UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO HENRIQUE FERNANDES ROSA

PERTURBAÇÕES DE OPERADORES GLOBALMENTE GEVREY HIPOELÍTICOS

CURITIBA

2018

EDUARDO HENRIQUE FERNANDES ROSA

PERTURBAÇÕES DE OPERADORES GLOBALMENTE GEVREY HIPOELÍTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov
Coorientador: Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva

CURITIBA
2018

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

R788p Rosa, Eduardo Henrique Fernandes
Perturbações de operadores globalmente Gevrey hipoelíticos [recurso eletrônico] / Eduardo Henrique Fernandes Rosa. – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

Orientador: Alexandre Kirilov – Coorientador: Fernando de Ávila Silva.

1. Perturbações (Matemática). 2. Equações diferenciais – Soluções numéricas. 3. Sturm-Liouville, Equação de. 4. Funções Gevrey Periódicas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kirilov, Alexandre. III. Silva, Fernando de Ávila. IV .Título.

CDD: 515.35

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **EDUARDO HENRIQUE FERNANDES ROSA** intitulada: **Perturbações de Operadores Globalmente Gevrey Hipoelíticos**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2018.

ALEXANDRE KIRILOV
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

CLÉBER DE MEDEIRA
Avaliador Interno (UFPR)

GERSON PETRONILHO
Avaliador Externo (UFSCAR)

RESUMO

Neste trabalho estudamos a influência de termos de ordem zero (perturbações) sobre a hipoeliticidade G^s global de operadores da forma $\partial_t - c(t)\partial_x$, supondo que $c(t)$ é uma função Gevrey de variável real. Mostramos que quando $\mathrm{Im}(c(t))$ não muda de sinal e não é identicamente nula, o operador perturbado continua sendo globalmente G^s hipoelítico; e quando $\mathrm{Im}(c(t))$ é identicamente nula, a hipoeliticidade G^s global do operador perturbado é equivalente a hipoeliticidade G^s global de um operador a coeficientes constantes conjugado. Também analisamos perturbações em espaços de dimensão maior que 2 obtendo uma interessante relação entre a hipoeliticidade G^s global de do operador perturbado e a injetividade de um operador conjugado.

Palavras-chave: Funções Gevrey Periódicas, Hipoeliticidade, Resolubilidade, Perturbações, Números de Liouville

ABSTRACT

In this work we study the influence of zero order terms (perturbations) on the global G^s hypoelipticity of operators in the form $\partial_t - c(t)\partial_x$, assuming that $c(t)$ is a Gevrey function of real variable. We show that when $\mathrm{Im}(c(t))$ does not change sign and is not identically null, the perturbed operator remains globally G^s hypoeliptic, and when $\mathrm{Im}(c(t))$ is null, the global G^s hypoelipticity of the perturbed operator is equivalent to the global G^s hypoelipticity of a constant coefficient operator conjugated. We also analyze perturbations in spaces of dimension greater than two obtaining an interesting relation between the global G^s hypoelipticity of the perturbed operator and the injectivity of a conjugated operator.

Keywords: Periodic Gevrey Functions, Hypoelipticity, Solvability, Perturbations, Liouville Numbers

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo dessa dissertação é abordar o seguinte problema: sabendo que o operador diferencial $\partial_t - c(t)\partial_x$ é globalmente G^s hipoelítico, para quais funções $\lambda \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ o operador perturbado $\partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x)$ ainda é globalmente G^s hipoelítico?

Recordamos que o operador P é dito globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$ se as condições

$$u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \text{ e } Pu \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$$

implicam que

$$u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Para responder essa pergunta, o primeiro passo é caracterizar a hipoeliticidade G^s global para os operadores diferenciais da forma $P = \partial_t - c(t)\partial_x$.

Na dissertação de mestrado de L. Coelho [5], o autor estuda a hipoeliticidade G^s global desta mesma classe de operadores, porém com a condição mais forte do coeficiente $c(t)$ ser analítico-real. Essa exigência de analiticidade permite o uso da fórmula integral de Cauchy para estimar as derivadas do candidato a solução, o que simplifica substancialmente algumas demonstrações.

Neste trabalho estendemos o resultado de L. Coelho, exigindo que a função $c(t)$ seja de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Para isso foi necessário modificar algumas técnicas de demonstração, principalmente na construção da solução singular no caso em que $\mathrm{Im}(c)$ muda de sinal. A caracterização que obtivemos foi a seguinte:

Teorema 3.5. *Considere o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$, com $c(t) = a(t) + ib(t)$ de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.*

1. *Se $s > 1$ e $b \not\equiv 0$, então P é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, b não muda de sinal.*
2. *Se $s \geq 1$ e $b \equiv 0$, então P é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se,*
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(r)dr$$
não é racional nem exponencial Liouville de ordem s.

Quando já havíamos terminado a demonstração deste resultado, tomamos conhecimento do artigo [4], de A. Bergamasco, P. Dattori e R. Gonzalez, no qual os autores estudaram a hipoeliticidade e resolubilidade G^s global para uma classe mais ampla de operadores diferenciais parciais lineares, a qual inclui nosso operador P.

No capítulo 4, seguindo um roteiro proposto por L. Takahashi [9], fazemos um breve estudo acerca da resolubilidade G^s global do operador P. Este estudo foi feito em dimensão 2 e $n+2$. O objetivo desse capítulo é servir de suporte para o estudo de perturbações feito no capítulo seguinte.

Finalmente, no capítulo 5, fornecemos algumas respostas para nossa pergunta inicial.

Teorema 5.3. *Se $Im(c)$ não muda de sinal e não é identicamente nula, e $\lambda \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, então o operador perturbado $L = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x)$ é globalmente G^s hipoelítico.*

Teorema 5.4. *Sejam $a = a(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ uma função a valores reais, $\lambda = \lambda(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e considere os seguintes operadores perturbados*

$$L = \partial_t - a(t)\partial_x - \lambda(t,x), \quad \widetilde{L} = \partial_t - a(t)\partial_x - \lambda_{00} \quad e \quad \widetilde{\widetilde{L}} = \partial_t - a_0\partial_x - \lambda_{00}$$

com $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} a(r)dr$ *e* $\lambda_{00} = (2\pi)^{-2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(t,x)dtdx.$

Se a_0 não é racional nem exponencial Liouville de ordem s, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *L é globalmente G^s hipoelítico.*
2. *$\widetilde{L}$ é globalmente G^s hipoelítico.*
3. *$\widetilde{\widetilde{L}}$ é globalmente G^s hipoelítico.*
4. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|k_1 - a_0k_2 - \lambda_{00}| \geq e^{-\varepsilon|(k_1,k_2)|^{1/s}}, \quad para \quad |(k_1,k_2)| \geq C_\varepsilon.$$

Aumentando a dimensão, escreveremos $(t,x,y) \in \mathbb{R}^{n+2}$, com $n \geq 1$, significando que $t,x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ não é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^{n+2}$. Entretanto faz sentido perguntar se alguma perturbação por função Gevrey será globalmente G^s hipoelítica.

Neste caso obtivemos um resultado muito interessante, o qual evidencia a relação entre a hipoeliticidade G^s global de L em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ e a injetividade de um operador associado.

Teorema 5.7. *Dadas $c \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$, considere os seguintes operadores*

$$L = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x,y) \ \ e \ \ L_{\lambda_{00}} = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda_{00},$$

com $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} c(r)dr$ *e* $\lambda_{00} = \dfrac{1}{(2\pi)^{n+2}}\displaystyle\int_{[0,2\pi]^{n+2}} \lambda(t,x,y)dtdxdy.$

Se Im(c) não é identicamente nula e não muda de sinal, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $L_{\lambda_{00}}$ *é injetivo em* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$.

2. $\lambda_{00} \notin i(\mathbb{Z} + c_0\mathbb{Z})$.

3. $L_{\lambda_{00}}$ *é globalmente* G^s *hipoelítico.*

4. L_λ *é globalmente* G^s *hipoelítico.*

2 PRÉ-REQUISITOS

2.1 Notações

Utilizamos as seguintes notações: $\mathbb{N}$ para o conjunto dos números naturais (inteiros positivos), $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ para o conjunto dos números inteiros não negativos, $\mathbb{Z}$ para o conjunto dos números inteiros, e $\mathbb{N}_0^n$ para o conjunto dos multi-índices, ou seja, n-uplas $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com coordenadas $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, para $j = 1, \ldots, n$.

Para α e β multi-índices e $t \in \mathbb{R}^n$ também adotamos as seguintes notações:

- $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$ (comprimento do multi-índice);
- $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$;
- $\beta \leq \alpha \iff \beta_j \leq \alpha_j,\ j = 1, \ldots, n$;
- se $\beta \leq \alpha$, então $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ e
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!};$$
- $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n}$;
- $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, com $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial_{t_j}}$;
- $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, com $D_j = \dfrac{1}{i}\partial_j$.

Para t e x em $\mathbb{R}^n$ adotamos o produto interno usual $t \cdot x = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$.

Duas fórmulas de grande utilidade neste trabalho são:

- (**Regra de Leibniz**) Se ϕ e ψ são de classe C^k e $|\alpha| \leq k$, então
$$D^\alpha \phi\psi = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\phi D^\beta \psi.$$
- (**Fórmula de Faà di Bruno**) Se f e g são funções de classe C^k então
$$(f \circ g)^{(k)}(x) = \sum_{\Delta(k)} \frac{k!}{\alpha!} f^{(|\alpha|)}(g(x)) \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!}\right)^{\alpha_j},$$
para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo $\Delta(k) = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k : \sum_{j=1}^{n} j\alpha_j = k\}$.

Observamos que quando f é uma função real a valores complexos (ainda de classe C^k) a fórmula de Faà di Bruno contínua válida. De fato, basta notar que

$$(f \circ g)^{(k)}(x) = \mathrm{Re}(f \circ g)^{(k)}(x) + i\mathrm{Im}(f \circ g)^{(k)}(x)$$

e aplicar a Fórmula de Faà di Bruno para funções reais.

2.2 Funções Gevrey e Ultradistribuições

Nesta seção apresentamos os principais espaços funcionais abordados neste trabalho, a saber: os espaços das funções Gevrey e Ultradistribuições 2π-periódicas em $\mathbb{R}^n$.

Um estudo mais detalhado de tais espaços, assim como as definições e provas dos resultados desta seção podem ser encontrados em [8].

Denotaremos por $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ o espaço da funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $2\pi-$periódicas infinitamente diferenciaiveis .

Dizemos que uma função $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é Gevrey periódica de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$, quando existir $C > 0$ tal que

$$|D^\alpha f(t)| \leq Ch^{|\alpha|}(\alpha!)^s,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ t \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto das funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$ é um espaço vetorial, denotado $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Da definição acima podemos concluir que $G^{s,h_1}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset G^{s,h_2}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, se $h_1 \leq h_2$, e $G^{s_1,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset G^{s_2,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, se $1 \leq s_1 \leq s_2$.

Para cada $f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\|f\|_{s,h} \doteq \sup\{|D^\alpha f(t)|h^{-|\alpha|}(\alpha!)^{-s} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, t \in \mathbb{R}^n\},\ f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Mostra-se que $\|f\|_{s,h}$ define uma norma em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, segundo a qual este espaço é de Banach. Além disso, $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial fechado em relação a multiplicação de funções e em relação a diferenciação.

Definição 2.1. *Dizemos que $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é uma função Gevrey 2π-periódica, de ordem $s \geq 1$, quando existir alguma amplitude $h > 0$ tal que $f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções Gevrey 2π-periódicas de ordem s, isto é,*

$$G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{h>0} G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 2.2. *Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica-real 2π-periódica, então $f \in G^{1,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ para alguma amplitude $h > 0$.*

Além disso, quando $s > 1$ o espaço da funções analíticas-reais $C^w_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto próprio de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, que por sua vez é um subconjunto próprio de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.3. *Fixada uma sequência* $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *estritamente crescente de números reais positivos tal que* $h_j \longrightarrow \infty$ *obtêm-se*

$$G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.4. *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Dizemos que* f_k *converge para* f *no sentido de* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *quando existir* $h_j > 0$ *tal que* $f_k \in G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* k, $f \in G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\| f_k - f \|_{s,h_j} \longrightarrow 0$. *Denotamos isso por* $f_k \longrightarrow f$ *em* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.5. *Existe uma topologia em* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *tal que a convergência de sequências nessa topologia coincide com a definição 2.4.*

Vamos denotar o dual topológico de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ por $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o espaço dos funcionais lineares $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuos. Chamamos os elementos de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ de ultradistribuições Gevrey periódicas, ou apenas ultradistribuições periódicas.

Proposição 2.6. *As seguintes afirmações a respeito do funcional linear* $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *são equivalentes:*

(i) *u é contínuo;*

(ii) *para todo* $\varepsilon > 0$, *existe uma constante* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|\langle u, f\rangle| \leq C_\varepsilon \sup\{|D^\alpha f(t)|\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s} : t \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n_0\},\ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n);$$

(iii) *se* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *que converge para zero no sentido de* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *então a sequência de números complexos* $(\langle u, f_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para zero.*

Dada uma distribuição $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ (dual topológico de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$), verifica-se que a restrição de u a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ resulta em um elemento de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, como $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, podemos identificar $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ com um subespaço de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ de forma injetiva. Desta forma podemos escrever

$$G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \subset C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.7. *Sejam* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Diremos que* u_k *converge para* u *no sentido de* $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *e escrevemos* $u_k \longrightarrow u$ *em* $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *se para toda* $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *tivermos*

$$\langle u_k - u, f\rangle \longrightarrow 0.$$

Definição 2.8. *Dados* $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ *a* $\alpha-$*ésima derivada de* u, *denotada* $D^\alpha u$, *e o produto de* u *por* f, *denotado* uf, *são as ultradistribuições periódicas definidas por*

$$\langle D^\alpha u, g\rangle = \langle u, (-1)^{|\alpha|}D^\alpha g\rangle \quad e \quad \langle uf, g\rangle = \langle u, fg\rangle,$$

para toda $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.1 Séries de Fourier

Dado $\xi \in \mathbb{Z}^n$, o ξ-ésimo coeficiente de Fourier de uma função $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{[0,2\pi]^n} f(x) e^{-i\xi\cdot t} dx,$$

e o ξ-ésimo coeficiente de Fourier de uma ultradistribuição $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n} < u, e^{-i\xi\cdot t} > .$$

Considere agora os seguintes espaços de sequências de números complexos:

$$S_s = \{(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n} : \exists\, C > 0, \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } |a_\xi| \leq C e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n\}; \text{ e}$$

$$S'_s = \{(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n} : \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |a_\xi| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Teorema 2.9. *Dada uma sequência $(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \in S_s$, a função*

$$f(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} a_\xi e^{i\xi\cdot t},\ t \in \mathbb{R}^n,$$

está bem definida e a convergência desta série é no sentido $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\widehat{f}(\xi) = a_\xi,\ \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Reciprocamente, dada $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ a sequência $(\widehat{f}(\xi))_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \in S_s$ e

$$f(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot t},\ t \in \mathbb{R}^n,$$

sendo a convergência da série no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.10. *Dada uma sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \in S'_s$, o elemento*

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{i\xi\cdot t},$$

pertence a $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e a convergência da série é no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\widehat{u}(\xi) = a_\xi,\ \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Reciprocamente, dada $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ a sequência $(\widehat{u}(\xi))_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \in S'_s$ e vale que

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi\cdot t},$$

sendo a convergência em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.2 Séries Parciais de Fourier

Dados $p, q, n \in \mathbb{N}$ tais que $n = p + q$, escrevemos $(t, x) \in \mathbb{R}^n$ para indicar que $t \in \mathbb{R}^p$ e $x \in \mathbb{R}^q$. Assim, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^q$, definimos o ξ-ésimo coeficiente parcial de Fourier de uma função $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, em relação a variável x, por

$$\widehat{f}(t,\xi) = (2\pi)^{-q} \int_{[0,2\pi]^q} f(t,x) e^{-i\xi\cdot x} dx,\ (t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q.$$

De modo análogo, o ξ-ésimo coeficiente parcial de Fourier de uma ultradistribuição $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, em relação a variável x, por

$$\langle \widehat{u}(t,\xi), g(t)\rangle = (2\pi)^{-q} \langle u, g(t) e^{-i\xi\cdot x}\rangle,\ g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Teorema 2.11. *Se $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f}(\cdot,\xi) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e*

$$f(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^q} \widehat{f}(t,\xi) e^{i\xi\cdot x},\ (t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

sendo a convergência desta série no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, existem $C, \varepsilon, h_\ell > 0$ tais que

$$|D^\alpha \widehat{f}(\cdot,\xi)| \leq C h_\ell^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ t \in \mathbb{R}^p,\ \alpha \in \mathbb{Z}^p,\ \xi \in \mathbb{Z}^q.$$

Reciprocamente, dada uma sequência $(f_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^q}$ em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ para a qual existem $C, \varepsilon, h_\ell > 0$ tais que

$$|D^\alpha f_\xi(t)| \leq C h_\ell^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ t \in \mathbb{R}^p,\ \alpha \in \mathbb{Z}^p,\ \xi \in \mathbb{Z}^q.$$

então a função

$$f(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^q} f_\xi(t) e^{i\xi\cdot x},\ (t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

está bem definida e a convergência é no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Além disso, $\widehat{f}(\cdot,\xi) = f_\xi$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}^q$.

Definição 2.12. *Dados $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e $\xi \in \mathbb{Z}^q$, definimos a ultradistribuição periódica*

$$ue^{i\xi\cdot x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$$

como sendo

$$\langle ue^{i\xi\cdot x}, f(t,x)\rangle = (2\pi)^q \langle u, \widehat{f}(t,\xi)\rangle,\ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Teorema 2.13. *Se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{u}(\cdot,\xi) \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e*

$$u(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^q} \widehat{u}(t,\xi) e^{i\xi\cdot x},$$

sendo a convergência desta série no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ e $h_\ell > 0$ existe $C = C_{\varepsilon,h_\ell} > 0$ tal que

$$|\langle \widehat{u}(\cdot,\xi), g\rangle| \leq C\|g\|_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ g \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(R^p),\ \xi \in \mathbb{Z}^q.$$

Reciprocamente, dada uma sequência $(u_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^q}$ *em* $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *para a qual, dados* $\varepsilon > 0$ *e* $h_\ell > 0$ *existe* $C = C_{\varepsilon,h_\ell} > 0$ *satisfazendo*

$$|\langle u_\xi, g\rangle| \leq C\|g\|_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ g \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(R^p),\ \xi \in \mathbb{Z}^q,$$

então

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^q} u_\xi e^{i\xi\cdot x}$$

está bem definida e a convergência desta série é no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$*. Além disso,* $\widehat{u}(\cdot,\xi) = u_\xi$*, para todo* $\xi \in \mathbb{Z}^q$*.*

2.3 Produto Tensorial de Ultradistribuições Periódicas

Como não encontramos referências para o tópico desta seção, decidimos descrevê-la com mais detalhes.

