UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RODNNY JESUS MENDOZA FAKHYE

APLICAÇÃO DA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA NO ESTUDO DE PROBLEMAS DINÂMICOS EM SEÇÕES DE BARRAGENS DE GRAVIDADE DE CONCRETO USANDO FORMULAÇÃO MULTI-PATCH

CURITIBA

2017

RODNNY JESUS MENDOZA FAKHYE

APLICAÇÃO DA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA NO ESTUDO DE PROBLEMAS DINÂMICOS EM SEÇÕES DE BARRAGENS DE GRAVIDADE DE CONCRETO USANDO FORMULAÇÃO MULTI-PATCH

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia dos Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

F176a Mendoza Fakhye, Rodnny Jesus.
Aplicação da análise isogeométrica no estudo de problemas dinâmicos em seções de barragens de gravidade de concreto usando formulação multi-patch. / Rodnny Jesus Mendoza Fakhye. – Curitiba, 2019.
165 f.: il

Orientador: Professor Doutor Roberto Dalledone Machado.
Coordenadora: Dr.ª Liliana Madalena Gramani.
Tese (Doutorado em Ciências) – Universidade Federal do Paraná – Setor de Ciências Exatas – Programa de Pós-Graduação Métodos Numéricos em Engenharia.
Inclui bibliografia

1. Análise Isogeométrica – teses 2. Barragens – teses 3. NURBS – teses.4. Vibrações – teses I. Professor Doutor Roberto Dalledone Machado. II. Universidade Federal do Paraná (Campus Curitiba). Setor de Ciências Exatas, – Programa de Pós-Graduação Métodos Numéricos em Engenharia. III. Titulo.

CDU: 519.67:627.82

Bibliotecária: Maria Angenária da França CRB9/1789

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS
EM ENGENHARIA - 40001016030P0

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **RODNNY JESUS MENDOZA FAKHYE** intitulada: **APLICAÇÃO DA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA NO ESTUDO DE PROBLEMAS DINÂMICOS EM SEÇÕES DE BARRAGENS DE GRAVIDADE DE CONCRETO USANDO FORMULAÇÃO MULTI-PATCH**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 27 de Setembro de 2017.

ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Presidente da Banca Examinadora

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA
Avaliador Interno (UFPR)

HSU YANG SHANG
Avaliador Externo (PUCPR)

MARCOS ARNDT
Avaliador Interno (UFPR)

JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO
Avaliador Externo (PUC/PR)

À minha esposa Tânia pela imensa paciência ao longo desta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Roberto Dalledone Machado pela orientação, paciência e ensinamentos transmitidos na realização deste trabalho.

A minha família em especial à minha mãe e meus irmãos, pelo incansável apoio em toda minha vida.

A todos os professores e colegas do Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia, turma DINTER – Unioeste – FPTI/CEASB.

A todo o pessoal funcionários e dirigentes da Fundação Parque Tecnológico Itaipu (FPTI) que através do Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens (CEASB) fizeram realidade este Doutorado.

RESUMO

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma abordagem relativamente recente que permite a discretização de um meio contínuo usando como funções de aproximação as funções geradas na construção de um modelo sólido ou de um modelo CAD (*Computer Aided Design*). Nesta formulação as funções de aproximação são aquelas empregadas tradicionalmente em computação gráfica, conhecidas como NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*). Por outro lado, no projeto de barragens a correta avaliação das solicitações de natureza dinâmica é de fundamental importância para garantir a segurança e estabilidade da estrutura. O presente trabalho pretende incorporar a AIG ao ferramental disponível para a análise deste tipo de estrutura. Como os modelos CAD são extensivamente utilizados tanto em projetos novos como em modelos gerados através do resgate de documentação pré-digital, a utilização da AIG abre a possibilidade de integração dos processos de desenho e análise, e também a realização de estudos de segurança em modelos recuperados. No presente estudo inicialmente são mostradas aplicações da AIG na análise de problemas de elasticidade bidimensional com o objetivo de validar a formulação. Em seguida é obtida a resposta dinâmica em problemas de vibrações livres e vibrações forçadas em seções transversais de barragens com e sem modelagem do subsolo. Para este propósito foi incorporada à formulação inicial a alternativa de utilização de *patches*. Os *patches* em AIG são artifícios de discretização que permitem trabalhar com subdomínios dentro do problema, facilitando a discretização de geometrias irregulares ou a manipulação de domínios, onde as propriedades físicas não são uniformes. Em seguida mostra-se o desempenho observado e discutem-se futuras aplicações. Os resultados obtidos com AIG nas aplicações estudadas mostram a aplicabilidade do método e resultados promissores. A utilização de *patches* agrega flexibilidade na capacidade de modelagem de diversos problemas. O desempenho observado da AIG permite confirmar as potencialidades deste método como ferramenta no projeto de barragens e estruturas.

Palavras-chave: NURBS. Análise Isogeométrica. *Patches*. Vibrações. Barragens.

ABSTRACT

Isogeometric Analysis (IGA) is a recent approach that allows the discretization of a continuous medium using as approximation functions, functions generated in the construction of a solid model or a Computer Aided Design (CAD) model. In this formulation the approximation functions are those used traditionally in computer graphics, known as NURBS (Non Uniform Rational B-Splines). On the other hand, in dam design the correct evaluation of the dynamic loadings has fundamental importance to guarantee the security and stability of the structure. The present work intends to incorporate IGA to the group of tools available for the analysis of this type of structures. Since CAD models are extensively used in both, new designs and models generated from rescue of pre-digital documentation, the use of IGA makes possible the integration of the design and analysis processes, as well as the realization of safety studies in recovered CAD models. In the present study, applications of IGA in two dimensional elasticity problems are presented in order to validate the formulation. Then the dynamic response is obtained for problems of free and forced vibrations of dam sections with and without underground modeling. For this purpose in the initial formulation the ability to work with subdomains through patches is introduced. IGA patches allow working with irregular geometries and problems where physical properties are not uniform. The observed performance is shown and future applications are discussed. The response obtained with IGA in the examples studied shows that the performance of the method is satisfactory. Incorporation of patches introduces a great flexibility in the modeling capacity for diverse problems, opening up a great range of possibilities of application in other areas. The results obtained also confirm the potential of IGA as a tool for the design of dams and structures.

Keywords: NURBS. Isogeometric analysis. Patches. Vibrations. Dams.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Usina Hidrelétrica de Itaipu 27

Figura 2 – Arranjo da Barragem de Itaipu 28

Figura 3 – Desenhos originais do Bloco de contraforte – Trecho E da Barragem de Itaipu..... 31

Figura 4 - Modelos CAD gerados a partir de recuperação de dados da Barragem de Itaipu..... 31

Figura 5 – Descrição do algoritmo de De Casteljau por ele mesmo..... 35

Figura 6 – Ideia original de Bézier para representação de uma curva 36

Figura 7 - Curva de Bézier de segundo grau 39

Figura 8 - Curva de Bézier de grau 3 39

Figura 9 - Curva *B-Spline* com dois segmentos quadráticos..... 40

Figura 10 - Funções base de grau 0,1, 2 e 3 e vetores de nós de controle correspondentes..... 42

Figura 11 – Exemplo de refinamento *h* numa curva B-*Spline* quadrática..... 44

Figura 12 – Exemplo de refinamento *p*. Curva quadrática para cúbica..... 45

Figura 13 – (a) Inserção de nós e elevação de grau (b) refinamento *k*..... 46

Figura 14 – Função base de superfície B-Spline obtida por produto tensorial..... 48

Figura 15 - Funções base NURBS quadráticas para um vetor de nós de controle aberto não uniforme $\Xi = [0,0,0,1,2,2,4,5,5,5]$ e pesos $W = [1,1,1,1,1,1,1,1]$ .51

Figura 16 - Curvas NURBS quadráticas com $\Xi = [0,0,0,1,2,3,3,3]$ e $\mathbf{w} = [1,1,w,1]$ 51

Figura 17 – (a) Malha de controle e (b) Malha física para uma superfície *NURBS* biquadrática de dois elementos isogeométricos com 12 pontos de controle, $\Xi = \{0,0,0,.5,1,1,1\}$, $\mathrm{H} = \{0,0,0,1,1,1\}$ e $\mathbf{W} = \{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$ .52

Figura 18 – Domínios utilizados na AIG..... 61

Figura 19 – Problema bidimensional em AIG (a) Domínio físico (b) Domínio paramétrico e funções base 67

Figura 20 – Exemplo de discretização usando 4 *patches* com diferentes graus de refinamento (a) Geometria inicial (b) Um ciclo de refinamento *h* (c) Dois ciclos de refinamento *h* (d) Três ciclos de refinamento *h.* 70

Figura 21 - Seções típicas numa barragem de gravidade..... 72

Figura 22 - Placa quadrada sob tensão uniforme (a) Problema inicial (b) Condições de contorno e modelagem do problema considerando simetria. 84
Figura 23 – Resultados obtidos para placa sob tensão uniforme com um elemento isogeométrico biquadrático (a) Discretização (b) Deslocamentos u_x (c) Tensão σ_{xx}. 85
Figura 24 – Discretização e solução para o deslocamento u_x para: (a) Um ciclo de refinamento *h* (b) Dois ciclos de refinamento *h* (c) Três ciclos de refinamento *h*..... 86
Figura 25 – Malhas com elementos distorcidos para o problema de placa sob tensão uniforme. O número de elementos de cada discretização é (a) 2 elementos (b) 4 elementos (c) 32 elementos 87
Figura 26 - Resultados para o deslocamento u_x obtidos para o problema de placa sob tensão uniforme com elementos distorcidos..... 88
Figura 27 – Campo de tensões para a malha com elementos distorcidos para (a) malha inicial (b) um ciclo de refinamento (c) dois ciclos de refinamento .. 89
Figura 28 – (a) Discretização (b) Resultados para o deslocamento u_x (c) Resultados para as tensões σ_x para o problema de placa quadrada sob tensão uniforme usando ANSYS..... 90
Figura 29 – Placa infinita com furo circular..... 91
Figura 30 – Malha com dois elementos isogeométricos quadráticos para o problema de placa com furo. 92
Figura 31 – Discretizações e número de GDL's usando refinamento *h* (a) um ciclo de refinamento (b) dois ciclos de refinamento (c) três ciclos de refinamento (4) quatro ciclos de refinamento. 93
Figura 32 – Mapa das tensões σ_x obtidas para as quatro discretizações mostradas na Figura 31. 94
Figura 33 – Convergência da solução para o exemplo da placa com furo circular. .. 94
Figura 34 – Placa tracionada com furo circular para solução com *patches* múltiplos. 95
Figura 35 – Problema da placa quadrada com furo (a) Discretização inicial dos *patches* (b) discretização com um ciclo de refinamento (c) Discretização com dois ciclos de refinamento (d) Discretização com três ciclos de refinamento 96

Figura 36 – Discretização nos quatro *patches* depois de aplicar quatro ciclos de refinamento *h*.....97
Figura 37 – Campo de tensões normas na direção *x* para o problema de placa com furo circular resolvido através de patches múltiplos.(a) Com um ciclo de refinamento *h*. (b) Com dois ciclos de refinamento *h* (c) com três ciclos de refinamento *h* (d) com quatro ciclos de refinamento h. Tensões em N/m^2. 98
Figura 38 – Convergência do fator de concentração *k* no exemplo da placa quadrada com furo usando AIG.....99
Figura 39 - Viga engastada – livre. Geometria e seção transversal.....101
Figura 40 – Discretização inicial com quatro elementos isogeométricos quadráticos para o problema de frequências naturais de vibração em vigas. 102
Figura 41 – Variação do erro relativo em função dos GDL para as nove frequências de vibração analisadas. Viga engasta e livre. 103
Figura 42 – Descrição da deformação dos quatro primeiros modos naturais de vibração para a viga engastada e livre.....104
Figura 43 - Viga engastada – engastada. Geometria e seção transversal.....105
Figura 44 - Variação do erro relativo em função dos GDL para as nove frequências de vibração analisadas. Viga engastada - engastada. 106
Figura 45 – Configuração da malha dos patches para o problema de viga engastada-livre.....107
Figura 46 – Malhas para o problema de viga engastada- livre com solução com *patches* com vários graus de refinamento.....108
Figura 47 - Variação do erro relativo em função dos GDL no modelo com *patches* para as seis frequências de vibração analisadas. Viga engasta e livre..109
Figura 48 - Seção transversal de uma barragem de gravidade de concreto com base fixa e contornos livres.....110
Figura 49 – Malha da solução de referência usando o programa ANSYS 111
Figura 50 – Malhas para a solução por AIG (a) Malha inicial (b) Com um ciclo de refinamento *h* (c) Com dois ciclos de refinamento *h* (d) Com três ciclos de refinamento *h* 112
Figura 51 – Estudo de convergência das frequências naturais de vibração obtidas usando AIG. 112
Figura 52 – Dados geométricos da viga engastada e livre usada na Seção 5.2.3..113

Figura 53 – Descrição da força pulso retangular P(t), para o problema 5.2.3 113
Figura 54 – Malha inicial da viga para o problema 5.2.3 usando AIG 114
Figura 55 – Análise de convergência das soluções de AIG com respeito à solução de referência obtida com ANSYS 115
Figura 56 – Resposta dinâmica em deslocamentos para o problema de viga submetida a força pulso retangular. 116
Figura 57 – Discretização da seção transversal de uma barragem com 192 elementos isogeométricos. 118
Figura 58 – Resposta dinâmica não amortecida para a seção de barragem submetida a vibrações livres (a) Deslocamentos $\mathbf{u}(t)$, Velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e Aceleração $\ddot{\mathbf{u}}(t)$. 119
Figura 59 - Resposta dinâmica amortecida (ζ = 5%) para a seção de barragem submetida a vibrações livres em deslocamentos $\mathbf{u}(t)$ 120
Figura 60 – Seção transversal de barragem submetida a carregamento harmônico no topo. 121
Figura 61 – Resposta dinâmica para o problema de vibrações forçadas para $\omega_e = 0,5\omega_1$ (a) Deslocamentos $\mathbf{u}(t)$, (b) Velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e (c) Aceleração $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ no Ponto A. 122
Figura 62 - Resposta dinâmica para o problema de vibrações forçadas para $\omega_e = 1,0\omega_1$ (a) Deslocamentos $\mathbf{u}(t)$, (b) Velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e (c) Aceleração $\ddot{\mathbf{u}}(t)$. 123
Figura 63 – Comparação de resultados em deslocamentos entre ANSYS e AIG para o problema de barragem submetidas a vibrações forçadas com amortecimento. 124
Figura 64 – (a) Seção transversal de barragem submetida a aceleração na base (b) Descrição da aceleração do solo $\ddot{u}_g(t)$ 126
Figura 65 – Deslocamentos em x do ponto A para a barragem submetida a aceleração do solo. 126
Figura 66 – Comparação da resposta transiente obtida com AIG e ANSYS para o problema de barragem submetida a aceleração de base 127
Figura 67 – Localização do Trecho E na barragem de Itaipu. 128

Figura 68 – Gerador de vibração (a) Esquema teórico (b) Vibrodina utilizado na UHE Itaipu.....130
Figura 69 - Geometria do Bloco E6.....132
Figura 70 - Especificação das camadas de fundação.....133
Figura 71 – Modelo computacional de referência (a) Estrutura geomecânica (b) Dimensões.....135
Figura 72 – (a) Seção transversal do bloco E6 da barragem (b) Modelo simplificado da seção de concreto (c).Superposição dos dois modelos.....137
Figura 73 – Modelo geométrico de barragem mais fundação para AIG.....139
Figura 74 – Discretização do modelo isogeométrico do bloco de concreto com quatro níveis de refinamento.....141
Figura 75 – Discretização do modelo isogeométrico da fundação da barragem com quatro níveis de refinamento (a) 30 patches inicias (b) patches depois de 1 ciclo de refino (c) patches depois de 2 ciclos de refino (d) patches depois de 3 ciclos de refino.....142
Figura 76 – Malhas usadas no ANSYS (a) Modelo sem fundação (b) Modelo com fundação.....143
Figura A.1 – Modelo de AIG bidimensional com 6 elementos quadráticos.....161
Figura A.2 – Fluxograma do programa de AIG para problemas de patch único.....163
Figura A.3 – Fluxograma do programa de AIG para discretização multi–patch.....165

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características das malhas de AIG para os problemas de vibração em vigas 102
Tabela 2 – Comparação dos valores de frequência obtidos usando AIG e ANSYS para o problema de viga engastada-livre 105
Tabela 3 - Características das malhas de AIG para a seção de barragem de gravidade 111
Tabela 4 – Frequências em Hz dos seis primeiros modos de vibração usando ANSYS 114
Tabela 5 – Comparação da resposta em deslocamentos entre AIG e MEF (ANSYS) para o problema de viga submetida a força pulso retangular 117
Tabela 6 - Frequências naturais obtidas no ensaio com vibrodina 131
Tabela 7 – Propriedades físicas das camadas de fundação 133
Tabela 8 – Propriedades físicas das camadas da fundação no modelo isogeométrico 138
Tabela 9 – Dados das malhas correspondentes ao Modelos 1 140
Tabela 10 - Dados das malhas correspondentes ao Modelo 2 141
Tabela 11 – Dados das malhas usadas no programa ANSYS 143
Tabela 12 - Frequências naturais calculadas com os modelos AIG e ANSYS, com e sem fundação 144
Tabela 13 – Frequências naturais de vibração do Bloco E6 obtidos por Garcia (2016) e nos ensaios de campo 145

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Domínio e funções base não nulas para o elemento 1.....68
Quadro 2 - Domínio e funções base não nulas para o elemento 2. 68
Quadro 3 - Algoritmo para aplicação do Método da Diferença Central em sistemas lineares de múltiplos graus de liberdade.....82

LISTA DE SIGLAS

2D	-	Duas dimensões ou bidimensional
3D	-	Três dimensões ou tridimensional
MEF	-	Método dos Elementos Finitos
CAD	-	*Computer Aided Design*
AIG	-	Análise Isogeométrica
BSFE	-	*B-Spline Finite Element Method*
NURBS	-	*Non Uniform Rational B-Splines*
SHM	-	*Structural Health Monitoring*
CEASB	-	Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens
PTI	-	Parque Tecnológico de Itaipu
IGES	-	*Initial Graphics Exchange Specification*
STEP	-	*Standard for the Exchange of Product Model Data*
ISO	-	*International Organization for Standardization*
PHIGS	-	*Programmer's Hierarchical Interactive Graphics System*
CAM	-	*Computer Aided Manufacturing*
CATIA	-	*Computer Aided Three-dimensional Interactive Application*
PVC	-	Problemas de Valor de Contorno
PVI	-	Problemas de Valor Inicial
N.A.	-	Nível de água
CEBSA	-	Centrais Elétricas Brasileiras Sociedade Anônima
GDL	-	Grau de Liberdade
MDC	-	Método da Diferença Central
UHE	-	Usina Hidrelétrica
MEFG	-	Método dos Elementos Finitos Generalizados

LISTA DE SÍMBOLOS

x, y, z	-	Coordenadas cartesianas
u	-	Parâmetro independente
$C()$	-	Equação paramétrica de uma curva
a, b	-	Limites do intervalo do parâmetro u
$\mathbf{B}_{i,n}(u)$	-	Polinômios de Bernstein
$\mathbf{P}_i$	-	Vetor de pontos de controle
$\xi,\ \eta$	-	Coordenadas paramétricas
$f_i(\xi)$	-	Funções base de ξ
Ξ	-	Vetor de nós de controle na direção ξ
H	-	Vetor de nós de controle na direção η
$N_{i,p}$	-	Função base B-Spline *i* de grau *p* na direção ξ
ξ_i	-	Nó de controle *i*
$N_{i,p}^{(k)}$	-	*k*-ésima derivada da função base $N_{i,p}(\xi)$
$\mathbf{S}(\xi,\eta)$	-	Superfície B-*Spline*
$M_{j,q}$	-	Função base B-Spline j de grau *q* na direção η
$\tilde{N}_{i,j,p,q}(\xi,\eta)$	-	Superfície base *B-Spline*
w	-	Função de ponderação
$\mathbf{C}(\xi)$	-	Função vetorial do parâmetro ξ
$R_i^p(\xi)$	-	Funções base NURBS
$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)$	-	Funções base de uma superfície NURBS
Ω_e	-	Domínio físico
$\hat{\Omega}_e$	-	Domínio paramétrico
$\overline{\Omega}_e$	-	Domínio primário
$\mathbf{X}$	-	Matriz de coordenadas no domínio físico
$\mathbf{\Psi}_I(\xi)$	-	Matriz de funções base NURBS
$\boldsymbol{\xi}$	-	Matriz de coordenadas paramétricas
$\mathbf{u}(x)$	-	Campo de deslocamentos
$\mathbf{u}_I$	-	Matriz de deslocamentos do ponto de controle
$\mathbf{J}_\xi$	-	Matriz Jacobiana
$x_{,\xi}$	-	Derivada parcial da coordenada global x com respeito a ξ
$x_{,\eta}$	-	Derivada parcial da coordenada global x com respeito a η
$y_{,\xi}$	-	Derivada parcial da coordenada global y com respeito a ξ
$y_{,\eta}$	-	Derivada parcial da coordenada global y com respeito a η
P_{iI}	-	Coordenada i do ponto de controle I

$|J_\xi|$ - Determinante da matriz Jacobiana

$\Psi_{I,x}$ - Derivada da função base I com respeito à coordenada x

$\Psi_{I,y}$ - Derivada da função base I com respeito à coordenada y

$\xi_{,x}$ - Derivada da coordenada paramétrica ξ com respeito à coordenada global x

$\xi_{,y}$ - Derivada da coordenada paramétrica ξ com respeito à coordenada global y

$\eta_{,x}$ - Derivada da coordenada paramétrica η com respeito à coordenada global x

$\eta_{,y}$ - Derivada da coordenada paramétrica η com respeito à coordenada global y

p - Grau das funções base na direção ξ

q - Grau das funções base na direção η

σ_{ij} - Tensor de tensões...

f_i - Tensor de forças...

Ω - Domínio físico

n_j - Vetor normal

h_i - Tensões de superfície

$\overline{u}$ - Descolamentos prescritos

Γ_σ - Parcela do contorno do domínio onde são aplicadas as condições naturais

Γ_u - Parcela do contorno do domínio onde são aplicadas as condições essenciais

C_{ijkl} - Tensor de coeficientes elásticos

ε_{ij} - Tensor de deformações infinitesimais

$\boldsymbol{\sigma}$ - Matriz de componentes de tensão

$\mathbf{C}^e$ - Matriz constitutiva

E - Módulo de Elasticidade

ν - Coeficiente de Poisson

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - Matriz de componentes de deformação

$\mathbf{D}$ - Matriz operador diferencial

$\mathbf{u}$ - Matriz de componentes de deslocamento

$\hat{\sigma}_{ij}$ - Solução aproximada do campo de tensões

R^Ω - Resíduo no domínio

R^Γ - Resíduo no contorno

$\mathbf{W}$ - Matriz de funções de ponderação

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ - Matriz das tensões aproximadas

$\mathbf{f}$ - Matriz das forças externas

$\mathbf{h}$ - Matriz das condições de contorno naturais

$\hat{\mathbf{u}}$ - Matriz de componentes de deslocamento aproximadas

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - Matriz de componentes de deformação aproximadas

$\mathbf{B}$	-	Matriz de derivadas das funções base *NURBS*
$\mathbf{k}$	-	Matriz de rigidez do sistema
ψ_i	-	Vetor de funções base não nulas do elemento i
FI1	-	Vetor de conetividades de funções base não nulas do elemento 1
FI2	-	Vetor de conetividades de funções base não nulas do elemento 2
PC	-	Vetor de pontos de controle
Ψ	-	Matriz global de funções base quadráticas
$\psi_{,x}$	-	Vetor de derivadas de funções base não nulas no elemento com respeito à coordenada espacial x
$\psi_{,y}$	-	Vetor de derivadas de funções base não nulas no elemento com respeito à coordenada espacial y
$\mathbf{\Omega}^2$	-	Matriz espectral
$\mathbf{\Phi}$	-	Matriz modal
$\mathbf{m}$	-	Matriz de massa
ρ	-	Densidade do material
ω_n	-	N-ésima frequência natural de vibração
ϕ_n	-	N-ésimo modo natural de vibração
$\dot{\mathbf{u}}$	-	Matriz da primeira derivada temporal do deslocamento
$\ddot{\mathbf{u}}$	-	Matriz da segunda derivada temporal do deslocamento
t	-	Tempo
$\mathbf{K}$	-	Matriz de rigidez diagonalizada...
$\mathbf{M}$	-	Matriz de massa diagonalizada...
K_n	-	N-ésimo termo na diagonal de $\mathbf{K}$
M_n	-	N-ésimo termo na diagonal de $\mathbf{M}$
q_n	-	N-ésima coordenada modal
$\mathbf{q}$	-	Vetor de coordenadas modais
$q_n(0)$	-	Representação em coordenadas modais da condição inicial de deslocamento zero
$\dot{q}(0)$	-	Representação em coordenadas modais da condição inicial de velocidade zero
$\mathbf{c}$	-	Matriz de amortecimento
$\mathbf{C}^m$	-	Matriz de amortecimento diagonalizada
$\dot{\mathbf{q}}$	-	Vetor da primeira derivada temporal das coordenadas modais
$\ddot{\mathbf{q}}$	-	Vetor da segunda derivada temporal das coordenadas modais
ζ_n	-	Taxa de amortecimento para o n-ésimo modo de vibração
$\mathbf{u}(t)$	-	Matriz de componentes de deslocamento no tempo t
a_0, a_1		Coeficientes da matriz de amortecimento de Rayleigh
$\mathbf{p}(t)$	-	Solicitação na estrutura dependente do tempo
$\mathbf{P}(t)$	-	Solicitação dinâmica em coordenadas modais
Δt_i	-	Passo de tempo i
T_x	-	Tensão de tração axial na direção x
k	-	Fator de concentração de tensão
F_m	-	Amplitude da força gerada pela vibrodina

S - Constante característica da vibrodina

$F_{1/2}$ - Ângulo relativo entre os discos de massas excêntricas

v_{ω} - Velocidade angular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 24

1.1 OBJETIVOS 29

1.1.1 Objetivo Geral 29

1.1.2 Objetivos específicos 29

1.2 JUSTIFICATIVA 29

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO 32

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 33

2.1 *DESCRIÇÃO COMPUTACIONAL DE CURVAS E SUPERFÍCIES* 33

2.1.1 Histórico das curvas de Bézier 34

2.1.2 Formas implícitas e formas paramétricas de uma curva 37

2.1.3 Curvas de Bézier 38

2.1.4 Curvas *B-Spline* e funções base 40

2.1.5 Derivadas das funções base da curva *B-Spline* 43

2.1.6 Vetor de nós de controle Ξ 43

2.1.7 Refinamento de curvas B-*Spline* 44

2.1.8 Superfícies B-*Spline* 47

2.1.9 *Non-Uniform Rational B-Splines*: NURBS 48

2.1.10 *Superfícies NURBS* 51

2.2 ESTADO DA ARTE - ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA (AIG) 53

2.2.1 Bibliotecas e implementações disponíveis 57

2.2.2 AIG na análise de barragens 58

3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA 60

3.1 FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA BIDIMENSIONAL 60

3.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA 62

3.3 APLICAÇÃO DA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA À ELASTICIDADE LINEAR 64

3.4 *PATCHES* MÚLTIPLOS NA AIG.....69
4 PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES EM BARRAGENS DE GRAVIDADE 72
4.1 Introdução.....72
4.2 Ações dinâmicas em barragens.....73
4.3 Métodos de análise.....73
4.4 Modos e frequências naturais de vibração.....75
4.5 Vibrações livres em sistemas não amortecidos 76
4.6 Vibrações livres em sistemas com amortecimento clássico.....78
4.7 Montagem da matriz de amortecimento – amortecimento de Rayleigh 79
4.8 Resposta dinâmica considerando vibrações forçadas 80
4.9 Método da Diferença Central (MDC).....80
5 EXEMPLOS NUMÉRICOS.....83
5.1 PROBLEMAS DA ELASTOSTÁTICA BIDIMENSIONAL.....83
5.1.1 Placa quadrada sob tensão axial uniforme – Discretização 1.....83
5.1.2 Placa infinita com furo circular 90
5.1.3 Placa quadrada com furo circular. Solução com patches múltiplos. 95
5.2 RESPOSTA DINÂMICA USANDO AIG.....99
5.2.1 Cálculo de frequências naturais em vigas 100
5.2.2 Frequências naturais de vibração de uma seção de uma barragem de gravidade de concreto 110
5.2.3 Análise dinâmica de uma viga engastada e livre submetida a uma força pulso retangular 113
5.2.4 Vibrações livres de uma seção de barragem sem amortecimento.....117
5.2.5 Vibrações livres de uma seção de barragem considerando amortecimento proporcional 120
5.2.6 Seção de barragem submetida a vibrações forçadas com amortecimento.....121
5.2.7 Barragem submetida a uma aceleração da base de fundação.....124

5.2.8 Modelagem de uma seção simplificada da Barragem de Itaipu com discretização da fundação e uso de *patches* múltiplos 127
6 CONCLUSÕES 147
REFERÊNCIAS 149
APÊNDICE A MATRIZES E VETORES NA AIG 161
A.1 DISCRETIZAÇÃO NA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA 161
A.2 FLUXOGRAMAS DA IMPLEMENTAÇÃO 162
A.2.1 Problemas de *patch* único 162
A.2.2 Problemas com *patches* múltiplos 164

1 INTRODUÇÃO

O projeto e análise de estruturas cada vez mais complexas é uma necessidade cada vez mais frequente na engenharia. Esta demanda somente é possível pela popularização dos computadores e o desenvolvimento de ferramentas computacionais que permitem o projeto e análise destas estruturas. Dependendo da complexidade é possível que este processo esteja formado por numerosas etapas preparatórias partindo do desenho até chegar na análise propriamente dita.

Considerando uma sequência convencional de projeto de uma estrutura, inicialmente a geometria da estrutura é desenvolvida em algum sistema CAD (*Computer Aided Design*). Logo, a partir do modelo geométrico CAD, o próximo passo é a análise. Esta análise pode ser realizada de várias formas, desde métodos analíticos para estruturas simples até a solução por métodos numéricos com maior ou menor grau de complexidade dependendo dos requerimentos de projeto e análise.

Entre os métodos numéricos utilizados na modelagem e análise de estruturas, o Método de Elementos Finitos (MEF) é um dos mais utilizados e encontra-se amplamente popularizado entre engenheiros e projetistas (BATHE, 2006), (BECKER; CAREY; ODEN, 1981), (BELYTSCHKO et al., 2013), (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). O processo de análise consiste em gerar uma malha de elementos finitos para a análise estrutural, com um número adequado de nós e de elementos de modo a se obter tanto uma boa aproximação geométrica como também uma precisão dos resultados adequada.

Na formulação clássica do Método dos Elementos Finitos (MEF), funções de interpolação polinomiais são corriqueiramente utilizadas na avaliação das incógnitas assim como na aproximação da geometria. As funções normalmente empregadas (p. ex. polinômios de Lagrange) são diferentes daquelas utilizadas pelos programas CAD na geração da geometria original. Portanto, a mesma peça ou estrutura é "desenhada" duas vezes, de modos independentes, sendo a primeira para a geração do modelo sólido ou geométrico e a segunda para o modelo de elementos finitos. Sabe-se que a geração das matrizes locais e globais de elementos finitos pode requerer até 60% do tempo empregado para modelagem e análise (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009). As interpolações pelas funções de forma de elementos finitos realizam-se de modo não integrado com as que são feitas também na

geração do modelo sólido. Pode-se inferir, portanto, que o processo de interpolação é duplicado, pois ocorre de dois modos diferentes para um mesmo problema: primeiro, na geração do modelo CAD, e segundo, na geração das matrizes de elementos finitos.

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma abordagem recente que permite a discretização de um meio contínuo através de funções de aproximação geradas a partir da construção de um modelo digital ou de um modelo CAD. Nesta formulação as funções de aproximação são aquelas empregadas tradicionalmente em computação gráfica, conhecidas como NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) (BENSON *et al.*, 2010).

Uma das vantagens desta abordagem é a comunicação direta entre ambientes CAD e ambientes de análise, permitindo uma otimização do tempo de pré-processamento e análise. Ainda, como a AIG permite que a análise trabalhe na geometria tida como "exata" ou de referência é possível eliminar imperfeições e erros de modelagem fornecendo soluções mais precisas para determinados problemas (COTTRELL; HUGHES; REALI, 2007).

Com respeito à análise de vibrações, Cottrell *et al.* (2006) mostraram que a AIG apresenta também melhores respostas que a formulação de elementos finitos convencionais no espectro de frequências. Os autores observaram que, ao contrário do MEF convencional, descontinuidades na precisão somente aparecem na região das frequências mais altas em problemas de vibrações livres. Segundo os autores esta falta de precisão nesse intervalo de frequências pode provocar uma degradação significativa da resposta nos modos mais altos de vibração.

No caso do projeto de novas barragens, a análise de vibrações é um problema fundamental para a avaliação da segurança assim como em programas de manutenção de barragens existentes. Do ponto de vista da Monitoração da Saúde Estrutural, *Structural Health Monitoring* em inglês ou simplesmente SHM (BALAGEAS; FRITZEN; GEMES, 2006), vibrações fora dos parâmetros normais de operação de uma barragem podem chegar a ocasionar dano estrutural. O dano estrutural compreende: alterações no material constitutivo, mudanças geométricas incluindo mudanças nas condições de contorno ou de apoio. Estas mudanças podem ser geradas por solicitações de natureza estática ou dinâmica e podem afetar de maneira negativa o funcionamento da estrutura (FARRAR; WORDEN, 2007).

As pesquisas relacionadas à resposta dinâmica das estruturas civis estão em desenvolvimento constante, pois envolvem muitos problemas ainda sem solução definitiva, como análises de estruturas submetidas a ações sísmicas, ventos ou outras solicitações de natureza não linear ou aleatória. A análise de vibrações no domínio do tempo e da frequência assim como a modelagem das excitações dinâmicas como ventos e sismos são ainda temas importantes de pesquisa (XU, 2010).

Considerando as características apontadas da AIG, é possível afirmar que sua aplicação em análises de vibrações em barragens torna-se interessante e promissora, pois o uso de ferramentas CAD é uma prática consagrada tanto em empreendimentos novos assim como no resgate de informações de estruturas cujos projetos não foram gerados de maneira digital. A AIG pode ser empregada com vantagens em modelos digitais recuperados da fase de projeto geométrico visando a construção de modelos discretos para análise.

Um exemplo de estruturas cujos acervos técnicos de projeto não foram arquivados digitalmente é a Usina Hidrelétrica (UHE) de Itaipu (Figura 1). Projetada no início da década de 1970 com uma capacidade instalada de 14.000 MW distribuída em vinte unidades geradoras de 700 MW cada, a UHE Itaipu é a maior usina do mundo em geração de energia. O empreendimento binacional desenvolvido pelo Brasil e pelo Paraguai no rio Paraná, localiza-se na fronteira entre os dois países, 14 Km a montante da ponte internacional que liga a cidade brasileira de Foz do Iguaçu à cidade paraguaia de Ciudad del Este. A construção da usina é resultado de intensas negociações entre os dois países iniciadas ainda na década de 1960. Produto destas negociações foi assinado o Tratado de Itaipu em 26 de abril de 1973 (ITAIPU-BINACIONAL, 2008).

Figura 1 – Usina Hidrelétrica de Itaipu
Fonte: (CEASB, 2015)

A UHE de Itaipu consiste em uma série de barragens que atravessam o rio Paraná e cujos coroamentos se desenvolvem a 225 metros acima do nível do mar. A casa de força está localizada no pé da Barragem Principal, transversalmente ao rio. O vertedouro, para descarga das vazões excedentes, fica localizado no platô da margem direita.

As barragens que formam o arranjo de Itaipu podem ser classificadas como:

1. Barragem de enrocamento com núcleo de argila, situada na margem esquerda próxima ao canal de desvio;
2. Barragens de terra das margens direita e esquerda da represa;
3. Barragem Principal, do tipo de gravidade aliviada (Blocos F);
4. Barragem do tipo contraforte, nas barragens lateral direita (Blocos E), barragens de ligação direita e esquerda (Blocos D e I);
5. Barragem de gravidade maciça na estrutura de desvio (Blocos H).

A Figura 2 ilustra este arranjo.

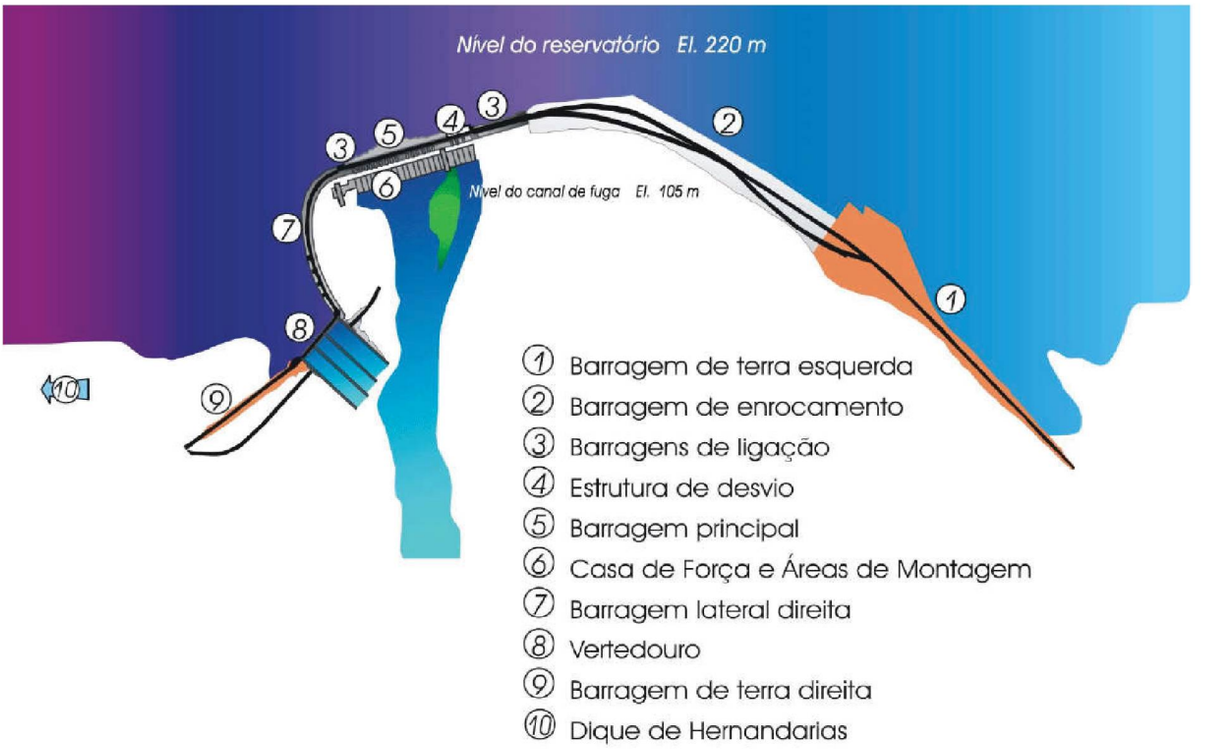


Figura 2 – Arranjo da Barragem de Itaipu
Fonte: (ITAIPU-BINACIONAL, 2008)

Neste contexto, o Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens (CEASB) implantado no Parque Tecnológico de Itaipu (PTI) desenvolve pesquisas em áreas relativas à segurança de barragens e modelagem 3D de estruturas civis. O primeiro projeto do CEASB nesta área data de 2009 e tinha como objetivo a modelagem 3D das estruturas civis e mecânicas da barragem da Usina Hidrelétrica de Itaipu. Este projeto que continua em desenvolvimento pretende não apenas gerar modelos tridimensionais digitais da barragem, mas criar modelos iterativos que permitam auxiliar os funcionários nas tomadas de decisões, e que sirva como ferramenta para programas de manutenção e segurança (ZINN *et al.*, 2011). Estes modelos digitais recuperados têm o potencial de servir como arquivos de entrada em simulações ou análises de segurança usando AIG.

Diante do exposto nos parágrafos anteriores, percebe-se que a aplicação da AIG na solução de problemas dinâmicos em seções de barragens é um passo significativo na direção do aproveitamento das informações CAD como entrada para simulações e análises de segurança em barragens.

O presente trabalho apresenta a formulação AIG na obtenção da resposta dinâmica em problemas de vibrações livres e vibrações forçadas e em código

próprio busca a aplicação em seções transversais de barragens com e sem modelagem do subsolo. Para este propósito foi incorporada à formulação inicial a alternativa de utilização de subdomínios através de *patches*. Os *patches* em AIG permitem trabalhar com geometrias irregulares e com problemas onde as propriedades físicas não são uniformes. O termo multi-*patch* é utilizado quando, na solução de um problema, são usados vários *patches* na discretização. A aplicação da AIG com ou sem capacidade multi-*patch* ainda é incipiente em análises de barragens, praticamente não existindo trabalhos nesta área na literatura.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver e implementar um código computacional de AIG para o estudo de problemas dinâmicos em seções de barragens de gravidade de concreto usando formulação multi-*patch*.

1.1.2 Objetivos específicos

Revisar os fundamentos da AIG e sua aplicação em problemas de estado plano de tensões e deformações.

Desenvolver e implementar um programa em linguagem MATLAB com capacidade multi-*patch* e estender sua aplicação a problemas de vibrações livres e forçadas.

Aplicar a AIG em problemas de vibrações de seções de barragens de concreto em estado plano de deformações, com e sem modelagem do solo de fundação.

Avaliar o desempenho dos modelos computacionais em AIG comparando os resultados obtidos com o MEF e dados experimentais, quando disponíveis.

1.2 JUSTIFICATIVA

Um dos principais atrativos da AIG é a utilização, como funções de aproximação, as funções NURBS que são as mesmas funções utilizadas pelos ambientes CAD. O aproveitamento das informações geométricas digitais, geradas

em sistemas CAD, de uma barragem executada ou ainda em fase de projeto, seria relevante evitando etapas adicionais de modelagem e ajudaria a otimizar recursos nos processos de avaliação da segurança dessas estruturas.

Tomando-se como exemplo a barragem de Itaipu, quando ela foi projetada, na década de 1970, ainda não existiam recursos computacionais robustos para a criação de modelos computacionais detalhados da estrutura. Na Figura 3 pode se observar um do inúmeros desenhos dos projetos originais do muro de contraforte da barragem de Itaipu desenvolvidos ainda de forma manual. O conjunto de desenhos, detalhes e plantas da Usina Hidrelétrica de Itaipu constituem-se um exemplo da grande quantidade de informação não digital preservada pelo Sistema de Arquivo Técnico de Itaipu.

Com o passar do tempo e com o uso intensivo de recursos computacionais gráficos na engenharia, o acervo técnico de Itaipu pode ser digitalizado e reconstruído em modelos CAD 3D. Na Figura 4, podem-se observar modelos CAD 3D recuperados da Barragem de Itaipu com base na documentação não digital da época do projeto. Modelos como os da Figura 4 foram criados cerca de 40 anos depois da construção da barragem, com os recursos gráficos disponíveis, e a partir da digitalização da documentação original e construção de modelos 3D em ambiente gráfico através de softwares comerciais em CAD.

Um modelo computacional confiável de uma barragem seria de grande utilidade, pois permitiria através de simulações, realizar análises de segurança e riscos de maneira econômica e rápida. Em particular, em Itaipu, a nova documentação permitirá além do entendimento integrado dos diferentes projetos a possibilidade de associação em sistemas de realidade virtual com a intenção de integrar os processos de manutenção e monitoração. Segundo Zinn *et al.* (2011) a digitalização da informação da UHE de Itaipu deve reduzir o tempo para tomada de decisões, otimizar a gestão do conhecimento e facilitar os estudos de novos projetos nas áreas civil e mecânica.

