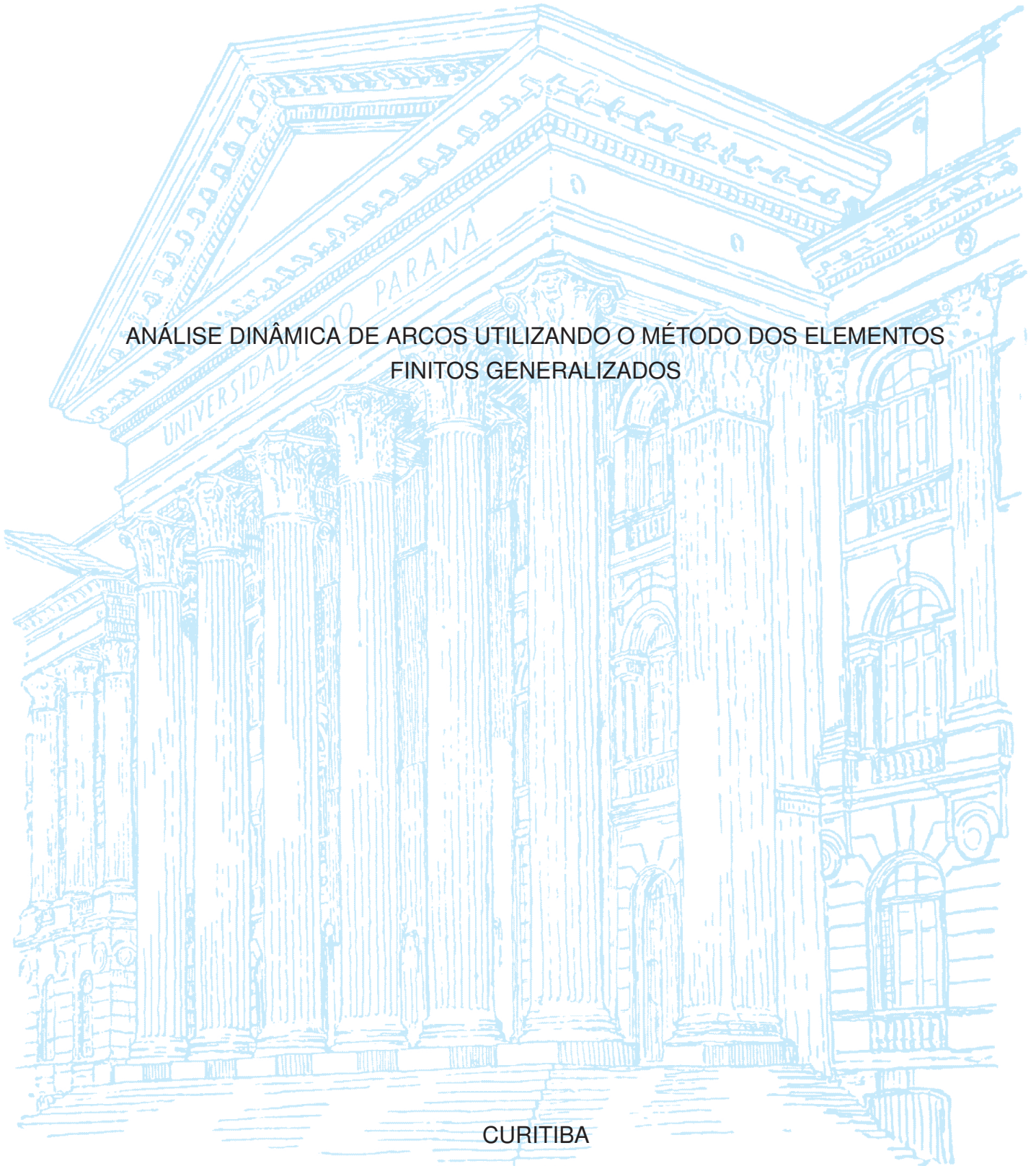


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RAMON MACEDO CORRÊA

ANÁLISE DINÂMICA DE ARCOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS GENERALIZADOS



CURITIBA

2019

RAMON MACEDO CORRÊA

ANÁLISE DINÂMICA DE ARCOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS GENERALIZADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Construção Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

---

C824a Corrêa, Ramon Macedo

Análise dinâmica de arcos utilizando o método dos elementos finitos generalizados [recurso eletrônico] / Ramon Macedo Corrêa, 2019.

Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

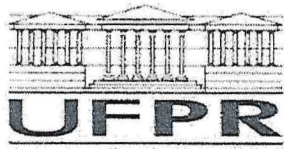
Coorientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

1. Método dos elementos finitos. 2. Análise modal. 3. Dinâmica estrutural. I. Universidade Federal do Paraná. II. Arndt, Marcos. III. Machado, Roberto Dalledone. IV. Título.

CDD 624.171

---

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA DE  
CONSTRUÇÃO CIVIL - 40001016049P2

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de RAMON MACEDO CORRÊA intitulada: **ANÁLISE DINÂMICA DE ARCOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 25 de Março de 2019.

MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

JUCÉLIO TOMAS PEREIRA

Avaliador Externo (UFPR)

ANDRÉ JACOMEL TORII

Avaliador Externo (UNILA)

*Este trabalho é dedicado ao meu pai Adilson Levi Corrêa  
e à minha mãe Ivaldete Macedo Corrêa.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a todas as pessoas que conheci nesses dois anos de mestrado em especial as seguintes pessoas: Bernardo Opolski, Claudia Slongo, Carolina Cittadin, Cezar Falavigna, Felipe Diniz, Gabriela Xavier, Gean Warmling, Leticia Col Debella, Paulo Gnatta, Paulo Weinhardt, Thamara Petrolli, Thomás Verderesi, Vinicius Coelho e todos os demais que tiveram grande parcela de importância para que eu completasse esta etapa.

À todos os meus professores que durante a minha vida me ensinaram e contribuíram para a minha formação.

Ao professor Roberto Dalledone Machado por toda a sabedoria e por estar sempre disposto a ajudar quando preciso.

Ao meu orientador, o professor Marcos Arndt, por toda ajuda, conselhos, sempre disposto a ajudar, sendo essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

E por fim e mais importante, gostaria de agradecer aos meus pais Adilson Levi Corrêa e Ivaldete Macedo Corrêa por todo apoio e por todo o sacrifício que eles fizeram para que eu pudesse chegar até aqui.

*"O verdadeiro conhecimento vem de dentro."  
(Sócrates)*

## RESUMO

O estudo do comportamento estático e dinâmico de estruturas, pelo emprego de métodos numéricos precisos e modelos que representem a realidade da maneira mais fiel possível, tem se tornado cada vez mais importante na busca de estruturas seguras e otimizadas. Os elementos de arco, em especial, têm atraído o interesse de pesquisadores por, principalmente, permitirem o entendimento de certos aspectos do comportamento de elementos de casca. Os elementos de arco acabam sendo muito sensíveis a problemas de travamento numérico e, para contornar este problema pode-se utilizar funções trigonométricas para enriquecer o espaço de aproximação tradicional do Método dos Elementos Finitos (MEF), através da técnica do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O MEFG tem sido aplicado com sucesso na dinâmica de estruturas conforme é mostrado na literatura, em geral conseguindo maior taxa de convergência e uma faixa maior de frequências com alta precisão em comparação com o MEF tradicional. Neste trabalho é investigada a aplicação do MEFG com enriquecimento trigonométrico para vibração de arcos finos e espessos. Os resultados obtidos dos modelos de arcos finos indicam excelentes taxas de convergência para as primeiras frequências e até 70% da faixa de frequências obtidas apresentando excelente precisão. Os exemplos que não possuíam soluções analíticas de referência foram comparados com soluções disponíveis na literatura e, em geral, apresentaram resultados melhores. Os exemplos de arco espesso não possuíam soluções analíticas de referência e, por isso, foram comparados com outras soluções aproximadas disponíveis na literatura e apresentaram valores bastante próximos aos disponíveis. Na análise transiente as respostas do MEFG comparadas com a solução de MEF de referência foram muito satisfatórias.

