UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
THAIS MAYUMI BATISTA MAKUTA

COHOMOLOGIA PARA AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS

CURITIBA
2015

THAIS MAYUMI BATISTA MAKUTA

COHOMOLOGIA PARA AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

CURITIBA
2015

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M235c Makuta, Thais Mayumi Batista
Cohomologia para ações parciais de grupos [recurso eletrônico] / Mayumi Batista Makuta – Curitiba, 2015.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática.
Orientador: Marcelo Muniz Silva Alves

1. Cohomologia (Álgebra). 2. Semigrupos inversos. 3. Cohomologia parcial de grupos.4. Cohomologia de semigrupos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Alves, Marcelo Muniz Silva. III. Título.

CDD: 514.23

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

"COHOMOLOGIA PARA AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS"

por

Thais Mayumi Batista Makuta

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre no Programa de Pós-Graduação em Matemática,

pela Comissão Examinadora composta por:

Orientador: Muny

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Dep. de Matemática – UFPR

Eliezer Batista

Prof. Dr. Eliezer Batista
UFSC

Mari Sano

Profa. Dra. Mari Sano
UTFPR

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Dep. de Matemática – UFPR

Curitiba, 27 de fevereiro de 2015.

ATA DA 66ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro de 2015, na sala de Reuniões do Setor de Ciências Exatas, foi instalada pelo Professor Marcelo Muniz Silva Alves, a Banca Examinadora para a sexagésima sexta Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Eliezer Batista, da Universidade de Santa Catarina, Prof. Dr. Mari Sano, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná e o Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves, orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às quatorze e trinta horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando a candidata **THAIS MAYUMI BATISTA MAKUTA** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "COHOMOLOGIA PARA AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2015.

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Presidente

Eliezer Batista

Prof. Dr. Eliezer Batista
Titular

Mari Sano

Profa. Dra. Mari Sano
Titular

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Titular

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação da candidata **THAIS MAYUMI BATISTA MAKUTA** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2015.

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Presidente

Eliezer Batista

Prof. Dr. Eliezer Batista
Titular

Mari Sano

Profa. Dra. Mari Sano
Titular

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Titular

Aos meus avós Alice e Conrado por sempre quererem saber como estavam os números.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Ziza e Pedro, pelo apoio e amor incondicionais e pelo orgulho que sentem de mim. Agradeço ao Fernando pelos quatro anos em que estamos juntos e também por não se cansar de ouvir falar sobre semigrupos e ações parciais nesse último ano de mestrado.

Agradeço ao meu orientador, Marcelo, por me orientar todos esses anos de graduação e mestrado, por acreditar em mim quando nem eu mais acreditava, e por compartilhar livros, músicas, e filmes comigo. Sua presença foi imprescindível na minha vida acadêmica, matematicamente, mas também emocionalmente, por todo o apoio e confiança depositados em mim. Além disso, tenho certeza que tenho um amigo para a vida.

Ainda, agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFPR, em especial aos professores Carlos Henrique, Eduardo e Florinda, pelas aulas e conversas. Agradeço aos meus colegas de mestrado pela companhia. Agradeço também aos professores membros da banca examinadora desta dissertação, Eliezer, Mari, e Edson, pelas sugestões e correções que compõe essa versão final.

Agradeço aos meus amigos Lilian, Ricardo, Cristian, Luana, Hevans, Danilo, Aramis, Gaio, e aos meus irmãos de orientação Diego e Ana Cristina, por todos os bons momentos que passamos juntos conversando sobre matemática, ou não.

Agradeço ao meu cachorro Tico por de vez em quando me morder e me lembrar que a vida não é feita só de lambidas.

E agradeço a CAPES pela bolsa de mestrado fornecida.

“But what I do I do because I like to do.”

Anthony Burgess
“A Clockwork Orange”, 1963.

“It’s still magic even if you know how it’s done.”

Terry Pratchett
“A Hat Full of Sky”, 2004.

“Because,’ she said, ‘when you’re scared but you still do it anyway, that’s brave.”

Neil Gaiman
“Coraline”, 2002.

RESUMO

Nesta dissertação, estuda-se a cohomologia associada a ações parciais de grupos e suas relações com a cohomologia de semigrupos inversos. Começa-se apresentando a teoria básica de semigrupos que será usada durante toda a dissertação. Desenvolve-se conceitos principais da cohomologia para ações parciais de grupos em semigrupos e em álgebras e estuda-se a associatividade de produtos cruzados, associados a ações parciais e a ações parciais torcidas, para estas últimas. Por fim, aplica-se a cohomologia de semigrupos inversos já existente ao caso em que o semigrupo inverso está associado a um grupo e mostra-se como é possível contornar certas diferenças entre os módulos associados a cada caso.

Palavras-chave: *ação parcial, semigrupos inversos, cohomologia parcial de grupos, cohomologia de semigrupos.*

ABSTRACT

In this work, the relations between the cohomology associated with partial actions of groups and the cohomology associated with inverse semigroups are studied. Basic semigroup theory is presented, which will be used throughout this dissertation. Main concepts of cohomology for partial actions of groups on semigroups and on algebras are developed and the associativity of crossed products, associated with partial actions and twisted partial actions, for the latter, are studied. At last, the already established cohomology for inverse semigroups is applied to the case when the inverse semigroup is associated to a group and it is shown how it is possible to go around certain differences between the modules associated with each case.

Keywords: *partial action, inverse semigroups, partial cohomology of groups, semigroup cohomology.*

SUMÁRIO

Introdução

Em alguns aspectos, a teoria de semigrupos inversos se assemelha à teoria de grupos e de aneis e as primeiras contribuições à teoria de semigrupos foram motivados por comparação com grupos e aneis. O Teorema de Wagner-Preston, por exemplo, é um análogo ao Teorema de Cayley para a teoria de grupos, no sentido que caracteriza os semigrupos inversos, como subsemigrupos de um semigrupo de bijeções (agora parciais) de um conjunto. Pode-se definir ações de semigrupos inversos em semigrupos comutativos e, como em teoria de grupos, pode-se estudar a cohomologia associada.

Agora, "generalizando" a noção usual de ações de grupo, surge a noção de ação parcial de grupos em aneis e semigrupos e também é possível estudar a cohomologia de tais ações parciais.

Nesta dissertação, estuda-se a cohomologia associada a ações parciais de grupos e suas relações com a cohomologia de semigrupos inversos.

No Capítulo 1, apresenta-se a teoria básica de semigrupos que será usada no decorrer do trabalho. Dá-se atenção especial à teoria de semigrupos inversos e demonstra-se o Teorema de Wagner-Preston. Neste capítulo, em particular, constroi-se a expansão de Birget-Rhodes $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$ associada a um grupo G, que será mostrada no Capítulo 3 a ser isomorfa ao semigrupo universal $\mathcal{S}(G)$, associado ao grupo G, construído por Exel, em [Exe98]. As principais referências desse capítulo são [How76, Law98].

No Capítulo 2, define-se o conceito de ação parcial de um grupo G em semigrupos e apresentam-se os conceitos principais da cohomologia para tais ações parciais. Definem-se também ações parciais de grupos em álgebras e o conceito de produtos cruzados tanto para ações parciais quanto para ações parciais torcidas e a Seção 2.2 é dedicada ao estudo da associatividade de tais produtos cruzados. A Seção 2.2.3 é dedicada à verificação de que as torções das ações parciais torcidas são o mesmo que 2-cociclos parciais. As principais referências são [DE05, DES08, DK15].

No Capítulo 3, constroi-se o semigrupo universal $\mathcal{S}(G)$ associado ao grupo G e o resultado principal desse capítulo mostra que as ações de $\mathcal{S}(G)$ estão em correspondência biunívoca com as ações parciais de G. A principal referência para esta parte é [Exe98]. Na Seção 3.4, mostra-se que $\mathcal{S}(G)$ é isomorfo à expansão de Birget-Rhodes para o grupo G, usando [KL04] como principal referência.

No Capítulo 4, estuda-se $\mathcal{S}$-módulos, com $\mathcal{S}$ semigrupo inverso. Seguindo o resultado principal do capítulo anterior, mostra-se a relação entre G-módulos parciais e $\mathcal{S}(G)$-módulos, demonstrando assim o isomorfismo $A \rtimes \mathcal{S}(G) \simeq A *_\theta G$ entre o produto cruzado $A *_\theta G$ e o produto semidireto $A \rtimes \mathcal{S}(G)$, com A um G-módulo parcial no primeiro caso e o $\mathcal{S}(G)$-módulo correspondente, no segundo caso. O restante do capítulo é dedicado a aplicar a cohomologia de semigrupos inversos, desenvolvida por Lausch em [Lau75], ao caso aqui apresentado e mostrar como algumas diferenças entre os módulos de Lausch e os módulos aqui estudados são contornadas. Usa-se [DK15, Lau75] como referências.

Capítulo 1

Semigrupos

Neste capítulo, além de apresentadas as noções básicas e alguns resultados de teoria de semigrupos que serão utilizadas nos capítulos seguintes, é apresentado o Teorema de Representação de Wagner-Preston, que caracteriza os semigrupos inversos. A principal referência para este capítulo é [How76].

1.1 Noções básicas

Definição 1.1.1. Um conjunto não vazio $\mathcal{S}$ munido de uma operação binária $\cdot$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{S} \times \mathcal{S} & \to & \mathcal{S} \\ & (s_1, s_2) & \mapsto & s_1 \cdot s_2 \end{array}$$

é um **semigrupo** se tal operação for associativa, ou seja, se

$$(s_1 \cdot s_2) \cdot s_3 = s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3)$$

$\forall s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$. Além disso, se existe $1 \in \mathcal{S}$ tal que

$$1 \cdot s = s \cdot 1 = s$$

$\forall s \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ é um **monoide**.

Quando não houver ambiguidade com relação à operação, denota-se $s_1 \cdot s_2$ por $s_1 s_2$. Escreve-se um semigrupo multiplicativo como $(\mathcal{S}, \cdot)$, ou simplesmente como $\mathcal{S}$.

Pode-se mostrar que um monoide possui no máximo um elemento 1.

Se $(\mathcal{S}, \cdot)$ satisfizer

$$\forall s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 = s_2 s_1$$

diz-se que $\mathcal{S}$ é um semigrupo **comutativo**.

Exemplo 1.1.2. Como exemplo de monoide, faz-se uma construção que será usada no decorrer do trabalho. Dado um grupo G com identidade 1_G, considera-se o conjunto $\mathcal{P}_{1_G}(G)$ de todos os subconjuntos finitos de G que contém 1_G. Define-se

$$\tilde{G}^{\mathcal{R}} := \{(A, g) \in \mathcal{P}_{1_G}(G) \times G \mid g \in A\}$$

que é monoide com a multiplicação

$$(A, g)(B, h) := (A \cup gB, gh).$$

De fato,

- $$\begin{aligned} ((A, g)(B, h))(C, t) &= (A \cup gB, gh)(C, t) \\ &= ((A \cup gB) \cup ghC, (gh)t) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (A, g)((B, h)(C, t)) &= (A, g)(B \cup hC, ht) \\ &= (A \cup g(B \cup hC), g(ht)) \end{aligned}$$

e tem-se, $((A, g)(B, h))(C, t) = (A, g)((B, h)(C, t))$.

O elemento $(\{1_G\}, 1_G)$ é identidade de $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$, pois

- $(A, g)(\{1_G\}, 1_G) = (A \cup g\{1_G\}, g1_G) = (A, g)$;

- $(\{1_G\}, 1_G)(A, g) = (\{1_G\} \cup 1_G A, 1_G g) = (A, g)$.

O monoide $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$ é chamado **expansão de Birget-Rhodes do grupo** G.

Definição 1.1.3. Dado um semigrupo $\mathcal{S}$, um subconjunto não vazio T de $\mathcal{S}$ é dito **subsemigrupo** de $\mathcal{S}$ se é fechado com respeito à multiplicação, ou seja, se $s_1, s_2 \in T$ implica $s_1 s_2 \in T$.

Entre os subsemigrupos de um semigrupo $\mathcal{S}$ estão o próprio $\mathcal{S}$, $\{1\}$ (se $\mathcal{S}$ for um monoide) e, mais geralmente, $\{e\}$, em que $e \in \mathcal{S}$ é um **idempotente**, ou seja, um elemento em $\mathcal{S}$ para o qual vale $e^2 = e$.

Exemplo 1.1.4. Calcula-se agora os idempotentes de $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$. Se $(A, g) \in \tilde{G}^{\mathcal{R}}$ é idempotente, tem-se $(A, g)(A, g) = (A, g)$, o que implica $(A \cup gA, g^2) = (A, g)$ e então $g^2 = g$ em G, ou seja, $g = 1_G$. Tem-se que todo $A \in \mathcal{P}_{1_G}(G)$ satisfaz $(A, 1_G)(A, 1_G) = (A, 1_G)$, pois $(A, 1_G)(A, 1_G) = (A \cup 1_G A, 1_G 1_G) = (A, 1_G)$, então, $(A, 1_G)$ é idempotente de $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$, para todo $A \in \mathcal{P}_{1_G}(G)$.

Definição 1.1.5. Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupo e A um subconjunto não vazio de $\mathcal{S}$.

(i) A é um **ideal à esquerda de** $\mathcal{S}$ se $\mathcal{S}A \subseteq A$;

(ii) A é um **ideal à direita de** $\mathcal{S}$ se $A\mathcal{S} \subseteq A$;

(iii) A é um **ideal (bilateral) de** $\mathcal{S}$ se A é ideal tanto à esquerda quanto à direita de $\mathcal{S}$.

aqui: $\mathcal{S}A = \{sa \mid s \in \mathcal{S}, a \in A\}$ e analogamente para $A\mathcal{S}$.

Tem-se que todo ideal A (à direita, à esquerda, ou bilateral) de $\mathcal{S}$ é um subsemigrupo de $\mathcal{S}$, mas a recíproca não é verdadeira. De fato, se A é ideal à direita ou à esquerda, então $AA \subseteq A$ e portanto, A é subsemigrupo de $\mathcal{S}$. E tem-se que o subsemigrupo $(\mathbb{N}, +)$ de $(\mathbb{Z}, +)$ não é ideal, pois $1 + (-2) \notin \mathbb{N}$.

A seguir, um lema técnico.

Lema 1.1.6. *Sejam A_g, A_h ideais de $\mathcal{S}$ gerados pelos idempotentes centrais $1_g, 1_h$, respectivamente. (Tais ideais gerados por um único idempotente central são chamados de* ***ideais unitais****). Então, $A_g \cap A_h = A_g A_h$ e além disso, $A_g A_h$ é o ideal gerado por $1_g 1_h$.*

Demonstração. ($\subseteq$): Seja um elemento na interseção $A_g \cap A_h$. Tal elemento é da forma $a1_g$ ou $b1_h$ e tem-se $a1_g = b1_h$. Assim, multiplicando tal igualdade por 1_g: $a1_g1_g = b1_h1_g \Rightarrow a1_g = b1_g1_h$ e tem-se a inclusão desejada.

($\supseteq$): Seja um elemento no produto A_gA_h. Tal elemento é da forma $a1_g1_h$ e tem-se $a1_g1_h \in A_h$. Como os idempotentes 1_g e 1_h são centrais, tem-se $a1_g1_h = a1_h1_g \in A_g$. E tem-se a inclusão desejada. □

Definição 1.1.7. Uma função $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ entre os semigrupos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ é um **homomorfismo** se

$$\phi(s_1 s_2) = \phi(s_1)\phi(s_2)$$

$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}$. Se ambos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são monoides, pede-se $\phi(1_{\mathcal{S}}) = 1_{\mathcal{T}}$.

Observação 1.1.8. Se $e \in \mathcal{S}$ é idempotente em $\mathcal{S}$, então $\phi(e)$ é idempotente em $\mathcal{T}$, pois $\phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e)$.

1.2 Semirreticulados

Seja Y um subconjunto não vazio de um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$. Diz-se que um elemento $c \in X$ é **limitante inferior para** Y se $c \leqslant y, \forall y \in Y$. Se o conjunto de limitantes inferiores é não vazio e existe um elemento máximo d (ou seja, $d \geqslant c$, para todo c limitante inferior de Y) d é chamado de **maior limitante inferior de** Y, ou **ínfimo**. Tal elemento é único, se existir, e escreve-se

$$d = \bigwedge\{y \mid y \in Y\}.$$

Se $Y = \{a, b\}$, escreve-se $d = a \wedge b$. Se $(X, \leqslant)$ é tal que $a \wedge b$ existe para todos $a, b \in X$, diz-se que $(X, \leqslant)$ é um **semirreticulado inferior**. Se se tem a propriedade mais forte de existir $\bigwedge\{y|y \in Y\}$ para todo subconjunto não vazio Y de X, então X é um **semirreticulado inferior completo**. Num semirreticulado inferior $(X, \leqslant)$, tem-se

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a. \tag{1.2.1}$$

Se $(X, \leqslant)$ é semirreticulado inferior, tem-se a operação binária $\wedge$ definida em X. Dados $a, b, c \in X$:

$$(a \wedge b) \wedge c \leqslant a \wedge b \leqslant a; \qquad (a \wedge b) \wedge c \leqslant a \wedge b \leqslant b; \qquad (a \wedge b) \wedge c \leqslant c.$$

Assim, $(a \wedge b) \wedge c$ é limitante inferior de $\{a, b, c\}$. Se d é um limitante inferior de $\{a, b, c\}$, então

$$d \leqslant a; \qquad d \leqslant b; \qquad d \leqslant c.$$

Logo, $d \leqslant a \wedge b$, $d \leqslant c$ e, portanto, $d \leqslant (a \wedge b) \wedge c$. Assim, $(a \wedge b) \wedge c$ é o ínfimo de $\{a, b, c\}$. Analogamente mostra-se que $a \wedge (b \wedge c)$ também é o ínfimo de $\{a, b, c\}$. Portanto,

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

e assim $(X, \wedge)$ é um semigrupo. Como é claro que $a \wedge a = a, \forall a \in X$ e que $a \wedge b = b \wedge a, \forall a, b \in X$, usa-se (1.2.1) e provou-se parte da proposição a seguir:

Proposição 1.2.1. *Seja $(E, \leqslant)$ um semirreticulado inferior. Então, $(E, \wedge)$ é um semigrupo comutativo de idempotentes e*

$$(\forall a, b \in E) \qquad a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Seja $(E, \cdot)$ um semigrupo comutativo de idempotentes. Então, a relação $\leqslant$ em E definida por

$$a \leqslant b \Leftrightarrow ab = a$$

é ordem parcial em E com respeito a qual E é um semirreticulado inferior. Em $(E, \leqslant)$, o ínfimo de a e b é seu produto ab.

Demonstração. Como $a^2 = a$, tem-se $a \leqslant a$. Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, então $ab = a$ e $ba = b$. Logo, $a = ab = ba = b$. Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$, então $ab = a$ e $bc = b$. Logo, $ac = abc = ab = a$ e $a \leqslant c$. Portanto, $\leqslant$ é ordem parcial. Já que

$$a(ab) = a^2b = ab \quad \text{e} \quad b(ab) = ab^2 = ab$$

tem-se $ab \leqslant a, b$. Se $c \leqslant a, b$, então $c(ab) = cb = c$ e $c \leqslant ab$. Portanto, $(E, \leqslant)$ é semirreticulado inferior e o ínfimo de a e b é ab. $\square$

Demonstrou-se tal proposição para que as expressões "semirreticulado inferior" e "semigrupo comutativo de idempotentes" sejam noções equivalentes e possa-se usar tanto uma quanto a outra no decorrer do texto, conforme seja conveniente.

1.3 Semigrupos regulares e semigrupos inversos

Definição 1.3.1. Um semigrupo $\mathcal{S}$ é um **semigrupo regular** se, para cada $s \in \mathcal{S}$, existe $s^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$ss^*s = s \quad \text{e} \quad s^*ss^* = s^*.$$

O elemento s^* é chamado **inverso** de s em S.

Observação 1.3.2. Tal definição vem da definição mais geral de **elemento regular** (um elemento $s \in \mathcal{S}$ é dito regular se existe $t \in \mathcal{S}$ tal que $sts = s$) e um semigrupo é dito regular se todos os seus elementos são regulares. Se e é idempotente no semigrupo $\mathcal{S}$, tem-se que e é elemento regular, pois $eee = ee = e$.

O próximo teorema caracteriza a situação em que os idempotentes de um semigrupo regular comutam entre si.

Teorema 1.3.3. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo regular. Então, os idempotentes de $\mathcal{S}$ comutam entre si se, e somente se, cada elemento de $\mathcal{S}$ possui um único inverso.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Supõe-se que os idempotentes de $\mathcal{S}$ comutam entre si e considera-se x e y inversos de $s \in \mathcal{S}$. Nota-se $(xs)^2 = (xs)(xs) = x(sxs) = xs$ e $(ys)^2 = (ys)(ys) = y(sys) = ys$, ou seja, xs e ys são idempotentes. Analogamente tem-se sx e sy idempotentes. Assim, $x = xsx = x(sys)x = (xs)(ys)x = (ys)(xs)x = y(sxs)x = ysx = (ysy)sx = y(sy)(sx) = y(sx)(sy) = y(sxs)y = ysy = y$.

$(\Leftarrow)$: Supõe-se que cada $s \in \mathcal{S}$ possui um único inverso e dados e, f idempotentes de $\mathcal{S}$, seja $z = (ef)^*$ inverso de ef. Tem-se fze idempotente em $\mathcal{S}$, pois $(fze)(fze) = f(zefz)e = fze$. Além disso, fze e ef são inversos, pois $fze(ef)fze = fz(ee)(ff)ze = (fze)(fze) = fze$ e $(ef)(fze)(ef) = e(ff)z(ee)f = (ef)z(ef) = ef$. Mas, sendo fze idempotente, fze é o seu único inverso e $fze = ef$. Segue que ef é idempotente e analogamente se tem fe idempotente. Ainda, como $(ef)(fe)(ef) = e(ff)(ee)f = (ef)(ef) = ef$ e $(fe)(ef)(fe) = f(ee)(ff)e = (fe)(fe) = fe$, obtém-se $ef = fe$, pela unicidade dos inversos. $\square$

A próxima definição é motivada pelo teorema anterior.

Definição 1.3.4. Um semigrupo $\mathcal{S}$ é um **semigrupo inverso** se existe, para cada $s \in \mathcal{S}$, um **único** elemento $s^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$ss^*s = s \quad \text{e} \quad s^*ss^* = s^*.$$

O elemento s^* é **o inverso** de s em $\mathcal{S}$.

Exemplo 1.3.5. Dado um grupo G, o monoide $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$ do Exemplo 1.1.2 é monoide inverso.

Dado $(A, g) \in \tilde{G}^{\mathcal{R}}$, precisa-se de $(B, h) \in \tilde{G}^{\mathcal{R}}$ tal que $(A, g)(B, h)(A, g) = (A, g)$ e $(B, h)(A, g)(B, h) = (B, h)$.

$$\begin{aligned} (A, g) &= (A, g)(B, h)(A, g) \\ &= (A \cup gB, gh)(A, g) \\ &= ((A \cup gB) \cup ghA, ghg). \end{aligned}$$

Então, $ghg = g$ em G, o que implica $h = g^{-1}$ e $A \cup gB \cup 1_G A = A$ implica $gB \subseteq A$.

$$\begin{aligned} (B, g^{-1}) &= (B, g^{-1})(A, g)(B, g^{-1}) \\ &= (B \cup g^{-1}A, g^{-1}g)(B, g^{-1}) \\ &= (B \cup g^{-1}A, g^{-1}). \end{aligned}$$

Então, $g^{-1}A \subseteq B$ e, portanto, $B = g^{-1}A$.

Logo, dado $(A, g) \in \tilde{G}^{\mathcal{R}}$, tem-se que $(g^{-1}A, g^{-1})$ é seu inverso, pois

- $$\begin{aligned} (A, g)(g^{-1}A, g^{-1})(A, g) &= (A \cup gg^{-1}A, gg^{-1})(A, g) \\ &= (A, 1_G)(A, g) \\ &= (A \cup 1_G A, 1_G g) \\ &= (A, g) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (g^{-1}A, g^{-1})(A, g)(g^{-1}A, g^{-1}) &= (g^{-1}A \cup g^{-1}A, g^{-1}g)(g^{-1}A, g^{-1}) \\ &= (g^{-1}A, 1_G)(g^{-1}A, g^{-1}) \\ &= (g^{-1}A \cup 1_G g^{-1}A, 1_G g^{-1}) \\ &= (g^{-1}A, g^{-1}). \end{aligned}$$

A notação $E(\mathcal{S})$, ou simplesmente E, será usada para o conjunto dos idempotentes do semigrupo inverso $\mathcal{S}$. É um subsemigrupo de $\mathcal{S}$, já que $e, f \in E$ então $(ef)^2 = e^2 f^2 = ef$. De fato, é um semigrupo comutativo de idempotentes e pode-se referir a E como semirreticulado de idempotentes de $\mathcal{S}$.

Lista-se agora algumas propriedades de semigrupos inversos.

Proposição 1.3.6. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso com semirreticulado de idempotentes E.*

(a) $(a^*)^* = a, \forall a \in \mathcal{S};$

(b) $e^* = e, \forall e \in E$;

(c) $aa^*, a^*a \in E, \forall a \in \mathcal{S}$;

(d) $(ab)^* = b^*a^*, \forall a, b \in \mathcal{S}$;

(e) $aea^*, a^*ea \in E, \forall a \in \mathcal{S}, e \in E$;

(f) Para todos idempotente e e elemento s, existe idempotente f tal que $es = sf$;

(g) Para todos idempotente e e elemento s, existe idempotente f tal que $se = fs$.

Demonstração.

(a) Segue da mutualidade dos inversos em semigrupos.

(b) Imediato: $eee = ee = e$.

(c) $\underbrace{aa^*a}\, a^* = aa^*$ e $a^*\, \underbrace{aa^*a} = a^*a$.

(d) Como bb^* e a^*a são idempotentes, tem-se

$(ab)(b^*a^*)(ab) = a(bb^*)(a^*a)b = aa^*abb^*b = ab$

$(b^*a^*)(ab)(b^*a^*) = b^*(a^*a)(bb^*)a^* = b^*bb^*a^*aa^* = b^*a^*$

E assim, b^*a^* é o inverso de ab. Ou seja, $(ab)^* = b^*a^*$.

(e) $(aea^*)(aea^*) = ae(a^*a)ea^* = aa^*ae^2a^* = aea^*$ e analogamente para a^*ea.

(f) Define-se $f = s^*es$. Daí, $sf = ss^*es = ess^*s = es$.

(g) Define-se $f = ses^*$. Daí, $fs = ses^*s = ss^*se = se$.

□

Corolário 1.3.7. *Se $a_1, \cdots, a_n$ são elementos de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, então*

$$(a_1 \cdots a_n)^* = a_n^* \cdots a_1^*.$$

□

Lema 1.3.8. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso, $\mathcal{T}$ um semigrupo e $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ um homomorfismo. Então, idempotentes em $\varphi(\mathcal{S})$ são imagens de idempotentes de $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Dado $e \in E(\varphi(\mathcal{S}))$, mostra-se que $\varphi^{-1}\{e\}$ é subsemigrupo inverso de $\mathcal{S}$. De fato, dados $a, b \in \varphi^{-1}\{e\}$, tem-se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = e^2 = e$ e então $ab \in \varphi^{-1}\{e\}$. Agora, dado $a \in \varphi^{-1}\{e\}$, mostra-se que $a^* \in \varphi^{-1}\{e\}$, ou seja, se $x' = \varphi(a^*)$, então $x' = e$. Como $aa^*a = a$ e $a^*aa^* = a^*$ e φ é homomorfismo, tem-se $ex'e = e$ e $x'ex' = x'$.

Ainda, já que aa^* e a^*a são idempotentes em $\mathcal{S}$, tem-se $(aa^*)(a^*a) = (a^*a)(aa^*)$ e assim $(ex')(x'e) = (x'e)(ex')$. Então, $e = ex'e = e(x'ex')e = e(x'eex')e = eex'x'ee = ex'x'e = x'eex' = x'ex' = x'$. Assim, $\varphi(a^*) = e$, o que implica $a^* \in \varphi^{-1}\{e\}$. Daí, como $\varphi^{-1}\{e\}$ é subsemigrupo de $\mathcal{S}$, tem-se $aa^*, a^*a \in \varphi^{-1}\{e\}$, ou $\varphi(aa^*) = \varphi(a^*a) = e$. Portanto, idempotentes em $\varphi(\mathcal{S})$ são imagens de idempotentes de $\mathcal{S}$. □

Proposição 1.3.9. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso, $\mathcal{T}$ um semigrupo e $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ um homomorfismo. Então, $\varphi(\mathcal{S})$ é semigrupo inverso.*

Demonstração. Mostra-se que $\varphi(\mathcal{S})$ é semigrupo regular cujos idempotentes comutam. Seja $t \in \varphi(\mathcal{S})$. Então, $t = \varphi(s)$, para algum $s \in \mathcal{S}$. Como $t = \varphi(ss^*s) = \varphi(s)\varphi(s^*)\varphi(s) = t\varphi(s^*)t$, tem-se que $\varphi(\mathcal{S})$ é semigrupo regular. Dados $e, f \in E(\varphi(\mathcal{S}))$, tem-se $e = \varphi(g)$ e $f = \varphi(h)$, com $g, h \in E(\mathcal{S})$. Logo,

$$ef = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(gh) = \varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g) = fe.$$

□

Neste contexto, tem-se que o elemento $\varphi(s^*)$ é o inverso de $\varphi(s)$ em $\varphi(\mathcal{S})$, pois

$$\varphi(s)\varphi(s^*)\varphi(s) = \varphi(ss^*s) = \varphi(s)$$
$$\varphi(s^*)\varphi(s)\varphi(s^*) = \varphi(s^*ss^*) = \varphi(s^*)$$

ou seja, $\varphi(s)^* = \varphi(s^*)$.

Assim como todo grupo pode ser visto como subgrupo de algum grupo simétrico, todo semigrupo inverso pode ser visto como subsemigrupo inverso de algum semigrupo de bijeções parciais, semigrupo descrito no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.10. Seja o conjunto $\mathcal{I}(X)$ de todas as bijeções entre subconjuntos de um conjunto X. A bijeção vazia $\emptyset \subseteq X \times X$ pertence ao conjunto $\mathcal{I}(X)$. O produto $\alpha\beta$ em $\mathcal{I}(X)$ é a composição $\alpha \circ \beta$ para todo $x \in X$ tal que $\alpha(\beta(x))$ faz sentido. Mais precisamente, $\alpha\beta$ é a bijeção

$$\alpha \circ \beta : \beta^{-1}(\operatorname{im}\beta \cap \operatorname{dom}\alpha) \to \alpha(\operatorname{im}\beta \cap \operatorname{dom}\alpha)$$

em que dom e im denotam, respectivamente, o domínio e a imagem de cada bijeção. E se $\operatorname{im}\beta \cap \operatorname{dom}\alpha = \emptyset$, define-se $\alpha \circ \beta = \emptyset$.

Tal operação é associativa: dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}(X)$, tem-se:

$$\alpha \circ \beta : \beta^{-1}(\operatorname{im}\beta \cap \operatorname{dom}\alpha) \to \alpha(\operatorname{im}\beta \cap \operatorname{dom}\alpha)$$
$$\beta \circ \gamma : \gamma^{-1}(\operatorname{im}\gamma \cap \operatorname{dom}\beta) \to \beta(\operatorname{im}\gamma \cap \operatorname{dom}\beta)$$

daí
$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)) &= (\beta \circ \gamma)^{-1}(\operatorname{im}(\beta \circ \gamma) \cap \operatorname{dom} \alpha) \\
&= (\beta \circ \gamma)^{-1}(\beta(\operatorname{im} \gamma \cap \operatorname{dom} \beta) \cap \operatorname{dom} \alpha) \\
&= (\beta \circ \gamma)^{-1}(\beta(\operatorname{im} \gamma) \cap \beta(\operatorname{dom} \beta) \cap \operatorname{dom} \alpha) \\
&= (\beta \circ \gamma)^{-1}(\beta(\operatorname{im} \gamma) \cap \operatorname{im} \beta) \cap \operatorname{dom} \alpha) \\
&= \gamma^{-1}(\beta^{-1}(\beta(\operatorname{im} \gamma) \cap \operatorname{im} \beta) \cap \operatorname{dom} \alpha)) \\
&= \gamma^{-1}(\operatorname{im} \gamma \cap \beta^{-1}(\operatorname{im} \beta \cap \operatorname{dom} \alpha))
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma) &= \gamma^{-1}(\operatorname{im} \gamma \cap \operatorname{dom}(\alpha \circ \beta)) \\
&= \gamma^{-1}(\operatorname{im} \gamma \cap \beta^{-1}(\operatorname{im} \beta \cap \operatorname{dom} \alpha))
\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{dom}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)) = \operatorname{dom}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)$.

Agora, tomando $x \in \operatorname{dom}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)) = \operatorname{dom}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)$, mostra-se $(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))(x) = ((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)(x)$:
$$\begin{aligned}
(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))(x) &= \alpha \circ ((\beta \circ \gamma)(x)) \\
&= \alpha \circ (\beta(\gamma(x))) \\
&= \alpha(\beta(\gamma(x))) \\
&= (\alpha \circ \beta)(\gamma(x)) \\
&= ((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)(x).
\end{aligned}$$

Logo, também se tem $\operatorname{im}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)) = \operatorname{im}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)$ e, portanto, $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$.

Nota-se também, que o inverso de α é simplesmente $\alpha^{-1} : \operatorname{im} \alpha \to \operatorname{dom} \alpha$.

Exemplo 1.3.11. Calcula-se agora os idempotentes em $\mathcal{I}(X)$, para um conjunto X. Dado $\alpha \in \mathcal{I}(X)$, então $\operatorname{dom} \alpha^2 = \alpha^{-1}(\operatorname{dom} \alpha \cap \operatorname{im} \alpha)$ e $\operatorname{im} \alpha^2 = \alpha(\operatorname{dom} \alpha \cap \operatorname{im} \alpha)$.