Dadas $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ e $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, definimos

$$\begin{aligned} u\otimes v : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f(t,x) &\longmapsto \langle u(t), \langle v(x), f(t,x)\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Para verificar que $u\otimes v$ está bem definida basta mostrar que a aplicação $g(t) = \langle v(x), f(t,x)\rangle$, $t \in \mathbb{R}^p$, pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$, qualquer que seja $f(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ dada.

Lema 2.14. *Considere* $g(t)$ *como definida acima. Então* $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ *e*

$$\partial^\alpha g(t) = \langle v(x), \partial^{(\alpha,0)} f(t,x)\rangle,\ \alpha \in \mathbb{N}^p_0.$$

Demonstração.

Vamos inicialmente provar que g é contínua, para isso sejam $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^p$ e $\bar{t} \in \mathbb{R}^p$ tais que $t_k \longrightarrow \bar{t}$. Veja que

$$g(t_k) - g(\bar{t}) = \langle v(x), f(t_k,x) - f(\bar{t},x)\rangle.$$

Logo, basta mostrarmos que $f(t_k,\cdot) - f(\bar{t},\cdot)$ converge para zero em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, pois assim da continuidade da v seguirá que $g(t_k) \longrightarrow g(\bar{t})$.

Como $f(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ segue que existe $h_\ell l > 0$ tal que $f(t,x)$, $\partial_{x_i} f(t,x)$ e $\partial_{t_j} f(t,x)$ pertencem a $G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$, para $i = 1, \ldots, q$, $j = 1 \ldots, p$ e $f(t,\cdot) \in G^{s,h_\ell l}_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}^q$.

Dado $\beta \in \mathbb{N}^q_0$ e $v_k(\theta) = (1-\theta)(t_k,x) - \theta(\bar{t},x)$, segue pela desigualdade do valor médio que

$$|\partial^{(0,\beta)} f(t_k,x) - \partial^{(0,\beta)} f(\bar{t},x)| \leq |(t_k,x) - (\bar{t},x)| \sup_{\theta\in[0,1]} |(\partial^{(0,\beta)} f)'(v_k(\theta))|$$

$$
\begin{aligned}
&= |t_k - \bar{t}\,| \sup_{\theta \in [0,1]} |\langle \nabla \partial^{(0,\beta)} f(v_k(\theta)), \cdot \rangle| \\
&= |t_k - \bar{t}\,| \sup_{\theta \in [0,1]} \sup_{|(t,x)|=1} |\langle \nabla \partial^{(0,\beta)} f(v_k(\theta)), (t,x) \rangle| \\
&\leq |t_k - \bar{t}\,| \sup_{\theta \in [0,1]} \sup_{|(t,x)|=1} |\nabla \partial^{(0,\beta)} f(v_k(\theta))||(t,x)| \\
&= |t_k - \bar{t}\,| \sup_{\theta \in [0,1]} |\nabla \partial^{(0,\beta)} f(v_k(\theta))| \\
&\leq |t_k - \bar{t}\,| \sup_{(t,x)} |\nabla \partial^{(0,\beta)} f(t,x)|.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
|\nabla \partial^{(0,\beta)} f(t,x)| &\leq \sum_{j=1}^{p} |\partial_{t_j} \partial^{(0,\beta)} f(t,x)| + \sum_{k=1}^{p} |\partial_{x_k} \partial^{(0,\beta)} f(t,x)| \\
&= \sum_{j=1}^{p} |\partial^{(0,\beta)} \partial_{t_j} f(t,x)| + \sum_{k=1}^{p} |\partial^{(0,\beta)} \partial_{x_k} f(t,x)| \\
&\leq C(\beta!)^s h_\ell^{|\beta|},
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
|\partial^{(0,\beta)} f(t_k,x) - \partial^{(0,\beta)} f(\bar{t},x)| \leq |t_k - \bar{t}\,| C(\beta!)^s h_\ell^{|\beta|}, \; x \in \mathbb{R}^q, \; \beta \in \mathbb{N}_0^q, \; k \in \mathbb{N}.
$$

Observe agora que

$$
\begin{aligned}
\| f(t_k,\cdot) - f(\bar{t},\cdot) \|_{s,h_\ell l} &= \sup_{x,\,\beta} |\partial^{(0,\beta)} f(t_k,x) - \partial^{(0,\beta)} f(\bar{t},x)| (\beta!)^{-s} h_\ell^{-|\beta|} \\
&\leq |t_k - \bar{t}\,| C \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

o que implica na continuidade de g.

Para mostrar que g é de classe C^1, seja $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que $a_k \to 0$. Pelo teorema do valor médio temos

$$
a_k^{-1}(g(t + a_k e_j) - g(t)) = \langle v(x), a_k^{-1}(f(t + a_k e_j, x) - f(t,x)) \rangle = \langle v(x), \partial_{t_j} f(t + \tilde{a}_k e_j, x) \rangle,
$$

sendo $0 < |\tilde{a}_k| < |a_k|$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Analogamente ao que foi feito na prova da continuidade de g, prova-se que

$$
\partial_{t_j} f(t + \tilde{a}_k e_j, \cdot) \longrightarrow \partial_{t_j} f(t,\cdot), \text{ em } G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)
$$

Utilizando a continuidade da v segue que $\partial_{t_j} g(t) = \langle u(x), \partial_{t_j} f(t,x) \rangle$. De forma análoga a prova da continuidade de g conclui-se a continuidade de $\partial_{t_j} g$, logo g é C^1.

Finalmente, por indução no comprimento do multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$, mostra-se que $\partial^\alpha g$ é contínua e que

$$
\partial^\alpha g(t) = \langle v(x), \partial^{(\alpha,0)} f(t,x) \rangle.
$$

Para provar que g é uma função Gevrey, como $f \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ segue que

$$\sup_{t,\alpha}\sup_{x,\beta}|\partial^{(\alpha,\beta)}f(t,x)| \leq \| f \|_{s,h_\ell} (\alpha!)^s(\beta!)^s h_\ell^{|\alpha|}h_\ell^{|\beta|}.$$

Seja $\varepsilon = h_\ell^{-1}$. Como $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$ segue que existe $C_\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$|\langle v, h(x)\rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{x,\beta}|\partial^\beta h(x)|\varepsilon^{|\beta|}(\beta!)^{-s},\ h \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q).$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha g(t)| &= |\langle u(x), \partial^{(\alpha,0)}f(t,x)\rangle| \\
&\leq C_\varepsilon \sup_{x,\beta}|\partial^{(\alpha,\beta)}f(t,x)|\varepsilon^{|\beta|}(\beta!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon \sup_{x,\beta}|\partial^{(\alpha,\beta)}f(t,x)|h_\ell^{-|\alpha|}h_\ell^{-|\beta|}(\alpha!)^{-s}(\beta!)^{-s}h_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s \\
&\leq C_\varepsilon h_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s \sup_{x,\beta}\sup_{t,\alpha}|\partial^{(\alpha,\beta)}f(t,x)|h_\ell^{-|\alpha|}h_\ell^{-|\beta|}(\alpha!)^{-s}(\beta!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon \| f \|_{s,h_\ell l} (\alpha!)^s h_\ell^{|\alpha|},
\end{aligned}$$

para $t \in \mathbb{R}^p_t$ e $\alpha \in \mathbb{N}^p_0$, e portanto $g \in G^{s,h_\ell}(\mathbb{R}^p_t)$.

A periodicidade de g é clara. Isso completa a demonstração. □

O lema anterior garante que $u \otimes v$ está bem definida, sendo obviamente $u \otimes v$ é linear. Vamos provar que $u \otimes v$ é contínua. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Da continuidade de u e v segue que existe $C_\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$|\langle v, h(t)\rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{t,\alpha}|\partial^\alpha h(t)|\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s},\ h \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t),$$

e

$$|\langle v, h(x)\rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{x,\beta}|\partial^\beta h(x)|\varepsilon^{|\beta|}(\beta!)^{-s},\ h \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x).$$

Dada $f(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle u \otimes v, f(t,x)\rangle| &= |\langle u(t), \langle v(x), f(t,x)\rangle\rangle| \\
&\leq C_\varepsilon \sup_{t,\alpha}|\partial^\alpha_t\langle v(x), f(t,x)\rangle|\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon \sup_{t,\alpha}|\langle v(x), \partial^{(\alpha,0)}f(t,x)\rangle|\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s} \\
&\leq C_\varepsilon \sup_{t,\alpha} C_\varepsilon \sup_{x,\beta}|\partial^{(\alpha,\beta)}f(t,x)|\varepsilon^{|\beta|}(\beta!)^{-s}\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon^2 \sup_{t,\alpha}\sup_{x,\beta}|\partial^{(\alpha,\beta)}f(t,x)|\varepsilon^{|(\alpha,\beta)|}((\alpha,\beta)!)^{-s}.
\end{aligned}$$

Disso segue que $u \otimes v \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$.

Definição 2.15. *Sejam $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ e $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$. Definimos o produto tensorial de u por v como sendo $u \otimes v \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$.*

Observação 2.16. *Dadas* $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ *e* $h \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$ *facilmente vê-se que* $(g \otimes h)(t,x) = g(t)h(x)$ *pertence a* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ *e que*

$$\langle u \otimes v, g \otimes h \rangle \;=\; \langle u, g \rangle \langle v, h \rangle.$$

Proposição 2.17. *Sejam* $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ *e* $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$. *Existe uma única* $w \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ *satisfazendo a seguinte propriedade: se* $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ *e* $h \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, *então*

$$\langle w, g \otimes h \rangle \;=\; \langle u, g \rangle \langle u, h \rangle.$$

Demonstração.

A existência é garantida pelo produto tensorial $u \otimes v$. Considere w satisfazendo a propriedade do enunciado e seja $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}^q$. Note que $e^{-i\xi\cdot(t,x)} = e^{-i\xi_1\cdot t}e^{-i\xi_2\cdot x}$. Então

$$\widehat{w}(\xi) \;=\; (2\pi)^{-(p+q)}\langle w, e^{-i\xi\cdot(t,x)}\rangle \;=\; (2\pi)^{-p}\langle u, e^{-i\xi_1\cdot t}\rangle(2\pi)^{-q}\langle v, e^{-i\xi_2\cdot x}\rangle \;=\; \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi_2).$$

Portanto da unicidade dos coeficientes de Fourier segue a unicidade de w. $\square$

De forma inteiramente análoga poderíamos ter definido o produto tensorial $u \otimes v$ da seguinte maneira

$$\langle u \otimes v, f(t,x) \rangle \;=\; \langle v(x), \langle u(t), f(t,x) \rangle \rangle, \; f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x).$$

Aplicando a proposição anterior obtemos uma versão do teorema de Fubini para nosso contexto:

$$\langle u(t), \langle v(x), f(t,x) \rangle \rangle \;=\; \langle u \otimes v, f(t,x) \rangle \;=\; \langle v(x), \langle u(t), f(t,x) \rangle \rangle.$$

Proposição 2.18. *Sejam* $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$, $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, $w \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^p_0$ *e* $\beta \in \mathbb{N}^q_0$. *Então:*

(i) $u \otimes (v + w) = u \otimes v + u \otimes w$;

(ii) $\lambda(u \otimes v) = \lambda u \otimes v = u \otimes \lambda v$;

(iii) $\partial^{(\alpha,\beta)}(u \otimes v) = \partial^\alpha u \otimes \partial^\beta v$.

A demonstração das propriedades acima segue diretamente da definição de produto tensorial.

2.4 Comportamento Assintótico de Certas Integrais

Nesta seção faremos um breve estudo quanto ao comportamento de sequências de integrais do tipo

$$J(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-\xi r^{2k}}\, dr, \; \xi \in \mathbb{N},$$

quando $\xi \to \infty$, com $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ fixos.

Mostraremos que $J(\xi) \to 0$, quando $\xi \to \infty$, e estimaremos a velocidade de tal decaimento. Esse comportamento no infinito será usado na demonstração do Teorema 3.5 para estimar o decaimento de alguns coeficientes de Fourier e construir uma solução singular.

Em primeiro lugar, notemos que

$$0 \leq J(\xi) = |J(\xi)| \leq \int_{-a}^{a} |e^{-\xi r^{2k}}| dr \leq 2a < \infty,$$

ou seja, os termos dessa sequência estão todos bem definidos e, claramente, $J(\xi') < J(\xi)$, sempre que $\xi < \xi'$. Logo a sequência $\{J(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Mostremos agora que $J(\xi) \to 0$ quando $\xi \to \infty$. Para ver isto, façamos em $J(\xi)$ a seguinte mudança de variáveis , $\tau = \sqrt[2k]{\xi} r$, então

$$J(\xi) = \frac{1}{\sqrt[2k]{\xi}} \int_{-a \sqrt[2k]{\xi}}^{a \sqrt[2k]{\xi}} e^{-\tau^{2k}} d\tau = c(\xi) \frac{1}{\sqrt[2k]{\xi}},$$

com $c(\xi) > 0$ uma constante que depende de $\xi \in \mathbb{N}$.

Como

$$c(\xi) \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^{2k}} d\tau = \sqrt{\pi} = C_\infty,$$

temos que

$$0 \leq J(\xi) \leq \frac{C_\infty}{\sqrt[2k]{\xi}} \to 0, \text{ quando } \xi \to \infty,$$

e portanto segue que

$$\lim_{\xi \to \infty} J(\xi) = 0.$$

Observando que $a \leq a \sqrt[2k]{\xi}$ para todo $\xi \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{1}{\sqrt[2k]{\xi}} \int_{-a}^{a} e^{-\tau^{2k}} d\tau \leq J(\xi) \leq \frac{1}{\sqrt[2k]{\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^{2k}} d\tau,$$

e desta forma, para todo $\xi \in \mathbb{N}$ temos

$$\frac{C_a}{\sqrt[2k]{\xi}} \leq J(\xi) \leq \frac{C_\infty}{\sqrt[2k]{\xi}}.$$

3 HIPOELITICIDADE GEVREY GLOBAL

Iniciamos este capítulo apresentando condições necessárias e suficientes para hipoeliticidade Gevrey global de operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes. Tais condições são dadas no Teorema 3.2, o qual é uma extensão natural do resultado clássico de S. Greenfield e N. Wallach [6] para a hipoeliticidade global no sentido C^∞.

Também obtemos uma caracterização completa da hipoeliticidade global Gevrey da classe de operadores $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ em $\mathbb{R}^2$. Este é um dos resultados mais importantes deste trabalho e seu enunciado pode ser encontrado no Teorema 3.5.

Neste trabalho todo usaremos a seguinte definição de hipoeliticidade G^s global:

Definição 3.1. *Dizemos que operador diferencial parcial P é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^n$, para $s \geq 1$, se as condições $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $Pu = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ implicarem que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

3.1 Operadores com coeficientes constantes

Considere o operador diferencial parcial linear de ordem $k \in \mathbb{Z}_+$

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha, \tag{3.1}$$

com coeficientes constantes $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e denote por

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n,$$

seu símbolo.

Teorema 3.2. *O operador P definido em (3.1) é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|P(\xi)| \geq \exp(-\varepsilon|\xi|^{1/s}), \tag{3.2}$$

para $|\xi| \geq C_\varepsilon$.

Demonstração.
Necessidade: Suponha que a condição (3.2) não seja verdadeira. Então existem $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $C > 0$, existe $\xi \in \mathbb{Z}^n$ tal que para $|\xi| > C$ vale $|P(\xi)| < e^{-\varepsilon_0|\xi|^{1/s}}$.

Assim, existe uma sequência $\{(\xi_j)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n$ com $|\xi_j| > j$ e $|P(\xi_j)| < \exp(-\varepsilon_0|\xi_j|^{1/s})$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Definindo

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{i\xi_j \cdot t},$$

temos

$$\widehat{u}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = \xi_j \text{ para algum } j \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ mas $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Observemos que

$$Pu(t) = \sum_{|\alpha| \le k} \alpha_a D^\alpha \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} e^{i\xi_j \cdot t} \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(\xi_j) e^{i\xi_j \cdot t} \doteq f(t).$$

Assim, temos que os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} P(\xi_j), & \xi = \xi_j \text{ para algum } j \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|\widehat{f}(\xi)| \le e^{-\varepsilon_0 |\xi|^{1/s}}$, segue que $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, logo P não é $G^s H$.

Suficiência: Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Pu = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

Pela unicidade de representação em série de Fourier, da igualdade acima obtemos

$$\widehat{f}(\xi) = P(\xi)\widehat{u}(\xi), \text{ para todo } \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.4}$$

Como $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, existem $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$

$$|\widehat{f}(\xi)| = |P(\xi)||\widehat{u}(\xi)| \le C_\varepsilon e^{-\varepsilon |\xi|^{1/s}}.$$

Tomando $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, segue da hipótese, que existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que

$$|P(\xi)| \ge e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \text{ para } |\xi| \ge C_{\varepsilon_1}. \tag{3.5}$$

Segue de (3.4) e (3.5) que

$$|\widehat{u}(\xi)| \le C_\varepsilon e^{-\varepsilon/2 |\xi|^{1/s}}, |\xi| \ge C_{\varepsilon_1}. \tag{3.6}$$

Escrevendo

$$u(t) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi t} = \sum_{|\xi| < C_{\varepsilon_1}} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi t} + \sum_{|\xi| \ge C_{\varepsilon_1}} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi t} \doteq u_1(t) + u_2(t), \tag{3.7}$$

falta apenas mostrar que u_1 e u_2 são funções Gevrey para concluir a demonstração.

