

KELLY CRISTINE PLACHA

**A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PRODUTO DE MEDIDAS
DE CRIANÇAS DA 3ª. SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL
E A INTERVENÇÃO DO PROFESSOR**

CURITIBA

2006

KELLY CRISTINE PLACHA

**A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PRODUTO DE MEDIDAS
DE CRIANÇAS DA 3ª. SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL
E A INTERVENÇÃO DO PROFESSOR**

Dissertação de Mestrado em Educação,
apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Educação, Setor de Educação, da
Universidade Federal do Paraná, na linha de
pesquisa: Educação Matemática.

Orientadora: Prof.^a. Dr.^a. Maria Lucia Faria
Moro.

CURITIBA

2006

Esta pesquisa é dedicada a todos os
professores que acreditam em um ensino
público de qualidade.

“Seja a mudança que você deseja ver no
mundo.” Gandhi

“O importante não é fazer o possível. O
importante é fazer o impossível se tornar
possível.” Herbert de Souza

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me guia em todos os momentos da minha vida. Sem Ele, nada seria possível.

À Prof.^a. Dr.^a. Maria Lucia Faria Moro, pela paciência, entusiasmo, competência, compromisso, carinho e dedicação na orientação desta pesquisa. Sua participação foi fundamental para a conclusão desta Dissertação de Mestrado e muito contribuiu com minha formação inicial de pesquisadora.

À Prof.^a. Dr.^a. Neuza Bertoni Pinto e a Prof.^a. Dr.^a. Tânia Maria Figueiredo Braga Garcia, por terem aceitado participar da Banca de Qualificação e pelas valiosas sugestões, elogios, comentários e críticas que muito contribuíram para a elaboração e o aprofundamento desta pesquisa.

Aos professores, funcionários e colegas, da linha de pesquisa: Educação Matemática, pelo apoio, pelas discussões e pelas contribuições oferecidas de diferentes maneiras.

Ao Prof. Sensi, pela competência e dedicação na leitura desta pesquisa, sugerindo as correções gramaticais necessárias.

À minha família, em especial aos meus pais, Edison e Maria e à minha avó Zelita, os quais sempre me apoiaram, com muito carinho, não só durante a produção desta Dissertação de Mestrado, mas, em todos os momentos da minha vida. Com eles aprendi a nunca desistir dos meus sonhos e a sempre lutar por meus ideais com honestidade, dedicação e compromisso.

Ao meu noivo Gilberto, pelo carinho, compreensão e apoio demonstrados em todos os momentos, principalmente, durante a produção desta pesquisa. Seu apoio e participação foram fundamentais em todos os momentos desta pesquisa.

Ao meu irmão Junior e minha cunhada Mauriane, os quais, à sua maneira, sempre me apoiaram e incentivaram.

Ao diretor Ademir, à vice-diretora Claudete e à coordenadora administrativa Viviane, da Escola Municipal Newton Borges dos Reis, os quais nunca deixaram de demonstrar compreensão, apoio e incentivo.

Às crianças, que participaram desta pesquisa e propiciaram momentos de carinho, descontração, aprendizagem e muita reflexão.

Às amigas, Clarice, Glads, Greici, Jane, Márcia, Michelle e Rosanne, pela amizade, companheirismo e compreensão em todos os momentos, as quais, com sua presença e com palavras de apoio e incentivo, amenizaram os momentos difíceis.

Aos amigos, Rosana e Paulo, os quais me apoiaram e incentivaram nos momentos mais difíceis.

A todos aqueles em que pude sentir apoio, meu carinho.

RESUMO

Trata-se de um estudo exploratório, de natureza qualitativa, que examina o processo de aprendizagem de crianças, das estruturas multiplicativas, conforme as proposições de Vergnaud sobre campos conceituais. Descreve a natureza das alterações das soluções notacionais, verbais e interpretativas das crianças, expressas durante a solução dos problemas de produto de medidas, conforme os níveis de raciocínio combinatório envolvidos em cada um deles, e as formas de intervenção expressas pela pesquisadora, no papel de professora, durante o desenvolvimento das soluções das crianças. A pesquisa foi realizada com cinco crianças, com idade entre 9 anos e 9 meses, sorteadas, aleatoriamente, entre as crianças de terceira série, do turno da manhã e da tarde, de uma escola municipal de Curitiba, localizada no bairro Tatuquara, as quais concordaram em participar do estudo e foram previamente autorizadas por seus pais. A escola foi escolhida por conveniência, por ser o local onde a pesquisadora atua como professora e pedagoga. A coleta de dados foi realizada em duas sessões de soluções de problemas, com cada criança individualmente, com intervalo de uma semana, para a qual foi elaborado um roteiro prévio. Foram apresentados, por escrito, pela pesquisadora, oito problemas de estrutura multiplicativa do tipo produto de medidas, um conjunto de quatro problemas diferentes em cada uma das sessões. Para que pudessem marcar suas soluções notacionais para cada um dos problemas propostos, as crianças tiveram como recurso: folhas de papel sulfite A4, uma caneta esferográfica preta e seis canetinhas hidrográficas coloridas. Após solucionar os problemas, por escrito, as crianças eram solicitadas a explicar as soluções que utilizaram. A intervenção da pesquisadora, no papel de professora, seguiu o estilo de intervenção clínico-crítico, inspirado em Piaget. Para o registro dos dados, as sessões foram filmadas em vídeo, na íntegra, e os dados (ações, verbalizações e soluções notacionais), transcritos, na íntegra, em protocolos, um para cada criança. Todo o conteúdo desses protocolos foi objeto de análise qualitativa. Essa análise permitiu descrever: a) a natureza das alterações das soluções notacionais, verbais e interpretativas das crianças expressas durante a solução dos problemas de produto de medidas para identificar o processo de aprendizagem ali ocorrente; b) a natureza das intervenções da pesquisadora, no papel de professora, para identificar as formas dessas intervenções. Os níveis de raciocínio combinatório identificados na análise das soluções de todas as crianças aos problemas propostos foram identificados com base nos resultados do estudo de Moro e Soares. Foram eles: de resposta contextualizada sem indício de combinação; das primeiras aproximações à solução combinatória; da obtenção de algumas combinações e da presença de solução combinatória. As formas identificadas de intervenção da experimentadora, no papel de professora, foram as seguintes: orientadora, reorientadora, questionadora e instigadora. Logo, dessa análise pode-se obter elementos fortes a favor da relevância das intervenções do professor como as descritas, para a ocorrência do progresso de cada criança pelos níveis de solução em direção a soluções de caráter combinatório. Porém esses progressos são vistos como pontuais, não significando que uma construção plena do raciocínio combinatório, tenha ali se efetivado.

Palavras-chave: Aprendizagem Matemática. Estrutura Multiplicativa. Intervenção do Professor. Problemas de Produto de Medidas. Soluções Matemáticas Infantis.

ABSTRACT

This paper is an exploratory study of qualitative order that examines the process of children's learning of the multiplicative structures according to Vergnaud's propositions on conceptual fields. It describes the nature of solutions and its alterations to problems of Cartesian product according to the levels of combinatory reasoning involved in each one of those solutions, and also the intervention forms of the researcher in the role of the teacher during the children's solutions performance. The study was conducted with five students aged between 9 and 9 years and 9 months. They were chosen at random from among 3rd grade students (morning and afternoon groups), attending a State Elementary School in the Tatuquara neighborhood who agreed to participate after receiving permission from their parents. The school was selected for convenience, as it is where the researcher works as a teacher. The collection of data was done in two individual sessions of problem solving, with a one-week interval between sessions, according to a plan. Eight multiplicative problems were presented in written form to children with four different problems in each session (two or three variables with low or high values). The children were asked to mark their notational solutions on an A4 sheet of paper, using black and colored pens. After solving the problems in writing, the children were asked to explain their solutions, when the researcher intervened according to the clinical-critical style inspired by Piaget. The sessions were videotaped and protocols of the transcription of all the events of notation production and interpretation were produced for each child. The entire content of these protocols were qualitatively analyzed. This analysis resulted in the description of a) the nature of the notational solutions and verbal interpretations changes expressed by the children during the solution of Cartesian product problems in order to identify the learning process involved; b) the nature of the researcher's interventions as a teacher, to identify the several forms of these interventions. The levels of the combinatory reasoning implied in the children's problem solutions were identified according to the results from Moro & Soares. These levels are: solutions belonging to the context of the problem without combinatory signs; from the preliminary approaches to the combinatory solutions; the achievement of some combinations; and the presence of combinatory solutions. The identified intervention forms of the researcher as teacher are: orientating, reorientating, questioning and instigating. The results show strong evidence in favor of the relevance of the different forms of the researcher's interventions as a teacher on the progress of most children's solutions, marked by a level of combinatory reasoning. However, this progress is seen as punctual, which does not mean that an effective construction of combinatory reasoning definitively took place in that process.

Keywords: Mathematical Learning; Multiplicative Structure; Teacher's Interventions; Cartesian Product Problems; Children Mathematical Solutions.

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: AS SOLUÇÕES DE PED AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO	90
QUADRO 2: AS SOLUÇÕES DE REN AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO	111
QUADRO 3: AS SOLUÇÕES DE MAT AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO	129
QUADRO 4: AS SOLUÇÕES DE EDU AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO	146
QUADRO 5: AS SOLUÇÕES DE BAR AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO	163
QUADRO 6: AS SOLUÇÕES DE PED AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO	182
QUADRO 7: AS SOLUÇÕES DE REN AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO	202
QUADRO 8: AS SOLUÇÕES DE MAT AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO	218
QUADRO 9: AS SOLUÇÕES DE EDU AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO	235
QUADRO 10: AS SOLUÇÕES DE BAR AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO	253
QUADRO 11: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 1 E 5:	256
QUADRO 12: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 2 E 6:	258
QUADRO 13: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 3 E 7:	260
QUADRO 14: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 4 E 8:	262

SUMÁRIO

I – O PROBLEMA E SUA JUSTIFICATIVA.....	1
II – REVISÃO DE LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	9
1 – A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	9
2 – A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS	16
3 – AS SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PELAS CRIANÇAS E O PAPEL DO PROFESSOR	24
4 – A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	31
5 – ALGUMAS ABORDAGENS DO PROCESSO DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DO RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO NO ENSINO FUNDAMENTAL.....	43
III – MÉTODO.....	56
1 – SUJEITOS	56
2 – PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS	58
3 – PROCEDIMENTOS DE REGISTRO DE DADOS.....	64
4 – PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS	65
IV – RESULTADOS	66
1 – RESULTADOS – 1ª. SESSÃO	75
2 – RESULTADOS – 2ª. SESSÃO	165
V – DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	264
REFERÊNCIAS.....	278
ANEXO A – PROBLEMAS – 1ª. SESSÃO	283
ANEXO B – PROBLEMAS – 2ª. SESSÃO	284
ANEXO C – RELATÓRIO DO ESTUDO PILOTO	285

I – O PROBLEMA E SUA JUSTIFICATIVA

As últimas décadas têm sido marcadas por uma grande variedade de pesquisas realizadas na área da educação matemática. Nesse conjunto, muitas são as pesquisas sobre o processo de elaboração das crianças, dos adolescentes, dos adultos e dos professores, em relação aos diversos conceitos matemáticos, geralmente presentes nos currículos escolares, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior (Vergnaud, 1983; 1988; 1991; 1996; Kamii, 1990; 1996; 2002; 2005; Carraher, Carraher e Schliemann, 1995; Nunes e Bryant, 1997).

Em meio a essas pesquisas sobre o processo de elaboração e construção dos conceitos matemáticos, percebe-se a forte influência da teoria de Piaget (1973), que indica que a aprendizagem só é possível quando há assimilação ativa por parte do sujeito que aprende.

Um dos pontos que merece destaque nesse quadro de pesquisas é a preocupação dos pesquisadores em conhecer, compreender e explicar o caráter ativo da aprendizagem de conteúdos matemáticos escolares, indicando a necessidade de uma aprendizagem matemática com compreensão dos conceitos.

Para Kamii (1990), a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos requer participação ativa e autônoma das crianças. A autora pontua que a aritmética não é aprendida por meio da técnica e, sim, por meio da capacidade que a criança possui de pensar e estabelecer relações com o objeto da aprendizagem.

Outro ponto que merece destaque nestas pesquisas relaciona-se ao fato de que Piaget (1973) já assinalava, como principal problema do ensino da Matemática, o ajuste entre as estruturas inteligentes da criança e o método utilizado pelo professor para o ensino dos conceitos matemáticos na escola.

Com relação a essa questão, percebe-se a importância da intervenção realizada pelo professor em sala de aula, levando os alunos à reflexão e, como consequência, à descoberta de noções, relações e propriedades matemáticas, fazendo-os, assim, evoluir sua compreensão dos conceitos trabalhados.

Pesquisas têm pontuado a ocorrência de uma real construção de conceitos em sala de aula quando o professor permite e incentiva que as crianças elaborem e utilizem estratégias próprias de cálculo¹ (Sinclair, 1990; Nunes e Bryant, 1997; Smole e Diniz, 1999; Franchi, 1999; Brito, 2001; Kamii, 2002; 2005).

Nesse processo de construção dos conceitos, o papel do professor é de fundamental importância, não se restringindo mais à transmissão de conhecimentos prontos, mas, sobretudo, provocando e instigando as crianças a elaborar estratégias próprias de cálculo, para que façam sua construção dos conceitos trabalhados. Piaget (1973) já evidenciava a necessidade de uma intervenção instigante do adulto para uma elaboração espontânea por parte da criança, em vez de lhe impor uma elaboração formalizada e pronta.

Um último ponto que merece destaque com relação a essas pesquisas é a importância atribuída aos conhecimentos e experiências prévias das crianças. Em seus estudos, Starepravo (1997) pontua que a ação mental é empobrecida quando as crianças recebem informações prontas e, em seguida, aplicam essas informações em exercícios escolares; a ação mental só ocorre quando a criança coloca o novo em relação com aquilo que já conhece e já vivenciou.

Papert (1994) propunha em suas pesquisas que a aprendizagem significativa das crianças ocorre a partir da solução de problemas e do estabelecimento de

¹ Caracterizam-se como estratégias próprias de cálculo, de acordo com Sinclair (1990), os procedimentos originais, cálculos mentais e os procedimentos de cálculo escritos que as crianças elaboram quando precisam solucionar um problema. Essas estratégias estão atreladas à compreensão e à organização do sistema de numeração decimal.

relações com as experiências vividas anteriormente. O autor ressalta também que os conhecimentos que as crianças têm devem se conectar com os problemas propostos em sala de aula, caso contrário, a aprendizagem não será significativa.

Este estudo pauta-se na concepção de que a construção dos conceitos matemáticos só ocorre quando há uma ação por parte do sujeito que aprende e na idéia de que o trabalho a partir da solução de problemas leva a criança a pensar, refletir, elaborar hipóteses e operar com os dados apresentados, estabelecendo relações com outras experiências que já tenha vivenciado.

O interesse em aprofundar um estudo envolvendo a educação matemática surge da minha vivência e necessidade como professora e pedagoga das séries iniciais do Ensino Fundamental. Como professora, percebo a dificuldade de compreensão e utilização dos conceitos matemáticos de estrutura multiplicativa pelas crianças; como pedagoga, percebo a dificuldade que os professores têm ao encaminhar o trabalho com a construção desses conceitos, valorizando o conhecimento prévio das crianças.

Nesse contexto, é minha expectativa que os resultados obtidos possam ser refletidos e incorporados à prática pedagógica dos professores, favorecendo as crianças com a possibilidade da construção de conceitos durante o processo de aprendizagem, com vistas a uma melhora significativa na qualidade do ensino público.

Particularmente, esta pesquisa poderá ser importante à medida que os resultados obtidos contribuam para que haja melhor compreensão do processo de aprendizagem das estruturas multiplicativas do tipo produto de medidas, segundo a perspectiva teórica de Vergnaud (1983; 1988; 1991; 1996).

A literatura já oferece alguns resultados em resposta à questão do ensino e da aprendizagem dos conceitos de estrutura multiplicativa (Canôas, 1997; Cunha, 1997; Nunes e Bryant, 1997; Barreto, 2001). Contudo, ela não os tem ainda tão evidentes no que concerne ao processo de construção dos conceitos multiplicativos no caso de problemas do tipo produto de medidas, pois a maioria dos estudos aborda a multiplicação do tipo isomorfismo de medidas (Franchi, 1999; Starepravo, 2001). Dessa forma, é importante desenvolver um estudo que analise como são solucionados pelas crianças os problemas de multiplicação do tipo produto de medidas.

São relativamente pouco numerosos os estudos a respeito do conceito multiplicativo do tipo produto de medidas. Mas, de um modo geral, são estudos que abordam a solução de problemas multiplicativos pelas crianças pequenas em situações de combinação de materiais concretos (English, 1992), a perspectiva da compreensão que o professor tem desse conceito ao solucionar problemas e a análise do processo de ensino-aprendizagem desse conceito em sala de aula (Vergnaud, 1983; Taxa, 2001; Esteves, 2001; Costa, 2003).

Vergnaud (1983) aponta que problemas de produto de medidas estão incluídos no campo conceitual das estruturas multiplicativas. Segundo o autor, a compreensão desse tipo de problema se constitui condição para o entendimento de outros conceitos envolvendo as estruturas multiplicativas. O não-entendimento dos conceitos e relações ali presentes traria dificuldades para as crianças no decorrer do processo de aprendizagem dessas estruturas. De acordo com os estudos de Vergnaud (1983; 1988; 1991; 1996), as situações e problemas que envolvem o raciocínio combinatório apóiam a construção das estruturas multiplicativas.

Taxa (2001) pontua que a compreensão dos problemas de estrutura multiplicativa do tipo produto de medidas pode ocorrer na escola, desde o início do Ensino Fundamental. De acordo com a autora:

Poderia haver para tal uma contribuição do ensino nas séries iniciais, antes mesmo dos formalismos exigidos nas séries posteriores, mas desde que esse conceito fosse melhor entendido como parte integrante e necessária à construção da estrutura multiplicativa no pensamento infantil, incluindo toda classe de noções que envolvem o conceito de proporcionalidade, acaso e probabilidade (TAXA, 2001, p. 7).

A opção por essa problemática está, portanto, no fato de que as multiplicações do tipo produto de medidas não aparecem freqüentemente entre os problemas de estrutura multiplicativa que as crianças solucionam em sala de aula, embora impliquem um raciocínio fundamental para que as crianças possam compreender as estruturas multiplicativas e apareçam como possibilidade de trabalho nos documentos oficiais, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental (PCN, 2001; AVA, 2002).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (2001) destacam, para o ensino da Matemática, quatro grupos de situações relacionadas às estruturas multiplicativas que necessitam ser exploradas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Entre elas aparecem “as situações associadas à idéia de combinatória” (BRASIL/MEC – PCN, 2001, p. 111).

De acordo com o encaminhamento proposto pelos PCN (2001), os problemas que envolvem esse tipo de raciocínio podem ser resolvidos por meio de desenhos, diagramas de “árvore”, até esgotar todas as possibilidades. Além disso, a busca pelas combinações possíveis “evidencia um conceito matemático importante, que é o produto cartesiano” (BRASIL/MEC – PCN, 2001, p. 112).

A análise da produção dos alunos acerca dos problemas envolvendo a multiplicação e a divisão, realizada pelo AVA (2002), revela que os alunos das séries

iniciais do Ensino Fundamental não estão tendo um desempenho satisfatório com relação às estruturas multiplicativas. Este estudo ressalta que os problemas envolvendo as estruturas multiplicativas devem ser trabalhados mediante as diferentes idéias que as constituem. Sendo assim:

Na multiplicação devem ser exploradas situações envolvendo: a idéia comparativa da multiplicação, a configuração retangular na multiplicação e a idéia combinatória na multiplicação. Com relação à divisão devem ser exploradas situações que envolvam a idéia de repartição eqüitativa, a idéia comparativa e as que possam ser resolvidas tendo como apoio configurações retangulares (AVA, 2002, p. 49).

Nesse contexto, percebe-se que a compreensão de um conceito matemático, no caso, as relações de produto de medidas, no quadro das estruturas multiplicativas, contém diversos aspectos, tal como o uso de estratégias e procedimentos de solução apropriados, relacionados aos conhecimentos que as crianças vão elaborando a partir dos seus conhecimentos e experiências e das intervenções propostas pelo professor.

Em especial, a compreensão dessas relações de produto de medida, ao que tudo indica, apóia e interliga a construção do raciocínio combinatório, de acordo com Moro e Soares (2006), um possível caminho então para apreciar soluções desse tipo de problemas.

Portanto, com base nessas reflexões, a questão central do estudo proposto é a seguinte:

Como ocorre o processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas de crianças da 3ª. série, na solução de problemas, sob a intervenção do professor?

Para levar adiante a investigação, são levantadas as seguintes questões:

- Como se caracterizam as soluções notacionais, as soluções verbais e as interpretações das crianças quando estas solucionam os problemas propostos sobre produto de medidas, quanto à presença ou não de raciocínio combinatório?
- Que formas assumem as intervenções da pesquisadora, no papel de professora, durante as soluções das crianças?

Nesse contexto, as soluções notacionais² e verbais das crianças e suas interpretações sobre as soluções que utilizaram expressam o processo de aprendizagem construtivista em curso e servem de parâmetro para a intervenção da pesquisadora, no papel de professora em atividade na sala de aula, com o intuito de que as crianças avancem os níveis de raciocínio combinatório.

Assim, a análise das soluções das crianças, nesta pesquisa, é feita integrada à análise das formas de intervenção da pesquisadora, no papel de professora como partícipe ativa que propõe e orienta a solução dos problemas, partindo sempre do conhecimento prévio que a criança possui e utiliza na solução de cada um dos problemas propostos.

Dessa forma, a progressão (ou não) das soluções das crianças aos problemas propostos traduz o processo de aprendizagem de cada uma delas, identificado e traduzido em níveis de construção do raciocínio combinatório, de acordo com os níveis de raciocínio combinatório descritos por Moro e Soares (2006).

Buscando encontrar resposta para essas questões e responder ao problema desta pesquisa, este estudo tem como objetivos:

² A expressão “soluções notacionais” refere-se aos registros escritos que a criança utiliza para solucionar os problemas propostos.

- Descrever a natureza das alterações das soluções notacionais, das soluções verbais e das interpretações das crianças expressas durante a solução dos problemas de produto de medidas, conforme os níveis de raciocínio combinatório envolvidos em cada um deles.
- Descrever a natureza das formas de intervenção expressas pela pesquisadora, no papel de professora, durante as soluções das crianças.

II – REVISÃO DE LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Delimitado o problema de investigação que esta pesquisa propõe, este capítulo inicia-se fazendo uma revisão de literatura sobre a educação matemática, a solução de problemas, as soluções dos problemas pelas crianças e o papel do professor nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Em seguida, é abordada a teoria dos campos conceituais e algumas abordagens do processo de ensino e da aprendizagem do raciocínio multiplicativo no Ensino Fundamental, à luz da teoria de Gérard Vergnaud.

1 – A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Pesquisas e estudos realizados acerca da aprendizagem dos conceitos matemáticos (Franchi, 1994; Pavanello, 1994; Kamii, 2002) têm demonstrado que compreender esses conceitos exige mais do que o ensino mecânico dos algoritmos³ e a sua possível aplicação na solução de problemas.

Embora essas pesquisas e esses estudos coloquem em evidência a aprendizagem a partir da construção de conceitos significativos pelas crianças, na maioria das escolas o trabalho com conceitos matemáticos ainda permanece restrito à transmissão, ao armazenamento e à aplicação de informações.

Kamii (2002) pontua que, no ensino tradicional da Matemática, muitos professores continuam mostrando às crianças como somar, subtrair, multiplicar e dividir e, então, apresentam problemas semelhantes para que as crianças possam

³ O conceito de algoritmo aparece nesta pesquisa conforme a definição apresentada por Vergnaud (1991), que define um algoritmo como uma regra (ou um conjunto de regras), com um número finito de passos, que possibilita, para todo problema de uma classe antes dada, conduzir a uma solução, se existe uma, e dependendo do caso, mostrar que não existe uma solução.

praticar os algoritmos aprendidos anteriormente. De acordo com a autora, esse modelo de “ensinar Matemática”, centrado na memorização não-significativa dos conteúdos, faz com que as crianças passem uma grande parte do tempo das aulas aplicando fórmulas e efetuando operações sem refletir sobre os seus significados.

Ainda hoje, em muitas salas de aula, esse modelo de educação vem sendo vivenciado pelas crianças e professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, prevalecendo a idéia de que a realização de grande quantidade de exercícios leva ao conhecimento do conceito matemático trabalhado. Essa prática estaria perfeitamente adequada, se aprender fosse sinônimo de decorar, memorizar e, em seguida, repetir as informações, aplicando-as em exercícios de fixação.

Com base nessa concepção, que privilegia o ensino de técnicas, Pavanello (1994) pontua que a prática pedagógica utilizada por muitos professores em sala de aula reserva aos alunos um papel passivo, pois o trabalho em sala de aula enfatiza a aplicação de modelos ensinados pelo professor. Essa prática, segundo a autora, não leva em consideração a capacidade de os alunos construir e reconstruir os conceitos matemáticos. Além disso, não possibilita ao aluno pensar e refletir sobre as atividades que está desenvolvendo, permitindo-lhe apenas encontrar a resposta correta estabelecida previamente pelo professor. Pavanello ressalta que:

Essa prática não leva em conta as diferenças individuais, porque nem sabe como lidar com elas; não propõe questões que admitam diferentes respostas, nem que levantem contradições que sejam analisadas e discutidas pelos estudantes. Nela não se valoriza a participação ativa do aluno na descoberta de propriedades e relações, não o desafia a produzir diferentes situações para um dado problema, nem o valoriza quando ele o faz (PAVANELLO, 1994, p. 7).

Em relação ao ensino da Matemática dentro da perspectiva tradicional, Franchi (1994) pontua que muitos dos professores e pesquisadores envolvidos com a educação matemática sabem que, nas séries iniciais do Ensino Fundamental,

parte do ensino da Matemática ainda permanece centrada no ensino das operações com números naturais. Segundo a autora, o estudo da Matemática é assim conduzido, geralmente, de forma muito limitada:

- Introduzem-se os algoritmos das operações por meio de etapas que avançam, sucessivamente, de casos, supostamente mais fáceis, para os mais difíceis. Esse percurso prolonga-se por um longo período de tempo, nem sempre garantindo ao aluno eficiência na execução das técnicas ensinadas e dificilmente a compreensão dos processos nelas envolvidos.
- Acompanhando esse ensino, introduzem-se os clássicos problemas verbais escolares (FRANCHI, 1994, p. 29).

Esse tipo de situação tem gerado uma grande preocupação, não só nos educadores, como também nos pesquisadores em educação matemática.

Professores e pesquisadores vêm observando a grande dificuldade das crianças em compreender os conceitos matemáticos. Em geral, nas aulas de Matemática, destina-se pouco ou quase nenhum tempo para que as crianças possam pensar, refletir, analisar e compreender os conceitos trabalhados, já que a ênfase do ensino está pautada nos algoritmos convencionais⁴ e as crianças têm que dominar técnicas de cálculo que, em geral, não têm sentido para elas.

Nesse contexto, passa despercebido o fato de que a técnica pode ser esquecida, se não tem sentido, enquanto, quando a criança reflete e compreende o que faz, pode generalizar essa relação para outras situações.

Zunino (1995) aponta para a necessidade de mudança do enfoque dos algoritmos que, em geral é feito na escola. Segundo a autora (1995), para os adultos parece óbvio que existe uma única maneira de representar as adições, subtrações, multiplicações e divisões. No entanto, estudos (Sinclair, 1990; Vergnaud, 1991; Papert, 1994; Franchi, 1999; Smole e Diniz, 1999; AVA, 2002) têm demonstrado que

⁴ O conceito de algoritmo convencional é utilizado para definir as regras dos algoritmos ensinados na escola, dentro de uma perspectiva tradicional, em que o ensino das técnicas precede o trabalho com a solução de problemas. Por exemplo, a regra do “vai um”, no ensino do algoritmo convencional da adição e a regra do “não dá... empresta”, no ensino do algoritmo convencional da subtração.

as crianças têm suas próprias idéias com relação à apresentação dessas operações, possibilitando-lhes avaliar suas estratégias, compará-las com as estratégias utilizadas pelos colegas e discutir a eficácia de cada uma delas, até que possam compreender os algoritmos convencionais.

Uma proposta diferenciada para a educação matemática deveria possibilitar a construção dos conceitos em situações significativas, pois, somente desta forma, os conceitos matemáticos podem ser compreendidos pelas crianças.

Piaget (1973), como foi dito antes, já indicava que a aprendizagem só é possível quando há assimilação ativa por parte da criança que está aprendendo. De acordo com o autor, o processo de construir e reconstruir conceitos implica ações e operações a serem elaboradas pelos aprendizes e que, assim, não são transmissíveis às crianças.

Em relação a esse papel ativo da criança na construção dos conceitos, Kamii (1990) pontua que a aprendizagem significativa requer participação ativa e autônoma das crianças, ressaltando também que a escola ainda permanece muito mais preocupada em transmitir informações e técnicas do que em trabalhar com a construção dos conceitos pelas crianças. A autora assim argumenta:

O ensino de técnicas operatórias que precede a apresentação de problemas verbais, na maioria dos livros, em vez de situações significativas para a criança, é uma manifestação da convicção de que sem essas técnicas as crianças não conseguirão raciocinar aritmeticamente. A aritmética não nasce da técnica, e sim da capacidade que a criança possui de pensar logicamente (KAMII, 1990, p. 47).

Todas essas reflexões evidenciam a necessidade de revisão do modelo de educação para o ensino da Matemática, apontando em direção à elaboração de uma prática pedagógica diferenciada que possibilite a construção de conceitos significativos pelas crianças, promovendo o pensar com autonomia e permitindo à criança ser o sujeito ativo de sua aprendizagem.

A importância do papel ativo das crianças no processo de aprendizagem tem destaque também nos estudos de Starepravo (1997), juntamente com indicações da necessidade de reavaliar o papel do professor e a prática pedagógica desenvolvida pela escola, visando à construção de conceitos significativos:

A escola na qual o professor expõe os conteúdos, mesmo que seja lançando mão de técnicas tidas como modernas e inovadoras, não é uma escola ativa, não considera que a aprendizagem só ocorre mediante a ação dos alunos. Não se trata de uma ação apenas física ou totalmente direcionada pelo professor, mas se trata de uma ação mental, impulsionada pelo desejo da descoberta. Não existe ação mental quando recebemos informações prontas e aplicamos em exercícios escolares, a ação mental só ocorre quando colocamos o novo em relação com aquilo que já conhecemos (STAREPRAVO, 1997, p. 45).

Além disso, as crianças trazem para a escola uma quantidade de conhecimentos construídos através das experiências que vivenciam. Esses conhecimentos são necessários para a construção dos conceitos matemáticos; no entanto, esses conhecimentos e experiências são geralmente desconsiderados pela maioria dos professores, principalmente nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Sob a perspectiva da relevância do conhecimento prévio no desenvolvimento de novos conhecimentos, Piaget (1973) enfatiza que em uma situação de aprendizagem tem-se que levar em consideração as estruturas e os conhecimentos prévios da criança para que possam ser propostas as atividades, possibilitando à criança avançar conceitualmente para o nível seguinte.

Piaget (1973) destaca que a aprendizagem é uma organização dos esquemas que a criança dispõe e utiliza na tentativa de responder a um problema.

Cabe ao professor, nesse contexto, criar as condições adequadas de ensino para garantir uma aprendizagem significativa, planejando atividades que desafiem à criança a busca de soluções. Piaget (1973) considerava que a aprendizagem é

provocada pelas situações que são apresentadas para a criança e para as quais ela não encontra, de imediato, uma resposta.

Com relação à construção do conhecimento, Piaget (1973; 1975) destaca que a formalização dos conceitos não deve acontecer precipitadamente, ressaltando que é a ação da criança que a faz construir os conceitos e compreendê-los. No entanto, explicita que é papel do professor elaborar e propor as situações que a coloquem em desafio e lhe possibilitem a reflexão. Piaget (1975) assim considera:

Cada vez que ensinamos prematuramente a uma criança alguma coisa que poderia ter descoberto por si mesma, esta criança foi impedida de inventar e conseqüentemente de entender completamente. Isto obviamente não significa que o professor deve deixar de inventar situações experimentais para facilitar a invenção de seu aluno (PIAGET, 1975, p. 89).

Todas estas reflexões, de acordo com Becker (2003), levam a uma proposta de ensino que tenha como compromisso fundamental do professor:

- sondar a estrutura cognitiva do sujeito da aprendizagem como condição de qualquer prática docente e sondá-la por intermédio de práticas centradas na atividade discente;
- instaurar a fala, no sentido de práticas de pesquisa e da pedagogia autogestionária de Piaget, ou do diálogo ou relação dialógica de Freire;
- transformar radicalmente os meios de avaliação, compreendida como correção ou controle ativos próprios da equibração, cujo processo auto-regulado implica o erro em todos os níveis (BECKER, 2003, p. 22-23).

Nesse aspecto faz-se necessária a mudança da cultura e das práticas escolares em relação ao erro, permitindo não só que ele apareça, mas, principalmente, que seja reconhecido como parte integrante do processo de aprendizagem. O erro do aluno, em geral, fornece dados para que o professor possa diagnosticar e compreender o processo de construção dos conceitos pelos alunos.

Partindo dessa concepção, de acordo com Meira (1993), a educação matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental deveria favorecer as crianças “uma compreensão do significado, estrutura e função dos conceitos matemáticos;

uma competência mínima para construir abordagens matemáticas para problemas e situações e, a apreciação da atividade matemática enquanto prática cultural” (Meira, 1993, p.19).

Com essas reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, percebe-se a importância de uma prática de sala de aula que envolva a solução de problemas, num ambiente em que o professor valorize a participação ativa das crianças na elaboração de estratégias de solução, na descoberta das relações entre os conceitos matemáticos, desafiando-as a produzir diferentes soluções para um mesmo problema e provocando-as para que evoluam na elaboração de sua compreensão do conceito matemático trabalhado.

Zunino (1995) expõe a necessidade de propor às crianças variadas situações para as quais necessitem utilizar um mesmo conceito, para que as crianças possam comparar as estratégias utilizadas por elas e pelos colegas, analisando as semelhanças e diferenças entre as várias situações que requerem o mesmo raciocínio.

Nesse aspecto, esta pesquisa poderá oferecer subsídios para que os professores possam valorizar, analisar e compreender as soluções notacionais de seus alunos durante o trabalho com as situações de ensino e de aprendizagem em sala de aula.

Pretende-se com este estudo, portanto, oferecer aos professores resultados que possibilitem um conhecimento aprofundado das estruturas multiplicativas do tipo produto de medidas, para melhor conhecimento do processo de aprendizagem da criança, permitindo ao professor ajustar de maneira permanente a sua intervenção pedagógica em sala de aula.

Spinillo (1995) já ponderava em seus estudos que a análise das estratégias de cálculo das crianças era algo complexo, porém, necessário. Segundo a autora, essas estratégias de cálculo refletem o modo de pensar das crianças e as relações que elas estabelecem sobre dados contidos em um problema ou em uma atividade a ser desenvolvida em sala de aula. Esses aspectos são essenciais para um ensino que objetive mais do que o uso mecânico dos algoritmos por parte dos alunos, pois possibilita ao professor compreender o processo de aprendizagem de seus alunos ao direcionar suas intervenções para que eles possam avançar sua compreensão acerca dos conceitos matemáticos.

Nesse contexto, Vergnaud (1991) destaca a importância do trabalho realizado pelo professor em sala de aula, assinalando que o conhecimento do professor não pode ser um simples entendimento geral da inteligência e do comportamento da criança; implica também um conhecimento profundo do que se vai ensinar e das relações desse conteúdo com a atividade possível da criança.

2 – A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nas últimas décadas vem-se observando um intenso movimento de investigação sobre as práticas desenvolvidas em sala de aula e sobre os processos de ensino-aprendizagem em relação à educação matemática.

Schliemann e Carraher (2003) destacam que atualmente existe uma grande preocupação por parte dos professores e dos pesquisadores em relação à aprendizagem da Matemática, uma vez que a realidade de muitas salas de aula está bastante distante de uma prática que favoreça a construção dos conceitos pelas crianças. De acordo com os autores:

Existe uma convergência de opiniões em relação à aprendizagem da matemática, vista atualmente como uma construção da criança e não como resultado de um simples processo de transmissão. Em lugar da memorização e da utilização mecânica de algoritmos, visa-se, com atividades de ensino, promover a compreensão de princípios e de relações matemáticas por parte da criança (SCHLIEMANN e CARRAHER, 2003, p. 7).

Nesse contexto, indicações sobre mudanças necessárias no trato das quatro operações e no trabalho com a solução de problemas (Sinclair, 1990; Vergnaud, 1991; Franchi, 1994; Zunino, 1995; Smole e Diniz, 1999) têm sido defendidas por professores e pesquisadores em educação matemática, pois, afinal, tradicionalmente os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino.

Estudos realizados por Smole e Diniz (1999) apontam que grande parte dos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental utiliza a solução de problemas como exercícios de aplicação de técnicas operatórias.

De acordo com as autoras, em muitas salas de aula, a solução de problemas continua sendo utilizada após o ensino dos algoritmos convencionais, com o intuito de verificar se as crianças aprenderam a utilizar os procedimentos ensinados pelo professor para a solução dos algoritmos.

Nas práticas de ensino mais tradicionais, os problemas são propostos pelo professor com a finalidade de verificar a aprendizagem e a aplicação de conceitos, algoritmos, propriedades e outros fatos da Matemática. Franchi (1994) ressalta que muitos livros didáticos favorecem essa prática quando os problemas são apresentados por capítulos, reduzindo-os assim a exercícios de mecanização e aplicação de fórmulas e algoritmos.

Starepravo (2001) pontua que, em geral, a atividade de solução de problemas aparece após o ensino do algoritmo, com o intuito de verificar a compreensão que a criança apresenta do algoritmo trabalhado. Segundo a autora, essa atividade, que tem como base modelos previamente estabelecidos pelo professor, dificulta a

construção dos conceitos pelas crianças, que acabam por empregar as técnicas ensinadas pelo professor.

Nesse contexto, percebe-se que a prática mais freqüente em relação à solução de problemas consiste no ensino de um procedimento, conceito ou técnica e na apresentação aos alunos de um problema para avaliar se são capazes de utilizar os recursos aprendidos.

Para as crianças que solucionam problemas nesse contexto, a preocupação está centrada na descoberta do algoritmo correto a ser empregado, utilizando todos os dados numéricos que aparecem no problema. Nessa prática desenvolvida em sala de aula, muitas vezes, as crianças realizam esse procedimento e não refletem sobre o problema proposto.

Repensar sobre essa concepção de ensino e de aprendizagem é um dos primeiros passos que os professores e os pedagogos que atuam nas séries iniciais do Ensino Fundamental podem dar em direção a uma mudança nos procedimentos de trabalho em sala de aula.

Dentro de uma perspectiva de construção de conceitos significativos, a solução de problemas é um dos caminhos para o processo do ensino e da aprendizagem da Matemática. Sendo assim, os problemas sempre devem gerar desafios para as crianças, propiciando também que os conhecimentos construídos anteriormente sejam questionados e reelaborados.

Nesse contexto, pesquisas (Vergnaud, 1991; Charnay, 1996; Smole e Diniz, 1999) indicam que os problemas deveriam desafiar a criança a lançar mão de seus conhecimentos ao elaborar estratégias para a sua solução.

Charnay (1996) toma como base a perspectiva piagetiana e destaca o papel da ação da criança no processo de aprendizagem. O autor enfatiza que só existirá

aprendizagem quando a criança se der conta de que tem um problema para resolver e quando reconhecer que o novo conhecimento que irá elaborar é uma resposta àquele problema.

Zunino (1995) defende que os problemas propostos pelos professores às crianças devem realmente apresentar um desafio, possibilitando à criança elaborar uma estratégia de solução, permitindo-lhe estabelecer relações que ainda não tinha estabelecido. A autora (1995) ressalta também a importância e a necessidade de tomar sempre como ponto de partida os problemas, em vez do trabalho com algoritmos sem significado aparente. Dessa forma, para Zunino (1995, p. 69), as crianças "... poderiam 'fazer matemática' em lugar de ver-se reduzidas a aplicar procedimentos que não compreendem".

Smole e Diniz (1999) pontuam que para uma criança, assim como para um adulto, um problema é toda a situação para a qual não encontra solução imediata, precisando então utilizar os conceitos que já tem em conexão com os recursos que dispõe no momento, estabelecendo um elo entre os dados de partida e o objetivo a atingir.

Com relação à compreensão dos conceitos, Vergnaud (1991) aponta que um problema demanda a realização de uma seqüência de ações e representações para que o resultado seja encontrado, pois, a solução não aparece inicialmente, sendo possível para a criança ir construindo a compreensão dos conceitos trabalhados.

Ressalta-se ainda o fato de que muitos estudos e pesquisas (Sinclair, 1990; Vergnaud, 1991; Papert, 1994; Franchi, 1999; Smole e Diniz, 1999; AVA, 2002) têm evidenciado que a solução de problemas contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que, para encontrar a solução do problema proposto, a criança tem que refletir e elaborar a melhor estratégia de cálculo. Além

disso, nesse contexto, a criança atribui sentido aos princípios e às relações que são essenciais para a compreensão dos conceitos matemáticos.

Em relação à construção de conceitos significativos pelas crianças, Papert (1994) já indicava, em seus estudos, que a aprendizagem significativa das crianças só acontece a partir da solução de problemas e do estabelecimento de relações com as experiências vividas anteriormente:

A única maneira correta de construir o conhecimento é integrá-lo, é utilizar o conhecimento anterior das pessoas, parte do qual é inato e parte aprendida com a vida. As coisas que as pessoas têm dentro de si devem se conectar com o novo problema, com a nova questão, caso contrário a aprendizagem não pode ser eficaz. Não é de admirar que as crianças não compreendam o que está acontecendo o que lhe é ensinado se torna um conhecimento abstrato, que elas só podem utilizar em situações muito formais e que não incorporam. Precisamos ensinar os estudantes a refinarem suas intuições... A desenvolverem um trabalho colaborativo. Precisamos ensiná-los a desenvolver suas intuições para uma forma mais sofisticada, que possa capacitá-los a lidar com uma situação nova (PAPERT, 1994, p. 145).

Vergnaud (1991) destaca também que, em se tratando do processo de aprendizagem, é fundamental que a criança construa o seu conhecimento na solução de problemas e que, nesse processo, a intervenção do professor torna-se indispensável:

É necessário que os conhecimentos que a criança adquire sejam construídos por ela mesma, em relação direta com as operações que é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que pode adaptar, compor e transformar, com os conceitos que constrói progressivamente. Isto não quer dizer que o papel do professor seja de pequena importância, ao contrário: o valor do professor reside justamente na sua capacidade de estimular e utilizar a atividade da criança (VERGNAUD, 1991, p. 9).

No entanto, como delineamos antes, o ensino tradicional de conceitos matemáticos apresenta ênfase excessiva na solução de algoritmos convencionais, e as práticas da sala de aula revelam que o trabalho com algoritmos convencionais para a solução de problemas ainda prevalece no ensino da Matemática.

Estudos complementares do AVA (2002) fazem uma reflexão acerca do ensino de algoritmo escolar:

As investigações educacionais e as diferentes experiências docentes há muito vêm demonstrando que mesmo os alunos que acertam uma conta empregando um algoritmo escolar, não necessariamente compreendem os princípios matemáticos que possibilitaram a criação daquele algoritmo e que nele se ocultam. Mesmo esses alunos acabam encontrando dificuldade para saber em que situações cada algoritmo poderá ser empregado. Os estudos revelam ainda que, embora o cálculo oral e/ou escrito no padrão escolar isolados por si só, não promove o contato com as idéias e com os modos de pensar fundamentais da matemática, não garantindo, por decorrência disso, que os alunos sejam capazes de enfrentar mesmo as situações matemáticas mais simples surgidas em contexto diferentes (PARANÁ/SEED – AVA 2000, 2002, p. 2).

A dificuldade na compreensão e na utilização dos algoritmos convencionais também é pontuada por Vergnaud (1991). De acordo com o autor, as crianças, mesmo conhecendo os algoritmos convencionais, quando se deparam com problemas do cotidiano usam predominantemente procedimentos pessoais de solução que lhes sejam significativos, pois esses procedimentos permitem que compreendam o que fizeram e sejam capazes de explicar a estratégia utilizada.

A aprendizagem matemática fundamentada nessa concepção, de acordo com Kamii (2005), é precisamente o tipo de aprendizagem que requer que a criança seja colocada em desafio e em questionamento constante, fazendo-a refletir ao buscar solucionar os problemas.

Kamii (2005) diz que a solução de um problema propicia à criança momentos em que é estimulada a verbalizar seu pensamento matemático e a justificar a estratégia de solução elaborada, resolvendo pontos de vista conflitantes, sendo também levada a formular explicações para questionar ou validar uma solução encontrada por ela ou por uma outra criança da sala de aula, para que, de fato, possa construir o seu conhecimento.

Os estudos complementares do AVA (2002) trazem uma reflexão acerca do ensino-aprendizagem da Matemática, utilizando a solução de problemas:

Nos últimos anos, um número considerável de pesquisas nas salas de aula de matemática em vários países tem demonstrado que os alunos melhoram a sua aprendizagem – podendo até mesmo inventar métodos, encontrar soluções ou decidir sobre a melhor estratégia de manejar uma determinada situação – quando, durante o processo de ensino-aprendizagem, eles são desafiados a levantar hipóteses, testá-las, jogar e investigar coisas como um detetive, contando sempre com os ouvidos e olhos atentos do professor, que, em diferentes circunstâncias, usa a voz não apenas para dar informações, mas principalmente para questionar, confrontar e problematizar os argumentos apresentados (PARANÁ/SEED – AVA 2000, 2002, p. 2).

A solução de um problema coloca as crianças diante de um desafio para o qual os conhecimentos que possuem nem sempre são suficientes para respondê-lo, exigindo delas a busca de procedimentos e a construção de novos saberes. Nesse contexto, pode-se concordar com Polya (1978) quando afirma que:

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 1978, p. 87).

Nessa perspectiva de aprendizagens significativas, provocadas pela solução de problemas, a criança está a todo o momento tomando decisões e compreendendo de fato os conceitos matemáticos que utiliza não só na escola, mas também na sua vida diária. Dessa forma, o ensino da Matemática estaria contribuindo para a formação de cidadãos autônomos, capazes de pensar por conta própria.

Kamii (1990) faz uma reflexão sobre o papel da autonomia na aprendizagem e aponta sua necessidade para a formação de cidadãos conscientes do seu papel perante a sociedade:

A essência da autonomia é que as crianças se tornam capazes de tomar decisões por elas mesmas. Autonomia não é a mesma coisa que liberdade completa. Autonomia significa ser capaz de considerar os fatores relevantes para decidir qual deve ser o melhor caminho da ação. Não pode haver moralidade quando alguém considera somente o seu ponto de vista. Se também consideramos o ponto de vista das outras pessoas, veremos que não somos livres para mentir, quebrar promessas ou agir irrefletidamente (KAMII, 1990, p. 37).

Compreendendo-se que a construção dos conceitos matemáticos consiste em um processo de estabelecer relações entre valores ou grandezas pelas crianças, a solução de problemas deve ser utilizada como recurso fundamental no ensino da Matemática, antes que sejam ensinadas as técnicas ou algoritmos de solução das operações específicas ali necessárias.

Quando se propõe à criança a solução de um problema e não de uma conta isolada, estimula-se a produção de procedimentos próprios de cálculos. Além disso, estudos confirmam (Piaget, 1973; Polya, 1978; Vergnaud, 1991) que só ocorre a aprendizagem quando a criança percebe que existe um problema para ser resolvido. É nesse contexto de estreita relação com as situações que dão sentido ao conceito que os conceitos matemáticos podem ser de fato compreendidos.

De acordo com uma perspectiva de educação matemática pautada na problematização, Starepravo (1997) define que:

Quando trabalhamos a partir de problematizações, abrimos as possibilidades de aprendizagens uma vez que os conteúdos não são tidos como fins em si mesmos, mas como meios importantes e essenciais na busca de respostas. Assim os problemas têm a função de gerar conflitos cognitivos nos alunos, que provoquem a necessidade de empreender uma busca pessoal (STAREPRAVO, 1997, p. 45).

Cabe ao professor, ao trabalhar com a solução de problemas, levar a criança a pensar e a identificar o pensamento que ela desenvolve, acompanhando-a para que possa intervir e provocar a construção do conhecimento.

Sinclair (1990) destaca a importância da realização de estudos que tenham como foco principal a compreensão dos conceitos e das relações matemáticas estabelecidas pela criança, na solução do problema, para que o professor possa intervir no processo de aprendizagem e a criança evolua na compreensão do conceito.

Portanto, é a partir dessa perspectiva que esta pesquisa considera a aprendizagem como um processo de construção de conceitos e relações pelas crianças e que o trabalho com conceitos matemáticos deve partir da proposição de problemas.

A solução de um problema constitui-se, assim, um caminho para o ensino e a aprendizagem da Matemática e deve permitir às crianças: elaborar estratégias próprias de cálculo, percebendo que existem estratégias diferenciadas para solucionar um mesmo problema; elaborar e compartilhar procedimentos de solução, confrontando e argumentando, com os colegas e com o professor; compreender o erro como parte do processo de construção e compreensão dos conceitos matemáticos; analisar os dados para a solução do problema, percebendo que, em alguns casos, a falta de dados inviabiliza a solução dele e, enfim, elaborar estratégias de cálculo, num constante processo de reflexão, compreensão e reelaboração de conceitos.

3 – AS SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PELAS CRIANÇAS E O PAPEL DO PROFESSOR

Estudos e pesquisas (Vergnaud, 1983; Carraher, Carraher e Schliemann, 1989; Brito e Taxa, 1999; Smole e Diniz, 1999; Schliemann, 2003) vêm destacando a importância de o professor conhecer o nível de compreensão que as crianças

possuem dos conceitos matemáticos, bem como apoiar-se nas estratégias próprias de cálculo e nas soluções notacionais produzidas por elas, intervindo, de maneira provocativa, para que as crianças possam avançar na compreensão de tais conceitos.

Com relação a essa questão, Brito e Taxa (1999) ressaltam que o único modo de conhecer como as crianças solucionam problemas é analisando os procedimentos por elas utilizados quando solucionam problemas verbais e quando utilizam papel e caneta.

Nesse contexto, Schliemann (2003) aponta que reconhecer o desenvolvimento e o uso do raciocínio matemático nas estratégias utilizadas pelas crianças e nas atividades que desenvolvem diariamente é um passo que o professor pode dar, a fim de propor atividades de ensino mais adequadas.

Smole e Diniz (1999) indicam que as estratégias de cálculos utilizadas pelas crianças fornecem dados fundamentais para que o professor possa elaborar e diagnosticar a compreensão do processo de aprendizagem dos alunos.

As autoras acrescentam que, quando a criança tem liberdade para utilizar suas estratégias de cálculo, o professor pode acompanhar o processo de aprendizagem e intervir sempre que necessário, ajudando a criança a avançar na sua compreensão dos conceitos matemáticos.

Dessa forma, é possível perceber que devido à prática desenvolvida em sala de aula no ensino tradicional, que ainda privilegia o ensino dos algoritmos por meio da realização de grande quantidade de exercícios de fixação e memorização antes da solução de problemas, perde-se a oportunidade de as crianças apresentarem raciocínios novos, levantarem hipóteses e validarem um resultado encontrado,

argumentando com os colegas e defendendo o seu ponto de vista na solução de um problema.

A literatura tem mostrado que o conhecimento matemático não se constitui em um conjunto de fatos a serem memorizados. Destaca, também, que a ação pedagógica do professor, conforme uma concepção de construção de conceitos significativos deve partir da premissa de que o conceito não pode ser transmitido às crianças; ao contrário, necessita ser ativamente construído por elas, com a intervenção do professor, num processo em que a aprendizagem passa a ser percebida e vivenciada como um processo de construção.

Vergnaud (1983) pontua em seus estudos que, ainda que as concepções, as estratégias e as representações das crianças sejam parcialmente incorretas, elas podem ser utilizadas para a solução de problemas simples, para passar, mais tarde, à construção de procedimentos e de conceitos mais próximos daqueles que são considerados soluções universais.

A teoria dos campos conceituais, para Vergnaud (1983), fornece aos professores um quadro para estes trabalharem com uma variedade de situações em níveis diferentes, o que poderia auxiliá-los a fazer com que as crianças evoluam lentamente, mas, significativamente, na construção dos conceitos trabalhados.

Vergnaud (1991) assinala ainda que, na solução de problemas de aritmética, as crianças encontram dificuldade para a compreensão dos conceitos. O autor ressalta que é em termos de esquemas que é preciso que o professor valorize a escolha de um procedimento utilizado pela criança para a solução de um problema, em um quadro em que há muita possibilidade de escolha.

Carraher, Carraher e Schliemann (1989) ressaltam em seus estudos a necessidade de valorizar as elaborações matemáticas próprias das crianças e, aliá-las às formas convencionais escolares de representação dos conceitos matemáticos.

Nesse contexto, as soluções notacionais das crianças devem ser compreendidas e analisadas para, a partir delas, entender o que a criança está compreendendo do conceito matemático que está sendo estudado, no caso específico desta pesquisa as estruturas multiplicativas do tipo produto de medidas.

O ensino, partindo das soluções notacionais e verbais utilizadas pelas crianças, poderá auxiliá-las no desenvolvimento de formas mais efetivas de operar com o raciocínio matemático.

No entanto, apesar de as crianças utilizarem cálculos mentais na solução de problemas cotidianos, Carraher, Carraher e Schliemann (1989) mostram que elas não conseguem utilizá-los na solução de problemas escolares, não encontrando nas técnicas que a escola ensina semelhança com os cálculos mentais que utilizam para a solução de problemas do seu dia-a-dia.

Com relação ao ensino dos algoritmos convencionais, Franchi (1999) faz uma reflexão, priorizando o trabalho em sala de aula com a utilização de procedimentos próprios elaborados pelas crianças para a solução e compreensão dos problemas:

Os procedimentos canônicos ou estandarizados não correspondem diretamente aos processos cognitivos envolvidos na sua resolução e, portanto, não podem ser ensinados diretamente. (...) Ao nosso ver, uma condição indispensável é que o aluno se aproprie da situação. Para essa apropriação é essencial que ele possa utilizar seus próprios procedimentos a partir da representação que ele faz da situação (FRANCHI, 1999, p. 189).

Além disso, Carraher, Carraher e Schliemann (1989) comprovam que, quando utilizam estratégias próprias de cálculo, as crianças têm maior facilidade para compreender e explicar o procedimento utilizado.

Franchi (1999) aponta em seus estudos a importância da socialização dos procedimentos elaborados pelas crianças entre todas as crianças da sala de aula. Trabalhar em pequenos grupos faz com que as crianças percebam a existência de diferentes procedimentos de cálculo, bem como possam estar avaliando e questionando os procedimentos apresentados pelos colegas:

A discussão e socialização desses procedimentos em classe é fundamental para a investigação dos conhecimentos em ação mobilizados na produção desses procedimentos, facilitando, no momento oportuno, a percepção pelos alunos das relações entre os vários procedimentos e a avaliação da maior ou menor eficiência e economia de cada um deles (FRANCHI, 1999, p. 189).

Moro (1998) lembra, a partir de Vergnaud, que é fundamental, na aprendizagem dos conceitos matemáticos, trabalhar integradamente a solução notacional correspondente como um componente necessário à elaboração conceitual em jogo. A autora ressalta que nesse processo de intervenção é essencial que o professor acompanhe as estratégias espontâneas das crianças para, a partir delas, instigar sua progressão para a elaboração de estratégias mais avançadas, partindo sempre dos esquemas de ação que a criança dispõe.

Nessa perspectiva, o ensino deve utilizar os procedimentos e as estratégias próprias das crianças como ponto de partida para o trabalho com os conceitos matemáticos, considerando sempre os significados atribuídos pelas crianças a essas formas de representação.

Nesse contexto é preciso reconhecer que as crianças precisam de tempo para compreender os conceitos e as idéias matemáticas trabalhadas em sala de aula. Cabe então ao professor, de acordo com Kamii (2002), criar as condições adequadas de ensino para que a aprendizagem possa acontecer.

Um desses caminhos, apontado por Vergnaud (1983) e já descrito anteriormente, é o trabalho com a solução de problemas em sala de aula,

circunstância em que o professor poderá estar interferindo no processo construção e reconstrução dos conceitos pelas crianças.

De acordo com o autor (1991), somente o conhecimento dos esquemas conceituais que as crianças vão construindo progressivamente em relação aos conceitos matemáticos é que permite ao professor intervir de forma adequada no processo de aprendizagem das crianças.

Nessa perspectiva, a sala de aula pode tornar-se um espaço provocativo, explorando situações em que as crianças realmente aprendam sob a intervenção do professor. Moro (1998) propõe que, nesta sala de aula, o papel do professor deve ter as características de orientador, de mediador e de provedor de desafios interessantes, intervindo de forma adequada, para que as crianças tenham uma aprendizagem significativa.

Piaget (1973) escreve sobre três princípios gerais para o ensino da Matemática em sala de aula, que permitem ao professor refletir sobre a sua prática e sobre o processo de aprendizagem das crianças.

O primeiro princípio diz que a compreensão de uma noção ou de uma teoria implica na sua reinvenção pelo sujeito. Então, o professor tem que organizar situações que possibilitem a busca de solução por parte das crianças, fornecendo os recursos necessários e compreendendo que o processo de construção é individual e solitário, ou seja, o professor cria as condições e quem constrói o conhecimento é a criança, no seu tempo e de acordo com os esquemas que já construiu e é capaz de compreender.

O segundo princípio enfatiza que a criança é capaz de fazer e compreender em ação, tomando consciência de suas ações; além disso, ressalta a importância do

trabalho em grupo durante o qual as crianças e o professor, ao trocarem informações, são capazes de ampliar os conceitos que estão sendo trabalhados.

O terceiro princípio fala sobre o papel da formalização dos conceitos que, conforme o autor, deve vir sempre como a finalização de um processo construído e não como ponto de partida para o trabalho com uma noção ou conceito. A formalização tem o seu momento específico e não pode ser prematura.

Moro (1998) ressalta também que, como a construção do conhecimento acontece nas trocas entre as crianças, estas aprendem em interação umas com as outras, em pequenos grupos ou grupos maiores. Para tanto, deve o professor propor e favorecer situações de aprendizagem que permitam essas trocas entre as crianças.

Kamii (1990) pontua que, em uma situação de aprendizagem, é papel do professor a proposição, a orientação e aplicação de problemas, criando as condições necessárias à construção do conhecimento.

O objetivo dessa forma de atuar do professor seria o de incentivar as crianças à busca de novas estratégias de cálculo, o que é fundamental para provocar avanços no processo de construção dos conceitos por essas crianças e na elaboração de estratégias mais eficazes.

Vergnaud (1991) enfatiza a importância do trabalho realizado pelo professor em sala de aula. Segundo o autor (1991), toda a formação do professor e todo o seu esforço devem conduzi-lo para um melhor conhecimento do processo de aprendizagem do aluno, permitindo a ele ajustar de maneira permanente a sua intervenção no processo do ensino e da aprendizagem. Esse conhecimento não pode ser um simples entendimento geral da inteligência e do comportamento da

criança; implica um conhecimento profundo do conceito que se vai ensinar e das relações que esse conceito estabelece com a atividade possível da criança.

Nesse contexto, assume-se então a posição a ser considerada nesta pesquisa, de que o papel do professor em sala de aula é indispensável, à medida que elabora os problemas e organiza contra-exemplos que levem a criança à reflexão, estimulando seu papel ativo no processo de aquisição do conhecimento. Assim, ajuda-a a construir e a organizar suas idéias, desencadeando reflexões e descobertas. As formas de o professor fazer sua intervenção terão então, força na relação que ele e as crianças irão estabelecer com o conhecimento.

4 – A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Entre os autores que defendem uma aprendizagem significativa por meio da solução de problemas, merece destaque o psicólogo francês Gérard Vergnaud.