Se $\alpha^2 = \alpha$, tem-se, em particular $\operatorname{dom} \alpha^2 = \operatorname{dom} \alpha$ e então, $\alpha^{-1}(\operatorname{dom} \alpha \cap \operatorname{im} \alpha) = \operatorname{dom} \alpha = \alpha^{-1}(\operatorname{im} \alpha)$. Como α é bijeção, tem-se $\operatorname{dom} \alpha \cap \operatorname{im} \alpha = \operatorname{im} \alpha$, ou seja, $\operatorname{im} \alpha \subseteq \operatorname{dom} \alpha$. Considerando as imagens de α e α^2, conclui-se $\operatorname{dom} \alpha \subseteq \operatorname{im} \alpha$ e, portanto, $\operatorname{dom} \alpha = \operatorname{im} \alpha$. Assim, α é idempotente somente se é uma bijeção de um subconjunto A de X nele mesmo. Isso não é o suficiente, ainda precisa-se $\alpha^2(x) = \alpha(x), \forall x \in A$. Como α é bijeção, a igualdade anterior implica $\alpha(x) = x, \forall x \in A$. Reciprocamente, se α é a função identidade para algum subconjunto A de X, é fácil ver que α é idempotente em $\mathcal{I}(X)$.

Portanto, $\alpha \in \mathcal{I}(X)$ é idempotente se, e somente se, $\alpha = 1_A$ para algum subconjunto A de X.

Antes de demonstrar o Teorema de Representação de Wagner-Preston, um lema técnico.

Lema 1.3.12. *Dado um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, $a\mathcal{S} = aa^*\mathcal{S}, \forall a \in \mathcal{S}$ e aa^* é o único idempotente gerador de $a\mathcal{S}$.*

Demonstração. Para cada $a \in \mathcal{S}$, tem-se $a\mathcal{S} = aa^*(a\mathcal{S}) \subseteq a(a^*\mathcal{S}) \subseteq a\mathcal{S}$ e portanto $a\mathcal{S} = aa^*\mathcal{S}$. Agora, seja $e \in E(\mathcal{S})$ tal que $a\mathcal{S} = aa^*\mathcal{S} = e\mathcal{S}$. Assim,

$(aa^*) = (aa^*)(aa^*) \in aa^*\mathcal{S} = e\mathcal{S} \Rightarrow aa^* = es_1$ para algum $s_1 \in \mathcal{S}$

$e = ee \in e\mathcal{S} = aa^*\mathcal{S} \Rightarrow e = aa^*s_2$ para algum $s_2 \in \mathcal{S}$

Logo, $aa^* = es_1 = e(es_1) = e(aa^*) = (aa^*)e = (aa^*)(aa^*s_2) = aa^*s_2 = e$. $\square$

Observação 1.3.13. Pode-se demonstrar também a situação análoga: $\mathcal{S}a = \mathcal{S}a^*a$, $\forall a \in \mathcal{S}$ e a^*a é o único idempotente gerador de $\mathcal{S}a$.

Observação 1.3.14. Lembra-se do Lema 1.1.6 que, como a^*a e bb^* são idempotentes em $\mathcal{S}$, tem-se $bb^*\mathcal{S} \cap a^*a\mathcal{S} = bb^*a^*a\mathcal{S}$, para todos $a, b \in \mathcal{S}$.

E finalmente, o Teorema de Representação de Wagner-Preston.

Teorema 1.3.15 (Teorema de Representação de Wagner-Preston)**.** *Se $\mathcal{S}$ é um semigrupo inverso, então existem um conjunto X e um homomorfismo injetivo $\rho : \mathcal{S} \to \mathcal{I}(X)$.*

Demonstração. Seja $X = \mathcal{S}$ (aqui, considerando $\mathcal{S}$ como conjunto). Para cada $a \in \mathcal{S}$, define-se $\rho_a : a^*a\mathcal{S} \to aa^*\mathcal{S}$ por $\rho_a(x) = ax$, para $x \in a^*a\mathcal{S}$. Nota-se que, dado $x = a^*as \in a^*a\mathcal{S}$, tem-se $\rho_a(x) = aa^*as = as \in a\mathcal{S} = aa^*\mathcal{S}$.

Agora mostra-se que cada ρ_a é bijeção cuja inversa é $\rho_a^{-1} = \rho_{a^*}$.

De fato, seja $x = a^*as_1 \in a^*a\mathcal{S}$. Então, $\rho_{a^*} \circ \rho_a(x) = \rho_{a^*}(aa^*as_1) = \rho_{a^*}(as_1) = a^*as_1 = x.$

E reciprocamente, seja $y = aa^*s_2 \in aa^*\mathcal{S}$. Então, $\rho_a \circ \rho_{a^*}(y) = \rho_a(a^*aa^*s_2) = \rho_a(a^*s_2) = aa^*s_2 = y.$

Assim, pode-se definir $\rho : \mathcal{S} \to \mathcal{I}(X)$ por $\rho(a) = \rho_a$, $\forall a \in \mathcal{S}$.

Agora mostra-se que ρ é homomorfismo, ou seja, $\rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab}$, $\forall a, b \in \mathcal{S}$.

Tem-se
$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}(\rho_a \circ \rho_b) &= \rho_b^{-1}[bb^*\mathcal{S} \cap a^*a\mathcal{S}] \\
&= \rho_{b^*}[bb^*a^*a\mathcal{S}] \\
&= b^*bb^*a^*a\mathcal{S} \\
&= b^*a^*a\mathcal{S} \\
&= (b^*a^*a)(b^*a^*a)^*\mathcal{S} \\
&= b^*a^*aa^*ab\mathcal{S} \\
&= b^*a^*ab\mathcal{S} \\
&= (ab)^*ab\mathcal{S} \\
&= \operatorname{dom}\rho_{ab};
\end{aligned}
$$

E $\rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab}$, $\forall a, b \in \mathcal{S}$: dado $x \in (ab)^*ab\mathcal{S}$, tem-se $\rho_a \circ \rho_b(x) = \rho_a(bx) = abx = \rho_{ab}(x).$

Logo, também se tem $\operatorname{im}(\rho_a \circ \rho_b) = \operatorname{im}\rho_{ab}$ e, portanto, $\rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab}$, $\forall a, b \in \mathcal{S}$.

E finalmente, mostra-se que ρ é injetora. De fato, se $\rho_a = \rho_b$, para $a, b \in \mathcal{S}$, tem-se, pela unicidade do gerador idempotente do Lema 1.3.12,

$$\operatorname{dom}\rho_a = \operatorname{dom}\rho_b \Rightarrow a^*a\mathcal{S} = b^*b\mathcal{S} \Rightarrow a^*a = b^*b$$

Como $\rho_a(b^*) = \rho_b(b^*)$, também se tem $ab^* = bb^*$. Logo,

$$b = bb^*b = ab^*b = aa^*a = a.$$

$\square$

Antes de terminar a seção, mostra-se a relação entre semigrupos inversos e grupos.

Proposição 1.3.16. *Grupos são precisamente os semigrupos inversos com um único idempotente.*

Demonstração. Claramente, grupos são semigrupos inversos com um único idempotente.

Reciprocamente, seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso com um único idempotente e. Então, $s^*s = e = ss^*$, para todo $s \in \mathcal{S}$. Mas $es = (ss^*)s = s = s(s^*s) = se$, e daí e é a identidade de $\mathcal{S}$. Portanto, $\mathcal{S}$ é um grupo. $\square$

1.4 Equivalências e congruências

Seja uma relação R nos conjuntos não vazios X e Y (ou seja, $R \subseteq X \times Y$). Define-se a relação **inversa** por $R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}$. Se R_1 e R_2 são relações nos conjuntos não vazios X, Y e Z, com $R_1 \subseteq X \times Y$ e $R_2 \subseteq Y \times Z$, define-se a relação **composta** por $R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R_1 \text{ e } (y, z) \in R_2\}$. Além disso, por uma **relação em** X, entende-se uma relação em $X \times X$.

Lembra-se que uma função $f : X \to Y$ é um caso particular de relação: uma **função** f é uma relação $f \subseteq X \times Y$ tal que cada $x \in X$ é primeira componente de um único par ordenado $(x, y) \in f$.

Uma conexão importante entre funções e relações é descrita na próxima proposição.

Proposição 1.4.1. *Se $f : X \to Y$ é uma função, então $f^{-1} \circ f$ é uma equivalência, em que f^{-1} é a relação inversa de f.*

Demonstração. Nota-se primeiramente:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in Y : (x, z) \in f \text{ e } (z, y) \in f^{-1}\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in Y : (x, z) \in f \text{ e } (y, z) \in f\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}. \end{aligned}$$

E fica claro que $f^{-1} \circ f$ é reflexiva, simétrica e transitiva. $\square$

Chama-se a equivalência $f^{-1} \circ f$ de **núcleo de** f e denota-se por $\ker f$.

Observação 1.4.2. Dada uma relação R qualquer em um conjunto não vazio X, define-se recursivamente as potências R^n de R, $\forall n \in \mathbb{N}$:

(i) $R^0 = 1_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$;

(ii) $R^1 = R$;

(iii) $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Dada uma relação R qualquer em um conjunto não vazio X, define-se R^∞, o **fecho transitivo de** R, por

$$R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.$$

O nome "fecho transitivo" é justificado pelo próximo lema.

Lema 1.4.3. *Se R é uma relação em um conjunto X, então R^∞ é a menor relação transitiva em X que contém R.*

Demonstração. Primeiramente, R^∞ é transitiva, pois, se $(x,y),(y,z) \in R^\infty$, então existem inteiros positivos m, n tais que $(x,y) \in R^m$ e $(y,z) \in R^n$. Então, $(x,z) \in R^n \circ R^m = R^{n+m} \subseteq R^\infty$. Também é claro que R^∞ contém $R^1 = R$.

Se T é uma relação transitiva em X que contém R, então

$$R^2 = R \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T$$

e mais geralmente, $R^n \subseteq T$, para $n = 1, 2, \ldots$. Assim, $R^\infty \subseteq T$. □

Agora, tem-se:

Proposição 1.4.4. *Se R é uma relação em um conjunto X e R^e é a menor relação de equivalência em X que contém R, então*

$$R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty.$$

Demonstração. Como na demonstração do lema anterior, tem-se que $E = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ é relação transitiva e contém R. Como $1_X \subseteq R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq E$, tem-se que E também é reflexiva. É claro que $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$ é simétrica. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $S^n = (S^{-1})^n = (S^n)^{-1}$ e, então, S^n também é relação simétrica. Logo,

$$\begin{aligned} (x,y) \in E \quad &\Rightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{N})\,(x,y) \in S^n \\ &\Rightarrow \quad (y,x) \in S^n \\ &\Rightarrow \quad (y,x) \in E \end{aligned}$$

e então E é relação simétrica. Portanto, E é relação de equivalência em X que contém R.

Agora, se σ é relação de equivalência em X que contém R, então $1_X \subseteq \sigma$ e $R^{-1} \subseteq \sigma^{-1} = \sigma$. Logo, $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq \sigma$. Além disso, $S \circ S \subseteq \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$, e mais geralmente $S^n \subseteq \sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $E \subseteq \sigma$. Assim, mostrou-se que $E\,(= [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty)$ é a menor relação de equivalência em X que contém R, ou seja, E coincide com R^e. □

E a próxima proposição é uma maneira de reescrever a proposição anterior.

Proposição 1.4.5. *Se R é uma relação em um conjunto X e R^e é a menor relação de equivalência em X que contém R, então $(x, y) \in R^e$ se, e somente se, ou $x = y$ ou, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência*

$$x = z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n = y$$

em que, para cada $i = 1, \ldots, n-1$, ou $(z_i, z_{i+1}) \in R$ ou $(z_{i+1}, z_i) \in R$.

Agora, estuda-se relações em semigrupos. Seja, então, $(\mathcal{S}, \cdot)$ um semigrupo. Uma relação R no conjunto $\mathcal{S}$ é chamada

- **compatível à esquerda** (com a operação de $\mathcal{S}$) se $(s, t) \in R$ implica $(as, at) \in R$, $\forall a, s, t \in \mathcal{S}$;
- **compatível à direita** se $(s, t) \in R$ implica $(sa, ta) \in R$, $\forall a, s, t \in \mathcal{S}$;
- **compatível** se $(s, t), (s', t') \in R$ implica $(ss', tt') \in R$, $\forall s, s', t, t' \in \mathcal{S}$.

Uma relação de equivalência compatível à esquerda (respectivamente, à direita) é chamada **congruência à esquerda (respectivamente, à direita)**. Uma relação de equivalência compatível é chamada **congruência**.

Proposição 1.4.6. *Uma relação ρ num semigrupo $\mathcal{S}$ é uma congruência se, e somente se, é ambos congruência à esquerda e à direita.*

Demonstração. Supõe-se primeiramente que ρ é uma congruência. Se $(s, t) \in \rho$ e $a \in \mathcal{S}$, então $(a, a) \in \rho$ pela reflexividade de ρ e então $(as, at) \in \rho$ e $(sa, ta) \in \rho$ pela compatibilidade. Assim, ρ é ambos congruência à esquerda e à direita.

Reciprocamente, se ρ é ambos congruência à esquerda e à direita, e se $(s, t), (s', t') \in \rho$, segue que (ss', ts') pertence a ρ pela compatibilidade à direita e que (ts', tt') pertence a ρ pela compatibilidade à esquerda. Logo, (ss', tt') pertence a ρ pela transitividade e tem-se que ρ é uma congruência. □

Dada uma relação R em X, define-se as R-**classes** ou **classes de equivalência**, para cada $x \in X$, por $Rx = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$. O conjunto de R-classes é chamado de **conjunto quociente de** X **por** R e é denotado por X/R. Define-se a sobrejeção natural $R^\natural : X \to X/R$, dada por

$$R^\natural x = Rx \tag{1.4.1}$$

$x \in X$.

Se ρ é uma congruência em um semigrupo $\mathcal{S}$, define-se uma operação binária no conjunto quociente $\mathcal{S}/\rho$:

$$\rho a \rho b = \rho(ab). \tag{1.4.2}$$

Tal operação está bem definida, pois $\rho a = \rho a'$ e $\rho b = \rho b'$ implicam $(a, a'), (b, b') \in \rho$ e daí $(ab, a'b') \in \rho$, ou seja $\rho(ab) = \rho(a'b')$. A operação é facilmente demonstrada associativa e assim, $(\mathcal{S}/\rho, \cdot)$ é um semigrupo. A função natural $\rho^\natural$ de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}/\rho$ definida em (1.4.1) é um homomorfismo.

Provou-se parte do próximo teorema.

Teorema 1.4.7 (Primeiro Teorema dos Isomorfismos). *Se ρ é uma congruência em um semigrupo $\mathcal{S}$, então $\mathcal{S}/\rho$ é um semigrupo com respeito à operação definida em* (1.4.2) *e a função $\rho^\natural : \mathcal{S} \to \mathcal{S}/\rho$ definida por $s \mapsto \rho s, \forall s \in \mathcal{S}$ é um homomorfismo.*

Se $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ é um homomorfismo, com $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ semigrupos, então a relação $\ker \phi = \phi^{-1} \circ \phi = \{(a, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid \phi a = \phi b\}$ é congruência em $\mathcal{S}$ e existe função injetora $\alpha : \mathcal{S}/\ker \phi \to \mathcal{T}$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(\ker\phi)^\natural"'] & \mathcal{T} \\ \mathcal{S}/\ker\phi \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Para provar a segunda parte do teorema, observa-se primeiramente que $\ker \phi$ é equivalência, pela Proposição 1.4.1. Resta mostrar a compatibilidade com a multiplicação, para que seja congruência. De fato, dados $a, b, c, d \in \mathcal{S}$, com $(a, b) \in \ker \phi$ e $(c, d) \in \ker \phi$, tem-se $\phi a = \phi b$ e $\phi c = \phi d$. Daí segue $\phi(ac) = \phi(a)\phi(c) = \phi(b)\phi(d) = \phi(bd)$, ou seja, $(ac, bd) \in \ker \phi$ e, portanto, $\ker \phi$ é congruência.

Define-se
$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathcal{S}/\ker\phi & \to & \mathcal{T} \\ (\ker\phi)^\natural a & \mapsto & \phi a. \end{array}$$

- α está bem-definido e é injetivo, já que:

  $(\ker \phi)^\natural a = (\ker \phi)^\natural b \Leftrightarrow (a, b) \in \ker \phi \Leftrightarrow \phi a = \phi b$;

- α é homomorfismo, pois:

$$\begin{aligned} \alpha[((\ker\phi)^\natural a)((\ker\phi)^\natural b)] &= \alpha[(\ker\phi)^\natural(ab)] \\ &= \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \\ &= \alpha[(\ker\phi)^\natural a]\alpha[(\ker\phi)^\natural b]. \end{aligned}$$

Da definição de α é claro que, para todo $a \in \mathcal{S}$, tem-se $\alpha(\ker \phi)^\natural a = \phi a$ e o diagrama comuta.

□

Congruências em semigrupos inversos possuem mais algumas propriedades.

Proposição 1.4.8. *Seja ρ uma congruência em um semigrupo inverso $\mathcal{S}$.*

(i) Se $(s,t) \in \rho$, então $(s^*,t^*), (s^*s, t^*t), (ss^*, tt^*) \in \rho$;

(ii) Se $(s,e) \in \rho$, com $e \in E$, então $(s,s^*), (s, s^*s), (s, ss^*) \in \rho$.

Demonstração. Prova-se somente uma implicação de cada item.

(i) Se $(s,t) \in \rho$, então $\rho(s) = \rho(t)$ em $\mathcal{S}/\rho$. Como $\rho(s^*) = \rho(s)^*$ e $\rho(t^*) = \rho(t)^*$, tem-se $\rho(s^*) = \rho(t^*)$, ou seja, $(s^*,t^*) \in \rho$.

(ii) Se $(s,e) \in \rho$, então $\rho(s) = \rho(e)$ em $\mathcal{S}/\rho$. Tem-se $\rho(s^*) = \rho(s)^* = \rho(e)^* = \rho(e) = \rho(s)$, ou seja, $(s,s^*) \in \rho$.

□

Seja ρ uma congruência em um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ (ou em qualquer semigrupo). A congruência ρ é chamada **congruência de grupo** quando $\mathcal{S}/\rho$ é grupo. É consequência da Proposição 1.3.9 que $\mathcal{S}/\rho$ é semigrupo inverso para qualquer congruência ρ. Como, pela Proposição 1.3.16, um grupo é um semigrupo inverso com um único idempotente e como cada ρ-classe que é idempotente em $\mathcal{S}/\rho$ deve conter um idempotente de $\mathcal{S}$ (pois $\rho^\natural$ é homomorfismo), segue que ρ é congruência de grupo se, e somente se, $(e,f) \in \rho$, para todos $e,f \in E$, ou seja, todos os idempotentes estão em uma mesma ρ-classe. Oposto a isso, estão as congruências que **separam idempotentes**, ou seja, se $(e,f) \in \rho$, com $e,f \in E$, então $e = f$.

1.5 Ordem parcial em semigrupos inversos

Dado um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, define-se a relação $\leqslant$ como segue: dados $s,t \in \mathcal{S}$,

$$s \leqslant t \Leftrightarrow s = te$$

para algum idempotente $e \in \mathcal{S}$. A restrição de $\leqslant$ ao semirreticulado de idempotentes E é a ordem natural do semirreticulado, como feito anteriormente:

$$e \leqslant f \Leftrightarrow ef = e.$$

De fato, se $e \leqslant f$, então $e = fi$, para algum idempotente i. Mas, então $fe = ffi = fi = e$ e assim, $fe = ef = e$. A recíproca é clara.

Antes de mostrar que o escrito acima define, de fato, uma relação de ordem parcial, mostra-se, entre outras coisas, que o lado em que o idempotente aparece na definição é irrelevante.

Lema 1.5.1. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso. São equivalentes:*

(1) $s \leqslant t$;

(2) $s = ft$, *para algum idempotente* f;

(3) $s^* \leqslant t^*$;

(4) $s = ss^*t$;

(5) $s = ts^*s$.

Demonstração.
$(1) \Rightarrow (2)$: Seja $s = te$. Então, $s = ft$, para algum idempotente f, pela Proposição 1.3.6.
$(2) \Rightarrow (3)$: Seja $s = ft$, para algum idempotente f. Então $s^* = t^*f$ e, por definição, $s^* \leqslant t^*$.
$(3) \Rightarrow (4)$: Seja $s^* \leqslant t^*$. Então, $s^* = t^*e$, para algum idempotente e. Tomando inversos, obtém-se $s = et$. Mas, como $es = eet = et = s$, tem-se $ess^* = ss^*$. Logo, $s = (ss^*)s = (ess^*)et = e(ss^*)et = ess^*t = ss^*t$.
$(4) \Rightarrow (5)$: Seja $s = ss^*t$. Então, $s = te$, para algum idempotente e, pela Proposição 1.3.6. Mas, como $se = tee = te = s$, tem-se $s^*se = s^*s$. Logo, $s = s(s^*s) = te(ss^*e) = tss^*e = tss^*$.
$(5) \Rightarrow (1)$: Definição. □

Proposição 1.5.2. *Seja* $\mathcal{S}$ *um semigrupo inverso. Tem-se:*

(i) *A relação* $\leqslant$ *é de ordem parcial em* $\mathcal{S}$;

(ii) *Se* $s \leqslant t$ e $u \leqslant v$, *então* $su \leqslant tv$;

(iii) *Se* $s \leqslant t$, *então* $s^*s \leqslant t^*t$ e $ss^* \leqslant tt^*$;

(iv) *O semirreticulado de idempotentes* E *satisfaz: dados* $s \in \mathcal{S}$ e $e \in E$ *com* $s \leqslant e$, *então* $s \in E$.

Demonstração.

(i) Como $s = s(s^*s)$, a relação é reflexiva. Agora, sejam $s \leqslant t$ e $t \leqslant s$. Então, pelo Lema 1.5.1, $s = ts^*s$ e $t = st^*t$. Logo, $s = ts^*s = st^*ts^*s = ss^*st^*t = st^*t = t$ e a relação é antissimétrica. Finalmente, supõe-se $s \leqslant t$ e $t \leqslant u$. Então, $s = te$ e $t = uf$, para e, f idempotentes. Logo, $s = te = (uf)e = u(fe)$ e $s \leqslant u$.

(ii) Sejam $s \leqslant t$ e $u \leqslant v$. Então, $s = te$ e $u = vf$, com e, f idempotentes. Assim, $su = tevf$. Pela Proposição 1.3.6, $ev = vi$, para algum idempotente i. Assim, $su = tv(if)$ e então $su \leqslant tv$.

(iii) Imediato do lema anterior e do item acima.

(iv) Imediato da definição da ordem parcial e do fato que E é fechado para a multiplicação.

□

Observação 1.5.3. Dado $(P, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado, um subconjunto Q de P que satisfaz o item (iv) da proposição acima é chamado de ideal de ordem (order ideal).

Exemplo 1.5.4. Quando se tem $(A, g) \leqslant (B, h)$, no monoide $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$? Tem-se $(A, g) \leqslant (B, h)$ se, e somente se, existe $(C, 1_G) \in E(\tilde{G}^{\mathcal{R}})$ tal que $(A, g) = (C, 1_G)(B, h)$.

Tem-se $(C, 1_G)(B, h) = (C \cup 1_G B, 1_G h) = (C \cup B, h)$ e $(A, g) = (C \cup B, h)$ implica $g = h$ e $A = C \cup B$. Ou seja, $(A, g) \leqslant (B, h)$ se, e somente se, $g = h$ e $B \subseteq A$.

Exemplo 1.5.5. Dado um conjunto X, qual é a relação $\leqslant$ em $\mathcal{I}(X)$? Dados $\alpha : \operatorname{dom}\alpha \to \operatorname{im}\alpha$ e $\beta : \operatorname{dom}\beta \to \operatorname{im}\beta$, mostra-se que $\alpha \leqslant \beta$ se, e somente se, β estende α.

De fato, se $\alpha \leqslant \beta$ em $\mathcal{I}(X)$, então existe um subconjunto C de X tal que $\alpha = \beta \circ 1_C$, em que 1_C denota a função identidade em C. Se $(x, y) \in \alpha$ (ou seja, se $\alpha(x) = y$), então tem-se que existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in 1_C$ e $(z, y) \in \beta$. Assim, $x = z$ e então $(x, y) \in \beta$. Logo, β estende α.

Reciprocamente, se β estende α, seja o elemento $\beta \circ 1_{\operatorname{dom}\alpha}$. Então, $(x, y) \in \alpha$ implica $(x, x) \in 1_{\operatorname{dom}\alpha}$ e $(x, y) \in \beta$. Logo, $\beta \circ 1_{\operatorname{dom}\alpha}$ estende α. Agora, supõe-se $(x, y) \in \beta \circ 1_{\operatorname{dom}\alpha}$. Então, $x \in \operatorname{dom}\alpha$ e $(x, y) \in \beta$. Logo, existe $\alpha(x) \in X$ tal que $(x, \alpha(x)) \in \alpha$. Mas, como β, que é bijeção parcial, estende α, deve-se ter $\alpha(x) = y$ e, então, $(x, y) \in \alpha$.

Portanto, $\alpha \leqslant \beta$ se, e somente se, β estende α.

É possível mostrar que se R é uma relação compatível em um semigrupo $\mathcal{S}$, então R^n também o é, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, R^∞ também é relação compatível com a multiplicação do semigrupo. Assim, tomando $R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$, como na Proposição 1.4.4, tem-se que R^e é a menor relação de equivalência que contém R e R^e é compatível com a multiplicação, ou seja, R^e é uma congruência no semigrupo $\mathcal{S}$. Pela Proposição 1.5.2, tem-se que $\leqslant$ é uma relação compatível com a multiplicação do semigrupo $\mathcal{S}$, logo, usando σ para denotar a menor relação de equivalência em $\mathcal{S}$ que contém $\leqslant$, tem-se que σ é a menor congruência em $\mathcal{S}$ que contém $\leqslant$. O próximo lema descreve melhor σ.

Lema 1.5.6. *Para um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ e para todos $s, t \in \mathcal{S}$, tem-se $(s, t) \in \sigma$ se, e somente se, existe $u \in \mathcal{S}$ tal que $u \leqslant s, t$.*

Demonstração. Se existe $u \in \mathcal{S}$ tal que $u \leqslant s, t$, tem-se que $z_1 = s$, $z_2 = u$ e $z_3 = t$ definem uma sequência tal que $z_i \leqslant z_{i+1}$ ou $z_{i+1} \leqslant z_i$, para $i = 1, 2$, e tem-se $(s, t) \in \sigma$, pela Proposição 1.4.5.

Reciprocamente, como feito na Proposição 1.4.5, tem-se que $(s, t) \in \sigma$ implica que existem $s = s_1, \ldots, s_n = t \in \mathcal{S}$ tais que $s_i \leqslant s_{i+1}$ ou $s_{i+1} \leqslant s_i$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

Portanto, $s_i = e_i s_{i+1}$ ou $s_{i+1} = e_i s_i$, com $e_i \in E(\mathcal{S})$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Para ambos os casos, $e_i s_{i+1} = e_i s_i$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Faz-se $e = e_1 \cdots e_{n-1}$. Assim

$$\begin{aligned} es = es_1 &= (e_2 \cdots e_{n-1})(e_1 s_1) \\ &= (e_2 \cdots e_{n-1})(e_1 s_2) \\ &= (e_1 e_3 \cdots e_{n-1})(e_2 s_2) \\ &= (e_1 e_3 \cdots e_{n-1})(e_2 s_3) \\ &= \dots \\ &= (e_1 \cdots e_{n-2})(e_{n-1} s_n) \\ &= es_n = et \end{aligned}$$

E toma-se $u = es = et \leqslant s, t$. □

O que mostra que σ é a congruência de grupo minimal em $\mathcal{S}$.

Observação 1.5.7. Tomando o monoide inverso $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$, pelo Exemplo 1.1.4, tem-se que todos os idempotentes de $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$ são da forma $(A, 1_G)$ e pelo Lema 1.3.8, os idempotentes de $\tilde{G}^{\mathcal{R}}/\sigma$ são as σ-classes de $(A, 1_G)$. Mas, como feito no Exemplo 1.5.4, $(A, 1_G) \leqslant (\{1_G\}, 1_G)$, $\forall A \in \mathcal{P}_{1_G}(G)$. Logo, $\tilde{G}^{\mathcal{R}}/\sigma$ é monoide inverso, pela Proposição 1.3.9, e possui um único idempotente. Ou seja, $\tilde{G}^{\mathcal{R}}/\sigma$ é um grupo! Além disso, é isomorfo a G pelo isomorfismo

$$\begin{aligned} G &\to \tilde{G}^{\mathcal{R}}/\sigma \\ g &\mapsto \sigma^{\natural}(\{1_G, g\}, g). \end{aligned}$$

1.6 E-unitários

Definição 1.6.1. Um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ é chamado E-**unitário** se, para todo $e \in E$ com $e \leqslant s$, tem-se s idempotente.

Para todos s, t no semigrupo inverso $\mathcal{S}$, define-se:

- **relação de compatibilidade à esquerda** por:

$$s \sim_e t \Leftrightarrow st^* \in E(\mathcal{S});$$

- **relação de compatibilidade à direita** por:

$$s \sim_d t \Leftrightarrow s^*t \in E(\mathcal{S});$$

- **relação de compatibilidade** pela interseção das duas relações acima:

$$s \sim t \Leftrightarrow st^*, s^*t \in E(\mathcal{S}).$$

Tomando a congruência σ gerada pela ordem parcial $\leqslant$ em um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, tem-se a próxima proposição.

Proposição 1.6.2. *Dado um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ E-unitário, tem-se $\sim = \sigma$.*

Demonstração. ($\sigma \subseteq \sim$): Sejam $s, t \in \mathcal{S}$ tais que $(s,t) \in \sigma$. Então, pelo Lema 1.5.6, existe $u \in \mathcal{S}$ tal que $u \leqslant s, t$. Assim, $uu^* \leqslant st^*$ e $u^*u \leqslant s^*t$. Mas, como $\mathcal{S}$ é um semigrupo E-unitário, tem-se $st^*, s^*t \in E(\mathcal{S})$, ou seja, $s \sim t$.

($\sim \subseteq \sigma$): Sejam $s, t \in \mathcal{S}$ tais que $s \sim t$. Tomando $u = ss^*t$, tem-se $u \leqslant s, t$, pois $ss^*, s^*t \in E(\mathcal{S})$ e, novamente pelo Lema 1.5.6, $(s,t) \in \sigma$. □

1.7 Semigrupos universais

A presente seção tem como objetivo definir o conceito de semigrupos universais. Conceito que será usado na Seção 3.1, na construção do monoide $\mathcal{S}(G)$, para um grupo G.

Se A é um conjunto não vazio, denota-se por F_A o conjunto de todas as palavras não vazias finitas $a_1a_2\ldots a_n$ do "alfabeto" A. Define-se uma operação binária em F_A por concatenação:

$$(a_1a_2\ldots a_n)(b_1b_2\ldots b_m) = a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m.$$

Com respeito a esta operação, F_A é um semigrupo, chamado **semigrupo livre sobre** A. O conjunto A é chamado **conjunto gerador de** F_A. Identifica-se cada elemento $a \in A$ com a palavra de uma única letra $a \in F_A$. Permitindo o uso da palavra vazia, tem-se que F_A é monoide.

A propriedade universal de semigrupos livres é dada pelo próximo teorema:

Teorema 1.7.1. *Sejam A um conjunto não vazio e $\mathcal{S}$ um semigrupo. Se $f : A \to \mathcal{S}$ é uma função qualquer, então existe um único homomorfismo $\phi : F_A \to \mathcal{S}$ tal que $\phi|_A = f$.*

Demonstração. Define-se $\phi : F_A \to \mathcal{S}$ por

$$\phi(a_1a_2\ldots a_n) \mapsto f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n).$$

Fica claro que ϕ é homomorfismo e que $\phi|_A = f$. Além disso, segue que ϕ é única, pois se $\psi : F_A \to \mathcal{S}$ também tem as propriedades desejadas, então, $\forall a_1a_2\ldots a_n \in F_A$:

$$\begin{aligned}\psi(a_1a_2\ldots a_n) &= \psi(a_1)\psi(a_2)\ldots\psi(a_n)\\ &= f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n)\\ &= \phi(a_1a_2\ldots a_n) \qquad \text{e daí, } \psi = \phi.\end{aligned}$$

□

Se $\mathcal{S}$ é um semigrupo e A é um conjunto gerador de $\mathcal{S}$, o teorema define um homomorfismo sobrejetivo $\phi : F_A \to \mathcal{S}$. Então, $\mathcal{S} \simeq F_A/\ker\phi$. Sempre é possível encontrar um conjunto gerador para $\mathcal{S}$ (o próprio $\mathcal{S}$ serve para tal fim) e deduz-se que todo semigrupo pode ser expresso a menos de isomorfismo como quociente de um semigrupo livre por uma congruência. Tal expressão não é única.

Observação 1.7.2. Na categoria de semigrupos com seus homomorfismos, tem-se: se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são semigrupos e $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ é um homomorfismo injetor, então dado um outro semigrupo $\mathcal{Q}$, com dois homomorfismos $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{Q} \to \mathcal{S}$ tais que $\phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2$, tem-se $\psi_1 = \psi_2$. Ou seja, homomorfismos injetores são monomorfismos, nesta categoria. Reciprocamente, dado $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ monomorfismo categórico, supõe-se, por contradição, que existem $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ distintos tais que $\phi(s_1) = \phi(s_2)$. Toma-se agora, o semigrupo livre $\mathcal{F}$ gerado por um elemento z, ou seja, os elementos de $\mathcal{F}$ são potências com expoentes em $\mathbb{N}$ de z, todos distintos e $z^n * z^m = z^{n+m}$, para $n, m \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{F}$ é o semigrupo livre gerado por z, existem homomorfismos $\psi_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ e $\psi_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ tais que $\psi_1(z) = s_1$ e $\psi_2(z) = s_2$. Então tem-se $\phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2$, com $\psi_1 \neq \psi_2$. Contradição!

Agora, se $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ é homomorfismo sobrejetor e $\mathcal{Q}$ é outro semigrupo com $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{T} \to \mathcal{Q}$ homomorfismos, tais que $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$, então $\psi_1 = \psi_2$. Ou seja, homomorfismos sobrejetores são epimorfismos, nesta categoria. Tem-se que a recíproca não vale em geral, mas vale para a categoria dos semigrupos inversos, ou seja, epimorfismos são funções sobrejetoras na categoria dos semigrupos inversos. Para uma demonstração, cita-se [Hig96, Teorema 2].

Tal observação é para justificar o uso dos termos "epimorfismo" e "monomorfismo" para significar funções sobrejetoras e injetoras (na categoria dos semigrupos inversos), respectivamente.

