

Eduardo Xavier Miqueles

Modelamento Sísmico em Meios
Analíticos

Curitiba
2006

Eduardo Xavier Miqueles

Modelamento Sísmico em Meios Analíticos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos parciais à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Biloti.

Curitiba
2006

TERMO DE APROVAÇÃO

Eduardo Xavier Miqueles

Modelamento Sísmico em Meios Analíticos

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada, Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Augustinho Rigoti
Departamento de Geologia, UFPR

Prof. Dr. Luiz Matioli
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Dr. Marcelo Muniz
Departamento de Matemática, UFPR

Orientador:

Prof. Dr. Ricardo Biloti
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC/Unicamp

Curitiba, 23 de Fevereiro de 2006

Agradecimentos

- (i) À minha mãe Maria Cristina, minha irmã Maria Esther e meu irmão Máximo pelo apoio e incentivo durante os vários degraus (e obstáculos) que apareceram (e teimam em aparecer!) nesta longa jornada.
- (ii) Ao professor Ricardo Biloti por sua orientação precisa, pela paciência a mim dedicada e por sempre me mostrar novos caminhos.
- (iii) Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná e à Coordenação do curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada pela colaboração direta ou indireta neste trabalho.

*Algunos quieren y no pueden.
Otros pueden y no quieren.
Nosotros que queremos y podemos,
damos gracias al Señor.*

In memoriam

Hipólito Antolín Miqueles

Sumário

1	Introdução	11
2	Ondas elásticas	15
2.1	Aproximação de ordem zero	15
2.2	A equação iconal	17
2.3	A equação do transporte	19
3	Teoria de Raios	22
3.1	Sistema de traçamento cinemático	22
3.1.1	Equações características: raios	23
3.1.2	Soluções analíticas	24
	A. Velocidade constante	
	B. Velocidade afim	
	C. Quadrado da vagarosidade afim	
	D. Quadrado da vagarosidade quadrático	
	E. Velocidade com logaritmo afim	
3.1.3	Região de viabilidade para direções iniciais	33
3.2	Sistema de traçamento dinâmico	33
3.2.1	Sistema de coordenadas centrado no raio	35
3.2.2	Sistema de traçamento centrado no raio	36
3.2.3	Sistemas <i>in-plane</i> e <i>out-of-plane</i>	38
	A. Velocidade constante	
	B. Velocidade afim	
	C. Quadrado da vagarosidade afim/quadrático	
	D. Velocidade com logaritmo afim	
3.3	Transmissão em uma interface	40
3.3.1	Direção: vetor vagarosidade	41
3.3.2	Amplitude	42
3.3.3	Quantidades dinâmicas Q e P	42

4	Implementando Raios	44
4.1	Meio multi-camadas	44
4.2	Traçamento ponto-interface	46
4.3	Traçamento entre dois pontos	52
4.4	Traçando um raio	54
4.5	Avaliando dados sobre um raio	56
5	Modelamento Sísmico	60
5.1	Síntese de traços	60
5.2	Modelando refletores	62
5.2.1	A integral de Kirchhoff	62
5.2.2	Estratégia para implementação	64
6	Resultados Numéricos	68
6.1	Traçamento de raios	68
6.1.1	Traçamento entre dois pontos	71
6.1.2	ART × Seis88	73
6.2	Modelamento	73
7	Conclusões	84
A	Fundamentação	87
A.1	A Transformada de Hilbert	87
A.2	Sistema de raios	88
A.3	Soluções fundamentais	90
A.4	Desacoplamento do sistema dinâmico	91
A.5	Tempo de trânsito paraxial	92
B	ART	94

Resumo

Modelamento sísmico é um problema direto, utilizado para resolver vários problemas inversos. Por problema direto entendemos a modelagem da propagação de ondas em meios previamente estabelecidos e por problema inverso, por exemplo, as estimativas dos tempos de propagação que, ao ajustarem os tempos observados, permitem estimar o meio. Tais técnicas dependem da construção de sismogramas sintéticos que representam o registro da simulação de um abalo sísmico. Tendo em mãos o registro de campo, uma comparação é feita entre o registro simulado e o real de forma que se os resultados são aceitáveis, então o modelo de velocidades adotado e a geometria do perfil escolhido representam bem a subsuperfície de investigação. Quando esta comparação não é adequada, o modelo sintético é alterado e o processo se repete até que se obtenha o ajuste desejado. Este processo é conhecido como ajuste tomográfico.

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre a resolução do sistema de traçamento de raios em meios analíticos, ou seja, quando escolhemos modelos de velocidade que permitem solução analítica para a equação iconal, que governa a propagação de ondas. Ao escolher cinco tipos de velocidades analíticas, são descritos os aspectos matemáticos da trajetória onde se concentra a alta frequência de ondas numa dada direção, o chamado *raio*, [3].

Grande parte do esforço para construir seções simuladas depende do traçamento eficiente e rápido de raios. Ao considerar meios analíticos, a implementação de raios torna-se peculiar e diferente das estratégias que utilizam métodos numéricos, como integração numérica ou diferenças finitas por exemplo. Este trabalho aborda teoria de raios como necessidade para modelamento. Logo, algoritmos para traçamento de raios são discutidos em aspectos teóricos e computacionais, visando a implementação de uma biblioteca denominada ART, cuja sigla denota *Analytical Ray Tracing*.

Ao final, considerando meios multi-camadas separados por interfaces que não se cruzam, são ilustrados os resultados obtidos por duas técnicas clássicas de modelamento: teoria de raios e integral de Kirchhoff.

Palavras-chave: *Teoria de raios, Modelamento sísmico.*

Abstract

Seismic modelling is a fundamental tool to solve inverse problems. Modelling aims to construct synthetic seismograms. By requiring that the simulated seismograms fit the ones acquired experimentally, it is possible to estimate velocity models for the subsurface.

The seismic section (or seismogram) depends on the velocity model. In this work we consider only few special velocity field distributions for which the eikonal equation (a high-frequency approximation for the wave kinematics) has analytical solution. The models we are considering are built by stacking layers of those special velocity fields. As a consequence, reliable ray tracing algorithms are discussed. They were implemented in C, and released as a computational library called **ART**, which stands for *Analytical Ray Tracing*.

Finally, we compare ray-theory and Kirchhoff modelling for that layered models.

Keywords: *Ray theory, Seismic modeling.*

Notações

- Seja $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ então $\dot{\mathbf{x}} = (d\mathbf{x}_j/du)$ e $\ddot{\mathbf{x}} = (d^2\mathbf{x}_j/du^2)$, onde u é a variável independente, desde que não haja ambigüidade no contexto.
- Para $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ denotamos $J_{(\mathbf{f}, \mathbf{x})}(\mathbf{y})$ a matrix Jacobiana de \mathbf{f} com respeito a \mathbf{x} avaliada em \mathbf{y} , isto é $J_{(\mathbf{f}, \mathbf{x})}(\mathbf{y}) = (\nabla \mathbf{f}_1(\mathbf{y}), \dots, \nabla \mathbf{f}_n(\mathbf{y}))^T$. Quando a variável \mathbf{x} estiver subentendida, denotaremos a matriz Jacobiana simplesmente por $J_{\mathbf{f}}$.
- O par de transformadas de Fourier direta e inversa de uma função f de decaimento exponencial é definido como

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\} = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

- A operação $\mathcal{P}: \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2 \times 2}$ age eliminando elementos que possuam índice 2 sobre vetores/matrices tridimensionais, i.e

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Quando $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{32} = \mathbf{A}_{23} = \mathbf{A}_{22} = 0$, $\mathbf{a}_2 = 0$ e $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma permutação de linhas (e $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$) então é imediato verificar que

$$\mathbf{PAP} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mathbf{A}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

e

$$\mathcal{P}(\alpha \mathbf{Ax} + \mathbf{a}) = \alpha \mathcal{P}(\mathbf{A})\mathcal{P}(\mathbf{x}) + \mathcal{P}(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

- Dado $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ não nulo, à reta gerada pelo vetor \mathbf{p} denotamos $r(\mathbf{p})$.
- Dados $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ não nulos, o cone positivo gerado pelos vetores é denotado por $C(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, i.e $C(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \{a\mathbf{v} + b\mathbf{w}: a, b \in \mathbb{R}_+\}$.

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, a idéia de exploração está relacionada a vários ramos da ciência. Em particular, na área de Sísmica, este termo recebe grande atenção da comunidade científica há muitos anos. De fato, um melhor conhecimento da estrutura e do meio em que vivemos fornece hoje dados que são considerados parte importante da demanda de informação de grandes empresas.

Assim, a informação que essencialmente se quer é a que auxilia a compreender a estrutura da Terra. Este tipo de conhecimento apoia a tarefa de exploração, por exemplo, de hidrocarbonetos ou outras reservas minerais, no caso da sísmica.

Os métodos sísmicos mais utilizados para estudo da estrutura da terra, são os de reflexão e refração. Nos métodos de reflexão, procura-se somente observar o comportamento de ondas sísmicas refletidas em estruturas definidas por descontinuidades do meio, que são as camadas. Já os métodos de refração observam as ondas sísmicas que se propagam em grandes distâncias. Neste caso, as informações são em geral de grande escala e trazem poucas informações da sub-superfície.

As técnicas para exploração dependem do meio. Por exemplo, em métodos de reflexão aplicados à terra, costuma-se usar a técnica GPR (*Ground Penetrating Radar*). Este método consiste basicamente na emissão de ondas eletromagnéticas no solo que são refletidas nas estruturas do meio e posteriormente recebidas em uma antena na superfície. Este método é menos custoso que aqueles que usam cargas explosivas, pois não é necessário a perfuração do solo para a realização do experimento. O GPR emite sinais de alta frequência, na faixa de 2500MHz. Veremos no Capítulo 2 que ondas de alta frequência permitem o desenvolvimento da teoria de raios.

Quando o meio de investigação apresenta água na superfície (como é o caso do mar), as ondas artificiais produzidas são geradas por ar comprimido ou vibradores e após um certo tempo são recebidas em hidrofones (detectores de

pressão) posicionados em uma linha de aquisição sobre o mar, ao longo de um cabo que pode chegar a 16km. A energia da onda refletida é captada e convertida em um sinal elétrico que é enviado para o sistema de registro a bordo do navio. O barco de prospecção sísmica segue trajetos em linha percorrendo a área de estudo, disparando regularmente o canhão de ar comprimido. Ao final, percorre em média 180km por dia.

Anterior à fase de exploração há a coleta de dados, que em sísmica é denominada de levantamento. Para tanto, realiza-se um abalo sísmico, com uma carga explosiva por exemplo (ao qual nos referimos por fonte), e a detecção deste evento em um sensor (ao qual nos referimos por receptor). Sabemos que ao movimentar a superfície da terra, as partículas do meio se excitam e transmitem a energia provocada pelo abalo que se propaga na forma de onda: a onda sísmica. O meio que esta onda percorre é constituído por materiais da terra (solo, rochas, estruturas, etc) e o caminho a ser traçado, desde a fonte até o receptor, leva um certo tempo. Após este tempo, a onda é registrada com uma dada intensidade.

Este tipo simples de experimento, feito em grande escala, ou seja com muitas fontes e receptores determinam medidas, que representam a vibração de partículas em função do tempo, que plotada em um gráfico constituem *traços sísmicos*. A uma coleção de traços sísmicos damos o nome de *sismograma* e objetiva-se dele extrair o maior volume possível de informação sobre o meio (terra estratificada e estruturada).

A maior parte da energia registrada num receptor, propaga-se da fonte até ele através de uma determinada trajetória que é denominada de *raio*. A geometria deste trajeto depende da velocidade inerente ao meio, por exemplo, o trajeto pode ser desde linhas retas até arcos de círculos. Como veremos, a propagação da onda é descrita matematicamente através da equação *iconal*. Esta equação diferencial pode ter solução analítica dependendo da velocidade do meio. No Capítulo 2 esta equação e suas implicações recebem destaque.

A aquisição de dados é feita com uma coleção de fontes e receptores dispostos em algum arranjo. Dentre vários destes arranjos, destacam-se aqueles de tiro comum e de afastamento comum (ver [17] por exemplo). Cada par fonte-receptor pertence a um domínio dito *abertura sísmica* e está na superfície π_1 como na Figura 1.1.

Ao longo de todo este trabalho, assumiremos que os meios considerados são representados geometricamente por planos, como o plano π_2 da Figura 1.1). As propriedades do meio não variam na sua direção ortogonal ao plano considerado. No entanto, consideraremos sempre a propagação de ondas em meios tridimensionais e neste sentido, costuma-se dizer que o modelamento é 2.5D. Veremos que esta hipótese permite obter algumas equações para o traçamento de raios cuja solução é mais fácil, e quando possível, analítica.

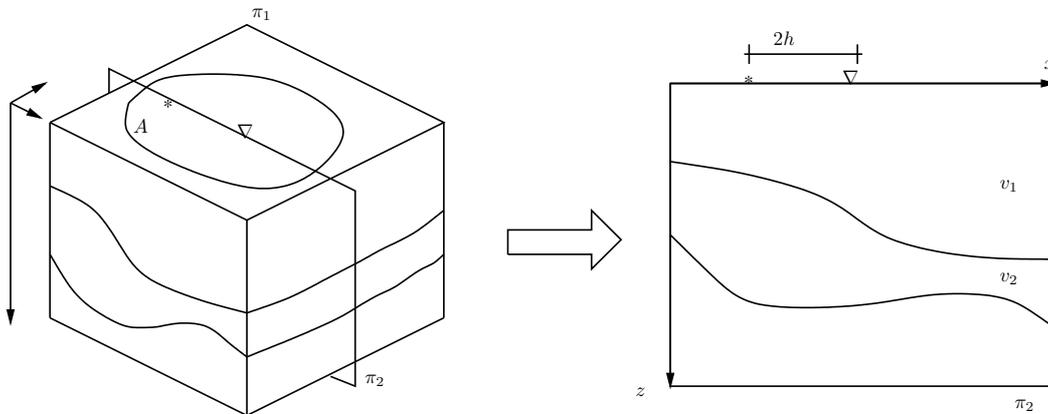


Figura 1.1: Estrutura do problema. Deseja-se explorar a região abaixo do conjunto A contido no plano superficial π_1 . No perfil do plano π_2 um experimento é feito, com fonte (asterisco $*$) e receptor (∇), para descobrir a geometria dos refletores. Cada camada tem sua velocidade especificada, v_1 e v_2 . A distância $2h$ entre fonte e receptor é dita afastamento.

A Figura 1.2 apresenta de forma sistemática o plano geral deste trabalho, que consiste em obter sequencialmente três informações: raios, traços e portanto sismogramas. Para cinco tipos diferentes de modelos de velocidades, serão obtidos raios, resultantes de solução analítica da equação iconal. Esta abordagem é feita no Capítulo 3.

Fixada uma fonte, e uma configuração de tiro comum, como na Figura 1.2.c, obtêm-se a coleção de traços da Figura 1.2.b; quanto maior o número de receptores (e/ou de fontes) melhor o registro do experimento. No entanto, para construir seções sísmicas, é necessário construir raios e o Capítulo 4 preenche esta necessidade proporcionando um enfoque mais computacional.

Cada técnica de implementação proposta não é única e determina, em paralelo a este trabalho, uma coleção de algoritmos para traçamento de raios, denominada ART (sigla para *Analytical Ray Tracing*). A maioria das bibliotecas ou programas de modelamento usam métodos numéricos como diferenças finitas. O ganho principal ao se implementar raios em meios analíticos é a rapidez e a precisão do traçamento.

O Capítulo 5 é dedicado ao modelamento Kirchhoff e sua implementação, visando o esforço computacional inerente ao modelamento, que requer a construção de muitos raios. Por fim, o Capítulo 6 mostra os resultados obtidos considerando os cinco modelos de velocidade adotados, como por exemplo o da Figura 1.2.a. Para um tipo de velocidade particular, a velocidade constante, é possível comparar os resultados com o pacote disponível **Seis88**. Demais resultados, com experimento de afastamento comum também são

apresentados.

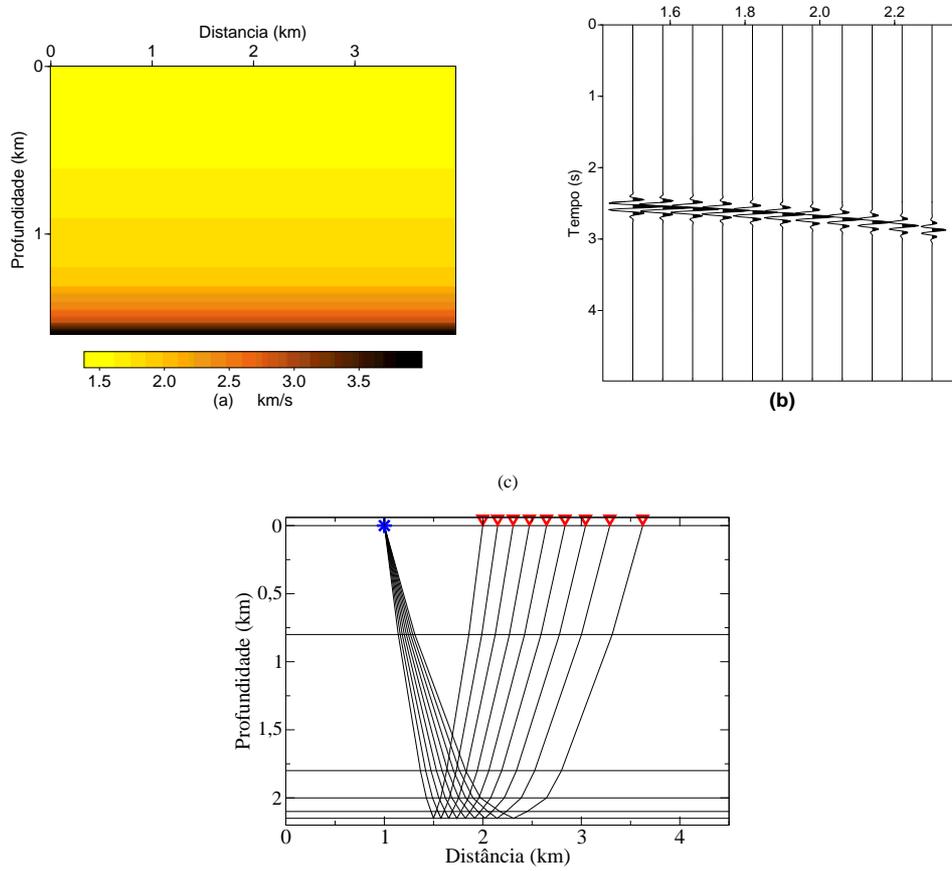


Figura 1.2: (a) Modelo de velocidades para um meio composto por seis camadas. (b) Coleção de traços para um exemplo simples com nove receptores e uma fonte; a abcissa representa o ponto médio entre fonte e receptor. (c) Geometria do experimento (tiro comum) e família de raios construída.

Capítulo 2

Ondas elásticas

Apresentaremos neste capítulo a equação que descreve o movimento de partículas em um meio contínuo sólido sob a ação de forças externas, dita *equação elastodinâmica*. Sob determinadas hipóteses a solução desta equação será aproximada pela solução de duas equações: a equação *iconal* e do *transporte*. Concentraremos-nos em descrever tal aproximação somente para meios isotrópicos, isto é, meios que apresentam uma mesma propriedade física em todas as direções, apresentando portanto uma certa simetria [18].

2.1 Aproximação de ordem zero

Um corpo elástico submetido a um conjunto de forças externas sofre deformações. Considere um ponto \mathbf{x} deste corpo, que inicialmente em repouso, é deslocado a um novo ponto $\mathbf{x} + \mathbf{u}$, com \mathbf{u} dependendo de \mathbf{x} . Em meios isotrópicos, quando consideramos que este deslocamento depende do tempo, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ satisfaz à seguinte relação [3], dita *equação elastodinâmica da onda*,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \theta \nabla \lambda + \nabla \mu \times \boldsymbol{\Omega} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

onde $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ (dilatação cúbica), $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, $\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 \mathbf{u}_j)$, ρ a densidade do meio, \mathbf{f} um vetor de força e λ e μ constantes elásticas do meio, ditos parâmetros de Lamé [18, 17].

Os parâmetros λ e μ podem variar com o vetor posição \mathbf{x} , no entanto quando são funções constantes dizemos que o meio é homogêneo. Neste caso, a equação (2.1) torna-se

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (2.2)$$

No caso de fluidos (ou meios acústicos), $\mu = 0$, ou seja são meios onde a solução de (2.1) é predominantemente uma onda de pressão. Neste último caso a equação elastodinâmica é dita simplesmente equação da onda.

Para meios homogêneos é possível desacoplar a equação (2.1) em duas outras equações mais simples. De fato, ao aplicar o operador divergente e rotacional na equação (2.1) obtemos respectivamente as equações $\rho \ddot{\theta} = \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}}) = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta$ e $\rho \ddot{\mathbf{\Omega}} = \nabla \times (\rho \ddot{\mathbf{u}}) = \mu \nabla^2 \mathbf{\Omega}$, que são duas equações de onda, uma escalar e outra vetorial. Vamos representá-las na seguinte forma

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{\alpha^2} \ddot{\theta}, \quad \nabla^2 \mathbf{\Omega} = \frac{1}{\beta^2} \ddot{\mathbf{\Omega}}. \quad (2.3)$$

onde $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ e $\beta^2 = \mu/\rho$. Mostra-se em [14, 13] que nesta situação o vetor deslocamento \mathbf{u} poderá ser obtido através de $\mathbf{u} = \nabla \theta + \nabla \times \mathbf{\Omega}$.

A onda θ é dita onda de compressão, longitudinal, de dilatação ou, simplesmente, onda P. A onda $\mathbf{\Omega}$ é denominada rotacional, transversal, de cisalhamento ou onda S. Nota-se facilmente que $\alpha > \beta$ o que significa que a onda P se propaga mais rapidamente que a onda S, razão pela qual é muitas vezes dita onda primária, pois é registrada experimentalmente primeiro. É também fácil perceber que em fluidos, $\beta = 0$ (pois $\mu = 0$) e portanto não existe onda S. Nestes casos, a onda que procuramos é dita acústica, caso contrário, elástica.

No caso não homogêneo a separação da onda \mathbf{u} em duas ondas independentes já não é mais possível, o que impossibilita o desacoplamento da equação (2.1) em duas equações mais simples. No entanto, mostra-se experimentalmente que, para ondas de alta freqüência¹, o desacoplamento acontece de forma aproximada.

Assim, procuraremos uma solução aproximada no domínio de freqüência da forma

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) = \omega^b e^{i\omega T(\mathbf{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j}, \quad (2.4)$$

com $\hat{\mathbf{u}}(\cdot, \omega) = \mathcal{F} \mathbf{u}(\cdot, t)$, onde b , \mathbf{A}_j e T são funções a serem determinadas.

Numa aproximação para o campo de onda em alta freqüência consideraremos apenas

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) \cong \mathbf{U}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.5)$$

¹Estamos assumindo que a variação de propriedades físicas do meio é pequena no espaço de um comprimento de onda, ou seja, a freqüência é alta. Na sísmica de exploração, as reflexões de interesse estão na faixa de até 60Hz. Na sísmica rasa, dita de alta resolução, a freqüência pode chegar até 300Hz e na sísmica de refração até 100Hz. Na técnica GPR, as freqüências tem a ordem de grandeza de MHz a GigaHz.

com $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}_0(\mathbf{x})$ e $G(\mathbf{x}, \omega) \equiv \omega^b e^{i\omega T(\mathbf{x})}$. Segue de (2.5) que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cong \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) \cong \frac{\mathbf{U}(\mathbf{x})}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^b e^{i\omega T(\mathbf{x})} e^{-i\omega t} dt = \mathbf{U}(\mathbf{x}) F(t - T(\mathbf{x})), \quad (2.6)$$

com $F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^b e^{-i\omega\xi} d\omega$. Generalizações a respeito da função F podem ser feitas. Vamos assumir então que a aproximação de ordem zero de \mathbf{u} é da seguinte forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) F(t - T(\mathbf{x})). \quad (2.7)$$

A função escalar T é dita tempo de trânsito e a frente de ondas elásticas é dada pelo conjunto de pontos que verificam $T(\mathbf{x}) = t$, com t constante. A função F é dita um sinal de alta frequência, como em [3, 19].

Logo, o vetor deslocamento \mathbf{u} é totalmente determinado uma vez conhecidos o tempo de trânsito T e o vetor \mathbf{U} . Estas quantidades são até o momento indeterminadas. Veremos como determiná-las nas próximas duas seções.

2.2 A equação iconal

Imporemos que o *ansatz* (2.7) seja uma solução aproximada (de alta frequência) da equação elastodinâmica (2.1). Ao impor esta condição mostraremos que o tempo de trânsito T satisfaz à equação iconal.

Aplicando a transformada de Fourier no tempo² em (2.1) (desprezando a fonte) obtemos

$$-\omega\rho\hat{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu)\nabla\hat{\theta} + \mu\nabla^2\hat{\mathbf{u}} + \hat{\theta}\nabla\lambda + \nabla\mu \times \hat{\Omega} + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)\hat{\mathbf{u}}, \quad (2.8)$$

com $\hat{\theta} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)$ e $\hat{\Omega} = \nabla \times \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)$. Inserindo a equação (2.5) em (2.8) obtemos

$$-\omega G(\mathbf{x}, \omega) D^{(2)}(\mathbf{U}) + i\omega G(\mathbf{x}, \omega) D^{(1)}(\mathbf{U}) + G(\mathbf{x}, \omega) D^{(0)}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

ou

$$(i\omega)^2 D^{(2)}(\mathbf{U}) + (i\omega) D^{(1)}(\mathbf{U}) \dot{F} + (i\omega)^0 D^{(0)}(\mathbf{U}) F = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

com cada vetor $D^{(j)}$ dado por

$$D^{(2)}(\mathbf{U}) = (\lambda + \mu)(\nabla T \cdot \mathbf{U})\nabla T + \mu\|\nabla T\|^2\mathbf{U} - \rho\mathbf{U}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} D^{(1)}(\mathbf{U}) = & (\lambda + \mu) [(\nabla \cdot \mathbf{U})\nabla T + \nabla(\nabla T \cdot \mathbf{U})] + \mu [2J_{\mathbf{U}} \nabla T + (\nabla^2 T) \mathbf{U}] \\ & + (\nabla T \cdot \mathbf{U})\nabla\lambda + \nabla\mu \times (\nabla T \times \mathbf{U}) + 2(\nabla\mu \cdot \nabla T)\mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.12)$$

²Lembrando que $\mathcal{F}\{\dot{u}\} = i\omega\mathcal{F}\{u\}$.

e

$$D^{(0)}(\mathbf{U}) = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\mathbf{U}) + \mu\nabla^2\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})\nabla\lambda + \nabla\mu \times (\nabla \times \mathbf{U}) + 2J_{\mathbf{U}}\nabla\mu. \quad (2.13)$$

Para soluções de alta frequência consideramos em (2.10) somente as maiores potências de ω , isto é $D^{(2)} = D^{(1)} = \mathbf{0}$ desprezando o termo $D^{(0)}$. Se impusermos $D^{(2)} = \mathbf{0}$ e denotarmos $\mathbf{p} = \nabla T$ então

$$\left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{U})\mathbf{p} + \frac{\mu}{\rho}\|\mathbf{p}\|^2\mathbf{U} - \mathbf{U} = 0 \Rightarrow \mathbf{\Gamma} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{\Gamma} = \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \frac{\mu}{\rho}\|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{I}, \quad (2.15)$$

com \mathbf{I} a matrix identidade³. Para que a equação matricial em (2.14) seja satisfeita, com $\mathbf{U} \neq 0$, devemos ter $\mathbf{\Gamma}$ singular, i.e, seu espectro deve conter o autovalor nulo.

Ora, se $\Lambda(\mathbf{\Gamma})$ denota o autovalor de $\mathbf{\Gamma}$ então

$$\Lambda(\mathbf{\Gamma}) = \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)\Lambda(\mathbf{p}\mathbf{p}^T) + \frac{\mu}{\rho}\mathbf{p}^T\mathbf{p} - 1,$$

e sabendo que os autovalores da matrix $\mathbf{p}\mathbf{p}^T$ são da forma $\{\mathbf{p}^T\mathbf{p}, 0\}$ então o espectro de $\mathbf{\Gamma}$ consiste em

$$\left\{ \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\mathbf{p}^T\mathbf{p} - 1, \frac{\mu}{\rho}\mathbf{p}^T\mathbf{p} - 1 \right\}.$$

Denotando respectivamente os autovalores acima de Λ_1 e Λ_2 (este com multiplicidade 2) então, para qualquer vetor \mathbf{h} ortogonal a \mathbf{p} é válido $\mathbf{\Gamma}\mathbf{h} = \Lambda_2\mathbf{h}$ e $\mathbf{\Gamma}\mathbf{p} = \Lambda_1\mathbf{p}$. Desta forma, (2.14) será verdadeiro se e somente se Λ_1 ou Λ_2 for nulo. Em ambos casos é imediato verificar que \mathbf{p} deve satisfazer à chamada *equação iconal*

$$\mathbf{p}^T\mathbf{p} = \frac{1}{c^2}, \quad (2.16)$$

com $c = \alpha$ no primeiro caso e $c = \beta$ no segundo, onde α e β são as velocidades de onda P e S, respectivamente. Isto significa que impor $\Lambda_1 = 0$ implica em \mathbf{p} ser um vetor paralelo à direção de propagação da onda (ou perpendicular à frente de onda) e, impor $\Lambda_2 = 0$ implica \mathbf{h} ser um vetor perpendicular à direção de propagação (ou paralelo à frente de onda). Como o autoespaço associado ao autovalor Λ_2 tem dimensão dois, existem dois vetores linearmente independentes, digamos \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 (ditos vetores de polarização) que são

³A matrix $\mathbf{\Gamma} + \mathbf{I}$ é dita matrix de Christoffel [3].

paralelos à frente de onda (Figura 2.1). Por outro lado, o autoespaço de dimensão um associado a Λ_1 é gerado pelo vetor \mathbf{p} que é sempre ortogonal à frente de onda, determinando portanto uma coleção de pontos no espaço que formam uma trajetória preferencial de alta frequência. A esta trajetória particular denominamos *raio* e damos um tratamento especial no capítulo seguinte.

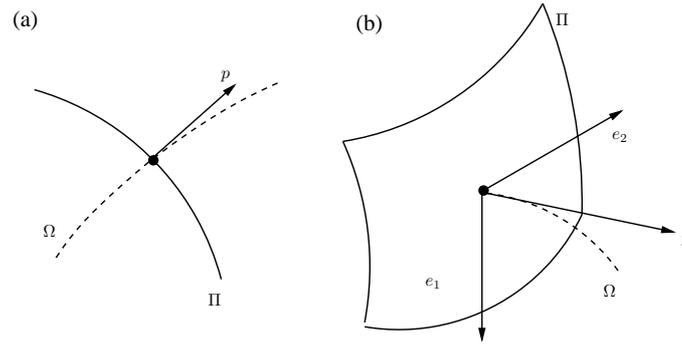


Figura 2.1: (a) Um raio Ω ortogonal à frente de onda Π (b) Em um dado ponto da frente de ondas Π a direção de propagação da onda S é determinada por uma combinação linear dos vetores \mathbf{e}_k , ortogonais, unitários e paralelos à frente de onda.

2.3 A equação do transporte

Para determinar totalmente a solução (2.7) da equação elastodinâmica da onda, falta somente determinar o vetor \mathbf{U} , uma vez resolvida a equação iconal para o tempo de trânsito.

De $D^{(1)} = \mathbf{0}$, em (2.10), obtemos

$$(\lambda + \mu) [(\nabla \cdot \mathbf{U})\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{U})] + \mu [2J_{\mathbf{U}} \mathbf{p} + (\nabla^2 T)\mathbf{U}] + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{U})\nabla\lambda + \nabla\mu \times (\mathbf{p} \times \mathbf{U}) + 2(\nabla\mu \cdot \mathbf{p})\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

ou, se \mathbf{H}_T denota a matriz Hessiana da função T então

$$(\lambda + \mu) [(\nabla \cdot \mathbf{U})\mathbf{p} + \mathbf{H}_T \mathbf{U} + J_{\mathbf{U}}^T \mathbf{p}] + \mu [2J_{\mathbf{U}} \mathbf{p} + (\nabla^2 T)\mathbf{U}] + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{U})\nabla\lambda + (\nabla\mu \cdot \mathbf{U})\mathbf{p} + (\nabla\mu \cdot \mathbf{p})\mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Afirmamos que para ondas P, o vetor \mathbf{U} é da forma $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})\nabla T$ ou $\mathbf{U} \doteq \alpha A \mathbf{p}$. De fato, basta observar que no caso de ondas primárias o vetor deslocamento é perpendicular à frente de onda, isto é \mathbf{U} é um múltiplo

de \mathbf{p} . A escolha acima é feita somente para garantir que ao longo do caminho preferencial da onda (o raio) o vetor \mathbf{U} tenha norma euclidiana A , que denominamos de *amplitude* da onda. Desta forma, temos

$$\nabla \mathbf{U}_j = \alpha \nabla A \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_j} + A \nabla \alpha \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_j} + \alpha A \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_j} \right),$$

e

$$J_{\mathbf{u}} = (\nabla \mathbf{U}_j^T) = \alpha \mathbf{p} \nabla A^T + A \mathbf{p} \nabla \alpha^T + A \alpha \mathbf{H}_T.$$

Logo, como $\mathbf{U} = \alpha A \mathbf{P}$ temos

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \{ (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{p} + 2(A\alpha) \mathbf{H}_T \mathbf{p} + \alpha \|\mathbf{p}\|^2 \nabla A + A \nabla \alpha \|\mathbf{p}\|^2 \} \\ & + \mu \{ 2(\mathbf{p}^T \nabla A^T \mathbf{p})(\alpha + A) + 2(A\alpha) \mathbf{H}_T \mathbf{p} + (\nabla^2 T)(A\alpha) \mathbf{p} \} \\ & + (\mathbf{p}^T \mathbf{p})(A\alpha) \nabla \lambda + (A\alpha)(\nabla \mu^T \mathbf{p}) \mathbf{p} + (\nabla \mu^T \mathbf{p})(A\alpha) \mathbf{p} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como $\|\mathbf{p}\|^2 = 1/\alpha^2$ e $\nabla \cdot \mathbf{U} = (A\alpha) \nabla^2 T + A(\nabla \alpha^T \mathbf{p}) + \alpha(\nabla A^T \mathbf{p})$, a equação (2.19) resulta ser

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \{ \mathbf{p} [(A\alpha) \nabla^2 T + A(\nabla \alpha^T \mathbf{p}) + \alpha(\nabla A^T \mathbf{p})] + 2(A\alpha) \mathbf{H}_T \mathbf{p} + \frac{1}{\alpha} \nabla A + \frac{A}{\alpha^2} \nabla \alpha \} \\ & + \mu \{ 2(\mathbf{p}^T \nabla A^T \mathbf{p})(\alpha + A) + 2(A\alpha) \mathbf{H}_T \mathbf{p} + (\nabla^2 T)(A\alpha) \mathbf{p} \} \\ & + \frac{A}{\alpha} \nabla \lambda + 2(A\alpha \mathbf{p})(\nabla \mu^T \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Portanto, tomando o produto interno de (2.20) com \mathbf{p} obteremos

$$(\lambda + \mu) \left\{ \frac{A}{\alpha} \nabla^2 T + \frac{2A}{\alpha} \nabla \alpha^T \mathbf{p} + \frac{2}{\alpha} \nabla A^T \mathbf{p} + 2A\alpha \delta \right\} + \frac{A}{\alpha} \mathbf{p}^T \nabla (\lambda + 2\mu) = 0, \quad (2.21)$$

com $\delta = \mathbf{p}^T \mathbf{H}_T \mathbf{p} = -\alpha^{-3} \nabla \alpha^T \mathbf{p}$. De fato, pela equação iconal

$$\delta = \mathbf{p}^T \mathbf{H}_T \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \nabla \mathbf{p} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{p}^T \mathbf{p})^T \mathbf{p} = \frac{1}{2} \nabla (\alpha^{-2})^T \mathbf{p} = -\alpha^{-3} \nabla \alpha^T \mathbf{p}.$$

Segue então de (2.21) que

$$(\lambda + \mu) \left\{ (\nabla^2 T) \frac{A}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \nabla A^T \mathbf{p} \right\} + \frac{A}{\alpha} \mathbf{p}^T \nabla (\lambda + 2\mu) = 0, \quad (2.22)$$

e como $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, (2.22) resulta finalmente em

$$(\alpha^2 \rho) \left\{ (\nabla^2 T) \frac{A}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \nabla A^T \mathbf{p} \right\} + \frac{A}{\alpha} \mathbf{p}^T \nabla (\alpha^2 \rho) = 0 \quad (2.23)$$

ou

$$\rho\alpha A \nabla^2 T + 2\rho\alpha(\nabla A^T \mathbf{p}) + \frac{A}{\alpha} \mathbf{p}^T \nabla(\alpha^2 \rho) = 0. \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.24) por $\alpha/\sqrt{\rho\alpha^2}$ obtemos

$$2\mathbf{p}^T \nabla \left(\sqrt{\rho\alpha^2} A \right) + \sqrt{\rho\alpha^2} A \nabla^2 T = 0. \quad (2.25)$$

A equação (2.25) é dita equação do transporte. Esta equação permite determinar a função amplitude A uma vez conhecido o tempo de trânsito T e portanto \mathbf{p} . Assim, tendo as funções T e A , conhecemos a solução (2.7).