Vergnaud (1983) assinala em seus estudos que a ciência e a tecnologia têm se desenvolvido com a intenção de resolver problemas. Menciona também que uma das questões mais desafiadoras à educação é, provavelmente, o uso de problemas significativos para que o conhecimento, tanto em seu aspecto teórico quanto prático, possa ser visto pelos alunos como uma contribuição importante na solução de problemas reais.

Vergnaud (1983) utiliza a teoria de Piaget como quadro de referência teórica para os seus estudos. No entanto, pontua que, se Piaget demonstrou que o conhecimento e a inteligência se desenvolvem durante um longo período de tempo para chegar à lógica formal, seu interesse próprio está em compreender melhor a aquisição e o desenvolvimento de conceitos específicos, na relação com as

situações e com os problemas, posição essa que o conduziu a propor a teoria dos campos conceituais.

A teoria dos campos conceituais permite o estudo das representações e das conceitualizações construídas pelos alunos durante um longo período de tempo. Essa teoria não é específica para a Matemática; no entanto, foi elaborada inicialmente com o objetivo de compreender os processos de conceitualização das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número – espaço e da álgebra. Além disso, a teoria dos campos conceituais pode ser utilizada como uma ferramenta eficaz para o estudo das dificuldades dos alunos, pois, fornece ao professor subsídios para acompanhar o processo de aprendizagem dos alunos.

A teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1991) estuda a construção de um conceito; mais especificamente, é a teoria do ensino e da aprendizagem dos conceitos escolares. Essa teoria tem, como intuito principal, fornecer aos professores um quadro que permita a compreensão das filiações e rupturas entre o conhecimento dos alunos, entendendo por conhecimento, nesse contexto, tanto o “saber-fazer” – formulação que a criança faz e utiliza para solucionar os problemas do dia-a-dia – como os “saberes expressos” – conhecimento teórico que a criança vai construindo com base nas relações que consegue estabelecer entre o conhecimento prévio e o novo conhecimento.

Nessa perspectiva, de acordo com Vergnaud (1991), as filiações referem-se à continuidade porque a construção de um conhecimento sempre se apóia em um conhecimento anterior, incorporando-o e transformando-o e as rupturas referem-se à descontinuidade no desenvolvimento. Afinal, cada nova etapa não é um mero prolongamento da etapa que lhe antecedeu, pois transformações qualitativas significativas ocorrem no modo de pensar das crianças.

Dessa forma se caracteriza a aprendizagem significativa, por meio da interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio das crianças. É nessa interação que o novo conhecimento adquire significado e o conhecimento prévio se transforma e passa a adquirir novo significado.

Vergnaud (1983, p. 127) define campo conceitual como “um conjunto de problemas e situações, cujo tratamento se faz necessário através de conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas estritamente interligados”.

Para a compreensão da teoria dos campos conceituais, Vergnaud (1983) destaca três idéias principais:

– É difícil e algumas vezes absurdo estudar separadamente a aquisição de conceitos interconectados. Como exemplo, o autor cita o estudo da multiplicação, divisão; fração, razão, números racionais; funções lineares e não-lineares; análise dimensional e vetor espacial. Esses conceitos, segundo Vergnaud, não são conceitos matemáticos independentes uns dos outros e estão simultaneamente presentes nos primeiros problemas que o aluno encontra na escola.

– É mais proveitoso, dentro de uma abordagem psicogenética para a aquisição de idéias específicas, abranger um domínio mais amplo do conhecimento, abordando uma diversidade maior de situações.

– Existem diferentes procedimentos e conceitos, bem como diferentes representações na solução de problemas de uma mesma classe. Embora essas concepções e representações sejam frágeis ou possam estar parcialmente erradas, elas podem ser utilizadas para a solução de problemas simples, para passar, mais tarde, à construção de procedimentos e conceitos mais próximos daqueles que são considerados soluções universais.

Vergnaud (1991) destaca que, para compreender o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito no curso da sua aprendizagem ou por ocasião de sua utilização, faz-se necessário considerar que um conceito se define com o apoio do seguinte tripé: o conjunto das situações que lhe dão sentido (a referência), o conjunto de invariantes que constituem suas propriedades (o significado) e o conjunto das formas simbólicas ou lingüísticas que permitem suas representações (o significante).

Segundo Vergnaud (1996), um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando há interesse pelo seu processo de aprendizagem e pelo seu ensino. Ressalta também ser através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para as crianças.

Vergnaud (1990) define “problema” como toda a situação para a qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, levantar hipóteses para verificação, a fim de encontrar uma solução. Para o autor, “... se quisermos avaliar de forma correta a medida da função adaptativa do conhecimento, temos de atribuir um lugar central às formas que ele assume na ação do sujeito” (Vergnaud, 1996, p. 156). Destaca-se aqui mais uma vez a importância de o professor compreender o processo cognitivo da criança, para poder intervir no processo de aprendizagem.

Em seus estudos, Vergnaud (1996) distingue duas classes de situações:

I – situações para as quais o sujeito dispõe das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato das situações (condutas automatizadas, organizadas);

II – situações para as quais o sujeito ainda não dispõe de todas as competências necessárias, quando o sujeito hesita e tenta várias abordagens

(acomoda as estruturas modificando-as) na busca da solução. Esses esquemas se acomodam, descombinam-se e recombinam-se (esse processo é acompanhado por descobertas).

Esta pesquisa apóia-se na proposição de que as operações de multiplicação e divisão constituem um campo conceitual, o das estruturas multiplicativas. De acordo com Vergnaud (1991), essas operações envolvem em sua construção vários esquemas, conceitos e relações que se aplicam, de forma diversamente combinada, a certo espaço de situações e problemas.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas, segundo Vergnaud (1991), refere-se ao conjunto das situações que demandam multiplicações e divisões de diferentes tipos ou a combinação dessas operações.

Vergnaud (1983) destaca três categorias de problemas próprios das estruturas multiplicativas: isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporção múltipla. Essas diferentes categorias devem, segundo Vergnaud (1991), ser trabalhadas cuidadosamente, a fim de auxiliar as crianças a reconhecerem as estruturas dos problemas e utilizarem os procedimentos adequados para a solução de cada um deles.

Os problemas do tipo produto de medidas, abordados neste estudo, de acordo com Vergnaud (1983), envolvem uma estrutura de problemas que remete para a composição cartesiana de dois espaços de medidas M_1 e M_2 , em uma terceira medida M_3 . Essa estrutura revela duas classes de problemas: a multiplicação – com o valor das medidas elementares, encontrar o valor do produto de medidas – e a divisão – com o valor do produto de medidas e o valor de uma das medidas elementares, encontrar o valor da outra medida.

Segundo Vergnaud (1991), essa forma de relação multiplicativa é uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é produto das outras duas tanto no plano numérico como no plano dimensional. Para o autor, “o esquema mais natural para representar essa forma de relação é no quadro cartesiano, pois o eixo é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura dos produtos de medidas” (Vergnaud, 1991, p. 211-212).

Para Vergnaud (1983), esse tipo de relação, de produto de medidas, descreve um amplo número de situações e problemas do dia-a-dia, bem como conceitos técnicos e físicos.

Para caracterizar os problemas do tipo produto de medidas, Vergnaud (1991) relaciona alguns exemplos:

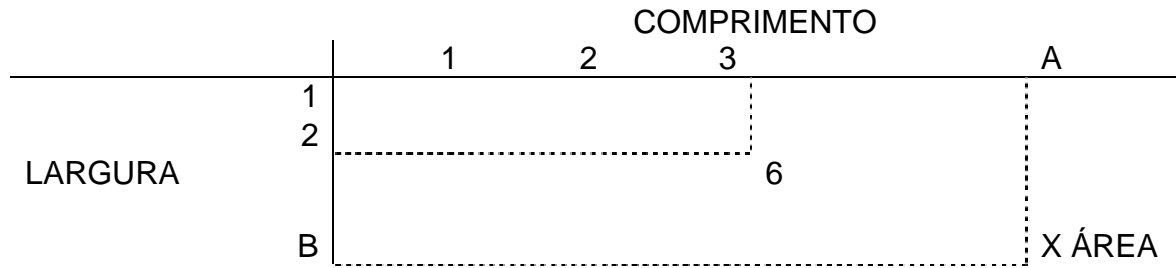
Exemplo 1: 3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça com cada rapaz. Quantos pares são possíveis formar?

Exemplo 2: Querem fabricar bandeiras com tecidos de duas cores diferentes (roxo e azul). As bandeiras têm que ter três listas. Quantas bandeiras diferentes podem ser fabricadas?

Exemplo 3: Um recipiente retangular tem 4 metros de largura e 3 metros de comprimento. Qual é a sua área?

Exemplo 4: Combinando somente suéter e cachecol, Ana pode ter 15 trajes diferentes. Tem 3 suéteres, quantos cachecóis têm? (Vergnaud, 1991, p. 211).

Como estão implicadas três variáveis, essa estrutura multiplicativa não pode ser representada por uma simples tabela de correspondência, semelhante a uma tabela utilizada para representar a estrutura do isomorfismo de medidas. De fato, essa estrutura é representada por uma tabela de dupla correspondência. Como exemplo, utilizamos um problema proposto por Vergnaud (1983, p. 134), o caso da área do retângulo:



Esse esquema proposto pelo autor ilustra a dupla proporção da área, para as medidas do comprimento e da largura independentemente.

Vergnaud (1983) utiliza mais três situações para exemplificar os problemas do tipo produto de medidas:

“Quatro meninas e três meninos vão dançar. Cada menino quer dançar com cada menina e, cada menina com cada menino. Quantos pares diferentes são possíveis formar?” (Vergnaud, 1983, p. 134).

Nesse exemplo, de acordo com Vergnaud (1983), as diferentes possibilidades de formação dos pares podem ser facilmente generalizadas e classificadas por uma tabela de dupla entrada, como se pode observar:

		MENINAS				PARES
		L	M	N	O	
MENINOS	A	AL	AM	AN	AO	
	B	BL	BM	BN	BO	
	C	CL	CM	CN	CO	

Já, a proporção do número de meninos e do número de meninas, separadamente, pode ser observada em uma tabela de dupla correspondência. Nessa tabela, para Vergnaud (1983), é possível verificar que o número de pares é proporcional ao número de meninos, quando o número de meninas permanece constante (colunas paralelas), e ao número de meninas, quando o número de meninos permanece constante (linhas paralelas).

		NÚMERO DE MENINAS				N
		1	2	3	4	
NÚMERO DE MENINOS	1	1		3		
	2	2	4	6	8	2 N
	3			9		
	M			3 M		M N

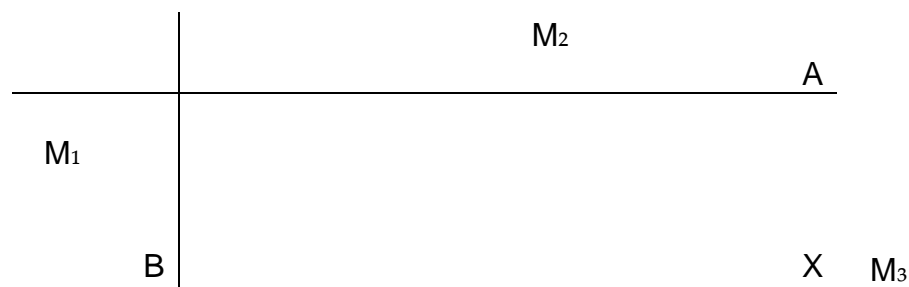
NÚMERO DE PARES

Vergnaud (1983) menciona também que a estrutura aritmética do produto cartesiano, como um produto de medidas, é de fato, muito difícil e não pode ser compreendida pelas crianças até ser analisada como uma dupla proporção.

No exemplo a seguir, existe um outro problema do tipo produtos de medidas (Vergnaud, 1983) de multiplicação, ou seja, com o valor das duas medidas elementares, tem-se que encontrar o valor do produto de medidas.

“Qual é a área de uma sala retangular que tem 7 metros de largura e 4,4 metros de comprimento?” (Vergnaud, 1983, p. 135).

$$A = 7 \quad B = 4,4 \quad M_1 = \text{largura} \quad M_2 = \text{comprimento} \quad M_3 = \text{área}$$



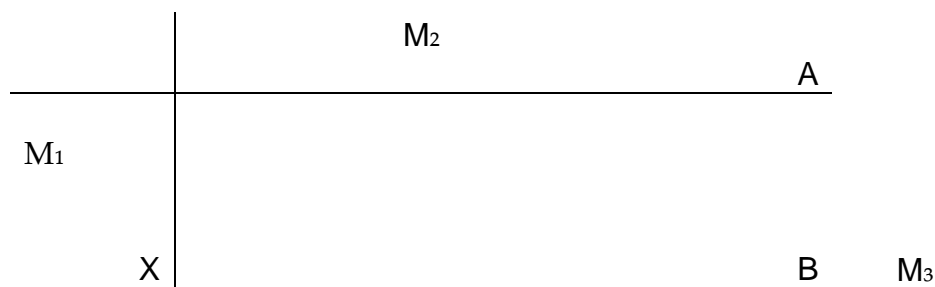
Nesse exemplo, Vergnaud (1983) chama a atenção para o fato de que é possível verificar que a solução $a \times b = x$ não é tão fácil de analisar, tanto em termos de relação escalar (grandezas do mesmo tipo) como em termos de relação funcional

(grandezas diferentes), pois a solução é o produto de duas medidas, no aspecto dimensional e numérico – área (m^2) = comprimento (m) x largura (m).

No próximo exemplo proposto por Vergnaud (1983), há um problema do tipo produtos de medidas, de divisão, ou seja, com o valor de uma das medidas elementares e o valor do produto de medidas, busca-se encontrar o valor da outra medida elementar.

“A área de uma piscina é $150 m^2$. Para enchê-la são necessários $320 m^3$ de água. Qual é a medida da altura da piscina?” (Vergnaud, 1983, p. 136).

$$A = 150 m^2 \quad B = 320 m^3 \quad M_1 = \text{altura} \quad M_2 = \text{área} \quad M_3 = \text{volume}$$



Aqui, novamente, segundo Vergnaud (1991), o procedimento da divisão não pode ser facilmente descrito por uma relação escalar ou por uma relação funcional, pois a grandeza da quantidade a ser encontrada é o resultado da grandeza do produto pela grandeza de outra medida elementar – volume (m^3) / área (m^2) = altura (m).

Vergnaud (1991) ressalta que, pela complexidade das estruturas multiplicativas, as crianças recorrem a procedimentos não-canônicos para a solução dos problemas. Segundo o autor, tais procedimentos revelam um manejo inteligente da situação e preparam assim as crianças para o desenvolvimento e a compreensão das situações canônicas.

No que concerne à aprendizagem da Matemática em geral, Vergnaud (1991) atribui à criança papel decisivo no seu processo educativo e na sua atividade sobre a realidade. De acordo com Vergnaud (1991), é necessário que os conceitos sejam construídos pela própria criança conforme as operações que é capaz de fazer sobre a realidade, com aquelas que está em condições de captar, compor e transformar progressivamente.

Isso não significa, segundo Vergnaud (1991), que o papel do professor tenha pouca importância nesse processo; ao contrário, o papel do professor consiste justamente em estimular essa atividade da criança, fazendo com que ela possa avançar gradativamente na compreensão dos conceitos que estão sendo trabalhados. Vergnaud complementa ainda que somente um conhecimento claro das noções que vai ensinar é que pode permitir ao professor compreender as dificuldades encontradas pelas crianças nas etapas pelas quais passa no processo de compreensão dos conceitos.

A aquisição dos conceitos, segundo Vergnaud (1991), não é independente da solução dos problemas. Para o autor, a solução de problemas deve ser compreendida como um meio e um critério para a aquisição dos conceitos matemáticos. Um meio, porque a análise dos problemas, das soluções e dos erros é pedagogicamente essencial para fazer as crianças compreenderem que relações são importantes e como podem ser tratadas; um critério, porque o fracasso na transformação e na composição de relações se traduz em lacunas e falta de conhecimento.

No caso da solução de problemas, Vergnaud (1991) destaca que é preciso romper com a prática corrente tradicional, sobretudo, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, que consiste em dar enunciados com uma seqüência predeterminada

de perguntas intermediárias. Essa prática, segundo o autor, não possibilita à criança a livre análise das relações para o descobrimento dos caminhos possíveis. Para o autor, torna-se mais proveitoso quando, ao contrário, a criança alcança uma aceitável compreensão das relações elementares, quando são apresentados problemas mais complexos sem perguntas intermediárias.

Vergnaud (1991) enfatiza que é indispensável ao professor mostrar para as crianças uma pluralidade de possibilidades para a solução dos problemas, evitando que elas imaginem que só existe uma maneira de obter a solução dos problemas propostos. Além disso, o professor deve estar atento para interpretar os procedimentos das crianças, evitando reprimir os caminhos não-convencionais que elas possam utilizar.

Em seus estudos, Vergnaud (1991) propõe alguns princípios que devem guiar a ação do professor no trabalho com a solução de problemas:

- fazer com que a criança elabore por si mesma as perguntas que tem sentido a respeito do enunciado;
- introduzir voluntariamente informações inúteis e, ao contrário, omitir informações necessárias;
- levar a criança a estabelecer uma ou várias representações operatórias das informações, das perguntas e dos caminhos a seguir para responder;
- estabelecer um vínculo entre as diferentes representações;
- recorrer, se for o caso, a uma reconstrução material e imitada de uma situação dada no enunciado e estabelecer os vínculos entre a situação material e as representações que se dão.

Esses princípios, segundo o autor, são indispensáveis para orientar a criança na análise em profundidade das relações e das transformações em jogo, análises

sem as quais o ensino só conduz a adestramentos pouco eficazes. É um grande erro pedagógico, de acordo com Vergnaud (1991), considerar que o ensino consiste necessariamente de uma parte de exercícios repetitivos para a aquisição, por simples condicionamento de procedimentos preestabelecidos.

Em seus estudos, Vergnaud (1991) pontua que a criança somente constrói um conceito, se o compreende, se é capaz de explicá-lo, e se consegue dar conta das relações que este mantém com os outros conceitos do campo conceitual, dos problemas aos quais se aplicam.

De acordo com Vergnaud (1983), a teoria dos campos conceituais fornece aos professores e pesquisadores um quadro teórico que permite analisar a formação dos conceitos matemáticos pelos alunos. Para o autor, essa teoria deve auxiliar os professores e os pesquisadores para que possam progredir na compreensão dos conceitos matemáticos.

Esta pesquisa pretende oferecer uma contribuição na compreensão das estruturas multiplicativas, do tipo produto de medida, pelas crianças, utilizando como referência as idéias de Vergnaud (1983; 1988; 1991; 1996) para analisar esse processo de aprendizagem, sob a intervenção provocativa do professor e do ponto de vista da transformação do raciocínio combinatório ali implicado.

A teoria dos campos conceituais e os princípios que devem guiar a ação do professor, de acordo com Vergnaud (1983; 1988; 1991; 1996), já descritos anteriormente, foram utilizados para orientar a intervenção da pesquisadora, no papel de professora; a elaboração dos oito problemas que foram propostos às crianças e guiaram a discussão dos resultados.

5 – ALGUMAS ABORDAGENS DO PROCESSO DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DO RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Nas séries iniciais do Ensino Fundamental, o ensino da multiplicação é freqüentemente realizado por meio de exercícios que envolvem o algoritmo da multiplicação, priorizando a memorização da tabuada sem compreensão e a técnica padrão de resolução do algoritmo como única estratégia de solução.

De outro lado, inúmeros estudos (Vergnaud, 1983; Franchi, 1999; Starepravo, 2001; Taxa, 2001; Esteves, 2001; Barreto, 2001) mostram que o raciocínio multiplicativo não é facilmente compreendido pelas crianças. Nesse contexto, esses autores apontam para a importância de que os professores conheçam e compreendam o processo de construção dos conceitos de multiplicação e divisão pelas crianças para que possam intervir no processo de aprendizagem.

Bryant e Kornilaki (1999) pontuam que o raciocínio multiplicativo não é desenvolvido facilmente pelas crianças nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Os autores assinalam que uma das razões dessa dificuldade centra-se no fato de que os adultos, neste caso específico, os professores, não conhecem o suficiente sobre o modo pelo qual as crianças pensam sobre as multiplicações e as divisões.

Outros estudos sobre o trabalho com o raciocínio multiplicativo em sala de aula (Canôas, 1997; Costa, 2003) têm destacado a necessidade de o professor conhecer o objeto matemático com o qual irá trabalhar para que possa levar os alunos, de fato, à construção dos conceitos matemáticos de estrutura multiplicativa.

Canôas (1997) concluiu em seus estudos que os professores têm uma visão estreita do campo conceitual multiplicativo, principalmente no que diz respeito à exploração das situações presentes nesse campo conceitual. Esses professores, de

acordo com a mesma autora, acreditam que a operação de divisão se reduz à distribuição em partes iguais, e a operação de multiplicação, à soma de parcelas iguais.

Costa (2003) verificou, em seu estudo, que muitos professores de Matemática não conhecem suficientemente bem a análise combinatória como objeto matemático, para que possam ensiná-la aos alunos.

Nesse contexto, Costa (2003) assinala que a compreensão que o professor tem sobre o conceito a ser trabalhado é essencial para a organização de suas ações em sala de aula, para que, a partir delas, possa possibilitar aos alunos a construção de suas aprendizagens.

Estudos sobre a diversidade de procedimentos utilizados na solução de problemas de estrutura multiplicativa (Barreto, 2001; Esteves, 2001; Taxa, 2001; Starepravo, 2001; Brito, Alves e Neves, 2003; Kamii, 2005) têm evidenciado a importância de o professor valorizar e incentivar a utilização de estratégias de cálculo em sala de aula para que as crianças possam avançar suas compreensões a respeito das estruturas multiplicativas.

Os estudos de Barreto (2001) mostram que alunos da 5ª. série de uma escola estadual de São Paulo mobilizaram uma heterogeneidade de procedimentos para a solução de problemas de quarta-proporcional. Segundo a mesma autora, esse fato evidencia a complexidade desse conceito e a necessidade de proposição de uma diversidade de problemas ao longo do processo de ensino-aprendizagem, para que, de fato, as crianças possam compreender o conceito trabalhado.

Entre os procedimentos utilizados pelos alunos, Barreto (2001) identificou um grande número de procedimentos não-canônicos, como a adição repetida, a

multiplicação com termo desconhecido, as multiplicações sucessivas, entre outros que foram mobilizados para solucionar os problemas mais elementares.

Sobre a diversidade dos procedimentos de cálculo mobilizado pelos alunos, Barreto (2001) ressalta que as contribuições de sua investigação para o ensino consistem em oferecer subsídios para:

- orientar uma aprendizagem que não tolha a criatividade dos alunos e respeite o ritmo dos que apresentam dificuldade ou se encontram, ainda, em uma etapa anterior;

- uma proposta de ensino que, contrapondo-se a uma prática em que o professor institucionaliza apressadamente o procedimento valor unitário, valorize a riqueza das produções individuais possíveis de serem estabelecidas pelos alunos em uma situação multiplicativa. Assim, as relações escalares podem ser mobilizadas tanto para solução de problemas como para controle dos resultados.

Esteves (2001) acredita que o trabalho com o desenvolvimento do raciocínio combinatório deva acontecer no Ensino Fundamental, de forma significativa, sem apresentação de fórmulas. Assim, no Ensino Médio, o aluno poderia ter esse conceito formalizado, compreendendo as fórmulas de forma significativa e não apenas como um algoritmo que o leve a mecanizar e associar palavras-chaves.

A mesma autora ressalta ainda que as atividades diversificadas, a serem propostas para favorecer um comportamento de busca de hipóteses que despertem o raciocínio, ajudam o processo de aprendizagem do aluno.

Starepravo (2001), em estudo sobre a solução de problemas de estrutura multiplicativa do tipo isomorfismo de medidas, verificou que as crianças utilizaram uma variedade e uma riqueza muito grande de procedimentos para a solução dos problemas propostos. Além disso, considera que os procedimentos utilizados pelas

crianças possibilitam ao professor conhecer psicogeneticamente o nível de seus alunos em relação aos conceitos trabalhados.

Taxa (2001), ao analisar as estratégias de solução de problemas de estrutura combinatória em crianças da 3ª. série do Ensino Fundamental, considerando as formas de representação gráfica e as verbalizações ocorridas durante a realização das tarefas, constatou que, na solução desses problemas, mesmo sem utilizar uma estratégia elaborada que possibilitasse a descoberta da estrutura combinatória, as crianças conseguiram selecionar os dados do problema e elaboraram alguns critérios que as auxiliaram na busca da estrutura combinatória.

Com relação às estratégias utilizadas pelas crianças na solução dos problemas propostos, Taxa (2001) pontua que:

As soluções apresentadas por essas crianças diante dos problemas não devem jamais ser desprezadas pelos educadores, pois quanto mais conseguirmos saber sobre como as crianças aprendem matemática e as implicações desta aprendizagem no pensamento, maior serão as possibilidades de os professores auxiliarem na formação de um sujeito ativo e transformador da realidade que o rodeia (TAXA, 2001, p. 3).

Neste contexto, Taxa (2001) considera que os problemas do tipo produto de medidas podem ser trabalhados com crianças pequenas, desde que “por meio de soluções inventadas por elas próprias: desenhos, utilização de material de apoio, em que apareça não só a exploração do cálculo mental, mas também o registro matemático construído por elas mesmas” (TAXA, 2001, p. 75).

Brito, Alves e Neves (2003), em um estudo sobre a solução de problemas de estrutura multiplicativa do tipo produto de medidas, verificaram que nos problemas que envolviam números maiores os alunos encontraram maior dificuldade para achar a solução, pois esses problemas implicam um raciocínio mais elaborado. Contudo, os problemas que envolviam números menores foram solucionados com maior facilidade, pois os alunos puderam utilizar outras estratégias de solução que não

aquelas canônicas (muitas vezes, ensinada pelo professor) das séries iniciais do Ensino Fundamental.

Um estudo realizado por Kamii (2005), com cinquenta e dois alunos da 3ª série, de duas escolas do Ensino Fundamental, trabalhando com propostas diferenciadas (em uma delas com uma proposta construtivista as crianças não haviam aprendido os algoritmos convencionais e, na outra, a Matemática era ensinada tradicionalmente), constatou que todos os alunos encontraram a resposta correta a problemas multiplicativos do tipo isomorfismo de medidas, solucionados individualmente.

Quase todas as crianças (noventa e sete por cento), que eram alunas da escola onde a matemática era ensinada tradicionalmente, utilizaram o algoritmo convencional da multiplicação, ao passo que nenhuma das crianças do grupo construtivista valeu-se do mesmo algoritmo, pois utilizavam-se de estratégias próprias de cálculo, que eram incentivadas pelo professor para solucionar problemas em sala de aula.

A grande diferença, segundo a autora, esteve no fato de que mesmo encontrando a resposta para o problema proposto, apenas 5% das crianças do grupo que utilizou o algoritmo convencional da multiplicação conseguiu explicar corretamente o algoritmo utilizado, enquanto 92% das crianças do grupo construtivista explicaram o algoritmo ou a estratégia utilizada.

De acordo com Kamii (2005), a explicação inadequada das crianças a respeito do algoritmo utilizado corretamente centra-se na dificuldade de compreensão que elas têm do valor posicional dos números.

Destaca-se, assim, a importância da elaboração de procedimentos próprios pelas crianças na compreensão dos conceitos matemáticos, neste caso, as

estruturas multiplicativas. Para Vergnaud (1991; 1996), dissemos antes, os conceitos de multiplicação e divisão irão tornar-se elaborações significativas quando se propiciar às crianças a solução de problemas, partindo-se inicialmente das estratégias de solução utilizadas por elas.

Outros estudos sobre o processo de ensino e aprendizagem das estruturas multiplicativas em sala de aula (Cunha, 1997; Kornilaki e Nunes, 1999; Park e Nunes, 2001; Vergnaud, 1983) têm evidenciado a proposição de problemas como atividade que favorece o desenvolvimento do pensamento matemático e a construção dos conceitos matemáticos pelas crianças.

Cunha (1997) aponta em seus estudos a necessidade de diversas abordagens da multiplicação e da divisão, desde as séries iniciais, como, por exemplo, a medida de área e o raciocínio combinatório, não somente enfatizando “adições repetidas” e subtrações sucessivas, para que talvez os alunos não criem as concepções de que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui”.

Além disso, a mesma autora ressalta que uma outra dificuldade dos alunos com relação às estruturas multiplicativas, na resolução dos problemas propostos em sua pesquisa, foi resolver questões de divisão para descobrir o valor desconhecido por meio da multiplicação, sem refletir sobre as relações possíveis na divisão.

Park e Nunes (2001), em um estudo sobre o ensino da multiplicação com crianças de seis anos que ainda não tinham nenhuma instrução prévia sobre a multiplicação na escola, verificaram que as crianças que aprendem a solucionar problemas envolvendo o raciocínio multiplicativo usando um esquema de correspondência têm um avanço conceitual significativo em relação às crianças que aprendem a solucionar problemas em termos de adições repetidas.

De acordo com os autores, esse fato sugere que os esquemas de correspondência constituem-se a origem conceitual do pensamento multiplicativo.

Com relação às operações de multiplicação e de divisão, Kornilaki e Nunes (1999) assinalam que as crianças têm e mobilizam diferentes esquemas de ação para cada uma dessas situações. De acordo com as autoras, o esquema de ação para a multiplicação é a composição de coleções em correspondência, e o esquema de ação para a divisão é a repartição e a formação de quotas. Desses estudos, concluíram que a multiplicação e a divisão inicialmente desenvolvem-se em paralelo e, mais tarde, passam a desenvolver-se como operações coordenadas.

Pesquisas acerca das estruturas multiplicativas do tipo produto de medidas, realizadas com crianças da Educação Infantil (English, 1992), têm evidenciado que, com o apoio do material concreto, as crianças avançam em suas concepções a respeito desse conceito.

Os resultados desses estudos evidenciam a dificuldade de compreensão das estruturas multiplicativas pelas crianças e pelos professores, bem como indicam que os problemas matemáticos que envolvem a estrutura multiplicativa não serão compreendidos se forem solucionados com a simples aplicação do algoritmo da multiplicação ou da divisão, pois, para que haja compreensão desses conceitos, é necessário que os alunos passem por um processo de construção conceitual gradativo.

Estudos em psicologia da educação matemática têm indicado que as crianças têm condições de compreender vários conceitos pertencentes ao campo conceitual das estruturas multiplicativas (English, 1992; 1996; Kishimoto, 2000; Mekhmandarov, 2000; Iannece, Nazzaro e Tortora, 2002; Monteiro, Serrazina e Barros, 2002; Monteiro, 2003; Misailadou e Williams, 2003; Moro e Soares, 2006). Entre esses

conceitos aparecem a razão, a proporção e o raciocínio combinatório, juntamente com indicativos da importância e da necessidade de esses conceitos serem trabalhados em sala de aula desde a Educação Infantil e das séries iniciais do Ensino Fundamental, partindo sempre das estratégias elaboradas pelas crianças e dos conhecimentos prévios que possuem.

Iannece, Nazzaro e Tortora (2002) propuseram uma atividade a crianças de 6 a 7 anos, no qual lhes foi permitido o uso de representações próprias com o intuito de favorecer uma evolução de desenhos espontâneos para representações bidimensionais, a partir de uma dramatização. Verificaram que as crianças passaram de formas corporais e verbais para formas de registro gráficas com a utilização do diagrama cartesiano. Os mesmos autores ressaltam, como resultado dessa atividade que enfocou níveis diferentes de representação, que o diagrama cartesiano passou a ser compreendido pelas crianças como um poderoso objeto matemático.

Kishimoto (2000) investigou os efeitos do raciocínio proporcional e metacognitivo na habilidade dos alunos para solucionarem problemas multiplicativos com frações decimais, em 344 alunos da escola elementares japonesa, de 4^{a.}, 5^{a.} e 6^{a.} séries. Os alunos resolveram um teste que envolvia problemas de multiplicação, de raciocínio proporcional e questionários de metacognição. O estudo identificou o raciocínio proporcional e metacognitivo como dois fatores importantes na solução de problemas multiplicativos, ressaltando que a relação entre a multiplicação bem-sucedida e o raciocínio proporcional foi significativa para estudantes de todas as séries.

Esses resultados, de acordo com Kishimoto (2000), mostram que o raciocínio proporcional é um dos fatores necessários para a solução de problemas multiplicativos por escrito, apoiando os achados de Vergnaud (1983), que também

pontua que a solução de problemas multiplicativos por escrito requer a compreensão dos conceitos de razão e proporção.

Este estudo traz implicações para o trabalho dos professores em sala de aula. Sendo assim, para melhor auxiliar os estudantes a solucionarem problemas multiplicativos com frações decimais, cabe aos professores não somente ensinar a multiplicação, como também ajudar os alunos a desenvolver outras habilidades, como o raciocínio proporcional e a habilidade de solucionar problemas.

Monteiro, Serrazina e Barros (2002) em estudo realizado com alunos da 4ª. série (9 anos de idade) analisaram as estratégias mobilizadas por eles para responder aos problemas. Nesse estudo, os alunos saíram da sala de aula para buscar resposta às perguntas dos problemas por eles elaborados e, quando retornaram para a sala de aula, tiveram que apresentar os resultados e os procedimentos utilizados. Durante o desenvolvimento dessa atividade, não foi ensinado aos alunos nenhum processo formal ou informal para a solução dos problemas. As crianças utilizaram as noções de aritmética que já tinham.

Os resultados desse estudo, segundo as autoras, ressaltam a importância de que o melhor momento para ensinar a uma criança uma habilidade ou conceito é o momento em que a criança se depara com uma situação nova para a qual não encontra de imediato uma resposta.

English (1992), em estudo com setenta e duas crianças, de 4 e 9 anos de idade, que solucionaram seis problemas combinatórios, envolvendo o vestuário de ursos de brinquedo em todas as possíveis combinações de artigos de roupa (combinando duas variáveis), pontua que as ações e as estratégias que as crianças utilizaram para solucionar os problemas propostos são indicativos de que as crianças são capazes de compreender e utilizar o raciocínio combinatório; além

disso, o autor ressalta que há uma progressão qualitativa das estratégias à medida que as idades avançam.

De acordo com o autor, estes resultados trazem implicações significativas para o currículo de Matemática na escola básica; além de indicar a importância de oportunizar na escola o trabalho com estratégias elaboradas pelas crianças, ressalta a necessidade do trabalho com o raciocínio combinatório desde cedo na escola, pois as crianças têm condições de compreender e operar com esse raciocínio. Assim, ressalta a importância da atividade de mediação desenvolvida pelo professor em sala de aula que favoreça o desencadeamento das habilidades metacognitivas das crianças.

English (1996), em outro estudo com crianças de 9 anos de idade, sobre a construção e a transferência de estratégias de solução de problemas combinatórios solucionados com apoio no concreto e na forma escrita, identifica o papel importante das estratégias próprias de cálculo para que essas elaborações sejam produzidas e verifica que o nível de realização em Matemática escolar não prediz o sucesso das crianças. Esse fato foi comprovado quando um aluno, considerado de baixo desempenho na escola, apresentou um sofisticado conhecimento combinatório, enquanto um aluno, considerado de alto desempenho, alcançou baixo rendimento na realização da mesma atividade.

Monteiro (2003), em estudo que explorou a perspectiva que os professores de Matemática têm sobre os conceitos de razão e proporção, quando resolvem problemas utilizando-se de procedimentos algorítmicos, verificou que as dificuldades e os equívocos apresentados podem estar localizados nas experiências que esses professores tiveram quando eram estudantes do Ensino Fundamental.

Nesse contexto, Monteiro (2003) ressalta a importância de que os cursos de formação possibilitem aos professores uma compreensão mais aprofundada dos conceitos básicos da Matemática e a capacidade de refletir e estar atentos às dificuldades e às idéias equivocadas de seus alunos. De acordo com a autora, a maioria dos professores ensina os conceitos de razão e proporção de um modo muito formal, enfatizando a memorização de regras.

Misailadou e Willians (2003), em estudo com crianças de 10 a 14 anos de idade, verificaram que elas utilizam predominantemente estratégias aditivas enquanto solucionam tarefas de razão e proporção. Os resultados deste estudo destacam a importância de o professor conhecer e diagnosticar os conceitos incorretos utilizados por seus alunos, auxiliando-os a melhorar a prática de sala de aula.

Mekhmandarov (2000) investigou a compreensão que crianças da pré-escola demonstram do produto cartesiano ao construir e analisar o produto de duas coleções. Os resultados do estudo revelam que as crianças podem construir elementos de produto cartesiano, ou aprenderam como fazê-lo no decorrer das entrevistas com algumas orientações.

O desempenho e o processo de aprendizagem das crianças da pré-escola, neste estudo, indicam que a estrutura de produto cartesiano pode ser trabalhada nessa faixa etária por meio de tarefas de construção e classificação, sendo facilitado por tarefas com objetos reais.

Hino (2000), ao analisar o processo pelo qual cinco alunos japoneses da 4ª série adquiriram novos usos da multiplicação em lições de medida de área, identificou que o uso da multiplicação no decorrer das lições evoluiu, com progressos individuais notáveis. Os resultados desse estudo indicam que houve uma

construção com significado da multiplicação enquanto ferramenta poderosa de pensamento.

Moro e Soares (2006) realizaram um estudo com cinquenta alunos de 3^a. e 4^a. séries de uma escola pública, solucionando quatro problemas multiplicativos de produto de medidas e encontraram diferentes níveis da construção inicial do raciocínio combinatório nas soluções dos alunos, além de verificarem que a grande maioria das soluções apresentou cálculo aditivo. De acordo com as autoras, esse fato chamou a atenção porque a adição apareceu como tentativa de as crianças utilizarem um algoritmo conhecido.

Os diferentes níveis de raciocínio combinatório identificados por Moro e Soares (2006) foram utilizados nesta pesquisa, para analisar as soluções notacionais e verbais das crianças e suas interpretações sobre as soluções que utilizaram na solução dos problemas, o que é descrito no capítulo de resultados. Como dissemos antes, identificamos assim as transformações referentes ao processo de aprendizagem de cada criança, processo esse esperado a partir das intervenções da pesquisadora, no papel de professora.

Moro e Soares (2006) pontuam que os resultados do estudo trazem algumas contribuições para a educação matemática: o papel importante do conteúdo e do formato dos problemas; a necessidade de favorecer aos alunos espaço para a elaboração de soluções alternativas sob diversas formas de notação; a relevância de o professor conhecer e interpretar as soluções das crianças para elaboração das intervenções docentes.

Nesse contexto, as autoras ressaltam a necessidade do trabalho com o raciocínio combinatório com crianças, pois, de acordo com as autoras, essa forma

de raciocínio multiplicativo, além de ser significativa para a cultura do ser humano, está presente na solução de diversos problemas do cotidiano.

Apesar de recomendações dos documentos oficiais e dos estudos e pesquisas desenvolvidas em educação matemática e em psicologia da educação matemática, fica evidente que problemas de produto de medidas são pouco freqüentes na Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Vimos pela literatura que é importante conhecer e compreender como ocorre o processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas de crianças, quando solucionam problemas, sob a intervenção do professor, para melhor identificar e avaliar suas formas de intervenção. Com isso, pretendemos ter elementos não só para estimular os professores a fazer seu trabalho com esse conceito da melhor forma possível, como também subsidiá-los na elaboração de formas de intervenção que auxiliem os alunos a construírem esse conceito matemático.

Além disso, destacamos dos estudos examinados a importância do trabalho com os diversos conceitos que estão presentes no campo conceitual das estruturas multiplicativas.

III – MÉTODO

A pesquisa ora descrita consiste em um estudo exploratório⁵ de natureza qualitativa⁶, simulando uma situação de aprendizagem de sala de aula, com os seguintes intuitos: descrever a natureza das alterações das soluções notacionais, das soluções verbais e das interpretações das crianças expressas durante a solução dos problemas de produto de medidas, conforme os níveis de raciocínio combinatório envolvidos em cada um deles; descrever a natureza das formas de intervenção expressas pela pesquisadora, no papel de professora, durante as soluções das crianças.

1 – SUJEITOS

A coleta de dados foi realizada em uma escola pública municipal de Curitiba, localizada no bairro Tatuquara. A escola foi escolhida por conveniência, pois é o local onde a pesquisadora atua como professora e pedagoga das séries iniciais do Ensino Fundamental.

Os sujeitos, cinco crianças da terceira série do Ensino Fundamental, com idade entre 9 anos (9;0) e 9 anos e 9 meses (9;9), foram sorteados, aleatoriamente, entre as crianças de cinco das seis turmas de terceira série da escola, do turno da manhã e da tarde, que concordaram em participar do estudo e foram previamente

⁵ Considera-se esta pesquisa como um estudo exploratório, pois, além de envolver um número restrito de sujeitos (apenas cinco crianças), ela se apóia, sobretudo, em trabalhos que também apenas iniciaram a abordagem da questão dos níveis de raciocínio combinatório presentes nas soluções das crianças, Moro e Soares (2006).

⁶ A pesquisa qualitativa, de acordo com Ludke (1984) apresenta algumas características principais: esforça-se para compreender situações específicas, dentro de um contexto mais amplo; busca entender o fenômeno sob a ótica dos sujeitos e não do pesquisador; o pesquisador faz a coleta das informações, que são transformadas em dados e esses dados produzidos pelo pesquisador são frutos da sua reflexão, no esforço de interpretar essa realidade; a análise desses dados é qualitativa e descritiva, pois enfoca processos, sentidos, conhecimentos e suas características.

autorizadas por seus pais ou responsáveis. A escolha dos sujeitos envolveu apenas cinco das seis turmas da escola, pois a outra é a turma para a qual a pesquisadora dá aula e, por certo, este fato traria inconvenientes para a coleta de dados.

A seguir, são apresentados os sujeitos com alguns dados de sua história escolar. As idades, indicadas em anos e meses, são aquelas que as crianças tinham no início do segundo semestre do ano letivo de dois mil e cinco, período da realização da coleta de dados.

BAR (9;1): do sexo feminino. Em 2005 cursou a terceira série no turno da tarde. Não foi repetente em nenhuma série. Ingressou na escola no ano de 2002, quando cursou a pré-escola.

EDU (9;7): do sexo masculino. Em 2005 cursou a terceira série no turno da manhã. Não foi repetente em nenhuma série. Ingressou na escola no ano de 2002, quando cursou a pré-escola.

MAT (9;7): do sexo masculino. Em 2005 cursou o primeiro semestre da terceira série no turno da manhã e o segundo semestre da terceira série no turno da tarde. Não foi repetente em nenhuma série. Ingressou na escola no ano de 2003, quando cursou a primeira série.

PED (9;9): do sexo masculino. Em 2005 cursou a terceira série no turno da manhã. Não foi repetente em nenhuma série. Ingressou na escola no ano de 2003, quando cursou a primeira série.

REN (9;0): do sexo masculino. Em dois mil e cinco cursou a terceira série no turno da tarde. Não foi repetente em nenhuma série. Ingressou na escola no ano de 2002, quando cursou a pré-escola.

Logo, os sujeitos são da faixa etária de 9 anos, em sua maioria meninos e nenhum deles foi repetente em alguma série.

2 – PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para a coleta de dados foram realizadas duas sessões de solução de problemas com cada criança, individualmente, no período da tarde, em dois dias (dezenove e vinte e nove de setembro), com intervalo aproximado de uma semana. Foram apresentados então quatro problemas a cada criança (em cada uma das duas sessões), por escrito. Foram disponibilizadas às crianças: uma folha de sulfite A4, para cada um dos problemas, uma caneta esferográfica preta e seis canetinhas hidrográficas coloridas: amarela, azul, preta, verde e vermelha, para que pudessem marcar suas respostas.

Os oito problemas, envolvendo o raciocínio multiplicativo do tipo produto de medidas, foram apresentados às crianças no formato escrito, um em cada folha de papel sulfite, pela pesquisadora, no papel da professora em atividade na sala de aula.

Todos os problemas trabalhados foram elaborados e selecionados de acordo com a classificação dos problemas de estrutura multiplicativa apresentada por Vergnaud (1983). Todos envolvem uma multiplicação do tipo produto de medidas em que, com o valor das medidas elementares, a criança deverá encontrar o valor do produto daquelas medidas dadas, combinando-se duas ou mais medidas elementares⁷. Os problemas utilizados estão a seguir relacionados por sessão.

Eis os oito problemas:

1ª. SESSÃO:

Problema 1 – Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser

⁷ A elaboração dos problemas, os materiais disponibilizados para o registro da solução das crianças, a quantidade de sessões utilizadas na coleta de dados e o intervalo de tempo entre cada uma delas foram decisões tomadas com base nos resultados do estudo piloto realizado no início do 2º. semestre do ano letivo de 2005 (Anexo 3).

de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

Problema 2 – Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

Problema 3 – Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

Problema 4 – Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

2ª. SESSÃO:

Problema 5 – Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

Problema 6 – Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

Problema 7 – Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

Problema 8 – Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

Os problemas foram escolhidos pelo fato de contemplarem duas ou três variáveis, característica essa combinada a valores altos e baixos para as variáveis (Vergnaud, 1991). Outro critério que marcou a escolha dos oito problemas se deve ao fato de que eles envolvem uma multiplicação, pois se considera essa solução menos complexa que a divisão para os sujeitos escolhidos. Além disso, foi considerado que, ao final da terceira série, as crianças estariam mais familiarizadas com o algoritmo da multiplicação. Assim, esses aspectos não seriam obstáculos maiores para levar os sujeitos a tentar solucionar os problemas.

Há ainda mais dois critérios que se fizeram presentes na escolha dos problemas: presença ou ausência de valores distractores⁸ e tipo e registro dos valores, em algarismos ou escrita alfabética.

O sujeito dispunha de uma mesa quadrada para trabalhar. Ele e a experimentadora permaneceram sentados, frente a frente, durante a solução dos problemas.

Para a proposição dos problemas, foi elaborado previamente um roteiro, com procedimentos básicos, que foram utilizados para iniciar a primeira sessão e, com pequenas alterações, para iniciar a segunda sessão.

ROTEIRO – 1ª. SESSÃO:

- Explicação para o sujeito da atividade a ser desenvolvida. “Hoje vamos resolver problemas! Você já resolveu problemas na escola?”
- Apresentação dos problemas digitados em folha de papel sulfite (A4) – anexo 1 – na qual o sujeito registraria a solução, utilizando para isso a caneta esferográfica preta ou canetinhas hidrográficas coloridas.
- Orientação sobre a forma de registro e os materiais disponíveis para o sujeito utilizar. “Utilizando a caneta ou as canetinhas e a folha de sulfite, você vai resolver esses problemas do seu jeito. Você pode resolver os problemas do jeito que você quiser: pode usar contas, desenhos, risquinhos ou o que você preferir. Se você quiser apagar alguma coisa, você risca com um X e começa de novo.”
- Questão para verificar se o sujeito queria ler o problema ou gostaria que fosse lido pela experimentadora: “Você quer ler o problema sozinho ou quer que eu leia para você?”

ROTEIRO – 2ª. SESSÃO:

- Explicação para o sujeito da atividade que seria desenvolvida. “Você lembra da atividade que você fez comigo? Pois é, hoje nós vamos resolver mais quatro problemas!”
- Apresentação dos problemas digitados em folha de papel sulfite (A4) – anexo 2 – na qual o sujeito registraria a solução, utilizando para isso os mesmos materiais que utilizou na 1ª. sessão: a caneta esferográfica preta ou canetinhas hidrográficas coloridas.
- Orientação sobre a forma de registro e os materiais disponíveis para o sujeito utilizar. “Como da última vez, você vai resolver os problemas

⁸ Valores distractores são os que, desnecessários para a solução do problema, aparecem no texto do problema, para verificar, se os sujeitos de fato identificam os valores das variáveis propriamente ditos Vergnaud (1983; 1991).

utilizando a caneta ou as canetinhas e a folha de papel sulfite. Você vai resolver os problemas do seu jeito. Você pode resolver os problemas do jeito que você quiser: pode usar contas, desenhos, risquinhos ou o que você preferir. Se você quiser apagar alguma coisa, você risca com um X e começa de novo.”

- Questão para verificar se o sujeito queria ler o problema ou gostaria que fosse lido pela experimentadora: “Você quer ler o problema sozinho ou quer que eu leia para você?”.

Os roteiros acima descritos foram utilizados para apresentar às crianças, da forma mais clara, os problemas.

Quando cada criança finalizava suas notações referentes à solução da situação-problema apresentada, era questionada pela experimentadora, no papel de professora, a explicar os procedimentos e a interpretar as notações utilizadas. A solicitação das explicações seguiu o estilo clínico-crítico proposto por Piaget (1983). Como conhecida, essa forma de interrogar o sujeito envolve perguntas para obter respostas próprias do sujeito e suas justificativas.

Para realizar a entrevista, o experimentador vai com a intenção clara de conversar sobre um determinado conceito ou uma determinada noção – a respeito da qual quer saber a concepção do sujeito. Dessa forma, o experimentador precisa possuir um roteiro específico com determinadas questões que se fazem necessárias, pois são as questões norteadoras. Tais questões devem ser sempre seguidas de pedidos de justificativa ao sujeito, provocando-o a refletir sobre sua ação ou resposta. O experimentador pode variar a forma e a ordem de tais questões ou colocar outras pertinentes, se o conteúdo das falas e ações do sujeito o provocar.

Esse procedimento permite ao experimentador coletar dados sobre a forma de pensar dos sujeitos, as relações e concepções que ele elaborou ou pode estar elaborando sobre o conteúdo focalizado.

A experimentadora, no papel de professora, elaborou, portanto, questões que se fizeram necessárias para captar mais elementos sobre a compreensão da criança e melhor analisar o seu raciocínio.

Como foi expresso anteriormente, todos os problemas utilizados possuem uma estrutura que remete à composição cartesiana de dois espaços de medidas, M_1 e M_2 , em uma terceira medida, M_3 , ou seja, pertencem ao tipo de problema, denominado por Vergnaud (1983; 1991) como de produto de medidas ou produto cartesiano, no quadro das estruturas multiplicativas.

O problema 1 “Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?”, contempla duas variáveis em que, M_1 representa a quantidade de tamanhos dos bolos (3) e M_2 , a quantidade de sabores (6). A medida M_3 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 (18 combinações possíveis). Além disso, os valores das variáveis são baixos e aparecem por extenso.

No problema 2 “Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?”, aparecem os valores distractores (5, 5 e 4), neste caso, M_1 representa a quantidade de tipos de carros (3) e M_2 , a quantidade de tipos de rodas (2). A medida M_3 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 (6 combinações possíveis).

Já o problema 3 “Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?”,

além de contemplar duas variáveis em que, M_1 representa a quantidade de cores diferentes de camisetas (15) e M_2 , a quantidade de personagens (12). A medida M_3 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 (180 combinações possíveis), os valores das variáveis são altos e aparecem numericamente.

O problema 4 “Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?”, envolve três variáveis e apresenta valores baixos que aparecem por extenso, em que M_1 representa a quantidade de sabores de sorvetes (7), M_2 a quantidade de tipos de cobertura (3) e M_3 representa a quantidade de tipos de casquinha (2). A medida M_4 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 , pela medida M_3 (42 combinações possíveis).

O problema 5 “Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?”, contempla duas variáveis, em que M_1 representa a quantidade de tamanhos das mochilas (2) e M_2 , a quantidade de cores diferentes (5). A medida M_3 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 (10 combinações possíveis). Além disso, os valores das variáveis são baixos e aparecem por extenso.

No problema 6 “Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?”, aparecem os valores distractores (6, 8 e 12); neste caso, M_1 representa a

quantidade de sabores de pizzas (30) e M_2 , a quantidade de tamanhos de pizzas (3). A medida M_3 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 (90 combinações possíveis).

Já o problema 7 “Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?”, além de contemplar duas variáveis, em que M_1 representa a quantidade de camisetas (15) e M_2 , a quantidade de bermudas (11). A medida M_3 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 (198 combinações possíveis), os valores das variáveis são altos e aparecem numericamente.

O problema 8 “Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?”, envolve três variáveis e apresenta valores baixos que aparecem por extenso, em que M_1 representa a quantidade de tipos de queijo (2), M_2 a quantidade de tipos de patê (3) e M_3 representa a quantidade de tipos de pães (4). A medida M_4 representa o produto da medida M_1 pela medida M_2 , pela medida M_3 (24 combinações possíveis).

3 – PROCEDIMENTOS DE REGISTRO DE DADOS

Para o registro dos dados, as sessões foram filmadas em vídeo, na íntegra, e os dados (ações, verbalizações, soluções notacionais) foram transcritos, na íntegra, em protocolos (um para cada sujeito). Dessa transcrição constam as falas da experimentadora, no papel de professora; também constam a fala, os gestos e os movimentos dos sujeitos, expressos durante a solução dos problemas propostos.

Os protocolos das entrevistas, as soluções notacionais dos sujeitos nas folhas de papel sulfite e a intervenção da pesquisadora, no papel de professora, constituíram-se material de análise desta pesquisa.

4 – PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS

Como antes foi sugerido, o principal procedimento de análise dos dados desta pesquisa é de natureza qualitativa: são descritos e analisados o conteúdo das soluções notacionais, das soluções verbais das crianças e de suas interpretações sobre suas soluções, para identificar e acompanhar o processo de aprendizagem ocorrente em cada sessão, bem como as intervenções da pesquisadora, no papel de professora, para descrever os tipos dessas intervenções a cada sessão.

A análise das soluções notacionais, das explicações utilizadas pelas crianças e da intervenção da professora foi feita por sujeito e por sessão.

Tomando como critério os níveis de raciocínio combinatório identificados por Moro e Soares (2006), apresentados no capítulo de resultados, foi identificado o nível de raciocínio combinatório de cada criança ao solucionar cada um dos problemas apresentados. Foi então verificado se, no decorrer da solução de cada problema, os níveis de raciocínio combinatório de cada criança, implicado naquela solução, alterava-se.

Para identificar e descrever as formas de intervenção utilizadas pela pesquisadora, no papel de professora, durante a solução dos problemas foram identificadas, em cada seqüência de falas da pesquisadora, as características da sua intervenção, no intento de ser obtida uma tipologia de formas de intervenção, descrita no capítulo seguinte.

IV – RESULTADOS

Para identificar a presença ou não de raciocínio combinatório, em seus diferentes níveis e subníveis, nas soluções notacionais e verbais e nas interpretações das crianças sobre essas soluções aos problemas propostos sobre produto de medidas, foram tomados como base os estudos de Moro e Soares (2006).

A seguir estão descritos os níveis e subníveis de raciocínio combinatório, identificados por Moro e Soares (2006), em um estudo com alunos de 3^a. e 4^a. séries, obtidos da análise das soluções de todos os sujeitos a quatro problemas multiplicativos de produto de medidas:

Nível 0 – DE RESPOSTA ALHEIA AO CONTEXTO: consiste em solução não numérica, descontextualizada em relação ao que pede o problema, com ausência de referência às variáveis.

Nível I – DE RESPOSTA CONTEXTUALIZADA SEM INDÍCIO DE COMBINAÇÃO:

Sub-nível IA: **Da escolha de variáveis**, consistindo de soluções que contém escolhas relativas a uma ou mais variáveis, sem qualquer combinação entre elas. Vão desde escolha(s) qua(is)quer relativa(s) a uma variável, até escolhas mais organizadas referentes a exemplares diferentes das variáveis, mas passando por escolhas identificadas relativas a uma ou mais variáveis e/ou as que se reportam a valores diferentes das variáveis.

Sub-nível IB: **Da adição de valores**, consistindo em soluções que se limitam ao cálculo aditivo (mental ou não) de parte, de todos os valores envolvidos, em certo momento incluindo distractores e não distractores e, depois, somente os valores das variáveis, conforme sua ordem de aparecimento ou não.

Sub-nível IC: **Das composições numéricas em cálculos aditivos, multiplicativos e/ou de divisão**, quando há emprego de algoritmo de composição numérica (conhecido) em contexto ao qual ele não se aplica. São obtidas uma ou mais composições numéricas (com ou sem desenho ilustrativo) com os valores das variáveis (e/ou com os distractores), entre si combinados, na maior parte dos casos para efetuar cálculos diversos, na aparente busca de “muitas maneiras”.

Nível II – DAS PRIMEIRAS APROXIMAÇÕES À SOLUÇÃO COMBINATÓRIA:

Sub-nível IIA: **Do caso favorito**, trata-se da representação de uma, e somente uma, possibilidade de combinação entre as variáveis (um e somente um valor de cada uma delas). Seria a combinação escolhida por razão estética ou de adequação de uso às vezes indicado. Quando presentes, os valores distractores são também, às vezes, considerados.

Sub-nível IIB: **Dos casos favoritos conforme valor distractor ou de variável estranha**, são soluções em que há a representação de alguns casos (sobretudo, três) de combinação das variáveis, envolvendo um ou

mais valores de cada uma delas. Estes valores não se excluem quando os valores das variáveis são pequenos (caso do problema 3). Mas excluem-se em outros casos: a cada valor de uma variável corresponde somente um valor da outra, por vezes ainda conforme critério de uso adequado, e com forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador.

Sub-nível IIC: **Dos casos favoritos ignorados os distractores**, as soluções representam alguns casos (sobretudo, três) de combinação das variáveis, cujos valores aparecem emparelhados, sem que os valores distractores interfiram na solução. Os valores das variáveis se excluem: a cada valor de uma variável corresponde somente um valor da outra, por vezes ainda conforme critério de uso adequado. Há forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador.

Nível III – DA OBTENÇÃO DE ALGUMAS COMBINAÇÕES:

Sub-nível IIIA: **As buscas iniciais de combinações, “distorcidas” pelos “distractores”**, são soluções em que estão representadas muitas combinações entre os valores das variáveis, mas regidas pelos valores distractores presentes (caso exclusivo do problema 1). Estas combinações são obtidas ou apenas com cálculo aditivo ou mesclando tais cálculos com os multiplicativos, na aparente busca de “muitas maneiras”.

Sub-nível IIIB: **As aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão**, consistem em soluções obtidas mediante diferentes combinações e complementações de cálculos aditivos, multiplicativos e de divisão entre alguns e/ou todos os valores das variáveis envolvidas, repetidos ou não, bem como entre resultados desses cálculos, complementados por vezes por valores unitários do texto do problema. Os diferentes tipos dos cálculos empregados são efetuados em ordens variadas, quer para eles próprios, quer para valores aplicados. Logo, há diferentes “junções” aditivas, multiplicativas e de divisão entre os valores das variáveis e/ou unitários, na busca de um certo número de combinações.

Sub-nível IIIC: **Das muitas combinações aditivo-multiplicativas: são soluções a problemas com três variáveis**, consistindo em número limitado de combinações entre os valores envolvidos, obtidos da combinação de adições e multiplicações, logo, diferentes “junções” aditivo-multiplicativas na busca da resposta final em termos de “muitos casos”. Por vezes, há também a representação por diagrama com recursos pictóricos, quando aparece a dificuldade em representar os valores das três variáveis.

Nível IV – DA PRESENÇA DE SOLUÇÃO COMBINATÓRIA: são soluções em que estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer em representação pelo diagrama cartesiano, quer por cálculo multiplicativo canônico (MORO e SOARES, 2006, p. 13-15).

Nesta pesquisa, foram encontrados quase os mesmos níveis e subníveis identificados por Moro e Soares (2006); contudo, identificaram-se também diferente subnível de raciocínio combinatório e ausência de um nível e de alguns subníveis. Destaca-se a respeito a seguinte diferença: Moro e Soares (2006) obtiveram esses níveis analisando as soluções notacionais, enquanto, nesta pesquisa, os níveis e subníveis foram aplicados também às soluções verbais das crianças e às suas interpretações sobre as soluções que utilizaram.

A seguir estão descritos os níveis e subníveis de raciocínio combinatório, que foram identificados nesta pesquisa com alunos da 3ª. série do Ensino Fundamental, obtidos na análise das soluções notacionais, das soluções verbais e das interpretações sobre suas soluções, de todos os sujeitos aos oito problemas de produto de medidas resolvidos.

Nível I – DE RESPOSTA CONTEXTUALIZADA SEM INDÍCIO DE COMBINAÇÃO

Subnível IA: **Da escolha de variáveis** consiste de soluções que contêm escolhas relativas a uma ou mais variáveis, sem qualquer combinação entre elas, vão desde escolha(s) qua(is)quer relativa(s) a uma variável até escolhas mais organizadas referentes a exemplares diferentes das variáveis, mas passando por escolhas identificadas relativas a uma ou mais variáveis e/ou às que se reportam a valores diferentes das variáveis.