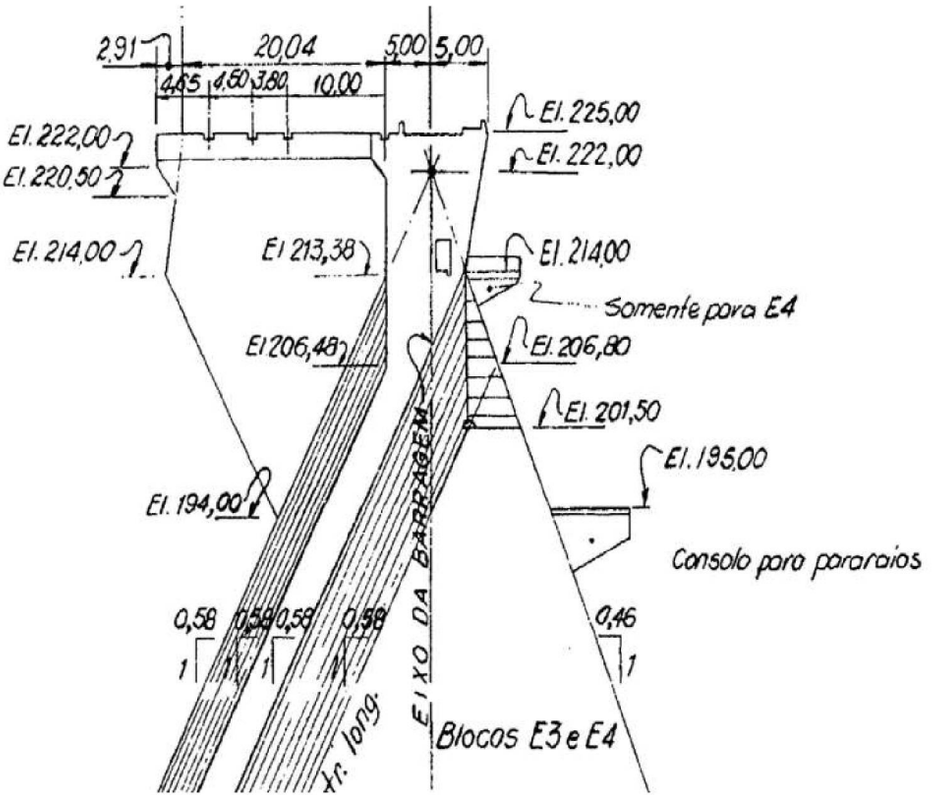
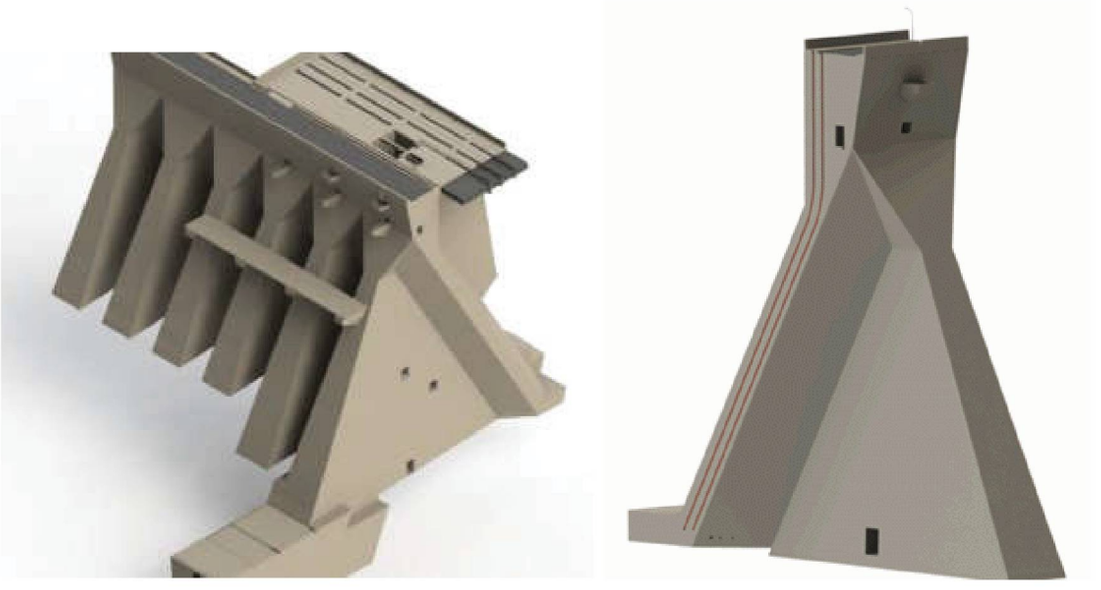


Figura 3 – Desenhos originais do Bloco de contraforte – Trecho E da Barragem de Itaipu
Fonte: CEASB(2015)



(a) (b)

Figura 4 - Modelos CAD gerados a partir de recuperação de dados da Barragem de Itaipu
(a) Perspectiva superior do trecho E (b) Bloco E1
Fonte: CEASB(2015)

Com o uso da simulação numérica, é possível introduzir perturbações, mudanças nas condições de contorno e observar as respostas afetadas ou sensíveis

a estas alterações. Desse modo podem ser simuladas situações limites ou de carregamentos extraordinários, considerando solicitações estáticas e/ou dinâmicas.

As respostas obtidas através do modelo numérico da estrutura podem servir como parâmetros de correlação, que poderão ser utilizadas dentro das análises de saúde estrutural.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 6 capítulos. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica em relação às funções NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) apresentando as origens, histórico e suas propriedades matemáticas, tanto para funções base lineares como para funções base de superfície. Logo é apresentada uma revisão do estado da arte da Análise Isogeométrica mostrando o campo crescente de aplicações e as formulações existentes que utilizam o conceito isogeométrico.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão dos conceitos fundamentais da AIG, descrevendo a implementação numérica para problemas de elasticidade linear junto com o Método de Galerkin, através do qual é obtida a solução aproximada. Também dentro deste capítulo são apresentados os *patches* em AIG, as suas características e vantagens. Em seguida é realizada uma revisão dos conceitos da Análise Dinâmica das estruturas e os fundamentos para obtenção da resposta para problemas de vibrações livres e forçadas com ou sem amortecimento.

O Capítulo 4 apresenta as aplicações numéricas da formulação proposta, que encontram-se divididos em problemas de elasticidade bidimensional, problemas de dinâmica estrutural e problemas utilizando *patches* isogeométricos.

As conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 5.

No Apêndice A é descrito o processo de montagem dos vetores e matrizes dentro da Análise Isogeométrica.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os sistemas estruturais são sistemas físicos submetidos a solicitações que podem ser de natureza estática ou dinâmica. Solicitações de natureza dinâmica tendem a causar vibrações, e estas vibrações devem ser corretamente quantificadas na fase de projeto para garantir a segurança e um correto funcionamento durante a vida útil da estrutura.

Os problemas de natureza dinâmica só podem ser modelados de maneira analítica para estruturas simples. Na maior parte dos casos práticos é necessário utilizar métodos numéricos que permitam obter soluções aproximadas mas que representem adequadamente o comportamento real da estrutura.

O presente trabalho pretende mostrar aplicações de AIG para problemas de natureza estática e dinâmica em barragens. A revisão bibliográfica compreende os fundamentos da análise isogeométrica e um levantamento do estado da arte.

2.1 *DESCRIÇÃO COMPUTACIONAL DE CURVAS E SUPERFÍCIES*

Até recentemente o interesse em curvas e superfícies do tipo *B-Splines* (ou *Basis Splines*) Racionais Não Uniformes, conhecidas como NURBS, estava restrito à comunidade científica que trabalhava na área de desenho assistido por computador (*Computer Aided Design*), onde as NURBS são consideradas o padrão para descrição de curvas e superfícies. A expansão do uso de NURBS envolve modelagem de objetos para artes visuais na indústria do entretenimento e também nos modelos de realidade virtual e mais recentemente na análise numérica de estruturas através da Análise Isogeométrica, motivo deste trabalho.

Também é importante destacar que as NURBS são o padrão na indústria para intercâmbio de dados em geometria computacional ou computação gráfica. Várias normas e padrões internacionais tais como IGES (*Initial Graphics Exchange Specification*), STEP (*Standard for the Exchange of Product Model Data* – ISO 10303), PHIGS (*Programmer's Hierarchical Interactive Graphics System*) entre outros adotam NURBS como ferramenta básica para o projeto geométrico computacional (HOWARD, 1991), (BLOOR; OWEN, 1991).

Segundo Piegl e Tiller (1997), grande parte do sucesso das NURBS se deve às seguintes características:

a) As funções NURBS fornecem uma base matemática unificada para representar tanto formas analíticas, tais como cônicas e superfícies quádricas, assim como superfícies de forma livre, como carenagens de aviões e peças de carrocerias;
b) O desenho usando NURBS torna-se intuitivo, pois quase todo o ferramental de NURBS assim como os algoritmos tem uma interpretação gráfica;
c) Os algoritmos de manipulação das funções NURBS são rápidos e numericamente estáveis;
d) As curvas e superfícies NURBS são invariantes com respeito às transformações geométricas mais comuns, tais como rotação, translação e projeções;
e) Quando os pesos de uma função NURBS são iguais à unidade, a curva/superfície NURBS se transforma em uma curva/superfície *B-Spline*, ou seja, NURBS é uma generalização das chamadas *B-Splines* e das curvas e superfícies de Bézier, ferramental amplamente conhecido e estudado em computação gráfica.

2.1.1 Histórico das curvas de Bézier

Segundo Farin (2002), em 1959 a empresa de automóveis francesa Citroën contratou um jovem matemático, com o objetivo de resolver alguns dos problemas teóricos que surgiram a partir do desafio da utilização de computadores no projeto de novos automóveis. O matemático era Paul de Faget De Casteljau, que tinha acabado de terminar o seu doutorado.

Casteljau começou a desenvolver um sistema que visava o projeto e representação de curvas e superfícies. Adotou o uso de polinômios Bernstein para a representação de curvas e superfícies desde o início, juntamente com um processo de refinamento baseado na interpolação linear sucessiva entre pontos, sendo que todos eles ficam na vizinhança da curva (PIEGL; TILLER, 1997). Este algoritmo é conhecido como o algoritmo de Casteljau e é mostrado como proposto originalmente na Figura 5.

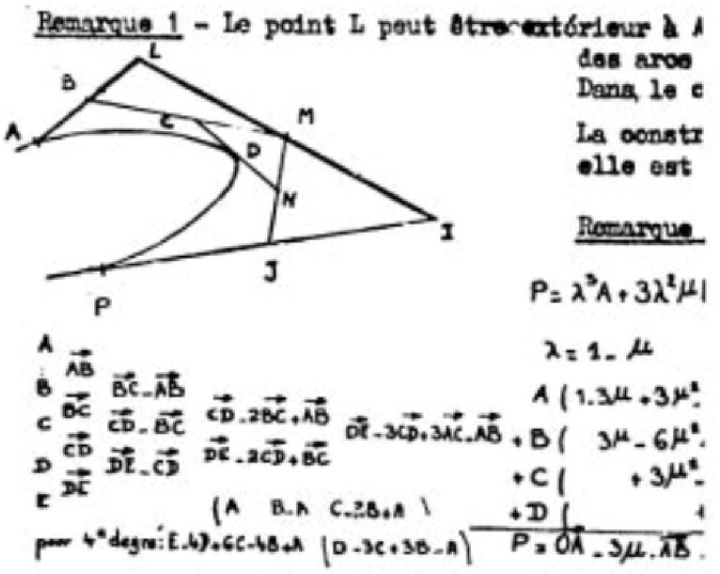


Figura 5 – Descrição do algoritmo de De Casteljau por ele mesmo
Fonte: Farin (2002)

O grande avanço no seu trabalho foi o uso de polígonos de controle, uma técnica que nunca fora usada antes. Em vez de mudar uma curva ou superfície diretamente, altera-se o polígono de controle, e a curva ou superfície segue o polígono de maneira intuitiva.

De Casteljau publicou vários relatórios técnicos entre 1959 e 1963 que foram mantidos em segredo pela Citroën por um longo tempo. O pesquisador W. Böhm foi o primeiro a dar reconhecimento a De Casteljau por seu trabalho na comunidade científica na década dos 70 e foi ele quem cunhou o termo “Algoritmo de Casteljau” (BÖHM, 1977). Em 1999 Boehm e Müller publicaram o artigo *On the Casteljau’s Algorithm* (BOEHM; MÜLLER, 1999) onde são descritos e detalhados os aportes de De Casteljau no desenvolvimento da representação gráfica computacional.

Paralelamente, na década de 1960, Pierre Bézier que trabalhava na fabricante concorrente de automóveis Renault, percebeu a necessidade de representações de peças mecânicas no computador. Os trabalhos de Bézier foram influenciados pelo conhecimento de desenvolvimentos semelhantes na Citroën, mas procedeu de maneira independente (FARIN, 2002). A ideia inicial de Bézier era representar uma curva como a intersecção de dois cilindros elípticos, sendo que estes cilindros estão definidos dentro de um paralelepípedo, veja Figura 6.

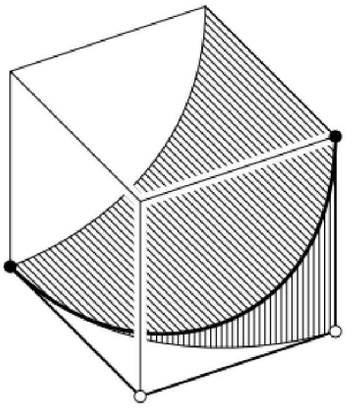


Figura 6 – Ideia original de Bézier para representação de uma curva
Fonte: Farin (2002)

A aplicação de transformações a este paralelepípedo resultaria em transformações da curva. Mais tarde, Bézier optou por formulações polinomiais da sua ideia inicial com polinômios de grau elevado. O resultado acabou por ser idêntico às curvas de De Casteljau, mas com ferramental matemático diferente.

Os trabalhos de Bézier foram publicados e divulgados amplamente, veja-se, por exemplo, Bézier (1966), Bézier (1967), entre outros.

Os trabalhos de Bézier logo chamaram a atenção do pesquisador Robin Forrest da Universidade de Cambridge (CADAZZ, 2004). Ele percebeu que as curvas de Bézier podiam ser expressas em termos dos polinômios Bernstein, isto é, na forma que De Casteljau já usava desde o início. O artigo de Forrest (1972) foi muito influente e ajudou a popularizar o termo “curvas de Bézier”.

O sistema CAD/CAM (*Computer Aided Manufacturing*) da Renault chamado UNISURF foi inteiramente baseado em curvas e superfícies de Bézier. Este software influenciou os desenvolvimentos da empresa aeronáutica francesa Dassault, que construiu um sistema chamado EVE. Mais tarde, esse sistema evoluiu para CATIA (*Computer Aided Three-dimensional Interactive Application*).

As curvas de Bézier representam entidades geométricas usando *splines* definidas por partes e adotando, como funções de base, os polinômios de Bernstein, como será visto na continuação (PIEGL; TILLER, 1997).

2.1.2 Formas implícitas e formas paramétricas de uma curva

Os dois métodos mais comuns para a representação de curvas e superfícies geométricas são equações implícitas e equações paramétricas.

A equação implícita de uma curva no plano xy teria forma $f(x,y)=0$. Esta equação descreve uma relação implícita entre as coordenadas x e y dos pontos da curva. Um exemplo é o círculo de raio unitário centrado na origem, denotado pela equação $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$, sendo esta última equação única.

Na forma paramétrica, cada uma das coordenadas de um ponto na curva é representada separadamente como uma função explícita de um parâmetro independente:

$$C(u)=(x(u),y(u)) \qquad a\le u\le b \tag{1}$$

onde $C(u)$ é uma função vetorial da variável independente u. Embora o intervalo $[a,b]$ seja arbitrário, é comum normalizar para [0,1]. O primeiro quadrante do mesmo círculo descrito no parágrafo anterior fica definido pelas equações paramétricas:

$$\begin{aligned} x(u)&=\cos(u), \qquad 0\le u\le\frac{\pi}{2}\\ y(u)&=\operatorname{sen}(u). \end{aligned} \tag{2}$$

Fazendo $t=\tan(u/2)$ pode-se obter a seguinte expressão:

$$x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y(t)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad 0\le t\le 1 \tag{3}$$

Assim a representação paramétrica de uma curva não é única. No espaço, a representação paramétrica com funções de coordenadas $x(u)$, $y(u)$ e $z(u)$ pode ser arbitrária, obtendo-se uma grande variedade de curvas. Um tipo de funções comumente utilizadas são as funções polinomiais. Neste caso uma curva pode ser representada da seguinte maneira:

$$\mathbf{C}(u)=(x(u),y(u),z(u))=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{a}_i u^i \qquad 0\le u\le 1 \tag{4}$$

onde $\mathbf{C}(u)$ é uma curva com polinômios base de grau n, e os $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)$ são vetores, pois:

$$x(u) = \sum_{i=0}^{n} x_i u^i \qquad y(u) = \sum_{i=0}^{n} y_i u^i \qquad z(u) = \sum_{i=0}^{n} z_i u^i \,. \tag{5}$$

Segundo Piegl e Tiller (1997), este tipo de representação tem as seguintes desvantagens:

- Como os coeficientes $\mathbf{a}_i$ não tem significado geométrico, dificulta o projeto iterativo de curvas ou superfícies;
- Os algoritmos para processar bases de potências tem teor algébrico e não geométrico.

2.1.3 Curvas de Bézier

As curvas de Bézier são outro tipo de curvas paramétricas que também usam polinômios como funções base, mas o método de Bézier é superior para modelagem geométrica (PIEGL; TILLER, 1997).

Uma curva de Bézier de grau n é definida por:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{B}_{i,n}(u)\mathbf{P}_i \qquad 0 \le u \le 1 \,. \tag{6}$$

onde as funções base $\mathbf{B}_{i,n}(u)$ são os polinômios de *Bernstein* de grau n dados por:

$$\mathbf{B}_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \tag{7}$$

e os coeficientes $\mathbf{P}_i$ são os chamados pontos de controle. Usando as Equações (6) e (7) pode-se obter, por exemplo, a curva de Bézier de grau 2:

$$\mathbf{C}(u) = (1-u)^2 \mathbf{P}_0 + 2u(1-u)\mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{P}_2 \tag{8}$$

A Equação (8) representa um arco parabólico entre $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_2$ como mostrado na Figura 7 e pode-se destacar o seguinte:

- O polígono formado por $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$ é chamado polígono de controle;
- $\mathbf{P}_0 = \mathbf{C}(0)$ e $\mathbf{P}_2 = \mathbf{C}(1)$

- As tangentes à curva nos pontos extremos são paralelas aos segmentos de reta $\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$.

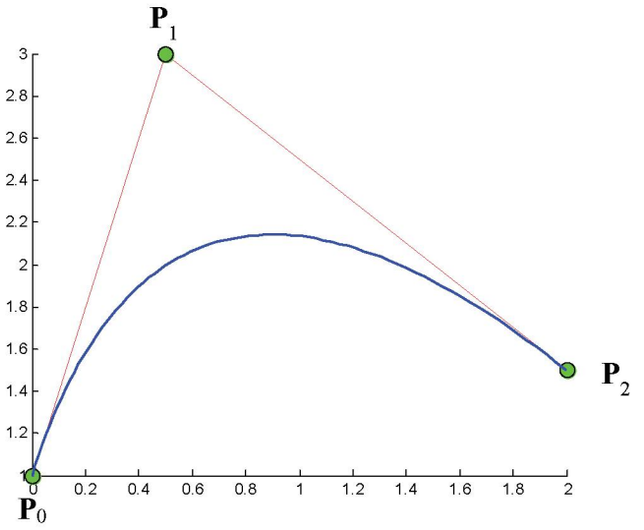


Figura 7 - Curva de Bézier de segundo grau
Fonte: O autor.

Para o caso de $n = 3$ obtém-se uma curva de Bézier cúbica (Figura 8), como mostrado na Equação (9):

$$\mathbf{C}(u) = (1-u)^3\mathbf{P}_0 + 3u(1-u)^2\mathbf{P}_1 + 3u^2(1-u)\mathbf{P}_2 + u^3\mathbf{P}_3 \qquad (9)$$

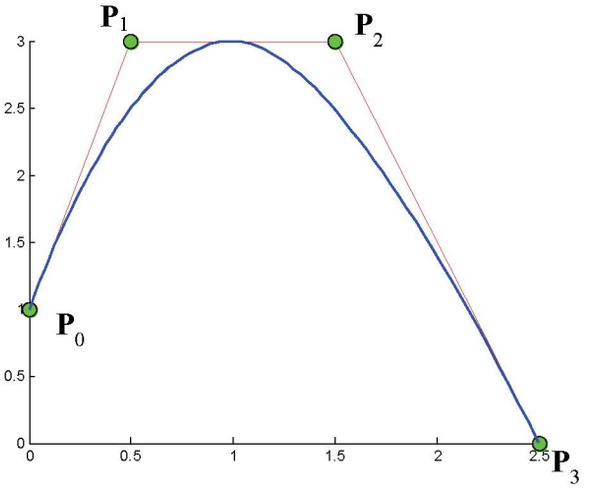


Figura 8 - Curva de Bézier de grau 3
Fonte: O autor.

2.1.4 Curvas *B-Spline* e funções base

Curvas que consistem em um único segmento polinomial têm desvantagens na modelagem de geometrias complexas. Como por exemplo, a necessidade de usar polinômios de polinômios de alto grau quando se tem um número grande de restrições. Além disto, do ponto de vista computacional, polinômios de alto grau são tem processamento ineficiente e podem ser numericamente instáveis (PIEGL; TILLER, 1997).

Uma curva *B-Spline* é uma curva definida por partes cujas funções base são funções polinomiais. A Figura 9 mostra uma curva *B-Spline* formada por dois segmentos de curvas de Bézier de grau 2.

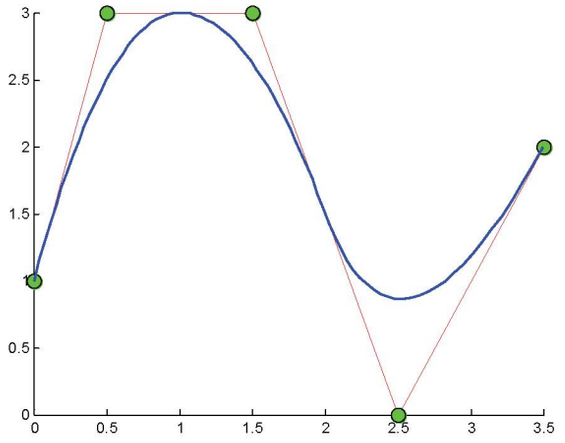


Figura 9 - Curva *B-Spline* com dois segmentos quadráticos
Fonte: O autor.

A representação polinomial de uma curva com variável paramétrica ξ é:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} f_i(\xi)\mathbf{P}_i \tag{10}$$

sendo $f_i(\xi)$ as funções base da curva *B-Spline*, n é o número de funções base e $\mathbf{P}_i$ o vetor de pontos de controle. O número de funções base é igual ao número de pontos de controle.

O vetor de parâmetros ξ_i, chamados nós de controle, cumpre a seguinte condição $\xi_0 = 0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 = 1$ podendo estar espaçados de modo uniforme ou

não. As funções base $f_i(\xi)$ são curvas paramétricas construídas de maneira recursiva iniciando com um grau polinomial (p) igual a zero (PIEGL; TILLER, 1997):

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 \text{ se } \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{11}$$

Para os graus maiores, ou seja, para p = 1, 2, 3... a equação fica:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{12}$$

Neste ponto é importante lembrar que os valores de ξ_i são elementos do vetor de nós de controle que satisfazem a condição $\xi_i \le \xi_{i+1}$, ou seja, cada elemento é maior ou igual ao anterior. O conjunto de ξ_i será chamado de Vetor de Nós de Controle e denotado por Ξ e sua influência na geometria da curva será explicada nas seções a seguir. Na Figura 10 mostram-se as funções base de grau 0, 1, 2 e 3 para um vetor de nós de controle não uniforme

Sobre as funções base pode-se afirmar:

- $N_{i,0}$ é uma função degrau, igual a zero em qualquer ponto menos no intervalo semiaberto $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$;
- Para $p > 0$, $N_{i,p}$ é uma combinação linear de duas funções base de grau $(p-1)$;
- O cálculo de um conjunto de funções base precisa do vetor de nós de controle e do grau p;
- A Equação (12) pode fornecer indeterminação, neste caso assume-se o quociente como sendo zero (PIEGL; TILLER, 1997);
- Os polinômios $N_{i,p}$ cumprem a propriedade de partição da unidade, ou seja, $\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) = 1$ para todo $0 \le \xi \le 1$;
- O intervalo semiaberto $[\xi_i, \xi_{i+1})$ pode ter comprimento nulo, pois os nós não precisam ser diferentes.

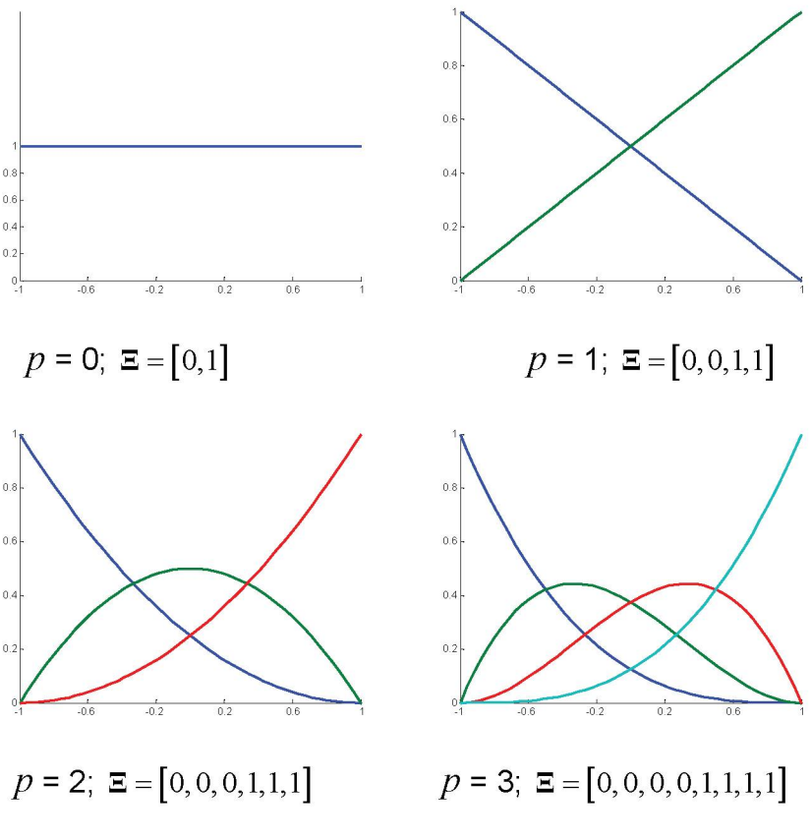


Figura 10 - Funções base de grau 0,1, 2 e 3 e vetores de nós de controle correspondentes
Fonte: O autor.

Como se percebe nas Equações (11) e (12), as funções base são recursivas, ou seja, para se calcular uma função base de um grau qualquer, é necessário que tenham sido calculadas as funções base com graus inferiores. Como exemplo de uso das Equações (11) e (12), será mostrada a seguir, a obtenção da função $N_{0,2}$ com um vetor de nós de controle $\Xi = [0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5]$.

$$N_{0,0} = N_{1,0} = 0 \qquad -\infty < \xi < \infty \tag{13}$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \le \xi \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{14}$$

$$N_{0,1} = \frac{\xi - 0}{0 - 0} N_{0,0} + \frac{0 - \xi}{0 - 0} N_{1,0} = 0 \qquad -\infty < \xi < \infty \tag{15}$$

$$N_{1,1} = \frac{\xi - 0}{0 - 0} N_{1,0} + \frac{1 - \xi}{1 - 0} N_{2,0} = \begin{cases} 1 - \xi & 0 \le \xi < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{16}$$

$$N_{0,2} = \frac{\xi - 0}{0 - 0} N_{0,1} + \frac{1 - \xi}{1 - 0} N_{1,1} = \begin{cases} (1-\xi)^2 & 0 \le \xi < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{17}$$

2.1.5 Derivadas das funções base da curva *B-Spline*

As derivadas das funções base *B-Spline* também podem ser definidas recursivamente (BARTELS; BEATTY; BARSKY, 1987), (PIEGL; TILLER, 1997):

$$N'_{i,p} = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{18}$$

Generalizando pode-se obter a fórmula recursiva para a *k*-ésima derivada:

$$N^{(k)}_{i,p}(\xi) = p\left(\frac{N^{(k-1)}_{i,p-1}}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{N^{(k-1)}_{i+1,p-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right) \tag{19}$$

Butterfield (1976) apresentou uma forma alternativa para calcular a *k*-ésima derivada da função base $N_{i,p}(\xi)$ em termos das funções base $N_{i,p-k},\ldots,N_{i+k,p-k}$, Equação (20):

$$N^{(k)}_{i,p} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^{k} a_{k,j} N_{i+j,p-k} \tag{20}$$

onde

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1 \\ a_{k,0} &= \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1} - u_i} \\ a_{k,j} &= \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1} - u_{i+j}} \qquad j = 1,\ldots,k-1;\ k \le p \\ a_{k,k} &= \frac{-a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} \end{aligned} \tag{21}$$

2.1.6 Vetor de nós de controle Ξ

O vetor de nós de controle tem influência direta nas funções de base como pode ser notado na Equação (12) e por consequência na curva resultante. Se o vetor de nós de controle for igualmente espaçado é chamado de uniforme, caso

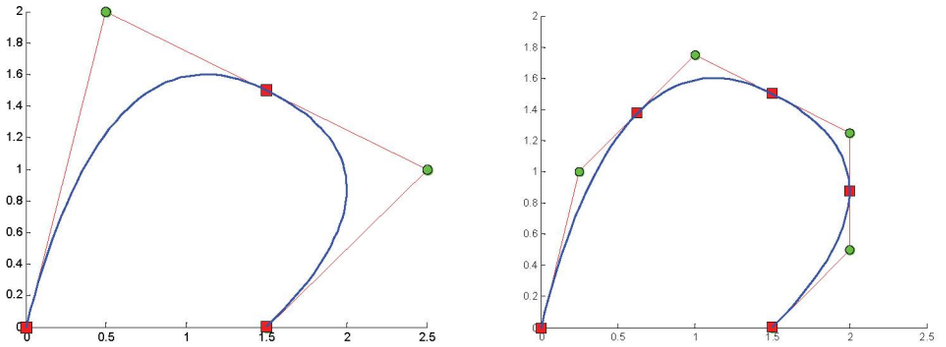
contrário tem-se um vetor de nós de controle não uniforme. Se as primeiras e últimas coordenadas aparecem $p+1$ vezes, tem-se um vetor aberto, onde p é o grau das funções de base. Este tipo de vetor é padrão na literatura CAD e no caso de AIG estes vetores permitem funções que definem graus de liberdade nos extremos dos elementos (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005). Alguns exemplos de vetores abertos normalizados (definidos no intervalo [0,1]) uniformes válidos são:

$$\begin{aligned} &\text{Para } p=1 && \Xi=[0,0,0.25,0.5,0.75,1,1] \\ &\text{Para } p=2 && \Xi=[0,0,0,0.4,0.8,1,1,1] \\ &\text{Para } p=3 && \Xi=[0,0,0,0,0.5,1,1,1,1] \end{aligned} \tag{22}$$

2.1.7 Refinamento de curvas B-*Spline*

O refinamento é uma característica essencial tanto para a representação gráfica do modelo como para a análise. O refinamento tem como objetivo capturar de maneira precisa geometrias complexas e variações nos campos procurados como solução. O refinamento de curvas B-*Spline* pode ser realizado de três maneiras: refinamento *h*, refinamento *p* e refinamento *k*: (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009), assim definidos:

1. Refinamento *h* é o processo onde pontos de controle adicionais são inseridos, obtendo-se novos intervalos não nulos entre nós de controle (elementos). A Figura 11 mostra um exemplo de refinamento *h*.



$\Xi=[0,0,0,0.5,1,1,1]$ $\Xi=[0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1]$

Curva original Curva Refinada

Figura 11 – Exemplo de refinamento *h* numa curva B-*Spline* quadrática.
Fonte: O autor.

2. Refinamento *p* consiste na elevação de grau das funções base utilizadas na análise. Neste processo a multiplicidade de cada nó de controle é incrementada em 1, mas novos nós de controle não são inseridos. Na Figura 12 é mostrado um exemplo de refinamento *p*.

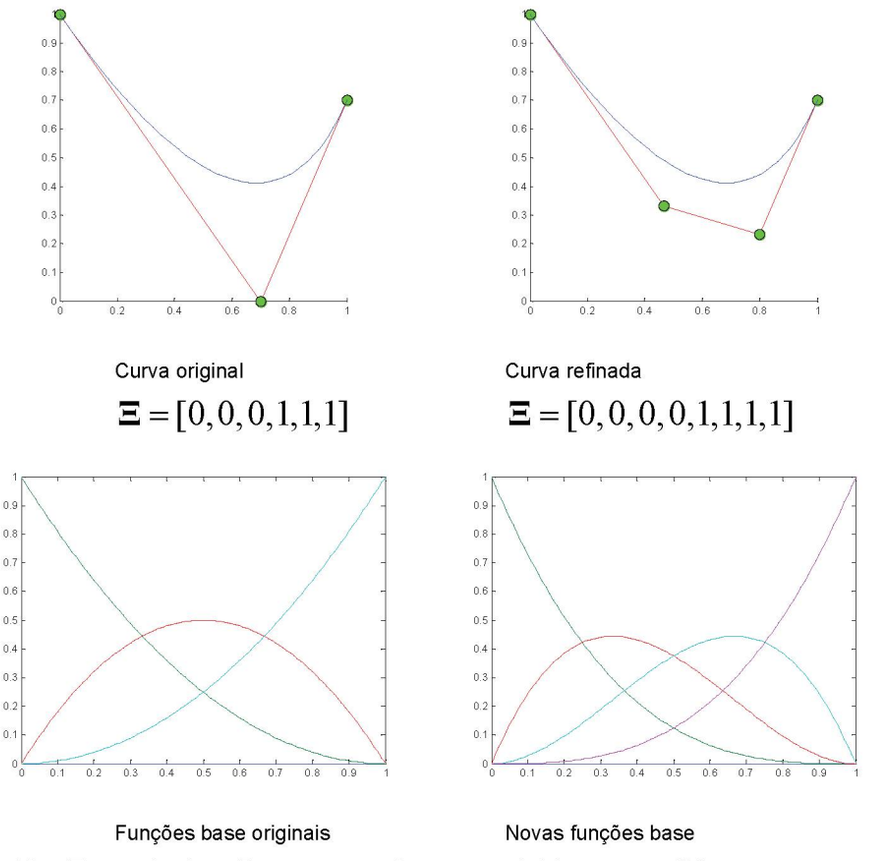
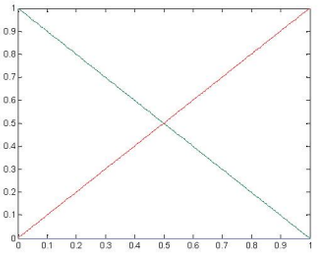


Figura 12 – Exemplo de refinamento *p*. Curva quadrática para cúbica
Fonte: O autor.

3. Refinamento *k* é um procedimento que combina a elevação do grau das funções base (refinamento *p*) e a inserção de novos nós de controle (refinamento *h*). Este processo não é comutativo.

Para ilustrar o comportamento destes procedimentos, na Figura 13 são mostrados os resultados obtidos aplicando refinamento p e refinamento k para um mesmo domínio inicial. Este domínio inicial é formado por um elemento e duas funções base de grau $p=1$ com vetores de nós de controle abertos como indicado.

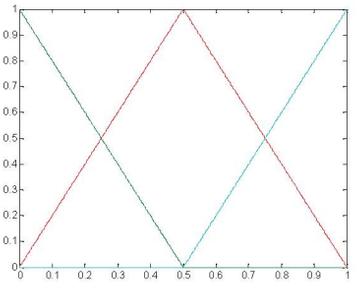


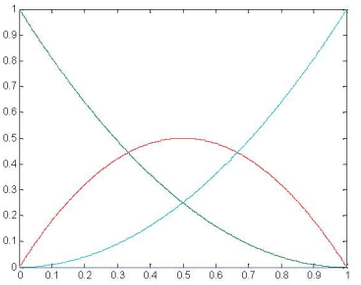
$$\Xi = \{0,0,1,1\}\ p = 1$$

Refinamento *k*

↙ Inserção de nós

Elevação de grau ↘



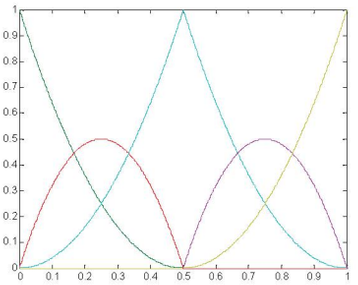


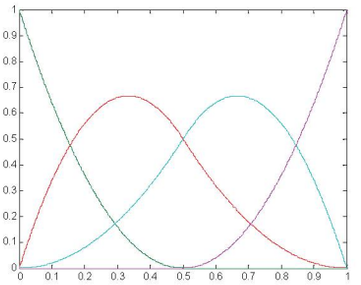
↙ Elevação de grau

Inserção de nós ↘

$$\Xi = [0,0,0.5,1,1]\ p=1$$

$$\Xi = [0,0,0,1,1,1]\ p=2$$





$$\Xi = [0,0,0,0.5,0.5,1,1,1]\ p=2$$

$$\Xi = [0,0,0,0.5,1,1,1]\ p=2$$

(a) (b)

Figura 13 – (a) Inserção de nós e elevação de grau (b) refinamento *k*
Fonte: O autor.

A inserção de nós e posterior elevação de grau (refinamento p) resulta em seis funções base de grau 2. Na Figura 13(a) pode-se observar que as funções assim geradas apresentam continuidade C^0 entre os limites do elemento.

Por outro lado, quando é usado o refinamento k, Figura 13(b), é obtido um número menor de funções base de grau 2 (quatro), porém, estas funções base têm continuidade C^1 através dos limites do elemento.

Segundo Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) o uso de funções base com maior grau de continuidade é um fator importante na precisão e robustez das soluções obtidas usando AIG.

2.1.8 Superfícies B-*Spline*

Considere as funções base B-*Spline* $N_{i,p}(\xi)$ e $M_{j,q}(\eta)$ com graus polinomiais p e q e vetores de nós de controle correspondentes: $\Xi = \left[\xi_{1,}\xi_{2,\ldots\ldots}\xi_{n+p+1}\right]$ e $\mathbf{H} = \left[\eta_{1,}\eta_{2,\ldots\ldots}\eta_{m+q+1}\right]$, onde coordenadas paramétricas ξ e η são ortogonais. Para cada uma destas funções base corresponde um vetor de pontos de controle. O conjunto de vetores de pontos de controle em duas dimensões é chamado de malha de controle e pode ser representado por $\left\{\mathbf{P}_{i,j}\right\}, i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,m$.

Através do produto tensorial:

$$\mathbf{S}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} \tag{23}$$

é obtida uma superfície B-*Spline.*

Uma superfície base B-Spline $\tilde{N}_{i,j,p,q}$ pode ser obtida pelo produto vetorial de duas funções base:

$$\tilde{N}_{i,j,p,q}(\xi,\eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \tag{24}$$

A Figura 14 representa uma função base bidimensional quadrática.

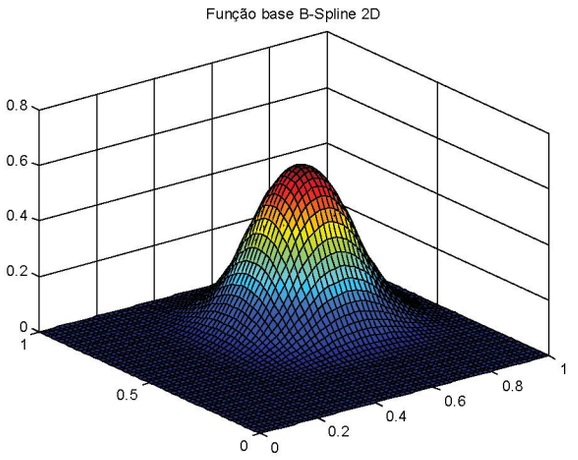


Figura 14 – Função base de superfície B-Spline obtida por produto tensorial
$\Xi = [0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1]$ $\mathbf{H} = [0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1]$
$\mathbf{W} = [1,1,1,1,1,1]$

Fonte: O autor.

2.1.9 *Non-Uniform Rational B-Splines*: NURBS

Uma curva NURBS é uma curva paramétrica B-*Spline* racional e com vetor de nós de controle não uniforme.

Pode-se obter uma curva NURBS a partir de uma curva *B-Spline* da seguinte maneira. Considere a curva B-*Spline*:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi)\mathbf{P}_i \tag{25}$$

Reescreve-se o vetor $\mathbf{P}_i$ como um vetor coluna com quatro componentes, sendo o quarto coeficiente igual a um:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

A multiplicação de cada coordenada por um número não nulo, não altera sua posição relativa. Seja w_i um número não nulo, pode-se obter assim um novo vetor em coordenadas homogêneas:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix} \tag{27}$$

Substituindo a Equação (27) na Equação (25) obtém-se:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi)\mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i z_i \\ \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i \end{bmatrix} \tag{28}$$

Esta equação representa o mapeamento de um ponto no espaço tridimensional para um espaço de quatro dimensões com $w_i \neq 0$. Pode-se obter novamente a representação cartesiana dividindo $\mathbf{C}(\xi)$ pelo quarto componente homogeneizado:

$$\mathbf{C}(\xi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i x_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(\xi) w_i} \\ \dfrac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i y_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(\xi) w_i} \\ \dfrac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i z_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(\xi) w_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(\xi) w_j} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

de onde finalmente obtém-se:

$$\mathbf{C}(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(\xi) w_j} \tag{30}$$

A equação (30) representa uma curva NURBS de grau p com pontos de controle $\mathbf{P}_i$, com vetor de nós de controle Ξ e pesos w_i.

Fazendo:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(\xi) w_j} \tag{31}$$

A equação (30) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} R_i^p(\xi) \mathbf{P}_i \tag{32}$$

onde $R_i^p(\xi)$ representa as funções base NURBS. Segundo Piegl e Tiller (1997), as curvas racionais descritas na Equação (32) permitem um processamento computacional eficiente e armazenamento de dados compacto. De acordo com (MINETTO, 2003) também é possível afirmar:

1. Se todos os pesos forem iguais à unidade, a curva NURBS se reduz para uma curva B-*Spline*.
2. Tanto o numerador como o denominador da Equação (31) são polinômios de grau p. Como resultado, os coeficientes R_i^p que multiplicam os pontos de controle são o quociente de dois polinômios de grau p, logo R_i^p assim como a função $\mathbf{C}(\xi)$ são racionais.

Estes resultados implicam que as curvas B-*Splines* são casos especiais das curvas NURBS e, por serem racionais, permitem a modelagem de cônicas e quádricas, propriedade que não existe nas curvas B-*Spline*. As derivadas das funções base descritas em (31) podem ser obtidas pela regra do quociente.

Um exemplo de funções base NURBS obtidas desta forma é mostrado na Figura 15.

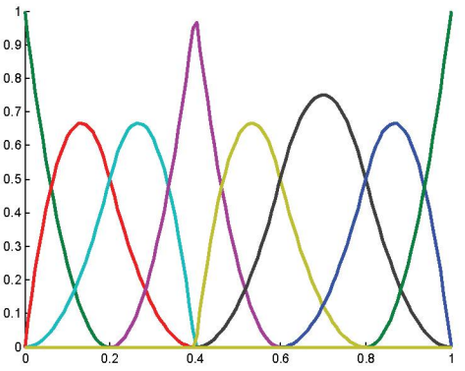


Figura 15 - Funções base NURBS quadráticas para um vetor de nós de controle aberto não uniforme $\Xi = [0,0,0,1,2,2,4,5,5,5]$ e pesos $W = [1,1,1,1,1,1,1,1]$

Fonte: O autor.

A existência dos pesos w permite também uma maior flexibilidade na modelagem de geometrias como mostrado na Figura 16 onde pode-se observar a variação da curva com o mesmo polígono de controle e mesmas funções base para diferentes valores de w.

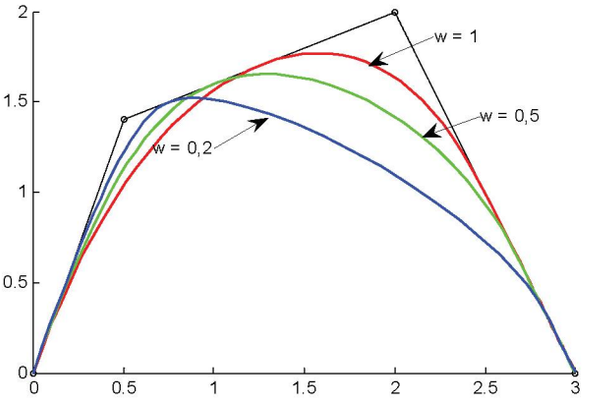


Figura 16 - Curvas NURBS quadráticas com $\Xi = [0,0,0,1,2,3,3,3]$ e $\mathbf{w} = [1,1,w,1]$

Fonte: (MENDOZA FAKHYE *et al.*, 2016)

2.1.10 *Superfícies NURBS*

Uma superfície *NURBS* também pode ser obtida através do produto tensorial de duas curvas *NURBS*. Desta maneira pode-se obter:

$$\mathbf{S}(\xi,\eta) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \qquad 0 \le \xi,\eta \le 1 \tag{33}$$

Os pontos $\mathbf{P}_{i,j}$ formam a malha de controle, $w_{i,j}$ são os pesos e $N_{i,p}(\xi)$ assim como $N_{j,q}(\eta)$ são as funções base B-*Spline* definidas na seção 2.1.4 com os vetores de nós de controle Ξ e H respectivamente. Da mesma maneira fazendo:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \tag{34}$$

A superfície da equação (33) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S}(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)\mathbf{P}_{i,j} \tag{35}$$

As funções $R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)$ representam as funções base de uma superfície *NURBS*, e estas funções compartilham as principais propriedades matemáticas das funções base $N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)$ citadas na seção 2.1.4, e as derivadas também podem ser calculadas pela regra do quociente.