Para ondas S, afirmamos que o vetor \mathbf{U} é da forma $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x})\mathbf{e}_2(\mathbf{x})$ com \mathbf{e}_k vetores ortogonais unitários e ortogonais à frente de onda e B, C funções escalares. Com efeito, existem dois vetores ortogonais à frente de onda e o vetor deslocamento \mathbf{u} é uma combinação deles, ou seja \mathbf{U} o é. Cada coeficiente desta combinação representa a amplitude na direção de \mathbf{e}_k com a norma de \mathbf{U} dada por⁴ $\sqrt{B^2 + C^2}$.

A inserção deste \mathbf{U} no produto $\mathbf{e}_k^T D^{(1)} = 0$ para $k = 1, 2$ gera o seguinte par de equações

$$\begin{cases} 2\mu\mathbf{p}^T \nabla B + B [\mu\nabla^2 T + \mathbf{p}^T \nabla \mu] + 2\mu C (J_{\mathbf{e}_2} \mathbf{p})^T \mathbf{e}_1 = 0, \\ 2\mu\mathbf{p}^T \nabla C + C [\mu\nabla^2 T + \mathbf{p}^T \nabla \mu] + 2\mu B (J_{\mathbf{e}_1} \mathbf{p})^T \mathbf{e}_2 = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

com $J_{\mathbf{e}_k}$ a matriz jacobiana de \mathbf{e}_k . Ou ainda, se \mathbf{e}_k são escolhidos de maneira a cancelar o termo que contém a matriz jacobiana (como comentado em [3]) então obtemos

$$\begin{cases} 2\mathbf{p}^T \nabla \sqrt{\rho\beta^2} B + \sqrt{\rho\beta^2} B \nabla^2 T = 0, \\ 2\mathbf{p}^T \nabla \sqrt{\rho\beta^2} C + \sqrt{\rho\beta^2} C \nabla^2 T = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

que são duas equações do transporte desacopladas para B e C .

No capítulo seguinte mostraremos que equação iconal descreve a trajetória de um raio, através de um sistema de equações diferenciais ordinárias em um meio arbitrário e que sobre este trajeto a equação do transporte permite avaliar a amplitude de forma analítica.

⁴Para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e escalares $a, b \in \mathbb{R}$ temos $\|a\mathbf{v} + b\mathbf{w}\|^2 = a^2\|\mathbf{v}\|^2 + b^2\|\mathbf{w}\|^2 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Capítulo 3

Teoria de Raios

Vimos no capítulo anterior que, para encontrar a solução da equação elastodinâmica da onda (2.1), é necessário determinar a amplitude e o tempo de trânsito da onda.

Através da aproximação de alta frequência a propagação da onda é feita através de caminhos (curvas) que obedecem a duas importantes condições físicas: neles se concentram a parte da onda com alta frequência e ele é considerado o caminho onde o tempo de trânsito é estacionário (princípio de Fermat). Este caminho é dito *raio* e foi introduzido no Capítulo 2 de forma intuitiva.

Obter raios para diferentes tipos de meio é o objetivo deste capítulo. Isto significa que queremos extrair o máximo de informação possível deste caminho; nisto se enquadra amplitude e tempo de trânsito. Veremos que obter um raio é matematicamente equivalente a resolver um sistema de equações diferenciais e que para determinados tipos de meios é possível obter expressões analíticas para um raio. A solução do sistema de raios pode ser analítica e isso depende fortemente do tipo de velocidade adotado para o meio de propagação da onda.

3.1 Sistema de traçamento cinemático

Nesta seção vamos obter um sistema de equações diferenciais ordinárias que governa a propagação da onda em alta frequência através da equação iconal. Tal sistema é obtido fazendo uso de uma ferramenta matemática para resolução de equações diferenciais parciais, ele permite determinar o tempo de trânsito uma vez que se tenha em mãos o vetor posição e a direção sobre o raio. Obter estes três dados em conjunto constitui a parte cinemática de obter um raio.

3.1.1 Equações características: raios

Queremos determinar a função $T: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tempo de trânsito, solução de (2.7). Vimos que se $\mathbf{p} = \nabla T$ então obtemos a equação iconal $\mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1/v^2$. Esta é uma equação diferencial parcial não linear de primeira ordem. Vamos representá-la por

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, T) = \frac{1}{n} \left[(\mathbf{p}^T \mathbf{p})^{n/2} - \frac{1}{v(\mathbf{x})^n} \right] \quad (3.1)$$

com $n \in \mathbb{R}$. A solução da equação (3.1) pode ser encontrada pelo método das características. Este método é discutido extensivamente em [2, 7] por exemplo. Ele permite mostrar que o problema acima é equivalente a resolver um sistema de equações diferenciais da forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{du} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \mathbf{p}, \quad \frac{dT}{du} = \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3.2)$$

com u um parâmetro arbitrário. A demonstração desta equivalência pode ser encontrada no Apêndice A.2.

O operador \mathcal{H} é dito Hamiltoniano e neste trabalho vamos assumir que n assume valores no conjunto $\{-1, 0, 1, 2\}$ denominando-o de índice do Hamiltoniano. O operador \mathcal{H} está bem definido para $n = 0$. Com efeito, pela regra de L'Hopital

$$\lim_{n \rightarrow 0} \mathcal{H} = \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} [(\mathbf{p}^T \mathbf{p})^{n/2} - v(\mathbf{x})^{-n}] = \frac{1}{2} \ln(v^2(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T \mathbf{p}). \quad (3.3)$$

Para $n \neq 0$, o sistema (3.2) com o Hamiltoniano (3.1) resulta em:

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = v(\mathbf{x})^{2-n} \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{du} = \frac{1}{n} \nabla \left(\frac{1}{v(\mathbf{x})^n} \right), \quad \frac{dT}{du} = \frac{1}{v(\mathbf{x})^n}. \quad (3.4)$$

Se $n = 0$, então $T = u$ (a menos de uma constante) e de (3.3) obtemos as seguintes equações

$$\frac{d\mathbf{x}}{dT} = v(\mathbf{x})^2 \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dT} = \frac{1}{v(\mathbf{x})} \nabla v(\mathbf{x}) = -\nabla(\ln v(\mathbf{x})). \quad (3.5)$$

Dado um conjunto de condições iniciais \mathbf{x}_0 , \mathbf{p}_0 e T_0 para cada uma das equações acima, a solução de (3.4) é uma curva característica em \mathbb{R}^6 da forma (\mathbf{x}, \mathbf{p}) . A projeção, no domínio da função T , de uma curva característica em \mathbb{R}^3 é dita curva base característica. São funções vetoriais da forma $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo vetor tangente é paralelo a \mathbf{p} , o vetor vazarosidade. O raio é matematicamente representado por uma curva base característica, razão pela qual

referimo-nos também ao sistema (3.2) como sistema de raios. A definição de uma curva característica pode ser encontrada no Apêndice A.2.

O índice do Hamiltoniano desempenha neste trabalho o papel de determinar qual o tipo de parâmetro u que varia ao longo do raio e que torna o sistema de raios mais simples.

3.1.2 Soluções analíticas

Os sistemas (3.4) e (3.5) podem ser resolvidos numericamente pelo método de Runge-Kutta, por exemplo. No entanto, para determinadas escolhas do campo de velocidades v este sistema admite solução analítica.

A importância de soluções analíticas para o sistema de raios vem junto com a vantagem (e a necessidade) de se traçar raios de forma fácil e rápida. Visando isto, apresentaremos cinco tipos de soluções analíticas para o sistema de raios. Em cada uma das soluções queremos exibir fórmulas analíticas fechadas para as funções \mathbf{x} , \mathbf{p} e T em função do parâmetro u que varia ao longo do raio.

Vamos assumir que a velocidade $v: L \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas contínuas até a segunda ordem e que verifica a seguinte propriedade,

$$\Phi(v(\mathbf{x})) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} + a_0, \quad (3.6)$$

onde Φ pode ser v , $1/v^2$ ou $\ln v$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ uma matriz com algumas restrições, como veremos adiante.

Impomos a condição de $\Phi(v)$ ser um função estritamente positiva, ou seja $\Phi(v(\mathbf{x})) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in L$; isto sempre pode ser feito através de uma escolha adequada dos coeficientes \mathbf{A} , \mathbf{a} e a_0 .

Nesta seção, consideramos meios onde a distribuição de velocidade não apresenta nenhum tipo de descontinuidade. Isto é feito para estabelecer expressões analíticas para o raio que se propaga em meios onde não há interfaces. A consideração de velocidades descontínuas no meio é feita nas próximas seções e/ou capítulos.

Mudança de variáveis

Os raios que nos interessam em meios 2.5D são aqueles confinados a um plano vertical e por isso trata-se geometricamente de uma curva no espaço cujos pontos tem segunda componente constante. Isto significa que em (3.6) consideramos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ um vetor com x_2 constante, que sem perda de

generalidade assume-se nulo. Logo, os coeficientes \mathbf{A} e \mathbf{a} são da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{31} & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 0 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Apenas para auxiliar o procedimento analítico ao longo do trabalho, consideraremos a operação \mathcal{P} dada em (1). Assim, quando for conveniente, olharemos para a o modelo geral de velocidades (3.6) com $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ e $\mathcal{P}(\mathbf{a})$ no lugar dos coeficientes \mathbf{A} e \mathbf{a} , transformando a equação em apenas duas dimensões nas variáveis $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = (x_1, x_3)^T$.

A. Velocidade constante

Tomando \mathbf{A} e \mathbf{a} nulos em (3.6), obtemos velocidade constante, $v(\mathbf{x}) = v_0 > 0$. Neste caso escolhemos por conveniência o índice do Hamiltoniano $n = 1$ e do sistema (3.4) obtemos dimensão de distância para o parâmetro u . Logo, $u \equiv s$ identifica o comprimento de arco. Portanto, $dT/ds = 1/v_0$ implica $T(s) = T_0 + (s - s_0)/v_0$ e $d\mathbf{p}/ds = 0$ implica em $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_0$. O vetor posição sobre o raio é dado por

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = v_0\mathbf{p}(s) \Rightarrow \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + v_0\mathbf{p}_0(s - s_0). \quad (3.8)$$

Da equação (3.8) é imediato verificar que a curva base característica determinada pelo vetor posição $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ é uma semi-reta partindo de \mathbf{x}_0 . Neste caso as frentes de onda são círculos concêntricos a \mathbf{x}_0 , com centro em \mathbf{x}_0 . Com efeito, a frente de onda é o lugar geométrico dos pontos \mathbf{x} de \mathbb{R}^3 que estão a um tempo constante t da posição inicial, isto é, da equação iconal

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \|v_0\mathbf{p}_0(s - s_0)\| = |s - s_0| = v_0|t - T_0|,$$

ou seja \mathbf{x} pertence ao círculo centrado em \mathbf{x}_0 e de raio $v_0|t - T_0|$.

A geometria de raios em meios de velocidade constante é esboçada na Figura 3.1.

B. Velocidade afim

Considerando $\Phi(v) = v$ em (3.6) com $\mathbf{A} = 0$ obtemos $v(\mathbf{x}) = a_0 + \mathbf{a}^T\mathbf{x}$. Neste caso escolhemos o índice do Hamiltoniano como $n = -1$. Logo, de $dT/du = v(\mathbf{x})$ o parâmetro u possui dimensão de aceleração e o denotamos por $u \equiv \xi$.

Como $\|p\| = 1/v$, o sistema (3.4) fica da seguinte forma,

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\xi} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^3}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\xi} = -\nabla v(\mathbf{x}), \quad \frac{dT}{d\xi} = v(\mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Como $\nabla v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, podemos resolver primeiro para o vetor vanguarda,

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\xi} = -\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{p}(\xi) = \mathbf{p}_0 - \mathbf{a}(\xi - \xi_0). \quad (3.10)$$

Vamos resolver agora para o vetor posição. Do cálculo elementar (ver [1] por exemplo) sabemos que se $\sigma \geq 0$ então

$$\int \frac{dq}{(\sqrt{\sigma + q^2})^3} = \sin \arctan \frac{q}{\sqrt{\sigma}}, \quad \int \frac{q dq}{(\sqrt{\sigma + q^2})^3} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma + q^2}}. \quad (3.11)$$

Então, de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|^3$ obtemos

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}_0 + \int_0^{\xi - \xi_0} \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}w)}{\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}w\|^3} dw \doteq \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(\xi - \xi_0), \quad (3.12)$$

onde só precisamos determinar quem é a função vetorial \mathbf{v} . Ora, se $\alpha = \|\mathbf{p}_0\|^2$, $\beta = \mathbf{p}_0^T \mathbf{a}$ e $\delta = \|\mathbf{a}\|^2$ então $\alpha - 2\beta w + \delta w^2 = \delta [(w - \kappa)^2 + \sigma]$ com $\kappa = \beta/\delta$, $\sigma = \alpha/\delta - \kappa^2$ e $\sigma > 0$. De fato, pela desigualdade de Schwarz,

$$\sigma = \frac{\|\mathbf{p}_0\|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} - \frac{(\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0)^2}{\|\mathbf{a}\|^4} \geq \frac{\|\mathbf{p}_0\|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} - \frac{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{p}_0\|^2}{\|\mathbf{a}\|^4} = 0 \quad (3.13)$$

(o caso $\sigma = 0$ é discutido na próxima seção). Portanto, de (3.11) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\eta) &= \int_0^\eta \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}w)}{(\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}w\|^2)^{3/2}} dw = \int_0^\eta \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}w)}{(\sqrt{\alpha - 2\beta w + \delta w^2})^3} dw \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^3} \int_0^\eta \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}w)}{(\sqrt{\sigma + (w - \kappa)^2})^3} dw \\ &= \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}\kappa)}{\|\mathbf{a}\|^3} \sin \arctan \frac{w - \kappa}{\sqrt{\sigma}} \Big|_0^\eta + \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^3} \frac{1}{\sqrt{\sigma + (w - \kappa)^2}} \Big|_0^\eta. \end{aligned}$$

Uma vez que $\sqrt{\sigma + \kappa^2} = \|\mathbf{p}_0\|/\|\mathbf{a}\|$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\eta) &= \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}\kappa)}{\|\mathbf{a}\|^3} \left\{ \sin \arctan \frac{\eta - \kappa}{\sqrt{\sigma}} + \sin \arctan \frac{\kappa}{\sqrt{\sigma}} \right\} \\ &\quad + \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma + (\eta - \kappa)^2}} - \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{p}_0\|} \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Falta agora determinar o tempo de trânsito ao longo do raio. De $\dot{T} = v(\mathbf{x})$ temos, $\dot{T} = a_0 + \mathbf{a}^T [\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(\xi - \xi_0)] = v(\mathbf{x}_0) + \mathbf{a}^T \mathbf{v}(\xi - \xi_0)$ e como $\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0 - \kappa \|\mathbf{a}\|^2 = 0$, vem de (3.14) que

$$\mathbf{a}^T \mathbf{v}(\eta) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma + (\eta - \kappa)^2}} - \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{p}_0\|} \right\}.$$

Portanto

$$T(\xi) = T_0 + v(\mathbf{x}_0)(\xi - \xi_0) + I_T(\xi - \xi_0), \quad (3.15)$$

com

$$\begin{aligned} I_T(\eta) &= \int_0^\eta \mathbf{a}^T \mathbf{I}(w) dw = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \int_0^\eta \frac{dw}{\sqrt{\sigma + (w - \kappa)^2}} - \frac{1}{\|\mathbf{p}_0\|} \eta \\ &= \ln \left\{ \sec \arctan \frac{w - \kappa}{\sqrt{\sigma}} + \frac{w - \kappa}{\sqrt{\sigma}} \right\} \Big|_0^{\xi - \xi_0} - \frac{1}{\|\mathbf{p}_0\|} \eta. \end{aligned}$$

Finalmente, como $v(\mathbf{x}_0) = 1/\|\mathbf{p}_0\|$ temos,

$$T(\xi) = T_0 + \ln \left\{ \frac{\sec \arctan \frac{\xi - \xi_0 - \kappa}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\xi - \xi_0 - \kappa}{\sqrt{\sigma}}}{\sec \arctan \frac{-\kappa}{\sqrt{\sigma}} + \frac{-\kappa}{\sqrt{\sigma}}} \right\}. \quad (3.16)$$

A geometria de raios em meios de velocidade afim é esboçada na Figura 3.1.

C. Quadrado da vagarosidade afim

Neste caso, consideramos $\Phi(v) = 1/v^2$ em (3.6) com $\mathbf{A} = 0$ obtendo $1/v(\mathbf{x})^2 = a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \in L$. Escolhendo $n = 2$ como o índice do Hamiltoniano temos $dT/du = v^{-2}$ donde o parâmetro u possui dimensão de espaço multiplicado por velocidade, denotando-o por $u \equiv \sigma$. O sistema de raios (3.4) fica

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{1}{v(\mathbf{x})^2} \right), \quad \frac{dT}{d\sigma} = \frac{1}{v(\mathbf{x})^2}. \quad (3.17)$$

Como $\nabla(1/v^2) = \mathbf{a}$, a equação para o vetor vagarosidade apresenta fácil solução. De fato,

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{\mathbf{a}}{2} \Rightarrow \mathbf{p}(\sigma) = \mathbf{p}_0 + (\sigma - \sigma_0) \frac{\mathbf{a}}{2}. \quad (3.18)$$

Logo, de $d\mathbf{x}/d\sigma = \mathbf{p}(\sigma)$ obtemos

$$\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{x}_0 + \int_{\sigma_0}^\sigma \left[\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{a} w \right] dw = \mathbf{x}_0 + (\sigma - \sigma_0) \mathbf{p}_0 + (\sigma - \sigma_0)^2 \frac{\mathbf{a}}{4}. \quad (3.19)$$

É portanto imediato que

$$T(\sigma) = T_0 + \frac{\sigma - \sigma_0}{v_0^2} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_0 (\sigma - \sigma_0)^2 + \frac{1}{12} \mathbf{a}^T \mathbf{a} (\sigma - \sigma_0)^3. \quad (3.20)$$

Cada raio está contido em um arco de circunferência. Para verificar isto, basta observar que a curvatura do raio é constante, $K(\sigma) = \left\| \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right) \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} \right\| = \left\| \frac{\mathbf{a}}{2} \right\|$.

A geometria de raios em meios cujo quadrado da vagarosidade é afim é esboçada na Figura 3.1.

D. Quadrado da vagarosidade quadrático

Em (3.6) assumiremos $\Phi(v) = 1/v^2$ com \mathbf{A} uma matriz simétrica, \mathbf{a} e a_0 quaisquer. Então, de $1/v(\mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} + a_0$ obtemos $\nabla(1/v^2) = 2\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$ e o sistema de raios como em (3.17), com parâmetro $u \equiv \sigma$ e índice do Hamiltoniano $n = 2$, tal como no modelo de vagarosidade afim.

Assumiremos dimensão dois para as matrizes envolvidas acima¹. Sem perda de generalidade assumiremos que $\sigma_0 = 0$. Então, resolvendo para o vetor vagarosidade, sabendo que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ obtemos

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{1}{v(\mathbf{x})^2} \right) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{a} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{p}}{d\sigma^2} = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{A}\mathbf{p}.$$

As soluções fundamentais de $\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ são $\mathbf{p}(\sigma) = e^{\pm\sigma\sqrt{\mathbf{A}}}\mathbf{p}_0$. Cada uma destas soluções existe desde que exista a matriz $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$, que verifica $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$, [11]. Isto é garantido se a matriz \mathbf{A} é positiva definida [12].

Como \mathbf{A} é simétrica, seus autovalores são reais e existe sempre uma decomposição espectral para \mathbf{A} , isto é $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$. Neste caso, é fácil verificar que

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\sqrt{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}, \quad (3.21)$$

sendo esta matriz real ou complexa dependendo do sinal de cada autovalor.

A exponencial da matriz $\sigma\sqrt{\mathbf{A}}$ é definida através de (3.21) por $e^{\sigma\sqrt{\mathbf{A}}} = \mathbf{S} \text{diag}(e^{\sigma\sqrt{\lambda_j}}) \mathbf{S}^{-1}$. Esta não é a única forma de se obter a exponencial de uma matriz, mas resulta ser a mais conveniente para o caso simétrico; mais sobre este processo pode ser encontrado em [22]. As soluções reais do sistema de equações $\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ são dadas no Lema A.3.1, no Apêndice A. Este lema

¹Tendo em vista o tratamento de raios em meios 2.5D, o que significa que estamos considerando $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ e $\mathcal{P}(\mathbf{a})$ com \mathcal{P} a operação (1).

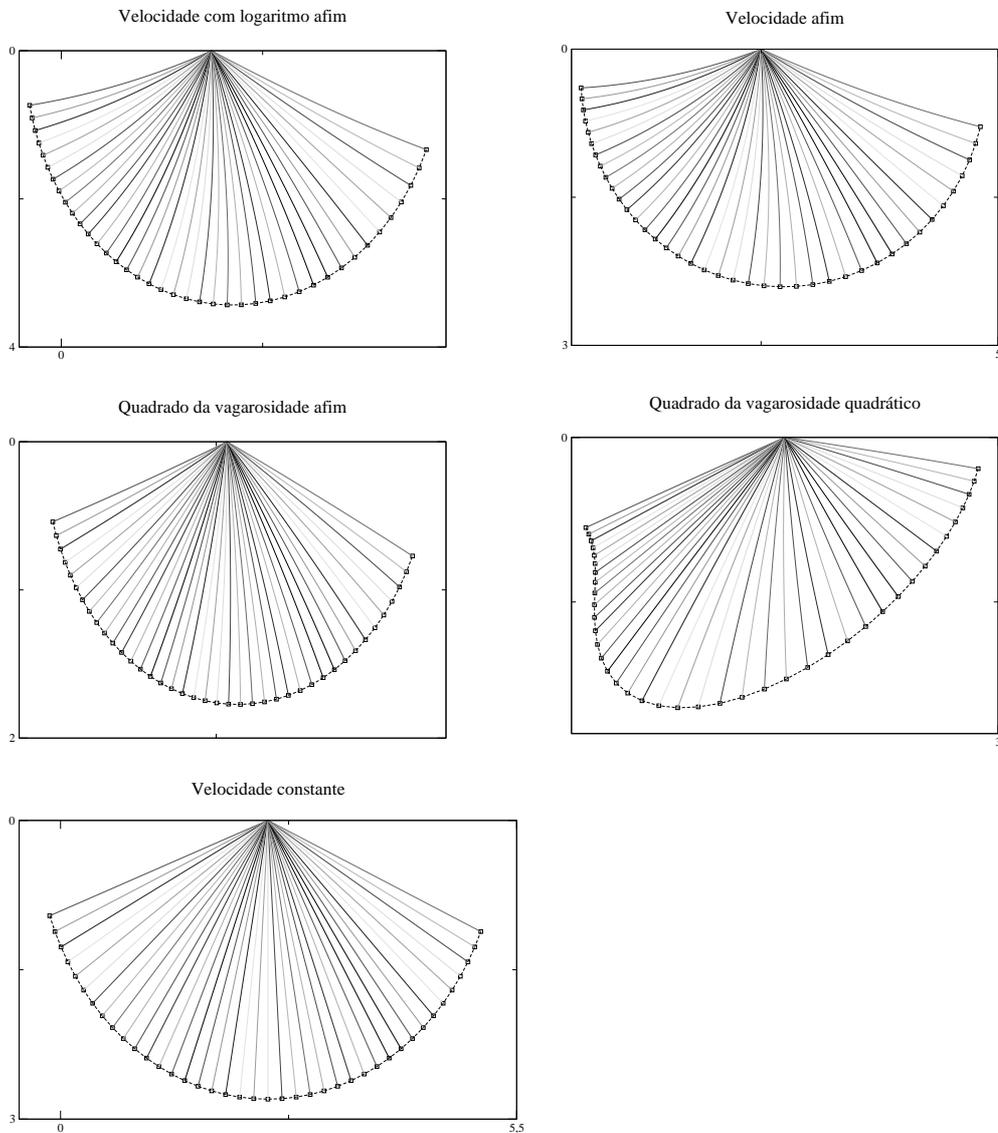


Figura 3.1: Geometria de raios para os cinco tipos de modelos estudados. Cada gráfico representa uma coleção de raios que emana de uma fonte pontual e atinge um determinado tempo; a coleção deste pontos finais representa a frente de onda para o tempo dado. No caso de velocidade constante a frente de onda é um arco de círculo e os raios são retas.

fornece a solução para o vetor vagarosidade em termos dos autovalores da matriz \mathbf{A} . A solução geral é da forma

$$\mathbf{p}(\sigma) = \xi \mathbf{p}_1(\sigma) + \eta \mathbf{p}_2(\sigma), \quad (3.22)$$

com ξ e η escalares e \mathbf{p}_k soluções fundamentais do lema acima. De $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ obtemos $\xi + \eta = 1$ e de $\dot{\mathbf{p}}(0) = \dot{\mathbf{p}}_0$ com $\dot{\mathbf{p}}_0 = \xi \dot{\mathbf{p}}_1(0) + \eta \dot{\mathbf{p}}_2(0)$, obtemos, multiplicando pelo transposto de \mathbf{p}_0 ,

$$\mathbf{p}_0^T \dot{\mathbf{p}}_0 = \xi \mathbf{p}_0^T \dot{\mathbf{p}}_1(0) + \eta \mathbf{p}_0^T \dot{\mathbf{p}}_2(0). \quad (3.23)$$

Resolvendo o sistema para (ξ, η) vem

$$\eta = \frac{\mathbf{p}_0^T (\dot{\mathbf{p}}_0 - \dot{\mathbf{p}}_1(0))}{\mathbf{p}_0^T (\dot{\mathbf{p}}_2(0) - \dot{\mathbf{p}}_1(0))}, \quad \xi = 1 - \eta, \quad (3.24)$$

onde, no caso do sistema de traçamento de raios $\dot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}$. Assim, o vetor posição é determinado por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ ou

$$\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{x}_0 + \xi \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathbf{p}_1(w) dw + \eta \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathbf{p}_2(w) dw, \quad (3.25)$$

e o trabalho analítico em se obter \mathbf{x} consiste apenas em integrar cada item do Lema A.3.1 anterior considerando (ξ, η) como em (3.24).

Denotando $\mathbf{f} = \int \mathbf{p}_1$ e $\mathbf{g} = \int \mathbf{p}_2$ o vetor posição é escrito por

$$\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{f}(\sigma) + \eta \mathbf{g}(\sigma), \quad (3.26)$$

e o tempo de trânsito segue de (3.26):

$$\frac{dT}{d\sigma} = 1/v_0^2 + 2\xi(\mathbf{A}\mathbf{f})^T \mathbf{x}_0 + 2\eta \mathbf{A}\mathbf{g}^T \mathbf{x}_0 + 2\xi\eta \mathbf{A}\mathbf{g}^T \mathbf{f} + \mathbf{a}^T (\xi \mathbf{f} + \eta \mathbf{g}) + \xi^2 (\mathbf{A}\mathbf{f})^T \mathbf{f} + \eta^2 (\mathbf{A}\mathbf{g})^T \mathbf{g}, \quad (3.27)$$

com $v_0 = v(\mathbf{x}_0)$, ou, integrando em relação ao parâmetro σ ,

$$\begin{aligned} T(\sigma) &= T_0 + \frac{\sigma}{v_0^2} + 2\xi(\mathbf{A}\mathbf{F})^T \mathbf{x}_0 + 2\eta(\mathbf{A}\mathbf{G})^T \mathbf{x}_0 \\ &+ 2\xi\eta \int_0^{\sigma} [\mathbf{A}\mathbf{g}(w)]^T \mathbf{f}(w) dw + \mathbf{a}^T (\xi \mathbf{F} + \eta \mathbf{G}), \\ &+ \xi^2 \int_0^{\sigma} [\mathbf{A}\mathbf{f}(w)]^T \mathbf{f}(w) dw + \eta^2 \int_0^{\sigma} [\mathbf{A}\mathbf{g}(w)]^T \mathbf{g}(w) dw \end{aligned} \quad (3.28)$$

Lema A.3.1	Funções \mathbf{f} e \mathbf{F}	Funções \mathbf{g} e \mathbf{G}
(i)	$\mathbf{f} = \mathbf{B}^{-1}[\exp \sigma\sqrt{\mathbf{A}} - \mathbf{I}]\mathbf{p}_0$ $\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{f}(\sigma) - \sigma\mathbf{p}_0]$	$\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{I} - \exp(-\sigma\sqrt{\mathbf{A}})]\mathbf{p}_0$ $\mathbf{G} = -\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{g}(\sigma) - \sigma\mathbf{p}_0]$
(ii)	$\mathbf{f} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^{-1/2} \sin(\sigma\sqrt{\mathbf{\Lambda}})\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$ $\mathbf{F} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^{-1}[\mathbf{I} - \cos(\sigma\sqrt{\mathbf{\Lambda}})]\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$	$\mathbf{g} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}[\mathbf{I} - \cos(\sigma\sqrt{\mathbf{\Lambda}})]\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$ $\mathbf{G} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^{-1}[\sigma\sqrt{\mathbf{\Lambda}} - \sin(\sigma\sqrt{\mathbf{\Lambda}})]\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$
(iii)	$\mathbf{f} = \mathbf{S}\text{diag} \left\{ \frac{e^{\sigma\sqrt{\lambda_1}} - 1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\sin \sigma\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{-\lambda_2}} \right\} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$ $\mathbf{F} = \mathbf{S}\text{diag} \left\{ \frac{e^{\sigma\sqrt{\lambda_1}} - 1 - \sigma}{\lambda_1}, \frac{\cos \sigma\sqrt{-\lambda_2} - 1}{\lambda_2} \right\} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$	$\mathbf{g} = \mathbf{S}\text{diag} \left[0, \frac{1 - \cos \sigma\sqrt{-\lambda_2} - 1}{\sqrt{-\lambda_2}} \right] \mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$ $\mathbf{G} = \mathbf{S}\text{diag} \left[0, \frac{\sigma}{\sqrt{-\lambda_2}} - \frac{\sin \sigma\sqrt{-\lambda_2}}{\lambda_2} \right] \mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$
(iv)	$\mathbf{f} = \left\{ \frac{\sigma}{\lambda_k} \mathbf{D} + \frac{e^{\sigma\sqrt{\lambda_k}} - 1}{\lambda_k^{3/2}} \mathbf{A} \right\} \mathbf{p}_0$ $\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} \mathbf{D}\mathbf{p}_0 + \left\{ \frac{\exp(\sigma\sqrt{\lambda_k}) - 1}{\lambda_k^2} - \frac{\sigma}{\lambda_k^{3/2}} \right\} \mathbf{A}\mathbf{p}_0$	$\mathbf{g} = \left\{ \frac{\sigma}{\lambda_k} \mathbf{D} + \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\lambda_k}}}{\lambda_k^{3/2}} \mathbf{A} \right\} \mathbf{p}_0$ $\mathbf{G} = \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} \mathbf{D}\mathbf{p}_0 + \left\{ \frac{\exp(-\sigma\sqrt{\lambda_k}) - 1}{\lambda_k^2} + \frac{\sigma}{\lambda_k^{3/2}} \right\} \mathbf{A}\mathbf{p}_0$
(v)	$\mathbf{f} = \frac{\sigma}{\lambda_k} \mathbf{D} + \frac{\cos \sigma\sqrt{-\lambda_k} - 1}{\lambda_k \sqrt{-\lambda_k}} \mathbf{A} \mathbf{p}_0$ $\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} \mathbf{D}\mathbf{p}_0 - \left\{ \frac{\sin(\sigma\sqrt{-\lambda_k})}{\lambda_k^2} + \frac{\sigma}{\lambda_k \sqrt{-\lambda_k}} \right\} \mathbf{A}\mathbf{p}_0$	$\mathbf{g} = \frac{-\sin \sigma\sqrt{-\lambda_k}}{\lambda_k \sqrt{-\lambda_k}} \mathbf{A} \mathbf{p}_0$ $\mathbf{G} = \left\{ \frac{1 - \cos(\sigma\sqrt{-\lambda_k})}{\lambda_k^2} \right\} \mathbf{A}\mathbf{p}_0$

Tabela 3.1: Funções \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{F} e \mathbf{G} para diferentes soluções fundamentais, como no Lema A.3.1. Considera-se $\mathbf{D} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$.

com $\mathbf{F}(\sigma) = \int_0^\sigma \mathbf{f}(w)dw$ e $\mathbf{G} = \int_0^\sigma \mathbf{g}(w)dw$. O tempo de trânsito é semi-analítico, pois não há uma primitiva para cada uma das integrais em (3.28). As funções \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{F} e \mathbf{G} estão apresentadas na Tabela 3.1.

A geometria de raios em meios cujo quadrado da vagarosidade é quadrático é esboçada na Figura 3.1.