Capítulo 2

Cohomologia para ações parciais de grupos

Neste capítulo, apresentam-se os conceitos principais da cohomologia de ações parciais. Na Seção 2.1, mostra-se a existência de um complexo de G-módulos parciais associado a uma ação parcial. Apresentam-se as ações parciais torcidas de grupos em álgebras e a Seção 2.2 é dedicada a entender quando os produtos cruzados associados a ações parciais torcidas e a ações parciais torcidas unitais são associativos. A Seção 2.2.3 é dedicada à verificação de que as torções são o mesmo que 2-cociclos parciais.

2.1 Noções básicas

Sejam G um grupo e A um semigrupo.

Definição 2.1.1. Uma **ação parcial θ de um grupo G em A** é uma coleção de isomorfismos de semigrupo $\theta_g : A_{g^{-1}} \to A_g$, com A_g ideal de A, para todo $g \in G$, satisfazendo, para $g, h \in G$:

(AP1) $A_1 = A$ e θ_1 é a função identidade de A;

(AP2) $\theta_g(A_{g^{-1}} \cap A_h) = A_g \cap A_{gh}$;

(AP3) $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ em $A_{h^{-1}} \cap A_{h^{-1}g^{-1}}$.

Considera-se o caso em que A é um monoide comutativo e cada ideal A_g é unital, ou seja, A_g é gerado por um idempotente 1_g de A. Neste caso, diz-se que θ é uma **ação parcial unital**. Então $A_g \cap A_h = A_g A_h$, pelo Lema 1.1.6, e as propriedades (AP2) e (AP3) podem ser substituídas por

(AP2') $\theta_g(A_{g^{-1}} A_h) = A_g A_{gh}$;

(AP3') $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ em $A_{h^{-1}}A_{h^{-1}g^{-1}}$.

Nota-se também que (AP2') implica a igualdade mais geral

$$\theta_g(A_{g^{-1}}A_{h_1}\cdots A_{h_n}) = A_g A_{gh_1}\cdots A_g A_{gh_n} \tag{2.1.1}$$

que segue observando-se

$$A_{g^{-1}}A_{h_1}\cdots A_{h_n} = A_{g^{-1}}A_{h_1}\cdots A_{g^{-1}}A_{h_n}.$$

Definição 2.1.2. Um monoide comutativo A com uma ação parcial unital θ de G em A é chamado de G-**módulo parcial unital**.

Dados dois G-módulos parciais (unitais) (A, θ) e (A', θ'), um **morfismo de ações parciais** $(A, \theta) \to (A', \theta')$ de G é um morfismo entre semigrupos $\varphi : A \to A'$ tal que $\varphi(A_g) \subseteq A'_g$ e $\varphi \circ \theta_g = \theta'_g \circ \varphi$ em $A_{g^{-1}}$.

Definição 2.1.3. Um **morfismo entre G-módulos parciais (unitais)** $\varphi : (A, \theta) \to (A', \theta')$ é um morfismo de ações parciais cuja restrição a cada A_g é um homomorfismo entre monoides $A_g \to A'_g$.

A categoria de G-módulos parciais unitais e morfismos será denotada por $\mathrm{pMod}(G)$. Às vezes, (A, θ) será denotado simplesmente por A.

Definição 2.1.4. Sejam $A \in \mathrm{pMod}(G)$ e n um inteiro positivo. Uma n-**cocadeia de G com valores em A** é uma função $f : G^n \to A$ tal que $f(g_1, \cdots, g_n)$ é um elemento invertível do ideal $A_{(g_1,\cdots,g_n)} := A_{g_1}A_{g_1g_2}\cdots A_{g_1\cdots g_n}$. Uma 0-**cocadeia** é um elemento invertível de A.

Denota-se o conjunto de n-cocadeias por $C^n(G, A)$. Tal conjunto é um grupo abeliano com a multiplicação ponto a ponto. A identidade é $e_n(g_1, \cdots, g_n) = 1_{g_1}1_{g_1g_2}\cdots 1_{g_1\cdots g_n}$ e o inverso de $f \in C^n(G, A)$ é $f^{-1}(g_1, \cdots, g_n) := f(g_1, \cdots, g_n)^{-1}$, em que $f(g_1, \cdots, g_n)^{-1}$ é o inverso de $f(g_1, \cdots, g_n)$ em $A_{(g_1,\cdots,g_n)}$.

Definição 2.1.5. Sejam $(A, \theta) \in \mathrm{pMod}(G)$ e n um inteiro positivo. Dados $f \in C^n(G, A)$ e $g_1, \cdots, g_{n+1} \in G$, define-se

$$\begin{aligned}(\delta^n f)(g_1, \cdots g_{n+1}) = {} & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2, \cdots g_{n+1})) \\ & \prod_{i=1}^{n} f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^i} \\ & f(g_1, \cdots, g_n)^{(-1)^{n+1}}\end{aligned}$$

Os inversos são tomados nos ideais correspondentes.

Se $n = 0$ e $a \in A$ é invertível, faz-se $(\delta^0 a)(g) = \theta_g(1_{g^{-1}}a)a^{-1}$.

Proposição 2.1.6. $\delta^n : C^n(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$ *é um homomorfismo tal que*

$$\delta^{n+1}\delta^n f = e_{n+2} \tag{2.1.2}$$

$\forall f \in C^n(G, A)$.

Demonstração. Seja $f \in C^n(G, A)$. Verifica-se primeiramente: $\delta^n f \in C^{n+1}(G, A)$. De fato, para $g_1, \cdots, g_{n+1} \in G$, $f(g_2, \cdots, g_{n+1})$ é invertível em $A_{(g_2,\cdots,g_{n+1})}$. Multiplicando por $1_{g_1^{-1}}$, torna-se invertível em $A_{g_1^{-1}}A_{(g_2,\cdots,g_{n+1})}$. Logo, $\theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f(g_2, \cdots, g_{n+1}))$ é invertível em $A_{(g_1,\cdots,g_{n+1})}$, pois θ_{g_1} é isomorfismo entre $A_{g_1^{-1}}A_{(g_2,\cdots,g_{n+1})}$ e $A_{(g_1,\cdots,g_{n+1})}$, por (2.1.1). Como o produto de invertíveis em ideais é invertível no produto de tais ideais, então, pela definição de δ^n, a imagem de $(\delta^n f)(g_1, \cdots g_{n+1})$ é invertível em

$$A_{(g_1,\cdots,g_{n+1})}\left(\prod_{i=1}^{n} A_{(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+1})}\right)A_{(g_1,\cdots,g_n)} = A_{(g_1,\cdots,g_{n+1})}$$

Como A é comutativo, para ver que δ^n é homomorfismo, é suficiente notar

$$\begin{aligned}
\theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f_1f_2(g_2, \cdots, g_{n+1})) &= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}(f_1(g_2, \cdots, g_{n+1})f_2(g_2, \cdots, g_{n+1}))) \\
&= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f_1(g_2, \cdots, g_{n+1})1_{g_1^{-1}}f_2(g_2, \cdots, g_{n+1})) \\
&= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f_1(g_2, \cdots, g_{n+1}))\theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f_2(g_2, \cdots, g_{n+1})))
\end{aligned}$$

Resta mostrar (2.1.2). Tal demonstração encontra-se no Apêndice A.

□

Definição 2.1.7. A função δ^n é chamada **homomorfismo de cobordo**. Define-se, como no caso clássico, os grupos abelianos $Z^n(G, A) = \ker \delta^n$, $B^n(G, A) = \operatorname{im} \delta^{n-1}$ e $H^n(G, A) = \ker \delta^n / \operatorname{im} \delta^{n-1}$ de n- **cociclos**, n-**cobordos** e n-**cohomologias parciais de** G **com valores em** A, $n \geqslant 1$, e para $n = 0$, $H^0(G, A) = Z^0(G, A) = \ker \delta^0$.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
H^0(G, A) = Z^0(G, A) &= \{a \in \mathcal{U}(A) \mid \theta_g(a1_{g^{-1}}) = a1_g, \forall g \in G\} \\
B^1(G, A) &= \{f \in C^1(G, A) \mid f(g) = \theta_g(a1_{g^{-1}})a^{-1}, a \in \mathcal{U}(A)\}
\end{aligned}$$

em que $\mathcal{U}(A)$ denota o grupo dos elementos invertíveis de A.

Nota-se que $H^0(G, A)$ é o subgrupo de θ-invariantes de $\mathcal{U}(A)$.

Além disso,

$$(\delta^1 f)(g, h) = \theta_g(f(h)1_{g^{-1}})f(gh)^{-1}f(g)$$

para $f \in C^1(G,A)$, implica

$$\begin{aligned} Z^1(G,A) &= \{f \in C^1(G,A) \mid f(gh)1_g = \theta_g(f(h)1_{g^{-1}})f(g), \forall g,h \in G\} \\ B^2(G,A) &= \{f' \in C^2(G,A) \mid f'(g,h) = \theta_g(f(h)1_{g^{-1}})f(gh)^{-1}f(g), f \in C^1(G,A)\} \end{aligned}$$

para $n = 2$:

$$(\delta^2 f)(g,h,t) = \theta_g(1_{g^{-1}}f(h,t))f(gh,t)^{-1}f(g,ht)f(g,h)^{-1}$$

para $f \in C^2(G,A)$ e segue que $f \in Z^2(G,A)$ se, e somente se,

$$\theta_g(f(h,t)1_{g^{-1}})f(g,ht) = f(gh,t)f(g,h) \tag{2.1.3}$$

$\forall g,h,t \in G$.

Proposição 2.1.8. *A função que leva um G-módulo parcial A na sequência*

$$C^0(G,A) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G,A) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n(G,A) \xrightarrow{\delta^n} \cdots$$

é um funtor de $\mathrm{pMod}(G)$ *na categoria de complexos de grupos abelianos.*

Demonstração. Sejam $\varphi : (A,\theta) \to (A',\theta')$ morfismo entre G-módulos parciais e $f \in C^n(G,A)$. Define-se $\tilde{\varphi}_n f = \varphi \circ f : G^n \to A'$. Deve-se mostrar: $\tilde{\varphi}_n f \in C^n(G,A')$.

De fato, para $g_1, \cdots, g_n$, o elemento $f(g_1,\cdots,g_n)$ é invertível em $A_{(g_1,\cdots,g_n)}$. Como $\varphi(1^A_{g_1}1^A_{g_1g_2}\cdots 1^A_{g_1\cdots g_n}) = 1^{A'}_{g_1}1^{A'}_{g_1g_2}\cdots 1^{A'}_{g_1\cdots g_n}$, a restrição de φ a $A_{(g_1,\cdots,g_n)}$ é homomorfismo entre monoides $A_{(g_1,\cdots,g_n)} \to A'_{(g_1,\cdots,g_n)}$. Logo, $\varphi(f(g_1,\cdots,g_n))$ é invertível em $A'_{(g_1,\cdots,g_n)}$ e seu inverso é $\varphi(f(g_1,\cdots,g_n)^{-1})$.

Consequentemente, para mostrar que $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ é morfismo de complexos, ou seja, para verificar a igualdade $\tilde{\varphi}_{n+1} \circ \delta^n = \delta^n \circ \tilde{\varphi}_n$, basta mostrar

$$\varphi \circ \theta_{x_1}(1^A_{x_1^{-1}}f(x_2,\cdots,x_{n+1})) = \theta'_{x_1}(1^{A'}_{x_1^{-1}}\varphi \circ f(x_2,\cdots,x_{n+1}))$$

pois os outros termos de δ^n que não envolvem a ação θ, só envolvem f e, portanto, satisfazem $\tilde{\varphi}_{n+1} \circ \delta^n = \delta^n \circ \tilde{\varphi}_n$.

Por definição de morfismo entre G-módulos parciais,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \theta_{g_1}(1^A_{g_1^{-1}}f(g_2,\cdots,g_{n+1})) &= \theta'_{g_1} \circ \varphi(1^A_{g_1^{-1}}f(g_2,\cdots,g_{n+1})) \\ &= \theta'_{g_1}(\varphi(1^A_{g_1^{-1}})\varphi(f(g_2,\cdots,g_{n+1}))) \\ &= \theta'_{g_1}(1^{A'}_{g_1^{-1}}\varphi(f(g_2,\cdots,g_{n+1}))) \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Corolário 2.1.9. *Para $n \geqslant 0$, a função $A \mapsto H^n(G, A)$ determina um funtor de* $\mathrm{pMod}(G)$ *em* Ab.

2.2 2-cociclos parciais e produtos cruzados parciais

Nesta seção será apresentada uma aplicação de cohomologia parcial de grupos. Em [DES08] foi introduzido o conceito de ação parcial torcida de um grupo G em uma k-álgebra $\mathcal{A}$ e foi construído o produto cruzado torcido $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$. Na Seção 2.2.3 será mostrado que os elementos $\omega_{g,h} \in \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh}$ que definem a "torção" da ação parcial são 2-cociclos parciais e que 2-cociclos cohomólogos dão origem a produtos cruzados torcidos isomorfos como álgebras G-graduadas.

2.2.1 Produtos cruzados por ações parciais

Serão consideradas inicialmente ações parciais (sem torção). Sejam G um grupo e $\mathcal{A}$ uma k-álgebra não necessariamente com unidade, em que k é um anel associativo, comutativo com unidade. Para definir o conceito de ação parcial do grupo G na k-álgebra $\mathcal{A}$, toma-se cada θ_g isomorfismo de álgebras entre ideais da álgebra $\mathcal{A}$.

Definição 2.2.1. Uma **ação parcial θ de G em $\mathcal{A}$** é uma coleção de isomorfismos de álgebras $\theta_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$, com $\mathcal{D}_g$ ideal de $\mathcal{A}$, para todo $g \in G$, satisfazendo, para $g, h \in G$:

(AP1) $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$ e θ_1 é a função identidade de $\mathcal{A}$;

(AP2) $\theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}$;

(AP3) $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ em $\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$.

Definição 2.2.2. Dada uma ação parcial θ de um grupo G numa álgebra $\mathcal{A}$, o **anel de grupo skew** $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ correspondente a θ é o conjunto de todas as somas formais finitas $\{\sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in \mathcal{D}_g\}$ em que os δ_g's são símbolos. O produto é determinado por $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}$.

Uma pergunta que surge naturalmente é se $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo. Será demonstrado que $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo se $\mathcal{A}$ for uma álgebra semiprima. Uma álgebra é dita **semiprima** se $\mathcal{A}$ não tem ideal nilpotente não nulo. Mais geralmente, dada uma ação parcial de um grupo G numa álgebra unital $\mathcal{A}$, o anel de grupo skew $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo se todo ideal $\mathcal{D}_g$ é idempotente ou não degenerado. Um ideal I de $\mathcal{A}$ é **não degenerado** se, para todo elemento não nulo $a \in I$, existe $b \in I$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$. Demonstra-se na Proposição 2.2.9 que uma álgebra unital $\mathcal{A}$ é semiprima se, e somente se, cada ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado.

O resultado principal sobre a associatividade de $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ segue do estudo das álgebras de multiplicadores $M(\mathcal{D}_g)$ dos ideais D_g. Além disso, na seção seguinte será feita uma extensão da construção do anel de grupo skew que utiliza as álgebras $M(\mathcal{D}_g)$ de modo essencial. Por isso, serão apresentados a seguir alguns resultados sobre multiplicadores em uma álgebra.

Sejam k um corpo, $\mathcal{A}$ uma k-álgebra associativa com unidade e I um ideal de $\mathcal{A}$. Fixado um elemento $x \in \mathcal{A}$, considera-se as multiplicações à esquerda e à direita de I por x:

$$\begin{array}{rcl} R_x : I & \to & I \\ a & \mapsto & R_x(a) := ax \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L_x : I & \to & I \\ a & \mapsto & L_x(a) := xa \end{array}$$

Então $L = L_x$ e $R = R_x$ são transformações lineares em I tais que as seguintes propriedades são satisfeitas, $\forall a, b \in I$:

(M1) $L(ab) = L(a)b$;

(M2) $R(ab) = aR(b)$;

(M3) $R(a)b = aL(b)$.

Tais propriedades são consequências diretas da associatividade de $\mathcal{A}$: $L(ab) = x(ab) = (xa)b = L(a)b$, $R(ab) = (ab)x = a(bx) = aR(b)$ e $R(a)b = (ax)b = a(xb) = aL(b)$.

Definição 2.2.3. A **álgebra de multiplicadores** de uma álgebra I é o conjunto $M(I)$ dos pares ordenados (R, L), em que R e L são transformações lineares $I \to I$ satisfazendo os itens (M1) a (M3). Para $(R, L), (R', L') \in M(I)$, $\alpha \in k$, as operações são definidas por:

- $\alpha(R, L) = (\alpha R, \alpha L)$;
- $(R, L) + (R', L') = (R + R', L + L')$;
- $(R, L)(R', L') = (R' \circ R, L \circ L')$.

Diz-se que R (respectivamente, L) é **multiplicador à direita (respectivamente, à esquerda)** de I.

Verifica-se que $M(I)$ é álgebra associativa com unidade (R_1, L_1), em que R_1 e L_1 são as identidades de I. (Se I for ideal de uma álgebra $\mathcal{A}$ com unidade $1_\mathcal{A}$, R_1 e L_1 são as multiplicações por $1_\mathcal{A}$ à direita e à esquerda, respectivamente.)

Define-se $\phi : I \to M(I)$ por $x \mapsto (R_x, L_x)$. ϕ é morfismo de álgebras, já que é k-linear e, além disso,

- $R_{xy}(a) = a(xy) = (ax)y = R_x(a)y = R_y \circ R_x(a)$;
- $L_{xy}(a) = (xy)a = x(ya) = xL_y(a) = L_x \circ L_y(a)$.

o que implica $\phi(xy) = (R_{xy}, L_{xy}) = (R_y \circ R_x, L_x \circ L_y) = \phi(x)\phi(y)$.

Definição 2.2.4. Diz-se que uma álgebra I é **não degenerada** se a função $\phi : I \to M(I)$ definida acima é injetiva.

Em geral, o núcleo de ϕ é a interseção do anulador à esquerda de I em I com seu anulador à direita em I. Portanto, I é não degenerada se, e somente se, para todo $a \in I$ não nulo, existe $b \in I$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$.

Mais geralmente, se I é um ideal em uma álgebra $\mathcal{A}$, pode-se considerar o homomorfismo $\psi : \mathcal{A} \to M(I)$, dado por $a \mapsto (R_a, L_a)$, cujo núcleo é a interseção do anulador à esquerda de I em $\mathcal{A}$ com seu anulador à direita em $\mathcal{A}$.

Proposição 2.2.5. *Valem:*

(i) $\phi(I)$ *é ideal de* $M(I)$*;*

(ii) $\phi : I \to M(I)$ *é isomorfismo se, e somente se,* I *é álgebra com unidade.*

Demonstração. (i) Toma-se $x \in I$ e $(R, L) \in M(I)$.

Mostra-se: $(R_x, L_x)(R, L), (R, L)(R_x, L_x) \in \phi(I)$.

$(R_x, L_x)(R, L) = (R \circ R_x, L_x \circ L)$. Aplicando em $a \in I$:

- $(R \circ R_x)(a) = R(ax) = aR(x) = R_{R(x)}(a)$;
- $(L_x \circ L)(a) = xL(a) = R(x)a = L_{R(x)}(a)$.

Logo, $(R_x, L_x)(R, L) = (R_{R(x)}, L_{R(x)}) \in \phi(I)$.

$(R, L)(R_x, L_x) = (R_x \circ R, L \circ L_x)$. Aplicando em $a \in I$:

- $(R_x \circ R)(a) = R(a)x = aL(x) = R_{L(x)}(a)$;
- $(L \circ L_x)(a) = L(xa) = L(x)a = L_{L(x)}(a)$.

Logo, $(R, L)(R_x, L_x) = (R_{L(x)}, L_{L(x)}) \in \phi(I)$.

(ii) Se ϕ é isomorfismo, segue que I tem unidade. Reciprocamente, se I tem unidade 1, $\phi(1) \in \phi(I)$ é unidade de $M(I)$ e, por $\phi(I)$ ser ideal de $M(I)$, tem-se $\phi(I) = M(I)$. Como ϕ é injetiva, tem-se $I \simeq M(I)$.

□

Seja I álgebra (preferencialmente sem unidade). Dados $(R, L), (R', L') \in M(I)$, quer-se verificar a validade da igualdade

$$R' \circ L = L \circ R' \tag{2.2.1}$$

Se x, x' pertencem a uma álgebra $\mathcal{A}$, com ideal I, com $(R, L) = (R_x, L_x)$ e $(R', L') = (R_{x'}, L_{x'})$, então a validade de (2.2.1) vem como consequência da associatividade de $\mathcal{A}$:

- $(R' \circ L)(a) = R'(xa) = (xa)x'$;
- $(L \circ R')(a) = L(ax') = x(ax')$.

No entanto, isso nem sempre vale. Como contraexemplo, toma-se I espaço vetorial munido da multiplicação trivial $xy := 0, \forall x, y \in I$. Todo par (R, L) de transformações lineares em I constituiria um multiplicador em I e não se espera que (2.2.1) valha.

Definição 2.2.6. Uma álgebra I é dita (R, L)**-associativa** se, dados dois multiplicadores $(R, L), (R', L') \in M(I)$, $R' \circ L = L \circ R'$.

O resultado a seguir lista duas condições suficientes para (R, L)-associatividade.

Proposição 2.2.7. *A álgebra I é (R, L)-associativa se vale quaisquer uma das condições:*

(i) I é não degenerada;

(ii) I é idempotente.

Demonstração. Sejam $(R, L), (R', L') \in M(I)$. Dados $a, b \in I$, tem-se

$$\begin{aligned} R(L'(a))b &= L'(a)L(b) && \text{pelo item (M3)} \\ &= L'(aL(b)) && \text{pelo item (M1)} \\ &= L'(R(a)b) && \text{pelo item (M3)} \\ &= L'(R(a))b && \text{pelo item (M1)} \end{aligned}$$

o que implica que $R(L'(a)) - L'(R(a))$ pertence ao anulador esquerdo de I.

Analogamente,

$$\begin{aligned} bR(L'(a)) &= R(bL'(a)) && \text{pelo item (M2)} \\ &= R(R'(b)a) && \text{pelo item (M3)} \\ &= R'(b)R(a) && \text{pelo item (M2)} \\ &= bL'(R(a)) && \text{pelo item (M3)} \end{aligned}$$

o que implica que $R(L'(a)) - L'(R(a))$ pertence ao anulador direito de I.

Se vale (i), tem-se $R(L'(a)) = L'(R(a)), \forall a \in I$.

Supondo $a_1, a_2 \in I$, fazendo $a = a_1a_2$, tem-se

$$\begin{aligned} R(L'(a)) &= R(L'(a_1a_2)) \\ &= R(L'(a_1)a_2) \\ &= L'(a_1)R(a_2) \\ &= L'(a_1R(a_2)) \\ &= L'(R(a_1a_2)) \\ &= L'(R(a)) \end{aligned}$$

Se vale (ii), tem-se que todo elemento de I é soma de termos da forma a_1a_2, e segue a conclusão. □

No próximo teorema considera-se ações parciais tais que todos os ideais $\mathcal{D}_g$ são (R, L)-associativos. É, portanto, útil ter meios de decidir quando os ideais de uma certa álgebra possuem tal propriedade. O próximo resultado segue essa direção, mas antes, algumas definições.

Definição 2.2.8. Numa álgebra unital $\mathcal{A}$ um ideal I é chamado

- **não degenerado à direita** se $a \in I$ não nulo implica $aI \neq \{0\}$;
- **não degenerado à esquerda** se $a \in I$ não nulo implica $Ia \neq \{0\}$.

Proposição 2.2.9. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra unital. São equivalentes:*

(i) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado;

(ii) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ ou é idempotente ou é não degenerado;

(iii) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado à direita;

(iv) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado à esquerda;

(v) $\mathcal{A}$ é semiprima.

Neste caso, todo ideal de $\mathcal{A}$ é (R, L)-associativo.

Demonstração. Demonstra-se somente (ii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iii), pois (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) $\Rightarrow$ (i) são triviais e (iv) pode ser substituído por (iii) por simetria.
(ii) $\Rightarrow$ (v): Se $\mathcal{A}$ possui um ideal nilpotente não nulo, então $\mathcal{A}$ possui um ideal I cujo quadrado é zero. Assim, I não é nem idempotente, nem não degenerado.
(v) $\Rightarrow$ (iii): Seja I um ideal com $a \in I$ não nulo tal que $aI = \{0\}$, por contradição. Então, o ideal gerado por a, denotado $J = \mathcal{A}a\mathcal{A}$, é não nulo pois $\mathcal{A}$ é unital. No entanto, $J^2 = \mathcal{A}a(\mathcal{A}\mathcal{A}a)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}aI\mathcal{A} = \mathcal{A}\{0\}\mathcal{A} = \{0\}$. Contradizendo (v). □

Seja $\pi : I \to J$ isomorfismo de k-álgebras. Então, dado $(R, L) \in M(I)$, tem-se que $(\pi \circ R \circ \pi^{-1}, \pi \circ L \circ \pi^{-1})$ é elemento de $M(J)$ e segue a seguinte proposição.

Proposição 2.2.10. *A função $\bar{\pi} : M(I) \to M(J)$ dada por $(R, L) \mapsto (\pi \circ R \circ \pi^{-1}, \pi \circ L \circ \pi^{-1})$ é isomorfismo de k-álgebras.*

Teorema 2.2.11. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra e θ é uma ação parcial de um grupo G em $\mathcal{A}$ tal que cada $\mathcal{D}_g$ $(g \in G)$ é (R, L)-associativo, então o anel de grupo skew $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo.*

Demonstração. Tem-se que $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo se, e somente se

$$(a\delta_g b\delta_h)c\delta_t = a\delta_g(b\delta_h c\delta_t) \tag{2.2.2}$$

$\forall g, h, t \in G$, $a \in \mathcal{D}_g$, $b \in \mathcal{D}_h$, $c \in \mathcal{D}_t$.

Partindo do lado esquerdo da igualdade acima:

$$\begin{aligned}(a\delta_g b\delta_h)c\delta_t &= \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}c\delta_t \\ &= \theta_{gh}\{\theta_{(gh)^{-1}}[\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b)]c\}\delta_{ght}\end{aligned}$$

Vê-se: $\theta_{g^{-1}}(a)b \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h \Rightarrow \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b) \in \theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}$ e segue:

$$\begin{aligned}\theta_{(gh)^{-1}}[\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b)] &= \theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}[\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b)]) \\ &= \theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)\end{aligned}$$

Como esse elemento pertence a $\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$, pois $\theta_{(gh)^{-1}}(\mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}) = \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$, pode-se abrir θ_{gh}: $(a\delta_g b\delta_h)c\delta_t = \theta_g(\theta_h\{\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)c\})\delta_{ght}$.

Comparando com

$$\begin{aligned}a\delta_g(b\delta_h c\delta_t) &= a\delta_g\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c)\delta_{ht} \\ &= \theta_g[\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c)]\delta_{ght}\end{aligned}$$

e aplicando $\theta_{g^{-1}}$, tem-se que vale (2.2.2) se, e somente se,

$$\theta_h\{\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)c\} = \theta_{g^{-1}}(a)\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c)$$

vale, $\forall a \in \mathcal{D}_g$, $b \in \mathcal{D}_h$, $c \in \mathcal{D}_t$.

Como $\theta_{g^{-1}} : \mathcal{D}_g \to \mathcal{D}_{g^{-1}}$ é isomorfismo, $\theta_{g^{-1}}(a)$ percorre $\mathcal{D}_{g^{-1}}$ e a condição acima equivale a

$$\theta_h\{\theta_{h^{-1}}(ab)c\} = a\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c) \tag{2.2.3}$$

$\forall a \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$, $b \in \mathcal{D}_h$, $c \in \mathcal{D}_t$.

Se $g = t = 1$, então $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_t = \mathcal{A}$ e, portanto, $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo se, e somente se, (2.2.3) vale $\forall h \in G$, $a, c \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{D}_h$. O que equivale a

$$(\theta_h \circ R_c \circ \theta_{h^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\theta_h \circ R_c \circ \theta_{h^{-1}}) \tag{2.2.4}$$

Como R_c é multiplicador à direita e L_a é multiplicador à esquerda, ambos de $\mathcal{D}_{h^{-1}}$, tem-se pela Proposição 2.2.10, que $\theta_h \circ R_c \circ \theta_{h^{-1}}$ é multiplicador à direita para $\mathcal{D}_h$. Portanto, se $\mathcal{D}_h$ é (R, L)-associativo, vale (2.2.4). □

Corolário 2.2.12. *Se θ é uma ação parcial de um grupo G em uma álgebra $\mathcal{A}$ tal que cada $\mathcal{D}_g$ $(g \in G)$ ou é idempotente ou é não degenerado, então o anel de grupo skew $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 2.2.7 e do Teorema 2.2.11. □

2.2.2 Produtos cruzados por ações parciais torcidas

Seja $\mathcal{A}$ uma k-álgebra associativa e não necessariamente com unidade, com k um anel comutativo, com unidade. Lembra-se que a álgebra de multiplicadores $M(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ é o conjunto

$$M(\mathcal{A}) = \{(R, L) \in \operatorname{End}{}_{\mathcal{A}}\mathcal{A} \times \operatorname{End}\mathcal{A}_{\mathcal{A}} \mid (aR)b = a(Lb)\}$$

com adição e multiplicação componente a componente.

Para um multiplicador $\omega = (R, L) \in M(\mathcal{A})$ e um elemento $a \in \mathcal{A}$, faz-se $a\omega = Ra$ e $\omega a = La$. Assim, sempre se tem $(a\omega)b = a(\omega b)$, para $a, b \in \mathcal{A}$.

Definição 2.2.13. Uma **ação parcial torcida** do grupo G em $\mathcal{A}$ é uma tripla

$$\theta = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\theta_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\omega_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$$

em que, para cada $g \in G$, $\mathcal{D}_g$ é ideal bilateral de $\mathcal{A}$, θ_g é isomorfismo $\mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$ e, para cada par $(g, h) \in G \times G$, $\omega_{g,h}$ é invertível em $M(\mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh})$, satisfazendo, para $g, h, t \in G$:

(APT1) $\mathcal{D}_g^2 = \mathcal{D}_g$, $\mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_h = \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_g$;

(APT2) $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$ e θ_1 é a função identidade de $\mathcal{A}$;

(APT3) $\theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh}$;

(APT4) $\theta_g \circ \theta_h(a) = \omega_{g,h}\theta_{gh}(a)\omega_{g,h}^{-1}, \forall a \in \mathcal{D}_{h^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$;

(APT5) $\omega_{1,g} = \omega_{g,1} = 1$;

(APT6) $\theta_g(a\omega_{h,t})\omega_{g,ht} = \theta_g(a)\omega_{g,h}\omega_{gh,t}, \forall a \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_{ht}$.

Faz-se alguns comentários sobre a definição acima. Segue do item (APT1) que o produto finito de ideais $\mathcal{D}_{g_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{D}_{g_n}$ é idempotente e

$$\begin{aligned}
\theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_f) &= \theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_f)\\
&= \theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_f)\\
&= \theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h) \cdot \theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_f)\\
&= \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh} \cdot \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gf}\\
&= \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh} \cdot \mathcal{D}_{gf}
\end{aligned}$$

ou seja, o item (APT3) implica $\theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_f) = \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh} \cdot \mathcal{D}_{gf}$, para todos $g, h, f \in G$. Assim, todos os multiplicadores do item (APT4) são aplicáveis.

Dada uma álgebra (associativa) I, com $I^2 = I$, tem-se, pela Proposição 2.2.7

$$(\omega x)\omega' = \omega(x\omega') \tag{2.2.5}$$

$\forall \omega, \omega' \in M(I), x \in I$. O que explica a ausência de parênteses do lado direito da igualdade (APT4). Observa-se também que o item (APT3) implica $\theta_g^{-1}(\mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{g^{-1}h}$.

Definição 2.2.14. Dada uma ação parcial θ de G em $\mathcal{A}$, o **produto cruzado** $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é a soma direta $\bigoplus_{g\in G} \mathcal{D}_g\delta_g$, em que os δ_g's são símbolos. A multiplicação é dada por

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) := \theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)b_h)\omega_{g,h}\delta_{gh}.$$

Aqui, $\omega_{g,h}$ age como multiplicador à direita em $\theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)b_h) \in \theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh}$.

Como mencionado anteriormente, um elemento a de uma álgebra $\mathcal{A}$ obviamente determina o multiplicador $(R_a, L_a) \in M(\mathcal{A})$, com $R_a x = xa$ e $L_a x = ax$, para $x \in \mathcal{A}$. Se I é ideal bilateral em $\mathcal{A}$, então tal multiplicador pode ser restrito a I e denota-se pelo mesmo par de símbolos (R_a, L_a).

Dado um isomorfismo de álgebras $\alpha : I \to J$ e um multiplicador $u = (R, L)$ de I, tem-se que $u^\alpha = (\alpha R\alpha^{-1}, \alpha L\alpha^{-1})$ é multiplicador de J, com $(\alpha R\alpha^{-1})(x) = \alpha(R(\alpha^{-1}(x)))$ e $(\alpha L\alpha^{-1})(x) = \alpha(L(\alpha^{-1}(x)))$.

Antes de demonstrar a associatividade de $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$, tem-se duas igualdades técnicas.

Lema 2.2.15. *Tem-se:*

(i) $a\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c) = \theta_h(\theta_h^{-1}(ab)c)$, $\forall a, c \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{D}_h$, $h \in G$;

(ii) $[\theta_{gh}^{-1}(\omega_{g,h}\theta_{gh}(x))]c = \theta_{gh}^{-1}(\omega_{g,h}\theta_{gh}(xc))$, $\forall x \in \mathcal{D}_{h^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$, $g, h \in G$, $c \in \mathcal{A}$.

Demonstração.