Subnível IB: **Da adição de valores** consiste de soluções que se limitam ao cálculo aditivo ou à divisão (mental ou não) de parte de todos os valores envolvidos, em certo momento incluindo distractores e não-distractores, e depois, somente os valores das variáveis, conforme sua ordem de aparecimento ou não.

Nível II – DAS PRIMEIRAS APROXIMAÇÕES À SOLUÇÃO COMBINATÓRIA

Subnível IIA: **O caso favorito** trata da representação de uma, e somente uma, possibilidade de combinação entre as variáveis (um, e somente um, valor de cada uma delas). Seria a combinação escolhida por razão estética ou de adequação de uso às vezes indicado. Quando presentes, os valores distractores são também, às vezes, considerados.

Subnível IIB: **Os casos favoritos ignorados os distractores** consiste de soluções que representam alguns casos (sobretudo, três) de combinação das

variáveis, cujos valores aparecem emparelhados, sem que os valores distractores interfiram na solução. Os valores das variáveis se excluem: a cada valor de uma variável corresponde somente um valor da outra, por vezes ainda conforme critério de uso adequado. Há forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador.

Subnível IIC: **Os casos favoritos combinando duas variáveis com uma** consistem em uma variância em que valores das duas variáveis estão presentes. Essas combinações são obtidas por meio de registro pictórico, por meio de escrita alfabética e numérica ou por meio da combinação dessas duas. A cada valor de uma variável correspondem dois valores da outra variável.

Nível III – DA OBTENÇÃO DE ALGUMAS COMBINAÇÕES

Subnível IIIA: **As buscas iniciais de combinações, “distorcidas” pelo valor de uma variável** são soluções em que as combinações são representadas de acordo com alguma variável, de maior e/ou de menor valor. Essas combinações são obtidas por meio de representação pictórica, margeada sempre pela variável de maior valor, na aparente busca de “muitas maneiras”.

Subnível IIIB: **As aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão** consistem em soluções obtidas mediante diferentes combinações e complementações de cálculos aditivos, multiplicativos e de divisão entre alguns e/ou todos os valores das variáveis envolvidas, repetidos ou não, bem como entre resultados desses cálculos, complementados por vezes por valores unitários do texto do problema. Os diferentes tipos dos cálculos empregados são efetuados em ordens variadas, quer para eles próprios, quer para valores aplicados. Logo, há diferentes “junções” aditivas, multiplicativas e de divisão entre os valores das variáveis e/ou dos valores unitários, na busca de certo número de combinações.

Subnível IIIC: **As muitas combinações aditivo-multiplicativas** são soluções para problemas com três variáveis, consistindo em número limitado de combinações entre os valores envolvidos, obtidos da combinação de adições e multiplicações; logo, são diferentes “junções” aditivo-multiplicativas na busca da resposta final em termos de “muitos casos”. Por vezes, há também a representação por diagrama com recursos pictóricos, quando aparece a dificuldade em representar os valores das três variáveis.

Subnível IIID: **As combinações possíveis entre duas das três variáveis** são soluções para problemas com três variáveis, em que estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores de duas das três variáveis envolvidas, quer por meio de representação pictórica, quer por meio de cálculo aditivo ou multiplicativo convencional, quer por duas ou mais dessas representações, na busca da resposta final em termos de “muitos casos”. A cada valor de uma variável correspondem todos os valores da outra variável, em que se verifica a dificuldade em representar os valores das três variáveis, pois, em muitos dos casos, combinam-se novamente os valores da variável combinada com os valores da outra variável que ainda não havia sido combinada.

Nível IV – DA PRESENÇA DE SOLUÇÃO COMBINATÓRIA: são soluções em que estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer em representação pictórica, quer por cálculo aditivo e/ou multiplicativo convencional, quer por cálculo aditivo não-convencional, quer por “árvore” de possibilidades, quer por duas ou mais dessas representações, envolvendo ou não escrita alfabética e numérica.

Para responder à questão da pesquisa sobre formas de intervenção, foram também identificadas e transcritas, com base na análise dos protocolos de dados, as

formas de intervenção da pesquisadora, no papel de professora, durante a solução dos problemas pelas crianças. Essas formas de intervenção foram as seguintes: orientadora, reorientadora, questionadora e instigadora.

A seguir estão descritas as referidas formas de intervenção.

A – ORIENTADORA

A forma ORIENTADORA de intervenção se fez presente no início de cada uma das sessões de solução de problemas. Consistiu em ações de apresentação da tarefa ao sujeito com explicações referentes à natureza dessa tarefa e aos diversos procedimentos e materiais passíveis de uso, de recomendações sobre a necessidade do registro das soluções. Essa forma de intervenção também se fez presente no início da solução de cada problema, com eventual leitura do problema proposto. Além disso, no decorrer da solução de cada um dos problemas, essa forma de intervenção também apareceu, embora com menor frequência.

Essa forma de intervenção apareceu, especificamente, quando a EXP⁹:

A I – Apresentou e explicou a atividade a ser desenvolvida.

A II – Entregou os materiais que poderiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito.

A III – Leu o problema em voz alta a pedido do sujeito.

A IV – Sugeriu que o sujeito lesse o problema, buscando as informações que ele trazia.

A V – Leu a questão do problema em voz alta.

A VI – Sugeriu que o sujeito lesse o problema, identificando a questão proposta.

⁹ A abreviatura EXP indica as intervenções da experimentadora, no papel de professora, durante a solução dos problemas pelas crianças.

A VII – Sugeriu que o sujeito registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

B – REORIENTADORA

A forma REORIENTADORA de intervenção se fez presente no decorrer de cada uma das sessões de solução de problemas. Consistiu em ações expressas no transcorrer da tarefa com o intuito de lembrar ao sujeito a atividade que estava sendo desenvolvida, a diversidade de notações e de materiais que poderia utilizar, reencaminhá-lo na busca de uma solução e/ou lembrá-lo das recomendações iniciais.

Essa forma de intervenção apareceu, especificamente, quando a EXP:

B I – Repetiu as orientações iniciais para deixar claro ao sujeito a natureza da atividade que estava sendo desenvolvida, diante dos sinais de incompreensão, insegurança e/ou ansiedade demonstrados pelo sujeito.

B II – Relembrou ao sujeito os materiais e a diversidade de notações que poderia utilizar para solucionar o problema.

B III – Solicitou ao sujeito que observasse as informações que estavam escritas no problema, verificando se os dados que havia utilizado e/ou a resposta dada estavam de acordo com as informações explicitadas no problema.

B IV – Insistiu com o sujeito para que iniciasse a solução do problema, lembrando a ele que podia tentar uma solução sem receio de errar, quando este demonstrava certa insegurança.

B V – Solicitou ao sujeito que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial de uma, duas ou três das variáveis.

C – QUESTIONADORA

A forma QUESTIONADORA de intervenção se fez presente no decorrer e ao término de cada solução notacional e/ou verbal, bem como ao término das interpretações sobre as soluções apresentadas pelo sujeito. O intuito principal dessa forma de intervenção foi o de colocar perguntas para que o sujeito refletisse sobre a solução notacional que produzira e/ou sobre o conteúdo da verbalização que expressara. Conforme o esperado, esse tipo de intervenção suscitou outras de mesmo tipo, de acordo com as respostas dos sujeitos. Essas perguntas possibilitaram à experimentadora captar mais elementos sobre a compreensão do sujeito para melhor analisar o seu raciocínio.

Essa forma de intervenção apareceu, especificamente, quando a EXP:

C I – Indagou ao sujeito a explicação da solução notacional ou verbal, correta ou incorreta, utilizada para solucionar o problema.

C II – Pediu ao sujeito verificasse se sua resposta estava de acordo com a questão e/ou informação proposta pelo problema.

C III – Solicitou ao sujeito que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

C IV – Expressou dúvida sobre a viabilidade ou inviabilidade da solução utilizada pelo sujeito.

C V – Indagou o sujeito sobre uma informação que constava no problema, verificando se de fato ele a compreendia.

C VI – Pediu ao sujeito que explicitasse o que não havia entendido.

C VII – Pediu ao sujeito que explicitasse o que o problema estava perguntando, para verificar se de fato ele o compreendia.

D – INSTIGADORA:

A forma INSTIGADORA de intervenção se fez presente intercalada à forma QUESTIONADORA durante a solução de todos os problemas. Consistiu de questões que provocaram o sujeito a iniciar a busca de uma solução notacional e/ou verbal, bem como a refletir sobre parte de sua solução notacional, quer na busca de outra solução para o problema, quer na avaliação de sua estratégia.

Essa forma de intervenção apareceu, especificamente, quando a EXP:

D I – Provocou o sujeito à busca de uma solução para o problema e/ou de outra solução para o problema.

D II – Desafiou o sujeito a buscar uma solução mais adiantada, diante da utilização de uma mesma estratégia menos adiantada para a solução do problema.

D III – Instigou o sujeito a refletir se já havia aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo e/ou algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

D IV – Desafiou o sujeito à responder à questão do problema.

D V – Provocou o sujeito a refletir sobre sua solução notacional e verbal e/ou parte de sua solução notacional e verbal.

D VI – Provocou o sujeito a relatar as informações que leu no problema.

D VII – Provocou o sujeito a ler a pergunta do problema.

D VIII – Estimulou o sujeito a explicitar o que estava pensando.

D IX – Desafiou o sujeito a repensar o procedimento de cálculo utilizado para solucionar o problema.

D X – Provocou o sujeito a refletir sobre a solução notacional e/ou solução verbal que havia desconsiderado.

D XI – Apresentou um contra-exemplo para instigar a reflexão do sujeito.

Seguem os resultados obtidos de cada sujeito, conforme cada sessão e cada problema. São descritas na ordem em que ocorreram as formas de intervenção da experimentadora e as soluções (notacionais e verbais) dadas pelas crianças aos problemas, bem como as interpretações sobre suas soluções, descritas em termos de níveis de raciocínio combinatório implicados naquela solução e/ou interpretação.

1 – RESULTADOS – 1ª. SESSÃO

1ª. SESSÃO – PED – (9; 9) ¹⁰

PROBLEMA 1

Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que poderiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e o lembrou dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que poderia utilizar para solucionar os problemas.

2º. momento: A EXP leu o problema em voz alta a pedido de PED.

PED – (Enquanto a EXP fazia a leitura do problema, PED acompanhava a leitura do problema e olhava para a EXP). Cinco. (Olha para a EXP).

3º. momento: PED obteve cinco, como resposta; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizou.

¹⁰ Essa marca indica a idade cronológica do sujeito em anos e meses; por exemplo, (9; 9) nove anos e nove meses de idade. Refere-se à idade da criança, na época em que foi realizada a coleta de dados.

EXP – Por que cinco?

PED – (Olha para o problema, fica em silêncio e olha para a EXP).

4º. momento: PED ficou em silêncio; então, a EXP indagou dele algumas informações que constavam no problema, verificando se de fato ele as compreendera.

EXP – Quantos tamanhos de bolos têm para vender nesta panificadora?

PED – Três. (Olha para a EXP).

EXP – Três? E cada tamanho de bolo pode ser de quantos sabores?

PED – (Olha para o problema e olha para a EXP). Dois.

Essa solução de PED encontra-se no nível II, subnível IIC: dos casos favoritos combinando duas variáveis com uma. Representa a combinação de duas variáveis com uma. A cada valor de uma variável correspondem dois valores da outra variável.

5º. momento: Após a resposta de PED a EXP pediu a ele que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações do problema.

EXP – Só pode ser de dois sabores?

PED – (Olha para o problema e permanece em silêncio).

EXP – O que está dizendo no problema. Cada bolo pode ser de quantos sabores?

PED – (Olha para a folha onde está escrito o problema e faz novamente a leitura silenciosa). Seis.

6º. momento: Depois que PED retomou as informações do problema e identificou que cada bolo poderia ser de seis sabores, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – De seis sabores. Então o bolo pequeno ele pode ter quantos sabores?

PED – (Olha para o problema, em seguida para a EXP). Seis.

EXP – É o bolo médio?

PED – (Olha para o problema, em seguida para a EXP). Seis.

EXP – É o bolo grande?

PED – (Olha para o problema, em seguida para a EXP). Seis. (Olha para a EXP e sorri). Todos os tamanhos podem ser com seis sabores.

7º. momento: Verificando que PED identificou que cada um dos tamanhos de bolo poderia combinar com os seis sabores, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Então quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher? Quantos tipos diferentes de bolo têm nessa panificadora? Você só vai poder comprar um, mas para escolher. Quantos tipos diferentes de bolo têm lá?

PED – (Pára, olha para o problema, olha para a EXP, olha para o problema novamente). Dezoito. (Olha para a EXP).

8º. momento: PED obteve dezoito, como resposta; então, a EXP solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Por que dezoito? (Olha para PED).

PED – (Tira a mão esquerda de cima da mesa). Contando de seis em... Seis vezes três dá dezoito... (Com a mão direita que está segurando a caneta preta, aponta para as informações que estão no problema).

9º. momento: A EXP sugeriu que PED registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – Então anota isso que você falou para podermos conversar e eu entender o que você está pensando.

PED – (Com a caneta preta que está em sua mão anota: $6 \times 3 = 18$ e quando finaliza sua notação olha para a EXP).

$$6 \times 3 = 18$$

10º. momento: Após PED finalizar sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que o número seis representa? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número seis).

PED – (Olha para a EXP). Seis sabores.

EXP – É o três? (Olha para PED).

PED – (Olha para a EXP). Tamanho...

EXP – É o dezoito, representa o quê?

PED – (Aponta com a caneta para as informações do problema, coloca a mão esquerda no rosto, olha para o problema, pára e coloca a mão na boca). O resultado. (Olha para a EXP).

EXP – Representa o resultado. Mas o resultado é o que? São os tipos diferentes do que?

PED – Do bolo. (Permanece olhando para a EXP e com a mão esquerda na boca).

EXP – São dezoito o que?

PED – Bolos diferentes. (Olha para a EXP).

EXP – Combinando o que... Os?

PED – Os sabores...

EXP – Com os... (Aponta para as notações de PED).

PED – Tamanhos. (Olha para a EXP e sorri).

Balas diferentes
 6 representa os valores diferentes
 em tres tamanhos

PED iniciou a solução do problema com solução de subnível IIC, mas ao final sua solução notacional e verbal e sua interpretação sobre a solução que havia utilizado, indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória, quando estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que se alternaram as formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; orientadora e questionadora, com incidência maior das formas orientadora e reorientadora.

PROBLEMA 2

Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

1º. momento: A EXP leu o problema em voz alta, a pedido do sujeito e, percebendo que PED estava em dúvida sobre o que fazer, a EXP provocou-o a relatar as informações do problema.

EXP – Então neste problema está falando o que? (Olha para PED).
 PED – (Olha para a EXP e fica em silêncio).

2º. momento: PED ficou em silêncio; então, a EXP solicitou a ele algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as compreendera.

EXP – Este problema está passando onde? Em que local que é?

PED – (Olha para a EXP, olha para o problema, fica em silêncio, olha novamente para o problema).

Loja. (Olha para a EXP, a mão esquerda permanece apoiando o queixo).

EXP – Em uma loja que vende o que? (Olha para PED).

PED – Uma loja... Eh... Carros... (Olha para a EXP).

EXP – Que tipos de carros têm para vender nessa loja? (Olha para PED).

PED – Gols, palio e... (Olha para o problema) E corsa. (Olha para a EXP).

EXP – Gols, pálios e corsas. E que tipos de rodas têm?

PED – Esportiva e comum. (Responde olhando para a EXP).

3º. momento: Após PED identificar todas as variáveis necessárias à solução do problema, a EXP o desafiou a responder à questão do problema.

EXP – De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Enquanto faz a leitura em voz alta, aponta para as informações do problema).

PED – (Enquanto a EXP faz a leitura do problema, acompanha com os olhos e quando finaliza, olha para ela e fica em silêncio, em seguida, olha para o problema, olha novamente para a EXP e sorri).

4º. momento: PED demonstrou estar em dúvida sobre o que fazer; então, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – Quantos tipos de carros têm para vender nessa loja? (Olha para PED).

PED – Quatorze. (Olha para a EXP).

5º. momento: PED disse que na loja havia 14 tipos de carro para vender; então, a EXP pediu a ele que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações do problema.

EXP – Tipos de carro? Tem quatorze tipos de carro para vender nessa loja? (Olha para PED).

PED – (Olha para a EXP e fica em silêncio). Não... Tipos não... (Olha para a EXP).

EXP – Tipos de carros têm quantos? (Olha para PED).

PED – Cinco. (Olha para a EXP).

EXP – Cinco tipos de carros? (Olha para PED).

PED – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Quais são os tipos que tem? (Olha para PED).

PED – São tre... Três... É três. (Olha para a EXP e, em seguida, olha para o problema).

EXP – Três tipos de carro. Quais tipos que são? (Olha para PED).

PED – (Olha para o problema). Gol, palio e corsa. (Olha para a EXP e continua apoiando o queixo com a mão esquerda).

EXP – E quantos tipos de roda? (Olha para PED).

PED – Duas. (Olha para a EXP e continua apoiando o queixo com a mão esquerda).

6º. momento: PED identificou todas as variáveis necessárias à solução do problema e seus respectivos valores; então, a EXP o desafiou a responder à questão do problema. Em seguida, lembrou-lhe os materiais e a diversidade de notações que poderia utilizar para solucionar o problema. Percebendo PED inseguro para iniciar a solução do problema, a EXP solicita a ele uma informação que consta no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – Por exemplo: o carro gol pode combinar com qual tipo de roda? (Olha para PED).

PED – (Pára, olha para a EXP). Comum. O gol... Com a comum... (Olha para a EXP).

Essa solução verbal de PED indica solução de nível II, subnível IIA: do caso favorito. Essa solução representa uma, e somente uma, possibilidade de combinação entre as variáveis (um, e somente um, valor de cada uma delas).

7º. momento: A EXP pediu a PED que verificasse se sua resposta estava de acordo com a questão proposta pelo problema.

EXP – Só com a comum? (Olha para PED).

PED – (Olha para o problema). Esportiva. (Olha para a EXP). Com a comum e com a esportiva. Com as duas. (Olha para o problema).

EXP – E o palio? (Aponta para a palavra palio com o dedo indicador da mão direita).

PED – (Olha para o problema, coloca a mão esquerda apoiada no queixo, pára...). Esportiva. (Olha para a EXP).

EXP – Só com a esportiva? (Olha para PED).

PED – Comum. (Permanece com a mão esquerda no queixo e olha para a EXP).

EXP – E a comum. E o corsa? (Olha para PED).

PED – (Olha para o problema, fica em silêncio). Os dois. (Olha para a EXP).

8º. momento: PED identificou que cada um dos carros poderia combinar com os dois tipos de roda; então, a EXP o desafiou a responder à questão do problema.

EXP – De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Lê novamente a pergunta do problema e olha para PED).

PED – (Pára, olha para o problema, faz uma leitura silenciosa e permanece com a mão apoiando o queixo). Seis.

9º. momento: PED obteve seis, como resposta; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente e, em seguida, pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – De seis? (Olha para PED). Então anota aí e nós vamos conversar sobre o que você fez, por que você acha que dá seis. (Aponta para a folha de sulfite).

PED – (Com a caneta preta que está em sua mão direita, escreve o número seis logo abaixo do problema e fica em silêncio).

EXP – Por que você acha que dá seis? (Olha para PED).

PED – Por causa dos três carros... Aqui... (Aponta com a caneta para os tipos de carros que estão escritos no problema) Com... E das duas rodas... Que tem... (Aponta para os tipos de rodas que estão escritos no problema) Esportiva e comum... Daí é isso que dá... (Olha para a EXP).

10º. momento: Na seqüência, a EXP instigou-o a refletir se já aprendera, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – E você já aprendeu alguma conta na sua sala de aula, na escola, que você pudesse fazer para encontrar este resultado? (Aponta para o número 6 que PED registrou na folha).

PED – (Segura a caneta preta em pé, em cima da mesa)

EXP – O que passou lá dentro da sua cabeça... (Olha para PED).

PED – (Movimenta a caneta preta que está na mão direita). Eu coloquei... Dois vezes três. (Olha para a EXP).

11º. momento: PED relatou que efetuaría uma multiplicação; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse na folha de papel sulfite, as informações que explicitara oralmente.

EXP – Então anota! (Olha para PED). Anota para eu entender o que você está pensando.

PED – (Olha para a EXP e, com a caneta preta que está na sua mão, faz a seguinte notação: $2 \times 3 = 6$, quando finaliza, olha para a EXP).

$$2 \times 3 = 6$$

12º. momento: A EXP solicitou a PED que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que o dois representa? (Olha para PED).

PED – O tipo de roda. (Aponta com a caneta preta para esta informação no problema).
 EXP – Então anota. (Aponta para a folha e olha para PED).
 EXP – E o três? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número três).
 PED – Três carros. (Olha para a EXP).
 EXP – E o que o seis representa?
 PED – Os três tipos... De carro... (Aponta para esta informação no problema). E... E... Os dois... Dois tipos de roda (Aponta para esta informação no problema). No total dão... Vai dar... Seis tipos diferentes de carro. (Olha para a EXP).

6 numero 2 representa os tipos de rodas
 3 representa os tipos de carros

De início, solução de subnível IIA, que se alterou no decorrer da solução. No final, a solução notacional e verbal de PED e sua interpretação sobre a solução que havia utilizado indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória, quando estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: orientadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; reorientadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; orientadora e questionadora.

PROBLEMA 3

Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

1º. momento: PED fez a leitura silenciosa do problema e, em seguida, a EXP leu o problema em voz alta, a pedido de PED.

PED – (Enquanto a EXP lê o problema, PED acompanha a leitura bem baixinho, olhando sempre para o problema. A mão direita que segura a caneta está em cima da mesa e a mão esquerda continua apoiando o queixo. Quando finaliza a leitura, PED permanece em silêncio, movimenta os dedos da mão esquerda que estão próximos a boca e observa o problema, em seguida, aponta com a caneta para o problema buscando as informações. Movimenta a caneta entre os dedos). Doze. (Olha para a EXP).

2º. momento: PED obteve doze, como resposta; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse a solução verbal utilizada para solucionar o problema.

EXP – Doze? Por que você acha que são doze? (Olha para PED).

PED – Por que... (Aponta para o problema) Ela pode bordar... Ela tem doze personagens diferentes. (Aponta com a caneta preta para esta informação do problema).

Essa resposta de PED indica solução de nível I, subnível IA: da escolha de variáveis. Essa solução contém escolha relativa a uma variável, sem qualquer combinação entre as variáveis.

3º. momento: PED explicou como havia pensado e, na seqüência, a EXP indaga dele uma informação que consta no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – E quantas cores de camiseta ela tem? (Olha para PED).

PED – Quinze. (Olha para a EXP). Poderia ser com o Ursinho Puff, né? (Olha para a EXP e sorri).

4º. momento: Verificando que PED havia identificado o valor da variável camisetas e havia indicado um personagem, a EXP indaga dele uma informação que consta no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – E o Ursinho Puff poderia aparecer em quantas cores diferentes de camiseta? (Olha para PED).

PED – Sim. (Olha para a EXP e acena afirmativamente com a cabeça). Poderia em quinze.

EXP – Poderia? Então me fale outro personagem. (Olha para PED).

PED – Pato Donald. (Olha para a EXP)

EXP – O Pato Donald? E o Pato Donald poderia aparecer em quantas cores de camiseta? (Olha para PED).

PED – Quinze. (Olha para a EXP). O Pateta... Tem outros também... (Olha para a EXP).

5º. momento: Depois de verificar que PED combinara um a um os personagens com as quinze cores de camiseta, a EXP provocou-o à busca de uma

solução para o problema e, em seguida, sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – E aí, como você vai fazer para descobrir se ela tem doze personagens e quinze cores de camisetas, quantas camisetas diferentes ela pode bordar? (Olha para PED).

PED – (Movimenta a caneta preta entre os dedos da mão direita, olha para o problema, aponta com a caneta para o problema e olha para a EXP). Dezesete.

EXP – Dezesete? Por que você acha dezesete? (Olha para PED).

PED – Por que... Por que... (Fica em silêncio e olha para a EXP).

EXP – Tenta. Tenta fazer que daí nós conversamos. (Olha para PED e aponta para a folha de sulfite).

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 12 \\ \hline 27 \end{array}$$

Essa solução notacional e verbal de PED indica solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Consiste de uma solução que se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

6º. momento: Após a resposta de PED, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele e, em seguida, provocou-o a refletir sobre a solução verbal anterior.

EXP – Então aqui você acha que se ela tem quinze cores diferentes de camisetas (Aponta para esta informação no problema) e doze personagens diferentes (Aponta para esta informação no problema), ela pode bordar quantos tipos diferentes de camiseta? (Aponta para a pergunta do problema).

PED – Vinte e sete. (Olha para a EXP e movimenta a caneta preta na mão).

EXP – Vinte e sete. Mas, olha o que eu te perguntei: Na camiseta azul, podem aparecer quantos personagens diferentes? (Olha para PED).

PED – Doze. (Continua com a mão esquerda na frente da boca olhando para a EXP).

EXP – E na camiseta cinza?...

PED – Doze. (Continua com a mão esquerda na frente da boca, olhando para a EXP e com a caneta preta apontando para o problema).

EXP – Então... Será que quinze mais doze (Aponta para a notação de PED) respondem este problema? (Olha para PED).

PED – (Para, olha para o problema, fica em silêncio). Não... Não sei. (Olha para a EXP).

7º. momento: PED ficou em dúvida sobre sua solução notacional; então, a EXP provocou-o a buscar uma outra solução para o problema.

EXP – O que você acha? (Olha para PED).

PED – (Pára, olha para o problema, fica em silêncio). Que dá mais. (Olha para a EXP e continua com a mão esquerda apoiando o rosto).

EXP – Pode dar mais? E como você poderia tentar resolver o problema? (Olha para PED).

PED –(Pára, olha para o problema, fica em silêncio, coloca a mão esquerda em cima da mesa e olha para o problema, em seguida, olha para a EXP e permanece em silêncio. Movimenta a caneta preta em cima da folha, parece que vai escrever algo, lê novamente o problema, se movimenta na cadeira. Olha novamente para a EXP e, em seguida para o problema).

8º. momento: Percebendo que PED estava em dúvida, a EXP provocou-o a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – O que você acha? (Olha para PED). Você acha que deste jeito que você fez está correto? (Aponta para a notação de PED).

PED – (Aponta para o problema como se estivesse lendo-o novamente e observa a sua notação). Eu acho que... Que tá. (Olha para a EXP).

EXP – Por quê? (Aponta com a mão para o problema). O que você fez aqui? (Aponta para a notação de PED).

PED – Quinze mais doze. (Olha para sua notação e, em seguida para a EXP).

EXP – O que? (Olha para PED). O que você fez aqui? (Aponta para a notação). O que quinze representa? (Aponta para o número quinze).

PED – Cores. (Continua com a mão esquerda no rosto).

EXP – E o doze?

PED – Personagens.

De início, solução de nível I, subnível IA, que passou, no decorrer, para solução de nível I, subnível IB. Ao final, a solução notacional de PED e sua interpretação sobre a solução que havia utilizado, permaneceram no nível I, subnível IB: da adição de valores. Consiste de uma solução que se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

Assim, não houve mudança de nível de solução em situação em que se alternaram as formas de intervenção da experimentadora: orientadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora e instigadora.

PROBLEMA 4

Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

1º. momento: PED fez a leitura silenciosa do problema; em seguida, solicitou à EXP que fizesse a leitura do problema em voz alta. Quando a EXP finalizou a leitura do problema, provocou PED a buscar uma solução para o problema.

EXP – Como você vai fazer para resolver o problema? (Olha para PED).

PED – Eu ia pegar o sete (Aponta para a palavra sete que está escrita no problema) mais três (Aponta para a palavra três que está escrita no problema) mais dois (Aponta para a palavra dois que está escrita no problema). Isso que... É isso. (Olha para a EXP).

2º. momento: Após PED explicar como iria solucionar o problema, a EXP sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que explicitara oralmente.

EXP – Então anota. (Olha para PED e aponta para a folha de sulfite). Anota para eu entender como você está pensando. (Aponta para a folha de sulfite).

PED – (Com a caneta preta que está na sua mão, arma o algoritmo convencional da adição: $7 + 3 + 2 = 12$. Quando finaliza sua notação, olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 3 \\ \hline 2 \\ \hline 12 \end{array}$$

3º. momento: PED finalizou sua solução notacional; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que você fez aqui? (Aponta para a notação de PED).

PED – Primeiro os sete sabores de sorvete... (Olha para a EXP e aponta para esta informação no problema).

EXP – Você combinou os sete sabores...

PED – (Completa a frase) Os três tipos de cobertura. (Aponta para esta informação no problema).

EXP – Com os três tipos de cobertura. (Olha para PED).

PED – Os dois tipos de cas... Cas... Casquinha... (Olha para a EXP e sorri).

Essa solução notacional e verbal de PED e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Consiste

de uma solução que se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

4º. momento: Após PED identificar todas as variáveis necessárias à solução do problema e utilizá-las para efetuar uma adição, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema, pedindo, em seguida, a PED que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações propostas.

EXP – De quantas maneiras diferentes você pode se servir sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha? (Enquanto lê novamente a pergunta do problema, aponta com o dedo indicador da mão direita para que PED possa acompanhá-la).

PED – Doze. (Olha para a EXP e sorri. A mão esquerda está apoiando o rosto e o cotovelo esquerdo está apoiado em cima da mesa).

EXP – Será que é doze mesmo? (Olha para PED). Você não gostaria de ler novamente o problema? (Olha para PED e aponta para o problema).

PED – É doze... É doze mesmo. (Olha para a EXP e acena afirmativamente com a cabeça).

5º. momento: PED permaneceu fazendo referência à adição dos valores das variáveis; então, a EXP solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial de duas das variáveis.

EXP – Vamos pensar um pouquinho. Fale-me um sabor de sorvete. (Olha para PED).

PED – Coco. (Olha para a EXP e, em seguida, olha para o problema).

EXP – O sorvete de coco pode ser combinado com qual tipo de cobertura? (Olha para PED).

PED – (Apóia o cotovelo esquerdo em cima da mesa e encosta a mão esquerda no seu corpo. Levanta a mão direita e apóia a caneta preta na folha de papel sulfite). Com três. (Olha para a EXP).

EXP – Com três? E outro sabor de sorvete? (Olha para PED).

PED – Chocolate. (Olha para a EXP).

EXP – Chocolate? E o sorvete de chocolate poderia combinar com quantos tipos de cobertura?

PED – Três. (Olha para a EXP, com a mão esquerda apóia a cabeça). Flocos... Três... Todos que tem sabor... Poderia ser com as coberturas... Três. (Olha para a EXP e sorri).

6º. momento: Depois que PED havia identificado que cada um dos sabores poderia combinar com os três tipos de cobertura, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema, envolvendo apenas essas duas variáveis. Em seguida, pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado e sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – E juntando tudo isso, quantos tipos diferentes poderiam dar? Combinando os sete tipos de sorvete com os três tipos de cobertura, quantos sorvetes diferentes iriam dar? (Aponta para o problema e olha para PED).

PED – (Pára, olha para a EXP, lê o problema, fica em silêncio). Vinte e um. (Olha para a EXP).

EXP – Por que ia dar vinte e um? (Olha para PED). O que você pensou para dar vinte e um? (Olha para PED). Que operação que você pensou na sua cabeça? (Olha para PED).

PED – Que foram três... (Movimenta a caneta com a mão direita). Daí... Foram três, três... De três em três para chegar a sete... (Aponta para o problema e olha para a EXP).

EXP – Sete. Então anota isso que você pensou aí. (Aponta para a folha de papel sulfite e olha para PED). Que operação que você pensou na sua cabeça? (Olha para PED).

3 em 3 poderiam a 7 que dariam o resultado 21

7º. momento: Na seqüência, a EXP instigou PED a refletir se já tinha aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

PED – (Com a caneta preta, marca o algoritmo convencional da multiplicação: $7 \times 3 = 21$. Quando finaliza, olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 3 \\ \hline 21 \end{array}$$

8º. momento: Para verificar se PED realmente compreendia a solução notacional que havia utilizado, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Vinte e um. E o sete, estava indicando o que mesmo? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número 7).

PED – (Movimenta o corpo para frente, olha para a EXP). Os... Sabores...

EXP – E o três? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número 3).

PED – As coberturas. (Movimenta a caneta preta com os dedos da mão direita e olha para a EXP).

EXP – E o vinte e um representa o que? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número 21).

PED – (Fica em silêncio, olha para o problema e movimenta a caneta na mão).

EXP – Juntando o que? (Olha para PED).

PED – Os dois. (Olha para a EXP). Os sabores com as coberturas. (Olha para a EXP).

9º. momento: PED explicou o que fez; então, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – E aí, você já terminou de combinar tudo? (Olha para PED).

PED – (Acena negativamente com a cabeça).

EXP – Aí você só combinou os sabores com as coberturas. E ainda tem o que para combinar aí? (Aponta para o texto do problema).

PED – Casquinhas.

10º. momento: Após PED ter identificado que ainda faltava combinar a variável casquinha, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

PED – (Olha para a EXP e, em seguida, com a caneta preta arma o algoritmo convencional da adição: $21 + 12 = 33$). Vinte e um mais doze. (Olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} +21 \\ 12 \\ \hline 33 \end{array}$$

11º. momento: Quando PED finalizou sua solução notacional, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele.

EXP – Por que você acha que é de mais? (Olha para a PED e aponta para sua notação).

PED – Por que... Tá juntando. (Olha para a EXP).

EXP – Por que você juntou o vinte e um com o doze? Dá onde você tirou o doze? (Aponta para a notação de PED).

PED – (Aponta com a caneta preta para a sua primeira notação, a adição que obteve doze, como resultado).

EXP – Ah, do resultado que você tinha encontrado antes. Então aqui deu vinte com doze deu o que?

PED – Trinta e três. (Olha para a EXP).

12º. momento: A EXP tentou persuadir PED a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado, mas ele disse que já terminara de resolver o problema e que a resposta obtida era aquela: trinta e três.

EXP – Trinta e três, o que? (Aponta para a notação).

PED – (Olha para a EXP e fica em silêncio). Pronto agora eu já terminei.

EXP – Então anota ali embaixo, o resultado final que você encontrou. (Aponta para a folha de sulfite).

PED – (Com a caneta preta faz a seguinte notação: O resultado final 33 sabores. Enquanto escreve, a mão esquerda está em cima da mesa. Quando finaliza a notação, olha para a EXP e sorri).

PED iniciou a solução do problema com solução de subnível IB; mas ao final a solução notacional e verbal de PED e sua interpretação sobre a solução que havia utilizado, indicam solução de nível III, subnível IIIC: das muitas combinações aditivo-multiplicativas. Essa solução ao problema com três variáveis consiste de número limitado de combinações entre os valores envolvidos, obtidos da combinação de adições e multiplicações, na busca da resposta final em termos de “muitos casos”.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: orientadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; reorientadora; instigadora; questionadora; orientadora; instigadora; questionadora; instigadora e questionadora. Ao final, predominaram as formas de intervenção: instigadora e questionadora.

QUADRO 1: AS SOLUÇÕES DE PED AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO

PED	PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3			PROBLEMA 4		
	TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV		PED			PED							
III	III D											
	III C										PED	
	III B											
	III A											
II	II C	PED										
	II B											
	II A				PED							
I	I B							PED	PED	PED		
	I A						PED					

Como se percebe no quadro acima, PED sempre partiu de soluções de nível inferior para soluções de nível mais adiantado em todos os problemas, chegando à solução de nível IV nos problemas 1 e 2. No problema 3, que envolvia valores altos para as variáveis, as soluções de PED permaneceram no nível I.

Na solução de todos os problemas houve alternância das formas de intervenção da experimentadora. No problema 1, houve incidência maior das formas orientadora e reorientadora; nos problemas 2 e 3 alternaram-se as formas orientadora, instigadora e questionadora e, no problema 4, predominaram as formas instigadora e questionadora.

1ª. SESSÃO – REN – (9; 0)

PROBLEMA 1

Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que poderiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e o lembrou dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que poderia utilizar para solucionar os problemas. REN fez a leitura silenciosa e, quando finalizou, produziu uma solução notacional; em seguida, disse para a EXP que não tinha entendido.

*pequeno
chocolate*

Essa solução notacional de REN indica solução de nível II, subnível IIA: do caso favorito. Sua solução representa apenas uma possibilidade de combinação entre as variáveis (um, e somente um, valor de cada uma delas).

2º. momento: REN disse que não tinha entendido o problema; então, a EXP solicitou a ele que observasse as informações que estavam escritas no problema, para verificar se a resposta dada estava de acordo com as informações explicitadas no problema.

REN – (Olha para a EXP e fica em silêncio).

3º. momento: Percebendo que REN estava em dúvida sobre o que fazer, a EXP provocou-o a relatar as informações que havia lido no problema.

EXP – O que está falando nesse... No problema? (Olha para REN e aponta para o problema).

REN – Tá combinando... Tamanho com sabor... (Olha para o problema).

4º. momento: REN identificou as duas variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP indagou dele algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as havia compreendido.

EXP – Tamanho com sabor! E nessa panificadora, quantos tamanhos diferentes de bolo têm para vender? (Olha para REN).

REN – Três. (Com os dedos mínimo, anelar e médio da mão direita, representa a quantidade três e mostra para a EXP).

EXP – Três! Quais são os tamanhos? (Olha para REN).

REN – Pequeno, médio e grande. (Olha para o problema e, em seguida, olha para a EXP).

5º. momento: REN identificou os três tamanhos que o bolo poderia ter; então, a EXP solicitou-lhe que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial de uma das variáveis.

EXP – O bolo pequeno... Pode ser de quantos sabores? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema, coloca a caneta preta próxima ao rosto, olha para a EXP e com os dedos mínimo, anelar e médio da mão direita, representa a quantidade três e mostra para a EXP).
Três.

6º. momento: REN identificou apenas três possibilidades de combinação; então, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele.

EXP – Só três sabores? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema, coloca a caneta preta próxima ao rosto, fica em silêncio).

EXP – Os bolos só podem ser de três sabores nessa panificadora? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema). Sim. (Olha para a EXP).

7º. momento: Na seqüência, a EXP pediu a REN que verificasse se a resposta encontrada estava de acordo com a informação proposta pelo problema.

EXP – O bolo pequeno só poderia ser de três tamanhos? (Olha para REN).

REN – Não... Me enganei... É de seis. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então, o bolo pequeno pode ser de quantos sabores? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema). Seis. (Olha para a EXP. Continua apoiando a cabeça com a mão esquerda).

8º. momento: REN obteve seis, como resposta; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Seis! (Olha para REN). Por que deu seis? (Olha para REN).

REN – (Busca as informações no problema e, um a um, lê os sabores que o bolo pequeno poderia ter). Por que... tem um tamanho e seis sabores. (Olha para a EXP). Morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana. (Olha para a EXP).

9º. momento: Após REN combinar o tamanho de bolo pequeno com os seis sabores, a EXP solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial das outras duas variáveis.

EXP – Seis! E o bolo médio? (Aponta para a palavra médio, que está escrita no problema).

REN – Seis. (Acena afirmativamente com a cabeça, coloca a caneta preta na frente da boca e olha para a EXP).

EXP – E o bolo grande? (Aponta para a palavra grande que está escrita no problema).

REN – Seis. (Acena afirmativamente com a cabeça, coloca a mão esquerda na frente da boca e olha para a EXP). Seis com cada tamanho. (Olha para a EXP e sorri).

10º. momento: REN percebeu que cada tamanho poderia combinar com os seis sabores; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Juntando tudo... De quantos jeitos diferentes os tamanhos e os sabores podem ser combinados? (Olha para REN).

REN – (Com dedos da mão esquerda que estavam na frente da sua boca começa a contar e, pára cada dedo, adiciona três.). Dezoito. (Coloca a mão na boca e olha para a EXP).

11º. momento: REN obteve dezoito, como resposta; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Dezoito! Por que dezoito? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema). Seis mais seis mais... Com mais seis é dezoito. (Olha para a EXP).

EXP – E por que seis mais seis mais seis... Por que você fez esse seis mais seis mais seis? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema e fica em silêncio).

12º. momento: REN permaneceu por algum tempo em silêncio; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – Anota aqui... (Aponta para a folha de sulfite). Para você não esquecer Isso que você pensou na cabeça. (Olha para REN). E para eu poder entender. (Olha para REN).

REN – (Com a caneta preta que estava na sua mão direita, anota a seguinte sentença matemática: $6 + 6 + 6 = 18$, em seguida, olha para a EXP).

$$6 + 6 + 6 = 18$$

13º. momento: REN tinha finalizado sua solução notacional; então, foi questionado pela EXP a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado. Em seguida, a EXP sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – O que representam esses seis? (Olha para REN).

REN – Cada um dos sabores... Com cada tamanhos. (Olha para a EXP).

EXP – Então anota aqui... (Aponta para a sentença matemática escrita por REN). Do que é esse seis. (Aponta para o primeiro seis, escrito por REN). Do que é esse seis. (Aponta para o segundo seis escrito por REN). Do que é esse seis. (Aponta para o último seis, escrito por REN). Que você falou?

REN – (Com a caneta preta escreve embaixo da sentença matemática que escreveu as palavras: pequeno, médio e grande, em seguida, olha para a EXP).

Handwritten equation: $6 \times 6 + 6 = 18$. Below the equation, three arrows point downwards from the first '6', the second '6', and the '+6' to the words 'pequeno', 'médio' and 'grande' respectively, written in cursive.

14º. momento: REN tinha complementado sua solução notacional; então, foi instigado pela EXP a refletir se já tinha aprendido na escola outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado. Em seguida, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, os resultados que explicitara oralmente.

EXP – Então aqui você utilizou uma continha... (Para a sentença matemática escrita por REN). Que conta é essa? Uma operação do que? (Olha para REN e aponta para sua notação).

REN – (Olha para sua notação). De mais.

EXP – De mais! Será que você já aprendeu na escola uma outra operação que você também conseguisse responder este problema? Que também respondesse este problema? (Aponta para a notação de REN e, em seguida, olha para REN).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça, coloca a mão esquerda na frente da boca e coloca a caneta preta próxima ao rosto).

EXP – Qual? (Aponta para a notação de REN).

REN – De vezes. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Como seria? (Aponta para a notação de REN).

REN – Seis... (Olha para sua notação). Vezes o três. (Olha para a EXP).

EXP – Então anota para a gente pensar junto. (Aponta para a folha de sulfite).

REN – (A mão esquerda apóia a folha de sulfite e com a caneta preta “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: $6 \times 3 = 18$). Dezoito. (Olha para a EXP).

15º. momento: Após registrar o algoritmo convencional da multiplicação na folha de papel sulfite, REN foi instigado pela EXP a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Esse seis representa o que? (Aponta para o número seis que REN escreveu).

REN – Sabores. (Olha para o problema e, em seguida, olha para a EXP).

EXP – Seis sabores. (Aponta para o número seis).

REN – (Com a caneta preta que estava na sua mão escreve a palavra sabores ao lado do número seis, em seguida, desenha uma seta ligando o número seis a palavra sabores. Olha para a EXP).

EXP – E o três representa o que?... (Aponta para o número seis).

REN – (Com a caneta preta que estava na sua mão escreve a palavra tamanhos, ao lado do número três, em seguida, desenha uma seta ligando o número três a palavra tamanhos. Olha para a EXP).

EXP – Então se o seis representa os sabores... (Aponta para o número seis escrito por REN). E o três representa os tamanhos. (Aponta para o número três escrito por REN). O dezoito representa o que? (Aponta para o número dezoito escrito por REN).

REN – Todos juntos. (Olha para a EXP e com a caneta preta escreve ao lado do número dezoito as palavras: todos juntos).

EXP – Todos juntos o que? (Olha para REN e aponta para a sua notação).

REN – Os sabores e os tamanhos. (Olha para o problema e para a sua notação).

6 → sabores
 $\frac{x3}{18}$ → tamanhos
 18 → todos juntos sabores e tamanhos

REN iniciou a solução do problema com solução de subnível IIA; mas, ao final, as soluções notacionais e verbais que REN utilizou e sua interpretação sobre as soluções que havia utilizado, indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo aditivo, por cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que intervenções dos vários tipos alternaram-se da seguinte forma: orientadora; reorientadora; instigadora; questionadora; reorientadora; questionadora; reorientadora; instigadora; questionadora; orientadora; instigadora; orientadora e questionadora, com incidência maior das formas orientadora e reorientadora.

PROBLEMA 2

Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

1º. momento: REN fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, olhou para a EXP; então, a EXP provocou-o a relatar as informações que tinha lido no problema.

EXP – O que o problema está dizendo? O que ele está falando e o que ele quer saber? (Olha para REN).

REN – (Com a mão esquerda apoiando a cabeça e, com a mão direita segurando a caneta preta faz uma leitura rápida do problema). Ele quer saber se... Parece que... Parece que tem um, dois tipos de roda e... Tem quatorze... Quatorze carros. (Aponta com a caneta preta para as informações que utilizou para pensar sobre a resposta do problema).

2º. momento: REN havia identificado dois tipos de roda e quatorze tipos de carro; então, a EXP o provocou à busca de uma solução para o problema.

EXP – Então tenta responder... (Olha para REN e aponta para a folha de sulfite).

REN – Rum, rum. (Acena afirmativamente com a cabeça e, aproxima a caneta preta da sua boca, lendo novamente algumas informações o problema, em seguida, com a caneta preta que está na sua mão “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: $5 \times 2 = 10$. Olha para a sua notação, apóia a cabeça com a mão esquerda e lê novamente o problema apontando com a caneta preta para as palavras do problema. Em seguida, ainda com a caneta preta anota ao lado do algoritmo convencional da multiplicação o algoritmo convencional da adição: $14 + 10 = + 4$, mas não finaliza a adição, olha para sua notação e sorri, em seguida, marca um X em cima desta adição e anota ao lado outro algoritmo convencional da adição: $10 + 4 = 14$. Após ficar um tempo em silêncio, olhando para suas notações, escreve com a caneta preta no lado esquerdo da folha a palavra: Quatorze, desenha uma seta e escreve ao lado dela a palavra carros. Embaixo do número quatorze escreve o número dois, desenha uma seta e escreve ao lado dela a palavra rodas. Quando finaliza, olha para a EXP, dá uma risada e olha novamente para suas notações).

The image shows three pieces of handwritten work on a white background. On the left, there is a large 'X' drawn over the text '14 -> carros' and '2 -> rodas'. In the middle, there is a multiplication problem $5 \times 2 = 10$ with a large 'X' over it. To the right of this, there are two addition problems: $14 + 10 = + 4$ and $10 + 4 = 14$. Both addition problems have a large 'X' over them.

3º. momento: REN havia feito diversas soluções notacionais e as desconsiderou. Verificando que REN estava em dúvida sobre o que fazer, a EXP provocou-o a refletir sobre a primeira solução notacional que tinha desconsiderado.

EXP – Então vamos pensar juntos! (Olha para REN e sorri). Você fez aqui... (Aponta para as notações de REN). Primeiro uma conta. (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a primeira conta que REN anotou). Cinco vezes dois dez. Por que você fez esta conta? (Aponta para o algoritmo convencional da adição escrito por REN).

REN – Por que tem cinco carros daí já iam dar dez... Daí (Aponta para as informações do problema com a caneta preta). E cinco mais cinco já era dez... (Aponta para sua notação e olha para a EXP).

EXP – Ah, você percebeu que teriam dez carros, cinco gols e cinco palios. (Olha para REN).
 REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

4º. momento: Após a explicação de REN, a EXP provocou-o a refletir sobre a segunda e a terceira solução notacional que havia desconsiderado.

EXP – Daí você tinha feito quatorze mais dez... (Aponta para a adição feita por REN que não foi finalizada e que está com um X em cima). E daí riscou por quê? (Olha para REN).
 REN – Por causa que daí dava vinte e quatro daí... Eu fiz com... Com o dez mais quatro. (Aponta para as suas notações).
 EXP – Para poder estar juntando com os corsas. (Aponta para esta informação no problema)
 REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

5º. momento: Na seqüência, a EXP provocou REN a refletir sobre a última solução notacional que tinha desconsiderado.

EXP – Tá, e daí depois aqui você escreveu... (Aponta para o canto esquerdo da folha onde REN fez mais algumas anotações). Que tem quatorze carros e duas rodas né?
 REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).
 EXP – Por que você marcou um X nessa? (Olha para REN e aponta para sua notação).
 REN – É que eu não sei... Eu não sei se tem quatorze tipos. (Olha para o problema).

6º. momento: Percebendo que REN estava em dúvida sobre as soluções notacionais que havia utilizado, bem como sobre o que fazer, a EXP leu a questão do problema em voz alta.

EXP – Tá! Então eu vou ler de novo o problema... (Aponta para o texto do problema). Para a gente pensar juntos... (Aponta para as notações de REN). Então vamos lá. (Inicia a leitura do problema em voz alta). Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Enquanto faz a leitura, aponta para o texto do problema com o dedo indicador).
 REN – (Acompanha com os olhos a leitura do problema e fica em silêncio).

7º. momento: REN ficou em silêncio; então, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – E quantos tipos de carro têm? (Aponta para as notações de REN).
 REN – (Fica em silêncio, olha para a EXP, olha para o problema, coloca o dedo mínimo da mão esquerda na boca e olha para a EXP). Quatorze. (Olha para a EXP).

8º. momento: Verificando que a resposta de REN continuava envolvendo os valores distractores, a EXP pediu a ele que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações do problema.

EXP – Quais são os tipos de carro que tem nessa loja para vender? (Olha para REN).
 REN – (Lê o problema para procurar a informação que necessita). Gols, palios e corsas.
 EXP – Então, quantos tipos de carros têm para vender? (Olha para REN).
 REN – Três. (Olha para a EXP).

9º. momento: REN identificou os três tipos de carro; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Três. Então a pergunta está dizendo: De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Lê a pergunta do problema em voz alta).
 REN – (Olha para o problema, em seguida, para as suas notações e fica em silêncio).
 EXP – O que você vai ter que fazer para descobrir? (Olha para REN).
 REN – Colocar os carros... Os carros... Com as rodas... (Olha para o problema).
 EXP – Os tipos de carros com as rodas! Então tenta fazer. (Aponta para a folha de sulfite).

2 → rodas
 3 → tipos de carros

10º. momento: REN identificou as duas variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Ah, e como que você vai fazer para descobrir de quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinadas? (Aponta para a pergunta do problema). Quanto que vai dar no total? (Olha para REN).
 REN – Cinco. (Olha para a EXP).
 EXP – Por que será que vai dar cinco? (Olha para REN).
 REN – (Olha para o problema). Por que tem três tipos de carro com dois tipos de rodas... (Olha para a EXP e coloca a mão esquerda no rosto e, com a caneta preta que está na sua mão, anota na folha de sulfite, embaixo das outras notações o algoritmo convencional da adição: $3 + 2 = 5$, em seguida, olha para a EXP).

A solução notacional de REN e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Nesse momento, sua

solução se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

11º. momento: Na seqüência, a EXP indagou de REN uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – Quantos são os tipos de carro? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema). Três. (Olha para a EXP).

EXP – Então o gol, ele poderia combinar com quantos tipos de roda? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema e fica em silêncio. A mão esquerda apóia a cabeça).

EXP – O gol poderia combinar com a roda esportiva? (Aponta para o tipo de carro gol que está escrito no problema).

REN – Poderia. (Acena afirmativamente com a cabeça). Com a comum e com... Com a comum e com a esportiva. (Olha para a EXP).

12º. momento: REN identificou que o carro gol poderia combinar com os dois tipos de roda; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E no total, quanto que daria tudo junto?

REN – Seis. (Olha para o problema e para suas notações e, com a caneta preta que está na sua mão anota uma embaixo da outra as palavras: gols...). (Olha para o problema). Palios... (Olha para o problema). Corsas... (Olha para o problema. Quando finaliza, desenha uma seta ao lado de cada uma destas palavras e escreve: o número dois ao lado de cada uma. Quando termina, olha para a EXP e sorri).

GOLS → 2
 PALIOS → 2
 CORSAS → 2

REN – (Com a caneta preta que está na sua mão anota o número seis ao lado da última notação que fez e olha para a EXP).

13º. momento: Para verificar se REN tinha compreendido de fato o que havia registrado, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema e, em seguida, solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Então, se eu te perguntar de quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Olha para REN).

REN – Seis. (Olha para a EXP).

EXP – De seis maneiras diferentes! (Olha para REN). O que esse dois representa? (Aponta para os números dois que REN escreveu).

REN – As rodas. (Olha para a EXP).

EXP – E esses três carros aqui... (Aponta para as palavras: gols, palios e corsas que REN escreveu). São o que?

REN – Tipos de carros. (Olha para a EXP).

14º. momento: Após REN explicar a solução notacional que havia utilizado, a EXP instigou-o a refletir se já tinha aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Teria alguma conta que você pudesse fazer que você já aprendeu lá na escola para encontrar o resultado? (Aponta para o número seis que REN escreveu ao lado de suas notações).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça, fica em silêncio, olha para as informações do problema, olha para suas notações, olha para frente, apóia a cabeça com a mão esquerda, olha para a EXP e “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: $2 \times 3 = 6$, em seguida, olha novamente para a EXP).

15º. momento: Na seqüência, a EXP pediu a REN que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que o dois representa? (Aponta para o número dois que REN escreveu).

REN – (Olha para o problema). Tipos de rodas. (Olha para a EXP e, com a caneta preta, desenha uma seta ao lado do número dois e escreve: tipos de rodas). Três tipos de carros. (Em seguida, desenha uma seta ao lado do número três e escreve: tipos de carro).

EXP – E o seis? (Aponta para o número seis que é o resultado da multiplicação feita por REN). Representa o que? (Olha para REN).

REN – Todos juntos. (Com a caneta preta escreve ao lado do número seis: todos juntos e olha para a EXP. Coloca a mão esquerda no cabelo, olha para suas notações e fica em silêncio).

EXP – Todos juntos o que? (Olha para REN).

REN – Carros e rodas. (Olha para a EXP).

$2 \rightarrow$ tipos de rodas
 $\times 3 \rightarrow$ tipos de carros
 $\hline 6 \rightarrow$ todos juntos carros e rodas

REN iniciou a solução do problema com solução de subnível IB; mas ao final suas soluções notacionais e verbais e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória, quando

estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo multiplicativo convencional, envolvendo escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que intervenções dos vários tipos alternaram-se da seguinte forma: instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora e questionadora, com incidência maior das formas instigadora e questionadora.

PROBLEMA 3

Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

1º. momento: REN fez a leitura silenciosa do problema e, a seguir, questionou a EXP que o desafiou a buscar uma solução mais adiantada, diante da utilização de uma mesma estratégia, menos adiantada, para a solução do problema.

REN – Pode desenhar as camisetas aqui? (Aponta com a caneta preta para o espaço na folha de sulfite onde irá desenhar as camisetas).

EXP – Você acha que é necessário desenhar? (Olha para REN). Esse é o único jeito de solucionar o problema? (Olha para REN).

REN – (Olha para a EXP e movimenta a cabeça para os lados como se quisesse dizer que não sabia). Não sei. (Vira a folha de sulfite de lado e coloca a caneta preta que está na mão direita na frente da sua boca. Lê novamente o problema). Acho que é. (Olha para a EXP). Quinze camisetas. (Olha para a folha de sulfite e inicia sua notação. Conta todas as camisetas que deram? (Aponta para as camisetas que desenhou com a caneta preta e, em seguida, aponta para o espaço abaixo do desenho das camisetas).

2º. momento: Após REN ter desenhado as quinze camisetas, a EXP provocou-o a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – Tá! Então o que você fez aí? (Aponta para as notações de REN). Você desenhou o que? (Olha para REN).

REN – As quinze camisetas. (Com a ponta de trás da caneta preta, passa por cima de todas as camisetas que desenhou).

3º. momento: A EXP interrogou REN sobre uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – No problema, só fala das camisetas? (Olha para REN).

REN – Não. (Olha para a EXP e sorri). Também dos personagens ele diz. (Olha para a EXP).

EXP – E quantos personagens ela tem? (Olha para REN).

REN – Doze. (Olha para a EXP e apóia a cabeça com a mão esquerda).

4º. momento: REN identificou as duas variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Doze! Por exemplo: nessa camiseta aqui... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a primeira camiseta desenhada por REN). Quantos personagens diferentes vão poder ter? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a primeira camiseta desenhada por REN).

REN – Um! Um de cada... (Olha para suas notações, apóia a cabeça com a mão esquerda, lê o problema, fica em silêncio e olha para a EXP). Doze. (Olha para a EXP).

EXP – Doze! E com esta camiseta... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a segunda camiseta desenhada por REN). Quantos personagens vão poder combinar? (Olha para REN).

REN – Doze. (Olha para a EXP).

EXP – E aí, o que você vai fazer? (Aponta para as notações de REN e olha para ele).

REN – (Com a caneta preta que está na sua mão escreve dentro da primeira camiseta que desenhou o número doze e ao lado escreve a palavra personagens, quando finaliza, olha para a EXP... Com a caneta preta, escreve o número doze dentro de todas as outras camisetas que desenhou, apoiando a folha de sulfite com a mão esquerda. Quando finaliza, olha para a EXP).



5º. momento: REN complementou a sua solução notacional e a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E aí? (Olha para REN). Quantos tipos diferentes de camisa ela pode bordar? (Lê em voz alta a pergunta do problema).

REN – Tem que... Tem que... Fazer a conta de mais. (Olha para a EXP, em seguida, começa a contar com os dedos das duas mãos a quantidade de camisetas diferentes que Eduarda pode bordar. Faz a soma das três primeiras camisetas e escreve o número trinta e seis embaixo do desenho das camisetas. Em seguida, aponta com a caneta preta para as três camisetas que contou e continua a contagem com a quarta camiseta, partindo do resultado trinta e seis. Quando finaliza a contagem, escreve o número quarenta e oito embaixo do número trinta e seis. Após escrever o número, conta as quatro camisetas que desenhou na primeira linha e já adicionou e olha para os números que registrou e para sua notação. Em seguida, com o auxílio do dedo indicador da mão esquerda conta as camisetas que ainda não adicionou). Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze. (Quando finaliza a contagem, escreve com a caneta preta embaixo do número quarenta e oito, onze vezes o número doze, um embaixo do outro, contando em voz bem baixinha para ver se havia colocado onze números doze, como se estivesse efetuando o algoritmo convencional da adição e passa o traço de igualdade).

The image shows a handwritten calculation. At the top, the number 36 is crossed out with a large 'X'. Below it, the number 48 is written. To the left of 48, there is a vertical list of numbers: 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12. A plus sign is written to the left of the first 12. A horizontal line is drawn under the last 12. Below the line, the number 180 is written, followed by the text '180 camisetas personagens e cores'.

6º. momento: REN finalizou sua solução notacional e a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que é cento e oitenta? (Olha para REN).

REN – Por que tá tudo junto. (Olha para a EXP).

EXP – Por que dá cento e oitenta? (Olha para REN).

REN – (Aponta para suas notações). Por aqui dá... Cento e oitenta... Juntando as cores dá tudo junto com os personagens... (Aponta para a adição que fez).

EXP – Juntando as cores com os personagens. Então, responda: Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

REN – Cento e oitenta camisetas. (Com a caneta preta escreve ao lado do número cento e oitenta a palavra camisetas).

Nesse problema, as soluções notacionais e verbais de REN e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos

possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por registro pictórico, por cálculo aditivo, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Isso ocorreu em situação em que se encontraram, pela ordem em que apareceram, as seguintes formas de intervenção da experimentadora: instigadora; questionadora; instigadora e questionadora. Houve alternância, portanto, entre duas formas de intervenção da experimentadora.

PROBLEMA 4

Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

1º. momento: REN leu o problema em voz alta e quando finalizou a leitura, olhou para a EXP e disse que não havia entendido; então, a EXP sugeriu a ele que lesse o problema, buscando as informações que trazia. Em seguida, provocou-o a relatar as informações que tinha lido.

EXP – Não entendeu? (Olha para REN). O que está falando no problema? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o problema).