Exemplo (de [3]): Em um meio lateralmente heterogêneo cujo quadrado da vagarosidade varia com o quadrado da profundidade z temos $1/v(z)^2 = cz^2 + bz + d$. Este caso se enquadra em (3.6) com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad a_0 = d.$$

Os autovalores de \mathbf{A} são 0 e c e a matriz de autovetores é $\mathbf{S} = \mathbf{I}$. Segue que $\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{S}\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}\{c, 0\}$. Este é um dos casos (iv) e (v) do Lema A.3.1, dependendo do sinal de c . Para c positivo temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{x}_0 + \xi \frac{\sigma}{c} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{01} \\ \mathbf{p}_{02} \end{bmatrix} + \xi \frac{e^{\sigma\sqrt{c}} - 1}{c^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ c\mathbf{p}_{02} \end{bmatrix} \\ + \eta \frac{\sigma}{c} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{01} \\ \mathbf{p}_{02} \end{bmatrix} + \eta \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{c}}}{c^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ c\mathbf{p}_{02} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

com ξ e η como em (3.24). Se fazemos referência aos eixos coordenados por x e z então,

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= x_0 + (\xi + \eta)p_{0x}\sigma = x_0 + p_{0x}, \\ z(\sigma) &= z_0 + (\xi B)e^{\sigma\sqrt{c}} - (\eta B)e^{-\sigma\sqrt{c}} + B, \end{aligned} \quad (3.30)$$

com $B = p_{0z}/\sqrt{c}$.

E. Velocidade com logaritmo afim

Consideramos $\Phi(v) = \ln v$ em (3.6) com $\mathbf{A} = 0$, ou seja $\ln v(\mathbf{x}) = a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{x}$. O parâmetro conveniente que varia ao longo do raio é o próprio tempo de trânsito, $u \equiv T$, e o índice do Hamiltoniano escolhido é $n = 0$. Do sistema (3.5) obtemos

$$\frac{d\mathbf{x}}{dT} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^T \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dT} = -\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_0 - T\mathbf{a}$ e

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 + \int_0^{T-T_0} \frac{\mathbf{p}_0 - w\mathbf{a}}{aw^2 - bw + c} dw,$$

com $a = \|\mathbf{a}\|^2$, $b = 2\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0$ e $c = \|\mathbf{p}_0\|^2$. Logo, pela desigualdade de Schwarz

$$\sigma = c - \frac{b^2}{4a} = \|\mathbf{p}_0\|^2 - \frac{(\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0)^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \geq 0, \quad (3.31)$$

(o caso $\sigma = 0$ é apresentado na próxima seção) $\kappa = b/2a$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \mathbf{x}_0 + \frac{1}{a} \int_0^{T-T_0} \frac{\mathbf{p}_0 - w\mathbf{a}}{(w - \kappa)^2 + (\sigma/a)} dw \\ &= \mathbf{x}_0 + \frac{(\mathbf{p}_0 - \kappa\mathbf{a})}{\sqrt{a\sigma}} \arctan \sqrt{\frac{a}{\sigma}}(w - \kappa) \Big|_0^{T-T_0} - \frac{\mathbf{a}}{2a} \ln \left[(w - \kappa)^2 - \frac{\sigma}{a} \right] \Big|_0^{T-T_0} \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 + \frac{(\mathbf{p}_0 - \kappa\mathbf{a})}{\sqrt{a\sigma}} f_1(T - T_0) - \frac{\mathbf{a}}{2a} f_2(T - T_0), \quad (3.32)$$

onde

$$f_1(w) = \arctan \sqrt{\frac{a}{\sigma}}(w - \kappa) + \arctan \sqrt{\frac{a}{\sigma}} \kappa, \quad f_2(w) = \ln \left[\frac{(w - \kappa)^2 - (\sigma/a)}{\kappa^2 - (\sigma/a)} \right].$$

A geometria de raios em meios de logaritmo da velocidade afim é esboçada na Figura 3.1.

3.1.3 Região de viabilidade para direções iniciais

Os modelos de velocidade afim ($n = -1$) e velocidade com logaritmo afim ($n = 2$) apresentados na seção anterior admitem solução analítica fechada desde que as constantes σ em (3.31) e (3.13) sejam não nulas. Em ambos casos, se $\sigma = 0$ então

$$(\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0)^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{p}_0\|^2, \quad (3.33)$$

isto é, \mathbf{a} e \mathbf{p}_0 são linearmente dependentes. Mostraremos que se este é o caso então o sistema que define a posição do raio não tem solução. Tais sistemas são da forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dT} = \frac{\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}T}{\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}T\|^2} \equiv \mathbf{g}(T), \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} = \frac{\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}\xi}{\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}\xi\|^3} \equiv \mathbf{h}(\xi).$$

Para verificar que o problema não é bem posto quando \mathbf{p}_0 é escolhido como em (3.33), basta mostrar que as funções \mathbf{g} e \mathbf{h} não satisfazem à condição de Lipschitz. Mas isto é imediato uma vez que

$$\mathbf{h}(\xi) = \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}\xi)/\|\mathbf{a}\|^3}{\sqrt{\left(\xi - \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)^2 + \sigma_{-1}}}, \quad \mathbf{g}(T) = \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a}T)/\|\mathbf{a}\|}{\left(T - \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)^2 + \sigma_2}, \quad (3.34)$$

donde, se $\sigma_{-1} = \sigma_2 \equiv 0$ então \mathbf{g} e \mathbf{h} não possuem derivada limitada na vizinhança de $\mathbf{a}^T \mathbf{p}_0 / \|\mathbf{a}\|^2$, ou seja não satisfazem à condição de Lipschitz.

3.2 Sistema de traçamento dinâmico

Obter valores de amplitudes ao longo do raio consiste na parte dinâmica de um traçamento. Um sistema de traçamento dinâmico de raios permite construir quantidades dinâmicas, em um sistema de coordenadas centrado no raio, que torna mais fácil a tarefa de avaliar amplitudes. Tal como na seção anterior, mostraremos que este sistema adquire forma peculiar quando consideramos o modelo de velocidade (3.6).

Cada raio no espaço é identificado através de um vetor $g \in \mathbb{R}^3$. Sua terceira coordenada identifica qual o parâmetro que está variando ao longo do raio, isto é $g_3 = u$ e denotamos $g = (\mathbf{g}^T, u)^T$. Ao fazer \mathbf{g} variar sobre algum conjunto pré-determinado obtemos uma família de raios partindo de um certo ponto inicial. Em particular, se \mathbf{x} denota o vetor posição de um raio e u representa tempo, então a coleção de pontos $\mathbf{y} \in \mathbf{x}(\mathbf{g}, u)$ para u fixo, determina a superfície frente de onda cuja parametrização é dada por \mathbf{g} . Logo, os vetores $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g_k}$, $k = 1, 2$ determinam um plano tangente sobre cada ponto desta superfície.

A parametrização $\mathbf{x} = \mathbf{x}(g)$ deve sempre estar bem definida [2], ou seja $\det J_{(\mathbf{x},g)}(g) \neq 0 \forall g$, e em particular sobre cada ponto do raio, isto é para todo u , usaremos a notação $J^{(u)} = \det J_{(\mathbf{x},g)}(\mathbf{g}, u)$. É fácil perceber que a última coluna da matriz $J_{(\mathbf{x},g)}$ representa o vetor $d\mathbf{x}/du$ pois $g_3 = u$. Daí, se s denota o parâmetro comprimento de arco então

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{1}{\frac{du}{ds}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{1}{g_u} = \mathbf{N} \frac{1}{g_u}$$

com $g_u = du/ds$ e \mathbf{N} o vetor normal à frente de onda (paralelo ao vetor vazarosidade). Portanto o jacobiano do raio pode ser escrito em termos de um produto misto

$$J^{(u)} = \frac{1}{g_u} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g_2} \right)_u \cdot \mathbf{N}. \quad (3.35)$$

Definiremos $J(u) = J^{(u)}/g_u$ o jacobiano ao longo do raio. Para obter a solução da equação do transporte costuma-se considerar um volume que determina uma vizinhança paraxial do raio Ω , limitado por superfícies de $\mathbf{x}(\mathbf{g}, \cdot)$ de u constante. Em seguida, aplica-se o Teorema da divergência e a fórmula da média para integrais e obtem-se a amplitude ao longo do raio da seguinte forma

$$A(u) = \left[\frac{\rho(u_0)c(u_0)J(u_0)}{\rho(u)c(u)J(u)} \right]^{1/2} A(u_0), \quad (3.36)$$

com c a velocidade e ρ a densidade do meio. A demonstração de (3.36) pode ser encontrada em [2, 3].

A única função ainda indeterminada, para fins de avaliação em (3.36) é o jacobiano J . No entanto, em vista de (3.35), basta somente determinar os vetores $\mathbf{y}_k \doteq \partial \mathbf{x} / \partial g_k$ para $k = 1, 2$ para construir J . Uma idéia para obter tais vetores sugerida em [2], consiste apenas em usar a regra da cadeia. De fato, se $h = v^{2-n}$ e $\mathbf{z}_k = \partial \mathbf{p} / \partial g_k$ então, pelo sistema de raios:

$$\frac{d\mathbf{y}_k}{du} = \frac{d}{du} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g_k} = \frac{\partial}{\partial g_k} \frac{d\mathbf{x}}{du} = \frac{\partial(h\mathbf{p})}{\partial g_k} = \frac{\partial h}{\partial g_k} \mathbf{p} + h \mathbf{z}_k = (\nabla h^T \mathbf{y}_k) \mathbf{p} + h \mathbf{z}_k$$

e, para $f = v^{-n}/n$:

$$\frac{d\mathbf{z}_k}{du} = \frac{d}{du} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial g_k} = \frac{\partial}{\partial g_k} \frac{d\mathbf{p}}{du} = \frac{\partial(\nabla f)}{\partial g_k} = \nabla (\nabla f^T \mathbf{y}_k) = \mathbf{H}_f \mathbf{y}_k.$$

com \mathbf{H}_f a matriz Hessiana de f . Logo, se $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ e $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ então podemos agrupar as duas equações anteriores no sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{p} \nabla h^T \mathbf{Y} + h \mathbf{Z} \\ \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{H}_f \mathbf{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{du} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \nabla h^T & h \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

O sistema (3.37) pode ser resolvido analiticamente para alguns dos casos de velocidade apresentados neste trabalho, por exemplo velocidade constante. No entanto, sua solução fornece apenas informação necessária à obtenção do jacobiano. Veremos que através da introdução de um sistema de coordenadas dinâmico, ou seja, que varia ao longo do raio, podemos obter outras informações além do jacobiano como, por exemplo, o espalhamento geométrico.

3.2.1 Sistema de coordenadas centrado no raio

Seja um raio Ω especificado por um par $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$. Como estamos tratando de meio 2.5D, $\Omega \in \pi$ com π um plano de x_2 constante. Para cada ponto $\mathbf{x}(u) \in \Omega$ introduzimos um sistema ortonormal de coordenadas $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ denotado por \mathcal{E}_u , onde cada vetor \mathbf{e}_k depende de u e \mathbf{e}_3 coincide com o vetor tangente ao raio, $\mathbf{N} = v(u)\mathbf{p}(u)$.

A Figura 3.2 ilustra o sistema centrado no raio. As coordenadas em relação à base \mathcal{E}_u são denotadas por $q = (q_1, q_2, q_3)^T = (\mathbf{q}^T, q_3)^T$ com \mathbf{q} coordenadas em relação ao plano π^q (veja Figura 3.2). A terceira coordenada denota o parâmetro que varia ao longo do raio, isto é $q_3 = u$.

Como o raio Ω é planar, o vetor \mathbf{e}_2 permanece sempre constante² de modo que podemos considerar $\mathbf{e}_1(u) = \mathbf{e}_2(u) \times \mathbf{e}_3(u) = v(u)(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{p}(u))$.

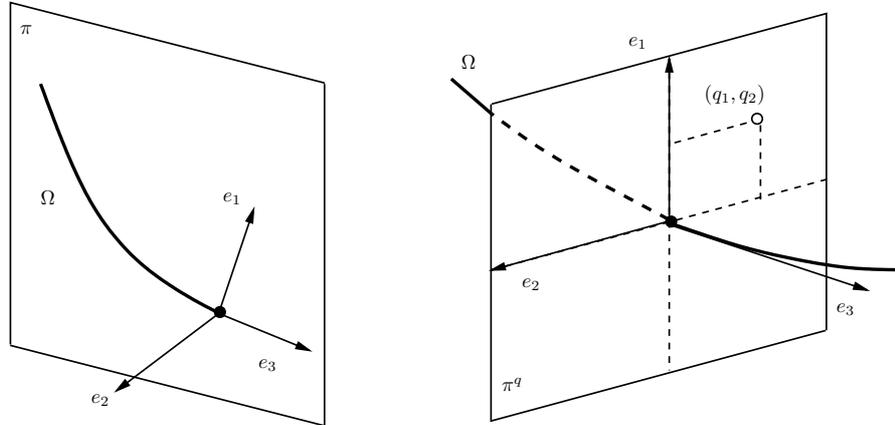


Figura 3.2: Sistema centrado em um raio planar $\Omega \in \pi$. O vetor \mathbf{e}_2 da base ortonormal \mathcal{E}_u permanece constante ao longo do raio.

Introduzindo este novo sistema teremos sempre $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$ e $q = q(g)$. Assim, o objetivo inicial de obter $J_{(\mathbf{x},g)}$ é reduzido ao objetivo de encontrar

²Em [3] mostra-se que os vetores e_k , $k = 1, 2$ que determinam o plano π^q devem satisfazer $d\mathbf{e}_k/du = v^{1-n}\mathbf{p}(u)\nabla v(u)^T\mathbf{e}_k$. Estes vetores não são necessariamente os vetores normal, tangente e binormal ao raio Ω .

$J_{(q,g)}$. Com efeito, pela regra da cadeia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q(g)) \Rightarrow J_{(\mathbf{x},g)} = J_{(\mathbf{x},q)}J_{(q,g)}$ com $J_{(\mathbf{x},q)}$ conhecido. Assim, se $\mathcal{J} = \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ representa uma base cartesiana fixa (canônica por exemplo) então \mathbf{x} escrito na base \mathcal{J} e q escrito na base \mathcal{E}_u são relacionados pela mudança de variáveis $\mathbf{x} = J_{(\mathbf{x},q)}q$, com $[J_{(\mathbf{x},q)}]_{ki} = \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{e}_i$.

Nota-se que $J_{(\mathbf{x},q)}$ é uma matriz ortogonal e que ao longo do raio Ω , a terceira coluna de $J_{(q,g)}(u)$ é $(0, 0, 1)^T$ pois $g_3 = u$ e $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Segue então da ortogonalidade³ de $J_{(\mathbf{x},q)}$ que

$$\begin{aligned} |J(u)| &= |\det J_{(\mathbf{x},g)}| = |\det J_{(\mathbf{x},q)}| |\det J_{(q,g)}| \\ &= |\det J_{(q,g)}| = |\det J_{(\mathbf{q},g)}|, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde $J_{(\mathbf{q},g)}$ é o jacobiano da mudança de variáveis $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{g})$. Dessa forma, determinar o jacobiano do raio é equivalente a obter o jacobiano de uma transformação bidimensional.

Pelo fato de \mathbf{e}_2 ser constante ao longo do plano π sobre o raio Ω , a matriz jacobiana $J_{(\mathbf{x},q)}$ resulta ser

$$J_{(\mathbf{x},q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{33} & 0 & \mathbf{e}_{31} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{e}_{31} & 0 & \mathbf{e}_{33} \end{bmatrix} = v(u) \begin{bmatrix} \mathbf{p}_3 & 0 & \mathbf{p}_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{p}_1 & 0 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

3.2.2 Sistema de traçamento centrado no raio

Queremos obter a matriz de derivadas $J_{(\mathbf{q},g)}$. Veremos que para este fim é suficiente construir um sistema de equações diferenciais ordinárias cuja solução resulta na matriz desejada.

Seja Ω' um raio na vizinhança *paraxial* de Ω , ou seja, um raio cujas coordenadas no sistema \mathcal{E}_u (cortando o plano π^q da Figura 3.2) são próximas de zero, para cada u , isto é $\mathbf{q} \approx \mathbf{0}$. Dizemos que o raio Ω' nestas condições é um raio *paraxial* a Ω .

No ponto $\mathbf{x}(\mathbf{q}, u)$ sobre o raio, Ω' possui vetor vagarosidade no sistema \mathcal{E}_u dado por $p^{(q)} = \nabla_q(T)$. Este vetor pode ser visto como o vetor vagarosidade \mathbf{p} do raio Ω no sistema \mathcal{E}_u , ou seja $p^{(q)} = J_{(\mathbf{x},g)}^{-1} \mathbf{p}$. Aqui, $p^{(q)} = (\mathbf{p}^{(q)}, p_3^{(q)})^T$.

Mostra-se em [19] que os vetores \mathbf{q} e $\mathbf{p}^{(q)}$ satisfazem ao seguinte sistema, dito *sistema dinâmico centrado no raio*,

$$\frac{d\mathbf{q}}{du} = v^{2-n} \mathbf{p}^{(q)}, \quad \frac{d\mathbf{p}^{(q)}}{du} = -\frac{\mathbf{V}}{v^{n+1}} \mathbf{q}, \quad (3.40)$$

com $\mathbf{V} = \mathbf{H}_v^{(q)}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$ a matriz Hessiana de v (na variável \mathbf{q}). Note que a matriz Hessiana \mathbf{V} pode ser obtida através da mudança de variáveis,

$$\mathbf{V} = J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}^T \mathbf{H}_v J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}, \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (3.41)$$

³Uma matriz ortogonal tem sempre determinante unitário em módulo.

com \mathbf{H}_v a matriz Hessiana (em \mathbb{R}^3) em coordenadas cartesianas de $v = v(\mathbf{x})$ e $J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}$ a matriz formada pelas duas primeiras colunas de $J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}$.

Derivando $d\mathbf{q}/du$ e $d\mathbf{p}^{(q)}/du$ em (3.40) com relação a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ e utilizando o fato que em Ω (ou no raio paraxial Ω'), $\mathbf{p}^{(q)}$ e \mathbf{q} são nulos, obtemos

$$\frac{d}{du} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial g_k} \\ \frac{\partial \mathbf{p}^{(q)}}{\partial g_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v^{2-n}(u)\mathbf{I} \\ -\frac{\mathbf{V}}{v^{n+1}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial g_k} \\ \frac{\partial \mathbf{p}^{(q)}}{\partial g_k} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Seguindo a notação clássica de [3], sejam $\mathbf{Q} = J_{(\mathbf{q},\mathbf{g})}$ e $\mathbf{P} = J_{(\mathbf{p}^{(q)},\mathbf{g})}$, então podemos reescrever o sistema (3.42) por

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Q}}{du} = v^{2-n}(u) \mathbf{P} \\ \frac{d\mathbf{P}}{du} = -\frac{\mathbf{V}}{v^{n+1}(u)} \mathbf{Q} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{du} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v^{2-n}(u)\mathbf{I} \\ -\frac{\mathbf{V}(u)}{v^{n+1}(u)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

ou $d\mathbf{W}/du = \mathbf{S}(u)\mathbf{W}$ com $\mathbf{W} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})^T \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ e \mathbf{S} a matriz de coeficientes. O sistema (3.43) é dito sistema dinâmico de traçamento de raios. Em particular, sua solução nos permite determinar o jacobiano $J(u)$ através de $J(u) = \det \mathbf{Q}(u)$. Veremos na próxima seção que outras quantidades, também importantes à determinação de um raio, são obtidas deste sistema.

Matriz de propagação

O sistema não linear de equações diferenciais $d\mathbf{W}/du = \mathbf{S}(u)\mathbf{W}$ é denominado sistema dinâmico. Sua solução é dada por

$$\mathbf{W}(u) = \mathbf{\Pi}(u, u_0)\mathbf{W}_0 \quad (3.44)$$

onde $\mathbf{\Pi}$ é dita *matriz de propagação*. Esta matriz satisfaz às seguintes propriedades: (i) $\mathbf{\Pi}(u, u) = \mathbf{I}$, (ii) $\mathbf{\Pi}^{-1}(u, u_0) = \mathbf{\Pi}(u_0, u)$ e (iii) $\mathbf{\Pi}(u, u_0) = \mathbf{\Pi}(u, a)\mathbf{\Pi}(a, u_0)$ para quaisquer escalares u, u_0 e a . Mostra-se, derivando em relação ao parâmetro u , que $\mathbf{\Pi}$ verifica $d\mathbf{\Pi}(u, u_0)/du = \mathbf{S}(u)\mathbf{\Pi}(u, u_0)$ com a condição inicial $\mathbf{\Pi}(u_0, u_0) = \mathbf{I}$. Como consequência, representamos a solução (3.43) por

$$\mathbf{W}(u) = [\mathbf{\Pi}_1(u, u_0), \mathbf{\Pi}_2(u, u_0)] \mathbf{W}(u_0) \quad (3.45)$$

com $\mathbf{\Pi}_1$ e $\mathbf{\Pi}_2$ da forma

$$\mathbf{\Pi}_j(u, u_0) \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_j(u, u_0) \\ \mathbf{P}_j(u, u_0) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2 \quad (3.46)$$

soluções do sistema dinâmico e com $\mathbf{\Pi}_1(u_0, u_0) = (\mathbf{I}, \mathbf{0})^T$ e $\mathbf{\Pi}_2(u_0, u_0) = (\mathbf{0}, \mathbf{I})^T$ como condição inicial.

3.2.3 Sistemas *in-plane* e *out-of-plane*

Como no traçamento cinemático, queremos obter soluções analíticas para o sistema (3.43). Para isto, iremos explorar o traçamento 2.5D para obter uma estrutura fácil para a matriz de segundas derivadas (3.41) e portanto um sistema mais fácil.

Em meios 2.5D o sistema de traçamento dinâmico (3.43) é desacoplado em dois sistemas. Com efeito, se considerarmos como condição inicial $\mathbf{Q}(u_0)$ e $\mathbf{P}(u_0)$ matrizes diagonais então é fácil obter de (3.43) a propriedade que $\mathbf{Q}(u)$ e $\mathbf{P}(u)$ ainda são matrizes diagonais. Logo, será necessário armazenar apenas a diagonal de cada uma destas matrizes.

Assim, denotando $\mathbf{W}^{(i)} = (Q_{11}, P_{11})^T$ e $\mathbf{W}^{(o)} = (Q_{22}, P_{22})^T$, o sistema (3.43) é desacoplado nos dois seguintes sistemas

$$\frac{d\mathbf{W}^{(i)}}{du} = \mathbf{S}^{(i)}(u)\mathbf{W}^{(i)}(u_0), \quad \frac{d\mathbf{W}^{(o)}}{du} = \mathbf{S}^{(o)}(u)\mathbf{W}^{(o)}(u_0), \quad (3.47)$$

com

$$\mathbf{S}^{(i)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & v^{2-n}(u) \\ \rho(u) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(o)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & v^{2-n}(u) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$\rho(u) = -\mathcal{P}(\mathbf{p})^T \mathbf{J}^T \mathcal{P}(\mathbf{H}_v) \mathbf{J} \mathcal{P}(\mathbf{p}) / v^{n-1}(u), \quad (3.49)$$

onde \mathbf{J} é uma matriz simplética de ordem dois. A demonstração de (3.49) pode ser encontrada no Apêndice A.4. O sistema de traçamento dinâmico (3.47) para $\mathbf{W}^{(i)}$ é dito *in-plane* e para $\mathbf{W}^{(o)}$ *out-of-plane*. Tanto um quanto outro admitem solução de acordo com (3.44), isto é

$$\mathbf{W}^{(*)}(u) = \mathbf{\Pi}^{(*)}(u, u_0) \mathbf{W}^{(*)}(u_0), \quad * = \{i, o\},$$

com $\mathbf{\Pi}^{(*)}$ a respectiva matriz de propagação em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. De (3.48) observa-se que o sistema *out-of-plane* têm sempre solução analítica. De fato,

$$\mathbf{W}^{(o)}(u) = \begin{bmatrix} 1 & y_n(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W}^{(o)}(u_0), \quad y_n(u) = \int_{u_0}^u v^{2-n}(w) dw. \quad (3.50)$$

donde segue que a matriz de propagação *out-of-plane* é dada por

$$\mathbf{\Pi}^{(o)}(u, u_0) = \begin{bmatrix} 1 & y_n(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

com n denotando o índice do Hamiltoniano do modelo adotado. O sistema *in-plane* possui solução analítica (neste trabalho) se e somente se $n = 1$ (velocidade constante) ou $n = -1$ (velocidade afim), pois $\rho(u) = 0 \forall u$ (isto é explicado a seguir). Nestes casos temos $\mathbf{W}^{(i)}(u) = \mathbf{W}^{(o)}(u)$.

O traçamento dinâmico desacoplado permite obter o jacobiano ao longo do raio de maneira elementar. Basta observar que de (3.38)

$$J(u) = \det J_{(\mathbf{x},g)} = \det \mathbf{Q}(u) = Q_{11}(u)Q_{22}(u) = \mathbf{W}_1^{(i)}(u) \mathbf{W}_1^{(o)}(u). \quad (3.51)$$

Apresentamos a seguir as diferentes formas que a função y_n assume, considerando sempre $u_0 = 0$ e a matriz Hessiana \mathbf{H} para fins de avaliação da função ρ em (3.49). Simplificaremos a notação assumindo \mathbf{D} no lugar de $\mathcal{P}(\mathbf{D})$ para qualquer dado tridimensional \mathbf{D} em questão.

A. Velocidade constante

- Tomando $n = 1$ e $u \equiv s$ o parâmetro comprimento de arco ao longo do raio Ω temos

$$y_1(s) = \int_0^s v(w)dw = v_0(s - s_0). \quad (3.52)$$

- Neste caso, a matriz Hessiana da velocidade é a matriz nula. Logo, $\rho(u) = 0$ para todo u e o sistema *in-plane* é igual ao sistema *out-of-plane*.

B. Velocidade afim

- Tomando $n = -1$ e $u \equiv \xi$ o parâmetro ao longo do raio Ω temos

$$y_{-1}(\xi) = \int_0^\xi v(w)dw = \frac{1}{\sqrt{\delta^3}\sigma} \left\{ \sin \arctan \frac{\xi - \kappa}{\sqrt{\sigma}} + \sin \arctan \frac{\kappa}{\sqrt{\sigma}} \right\}, \quad (3.53)$$

com $\alpha = \|\mathbf{p}_0\|^2$, $\beta = \mathbf{p}_0^T \mathbf{a}$, $\delta = \|\mathbf{a}\|^2$, $\kappa = \beta/\delta$ e $\sigma = \alpha/\delta - \kappa^2$.

- Neste caso, a matriz Hessiana da velocidade é a matriz nula. Logo, $\rho(u) = 0$ para todo u e o sistema *in-plane* é igual ao sistema *out-of-plane*.

C. Quadrado da vagariedade afim/quadrático

- Tomando $n = 2$ e $u = \sigma$ o parâmetro natural ao longo do raio Ω temos

$$y_2(\sigma) = \int_0^\sigma dw = \sigma. \quad (3.54)$$

- Aqui $\Phi(v) = v^{-2}$, $\Phi'(v) = -2v^{-3}$, $\Phi''(v) = 6v^{-4}$ e pela equação (A.18)

$$\nabla v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}v^3(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_v(\mathbf{x}) = \frac{3}{4}v^5(\mathbf{x})\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

para quadrado da vagarosidade afim e

$$\nabla v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}v^3(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_v(\mathbf{x}) = -v^3(\mathbf{x})\mathbf{A} + \frac{3}{4}v^5(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})^T$$

com $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$ para quadrado da vagarosidade quadrático. Logo,

$$\rho(u)_{\text{afim}} = -\frac{3}{4}v^4(u)\mathbf{p}(u)^T(\mathbf{J}^T\mathbf{a})(\mathbf{J}^T\mathbf{a})\mathbf{p}(u) \quad (3.55)$$

e

$$\rho(u)_{\text{quad}} = v^2(u)\mathbf{p}(u)^T\mathbf{J}^T\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{p}(u) - \frac{3}{4}v^4(u)\mathbf{p}(u)^T(\mathbf{J}^T\mathbf{g}(\mathbf{x}))(\mathbf{J}^T\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{p}(u). \quad (3.56)$$

D. Velocidade com logaritmo afim

- Tomando $n = 0$ e $u \equiv T$ o parâmetro tempo ao longo do raio Ω temos

$$y_0(T) = \int_0^T v^2(w)dw = \frac{1}{\sqrt{a\sigma}} \left\{ \arctan \left[(T - \kappa)\sqrt{\frac{a}{\sigma}} \right] + \arctan \kappa\sqrt{\frac{a}{\sigma}} \right\} \quad (3.57)$$

com $a = \|\mathbf{a}\|^2$, $b = 2\mathbf{a}^T\mathbf{p}_0$, $c = \|\mathbf{p}_0\|$, $\sigma = c - b^2/4a$ e $\kappa = b/2a$.

- Aqui, $\Phi(v) = \ln v$, $\Phi'(v) = v^{-1}$ e $\Phi''(v) = -v^{-2}$ resultando, pela equação (A.18), em $\nabla v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})\mathbf{a}$ e $\mathbf{H}_v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})\mathbf{a}\mathbf{a}^T$. Logo,

$$\rho(u) = -v^2(u)\mathbf{p}(u)^T\mathbf{J}^T\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{J}\mathbf{p}(u) = -v^2(u)\mathbf{p}(u)^T(\mathbf{J}^T\mathbf{a})(\mathbf{J}^T\mathbf{a})^T\mathbf{p}(u) \quad (3.58)$$

3.3 Transmissão em uma interface

Um meio separado por uma interface Σ determina dois semi-espacos L_+ e L_- . Logo, uma onda elástica que se propaga através de um raio Ω em L_+ , incidente sobre um ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$, com quantidades cinemáticas ou dinâmicas $\mathcal{D}_I(x)$ produz uma onda refletida e transmitida com quantidades $\mathcal{D}_R(\mathbf{x})$ e $\mathcal{D}_T(\mathbf{x})$ respectivamente.

Por “quantidades” entendemos: vetor vagarosidade, amplitude, matriz de propagação, espalhamento geométrico, dentre outros. O objetivo desta seção é obter \mathcal{D}_R e \mathcal{D}_T a partir de \mathcal{D}_I no ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$.

Se \mathbf{u}_I , \mathbf{u}_R e \mathbf{u}_T denotam as ondas de alta frequência (de tal maneira que a teoria de raios se aplica) incidente, refletida e transmitida respectivamente, no ponto $x \in \Sigma$ então no domínio de frequência cada uma delas tem a forma

$$\hat{\mathbf{u}}_k \cong \omega^{b_k} \mathbf{U}_k(\mathbf{x}) e^{i\omega T_k(\mathbf{x})} \quad (3.59)$$

para $k = \{I, R, T\}$, como em (2.5). Exigindo que o campo de ondas seja contínuo sobre a interface Σ obtemos, para todo $\mathbf{x} \in \Sigma$

$$\hat{\mathbf{u}}_I(\mathbf{x}, \omega) + \hat{\mathbf{u}}_R(\mathbf{x}, \omega) = \hat{\mathbf{u}}_T(\mathbf{x}, \omega) \Rightarrow \begin{cases} T_I(\mathbf{x}) = T_R(\mathbf{x}) = T_T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{U}_I(\mathbf{x}) + \mathbf{U}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_T(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.60)$$

A demonstração detalhada das equações acima podem ser encontradas em [2].

3.3.1 Direção: vetor vagarosidade

No sistema formado pelos vetores tangente \mathbf{t} e normal \mathbf{N} a $\mathbf{x} \in \Sigma$ o vetor vagarosidade \mathbf{p}_k é dado pela combinação linear $\mathbf{p}_k = \mathbf{t} + \eta_k \mathbf{N}$ com $\eta_k = \mathbf{p}_k^T \mathbf{N}$, i.e $\mathbf{t} = \mathbf{p}_k - \eta_k \mathbf{N}$ para $k = \{I, R, T\}$. Mostra-se em [3] que para $j \neq k$

$$\eta_k = \pm \sqrt{\frac{1}{v_k^2(x)} - \frac{1}{v_j^2(\mathbf{x})} + (\mathbf{p}_j^T \mathbf{N})^2}. \quad (3.61)$$

Portanto, dado o vetor vagarosidade \mathbf{p}_I basta fazer $j = I$ e $k = T$ em (3.61) para obter o vetor vagarosidade da onda transmitida,

$$\mathbf{p}_T = \mathbf{t} + \eta_T \mathbf{N} = (\mathbf{p}_I - \eta_I \mathbf{N}) + \eta_T \mathbf{N} = \mathbf{p}_I - (\mathbf{p}_I^T \mathbf{N}) \mathbf{N} + \eta_T \mathbf{N}. \quad (3.62)$$

com η_T como em (3.61) satisfazendo $\text{sign}(\eta_T) = \text{sign}(\eta_I) = \text{sign}(\mathbf{p}_I^T \mathbf{N})$. Para determinar o vetor vagarosidade da onda refletida basta fazer $j = I$ e $k = R$ em (3.61) para obter $\eta_R = \pm |\mathbf{p}_I^T \mathbf{N}| = \mathbf{p}_I^T \mathbf{N}$ donde, $\mathbf{p}_R = \mathbf{p}_I - 2(\mathbf{p}_I^T \mathbf{N}) \mathbf{N}$.

Tipos de reflexão

Para determinar o vetor vagarosidade da onda transmitida precisamos essencialmente determinar o escalar η_T em (3.61). Isto será possível se a raiz quadrada que o define estiver definida em \mathbb{R} , o que equivale à validade da Lei de Snell no ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$, i.e $|\sin \alpha_I| \leq v_T(\mathbf{x})/v_I(\mathbf{x})$. Quando isto não acontece, não existe a onda transmitida⁴ e somente a refletida é considerada. Nestes casos, dizemos que reflexão é *pós-crítica*. Quando ocorre a desigualdade estrita diz-se que a reflexão é *sub-crítica* quando se tem a igualdade a reflexão é dita *crítica*.

⁴Fisicamente ela existe mas não a consideramos aqui.

3.3.2 Amplitude

Para determinar as amplitudes \mathbf{U}_R e \mathbf{U}_T no ponto $x \in \Sigma$ usamos a condição (3.60). Não apresentaremos os cálculos, pois podem ser encontrados em [2, 3]. Apenas afirmamos que tanto \mathbf{U}_R quanto \mathbf{U}_T são vetores cujas coordenadas representam as amplitudes no sistema de coordenadas centrado no raio, isto é, $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{e}_2(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x})\mathbf{e}_3(\mathbf{x})$ com \mathbf{e}_j os vetores de polarização da base \mathcal{E}_u centrada no raio.

