LUCIANE CRUZ JESS

FRAÇÕES EM UM LIVRO DIDÁTICO NA 5ª E 6ª SÉRIES: UMA APROXIMAÇÃO ATRAVÉS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Curitiba
2004

LUCIANE CRUZ JESS

FRAÇÕES EM UM LIVRO DIDÁTICO NA 5ª E 6ª SÉRIES: UMA APROXIMAÇÃO ATRAVÉS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática da Universidade Federal do Paraná.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna

Curitiba

2004

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

PARECER

Defesa de Dissertação de **LUCIANE CRUZ JESS** para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO.

Os abaixo-assinados, DR. CARLOS ROBERTO VIANNA; DR. ANTONIO MIGUEL e DRª MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES argüiram, nesta data, a candidata acima citada, a qual apresentou a seguinte Dissertação: **"AS FRAÇÕES EM UM LIVRO DIDÁTICO DE QUINTA E SEXTA SÉRIES: UMA APROXIMAÇÃO ATRAVÉS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA".**

Procedida a argüição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que a candidata está apta ao Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
DR. CARLOS ROBERTO VIANNA		aprovado
DR. ANTONIO MIGUEL		APROVADO
DRª MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES	MTCSoares	APROVADO

Curitiba, 30 de novembro de 2004

Profª Drª Regina Maria Michelotto
Coordenadora do Programa de
Pós-Graduação em Educação

Dedico este trabalho a meu pai que já se encontra em um plano superior e a Salmita uma amiga muito especial.

Agradecimentos especiais

A DEUS, por me permitir chegar até aqui.

A todos aqueles que de maneira direta ou indireta participaram deste processo de estudo.

Àquele que além de ter dividido as horas de estudo também dividiu as responsabilidades de um lar: Gil.

Muito obrigada

SUMÁRIO

RESUMO

Este trabalho tem o propósito de descrever algumas relações entre diferentes modos de conceber e representar quantidades fracionárias e, em particular, assinalar como este conhecimento chega às mãos de alunos e professores mediante livros didáticos e livros de história da matemática. Além disso, elabora-se uma categorização das formas como o conteúdo “frações” é abordado no livro didático adotado no município de Araucária; e realiza-se um apanhado das menções ao termo “fração” em livros de História da Matemática.

Palavras chave: história da matemática, frações, educação matemática, formação de professores.

ABSTRACT

This work has the purpose to describe some relations between different ways to conceive and to represent amounts factionaries and, in particular, to mark as this knowledge how to arrive in the hands of pupils and teachers by didactics books and books of history of the mathematics. Moreover, is elaborating one list of categories of the forms as the content "fractions" is boarded in the didactic book adopted in the municipal district of Araucária; and is realized one resume of mentions to the term "fraction" in the books of History of the Mathematics.

Key words: history of mathematics, fractions, mathematical education, formation of teachers

INTRODUÇÃO

Começo por colocar a questão que pretendo investigar: as relações entre diferentes modos de conceber e representar quantidades fracionárias e, em particular, desejo observar como este conhecimento chega às mãos de alunos e professores mediante livros didáticos e livros de história da matemática.

Esta formulação inicial do problema é, na verdade, uma dentre muitas a que cheguei após um longo processo de tentativas e enganos. Entendo que a história dessas tentativas é relevante para a compreensão das dificuldades associadas ao problema, dificuldades que me acompanharam até o momento da defesa da dissertação, e que motivaram uma re-escrita do problema.

No que segue, inicialmente procurarei situar como foi que comecei a manifestar interesse pelo tema das frações, como este tema está particularmente ligado com alguns momentos de minha história pessoal e procurarei, também, retratar algumas das formulações iniciais para meu problema de pesquisa.

CONFIGURAÇÔES INICIAIS

Minha vida escolar de 1º e 2º graus se passou em uma escola da rede pública de Curitiba. Cursei o Magistério, preparando-me para o trabalho com crianças de pré à quarta série.

Sempre fui uma aluna com bom rendimento em matemática, por isso, nunca imaginei que, como professora desta disciplina, sentiria tanta dificuldade em ensiná-la.

Atuando nas séries iniciais, senti-me incentivada a concorrer a uma das vagas do curso de Licenciatura em Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUC/PR, no ano de 1990. Hoje percebo que, após quatro anos de curso – e mesmo tendo a disciplina específica de História da Matemática ministrada durante um semestre –, não saberia identificar como usar a história da matemática em sala de aula de maneira que ela pudesse auxiliar na compreensão de conceitos pelos alunos do Ensino Fundamental.

Ao final de 1993, com a conclusão da licenciatura em matemática, cursei, na mesma instituição, uma especialização em didática, pois achava que necessitava aprender mais sobre as especificidades da educação, além daquilo que havia visto na graduação. Meu curso, como as demais licenciaturas, teve em seu currículo as disciplinas de Psicologia, Didática, Fundamentos da Educação e outras... mas durante o decorrer dessas disciplinas, – percebo isso somente agora, em retrospectiva –, eu e meus colegas éramos resistentes a essas disciplinas “didáticas”, e acabamos por perder o que de melhor elas tinham a oferecer.

Em maio de 1995 iniciei minha carreira como professora de matemática, atuando de 5ª a 8ª série, e fazendo parte do Quadro Próprio do Magistério (QPM) da Secretaria Municipal de Educação – SMED – de Araucária. Com pouco tempo de atuação neste nível de ensino percebi nos meus alunos as mesmas dificuldades de aprendizagem apresentadas pelas crianças das séries iniciais: em particular, dificuldades em relação ao estudo das frações. Minha indagação era e continua sendo: Por quê?

Talvez uma das razões fosse a minha própria dificuldade ao ensinar esse conteúdo, ao tentar estabelecer relações com outros conteúdos da matemática, e, mesmo ao tentar relacionar as diferentes formas de "apresentação" de um número fracionário. Tais dificuldades serviram como motivação para que eu viesse a efetuar leituras sobre problemas de aprendizagem dos números racionais, já que não era, nem é possível, simplesmente, excluir um tópico do rol de conteúdos do planejamento anual da escola. Um problema de pesquisa poderia ser obtido a partir daí: o uso que se dava às frações no passado serve como justificativa para ensiná-las hoje? Talvez, de posse desse problema, eu pudesse recorrer à história para elucidar uma dificuldade do presente.

Navegando pela internet, encontrei um site[1] que apresentava um curso, elaborado por um grupo de trabalho coordenado pelos professores Luiz Márcio Pereira Imenes e Anita Rondon Berardinelli, para professores de 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental. Dentre os itens abordados no curso, o que mais chamou minha atenção foi que um dos tópicos destinados ao ensino das frações problematizava: *uma fração é, ou não é um número?* Também chamou minha atenção a apresentação do problema da "herança dos camelos" [2], pois ele era meu conhecido desde o meu primeiro dia de aula na disciplina de "Fundamentos da Matemática", na época da graduação. Lembro-me bem de como o conteúdo do problema provocou alvoroço geral na maioria dos alunos daquela turma: frações! Como aquilo estava acontecendo? Como era possível resolver aquele problema sendo possível lucrar um camelo e não prejudicar ninguém? A explicação da solução, descrita passo a passo no site, fez-me recordar a explicação dada pelo professor quando percebeu que poucos alunos haviam chegado a uma solução.

Paralelamente às buscas na internet, entrei em contato com algumas pesquisas realizadas em Pernambuco e constatei casos de sucesso na aprendizagem da relação fração-decimal-porcentagem, o que contrariava minha experiência com o fraco rendimento na aprendizagem das frações. Mesmo com fontes comprovando a possibilidade de um bom desempenho na aprendizagem deste tema, minha idéia sobre a exclusão desse conteúdo do currículo escolar permanecia. Para mim, as frações não deveriam ser ensinadas, pois

---

[1] http: //educar.sc.usp.br /matemática /m5let1.htm: Último acesso em 07/11/2004.
[2] Consultar o endereço eletrônico citado acima. Ver, também, Tahan (1990).

não eram encontradas facilmente no cotidiano dos alunos, ao contrário do caso dos números decimais, que facilmente podem ser exemplificados com o uso de valores monetários ou com o uso de medidas. Essas considerações me permitiriam reformular a questão de pesquisa: há novos usos e problemas que justifiquem o ensino das frações na atualidade? Também seria necessário buscar compreender como seria possível abordar, distintamente, números decimais e frações pois, percebo dificuldades – na abordagem dos livros didáticos – nessa passagem do conceito de fração para sua representação decimal,

Em agosto de 1997, iniciei um curso de especialização[3] no qual buscava, dentre outras coisas, um aprimoramento dos meus conhecimentos referentes ao conteúdo dos números racionais, e, mais especificamente: os números fracionários. Eu esperava que ampliando meus conhecimentos isso viesse a se traduzir em um melhor resultado nas avaliações dadas aos meus alunos de 5ª à 8ª séries.

Nesse curso, tive a oportunidade de conhecer publicações específicas da Educação Matemática, como as revistas Zetetiké, Boletim do Gepem, Bolema e Educação Matemática (revista da Associação de Professores de Matemática – APM – de Portugal), sendo que, nesta última, li alguns artigos que falavam sobre o uso da história da matemática na aula de matemática. Neste período, fiquei sabendo que existiam eventos específicos para professores de matemática como o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) ou o Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM).

Paralelamente a essas leituras, e com a minha integração ao quadro de professores de Araucária, comecei a participar dos encontros do grupo de professores de matemática do município. Eles se reuniam, e continuam a se reunir, mensalmente, para discutir questões relacionadas ao ensino da matemática. Estas reuniões visam à capacitação profissional e contam, ora com professores convidados que ministram palestras, seminários, oficinas ou cursos; ora com a coordenação específica de matemática que orienta discussões internas do grupo. Essas reuniões, chamadas de ‘assessoramentos’, permitiram-me ter os primeiros contatos com pessoas preocupadas com o ensino-aprendizagem e, especificamente, discutir sobre ensinar ou não tópicos específicos de Matemática.

Nesses encontros, foram levantadas, dentre outras, questões como:

- Qual a finalidade do que ensinamos?
- Que conteúdos devemos selecionar para integrar o planejamento?
- Como devemos ensinar tal conteúdo?
- Por que devemos ensinar frações se usamos somente os decimais na maioria das situações do cotidiano?

3 “Matemática para professores de 1º e 2º Graus”, versão 97/98, na Universidade Federal do Paraná.

Durante os momentos de assessoramento em Araucária, eu viria a associar ao uso didático da história da matemática um papel mais crítico, pois ainda acreditava que a simples introdução de fatos históricos, ou problemas curiosos, fossem suficientes para a motivação dos alunos; ainda lembrava com nitidez alguns dos detalhes da história contada por meus professores sobre as frações:

- os egípcios, por causa das enchentes do Nilo, foram obrigados a utilizar as frações;
- os egípcios interpretavam as frações como "parte da unidade" e somente utilizavam as frações unitárias, que são frações com numeradores iguais a um;
- os egípcios, para representar as frações, colocavam um sinal oval alongado sobre aquilo que nós chamamos hoje de denominador.

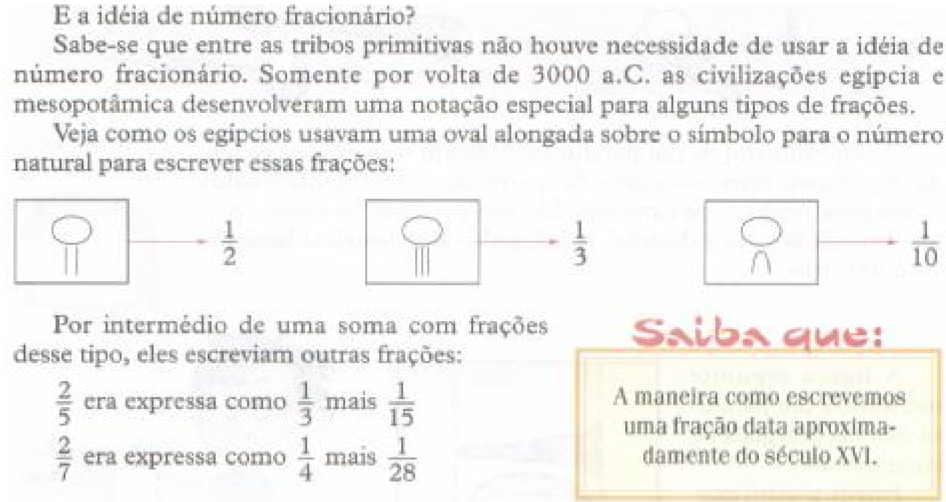
Seria possível pensar de forma diferente dessa? Não havia como questionar essas informações... elas me haviam sido dadas por "meus professores"... e eram confirmadas quando eu me aventurava a ler os livros de História da Matemática que estavam ao meu alcance, ou quando encontrava referências "históricas" nos livros didáticos que utilizava. Eu não poderia nem imaginar que, por exemplo, os egípcios poderiam ter outros usos para as frações...

A história que serve de referência para aquelas afirmações, que continua viva em minha memória, pode ser encontrada – como podemos constatar nos exemplos apresentados em seguida –, em alguns livros didáticos, em particular no livro adotado pelas escolas do Município de Araucária *(Matemática, Pensar e Descobrir: Novo),* no período relativo a essa pesquisa.

Na página 149 do livro de 5ª série encontramos o seguinte texto:

> *Disseram que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio Nilo, ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviaria medidores ao local e faria medir a terra, a fim de saber quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra.*

Eu não tinha condições de saber, sem uma indicação de referência, que o texto acima havia sido retirado de Heródoto, e que é utilizado por outros autores, por exemplo, aparece na página 32 do livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*,.de Bento de Jesus Caraça. Isso mostra que nossa possibilidade, como professores, de perceber a presença ou não de elementos de história da matemática nos livros didáticos fica fortemente condicionada, de um lado pelas leituras prévias que possamos ter, de outro lado pelas indicações explícitas dadas pelos autores dos livros didáticos que, entretanto, raramente revelam suas fontes. O modo "padrão" das referências históricas é o que exemplificamos em seguida; no mesmo livro didático, um pouco mais adiante, na página 153, encontramos a seguinte referência às frações:



E a idéia de número fracionário?

Sabe-se que entre as tribos primitivas não houve necessidade de usar a idéia de número fracionário. Somente por volta de 3000 a.C. as civilizações egípcia e mesopotâmica desenvolveram uma notação especial para alguns tipos de frações.

Veja como os egípcios usavam uma oval alongada sobre o símbolo para o número natural para escrever essas frações:

$\rightarrow \frac{1}{2}$ $\qquad \rightarrow \frac{1}{3}$ $\qquad \rightarrow \frac{1}{10}$

Por intermédio de uma soma com frações desse tipo, eles escreviam outras frações:

$\frac{2}{5}$ era expressa como $\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{15}$

$\frac{2}{7}$ era expressa como $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{28}$

Saiba que:

A maneira como escrevemos uma fração data aproximadamente do século XVI.

Talvez a história da matemática pudesse contribuir para que na construção do conhecimento dos alunos se descrevesse o contexto do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos; talvez ela pudesse contribuir na formação dos professores se nos ajudasse a perceber as idéias subjacentes ao conteúdo apresentado. Entretanto, nada disso era possível de vislumbrar a partir de fragmentos de história como o recortado acima, fragmentos que não colocam problemas básicos como: em que práticas do dia-a-dia os egípcios utilizariam as frações? Alega-se, no texto, que "tribos primitivas" não tinham necessidades de utilizar as frações. Quais seriam, então, "as necessidades" dos egípcios? A informação histórica acima destaca a forma de escrever as frações, mas nada diz sobre os motivos que levaram à escolha de uma determinada maneira de escrevê-las, em detrimento de outras que foram utilizadas em épocas diversas e por variados povos. Dessa forma, a história da matemática não estaria auxiliando na construção de conhecimentos -, nem de alunos, nem de professores -, ao contrário, estaria contribuindo apenas para "congelar" certos modos de ver, que se repetem em quase todos os livros didáticos de matemática.

É interessante observar que documentos oficiais de orientação curricular, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), sugerem um tratamento dos números fracionários que contemple variados modos de concebê-los e representá-los: *"O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial* *atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados tais como: parte/todo, quociente, razão e operador"* (BRASIL, 1997, p.66, grifos meus).

Outro texto que nos serve de referência para indicar a necessidade da atenção aos diferentes modos de conceber e representar as frações é o de Pires (2000), onde se ressalta que um trabalho envolvendo medidas e números racionais na 5ª série, seria um bom caminho para o estudo das frações, no qual o tema deve aparecer em formas variadas como: razão, quociente, parte-todo e representação fracionária.[4] Para Pires, as dificuldades apresentadas na aprendizagem deste tema podem estar relacionadas a *"forma única",* adotada pelos livros didáticos e pelos professores, de introduzir o conteúdo das frações.[5]

Então, chego a esse ponto com uma indicação para meu problema de pesquisa: diferentes formas de conceber e representar as frações. Uma questão que não imporia, necessariamente, um olhar histórico, permitindo, ainda, uma diversidade de abordagens.

Inegável dizer que eu buscava uma forma de envolver a história da matemática em meu problema de pesquisa, essa possibilidade era o que me motivava. Busquei respaldo nas indicações oficiais, mas nada encontrei, a não ser alusões genéricas como a que segue abaixo:

> *"A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento".* (BRASIL, 1997, p.42)

Nessa citação destaco que é dito que a história da matemática "pode" oferecer uma contribuição, mas que o trabalho de revelar a matemática como "criação humana" é deixado a encargo do professor. Isso significa que, se houver uma tal contribuição da história da matemática, ela vai se dar na formação do professor, permitindo a ele uma relação com o conhecimento matemático favorecedora da aprendizagem dos alunos. Os PCN nos dizem um pouco mais:

> *"A própria história da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática". (*BRASIL, 1997, p. 40)

[4] "A esse respeito, estudos como os de Kieren (1976), Behr *et alii* (1984) e Dickson *et alii* (1984), apresentados por Ciscar e Garcia (1988), procuraram identificar as principais interpretações dos números racionais, ou seja, parte/todo e medida; quociente; razão; operador." (PIRES, 2000, p. 177)

[5] "Sem entrar no mérito dessas polêmicas, interessa-nos destacar que a dificuldade com as frações pode estar muito relacionada à sua introdução de forma única, sendo que uma diversidade de significações parece essencial. Ou seja, há uma razoável teia a ser tecida entre as primeiras idéias intuitivas de *metade* e *terça parte* até a consideração das frações como elementos integrantes de uma estrutura algébrica." (PIRES, 2000, p. 177)

Essa citação nos remete à busca das práticas sociais no interior das quais os conhecimentos matemáticos foram gestados e desenvolvidos. Assim concebida, a matemática passa a ser um conhecimento cuja dinâmica de suas transformações exige um recurso ao conhecimento da história. De posse de tais conhecimentos talvez o professor pudesse melhor compreender alguns tópicos do conteúdo, no caso deste trabalho o foco estaria nas frações, encontrando formas de problematizá-las junto a seus alunos.

As possibilidades didáticas da história da matemática são reforçadas, ainda que genericamente, pelos PCN:

> *"... a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles. Por exemplo, isso fica evidente quando se percebe que a ampliação dos campos numéricos historicamente será associada à resolução de situações-problema que envolvem medidas"...."essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos de história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados".* (BRASIL, 1997, p. 43)

É claro que as sugestões apresentadas pelos PCN não constituem uma instância de regulamentação efetiva do que ocorre, ou do que "deveria ocorrer", em sala de aula. Embora eles contenham orientações que podem ou não ser seguidas, de certa forma os Parâmetros determinaram alterações significativas no conteúdo e na forma dos livros didáticos. Além disso, os PCN não devem ser vistos como uma fonte teórica, uma possível instância de legitimação científica para determinar – ou não – o uso de uma metodologia (como o uso da história); eles são, na verdade, instâncias "oficiais" de divulgação de determinadas idéias, idéias que se apresentam como dominantes até mesmo em função dessa força de "oficialidade" da qual são revestidas.

Todas essas indagações sobre as frações e a história da matemática contribuíram para que minhas dúvidas fossem se acumulando e transformando. Será que com o conhecimento da história da matemática eu conseguiria argumentos para defender a retirada do tópico de conteúdo "frações" do ensino regular? Ou viria a perceber a relevância desse conhecimento e passaria a defender sua permanência no currículo? Ainda: ao compreender como as frações eram utilizadas por outros povos e em diferentes épocas, teria eu melhores condições de elaborar procedimentos didáticos que viessem a favorecer a aprendizagem dos meus alunos? A questão genérica "Pode a História da Matemática ajudar na compreensão de conceitos matemáticos?" passava a ter um certo grau de especificidade, passava a estar condicionada.

E, foi assim que cheguei àquilo que pretendo fazer em minha dissertação de mestrado: descrever algumas relações entre diferentes modos de conceber e representar quantidades fracionárias e, em particular, assinalar como este conhecimento chega às mãos de alunos e professores mediante livros didáticos e livros de história da matemática

Na seqüência deste trabalho, apresentarei algumas idéias iniciais da perspectiva dos professores sobre o assunto frações, o desenvolvimento sugerido pelos matemáticos para o tópico "números racionais", uma categorização das formas como o conteúdo "frações" é abordado no livro didático adotado no município de Araucária e uma breve excursão em torno às menções ao termo "fração" em livros de História da Matemática. Esse material servirá de suporte para as considerações que retomam o problema de pesquisa.

UM PERCURSO E SEUS ACIDENTES

Na busca de informações para desenvolver meu trabalho decidi, pensando em explorar posteriormente as respostas, elaborar algumas questões referentes ao uso da história da matemática (e sobre o ensino dos racionais, principalmente sobre o ensino das frações) e, em seguida, pedi a alguns colegas que as respondessem, aproveitando o último encontro de professores de matemática ocorrido em Araucária no ano de 2002.

Como esse encontro ocorreu próximo ao final do ano letivo, poucos foram os participantes, apenas oito professores de um grupo que geralmente é formado por vinte, mas, mesmo assim, entreguei o questionário, e ainda o enviei por e-mail para outros três colegas de quem possuía os endereços eletrônicos. Ao final, consegui totalizar nove questionários respondidos. Parte dessas respostas aparece, em destaque, ao longo do texto abaixo, onde apresento as perguntas então formuladas aos meus colegas professores[6].

1) Você ensina frações para seus alunos? Defenda sua opinião.

[6] A íntegra das respostas é fornecida no Anexo I.

Eu esperava obter da maioria dos professores a afirmação de que embora ensinassem frações a seus alunos, consideravam que esse tópico pudesse ser excluído do planejamento.

Todos os professores responderam afirmando que sim, que ensinavam as frações. Algumas das justificativas apresentadas foram:

- *"...pois é um conteúdo que faz parte do universo matemático e deve ser ensinado, no entanto; deve ser repensado o modo de ensinar frações, uma vez que o método tradicional apresentado pelo livro didático não se tem mostrado eficaz".*
- *"...nem todas as coisas são inteiras".*
- *"As frações são uma extensão dos números naturais (inteiros).Importante pra a compreensão do dia-a-dia que os cercam".*
- *"É totalmente necessário desenvolver o entendimento do aluno embora ele encontre muita dificuldade e medo diante das frações. Aos poucos podemos fazer com eles vão perdendo o medo".*

2) Como você ensina frações? Se este é um tópico de seu planejamento.

Esperava encontrar nas respostas obtidas uma forma ideal de ensinar frações para que houvesse um aprendizado eficaz desse conteúdo, com a inserção da historia da matemática como facilitadora da aprendizagem. Algumas das respostas obtidas foram:

- *"Defendo que o ensino de frações, pelo menos nas séries do ensino fundamental, deve ser feito sempre de forma prática e dinâmica para, só então, "mergulharmos" nas suas propriedades teóricas".*
- *"Inicialmente com material de apoio. Ex.: barras divididas, comparação para perceber as frações equivalentes, realização das operações, ...Através de problemas significativos, muitas vezes o aluno sendo o sujeito do enunciado.Ex.: divisão de uma pizza".*
- *"Fazendo o aluno falar onde ele encontra este conhecimento no dia-a-dia. Usando a geometria. Usando a álgebra. Materiais concretos. Vídeos. Recorte, colagem".*

As respostas dadas a essas perguntas mostraram que as dificuldades dos meus alunos também eram sentidas por outros, mas nenhuma das respostas sugeria a exclusão das frações no planejamento escolar.

3) De que forma você ensina o assunto: números racionais? (Explique)

Eu esperava que os professores respondessem que a necessidade de registrar quantidades não inteiras ocasionou o surgimento das frações e, mais tarde, da representação decimal. Pensava obter indicações de que o conhecimento da história dos números racionais seria muito importante para ensinar este conteúdo, especialmente a parte que se destina ao ensino das frações.

Algumas das respostas foram:

- *"Naturalmente, apresentando-os...".*
- *"Depois dos alunos entenderem os números naturais, números inteiros*".
- *"Começo fazendo experiências concretas de divisões, facilitando a compreensão do aluno (com objetos). A seguir, passamos a fazer as contas com os números naturais, para depois trabalhar com os racionais".*
- *"Fazendo um apanhado histórico e partindo da forma fracionária de escrita dos números concomitantemente à operação de divisão".*

4) Há diferença entre fração e número racional? ... Justifique.

Esperava com essa questão que relatassem a dificuldade em fazer os alunos relacionarem fração e número racional, partindo de uma noção simples da fração como representação de parte de um todo, para uma noção mais geral onde esta parte fosse vista como um número dentro do sistema de numeração decimal.

Algumas das respostas obtidas foram:

- *"Matematicamente, isto é, teoricamente falando, não há diferença nenhuma, visto que a própria definição de número racional utiliza-se de forma fracionária para bem definir-se. No entanto, para ações práticas do cotidiano, existe uma insistência em lidar com as frações como se fossem um capítulo a parte da matemática".*
- *"Ué? Fração não é mais um número racional?"*
- *"Sim, pois o número racional é a simbologia de uma fração".*
- *"Não, pois a fração é uma razão entre dois números, logo um número racional".*

Creio que as respostas dos professores atestam a propriedade do meu problema de pesquisa. Estão presentes aqui diferentes formas de conceber e representar as frações, e tais formas se explicitam no momento em que lhes é perguntado sobre uma "relação" entre duas idéias. Por exemplo: o número racional e a fração são vistos como duas coisas muito distintas quando se diz que o número racional usa a "forma fracionária" para definir-se; há um completa inversão quando se diz que ele é a "simbologia" da fração.

Para as perguntas 5 e 6, esperava que todos respondessem que utilizavam a historia da matemática e explicassem como o fazem.

5) Há utilização de elementos históricos em suas aulas a respeito dos assuntos mencionados? Se há, como isso é feito?

Algumas das respostas foram:

- *"A resposta é afirmativa, pois os elementos históricos é o que nos dá o alicerce para a justificação das demonstrações e definições matemáticas e ainda serve de motivação para que os alunos possam redescobrir a matemática".*
- *"Sim. Às vezes lemos com os alunos os elementos históricos que se apresentam nos livros didáticos; conto outros, que sei – não muitos – para eles".*
- *"Temos poucos elementos históricos deste assunto ao nosso alcance. Utilizando jornais, procuro trazer aos alunos a história do cotidiano".*
- *"Na medida do possível sim, de maneira que o aluno possa entendê-lo, sempre tentando contextualizar, trazendo para a realidade".*

6) Há utilização de elementos históricos em suas aulas a respeito de outros temas? Se há, como isso é feito?