Como, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, a função $t \in \mathbb{R}^n \longmapsto e^{i\xi \cdot t}$ analítica real e u_1 é uma combinação linear (finita) de tais funções, então $u_1 \in C^\omega_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Para finalizar, por (3.6), existem $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ tais que $|\widehat{u}(\xi)| \le C_\varepsilon e^{-\varepsilon/2|\xi|^{1/s}}$, para $|\xi| \ge C_{\varepsilon_1}$, e então podemos concluir que $u_2 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Segue portanto que $u_1(t) + u_2(t) = u(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. □

Uma das aplicações mais belas do Teorema 3.2 ocorre no caso $n = 2$, quando tentamos caracterizar a hipoeliticidade global Gevrey do operador de coeficiente real

$$P_\alpha = \partial_t - \alpha\partial_x,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para enunciá-la com precisão, fazemos uso da seguinte definição:

Definição 3.3. *Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ não é um número Liouville exponencial com expoente $s \geq 1$, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|p - \alpha q| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|q|^{1/s}}, \text{ para todo } (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}). \tag{3.8}$$

Denotamos o conjunto dos números Liouville exponencial com expoente $s \geq 1$ por $\mathbb{E}^s$.

Teorema 3.4. *O operador $P_\alpha = \partial_t - \alpha\partial_x$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, $\alpha \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s)$.*

Demonstração.
Necessidade: Suponha que $\alpha = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Neste caso, tomando $p = lm$ e $q = ln$, com $l \in \mathbb{Z}$, temos

$$\widehat{P}_\alpha(p, q) = \widehat{P}_\alpha(lm, ln) = lm - \frac{m}{n}ln = 0, \text{ para todo } l \in \mathbb{Z},$$

o que viola a condição (3.2) do Teorema 3.2, logo P_α não é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$.

Suponhamos agora que $\alpha \in \mathbb{E}^s$, ou seja, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer constante $C > 0$ existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ tal que

$$|p - \alpha q| < Ce^{-\varepsilon_0|q|^{1/s}}.$$

Em particular, tomando $C = \dfrac{1}{j}$, obtemos uma sequência $(p_j, q_j) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ que satisfaz

$$|p_j - \alpha q_j| < \frac{1}{j}e^{-\varepsilon_0|q|^{1/s}} \leq e^{-\varepsilon_0|q|^{1/s}}.$$

Além disso, podemos supor $|q_j| \geq 2$ e $|q_j| \to \infty$. Logo

$$|p_j| - |\alpha||q_j| \leq |p_j - \alpha q_j| < e^{-\varepsilon_0|q|^{1/s}} \leq 1 \leq |q_j|$$

e portanto

$$|p_j| \leq (1 + |\alpha|^2)|q_j|.$$

Assim temos que

$$p_j^2 + q_j^2 \leq [1 + (1 + |\alpha|)^2]q_j^2. \tag{3.9}$$

Segue de (3.1) e de (3.9) que

$$|\widehat{P}_\alpha(p_j, q_j)| = |p_j - \alpha q_j| < e^{-\varepsilon_0|q_j|^{1/s}} \leq e^{-\varepsilon_0 \dfrac{1}{C^{1/s}}|(p_j,q_j)|^{1/s}},\ j = 1, 2, \cdots$$

com $C = \{[1 + (1+\alpha)^2]\}^{1/2}$ e $|q_j| \to \infty$. Logo, P_α não é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$.

Suficiência: Suponhamos agora que α seja um irracional não Liouville exponencial com expoente s, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|p - \alpha q| \geq e^{-\varepsilon |q|^{1/s}}, \text{ para todo } (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}). \tag{3.10}$$

Segue de (3.10) que

$$|\widehat{P}_\alpha(p, q)| = |p - \alpha q| \geq e^{-\varepsilon |q|^{1/s}} \geq e^{-\varepsilon |(p,q)|^{1/s}}, \text{ para todo } (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}). \tag{3.11}$$

Notemos que

$$|\widehat{P}_\alpha(p, 0)| = |p| \geq 1 > e^{-\varepsilon |(p,0)|^{1/s}}, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{3.12}$$

Assim, segue de (3.11) e (3.12) e do Teorema 3.2 que o operador P_α é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$. □

3.2 Operador da forma $P = \partial_t - c(t)\partial_x$

O próximo passo é caracterizar a hipoeliticidade G^s global para os operadores diferenciais da forma

$$P = \partial_t - c(t)\partial_x, \text{ com } c(t) = a(t) + ib(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}). \tag{3.13}$$

A abordagem usada nesta seção foi inspirada na dissertação de mestrado de L. S. Coelho [5], na qual o autor estuda esta mesma classe de operadores, porém com a condição mais forte do coeficiente $c(t)$ ser analítico-real, o que permite usar a fórmula integral de Cauchy para estimar as derivadas do candidato a solução e, assim, simplificar substancialmente algumas estimativas.

A novidade no resultado abaixo é permitir que a função $c(t) = a(t)+ib(t)$ seja de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Neste caso, as técnicas de demonstração tiveram que ser modificadas especificamente na construção de uma solução singular para o caso em que b muda de sinal.

Como salientamos na introdução, durante o preparo desta dissertação tomamos conhecimento do artigo [4] no qual este resultado é demonstrado para uma classe de operadores diferenciais que inclui nosso operador.

Teorema 3.5. *Considere o operador P definido em 3.13.*

1. *Se $s > 1$ e b não é identicamente nula, então P é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, b não muda de sinal.*

2. Se $s \geq 1$ e b é identicamente nula, então P é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(r)dr \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s).$$

Essa é a versão mais geral do resultado e sua demonstração é bastante extensa. Por este motivo optamos por enunciar e provar três resultados nas subseções abaixo (Proposições 3.6, 3.11 e 3.12) que juntas são equivalentes ao Teorema 3.5.

3.2.1 O caso $b \equiv 0$

Considere o operador diferencial parcial

$$P = \partial_t - a(t)\partial_x, \tag{3.14}$$

com $a = a(t)$ sendo uma função de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais, e defina

$$A(t) = \int_0^t a(r)dr - a_0 t, \quad \text{com} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(r)dr.$$

O principal resultado dessa subseção é o seguinte.

Proposição 3.6. *O operador* (3.14) *é globalmente G^s hipoelítico, para $s \geq 1$ se, e só se, $a_0 \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s)$.*

Para demonstrar esta Proposição precisamos antes provar alguns resultados auxiliares, os quais passamos a enunciar e demonstrar.

Proposição 3.7. *A aplicação*

$$\begin{aligned} S\colon D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \\ u(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} &\longmapsto S(u(t,x)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi A(t)}e^{i\xi x}, \end{aligned}$$

define um automorfismo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ com automorfismo inverso dado por

$$\begin{aligned} S^{-1}\colon D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \\ u(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} &\longmapsto S(u(t,x)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi)e^{-i\xi A(t)}e^{i\xi x}. \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, mostramos que S está bem definida, ou seja, mostramos que se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, então $Su \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $h_\ell > 0$ dados. Queremos mostrar que existe $C_{\varepsilon,h_\ell} = C > 0$ tal que

$$|\langle \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi A(t)}, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{s,h\ell}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \quad \xi\in\mathbb{Z},\ \varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Considere $\varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Pelo Lema 6.8 existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha e^{i\xi A(t)}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \qquad \alpha\in\mathbb{N}_0, t\in\mathbb{R}, \xi\in\mathbb{Z}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha e^{i\xi A(t)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}}\varphi(t)| &= |\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta e^{i\xi A(t)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}}\partial^{\alpha-\beta}\varphi(t)| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial^\beta e^{i\xi A(t)}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}}|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(t)| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^s C_\varepsilon^{|\beta|}(\beta!)^s \parallel\varphi\parallel_{s,h_\ell}((\alpha-\beta)!)^s h_\ell^{|\alpha-\beta|} \\
&\leq (\alpha!)^s C_\varepsilon^{|\alpha|} h_\ell^{|\alpha|} 2^{|\alpha|}\parallel\varphi\parallel_{s,h_\ell} \\
&= \widetilde{C}_{\varepsilon,h_\ell}^{|\alpha|}(\alpha!)^s\parallel\varphi\parallel_{s,h_\ell},
\end{aligned}
$$

sendo $\widetilde{C}_{\varepsilon,h_\ell} = 2h_\ell c_\varepsilon$. Utilizando o Lema (6.8) obtemos $\bar{C}_\varepsilon > 0$

$$
|\xi|^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}} \leq \bar{C}_\varepsilon^k (k!)^s,\ \xi\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}_0.
$$

Defina $\mu = (\max\{\widetilde{C}_{\varepsilon,h_\ell},\bar{C}_\varepsilon\})^{-1}$. Da continuidade de u segue que existe $C_\mu > 0$ tal que

$$
|\langle u,\psi\rangle| \leq C_\mu \sup_{t,\alpha}\sup_{x,k}|\partial^{(\alpha,k)}\psi(t,x)|\mu^{|(\alpha,k)|}((\alpha,k)!)^{-s}, \quad \psi\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2).
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
|\langle\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi A(t)},\varphi(t)\rangle| &= |\langle\widehat{u}(t,\xi), e^{i\xi A(t)}\varphi(t)\rangle| \\
&= \frac{1}{2\pi}|\langle u(t,x), e^{i\xi A(t)}\varphi(t)e^{-i\xi x}\rangle| \\
&\leq \frac{C_\mu}{2\pi}\sup_{t,\alpha}\sup_{x,k}|\partial_t^\alpha\partial_x^k e^{i\xi A(t)}\varphi(t)e^{-i\xi x}|\mu^{|\alpha|}\mu^k(\alpha!)^{-s}(\beta!)^{-s}.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
&|\partial_t^\alpha e^{i\xi A(t)}\varphi(t)e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{1/s}}|\ |\partial_x^k e^{-i\xi x}e^{-\frac{\varepsilon}{2}}|\ \mu^{|\alpha|}\mu^k(\alpha!)^{-s}(k!)^{-s}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \\
&= |\partial_t^\alpha e^{i\xi A(t)}\varphi(t)e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{1/s}}|\ |\xi|^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\ \mu^{|\alpha|}\mu^k(\alpha!)^{-s}(k!)^{-s}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \\
&\leq \widetilde{C}_{\varepsilon,h_\ell}^{|\alpha|}(\alpha!)^s\parallel\varphi\parallel_{s,h_\ell}\ \bar{C}_\varepsilon^k(k!)^s\mu^{|\alpha|}\mu^k(\alpha!)^{-s}(k!)^{-s}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \\
&= \max\{\widetilde{C}_{\varepsilon,h_\ell},\bar{C}_\varepsilon\}^{|\alpha|+k}\ \mu^{|\alpha|+k}\parallel\varphi\parallel_{s,h_\ell}\ e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \\
&= \parallel\varphi\parallel_{s,h_\ell}\ e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}},
\end{aligned}
$$

para todo $\xi\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in\mathbb{N}_0$, $k\in\mathbb{N}_0$, $t\in\mathbb{R}$ e $x\in\mathbb{R}$. Portanto

$$
|\langle\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi A(t)},\varphi(t)\rangle| \leq \frac{C_\mu}{2\pi}\parallel\varphi\parallel_{s,h_\ell}\ e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}},
$$

e S está bem definida.

Analogamente mostra-se que a aplicação S^{-1} está bem definida e a verificação que $S\circ S^{-1} = I = S^{-1}\circ S$ é direta. $\square$

Proposição 3.8. *O operador S definido na Proposição anterior, restrito so espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, define um automorfismo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Para mostrar que $S|_{G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)}$ também define um automorfismo, basta provar que $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é $S-$invariante e $S^{-1}-$invariante. Mostramos que $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é $S-$invariante. Seja $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Para verificar que $Su \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ basta provar que existem $C > 0$, $h_\ell > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\partial_t^\alpha \Big[\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi A(t)}\Big]| \leq Ch_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \xi \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}.$$

Como $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ segue que existem $C > 0$, $h_\ell > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| \leq Ch_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \xi \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi A(t)}| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial^\beta \widehat{u}(t,\xi)||\partial^{\alpha-\beta}e^{i\xi A(t)}| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^s Ch_\ell^{|\beta|}(\beta!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}}|\partial^{\alpha-\beta}e^{i\xi A(t)}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^s Ch_\ell^{|\beta|}(\beta!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}}C_\varepsilon^{|\alpha-\beta|}((\alpha-\beta)!)^s \\
&\leq C(2h_\ell C_\varepsilon)^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}},
\end{aligned}$$

e portanto $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é $S-$invariante. De forma análoga, mostra-se que $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é $S^{-1}-$invariante. □

Proposição 3.9. *Se $P = \partial_t - c(t)\partial_x$, com $c(t) = a(t)+ib(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, então vale a seguinte conjugação*

$$S^{-1}PS = \widetilde{P} \doteq \partial_t - (a_0 + ib(t))\partial_x.$$

Demonstração. De fato, se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, então

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(u) &= S^{-1}PSu = S^{-1}PS\big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x}\big) \\
&= S^{-1}P\big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi A(t)}e^{i\xi x}\big) \\
&= S^{-1}\big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\big[\partial_t\widehat{u}(t,\xi) + \widehat{u}(t,\xi)[i\xi\partial_t A(t)] - c(t)(i\xi)\widehat{u}(t,\xi)\big]e^{i\xi A(t)}e^{i\xi x}\big) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\big[\partial_t\widehat{u}(t,\xi) + \widehat{u}(t,\xi)[i\xi\partial_t A(t)] - c(t)(i\xi)\widehat{u}(t,\xi)\big]e^{i\xi x} \\
&= (\partial_t - (a_0 + ib(t))\partial_x)(u).
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.10. *O operador P é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, o operador $\widetilde{P} = S^{-1}PS$ é globalmente G^s hipoelítico.*

Demonstração. Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\widetilde{P}u = S^{-1}PSu = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Como S e S^{-1} são automorfismos em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, existe $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $S^{-1}v = u$ e $Pv = Sf \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Como P é globalmente G^s hipoelítico segue que $v \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, pois S também é um automorfismo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Daqui segue que $u = Sv \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e $\widetilde{P}$ é globalmente G^s hipoelítico. A implicação contrária é análoga. □

Prova da Proposição 3.6.

Pela Proposição 3.9, os operadores $P = \partial_t - a(t)\partial_x$ e $\widetilde{P} = \partial_t - a_0\partial_x$ são conjugados, e pela Proposição 3.10, P é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, o operador $\widetilde{P}$ é globalmente G^s hipoelítico. Por fim, segue do Teorema 3.4, que $\widetilde{P}$ é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, $a_0 \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s)$, o que conclui a demonstração. □

3.2.2 O caso $b \not\equiv 0$

Agora considere o operador diferencial parcial

$$P = \partial_t - (a(t) + ib(t))\partial_x, \tag{3.15}$$

com $c(t) = a(t) + ib(t)$ sendo uma função de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, com $s > 1$, e b sendo uma função não identicamente nula.

Proposição 3.11. *Se P é globalmente G^s hipoelítico então b não muda de sinal.*

Demonstração. Suponha que a função b muda de sinal, vamos mostrar que o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ não é globalmente G^s hipoelítico, e para isso vamos encontrar uma solução singular para o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$, ou seja, uma ultradistribuição $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Pelas Proposições 3.9 e 3.10, basta mostrar que o operador conjugado $\widetilde{P} = \partial_t - (a_0 + ib(t))\partial_x$ não é globalmente G^s hipoelítico. Logo faremos a construção da solução singular considerando separadamente os seguintes casos: (i) $b_0 > 0$; (ii) $b_0 < 0$; (iii) $b_0 = 0$ e $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; e (iv) $b_0 = 0$ e $a_0 \in \mathbb{Q}$.

No primeiro caso abaixo fazemos todos os detalhes. Os casos (ii) e (iii) seguem as mesmas ideias do caso (i). Na página 32 fazemos um breve comentário sobre a prova. Finalmente o caso (iv) é o mais simples e sua prova inicia na página 33

(i) Caso $b_0 > 0$.

Considere a função

$$H(t,r) = \int_{t-r}^{t} (a_0 + ib(y))dy = a_0 r + i\int_{t-r}^{t} b(y)dy, \;\; t, r \in [0, 2\pi],$$

e defina

$$B = \min_{0\leq t,r\leq 2\pi} Im(H(t,r)) = Im(H(t_0,r_0)) = \int_{t_0-r_0}^{t_0} b(r)dr.$$

Como b muda de sinal então $B<0$. Note também que $Im(H(t_0,0))=0>B$ e que $Im(H(t_0,2\pi)) = 2\pi b_0 > 0 > B$, logo $r_0\in(0,2\pi)$. Aplicando uma translação na variável t (caso seja necessário), podemos supor que $t_0\in(0,2\pi)$ e que $b(0)\neq 0$. Afirmamos que $b(t_0-r_0)=0$. De fato, se $b(t_0-r_0)>0$, então existira $\delta>0$ tal que $r_0-\delta$ e $r_0+\delta$ pertencem a $(0,2\pi)$ e $b(y)>0$ para todo $y\in(t_0-r_0-\delta, t_0-r_0+\delta)$. Então

$$Im(H(t_0,r_0-\delta)) = \int_{t_0-r_0+\delta}^{t_0} b(y)dy = \int_{t_0-r_0}^{t_0} b(y)dy - \int_{t_0-r_0}^{t_0-r_0+\delta} b(y)dy < \int_{t_0-r_0}^{t_0} b(y)dy = B,$$

o que seria uma contradição. Analogamente mostra-se que $b(t_0-r_0)$ não pode ser negativo, logo $b(t_0-r_0)=0$ e portanto $t_0-r_0\in(0,2\pi)$, já que estamos supondo $b(0)\neq 0$.

Seja $\varphi\in G^s_{2\pi}((0,2\pi))$ uma função de corte com $supp(\varphi)\subset[t_0-r_0-\delta, t_0-r_0+\delta]\subset(0,t_0)$, tal que $\varphi(t)\equiv 1$ para $t\in[t_0-r_0-\delta/2, t_0-r_0+\delta/2]$ e $0\leq\varphi(t)\leq 1$ para $t\in(0,2\pi)$.