A Figura 17 mostra uma superfície *NURBS* biquadrática junto com a malha de controle.

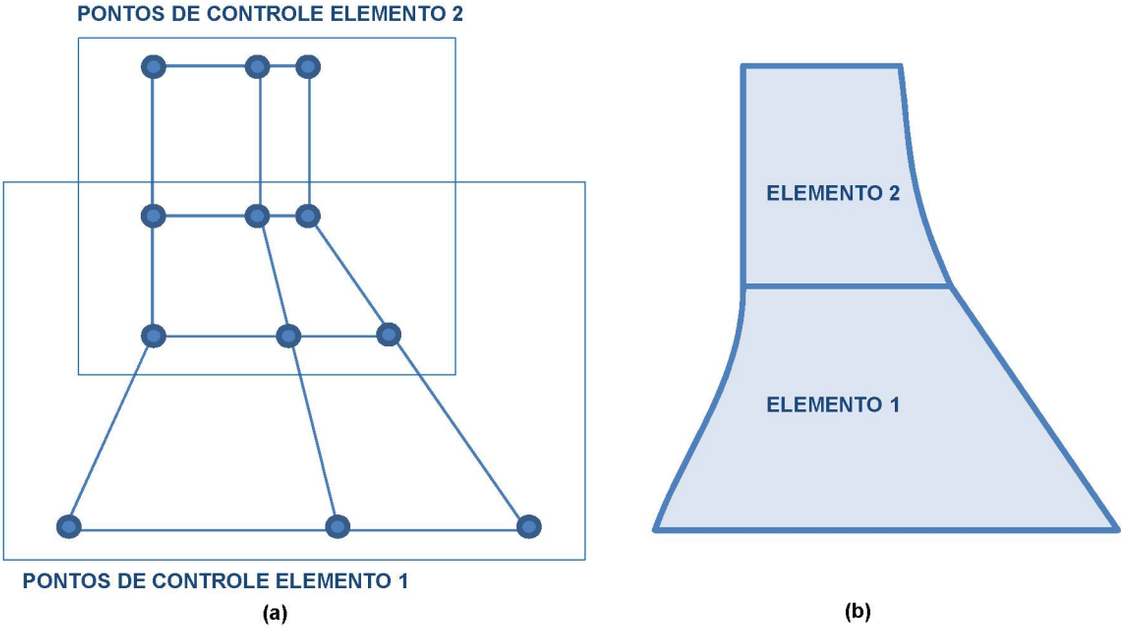


Figura 17 – (a) Malha de controle e (b) Malha física para uma superfície *NURBS* biquadrática de dois elementos isogeométricos com 12 pontos de controle, $\Xi=\{0,0,0,.5,1,1,1\}$, $\mathrm{H}=\{0,0,0,1,1,1\}$ e $\mathbf{W}=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$.

Fonte: O autor.

2.2 ESTADO DA ARTE - ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA (AIG)

A modelagem do comportamento físico de sistemas na natureza pode ser baseada em equações diferenciais. Estas equações diferenciais podem ser classificadas em Problemas de Valor de Contorno (PVC) e Problemas de Valor Inicial (PVI) (ZILL; CULLEN, 2003).

Soluções analíticas somente encontram-se disponíveis para um número limitado de problemas e geralmente com geometrias simples. Entretanto, para inúmeros problemas reais de engenharia, a obtenção de soluções analíticas é algo difícil ou impraticável.

O desenvolvimento das técnicas numéricas permitiu a obtenção de soluções aproximadas para inúmeros problemas complexos. Mas foi só a partir da acessibilidade a computadores com maior capacidade de processamento, velocidade e de armazenamento suficiente, que os métodos numéricos se tornaram a forma dominante para a solução de problemas reais de engenharia.

Entre os vários métodos numéricos para a solução de PVI ou PVC disponíveis podem ser citados o Método dos Elementos Finitos (BATHE, 2006), (HUGHES, 2000), (REDDY, 1993), (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005); o Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA, 1982), (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992), (WROBEL, 2002), (WROBEL; ALIABADI, 2002), (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 2012); Método dos Elementos Finitos Generalizados (MELENK; BABUŠKA, 1996), (BABUŠKA; MELENK, 1997) e métodos sem malha (BELYTSCHKO et al., 1996), (LIU, 2009).

O desenvolvimento de um projeto moderno de engenharia consiste em várias fases ou etapas, entre elas: a modelagem gráfica em CAD, criação do modelo numérico, a análise propriamente dita, solução e o pós-processamento. Pode-se observar que a análise e a obtenção da solução são apenas uma parte do processo.

No geral todos estes métodos trabalham com uma geometria aproximada, que não é a “exata” (modelo CAD). Este fato introduz erros de geometria na solução numérica.

Visando a solução deste problema, Hughes *et al.*(2005) introduziram uma nova formulação chamada Análise Isogeométrica (AIG). No artigo citado, as funções *NURBS* (padrão dos sistemas CAD) foram utilizadas não só para a descrição da geometria como também na aproximação do campo em análise. É importante notar que tentativas de incorporar a tecnologia CAD dentro do MEF já tinham sido

propostas anteriormente, como é o caso do BSFE (*B-Spline Finite Element Method*) proposto no trabalho de Kagan, Fischer e Bar-Yoseph (1998) e desenvolvido em trabalhos subsequentes (KAGAN; FISCHER, 2000), (KAGAN; FISCHER; BAR-YOSEPH, 2001) onde *B-Splines* foram utilizadas como funções de forma. A maior diferença entre o BSFE e a AIG é que a abordagem do BSFE corresponde à modelagem físico-geométrica, onde ao invés de manipular diretamente os parâmetros das curvas B-*Spline* para obter a geometria desejada, considera-se um corpo com uma configuração geométrica inicial onde são aplicadas forças fictícias que modelam o corpo até a configuração de projeto, precisando assim da resolução de um problema físico cada vez que a geometria é alterada.

A partir do trabalho inicial de Hughes *et al.* (2005), vários outros artigos foram publicados, mostrando a aplicabilidade desta técnica em diversos campos, incluindo um livro base para esta área de pesquisa (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009) tanto como eventos específicos sobre o método (BARTH et al., 2014).

A AIG tem se tornado uma alternativa viável ao Método dos Elementos Finitos convencional (BAZILEVS *et al.*, 2006), encontrando-se em desenvolvimento permanente. Na literatura é possível verificar a constante evolução das formulações procurando melhoras na precisão e eficiência (AURICCHIO et al., 2007), (ECHTER; OESTERLE; BISCHOFF, 2013), (WANG; ZHANG; XUAN, 2012), (ENGVALL; EVANS, 2016), (XIA; QIAN, 2016).

Um dos primeiros trabalhos que explorou a AIG em problemas de vibração de estruturas é o de Cottrel *et al.* (2006). Neste trabalho, a formulação AIG mostrou desempenho superior em análise de vibrações. Importantes propriedades da AIG quando aplicado refinamento foram exploradas por Cottrell *et al.* (2007). Estas propriedades foram confirmadas no trabalho de Beirão da Veiga *et al.*(2011).

Os problemas de elastodinâmica são fonte contínua de estudos e aperfeiçoamentos na AIG. Manh *et al.* (2011) estudaram problemas de otimização de membranas submetidas a vibrações, Shojaee *et al.* (2012a) analisaram o problema de vibrações livres em placas finas usando NURBS para a aproximação da geometria e do campo de deflexões, Idesman *et al.* (2014) abordam a propagação de ondas devido a cargas de impacto em barras comparando soluções com o método dos elementos finitos convencional, espectral e isogeométrico. Problemas de dinâmica em barras com grandes rotações são tratados no trabalho

de Espath *et al.* (2015) enquanto que Thai *et al.* (2016) modelaram estruturas formadas por cabos sujeitas a vibrações livres usando AIG.

Em problemas de contato, a presença de superfícies facetadas pode levar a saltos e oscilações nos campos de tensão quando são utilizadas formulações convencionais de MEF (NGUYEN; BORDAS, 2015). Temizer *et al.* (2011) encontraram benefícios na utilização da AIG, visto que, usando *NURBS* as superfícies de contato obtidas são suaves, levando a resultados mais precisos. Uma revisão dos avanços nesta área específica pode ser encontrada em De Lorenzis, Wriggers, Hughes (2014).

Outra linha de pesquisa bastante ativa tenta aproveitar características matemáticas das funções base NURBS e sua alta continuidade, que é uma propriedade favorável do ponto de vista da integração numérica. Com a intenção de diminuir o custo computacional das aplicações AIG, Hughes *et al.* (2010) desenvolveram uma quadratura otimizada como alternativa à quadratura de Gauss convencional. Outros trabalhos como os de Auricchio *et al.* (2012b), Xi *et al.* (2015), Ait-Haddou *et al.* (2015), Hillman *et al.* (2015), Johannessen (2017), Barton e Calo (2016) e Calabrò *et al.* (2016) seguem esta direção.

A AIG também tem mostrado vantagens na área de otimização estrutural de forma devido à capacidade de acoplamento com ambientes CAD. Nesta área é possível citar os trabalhos de Friederich *et al.* (2011), Hassani *et al.* (2012), Seo *et al.* (2010), Wall *et al.* (2008) e Wang e Benson (2016).

Aplicações na teoria de placas e cascas também têm sido abordadas por diversos pesquisadores. Mostrando vantagens com respeito às abordagens convencionais, é possível encontrar a aplicação de AIG na análise de cascas usando a Teoria de Reissner-Mindlin (BENSON *et al.*, 2010), análise de cascas usando a Teoria de Kirchoff-Love (KIENDL *et al.*, 2010), problemas de cascas envolvendo grandes deformações (BENSON *et al.*, 2011). Kikis *et al.* (2016) propõem os estudo de cascas de Reissner-Mindlin usando malhas diferentes de pontos de controle para rotações e deslocamentos. Existem diversos trabalhos nesta área como os de: Riffnaller-Schiefer *et al.* (2016), Yin *et al.* (2014) e Yin *et al.* (2015).

Na área de materiais compósitos podem ser citados os trabalhos de Kapoor e Kapania (2012) que estudaram placas de material compósito com não linearidade geométrica usando AIG, Shojaee *et al.* (2012b) e Thai *et al.* (2012) analisaram o problema de vibrações e flambagem para este mesmo tipo de placas. A modelagem

de materiais compósitos é um campo muito ativo de pesquisa, entre outros trabalhos pode-se citar: Guo e Ruess (2015), Nguyen-Xuan *et al.* (2014a), Phung-Van *et al.* (2015) e Luu et al. (2015).

Em outras áreas de estruturas, modelos com elementos isogeométricos de viga de Timoshenko foram desenvolvidos por Bouclier *et al.* (2012) e Lee e Park (2013). Os primeiros centraram o trabalho no desenvolvimento de elementos livres de travamento por cortante e os últimos estudaram problemas de vibração.

No campo de estruturas civis, vigas mistas de concreto armado e perfis de aço foram modeladas usando AIG por Lezgy-Nazargah (2014) e Cazzani *et al.* (2014) modelaram arcos históricos em alvenaria para estudos de recuperação e manutenção.

Aplicações da AIG em problemas envolvendo plasticidade podem ser encontradas nos trabalhos de Elguedj *et al.*(2008), Cardoso e Cesar de Sá (2012), Taylor (2011), Nguyen-Xuan *et al.* (2014b) e Moysidis e Koumusis (2015).

De acordo com Nguyen *et al.* (2015) a suavidade de funções de base NURBS é atraente para análise de fluidos. Entre os trabalhos nesta área pode-se citar: Bazilevs *et al.* (2008) que estudaram interação entre fluido incompressível e estruturas hiperelásticas, Gomez *et al.* (2010) simularam numericamente as equações de Navier-Stokes-Korteweg, Evans e Hughes (2013) estudaram as equações de Navier-Stokes para meios incompressíveis, Shahrbanozadeh *et al*. (2015) estudaram o fluxo de água através da fundação de uma barragem através da Equação de Laplace.

O campo de aplicação da AIG continua em crescimento atingindo áreas como mecânica da fratura (Bui et al. (2016), Choi e Cho (2014), Cuomo *et al.* (2014), De Luycker *et al.* (2011) e Irzal *et al.* (2014)), biomecânica (Chivukula *et al.* (2014), Signetti e Pugno (2015), Tepole *et al.* (2014), Tepole *et al.* (2015) e Zhang et al. (2007)) e geotecnia (Nguyen *et al.* (2014)).

Na área de concreto ou concreto armado existem poucos trabalhos publicados. Ma *et al.* (2016) implementaram um modelo elastoplástico de dano para peças de concreto usando AIG, Lezgy-Nazargah (2014) propôs um modelo para análise de vigas de concreto armado com modelagem explícita das barras de aço usando AIG.

Na literatura é possível encontrar a generalização da ideia de trabalhar com as funções NURBS como funções de interpolação no Método dos Elementos de

Contorno. Entre os primeiros trabalhos nesta direção temos o trabalho de Politis *et al.* (2009) onde esta abordagem é aplicada para problemas de potencial e Gong *et al.* (2017) que aplicam a técnica para problemas de potencial tridimensionais. Simpson *et al.* (2013) utilizam esta abordagem para problemas de elastostática. Nestes trabalhos é utilizado o termo Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos.

Também é possível encontrar o enfoque isogeométrico combinado com Método de Colocação (AURICCHIO et al., 2012a), como uma alternativa ao método de Galerkin de resíduos ponderados. Segundo Kruse *et al.* (2015) esta aproximação fornece uma redução significativa do custo computacional para discretizações com funções base isogeométricas de alto grau.

No Brasil a AIG também está ganhando espaço, podemos citar como exemplo os trabalhos de Espath *et al.* (2015) na Universidade Federal do Rio Grande do Sul que utilizaram simultaneamente AIG e MEF em problemas de otimização estrutural de perfis aerodinâmicos.

Na Universidade Federal do Paraná, é possível citar os trabalhos de Rauen *et al.* (2013a, 2013b, 2017) onde foram estudados problemas de vibração livre em estruturas de barras e comparando o seu desempenho com o Método dos Elementos Finitos convencional e o Método dos Elementos Finitos Generalizados. Almeida *et al.* (2016) estudaram problemas de concentração de tensões em elasticidade bidimensional.

Na Universidade Federal do Ceará, Barroso (2015) utilizou AIG na análise e otimização de estruturas laminadas usando algoritmos genéticos.

Também na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Tonon (2016) realizou a simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogeométrica.

2.2.1 Bibliotecas e implementações disponíveis

A descrição de referência dos aspectos computacionais num código de AIG pode ser encontrada em Cottrell *et al.* (2009). Vuong et al. (2010) disponibilizaram um código de AIG em Matlab® para solução de problemas de difusão bidimensionais. Uma contribuição importante foi realizada por De Falco *et al.* (2011), que disponibilizaram uma série de bibliotecas em Matlab® e C++ de uso livre para

AIG. Vários trabalhos subsequentes utilizaram estas bibliotecas como base, incluindo o presente trabalho.

Rypl e Patzak (2012) apresentaram uma implementação da AIG em C++ dentro de um código de elementos finitos usando programação orientada a objetos.

Nguyen *et al.* (2015) desenvolveram o código aberto em Matlab® MIGFEM, que permite análises usando AIG com funções de enriquecimento no contexto de XFEM *(Extended Finite Element Method*). Também Pauletti et al. (2015) disponibilizaram as bibliotecas de código aberto IGATools desenvolvidas em C++. Mais recentemente, Dalcin et al. (2016) apresentaram um código de AIG de alta performance usando processamento paralelo.

Na análise de placas finas, Chang *et al.* (2016) apresentaram um código de AIG em Fortran usando o método da penalidade para imposição das condições de contorno.

Recentemente Stahl *et al.* (2016) apresentaram técnicas para visualização e pós-processamento de resultados de AIG usando também funções NURBS. É importante ressaltar que na literatura é comum a visualização de resultados da AIG usando pós-processadores do MEF.

Outra tendência é a incorporação das técnicas de AIG em códigos de elementos finitos já existentes, como por exemplo, o trabalho de Taylor (2011) que incorporou AIG no FEAP (TAYLOR, 2005) e o trabalho de Duval, Maurin e Elguedj (2012) que incorporaram subrotinas de AIG no software ABAQUS (ABAQUS, 2011). Estes trabalhos levam em consideração o fato de que a utilização da AIG ainda está praticamente limitada ao meio acadêmico. Um dos fatores que impede a aplicação mais ampla da AIG na indústria é a dificuldade existente na incorporação das informações geométricas contidas em arquivos CAD diretamente em programas de AIG.

2.2.2 AIG na análise de barragens

Até a fase de levantamento da literatura científica disponível deste trabalho, não foram encontradas aplicações da AIG na modelagem ou análise estrutural de barragens de concreto. No entanto, existem artigos que tratam da mecânica dos fluidos em barragens, por exemplo, o trabalho de Shahrbanozadeh, Barani e Shojaee (2015) que utilizaram AIG para resolver a equação de Laplace para analisar

o fluxo sob barragens e o trabalho de Maghsoudi, Amini e Basefat (2014) que simulou o comportamento do fluído durante o rompimento de uma barragem.

Este levantamento valida a afirmação de que estudos que aplicam a AIG em problemas de análise estrutural de barragens (estáticos ou dinâmicos) ainda são raros, configurando uma área promissora e ainda em desenvolvimento dentro dos estudos da AIG.

Como comentário final, é possível afirmar que a promessa inicial com a qual surgiu a AIG, da possível integração dos ambientes CAD e de análise ainda não foi concretizada integralmente, mas existe um esforço da comunidade científica com este objetivo. No trabalho de Längts *et al*. (2016) é apresentada uma interface computacional que permite a modelagem CAD e a análise estrutural interativa usando AIG para estruturas laminares. Nesta interface estão integradas ferramentas que permitem a medição da eficiência do projeto, como a distribuição da energia de deformação, permitindo a mudança geométrica e análise imediata de maneira gráfica e interativa. Na mesma direção encontra-se o trabalho de Philipp et al. (2016), mas para a análise e projeto de tenso-estruturas.

Como visto nesta revisão do estado da arte, existem poucos trabalhos referentes à aplicação da AIG em seções de barragens de concreto. A maioria dos trabalhos que se teve acesso são aplicações em outras áreas da engenharia estrutural, logo a existência desta lacuna justifica a realização desta pesquisa.

As principais contribuições deste trabalho são a utilização da AIG, com formulação *multi-patch*, em um modelo de uma seção de barragem de concreto com modelagem do solo de fundação em problemas de vibrações, e a utilização do conceito de massa adicional junto com a AIG em problemas de interação fluído-estrutura.

3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

A Análise Isogeométrica introduzida por Hughes et al. (2005) é um método numérico para solução de problemas de valor de contorno. Este método permite a discretização de um meio contínuo através de funções de interpolação geradas a partir da construção de um modelo sólido ou de um modelo CAD (*Computer Aided Design*). Nesta formulação as funções de aproximação são aquelas empregadas tradicionalmente em computação gráfica, como as *B-Splines* e NURBS.

Nas seções anteriores foram mostradas a versatilidade e vantagens das funções NURBS, assim como sua precisão na modelagem geométrica. As funções NURBS têm como característica principal a representação fiel do modelo físico em estudo. Foi mostrado que estas características são consequência das funções base utilizadas. Na AIG estas mesmas funções são utilizadas na aproximação e cálculo da solução.

3.1 FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA BIDIMENSIONAL

No MEF a formulação isoparamétrica refere-se à utilização das mesmas funções base para aproximação da geometria e do campo desconhecido (BATHE, 2006). A AIG usa também este conceito, porém as funções base utilizadas modelam de maneira exata a geometria em todo momento, ou seja, o refinamento só tem a função de melhorar a aproximação do campo incógnita.

Os dados de entrada de AIG são os dados das curvas ou superfícies *NURBS* que definem o modelo, ou seja, o vetor de nós de controle, os pontos de controle e o grau das funções base.

Para cada elemento isogeométrico, trabalha-se com três conceitos de domínio:

- O domínio físico (Ω_e) está associado aos eixos coordenados globais x, y e z e deve representar a estrutura real a ser estudada;
- O domínio paramétrico ($\widehat{\Omega}_e$), formado pelo mapeamento das funções NURBS em duas dimensões, é um retângulo e, em três dimensões, um paralelepípedo. Este domínio é definido considerando somente os

intervalos não nulos entre os nós de controle ξ_i. Estes intervalos definem os elementos isogeométricos.

- O domínio primário ($\bar{\Omega}_e$) é o domínio onde são definidas as regras de integração, neste caso $\bar{\Omega}_e = [-1,1]$ (integração de Gauss).

Estes domínios e suas relações estão ilustrados na Figura 18.

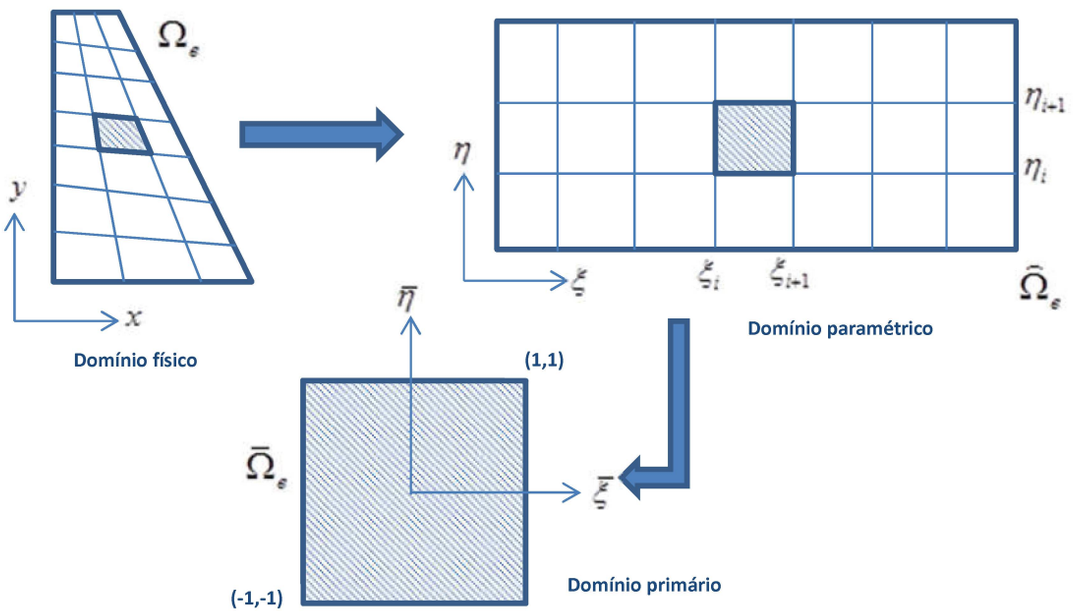


Figura 18 – Domínios utilizados na AIG
Fonte: O autor.

Neste ponto é importante definir o conceito de *patch* na AIG, “retalho” seria a tradução literal da palavra inglesa *patch* ao português, cuja definição segundo o Dicionário Michaelis (2004) é: “[...] Parte que se separa de um todo; fração”. No contexto da AIG o termo patch se refere a uma parcela do domínio em análise ou em outras palavras representa um subdomínio do problema em estudo, logo a descrição de domínios mostrada corresponde a um problema com um *patch* único, e o desenvolvimento a seguir corresponde a esta descrição. Existem geometrias com maior complexidade que precisam de múltiplos *patches* ou subdomínios. Nas seções seguintes será explicado o conceito de *patches* múltiplos.

O mapeamento do domínio físico para o domínio paramétrico é dado por:

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^{n} \mathbf{\Psi}_I(\boldsymbol{\xi})\mathbf{P}_I \tag{36}$$

onde $\mathbf{\Psi}_I(\xi)$ representa, nesse caso, as funções base de superfície *NURBS*, $\mathbf{P}_I$ são os n pontos de controle e ξ representa as coordenadas paramétricas (ξ,η). Na formulação isoparamétrica utilizada, o campo de deslocamentos é aproximado pelas mesmas funções de forma, ou seja:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{I=1}^{n} \mathbf{\Psi}_I(\xi)\mathbf{u}_I \tag{37}$$

Na Equação (37), $\mathbf{u}_I$ representa o valor do campo de deslocamentos correspondentes aos pontos de controle $\mathbf{P}_I$. Na AIG os graus de liberdade ficam nos pontos de controle, considerando que as funções *NURBS* não são interpoladoras, alguns valores de $\mathbf{u}_I$ podem não representar deslocamentos físicos.

3.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Antes de poder efetuar cálculos de integração, por conta do mapeamento definido na Equação (36), é necessário calcular a matriz Jacobiana. A matriz Jacobiana tem a forma:

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{bmatrix} x_{1,\xi} & x_{1,\eta} \\ x_{2,\xi} & x_{2,\eta} \end{bmatrix} \tag{38}$$

As componentes desta matriz (derivadas parciais) são calculadas usando a equação (36):

$$\begin{aligned} x_{1,\xi} &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi} P_{1I} \\ x_{1,\eta} &= \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi_I}{\partial \eta} P_{1I} \\ x_{2,\xi} &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi} P_{2I} \\ x_{2,\eta} &= \frac{\partial x_2}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi_I}{\partial \eta} P_{2I} \end{aligned} \tag{39}$$

Nesta expressão P_{iI} representa a coordenada x_i do ponto de controle I. O determinante de $\mathbf{J}_\xi$ é denotado por $\left|J_\xi\right|$. As derivadas das funções base com respeito às coordenadas físicas são calculadas através de:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{I,x_1} & \Psi_{I,x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{I,\xi} & \Psi_{I,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{,x_1} & \xi_{,x_2} \\ \eta_{,x_1} & \eta_{,x_2} \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{I,x_1} & \Psi_{I,x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{I,\xi} & \Psi_{I,n} \end{bmatrix} \left| J_{\xi} \right|^{-1} \tag{41}$$

Nestas expressões os índices subscritos representam derivação parcial após a vírgula.

Na AIG, integrações realizadas sob o domínio físico Ω são divididas em integrais por elemento cujo domínio é denotado por Ω_e. Estas integrais devem ser realizadas no domínio paramétrico $\hat{\Omega}_e$ e depois trazidas para o domínio primário $\overline{\Omega}_e$ onde as regras de integração são definidas.

Este processo é descrito para uma função geral de duas variáveis $f(x,y)$ como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\left(x_1,x_2\right) d\Omega &= \sum_{e=1}^{n} \int_{\Omega_e} f\left(x_1,x_2\right) d\Omega_e \\ &= \sum_{e=1}^{n} \int_{\hat{\Omega}_e} f\left(x_1(\xi),x_2(\eta)\right) \left|J_{\xi}\right| d\hat{\Omega}_e \\ &= \sum_{e=1}^{n} \int_{\overline{\Omega}_e} f\left(\overline{\xi},\overline{\eta}\right) \left|J_{\xi}\right| \left|J_{\overline{\xi}}\right| d\overline{\Omega}_e \end{aligned} \tag{42}$$

onde n é o número de pontos de integração.

A última integral pode ser calculada usando quadratura de Gauss-Legendre. Neste trabalho foi utilizada uma quadratura gaussiana $(p+1)\times(q+1)$ onde p e q são os graus das funções base nas direções ξ e η, respectivamente.

O determinante da matriz Jacobiana no caso da transformação do espaço primário ao espaço paramétrico é dado por (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009):

$$\left|J_{\overline{\xi}}\right| = \frac{1}{4}\left(\xi_{i+1} - \xi_i\right)\left(\eta_{j+1} - \eta_j\right) \tag{43}$$

Deve ser ressaltado que a quadratura Gaussiana não é uma solução ótima para AIG. Hughes *et al.* (2010) indicam que a integração de funções NURBS precisa de um número menor de pontos de integração, uma das razões para esta afirmação é que as funções *NURBS* utilizadas possuem um certo grau de suavidade nos contorno dos elementos que permitem esta redução.

Conforme citado na seção 2.2 esta é uma linha constante de pesquisa na AIG, podendo-se considerar o trabalho de Hughes *et al.* (2010) como seminal.

3.3 APLICAÇÃO DA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA À ELASTICIDADE LINEAR

A equação diferencial ou forma forte do problema de elasticidade de maneira compacta está dada pela equação de equilíbrio em notação indicial por:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ no domínio } \Omega. \tag{44}$$

O problema está sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\sigma_{ij} n_j = h_i \qquad \text{em } \Gamma_\sigma \tag{45}$$

$$u_i = \overline{u} \qquad \text{em } \Gamma_u \tag{46}$$

A Equação (45) representa as condições naturais ou de Neumann e a Equação (46) as condições essenciais ou de Dirichlet, Γ_σ e Γ_u representam parcelas do contorno tais que não existe interseção entre eles com exceção de alguns pontos discretos ou pontos singulares (REDDY, 1993).

O conjunto das Equações (44), (45) e (46) representam o equilíbrio estático do corpo em estudo junto com as condições de suporte e as tensões de superfície.

Para um sólido linear elástico a Lei de *Hooke* generalizada é dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \tag{47}$$

onde C_{ijkl} são os coeficientes elásticos ou relação constitutiva e ε_{ij} é o tensor de deformações infinitesimais. Escrito de forma matricial tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon} \tag{48}$$

A matriz $\mathbf{C}^e$, também conhecida como matriz constitutiva, tem a forma:

$$\mathbf{C}^e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson.

O tensor de deformações infinitesimais é definido por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,x_j} + u_{j,x_i}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]. \tag{50}$$

Onde x_i representam as coordenadas cartesianas e $i = 1,2,3$.

Ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{Du} \tag{51}$$

Logo, a Lei de Hooke pode ser reescrita como:

$$\sigma = \mathbf{C}^e\mathbf{Du} \tag{52}$$

Se $\hat{\sigma}_{ij}$ é uma solução aproximada da Equação (44), então os resíduos no domínio R^{Ω} e no contorno R^{Γ} ficam:

$$R^{\Omega} = \hat{\sigma}_{ij,j} + f_i \tag{53}$$

$$R^{\Gamma} = \hat{\sigma}_{ij}n_j - h_i \tag{54}$$

Aplicando o método de Galerkin e visando minimizar o resíduo no domínio e no contorno, multiplica-se a equação do resíduo por uma função peso. Integrando obtém-se:

$$\int_{\Omega}\left(\hat{\sigma}_{ij,j} + f_i\right)w_i d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma}\left(\hat{\sigma}_{ij}n_j - h_i\right)w_i d\Gamma_\sigma = 0 \tag{55}$$

Integrando por partes e aplicando o teorema de Green, chega-se na forma fraca do problema:

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij} w_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} h_i w_i d\Gamma_\sigma \tag{56}$$

Na forma matricial a expressão (56) torna-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{W}\hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W}\mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{W}\mathbf{h} d\Gamma_\sigma \tag{57}$$

onde $\mathbf{D}$ é a matriz de operadores diferenciais, $\mathbf{W}$ é a matriz de funções peso, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ é a matriz de tensões aproximadas, $\mathbf{f}$ é a matriz de forças externas e $\mathbf{h}$ é a matriz das condições de contorno naturais.

Aproximando então o campo de deslocamentos por uma função do tipo

$$\hat{\mathbf{u}}(x) = \sum_{I=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_I \mathbf{u}_I \tag{58}$$

onde $\boldsymbol{\Psi}_I$ representa as funções base NURBS. Reescrevendo os tensores de deformações infinitesimais e tensões aproximados:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Psi}_I \mathbf{u}_I \tag{59}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e \mathbf{D}\boldsymbol{\Psi}_I \mathbf{u}_I \tag{60}$$

Designando-se o produto $\mathbf{D}\boldsymbol{\Psi}_I = \mathbf{B}_I$ a Equação (60) fica:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \tag{61}$$

A matriz $\mathbf{B}_I$, no contexto da AIG, representa as derivadas das funções de base *NURBS*.

Lembrando que no método de Galerkin as funções peso são as mesmas que as funções de aproximação, obtém-se uma nova expressão para a forma fraca:

$$\sum_{I=1}^{n} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_I d\Omega \right) \mathbf{u}_I = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}_I \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{\Psi}_I \mathbf{h} d\Gamma_\sigma \tag{62}$$

A Equação (62), representa o sistema matricial: $\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, que deve ser resolvido para $\mathbf{u}$, e a matriz de rigidez $\mathbf{k}$ do sistema é dada por:

$$\mathbf{k} = \sum_{I=1}^{n} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_I d\Omega \right) \mathbf{u}_I \tag{63}$$

No caso bidimensional a matriz $\mathbf{B}_I$ é dada por:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x_1} & \\ & \Psi_{I,x_2} \\ \Psi_{I,x_2} & \Psi_{I,x_1} \end{bmatrix} \tag{64}$$

onde Ψ_{I,x_1} e Ψ_{I,x_2} são as submatrizes das derivadas espaciais das funções base *NURBS*.

Com o objetivo de ilustrar melhor este procedimento dentro da AIG, considera-se o problema bidimensional da Figura 19. Para este problema as funções base são de grau 2 nas duas direções ($p = q = 2$) e os vetores de nós de controle nas direções ξ e η são $\Xi = [0,0,0,0.5,1,1,1]$ e $\mathrm{H} = [0,0,0,1,1,1]$, respectivamente. A geometria no espaço físico está descrita com 12 pontos de controle (Figura 19a), sendo quatro pontos na direção ξ e três pontos na direção η.

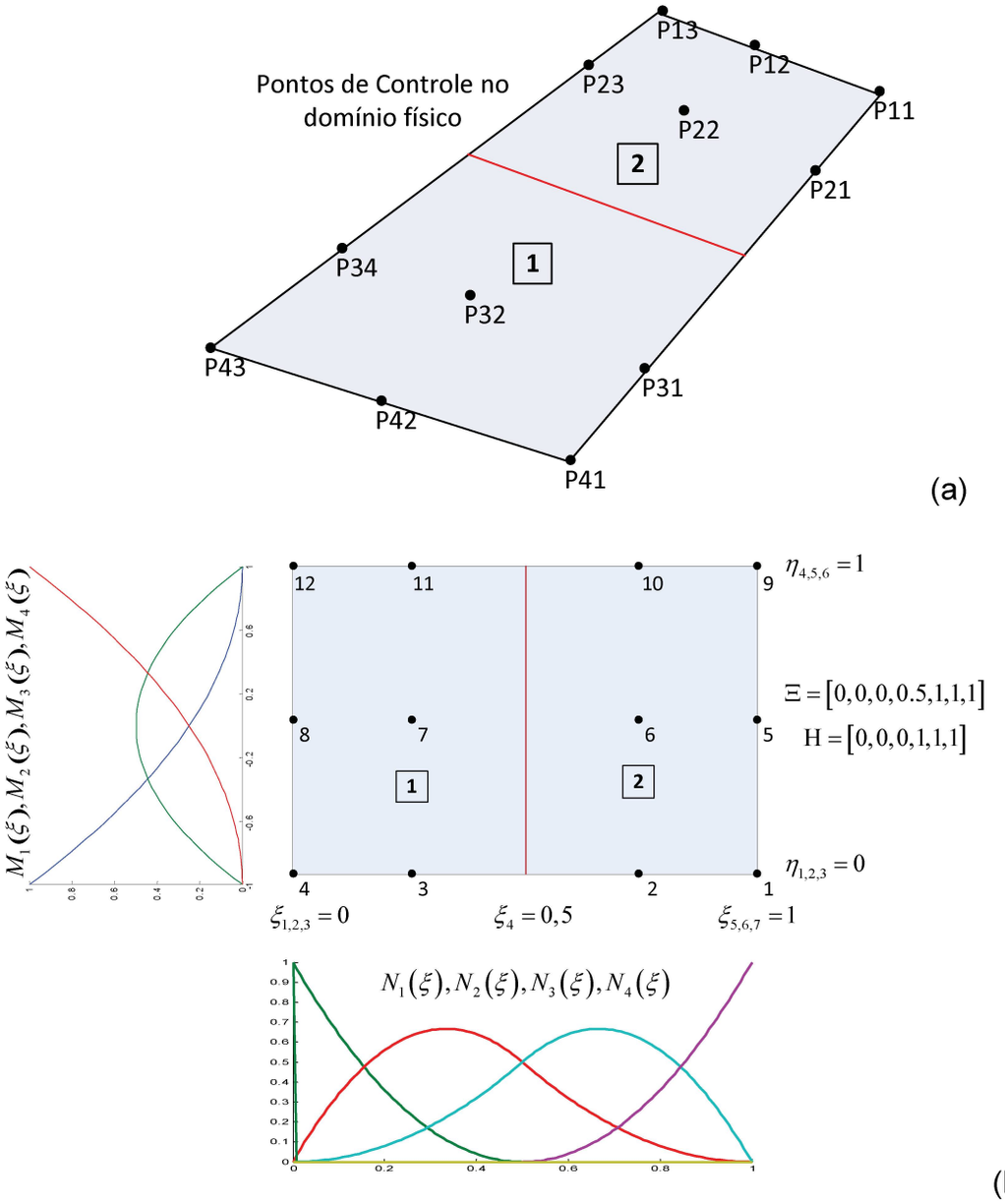


Figura 19 – Problema bidimensional em AIG (a) Domínio físico (b) Domínio paramétrico e funções base

Fonte: O Autor.

Para o elemento 1, as funções base unidimensionais não nulas e o domínio no espaço paramétrico são mostrados no Quadro 1.

Direção	Intervalo	Funções não nulas
ξ	$[\xi_3, \xi_4]$	$N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi)$
η	$[\eta_3, \eta_4]$	$M_1(\eta), M_2(\eta), M_3(\eta)$

Quadro 1 – Domínio e funções base não nulas para o elemento 1.
Fonte: O autor.

Como as funções base bidimensionais são obtidas através de produto tensorial, existem 9 funções base diferentes de zero que podem ser montadas num vetor:

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \left[N_1M_1 \; N_2M_1 \; N_3M_1 \; N_1M_2 \; N_2M_2 \; N_3M_2 \; N_1M_3 \; N_2M_3 \; N_3M_3 \right] \quad (65)$$

Estas funções base podem ser associadas ao elemento 1 através de um vetor de "conetividades" de funções base com índices globais:

$$\mathbf{PSI1} = \left[1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \right] \quad (66)$$

Similarmente para o elemento 2 tem-se as funções base não nulas e o domínio no espaço paramétrico no Quadro 2. Novos índices não são gerados para funções base já calculadas previamente.

Direção	Intervalo	Funções não nulas
ξ	$[\xi_4, \xi_5]$	$N_2(\xi),\ N_3(\xi),\ N_4(\xi)$
η	$[\eta_3, \eta_4]$	$M_1(\eta),\ M_2(\eta),\ M_3(\eta)$

Quadro 2 - Domínio e funções base não nulas para o elemento 2.
Fonte: O autor.

Logo:

$$\boldsymbol{\psi}_2 = \left[N_2M_1 \; N_3M_1 \; N_4M_1 \; N_2M_2 \; N_3M_2 \; N_4M_2 \; N_2M_3 \; N_3M_3 \; N_4M_3 \right] \quad (67)$$

$$\mathbf{PSI2} = \left[2\,3\,10\,5\,6\,11\,8\,9\,12 \right] \quad (68)$$

Os pontos de controle podem ser armazenados em um vetor $\mathbf{PC}$ de dimensão $n \times 2$, onde n é o número total de pontos de controle no domínio:

$$\mathbf{PC} = \left[P_{11} \quad P_{21} \quad P_{31} \quad P_{41} \quad P_{12} \quad P_{22} \quad P_{32} \quad P_{42} \quad P_{13} \quad P_{23} \quad P_{33} \quad P_{43} \right]^T \quad (69)$$

A matriz global de funções base Ψ está dada por:

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & 5 & 6 & 11 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}^T \tag{70}$$

Com os vetores $\boldsymbol{\psi}_i$ é possível, calcular as derivadas com respeito às coordenadas espaciais x_1 e x_2, e armazená-las em vetores. Considerando o elemento 1 e para as derivadas das funções base com respeito a x_1 tem-se:

$$\boldsymbol{\psi}_{,x_1} = \begin{bmatrix} \psi_{1,x_1} & \psi_{2,x_1} & \psi_{3,x_1} & \psi_{4,x_1} & \psi_{5,x_1} & \psi_{6,x_1} & \psi_{7,x_1} & \psi_{8,x_1} & \psi_{9,x_1} \end{bmatrix} \tag{71}$$

De maneira semelhante obtém-se o vetor $\boldsymbol{\psi}_{,x_2}$ para as derivadas na direção de y. Logo a matriz $\mathbf{B}_I$ pode ser escrita:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \psi_{1,x_1} & \psi_{2,x_1} & \cdots & \psi_{9,x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi_{1,x_2} & \psi_{2,x_2} & \cdots & \psi_{9,x_2} \\ \psi_{1,x_2} & \psi_{2,x_2} & \cdots & \psi_{9,x_2} & \psi_{1,x_1} & \psi_{2,x_1} & \cdots & \psi_{9,x_1} \end{bmatrix} \tag{72}$$

Esta matriz corresponde a matriz $\mathbf{B}_I$ da Equação (64). No Apêndice A são mostrados mais detalhes da implementação computacional.

3.4 *PATCHES* MÚLTIPLOS NA AIG

Como indicado na Seção 3.1, na AIG o domínio físico corresponde a uma representação da geometria real através da malha física e na malha física existem duas hierarquias de discretização: o *patch* e o elemento. Cada elemento no espaço físico é a imagem de um elemento correspondente no espaço paramétrico, mas o mapeamento em si é global para todo o *patch*, ao contrário do que acontece no MEF convencional.

Nos trabalhos pioneiros de Kagan, Fischer e Bar-Yoseph (1998) e Kagan, Fischer (2000) o termo elemento referia-se a um *patch*. No presente trabalho o significado dos termos *patch* e elemento correspondem à terminologia adotada por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), onde um elemento isogeométrico corresponde a um intervalo não nulo entre nós de controle e o *patch* refere-se a um macro elemento ou subdomínio.

Na solução de determinados problemas pode ser satisfatório o uso de um único *patch,* como por exemplo, no trabalho seminal de Hughes (2005) todos os

exemplos numéricos mostrados foram discretizados com um único *patch*. No entanto, para problemas de geometria complexa ou domínios com propriedades físicas não uniformes o uso de patches múltiplos pode ser inevitável.

Como exemplo, a Figura 20 mostra uma superfície modelada com quatro patches com diferentes graus de refinamento. Neste exemplo são utilizados dois *patches* diferentes para modelar as seções superior e inferior que sofrem variação na largura e dois patches adicionais são localizados na seção central, onde não existem mudanças geométricas, mas o *patch* pode ser introduzido, por exemplo, para simular mudança de material.

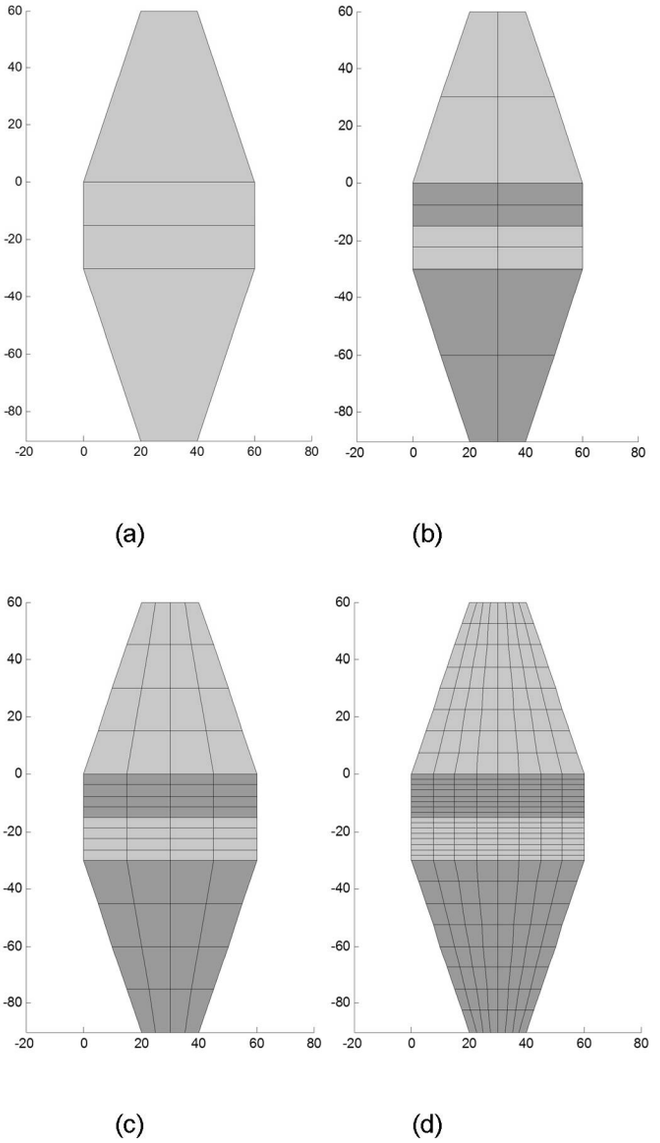


Figura 20 – Exemplo de discretização usando 4 *patches* com diferentes graus de refinamento (a) Geometria inicial (b) Um ciclo de refinamento *h* (c) Dois ciclos de refinamento *h* (d) Três ciclos de refinamento *h.*

Fonte: O autor.