Algumas das respostas foram:

- *"Sim, sempre que possível, pois eles gostam de saber do que estão falando, sobre o que estão estudando".*
- *"Sim. Alguns livros trazem alguns tópicos relacionados com o desenvolver da historia. Aproveito o livro para lermos em conjunto e debater. A seguir para que haja uma melhor interpretação do assunto, recomendo que os alunos formulem perguntas e as respondam".*
- *"Sim, da mesma forma que as frações".*

7) O que justificaria o uso da história da matemática no seu ensino da matemática?

Por achar que a história da matemática pudesse vir a ajudar no ensino da matemática, não apenas como introdução de fatos históricos, mas como fonte para indagações dos professores, esperava obter respostas que concordassem com essa opinião e assim poder ter a minha idéia compartilhada por colegas de trabalho que são pessoas próximas a mim.

Algumas das respostas foram:

- *"Além de despertar o interesse dos alunos, mostra que tudo tem uma história, não surgiu do nada, não foi a professora que inventou – alguns se surpreendem".*
- *"Para o aluno entender que a matemática não é algo de agora, uma invenção atual, e sim construída devido ás necessidades humanas ao longo do tempo".*
- *"Conforme já mencionei, a História da Matemática nos serve de alicerce para a introdução e compreensão dos conceitos matemáticos".*
- *"Mais um recurso, mais um conhecimento, e se ter a certeza que todos os professores tenham ciência disso e saibam como aplicá-lo. De maneira que venha ao encontro do educando e possibilite a sua compreensão*".

8) Qual a sua opinião a respeito do ensino das frações?

Como sempre me questionara sobre a importância do estudo das frações, esperava, com essa questão, perceber que outras pessoas também se questionavam e, de alguma maneira, julguei que utilizassem a história da matemática para auxiliá-los no ensino de algo que não é tão bem aceito. Algumas das respostas foram:

- *"Acho importante, pois os alunos devem saber que existem partes inteiras, mas também, que existem partes fracionadas*".
- *"Conforme sabemos, os livros didáticos trazem o ensino de frações na 4ª e 5ª série e um pouco na sexta, na minha modesta opinião deveríamos diminuir esta carga teórica do ensino de frações destas séries, onde a maturidade do aluno não ajuda e jogarmos uma parte deste ensino para o decorrer do Ensino Médio".*
- *"Precisa ser revisto!"*

Pude perceber que a preocupação com a história da matemática no interior das aulas não era só minha, alguns dos entrevistados a apresentaram, registrado suas idéias com relação à utilização de elementos históricos nas aulas ministradas.

* * *

Com minha aventura ao realizar essa coleta de respostas creio que um fator ficou evidenciado: a maioria dos professores utiliza somente aquilo que o livro didático traz de história da matemática. Narram o fato descrito no livro acreditando que, desse modo, estejam estimulando a curiosidade do aluno e o incentivando a estudar e aprender os conteúdos envolvidos.

Apesar de não ter feito a elaboração e a escrita dessas perguntas com os cuidados necessários à aplicação de um questionário de pesquisa, vejo, através dos dados obtidos, que os professores se manifestaram, a respeito do ensino dos racionais, em particular das frações e do uso da história da matemática no ensino da matemática, favoráveis ao uso da história da matemática em suas aulas. Eles vêem o conteúdo das frações como necessário e, por isso, pretendem garantir sua continuidade nos currículos do Ensino Fundamental.

Em versões anteriores desse trabalho este capítulo recebia o título de "uma investigação afobada". Foi assim que me vi, depois de refletir sobre a falta de preparo com que fui fazer essa coleta de dados. Na ocasião eu não tinha claro que pudesse haver diferentes formas de conceber as frações, apenas buscava indícios que viessem reforçar algumas de minhas idéias iniciais: razões para defender o abandono do ensino das frações e para incluir elementos de história da matemática nas aulas como elemento facilitador da aprendizagem dos conceitos matemáticos. Não percebi nos professores qualquer disposição para deixar de lado o conteúdo frações. Ao mesmo tempo, pude observar que o uso da história da matemática estava condicionado pelas referências presentes nos livros didáticos e, raras vezes, recorrendo-se a livros de história da matemática.

Embora "afobada" essa investigação forneceu elementos necessários para os próximos passos da pesquisa, quais sejam: uma tentativa de detalhar a abordagem do conceito de fração no livro adotado no município de Araucária, listando as referências históricas ao assunto presentes neste livro. Além disso, procurei organizar e apresentar o conteúdo a que os professores teriam acesso caso buscassem "fração" em livros de história da matemática aos quais poderiam ter acesso. Em seguida, acho relevante apresentar a maneira como somos preparados para encarar o tema "números racionais" na perspectiva "dos matemáticos" tal como ela é apresentada, por exemplo, em disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática e de Especializações para professores de matemática em serviço. Essa, portanto, será a seqüência percorrida nos próximos três capítulos e que servirá como base para as elaborações posteriores.

AS FRAÇÕES EM UM LIVRO DIDÁTICO

Figura 1: http://matematica.com.sapo.pt/ acessado em 20/07/2004

Embora as frações sejam utilizadas em todas as séries do ensino fundamental, o objetivo deste trabalho é verificar sua forma de abordagem na 5ª e na 6ª série, onde tal conteúdo é desenvolvido com maior ênfase, sendo que nas séries posteriores passa a ser utilizado como “ferramenta” já conhecida.

O livro didático escolhido, por ser adotado - na época da pesquisa - pelas escolas do Município de Araucária, foi: *Matemática Pensar e Descobrir: Novo*, cujos autores são José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr. Trabalhei com a edição do ano 2000. Este livro, na 5ª série, divide o conteúdo em 6 unidades:

- Numeração e sistemas de numeração;
- Os números naturais;
- Divisibilidade: divisores e múltiplos de números naturais;
- Os números racionais e sua forma fracionária;
- Os números racionais e sua forma decimal;
- Os números e o sistema decimal de medidas.

Para a 6ª série, o conteúdo encontra-se dividido em 7 unidades:

- Fórmulas matemáticas e o cálculo de medidas;
- Os números inteiros;

- Números racionais relativos;
- Estudando as equações;
- Estudando as inequações;
- Razão e proporção: estudo e aplicações
- Grandezas proporcionais: regra de três.

De acordo com o já antecipado, o propósito deste capítulo é o de organizar uma apresentação das menções ao tema *frações* ao longo do desenvolvimento do conteúdo da 5ª e 6ª séries, Disponibiliza-se cópia integral das páginas referentes aos capítulos específicos sobre o assunto no ANEXO III, (somente em versão digital).

A apresentação das menções às frações será feita com base em uma malha descritiva que foi criada a partir da leitura de Pires (2000, p.177). Assim, no que segue, o conteúdo dos livros é organizado a partir de uma classificação prévia em que as referências às frações são distribuídas na seguinte malha descritiva: <u>aspectos históricos</u>, <u>relação parte-todo</u>, <u>razão</u>, <u>operações</u>, e <u>representação fracionária</u>.

3.1 CRITÉRIOS PARA A MALHA DESCRITIVA

Para a elaboração da malha descritiva deste livro didático (LD), procurei dividir, inicialmente, o material do próprio livro em três partes que se excluem mutuamente:

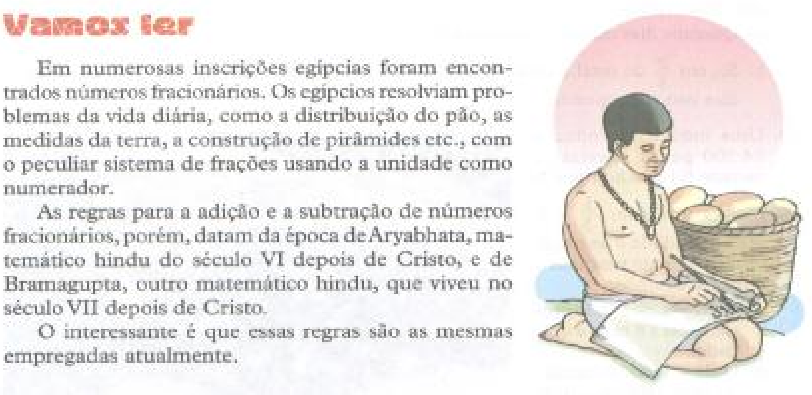
- **Texto:** textos do LD que serão considerados por conterem aspectos do desenvolvimento histórico ou utilização do conteúdo *fração* na atualidade.
- **Exercícios:** principalmente os exercícios resolvidos do LD e demais apresentações para o aluno como proposta de elucidação do conteúdo. [A forma de apresentação é mais próxima de exercícios do que de exemplos, por isso o nome]
- **Exercícios propostos:** o LD apresenta um rol de exercícios para que sejam resolvidos pelo aluno.

A malha descritiva deverá conter o cruzamento dos elementos enumeramos acima; com cada um dos aspectos relacionados anteriormente: aspectos históricos, relação parte-todo, razão, operações, e representação fracionária.

Em seguida busco exemplificar cada um dos cruzamentos possíveis.

1) **Aspectos históricos (H):** este item contempla os textos que aparecem no LD como fonte de leitura narrando passagens históricas ou exemplificando aspectos da atualidade.

1) Exemplo: **H** e **Texto**



Vamos ler

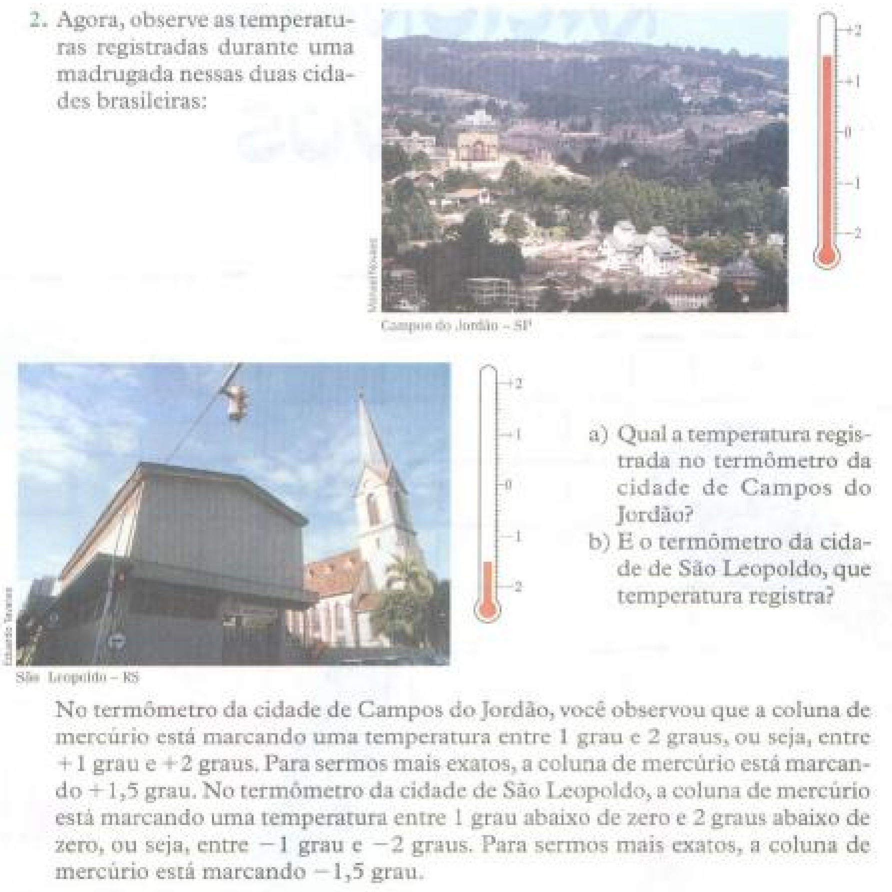
Em numerosas inscrições egípcias foram encontrados números fracionários. Os egípcios resolviam problemas da vida diária, como a distribuição do pão, as medidas da terra, a construção de pirâmides etc., com o peculiar sistema de frações usando a unidade como numerador.

As regras para a adição e a subtração de números fracionários, porém, datam da época de Aryabhata, matemático hindu do século VI depois de Cristo, e de Bramagupta, outro matemático hindu, que viveu no século VII depois de Cristo.

O interessante é que essas regras são as mesmas empregadas atualmente.

Figura 2: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 182.

2) Exemplo: **H** e **Exercícios**



2. Agora, observe as temperaturas registradas durante uma madrugada nessas duas cidades brasileiras:

Campos do Jordão – SP

São Leopoldo – RS

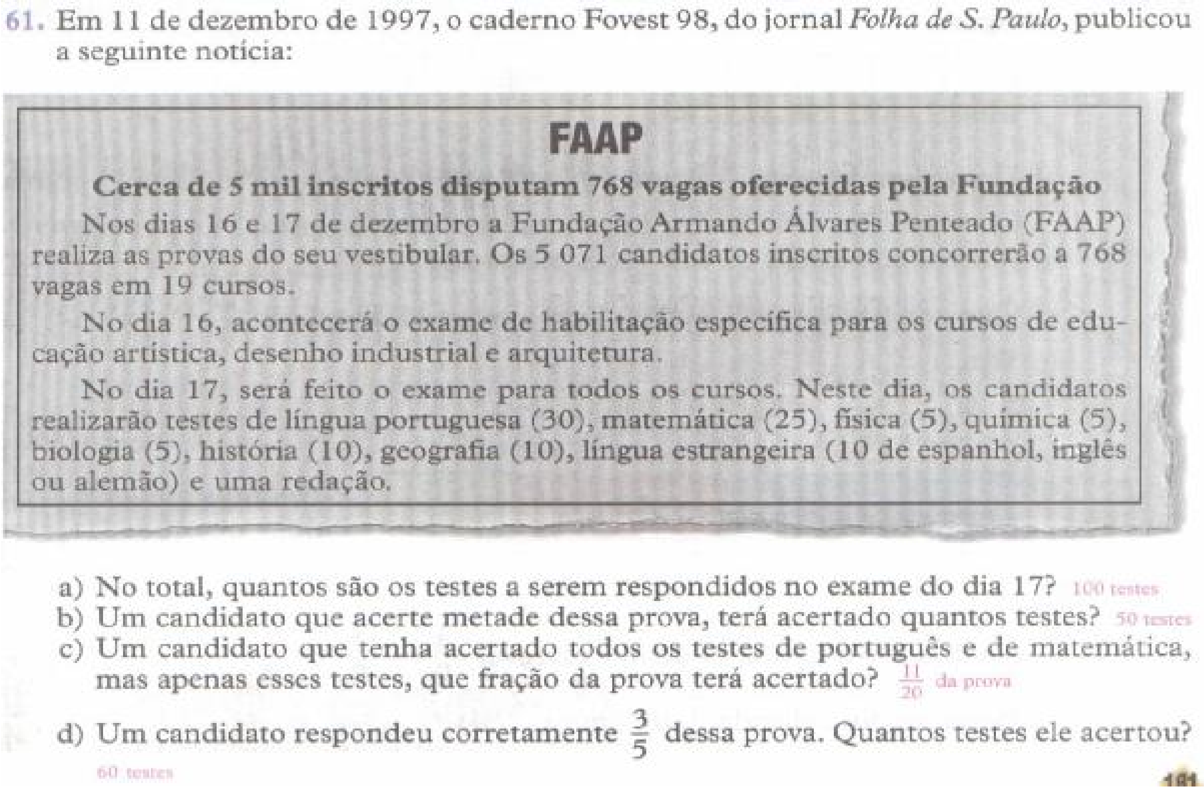
a) Qual a temperatura registrada no termômetro da cidade de Campos do Jordão?

b) E o termômetro da cidade de São Leopoldo, que temperatura registra?

No termômetro da cidade de Campos do Jordão, você observou que a coluna de mercúrio está marcando uma temperatura entre 1 grau e 2 graus, ou seja, entre +1 grau e +2 graus. Para sermos mais exatos, a coluna de mercúrio está marcando +1,5 grau. No termômetro da cidade de São Leopoldo, a coluna de mercúrio está marcando uma temperatura entre 1 grau abaixo de zero e 2 graus abaixo de zero, ou seja, entre −1 grau e −2 graus. Para sermos mais exatos, a coluna de mercúrio está marcando −1,5 grau.

Figura 3: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 6ª série, p. 116.

3) Exemplo: **H** e **Exercícios Propostos**



61. Em 11 de dezembro de 1997, o caderno Fovest 98, do jornal *Folha de S. Paulo*, publicou a seguinte notícia:

FAAP

Cerca de 5 mil inscritos disputam 768 vagas oferecidas pela Fundação

Nos dias 16 e 17 de dezembro a Fundação Armando Álvares Penteado (FAAP) realiza as provas do seu vestibular. Os 5 071 candidatos inscritos concorrerão a 768 vagas em 19 cursos.

No dia 16, acontecerá o exame de habilitação específica para os cursos de educação artística, desenho industrial e arquitetura.

No dia 17, será feito o exame para todos os cursos. Neste dia, os candidatos realizarão testes de língua portuguesa (30), matemática (25), física (5), química (5), biologia (5), história (10), geografia (10), língua estrangeira (10 de espanhol, inglês ou alemão) e uma redação.

a) No total, quantos são os testes a serem respondidos no exame do dia 17? 100 testes
b) Um candidato que acerte metade dessa prova, terá acertado quantos testes? 50 testes
c) Um candidato que tenha acertado todos os testes de português e de matemática, mas apenas esses testes, que fração da prova terá acertado? $\frac{11}{20}$ da prova
d) Um candidato respondeu corretamente $\frac{3}{5}$ dessa prova. Quantos testes ele acertou? 60 testes

181

Figura 4: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 181.

2) **Relação Parte Todo (PT):** este item contempla aquelas passagens onde há menção a um “todo” do qual a fração seja a parte; ou quando se torna necessário o uso de um todo de referência para compreensão da fração como parte dele. Conforme o tipo de “todo” considerado, ou conforme a “natureza” da grandeza a ser dividida, especificou-se, ainda, quando a relação utiliza “todos” contínuos, ou discretos, conforme nomenclatura já consagrada na elaboração dos livros didáticos.

Nas páginas seguintes apresentamos um exemplo de cada um dos cruzamentos possíveis.

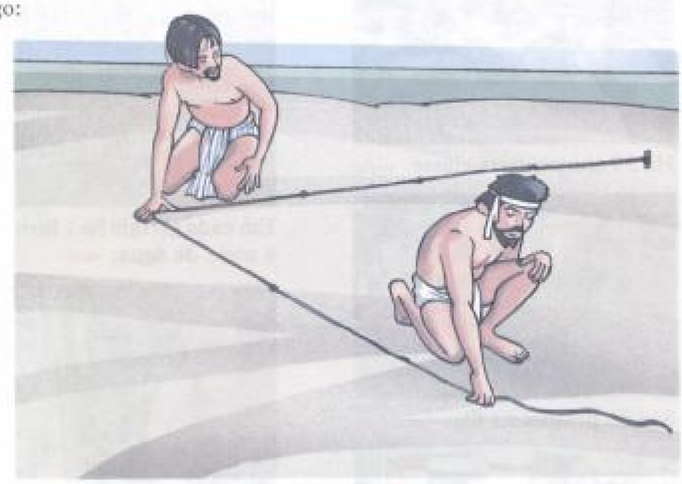
2.1) **Parte-Todo Contínuo (PTC)**: quando o todo envolvido for contínuo, ou seja, representa um conjunto “único” como: um barbante, uma reta numerada, uma folha de papel.

- Exemplo: **PTC** e **Texto**

Vamos ler

Há aproximadamente 4 000 anos o Egito era governado pelo rei Sesóstris.

Cerca de 1 500 anos depois, no volume II da obra *Histórias*, de Heródoto, considerado o *pai da História*, há referência a esse rei egípcio. Veja o que narra o historiador grego:



“Disseram que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio Nilo, ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviaria medidores ao local e faria medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra.”

Pela narrativa de Heródoto, percebemos que desde a Antigüidade é registrada a necessidade de o homem expressar numericamente uma medição.

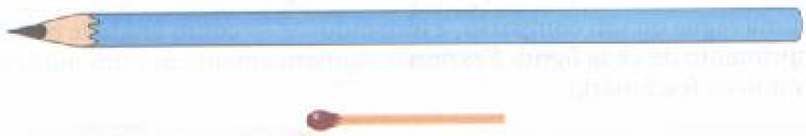
A história da Matemática nos mostra que, na Antigüidade, os egípcios usavam apenas frações de unidade: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, e os romanos usavam frações com denominador 12. Por volta do século V, os hindus já dividiam a circunferência em 360 partes iguais.

Com o correr dos séculos, muitas notações foram usadas para representar frações. A maneira que usamos hoje — uma barra separando um par ordenado de números — data do século XVI.

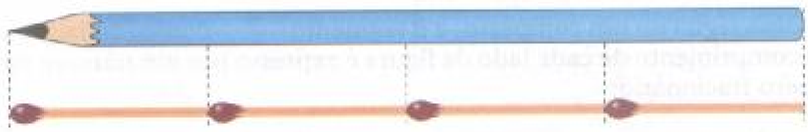
Figura 5: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 149.

- Exemplo: **PTC** e **Exercícios**

3. Vamos medir o comprimento desse lápis usando como unidade de medida um palito de fósforo.



Vamos verificar quantos palitos de fósforo “cabem” no comprimento do lápis!

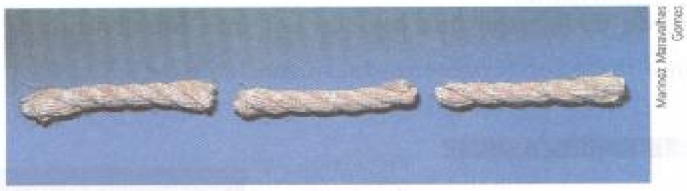


Nesse caso, o comprimento do lápis é igual ao comprimento de quatro palitos.

Figura 6: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 151.

- Exemplo: **PTC** e **Exercício Proposto**

A figura representa uma corda.
Observe-a e responda:



a) Em quantos pedaços de mesmo comprimento a corda foi dividida?
b) Qual a fração que representa cada pedaço da corda?

Figura 7: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 156.

2.2) **Parte-Todo Discreto (PTD):** quando o todo envolvido for discreto, ou seja, representa um conjunto de elementos como: um conjunto de bolinhas, dinheiro, canetas, livros...

- Exemplo: **PTD** e **Exercício Proposto**

Uma equipe de futebol é formada por 11 jogadores. Cada jogador representa que fração da equipe? $\frac{1}{11}$

Figura 8: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 156.

3) **Razão (R):** esse item contempla as comparações entre quantidades. Os exemplos mais usuais são as porcentagens, a relação entre os pontos ganhos e os pontos perdidos em um campeonato...

- Exemplo: **R** e **Texto**

Vamos ler

A palavra *razão* vem do latim *ratio* e envolve a idéia de relação.

Os matemáticos gregos apresentaram vários conceitos sobre razões. Euclides, por exemplo, afirmava que "razão é uma relação de tamanho entre grandezas da mesma espécie". No entanto, esse ponto de vista realçava apenas aspectos teóricos do conceito de número, reduzindo o seu papel como instrumento de cálculo.

Somente no século XV é que os matemáticos italianos deram uma aplicação prática para as razões. Entre eles, destacou-se Luca Pacioli (1445-1514).

Luca Pacioli em pintura de Jacopo de Barbari

Figura 9: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 6ª série, p. 243.

- Exemplo: **R** e **Exercícios**

2. Durante uma partida de basquete, um jogador fez 20 arremessos e obteve 10 cestas. Como podemos avaliar o aproveitamento desse jogador?
Podemos proceder de dois modos:

1º) Dividimos o número de arremessos dados pelo número de cestas obtidas:

$$20 : 10 = \frac{20}{10} = \frac{2}{1} = 2$$

O número de arremessos dados representa duas vezes (o dobro) o número de cestas obtidas, ou seja, de cada dois arremessos ele acertou um.

Figura 10: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 6ª série, p. 242.

- Exemplo: **R** e **Exercício Proposto**

Vinte carros faziam parte do *grid* de largada de um Grande Prêmio de Fórmula 1. Dois deles não chegaram nem a largar e 7 desistiram por defeito mecânico.

a) Que fração do total de carros não completou o percurso?

b) Que fração do total de carros completou o percurso?

Figura 11: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 159.

4) **Operações:** este item contempla aquelas situações em que o conceito de fração está mais diretamente associado a uma das operações elementares, em geral a divisão.

   4.1) **Quociente (Q):** inclui cada exercício que apresenta em seu contexto a idéia de divisão em partes iguais ou “quanto cabem”, como por exemplo, a divisão de 15 metros de lona para cobrir 5 lotes de tijolo, ou tendo 5000 tijolos quantos lotes serão feitos com 500 tijolos.

- Exemplo: **Q** e **Exercícios**

3. Quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em $\frac{5}{6}$?
Veja os desenhos:

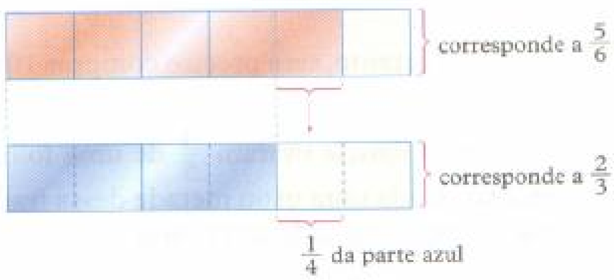


Figura 12: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 200.

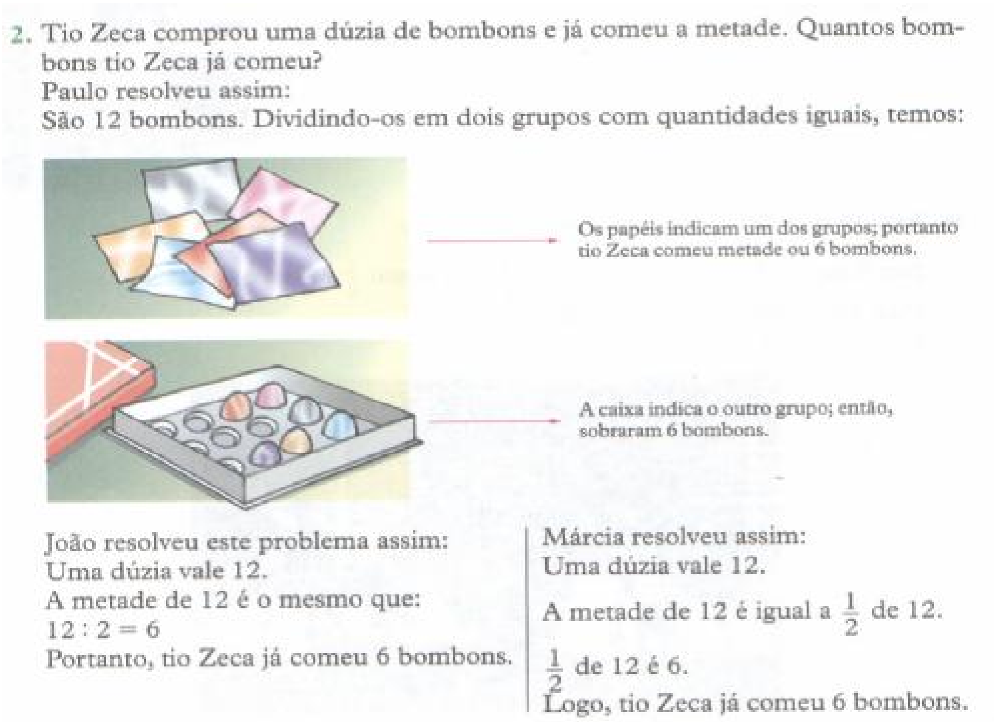
- Exemplo: **Q** e **Exercícios Propostos**

38. Uma barra de chocolate de 200 gramas é dividida em 8 porções iguais.
a) Cada porção representa que fração do “peso” total da barra? $\frac{1}{8}$
b) Quantos gramas tem metade da barra? 100 gramas
c) Quantos gramas tem um quarto da barra? 50 gramas
d) Quantos gramas tem um oitavo da barra? 25 gramas

Figura 13: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 169.