Definimos

$$\widehat{f}(t,\xi) = \begin{cases} (1-e^{i\xi c_0 2\pi})e^{\xi B}\varphi(t)e^{i\xi a_0(t-t_0)}, & \xi>0; \\ 0, \quad \xi\leq 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

para $t\in[0,2\pi]$ e $\widehat{f}(t+2\pi,\xi)=\widehat{f}(t,\xi)$ para $t\in\mathbb{R}$.

Resta mostrar que

$$f(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(t,\xi)e^{i\xi x} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \tag{3.17}$$

e que existe $u\in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)\setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\widetilde{P}u=f$.

Inicialmente note que $\widehat{f}(t,\xi)\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, para todo ξ inteiro. De fato, para $\xi\leq 0$, temos a função nula e para $\xi>0$ temos um produto de funções Gevrey, logo para todo $\xi\in\mathbb{Z}$ temos $\widehat{f}(t,\xi)\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Agora verifiquemos que as derivadas de $\widehat{f}(t,\xi)$ satisfazem as estimativas do Teorema 2.11, e assim concluiremos que $f\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Sejam $C,h>0$ tais que $|\partial_t^\alpha\varphi(t)|\leq Ch^\alpha(\alpha!)^s$, para todo $t\in[0,2\pi]$ e $\alpha\in\mathbb{N}_0$. Segue que:

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha \widehat{f}(t,\xi)| &= \left|(1-e^{i\xi c_0 2\pi})\left(\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left(\partial_t^\beta e^{i\xi a_0(t-t_0)}\right)\left(\partial_t^{\alpha-\beta}\varphi(t)\right)e^{B\xi}\right)\right| \\ &\leq |1-e^{i\xi c_0 2\pi}|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left|\left(\partial_t^\beta e^{i\xi a_0 t}\right)\right|\left|\left(\partial_t^{\alpha-\beta}\varphi(t)\right)\right|e^{B\xi} \\ &\leq 2e^{B\xi}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|a_0\xi|^\beta Ch^{(\alpha-\beta)}((\alpha-\beta)!)^s \end{aligned}$$

$$\leq C(|a_0|h)^{\alpha}e^{(B/2)\xi}\Bigg[\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\xi^{\beta}e^{-(-B/2)\xi}((\alpha-\beta)!)^s\Bigg]$$

$$\leq C(|a_0|h)^{\alpha}e^{(B/2)\xi}\Bigg[\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^s\xi^{\beta}e^{-(-B/2)\xi}((\alpha-\beta)!)^s\Bigg]$$

$$= C(|a_0|h)^{\alpha}e^{(B/2)\xi}\Bigg[\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{(\alpha!)^s}{(\beta!)^s((\alpha-\beta)!)^s}\xi^{\beta}e^{-(-B/2)\xi}((\alpha-\beta)!)^s\Bigg]$$

$$= C(|a_0|h)^{\alpha}e^{(B/2)\xi}\Bigg[\sum_{\beta\leq\alpha}(\alpha!)^s\frac{\xi^{\beta}e^{-(-B/2)\xi}}{(\beta!)^s}\Bigg]$$

$$\leq C(|a_0|h)^{\alpha}e^{(B/2)\xi^{1/s}}\Bigg[\sum_{\beta\leq\alpha}(\alpha!)^s\frac{\xi^{\beta}e^{-(-B/2)\xi^{1/s}}}{(\beta!)^s}\Bigg]$$

$$\leq C(|a_0|h)^{\alpha}e^{(B/2)\xi^{1/s}}\Bigg[\sum_{\beta\leq\alpha}(\alpha!)^sC^{\beta}_{(B/2)}\Bigg]$$

$$= C(|a_0|h)^{\alpha}(\alpha!)^se^{(B/2)\xi^{1/s}}\Bigg[\sum_{\beta\leq\alpha}C^{\beta}_{(B/2)}\Bigg]$$

$$\leq C(1+C_{(B/2)})(|a_0|h(1+C_{(B/2)}))^{\alpha}(\alpha!)^se^{(B/2)\xi^{1/s}}$$

$$= \widetilde{C}\widetilde{h}^{\alpha}(\alpha!)^se^{\widetilde{B}\xi^{1/s}}.$$

E pelo Teorema 2.11, segue que $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

O próximo passo é encontrar $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\widetilde{P}u = f$, mas com $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Suponha que exista $u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ solução da equação $Pu = f$, sendo f a função definida em (3.17). Pelo Lema 6.1, o operador P é contínuo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, logo

$$Pu(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\left(\frac{d}{dt} - i\xi c(t)\right)\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(t,\xi)e^{i\xi x}.$$

Segue da unicidade de representação em séries parciais de Fourier que,

$$\widehat{f}(t,\xi) = \left(\frac{d}{dt} - i\xi c(t)\right)\widehat{u}(t,\xi),\ \forall\xi \in \mathbb{Z}.$$

Pelo Lema 6.3, a equação acima é equivalente a

$$\left(\frac{d}{dt} - i\xi c_0\right)\left(e^{-i\xi C(t)}\widehat{u}(t,\xi)\right) = e^{-i\xi C(t)}\widehat{f}(t,\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

com $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} c(r)dr$ e $C(t) = \displaystyle\int_0^t c(r)dr - c_0t$.

Como $b_0 > 0$, então $i\xi c_0 \in i\mathbb{Z} \Leftrightarrow \xi = 0$. Pelo Lema 6.6, as soluções para $\xi \neq 0$ são dadas por por

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{1}{1-e^{i\xi c_0 2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{i\xi H(t,r)}\widehat{f}(t-r,\xi)dr,$$

Substituindo a expressão (3.16) na expressão acima obtemos a seguinte solução para (3.18):

$$\widehat{u}(t,\xi)=\begin{cases} e^{i\xi a_0(t-t_0)}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\xi(B-Im(H(t,r)))}\varphi(t-r)dr, & \xi>0;\\ 0, \quad \xi\leq 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

O próximo passo é, mostrar que $u=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x}$ é de fato uma ultradistribuição periódica. Claramente, para cada ξ, o coeficiente $\widehat{u}(t,\xi)$ é uma função contínua e $2\pi-$periódica, portanto $\widehat{u}(\cdot,\xi)\in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$, para todo $\xi\in\mathbb{Z}$. Além disso, para cada $\phi\in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}_t)$ temos

$$\begin{aligned}
\Big|\langle\widehat{u}(t,\xi),\phi(t)\rangle\Big| &= \left|\int_0^{2\pi}\widehat{u}(t,\xi)\phi(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\xi(B-Im(H(t,r)))}\varphi(t-r)e^{i\xi a_0(t-t_0)}\phi(t)drdt\right| \\
&\leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{\xi(B-Im(H(t,r)))}\right||\varphi(t-r)|\left|e^{i\xi a_0(t-r-t_0)}\right||\phi(t)|drdt \\
&\leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\phi(t)|drdt \\
&\leq (2\pi)^2\left\|\phi\right\|_{s,h_\ell}.
\end{aligned}$$

Daqui concluímos que $u\in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Por fim, vejamos que $u\notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Faremos isso analisando o comportamento de $|\widehat{u}(t_0,\xi)|$ quando $\xi\to\infty$.

Considere a função

$$\psi(r)=B-Im(H(t_0,r))=B-\int_{t_0-r}^{t_0}b(y)dy,$$

com $r\in[0,2\pi]$. Note que:

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(t_0,\xi)| &= \left|\int_0^{2\pi}e^{\xi\psi(r)}\varphi(t_0-r)dr\right| = \int_{r_0-\delta}^{r_0+\delta}e^{\xi\psi(r)}\varphi(t_0-r)dr \\
&\geq \int_{r_0-\delta/2}^{r_0+\delta/2}e^{\xi\psi(r)}dr,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

nas desigualdades acima usamos os fatos que: $\mathrm{supp}(\varphi)\subset[t_0-r_0-\delta,t_0-r_0+\delta]$, que $\varphi(t)=1$ para $t\in[t_0-r_0-\delta/2,t_0-r_0+\delta/2]$ e que $0\leq\varphi(t)\leq 1$ para $t\in(0,2\pi)$.

Para concluir a prova, analisemos o comportamento assintótico da sequência

$$J(\xi)=\int_{r_0-\delta/2}^{r_0+\delta/2}e^{\xi\psi(r)}dr$$

quando $\xi\to\infty$.

Primeiramente, note que $\psi(r_0)=\psi'(r_0)=0$. De fato,

$$\psi(r_0)=B-Im(H(t_0,r_0))=B-B=0.$$

Além disso,

$$\psi'(r) = \left[B - \int_{t_0-r}^{t_0} b(y)dy\right]' = b(t_0 - r).$$

Pela fórmula de Taylor de $\psi(r)$, com resto de Lagrange de segunda ordem, em torno de r_0, temos

$$\psi(r_0 + h) = \frac{\psi(r_0)h^0}{0!} + \frac{\psi'(r_0)h^1}{1!} + \frac{\psi''(r_0 + \theta(h))h^2}{2!} = \frac{1}{2}\psi''(r_0 + \theta(h))h^2, \tag{3.21}$$

para $h \in (r_0 - \delta/2, r_0 + \delta/2)$ e $\theta(h) \in [r_0 - \delta/2, r_0 + \delta/2]$.

Neste ponto, há duas possibilidades para o número

$$M \doteq \sup_{r_0-\delta/2 \leq y \leq r_0+\delta/2} \left|\frac{\psi''(y)}{2!}\right|.$$

Temos: $M = 0$ ou $M > 0$.

No primeiro caso, da expressão (3.21), segue que $\psi(r) \equiv 0$ em $[r_0 - \delta/2, r_0 + \delta/2]$, e portanto:

$$J(\xi) = \int_{r_0-\delta/2}^{r_0+\delta/2} e^{\xi\psi(r)}dr = \int_{r_0-\delta/2}^{r_0+\delta/2} e^0 dr = \delta \geq \frac{\widetilde{C}_1}{\sqrt{\xi}},$$

para todo $\xi > 0$.

No segundo caso, novamente por (3.21), temos que

$$-\psi(r_0 + h) = -\frac{1}{2}\psi''(r_0 + \theta(h))h^2 \leq \frac{1}{2}Mh^2 = M'h^2,$$

logo

$$\xi\psi(r_0 + h) \geq -\xi Mh^2,\ \xi > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J(\xi) &= \int_{r_0-\delta/2}^{r_0+\delta/2} e^{\xi\psi(r)}dr = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{\xi\psi(r_0+h)}dh \\
&\geq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{-\xi M'h^2}dh = \int_{-\delta\sqrt{M'}/2}^{\delta\sqrt{M'}/2} e^{\xi w^2}dw \geq \frac{\widetilde{C}_2}{\sqrt{\xi}},
\end{aligned}$$

para todo $\xi > 0$.

Tomando $C = \min\{\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2\}$, segue dos dois casos acima e de (3.20) que

$$|\widehat{u}(t_0, \xi)| \geq \frac{C}{\sqrt{\xi}}, \text{ para todo } \xi > 0,$$

o que nos garante que $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e conclui a prova neste caso.

(ii) Caso $b_0 < 0$.

Este caso é análogo ao anterior, bastando apenas mudar algumas escolhas. Aqui tomamos

$$\widetilde{B} = \max_{0 \leq t,r \leq 2\pi} Im(H(t,r)) = \int_{t_0}^{t_0+r_0} b(y)dy$$

e como b muda de sinal, temos que $\widetilde{B} > 0$. Usamos a forma equivalente de $\widehat{u}(t,\xi)$ dada em (6.7). Então definimos

$$\widehat{f}(t,\xi) = \begin{cases} e^{-\xi \widetilde{B}}\varphi(t) e^{i\xi a_0(t_0 - t)}, & \xi > 0; \\ 0, \quad \xi \leq 0, \end{cases}$$

para $t \in [0, 2\pi]$ e $\widehat{f}(t + 2\pi, \xi) = \widehat{f}(t, \xi)$ para $t \in \mathbb{R}$, com φ igual ao caso anterior. E de forma semelhante mostra-se que $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ mas $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Caso $b_0 = 0$ e $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Este caso é praticamente igual ao primeiro caso e por este motivo omitiremos sua prova.

(iv) Caso $b_0 = 0$ e $a_0 = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $(p,q) = 1$ e $q \in \mathbb{N}$.

Por fim, neste último caso, buscamos uma $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu = 0$.

Começamos observando que a função $C(t) = \displaystyle\int_0^t c(r)dr - a_0 t$ é contínua e 2π-periódica, pois $\displaystyle\int_0^{2\pi} c(r)dr - 2\pi a_0 = 0$. Daqui segue que a parte imaginária de $C(t)$ assume mínimo. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$Im(C(t_0)) = \min_{t \in \mathbb{R}} Im(C(t)).$$

Agora defina

$$u(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{N}} e^{\xi q Im(C(t_0))} e^{i\xi q (C(t) + a_0 t)} e^{i\xi q x}.$$

Neste caso, para todo $\xi \in \mathbb{N}$, temos

$$|\widehat{u}(t, \xi q)| = \left| e^{\xi q\{Im(C(t_0)) - Im(C(t))\}} e^{i\xi q\{Re(C(t)) + a_0 t\}} \right| \leq 1,$$

o que implica em $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, pois

$$|\langle \widehat{u}(t,\xi q), \phi(t) \rangle| = \left| \int_0^{2\pi} \widehat{u}(t,\xi q)\phi(t)dt \right| \leq 2\pi \sup_{t \in [0,2\pi]} |\phi(t)|.$$

Por outro lado, note que $|\widehat{u}(t_0, \xi q)| = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{N}$ e portanto $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Um cálculo simples mostra que $Pu = 0$, o que conclui a demonstração do Teorema.

□

Proposição 3.12. *Considere o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$, com $c(t) = a(t) + ib(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Suponha que $s \geq 1$ e b não é identicamente nula. Se b não muda de sinal, então P é globalmente G^s hipoelítico.*

No próximo capítulo enunciamos e provamos um resultado que engloba esta Proposição como um caso particular. Para não repetir aqui a mesma prova, remetemos o leitor a demonstração do Teorema 5.1, bastando considerar $\lambda = 0$.

4 RESOLUBILIDADE GEVREY GLOBAL

Neste capítulo o objetivo é caracterizar a resolubilidade G^s global do operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ no espaço $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x = \mathbb{R}^2$ e também em $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_y = \mathbb{R}^{n+2}$, com $n \geq 1$. Nosso interesse pela dimensão $n+2$ ficará mais clara no próximo capítulo, no qual estudamos perturbações de operadores neste espaço.

4.1 O caso $\mathbb{R}^2$

Para começar, definimos precisamente o que entendemos por resolubilidade G^s global neste trabalho. Para isso, considere o seguinte resultado:

Lema 4.1. *Se $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e existe $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu = f$, então $\langle v, f\rangle = 0$ para toda $v \in \ker {}^tP \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Se $v \in \ker {}^tP$, então $\langle v, f\rangle = \langle v, Pu\rangle = \langle {}^tPv, u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0$. □

Seja E o seguinte conjunto:

$$E = \{f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2) : \langle v, f\rangle = 0, \text{ para todo } v \in \ker {}^tP\}$$

Definição 4.2. *Dizemos que um operador P é globalmente G^s resolúvel em $\mathbb{R}^2$ se, para toda $f \in E$ existir $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu = f$.*

Observamos que E é um subespaço vetorial de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, conhecido como espaço das funções admissíveis para resolubilidade G^s global do operador P.

Agora, com o objetivo descrever melhor o espaço E da funções admissíveis, caracterizaremos o núcleo do operador transposto $\ker {}^tP$ através dos coeficientes parciais de Fourier de seus elementos.

Considere

$$v(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(t,\xi)e^{i\xi x} \in \ker {}^tP \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Como ${}^tPv = 0$, segue da unicidade dos coeficientes parciais de Fourier que

$$\left(\frac{d}{dt} - i\xi c(t)\right)\widehat{v}(t,\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Pelo Lema 6.3, a equação (4.1) tem solução se, e somente se, a seguinte equação tem solução

$$\left(\frac{d}{dt} - i\xi c_0\right)\left(e^{-i\xi C(t)}\widehat{v}(t,\xi)\right) = 0, \quad \xi \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

com $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} c(r)dr$ e $C(t) = \displaystyle\int_0^t c(r)dr - c_0 t$.

Pelo Lema 6.5, as soluções Gevrey 2π-periódicas de (4.2) são não-triviais se, e somente se, $-i\xi c_0 \in i\mathbb{Z}$; neste caso, tais soluções são da forma $C_\xi e^{i\xi c_0 t}$. Logo as soluções Gevrey 2π-periódicas de (4.1) são da forma:

- $\widehat{v}(t,\xi) \equiv 0$, se $\xi c_0 \notin \mathbb{Z}$;
- $\widehat{v}(t,\xi) = C_\xi e^{i\xi c_0 t} e^{i\xi C(t)} = C_\xi e^{i\xi \int_0^t c(r)dr}$, se $\xi c_0 \in \mathbb{Z}$.

Vamos mostrar que a série $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(t,\xi)e^{i\xi x}$, com os coeficientes parciais de Fourier acima, é de fato uma ultradistribuição Gevrey.