**Palavras-chaves:** Método dos Elementos Finitos. Método dos Elementos Finitos Generalizados. Elementos de Arco. Análise Dinâmica.



## ABSTRACT

The study of static and dynamic behaviors of structures, by employment of accurate numerical methods and models that represent the reality in the most faithful way, has become increasingly important in the search of secure and optimized structures. The arch elements, in particular, has aroused interest of researchers, mostly, for providing insight into many aspects of shell element behavior. The arch elements are very sensitive to numerical locking issues. The enrichment of the traditional FEM approximation space using trigonometric functions by the Generalized Finite Element Method (GFEM) technique can be applied in order to avoid this issue. The GFEM has been successfully applied in dynamics of structures as shown in literature, achieving in general higher convergence rates and higher range of frequencies with high precision than the traditional FEM. In this work the application of the GFEM with trigonometric enrichment for thin and thick arch vibration is investigated. The models results of thin arches obtained indicate excellent convergence rates for the first frequencies and up to 70% of the obtained frequency range with excellent accuracy. The examples that did not have analytical solution of reference were compared to available solutions in literature and in general present better results. The thick arch examples did not have reference analytical solutions and therefore they were compared to other approximate solutions available in literature and present values very close to those available. In the transient analysis the GFEM responses were very satisfactory compared to the reference MEF solution.

**Key-words:** Finite Element Method. Generalized Finite Element Method. Arch Elements. Dynamic Analysis.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Comparação de frequências com erro inferior a 1% obtidas pelas formulações de MMA e MEF para viga simplesmente apoiada. . .	32
FIGURA 2 – Comparação de frequências naturais de vibração obtidas com MEFH e MEF $p$ -Fourier com a solução analítica. . . . .	35
FIGURA 3 – Erros encontrados nos modelos para barra engastada e livre sujeita a carregamento harmônico com 21 graus de liberdade. . . .	38
FIGURA 4 – Partição da Unidade Lagrangeana Linear. . . . .	43
FIGURA 5 – Partição da Unidade Cúbica. . . . .	44
FIGURA 6 – Função de Enriquecimento $\Phi_j$ , para $j = 1$ . . . . .	45
FIGURA 7 – Funções $G_{1j}$ e $G_{2j}$ para elemento $C^0$ com $j = 1$ e com partição da unidade linear. . . . .	46
FIGURA 8 – Funções de Enriquecimento propostas por Arndt (2009) para $j = 1$ .	47
FIGURA 9 – Função de Enriquecimento $\Phi_j$ baseadas em Leung e Zhu (2004), para $j = 1$ . . . . .	49
FIGURA 10 – Funções $G_{1j}$ e $G_{2j}$ $C^1$ com $j = 1$ e partição da unidade linear. . .	50
FIGURA 11 – Função de Enriquecimento $\Phi_j$ baseadas em Arndt (2009), para $j = 1$ . . . . .	50
FIGURA 12 – Elemento de Arco Fino. . . . .	52
FIGURA 13 – Um elemento diferencial de arco fino. . . . .	53
FIGURA 14 – Geometria e sistema de coordenadas para elementos de arco espesso. . . . .	57
FIGURA 15 – Anel circular e modelo de um quarto do anel. . . . .	62
FIGURA 16 – Convergência da 2ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear. . . . .	63
FIGURA 17 – Convergência da 4ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear. . . . .	63
FIGURA 18 – Convergência da 6ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear. . . . .	64
FIGURA 19 – Convergência da 8ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear. . . . .	64
FIGURA 20 – Comparação da convergência da 2ª frequência natural do anel do MEFG - CC 2 com Timoshenko (1955). . . . .	66
FIGURA 21 – Comparação da convergência da 2ª frequência natural do anel MEFG x MEF $p$ -Fourier. . . . .	67