Então,

$$\mathbf{U}_k(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_k(\mathbf{x})\mathbf{U}_I(\mathbf{x}), \quad k = \{T, R\}, \quad (3.63)$$

com \mathcal{C}_T o *coeficiente de transmissão* e \mathcal{C}_R o *coeficiente de reflexão*⁵ dados por

$$\mathcal{C}_T = 2 \frac{\mathbf{p}_I^T \mathbf{N}}{\mathbf{p}_I^T \mathbf{N} + \mathbf{p}_T^T \mathbf{N}}, \quad \mathcal{C}_R = \frac{\mathbf{p}_I^T \mathbf{N} - \mathbf{p}_T^T \mathbf{N}}{\mathbf{p}_I^T \mathbf{N} + \mathbf{p}_T^T \mathbf{N}}. \quad (3.64)$$

Quando a reflexão é pós-crítica, os coeficientes de reflexão e transmissão são números complexos. De fato, se denotamos $\eta_T = \sqrt{y}$ como em (3.61) e $y < 0$ então $\eta_T = i\sqrt{-y}$ donde $\mathbf{p}_T = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, com $\mathbf{v} = \mathbf{p}_I - (\mathbf{p}_I^T \mathbf{N})\mathbf{N}$ e $\mathbf{w} = \sqrt{-y}\mathbf{N}$. Segue então,

$$\mathcal{C}_T = 2(\mathbf{p}_I^T \mathbf{N}) \left\{ \frac{b}{b^2 + w^2} + i \frac{w}{b^2 + w^2} \right\} = 2(\mathbf{p}_I^T \mathbf{N}) \frac{b + iw}{|b + iw|} \quad (3.65)$$

e

$$\mathcal{C}_R = \frac{rb + w^2}{b^2 + w^2} + i \frac{bw - rw}{b^2 + w^2} = \frac{(b - iw)(r + iw)}{|b + iw|}, \quad (3.66)$$

com $b = \mathbf{v}^T \mathbf{N} + \mathbf{p}_I^T \mathbf{N}$, $w = \mathbf{w}^T \mathbf{N}$ e $r = \mathbf{p}_I^T \mathbf{N} - \mathbf{v}^T \mathbf{N}$.

3.3.3 Quantidades dinâmicas Q e P

Em meios 2.5D as quantidades dinâmicas que tratamos são representadas pelos vetores $\mathbf{W}^{(i)}$ e $\mathbf{W}^{(o)}$ soluções de (3.47). Assim como nas duas seções anteriores, queremos determinar $\mathbf{W}_R^{(*)}$ e $\mathbf{W}_T^{(*)}$ em $\mathbf{x} \in \Sigma$ conhecendo $\mathbf{W}_I^{(*)}$, para $*$ = $\{i, o\}$.

A interface Σ pertence ao plano de existência do raio (plano π da Figura 3.2), portanto usaremos a notação \mathbf{x} tendo em mente que ela representa $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ com \mathcal{P} a operação (1).

⁵Generalizações a respeito destes coeficientes podem ser encontradas em [3], aqui consideramos somente o caso de ondas planas.

Proposição 3.3.1 No ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$ temos $\mathbf{W}_k^{(*)}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Pi}_k^{(*)}(\mathbf{x})\mathbf{W}_I^{(*)}(\mathbf{x})$ onde

$$\mathbf{\Pi}_k^{(i)} = \pm \begin{bmatrix} \cos \alpha_k / \cos \alpha_I & 0 \\ [E_I - E_k - uD]/(\cos \alpha_k \cos \alpha_I) & \cos \alpha_I / \cos \alpha_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}_k^{(o)} = \mathbf{I} \quad (3.67)$$

com

$$\begin{cases} E_I(\mathbf{x}) = -\frac{\sin \alpha_I}{v_I(\mathbf{x})} \mathbf{p}_I(\mathbf{x})^T \mathcal{A}_I \nabla v_I(\mathbf{x}) \\ E_k(\mathbf{x}) = -\frac{\sin \alpha_k}{v_k(\mathbf{x})} \mathbf{p}_k(\mathbf{x})^T \mathcal{A}_k \nabla v_k(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad u(\mathbf{x}) = \epsilon \left\{ \frac{\cos \alpha_I}{v_I(\mathbf{x})} \mp \frac{\cos \alpha_k}{v_k(\mathbf{x})} \right\}, \quad (3.68)$$

$D(\mathbf{x})$ sendo a curvatura da interface no ponto \mathbf{x} ,

$$\mathcal{A}_I = \begin{bmatrix} \sin \alpha_I & -2\epsilon \cos \alpha_I \\ 2\epsilon \cos \alpha_I & \sin \alpha_I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_k = \begin{bmatrix} \sin \alpha_k & \mp 2\epsilon \cos \alpha_k \\ \pm 2\epsilon \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$\epsilon = \text{sign}(\mathbf{p}_I^T \mathbf{N})$, com o sinal nas equações (3.67), (3.68) e (3.69) positivo para transmissão e negativo para reflexão e $k = R$ para reflexão e $k = T$ para transmissão.

A matriz $\mathbf{\Pi}_k^{(i)}$ é dita matriz de transmissão/reflexão *in-plane* para $k = T, R$ respectivamente. A demonstração da proposição acima é longa e construtiva; consiste em introduzir um sistema ortonormal de coordenadas centrado no ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$ e considerar um raio paraxial. Após devidas mudanças de variáveis é possível chegar às equações (3.67)-(3.69). A dedução detalhada pode ser vista em [3].

Como conseqüência da proposição acima temos que o jacobiano do raio é descontínuo através de uma interface. Com efeito, se $J_I(\mathbf{x})$ denota o jacobiano incidente então de (3.51) $J_I(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_{I1}^{(i)} \mathbf{W}_{I1}^{(o)}$ e da Proposição 3.3.1,

$$J_k(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_{k1}^{(i)} \mathbf{W}_{k1}^{(o)} = \pm \frac{\cos \alpha_k}{\cos \alpha_I} \mathbf{W}_{I1}^{(i)} \mathbf{W}_{I1}^{(o)} = \pm \frac{\cos \alpha_k}{\cos \alpha_I} J_I(\mathbf{x}) \quad (3.70)$$

com + para transmissão e - para reflexão, donde segue a descontinuidade.

Também como conseqüência da Proposição 3.3.1 temos que o espalhamento geométrico ao longo de um raio Ω definido por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \sqrt{|J(\mathbf{x})|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.71)$$

também é descontínuo através de uma interface quando há transmissão, uma vez que o jacobiano J o é. Sobre uma interface onde há reflexão isto não acontece pois de (3.70) temos $\cos \alpha_R = \cos \alpha_I$.

Capítulo 4

Implementando Raios

Este capítulo é dedicado à implementação do sistema de traçamento de raios. Além disto, questões práticas como o traçamento ponto-interface, ponto-a-ponto e avaliação de quantidades ao longo do raio serão discutidas. Todos os algoritmos apresentados aqui estão implementados numa biblioteca denominada ART. Esta biblioteca foi implementada em linguagem de programação C e consiste numa coleção de rotinas para traçamento de raios. Uma breve descrição de ART é feita no Apêndice B.

Até agora consideramos que o raio é determinado pela resolução do sistema (3.4), ou seja, fixada uma condição inicial, o raio é uma curva, que parte de um ponto com uma dada direção e se propaga em um meio sem barreiras. Na situação real de uma onda sísmica se propagando na terra, tem-se ainda maior complexidade dada pela descontinuidade da velocidade sobre cada refletor (ou interface). Assim, o raio (ou a onda) emana de um ponto (fonte pontual) e encontra barreiras nas quais, dependendo do meio, pode refletir ou transmitir conforme a Lei de Snell. No caso de um modelo que represente o perfil da seção transversal da terra, por exemplo, então com maior razão o raio irá viajar ao longo de camadas e irá incidir sobre *interfaces*. Esta incidência deve estar matematicamente bem definida como na Seção 3.3 do capítulo anterior.

Neste capítulo vamos analisar diferentes tipos de questões práticas que surgem naturalmente em traçamento de raios em meios não homogêneos ou homogêneos.

4.1 Meio multi-camadas

O tipo de meio que trataremos é composto por várias camadas limitadas por interfaces suaves, definidas para $x \in [a, b]$. A velocidade em cada camada

é uma para a qual o sistema de raios possui solução analítica, ou seja como no modelo geral de velocidades (3.6). A Figura 4.1.a ilustra o meio da maneira geral que trataremos. O modelo consiste de uma região limitada $[a, b] \times [0, d]$ particionada em camadas da forma,

$$L_j = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2: \Sigma_j(x) \leq z < \Sigma_{j+1}(x), x \in [a, b]\}. \quad (4.1)$$

Cada camada possui um modelo de velocidades para ondas P e S, como na equação (3.6). A interface superior e inferior de cada camada não intersecta qualquer outra interface; a este tipo de modelo denominamos *simples*¹. Cada interface é representada por uma spline cúbica e é portanto uma função suave; exige-se que o primeiro e o último ponto de controle de cada spline não sejam pontos interiores ao modelo de camadas.

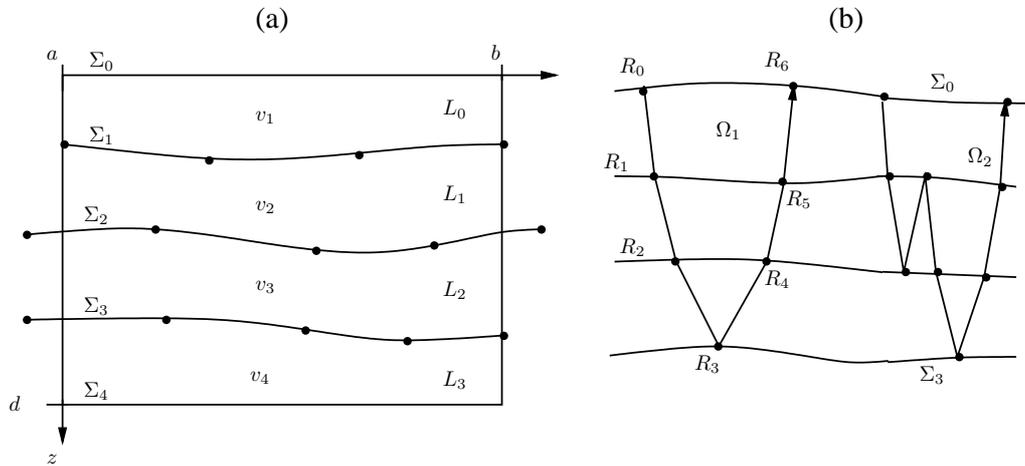


Figura 4.1: (a) Exemplo de um modelo composto por quatro camadas e cinco interfaces; em cada camada está adotado um modelo de velocidades v_j tal que o sistema de raios possua solução analítica. Cada interface é uma spline cúbica e cada ponto esboçado sobre a mesma representa um de seus pontos de controle. (b) Exemplos de código de raio em um modelo simples. Para o raio Ω_1 que parte de R_0 o código de raio é $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 0), (1, 0), (0, 0)\}$ e para o raio Ω_2 é $\{(0, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 0), (1, 0), (0, 0)\}$, ambos para onda P.

Código de raio

Um raio que se propaga em um meio como o da Figura 4.1.a obviamente irá encontrar interfaces ao longo de seu caminho, dependendo de sua direção

¹Modelos que não satisfazem a estas hipóteses são de tratamento mais difícil e estão fora do escopo deste trabalho.

inicial. A seqüência de camadas que o raio percorre é informada em um conjunto finito de pares $\{(j_0, w_0), (j_1, w_1), \dots, (j_{N-1}, w_{N-1})\}$, $j_k \in \mathbb{Z}_+$ e $w_k \in \{0, 1\}$ para todo k . Cada j_k indica a camada pela qual o raio deve passar e $w_k = 0$ indica que nesta camada a onda que se propaga é primária e $w_k = 1$ indica onda cisalhante. Este trajeto pode não ser possível, dependendo da posição da fonte e da direção inicial de propagação. Logo, não é necessário que o raio passe por todas as camadas. A Figura 4.1.b ilustra dois exemplos de código de raio. Denotaremos o código referente a um raio Ω por $r_c(\Omega)$.

Direção inicial

Um raio Ω com código $r_c(\Omega)$ especificado é determinado inicialmente por um ponto \mathbf{x}_0 e uma direção \mathbf{p}_0 , que constituem as condições iniciais do sistema de traçamento cinemático de raios. A direção inicial \mathbf{p}_0 deve satisfazer a equação iconal e portanto escolhemos o vetor vazarosidade da forma $\mathbf{p}_0 = (1/v_0)(\sin \theta, \cos \theta)^T$ com $\theta \in [-\pi, \pi]$ medido em relação ao eixo z positivo e v_0 a velocidade no ponto \mathbf{x}_0 .

Raio como uma seqüência de pontos

Em um meio composto por camadas, como o da Figura 4.1.a, um raio Ω que se propaga de acordo com o código de raio $r_c(\Omega)$ é tratado como uma seqüência de pontos de reflexão ou transmissão. De fato, em cada camada o sistema de traçamento cinemático possui solução analítica, de modo que basta armazenar os pontos extremos dos segmentos que compõem o raio.

Assim, se um raio Ω parte de um ponto R_0 e atinge um ponto R_N então é identificado pela seqüência $\{R_0, R_1, \dots, R_N\}$ onde R_k é o ponto de reflexão ou transmissão sobre a interface determinada pelo código de raio. A Figura 4.1.b ilustra a seqüência de pontos de um raio.

De (4.1) vemos que cada camada, por definição, não contém a interface inferior. Por esta razão, quando o código de raio indicar transmissão, cada ponto R_k pertencerá à camada seguinte; usaremos esta convenção neste trabalho.

4.2 Traçamento ponto-interface

Dado $r_c(\Omega)$ um código de raio e θ uma direção, fixos porém arbitrários, o seguinte problema prático surge ao construir o raio Ω : *qual é o ponto de incidência sobre uma dada interface?*

Vamos denotar o meio da Figura 4.1.a por \mathcal{M} . Seja uma camada $L_k \subset \mathcal{M}$ limitada acima pela interface Σ_k e abaixo por Σ_{k+1} . Dado $S \in L_k$ um ponto

inicial, queremos encontrar $R \in \Sigma_j$, $j = k$ ou $j = k + 1$, tal que o raio Ω que conecta S e R esteja inteiramente contido em L_k . Fica subentendido que o raio Ω é obtido a partir de uma direção inicial $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Vamos supor também que o raio de curvatura de um raio Ω é grande o suficiente, para que não haja *turning rays*² dentro de uma camada.

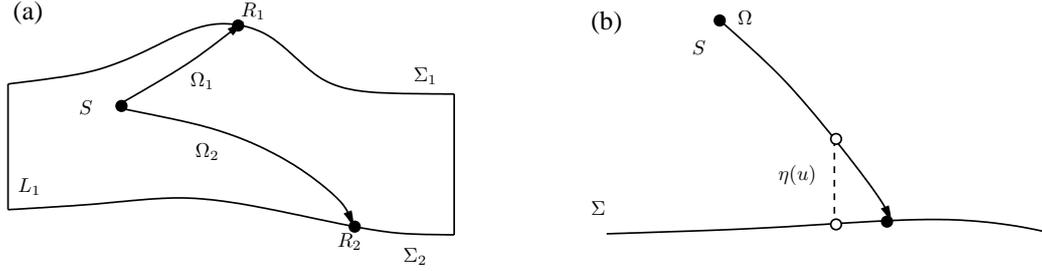


Figura 4.2: (a) Camada $L_1 \subset \mathcal{M}$; o raio Ω_j parte de $S \in L_1$ encontrando uma interface no ponto R_j , para $j = 1, 2$. (b) Função distância η a ser minimizada, quando isto acontece o raio encontra a interface.

A spline cúbica que representa cada interface é denotada por s_j e é gerada pelos pontos de controle $\{W_1, W_2, \dots, W_l, \dots\}$, $W_l \in \mathbb{R}^2$. A idéia para obter o ponto R é usar o método de Newton para encontrar um zero da função

$$\eta(u) \equiv x_3(u) - s_j(x_1(u)), \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1(u), x_3(u))$ é o vetor posição sobre o raio Ω . A derivada de η é obtida a partir do sistema de raios $\dot{\mathbf{x}} = v^{2-n}(u)\mathbf{p}$,

$$\eta'(u) = v^{2-n}(u) \{p_3(u) - s'_j(x_1(u))p_1(u)\}.$$

Assim, a i -ésima iteração de Newton é da forma

$$u_{i+1} = u_i - v^{n-2} \frac{x_3 - s_j(x_1)}{p_3 - s'_j(x_1)p_1} \Big|_{u_i} = u_i - v^{n-2}(u_i) \frac{\eta(u_i)}{\mathbf{p}^T \mathbf{N}_{s_j} \Big|_{u_i}}, \quad (4.3)$$

com n o índice do Hamiltoniano referente ao modelo de velocidade adotado para a camada L_k e $\mathbf{N}_{s_j} = (-(s'_j \circ x_1)(u), 1)$ o vetor normal à interface Σ_j .

Observe que

$$\eta'(u_i) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}^T \mathbf{N}_{s_j} \Big|_{u_i} = 0,$$

isto é, sobre um ponto do raio Ω , o vetor vagariedade (ou o tangente) é ortogonal ao respectivo ponto (projetado) sobre a interface. Isto somente

²São raios tais que a terceira componente do vetor vagariedade, p_3 , troca de sinal dentro de uma mesma camada.

pode acontecer se considerarmos *turning rays*, o que não é o caso. Sendo assim, o algoritmo de Newton está sempre bem definido. Se houver um tal raio, então o algoritmo falha e consideramos que o raio é ineficaz.

O parâmetro inicial u_0 para o método de Newton deve ser escolhido de maneira adequada para garantir convergência quadrática de (4.3). A idéia intuitiva e que funciona bem na prática consiste em encontrar um par de pontos de controle da spline tais que a reta gerada pelo vetor vagarosidade encontra a reta suporte que contém estes pontos de controle.

Podemos formalizar isto, usando as notações no começo do trabalho, da seguinte maneira: queremos encontrar um índice $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbf{p}(S)$ (o vetor vagarosidade no ponto inicial S) pertença ao conjunto $C(W_l - S, W_{l+1} - S)$. As Figuras 4.3.a e 4.3.b ilustram o caso onde existe e não existe um índice l respectivamente.

Quando não existe um par de pontos de controle que satisfaz a condição acima, como na Figura 4.3.c, escolhemos u_0 de outra forma. Neste caso procuramos novamente um par de pontos de controle tal que a média das distâncias de cada um deles à reta gerada pelo vetor $\mathbf{p}(S)$ seja mínima. Isto é, se d_l é a distância ortogonal de W_l à reta $r(\mathbf{p}(S))$ então procuramos $l \in \mathbb{Z}$ tal que $(d_l + d_{l+1})/2$ seja mínimo. Em ambos casos, caso (i): de cone positivo e caso (ii): de projeção ortogonal, o índice l pode variar ao longo de todo seu domínio (quantos pontos de controle existirem).

Parametrizando a reta gerada pelo vetor $\mathbf{p}(S)$ por $\mathbf{X}(\tau) = S + \tau\mathbf{p}(S)$ e fazendo $M_l = (W_l + W_{l+1})/2$ então,

- (i) Na estratégia de cone positivo (Figura 4.3.d), a intersecção da curva \mathbf{X} com a reta suporte de W_l a W_{l+1} é obtida com

$$\tau = \frac{\Delta S_1 - \Delta W_{l1} + W_{l3} - S_3}{p_3(S) - \Delta p_1(S)} \quad (4.4)$$

$$\text{e } \Delta = (W_{l+1,3} - W_{l,3}) / (W_{l+1,1} - W_{l,1});$$

- (ii) Na estratégia de projeção ortogonal (Figura 4.3.e), tomamos τ tal que $\mathbf{X}(\tau) - M_l \perp \mathbf{p}(S)$, dado por

$$\tau = \frac{\mathbf{p}(S)^T(M_l - S)}{\|\mathbf{p}(S)\|^2}. \quad (4.5)$$

Através de uma reparametrização por comprimento de arco para a reta \mathbf{X} percebe-se que $\tau = sv(S)$, com s o parâmetro comprimento de arco. Também do sistema de raios, $dT/du = 1/v^n$, obtemos $ds/v = du/v^n$. Logo, o parâmetro u referente ao ponto $\mathbf{X}(\tau)$ é aproximadamente dado por $u \approx v^{n-1}(\tau)s$.

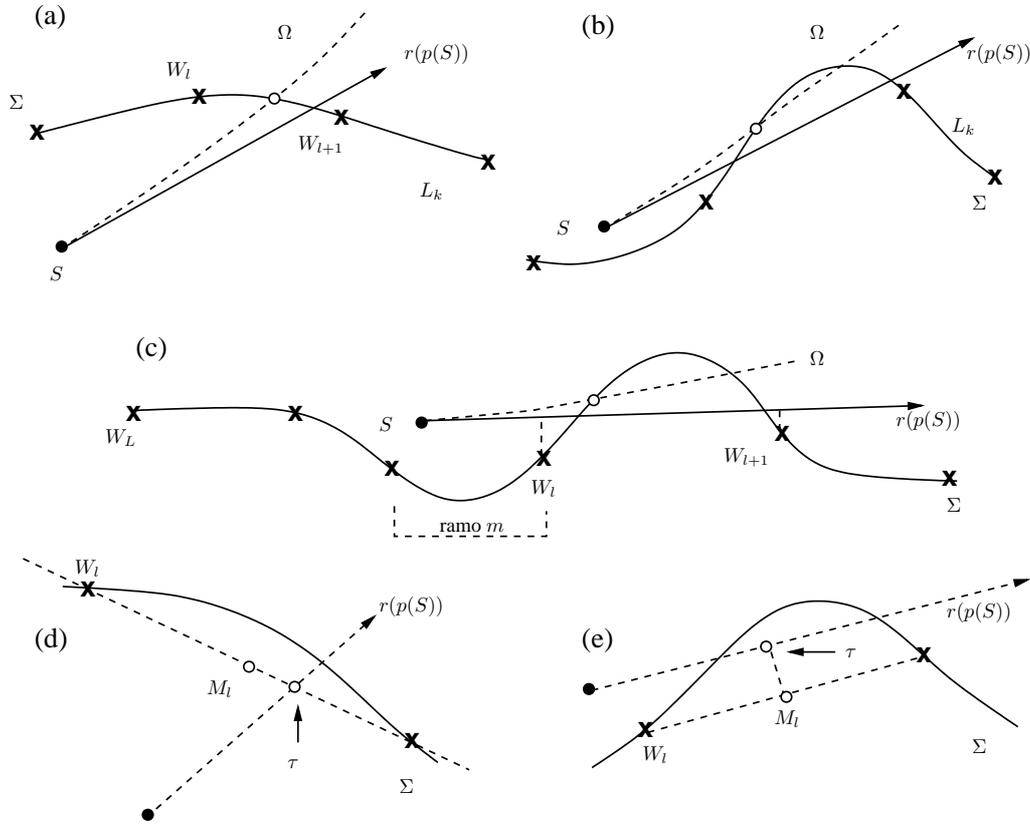


Figura 4.3: Determinação do ponto inicial para o método de Newton. Existe, situação (a), e não existe, situação (b), um índice l tal que o vetor vagarosidade $\mathbf{p}(S)$ pertence ao cone positivo gerado pelos vetores $W_l - S$ e $W_{l+1} - S$. (c) Existe um índice $l \in \mathbb{Z}$ tal que a distância média do par $\{W_l, W_{l+1}\}$ à reta $r(\mathbf{p}(S))$ é mínima. (d) e (e) Parâmetro inicial τ sobre a curva que parametriza a reta $r(\mathbf{p}(S))$.

Finalmente, o parâmetro inicial para o método de Newton é escolhido como,

$$u_0 \approx v^{n-1}(\tau)s = v^{n-1}(\tau) \frac{\tau}{v(S)}, \quad (4.6)$$

com τ como em (4.4) ou (4.5), onde entende-se $v(\tau)$ por $v(\mathbf{X}(\tau))$. O procedimento para obter o ponto de incidência sobre a interface Σ_j é da seguinte forma:

Algoritmo 4.2.1 (Obtenção do parâmetro u^* em uma camada)

Dado $S = (S_x, S_z) \in L_k \subset \mathcal{M}$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$.

1. Descubra qual a interface Σ_j que o raio irá intersectar a partir do código de raio;
2. Obtenha m tal que $W_{m,1} \leq S_x \leq W_{m+1,1}$ e l tal que $\mathbf{p}(S) \in C(W_l - S, W_{l+1} - S)$, onde $l \geq m$ se o vetor $\mathbf{p}(S)$ se dirige à direita e $l \leq m$ se o vetor $\mathbf{p}(S)$ se dirige à esquerda;
 - 2.1 Se existe l no passo 2 então considere o ponto inicial (4.6) com τ como em (4.4).
 - 2.2 Caso contrário obtenha l que minimiza $(d_l + d_{l+1})/2$ com d_l a distância de W_l à reta gerada pelo vetor vagarosidade $\mathbf{p}(S)$; neste caso considere (4.6) com τ como em (4.5);
3. Aplique as iterações de Newton (4.3) obtendo um parâmetro u^* ;

Para o modelo \mathcal{M} composto por mais de uma camada o algoritmo acima é aplicado tantas vezes quantas o código de raio estipular. Ao incidir sobre uma interface, uma nova direção θ é calculada, através da Lei de Snell, tal como na Seção 3.3.

Ressalta-se que o primeiro passo do algoritmo acima pode ser um problema maior do que o presente pois não sabemos quão curvado o raio pode ser. Uma estratégia consiste em ignorar este passo e aplicar o algoritmo acima duas vezes, uma para cada interface que limita a camada, comparando resultados ao final. A vantagem disto é que sempre podemos garantir que um ponto de incidência será encontrado, a desvantagem imediata é que se o modelo de velocidades apresenta baixo contraste então o algoritmo de Newton aplicado a uma das interface é em vão. Em ART, o primeiro passo do algoritmo acima é ignorado e as duas interfaces são consideradas; isto garante que em interfaces com geometria anticlinal (como na Figura 4.3.b) o ponto correto de incidência seja encontrado.

A Figura 4.4 ilustra resultados obtidos com o Algoritmo 4.2.1 em um modelo composto por duas camadas limitadas por uma interface com geometria sinclinal. Dado um conjunto de ângulos $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N\}$ com $\theta_0 = 0$ e $\theta_N = 60^\circ$, uma família de raios, cada um com direção inicial θ_j , é construída. Para cada um destes ângulos e para cada modelo de velocidades deste trabalho, é esboçado o parâmetro u obtido pelo método de Newton e o número de iterações deste. Lembramos que cada modelo é especificado pelo índice do Hamiltoniano n e portanto $u = u(\theta; n)$.

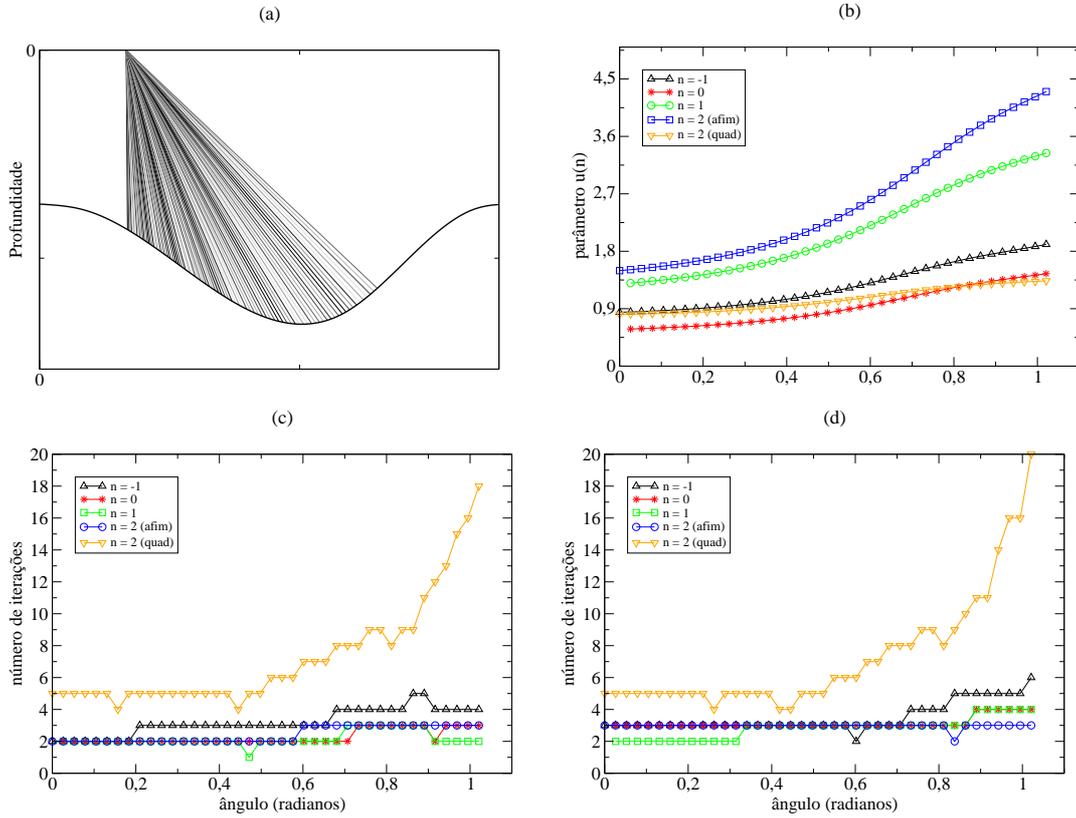


Figura 4.4: (a) Geometria do meio e uma família de raios com velocidade constante ($n = 1$). Cada raio é obtido com direção inicial $\theta_j = j\Delta\theta$ com $\Delta\theta = 60\pi/180N$, $N = 40$ e segundo o código de raio $\{(0, 0)\}$. (b) Parâmetro $u = u(\theta_j; n)$ obtido pelo método de Newton que faz cada raio atingir a interface, para cada modelo de velocidades determinado pelo índice do Hamiltoniano n . (c) e (d) Número de iterações obtidas com o método de Newton usando a estratégia de cone positivo e de projeção ortogonal respectivamente (ver texto para mais detalhes).

4.3 Traçamento entre dois pontos

Seja $r_c(\Omega)$ um código de raio e dois pontos S e R situados dentro do modelo \mathcal{M} , com R situado sobre uma interface Σ . Vimos na seção anterior como obter um raio que conecta o ponto inicial S à interface Σ . O objetivo aqui é encontrar um ou mais raios que partem de S e chegam ao ponto final³ R .

Seja f uma função escalar que associa a cada ângulo θ , um escalar $x_{R(\theta)}$ onde $R(\theta)$ denota o ponto que um raio com direção inicial θ atinge em uma interface Σ e x sua abscissa. O método que procuramos busca um θ^* tal que $f(\theta^*) = x_R$ e para isso, usaremos uma variação do método da bissecção seguindo a abordagem clássica do método *shooting*.

Para começar, vamos procurar dois raios $\Omega_1(\theta_1)$ e $\Omega_2(\theta_2)$ que verificam a condição $f(\theta_1) \leq x_R \leq f(\theta_2)$ como na Figura 4.5.b. Estes raios são escolhidos em uma coleção de raios que partem de S e seguem um código de raio específico, como mostra a Figura 4.5.a.

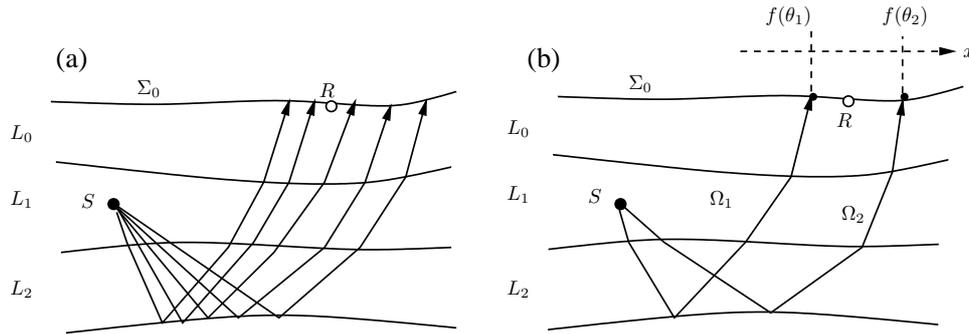


Figura 4.5: (a) Leque de raios que emana do ponto inicial S e chega na interface Σ através do código de raio $r_c = \{1, 2, 2, 1, 0\}$. (b) Raios Ω_1 e Ω_2 que englobam o ponto final R .

A seguir, basta considerar um raio que tenha ângulo inicial θ entre os ângulos θ_1 e θ_2 . Se considerarmos θ como sendo a média teremos exatamente o método da bissecção. Em vez disto, aproximamos f linearmente, digamos $f(\theta) = a + b\theta$ com $f(\theta_j) = x_{R(\theta_j)}$ e tomamos $\theta^{(1)}$ tal que $f(\theta^{(1)}) = x_R$, isto é

$$\theta^{(1)} = \frac{x_R - a}{b}, \quad a = \frac{\theta_2 f(\theta_1) - \theta_1 f(\theta_2)}{\theta_2 - \theta_1}, \quad b = \frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}. \quad (4.7)$$

³A este tipo de traçamento dá-se o nome de *two-point ray tracing*. O método de traçamento entre dois pontos apresentado neste trabalho não é único. Em [3] são citados pelo menos mais três métodos.

Finalmente, basta considerar o raio $\Omega(\theta^{(1)})$ e observar a qual intervalo, seja $[f(\theta_1), f(\theta^{(1)})]$ ou $[f(\theta^{(1)}), f(\theta_2)]$, a coordenada x_R pertence, repetindo a construção de um novo ângulo da mesma maneira.

O algoritmo acima é aplicado para cada par de raios cujos pontos extremos englobam o ponto R . Isto acontece quando há região de cáustica na interface onde acontece a reflexão (veja Figura 4.6.a). Logo, para cada um destes pares de raios, a seqüência de ângulos $\{\theta^{(k)}\}$ converge para um ângulo ótimo θ^* ; e como conseqüência temos o raio $\Omega(\theta^*)$ que conecta o ponto S ao ponto R .

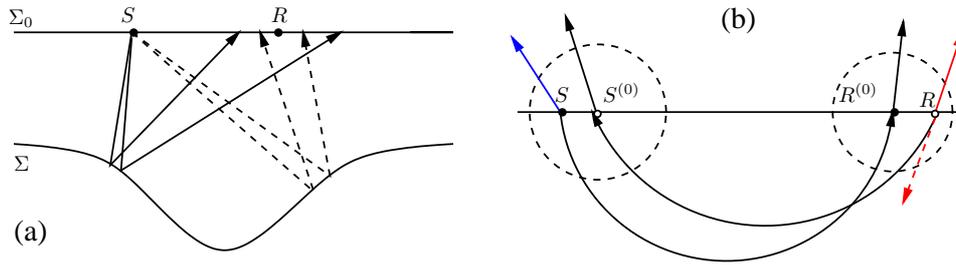


Figura 4.6: (a) Par de raios que engloba o receptor; para cada um destes pares, aplica-se um algoritmo para obter o ângulo do raio que conecta S a R . (b) Correção do ângulo para traçamento entre dois pontos, como em [10].

Uma outra estratégia para implementar o traçamento entre dois pontos, proposta em [10], consiste em corrigir o ângulo de traçamento $\theta^{(k)}$ através de aproximação paraxial. A idéia nesta estratégia é ilustrada na Figura 4.6.b.