Dados $\varepsilon, h_\ell > 0$, escolhemos C_ξ tal que $|C_\xi| \leq \dfrac{Ce^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}}{\int_0^{2\pi} e^{-\xi\int_0^t b(r)dr}dt}$, e teremos

$$\begin{aligned}
|\langle \widehat{v}(t,\xi), \varphi(t)\rangle| &= \left| \int_0^{2\pi} C_\xi e^{i\xi\int_0^t c(r)dr}\varphi(t)dt \right| \\
&\leq |C_\xi| \int_0^{2\pi} \left|e^{i\xi\int_0^t c(r)dr}\right| \left|\varphi(t)\right| dt \\
&\leq \|\varphi\|_{s,h_\ell} |C_\xi| \int_0^{2\pi} \left|e^{i\xi\int_0^t c(r)dr}\right| dt \\
&\leq \|\varphi\|_{s,h_\ell} |C_\xi| \int_0^{2\pi} e^{-\xi\int_0^t b(r)dr} dt \\
&\leq C\|\varphi\|_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Concluímos portanto, pelo Teorema 2.13, que $v(t,x) = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(t,\xi)e^{i\xi x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\ker {}^tP = \Big\{ & v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2);\ \widehat{v}(t,\xi) \equiv 0,\ \text{se } \xi c_0 \notin \mathbb{Z},\ \text{e } \widehat{v}(t,\xi) = C_\xi e^{i\xi\int_0^t c(r)dr},\ \text{se } \xi c_0 \notin \mathbb{Z}, \\
& \text{e } |C_\xi| \leq \frac{Ce^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}}{\int_0^{2\pi} e^{-\xi\int_0^t b(r)dr}dt},\ \text{para } \varepsilon, C > 0 \Big\}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Lema 4.3. *Se $f \in E$, então $\langle \widehat{v}(\cdot,-\xi), \widehat{f}(\cdot,\xi)\rangle = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $v \in \ker {}^tP$.*

Demonstração. Sejam $f \in E$ e $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
\langle v, f\rangle &= \left\langle \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x}, \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(t,\sigma)e^{i\sigma x} \right\rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}} \left\langle \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x}, \widehat{f}(t,\sigma)e^{i\sigma x}\right\rangle \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}} \left\langle \widehat{u}(t,\xi), \widehat{f}(t,\sigma)\right\rangle \left\langle e^{i\xi x}, e^{i\sigma x}\right\rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}} \left\langle \widehat{u}(t,\xi), \widehat{f}(t,\sigma)\right\rangle \int_0^{2\pi} e^{i(\xi+\sigma)x}dx \\
&= 2\pi \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}} \left\langle \widehat{u}(t,-\sigma), \widehat{f}(t,\sigma)\right\rangle
\end{aligned}$$

Sejam $v \in \ker {}^tP$ e $\xi_0 \in \mathbb{Z}$ fixados.

- Se $-\xi_0 c_0 \notin \mathbb{Z}$, de (4.4) temos $\widehat{u}(t, -\xi_0) \equiv 0$ e portanto

$$\left\langle \widehat{u}(t, -\xi_0), \widehat{f}(t, \xi_0) \right\rangle = \left\langle 0, \widehat{f}(t, \xi_0) \right\rangle = 0.$$

- Se $-\xi_0 c_0 \in \mathbb{Z}$, de (4.4) temos

$$\widehat{u}(t, -\xi_0) = C_{-\xi_0} e^{-i\xi_0 \int_0^t c(r)dr} \text{ com } |C_{-\xi_0}| \leq \frac{Ce^{\varepsilon|-\xi_0|^{\frac{1}{s}}}}{\int_0^{2\pi} e^{\xi_0 \int_0^t b(r)dr} dt}.$$

Agora, considere

$$w = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{w}(t, \xi) e^{i\xi x},$$

com $\widehat{w}(t, \xi) \equiv 0$ para todo $\xi \neq -\xi_0$ e $\widehat{w}(t, -\xi_0) = \widehat{u}(t, -\xi_0)$.

Então $w \in \ker^t P$ e, para $f \in E$, temos

$$0 = \left\langle \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{w}(t, \xi) e^{i\xi x}, \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(t, \sigma) e^{i\sigma x} \right\rangle = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}} \left\langle \widehat{w}(t, -\sigma), \widehat{f}(t, \sigma) \right\rangle$$
$$= \left\langle \widehat{w}(t, -\sigma), \widehat{f}(t, \sigma) \right\rangle = \left\langle \widehat{u}(t, -\sigma), \widehat{f}(t, \sigma) \right\rangle.$$

Assim, concluímos a demonstração.

□

Pelo Lema acima, temos

$$E = \{f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2); \langle \widehat{v}(\cdot, -\xi), \widehat{f}(\cdot, \xi) \rangle = 0, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{Z} \text{ e } v \in \ker{}^t P\},$$

Em relação ao operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ temos

$$E = \left\{ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2); \text{ se } \xi c_0 \in \mathbb{Z} \text{ então } \int_0^{2\pi} e^{i\xi \int_0^t c(r)dr} \widehat{f}(t, \xi) dt = 0 \right\}.$$

Em particular, temos os seguintes casos:

- Se b não muda de sinal e não é identicamente nula, então $b_0 \neq 0$ e $i\xi c_0 = i\xi a_0 - \xi b_0 \in i\mathbb{Z}$ se, e somente se, $\xi = 0$, e portanto:

$$E = \left\{ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2); \int_0^{2\pi} \widehat{f}(t, 0) dt = 0 \right\}. \tag{4.5}$$

- Se $b \equiv 0$ e a_0 é irracional, então $i\xi c_0 = i\xi a_0 \in i\mathbb{Z}$ se, e somente se, $\xi = 0$, e novamente:

$$E = \left\{ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2); \int_0^{2\pi} \widehat{f}(t, 0) dt = 0 \right\}.$$

Podemos agora enunciar um resultado sobre a resolubilidade G^s global de P em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.4. *Considere o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$, com $c \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, $c(t) = a(t) + ib(t)$. Se b não muda de sinal e não é identicamente nula, ou se $b \equiv 0$ e $a_0 \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s)$, $s \geq 1$, então P é globalmente G^s resolúvel.*

A prova será dividida em duas Proposições cujas demonstrações usam abordagens suficientemente diferentes para justificar essa divisão. Na Proposição 4.5 consideraremos o caso em que b não é identicamente nula e não muda de sinal; e na Proposição 4.8 abordaremos o caso em que b é identicamente nula e $a_0 \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s)$.

Proposição 4.5. *Considere o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$, com $c(t) = a(t) + ib(t)$ de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Se b não muda de sinal e não é identicamente nula então P é globalmente G^s resolúvel.*

Antes de passar a demonstração desta Proposição, precisamos fazer algumas considerações e provar dois Lemas auxiliares.

Em primeiro lugar, no caso em que b não muda de sinal e não é identicamente nula, não há perda de generalidade em supor que $b(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, se $b(t) \leq 0$, a mudança de variáveis $t' = t$ e $x' = -x$ transforma o operador P em $P' = \partial_{t'} - (-c(t'))\partial_{x'}$, com $\mathrm{Im}(-c(t')) \geq 0$. Logo P é globalmente G^s resolúvel se e somente se P' também o é.

A seguir, dada $f \in E$, se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é solução de $Pu = f$, então seus coeficientes parciais de Fourier são soluções das equações

$$\left(\frac{d}{dt} - i\xi c(t)\right)\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(t,\xi). \tag{4.6}$$

com $\xi \in \mathbb{Z}$.

Pelo Lema 6.3, para cada $\xi \in \mathbb{Z}$, equação acima é equivalente a

$$\left(\frac{d}{dt} - i\xi c_0\right)\left(e^{-i\xi C(t)}\widehat{u}(t,\xi)\right) = e^{-i\xi C(t)}\widehat{f}(t,\xi), \tag{4.7}$$

com $C(t) = \displaystyle\int_0^t c(r)dr - c_0 t$.

Pelo Lema 6.6, a única solução de (4.6) quando $-i\xi c_0 \notin i\mathbb{Z}$ é

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{1}{1 - e^{(i\xi c_0)2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{i\xi H(r,t)}\widehat{f}(t-r,\xi)dr, \tag{4.8}$$

ou equivalentemente

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{1}{e^{-(i\xi c_0)2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{i\xi H(t,-r)}\widehat{f}(t+r,\xi)dr, \tag{4.9}$$

sendo $H(t,r) = C(t-r) - C(t) - c_0 r$.

Quando $-i\xi c_0 \in i\mathbb{Z}$ e $\displaystyle\int_0^{2\pi} \widehat{f}(r,0)dr = 0$, uma solução de (4.6) é dada por

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_0^t e^{i\xi c_0 r}\widehat{f}(r,\xi)dr. \tag{4.10}$$

Como $b \not\equiv 0$ e não muda de sinal, então

$$-i\xi c_0 \in i\mathbb{Z} \Leftrightarrow \xi = 0.$$

Para mostrar que

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2),$$

nossa estratégia será encontrar estimativas adequadas para as derivadas de $\widehat{u}(t,\xi)$, e então utilizar o Teorema 2.11, para isso precisamos de dois resultados preliminares, os quais enunciamos e provamos abaixo.

Lema 4.6. *Para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, $\widehat{u}(t,\xi) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, para $\xi = 0$ temos

$$\widehat{u}(t,0) = \int_0^t \widehat{f}(r,0)dr \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}),$$

e consequentemente $\widehat{u}(t,0) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Vamos analisar agora o caso $\xi > 0$.

Considere a função $e_\xi(t) = e^{i\xi t}$, $t \in \mathbb{R}$. Como e_ξ é analítica, segue que $e_\xi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ e portanto existem $C_\xi > 1$ e $h > 1$ tais que

$$\left|\partial_t^j e_\xi(t)\right| \leq C_\xi h^j (j!)^s,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $j \in \mathbb{N}_0$.

Note que $H(t,r)$ é 2π-periódica em t e $\partial_t H(t,r) = c(t-r) - c(t)$. Como $c(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, existem $C_H > 1$ e $h_1 > 1$ tais que

$$\left|\partial_t^j H(t,r)\right| \leq C_H h_1^j (j!)^s,$$

para $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]$e $j \in \mathbb{N}_0$.

Aplicando a fórmula de Faà di Bruno para a composição $e_\xi \circ g(t)$, com $g(t) = H(t,r)$, $t \in \mathbb{R}$ e $r \in [0,2\pi]$ fixo e usando as estimativas acima temos que:

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha (e_\xi \circ g)(t)| &= \left| \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{\alpha!}{k!} e_\xi^{(|k|)}(g(t)) \prod_{j=1}^{\alpha} \left(\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\right)^{k_j} \right| \\
&\leq \alpha! \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{1}{k!} C_\xi h^{|k|} (|k|!)^s \prod_{j=1}^{\alpha} \left(\frac{C_H h_1^j (j!)^s}{j!}\right)^{k_j} \\
&\leq \alpha! C_\xi (C_H h h_1)^\alpha \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{1}{k!} (|k|!)^s \prod(\alpha),
\end{aligned}$$

com $\Delta(\alpha) = \{k = (k_1, \cdots, k_\alpha) \in \mathbb{N}_0^\alpha;\ \sum_{j=1}^\alpha jk_j = \alpha\}$ e $\prod(\alpha) = \prod_{j=1}^\alpha ((j!)^{s-1})^{k_j}$.

Segue, dos Lemas 6.9 e 6.10 que

$$|\partial^\alpha (e_\xi \circ g)(t)| \leq \alpha! C_\xi (C_H h h_1)^\alpha \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{|k|!}{k!} (\alpha!)^{s-1}$$

$$= C_\xi (C_H h h_1)^\alpha (\alpha!)^s 2^{\alpha-1} \ \leq \ C_\xi (2C_H h h_1)^\alpha (\alpha!)^s,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

Como $\widehat{f}(t,\xi) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, segue que existem $K > 1$ e $h_2 > 1$ tais que

$$|\partial^\alpha \widehat{f}(t,\xi)| \leq K h_2^\alpha (\alpha!)^s,$$

para $t \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

Pelo Lema 6.7 existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{1 - e^{i2\pi\xi c_0}} \right| \leq C,$$

logo, das estimativas anteriores, temos

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| &= \left| \frac{1}{1 - e^{i2\pi\xi c_0}} \int_0^{2\pi} \partial^\alpha (e^{i\xi H(t,r)} \widehat{f}(t-r,\xi)) dr \right| \\
&\leq C \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\partial_t^\beta e^{i\xi H(t,r)} \right) \left(\partial_t^{(\alpha-\beta)} \widehat{f}(t-r,\xi) \right) \right| dr \\
&\leq C \int_0^{2\pi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(C_\xi (2C_H h h_1)^\beta (\beta!)^s \right) \left(K h_2^{\alpha-\beta} ((\alpha-\beta)!)^s \right) dr \\
&\leq 2\pi C_\xi K (4 C_H h h_1 h_2)^\alpha (\alpha!)^s,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

Concluímos portanto que $\widehat{u}(t,\xi) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, para $\xi > 0$.

A prova para $\xi < 0$ é completamente análoga. A principal diferença é que usamos a expressão equivalente 4.9 nas estimativas acima, o que conclui a prova deste resultado. □

Lema 4.7. *Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\left| \partial_t^\alpha e^{i\xi H(t,r)} \right| e^{-\varepsilon \xi^{1/s}} \leq C_\varepsilon^\alpha (\alpha!)^s,$$

para todo $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Como no Lema anterior, já sabemos que existem $C_H > 1$ e $h > 1$ tal que

$$\left| \partial_t^j H(t,r) \right| \leq C_H h_1^j (j!)^s,$$

para $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]$.

Como estamos supondo $b(t) \geq 0$, então $\left| e^{i\xi H(t,r)} \right| \leq 1$, para todo $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]$ e $\xi > 0$.

Aplicando a fórmula de Faà di Bruno para $e_\xi(t) = e^{i\xi t}$ e $g(t) = H(t,r)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $r \in [0,2\pi]$ fixado, obtemos, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0$, que

$$|\partial_t^\alpha (e_\xi \circ g)(t)| = \left| \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{\alpha!}{k!} e_\xi^{(|k|)}(g(t)) \prod_{j=1}^{\alpha} \left(\frac{g^{(j)}(t)}{j!} \right)^{k_j} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{\alpha!}{k!} (i\xi)^{|k|} e^{i\xi H(t,r)} \prod_{j=1}^{\alpha} \left(\frac{\partial_t^j H(t,r)}{j!} \right)^{k_j} \right| \\
&\leq \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{\alpha!}{k!} |\xi|^{|k|} e^{i\xi H(t,r)} \prod_{j=1}^{\alpha} \left(\frac{C_H h_1^j (j!)^s}{j!} \right)^{k_j} \\
&\leq (C_H h)^{\alpha} \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{\alpha!}{k!} \frac{|\xi|^{|k|}}{(|k|!)^s} (|k|!)^s \prod(\alpha),
\end{aligned}
$$

com $\Delta(\alpha) = \{k = (k_1, \cdots, k_\alpha) \in \mathbb{N}_0^\alpha;\ \sum_{j=1}^{\alpha} j k_j = \alpha\}$ e $\prod(\alpha) = \prod_{j=1}^{\alpha} ((j!)^{s-1})^{k_j}$.

Segue do Lema 6.10 e do fato que $k! \leq |k|!$, que

$$
|\partial_t^\alpha (e_\xi \circ g)(t)| \leq (C_H h)^\alpha (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{|k|!}{k!} \frac{|\xi|^{|k|}}{(|k|!)^s}. \tag{4.11}
$$

Agora multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\varepsilon \xi^{1/s}}$ e aplicando os Lemas 6.8 e 6.9, segue que existe $K_\varepsilon > 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
\left| \partial_t^\alpha e^{i\xi H(t,r)} \right| e^{-\varepsilon \xi^{1/s}} &\leq (C_H h)^\alpha (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{|k|!}{k!} \frac{|\xi|^{|k|}}{(|k|!)^s} e^{-\varepsilon \xi^{1/s}} \\
&\leq (C_H h)^\alpha (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{|k|!}{k!} K_\varepsilon^{|k|} \\
&\leq (C_H h K_\varepsilon)^\alpha (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{|k|!}{k!} \\
&\leq (C_H h K_\varepsilon)^\alpha (\alpha!)^s 2^{\alpha - 1} \\
&\leq (2 C_H h K_\varepsilon)^\alpha (\alpha!)^s = C_\varepsilon (\alpha!)^s,
\end{aligned}
$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\xi > 0$ e $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. □

Prova da Proposição 4.5. Basicamente, precisamos obter estimativas para as derivadas de $\widehat{u}(t,\xi)$ suficientemente boas para podermos aplicar o Teorema 2.11 e provar que $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^2)$.

Começamos observando que como $f \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^2)$, existem $\varepsilon > 0$, $C_f > 1$ e $h > 1$ tais que

$$
\left| \partial_t^\alpha \widehat{f}(t,\xi) \right| \leq C_f h^\alpha (\alpha!)^s e^{-\varepsilon \xi^{1/s}},
$$

para $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $\xi \in \mathbb{Z}$.

Segue dos Lemas 6.7 e 4.7, que existem $C > 1$ e $C_\varepsilon > 1$ tais que

$$
\left| \frac{1}{1 - e^{i2\pi\xi c_0}} \right| \leq C \quad \text{e} \quad \left| \partial_t^\alpha e^{i\xi H(t,r)} \right| e^{-\varepsilon \xi^{1/s}} \leq C_\varepsilon (\alpha!)^s,
$$

para todo $\xi > 0, \alpha \in \mathbb{N}_0$, e $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

Assim, dado $\alpha \in \mathbb{N}_0$, temos

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| &= \left| \frac{1}{1-e^{i2\pi\xi c_0}} \int_0^{2\pi} \partial^\alpha (e^{i\xi H(t,r)} \widehat{f}(t-r,\xi)) dr \right| \\
&\leq C \int_0^{2\pi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s \left| \partial_t^\beta e^{i\xi H(t,r)} \right| \left| \partial_t^{(\alpha-\beta)} \widehat{f}(t-r,\xi) \right| dr \\
&\leq C \int_0^{2\pi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s \left| \partial_t^\beta e^{i\xi H(t,r)} \right| C_f h^{\alpha-\beta} ((\alpha-\beta)!)^s e^{-\varepsilon \xi^{1/s}} dr \\
&\leq C C_f h^\alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s \left| \partial_t^\beta e^{i\xi H(t,r)} \right| ((\alpha-\beta)!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} dr \\
&\leq C C_f h^\alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s C_\varepsilon^\beta (\beta!)^s ((\alpha-\beta)!)^s dr \\
&\leq C C_f h^\alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta \leq \alpha} C_\varepsilon^\beta (\alpha!)^s dr \\
&\leq C 2\pi C_f (2C_\varepsilon h)^\alpha (\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}},
\end{aligned}
$$

para $t \in R$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $\xi > 0$.