FIGURA 22 – Comparação da convergência da 4ª frequência natural do anel MEFG x MEF $p$ -Fourier. . . . .	67
FIGURA 23 – Comparação da convergência da 6ª frequência natural do anel MEFG x MEF $p$ -Fourier. . . . .	68
FIGURA 24 – Comparação da convergência da 8ª frequência natural do anel MEFG x MEF $p$ -Fourier. . . . .	68
FIGURA 25 – Espectro de frequências do MEFG - LC 1. . . . .	70
FIGURA 26 – Espectro de frequências do MEFG - CC 1. . . . .	70
FIGURA 27 – Espectro de frequências do MEFG - LC 2. . . . .	71
FIGURA 28 – Espectro de frequências do MEFG - CC 2. . . . .	71
FIGURA 29 – Espectro de frequências do elemento THIN <sup>01</sup> . . . . .	72
FIGURA 30 – Espectro de frequências do elemento THIN <sup>11</sup> . . . . .	72
FIGURA 31 – Número de Condição da matriz de massa, com partição da unidade linear. . . . .	73
FIGURA 32 – Comparação do número de condição da matriz de massa dos elementos de MEFG propostos com os elementos de Leung e Zhu (2004). . . . .	74
FIGURA 33 – Número de condição da matriz de massa do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica . . . . .	75
FIGURA 34 – Convergência da 2ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica. . . . .	76
FIGURA 35 – Convergência da 4ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica. . . . .	76
FIGURA 36 – Convergência da 6ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica. . . . .	77
FIGURA 37 – Convergência da 8ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica. . . . .	77
FIGURA 38 – Espectro de frequências do MEFG - LC 1 com partição da unidade cúbica. . . . .	78
FIGURA 39 – 2º modo de vibração do anel. . . . .	79
FIGURA 40 – Modos de Vibração do anel . . . . .	80
FIGURA 41 – Esquema do arco biarticulado variando o ângulo ( $\alpha$ ). . . . .	81
FIGURA 42 – Esquema do arco biapoado com ângulo de abertura de 90°. . . . .	84
FIGURA 43 – Esquema do arco biapoado com ângulo de abertura igual a 150°. . . . .	87
FIGURA 44 – Modos de Vibração do arco biapoado com ângulo de abertura igual a 150°. . . . .	90
FIGURA 45 – Número de Condição da Matriz de Massa, com partição da unidade linear. . . . .	92

FIGURA 46 – Número de Condição da Matriz de Massa do MEFG E1, com partição da unidade linear e cúbica. . . . .	92
FIGURA 47 – Número de Condição da Matriz de Massa do MEFG E2, com partição da unidade linear e cúbica. . . . .	93
FIGURA 48 – Modos de Vibração do arco espesso biapoiado com ângulo de abertura igual a 90°. . . . .	98
FIGURA 49 – Esquema do arco biengastado. . . . .	99
FIGURA 50 – Modos de Vibração do arco espesso biengastado com ângulo de abertura igual a 90°. . . . .	101
FIGURA 51 – Esquema do arco em balanço com seção variável . . . . .	102
FIGURA 52 – Esquema do arco para a análise transiente. . . . .	111
FIGURA 53 – Resposta de deslocamentos sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	112
FIGURA 54 – Resposta de velocidade sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF.	112
FIGURA 55 – Resposta de aceleração sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF.	113
FIGURA 56 – Resposta de velocidade, trecho inicial, sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	113
FIGURA 57 – Resposta de aceleração, trecho inicial, sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	114
FIGURA 58 – Resposta de deslocamentos sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	115
FIGURA 59 – Resposta de velocidade sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	115
FIGURA 60 – Resposta de aceleração sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	116
FIGURA 61 – Resposta de deslocamentos, trecho inicial, sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	116
FIGURA 62 – Resposta de velocidade, trecho inicial, sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	117
FIGURA 63 – Resposta de aceleração, trecho inicial, sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF. . . . .	117