Começando no ponto S , basta traçar um raio que parte com ângulo inicial $\theta^{(0)}$ e atinja um ponto $R^{(0)}$ próximo o suficiente a R (e na mesma interface). Tendo este raio, podemos aproximar o tempo de trânsito na vizinhança de $R^{(0)}$ através da expansão de Taylor

$$T(\mathbf{x}) \cong T(\mathbf{y}_{R,0}) + \mathbf{p}_{R,0}^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}_{R,0}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{y}_{R,0})^T \mathbf{M}_{R,0} (\mathbf{x} - \mathbf{y}_{R,0}), \quad (4.8)$$

com $\mathbf{y}_{R,0}$ o vetor posição de $R^{(0)}$, $\mathbf{M}_{R,0}$ a matriz hessiana de T (no sistema de coordenadas centrado no raio), $\mathbf{p}_{R,0}$ o vetor vagarosidade incidente no ponto $\mathbf{y}_{R,0}$ e \mathbf{x} um ponto na vizinhança esférica de $\mathbf{y}_{R,0}$. Portanto, da equação acima podemos obter o vetor vagarosidade aproximado no ponto \mathbf{x}_R (posição de R) por

$$\mathbf{p}_{b,0} = \mathbf{p}_{R,0} + \mathbf{M}_{R,0} (\mathbf{x}_R - \mathbf{y}_{R,0}). \quad (4.9)$$

Em seguida, traçamos um raio com direção inicial $-\mathbf{p}_{b,0}$ atingindo um ponto $S^{(0)}$ próximo a S . Finalmente, usando a mesma notação, podemos tratar de maneira análoga o par $\{S^{(0)}, S\}$ e obter como acima uma direção aproximada

para o vetor vagarosidade em S da forma

$$\mathbf{p}_{f,0} = \mathbf{p}_{S,0} + \mathbf{M}_{S,0}(\mathbf{x}_S - \mathbf{y}_{S,0}). \quad (4.10)$$

Logo, considerando $\theta^{(1)}$ o ângulo que $-\mathbf{p}_{f,0}$ forma com o eixo z positivo, traçamos um novo raio com esta direção inicial. O processo se repete até obtermos uma precisão desejada.

Desta forma, temos que o ângulo $\theta^{(k+1)}$ é obtido pela construção dos vetores $\mathbf{p}_{b,k}$ (*backward*) e $\mathbf{p}_{f,k}$ (*forward*); esta construção consiste em uma iteração do algoritmo. A demonstração da equação (4.8), assim como a estrutura da matriz $\mathbf{M}_{R,k}$ é apresentada no Apêndice A.5.

A atualização do ângulo $\theta^{(k)}$ através de aproximação paraxial funciona bem desde que $\|\mathbf{y}_{R,0} - \mathbf{x}_R\| < \epsilon$ com ϵ bastante pequeno. Uma terceira forma de atualizar o ângulo consiste em combinar os dois procedimentos acima da seguinte forma:

1. Construa um raio que parte de \mathbf{x}_S e atinge $\mathbf{y}_{R,0}$ com vetor vagarosidade $\mathbf{p}_{R,0}$;
2. Defina β e α ângulos com o eixo z positivo dos vetores $-\mathbf{p}_{R,0}$ e $-\mathbf{p}_{b,0}$ (como em (4.9));
3. Construa raios com direções iniciais α e β e começando em \mathbf{x}_R , atingindo os pontos $\mathbf{x}_{S,\alpha}$ e $\mathbf{x}_{S,\beta}$ próximos a \mathbf{x}_S ;
4. Use interpolação linear e encontre um ângulo θ que atinge um ponto $\mathbf{y}_{S,0}$ próximo de \mathbf{x}_S ;
5. Repita os passos [1-4] para o ponto $\mathbf{y}_{S,k}$, encontrando um ângulo $\theta \equiv \theta^{(1)}$ que faz um raio partir de \mathbf{x}_S e atingir um ponto $\mathbf{y}_{R,1}$.

O processo acima continua até que se atinja uma precisão desejada entre $\mathbf{y}_{R,k}$ e \mathbf{x}_R . Observe que uma iteração deste algoritmo é mais cara que os demais algoritmos, pois envolve mais traçamentos de raios, quatro no total; apresentaremos no Capítulo 6 os resultados obtidos para traçamento entre dois pontos.

4.4 Traçando um raio

Para traçar um raio precisamos apenas definir um algoritmo que trabalhe sobre uma única camada, pois se o raio fizer um trajeto ao longo de várias camadas, o mesmo algoritmo será aplicado repetidas vezes. Por “traçar” um raio entendemos obter a sequência de pontos que o define, como na Figura

4.1.b. Sobre cada um destes pontos de reflexão ou transmissão procuraremos definir quantidades cinemáticas e dinâmicas.

Denotaremos por \mathcal{D}_I ao conjunto de quantidades incidentes sobre um ponto extremo que compõe um raio e \mathcal{D}_T ao conjunto de quantidades transmitidas (ou refletidas) sobre uma interface, como na Seção 3.3. Cada conjunto \mathcal{D}_I e \mathcal{D}_T é obtido através de um algoritmo adequado.

Por exemplo, em \mathcal{D}_l , $l = \{I, T\}$, temos as seguintes quantidades: vetor vagarosidade, posição sobre o raio, tempo de trânsito, vetores *in-plane* e *out-of-plane* soluções do sistema dinâmico, espalhamento geométrico, jacobiano ao longo do raio, amplitude, ângulo de incidência/transmissão, matrizes de propagação e coeficientes de reflexão/transmissão.

Primeiro, precisamos definir uma fonte pontual onde o raio irá começar sua trajetória. Representaremos a fonte pelo ponto $S \equiv R_0 \in \mathbb{R}^2$ e associaremos a ela as seguintes quantidades iniciais:

$$\mathcal{D}_T(R_0) = \{R_0, \mathbf{p}, T, \mathbf{W}^{(i)}, \mathbf{W}^{(o)}, \mathcal{L}, A_P, A_S, \mathcal{C}_R, \mathcal{C}_T, \dots\}, \quad \mathcal{D}_I(R_0) = \emptyset \quad (4.11)$$

(não há incidência sobre a fonte), com $\mathbf{p}(R_0) = (\sin \theta, \cos \theta)$ uma direção inicial (dado algum θ), $\mathbf{W}^{(i)}(R_0) = (0, 1)^T$ e $\mathbf{W}^{(o)} = (1, 0)^T$ vetores *in-plane* e *out-of-plane*, condições de fonte pontual (como em [3]), A_P e A_S valores iniciais de amplitude para onda P e S respectivamente e $\mathcal{C}_R(R_0) = 1$, $\mathcal{C}_T(R_0) = 1$ os coeficientes de reflexão e transmissão respectivamente.

Considere \mathcal{A}_I um algoritmo de incidência e \mathcal{A}_T um algoritmo de transmissão. Ambos são encarados como funções que, a cada conjunto de entrada, atribui um conjunto de saída. Assim, o algoritmo \mathcal{A}_I age da seguinte maneira: dado um ponto $R_k \in \mathbb{R}^2$ em uma j_k -ésima camada, associado a quantidades $\mathcal{D}_T(R_k)$, e um parâmetro u^* como no Algoritmo 4.2.1, então temos que $\mathcal{A}_I(\mathcal{D}_T(R_k), j_k, u^*)$ determina o conjunto de quantidades de um raio que incide sobre um ponto da interface. O algoritmo de transmissão é elementar e não é discutido pois consiste em considerar os elementos de \mathcal{D}_I e usar os resultados apresentados na Seção 3.3, ou seja, age da seguinte forma: $\mathcal{D}_T = \mathcal{A}_T(\mathcal{D}_I)$.

Cada um destes algoritmos permite construir o raio como uma cadeia de pontos (ver Figura 4.1.b), como nos seguintes algoritmos⁴.

Algoritmo 4.4.1 (Seqüência de pontos que formam o raio)

Dados $r_c = \{(j_0, w_k), (j_1, w_k), \dots, (j_{m-1}, w_k)\}$ o código de raio e um ponto inicial R_0

⁴ART considera $\mathcal{A}_I: \mathcal{D} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{A}_T: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ algoritmos de incidência e transmissão respectivamente.

1. Defina $\mathcal{D}_I(R_0)$ e $\mathcal{D}_T(R_0)$ como em (4.11) de acordo com o tipo de velocidade w_0 ;
2. Para $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$:
 - 2.1 Defina $u^{(k)}$ como o parâmetro que permite partir de R_k e obter R_{k+1} através do Algoritmo 4.2.1;
 - 2.2 $\mathcal{D}_T(R_k) = \mathcal{D}_T(R_k) \cup \{u^{(k)}\}$
 - 2.3 Defina $\mathcal{D}_I(R_{k+1}) = \mathcal{A}_I(\mathcal{D}_T(R_k), j_k, u^{(k)})$ pelo Algoritmo 4.4.2 de acordo com o tipo de velocidade w_k ;
 - 2.4 Defina $\mathcal{D}_T(R_{k+1}) = \mathcal{A}_T(\mathcal{D}_I(R_{k+1}))$ com o tipo de velocidade w_{k+1} ;
3. Defina o raio, em forma de algoritmo, através da seqüência de conjuntos

$$\Omega \leftrightarrow \{\mathcal{D}_T(R_0), \mathcal{D}_T(R_1), \dots, \mathcal{D}_T(R_m)\}. \quad (4.12)$$

Algoritmo 4.4.2 (Algoritmo de incidência \mathcal{A}_I)

Dados $u^{(k)}$, j_k e $\mathcal{D}_T(R_k)$ sobre o ponto R_k do raio;

1. Obtenha, conforme o modelo de velocidades adotado para a camada j_k , as quantidades cinemáticas $R_{k+1} = \mathbf{x}(u^{(k)})$, $\mathbf{p}(u^{(k)})$, $T(u^{(k)})$, $v(u^{(k)})$, $\mathcal{C}_R(R_{k+1})$ e $\mathcal{C}_T(R_{k+1})$ e as dinâmicas $\mathbf{W}^{(i)}(u^{(k)})$, $\mathbf{W}^{(o)}(u^{(k)})$, $\mathcal{L}(u^{(k)})$, $J(u^{(k)})$, $A_P(u^{(k)})$ e $A_S(u^{(k)})$, usando $\mathcal{D}_T(R_k)$ como dados iniciais;
2. Defina, para todas as quantidades computadas no passo anterior,

$$\mathcal{D}_I(R_{k+1}) = \{R_{k+1}, \mathbf{p}(u^{(k)}), T(u^{(k)}), v(u^{(k)}), \mathcal{C}_R(R_{k+1}), \mathcal{C}_T(R_{k+1})\} \cup \{\mathbf{W}^{(i)}(u^{(k)}), \mathbf{W}^{(o)}(u^{(k)}), \mathcal{L}(u^{(k)}), J(u^{(k)}), A_P(u^{(k)}), A_S(u^{(k)})\}$$

4.5 Avaliando dados sobre um raio

O Algoritmo 4.4.1 constrói o raio como a cadeia da Figura 4.1.b que, na biblioteca ART equivale à seqüência (4.12). Logo, cada elemento da seqüência (4.12) é armazenado em uma estrutura de dados adequada. Esta seção mostra como ART avalia quantidades do raio fora dos pontos extremos que o compõem.

Seja o raio Ω definido como em (4.12). Partindo de cada ponto R_k devemos obter, conforme o Algoritmo 4.2.1, um parâmetro ótimo $u^{(k)}$ tal que $\mathbf{x}(0) = R_k$ e $\mathbf{x}(u^{(k)}) = R_{k+1}$ onde \mathbf{x} é o vetor posição do raio no ramo pertencente à j_k -ésima camada, solução analítica do sistema de raios (de acordo com o modelo de velocidades adotado).

A Figura 4.7 ilustra um raio sobre um meio multi-camadas e sua representação em ART; o parâmetro u sobre cada ramo do raio varia no intervalo $[0, u^{(k)}]$. Este acontecimento ocorre devido à possível escolha de diferentes tipos de velocidades para cada camada. É natural então que se construa um parâmetro contínuo ao longo do raio: o tempo. Como o tempo de trânsito va-

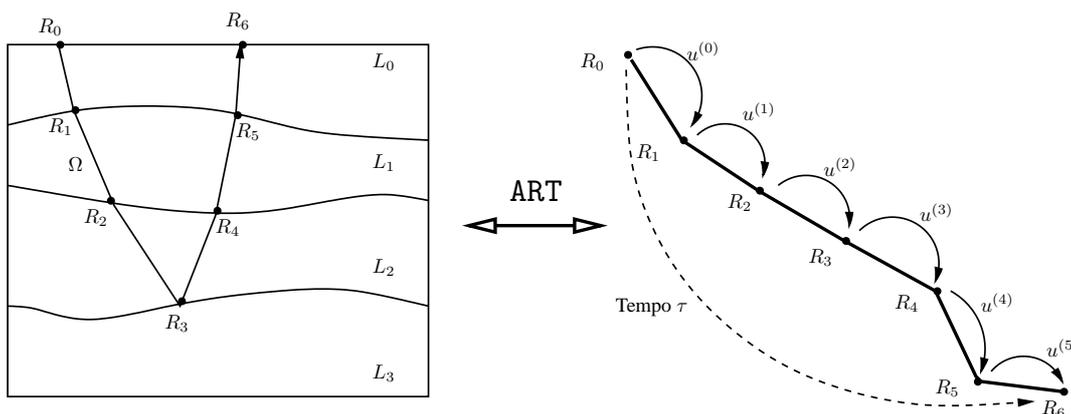


Figura 4.7: Raio Ω como uma seqüência de pontos onde o parâmetro tempo varia de forma contínua e em cada ramo o parâmetro u varia entre 0 e $u^{(k)}$ de acordo com o modelo de velocidade adotado na camada.

ria ao longo do raio então para cada $\tau \in [0, \tau_f]$ onde $\tau_f = T(u^{N-1}) \in \mathcal{D}_T(R_N)$ em um raio de N ramos, queremos avaliar quantidades \mathcal{D} do raio, no tempo τ (usa-se a notação da seção anterior).

O problema que se propõe é resolvido considerando um outro problema mais simples. Seja $\tilde{\Omega}$ um raio que parte de um ponto R_k e chega em R_{k+1} ; dado $T = T(u)$ a função tempo de trânsito sobre $\tilde{\Omega}$ e $\tau \geq T(0)$ um tempo referência, então qual é o $u \in [0, u^{(k+1)}]$ tal que $T(u) = \tau$?

A solução ao problema acima sempre existe, pelo Teorema do Valor Intermediário, uma vez que a função tempo T é sempre crescente e contínua ao longo do raio $\tilde{\Omega}$, como ilustra Figura 4.8. Obviamente, se $\tau = T(0)$ então $u = 0$, caso contrário a solução é obtida pelo método de Newton.

O método de Newton é aplicado à função $T(u) - \tau$, que pelo sistema de raios (3.4), resulta no esquema iterativo $u_{i+1} = u_i - v^n(u_i) (T(u_i) - \tau)$ com n o índice do Hamiltoniano. A seqüência $\{u_i\}$ convergirá quadraticamente ao ponto ótimo desde que o ponto inicial esteja na vizinhança do ponto ótimo. Para fazer uma boa escolha deste ponto, ajustamos uma parábola nos pontos $(0, T_k)$, $(U, T(U))$ e $(u^{(k+1)}, T_{k+1})$ com U qualquer no intervalo considerado ($U = u^{(k+1)}/2$ por exemplo). Logo, se existir um u que verifica $T(u) = \tau$ então o mesmo acontecerá com a parábola

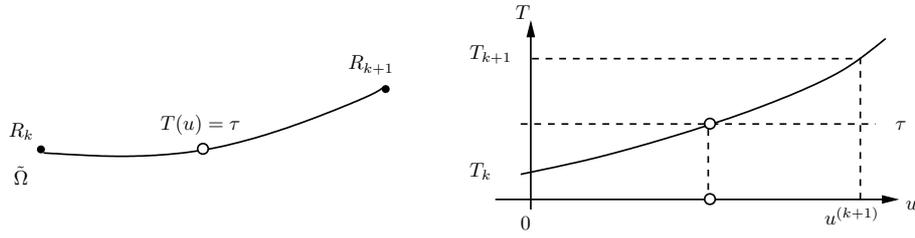


Figura 4.8: Gráfico do tempo do trânsito em uma j_k -ésima camada. Dado τ queremos encontrar u tal que $T(u) = \tau$, com $T_k = T(0)$ e $T_{k+1} = T(u^{(k+1)})$.

Finalmente, para obter $\mathcal{D}(\tau)$ ao longo do raio usamos o algoritmo apresentado a seguir.

Algoritmo 4.5.1 (Avaliando dados sobre um raio)

Dados um raio como em (4.12) e um tempo $\tau \in [0, \tau_f]$;

1. Encontre um índice k tal que $T_k \leq \tau \leq T_{k+1}$;
2. Interpole T , no k -ésimo ramo do raio, por um polinômio p de grau dois e resolva $p(u) = \tau$, encontrando u_0 ;
3. Determine pelo método de Newton um u tal que $T(u) = \tau$, com T a função tempo de trânsito referente à j_k -ésima camada, considerando u_0 do passo anterior, como ponto inicial;
4. Defina $\mathcal{D}(\tau) = \mathcal{A}_I(\mathcal{D}_T(R_k), j_k, u)$ através do Algoritmo 4.4.2 de acordo com o tipo de velocidade, i.e P ou S.

A Figura 4.9 ilustra a forma como um raio é tratado em ART, considerando-o como uma cadeia de informações, cada uma referente a um ponto extremo. Na Figura 4.10.a está ilustrada a geometria do raio e do modelo de duas camadas escolhido; a primeira com velocidade afim e a segunda com velocidade constante. A Figura 4.10.b apresenta o número de iterações pelo método de Newton para avaliar quantidades arbitrárias ao longo do raio construído, pelo Algoritmo 4.5.1.

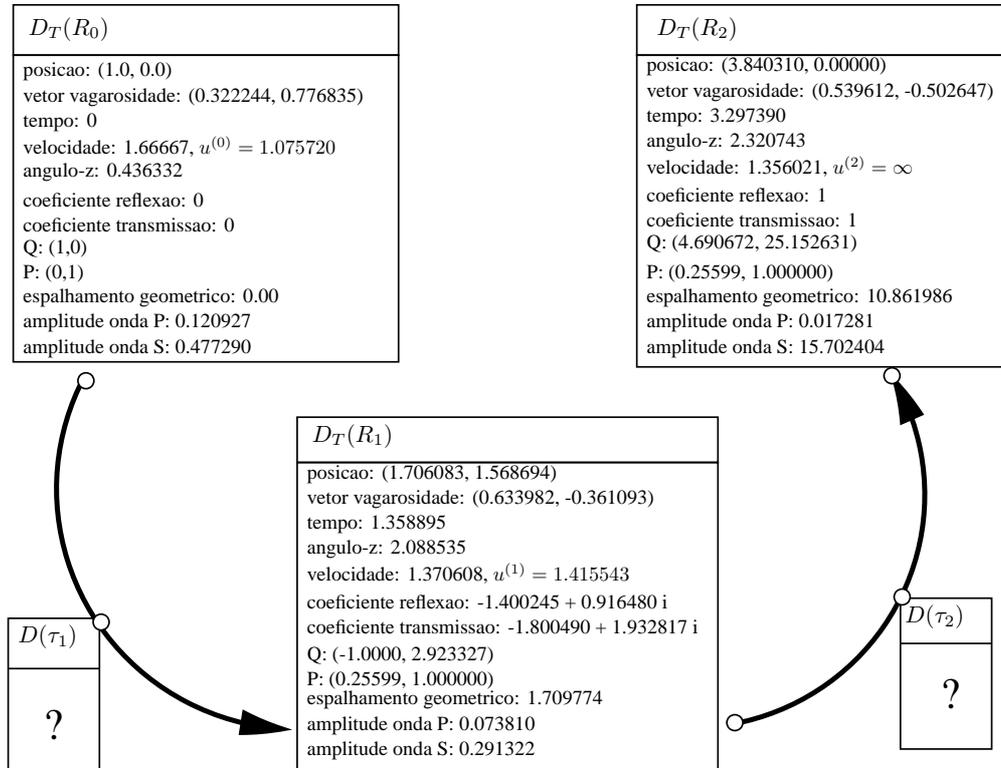


Figura 4.9: Ilustração do Algoritmo 4.4.1 para o raio da Figura 4.10.a. A cada ponto extremo do raio é associado um conjunto de dados. Logo, a avaliação de quantidades arbitrárias sobre o raio em tempos τ_1 e τ_2 , é feita de forma analítica (ou semi-analítica), usando o sistema de raios, as informações sobre o ponto extremo anterior e o Algoritmo 4.5.1.

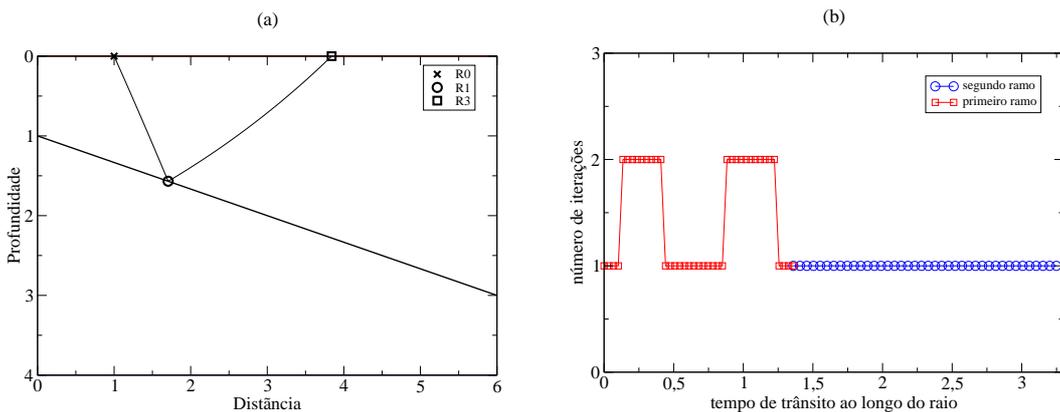


Figura 4.10: (a) Raio em um meio com velocidade afim, partindo do ponto (1,0) com direção inicial 25°. (b) Número de iterações do método de Newton para avaliar quantidades ao longo de cada segmento do raio.

Capítulo 5

Modelamento Sísmico

Vimos que a solução da equação elastodinâmica da onda (2.1) é obtida aproximadamente ao longo de um raio. Para isto, obtivemos o tempo de trânsito mediante a equação iconal e a amplitude através da equação do transporte; cada uma destas com solução analítica ao longo do raio. Portanto, temos todos os ingredientes necessários para avaliar o campo \mathbf{u} através da aproximação (2.7). Isto será particularmente feito ao longo do raio, onde temos mais informações sobre o comportamento do campo de ondas.

Neste capítulo, veremos como se comporta o vetor deslocamento \mathbf{u} em um ponto R que é atingido pelo campo de ondas proveniente de uma fonte pontual S .

5.1 Síntese de traços

Seja Ω um raio que conecta um ponto inicial S a um ponto R . Assumiremos que R está situado sobre alguma interface, portanto Ω pode ser obtido por traçamento de raios entre dois pontos, como apresentado na Seção 4.3. Por um *traço sísmico* entendemos o registro do campo de pressão ou deslocamento feito por um receptor, ao longo do tempo. A aproximação de alta frequência, através da teoria de raios, deste traço é dada por

$$\mathbf{u}(R, t) = \Re\{\mathbf{U}(R)F(t - T(R))\}, \quad (5.1)$$

onde F é um sinal de alta frequência, $\mathbf{U}(R)$ é vetor deslocamento e $T(R)$ é o tempo de trânsito no ponto R .

O sinal F é dado por $F(t) = x(t) + ig(t)$ com $x, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $g = \mathcal{H}(x)$ onde \mathcal{H} denota a transformada de Hilbert. Dentre as várias formas que x pode assumir, destacamos o sinal de Gabor; logo, conforme [4]

o par (x, g) é dado por,

$$x(t) = e^{-\left(\frac{2\pi ft}{\gamma}\right)^2} \cos(2\pi ft), \quad g(t) \sim -e^{-\left(\frac{2\pi ft}{\gamma}\right)^2} \sin(2\pi ft), \quad (5.2)$$

com $f, \gamma \in \mathbb{R}$ parâmetros arbitrários.

Como estamos tratando da solução ao longo do raio, o vetor deslocamento \mathbf{U} da equação (5.1) assume as formas

$$\mathbf{U}(R) = A(R)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{U}(R) = B(R)\mathbf{e}_1 + C(R)\mathbf{e}_2,$$

para ondas P e S respectivamente, onde A, B e C são soluções da equação do transporte (2.25) e (2.27) e \mathbf{e}_j os vetores de polarização ao longo do raio. Cada função amplitude A, B ou C , que denotaremos genericamente por \mathcal{A} , pode ser obtida ao longo do raio através da equação (3.36), que aqui rescrevemos da forma

$$\mathcal{A}(R) = \left[\frac{\rho(S)c(S)J(S)}{\rho(R)c(R)J(R)} \right]^{1/2} \mathcal{A}(S) = \left[\frac{\rho(S)c(S)}{\rho(R)c(R)} \right]^{1/2} \frac{\mathcal{L}(S)}{\mathcal{L}(R)} e^{i\frac{\pi}{2}\kappa(R,S)} \mathcal{A}(S), \quad (5.3)$$

com c a velocidade do meio, \mathcal{L} o espalhamento geométrico (como na equação (3.71)) e κ o *índice de KMAH* dado pelo número de pontos de cáustica sobre o raio¹ desde o ponto inicial até o ponto R .

A equação (5.3) não é válida para fonte pontual, uma vez que $\mathcal{L}(S) = 0$ e $\mathcal{A}(R)$ permaneceria nulo ao longo do raio (o que não é o caso). Neste caso, é possível derivar uma expressão fechada para $\mathcal{A}(R)$ (como em [19]) dada por

$$\mathcal{A}(R) = \left[\frac{\rho(S)c(S)}{\rho(R)c(R)J(R)} \right]^{1/2} \mathcal{G}(S) = \left[\frac{\rho(S)c(S)}{\rho(R)c(R)} \right]^{1/2} \frac{\mathcal{G}(S)}{\mathcal{L}(R)} e^{i\frac{\pi}{2}\kappa(R,S)}, \quad (5.4)$$

com \mathcal{G} dito *constante de radiação* dado por

$$\mathcal{G}_A(S) = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_3}{4\pi\rho(S)\alpha(S)}, \quad \mathcal{G}_B(S) = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_1}{4\pi\rho(S)\beta(S)}, \quad \mathcal{G}_C(S) = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_2}{4\pi\rho(S)\beta(S)}, \quad (5.5)$$

com \mathbf{f} um vetor de força, α e β velocidade para onda primária e secundária respectivamente.

Da equação (5.3), a função \mathcal{A} pode assumir valores complexos somente se o raio Ω passa por algum ponto de cáustica ou se existe reflexão pós-crítica devido à equações (3.65) e (3.66).

No caso de existir mais de um raio que conecta o ponto inicial S ao ponto final R , o traço resultante em R é a soma de cada traço individual. A Figura 5.1 ilustra esta situação.

¹Note que $\kappa(R, S) = \kappa(R) - \kappa(S)$, pois $\sqrt{J(R)} = \sqrt{|J(R)|} e^{-i\frac{\pi}{2}\kappa(R)}$ (ver [19, 3]).

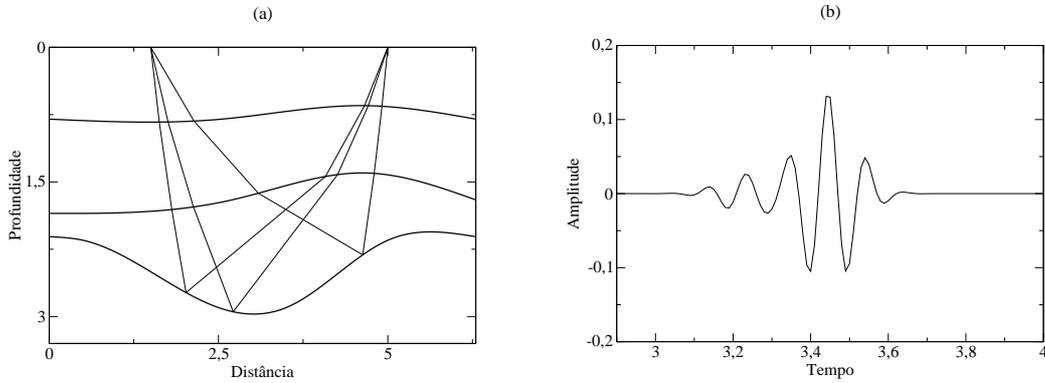


Figura 5.1: (a) Conjunto de raios conectando a fonte na posição $(1.5, 0)$ ao receptor $(5, 0)$. (b) Traço sísmico correspondente ao par fonte-receptor dado.

5.2 Modelando refletores

O objetivo do modelamento sísmico é obter no domínio de tempo, uma imagem de um dado refletor através de uma família de raios que conecta uma fonte a um receptor, ambos fixos porém arbitrários sobre a superfície de medição.

Se Σ é um refletor que queremos modelar, então cada ponto deste é atingido pela onda incidente e, pelo princípio de Huygens, age como pontos difratores, contribuindo em energia para o campo de ondas refletido (Ver Figura 5.2).

Veremos que para modelar uma interface, devemos basicamente traçar raios que incidem e partem sobre cada ponto da interface Σ , extraindo informações cinemáticas e dinâmicas destes. Apenas para ilustrar o modelamento, consideraremos o exemplo da Figura 5.3 onde a contribuição do campo de ondas sobre o refletor vem somente do ponto da interface onde o raio tem reflexão especular². Neste exemplo, a fonte permanece fixa e os receptores variam em sua vizinhança sob uma configuração de tiro comum. O registro de amplitudes em cada receptor para este experimento é esboçado na Figura 5.3 (direita), que denominamos de *sismograma*; sendo nada mais que uma coleção lateral de traços sísmicos.

5.2.1 A integral de Kirchhoff

O exemplo da seção anterior ilustra o modelamento por teoria de raios de ordem zero gerando um sismograma que depende do experimento realizado.

²Que obedece à Lei de Snell.

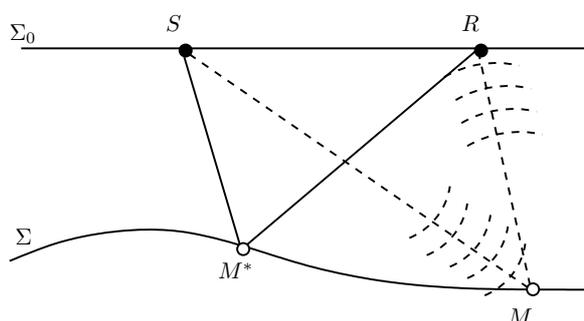


Figura 5.2: Geometria do modelamento. Para cada par fonte-receptor denotados por S e R existe um ponto M^* de reflexão cujo raio contribui preferencialmente à resposta obtida em R . Outros pontos M no refletor Σ agem como pontos difratores, também contribuindo à resposta.

Aproximação por raios não é capaz de descrever todos os fenômenos que são efetivamente observados em seções reais. Por exemplo, não é possível simular difrações com a teoria de raios apresentada. A aproximação de Kirchhoff do campo refletido, por outro lado, é capaz de representá-lo mais fielmente.

Para obter a integral de Kirchhoff fazemos uso do fato que o campo de ondas espalhado sobre a interface é o campo incidente vezes o coeficiente de reflexão. Em seguida, impondo condições de fronteira mista sobre o refletor e usando as identidades de Green, obtemos o campo de ondas espalhado sobre a superfície de medição. Este procedimento matemático pode ser encontrado com mais detalhes em [2, 19].

Considere a parametrização das posições de fonte e receptor $S(\xi)$ e $R(\xi)$. A contribuição de todos os pontos difratores da superfície Σ parametrizada por η , é dada (como em [21, 20]) por

$$\mathcal{K}(\xi, t) = \int_{\Sigma(\eta)} \mathcal{W}(\xi, \eta) \mathcal{C}_R(\eta) \frac{dF}{dt} [t - \tau(\xi, \eta)] d\Sigma(\eta). \quad (5.6)$$

onde \mathcal{W} é um peso adequado inerente a cada ponto sobre Σ e $\mathcal{C}_R(\eta)$ o coeficiente de reflexão no ponto de coordenadas η sobre o refletor, dado pela equação (3.64).

As quantidades necessárias ao cálculo da integral (5.6) são computadas traçando-se raios de difração $SM(\eta)R$. Para algum valor η^* não necessariamente único, o raio $SM(\eta^*)R$ será na verdade um raio de reflexão.

A função τ representa o tempo de trânsito do raio difrator $SM(\eta)R$, i.e

$$\tau(\xi, \eta) = T[S(\xi), M(\eta)] + T[M(\eta), R(\xi)] \quad (5.7)$$

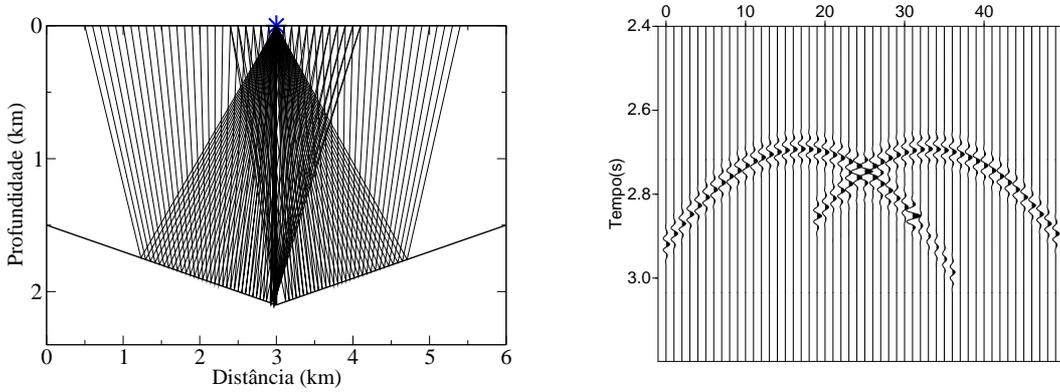


Figura 5.3: Família de raios para um modelo sintético com fonte situada na posição $(3, 0)$ e receptores distribuídos em configuração de tiro comum; a inclinação de cada braço que compõe a interface é de $11, 30^\circ$. À direita o sismograma obtido com o experimento.

com T o tempo de trânsito, solução da equação iconal. O peso \mathcal{W} da integral (5.6) é dado por

$$\mathcal{W}(\xi, \eta) = \mathcal{A}_{SM}[M(\eta)]\mathcal{A}_{MR}[R(\xi)]\mathcal{O}(\eta), \quad (5.8)$$

onde \mathcal{A}_{SM} e \mathcal{A}_{MR} representam a amplitude no ponto M e R respectivamente, obtidas por traçamento dinâmico sobre os raios $SM(\eta)$ e $M(\eta)R$. O fator \mathcal{O} é dito *fator de obliquidade* e é dado por

$$\mathcal{O}(\eta) = \frac{\cos \theta_I(\eta) + \cos \theta_E(\eta)}{2 v[M(\eta)]}, \quad (5.9)$$

onde θ_I e θ_E são ângulos do vetor vazarosidade incidente e emergente, no ponto M , com o vetor normal à interface, para os raios $SM(\eta)$ e $M(\eta)R$ respectivamente; $v(M)$ é a velocidade no ponto M , na camada acima do refletor.

5.2.2 Estratégia para implementação

A implementação da integral (5.6) consiste, essencialmente, no traçamento de muitos raios. Isto pode ser um trabalho lento se não feito com cautela.