Concluímos, pelo Teorema 2.11, que $\sum\limits_{\xi>0} \widehat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Com uma análise análoga para $\xi < 0$, bastando utilizar a forma equivalente para $\widehat{u}(t,\xi)$, dada em (4.9), mostra-se que $\sum\limits_{\xi<0} \widehat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Como

$$
u(t,x) = \sum_{\xi<0} \widehat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} + \sum_{\xi>0} \widehat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} + \widehat{u}(t,0),
$$

segue que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

Proposição 4.8. *Considere o operador $P = \partial_t - a(t)\partial_x$, com $a(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ sendo uma função real e $a_0 \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s)$, $s \geq 1$, então P é globalmente G^s resolúvel.*

Demonstração. Dada $f \in E$, queremos encontrar $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu = f$. Pelas Proposições 3.7 e 3.10, basta mostrar que o operador $\widetilde{P} = \partial_t - a_0\partial_x$ é globalmente G^s resolúvel e usar o automorfismo S para provar que P também é globalmente G^s resolúvel.

De fato, se $f \in E$, então $F = Sf \in \widetilde{E} = \left\{ H \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2); \int_0^{2\pi} \widehat{H}(t,0)dx = 0 \right\}$. Com isso, se encontrarmos $U \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\widetilde{P}U = F$, estaremos provando que P é globalmente G^s resolúvel, pois se $u = S^{-1}U$, então $Pu = PSU = S^{-1}\widetilde{P}U = S^{-1}F = S^{-1}Sf = f$.

Assim, dada $F \in \widetilde{E}$, vamos provar que existe tal $U \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\widetilde{P}U = F$.

Substituindo as séries formais de Fourier de $U(t,x)$ e $F(t,x)$ na expressão $\widetilde{P}U = F$, usando a continuidade do operador $\widetilde{P}$ e a unicidade de representação em séries de Fourier concluímos que

$$F(\xi,\eta) = i(\xi - a_0\eta)U(\xi,\eta),$$

para todo $(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2$.

Note que $\xi - a_0\eta = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta = 0$, pois $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Como $F \in \widetilde{E}$ então $F(0,0) = 0$ e podemos tomar $U(0,0) = 0$. Para $(\xi,\eta) \neq (0,0)$, tomamos

$$U(\xi,\eta) = \frac{F(\xi,\eta)}{i(\xi - a_0\eta)}.$$

Para finalizar esta prova precisamos mostrar que existem $C, \varepsilon > 0$ tais que $|U(\xi,\eta)| \leq Ce^{-\varepsilon|(\xi,\eta)|^{1/s}}$, e usar o Teorema 2.9 para concluir que $U \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Como a_0 não é exponencial Liouville de ordem s, então para todo $\bar{\varepsilon} > 0$, existe $C_{\bar{\varepsilon}} > 0$ tal que

$$|p - a_0 q| \geq C_{\bar{\varepsilon}} e^{-\bar{\varepsilon}|q|^{1/2}}, \quad (p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$

Como $F \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, existem $C_f, \varepsilon_f > 0$ tais que

$$|\widehat{F}(\xi,\eta))| \leq C_f e^{-\varepsilon_f|(\xi,\eta))|^{1/s}}, \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2.$$

Se $\eta \neq 0$, temos que $|\xi - a_0\eta| \geq C_{\bar{\varepsilon}} e^{-\bar{\varepsilon}|q|^{1/2}}$, logo

$$|U(\xi,\eta))| = \frac{|F(\xi,\eta))|}{|\xi - a_0\eta|} \leq \frac{C_f e^{-\varepsilon_f|(\xi,\eta))|^{1/s}}}{C_{\bar{\varepsilon}} e^{-\bar{\varepsilon}|\eta|^{1/2}}},$$

e escolhendo $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_f/2$, segue que

$$|U(\xi,\eta))| \leq C_1 e^{-\varepsilon_f/2|(\xi,\eta))|^{1/s}}.$$

Se $\xi \neq 0$ e $\eta = 0$, temos

$$|U(\xi,0)| = \frac{|F(\xi,0)|}{|\xi|} \leq \frac{C_f e^{-\varepsilon_f|(\xi,0)|^{1/s}}}{|\xi|} \leq C_f e^{-\varepsilon_f|(\xi,0)|^{1/s}} \leq C_f e^{-\varepsilon_f/2|(\xi,0)|^{1/s}}.$$

Logo, $|U(\xi,0)| \leq Ce^{-\varepsilon_f/2|(\xi,\eta))|^{1/s}}$, para todo $(\xi,\eta)) \in \mathbb{Z}^2$.

Temos portanto que $U \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e então concluímos que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Assim, temos que P é globalmente G^s resolúvel. □

4.2 O caso $\mathbb{R}^{n+2}$

A ideia agora é estender a Proposição 4.5 para dimensões superiores, ou seja, mostrar que o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ continua sendo globalmente G^s resolúvel em $\mathbb{R}^{n+2}$, para $n \geq 1$. Para fazer isso, vamos repetir a análise feita em dimensão 2, omitindo vários detalhes.

Nesta seção a notação $(t,x,y) \in \mathbb{R}^{n+2}$ significa que $t,x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

Começamos observando que o Lema 4.1 pode ser naturalmente estendido para a dimensão $n+2$, logo podemos considerar o espaço E das funções admissíveis para resolubilidade G^s global do operador P

$$E = \{f(t,x,y) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}); \langle v, f\rangle = 0, \text{ para todo } v \in \ker {}^tP\}.$$

Definição 4.9. *Dizemos que um operador P é globalmente G^s resolúvel em $\mathbb{R}^{n+2}$ se, para toda $f \in E$ existir $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ tal que $Pu = f$.*

Para descrever melhor o espaço E, precisamos novamente caracterizar o núcleo $\ker {}^tP$. Começamos escrevendo

$$v(t,x,y) = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n} \widehat{v}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta\cdot y)} \in \ker {}^tP \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}).$$

Como ${}^tPv = 0$, segue da unicidade de representação em séries parciais de Fourier em relação às variáveis x e y que

$$\left(\frac{d}{dt} - i\xi c(t)\right)\widehat{v}(t,\xi,\eta) = 0, \text{ para } \xi \in \mathbb{Z} \text{ e } \eta \in \mathbb{Z}^n. \tag{4.12}$$

Com uma argumentação análoga a feita na seção anterior, como b não muda de sinal e não é identicamente nula, então $b_0 \neq 0$, logo $i\xi c_0 \in i\mathbb{Z} \Leftrightarrow \xi = 0$.

Logo as soluções Gevrey 2π-periódicas de (4.12) são dadas por

- $\widehat{v}(t,\xi,\eta) \equiv 0$, se $\xi \neq 0, \eta \in \mathbb{Z}^n$; e
- $\widehat{v}(t,0,\eta) = C_\eta$, se $\eta \in \mathbb{Z}^n$.

Dados $\varepsilon, h_\ell > 0$, e escolhendo C_η tal que $|C_\eta| \leq \dfrac{C}{2\pi}e^{\varepsilon|(\xi,\eta)|^{1/s}}$, teremos

$$|\langle \widehat{v}(t,\xi), \varphi(t)\rangle| \leq C \left\|\varphi\right\|_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \text{ para } \varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}). \tag{4.13}$$

Concluímos portanto, pelo Teorema 2.13, que

$$v(t,x,y) = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n} \widehat{v}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta\cdot y)} = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \widehat{v}(t,0,\eta)e^{i\eta\cdot y} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}).$$

Daqui segue que:

$$\ker {}^tP = \Big\{ v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}) \ ; \ \widehat{v}(t,\xi,\eta) \equiv 0, \text{ se } \xi \neq 0, \eta \in \mathbb{Z}^n \text{ e } \widehat{v}(t,0,\eta) = C_\eta, \text{ se } \eta \in \mathbb{Z}^n, \\ \text{com } |C_\eta| \leq \frac{C}{2\pi}e^{\varepsilon|(\xi,\eta)|^{1/s}}, \text{ para } \varepsilon, C > 0 \Big\},$$

e com uma argumentação análoga à feita no Lema 4.3, segue que

$$E = \Big\{ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}); \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} C_{-\eta}\int_0^{2\pi} \widehat{f}(t,0,\eta)dx = 0, \text{para todo } \eta \in \mathbb{Z}^n \text{ com}$$

$$|C_\eta| \leq \frac{C}{2\pi} e^{\varepsilon|(\xi,\eta)|^{\frac{1}{s}}}, \text{ para } \varepsilon, C > 0 \Big\}.$$

Agora considerando a ultradistribuição $v_{\bar{\eta}}$ definida por

- $\widehat{v}_{\bar{\eta}}(t, \xi, \eta) \equiv 0$, se $(\xi, \eta) \neq (0, -\bar{\eta})$;
- $\widehat{v}_{\bar{\eta}}(t, 0, -\bar{\eta}) \equiv 1$,

é claro que $v \in \ker {}^tP$ e portanto, para $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$, tem-se que

$$\langle v_{\bar{\eta}}, f \rangle = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} C_{-\eta} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(t, 0, \eta) dx = \int_0^{2\pi} \widehat{f}(t, 0, \eta) dx.$$

Portanto, concluímos que

$$E = \left\{ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}); \int_0^{2\pi} \widehat{f}(t, 0, \eta) dx = 0, \text{ para todo } \eta \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Agora podemos mostrar que o operador P é globalmente G^s resolúvel em $\mathbb{R}^{n+2}$.

Teorema 4.10. *Seja $P = \partial_t - c(t)\partial_x$, com $c(t) = a(t) + ib(t)$ de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Se b não muda de sinal e $b \not\equiv 0$ então P é globalmente G^s resolúvel.*

Demonstração. Dada $f \in E$, queremos mostrar que existe $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ solução de $Pu = f$. Mas resolver $Pu = f$ é equivalente a resolver, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\eta \in \mathbb{Z}^n$, a equação

$$\left(\frac{d}{dt} - i\xi c(t) \right) \widehat{u}(t, \xi, \eta) = \widehat{f}(t, \xi, \eta). \tag{4.14}$$

Como $i\xi c_0 \notin i\mathbb{Z} \Leftrightarrow \xi \neq 0$, então as soluções 2π-periódicas de (4.14), para $\xi \neq 0$, são dadas por

$$\widehat{u}(t, \xi, \eta) = \frac{1}{1 - e^{i\xi c_0 2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{\xi H(t,r)} \widehat{f}(t - r, \xi, \eta) dr,$$

ou equivalentemente por

$$\widehat{u}(t, \xi, \eta) = \frac{1}{e^{-i\xi c_0 2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\xi H(t,-r)} \widehat{f}(t + r, \xi, \eta) dr,$$

com $H(t, r) = C(t - r) - C(t) - c_0 r$.

E, para $\xi = 0$, uma solução é dada por

$$\widehat{u}(t, 0, \eta) = \int_0^t f(r, 0, \eta) dr,$$

quando $\int_0^{2\pi} \widehat{f}(r, 0, \eta) dr = 0$, o que ocorre pois estamos tomando $f \in E$.

Por fim, cálculos análogos aos feitos no Teorema 5.5 mostram que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ e portanto segue que P é globalmente G^s resolúvel em $\mathbb{R}^{n+2}$. $\square$

5 PERTURBAÇÕES GEVREY

Neste capítulo estudamos como termos de ordem zero interagem com a hipoeliticidade G^s global de operadores diferenciais da forma $P = \partial_t - c(t)\partial_x$.

As duas principais referências nesta direção são os trabalhos [1] e [2] de A. Bergamasco, nos quais o autor obtém resultados sobre a perturbação de operadores globalmente hipoelíticos e globalmente analíticos-hipoelíticos de primeira ordem e também de ordens superiores.

A forma como organizamos este capítulo é fortemente inspirada nos trabalhos de L. Takahashi [9] e A. Kirilov [7], em que os autores estudam perturbações de operadores globalmente hipoelíticos da forma P em dimensão 2 e $n+2$, respectivamente.

Novamente, o diferencial de nosso trabalho é assumir o coeficiente $c(t)$ é uma função de classe G^s, bem como as perturbações. Os resultados obtidos são extensões naturais dos Teoremas conhecidos e as técnicas de demonstração foram adaptadas para o caso Gevrey.

5.1 Perturbações em $\mathbb{R}^2$

Nesta seção queremos estudar como perturbações por funções $\lambda \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ afetam a hipoeliticidade G^s global de operadores da forma

$$P = \partial_t - c(t)\partial_x,$$

com $c(t) = a(t) + ib(t)$ de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Mais precisamente, sabendo que P é globalmente G^s hipoelítico, queremos identificar para quais funções $\lambda \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ o operador $L = P - \lambda(t,x)$ também será globalmente G^s hipoelítico.

Começaremos pelo caso mais simples, supondo que a perturbação $\lambda \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ seja uma função constante.

Teorema 5.1. *Seja $L_\lambda = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda$, com $c(t) = a(t) + ib(t)$ de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, $s \geq 1$, e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se b não é identicamente nula e não muda de sinal, então L_λ é globalmente G^s hipoelítico.*

Demonstração. Em primeiro lugar, podemos supor, sem perda de generalidade, que $b(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, se $b(t) \leq 0$, basta aplicar a mudança de variáveis $t' = t$ e $x' = -x$, que transforma o operador L_λ em $L'_\lambda = \partial_{t'} - (-c(t'))\partial_{x'} - \lambda$, com $\mathrm{Im}(-c(t')) \geq 0$.

Suponha agora que $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ seja uma solução da equação $L_\lambda u = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Substituindo as representações de u em f em séries parciais de Fourier nesta equação, pela continuidade do operador L_λ (ver Lema 6.1) temos

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\left(\frac{d}{dt}-i\xi c(t)-\lambda\right)\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi t}=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(t,\xi)e^{i\xi t}.$$

Segue da unicidade dos coeficientes parciais de Fourier que

$$\widehat{f}(t,\xi)=\left(\frac{d}{dt}-i\xi c(t)-\lambda\right)\widehat{u}(t,\xi),\ \forall\xi\in\mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

Pelo Lema 6.3, a equação (5.1) é equivalente a

$$\left(\frac{d}{dt}-i\xi c_0-\lambda\right)\left(e^{-i\xi C(t)}\widehat{u}(t,\xi)\right)=e^{-i\xi C(t)}\widehat{f}(t,\xi),\quad \xi\in\mathbb{Z}, \tag{5.2}$$

com $c_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}c(r)dr$ e $C(t)=\displaystyle\int_0^t c(r)dr-c_0t.$

Como $\widehat{f}(\cdot,\xi)\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, segue do Lema 4.6 que $\widehat{u}(\cdot,\xi)\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Estudaremos as soluções de (5.2) utilizando o Lema (6.6), com $\gamma=-(i\xi c_0+\lambda)$.

Como $c_0=a_0+ib_0$ e $\lambda=a_1+ib_1$, então

$$\gamma=-(i\xi c_0+\lambda)=-(a_1-\xi b_0)-i(b_1+\xi a_0),$$

com $b_0\neq 0$ (pois b não muda de sinal e $b\not\equiv 0$). Logo

- Para $\xi=0$,
  - $\gamma\in i\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\ \lambda\in i\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\ a_1=0$ e $b_1\in\mathbb{Z}$.
- Para $\xi\neq 0$,
  - Se $a_1=0$, então $\gamma\notin i\mathbb{Z}$, para todo $\xi\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
  - Se $a_1\neq 0$ e $\frac{a_1}{b_0}\notin\mathbb{Z}$, então $\gamma\notin i\mathbb{Z}$, para todo $\xi\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
  - Se $a_1\neq 0$ e $\frac{a_1}{b_0}\in\mathbb{Z}$, então existe $\xi_0\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, com $\frac{a_1}{b_0}=\xi_0$.
    - Se $\xi\neq\xi_0$, então $\gamma\notin i\mathbb{Z}$.
    - Se $\xi=\xi_0$ e $b_1+\xi_0a_0\notin\mathbb{Z}$, então $\gamma\notin i\mathbb{Z}$.
    - Se $\xi=\xi_0$ e $b_1+\xi_0a_0\in\mathbb{Z}$, então $\gamma\in i\mathbb{Z}$.

Analisando todas as possibilidades acima, notamos que em apenas dois casos teremos $\gamma\in i\mathbb{Z}$:

- $\xi=0, a_1=0$ e $b_1\in\mathbb{Z}$; e
- $\xi=\dfrac{a_1}{b_0}\in\mathbb{Z}$ e $b_1+a_0\dfrac{a_1}{b_0}\in\mathbb{Z}$.

Em todos os demais casos, nos quais $\gamma\notin i\mathbb{Z}$, a solução da equação (5.1), obtidas pelo Lema 6.6, é dada por

$$\widehat{u}(t,\xi)=\frac{1}{1-e^{2\pi(i\xi c_0+\lambda)}}\int_0^{2\pi}e^{\lambda r}e^{i\xi H(t,r)}\widehat{f}(t-r,\xi)dr,$$

ou equivalentemente por

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{1}{e^{-2\pi(i\xi c_0+\gamma)} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda r} e^{i\xi H(t,-r)} \widehat{f}(t+r,\xi)dr,$$

com $H(t,r) = C(t-r) - C(t) - c_0 r$, $C(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} c(r)dr - c_0\alpha$, e $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} c(r)dr$.

Mostraremos que a sequência $\{\widehat{u}(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}}$ satisfaz as estimativas do Teorema 2.11, e portanto $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Para não sobrecarregar desnecessariamente a notação nas contas abaixo, suponha que o caso $\xi = \frac{a_1}{b_0} \in \mathbb{Z}$ e $b_1 + a_0\frac{a_1}{b_0} \in \mathbb{Z}$ não ocorre. Ao final da prova trataremos esse caso separadamente. Passemos a análise dos casos em que $\xi > 0$ e $\xi < 0$.