   4.2) **Operador (O):** cada exercício que apresenta em seu contexto a idéia de divisão, em que a fração atua como modificadora de uma situação inicial, assim como nos casos em que é necessário ampliar ou reduzir um desenho.

- Exemplo: **O** e **Exercícios**


2. Tio Zeca comprou uma dúzia de bombons e já comeu a metade. Quantos bombons tio Zeca já comeu?
Paulo resolveu assim:
São 12 bombons. Dividindo-os em dois grupos com quantidades iguais, temos:

Os papéis indicam um dos grupos; portanto tio Zeca comeu metade ou 6 bombons.

A caixa indica o outro grupo; então, sobraram 6 bombons.

João resolveu este problema assim:
Uma dúzia vale 12.
A metade de 12 é o mesmo que:
12 : 2 = 6
Portanto, tio Zeca já comeu 6 bombons.

Márcia resolveu assim:
Uma dúzia vale 12.
A metade de 12 é igual a $\frac{1}{2}$ de 12.
$\frac{1}{2}$ de 12 é 6.
Logo, tio Zeca já comeu 6 bombons.

Figura 14: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 176.

- Exemplo: **O** e **Exercícios Propostos**


Pedro e seu cão subiram juntos numa balança que marcou 54 quilos. Quando Pedro desceu da balança, deixando o cão sozinho, a balança registrou $\frac{1}{6}$ do que havia marcado antes.
Quantos quilos tem o cão e quantos quilos tem Pedro?

Figura 15: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 180.

5) **Representação Fracionária:** cada exercício que solicita a representação por meio de desenhos ou da escrita. Esse critério será subdividido em duas classes:

   5.1) **Representação por Figuras (RF):** cada exercício que solicita a representação por meio de desenhos

- Exemplo: **RF** e **Textos**

21. Suponha que você tenha duas tiras de cartolina, cada uma com 36 centímetros de comprimento. Se dividir a primeira tira a cada 9 centímetros e a segunda, a cada 6 centímetros:

a) Quantas partes você obterá na primeira tira? 4 partes
- Use uma fração para indicar cada uma dessas partes. $\frac{1}{4}$
- Use uma fração para indicar três dessas partes. $\frac{3}{4}$

b) Quantas partes você obterá na segunda tira? 6 partes
- Use uma fração para indicar cada uma dessas partes. $\frac{1}{6}$
- Use uma fração para indicar cinco dessas partes. $\frac{5}{6}$

Figura 16: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 160.

- Exemplo: **RF** e **Exercícios**

Quanto mede o parafuso da figura, em polegadas? $\frac{1}{2}$ polegada

Note que $\frac{1}{2} < 1$.

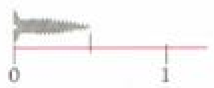


Figura 17: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 161.

- Exemplo: **RF** e **Exercício Proposto**

Copie o contorno das figuras no seu caderno. A seguir, divida cada figura em quatro partes iguais e pinte, em cada uma, $\frac{1}{4}$ da figura.

a) quadrado b) círculo c) retângulo d) hexágono regular

Figura 18: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 157.

5.2) **Representação Escrita (RE):** cada exercício que solicita a representação da escrita decimal.

- Exemplo: **RE** e **Exercícios**

1. Escreva o número racional positivo ou o número racional negativo que indica:

a) uma temperatura de 25,6 °C acima de zero +25,6
b) uma profundidade de 160,5 m abaixo do nível do mar −160,5
c) uma altitude de 1,72 km acima do nível do mar +1,72
d) uma temperatura de 6,5 °C abaixo de zero −6,5

Figura 19: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 6ª série, p. 118.

- Exemplo: **RE** e **Exercícios Propostos**

Escreva como são lidas as frações que aparecem nas afirmações seguintes:

a) Numa sala de 5ª série, $\frac{1}{7}$ dos alunos ainda não completaram 11 anos. um sétimo

b) Valdir reserva $\frac{1}{5}$ do salário para pagar o aluguel do apartamento em que mora. um quinto

c) De uma forma geral, cada mês representa $\frac{1}{12}$ do ano. um doze avos

d) Em um terreno, $\frac{1}{8}$ da sua área foi reservado para se fazer um jardim. um oitavo

e) Após andar $\frac{1}{4}$ de hora, já percorremos $\frac{1}{15}$ do percurso total da viagem. um quarto; um quinze avos

f) Numa escola $\frac{1}{100}$ dos alunos praticam voleibol. um centésimo

Figura 20: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 157.

8) **Sem Classificação (SC):** exercícios que não se enquadram na classificação acima.

- **SC** e **Exercícios**

8. Qual é a forma mais simples possível de escrever a expressão:

$$3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{7}{10}\right)?$$

$$3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{7}{10}\right) =$$

$$= \frac{3}{1} - \left(\frac{5}{20} + \frac{4}{20} + \frac{10}{20}\right) - \left(\frac{10}{10} - \frac{7}{10}\right) =$$

$$= \frac{3}{1} - \frac{19}{20} - \frac{3}{10} =$$

$$= \frac{60}{20} - \frac{19}{20} - \frac{6}{20} = \frac{35}{20} \overset{:5}{\underset{:5}{=}} \frac{7}{4}$$

Figura 21: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 5ª série, p. 186

- **SC** e **Exercícios Propostos**

13. Represente na reta numérica dois números racionais fracionários, simétricos em relação à origem. resposta pessoal

Figura 22: Matemática: Pensar e Descobrir: Novo – 6ª série, p. 122.

3.2 SÍNTESE DOS DADOS OBTIDOS

As informações registradas a seguir dizem respeito aos dados observados tanto no livro didático da 5ª série (páginas 148 a 208) onde foram analisadas 60 páginas, quanto no livro didático de 6ª série (páginas 115 a 302) onde foram observadas 51 páginas.

Para o livro da 5ª série:

- Foram 7 ocorrências de Textos.

- As 176 ocorrências de exercícios ficaram assim distribuídas:
  - § 42 em Parte-Todo (**PT)**, sendo que: 37 PTD
5 PTC
  - § 27 em Razão (**R)**
  - § 35 em Operações, sendo que: 32 O
3 Q
  - § 30 em Representação Fracionária, sendo que: 29 RF
1 RE
  - § 42 sem classificação (SC)

Para o livro da 6ª série:

- Ocorreu somente uma inserção de texto, referindo-se ao conteúdo “Razão”.

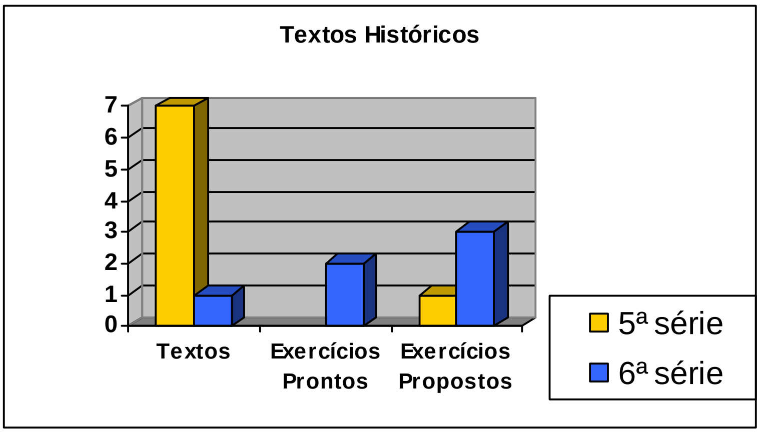
- As 132 ocorrências de exercícios ficaram assim distribuídas:
  - § 6 em Parte-Todo (**PT)**, todos do tipo PTD.
  - § 52 em Razão (**R)**.
  - § 1 em Operações, do tipo O.
  - § 12 em Representação Fracionária, todos do tipo RE.
  - § 61 sem classificação (SC)

As quantificações obtidas foram traduzidas em forma de tabelas e gráficos.

A tabela abaixo mostra a quantidade de vezes em que textos históricos, foram observados nos dois livros e nas três categorias iniciais (Textos, Exercícios e Exercícios Propostos).

Tabela de Classificação dos Textos Históricos

	Textos		Exercícios		Exercícios Propostos	
	5ª – Total	6ª – Total	5ª – Total	6ª – Total	5ª – Total	6ª – Total
H	**7**	**1**	**-**	**2**	**1**	**3**

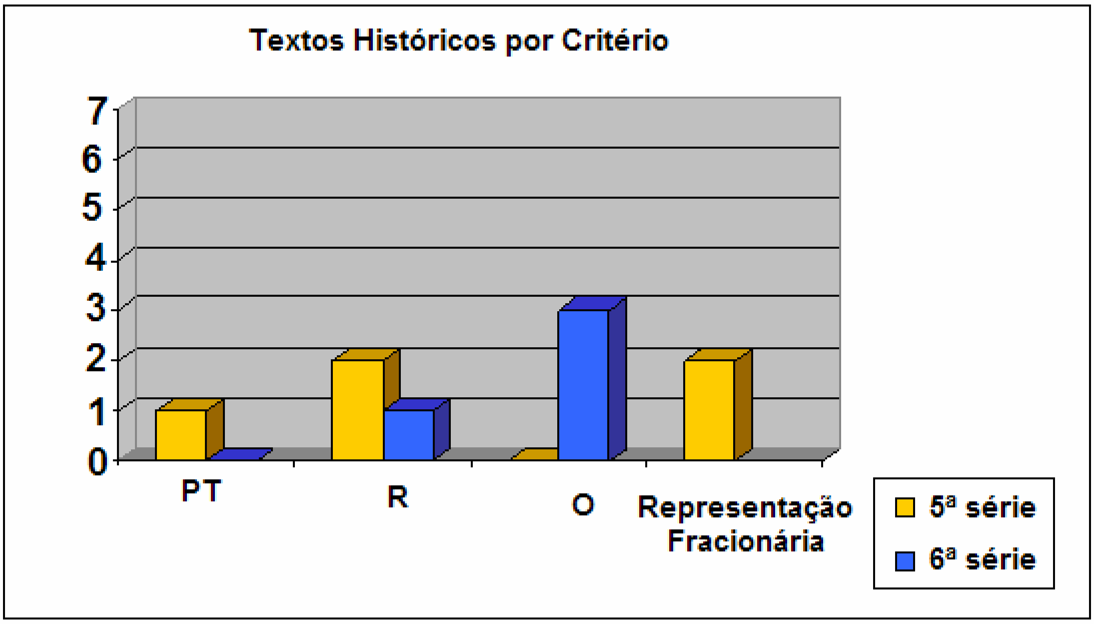


A tabela seguinte apresenta a quantidade de vezes em que cada uma das idéia das frações foi utilizadas nos Textos, Exercícios e Exercícios Propostos.

Tabela da Classificação

	Textos		Exercícios		Exercícios Propostos	
	5ª – Total	6ª – Total	5ª – Total	6ª – Total	5ª – Total	6ª – Total
Parte-Todo	**1**		**20**	**3**	**22**	**3**
Razão	**2**	**1**	**8**	**15**	**20**	**37**
Operações			**11**		**24**	**1**
Representação Fracionária	**2**		**10**	**2**	**20**	**10**
Sem Classificação			**7**	**6**	**35**	**55**

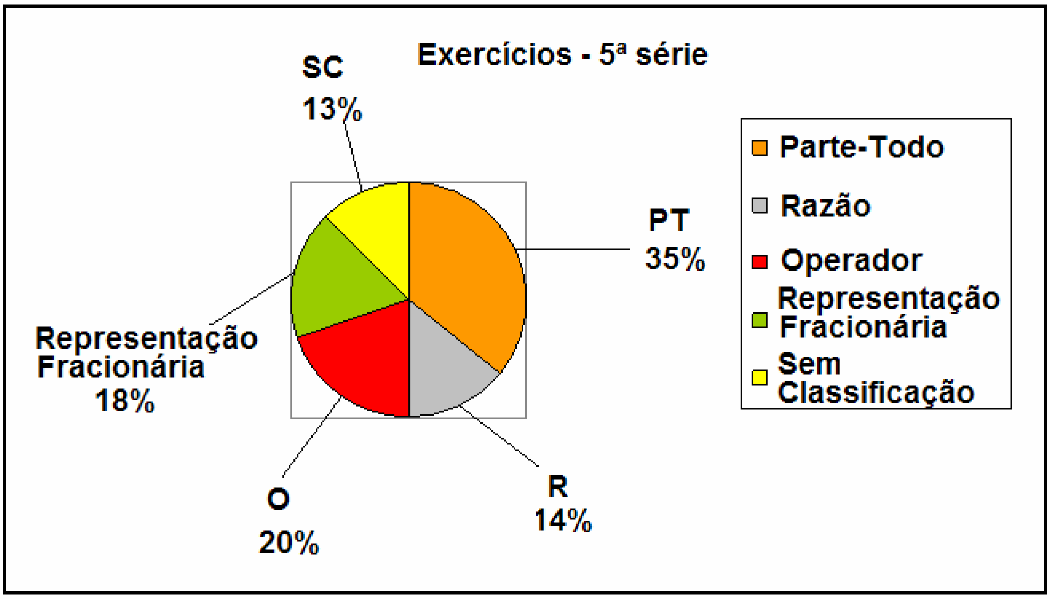
Para a classificação dos textos, além do critério “história”, eles passaram por uma reclassificação conforme o conteúdo do mesmo. Assim para o total de inserção histórica sob a forma de texto temos que eles aparecem mesclados entre Relação Parte Todo, Razão, Operações e Representação Fracionária.



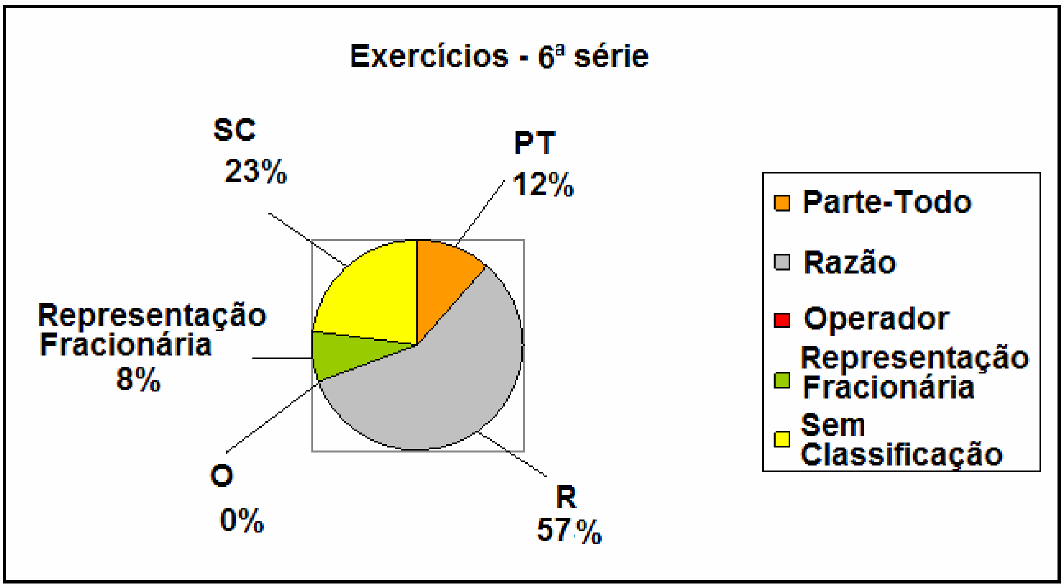
A tabela de classificação fornece os números que satisfazem aos critérios utilizados na classificação correspondentes ao que foi designado de exercícios e exercícios propostos tanto no LD de 5ª série, como no de 6ª.

Exercícios para 5ª e 6ª séries:

Conforme a construção do gráfico abaixo é possível verificar a maior quantificação aos exercícios relacionados à idéia de medida (Parte-todo), isso está de acordo com os problemas registrados durante a antiguidade entendendo que essa idéia foi geradora da necessidade de organização de uma nova forma de representação numérica.

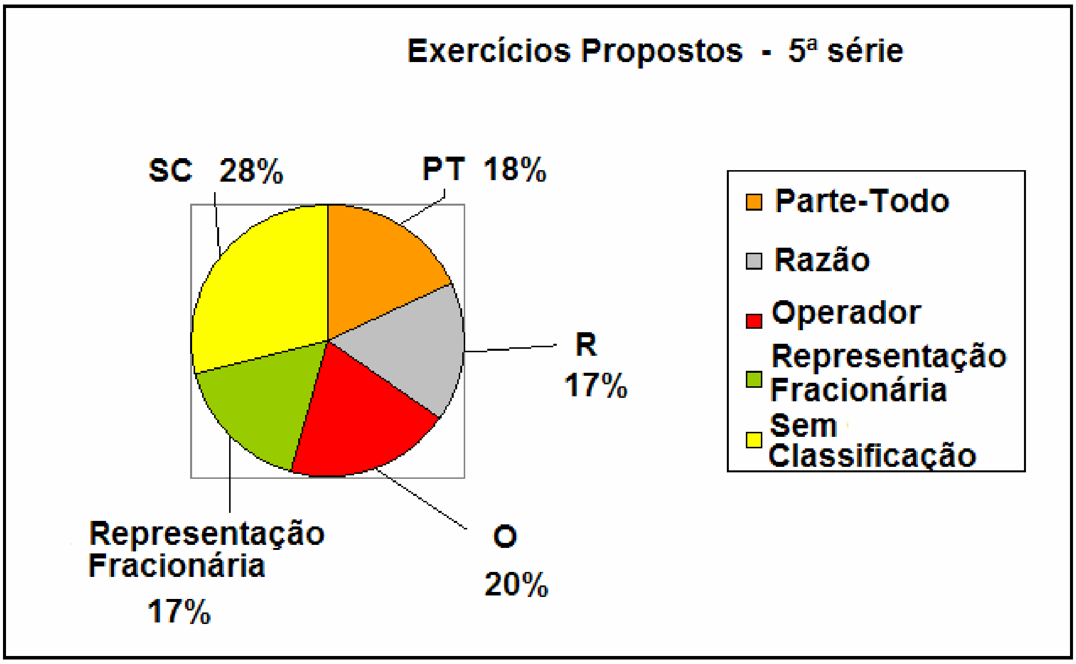


No gráfico abaixo nota-se uma predominância do entendimento da fração como razão, o que também está de acordo com os problemas registrados durante a antiguidade, onde essa idéia esteve presente na maioria dos povos antigos, servindo para a resolução dos problemas práticos da época.

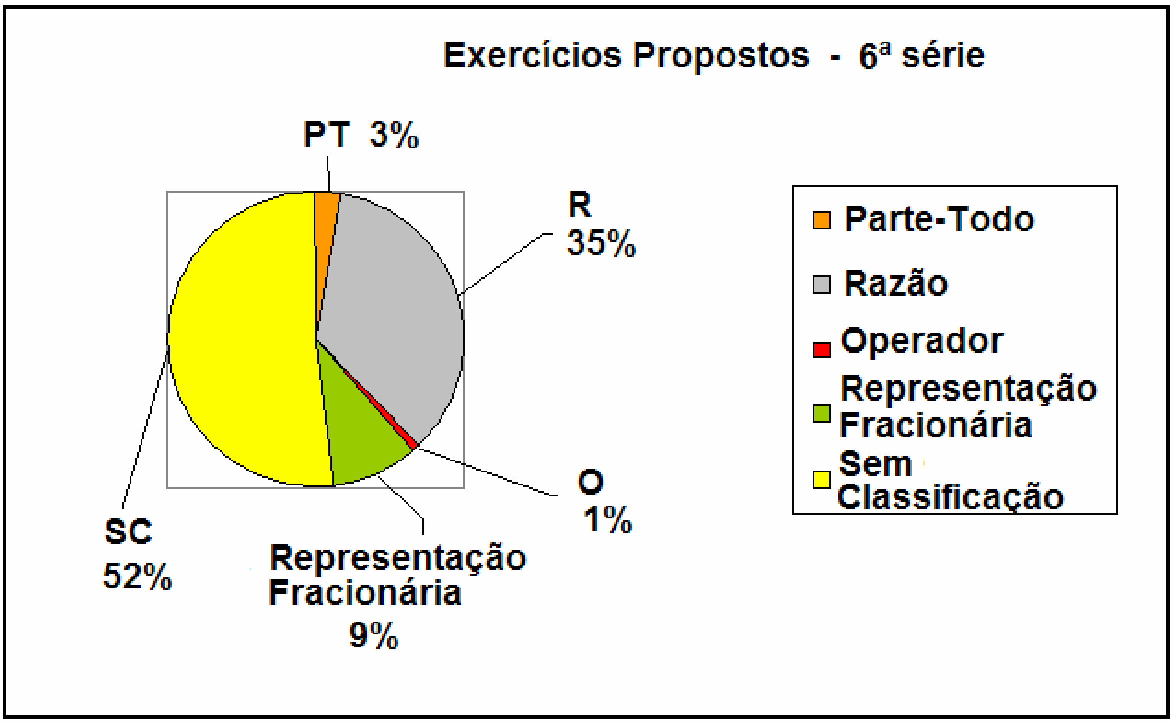


Exercícios Propostos para 5ª e 6ª séries:

Conforme a construção do gráfico abaixo, é possível verificar uma distribuição eqüitativa a cada atributo dado aos exercícios propostos, entre as idéia associadas às frações.



No gráfico abaixo nota-se uma predominância dos exercícios em que a fração é entendida como razão.



É possível verificar, com os dados coletados, que o tratamento dado ao estudo das frações mescla, um tanto aleatoriamente, diversas formas de apresentação, com alguma predominância da idéia de razão. Cumpre destacar que há uma certa relação entre estas formas de apresentação e aquelas que podemos perceber os livros de História da Matemática – que serão descritos no próximo capítulo. Assim, observar os problemas antigos e tentar aproximar as atuais necessidades de resolução com aquelas de antigamente, auxilia-nos a perceber certos aspectos da história da matemática que poderiam orientar a elaboração de textos didáticos.

FRAÇÕES EM HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

> *"Basta, entretanto, que nos recordemos do duro aprendizado escolar do manejo dos números (em particular as longas e penosas horas passadas durante a infância a aprender de cor a tabuada) para percebermos que se trata de fato de uma aquisição de nossa civilização, de algo inventado e que deve ser transmitido como a linguagem – esse outro 'instrumento' que exige um aprendizado. Portanto, os números têm também sua história. Uma história muito longa e complexa".*
>
> (Ifrah, 1995, tomo1, p. xxxiv).

Embora a Matemática possua problemas próprios, seus fundamentos têm tanta ligação com a vida real como qualquer outra ciência. O surgimento dos números, por exemplo, foi impulsionado por necessidades sociais que fizeram com que o homem desenvolvesse um sistema de numeração e problemas novos foram aparecendo juntamente com circunstâncias que passavam a exigir que diferentes tipos de números fossem criados.

Um destes tipos de números era necessário para permitir o registro de medições, além das simples contagens. CARAÇA (2000), por exemplo, afirma que o resultado da medição é de tão grande importância que interfere nas relações entre "ter" e "poder", com base na propriedade, nas relações de vida.

Um dos meus objetivos nesse trabalho é descrever como as frações estão inseridas no dia-a-dia do professor de matemática. Em particular, neste capítulo, tento mostrar aquilo a que um professor poderia ter acesso se recorresse a livros de história da matemática com o objetivo de compreender de onde vieram, e a que serviam as frações. A escolha dos livros que utilizei é um reflexo da possibilidade de acesso que tive. Acredito que este acesso seja mais amplo e diversificado do que aquele a que a maioria dos professores que não estivessem cursando um mestrado poderia ter. Procurei exibir integralmente o material ao qual eu pude ter acesso. Isso significa que as informações que compilei, e apresento em seguida, embora possam parecer poucas, ou arbitrárias, estão – com certeza – fora do alcance da maioria dos professores atuando em sala de aula (esse é um critério que julgo relevante destacar). Essa apresentação é uma série de recortes retirados de diversos livros de história da matemática, procurei organizar os textos numa seqüência de base cronológica e que proporcionasse ao leitor o cenário o mais amplo possível para construir um pano de fundo para seu conhecimento sobre as frações.

As transcrições sucessivas foram extraídas das obras identificadas na tabela abaixo. Pelo sobrenome do autor pode-se obter os detalhes de edição de cada livro consultado recorrendo-se às referências bibliográfica no final desta dissertação.

Autor	Obra
AABOE	Episódios da Historia Antiga da Matemática
ALMEIDA	Origens da Matemática.
BOYER	História da Matemática
CARAÇA	Conceitos Fundamentais da Matemática
COLLETTE	Historia de las Matemáticas I
DAVIS	Tópicos de História da Matemática: Computação
EVES	Introdução à História da Matemática
GUNDLACH	Tópicos de História da Matemática: Números e Numerais
IFRAH	História Universal dos Algarismos, tomos 1 e 2
JOSEPH	La Cresta Del Pavo Real: Las Matemáticas y sus raíces no europeas
STRUIK	História Concisa das Matemáticas

Segundo SCHUBRING, (2003, p.22) *"desde a mais primitiva era proto-suméria e desde a invenção da escrita, mesmo antes de 3000 a.C., há evidências amplas de ensino institucionalizado".* Isso nos leva a admitir como hipótese fundamentada que o ensino institucionalizado de Matemática já existia na Mesopotâmia, região que está no sul da Ásia entre os rios Tigre e Eufrates (hoje região do Iraque e vizinhanças),

Entre os textos preservados em tabletes cuneiformes, em particular alguns do período paleobabilônico clássico (2000 a 1600a.C.), podem ser identificados: *"<u>exercícios para casa e problemas para estudantes</u>, e manuais para uso do professor. Alguns tabletes são mesmo pequenos manuais, como o que apresenta 21 problemas de álgebra. Tipicamente, há textos rituais que fornecem ao escriba o algoritmo particular a ser usado." (*Schubring, 2003, p.22, grifos meus)

Pelo relato dos livros de História da Matemática consultados, percebe-se que o desenvolvimento da sociedade na região da Mesopotâmia merece maior atenção:

BOYER

O surgimento de civilizações caracterizadas pelo uso de metais teve lugar primeiro em vales de rios, como os do Egito, Mesopotâmia, Índia e China; por isto nós designaremos a parte mais antiga do período histórico pelo nome de "estagio potâmico". Os registros cronológicos das civilizações nos vales dos rios Indo e Yang-tse não merecem confiança, mas dispomos de informações razoavelmente segura sobre os povos que viveram ao longo do Nilo e no crescente fértil dos rios Tigre e Eufrates. (p.07)

COLLETTE Si convenimos en hacer coincidir el nascimiento de las civilizaciones antiguas con el advenimiento de la Edad de los Metales, las primeras sociedades organizadas se formaron en las orillas de los grandes rios de la Índia y de la China. Encontraremos en el mapa los focos más importantes que dieron lugar a las civilizaciones babilônica y egípcia. El balance cronológico de las civilizaciones de los valles del Indo y del Changijiang (YAngtsé) (rios que nacen en el Tibet y se dirigen respectivamente hacia el norte de la Índia y hacia el este de China) se apoya en crônicas cuya veracidad se pone en duda con frecuencia. Por el contrario, las informaciones procedentes de los habitantes del valle del Nilo y del “Creciente Fértil” ofrecen, en las fuentes recogidas hasta ahora, una mayor objetividad y una interpretación más acertada de las actividades matemáticas de estos pueblos. (p.19)
EVES ...Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviram para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitante. Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. (p.57)

Conforme BOYER “*....a idéia de número é muito mais antiga do que os progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos com rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, [...] vêm de um período cerca de trinta mil anos atrás”.* (p.3) Assim como a idéia de número*, “o conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e a sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica”* (Boyer, p.4). De fato, as frações surgiram muito tempo depois.