De fato, para um experimento com 100 pares de fontes e receptores, traçaríamos ingenuamente 20000 raios com o método de traçamento entre dois

pontos como apresentado na Seção 4.3, seria custoso. Ilustraremos uma estratégia diferente com um modelo simples, deixando os demais resultados para o próximo capítulo. Considere (S, R) um par fonte-receptor fixo e M_0 o primeiro ponto sobre a interface (da esquerda para direita) com abscissa x_0 . Para encontrar os raios SM_0 e M_0R usa-se o algoritmo de traçamento entre dois pontos da Seção 4.3 (com permissão para criar um leque inicial de y raios), como na Figura 5.4.a. Temos assim dois ângulos: $\theta_{S,0}$ e $\theta_{R,0}$. O primeiro é a direção inicial do raio SM_0 e o segundo a direção inicial do raio RM_0 .

A seguir, para encontrar o raio SM_1 , onde M_1 possui abscissa $x_1 = x_0 + \Delta$, cria-se um raio auxiliar Ω_1 com direção inicial $\theta_{S,0} + \delta$, onde $\delta = |\theta_{S,0} - \eta|$, com η o ângulo do vetor $\vec{M_0S}$ com a profundidade. Logo, usamos o par de raios SM_0 e Ω_1 como condições iniciais para determinar o raio SM_1 usando um dos algoritmos apresentados na Seção 4.3, isto gera um ângulo inicial $\theta_{S,1}$ para tal raio.

Analogamente, cria-se um raio auxiliar Ω_2 com direção inicial $\theta_{R,0} + \delta$, que juntamente com o raio RM_0 fornecem condições iniciais para encontrar o raio RM_1 com direção inicial $\theta_{R,1}$. Logo, tendo este raio, basta traçá-lo na direção oposta, construindo o raio M_1R . Este processo continua da mesma forma para o ponto M_2 , com abscissa $x_2 = x_0 + 2\Delta$ e todos os demais. A Figura 5.4.b ilustra a primeira iteração deste procedimento.

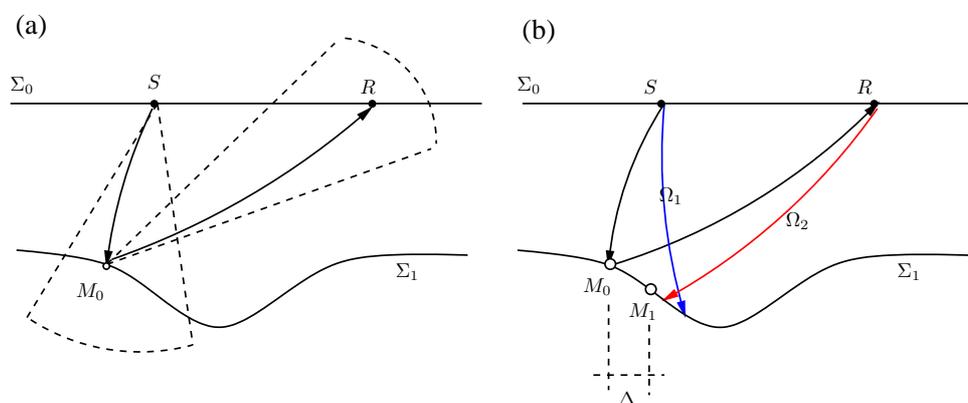


Figura 5.4: Construção de uma família de raios para a integral (5.6). (a) Primeiro traçamento de raios, usando o traçamento de dois pontos convencional, entre os pontos S, M_0 e M_0, R . (b) Condições iniciais para o próximo raio procurado, usando a informação daquele que o precede.

A variação no ângulo, δ , é na verdade escolhida como sendo $\delta = \eta/I$, onde $I > 0$ é o número da interface a ser modelada. De fato, quanto mais profunda a interface, menor deve ser a variação no ângulo devido à mudança

de direção do raio ao longo de interfaces, através da lei de Snell.

O número médio de raios traçados para o par fonte-receptor, nesta estratégia, é dado por $[2 + n(S, M) + n(M, R)](J - 1) + 2[y + n(S, M_0) + n(M_0, R)]$, com $n(\cdot, \cdot)$ o número médio de iterações para obter o ângulo ótimo. Se estimamos, como antes, que o número de iterações é 4 e $y = 60$ então ao total teremos traçado $128 + 6(J - 1)$ raios. Por exemplo, se $J = 100$ então com a estratégia “ingênua”, teríamos um total de 25600 raios, enquanto com esta apenas 1118. A família de raios para um experimento com fonte-receptor fixos é apresentada na Figura 5.5.b.

Quando a interface possui geometria anticlinal ou outro tipo de geometria acentuada, leves modificações no algoritmo acima devem ser feitas. Para começar, fixando o primeiro ponto M_0 , deve-se traçar raios, ao ponto M_j , usando o algoritmo da Seção 4.3 até que ambos raios SM_j e M_jR sejam viáveis³; a partir daí, a estratégia segue como apresentada acima, como ilustra a Figura 5.6. Tal acontecimento é esboçado no exemplo da Figura 5.5.a, onde aparece uma região da interface que não é coberta por raios.

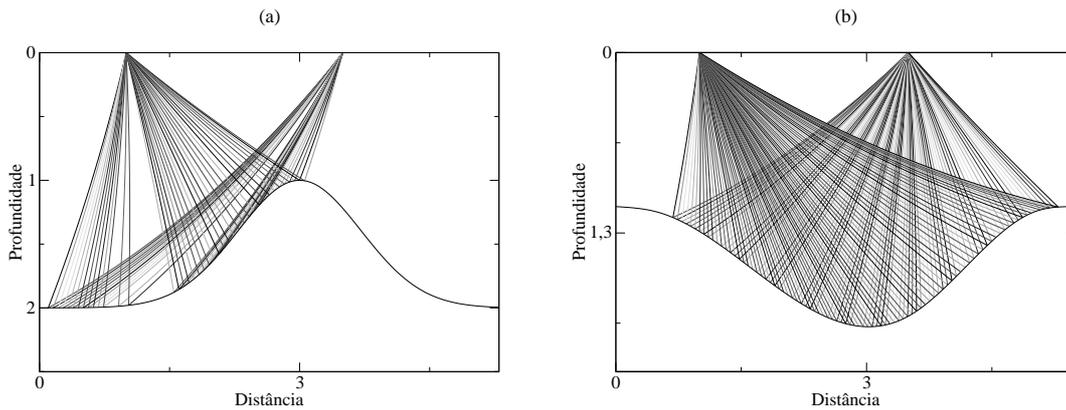


Figura 5.5: Família de raios para a integral de Kirchhoff em um modelo composto por duas camadas com interface (a) anticlinal e (b) sinclinal. A primeira camada possui velocidade afim e a segunda constante; a fonte é situada em $(1, 0)$ e o receptor em $(3.5, 0)$.

³Isto é, que possamos traçá-los dentro do modelo.

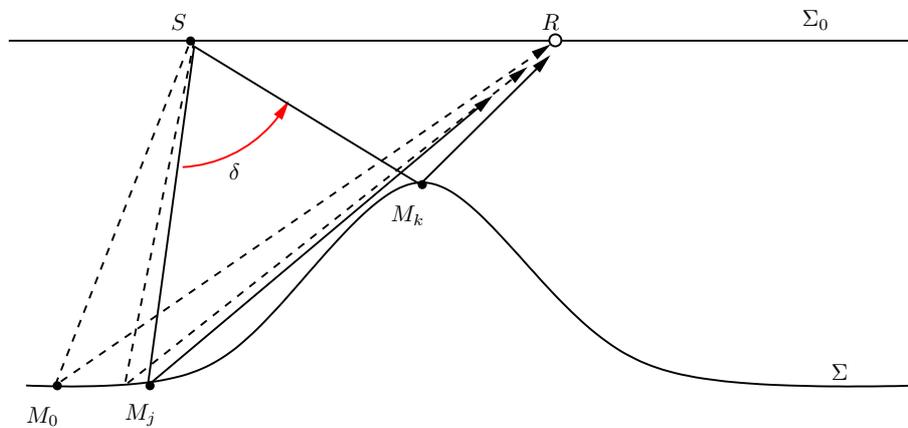


Figura 5.6: Atualização do passo δ no ângulo de traçamento. Em linha tracejada estão os primeiros raios *viáveis* partindo do ponto M_0 . O último par de raios viáveis antes de atingir a região acentuada da interface é SM_jR , o próximo somente no ponto M_k . Logo, deve-se escolher δ como o ângulo entre os vetores $M_j - S$ e $M_k - S$.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos com a implementação de raios, tal como apresentado no Capítulo 4. Todos os resultados foram obtidos através da implementação, em linguagem de programação C, de uma biblioteca de raios denominada **ART**. Mais sobre o uso de **ART** pode ser encontrado no Apêndice B.

Concentraremos-nos em esboçar resultados sobre modelamento, tal como apresentado no Capítulo 5 para modelos 2.5D particulares. Antes de atingir este objetivo, mostraremos o comportamento de **ART** ao traçar raios sobre os cinco tipos de velocidades estudados e como construir um diagrama de raios resultante de um experimento sobre a superfície de medição. **ART** é comparado ao pacote **Seis88** desenvolvido por Červený e Psencik em 1988, [4] e para isso, uma pequena seção é dedicada adiante.

6.1 Traçamento de raios

Para construir a parte cinemática de um raio precisamos assumir, obviamente um modelo de velocidades, uma direção inicial, um ponto inicial que representa a fonte pontual e um código de raio que indica a trajetória ao longo das camadas.

Para verificar a validade da implementação e a qualidade de um traçamento cinemático, foi criado um modelo simples composto por duas camadas separadas por um refletor plano inclinado, determinado pela função $z = cx + d$ com $c = -1/3$ e $d = 3$. Sobre cada camada considera-se velocidade constante ou quadrado da vagarosidade afim $1/v^2(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + a_0$. Mostraremos que para estes modelos é possível obter quantidades cinemáticas de forma analítica, sem uso de **ART**. As comparações entre cada valor exato e obtido por **ART** serão apresentadas em forma de tabela a seguir. O maior interesse neste exemplo

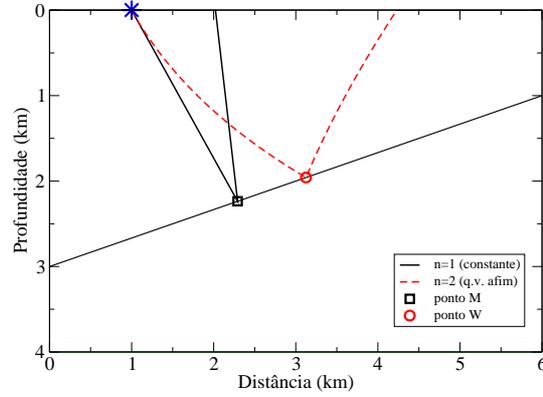


Figura 6.1: Raios para velocidade constante (linha contínua) e quadrado da vagarosidade afim (linha tracejada) na primeira camada. O primeiro atinge a interface no ponto **M** sobre o refletor e o segundo em **W**.

é mostrar que ART consegue obter de forma satisfatória o parâmetro u que varia ao longo do raio e que o faz sair de um ponto e atingir uma interface. Se este valor for aceitável então poderemos afirmar que ART possui um bom desempenho, pois todas as expressões cinemáticas (e algumas dinâmicas) são avaliadas analítica ou semi-analiticamente por esse valor.

Seja uma fonte pontual $\mathbf{S} = (1, 0)$ e considere que o raio parte com direção de $\theta = 30^\circ$ reflete e volta na superfície. Se $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ é o vetor posição sobre o raio então queremos encontrar o parâmetro u tal que $\mathbf{x}(u) \in \Sigma$, i.e que faz o raio partir de \mathbf{S} e incidir em **M** (para velocidade constante) ou em **W** (para quadrado da vagarosidade afim) sobre o refletor (veja Figura 6.1). Lembramos que para velocidade constante $u \equiv s$ (comprimento de arco) e para quadrado da vagarosidade afim $u \equiv \sigma$ (dito parâmetro natural). A situação proposta é resolvida com as equações (3.8) e (3.19) através de

$$s = \frac{\mathbf{S}_2 - c\mathbf{S}_1 - d}{v(\mathbf{S})(c\mathbf{p}_{01} - \mathbf{p}_{02})}, \quad \frac{\sigma^2}{4}(\mathbf{a}_2 - c\mathbf{a}_1) + \sigma(\mathbf{p}_{02} - c\mathbf{p}_{01}) + \mathbf{S}_2 - c\mathbf{S}_1 - d = 0 \quad (6.1)$$

onde $\mathbf{p}_0 = (\sin \theta, \cos \theta)/v(\mathbf{S})$ é a direção inicial no ponto inicial. A velocidade constante na primeira camada é unitária e para o segundo modelo escolhe-se $\mathbf{a} = (1, c)^T$ e $a_0 = 1$ de maneira que a segunda equação em (6.1) fique fácil. A Tabela 6.1 mostra os resultados obtidos para este experimento.

Outro ponto relevante para se abordar aqui é que estratégia de obtenção de pontos de reflexão/transmissão, como na Seção 4.2, via cone gerado por pontos da spline pode falhar em alguns casos. A Figura 6.2 ilustra um exemplo desta situação com modelo de velocidade constante. O raio que se deve obter é aquele que parte da superfície e atinge a terceira interface.

Quantidade	Exato	ART	Erro relativo
$s(\mathbf{S}, \mathbf{W})$	$\frac{16}{1+3\sqrt{3}}$	2.582248	$1.375768 \cdot 10^{-7}$
\mathbf{M}_1	$\frac{3\sqrt{3}+9}{1+3\sqrt{3}}$	2.291124	$7.752908 \cdot 10^{-8}$
\mathbf{M}_2	$\frac{8\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}}$	2.236292	$2.647667 \cdot 10^{-8}$
$T(\mathbf{M})$	$\frac{16}{1+3\sqrt{3}}$	2.582248	$1.375768 \cdot 10^{-7}$
$\mathbf{p}_{R1}(\mathbf{M})$	$\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$	-0.119615	$2.025416 \cdot 10^{-6}$
$\mathbf{p}_{R2}(\mathbf{M})$	$\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$	-0.992820	$3.253635 \cdot 10^{-7}$

Quantidade	Exato	ART	Erro relativo
$\sigma(\mathbf{S}, \mathbf{W})$	$\frac{16}{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	1.825925	$9.841564 \cdot 10^{-8}$
\mathbf{W}_1	$\frac{117\sqrt{6}+169\sqrt{2}}{45\sqrt{6}+41\sqrt{2}}$	3.124624	$5.911705 \cdot 10^{-8}$
\mathbf{W}_2	$\frac{288\sqrt{6}+200\sqrt{2}}{135\sqrt{6}+123\sqrt{2}}$	1.958459	$2.016413 \cdot 10^{-7}$
$T(\mathbf{W})$	$\frac{32}{27} \frac{(404+153\sqrt{3})\sqrt{2}}{(3\sqrt{3}+1)^3}$	4.713717	$8.279654 \cdot 10^{-9}$
$\mathbf{p}_{R1}(\mathbf{W})$	$\frac{34+18\sqrt{3}}{30\sqrt{6}+10\sqrt{2}}$	0.743801	$1.179556 \cdot 10^{-7}$
$\mathbf{p}_{R2}(\mathbf{W})$	$\frac{-314-78\sqrt{3}}{90\sqrt{6}+30\sqrt{2}}$	-1.708381	$1.350936 \cdot 10^{-7}$

Tabela 6.1: Comparação entre valores exato e obtido por ART, para quantidades cinemáticas sobre os raios da Figura 6.1. Considera-se que \mathbf{p}_R é o vetor vagarosidade refletido, \mathbf{M} e \mathbf{W} pontos sobre a interface, $\sigma(\mathbf{S}, \mathbf{W})$ e $s(\mathbf{S}, \mathbf{W})$ parâmetros sobre o raio para atingir o refletor e T o tempo de trânsito.

Neste exemplo, o vetor vagarosidade originado pela lei de Snell na segunda interface satisfaz à condição exigida sobre um ponto da interface. Neste caso, o candidato a ponto inicial para o método de Newton é o próprio ponto da spline (a solução procurada), como ilustra a Figura 6.2 (direita), ou seja, o algoritmo não converge.

O contra-exemplo para esta estratégia falha pois o cone ‘otimo’ é procurado sem critério de parada, ou seja, varre todos os pontos da spline e procura o par que atende à geometria da Figura 4.3; sendo que no exemplo este par é o último, quando deveria ser o anterior.

Colocar um *break*, quando encontra o par de pontos da spline, no algoritmo de busca, também não é a solução para o problema pois, se a mesma situação apresentada acima acontece em um ponto central da spline, gostaríamos que o cone fosse o posterior e não o anterior. Tampouco é garantia de funcionalidade colocar muitos pontos de controle na spline que define a interface.

Assim, a geometria da interface é o fator mais importante para a escolha do método usado. Via de regra, em interfaces acentuadas (e com caracte-

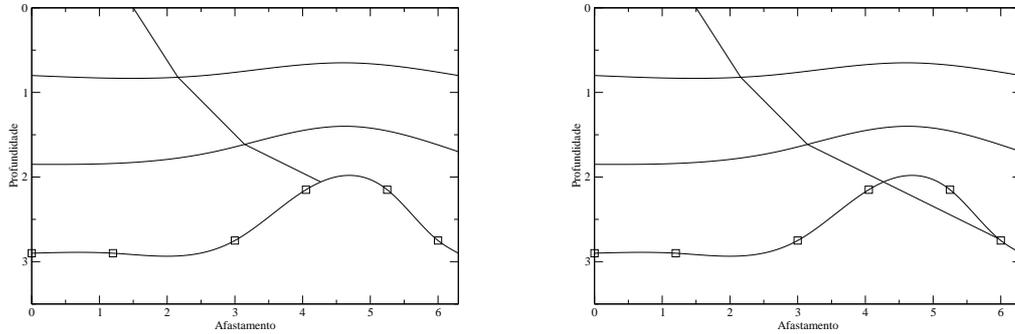


Figura 6.2: À esquerda, raio correto obtido com a estratégia de distância mínima para incidência na terceira interface; à direita raio errado obtido com a estratégia de cone.

rística anticlinal) como na do exemplo apresentado, a estratégia para obter pontos de reflexão/transmissão deve ser a de distância mínima. Como ART não tem controle sobre a interface, o método padrão implementado é o de estratégia de cone, embora isso possa ser alterado.

6.1.1 Traçamento entre dois pontos

Considere um modelo constituído por quatro camadas, sendo as três últimas com velocidade afim $v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + a_0$ e a primeira com velocidade constante 2.4km/s. Os coeficientes \mathbf{a} e a_0 são dados respectivamente em cada camada pelos seguintes vetores: $\{\mathbf{a} = (2.1, 2.5), a_0 = 2.6\text{km/s}\}$, $\{\mathbf{a} = (2.4, 2.6), a_0 = 2.7\text{km/s}\}$ e $\{\mathbf{a} = (2.4, 2.7), a_0 = 3.0\text{km/s}\}$. A Figura 6.3.c ilustra o modelo de velocidades.

Para determinar o conjunto de raios que parte de uma fonte pontual $\mathbf{S} = (1, 0)$ e incide em uma coleção de pontos $\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4\}$ sobre o primeiro refletor, usamos o traçamento entre dois pontos apresentado na Seção 4.3 usando a estratégia de interpolação linear e mista. Tomaremos $(\mathbf{R}_1)_x = 3\text{km}$, $(\mathbf{R}_2)_x = 3.5\text{km}$, $(\mathbf{R}_3)_x = 4\text{km}$ e $(\mathbf{R}_4)_x = 4.5\text{km}$.

Para o caso particular de raios entre \mathbf{S} e \mathbf{R}_4 , a Figura 6.3.b apresenta os raios iniciais cujos pontos extremos englobam o ponto \mathbf{R}_4 . A maneira como ART encontra raios é construir um leque com código de raio $\{0, 1, 2, 2, 1\}$ (para onda P por exemplo), a seguir (veja a Figura 6.3.b) encontrar respectivamente os pares de raios $\{\mathbf{SA}, \mathbf{SB}\}$, $\{\mathbf{SC}, \mathbf{SD}\}$ e $\{\mathbf{SE}, \mathbf{SF}\}$, cujos pontos extremos englobam o ponto \mathbf{R}_4 ; logo aplica o algoritmo de determinação do ângulo ótimo para cada um destes pares.

Por exemplo, a convergência do algoritmo de interpolação linear acontece

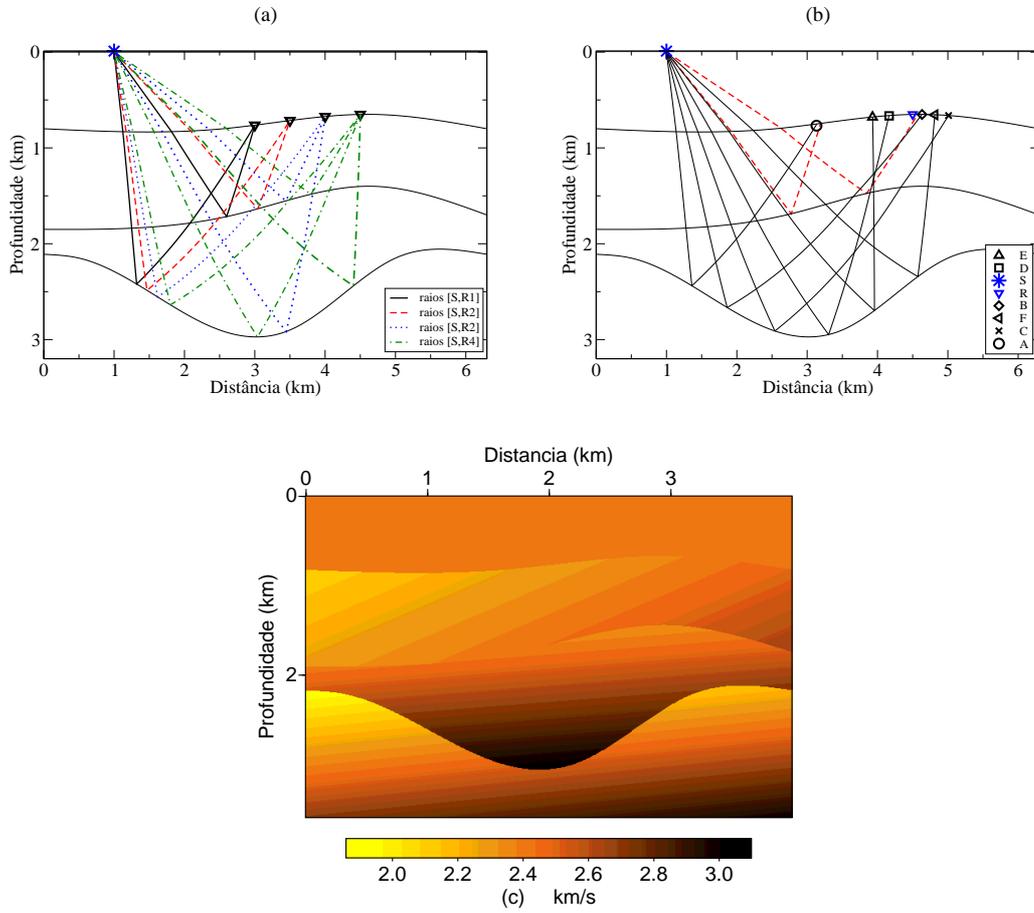


Figura 6.3: (a) Conjunto de raios traçados entre cada par fonte-receptor S e R_j . (b) Raios iniciais para o algoritmo que determina o conjunto de raios entre S e R_4 : os raios que incidem em $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ e $\{E, F\}$ geram os raios, da esquerda para a direita, que incidem sobre a terceira interface. (c) Modelo de velocidade adotado para o experimento.

	(S, R_1)	(S, R_2)	(S, R_3)	(S, R_4)
Leque (i)	10	10	10	20
Leque (ii)	10	10	10	27
Iterações (i)	3,6	11,3	9,3,13	7,7,3,7
Iterações (ii)	1,1	5,1	2,2,1	2,3,2,3

Tabela 6.2: Número de raios no leque inicial do *shooting* para o algoritmo de traçamento entre dois pontos e o número de iterações nos métodos (i) interpolação linear e (ii) misto (interpolação e aproximação paraxial) para cada par fonte-receptor do experimento a Figura 6.3.a.

em 7, 3 e 7 iterações para cada um dos raios acima respectivamente. O algoritmo misto converge em 3, 2 e 3 iterações. Situação similar acontece com o par de raios (em linha tracejada na Figura 6.3.b) que se propaga pelas camadas $\{0, 1, 1\}$. A convergência acontece com 7 iterações por interpolação linear e com 2 pelo algoritmo misto. Estes valores são apresentados na Tabela 6.2.

6.1.2 ART \times Seis88

Para os modelos de velocidade constante podemos comparar os resultados obtidos por ART com os resultados obtidos pelo pacote Seis88. Nesta comparação, preocuparemos-nos em verificar se a trajetória de um conjunto de raios é semelhante, se o número de raios traçados é o mesmo e gerando quantidades dinâmicas aceitáveis dentro de uma tolerância.

Consideraremos um modelo formado por duas camadas homogêneas separadas por um refletor mergulhante com 45° de inclinação. A Figura 6.4 ilustra o experimento de tiro comum realizado com fonte situada no ponto $(1, 0)$; na mesma figura estão apresentadas as comparações entre tempo de trânsito e quantidades dinâmicas em cada ponto de um raio. ART encontra para este exemplo quatro raios a mais que Seis88 conforme ilustra a superposição de raios na subfigura (a). As demais subfiguras ilustram, para este experimento, o erro global dentro da tolerância 10^{-4} .

6.2 Modelamento

Assim como na seção anterior, antes de ilustrarmos os resultados sobre modelamento, mostraremos que com o traçamento de raios obtido por ART, o traço obtido para um par fonte-receptor através da integral de Kirchhoff (5.6) é aceitável. Considere um meio homogêneo composto por duas camadas, a primeira com velocidade 1km/s e densidade 1.5g/cm^3 e a segunda com velocidade 1.5km/s e densidade 2.5g/cm^3 , separadas por um refletor inclinado como o da Figura 6.1, descrito pela função $z = cx + d$, onde $c = -1/3$ e $d = 3$.

Se (\mathbf{S}, \mathbf{R}) é um par fonte e receptor então para cada \mathbf{M} fixo sobre a interface, $s(\mathbf{S}, \mathbf{M}) = \|\mathbf{M} - \mathbf{S}\|$ e $s(\mathbf{M}, \mathbf{R}) = \|\mathbf{R} - \mathbf{M}\|$ são os parâmetros que fazem um raio partir de \mathbf{S} e incidir em \mathbf{M} e de \mathbf{M} incidir em \mathbf{R} respectivamente (pois representam comprimento de arco). Como o meio é de velocidade constante, as soluções $\mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{W}^{(o)}$ dos sistemas (3.47) são dadas por $\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{M}) = (\|\mathbf{M} - \mathbf{S}\|, 1)^T$ e $\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{R}) = (\|\mathbf{R} - \mathbf{M}\|, 1)^T$; isto decorre das equações (3.52) e (3.50). Daí, pela equação (3.51), resultam os seguintes valores de espalhamento geométrico: $\mathcal{L}(\mathbf{M}) = \|\mathbf{M} - \mathbf{S}\|$ e $\mathcal{L}(\mathbf{R}) = \|\mathbf{R} - \mathbf{M}\|$.

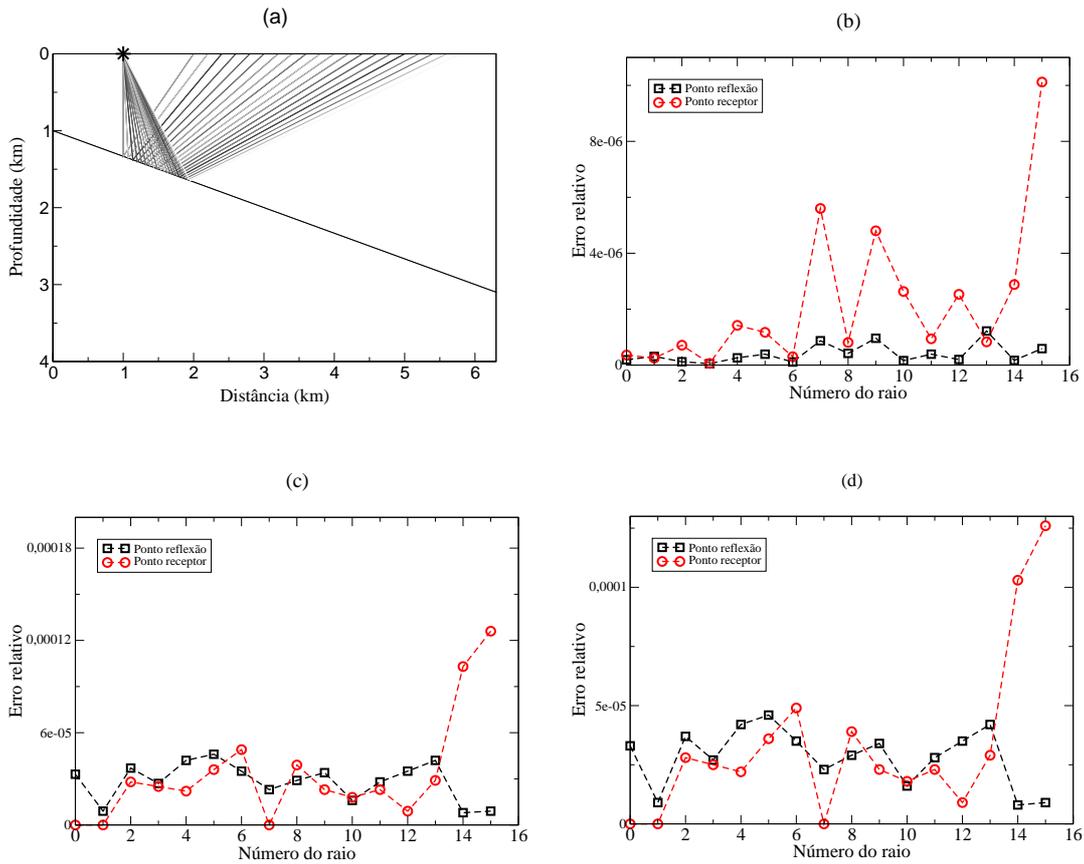


Figura 6.4: Comparação entre ART e Seis88: (a) Geometria de raios obtidos para experimento de tiro comum em ambos programas. (b), (c) e (d) Erro absoluto para valores de tempo de trânsito, $\Pi_{12}^{(i)}$ (Q *in-plane*) e $\Pi_{12}^{(o)}$ (Q *out-of-plane*) respectivamente, no primeiro e segundo ponto de cada raio (segundo a convenção de que a fonte é o ponto de número zero e Π a matriz de propagação).

Portanto, considerando onda primária não convertida, os valores de amplitude em cada um dos pontos \mathbf{M} e \mathbf{R} são dados, através das equações (5.4) e (5.5), por

$$\mathcal{A}(\mathbf{M}) = \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\mathbf{f}^T(\mathbf{M} - \mathbf{S})}{6\pi\|\mathbf{M} - \mathbf{S}\|^2}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{f}^T(\mathbf{R} - \mathbf{M})}{6\pi\|\mathbf{R} - \mathbf{M}\|^2}. \quad (6.2)$$

O fator de obliquidade no ponto \mathbf{M} , como na equação (5.9), é dado por

$$\mathcal{O}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{|(\mathbf{M} - \mathbf{S})^T \mathbf{N}|}{\|\mathbf{M} - \mathbf{S}\|} + \frac{|(\mathbf{R} - \mathbf{M})^T \mathbf{N}|}{\|\mathbf{R} - \mathbf{M}\|} \right\}, \quad (6.3)$$

com \mathbf{N} o vetor normal à interface no ponto \mathbf{M} . Finalmente, aproximando pelo método do trapézio a integral (5.6), o pulso aproximado é comparado ao pulso obtido por traçamento de raios, mediante a estratégia apresentada no capítulo anterior. A Figura 6.5.a ilustra esta situação, onde consideramos $\mathbf{f} = (1, 1)^T$ e parâmetros do sinal $f = 10$ e $\gamma = 6$. A Figura 6.5.b ilustra a família de raios para a aproximação numérica da integral de Kirchhoff entre a fonte $\mathbf{S} = (1, 0)^T$ e o receptor $\mathbf{R} = ((342 + 25\sqrt{3})/(78 + 65\sqrt{3}), 0)^T$ (este é o raio da seção anterior, que parte da fonte com 30° , apresentado na Figura 6.1).

A Figura 6.6 ilustra a comparação entre raios obtidos por ART e Seis88 para um modelo homogêneo composto por quatro camadas. Uma vez que os diagramas de raios apresentam geometrias parecidas entre si, podemos comparar o traçamento dinâmico em cada um dos raios e obter seções para diversos tipos de experimentos. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 6.7 a 6.13.

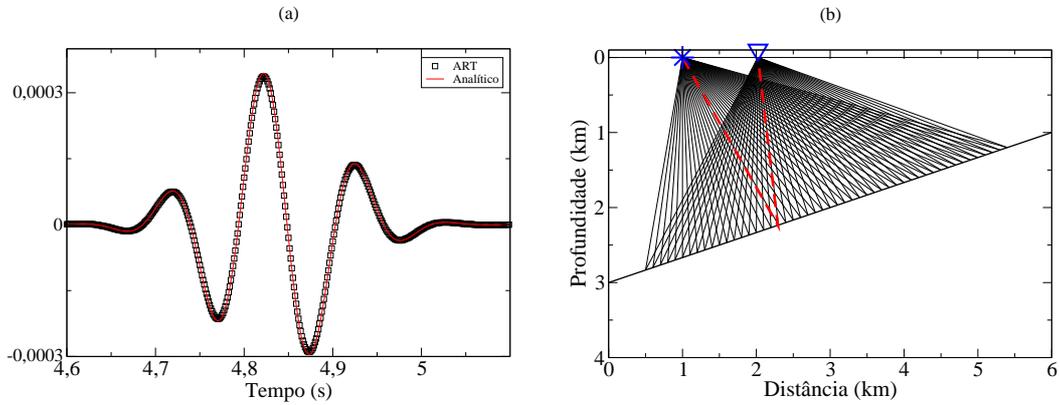


Figura 6.5: (a) Comparação entre o pulso aproximado pelo método do tra-pé-zio e o obtido por traçamento de raios em ART. (b) Família de raios para a integral de Kirchhoff em linha contínua e o raio de reflexão em linha tra-ce-jada.