(i) Como $\theta_h : \mathcal{D}_{h^{-1}} \to \mathcal{D}_h$ é isomorfismo, tem-se que $(\theta_h R_c \theta_h^{-1}, \theta_h L_c \theta_h^{-1})$ é multiplicador de $\mathcal{D}_h$, e aplicando (2.2.5) a $(R', L') := (\theta_h R_c \theta_h^{-1}, \theta_h L_c \theta_h^{-1})$ e (R_a, L_a), tem-se:

- $$\begin{aligned} ((R_a, L_a)b)(R', L') &= (L_a b)(R', L') \\ &= R'(L_a b) \\ &= (\theta_h R_c \theta_h^{-1})(L_a b) \\ &= \theta_h(\theta_h^{-1}(ab)c) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (R_a, L_a)(b(R', L')) &= (R_a, L_a)(R'b) \\ &= L_a((\theta_h R_c \theta_h^{-1})b) \\ &= a\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c) \end{aligned}$$

(ii) Pelo item (APT4) da Definição 2.2.14, ao restringir θ_{gh} a $\mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$ tem-se um isomorfismo $\mathcal{D}_{h^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}} \to \mathcal{D}_{gh} \cdot \mathcal{D}_g$. Assim, $\omega_{g,h}^{\theta_{gh}^{-1}} = (\theta_{gh}^{-1}\omega_{g,h}\theta_{gh}, \theta_{gh}^{-1}\omega_{g,h}\theta_{gh}) =: (R'', L'')$ é multiplicador em $\mathcal{D}_{h^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$, e combinando-o em (2.2.5) com (R_c, L_c), tem-se:

- $$\begin{aligned} ((R'', L'')x)(R_c, L_c) &= (L''x)(R_c, L_c) \\ &= R_c[(\theta_{gh}^{-1}\omega_{g,h}\theta_{gh})x] \\ &= [\theta_{gh}^{-1}(\omega_{g,h}\theta_{gh}(x))]c \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(R'', L'')(x(R_c, L_c)) &= (R'', L'')(R_c x)\\ &= (\theta_{gh}^{-1}\omega_{g,h}\theta_{gh})[R_c x]\\ &= \theta_{gh}^{-1}(\omega_{g,h}\theta_{gh}(xc))\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.16. *O produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo.*

Demonstração. Obviamente, $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é associativo se, e somente se,

$$(a\delta_g b\delta_h)c\delta_t = a\delta_g(b\delta_h c\delta_t) \tag{2.2.6}$$

$\forall g, h, t \in G$, $a \in \mathcal{D}_g$, $b \in \mathcal{D}_h$, $c \in \mathcal{D}_t$. Partindo do lado esquerdo da igualdade acima:

$$\begin{aligned}(a\delta_g b\delta_h)c\delta_t &= \theta_g(\theta_g^{-1}(a)b)\omega_{g,h}\delta_{gh}c\delta_t\\ &= \theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[\theta_g(\theta_g^{-1}(a)b)\omega_{g,h}]\}c\omega_{gh,t}\delta_{ght}\end{aligned}$$

E pelo lado direito:

$$\begin{aligned}a\delta_g(b\delta_h c\delta_t) &= a\delta_g\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c)\omega_{h,t}\delta_{ht}\\ &= \theta_g[\theta_g^{-1}(a)\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c)\omega_{h,t}]\omega_{g,ht}\delta_{ght}\\ &= \theta_g[\theta_g^{-1}(a)\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c)]\omega_{g,h}\omega_{g,ht}\delta_{ght}\end{aligned}$$

em que a última igualdade vale por (APT6), já que $\theta_g^{-1}(a)\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c) \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \theta_h(\mathcal{D}_h^{-1} \cdot \mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_{ht}$. Comparando o que foi obtido, pode-se cancelar $\omega_{gh,t}$, já que é invertível.

Observando-se que, já que θ_g^{-1} é isomorfismo, $\theta_g^{-1}(a)$ percorre $\mathcal{D}_{g^{-1}}$ quando a percorre $\mathcal{D}_g$, tem-se que vale (2.2.6) se, e somente se,

$$\theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[\theta_g(ab)\omega_{g,h}]\}c = \theta_g[a\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c)]\omega_{g,h} \tag{2.2.7}$$

vale $\forall g, h \in G$, $a \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$, $b \in \mathcal{D}_h$, $c \in \mathcal{A}$. Aplicando (i) do Lema 2.2.15 ao lado direito de (2.2.7), tem-se $\theta_g[a\theta_h(\theta_h^{-1}(b)c)]\omega_{g,h} = \theta_g[\theta_h(\theta_h^{-1}(ab)c)]\omega_{g,h}$. Agora, $y = ab \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h$ e, portanto, basta mostrar que vale:

$$\theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[\theta_g(y)\omega_{g,h}]\}c = \theta_g[\theta_h(\theta_h^{-1}(y)c)]\omega_{g,h} \tag{2.2.8}$$

$\forall g, h \in G$, $y \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h$, $c \in \mathcal{A}$. Escreve-se $x = \theta_h^{-1}(y)$ e tem-se $x \in \theta_h^{-1}(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_{h^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$. Então, pelo item (APT4) da Definição 2.2.13, o lado esquerdo de (2.2.8) fica

$$\begin{aligned}\theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[\theta_g(y)\omega_{g,h}]\}c &= \theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[\theta_g \circ \theta_h(x)\omega_{g,h}]\}c\\ &= \theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[(\omega_{g,h}\theta_{gh}(x)\omega_{g,h}^{-1})\omega_{g,h}]c\}\\ &= \theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[\omega_{g,h}\theta_{gh}(x)]c\}\end{aligned}$$

Aplicando (ii) do Lema 2.2.15, tem-se que o último é igual a

$$\begin{aligned}\theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}[\omega_{g,h}\theta_{gh}(x)]c\} &= \theta_{gh}\{\theta_{gh}^{-1}(\omega_{g,h}\theta_{gh}(xc))\}\\ &= \omega_{g,h}\theta_{gh}(xc)\end{aligned}$$

Assim, tomando $z = xc$, (2.2.8) fica

$$\omega_{g,h}\theta_{gh}(z) = \theta_g[\theta_h(z)]\omega_{g,h}$$

com $g, h \in G$, $z \in \mathcal{D}_{h^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$, mas tal igualdade é o item (APT4) da Definição 2.2.13. □

2.2.3 Torções como 2-cociclos parciais

Nesta seção, estabelece-se a relação entre as torções de ações parciais torcidas unitais e 2-cociclos com valores em G-módulos parciais.

Então, seja,

$$\theta = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\theta_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\omega_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$$

uma ação parcial torcida. Dada uma álgebra $\mathcal{A}$, o produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ é a soma direta $\bigoplus_{g\in G} \mathcal{D}_g\delta_g$ com multiplicação

$$(a\delta_g)(b\delta_h) = \theta_g(\theta_g^{-1}(a)b)\omega_{g,h}\delta_{gh}.$$

Quando a ação é unital, ou seja, quando cada $\mathcal{D}_g$ é gerado por um idempotente central, tem-se:

$$\begin{aligned}(a\delta_g)(b\delta_h) &= \theta_g(\theta_g^{-1}(a)1_{g^{-1}}b)\omega_{g,h}\delta_{gh}\\ &= \theta_g(\theta_g^{-1}(a))\theta_g(1_{g^{-1}}b)\omega_{g,h}\delta_{gh}\\ &= a\theta_g(1_{g^{-1}}b)\omega_{g,h}\delta_{gh}\end{aligned}$$

Então sejam $\theta = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\theta_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\omega_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ ação parcial torcida e $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ o produto cruzado com multiplicação $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = a_g\theta_g(1_{g^{-1}}b_h)\omega_{g,h}\delta_{gh}$.

Se ω é 2-cociclo, por (2.1.3) tem-se:

$$\theta_g(1_{g^{-1}}\omega_{h,t})\omega_{g,ht} = \omega_{gh,t}\omega_{g,h}$$

com $\omega_{g,h} \in \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh}$ e $\omega_{gh,t} \in \mathcal{D}_{gh} \cdot \mathcal{D}_{ght}$.

Tomando $a \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_{ht}$:

$$\begin{aligned}\theta_g(a\omega_{h,t})\omega_{g,ht} &= \theta_g(a1_{g^{-1}}\omega_{h,t})\omega_{g,ht}\\ &= \theta_g(a)\theta_g(1_{g^{-1}}\omega_{h,t})\omega_{g,ht}\\ &= \theta_g(a)\omega_{g,h}\omega_{gh,t}\end{aligned}$$

e a ação parcial torcida é unital!

Reciprocamente, se a ação parcial torcida é unital:

$$\theta_g(a\omega_{h,t})\omega_{g,ht} = \theta_g(a)\omega_{g,h}\omega_{gh,t}, \forall a \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_{ht}$$

toma-se $a = 1_{g^{-1}}1_h1_{ht} \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_{ht}$:

$$\begin{aligned} \theta_g(1_{g^{-1}}1_h1_{ht}\omega_{h,t})\omega_{g,ht} &= \theta_g(1_g^{-1}\omega_{h,t})\omega_{g,ht} \\ &= \theta_g(1_{g^{-1}})\omega_{g,h}\omega_{gh,t} \\ &= 1_g\omega_{g,h}\omega_{gh,t} \\ &= \omega_{g,h}\omega_{gh,t} \end{aligned}$$

e ω é 2-cociclo!

Portanto, demonstrou-se o seguinte teorema:

Teorema 2.2.17. *Seja $\theta = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\theta_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\omega_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ satisfazendo os itens (APT1) a (APT5). Então, θ satisfaz o item (APT6) se, e somente se, ω é 2-cociclo parcial.*

Também, cociclos cohomólogos, como na Definição 2.1.7, que estão na mesma classe em $H^2(G, A)$, correspondem a ações parciais torcidas equivalentes, como definido em [DES10].

Definição 2.2.18. Sejam duas ações parciais torcidas do grupo G na álgebra $\mathcal{A}$:

$$\theta = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\theta_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\omega_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$$

e

$$\theta' = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\theta'_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\omega'_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$$

em que cada $\mathcal{D}_g$ é ideal unital com unidade 1_g, $\forall g \in G$. As ações parciais torcidas θ e θ' são ditas **equivalentes** se existe uma função

$$\begin{aligned} \varepsilon : G &\to \mathcal{A} \\ g &\mapsto \varepsilon_g \in \mathcal{U}(\mathcal{D}_g) \end{aligned}$$

tal que $\forall g, h \in G$, $a \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$, tem-se

(E1) $\theta'_g(a) = \varepsilon_g\theta_g(a)\varepsilon_g^{-1}$;

(E2) $\omega'_{g,h} = \varepsilon_g\theta_g(\varepsilon_h 1_{g^{-1}})\omega_{g,h}\varepsilon_{gh}^{-1}$.

Tem-se o seguinte teorema.

Teorema 2.2.19. *Duas ações parciais torcidas θ e θ', como na Definição 2.2.18, são equivalentes se, e somente se, existe um isomorfismo $\mathcal{A}$-linear à esquerda e que preserva G-graduação entre os produtos cruzados correspondentes $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ e $\mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$.*

Demonstração. Sejam θ e θ' duas ações parciais torcidas equivalentes, ou seja, existe uma função $\varepsilon : G \to \mathcal{A}$, dada por $g \mapsto \varepsilon_g \in \mathcal{U}(\mathcal{D}_g)$, satisfazendo os itens (E1) e (E2). Define-se

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} \rtimes_\theta G &\to \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G \\ a_g\delta_g &\mapsto a_g\varepsilon_g^{-1}\delta_g. \end{aligned}$$

De fato, φ é homomorfismo:

- $$\begin{aligned}\varphi((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) &= \varphi(\theta_g(\theta_g^{-1}(a_g)b_h)\omega_{g,h}\delta_{gh})\\ &= \varphi(a_g\theta_g(1_{g^{-1}}b_h)\omega_{g,h}\delta_{gh})\\ &= a_g\theta_g(1_{g^{-1}}b_h)\omega_{g,h}\varepsilon_{gh}^{-1}\delta_{gh};\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\varphi(a_g\delta_g)\varphi(b_h\delta_h) &= (a_g\varepsilon_g^{-1}\delta_g)(b_h\varepsilon_h^{-1}\delta_h)\\ &= \theta'_g(\theta_g'^{-1}(a_g\varepsilon_g^{-1})b_h\varepsilon_h^{-1})\omega'_{g,h}\delta_{gh}\\ &= a_g\varepsilon_g^{-1}\theta'_g(1_{g^{-1}}b_h\varepsilon_h^{-1})\omega'_{g,h}\delta_{gh}\\ &= a_g\varepsilon_g^{-1}\varepsilon_g\theta_g(1_{g^{-1}}b_h\varepsilon_h^{-1})\varepsilon_g^{-1}\varepsilon_g\theta_g(\varepsilon_h1_{g^{-1}})\omega_{g,h}\varepsilon_{gh}^{-1}\delta_{gh}\\ &= a_g\theta_g(1_{g^{-1}}b_h)\omega_{g,h}\varepsilon_{gh}^{-1}\delta_{gh}.\end{aligned}$$

φ é $\mathcal{A}$-linear à esquerda e preserva G-graduação por construção.

Também, φ é bijetora, pois $\psi : \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G \to \mathcal{A} \rtimes_\theta G$ definida por $a_g\delta_g \mapsto a_g\varepsilon_g\delta_g$, $\forall a_g\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$, é sua inversa:

- $$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)(a_g\delta_g) &= \psi(a_g\varepsilon_g^{-1}\delta_g)\\ &= a_g\varepsilon_g^{-1}\varepsilon_g\delta_g\\ &= a_g\delta_g;\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(\varphi\circ\psi)(a_g\delta_g) &= \varphi(a_g\varepsilon_g\delta_g)\\ &= a_g\varepsilon_g\varepsilon_g^{-1}\delta_g\\ &= a_g\delta_g.\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi : \mathcal{A} \rtimes_\theta G \to \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$ é homomorfismo bijetivo, ou seja, é um isomorfismo entre os produtos cruzados $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$ e $\mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$.

Reciprocamente, se existe o isomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \rtimes_\theta G \to \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$ que é $\mathcal{A}$-linear à esquerda e que preserva G-graduação, então dado $a_g\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_\theta G$, tem-se $\varphi(a_g\delta_g) = a_g\varphi(1_g\delta_g) = a_g\lambda_g\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$, com $\lambda_g \in \mathcal{D}_g$.

Primeiramente, cada λ_g é invertível em $\mathcal{D}_g$: como $\varphi : \mathcal{A} \rtimes_\theta G \to \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$ é A-linear à esquerda e preserva G-graduação, tem-se que a inversa $\varphi^{-1} : \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G \to \mathcal{A} \rtimes_\theta G$ também é $\mathcal{A}$-linear à esquerda e preserva G-graduação. Então, dado $a_g\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$, tem-se $\varphi^{-1}(a_g\delta_g) = a_g\varphi^{-1}(1_g\delta_g) = a_g\mu_g\delta_g$, com $\mu_g \in \mathcal{D}_g$. Assim, $\varphi\circ\varphi^{-1}$ é a função identidade em $\mathcal{A} \rtimes_{\theta'} G$ e $\varphi^{-1}\circ\varphi$ é a função identidade em $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$. Logo,

- $1_g\delta_g = (\varphi\circ\varphi^{-1})(1_g\delta_g) = \varphi(\mu_g\delta_g) = \mu_g\lambda_g\delta_g$, o que implica $1_g = \mu_g\lambda_g$;
- $1_g\delta_g = (\varphi^{-1}\circ\varphi)(1_g\delta_g) = \varphi^{-1}(\lambda_g\delta_g) = \lambda_g\mu_g\delta_g$, o que implica $1_g = \lambda_g\mu_g$.

Portanto, cada λ_g tem inverso μ_g em $\mathcal{D}_g$.

Como φ deve ser homomorfismo, deve-se ter $\varphi((1_g\delta_g)(a_e\delta_e)) = \varphi(1_g\delta_g)\varphi(a_e\delta_e)$. Daí,

- $$\begin{aligned}\varphi((1_g\delta_g)(a_e\delta_e)) &= \varphi(\theta_g(\theta_g^{-1}(1_g)a_e)\omega_{g,e}\delta_{ge})\\ &= \varphi(\theta_g(1_{g^{-1}}a_e)\delta_g)\\ &= \theta_g(1_{g^{-1}}a_e)\lambda_g\delta_g;\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\varphi(1_g\delta_g)\varphi(a_e\delta_e) &= (1_g\lambda_g\delta_g)(a_e\lambda_e\delta_e)\\ &= \theta'_g(\theta'^{-1}_g(1_g\lambda_g)a_e)\omega_{g,e}\delta_{ge}\\ &= \lambda_g\theta'_g(1_{g^{-1}}a_e)\delta_g.\end{aligned}$$

Logo, $\theta_g(1_{g^{-1}}a_e)\lambda_g = \lambda_g\theta'_g(1_{g^{-1}}a_e)$ e, portanto, $\theta'_g(1_{g^{-1}}a_e) = \lambda_g^{-1}\theta_g(1_{g^{-1}}a_e)\lambda_g$ e tem-se, o item (E1) da Definição 2.2.18.

Ainda como φ deve ser homomorfismo, deve-se ter $\varphi((1_g\delta_g)(1_h\delta_h)) = \varphi(1_g\delta_g)\varphi(1_h\delta_h)$. Daí,

- $$\begin{aligned}\varphi((1_g\delta_g)(1_h\delta_h)) &= \varphi(\theta_g(\theta_g^{-1}(1_g)1_h)\omega_{g,h}\delta_{gh})\\ &= \varphi(\theta_g(1_{g^{-1}}1_h)\omega_{g,h}\delta_{gh})\\ &= \theta_g(1_{g^{-1}}1_h)\omega_{g,h}\lambda_{gh}\delta_{gh};\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\varphi(1_g\delta_g)\varphi(1_h\delta_h) &= (1_g\lambda_g\delta_g)(1_h\lambda_h\delta_h)\\ &= \theta'_g(\theta'^{-1}_g(1_g\lambda_g)1_h\lambda_h)\omega'_{g,h}\delta_{gh}\\ &= \lambda_g\theta'_g(1_{g^{-1}}1_h\lambda_h)\omega'_{g,h}\delta_{gh}\\ &= \lambda_g\lambda_g^{-1}\theta_g(1_{g^{-1}}1_h\lambda_h)\lambda_g\omega'_{g,h}\delta_{gh}\\ &= \theta_g(1_{g^{-1}}1_h\lambda_h)\lambda_g\omega'_{g,h}\delta_{gh}.\end{aligned}$$

Logo, multiplicando $\theta_g(1_{g^{-1}}1_h\lambda_h)\lambda_g\omega'_{g,h} = \theta_g(1_{g^{-1}}1_h)\omega_{g,h}\lambda_{gh}$ por $\theta_g(1_{g^{-1}}1_h\lambda_h^{-1})$, tem-se $\lambda_g\omega'_{g,h} = \theta_g(1_{g^{-1}}1_h\lambda_h^{-1})\omega_{g,h}\lambda_{gh}$ e, portanto, $\omega'_{g,h} = \lambda_g^{-1}\theta_g(1_{g^{-1}}1_h\lambda_h^{-1})\omega_{g,h}\lambda_{gh}$ e tem-se o item (E2) da Definição 2.2.18.

Assim, a função $\lambda : G \to \mathcal{A}$, dada por $g \mapsto \lambda_g^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{D}_g)$, $\forall g \in G$, satisfaz os itens (E1) e (E2) da Definição 2.2.18. Portanto, as ações θ e θ' são equivalentes. $\square$

Capítulo 3

Ações parciais de grupos e ações de semigrupos inversos

Nesse capítulo, constroi-se um monoide inverso $\mathcal{S}(G)$ associado a um grupo G. Mostra-se que as ações de $\mathcal{S}(G)$ estão em correspondência biunívoca com ações parciais de G. A principal referência é [Exe98]. Na Seção 3.4, mostra-se um isomorfismo do monoide de Exel com a expansão de Birget-Rhodes do grupo G, obtendo-se uma descrição mais explícita para o mesmo. A principal referência é [KL04].

3.1 Monoide de Exel

Nesta seção, G denota um grupo fixado cujo elemento neutro é denotado por 1_G.

Definição 3.1.1. Seja $\mathcal{S}(G)$ o semigrupo universal definido por geradores e relações como segue. A cada elemento $g \in G$ associa-se o gerador $[g]$. Para cada par de elementos $g, h \in G$, considera-se as relações

(i) $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$;

(ii) $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$;

(iii) $[g][1_G] = [g]$;

(iv) $[1_G][g] = [g]$.

Observação 3.1.2. Algumas observações são pertinentes.

- Devido aos itens (i) e (iii), tem-se $[g][g^{-1}][g] = [g][g^{-1}g] = [g][1_G] = [g]$, o que indica que $\mathcal{S}(G)$ deve ser um semigrupo inverso, pois a unicidade do inverso de $[g]$ em $\mathcal{S}(G)$ vem da unicidade do inverso de g em G.

- O item (iv) é consequência dos itens anteriores, pois

$$[1_G][g] = [gg^{-1}][g] = [g][g^{-1}][g] = [g]$$

ou seja, tal item pode ser suprimido da definição sem consequências.

Pela universalidade de semigrupos definidos por geradores e relações, tem-se

Proposição 3.1.3. *Dados um semigrupo $\mathcal{S}$ e uma função $f : G \to \mathcal{S}$ satisfazendo, para $g, h \in G$:*

(i) $f(g^{-1})f(g)f(h) = f(g^{-1})f(gh)$;

(ii) $f(g)f(h)f(h^{-1}) = f(gh)f(h^{-1})$;

(iii) $f(g)f(1_G) = f(g)$.

existe um único morfismo $\tilde{f} : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}$ tal que $\tilde{f}([g]) = f(g)$.

Observação 3.1.4. Uma função satisfazendo os itens (i) e (ii) e $f(1_G) = 1_{\mathcal{S}}$ é chamada **homomorfismo parcial**.

Proposição 3.1.5. *Existe um antiautomorfismo involutivo $* : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}(G)$ tal que $[g]^* = [g^{-1}], \forall g \in G$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}(G)^{\text{op}}$ o semigrupo oposto, cujo conjunto subjacente é o mesmo, mas a multiplicação dos elementos $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(G)^{\text{op}}$ é dada por $\alpha \bullet \beta := \beta\alpha$, em que $\beta\alpha$ corresponde à multiplicação usual em $\mathcal{S}(G)$. Define-se $f : G \to \mathcal{S}(G)^{\text{op}}$ por $g \mapsto [g^{-1}]$. Tem-se

(i)
$$\begin{aligned} f(g^{-1}) \bullet f(g) \bullet f(h) &= [g] \bullet [g^{-1}] \bullet [h^{-1}] \\ &= [h^{-1}][g^{-1}][g] \\ &= [(gh)^{-1}][g] \\ &= [g] \bullet [(gh)^{-1}] \\ &= f(g^{-1}) \bullet f(gh) \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} f(g) \bullet f(h) \bullet f(h^{-1}) &= [g^{-1}] \bullet [h^{-1}] \bullet [h] \\ &= [h][h^{-1}][g^{-1}] \\ &= [h][(gh)^{-1}] \\ &= f(gh) \bullet f(h^{-1}) \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} f(g) \bullet f(1_G) &= [1_G][g^{-1}] \\ &= [g^{-1}] \\ &= f(g) \end{aligned}$$

Assim, devido à Proposição 3.1.3, f se estende a um homomorfismo $* : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}(G)^{\mathrm{op}}$, dado por $[g]^* = [g^{-1}]$, $\forall g \in G$, que é antiautomorfismo se visto como função de $\mathcal{S}(G)$ em si mesmo. □

Estuda-se idempotentes em $\mathcal{S}(G)$ a seguir.

Proposição 3.1.6. *Para todo $g \in G$, seja $\varepsilon_g = [g][g^{-1}] \in \mathcal{S}(G)$. Então, para $g, h \in G$:*

(i) ε_g é idempotente autoadjunto: $\varepsilon_g^* = \varepsilon_g = \varepsilon_g^2$;

(ii) $[g]\varepsilon_h = \varepsilon_{gh}[g]$;

(iii) $\varepsilon_g\varepsilon_h = \varepsilon_h\varepsilon_g$.

Demonstração.

(i)
$$\begin{aligned} \varepsilon_g\varepsilon_g &= [g][g^{-1}][g][g^{-1}] \\ &= [g][1_G][g^{-1}] \\ &= [g][g^{-1}] \\ &= \varepsilon_g \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\varepsilon_g)^* &= ([g][g^{-1}])^* \\ &= [g^{-1}]^*[g]^* \\ &= [g][g^{-1}] \\ &= \varepsilon_g \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} [g]\varepsilon_h &= [g][h][h^{-1}] \\ &= [gh][h^{-1}] \\ &= [gh][(gh)^{-1}][gh][h^{-1}] \\ &= [gh][(gh)^{-1}][ghh^{-1}] \\ &= [gh][(gh)^{-1}][g] \\ &= \varepsilon_{gh}[g] \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} \varepsilon_g\varepsilon_h &= [g][g^{-1}]\varepsilon_h \\ &= [g]\varepsilon_{g^{-1}h}[g^{-1}] \\ &= \varepsilon_{gg^{-1}h}[g][g^{-1}] \\ &= \varepsilon_h\varepsilon_g \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.7. *Todo elemento $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ admite uma decomposição*

$$\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$$

$n \geqslant 0$ e $g_1, \cdots, g_n, h \in G$. Além disso, pode-se assumir $g_i \neq g_j$, se $i \neq j$, $g_i \neq h$ e $g_i \neq 1_G, \forall i = 1, \cdots, n$.

Demonstração. Seja S o subconjunto de $\mathcal{S}(G)$ que consiste de todos os $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ que admitem uma tal decomposição. Como as condições valem para $n = 0$, vê-se que cada

$[g]$ pertence a S. Logo, é suficiente provar que S é subsemigrupo de $\mathcal{S}(G)$, já que os $[g]$'s formam um sistema de geradores para $\mathcal{S}(G)$. Assim, dados $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h], [t]$, basta mostrar que $\alpha[t]$ pertence a S (e S é ideal à direita de $\mathcal{S}(G)$ e portanto, subsemigrupo). Primeiramente, nota-se:

$$[h][t] = [h][h^{-1}][h][t] = [h][h^{-1}][ht] = \varepsilon_h[ht]$$

Assim,

$$\alpha[t] = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h][t] = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}\varepsilon_h[ht] \in S$$

Como cada ε_{g_i} é idempotente, e tais idempotentes comutam, pela Proposição 3.1.6, é fácil ver como excluir repetições e qualquer ε_{1_G}. Também, se $g_i = h$, para algum i, então $\varepsilon_{g_i} = [h][h^{-1}]$ e novamente comutando idempotentes

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon_{g_1} \cdots \widehat{\varepsilon_{g_i}} \cdots \varepsilon_{g_n}[h][h^{-1}][h] \\ &= \varepsilon_{g_1} \cdots \widehat{\varepsilon_{g_i}} \cdots \varepsilon_{g_n}[h] \end{aligned}$$

(em que $\widehat{\varepsilon_{g_i}}$ significa a omissão do termo ε_{g_i} na expressão) e eliminou-se ε_{g_i}. □

Definição 3.1.8. Se $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ é escrito $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$ satisfazendo as condições anteriores, diz-se que α está na **forma padrão**.

Quer-se mostrar que $\mathcal{S}(G)$ é, de fato, um semigrupo inverso. A proposição a seguir é um passo mais perto de provar tal resultado.

Proposição 3.1.9. *Para cada $\alpha \in \mathcal{S}(G)$, tem-se*

$$\alpha\alpha^*\alpha = \alpha \qquad \alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$$

Demonstração. Seja $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$.

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^*\alpha &= \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h][h^{-1}]\varepsilon_{g_n} \cdots \varepsilon_{g_1}\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h] \\ &= \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h][h^{-1}][h] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

e aplicando $*$ em tal igualdade, tem-se $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$, já que $*$ é antiautomorfismo de $\mathcal{S}(G)$. □

Para mostrar que $\mathcal{S}(G)$ é semigrupo inverso, resta mostrar a unicidade de α^* satisfazendo as afirmações do resultado anterior. Mas, como é difícil estabelecer unicidade em estruturas algébricas vindas de geradores e relações, faz-se uso de certas representações. E tal é o propósito da próxima seção.

3.2 Representações de $\mathcal{S}(G)$

Nesta seção, usa-se o termo "representação" para designar qualquer homomorfismo de $\mathcal{S}(G)$ em um semigrupo. Tais representações serão obtidas usando a Proposição 3.1.3.

Primeiramente, tem-se a função **grau**:

$$\begin{array}{rcl} \partial : \mathcal{S}(G) & \to & G \\ [g] & \mapsto & g \end{array}$$

Como $\mathrm{id} : G \to G$, a função identidade $g \mapsto g$, satisfaz as condições da Proposição 3.1.3, tem-se que existe um único homomorfismo $\mathcal{S}(G) \to G$ tal que $[g] \mapsto \mathrm{id}(g) = g$. Ou seja, ∂ é homomorfismo.

Para $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h] \in \mathcal{S}(G)$ na forma padrão, tem-se $\partial(\alpha) = h$, pois

$$\begin{array}{rcl} \partial(\alpha) & = & \partial([g_1][g_1^{-1}] \cdots [g_n][g_n^{-1}][h]) \\ & = & \partial([g_1])\partial([g_1^{-1}]) \cdots \partial([g_n])\partial([g_n^{-1}])\partial([h]) \\ & = & g_1 g_1^{-1} \cdots g_n g_n^{-1} h = h \end{array}$$

Observação 3.2.1. Seja $\beta = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[k]$ idempotente em $\mathcal{S}(G)$. Como a função grau é homomorfismo, tem-se que $\partial(\beta)$ deve ser idempotente em G. Então, $\partial(\beta) = k = 1_G$, logo $\beta = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[1_G]$, ou simplesmente $\beta = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}$.

Agora, discute-se um tipo mais sutil de representação de $\mathcal{S}(G)$. Seja $\mathcal{P}_{1_G}(G)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de G que contém o elemento 1_G. A representação que será considerada agora é um homomorfismo $\phi : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_{1_G}(G))$, em que $\mathcal{F}(\mathcal{P}_{1_G}(G))$ é o semigrupo das funções de $\mathcal{P}_{1_G}(G)$ em si mesmo, com composição como multiplicação. Assim, para cada $g \in G$, denota-se por ϕ_g a função

$$\begin{array}{rcl} \phi_g : \mathcal{P}_{1_G}(G) & \to & \mathcal{P}_{1_G}(G) \\ E & \mapsto & gE \cup \{1_G\} \end{array}$$

Observa-se que, como $1_G \in E$, também pode-se escrever $\phi_g(E) = gE \cup \{1_G, g\}$.

Proposição 3.2.2. *A função $\phi : G \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_{1_G}(G))$, $g \mapsto \phi_g$ satisfaz os itens (i) a (iii) da Proposição 3.1.3 e logo, existe uma única representação $\Lambda : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_{1_G})$ tal que $\Lambda([g]) = \phi_g$.*

Demonstração. $g, h, 1_G \in G, E \in \mathcal{P}_{1_G}(G)$.

(i) • $$\begin{array}{rcl} \phi_{g^{-1}}\phi_g\phi_h(E) & = & \phi_{g^{-1}}\phi_g(hE \cup \{1_G, h\}) \\ & = & \phi_{g^{-1}}(ghE \cup \{gh, g, 1_G\}) \\ & = & hE \cup \{h, 1_G, g^{-1}\} \end{array}$$

- $$\begin{aligned}\phi_{g^{-1}}\phi_{gh}(E) &= \phi_{g^{-1}}(ghE \cup \{gh, 1_G\}) \\ &= hE \cup \{h, g^{-1}, 1_G\}\end{aligned}$$

(ii)

- $$\begin{aligned}\phi_g\phi_h\phi_{h^{-1}}(E) &= \phi_g\phi_h(h^{-1}E \cup \{h^{-1}, 1_G\}) \\ &= \phi_g(E \cup \{1_G, h\}) \\ &= gE \cup \{g, gh, 1_G\}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\phi_{gh}\phi_{h^{-1}}(E) &= \phi_{gh}(h^{-1}E \cup \{h^{-1}, 1_G\}) \\ &= gE \cup \{g, gh, 1_G\}\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\phi_g\phi_{1_G}(E) &= \phi_g(1_GE \cup \{1_G\}) \\ &= \phi_g(E)\end{aligned}$$

□

Observa-se que, para $g \in G$ e $E \in \mathcal{P}_{1_G}(G)$, tem-se

$$\Lambda(\varepsilon_g)(E) = \Lambda([g][g^{-1}])(E) = \phi_g\phi_{g^{-1}}(E) = \phi_g(g^{-1}E \cup \{g^{-1}, 1_G\}) = E \cup \{1_G, g\}$$

Em particular, se $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$, pode-se verificar

$$\Lambda(\alpha)(\{1_G\}) = \Lambda(\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h])(1_G) = \{g_1, \cdots, g_n, h, 1_G\}.$$

Prova-se a unicidade da decomposição padrão $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$ usando essas duas representações.

Proposição 3.2.3. *Todo $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ admite uma única decomposição $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$, a menos de ordem dos ε_{g_i}'s.*

Demonstração. Como observado acima, tem-se $\Lambda(\alpha)(\{1_G\}) = \{g_1, \cdots, g_n, h, 1_G\}$ e $\partial(\alpha) = h$. Assim, se existe outra decomposição padrão $\alpha = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[k]$, tem-se $\partial(\alpha) = k$ e então $k = h$. Por outro lado, $\{g_1, \cdots, g_n, h, 1_G\} = \{h_1, \cdots, h_m, k, 1_G\}$, logo $\{g_1, \cdots, g_n, h, 1_G\} \setminus \{h, 1_G\} = \{h_1, \cdots, h_m, k, 1_G\} \setminus \{k, 1_G\}$ o que implica $\{g_1, \cdots, g_n\} = \{h_1, \cdots, h_m\}$. □

Teorema 3.2.4. *Para todo grupo G, $\mathcal{S}(G)$ é um semigrupo inverso.*

Demonstração. Assume-se que $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ admite outro inverso, além de α^*, $\beta \in \mathcal{S}(G)$ tal que

$$\alpha\beta\alpha = \alpha \qquad \beta\alpha\beta = \beta$$

Escreve-se na forma padrão: $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$ e $\beta^* = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[k]$ (e $\beta = [k^{-1}]\varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}$) e tem-se $h = \partial(\alpha) = \partial(\alpha\beta\alpha) = hk^{-1}h$ e assim $h = k$. Também se tem

$$\alpha\beta\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h][h^{-1}]\varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h] = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}\varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[h]$$

Pela unicidade das decomposições padrão, tem-se $\{g_1, \cdots, g_n, h_1, \cdots, h_m\} = \{g_1, \cdots, g_n\}$ o que implica

$$\{h_1, \cdots, h_m\} \subseteq \{g_1, \cdots, g_n\}$$

Analogamente, $\beta^*\alpha^*\beta^* = \beta^*$

$$\beta^*\alpha^*\beta^* = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[h][h^{-1}]\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}\varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[h] = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$$

Novamente pela unicidade das decomposições padrão, tem-se $\{h_1, \cdots, h_m, g_1, \cdots, g_n\} = \{h_1, \cdots, h_m\}$ e assim

$$\{g_1, \cdots, g_n\} \subseteq \{h_1, \cdots, h_m\}$$

E conclui-se $\beta = \alpha^*$ □

Corolário 3.2.5. *$\mathcal{S}(G)$ é semigrupo E-unitário.*

Demonstração. Nota-se que se β é idempotente em $\mathcal{S}(G)$, $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ e $\alpha\beta$ também é idempotente, então α deve ser necessariamente idempotente.