A implementação computacional compreende a obtenção das matrizes da AIG por meio de laços para cada *patch.* Esta metodologia é descrita em detalhe na seção A.2.2 do Apêndice A.

4 PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES EM BARRAGENS DE GRAVIDADE

4.1 INTRODUÇÃO

Uma barragem de gravidade é uma estrutura sólida de concreto destinada a conter um volume de água e projetada para resistir ao empuxo horizontal da água usando principalmente seu elevado peso próprio. Embora a configuração mais comum seja com eixo reto, barragens de gravidade podem ser algumas vezes com eixo curvo ou anguladas devido a condições topográficas. Normalmente barragens de gravidade em concreto são as mais executadas e as mais simples para projetar e construir (CHOPRA, 1988).

As seções de uma barragem de gravidade podem ser de dois tipos: seções com transborde (vertedores) e, caso contrário, seções sem transborde, como mostrado na Figura 21. Quando existe geração de energia elétrica uma parte da seção sem transborde pode conter tomadas de água destinadas à usina.

Segundo CEBSA-ELETROBRÁS (2003), no projeto estrutural de uma barragem devem ser considerados os seguintes carregamentos:

- Cargas verticais;
- Pressão hidrostática e subpressão;
- Empuxos devidos à material assoreado;
- Pressões Hidrodinâmicas;
- Ações dinâmicas.

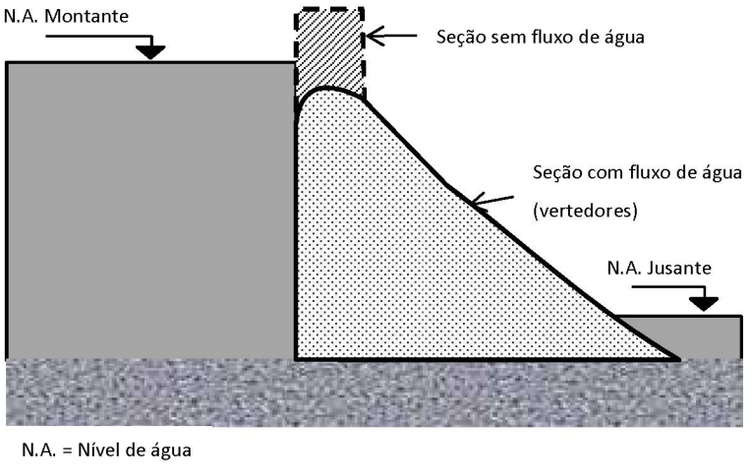


Figura 21 - Seções típicas numa barragem de gravidade
Fonte: O autor

4.2 AÇÕES DINÂMICAS EM BARRAGENS

No projeto de barragens devem ser considerados dois tipos de ações dinâmicas: a ação da força do vento e ações sísmicas (CHOPRA, 1978).

No caso da ação do vento na barragem, esta solicitação somente é considerada em análises de estabilidade na fase de construção quando o reservatório de água ainda não existe. No entanto, se o projeto da barragem contempla um nível de reservatório que é relativamente baixo com respeito à cota mais alta da barragem, a pressão de vento deve ser considerada também nas condições de serviço (CORNS; TARBOX; SCHRADER, 1988).

Segundo a NBR 15421 (ABNT, 2003) todas as estruturas devem ser projetadas e construídas para resistir aos efeitos de ações sísmicas e estes efeitos devem ser considerados na verificação dos estados limites últimos. Embora muitas barragens tenham colapsado ao longo da história, poucas destas falhas foram originadas por ações sísmicas e nenhuma destas falhas aconteceu em grandes barragens de concreto (CORNS; TARBOX; SCHRADER, 1988). No entanto, existem casos de danos induzidos em barragens pela ação de terremotos e danos provocados por problemas de vibração (CHOPRA, 1988). Considerando que o colapso de uma barragem pode colocar em risco a vida de milhares de pessoas, uma análise correta deste problema é de grande importância na avaliação da segurança da barragem.

No caso de barragens de gravidade, o comportamento dinâmico destas estruturas tem sido estudado com relativo sucesso devido ao fato de que este tipo de barragem é apropriado para ser modelado no plano (análise 2D). A confiabilidade deste procedimento tem sido verificada, demonstrando que os resultados previstos geralmente são consistentes com as observações de campo (CHOPRA, 1978).

A caracterização da resposta dinâmica de uma barragem é de grande importância também para o estudo de problemas de interação fluido–estrutura (SAMII; LOTFI, 2007).

4.3 MÉTODOS DE ANÁLISE

Aproximadamente até a década de 1960, as análises estruturais de barragens eram basicamente estáticas. As forças inerciais eram consideradas como forças

estáticas e combinadas com a pressão hidrostática e as cargas de gravidade. A análise verificava a estabilidade com respeito ao tombamento e deslizamento da barragem, tratando esta como se fosse um corpo rígido. O dimensionamento era feito em função das tensões obtidas pela aplicação destas forças. Da mesma maneira, os efeitos do movimento horizontal da base eram representados por forças estáticas e as propriedades dinâmicas da estrutura, assim como as características da resposta do conjunto reservatório e fundação não eram levadas em conta (CHOPRA, 1988).

No trabalho de Miquel e Bouaanani (2010) é enfatizada a importância da determinação das características dinâmicas da barragem assim como os efeitos dinâmicos da interação fluído-estrutura na avaliação da segurança de algumas estruturas.

Simultaneamente ao desenvolvimento do MEF, o procedimento da análise estrutural de barragens começou a mudar. Os avanços das técnicas computacionais na obtenção da resposta dinâmica e a disponibilidade de computadores com suficiente capacidade de processamento tornaram possível essa mudança. Na literatura é possível encontrar, a partir da década de 1970, publicações apresentando trabalhos com análises dinâmicas de barragens baseados em elementos finitos. Embora estes trabalhos superassem algumas deficiências do enfoque estático, ainda tinham significativas limitações (CHOPRA, 1978).

Dentro das técnicas modernas de análise dinâmica de barragens, uma fase fundamental é a determinação dos modos e frequências naturais de vibração.

Segundo Soriano (2014) pode-se definir um modo natural de vibração como a configuração espacial dos graus de liberdade de um modelo estrutural em vibração harmônica livre e associada a uma determinada frequência característica do modelo (frequência natural de vibração). Nesta vibração somente são consideradas forças elásticas e inerciais na estrutura. Chama-se modo fundamental de vibração ao modo natural correspondente à menor frequência natural de vibração.

Diversos procedimentos analíticos e numéricos têm sido desenvolvidos para obter a resposta dinâmica de estruturas. Como indicado nas seções anteriores o MEF é um dos procedimentos numéricos mais utilizados na atualidade. O MEF combinado com o método da superposição modal permite realizar a análise dinâmica em uma grande variedade de estruturas incluindo barragens. No caso da análise transiente, quando se deseja saber a resposta da estrutura ao longo do

tempo, é possível utilizar conjuntamente outros métodos como, por exemplo, o Método da Diferença Central, para a obtenção da solução. Nas seções seguintes ao invés de utilizar o MEF tradicional será utilizada a AIG, e todos estes procedimentos serão descritos com maior detalhamento.

4.4 MODOS E FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

O problema de autovalores generalizado para elasticidade linear, cuja solução fornece as frequências e modos naturais de vibração de uma estrutura pode ser representados na forma matricial (CLOUGH; PENZIEN, 1995) por:

$$\left[\mathbf{k} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{m}\right]\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0}. \tag{73}$$

onde $\boldsymbol{\Phi}$ representa a matriz de autovetores que representa os modos de vibração, $\boldsymbol{\Omega}^2$ são os quadrados das frequências angulares (ω_n), $\mathbf{k}$ é a matriz de rigidez descrita na Equação (63) e $\mathbf{m}$ é a matriz de massa, calculada através de:

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\Psi}_j^{\,T} \boldsymbol{\Psi}_k d\Omega \tag{74}$$

No contexto da AIG $\boldsymbol{\Psi}_j$ e $\boldsymbol{\Psi}_k$ são as matrizes dos valores das funções base *NURBS* e a densidade do material está representada por ρ.

A Equação (73) pode ser interpretada como um conjunto de N equacões algébricas homogêneas para os N elementos $\phi_{jn}\left(j = 1,2,...,N\right)$ e este conjunto sempre tem a solução trivial $\phi_n = \mathbf{0}$ (CHOPRA, 2012). A solução não trivial existe se:

$$\det\left[\mathbf{k} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{m}\right] = \mathbf{0} \tag{75}$$

A Equação (75) é conhecida como equação característica. Como a matriz de massa $\mathbf{m}$ e matriz de rigidez $\mathbf{k}$ são sempre matrizes simétricas e definidas positivas (FELIPPA, 2004), esta equação fornece N raízes reais e positivas para ω_n^2 sendo N é a dimensão das matrizes $\mathbf{k}$ e $\mathbf{m}$.

Quando uma frequência natural ω_n é conhecida, a Equação (73) pode ser resolvida para determinar o autovetor correspondente associado a um modo de vibração natural ϕ_n. A solução do problema de autovalores e autovetores fornece a forma do autovetor através dos valores relativos dos N deslocamentos

$\phi_{jn}\left(j=1,2,...,N\right)$. Para cada uma das frequências naturais, existe um vetor ϕ_n independente, estes vetores são também conhecidos como modos naturais de vibração (CHOPRA, 2012).

4.5 VIBRAÇÕES LIVRES EM SISTEMAS NÃO AMORTECIDOS

As equações de movimento para um sistema de graus de liberdade múltiplos, sujeito a vibrações livres e sem amortecimento são:

$$\mathbf{m\ddot{u}} + \mathbf{ku} = \mathbf{0} \tag{76}$$

A equação (76) representa N equações diferenciais homogêneas e acopladas. A solução deve satisfazer as seguintes condições iniciais no tempo $t=0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t=0) &= \mathbf{u}\left(\mathbf{0}\right) \\ \dot{\mathbf{u}}(t=0) &= \dot{\mathbf{u}}\left(\mathbf{0}\right) \end{aligned} \tag{77}$$

Nas Equações (76) e (77): $\mathbf{m}$ representa a matriz massa, $\mathbf{k}$ é a matriz de rigidez, $\mathbf{u}$ é a resposta em deslocamentos, $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ são os vetores da primeira e segunda derivada temporal dos deslocamentos respectivamente (velocidades e acelerações).

As frequências e modos naturais de vibração são obtidos resolvendo o problema de autovalores descrito na Equação (73). Os N autovalores e N modos naturais de vibração (autovetores) podem ser representados de maneira compacta de forma matricial da seguinte maneira:

$$\mathbf{\Phi} = \left[\phi_{nj}\right] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \tag{78}$$

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \tag{79}$$

As matrizes $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Omega}^2$ são designadas de matriz modal e matriz espectral, respectivamente. É possível provar que os modos naturais de vibração são

ortogonais com respeito às matrizes $\mathbf{m}$ e $\mathbf{k}$[1], logo as matrizes resultantes dos seguintes produtos são matrizes diagonais:

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{k} \mathbf{\Phi} \tag{80}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi} \tag{81}$$

Cada termo na diagonal das matrizes $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ é designado por K_n e M_n. Usando os modos naturais de vibração como vetores base para representar qualquer deslocamento $\mathbf{u}$, obtém-se:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n = \mathbf{\Phi q} \tag{82}$$

onde os q_n são escalares, também conhecidos como coordenadas modais e podem ser calculados por:

$$q_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{m u}}{M_n} \tag{83}$$

De acordo com Chopra (2012), a solução da Equação (76) em coordenadas modais é dada por:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \left[q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] \tag{84}$$

ou

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n(t) \tag{85}$$

onde:

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{86}$$

Nestas equações $q_n(0)$ e $\dot{q}(0)$ são a representação em coordenadas modais das condições iniciais descritas na Equação (77). A Equação (84) representa o deslocamento $\mathbf{u}$ como função do tempo t e das condições inicias de deslocamento e velocidade. As frequências e modos naturais de vibração já foram calculados na solução do problema de autovalores, assim a resposta em deslocamentos pode ser determinada. A resposta dinâmica em velocidade e

[1] Ver por exemplo Clough e Penzien (1995).

aceleração pode ser calculada analiticamente derivando-se em função do tempo a Equação (84).

4.6 VIBRAÇÕES LIVRES EM SISTEMAS COM AMORTECIMENTO CLÁSSICO

Considerando amortecimento no problema de vibrações livres, a equação diferencial que governa o problema é (CHOPRA, 2012):

$$\mathbf{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0} \tag{87}$$

onde $\mathbf{c}$ é a matriz de amortecimento. Como foi apresentado na seção 4.5, a matriz modal $\mathbf{\Phi}$ diagonaliza as matrizes de massa e de rigidez. Uma matriz de amortecimento que é diagonalizável por $\mathbf{\Phi}$ é designada por matriz de amortecimento clássica. Amortecimento clássico também permite inferir que o sistema amortecido tem os mesmos modos naturais de vibração do sistema não amortecido.

Assim a transformação modal de $\mathbf{c}$, fornece uma matriz diagonal $\mathbf{C}^m$:

$$\mathbf{C}^m = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{c}\, \mathbf{\Phi} \tag{88}$$

Em coordenadas modais a Equação (87) tem a forma:

$$\mathbf{M\ddot{q} + C}^m\mathbf{\dot{q} + Kq = 0} \tag{89}$$

Considerando amortecimento clássico, a Equação (89) representa N equações diferenciais não acopladas:

$$M_n\ddot{q}_n + C_n^m\dot{q}_n + K_n q_n = 0 \tag{90}$$

Para o modo de vibração n a taxa de amortecimento pode ser calculada como:

$$\zeta_n = \frac{C_n^m}{2M_n\omega_n} \tag{91}$$

Dividindo a Equação (90) por M_n obtém-se:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n^2\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \tag{92}$$

A solução desta equação tem a mesma forma que a solução para um sistema amortecido de um grau de liberdade, pois a solução para o modo vibração n não depende dos outros modos de vibração. Assim a resposta em coordenadas modais é (CHOPRA, 2012; CLOUGH; PENZIEN, 1995):

$$q_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \operatorname{sen}\omega_{nD} t \right] \tag{93}$$

onde:

$$\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \tag{94}$$

A substituição destas expressões na Equação (82) fornece

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n e^{-\zeta_n \omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \operatorname{sen}\omega_{nD} t \right] \tag{95}$$

Esta equação representa a solução para o problema de vibrações livres com amortecimento clássico. Os deslocamentos são função do tempo e das condições iniciais do movimento. Da mesma maneira é possível obter expressões analíticas para a velocidade e aceleração ou podem ser calculadas numericamente.

4.7 MONTAGEM DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO – AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

As Diretrizes Federais para Segurança de Barragens dos Estados Unidos de América (FEMA, 2005) indicam que é possível utilizar o amortecimento clássico para caracterização da resposta dinâmica de barragens de gravidade de concreto. Dentro dos métodos existentes para obter matrizes de amortecimento proporcionais ou clássicas, será usado o amortecimento de Rayleigh.

A matriz de amortecimento de Rayleigh é obtida a partir da seguinte combinação linear (CHOPRA, 2012; CLOUGH; PENZIEN, 1995; SORIANO, 2014):

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \tag{96}$$

A taxa de amortecimento para o n-ésimo modo de vibração deste sistema é:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{97}$$

Os coeficientes a_0 e a_1 podem ser determinados para valores específicos de taxas de amortecimento para o i-ésimo e j-ésimo modos, obtendo-se assim o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega_i^{-1} & \omega_i \\ \omega_j^{-1} & \omega_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \tag{98}$$

Se a mesma taxa de amortecimento é especificada para os modos de referência i e j, o que é usual, então estas constantes podem ser calculadas:

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \qquad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \tag{99}$$

Logo a matriz de amortecimento $\mathbf{c}$ pode ser calculada usando a Equação (96) e a taxa de amortecimento para qualquer modo é calculada usando a Equação (97).

A escolha dos modos de referência i e j deve ser feita de tal maneira que as taxas de amortecimento para os modos que contribuem significativamente à resposta tenham valores dentro dos parâmetros especificados.

4.8 RESPOSTA DINÂMICA CONSIDERANDO VIBRAÇÕES FORÇADAS

O problema de vibrações forçadas num sistema de múltiplos graus de liberdade pode ser modelado pelo sistema de equações diferenciais representado em forma matricial por:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \tag{100}$$

onde $\mathbf{p}(t)$ representa uma solicitação no sistema dependente do tempo. Usando a transformação modal descrita nas equações (80), (81), (82), (88) e considerando amortecimento clássico, obtém-se o problema equivalente em coordenadas modais:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^m\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \text{ com } \mathbf{P}(t) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{p}(t) \tag{101}$$

Quando a solicitação $\mathbf{P}(t)$ varia arbitrariamente com o tempo (solicitações sísmicas, por exemplo) a solução analítica do sistema descrito na Equação (100) fica impraticável ou de difícil obtenção. Para a solução deste tipo de problema é necessário adotar um método numérico baseado em cálculos por passo de tempo. No presente trabalho é utilizado o Método da Diferença Central (MDC), que será descrito a seguir.

4.9 MÉTODO DA DIFERENÇA CENTRAL (MDC)

De acordo com Chopra (2012), o MDC é uma aproximação das derivadas temporais do deslocamento (velocidade e aceleração). Para um passo de tempo

$\Delta t_i = \Delta t$ constante as expressões de velocidade e aceleração no caso de um sistema linear de um grau de liberdade são:

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \tag{102}$$

A substituição estas expressões na equação de equilíbrio no tempo $t = t_i$:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u} + ku_i = p(t_i) \tag{103}$$

permite obter expressões para o deslocamento u_{i+1} no tempo t_{i+1}. A resposta no tempo t_{i+1} é obtida em função da resposta no tempo atual t_i, esta é a característica dos chamados métodos explícitos.

No caso de múltiplos graus de liberdade, as Equações (102), transformam-se em equações matriciais. O Quadro 3 mostra o algoritmo implementado computacionalmente. Neste algoritmo são utilizadas coordenadas modais e amortecimento proporcional para trabalhar com as equações desacopladas.

Segundo Chopra (2012), o passo de tempo requerido para garantir a estabilidade do método da diferença central é:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi} \text{ ou } \Delta t < \frac{1}{\omega_n \pi} \tag{104}$$

onde T_n e ω_n são o período e a frequência natural de vibração respectivamente. Para sistemas de múltiplos graus de liberdade, a restrição do passo de tempo descrita na Equação (104) não tem efeitos práticos, pois para obter resultados com precisão adequada, um passo de tempo muito menor deve ser escolhido (CLOUGH; PENZIEN, 1995).

Quadro 3 - Algoritmo para aplicação do Método da Diferença Central em sistemas lineares de múltiplos graus de liberdade

I Cálculos preliminares

1. $\mathbf{q}_0 = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\Phi}\right)^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{u}_0\right); \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\Phi}\right)^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}_0\right)$

2. $\mathbf{P}_0 = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{p}_0$

3. $\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}^m \dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{q}_0\right)$

4. $\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_0$

5. $\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}^m$

6. $\mathbf{a} = \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}^m$

7. $\mathbf{b} = \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}$

II Cálculos para cada Δt

1. $\mathbf{P}_i = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{p}_i$

2. $\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{a}\mathbf{q}_{i-1} - \mathbf{b}\mathbf{q}_i$

3. $\mathbf{q}_{i+1} = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{P}}_i$

4. $\mathbf{u}_{i+1} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}_{i+1}$

Atualizar valores e repetir os cálculos em II para o próximo passo de tempo

Fonte: Adaptado de Chopra(2012).

Neste capítulo foi descrito o ferramental teórico que foi utilizado no presente trabalho para problemas de vibrações e que foram implementados em linguagem MATLAB junto com a AIG.

Na continuação serão mostrados diversos exemplos de aplicação procurando mostrar as características e capacidades das metodologias descritas nos capítulos três e quatro.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentadas diversas aplicações numéricas usando AIG em vários problemas da Mecânica, com o objetivo de comprovar a aplicabilidade e os aspectos positivos da metodologia estudada.

Inicialmente, nos itens 5.1.1 e 5.1.2 são apresentados problemas de elasticidade bidimensional estáticos e problemas que envolvem concentração de tensões com os resultados sendo comparados com soluções analíticas. Vários aspectos são observados, como a convergência do método e a sensibilidade na distorção das malhas. Na sequência, item 5.1.3, apresenta-se a solução do problema de placa com furo do item 5.1.2 considerando múltiplos patches e mostrando o desempenho dessa abordagem.

Num segundo momento, são mostradas discretizações com *patch* único e com vários *patches* com a intenção de mostrar as potencialidades do seu uso.

Em seguida, visando avaliar as capacidades da AIG em problemas dinâmicos, são mostradas aplicações envolvendo vibrações livres e vibrações forçadas em problemas planos. Finalmente é apresentada a modelagem de uma seção de barragem, representando um dos blocos de gravidade da UHE de Itaipu, conjuntamente com o maciço de fundação utilizando a formulação com múltiplos *patches*.

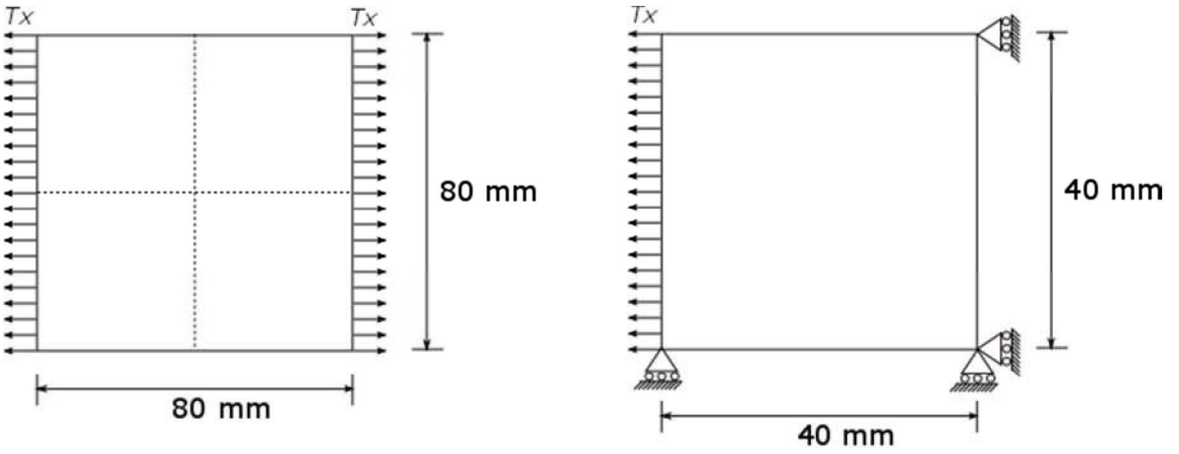
5.1 PROBLEMAS DA ELASTOSTÁTICA BIDIMENSIONAL

5.1.1 Placa quadrada sob tensão axial uniforme – Discretização 1

A Figura 22 mostra uma placa retangular de espessura uniforme submetida a uma tensão axial de tração T_x na direção x (horizontal). De acordo com Felippa (2004), este problema deve ser resolvido de maneira exata por qualquer malha de elementos finitos consistente e estável. Este problema servirá como teste inicial da formulação de AIG e também serve para mostrar algumas características do método.

A solução analítica do problema de estado plano de tensões é $\sigma_x = T_x$, $\sigma_y = 0$, $u_x = T_x x / E$ e $u_y = \nu u_x = \nu T_x x / E$; onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson (FELIPPA, 2004).

Considerando a tensão aplicada como T_x = 10 N/mm^2 e as propriedades do material como E = 10^5 N/mm^2 e ν = 0,3. No bordo onde a tensão T_x é aplicada, a solução analítica fornece: u_x = 4×10^{-4} mm, u_y = 1,2×10^{-5} mm, $\sigma_x = 10$ N/mm^2 e $\sigma_y = 0$.



(a) (b)

Figura 22 - Placa quadrada sob tensão uniforme (a) Problema inicial (b) Condições de contorno e modelagem do problema considerando simetria.
Fonte: O autor.

Levando em conta a simetria do problema, somente um quarto da placa foi modelado. Usando a discretização mostrada na Figura 23(a) com um único elemento isogeométrico biquadrático com 9 pontos de controle e 18 graus de liberdade, foram obtidas as respostas coincidentes com as analíticas para tensões e deslocamentos como mostrado nas Figura 23(b) e Figura 23(c).

O campo de deslocamentos varia uniformemente de zero até o valor máximo de u_x localizado na face esquerda da placa. No campo de tensões é obtido um campo uniforme com o valor da resposta analítica esperada.

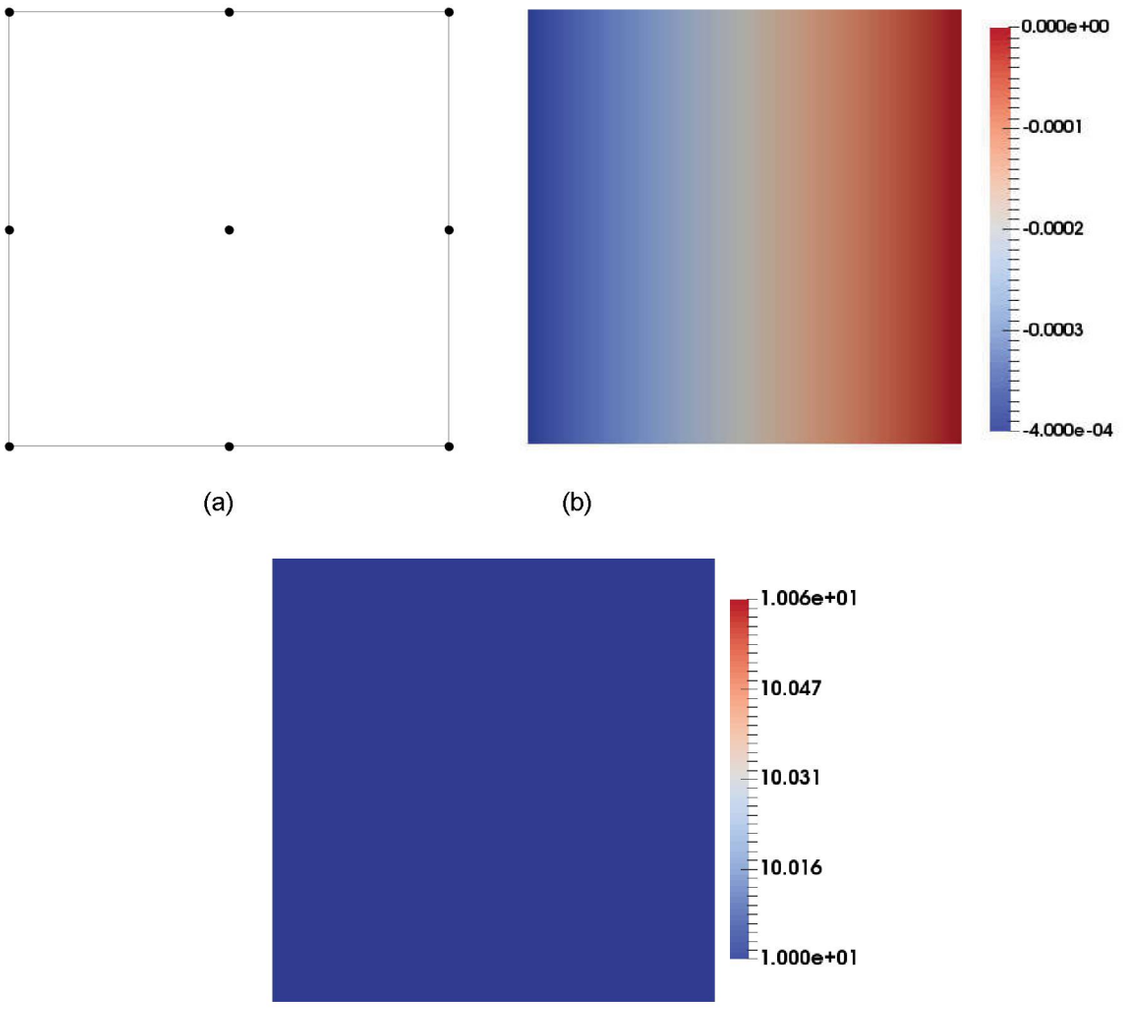


Figura 23 – Resultados obtidos para placa sob tensão uniforme com um elemento isogeométrico biquadrático (a) Discretização (b) Deslocamentos u_x (c) Tensão σ_{xx}.

Fonte: O autor.

Embora não fosse necessário, pois devido à simplicidade do problema a solução analítica foi atingida usando-se um único elemento, na sequência são mostradas três discretizações adicionais e suas soluções com o intuito de se mostrar o refinamento h em duas dimensões. Como foi comentado na Seção 2.1.7 o refinamento h consiste na inserção de novos pontos de controle, gerando novos intervalos de nós de controle, que geram novos elementos. Como as superfícies são obtidas por produto vetorial, o refinamento h é aplicado nas funções base unidimensionais, obtendo-se depois as funções base de superfície. O refinamento pode ser aplicado sucessivamente à maneira de ciclos de refinamento. A Figura 24

mostra a aplicação consecutiva de três ciclos de refinamento sucessivos e a respectiva solução para o deslocamento na direção x.

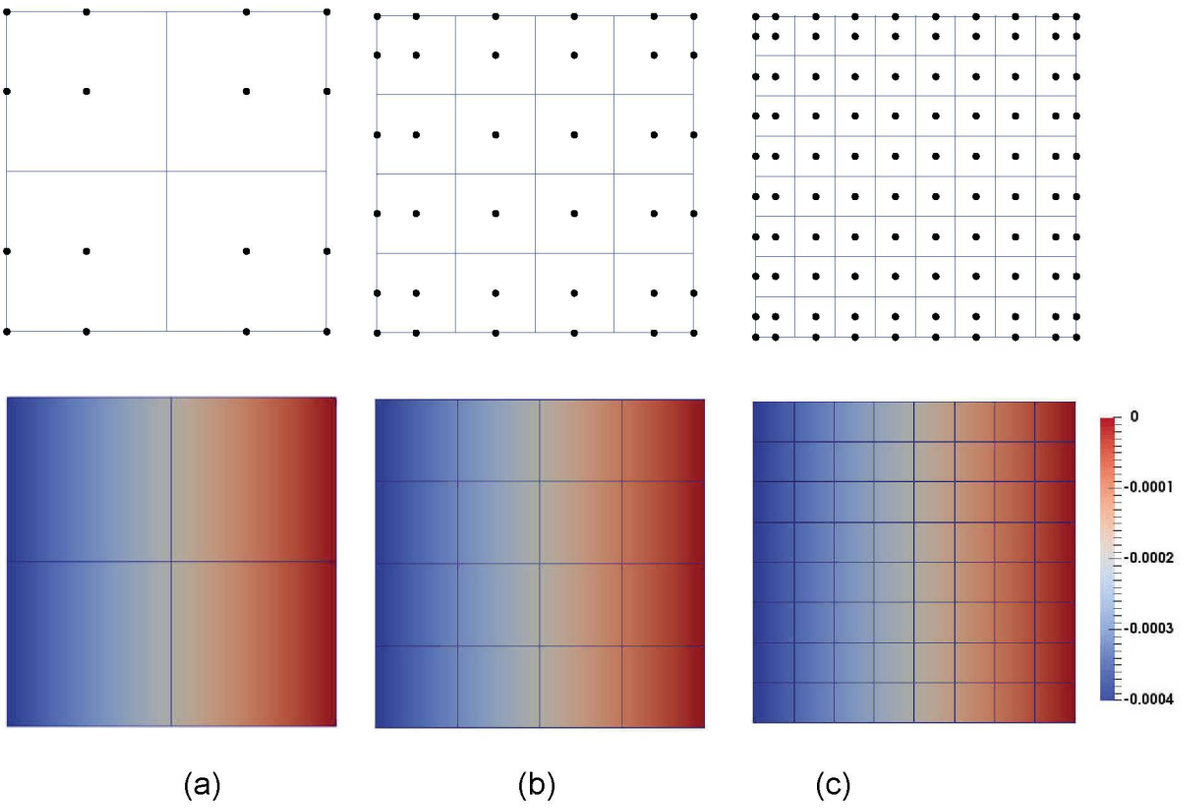


Figura 24 – Discretização e solução para o deslocamento u_x para: (a) Um ciclo de refinamento *h* (b) Dois ciclos de refinamento *h* (c) Três ciclos de refinamento *h*.
Fonte: O autor.

Para avaliar o efeito de elementos isogeométricos distorcidos, são consideradas três novas discretizações. No entanto como a "malha" isogeométrica é gerada a partir de um produto tensorial, é difícil obter elementos não uniformes para geometrias regulares. Neste trabalho foram repetidos três pontos de controle na malha inicial como mostrado na Figura 25a (são eles os pontos 2 e 3, 6 e 7, e 10 e 11) para obter dois elementos isogeométricos não retangulares e depois aplicar o refinamento h duas vezes para obter as malhas ilustradas nas Figura 25(b) e Figura 25(c). A repetição dos nós gera mal condicionamento das matrizes correspondentes dos elementos inicias. Este teste também verifica o comportamento da AIG nesta situação.

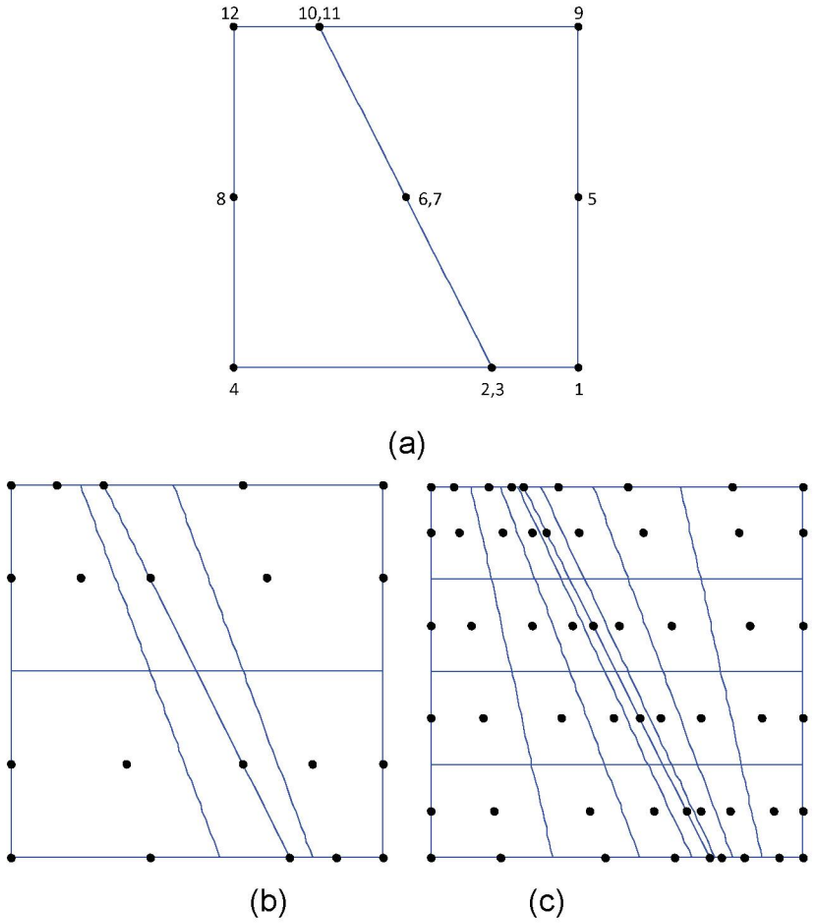


Figura 25 – Malhas com elementos distorcidos para o problema de placa sob tensão uniforme. O número de elementos de cada discretização é (a) 2 elementos (b) 4 elementos (c) 32 elementos

Fonte: O autor.

Os resultados da solução obtida para os deslocamentos u_x determinados nas três discretizações são mostrados na Figura 26.

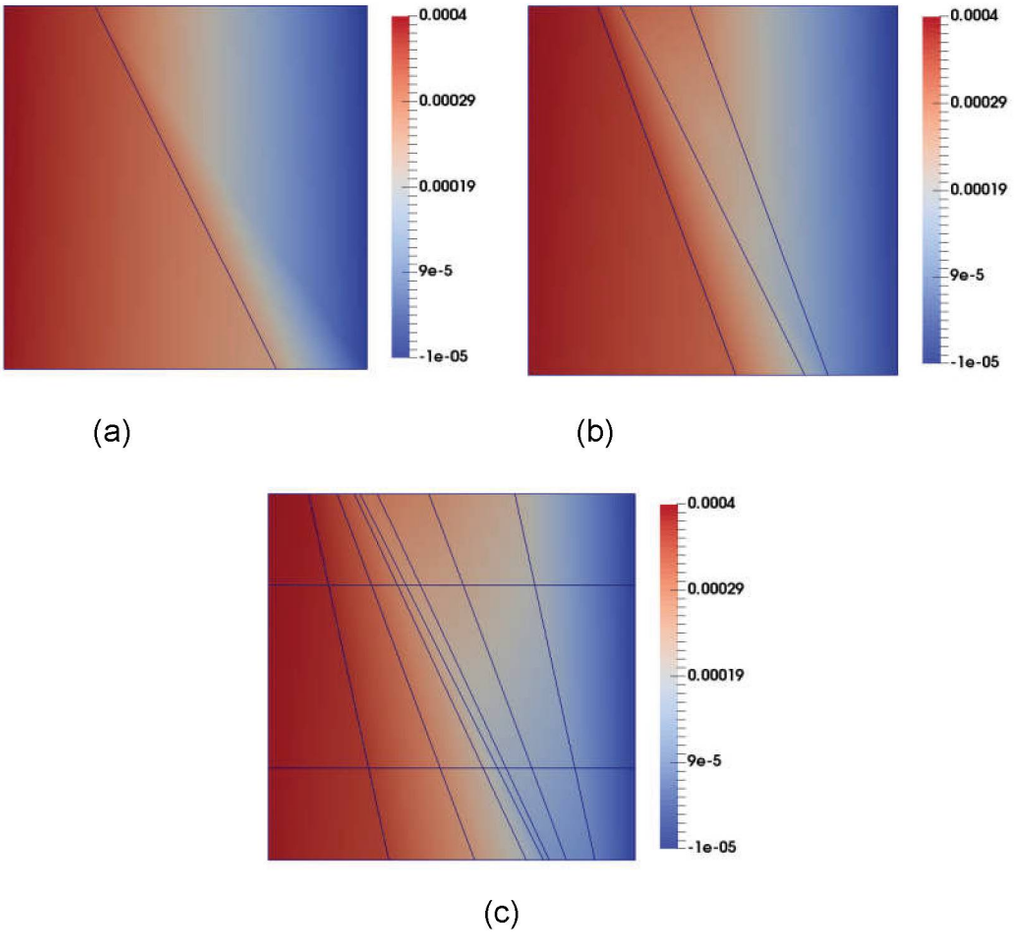


Figura 26 - Resultados para o deslocamento u_x obtidos para o problema de placa sob tensão uniforme com elementos distorcidos.
Fonte: O autor.

Nestes testes, embora o resultado na borda esquerda seja o mesmo que a solução analítica (Figura 26), é possível observar nos resultados uma variação menos uniforme do valor dos deslocamentos se comparada com a primeira solução (Figura 24). Esta perturbação na resposta de deslocamentos permanece ainda nos modelos com maior discretização (Figura 26b, Figura 26c). Pode-se explicar este resultado porque além da geometria distorcida dos elementos, o número de pontos de controle repetidos aumenta a cada refinamento. Segundo Cottrell et al. (2009) a repetição de pontos de controle introduz uma singularidade no mapeamento do domínio paramétrico. No entanto, a presença desta singularidade não impede a obtenção da solução mostrando assim a robustez do método. Na Figura 27 são mostrados os resultados obtidos para o campo de tensões nas três soluções revelando uma distribuição constante em todos os casos.

.

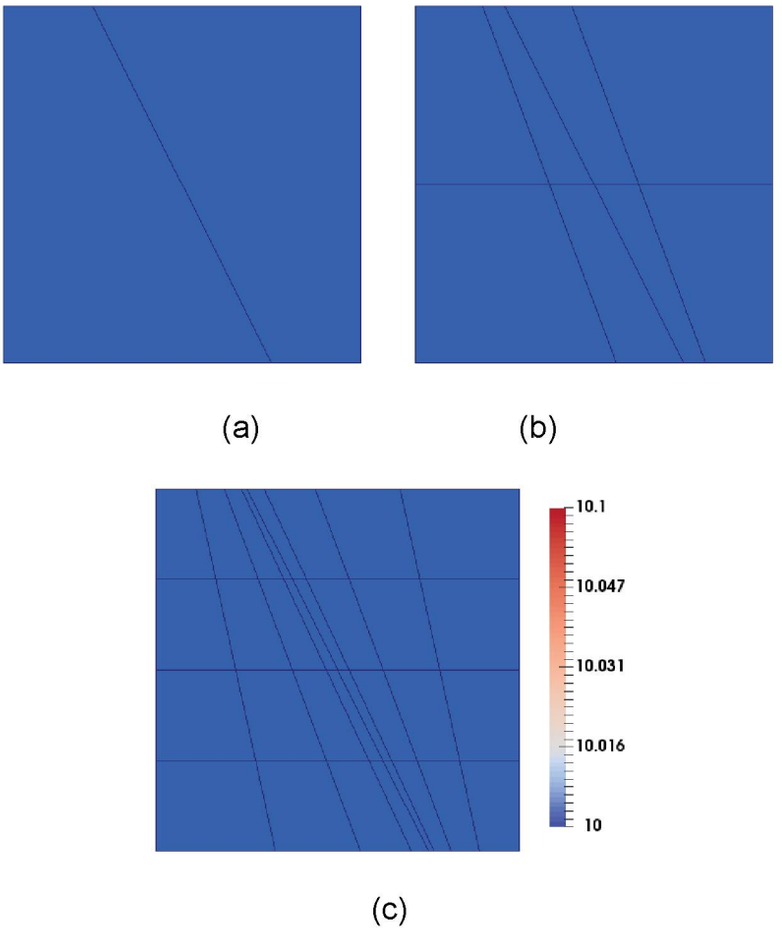
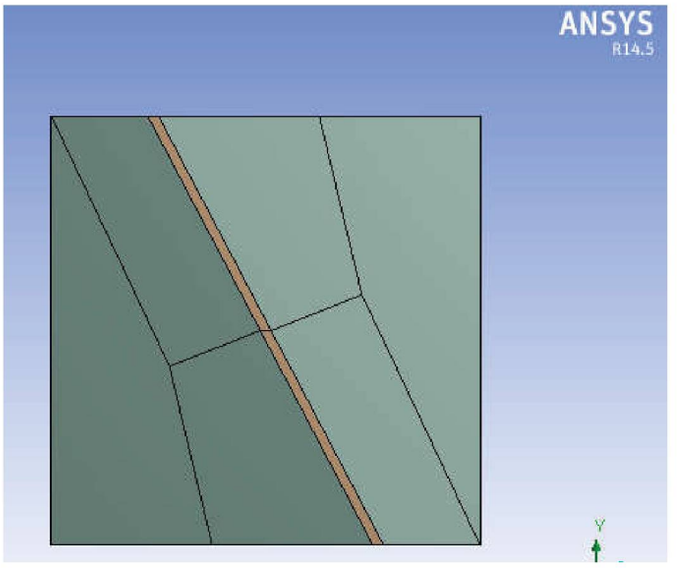
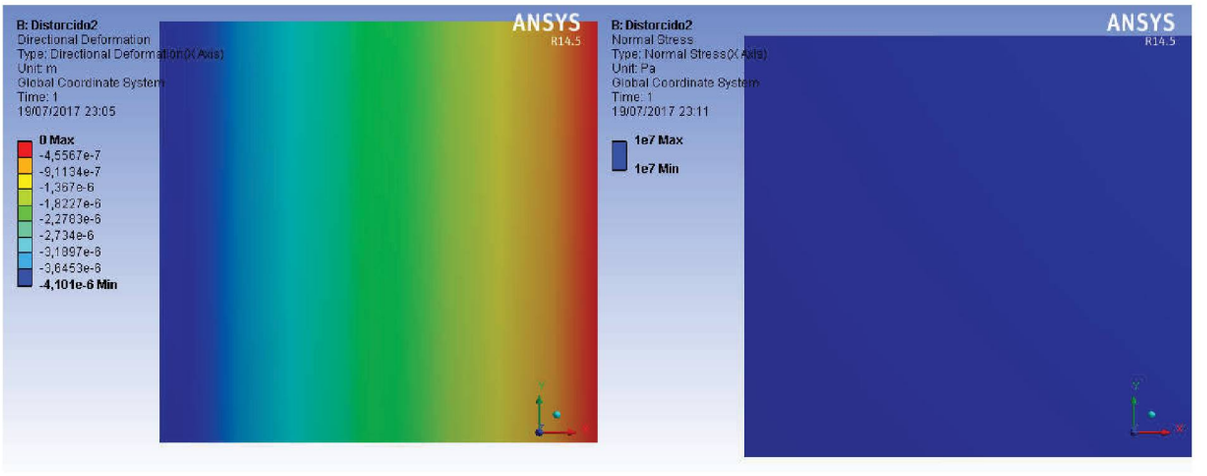


Figura 27 – Campo de tensões para a malha com elementos distorcidos para (a) malha inicial (b) um ciclo de refinamento (c) dois ciclos de refinamento

Com o intuito de comparar estes resultados com o MEF, a Figura 28(a) mostra a discretização e resultados para o mesmo exemplo com uma malha com oito elementos quadrilaterais quadráticos de nove nós usando o software ANSYS *Workbench*®, versão 14.5 (ANSYS, 2014). É importante destacar que no modelo de AIG com elementos distorcidos também existem nós repetidos, o que não foi possível reproduzir usando o MEF. A malha gerada tem elementos de tamanhos não uniformes para tentar aproximar o efeito dos nós repetidos no modelo de AIG. No resultado do MEF para o deslocamento u_x ,Figura 28(b), pode-se observar que a resposta tem uma pequena variação com respeito ao valor analítico, pois a solução por MEF fornece 4,101 mm que representa uma variação de 2,52% que pode ser atribuída a distorção da malha. Com respeito às tensões σ_x, Figura 28(c), foram obtidos os resultados analíticos com distribuição uniforme.