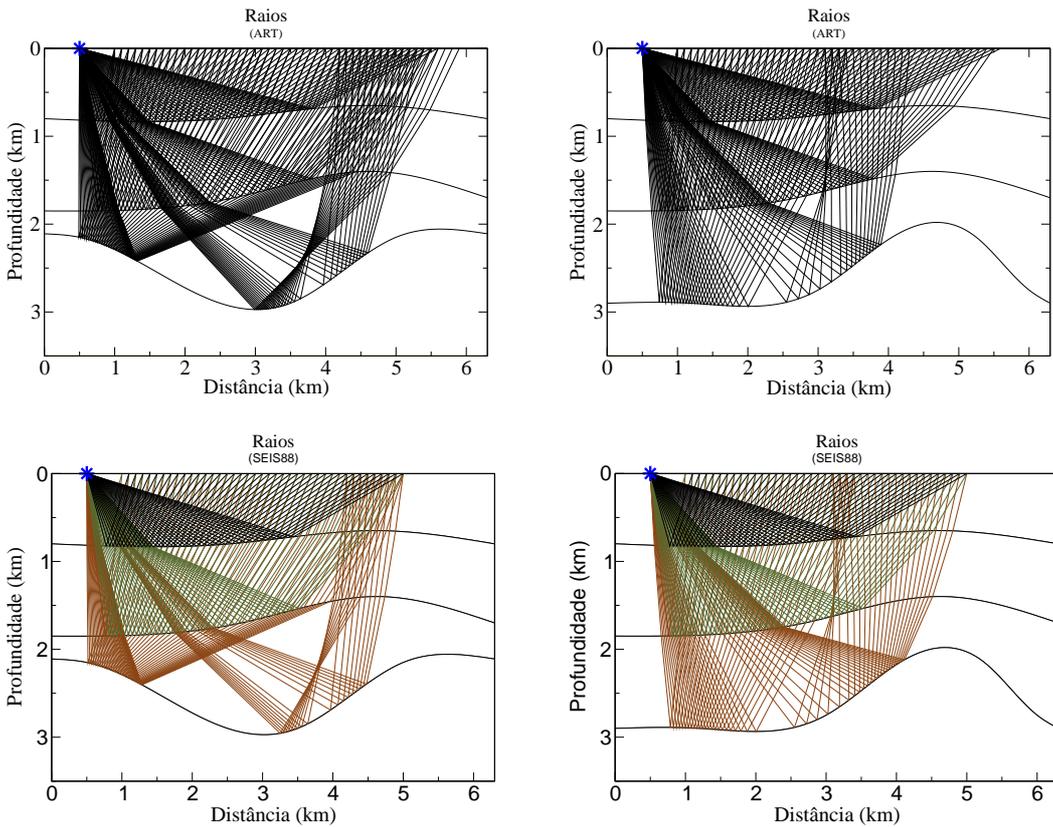


Figura 6.6: Comparação entre diagramas de raios, obtidos por ART e Seis88, para um experimento de tiro comum sobre o modelo de quatro camadas a velocidades 1.5km/s, 1.9km/s, 2.5km/s e 3.0km/s de cima para baixo.

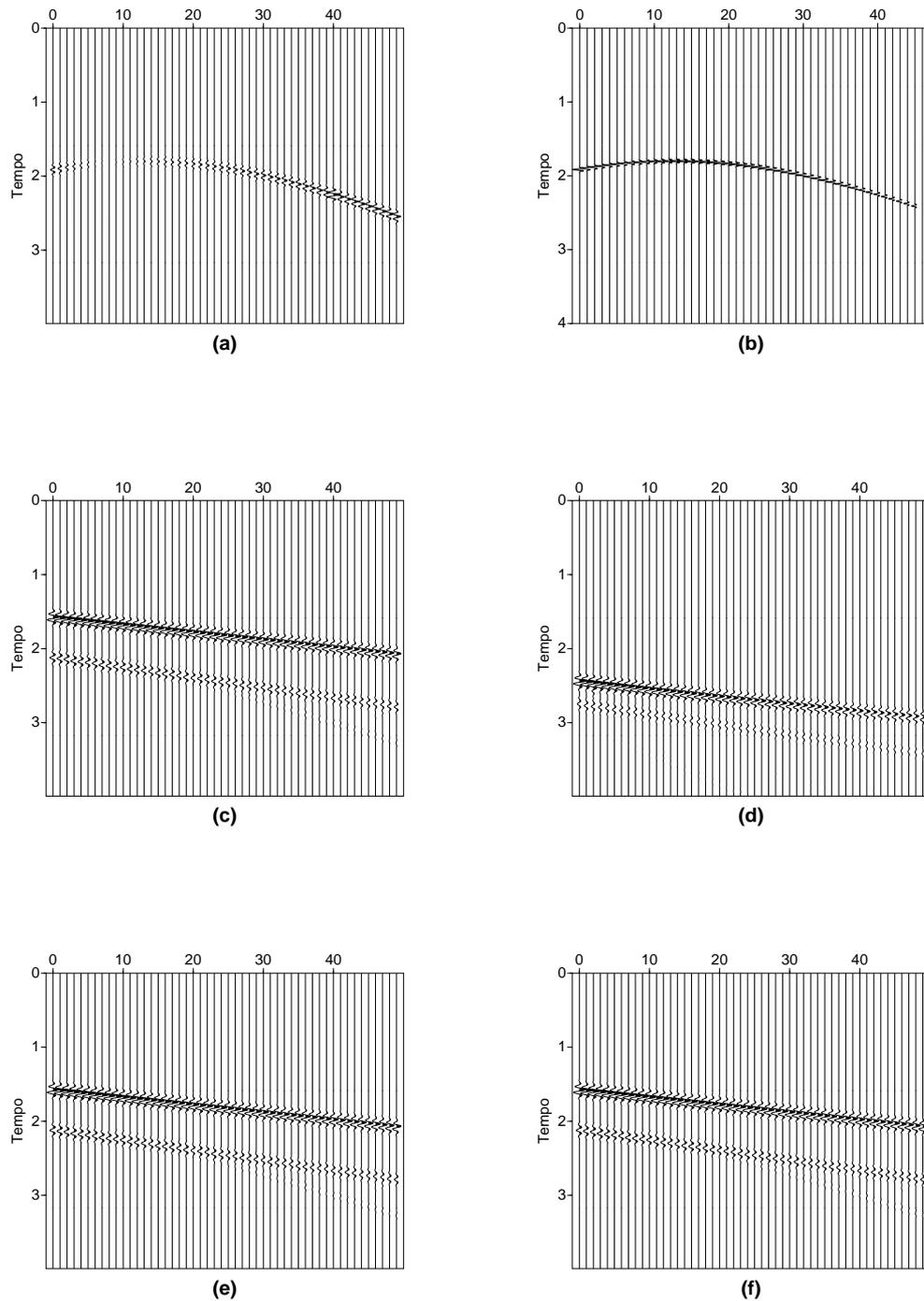


Figura 6.7: Modelamento para um refletor plano inclinado de 18° . Seção de tiro comum obtida com (a) ART e (b) Seis88. Seção obtida por modelamento Kirchhoff com experimento de afastamento comum para (c) velocidade constante (d) velocidade afim (e) quadrado da vagarosidade afim e (f) velocidade com logaritmo afim.

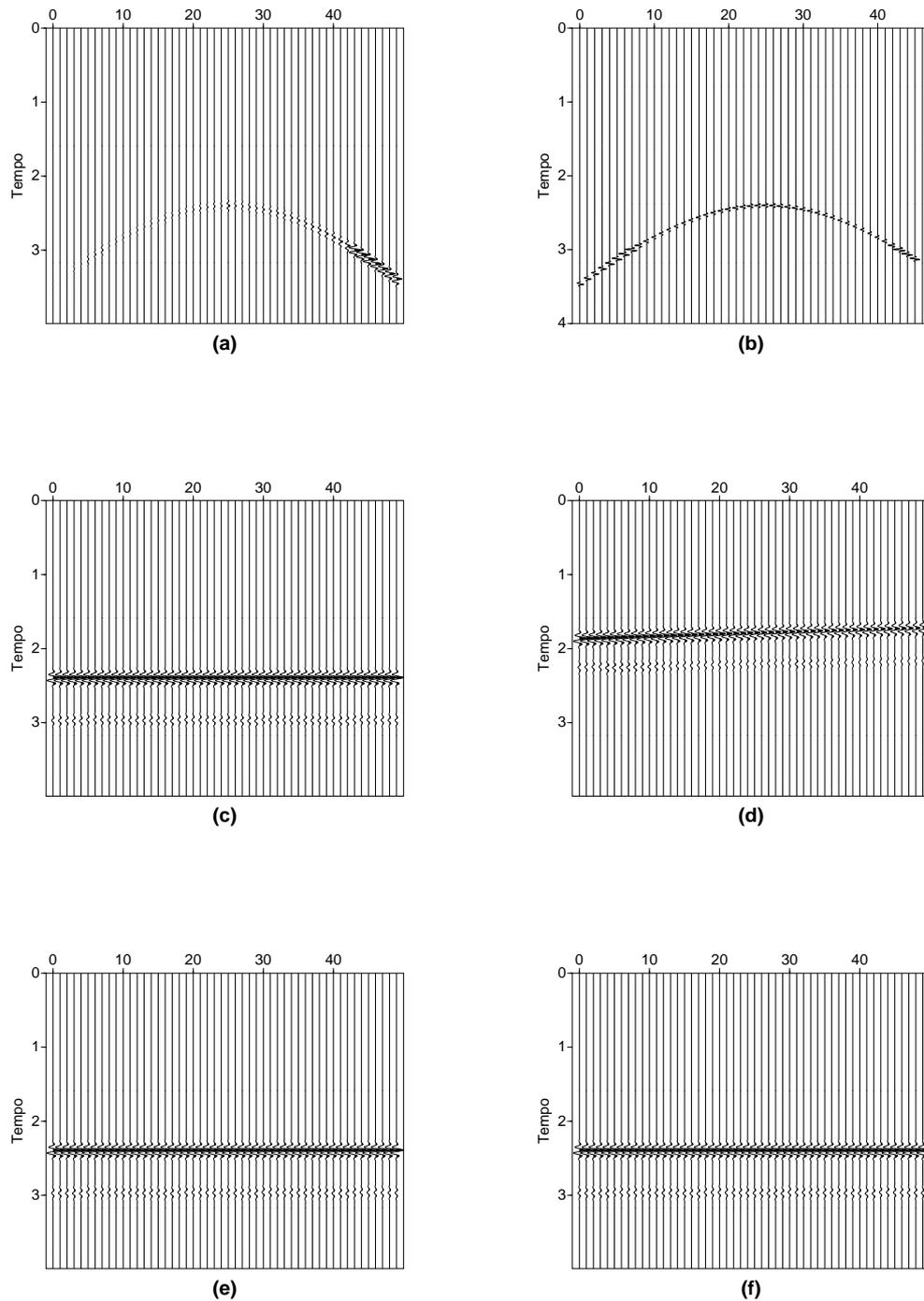


Figura 6.8: Modelamento para um refletor plano horizontal. Seção de tiro comum obtida com (a) ART e (b) Seis88. Seção obtida por modelamento Kirchhoff com experimento de afastamento comum para (c) velocidade constante (d) velocidade afim (e) quadrado da vagarosidade afim e (f) velocidade com logaritmo afim.

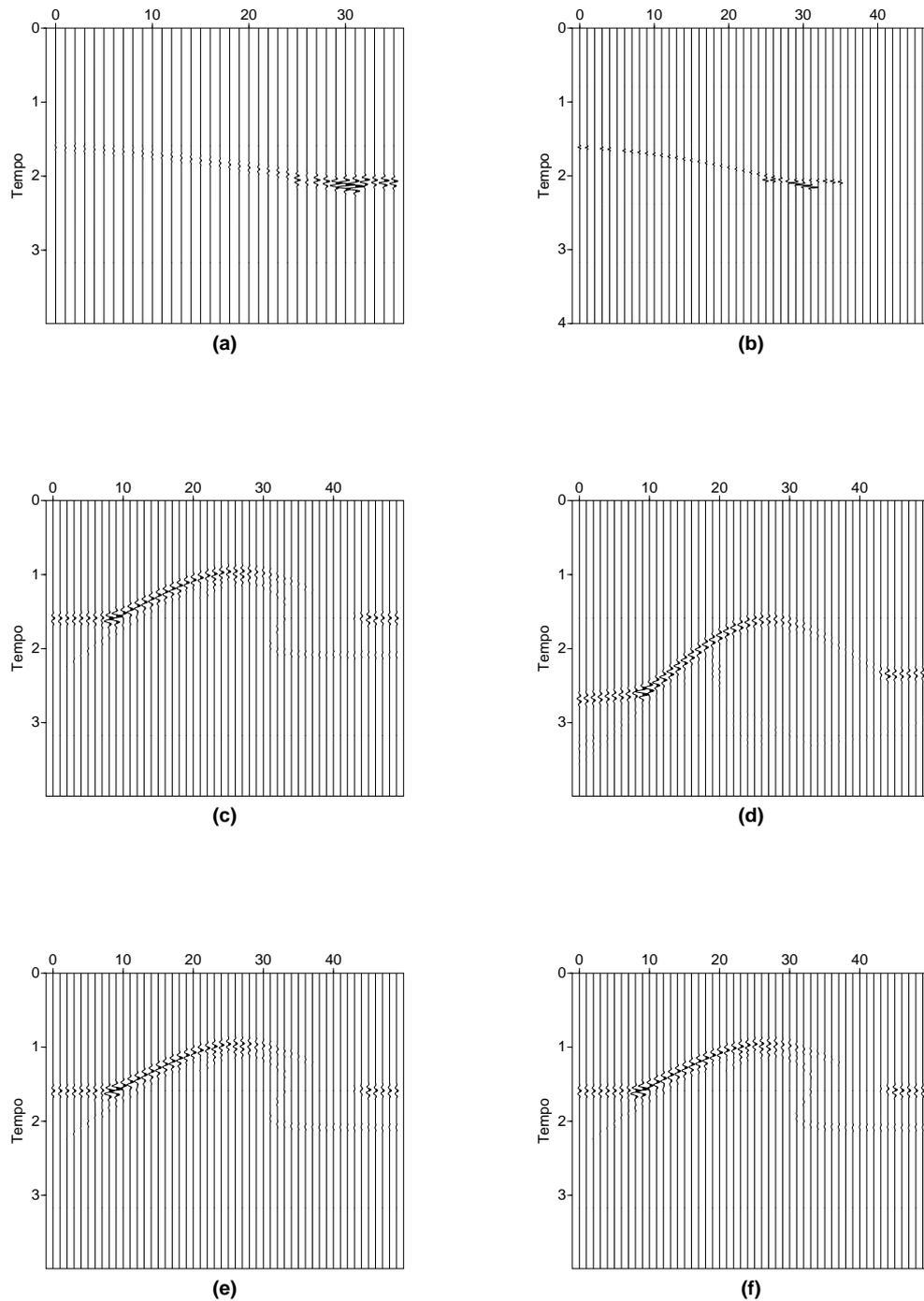


Figura 6.9: Modelamento para um refletor anticlinal. Seção de tiro comum obtida com (a) ART e (b) Seis88. Seção obtida por modelamento Kirchhoff com experimento de afastamento comum para (c) velocidade constante (d) velocidade afim (e) quadrado da vagarosidade afim e (f) velocidade com logaritmo afim.

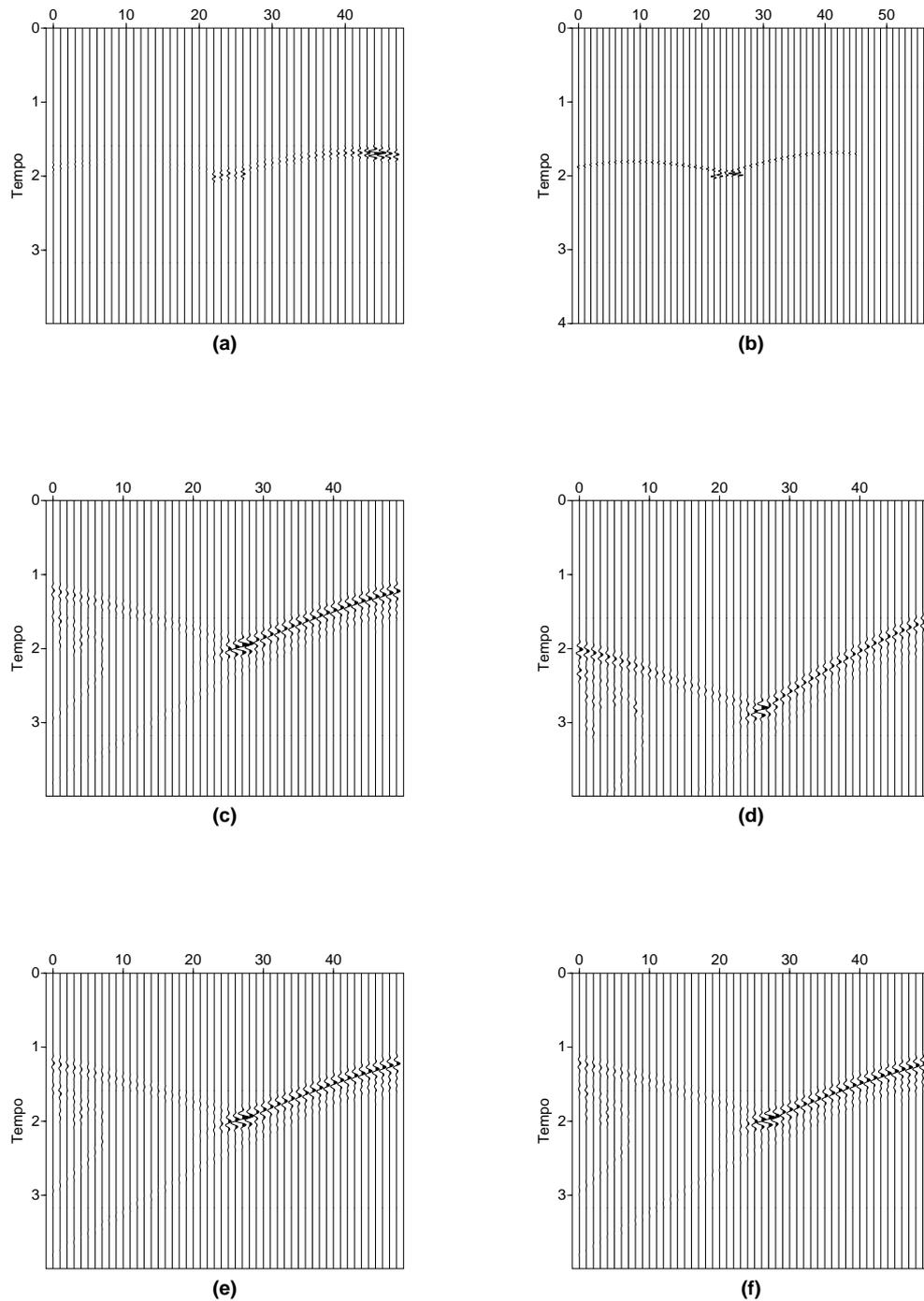


Figura 6.10: Modelamento para um refletor sinclinal. Seção de tiro comum obtida com (a) ART e (b) Seis88. Seção obtida por modelamento Kirchhoff com experimento de afastamento comum para (c) velocidade constante (d) velocidade afim (e) quadrado da vagarosidade afim e (f) velocidade com logaritmo afim.

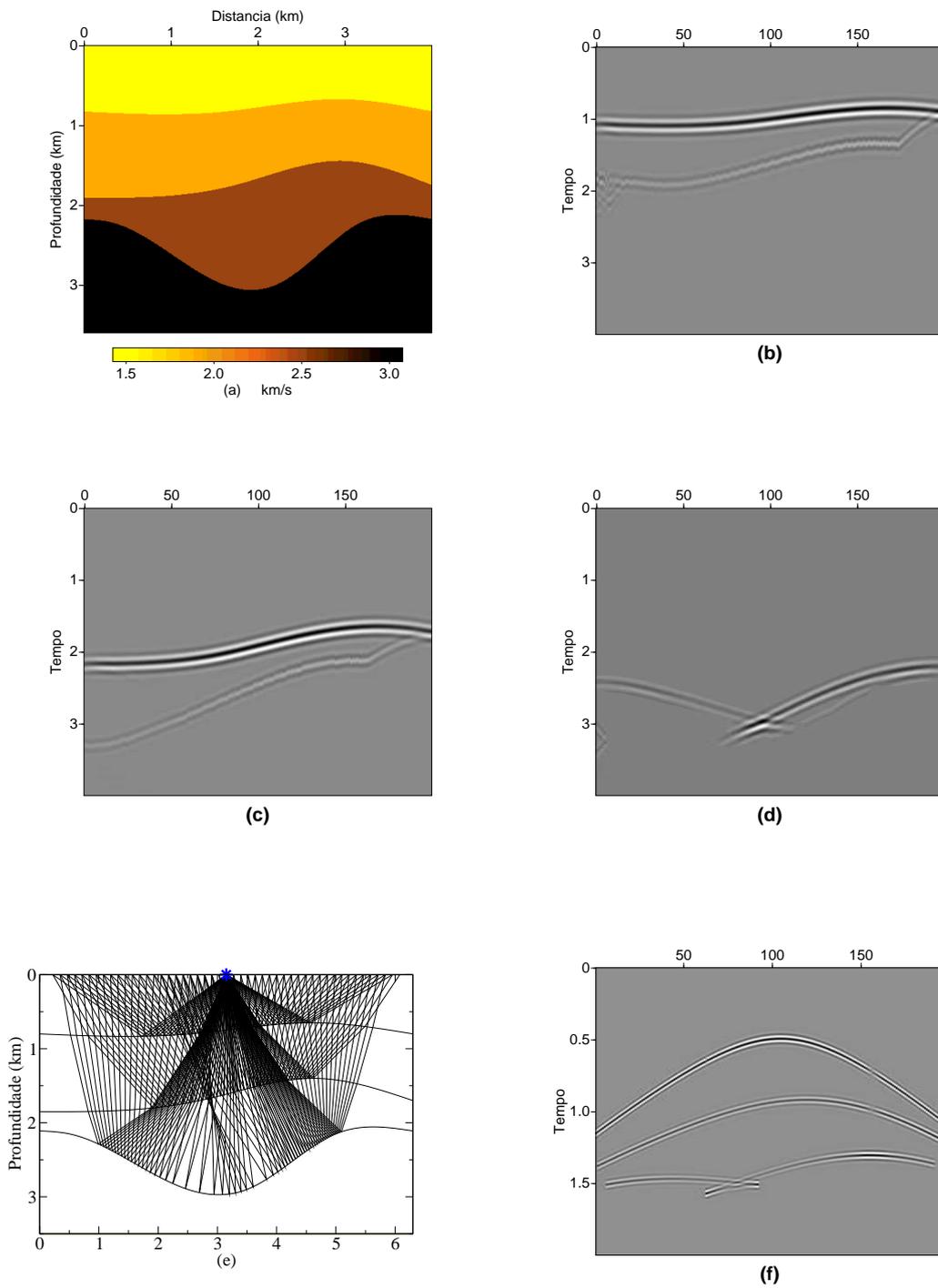


Figura 6.11: (a) Modelo de velocidades para um meio multi-camadas homogêneo. (b), (c) e (d) Modelamento Kirchhoff para a primeira, segunda e terceira interface respectivamente. Modelamento por raios (tiro comum): (e) diagrama de raios e (f) seção obtida com ART.

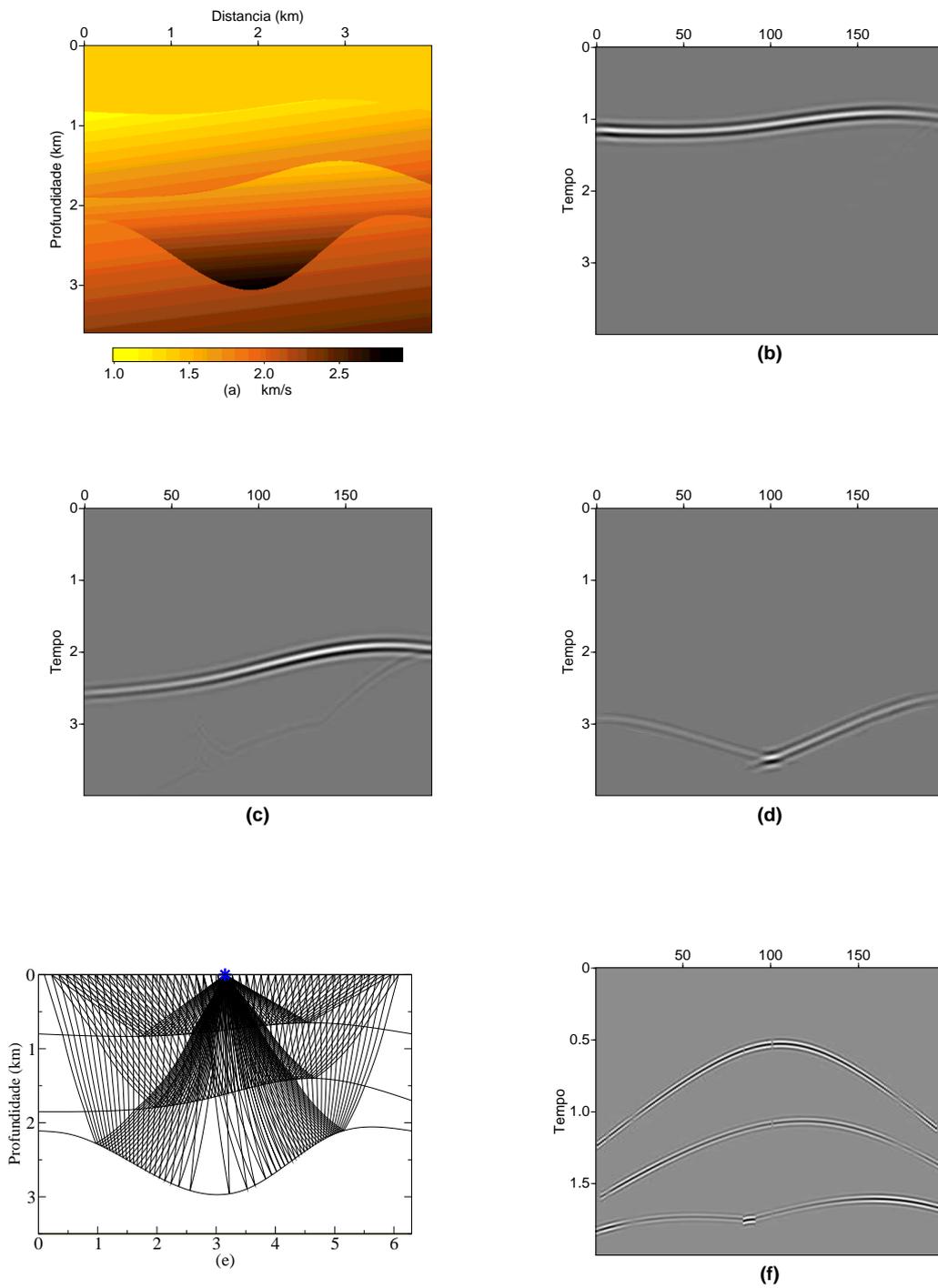


Figura 6.12: (a) Modelo de velocidades para um meio multi-camadas, com segunda e terceira camadas com velocidade afim. (b), (c) e (d) Modelamento Kirchhoff para a primeira, segunda e terceira interface respectivamente. Modelamento por raios (tiro comum): (e) diagrama de raios e (f) seção obtida com ART.

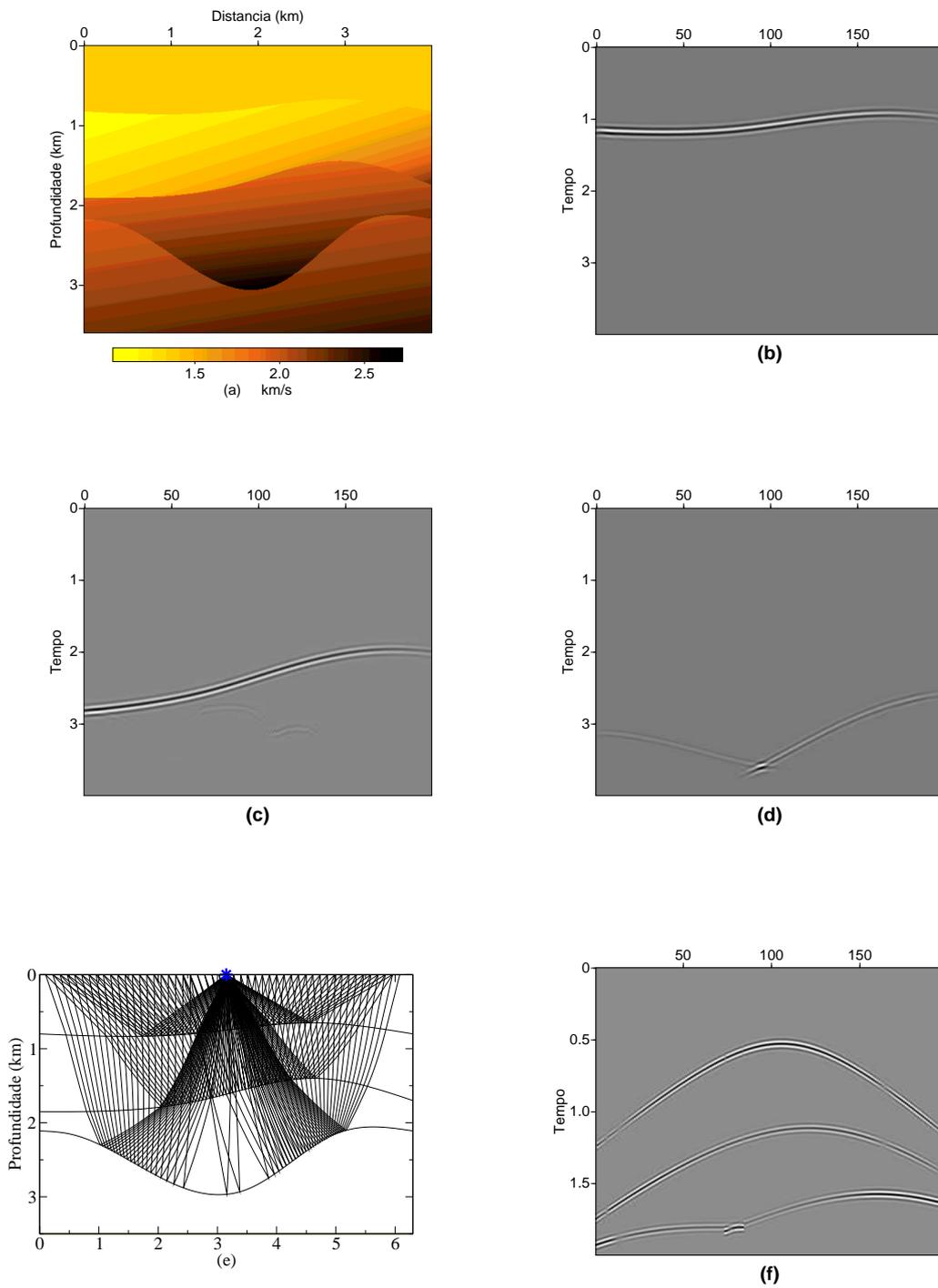


Figura 6.13: (a) Modelo de velocidades para um meio multi-camadas, com segunda e terceira camadas com quadrado da vagarosidade afim. (b), (c) e (d) Modelamento Kirchhoff para a primeira, segunda e terceira interface respectivamente. Modelamento por raios (tiro comum): (e) diagrama de raios e (f) seção obtida com ART.

Capítulo 7

Conclusões

Algoritmos para traçamento de raios desempenham papel fundamental em grande parte dos estudos relacionados a propagação de ondas em meios multi-camadas. Este trabalho representa apenas uma parte da enorme quantidade de teoria existente por trás de estudos relacionados ao modelamento por traçamento de raios. Concentramo-nos em meios para os quais há solução analítica (ou semi-analítica) para o sistema de raios.

A iniciativa de se obter soluções analíticas para a equação iconal vem junto com a expectativa de que camadas da subsuperfície possam ter um modelo de velocidades aproximado por um daqueles apresentados no Capítulo 3. O ganho que se espera obter com soluções analíticas é obviamente a rapidez e a precisão do traçamento de raios.

Como se observou no Capítulo 6, através de um exemplo simples (Tabela 6.1), a precisão dos resultados obtidos com a implementação dos algoritmos do Capítulo 4, é satisfatória. Mesmo que este exemplo sirva apenas para calibrar os métodos, acredita-se no bom desempenho já que ele está vinculado somente à determinação de um parâmetro que varia sobre o raio. A rapidez da construção de um único raio é alcançada e atende às expectativas de uma implementação inicial. Tais tempos não são apresentados pois não contribuem de forma significativa para o trabalho; apenas para citar, o traçamento de um raio não excede meio segundo de tempo de CPU, independente do modelo de velocidade adotado.

A implementação da biblioteca analítica de raios **ART** confirma as expectativas a respeito do traçamento, pelo menos na parte cinemática, como mostra a comparação com o pacote **Seis88**. A respeito da parte dinâmica, os valores obtidos também são aceitáveis na comparação com o pacote conhecido. A dependência de certos parâmetros e métodos para o traçamento de raios pode tornar alguns resultados infactíveis, como mostra o exemplo da Figura 6.2, mas a experiência de testes mostra que os melhores parâmetros e métodos

são aqueles apresentados a seguir:

- a.** Das estratégias apresentadas na seção 4.2 para traçamento entre ponto e interface, a de cone positivo apresenta melhor resultado em interfaces menos acentuadas ou com geometria sinclinal; já a estratégia de distância mínima alcança resultados mais desejáveis principalmente quando a interface é acentuada anticlinalmente. Independente dos resultados, ambas funcionam e adota-se preferencialmente a primeira estratégia.
- b.** A respeito do item (a), o método de Newton converge, na maioria dos casos, em menos iterações quando a estratégia de distância mínima é escolhida. A Figura 4.4 mostra isto com um exemplo simples. No entanto, é mais suscetível a falhas devido à geometria da interface. Testes sugerem os seguintes valores para número máximo de iterações:

Velocidade	$n = 1$	$n = -1$	$n = 2$ (afim)	$n = 2$ (quad)	$n = 0$
no. iter.	10	10	15	20	15

- c.** A tolerância do erro para o traçamento entre dois pontos foi definida como 10^{-8} ; e o número máximo de atualizações do ângulo ótimo, tanto no método de interpolação linear quanto no paraxial, não excede 60 (em casos excepcionais, como quadrado da vagarosidade quadrático); logo definiu-se o valor máximo 50.

Os valores de parâmetros e métodos listados acima serviram aos propósitos do trabalho mas não são fixos. ART pode ser ajustada conforme a necessidade.

Por conta de variações nos parâmetros do modelamento, como o sinal analítico Gabor (5.2) com $f = 25$ e $\gamma = 6$, os traços obtidos por ART não são dinamicamente iguais aos de *Seis88* (que usa Ricker), mas sim cinematicamente. O sinal de Ricker não foi usado devido à dificuldade da obtenção da transformada de Hilbert do sinal para parâmetros f, γ arbitrários, propriedade esta que é contornada pelo sinal de Gabor, mediante a aproximação (5.2). Os resultados sobre modelamento por raios para experimentos de tiro comum e afastamento comum são bons, pois as curvas de tempo de trânsito obtidas em relação a um refletor específico apresentam geometria condizente com cada modelo de velocidade adotado.

Os tempos de execução para modelamento Kirchhoff ficam, no pior caso, na ordem de 6 minutos quando são exigidos 200 pares fonte-receptor e 300 pontos sobre o refletor. Por piores casos, entendem-se os modelos quadrado da vagarosidade afim e velocidade com logaritmo afim que dependem da resolução numérica de um sistema de equações diferenciais ordinárias (sistema *out-of-plane*). Os modelos de velocidade constante e afim são os mais rápidos

pois não dependem de solução numérica. A técnica de aceleração do modelamento Kirchhoff funciona bem, uma vez que se não implementada, o tempo médio de execução fica na ordem de 15 minutos (conforme discutido na Seção 5.2.2). O modelamento por raios não foi implementado com técnica de aceleração pois não depende da construção de tantos raios quanto Kirchhoff.