De fato, se $\alpha = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[h]$ e $\beta = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}$, então $\partial(\alpha\beta) = \partial(\alpha)\partial(\beta) = h1_G$ e como $\alpha\beta$ é idempotente, $\partial(\alpha\beta) = 1_G$ e portanto, $h = 1_G$ e α também é idempotente. □

3.3 Ações de semigrupos inversos versus ações parciais de grupos

Nesta seção, mostra-se que ações parciais de um grupo G em um conjunto X correspondem a ações do semigrupo $\mathcal{S}(G)$ em X, isto é, homomorfismos de $\mathcal{S}(G)$ em $\mathcal{I}(X)$.

Proposição 3.3.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma função $\theta : G \to \mathcal{I}(X)$ define uma ação parcial de G em X se, e somente se, tem-se $\forall g, h \in G$*

(i) $\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}} = \theta_{gh}\theta_{h^{-1}}$;

(ii) $\theta_{1_G} = \mathrm{id}_X$.

Neste caso, θ também satisfaz

(iii) $\theta_{g^{-1}}\theta_g\theta_h = \theta_{g^{-1}}\theta_{gh}$.

Demonstração.

($\Rightarrow$): Se $\theta = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\theta_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G})$ é ação parcial de G em X, tem-se, para $g, h \in G$,

(AP1) $\mathcal{D}_{1_G} = X$ e θ_{1_G} é a função identidade de X;

(AP2) $\theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}$;

(AP3) $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ em $\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$.

Primeiramente, tem-se $\operatorname{dom}(\theta_g\theta_h) = \theta_h^{-1}[\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h] = \theta_{h^{-1}}[\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h] = \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$.

Daí,

- $$\begin{aligned}\operatorname{dom}(\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}) &= \theta_{h^{-1}}^{-1}[\operatorname{dom}(\theta_g\theta_h) \cap \operatorname{im}\theta_{h^{-1}}] \\ &= \theta_h[\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}}] \\ &= \theta_h[\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}] \\ &= \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\operatorname{dom}(\theta_{gh}\theta_{h^{-1}}) &= \theta_{h^{-1}}^{-1}[\operatorname{dom}\theta_{gh} \cap \operatorname{im}\theta_{h^{-1}}] \\ &= \theta_h[\mathcal{D}_{(gh)^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}}] \\ &= \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\end{aligned}$$

e tem-se $\operatorname{dom}(\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}) = \operatorname{dom}(\theta_{gh}\theta_{h^{-1}})$.

Agora, tomando $x \in \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$, tem-se $x = \theta_{h^{-1}}\theta_h(x) = \theta_{h^{-1}}(y)$, com $y = \theta_h(x) \in \mathcal{D}_h$ e o item (AP3) fica

$$\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}(y) = \theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}\theta_h(x) = \theta_{gh}\theta_{h^{-1}}\theta_h(x) = \theta_{gh}\theta_{h^{-1}}(y)$$

e tem-se $\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}} = \theta_{gh}\theta_{h^{-1}}$ e vale (i) e, pelo mesmo argumento, vale (iii). É claro que $\theta : G \to \mathcal{I}(X)$, $g \mapsto \theta_g$ satisfaz (ii) e segue o resultado.

($\Leftarrow$): Tomando $g = h^{-1}$ em (i), tem-se $\theta_{h^{-1}}\theta_h\theta_{h^{-1}} = \theta_{1_G}\theta_{h^{-1}} = \theta_{h^{-1}}$. E trocando h e h^{-1}, tem-se $\theta_h\theta_{h^{-1}}\theta_h = \theta_{1_G}\theta_h = \theta_h$. Assim, pela unicidade de inversos em semigrupos inversos, tem-se $\theta_h^* = \theta_{h^{-1}}$. Definindo $\mathcal{D}_h = \operatorname{im}\theta_h$, a conclusão acima implica $\operatorname{dom}\theta_h = \operatorname{im}\theta_h^* = \operatorname{im}\theta_{h^{-1}} = D_{h^{-1}}$. Ou seja, θ_h é função de $\mathcal{D}_{h^{-1}}$ em $\mathcal{D}_h$, como desejado. Agora, para $g, h \in G$, tem-se

$$\theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}} = \theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}}\theta_g\theta_{g^{-1}} = \theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\theta_{g^{-1}}.$$

Assim, em particular, os domínios de tais funções devem coincidir.

Por um lado, tem-se $\operatorname{dom}(\theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}}) = \theta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h)$. Como $\theta_g\theta_{g^{-1}}$ é função identidade em $\mathcal{D}_g$, tem-se, por outro lado, $\operatorname{dom}(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\theta_{g^{-1}}) = \mathcal{D}_{gh} \cap \mathcal{D}_g$ e segue o item (AP2).

Já que $\theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}}\theta_g = \theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g$ e $\theta_h^* = \theta_{h^{-1}}$, tem-se

$$\theta_{g^{-1}}\theta_g\theta_h = (\theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}}\theta_g)^* = (\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g)^* = \theta_{g^{-1}}\theta_{gh}.$$

□

E agora pode-se anunciar o resultado principal.

Teorema 3.3.2. *Para todo grupo G e qualquer conjunto X, existe uma correspondência biunívoca*

$$\{\textit{ações parciais de } G \textit{ em } X\} \leftrightarrow \{\textit{ações de } \mathcal{S}(G) \textit{ em } X\}$$

Demonstração. Pela Proposição 3.1.3, homomorfismos $\mathcal{S}(G) \to \mathcal{I}(X)$ estão em correspondência biunívoca com funções $G \to \mathcal{I}(X)$ que satisfazem os itens (i) a (iii) do referido resultado. Pela Proposição 3.3.1, tais funções correspondem a ações parciais de G em X. □

3.4 Outra descrição do monoide de Exel

Considera-se o monoide inverso $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$ como no Exemplo 1.1.2.

Lembra-se que $\tilde{G}^{\mathcal{R}} = \{(A, g) \in \mathcal{P}_{1_G}(G) \times G \mid g \in A\}$ é monoide inverso com a multiplicação $(A, g)(B, h) = (A \cup gB, gh)$.

Lema 3.4.1. *O monoide $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$ é gerado pelos elementos $\jmath(g), g \in G$, em que $\jmath : G \to \tilde{G}^{\mathcal{R}}$ é a função que a cada $g \in G$ associa $(\{1_G, g\}, g) \in \tilde{G}^{\mathcal{R}}$.*
Em particular, se $(A, g) = (\{1_G, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$, com $g = g_n$, então

$$(A, g) = \jmath(g_1)\jmath(g_1^{-1}g_2)\cdots\jmath(g_{n-1}^{-1}g_n).$$

Além disso, valem $\forall g, h \in G$:

(i) $\jmath(g^{-1})\jmath(g)\jmath(h) = \jmath(g^{-1})\jmath(gh)$;

(ii) $\jmath(g)\jmath(h)\jmath(h^{-1}) = \jmath(gh)\jmath(h^{-1})$;

(iii) $\jmath(g)\jmath(1_G) = \jmath(g)$;

(iv) $\jmath(1_G)\jmath(g) = \jmath(g)$.

Demonstração. Seja $(A, g) = (\{1_G, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$. Então

$$(A, g) = (\{1_G, g_1, \cdots, g_{n-1}\}, g_{n-1})(\{1_G, g_{n-1}^{-1}g_n\}, g_{n-1}^{-1}g_n).$$

E repetindo o processo obtém-se

$$(A, g) = (\{1_G, g_1\}, g_1)\prod_{k=2}^{n}(\{1, g_{k-1}^{-1}g_k\}, g_{k-1}^{-1}g_k) = \jmath(g_1)\prod_{k=2}^{n}(\jmath(g_{k-1}^{-1}g_k)).$$

(i)

- $$\begin{aligned} \jmath(g^{-1})\jmath(g)\jmath(h) &= (\{1_G, g^{-1}\}, g^{-1})(\{1_G, g\}, g)(\{1_G, h\}, h) \\ &= (\{1_G, g^{-1}\} \cup g^{-1}\{1_G, g\}, g^{-1}g)(\{1_G, h\}, h) \\ &= (\{1_G, g^{-1}\}, 1_G)(\{1_G, h\}, h) \\ &= (\{1_G, g^{-1}\} \cup 1_G\{1_G, h\}, 1_G h) \\ &= (\{1_G, g^{-1}, h\}, h) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \jmath(g^{-1})\jmath(gh) &= (\{1_G, g^{-1}\}, g^{-1})(\{1_G, gh\}, gh) \\ &= (\{1_G, g^{-1}\} \cup g^{-1}\{1_G, gh\}, g^{-1}gh) \\ &= (\{1_G, g^{-1}, h\}, h) \end{aligned}$$

(ii)

- $$\begin{aligned} \jmath(g)\jmath(h)\jmath(h^{-1}) &= (\{1_G, g\}, g)(\{1_G, h\}, h)(\{1_G, h^{-1}\}, h^{-1}) \\ &= (\{1_G, g\} \cup g\{1_G, h\}, gh)(\{1_G, h^{-1}\}, h^{-1}) \\ &= (\{1_G, g, gh\}, gh)(\{1_G, h^{-1}\}, h^{-1}) \\ &= (\{1_G, g, gh\} \cup gh\{1_G, h^{-1}\}, ghh^{-1}) \\ &= (\{1_G, g, gh\}, g) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \jmath(gh)\jmath(h^{-1}) &= (\{1_G, gh\}, gh)(\{1_G, h^{-1}\}, h^{-1}) \\ &= (\{1_G, gh\} \cup gh\{1_G, h^{-1}\}, ghh^{-1}) \\ &= (\{1_G, gh, g\}, g) \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} \jmath(g)\jmath(1_G) &= (\{1_G, g\}, g)(\{1_G\}, 1_G) \\ &= (\{1_G, g\} \cup g\{1_G\}, g1_G) \\ &= (\{1_G, g\}, g) \\ &= \jmath(g) \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned} \jmath(1_G)\jmath(g) &= (\{1_G\}, 1_G)(\{1_G, g\}, g) \\ &= (\{1_G\} \cup 1_G\{1_G, g\}, 1_G g) \\ &= (\{1_G, g\}, g) \\ &= \jmath(g) \end{aligned}$$

□

Assim, pela Proposição 3.1.3, existe único morfismo $\tilde{\jmath} : \mathcal{S}(G) \to \tilde{G}^{\mathcal{R}}$. O teorema a seguir mostra que tal morfismo é, na verdade, um isomorfismo.

Teorema 3.4.2. *Sejam G um grupo e $\mathcal{S}$ um monoide inverso. Para toda função $\theta : G \to \mathcal{S}$ que satisfaz os itens (i) a (iii) da Proposição 3.1.3, existe único homomorfismo entre monoides $\hat{\theta} : \tilde{G}^{\mathcal{R}} \to \mathcal{S}$ tal que $\hat{\theta}\jmath = \theta$.*

Demonstração. Seja $(A, g) = (\{1_G, g_1, \cdots, g_n\}, g_n) \in \tilde{G}^{\mathcal{R}}$. Define-se

$$\hat{\theta}(A, g) := \theta(g_1)\theta(g_1)^* \cdots \theta(g_n)\theta(g_n)^*\theta(g).$$

Como cada produto $\theta(g_i)\theta(g_i)^*$ é idempotente em $\mathcal{S}$, a definição de $\hat{\theta}$ independe da ordem dos elementos g_i. Assim, $\hat{\theta}$ está bem definido.

Tem-se $\hat{\theta}\jmath(g) = \hat{\theta}(\{1_G, g\}, g) = \theta(g)\theta(g)^*\theta(g) = \theta(g)$ e vale $\hat{\theta}\jmath = \theta$.

Como $\hat{\theta}(\{1_G\}, 1_G) = \theta(1_G)$, falta apenas mostrar que $\hat{\theta}$ é homomorfismo entre semigrupos, ou seja, que vale a igualdade $\hat{\theta}(A,g)\hat{\theta}(B,h) = \hat{\theta}((A,g)(B,h))$.

Sejam $(A,g) = (\{1_G, g_1, \cdots, g_n\}, g_n), g = g_n$ e $(B,h) = (\{1_G, h_1, \cdots, h_m\}, h_m), h = h_m$. Tem-se

$$\hat{\theta}(A,g) = \theta(g_1)\theta(g_1)^* \cdots \theta(g_n)\theta(g_n)^*\theta(g)$$

e

$$\hat{\theta}(B,h) = \theta(h_1)\theta(h_1)^* \cdots \theta(h_m)\theta(h_m)^*\theta(h).$$

Observa-se

$$\begin{aligned}
&\theta(g)\theta(h_1)\theta(h_1)^* \cdots \theta(h_m)\theta(h_m)^* \\
&\theta(g)\theta(g)^*\theta(g)\theta(h_1)\theta(h_1)^* \cdots \theta(h_m)\theta(h_m)^* \\
&= \theta(g) \textstyle\prod_{p=1}^{m} \theta(h_p)\theta(h_p)^*\theta(g)^*\theta(g)
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
&\theta(g)\theta(h_1)\theta(h_1)^*\theta(g)^*\theta(g) \\
&= \theta(gh_1)\theta(h_1)^*\theta(g)^*\theta(g) \\
&= \theta(gh_1)\theta(gh_1)^*\theta(g)
\end{aligned}$$

nas igualdades acima foi usado que idempotentes comutam em semigrupos inversos.

Continuando o processo

$$\begin{aligned}
&\theta(g)\theta(h_1)\theta(h_1)^* \cdots \theta(h_m)\theta(h_m)^* \\
&= \theta(gh_1)\theta(gh_1)^* \cdots \theta(gh_m)\theta(gh_m)^*\theta(g)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\theta(g)\theta(h) = \theta(g)\theta(g)^*\theta(g)\theta(h) \\
&= \theta(g)\theta(g)^*\theta(gh).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(A,g)\hat{\theta}(B,h) &= (\textstyle\prod_{r=1}^{n} \theta(g_r)\theta(g_r)^*)(\prod_{s=1}^{m} \theta(gh_s)\theta(gh_s)^*)\ \underbrace{\theta(g)\theta(g)^*}_{=\theta(g_n)\theta(g_n)^*}\ \theta(gh) \\
&= (\textstyle\prod_{r=1}^{n} \theta(g_r)\theta(g_r)^*)(\prod_{s=1}^{m} \theta(gh_s)\theta(gh_s)^*)\theta(gh).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(A,g)(B,h) = (\{1_G, g_1, \cdots, g_n, gh_1, \cdots, gh_m\}, gh)$$

o que deixa claro a igualdade

$$\hat{\theta}(A,g)\hat{\theta}(B,h) = \hat{\theta}((A,g)(B,h)).$$

Para provar a unicidade, seja $\phi : \widetilde{G}^{\mathcal{R}} \to \mathcal{S}$ homomorfismo tal que $\phi\jmath = \theta$. Dado $(A,g) = (\{1_G, g_1, \cdots, g_n\}, g_n) = \jmath(g_1)\jmath(g_1^{-1}g_2)\cdots\jmath(g_{n-1}^{-1}g_n)$, tem-se $\phi(A,g) = \theta(g_1)\theta(g_1^{-1}g_2)\cdots\theta(g_{n-1}^{-1}g_n)$.

Daí

$$\begin{aligned}
&\theta(g_1)\theta(g_1^{-1}g_2) = \theta(g_1)\theta(g_1)^*\theta(g_2)\\
&\vdots\\
&\theta(g_{n-1})\theta(g_{n-1}^{-1}g_n) = \theta(g_{n-1})\theta(g_{n-1})^*\theta(g_n)
\end{aligned}$$

E tem-se $\phi(A,g) = \hat{\theta}(A,g)$. □

Observação 3.4.3. A partir daqui, $\mathcal{S}(G)$ denota o monoide de Exel com sua descrição via expansão de Birget-Rhodes para o grupo G, ou seja,

$$\mathcal{S}(G) = \{(A,g) \in \mathcal{P}_{1_G}(G) \times G : g \in A\}$$

Um elemento $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ está na forma padrão se for escrito

$$\alpha = \varepsilon_{g_1}\cdots\varepsilon_{g_n}\jmath(h)$$

com $\jmath : G \to \mathcal{S}(G)$ a função que associa $\jmath(g) = (\{1_G, g\}, g)$ a cada $g \in G$ e

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{g_i} &= \jmath(g_i)\jmath(g_i^{-1})\\
&= (\{1_G, g_i\}, g_i)(\{1_G, g_i^{-1}\}, g_i^{-1})\\
&= (\{1_G, g_i\} \cup g_i\{1_G, g_i^{-1}\}, g_i g_i^{-1})\\
&= (\{1_G, g_i\}, 1_G).
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Módulos parciais e módulos sobre o monoide de Exel

A partir daqui, por ação de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ em um conjunto X quer-se dizer um homomorfismo $\mathcal{S} \to \mathcal{I}(X)$ e se $\mathcal{S}$ é um monoide, então a expressão **ação** sempre denota uma **ação unital**, ou seja, um homomorfismo entre monoides $\mathcal{S} \to \mathcal{I}(X)$. Mas nota-se que dado um semigrupo A, a composição de dois isomorfismos parciais (ou seja, isomorfismos entre ideais arbitrários de A) não é isomorfismo parcial, no geral, já que o domínio da composição não é necessariamente um ideal. No entanto, o conjunto $\mathcal{I}_{\mathrm{ui}}(A)$ de todos os isomorfismos entre ideais unitais de A (ideais gerados por idempotentes centrais de A) formam um monoide inverso. Uma motivação para estudar homomorfismos $\mathcal{S} \to \mathcal{I}_{ui}(A)$ vem de ações parciais de grupos, pois, como será visto a seguir, ações parciais de G em um monoide comutativo A correspondem a homomorfismos de $\mathcal{S}(G)$ em $\mathcal{I}_{ui}(A)$. Com base neste resultado, far-se-á a conexão da cohomologia de G-módulos parciais apresentada no Capítulo 2 com a cohomologia de $\mathcal{S}$-módulos desenvolvida por Lausch, em [Lau75].

Na Seção 4.1, quer-se caracterizar ações de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ em um semigrupo A em termos de endomorfismos de A. Dado um monoide inverso $\mathcal{S}$, Lausch define um $\mathcal{S}$-módulo como uma tripla (A, λ, α) em que A é um monoide inverso comutativo, $\lambda : \mathcal{S} \to \mathrm{End}(A)$ é um homomorfismo de monoides e $\alpha : E(\mathcal{S}) \to E(A)$ é um isomorfismo de monoides tais que, para todos $a \in A, s \in S, e \in E(\mathcal{S})$:

(i) $\lambda_e(a) = \alpha(e)a$;

(ii) $\lambda_s(\alpha(e)) = \alpha(ses^*)$.

Prova-se que a categoria dos "módulos de Lausch" é abeliana e pode-se definir $H^n_{\mathcal{S}}(A)$, a cohomologia de grau n de $\mathcal{S}$ com coeficientes em A, como o n-ésimo funtor derivado do funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-, A)$, e $H^n_{\mathcal{S}}(A)$ pode ser calculada a partir de resoluções projetivas de um $\mathcal{S}$-módulo que faz o mesmo papel que o módulo trivial na cohomologia de grupos usual.

Ainda na Seção 4.1, será mostrado como associar a uma ação de $\mathcal{S}$ em A um $\mathcal{S}'$-módulo de Lausch, sendo $\mathcal{S}'$ um quociente de $\mathcal{S}$. Na Seção 4.2 será apresentada a construção de $\mathcal{S}$-módulos livres e, na Seção 4.3 será feita a conexão da cohomologia de ações parciais de G com a cohomologia de Lausch.

4.1 $\mathcal{S}$-módulos

Definição 4.1.1. Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo (respectivamente, monoide) inverso. Uma **ação de $\mathcal{S}$ em um semigrupo** A é um homomorfismo de semigrupos (respectivamente, monoides) $\mathcal{S} \to \mathcal{I}_{\mathrm{ui}}(A)$.

Pelo Capítulo 3, uma ação parcial de G em um conjunto X pode ser vista como uma representação parcial de G em $\mathcal{I}(X)$. Isto implica que ações parciais unitais de G em um monoide A podem ser identificadas com as representações parciais de G em $\mathcal{I}_{\mathrm{ui}}(A)$.

Proposição 4.1.2. *Existe uma correspondência biunívoca entre G-módulos parciais e ações (unitais) de $\mathcal{S}(G)$ em monoides comutativos.*

Dado $(A, \theta) \in \mathrm{pMod}(G)$, a ação correspondente τ de $\mathcal{S}(G)$ em A é dada como segue: para $s = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n} \jmath(h) \in \mathcal{S}(G)$, τ_s é a bijeção:

$$\begin{aligned} \tau_s : 1_{h^{-1}g_1} \cdots 1_{h^{-1}g_n} 1_{h^{-1}} A &\to 1_{g_1} \cdots 1_{g_n} 1_h A \\ a &\mapsto \theta_h(a) \end{aligned}$$

Tal correspondência é isomorfismo de categorias como explicado a seguir.

Observação 4.1.3. Sejam $A, A' \in \mathrm{pMod}(G)$, τ, τ' as ações correspondentes de $\mathcal{S}(G)$ nos semigrupos A e A'. Denota-se por 1_s e $1'_s$ as identidades de $\operatorname{im} \tau_s$ e $\operatorname{im} \tau'_s$, respectivamente ($s \in \mathcal{S}(G)$). Então um homomorfismo de semigrupos $\varphi : A \to A'$ é um morfismo de G-módulos parciais se, e somente se, tem-se, para $s \in \mathcal{S}(G)$:

(i) $\varphi(1_s) = 1'_s$ (e então $\varphi(\operatorname{dom} \tau_s) \subseteq \operatorname{dom} \tau'_s$);

(ii) $\varphi \circ \tau_s = \tau'_s \circ \varphi$, em $\operatorname{dom} \tau_s$

É razoável a próxima definição:

Definição 4.1.4. Sejam τ e τ' ações de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ nos semigrupos A e A'. Um **morfismo** $\tau \to \tau'$ é um homomorfismo $\varphi : A \to A'$ tal que valem as condições da observação anterior, $\forall s \in \mathcal{S}$ (como acima, $\operatorname{im} \tau_s = 1_s A$ e $\operatorname{im} \tau'_s = 1'_s A$).

Então, ações de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ em monoides comutativos formam uma categoria que será denotada por $\mathrm{A}(\mathcal{S})$.

Proposição 4.1.5. *As categorias* $\mathrm{pMod}(G)$ *e* $\mathrm{A}(\mathcal{S}(G))$ *são isomorfas.*

De fato, a Proposição 4.1.2 e a Observação 4.1.3 definem um funtor de $\mathrm{pMod}(G)$ em $\mathrm{A}(\mathcal{S}(G))$ bijetivo em objetos e identidade em morfismos.

A partir daqui, começa-se a caracterização de ações de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ em um semigrupo A em termos de endomorfismos de A.

Lema 4.1.6. *Sejam* $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_{\mathrm{ui}}(A)$ *uma ação de um semigrupo inverso* $\mathcal{S}$ *em um semigrupo* A*, dada por* $s \mapsto \tau_s$*, e* 1_s *a identidade de* $\operatorname{im}\tau_s$*. Então,*

(i) $\tau_e = \mathrm{id}_{1_e A}, \forall e \in E(\mathcal{S})$*;*

(ii) $\tau_s(1_{s^*}1_t) = 1_{st}, \forall s, t \in \mathcal{S}$*.*

Demonstração.

(i) Como e é idempotente, tem-se que τ_e é bijeção de $\operatorname{dom}\tau_e = \operatorname{im}\tau_e$ que coincide com seu quadrado (pois, como τ_e é bijeção, existe $(\tau_e)^{-1}$ e compondo em $\tau_e = \tau_e^2$: $(\tau_e)^{-1}\tau_e = (\tau_e)^{-1}\tau_e^2 \Rightarrow \mathrm{id}_{1_e A} = \tau_e$).

(ii) Nota-se que 1_{st} é identidade de $1_{st}A$ e

$$
\begin{aligned}
1_{st}A &= \operatorname{im}\tau_{st} \\
&= \operatorname{im}(\tau_s \circ \tau_t) \\
&= \tau_s(\operatorname{dom}\tau_s \cap \operatorname{im}\tau_t) \\
&= \tau_s(1_{s^*}A \cap 1_t A) \\
&= \tau_s(1_{s^*}1_t A) \quad \text{pelo Lema 1.1.6}
\end{aligned}
$$

Logo, $\tau_s(1_{s^*}1_t) = 1_{st}$.

□

Teorema 4.1.7. *Sejam* $\mathcal{S}$ *um semigrupo inverso e* A *um semigrupo. Existe uma correspondência biunívoca entre ações de* $\mathcal{S}$ *em* A *e os pares* (λ, α)*, em que* λ *é um homomorfismo* $\mathcal{S} \to \operatorname{End} A$, $s \mapsto \lambda_s$*, e* α *é um homomorfismo* $E(\mathcal{S}) \to E(C(A))$ *tais que*

(i) $\lambda_e(a) = \alpha(e)a, e \in E(\mathcal{S}), a \in A$*;*

(ii) $\lambda_s(\alpha(e)) = \alpha(ses^*), s \in \mathcal{S}, e \in E(\mathcal{S})$*.*

Aqui, $C(A)$ *denota o centro de* A*, ou seja,* $C(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$*.*

Demonstração. Seja $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_{\mathrm{ui}}(A)$, dada por $s \mapsto \tau_s$, uma ação de $\mathcal{S}$ em A. Como a ação é unital, tem-se que a identidade 1_s de $\operatorname{im}\tau_s$ pertence a $E(C(A))$. Assim, define-se

$$
\begin{aligned}
\alpha^\tau : E(S) &\to E(C(A)) \\
e &\mapsto 1_e.
\end{aligned}
$$

Do Lema 4.1.6, tem-se $1_{ef} \overset{\text{(ii)}}{=} \tau_e(1_e 1_f) \overset{\text{(i)}}{=} 1_e 1_f$ e α^τ é homomorfismo. Ainda, para quaisquer $s \in \mathcal{S}$ e $a \in A$, faz-se

$$\lambda_s^\tau(a) = \tau_s(1_{s^*}a).$$

O lado direito da igualdade acima faz sentido, pois 1_{s^*} é identidade de $\operatorname{im}\tau_{s^*} = \operatorname{dom}\tau_s$ e $\operatorname{dom}\tau_s$ é ideal. Como 1_{s^*} é idempotente central e τ_s é homomorfismo, tem-se

$$\begin{aligned}
\lambda_s^\tau(ab) &= \tau_s(1_{s^*}ab) \\
&= \tau_s(1_{s^*}a1_{s^*}b) \\
&= \tau_s(1_{s^*}a)\tau_s(1_{s^*}b) \\
&= \lambda_s^\tau(a)\lambda_s^\tau(b)
\end{aligned}$$

e $\lambda_s^\tau \in \operatorname{End} A$. Verifica-se que $\lambda^\tau : \mathcal{S} \to \operatorname{End} A$ é homomorfismo:

$$\begin{aligned}
\lambda_s^\tau(\lambda_t^\tau(a)) &= \tau_s(1_{s^*}\tau_t(1_{t^*}a)) \\
&= \tau_s(\tau_t(1_{t^*}1_{t^*s^*})\tau_t(1_{t^*}a)) \\
&= \tau_s(\tau_t(1_{t^*}1_{t^*s^*}a)) \\
&= \tau_{st}(1_{t^*}1_{t^*s^*}a) && \text{pois } 1_{t^*}1_{t^*s^*}a \in \operatorname{dom}\tau_{st} \\
&= \tau_{st}(1_{t^*}1_{t^*s^*})\tau_{st}(1_{t^*s^*}a) && \text{pois } 1_{t^*s^*} \text{é idempotente} \\
&= 1_s\tau_{st}(1_{t^*s^*}a) && \text{item (ii) do Lema 4.1.6} \\
&= \tau_{st}(1_{t^*s^*}a) && \operatorname{im}\tau_{st} \subseteq \operatorname{im}\tau_s, \text{ pois é ação parcial} \\
&= \lambda_{st}^\tau(a)
\end{aligned}$$

(i) $$\begin{aligned}
\lambda_e^\tau(a) &= \tau_e(1_{e^*}a) && \text{item (ii) do Lema 4.1.6} \\
&= 1_e a \\
&= \alpha(e)a
\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}
\lambda_s^\tau(1_e) &= \tau_s(1_{s^*}1_e) \\
&= \tau_s(1_{s^*}1_{s^*}1_e) \\
&= \tau_s(1_{s^*}\tau_e(1_{s^*}1_e)) && \text{pois } 1_{s^*}1_e \in 1_eA \Rightarrow 1_{s^*}1_e = \tau_e(1_{s^*}1_e) \\
&= \tau_s(1_{s^*}1_{es^*}) \\
&= 1_{ses^*}
\end{aligned}$$

Reciprocamente, dado um par (λ, α) satisfazendo $\lambda_e(a) = \alpha(e)a$ para $e \in E(\mathcal{S}), a \in A$, e $\lambda_s(\alpha(e)) = \alpha(ses^*)$ para $s \in \mathcal{S}, e \in E(\mathcal{S})$, define-se $1_s \in E(C(A))$ por

$$1_s = \alpha(ss^*).$$

Tem-se $\lambda_s(1_{s^*}) = \lambda_s(\alpha(s^*s)) = \alpha(ss^*ss^*) = \alpha(ss^*) = 1_s$ e, portanto, $\lambda_s(1_{s^*}A) \subseteq 1_sA$. Além disso, $(\lambda_s \circ \lambda_{s^*})|_{1_sA} = \lambda_{ss^*}|_{1_sA} = \operatorname{id}_{1_sA}$ (já que $\lambda_{ss^*}(1_sa) = \alpha(ss^*)1_sa = 1_sa$) e $(\lambda_{s^*} \circ \lambda_s)|_{1_{s^*}A} = \lambda_{s^*s}|_{1_{s^*}A} = \operatorname{id}_{1_{s^*}A}$ (já que $\lambda_{s^*s}(1_{s^*}a) = \alpha(s^*s)1_{s^*}a = 1_{s^*}a$). O que implica que $\lambda_s|_{1_{s^*}A} : 1_{s^*}A \to 1_sA$ é bijeção cuja inversa é $\lambda_{s^*}|_{1_sA}$. Assim, pode-se definir o homomorfismo $\tau^{(\lambda,\alpha)} : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_{\mathrm{ui}}(A)$ por $\tau_s^{(\lambda,\alpha)} = \lambda_s|_{1_{s^*}A}$. De fato, é homomorfismo, pois

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}(\tau_s^{(\lambda,\alpha)} \circ \tau_t^{(\lambda,\alpha)}) &= \lambda_{t^*}(1_{s^*}A \cap 1_tA)\\
&= \lambda_{t^*}(1_{s^*}1_tA)\\
&= \lambda_{t^*}(1_{s^*})\lambda_{t^*}(1_tA)\\
&= \lambda_{t^*}(\alpha(s^*s))1_{t^*}A\\
&= \alpha(t^*s^*st)\alpha(t^*t)A\\
&= \alpha(t^*s^*stt^*t)A\\
&= \alpha(t^*s^*st)A\\
&= 1_{t^*s^*}A\\
&= \operatorname{dom}\tau_{st}^{(\lambda,\alpha)}.
\end{aligned}$$

Além disso,
$$\begin{aligned}
\lambda_t(1_{t^*s^*}) &= \lambda_t(\alpha(t^*s^*st))\\
&= \alpha(t(t^*s^*st)t^*)\\
&= \alpha(s^*stt^*)\\
&= \alpha(s^*s)\alpha(tt^*)\\
&= 1_{s^*}1_t.
\end{aligned}$$

Logo, como
$$\begin{aligned}
1_{t^*s^*} &= \alpha(t^*(s^*s)t)\\
&= \lambda_{t^*}(\alpha(s^*s))\\
&= \lambda_{t^*tt^*}(\alpha(s^*s))\\
&= \lambda_{t^*t}\lambda_{t^*}(\alpha(s^*s))\\
&= \alpha(t^*t)\lambda_{t^*}(\alpha(s^*s))\\
&= 1_{t^*s^*}1_{t^*}
\end{aligned}$$

tem-se, para todo $a \in \operatorname{dom}\tau_{st}^{(\lambda,\alpha)}$, $a = 1_{t^*s^*}a$ e:

$$\begin{aligned}
(\tau_s^{(\lambda,\alpha)} \circ \tau_t^{(\lambda,\alpha)})(a) &= \tau_s^{(\lambda,\alpha)}(\tau_t^{(\lambda,\alpha)}(1_{t^*s^*}a))\\
&= \tau_s^{(\lambda,\alpha)}(\tau_t^{(\lambda,\alpha)}(1_{t^*s^*}1_{t^*}a))\\
&= \tau_s^{(\lambda,\alpha)}(\lambda_t(1_{t^*s^*}1_{t^*}a))\\
&= \tau_s^{(\lambda,\alpha)}(1_{s^*}1_t\lambda_t(1_{t^*}a))\\
&= \lambda_s(1_{s^*}\lambda_t(1_{t^*}a))\\
&= 1_s\lambda_{st}(1_{t^*}a)\\
&= 1_s\lambda_{st}(a)\\
&= 1_s\tau_{st}^{(\lambda,\alpha)}(a)\\
&= \tau_{st}^{(\lambda,\alpha)}(a).
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\tau \mapsto (\lambda^\tau, \alpha^\tau)$ e $(\lambda,\alpha) \mapsto \tau^{(\lambda,\alpha)}$ são mutuamente inversas. Considerando $\tau^{(\lambda^\tau,\alpha^\tau)}$, a identidade de $\operatorname{dom}\tau_s^{(\lambda^\tau,\alpha^\tau)}$ é $\alpha^\tau(s^*s) = 1_{s^*s}$, que é a identidade de $\operatorname{dom}\tau_{ss^*}$, para qualquer $s \in \mathcal{S}$. Mas, $1_{s^*} = \tau_{s^*}(1_s) = \tau_{s^*}(1_s1_s) = 1_{s^*s}$ e daí, $\operatorname{dom}\tau_s = \operatorname{dom}\tau_s^{(\lambda^\tau,\alpha^\tau)}$. Por construção: $\tau_s^{(\lambda^\tau,\alpha^\tau)} = \lambda_s^\tau|_{1_{s^*s}A} = \lambda_s^\tau|_{1_{s^*}A}$. Mas, $\lambda_s^\tau(a) = \tau_s(1_{s^*}a)$ e como $a = 1_{s^*}a$ (se $a \in 1_{s^*}A$), logo $\lambda_s^\tau = \tau_s$ em $1_{s^*}A$ e, consequentemente, $\tau^{(\lambda^\tau,\alpha^\tau)} = \tau$.