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Elementos Finitos de Arcos Finos Desenvolvidos. . . . .	56
TABELA 2 – Elementos Finitos de Arco Espesso Desenvolvidos. . . . .	60
TABELA 3 – Dados do anel circular. . . . .	61
TABELA 4 – Frequências, em Hz, obtidas com o MEFG - LC 1, MEFG - CC 2, THIN <sup>01</sup> e THIN <sup>11</sup> comparadas com a solução analítica. . . . .	69
TABELA 5 – Dados do arco biarticulado. . . . .	81
TABELA 6 – Frequências fundamentais (rad/s) dos arcos articulados com o MEFG - LC 1. . . . .	82
TABELA 7 – Frequências fundamentais (rad/s) dos arcos articulados com o MEFG - CC 2. . . . .	83
TABELA 8 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° biapoado com o MEFG - LC 1 e $R/r = 25$ . . . . .	85
TABELA 9 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° biapoado com o MEFG - CC 2 e $R/r = 25$ . . . . .	85
TABELA 10 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° biapoado com o MEFG - LC 1 e $R/r = 140$ . . . . .	86
TABELA 11 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° biapoado com o MEFG - CC 2 e $R/r = 140$ . . . . .	86
TABELA 12 – Dados do arco biapoado com ângulo de abertura igual a 150°. . . . .	87
TABELA 13 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoado com o MEFG - LC 1. . . . .	88
TABELA 14 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoado com o MEFG - CC 2. . . . .	88
TABELA 15 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoado com o MEFH - LC. . . . .	89
TABELA 16 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoado com o MEFH - CC. . . . .	89
TABELA 17 – Dados do arco para estudo do número de condição da matriz de massa. . . . .	91
TABELA 18 – Dados do arco articulado espesso utilizado. . . . .	94
TABELA 19 – Precisão da frequência fundamental (rad/s) do arco articulado com o elemento MEFG E1 partição da unidade linear. . . . .	94
TABELA 20 – Precisão da frequência fundamental (rad/s) do arco articulado com o elemento MEFG E2 com partição da unidade cúbica. . . . .	95
TABELA 21 – Dados do arco 90° biapoado. . . . .	96

TABELA 22 – 10 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° biapoiado com o MEFG E1.	96
TABELA 23 – 10 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° biapoiado com o MEFG E2.	97
TABELA 24 – Dados do arco espesso 90° engastado. . . . .	99
TABELA 25 – 10 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° engastado com o MEFG E1.	100
TABELA 26 – 10 primeiros parâmetros $C_n$ do arco 90° engastado com o MEFG E2.	100
TABELA 27 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e $L/r_1 = 10$ . . . . .	103
TABELA 28 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e $L/r_1 = 10$ . . . . .	104
TABELA 29 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e $L/r_1 = 10$ . . . . .	105
TABELA 30 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e $L/r_1 = 10$ . . . . .	106
TABELA 31 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e $L/r_1 = 20$ . . . . .	107
TABELA 32 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e $L/r_1 = 20$ . . . . .	108
TABELA 33 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e $L/r_1 = 20$ . . . . .	109
TABELA 34 – 3 primeiros parâmetros $C_n$ para arco em balanço com seção variável com o MEFG E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e $L/r_1 = 20$ . . . . .	110

## LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

**MC** Método Composto

**MEC** Método dos Elementos de Contorno

**MEF** Método dos Elementos Finitos

**MEF  $p$ -Fourier** Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier

**MEFG** Método dos Elementos Finitos Generalizados

**MEFH** Método dos Elementos Finitos Hierárquicos

**MEFX** Método dos Elementos Finitos Estendidos

**MMA** Método dos Modos Admissíveis

**MPU** Método da Partição da Unidade

**NURBS** *Non-Uniform Rational B-Splines*

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\text{diam}$	Diâmetro de um conjunto
$\{\mathbf{f}\}$	Vetor de forças
$\{\mathbf{f}\}^e$	Vetor de forças elementares
$f_i$	Frequências naturais do anel
$i$	Índice
$j$	Índice
$k$	Fator de correção ao cisalhamento
$m_n$	Momento distribuído
$\{\mathbf{p}(t)\}$	Força atuante ao longo do tempo
$p_s, p_\alpha$	Força distribuída axialmente
$p_n$	Força distribuída radialmente
$\{q\}$	Vetor contendo os graus de liberdade nodais e de campo
$r$	Raio do anel
$s$	Sistema de coordenadas curvilínea
$s_i, s_j$	Conjunto de números distintos que representam os nós
$u_i$	Graus de liberdade relacionados aos deslocamentos axiais
$u_h^e$	Função que aproxima $u$ pelo MEFG no elemento
$u_{MEF}^e$	Parcela de aproximação proveniente do espaço não enriquecido do MEF
$u_{ENR}^e$	Parcela de aproximação proveniente do enriquecimento
$\{\mathbf{u}\}$	Vetor de deslocamentos
$\{\ddot{\mathbf{u}}\}$	Vetor de acelerações
$v$	Função de teste ou função de base do Método da Partição da Unidade