ALMEIDA De modo geral parece que as sociedades primitivas não necessitam do uso de frações. O problema de dividir 20 conchas por 5 pessoas, ou seja, encontrar 1/5 de 20, pode ser resolvido, construindo-se 5 montes (iguais) com as 20 conchas, obtendo-se 4 conchas para cada um. Para suas necessidades quantitativas, o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas, dispensando o trabalho com frações; portanto as sociedades primitivas podem efetuar contas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com o auxilio de contadores, dentro de certo limite, sem terem noção dos fundamentos lógicos desses procedimentos. (p.39)
BOYER A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo. (p.4)
COLLETTE La división fue una operación demasiado difícil, desde un punto de vista práctico, para los pueblos primitivos. Parece que lãs fracciones hacen su aparición con el advenimiento de lãs civilizaciones babilônica y egípcia. (p.14)
STRUIK Contar pelos dedos, ou seja, contar 5 a 5 e 10 a 10, surgiu apenas numa determinada fase do desenvolvimento social. Quando se alcançou essa fase, os números passaram a exprimir-se numa base, com a ajuda da qual podem ser formados números grandes; foi desta maneira que surgiu uma aritmética de tipo primitivo. O número 14 exprimia-se por 10+4, ou algumas vezes por 15-1. A multiplicação começou quando 20 se exprimiu, não como 10+10, mas como 2X10. Tais operações diádica foram usadas durante milhares de anos como uma espécie de meio caminho entre a adição e a multiplicação, especialmente no Egito e na civilização pré-ariana de mohenjo-Daro, no indo. A divisão começou quando 10 se exprimiu como “metade de um corpo”, embora a formação consciente de frações permanecesse bastante rara. Nas tribos norte-americanas, por exemplo, são conhecidos poucos casos de formação de frações e em quase todos somente ½, embora algumas vezes surja 1/3 e 1/4. (p.33)

“*Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever”.* (Boyer, p.4)

“ ...de todas as formas de vida conhecidas sobre a terra, a espécie humana é a única a ter desenvolvido um procedimento sistemático para armazenar informações úteis e transmiti-las de uma geração a outra”. (Gundlach, p.1)

“As dificuldades materiais encontradas foram, porém, bastante reais. Sem o suprimento abundante e conveniente de materiais adequados à escrita, qualquer desenvolvimento muito extensivo dos processos aritméticos estava sujeito a impedimentos. Deve-se lembrar que o hoje papel comum de polpa industrializado só existe há menos de cem anos. O antigo papel feito de trapos era produzido manualmente e consequentemente era caro e escasso, isso sem falar que só foi introduzido na Europa no século XII, embora seja provável que os chineses já o conhecessem um milênio antes”. (Eves, p.38)

Assim, é possível verificar que a dificuldade na preservação dos materiais utilizados para os registros de certos povos limita-nos hoje no conhecimento de determinadas regiões. A transmissão do conhecimento produzido ficou atrelada a fatores como:

BOYER

... Na Mesopotâmia, onde o barro era abundante, marcas em forma de cunha eram feitas com um estilete sobre tabletas moles que depois eram cozidas em fornos ou ao calor do Sol. [...] O significado a ser transmitido em cuneiforme tinham grande durabilidade; por isso muitos milhares de tais tabletas sobreviveram até nossos dias, muitos datando de cerca de 4000 anos.[.....] A numeração hieroglífica egípcia foi facilmente decifrada. O sistema, pelo menos tão antigo quanto as pirâmides, datando de cerca de 5000 anos atrás baseava-se, como seria de esperar, na escala de dez. Usando um esquema iterativo simples e símbolos diferentes para a primeira meia dúzia de potencias de dez, números maiores que um milhão foram incisos em pedra, madeira e outros materiais. (p.07,08)

Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. (p.09)

COLLETTE

El conocimiento actual de las matemáticas babilônicas procede de las excavaciones arqueológicas emprendidas a partir de mediados del siglo XIX, con el fin de extraer documentos de todo tipo suscetibles de revelar dos elementos más importantes que caracterizaron a esta gran civilización prehelénica. Se han recogido ya, en los distintos emplaziamientos arqueológicos de Mesopotâmia, casi médio millón de tablillas de arcilla, de las cuales más de 300 conciernen esencialmente al âmbito matemático.

[...] Esto explica la abundancia de documentos babilônicos conservados, mientras que la naturaleza de otros , cono el papiro egípcio o el bambu chino, los hace facilmente perecederos. (p.20)

EVES

....os egípcios cedo desenvolveram duas formas de escrita consideravelmente mais rápidas para trabalhos em papiros, madeira e cerâmica. (p.30,31)

Os babilônios antigos, carecendo de papiros e tendo pouco acesso a pedras convenientes, recorreram principalmente à argila como material de escrita. (p.31)

Carecendo de um material de escrita como o papel, os chineses e japoneses antigos registravam seus achados em lâminas de bambu. (p.34)

STRUIK

É difícil datar as descobertas no Oriente. O caráter estático de sua estrutura social contribui para conservar o conhecimento cientifico através de séculos ou mesmo de milênios. As descobertas feitas dentro do isolamento de uma cidade podiam não atingir outras localidades. Os registros do conhecimento cientifico e técnico foram destruídos por mudanças dinásticas, guerras ou inundações. (p.48)

Outra dificuldade na datação da ciência oriental deve-se ao material usado para a sua conservação. Os Mesopotâmios coziam placas de barro, que eram praticamente indestrutíveis. Os Egípcios usaram o papiro e uma grande parte dos seus escritos conservaram-se devido ao clima seco. Os Chineses e os Indianos usaram material mais deteriorável, como a casca de árvore e o bambu. Os Chineses, cerca do século I a.C., começaram a utilizar o papel, mas conservaram poucos escritos datando de antes de 700 d.C. O nosso conhecimento das matemáticas orientais é, por esse motivo, impreciso. (p.49)

O papiro, criado pelos egípcios, era muito valioso para ser usado como simples rascunho:

> *“Os antigos egípcios inventaram um primitivo material de escrita parecido com o papel – o papiro, que por volta do ano 650 a.C. já havia sido introduzido na Grécia. Esse material era feito de um junco aquático chamado papu. Os talos desse junco eram cortados em longas e delgadas tiras que eram colocadas lado a lado para formar uma folha. Outra camada de tiras era colocada por cima e a peça era então embebida em água, após o que era imprensada e posta a secar ao sol. É provável que devido a uma goma natural da planta as camadas mantivessem-se unidas. Após a secagem as folhas eram preparadas para a escrita mediante um laborioso processo de alisamento feito com um objeto redondo e rígido.* (Eves, p.38)

Os que sobreviveram ao tempo nos mostram inclusive, segundo JOSEPH (p.117), resultados de pagamentos efetuados a trabalhadores e é possível verificar em um deles *“ ... um raro ejemplo de um error aritmético por parte del escriba ....* “ Mas o mais significativo é o que Joseph destaca *“ ....la tabla, tambíen, es um buen testimonio de la facilidad com que los egípcios podían manejar las fracciones”.* Os registros encontrados nos revelam a “vida” dos povos antigos, por eles podemos observar o desenvolvimento dado à matemática:

AABOE ...Há dois papiros matemáticos preservados, o papiro Rhind, e o Papiro Moscou, que nos dão uma idéia do caráter e do conteúdo da matemática egípcia. (p.34)
ALMEIDA O Papiro de Rhind, nossa mais importante fonte sobre a matemática egípcia, foi descoberto na metade do século passado, ao que parece nas ruínas de pequeno edifício, perto do templo mortuário de Ramsés II em Tebas. Foi adquirido em Luxor, juntamente com outras antiguidades egípcias, pelo advogado escocês Alexander Henry Rhind, que, por razoes de saúde, foi obrigado a passar o inverno no Egito durante as temporadas de 1855-6 e 1856-7. Rhind faleceu quando retornava para casa de outra visita ao Egito, em 1863, e o papiro Rhind, bem como outro documento matematico conhecido como o rolo de couro, foram adquiridos do seu testamenteiro em 1865 pelo Museu Britânico. O Papiro Rhind, no seu estado original, formava um rolo constituído de quatorze folhas de papiro, cada qual com cerca de 40 cm de comprimento e 32 cm de altura, coladas nas extremindades. O comprimento total sobrevivente é de 513 cm. O Papiro foi

encontrado em dois pedaços, alguns fragmentos da região da ruptura forma identificados na coleção egípcia da Sociedade Histórica de Nova Iorque, em 1922. tinham sido adquiridos em Luxor pelo comerciante americano Edwin Smith, em 1862-3, e foram presenteados pela sua filha à Sociedade Histórica, após a morte do seu pai. Estão atualmente no Museu de Broklyn. O Papiro está escrito em caracteres hieráticos, em preto e vermelho, e se lê da direita para a esquerda. Foi copiado pelo escriba Ahmose (A'h-mosè) durante o período dos Hicsos, ou reis Pastores (cerca de 1650 a.C.), de escritos cerca de 200 anos mais antigos. Contem cerca de 87 problemas matemáticos. Estes são precedidos por uma tabela de divisão de 2 pelos números ímpares de 3 a 101, as respostas sendo expressas como soma de frações unitárias (os egípcios só operavam com esse tipo de fração, cujo numerador era a unidade, 1). (p.145) Tanto o Papiro Rhind como o de Moscou são textos-problemas da mesma espécie que os textos chineses ou babilônicos. (p.147)
BOYER O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no British Museum, (exceto uns poucos fragmentos, que estão no Brooklin Museum). Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, por isso é conhecido como papiro Rhind, ou, menos frequentemente, chamado Papiro Ahmes em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 A.C. O escriba conta que o material provem de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 A.C., e é possível que partes desse conhecimento tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, qu surpreendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 anos. De qualquer modo a matemática egípcia parece ter ficado estagnada por cerca de 2000 anos, após um inicio bastante auspicioso. (p.09) .... Os papiros de Ahmes e Moscou, nossas principais fontes de informação, podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências do ensino de matemática no Egito; outras evidências fornecidas por inscrições sobre monumentos, fragmentos de outros papiros matemáticos, e documentos de ramos aparentados da ciência servem para confirmar a impressão geral. (p.16)

COLLETTE

Afortunadamente, el clima seco de Egipto favoreció la conservacíon de alguns papiros, el más antiguo de los cuales es aproximadamente del año 1800 a. C. Los principales documentos com que se cuenta em la actualidad son:

1) El papiro de Rhind: rollo de papiro (0,33 X 5,48m) conservado em el British Museum, algunos fragmentos del cual se encuentran em el museo de Brooklyn. Este papiro, comprado em 1858 em Luxor por um joven abogado escocês llamado Henry Rhind, escrito por el escriba Ahmes hacia el año 1650 a.C. y exhumado em Tebas em 1855, constituye una fuente importante de la que obtenemos el conjunto de conocimientos matemáticos egípcios. Contiene 85 problemas redactados em escritura hierática, colección que debía servir de manual práctico para los no iniciados. Este texto, según Ahmes, es uma cópia de um texto más antiguo (2000-1800), algunos de cuyos elementos proceden quizá de períodos aún más antiguos. El título del papiro es más bien ingênuo: “Directrices para obtener um conocimiento de todas las cosas, inherentes a todo lo que existe , conocimientos de todos los secretos...”. las cinco partes del manual de Ahmes se refieren respectivamente a la aritmética, la estereometría, la geometria, el cálculo de pirâmides y um conjunto de problemas prácticos.
2) El papiro de Moscú: rollo de papiro (0,07 X 5,48 m) comprado em Egipto em 1893 y conservado em el museo de artes de Moscú (tambíen llamado papiro Golenisheff). Escrito hacia el año 1850 a.C. por um escriba desconocido, contiene 25 problemas relacionados com la vida práctica y se parece al de Ahmes, salvo em dos problemas de particular significación. El papiro de Moscú es, junto com el de Ahmes, uma de nuestra principales fuentes de información.
3) El rollo de cuero de las matemáticas egípcias: rollo de cuero (0,25 X 5,18 m) comprado com el papiro Rhind y conservado em el British Museun desde 1864. En 1927 se consiguió, no si dificultad, desenrollar este documento de cuero y encontrar em el uma colección, por duplicado, de 26 sumas escritas em forma de fracciones unitárias. Todo parece indicar que este rollo era uma copia sacada de um manual, copia que servia de guia práctica o tabla para um futuro trabajo. Según Gillings[7] esta tabla arroja mucha luz sobre el aspecto mecânico contenido em las principales fuentes de las matemáticas egípcias, de la aritmética, además de proporcionar uma justificación de la supuesta existência de tablas tipo fracciones.
4) Los papiros de Kahun, Berlin, Reisner, Akhmîn y algunos otros completan, em algunos puntos particulares, los conocimientos matemáticos que se derivan de los três anteriores. (p.40,41)

[7] R.J. Gillings, Mathematics in the time of Pharaohs, Cambridge (Massachusetts), MIT Press, 1972, p.91.

DAVIS Um erudito e antiquário escocês, A. Henry Rhind, estava passando o inverno de 1858 no Egito, por razoes de saúde. Correndo casualmente os olhos pelos objetos de uma loja em Luxor, descobriu e comprou um antigo papiro egípcio que, segundo constava, tinha sido encontrado em umas ruínas em Tebas. Quando Rhind morreu, alguns anos mais tarde, o documento foi transferido para o Museu Britânico. O rolo, originalmente de 18 pés por 13 polegadas[8]*, foi encontrado dividido em vários "livros", faltando-lhe vários pedaços. Muitos desses fragmentos forma descobertos mais tarde, de posse da New York Historical Society, e foi possível fazer uma tradução completa do papiro / GUGGENBUHL: 406-10/. O papiro Rhind é uma coleção de exemplos matemáticos copiados pelo escriba Ahmes (seu nome às vezes é dado como A'h-mosè ou Ahmose) por volta de 1650 a.C., no reinado de A-use Re, da dinastia dos hicsos. O escriba explica que esses escritos são uma copias de outros mais antigos no tempo de Ne-ma'et-Re (Amenemhet III), o que dataria o trabalho da ultima metade do século XIX a.C. Nas palavras de abertura o escriba expõe seu propósito: mostrar "cálculos precisos de penetrar as coisas, conhecimento das coisas existentes e todos os mistérios ... e todos os segredos". A escrita é hierática, uma forma menos formal do que a hieroglifica, utilizando símbolos gerais ao invés das figuras desta ultima. O documento é dividido em três partes, após a introdução: problemas aritméticos; problemas geométricos; e problemas variados, incluindo algumas aplicações de áreas e volumes. (p.39,40)
EVES 1650 a.C. Essa é a data aproximada do papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contem 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. Esse papiro e o papiro de Moscou são nossas principais fontes de informação referentes à matemática egípcia antiga. ... O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um circulo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. (p.69,70) Todos os 110 problemas incluídos nos papiros Moscou e Rhind são numéricos e boa parte deles é muito simples. Embora a maioria tenha origem prática, há alguns de natureza teórica. Uma das conseqüências do sistema de numeração egípcio é o caráter aditivo da aritmética dependente. Assim, a multiplicação e a divisão eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo numero pode ser representado por uma soma de potências de 2. (p.72)

[8] Aproximadamente 5 m por 0,30 m. (N.T.)

STRUIK

Durante muito tempo, o nosso campo histórico mais rico repousava no Egito, devido à descoberta, em 1858, do chamado Papiro de Rhind, escrito por volta de 1650 a.C., mas que continha material ainda mais antigo. (p. 49)

A maior parte dos nossos conhecimentos sobre a matemática egípcia deriva de dois papiros: o papiro de Rhind, que contem 85 problemas, e o chamado Papiro de Moscou, talvez dois séculos mais antigo, que contem 25 problemas. Estes problemas já eram há muito conhecido quando estes manuscritos foram compilados, mas existem papiros menores, mais recentes – alguns do tempo do Império Romano -, que não apresentavam diferenças de ponto de visto. (p. 52)

Não só de papiros os registros foram feitos,

"Outro material de escrita primitiva era o pergaminho, feito de peles de animais em geral carneiros e cordeiros. Naturalmente era raro e difícil de se obter. Mais valioso ainda era o papel pergaminho, um material feito de pele de vitelos. O pergaminho era efetivamente tão caro que na Idade Média surgiu o costume de raspar a tinta de velhos manuscritos em pergaminho para poder usá-lo outra vez. Tais manuscritos são chamados palimpsestos (palin, outra vez; psao, raspado). Em alguns casos, com a passagem dos anos, o escrito original de um palimpseto reaparecia por baixo do tratamento posterior. Algumas restaurações interessantes forma feitas dessa maneira". (Eves, p.38)

E assim, em 1927, houve uma grande expectativa diante de um achado datado aproximadamente da mesma época do Papiro de Rhind,

"...Muchos aguardaban descubrimientos importantes. Imaginese su desencanto cuando todo lo que apareció fue una colleción de 26 sencillas igualdades, como 1/10 + 1/40 = 1/8, registradas por un desconocido e inexperto escriba. Glanville (1927), el primer traductor del manuscrito, sugirió irónicamente que el manuscrito podia tener algún valor por la nuevavisión que podia ofrecer sobre la tecnologia del curtido del cuero de su época. Sin embargo, un juicio tan pesimista no há sido confirmado por su ulterior examen, ya que sus contenidos han servido para clarificar numerosos cálculos contenidos em el papiro de Ahmes". (Joseph, p.107)

O grande número de informações egípcias se deve ao fato de que:

*“La civilización egípcia nació probablemente de um gran número de pequeñas comunidades urbanas y rurales que se unieron progresivamente em dos reinos, el Alto y el Bajo Egipto. El primer rey que, según parece, reunió el Alto y el Bajo Egipto fue Menes. De Menes a Alejandro Magno, época que comienza hacia el año 3100 a. C. y termina com la conquista griega de Alejandría em el 322 a. C., se suceden distintos impérios y períodos intermédios. Egipto fue considerado durante mucho tiempo, debido al clima muy seco de la región y al culto que los egípcios profesaban a sus muertos, como el campo por excelência de las excavaciones históricas. Por esto, Egipto está lleno de construcciones numerosos papiros y objetos que el clima favorable há conservado muy bien.” (*Collette, p.39)

Desde os mais antigos registros sobreviventes chegados até nós, é possível verificar que medir e contar são atos freqüentes no cotidiano de todos. Medir consiste em comparar grandezas de mesma natureza, em obter resultados que facilitem as relações sociais de trocas exigidas pelo progresso. *“Os homens da Idade da Pedra não usavam frações mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a* ***necessidade do conceito de fração e de notação*** *para frações”*. (Boyer, p.09)

Ao repartir as terras próximas ao rio Nilo o Faraó cobrava pelo uso. Essas terras eram muito preciosas, pois, pelo menos uma vez por ano as águas do Nilo inundavam uma vasta região ao longo de suas margens deixando uma estreita faixa de terras férteis prontas para o cultivo, o que beneficiava a agricultura no Egito.

Usando cordas com marcas especiais para fazer a medição, os encarregados – estiradores – dividiam em porções iguais entre os egípcios, as terras, com a obrigação de pagar tributos uma vez ao ano. Esses mesmos estiradores determinavam a porção de terra descontada do tributo referente a parte perdida pelo agricultor, quando o Nilo inundava as terra já cultivadas. A idéia de ‘parte de’ levou os egípcios a criarem um novo tipo de registro numérico, e ao fazê-lo, usaram frações.

“La operación con fracciones de la unidade s un rasgo singular de lãs matemáticas egípcias y está ausente de casi todas lãs otras tradiciones matemáticas. Una proporción sustancial de los cálculos supervivientes del antiguo Egipto emplea tales operaciones – de los 87 problemas del papiro de Ahmes solo seis no lo hacen –. Se pueden sugerir dos razones de este énfasis tan grande em lãs fracciones. Em una sociedade que no utilizaba el dinero, em la que lãs transacciones se efectuaban en espécie, existia una necesidade de cálculos exactos con fracciones, particularmente em los problemas pr´pacticos como la división de los alimentos, la parcelación de la tierra y la mzcla de los distintos ingredientes para fabricar la cerveza o el pan. [...] numerosos problemas em el papiro de Ahmes tratan de esos problemas prácticos. Una segunda razón provenia del caráter particular de la aritmética egípcia. El proceso de dividir por dos con frecuencía a fracciones". (Joseph, p.107)

BOYER

As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias – isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. A fração 1/8 aparecia então como , e 1/20 como  . Na notação hierática, dos papiros, o oval alongado é substituído por um ponto, colocado sobre a cifra para o inteiro correspondente (ou sobre a cifra da direita no caso do recíproco de um número multidígito). No Papiro Ahmes, por exemplo, a fração 1/8 aparece como  e 1/20 como . Tais frações eram manipuladas livremente no tempo de Ahmes, mas a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios. Eles se sentiam à vontade com a fração 2/3, para a qual tinham um sinal hierático ; ocasionalmente usavam sinais especiais para frações da forma n/(n + 1), os complementos das frações unitárias. (p.09,10)

.... A precisão nas aproximações era relativamente fácil de conseguir para os babilônios com sua notação para frações, a melhor que qualquer civilização tenha possuído até a Renascença. (p.21)

As notações gregas primitivas para os inteiros não eram excessivamente incômodas e serviam bem aos seus objetivos. Era no uso de frações que o sistema era fraco. Como os egípcios, os gregos se sentiram tentados a usar frações unitárias, e para estas tinham uma representação simples.

... Aqui vemos que as civilizações antigas evitaram o uso excessivo de frações: simplesmente subdividiam as unidades de comprimento, peso e dinheiro tão eficazmente que podiam calcular em termos de múltiplos inteiros das subdivisões. Essa é, sem dúvida, a explicação da popularidade, na antiguidade, das subdivisões duodecimais e sexagesimais, pois o sistema decimal aqui fica em forte desvantagem. (p.44)

DAVIS

O as de cobre dos romanos pesava uma libra e era dividido em 12 unciae, ou “onças”; as partes sucessivas eram divididas em metades. Assim envolviam-se unidades fracionárias de duodécimos, um vinte e quatro avos, um quarenta e oito avos, etc. certas versões do ábaco romano, que descrevemos brevemente, atendiam a essa variação de partes fracionárias. (p.4)

O calculo com frações representava um problema da maior importância para muitos matemáticos antigos. Isso acontecia especialmente entre os egípcios, que recorreram quase totalmente ao uso de “frações unitárias” – frações de numerador 1. a “parte de 12” significava 1/12 e era indicada escrevendo-se o denominador com um símbolo especial sobre ele para indicar “parte”:  . Na forma hierática, colocava-se um ponto sobre o símbolo do numeral. Um símbolo especial, , era seguido para uma importante fração não unitária, 2/3. (p.9,10)

Nos mais antigos registros matemáticos encontrados já aparecem frações. Os antigos, todavia, não desenvolveram uma abordagem generalizada das frações, de modo que os métodos especiais de lidar com elas muitas vezes impuseram certas restrições a seu uso.

Já no ano 2000 a.C. os babilônios usavam frações. Elas eram escritas em forma posicional,essencialmente da mesma maneira que as frações decimais de hoje. Todavia, os denominadores não escritos eram sucessivas potencias de sessenta, e não há qualquer indicio de uma separatriz que correspondesse a virgula decimal. (p.52,53)

EVES

Os números inteiros são abstrações que surgem do processo de contar coleções finitas de objetos. Mas as necessidades da vida prática requerem, além da contagem de objetos individuais, a medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo. Para satisfazer essas necessidades básicas referentes a medições necessita-se de frações, pois raramente acontece de um comprimento, para citar um exemplo, contar um número exato de vezes uma unidade linear. Definindo-se, assim, um número racional como o quociente p/q, q≠0, de dois números inteiros, o sistema dos números racionais é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações. (p.104)

.. O processo egípcio de multiplicação e divisão não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda tanto ao ábaco que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois.

Os egípcios esforçaram-se para evitar algumas das dificuldades computacionais encontradas com frações representando-as, com exceção de 2/3, como soma das frações chamadas unitárias, ou seja, aquelas de numerador igual a 1. Essa redução tornava-se possível graças ao emprego de tábuas que davam a representação desejada para frações do tipo 2/n, as únicas necessárias devido à natureza diádica da multiplicação egípcia. Os problemas do papiro Rhind são precedidos de uma dessas tábuas para todos os ímpares n de 5 a 101. Assim, encontramos 2/7 expresso como 1/4 + 1/28, 2/97 como 1/56 + 1/679 + 1/776 e 2/99 como 1/66 + 1/198. Apenas uma decomposição é dada para cada caso. A tábua é utilizada em alguns dos problemas do papiro.

...

As frações unitárias eram indicadas, na notação hieroglífica egípcia, pondo-se um símbolo elíptico sobre o numero do denominador. Um símbolo especial era usado também para a fração excepcional 2/3 e um outro símbolo às vezes aparecia para 1/2. (p.73)

GUNDLACH

Na matemática egípcia, o uso de frações restringia-se quase totalmente às chamadas frações unitárias, aquelas cujo numerador é 1. em hieróglifos, essas frações eram representadas colocando-se o símbolo  sobre o símbolo do denominador. Símbolos especiais eram usados para 1/2 e 2/3. Na forma hierática, geralmente usava-se um ponto sobre o denominador para indicar a fração unitária, embora também certas frações simples, tais como 1/2, 1/3 e 2/3, tivessem cada uma seu próprio símbolo.(p.24)

A notação das frações também variava bastante, e algumas frações estavam sujeitas a interpretação errada. Frações unitárias (numerador 1) eram comumente representadas pelos símbolos em letras para o denominador com um acento sobre ele. Outras frações eram representadas às vezes pelo numerador seguido do denominador acentuado, às vezes escrevendo-se o denominador acentuado duas vezes.Posteriormente as frações começaram a ser escritas de maneira algo semelhante à notação moderna – um numeral sobre o outro – mas com o denominador aparecendo na parte superior, e geralmente sem nenhum traço entre numerador e denominador. (p.27)

IFRAH

...O principal interesse de uma numeração escrita, todo mundo está de acordo, é permitir a seus usuários uma representação simples e não ambígua dos números. Digo de todos os números, sejam inteiros ou fracionários, racionais ou não. O que nos é preciso adotar, portanto, é uma numeração tendo por base um numero que não têm outro divisor estrito que ele mesmo. Noutras palavras, uma numeração fundada no numero primo. Quero como exemplo apenas a numeração de base onze. Esta seria bem mais vantajosa do que as bases dez e doze, visto que as frações nela seriam geralmente irredutíveis; num tal sistema, teriam apenas uma só e única representação. Um exemplo: o numero que representamos no nosso atual sistema decimal pela notação 0,68 corresponde ao mesmo tempo às frações 68/100, 34/50 e 17/25. Essas frações representam claro, o mesmo valor, mas há igualmente uma ambigüidade na representação. Numa numeração tendo por base sete ou onze (ou que, mais geralmente, seria fundada numa base igual a um numero primeiro), tais ambigüidades desapareceriam completamente, a irredutibilidade engendraria a unicidade das representações. (p.80,81)

...Sabe-se também que os romanos empregaram um sistema fracionário fundado na divisão dos As, unidade aritmética, monetária e ponderal, repartida em doze sub-unidades chamadas onças. (p.184)

JOSEPH

Dos rasgos importantes del cálculo con fracciones de los egípcios se subrayan aqui:

1. Por retorcido que nos parezca, para calcular un tercio de un número un escriba calculaba primero los dos tercios de esse número y luego dividia el resultado por dos. Èsta era la práctica habitual em todos los cálculos de los egípcios.