Outras aplicações imediatas de ART, além de modelamento poderiam ser: o uso de traçamento de raios em sismica de refração e para obter campos de velocidade RMS (como em [10]). No apêndice B são ilustrados exemplos desta última aplicação usando a biblioteca. Ainda há espaço para melhoras; apenas para citar algumas:

- i. adaptar o traçamento entre dois pontos para que o receptor não esteja necessariamente sobre uma interface; isto permitiria realizar experimentos VSP (*vertical seismic profiling*), como em [8, 18];
- ii. incluir técnicas de aceleração para a construção de diagramas de raios resultantes de experimentos como afastamento comum e tiro comum;
- iii. permitir traçamento de raios em modelos separados por interfaces que se cruzam, o que já aumenta bastante a complexidade dos algoritmos.

Apêndice A

Fundamentação

A.1 A Transformada de Hilbert

A transformada de Hilbert de uma função f é dada por

$$\mathcal{H}\{f\}(t) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi \quad (\text{A.1})$$

onde v.p. denota o valor principal da integral. Neste trabalho, interessamos basicamente uma das propriedades mais importantes da transformada de Hilbert, que consiste em sua relação com a transformada de Fourier.

Da equação (A.1) nota-se que a transformada pode ser obtida como uma integral de convolução, isto é, se $h(t) = -1/\pi t$ então

$$\mathcal{H}\{f\} = h \star f. \quad (\text{A.2})$$

Logo, aplicando a transformada de Fourier na equação (A.2) e sabendo que a transformada de Fourier de uma convolução é igual ao produto das respectivas transformadas então temos

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}(f)\} = \mathcal{F}\{h \star f\} = \mathcal{F}\{h\}\mathcal{F}\{f\} \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\mathcal{H}\{f\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{h\}\mathcal{F}\{f\}\}. \quad (\text{A.4})$$

A equação (A.4) mostra que a transformada de Hilbert de uma função f pode ser obtida explicitamente pelo cálculo das transformadas direta e inversa de Fourier. Mostra-se ainda que a transformada de Fourier da função h é dada por $\hat{h}(\omega) = -i\text{sign}(\omega)$ donde segue

$$\mathcal{H}\{f\}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{-i\text{sign}(\omega)\hat{f}(\omega)\}(t). \quad (\text{A.5})$$

A equação (A.4) permite que a transformada de Hilbert seja avaliada com o uso da transformada rápida de Fourier, direta e inversa.

A.2 Sistema de raios

O objetivo desta seção é verificar a equivalência do problema (3.1) com o sistema de equações (3.2), o qual denominamos de sistema de raios. Denotaremos por $\text{gr}(T)$ o gráfico de uma função $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Mostraremos primeiro que (3.1) implica em (3.2). Se $\mathbf{x}_0 \in D$ com $(\mathbf{x}_0, T_0) \in \text{gr}(T)$ então o vetor normal é dado por $(\mathbf{p}, -1)$ com \mathbf{p} atendendo a equação $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0, T_0, \mathbf{p}) = 0$.

A coleção de todos os planos tangentes a $\text{gr}(T)$ no ponto (\mathbf{x}_0, T_0) e que tem vetor normal $(\mathbf{p}, -1)$ gera um cone com vértice em (\mathbf{x}_0, T_0) (dito cone de Monge). Ao variar o ponto \mathbf{x}_0 obtemos um campo de cones sobre $\text{gr}(T)$. Assim, a solução T que procuramos deverá ser encarada como o envelope da família de cones.

O gerador de cada cone¹ corta a superfície $\text{gr}(T)$ em uma direção que define uma curva, dita *curva característica*. Mostraremos que sobre cada curva característica é possível construir a solução.

Assim, se a cada cone associamos um parâmetro $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ então T é o envelope da seguinte família de cones $\Phi(\mathbf{x}, T, \lambda) = 0$ onde, variando λ temos definido pelo teorema da função implícita uma função $T = G(\mathbf{x}, \lambda)$. Mas do fato de ser T o envelope de Φ , é solução do sistema

$$T = G(\mathbf{x}, \lambda), \quad 0 = \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\mathbf{x}, \lambda). \quad (\text{A.6})$$

Da primeira equação de (A.6) temos

$$dT = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial G}{\partial \lambda} d\lambda = \nabla G \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

e da segunda, denotando $G' = \frac{\partial G}{\partial \lambda}$ temos

$$0 = \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial G'}{\partial \lambda} d\lambda = \nabla(G') \cdot d\mathbf{x}. \quad (\text{A.8})$$

Para qualquer $\mathbf{x}_0 \in D$ fixo e \mathbf{p} tal que $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0, T_0, \mathbf{p}) = 0$ devemos ter $\mathbf{p} = \nabla G$ pois G é o envelope de Φ . Daí, para quaisquer i, j

$$\frac{(G')_{\mathbf{x}_i}}{(G')_{\mathbf{x}_j}} = \frac{\frac{\partial G_{\mathbf{x}_i}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial G_{\mathbf{x}_j}}{\partial \lambda}} = \frac{dG_{\mathbf{x}_i}}{dG_{\mathbf{x}_j}} = \frac{d\mathbf{p}_i}{d\mathbf{p}_j} \quad (\text{A.9})$$

¹Por gerador entendemos a reta obtida da interseção do cone com um plano particular da coleção que o gera.

e de (A.7) resulta $dT = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}$. De (A.8) e de (A.9) obtemos

$$0 = d\mathbf{x}_i + \sum_{k \neq i}^m \frac{d\mathbf{p}_k}{d\mathbf{p}_i} d\mathbf{x}_k \quad (\text{A.10})$$

e derivando \mathcal{H} em \mathbf{p} resulta

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} = 0 \Rightarrow 0 = \mathcal{H}_{\mathbf{p}_i} + \sum_{k \neq i}^m \mathcal{H}_{\mathbf{p}_k} \frac{d\mathbf{p}_k}{d\mathbf{p}_i}. \quad (\text{A.11})$$

De (A.10) e (A.11) temos

$$0 = d\mathbf{x}_i + d\mathbf{x}_j \frac{d\mathbf{p}_j}{d\mathbf{p}_i} + \sum_{k \neq i, j}^m \frac{d\mathbf{p}_k}{d\mathbf{p}_i} d\mathbf{x}_k, \quad 0 = \mathcal{H}_{\mathbf{p}_i} + \mathcal{H}_{\mathbf{p}_j} \frac{d\mathbf{p}_j}{d\mathbf{p}_i} + \sum_{k \neq i, j}^m \mathcal{H}_{\mathbf{p}_k} \frac{d\mathbf{p}_k}{d\mathbf{p}_i}, \quad (\text{A.12})$$

para algum $i \neq j$. A primeira equação de (A.12) resulta em

$$\frac{d\mathbf{p}_j}{d\mathbf{p}_i} = - \sum_{k \neq i, j}^m \frac{d\mathbf{p}_k}{d\mathbf{p}_i} \frac{d\mathbf{x}_k}{d\mathbf{x}_j} - \frac{d\mathbf{x}_i}{d\mathbf{x}_j}$$

que substituindo na segunda implica

$$0 = \left(\mathcal{H}_{\mathbf{p}_i} - \mathcal{H}_{\mathbf{p}_j} \frac{d\mathbf{x}_i}{d\mathbf{x}_j} \right) + \sum_{k \neq i, j}^m \frac{d\mathbf{p}_k}{d\mathbf{p}_i} \left(\mathcal{H}_{\mathbf{p}_k} - \mathcal{H}_{\mathbf{p}_j} \frac{d\mathbf{x}_k}{d\mathbf{x}_j} \right). \quad (\text{A.13})$$

Logo, de (A.13) teremos

$$\mathcal{H}_{\mathbf{p}_k} - \mathcal{H}_{\mathbf{p}_j} \frac{d\mathbf{x}_k}{d\mathbf{x}_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{x}_k}{\mathcal{H}_{\mathbf{p}_k}} = \frac{d\mathbf{x}_j}{\mathcal{H}_{\mathbf{p}_j}}, \quad \forall k, j,$$

o que significa que a razão acima deve ser constante. Se introduzirmos um parâmetro u então teremos para todo k

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{\mathcal{H}_{\mathbf{p}_k}} = du \Rightarrow \frac{d\mathbf{x}_k}{du} = \mathcal{H}_{\mathbf{p}_k} \Rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{du} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (\text{A.14})$$

Depois, de $dT = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}$ e de (A.14) obtemos

$$\frac{dT}{du} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{du} \Rightarrow \frac{dT}{du} = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (\text{A.15})$$

O par de equações (A.14) e (A.15) é indeterminado pois falta uma equação para \mathbf{p} . Ora, de $\mathbf{p} = \nabla T$ obtemos

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \right) = \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad (\text{A.16})$$

e como a derivada em \mathbf{x} de $\mathcal{H} = 0$ resulta ser

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0},$$

temos em (A.16)

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \mathbf{p}. \quad (\text{A.17})$$

A solução do sistema de equações (A.14), (A.15) e (A.17) gera uma curva inteiramente contida em $\text{gr}(T)$ cujo vetor posição é dado por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ e vetor tangente $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$. Esta curva característica está associada a uma direção característica (proveniente do gerador do cone) e portanto, a família destas curvas gerará por completo o conjunto $\text{gr}(T)$.

Resta mostrar que (3.2) implica (3.1). Para isso basta verificar que a solução do sistema de equações (3.2) satisfaz $\mathcal{H}(\mathbf{x}(u), T(u), \mathbf{p}(u)) = 0$ para todo u . De fato, é imediato verificar que através das equações (3.2) tem-se $d\mathcal{H}/du = 0$ implicando em \mathcal{H} constante. Mas se a curva determinada pela solução do sistema passa por um ponto $(\mathbf{x}_0, T_0) \in \text{gr}(T)$ que satisfaça $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0, T_0, \mathbf{p}_0) = 0$ então \mathcal{H} permanece constante e igual a zero para todo u . Isto conclui a demonstração. ■

A.3 Soluções fundamentais

Para determinar o vetor vagariedade no modelo com quadrado da vagariedade quadrático precisamos determinar as soluções do sistema de equações $d^2\mathbf{p}/d\sigma^2 = \mathbf{A}\mathbf{p}$ com $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uma matriz simétrica não nula.

Partindo do princípio que a solução fundamental de tal sistema é dada por $\mathbf{p}(\sigma) = e^{\pm\sigma\sqrt{\mathbf{A}}}\mathbf{p}_0$ e \mathbf{A} admite uma decomposição espectral, o seguinte lema mostra como são as soluções do sistema proposto segundo o sinal dos autovalores da matriz \mathbf{A} .

Consideramos a seguinte notação $f(\sigma\sqrt{\Lambda}) = \text{diag}\{f(\sigma\sqrt{\lambda_j})\}$, para uma função f definida no espectro de \mathbf{A} . O caso de \mathbf{A} com dois autovalores nulos não é considerado uma vez que \mathbf{A} é não nula e simétrica²

Lema A.3.1 *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uma matriz simétrica cujos autovalores são λ_1 e λ_2 . As soluções fundamentais (reais) do sistema de equações diferenciais $\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ são dadas por*

(i) *se $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2$: $\mathbf{p}_{\pm}(\sigma) = \mathbf{S} e^{\pm\sigma\sqrt{\Lambda}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$;*

²A única matriz simétrica em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ que tem dois autovalores nulos é a matriz nula.

(ii) se $\lambda_j < 0$, $j = 1, 2$: $\mathbf{p}_1(\sigma) = \mathbf{S} \cos(\sigma\sqrt{\Lambda})\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_2(\sigma) = \mathbf{S} \sin(\sigma\sqrt{\Lambda})\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$;

(iii) se $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$: $\mathbf{p}_j(\sigma) = \mathbf{S}\Lambda_j(\sigma)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}_0$ com

$$\Lambda_1(\sigma) = \text{diag}\{e^{\sigma\sqrt{\lambda_1}}, \cos(\sigma\sqrt{-\lambda_2})\} \quad \Lambda_2(\sigma) = \text{diag}\{0, \sin(\sigma\sqrt{-\lambda_2})\}$$

(iv) se $\lambda_j = 0$, $\lambda_k > 0$: $\mathbf{p}_{\pm}(\sigma) = \frac{1}{\lambda_k}\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{\lambda_k}e^{\pm\sigma\sqrt{\lambda_k}}\mathbf{A}\mathbf{p}_0$

(v) se $\lambda_j = 0$, $\lambda_k < 0$: $\mathbf{p}_1(\sigma) = \frac{1}{\lambda_k}\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{\lambda_k}\cos(\sigma\sqrt{-\lambda_k})\mathbf{A}\mathbf{y}_0$ e $\mathbf{p}_2(\sigma) = \frac{1}{\lambda_k}\sin(\sigma\sqrt{-\lambda_k})\mathbf{A}\mathbf{y}_0$;

onde \mathbf{S} e Λ são matrizes tais que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}$ e $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}^{-1}$ com \mathbf{P} uma permutação de linhas.

Prova: A demonstração de (i) a (iii) é imediata, basta usar o fato (3.21). Para verificar (iv), considere o sinal positivo de σ (o caso negativo segue analogamente). Se $\mathbf{N} = \text{diag}\{1, 0\}$ e \mathbf{P} é uma matriz de permutação de linhas temos

$$\mathbf{p}_+(\sigma) = \mathbf{S} \left\{ \mathbf{N} + \frac{e^{\sigma\sqrt{\lambda_k}}}{\lambda_k} \Lambda \right\} \mathbf{S}^{-1}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e como $\mathbf{S}\mathbf{N}\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\lambda_k}\mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\Lambda\mathbf{P}\mathbf{S}^{-1} = [\mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}^{-1}]\mathbf{A}[\mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}^{-1}]^{-1}$ segue o resultado com $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}(\mathbf{S}\mathbf{P})^{-1}$. A parte (v) é uma consequência de (iv). ■

A.4 Desacoplamento do sistema dinâmico

O objetivo desta seção é mostrar como obter a função ρ em (3.49), importante para o sistema de traçamento dinâmico *in-plane* de raios neste trabalho.

Começamos observando que o modelo geral de velocidades (3.6) adotado neste trabalho satisfaz às seguintes propriedades,

$$\mathbf{H}_v = 2\mathbf{A} \Phi'(v) - \mathbf{g}\mathbf{g}^T \Phi''(v)/(\Phi'(v))^3, \quad \nabla v = \mathbf{g}/\Phi'(v) \quad (\text{A.18})$$

com $\mathbf{g} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Este resultado é apenas uma consequência do uso repetido da regra da cadeia em (3.6) com \mathbf{A} e \mathbf{a} como em (3.7). Logo, usando (2) e a notação acima temos $\mathbf{P}\mathbf{g} = (\mathcal{P}(\mathbf{g})^T, 0)^T$ e por (3), $\mathcal{P}(\mathbf{g}) = 2\mathcal{P}(\mathbf{A})\mathcal{P}(\mathbf{x}) + \mathcal{P}(\mathbf{a})$. Portanto, como $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathcal{P}(\mathbf{A})\mathbf{P}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_v &= \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\Phi'} \begin{bmatrix} 2\mathcal{P}(\mathbf{A}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} - \frac{\Phi''}{(\Phi')^3} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mathbf{g})\mathcal{P}(\mathbf{g})^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \mathbf{P} \\ &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mathbf{H}_v) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Assim, denotando $\mathbf{h} = v(u)(p_3, -p_1)^T$ e usando (3.39) a matriz hessiana \mathbf{V} em (3.41) resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= J_{(\mathbf{x}, \mathbf{q})}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mathbf{H}_v) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P} J_{(\mathbf{x}, \mathbf{q})} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T & 0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mathbf{H}_v) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \mathcal{P}(\mathbf{H}_v) \mathbf{h} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e como é fácil perceber, $\mathbf{h}(u) = v(u) \mathbf{J} \mathcal{P}(\mathbf{p})(u)$ com \mathbf{J} uma matriz simplética de ordem dois, donde

$$\mathbf{V}(u) = v(u)^2 \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mathbf{p})^T \mathbf{J}^T \mathcal{P}(\mathbf{H}_v) \mathbf{J} \mathcal{P}(\mathbf{p}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{H}_v) = \frac{2}{\Phi'} \mathcal{P}(A) - \frac{\Phi''}{(\Phi')^3} \mathcal{P}(\mathbf{g}) \mathcal{P}(\mathbf{g})^T.$$

Finalmente, inserindo (A.19) no sistema dinâmico (3.43) resulta o desacoplamento (3.48) com a função ρ como em (3.49).

A.5 Tempo de trânsito paraxial

Seja R um ponto sobre um raio Ω e W um ponto na vizinhança de R . Nesta seção discutiremos a respeito da equação (4.8). A demonstração desta equação pode ser encontrada essencialmente em [3]. A diferença aqui é que o parâmetro que varia ao longo do raio não é somente o comprimento de arco. Isso resulta em pequenas modificações na estrutura da matriz Hessiana.

Ao fazer duas expansões de Taylor, uma sobre o raio e outra sobre o plano ortogonal ao raio Ω (plano π^q da Figura 3.2) obtemos a seguinte expansão para tempo de trânsito no ponto W

$$T(\mathbf{x}_W) \cong T(\mathbf{x}_R) + \mathbf{p}_q^T \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q}, \quad (\text{A.20})$$

com $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ e

$$\mathbf{p}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{v(\mathbf{x}_R)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \frac{-\alpha(\mathbf{x}_R)}{v(\mathbf{x}_R)v(\mathbf{x}_W)} \\ \frac{-\alpha(\mathbf{x}_R)}{v(\mathbf{x}_R)v(\mathbf{x}_W)} & -n v^{n-3}(\mathbf{x}_R) \frac{dv}{du} \Big|_{\mathbf{x}_R} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial q_1} \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} \end{bmatrix},$$

\mathbf{E} a matrix Hessiana de T com relação a (q_1, q_2) e n o índice do Hamiltoniano referente ao modelo de velocidade adotado. Logo, através da mudança de

variáveis $\mathbf{q} = J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}^T \mathbf{x}$ com \mathbf{x} o vetor de coordenadas cartesianas, a expressão do tempo de trânsito paraxial (A.20) fica

$$T(\mathbf{x}_W) \cong T(\mathbf{x}_R) + \mathbf{x}^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad (\text{A.21})$$

onde $\mathbf{p} = J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}^T \mathbf{p}_q$ e $\mathbf{B} = J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})} \mathbf{H} J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}^T$. Usando a matriz de permutação de linhas \mathbf{L} (segunda e terceira linhas), a expressão acima reduz-se a

$$T(\mathbf{x}_W) \cong T(\mathbf{x}_R) + (\mathbf{L}\mathbf{x})^T (\mathbf{L}\mathbf{p}) + \frac{1}{2} (\mathbf{L}\mathbf{x})^T \mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{L} (\mathbf{L}\mathbf{x}). \quad (\text{A.22})$$

Mas, para meios 2.5D, a matriz $J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}$ é como na equação (3.39), donde

$$\mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{L} = (\mathbf{L}J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}\mathbf{L})\mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{L}(\mathbf{L}J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}^T\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \beta \\ \beta^T & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

com

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_3 & \mathbf{t}_1 \\ -\mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{32} \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{t} = v\mathbf{p}$. Ainda, $\nabla_q v = J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}^T \nabla v$ e para meios 2.5D, $\beta = \mathbf{0}$ e

$$\nabla_q v = \mathbf{L}(\mathbf{L}J_{(\mathbf{x},\mathbf{q})}^T\mathbf{L})\mathbf{L}\nabla v = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \mathcal{P}(\nabla v) \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{z} \equiv \mathcal{P}(\nabla_q v) = \mathbf{R}^T \mathcal{P}(\nabla v)$. Mostra-se em [3] que a matriz \mathbf{E} pode ser obtida por $\mathbf{E} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$; daí, para o caso 2.5D que tratamos, temos $\mathbf{E} = \text{diag}\{M^{(i)}, M^{(o)}\}$ onde $M^{(i)} = \mathbf{W}_2^{(i)}/\mathbf{W}_1^{(i)}$, $M^{(o)} = \mathbf{W}_2^{(o)}/\mathbf{W}_1^{(o)}$ e $\{\mathbf{W}^{(i)}, \mathbf{W}^{(o)}\}$ soluções do sistema de traçamento dinâmico *in-plane* e *out-of-plane*.

Segue que

$$\mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & M^{(o)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} M^{(i)} & \frac{-\mathbf{z}_1}{v(\mathbf{x}_R)v(\mathbf{x}_W)} \\ \frac{-\mathbf{z}_1}{v(\mathbf{x}_R)v(\mathbf{x}_W)} & -nv^{-1}(\mathbf{x}_R)\mathbf{p}^T \nabla v \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

e como $x_2 = 0$, substituímos a equação (A.24) em (A.22) obtendo finalmente

$$T(\mathbf{x}_W) \cong T(\mathbf{x}_R) + \mathcal{P}(\mathbf{x})^T \mathcal{P}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\mathbf{x})^T \mathbf{M} \mathcal{P}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.25})$$

com $\mathbf{M} = \mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{R}^T$.

Apêndice B

ART

A biblioteca ART, cuja sigla denota *Analytical Ray Tracing*¹, foi implementada como projeto paralelo a este trabalho e serve como ferramenta prática para traçamento de raios em alguns meios onde a equação iconal possui solução analítica.

Uma das principais vantagens de ART é que permite manipular o raio como uma estrutura de dados, facilitando o acesso a informações cinemáticas ou dinâmicas em cada ponto do mesmo. Como consequência, conjuntos de raios ou mesmo famílias de raios podem ser tratadas, permitindo a construção de dados que dependem de raios, como por exemplo a seção sísmica ou a construção de um modelo de velocidade RMS.

Detalhes a respeito da notação e da funcionalidade de rotinas, assim como a construção de um arquivo de configuração para o modelo, são descritos na documentação da biblioteca.

Do que depende e o que faz?: ART depende de outras bibliotecas, listadas a seguir; cada uma delas é distribuída sob licença GPL, o que torna livre a presente biblioteca.

- (a) Gnu Scientific Library (GSL) (<http://www.gnu.org/software/gsl/>): biblioteca de computação científica. Foi usada para a solução do sistema de traçamento dinâmico *in-plane* e para o uso do método de Newton sobre funções unidimensionais.
- (b) GLib (<http://www.gtk.org>): biblioteca que fornece suporte em estrutura de dados para programação em C. Para este trabalho, permite criar listas encadeadas que representam o raio.

¹Ou também *Asymptotic Ray Technique*, uma vez que se trata da aproximação de ordem zero da solução da equação elastodinâmica, que dá início à teoria de raios.

- (c) libConfuse (<http://www.nongnu.org/confuse/>): biblioteca para *parse* de arquivos. Neste trabalho, permite definir o formato de arquivos de configuração.

As principais funções de ART são: traçamento ponto-interface, ponto a ponto, construção de um leque de raios e construção de um diagrama de raios. Traçamento cinemático e dinâmico são funções separadas e o segundo depende do primeiro. Por diagrama de raios, entende-se uma família de raios para construção de experimentos de tiro comum, receptor comum e afastamento comum.

Como gera resultados?: ART constrói raios que permitem a extração de informações cinemáticas ou dinâmicas, como apresentado na Seção 4.5. Torna-se responsabilidade do usuário gerar tais informações e armazená-las de forma conveniente, usando seu software preferido para obter gráficos, imagens ou seções sísmicas. Por exemplo, para gerar os resultados obtidos neste trabalho foram usados: Grace (<http://www.plasma-gate.weizmann.ac.il/Grace/>) para gráficos de raios e SU (<http://www.cwp.mines.edu>) para construção de imagens e seções.

Exemplo 1 - construindo um raio: Suponha um modelo composto por duas camadas. Para construir um raio que parte do ponto (1, 0) na superfície com 25° , reflete na primeira interface e volta à superfície, usamos o código fonte apresentado abaixo. Admite-se que o modelo está descrito no arquivo `modelo.cfg`.

```
int main(void)
{
    FILE *fpmodel;
    int rc[2][2] = {{0,0},{0,0}};
    int status;
    art_model_t *model;
    art_params_t *params;
    art_ray_t *ray;
    art_source_t source;
    art_raycode_t *raycode;

    fpmodel = fopen("modelo.cfg","r");
    status = art_build_model_cfg(fpmodel, &model);
    fclose(fpmodel);

    if(status!=ART_SUCCESS)
        return 1;

    params = art_alloc_params();
    art_default_parameters(params, model);

    source.x = 1.0;
    source.z = 0.0;
    source.interface = 0;
    source.angle = 25*M_PI/180;

    raycode = art_alloc_raycode(rc[0], rc[1], 2);

    status = art_ray(params, &source, raycode, &ray);

    if(status!=ART_SUCCESS)
        status = 1;
    else
        status = 0;

    art_free_raycode(raycode);
    art_free_ray(ray);
    art_free_model(model);
    art_free_params(params);

    return status;
}
```

Exemplo 2 - traçamento entre dois pontos: Suponha um modelo composto por duas camadas. Para construir raios que conectam o ponto (1, 0) ao ponto (3, 0) na superfície, usamos o código fonte apresentado abaixo. Admite-se que o modelo está descrito no arquivo `modelo.cfg`.

```

int main(void)
{
    FILE *fpmodel;
    int status, rc[2][2] = {{0,0}, {0,0}};

    art_model_t *model;
    art_params_t *params;
    art_2prtacc_t *acc;
    art_rays_t *srays;
    art_SR_t *pair;
    art_raycode_t *raycode;

    fpmodel = fopen("modelo.cfg","r");
    status = art_build_model_cfg(fpmodel, &model);
    fclose(fpmodel);

    if(status!=ART_SUCCESS)
        return 1;

    params = art_alloc_params();
    art_default_parameters(params, model);

    pair = art_alloc_SR(m, 1.0, 0.0, 0, 3.0, 0.0, 0);
    raycode = art_alloc_raycode(rc[0], rc[1], 2);
    acc = art_alloc_2prtacc();
    status = art_2pointRT(params, pair, raycode, acc, &srays);

    if(status != ART_SUCCESS)
        status = 1;
    else
        status = 0;

    art_free_raycode(raycode);
    art_free_rays(srays);
    art_free_SR(pair);
    art_free_2prtacc(acc);
    art_free_model(model);
    art_free_params(params);

    return status;
}

```

Exemplo 3 - velocidade RMS: Para construir um modelo de velocidades RMS (*root mean square*, ver [8, 10]) é necessário contruir raios que partem da superfície com ângulo nulo (raio imagem). O seguinte código fonte ilustra como ART constrói tais raios. Admite-se a existência de arquivos `modelo.cfg`: para velocidade constante e quadrado da vagarosidade afim/quadrático. Os resultados são obtidos com `./main > vrms.dat`, gerando através de SU os resultados apresentados na Figura B.1.

```

int main(void)
{
    FILE *fpmodel;
    size_t i, j, k, npt=400, npx=400;
    int status, rc[2][4] = {{0,1,2,3},{0,0,0,0}};
    double weights[NQUAD] = {0.888888, 0.555555, 0.555555};
    double qpoints[NQUAD] = {0.0, 0.77459667, -0.77459667};
    double maxtime, step, t[400], V[400], w, velocity, sum;
    double a=1, b=4;

    art_model_t *model;
    art_params_t *params;
    art_ray_t *ray;
    art_rays_t *rays;
    art_raycode_t *raycode;

    fpmodel = fopen("modelo.cfg","r");
    status = art_build_model_cfg(fpmodel, &model);
    fclose(fpmodel);

    if(status!=ART_SUCCESS)
        return 1;

    params = art_alloc_params();
    art_default_parameters(params, m);

    /* Construção do modelo */
    raycode = art_alloc_raycode(rc[0], rc[1], 4);
    status = art_image_rays(params, a, b, npx, raycode, &rays);

    if(status!=ART_SUCCESS)
        return 1;
    else
    {
        npx = art_length_rays(rays);
        for(i=0; i<npx; i++)
        {
            ray = art_get_jth_ray(rays, i);
            maxtime = art_ray_get_last_traveltime(ray);
            step = maxtime/(double) npt;
            t[0] = 0;

            art_ray_eval_velocity(0, params, ray, &V[0]);

            for(j=1; j<=npt; j++)
            {
                t[j] = j * step;
                sum = 0.0;

                for(k=0; k<NQUAD; k++)
                {
                    w = 0.5 * (t[j] - t[j-1]) * points[k]
                      + 0.5 * (t[j] + t[j-1]);

                    art_ray_eval_velocity(w, params, ray,
                                          &velocity);

                    sum += velocity * velocity * weights[k];
                }
                sum *= 0.5 * step;

                V[j] = sqrt((t[j-1] * V[j-1]*V[j-1] + sum)/t[j]);

                fprintf(stdout,"%f ",V[j]);
            }
            fprintf(stdout,"\n");
        }
        art_free_rays(rays);
        art_free_raycode(raycode);
        art_free_model(model);
        art_free_params(params);

        return 0;
    }
}

```

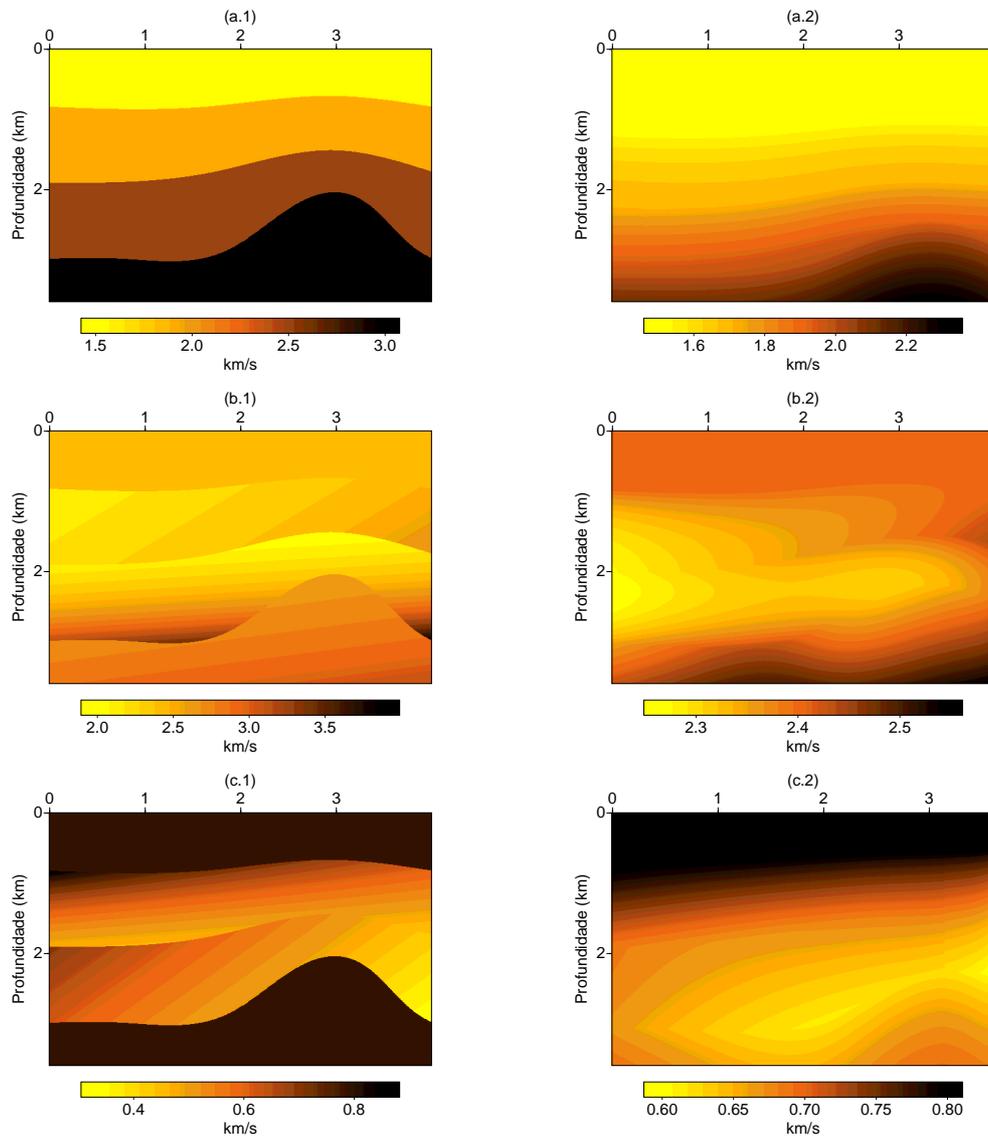


Figura B.1: Campo de velocidade RMS (à direita) para (a) modelo de velocidade constante (b) quadrado da vagarosidade afim e (c) quadrado da vagarosidade quadrático.

Referências Bibliográficas

- [1] Abramovitz M., Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington D.C., 1965.
- [2] Bleistein N., *Mathematical Methods for wave Phenomena*, Academic Press, 1984.
- [3] Červený V., *Seismic ray theory*, Cambridge University Press, 2001.
- [4] Červený V., Pšenčík I., *Ray-theory amplitudes and synthetic seismograms in 2-D inhomogeneous isotropic layered structures. Program package SEIS*, Report 12, Department of Geophysics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Praha 2002.
- [5] Chi-Tsong Chen, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston Inc, 1970.
- [6] Claerbout J.F., Black J.L., *Basic Earth Imaging*, Version 2.4, 2001.
- [7] Courant R., Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Partial Differential Equations*, Interscience Cambridge, 1962.
- [8] Dobrin M.B., Savit C.H., *Introduction to Geophysical Prospecting*, 4th Edition, McGraw-Hill, 1988.
- [9] Hirsch M.W., Smale S., *Differential equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [10] Hubral P., Krey T., *Interval Velocities from Seismic Reflection Time Measurements*, SEG Monograph Series No. 3, Tulsa; Society of Exploration Geophysicists, 1980.
- [11] Hyun-Min Kim, *Computing square roots of a matrix*, Master Thesis, University of Manchester, 1997.

- [12] Kreysig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [13] Lay T., Wallace T.C, *Modern Global Seismology*, Academic Press, 1995.
- [14] Love E.H., *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4° Ed., NY, 1927.
- [15] Santos L.T., Schleicher J., Tygel M., *Modelling, migration and demigration*, The Leading Edge, 2000.
- [16] Scales J., *Theory of Seismic Imaging*, Center for Wave Phenomena-Colorado, (Release 2.2, hilbert.mines.colorado.edu), Samizdat Press, 1994.
- [17] Sheriff R.E, *Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics, 4th ed.*, Society of exploration geophysicists, 2002.
- [18] Sheriff R.E., Geldart L.P., *Exploration Seismology Vol 1 - History, theory & data acquisition*, Cambridge University Press, 1982.
- [19] Schleicher J., Tygel M., Hubral P., *Seismic True-amplitude Imaging*, Campinas, 2002.
- [20] Tygel M., Schleicher J., Santos L.T., Hubral P., *The Kirchhoff-Helmoltz integral pair*, Journal of Computational Acoustics, 1999.
- [21] Tygel M., Schleicher J., Hubral P., *Kirchhoff-Helmoltz theory in modeling and migration*. Journal of Seismic Exploration 3, 1994.
- [22] Van Loan C., Moler C., *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later*, SIAM, Vol. 45, No. 1, pp 3-000, review, 2003.