Agora, dado (λ,α), mostra-se $\alpha^{\tau^{(\lambda,\alpha)}} = \alpha$ e $\lambda^{\tau^{(\lambda,\alpha)}} = \lambda$. Para qualquer $e \in E(\mathcal{S})$, a imagem $\alpha^{\tau^{(\lambda,\alpha)}}(e)$ é a identidade de $\operatorname{dom}\tau_e^{(\lambda,\alpha)}$, que é $\alpha(ee^*) = \alpha(e)$. Além disso, tem-se

$$\begin{aligned}
\lambda_s^{\tau^{(\lambda,\alpha)}} &= \tau_s^{(\lambda,\alpha)}(\alpha(s^*s)a) \\
&= \lambda_s|_{\alpha(s^*sA)}(\alpha(s^*s)a) \\
&= \lambda_s(\alpha(s^*s)a) \\
&= \lambda_s(\alpha(s^*s))\lambda_s(a) \\
&= \alpha(ss^*ss^*)\lambda_s(a) = \alpha(ss^*)\lambda_s(a) \\
&= \lambda_{ss^*}\lambda_s(a) \\
&= \lambda_{ss^*s}(a) = \lambda_s(a).
\end{aligned}$$

□

Definição 4.1.8. Dado um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, um $\mathcal{S}$-**módulo** é uma tripla (A, λ, α) (por simplicidade, A), com A um semigrupo comutativo, $\lambda : \mathcal{S} \to \operatorname{End} A$ e $\alpha : E(\mathcal{S}) \to E(A)$ são homomorfismos satisfazendo as condições do Teorema 4.1.7. Se α é isomorfismo, diz-se que A é **estrito**.

Proposição 4.1.9. *Sejam τ e τ' ações de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ nos semigrupos A e A'. Usa-se as notações $(\lambda, \alpha) = (\lambda^\tau, \alpha^\tau)$ e $(\lambda', \alpha') = (\lambda^{\tau'}, \alpha^{\tau'})$. Então, um homomorfismo $\varphi : A \to A'$ é um morfismo $\tau \to \tau'$ se, e somente se, satisfaz:*

(i) $\varphi \circ \alpha = \alpha'$ *em* $E(\mathcal{S})$*;*

(ii) $\varphi \circ \lambda_s = \lambda'_s \circ \varphi, \forall s \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Como $1_s = \alpha(ss^*)$, (i) equivale a $\varphi(1_s) = 1'_s$, enquanto (ii) é o mesmo que $\varphi(\tau_s(1_{s^*}a)) = \tau'_s(1'_s\varphi(a)), \forall a \in A$, pois $\lambda^\tau_s(a) = \tau_s(1_{s^*}a)$. Mas esta última igualdade pode ser substituída por $\varphi(\tau_s(1_{s^*}a)) = \tau'_s(\varphi(1_{s^*}a)), \forall a \in A$, ou seja, $\varphi \circ \tau_s = \tau'_s \circ \varphi$ em $1_{s^*}A = \operatorname{dom}\tau_s$. □

Definição 4.1.10. Sejam (A, λ, α) e (A', λ', α') S-módulos. Um **morfismo** $(A, \lambda, \alpha) \to (A', \lambda', \alpha')$ é um homomorfismo $\varphi : A \to A'$ satisfazendo as condições da Proposição 4.1.9.

Dado um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, denota-se por $\operatorname{Mod}(\mathcal{S})$ a categoria de $\mathcal{S}$-módulos e morfismos. Assim, o Teorema 4.1.7 e a Proposição 4.1.9 implicam

Proposição 4.1.11. *Para um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, as categorias $\mathrm{A}(\mathcal{S})$ e $\operatorname{Mod}(\mathcal{S})$ são isomorfas.*

Corolário 4.1.12. *Para um grupo G, as categorias $\operatorname{pMod}(G)$ e $\operatorname{Mod}(\mathcal{S}(G))$ são isomorfas.*

Explicitamente, dado $(A, \theta) \in \operatorname{pMod}(G)$, define-se

$$\lambda^\theta_{\jmath(g)}(a) = \theta_g(1_{g^{-1}}a) \quad \text{e} \quad \alpha^\theta(\varepsilon_g) = 1_g, \forall g \in G$$

Isto implica $\alpha^\theta(\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}) = 1_{g_1} \cdots 1_{g_n}$ e $\lambda^\theta_{\varepsilon_{g_1}\cdots\varepsilon_{g_n}\jmath(h)}(a) = 1_{g_1} \cdots 1_{g_n}\theta_h(1_{h^{-1}}a)$.

Para um morfismo $\varphi : (A, \theta) \to (A', \theta')$, (aqui, $(\lambda, \alpha) = (\lambda^\theta, \alpha^\theta)$ e $(\lambda', \alpha') = (\lambda^{\theta'}, \alpha^{\theta'})$, como anteriormente), vê-se:

- $$\begin{aligned}\varphi(\alpha(\varepsilon_{g_1}\cdots\varepsilon_{g_n})) &= \varphi(1_{g_1}\cdots 1_{g_n})\\ &= 1'_{g_1}\cdots 1'_{g_n}\\ &= \alpha'(\varepsilon_{g_1}\cdots\varepsilon_{g_n})\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\varphi(\lambda^{\theta}_{\varepsilon_{g_1}\cdots\varepsilon_{g_n}\jmath(h)}(a)) &= \varphi(1_{g_1}\cdots 1_{g_n}\theta_h(1_{h^{-1}}a))\\ &= 1'_{g_1}\cdots 1'_{g_n}\theta'_h(1'_{h^{-1}}\varphi(a))\\ &= \lambda'^{\theta}_{\varepsilon_{g_1}\cdots\varepsilon_{g_n}\jmath(h)}(\varphi(a))\end{aligned}$$

O próximo objetivo é empregar a cohomologia de Lausch no contexto aqui apresentado. Em [Lau75], Lausch introduziu uma categoria de $\mathcal{S}$-módulos, com $\mathcal{S}$ semigrupo inverso. Tal categoria consiste nos aqui chamados $\mathcal{S}$-módulos estritos inversos e a observação a seguir mostra que também é razoável restringir o estudo a um A inverso, no caso de G-módulos parciais.

Observação 4.1.13. Seja $(A,\theta)\in\mathrm{pMod}(G)$. Define-se $\tilde{A}$ como o subsemigrupo (inverso) de A formado pelos elementos invertíveis de todos os ideais $1_{g_1}\cdots 1_{g_n}A$, com $g_1,\cdots,g_n\in G, n\in\mathbb{N}$. Logo, $\theta_g(1_{g^{-1}}\tilde{A}) = 1_g\tilde{A}$ e θ restrito a $\tilde{A}$ define uma ação parcial $\tilde{\theta}$ de G em $\tilde{A}$. Além disso, $(\tilde{A},\tilde{\theta})\in\mathrm{pMod}(G)$ e $H^n(G,A)=H^n(G,\tilde{A})$.

De fato, se $a\in\mathcal{U}(1_{g_1}\cdots 1_{g_n}A)$ e $b\in\mathcal{U}(1_{h_1}\cdots 1_{h_m}A)$, então ab é invertível no produto $1_{g_1}\cdots 1_{g_n}1_{h_1}\cdots 1_{h_m}A$. O inverso de a em $\tilde{A}$ é o seu inverso no ideal correspondente. Mais ainda, se $a\in\mathcal{U}(1_{g_1}\cdots 1_{g_n}A)$, então $\theta_g(1_{g^{-1}}a)\in\mathcal{U}(1_g1_{gg_1}\cdots 1_{gg_n}A)\subseteq 1_g\tilde{A}$ e como, similarmente, $\theta_{g^{-1}}(1_g\tilde{A})\subseteq 1_{g^{-1}}\tilde{A}$, tem-se a igualdade $\theta_g(1_{g^{-1}}\tilde{A})=1_g\tilde{A}$. O que implica

$$\begin{aligned}\theta_g(1_{g^{-1}}1_h\tilde{A}) &= \theta_g(1_{g^{-1}}1_h)\theta_g(1_{g^{-1}}\tilde{A})\\ &= 1_g1_{gh}\tilde{A}\end{aligned}$$

e as restrições $\tilde{\theta}_g$ de θ_g a $1_{g^{-1}}\tilde{A}\subseteq 1_{g^{-1}}A$ são, de fato, ação parcial de G em $\tilde{A}$. Por construção $(\tilde{A},\tilde{\theta})\in\mathrm{pMod}(G)$. Nota-se que $\mathcal{U}(1_{g_1}\cdots 1_{g_n}A)=\mathcal{U}(1_{g_1}\cdots 1_{g_n}\tilde{A})$ e assim, $C^n(G,A)=C^n(G,\tilde{A})$. Como $\tilde{\theta}$ é restrição de θ, os homomorfismos de cobordo desses dois complexos de cocadeias também coincidem e portanto, seus grupos de cohomologia são iguais.

Definição 4.1.14. Um G-módulo parcial (A,θ) é chamado **inverso** se A é inverso e $E(A)$ é gerado pelos idempotentes 1_g, $(g\in G)$.

Observação 4.1.15. Se $(A,\theta)\in\mathrm{pMod}(G)$, então $(\tilde{A},\tilde{\theta})$ é inverso. Outra observação imediata é que

$$E(A)=\langle 1_g\,|\,g\in G\rangle \Leftrightarrow \alpha^\theta : E(\mathcal{S}(G))\to E(A) \text{ é epimorfismo}$$

Definição 4.1.16. Um $\mathcal{S}$-módulo (A,λ,α) é chamado **inverso** se A é inverso e α é epimorfismo.

Observação 4.1.17. Um G-módulo parcial (A,θ) é inverso se, e somente se, o $\mathcal{S}(G)$-módulo $(A,\lambda^\theta,\alpha^\theta)$ correspondente é inverso.

Assim, trocando um G-módulo parcial inverso por um $\mathcal{S}(G)$-módulo, vê-se que o que difere tal $\mathcal{S}(G)$-módulo de um $\mathcal{S}(G)$-módulo de Lausch é o fato de $\alpha^\theta : E(\mathcal{S}(G)) \to E(A)$ não ser injetivo, em geral. No entanto, um G-módulo parcial inverso A pode ser visto como um módulo estrito inverso sobre alguma imagem epimórfica $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}(G)$. Com isso, as cohomologias de A como G-módulo parcial e como $\mathcal{S}$-módulo coincidem. Para aproximar o presente estudo da cohomologia de Lausch, vê-se que $\mathcal{S}$ pode ser escolhido $E(A) *_\theta G$, como explica-se a seguir.

Dados um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ e um $\mathcal{S}$-módulo (A, λ, α), denota-se por $L(A, \mathcal{S})$ o conjunto dos elementos da forma $a\delta_s$, com $s \in \mathcal{S}, a \in \alpha(ss^*)A$ e δ_s um símbolo (pode-se ver $L(A, \mathcal{S})$ como subconjunto do produto cartesiano $A \times \mathcal{S}$).

Proposição 4.1.18. *O conjunto $L(A, \mathcal{S})$ é um semigrupo com a multiplicação $a\delta_s \cdot b\delta_t = a\lambda_s(b)\delta_{st}$.*

Demonstração. Sejam $a\delta_s, b\delta_t \in L(A, \mathcal{S})$. Como $b \in \alpha(tt^*)A$, tem-se $b = \alpha(tt^*)b$. Daí, $\lambda_s(b) = \lambda_s(\alpha(tt^*)b) = \lambda_s(\alpha(tt^*))\lambda_s(b) = \alpha(stt^*s^*)\lambda_s(b)$ implica $\lambda_s(b) \in \alpha(stt^*s^*)A$. E a multiplicação acima está bem definida.

É associativa:

- $(a\delta_s \cdot b\delta_t) \cdot c\delta_r = a\lambda_s(b)\delta_{st} \cdot c\delta_r = a\lambda_s(b)\lambda_{st}(c)\delta_{str}$;
- $a\delta_s \cdot (b\delta_t \cdot c\delta_t) = a\delta_s \cdot b\lambda_t(c)\delta_{tr} = a\lambda_s(b\lambda_t(c))\delta_{str} = a\lambda_s(b)\lambda_{st}(c)\delta_{str}$.

E tem-se $(a\delta_s \cdot b\delta_t) \cdot c\delta_r = (a\delta_s \cdot b\delta_t) \cdot c\delta_r$. □

Observação 4.1.19. Nota-se que $\lambda_s(a)\delta_s$ e $\lambda_s(a)\delta_{ss^*}$ são elementos em $L(A, \mathcal{S})$, para todo $a \in A$, já que $\lambda_s(a) = \lambda_{ss^*s}(a) = \lambda_{ss^*}(\lambda_s(a)) = \alpha(ss^*)\lambda_s(a)$.

Observação 4.1.20. $E(L(A, \mathcal{S})) = \{f\delta_e \mid e \in E(\mathcal{S}), f \in E(A), f \leqslant \alpha(e)\}$. Tomando $f\delta_e \in L(A, \mathcal{S})$, como anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} (f\delta_e)(f\delta_e) &= f\lambda_e(f)\delta_{ee} \\ &= f\alpha(e)f\delta_e \\ &= f\delta_e \end{aligned}$$

Reciprocamente, tomando $a\delta_s$ idempotente em $L(A, \mathcal{S})$, tem-se $(a\delta_s)(a\delta_s) = a\delta_s$. Mas, $(a\delta_s)(a\delta_s) = a\lambda_s(a)\delta_{ss}$, o que implica $a\lambda_s(a)\delta_{ss} = a\delta_s$ e tem-se $s \in E(\mathcal{S})$. Daí, $a \in \alpha(ss^*)A$ implica que a pertence a $\alpha(s)A$, ou seja, $a = \alpha(s)a$ (ou ainda, $a \leqslant \alpha(a)$). Agora, aplicando λ_s a $a\lambda_s(a) = a$ e usando o fato de que cada λ_s restrito a $\alpha(s)A$ é isomorfismo, tem-se

$$\begin{aligned} & \lambda_s(a\lambda_s(a)) = \lambda_s(a) \\ \Rightarrow\ & \lambda_s(a^2) = \lambda_s(a) \\ \Rightarrow\ & a^2 = a \end{aligned}$$

ou seja, $a \in E(A)$.

Para o que segue, usa-se não $L(A,\mathcal{S})$, mas sim um quociente de $L(A,\mathcal{S})$ que leva em conta a ordem parcial natural em $\mathcal{S}$. Relembra-se da Seção 1.5 que, em um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, pode-se definir uma ordem parcial $\leqslant$ e que esta gera uma congruência que será denotada por σ.

Definição 4.1.21. Para $(A,\lambda,\alpha)\in \mathrm{Mod}(\mathcal{S})$, ρ denota a congruência gerada por

$$\{(a\delta_s, a\delta_t)\in L(A,\mathcal{S})\times L(A,\mathcal{S}) \mid s\leqslant t\} \tag{4.1.1}$$

O semigrupo quociente $L(A,\mathcal{S})/\rho$ será denotado por $A\rtimes\mathcal{S}$ e chamado **produto semidireto entre** A **e** $\mathcal{S}$.

Como $s\leqslant t$ implica $ss^*\leqslant tt^*$, tem-se $\alpha(ss^*)A=\alpha(ss^*tt^*)A\subseteq\alpha(tt^*)A$.

Observação 4.1.22. Nas condições da Definição 4.1.21, a relação (4.1.1) é compatível com a multiplicação em $L(A,\mathcal{S})$ e assim, a congruência ρ é a relação de equivalência gerada por (4.1.1).

De fato, dados $a\delta_s, a\delta_t\in L(A,\mathcal{S})$, com $s\leqslant t$ e um $b\delta_u\in L(A,\mathcal{S})$ arbitrário:

- $(b\delta_u\cdot a\delta_s, b\delta_u\cdot a\delta_t)=(b\lambda_u(a)\delta_{us}, b\lambda_u(a)\delta_{ut})\in\rho$, pois $us\leqslant ut$;
- $(a\delta_s\cdot b\delta_u, a\delta_t\cdot b\delta_u)=(a\lambda_s(b)\delta_{su}, a\lambda_t(b)\delta_{tu})\in\rho$, se $a\lambda_s(b)=a\lambda_t(b)$.

Como $s=ss^*t$, então
$$\begin{aligned} a\lambda_s(b) &= a\lambda_{ss^*t}(b)\\ &= a\lambda_{ss^*}\lambda_t(b)\\ &= a\alpha(ss^*)\lambda_t(b)\\ &= a\lambda_t(b)\end{aligned}$$
pois $a\alpha(ss^*)=a$.

Como consequência imediata, tem-se

$$(a\delta_s, b\delta_t)\in\rho\Rightarrow a=b \text{ e } (s,t)\in\sigma.$$

A recíproca, no entanto, nem sempre é verdadeira.

Lema 4.1.23. *Para qualquer* $(A,\lambda,\alpha)\in\mathrm{Mod}(\mathcal{S})$ *e para* $a\delta_s, b\delta_t\in L(A,\mathcal{S})$ *arbitrários, tem-se* $(a\delta_s, b\delta_t)\in\rho$ *se, e somente se, existe* $u\in\mathcal{S}$ *tal que* $u\leqslant s,t$ *e* $a=b\in\alpha(uu^*)A$.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Se $(a\delta_s, b\delta_t)\in\rho$, então $a=b$, pela observação anterior. Fixa-se $a\delta_s=a\delta_{s_1},\ldots,a\delta_{s_n}=a\delta_t$ uma sequência de elementos de $L(A,\mathcal{S})$ tais que $s_i=e_is_{i+1}$ ou $s_{i+1}=s_ie_i$, com $e_i\in E(\mathcal{S})$, $\forall i=1,\ldots,n-1$. Como $a\in\alpha(s_is_i^*)A$, $\forall i=1,\ldots,n-1$, então $a\in\alpha(e_i)A$, $\forall i=1,\ldots,n-1$. Portanto, fazendo $e=e_1\cdots e_{n-1}$, tem-se $a\in\alpha(e)A$. Agora, tomando $u=es(=et)$, tem-se $u\leqslant s,t$ e, além disso, $a\in\alpha(e)\alpha(ss^*)=\alpha(uu^*)A$.

($\Leftarrow$): Se existe $u\in\mathcal{S}$ tal que $u\leqslant s,t$ e $a=b\in\alpha(uu^*)A$, então $(a\delta_u, a\delta_s)$ e $(a\delta_u, a\delta_t)$ pertencem à relação definida em (4.1.1) e assim, por simetria e transitividade de ρ, tem-se $(a\delta_s, a\delta_t)\in\rho$. $\square$

Exemplo 4.1.24. Para um grupo (multiplicativo) qualquer G, é possível definir uma estrutura de monoide inverso em $\mathcal{S} = G \cup \{0\}$. Define-se em $\mathcal{S}$ uma estrutura de $\mathcal{S}$-módulo (estrito) como segue:

$$\lambda_s(t) = ss^*t \quad \text{e} \quad \alpha(e) = e \qquad (s, t \in \mathcal{S}, e \in E(\mathcal{S}))$$

No caso do grupo cíclico $\mathbb{Z}_2 = \langle a \mid a^2 = 1\rangle$ e faz-se $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_2 \cup \{0\}$. Então $(a, 1) \in \sigma$, mas $(a\delta_a, a\delta_1) \notin \rho$.

De fato, $0 \leqslant a$ (pois $0 = a \cdot 0$) e $0 \leqslant 1$ (pois $0 = 1 \cdot 0$). Mas, não se tem $a \leqslant 1$, nem $1 \leqslant a$. Pois $a \leqslant 1 \Leftrightarrow a = 1 \cdot e$, mas $1 \cdot 0 \neq a$ e $1 \cdot 1 \neq a$; e $1 \leqslant a \Leftrightarrow 1 = a \cdot e$, mas $a \cdot 1 \neq 1$ e $a \cdot 0 \neq 1$. Como $0 \leqslant a, 1$, mas 1 e a não se relacionam, o único $u \in \mathcal{S}$ tal que $u \leqslant a, 1$ é 0. Apesar de se ter $a \in \alpha(aa^*)\mathcal{S} = \alpha(1)\mathcal{S} = \mathcal{S}$, não é possível encontrar $u \leqslant a, 1$ tal que $a \in \alpha(uu^*)\mathcal{S}$, já que isto implicaria $a = 0$. Daí, pelo Lema 4.1.23, $(a\delta_a, a\delta_1) \notin \rho$.

Observação 4.1.25. Se, nas condições do Lema 4.1.23, o semigrupo $\mathcal{S}$ for E-unitário, então $(a\delta_s, b\delta_t) \in \rho$ exatamente quando $(s, t) \in \sigma$ e $a = b$.

De fato, se $\mathcal{S}$ é E-unitário, tem-se $s \sim t \Rightarrow t^*s \in E(\mathcal{S})$. Tomando $v := tt^*s$, tem-se $v \leqslant s, t$ (pois, $v = (tt^*)s = t(t^*s)$). Daí $vv^* = tt^*ss^*tt^* = ss^*tt^*$ e então $a = b \in \alpha(vv^*)A$.

Corolário 4.1.26. *Se $(a\delta_s, b\delta_t) \in \rho$, então dado $c \in A$, tem-se $(ca\delta_s, cb\delta_t) \in \rho$.*

Demonstração. De fato, se $a = b \in \alpha(uu^*)A$, então $ca = cb \in \alpha(uu^*)A$. □

Observação 4.1.27. Sejam $(A, \lambda, \alpha) \in \mathrm{Mod}(\mathcal{S})$ e $a\delta_e, b\delta_f \in L(A, \mathcal{S})$, com $e, f \in E(\mathcal{S})$. Então, $(a\delta_e, b\delta_f) \in \rho$ quando $a = b$.

Pois $ef \leqslant e, f$ e $a = b$ implicam $a = b \in \alpha(e)\alpha(f)A = \alpha(ef)A$.

Levando em conta a Observação 4.1.20, cada classe de ρ contém no máximo um idempotente de $L(A, \mathcal{S})$. Equivalentemente, $\rho^\natural : L(A, \mathcal{S}) \to L(A, \mathcal{S})/\rho = A \rtimes \mathcal{S}$ restrito a $E(L(A, \mathcal{S}))$ é injetivo.

Proposição 4.1.28. *Seja (A, λ, α) um $\mathcal{S}$-módulo, com α epimorfismo. Então, existem um semigrupo inverso $\mathcal{S}'$, um epimorfismo $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ e um $\mathcal{S}'$-módulo $(A, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha})$ tais que*

(i) $(A, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha})$ *é estrito;*

(ii) $\tilde{\lambda} \circ \pi = \lambda$ *em* $\mathcal{S}$ *e* $\tilde{\alpha} \circ \pi = \alpha$ *em* $E(\mathcal{S})$.

Reciprocamente, dados um epimorfismo $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ e um $\mathcal{S}'$-módulo estrito $(A, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha})$, as funções λ e α, determinadas por (ii), munem A com uma estrutura de $\mathcal{S}$-módulo, e além disso, α é sobrejetivo.

Demonstração. A função $\varphi : \mathcal{S} \to L(A, \mathcal{S})$ dada por $\varphi(s) = \alpha(ss^*)\delta_s$, para $s \in \mathcal{S}$ é homomorfismo. De fato,
$$\begin{aligned}\varphi(s)\varphi(t) &= \alpha(ss^*)\delta_s\alpha(tt^*)\delta_t\\ &= \alpha(ss^*)\lambda_s(\alpha(tt^*))\delta_{st}\\ &= \alpha(ss^*)\alpha(stt^*s^*)\delta_{st}\\ &= \alpha(ss^*stt^*s^*)\delta_{st}\\ &= \alpha(stt^*s^*)\delta_{st}\\ &= \varphi(st).\end{aligned}$$

Assim, $\operatorname{im}\varphi$ é subsemigrupo inverso de $L(A, \mathcal{S})$, com $(\alpha(ss^*)\delta_s)^* = \alpha(ss^*)\delta_{s^*}$.

Fixa-se $\pi = \rho^\natural \circ \varphi : \mathcal{S} \to L(A, \mathcal{S})/\rho = A \rtimes \mathcal{S}$. É epimorfismo sobre $\mathcal{S}' := \operatorname{im}\pi$. Além disso, $\mathcal{S}'$ também é inverso e

$$\pi(s)^* = \pi(s^*) = \rho^\natural(\alpha(s^*s)\delta_{s^*}). \tag{4.1.2}$$

Para $a \in A$ e $s \in \mathcal{S}$, tem-se
$$\begin{aligned}\varphi(s) \cdot a\alpha(s^*s)\delta_{s^*} &= \alpha(ss^*)\delta_s \cdot a\alpha(s^*s)\delta_{s^*}\\ &= \alpha(ss^*)\lambda_s(a\alpha(s^*s))\delta_{ss^*}\\ &= \lambda_s(a)\delta_{ss^*} \qquad \text{usando a Observação 4.1.19.}\end{aligned}$$

Assim, aplicando $\rho^\natural$:

$$\pi(s)\rho^\natural(a\alpha(s^*s)\delta_{s^*}) = \rho^\natural(\lambda_s(a)\delta_{ss^*}) \tag{4.1.3}$$

para $a \in A$ e $s \in \mathcal{S}$ arbitrários.

Se $\pi(s) = \pi(t)$, por (4.1.2) e pelo Corolário 4.1.26, tem-se

$$\rho^\natural(a\alpha(s^*s)\delta_{s^*}) = \rho^\natural(a\alpha(t^*t)\delta_{t^*})$$

para $a \in A$ arbitrário. Assim, os lados esquerdos de (4.1.3), correspondentes a s e a t, são iguais, ou seja, $\pi(s)\rho^\natural(a\alpha(s^*s)\delta_{s^*}) = \pi(t)\rho^\natural(a\alpha(t^*t)\delta_{t^*})$, fazendo os lados direitos também iguais, ou seja, $\rho^\natural(\lambda_s(a)\delta_{ss^*}) = \rho^\natural(\lambda_t(a)\delta_{tt^*})$. E pelo Lema 4.1.23, tem-se $\lambda_s = \lambda_t$. Logo, existe uma função $\tilde{\lambda} : \mathcal{S}' \to \operatorname{End} A$ tal que $\tilde{\lambda} \circ \pi = \lambda$. E vê-se que $\tilde{\lambda}$ é homomorfismo.

Como $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ é epimorfismo, os idempotentes de $\mathcal{S}'$ são imagens de idempotentes de $\mathcal{S}$, ou seja, são as classes $\pi(e) = \rho^\natural(\alpha(e)\delta_e)$ (com $e \in E(\mathcal{S})$, $f \in E(A)$, $f \in \alpha(e)$) e $\pi(e_1) = \pi(e_2)$ se, e somente se, $\alpha(e_1) = \alpha(e_2)$, já que ρ separa idempotentes. O que define um monomorfismo $\tilde{\alpha} : E(\mathcal{S}') \to E(A)$, com $\tilde{\alpha} \circ \pi = \alpha$ em $E(\mathcal{S})$ que de fato é isomorfismo pela sobrejetividade de α.

Verifica-se as propriedades do Teorema 4.1.7. Devido à sobrejetividade de π, basta provar

(i') $\tilde{\lambda}_{\pi(e)}(a) = \tilde{\alpha}(\pi(e))a, \forall a \in A, e \in E(\mathcal{S})$;

(ii') $\tilde{\lambda}_{\pi(s)}(\tilde{\alpha}(\pi(e))) = \tilde{\alpha}(\pi(s)\pi(e)\pi(s^*)), \forall s \in \mathcal{S}, e \in E(\mathcal{S})$.

Mas estas são justamente as propriedades do Teorema 4.1.7 para (λ, α) pela definição de $(\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha})$.

A recíproca é direta: se $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ é um epimorfismo, $\tilde{\lambda} : \mathcal{S}' \to \operatorname{End} A$ é homomorfismo e $\tilde{\alpha} : E(\mathcal{S}') \to E(A)$ é isomorfismo tal que $(A, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha})$ é $\mathcal{S}'$-módulo estrito, então $\lambda = \tilde{\lambda} \circ \pi : \mathcal{S} \to \operatorname{End} A$ e $\alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi : E(\mathcal{S}) \to E(A)$ são homomorfismos. Além disso, α é sobrejetivo, pois $\pi(E(\mathcal{S})) = E(\mathcal{S}')$. Como feito acima, as propriedades do Teorema 4.1.7 para (λ, α) são equivalentes às mesmas propriedades para $(\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha})$. Portanto, (A, λ, α) é $\mathcal{S}$-módulo com α sobrejetivo. □

Definição 4.1.29. Dado $(A, \theta) \in \operatorname{pMod}(G)$, define-se o **produto cruzado de** A **e** G como o conjunto $A *_\theta G$ de $a\delta_g$, com $g \in G$, $a \in 1_g A$ e δ_g um símbolo. Com a multiplicação $a\delta_g \cdot b\delta_h = a\theta_g(1_{g^{-1}}b)\delta_{gh}$, tem-se $A *_\theta G$ semigrupo.

Como o domínio de cada θ é ideal unital de A, pelo Corolário 2.2.12, tem-se que tal produto é associativo.

- $(a\delta_g \cdot b\delta_h) \cdot c\delta_t = (a\theta_g(1_{g^{-1}}b)\delta_{gh}) \cdot c\delta_t = a\theta_g(1_{g^{-1}}b)\theta_{gh}(1_{(gh)^{-1}}c)\delta_{ght}$;
- $a\delta_g \cdot (b\delta_h \cdot c\delta_t) = a\delta_g \cdot (b\theta_h(1_{h^{-1}}c)\delta_{ht}) = a\theta_g(1_{g^{-1}}b\theta_h(1_{h^{-1}}c))\delta_{ght}$.

Observação 4.1.30. Sejam $(A, \theta) \in \operatorname{pMod}(G)$ e (A, λ, α) o $\mathcal{S}(G)$-módulo correspondente. Então,

$$A \rtimes \mathcal{S}(G) \simeq A *_\theta G.$$

Constroi-se tal isomorfismo usando o Primeiro Teorema dos Isomorfismos, para homomorfismos entre semigrupos. Primeiramente, nota-se que, dados elementos arbitrários $\beta_1 = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n} \jmath(g)$ e $\beta_2 = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m} \jmath(h)$ em $\mathcal{S}(G)$, tem-se $(\beta_1, \beta_2) \in \sigma$ se, e somente se, $g = h$. Logo, tem-se $(a\delta_{\beta_1}, b\delta_{\beta_2}) \in \rho$ se, e somente se, $a = b$ e $g = h$. Assim, pode-se definir

$$\begin{aligned} \gamma : L(A, \mathcal{S}(G)) &\to A *_\theta G \\ a\delta_{\jmath(g)} &\mapsto a\delta_g. \end{aligned}$$

Tem-se que γ é facilmente verificada sobrejetora. Verifica-se que γ é homomorfismo:

- $$\begin{aligned} \gamma(a\delta_{\jmath(g)} b\delta_{\jmath(h)}) &= \gamma(a\lambda_{\jmath(g)}(b)\delta_{\jmath(g)\jmath(h)}) \\ &= \gamma(a\theta_g(1_{g^{-1}}b)\delta_{\jmath(gh)}) \\ &= a\theta_g(1_{g^{-1}}b)\delta_{gh}; \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \gamma(a\delta_{\jmath(g)})\gamma(b\delta_{\jmath(h)}) &= a\delta_g b\delta_h \\ &= a\theta_g(1_{g^{-1}}b)\delta_{gh}. \end{aligned}$$

O núcleo de γ é composto pelos pares $(a\delta_{\jmath(g)}, b\delta_{\jmath(h)}) \in L(A, \mathcal{S}(G)) \times L(A, \mathcal{S}(G))$ tais que $\gamma(a\delta_{\jmath(g)}) = \gamma(b\delta_{\jmath(h)})$. Mas tal igualdade implica $a\delta_g = b\delta_h$, ou seja, $a = b$ e $g = h$. Portanto, $\ker \gamma = \rho$.

Logo, pelo Primeiro Teorema dos Isomorfismos, existe função injetora $L(A, \mathcal{S}(G))/\rho \to A *_\theta G$. Tal função é, de fato isomorfismo, pois γ era sobrejetora.

Portanto, $\begin{array}{ccc} A \rtimes \mathcal{S}(G) & \to & A *_\theta G \\ \rho^\natural(a\delta_{\jmath(h)}) & \mapsto & a\delta_h \end{array}$ é isomorfismo!

Corolário 4.1.31. *Sejam (A, θ) um G-módulo parcial inverso e $(A, \lambda^\theta, \alpha^\theta)$ o $\mathcal{S}(G)$-módulo (inverso) correspondente. Então, existem um $\mathcal{S}$-módulo estrito (A, λ, α), com $\mathcal{S} = E(A) *_\theta G$, e o epimorfismo $\pi : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}$ definido por $\pi(\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n} \jmath(h)) = 1_{g_1} \cdots 1_{g_n} 1_h \delta_h$ tal que (λ, α) satisfaz o item (ii) da Proposição 4.1.28, para $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$.*

Demonstração. De fato, existe $\pi : \mathcal{S}(G) \to A \rtimes \mathcal{S}(G)$ como na Proposição 4.1.28:

$$\pi(\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n} \jmath(h)) = \rho^\natural(\alpha^\theta(\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n} \varepsilon_h)\delta_{\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n} \jmath(h)}) = \rho^\natural(1_{g_1} \cdots 1_{g_n} 1_h)\delta_{\varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n} \jmath(h)}$$

que se identifica com $1_{g_1} \cdots 1_{g_n} 1_h \delta_h \in E(A) *_\theta G$, como na Observação 4.1.30. □

Observação 4.1.32. Seja $\varphi : A' \to A''$ um morfismo de $\mathcal{S}$-módulos. Então, existe um (único) homomorfismo de semigrupos $\hat{\varphi} : A' \rtimes \mathcal{S} \to A'' \rtimes \mathcal{S}$ tal que $\hat{\varphi}(\rho'^\natural(a\delta_s)) = \rho''^\natural(\varphi(a)\delta_s)$, para $a\delta_s \in L(A', \mathcal{S})$.