2. aparte de los tercios (representados por su próprio jeroglífico, ), los egípcios no tenían frcciones compuestas: todas lãs fracciones se descomponían en una suna de fracciones de la undade (fracciones como ¼ y 1/5).

(P. 108)

STRUIK

O aspecto mais notável da aritmética egípcia é o seu calculo de frações. Todas as frações eram reduzidas a somas das chamadas “frações unitárias”, o que quer dizer frações de numerador 1. Eram indicadas pelo numero do denominador com um símbolo em cima, que nós indicaremos com uma barra. Assim, indicamos 1/10 por $\overline{10}$. As únicas exceções eram ½ e 2/3, para as quais existiam símbolos especiais. A redução a somas de frações unitárias era possível através de tabelas, que davam a decomposição de frações da forma 2/n – a única decomposição necessária por causa da multiplicação diádica. O Papiro de Rhind tem uma tabela que dá as equivalências em frações unitárias para todos os números impares de 5 a 101 [...] O principio subjacente a esta redução especial a frações untarias não é claro [...] Este calculo com frações deu à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no perigo grego, mas também na Idade média. A decomposição pressupunha alguma perícia matemática e existem teorias interessantes para explicar o caminho pelo qual os especialistas egípcios poderiam ter obtido os seus resultados. (p.53)

De acordo com BOYER (1974) a aproximação era relativamente fácil de ser obtida para os babilônios com a notação fracionária que usavam, visto que foi a melhor de qualquer civilização usou até a Renascença. (p.21) Enquanto que, para escrever algumas das frações de medidas, os egípcios utilizavam desenhos inspirados em seus deuses, segundo Ifrah (1995) essa forma era utilizada como decoração. Com a necessidade de uma escrita rápida, o sistema de notação se simplificou.

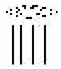
Segundo IFRAH, (p. 348-9-350) a evolução na grafia das frações egípcias tem ligação com um deus esquartejado:

“Este deus era conhecido sob o nome de oudjat, notado foneticamente com a ajuda de hieróglifos da maneira seguinte:

O oudjat era ao mesmo tempo o olho de um ser humano e o de um falcão; comportava portanto, as duas partes da córnea, a íris e a sobrancelha do olho humano, elemento aos quais se acrescentava, em posição inferior, as duas marcas coloridas características do falcão-peregrino. E como os submúltiplos mais usuais do héqat eram sucessivamente o meio, o quarto, o oitavo, o um-dezesseis avos, o um-trinta e dois avos e o um-sessenta e quatro avos, essa notação consistiu então em *decompor o cudjat emseis partes e depois atribuir a cada uma delas uma das seis frações:*

1/2, 1/4, 1/8, 1/32 e 1/64” (Ifrah, p.350)

Uma informação que IFRAH, nos dá sobre o oudjat é que ele *“constituía uma sobrevivência dos mitos osirianos e seus simbolismo detinha um lugar importante nos ritos mágicos e funerários que se ligavam a ele”.* (p.351)

Segundo o próprio IFRAH (p.349), os egípcios utilizavam o hieróglifo da boca (),com o número que servia de denominador embaixo do hieróglifo, para exprimir as frações:  $\frac{1}{3}$. Eles interpretavam a fração somente como uma parte da unidade. Utilizavam, então, frações unitárias, isto é, com numerador igual a 1. As outras frações eram expressas por meio de uma soma de frações de numerador 1 como, por exemplo, para $\frac{3}{5}$, eles escreviam $\frac{1}{2}\frac{1}{10}$ (sem o símbolo conhecido nos dias atuais +).

O Papiro de Rhind contém uma lista de equivalências, em frações unitárias para todos os ímpares de 5 a 101, segundo Struik (1986), esta relação de equivalências não está clara, pois a decomposição de frações da forma $\frac{2}{n}$, quando o denominador é o número 19, o que seria para nós na forma $\left(\frac{2}{19}\right)$, para o qual a decomposição deveria ser $\frac{1}{12}\frac{1}{57}\frac{1}{228}$ está a decomposição $\frac{1}{12}\frac{1}{76}\frac{1}{114}$. Embora este cálculo com frações tenha dado um caráter complicado e pesado à matemática egípcia, esta forma se perpetuou durante milhares de anos.

De acordo com SCHUBRING, *“O Egito apresenta uma estrutura análoga* (à Mesopotâmia)*, com uma corporação de escribas e ensino institucionalizado”.* (p.24-26)

“Em contraste com a predominância da álgebra na matemática babilônica, esses fragmentos de livros-texto abordam principalmente a aritmética. <u>A aritmética egípcia é predominantemente aditiva – as multiplicações são reduzidas a adições.</u> Uma característica peculiar é que todas as frações são reduzidas a frações de numerador um. (...)

No texto do Papiro de Rhind, observamos uma interessante estrutura interna: os fundamentos aritméticos e geométricos são expostos primeiro, vindo às aplicações somente depois". (Schubring, 2003, p.24-26, grifos meus)

AABOE

A coincidência virtual entre os números principais e os números da tábua de recíprocos nos fornece uma pista para a maneira como os babilônios realmente calculava. É bem claro que a tabua de recíprocos combinada com estas tábuas de multiplicação servia também para divisões, pois a dividido por b é a multiplicação pelo recíproco de b, ou

$\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$ (p. 22)

ALMEIDA

Quando os chineses desejavam dividir um numero operavam como nós operamos, 14 dividido por 6 dava 2 e 2/6. os babilônios operavam de modo completamente diferente: para dividir 14 por 6, primeiro procuravam na tabela de recíprocos o recíproco de 6: 0,10, que então era multiplicado por 14 para se obter o resultado desejado. (p. 141)

BOYER

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas "duplações". Nossa palavra "multiplicação", na verdade, sugere o processo egípcio. Uma multiplicação de, digamos, 69 por 19 seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552 e mais uma vez, dando 1104, que é, naturalmente, dezesseis vezes 69. Como 19 = 16 + 2 + 1, o resultado da multiplicação de 69 por 19 é 1104 + 138 + 69 – isto é, 1311. Ocasionalmente usava-se também uma multiplicação por dez, pois isto é natural na notação hieroglífica decimal. Multiplicação de combinações de frações unitárias também era parte da aritmética egípcia. (p.11)

COLLETTE

La utilización de tablas de inversos (valores de $\frac{1}{n}$ para diferentes valores de n, todo ello expresado en el sistema sexagesimal) permitía reducir la operación de división a uma operación de multiplicación. (p.25)

Las operaciones usuales se efectúan, casi em su totalidad com la ajudo del principio de adición o por desdoblamiento. (p.43)

Si, por uma parte, este principio de desdoblamiento facilita las operaciones usuales, por outra, los egípcios encontraron serias dificultades para la aplicación de estas operaciones a las fracciones.

Em efecto, reducían todas las fracciones (excepto quizá la fracción $\frac{2}{3}$) a sumas de fracciones unitárias a fin de simplificar las operaciones. Esta reduccion fue posible gracias a la construcción de tablas que contenían fracciones del tipo $\frac{2}{n}$ (cualquier outra forma no es esencial em virtud del principio de desdoblamiento). El papiro de Ahmes empieza com uma tabla que expresa $\frac{2}{n}$, de n=3 a n=101, como suma de fracciones unitárias.

Evidentemente, com estas tablas las operaciones se efectuaban de forma muy sencilla, aunque laboriosa, pero el problema difícil radica esencialmente em la construcción de tablas que reduzcan toda fracción a fracciones unitárias. Como conseguían los egípcios, de manera general, reducir las fracciones a fracciones untarias, no lo sabemos muy bien. Ahmes, em su papiro, utiliza unas veces uma serie de transformaciones y otras outra distinta. Sin embargo, Neugebauer sugiro que la elección de la secuencia depende, em la mayoría de los casos, de que se prefiera utilizar las fracciones naturales $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ y desdoblarlas sucesivamente. Consideremos algunos ejemplos de reducción de fracciones.

Ejemplo 1.: Ahmes transforma $\frac{2}{7}$, y obtiene $\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$

¿Como lo consigue?

Desdoblemos $\frac{2}{7}$, tenemos $\frac{2}{7} = \frac{1}{7}+\frac{1}{7}$.

Desdoblemos $\frac{1}{7}$, tenemos $\frac{1}{14}+\frac{1}{14}$.

Desdoblemos $\frac{1}{14}$, tenemos $\frac{1}{28}+\frac{1}{28}$.

Así:

$$\frac{2}{7} =$$

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{28}+\left(\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$$

(p.45,46)

DAVIS

Como já foi observado anteriormente, a multiplicação para o calculador egípcio dependia de dobrar. Para se dobrar uma fração unitária com denominador par, dividia-se ao meio o denominador. Para o dobro de $\overline{3}$, os egípcios usavam seu símbolo especial. Para se dobrarem valores restantes com denominador ímpar, eram necessárias tábuas especiais. O papiro de Rhind começa dando tais tábuas para o dobro de $\overline{N}$, para todos os valores impares de N até 101. por exemplo, 2/43 = $\overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$. Se o denominador é divisível por 3 – isto é, se é da forma 3k –, o dobro é sempre $\overline{2k} + \overline{6k}$. (p.9,10)

A multiplicação de frações por números inteiros era feita de maneira semelhante. No problema 2, para dividir 2 pães igualmente entre 10 homens (os primeiros 6 problemas consistem em dividir 1,2,6,7,8 e 9 pães igualmente entre 10 homens), o texto simplesmente afirma que cada homem deve receber 1/5 de pão, e depois verificar se esse valor está correto multiplicando 10 por 1/5.

1	$\frac{1}{5}$
v2	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
4	$\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
v8	$1\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$

“Total 2 pães, o que está correto.” Embora o escriba efetivamente não faça isso, podemos verificar que 2 + 8 = 10, e de modo correspondente (1/3 + 1/15) + (1 1/3 + 1/5 + 1/15) é 2. no trabalho acima, os dobros de 1/5 e 1/15 são os valores dados na tabela introdutória de 2/n. Para dobrar $\overline{n}$ quando n é par, basta dividir n por 2.

O resultado da divisão de 6 pães entre 10 homens é dado como ½ + 1/10; de 7 paes por 10 homens, 2/3 + 1/30, o que ilustra o uso de 2/3 quando possível. /GILLINGS (a)./

Uma das poucas generalizações do método é dada no Problema 61B: “Para achar 2/3 de $\overline{5}$, tome seu dobro e seu sêxtuplo, e proceda assim para achar qualquer fração que possa ocorrer”. Assim devemos achar $\overline{8}$ + $\overline{6g5}$ ou 1/10 + 1/30, que é 2/3 de 1/5. contudo, não há nenhuma prova de que esse método sempre leve ao resultado correto....

Se a divisão não é exata, usa-se também mediação, com as frações resultantes. Assim no Problema 24, no qual uma passagem intermediária requer a divisão de 19 por 8, temos

1	8
2	16 v
$\overline{2}$	4
$\overline{4}$	2 v
$\overline{8}$	1 v

O quociente é 2 + $\overline{4}$ + $\overline{8}$. (p. 41,42)

IFRAH A multiplicação à maneira egípcia é portanto simples e pode ser feita sem recorrer às tábuas de multiplicação. A divisão é feita igualmente seguindo multiplicações consecutivas, mas o procedimento é efetuado no sentido inverso. (p.367) Naturalmente esse método só pode ser aplicado no caso em que o dividendo é um múltiplo do divisor. Mas quando a divisão não é sem resto, recorre-se às frações de numero seguindo procedimentos que seia demorado e complicado explicar aqui. (p.368)
JOSEPH Toda multiplicación y división que implicara fracciones de la unidad conduciría invariablemente al problema de como duplicar lãs frcciones de la unidad. Ahora, doblar una fracción de la unidad con un denominador par se reduce a la sencilla cuestión de dividir por dos el denominador. Así, no ofrecía ninguna dificultad, pues 2/3 tenía su próprio símbolo jeroglífico o hierático. Pero lãs dificultades surgían al duplicar lãs fracciones de la unidad con otros denominadores impares. Por alguna razón que desconocemos, no estaba permitido en el calculo egípcio escribir dos veces 1/n con 1/n + 1/n. Así, resultaba necesaria alguna forma de contar fácil que suministrara lãs fracciones de la unidad apropiadas que sunaran 2/n, donde n = 5,7,9,... Al principio del papiro de Ahmes existe una tabla de descomposición de 2/n en fracciones de la unidad para todos los valores impares de n desde 3 a 101. (p.109) El producto de los dos números utilizando la multiplicación moderna seria 46 23/45, que es exactamente el resultado egípcio dado em la ultima fila. En el curso de la multiplicación hemos tomado los términos de lãs fracciones de la unidad de 2/5, 2/15 y 2/9 de la tabla 3.1. Y como la multiplicación egípcia se basaba em la duplicación, solo se requeria la tabla 3.1. El carácter laborioso y tedioso de esta forma de multiplicar no nos debe hacer olvidar la modéstia de lãs herramientas requeridas. Saber duplicar, dividir por dos y trabajar con la fracción “dos tercios”, junto con la tabla de 2/n, es suficiente. Para ilustrar la división con fracciones, tomemos uno de los problemas más dificiles de su clase del papiro de Ahmes, el Problema 33, que puede ser reformulado de la manera siguiente: (p.111) Ejemplo 3.6. La soma de una cierta cantidad y sus tercios, su mitad y su séptima parte es 37. ¿Cuál es esa cantidad? Solución: Em el idioma del álgebra moderna, este problema se resuelve formulando una

ecuación de primer grado con una incógnita. Sea esta cantidad x. el problema entonces consiste en resolver

(1 + 2/3 + ½ + 1/7)x = 37

Para dar

$$x = \frac{37}{1 + 1/2 + 2/3 + 1/7} = 16\frac{2}{97}$$

El problema reformulado es: Dividir 37 por 1 + 2/3 +1/2 + 1/7.

1	1 +2/3 + ½ + 1/7
2	4 + 1/3 + ¼ +1/28 (2/7 = ¼ + 1/28 según la tabla 2/n)
4	8 + 2/3 + ½ + 1/14
8	18 + 1/3 + 1/7
→16	36 + 2/3 + ¼ + 1/28

(p.112)

La finalidad principal de la construcción de la tabla era su uso em multiplicación y división (p.112)

Los egípcios adoptaron un método de solucion que es análogo (pero no equivalente) al método actual del mínimo comum denominador. En primer lugar, tomaban el denominador de la fracción de la unidad más pequena como numero de referencia, y luego multiplicaban la fracción por este número para obtener "auxiliares rojos" (llamados así porque el escriba anotaba estos números con tinta roja). Procedían a calcular em cuánto la suma de estos auxiliares era menr que el número de referncia. Esta cantidad por defecto se expresaba a continuación como uma fracción del número de referencia para obtener el complemento deseado. Si la cantidad por defecto resultaba ser uma fracción de difícil manejo, se seguia buscando um nuevo número de referencia que produjera auxiliares más manejables. (p.113)

É interessante perceber que, como enfatiza *COLLETTE, (p.47) "Parece que las fracciones* $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ *eran especialmente apreciadas por los egípcios, quizá debido a su continua presencia em la vida diária. Por desdoblamiento, se obtienen dos secuencias de fracciones "naturales":* $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$*, etc., y* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ *etc." .*

Embora reforçado por vários dos autores selecionados, o sistema sexagesimal prevaleceu entre os astrônomos até os tempos modernos e, obviamente, ainda é usado na trigonometria esférica. Mas foram as frações unitárias as vedetes:

AABOE

Fora da geometria, eles não ultrapassaram a aritmética elementar. A explicação disso é, sem dúvida, que eles tiveram a idéia natural mais infeliz de admitir somente frações com numerador 1, isto é, frações da forma 1/n, com uma exceção, ou seja 2/3. assim, eles representariam

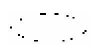
$\frac{2}{5} como \frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ ou $\frac{9}{10} como \frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}$

Enquanto que os babilônios escreviam 0;24 ou 0;54. É portanto surpreendente que as adições e multiplicações, simples trivialidades para os babilônios, permaneceram problemas de complexidade máxima para os egípcios. Os gregos herdaram este estilo egípcio, mas Ptolomeu, o astrônomo, antes de empreender cálculos sérios em seu Almagesto, afirma que: "em geral usaremos o sistema numérico sexagesimal devido à inconveniência das frações." (p.34,35)

COLLETTE

A veces se invierte el orden de los spimbolos, a veces la representación es vertical em lugar de horizontal. Para representar las fracciones unitárias (numerador uno), los egípcios colocaban encima del número um símbolo de forma oval. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{7}$ aparece em la forma  y la fracción $\frac{1}{10}$ aparece em la forma .

[...]

Para representar las fracciones em el sistema hierático, el símbolo jeroglifico  es sustituido simplemente por um punto . Así $\frac{1}{8}$ aparece em la forma  y $\frac{1}{20}$ se convierte em . Generalmente, los egípcios utilizaban signos específicos para fracciones particulares como $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Em general, trabajan com fracciones unitárias y cualquier fracción de la forma $\frac{p}{q}$ se expresa como uma suma de fracciones unitárias. (p.43)

...Igual que los egipcios, los griegos sintieron la tentación de emplear abundantemente las fracciones unitárias. La notación para um submúltiplo de um entero cualquiera consistia em escribir, com el fin de distinguir bien el entero de la fracción, el entero com um acento. Por ejemplo $\frac{1}{3}$ se escribía así: “g '” y “ xe '” representaba $\frac{1}{25}.xe$ ' podia representar tambíen el número $20\frac{1}{5}$, pero com frecuencia el contexto permitia identificar bien el número. Entre los matemáticos de la Escuela de Alejandría, la utilización de fracciones ordinárias, así como la de fracciones sexagesimales em astronomia y trigonometria (uma secuela de las influencias babilônicas), se hizo habitual. (p.70)

DAVIS

As frações unitárias eram usadas também em problemas de divisão. Problemas apresentados no papiro Rhind envolviam a divisão de 6, 7, 8 ou 9 pães igualmente entre 10 homens. As respostas egípcias eram $\overline{2}+\overline{10}$, $\overline{\overline{3}}+\overline{30}$, $\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}$ e $\overline{\overline{3}}+\overline{5}+\overline{50}$ pães para cada um [3]/VAN DER WAERDEN: 19-30; NEUGEBAUER:74-78/.(p.10)

O papiro Rhind, muitas vezes chamado papiro Ahmes, contem o primeiro tratamento sistemático das frações unitárias. Valores fracionários que não podiam ser expressos por nenhuma fração unitária eram representados pela soma de duas ou mais frações unitárias, com um espaço entre elas, em vez do sinal mais. Assim 2/35 se escrevia como 1/30 [+] 1/42. as frações unitárias eram escritas com um símbolo de fração com o denominador embaixo. Em hieróglifos (escrita pictórica), a fração ¼ era escrita como , 1/13 como  e assim por diante. A fração 2/3 tinha um símbolo especial, , e 1/2 ás vezes se escrevia . Em escrita cursiva hierática indicava-se a fração unitária por um ponto ou símbolo, chamado ro, colocado sobre o denominador. ...

Os gregos também usavam frações unitárias. Frequentemente elas eram representadas escrevendo-se apenas o denominador com um acento simples ou duplo; assim, lb" representava 1/32. Mas os eruditos gregos não se limitavam a frações unitárias. Frações gerais às vezes eram indicadas escrevendo-se o numerador uma vez com um acento e o denominador duas vezes com um acento duplo. Assim e 'h "h " = 5/8. Em alguns casos o denominador era colocado na atual posição do expoente; em outros casos o denominador era escrito diretamente sobre o numerador (exatamente o contrario da notação moderna, só que não se usava barra entre eles).

Em Roma o uso de frações ocorria mais frequentemente em cálculos com moeda e em metrologia. Cada fração tinha um nome especial, e os romanos geralmente mantinham o denominador como uma constante, 12, provavelmente porque sua moeda de cobre, as, que pesava uma libra, era dividida em 12 unciae. Cálculos com frações constituíam a parte principal da instrução aritmética nas escolas romanas. (p.53)

Mesmo as frações unitárias sendo a vedete da antiguidade, AABOER, (p.18), coloca que muitos verificaram que o sistema babilônico era melhor: "*Outra vantagem da base babilônia é que mais frações podem ser escritas como frações sexagesimais finitas do que como frações decimais finitas".*

É possível dizer que os problemas registrados nos papiros, traduzem o espírito da sociedade:

> *En una economia no monetária, el pago tanto de artículos como del trabajo se hace en espécie. Com frecuencia la elección de los artículos que actúan como medidas o estándares de valor suministra unas perspectivas interesantes del carcter de una sociedad. En Egipto, el pan y la cerveza eran los enstándares de valor de cambio más corrientes. Diversos problemas del papiro de Ahmes se refieren a estos artículos, tratando de su distribución entre um numero dado de trabajadores y también midiendo la fuerza (pesu) de tipos diferentes de estos artículos. [...] (Joseph, p.116)*

AABOE

As semelhanças entre nosso sistema numérico e o dos babilônicos são várias: nós, como eles, empregamos um numero finito de símbolos ou algarismos (usamos dez) para exprimir todos os inteiros; fazemos também estes algarismos cumprirem sua missão atribuindo importância a suas posições, de modo que com cada mudança de casa para a esquerda, seu valor seja multiplicado por um fator constante (conosco, 10, com os babilônicos, 60). Nós, como eles, usamos uma extensão deste princípio para exprimir certas frações (frações decimais em nosso caso) fazendo valer mesmo alem da casa das unidades a regra de que a movimentação de um algarismo uma casa para a direita significa dividir seu valor pelo fator constante 10, ou 60. a propósito, os números 10 e 60, que desempenham um papel tão crucial, são chamados as bases dos dois sistemas numéricos, que são designados respectivamente por sistema decimal e sexagesimal; e da mesma maneira que falamos de frações decimais, chamamos suas correspondentes babilônias de frações sexagesimais. (p.14,15)

BOYER

A tabela para 2/n no Papiro Ahmes é seguida de uma curta tabela para n/10 para entre 1 e 9, as frações sendo novamente expressas em termos das favoritas – frações unitárias e a fração 2/3. A fração 9/10, por exemplo, é decomposta como 1/30 mais 1/5 mais 2/3. Ahmes tinha começado sua obra garantindo que ela forneceria um "estudo completo e minucioso de todas as coisas ... e o conhecimento de todos os segredos", e por isso a parte principal do material que se segue às tabelas para 2/n e n/10 consiste de oitenta e quatro problemas sobre questões variadas. Os seis primeiros requerem a divisão de um ou dois ou seis ou sete ou oito ou nove pães entre dez homens, e o escriba usa a tabela n/10 que acabou de dar. No primeiro problema o escriba tem um trabalho considerável para mostrar que está correto dar a cada homem um décimo de um pão. Se um homem recebe 1/10 de um pão, dois homens receberão 2/10 ou 1/5 e quatro receberão 2/5, ou seja, 1/3 + 1/15 de um pão. Portanto oito homens receberão 2/3 + 2/15, ou 2/3 + 1/10 + 1/30 de um pão, e oito homens mais dois homens terão 2/2 + 1/5 + 1/10 + 1/30, ou um pão inteiro. Ahmes parece ter dito alguma espécie de equivalente de nosso mínimo múltiplo comum, que lhe permitiu terminar a demonstração. Na divisão de sete pães por dez homens, o escriba poderia ter escolhido ½ + 1/5 de pão para cada um.

...

O Prob. 13 no Papiro Ahmes, por exemplo, pede o produto de 1/16 + 1/112 por 1 + 1/2 + 1/4 o resultado 1/8 é achado corretamente. Para a divisão, inverte-se o processo da duplicação, e o divisor é dobrado sucessivamente, em vez do multiplicando. Que os egípcios tinham alcançado grande virtuosidade na aplicação do processo de duplicação e do conceito de fração unitária é evidente pelos cálculos nos problemas do Papiro Ahmes. O Prob. 70 requer o quociente da divisão de 100 por 7 + ½ + ¼ + 1/8; o resultado, 12 + 2/3 + 1/42 + 1/126 é obtido assim, dobrando o divisor sucessivamente, primeiro obtemos 15 + ½ + ¼, depois 31 + ½, e finalmente 63, que é oito vezes o divisor. Além disso, dois terços do divisor sabe-se dar 5 + ¼. Portanto o divisor, quando multiplicado por 8 + 4 + 2/3 dará 99 ¾, faltando ¼ para o produto 100 que se quer. Aqui um ajuste inteligente é feito. Como oito vezes o divisor dá 63, resulta que o divisor quando multiplicado por 2/63 produzirá 1/4. Da tabela para 2/n sabe-se que 2/63 é 1/42 + 1/126, portanto o quociente procurado é 12 + 2/3 + 1/42 + 1/126. Inicialmente, esse processo usa a comutatividade da multiplicação, princípio evidentemente familiar aos egípcios. (p.11)

Muitos dos problemas de Ahmes mostram conhecimento de manipulações equivalente à regra de três. O problema 72 pergunta qual o numero de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10, e a solução é apresentada como 100/10 X 45 ou 450 pães. Nos problemas sobre pães ou cerveja a força ou pesu é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão. São numerosos os problemas sobre pães e cerveja no Papiro Ahmes. O Prob. 63, por exemplo, pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantidades que devem receber estão na proporção prolongada 2/3:1/2:1/3:1/4. A solução é encontrada fazendo o quociente de 700 pela soma das frações na proporção. Nesse caso o quociente de 700 por 1 ¾ é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é 1/2 + 1/14. o resultado é 400; calculando 2/3 e 1/2 e 1/3 e 1/4 disto são obtidas as parcelas requeridas.

...