$v_i$	Função de teste pertencente ao espaço aproximado
$w_i$	Graus de liberdade relacionados aos deslocamentos transversais
$A$	Área da seção transversal
$C_\infty, C_g$	Constantes do Método da Partição da Unidade
$E$	Módulo de elasticidade
$F_i$	Funções de forma clássicas do MEF
$G$	Módulo de cisalhamento
$G_{ij}$	Funções de forma enriquecidas
$H^m$	Espaço de Sobolev das funções com derivadas de ordem até $m$ que seja quadraticamente integráveis no sentido de Lebesgue
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$J_i$	Funções de forma relacionados a $\theta$
$[\mathbf{K}]$	Matriz de rigidez
$[\mathbf{K}]^e$	Matriz de rigidez elementar
$L$	Comprimento do elemento
$L$	Lagrangiano
$L_i^k$	Polinômios de Lagrange associados aos nós $s_i$
$L^m$	Espaço das funções integráveis no sentido de Lebesgue
$M$	Subconjunto limitado de um espaço normado $X$
$[\mathbf{M}]$	Matriz de massa
$[\mathbf{M}]^e$	Matriz de massa elementar
$N$	Dimensão de um espaço vetorial
$\{N_P\}, \{N_Q\}, \{N_J\}$	Vetores contendo as funções de forma
$\{\overline{N_P}\}, \{\overline{N_Q}\}, \{\overline{N_J}\}$	Vetores contendo as funções de forma com mesma dimensão
$P_i$	Funções de forma relacionados a $u$
$Q_i$	Funções de forma relacionados a $w$

$R$	Raio de curvatura da viga
$R^n$	Espaço dos números reais de dimensão $n$
$T$	Energia cinética
$U$	Energia de deformação
$V$	Espaço linear
$W$	Trabalho das forças externas
$\beta_j$	Parâmetro das funções enriquecedora
$\overline{\beta_j}$	Parâmetro estabilizado das funções enriquecedora
$\gamma$	Deformação de cisalhamento
$\gamma_{1j}, \gamma_{2j}$	Funções de Enriquecimento do MEFG
$\varepsilon$	Deformação axial do elemento de viga
$\varepsilon_i$	Posição de um nó de um elemento finito em coordenadas locais
$\theta_i$	Graus de liberdade relacionados à rotação da seção transversal
$\kappa$	Deformação de flexão
$\xi$	Coordenadas locais dentro de um elemento finito
$\rho$	Massa específica
$\phi_{1j}, \phi_{2j}$	Funções de enriquecimento do MEFG
$\phi$	Rotação do elemento de viga curva
$\{\phi\}$	Modos de vibração
$\varphi_i$	Funções que compõem uma Partição da Unidade
$\chi$	Mudança de curvatura
$\omega$	Frequências naturais
$\omega_{anali}$	Frequências naturais analíticas
$\omega_{apro}$	Frequências naturais obtidas numericamente
$\Phi_n$	Funções enriquecedoras
$\Omega$	Domínio