Nota-se que pelas condições da Proposição 4.1.9, a função $\overline{\varphi} : L(A', \mathcal{S}) \to L(A'', \mathcal{S})$ definida por $a\delta_s \mapsto \varphi(a)\delta_s$, é um homomorfismo bem definido de semigrupos, e pelo Lema 4.1.23, $\overline{\varphi}(\ker \rho'^\natural) \subseteq \ker \rho''^\natural$, permitindo a definição do homomorfismo $\hat{\varphi} : A' \rtimes \mathcal{S} \to A'' \rtimes \mathcal{S}$ fazendo $\hat{\varphi}(\rho'^\natural(a\delta_s)) = \rho''^\natural(\varphi(a)\delta_s)$.

Observação 4.1.33. Sejam (A', λ', α') e $(A'', \lambda'', \alpha'')$ $\mathcal{S}$-módulos, $(A', \tilde{\lambda}', \tilde{\alpha}')$ e $(A'', \tilde{\lambda}'', \tilde{\alpha}'')$ os módulos estritos correspondentes sobre as imagens $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}''$ dos epimorfismos $\pi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ e $\pi'' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}''$ como na Proposição 4.1.28. Então, um homomorfismo $\varphi : A' \to A''$ é um morfismo entre $\mathcal{S}$-módulos se, e somente se,

(i) $\varphi \circ \tilde{\alpha}'' \circ \pi' = \tilde{\alpha}'' \circ \pi''$, em $E(\mathcal{S})$;

(ii) $\varphi \circ \tilde{\lambda}'_{\pi'(s)} = \tilde{\lambda}''_{\pi''(s)} \circ \varphi, \forall s \in \mathcal{S}$.

Além disso, existe um (único) homomorfismo $\psi : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}''$ satisfazendo $\psi \circ \pi' = \pi''$, tal que os itens anteriores podem ser substituídos por

(i') $\varphi \circ \tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}'' \circ \psi''$, em $E(\mathcal{S}')$;

(ii') $\varphi \circ \tilde{\lambda}'_s = \tilde{\lambda}''_{\psi(s)} \circ \varphi, \forall s \in \mathcal{S}'$.

De fato, pelo item (ii) da Proposição 4.1.28, (i) e (ii) são (i) e (ii) da Proposição 4.1.9 para $\varphi : A' \to A''$. Além disso, devido a $\varphi \circ \alpha' = \alpha''$, o homomorfismo $\hat{\varphi} : A' \rtimes \mathcal{S} \to A'' \rtimes \mathcal{S}$ da Observação 4.1.32 pode ser restrito a um homomorfismo $\psi : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}''$, com $\psi \circ \pi' = \pi''$.

Finalmente, substituindo π'' por $\psi \circ \pi'$ em (i) e (ii), obtém-se (i') e (ii'), por sobrejetividade de π'.

Definição 4.1.34. Dados um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ e um epimorfismo $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, define-se um $\mathcal{S}$-**módulo** π-**estrito** como um par (A, π), com $A = (A, \lambda, \alpha)$ um módulo estrito sobre $\mathcal{S}' = \pi(\mathcal{S})$.

Nota-se que $\mathcal{S}$-módulos id-estritos são os $\mathcal{S}$-módulos estritos da Definição 4.1.8. Omitindo π de (A, π), chama-se A de $\mathcal{S}$-módulo π-estrito. Além disso, se π não for especificado, diz-se que A é um $\mathcal{S}$-**módulo epiestrito**.

Definição 4.1.35. Sejam (A', λ', α') e $(A'', \lambda'', \alpha'')$ $\mathcal{S}$-módulos epiestritos sob os epimorfismos $\pi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ e $\pi'' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}''$, respectivamente. Um **morfismo** $(A', \pi') \to (A'', \pi'')$ entre $\mathcal{S}$-módulos epiestritos é um par (φ, ψ), com $\varphi : A' \to A''$ e $\psi : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}''$ homomorfismos de semigrupos tais que

(i) $\psi \circ \pi' = \pi''$;

(ii) $\varphi \circ \alpha' = \alpha'' \circ \psi$ em $E(S')$;

(iii) $\varphi \circ \lambda'_s = \lambda''_{\psi(s)} \circ \varphi, \forall s \in \mathcal{S}'$.

No caso em que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$ e $\pi' = \pi''$, tem-se $\psi = \mathrm{id}$ e as igualdades (ii) e (iii) dão a definição de morfismos de $\mathcal{S}'$-módulos estritos.

$\mathcal{S}$-módulos epiestritos e seus morfismos formam uma categoria (com composição de morfismos coordenada a coordenada) denotada por $\mathrm{ESMod}(\mathcal{S})$.

Definição 4.1.36. Um $\mathcal{S}$-módulo epiestrito isomorfo a $(A, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha})$ dado na Proposição 4.1.28 é chamado **padrão**.

Agora descreve-se $\mathcal{S}$-módulos epiestritos (A, π) em termos de π. Nota-se que para (A, π) da Proposição 4.1.28, tem-se $\ker \pi \subseteq \sigma$, pela Observação 4.1.22. Na verdade, tal condição caracteriza (A, π) como um módulo epiestrito, se $\mathcal{S}$ é E-unitário.

Proposição 4.1.37. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso E-unitário. (A, λ', α') $\mathcal{S}$-módulo epiestrito, com $\pi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, é padrão se, e somente se,* $\ker \pi' \subseteq \sigma$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Se $(\varphi, \psi) : (A', \pi') \to (A'', \pi'')$ é isomorfismo entre $\mathcal{S}$-módulos epiestritos, então $\psi \circ \pi' = \pi''$ implica $\ker \pi' = \ker \pi''$.

$(\Leftarrow)$: Considera-se o $\mathcal{S}$-módulo (A, λ, α), $\lambda = \lambda' \circ \pi'$ e $\alpha = \alpha' \circ \pi'$. Pela Proposição 4.1.28, tal $\mathcal{S}$-módulo pode ser visto como um módulo π''-estrito (A, λ'', α'') para o correspondente $\pi'' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'' \subseteq A \rtimes \mathcal{S}$ (em particular, $\lambda = \lambda'' \circ \pi''$ e $\alpha = \alpha'' \circ \pi''$). Mostra-se: $\ker \pi' = \ker \pi''$:

- $\ker \pi'' \subseteq \ker \pi'$: E para esta inclusão, $\mathcal{S}$ não precisa ser E-unitário. De fato,

$$\pi''(s) = \pi''(t) \Leftrightarrow (\alpha(ss^*)\delta_s, \alpha(tt^*)\delta_t) \in \rho$$

e, pelo Lema 4.1.23, existe $u \leqslant s, t$ tal que $\alpha(ss^*)\alpha(uu^*) = \alpha(ss^*) = \alpha(tt^*)$. Como $u \leqslant s, t$ implica $uu^* \leqslant ss^*, tt^*$, as igualdades anteriores se reduzem a $\alpha(uu^*) = \alpha(ss^*) = \alpha(tt^*)$. De $\alpha = \alpha' \circ \pi'$, tem-se $\pi'(uu^*) = \pi'(ss^*) = \pi'(tt^*)$, já que α' é bijeção. Logo,

$$\pi'(s) = \pi'(ss^*)\pi'(s) = \pi'(uu^*)\pi'(s) = \pi'(u)$$

e analogamente $\pi'(t) = \pi'(u)$ e, portanto, $\pi'(s) = \pi'(t)$.

- $\ker \pi' \subseteq \ker \pi''$: De fato,

$$\pi'(s) = \pi'(t) \Rightarrow (s, t) \in \sigma \quad \text{pois } \ker \pi' \subseteq \sigma$$

Além disso, $\pi'(ss^*) = \pi'(s)\pi'(s)^* = \pi'(t)\pi'(t)^* = \pi'(tt^*)$ e logo, $\alpha(ss^*) = \alpha(tt^*)$. Assim, pela Observação 4.1.25, $(\alpha(ss^*)\delta_s, \alpha(tt^*)\delta_t) \in \rho$, ou seja, $\pi''(s) = \pi''(t)$.

Como $\ker \pi' = \ker \pi''$, existe um único isomorfismo $\psi : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}''$ satisfazendo $\psi \circ \pi' = \pi''$. As igualdades $\alpha = \alpha' \circ \pi' = \alpha'' \circ \pi''$ e $\lambda = \lambda' \circ \pi' = \lambda'' \circ \pi''$ implicam $\alpha' = \alpha'' \circ \psi$ e $\lambda' = \lambda'' \circ \psi$. Isto significa que $(\mathrm{id}, \psi) : (A, \pi') \to (A, \pi'')$ é isomorfismo em $\mathrm{ESMod}(S)$. □

Corolário 4.1.38. *Nas condições da Proposição 4.1.37, se (A, π') é padrão, então existe um epimorfismo de semigrupos $\eta : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}/\sigma$ tal que $\eta \circ \pi'$ é a função $\sigma^\natural : \mathcal{S} \to \mathcal{S}/\sigma$. Em particular, se A é o $\mathcal{S}(G)$-módulo padrão do Corolário 4.1.31, então η pode ser visto como um epimorfismo $\mathcal{S}' \to G$ por $\eta(1_{g_1} \cdots 1_{g_n} 1_h \delta_h) = h$.*

4.2 Objetos livres na categoria dos $\mathcal{S}$-módulos epiestritos inversos

Seguindo [Lau75], quer-se definir o conceito de objeto livre na categoria $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$, a ser definida a seguir. Para tal, precisa-se definir o conceito de base de um $\mathcal{S}$-módulo epiestrito inverso livre. E este é o objetivo desta seção. Portanto, de agora em diante só serão usados módulos inversos.

Definição 4.2.1. Um $\mathcal{S}$-módulo epiestrito (A, π) é dito **inverso** se A é um semigrupo inverso. A subcategoria de $\mathcal{S}$-módulos epiestritos inversos será denotada por $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$.

Em [Lau75], Lausch define uma base de um $\mathcal{S}$-módulo livre como sendo um $E(\mathcal{S})$-conjunto. Tal $E(\mathcal{S})$-conjunto é uma união disjunta de conjuntos indexados por $E(\mathcal{S})$. Um morfismo entre $E(\mathcal{S})$-conjuntos é uma função que leva a componente e de um conjunto na componente e do outro conjunto, para todo $e \in E(\mathcal{S})$. Tais conjuntos serão aqui denominados $E(\mathcal{S})$-**conjuntos estritos**. No entanto, define-se um conceito mais geral de $E(\mathcal{S})$-conjunto.

Definição 4.2.2. Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ semigrupos inversos e $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ um epimorfismo. Um $E(\mathcal{S})$**-conjunto** π**-estrito** é um par (T, π), com T um $E(\mathcal{S}')$-conjunto estrito.

Nota-se que $E(\mathcal{S})$-conjuntos id-estritos são identificados com os $E(\mathcal{S})$-conjuntos estritos descritos acima. Como anteriormente, π será frequentemente omitido e um $E(\mathcal{S})$-conjunto π-estrito cujo π não está explícito será chamado $E(\mathcal{S})$**-conjunto epiestrito**. Usa-se a notação T_e para a componente e de T $(e \in E(\mathcal{S}'))$.

Definição 4.2.3. Dados dois $E(\mathcal{S})$-conjuntos epiestritos $(T', \pi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}')$ e $(T'', \pi'' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'')$, um **morfismo entre** $E(\mathcal{S})$**-conjuntos epiestritos** é um par (φ, ψ), com $\psi : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}''$ homomorfismo de semigrupos satisfazendo $\psi \circ \pi' = \pi''$ e $\varphi : T' \to T''$ uma função tal que $\varphi(T'_e) \subseteq T''_{\psi(e)}$, $\forall e \in E(\mathcal{S}')$.

Se $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$ e $\pi' = \pi''$, então (φ, ψ) é morfismo entre $E(\mathcal{S})$-conjuntos epiestritos se, e somente se, $\psi = \mathrm{id}$ e φ é morfismo, no sentido de [Lau75], entre $E(\mathcal{S}')$-conjuntos estritos. A categoria de $E(\mathcal{S})$-conjuntos epiestritos e morfismos será denotada por $\mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$.

Observação 4.2.4. Cada $\mathcal{S}$-módulo π-estrito inverso é um $E(\mathcal{S})$-conjunto π-estrito e cada morfismo de $\mathcal{S}$-módulos epiestritos inversos é um morfismo entre $E(\mathcal{S})$-conjuntos epiestritos.

Um $\mathcal{S}$-módulo π'-estrito inverso (A, λ, α), com $\pi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, é um $\mathcal{S}'$-módulo estrito inverso, logo é um $E(\mathcal{S}')$-conjunto. Sua e-componente é $A_e = \{a \in A \mid aa^* = \alpha(e)\}$.

Agora, se $(\varphi, \psi) : (A', \pi') \to (A'', \pi'')$ é um morfismo entre $\mathcal{S}$-módulos epiestritos inversos e $a \in A'_e$, para $e \in E(\mathcal{S}')$, tem-se

$$\varphi(a)\varphi(a)^* = \varphi(aa^*) = \varphi(\alpha'(e)) = \alpha''(\psi(e))$$

e, então $\varphi(a) \in A''_{\psi(e)}$. Com isso, tem-se um funtor de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ em $\mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$ que leva o $\mathcal{S}$-módulo (A, π) no $E(\mathcal{S})$-conjunto correspondente. Ou seja, construiu-se um funtor esquecimento de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ em $\mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$.

Definição 4.2.5. Um módulo $F \in \mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ é **livre** sobre um conjunto $T \in \mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$ se existe morfismo $(\imath, \kappa) : T \to F$ em $\mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$ tal que, para quaisquer $A \in \mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ e morfismo $(\varphi, \psi) : T \to A$ em $\mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$ existe um único morfismo $(\breve{\varphi}, \breve{\psi}) : F \to A$ em $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ tal que $(\varphi, \psi) = (\breve{\varphi}, \breve{\psi}) \circ (\imath, \kappa)$.

Explicita-se a construção de Lausch, feita em [Lau75], de um $\mathcal{S}$-módulo livre (estrito). Dado um $E(\mathcal{S})$-conjunto T, define-se $F = F(T)$ como a união disjunta das componentes F_e, em que cada F_e é o grupo abeliano livre sobre

$$\{(s,t) \in \mathcal{S} \times T : ss^* = e, t \in T_f, \text{ para algum } f \geqslant s^*s\}.$$

A soma entre elementos $(s,t) \in F_e$ e $(s',t') \in F_{e'}$ de diferentes componentes é a soma formal

$$(e's,t) + (es',t') \in F_{ee'}$$

e tal soma está bem definida pois

- $(e's)(e's)^* = e'ss^*e'^* = ss^*e' = ee' \Rightarrow e's \in F_{ee'}$;
- $(es')(es')^* = es's'^*e = es's'^* = ee' \Rightarrow es' \in F_{ee'}$.

A estrutura de $\mathcal{S}$-módulo é definida por

$$\lambda^F_{s'}(s,t) = (s's,t) \quad \text{e} \quad \alpha^F(e) = 0_e$$

em que 0_e é o zero de F_e. O mergulho $\imath : T \to F$ é dado por:

$$T_e \ni t \mapsto (e,t) \in F_e. \tag{4.2.1}$$

Observação 4.2.6. Cada (s,t), com $t \in T_f$, pode ser escrito $\lambda^F_s(f,t)$, pois $s^*s \leqslant f$ implica

$$sf = (ss^*s)f = s(s^*sf) = s(s^*s) = s.$$

Proposição 4.2.7. *Para qualquer $E(\mathcal{S})$-conjunto epiestrito $(T, \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}')$ existe um $\mathcal{S}$-módulo epiestrito inverso livre $F(T)$ sobre T.*

Demonstração. Como $(T, \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}')$ é $E(\mathcal{S}')$-conjunto, pela Proposição 3.1 de [Lau75], existe um $\mathcal{S}'$-módulo livre (de Lausch) $(F(T), \lambda^{F(T)}, \alpha^{F(T)})$ que portanto pode ser considerado com um $\mathcal{S}$-módulo π-estrito. Mostra-se que $F(T)$ é livre sobre T em $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$.

Seja $\imath : T \to F(T)$ o mergulho (4.2.1). Como observado depois da Definição 4.2.3, o par $(\imath, \mathrm{id})$ é morfismo em $\mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$. Sejam um módulo $(A, \lambda, \alpha) \in \mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ e $(\varphi, \psi) : T \to A \in \mathrm{ESSet}(\mathcal{S})$. Usa-se a notação aditiva para A. Precisa-se encontrar $(\breve{\varphi}, \breve{\psi})$ em $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ tal que $\breve{\varphi} \circ \imath = \varphi$ e $\breve{\psi} \circ \mathrm{id} = \psi$. A segunda condição implica imediatamente $\breve{\psi} = \psi$. A primeira determina unicamente $\breve{\varphi}$ como um homomorfismo satisfazendo o item (iii) da Definição 4.1.35. De fato, toma-se $(s,t) \in F(T)_e$, com $t \in T_f$, e nota-se, pela Observação 4.2.6, que $\breve{\varphi}(s,t) = \breve{\varphi} \circ \lambda^{F(T)}_s(f,t)$ que deveria ser igual a $\lambda_{\psi(s)} \circ \breve{\varphi}(f,t) = \lambda_{\psi(s)} \circ \breve{\varphi} \circ \imath(t) = \lambda_{\psi(s)}(\varphi(t))$. Logo

$$\breve{\varphi}\left(\sum a_{s,t}(s,t)\right) = \sum a_{s,t}\lambda_{\psi(s)}(\varphi(t))$$

e o item (iii) da Definição 4.2.3 é verificado. Além disso, como $\varphi(T_e) \subseteq A_{\psi(e)}$, para todo $e \in E(\mathcal{S}')$, tem-se

$$\lambda_{\psi(s)}(\varphi(t)) \in \lambda_{\psi(s)}(A_{\psi(f)}) \subseteq A_{\psi(s)\psi(f)\psi(s)^*} = A_{\psi(sfs^*)} = A_{\psi(ss^*)} = A_{\psi(e)}$$

e assim, $\breve{\varphi}$ é um homomorfismo de $F(T)_e$ para $A_{\psi(e)}, \forall e \in E(\mathcal{S}')$. Logo, $\breve{\varphi}$ leva o zero $\alpha^{F(T)}(e)$ de F_e ao zero $\alpha(\psi(e))$ de $A_{\psi(e)}$ e o item (ii) da Definição 4.2.3 também é verificado. Resta mostrar que $\breve{\varphi}$ é homomorfismo de semigrupos (aqui, escritos aditivamente). Para $(s,t) \in F(T)_e$ e $(s',t') \in F(T)_{e'}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\breve{\varphi}((s,t)+(s',t')) &= \breve{\varphi}((e's,t)+(es',t')) \\
&= \lambda_{\psi(e's)}(\varphi(t)) + \lambda_{\psi(es')}(\varphi(t')) \\
&= [\alpha(\psi(e')) + \lambda_{\psi(s)}(\varphi(t))] + [\alpha(\psi(e)) + \lambda_{\psi(s')}(\varphi(t'))] \\
&= [\alpha(\psi(e)) + \lambda_{\psi(s)}(\varphi(t))] + [\alpha(\psi(e')) + \lambda_{\psi(s')}(\varphi(t'))] \\
&= \lambda_{\psi(s)}(\varphi(t)) + \lambda_{\psi(s')}(\varphi(t')) \\
&= \breve{\varphi}(s,t) + \breve{\varphi}(s',t').
\end{aligned}$$

□

Definição 4.2.8. A subcategoria plena de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$ formada pelos objetos (A,π) com o mesmo $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ será chamada π-**componente** de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$.

Observação 4.2.9. Nota-se que qualquer morfismo entre elementos de uma π-componente fixa, com $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, tem a forma $(\varphi, \mathrm{id}_{\mathcal{S}'})$. Então tal componente é isomorfa à categoria de $\mathcal{S}'$-módulos estritos inversos. Em particular, é uma categoria abeliana.

Observação 4.2.10. O módulo epiestrito inverso $F(T)$ livre sobre $(T, \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}')$ pertence a π-componente de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$. Além disso, é projetivo nesta componente. De fato, pelo Corolário 3.2 de [Lau75], $F(T)$ é um $\mathcal{S}'$-módulo estrito inverso.

Corolário 4.2.11. *Existem módulos epiestritos não padrão.*

Por exemplo, considera-se um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ com $\sigma \neq \mathcal{S}^2$ e o epimorfismo $\pi : \mathcal{S} \to 0$ ao semigrupo nulo. Claramente, $\mathcal{S}^2 = \ker \pi \nsubseteq \sigma$. Então, para qualquer conjunto π-estrito T, o $\mathcal{S}$-módulo π-estrito inverso livre $F(T)$ não é padrão.

Segundo as Proposições 4.1.2 e 4.1.28, o Teorema 4.1.7 e a Observação 4.1.17, cada G-módulo parcial inverso pode ser visto como um $\mathcal{S}(G)$-módulo epiestrito inverso.

Definição 4.2.12. Sejam A um G-módulo parcial inverso e T um $E(\mathcal{S}(G))$-conjunto epiestrito. O módulo A é dito **livre** sobre T se o $\mathcal{S}(G)$-módulo epiestrito inverso correspondente é livre sobre T em $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S}(G))$.

Agora constroi-se um G-módulo parcial inverso livre. Dada $\Gamma : G \to M$ representação parcial do grupo G no monoide M, seja $\Gamma(G)$ o submonoide de M gerado por $\Gamma(g)$, $g \in G$. Então, $\Gamma(G)$ é imagem epimórfica de $\mathcal{S}(G)$ e toda imagem epimórfica $\pi(\mathcal{S}(G))$ de $\mathcal{S}(G)$ pode ser obtida desta forma, fazendo $\Gamma = \pi \circ \jmath$, com $\jmath : G \to \mathcal{S}(G)$ dado por $\jmath(g) = (\{1_G, g\}, g)$. Tem-se que $\Gamma(G)$ é monoide inverso com $\Gamma(g)^* = \Gamma(g^{-1})$.

Aplicando π em $\varepsilon_g = \jmath(g)\jmath(g^{-1})$ obtem-se $\pi(\varepsilon_g) = ((\pi \circ \jmath)(g))((\pi \circ \jmath)(g^{-1})) = \Gamma(g)\Gamma(g^{-1})$ e escreve-se $e_g = \Gamma(g)\Gamma(g^{-1}) = \pi(\varepsilon_g)$. Os elementos e_g são idempotentes que comutam dois a dois e tem-se, para todos $g, h \in G$:

$$\begin{aligned} e_{gh}\Gamma(g) &= \Gamma(gh)\Gamma(h^{-1}g^{-1})\Gamma(g) \\ &= \Gamma(gh)\Gamma(h^{-1}g^{-1}g) \\ &= \Gamma(gh)\Gamma(h^{-1}) \\ &= \Gamma(g)\Gamma(h)\Gamma(h^{-1}) \\ &= \Gamma(g)e_h. \end{aligned}$$

Seja E o submonoide de $\Gamma(G)$ gerado pelos idempotentes e_g. Cita-se [DN10, Teorema 6] (adaptado a esse caso):

Teorema 4.2.13. *As funções $\theta_g : E_{g^{-1}} \to E_g$, $g \in G$, definidas por*

$$\theta_g(e) = \begin{cases} \Gamma(g)e\Gamma(g^{-1}) & \textit{se } E_{g^{-1}} \neq 0, \\ 0 & \textit{se } E_{g^{-1}} = 0, \end{cases}$$

definem uma ação parcial $\theta = \theta^\Gamma$ de G em E, e a função $\psi : E *_\theta G \to \Gamma(G)$, definida por $a\delta_g \mapsto a\Gamma(g)$ é epimorfismo entre semigrupos.

Tem-se que $\Gamma(G)$ é imagem epimórfica de $E *_\theta G$, com $\theta = \theta^\Gamma = \{\theta_g : E_{g^{-1}} \to E_g\}$ a ação parcial de G em E correspondente a Γ, com $E_g = e_g E$, $\theta_g(e) = \Gamma(g)e\Gamma(g^{-1})$, para $e \in E_{g^{-1}}$. Segue que $\Gamma(G)$ é a união (não necessariamente disjunta)

$$\Gamma(G) = \bigcup_{g \in G} E_g \Gamma(g)$$

Além disso, como se tem um epimorfismo $\mathcal{S}(G) \to \Gamma(G)$, obtem-se $E = E(\Gamma(G))$, o conjunto de todos os idempotentes de $\Gamma(G)$.

Dado $s = e\Gamma(g)$ (com $e \in E_g$) em $\Gamma(G)$, escreve-se $e = e_g e_{h_1} \cdots e_{h_k}$ ($h_1, \ldots, h_k \in G$) e então

- $$\begin{aligned} ss^* &= e_g e_{h_1} \cdots e_{h_k} \Gamma(g)\Gamma(g)^* e^*_{h_k} \cdots e^*_{h_1} e^*_g \\ &= e_g e_{h_1} \cdots e_{h_k} \\ &= e; \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} s^*s &= \Gamma(g)^* e^*_{h_k} \cdots e^*_{h_1} e^*_g e_g e_{h_1} \cdots e_{h_k} \Gamma(g) \\ &= \Gamma(g^{-1}) e^*_{h_k} \cdots e^*_{h_1} e^*_g e_g e_{h_1} \cdots e_{h_k} \Gamma(g) \\ &= e_{g^{-1}h_k} \Gamma(g^{-1}) e_{h_{k-1}} \cdots e^*_{h_1} e^*_g e_g e_{h_1} \cdots e_{h_k} \Gamma(g) \\ &= \ldots \\ &= e_{g^{-1}h_k} e_{g^{-1}h_{k-1}} \cdots e_{g^{-1}h_1} e_{g^{-1}}; \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\Gamma(g^{-1})e\Gamma(g) &= \Gamma(g^{-1})e_g e_{h_1}\cdots e_{h_k}\Gamma(g)\\ &= e_{1_G}e_{g^{-1}h_1}\cdots e_{g^{-1}h_k}\Gamma(g^{-1})\Gamma(g)\\ &= \theta_{g^{-1}}(e).\end{aligned}$$

Dado um E-conjunto estrito $T = \coprod_{e\in E} T_e$, o G-módulo parcial inverso livre $F(T)$ sobre T pode ser especificado como segue. Fixado $e \in E$, seja $\Gamma_e = \{e\Gamma(g) \in \Gamma(G) \mid g \in G, e \in E_g\}$. A condição $e \in E_g$ significa que e pode ser escrito como $e = e_g e_{h_1}\cdots e_{h_k}$, com $h_1,\ldots,h_k \in G$. Observa-se que Γ_e consiste nos elementos $s \in \Gamma(G)$ tais que $ss^* = e$. Agora, para um $s = e\Gamma(g) \in \Gamma_e$ arbitrário, seja $E(s) := \{f \in E \mid f \geqslant s^*s\}$. Em particular, $E(s)$ contém todos $f \in E$ que podem ser escritos da forma $f = (e_{g^{-1}})^\nu \prod_{i\in I} e_{g^{-1}h_i}$, com $\nu \in \{0,1\}$ e $I \subseteq \{1,\ldots,k\}$ (I também pode ser o conjunto vazio). Se $\nu = 0$ e $I = \emptyset$, faz-se $f = 1_M$. Agora, faz-se $T(s) := \bigcup_{f\in E(s)} T_f$. Então, a e-componente $F(T)_e$ de $F(T)$ é o grupo abeliano livre gerado por $B_e := \{(s,t) \mid s \in \Gamma_e, t \in T(s)\}$. Denota-se por $1_{(e)}$ a identidade de $F(T)_e$ e escreve-se $1_g = 1_{e_g}$, $g \in G$. Os elementos de $\coprod_{e\in E} B_e$ serão chamados geradores canônicos de $F(T)$. O produto entre os geradores canônicos $(s,t) \in F(T)_e$ e $(s',t') \in F(T)_{e'}$ de componentes diferentes é $(es',t')(e's,t) \in F(T)_{ee'}$.

A ação parcial correspondente $\theta^{F(T)}$ de G em $F(T)$ consiste nos isomorfismos $\theta_g^{F(T)} : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$, com $\mathcal{D}_g = 1_g F(T) = \coprod_{e\in E_g} F(T)_e$, $g \in G$, e $\theta_g^{F(T)}(s,t) = (\Gamma(g)s,t)$, para qualquer gerador canônico (s,t) pertencente a $\mathcal{D}_{g^{-1}}$. Se $(s,t) \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$, então $s = e_{g^{-1}}e\Gamma(h)$, para $e \in E$, $h \in G$ tais que $e_{g^{-1}}ee_h = e_{g^{-1}}e$. Assim,

$$\theta_g^{F(T)}(e_{g^{-1}}e\Gamma(h),t) = (\theta_g(e_{g^{-1}}e)\Gamma(gh),t).$$

Escrevendo $e = e_h e_{k_1}\cdots e_{k_l}$, com $k_1,\ldots,k_l \in G$, tem-se $\theta_g(e_{g^{-1}}e) = e_g e_{gh} e_{gk_1}\cdots e_{gk_l}$. Um elemento $a \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$ pertence a alguma componente $F(T)_e$ e pode ser escrito $a = (s_1,t_1)^{n_1}\cdots(s_r,t_r)^{n_r}$, com $n_i \in \mathbb{Z}$ e tem-se

$$\theta_g^{F(T)}(a) = (\theta_g^{F(T)}(s_1,t_1))^{n_1}\cdots(\theta_g^{F(T)}(s_r,t_r))^{n_r}.$$

4.3 Cohomologia parcial de grupos e cohomologia de semigrupos inversos

Começando com um $\mathcal{S}$-módulo estrito A, (ou seja, com um $\mathcal{S}$-módulo de Lausch), tem-se que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-,A)$ é funtor aditivo de uma categoria abeliana à categoria Ab e, segundo [Lau75], sua cohomologia é seu funtor derivado aplicado ao $\mathcal{S}$-módulo $\mathbb{Z}_{\mathcal{S}}$ com $(\mathbb{Z}_{\mathcal{S}})_e = \{n_e \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $n_e + m_f = (n+m)_{ef}$, $\lambda_s^{\mathbb{Z}_{\mathcal{S}}}(n_e) = n_{ses^*}$, $\alpha^{\mathbb{Z}_{\mathcal{S}}}(e) = 0_e$. Logo, $H^n_{\mathcal{S}}(A)$ pode ser calculado tomando-se uma resolução projetiva apropriada de $\mathbb{Z}_{\mathcal{S}}$.

Definição 4.3.1. Os **grupos de cohomologia** de um semigrupo inverso $\mathcal{S}$ com valores num $\mathcal{S}$-módulo epiestrito inverso $(A, \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}')$ são $H^n(\mathcal{S}, A) = H^n_{\mathcal{S}'}(A)$, em que A é tomado como $\mathcal{S}'$-módulo estrito do lado direito da igualdade.

Nas condições acima, denota-se por $\mathrm{Hom}_\pi(-, A)$ a restrição de $\mathrm{Hom}(-, A)$ a π-componente de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$. Agora, a cohomologia acima é seu funtor derivado aplicado ao $\mathcal{S}$-módulo π-estrito inverso $\mathbb{Z}_{\mathcal{S}'}$ com $(\mathbb{Z}_{\mathcal{S}'})_e = \{n_e \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $n_e + m_f = (n+m)_{ef}$, $\lambda_s^{\mathbb{Z}_{\mathcal{S}'}}(n_e) = n_{ses^*}$, $\alpha^{\mathbb{Z}_{\mathcal{S}'}}(e) = 0_e$. Logo, $H^n(\mathcal{S}, A)$ pode ser calculado tomando-se uma resolução projetiva apropriada de $\mathbb{Z}_{\mathcal{S}'}$ na π-componente de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S})$. Mas, para $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ e $(A, \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}')$ vindo de um $(A, \theta) \in \mathrm{pMod}(G)$ inverso, pode-se construir uma resolução livre de $\mathbb{Z}_{\mathcal{S}'}$ tal que os grupos de cohomologia correspondentes com valores em (A, π) são $H^n(G, A)$.

Definição 4.3.2. Seja $\Gamma : G \to \mathcal{S}$ um homomorfismo parcial do grupo G no monoide inverso $\mathcal{S}$. Para n um inteiro positivo, denota-se por V_n o $E(\mathcal{S})$-conjunto estrito cuja e-componente é o conjunto (que pode ser vazio) das n-uplas ordenadas $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ tal que $e_{(g_1,\dots,g_n)} = e$, em que $e_{(g_1,\dots,g_n)}$ é o idempotente

$$e_{g_1} e_{g_1 g_2} \cdots e_{g_1 \cdots g_n} = \Gamma(g_1) \cdots \Gamma(g_n) \Gamma(g_n)^* \cdots \Gamma(g_1)^*.$$

Para $n = 0$ define-se $(V_n)_e$ como sendo o conjunto unitário $\{(\ )\}$ se $e = 1_{\mathcal{S}}$ e vazio, caso contrário. O $\mathcal{S}$-módulo livre sobre V_n será denotado por R_n.

Lema 4.3.3. *Sejam (A, θ) um G-módulo parcial inverso e (A, λ, α) o $\mathcal{S}(G)$-módulo π-estrito inverso (padrão) correspondente, $\pi : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}$. Seja $\Gamma = \pi \circ \jmath : G \to \mathcal{S}$ e considera-se $R_n = R_n(\Gamma)$ um elemento da π-componente de* $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S}(G))$*. Então, o grupo abeliano* $\mathrm{Hom}_\pi(R_n, A)$ *é isomorfo a $C^n(G, A)$.*

Demonstração. Como R_n é o $\mathcal{S}$-módulo livre sobre $V_n = V_n(\Gamma)$, cada morfismo de R_n para A é determinado por seus valores em V_n. Assim, $\mathrm{Hom}_\pi(R_n, A)$ pode ser identificado com o conjunto de morfismos de $E(\mathcal{S}(G))$-conjuntos π-estritos de V_n para A. Um par (φ, ψ) é um tal morfismo se, e somente se, $\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$ e $\varphi(v) \in A_e$, $\forall v \in (V_n)_e$.