Muitos dos cálculos com “aha” no Papiro de Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. (p.12)

EVES

Muitos dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o quão substancioso eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domesticas e sobre armazenamento de grãos (p.73)

JOSEPH

Considerese como los egípcios resolvieron el seguiente problema (num. 25) del papiro de Ahmes:

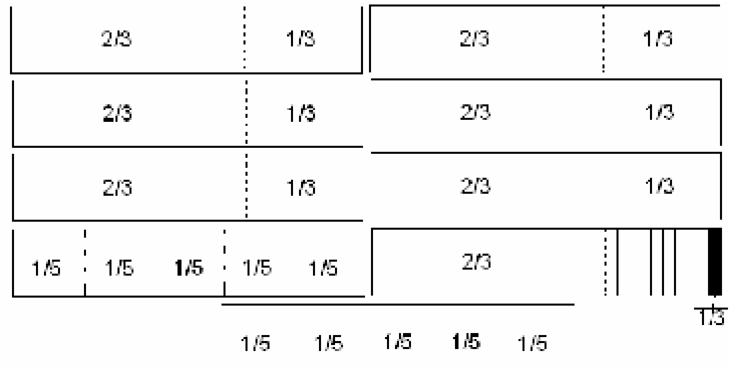
Ejemplo 3.4. Dividir 16 por 3

Solución:

1	→ 3
2	6
4	→12
2/3	2
1/3	→1
1+4+1/3 = 5 + 1/3	16

Como 12 + 3 = 15 es menor que 16, el escrioba egípcio procederia calculando 2/3 de 1 y, a continación, dividiendo por 2 el resultado. Estos pasos se indican a la izquierda. Ahora, 3 + 12 + 1 = 16. la suna de los valores correpondentes em la columna de la izquierda da la repuesta, 5 1/3. (p.107,108)

Como se há sugerido, el uso exclusivo de lãs fracciones de la unidad en la matemática egípcia también tênia una base l´gica practica. Esto aparece muy claramente em los seis primeros problemas del papiro de Ahmes, que tratan de repartir n panes entre diez hombres, donde n = 1,2,6,7,8,9. Como ilustración consideremos el Problema 6, que trta de la división de 9 panes entre 10 hombres. Uma aproximación moderna sería calcular la porción que corresponde a cada uno, esto es, 9/10 de un pan, y a continuación dividir los panes de forma que los primeros nueve hombres obtengan cada uno un trozo 9/10 de cada uno de los nueve panes. El último hombre, a quien se lê han dejado nueve piezas de 1/10 de pan, podría considerar este método de distribución poço satisfactorio. El método egípcio de división evita esta dificultad. Consiste em examinar primero la tabla de descomposición para n/10 y descubrir que 9/10 = 2/3 + 1/5 + 1/30. La división procederia seguidamente como se muestra en la figura 3.1: siete hombres recibirian cada uno três piezas de pan, consistentes em 2/3, 1/5 y 1/30 de un pan. Los otros três hombres rcibirían cada uno 4 piezas consistentes em dos piezas de 1/3, uma pieza de 1/5 y una pieza de 1/30 de un pan. No solo se há hecho justicia, sino que se vê que se há hecho. (p.115, 116)



Problema 6 del papiro de Ahmes: Repartir nueve hogazas entre diez hombres (según Gillings, 1962, pág. 67)

STRUIK

Muitos problemas eram muito simples e não iam além de equações lineares com uma incógnita:

A soma de 2/3, 1/2 e 1/7 de uma quantidade com ela própria dá 33. Qual é a quantidade?

A resposta 14 28/97, escreve-se em frações unitárias: $14\,\overline{4}\,\overline{97}\,\overline{56}\,\overline{679}\,\overline{776}\,\overline{194}\,\overline{388}$.

Os problemas relacionados com a quantidade do pão e de diferentes tipos de cerveja, com a alimentação dos animais e o armazenamento do trigo, mostram a origem prática desta aritmética pouco cômoda e desta álgebra primitiva. Alguns problemas revelam um interesse teórico, como aquele em que se dividem 100 pães por 5 homens de tal forma que a parte recebida deve estar em progressão aritmética e 1/7 da soma das três maiores partes recebidas deve ser igual à soma das suas partes menores. (p.54)

Considerando o inicio da era Cristã, segundo STRUIK, *"Os textos **hindus** mais antigos que existem provem talvez dos primeiros séculos d.C.; os mais antigos textos chineses datam do mesmo período ou são um pouco anteriores".(*p.64) Contudo, há grande diferença entre a matemática Hindu e a Grega, enquanto que os hindus a fazia de serva da astronomia, os gregos a estudadavam por si própria.

> *"... a matemática na índia era cultivada quase que exclusivamente por sacerdotes, na Grécia o estudo da matemática estava aberto a todos que se interessassem pelo assunto. Os hindus eram rematados calculadores mas geômetras medíocres; os*

gregos eram excelentes geômetras mas pouco se interessavam por trabalhos computacionais. [...] Os hindus escreviam em versos e muitas vezes revestiam seus trabalhos de uma linguagem obscura e mística; os gregos buscavam a clareza e a organização lógica em suas exposições. A matemática hindu era grandemente empírica, raramente oferecendo uma demonstração ou uma dedução; a característica mais importante da matemática grega era sua insistência com as demonstrações rigorosas." (Eves, p. 259)

A matemática e astronomia hindu chegaram primeiro aos árabes, que a compreenderam, assimilaram e refinaram antes de repassar à Europa. Um dos manuscritos da região, que sobreviveu até nossos dias, já que o material era pouco resistente, é o *Manuscrito de Bakhshali.* Este manuscrito tem como data provável entre os anos 200 d.C a 400 d.C. Nele é possível identificar problemas que dizem respeito a aritmética, álgebra, e alguns problema de geometria e medida.

Dentre esses problemas, podemos destacar como exemplos de razão:

- *Dois rapazes estão ao serviço de um rei. Pelos seus serviços um recebe* $\frac{13}{6}$ *dinares por dia e o outro* $\frac{3}{2}$*. O primeiro deve ao segundo 10 dinares. Calcula e diz quando é que os dois têm a mesma quantidade de dinheiro. (Joseph)*

Outra importante obra que resistiu ao tempo é o livro intitulado *Ãryabhatiya* (476-550) que contém 118 versos, e está dividido entre a introdução; um capítulo chamado *Ganitapada,* que é um resumo da matemática hindu do seu tempo em que os versos falam de aritmética, álgebra, trigonometria plana e esférica, frações contínuas e equações do 2º grau; uma terceira parte com versos sobre o cálculo do tempo e modelos planetários e a parte final que contém versos sobre a esfera e eclipses. Essa obra é considerada uma miscelânea entre o simples e o complexo, entre o certo e o errado. (Boyer, p.154)

Um dos versos é:

- *Ó bela donzela com olhos radiantes, diz-me, uma vez que compreendes o método da inversão, qual é o número que multiplicado por 3, aumentado por* $\frac{3}{4}$ *do produto, dividido por 7, reduzido em um terço do resultado, depois multiplicado por ele próprio, depois reduzido de 52, cuja raiz quadrada é então extraída antes de ser adicionado 8 e dividido por 10, dá o resultado final 2? (Joseph, 1996)*

Já o tratado *Ganita-Sâra-Sangraha* (Compêndio do cálculo essencial), escrito por Mahãvira no século IX está dividido em 9 capítulos. Dentre os capítulos, encontram-se problemas que envolvem operações com frações e regra de três.

BOYER A queda do Império Romano do Ocidente tradicionalmente é situada no ano 476; foi nesse ano que nasceu Ãryabhata, autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos. É claro, entretanto, que tinha havido atividade matemática na Índia muito antes disto – provavelmente antes mesmo da mística fundação de Roma em 753 A.C. A Índia, como o Egito, tinha seus "estiradores de corda", e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medida e construção de altares tomou a forma de um corpo de conhecimentos conhecido como os Sulvasutras ou "regras de corda". Sulva (ou sulba) refere-se às cordas usadas para medidas, e sutra significa um livro de regras ou aforismos relativos a um ritual ou ciência. O estirar de cordas é notavelmente reminiscente da origem da geometria egípcia, e sua associação com funções nos templos nos faz lembrar a possível origem ritual da matemática. (p.150, 151).
COLLETTE La caída del Império romano, situada generalmente em el año 476 d.C., marca el nacimiento de uno de los dos Ãryabhata, autor de uma obra índia sobre □ãs matemáticas. Por outra parte, conocemos algunos textos índios, cuyo origen, aunque incierto, se remonta probablemente a antes de la era cristiana. Además la construcción de los templos y la determinación de lops altares religiosos exigían tales conocimientos matematicso que es inimaginable que □ãs primeras actividades índias em el campo de □ãs matemáticas no empezasen hasta princípios de la era cristiana. ... El conjuto de conocimientos requeridos para erigir los templos y altares se encuentra em los Sulvasutras o reglas de las cuerdas…...Está totalmente escrito em verso;…. (p.181)
DAVIS O atual método de escrever frações parece ter-se originado com os hindus. Talvez tenha derivado da Grécia, onde foi usado no período final. No manuscrito Bakhshali (c. século VI?) escreviam-se frações com o numerador sobre o denominador, sem nenhuma linha divisória. Inteiros eram escritos como frações de denominador 1. já em 1000 os árabes tinham introduzido as barras nas formas a/b, $a-b$, $\frac{a}{b}$ mas não as empregavam em todos os casos. Ao adotar as formas mouriscas, o rabino judeu Abraham bem Ezra (1097-1167) geralmente omitia a barra, mas esta foi comumente encontrada em manuscritos posteriores a essa época. (p.53,54)

EVES

Pouco se sabe sobre o desenvolvimento da matemática hindu antiga, em virtude da falta de registros históricos autênticos. A fonte histórica preservada mais antigas são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontradas em Mohenjo Daro, um sítio localizado a nordeste da cidade de Karachi no Paquistão. Vestígio de ruas largas, habitações de tijolos com banheiros ladrilhados, redes de esgoto subterrâneos e piscinas públicas indicam uma civilização tão avançada quanto qualquer outra do Oriente antigo. O povo dessa cidade tinha sistemas de escrita, contagem, pesos e medidas e cavava canais para irrigação. Tudo isso são requisitos básicos para a matemática e a engenharia. Não se sabe o fim que esse povo teve.

Foi há cerca de 4000 anos que bandos de nômades, vindos das planícies da Ásia Central, atravessaram o Himalaia e penetraram na Índia. Esses invasores chamavam-se arianos, designação que provém da palavra sânscrita que significa nobre ou proprietário de terras. Muitos desses invasores permaneceram outros rumaram para a Europa e formaram a raiz da raça indo-européia. A influencia dos arianos gradualmente estendeu-se por toda a Índia. Durante o primeiro milênio de sua permanência eles aprimoraram a língua sânscrita, escrita e falada. São eles também os responsáveis pelo sistema de castas. (p.247)

No século VI a.C, as tropas persas sob comando de Dario invadiram a Índia mas não fizeram conquistas definitivas. Pertencem a este período dois eminentes indianos antigos, o gramático Panini e o pregador religioso Buda. É essa também, provavelmente, a época de S'ulvasütras ("as regras da corda"), escritos religiosos de interesse na história da matemática pelo fato de abarcarem regras geométricas para construção de altares (mediante esticamento de cordas) em que se revela um certo conhecimento dos termos pitagóricos. (p.248)

IFRAH

As tabelas numéricas e os tratados de matemática e astronomia dos indianos, assim como suas obras místicas, teológicas, legendárias e cosmológicas, foram compostas na maioria das vezes em versos:

Um colar se quebrou durante jogos de amor.
Uma seqüência de perolas então escapou dele.
A sexta parte dentre elas sobre o solo caiu.
A quinta sobre a colcha permaneceu.
A terceira pela jovem foi salva.
E décima foi retirada pelo bem-amado.
E seis perolas ao cordão permaneceram atadas.

Diga-me quantas pérolas contava o colar dos bem-felizes. Este é o enunciado de um problema de aritmética tal como se encontra na *Lilâvatî célebre tratado de matemática em forma de versos, creditado a *Bhãskarachârya (em 1150); o titulo nada mais é do que o nome da filha do matemático. Eis um outro exemplo: De um maço de flores de lótus, Um terço foi oferecido a *Shiva, Um quinto a *Vishnu, E um sexto a *Sûrya. Um quarto foi apresentado a Bhâvanî. As seis flores restantes Foram dadas ao venerável preceptor. Diga-me rápido qual era o total de flores. E como os sábios apreciavam muito os jogos e especulações sobre os números, o prazer refinado que experimentaram geralmente foi traduzido numa forma se não lírica, ao menos versificada dos enunciados. Por isso uma notação imagética dos números, expressa por palavras de valor simbólico, escolhidas numa sinonímia quase ilimitada, segundo as regras da versificação sânscrita. De modo que a transcrição de uma tabela numérica ou da mais arida das formulas matemáticas parecia, por assim dizer, um poema épico. (tomo II, p.145,146)
STRUIK Nessa altura existiam os chamados Sulvasutras, parte dos quais datam de 500 a.C., ou antes, e que contem regras matemáticas que podem ser de uma antiga origem nativa. Estas regras são encontradas com a construção de altares. [...] há um certo conhecimento do teorema de Pitágoras em casos específicos e existem algumas aproximações curiosas em termos de frações unitárias, ... (p.64)

Segundo EVES, a matemática árabe se destaca por:

'... volta de 450 d.C. até perto do fim do século XV a Índia outra vez se viu às voltas com numerosas invasões estrangeiras. Primeiro vieram os hunos, depois, no século VIII, os árabes e no século XI os persas. Durante esse período despontaram vários matemáticos hindus eminentes, destacando-se os dois Ãryabhatas, Brahmagupta, Mahãvïra e Bhãskara. [...] Brahmagupta foi o mais eminente matemático hindu do século VII. Viveu e trabalhou no centro astronômico de Ujjain, na Índia Central. Em 628 escreveu Brahmasphuta-sidd'h'ãnta ("o sistema de Brahma revisado"), um trabalho de astronomia em vinte e um capítulos, dos quais o 12º e o 18º se ocupam de matemática. Mahãvira, que se distinguiu por volta de 850, era de Misore, no sul

da Índia, e escreveu sobre matemática elementar. Bhãskara também viveu em Ujjain. Seu trabalho, Siddhãnta S'iromani ("diadema de um sistema astronômico"), foi escrito em 1150 e mostra poucos progressos em relação ao trabalho de Brahmagupta, cinco séculos mais antigo. As duas partes mais importantes do trabalho de Bhãskara são Lilãvati ("bela") e Vijaganita ("extração de raízes"), que tratam de aritmética e álgebra , respectivamente.As partes matemáticas dos trabalhos de Brahmagupta e Bhãskara foram traduzidas para o inglês por H.T. Colebrooke em 1817. O Sûrya Siddãnta foi traduzido por E. Burgess em 1860 e o trabalho de Mahãvira foi publicado em 1912 por M. Rangãcãrya.

Depois de Bhãskara a matemática hindu fez apenas progressos irregulares até os tempos modernos. A sociedade matemática Indiana foi fundada em 1907 e dois anos depois apareceu em Madras o Journal of the Indian Mathematical Society. A revista de estatística indiana, Sankhyã, começou a ser publicado em 1933. (p.250, 251)

Segundo os vários autores consultados, foi fundamental para a conservação da cultura a maneira como os árabes se apropriaram do saber grego e hindu. Os califas propiciaram e incentivaram a tradução de trabalhos de astronomia, medicina e matemática gregos para o árabe possibilitando assim que fossem preservados até que europeus tivessem condições de traduzi-los então para o latim ou outras línguas.

Ainda de acordo com EVES,

A primeira aritmética árabe que se conhece é a de al-Khowârizmî; seguiu-se a ela uma batelada de outras aritméticas árabes. Essas aritméticas geralmente ensinavam regras para efetuar cálculos modela das nos algoritmos hindus. Davam também o processo conhecido hoje como noves fora, usado para testar cálculos aritméticos e as regras de falsa posição e falsa posição dupla mediante as quais podem-se resolver alguns problemas algébricos de maneira não-algébrica. [...] Também explicavam freqüentemente raízes quadradas e cúbicas, frações e regra de três. (p.263)

Já a matemática chinesa, segundo *STRUIK, "é dificultado pela falta de traduções" .... "os Nove Capítulos constituem um livro totalmente dedicado à matemática, já bastante característico da natureza da matemática da China, que perdurou por milhares de anos". (p.65).* O material utilizado para os registros chineses era muito perecível (os primeiros eram em carapaças de animais, árvores...). Esse fato também prejudicou a transmissão escrita dos conhecimentos daquela época.

“A China é conhecida como um Estado altamente burocrático, e foi a primeira nação a introduzir exames oficias sofisticados para regular o acesso ás carreiras administrativas. A matemática, embora não muito apreciada pela religião estatal, o confucionismo, fazia parte desses exames.

Os exames tornaram-se sistemáticos depois das reformas ocorridas durante a dinastia Sui, por volta do século VI d.C. Havia um currículo bem planejado, com programas e livros-texto para cada uma das diversas disciplinas escolhidas. ... Tal sistema funcionou por cerca de setecentos anos”. (Schubring, p.26)

Os chineses conheciam as operações com frações comuns, para as quais achavam o mínimo múltiplo comum. Segundo BOYER (p.146,147), Assim como demais contextos associavam as diferenças entre os sexos, nomeando de numerador o “filho” e o denominador a “mãe”. Esse poder do yin e yang tornaram as regras para manipular frações mãos fácil de seguir.

ALMEIDA ...Os chineses, desde os mais antigos textos conhecidos, empregavam o sistema de muneração de base dez, decimal, e usavam frações mistas m/n. tanto para os números inteiros como para frações **...** Se um escriba desejasse traduzir texto de fonte original, que empregava base decimal, para uma língua que utilizasse a base sexagesimal, a conversoa de frações da forma m/n era relativamente fácil de ser efetuada. O processo inverso, de passar frações sexagesimais para decimais, é muito mais moroso e difícil. (p.141)
BOYER Parece ter havido algum contato entre a Índia e a China, bem como entre a China e o Ocidente, mas os entendidos não estão de acordo quanto à extensão e sentido dos empréstimos. A tentação de ver influencia babilônica ou grega na China por exemplo, se depara com o problema de não terem os chineses usado frações sexagesimais. **A numeração chinesa permaneceu essencialmente decimal, com notações marcadamente diferentes das de outros países.** Na China, desde os tempos primitivos, dois sistemas de notação estiveram em uso. Num predominava o principio multiplicativo, no outro era usada uma forma de notação posicional. (p.145) Nenhuma descrição da numeração chinesa seria completa sem uma referência ao uso das frações. Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Como em outros contextos, viam analogias com

as diferenças entre os sexos, refereindo-se ao numerador como “filho” e ao denominador como “mãe”. A ênfase sobre yin e yang (opostos, essencialmente em sexo) tornava mais fácil seguir as regras par amanipular frações. Mais importante do que essas, no entanto, era a tendência à decimalização de frações na China. Como na Mesopotâmia uma metrologia sexagesimal levou à numeração sexagesimal, também na China a adesão à idéia decimal em pesos e medidas teve como resultado um habito decimal no tratamento de frações que, ao que se diz, pode ser encontrado já no século 14 a. C. (p.146,147)

EVES

Embora as civilizações da China antiga ao longo dos rios Yang-Tsé e Howang Ho provavelmente sejam posteriores à civilização egípcia ao longo do Nilo e à babilônica, entre o Tigre e o Eufrates, muito pouco material de natureza primária oriundo delas chegou até nós. Isso em virtude de os povos da época com certeza fazerem muitos de deus registros em bambu, um material perecível. E, para agravar, o egotista imperador Shï Huang-ti ordenou em 213 a.C. uma lamentável queima de livros. A despeito de ameaças e represálias severas, o edito do imperador certamente não foi levado a efeito completamente, mas como muitos dos livros queimados foram reconstituídos de memória, hoje há dúvidas sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico que se alega ser anterior àquela data infeliz. Por conseqüência, muito de nosso conhecimento sobre a matemática chinesa primitiva baseia-se em informações orais e interpretações posteriores a textos originais. (p.241)

IFRAH

Observemos ainda essa interessante notação que os eruditos chineses e japoneses utilizaram para exprimir as potencias negativas da base dez:

$10^{-1} = 1/10$, $10^{-2} = 1/100$, $10^{-3} = 1/1000$, $10^{-4} = 1/10000$ etc.

Tal notação está mencionada nos JInkoki, tratado de aritmética publicado em1627 pelo matemático japonês Yoshida Mitsuyoshi. (p.580)

JOSEPH

... contiene tambíen uma discusión de los métodos para sumar, restar y multiplicar fracciones. Y aqui aparece uma regla para simplificar que es idêntica a la del algoritmo de la “subtracción repetida” encontrado em la obra del matemático helenístico Nicómaco de Geresa, qu vivió em el primer siglo de nuestra era. Considere-se um fraccion reductible de la forma m/n.

....contem também uma discussão dos métodos para somar, diminuir e multiplicar frações. E aqui aparece uma regra para simplificar que é idêntica a do algoritmo da subtração repetida encontrada na obra do matemático helenístico Nicómaco de Geresa, que viveu no primeiro século de nossa era. Considera-se uma fração redutível a da forma m/n. (p.220)

STRUIK
A matemática chinesa foi sempre decimal....A matemática dos Nove Capítulos consiste principalmente num conjunto de problemas com regras gerais para a sua solução; tem um caráter de calculo aritmético e conduzem a equações algébricas com coeficientes numéricos. (p. 66)

A matemática chinesa ocupa um lugar excepcional, pois a sua tradição permaneceu praticamente intacta até anos recentes, o que permitiu estudar um pouco melhor a sua posição na comunidade do que a da matemática egípcia ou babilônica, que permanecem a civilizações desaparecidas. (p. 67)

Um dos manuscritos mais antigos da China, que chegou até nós, conhecido por *Nove Capítulos da Arte Matemática ou Nove capítulos sobre a arte de calcular*, utilizado aproximadamente no ano 1600, “trabalhou habilmente com frações decimais” (Eves, p.246).

Segundo SCHUBRING (p.28) esta obra teve impacto na Ásia comparável ao de Euclides no Ocidente. Sua estrutura de apresentação é: *“propor problemas; dar sua solução numérica; fornecer a regra pronta para calcular a solução com base nos dados”* e consta de 246 problemas, sem definições ou explicações lógicas.

O capítulo I desta obra revela problemas envolvendo áreas de terrenos de cultivo e cálculos com frações. O capítulo II desta obra trata do cálculo de porcentagens e proporções sobre diversos tipos de bens, resolvidos com o auxilio da fração como razão, bem como os problemas 32 e 33.

“A regra de três, provavelmente se originou na China antiga, alcançou a Arábia através da Índia, onde Brahmagupta e Bhãskara a trataram por essa mesma designação” (Eves, p.263). Sua ligação com a proporção só foi reconhecida no século XIV.

Os demais capítulos tratam de problemas sobre regra de três simples, progressões aritméticas e geométricas e outros tópicos da Matemática, todos enfocando problemas de ordem prática. Um aspecto interessante da linguagem registrada da china e que ela mantém suas regras próximas as de hoje.

Outro documento decifrado é o *Manual Aritmético do Mestre Sol*, nele há problemas que apresentam métodos para o cálculo com frações, proporções, regra de três simples.

Mais especificamente sobre “Nove capítulos sobre a arte matemática”, temos que, segundo alguns dos autores:

ALMEIDA O Chiu-Chang Suan-Shu, ou “Nove capítulos sobre a arte matemática”, é, talvez, o mais extenso e abrangente tratado antigo da matemática chinesa. Nem a sua data nem o seu autor são conhecidos com exatidão. Segundo o comentarista Liu-Hui, que viveu no século terceiro da era cristã, no prefácio do seu trabalho escrito em 263 d.C., este tratado foi composto de remanescentes de escritos antigos, que forma compilados, parcialmente revisados e aumentados, por Chang T’sang (c.202-162 a.C.). No ano 213 a.C. todos os livros foram queimados e todos os estudiosos forma enterrados por ordem do poderoso e despótico imperador Shih Hoang-ti, que morreu em 210 a.C.; não poupou nem mesmo os aparentemente inócuos livros de matemática ou de astronomia. Logo após sua morte, o seu império se esfacelou, os livros antigos foram procurados e a tradição cultural se soergueu. Nessa ocasião, segundo Liu Hui, Chang T’sang encontrou alguns escritos antigos, nos quais baseou o Chiu-Chang Suan-Shu. O trabalho foi revisado algum tempo depois por Ching Ch’ou (ou Ch’ang). Segundo algumas fontes, o trabalho original no qual Chang se baseou foi o Chiu-shang ou Chiu Shu (Nove Matemáticas), editado por ordem de Chou Kung, da antiga dinastia Chou (c. 1200 a.C.). não existe, todavia, cópia dessa trabalho, ou mesmo certeza que de esse trabalho exisitu. (p.124)
BOYER Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades dos triângulos retângulos. Ao passo que os gregos da mesma época estavam compondo tratados logicamente ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos babilônios e egípcios de compilar coleções de problemas específicos. Nove capítulos também se assemelha à matemática egípcia pelo uso da “falsa posição”, mas a invenção desse processo, assim como a origem da matemática chinesa em geral, parece ter sido independente da influência ocidental.(p.143,144)
COLLETTE El Zhui Zhang Suan shu o El arte matemático em nueve secciones, el más importante clásico chino de las matemáticas sin duda, aunque tercero por orden cronológico, fue probablemente el libro matemático que tuvo más influencia em China. Tampoco em este caso se conocen com certeza el autor y la fecha de aparición,probablemente a causa del edicto del emperador, que, em el am 213 a.C. ordeno quemar todos los libros existentes. Esta es la razón de que los textos que han llegado hasta nosotros sean

probablemente copias de los originales escritas de memória. Em resume, todas las hipótesis son aceptables: de esto se desprende la enorme dificultad de precisar de forma rigurosa el origen de estas obras.

Este libro contiene aproximadamente 250 problemas sobre agrimensura, agricultura, pertenencia de bienes, contribuición, cálculo de longitudes y superfícies, solución de ecuaciones y propriedades de los triângulos rectángulos. (p.175,176)

EVES

O mais importante dos textos de matemática chineses antigos o K'ui-ch'ang Suan-shu, ou Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, que data do período Han mas que muito provavelmente contém material bem mais antigo . E uma síntese do conhecimento do matemático chinês antigo. Nele estão estabelecidos os traços da matemática antiga da China: cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa seqüência de problemas aplicados. O trabalho que é rico em conteúdo, consta de 246 problemas sobre agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos. São dadas regras de resolução, mas não há demonstrações no sentido grego. (p.243)

... uma breve indicação do conteúdo de cada um dos nove capítulos do K'ui-ch'ang Suan-shu:

1. Questões de agrimensura, com regras corretas para as áreas do triangulo, do trapézio e do circulo e com aproximações para o círculo dadas por $(3/4)d^2$ e $(1/12)c^2$ onde se toma π como 3 .

2. Porcentagem e proporção; 3. Regra de sociedade e regra de três; 4. Determinação de lados de figuras, incluindo cálculos de raízes quadradas e cúbicas; 5. Volumes; 6. Problemas de movimento e ligas; 7. A regra de falsa posição; 8. Sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais; 9.Triângulos retângulos pitagóricos. (p.243, 244)

Yang Hui, cujos livros são uma espécie de extensão dos Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, trabalhou habilmente com frações decimais; em essência seu método era o mesmo que se usa hoje. (p.246)

Versões originais da maior parte dos textos gregos não chegaram até os dias de hoje. Os materiais utilizados para os registros, eram frágeis e perecíveis. Assim sendo, apenas o trabalho que era considerado importante recebeu compilações e chegou até nossos dias.

Para os gregos, as frações não podiam ser identificadas como número, pois "na Grécia a palavra número era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único mas como uma razão ou relação entre inteiros" (BOYER, 1974, p. 39). A fração só era entendida como representação de duas forças sobre um todo referencial. A forma para identificar essa representação era similar a dos egípcios: um sinal ou acento. Esse sinal distinguia o símbolo utilizando para o inteiro, da idéia de 'parte de' correspondente, onde somente o contexto traduzia a idéia empregada. Também como os egípcios, eles se reduziam ao uso das frações unitárias.

Nas histórias da matemática, parece consensual que uma matemática dedutiva, desenvolvida e formalmente organizada pelos gregos, tem um caráter diferente daquela de caráter prático desenvolvido no Egito e na Mesopotâmia. A maneira "dedutiva" de encarar o conhecimento Matemático não facilitou o trabalho de resolução de problemas práticos, como os problemas egípcios ou mesopotâmios.