REN – (Aponta com a caneta preta para o problema e inicia a leitura). Que em uma sorveteria tem... Sete sabores... Sete sabores... Três tipos de cobertura e dois tipos de casquinha. (Olha para a EXP).

2º. momento: REN identificou as três variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP pediu a ele que explicitasse o que o problema estava perguntando, para verificar se de fato ele o compreendera.

EXP – E aí? Está perguntando o que? (Olha para REN).

REN – (Lê silenciosamente o problema e fica em silêncio).

3º. momento: REN ficou em silêncio; então, a EXP leu a questão do problema em voz alta, e, em seguida, provocou-o à busca de uma solução.

EXP – Você pensou em alguma coisa que você pudesse fazer para descobrir? (Olha para REN).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – O que? (Olha para REN).

REN – É que os dois tipos de casquinha são casquinha e cascão. (Enquanto responde, gira a caneta preta na sua mão, quando finaliza, olha para a EXP).

EXP – (Olha para REN e sorri).

REN – (Com a caneta preta escreve embaixo do problema as palavras casquinha e cascão)...

casquinha e cascão

REN –... (Coloca a mão esquerda na frente da boca e olha para o problema). Morango... Chocolate... Caramelo...

3 -> morango, chocolate e caramelo

REN –... (Logo a seguir, escreve o número sete, desenha uma seta e ao lado da seta inicia a escrita dos sabores do sorvete: manga, creme de leite, morango, milho verde, chocolate, abacaxi e chocolate branco).

7 -> manga, creme de leite, morango, milho verde, chocolate, abacaxi e chocolate branco

4º. momento: REN identificou e registrou as três variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E agora, REN? (Olha para REN). De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha? (Lê novamente a pergunta do problema em voz alta).

REN – (Pára, fica em silêncio, olha para suas notações, movimenta a caneta preta na mão e a coloca na frente de sua boca. Com a ponta da caneta preta lê as suas notações, levanta a cabeça, coça a cabeça com a caneta preta e olha para a EXP). Não sei se é duas formas que tem... Doze... Não sei se é... (Responde após contar as casquinhas, as coberturas e os sabores de sorvete que escreveu).

Essa solução verbal de REN indica solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Essa solução se limita ao cálculo aditivo mental de todos os valores envolvidos.

5º. momento: Percebendo que REN estava em dúvida sobre a solução verbal que havia utilizado, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a tinha compreendido; na seqüência, solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial de duas das três variáveis.

EXP – Quantas são as coberturas. (Olha para a REN).

REN – Três. (Olha para a EXP).

EXP – Por exemplo... (Aponta para as notações de REN). Se você escolheu o primeiro sabor que você fez aqui... (Aponta para o primeiro sabor de sorvete escrito por REN). Manga! O sorvete de manga pode combinar com quantos tipos de coberturas? (Olha para REN).

REN – Três. (Olha para a EXP).

EXP – Com três. O sorvete de creme de leite... (Aponta para o segundo sabor de sorvete escrito por REN).

REN – Três. (Olha para a EXP).

EXP – E o de morango? (Aponta para o terceiro sabor de sorvete escrito por REN).

REN – Três. (Olha para a EXP)...

EXP – Já deu quantos tipos diferentes de sorvete? (Olha para REN).

REN – (Coloca a mão na frente na boca e olha para a EXP). Dezoito... (Olha para a EXP, acena negativamente com a cabeça e sorri). Vinte e um... (Olha para a EXP, acena negativamente com a cabeça e sorri).

6º. momento: A EXP sugeriu a REN que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

7 -> manga, creme de leite, morango, milho verde, chocolate, abacaxi e chocolate branco

7º. momento: REN complementou sua solução notacional; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Por que você está colocando o número três embaixo de cada sabor de sorvete? (Aponta para os números três escritos por REN).

REN – Por que combina com três tipos de cobertura. (Aponta com a caneta preta para os tipos de cobertura que escreveu e olha para a EXP).

EXP – Então, combinado as coberturas com os sorvetes, quantos tipos já dão? (Aponta para a notação de REN).

REN – (Coloca a mão esquerda na frente da boca). Vinte e sete... Não, não!... Péra aí! (Acena negativamente com a cabeça). Três, seis, nove, doze, quinze, dezoito, vinte e um. (Conta de três em três em voz alta cada um dos três que escreveu). Vinte e um. (Olha para a EXP).

8º. momento: REN obteve vinte e um, como resposta; então, a EXP o instigou a refletir se já havia aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

REN – (Com a caneta preta escreve o algoritmo convencional da multiplicação, “arma” a conta começando pelo três, olha para suas notações e conta os sabores dos sorvetes, olha para, em seguida, escreve o número sete, coloca o sinal de x e passa o traço de igualdade, após escreve o resultado vinte e um).

9º. momento: REN finalizou sua solução notacional; na seqüência, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Nessa operação aqui... (Aponta para o algoritmo da multiplicação escrito por REN). O que o três representa? (Aponta para o número três escrito por REN).

REN – Os sabores (Olha para a EXP)... De cobertura. (Com a caneta preta escreve as palavras: de coberturas, ao lado da palavra sabores. Quando finaliza, apóia a cabeça com a mão esquerda e olha para a EXP).

EXP – E o sete... (Aponta para o número sete escrito por REN). Representa o que? (Olha para REN).

REN – (Olha para as suas notações). Sete. (Em seguida, olha para o problema e com a caneta preta desenha uma seta e escreve ao lado do número sete a palavra sabores). De sorvetes. (Com a caneta preta anota ao lado da palavra sabores as palavras: de sorvetes).

EXP – E o vinte e um? (Aponta para o número vinte e um escrito por REN)

REN – (Olha para sua notação). Todos juntos. (Com a caneta preta desenha uma seta ao lado do número vinte e um e escreve as palavras: todos juntos. Quando termina de escrever olha para a EXP e respira fundo).

$$\begin{array}{r}
 3 \rightarrow \text{sabores de coberturas} \\
 \times 7 \rightarrow \text{sabores de sorvetes} \\
 \hline
 21 \rightarrow \text{todos juntos}
 \end{array}$$

10º. momento: REN explicou como pensara; então, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional e indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – Tá! Então agora você já conseguiu combinar tudo? Você já combinou tudo? (Olha para REN e aponta com o dedo indicador da mão direita para o problema).

REN – (Acena negativamente com a cabeça).

EXP – O que está faltando ainda? (Olha para REN).

REN – A casquinha. (Olha para sua notação).

11º. momento: Depois que REN identificou que faltava combinar uma variável, os tipos de casquinha, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – Como você vai fazer para descobrir quanto vai dar? (Olha para REN).

REN – (Coloca a mão esquerda embaixo da mesa). Vai dar vinte e um mais dois. (Olha para a EXP).

Essa solução verbal de REN indica solução de nível III, subnível IIIC: das muitas combinações aditivo-multiplicativas. Essa solução a esse problema com três variáveis consiste de número limitado de combinações entre os valores envolvidos, obtidos da combinação de adições e multiplicações, na busca da resposta final em termos de “muitos casos”.

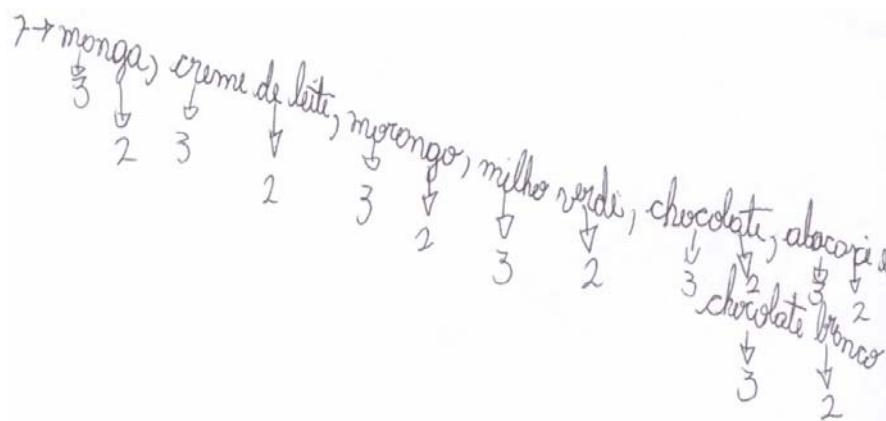
12º. momento: REN disse que efetuaría uma adição; então, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele.

EXP – Mais dois? Um desses vinte em sorvetes pode combinar com quantas casquinhas? (Aponta para o sabor de sorvete manga que REN escreveu).

REN – Duas. (Olha para a EXP).

EXP – Será que vinte em mais dois resolve o problema? (Olha para REN).

REN – Não. (Acena negativamente com a cabeça). Vou por aqui também... (Desenha uma seta e escreve o número dois embaixo de cada um dos sabores de sorvete que desenhara)... Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete. (Em seguida, apóia a cabeça com a mão esquerda e conta de dois em dois os números dois que escreveu). Dois, quatro, seis, oito, dez, doze, quatorze...

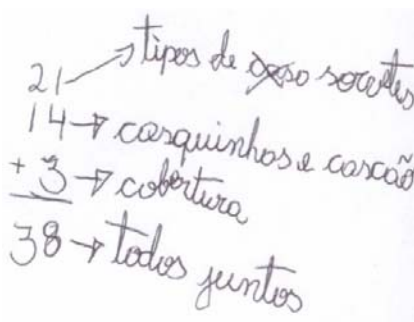


13º. momento: Na seqüência, a EXP provocou REN a buscar uma solução para o problema e, em seguida, sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – O que você vai ter que fazer? (Olha para REN).

REN – Daí eu faço assim... (Olha para a EXP). Ponho o vinte e um aqui... (Aponta para o espaço em cima do número quatorze). O quatorze aqui... (Aponta para o número quatorze que já havia escrito). E o número três aqui... (Aponta para o espaço abaixo do número quatorze). E faço uma conta para ver tudo junto aqui... (Faz um círculo com a mão em cima de todas as notações que fez).

EXP – Então coloca para a gente pensar! (Olha para REN e aponta para a folha de sulfite).



14º. momento: REN obteve trinta e oito, como resposta; então, a EXP solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Trinta e oito o que? (Aponta para o número trinta e oito escrito por REN).

REN – Todos juntos. (Olha para a EXP). Por que essa daqui está combinando... (Aponta para a adição que efetuou). Os tipos de sorvete... (Aponta com a caneta preta para o número vinte e um). De casquinha e cascão... (Aponta para o número quatorze com a ponta da caneta preta). E de... Cobertura... (Aponta para o número três).

A solução verbal inicial de REN de subnível IB, adiante passa à solução de nível III, subnível IIIC: das muitas combinações aditivo-multiplicativas, patamar em que permaneceu até o final.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: orientadora; instigadora; questionadora; orientadora; instigadora; questionadora; reorientadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; orientadora e questionadora, com incidência maior das formas: instigadora e questionadora.

QUADRO 2: AS SOLUÇÕES DE REN AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO

REN	PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3			PROBLEMA 4		
	TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV		REN			REN		REN					
III	III D											
	III C										REN	REN
	III B											
	III A											
II	II C											
	II B											
	II A	REN										
I	I B			REN						REN		
	I A											

Como se vê no quadro acima, REN partiu de soluções de nível menos adiantado para soluções de nível mais adiantado, obtendo soluções de nível IV nos problemas 1 e 2 e solução de nível III, no problema IV. Porém, no problema 3, REN já apresentou solução de nível IV, na primeira tentativa.

Na solução de REN aos problemas, houve alternância das formas de intervenção da experimentadora. No problema 1, incidência maior das formas orientadora e reorientadora. Nos problemas 2, 3 e 4, incidência maior das formas instigadora e questionadora.

1ª. SESSÃO – MAT – (9; 7)

PROBLEMA 1

Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção, apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que poderiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e lembrou-o dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que poderia utilizar para solucionar os problemas. MAT fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, foi provocado pela EXP a relatar as informações que lera no problema.

EXP – Terminou e daí? (Olha para MAT).

MAT – É... (Coloca a mão esquerda no rosto) Sobre os bolos, (Movimenta os braços em cima da mesa) sobre os tamanhos dele... (Coloca a mão direita em cima das pernas e com a esquerda passa a mão no queixo). Tem cada coisa assim sobre o sabor... Eh... Se ele é pequeno ou grande... (Com o dedo mínimo da mão esquerda, coça o queixo).

2º. momento: Percebendo que a explicação de MAT estava confusa, a EXP sugeriu a ele que lesse o problema, buscando as informações que ali estavam.

EXP – O que então o problema está dizendo? O que tem nesta padaria para vender? (Olha para MAT).

MAT – Bolos. (Olha para a EXP).

EXP – Bolos? De quantos tamanhos? (Olha para MAT e sorri).

MAT – Pequeno, médio e grande. (Olha para o problema e olha para a EXP).
 EXP – Quantos? (Olha para a EXP).
 MAT – (Continua apoiando a mão esquerda no rosto). Três. (Olha para a EXP).
 EXP – Três? E quantos sabores? (Olha para MAT e sorri).
 MAT – Seis. (Olha para a EXP).

3º. momento: MAT retomou as informações do problema; então, a EXP pediu a ele que explicitasse o que o problema está perguntando, para verificar se de fato ele o compreendera.

EXP – Seis? E o que está perguntando para você responder?
 MAT – Eh... (Olha para o problema e dá uma risadinha). Esqueci... (Coloca o dedo polegar da mão esquerda na boca e, com os outros dedos mexe no cabelo).

4º. momento: MAT respondeu que esquecera; então, a EXP leu a questão do problema em voz alta e, em seguida, indagou MAT sobre algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as havia compreendido e desafiou-o a buscar uma solução.

EXP – Então vamos ver lá. (Aponta com a caneta preta para a pergunta do problema). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor? (Olha para MAT).
 MAT – (Com a mão esquerda enrola a ponta do cabelo).
 EXP – Então lá tem vários bolos... Quantos bolos diferentes será que tem nessa panificadora?
 MAT – (Enquanto a EXP fala, com a mão esquerda mexe no queixo). Vários. (Olha para o problema).
 EXP – Como que vai dar para descobrir sabe... Com estas informações que este problema está dando? (Aponta para o problema).
 MAT – Chocolate pode ir com o grande. (Olha para a EXP).

5º. momento: Na seqüência, a EXP provocou MAT a refletir sobre sua solução verbal.

EXP – Só com o grande?
 MAT – Com o pequeno e... Com o médio... (Continua com a mão no queixo e sorrindo).
 EXP – Então o bolo de chocolate pode ser de quantos tamanhos?
 MAT – Pequeno, médio e grande. (Olha para a EXP e sorri).
 EXP – Então quanto que vai dar o bolo de chocolate?
 MAT – Três. (Olha para a EXP apoiando o rosto com mão esquerda).

6º. momento: MAT identificou que o bolo de chocolate poderia combinar com os três tamanhos; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Três? Dá para você anotar isso aí já para você não esquecer? (Olha para MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça. A mão esquerda permanece embaixo do queixo).

EXP – Então anota. (Aponta para a folha).

MAT – (Acena novamente afirmativamente com a cabeça. Pega a caneta preta que está em cima da mesa com a mão direita e começa a escrever o número três, quando termina de escrever coloca a caneta preta em cima da folha).

7º. momento: Quando MAT tinha finalizado sua solução notacional, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendia.

EXP – Só dá para ser de chocolate o bolo? (Olha para o problema).

MAT – Não. Pode ser de outro... Doce de leite. (Olha para a EXP).

EXP – E o de doce de leite pode ser de quantos tamanhos? (Olha para MAT).

MAT – Pequeno, médio e grande. (Olha para as informações que estão no problema e, em seguida, olha para a EXP).

EXP – Então é de quantos?

MAT – Três. (Olha para a EXP, pára e escreve outro número três ao lado do número três que havia escrito).

8º. momento: Após MAT ter registrado o segundo número três, na folha de papel sulfite, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Três. Como você vai saber que este número três (Aponta com a caneta para o primeiro número três que MAT escreveu) é de chocolate e este (Aponta com a caneta preta para o segundo número três que MAT escreveu) é de doce de leite?

MAT – (Com a mão esquerda apoiada no queixo, olha para as notações que fez. Pára, coça o queixo, sorri, levanta a cabeça, Coloca o dedo mínimo na boca). Eu não... Coloca um C aqui (Aponta para o primeiro número três que escreveu) e um L (Aponta para o segundo número três que escreveu)... Aqui. (Com a mão direita pega a caneta preta que está em cima da folha e com a mão esquerda apóia a cabeça). Isso que eu fiz... (MAT aprimora sua solução notacional para os sabores de bolo: chocolate e doce de leite e, em seguida, faz o mesmo com os outros sabores de bolo. Registra o número três e escreve em cima de cada um, uma letra ou duas para identificar cada um dos seis sabores de bolo).

C 3 L 3 B 3 C 3 B6 3 M 3

9º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, foi desafiado pela EXP a responder à questão do problema.

EXP – Tá! Então agora, quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher? Quantos tipos de bolo você pode escolher para comprar juntando todos os tipos que tem lá nessa panificadora?

MAT – (Está com a mão esquerda encostada no rosto e olhando para a EXP). Seis. (Olha para a EXP).

10º. momento: MAT obteve seis, como resposta; então, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Seis? Será? Olha ali o que você descobriu! (Aponta com o dedo indicador para as notações feita por MAT).

MAT – (Olha para as suas notações e olha para o problema). Três de cada. (Olha para a EXP).

11º. momento: MAT identificou que podia comprar três bolos de cada sabor; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Então, juntando todos os tamanhos com os sabores... (Aponta para a notação de MAT). Quantos tipos diferentes de bolo podem ter? (Aponta para a notação de MAT).

MAT – (Com a mão esquerda enrola a ponta do cabelo e com a mão direita segura a caneta em cima da folha de sulfite). Doze? (Rapidamente percebe que se confundiu). Quer dizer... (Acena a cabeça como se tivesse cometido um engano). Dezoito vai dar. (Olha para a EXP e continua enrolando o cabelo com a mão esquerda).

12º. momento: MAT obteve dezoito, como resposta e a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Então... (Olha para MAT). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar?

MAT – (Enrolando o cabelo com a mão esquerda e olhando para sua notação responde) Dezoito.

EXP – Dezoito. Então anota sua resposta. (Aponta para a folha de sulfite).

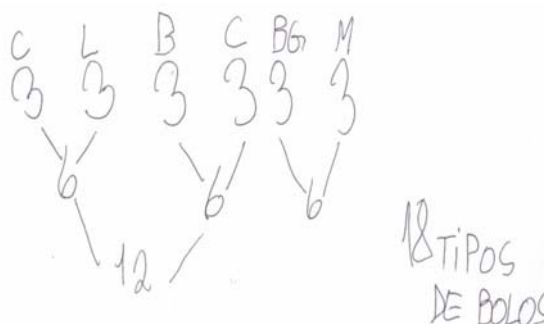
MAT – (Pega a caneta preta e anota na folha de sulfite o número dezoito).

EXP – (Aponta para a notação de MAT). Dezoito tipos diferentes do que? (Olha para MAT).

MAT – (Pára, observa suas notações e fica em silêncio).

EXP – Do que? (Olha para MAT).

MAT – (Com a caneta preta escreve ao lado do número dezoito “Tipos de bolo”. Apoiando a folha de sulfite com a mão esquerda para poder escrever. Quando finaliza sua notação, coloca a caneta preta em cima da folha de sulfite, apóia novamente a cabeça com a mão esquerda e olha para a EXP).



13º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Por que deu dezoito? (Aponta para a notação de MAT).

MAT – (Olha para sua notação). Três mais três dá seis... Daí com mais três... (Faz uma pausa). Daí ia dar... (Faz uma pausa). Nove... Daí com mais três doze... Com mais seis daí dezoito. (Olha para a EXP).

EXP – Então você juntou... O que você combinou para dar dezoito? (Olha para MAT). Combinou o que com o que?

MAT – Os números três. (Continua enrolando a ponta do cabelo com a mão esquerda).

EXP – Tá! Mas esses três são do que? (Aponta para os números três escritos por MAT).

MAT – Três tamanhos... (Olha para a EXP).

EXP – Três tamanhos e seis o que?

MAT – Tipos de bolo. (Olha para a EXP).

EXP – Tipos de bolo?

MAT – Não, sabores. (Olha para a EXP e sorri).

As notações e verbalizações utilizadas por MAT e sua interpretação a respeito indicam a elaboração progressiva de solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo aditivo não-convencional, por “árvore” de possibilidades, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Houve a identificação e a descrição progressiva de cada variável e de seus valores em situação em que manifestaram, pela ordem em que apareceram, as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; instigadora; orientadora; questionadora; orientadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; orientadora e questionadora. Logo, com a alternância entre as formas de intervenção identificadas, houve a elaboração acima referida.

PROBLEMA 2

Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

1º. momento: MAT fez a leitura silenciosa do problema e quando finalizou, explicou para a EXP as informações que o problema trazia. Após a explicação de MAT, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

MAT – Tá perguntando que tipo de maneira dá para combinar as rodas e os carros. (Olha para o problema e continua enrolando a ponta do cabelo).

EXP – E como você pode fazer para descobrir? (Olha para MAT).

MAT – Ajuntando eles. (Olha atentamente para o problema). Deixa ver... Corsas têm cinco... (Olha para o problema). Coloca... Cinco carros... Cinco corsas... Dá para colocar as rodas esportivas... (Faz uma pausa e olha para o problema). Nos palios dá para colocar comum... E... Nos... Gols dá para colocar também. (Olha para o problema e, em seguida, olha para a EXP).

Essa solução verbal de MAT indica solução de nível II, subnível IIB: dos casos favoritos ignorados os distratores. A solução verbal de MAT apresenta alguns casos de combinação das variáveis. Os valores das variáveis se excluem: a cada valor de uma variável corresponde um ou dois valores da outra, conforme critério de uso adequado. Há forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador.

2º. momento: A EXP sugeriu a MAT que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente; em seguida, a EXP leu a questão do problema em voz alta.

EXP – Também? Então como que a gente poderia representar isso. (Olha para MAT). Por exemplo: o carro gol ele poderia combinar com qual tipo de roda? (Olha para MAT).

MAT – Comum. (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda).

EXP – Só com a comum? (Olha para MAT).

MAT – E com a esportiva. (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda).

3º. momento: MAT identificou que o carro gol poderia combinar com os dois tipos de roda; então, a EXP solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial das variáveis.

EXP – E o palio? (Olha para MAT).

MAT – Com a comum e a esportiva. (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda).

EXP – E o corsa? (Olha para MAT).

MAT – Comum e esportiva. (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda).

4º. momento: MAT identificou que cada um dos tipos de carro poderia combinar com os tipos de roda; então, foi desafiado pela EXP a responder à questão do problema.

EXP – De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Olha para MAT).

MAT – Duas. (Olha para as informações do problema).

EXP – Mas tudo junto? (Olha para MAT).

MAT – Tudo junto... (Pára, olha para o problema). Aí eu não sei. (Olha para a EXP e dá uma risadinha).

5º. momento: Percebendo que MAT demonstrava estar inseguro sobre o que fazer, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – Como você poderia fazer para descobrir, no total, de quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Olha para MAT).

MAT – Escrever de dois em dois. (Olha para as informações do problema).

The image shows three handwritten mathematical expressions representing combinations of car types (E, C) and wheel types (2, 2). The first expression is for GOL, showing E 2 and C 2. The second expression is for PALIO, showing E 2 and C 2. The third expression is for CORSA, showing E 2 and C 2.

6º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema e, em seguida, leu a questão do problema em voz alta.

EXP – Tá. E daí a pergunta diz lá... (Aponta para a pergunta do problema). De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

MAT – Quantas maneiras diferentes? (Olha para a EXP). Quatro vai dar com o gol... Mais quatro oito... Com mais quatro dá... (Conta nos dedos da mão esquerda a partir do número sete). Nove, dez, onze... (Faz uma pausa). Doze! (Olha para a EXP).

7º. momento: MAT obteve doze, como resposta; então, a EXP solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Dão doze tipos diferentes? Como você pensou? (Olha para MAT). Por que você colocou aqui... (Aponta para a letra E e C respectivamente). Com esportiva dois e com... O gol ia ter duas rodas esportivas e duas rodas comuns? (Aponta para as notações de MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – O gol ia ter duas rodas esportivas e duas rodas comuns? (Aponta para a notação de MAT). Mas tem carro assim? Com duas rodas de cada tipo?

MAT – Não sei. (Olha para a EXP).

EXP – E por que você colocou aqui... (Aponta para a notação de MAT)?

MAT – Vai ver que tem algum carro assim... (Olha para a EXP).

8º. momento: Percebendo que MAT estava em dúvida sobre a solução que havia utilizado, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional escrita e, em seguida, apresentou um contra-exemplo para instigar a reflexão de MAT.

EXP – É por que outro dia uma criança me falou que o gol poderia ser com as duas rodas, com os dois tipos de roda. Ou todas comum ou todas esportivas. (Olha para MAT). Que o palio também poderia ser com os dois tipos de roda e o corsa também e ele falou que dariam um total de seis tipos diferentes, por que cada carro poderia combinar com os dois tipos de roda. O que você acha? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para a EXP e fica em silêncio).

EXP – Que ele está errado? (Olha para MAT). Que ele está certo? (Olha para MAT).

MAT – Tá errado por que... (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda). A esportiva é duas... (Olha para a sua notação). A roda da frente e a roda de trás do gol vai ser duas comum... (Olha para sua notação). Daí vai dar doze... (Olha para a EXP).

9º. momento: Na seqüência, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por MAT.

EXP – Doze? (Olha para MAT). Você acha que é doze mesmo? (Olha para MAT).

MAT – Por que juntando os três tipos vai dar um total de doze. (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda e olha para a EXP).

EXP – Doze o que? (Olha para MAT).

MAT – Doze tipos de roda. (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda e olha para a EXP).

EXP – Você pode anotar isso para mim? (Olha para MAT). Então, por favor... (Aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Pega a caneta preta que está em cima da mesa com a mão direita, enquanto enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda. Registra a sua resposta: 12 tipos de rodas. Quando finaliza sua notação, coloca a caneta preta em cima da mesa).

12 TIPOS DE RODAS

MAT iniciou a solução do problema com solução de nível IIB, mas, ao final, a solução notacional e verbal de MAT e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível II, subnível IIC: dos casos favoritos combinando duas variáveis com uma. Essa solução representa a combinação de duas variáveis com uma. Essas combinações foram obtidas por meio de escrita alfabética e numérica. Nessa solução, a cada valor de uma variável correspondem dois valores da outra variável.

Essa mudança de subnível se fez quando se manifestaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: instigadora; orientadora; reorientadora; instigadora; questionadora; instigadora e questionadora.

PROBLEMA 3

Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

1º. momento: MAT fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, explicou para a EXP as informações que o problema trazia. Então, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema e sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que explicitara oralmente.

MAT – (Aproxima a folha de si e olha atentamente para o problema. Coloca as duas mãos em cima da folha, uma sobre a outra e faz a leitura silenciosa do problema. Quando finaliza olha para a EXP). Aqui está falando sobre as camisetas... (Enrola a ponta dos cabelos com a mão esquerda). E perguntando quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar. (Olha para a EXP).

EXP – E como você responderia? (Olha para MAT).

MAT – Ela tem quinze tipos de cores e doze personagens. (Enquanto responde, busca as informações no problema). Daí... (Enrola as pontas dos cabelos com o dedo indicador da mão esquerda).

EXP – Vai pensando e anota como você está pensando. (Aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Olha para cima, movimentando os lábios, olha para o lado. As duas mãos estão embaixo da mesa, como se estivesse escondendo os dedos para poder contar. Pega a caneta preta que estava em cima da mesa, olha novamente para o problema, escreve a palavra VERDE e olha para a EXP). Pode ser de duas cores para cada personagem?

2º. momento: MAT demonstrou estar em dúvida sobre as combinações que podia fazer; então, a EXP sugeriu a ele que lesse o problema novamente, buscando as informações que o problema trazia. Em seguida, indagou-o sobre algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as havia compreendido.

EXP – Vamos ver o que está escrito no problema? (Olha para MAT e aponta para o problema).

MAT – (Olha para a EXP, acena afirmativamente com a cabeça e faz a leitura silenciosa do problema).

EXP – Quantos personagens que ela tem? (Olha para MAT).

MAT – Doze. (Olha para a EXP).

EXP – E quantas cores de camiseta? (Olha para MAT).

MAT – (Coloca a mão na orelha) Quinze. (MAT retoma as informações do problema, escreve uma a uma as cores de camiseta que Eduarda tem para bordar e embaixo da cor escreve o número doze).

VERDE 12	ROSA 12	ASUL 12	VERMELHO 12
BRANCO 12	AMARELO 12	ROCHO 12	PRETO 12
ASUL MARINHO 12	CINZA 12	COR DE PELE 12	
AMARON 12	AMARELO CONMADO 12	ASUL ES-	
CURO 12	ALARANJADO 12		

3º. momento: MAT identificou as variáveis necessárias à solução do problema e a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – Tá, e agora para descobrir quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar? (Aponta para as notações).

MAT – (Olha para suas notações).

EXP – Como você vai descobrir?

MAT – (Olha para suas notações, movimentando a boca, olha para a EXP, sorri e levanta os ombros em sinal de dúvida). Não sei. (Olha para a EXP).

4º. momento: MAT respondeu que não sabia o que fazer; então, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional e, em seguida, desafiou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – Oh... (Aponta para as notações). Você descobriu que com a verde ela pode fazer doze, (Aponta para a palavra verde) com a rosa doze, (Aponta para a palavra rosa) com a azul doze, (Aponta para a palavra azul) com a vermelha doze (Aponta para a palavra vermelha). E no total como vai dar para você saber? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para suas notações).

EXP – No total quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar? (Aponta para as notações de MAT).

MAT – (Pára, olha para as suas notações, lê o problema silenciosamente, fica em silêncio e olha para a EXP).

EXP – O que você pode fazer para descobrir MAT? (Olha para MAT).

MAT – É uma conta de mais. (Olha para a EXP, olha para suas notações, em seguida, começa a contar de quinze em quinze nos dedos, utilizando as duas mãos e movimentando levemente os lábios. Enquanto conta olha para os dedos). Cento e quarenta e cinco.

5º. momento: Percebendo que o resultado obtido por MAT não estava correto, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele e, em seguida, sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Como você foi fazendo essa conta? (Olha para MAT).

MAT – Conta de mais. (Olha para a EXP).

EXP – Será que não seria mais fácil você anotar os números para não se perder na conta? (Olha para MAT).

MAT – Seria. (Olha para a EXP).

EXP – Você não quer tentar? (Olha para MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Então tenta. (Olha para MAT).

MAT – (“Arma” o algoritmo da adição e inicia o cálculo pela coluna das unidades).

Na solução desse problema houve elaboração de nível IV, a solução notacional e verbal utilizada por MAT e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo aditivo, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Houve alternância das seguintes formas de intervenção da experimentadora: instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; orientadora; questionadora; orientadora e questionadora. Logo, com a alternância entre as formas de intervenção identificadas, houve a elaboração acima referida.

PROBLEMA 4

Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

1º. momento: MAT fez a leitura silenciosa do problema e, quando terminou de ler, explicou para a EXP o que estava escrito no problema; em seguida, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

MAT – Aqui está dizendo sobre os sorvetes, as coberturas e as casquinhas. (Faz uma pausa). Quantos tipos de cobertura e de casquinha eu posso combinar. (As mãos continuam embaixo da mesa e, enquanto fala, movimentava-se na cadeira, em seguida, fica em silêncio).

EXP – E como você vai fazer para resolver o problema? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para o problema, se ajusta na cadeira, faz uma nova leitura silenciosa do problema e olha para a EXP). As casquinhas... Tem duas. (Olha novamente para o problema). Sete sabores de sorvete... E três tipos de cobertura. (Olha para a EXP).

2º. momento: Verificando que MAT havia retomado as informações do problema, a EXP sugeriu a ele que lesse novamente o problema, para identificar a questão proposta.

EXP – Tá! (Olha para MA). E aí, a pergunta diz o que? (Aponta para a pergunta do problema).

MAT – (Lê em voz alta a pergunta do problema). De quantos... De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha? (Finaliza a leitura e olha para a EXP).

3º. momento: MAT leu a pergunta do problema em voz alta; em seguida, foi provocado pela EXP à busca de uma solução para o problema.

EXP – Como que você vai fazer para poder responder este problema? (Olha para MAT).
 MAT – Morango... (Olha para o lado). Sorvete de morango... (Movimenta-se na cadeira). Doce de... (Olha para o lado). Casquinha... Cascão... Casquinha. (Olha para o problema e, em seguida, para a EXP).

4º. momento: MAT elaborou uma solução verbal; então, a EXP pediu-lhe que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações do problema.

EXP – Então, quantos sabores de sorvete têm lá? (Olha para MAT).
 MAT – Sete. (Olha para a EXP e continua se movimentando na cadeira)
 EXP – Sete. Cada sabor de sorvete pode combinar com quantas casquinhas? (Olha para MAT).
 MAT – Duas. (Olha para a EXP).
 EXP – Duas. E aí já deu quantos tipos diferentes? (Olha para MAT).
 MAT – (Olha para cima e conta movimentando a boca). Sete. (Olha para a EXP). Sete combina com casquinha. (Olha para a EXP). E sete combina com Cascão. (Olha para a EXP).
 EXP – Quanto que já dá tudo isso? (Olha para MAT).
 MAT – (Olha para cima). Quatorze.

5º. momento: MAT identificou todas as combinações possíveis entre duas das três variáveis; então, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a havia compreendido.

EXP – Quatorze. Mas é só sabor e casquinha que dá para combinar? (Olha para MAT).
 MAT – (Olha para o problema). Não.
 EXP – O que mais dá para combinar também? (Olha para MAT).
 MAT – Cobertura. (Responde bem baixinho e se ajeita na cadeira). Tem também a cobertura para por nos sorvetes. (Olha para a EXP e sorri).

6º. momento: MAT identificou a terceira variável; então, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema e, em seguida, desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E daí? (Olha para MAT).

MAT – (Lê trechos do problema para buscar esta informação). Cobertura é três tipos... (Olha para a EXP e, em seguida, olha para cima). Dá para combinar com... Com os sorvetes. (Olha para a EXP). Com as casquinhas... (Olha para a EXP).

EXP – E quanto que dá no total? (Aponta para o problema). De quantas maneiras diferentes você pode se servir? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para cima). Quatorze. (Faz uma pausa e corrige sua resposta). Não!... Colocando mais as três coberturas... (Movimenta-se para a direita e para a esquerda na cadeira, balançando-se e olha para cima, refletindo). Dezesete.

7º. momento: MAT obteve dezesete, como resposta; então, a EXP convidou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Você pode me mostrar como é isso que você pensou? (Aponta para a folha de sulfite).

MAT – Tem quatorze e daí eu coloquei os três tipos de cobertura. (As mãos continuam embaixo da mesa e ele movimenta o corpo, balançando-o). Daí... Fica dezesete. (Olha para a EXP).

Essa solução verbal de MAT e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível III, subnível IIIB: as aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão. Sua solução foi obtida mediante diferentes combinações e complementações de cálculos aditivos, entre alguns dos valores das variáveis envolvidas, na busca de certo número de combinações.

8º. momento: Para fazer com que MAT refletisse sobre sua solução, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução que ele tinha utilizado.

EXP – Vamos supor: Você tem quatorze tipos de sorvete já misturados com a casquinha, né? (Olha para MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Se você pegar um desses sabores, vai poder combinar com quantas coberturas? (Olha para MAT).

MAT – Ah... Com as três. (Olha para o problema e, em seguida, olha para a EXP). Cada um dá com as três.

9º. momento: MAT identificou que cada um dos sabores poderia combinar com os três tipos de cobertura, e a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E aí, o que você pode fazer para descobrir quanto vai dar no total? (Olha para MAT e aponta para o problema).

MAT – Contando de três em três? (Olha para a EXP com expressão de dúvida).

10º. momento: Percebendo que MAT estava em dúvida sobre o que fazer, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – O que você acha? (Olha para MAT).

MAT – (Movimenta os braços para cima e para baixo como sinal de dúvida).

EXP – Então, tenta. (Olha para MAT e sorri).

MAT – (Elabora então uma solução notacional escrita).

11º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Você pode me explicar o que você fez? (Olha para MAT).

MAT – (Passa a mão no rosto, olha para o lado, movimentando-se na cadeira). Vinte e um. Os... É dos sabores e das coberturas... (Olha para a EXP).

EXP – Vinte e um? Como que você pensou? (Olha para MAT).

MAT – Contando de três em três. (Aponta para os números três de sua notação).

EXP – Me explique: (Aponta para a notação de MAT).

MAT – (Com o dedo indicador da mão esquerda aponta para os números três). Três mais três (Aponta para o primeiro e para o segundo três que escreveu) é seis, com mais três (Aponta para o terceiro três que escreveu) é nove, com mais três (Aponta para o quarto três que escreveu) é doze, (Faz uma pausa e respira fundo) com mais três (Aponta para o quinto três que escreveu) é quinze, com mais três (Aponta para o sexto três que escreveu) é dezoito e com mais três (Aponta para o último três que escreveu) dá vinte e um. (Olha para a EXP).

Essas soluções, verbalizações e interpretações de MAT indicam solução de nível III, subnível IIID: das combinações possíveis entre duas das três variáveis. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores de duas das três variáveis envolvidas, por meio de escrita alfabética e numérica. A cada valor de uma variável correspondem todos os valores da outra variável.

12º. momento: Na seqüência, a EXP sugeriu a MAT que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que tinha explicitado oralmente.

EXP – Então anota. (Aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Com a caneta preta anota o número vinte e um, enrolando o cabelo com a mão esquerda).

13º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP pediu a ele que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações e com a questão proposta pelo problema e, em seguida, sugeriu a MAT que registrasse sua resposta na folha de papel sulfite.

EXP – Vinte e um, é isso mesmo? É isso que o problema está perguntando? (Olha para MAT). Você se lembra que tem mais uma coisa que você me falou, você me falou que cada um desses (Aponta para o sabor e a cobertura) poderia ser com duas casquinhas.

MAT – (Olha para suas notações e segura a caneta preta na mão). É mesmo... Não vai dar... Vai dar quarenta e dois. (Olha para a EXP).

EXP – Então anota. (Aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Com a caneta preta faz um X em cima do número vinte e um).



14º. momento: Após MAT alterar sua resposta, foi questionado pela EXP a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Por que deu quarenta e dois? (Olha para MAT).

MAT – Por que vinte e um mais vinte e um é quarenta e dois. (Coça os olhos com a mão direita). E... Ajuntando os... As coberturas e os quatorze sabores vai dar quarenta e dois. (Olha para a EXP).

EXP – Juntando tudo?

MAT – (Acena a cabeça afirmativamente).

EXP – Então, de quantas maneiras diferentes você pode se servir? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para sua notação). Quarenta e dois. (Responde e continua enrolando o cabelo com a mão esquerda).

Agora, as notações e verbalizações de MAT e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das três variáveis, que por “árvore” de possibilidades, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Assim, de solução de subnível IIIB, MAT passou a IIID e depois chegou à solução de nível IV. Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que

alternaram-se as seguintes formas de intervenção da experimentadora, pela ordem em que apareceram: instigadora; orientadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; orientadora; questionadora; orientadora e questionadora. Houve alternância de formas de intervenção, predominando a questionadora e a instigadora.

QUADRO 3: AS SOLUÇÕES DE MAT AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO

MAT	PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3			PROBLEMA 4		
	TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV	MAT						MAT					MAT
III	III D										MAT	
	III C											
	III B									MAT		
	III A											
II	II C				MAT							
	II B			MAT								
	II A											
I	I B											
	I A											

Como se vê no quadro acima, MAT nos problema 1 e 3 utilizou na primeira tentativa, solução de nível IV, descrevendo e identificando cada uma das variáveis e seus respectivos valores. Essas soluções ocorreram em situação em que se manifestaram as formas de intervenção da experimentadora em alternância.

Na solução dos problemas 2 e 4, MAT partiu de solução de nível inferior para solução de nível mais adiantado. No problema 2 havia presença dos valores distractores.

A mudança de nível de solução nos problemas 2 e 4 se fez quando se alternaram as formas de intervenção da experimentadora. Na solução do problema 4, predominaram as formas de intervenção: questionadora e instigadora. Na solução dos problemas 1 e 3 houve alternância das formas de intervenção da experimentadora.

1ª. SESSÃO – EDU – (9; 7)

PROBLEMA 1

Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que podiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e relembra-o dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar os problemas e, em seguida, leu o problema em voz alta a pedido do sujeito.

2º. momento: EDU ficou em silêncio; então, a EXP sugeriu a ele que lesse o problema, buscando as informações que o problema trazia.

EXP – O que está dizendo aí no problema? (Olha para EDU). Que na panificadora vende o que? (Olha para EDU).

EDU – Bolo. (Continua segurando a folha com as duas mãos).

EXP – Bolo. E tem quantos tamanhos de bolo? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para o problema). Médio, grande e pequeno. (Olha para a EXP). E tem também os sabores. (Olha para o problema).

EXP – E tem quantos sabores de bolo? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para o problema). Tem seis. (Olha para a EXP).

3º. momento: EDU identificou as variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – E como você vai fazer para encontrar o resultado? (Olha para EDU).

EDU – Vou desenhar. (Olha para a EXP e sorri).



Essa solução notacional de EDU indica solução de nível II, subnível II C: dos casos favoritos, em uma variância em que valores das duas variáveis estão presentes. Essa combinação foi obtida por meio de registro pictórico, envolvendo a escrita alfabética. A cada valor de uma variável correspondem dois valores da outra.

4º. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP indagou dele algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as tinha compreendido.

EXP – Então o bolo, ele pode ter quantos sabores? (Olha para EDU).

EDU – Um. (Olha para a EXP). Um de cada né? (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Mas lá na panificadora quantos sabores diferentes têm? (Olha para EDU e aponta com a caneta preta para o problema).

EDU – Seis. (Olha para a EXP).

EXP – E quantos são os tamanhos que o bolo pode ter? (Olha para EDU).

EDU – São três. (Olha para a EXP).

5º. momento: EDU identificou as duas variáveis necessárias à solução do problema; então a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – O bolo pequeno pode ser de quais sabores? (Olha para EDU).
 EDU – Coco. (Olha para a EXP).
 EXP – Pode ser de coco...
 EDU – Doce de leite. (Olha para a EXP).
 EXP – De doce de leite. (Olha para EDU).
 EDU – Chocolate. (Olha para a EXP).
 EXP – De chocolate. (Olha para EDU).
 EDU – Brigadeiro. (Olha para a EXP).
 EXP – De brigadeiro. (Olha para EDU).
 EDU – Banana. (Olha para a EXP).
 EXP – De banana. (Olha para EDU).
 EDU – E de doce de leite.
 EXP – Quantos sabores? (Olha para EDU).
 EDU – Seis. (Olha para a EXP).

6º. momento: Após EDU combinar um a um os sabores com o tamanho de bolo pequeno, a EXP novamente indaga dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a tinha compreendido.

EXP – E o bolo médio, de quantos sabores você vai poder comprar? (Olha para EDU).
 EDU – Também. (Acena afirmativamente com a cabeça).
 EXP – Então ele pode ser de quantos tipos? (Olha para EDU).
 EDU – De seis. (Olha para a EXP e acena afirmativamente com a cabeça).

7º. momento: EDU combinou um a um os sabores com o tamanho de bolo médio; então, novamente foi indagado pela EXP sobre uma informação que constava no problema.

EXP – De seis. E o bolo grande?
 EDU – Seis também. (Mexe com a mão esquerda na folha e acena afirmativamente com a cabeça).

8º. momento: Após perceber que EDU havia combinado separadamente cada um dos sabores com cada um dos tamanhos, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Juntando tudo isso, quantos tipos diferentes de bolo você pode comprar? (Olha para EDU). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

EDU - (Olha para suas notações, pára e olha para a EXP). Três. Será que é três? (Olha para a EXP, fica por algum tempo em silêncio e sorri).

Essa solução verbal de EDU indica solução de nível I, subnível I A: da escolha de variáveis. Sua resposta contém escolha relativa a uma variável, sem qualquer combinação entre os valores das variáveis.

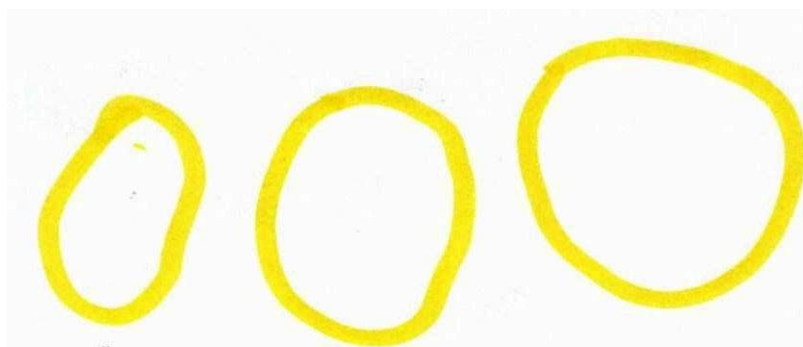
9º. momento: Percebendo que EDU estava em dúvida sobre sua resposta, a EXP estimulou-o a explicitar o que estava pensando e, em seguida, sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que havia explicitado oralmente.

EXP – O que você está pensando! (Olha para EDU e sorri).

EDU – (Olha para a EXP). Estou pensando no total... Tudo junto... Quanto que vai dar... (Olha para a EXP).

EXP – Pense só, se você tentar... Registre aí, na folha de sulfite, isso que você está pensando! (Olha para EDU e aponta para a folha de sulfite).

EDU – (Olha para a EXP, pega a canetinha amarela e utilizando-se do registro pictórico desenha o contorno do bolo grande). Grande. (Em seguida, desenha o contorno bolo médio). Médio. (Por último desenha o contorno bolo pequeno). Pequeno. (Quando finaliza suas soluções notacionais, olha para a EXP, coloca a canetinha amarela em cima da mesa e sorri).



10º. momento: Após EDU ter desenhado o contorno dos três tamanhos de bolo, a EXP indagou-o sobre uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a havia compreendido.

EXP – Então, o pequeno (Aponta para o bolo pequeno desenhado por EDU) pode ser de quantos sabores? (Olha para EDU). Que a gente acabou de pensar...

EDU – Seis. (Olha para a EXP, pega a caneta preta e anota o número seis embaixo do bolo pequeno).

EXP – E o médio? (Aponta para o bolo médio que EDU havia desenhado).

EDU – Seis. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Seis também!

EDU – (Com a caneta preta que estava em sua mão, anota o número seis embaixo do bolo médio).

EXP – E o grande?

EDU – Seis. (Olha para a EXP e acena afirmativamente com a cabeça).

11º. momento: EDU finalizou sua solução notacional; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Seis. E agora, combinando tudo, quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar combinando um tamanho e um só sabor? (Lê novamente a pergunta do problema e aponta com o dedo indicador).

EDU – (Acompanha com o olhar atento a leitura do problema). Dezoito.

12º. momento: EDU obteve dezoito, como resposta; então, a EXP convidou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Como você descobriu? (Olha para EDU e sorri). Como você pensou no dezoito? (Olha para EDU).

EDU – É que eu fiz seis... Seis mais seis... (Aponta para os seis que escreveu embaixo dos bolos pequeno e médio, com a caneta preta). Dá doze... Daí juntando mais seis... (Aponta com a caneta preta para o número seis que escreveu embaixo do bolo grande). Dá dezoito. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Por que seis, mais seis, mais seis? (Olha para EDU).

EDU – Seis de cada tamanho, né! (Olha para a EXP e sorri).

13º. momento: Após EDU explicar como pensou, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e resultados que tinha explicitado oralmente.

EDU – (Olha para a EXP e sorri e, com a caneta preta que está na sua mão faz a seguinte notação: seis mais seis dá doze e depois com mais seis. Pára, olha para o que escreveu, faz a leitura em voz baixa, arruma as canetinhas que estão escorregando de cima da mesa e continua sua notação, no total dá dezoito. Quando finaliza a notação, olha para a EXP).

EXP – E aí, o que você escreveu aí? (Aponta para a notação de EDU).

EDU – (Olha para a sua notação e a lê). Seis mais seis dá doze e depois com mais seis no total da dezoito. (Olha para a EXP).

EXP – Dezoito o que? (Aponta para o número dezoito escrito por EDU).

EDU – Dezoito... Sabores de bolo. (Movimenta a folha de sulfite com a mão direita em cima da mesa).

seis mais seis da doze e depois
mais 6 no total da 18

De início, EDU apresentou solução de nível II, subnível IIC, que passou no decorrer da solução para o nível I, subnível IA e, no final, a solução notacional e verbal de EDU e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer em representação pictórica, quer por cálculo aditivo não-convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: orientadora; reorientadora; orientadora; instigadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora e orientadora.

PROBLEMA 2

Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

1º. momento: A EXP fez a leitura em voz alta a pedido de EDU; quando a EXP finalizou a leitura do problema, EDU fez a leitura do problema e iniciou uma solução.



Essa solução notacional de EDU indica solução de nível II, subnível IIB: dos casos favoritos ignorados os distractores. Essa solução representa alguns casos de combinação das variáveis, sem que os valores distractores interfiram na solução. Nessa solução os valores das variáveis se excluem: a cada valor de uma variável corresponde somente um valor da outra. Há forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador.

2º. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP provocou-o a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – Será que o gol poderia ser de algum outro tipo? (Aponta com a caneta preta para a palavra gol e para a palavra esportivo).

EDU – Podia. (Olha para suas notações).

EXP - Com qual roda?

EDU – Com comum. (Olha para a EXP).

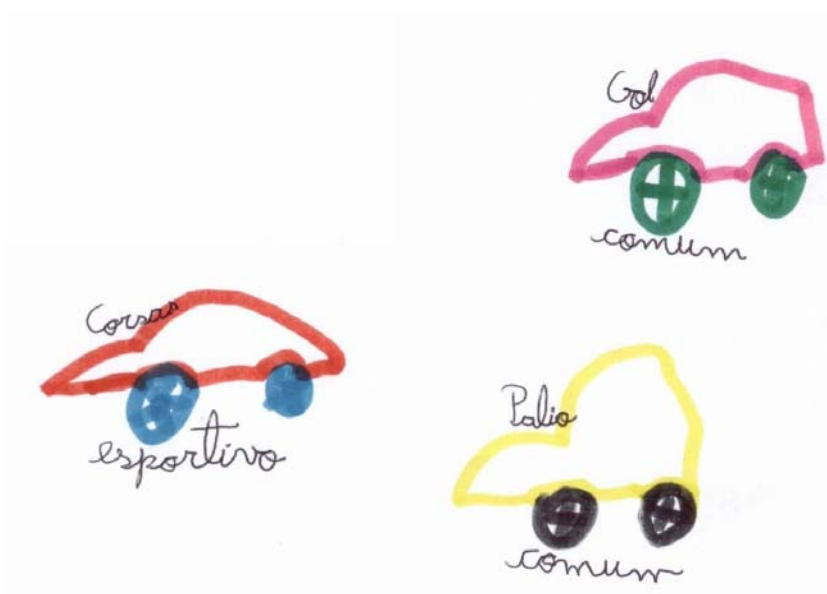
3º. momento: Um a um, EDU afirmou que os tipos de carro podiam combinar também com o outro tipo de roda; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E aí então, no total quantos jeitos diferentes que os tipos de carros e rodas poderiam ser combinados? De quantos tipos diferentes? (Olha para EDU e sorri).

EDU - Três. (Olha para suas notações e, em seguida, olha para a EXP). Três tipos de carro.

Essa solução verbal de EDU indica solução de nível I, subnível I A: da escolha de variáveis. Sua solução verbal contém escolha relativa a uma variável, sem qualquer combinação entre os valores das variáveis.

4°. momento: EDU obteve três, como resposta; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.



5°. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP leu a questão do problema em voz alta e, em seguida, desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Então diz lá: (Lê novamente a pergunta do problema para EDU). De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? De quantas maneiras diferentes que você descobriu?

EDU – (Olha para as suas notações, lê silenciosamente a pergunta do problema) Seis. (Com a caneta preta que estava em sua mão, registra uma resposta na folha de sulfite).

os tipos de cores pode ser combinado com
seus tipos de rodas e da seus tipos de
tr.

6°. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP pediu a ele que explicitasse sua interpretação sobre a solução que tinha utilizado.

EXP – Você pode me explicar como você pensou? (Olha para EDU e sorri).

EDU – Desenhei os tipos de carro com os tipos de rodos. (Olha para a EXP). Todos os tipos que tinha lá. (Aponta para o problema).

EXP – Então você tinha quantos tipos de carros? (Aponta para o problema).

EDU – Três. (Coloca a mão em cima das canetinhas coloridas).

EXP – Três. E quantos tipos de rodas? (Aponta novamente para o problema).

EDU – Três... (Olha para o problema e imediatamente corrige sua resposta). Duas. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Dois tipos de rodas, né? (Olha para EDU e aponta para esta informação no problema). Quais eram os tipos de rodas?

EDU – (Movimenta a cabeça e sorri). Esportiva e comum. (Olha para a EXP).

EXP – E comum. E os tipos de carros?

EDU – (Olha para suas notações). Gol, palio e corsa. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então você tinha três tipos de carros... (Aponta para esta informação no problema). Combinando com dois tipos de rodas... (Aponta para esta informação no problema). Formou quantos tipos diferentes? (Aponta para as notações de EDU).

EDU – Seis. (Olha para a EXP e sorri). Cada carro com os dois tipos de roda. As duas rodas que tinha. (Olha para a EXP).

7°. momento: EDU explicou como tinha pensado; então, a EXP instigou-o a refletir se já havia aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Seis. Teria alguma conta que você já aprendeu na escola? Alguma continha que você soubesse fazer para representar este resultado? (Aponta para o resultado encontrado por EDU).

EDU – (Movimenta-se na cadeira e coloca as mãos próximas ao seu corpo). Não. (Acena negativamente com a cabeça).

A solução notacional e a solução verbal de EDU iniciaram-se no nível II, subnível IIB. No decorrer, as soluções passam para o nível I, subnível IA. No final, a solução notacional e verbal de EDU e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por meio de representação pictórica, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

2°. momento: Quando EDU finalizou sua notação, a EXP solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia produzido.

EXP – O que você fez aí, você pode me explicar? (Aponta para as notações de EDU).

EDU – Eu fiz as camisetas... E desenhei os personagens. (Olha para suas notações). Quinze camisetas e os quinze personagens. (Olha para a EXP e sorri).

Essa solução notacional de EDU e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível III, subnível IIIA: as buscas iniciais de combinações, “distorcidas” pelo valor de uma variável. Em sua solução as combinações foram obtidas por meio de representação pictórica e escrita alfabética, margeadas sempre pela variável de maior valor, na aparente busca de “muitas maneiras”.

3°. momento: Na seqüência, a EXP provocou EDU a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Tá, por exemplo, esta camiseta aqui vermelha... (Aponta com a caneta preta para a primeira camiseta desenhada por EDU). Que personagem é esse? (Aponta para o personagem desenhado por EDU).

EDU – Pinóquio. (Ajeita-se na cadeira).

EXP – O Pinóquio. O Pinóquio será que só pode estar nesta camiseta? (Circula invisivelmente a camiseta vermelha com a caneta preta). Só na vermelha ele pode sair?

EDU – Num, num. (Acena negativamente com a cabeça).

EXP – Ele pode sair em quantas? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para suas notações). Duas... (Olha para a EXP). Eu acho que é... (Olha para a EXP).

4°. momento: EDU identificou duas possibilidades de combinação; contudo, não tinha muita certeza. Então, a EXP instigou-o a dar uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a tinha compreendido.

EXP – Só em duas ele pode sair? (Aponta para as camisetas desenhadas por EDU).

EDU – Não. Ele pode sair em todas. (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Então esse personagem (Aponta para o primeiro personagem desenhado por EDU) pode combinar com quantas camisetas?

EDU – Quinze. (Movimenta-se na cadeira).

5º. momento: EDU identificou que cada um dos personagens poderia combinar com todas as doze cores de camiseta; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Como você vai fazer para descobrir no total? Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar? (Aponta para as camisetas desenhadas por EDU).

EDU – É só juntar o doze e o quinze. (Olha para a EXP). Não é? (Olha para a EXP). Eu acho que é doze mais quinze... (Olha para a EXP).

Essa solução verbal de EDU indica solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo, de todos os valores envolvidos conforme sua ordem de aparecimento.

6º. momento: EDU demonstrou estar em dúvida sobre o procedimento de cálculo que iria utilizar; então, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele.

EXP – Será que doze mais quinze responderia de todo o problema?

EDU – Não. (Acena negativamente com a cabeça).

EXP – Oh, você falou que aqui... (Aponta com a caneta preta para a camiseta vermelha). Dá para combinar com doze?

EDU – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – E aqui? (Aponta com a caneta preta para a camiseta azul).

EDU – Doze. (Olha para a notação e olha para a EXP).

EXP – E aqui? (Aponta com a caneta preta para a camiseta verde).

EDU – Doze. (Olha para a notação e olha para a EXP).

EXP – E aí? (Aponta para as outras camisetas). O que você poderia fazer? (Olha para EDU).

EDU – (Coça o rosto com o dedo indicador da mão direita, olha para suas notações, sorri, olha para o problema). Pega doze de cada camiseta e soma os doze... (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então tenta fazer para ver se vai dar certo. (Olha para EDU e sorri).

7º. momento: Após o questionamento da EXP, EDU respondeu que efetuará uma adição; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EDU – (Com a caneta preta que estava na sua mão, escreve os números doze, em duas colunas, em seguida, coloca a mão esquerda embaixo da mesa para auxiliá-lo na contagem e se perde).

$$\begin{array}{ll}
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12 \\
 12 & 12
 \end{array}$$

8º. momento: EDU tentou efetuar mentalmente a adição e se perdeu; então, a EXP o estimulou a explicitar o que estava pensando.

EDU – Tô pensando primeiro nos dois e depois vou contar os um. (Obtém trinta na adição das unidades e registra no canto esquerdo da folha de sulfite, depois, soma as dezenas e obtém cento e cinquenta, como resposta e registra este valor no canto esquerdo da folha também, em seguida, efetua a adição).

$$\begin{array}{r}
 30 \\
 + 150 \\
 \hline
 180
 \end{array}$$

9º. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que você descobriu? (Aponta para a notação de EDU).

EDU – Cento e oitenta... (Olha para a EXP). Camisetas que ela pode bordar. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Porque você escreveu quinze vezes o número doze? (Aponta para a notação de EDU).

EDU – Por causa das... (Olha para a EXP). Das... Camisetas que ela pode bordar. (Olha para a EXP e sorri). Tinha doze camisetas mais com as quinze cores. (Olha para a EXP). Isso que eu fiz.

Essa solução notacional e verbal de EDU e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo aditivo não-convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Em suma, do subnível IIIA a solução de EDU passou por regressões aditivas que caracterizam o subnível IB, mas, ao final, são obtidas, por cálculo aditivo, o total de combinações; dessa forma, sua solução chega ao nível IV.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; orientadora; instigadora e questionadora, com incidência maior das formas instigadora e questionadora.

PROBLEMA 4

Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

1º. momento: A EXP leu o problema em voz alta a pedido de EDU; em seguida, EDU fez a leitura silenciosa do problema e quando finalizou, iniciou uma solução.

EDU – (Pega a canetinha amarela e desenha duas casquinhas, pára, busca a informação no problema e desenha mais cinco casquinhas, totalizando sete casquinhas. Quando finaliza, pega a canetinha vermelha e desenha sobre a primeira casquinha uma bola de sorvete, coloca a canetinha vermelha em cima da mesa, pega a canetinha azul e desenha ainda na primeira casquinha, ao lado da bola de sorvete vermelha uma bola de sorvete azul. Em seguida, pega novamente a canetinha azul e preenche o contorno da bola de sorvete azul, coloca a canetinha azul em cima da mesa, pega a canetinha vermelha novamente e preenche o contorno da bola de sorvete vermelha e coloca a canetinha vermelha em cima da mesa. Em seguida, olha para a EXP).

Essa solução notacional de EDU indica solução de nível II, subnível IIC: dos casos favoritos combinando duas variáveis com uma. Sua solução representa a combinação de duas variáveis com uma. Essa combinação foi obtida por meio de registro pictórico. A cada valor de uma variável correspondem dois valores da outra variável.