Se $n = 0$, então φ é identificado com a imagem de $(\ ) \in (V_n)_{1_{\mathcal{S}}}$, que deveria pertencer a $A_{1_{\mathcal{S}}}$, ou seja, deveria ser invertível com respeito a $\alpha(1_{\mathcal{S}}) = \alpha \circ \pi(1_{\mathcal{S}(G)}) = \alpha^\theta(1_{\mathcal{S}(G)}) = 1_A$. Logo, $\mathrm{Hom}_\pi(R_0, A) \simeq \mathcal{U}(A) = C^0(G, A)$.

Para $n > 0$, a função φ pode ser vista como uma função $G^n \to A$ tal que $\varphi(g_1, \dots, g_n) \in A_e$, em que $e = e_{(g_1,\dots,g_n)}$. Por definição, A_e consiste em $a \in A$ invertíveis com respeito a

$$\alpha(e) = \alpha^\theta(\varepsilon_{g_1} \varepsilon_{g_1 g_2} \cdots \varepsilon_{g_1 \cdots g_n}) = 1_{g_1} 1_{g_1 g_2} \cdots 1_{g_1 \cdots g_n}.$$

Assim, $A_e = \mathcal{U}(A_{(g_1,\dots,g_n)})$ e logo, $\mathrm{Hom}_\pi(R_n, A) \simeq C^n(G, A)$. □

Definição 4.3.4. Nas condições da Definição 4.3.2, para $n \geqslant 1$, define-se o morfismo de $\mathcal{S}$-módulos $\partial_n : R_n \to R_{n-1}$ por

$$\begin{aligned}\partial_n(g_1, \cdots, g_n) &= (\Gamma(g_1)e_{(g_2,\cdots,g_n)}, (g_2, \cdots, g_n)) \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(e_{(g_1,\cdots,g_n)}, (g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_n)) \\ &+(-1)^n(e_{(g_1,\cdots,g_n)}, (g_1, \cdots, g_{n-1})), n > 1. \\ \partial_1(g) &= (\Gamma(g), (\,)) - (e_g, (\,))\end{aligned}$$

e $\epsilon : R_0 \to \mathbb{Z}_S$ por $(\,) \mapsto 1_{1_\mathcal{S}}$.

Lema 4.3.5. *Nas condições do Lema 4.3.3, para $n \geqslant 0$ e $f \in C^n(G, A)$ arbitrário, tem-se $\delta^n f = f \circ \partial_{n+1}$, em que f e $\delta^n f$ são tomados como homomorfismos de $\mathcal{S}(G)$-módulos π-estritos $R_n \to A$ e $R_{n+1} \to A$, respectivamente.*

Demonstração. Denota-se por $\imath_n$ o mergulho natural $V_n \to R_n$ dado em (4.2.1). Se $n = 0$, então $f \in C^0(G, A)$ considerado como $f : R_0 \to A$ é identificado com $f(\imath_0(\,)) = a \in \mathcal{U}(A)$, em que $\imath_0(\,) = (1_\mathcal{S}, (\,))$. Assim, para $g \in G$:

$$\begin{aligned}f(\partial_1(g)) &= f(\Gamma(g), (\,))f(e_g, (\,))^* \\ &= f(\lambda_{\Gamma(g)}(1_\mathcal{S}, (\,)))f(\lambda_{e_g}(1_\mathcal{S}, (\,)))^* \\ &= \lambda_{\Gamma(g)}f((1_\mathcal{S}, (\,)))\lambda_{e_g}f(1_\mathcal{S}, (\,))^* \\ &= \lambda_{\Gamma(g)}(a)\lambda_{e_g}(a)^* \\ &= \lambda^\theta_{\jmath(g)}(a)\lambda^\theta_{\varepsilon_g}(a)^* \\ &= \theta_g(a1_{g^{-1}})(a1_g)^* \\ &= \theta_g(a1_{g^{-1}})a^*1_g \\ &= \theta_g(a1_{g^{-1}})a^* \\ &= (\delta^0 a)(g).\end{aligned}$$

Agora, sejam $n > 0$ e $f \in C^n(G, A)$. Considerando f como o morfismo $R_n \to A$, nota-se

$$f(g_1, \cdots, g_n) = f(\imath(g_1, \cdots, g_n)) = f(e_{(g_1,\cdots,g_n)}, (g_1, \cdots, g_n)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}f(\partial_{n+1}(g_1, \cdots, g_{n+1})) &= \lambda_{\Gamma(g_1)}(f(g_2, \cdots, g_{n+1})) \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_{e_{(g_1,\cdots,g_{n+1})}}(f(g_1, \ldots, g_ig_{i+1}, \ldots, g_{n+1}))(-1)^i \\ &\lambda_{e(g_1,\cdots,g_{n+1})}(f(g_1, \cdots, g_n))^{(-1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Como visto acima, $\lambda_{\Gamma(g)}(a) = \theta_g(a1_{g^{-1}})$ e $\lambda_{e_g}(a) = a1_g$. Portanto,

$$f(\partial_{n+1})(g_1, \cdots, g_{n+1}) = (\delta^n f)(g_1, \cdots, g_{n+1})1_{g_1} \cdots 1_{g_1\cdots g_{n+1}} = (\delta^n f)(g_1, \cdots, g_{n+1})$$

pois $(\delta^n f)(g_1, \cdots, g_{n+1}) \in A_{(g_1,\cdots,g_{n+1})}$ □

Corolário 4.3.6. *Nas condições do Lema 4.3.3, para $n \geqslant 2$, a composição $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ é o morfismo nulo de R_n para R_{n-2} na π-componente de* $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S}(G))$.

Demonstração. De fato, o módulo (A,π) é padrão por construção. Como $\mathcal{S}(G)$ é E-unitário, pela Proposição 4.1.37, qualquer módulo da π-componente da categoria $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S}(G))$ é padrão e, em particular, todo R_n tem essa propriedade. Assim, sem perda de generalidade, pode-se assumir que (R_n,π) é obtido a partir de algum G-módulo parcial inverso (R_n,θ_n), $\forall n \geqslant 0$. Tomando $A' = R_{n-2}$ e $f = \mathrm{id}_{R_{n-2}} \in \mathrm{Hom}_\pi(R_{n-2},A')$, pelo Lema 4.3.5 e pela Proposição 2.1.6, tem-se

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\circ\partial_n &= (f\circ\partial_{n-1})\circ\partial_n \\ &= \delta^{n-2}f\circ\partial_n && (4.3.5) \\ &= \delta^{n-1}\delta^{n-2}f && (4.3.5) \\ &= e_n && (2.1.6) \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.3.3, a cocadeia e_n pode ser vista como o morfismo $R_n \to R_{n-2}$ que leva cada elemento de $(V_n)_e$ ao zero de $(R_{n-2})_e$, $e \in E(\mathcal{S})$. Então, $e_n = 0 \in \mathrm{Hom}_\pi(R_n, R_{n-2})$. □

Definição 4.3.7. Nas condições do Lema 4.3.3, sejam $\eta : \mathcal{S} \to G$ como no Corolário 4.1.38 e $\forall n \geqslant 0$, define-se o morfismo $\sigma_n : R_n \to R_{n+1}$ de $E(\mathcal{S})$-conjuntos π-estritos como segue. Em cada e-componente de R_n, é o homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} (R_n)_e &\to (R_{n+1})_e \\ (s,(g_1,\ldots,g_n)) &\mapsto (ss^*,(\eta(s),g_1,\ldots,g_n)). \end{aligned}$$

Define-se também $\tau : \mathbb{Z}_\mathcal{S} \to R_0$ como o homomorfismo $(\mathbb{Z})_e \to (R_0)_e$ tal que $\tau(1_e) = (e,(\,))$, $e \in E(\mathcal{S})$.

O fato de σ_n estar bem-definida segue do próximo lema.

Lema 4.3.8. *Nas condições da Definição 4.3.7, tem-se* $\forall g \in G, s \in \mathcal{S}$:

(i) $\eta(\Gamma(g)) = g$;

(ii) $ss^*\Gamma(\eta(s)) = s$;

(iii) $s\Gamma(\eta(s)^*) = ss^*$.

Demonstração. Nota-se que $\eta\circ\pi$ é o epimorfismo natural $\mathcal{S}(G) \to G$, então $\eta(\Gamma(g)) = \eta(\pi(\jmath(g))) = g$ e tem-se o item (i). Se $s = \pi(\varepsilon_{g_1}\cdots\varepsilon_{g_n}\jmath(h))$, então $\eta(s) = h$ e $\Gamma(\eta(s)) = \Gamma(h) = \pi(\jmath(h))$ e seguem os itens (ii) e (iii) das igualdades em $\mathcal{S}(G)$. □

Agora mostra-se que $(ss^*,(\eta(s),g_1,\ldots,g_n))$ na Definição 4.3.7 é um elemento de R_{n+1}, ou seja: $(ss^*)^*(ss^*) = ss^* \leqslant e_{(\eta(s),g_1,\ldots,g_n)}$.

$$\begin{aligned} ss^*e_{(\eta(s),g_1,\ldots,g_n)} &= \underbrace{ss^*\Gamma(\eta(s))}\,e_{(g_1,\ldots,g_n)}\Gamma(\eta(s)^*) \\ &= \underbrace{se_{(g_1,\ldots,g_n)}}\,\Gamma(\eta(s)^*) \\ &= s\Gamma(\eta(s)^*) \\ &= ss^* \end{aligned}$$

em que na penúltima igualdade foi usado: $s^*s \leqslant e_{(g_1,\ldots,g_n)} \Rightarrow s^*se_{(g_1,\ldots,g_n)} = s^*s$ e multiplicando essa igualdade acima por s: $ss^*se_{(g_1,\ldots,g_n)} = ss^*s$, ou seja: $se_{(g_1,\ldots,g_n)} = s$.

Teorema 4.3.9. *Nas condições do Lema 4.3.3:*

(i) $\operatorname{im}\partial_1 \subseteq \ker\epsilon$*;*

(ii) $\partial_1 \circ \sigma_0 + \tau \circ \epsilon = \mathrm{id}_{R_0}$*;*

(iii) $\partial_{n+1} \circ \sigma_n + \sigma_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{id}_{R_n}, \forall n \geqslant 1.$

Demonstração.

(i) Para $g \in G$, tem-se
$$\begin{aligned}\epsilon(\partial_1(g)) &= \epsilon(\Gamma(g), (\,)) - \epsilon(e_g, (\,))\\ &= \lambda^{\mathbb{Z}\mathcal{S}}_{\Gamma(g)}(1_{1_\mathcal{S}}) - \lambda^{\mathbb{Z}\mathcal{S}}_{e_g}(1_{1_\mathcal{S}})\\ &= 1_{\Gamma(g)\Gamma(g)^*} - 1_{e_g}\\ &= 0_{e_g}\end{aligned}$$

(ii) É suficiente verificar a igualdade num gerador arbitrário $(s, (\,))$ de $(R_0)_{ss^*}$.
$$\begin{aligned}(\partial_1 \circ \sigma_0 + \tau \circ \epsilon)(s, (\,)) &= \partial_1(ss^*, (\eta(s))) + \tau(\lambda^{\mathbb{Z}\mathcal{S}}_s(1_{1_\mathcal{S}}))\\ &= (ss^*\Gamma(\eta(s)), (\,)) - (ss^*e_{\eta(s)}, (\,)) + \tau(1_{ss^*})\\ &= (s, (\,)) - (ss^*\Gamma(\eta(s))\Gamma(\eta(s))^*, (\,)) + (ss^*, (\,))\\ &= (s, (\,)) - (s\Gamma(\eta(s))^*, (\,)) + (ss^*, (\,))\\ &= (s, (\,)) - (ss^*, (\,)) + (ss^*, (\,))\\ &= (s, (\,)).\end{aligned}$$

(iii) Toma-se um gerador $(s, (g_1, \ldots, g_n))$ de $(R_n)_{ss^*}$.

Calcula-se primeiramente $\partial_{n+1} \circ \sigma_n(s, (g_1, \ldots, g_n))$.

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}\circ\ &\sigma_n(s, (g_1, \ldots, g_n)) = \partial_{n+1}(ss^*, (\eta(s), g_1, \ldots, g_n))\\ &= (ss^*\Gamma(\eta(s))e_{(g_1,\ldots,g_n)}, (g_1, \ldots, g_n))\\ &-(ss^*e_{(\eta(s),g_1,\ldots,g_n)}, (\eta(s)g_1, g_2, \ldots, g_n))\\ &+\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}(ss^*e_{(\eta(s),g_1,\ldots,g_n)}, (\eta(s), g_1, \ldots, g_ig_{i+1}, \ldots, g_n))\\ &+(-1)^{n+1}(ss^*e_{(\eta(s),g_1,\ldots,g_n)}, (\eta(s), g_1, \ldots, g_{n-1}))\\ &= (se_{(g_1,\ldots,g_n)}, (g_1, \ldots, g_n))\\ &-(ss^*, (\eta(s)g_1, g_2, \ldots, g_n))\\ &+\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}(ss^*, (\eta(s), g_1, \ldots, g_ig_{i+1}, \ldots, g_n))\\ &(-1)^{n+1}(ss^*, (\eta(s), g_1, \ldots, g_{n-1})).\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Além disso, nota-se: $se = s \Rightarrow sf = s, \forall f \geqslant e$, pois $sf = sef = se = s$. Logo,
$$\begin{aligned}s\Gamma(g_1)e_{(g_2,\ldots,g_n)} &= se_{(g_1g_2,g_3,\ldots,g_n)}\\ &= s\Gamma(g_1)\end{aligned}$$

já que $e_{(g_1g_2,\ldots,g_n)} \geqslant e_{(g_1,\ldots,g_n)}$.

Calcula-se agora $\sigma_{n-1} \circ \partial_n(s, (g_1, \ldots, g_n))$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{n-1}\circ \quad & \partial_n(s,(g_1,\ldots,g_n)) = \sigma_{n-1}(s\Gamma(g_1)e_{(g_2,\ldots,g_n)},(g_2,\ldots,g_n)) \\
& + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{n-1}(se_{g_1,\ldots,g_n},(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_n)) \\
& +(-1)^n\sigma_{n-1}(se_{(g_1,\ldots,g_n)},(g_1,\ldots,g_{n-1})) \\
& = \sigma_{n-1}(s\Gamma(g_1),(g_2,\ldots,g_n)) \\
& + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{n-1}(s,(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_n)) \\
& +(-1)^n\sigma_{n-1}(s,(g_1,\ldots,g_{n-1})) \\
& = (s\Gamma(g_1)\Gamma(g_1)^*s^*,(\eta(s\Gamma(g_1)),g_2,\ldots,g_n)) \\
& + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(ss^*,(\eta(s),g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_n)) \\
& +(-1)^n(ss^*,(\eta(s),g_1,\ldots,g_{n-1})) \\
& = (ss^*,(\eta(s)g_1,g_2,\ldots,g_n)) \\
& + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(ss^*,(\eta(s),g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_n)) \\
& +(-1)^n(ss^*,(\eta(s),g_1,\ldots,g_{n-1}))
\end{aligned}
\tag{4.3.2}
$$

Somando (4.3.1) e (4.3.2) obtém-se $(s, (g_1, \ldots, g_n))$, como desejado.

$\square$

Pelo Corolário 4.3.6 e pelo item (i) do Teorema 4.3.9, tem-se que a sequência

$$
\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} R_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} R_1 \xrightarrow{\partial_1} R_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_{\mathcal{S}} \to 0 \tag{4.3.3}
$$

é complexo de $\mathcal{S}(G)$-módulos. Além disso, segue do item (ii) do Teorema 4.3.9 que, se $x \in \ker\epsilon$, tem-se que $(\partial_1 \circ \sigma_0 + \tau \circ \epsilon)(x) = \mathrm{id}_{R_0}(x)$ implica $x = \partial_1(\sigma_0(x))$, ou seja, $x \in \operatorname{im}\partial_1$. Por sua vez, segue do item (ii) do mesmo teorema que, se $x \in \ker\partial_n$, tem-se que $(\partial_{n+1} \circ \sigma_n + \sigma_{n-1} \circ \partial_n)(x) = \mathrm{id}_{R_n}(x)$ implica $x = \partial_{n+1}(\sigma_n(x))$, ou seja, $x \in \operatorname{im}\partial_{n+1}$. Assim, para o complexo (4.3.3), tem-se $\ker\epsilon \subseteq \operatorname{im}\partial_1$ e $\ker\partial_n \subseteq \operatorname{im}\partial_{n+1}$, $\forall n \geqslant 1$.

Logo, tem-se que o complexo (4.3.3) na verdade é uma sequência exata de $\mathcal{S}(G)$-módulos e tem-se o seguinte resultado.

Corolário 4.3.10. *Nas condições do Lema 4.3.3, a sequência*

$$
\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} R_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} R_1 \xrightarrow{\partial_1} R_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_{\mathcal{S}} \to 0
$$

em que 0 é o zero da π-componente de $\mathrm{InvESMod}(\mathcal{S}(G))$, é uma resolução livre de $\mathbb{Z}_{\mathcal{S}}$ cujos grupos de cohomologia com valores em A são isomorfos a $H^n(G, A)$.

Corolário 4.3.11. *Nas condições do Lema 4.3.3, tem-se $H^n(G, A) \simeq H^n(\mathcal{S}(G), A)$, $\forall n \geqslant 0$.*

Apêndice A

O complexo $C^\bullet(G, A)$

O objetivo desse apêndice é demonstrar a igualdade (2.1.2) da Proposição 2.1.6. Mas antes, relembra-se alguns conceitos necessários.

Primeiramente, a Definição 2.1.4, que se encontra originalmente na página 24.

Definição 2.1.4. Sejam $A \in \mathrm{pMod}(G)$ e n um inteiro positivo. Uma n-**cocadeia de** G **com valores em** A é uma função $f : G^n \to A$ tal que $f(g_1, \cdots, g_n)$ é um elemento invertível do ideal $A_{(g_1,\cdots,g_n)} := A_{g_1}A_{g_1g_2}\cdots A_{g_1\cdots g_n}$. Uma 0-**cocadeia** é um elemento invertível de A.

Como feito na mesma página 24, denota-se o conjunto de n-cocadeias por $C^n(G, A)$. Tal conjunto é um grupo abeliano com a multiplicação ponto a ponto. A identidade é $e_n(g_1, \cdots, g_n) = 1_{g_1}1_{g_1g_2}\cdots 1_{g_1\cdots g_n}$ e o inverso de $f \in C^n(G, A)$ é $f^{-1}(g_1, \cdots, g_n) := f(g_1, \cdots, g_n)^{-1}$, em que $f(g_1, \cdots, g_n)^{-1}$ é o inverso de $f(g_1, \cdots, g_n)$ em $A_{(g_1,\cdots,g_n)}$.

Reescreve-se agora, a Definição 2.1.5.

Definição 2.1.5. Sejam $(A, \theta) \in \mathrm{pMod}(G)$ e n um inteiro positivo.

Dados $f \in C^n(G, A)$ e $g_1, \cdots, g_{n+1} \in G$, define-se

$$\begin{aligned}(\delta^n f)(g_1, \cdots g_{n+1}) \quad &= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2, \cdots g_{n+1})) \\ &\prod_{i=1}^n f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^i} \\ &f(g_1, \cdots, g_n)^{(-1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Os inversos são tomados nos ideais correspondentes.

Se $n = 0$ e $a \in A$ é invertível, faz-se $(\delta^0 a)(x) = \theta_g(1_{g^{-1}}a)a^{-1}$.

Finalmente, reescreve-se o enunciado da Proposição 2.1.6 e demonstra-se somente a equação (2.1.2).

Proposição 2.1.6. $\delta^n : C^n(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$ é um homomorfismo tal que

$$\delta^{n+1}\delta^n f = e_{n+2}$$

$\forall f \in C^n(G, A)$.

Demonstração. De fato, para $g_1, \cdots, g_{n+1} \in G$, $f(g_2, \cdots, g_{n+1})$, tem-se:

$$\begin{array}{rcll} (\delta^{n+1}\delta^n f)(g_1,\dots,g_{n+2}) & = & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}\delta^n f(g_2,\dots,g_{n+2})) & (1) \\ & & \displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} \delta^n f(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+2})^{(-1)^i} & (2) \\ & & \delta^n f(g_1,\dots,g_{n+1})^{(-1)^{n+2}} & (3) \end{array} \tag{A.1}$$

Parte da linha (1) de (A.1) é:

$$\begin{aligned} \delta^n f(g_2,\dots,g_{n+2}) = {} & \theta_{g_2}(1_{g_2^{-1}} f(g_3,\dots,g_{n+2})) \\ & \prod_{i=2}^{n+1} f(g_2,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+2})^{(-1)^{i-1}} \\ & f(g_2,\dots,g_{n+1})^{(-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

então, (1) fica:

$$\begin{aligned} \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}\delta^n f(g_2,\dots,g_{n+2})) = {} & \theta_{g_1}[1_{g_1^{-1}}\theta_{g_2}(1_{g_2^{-1}} f(g_3,\dots,g_{n+2})) \\ & \prod_{i=2}^{n+1} f(g_2,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+2})^{(-1)^{i-1}} \\ & f(g_2,\dots,g_{n+1})^{(-1)^{n+1}}] \end{aligned}$$

arrumando:

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}\delta^n f(g_2,\dots,g_{n+2})) = {} & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}\theta_{g_2}(1_{g_2^{-1}} f(g_3,\dots,g_{n+2}))) \; (*_1) \\ & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} \prod_{i=2}^{n+1} f(g_2,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+2})^{(-1)^{i-1}}) \; (*_2) \\ & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2,\dots,g_{n+1})^{(-1)^{n+1}}) \; (*_3) \end{aligned}}$$

A linha (2) de (A.1), para $i = 1$, é:

$$\begin{aligned} \delta^n f(g_1g_2, g_3,\cdots,g_{n+2}) = {} & \theta_{g_1g_2}(1_{g_2{}^{-1}g_1{}^{-1}} f(g_3,\cdots,g_{n+2})) \\ & f((g_1g_2)g_3,\cdots,g_{n+2})^{(-1)} \\ & \prod_{i=3}^{n+1} f(g_1g_2, g_3,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+2})^{(-1)^{i+1}} \\ & f(g_1g_2,\cdots,g_{n+1})^{(-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

então, (2) para $i = 1$ fica:

$$\begin{aligned}\delta^n f(g_1g_2, g_3, \cdots, g_{n+2})^{(-1)} = {} & \theta_{g_1g_2}(1_{g_2^{-1}g_1^{-1}} f(g_3, \cdots, g_{n+2}))^{(-1)} \\ & f((g_1g_2)g_3, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^2} \\ & \prod_{i=3}^{n+1} f(g_1g_2, g_3, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^{i+1+1}} \\ & f(g_1g_2, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{n+1+1}}\end{aligned}$$

arrumando:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta^n f(g_1g_2, g_3, \cdots, g_{n+2})^{(-1)} = {} & \theta_{g_1g_2}(1_{g_2^{-1}g_1^{-1}} f(g_3, \cdots, g_{n+2}))^{(-1)} \ (*_1) \\ & f((g_1g_2)g_3, \cdots, g_{n+2})^{(+1)} \ (\triangle_1) \\ & \prod_{i=3}^{n+1} f(g_1g_2, g_3, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^i} \ (\triangle_2) \\ & f(g_1g_2, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^n} \ (\triangle_3)\end{aligned}}$$

A linha (2) de (A.1), para $2 \leqslant i \leqslant n$, é:

$$\begin{aligned}\delta^n f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2}) = {} & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2})) \\ & \prod_{j=1}^{i-2} f(g_1, \cdots, g_jg_{j+1}, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^j} \\ & \prod_{j=i+2}^{n} f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_jg_{j+1}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^{j+1}} \\ & f(g_1, \cdots, g_{i-1}(g_ig_{i+1}), \cdots, g_{n+2})^{(-1)^{i-1}} \\ & f(g_1, \cdots, (g_ig_{i+1})g_{i+2}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^i} \\ & f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{n+1}}\end{aligned}$$

então, (2) para $2 \leqslant i \leqslant n$ fica:

$$\begin{aligned}\delta^n f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^i} = {} & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2}))^{(-1)^i} \\ & \prod_{j=1}^{i-2} f(g_1, \cdots, g_jg_{j+1}, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^{j+i}} \\ & \prod_{j=i+2}^{n} f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_jg_{j+1}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^{i+j+1}} \\ & f(g_1, \cdots, g_{i-1}(g_ig_{i+1}), \cdots, g_{n+2})^{(-1)^{2i-1}} \\ & f(g_1, \cdots, (g_ig_{i+1})g_{i+2}, \cdots, g_{n+2})^{(-1)^{2i}} \\ & f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{i+n+1}}\end{aligned}$$

arrumando:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta^n f(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+2})^{(-1)^i} &= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f(g_2,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+2}))^{(-1)^i}\ (*_2)\\ &\prod_{j=1}^{i-2} f(g_1,\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+2})^{(-1)^{j+i}}\ (\triangle_2)\\ &\prod_{j=i+2}^{n} f(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_{n+2})^{(-1)^{i+j+1}}\ (\triangle_2)\\ &f(g_1,\cdots,g_{i-1}(g_ig_{i+1}),\cdots,g_{n+2})^{(-1)}\ (\triangle_1)\\ &f(g_1,\cdots,(g_ig_{i+1})g_{i+2},\cdots,g_{n+2})^{(+1)}\ (\triangle_1)\\ &f(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+1})^{(-1)^{i+n+1}}\ (\triangle_3)\end{aligned}}$$

A linha (2) de (A.1), para $i = n+1$, é:

$$\begin{aligned}\delta^n f(g_1,\cdots,g_{n+1}g_{n+2}) &= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f(g_2,\cdots,g_{n+1}g_{n+2}))\\ &\prod_{j=1}^{n-1} f(g_1,\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_{n+1}g_{n+2})^{(-1)^j}\\ &f(g_1,\cdots,g_n(g_{n+1}g_{n+2}))^{(-1)^n}\\ &f(g_1,\cdots,g_n)^{(-1)^{n+1}}\end{aligned}$$

então, (2), para $i = n+1$ fica:

$$\begin{aligned}\delta^n f(g_1,\cdots,g_{n+1}g_{n+2})^{(-1)^{n+1}} &= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f(g_2,\cdots,g_{n+1}g_{n+2}))^{(-1)^{n+1}}\\ &\prod_{j=1}^{n-1} f(g_1,\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_{n+1}g_{n+2})^{(-1)^{j+n+1}}\\ &f(g_1,\cdots,g_n(g_{n+1}g_{n+2}))^{(-1)^{n+n+1}}\\ &f(g_1,\cdots,g_n)^{(-1)^{n+1+n+1}}\end{aligned}$$

arrumando:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta^n f(g_1,\cdots,g_{n+1}g_{n+2})^{(-1)^{n+1}} &= \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}f(g_2,\cdots,g_{n+1}g_{n+2}))^{(-1)^{n+1}}\ (*_2)\\ &\prod_{j=1}^{n-1} f(g_1,\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_{n+1}g_{n+2})^{(-1)^{j+n+1}}\ (\triangle_2)\\ &f(g_1,\cdots,g_n(g_{n+1}g_{n+2}))^{(-1)}\ (\triangle_1)\\ &f(g_1,\cdots,g_n)^{(+1)}\ (\triangle_4)\end{aligned}}$$

A linha (3) de (A.1) é:

$$\begin{aligned}\delta^n f(g_1, \cdots, g_{n+1}) = {} & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2, \cdots, g_{n+1})) \\ & \prod_{i=1}^{n} f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^i} \\ & f(g_1, \cdots, g_n)^{(-1)^{n+1}}\end{aligned}$$

então, (3) fica:

$$\begin{aligned}\delta^n f(g_1, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{n+2}} = {} & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{n+2}}) \\ & \prod_{i=1}^{n} f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{i+n+2}} \\ & f(g_1, \cdots, g_n)^{(-1)^{n+1+n+2}}\end{aligned}$$

arrumando:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta^n f(g_1, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{n+2}} = {} & \theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}} f(g_2, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{n}}) \ (*_3) \\ & \prod_{i=1}^{n} f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^{i+n}} \ (\triangle_3) \\ & f(g_1, \cdots, g_n)^{(-1)} \ (\triangle_4)\end{aligned}}$$

O produto de todos os fatores indicados com $*$, exceto $(*_1)$, é $e_{n+2}(g_1, \ldots, g_{n+2})$ para $n \geqslant 1$. Para $n = 0$, tal produto é $e_1(g_1)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\theta_{g_1}(1_{g_1^{-1}}\theta_{g_2}(1_{g_2^{-1}} f(g_3, \ldots, g_{n+2}))) &= \theta_{g_1}(\theta_{g_2}(1_{g_2^{-1}} 1_{g_2^{-1}g_1^{-1}} f(g_3, \ldots, g_{n+2}))) \\ &= \theta_{g_1 g_2}(1_{g_2^{-1}} 1_{g_2^{-1}g_1^{-1}} f(g_3, \ldots, g_{n+2}))\end{aligned}$$

pelo item (AP3').

Multiplicando os dois termos indicados com $(*_1)$:

$$\begin{aligned}&\theta_{g_1 g_2}(1_{g_2^{-1}} 1_{g_2^{-1}g_1^{-1}} f(g_3, \ldots, g_{n+2}))\theta_{g_1 g_2}(1_{g_2^{-1}g_1^{-1}} f(g_3, \cdots, g_{n+2})^{(-1)}) \\ &= \theta_{g_1 g_2}(1_{g_2^{-1}} 1_{g_2^{-1}g_1^{-1}} e_n(g_3, \ldots, g_{n+2})) \\ &= 1_{g_1} 1_{g_1 g_2} e_n(g_1 g_2 g_3, g_4, \ldots, g_{n+2}) \\ &= e_{n+2}(g_1, \ldots, g_{n+2}).\end{aligned}$$

O produto de todos os fatores indicados com $\triangle$ aparecem com seus inversos e multiplicando tais pares, obtém-se o produto de alguns dos idempotentes $1_{g_1}, 1_{g_1 g_2}, \ldots$.

Por exemplo, para $(\triangle_1)$:

$$\begin{aligned}
&f((g_1g_2)g_3, \cdots, g_{n+2})^{(+1)} \\
&\prod_{i=2}^{n} f(g_1, \cdots, g_{i-1}(g_ig_{i+1}), \cdots, g_{n+2})^{(-1)} \\
&\prod_{i=2}^{n} f(g_1, \cdots, (g_ig_{i+1})g_{i+2}, \cdots, g_{n+2})^{(+1)} \\
&f(g_1, \cdots, g_n(g_{n+1}g_{n+2}))^{(-1)}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

O produto $f((g_1g_2)g_3, \cdots, g_{n+2})^{(+1)} f((g_1g_2)g_3, \cdots, g_{n+2})^{(-1)}$ (que corresponde à primeira linha de (A.2) multiplicada ao termo para $i = 2$ do primeiro produtório) fica:

$$\begin{aligned}
f((g_1g_2)g_3, \cdots, g_{n+2})^{(+1)} f((g_1g_2)g_3, \cdots, g_{n+2})^{(-1)} \\
= e_n(g_1g_2g_3, g_4, \ldots, g_{n+2}) \\
= 1_{g_1g_2g_3} 1_{g_1g_2g_3g_4} \cdots 1_{g_1 \cdots g_{n+2}}.
\end{aligned}$$

A partir daí, tomando o termo para $i = k$ do primeiro produtório e multiplicando pelo termo para $i = k - 1$ do segundo produtório, tem-se

$$\begin{aligned}
f(g_1, \cdots, g_{k-1}(g_kg_{k+1}), \cdots, g_{n+2})^{(-1)} f(g_1, \cdots, (g_{k-1}g_k)g_{k+1}, \cdots, g_{n+2})^{(+1)} \\
= e_n(g_1, \ldots, g_{k-1}g_kg_{k+1}, \ldots, g_{n+2}) \\
= 1_{g_1} 1_{g_1g_2} \cdots 1_{g_1 \cdots g_{k-2}} 1_{g_1 \cdots g_{k+1}} \cdots 1_{g_1 \cdots g_{n+2}}, \quad \text{para } 3 \leqslant k \leqslant n.
\end{aligned}$$

Resta o termo para $i = n$ do segundo produtório, que multiplicado pela última linha de (A.2) fica:

$$\begin{aligned}
f(g_1, \cdots, g_n(g_{n+1}g_{n+2}))^{(+1)} f(g_1, \cdots, g_n(g_{n+1}g_{n+2}))^{(-1)} \\
= e_n(g_1, \cdots, g_ng_{n+1}g_{n+2}) \\
= 1_{g_1} \cdots 1_{g_1 \cdots g_{n-1}} 1_{g_1 \cdots g_{n+2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\delta^{n+1}\delta^n f)(g_1, \ldots, g_{n+2}) = e_{n+2}(g_1, \ldots, g_{n+2})$. $\square$

REFERÊNCIAS

[DE05] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Transactions of the American Mathematical Society **357** (2005), 1931–1952.

[DES08] M. Dokuchaev, R. Exel, and J. J. Simón, *Crossed products by twisted partial actions and graded algebras*, Journal of Algebra **320** (2008), no. 8, 3278–3310.

[DES10] ______, *Globalization of twisted partial actions*, Transactions of the American Mathematical Society **362** (2010), no. 8, 4137–4160.

[DK15] M. Dokuchaev and M. Khrypchenko, *Partial cohomology of groups*, Journal of Algebra **427** (2015), no. 0, 142 – 182.

[DN10] M. Dokuchaev and B. Novikov, *Partial projective representations and partial actions*, Journal of Pure and Applied Algebra **214** (2010), no. 3, 251–268.

[Exe98] R. Exel, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups*, Proceedings of the American Mathematical Society **126** (1998), no. 12, 3481–3494.

[Hig96] P. M. Higgins, *Epis from locally inverse semigroups are onto*, Semigroup Forum **52** (1996), no. 1, 49–53 (English).

[How76] J. M. Howie, *An introduction to semigroup theory*, L.M.S. monographs, Academic Press, 1976.

[KL04] J. Kellendonk and M. V. Lawson, *Partial actions of groups*, International Journal of Algebra and Computation **14** (2004), no. 01, 87–114.

[Lau75] H. Lausch, *Cohomology of inverse semigroups*, Journal of Algebra **35** (1975), no. 1, 273–303.

[Law98] M. V. Lawson, *Inverse semigroups: The theory of partial symmetries*, World Scientific, 1998.