Dentre os documentos encontrados na Grécia e região, estão os Papiros de Michigan. Entre esses papiros, encontramos o denominado 621 com uma tabela de frações e o 4966[9] contendo problemas de resolução aritmética.

O texto denominado *Antologia grega ou palatina*, é um conjunto de epigramas do século V d.C., na sua maioria de autoria desconhecida. A maior parte dos problemas resolvem-se por meio de cálculos numéricos com frações.

O surgimento dos cálculos foi impulsionado pelo o crescimento econômico de algumas cidades como Florença, Veneza e Pisa. Esses cálculos, relacionados à empréstimos e juros, preços de revenda, etc, levaram à criação e desenvolvimento de um novo conhecimento comercial.

> *"A porcentagem passou a ser utilizada no final do século XV em questões comerciais como calculo de juros, lucros e prejuízos e impostos. A idéia porém, teve origem muito antes. Quando o imperador romano Augustus estabeleceu um imposto sobre todas as mercadorias vendidas em hasta pública, centsima rerum venalium, a taxa era* $\frac{1}{100}$ *"* (Davis, p.64)

[9] http://www.lib.umich.edu/pap/Michigan%20Papyrus%20Collection/Religion/religion.html

BOYER ...A barra horizontal para frações, por exemplo, era usada regularmente por Fibonacci (e já era conhecida na Arábia), mas somente no século dezesseis seu uso tornou-se comum. (A barra inclinada foi sugerida em 1845 por De Morgan) ...É uma das ironias da história que a vantagem principal da notação posicional – sua aplicabilidade a frações – escapasse quase completamente aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência. Quanto a isso Fibonacci tem tanta responsabilidade quanto qualquer outro, pois usou três tipos de frações – comuns, sexagesimais, e unitárias – mas não frações decimais. Na verdade, no Líber Abaci, os dois piores dentre esses sistemas – as frações unitárias e as comuns – são muito usadas. ... Fibonacci evidentemente gostava das frações unitárias – ou julgava que seus leitores gostassem – pois o Liber Abaci contém tabelas de conversão de frações comuns a unitárias. (p.185, 186) É claro que Stevin não foi em nenhum sentido o inventor das frações decimais, nem o primeiro a usa-las sistematicamente. Na China antiga encontra-se um uso mais do que incidental de frações decimais, como também na Arábia medieval e na Europa do Renascimento; quando Viète as recomendou diretamente em 1579 elas já eram geralmente aceitas pelos matemáticos que se encontravam nas fronteiras da pesquisa. Entre o povo em geral, no entanto, e mesmo entre praticantes de matemática, as frações decimais só se tornaram amplamente conhecidas quando Stevin se dispôs a explicar o sistema do modo elementar e completo. Ele queria ensinar a todos “como efetuar, com facilidade nunca vista, todas as computações necessárias entre os homens por meio de inteiros sem frações”. Isto é, estranhamente, Stevin se concentrava em seus décimos, centésimos, milésimos, etc., como numeradores inteiros, como fazemos na medida comum do tempo em minutos e segundo. quantos dentre nós pensamos em 3 minutos e 4 segundos, digamos, como numa fração? É muito mais provável que pensemos em 3 minutos como num inteiro em vez de como 3/60 de hora; e essa era exatamente a maneira de pensar de Stevin. Por isto ele não escrevia suas expressões decimais como um denominador, como o fazia Viète; em vez disso, num circulo acima ou depois de cada dígito ele escrevia a potencia de dez assumida como divisor. (p.232)
COLLETTE Em Die Coss encontramos por primera vez em um libro impreso la utilización de fracciones decimales, así com el símbolo moderno para las raíces. (p.265)

DAVIS A escrita de uma fração com o numerador sobre o denominador parece ter se originado com os hindus, mas um traço divisório só passou a ser de uso geral no século XVI. O uso do traço diagonal, como 2/3, só obteve aceitação no século XIX, quando foi defendido por Augustus De Morgan. O uso de dois pontos, como em 2:3, encontra-se no trabalho de Gottfried Wilhem von Leibniz já em 1676. Talvez pareça estranho que as frações decimais só tenham sido introduzidas no século XVI. Essa demora talvez tenha sido devido à tradicional divisão sexagesimal do ângulo, perpetuada nas tábuas trigonométricas. Além do mais, as tábuas matemáticas eram construídas especificamente de modo a que as frações pudessem ser evitadas. (p.11) O principal impulso ao uso de frações decimais foi dado por Simon Stevin em 1585. Mais uma vez houve atraso para desenvolver uma notação adequada, e a virgula (ou ponto) decimal só passou a ser universalmente usada no primeiro quartel do século XVIII [9]. A maioria dos escritores de aritmética na Europa adotou a pratica de relegar a discussão das frações comuns e decimais ao final de seus livros. Aparentemente, poucos estudantes tinham a expectativa de jamais chegar às frações. (p.54)
EVES O período que vai da queda do Império Romano, na metade do século V, até o século XI, é conhecido como Baixa Idade Media. Durante esse período a civilização na Europa Ocidental atingiu níveis muito baixos: o ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e dos ofícios legados pelo mundo antigo foram esquecidos. Apenas os monges dos monastérios católicos e uns poucos leigos cultos preservaram um tênue fio de saber grego e latino. O período foi marcado por muita violência física e intensa fé religiosa. A ordem social antiga cedeu lugar a uma outra, feudal e eclesiástica. Os romanos nunca tiveram inclinação para a matemática abstrata, ao contrário, somente os aspectos práticos da matemática, ligados ao comercio e à engenharia civil, lhes interessavam. Com a queda o Império Romano e a cessação subseqüente de grande parte do comércio leste-oeste e, ainda, com o abandono de projetos estatais de engenharia, mesmo esse interesse minguou e não seria exagero dizer que, afora a elaboração do calendário cristão, muito pouca matemática se fez durante o meio milênio da Baixa Idade Média. Dentre as pessoas a quem se creditam, com muito boa vontade, um certo papel na história da matemática da Baixa Idade Média, devemos mencionar o estadista romano Boécio, os clérigos eruditos ingleses Beda e Alcuíno e o famoso sacerdote erudito francês Gerbert, que

veio a se tornar o papa Silvestre II. (p.289)

Pietro Antonio Castaldi nasceu em Bolonha, em 1548, ensinou matemática e astronomia em Florença, Perúgia e Bolonha e faleceu em sua cidade natal em 1626. Deixou muitos trabalhos em matemática, dentre os quais uma aritmética, um tratado sobre números perfeitos, uma edição dos seis primeiros livros dos Elementos e um breve tratado de álgebra. Credita-se a ele o mérito de ter dado os primeiros passos na teoria das frações contínuas. (p.312)

O mais destacado e influente matemático dos Paises Baixos no século XVI foi Simon Stevin (1548-1620). Foi intendente geral da armada holandesa de 1593 até o fim de sua vida e geriu muitas obras públicas. Na história da matemática Stevin é conhecido principalmente por ter dado uma das exposições mais antigas da teoria das frações decimais. (p.313)

Num resumo das realizações matemáticas do século XVI, pode-se dizer que a álgebra simbólica teve um bom andamento, que os cálculos com numerais indo-arábicos se padronizaram, que as frações decimais ganharam terreno, que se resolveram as equações cúbicas e quárticas e a teoria das equações progrediu, que os números negativos começaram a ser aceitos, que a trigonometria se aprimorou e sistematizou e que se calcularam excelentes tabuas. O campo estava preparado para os notáveis avanços do próximo século. (p.314)

Muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comercio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas poara que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sepre e continuamente. Quando notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores. É hora de se considerar o terceiro desses grandes dispositivos poupadores de trabalho, os logaritmos, inventados por John Napier perto do inicio do século XVII. (p.341)

....O símbolo anglo-americano (÷) da divisão também é do século XVII, tendo aparecido impresso pela primeira vez em 1659 numa algebre do suíço Johann Heinrich Rahn (1622-1676). Tal símbolo tornou-se conhecido na Inglaterra alguns anos mais tarde quando esse trabalho foi traduzido. Esse símbolo de divisão foi usado longamente no continente europeu para indicar subtração. (p.349)

IFRAH Uma fração decimal é uma aquela cujo denominador é igual a dez ou a uma potencia de dez, 3/10, 1/100, 251/10000 etc. são frações decimais. (p.702)
STRUIK O cálculo fracionário através de uma notação própria também é simples; mas os Gregos eram pouco consistentes devido a falta de um sistema uniforme. Usaram frações unitárias egípcias, as frações sexagesimais da Babilônia e também as frações numa notação que faz pensar na nossa. As frações decimais nunca foram introduzidas, mas este importante melhoramento dá-se apenas mais tarde, no Renascimento europeu, depois de o aparelho computacional ter sido estendido muito para alem da utilização que tivera na antiguidade; mesmo assim, as frações decimais não foram adotadas em muitos livros de estudo senão nos séculos XVIII e XIX. (p.110)

"As frações decimais eram raramente usadas pelos povos do ocidente antes da Renascença" (Boyer, p.45), segundo muitos autores elas foram introduzidas no século XVI, por meio da divisão sexagesimal do ângulo. A divisão como a de hoje, foi consolidada no final do século XVII e Calandri, 1491, foi o primeiro a utilizar o nosso padrão para uma divisão. Foi a invenção dos logaritmos que estimulou o uso das frações decimais. (Boyer,1976)

Em contrapartida a afirmação acima, a utilização na antiguidade da idéia das formas fracionárias na resolução dos problemas revela um fundo prático. Essa representação numérica na qual a "parte de" um todo é envolvida nas soluções de problemas quando a necessidade ultrapassa a barreira dos números inteiros, explicaria a existência dessa forma de registro nos dias atuais.

> "...Para satisfazer essas necessidades básicas referentes a medições necessita-se de frações, pois raramente acontece de um comprimento, para citar um exemplo, contar um número exato de vezes uma quantidade linear. (...) o sistema dos números racionais é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações" (Eves, p.104).

Este conjunto de recortes, que busca ser exaustivo na descrição daquilo que há como referências às frações na literatura consultada, põem em relevo a importância do resgate de algumas trajetórias do processo histórico; um resgate que pode nos fazer refletir sobre possíveis relações entre os problemas nas situações que podem ter originado algum conhecimento sobre as frações, e situações contemporâneas, situações presentes no processo de transmissão desse conhecimento em sala de aula.

Entendendo a problematização como um conjunto de elementos que possibilita introduzir e instigar o interesse por certo conteúdo, procurei verificar o emprego da forma fracionária na antiguidade, de modo a poder dispor, de forma descritiva, elementos passíveis de novas problematizações em função de necessidades e conhecimentos dos professores que venham a ter acesso a esse conhecimento.

Na seqüência, procuro mostrar como a formação dos professores de matemática busca contemplar o conhecimento sobre as frações.

OS NÚMEROS RACIONAIS NO LIVRO DE IVAN NIVEN

Durante o tempo em que estava inscrita em uma lista de discussão sobre Educação Matemática, a leitura de e-mails sob o título de "*educação matemática nas séries iniciais"*, chamou-me a atenção, pois um dos textos tratava da exclusão do tópico "frações" do rol de conteúdos a ser ensinado nesse nível escolar. Dizia a mensagem:

> *E não seria muito mais lógico abdicarmos de "ensinar" frações?... Mas o que eu desejo expressar é se é NECESSÁRIO que estudemos as frações por elas mesmas, que quebremos a cabeça na busca de contextualizações para elas... Precisamos? Se sim... então eu gostaria de saber para quê! (OU, em termos negativos,... o que é que os alunos PERDEM se deixarem de aprendê-las...) ...* (lista de discussão em 17/08/2003, às 19:20:07)

As frações não são encontradas facilmente no dia-a-dia e tendo sido motivo de dificuldade na aprendizagem dos meus alunos de 1º e 2º ciclos e, atualmente, dos alunos que freqüentam o 3º e o 4º ciclo, não seria mais lógico, simplesmente, suprimir essa parte do conteúdo imposta pelo currículo de matemática?

A leitura do e-mail citado reforçou minha impressão de que o questionamento acerca das frações era bastante plausível, quer quanto à sua permanência no currículo, quer para a busca de formas metodológicas mais adequadas para abordá-las.

O decorrer da minha prática profissional, e as leituras que fiz no tocante à educação matemática, fez-me perceber que a forma metodológica com a qual um assunto é apresentado aos alunos pode mudar o modo como eles vêem esse assunto.

Por outro lado, para mostrar que a forma metodológica no tratamento dos números fracionários precisa ser revista, é importante ter indicativos de maneiras de apresentar o desenvolvimento dos Números Racionais, presentes em livros cujo grau de aprofundamento na matemática seja aceito e reconhecido como estando de acordo com níveis mais avançados de estudo/ensino, para que seja possível a análise deste tópico em um nível mais elementar.

Com essa perspectiva, selecionei o livro *Números: Racionais e Irracionais*, de Ivan M. Niven, por ter sido um livro indicado e trabalhado pelos professores do Departamento de Matemática da UFPR no curso de especialização, já mencionado, que cursei nos anos de 1997/8. Assim, neste capítulo, apresentarei algumas das idéias que me serviram de base e que foram extraídas deste livro.

O livro *Números: Racionais e Irracionais* menciona, na contracapa, que sua indicação de leitura é proveitosa a todos os interessados por Matemática. Inferi que, após a leitura do *Capítulo 2 – Números Racionais*, o leitor, pelo menos aquele que tem maior afinidade com a Matemática, teria condições de identificar um número racional e suas diversas representações.

Segundo Niven (1984), a necessidade de resolver questões práticas surgidas em conseqüência do desenvolvimento social mostrou que os números naturais eram insuficientes. Uma das necessidades foi a de medir, já que nem sempre era possível conseguir uma unidade de medida que coubesse um número exato de vezes no que se queria medir, provocando o surgimento das frações... dos números racionais, cujo nome está diretamente ligado ao significado: *"razões de números inteiros"* (1984, p.1).

Niven começa seu caminho de sistematização dos números com uma breve exposição a respeito dos números naturais. O autor comenta o surgimento do zero e dos números negativos, afirmando que esses números apareceram muito mais tarde que os primeiros números para contagem. Ressalta que fica subentendido que quando os matemáticos falam em "números racionais", este conjunto numérico abrange tanto o zero como os números inteiros negativos. Aponta o aparecimento dos números racionais como uma dificuldade no resultado de divisões expressas como: $\frac{4}{3}, \ \frac{7}{6}, \ -\frac{2}{5}, \ \ldots$.

Os resultados dessas divisões passam a constituir um novo conjunto, o conjunto dos Números Racionais, onde *"um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que* ***pode*** *ser colocado na forma* $\frac{a}{d}$*, onde a e d são inteiros e d não é zero"* (negrito meu, 1984, p.30).

Será que fica claro para o leitor que existem números que **não podem** ser colocados nessa forma $\frac{a}{d}$, com a e d inteiros?

Ainda: a origem dos números racionais se deve, estritamente, às dificuldades na escrita de divisões? Desde quando a notação ½ representa "1 dividido por 2" ? Essa pergunta é pertinente, pois, nas séries iniciais, os alunos não costumam fazer essa associação entre a representação das frações e uma divisão. Teriam feito tal associação os egípcios que, na antiguidade, trabalhavam sistematicamente com frações unitárias?

Niven apresenta algumas observações sobre a definição fornecida:

- No conjunto de resultados de divisões como $\frac{4}{3}, \ \frac{7}{6}, \ -\frac{2}{5}, \ ...$ a exigência é que d ≠ 0, onde d é um divisor que pode resultar tanto em uma divisão exata como em uma divisão não exata.

Com isso ele nos faz a ressalva de que um número cujas representações decimais não sejam exatas também são racionais. O número $\frac{1}{3}$ tem representação 0,333...., ou seja: d é um número inteiro, três, mas o resultado da divisão não é exato.

- Não basta dizermos que um número racional é da forma $\frac{a}{d}$, com a e d inteiros e d ≠ 0, porque existem infinitos modos de representar um número racional.

Aqui Niven coloca em evidência o problema da unicidade da representação. Um determinado número, por exemplo o 4 que escolhemos acima, pode ser representado de infinitas maneiras: $\frac{4}{1}, \ \frac{8}{2}, \ -\frac{40}{10}, \ ...$

- Todo número inteiro pode ser escrito na forma $\frac{a}{d}$: por exemplo: $..., \ -\frac{5}{1}, \ -\frac{4}{1}, \ ..., \ \frac{0}{1}, \ ..., \ \frac{4}{1}, \ \frac{5}{1}, \ ...$ ou seja, basta acrescentar o denominador unitário a cada um dos números inteiros.

Dois exemplos utilizados por Niven, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$, exemplificam como pode se tornar trabalhoso classificar um número como racional, ou não, baseando-se apenas na sua forma de apresentação.

Neste caso, utilizando apenas algumas operações aritméticas, é possível verificar se os exemplos dados correspondem a números racionais:

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$, logo $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é um número racional.

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5 \times 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}, \text{ logo } \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} \text{ não é um número racional.}$$

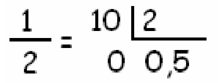
Aqui pode ser destacada uma grande dificuldade envolvendo o problema com o qual estamos lidando. O número $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é racional, é uma fração. Entretanto nem o seu numerador é um número inteiro (o "a" da definição), nem o seu denominador é um número inteiro (o "d" da definição). Mas, o trabalho algébrico feito acima nos mostra que este número pode ser colocado na forma da definição, com "a" assumindo o valor 2, e "d" assumindo o valor 1. Isso quer dizer que a representação inicial do número não permite reconhecê-lo como racional.

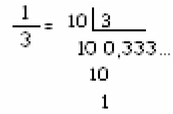
O problema é que Niven concebe os números racionais como uma divisão, e representa essa divisão usando o mesmo símbolo que é utilizado para representar as frações. Isso poderia ser feito de um outro modo? Sim. Por exemplo: para os gregos, na antiguidade, não existiam, a rigor, nem números irracionais, e nem números racionais; o que existiam eram grandezas incomensuráveis e quantidades fracionárias concebidas como uma razão entre quantidades inteiras. A pergunta vem de imediato: mas uma razão não é a mesma coisa que uma divisão? E a resposta é o que avança na solução de nosso problema: não. Isso pode ser constatado na classificação que fizemos do conteúdo abordado no livro didático.

Após a leitura dessas observações talvez fique mais claro para o leitor a importância da palavra 'pode' na definição dada por Niven.

Na continuação de seu livro, Niven passa ao estudo da representação finita ou periódica. Chamamos, nesse trabalho, a representação do tipo $\frac{a}{d}$ de "forma fracionária" porque a designação "fração" é a primeira que, didaticamente, ocorre na vida escolar de nossos alunos. Essa representação poderia ser chamada de "forma racional", ou de "forma quociente", mas entendemos que embora a representação se mantenha a mesma, as idéias envolvidas, as práticas associadas a essas idéias, não são as mesmas ao longo da história ou do encontro com os conteúdos matemáticos na escola. Feita essa observação, destacamos que Niven pretende mostrar que a representação fracionária não é a única conveniente a um número racional, ele pode ser expresso mediante representações que podem ser decimais finitas e infinitas.

Utilizando $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ Niven exemplifica que as representações decimais são obtidas a partir da divisão entre o numerador e o denominador de cada fração.





As frações finitas podem ser obtidas a partir dos decimais, transformando o número decimal em uma fração decimal ordinária e deixando-a irredutível, isto é, tornando a e b primos entre si: $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

O autor define que um número racional "*na forma irredutível* $\frac{a}{b}$*, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5*" (NIVEN, 1984, p.36). Sendo que se b for formado por fatores diferentes de 2 e/ou 5, então não é possível uma representação decimal finita.

As dízimas periódicas são as representações decimais infinitas, ou seja, possuem números que se repetem infinitamente como: $\frac{5}{11} = 0{,}454545...$ e $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$ Para grafar que está apresentando uma dízima periódica, Niven usa uma barra sobre o(s) algarismo(s) repetitivo(s). Assim, segundo ele, *"todo número racional* $\frac{a}{b}$ *pode ser representado por uma fração decimal finita ou por uma fração decimal infinita periódica; reciprocamente, toda fração decimal, finita ou periódica infinita, representa um número racional"* (NIVEN, 1984, p. 50).

– E o número 0,101001000100001... é racional? Este questionamento sobre uma representação decimal infinita não periódica fecha o capítulo dos racionais levando o leitor a uma próxima etapa, que não vamos abordar aqui por fugir ao escopo de nossa investigação: os números irracionais.

Para que haja a possibilidade de traçar um paralelo entre o que é ensinado, dessa forma, em Cursos de Matemática e aquilo que deve ser apresentado aos alunos no Ensino Fundamental, considero necessário recorrer a outras abordagens, por exemplos àquelas que busquem seus fundamentos na história da matemática e nas dificuldades enfrentadas pelos diversos povos para resolver seus problemas envolvendo a idéia de fração.

Apenas o estudo em nível avançado, sob a perspectiva do desenvolvimento matemático, permitiria ao futuro professor tecer as ligações deste conhecimento supostamente "mais avançado" com aquilo que ele deverá trabalhar nas 5ª e 6ª séries?

A suposição adotada por Niven, de que o leitor já domina os procedimentos necessários para o trabalho dos racionais, é adequada ao ensino desses números em turmas de 5ª e 6ª série? Ao trabalhar com essa formalização mais rigorosa, é possível perceber as diferentes necessidades do surgimento dos números racionais?

E ainda, é possível identificar qual relação pode assumir a representação do número fracionário, por exemplo: parte-todo, operador,... Ou essas diferentes "idéis" sobre as frações careceriam de significado para Niven?

No que ajuda, o "saber mais matemática" do professor, em relação ao conteúdo dos números fracionários para o momento do ensino deste conteúdo? (Em outras palavras: sabendo-se "o mais", sabe-se "o menos"?)

Penso que uma mudança na maneira de expor o conteúdo sobre as frações pode acarretar melhor aprendizado desse conteúdo. Uma forma de operacionalizar essa mudança, um caminho possível, consiste na utilização de conhecimentos e problematizações que podem ser buscados na história da matemática.

Ao abordar esse conteúdo (e também outros temas da Matemática) através de "iluminações" proporcionadas pela história é necessário que ela, a história deste conteúdo, seja entendida numa dimensão pedagógica adequada para a sala de aula. A reconstituição da trajetória desse conteúdo ao longo dos anos deve visar tanto o educador matemático como o educando, e deve ser guiada por um questionamento que envolve a "vida" desse tema. Estas idéias foram desenvolvidas por Antonio Miguel e alguns de seus orientandos em dissertações de mestrado realizadas na Faculdade de Educação da UNICAMP. Uma das dissertações trata da reconstituição histórica das geometrias não-euclidianas, a outro da mudança de concepção de professores, e futuros professores, em relação ao ensino/aprendizagem dos números naturais. Talvez seja este o caminho para a elaboração de propostas de abordagens de conteúdos que possam, efetivamente, incorporar conhecimentos de história da matemática e auxiliar na compreensão dos conceitos pelos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo Silva (2001), uma visão idealizada sobre o papel da história da matemática atribui a ela uma função milagrosa, como se o seu uso e o seu domínio proporcionassem a resolução de todos os problemas de ensino-aprendizagem da matemática. Para esta autora, a utilização da história da matemática é justificada, e se enche de significação, se a matemática for encarada como uma ciência, uma forma de conhecimento, um tipo de atividade humana, de manifestação cultural. Estudar a *"História da Matemática é uma forma de entender melhor as relações do homem com o conhecimento matemático dentro de um certo contexto cultural*" (SILVA, 2001, p.130). Mas, de outro lado, se a Matemática for pensada como estando "finalizada", a sua história só serviria para ser reproduzida.

Antonio Miguel, em 1993, ao desenvolver sua tese de doutoramento, proporciona uma das respostas que considero mais coerente com o que acorre nas salas de aula, a sugestão que torna possível a participação da história da matemática do desenvolvimento das aulas foi então denominada de Estudo Histórico-Pedagógico-Temático. Para esse autor, a história da matemática pode ser instrumento de desmistificação e desalienação no ensino da matemática, ela agiria como instrumento promotor de atitudes e valores uma vez que, por meio dela, o educando poderia extrair força para superar as barreiras enfrentadas na sua trajetória de aprendizado.

É ainda em sua tese de doutoramento que Miguel (1993), faz um apanhado daquilo que é dito por vários autores envolvidos com o "uso" da história da matemática, estabelecendo uma relação dos argumentos favoráveis e não-favoráveis a aplicabilidade da história na aula de matemática.

Destaco alguns dos argumentos favoráveis ao uso da História da Matemática:

- *Motivação para o ensino aprendizagem da Matemática;*
- *Instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino;*
- *Instrumento de formalização de conceitos, promotor do pensamento independente e crítico e de atitudes e valores, etc.*

E os argumentos desestimulantes:

- *Ausência de literatura específica;*
- *Natureza imprópria da literatura disponível;*
- *O elemento histórico ser um fator complicador;*

Ou seja: cabe ressaltar que toda moeda tem dois lados! Prudência, ao se exaltar ou não o valor da História da Matemática como auxilio pedagógico; é de extrema importância. Segundo o autor da tese, o recomendável é que se tome uma posição intermediária, que possibilite dar à História da Matemática um papel pedagógico que esteja ligado ao planejamento didático, sendo pensada de modo a propiciar uma real contribuição para o planejamento do professor.

Pensar em uma história voltada para a sala de aula confronta, de início, qualquer tipo de crença em uma história da matemática única, verdadeira, pronta, acabada e adequada para uma utilização automática. Assim é que se justifica a necessidade e a importância da disseminação de Estudos Histórico-Pedagógicos-Temáticos. Ou seja, para Miguel é importante que a História da Matemática seja produzida / realizada com vistas no educador matemático e no educando e que seja considerada nos seus aspectos psicológicos, epistemológicos, sócio-políticos e culturais, para que possa adquirir o status de uma história viva, para que possa servir a uma prática problematizadora.

A problematização é o elemento chave nesse caminho. É um desafio: a criação de uma necessidade para buscar o conhecimento. A problematização tem como objetivo selecionar os principais questionamentos levantados na prática social de determinado conteúdo. São esses questionamentos que impulsionam o uso da História da Matemática na aula de Matemática, orientando o desenvolvimento do trabalho do professor e consequentemente o trabalho desenvolvido pelos alunos.

Um pressuposto necessário para essa abordagem do estudo histórico pedagógico é o de *história-problema*, onde se busca questionar aquilo que seriam "os problemas" e, não apenas se preocupar com a sua possível solução. Para Miguel a história-problema é *"uma reconstituição racional do processo histórico de elaboração de um conceito"* exigindo uma *"analise epistemológica desse processo"* (1993, p.173). É a discussão do conteúdo escolar e sua inserção no contexto de uma prática social.

A concepção de um estudo histórico-pedagógico temático, definido por Miguel, tem algumas características:

- No estudo histórico-pedagógico temático é indispensável que os ideais políticos e os valores éticos, estéticos, dentre outros, que norteiam os processos produtivos do tema estudado estejam aparentes para serem pedagogicamente problematizados com o intuito de uma efetiva contribuição para a formação do sujeito que este estudo pretende atingir.
- A tentativa de uma participação efetiva da história nas aulas de matemática deixaria de ser um tempo perdido para passar a ser uma aliada na "*construção conceitual solidária e sólida tanto no terreno da matemática quanto no da história" (MIGUEL, 1996, v.e.).*

- a linha de conduta desta reconstituição histórica é a história-problema, onde cabe ao investigador buscar na história o problema e, a partir dele *"(...) procurar determinar a natureza e a extensão do objeto a ser percorrido a fim de solucioná-lo, isto é, de dar uma solução possível (porque baseada em vestígios de várias naturezas) e provisória ao problema ... interrogar o passado à luz de propósitos e necessidades pedagógicas do presente relativas ao ensino-aprendizagem da matemática"* (1996, v.e.).