2º. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP pediu a ele que verificasse se sua solução estava de acordo com as informações propostas pelo problema.

EDU - (EDU pára, reflete por alguns instantes, pega a canetinha verde e desenha uma cobertura em cima das duas bolas de sorvete desenhadas na primeira casquinha, e com a canetinha verde

desenha uma bola de sorvete na segunda casquinha,... pega a canetinha vermelha e desenha a cobertura em cima da bola de sorvete da segunda casquinha,... Pega a canetinha preta e desenha uma bola de sorvete na terceira casquinha,..., pega a canetinha amarela e desenha a cobertura em cima da bola de sorvete da terceira casquinha,... Pára, olha para as notações que fez, lê rapidamente as informações do problema, pega a canetinha rosa e desenha uma bola de sorvete na quarta casquinha,..., pega a canetinha preta e desenha a cobertura em cima da bola de sorvete da quarta casquinha,... Pára, olha para as canetinhas, reflete, pega a canetinha amarela e desenha uma bola de sorvete na quinta casquinha,..., pega a canetinha preta e desenha a cobertura em cima da bola de sorvete da quinta casquinha,... Pára,..., olha para as notações, lê o problema,..., pega a canetinha azul e desenha uma bola de sorvete na sexta casquinha,..., pega a canetinha rosa e desenha a cobertura em cima da bola de sorvete da sexta casquinha,..., pega a canetinha preta, desenha o contorno de uma bola de sorvete e desenha quatro pontinhos dentro do contorno da sétima casquinha,..., olha para as notações que já fez,..., pega a canetinha azul e desenha a cobertura em cima da bola de sorvete da sétima casquinha).



3º. momento: Quando EDU complementou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que você fez EDU? (Olha para EDU e para suas notações).

EDU – Aqui (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para a primeira bola de sorvete que desenhou) é a massa, aqui (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para a primeira cobertura que desenhou) é a cobertura e aqui (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para a primeira casquinha que desenhou) é a casquinha. (Olha para a EXP). Eu juntei os todos com as três coisas... (Olha para a EXP e aponta para o problema).

4º. momento: A resposta de EDU fez referência às três variáveis; então, a EXP leu a questão do problema em voz alta e, em seguida, desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Olha lá! (Aponta para a questão do problema). De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

EDU – De sete. (Olha para a EXP).

5º. momento: EDU obteve sete, como resposta; então, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele.

EXP – Você acha que dá sete mesmo? (Olha para EDU e aponta para sua solução notacional).

EDU – (Pára, olha para as notações, lê o problema, pára, coloca a mão esquerda em cima da folha e, com os dedos polegar, indicador e médio da mão direita, aponta para o último sorvete que desenhou). Porque tem sete tipos de cobertura e sete tipos de massa... E sete tipos de casquinha.

A solução notacional e verbal utilizada por EDU e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível III, subnível IIIA: as buscas iniciais de combinações, “distorcidas” pelo valor de uma variável. Em sua solução as combinações são representadas de acordo com a variável de maior valor. Essas combinações são obtidas por meio de representação pictórica, margeada sempre pela variável de maior valor, na aparente busca de “muitas maneiras”.

6º. momento: Na seqüência, a EXP indagou de EDU uma informação que constava no problema, verificando se de fato ele a compreendera.

EXP – Ah, tem sete tipos de cobertura! Está escrito isto no problema? (Olha para EDU e aponta para o problema).

EDU – (Segura as canetinha verde e vermelha com a mão direita, olha para a EXP e sorri. A mão esquerda está apoiada em cima das pernas. Balança a cabeça negativamente). Nhum, nhum. (Olha para a EXP). Não diz isso. (Olha para a EXP e acena negativamente com a cabeça).

7º. momento: EDU respondeu que a informação não estava no problema; então, a EXP novamente lhe pediu que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EDU – De sete. (Olha para a EXP).

EXP – Como você pensou? (Olha para EDU). Me explica para eu entender o que você pensou!

EDU – É que... É que... Tem sete sabores... (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para os sabores que desenhou)... E tem que ter sete casquinhas... (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para as sete casquinhas que desenhou, em seguida, coloca as mãos em cima da folha de sulfite). Aí... Com a cobertura que vai dar sete, vai dar sete coberturas. (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para as coberturas que desenhou). Agora, pronto! (Olha para a EXP e sorri).

Da solução de nível IIC, EDU passou à solução de subnível IIIA e, no final, a solução notacional e verbal utilizada por EDU e sua interpretação sobre a solução que utilizou, permanecem no nível III, subnível IIIA: as buscas iniciais de combinações, “distorcidas” pelo valor de uma variável. Em sua solução as combinações são representadas de acordo com a variável de maior valor. Essas combinações são obtidas por meio de representação pictórica, margeada sempre pela variável de maior valor, na aparente busca de “muitas maneiras”.

Essa mudança de nível de solução apareceu na alternância das seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; questionadora; instigadora e questionadora.

QUADRO 4: AS SOLUÇÕES DE EDU AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO

EDU		PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3			PROBLEMA 4		
		TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV				EDU			EDU			EDU			
III	III D												
	III C												
	III B												
	III A							EDU				EDU	EDU
II	II C	EDU									EDU		
	II B				EDU								
	II A												
I	I B							EDU					
	I A		EDU			EDU							

Como se vê no quadro acima, as soluções de EDU aos problemas 1, 2 e 3 iniciaram em um nível de solução mais adiantado, retornaram para um nível menos adiantado e, ao final, avançaram para o nível IV. No problema 4, as soluções de EDU partiram de um nível menos adiantado e avançaram para um nível mais adiantado de solução.

Durante a solução dos problemas 1, 2, 3 e 4, alternaram-se as formas de intervenção da experimentadora.

1ª. SESSÃO – BAR – (9; 1)

PROBLEMA 1

Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que podiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e, lembrou-lhe os materiais e a diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar os problemas; em seguida, leu o problema em voz alta a pedido do sujeito.

BAR – (Acompanha a leitura do problema e, quando a EXP finaliza a leitura, olha para ela, levantando os dedos da mão direita. Pára, olha para a folha de sulfite, pega a caneta preta, faz a leitura silenciosa do problema, movendo levemente os lábios). Pode escrever? (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Pode. (Olha para BAR).

BAR – (Com a caneta preta que já está em sua mão escreve a palavra morango). Um só?

2º. momento: BAR escreveu a palavra morango na folha de papel sulfite e questionou a EXP; então, a EXP sugeriu a ela que lesse o problema, buscando as informações que ele trazia.

EXP – Leia lá o que está perguntando, o que diz no texto do problema. (Aponta para o problema).

BAR – (Encosta a caneta preta no rosto)

EXP – (Lê a pergunta do problema para BAR). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor? Pensando que você tem os três tamanhos e os seis sabores.

BAR – (Enquanto a EXP lê o problema, acompanha com os olhos. Pára, olha para a folha, bate a caneta na folha, faz a leitura silenciosa da pergunta do problema, acompanhada pela caneta). Tem mais sabor... (Olha para a EXP e sorri).

3º. momento: BAR demonstrou estar em dúvida sobre o que fazer; então, a EXP indagou dela algumas informações que constavam no problema, verificando se de fato ela as havia compreendido.

EXP – Vamos olhar o problema? (Olha para BAR e sorri). Quantos tamanhos de bolo têm nessa padaria? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para a EXP e respira fundo) três. Tem o pequeno, o médio e o grande. (Olha para a EXP).

EXP – E tem quantos sabores que estes bolos poderiam ser? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para a EXP e respira fundo) Seis.

4º. momento: BAR identificou as variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP provocou-a a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – Por exemplo, você escreveu o sabor morango, se você fosse escolher o bolo de morango, ele poderia ser de quantos tamanhos? (Olha para BAR).

BAR – De um. (Olha para a EXP). Ah! (Movimenta as mãos, abre os dedos, olha para a EXP e sorri). Pequeno.

EXP – Você só podia escolher para comprar um, mas ele poderia ser de quantos tamanhos lá na panificadora? (Olha para BAR e sorri).

BAR – (Busca as informações no problema). Pequeno, médio e grande. (Olha para a EXP).

EXP – De quantos tamanhos? (Olha para BAR).

BAR – Três. (Com a caneta preta, escreve o número três ao lado da palavra morango).

5º. momento: BAR identificou que o bolo de morango poderia ser de três tamanhos; então, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – Vai vindo no total de quantos tipos você poderia escolher... Diferentes. (Olha para BAR). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor? (Olha para BAR e aponta para a folha de sulfite).

BAR – Eu escolhi outro sabor. (Com a caneta preta escreve a palavra coco embaixo da palavra morango).

EXP – O de coco poderia ser de quantos tamanhos? (Aponta para a palavra coco que BAR escreveu).

BAR – (Pára, encosta a caneta preta no rosto, olha para a palavra coco). Três. (Com a caneta preta, escreve o número três ao lado da palavra coco. Encosta a caneta preta no rosto, logo em seguida, com a caneta preta escreve a palavra doce de leite embaixo da palavra coco). Doce de leite. (Aponta com a caneta preta para o problema, como se estivesse buscando as informações, fica em silêncio).

EXP – E o de doce de leite, poderia ser de quantos tamanhos? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – De três. (Com a caneta preta, escreve o número três ao lado da palavra doce de leite. Coloca a mão esquerda na cabeça por alguns instantes, coloca novamente a mão na folha e, apontando com a caneta preta, faz a leitura silenciosa do problema. Pára, observa suas notações e, embaixo da palavra doce de leite, escreve a palavra chocolate, anotando, logo em seguida, ao lado da palavra chocolate o número três. Pára, observa e escreve a palavra “brigadero” embaixo da palavra chocolate, observa suas notações, enquanto enrola o cabelo com a mão esquerda, permanece com a caneta preta na mão. Faz uma leitura rápida dos sabores e dos tamanhos, apontando com a caneta e escreve o número 3 ao lado da palavra brigadeiro. Pára, arregança a manga da blusa do braço direito,

movimenta as mãos, lê o problema apontando com a caneta e escreve a palavra banana embaixo da palavra brigadeiro. Pára, observa e escreve o número três ao lado da palavra banana).

MORANGO 3
 COCO 3
 DOCE DE LEITE 3
 CHOCOLATE 3
 BRIGADEIRO 3
 BANANA 3

6º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – E aí então? (Olha para BAR). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor? (Olha para BAR e sorri).

BAR – (Aponta para o problema com a caneta).

EXP – Quantos tipos diferentes de bolo você ia poder escolher? Quantos tipos diferentes de bolo teriam lá na padaria para você escolher? (Olha para BAR).

BAR – Morango, coco, doce de leite, chocolate, brigadeiro e banana. (Bate levemente com os dedos da mão esquerda sobre a folha de papel sulfite).

7º. momento: BAR apenas leu os nomes dos sabores; então, a EXP indagou dela uma informação que constava no problema, verificando se de fato ela a compreendera.

EXP – Mas, de quantos tamanhos eles seriam? (Olha para BAR e aponta para o problema).

BAR – De três. (Olha para sua notação).

EXP – Será que combinando tudo isso os tamanhos com os sabores, quantos tipos diferentes de bolo daria? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – (Pára, observa, lê o problema). Contando os tamanhos? (Olha para a EXP).

EXP – Contando os tamanhos e os sabores.

BAR – Dá dezoito diferentes juntando com esses aqui... (Aponta para os números três que escreveu ao lado dos sabores) Né? (Olha para a EXP).

EXP – Daria então quantos tipos de bolos combinados com sabores para você escolher?

BAR – (Olha para o problema, olha para suas notações, coloca a mão direita no peito e respira fundo). Vinte e quatro.

8º. momento: BAR obteve vinte e quatro, como resposta; então, a EXP solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Vinte e quatro. Como você pensou para dar vinte e quatro?

BAR – Juntando todos. (Aponta para as suas notações e faz um círculo com a caneta, mostrando que descobriu o resultando juntando tudo).
 EXP – Juntando o que? (Olha para BAR).
 BAR – Os tamanhos e os sabores. (Bate levemente com a caneta na folha).
 EXP – Juntando os tamanhos e os sabores? Como que daria vinte e quatro? Me explica para que eu possa entender. (Olha para a EXP e sorri).
 BAR – (Observa a EXP e fica em silêncio).
 EXP – Você pegou três de cada... (Aponta para os números três que BAR escreveu).
 BAR – (Acena a cabeça afirmativamente).
 EXP – E depois fez o que?
 BAR – Conte com... Com estes daqui (Aponta com a caneta preta para os sabores que escreveu).
 EXP – E aí deu vinte e quatro. Misturando... Então pode responder.
 BAR – (Com a caneta preta escreve embaixo das notações que havia feito: "R: 24 sabores"). Vinte e quatro sabores.

A solução notacional e verbal de BAR e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível III, subnível IIIB: as aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão. Consiste de solução obtida mediante diferentes combinações e complementações de cálculos aditivos entre alguns dos valores das variáveis envolvidas, bem como entre resultados desses cálculos, na busca de certo número de combinações.

Essa solução foi obtida progressivamente na sessão quando houve as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; orientadora; questionadora; instigadora e questionadora.

PROBLEMA 2

Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

1º. momento: A EXP leu o problema em voz alta a pedido de BAR. Quando a EXP finalizou a leitura, BAR fez a leitura silenciosa e, em seguida, questionou a EXP.

BAR – (Acompanha a leitura do problema, a mão direita está na mesa, encostada na caneta preta e a mão esquerda apóia a folha de sulfite. Coça a cabeça com a mão esquerda, levanta a mão direita, enquanto lê o problema. Pega a caneta e faz a leitura silenciosa e apontada do problema. Segura a caneta na mão, encosta no rosto, bate na folha de sulfite). Pra escrever? (Olha para a EXP).

2º. momento: BAR perguntou se podia escrever; então, a EXP lembrou-a dos materiais e da diversidade de notações que podia utilizar para solucionar o problema.

EXP – Do seu jeito. Do jeitinho que você quiser, se você quiser desenha, se você quiser escreve, se você quiser faz continha... (Olha para BAR e sorri).

BAR – (Pára, observa e escreve com a caneta preta a palavra gols, pára, olha para o problema, aponta com a caneta preta para o problema e respira fundo). E as rodas? Pra mim escrever dos lados? (Olha para a EXP).

EXP – Pode... Você escrever o gol com qual roda podia ser. (Olha para BAR).

BAR – Rum, rum. (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Então escreve.

BAR – (Com o dedo indicador da mão direita aponta para o problema, procurando o nome dos tipos de roda).

EXP – Qual roda? O gol poderia ser com qual tipo de roda?

BAR – Esportiva. (Com a caneta preta, escreve a palavra esportiva ao lado da palavra gols).

EXP – Só poderia ser com a esportiva? (Olha para BAR).

BAR – Poderia ser também comum. (Com a caneta preta, escreve a palavra comum ao lado da palavra esportiva).

3º. momento: BAR identificou que o carro gol poderia combinar com os dois tipos de roda; então, a EXP indagou dela uma informação que constava no problema, verificando se de fato ela a compreendera.

EXP – Então o gol poderia ser de quantos jeitos? (Olha para BAR).

BAR – Esportiva e comum. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então quantos jeitos que são? (Olha para BAR).

BAR – Dois. (Aponta com a caneta preta para as palavras esportiva e comum que escreveu e escreve ao lado o número dois).

EXP – Dois.

BAR – (Pára, observa o que escreveu, faz a leitura do problema novamente, acompanhando com a caneta). Palios. (Com a caneta preta escreve a palavra palio embaixo da palavra gol). O palio também pode ser com a esportiva e com a comum também. (Localiza com a caneta preta os tipos de roda no problema e anota ao lado da palavra palio. Quando finaliza a escrita, pára, observa o que já escreveu e anota o número dois ao lado das palavras, faz leitura silenciosa do problema, fica em silêncio e continua segurando a caneta preta na mão. Olha para a EXP e sorri).

GOLS ESPORTIVA COMUM 2
PALIO ESPORTIVA E COMUM 2

4º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP pediu a ela que verificasse se sua notação estava de acordo com as informações do problema.

EXP – Só tinham dois tipos de carro? (Olha para BAR).

BAR – Tinha... Gols e palios. (Aponta para as palavras gols e palios que estão escritas no problema. Pára, lê o problema novamente e respira fundo). Não. Cor... Ah... Tinha corsas também. (Com a caneta preta escreve a palavra corsa embaixo da palavra palio). Também o corsa... Também o corsa podia ser com a comum e a esportiva... Também. (Anota as palavras esportiva e comum com a caneta preta e, ao lado, escreve o número dois. Fica em silêncio, olha para a EXP e sorri).

CORSA COMUM ESPORTIVA 2

5º. momento: BAR complementou sua solução notacional; então, foi desafiada pela EXP a responder à questão do problema.

EXP – Então, como você vai fazer para responder? (Olha para BAR). De quantas maneiras os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Olha para BAR).

BAR – (Observa atentamente a EXP). As rodas e... E os carros... (Olha para a EXP, em seguida, olha para o problema). Contando assim... Tudo.

6º. momento: BAR demonstrou estar em dúvida sobre o que fazer; então, a EXP provocou-a a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – Vamos ver o que você escreveu aqui...(Aponta para a notação de BAR). Por exemplo: O gol poderia ser de quantos tipos? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a palavra gol).

BAR – De dois. (Aponta para as palavras esportiva e comum que escreveu e para o número dois que escreveu ao lado).

EXP – De dois. O palio? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a palavra palio).

BAR – Dois... (Aponta para as palavras esportiva e comum que escreveu e para o número dois que escreveu ao lado).

EXP – E o corsa? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a palavra corsa).

BAR – De Do... Dois. (Aponta para as palavras esportiva e comum que escreveu e para o número dois que escreveu ao lado).

7º. momento: BAR verificou que cada um dos tipos de carro poderia combinar com os dois tipos de roda; então, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – No total, de quantos tipos diferentes você poderia combinar as rodas e os carros? (Olha para BAR).

BAR – (Pára, circula com a caneta sem escrever as notações que havia feito, olha para a EXP, olha novamente para as suas notações. Segura a caneta preta com a mão direita e, com auxílio dos dedos mínimo, anelar e médio da mão esquerda, conta de três em três cada um dos carros e chega ao total nove, pois, além de contar o total referente à combinação das rodas com cada tipo de carro, conta também o tipo do carro) Nove. (Responde após olhar para as notações que havia feito).

Essa solução notacional e verbal de BAR indica solução de nível III, subnível IIIB: as aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão. Consiste de solução obtida mediante diferentes combinações e complementações de cálculos aditivos entre alguns dos valores das variáveis envolvidas, bem como entre resultados desses cálculos, na busca de certo número de combinações.

8º. momento: BAR obteve nove, como resposta; então, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ela.

EXP – Nove? Será que dá nove? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para a EXP e fica em silêncio).

EXP – Você me falou que o gol pode ser de dois tipos... O palio de dois tipos... E o corsa de dois tipos... E no total, isso dá nove?

BAR – Dos... Das... Das rodas... Dá seis. (Segura a caneta preta com a mão direita e, com auxílio dos dedos mínimo, anelar e médio da mão esquerda, conta de dois em dois cada combinação feita). E dos tipos de carros... Dá três.. (Olha para a EXP).

EXP – Então, de quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados? (Olha para a EXP).

BAR – Esportiva e comum. (Enrola a ponta da folha com a mão direita).

EXP – E no total da quanto?

BAR – Nove. (Segura a caneta preta com a mão direita e, com auxílio dos dedos mínimo, anelar e médio da mão esquerda, conta de dois em dois cada combinação feita).

9º. momento: BAR obteve, de novo, nove, como resposta; então, a EXP leu a questão do problema em voz alta.

EXP – Tudo junto, os carros e as rodas, no total. De quantos jeitos diferentes podem ser combinados? (Olha para BAR).

BAR – (Pára, fica em silêncio, permanece com as mãos em cima da mesa, segurando a caneta preta com a mão esquerda. Lê novamente o problema e as notações que fez). Contando com esses aqui, né? (Aponta com a caneta preta para os para os números dois que escreveu e, em seguida, para os tipos de carro que escreveu: gol, palio e corsa).Dá nove mesmo. (Olha para a EXP e sorri).

10º. momento: Para finalizar, a EXP sugeriu que BAR registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que tinha explicitado oralmente.

Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Por que da nove? O que você pensou? (Olha para BAR).

BAR – (Vira a folha com o problema para a EXP e mostra a resposta que registrou com a caneta). No total dá nove... Juntando tudo... Os carros e os tipos de roda. (Olha para a EXP). Juntei os seis... Do dois de cada, com os três carros. (Olha para a EXP e sorri).

A solução notacional e verbal de BAR e sua interpretação sobre a solução que utilizou, permaneceram no nível III, subnível IIIB: das aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão. Consiste de solução obtida mediante diferentes combinações e complementações de cálculos aditivos entre alguns dos valores das variáveis envolvidas, bem como entre resultados desses cálculos, na busca de certo número de combinações.

Essa solução se mantém quando houve, pela ordem em que apareceram, as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; questionadora; instigadora; questionadora; orientadora e questionadora. Com alternância das diversas formas de intervenção.

PROBLEMA 3

Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

1º. momento: A EXP leu o problema em voz alta a pedido de BAR; quando finalizou a leitura, BAR leu outra vez o problema e, em seguida, relatou a questão do problema.

BAR – (Acompanha atentamente a leitura do problema que está sendo realizada pela EXP. A mão esquerda está apoiando a folha de papel sulfite e a mão direita está enrolando o canto da folha. Quando a EXP finaliza a leitura do problema BAR pega a caneta preta que está em cima da mesa e segura com a mão direita. Movimenta a caneta preta na mão. Faz a leitura silenciosa do problema). Quanto que... Quantas coisas ela poderia bordar, né? ... Tipo coração... (Olha para a EXP e sorri).

2º. momento: BAR relatou a questão do problema; então, a EXP pediu-lhe que verificasse se sua resposta estava de acordo com a questão proposta pelo problema.

EXP – Coração! O que ela tem para bordar? (Olha para BAR e aponta para o problema).

BAR – Personagens infantis. (Olha para EXP, aponta para o problema e permanece por um tempo em silêncio). Ah é... (Olha para a EXP e sorri). Coração nem é personagem!

EXP – Por exemplo, me diga o nome de um personagem infantil. (Olha para BAR).

BAR – Mônica. (Olha para a EXP).

3º. momento: BAR citou o exemplo da Mônica como personagem; então, a EXP indagou dela uma informação que constava no problema, verificando se de fato ela a compreendera.

EXP – Em quantas cores diferentes de camiseta a Mônica poderia aparecer? (Olha para BAR).

BAR – (Pára, olha para o problema, olha para a EXP, movimenta a caneta preta que está na sua mão, olha para o problema novamente e lê). Em três? (Olha para a EXP e acena negativamente com a cabeça, em seguida, olha para as informações do problema).

4º. momento: BAR demonstrou não ter certeza da resposta que havia dado anteriormente; então, a EXP indagou dela uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ela a compreendera.

EXP – Quantas cores diferentes de camiseta Eduarda têm para bordar? (Aponta para o problema e olha para BAR).

BAR – Doze. (Olha para a EXP).

5º. momento: A resposta de BAR não estava correta; então, a EXP sugeriu a ela que lesse o problema, buscando as informações que ele trazia e, em seguida, pediu-lhe que verificasse se sua resposta estava de acordo com a informação proposta pelo problema.

EXP – Doze cores? Veja bem... Leia lá no problema... Eduarda tem...

BAR – Uma máquina de bordar... (Inicia novamente a leitura do problema e aponta com a caneta preta para o problema que está lendo). Ela borda personagens infantis em camisetas... Eduarda tem quinze cores... (Pára a leitura do problema, pois, encontrou a informação que estava buscando). Ah... (Olha para a EXP e sorri). É quinze. (Acena afirmativamente com a cabeça).

6º. momento: BAR identificou que Eduarda tinha quinze cores de camisetas para bordar; então, novamente foi indagada pela EXP sobre uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ela a havia compreendido.

EXP – Então a Mônica poderia aparecer em quantas camisetas? (Olha para BAR).

BAR – Quinze. (Olha para a EXP).

EXP – Em quinze. (Olha para BAR)

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Só que ela só tem um personagem? (Olha para BAR).

BAR – Ela tem vários. (Apóia as mãos em cima da folha de sulfite).

EXP – Quantos? (Olha para BAR).

BAR – (Lê novamente o problema silenciosamente, para buscar esta informação). Doze. (Olha para a EXP).

EXP – Cada um desses doze personagens poderia aparecer em quantas camisetas? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema para buscar a resposta, movimentando a cabeça para acompanhar a leitura). Em quinze.

7º. momento: BAR identificou as variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP provocou-a à busca de uma solução para o problema.

EXP – E como você vai fazer para descobrir, no total, quantos tipos de camisetas diferentes ela pode bordar? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema para tentar encontrar esta resposta. As duas mãos permanecem em cima da folha e a caneta preta está na mão direita. Faz a leitura de uma parte do problema). Em quinze.

Essa solução verbal de BAR indica solução de nível I, subnível IA: da escolha de variáveis. Sua solução contém escolha relativa a uma variável, sem qualquer combinação entre os valores das variáveis.

8º. momento: BAR obteve quinze, como resposta; então, a EXP pediu a ela que verificasse se sua resposta estava de acordo com a informação proposta pelo problema. Em seguida, instigou-a a refletir se já aprendera, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-la a encontrar o resultado.

EXP – No total, ela pode bordar quinze camisetas? (Olha para BAR). É isso? (Olha para o problema).

BAR – Não, é pouco. (Olha para a EXP e acena negativamente com a cabeça).

EXP – Quantos personagens ela pode bordar em quinze? (Olha para BAR).

BAR – Doze. Doze personagens. (Olha para a EXP e sorri). Vai ter que fazer uma conta.

EXP – Existe uma conta que você pode fazer? (Olha para BAR).

BAR – Não sei. (Responde sorrindo para a EXP).

EXP – Não sabe? (Olha para BAR). Então o que você iria responder nesse problema? (Aponta para o problema).

BAR – (Olha para a EXP e fica em silêncio). Vou... Vai... Vou ver... (Olha para a EXP).

9º. momento: Percebendo que BAR demonstrava estar em dúvida sobre o que fazer, a EXP indagou dela uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ela a tinha compreendido; em seguida, sugeriu a ela que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – A Mônica pode aparecer em quantas camisetas? (Aponta para a palavra Mônica escrita por BAR).

BAR – Quinze. (Com a caneta preta escreve a palavra Mônica na folha de papel sulfite, olha para a EXP e com a caneta preta anota o número quinze ao lado da palavra Mônica).

MONICA 15

10º. momento: BAR iniciou uma solução notacional; na seqüência, foi indagada pela EXP sobre uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ela havia compreendido.

EXP – Quinze. Mas ela tem só um personagem, para bordar? (Olha para BAR).

BAR – Não, tem mais onze. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Mais onze, tirando a Mônica só sobram onze. (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para o problema).

BAR – (Olha atentamente para a EXP).

EXP – E os outros personagens, podem aparecer em quantas camisetas? (Olha para BAR).

BAR – Em quinze também. (Olha para a EXP).

11º. momento: BAR identificou que cada personagem podia aparecer em quinze camisetas; então, a EXP provocou-a à busca de uma solução para o problema.

EXP – Pois é, daí como é que você vai fazer para descobrir no total? (Olha para BAR).

BAR – (Pára e olha para o problema, em seguida, fica em silêncio). Mais um personagem?

EXP – (Acena afirmativamente com a cabeça).

BAR – (Fica em silêncio). O Homem Aranha. (Olha para a EXP).

EXP – O Homem Aranha poderia aparecer em quantas camisetas? (Olha para BAR).

BAR – Quinze. (Olha para a EXP e com a caneta preta anota Homem Aranha embaixo da palavra Mônica e, em seguida, anota ao lado da palavra o número quinze).

HOMEM ARANHA 15
 CEBOLHINHA 15
 URUINHOPÓO 15
 SURPE MEM 15
 SUPER MENINAS PODEROSA 15
 MULHER ELÁSTICO 15
 GASCAO 15
 MAGALI 15
 CINDERELA 15
 BRANCA DE NEVE 15
 PINOQUIO 15

12º. momento: Um a um BAR registrou o nome dos personagens e escreveu ao lado o número quinze. Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – Então já deu os doze personagens? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – Já. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – O que você poderia fazer para descobrir no total, todos esses... Quantas camisetas que dariam para ela fazer? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – (Olha para sua notação, pára). Doze.

Essa solução verbal de BAR permanece no nível I, subnível IA: da escolha de variáveis. Sua solução contém escolha relativa a uma variável, mencionando seu valor, sem qualquer combinação entre os valores das variáveis.

13º. momento: BAR obteve doze, como resposta; então, foi provocada pela EXP a refletir sobre parte de sua solução notacional escrita; em seguida, foi instigada a refletir se já tinha aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-la a encontrar o resultado.

EXP – Só doze camisetas? Mas olha só, você não viu que com a Mônica daria para fazer quantas camisetas? (Aponta para a palavra Mônica)

BAR – Quinze.

EXP – Quinze (Aponta com dedo indicador da mão direita para a notação de BAR). O que você pode fazer? (Olha para BAR).

BAR – (Pára, olha para sua notação, olha para o problema, buscando encontrar mais informações). Uma continha. (Olha para a EXP).

EXP – Uma conta do que? (Olha para BAR).

BAR – De mais. (Olha para a EXP e sorri).

14º. momento: BAR explicou que efetuará uma adição; então, a EXP sugeriu a ela que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que havia explicitado oralmente.

EXP – De mais. Então pode fazer... (Aponta para a folha de sulfite).

BAR – (Olha para a sua notação). É doze quinze? (Olha para a EXP).

EXP – O que você acha? (Olha para BAR).

BAR – Que sim. (Com a caneta preta que está em sua mão escreve cinco vezes o número quinze, um embaixo do outro, organizando o algoritmo convencional da adição).

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 + 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 \hline
 180
 \end{array}$$

15º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, foi desafiada pela EXP a responder à questão do problema.

EXP – E no total, quantos tipos diferentes de camisetas ela pode bordar? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a pergunta do problema).

BAR – Cento e oitenta. (Olha para a resposta da conta que fez).

16º. momento: BAR obteve cento e oitenta, como resposta; então, a EXP instigou-a a refletir se já tinha aprendido na escola outro procedimento de cálculo que pudesse levá-la a encontrar o resultado.

EXP – Você fez uma continha de mais. (Aponta para a adição feita por BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Teria um outro tipo de continha que você poderia ter feito?

BAR – (Acena negativamente com a cabeça). Não. (Olha para a EXP e sorri).

17º. momento: Na seqüência, BAR foi solicitada pela EXP a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Então por que você colocou aqui... (Aponta para a adição de BAR). Doze vezes o número quinze?

BAR – Por que... Com cada uma tem quinze. (Aponta para sua notação com a caneta).

EXP – Em cada uma o que?

BAR – Bor... Eh... Personagem. (Olha para a EXP).

EXP – Com cada personagem ela pode fazer quinze camisetas... E no total... (Aponta para a notação de BAR). Então... Quantas camisetas ele pode fazer?

BAR – Cento e oitenta. (Olha para a EXP).

Da solução de nível IA que se manteve por alguns momentos desde o início, passou BAR por aproximações a solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, mas somente por cálculo aditivo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível foi obtida em circunstância em que apareceram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; questionadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; orientadora; questionadora; instigadora; orientadora; instigadora e questionadora. Assim, foi por alternância das formas de intervenção, que BAR chegou à solução de nível IV.

PROBLEMA 4

Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

1º. momento: A EXP leu o problema em voz alta a pedido de BAR. Quando a EXP finalizou a leitura, BAR fez a leitura silenciosa do problema e, em seguida, elaborou uma solução verbal.

BAR – (Enquanto a EXP lê, acompanha com os olhos e faz silenciosamente a leitura do problema. Quando a EXP finaliza a leitura, bate levemente com a caneta preta em cima da mesa. Em seguida, olha para o problema e fica em silêncio, segurando a caneta preta com a mão direita). Poderia ser de morango... (Olha para a EXP). Baunilha. (Olha para a EXP).

EXP – Poderia ser de morango, baunilha... (Olha para BAR).

BAR – Banana. (Olha para EXP).

EXP – Banana. (Olha para BAR).

BAR – Uva. (Olha para EXP).

EXP – Uva. (Olha para BAR).

BAR – Leite condensado. (Olha para EXP).

EXP – Leite condensado. (Olha para BAR).

BAR – (Pára, olha para o problema, fica em silêncio. Olha para a EXP).

2º. momento: Um a um BAR identificou os sabores de sorvete que poderiam ser combinados; em seguida, a EXP indagou dela algumas informações que constavam no problema, para verificar se fato ela as compreendera.

EXP – Mas no total, quantos sabores você teria de sorvete? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema, movimenta a mão direita que está segurando a caneta preta). No total? (Olha para a EXP).

EXP – É. (Olha para BAR).

BAR – Então é sete. (Interrompe a leitura da EXP). E tem sete sabores e três tipos de cobertura. (Movimenta a caneta preta em cima do texto do problema e olha para a EXP).

3º. momento: BAR identificou as três variáveis necessárias à solução do problema; então, a EXP leu a questão do problema em voz alta e, em seguida, desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – Então. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

BAR – (Olha para o problema e conta nos dedos batendo na mesa). Dá doze daí. (Olha para a EXP).

4º. momento: BAR obteve doze, como resposta; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Dá doze? E como que você pensou? (Olha para BAR).

BAR – Combinando os sabores (Aponta para a palavra sabores no problema), a cobertura (Aponta para a palavra cobertura no problema) e a casquinha (Aponta para a palavra casquinha no problema. Olha para a EXP).

5º. momento: Quando BAR concluiu sua interpretação, a EXP sugeriu a ela que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Anota isso que você me disse, na folha de sulfite, para que eu possa entender o que você está pensando. (Olha para BAR).

BAR – (Com a caneta preta que está na sua mão escreve o número doze e ao seu lado as palavras ao todo). Doze ao todo. (Olha para a EXP). Fiz com conta. (Olha para a EXP).

12 AO TODO

6º. momento: Na seqüência, a EXP pediu a BAR que explicitasse sua interpretação sobre a solução que tinha utilizado e, em seguida, sugeriu a ela que registrasse, na folha de papel sulfite, os resultados que tinha explicitado oralmente.

EXP – E que conta você fez para encontrar esta resposta? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – De mais. (Olha para a EXP).

EXP – Então, você pode anotar esta conta para eu ver? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça. Com a caneta preta que está na sua mão “arma” o algoritmo convencional da adição, anota primeiro o número sete, depois, o número três e por último o número dois, em seguida, coloca o traço da igualdade e o sinal de mais. Pára, conta mentalmente e coloca o número doze como resposta). Ia dar doze. (Olha para a EXP).

EXP – No total daria doze? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 3 \\ 2 \\ \hline 12 \end{array}$$

7º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP expressou dúvida sobre a solução utilizada por ela.

EXP – Você acha que dá doze mesmo? (Aponta para a notação de BAR e, em seguida, aponta para o problema).

BAR – É isso, porque... Porque eu ajuntei todos e coloquei com os sorvetes, casquinhas e as... As coberturas. (Olha para a EXP). Pronto.

A solução notacional e verbal utilizada por BAR e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo (mental ou não), de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

Essa solução ocorreu, quando houve, pela ordem em que apareceram, as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; orientadora; questionadora; orientadora; instigadora; questionadora; orientadora e questionadora.

QUADRO 5: AS SOLUÇÕES DE BAR AOS PROBLEMAS DA 1ª. SESSÃO

BAR		PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3			PROBLEMA 4		
		TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV										BAR			
III	III D												
	III C												
	III B	BAR			BAR	BAR							
	III A												
II	II C												
	II B												
	II A												
I	I B										BAR		
	I A							BAR	BAR				

Como se vê no quadro acima, apenas no problema 3, BAR partiu de solução de nível inferior para solução de nível mais adiantado, ainda com predominância do raciocínio combinatório aditivo. Nos problemas 1 e 2, as soluções de BAR iniciaram e permaneceram no nível III, subnível IIIB. No problema 4, a solução de BAR é de nível I, subnível IB.

Durante a solução dos problemas por BAR, alternaram-se as formas de intervenção da experimentadora.

Em suma, no decorrer da solução dos problemas da 1ª. sessão, percebeu-se que as formas de intervenção: orientadora e reorientadora predominaram durante a solução do problema 1 por todos os sujeitos.

Já na solução dos problemas 2, 3 e 4, houve uma derivação em relação às formas de intervenção da experimentadora, que se alternaram, com predominância das formas: questionadora e instigadora. As formas: orientadora e reorientadora apareceram, embora com menor frequência.

Na solução do problema 1, PED, REN, MAT e EDU obtiveram, ao final, solução de nível IV; apenas a solução de BAR permaneceu no nível III, subnível IIIB.

Na solução do problema 2, PED, REN E EDU obtiveram solução de nível IV, apenas as soluções de MAT e de BAR permaneceram nos níveis II e III respectivamente.

Na solução do problema 3, REN e MAT, na primeira tentativa, utilizaram solução de nível IV. EDU e BAR partiram de solução de nível menos adiantado e obtiveram solução de nível IV, apenas a solução de PED permaneceu no nível I.

No problema 4, apenas a solução de MAT avançou para solução de nível IV. A solução de BAR permaneceu no nível I, a solução de EDU permaneceu no nível II e, as soluções de REN e PED avançaram de nível I para nível III. Esse problema pode ser considerado o mais difícil, pois envolve três variáveis, talvez, por esse motivo, apenas um sujeito, MAT, avançou para solução de nível IV.

2 – RESULTADOS – 2ª. SESSÃO

2ª. SESSÃO – PED – (9; 9)

PROBLEMA 5

Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que podiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e, relembra-o dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar os problemas.

2º. momento: PED fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou a leitura, a EXP provocou-o a relatar as informações que leu no problema.

EXP – E daí o que você percebeu que informações têm aí? (aponta para o problema). O que está perguntando? (Olha para PED).

PED – Pergunta do... Que pode comprar uma mochila e tem dois... Dois tipo de tamanho. (Olha para a EXP). E tem cinco cores... (Olha para a EXP).

3º. momento: Depois que PED identificou as duas variáveis necessárias à solução do problema, a EXP leu a questão do problema em voz alta; em seguida, desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Daí o problema está perguntando, quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Lê a pergunta do problema em voz alta). Quanto vai dar? (Olha para PED).

PED – (Olha para o lado, coloca a mão na boca, fica por um tempo em silêncio, olha para o problema, aponta com a caneta preta para as informações do problema). Não sei... (Olha para a EXP). Eu li que tem mochilas... Grande e pequena. (Olha para a EXP). E tem... Tem cinco cores para escolher. (Olha para a EXP).

4º. momento: PED relatou as variáveis e seus valores; então, a EXP indagou dele algumas informações que constavam no problema, verificando se de fato ele as compreendera.

EXP – Vamos pensar juntos, né? (Olha para PED). Por exemplo, a mochila pequena ela pode ser de quais cores? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o problema).

PED – (Olha para a EXP e segura o queixo com a mão esquerda). Cinco. (Olha para a EXP).

EXP – De cinco! Quais são as cores? (Olha para PED).

PED – Verde, azul, vermelho, amarelo e preto. (Olha para o problema e com a caneta preta que estava na sua mão, escreve o número cinco na folha de sulfite, quando finaliza, olha para a EXP).

EXP – E lá só tem mochila pequena? (Aponta para o problema).

PED – Tem grande. (Coloca a mão esquerda na frente da boca).

EXP – Tem grande. Então, tem cinco tipos de mochila pequena e quantos tipos de mochila grande? (Olha para PED).

PED – Cinco. (Olha para a EXP e registra uma solução notacional, na folha de sulfite).

5 Pequeno 5 Grande

5º. momento: Quando PED finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema, fazendo a leitura em voz alta.

EXP – Então, quantos tipos diferentes de mochilas ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho? (Olha para PED).

PED – (Olha para a EXP). Dez.

6º. momento: PED respondeu que Amanda poderia escolher dez tipos diferentes de mochilas para comprar; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que tinha utilizado.

EXP – Dez! Por que pode ser dez? (Olha para PED).

PED – (Apóia a mão direita em cima da mesa e coloca a mão esquerda próxima ao peito). Cinco tipos da pequena e cinco da grande. (Coloca a mão esquerda na frente da boca, olha para a EXP e, com a caneta preta que está em sua mão escreve o número dez).

EXP – Dez o quê? (Aponta para o número dez escrito por PED e olha para ele).

PED – Tipos de mochilas. (Com a caneta preta completa sua frase escrevendo ao lado da palavra tipos as palavras: de mochilas e, quando termina de escrever, olha para a EXP).

10 Tipos de mochilas

EXP – Você entendeu porque deu dez tipos? (Aponta com a mão esquerda para a notação de PED).
 Você pode me explicar para eu entender como você pensou? (Olha para PED).
 PED – Sim. (Acena afirmativamente com a cabeça e coloca a mão esquerda na frente da boca).
 EXP – Você fez uma conta, do quê? (Olha para PED).
 PED – De mais. (Com a mão na frente da boca, olha para a EXP e, com a caneta preta escreve a sentença matemática: $5 + 5 = 10$, quando finaliza, olha para a EXP).

$$5 + 5 = 10$$

7º. momento: Quando PED finalizou a sentença matemática, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para o primeiro número cinco escrito por PED). Então este cinco representa...?
 PED – A mochila pequena. (Olha para a EXP e aponta com a ponta da caneta para a palavra pequena que escreveu).
 EXP – A mochila pequena! E este cinco representa o quê? (Aponta com dedo indicador da mão esquerda para o outro número cinco escrito por PED).
 PED – A grande. (Olha para a EXP).
 EXP – A mochila grande! Então juntando tudo? (Aponta para a folha de sulfite).
 PED – Vai dá dez. (Olha para a EXP).

8º. momento: A EXP instigou PED a refletir se tinha aprendido na escola algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Dez tipos de mochilas diferentes para comprar. Teria alguma outra operação, alguma outra continha que você pudesse fazer que também chegasse ao resultado usando as informações aqui do problema? (Aponta para a notação de PED e, em seguida para a folha de sulfite).
 PED – (Com a mão esquerda na frente da boca, “arma” o algoritmo convencional da adição).

The image shows a handwritten vertical addition problem: $10 + 5 + 5$. The numbers are arranged vertically: 10 on top, 5 in the middle, and 5 at the bottom. A large 'X' is drawn over the entire calculation, indicating it is not the method used by the student.

9º. momento: PED finalizou a adição e a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Aqui o que você estaria combinando? (Aponta para a adição: $10 + 5 + 5$ efetuada por PED).

PED – (Com a mão esquerda na frente da boca, com o braço direito apoiado em cima da mesa, olha para sua notação). Este, este e este. (Aponta para os dois números cinco que escreveu e, em seguida, para o número dez). Não! (Com a caneta preta que estava em sua mão faz um X em cima do algoritmo convencional da adição).

10º. momento: Após PED marcar um X em cima da adição que havia efetuado, a EXP provocou-o a refletir sobre a solução notacional que tinha desconsiderado.

EXP – Você marcou um X na adição. (Aponta para a adição efetuada por PED). Você entendeu porque não dá vinte tipos de mochilas? (Olha para PED e aponta para suas notações).

PED – (Olha para suas notações). Entendi. (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Por quê? (Olha para PED).

PED – (Coloca a mão esquerda na frente da boca). Cinco as pequenas (Aponta para o primeiro cinco que escreveu). E cinco as grandes. (Aponta para o segundo cinco que escreveu). Tem cinco de cada... Tudo junto... Dá dez... (Olha para a EXP).

11º. momento: Novamente, a EXP instigou PED a refletir se havia aprendido na escola algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Tá! Mas pensando neste resultado dez que você achou. (Aponta para o resultado dez encontrado por PED). Teria algum outro tipo de continha que você pudesse fazer?

PED – (Olha para sua notação, coloca a mão esquerda na frente da boca e fica em silêncio por algum tempo). De vezes. (Olha para a EXP).

EXP – Mas como seria de vezes? (Olha para PED).

PED – (Fica em silêncio por um tempo olhando para sua notação). Cinco vezes o dois. (Olha para a EXP e com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da multiplicação).

$$\begin{array}{r} 5 \times 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

12º. momento: Quando PED finalizou a multiplicação, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O cinco representaria o quê? (Aponta para o número cinco escrito por PED na multiplicação).

PED – Cores. (Olha para a EXP).

EXP – E o dois representa o quê? (Aponta para o número dois escrito por PED na multiplicação).

PED – Os... Os tamanhos... Dois tamanhos... (Olha para a EXP).

EXP – Você entendeu por que seria de vezes? (Aponta para a multiplicação efetuada por PED).

PED – Porque tem dois tamanhos e... Cinco cores. (Olha para a EXP).

S representa os casos
e os tamanhos

A solução notacional de PED e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam, no decorrer do problema, solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer por cálculo aditivo e multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Em suma, houve, pela ordem em que apareceram, as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; instigadora; orientadora; instigadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora e questionadora.

PROBLEMA 6

Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

1º. momento: PED fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, foi provocado pela EXP a relatar as informações que lera no problema.

EXP – E daí, PED, o que está falando o problema? (Aponta com a mão direita para o problema).

PED – (Olha para as informações do problema para buscar a resposta). Que... Que tem trinta sabores de pizza e... Três tamanhos. (Olha para a EXP).

2º. momento: Após PED identificar as duas variáveis necessárias à solução do problema, a EXP provocou-o a ler a pergunta do problema.

EXP – Trinta sabores e três tamanhos de pizza. É isso? E daí, o que está perguntando? (Olha para PED e aponta com a mão direita para o problema).

PED – De quantas maneiras diferentes e sabores e tamanhos das pizzas podem ser combinados? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

3º. momento: Depois que PED leu a pergunta do problema, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – Então, o que você acha que você vai ter que fazer para descobrir? (Olha para PED).

PED – (Lê novamente o problema). Se eu colocar todos os números que tem aqui... (Aponta para o problema com a ponta da caneta preta). Os trinta... (Aponta com a ponta da caneta preta para o número trinta). Os três... (Aponta com a ponta da caneta preta para o número três). O seis... (Aponta com a ponta da caneta preta para o número seis). O oito... (Aponta com a ponta da caneta preta para o número oito). E o doze... (Aponta com a ponta da caneta preta para o número doze e olha para a EXP).

EXP – Então tenta colocar. (Aponta para a folha de sulfite).

PED – (Com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da adição: $30 + 3 + 6 + 8 + 12$, passa o traço da igualdade e inicia a adição pela coluna das unidades, encontra dezenove como resultado, escreve o número nove na coluna das unidades e o um, no estilo do “vai um” na coluna das dezenas, adiciona e obtém como resultado final da adição o número cinquenta e nove. Quando finaliza, olha para sua notação e, em seguida, olha para a EXP).

4º. momento: Quando PED finalizou a adição, a EXP pediu a ele que verificasse se sua resposta estava de acordo com a questão proposta pelo problema.

EXP – O que você fez aí? Uma conta? É isso?

PED – (Apóia a cabeça com a mão esquerda). É. (Olha para a EXP). Usando os trinta sabores, os três tamanhos e os pedaços de pizza.

EXP – Mas o que diz a pergunta do problema? De quantas maneiras diferentes e sabores e tamanhos das pizzas podem ser combinados? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

PED – (Fica em silêncio e com a caneta preta que estava na sua mão “arma” uma nova adição: $30 + 3$, passa o traço da igualdade, resolve a adição e obtém trinta e três como resultado. Quando finaliza esta adição, olha para a EXP).

5º. momento: PED reformulou sua adição e, na seqüência, a EXP provocou-o a refletir sobre a solução notacional que havia desconsiderado.

EXP – Então aí, por que você tirou o seis, o oito e o doze? (Aponta para os números seis, oito e doze, que PED havia utilizado na outra adição).

PED – Por que não tá perguntando dos pedaços... (Aponta com a ponta da caneta preta para a pergunta do problema).

EXP – Por que são os pedaços e não está perguntando! Então aqui você fez uma conta de mais, trinta mais três, trinta e três, né? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a adição efetuada por PED).

PED – (Acena afirmativamente com a cabeça).

6º. momento: PED explicou porque havia alterado e desconsiderado sua solução notacional; então, a EXP indagou-o sobre algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as compreendia.

EXP – Então, vou te fazer mais uma pergunta para ver o que você acha. (Olha para PED). Vamos supor, se tem três tamanhos de pizza que tamanho podem ser eles? (Olha para PED).

PED – (Coloca a mão esquerda embaixo do queixo para apoiar o rosto). Pequeno, médio e grande. (Aproxima-se com o corpo da folha de sulfite, olha para a EXP e com a caneta preta que já estava na sua mão escreve as palavras: Pequeno, médio, grande, uma embaixo da outra, quase no final da folha de sulfite e olha para a EXP em seguida).

Por exemplo, se você for nesta pizzaria e quiser comprar uma pizza pequena... (Aponta para a palavra pequena escrita por PED). Quantos sabores diferentes de pizza pequena têm? (Olha para PED).

PED – (Olha para o problema). Trinta. (Olha para a EXP).

EXP – Trinta, então de pizza pequena têm trinta. (Olha para PED e aponta para a palavra pequena que ele havia escrito).

PED – (Com a caneta preta escreve ao lado da palavra pequena: tem 30, quando finaliza sua notação, olha para a EXP, em seguida, escreve o número trinta ao lado da palavra médio e, com a caneta preta escreve o número trinta ao lado da palavra grande).

Pequena tem 30
Média - 30
Grande - 30

7º. momento: Após PED registrar que cada um dos tamanhos de pizza poderia ser de trinta sabores, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Trinta! (Olha para PED e sorri). Então, olhe só a pergunta: De quantas maneiras diferentes e sabores e tamanhos das pizzas podem ser combinados? (Lê novamente a pergunta do problema em voz alta). Então se você chegar lá nesta loja e quiser escolher uma pizza, combinando os sabores com os tamanhos, quantos tipos de pizzas diferentes vão ter lá para escolher? (Olha para PED e sorri).

PED – (Olha para sua última notação). Esses... Esses três tipos de sabores... (Aponta com a ponta da caneta preta para os três números trinta que escreveu). Esses três tipos de sabores... (Aponta com a ponta da caneta preta para os três números trinta que escreveu). E esses três tipos de tamanho... (Aponta com a ponta da caneta preta para os três tamanhos que escreveu).

EXP – Tenta para você ver. (Olha para PED e aponta para a folha de sulfite com a mão direita).

PED – (Está com os braços cruzados em cima da mesa, em seguida, descruza-os e com a caneta preta “arma” o algoritmo convencional da adição: $30 + 30$, escreve o sinal de mais $+ 30 + 3$, escreve o sinal de mais, passa o traço da igualdade e resolve a adição iniciando pela coluna das unidades e, em seguida, das dezenas e obtém noventa e três como resultado. Quando finaliza sua adição, olha para a EXP).

8º. momento: Quando PED finalizou a adição, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que esse trinta representa? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o primeiro número trinta escrito por PED).

PED – (Olha para sua notação). Sabores da pequena. (Olha para a EXP).

EXP – E esse trinta? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o segundo número trinta escrito por PED).

PED – Da média. (Olha para a EXP).

EXP – E esse trinta? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o terceiro número trinta escrito por PED).

PED – Da grande. (Olha para a EXP).

EXP – E esse três? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número três escrito por PED).

PED – (Coloca a caneta preta na frente da boca e fica em silêncio, com a caneta preta marca um X no três que havia colocada na adição e corrige o resultado para noventa, escrevendo o número zero em cima do número três). Dá noventa. (Olha para a EXP).

9º. momento: PED reformulou a adição e obteve noventa, como resposta; então, a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que tinha utilizado e, em seguida, provocou-o a refletir sobre a solução notacional que havia desconsiderado.

EXP – Noventa! Por que dá noventa? (Olha para PED).

PED – Por que antes eu tava somando com três. (Aponta com a ponta da caneta preta para o número três)

EXP – Por que você marcou um X no três? (Olha para PED e aponta para o número três que PED marcou com um X).

PED – Por que já tem os três tipos de pizza. (Aponta com a ponta da caneta preta para os três números trinta que escreveu).

10º. momento: A EXP instigou PED a refletir se já havia aprendido, na escola, algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Então você fez uma conta de mais. (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a última adição efetuada por PED). Você acha que teria uma outra conta que você pudesse fazer que não fosse de mais? (Olha para PED).

PED – (Olha para a sua notação). Trinta vezes o três. (Olha para a EXP e apóia o cotovelo esquerdo em cima da mesa) e, (Com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 30×3 , escreve o sinal \times , passa o traço da igualdade e soluciona a multiplicação obtendo noventa e três como resultado. Quando finaliza a multiplicação, apóia o braço direito em cima da mesa e olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \end{array}$$

11º. momento: Quando PED finalizou sua solução notacional, a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

- EXP – Por que você pensou em trinta vezes o três? (Aponta para a multiplicação efetuada por PED).
 PED – (Aponta para a multiplicação que efetuou com a caneta preta). Por que eu ia combiná...
 Combiná... Trinta sabores e três tipos de tamanhos. (Olha para a EXP).
 EXP – O que o trinta representa? (Olha para PED).
 PED – Os sabores! (Olha para a EXP).
 EXP – E o três, o que o três representa? (Olha para PED).
 PED – Os tamanhos? (Olha para a EXP e aponta para esta informação no problema).
 EXP – Então combinando os trinta sabores com os três tipos de tamanho, você vai poder ter quantas pizzas? (Olha para PED e aponta para o número trinta e para o número três utilizados por PED na multiplicação). Quantos tipos de pizza?
 PED – (Olha para sua notação). Noventa. (Olha para a EXP).

Durante a solução do problema, a solução notacional de PED e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer por cálculo aditivo e/ou multiplicativo convencional, que por “árvore” de possibilidades, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Esse nível de solução apareceu quando se manifestaram as duas formas de intervenção da experimentadora em alternância: instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora e questionadora.

PROBLEMA 7

Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

PED – (Olha para a EXP, sorri, pega a folha de sulfite, a aproxima de si, apóia os dois braços em cima da mesa e inicia a leitura silenciosa do problema, quando finaliza a leitura, lê novamente o problema, desta vez, apontando com a caneta preta. Quando termina de ler pela segunda vez, “arma” o algoritmo convencional da adição: $18 + 11$, coloca o sinal de mais, passa o traço da igualdade e inicia a solução pela coluna das unidades, quando finaliza, adiciona a coluna das dezenas e obtém 29 como resultado. Olha para sua solução notacional, fica em silêncio por algum tempo e, ao lado da adição “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 18×11 , coloca o sinal x, passa o traço da igualdade, olha para a multiplicação, em seguida, olha para a adição, marca um X em cima da adição e da multiplicação e olha para a EXP).

1º. momento: A EXP provocou PED a refletir sobre as soluções notacionais que havia desconsiderado.

EXP – (Olha para PED). O que você fez, PED? (Aponta para suas notações).

PED – Dezoito mais onze. (Aponta com a ponta da caneta preta para a adição que efetuou).

EXP – Por que você fez dezoito mais onze?(Aponta com o dedo indicador da mão direita para a adição efetuada por PED).

PED – Deu vinte e nove... (Aponta com a caneta preta para o resultado da adição que efetuou). Por causa dos dezoito e dos onze... (Aponta com a caneta preta para estes números no problema). Camisetas e bermudas... Eu fiz. (Olha para a EXP). Mas daí é muito pouco... Os jeitos... (Olha para a EXP)

EXP – E aqui você começou a fazer uma conta de vezes e aí você riscou, por quê? (Aponta para a multiplicação que PED “armou”).

PED – Por que eu acho que não é de vezes... (Olha para a EXP e aponta para a adição).

2º. momento: Na seqüência, a EXP indagou de PED uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a havia compreendido.

EXP – Então vou te fazer uma pergunta: vamos supor, ele tem dezoito camisetas, né? (Olha para PED).

PED – (Coloca a caneta preta na frente da boca e acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Com uma dessas camisetas, combinando com as onze bermudas, quantas roupas diferentes ele poderia ter? Usando só uma camiseta e as onze bermudas, quantas roupas diferentes já dariam? (Olha para PED).

PED – Onze camisetas... (Olha para cima). E uma bermuda. (Fica em silêncio, olha para o problema). Onze.

EXP – E com duas camisetas? (Olha para PED).

PED – Duas? (Olha para cima). Com duas camisetas... (Olha para cima e fica em silêncio). Vinte e duas. (Olha para a EXP).

3º. momento: Após PED identificar que cada uma das camisetas poderia combinar com as onze bermudas, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – O que você poderia fazer para descobrir com as dezoito camisetas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? O que você vai ter que fazer para estar descobrindo? (Olha para PED).
 PED – (Acena afirmativamente com a cabeça). Dezoito vezes onze. (Olha para a EXP).
 EXP – Dezoito vezes onze? Por quê? (Olha para PED).
 PED – Por que tem... Dezoito camisetas... (Aponta com a ponta da caneta preta para esta informação no problema). E onze camisetas...

4º. momento: PED disse que poderia efetuar uma multiplicação; então, a EXP sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que havia explicitado oralmente.

EXP – Então anota. (Aponta com a mão direita para a folha de sulfite). Você já sabe fazer conta de multiplicar por dois números? (Olha para PED).
 PED – (Acena afirmativamente com a cabeça e com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 18×11 , escreve o sinal \times , passa o traço da igualdade e multiplica inicialmente o número um pelo número dezoito, obtendo onze como resultado).

$$\begin{array}{r}
 18 \\
 \times 11 \\
 \hline
 18 \\
 + 18 \\
 \hline
 198
 \end{array}$$

5º. momento: Quando PED finalizou a multiplicação e obteve cento e noventa e oito, como resposta, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema; em seguida, leu em voz alta a questão do problema e sugeriu a PED que registrasse, na folha de papel sulfite, o resultado que havia explicitado oralmente.

EXP – Então... (Lê a pergunta do problema em voz alta). De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (Olha para PED). O Pedro? (Olha para PED e sorri).
 PED – (Aponta com a ponta da caneta preta para a multiplicação que efetuou). Cento e noventa e oito. (Olha para a EXP).
 EXP – (Aponta com a mão direita para a folha de sulfite). Então anota! (Olha para PED).

PED – (Lê silenciosamente a pergunta do problema). Cento e noventa e oito tipos... (Olha para o problema). Maneiras. (Com a caneta preta escreve a palavra maneiras ao lado do número cento e noventa e oito que havia escrito e olha para a EXP).

6º. momento: A EXP pediu a PED que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – E agora? (Aponta para as notações de PED). Você poderia me explicar o que você pensou? (Olha para PED).

PED – (Olha para suas notações e fica por algum tempo em silêncio). Ele poderia se vestir de cento e noventa e oito maneiras por que ele tem dezoito camisas e onze bermudas. (Olha para a EXP e aponta para o resultado cento e noventa e oito que obteve com a multiplicação).

Durante a solução do problema, as soluções notacionais e verbais de PED e sua interpretação sobre as soluções que utilizou, indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Esse nível de solução apareceu, quando se manifestaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora em alternância: instigadora; questionadora; instigadora; orientadora; instigadora; orientadora e questionadora.

PROBLEMA 8

Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

1º. momento: PED fez a leitura silenciosa do problema; quando finalizou, disse para a EXP que não tinha entendido e pediu a ela que fizesse a leitura do

problema em voz alta. A EXP leu o problema em voz alta a pedido de PED; em seguida, provocou-o a relatar as informações que havia lido no problema.

EXP – E aí, o que está falando aí que você já entendeu? (Aponta para o problema). O que você já descobriu o que está falando? (Olha para PED).

PED – (Coloca a mão esquerda na frente da boca, olha para as informações do problema, enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda e olha para a EXP). Queijo... Queijo e... (Olha para a EXP).

EXP – Queijo e...? (Olha para PED).

PED – Patê. (Olha para a EXP).

2º. momento: Após PED identificar duas das três variáveis necessárias à solução do problema, a EXP indagou dele algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as compreendia; em seguida, solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial dessas variáveis.

EXP – Queijo e patê. Então, vamos pensar primeiro no pão com o patê. Quantos tipos de pães têm? (Olha para PED e aponta para o problema com a mão direita).

PED – (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda). Quatro. (Olha para a EXP).