$\Omega_i$	Subdomínios
$\nabla$	Operador diferencial nabla

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
1.1	OBJETIVO GERAL	23
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	23
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	23
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>24</b>
2.1	VIBRAÇÃO DE ESTRUTURAS	24
2.2	MÉTODOS DE SOLUÇÃO	25
2.2.1	Métodos Analíticos	25
2.2.2	Método dos Elementos de Contorno	27
2.2.3	Método de Rayleigh-Ritz	27
2.2.4	Análise Isogeométrica	28
2.2.5	Método dos Elementos Finitos	29
2.2.6	Método dos Modos Admissíveis	31
2.2.7	Método Composto	33
2.2.8	Método dos Elementos Finitos $p$ -Fourier	33
2.2.9	Método dos Elementos Finitos Generalizados	35
<b>3</b>	<b>O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA VIBRAÇÃO DE ARCOS</b>	<b>40</b>
3.1	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO MEEG	40
3.2	FUNÇÕES DE FORMA	44
3.2.1	Funções de Forma Classe $C^0$	44
3.2.1.1	Funções de enriquecimento $C^0$ baseadas em Leung e Zhu (2004)	45
3.2.1.2	Funções de enriquecimento $C^0$ baseadas em Arndt (2009)	46
3.2.1.3	Funções de enriquecimento $C^0$ do MEEG	47
3.2.2	Funções de Forma Classe $C^1$	48
3.2.2.1	Funções de enriquecimento $C^1$ baseadas em Leung e Zhu (2004)	49
3.2.2.2	Funções de enriquecimento $C^1$ baseadas em Arndt (2009)	49
3.2.2.3	Funções de enriquecimento $C^1$ do MEEG	51
3.3	ELEMENTOS DE ARCO	51
3.3.1	Elemento de Arco Fino	51
3.3.1.1	Elementos Finitos de Arco Fino	55
3.3.2	Elemento de Arco Espesso	56
3.3.2.1	Elementos Finitos de Arcos Espessos	60
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>61</b>

4.1	ANÁLISES DE VIBRAÇÃO LIVRE DE ARCOS FINOS . . . . .	61
4.1.1	Modelo do Anel Circular . . . . .	61
4.1.2	Arco biarticulado com variação do ângulo de abertura . . . . .	81
4.1.3	Arco de 90° biapoiado . . . . .	83
4.1.4	Arco de 150° biapoiado . . . . .	87
4.2	ANÁLISES DE VIBRAÇÃO LIVRE DE ARCOS ESPESSOS . . . . .	91
4.2.1	Estudo do Número de Condição da Matriz de Massa . . . . .	91
4.2.2	Arco biarticulado com variação do ângulo de abertura . . . . .	93
4.2.3	Arco biapoiado com ângulo de abertura de 90° . . . . .	95
4.2.4	Arco biengastado com ângulo de abertura de 90° . . . . .	99
4.2.5	Arco em balanço com seção variável . . . . .	102
4.3	ANÁLISE TRANSIENTE DE ARCOS . . . . .	110
4.3.1	Análise do Carregamento tipo Harmônico . . . . .	111
4.3.2	Carregamento tipo pulso retangular . . . . .	114
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>119</b>
5.1	SUGESTÕES DE CONTINUIDADE . . . . .	120
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>121</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Entre outras várias ramificações, de uma maneira geral, podem ser realizados dois tipos de análise em uma estrutura, a análise estática e a análise dinâmica. A análise estática é realizada em casos onde as variações temporais dos deslocamentos da estrutura ocorrem em intervalos de tempo suficientemente grandes, de tal modo que os efeitos inerciais possam ser negligenciados em uma análise de esforços nessa estrutura. Porém, em casos onde a variação temporal dos deslocamentos ocorre em intervalos considerados pequenos, a análise dinâmica se torna indispensável.

A análise dinâmica por sua vez, pode ser dividida em duas partes, a análise de vibração livre (ou modal) e a análise de vibração forçada (ou transiente). Na análise de vibração livre não há nenhuma força externa atuando sobre a estrutura e ela é utilizada para se obter os modos e frequências naturais de vibração da estrutura ou seja, suas características dinâmicas. Já na análise de vibração forçada, existem forças externas atuando na estrutura ao longo do tempo e que causam uma variação temporal de esforços.

Com a crescente preocupação de se encontrar soluções que não apenas atendam requisitos técnicos e econômicos, mas que também levem em conta questões estéticas na concepção das obras de engenharia, tem se utilizado cada vez mais elementos curvos pelo fato dos mesmos terem um certo apelo arquitetônico e por serem mais eficientes em determinados casos, com várias aplicações na engenharia como por exemplo em pontes e fuselagem de aviões. De acordo com Leung e Zhu (2004), os elementos de arco têm gerado um interesse cada vez maior de pesquisadores por dois motivos principais: o primeiro é pelo crescente uso de tal elemento estrutural e o segundo é pelo fato de que o entendimento de seu comportamento também fornece uma visão de vários aspectos do comportamento de elementos de casca.