Miguel concebe a relação entre um estudo histórico-pedagógico temático e a prática pedagógica em matemática como sendo apenas um ponto de referência (não uma "camisa de força", nem um "manual"), por isso acredita que um projeto dessa natureza possa apresentar-se em diferentes formatos: como um texto convencional ou um diálogo, ou ainda: diálogo e texto.

Dois trabalhos derivados da proposta de Miguel já foram concluídos. O primeiro deles é a dissertação: *Geometrias Não–Euclidianas: Um Estudo Histórico–Pedagógico* de Arlete de Jesus Brito, 1995, na qual a técnica do diálogo é usada para traçar uma reconstituição racional da história para as geometrias não-euclidianas. A autora, além da referência nos textos de Antonio Miguel busca também fundamentar-se em algumas propostas de Focault, ou seja: *na analise dos documentos não devemos utilizar textos, livros, ou obras, mas formações discursivas que são definidas quando há uma regularidade entre os objetos, tipos de enunciação, conceitos e escolhas temáticas* (Focault citado em BRITO, 1995, p.170)

Ainda para Brito, a concepção de problematização requer o entendimento de situação problema como definida por Brousseau: *"uma situação que seja suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente"* (Brousseau citado por BRITO, 1995, p.175) bem como com as finalidades atribuídas por Miguel, ou seja, a *"problematização visa à formação política do cidadão"* (BRITO, 1995, p.176).

Dessa maneira, o ambiente propicia que o próprio educando *"perceba a si próprio e ao conhecimento cientifico como sendo histórica e culturalmente condicionado, compartilhe com os demais elementos do grupo suas posturas filosóficas..."* (BRITO, 1995, p.178-9).

Um segundo trabalho nessa linha de pesquisa é: *Um Estudo Histórico-Pedagógico das Crenças de Futuros Professores Acerca do Ensino-Aprendizagem da Noção de Número Natural* de Eliana da Silva Souza, (1995) no qual o objetivo é a realização de um estudo histórico-pedagógico do número natural, para servir como apoio para a prática pedagógica.

Em suas considerações finais, a autora declara que os filósofos, historiadores, matemáticos irão "torcer o nariz" em relação ao seu trabalho visto que ele não atende às perspectivas correntes para nenhuma das disciplinas de formação destes profissionais. Continuando, ela afirma que era esta exatamente a sua intenção. De outro lado, ela alega que também conseguiu fazer com que suas alunas descobrissem algumas relações entre Matemática e Filosofia, entre Matemática e História da Educação, que até então, não haviam percebido (o que também provocou uma transformação da autora tanto como professora quanto como pesquisadora).

Eliana da Silva Souza acredita que a relação pesquisa-ensino e o papel de professora-pesquisadora, deva ser uma via de mão dupla. Não entende a sala de aula como espaço de aplicação da pesquisa ou como espaço exclusivo de coleta de dados, e nem entende a pesquisa como a síntese do que ocorre na sala de aula. A autora esteve preocupada com a construção das relações que envolvem uma metodologia do ensino da noção de número natural, que não está 'pronta', o que exige compreender suas múltiplas e inesperadas relações, na busca de significações no contexto em que foram produzidas.

No caso deste trabalho, minha investigação não se destinava a desenvolver um estudo histórico-pedagógico, trata-se da intenção de procurar vislumbrar algumas maneiras pedagógicas de aproveitar os elementos de história da matemática presentes em um instrumento que está ao alcance do professor: seu livro didático. Por isso, a escolha de uma aproximação a um estudo-histórico-pedagógico-temático na tentativa de responder a pergunta inicialmente colocada: *Como aparece a história dos números fracionários em um livro didático?*

O fator que motivou a escolha do tema exposto neste trabalho foi a dificuldade, por mim percebida em alunos do Ensino Fundamental, diante do estudo das frações.

A lembrança de trechos da história da matemática dos egípcios na época de minha vida escolar, assim como a pequena coleta de informações na qual constatei que alguns professores utilizam-se da "contação" de casos da história da matemática, descritas no início desta dissertação; determinaram o contexto que me permitiu relacionar a história da matemática com o estudo das frações voltado para o Ensino Fundamental.

Minhas primeiras idéias estavam voltadas para o uso da história da matemática no ensino, ou seja, eu pensava olhar para a história da matemática como um recurso pedagógico favorável ao professor. Pensava que seria um auxiliar importante para ajudá-lo a visualizar no conhecimento matemático da antiguidade formas de abordagem para a atualidade. Os exercícios, que muitas vezes acabam se tornando mecânicos, poderiam se encher de significados e passariam a ajudar na construção dos conceitos.

Qualquer fato histórico passa a ter importância, ou deixa de tê-lo, se você delega importância ou não a história da matemática. Como penso que nenhum ser humano é imparcial, imagino que o historiador seleciona os fatos da história conforme sua visão de mundo. Esta seleção cria um elo entre o presente e o passado que pode estar apoiado em uma situação pessoal do presente. A história é feita por um homem e recontada por outro...

O andamento deste trabalho se deu com um rol de questões que foram obtidas por meio de questionário respondido por professores de Matemática. Esse serviu para que pudesse constatar que muitos confirmam a permanência das frações no currículo de Matemática. No capítulo sobre a classificação dos números fracionários nos livros didáticos de 5ª série e 6ª séries foi feito um levantamento numérico, classificando os exercícios prontos, propostos e textos conforme a idéia empregada na forma de representação fracionária: razão, representação, medida e textos históricos. Com esse levantamento, pude constatar que a abordagem do fracionário, ao longo da 5ª e 6ª séries do Ensino fundamental encontra-se direcionada entre:

- 5ª serie sua abordagem é estritamente parte-todo, variando o "tipo" do todo empregado, fazendo com que o aluno exerça a noção de fração: 'parte de' e divida o desenho em partes iguais.
- 6ª série sua abordagem pende para a forma de razão.

Na seqüência, organizei um capítulo no qual estivesse exposto o máximo possível de informações que um professor poderia encontrar, com algum esforço, sobre as frações. Este conteúdo foi retirado dos livros de História da Matemática a que, possivelmente, os professores possam ter acesso - e mesmo assim, é necessário considerar que essa literatura é um material difícil, e que "o conteúdo" sobre as frações não se amplia pois as obras são muito repetitivas em suas informações.

Pude constatar que as idéias presentes na escrita das frações remontam da antiguidade a nossos dias, servindo para a resolução de problemas práticos do dia a dia, como no caso de medição, pagamento de impostos, comparação entre grandezas. Ou seja, a noção matemática de número racional foi sócio-culturalmente produzida para que os homens pudessem lidar com situações que necessitavam do registro derivado da comparação entre quantidades inteiras, já que foi a necessidade de medida que o impulsionou até os dias de hoje.

Uma oportunidade aberta com o estudo histórico-pedagógico é a de discutir, com os alunos, possíveis desdobramentos adotados por diversos povos, dando possibilidade ao professor de problematizar o caminho trilhado pelo conteúdo, neste caso pelas frações, explorando nos diversos problemas da antiguidade os fatores que acabaram contribuindo para o avanço das descobertas matemáticas na busca pela solução de tarefas diárias daquela época e que se encontram presentes em várias situações da atualidade.

Considero, com a finalização deste trabalho, que a história pode ser promotora de atitudes positivas tanto para professores, que podem modificar e planejar os rumos de sua aula fazendo relações entre situações passadas e presentes e as soluções encontradas, quanto para os alunos; que por meio do conhecimento dos desafios inicialmente impostos pelas necessidades práticas ou culturais, podem adquirir consciência matemática e lidar com melhor desenvoltura com os problemas que lhe são propostos. A história oferece uma visão ampla e diversificada da sociedade, bem como possibilita descobrir diversos pontos de vista sobre os conceitos, idéias e crenças.

Assim fica o desafio lançado: para que este trabalho sirva de apoio para a realização de um EHPT nos moldes idealizados por Miguel.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUCÁRIA. **Matemática**. Secretaria Municipal da Educação. Araucária, PR, 1992.

BEZERRA, F.J.B. – **Introdução do Conceito de Numero Fracionário e de suas representações: uma abordadgem criativa para a sala de aula,** São Paulo, PUC, 2001, dissertação de mestrado.

BOYER, Carl B. - **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Ed. Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ministério da Educação e Cultura. Brasília, DF, 1997.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico**, Campinas, FE-UNICAMP, 1995. Dissertação de mestrado.

COLLETTE, J.P. **Historia de las matemáticas I e II**, Editores Siglo Veintiuno, México, 1986.

D'AMBROSIO, U. **A História da Matemática:questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Mtematica**, in Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas, Maria Aparecida viggiani Bicudo, Editora da Unesp, São Paulo, 1999.

EVES, H. - **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp, Campinas, 1995.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. **Matemática – Pensar e Descobrir: Novo.** São Paulo: Editora FTD, 1996, 4 v.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**, 2 volumes, Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

JOSEPH, G. G. **La cresta del pavo real: la matemáticas y sus raíces no europeas,** Madrid: Ediciones Pirâmide, 1996.

MELO, S.B. Comprension del concepto de numero irracional. Uma radiografia del problema y uso de la historia como alternativa de superacion: enfoques complementarios, **Revista Ciencias Matematicas**, Vol. 19, no.2, 2001 (versão eletrônica)

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências**, Belém-Pará, Editora UEPA , 2001.

MIGUEL, Antonio - **A Constituição do Paradigma do Formalismo Pedagógico Clássico em Educação Matemática,** in: Zetetiké, Campinas, S.P., Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, CEMPEM, Ano 3, nº 3, 1995.

_________ - **As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores,** in: Zetetiké, Campinas, S.P., Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, CEMPEM, v. 5, nº 8, 1997.

_________ - **Estudos Históricos-Pedagógicos Temáticos e História-Problema.**. Braga, Portugal, actas do Congresso 'História e Educação Matemática', 1996, (versão eletrônica).

_________ - **Três estudos sobre história e Educação Matemática**. Campinas, FE-UNICAMP, 1993. Tese de doutorado.

MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria A. - **O Ensino de Matemática no primeiro grau**. São Paulo, Atual, 1986.

_________ - **A prática social de investigação em história da matemática: algumas considerações teórico-metodológicas**, Campinas, São Paulo, anais do VI EBRAPEM, Gráfica FE, 2002.

MIORIM, M.A.; **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Editora Atual, 1998.

MOREIRA, P. C. e DAVID, M. M. M. S., **Números Racionais: conhecimentos de formação inicial e pratica docente na escola básica,** Revista Bolema, ano 17, número 21, 2004, pp. 1-19.

NIVEN, I. M., **Números: racionais e irracionais**, trad. Renata Watanabe, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

PIRES, C.M.C **Currículo de Matemática: da Organização Linear à Idéia de Rede**. São Paulo, FTD, 2000.

SCHUBRING, G. – **Análise Histórica de Livros de Matemática: Notas de aula**, Autores Associados, Campinas, SP, 2003.

SILVA, C. M. S. **A História da Matemática e os cursos de Formação de Professores**, in: Formação de Professores de Matemática: Uma visão Multifacetada, Helena Noronha Cury, EDIPUCRS, 2001.

SILVA, J. C.; **História da Matemática e o Ensino da Matemática**, in Congresso/Portugal, 1995, versão eletrônica: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr1.html- último acesso em 11/11/2003.

SILVA, V. et al. **Uma Experiência de Ensino de Fração Articulada ao Decimal e à Porcentagem.** SBEM, São Paulo:, 2000, nº. 8, p. 16-23.

SOUZA, E. S. – **Um Estudo Histórico-Pedagógico das Crenças de Futuros Professores Acerca do Ensino-Aprendizagem da Noção de Numero Natural**. Campinas, FE-UNICAMP, 199_. Dissertação de Mestrado.

STRUIK, D. J. – **Por que estudar história da matemática?** in: História da técnica e da tecnologia, Ruy Gama. São Paulo, T. A. Queiroz/Ed. da Universidade de São Paulo, 1985, pp. 191-215.

____________ – **História Concisa das Matemáticas,** Editora Gradiva, Portugal, 1992.

TAHAN, M. – **O Homem Que Calculava**, Editora Record, Rio de Janeiro: 45ª edição, 1990, p.19-20, 191-193.

Endereços eletrônicos:

http://educar.sc.usp.br/matematica/m5let1.htm, acessado em 20/07/04

http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm, acessado em 20/07/04

http://www.malhatlantica.pt/mathis/, acessado em 20/07/04

http://matematica.com.sapo.pt/, acessado em 20/07/2004

http://www.lib.umich.edu/pap/Michigan%20Papyrus%20Collection/Religion/religion.html, acessado em 01/11/04.

A N E X O S

8.1 ANEXO I

1) Você ensina frações para seus alunos? Defenda sua opinião.

ALRS - Sim, pois é um conteúdo que faz parte do universo matemático e deve ser ensinado, no entanto, deve ser repensado o modo de ensinar frações uma vez que o método tradicional apresentado pelo livro didático não tem se mostrado eficaz.

ABVF - Sim, nem todas as coisas são inteiras.

AF - Sim, pois desde pequenos eles necessitam dividir a unidade em partes.

DK - Sim, sou extremamente contra o ensino das frações com problemas “exagerados” no ensino de 1ª a 4ª séries, também seleciono situações problemas para os alunos de 5ª a 8ª série – alguns apresentados nos livros didáticos são absurdos – contextualização.

JVH - Sim. É totalmente necessário desenvolver o entendimento do aluno embora ele encontre muita dificuldade e medo diante das frações. Aos poucos podemos fazer com eles vão perdendo o medo.

LT - Sim, as frações estão no cotidiano, fazer com que o aluno entenda o conceito de fração é sua função social.

PSI - Sim, pois a mesma encontra-se na vida de todos e para realização de muitas coisas no nosso cotidiano.

SB - Sim, nas quatro séries o tema é abordado, sempre que possível explicando que as frações representam parte de algo ou qual a sua localização na reta numérica

SI - Sim. As frações são uma extensão dos números naturais (inteiros).
Importante para a compreensão do dia-a-dia que os cercam.
Muitos profissionais necessitam deste conhecimento.

2) Como você ensina frações? Se este é um tópico de seu planejamento.

ALRS - Defendo que o ensino de frações, pelo menos nas séries do ensino fundamental, deve ser feito sempre de forma prática e dinâmica para só então “mergulharmos” nas suas propriedades teóricas.

ABVF - Através de desenhos.

AF - Inicialmente com material de apoio.
Ex.: barras divididas, comparação para perceber as frações equivalentes, realização das operações, ...
Através de problemas significativos, muitas vezes o aluno sendo o sujeito do enunciado.
Ex.: divisão de uma pizza.

DK - Com desenhos, recortes – através de situações –problemas, mas sempre que possível transformo com os alunos, as frações em números decimais pois acho que fica mais compreensível.

JVH - Inicio relembrando os recortes que eles aprenderam no período entre 1ª a 4ª séries. Recordo com pinturas e gravuras e divisões de objetos. Quando na prática este assunto está assimilado paralelamente vou demonstrando que usando os números em frações o resultado é o mesmo. Procuro demonstrar que usando frações é mais fácil de se chegar ao resultado final.

LT - Através de situações práticas para mostrar para os alunos o significado das frações.

PSI - Contextualizando é usando exemplos práticos.

SB - Usando a seqüência do livro didático e acrescentado exemplos numéricos que sejam fáceis de transformar em decimais para a representação na reta numérica.

SI - Fazendo o aluno falar onde ele encontra este conhecimento no dia-a-dia.
Usando a geometria. Usando a álgebra. Materiais concretos. Vídeos
Recorte, colagem.

3) De que forma você ensina o assunto: números racionais? (Explique)

ALRS - Fazendo um apanhado histórico e partindo da forma fracionária de escrita dos números concomitantemente à operação de divisão.

ABVF - Depois dos alunos entenderem os números naturais, n^{os} inteiros

AF - Naturalmente, apresentando-os....

DK - Idem 2 (Com desenhos, recortes – através de situações –problemas, mas sempre que possível transformo com os alunos, as frações em números decimais pois acho que fica mais compreensível).

JVH - Começo fazendo experiências concretas de divisões, facilitando a compreensão do aluno (com objetos). A seguir passamos a fazer as contas com os números naturais para depois trabalhar com os racionais.

LT - Através também de situações práticas que envolvam relações do cotidiano.

PSI - Também contextualizando é usando exemplos práticos em situações do dia a dia.

SB - Basicamente como o ensino de frações, e a partir da sexta série acrescentando os números negativos.

SI - Como extensão dos números naturais, inteiros.

4) Há diferença entre fração e número racional? ..... Justifique.

ALRS - Matematicamente, isto é, teoricamente falando não há diferença nenhuma visto que a própria definição de número racional utiliza-se de forma fracionária para bem definir-se, no entanto, para ações práticas do cotidiano existe uma insistência em lidar com as frações como se fossem um capítulo a parte da matemática.

ABVF - As quantidades na fração são exatas o que já não ocorre com os números racionais.

AF - Simplesmente é uma ampliação dos fracionários, pois quando ensinamos os fracionários, nos atemos a frações mais simples.

DK - Ué? Fração não é mais um número racional?
Lembro que quando ensinei frações (1ª a 4ª série) nem tocava no assunto "números racionai" mas na 6ª série já diferenciamos com os alunos os conjuntos numéricos.

JVH - Sim, pois o número racional é a simbologia de uma fração.

LT - Fração é um número racional, pelo conceito faz parte do conjunto dos números racionais.

PSI - ....

SB - Não, pois a fração é uma razão entre dois números, logo um número racional.

SI - Frações, forma mais exata de se apresentar as quantidades.
Frações são expressas como quociente de números.
Número racional.

5) Há utilização de elementos históricos em suas aulas a respeito dos assuntos mencionados? Se há, como isso é feito?

ALRS - A resposta é afirmativa, pois os elementos históricos é o que nos dá o alicerce para a justificação das demonstrações e definições matemáticas é ainda serve de motivação para que os alunos possam redescobrir a matemática.

ABVF - Sim, através da leitura, recortes, etc.

AF - Sim, através de relato, eu contando.
Algumas vezes leituras de textos, feitos pelos próprios alunos e comentada logo após.

DK - Sim. As vezes lemos com os alunos os elementos históricos que se apresentam nos livros didáticos, conto outros, que sei – não muitos – para eles.

DK - Precisa ser revisto!

JVH - Temos poucos elementos históricos deste assunto ao nosso alcance. Utilizando josrnais procuro trazer aos alunos a história do cotidiano.

LT - Elementos históricos relacionados a fração são utilizados nas primeiras aulas sobre esse assunto ou sempre que possível fazer relação histórica com a aula.

PSI - Na medida do possível sim, de maneira que o aluno possa entende-lo, sempre tentando contextualizar, trazendo para a realidade.

SB - Quando está presente um texto no livro didático este é lido pela turma e comentando caso haja necessidade.

SI - Sim há elementos históricos.
Artigos em geral
Recortes
Leituras
Vídeos
Pesquisas
Estatísticas.

6) Há utilização de elementos históricos em suas aulas a respeito de outros temas? Se há, como isso é feito?

ALRS - Sim existe e é feito através de pesquisas em livros didáticos, jornais, revistas e ou na Internet, por exemplo, neste ano (2002) numa apresentação teatral da peça “A moratória”, fez-se necessária a busca e o resgate histórico da quebra da “bolsa de valores” ocorrida nos anos de 29/30 do século passado.

ABVF - Sim através de vídeo, livros, etc.

AF - Sim, sempre que possível, pois eles gostam de saber do que estão falando, sobre o que estão estudando.

DK - Sim, talvez se soubessemos mais do que sabemos seria muito bom usá-lo, pois os alunos ficam interessados quando contamos algo que já acontecera com aquilo que estão aprendendo.

JVH - Sim. Alguns livros trazem alguns tópicos relacionados com o desenvolver da historia. Aproveito o livro para lermos em conjunto e debater. A seguir para que haja uma melhor interpretação do assunto, recomendo que os alunos formulem perguntas e as respondam.

LT - Sim, da mesma forma que as frações.

PSI - Também no que for possível.

SB - Da mesma forma que o anterior, ou por indagação de algum aluno.

SI -....

7) O que justificaria o uso da História da Matemática no seu ensino da Matemática?

ALRS - Conforme já mencionei a História da Matemática nos serve de alicerce para a introdução e compreensão dos conceitos matemáticos.

ABVF - A aula é mais agradável e é importante conhecer a história da matemática. Como começou a numeração, por exemplo.

AF - Muitas vezes motiva os alunos pois geralmente as pessoas gostam de história. Alguns têm curiosidade.

DK - Além de despertar o interesse do alunos, mostra que tudo tem uma história, não surgiu do nada, não foi a professora que inventou – alguns se surpreendem.

JVH - Para que o aluno entenda que os cálculos surgiram por causa de uma dificuldade que houve. O aluno deve perceber que antes de se descobrir a maneira de calcular é mais difícil de se resolver a situação proposta. Se o aluno entender que os cálculos dinamisam as soluções ele vai fazer os cálculos com mais empenho.

LT - Para o aluno entender que a matemática não é algo de agora, uma invenção atual e sim construída devido as necessidades humanas ao longo do tempo.

PSI - Mais um recurso, mais um conhecimento, e se ter a certeza que todos os professores tenham ciência disso e saibam como aplica-lo. De maneira que venha ao encontro do educando e possibilite a sua compreensão.

SB - Situar o aluno na evolução do conhecimento.

SI - Embasamento cientifico
Maior compreensão e fundamentação.
Que é uma ciência e como tal tem evolução.

8) Qual a sua opinião a respeito do ensino das frações?

ALRS - Conforme sabemos, os livros didáticos trazem o ensino de frações na 4ª e 5ª série e um pouco na sexta, na minha modesta opinião deveríamos diminuir esta carga teórica do ensino de frações destas séries, onde a maturidade do aluno não ajuda e jogarmos uma parte deste ensino para o decorrer do Ensino Médio.

ABVF - Acho importante pois os alunos devem saber que existem partes inteiras mas também que existem partes fracionadas.

AF - Eu particularmente gosto.
As frações são importantes, pois diariamente as pessoas dividem a unidade em partes,...

DK - Precisa ser revisto!

JVH - Apesar de ser um tópico difícil devemos ensiná-la. Para não sufocar o aluno devemos também depois de um certo tempo dar uma trégua. Depois de outros assuntos voltar a trabalhar com frações. Aos poucos os alunos vão assimilando este conteúdo.

LT - Acho que as frações podem sim ser ensinadas desde que o professor trabalhe com os alunos dando significado a esse conteúdo, fazendo relações com o dia-a-dia .

PSI - Bom, acho necessário um bom trabalho, o qual deixa claro para o aluno a sua real importância, para o seu cotidiano. Para seu uso na prática.

SB - Falta uma maior interação nas formas de representação, ou seja, o aluno perceber que um mesmo número pode ser representado de várias maneiras.

SI - Compreensão dos fatos e atos corriqueiros da vida
Entendimento das pesquisas estatísticas.
Amadurecimento das relações de quantidades.

8.2 ANEXO II

Tabela de classificação das Imagens digitalizadas dos livros de 5ª e 6ª séries

As imagens digitalizadas e classificadas na seqüência, conforme o conteúdo envolvido: Frações, de acordo com as especificações do capítulo 5 desta dissertação, com as siglas: **H, MEDIDA, R, O, REPRESENTAÇÃO e SC** foram tabuladas na tabela que segue.

Tabela de Classificação

		Textos		**Exercícios Prontos**		**Exercícios Propostos**	
		5ª – pág.	**6ª – pág.**	**5ª – pág.**	**6ª – pág.**	**5ª – pág.**	**6ª – pág.**
História		149, 153, 160, 182, 191, 204, 207,	243		116 – 2 242 – 1	181- 61	245 -1 246 – 5 247 - 9
ParteTodo	**PTC**	149		151 – 3,4,5 158 – 1,2 162 – 5,6 163 – 1,2,3 168 – 2 171 – 3 172 – 1 173 – 2 182 – 1 183 – 2,3 184 -4 192 – S/n 199 – 2	120 – 1,2 121 – 3	152 – 3 156 – 4,7 166 – 25,26,27,28 179 – 51 187 – 62,63,64,66 188 - Desafio 190 – 81 191 – 82 197 – 92,95	122 – 11,12 125 – 26
	PTD					156 – 5,6 ; 175 – 45 196 – 89 ; 190 – 78	
Razão	**R**	204,207	243	164 – 2,3 165 – 4 168 – 3 205 – 1,2,3 206 – 4	242 – 1,2 244 – 3 256 – s/n 258 – 1 259 – 2,3,4,5 248 – 1 249 – 2 250 – 3,4 251 – 5,6	159 – 19,20 167 – 30,31,32,33,34 170 – 39 172 – 40 174 – 42 175 – 46,47,48 179 – 49 188 – 72 197 – 91 206 – 114	119 – 7 128 – 32 131 – 41,42 136 – 58 137 – 63 245 – 1 246 – 2,3,4,5 247 – 6,7,8,9 260 – 31,34 261 – 35,36,37 262 – 40,41,desafio 253 – 11,12,1'3,14,15,16

							254– 17,18,19,20,21,22,23 255 – desafio

		Textos		Exercícios Prontos		Exercícios Propostos	
		5ª – pág.	**6ª – pág.**	**5ª – pág.**	**6ª – pág.**	**5ª – pág.**	**6ª – pág.**
Operador	**Q**			164 – 1 200 – 3		169 – 38	
	O			176 – 2 177 – 3 178 – 4,5 185 – 6 186 – 7 192 – 1 194 – 3 199 - 1		179 – 50,52 180 – 53,54,55,56,57,58 181 – 59,60,61 188 – 73,74 197 – 96 201 – 100 202 – 101,103,104 206 – 115 207 – 116,117,118,119	131 - 39
Representação	**RF**	153,160		161 – 1,2,3,4 168 – 1 170 – 1,2 189 – 1,2 193 – 2		156 – 8,9,10 157 – 11,12,13,14 159 – 17,18 160 – 21 162 – 22,24 167 – desafio 174 – 43 190 – 75,76,79 196 – 85,86	
	RE				116 – 2 118 – 1	157 – 15	119 – 3 121 – 10 258 – 24,25,26,28 260 – 29,30,32,33
SC				150 – 1 151 – 2 174 – 3 176 – 1 185 – 5 186 – 8 198 – s/n	116 – 1 118 – 2 129 – 1,2,3,4	152 – 1,2 159 – 16 162 – 23 167 – 29 174 – 41 175 – 44 187 – 65,67 188 – 68,69,70,71 190 – 77,80 191 – 83,84 196 – 87,88,90 197 – 93,94	119 – 4,5,6,8,9 122 – 13 124 – 14,15,16,17,18,19,20,21 125 – 22,23,24,25,27 127 – 28,29,30 128 – 31,33,34,35,36,37 131 – 38,40,43 132 – 44,45,46,47,48,49 135 – 50,51,52,53,54,55,56,57 136 – 59,60,61 137 – 62,64 162 – 62,64

						198 – 97 201 – 98,99 202 – 102,105 204 – 106,107,108,109,110,111 206 – 112,113	258 – 27 261 – 38,39

8. 3 ANEXO III

O anexo III encontra-se gravado no CD que acompanha este trabalho.