EXP – E quantos tipos de patê? (Olha para PED).

PED – (Continua enrolando a ponta do cabelo com a mão esquerda em quanto lê o problema para buscar a informação que necessita). Três. (Olha para a EXP).

EXP – Três tipos de patê. Então combinando os tipos de pão com os tipos de patê, quantos sanduíches diferentes já dão? (Olha para PED).

PED – (Olha para o problema). Do pão com o patê? (Olha para a EXP).

EXP – É. (Olha para PED).

PED – (Olha para o problema). Sete. (Enrolando a ponta do cabelo com a mão esquerda, olha para a EXP).

3º. momento: PED obteve sete, como resposta e a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que tinha utilizado.

EXP – Como você fez para combinar? (Olha para PED).

PED – O quatro e o três. (Aponta para estes números no problema e olha para a EXP).

EXP – O que você fez com o quatro e com o três? (Olha para PED).

PED – (Olha para a EXP, em seguida olha para baixo e continua enrolando a ponta do cabelo com a mão esquerda). Uma conta de mais. (Olha para frente).

A solução verbal de PED e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo de parte dos valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento no texto do problema.

4º. momento: A EXP indagou PED sobre uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera. Em seguida, solicitou a PED que refletisse sobre as possibilidades de combinação de duas das três variáveis.

EXP – Então se você tem quatro tipos de pães. Por exemplo, neste tipo de pão podem ser passados quantos tipos de patê? (Olha para PED).
 PED – Três. (Olha para a EXP). Que pode ser de frango, de presunto, de queijo.
 EXP – Então no pão francês quantos tipos de patê podem ser passados?
 PED – Três. (Aponta com os dedos da mão direita o número três).
 EXP – No pão de queijo podem ser passados quantos tipos de patê? (Olha para PED).
 PED – Três. (Olha para a EXP).
 EXP – No pão de leite podem ser passados quantos tipos de patê? (Olha para PED).
 PED – Três. (Olha para a EXP).
 EXP – E o pão caseiro pode ser combinado com quantos tipos de patê? (Olha para PED).
 PED – Três. (Olha para a EXP).
 EXP – E aí, quantos tipos de sanduíches diferentes já dão combinando os quatro tipos de pães com o três tipos de patê? (Olha para PED).
 PED – Doze. (Olha para a EXP).

5º. momento: Um a um PED combinou os tipos de pão com os tipos de patê, obtendo doze, como resposta; então, a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado, sugerindo a PED que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que tinha explicitado oralmente.

EXP – Por que dá doze? (Olha para PED).
 PED – Eu fiz assim... (Aponta com a mão esquerda para a sua cabeça). Três vezes quatro doze. (Olha para a EXP).
 EXP – Então anota isso. (Olha para PED e aponta para a folha de sulfite com a mão direita).
 PED – (Com a caneta preta que está na sua mão, escreve logo abaixo do problema, os números: $3 \cdot 4 = 12$ e olha para a EXP). Doze.

$$3 \cdot 4 = 12$$

6º. momento: Quando PED finalizou sua solução notacional, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a tinha compreendido.

EXP – Patê. Mas no pão só pode ir pão e patê? (Olha para PED).
 PED – Não. (Olha para a EXP).
 EXP – O que mais pode ir nestes pães? (Olha para PED).
 PED – (Busca esta informação no problema). Queijo.

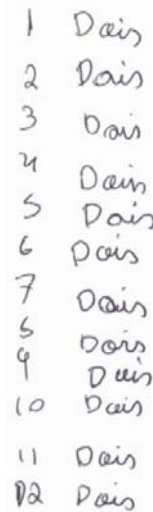
EXP – Queijo. E quantos tipos de queijo você tem? (Olha para PED).

PED – (Olha para o problema para buscar esta informação). Dois. (Olha para a EXP).

7º. momento: PED identificou a outra variável que necessitava utilizar para solucionar o problema; então, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – O que você vai ter que fazer para conseguir resolver isso? (Olha para PED).

PED – (Com a caneta preta, escreve logo abaixo do número doze, os números de um a doze, um embaixo do outro e olha para a EXP). Escrevi até o doze... (Com a caneta preta escreve a palavra dois ao lado do número um que havia escrito e olha para a EXP).



1 Dois
2 Dois
3 Dois
4 Dois
5 Dois
6 Dois
7 Dois
8 Dois
9 Dois
10 Dois
11 Dois
12 Dois

8º. momento: Após PED concluir sua solução notacional, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema; em seguida, incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – E agora; então, quanto dá tudo? (Circula com o dedo indicador da mão direita as notações de PED).

PED – (Confere novamente sua notação apontando com a caneta preta). Vinte e quatro. (Olha para a EXP e sorri).

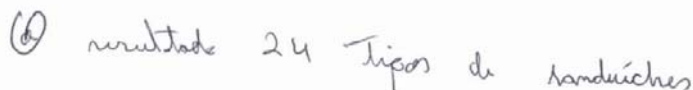
EXP – Por que dá vinte e quatro? (Olha para PED).

PED – Porque este daqui... (Aponta para a multiplicação: $3 \cdot 6 \cdot 9 = 12$). É do pão com o patê. E esse aqui... (Aponta para os números de um a doze que escreveu)... É do pão com o patê junto com os... Com os queijos. (Olha para a EXP).

9º. momento: PED explicou como pensara e a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de sulfite, o resultado que tinha explicitado oralmente.

EXP – Então anota. (Olha para PED e aponta para a folha de sulfite).

PED – (Com a caneta preta escreve quase no final da folha: O resultado 24 tipos de sanduíches. Quando finaliza sua notação olha para a EXP).



(4) resultado 24 tipos de sanduíches

10º. momento: Quando PED finalizou sua solução notacional, a EXP instigou-o a refletir se já tinha aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar a resposta.

EXP – Será que tinha alguma continha que você pudesse fazer para descobrir, para chegar a esse resultado? (Olha para PED).

PED – (Com a caneta preta que estava na sua mão registra o algoritmo convencional da multiplicação).

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

Na seqüência, PED complementou sua solução notacional.

PED – (Com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: $12 \times 2 = 24$. Quando finaliza a multiplicação, olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

11º. momento: PED finalizou a multiplicação e a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – E aí, o que você descobriu? (Olha para PED).

PED – Vinte e quatro. (Olha para as suas notações).

EXP – Então quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados com um tipo de pão, um tipo de patê e um tipo de queijo? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

PED – Vinte e quatro. (Olha para a EXP).

EXP – Vinte e quatro! O que você fez primeiro aqui para descobrir que dava vinte e quatro? (Aponta para os números de um a doze que PED havia escrito).

PED – Combinei os patês... (Aponta com a caneta preta para a pergunta do problema).

EXP – Com o quê? (Olha para PED).

PED – Com os quatros de pão. (Aponta com a caneta preta para esta informação no problema).

EXP – Com quatro de pão. Depois o que você fez? (Olha para PED).

PED – Peguei o doze e multipliquei por dois... (Aponta para a multiplicação $12 \times 2 = 24$ que efetuou).

EXP – E aí você descobriu; então, quantos tipos de sanduíches podem ser servidos? (Olha para PED).

PED – Vinte e quatro, combinando todos. (Olha para a EXP).

De nível I, subnível IB, as soluções notacionais e verbais de PED e sua interpretação sobre as soluções que utilizou, avançaram progressivamente para solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer por cálculo multiplicativo convencional, quer por “árvore” de possibilidades, envolvendo a escrita alfabética e numérica. Em sua solução predomina o caráter aditivo das combinações.

Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; instigadora; reorientadora; questionadora; reorientadora; questionadora; orientadora; questionadora; instigadora; questionadora; orientadora; instigadora e orientadora.

QUADRO 6: AS SOLUÇÕES DE PED AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO

PED		PROBLEMA 5			PROBLEMA 6			PROBLEMA 7			PROBLEMA 8		
		TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV		PED			PED			PED				PED	
III	III D												
	III C												
	III B												
	III A												
II	II C												
	II B												
	II A												
I	I B										PED		
	I A												

Como se vê no quadro acima, as soluções de PED aos problemas 5, 6 e 7 indicam solução de nível IV, predominando o caráter aditivo do raciocínio combinatório. Na solução do problema 8, a solução de PED iniciou em um nível menos adiantado e avançou para o nível IV, ainda com predomínio do raciocínio aditivo.

Na solução de todos os problemas por PED, houve alternância de três formas de intervenção da experimentadora: orientadora, questionadora e instigadora. A forma reorientadora, apareceu somente uma vez, durante a solução do problema 5 e duas vezes, durante a solução do problema 8. Na solução do problema 6, alternaram-se apenas duas formas de intervenção da experimentadora: questionadora e instigadora.

2ª. SESSÃO – REN – (9)

PROBLEMA 5

Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que podiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e lembrou-o dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar os problemas.

2º. momento: REN fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou a leitura, produziu a seguinte solução notacional.

pequena e grande → tamanhos
verde, azul, vermelha, amarela e preta → cores

3º. momento: Quando REN finalizou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que você anotou aí? (Aponta para o problema com a mão direita). Explica-me para eu entender como você pensou? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para as notações de REN).

REN – (Aponta com a caneta preta para a sua notação). Anotei os dois tipos de tamanho... (Aponta com a caneta preta para as palavras pequena e grande que escreveu). E os... (Aponta com a caneta preta para cada uma das cinco cores que escreveu, contando uma a uma). Um... Dois... Três... Quatro... Cinco... Cinco tipos de cores. (Olha para a EXP). E ...Agora não sei...(Olha para EXP).

4º. momento: REN identificou os valores e as variáveis necessárias à solução do problema; contudo, parecia estar em dúvida sobre o que fazer; então, a EXP pediu a ele que explicitasse o que o problema estava perguntando, para verificar se de fato ele o compreendia; em seguida, desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Tá! E o que o problema está perguntando para você? (Aponta para a pergunta do problema).

REN – Da cor e do tamanho. (Aponta com a caneta preta para estas informações no problema e apóia os dois cotovelos em cima da mesa, com as duas mãos fechadas apoiando o rosto).

EXP – Vamos ler o problema todo? (Olha para REN e aponta para o problema com o dedo indicador da mão direita).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho? (Lê o problema em voz alta apontando para cada palavra com o dedo indicador da mão direita).

REN – (Esfrega a caneta preta entre as duas mãos, ajeita-se na cadeira, coloca a caneta preta perto da boca e olha para a EXP). Sete. (Olha para suas notações).

EXP – Por que você acha sete? (Olha para REN).

REN – (Olha para suas notações). Por causa que são cinco cores e dois tamanhos... Daí da sete. (Olha para a EXP).

Essa solução verbal de REN e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Essa solução se limita ao cálculo aditivo, de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

5º. momento: A EXP solicitou a REN que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial de duas das três variáveis envolvidas.

EXP – Tá, e se a gente pensar assim: a mochila pequena, se você for comprar mochila pequena, que cores ela pode ser? (Olha para REN).

REN – (Apóia a cabeça com a mão esquerda, coloca a caneta preta na frente da boca e olha para sua notação). Tem verde, azul, vermelha, amarela e preta. (Aponta com a ponta da caneta preta para cada uma das cores que escreveu e olha para a EXP).

EXP – Então, quantos tipos de mochila já deram? (Olha para REN).

REN – (Apóia a cabeça com a mão esquerda e apóia a mão direita em cima da folha de sulfite). Cinco. (Olha para a EXP).

EXP – Cinco. E a mochila grande pode ser de quais cores? (Olha para REN).

REN – (Apóia a cabeça com a mão esquerda, coloca a caneta preta na frente da boca e olha para sua notação). Tem verde, azul, vermelha, amarela e preta. (Aponta com a ponta da caneta preta para cada uma das cores que escreveu e olha para a EXP). Cinco.

6º. momento: Após REN perceber que cada um dos dois tamanhos de mochila poderia ser de cinco cores, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Então, quantos tipos de mochilas diferentes têm nessa loja para a Amanda poder comprar? (Olha para REN).

REN – (Apóia a cabeça com a mão esquerda). Dez. (Olha para a EXP e sorri).

7º. momento: REN obteve dez, como resposta, e a EXP estimulou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Dez! Por que dez? (Olha para REN).

REN – Por causa que a pequena deu cinco... (Aponta com a caneta preta para a palavra pequena que escreveu e, em seguida, para as cores). E a grande deu cinco... (Aponta com a caneta preta para a palavra pequena que escreveu e, em seguida, para as cores). E por causa das duas deu dez. (Olha para a EXP).

8º. momento: Depois que REN explicou sua interpretação sobre a solução que utilizara, a EXP instigou-o a refletir se já havia aprendido na escola algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – E existe alguma operação que você já aprendeu na escola... (Olha para REN). Alguma continha que você possa fazer e que represente estas informações... (Circula com o dedo indicador da mão direita as notações de REN). Que estão aqui no problema? (Aponta para o problema).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça e olha para a EXP).

EXP – Qual? (Olha para REN).

REN – (Com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: $5 \times 2 = 10$, em seguida, “arma” o algoritmo convencional da adição: $5 + 5 = 10$. Quando finaliza sua notação, olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 2 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ + 5 \\ \hline 10 \end{array}$$

9º. momento: Quando REN finalizou suas soluções notacionais, a EXP interrogou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Você fez aqui a primeira cinco vezes dois, igual a dez... (Aponta para a multiplicação efetuada por REN com o dedo indicador da mão direita). O que o cinco representa? (Aponta para o número cinco que REN utilizou na multiplicação).

REN – O... As cores. (Aponta com a ponta da caneta preta para as cores que escreveu).

EXP – As cores! (Olha para REN).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – E o dois representa o que? (Aponta para o número dois que REN utilizou na multiplicação).

REN – Os tamanhos. (Apóia as duas mãos em cima da folha de sulfite, uma sobre a outra e olha para a EXP).

EXP – E na aquela ali... (Aponta para a adição efetuada por REN). Cinco mais cinco... (Olha para REN).

REN – E aqui deu cinco da pequena... (Aponta com a ponta da caneta preta para o primeiro número cinco que escreveu). E cinco da grande... (Aponta com a ponta da caneta preta para o segundo número cinco que escreveu e olha para a EXP).

10º. momento: REN explicou como pensara e a EXP desafiou-o a responder à questão do problema; em seguida, interrogou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Então, como que você responderia? (Olha para REN e lê a pergunta do problema em voz alta). Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Olha para REN).

REN – (Apóia os dois cotovelos em cima da mesa e olha para a EXP). Dez. (Coloca a caneta preta na boca).

10 tipos de mochila Amanda pode comprar

EXP – Dez tipos de mochila Amanda pode comprar. (Lê a resposta escrita por REN). Esses dez tipos de mochila... (Aponta para o número dez escrito por REN). São combinando o que? (Olha para REN).

REN – (Olha para a EXP). Pequena e grande. (Apóia o queixo com a mão esquerda e segura a caneta preta com a mão direita levantada). Com verde, azul, vermelha, amarela e preta. (Aponta para as cores das mochilas que havia escrito).

De início, solução de nível I, subnível IB, mas ao final as soluções notacionais de REN e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo aditivo e multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução apareceu em situação em que se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; questionadora; instigadora; reorientadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora e questionadora.

PROBLEMA 6

Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

1º. momento: REN fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, disse para a EXP que não havia entendido o problema. A EXP pediu a REN que explicitasse o que não entendera.

EXP – O que você não entendeu? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema, coloca a mão esquerda na cabeça). É. Como que... Tem trinta sabores... (Olha para o problema para buscar informações). Eu não entendi de quantas maneiras os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados. (Olha para a EXP).

EXP – Então, que os tamanhos e os sabores das pizzas podem ser combinados... (Olha para REN). De quantas maneiras diferentes os tamanhos e os sabores da pizza podem ser combinados? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

REN – (Olha para a EXP e fica em silêncio).

2º. momento: REN disse que não entendera a questão do problema; então, a EXP indagou-o sobre algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as tinha compreendido.

EXP – Quantos sabores de pizza têm? (Olha para REN).

REN – (Apóia os cotovelos em cima da mesa, apóia o rosto com as duas mãos e olha para o problema). Trinta sabores. (Olha para a EXP).

EXP – E quantos tamanhos? (Olha para REN).

REN – Três. (Olha para a EXP).

3º. momento: Após REN identificar as duas variáveis necessárias à solução do problema e seus respectivos valores, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema, desafiando-o, em seguida, a responder à questão ali feita.

EXP – Então, de quantas formas será que os sabores e os tamanhos podem ser combinados? (Olha para REN).

REN – (Coloca a mão esquerda na frente da boca). Trinta... (Olha para a EXP). Não... Trinta e três... (Olha para a EXP e movimenta as mãos na frente do rosto).

EXP – Por que você acha que é trinta e três? (Olha para REN).

REN – (Olha para o problema). Por causa que é trinta sabores e três tamanhos. (Aponta com a ponta da caneta preta para esta informação no problema).

Essa solução verbal de REN e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Essa solução se limita ao cálculo aditivo, de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

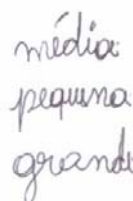
4º. momento: A EXP indagou de REN uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a tinha compreendido.

EXP – Por exemplo, vamos pensar em um tamanho de pizza? (Olha para REN).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – De que tamanho podem ser? (Olha para REN).

REN – (Apóia os cotovelos em cima da mesa). Média. (Olha para a EXP). Pequena. (Olha para a EXP e com a caneta pequena escreve a palavra pequena embaixo da palavra média e, em seguida, escreve a palavra grande embaixo da palavra pequena e olha para a EXP). E a grande.



média
pequena
grande

5º. momento: REN identificou os tamanhos que a pizza podia ter; em seguida, a EXP solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades parciais de combinação das três variáveis.

EXP – Se você for lá nessa pizzaria comprar... A pizza pequena, ela pode ser de quantos sabores? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a palavra pequena escrita por REN)

REN – (Apóia as duas mãos em cima da folha de sulfite, olha para o problema, coloca a caneta preta na boca). Trinta. (Olha para a EXP). Trinta sabores.

EXP – E a pizza média? (Aponta para a palavra média escrita por REN).

REN – Trinta. (Olha para a EXP).

EXP – E a grande? (Olha para REN).

REN – Trinta. (Olha para a EXP e com a caneta preta que estava na sua mão desenha uma seta ao lado de cada tamanho de pizza que havia escrito).

6º. momento: Após REN identificar que cada um dos tamanhos de pizza podia ser de trinta sabores, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Então, combinando os tamanhos com os sabores de quantas maneiras diferentes eles podem ser combinados? (Olha para REN).

REN – (Aponta com a ponta da caneta preta para suas notações, apóia a cabeça com a mão esquerda e fica em silêncio).

EXP – Por que você colocou estas setinhas aqui? (Aponta para as setinhas que REN desenhou ao lado dos tamanhos das pizzas).

REN – (Olha para as setas que desenhou). Para colocar que tem trinta sabores... (Olha para a EXP e com a caneta preta escreve ao lado de cada uma das três setas que escreveu o número trinta e a palavra sabores. Quando finaliza, olha para a EXP). Noventa. (Olha para sua notação).

média → 30 sabores
pequena → 30 sabores
grande → 30 sabores

7º. momento: Quando REN finalizou sua solução notacional, a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O que você pensou? (Olha para REN).

REN – Que eu pensei... Que combinando os trinta sabores com os três tamanhos... Daí deu noventa... (Aponta para sua notação e olha para a EXP).

8º. momento: Na seqüência, a EXP instigou REN a refletir se já havia aprendido na escola algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – E você já aprendeu alguma continha que você pudesse fazer para representar isso que você pensou? (Olha para REN e aponta para a folha de sulfite).

REN – (Coloca a caneta preta na frente da boca, olha para a EXP e acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Qual? (Olha para REN).

REN – (Olha para a EXP e coloca a caneta preta na boca). Trinta vezes três. (Olha para frente, fica em silêncio com o dedo indicador na frente da boca). Nove vezes dez. (Olha para a EXP e com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 10×9 , coloca o sinal \times , passa o traço da igualdade e obtém noventa como resposta, em seguida, “arma” o algoritmo convencional da adição: $30 + 30 + 30$, coloca o sinal $+$, passa o traço da igualdade e obtém noventa como resposta, quando finaliza olha para a EXP).

$$\begin{array}{r}
 \cancel{10} \\
 \cancel{9} \\
 \cancel{90} \\
 \hline
 30 \\
 30+ \\
 30 \\
 \hline
 90
 \end{array}$$

9º. momento: REN registrou duas soluções notacionais e a EXP interveio, expressando dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele. Em seguida, incitou REN a explicitar sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Tá! Aqui você está fazendo várias continhas... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para as duas operações efetuadas por REN). Para dar o resultado noventa, né? (Olha para REN).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça e apóia a cabeça com a mão esquerda).

EXP – No caso, o que o dez... (Aponta para o número dez que REN utilizou na multiplicação, com o dedo indicador da mão direita). Representa? (Olha para REN).

REN – (Olha para a EXP e acena negativamente com a cabeça e, com a caneta preta marca um X em cima da multiplicação que havia efetuado).

EXP – E aqui do lado... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a adição efetuada por REN). Você fez trinta mais trinta mais trinta... (Aponta para os números trinta escritos por REN). E daí, o que cada um desses trinta representa? (Olha para REN).

REN – (Olha para sua notação). Os sabores. (Aponta com a caneta preta para a sua notação e, em seguida, para esta informação no problema).

EXP – Esse primeiro trinta representa o que? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o primeiro trinta escrito por REN).

REN – Os sabores da média. (Coça a cabeça com a caneta preta e olha para a EXP).

EXP – E esse trinta? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o segundo trinta escrito por REN).

REN – Os sabores da grande. (Apóia a cabeça com a mão direita).

EXP – E esse trinta? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o trinta escrito por REN).

REN – Os sabores da pequena. (Olha para a EXP).

EXP – Então, combinando os sabores com os tamanhos, quantas pizzas, de quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos podem ser combinados? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para as notações de REN).

REN – De noventa. (Olha para a EXP).

10º. momento: Depois que REN identificou que apenas a adição representava as informações do problema, a EXP instigou-o a refletir se já havia aprendido na escola algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Será que teria alguma outra conta que representasse as informações aqui desse problema? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para as informações do problema e para as notações de REN).

REN – (“Arma” o algoritmo da multiplicação: $3 \times 30 = 90$, ajeita-se na cadeira, olha para a EXP e coloca a caneta preta em cima da mesa).

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 30 \\ \hline 90 \end{array}$$

11º. momento: Quando REN finalizou a multiplicação, a EXP o incitou a explicitar sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – O que este três representa? (Aponta para o número três utilizado por REN na multiplicação).

REN – Os três tamanhos. (Olha para a EXP).

EXP – E o trinta? (Aponta para o número trinta utilizado por REN na multiplicação).

REN – Os sabores. (Apóia o cotovelo esquerdo em cima da mesa).

EXP – E o noventa? (Aponta para o número noventa que REN encontrou como resposta da multiplicação). Representa o que? (Olha para REN).

REN – Todos juntos. (Apóia o cotovelo esquerdo em cima da mesa e olha para a EXP).

EXP – Todos juntos o que? (Olha para REN).

REN – Os sabores e tamanhos. (Olha para a EXP).

12º. momento: Após REN explicar como havia pensado, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que tinha explicitado oralmente.

EXP – Então anota. (Aponta para a folha de sulfite).

REN – (Com a caneta preta que estava na sua mão desenha uma seta ao lado do número noventa que obteve como resultado da multiplicação e escreve ao lado da seta: Todos juntos tamanhos e sabores. Quando finaliza a notação, olha para a EXP e coloca a caneta preta em cima da mesa).

todos juntos tamanhos e
sabores

EXP – O que você descobriu? (Olha para REN). Que se você tiver trinta sabores de pizza e três tamanhos, quantas pizzas diferentes vão poder ser formadas? (Olha para REN).

REN – (Coloca as duas mãos no rosto, olha para suas notações, sorri e olha para a EXP). Noventa.

De início, solução de nível I, subnível IB, mas ao final as soluções notacionais e verbais utilizadas por REN e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução

estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por meio de cálculo aditivo e multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: questionadora; instigadora; questionadora; reorientadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora e orientadora.

PROBLEMA 7

Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

1º. momento: REN fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, questionou a EXP sobre a possibilidade de desenhar as camisetas e as bermudas. A EXP lembrou REN dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar o problema.

REN – (Coloca a caneta preta em cima da mesa, com a mão esquerda pega a canetinha azul, passa para a mão direita e desenha o contorno de uma camiseta, quando finaliza, coloca a canetinha azul em cima da mesa e assim, uma a uma, desenha as dezoito camisetas).

2º. momento: Quando REN finalizou sua solução notacional, a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que tinha utilizado.

EXP – O que você desenhou aqui? (Aponta para a notação de REN).

REN – (Olha para sua notação). As dezoito camisetas. (Olha para a EXP e, com as duas mãos ajeita as canetinhas que estavam em cima da mesa).

3º. momento: Após REN explicar que havia desenhado as dezoito camisetas, a EXP provocou-o a relatar as informações que havia lido no problema.

EXP – E o que está dizendo no problema? (Aponta para o problema)

REN – Pedro tem dezoito camisetas e onze bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (Lê o problema em voz alta).

4º. momento: REN leu o problema; então, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Tá! Então, por exemplo... Com esta camiseta aqui... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a primeira camiseta desenhada por REN). Ele pode usar com quantas bermudas? (Olha para REN).

REN – Com onze. (Olha para a EXP e aponta para as camisetas que desenhou). Vou colocar onze aqui dentro. (Aponta com a caneta preta para o interior da primeira camiseta que desenhou e escreve o número onze dentro e assim, uma a uma, escreve o número onze dentro das camisetas. Quando termina de escrever o número onze dentro das camisetas, com a ponta da caneta preta conta uma a uma a quantidade de camisetas que desenhou, respira fundo, ajeita-se na cadeira, segura a caneta preta com as duas mãos e olha para a EXP). Dezoito camisetas com onze. (Olha para a EXP e com a caneta preta, escreve o número onze dentro de cada uma das camisetas que desenhou).



5º. momento: Quando REN finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Então agora, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (Lê a pergunta do problema em voz alta e olha para REN).

REN – (Apóia a cabeça com a mão esquerda e com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da adição: $18 + 11$, escreve o sinal +, passa o traço da igualdade e resolve rapidamente a adição iniciando pela coluna das unidades e, em seguida, das dezenas, obtendo vinte e nove como resultado). Vinte e nove. (Olha para a EXP).

Essa solução notacional de REN indica solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo, de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

6º. momento: Depois que REN encontrou vinte e nove, como resposta, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Vinte e nove! Por exemplo, aqui... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a primeira camiseta desenhada por REN). Já deu quantos jeitos diferentes de se vestir? (Olha para REN).

REN – (Olha para suas notações). Onze. (Olha para a EXP).

EXP – Onze! Juntando duas camisetas... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para as duas primeiras camisetas desenhadas por REN). Já dão quantos jeitos? (Olha para REN).

REN – (Olha para a EXP). Vinte e dois.

EXP – E juntando três camisetas? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para as três primeiras camisetas desenhadas por REN).

REN – (Olha para as camisetas que desenhou). Trinta... (Aponta com a mão direita para as três primeiras camisetas que desenhou, como se estivesse contando, primeiro as dezenas e, em seguida, as unidades). Trinta... Trinta e três. (Olha para a EXP).

7º. momento: REN obteve trinta e três, como resposta parcial, combinando três camisetas com onze bermudas; então, a EXP desafiou-o a repensar o procedimento de cálculo utilizado para solucionar o problema.

EXP – Trinta e três! E olha o que você disse aqui... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a adição efetuada por REN). Que se ele combinar as dezoito camisetas com as onze bermudas ele vai ter vinte e nove jeitos de se vestir... (Aponta para o número dezoito e para o número onze escrito por REN).

REN – (Olha para suas notações, acena afirmativamente com a cabeça e coloca a mão esquerda em cima das canetinhas coloridas. Pega a caneta preta que estava em cima da mesa, sorri e acena negativamente com a cabeça pois, percebe que a adição que efetuou não responde a pergunta do problema, marca um X em cima da adição e olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 11 \\ \hline 29 \end{array}$$

8º. momento: Depois que REN marcou um X em cima da operação que havia efetuado, a EXP provocou-o a refletir sobre a solução notacional que havia desconsiderado.

EXP – Por que não deu? (Olha para REN).

REN – Por causa que não tinha que dar... (Aponta para as camisetas que desenhou com a mão direita). Vinte e nove as três... Não deu... (Olha para a EXP). Deu trinta e três. (Apóia as duas mãos em cima da mesa e, com a ponta da caneta preta passa por cima das camisetas e olha atentamente para suas notações, apoiando a cabeça com a mão esquerda).

9º. momento: A EXP provocou REN a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – O que você fez aqui... (Aponta com o dedo indicador da mão direita para as camisetas desenhadas por REN). Por que você colocou esses onze dentro das camisetas? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para os números onze que REN escreveu dentro das camisetas).

REN – Por que... Dezoito camisetas... (Aponta com a mão direita para as camisetas que desenhou). Que dava para ele se vestir de onze maneiras com as bermudas e cada camiseta... (Aponta para as camisetas com a mão direita). Com cada camiseta que dava com as onze bermudas. (olha para a EXP).

10º. momento: Após REN explicar que cada uma das camisetas poderia combinar com cada uma das onze bermudas, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – Mas agora eu estou perguntando para você como você acha que vai conseguir descobrir de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (Olha para REN).

REN – (Olha para a EXP, coloca a caneta preta na boca, olha para suas notações, olha para frente e fica em silêncio por algum tempo. Aponta com a caneta preta para as camisetas que desenhou como se estivesse contando, apóia as duas mãos em cima da mesa, olha para a EXP, sorri, coloca as duas mãos na cabeça e olha para suas notações).

EXP – E daí, o que você estava pensando REN? (Olha para REN). Que você contou lá? (Olha para REN).

REN – Que eu tava contando que... Daí deu... Daí... Trinta e três... (Aponta para as três primeiras camisetas que desenhou). Daí fui contando assim... (Aponta para as outras camisetas que desenhou). De onze em onze... (Olha para a EXP e sorri).

EXP – E que conta você está fazendo? (Olha para REN).

REN – (Olha para suas notações, coça o olho com a mão esquerda e, aponta para as camisetas com a caneta preta). Tô contando... De onze em onze... (Olha para a EXP).

11º. momento: REN explicou para a EXP que estava contando de onze em onze; então, a EXP instigou-o a refletir se já tinha aprendido na escola algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – De onze em onze! (Olha para REN). Dá para fazer alguma conta? (Aponta para a folha de sulfite).

REN – (Apóia os dois cotovelos em cima da mesa). Juntando tudo aqui... (Aponta para as camisetas que desenhou). De mais! (Olha para a EXP).

EXP – Como que poderia ser esta conta de mais? (Olha para REN).

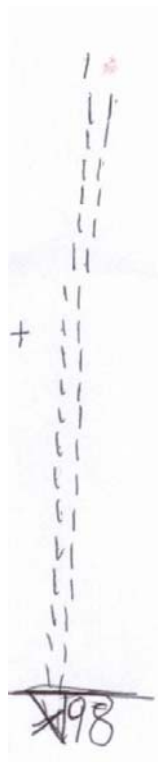
REN – Dezoito onze... (Olha para a EXP e aponta para o espaço em branco na folha de sulfite. Com a caneta preta que estava na sua mão “arma” o algoritmo convencional da adição: $11 + 11 + 11 + 11 + 11$ e pára, pois, é interrompido pela EXP).

EXP – Te atrapalhei, né! Eu perguntei, por que dezoito onze? (Olha para REN e sorri).

REN – (Aponta para as camisetas que desenhou com a caneta preta). Por que tem dezoito camisetas e onze bermudas. (Olha para a EXP).

EXP – Rum, rum! (Acena afirmativamente com a cabeça).

REN – (Com a caneta preta, continua a escrever os números onze na adição que estava efetuando, escreve mais quinze números onze e faz uma pausa para conferir. Conta um a um a quantidade de números onze que escreveu, percebe que sobrou um e marca um X em cima do último número onze que havia escrito, passa o traço da igualdade e inicia a adição pela coluna das unidades, nem conta os números um que escreveu e obtém dezoito como resultado, escreve o número oito embaixo do traço da igualdade e coloca o número um, no estilo do “vai um” na coluna das dezenas, em seguida, adiciona e escreve o número dezenove embaixo do traço da igualdade). Cento e noventa e oito. (Olha para a EXP).



12º. momento: REN finalizou a adição e obteve cento e noventa e oito, como resposta; então, a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Cento e noventa e oito, o que? (Olha para REN).

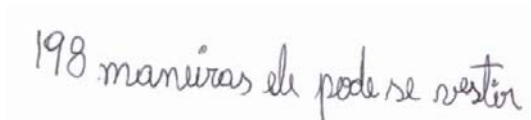
REN – (Olha para as camisetas que desenhou). Diferentes... De camiseta e bermuda... Para ele se vestir... (Circula as camisetas que desenhou com a ponta de trás da caneta preta).

EXP – Então, cento e noventa e oito maneiras de ele se vestir. (Olha para REN). Do que é esta conta que você fez? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a adição efetuada por REN).

REN – De mais. (Olha para a EXP). Por que aqui tem dezoito onze... Daí... Nem fui contando. (Aponta com a caneta preta para os números onze que havia escrito na adição).

EXP – Então, de quantas maneiras diferentes o Pedro pode se vestir? (Olha para REN e aponta para a pergunta do problema).

REN – (Olha para o resultado da adição que efetuou). Cento e noventa e oito. (Olha para a EXP e com a caneta preta que estava na sua mão escreve: 198 maneiras ele pode se vestir. Quando finaliza sua notação, olha para a EXP).



198 maneiras ele pode se vestir

13º. momento: A EXP provocou-o a refletir se já havia aprendido, na escola, algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Aqui você fez uma conta de mais, né? (Olha para REN e aponta para a adição que ele efetuou).

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – E teria alguma outra conta que você pudesse fazer? (Olha para REN). Que também... (Aponta com a mão direita para a folha de sulfite). Respondesse a esse problema, utilizando essas informações? (Aponta com a mão direita para o problema).

REN – (Olha para suas notações). Não! (Acena negativamente com a cabeça e olha para a EXP).

EXP – Não!

REN iniciou a solução do problema com solução de nível I, subnível IB, mas, ao final, as soluções notacionais e verbais de REN e sua interpretação sobre as soluções utilizadas indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo aditivo convencional, por representação pictórica, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: reorientadora; questionadora; instigadora; questionadora e instigadora.

PROBLEMA 8

Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

1º. momento: REN fez a leitura do problema em voz alta e, quando finalizou, registrou a seguinte solução notacional, na folha de papel sulfite.

REN – (Quando finaliza a leitura olha para a EXP, olha novamente para o problema, olha para a EXP, apóia a cabeça com a mão direita e a folha de sulfite com a mão esquerda, fica em silêncio por um tempo e com a caneta preta que está na sua mão escreve logo abaixo do problema: 2 tipos de queijo). Dois tipos de queijo. (Olha para as informações do problema e com a caneta preta escreve: 3 diferentes de sanduíches). Três diferentes de sanduíches. (Olha novamente para as informações do problema e escreve o número quatro em cima do número três que havia escrito e escreve na sequência: 3 tipos de patê). Três tipos de patê. (Quando finaliza suas notações, olha para a EXP).

2 tipos de queijo
~~4~~ diferentes de sanduíches pães
 3 tipos de patê

2º. momento: Quando REN finalizou sua solução notacional, a EXP leu a questão do problema em voz alta; em seguida, provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – E agora, ali está perguntando: Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê? (Lê a pergunta do problema em voz alta e olha para REN).

REN – (Coloca os cotovelos em cima da mesa e enrola as pontas dos cabelos com as mãos. Fica em silêncio por algum tempo e olha para as suas notações). Se tem dois tipo de queijo... Tipos de pães... (Olha para suas notações). E três tipos de patê... Daí... Eu não... Não sei fazer... (Olha para a EXP).

3º. momento: Percebendo que REN tinha identificado as variáveis necessárias à solução do problema tendo, no entanto, demonstrado estar em dúvida sobre o que fazer, a EXP solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de

combinação de duas das três variáveis envolvidas. Em seguida, solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Quantos tipos de queijo têm? (Olha para REN).

REN – Dois. (Olha para suas notações).

EXP – Dois! E quantos tipos de pães? (Olha para REN).

REN – Quatro. (Continua olhando para suas notações).

EXP – E combinando os queijos com os pães quantos tipos de sanduíches já dão? (Olha para a REN).

REN – Seis! (Olha para a EXP e responde antes mesmo dela concluir a pergunta).

EXP – Por que dá seis? (Olha para REN).

REN – Por que... Quatro mais dois dá seis. (Olha para a EXP e coloca a caneta preta perto da boca).

Essa solução verbal de REN e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo, de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento, no texto do problema.

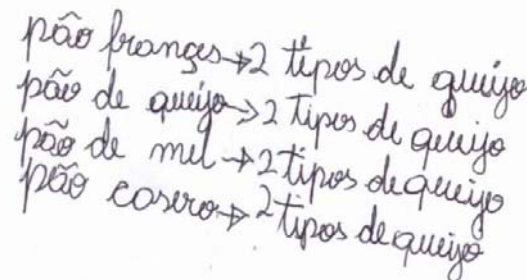
4º. momento: A EXP instigou REN a dar uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – Me fale quantos tipos de pães foram comprados? (Olha para REN).

REN – (Olha para suas notações). Pão francês. (Olha para a EXP e com a caneta preta que estava na sua mão escreve as palavras: pão francês, pão de queijo, pão de mel e pão caseiro na folha de sulfite).

EXP – Então, vamos pensar lá! Com o pão francês... (Aponta para as palavras: pão francês, escritas por REN). Quantos tipos de queijo podem ser combinados? (Olha para REN).

REN – Dois. (Olha para a EXP, sorri e desenha uma seta ao lado dos tipos de pães que havia escrito e, com a caneta preta escreve: 2 tipos de queijo, ao lado de cada um dos tipos de pães que havia desenhado. Quando finaliza, olha para a EXP).



pão francês → 2 tipos de queijo
 pão de queijo → 2 tipos de queijo
 pão de mel → 2 tipos de queijo
 pão caseiro → 2 tipos de queijo

5º. momento: Quando REN finalizou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que tinha utilizado.

EXP – E aí, combinando os pães com os queijos, já deram quantos tipos de sanduíches diferentes? (Olha para REN e aponta para suas notações).

REN – (Olha para sua última notação e conta de dois em dois, cada um dos números dois que escreveu ao lado dos tipos de pães). Dois, quatro, seis, oito. (Olha para sua notação). Oito! (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Aqui você combinou o que REN? (Aponta para a última notação feita por REN).

REN – Combinei... Os quatro pães com os dois... Com os dois tipos de queijo... (Enquanto responde olha para sua notação e coloca a mão direita próxima ao peito, a mão esquerda apóia a cabeça).

8 tipos combinando os pães e os tipos de queijos

6º. momento: Após REN combinar duas das três variáveis, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – Tá! Mas você só tem pães e queijos para combinar? (Olha para REN).

REN – (Acena negativamente com a cabeça e olha para a EXP). Não!

EXP – O que mais que você tem para combinar agora? (Olha para REN).

REN – O patê. (Olha para a EXP).

EXP – E agora o que você pode fazer? (Olha para REN e aponta com a mão direita para suas notações).

REN – Combinar os patês com os oito tipos... (Aponta para o número oito da combinação entre pães e queijos).

EXP – Então combina! (Olha para REN e aponta para a folha de sulfite).

REN – (Olha para o problema). Três patês! (Olha para sua notação e, com a caneta preta escreve na folha de sulfite a palavra: patê e desenha ao lado uma seta e escreve a palavra frango, escreve a palavra presunto embaixo da palavra frango e escreve a palavra atum embaixo da palavra presunto e olha para a EXP).

7º. momento: Depois que REN finaliza sua solução notacional, a EXP o provoca à busca de uma solução para o problema.

EXP – Tá! O patê de frango vai poder combinar com quantos tipos já de sanduíches? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a palavra frango escrita por REN)

REN – (Olha para o problema e para suas notações). Oito. (Olha para a EXP).

EXP – É o patê de presunto? (Olha para REN).

REN – Oito. (Olha para a EXP).

EXP – É o patê de atum? (Olha para REN).

REN – Oito. (Olha para a EXP e com a caneta preta desenha ao lado de cada um dos sabores do patê uma seta e escreve ao lado o número: 8 e olha para a EXP).

patê 3
frango 8
presunto 9
atum 4

8º. momento: Quando REN finalizou sua solução notacional, a EXP o desafiou-o a responder à questão do problema. Em seguida, pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – E agora sim! E tudo junto aí... (Aponta para as notações de REN). Vão dar quantos tipos de sanduíches diferentes? (Olha para REN).

REN – (Olha para suas notações e, partindo do número dezesseis, pois, fez mentalmente oito mais oito, conta nos dedos das mãos mais oito). Dezessete, dezoito, dezenove, vinte, vinte e um, vinte e dois, vinte e três, vinte e quatro. (Olha para a EXP). Vinte e quatro.

24 tipos de (pães 4) (queijos 2) patê 3

EXP – Tá! Então aqui... (Aponta para a última notação de REN). Você já tinha combinado então os pães com os queijos... (Aponta para anotação de REN). E aqui você combinou os patês. Teria alguma conta que representasse essa... Esse resultado que você achou? (Aponta para a última notação de REN). O que você fez aí? (Olha para REN).

REN – (Olha para a EXP). Oito... Dezesseis... Vinte e quatro... (Olha para sua notação e, em seguida, olha para a EXP).

EXP – (Olha para REN). Hum! Foi contando de oito em oito!

REN – (Acena afirmativamente com a cabeça).

De início, solução de nível I, subnível IB, mas ao final a solução notacional de REN e sua interpretação sobre a solução utilizada indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo aditivo não-convencional, por “árvore” de possibilidades, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; instigadora; reorientadora; questionadora; instigadora; questionadora e instigadora.

QUADRO 7: AS SOLUÇÕES DE REN AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO

REN	PROBLEMA 5			PROBLEMA 6			PROBLEMA 7			PROBLEMA 8		
	TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV		REN			REN			REN			REN	
III	III D											
	III C											
	III B											
	III A											
II	II C											
	II B											
	II A											
I	I B	REN		REN			REN			REN		
	I A											

Como se vê no quadro acima, na solução dos problemas 5, 6, 7 e 8, REN sempre partiu de solução de nível I, subnível IB e avançou para solução de nível IV.

Essa mudança de nível de solução apareceu quando se manifestaram as diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância.

2ª. SESSÃO – MAT – (9; 7)

PROBLEMA 5

Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria.

Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que podiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e lembrou-o dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar os problemas.

2º. momento: MAT fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, foi provocado pela EXP a relatar as informações que havia lido no problema.

EXP - O que você acha? (Olha para MAT). O que está dizendo o problema? (Aponta com a mão esquerda para o problema)

MAT – (Continua com as mãos em cima dos joelhos enquanto olha para o problema). Fala sobre o tamanho das mochilas e as cores. (Olha para a EXP).

3º. momento: Depois que MAT identificou as duas variáveis necessárias à solução do problema, a EXP sugeriu a ele que lesse o problema, para identificar a questão proposta.

EXP – E o que está perguntando?

MAT – Que Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria e tem vários tipos de mochilas e que Amanda quer comprar uma. (Busca as informações no problema e lê parte dele para construir sua resposta).

EXP – Então o que está dizendo ali? (Aponta para a pergunta do problema). Quantos tipos mochila... ? (Olha para MAT, pois, ele completa sua frase).

MAT – Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Completa a frase da EXP lendo a pergunta do problema). Combinando uma cor e com um tamanho? (Olha para a EXP).

4º. momento: Após MAT identificar a questão proposta pelo problema, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E daí, o que você acha? (Olha para MAT). Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Aponta para a pergunta do problema).

MAT – Com a grande dá para fazer com a... (Olha para a EXP). Com a azul ou vermelho ou verde, amarela e preta. (Responde olhando para as cores das mochilas que estão escritas no problema).

EXP – Com a grande dá quantos tipos de mochilas? (Olha para MAT).

MAT – Faz... Cinco. (Olha para cima e, em seguida, olha para a EXP).

EXP – E com a pequena? (Olha para MAT e sorri).

MAT – Cinco. (Mostra os cinco dedos da mão e olha para a EXP, em seguida, coloca as mãos em cima dos joelhos).

5º. momento: MAT identificou que a mochila grande e a mochila pequena podiam ser compradas de cinco cores diferentes; então, a EXP provocou-o a responder à questão do problema.

EXP – Então juntando tudo, Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para o problema). Quinze. (Olha para a EXP e continua com as mãos em cima dos joelhos).

6º. momento: A EXP pediu a MAT que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações do problema.

EXP – Quinze? (Olha para MAT).

MAT – Porque é três tipos de tamanhos, né? (Olha para a EXP).

EXP – Três tipos? (Olha para MAT).

MAT – Dois. (Balança a cabeça para os lados dizendo que se enganou). Então dez. (Olha para a EXP e sorri).

7º. momento: Depois que MAT retomou as informações do problema e reformulou sua resposta, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Como você pode escrever isso para mim? (Aponta para a folha de sulfite com a mão direita).

MAT – (Posiciona a caneta preta que estava em sua mão para escrever e apóia a cabeça com a mão esquerda). Dois tamanhos... (Olha para a folha de sulfite). Aqui é o pequeno... (Com a caneta preta escreve a letra P logo abaixo do problema). E aqui é o grande... (Com a caneta preta escreve a letra G logo abaixo do problema e próxima da letra P). E aqui junta todas as cores... (Desenha um pequeno círculo embaixo da letra P). E aqui são todas as cores... (Desenha um pequeno círculo embaixo da letra G). São cinco... (Aponta para um e para outro círculo respectivamente). Daí juntava tudo... (Aponta para a letra P e, em seguida, para a letra G). E dava dez. (Apóia a folha de sulfite com a mão esquerda e olha para a EXP). Daí deu dez. (Com a caneta preta que está na sua mão escreve embaixo da letra P que havia escrito as cores que a mochila pequena pode ter: azul, amarela, verde, vermelha e preta, antes de escrever a cor olhava para o problema para buscar quais as cores que a mochila poderia ter. Em seguida, escreve as cores embaixo da letra G que havia escrito, para representar as cores que a mochila grande poderia ter, antes de escrever a cor olhava para o problema para buscar quais as cores que a mochila poderia ter. Quando finaliza coloca a caneta preta em cima da folha de sulfite e olha para a EXP).

P G

AZUL, AMARELA, VERDE, VERMELHA E PRETA AZUL, AMARELA, VERDE, VERMELHA E PRETA

8º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Fez? Então você colocou que pequena pode ser azul, amarela, verde, vermelha e preta. (Aponta para as cores de mochila pequena que MAT escreveu). E a grande também, pode ser azul, amarela, verde, vermelha e preta. (Aponta para as cores de mochila grande que MAT escreveu). Então, no total, quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Aponta para as notações de MAT).

MAT – (Coloca as duas mãos em cima da folha de sulfite). Dez. (Olha para a EXP e ajeita-se na cadeira).

9º. momento: Na seqüência, a EXP sugeriu a MAT que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Então anota. (Aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Pega a caneta que estava em cima da folha de sulfite e escreve embaixo das cores das mochilas: 10 tipo de mochila. Quando termina de escrever, coloca a caneta preta em cima da folha de sulfite, coloca as duas mãos em cima das pernas e olha para a EXP).

10 TIPO DE MUCHILAS

10º. momento: A EXP instigou MAT a refletir se já tinha aprendido na escola algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Então você descobriu que é dez... (Aponta para o número dez escrito por MAT). E agora eu pergunto: tem alguma conta, alguma operação que você aprendeu na escola que pudesse representar isso que você fez? (Circula com a mão direita as notações de MAT).

MAT – (Com as mãos em cima das pernas olha para frente e fica um tempo em silêncio). Cinco mais cinco. (Olha para a EXP e movimentando o braço esquerdo, levantando o ombro).

11º. momento: Após a resposta de MAT, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – Cinco mais cinco, então anota. (Olha para MAT).

MAT – (Apoiando a cabeça com a mão esquerda, pega a caneta preta que estava em cima da folha de sulfite e escreve a sentença matemática $5 + 5$, quando finaliza, olha para a EXP).

$$5 + 5 = 10$$

12º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, foi solicitado pela EXP a explicitar sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – O cinco aqui representa o quê? (Aponta com dedo indicador da mão direita para o primeiro cinco escrito por MAT).

MAT – (A mão esquerda apóia a cabeça e a mão direita se movimenta enquanto responde). O tamanho pequeno das cinco cores. (Olha para a EXP).

EXP – E o outro cinco? (Aponta com dedo indicador da mão direita para o segundo cinco escrito por MAT).

MAT – O tamanho das cinco cores. (Aponta para as notações que havia feito).

13º. momento: Após MAT explicar como havia pensado, a EXP indagou-o a refletir se já tinha aprendido, na escola, outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado e, em seguida, sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que tinha explicitado oralmente.

EXP – Aí você fez uma conta de mais, uma adição. (Aponta para a adição efetuada por MAT). Teria mais alguma outra operação que você pudesse fazer? (Olha para MAT).

MAT – (Com os dois cotovelos apoiados em cima da mesa e com os braços entrelaçados, olha para suas notações). Não sei. (Olha para a EXP e levanta e abaixa os ombros).

EXP – O que você acha? (Aponta para as notações de MAT). Que não fosse de mais. (Olha para MAT).

MAT – Na conta de vezes dá para fazer duas vezes cinco daí dá dez. (Olha para a EXP).

EXP – Então coloca aí para a gente pensar sobre ela. (Aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Pega a caneta preta que estava em cima da folha de sulfite e escreve a sentença matemática: $2 \times 5 = 10$, embaixo da adição $5 + 5 = 10$, quando finaliza, coloca a caneta preta em cima da mesa e olha para a EXP).

$$2 \times 5 = 10$$

14º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, foi convidado pela EXP a explicitar sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Pensando neste problema... (Aponta para o problema). O que o dois representaria? (Aponta para o número dois escrito por MAT).

MAT – Duas vezes. (Movimenta as mãos que estão juntas e olha para a EXP).

EXP – Duas vezes. Mas o dois neste problema ele representa o quê? (Aponta para o problema e, em seguida, para o número dois escrito por MAT).

MAT – (Olha para o problema e, em seguida, para suas notações). O tamanho pequeno e grande! (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para as letras P e G que escreveu).

EXP – E o cinco representa o quê? (Aponta para o número cinco escrito por MAT).

MAT – É... Os tipos de cores. (Olha para a EXP).

As soluções notacionais e verbais utilizadas por MAT e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer por cálculo aditivo e multiplicativo convencional, quer por “árvore” de possibilidades, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Esse nível de solução se fez em situação em que se alternaram as formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; orientadora; instigadora; questionadora; orientadora; instigadora; orientadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; orientadora e questionadora.

PROBLEMA 6

Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

1º. momento: MAT fez a leitura silenciosa do problema e quando finalizou, explicou para a EXP o que tinha lido. MAT identificou as duas variáveis necessárias

à solução do problema; então, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – O que você acha que vai ter que fazer? (Olha para MAT).

MAT – (Coloca a mão esquerda em cima do braço direito). Tem três tipos de tamanhos, deixa eu ver se eu lembro... (Olha para cima). Pequeno, médio e grande... (Olha para a EXP).

EXP – Três tipos de tamanhos e o que mais? (Olha para MAT).

MAT – (Coloca as duas mãos em cima dos joelhos). E trinta sabores. (Olha para a EXP).

2º. momento: Depois que MAT identificou os valores das duas variáveis necessárias à solução do problema, a EXP sugeriu-lhe que lesse o problema, para identificar a questão proposta; em seguida, provocou-o à busca de uma solução.

EXP – E aí está perguntando o quê? (Aponta para a pergunta do problema).

MAT – É. (Lê a pergunta do problema em voz alta). De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos das pizzas podem ser combinados? (Olha para a EXP).

EXP – E daí, o que você acha? Como você vai ter que fazer para poder descobrir? (Olha para MAT).

MAT – (Fica em silêncio, permanece com as duas mãos em cima dos joelhos e observa atentamente o problema). Trinta vezes três. (Olha para a EXP).

3º. momento: MAT indicou uma solução; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que havia explicitado oralmente.

EXP – Anota. (Aponta para a folha de sulfite). Vamos conversar sobre isso.

MAT – (Pega a caneta preta que estava em cima da mesa e “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 30×3 , em seguida, passa o traço da igualdade e efetua a multiplicação iniciando pela unidade e, em seguida, a dezena e encontra 90 como resposta. Quando finaliza a multiplicação, coloca a caneta preta em cima da mesa e olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \end{array}$$

4º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP incitou-o a explicitar sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – Você disse: Ah, é trinta vezes três. Por que você acha que aqui é trinta? (Aponta para o número trinta que MAT escreveu). O que o trinta aqui estaria representando? (Aponta para o número trinta que MAT escreveu).

MAT – (Coloca a mão direita embaixo do queixo). Os sabores. (Olha para o problema e, em seguida, olha para a EXP).

EXP – E o três? (Aponta para o número três que MAT escreveu).

MAT – É... (Olha para o problema). Os tamanhos. (Olha para a EXP).

EXP – Então, de quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos das pizzas podem ser combinados? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

MAT – Noventa! (Olha para a EXP).

EXP – Você entendeu por que deu noventa? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para o problema). Porque aqui tem três tipos de tamanhos e trinta tipos de sabores, daí fiz trinta vezes três. (Aponta para estas informações que estão escritas no problema).

90 TIPOS DE SABORES E
TAMANHO

Em primeira tentativa, as soluções notacionais e verbais utilizadas por MAT e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Esse nível de solução se fez em situação em que se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: instigadora; orientadora; instigadora; orientadora e questionadora.

PROBLEMA 7

Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

1º. momento: MAT fez a leitura silenciosa do problema e quando finalizou, explicou para a EXP as informações que leu. Percebendo que MAT havia identificado as duas variáveis necessárias à solução do problema, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – O que você vai poder fazer para descobrir? (Olha para MAT).

MAT – (Apóia a cabeça com a mão esquerda e continua olhando para o problema). Uma conta de vezes!... É... Eu acho... (Olha para a EXP).

2º. momento: Após MAT responder que teria que efetuar uma multiplicação, a EXP sugeriu que ele registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que explicitara oralmente.

EXP – Então, tenta fazer. Anota na folha de sulfite. (Olha para MAT e aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Pega a caneta preta que estava em cima da mesa e ao lado da folha de sulfite e “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 18×11 , em seguida, passa o traço da igualdade e inicia a solução, multiplica a unidade e olha para a EXP). Dezoito. (Aponta com a ponta da caneta para o resultado que encontrou).

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 11 \\ \hline 18 \\ 180 \\ \hline \end{array}$$

3º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP provocou-o a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – Você já aprendeu fazer conta de vezes por dois números? (Olha para MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – E aí, então agora você multiplicou a unidade... E agora você vai ter que multiplicar o que? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número 1 que está na dezena).

MAT – Dezena. (Olha para a EXP).

EXP – A dezena! (Olha para MAT).

MAT – (Pega a caneta que estava em cima da mesa e olha para sua notação). Só que aqui vai dar dezoito de novo! (Olha para a EXP com cara de assustado).

EXP – Tá! Então onde que vai ficar... (Aponta para o algoritmo da multiplicação parcialmente solucionado por MAT). O outro dezoito que você disse que vai dar o resultado?

MAT – Embaixo. (Aponta com a caneta preta para o espaço logo abaixo do outro dezoito que MAT encontrou como resultado da multiplicação dezoito vezes um).

EXP – (Olha para MAT). Então coloca. (Aponta para a folha de sulfite com a mão direita).

MAT – (Com a caneta preta que estava em sua mão escreve o número dezoito exatamente embaixo do outro número dezoito que havia escrito). Trinta e seis. (Quando finaliza sua notação coloca a caneta preta em cima da folha de sulfite, apóia a cabeça com a mão esquerda e olha para a EXP).

$$\begin{array}{r}
 18 \\
 \times 11 \\
 \hline
 18 \\
 + 18 \\
 \hline
 36
 \end{array}$$

4º. momento: MAT finalizou sua multiplicação; então, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Então aí... (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para a multiplicação de MAT). O que você descobre no problema? (Olha para MAT).

MAT – (Observa atentamente a pergunta do problema). Que... Ajuntando as camisetas e as bermudas... Dá trinta e seis tipos... (Coloca as duas mãos embaixo da cadeira e olha para a EXP).

EXP – Trinta e seis tipos... (Olha para MAT). Do que? (Aponta para a notação de MAT).

MAT – De bermuda e camiseta... (Olha para a EXP e continua com as duas mãos embaixo da cadeira).

EXP – Por que você usou o dezoito? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número dezoito que MAT utilizou na multiplicação).

MAT – É por causa que é dezoito camisetas... (Olha para o problema). E onze, é por causa das onze bermudas. (Retira as mãos debaixo da cadeira e as coloca em cima das pernas).

5º. momento: A EXP instigou MAT a refletir se já havia aprendido, na escola, outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Teria alguma outra conta que você pudesse fazer? ... Que também utilizasse os dados do problema para você encontrar a resposta? (Olha para MAT e aponta para a folha de sulfite).

MAT – (Olha para sua notação). Não sei... (Movimenta os ombros para cima e para baixo e acena negativamente com a cabeça).

EXP – Não sabe? (Olha para MAT).

MAT –(Acena negativamente com a cabeça e olha para baixo).

6º. momento: Quando MAT disse que não conhecia outro procedimento de cálculo, a EXP provocou-o a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – (Olha para MAT). Então olha só... Uma vez o dezoito... (Aponta para o número um e, em seguida, para o número dezoito). Você disse que dá dezoito. Não é? (Olha para MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – É duas vezes o dezoito? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para baixo). Duas vezes o dezoito é... (Olha para a folha de sulfite). Trinta e seis. (Coloca as duas mãos embaixo da mesa, como se estivesse contando).

EXP – E olha a tua resposta... (Aponta com a caneta preta para o número trinta e seis que MAT encontrou como resposta para a multiplicação dezoito vezes o onze). Você disse que onze vezes o dezoito dá trinta e seis.

MAT – (Apóia a cabeça com a mão esquerda, olha para sua notação e coloca a mão direita em cima da perna). Não sei. (Olha para a EXP).

EXP – E aí? (Olha para MAT).

MAT – Eu acho que dá. (Olha para sua notação e, em seguida, olha para a EXP).

EXP – Duas vezes o dezoito dá o mesmo tanto que onze vezes o dezoito? (Olha para MAT e aponta para a multiplicação que ele solucionou).

MAT – Dá! (Olha para a EXP e acena afirmativamente com a cabeça).

7º. momento: Percebendo que MAT estava com dificuldade para refletir sobre o resultado que havia encontrado, a EXP apresentou-lhe um contra-exemplo para o instigar a refletir.

EXP – Por que um aluno meu... (Olha para MAT). Ele falou... Explicou-me... Que quando a gente vai multiplicar dois números aqui... (Aponta para o número onze da multiplicação de MAT). Como esse um aqui... (Aponta para a dezena do número onze). Ele não vale um... Ele vale dez... (Olha para MAT). Por que ele está na dezena, a gente coloca um zero aqui... (Aponta para o segundo número oito que MAT colocou na unidade). E aí que começa a fazer a multiplicação. (Aponta com a ponta da caneta preta e olha para MAT).

MAT – (Enrola a ponta do cabelo com a mão esquerda e olha atentamente para a EXP e para a sua explicação). Hum! (Olha para a EXP).

EXP – O que você acha? (Olha para MAT). Que ele estava certo ou estava errado? (Olha para MAT e aponta com a ponta da caneta preta para a multiplicação que MAT solucionou).

MAT – (Olha para a EXP). Certo. (Movimenta os ombros para cima). Eu acho... (Olha para baixo e as duas mãos estão em cima dos joelhos).

8º. momento: MAT percebeu que o jeito que o aluno da EXP tinha resolvido a multiplicação estava correto; dessa forma, a EXP desafiou-o a repensar o procedimento de cálculo utilizado para solucionar o problema.

EXP – Você quer tentar fazer de novo esta conta... Ou você acha que está certo assim? (Olha para MAT).