(a)



(b) (c)

Figura 28 – (a) Discretização (b) Resultados para o deslocamento u_x (c) Resultados para as tensões σ_x para o problema de placa quadrada sob tensão uniforme usando ANSYS.

5.1.2 Placa infinita com furo circular

Uma das vantagens da AIG citadas por Hughes *et al.* (2005) é a continuidade C^1 das funções base NURBS através dos elementos. No trabalho citado, o autor indica que esta propriedade é especialmente interessante em problemas de elasticidade em que são as tensões, e não os deslocamentos, as grandezas de interesse, pois as tensões são função do gradiente de deslocamentos.

Neste exemplo é analisado um problema conhecido na literatura como de concentração de tensões. Trata-se de uma placa infinita com furo circular submetida

à uma tensão de tração constante nos extremos. A Figura 29 ilustra o problema analisado. Considerando a simetria do problema, somente um quarto da placa foi analisada. Como condições de contorno têm-se os deslocamentos iguais a zero nas direções perpendiculares aos eixos de simetria. Nas bordas superior e esquerda foram colocados os valores de tensão analíticos calculados através das Equações (105), (106) e (107) com os valores das coordenadas correspondentes.

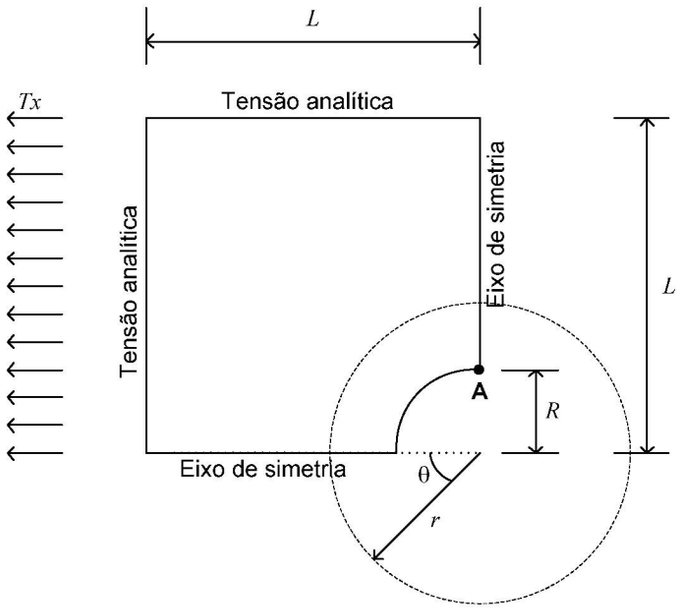


Figura 29 – Placa infinita com furo circular
Fonte: O autor.

A solução analítica deste problema pode ser encontrada em vários livros da Teoria de Elasticidade, por exemplo, Timoshenko e Goodier (1970). A solução é dada em coordenadas polares por:

$$\sigma_{xx} = \frac{T_x}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{T_x}{2}\left(1-4\frac{R^2}{r^2}+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \qquad (105)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{T_x}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{T_x}{2}\left(1+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \qquad (106)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{T_x}{2}\left(1+2\frac{R^2}{r^2}-3\frac{R^4}{r^4}\right)\mathrm{sen}\,2\theta \qquad (107)$$

Os dados iniciais considerados são: E = 10^5 N/mm^2, T_x = 1 N/mm^2, L = 4mm e R = 1mm.

A geometria do problema foi modelada a partir de dois elementos isogeométricos biquadráticos e 12 pontos de controle como mostrado na Figura 30.

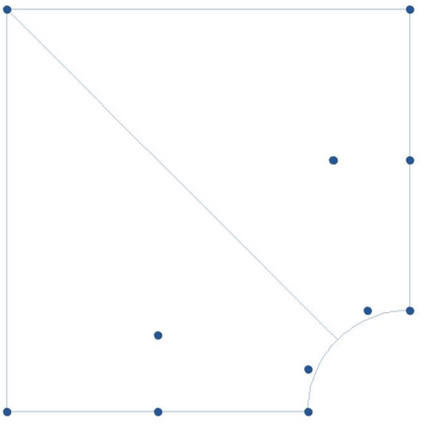


Figura 30 – Malha com dois elementos isogeométricos quadráticos para o problema de placa com furo.
Fonte: O autor.

Para obtenção desta geometria, o ponto de controle correspondente ao canto superior esquerdo é duplicado. Sendo assim, a malha de controle aparentemente formada por 11 pontos de controle corresponde na verdade a 12 pontos de controle, sendo dois pontos sobrepostos. Na AIG, pelas características das funções base NURBS, existe continuidade C^1 nas fronteiras dos elementos. Segundo Cottrell et al. (2009), a superposição de dois pontos de controle, leva à redução do grau de continuidade em um. Por isso, neste caso, a continuidade nos pontos adjacentes fica reduzida para C^0. Nas análises mostradas na sequência pode-se observar que a utilização deste artifício não afeta a qualidade dos resultados.

A solução analítica mostra que uma tensão $\sigma_x = 3\,\text{N/mm}^2$ é obtida para o ponto A localizado na borda superior do furo (Figura 29). A Figura 31 mostra as discretizações utilizadas e número de GDL´s usadas para investigar a convergência do método. Estas discretizações foram obtidas pela aplicação sucessiva de refinamento *h*.

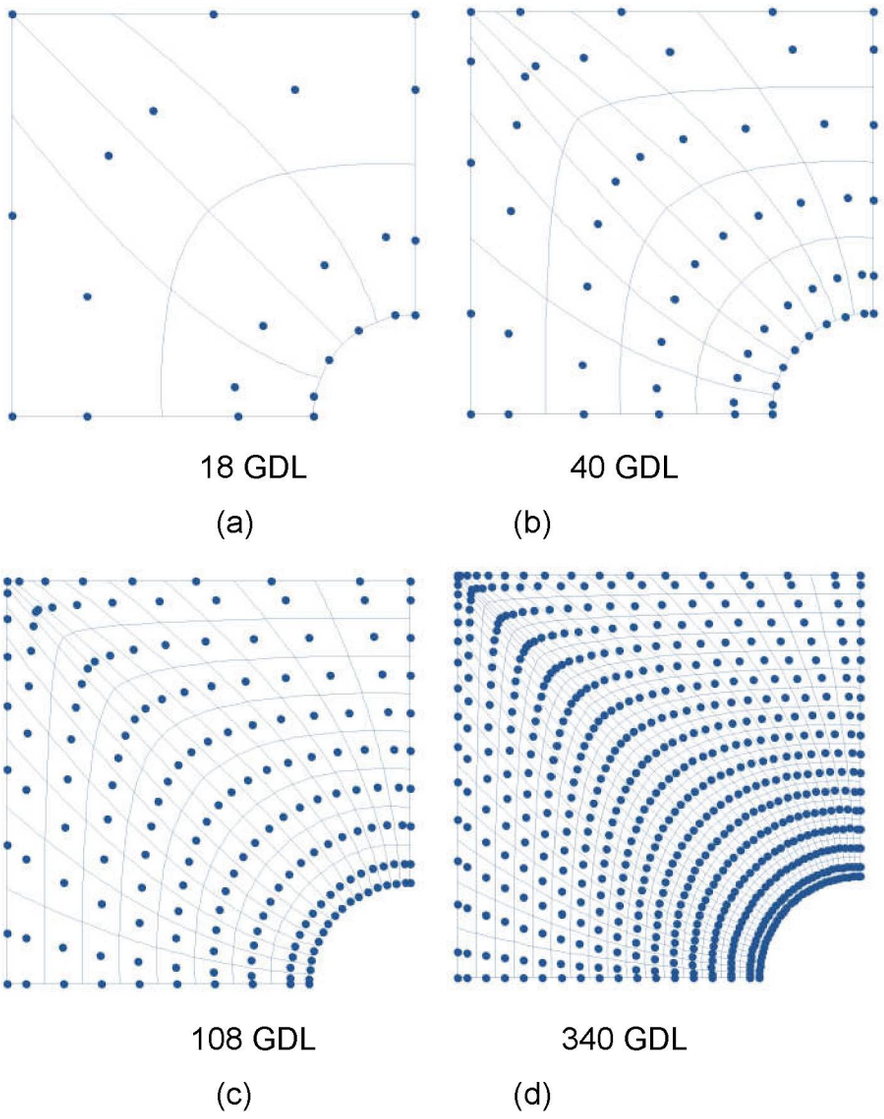


Figura 31 – Discretizações e número de GDL's usando refinamento *h* (a) um ciclo de refinamento (b) dois ciclos de refinamento (c) três ciclos de refinamento (4) quatro ciclos de refinamento.
Fonte: O autor.

Na Figura 32 são mostrados os mapas da tensão σ_x para as quatro discretizações correspondentes na Figura 31. Pode-se observar suavidade do campo de tensões obtido e na Figura 33 é mostrada a convergência ao resultado analítico da tensão no canto superior da borda do furo, mostrando resultados de zero até seis ciclos de refinamento. A medida que o modelo fica mais refinado com o aumento do número de graus de liberdade, a solução fica mais próxima do valor analítico.

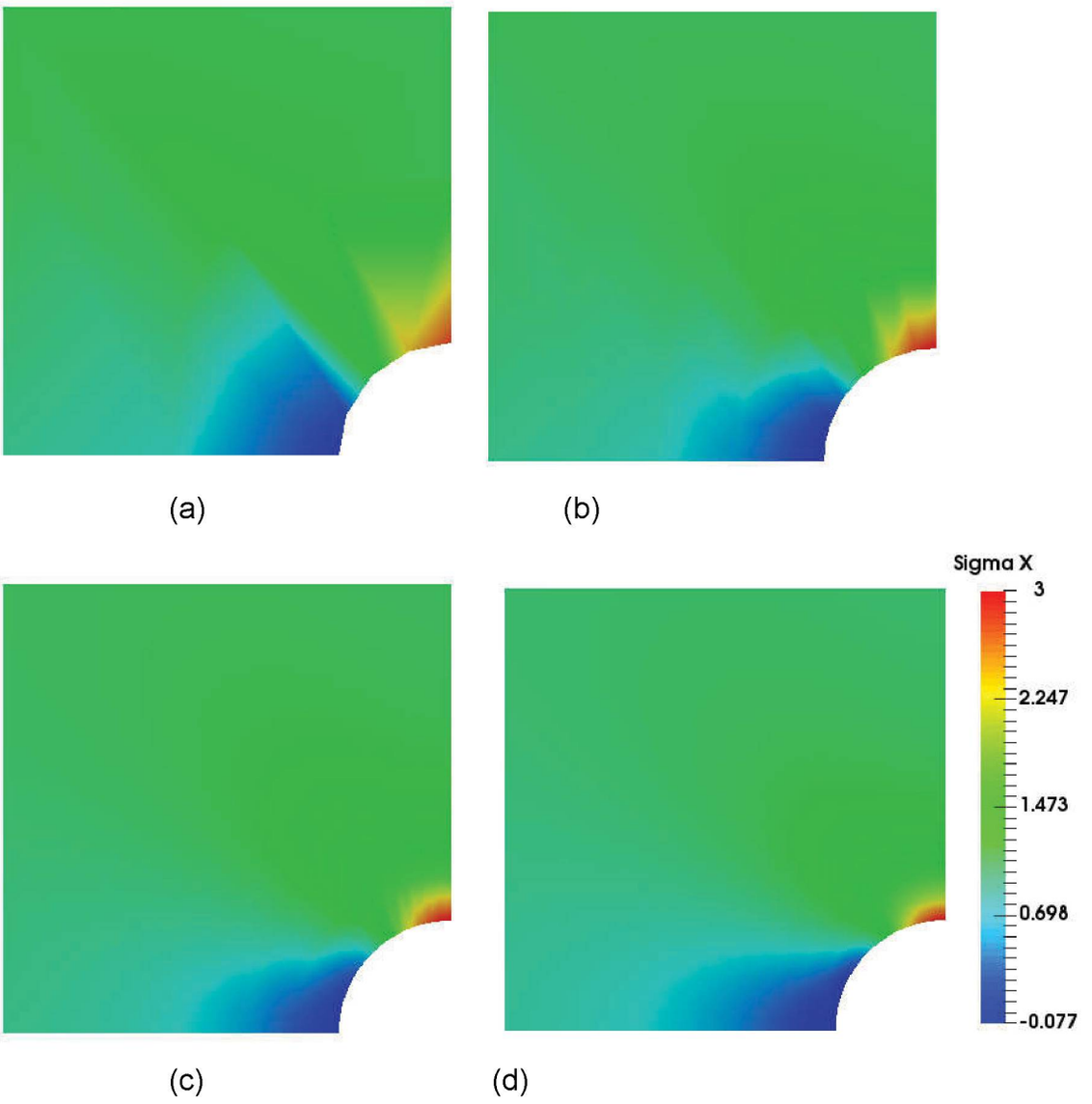


Figura 32 – Mapa das tensões σ_x obtidas para as quatro discretizações mostradas na Figura 31.
Fonte: O autor.

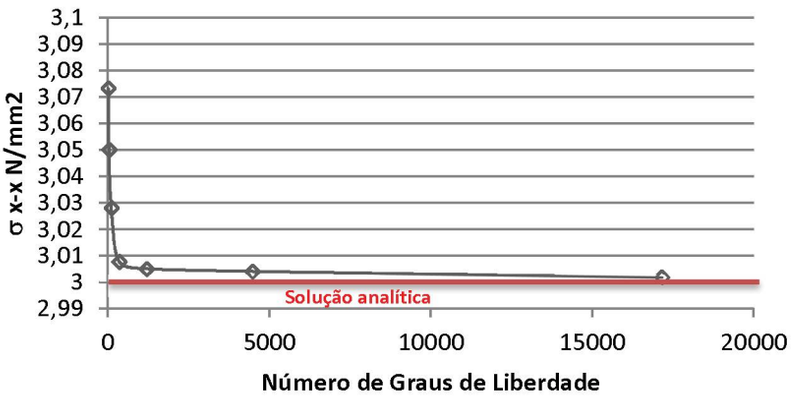


Figura 33 – Convergência da solução para o exemplo da placa com furo circular.
Fonte: O autor.

5.1.3 Placa quadrada com furo circular. Solução com patches múltiplos.

O seguinte exemplo tem como objetivo mostrar o desempenho da formulação com *patches* múltiplos em um problema de concentração de tensões. O problema a ser abordado tem características similares ao mostrado na Seção 5.1.2, contudo, neste exemplo a placa é de dimensões finitas e a tensão normal T_x é aplicada diretamente nas bordas laterais com um valor igual a 10MPa. A geometria do exemplo estudado é mostrada na Figura 34. O ponto A é usado como referência para o cálculo do fator de concentração de tensões. Os valores das propriedades físicas consideradas são módulo de elasticidades E = 10^4MPa e coeficiente de Poisson ν = 0,3.

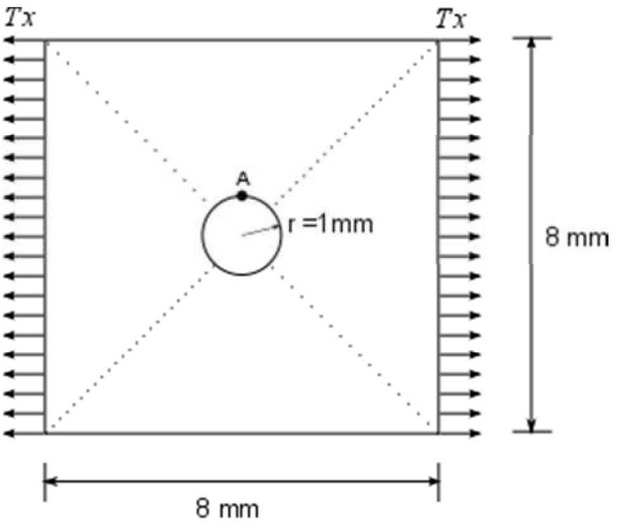
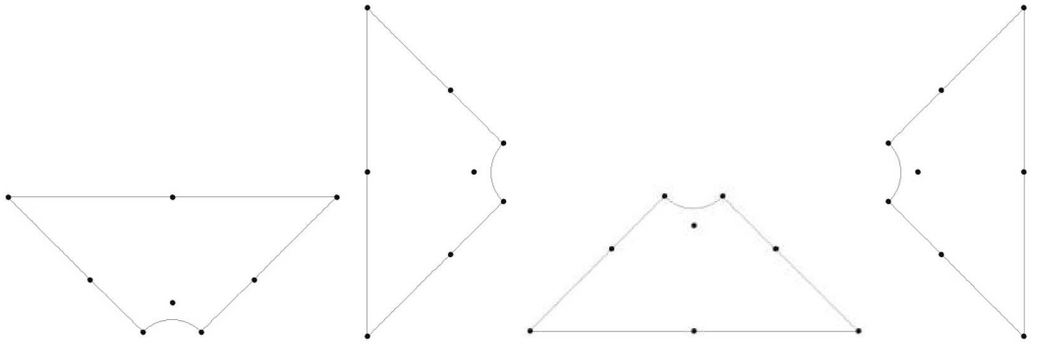


Figura 34 – Placa tracionada com furo circular para solução com *patches* múltiplos.
Fonte: O autor:

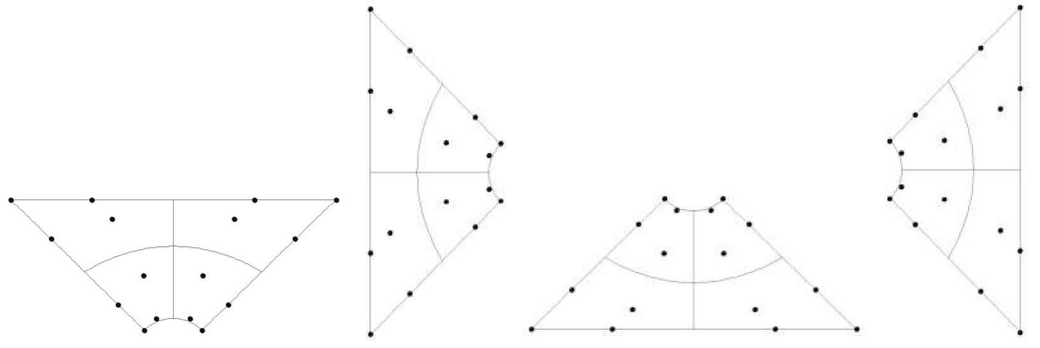
O fator de concentração de tensões é definido pela relação entre a tensão normal máxima na peça e a tensão normal T_x aplicada nos extremos:

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{T_x} \tag{108}$$

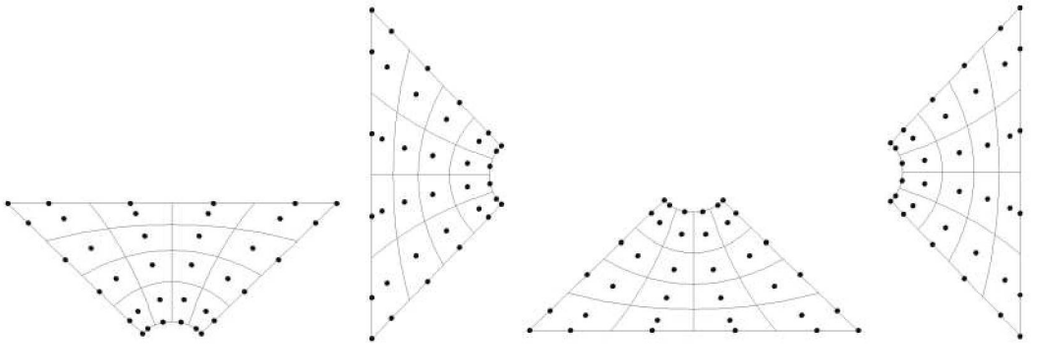
A placa foi modelada dividindo-se o domínio em quatro patches seguindo as diagonais da placa como mostrado na Figura 34. Cada patch do problema foi inicializado com, uma malha de controle de nove pontos com um elemento isogeométrico biquadrático único como mostrado na Figura 35 (a).



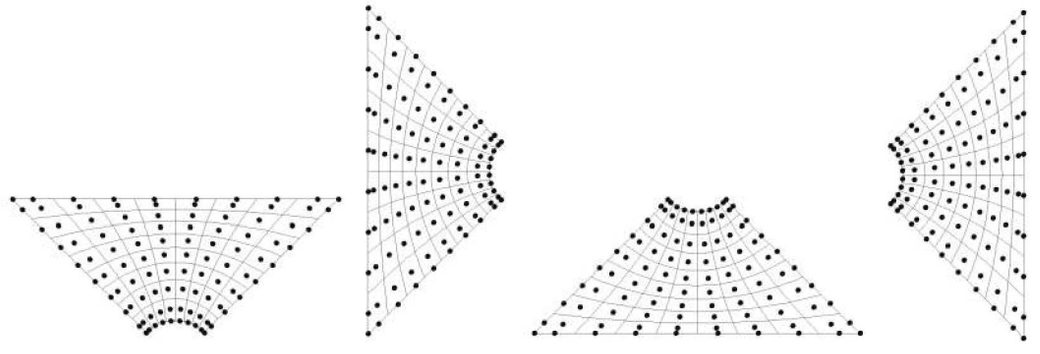
(a) Discretização inicial



(b) Discretização com um ciclo de refinamento



(c) Discretização com dois ciclos de refinamento



(d) Discretização com três ciclos de refinamento

Figura 35 – Problema da placa quadrada com furo (a) Discretização inicial dos *patches* (b) discretização com um ciclo de refinamento (c) Discretização com dois ciclos de refinamento (d) Discretização com três ciclos de refinamento

Fonte: O autor.

Nas Figura 35(b), (c) e (d) são mostradas as discretizações dos *patches* depois de um, dois e três ciclos de refinamento *h* respectivamente.

A malha completa para a análise da placa depois de aplicar quatro ciclos de refinamento h é mostrada na Figura 36 com 256 elementos isogeométricos biquadráticos para cada *patch*, que correspondem a 2.448 GDL no problema inteiro.

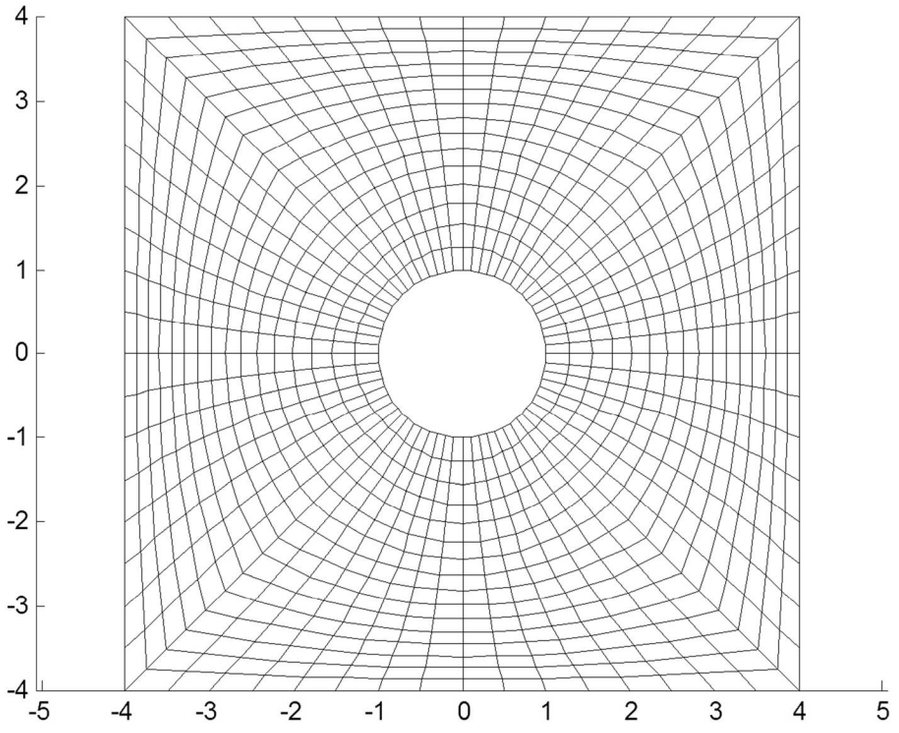


Figura 36 – Discretização nos quatro *patches* depois de aplicar quatro ciclos de refinamento *h*.
Fonte: O autor.

Os resultados obtidos para o campo de tensões σ_x nas discretizações com dois, três e quatro ciclos de refinamento são mostrados na Figura 37. A tensão máxima encontra-se localizada no ponto A, na borda do furo como indicado na Figura 34 e ultrapassa o valor da solução analítica de $\sigma_x = 30$ MPa esperado no caso de uma placa infinita, o que corresponde a um fator de concentração *k* igual a 3. Esta divergência era esperada porque as condições do problema são diferentes. No trabalho de Milic e Morinkovic (2013) é apresentada uma solução de referência para o problema em estudo usando uma malha de elementos finitos no programa ANSYS com 267.032 GDL que fornece um fator de concentração *k* igual a 3,51.

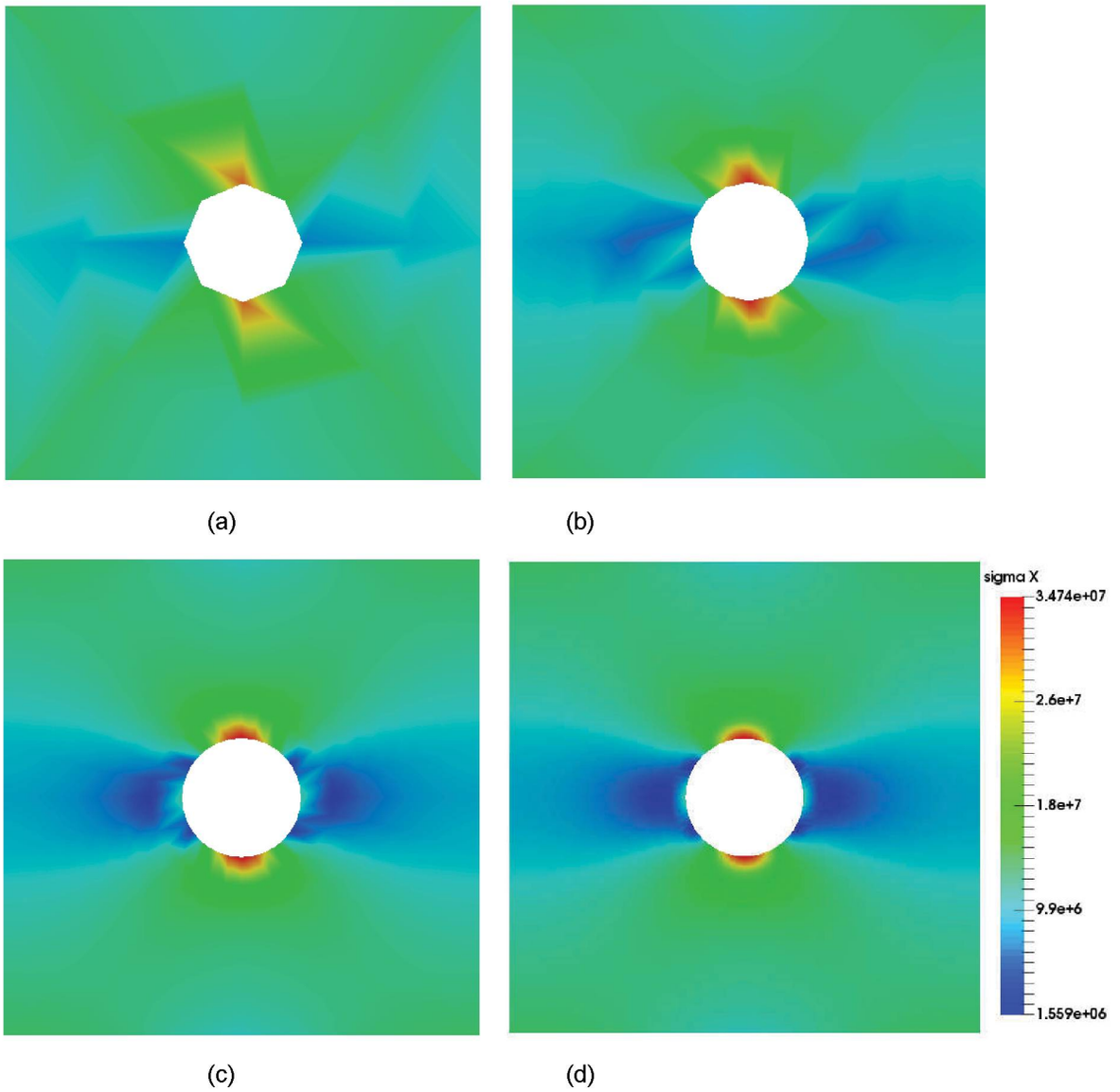


Figura 37 – Campo de tensões normas na direção *x* para o problema de placa com furo circular resolvido através de patches múltiplos.(a) Com um ciclo de refinamento *h*. (b) Com dois ciclos de refinamento *h* (c) com três ciclos de refinamento *h* (d) com quatro ciclos de refinamento h. Tensões em N/m^2.

Fonte: O autor.

O fator de concentração *k* calculado com o resultado obtido da discretização com quatros ciclos de refinamento mostrado na Figura 37(d) foi igual a 3,474. Considerando como valor de referência *k* = 3,51, pode-se observar que existe uma diferença de 1,02% entre as duas soluções. É importante ressaltar que no artigo de Milic e Morinkovic (2013), o valor de *k* foi obtido com um número de graus de liberdade bem maior do que o utilizado no presente estudo, além de modelar apenas

um quarto da placa considerando a dupla simetria. A convergência do valor de *k* do presente estudo é mostrada na na Figura 38.

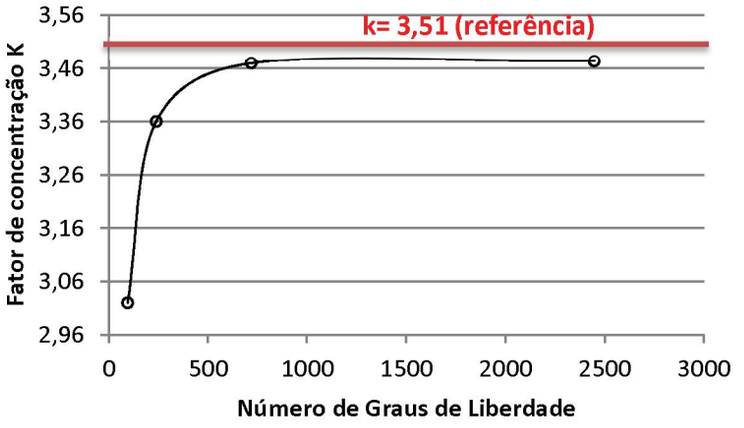


Figura 38 – Convergência do fator de concentração *k* no exemplo da placa quadrada com furo usando AIG.
Fonte: O autor.

Neste gráfico pode-se observar a variação mínima do valor de *k* entre as discretizações de 720 GDL e 2448 GDL.

Os resultados apresentados na Figura 37 mostram uma distribuição suave do campo de tensões, indicando a capacidade das funções base NURBS de descrever campos de tensão precisos com um número menor de GDL. Neste exemplo também foi testado o desempenho da implementação computacional usando *patches,* os resultados fornecidos são semelhantes a aqueles obtidos com discretizações muito mais refinadas do MEF.

5.2 RESPOSTA DINÂMICA USANDO AIG

O estudo de problemas de vibrações livres (problema de autovalores e autovetores), permite mostrar o comportamento das funções NURBS como funções de aproximação em problemas de dinâmica estrutural. Resultados apresentados em inúmeros trabalhos mostram vantagens em precisão quando comparados com resultados com o MEF convencional (COTTRELL et al., 2006).

Em um destes trabalhos, Rauen, Machado e Arndt (2017) estudaram o espectro de frequências de vibração obtido usando AIG em vigas de Euler-Bernoulli. No citado trabalho, foi mostrado que o espectro de frequências obtido usando AIG

apresenta um maior número de frequências com erros baixos, quando comparada com o MEF e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Este seria um indicativo de que AIG pode ser aplicada em diversos problemas de vibrações de estruturas, notadamente no caso de barragens.

Nesta seção, primeiramente, serão apresentados exemplos numéricos que mostram o bom desempenho da formulação AIG em problemas de cálculo de frequências de vibração em vigas, comparando-se as respostas numéricas com as analíticas.

Em seguida serão mostrados exemplos com problemas correspondentes a seções transversais de barragens sujeitas a vibrações livres e vibrações forçadas. Por fim, e para finalizar, um estudo, com uma seção de gravidade aliviada da barragem de Itaipu, procura-se mostrar o desempenho e qualidade dos resultados obtidos considerando a solução em múltiplos *patches* aplicada para considerar diferentes camadas de fundação.

5.2.1 Cálculo de frequências naturais em vigas

As soluções analíticas usadas neste estudo para comparação, correspondem à teoria de vigas de Euler-Bernoulli, lembrando que as soluções numéricas foram baseadas em modelo de Estado Plano de Tensões.

De acordo com Blevins (2016) a solução analítica para as frequências para vigas de vão único é dada por:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad i = 1,2,3... \tag{109}$$

onde:

ω_i é a i-ésima frequência natural;

λ_i é um parâmetro adimensional para o i-ésimo modo de vibração e que depende das condições do contorno;

L é o comprimento da viga;

E é o módulo de elasticidade;

I é o momento de inércia da seção transversal;

ρ é a densidade do material;

A é a área da seção transversal.

5.2.1.1 Viga engastada - livre

Neste exemplo será resolvido o exemplo ilustrado na Figura 39. Como a formulação usada é de estado plano de tensões e não de elementos de barra, será utilizada uma viga esbelta cujas dimensões aproximem o seu comportamento à Teoria de Euler-Bernoulli. As dimensões e propriedades físicas consideradas são L = 2m, b = 0,02m, h = 0,04m, ρ = 7850 kg/m^3 e E = 200GPa.

Figura 39 - Viga engastada – livre. Geometria e seção transversal
Fonte: O autor.

Para estas condições de contorno, os valores do parâmetro adimensional λ_i estão dados por (BLEVINS, 2016):

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1{,}87510407 \\
\lambda_2 &= 4{,}69409113 \\
\lambda_3 &= 7{,}85475744 \\
\lambda_4 &= 10{,}99554073 \\
\lambda_5 &= 14{,}13716839 \\
\lambda_i &= (2i-1)\pi/2,\ i>5
\end{aligned} \tag{110}$$

A malha inicial de AIG está formada por quatro elementos isogeométricos como mostrado na Figura 40.

Figura 40 – Discretização inicial com quatro elementos isogeométricos quadráticos para o problema de frequências naturais de vibração em vigas.
Fonte: O autor.

Para comparação foram consideradas as frequências dos nove primeiros modos de vibração e foram aplicados sucessivamente cinco ciclos de refinamento *h*. As malhas obtidas junto com o número de pontos de controle, número de elementos e GDL estão mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Características das malhas de AIG para os problemas de vibração em vigas

Número de ciclos de Refinamento	Número de Pontos de Controle	Número de Elementos	Número de GDL
0	18	4	36
1	40	16	80
2	108	64	216
3	340	256	680
4	1188	1024	2376
5	4420	4096	8840

Fonte: O autor

Os resultados obtidos assim como a convergência para cada uma das frequências são mostrados na Figura 41.

Antes de analisar os resultados deve ser levado em conta que a solução analítica não corresponde exatamente ao problema analisado que é bidimensional e a solução analítica corresponde a problemas unidimensionais de vigas

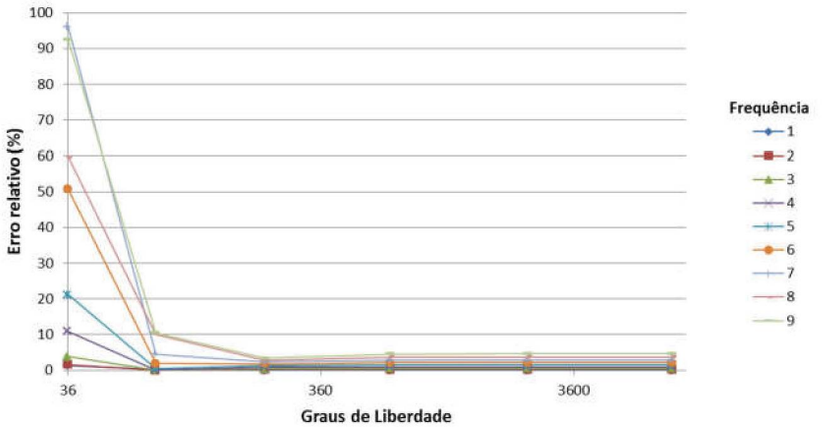


Figura 41 – Variação do erro relativo em função dos GDL para as nove frequências de vibração analisadas. Viga engasta e livre.
Fonte: O autor.

Neste primeiro exemplo pode-se observar que existe boa concordância para a primeira frequência de vibração chegando a um valor de erro relativo próximo de 0,01%. No entanto a partir da segunda frequência de vibração, existe convergência para um valor que difere a partir de 0,2% na segunda frequência até 4,6% no nono modo de vibração. A explicação a esta divergência pode estar relacionada às diferenças entre o modelo de estado plano de tensões e a teoria de Euler-Bernoulli. Na Figura 42 são mostrados os quatro primeiros modos de vibração para uma viga engastada e livre. Para as frequências maiores a geometria do modo de vibração correspondente gera segmentos onde a curvatura da viga é significativa. Por exemplo, no primeiro modo de vibração a curvatura está distribuída no comprimento inteiro da viga pois só existe um ponto onde não existe deslocamentos, no caso a borda de engastamento. Neste caso a resposta obtida com o modelo em AIG fica próximo à solução analítica. Para o segundo modo de vibração já são dois pontos sem deslocamentos e a curvatura é concentrada num comprimento menor ao comprimento total da viga e o erro aumenta. Por exemplo, no quarto modo existem quatro pontos sem deslocamento e a curvatura é desenvolvida em comprimentos cada vez menores e a diferença com o resultado da teoria de Euler-Bernoulli aumenta. No caso do modelo bidimensional de AIG a relação comprimento altura nestes segmentos fica menor e, por tanto os efeitos correspondentes ao cisalhamento e deformação axial, contemplados no modelo de AIG, começam a ser

significativos. Estes fatores, entretanto, não são levados em conta na solução analítica para barras.

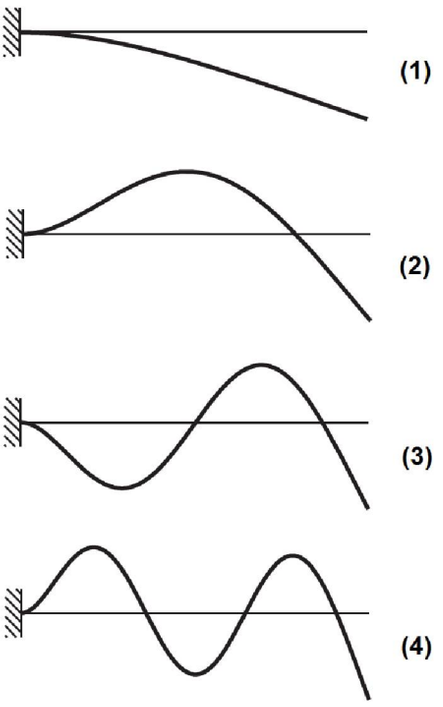


Figura 42 – Descrição da deformação dos quatro primeiros modos naturais de vibração para a viga engastada e livre.
Fonte: O autor.

Para efeitos de comparação, o presente problema foi modelado usando o programa ANSYS usando 912 elementos quadrilaterais quadráticos planos com 7.218 GDL. A Tabela 2 mostra os resultados da análise isogeométrica com 8.840 GDL e os resultados obtidos usando ANSYS mostrando uma boa concordância para os valores das primeiras nove frequências.

Tabela 2 – Comparação dos valores de frequência obtidos usando AIG e ANSYS para o problema de viga engastada-livre

Modo	Frequência (Hz)	
	AIG	ANSYS
1	8,15	8,15
2	51,00	51,01
3	142,37	142,42
4	277,80	277,90
5	456,70	456,91
6	677,68	678,08
7	939,18	939,86
8	1239,43	1240,51
9	1576,51	1578,21

Fonte: O autor.

5.2.1.2 Viga engastada-engastada

A segunda viga em análise é uma viga com extremos engastados com dados similares ao exemplo estudado na seção anterior. A geometria do problema está descrita na Figura 43. As dimensões e propriedades físicas são as mesmas do problema anterior: L = 2m, b = 0,02m, h = 0,04m, ρ = 7850 kg/m^3 e E = 200GPa.

Figura 43 - Viga engastada – engastada. Geometria e seção transversal
Fonte: O autor.

Considerando as condições de engastamento nas duas extremidades, os valores do parâmetro adimensional λ_i ficam (BLEVINS, 2016):

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 4,73004074 \\
\lambda_2 &= 7,85320462 \\
\lambda_3 &= 10,9956079 \\
\lambda_4 &= 14,1371665 \\
\lambda_5 &= 17,2787597 \\
\lambda_i &= (2i+1)\pi / 2,\ i > 5
\end{aligned} \tag{111}$$

Neste problema será utilizada a mesma malha inicial mostrada na Figura 40 e os mesmos dados de refinamento mostrados na Tabela 1.

Os resultados de convergência obtidos são mostrados na Figura 44.

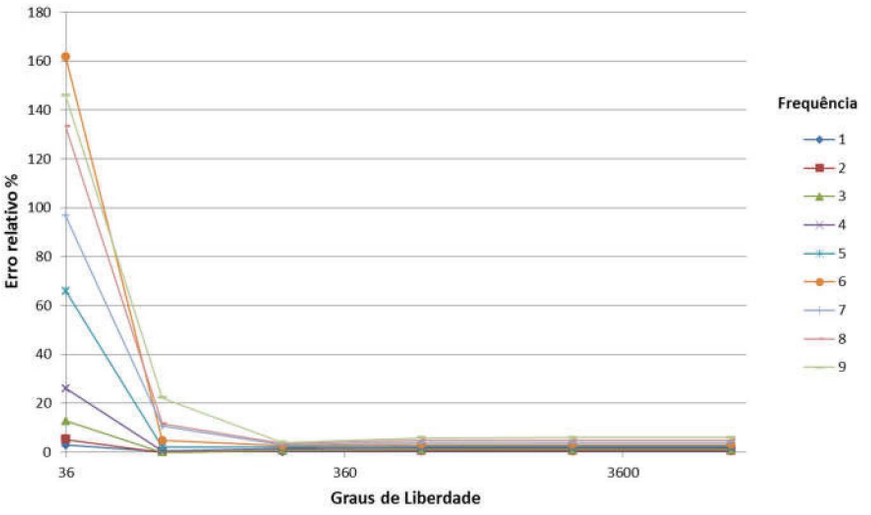


Figura 44 - Variação do erro relativo em função dos GDL para as nove frequências de vibração analisadas. Viga engastada - engastada.
Fonte: O autor.