Utilizando novamente os Lemas 4.6 e 4.7, basta repetir a análise feita da demonstração da Proposição 4.5, na página 40. Sejam $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $\xi > 0$, então

$$\begin{aligned}
|\partial^{\alpha}\widehat{u}(t,\xi)| &= \left| \frac{1}{1-e^{i2\pi(\xi c_0+\lambda)}} \int_0^{2\pi} \partial^{\alpha}(e^{i\xi H(t,r)+\lambda r}\widehat{f}(t-r,\xi))dr \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{1-e^{i2\pi(\xi c_0+\lambda)}} \right| \int_0^{2\pi} \left| \partial_t^{\alpha}(e^{i\xi H(t,r)+\lambda r}\widehat{f}(t-r,\xi))dr \right| \\
&\leq C \int_0^{2\pi} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s \left|\partial_t^{\beta} e^{i\xi H(t,r)}\right| \left|\partial_t^{(\alpha-\beta)}\widehat{f}(t-r,\xi)\right| dr \\
&\leq C \int_0^{2\pi} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s \left|\partial_t^{\beta} e^{i\xi H(t,r)}\right| C_f h^{\alpha-\beta}((\alpha-\beta)!)^s e^{-\varepsilon\xi^{1/s}} dr \\
&\leq CC_f h^{\alpha} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s \left|\partial_t^{\beta} e^{i\xi H(t,r)}\right| ((\alpha-\beta)!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} dr \\
&\leq CC_f h^{\alpha} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s C_{\varepsilon}^{\beta}(\beta!)^s((\alpha-\beta)!)^s dr \\
&\leq CC_f h^{\alpha} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta\leq\alpha} C_{\varepsilon}^{\beta}(\alpha!)^s dr \\
&\leq C2\pi C_f(2C_{\varepsilon}h)^{\alpha}(\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{1/s}},
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.11, conclui-se que $\sum\limits_{\xi>0} \widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Para $\xi < 0$ a conta é análoga à feita acima, bastando utilizar a forma equivalente de $\widehat{u}(t,\xi)$ dada acima.

Por fim, para os últimos dois casos , não são necessárias estimativas, pois pelo Lema 4.6, já temos que $\widehat{u}(t,\xi) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ em ambos os casos, e portanto $\widehat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Concluímos assim que L_λ é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$. $\square$

Observação 5.2. *A Proposição 3.12 é um caso caso particular do Teorema acima, com $\lambda = 0$. Logo sua demonstração está contida na prova acima.*

A seguir, analisaremos o efeito de perturbações por funções Gevrey na hipoeliticidade G^s global de P.

Teorema 5.3. *Se $b \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ não muda de sinal e não é identicamente nula, e $\lambda = \lambda(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, então $L = P - \lambda$ é globalmente G^s hipoelítico.*

Demonstração. Seja $\widetilde{\lambda}(t,x) = \lambda(t,x) - \lambda_{00}$, com

$$\lambda_{00} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(t,x)dtdx.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \widehat{\widetilde{\lambda}}(t,0)dt &= \int_0^{2\pi} \widehat{\widetilde{\lambda}}(t,0)e^{i0x}dt \ = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{\lambda}(t,x)dtdx \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(t,x)dtdx - (2\pi)^2\lambda_{00} = 0,\end{aligned}$$

segue que $\widetilde{\lambda} \in E$. Recordando que E é o espaço das funções admissíveis para resolubilidade de P, definido em (4.5).

Segue do Teorema 4.4 que o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ é globalmente G^s resolúvel, logo existe $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu = \widetilde{\lambda}$. Esta informação será útil a seguir, pois usaremos uma conjugação para mudar o problema de mostrar a hipoeliticidade G^s global do operador L para o operador $L_{\lambda_{00}} = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda_{00}$, o qual já sabemos ser globalmente G^s hipoelítico pelo Teorema 5.1.

Vamos começar mostrando que vale a seguinte conjugação:

$$e^{-u}L(e^u v) = L_{\lambda_{00}}v,$$

para toda $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$. De fato,

$$\begin{aligned}L(e^{u(t,x)}v(t,x)) &= (\partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x))(e^u v) \\ &= (\partial_t u)e^u v + e^u(\partial_t v) - c(t)(\partial_x u)e^u v - c(t)e^u(\partial_x v) - \lambda e^u v \\ &= e^u\big\{(\partial_t u - c(t)\partial_x u)v + \partial_t v - c(t)\partial_x v - \lambda v\big\} \\ &= e^u\big\{(Pu)v + \partial_t v - c(t)\partial_x v - \lambda v\big\} \\ &= e^u\big\{\widetilde{\lambda}v + \partial_t v - c(t)\partial_x v - \lambda v\big\} \\ &= e^u\big\{\lambda v - \lambda_{00}v + \partial_t v - c(t)\partial_x v - \lambda v\big\} \\ &= e^u\big\{\partial_t v - c(t)\partial_x v - \lambda_{00}v\big\} \\ &= e^u L_{\lambda_{00}}v.\end{aligned}$$

Portanto, L é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, $L_{\lambda_{00}}$ o é. Mas como b não muda de sinal e não é identicamente nula, o Teorema 5.1 nos garante que $L_{\lambda_{00}}$ é globalmente G^s hipoelítico e portanto concluímos que L também o é. $\square$

Teorema 5.4. *Seja $a = a(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ uma função a valores reais, $\lambda = \lambda(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e considere os seguintes operadores perturbados*

$$L = \partial_t - a(t)\partial_x - \lambda(t,x), \quad \widetilde{L} = \partial_t - a(t)\partial_x - \lambda_{00} \ \ e \ \ \widetilde{\widetilde{L}} = \partial_t - a_0\partial_x - \lambda_{00}$$

com $\lambda_{00} = (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(t,x)dtdx.$

Se $a_0 \notin (\mathbb{Q} \cup \mathbb{E}^s)$então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *L é globalmente G^s hipoelítico;*
2. *$\widetilde{L}$ é globalmente G^s hipoelítico;*
3. *$\widetilde{\widetilde{L}}$ é globalmente G^s hipoelítico;*
4. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|k_1 - a_0k_2 - \lambda_{00}| \geq e^{-\varepsilon|(k_1,k_2)|^{1/s}}, \quad para \quad |(k_1,k_2)| \geq C_\varepsilon.$$

Demonstração. A equivalência entre os itens *1* e *2* segue da conjugação apresentada no Teorema anterior, enquanto que a equivalência entre os itens *2* e *3* segue do automorfismo S exibido na Proposição 3.7. Por fim, a equivalência entre os itens *3* e *4* é apenas um caso particular do Teorema 3.2. $\square$

5.2 Perturbações em $\mathbb{R}^{n+2}$

Nesta seção estudamos a hipoeliticidade G^s global do operador

$$L_\lambda = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x,y), \tag{5.3}$$

com $c(t) = a(t) + ib(t)$ de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, $s \geq 1$, e $\lambda = \lambda(t,x,y)$ de classe $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$. Recordando que a notação $(t,x,y) \in \mathbb{R}^{n+2}$ significa que $t,x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

Observamos inicialmente que o operador $P = \partial_t - c(t)\partial_x$ não é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^{n+2}$, para $n \geq 1$. De fato, considerar a ultradistribuição

$$u = 1_t \otimes 1_x \otimes \delta_y \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}) \setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}),$$

então, pela Proposição 2.18, temos

$$Pu \ = \ (\partial_t - c(t)\partial_x)(1_t \otimes 1_x \otimes \delta_y)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\partial_t 1_t) \otimes 1_x \otimes \delta_y - c(t) 1_t \otimes (\partial_x 1_x) \otimes \delta_y \\
&= 0 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2}).
\end{aligned}
$$

Isso significa que neste capítulo não faz sentido falar de perturbação do operador globalmente G^s hipoelítico P, porém faz sentido perguntar se alguma perturbação deste operador por funções Gevrey resultará em um operador globalmente G^s hipoelítico.

A resposta para esta pergunta é positiva e evidencia uma relação nada intuitiva entre hipoeliticidade e injetividade. Comecemos analisando o caso de perturbações por constantes.

Teorema 5.5. *Seja L_λ o operador dado em* (5.3)*, com $\lambda \in \mathbb{C}$. Se b não muda de sinal e não é identicamente nula, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *L_λ é injetivo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$;*

2. *$\lambda \notin i(\mathbb{Z} + c_0\mathbb{Z})$;*

3. *L_λ é globalmente G^s hipoelítico.*

Demonstração. (1. $\Rightarrow$ 2.) Seja $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ solução de $L_\lambda u = 0$. Escrevendo

$$
u(t,x,y) = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(t,\xi,\eta) e^{i(\xi x + \eta\cdot y)},
$$

pela continuidade de L_λ temos

$$
0 = L_\lambda u = L_\lambda\Bigg(\sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta\cdot y)}\Bigg) = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n} \left(\frac{d}{dt} - (i\xi c(t) + \lambda)\right)\widehat{u}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta\cdot y)},
$$

e da unicidade dos coeficientes parciais de Fourier, temos

$$
\left(\frac{d}{dt} - (i\xi c(t) + \lambda)\right)\widehat{u}(t,\xi,\eta) = 0,
$$

para todo $(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n$.

Pelo Lema 6.3, a equação acima é equivalente a

$$
\left(\frac{d}{dt} - (i\xi c_0 + \lambda)\right)e^{-ijC(t)}\widehat{u}(t,\xi,\eta) = 0,
$$

com $C(t) = \displaystyle\int_0^t c(r)dr - a_0 t$ e $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} c(r)dr.$

Finalmente, pelo Lema 6.5, a equação acima possui solução não-trivial se, e somente se, o número $-(i\xi c_0 + \lambda) \in i\mathbb{Z}$, o que é equivalente à dizer que $\lambda \in i\mathbb{Z} + ic_0\mathbb{Z} = i(\mathbb{Z} + c_0\mathbb{Z})$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ tal que $L_\lambda u = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$. Mostraremos que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ analisando os coeficientes parciais de Fourier de u em relação às variáveis x e y.

Escrevendo
$$u(t,x,y)=\sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n}\widehat{u}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta\cdot y)},$$
e
$$f(t,x,y)=\sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta\cdot y)},$$
segue da continuidade de L_λ e da unicidade dos coeficientes parciais de Fourier que
$$\widehat{f}(t,\xi,\eta)=\left(\frac{d}{dt}-(i\xi c(t)+\lambda)\right)\widehat{u}(t,\xi,\eta),\ \forall(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n.$$

E dos Lemas 6.3 e 6.6, as soluções da equação são da forma
$$\widehat{u}(t,\xi,\eta)=\frac{1}{1-e^{2\pi(i\xi c_0+\lambda)}}\int_0^{2\pi}e^{\lambda r}e^{i\xi H(t,r)}\widehat{f}(t-r,\xi,\eta)dr,$$
ou equivalentemente da forma
$$\widehat{u}(t,\xi,\eta)=\frac{1}{e^{-2\pi(i\xi c_0+\lambda)}-1}\int_0^{2\pi}e^{-\lambda r}e^{i\xi H(t,-r)}\widehat{f}(t+r,\xi,\eta)dr,$$
com $H(t,r)=C(t-r)-C(t)-c_0r$, $C(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\alpha}c(r)dr-c_0\alpha$, e $c_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}c(r)dr$.

Como, por hipótese, $\lambda\notin i(\mathbb{Z}+c_0\mathbb{Z})$ segue que $-(i\xi c_0+\lambda)\notin i\mathbb{Z}$ para todo $\xi\in\mathbb{Z}$, assim as duas expressões acima para $\widehat{u}(t,\xi,\eta)$ cobrem todas as possibilidades.

Um cálculo análogo ao que fizemos na demonstração do Teorema 5.1 nos garante que $u\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$, portanto o operador L_λ é globalmente G^s hipoelítico.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Suponhamos que L_λ não seja injetivo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$. Afirmamos que a aplicação
$$\widetilde{L}_\lambda : D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)\to D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$$
definida por $\widetilde{L}_\lambda=\partial_t-c(t)\partial_x-\lambda$ não é injetiva em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Notemos, inicialmente, que se L_λ não é injetivo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$, então existe $u(t,x,y)\not\equiv 0$ tal que $L_\lambda u(t,x,y)=0$. Agora seja $(t_0,x_0,y_0)\in\mathbb{R}^{n+2}$ tal que $u(t_0,x_0,y_0)\neq 0$ e consideremos a função $u_{y_0}(t,x)\doteq u(t,x,y_0)$. Logo $u_{y_0}(t_0,x_0)\neq 0$ e temos que $\widetilde{L}_\lambda u_{y_0}(t,x)=L_\lambda u(t,x,y_0)=0$, assim $\widetilde{L}_\lambda$ não é injetivo.

Assim sendo, existe $\varphi\not\equiv 0$ tal que $\widetilde{L}_\lambda\varphi=0$.

Por fim, seja $u=\varphi\otimes v$, com $v\in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n_y)\setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n_y)$, então $u\neq 0$ e
$$L_\lambda u=(\widetilde{L}_\lambda\varphi)\otimes v=0,$$
e portanto L_λ não é globalmente G^s hipoelítico. $\square$

Teorema 5.6. *Dados $s \geq 1$, $c(t) = a(t) + ib(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $\lambda = \lambda(t,x,y) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$, considere os operadores*

$$L_\lambda = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x,y) \quad e \quad L_{\lambda_{00}} = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda_{00}$$

com $\lambda_{00} = \dfrac{1}{(2\pi)^{n+2}} \displaystyle\int_{[0,2\pi]^{n+2}} \lambda(t,x,y)dtdxdy.$

Se b não é identicamente nula e não muda de sinal, então

$$L_\lambda \text{ é globalmente } G^s \text{ hipoelítico} \Longleftrightarrow L_{\lambda_{00}} \text{ é globalmente } G^s \text{ hipoelítico.}$$

Demonstração. Seja $\widetilde{\lambda}(t,x,y) = \lambda(t,x,y) - \lambda_{00}$. Como

$$\int_{[0,2\pi]^{n+2}} \widetilde{\lambda}(t,x,y)dtdxdy = 0,$$

segue que $\widetilde{\lambda} \in E$, o espaço das funções admissíveis para resolubilidade G^s global do operador P (ver definição 4.9)

Como o operador P é globalmente G^s resolúvel, existe $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$ tal que $Pu = \widetilde{\lambda}$.

Repetindo os cálculos que fizemos na demonstração do Teorema 5.3, prova-se a validade da conjugação

$$e^{-u}L(e^u v) = L_{\lambda_{00}} v,$$

para toda $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$. Daqui segue que L_λ é globalmente G^s hipoelítico se, e somente se, $L_{\lambda_{00}}$ é globalmente G^s hipoelítico. □

O seguinte Teorema sumariza os resultados dessa seção.

Teorema 5.7. *Sejam L e $L_{\lambda_{00}}$ como acima definidos Se b não é identicamente nula e não muda de sinal, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$L_{\lambda_{00}}$ é injetivo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+2})$;*
2. *$\lambda_{00} \notin i(\mathbb{Z} + c_0\mathbb{Z})$;*
3. *$L_{\lambda_{00}}$ é globalmente G^s hipoelítico.;*
4. *L_λ é globalmente G^s hipoelítico.*

6 APÊNDICE

Reunimos neste capítulo alguns resultados auxiliares utilizados no texto.

Lema 6.1. *Considere o operador*

$$L = \partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x),$$

sendo $c \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. *Nestas condições,* $L : D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \to D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ *é contínuo.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T_n \to 0$ no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Queremos mostrar que $(LT_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para 0 no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Para toda $\phi(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle LT_n, \phi\rangle &= \langle(\partial_t - c(t)\partial_x - \lambda(t,x))T_n, \phi\rangle \\
&= \langle \partial_t T_n - c(t)\partial_x T_n - \lambda(t,x)T_n, \phi\rangle \\
&= \langle \partial_t T_n, \phi > - < c(t)\partial_x T_n, \phi\rangle > - < \langle\lambda(t,x)T_n, \phi\rangle \\
&= -\langle T_n, \partial_t\phi > + < T_n, c(t)\partial_x\phi\rangle > - < \langle T_n, \lambda(t,x)\phi\rangle \\
&= \langle T_n, -\partial_t\phi + c(t)\partial_x\phi - \lambda(t,x)\phi\rangle \\
&= \langle T_n, {}^tL\phi\rangle
\end{aligned}$$

e como $T_n \to 0$ no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e ${}^tL\phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$< LT_n, \phi >=< T_n, {}^tL\phi >\to 0.$$

Portanto L é contínuo. □

Lema 6.2. *A regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções continua válida quando o segundo termo é uma ultradistribuição Gevrey.*

Demonstração. Sejam $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$ e $\phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, temos que:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}(f(t)u(t)), \phi(t)\right\rangle &= -\left\langle f\cdot u, \frac{d}{dt}\phi\right\rangle = -\left\langle u, f\frac{d}{dt}\phi\right\rangle = -\left\langle u, \frac{d}{dt}(f\phi) - \frac{d}{dt}f\cdot\phi\right\rangle \\
&= -\left\langle u, \frac{d}{dt}(f\phi)\right\rangle + \left\langle u, \frac{d}{dt}f\cdot\phi\right\rangle = \left\langle f\frac{d}{dt}u, \phi\right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}f\cdot u, \phi\right\rangle \\
&= \left\langle f\frac{d}{dt}u + \frac{d}{dt}f\cdot u, \phi\right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}f\cdot u + f\frac{d}{dt}u, \phi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{d}{dt}(f\cdot u) = \dfrac{d}{dt}f\cdot u + f\dfrac{d}{dt}u.$ □

Lema 6.3. *As seguintes equações são equivalentes:*

$$\left(\frac{d}{dt} - b(t)\right)u(t) = g(t) \tag{6.1}$$

e

$$\left(\frac{d}{dt} - b_0\right)\left(e^{-B(t)}u(t)\right) = e^{-B(t)}g(t), \tag{6.2}$$

com $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, $b,\ g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, $b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} b(r)dr$ *e* $B(t) = \int_0^t b(r)dr - b_0 t$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ está em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e como e^z $(z \in \mathbb{C})$ é função inteira, segue que $e^{-B(t)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e portanto $e^{-B(t)}u(t)$ está bem definida.

Antes de mostrarmos a equivalência, notemos que para $\phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ arbitrária, vale

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{d}{dt} - b_0\right)\left(e^{-B(t)}u(t)\right), \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt}\left(e^{-B(t)}u(t)\right) - b_0\left(e^{-B(t)}u(t)\right), \phi \right\rangle \\
&= \left\langle -(b(t) - b_0)e^{-B(t)}u(t) + e^{-B(t)}\frac{d}{dt}u(t), \phi \right\rangle - \left\langle b_0\left(e^{-B(t)}u(t)\right), \phi \right\rangle \\
&= \left\langle -b(t)e^{-B(t)}u(t) + e^{-B(t)}\frac{d}{dt}u(t), \phi \right\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, vale que

$$\left\langle \left(\frac{d}{dt} - b_0\right)\left(e^{-B(t)}u(t)\right), \phi \right\rangle = \left\langle e^{-B(t)}\left(\frac{d}{dt} - b(t)\right)u(t), \phi \right\rangle. \tag{6.3}$$

Agora mostremos as equivalências.