MAT – Eu acho que está certo assim. (Olha para sua notação).

EXP – (Olha para MAT). Então, de quantas maneiras diferentes o Pedro pode se vestir? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

MAT – (Olha para a sua notação). De trinta e seis. (Olha para baixo).

EXP – De trinta e seis maneiras diferentes? (Olha para MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça).

A solução notacional e verbal utilizada por MAT e sua interpretação sobre a solução que utilizou, embora, o resultado final não esteja correto, pois não domina o algoritmo, indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em

sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis por meio do cálculo multiplicativo convencional.

Esse nível de solução se fez em situação em que se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: instigadora; orientadora; instigadora; questionadora e instigadora.

PROBLEMA 8

Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

1º. momento: MAT fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, relatou para a EXP as informações que havia lido. Em seguida, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

MAT – Hum! Os pão vem acompanhado com... É... Um tipo de queijo... Um tipo de patê... E... Um tipo de pão vem... (Enquanto responde, olha para o problema).

EXP – E aí? (Olha para MAT). Como você vai fazer para descobrir quantos tipos de diferentes de sanduíches ela pode servir? (Lê a pergunta do problema em voz alta e olha para MAT).

MAT – (Olha para o lado direito). Uma conta de mais!

2º. momento: MAT disse que iria efetuar uma adição; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que havia explicitado oralmente.

MAT – Vou fazer uma conta de mais. (Olha para a EXP, pega a caneta preta que estava em cima da mesa e “arma” o algoritmo convencional da adição: $4 + 3 + 2$. Coloca o sinal de mais e passa o traço da igualdade, coloca a caneta preta em cima da folha de sulfite e faz a adição com o auxílio dos dedos). Aqui dá nove tipos de pão. (Pega a caneta preta que estava em cima da folha de sulfite e anota o resultado nove na adição).

$$\begin{array}{r} + 4 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 9 \end{array}$$

A solução notacional e verbal de MAT indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Essa solução se limita ao cálculo aditivo, de todos os valores das variáveis, conforme sua ordem de aparecimento.

3º. momento: A EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por MAT.

EXP – Por que vai dar nove? (Olha para MAT).

MAT – (Coloca as duas mãos no peito e olha para a EXP). Ajuntando todos... Dá nove! (Olha para a EXP).

4º. momento: MAT explicou que tinha juntado todos os valores; então, a EXP solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial de duas das três variáveis envolvidas.

EXP – (Olha para MAT). Por exemplo, se a gente não juntasse os três de uma vez... (Aponta com a mão esquerda para a folha de sulfite e faz um círculo no ar). Se a gente juntasse só dois... (Olha para MAT). Juntando os tipos de pães com os tipos de queijo... (Aponta para estas informações no problema). Quantos tipos de sanduíches já dariam? (Olha para MAT).

MAT – (Apóia os dois cotovelos em cima da mesa, aproxima as duas mãos do peito e olha para o problema).

5º. momento: MAT observou as informações do problema e pareceu estar em dúvida sobre o que fazer; então, a EXP instigou-o a dar uma informação que constava no problema, verificando se de fato ele a compreendera.

EXP – Cada pão poderia combinar com quantos tipos de queijo? (Olha para MAT).

MAT – Dois. (Olha para a EXP e permanece com os cotovelos apoiados em cima da mesa, olha para o problema e logo depois para a sua notação. Pega a caneta preta que estava em cima da folha de sulfite e “arma” o algoritmo convencional da adição: $4 + 2$. Coloca o sinal de mais, passa o traço da igualdade e encontra seis, como resposta).

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

6º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ele.

EXP – Você acha que seria uma conta de mais? (Olha para MAT).

MAT – (Coloca a mão esquerda na testa e olha para sua notação). Eu acho que é! (Olha para a EXP e continua segurando a caneta preta em sua mão direita). Vai dá se... (Olha para sua notação). Seis. (Coloca a caneta preta em cima da folha de sulfite).

EXP – Seis o que? (Olha para MAT e aponta para a adição que ele acabou de fazer).

MAT – (Coloca a mão esquerda no queixo). Seis... Seis tipos de... De... (Olha para o problema). De pão... (Olha para a EXP e coloca as duas mãos em cima das pernas).

7º. momento: Para fazer com que MAT refletisse sobre a resposta encontrada, a EXP o instigou a dar uma informação que constava no problema, verificando se de fato ele a havia compreendido.

EXP – Quantos são os tipos de queijo? (Olha para MAT).

MAT – Quatro. (Olha para a EXP).

EXP – E de pães, quantos são os tipos? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para o problema). Dois. (Olha para a EXP).

EXP – (Olha para MAT). Por exemplo, um tipo de pão poderia combinar com quantos tipos de queijo? (Olha para MAT).

MAT – (Acena afirmativamente com a cabeça). Dois. (Olha para a EXP).

EXP – No total, já dariam quantos tipos diferentes de sanduíches? (Olha para MAT).

MAT – (Olha para baixo). Oito. (Olha para a EXP).

8º. momento: Após MAT combinar os tipos de pão com os tipos de queijo, a EXP instigou-o a refletir se já havia aprendido na escola algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Você já aprendeu na escola alguma conta que você teria que fazer para poder combinar, para encontrar a resposta? (Aponta para a folha de sulfite com a mão direita).

MAT – (Olha para a EXP). De vezes. (Olha para cima).

EXP – Que número? (Olha para MAT).

MAT – Dois. (Olha para a EXP). Quatro vezes dois... (Olha para a EXP e sorri).

9º. momento: MAT explicou que utilizaria uma multiplicação; então, a EXP sugeriu a ele que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que havia explicitado oralmente.

EXP – Então anota. (Aponta com a mão direita para a folha de sulfite).

MAT – (Pega a caneta preta que estava em cima da folha de sulfite e “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 4×2 , coloca o sinal de vezes e passa o traço da igualdade).

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

10º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – (Olha para MAT e aponta para sua multiplicação). Por que quatro vezes dois?

MAT – (Olha para sua notação). É por causa que eu tô juntando os quatro pão com os dois... Com os dois queijo... (Olha para a EXP).

11º. momento: Depois que MAT combinou os tipos de pão com os tipos de queijo, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – E agora você precisa juntar o que mais nesses sanduíches? (Olha para MAT).

MAT – É... (Olha para o problema). Os patê... (Olha para a EXP).

EXP – Cada tipo de patê vai poder combinar com o que? (Olha para MAT).

MAT – Três patê vai dar com um sanduíche. (Movimenta a cabeça para o lado esquerdo). Mais três patê vai dar com outro sanduíche... (Movimenta novamente a cabeça para o lado esquerdo). Daí já vai dar seis. (Olha para a EXP). Mais... (Fica em silêncio e olha para a EXP).

EXP – Juntando só os pães com os queijos... (Aponta para a multiplicação efetuada por MAT). Já deram quantos tipos de sanduíches? (Olha para MAT).

MAT – Oito. (Olha para o resultado da sua multiplicação).

12º. momento: Percebendo que MAT havia identificado a terceira variável que deveria ser combinada e seu valor, a EXP provocou-o à busca de uma solução para o problema.

EXP – Três! E o que você vai ter que fazer para descobrir quanto vai dar? (Olha para MAT).

MAT – Vezes! (Olha para a EXP, pega a caneta preta que estava em cima da folha de sulfite e “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 8×3).

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline 24 \end{array}$$

13º. momento: Quando MAT finalizou sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução utilizada.

EXP – Por que vinte e quatro? (Olha para MAT).

MAT – (Coloca as duas mãos embaixo da cadeira). Por que... O oito vezes três dá vinte e quatro. (Olha para a EXP e, em seguida, olha para baixo).

EXP – E de onde você tirou o oito? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número oito que MAT utilizou na multiplicação).

MAT – É que... Tira... Tira daqui... (Aponta com o dedo indicador da mão esquerda para a multiplicação 4×2 que efetuou). Dos quatro tipos de pães e dos dois tipos de queijos. (Olha para a EXP).

EXP – (Lê em voz alta a pergunta do problema). Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê? (Olha para MAT).

MAT – (Movimenta-se na cadeira, balançando para um lado e para o outro). Vinte e quatro. (Olha para suas notações).

24 TIPOS DE QUEIJOS, PÃES E PATÊ

EXP – E você então consegue me explicar por que deu vinte e quatro? (Olha para MAT).

MAT – (Coloca a caneta preta em cima da folha de sulfite, apóia a mão esquerda em cima da perna, em seguida, coloca as duas mãos embaixo da cadeira). É por causa que... Juntando os... É... Os dois tipos de queijo... Os três tipos de patê... E os quatro tipos de pães... Daí vai... Ajuntando tudo na conta de vezes... Vai dar vinte e quatro... (Movimenta-se na cadeira balançando-se para um lado e para o outro).

MAT iniciou a solução do problema com solução de nível I, subnível IB, mas ao final as soluções notacionais e verbais de MAT e sua interpretação sobre as soluções utilizadas indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de

combinação entre os valores das variáveis, por meio de cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: instigadora; orientadora; questionadora; reorientadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora e questionadora.

QUADRO 8: AS SOLUÇÕES DE MAT AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO

MAT	PROBLEMA 5			PROBLEMA 6			PROBLEMA 7			PROBLEMA 8		
	TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV	MAT			MAT			MAT				MAT	
III	III D											
	III C											
	III B											
	III A											
II	II C											
	II B											
	II A											
I	I B									MAT		
	I A											

Como se vê no quadro acima, as soluções de MAT aos problemas 5, 6 e 7 indicam solução de nível IV. Durante a solução desses problemas, alternaram-se as formas de intervenção da experimentadora.

No problema 8, MAT partiu de solução de nível menos adiantada para solução de nível IV. No decorrer da solução desse problema, alternaram-se as diferentes formas de intervenção da experimentadora.

2ª. SESSÃO – EDU – (9; 7)

PROBLEMA 5

Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que poderiam ser utilizados para o registro da solução encontrada pelo sujeito e lembrou-o dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar os problemas.

2º. momento: A pedido de EDU, a EXP leu o problema em voz alta. Quando a EXP finalizou a leitura, EDU iniciou uma solução notacional.

EDU – (Pega a canetinha preta que estava em cima da mesa, olha para o lado, coça a orelha com a mão direita e fica em silêncio, passa a mão em cima da folha de sulfite e ameaça escrever algo, mas não escreve. Lê novamente silenciosamente o problema. Com a canetinha preta inicia o desenho de uma mochila, coloca a canetinha preta em cima da mesa e pega a canetinha vermelha para complementar o desenho).

Essa solução notacional de EDU indica solução de nível II, subnível IIC: dos casos favoritos combinando duas variáveis com uma. Essa combinação foi obtida por meio de registro pictórico, em que para cada valor de uma variável correspondem dois valores da outra variável.

3º. momento: A EXP provocou EDU a refletir sobre parte de sua solução notacional. Em seguida, indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendia.

EXP – Cada mochila só pode ser de quantas cores? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para as canetinhas, olha para o problema e fica em silêncio). De uma.

4º. momento: EDU retomou as informações do problema e verificou que cada mochila podia ser de apenas uma cor de cada vez; em seguida, produziu a seguinte solução notacional.



5º. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP solicitou-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Tá, então o que você fez? (Aponta para a notação de EDU).

EDU – Eu fiz um desenho e escrevi. (Aponta para sua notação e olha para a EXP sorrindo)

EXP – Você fez um desenho e escreveu o quê? (Olha para EDU).

EDU – Fiz o desenho e escrevi o tamanho. (Olha para a EXP e sorri).

6º. momento: EDU explicou que se utilizara do desenho e da escrita alfabética para solucionar o problema; então, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema e, em seguida, leu a questão do problema em voz alta.

EXP – Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria, quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Lê novamente a pergunta do problema em voz alta).

EDU – Dez. (Responde sorrindo e olha para a EXP).

7º. momento: Depois que EDU respondeu à questão do problema, a EXP provocou-o a refletir sobre sua solução notacional e pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução utilizada.

EXP – Ah. É dez? Você combinou o que para desenhar aqui... (Aponta para a notação de EDU). (Circula com o dedo indicador da mão direita a notação de EDU).

EDU – Os tamanhos e as... Cores. (Complementa a frase antes da EXP).

EXP – Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar? (Olha para EDU).

EDU – (Pega a caneta preta que estava em cima da mesa e no final da folha escreve: 10 tipos de mochila, quando finaliza a escrita olha para a EXP).



10 tipos de mochilas

EXP – Por que dão dez tipos que você descobriu desenhando? (Olha para EDU e aponta para sua notação).

EDU – Eu tô desenhando... Eu desenhei cinco tipos de cores para a pequena... (Aponta para as cinco mochilas pequenas que desenhou). E cinco cores da grande. (Aponta para as cinco mochilas grandes que desenhou).

EXP – E juntando tudo, os tamanhos e a cores, deram quantos tipos diferentes? (Olha para EDU).

EDU – Dez. (Olha para a EXP e sorri).

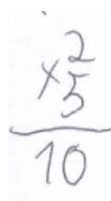
8º. momento: Na seqüência, a EXP instigou-o a refletir se já tinha aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Teria alguma conta que você pudesse fazer para representar esse resultado? (Aponta para a folha de sulfite).

EDU – (Olha para o lado, pára, fica em silêncio, olha para a EXP). Duas vezes o cinco.

EXP – Duas vezes o cinco! Então anota. (Olha para EDU e aponta para a folha de sulfite).

EDU – (Pega a caneta preta que estava em cima da desenha escreve o número dois, em seguida, marca com X. Logo depois, “arma” o algoritmo convencional da multiplicação: 2 x 5 e passa o traço da igualdade e coloca o resultado dez, quando finaliza, olha para a EXP).



$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 5 \\ \hline 10 \end{array}$$

9º. momento: A EXP pediu a EDU que explicitasse sua interpretação sobre a solução utilizada.

EXP – Por que seria duas vezes o cinco? (Aponta para a multiplicação efetuada por EDU).

EDU – Porque tem dois tipos de tamanhos e cinco cores. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então para juntar tudo faria uma conta de vezes?

EDU – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EDU iniciou a solução do problema com solução de nível II, subnível IIC, mas ao final a solução notacional e verbal utilizada por EDU e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer por meio de representação pictórica, quer por meio de cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: orientadora; reorientadora; orientadora; instigadora; questionadora; orientadora; instigadora; questionadora; instigadora e questionadora.

PROBLEMA 6

Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

1º. momento: EDU fez a leitura silenciosa do problema; quando terminou a leitura, olhou para a EXP e ficou em silêncio. Nesse momento, a EXP interveio e provocou-o a relatar as informações lidas no problema.

EXP – Deixa eu só te perguntar: o que você leu aqui no problema? (Aponta para o problema).

EDU – (Olha para as informações do problema). Tem trinta tipos de sabores e três tipos tamanhos. (Movimenta a folha de sulfite em cima da mesa e olha para a EXP sorrindo).

2º. momento: Após EDU identificar as duas variáveis necessárias à solução do problema, a EXP provocou-o à busca de uma solução para ele.

EXP – E será... Combinando tudo isso, quantos tipos diferentes de pizza vão dar? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para o problema e fica em silêncio).

EXP – O que você acha? (Olha para EDU).

EDU – (Fica em silêncio, coça o olho esquerdo com a mão esquerda, olha para os lados e fica em silêncio).

3º. momento: Percebendo que EDU estava pensando em silêncio, a EXP estimulou-o a explicitar o que estava pensando.

EXP – O que você está pensando, EDU? (Olha para EDU e sorri).

EDU – (Olha para o problema e faz novamente a leitura silenciosa do problema. As duas mãos estão em cima da folha de sulfite, uma sobre a outra. Fica em silêncio). Que tem que fazer uma conta. (Olha para a EXP).

4º. momento: Como EDU disse que tinha que fazer uma conta, a EXP instigou-o a refletir se já havia aprendido, na escola, algum procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar a resultado.

EXP – Você já aprendeu na escola uma conta que você acha que poderia fazer para descobrir o resultado? (Olha para EDU).

EDU – Não sei. Sei que tem que fazer uma conta. (Olha para a EXP e sorri).

5º. momento: Embora EDU tivesse dito que não sabia o que fazer, a EXP percebeu que ele estava dizendo algo bem baixinho; então, estimulou-o a explicitar o que estava pensando.

EXP – O que você está pensando aí, você está bem quietinho, falando, olhando para o problema. O que você está pensando aí? Me conta para eu entender o que você está pensando. (Olha para EDU e sorri).

EDU – Estou pensando que tem três em trinta. (Olha para a EXP).

EXP – Três em trinta? (Olha para EDU).

EDU – É trinta divididos por três. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Por que você está tentando fazer trinta divididos por três? (Olha para EDU).

EDU – Porque aqui tem três... (Aponta para a informação dos tamanhos de pizza no problema). E daí se eu dividir por três daí vai ficar dez. (Aponta para a folha de sulfite).

EXP – Dez. (Olha para EDU).

EDU – Aí, junto esses três vai ficar trinta. (Responde movimentando as mãos em cima da folha de sulfite e ajeitando-se na cadeira).

Essa solução de EDU encontra-se no nível III, subnível IIIB: as aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão. Essa solução foi obtida mediante diferentes combinações e complementações de cálculos de divisão e de adição de alguns dos valores das variáveis envolvidas, na busca de certo número de combinações.

6º. momento: Na seqüência, a EXP pediu a EDU que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações do problema; em seguida, leu o problema em voz alta.

EXP – Tá! Mas vamos pensar o que está falando lá. (Aponta para o problema). Está falando que... (Faz novamente a leitura do problema em voz alta, apontando com a caneta preta). “Na pizzaria tem trinta sabores e três tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em seis fatias, a pizza média pode ser cortada em oito fatias e a pizza grande pode ser cortada em doze fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos das pizzas podem ser combinados?” (Olha para EDU). Combinando os sabores e os tamanhos, quantos tipos de pizza diferentes vão dar para vender nesta pizzaria? (Olha para EDU).

EDU – (Acompanha a leitura do problema atentamente, quando a EXP finaliza a leitura do problema olha para ela e sorri).

EXP – O que você acha? (Olha para EDU).

EDU – (Faz novamente a leitura silenciosa do problema, coloca a mão na frente do rosto, olha para os lados, movimenta-se na cadeira, olha para a EXP e fica em silêncio).

7º. momento: Percebendo que EDU estava em dúvida sobre o que fazer, a EXP indagou dele as informações que constavam no problema, para verificar se de fato ele as compreendia.

EXP – Vamos supor que você fosse lá pedir uma pizza nesta pizzaria. (Olha para EDU e sorri). De quantos tamanhos poderia ser? (Olha para EDU).

EDU – (Acena afirmativamente com a cabeça e sorri). De três. (Olha para a EXP).

EXP – É de quantos sabores? (Olha para EDU).

EDU – De trinta. É... Trinta. (Olha para a EXP).

EXP – Se você escolhesse o tamanho pequeno... (Aponta para a palavra pequeno, que está escrita na folha de sulfite). Quantos sabores teriam no tamanho pequeno? (Olha para EDU e aponta com a mão esquerda para a folha de sulfite).

EDU – (Fica em silêncio). Trinta. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Se você escolher o tamanho médio, teriam quantos sabores? (Olha para EDU e aponta para o problema).

EDU – Trinta. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Se você escolher o tamanho grande? (Aponta para o problema).

EDU – Trinta. (Olha para a EXP e sorri).

8º. momento: Após EDU identificar que cada um dos tamanhos de pizza poderia combinar com os trinta sabores, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E juntando os tamanhos com os sabores, quantos tipos diferentes você vai ter? (Aponta para a pergunta do problema).

EDU – (Fica em silêncio e busca a informação no problema). Tem trinta sabores nas três pizzas? (Aponta para esta informação no problema e olha para a EXP). Então... Eu acho...

EXP – O que você acha? (Olha para EDU e sorri).

EDU – Eu estou pensando que na pequena tem trinta sabores, juntando com as outras duas. (Aponta para estas informações no problema).

9º. momento: EDU explicou como estava pensando; então, a EXP sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que tinha explicitado oralmente.

EXP – Então tenta fazer para ver. (Olha para EDU e aponta para a folha de sulfite).

EDU – (Segura a caneta preta com a mão direita, e a movimenta em cima da folha de sulfite ameaçando que vai escrever e fica em silêncio). Tem que juntar os trinta sabores de cada tamanho. (Olha para a EXP).

EXP – Para saber quanto vai dar os tamanhos e os sabores juntos? (Aponta para estas informações no problema). Você acha que tem que juntar tudo? (Olha para EDU).

EDU – (Acena afirmativamente com a cabeça).

10º. momento: Quando EDU concluiu sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que utilizara.

EXP – E aí, EDU, o que você fez? (Aponta para as duas adições efetuadas por EDU).

EDU – Eu juntei... Juntei os três tamanhos de pizza... Juntei com os trinta sabores. (Aponta para sua notação e, em seguida, para estas informações que estão escritas no problema).

EXP – E aí, quanto deu? (Olha para EDU e aponta para a folha de sulfite).

EDU – Noventa. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então o que é esse noventa? O que esse noventa representa? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o resultado da segunda adição efetuada por EDU).

EDU – (Olha para suas notações, movimenta-se na cadeira). Noventa sabores. (Olha para a EXP e sorri).

90 tipo de tamanho e sabores

11º. momento: A EXP instigou EDU a refletir se já tinha aprendido, na escola, algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – Então aqui você fez uma conta de mais. (Aponta para a segunda adição efetuada por EDU com o dedo indicador da mão direita). Se você não tivesse feito uma conta de mais, que é uma adição, teria alguma outra operação que você poderia ter feito que representasse isso que você fez aqui? (Aponta para a segunda adição efetuada por EDU com o dedo indicador da mão direita e olha para EDU).

EDU – (Olha para sua notação e sorrindo olha para a EXP). Três vezes trinta. (Ajeita-se na cadeira).

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 30 \\ \hline 90 \end{array}$$

12º. momento: Quando EDU concluiu sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução utilizada.

EXP - O que o três representa? (Olha para EDU e aponta para a o número três que está na multiplicação efetuada por EDU).

EDU – Os tamanhos. (Olha para a EXP).

EXP – Os tamanhos. E o trinta? (Olha para EDU e aponta para a o número trinta que está na multiplicação efetuada por EDU).

EDU – Os sabores. (Olha para a EXP).

EXP – Então juntando os sabores com os tamanhos, quantos tipos diferentes... (A EXP não conclui a pergunta).

EDU – Noventa. (EDU já define a resposta e olha para a EXP sorrindo).

De início, solução de nível III, subnível IIIB, mas ao final as soluções notacionais e verbais utilizadas por EDU e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por meio de cálculo aditivo convencional, por meio de cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora e questionadora.

PROBLEMA 7

Pedro tem 18 camisas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

1º. momento: EDU fez duas vezes a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, a EXP provocou-o a relatar as informações lidas.

EXP – O que está escrito no problema? (Olha para EDU).

EDU – (Movimenta a caneta preta na mão direita e apóia a folha de sulfite com a mão esquerda). É... Que tem... Que Pedro tem dezoito tipos de camisas e onze tipos de bermudas... De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (Lê a pergunta do problema em voz alta).

2º. momento: Percebendo que EDU havia identificado as duas variáveis necessárias à solução do problema, a EXP provocou-o à busca de uma solução; em seguida, leu a questão do problema em voz alta.

EXP – E aí o que você acha? (Olha para EDU e sorri). De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a pergunta do problema).

EDU – (Produz uma solução notacional e olha para a EXP).



3º. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP provocou-o a refletir sobre sua solução.

EXP – O que você está tentando representar? (Aponta para a notação feita por EDU).

EDU – Aqui a camiseta... (Aponta com a caneta preta para a camiseta que desenhou). E aqui a bermuda. (Aponta com a caneta preta para a bermuda que desenhou).

EXP – E o que você vai fazer? (Olha para EDU).

EDU – (Com a canetinha preta na mão direita). Vou desenhar. (Movimenta a canetinha preta na mão e olha para a EXP).

EXP – Desenhar o quê? (Olha para EDU).

EDU – As camisetas e as bermudas. (Movimenta a canetinha preta na mão e olha para a EXP).

4º. momento: EDU respondeu que iria utilizar o desenho; então, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, verificando se de fato ele a compreendera.

EXP – Tá, por exemplo, a camiseta... (Aponta com a caneta preta para a camiseta que EDU desenhou). Que cor é essa?

EDU – Cor-de-rosa. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – A camiseta cor-de-rosa... (Aponta com a caneta preta para a camiseta rosa que EDU desenhou). Poderia combinar com quantas bermudas? (Aponta com a caneta preta para a bermuda que EDU desenhou).

EDU – Onze. (Olha para EXP sorri e ajeita as canetinhas que estão em cima da mesa com a mão direita).

EXP – Com onze! (Olha para EDU). E uma outra cor de camiseta, por exemplo? (Aponta para o problema).

EDU – Verde. (Olha para a EXP).

EXP – Verde. Poderia combinar com quantas bermudas? (Olha para EDU).

EDU – Onze. (Olha para a EXP e sorri).

5º. momento: Verificando que EDU percebera que cada uma das dezoito cores de camiseta poderia combinar com as onze bermudas, a EXP desafiou-o a buscar uma solução mais adiantada, diante da utilização de uma mesma estratégia menos adiantada para a solução do problema.

EXP – E como você vai fazer para descobrir o resultado total disso? (Olha para EDU e aponta para as informações do problema).

EDU – (Fica em silêncio, organiza as canetinhas coloridas com a mão esquerda, olha para sua notação, pega a caneta preta que estava em cima da mesa, lê novamente o problema, olha para sua notação).

EXP – O que você está pensando EDU? (Olha para EDU).

EDU – (Está pensando e parece que faz uma conta mentalmente).

EXP – Em que conta você está pensando? (Olha para EDU).

EDU – Eu tô tentando pegar onze, mais onze. (Aponta com a caneta preta para a sua notação).

6º. momento: A EXP pediu a EDU que efetuasse uma adição; então, sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados explicitados oralmente.

8º. momento: A EXP apresentou um contra-exemplo para instigar EDU à reflexão.

EXP – E se tivessem aqui duas camisetas e onze bermudas, o que você ia fazer daí? (Aponta para o problema). E se tivessem aqui duas camisetas e onze bermudas, o que você ia fazer?

EDU – Eu ia colocar duas vezes o onze. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Duas vezes o onze. Muito bem, então você colocou aqui dezoito vezes onze... (Aponta para a adição de EDU e, em seguida, para o problema).

EDU – Hum, hum! (Acena afirmativamente com a cabeça). Porque ele tinha dezoito camisetas. (Olha para EDU).

9º. momento: A EXP desafiou EDU a responder à questão do problema.

EXP – Então tá bom! De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (Olha para EDU).

EDU – Cento e noventa e oito. (Com a caneta preta que estava em sua mão escreve na folha de sulfite: 198 tipos diferentes, quando finaliza, olha para a EXP).

198 tipos diferentes

10º. momento: Na seqüência, a EXP provocou EDU a refletir se já tinha aprendido, na escola, algum outro procedimento de cálculo que pudesse levá-lo a encontrar o resultado.

EXP – E agora vou te perguntar: teria uma outra conta, ao invés da conta de adição... (Aponta para a adição efetuada por EDU). Que você fez, que você também pudesse encontrar esse resultado? Que representasse o que o problema está pedindo para você? (Aponta para esta informação no problema).

EDU – (Acena negativamente com a cabeça). Não. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Será que isso te lembra alguma operação? (Olha para EDU e sorri).

EDU – Não. (Acena negativamente com a cabeça).

Nesse problema a solução notacional e verbal de EDU e sua interpretação sobre as soluções que utilizou indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis por meio de cálculo aditivo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Esse nível de solução apareceu quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: instigadora; orientadora; instigadora; questionadora; instigadora; orientadora; questionadora; instigadora; orientadora e questionadora.

PROBLEMA 8

Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

1º. momento: EDU fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, foi estimulado pela EXP a explicitar o que estava pensando. Em seguida, a EXP provocou-o a relatar as informações lidas no problema.

EXP – E daí, EDU, o que você está pensando? (Olha para EDU e sorri).

EDU – Estou pensando numa conta. (Sorrindo olha para a EXP e bate com a caneta preta em cima da folha de sulfite).

EXP – Que conta? (Olha para EDU).

EDU – (Movimenta folha de sulfite em cima da mesa, apóia a folha de sulfite com a mão esquerda). Ainda não sei. (Sorrindo olha para a EXP).

EXP – O que está perguntando neste problema? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para a pergunta do problema).

EDU – (Faz novamente a leitura silenciosa do problema). Que ele comprou dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. (Responde lendo as informações no problema).

2º. momento: Após EDU identificar as variáveis necessárias à solução do problema, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – E aí? Quantos tipos diferentes de sanduíche vão poder ser servidos? (Olha para EDU e sorri).

EDU – (Fica em silêncio olhando para o problema, faz novamente a leitura silenciosa do problema apontando com a caneta, movimenta a caneta na mão direita, encosta a caneta preta no queixo, sempre olhando para as informações do problema, passa a mão esquerda no rosto, olha para cima e, em seguida, olha para a EXP).

EXP – O que você está pensando, EDU? (Olha para EDU).

EDU – Eu... Eu estou pensando... Estou pensando numa conta ainda. (Sorrindo movimenta a caneta preta na mão direita e olha para a EXP).

EXP – Que conta? (Olha para EDU).

EDU – Não sei. (Movimenta a cabeça para os lados). Estou fazendo de dividir. (Movimenta a mão esquerda em cima da folha de sulfite e olha para a EXP sorrindo). Eu acho... Não sei...

EXP – Por que de dividir? (Olha para EDU).

EDU – Acho que... Acho que eu não sei... (Olha para a EXP e sorri).

3º. momento: EDU respondeu para a EXP que estava pensando em efetuar uma divisão; então, a EXP sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Pode ir colocando no papel o que você está pensando para você não esquecer e para que eu possa entender o que você está pensando. (Aponta para a folha de sulfite).

EDU – (Movimenta a caneta preta que está na sua mão direita, olha para o problema e fica em silêncio).

4º. momento: Percebendo que EDU estava em dúvida sobre que operação utilizar para solucionar o problema, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera. Em seguida, pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução utilizada.

EXP – Tem dois tipos de queijo e quatro tipos de pães... (Aponta para estas informações no problema). Combinando só os queijos com os pães, quantos tipos já de sanduíches dão para ser feito? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para os lados, levanta as duas mãos e apóia os cotovelos em cima da mesa, olha para cima, bate com as mãos em cima da folha de sulfite). Quatro. (Olha para a EXP sorrindo).

EXP – Por que quatro? (Olha para EDU).

EDU – (Sorris, fica em silêncio, coloca a caneta preta próxima ao queixo, olha para o problema e fica em silêncio).

EXP – Como que você fez para encontrar quatro, como resposta? (Olha para EDU e sorri).

EDU – É que eu... É que eu pego os dois tipos de queijo e divido por quatro. (Olha para a EXP).

EXP – Por que divide por quatro? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para o problema e fica em silêncio). Tem quatro tipos de pães. (Olha para a EXP e aponta para esta informação no problema). E dois tipos de queijo. (Olha para a EXP e aponta para esta informação no problema).

Essa solução verbal de EDU e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da divisão de valores. Essa solução se limita à divisão (mental) de parte dos valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

5º. momento: A EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por EDU.

EXP – Dois tipos de queijo... (Olha para EDU). Não duas fatias de queijo. (Olha para EDU).

EDU – (Fica em silêncio e olha para o problema).

EXP – Tem duas fatias ou dois tipos? (Olha para EDU).

EDU – Dois tipos. (Olha para a EXP sorrindo).

6º. momento: Na seqüência, a EXP indagou de EDU uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera. Em seguida, solicitou a ele que refletisse sobre as possibilidades de combinação parcial de duas das três variáveis.

EXP – Por exemplo, que queijo você conhece? (Olha para EDU).

EDU – (Olha para a EXP sorrindo, bate com a caneta preta em cima da folha de sulfite, abaixa a cabeça, movimenta a caneta preta na mão, ameaça escrever algo, ajeita-se na cadeira e fica em silêncio). Mussarela... Branco... Esses. (Olha para a EXP).

EXP – Então, dois tipos de queijo: queijo mussarela e queijo branco. O queijo mussarela poderia combinar com quantos tipos de pães? (Olha para EDU).

EDU – (Passa a caneta preta para a mão esquerda e movimenta a folha de sulfite em cima da mesa). Quatro. (Olha para a EXP).

EXP – E o queijo branco? (Olha para EDU).

EDU – Com quatro também. (Olha para a EXP sorrindo e acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Quantos tipos de sanduíches já dariam aí? (Olha para EDU).

EDU – Oito. (Sorrindo olha para a EXP).

7º. momento: Após EDU identificar que cada um dos tipos de queijo poderia combinar com os tipos de pão, a EXP sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Então, você já viu que juntando o pão com o queijo deu? (Olha para EDU).

EDU – Oito. (Sorri e olha para a EXP).

EXP – Você poderia representar isso que você pensou? (Olha para EDU).

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

8º. momento: Depois que EDU combinou duas das três variáveis, a EXP indagou dele uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ele a compreendera.

EXP – Então, você descobriu que juntando os pães com os queijos você já conseguiu formar oito sanduíches diferentes. (Aponta para a notação de EDU). E agora, o que falta ser combinado? (Aponta para o problema).

EDU – O patê... Com estes tipos de pães. (Olha para a EXP e aponta para o número oito que obteve como resultado da adição).

EXP – Patê. Então, cada um desses oito sanduíches pode ser combinado com quantos tipos de patê? (Aponta para o número oito encontrado para EDU na resposta da adição).

EDU – (Busca a informação no problema). Três. (Olha para a EXP).

9º. momento: Quando EDU identificou a variável que estava faltando para ser combinada e o seu valor, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema.

EXP – Como você pode representar isso? (Olha para EDU e aponta para a folha de sulfite com a mão direita).

EDU – (Olha para a EXP e sorri). Três vezes oito. (com a caneta preta que está na sua mão “arma” o algoritmo convencional da adição bem no canto direito da folha de sulfite: 3×8 , passa o traço da igualdade e conta de oito em oito para descobrir a resposta e anota embaixo do traço da igualdade o número vinte e quatro). Vinte e quatro. (Olha para a EXP e sorri).

$$\begin{array}{r} \times 3 \\ 8 \\ \hline 24 \end{array}$$

10º. momento: Quando EDU finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-o a responder à questão do problema e, em seguida, pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução utilizada.

EXP – Por que vai dar vinte e quatro? (Olha para EDU).

EDU – Porque tem três tipos de patês, então três tipos vezes oito dá vinte e quatro. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então, o que o três representa? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número três que EDU escreveu).

EDU – O patê. (Olha para a EXP).

EXP – E o oito? (Aponta para o número oito que EDU escreveu).

EDU – Pão com queijo. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Então anota quantos tipos diferentes de sanduíche podem ser servidos.

EDU – (Com a caneta preta escreve: 24 tipos de sanduíches, olha para suas notações e, em seguida, olha para a EXP).

24 tipos de sanduíches

De início, solução de nível I, subnível IB, mas ao final as soluções notacionais e verbais utilizadas por EDU e sua interpretação sobre as soluções que utilizou

indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer por cálculo aditivo e multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: instigadora; orientadora; questionadora; reorientadora; questionadora; instigadora; orientadora; instigadora e questionadora.

QUADRO 9: AS SOLUÇÕES DE EDU AOS PROBLEMAS DA 2ª. SESSÃO

EDU		PROBLEMA 5			PROBLEMA 6			PROBLEMA 7			PROBLEMA 8		
		TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS			TENTATIVAS		
NÍVEIS		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV			EDU			EDU		EDU				EDU	
III	III D												
	III C												
	III B				EDU								
	III A												
II	II C	EDU											
	II B												
	II A												
I	I B										EDU		
	I A												

Como se vê no quadro acima, na solução dos problemas 5, 6 e 8, EDU sempre partiu de solução de nível menos adiantado e avançou para solução de nível IV. No problema 7, EDU apresentou na primeira tentativa solução de nível IV.

Na solução de todos os quatro problemas, alternaram-se três formas de intervenção da experimentadora: orientadora, questionadora e instigadora, apenas durante a solução do problema 5, apareceu a forma de intervenção reorientadora.

2ª. SESSÃO – BAR – (9; 1)

PROBLEMA 5

Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

1º. momento: A EXP iniciou a atividade de solução de problema com sua intervenção: apresentou e explicou a atividade que seria desenvolvida, entregou os materiais que podiam ser utilizados para o registro da solução encontrada e, lembrou-a dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar os problemas.

2º. momento: BAR leu o problema em voz alta e, quando finalizou a leitura, a EXP provocou-a a relatar as informações lidas no problema.

EXP – O que você acha? (Olha para BAR). O que está dizendo aí no problema? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o problema).

BAR – (Lê o problema para encontrar a resposta). Que ela quer... Ela quer comprar uma mochila. (Olha para a EXP). Nem muito grande... Nem muito pequena. (Movimenta a cabeça para os lados, olha para a EXP, sorri e novamente coloca as duas mãos em cima da mesa, uma sobre a outra).

3º. momento: A EXP pediu a BAR que verificasse se sua resposta estava de acordo com as informações do problema.

EXP – Está dizendo que não é nem grande, nem pequena? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente e, em seguida, negativamente com a cabeça).

4º. momento: Percebendo que BAR estava em dúvida sobre o que fazer, a EXP indagou dela uma informação que constava no problema, para verificar se de fato ela a compreendera.

EXP – Onde tem essas mochilas para vender? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema). Na papelaria. (Olha para a EXP).

EXP – Na papelaria! E que tamanhos podem ser essa mochila que ela vai comprar? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o problema e olha para BAR).

BAR – Pode ser de tamanho pequeno, grande. (Olha para o problema e movimenta as mãos que estão em cima da mesa esfregando-as uma na outra).

EXP – Então quantos tamanhos diferentes têm?(Olha para BAR).

BAR – Dois. (Olha para o problema).

EXP – Dois! E cores? Quantas têm? (Olha para BAR).

BAR – Quantas? (Olha para o problema, localiza onde estão escritas as cores e, com o auxílio do dedo indicador da mão direita conta uma a uma). Cinco. (Olha para a EXP).

5º. momento: Após BAR identificar as duas variáveis necessárias à solução do problema e seus respectivos valores, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema. Em seguida, leu a questão do problema em voz alta.

EXP – Cinco! Então a pergunta lá! (Aponta para a pergunta do problema e a lê em voz alta). Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar combinando uma cor e um tamanho? Quantos tipos de mochila diferentes têm que ela pode escolher? (Olha para BAR).

BAR – (Enquanto a EXP lê a pergunta do problema acompanha atentamente com olhos. Quando a EXP a questiona, olha atentamente). Ela pode escolher os dois. (Olha para o problema e, em seguida, olha para a EXP). Pequena e grande. (Olha novamente para a EXP).

Essa solução verbal de BAR indica solução de nível I, subnível IA: da escolha de variáveis. Sua resposta contém escolhas relativas aos valores de uma variável, sem qualquer combinação entre as variáveis.

6º. momento: Na seqüência, a EXP indagou de BAR algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ela as compreendera.

EXP – Quantas são as cores das mochilas? (Olha para BAR).

BAR – Cinco. (Olha para a EXP).

EXP – E quantos são os tamanhos? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema). Dois. (Olha para a EXP).

EXP – Por exemplo, a mochila pequena... (Aponta para a palavra pequena que está escrita no problema). Pode ser de que cor? (Olha para BAR).

BAR – (Ainda com as duas mãos em cima da mesa, movimenta os dedos esfregando-os uns nos outros e olha para as informações do problema). Dá para ser azul. (Olha para a EXP). Podem ser... Pode ser verde, vermelha, amarela e preta... (Olha para a EXP).

EXP – Só tem pequena? (Olha para BAR).

BAR – Não... Tem a grande! (Olha para a EXP).

EXP – E a grande, pode ser de quais cores? (Aponta para o problema).

BAR – (Olha para as informações do problema). Pode ser verde, azul, vermelha, amarela e preta... (Olha para a EXP e mexe no cabelo com a mão esquerda).

7º. momento: BAR retomou as informações do problema, identificando as variáveis e os seus respectivos valores; então, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema, provocando-a, em seguida, à busca de uma solução para o problema.

EXP – Então, juntando tudo, quantos tipos diferentes de mochilas vão ter, será? (Olha para BAR).

BAR – (Lê novamente o problema e fica em silêncio).

EXP – Como você pode fazer para descobrir? (Olha para BAR).

BAR – (Permanece em silêncio lendo o problema e apoiando a cabeça com a mão esquerda). Dá para fazer conta? (Olha para a EXP).

8º. momento: BAR demonstrou estar em dúvida sobre a solução notacional que poderia utilizar; então, a EXP lembrou-a dos materiais e da diversidade de soluções notacionais que podia utilizar para solucionar o problema.

BAR – (Com a caneta preta que está na sua mão direita desenha uma mochila, quando finaliza o desenho olha para o problema). Fiz uma já! (Olha para a EXP).

EXP – O que você desenhou? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – É pequena... A mochila pequena. (Olha para sua notação).

EXP – E de quais cores ela poderia ser? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – Poderia ser verde... (Busca as informações do problema). Poderia ser amarela. (Aponta para a sua notação). Vermelha... Azul. (Olha para A EXP). Ou preta. (Olha para A EXP).

9º. momento: A EXP sugeriu a BAR que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que explicitara oralmente.

EXP – Então não seria bom você anotar isso que você me explicou? (Aponta para a folha de sulfite).

BAR – (Com a caneta preta que está na sua mão escreve o numero cinco ao lado da mochila que desenhou). Cinco tamanhos, cinco cores. (Olha para a EXP).

EXP – Cores ou tamanhos? (Olha para BAR). Que tamanho é a mochila? (Olha para BAR).

BAR – Pequena. (Olha para a sua notação).

EXP – Então a mochila pequena poderia ser do que? De cinco o quê? Tamanho ou cores? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema). Cores. (Olha para a EXP).

EXP – Então anota. (Aponta para a folha de sulfite).

BAR – Cinco cores... (Olha para sua notação e com a caneta preta que está em sua mão escreve a palavra cores ao lado do número cinco). Pronto! (Olha para a EXP). Agora, tem a grande. (Olha para a EXP).

EXP – E a mochila grande? (Olha para BAR).

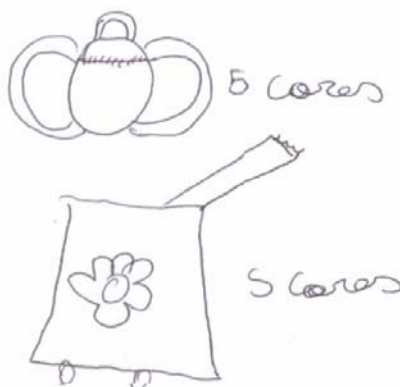
BAR – Também poderia ter cinco cores. (Olha para a EXP e coloca o dedo mínimo da mão esquerda na boca).

EXP – Rum, rum. (Acena afirmativamente com a cabeça).

BAR – (Com a caneta preta que está em sua mão desenha uma mochila diferente embaixo da outra mochila que havia desenhado). Pronto! (Quando finaliza o desenho olha para sua notação). Pronto! (Olha para a EXP).

EXP – E a mochila grande, de quantas cores poderia ser? (Aponta para a mochila que BAR desenhou).

BAR – Cinco. (Com a caneta preta escreve o número cinco ao lado da mochila que desenhou escreve a palavra cores ao lado).



10º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – Quantos tipos diferentes de mochila têm na papelaria para ela escolher? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para as informações do problema, fica em silêncio, e seguida, com os dedos da mão direita, apoiando um a um em cima da mesa conta as mochilas e as cores). Juntando as cores e as mochilas? (Olha para a EXP).

EXP – O que você acha? (Olha para BAR).

BAR – (Com os dedos da mão esquerda faz a contagem). Um... (Aponta para a mochila com a caneta preta). Dois, três, quatro, cinco, seis... (Aponta para o número cinco que escreveu ao lado da mochila pequena e conta nos dedos). Sete... (Aponta para a mochila grande que desenhou). Oito, nove, dez, onze, doze... (Aponta para o número cinco que escreveu ao lado da mochila grande e conta nos dedos). Ficaria doze. (Olha para a EXP).

As soluções notacional e verbal de BAR indicam solução de nível I, subnível IB: da adição, de valores. Essa solução se limita ao cálculo aditivo, de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

11º. momento: Na seqüência, a EXP provocou BAR a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – Então a mochila pequena de quantos tipos ela poderia ser?

BAR – Cinco.

EXP – Então, a mochila pequena poderia ser de quantas cores? (Olha para BAR).

BAR – Cinco. (Olha para a EXP).

EXP – Cinco! E a mochila grande poderia ser de quantas cores? (Olha para BAR).

BAR – Cinco. (Olha para a EXP).

EXP – Então juntando os tamanhos e as cores... (Aponta para a notação de BAR). Quantos jeitos diferentes ela poderia escolher? (Olha para BAR).

BAR – De doze. (Olha para a EXP).

12º. momento: BAR explicou como tinha pensado; então, a EXP provocou-a a buscar outra solução para o problema.

EXP – Juntando tudo dá doze? Se você tentasse desenhar usando as cores, para a gente ver se dá doze mesmo. (Aponta para as seis canetinhas coloridas que estão em cima da mesa). Se você tentasse desenhar dessas cores que elas poderiam ser, será que dariam? (Olha para BAR).

BAR – (Pega a canetinha vermelha e desenha uma mochila pequena, quando termina, coloca a canetinha vermelha em cima da mesa). Verde... (Ameaça pegar a canetinha verde). Azul... (Pega a canetinha azul que está em cima da mesa e desenha uma mochila grande, quando termina, segura a canetinha azul com a mão direita). Pronto, desenhei. (Olha para a EXP).

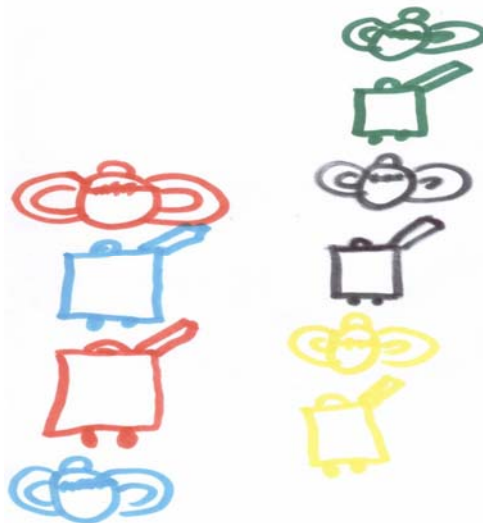
EXP – O que você desenhou aí? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – Duas mochilas. (Olha para a EXP e segura a canetinha azul com a mão esquerda).

13º. momento: BAR permaneceu por um tempo em silêncio; então, a EXP provocou-a a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Você desenhou a vermelha pequena... (Aponta para a mochila pequena que BAR desenhou). E a azul grande. (Aponta para a mochila grande que BAR desenhou). A vermelha também poderia ser grande? (Olha para BAR).

BAR – Poderia. (Olha para sua notação e coloca a canetinha azul em cima da mesa. BAR retoma as informações do problema e reelabora sua solução notacional).



14º. momento: Na seqüência, a EXP provocou BAR a responder à questão do problema, lendo-a em voz alta.

EXP – Tá, então agora a pergunta... (Lê em voz alta a pergunta do problema para BAR, apontando com o dedo indicador da mão direita). Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho? (Olha para BAR).

BAR – Pequena e grande. (Olha para suas notações).

EXP – No total? (Aponta para as notações de BAR). Você fez o registro agora desenhando? Quantos tipos diferentes de mochila deram para fazer? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para suas notações e conta uma a uma com a ponta da canetinha amarela as mochilas coloridas que desenhou). Uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove dez... (Respira fundo). Dez. (Olha para a EXP).

15º. momento: Para verificar se BAR havia compreendido o que tinha feito, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução utilizada.

EXP – Você entendeu por que são dez? (Olha para BAR).

BAR – Entendi. (Olha para a EXP e acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Por quê? (Olha para BAR).

BAR – Porque causa que... Que se você juntar tudo dá dez. (Aponta para as suas notações e olha para a EXP). Os tamanho e as cores. (Olha para a EXP e sorri).

16º. momento: A EXP sugeriu a BAR que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que explicitara oralmente.

EXP – Juntando os tamanhos e as cores. (Olha para BAR e sorri). Então anota a sua resposta dizendo quantos tipos diferentes de mochila vão ter para ela escolher?

BAR – (Coloca a canetinha amarela em cima da mesa, pega a canetinha rosa e escreve a resposta: 10 tipos de mochila. Quando finaliza sua resposta olha para a EXP). Por que tem as cinco que são as cores e dois que são os tamanhos. Daí... juntando tudo! (Olha para a EXP e sorri).

10 TIPOS DE
MOCHILA

17º. momento: Antes de finalizar, a EXP desafiou BAR a refletir sobre a solução notacional que havia desconsiderado.

EXP – Lembra que você tinha dito a outra resposta, que era doze? (Olha para BAR). Por que agora você mudou? (Olha para a EXP).

BAR – Por causa que... Porque antes eu não tinha feito tudo... (Aponta para suas notações). Não tinha dado doze... (Olha para a EXP). Os tamanhos mais com as cores e agora vi que não era assim. Tem que ser todos juntos. Juntos. (Olha para a EXP e sorri).

BAR iniciou a solução do problema com solução de nível I, subnível IA, que passou no decorrer do problema para subnível IB e, no final, a solução notacional e verbal utilizada por BAR e sua interpretação sobre as soluções utilizadas indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, por meio de representação pictórica, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; reorientadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; reorientadora; orientadora; instigadora; questionadora e instigadora.

PROBLEMA 6

Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

1º. momento: BAR fez a leitura silenciosa do problema e, quando finalizou, solicitou à EXP que fizesse a leitura do problema em voz alta. Quando a EXP finalizou a leitura do problema, pediu a BAR que explicasse o que o problema estava perguntando, para verificar se de fato ela o compreendera.

EXP – O que o problema está perguntando? O que está escrito ali na pergunta? (Aponta para a pergunta do problema). O que ele quer saber? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema). Ele está perguntando se... De quantas maneiras os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados. (Olha para a EXP).

2º. momento: Quando BAR identificou as informações necessárias à solução do problema, a EXP provocou-a a buscar uma solução. Em seguida, sugeriu a ela que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que explicitara oralmente.

EXP – Isso. (Olha para BAR e sorri). E o que você acha? Como você vai fazer para resolver? (Olha para BAR e aponta para a folha de sulfite).

BAR – (Olha para o problema, coloca as duas mãos embaixo da mesa sobre as pernas e fica em silêncio). Escrevendo. (Olha para a EXP).

EXP – Então, o que você vai escrever? (Olha para BAR).

BAR – (Pára, fica em silêncio, coloca a mão esquerda em cima da folha de sulfite e a mão direita em cima da mesa). Vou escrever trinta sabores e três tamanhos. (Olha para a EXP).

EXP – Que tal se você anotasse isso que me disse! (Olha para BAR e sorri).

BAR – (Com a caneta preta escreve o número trinta e ao lado a palavra sabores, em seguida, escreve o número trinta embaixo e começa a escrever a palavra tamanh, acena negativamente com a cabeça, risca esta parte da notação e escreve ao lado o número três e a palavra, tamanho. Quando finaliza, olha para a EXP).

Handwritten note on a piece of paper showing "30 sabores" and "3 tamanhos" with some scribbles.

3º. momento: Após BAR registrar, na folha de papel sulfite, as duas variáveis necessárias à solução do problema e seus respectivos valores, a EXP desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – Tá! Então você anotou aqui trinta sabores... (Aponta para esta notação de BAR). E três tamanhos... (Aponta para esta notação de BAR). Então agora, juntando tudo: de quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos podem ser combinados? (Lê em voz alta a pergunta do problema).

BAR – Juntando os trinta com os três? (Aponta para a sua notação e olha para a EXP).

EXP – É. (Olha para BAR e acena afirmativamente com a cabeça).

BAR – (Olha para a sua notação). Dá trinta e três. (Olha para a EXP).

EXP – Você acha que vai dar trinta e três? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

Esta solução verbal de BAR indica solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento no texto do problema.

4º. momento: Na seqüência, a EXP indagou de BAR algumas informações que constavam no problema, para verificar se de fato ela as compreendera.

EXP – Quantos são os tamanhos de pizza que tem para vender? (Olha para BAR).
 BAR – Três... Grande, pequeno e médio. (Olha para a EXP).
 EXP – E são quantos sabores? (Olha para BAR).
 BAR – Trinta. (Olha para a EXP).
 EXP – Então vamos pensar juntas. Três tamanhos de pizzas, que tamanhos poderiam ser esses? (Olha para BAR).
 BAR – Grande, pequeno e médio.. (Conta com os dedos).
 EXP – O tamanho pequeno poderia ser de quantos sabores? (Olha para BAR).
 BAR – De trinta. (Olha para a EXP).
 EXP – De trinta. E de tamanho médio? (Olha para BAR).
 BAR – De trinta. (Olha para a EXP).
 EXP – Trinta. E de tamanho grande? (Olha para BAR).
 BAR – De trinta. (Olha para a EXP). Eh... Todos poderiam ser de trinta!

5º. momento: Depois que BAR identificou que cada um dos tamanhos de pizza poderia ser de trinta sabores, a EXP desafiou-a a repensar o procedimento de cálculo utilizado para solucionar o problema.

EXP – Será que dá trinta e três? (Olha para BAR).
 BAR – (Olha para o problema). Não. (Olha para a EXP e acena negativamente com a cabeça).
 EXP – Quantos jeitos que iam dar? (Olha para BAR).
 BAR – (Coloca o dedo mínimo da mão esquerda na boca e conta com os dedos da mão direita de três em três). Nove. (Olha para a EXP). Não sei... Eu acho... (Olha para a EXP).
 EXP – Vamos pensar. (Olha para BAR). Quantos tamanhos diferentes têm? (Olha para BAR).
 BAR – Trinta! (Quando percebe que se confundiu acena negativamente com a cabeça e sorri). Não três. (Olha para a EXP).
 EXP – Cada uma pode ser de quantos tamanhos? (Olha para BAR).
 BAR – Três. (Olha para a EXP). Agora eu digo... Faço... Trinta vezes o número três. (Olha para a EXP). Pode fazer a conta? (Aponta para a folha de sulfite e olha para a EXP).
 EXP – Pode. (Olha para BAR).

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 33 \end{array}$$

6º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP indagou dela a explicação da solução notacional que utilizara.

EXP – Trinta e três. Como você fez para resolver a conta? (Olha para BAR e aponta para a multiplicação por ela efetuada).
 BAR – Fiz o trinta vezes o número três. (Aponta com a caneta preta para a multiplicação que efetuou).
 EXP – Como você pensou aqui para resolver a conta? (Aponta para a multiplicação efetuada por BAR).
 BAR – (Olha para sua notação).
 EXP – Como você fez para saber que aqui ia dar três? (Olha para BAR).
 BAR – Eu fiz... (Aponta para sua notação). Peguei o zero vezes o debaixo. (Aponta para o número zero e, em seguida, para o número três).
 EXP – Tá, zero vezes o três. Nenhuma vez o três dá quanto? (Olha para BAR).

BAR – Dá três. (Olha para sua notação e fica em silêncio. Percebe que se confundiu. Movimenta a cabeça para os lados). Dá zero. (Olha para a EXP e sorri).

7º. momento: BAR percebeu que se confundira, que havia errado o cálculo; então, a EXP desafiou-a a repensar o procedimento de cálculo utilizado para solucionar o problema.

EXP – Então vamos tentar de novo. (Olha para BAR e aponta para sua notação). Então, tenta, faz aqui do lado para a gente pensar juntas. (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o espaço ao lado da multiplicação que BAR havia efetuado).

BAR – (Com a caneta preta BAR “arma” novamente a multiplicação e passa o traço da igualdade, Olha para a EXP).

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \end{array}$$

8º. momento: Após BAR finalizar sua solução notacional, a EXP pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – E que resultado deu essa conta? (Aponta para a multiplicação efetuada por BAR).

BAR – Noventa. (Olha para a EXP).

EXP – Noventa! Esse trinta aqui representa o quê? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número trinta utilizado na multiplicação).

BAR – Representa os sabores. (Olha para a EXP).

EXP – Os sabores. E os três representa o quê? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o número três utilizado na multiplicação).

BAR – O tamanho. (Olha para a EXP).

EXP – Se você juntar tudo, sabores com os tamanhos... (Aponta para o número trinta e para o número três respectivamente). De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos das pizzas podem ser combinados? (Olha para BAR).

BAR – De noventa. (Olha para a EXP).

9º. momento: Antes de finalizar, a EXP provocou BAR a refletir sobre o resultado que tinha desconsiderado.

EXP – Você entendeu porque dá noventa e não trinta e três? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Você concorda que dá noventa? (Olha para BAR).

BAR – Concordo. (Olho para a EXP).

EXP – Por quê? (Olha para BAR).

BAR – Por causa que... (Coloca o dedo mínimo da mão esquerda na boca e olha para sua notação). Por que tá escrito aqui... (Aponta sua notação). Que em cada tamanho e sabores... Tem trinta... Sabores... E tem... Tem três tamanhos. (Olha para a EXP).

EXP – Então você quer responder agora?

BAR – Rum, rum. (Acena afirmativamente com a cabeça).

R: Juntando as sobras e os
 toninhos dá pra 90 juntando
 tudo

BAR iniciou a solução do problema com solução de nível I, subnível IB, mas ao final a solução notacional e verbal utilizada por BAR e sua interpretação sobre as soluções utilizadas indicam solução de nível IV: da presença de solução combinatória. Em sua solução estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis por meio de cálculo multiplicativo convencional, envolvendo a escrita alfabética e numérica.

Essa mudança de nível de solução se fez em situação em que se alternaram as seguintes formas de intervenção da experimentadora: orientadora; questionadora; instigadora; orientadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora; instigadora; questionadora e instigadora.

PROBLEMA 7

Pedro tem 18 camisas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

1º. momento: BAR fez a leitura do problema em voz alta e, quando finalizou, foi provocada pela EXP a buscar uma solução para o problema.

EXP – O que você acha? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema). De dois. (Olha para a EXP).

EXP – De duas maneiras diferentes? (Olha para BAR).

BAR – Não. (Movimenta a caneta preta passando-a de uma mão para outra). De uma. (Olha para a EXP).

EXP – De uma? (Olha para BAR).

BAR – É, por que... Ele tem uma camiseta e uma bermuda. (Olha para a EXP).

Essa solução verbal de BAR e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível II, subnível IIA: do caso favorito. BAR representa uma, e

somente uma, possibilidade de combinação entre as variáveis. Seria a combinação escolhida por adequação de uso.

2º. momento: A EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por BAR.

EXP – Tá. Mas de uma maneira que ele quisesse se vestir. E de uma outra vez? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para o problema). Com outra camiseta e outra bermuda. (Movimenta a caneta que está na mão direita, batendo-a levemente na mesa).

EXP – Quantos serão no total que ele poderia se vestir, de tipos diferentes? (Olha para BAR e aponta para a pergunta do problema).

BAR – (Fica em silêncio, lê o problema silenciosamente e resolve o “algoritmo convencional da adição” mentalmente, utilizando os dedos para adicionar primeiro as unidades... (Imagina oito e adiciona um) E, em seguida as dezenas (Imagina o um e adiciona mais um). Quando finaliza, olha para o problema). Vinte e nove, juntando as camisetas e as bermudas. (Olha para a EXP).

Essa solução verbal de BAR indica solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

3º. momento: A EXP pediu a BAR que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado. Em seguida, sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações que havia explicitado oralmente.

EXP – Você acha que daria vinte e nove?

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Como você pensou para encontrar o resultado vinte e nove? (Olha para BAR).

BAR – (Coloca a caneta preta em cima da mesa). Eu contei dezoito mais onze. (Olha para a EXP).

EXP – Então anote para você me mostrar como pensou e para você ver. (Aponta para a folha de sulfite).

BAR – (Pega a caneta que está em cima da mesa com a mão direita e “arma” o algoritmo convencional da adição: $18 + 11 = 29$),

$$\begin{array}{r} 18 \\ +11 \\ \hline 29 \end{array}$$

4º. momento: Após BAR explicar como havia pensado para solucionar o problema, a EXP provocou-a a refletir sobre sua solução notacional.