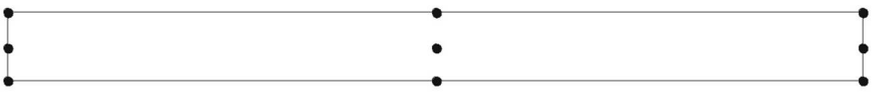
Nos resultados é possível observar um comportamento similar ao encontrado no exemplo da seção anterior. Existe boa convergência no primeiro modo com um erro relativo de 0,2% e para as frequências maiores a diferença relativa aumenta até convergir até um valor de 6% no último modo estudado.

O comportamento da resposta é similar ao exemplo anterior. O incremento da diferença relativa pode ser atribuído às condições de contorno que são mais restritivas desde o início havendo dois pontos sem deslocamentos desde o primeiro modo. A análise dos resultados obtidos para os dois problemas mostra um comportamento semelhante e deixa claro que como era esperado o modelo não se comporta exatamente igual aos elementos de viga, pois outros efeitos levados em

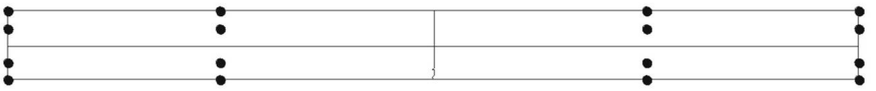
conta no modelo bidimensional afetam as respostas obtidas principalmente para as frequências maiores.

5.2.1.3 Viga engastada – livre cálculo das frequências de vibração usando formulação com *patches*

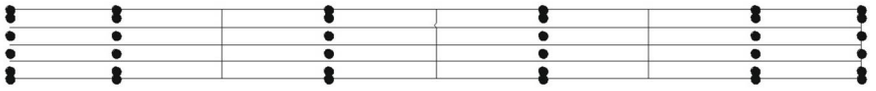
Com a intenção de verificar o desempenho da formulação com *patches* no cálculo de frequências naturais de vibração, será resolvido novamente o problema de viga engastada – livre mostrado na seção 5.2.1.1 com as mesmas propriedades físicas e a mesma configuração geométrica já mostrada na Figura 39.



(a) Configuração inicial do *patch*



(b) Configuração do *patch* depois de um ciclo de refinamento *h*



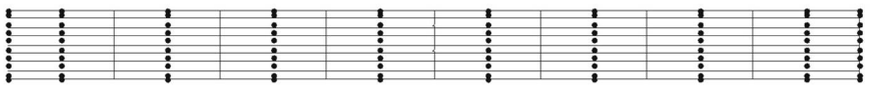
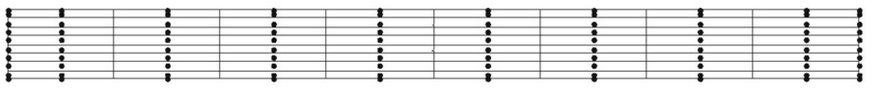
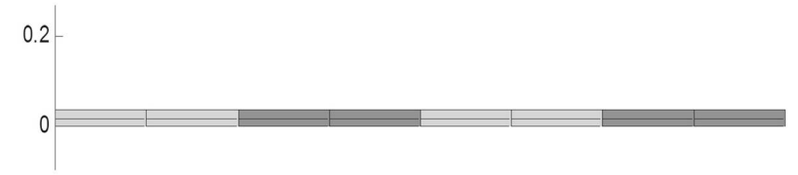
(c) Configuração do *patch* depois de dois ciclos de refinamento *h*

(d) Configuração do *patch* depois de três ciclos de refinamento *h*

(e) Configuração do *patch* depois de quatro ciclos de refinamento *h*

Figura 45 – Configuração da malha dos patches para o problema de viga engastada-livre
Fonte: O autor.

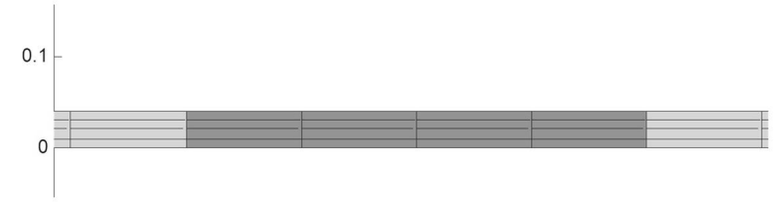
Para a modelagem da viga foram utilizados quatro *patches* distribuídos no comprimento da viga. Cada *patch* foi inicializado com um elemento isogeométrico

biquadrático como mostrado na Figura 45(a) e aplicando refinamento *h* de maneira sucessiva. Nesta figura também são mostrados os *patches* com vários ciclos de refinamento e os respectivos pontos de controle. A malha inicial e a malha com um ciclo de refinamento da viga completa estão esquematizadas na Figura 46. Já as malhas com dois, três e quatro ciclos são mostradas parcialmente para destacar o detalhe do refinamento.

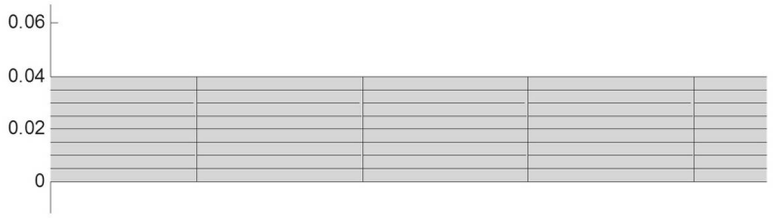
(a) Malha inicial com quatro *patches*



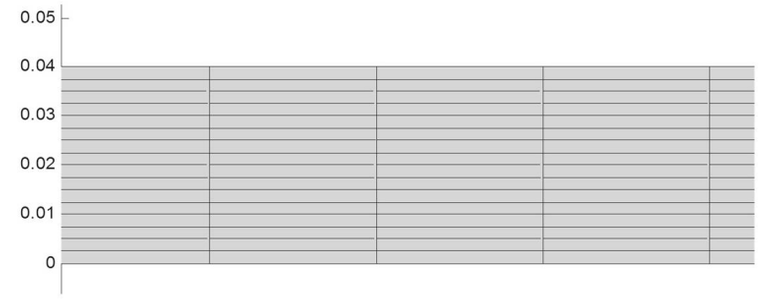
(b) Malha depois de um ciclo de refinamento



(c) Detalhe do *patch* com dois ciclos de refinamento



(d) Detalhe do *patch* com três ciclos de refinamento



(d) Detalhe do *patch* com quatro ciclos de refinamento

Figura 46 – Malhas para o problema de viga engastada- livre com solução com *patches* com vários graus de refinamento.

Fonte: Autor.

As malhas resultantes apresentam no total: 54, 104, 252, 740 e 2484 GDL. Realizados os cálculos dos valores das frequências naturais de vibração foram comparados com os obtidos pela Equação (109).

A Figura 47 mostra o gráfico do erro relativo destas soluções com respeito à solução analítica e o número de GDL para cada frequência.

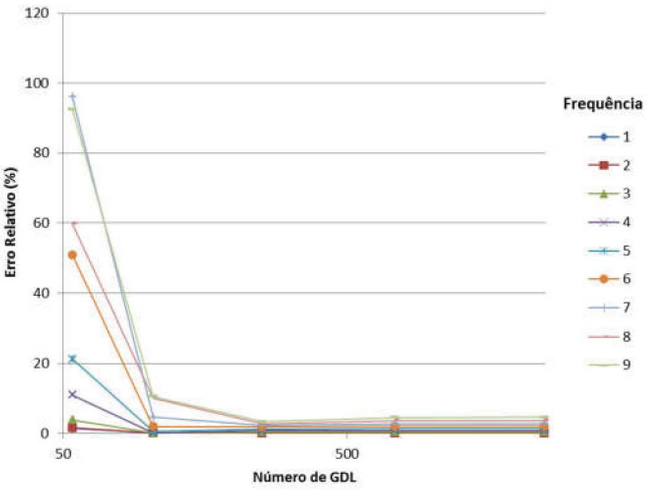


Figura 47 - Variação do erro relativo em função dos GDL no modelo com *patches* para as seis frequências de vibração analisadas. Viga engasta e livre.
Fonte: O autor.

Nos resultados mostrados pode-se observar que, quando comparado com a Figura 41, a discretização com patches tem desempenho similar à formulação de *patch* único, ou seja, os resultados são consistentes com a resposta analítica de referência. O mesmo comportamento pode ser observado na convergência da primeira frequência e também na divergência que começa aparecer nas frequências superiores. As observações colocadas na seção 5.2.1 sobre as diferenças entre resultados numéricos e analíticos para este tipo de problema permanecem válidas neste caso.

Estes resultados reforçam a possibilidade do uso da formulação com *patches* na solução de problemas que envolvem o cálculo de frequências naturais de vibração.

5.2.2 Frequências naturais de vibração de uma seção de uma barragem de gravidade de concreto

No presente exemplo, mostram-se os resultados obtidos para um problema de estado plano de deformações, onde o objetivo é determinar as frequências naturais de vibração de uma seção transversal de uma barragem de gravidade de concreto.

No estado plano de deformações, os carregamentos são considerados como atuando só no plano da seção em análise, e as deformações ou deslocamentos perpendiculares ao plano são considerados como nulos. Esta hipótese pode ser adotada para a análise de uma seção transversal de uma barragem, onde a seção transversal analisada encontra-se confinada dentro da massa da barragem.

Neste exemplo é analisada uma seção genérica correspondente a uma barragem de gravidade cujas dimensões são mostradas na Figura 48, considerando a base como fixa. As propriedades físicas do material utilizadas foram módulo de elasticidade E = 23GPa, Coeficiente de Poisson ν = 0,2 e densidade ρ = 25 kN/m^3.

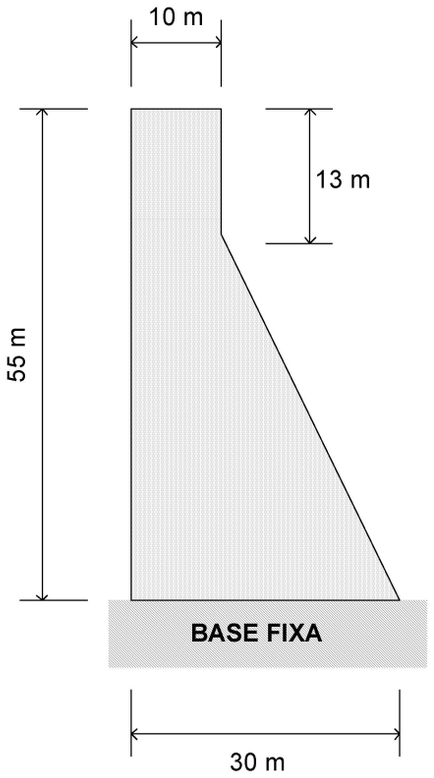


Figura 48 - Seção transversal de uma barragem de gravidade de concreto com base fixa e contornos livres.
Fonte: O autor.

Neste caso será utilizado como referência o valor obtido para as seis primeiras frequências obtidas usando MEF e o programa comercial ANSYS. Foram usados elementos quadrilaterais quadráticos de oito nós e uma malha de 4638 GDL. A Figura 49 mostra a malha utilizada no ANSYS.

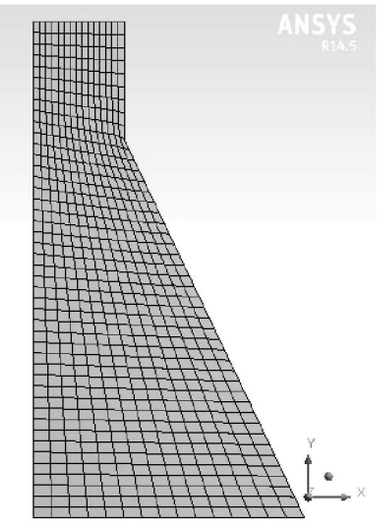


Figura 49 – Malha da solução de referência usando o programa ANSYS
Fonte: O autor

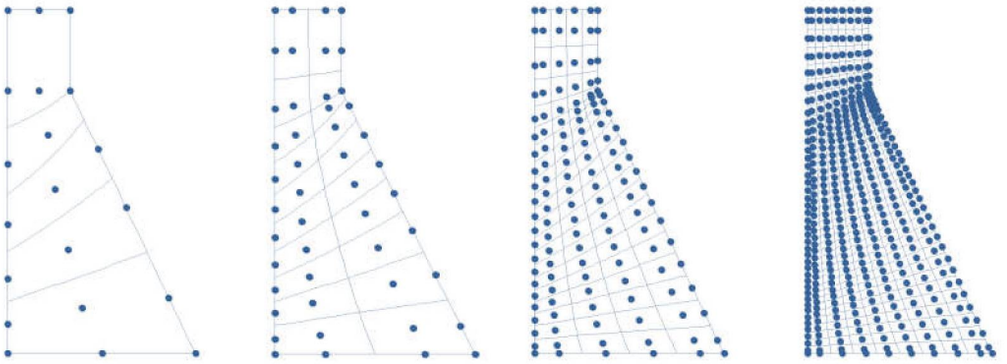
A solução usando AIG foi obtida a partir de uma malha inicial de 5 elementos isogeométricos quadráticos e aplicando sucessivamente 4 ciclos de refinamento *h*. Na Tabela 3 são mostradas as características das malhas obtidas.

Na Figura 50 é mostrada representação gráfica da malha inicial e das quatro primeiras malhas obtidas por refinamento *h*.

Tabela 3 - Características das malhas de AIG para a seção de barragem de gravidade

Número de ciclos de Refinamento	Número de Pontos de Controle	Número de Elementos	Número de GDL
0	21	5	42
1	48	20	96
2	132	80	264
3	420	320	840
4	1476	1280	2952

Fonte: O autor.



(a) (b) (c) (d)

Figura 50 – Malhas para a solução por AIG (a) Malha inicial (b) Com um ciclo de refinamento *h* (c) Com dois ciclos de refinamento *h* (d) Com três ciclos de refinamento *h*
Fonte: O autor.

Os resultados obtidos usando AIG convergem para a solução obtida com o programa ANSYS. Na Figura 51 são mostrados os gráficos de convergência das primeiras 6 frequências, normalizando os resultados com respeito aos obtidos na solução de referência do MEF. A partir da solução com 840 GDL pode-se observar a boa concordância da AIG com os resultados obtidos com o software comercial ANSYS, mostrando boa aproximação com um número menor de GDL.

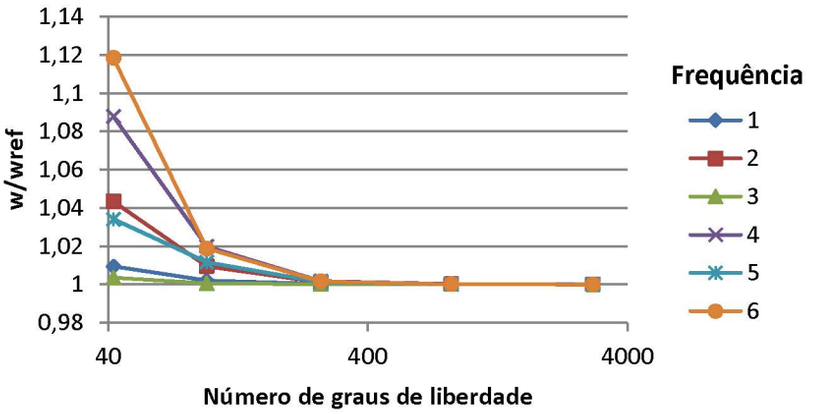


Figura 51 – Estudo de convergência das frequências naturais de vibração obtidas usando AIG.
Fonte: O autor.

5.2.3 Análise dinâmica de uma viga engastada e livre submetida a uma força pulso retangular

Neste exemplo será analisado o comportamento de uma viga engasta e livre submetida a uma carga tipo pulso retangular $P(t)$ usando os procedimentos indicados na Seção 4.

As condições iniciais no tempo $t = 0$ são $u(0) = \dot{u}(0) = \ddot{u}(0) = 0$. Os dados geométricos e propriedades físicas do problema são: L = 0,5m; h = 0,01m; b = 0,1m, Módulo de Elasticidade E = 200GPa, coeficiente de Poisson ν = 0,3 e densidade ρ = 7.850 kg/m^3, sem considerar amortecimento. A viga estudada mostra-se na Figura 52. A descrição no tempo da força do tipo pulso retangular $P(t)$, encontra-se na Figura 53

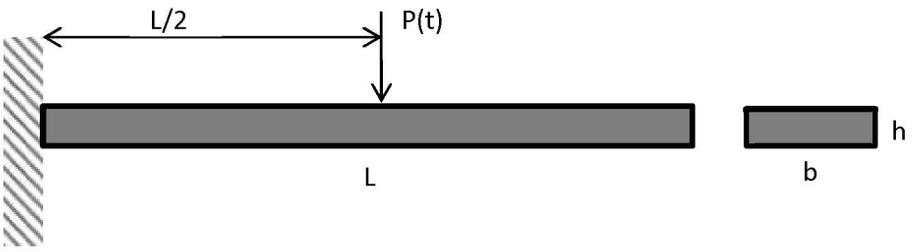


Figura 52 – Dados geométricos da viga engastada e livre usada na Seção 5.2.3
Fonte: O autor.

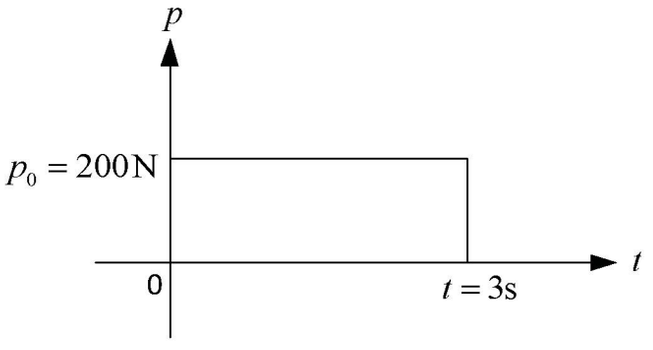


Figura 53 – Descrição da força pulso retangular P(t), para o problema 5.2.3
Fonte: O autor.

5.2.3.1 Verificação do cálculo dos modos de vibração

Antes de fazer a análise de vibrações livres, será verificado se a discretização adotada proporciona uma aproximação suficiente para o cálculo das frequências naturais de vibração. Foi utilizada uma solução de referência usando MEF e o programa ANSYS usando 912 elementos quadrilaterais quadráticos com 6402 GDL. Os valores obtidos para as seis primeiras frequências encontram-se na Tabela 4.

Tabela 4 – Frequências em Hz dos seis primeiros modos de vibração usando ANSYS

Modo	Frequência (Hz)
1	32,62
2	204,01
3	569,55
4	1111,30
5	1827,00
6	2524,50

Fonte: O autor.

Usando AIG foi elaborada uma malha inicial com quatro elementos isogeométricos e 24 GDL, esta malha é mostrada na Figura 54. Aplicando quatro ciclos de refinamento *h* sucessivamente pode-se observar a convergência das soluções com respeito à solução de referência obtida no ANSYS. A Figura 55 mostra a análise de convergência depois do segundo, terceiro e quarto ciclos de refinamento.

Figura 54 – Malha inicial da viga para o problema 5.2.3 usando AIG
Fonte: O autor.

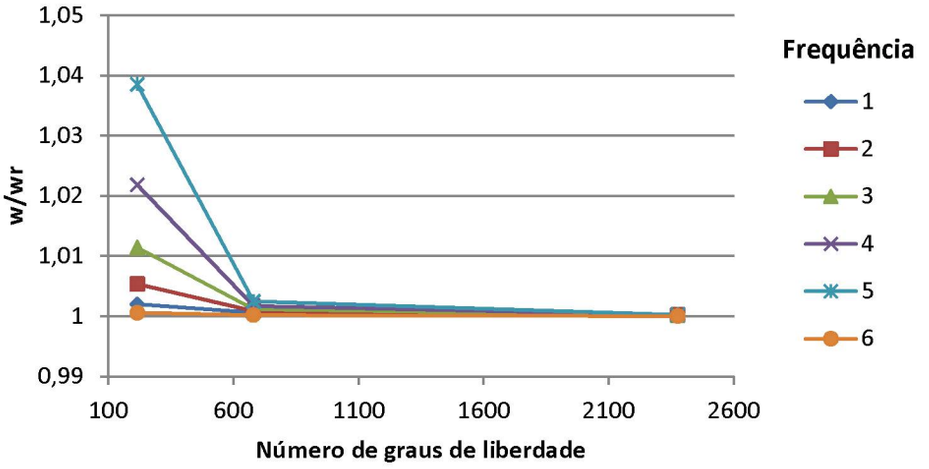


Figura 55 – Análise de convergência das soluções de AIG com respeito à solução de referência obtida com ANSYS
Fonte: O autor.

A solução obtida depois do quarto ciclo de refinamento corresponde à discretização com 1024 elementos e 2376 GDL, que será usada na análise transiente.

5.2.3.2 Análise transiente

Para obtenção da resposta no tempo foi usado o Método da Diferença Central descrito na seção 4.9. Para aplicação do método foi utilizado um passo de tempo Δt =0,0015s e o tempo total considerado foi 0,4995s. Na Figura 56 é mostrada a resposta em deslocamentos $u(t)$ usando AIG de um ponto situado no eixo longitudinal de simetria da viga no extremo livre. Nesta resposta é possível observar os dois tipos de comportamento esperados: vibração forçada até o tempo $t = 0,3\text{s}$ e vibrações livres para o $t > 0,3\text{s}$, mostrando o desempenho correto da formulação de AIG.

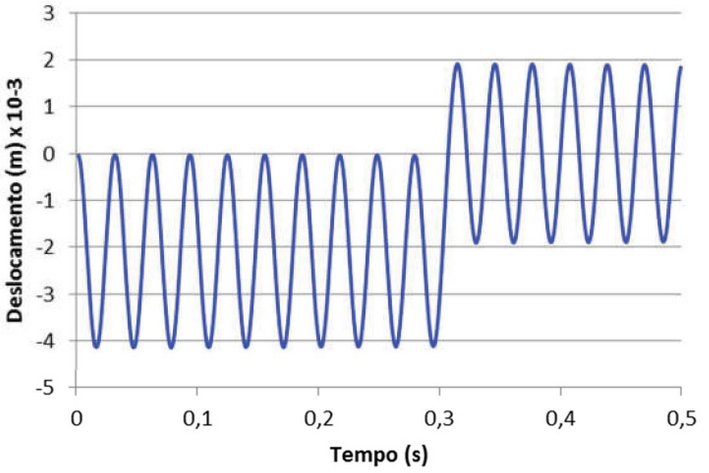


Figura 56 – Resposta dinâmica em deslocamentos para o problema de viga submetida a força pulso retangular.
Fonte: O autor.

Para efeitos de comparação, este problema foi resolvido via o MEF usando o programa ANSYS. A malha utilizada foi de 912 elementos quadrilaterais quadráticos com 6402 GDL. Foi usado o módulo *Transient* do ANSYS, que utiliza o método de Newmark para a integração no tempo (ANSYS, 2014), e um passo de tempo Δt = 0,0015s. Na Tabela 5 pode-se observar a resposta em deslocamentos para os primeiros 20 passos de tempo.

Os resultados mostram boa concordância entre as soluções de AIG e MEF, sendo que a solução em AIG tem um número menor de GDL, mas ainda assim fornece boa precisão nos resultados.

Tabela 5 – Comparação da resposta em deslocamentos entre AIG e MEF (ANSYS) para o problema de viga submetida a força pulso retangular

Tempo	AIG	ANSYS
0,0015	-4,4492E-05	-4,4642E-05
0,0030	-2,2428E-04	-2,2502E-04
0,0045	-5,9907E-04	-6,0092E-04
0,0060	-1,1375E-03	-1,1406E-03
0,0075	-1,7414E-03	-1,7457E-03
0,0090	-2,3487E-03	-2,3540E-03
0,0105	-2,9470E-03	-2,9529E-03
0,0120	-3,4921E-03	-3,4979E-03
0,0135	-3,8991E-03	-3,9036E-03
0,0150	-4,1118E-03	-4,1144E-03
0,0165	-4,1412E-03	-4,1414E-03
0,0180	-4,0080E-03	-4,0055E-03
0,0195	-3,6980E-03	-3,6920E-03
0,0210	-3,2152E-03	-3,2060E-03
0,0225	-2,6242E-03	-2,6128E-03
0,0240	-2,0048E-03	-1,9923E-03
0,0255	-1,4003E-03	-1,3875E-03
0,0270	-8,3948E-04	-8,2747E-04
0,0285	-3,8233E-04	-3,7311E-04
0,0300	-9,7607E-05	-9,2762E-05

Fonte: O autor

5.2.4 Vibrações livres de uma seção de barragem sem amortecimento

Considerando os mesmos dados geométricos e propriedades resistentes do exemplo da Seção 5.2.2, agora será estudada a resposta dinâmica da estrutura de uma barragem para o problema de vibrações livres. Serão mantidas as mesmas condições de contorno.

Neste problema foi utilizada a malha com 420 pontos de controle com 320 elementos isogeométricos quadráticos com 840 graus de liberdade descrita na Seção 5.2.2 e ilustrada na Figura 57.

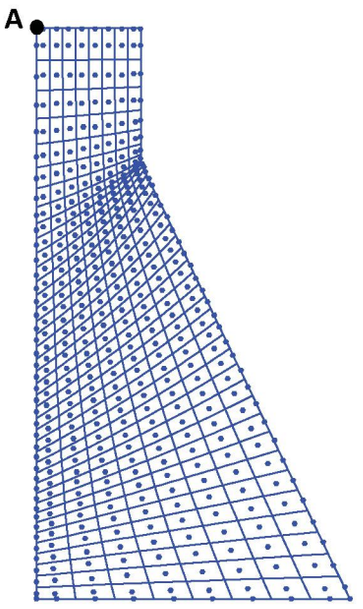
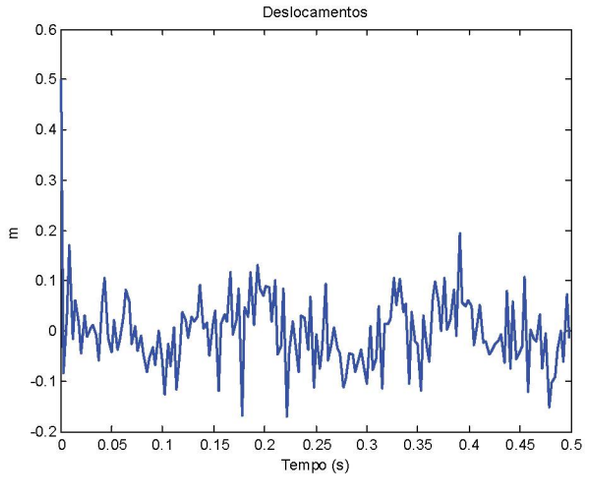


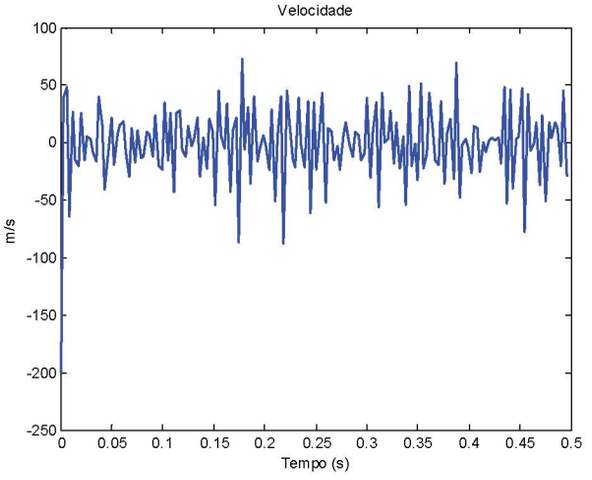
Figura 57 – Discretização da seção transversal de uma barragem com 192 elementos isogeométricos.
Fonte: O autor.

As condições iniciais do problema são $u_i(0) = 0,5\text{m}$ e $\dot{u}_i(0) = 0$, onde u_i representa o deslocamento na direção horizontal (x) no ponto A na Figura 57.

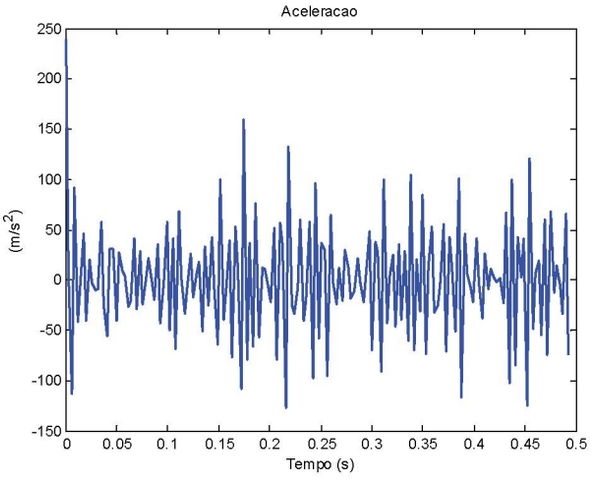
A resposta numérica obtida usando o procedimento descrito na Seção 4.5 com um passo de tempo $\Delta t =$ 0,001s está representada na Figura 58, onde os deslocamentos $\mathbf{u}(t)$, velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e a aceleração $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ são mostrados para o intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 0,5$ s. Os gráficos correspondem ao mesmo ponto de aplicação da condição inicial $u_i(0) = 0,5\text{m}$.



(a) Deslocamento m



(b) Velocidade m/s



(c) Aceleração m/s^2

Figura 58 – Resposta dinâmica não amortecida para a seção de barragem submetida a vibrações livres (a) Deslocamentos $\mathbf{u}(t)$, Velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e Aceleração $\ddot{\mathbf{u}}(t)$.

Fonte: O autor.

5.2.5 Vibrações livres de uma seção de barragem considerando amortecimento proporcional

Usando as mesmas propriedades geométricas e físicas do exemplo anterior e o mesmo valor para o passo de tempo, é analisado o problema de vibrações livres com amortecimento proporcional. Segundo as Diretrizes Federais para Segurança de Barragens dos Estados Unidos (FEMA, 2005) pode-se adotar para barragens de gravidade de concreto armado uma taxa de amortecimento ζ de 5%.

Conforme o item 4.7, para a obtenção da matriz de amortecimento de Rayleigh foram utilizados os modos de vibração 1 e 6 como modos de referência. A resposta dinâmica em deslocamentos, correspondente ao extremo superior esquerdo da barragem, é mostrada na Figura 59.

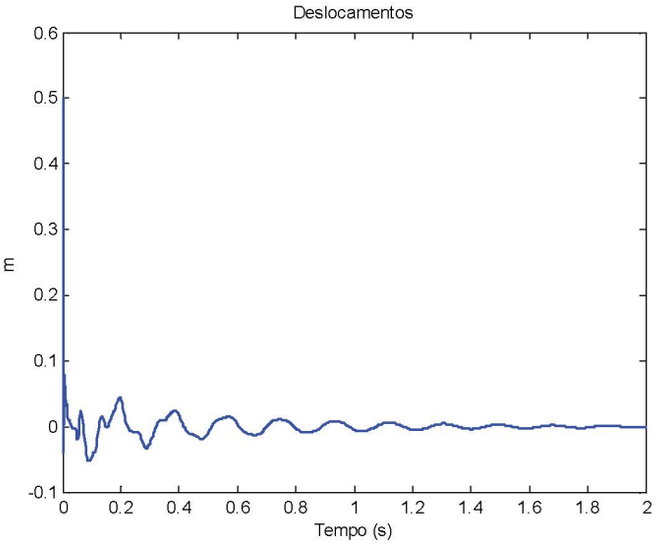


Figura 59 - Resposta dinâmica amortecida (ζ = 5%) para a seção de barragem submetida a vibrações livres em deslocamentos $\mathbf{u}(t)$

Fonte: O autor.

A análise usando AIG considerando amortecimento proporcional mostra corretamente a diminuição do movimento para um tempo t maior até o repouso, mostrando o comportamento de um sistema subamortecido.

5.2.6 Seção de barragem submetida a vibrações forçadas com amortecimento

Considera-se agora uma excitação harmônica $p(t) = p_0 \operatorname{sen}(\omega_e t)$ com frequência (ω_e) aplicada no topo da barragem como mostrado na Figura 60.

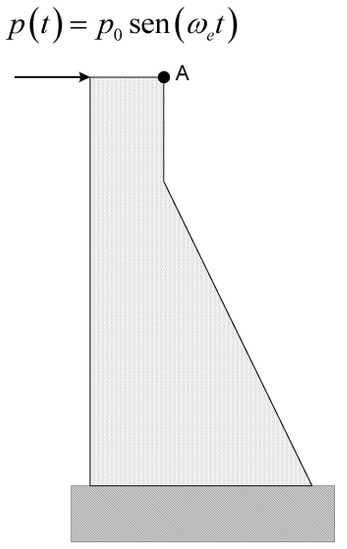


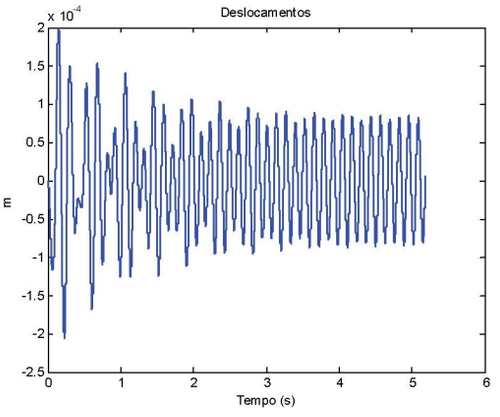
Figura 60 – Seção transversal de barragem submetida a carregamento harmônico no topo.
Fonte: O autor.

Partindo do repouso e considerando um valor de p_0 igual a 80 kN e considerando a frequência de excitação (ω_e) igual a $0{,}5\omega_2$ e $1{,}0\omega_2$, onde ω_2 corresponde à segunda frequência natural de vibração obtida no Exemplo 5.2.2 igual a 15,41Hz. Este problema foi resolvido usando o Método da Diferença Central descrito na seção 4.9 com um passo de tempo de 0,0004s e taxa de amortecimento ζ de 5%.

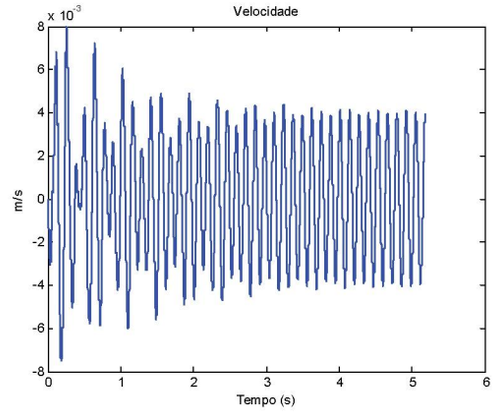
Nas Figura 61 e Figura 62 são mostradas as respostas dinâmicas em deslocamentos, velocidade e aceleração correspondente ao topo da barragem no ponto A (Figura 60) para as duas solicitações harmônicas.

Observando-se os resultados mostrados na Figura 61 é possível identificar a vibração transiente no início do gráfico, esta fase da resposta vai desaparecendo pelo efeito do amortecimento. Em seguida, o gráfico mostra uma resposta correspondente à vibração forçada ou vibração no estado estacionário *(steady-state)*. Esse comportamento é esperado quando a frequência de excitação externa não está próxima de uma frequência natural de vibração.

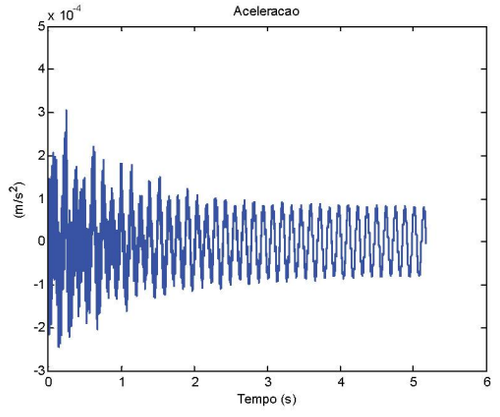
A Figura 62 mostra o efeito quando a frequência da excitação é igual a frequência de ressonância. O comportamento típico esperado neste tipo de problema é o aumento da amplitude do deslocamento com cada ciclo de vibração. Neste caso o crescimento da amplitude é limitado devido ao amortecimento.



(a)

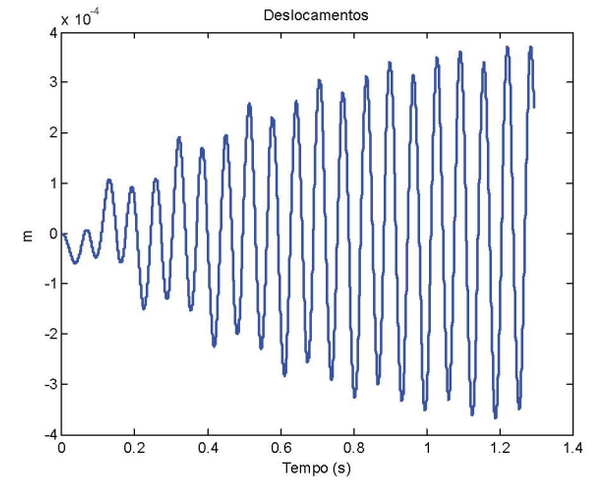


(b)

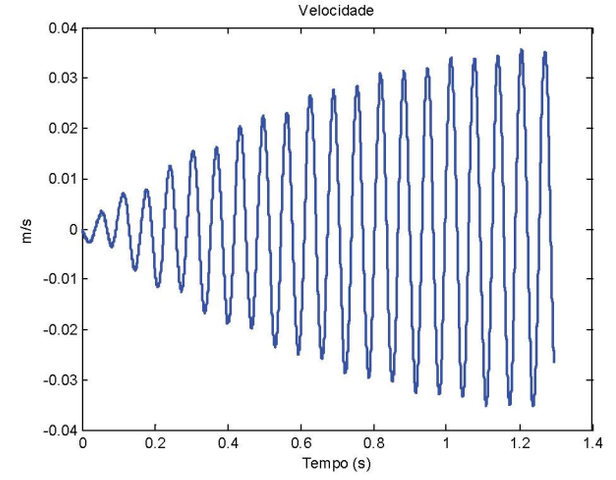


(c)

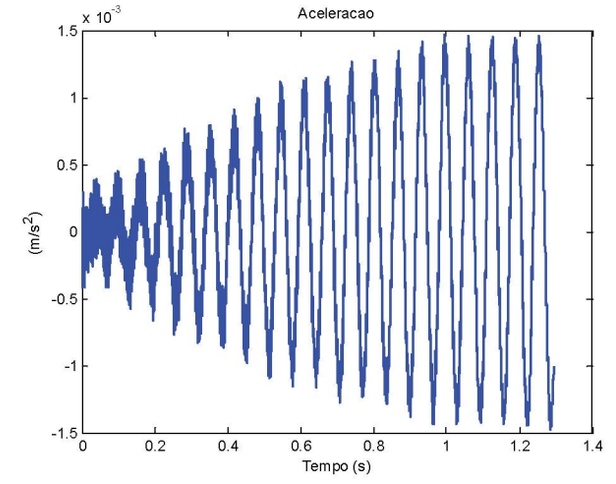
Figura 61 – Resposta dinâmica para o problema de vibrações forçadas para $\omega_e = 0,5\omega_1$ (a) Deslocamentos $\mathbf{u}(t)$, (b) Velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e (c) Aceleração $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ no Ponto A.
Fonte: O autor.



(a)



(b)



(c)

Figura 62 - Resposta dinâmica para o problema de vibrações forçadas para $\omega_e = 1,0\omega_1$ (a) Deslocamentos $\mathbf{u}(t)$, (b) Velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e (c) Aceleração $\ddot{\mathbf{u}}(t)$.

Fonte: O autor.

Para comparação, este mesmo problema (com $\omega_e = 0,5\omega_1$) foi resolvido usando o programa ANSYS. A discretização é a mesma mostrada na Figura 49 com uma malha de 4638 GDL e elementos quadrilaterais quadráticos de oito nós, foi utilizado o mesmo passo de tempo especificado na AIG o método utilizado pelo software ANSYS para análise transiente é o Método de Newmark (ANSYS, 2014). Na Figura 63 pode-se observar a boa concordância entre os resultados obtidos com AIG e MEF, ressaltando que o modelo da AIG tem um número menor de GDL.

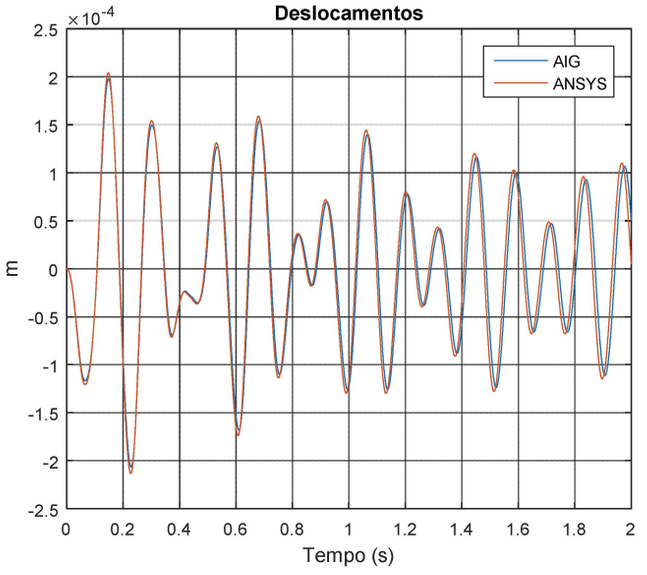


Figura 63 – Comparação de resultados em deslocamentos entre ANSYS e AIG para o problema de barragem submetidas a vibrações forçadas com amortecimento.
Fonte: O autor.

As respostas obtidas usando AIG se mostram consistentes com a teoria, sendo que o efeito de ressonância e a parcela correspondente ao estado estacionário do movimento foram corretamente identificados.

5.2.7 Barragem submetida a uma aceleração da base de fundação

Na dinâmica de estruturas, a variação no tempo da aceleração do solo é uma das maneiras mais usadas para definir os movimentos de terra durante um terremoto (CLOUGH; PENZIEN, 1995). Em uma estrutura somente o deslocamento relativo entre a massa e a base produzem forças elásticas e de amortecimento. A equação do movimento para um sistema linear de um grau de liberdade é:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \tag{112}$$

onde m é a massa do sistema, $\ddot{u}$ a aceleração, c o amortecimento, $\dot{u}$ a velocidade, k a rigidez do sistema, u o deslocamento e $\ddot{u}_g(t)$ é a aceleração do deslocamento da base da estrutura ou solo. Por inspeção, é possível inferir que o deslocamento relativo da estrutura devido a uma aceleração na base será idêntico ao deslocamento da estrutura com a base estática e submetida a uma forca igual a $-m\ddot{u}_g(t)$, logo a aceleração da base pode ser substituída pela ação de uma força efetiva inercial $p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$.

No caso de um sistema de múltiplos graus de liberdade a Equação (112) pode ser generalizada, chegando-se na forma matricial:

$$\mathbf{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g} \tag{113}$$

onde $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{k}$ são as mesmas matrizes descritas na Seção 4.4 e $\ddot{\mathbf{u}}_g$ é o vetor de aceleração da base.

A comparação entre a Equação (113) e a Equação (87), mostra que as equações de movimento para forças externas e para aceleração na base são iguais, logo os procedimentos mostrados na Seção 4.8 podem ser aplicados na solução de problemas com ações sísmicas.

Considera-se agora a mesma seção de barragem do problema da Seção 5.2.6 com as mesmas dimensões e propriedades físicas (Figura 64a). A estrutura encontra-se submetida a uma aceleração da base arbitrária $\ddot{u}_g(t)$, descrita na Figura 64b (RAJASEKARAN, 2009).

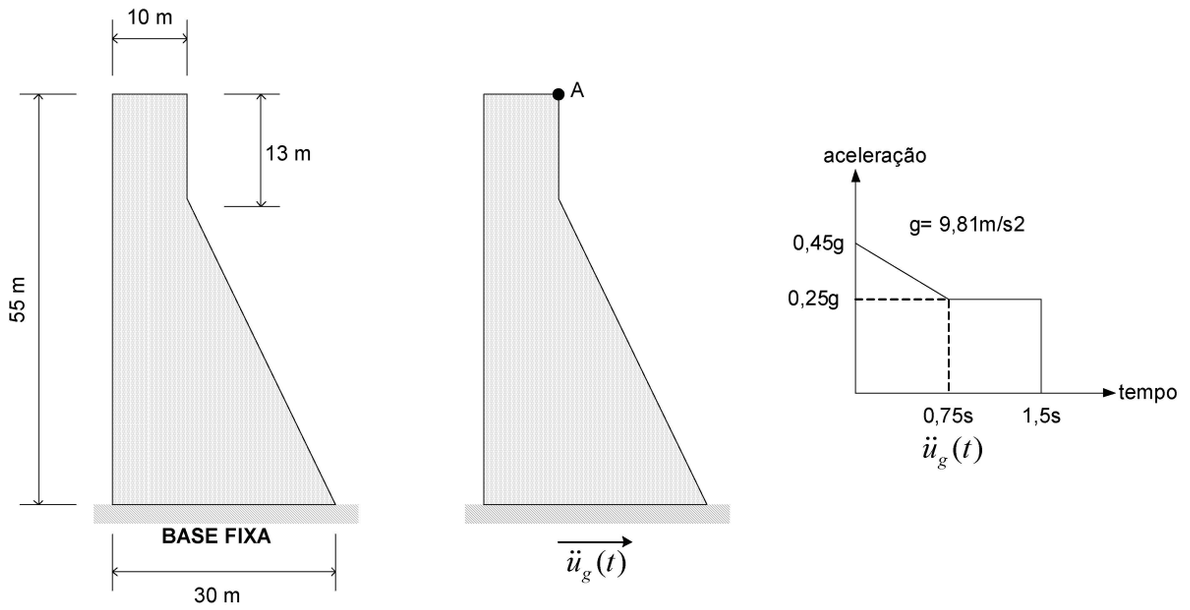


Figura 64 – (a) Seção transversal de barragem submetida a aceleração na base (b) Descrição da aceleração do solo $\ddot{u}_g(t)$

Fonte: (a) O autor (b) adaptado de (RAJASEKARAN, 2009).