- Suponhamos $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ que seja solução de (6.1), então:

$$\left\langle \left(\frac{d}{dt} - b_0\right)\left(e^{-B(t)}u(t)\right), \phi \right\rangle = \left\langle e^{-B(t)}\left(\frac{d}{dt} - b(t)\right)u(t), \phi \right\rangle = \left\langle e^{-B(t)}g(t), \phi \right\rangle$$

ou seja, se $u(t)$ é solução de (6.1), então $e^{-B(t)}u(t)$ é solução de (6.2).

(6.2) $\implies$ (6.1)

Suponhamos agora $w \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ solução de (6.2), então:

$$\left\langle e^{-B(t)}g(t), \phi \right\rangle = \left\langle \left(\frac{d}{dt} - b_0\right)w, \phi \right\rangle = \left\langle e^{-B(t)}\left(\frac{d}{dt} - b(t)\right)e^{B(t)}w(t), \phi \right\rangle$$

logo $\left(\dfrac{d}{dt} - b(t)\right)e^{B(t)}w(t) = g(t)$, ou seja, se w é solução de (6.2), então $e^{B(t)}w$ é solução de (6.1). □

Lema 6.4. *1. Se* $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ *e* $u' = 0$, *então* $u = cte$.

2. Sejam $u, g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ *com* $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(r)dr = 0$ *tal que* $u' = g$, *então* $u = cte + \displaystyle\int_0^t g(r)dr$.

Demonstração. 1. Como $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, então

$$0 = \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(\xi)e^{i\xi t}\right)\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} i\xi\widehat{u}(\xi)e^{i\xi t},$$

logo pela unicidade dos coeficientes de Fourier, segue que $i\xi\widehat{u}(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Assim, $\widehat{u}(\xi) = 0$ se $\xi \neq 0$. Portanto, temos

$$u(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(\xi)e^{i\xi t} = \widehat{u}(0) = cte.$$

2. Sejam u_1 e $u_2 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ tais que $u_1' = g$ e $u_2' = g$. Temos $(u_1 - u_2)' = (u_1' - u_2') = 0$ e pelo item anterior, segue que $u_1 - u_2 = c$, ou seja, $u_1 = c + u_2$, sendo c uma constante.
   Note que $u_0(t) = \int_0^t g(r)dr \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ é uma solução de $u(t)' = g(t)$, assim

$$u(t) = u_0 + c = c + \int_0^t g(r)dr.$$

□

Lema 6.5. *Se $\gamma \in \mathbb{C}$, então a equação*

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)u(t) = 0 \tag{6.4}$$

admite única solução em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ não-trivial se, e somente se, $\gamma \in i\mathbb{Z}$. Se $\gamma \in i\mathbb{Z}$, então $u(t) = Ce^{-i\gamma t}$, $C \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Por fator integrante, as soluções de (6.4) são da forma:

$$u(t) = Ce^{-\lambda t},\ C \in \mathbb{C}.$$

Para que u seja 2π-periódica, devemos ter que

$$u(t) = Ce^{-\lambda t} = Ce^{-\lambda(t+2\pi)} = u(t + 2\pi),$$

e isso ocorrerá se, e somente se, $e^{-\lambda 2\pi} = 1$, o que é equivalente que $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ e $\mathrm{Im}(\lambda) \in \mathbb{Z}$. Portanto há solução não-trivial apenas quando $\lambda \in i\mathbb{Z}$. □

Lema 6.6. *Sejam $\gamma \in \mathbb{C}$, $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ e a equação*

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)u(t) = g(t). \tag{6.5}$$

Nestas condições, temos:

1. Se $\gamma \notin i\mathbb{Z}$, então (6.5) admite única solução em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, a qual pode ser escrita como:

$$u(t) = \frac{1}{1-e^{-2\pi\gamma}} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma r} g(t-r)dr, \tag{6.6}$$

ou de forma equivalente,

$$u(t) = \frac{1}{e^{2\pi\gamma}-1} \int_0^{2\pi} e^{\gamma r} g(t+r)dr. \tag{6.7}$$

2. Se $\gamma \in i\mathbb{Z}$ e $\int_0^{2\pi} e^{-\gamma r} g(r)dr = 0$, então uma solução de (6.5) é dada por

$$u(t) = e^{-\gamma t} \int_0^{t} e^{\gamma r} g(r)dr. \tag{6.8}$$

.

Demonstração. Suponha que $\gamma \notin i\mathbb{Z}$. Multiplicando a equação (6.5) por $e^{\gamma t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\gamma t}u(t)) = e^{\gamma t}\frac{d}{dt}u(t) + \gamma e^{\gamma t}u(t) = e^{\gamma t}\frac{d}{dt}u(t) + (\gamma e^{\gamma t}u(t)) = e^{\gamma t}g(t),$$

logo, segue do lema 6.4 que

$$u(t) = Ce^{-\gamma t} + \int_0^t e^{\gamma(r-t)}g(r)dr.$$

Observe que u é uma função Gevrey com $u(0) = C$ e da condição $u(0) = u(2\pi)$ obtem-se

$$C = \frac{1}{e^{2\pi\gamma}-1} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma r} g(r)dr.$$

Como $e^{-2\pi\gamma} - 1 \neq 0$, pois $\gamma \notin i\mathbb{Z}$, então

$$u(t) = \frac{1}{e^{2\pi\gamma}-1} \int_0^{2\pi} e^{\gamma(r-t)} g(r)dr + \int_0^t e^{\gamma(r-t)}g(r)dr, \quad u(0) = u(2\pi),$$

donde

$$u(t) = \frac{1}{e^{2\pi\gamma}-1} \int_0^{2\pi} e^{\gamma r} g(t-r)dr.$$

Uma vez que g é 2π-periódica, segue que u também o é.

Verifiquemos que (6.5) admite única solução. Para tanto, supondo $u_1, u_2 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ soluções de (6.5), segue que $u_1 - u_2 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ é solução de $\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)u(t) = 0$ e pelo lema 6.5, tem-se $u_1 - u_2 \equiv 0$ e portanto $u_1 = u_2$.

A equivalência entre as equações (6.6) e (6.7) é imediata, o que conlui a prova de 1.

Considere agora $\gamma \in i\mathbb{Z}$. Se u é solução de (6.5), então $\frac{d}{dt}(e^{\gamma t}u(t)) = e^{\gamma t}g(t)$ e pelo lema 6.4, item 2, segue que $u(t) = Ce^{-\gamma t} + \int_0^t e^{\gamma r - t}g(r)dr$. Temos também que u é função Gevrey, com $u(0) = C = u(2\pi)$.

Para verificar que u é 2π-periódica, note que

$$u(t+2\pi) = u(t) = Ce^{-\gamma t + 2\pi} + \int_0^{t+2\pi} e^{\gamma r - (t+2\pi)} g(r)dr$$

$$
\begin{aligned}
&= Ce^{-\gamma t+2\pi} + e^{-\gamma(t+2\pi)} \int_0^{t+2\pi} e^{\gamma r} g(r) dr \\
&= Ce^{-\gamma t+2\pi} + e^{-\gamma(t+2\pi)} \left(\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+t} \right) \big(e^{\gamma r} g(r)\big) dr \\
&= e^{-\gamma t} \left[\int_0^t e^{\gamma s} g(s) ds + C \right] = u(t).
\end{aligned}
$$

Por fim, tomando $C = 0$, obtem-se a solução

$$
u(t) = e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\lambda r} g(r) dr.
$$

□

Lema 6.7. *Sejam $c_0 = a_0 + ib_0$ e $\lambda = a_1 + ib_1$, com $b_0 > 0$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$
|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}|^{-1} \le C \tag{6.9}
$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

Demonstração. Dividiremos a análise em 3 casos:

- Caso $\xi = 0$ e $a_1 \neq 0$ ou $\xi = 0$ e $b_1 \notin \mathbb{Z}$.

  É claro que $e^{2\pi\lambda} \neq 1$, logo $|1 - e^{2\pi\lambda}| = C_0 > 0$.

- Caso $a_1 < b_0$ e $\xi = 1, 2, \cdots$.

  Observemos que $\xi b_0 \ge b_0 \Rightarrow (a_1 - \xi b_0)2\pi \le (a_1 - b_0)2\pi \Rightarrow e^{(a_1 - \xi b_0)2\pi} \le e^{(a_1 - b_0)2\pi}$. Logo

$$
\begin{aligned}
|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}| &\ge 1 - |e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}| = 1 - |e^{(a_1 - \xi b_0)2\pi}| \\
&\ge 1 - |e^{(a_1 - b_0)2\pi}| = 1 - e^{(a_1 - b_0)2\pi} = C_1 > 0
\end{aligned}
$$

- Caso $0 < b_0 \le a_1$ e $\xi = 1, 2, \cdots$.

  Seja $\xi_0 = \left[\dfrac{a_1}{b_0}\right]$, sendo $\xi_0 \le a_1/b_0 < \xi_0 + 1$, $\xi_0 \in \mathbb{N}$.

  Para $\xi \ge \xi_0 + 1$, temos

$$
\begin{aligned}
b_0 \xi 2\pi \ge b_0(\xi_0 + 1)2\pi &\implies [a_1 - b_0\xi]2\pi \ge [a_1 - b_0(\xi_0 + 1)]2\pi \\
&\implies e^{[a_1 - b_0\xi]2\pi} \le e^{[a_1 - b_0(\xi_0 + 1)]2\pi}
\end{aligned}
$$

  logo

$$
|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}| \ge 1 - e^{[a_1 - b_0\xi]2\pi} \ge 1 - e^{[a_1 - b_0(\xi_0 + 1)]2\pi} = C_2 > 0
$$

  Para $\xi = \xi_0$ e $\xi_0 = \dfrac{a_1}{b_0}$, temos que $i\xi c_0 + \lambda \notin i\mathbb{Z} \Leftrightarrow b_1 + \xi_0 a_0 \notin \mathbb{Z}$. Logo

$$
|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}| = |1 - e^{i(b_1 + \xi_0 a_0)2\pi}|
$$

$$= |1 - \cos((b_1 + \xi_0 a_0)2\pi) - i\sin((b_1 + \xi_0 a_0)2\pi)|$$
$$\geq |1 - \cos((b_1 + \xi_0 a_0)2\pi)| = C_3 > 0.$$

Para $\xi = \xi_0$ e $\xi_0 < \dfrac{a_1}{b_0}$, temos que $i\xi c_0 + \lambda \notin i\mathbb{Z}$. Logo

$$|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}| \geq 1 - e^{(a_1 + \xi_0 a_0)2\pi} = C_4 > 0.$$

Para $\xi \leq \xi_0 - 1$, temos que $1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)} \neq 0$, logo

$$|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}| \geq min\{|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}|, \xi = 1, 2, \cdots, \xi_0 - 1\} = C_5 > 0.$$

Logo, tomando $C^{-1} = min\{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, temos que

$$|1 - e^{2\pi(\lambda + i\xi c_0)}|^{-1} \leq C.$$

$\square$

Lema 6.8. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|\xi|^{|\alpha|} \leq e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}} C_\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \qquad \xi \in \mathbb{Z}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Demonstração. Considere $f(t) = t^{|\alpha|}e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{s}}}$, para $t \in \mathbb{R}$. Não é difícil verificar que $\bar{t} = (\frac{s|\alpha|}{\varepsilon})^s$ maximiza a função $f(t)$. Note que

$$e^{|\alpha|} = \sum_{k \geq 0} \frac{|\alpha|^k}{k!} \geq \frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{|\alpha|!}.$$

Utilizando que $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}(\alpha!)$, obtemos que

$$\frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{e^{|\alpha|}} \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|}(\alpha!).$$

Então, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale que

$$\begin{aligned} t^{|\alpha|}e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{s}}} &= f(t) \leq f(\bar{t}) \leq \left(\frac{s|\alpha|}{\varepsilon}\right)^{s|\alpha|} e^{-s|\alpha|} \\ &= \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{s|\alpha|} \left(\frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{e^{|\alpha|}}\right)^s \leq \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{s|\alpha|} n^{s|\alpha|}(\alpha!)^s \\ &= C_\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \end{aligned}$$

sendo $C_\varepsilon = (\frac{ns}{\varepsilon})^s$. Substituindo t por $|\xi|$ segue o resultado. $\square$

Lema 6.9. *Sejam $\beta \in \mathbb{Z}_+, \beta \geq 1$ e $R \in \mathbb{R}$. Então*

$$\sum_{\Delta} \frac{(m_1 + \cdots + m_\beta)!}{m_1! \ldots m_\beta!} R^{m_1 + \cdots + m_\beta} = R(1 + R)^{\beta - 1},$$

sendo $\Delta(\beta) = \{(m_1, \ldots, m_\beta) \in \mathbb{Z}_+^\beta : \sum_{j=1}^\beta jm_j = \beta\}$. Em particular, para $R = 1$,

$$\sum_{\Delta(\beta)} \frac{(m_1 + \cdots + m_\beta)!}{m_1! \ldots m_\beta!} = 2^{\beta - 1}.$$

Demonstração. Caso $R = 0$ é imediato, portanto considere $R \neq 0$. Defina as seguintes funções

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{j \geq 0} x^j, \qquad |x| < 1,$$

e

$$f(x) = \frac{1}{1 - R(x-1)} = \sum_{j \geq 0} R^j (x-1)^j, \qquad |R(x-1)| < 1.$$

Não é difícil ver que $g^{(j)}(0) = j!$ e $f^{(j)}(1) = R^j j!$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}_+$. Note que

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= \frac{1-x}{1-x(1+R)} = \frac{1}{1-x(1+R)} - x\frac{1}{1-x(1+R)} \\ &= \sum_{j \geq 0} x^j (1+R)^j - \sum_{j \geq 0} x^{j+1}(1+R)^j \\ &= 1 + \sum_{j \geq 1} x^j (1+R)^j - x^j (1+R)^{j-1} \\ &= 1 + \sum_{j \geq 1} x^j (1+R)^{j-1} R, \end{aligned}$$

para $|x(R+1)| < 1$. Então $(f \circ g)^{\beta}(0) = \beta!(1+R)^{\beta-1}R$. Substituindo as respectivas derivadas de f, g e $f \circ g$ na fórmula de Faà di Bruno segue o resultado. □

Lema 6.10. *Sejam $\beta \in \mathbb{Z}_+, \beta \geq 1$ e $(m_1, \ldots, m_\beta) \in \Delta = \{(m_1, \ldots, m_\beta) \in \mathbb{Z}_+^\beta : \sum_{j=1}^{\beta} j m_j = \beta\}$. Definindo $\prod(\beta) = \prod_{j=1}^{\beta}((j!)^{s-1})^{m_j}$ temos que*

$$((m_1 + \cdots + m_\beta)!)^s \prod(\beta) \leq (m_1 + \cdots + m_\beta)!(\beta!)^{s-1}.$$

Demonstração. Primeiramente note que a sequência $a_\beta = (\beta!)^{\frac{1}{\beta-1}}$ é crescente.

De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{a_{\beta+1}}{a_\beta} &= \frac{((\beta+1)!)^{\frac{1}{\beta}}}{(\beta!)^{\frac{1}{\beta-1}}} = \left(\frac{((\beta+1)!)^{\beta-1}}{(\beta!)^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta(\beta-1)}} \\ &= \left(\frac{(\beta+1)^{\beta}((\beta+1)!)^{\beta-1}}{((\beta+1)!)^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta(\beta-1)}} = \left(\frac{(\beta+1)^{\beta}}{(\beta+1)!}\right)^{\frac{1}{\beta(\beta-1)}} > 1. \end{aligned}$$

Logo, para $1 < j \leq n$, temos que $(j!)^{\frac{s-1}{j-1}} < (\beta!)^{\frac{s-1}{\beta-1}}$ e portanto

$$(j!)^{s-1} \leq ((\beta!)^{s-1})^{\frac{j-1}{\beta-1}}.$$

Disso segue que

$$\prod(\beta) = ((2!)^{s-1})^{m_2}((3!)^{s-1})^{m_3} \ldots ((\beta!)^{s-1})^{m_\beta} \leq ((\beta!)^{s-1})^{\frac{m_2+2m_3+\ldots(\beta-1)m_\beta}{\beta-1}},$$

e que

$$((m_1 + \cdots + m_\beta)!)^s = (m_1 + \cdots + m_\beta)!((m_1 + \cdots + m_\beta)!)^{s-1} \leq (m_1 + \cdots + m_\beta)!((\beta!)^{s-1})^{\frac{(m_1+\ldots m_\beta)-1}{\beta-1}},$$

pois $1 < (m_1 + \cdots + m_\beta) \leq \beta$. Finalmente, multiplicando essas duas últimas desigualdades segue o resultado. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BERGAMASCO, A. P. Perturbations of globally hypoelliptic operators. *Journal of Differential Equations*, v. 114, n. 2, p. 513–526, 1994.

[2] BERGAMASCO, A. Hipoeliticidade global para algumas classes de operadores. *Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo.*, 1989.

[3] BERGAMASCO, A. Remarks about global analytic hypoellipticity. *Transactions of the American Mathematical Society*, p. 4113–4126, 1999.

[4] BERGAMASCO, A.; DA SILVA, P. D.; GONZALEZ, R. Global solvability and global hypoellipticity in gevrey classes for vector fields on the torus. *Journal of Differential Equations*, v. 264, n. 5, p. 3500 – 3526, 2018.

[5] COELHO, L. Regularidade global gevrey das soluções de certas classes de operadores parciais lineares de primeira ordem. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos*, 2004.

[6] GREENFIELD, S. J.; WALLACH, N. R. Global hypoellipticity and liouville numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 31, n. 1, p. 112–114, 1972.

[7] KIRILOV, A. Algumas observações sobre a hipoeliticidade global no toro n-dimensional. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos*, 1996.

[8] PETRONILHO, G. Ultradistribuições gevrey periódicas em $\mathbb{R}^n$. Apostila do curso apresentado na I EBED - UNICAMP, 2003.

[9] TAKAHASHI, L. Hipoeliticidade global de certas classes de operadores diferenciais parciais. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos*, 1995.