EXP – Ele tem onze bermudas e tem dezoito blusas, mas com uma das dezoito blusas ele poderia usar com quantas das bermudas. (Olha para BAR).

BAR – Onze. (Olha para a EXP e sorri).

EXP – Com onze bermudas. Com a outra camiseta, com quantas bermudas ele poderia usar? (Olha para BAR).

BAR – Com onze. (Olha para a EXP).

EXP – E com a outra? (Olha para BAR).

BAR – Onze. (Olha para a EXP).

5º. momento: Novamente, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por BAR.

EXP – Você acha que vai dar vinte e nove mesmo? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Por quê? Você falou que concorda comigo que uma blusa poderia usar com onze bermudas, com outra blusa mais onze, quantos tipos diferentes já dariam aí, combinando duas blusas com as bermudas? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para a adição que efetuou e conta novamente com os dedos). Vinte e nove. (Olha para a EXP).

EXP – Vinte e nove? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça. A mão esquerda está apoiada na mesa e a direita apoiada sobre a esquerda e, segurando a caneta preta).

6º. momento: Percebendo que BAR necessitava refletir sobre o problema, a EXP apresentou um contra-exemplo para instigar BAR à reflexão.

EXP – É que um aluno meu falou que com cada uma dessas blusas ele poderia usar onze bermudas, daí daria um resultado bem maior. O que você acha? (Olha para BAR e aponta com o dedo indicador da mão direita para sua notação).

BAR – Acho também. (Olha para a EXP e movimenta as mãos).

EXP – Você acha que ele está certo? (Olha para BAR).

BAR – (Acena afirmativamente com a cabeça).

EXP – Então você acha que sua resposta de vinte e nove não está certa? (Olha para BAR).

BAR – Nhum, nhum. (Acena negativamente com a cabeça).

EXP – E teria um outro jeito de você responder? (Olha para BAR).

BAR – Teria. (Olha para a EXP).

7º. momento: BAR ficou em dúvida sobre a resposta que tinha utilizado, relatando existir outra possibilidade de solução. Então, a EXP desafiou-a a buscar outra solução para o problema e, em seguida, desafiou-a a responder à questão do problema.

EXP – Como? (Olha para BAR).

BAR – Estou pensando... (Olha para sua notação e, em seguida, faz uma leitura silenciosa do problema). Que poderia... Uma blusa e uma bermuda... De cada vez. (Olha para a EXP e movimentase na cadeira).

EXP – Isso mesmo! (Olha para BAR e sorri). De cada vez ele poderia usar uma bermuda e uma blusa! (Movimenta a mão em cima da folha de sulfite). Mas, juntando tudo isso, quantos tipos diferentes que poderia ter para ele se vestir? (Aponta com o dedo indicador da mão direita para o problema e olha para BAR).

BAR – Vinte e nove. (Olha para a EXP).

EXP – Vinte e nove tipos diferentes! Você concorda que a sua resposta está correta? (Segura a ponta da folha de sulfite com a mão direita).

BAR – Rum, rum. (Acena afirmativamente com a cabeça). Terminei! (Olha para a EXP).

De início, solução de nível II, subnível IIA que passou no decorrer para solução de nível I, subnível IB; ao final a solução notacional e verbal utilizada por BAR e sua interpretação sobre a solução que utilizou permaneceram no nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

Essa mudança de nível de solução se fez quando se manifestaram diferentes formas de intervenção da experimentadora em alternância: instigadora; questionadora; orientadora; instigadora; questionadora e instigadora.

PROBLEMA 8

Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

1º. momento: A EXP leu o problema em voz alta, a pedido de BAR. Quando a EXP finalizou a leitura do problema, BAR explicou o que iria fazer.

BAR – (Quando a EXP finaliza a leitura do problema, pega a caneta preta e passa por cima do problema com a ponta de trás e faz a leitura silenciosa do problema acompanhando com a caneta). Dava para mim juntar tudo. (Movimenta a caneta preta em cima da folha de sulfite e olha para a EXP).

2º. momento: Na seqüência, a EXP provocou BAR a buscar uma solução para o problema.

EXP – E como você vai fazer? (Olha para BAR e aponta com o dedo indicador para a folha de sulfite).

BAR – (Aponta com a caneta preta para as informações do problema). Juntando os dois... Os dois tipos de queijo... (Aponta para esta informação no problema). Os três tipos de patê e os quatro tipos de pães. (Olha para a EXP).

EXP – Então junta para ver quanto vai dar? (Olha para BAR).

BAR – Fazendo a conta... (Com a ponta de trás da caneta preta aponta para o problema buscando as informações que necessita. Vira a caneta preta e “arma” o algoritmo convencional da adição: $2 + 3 + 4$ e passa o traço da igualdade, em seguida, soluciona a adição contando os números com a mão esquerda, movimentando-os com o da mão direita). Vai dar nove.

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 3 \\ \hline 4 \\ 9 \end{array}$$

3º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP pediu que ela explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Nove o quê? (Olha para BAR).

BAR – Nove tamanhos... Nove pães e nove tipos de queijo, os de patê e os pães. (Enquanto responde busca as informações no problema).

EXP – Vão dar nove tipos diferentes. (Olha para BAR).

BAR – É. (Acena afirmativamente com a cabeça e olha para a EXP).

EXP – Então vamos ver. Você falou que dois, três e o quatro. (Aponta para os números dois, três e quatro respectivamente). Por quê? (Olha para BAR).

BAR – (Olha para a EXP). Dois porque são dois tipos de queijo... (Aponta para o número dois que está na adição com o dedo indicador da mão direita). Três porque são três tipos de patê... (Aponta para o número três que está na adição com o dedo indicador da mão direita). E quatro porque são quatro tipos de pães. (Aponta para o número quatro que está na adição com o dedo indicador da mão direita). Certo? (Olha para BAR).

A solução notacional utilizada por BAR e sua interpretação sobre a solução que utilizou indicam solução de nível I, subnível IB: da adição de valores. Sua solução se limita ao cálculo aditivo de todos os valores envolvidos, conforme sua ordem de aparecimento.

4º. momento: Na seqüência, a EXP solicitou a BAR que refletisse sobre as possibilidades de combinação de duas das três variáveis envolvidas. Em seguida, sugeriu-lhe que registrasse, na folha de papel sulfite, as informações e os resultados que havia explicitado oralmente.

EXP – Tá! O pão francês poderia combinar com quantos queijos? (Olha para BAR e movimenta a mão direita e círculo em cima da folha de sulfite).

BAR – Com dois. (Olha para a EXP e se ajeita na cadeira).
 EXP – Então você poderia anotar. (Olha para BAR e aponta para a folha de sulfite).
 BAR – (Com a caneta preta que está na sua mão, registra sua solução notacional).

2 PÃO FRANCES
 2 PÃES NORMAIS
 2 PÃES DE SANDUICHES
 2 PÃES CASEIRO

5º. momento: Quando BAR finalizou sua solução notacional, a EXP provocou-a a refletir sobre parte de sua solução notacional.

EXP – Então, combinou todos os tipos de pães com os queijos? (Aponta para as notações de BAR).
 BAR – Já. (Olha para a EXP e apóia a cabeça com a mão esquerda).
 EXP – E quantos tipos diferentes de sanduíche já dariam? (Olha para BAR).
 BAR – (Conta de dois em dois, apontando com a ponta da caneta preta para os números dois que escreveu). Oito. (Olha para a EXP).

8 PÃES

6º. momento: BAR combinou duas das três variáveis; então, a EXP indagou dela uma informação que constava no problema, verificando se de fato ela a compreendera.

EXP – Tá. Agora, só tem pão e queijo? (Olha para BAR).
 BAR – Não. (Acena negativamente com a cabeça).
 EXP – Tem o quê também? (Olha para BAR e aponta para o problema).
 BAR – (Lê o problema para buscar esta informação). Patê. (Levanta a cabeça e olha para cima).
 EXP – E agora, quantos tipos de patê têm? (Aponta para o problema).
 BAR – Tem três. (Responde após ler esta informação no problema).

7º. momento: Após BAR identificar a terceira variável necessária à solução do problema e seu respectivo valor, a EXP provocou-a a buscar uma solução para o problema.

EXP – E aí, como será que vai dar para descobrir quantos vão dar? (Aponta para a folha de sulfite).
 BAR – (Olha para o problema e efetua uma conta utilizando os dedos da mão esquerda para contar, apoiando-os na mesa). Vai dar doze. (Olha para a EXP).

8º. momento: BAR obteve doze, como resposta; então, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por ela.

EXP – Como que ia dar doze? (Olha para BAR).

BAR – Tipo assim... (Aponta para a sua notação). Tirando os dois e colocando os seis... Daí não ia dar oito... Ia dar doze... (Olha para sua notação).

EXP – Juntando os...

BAR – Os pães com os do patê. (Ajeita o cabelo com a mão esquerda).

EXP – E os queijos daí? E os pães com queijo? (Aponta para a notação de BAR).

BAR – Já ia dar oito. (Olha para sua notação e movimenta as mãos esfregando-as uma na outra).

EXP – E juntando tudo? (Aponta para o problema).

BAR – Os pães com os do patê? (Olha para a EXP). Não sei o que fazer... (Olha para a EXP).

9º. momento: Percebendo que BAR estava em dúvida sobre o que fazer, a EXP leu a questão do problema em voz alta.

EXP – É, porque olha a pergunta: “Quantos tipos diferentes de sanduíche podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?”. (Faz a leitura do problema em voz alta, apontando com o dedo indicador da mão direita).

BAR – (Conta com dedos da mão direita a quantidade de sanduíches que formou combinando pão e queijo, conta de dois em dois, depois, pega o número doze, que segundo ela refere-se à combinação dos patês e conta com os dedos, um a um, a partir do oito, mais doze). Ia dar vinte. (Olha para a EXP).

10º. momento: Novamente, a EXP expressou dúvida sobre a viabilidade da solução utilizada por BAR; em seguida, pediu-lhe que explicitasse sua interpretação sobre a solução que havia utilizado.

EXP – Ia dar vinte? Como? (Olha para BAR).

BAR – Colo... Juntando os dois... (Aponta para os números dois que escreveu). Mais os três (Aponta para a informação da quantidade de patês no problema).

EXP – Então anota para você não esquecer quantos três você usaria. (Aponta para a folha de sulfite).

BAR – Dá vinte. (Com a caneta preta escreve o número vinte embaixo do número oito e escreve ao lado a palavra pães). Vinte pães. (Olha para a EXP).

20 PÃES

EXP – Esses vinte seriam o que? (Aponta para o número vinte escrito por BAR).

BAR – Seriam com... Com os pães com o queijo e o patê. (Movimenta a caneta preta com a mão direita enquanto responde). Vinte e oito, juntando tudo. (Aponta com a caneta preta para sua notação).

EXP – Juntando o quê? (Olha para BAR).

BAR – Os pães, os queijos e o patê. (Olha para a sua notação e movimenta a caneta preta com a mão direita).

Na solução dos problemas 5, 6 e 8, BAR partiu de solução de nível menos adiantado para solução de nível mais adiantado, obtendo solução de nível IV nos problemas 5 e 6.

Na solução do problema 7, BAR partiu de solução de nível II, subnível IIA e, ao final, retornou para solução de nível I, subnível IB.

Durante a solução de todos os problemas por BAR, alternaram-se três formas de intervenção da experimentadora: orientadora, questionadora e instigadora, apenas, durante a solução dos problemas 5 e 8 apareceu a forma de intervenção reorientadora.

Em suma, no decorrer da solução dos problemas da 2ª. sessão, percebeu-se que as formas de intervenção: orientadora e reorientadora apareceram com mais ênfase, durante a solução do problema 1 por todos os sujeitos.

Já na solução dos problemas 6, 7 e 8, à medida que os sujeitos estavam familiarizados com a atividade que seria desenvolvida, as formas de intervenção: questionadora e instigadora, alternaram-se durante a solução dos problemas. A forma orientadora de intervenção apareceu e a forma de intervenção reorientadora também, embora com menor frequência.

Na solução do problema 5, PED e MAT obtiveram, na primeira tentativa, solução de nível IV. REN, EDU e BAR partiram de solução de nível menos adiantado e avançaram para solução de nível IV.

Na solução do problema 6, PED e MAT obtiveram, novamente, na primeira tentativa, solução de nível IV. REN, EDU e BAR partiram de solução de nível menos adiantado e avançaram para solução de nível IV.

Na solução do problema 7, PED, MAT e EDU obtiveram, na primeira tentativa, solução de nível IV. REN partiu de solução de nível menos adiantado e avançou

para solução de nível IV. Apenas BAR partiu de solução de nível mais adiantado, nível II e, retornou para solução de nível menos adiantado, nível I.

Na solução do problema 8, PED, REN, MAT e EDU partiram de solução de nível menos adiantado e avançaram para solução de nível IV, apenas a solução de BAR, que também avançou de nível menos adiantado para nível mais adiantado, não avançou para o nível IV.

QUADRO 11: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 1 E 5:

Níveis \ Tentativas		1ª. Sessão - Problema 1			2ª. Sessão - Problema 5		
		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV		MAT	PED	EDU	PED	REN	BAR
			REN		MAT	EDU	
III	III D						
	III C						
	III B	BAR					
	III A						
II	II C	PED			EDU		
		EDU					
	II B						
	II A	REN					
I	I B				REN	BAR	
	I A		EDU		BAR		

Os problemas 1 e 5 contemplavam duas variáveis; os valores, baixos, estavam registrados em escrita alfabética, com resultados finais inferiores a 20.

1 – Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

5 – Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

Na solução do problema 1, quatro das cinco crianças obteve solução de nível IV. Dessas quatro crianças uma utilizou, na primeira tentativa, solução de nível IV. As outras três crianças utilizaram de início solução de nível menos adiantado e avançaram para solução de nível IV. Apenas uma das crianças iniciou e finalizou a solução no nível III, subnível IIIB.

Em relação às formas de intervenção da experimentadora, identificou-se uma alternância de todas as formas, com predominância das formas: orientadora e reorientadora.

Na solução do problema 5, todas as crianças obtiveram solução de nível IV. Duas crianças obtiveram, na primeira tentativa. As outras três crianças partiram de solução menos adiantada e avançaram para solução de nível IV.

Foram identificadas no decorrer da solução do problema 5, a alternância de todas as formas de intervenção da experimentadora. Mas, houve forte ocorrência das formas orientadora e reorientadora.

Em suma, na solução dos problemas 1 e 5 (duas variáveis e valores baixos) predominaram avanços de níveis anteriores para o nível IV, com alternância das formas de intervenção da experimentadora, destacando-se as formas orientadora e reorientadora.

QUADRO 12: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 2 E 6:

Níveis \ Tentativas		1ª. Sessão - Problema 2			2ª. Sessão - Problema 6		
		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV			PED	EDU	PED	REN	
			REN		MAT	EDU	
						BAR	
III	III D						
	III C						
	III B		BAR	BAR		EDU	
	III A						
II	II C		MAT				
	II B		MAT				
			EDU				
II A		PED					
I	I B		REN		REN		
					BAR		
	I A			EDU			

Os problemas 2 e 6 contemplavam duas variáveis, os valores relativamente baixos, estavam registrados em algarismos, com resultados finais não superiores a 100. Nestes problemas havia a presença dos valores distractores.

2 – Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

6 – Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

Na solução do problema 2, a maioria das crianças partiu de solução de nível menos adiantado e avançou para solução de nível mais adiantado. Três das cinco crianças obtiveram solução de nível IV. Duas crianças iniciaram a solução do problema nos níveis II e III, respectivamente, permanecendo nesses níveis até o final da solução do problema.

Em relação às formas de intervenção da experimentadora, identificou-se uma alternância de três formas de intervenção: orientadora, questionadora e instigadora, com a predominância das formas: questionadora e instigadora.

Na solução do problema 6, duas das cinco crianças obtiveram, na primeira tentativa, solução de nível IV. As outras três crianças partiram de solução de nível menos adiantado e avançaram para solução de nível IV.

Identificou-se, no decorrer da solução do problema 6, alternância de todas as formas de intervenção da experimentadora, com predominância das formas: orientadora, questionadora e instigadora.

Em suma, na solução dos problemas 2 e 6 (duas variáveis, valores baixos e presença dos valores distractores) predominaram avanços de níveis menos adiantados para solução de nível IV, sobretudo na 2ª. sessão e, destacaram-se as formas de intervenção questionadora e instigadora.

QUADRO 13: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 3 E 7:

Níveis \ Tentativas		1ª. Sessão - Problema 3			2ª. Sessão - Problema 7		
		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.
IV		REN		EDU	PED	REN	
		MAT		BAR	MAT		
					EDU		
III	III D						
	III C						
	III B						
	III A		EDU				
II	II C						
	II B						
	II A				BAR		
I	I B		PED	PED	REN	BAR	BAR
			EDU				
	I A		PED	BAR			
			BAR				

Os problemas 3 e 7 contemplavam duas variáveis; os valores altos, estavam registrados em algarismos, com resultados finais superiores a 150.

3 – Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

7 – Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

Na solução do problema 3, quatro das cinco crianças obtiveram solução de nível IV, duas delas, na primeira tentativa. As outras duas crianças partiram de solução de nível menos adiantado e avançaram para solução de nível IV. Apenas uma das crianças partiu de solução de nível I e permaneceu neste nível até o final.

Com relação às formas de intervenção da experimentadora, foi possível verificar uma alternância de três formas de intervenção: orientadora, instigadora e questionadora, com predominância da forma questionadora.

Na solução do problema 7, novamente, quatro das cinco crianças obtiveram solução de nível IV, três delas obtiveram essa solução na primeira tentativa e uma delas partiu de solução de nível menos adiantado e avançou para solução de nível IV. Uma das crianças partiu de solução de nível II e retornou para solução de nível I.

Identificou-se, no decorrer da solução desse problema, uma alternância de três formas de intervenção da experimentadora: orientadora, instigadora e questionadora, com predominância da forma instigadora.

Em suma, na solução dos problemas 3 e 7 (duas variáveis e valores altos) predominou a manutenção de solução de nível IV, na primeira tentativa. Apareceram todas as formas de intervenção da experimentadora, sobretudo questionadora e instigadora.

QUADRO 14: NÍVEIS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO QUE AS CRIANÇAS EXPRESSARAM AO SOLUCIONAR OS PROBLEMAS 4 E 8:

Níveis \ Tentativas		1ª. Sessão - Problema 4			2ª. Sessão - Problema 8			
		1ª.	2ª.	3ª.	1ª.	2ª.	3ª.	
IV				MAT		PED		
						REN		
						MAT		
						EDU		
III	III D		MAT					
	III C			PED	REN		BAR	
				REN				
	III B		MAT					
III A			EDU	EDU				
II	II C	EDU						
	II B							
II A								
I	I B	PED			PED			
		REN			REN			
		BAR			MAT			
					EDU			
	I A				BAR			

Os problemas 4 e 8 contemplavam três variáveis; os valores baixos, estavam registrados em escrita alfabética, com resultados finais inferiores a 50.

4 – Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

8 – Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

Na solução do problema 4, apenas uma das cinco crianças obteve solução de nível IV. Três das cinco crianças partiram de solução de nível menos adiantado, nível I e nível II e avançaram para solução de nível mais adiantado, nível III. Uma das cinco crianças apresentou solução de nível I.

Com relação às formas de intervenção da experimentadora durante a solução do problema, foi possível identificar uma alternância de três formas de intervenção: orientadora, instigadora e questionadora, com predominância da forma questionadora.

Na solução do problema 8, quatro das cinco crianças obtiveram solução de nível IV, na segunda tentativa. Todas elas partiram de solução de nível I e avançaram para solução de nível IV. Apenas uma das crianças que também partiu de solução de nível I, avançou no final, para solução de nível III.

Da mesma forma que no decorrer da solução do problema 4, foi possível identificar alternância de três formas de intervenção: orientadora, instigadora e questionadora, com predominância da forma questionadora.

Em suma, na solução dos problemas 4 e 8 (três variáveis e valores baixos) predominaram avanços na 1ª. sessão mas, não para solução de nível IV. Na 2ª. sessão predominaram avanços de nível menos adiantado para o nível IV. Houve alternância das formas de intervenção, com predominância da forma questionadora.

V – DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa verificou-se como ocorre o processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas de crianças da 3ª. série, na solução de problemas, sob a intervenção do professor.

Visando responder ao problema proposto, duas questões foram levantadas, ainda no início da pesquisa:

Como se caracterizam as soluções notacionais, as soluções verbais e as interpretações das crianças quando estas solucionam os problemas propostos sobre produto de medidas, quanto à presença ou não de raciocínio combinatório?

Que formas assumem as intervenções da pesquisadora, no papel de professora, durante as soluções das crianças?

Ao descrever então a natureza das alterações das soluções notacionais, das soluções verbais e das interpretações das crianças expressas durante a solução dos problemas de produto de medidas, conforme os níveis de raciocínio combinatório envolvidos em cada um deles, identificaram-se diferentes níveis de construção inicial do raciocínio combinatório. Houve também, mudanças de níveis menos avançados de solução para níveis mais avançados de solução, no decorrer da solução dos problemas, por todas as crianças. Mas que significado têm tais avanços obtidos em termos de aprendizagem?

Na solução de todos os problemas da 1ª. sessão pelas crianças, houve aprendizagem pontual, que partiu sempre de um nível menos adiantado de solução e avançou para níveis mais adiantados de solução. Na maior parte dos casos, as crianças partiram sempre de solução de nível menos adiantado para solução de nível mais adiantado. Já na solução de todos os problemas da 2ª. sessão pelas crianças, houve aprendizagem mais estável, predominando a manutenção de

solução de nível IV na primeira tentativa ou o avanço de solução de nível menos adiantado para solução de nível mais adiantado.

Assim sendo, os avanços de nível de solução ocorreram muito ligados às formas de intervenção da experimentadora, no papel de professora. Esta interveio para levar cada criança à solução de níveis mais adiantados. Então, os avanços se caracterizaram como mudanças de níveis de solução, mas nada assegura que, em grande parte dos casos, tenham eles significado a estabilização do raciocínio combinatório, no sentido de que uma construção desse raciocínio, ao menos no nível IV, que foi empregado, de fato, tenha ali se efetivado.

Em linhas gerais, foram encontrados os mesmos níveis e subníveis identificados por Moro e Soares (2006): nível I: soluções contextualizadas sem indício de combinação; nível II: soluções que se aproximam à solução combinatória; nível III: soluções que obtêm algumas combinações e nível IV: soluções com presença de solução combinatória.

Salienta-se ainda nesta pesquisa que, diferentemente de Moro e Soares (2006), além das soluções notacionais, foram descritas e analisadas também as soluções verbais e as interpretações das crianças sobre as soluções que utilizaram, procedimento este que possibilitou uma melhor compreensão do processo de aprendizagem das crianças e, como consequência, uma efetiva e pontual intervenção da pesquisadora, no papel de professora.

Os resultados desta pesquisa indicam que os avanços das crianças no processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas, de níveis menos avançados de solução para níveis mais avançados de solução, no decorrer da solução dos problemas, estão ligados às formas de intervenção utilizadas pela experimentadora.

Dessa forma, foram identificadas e transcritas as formas de intervenção utilizadas pela experimentadora, no papel de professora, durante a solução dos problemas. Essas formas de intervenção foram as seguintes: orientadora, reorientadora, questionadora e instigadora.

Ao descrever a natureza das formas de intervenção expressas pela pesquisadora, no papel de professora, durante as soluções das crianças, pôde-se identificar que no início da solução dos problemas 1 e 5, problemas que iniciaram a 1ª. e a 2ª. sessão, respectivamente, predominaram as formas de intervenção orientadora e reorientadora, pois havia a necessidade de apresentar às crianças a tarefa que seria realizada, explicitando a importância do registro das soluções, os diversos procedimentos de cálculo e os materiais passíveis de uso. Além disso, sempre que solicitada, a experimentadora fez a leitura dos problemas propostos, lembrando as recomendações iniciais, sempre que necessário.

No decorrer da solução desses dois problemas e dos outros que foram propostos às crianças, essas formas de intervenção também estiveram presentes, embora com menor intensidade.

Percebeu-se que, à medida que as crianças estavam familiarizadas com a atividade, houve mudança da forma de intervenção da experimentadora e apareceram com mais ênfase as formas: instigadora e questionadora.

A forma de intervenção questionadora se fez presente no decorrer e ao término de cada solução notacional e/ou verbal, bem como ao término das interpretações sobre as soluções apresentadas pelas crianças. Essas perguntas possibilitaram à experimentadora, no papel de professora, captar mais elementos sobre a compreensão da criança para melhor analisar o seu raciocínio.

Já a forma de intervenção instigadora apareceu intercalada à forma questionadora durante a solução de todos os problemas. Consistindo de questões que provocaram a criança a iniciar a busca de uma solução notacional e/ou verbal, bem como a refletir sobre parte de sua solução notacional, quer na busca de outra solução para o problema, quer na avaliação de sua estratégia.

Destaca-se também que, durante a conversa de “familiarização” e apresentação da atividade que seria desenvolvida, logo no início da 1ª. sessão, uma das cinco crianças disse não saber o que eram problemas e que nunca havia solucionado problemas na escola. Esse fato indica a necessidade de o professor explicitar em sala de aula, com clareza, a atividade que será desenvolvida.

Outro elemento identificado nessa conversa foi o relato das crianças quando explicitaram que na escola utilizavam apenas lápis e borracha para solucionar os problemas, demonstrando-se muito felizes com a possibilidade de utilizar caneta com tinta preta e canetinhas hidrográficas coloridas para solucionar os problemas.

Esses relatos apontam para a necessidade e a importância de o professor explorar em sala de aula o trabalho com a solução de problemas e com a utilização de uma diversidade de materiais para o registro das soluções das crianças.

Considera-se importante ressaltar que mesmo nas soluções de nível IV, que indicam a presença de solução combinatória, há predominância do cálculo aditivo. Verificou-se também, em alguns momentos, a ocorrência da passagem do cálculo aditivo para o cálculo multiplicativo.

Destaca-se também que os avanços das crianças no processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas estiveram ligados ao tipo de problema. Afinal, os problemas propostos às crianças apresentavam diferentes níveis de dificuldade: duas ou três variáveis; valores altos e baixos para as

variáveis; presença ou ausência dos valores distractores e tipo de registro dos valores, em algarismos ou escrita alfabética. Desses, apenas nos problemas 4 e 8, que envolviam três variáveis, as crianças encontraram mais dificuldade, justamente, ao que parece, por causa da presença de três variáveis.

A solução de problemas de produto de medidas, com três variáveis, implica a representação tridimensional, pois a utilização de um diagrama bidimensional não dá conta. Dessa forma, ficou ainda mais difícil para as crianças a solução de um problema com tais características, mediante aquela forma de representação.

Na solução do problema 4, apenas uma das cinco crianças obteve solução de nível IV. Três das cinco crianças partiram de solução de nível menos adiantado, nível I e nível II, e avançaram para solução de nível mais adiantado, nível III. Uma das cinco crianças apresentou solução de nível I. Na solução do problema 8, quatro das cinco crianças obtiveram solução de nível IV, na segunda tentativa. Todas elas partiram de solução de nível I e avançaram para solução de nível IV. Apenas uma das crianças, que também partiu de solução de nível I, avançou ao final, para solução de nível III. Assim, avanços mais restritos, comparados com a solução das crianças aos outros problemas, parecem estar no fato de que era necessário combinar três variáveis.

Verificou-se que os problemas que apresentavam duas variáveis, sobretudo com valores baixos para essas variáveis, possibilitaram a utilização de uma variedade maior de soluções notacionais pelas crianças: registros pictóricos, cálculos aditivos, cálculos multiplicativos, “árvore” de possibilidades, escrita alfabética e numérica.

Brito, Alves e Neves (2003) já pontuavam em seu estudo que, quando os valores das variáveis são baixos, é possível que as crianças elaborem uma

representação gráfica que as auxilie na solução do problema. Segundo as autoras, o mesmo não é possível com valores altos para as variáveis, o que passa a exigir a utilização de cálculos formais.

Vergnaud (1983) destaca em seus estudos a importância e a necessidade de o professor apresentar aos alunos problemas com valores altos, pois, segundo o autor (1983), não há como os alunos desenvolverem conceitos complexos se eles não têm contato com situações complexas.

Outra dimensão que chama a atenção é que, embora as crianças já tivessem aprendido os algoritmos convencionais na escola, só os utilizaram após terem sido instigadas pela pesquisadora a lembrarem de algum procedimento escolar de solução. Destaca-se, na pesquisa, o quanto foi relevante a pesquisadora, no papel de professora, lembrar que alguma continha podia ser utilizada.

Cabe dizer, também, que a experimentadora, no papel de professora, elaborou intervenções que se fizeram necessárias para captar mais elementos sobre a compreensão das crianças e para melhor analisar o seu raciocínio. A intervenção aqui proposta seguiu o estilo clínico-crítico proposto por Piaget (1983), partindo sempre das soluções notacionais, das soluções verbais e das interpretações das crianças sobre as soluções que utilizaram. Dessa forma, no decorrer da solução dos problemas pelas crianças, alternaram-se as quatro formas de intervenção da experimentadora, no papel de professora, identificadas nesta pesquisa, pois essas formas de intervenção eram elaboradas e adaptadas a partir das soluções das crianças, sempre em relação ao conceito focalizado: o raciocínio combinatório.

Verificou-se então que o processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas de crianças da 3ª. série, na solução de problemas, ocorreu à medida que se alternaram as intervenções da

experimentadora, no papel de professora, partindo sempre do nível de compreensão em que a criança se encontrava, com relação à construção do conceito que estava sendo trabalhado.

Logo, dos resultados obtidos, podem-se obter elementos fortes a favor da relevância das intervenções do professor, como as descritas, para a ocorrência do progresso de cada criança pelos níveis de solução, em direção a soluções de caráter combinatório.

Considerando a discussão acima desenvolvida, destacam-se aqui, algumas indicações dos resultados desta pesquisa, as quais são consideradas de suma importância para professores e pesquisadores na área da educação matemática: a necessidade de o professor incentivar e estimular as crianças à utilização de estratégias próprias de cálculo; a relevância do trabalho com os conceitos matemáticos a partir da solução de problemas; a importância de o professor identificar e acompanhar o processo de aprendizagem das crianças para que possa realizar intervenções significativas; a relevância das interpretações das crianças sobre as soluções notacionais e verbais que utilizam quando solucionam problemas; a importância do trabalho com as estruturas multiplicativas na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental e a necessidade de o professor compreender os conceitos matemáticos que trabalha com as crianças.

Estudos realizados acerca da aprendizagem dos conceitos matemáticos e já mencionados anteriormente (Franchi, 1994; Pavanello, 1994; Kamii, 2002) indicam que a aprendizagem desses conceitos requer mais do que o ensino mecânico dos algoritmos e sua aplicação na solução de problemas.

Consoante com as indicações desses estudos, os resultados desta pesquisa possibilitaram identificar que, embora as crianças já tivessem aprendido os

algoritmos convencionais na escola, só os utilizaram após serem instigadas pela experimentadora, no papel de professora, pois, de início, como lhes foi permitido e incentivado, utilizaram estratégias próprias de cálculo que lhes foram mais significativas e as auxiliaram na solução dos problemas propostos.

Esse fato revela que o ensino mecânico dos algoritmos e sua aplicação na solução dos problemas não garantem a aprendizagem dos conceitos matemáticos, pois nem sempre as crianças atribuem significado a esses algoritmos. No entanto, mesmo com as indicações desses estudos, ainda hoje, são pouco numerosas as práticas escolares que dão atenção e valorizam as estratégias de cálculo utilizadas pelas crianças.

Na sua grande maioria, as práticas de sala de aula têm propiciado pouco estímulo à criatividade das crianças nas aulas de Matemática, supervalorizando o trabalho com os algoritmos convencionais e com a institucionalização precoce dos conceitos trabalhados. Os algoritmos convencionais, ao contrário, deveriam ser construídos pelas crianças gradativamente, partindo das estratégias de cálculo que lhes sejam significativas e lhes permitam atribuir significado aos algoritmos, percebendo sua eficácia. A utilização do algoritmo convencional apareceria, então, ao final do processo de construção de um determinado conceito.

Piaget (1973) já pontuava que a formalização tem seu momento específico e não pode ser prematura; ao contrário, ela deve aparecer como a finalização de um processo de construção do conceito trabalhado.

Em relação à necessidade de o professor incentivar e estimular a utilização de estratégias próprias de cálculo pelas crianças, pesquisas (Sinclair, 1990; Carraher, Carraher e Schliemann, 1989; Nunes e Bryant, 1997; Franchi, 1999; Smole e Diniz, 1999; Kamii, 2002; 2005) têm destacado também a necessidade e a

importância de as crianças utilizarem estratégias próprias de cálculo, em forma de diferentes soluções notacionais e verbais, para que possam solucionar com compreensão os problemas que lhes são propostos.

De acordo com essas pesquisas, quando as crianças utilizam estratégias próprias de cálculo, têm mais facilidade para compreender e explicar as estratégias utilizadas e, além disso, a utilização dessas estratégias as auxiliam na construção e compreensão dos conceitos matemáticos.

Nesta pesquisa, com apenas cinco crianças, pôde-se identificar uma variedade de estratégias próprias de cálculo utilizadas por elas na solução dos problemas propostos. Essas estratégias permitiram à experimentadora, no papel de professora, identificar, acompanhar e intervir no processo de aprendizagem dessas crianças.

Em sala de aula, com mais crianças, outras estratégias podem ser identificadas, permitindo ao professor identificar o nível de aprendizagem em que a criança se encontra e, a partir desse nível, promover as intervenções necessárias para que ela avance no seu processo de aprendizagem.

Assim sendo, o ensino e a aprendizagem da Matemática em sala de aula poderiam ser mais significativos se, além de incentivar a utilização de estratégias próprias de cálculo pelas crianças, os professores conhecessem melhor essas estratégias de cálculo e também identificassem as dificuldades que as crianças encontram no processo de construção dos conceitos matemáticos.

Nesse contexto, uma prática que valorize a construção significativa dos conceitos pelas crianças atribui importância aos conhecimentos e experiências prévias dessas crianças e lhes possibilita participação ativa no seu processo de aprendizagem.

A terceira indicação dos resultados desta pesquisa aponta para a relevância do trabalho com os conceitos matemáticos a partir da solução de problemas. Pesquisas (Vergnaud, 1991; Charnay, 1996; Smole e Diniz, 1999) já descritas anteriormente têm destacado a importância do trabalho com a solução de problemas, num processo em que a criança está a todo o momento diante de um desafio para o qual os conhecimentos que possui nem sempre são suficientes para responder aos problemas.

Os resultados desta pesquisa possibilitaram identificar que, durante a solução dos problemas propostos, as crianças necessitaram refletir, analisar, questionar, elaborar hipóteses, operar com os dados apresentados, estabelecendo relações com os conhecimentos prévios e confrontando idéias num constante processo de construção e reconstrução dos conceitos, em um processo marcado pela intervenção da experimentadora, no papel de professora.

Nesse processo de construção e reconstrução dos conceitos, o papel do professor é de extrema importância. A literatura (Vergnaud, 1983; Carraher, Carraher e Schliemann, 1989; Brito e Taxa, 1999; Schliemann, 2003) tem destacado a importância de o professor conhecer o nível de compreensão das crianças a respeito do conceito trabalhado. Esses dados, de acordo com essas pesquisas, são fundamentais para que o professor possa elaborar e propor atividades mais significativas, intervindo de forma adequada e possibilitando às crianças avançarem no processo de construção dos conceitos trabalhados.

Considera-se que os resultados desta pesquisa ressaltam a importância de o professor identificar e acompanhar o processo de aprendizagem das crianças, a fim de que possa realizar intervenções significativas, pois, no decorrer da solução de todos os problemas que foram propostos às cinco crianças, foram explicitadas

diversas formas de intervenção da experimentadora, no papel de professora, possibilitando às crianças avançarem no processo de aprendizagem do raciocínio combinatório.

Nesse contexto, trabalhando com os conceitos matemáticos a partir da solução de problemas e valorizando as estratégias próprias de cálculo utilizadas pelas crianças, o professor, na sua prática de sala de aula, terá mais elementos para compreender o que as crianças sabem e o que ainda não sabem, intervindo de forma adequada e significativa no processo de aprendizagem.

Como antes foi mencionado, Vergnaud (1991; 1996) já ressaltava a importância de o professor conhecer e acompanhar o processo de aprendizagem das crianças, propondo intervenções adequadas e significativas que permitam à criança avançar gradativamente na construção e compreensão dos conceitos que estão sendo trabalhados.

A literatura estudada indica também que a ação pedagógica do professor em sala de aula, dentro de uma perspectiva de construção de conceitos significativos, deve valorizar a participação ativa das crianças na construção desses conceitos. Nesse contexto, Moro (1998) resalta que a construção dos conceitos acontece também nas trocas entre as crianças; sendo assim, cabe ao professor propiciar momentos em sala de aula para que as crianças possam apresentar e explicar as estratégias de cálculo que utilizaram, validando-as ou questionando-as, provocando, dessa forma, avanços no processo de construção dos conceitos e na elaboração de estratégias cada vez mais eficazes e econômicas.

Esta pesquisa considera também a relevância das interpretações das crianças sobre as soluções notacionais e verbais que utilizaram quando solucionaram os problemas; afinal, as interpretações por elas expressas,

possibilitaram não só a retomada e a reflexão da estratégia de cálculo utilizada, como também as instigou, quando necessário, à busca de uma outra estratégia de cálculo que pudesse solucionar o problema proposto.

Dessa forma, enfatiza-se a relevância das interpretações das crianças sobre as soluções notacionais e verbais que utilizam quando solucionam problemas em sala de aula. Afinal, as interpretações que as crianças expressam sobre suas soluções permitem ao professor compreender, acompanhar o processo de aprendizagem e elaborar intervenções que atendam às necessidades específicas das crianças. Além disso, essas interpretações possibilitam aos professores refletir sobre as estratégias de cálculo utilizadas pelas crianças e, se necessário, instigá-las à busca de uma nova estratégia de cálculo.

As recomendações presentes na literatura que foi pesquisada (English, 1992; Kishimoto, 2000; Mekhmandarov, 2000; Taxa, 2001; Iannece, Nazzaro e Tortora, 2002; Monteiro, Serrazina e Barros, 2002; Monteiro, 2003; Misailadou e Williams, 2003; Moro e Soares, 2006) e os resultados desta pesquisa apontam para a importância do trabalho com problemas que envolvam o raciocínio combinatório, desde o início da escolaridade das crianças.

Da mesma forma que em relação aos diferentes conceitos matemáticos, a construção do raciocínio combinatório, de acordo com Moro e Soares (2006), se faz em diversos níveis, os quais devem ser trabalhados na escola desde cedo, na construção dessa forma de raciocinar.

Nesse contexto, o trabalho com o raciocínio combinatório deve partir sempre do patamar de compreensão em que as crianças se encontram. Nesta pesquisa, durante a solução dos problemas pelas crianças, as intervenções realizadas pela

experimentadora, no papel de professora, procuraram partir sempre do nível de compreensão que as crianças expressavam do raciocínio combinatório.

Com relação a esse aspecto, Vergnaud (1991) pontua em seus estudos a complexidade e a continuidade do processo de aprendizagem na construção dos conceitos matemáticos, em seus diferentes níveis qualitativos, no decorrer de toda a escolarização. No caso específico desta pesquisa sobre as relações multiplicativas de produto de medidas, destaca-se a importância e a necessidade do trabalho com esse conceito na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental (English, 1992; Taxa, 2001).

Pesquisas sobre o raciocínio multiplicativo em sala de aula (Canoas, 1997; Costa, 2003) indicam a importância e a necessidade de os professores conhecerem o conceito matemático com o qual trabalham, para que possam auxiliar seus alunos na construção desse conceito. Somente uma compreensão clara do conceito que será trabalhado permite ao professor organizar as atividades que irá propor em sala de aula.

No caso específico desta pesquisa, destaca-se a importância do conhecimento da teoria de Vergnaud para o ensino das estruturas multiplicativas, na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Os resultados e as indicações desta pesquisa podem contribuir para que os professores repensem o seu trabalho com a Matemática em sala de aula. Conhecendo o processo de construção dos conceitos das crianças e as dificuldades que elas encontram nesse processo, o professor poderá intervir de maneira adequada, favorecendo a aprendizagem significativa.

Por fim, destaca-se a importância de novas pesquisas nesta área. São salientadas também as limitações desta pesquisa, sobretudo pelo número reduzido

de sujeitos estudados, pois ela consiste em um estudo exploratório do qual participaram apenas cinco crianças, que resolveram somente problemas multiplicativos de produto de medidas. Destaca-se também que as intervenções da pesquisadora, no papel de professora, foram realizadas com cada criança individualmente, diferente do que acontece em sala de aula, quando os professores trabalham com muitos alunos ao mesmo tempo.

As investigações realizadas nesta pesquisa podem ser aprofundadas no que se refere ao número de sujeitos; também quanto à análise das intervenções do professor, no processo de construção dos conceitos matemáticos. Cabe ainda lembrar a necessidade de se estudarem as implicações desses e de outros fatores para o processo do ensino e da aprendizagem dos conceitos matemáticos, entre as quais as relações de produto de medidas aqui estudadas.

Há também a possibilidade de estudos que reexaminem os níveis de raciocínio combinatório que serviram de referência para esta pesquisa, conforme as próprias observações de Moro e Soares (2006), mesmo porque, diferente de Moro e Soares (2006), nesta pesquisa também foram utilizados os níveis descritos pelas autoras para examinar não só as soluções notacionais, como também as soluções verbais e interpretativas das crianças.

Também sugere-se a importância de pesquisas que examinem o que ocorre durante a solução de problemas de produto de medidas que envolvem a divisão, não examinados nesta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BARRETO, I. M. A. **Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BECKER, F. **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2003.

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Ministério da Educação: Secretaria da Educação Fundamental, 3. ed. Brasília, 2001.

BRINGUIER, J. C. **Conversando com Jean Piaget.** Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil S. A., 1993.

BRITO, M. R. F. **Psicologia da educação matemática.** Florianópolis: Insular, 2001.

BRITO, M. R. F., ALVES, E. V. e NEVES, L. F. A solução de problemas de estrutura multiplicativa. In: **Anais do IX Congresso Brasileiro de Psicologia do Desenvolvimento.** João Pessoa: SBPD/UFPB, 2003, p. 105.

BRITO, M.R.F.; TAXA, F.O.S. An exploratory study about problem solving in two groups of elementary school students. In: **Abstracts – IX Th European Conference on Developmental Psychology – Human Development at the turn of the century.** Island of Sepses, Greece: 1999, September, p. 51.

BROITMAN, C. El tratamiento didáctico de problemas multiplicativos desde el inicio de la escolaridad básica. **Projeto – Revista de Educação.** Porto Alegre: Artes Médicas, v. 2, n. 3, 2000, p. 38-43.

BRYANT, P.; KORNILAKI, E. Children's development of multiplicative thinking. In: **Abstracts – IX Th European Conference Developmental Psychology – Human Development at the turn of the century.** Island of Spetses, Greece: 1999, September, p. 389.

CANÔAS, S. S. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor nas séries iniciais (1ª. a 4ª. série).** Dissertação de Mestrado em Ensino Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, S. Paulo, 1997.

CARRAHER, T; CARRAHER, D e SCHLIEMANN, A. **Na vida dez na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1995.

CHARNAY, R. **Aprendendo (com) a resolução de problemas.** In: PARRA, C. e SAIZ, I. (Org.) **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 36-47.

COLL, C. **Desenvolvimento Psicológico e Educação: psicologia da educação.** Porto Alegre: ARTMED, 1996.

COSTA, C. A. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

CUNHA, M. C. C. **As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries.** Dissertação de Mestrado em Ensino Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

CURITIBA/SME. **A Escola Municipal e os Ciclos de Aprendizagem** – Projeto de Implantação – Rede Municipal de Ensino de Curitiba. Gestão de 1997 – 2000.

ENGLISH, L. Children's use of domain-specific knowledge and domain-general in novel problem solving. **British Journal of Educational Psychology**: 62, 1992, p. 203-216.

_____. Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. **The Journal of Mathematical Behavior**. 1996, 15 (1), p. 81-112.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

FRANCHI, A. Onde está o problema? **Educação Matemática em Revista**: Ano 2 – nº. 3, 1994, p. 29-33.

_____. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999, p. 155-195.

HINO, K. Process of internalizing new use of multiplication through classroom instruction: a case study. In: NAKAHARA, T. e KOYAMA, M. (Eds.). **Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME**, vol. 3. Hiroshima: Hiroshima University, 2000, p. 49-56.

IANNECE, D.; NAZZARO, P. E TORTORA, R. From naive drawing to Cartesian representation. In: COCKBURN, A. D. e NARDI, E. (Eds.). **Proceedings of the 26th. Annual Conference of the PME**, vol. 1. Norwich: UEA/PME, 2002, p. 323.

KAMII, C. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética (séries iniciais): implicações da teoria de Piaget.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

_____. **Crianças pequenas reinventam a aritmética: implicações da teoria de Piaget.** Porto Alegre: Artmed, 2002.

_____. **Reinventando a aritmética:** implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1996.

_____. **A criança e o número:** implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas: Papirus, 1990.

KISHIMOTO, T. Solving multiplicative word problems with decimal fractions: the effects of proportional reasoning and metacognition. In: NAKAHARA, T. e KOYAMA, M. (Eds.). **Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME**, vol. 3. Hiroshima: Hiroshima University, 2000, p. 295-301.

KORNILAKI, E; NUNES, T. Do multiplication and division develop in parallel or as coordinated operations? In **Abstracts – IX th European Conference Developmental Psychology – Human Development at the turn of the century**. Island of Spetses, Greece: 1999, September, p. 389-390.

LUDKE, M. **A pesquisa qualitativa e o estudo da escola**. Caderno de Pesquisa, 49, maio 84, p. 43-44.

MEIRA, L. O “mundo-real” e o “dia-a-dia” no ensino da matemática. **Educação Matemática em Revista:** Ano 1 – nº. 1, 1993, p. 19-27.

MEKHMANDAROV. I. Analysis and synthesis of the Cartesian product by kindergarten children. In: NAKAHARA, T. e KOYAMA, M. (Eds.). **Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME**, vol. 3. Hiroshima: Hiroshima University, 2000, p. 295-301.

MISAILADOU, C. e WILLIAMS, J. Measuring children’s proportional reasoning, the “tendency” for an additive strategy and the effect of models. In: PATEMAN, N. A.; DOUGHERTY, B. J. e ZILLIOX, J. (Eds.). **Proceedings of 27th. Joint Meeting of PME and PMENA**, vol. 3. Honolulu: PME/University of Hawaii: 2003, p. 293-300.

MONTEIRO, C. Prospective elementary teachers’ misunderstanding in solving ratio and proportion problems. **Proceedings of 27th. Joint Meeting of PME and PMENA**, vol. 3. Honolulu: PME/University of Hawaii: 2003, p. 317-323.

MONTEIRO, C. SERRAZINA, L. E BARROS, E. Children’s strategies to solve proportion problems in a real world context. In: COCKBURN, A. D. e NARDI. E. (Eds.). **Proceedings of the 26th. Annual Conference of the PME**, vol. 1. Norwich: UEA/PME, 2002, p. 301.

MORO, M. L. F. **Aprendizagem construtivista da adição/subtração e interações sociais:** o percurso de três parceiros. Tese de Professor Titular em Psicologia da Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1998.

MORO, M. L. F. e SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, 2006 (manuscrito aceito para publicação, em mimeo).

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAPERT, S. **A máquina das crianças**: repensando a Escola na Era da Informática. Ed. Artmed. 2ª. reimpressão. Porto Alegre, 1994.

PARANÁ/SEED. **Estudos complementares AVA 2000**: análise de resolução em questões de matemática. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação –SEED, 2002.

PARK, J. H., NUNES T. The development of the concept of multiplication. **Cognitive Development** 16, 2001. p. 763-773.

PAVANELLO, R. M. Educação matemática e criatividade. **Educação Matemática em Revista**: Ano 2 – nº. 3, 1994, p. 5-11.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética**. Piaget. Coleção Os Pensadores. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983, p. 104-112.

_____. Remarques sur l'éducation mathématique. In: FRANÇAIS, J. **Remarques on mathematical education**. Math école, 1973, année 12, nº. 58, p. 1-7.

_____. **Para onde vai a educação?** Rio de Janeiro: J. Olympio, 1975.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro. Interciência, 1978.

SCHLIEMANN, A. D. Da matemática da vida diária à matemática da escola. In: SCHLEMAN, A. D. E CARRAHER, D. (Orgs.) **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. 2. ed. - Campinas, SP: Papyrus, 2003, p.11-38.

SCHLIEMANN, A. D. E CARRAHER, D. (Orgs.) **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. 2. ed. - Campinas, SP: Papyrus, 2003.

SCHLIEMANN, A. D., SANTOS, C. M., COSTA, S. C. Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In: ALENCAR, E.S. (org.) **Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem**. 4ª ed. - São Paulo: Cortez, 2001, p. 99-117.

SINCLAIR, A. A notação numérica na criança. In: SINCLAIR, H. (org.) **A produção de notações na criança**: linguagem, número, ritmos e melodias. São Paulo: Cortez, Autores Associados, 1990, p. 71-96.

SMOLE, K. C. E DINIZ, M. I. V. Resolvendo problemas: obstáculos que podem ser superados desde cedo em relação à matemática. **Revista do Professor**, Porto Alegre 15 (58), abr./jun., 1999, p. 10-15.

SPINILLO, A. G. Estratégias na resolução de tarefas de proporção por crianças. In: **Livro de resumos da semana de estudos em psicologia da educação matemática**. Recife, 1995, p. 14-18.

STAREPRAVO, A. R. **Matemática em tempo de transformação**. Curitiba: Renascer, 1997.

_____. **A resolução de problemas de estrutura multiplicativa por crianças da 3ª. série do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação – Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.

TAXA, F. de O. S. **Problemas multiplicativos e processos de abstração em crianças na 3ª. série do ensino fundamental**. Tese de Doutorado em Psicologia Educacional – Faculdade de Educação da Unicamp, Campinas, 2001.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: RESH, R. e LANDAU, M. **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York, Academic Press, 1983, p. 127-174.

_____. Psicologia cognitiva y del desarrollo y didáctica de lãs matemáticas. In: HUARTE, F. (coord.) **Temas actuales sobre psicopedagogía y didáctica**. Spania: Madrid – Narcea, 1988, p. 239-254.

_____. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

_____. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos - Instituto Jean Piaget, 1996, p. 155-191.

ZUNINO, D. L. **A matemática na escola**: aqui e agora. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995.

ANEXO A – PROBLEMAS – 1ª. SESSÃO

1. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

2. Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

3. Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

4. Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

ANEXO B – PROBLEMAS – 2ª. SESSÃO

5. Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

6. Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

7. Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

8. Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

ANEXO C – RELATÓRIO DO ESTUDO PILOTO

INTRODUÇÃO

Este estudo piloto busca verificar a viabilidade dos procedimentos utilizados para a coleta e para o registro de dados, para estudo cuja finalidade é a de identificar a compreensão que crianças da terceira série apresentam das estruturas multiplicativas do tipo produto de medidas.

Neste processo se fez necessária a intervenção intencional e específica da experimentadora na elaboração dos problemas que foram propostas e na coordenação das situações que guiaram a participação das crianças.

No caso deste estudo, foram utilizados oito problemas de multiplicação do tipo produto de medidas, apresentados por escrito às crianças, com o intuito de verificar se os procedimentos utilizados permitiriam a coleta de dados para posterior análise da elaboração das crianças ao representarem sua compreensão do conceito de multiplicação envolvido nesses problemas e das intervenções realizadas pela experimentadora, no papel de professora, em sala de aula.

O principal referencial teórico está nas proposições de Gérard Vergnaud (1983; 1988; 1991; 1996) sobre campos conceituais e sobre as estruturas multiplicativas.

OBJETIVOS

Verificar a viabilidade dos procedimentos para o registro e para a coleta de dados do estudo sobre “A solução de problemas de produto de medidas de crianças da 3ª. série do Ensino Fundamental e a intervenção do professor”, detectando pontos positivos e pontos negativos: a) na intervenção intencional e específica da

experimentadora; b) na elaboração dos problemas que foram propostas; c) na coordenação das situações que guiaram a participação das crianças.

METODOLOGIA

Foram propostos oito problemas, por escrito, para três crianças, (TAY – 9; 3, THA – 9; 10 e SUE – 9; 10), alunas da 4ª. série do Ensino Fundamental, de uma escola estadual de Curitiba. Essas crianças foram escolhidas por conveniência, por morarem perto da residência da experimentadora.

PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

Materiais: Uma caneta esferográfica com tinta azul, vinte e quatro folhas de papel sulfite tamanho A4 (oito para cada criança; em cada uma das folhas estavam impressos os problemas propostos) e um estojo com doze canetas hidrográficas coloridas.

Para a coleta de dados, foram realizadas duas sessões de solução de problemas, com cada criança, individualmente, no período da manhã de dois dias (vinte e seis de maio e vinte e nove de maio). Cada criança participou apenas das suas duas sessões, resolvendo os oito problemas, quatro em cada uma das duas sessões.

Os problemas, envolvendo o raciocínio multiplicativo do tipo produto de medidas, foram apresentados por escrito pela experimentadora, no papel da professora, em atividade na sala de aula.

Foram disponibilizadas às crianças: 1 folha de sulfite A4 (para cada um dos problemas, 1 caneta esferográfica com tinta azul e 6 canetinhas hidrográficas coloridas, para que pudessem marcar suas respostas).

Os problemas utilizados envolviam uma multiplicação com o valor das medidas elementares e a criança deveria encontrar o valor do produto daquelas medidas dadas, combinando duas ou mais medidas elementares. Os problemas utilizados estão relacionados por sessão.

Eis os oito problemas:

1ª. SESSÃO:

1. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de seis tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?
2. Em uma loja de carros tem 5 gols, 5 palios e 4 corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?
3. Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?
4. Em uma sorveteria por quilo existem sete sabores de sorvete, três tipos de coberturas e dois tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

2ª. SESSÃO:

5. Uma papelaria vende mochilas de dois tamanhos (pequena e grande) e em cinco cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?
6. Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?
7. Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?
8. Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei dois tipos de queijo, três tipos de patê e quatro tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

Os problemas foram escolhidos pelo fato de contemplarem duas ou três variáveis, característica essa combinada a valores altos e baixos para as variáveis. Outro critério que marcou a escolha dos oito problemas se deveu ao fato de que eles envolviam uma multiplicação, pois considera-se esta solução menos complexa que a divisão. Além disso, acredita-se que, ao final da terceira série, as crianças estejam mais familiarizadas com o algoritmo da multiplicação.

Há ainda mais dois critérios que se fizeram presentes na escolha dos problemas: nos problemas 1, 4, 5 e 8, os valores apareceram por extenso; os problemas 2 e 6 envolveram os valores distractores.

Os oito problemas foram apresentados às crianças no formato escrito.

O trabalho foi desenvolvido em uma mesa retangular como apoio para a criança registrar suas notações. A experimentadora e a criança permaneceram sentadas, frente a frente, durante a solução dos problemas.

Para a proposição dos problemas, foi elaborado previamente um roteiro, com procedimentos básicos, que foram utilizados para iniciar a primeira e a segunda sessão.

ROTEIRO:

Explicação para a criança da atividade que será desenvolvida. “Hoje vamos resolver problemas! Você já resolveu problemas na escola?”

Apresentação do problema digitado em uma folha de papel sulfite (A4) – anexo 1 – na qual a criança irá registrar a resolução, utilizando para isso a caneta esferográfica preta ou canetinhas hidrográficas coloridas.

Orientação sobre a forma de registro e os materiais disponíveis para a criança utilizar. “Utilizando a caneta ou as canetinhas e a folha de papel sulfite, você vai resolver esse problema do seu jeito. Você pode resolver o problema do jeito que você quiser: pode usar contas, desenhos, risquinhos ou o que você preferir. Se você quiser apagar alguma coisa, você risca com um X e começa de novo”.

Questão para verificar se a criança queria ler o problema ou gostaria de que fosse lido pela experimentadora. “Você quer ler o problema sozinha ou quer que eu leia para você?”

O roteiro acima descrito foi utilizado para apresentar às crianças, da forma mais clara, os problemas.

Quando cada criança finalizava suas notações referentes à resolução do problema apresentado, era questionada pela experimentadora a explicar os procedimentos e interpretar as notações utilizadas. A solicitação das explicações seguiu o estilo clínico-crítico, proposto por Piaget (1983).

A experimentadora elaborou questões que se fizeram necessárias para captar mais elementos sobre a compreensão da criança e para melhor analisar o seu raciocínio. Algumas das questões elaboradas estão relacionadas abaixo:

- “Que resposta você encontrou?”
- “O que o problema estava perguntando?”
- “O bolo de morango pode ser de quantos tamanhos? E o de chocolate? E o de brigadeiro? E o de coco? E o de doce de leite? E o de banana?”
- “Tem alguma conta que você aprendeu na escola e que possa representar o que você acabou de me explicar?”
- “Por que você usou o 3×6 ? O que o número 3 representa? O que o número 6 representa?”
- “Por que você fez uma conta de vezes?”
- “Explique-me para que eu possa entender como você pensou?”
- “Quantos tipos de carros diferentes têm? E com quantos tipos de roda esses carros podem ser combinados?”
- “Que tal se você tentasse usar desenhos?”
- “Você entendeu por que deu esse resultado? Então me explique:”
- “Será que é possível somar 15 com 12 para responder a esse problema?”
- “Um personagem poderia estar em quantas camisetas? E 2? E 3?”
- “O número 3 está se referindo a quê? E o número 30?”
- “Deixa eu lhe fazer uma pergunta: com quantas bermudas essa camiseta pode combinar? E essa outra? E essa outra? Será que é possível responder com essa conta que você fez?”
- “Você não gostaria de tentar fazer essa conta novamente?”
- “Por que você escolheu fazer uma conta de mais?”
- “A mochila verde pode ser comprada de quantos tamanhos? E a vermelha? E a azul? E a amarela? E a preta?”
- “De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?”

PROCEDIMENTOS DE REGISTRO DE DADOS

Para o registro dos dados, as sessões foram filmadas em vídeo, na íntegra, contendo os seguintes dados: ações, verbalizações, produção de registros gráficos.

ANÁLISE DOS RESULTADOS DO ESTUDO PILOTO

Com relação à filmagem, a mesma foi analisada junto com a pessoa que filmou. Percebeu-se então a necessidade de a pessoa que fez a filmagem ficar ao lado da experimentadora. Afinal, as crianças olhavam para a experimentadora a todo o momento. Verificou-se também a necessidade de a filmadora permanecer ligada na tomada e não se utilizar bateria, pois esta poderia acabar e haveria necessidade de substituí-la. O local para a filmagem deveria ter pouco ou nenhum barulho para que não ocorresse esse tipo de interferência no áudio. Além disso, percebeu-se também a necessidade de focar mais o rosto da criança.

Refletindo sobre a quantidade de sessões e a quantidade de problemas em cada sessão, verificou-se que 4 problemas são suficientes para cada uma das sessões. Considera-se que a quantidade de sessões parece estar adequada, pois, observando os registros produzidos pelas crianças, parece ser possível realizar a análise do processo de compreensão dos problemas propostos.

As maiores dificuldades que o estudo piloto revelou estão centradas na intervenção proposta pela experimentadora: esta não apresentou contra-exemplos; não elaborou muitas questões para que as crianças pudessem refletir sobre os problemas que envolviam três variáveis e os valores distractores.

Este estudo piloto trouxe valiosas contribuições, dado que possibilitou que fossem revelados os pontos positivos da coleta de dados, ressaltando os pontos negativos que devem ser superados para a coleta de dados da pesquisa. Ressalta-se a importância da experimentadora programar e refletir melhor sobre as diversas formas de intervenção, a fim de melhorá-las no decorrer da coleta de dados.

Esses resultados indicam a importância de o professor que atua com as séries iniciais do Ensino Fundamental conhecer o nível de compreensão que as

crianças possuem dos conceitos matemáticos para poder realizar formas de intervenção mais adequadas. Também apontam para a necessidade de esse professor planejar uma intervenção que possibilite às crianças avançarem nas suas compreensões dos conceitos matemáticos trabalhados.