Usando o mesmo modelo isogeométrico da Seção 5.2.6 e com um passo de tempo de 0,0015s para o MDC, a resposta obtida para o deslocamento na direção de x do ponto A da barragem é mostrada na Figura 65.

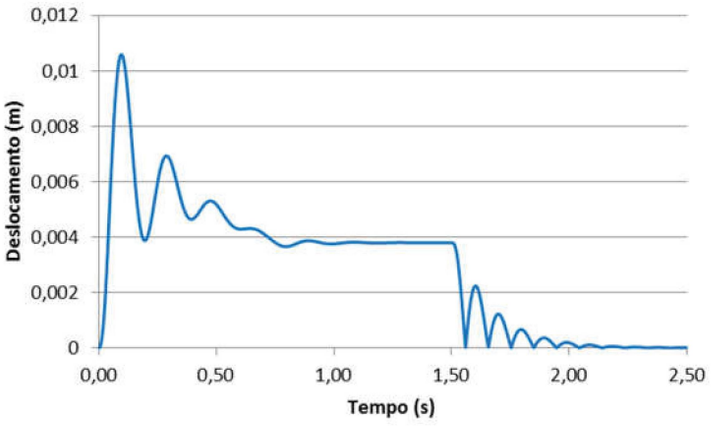


Figura 65 – Deslocamentos em x do ponto A para a barragem submetida a aceleração do solo.

Fonte: O autor.

O gráfico do deslocamento mostra concordância com a duração da solicitação. Uma vez que a solicitação termina em $t = 1,5$ s o comportamento da estrutura corresponde ao comportamento de vibrações livres amortecidas.

Para efeitos de comparação, o problema foi resolvido via o MEF usando o programa ANSYS. A malha utilizada foi de 912 elementos quadrilaterais quadráticos com 8084 GDL. Na Figura 66 pode-se observar a comparação da resposta obtida com AIG e ANSYS, o gráfico mostra boa concordância das respostas do modelo de AIG com valores muito próximos da solução com ANSYS. A partir do tempo $t = 1,5$ s existe uma pequena defasagem entre as soluções, porém é possível observar que os valores dos picos de deslocamentos são consistentes ao longo de toda a resposta no tempo.

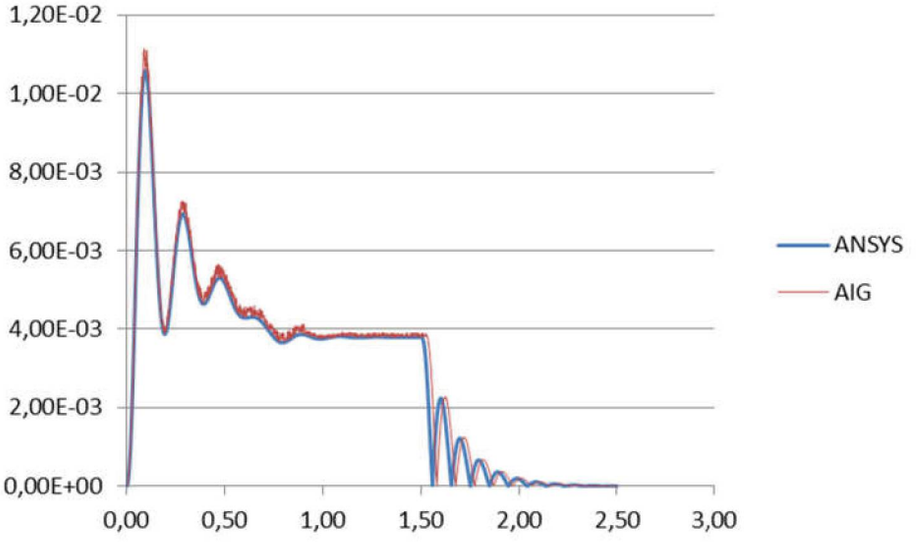


Figura 66 – Comparação da resposta transiente obtida com AIG e ANSYS para o problema de barragem submetida a aceleração de base
Fonte: O autor.

5.2.8 Modelagem de uma seção simplificada da Barragem de Itaipu com discretização da fundação e uso de *patches* múltiplos

Neste exemplo pretende-se analisar um problema envolvendo uma estrutura real. A estrutura selecionada é a seção transversal de um dos blocos da barragem de gravidade aliviada de UHE Itaipu. A UHE de Itaipu é uma das maiores usinas hidrelétricas em operação do mundo com uma capacidade instalada de 14.000MW

distribuídos em vinte unidades geradoras de 700 MW cada (ITAIPU-BINACIONAL, 2009). A usina hidrelétrica de Itaipu teve no ano de 2016 uma produção histórica de 103.098.366 de Megawatts-hora (MWh) estabelecendo uma nova marca, voltando a ser líder mundial de geração de energia elétrica anual à frente de UHE de Três Gargantas na China (ITAIPU-BINACIONAL, 2017).

Como indicado nas seções anteriores o arranjo da UHE Itaipu tem cinco diferentes tipos de barragem. Neste exemplo pretende-se obter os modos de vibração de um dos blocos da Barragem do tipo contraforte, correspondente ao Bloco E6 cuja localização pode ser observada na Figura 67.

Figura 67 – Localização do Trecho E na barragem de Itaipu.
Fonte: Adaptado de Itaipu Binacional (2009)

No trabalho de Garcia (2016) foi realizada a análise dinâmica computacional deste bloco usando um modelo de elementos finitos tridimensional com o auxilio do software ANSYS. Nesse estudo foram comparadas as frequências naturais de vibração obtidas numericamente com as obtidas experimentalmente através de um ensaio de campo usando equipamentos de vibração forçada.

No presente exemplo será modelado o mesmo bloco usando elementos isogeométricos biquadráticos considerando um modelo simplificado de estado plano de deformações. Serão calculadas as frequências naturais de vibração e os resultados serão comparados com os obtidos usando MEF (ANSYS) com o objetivo de validar o modelo. Os resultados de Garcia (2016) e com os resultados do ensaio de vibração forçada serão utilizados como segundo referencial por corresponder a modelos e situações diferentes.

5.2.8.1 Ensaio de vibração de forçada

Um ensaio de vibração forçada consiste em se aplicar uma excitação controlada em um ou vários pontos da estrutura e medir sua resposta. A resposta medida em campo corresponde normalmente à aceleração. Estes dados experimentais fornecem subsídios que permitem avaliar as frequências naturais de vibração e o amortecimento de uma estrutura (CHOPRA, 2012).

Segundo Juliani (2009) a realização de ensaios de vibração pode ser necessária nas seguintes situações:

a) Quando existe mudança dos carregamentos na estrutura;
b) Quando a geometria da estrutura é alterada;
c) Quando a estrutura foi danificada;
d) Quando são realizados reparos;
e) Para programas de manutenção estrutural.

No caso do ensaio realizado na UHE de Itaipu, os ensaios de vibração foram realizados como parte do programa de manutenção e monitoração estrutural da barragem.

Nos ensaios de vibração, a excitação externa pode ser fornecida por diversos meios, entre eles: martelo de impacto, ações ambientais e geradores de vibração.

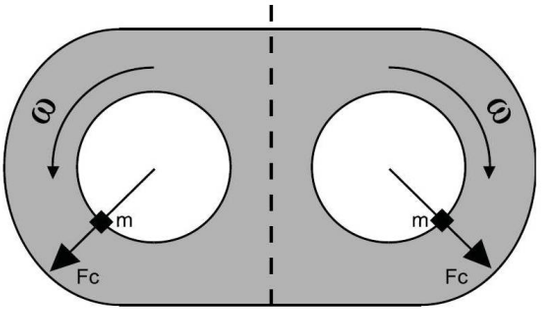
Segundo Queiroz (2014) o martelo de impacto é uma das mais simples e conhecidas formas de proporcionar uma perturbação controlada a uma estrutura. Para obras civis, este aparelho pesa cerca 55 N e tem uma ponta instrumentada por um sensor piezoelétrico. Pelas suas características, este instrumento é apropriado para estruturas flexíveis, estruturas metálicas por exemplo.

Os ensaios de medição da resposta de estruturas submetidas a ações ambientais consistem simplesmente na medição da resposta às ações as quais as estruturas estão sujeitas durante a sua vida útil. Estas ações podem ser vento, tráfego de veículos, tráfego de pedestres, ondulação marítima ou do escoamento de rios ou vibrações induzidas por maquinaria.

Os geradores de vibração, *shaking machines* em inglês ou vibrodina (do italiano *vibrodìna*), são projetados para fornecer excitações harmônicas de magnitude adequada para estruturas em escala real (CHOPRA, 2012).

A UHE Itaipu realizou ensaios de vibrações no Trecho E para capturar as frequências naturais de vibração de todos os blocos do trecho (GARCIA, 2016). A

vibrodina utilizada na UHE de Itaipu é um equipamento composto por dois discos com massas excêntricas que giram em torno de um eixo em um mesmo plano, com mesma velocidade angular e direções opostas. A Figura 68(a) ilustra o esquema teórico de funcionamento de um gerador de vibração e a Figura 68 (b) mostra os equipamentos utilizados e o posicionamento para o ensaio de vibração forçada no Trecho E. A força harmônica de excitação tem a direção do fluxo do Rio Paraná.



(a)

(b)

Figura 68 – Gerador de vibração (a) Esquema teórico (b) Vibrodina utilizado na UHE Itaipu
Fonte: (a) (JULIANI, 2009) (b) (CEASB, 2015)

Para o equipamento utilizado, a amplitude da força gerada pode ser calculada através da equação:

$$F_m = S\cos\left(F_{1/2}\right)v_\omega^2 \tag{114}$$

onde F_m é a amplitude da força resultante gerada pela vibrodina, S é a constante característica do equipamento (4036 N/Hz²), $F_{1/2}$ é o ângulo relativo entre os discos de massas excêntricas e v_ω é a velocidade angular.

Na Tabela 6 encontram-se as frequências naturais obtidas no ensaio de vibrações forçadas para os quatro primeiros modos de vibração do Bloco E6.

Tabela 6 - Frequências naturais obtidas no ensaio com vibrodina

Modo de Vibração	Frequência (Hz)
1	5,34
2	7,92
3	11,64
4	13,48

Fonte: (CEASB, 2015)

5.2.8.2 Descrição do bloco em análise

Os componentes básicos do bloco E6 da barragem de concreto de Itaipu são: cabeça de montante, alma do contraforte e crista. A construção do corpo da barragem na forma de um bloco único monolítico de concreto não foi considerada para evitar fissuras provenientes de tensões térmicas originadas pelo calor de hidratação do concreto. O Bloco E6 é um bloco de contraforte com cabeça poligonal. A geometria do Bloco é ilustrada na Figura 69.

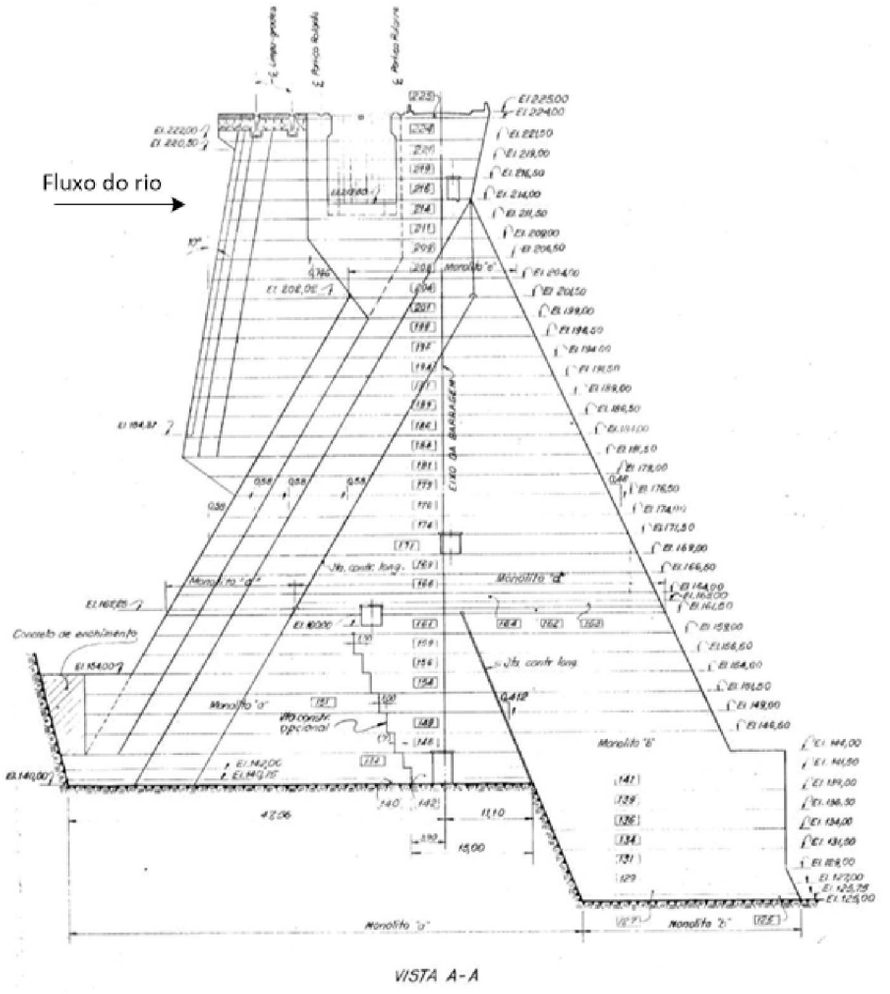


Figura 69 - Geometria do Bloco E6
Fonte: CEASB(2015)

No trabalho de Garcia (2016), o modelo geomecânico considerado foi baseado em estudos realizados na fase de projeto e na campanha de investigações realizada pela Itaipu Binacional em 2012.

De acordo com estes estudos encontram-se quatorze camadas de fundação consideradas no modelo com diferentes propriedades mecânicas e físicas. Estas camadas são mostradas na Figura 70, e as propriedades físicas correspondentes a cada camada, são apresentadas na Tabela 7.

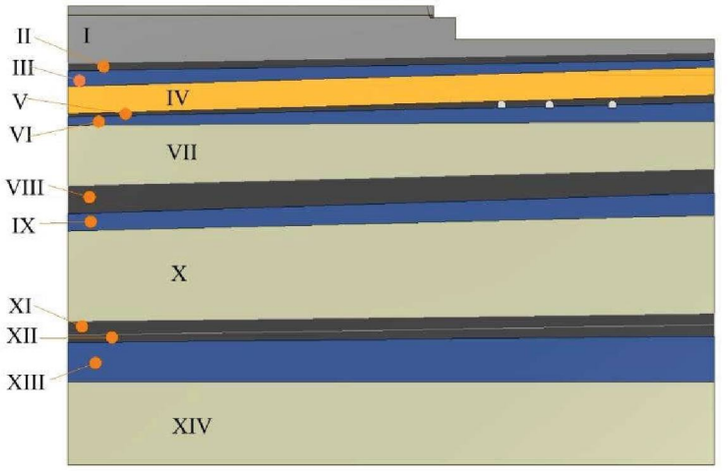


Figura 70 - Especificação das camadas de fundação.
Fonte: Garcia (2016).

Tabela 7 – Propriedades físicas das camadas de fundação

Camada	Classificação da Rocha	Densidade (kg/m3)	Módulo de Elasticidade ($x10^6$Pa)	Coeficiente de Poisson
I	Basalto Denso Cinza	2960	32,0	0,28
II	Brecha Basáltica	2520	10,0	0,22
III	Basalto Vesículo Amigdaloidal	2110	9,0	0,21
IV	Basalto Denso Vermelho	2960	25,0	0,28
V	Brecha Basáltica	2520	11,8	0,20
VI	Basalto Vesículo Amigdaloidal	2110	11,7	0,20
VII	Basalto Denso	2960	25,5	0,16
VIII	Brecha Basáltica	2520	9,8	0,20
IX	Basalto Vesículo Amigdaloidal	2110	14,7	0,20
X	Basalto Denso	2960	29,4	0,16
XI	Brecha Basáltica	2500	9,4	0,20
XII	Zona de transição A/B BB	2500	9,4	0,20
XIII	Basalto Vesículo Amigdaloidal	2110	14,7	0,20
XIV	Basalto Denso	2960	29,4	0,20

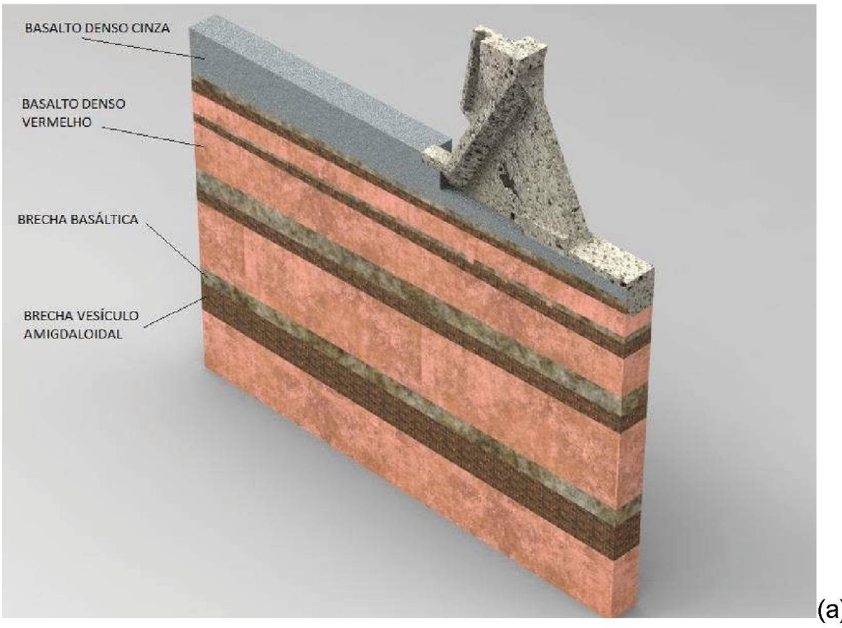
Fonte: Garcia (2016).

No trabalho citado, foi desenvolvido um modelo tridimensional incluindo o bloco E6 da barragem e a fundação com as camadas classificadas na Tabela 7.

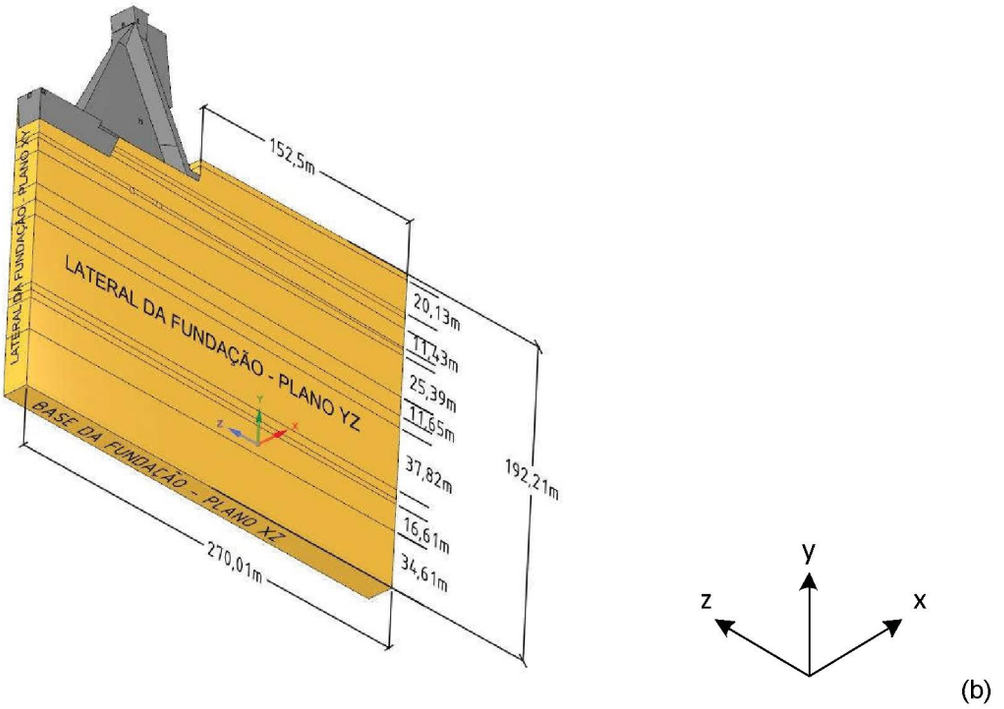
Este modelo com camadas foi denominado Modelo 2[2]. Para o concreto utilizou-se uma relação constitutiva correspondente a um material linear e homogêneo com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade igual a 22GPa, coeficiente de Poisson igual a 0,18 e densidade igual a 2.620 kg/m³. Vale ressaltar que estes valores foram obtidos em função de ensaios de corpos de prova retirados da estrutura. Foi considerada também ligação perfeita entre barragem e solo e entre as camadas do solo de fundação. Cada uma delas foi caracterizada pelas respectivas propriedades descritas na Tabela 7. A Figura 71(a) mostra o modelo que foi utilizado como referência.

No modelo computacional, foi considerada a base da última camada de solo como fixa, não permitindo nenhum deslocamento. Nas faces laterais da fundação (paralelas aos planos XY e YZ) os deslocamentos nas direções X e Z são impedidos, porém na direção Y são livres.

[2] No trabalho de Garcia (2016) o Modelo 1 corresponde a um modelo de fundação com uma única camada maciça de solo com suas propriedades obtidas como média ponderada das descritas na Tabela 5, no presente trabalho este modelo não foi considerado.



(a)



(b)

Figura 71 – Modelo computacional de referência (a) Estrutura geomecânica (b) Dimensões
Fonte: Garcia (2016).

5.2.8.3 Modelo isogeométrico

Para a elaboração do modelo isogeométrico do presente estudo, algumas restrições devidas às características do programa computacional implementado tiveram que ser observadas:

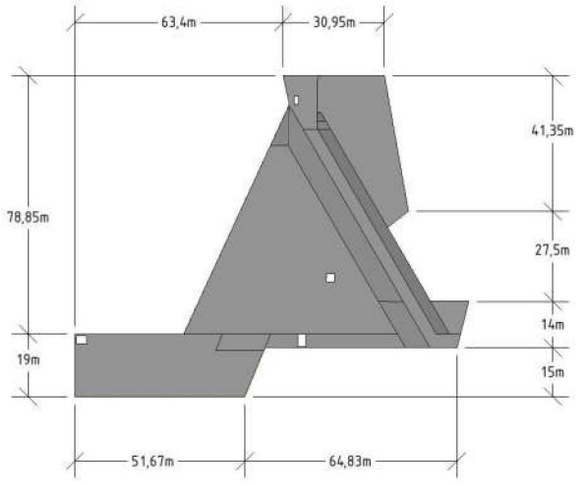
a) O modelo adotado é plano (2D) em estado plano de deformações com espessura constante diferentemente do modelo de Garcia (2016) que é 3D e de espessura variável;
b) Para modelar diferentes materiais foi necessária a utilização de *patches,* com um *patch* diferente por cada material;
c) Para diminuir a complexidade do modelo, foram realizadas algumas simplificações na geometria da barragem, e algumas das camadas mais finas foram aglutinadas em camadas maiores, como descrito nas seções seguintes.

Neste estudo o reservatório foi considerado vazio tal como no estudo de Garcia (2016). Com estas restrições foram desenvolvidos dois modelos isogeométricos descritos nas seções seguintes.

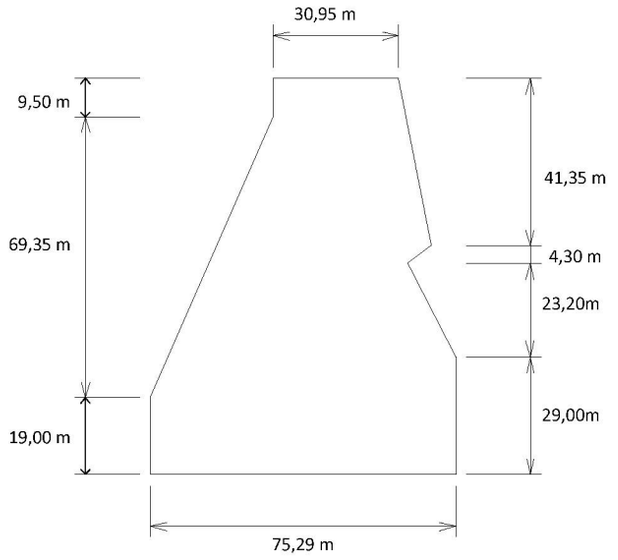
5.2.8.4 Descrição da geometria e propriedades físicas do modelo

A Figura 72(a) mostra a seção transversal da barragem correspondente ao bloco analisado. A seção de barragem foi modelada por um único *patch* isogeométrico. A Figura 72 (b) mostra a geometria simplificada adotada e Figura 72 (c) mostra a superposição da geometria simplificada com a seção da barragem para comparação.

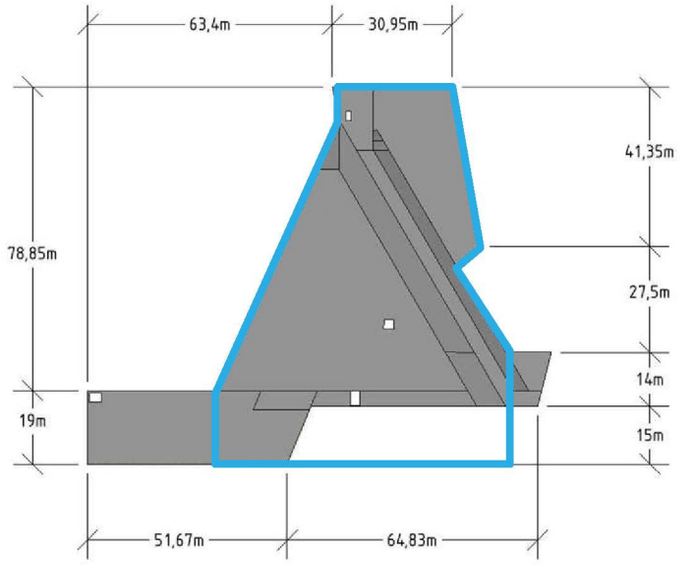
Para modelar o solo de fundação foi reduzido o número de camadas de 14 para 10 como mostrados na Tabela 8. Esta redução se refere unicamente às camadas de menor espessura aglutinando-as para simplificar o modelo computacional. As propriedades físicas das camadas resultantes da junção de duas foram obtidas calculando a média ponderada entre os valores individuais.



(a)



(b)



(c)

Figura 72 – (a) Seção transversal do bloco E6 da barragem (b) Modelo simplificado da seção de concreto (c).Superposição dos dois modelos.
Fontes: (a) Garcia (2016) (b) O autor (c) O autor.

Tabela 8 – Propriedades físicas das camadas da fundação no modelo isogeométrico

Camada	Camada (Tabela 7)	Densidade (kg/m3)	Módulo de Elasticidade ($x10^9$Pa)	Coeficiente de Poisson	Espessura (m)
1	I	2960	32,0	0,28	9,76
2	II + III	2247	9,3	0,21	9,50
3	IV	2960	25,0	0,28	11,43
4	V + VI	2233	11,7	0,20	4,49
5	VII	2960	25,5	0,16	25,39
6	VIII + IX	2365	11,7	0,20	18,80
7	X	2960	29,4	0,16	37,82
8	XI + XII	2500	9,4	0,20	8,80
9	XIII	2110	14,7	0,20	16,61
10	XIV	2960	29,4	0,20	34,61
				Total	**177,21**

Fonte: O autor.

As propriedades físicas consideradas para o concreto foram módulo de elasticidade igual a 22GPa, coeficiente de Poisson igual a 0,18 e densidade igual 2.620 kg/m³.

Todos os valores da Tabela 8 e as propriedades do concreto foram retirados do trabalho de Garcia (2016).

A geometria simplificada da seção de concreto incluindo o substrato da fundação está ilustrada na Figura 73. As discretizações usadas serão mostradas nas seções seguintes.

5.2.8.5 Condições de contorno do Modelo Isogeométrico 1

Neste modelo foram utilizadas as mesmas condições de contorno que o modelo tridimensional de referência (GARCIA, 2016): base de fundação fixa e laterais com restrição ao deslocamento na direção X e sem restrição ao deslocamento vertical (direção Y). Foram consideradas dez camadas de fundação e a barragem em concreto.

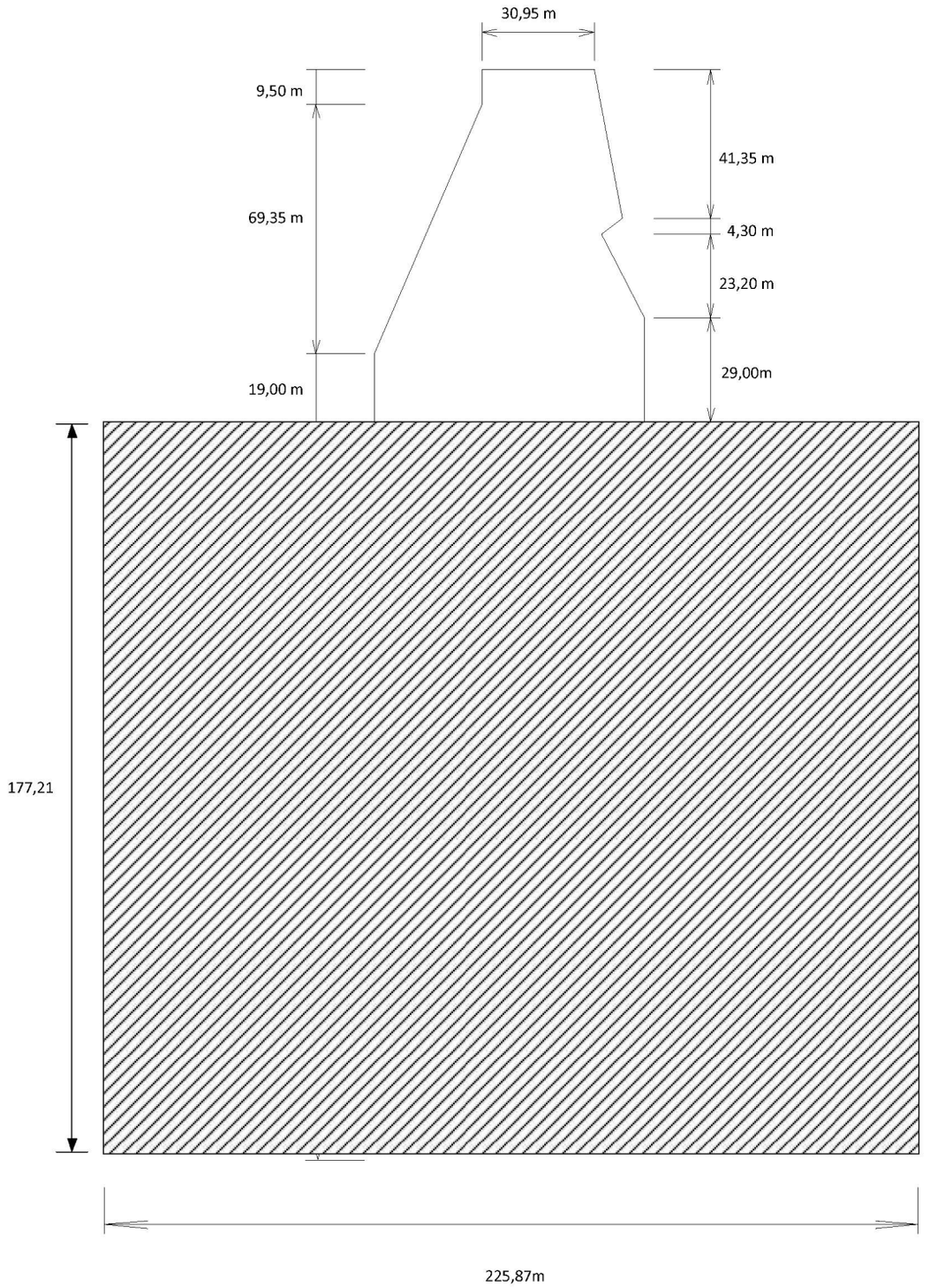


Figura 73 – Modelo geométrico de barragem mais fundação para AIG.
Fonte: O autor.

5.2.8.6 Condições de contorno do Modelo Isogeométrico 2

Com a intenção de ter um modelo de controle, neste caso foi eliminada a modelagem do solo de fundação na sua totalidade. Ou seja, foi considerada a superfície de contato da barragem com o solo de fundação como indeslocável ou engastada perfeitamente. Portanto na modelagem foi considerado unicamente o *patch* correspondente à seção de concreto.

5.2.8.7 Discretização e Resultados obtidos

A seção do bloco E6 da barragem foi modelada com um *patch* único com as propriedades físicas do concreto descritas na Seção 5.2.8.4. A fundação foi modelada por 30 *patches* em uma malha de 10 patches de altura (uma fila para cada camada de fundação) e três colunas da mesma largura do bloco de concreto. O modelo inicial consta de 31 patches com ligação perfeita entre eles. Na Figura 74, mostra-se a malha do *patch* de concreto com três ciclos de refinamento.

A discretização das camadas de fundação foi realizada colocando-se inicialmente três elementos isogeométricos para cada camada. Foram aplicados três ciclos de refinamentos sucessivos, fazendo coincidir os GDL's entre os diferentes *patches*.

Na Tabela 9, encontram-se os dados das malhas utilizadas para o modelo isogeométrico 1. A Tabela 10 mostra os dados correspondentes às malhas do modelo isogeométrico 2. Foram aplicados três ciclos de refinamento para os dois modelos.

Tabela 9 – Dados das malhas correspondentes ao Modelos 1

Modelo 1			
Ciclos de refinamento	Número de Elementos	Pontos de Controle	GDL
0	37	182	364
1	148	468	936
2	592	1032	2064
3	2368	3198	6396

Fonte: O autor.

Tabela 10 - Dados das malhas correspondentes ao Modelo 2

Modelo 2			
Ciclos de refinamento	Número de Elementos	Pontos de Controle	GDL
0	7	27	54
1	28	99	198
2	112	180	360
3	448	580	1160

Fonte: O autor.

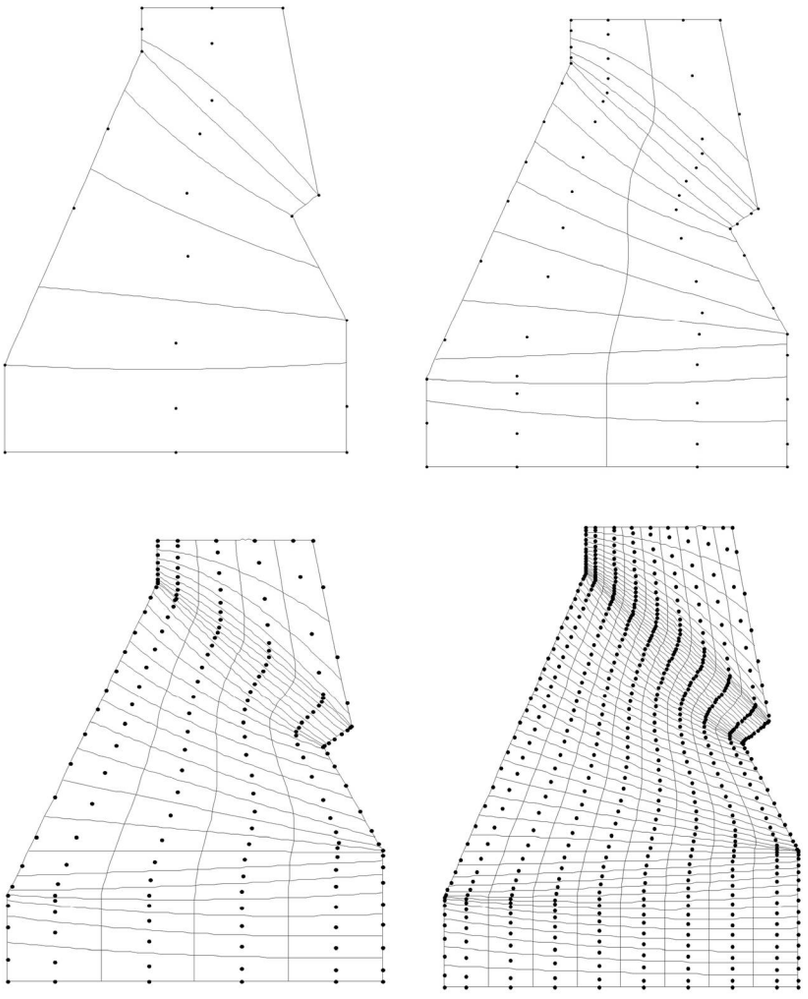


Figura 74 – Discretização do modelo isogeométrico do bloco de concreto com quatro níveis de refinamento.
Fonte: O autor.

Na Figura 75 está ilustrada a discretização utilizada para o solo de fundação com 30 *patches.* As discretizações somente mostram o solo de fundação por motivo de escala para destacar o numero de elementos isogeométricos e camadas.

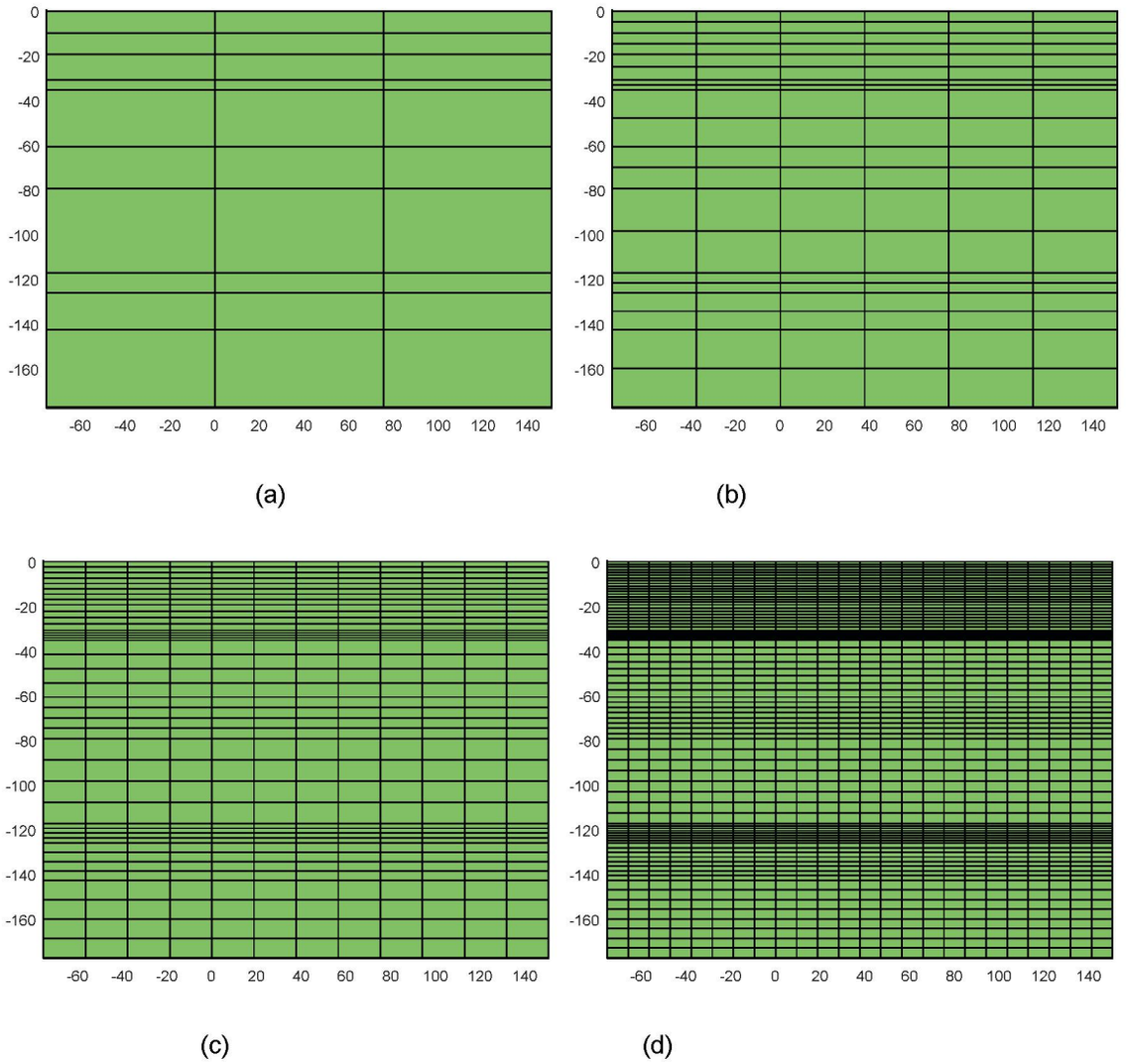
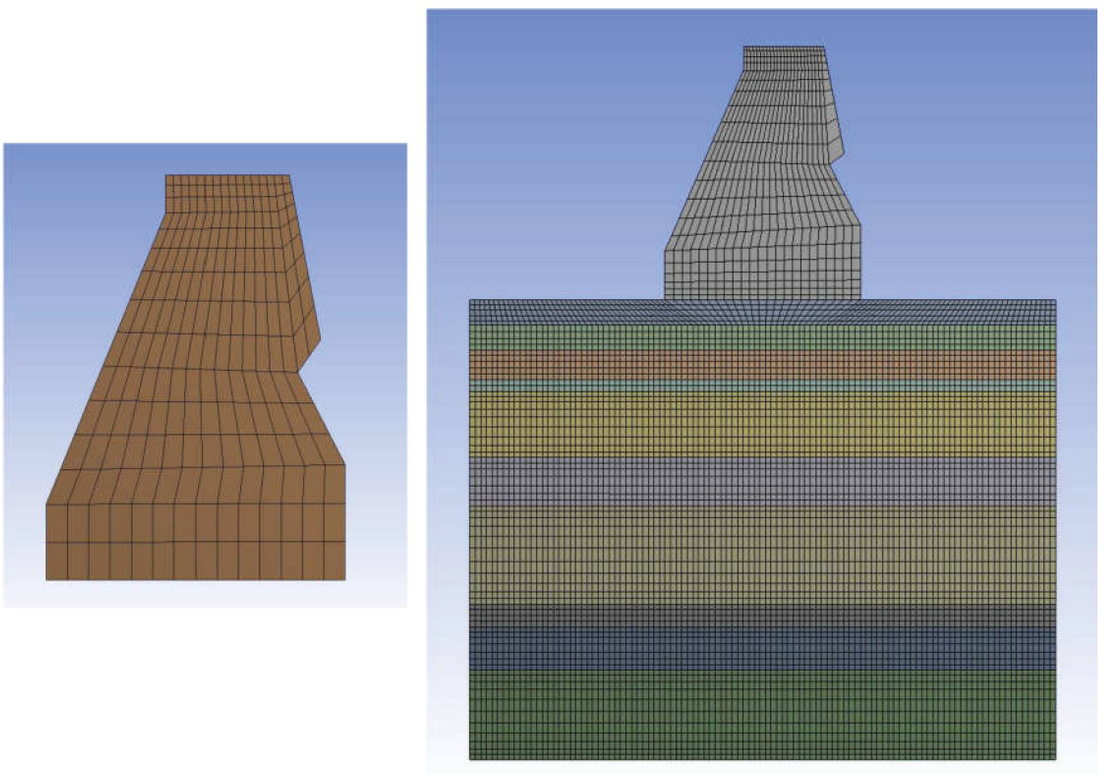


Figura 75 - Discretização do modelo isogeométrico da fundação da barragem com quatro níveis de refinamento (a) 30 patches inicias (b) patches depois de 1 ciclo de refino (c) patches depois de 2 ciclos de refino (d) patches depois de 3 ciclos de refino.

Fonte: O autor.

Para comparação também foram gerados dois modelos de estado plano de deformações usando MEF e o programa ANSYS, foram utilizados elementos quadrilaterais quadráticos de nove nós, com as mesmas condições de contorno e propriedades de materiais descritos nas seções anteriores.

Na Figura 76, são mostradas as duas malhas usadas no programa ANSYS para estado plano de deformações. Na Tabela 11 encontram-se o número de elementos e o número de GDL de cada malha.



(a) (b)

Figura 76 – Malhas usadas no ANSYS (a) Modelo sem fundação (b) Modelo com fundação.

Tabela 11 – Dados das malhas usadas no programa ANSYS

Malha	Número de Elementos	GDL
Sem Fundação	228	747
Com Fundação	7318	22339

Fonte: O autor.

Na Tabela 12, encontram-se os resultados das 15 primeiras frequências naturais de vibração (em Hertz) obtidas para os dois modelos de AIG, junto com os resultados obtidos pelos modelos com e sem fundação do ANSYS.

Tabela 12 - Frequências naturais calculadas com os modelos AIG e ANSYS, com e sem fundação

	FREQUÊNCIAS (Hz)			
	COM FUNDAÇÃO		SEM FUNDAÇÃO	
Modo de Vibração	Modelo Isogeométrico 1	Modelo ANSYS	Modelo Isogeométrico 2	Modelo ANSYS
1	2,4460	2,2087	3,2743	3,1990
2	3,4108	3,2879	8,2215	8,0325
3	4,9571	4,8653	8,9678	8,7616
4	6,0700	5,8548	16,7820	16,3970
5	6,2340	6,0288	21,0570	20,5730
6	8,3481	7,9168	22,1410	21,6320
7	9,0374	8,7837	24,2170	23,6610
8	10,1730	10,0080	25,9090	25,3130
9	10,9750	10,9470	27,7790	27,1400
10	11,5380	11,5230	30,7690	30,0620
11	12,2800	12,0390	31,9790	31,2440
12	12,6010	12,3660	34,5990	33,8040
13	13,6810	13,5580	36,5900	35,5490
14	14,0020	13,6700	36,7590	35,6140
15	14,4730	14,2840	39,3640	38,4590

Fonte: O autor.

Analisando os resultados obtidos, pode-se observar que as respostas estão influenciadas pela modelagem do maciço da fundação. Os modelos com engastamento perfeito na base do bloco de concreto fornecem valores mais altos das frequências naturais de vibração e aumentam rapidamente conforme o número de modo de vibração. Os modelos que incluem a fundação fornecem frequências menores, sendo por tanto menos rígidos.

Quando são comparados os resultados entre os modelos isogeométricos com os correspondentes do ANSYS (com e sem fundação), pode se observar uma excelente concordância entre os resultados. O modelo de AIG tende a ser um pouco mais rígido fornecendo valores das frequências aproximadamente 2% maiores que os do MEF.

Nos modelos com modelagem de fundação, o modelo Isogeométrico 2 também mostra um excelente desempenho mostrando resultados coerentes com os obtidos pelo ANSYS. Neste caso a AIG também fornece valores de frequência de vibração um pouco maiores, caracterizando um modelo um pouco mais rígido. No entanto, estes resultados validam a implementação de AIG multi-*patch* desenvolvida no presente trabalho.

Para efeitos de comparação na Tabela 13 são mostrados os resultados obtidos por Garcia(2016) e os obtidos nos ensaios de campo realizados pela Itaipu Binacional em 2012.

Tabela 13 – Frequências naturais de vibração do Bloco E6 obtidos por Garcia (2016) e nos ensaios de campo

Modo de Vibração	Ensaio de Campo	Garcia(2016)
1	5,34	3,541
2	7,92	4,187
3	11,64	5,700
4	13,48	5,983
5		6,746
6		8,146
7		9,549
8		9,696
9		10,119
10		10,221
11		11,502
12		11,692
13		11,761
14		12,828
15		12,891

Fonte: O autor.

É importante notar que os resultados experimentais foram obtidos para a condição de reservatório cheio e os resultados computacionais, tanto no trabalho de Garcia (2016) como no presente estudo, correspondem à condição de reservatório vazio. Portanto, as diferenças, além das decorrentes das simplificações do modelo computacional, decorrem também do volume de água à montante que altera a resposta modal do sistema (HALL, 1988).

Os resultados obtidos por Garcia (2016) não podem ser comparados diretamente com os obtidos aqui usando AIG. Garcia (2016) realizou a análise deste bloco usando um modelo de elementos finitos tridimensional e com espessura variável, também com o auxilio do software ANSYS. Na malha de elementos finitos usada na modelagem do bloco de concreto, foram utilizados 11.902 elementos quadráticos tetraédricos com 10 nós e na malha correspondente à fundação 39.301 elementos, entre elementos quadráticos tetraédricos de 10 nós e quadráticos hexagonais com 20 nós, sendo por tanto, um modelo maior e mais sofisticado contemplando muitos detalhes geométricos que não foram modelados na AIG.

No entanto, os resultados são próximos com os obtidos neste trabalho, mostrando a eficiência do modelo em AIG com menor número de GDL e simplificações, porém a diferença é grande ainda com os resultados experimentais.

Pode-se afirmar que a modelagem das condições de contorno da fundação é um ponto crítico para aperfeiçoar os modelos computacionais até agora estudados recomendando-se novas investigações para melhorar a representação do maciço de fundação.

Pode-se ressaltar também que as relações constitutivas lineares elásticas usadas em todos os modelos não correspondem à realidade. O comportamento não linear do concreto é descrito abundantemente na literatura. Da mesma maneira a representação do solo de fundação como material linear homogêneo, também é uma grande aproximação.

As respostas obtidas através da análise isogeométrica neste exemplo mais realista, com resultados próximos aos do estudo experimental mostram o potencial de aplicação da AIG como ferramenta na análise de barragens.

É necessário ressaltar que não existe correspondência direta entre as frequências de vibração do ensaio de campo com o modelo computacional 3D e os modelos bidimensionais. Para isto teria que ser verificado se os modos são equivalentes entre si. Existem modos e frequências que podem ser capturados pelo modelo 3D e que os modelos 2D não tem a capacidade de captar. Por estas razões, a comparação entre os resultados do ensaio e os modelos computacionais não é trivial.

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi implementado um programa de AIG em MATLAB com capacidade multi-*patch*. A formulação utilizada contempla a literatura atualizada e disponível. O programa desenvolvido mostrou-se capaz de resolver diversos problemas estáticos e dinâmicos de elasticidade linear plana.

Foi feita uma revisão dos fundamentos da AIG e as funções NURBS que são a base fundamental do método.

O programa desenvolvido em MATLAB conseguiu resolver com sucesso em problemas de estado plano de tensões e estado plano de deformações. Dentro dos problemas de análise estática os problemas de concentração de tensões permitiram verificar a precisão e consistência dos campos de tensão obtidos.

A formulação com *patches* se mostrou precisa para problemas de elasticidade linear., fornecendo maior flexibilidade para modelar geometrias complexas ou com vários materiais, tal como possibilitou a modelagem de camadas de solo de fundação.

Dentro dos problemas estudados, foi possível caracterizar a resposta dinâmica das estruturas através do cálculo das propriedades fundamentais como as frequências e modos naturais de vibração, onde foram obtidos resultados comparáveis aos obtidos com softwares consagrados como ANSYS.

Na análise transiente, a AIG junto com MDC mostrou-se efetiva para caso de vibrações forçadas e acelerações da base de fundação.

Foram modeladas seções de barragens de gravidade de concreto, como o da seção do bloco E6 da barragem de Itaipu, a formulação multi-*patch* utilizada foi validada ao obter resultados bastante próximos aos obtidos com softwares consagrados como o ANSYS e com modelos computacionais maiores, mostrando a sua eficiência.

Os resultados deste trabalho demonstram a capacidade da AIG para solucionar problemas da análise de vibrações em barragens e outras estruturas. Também, abre a possibilidade de utilização direta de informações CAD como dados de entrada em análises. Na área de segurança de barragens, a possibilidade de aproveitamento das informações CAD seria um aporte significativo evitando etapas adicionais de modelagem o que otimizaria recursos em estudos de segurança estrutural.

Para um estudo mais abrangente de problemas envolvendo barragens, os seguintes estudos são sugeridos:

- Implementação de elementos isogeométricos tridimensionais, o que abriria um leque maior de campos de aplicação da AIG;

- Incorporação de métodos de quadratura otimizados para AIG;

- Inclusão do uso de funções base que permitam refinamento localizado. A inclusão deste tipo de funções base otimizaria o uso dos recursos computacionais;

- Verificar a inclusão da capacidade de trabalho com *patches* não conformes, *patches* que não compartilham os mesmos pontos de controle;

- Incorporar no modelo os efeitos inerciais do reservatório cheio. Existem diversos métodos passíveis de serem aplicados como o Método de Chopra (CHOPRA, 1978), O Método do Corpo de Engenheiros do exército dos EUA (USACE, 2007) e Miquel e Bouanaani (2010) entre outros.

- Inclusão de não linearidade física e geométrica, que permitiria o estudo de estruturas com relações constitutivas de maior complexidade.

REFERÊNCIAS

ABAQUS. **ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.11**. Providence, RI: Dassault Systemes, 2011.

AIT-HADDOU, R.; BARTON, M.; CALO, V. M. Explicit Gaussian quadrature rules for C1 cubic splines with symmetrically stretched knot sequences. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 290, p. 543–552, 2015.

ALMEIDA, D. C. DE; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. **Refinamento K da Análise Isogeométrica aplicado a problemas bidimensionais de concentração de tensões**. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Mechanics (CILAMCE). **Anais**...Brasília: ABMEC, 2016

ANSYS. **ANSYS Mechanical APDL Theory Reference**. Canonsburg, PA: Ansys Inc., 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15421: Projeto de Estruturas Resistentes a Sismos**. Rio de Janeiro: ABNT, 2003.

AURICCHIO, F. et al. A fully "locking-free" isogeometric approach for plane linear elasticity problems: A stream function formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 1–4, p. 160–172, 2007.

AURICCHIO, F. et al. Isogeometric collocation for elastostatics and explicit dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 249–252, p. 2–14, 2012a.

AURICCHIO, F. et al. A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 249–252, p. 15–27, dez. 2012b.

BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.

BALAGEAS, D.; FRITZEN, C.-P.; GEMES, A. (EDS.). **Structural Health Monitoring**. London, UK: ISTE, 2006.

BARROSO, E. S. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica**. Fortaleza, CE: Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, 2015.

BARTELS, R. H.; BEATTY, J. C.; BARSKY, B. A. **An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling**. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1987.

BARTH, T. J. et al. **Isogeometric Analysis and Applications 2014**. [s.l.] Springer, 2014.

BARTOŇ, M.; CALO, V. M. Optimal quadrature rules for odd-degree spline spaces and their application to tensor-product-based isogeometric analysis. **Computer**

Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 305, p. 217–240, jun. 2016.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

BAZILEVS, Y. et al. Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 16, n. 7, p. 1031–1090, 21 jul. 2006.

BAZILEVS, Y. et al. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. **Computational Mechanics**, v. 43, n. 1, p. 3–37, 2008.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, T. J. **Finite Elements, An Introduction**. New Jersey: Prentice Hall, 1981.

BEIRÃO DA VEIGA, L. et al. Some estimates for h–p–k-refinement in Isogeometric Analysis. **Numerische Mathematik**, v. 118, n. 2, p. 271–305, 2011.

BELYTSCHKO, T. et al. Meshless methods: an overview and recent developments. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, n. 1, p. 3–47, 1996.

BELYTSCHKO, T. et al. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2013.

BENSON, D. J. et al. Isogeometric shell analysis: The Reissner–Mindlin shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5–8, p. 276–289, 2010.

BENSON, D. J. et al. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, n. 13–16, p. 1367–1378, 2011.

BÉZIER, P. Définition numérique des courbes et surfaces I. **Automatisme**, v. 11, n. 12, p. 625–632, 1966.

BÉZIER, P. Définition numérique des courbes et surfaces II. **Automatisme**, v. 12, p. 17–21, 1967.

BLEVINS, R. D. **Formulas for dynamics, acoustics and vibration**. Chichester: John Wiley & Sons, 2016.

BLOOR, M. S.; OWEN, J. CAD/CAM product-data exchange: the next step. **Computer-Aided Design**, v. 23, n. 4, p. 237–243, 1991.

BOEHM, W.; MÜLLER, A. On de Casteljau's algorithm. **Computer Aided Geometric Design**, v. 16, n. 7, p. 587–605, ago. 1999.

BÖHM, W. Über die Konstruktion von B-Spline-Kurven. **Computing**, v. 18, n. 2, p. 161–166, jun. 1977.

BOUCLIER, R.; ELGUEDJ, T.; COMBESCURE, A. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and**

Engineering, v. 245–246, p. 144–162, 2012.

BREBBIA, C. A. **Boundary element methods in engineering**. Wessex: Springer New York, NY, USA:, 1982.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. [s.l.] Springer New York, NY, USA:, 1992.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2012.

BUI, T. Q. et al. Extended isogeometric analysis for dynamic fracture in multiphase piezoelectric/piezomagnetic composites. **Mechanics of Materials**, v. 97, p. 135–163, jun. 2016.

BUTTERFIELD, K. R. The Computation of all the Derivatives of a B-spline Basis. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 17, n. 1, p. 15–25, 1976.

CADAZZ. **CAD Software: History of CAD/CAM**. Disponível em: <http://www.cadazz.com/cad-software-history.htm>, 2004.

CALABRÒ, F.; SANGALLI, G.; TANI, M. Fast formation of isogeometric Galerkin matrices by weighted quadrature. **arXiv preprint arXiv:1605.01238**, 2016.

CARDOSO, R. P. R.; CESAR DE SA, J. M. A. The enhanced assumed strain method for the isogeometric analysis of nearly incompressible deformation of solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 92, n. 1, p. 56–78, 5 out. 2012.

CAZZANI, A.; MALAGÙ, M.; TURCO, E. Isogeometric analysis: a powerful numerical tool for the elastic analysis of historical masonry arches. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, 2014.

CEASB. **Acervo técnico do CEASB**. Itaipu Binacional: Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens, 2015.

CEBSA-ELETROBRÁS. **Critérios de projeto civil de usinas hidrelétricas**. Rio de Janeiro, RJ: Eletrobrás, 2003.

CHANG, F. et al. A Fortran implementation of isogeometric analysis for thin plate problems with the penalty method. **Engineering Computations**, v. 33, n. 7, p. 2149–2164, 3 out. 2016.

CHIVUKULA, V. et al. Micro-scale blood particulate dynamics using a non-uniform rational B-spline-based isogeometric analysis. **International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering**, v. 30, n. 12, p. 1437–1459, dez. 2014.

CHOI, M.-J.; CHO, S. Isogeometric shape design sensitivity analysis of stress intensity factors for curved crack problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 279, p. 469–496, 2014.

CHOPRA, A. K. Earthquake resistant design of concrete gravity dams. **Journal of the Structural Division**, v. 104, n. 6, p. 953–971, 1978.

CHOPRA, A. K. Earthquake response analysis of concrete dams. In: JANSEN, R. B. (Ed.). . **Advanced dam engineering for design, construction, and rehabilitation**. [s.l.] Springer, 1988. p. 416–465.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2012.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. Berkeley, CA: Computers & Structures Inc., 1995.

CORNS, C. F.; TARBOX, G. S.; SCHRADER, E. K. Gravity dam design and analysis. In: **Advanced dam engineering for design, construction, and rehabilitation**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1988. p. 466–492.

COTTRELL, J. A. et al. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 41–43, p. 5257–5296, 2006.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. 1st. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2009.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 41–44, p. 4160–4183, 2007.

CUOMO, M.; CONTRAFATTO, L.; GRECO, L. A variational model based on isogeometric interpolation for the analysis of cracked bodies. **International Journal of Engineering Science**, v. 80, p. 173–188, jul. 2014.

DALCIN, L. et al. PetIGA: A framework for high-performance isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 308, p. 151–181, 2016.

DE FALCO, C.; REALI, A.; VÁZQUEZ, R. GeoPDEs: A research tool for Isogeometric Analysis of PDEs. **Advances in Engineering Software**, v. 42, n. 12, p. 1020–1034, 2011.

DE LORENZIS, L.; WRIGGERS, P.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric contact: a review. **GAMM-Mitteilungen**, v. 37, n. 1, p. 85–123, 2014.

DE LUYCKER, E. et al. X-FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, n. 6, p. 541–565, 12 ago. 2011.

DUVAL, A.; MAURIN, F.; ELGUEDJ, T. **Abaqus user element implementation of NURBS based isogeometric analysis**. 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. **Anais**...Vienna, Austria: 2012

ECHTER, R.; OESTERLE, B.; BISCHOFF, M. A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 254, p. 170–180, 2013.

ELGUEDJ, T. et al. and projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 33–40, p. 2732–2762, jun. 2008.

ENGVALL, L.; EVANS, J. A. Isogeometric triangular Bernstein–Bézier discretizations: Automatic mesh generation and geometrically exact finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 304, p. 378–407, jun. 2016.

ESPATH, L. F. R. et al. A NURBS-based finite element model applied to geometrically nonlinear elastodynamics using a corotational approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 102, n. 13, p. 1839–1868, 2015.

EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric divergence-conforming B-splines for the unsteady Navier–Stokes equations. **Journal of Computational Physics**, v. 241, p. 141–167, 2013.

FARIN, G. A History of Curves and Surfaces in. In: **Handbook of Computer Aided Geometric Design**. [s.l.] Elsevier, 2002. p. 1–21.

FARRAR, C. R.; WORDEN, K. An introduction to structural health monitoring. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 365, n. 1851, p. 303–315, 15 fev. 2007.

FELIPPA, C. Introduction to Finite Element Methods. In: **Introduction to Finite Element Methods**. [s.l.] University of Colorado, 2004.

FEMA. **Federal Guidelines for Dam Safety**. USA: Federal Emergency Management Agency, 2005.

FORREST, A. R. Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials. **The Computer Journal**, v. 15, n. 1, p. 71–79, 1972.

FRIEDERICH, J.; SCHERER, M.; STEINMANN, P. Isogeometric structural shape optimization using a fictitious energy regularization. **Procedings in Applied Mathematics and Mechanics**, v. 11, n. 1, p. 709–710, dez. 2011.

GARCIA, E. L. **Análise dinâmica sob efeito de sismo de um bloco da barragem de concreto da usina de Itaipu**. Curitiba, PR: Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos Aplicados em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2016.

GOMEZ, H. et al. Isogeometric analysis of the isothermal Navier–Stokes–Korteweg equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 25–28, p. 1828–1840, 2010.

GONG, Y. P.; DONG, C. Y.; QIN, X. C. An isogeometric boundary element method

for three dimensional potential problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 313, p. 454–468, 2017.

GUO, Y.; RUESS, M. A layerwise isogeometric approach for NURBS-derived laminate composite shells. **Composite Structures**, v. 124, n. January, p. 300–309, 2015.

HALL, J. F. The dynamic and earthquake behaviour of concrete dams: review of experimental behaviour and observational evidence. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 7, n. 2, p. 58–121, 1988.

HASSANI, B.; KHANZADI, M.; TAVAKKOLI, S. M. An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 45, n. 2, p. 223–233, 23 fev. 2012.

HILLMAN, M.; CHEN, J. S.; BAZILEVS, Y. Variationally consistent domain integration for isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 521–540, 2015.

HOWARD, T. L. J. Evaluating PHIGS for CAD and general graphics applications. **Computer-Aided Design**, v. 23, n. 4, p. 244–251, 1991.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**. Mineola, NY: Dover, 2000.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 39–41, p. 4135–4195, 2005.

HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SANGALLI, G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5–8, p. 301–313, 2010.

IDESMAN, A. et al. Accurate solutions of wave propagation problems under impact loading by the standard, spectral and isogeometric high-order finite elements. Comparative study of accuracy of different space-discretization techniques. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 88, p. 67–89, 2014.

IRZAL, F. et al. An isogeometric analysis Bézier interface element for mechanical and poromechanical fracture problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 97, n. 8, p. 608–628, 24 fev. 2014.

ITAIPU-BINACIONAL. **Usina Hidrelétrica de Itaipu: aspectos técnicos das estruturas civis**. Foz do Iguaçu: Superintendência de Engenharia – Diretoria Técnica, 2008.

ITAIPU-BINACIONAL. **Itaipu: usina hidrelétrica – projeto: aspectos de engenharia**. Foz do Iguaçu: Superintendência de Engenharia – Diretoria Técnica, 2009.

ITAIPU-BINACIONAL. **Itaipu fecha ano batendo recorde em dezembro e tem produção histórica de 103,09 milhões de MWH**. Disponível em: <https://www.itaipu.gov.br/sala-de-imprensa/noticia/itaipu-fecha-ano-batendo-

recorde-em-dezembro-e-tem-producao-historica-de-10>. Acesso em: 29 jul. 2017.

JOHANNESSEN, K. A. Optimal quadrature for univariate and tensor product splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 316, p. 84–99, abr. 2017.

JULIANI, M. **Análise dinâmica em estruturas de concreto**. XV Congresso Brasileiro de Engenharia de Avaliações e Perícias. **Anais**...São Paulo: IBAPE-SP, 2009

KAGAN, P.; FISCHER, A.; BAR-YOSEPH, P. Z. New B-Spline Finite Element Approach for Geometric Design and Mechanical Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 41, n. March 1997, p. 435–458, 1998.

KAGAN, P.; FISCHER, A.; BAR-YOSEPH, P. Z. Mechanically based design: Adaptive refinement for B-spline finite element. **Proceedings - International Conference on Shape Modeling and Applications, SMI 2001**, v. 1175, n. July 2002, p. 345–352, 2001.

KAGAN, P.; FISCHER, A. Integrated mechanically based CAE system using B-Spline finite elements. **Computer-Aided Design**, v. 32, p. 539–552, 2000.

KAPOOR, H.; KAPANIA, R. K. Geometrically nonlinear NURBS isogeometric finite element analysis of laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 94, n. 12, p. 3434–3447, 2012.

KIENDL, J. et al. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 37–40, p. 2403–2416, 2010.

KIKIS, G.; DORNISCH, W.; KLINKEL, S. Isogeometric Reissner-Mindlin shell analysis - employing different control meshes for displacements and rotations. **Procedings in Applied Mathematics and Mechanics**, v. 16, n. 1, p. 209–210, 2016.

KRUSE, R. et al. Isogeometric collocation for large deformation elasticity and frictional contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 296, p. 73–112, nov. 2015.

LÄNGST, P.; MICHALSKI, A.; LIENHARD, J. Integrated Design Approach for Shell Structures Using Isogeometric Analysis. **Nexus Network Journal**, p. 1–15, 2016.

LEE, S. J.; PARK, K. S. Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 22, p. 9174–9190, 2013.

LEZGY-NAZARGAH, M. An isogeometric approach for the analysis of composite steel–concrete beams. **Thin-Walled Structures**, v. 84, p. 406–415, 2014.

LIU, G.-R. **Meshfree methods: moving beyond the finite element method**. [s.l.] Taylor & Francis, 2009.

LUU, A.-T.; KIM, N.-I.; LEE, J. NURBS-based isogeometric vibration analysis of

generally laminated deep curved beams with variable curvature. **Composite Structures**, v. 119, p. 150–165, 2015.

MA, C.; CHEN, W.; SUN, J. Numerical Implementation of Spatial Elastoplastic Damage Model of Concrete in the Framework of Isogeometric Analysis Approach. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2016, p. 1–13, 2016.

MAGHSOUDI, R.; AMINI, R.; BASEFAT, Z. M. N. Using isogeometric method in dam break modeling with Lagrangian approach. **Journal of Fluid Mechanics and Structures**, v. 4, n. 3, p. 6–7, 2014.

MANH, N. D. et al. Isogeometric shape optimization of vibrating membranes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, n. 13–16, p. 1343–1353, 2011.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.

MENDOZA FAKHYE, R. J. et al. Estudo de problemas de vibrações em barragens usando análise isogeométrica. In: **Métodos numéricos aplicados a análise de segurança de barragens**. Foz do Iguaçu: Editora Parque Itaipu, 2016. p. 600.

MILIĆ, P.; MARINKOVIĆ, D. ISOGEOMETRIC STRUCTURAL ANALYSIS BASED ON NURBS SHAPE FUNCTIONS. **Facta Universitatis Series: Mechanical Engineering**, v. 11, n. 2, p. 193–202, 2013.

MINETTO, C. DE F. **Um estudo sobre curvas NURBS**. Porto Alegre, RS: Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.

MIQUEL, B.; BOUAANANI, N. Simplified evaluation of the vibration period and seismic response of gravity dam–water systems. **Engineering Structures**, v. 32, n. 8, p. 2488–2502, 2010.

MOYSIDIS, A. N.; KOUMOUSIS, V. K. **A hysteretic formulation for isogeometric analysis and shape optimization of plane stress structures**. 8th GRACM International Congress on Computational Mechanics. **Anais**...Volos: 2015

NGUYEN, M. N. et al. Isogeometric analysis for unsaturated flow problems. **Computers and Geotechnics**, v. 62, p. 257–267, 2014.

NGUYEN, V. P. et al. Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 117, p. 1–114, 2015.

NGUYEN, V. P.; BORDAS, S. Extended Isogeometric Analysis for Strong and Weak Discontinuities. In: **Isogeometric Methods for Numerical Simulation**. Vienna: Springer, 2015. p. 21–120.

NGUYEN-XUAN, H. et al. Isogeometric analysis of functionally graded plates using a refined plate theory. **Composites Part B: Engineering**, v. 64, p. 222–234, 2014a.

NGUYEN-XUAN, H. et al. Plastic collapse analysis of cracked structures using extended isogeometric elements and second-order cone programming. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 72, p. 13–27, 2014b.

PAULETTI, M. S. et al. Igatools: An isogeometric analysis library. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 37, n. 4, p. 465–496, 2015.

PHILIPP, B. et al. Integrated design and analysis of structural membranes using the Isogeometric B-Rep Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 303, p. 312–340, 2016.

PHUNG-VAN, P. et al. Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory. **Composite Structures**, v. 123, p. 137–149, 2015.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**. Berlin: Springer Verlag, 1997.

POLITIS, C. et al. **An isogeometric BEM for exterior potential-flow problems in the plane**. SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling. **Anais**...San Francisco: SIAM, 2009

QUEIROZ, M. **Técnicas de análise dinâmica de passarelas**. Rio de Janeiro, RJ: Dissertação (Mestrado Profissional em Projeto de Estruturas) - Programa de Projeto de Estruturas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.

RAJASEKARAN, S. **Structural dynamics of earthquake engineering: theory and application using MATHEMATICA and MATLAB**. New Delhi: Woodhead Publishing India Private Limited, 2009.

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. **Isogeometric analysis of free vibration of bars**. 22nd International Congress of Mechanical Engineering. **Anais**...2013a

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. **Isogeometric analysis and the enriched methods : comparisons for the problem of free vibration of Euler-Bernoulli beams**. (Z. J. G. . Del Prado, Ed.)XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. **Anais**...Pirenópolis: ABMEC, 2013b

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. Isogeometric analysis of free vibration of framed structures: comparative problems. **Engineering Computations**, v. 34, n. 2, p. 377–402, 18 abr. 2017.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. Highstown: McGraw - Hill, 1993.

RIFFNALLER-SCHIEFER, A.; AUGSDÖRFER, U. H.; FELLNER, D. W. Isogeometric shell analysis with NURBS compatible subdivision surfaces. **Applied Mathematics and Computation**, v. 272, p. 139–147, jan. 2016.

RYPL, D.; PATZÁK, B. From the finite element analysis to the isogeometric analysis in an object oriented computing environment. **Advances in Engineering Software**, v. 44, n. 1, p. 116–125, 2012.

SAMII, A.; LOTFI, V. Comparison of coupled and decoupled modal approaches in seismic analysis of concrete gravity dams in time domain. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 43, n. 13, p. 1003–1012, 2007.

SEO, Y.-D.; KIM, H.-J.; YOUN, S.-K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, n. 11–12, p. 1618–1640, jun. 2010.

SHAHRBANOZADEH, M.; BARANI, G. A.; SHOJAEE, S. Simulation of flow through dam foundation by isogeometric method. **Engineering Science and Technology, an International Journal**, v. 18, n. 2, p. 185–193, 2015.

SHOJAEE, S. et al. Free vibration analysis of thin plates by using a NURBS-based isogeometric approach. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 61, p. 23–34, 2012a.

SHOJAEE, S. et al. Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method. **Composite Structures**, v. 94, n. 5, p. 1677–1693, 2012b.

SIGNETTI, S.; PUGNO, N. M. Frontiers in Modeling and Design of Bio-Inspired Armors. **Frontiers in Materials**, v. 2, p. 1–3, 2015.

SIMPSON, R. N. et al. An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2D implementation aspects. **Computers and Structures**, v. 118, p. 2–12, 2013.

SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

STAHL, A.; KVAMSDAL, T.; SCHELLEWALD, C. Post-processing and visualization techniques for isogeometric analysis results. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, n. 7034, 2016.

TAYLOR, R. L. FEAP—A Finite Element Analysis Program, Version 7.5 User Manual. **University of California at Berkeley, Berkeley, CA**, 2005.

TAYLOR, R. L. Isogeometric analysis of nearly incompressible solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, n. 1–5, p. 273–288, 8 jul. 2011.

TEMIZER, İ.; WRIGGERS, P.; HUGHES, T. J. R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, n. 9–12, p. 1100–1112, 2011.

TEPOLE, A. B. et al. Characterization of living skin using multi-view stereo and isogeometric analysis. **Acta biomaterialia**, v. 10, n. 11, p. 4822–31, 2014.

TEPOLE, A. B. et al. Isogeometric Kirchhoff–Love shell formulations for biological membranes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 293, p. 328–347, ago. 2015.

THAI, C. H. et al. Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner--Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 91, n. 6, p. 571–603, 2012.

THAI, S.; KIM, N.-I.; LEE, J. Free Vibration Analysis of Cable Structures Using Isogeometric Approach. **International Journal of Computational Methods**, v. 0, n. 0, p. 1750033, 2016.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**McGraw-Hill, New York, NY, , 1970.

TONON, P. **Simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogeométrica**. Porto Alegre, RS: Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.

USACE. **Earthquake Design and Evaluation of Concrete Hydraulic Structures**. Washington DC: Department of US Army, 2007.

VUONG, A.-V.; HEINRICH, C.; SIMEON, B. ISOGAT: A 2D tutorial MATLAB code for Isogeometric Analysis. **Computer Aided Geometric Design**, v. 27, n. 8, p. 644–655, 2010.

WALL, W. A.; FRENZEL, M. A.; CYRON, C. Isogeometric structural shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 33–40, p. 2976–2988, jun. 2008.

WANG, D.; ZHANG, H.; XUAN, J. A strain smoothing formulation for NURBS-based isogeometric finite element analysis. **Science China Physics, Mechanics and Astronomy**, v. 55, n. 1, p. 132–140, 2012.

WANG, Y.; BENSON, D. J. Isogeometric analysis for parameterized LSM-based structural topology optimization. **Computational Mechanics**, v. 57, n. 1, p. 19–35, 23 jan. 2016.

WROBEL, L. C. **The Boundary Element Method, Volume 1, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics**. [s.l.] John Wiley & Sons, Ltd., 2002.

WROBEL, L. C.; ALIABADI, M. **The Boundary Element Method, Volume 2, Applications in Solids and Structures**. [s.l.] John Wiley & Sons, Ltd., 2002.

XI, P.; SONG, Y. W.; CAI, X. M. **The Clenshaw-Curtis quadrature in isogeometric analysis**. 6th International Conference on Computational Methods (ICCM2015). **Anais**...Auckland, NZ: 2015

XIA, S.; QIAN, X. Isogeometric Analysis with Bézier Tetrahedra. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2016.

XU, Z. Review for dynamic researches in civil engineering in recent years. **Science China Technological Sciences**, v. 53, n. 5, p. 1450–1462, 2010.

YIN, S. et al. Isogeometric locking-free plate element: A simple first order shear

deformation theory for functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 118, p. 121–138, 2014.

YIN, S. et al. A cutout isogeometric analysis for thin laminated composite plates using level sets. **Composite Structures**, v. 127, p. 152–164, 2015.

ZHANG, Y. et al. Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 29–30, p. 2943–2959, maio 2007.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method for solid and structural mechanics**. [s.l.] Butterworth-heinemann, 2005.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3ª Edição ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2003.

ZINN, G. K. et al. **Modelagem tridimensional das estruturas civis e mecânicas da UHE Itaipu para estudos em segurança de barragens**. XXVIII Seminário Nacional de Grandes Barragens. **Anais**...Porto de Galinhas, BA: CBDB, 2011

APÊNDICE A MATRIZES E VETORES NA AIG

A.1 DISCRETIZAÇÃO NA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Para este trabalho foi desenvolvido um programa em Matlab® que segue a estrutura computacional descrita em Nguyen *et al.* (2015).

Para ilustrar as matrizes e vetores utilizados para cada elemento, considere o exemplo mostrado na Figura 1.

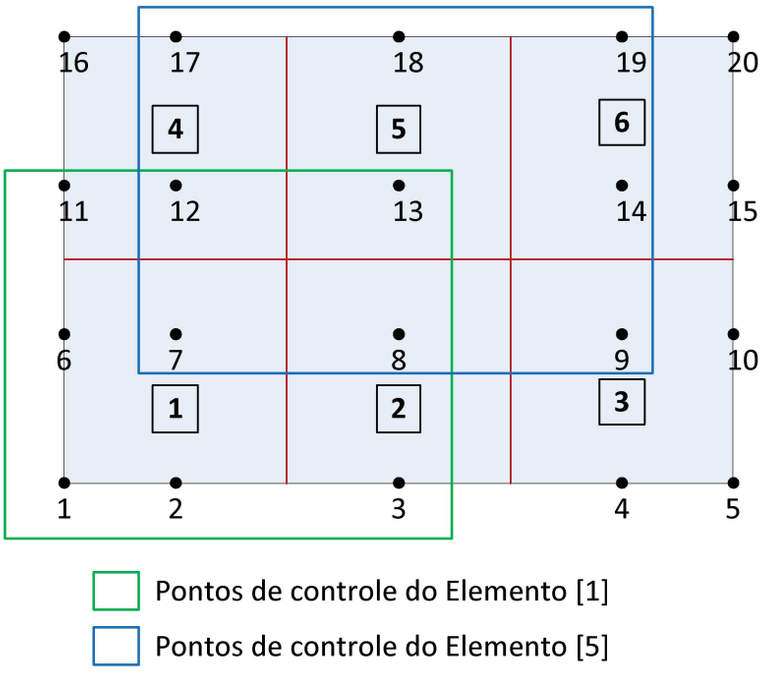


Figura A.1 – Modelo de AIG bidimensional com 6 elementos quadráticos
Fonte: O autor.

Nesta figura é mostrado um modelo bidimensional com 20 pontos de controle e 6 elementos isogeométricos (2×3). Os dados dos pontos de controle são armazenados numa matriz $(m \times n)$ onde m e n são o número de pontos de controle nas direções η e ξ respectivamente. Para elementos biquadráticos os graus das funções base são.

$$\mathrm{PC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

Os vetores de controle estão dados por $\xi = [0,0,0,1/3,2/3,1,1,1]$ e $\eta = [0,0,0,1/2,1,1,1]$. Logo o número de elementos em cada direção está dado pelos intervalos entre os valores de ξ e η não repetidos. Estes valores são armazenados nas variáveis EX=3 e EY=2.

Com estes dados é possível definir a matriz de conetividades de todos os elementos da malha completa que tem as dimensões Número de Elementos $\times$ $(p+1)(q+1)$. Para o exemplo da figura tem-se:

$$\mathrm{CE} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 & 13 & 14 & 15 \\ 6 & 7 & 8 & 11 & 12 & 13 & 16 & 17 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 12 & 13 & 14 & 17 & 18 & 19 \\ 8 & 9 & 10 & 13 & 14 & 15 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

O domínio paramétrico de cada elemento em cada direção está dado por:

$$dom\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } dom\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Com estes dados e as matrizes dos índices das funções base obtidas como descrito na seção 3.4 é possível determinar as matrizes necessárias para AIG. Esta implementação faz uso intensivo das subrotinas para cálculo de valores de funções base assim como derivadas das bibliotecas *geoPDEs* (DE FALCO; REALI; VÁZQUEZ, 2011).

A.2 FLUXOGRAMAS DA IMPLEMENTAÇÃO

A.2.1 Problemas de *patch* único

A Figura A.2 mostra o fluxograma utilizado na solução de problemas nos quais somente existe um único *patch* de elementos isogeométricos. Nesta estrutura pode-se identificar as semelhanças com um programa de MEF convencional. Observam-se diferenças principalmente na leitura de dados que em AIG significa a leitura das informações CAD ou os parâmetros das funções NURBS.

No presente trabalho o vetor de forças é calculado separadamente do laço de montagem da matriz de rigidez.

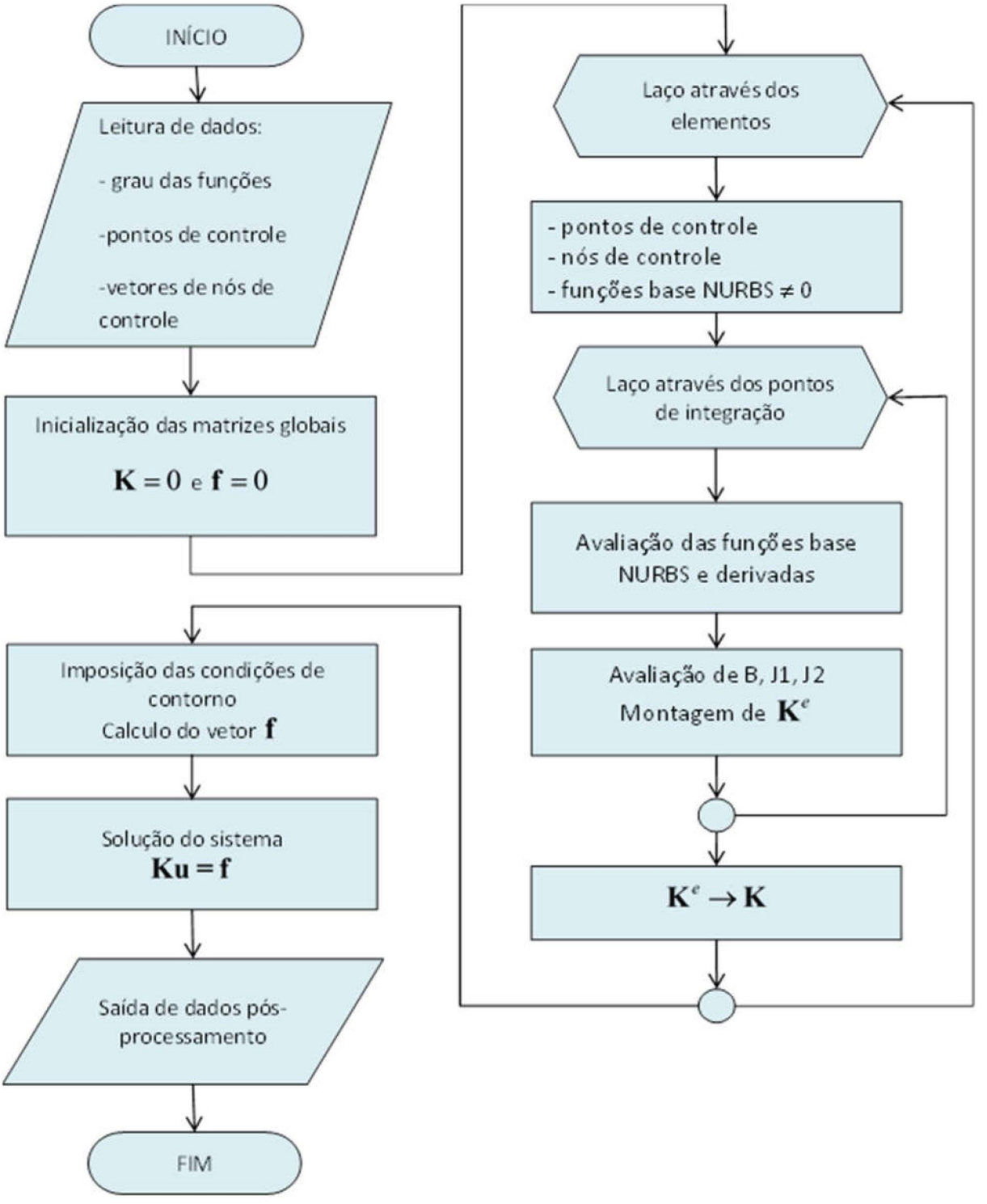


Figura A.2– Fluxograma do programa de AIG para problemas de *patch* único
Fonte: O autor.

A.2.2 Problemas com *patches* múltiplos

Neste caso existe um laço adicional através dos patches. Repetem-se os cálculos mostrados para problemas de *patch* único um número de vezes igual ao número de patches necessários na discretização do problema. A Figura A.3 ilustra o fluxograma correspondente.

Especial cuidado deve ser observado na imposição de condições de contorno e no cálculo de vetores de carga que são comuns a vários *patches*.

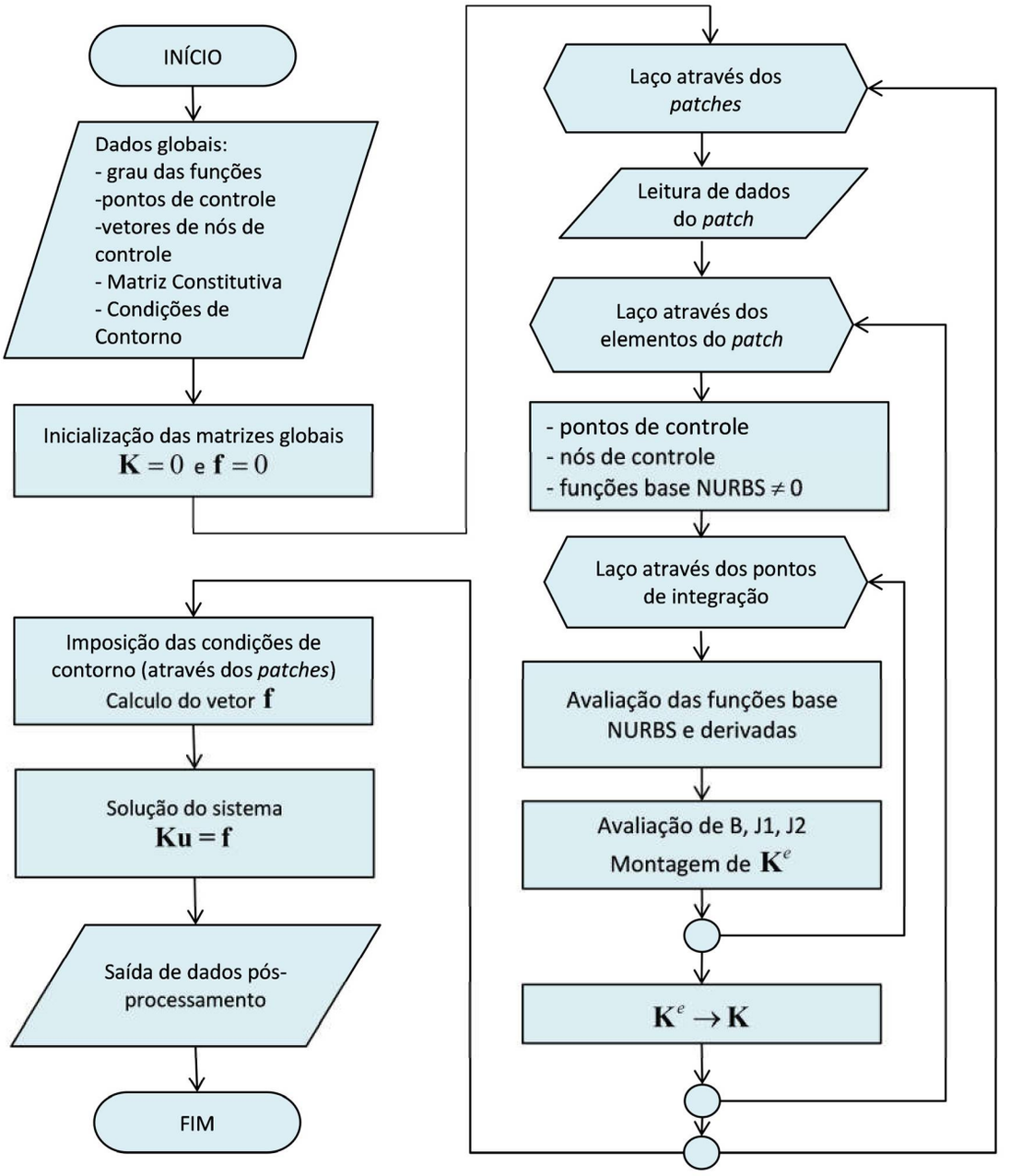


Figura A.3 - Fluxograma do programa de AIG para discretização multi–*patch.*