Um problema muito comum encontrado em elementos de arco, ou viga curva no plano de atuação do carregamento, que os diferem dos elementos de vigas retas são os problemas de travamentos de membrana e de cisalhamento (*membrane and shear locking*). De acordo com Raveendranath, Singh e Pradhan (2000), estes efeitos ocorrem devido à incapacidade do elemento finito empregado de representar o comportamento inextensional à flexão.

Para resolver o problema de vibração pode-se optar por dois caminhos, buscar a solução analítica do problema de valores de contorno que rege o problema ou buscar o uso de soluções numéricas, tais como o Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier e o Método dos Elementos Finitos Generalizados, entre

outros.

As soluções analíticas acabam apresentando grandes limitações, sendo reduzidas apenas a problemas bastantes específicos e, no caso de elementos de arcos, as mesmas são raramente encontradas. Por isso, o uso de métodos numéricos tem sido muito explorado.

Apesar do Método dos Elementos Finitos tradicional (MEF) ser muito utilizado para a solução de problemas de engenharia, de acordo com Arndt (2009), para problemas de vibração livre, o método apresenta bons resultados apenas para as primeiras frequências, sendo que para se obter bons resultados para frequências mais elevadas é necessário um refino muito grande, exigindo-se um grande esforço computacional. Por isso surge a ideia de se aplicar um método enriquecido para obter as frequências e modos naturais de vibração, tal como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

A técnica do MEFG tem como origem o Método da Partição da Unidade, o qual é utilizado como base para a expansão do espaço de aproximação tradicional do MEF. Para escolher de forma adequada as funções enriquecedoras, é necessário o prévio conhecimento de alguma característica do comportamento da solução esperada para o problema.

O MEFG foi paralelamente proposto por Babuska e outros pesquisadores (MELENK; BABUSKA, 1996; BABUSKA; BANERJEE; OSBORN, 2004; DUARTE; BABUSKA; ODEN, 2000) e por Duarte e Oden (DUARTE; ODEN, 1996; ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998) sob diversos nomes, entre eles: Método dos Elementos Finitos Especiais, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade, Nuvens  $hp$  e Método dos Elementos Finitos  $hp$  baseado em Nuvens. Diversos métodos sem malha recentemente propostos podem ser considerados casos especiais deste método. O MEFG tem sido aplicado com sucesso em problemas de análise e modelagem de trincas (MALEKAN et al., 2018; CHIN; LASSERRE; SUKUMAR, 2017; REN; GUAN, 2017), problemas de interface (KERGRENE; BABUSKA; BANERJEE, 2016) e mecânica quântica (PASK; SUKUMAR, 2016), entre outros.

Alguns trabalhos (ARNDT, 2009; ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2010; TORII, 2012; TORII; MACHADO, 2012; SHANG, 2016; SHANG; MACHADO; ABDALLA FILHO, 2016; ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2016), têm demonstrado a eficácia do MEFG para soluções de problemas de dinâmica de estruturas reticuladas, tais como barras, treliças, vigas de Euler-Bernoulli, pórticos e vigas de Timoshenko.

Dado o sucesso alcançado por tais pesquisadores para os diferentes tipos de elementos estruturais citados anteriormente, neste trabalho é verificada a eficiência do

MEFG para a análise de vibração em arcos comparando os resultados com soluções analíticas, outros trabalhos disponíveis na literatura, além de comparação entre os modelos propostos.

### 1.1 OBJETIVO GERAL

Aplicar o Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise dinâmica de arcos.

### 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para se alcançar o objetivo geral proposto pretende-se:

- a) Apresentar a formulação e desenvolver elementos finitos generalizados de arcos finos e espessos.
- b) Propor e testar elementos variando o grau polinomial do espaço de aproximação da solução, funções de enriquecimento e partição da unidade utilizados na sua construção.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho foi organizado segundo estrutura descrita a seguir. O capítulo 2 apresenta uma breve conceituação teórica sobre o problema de vibração e métodos de solução analíticos e aproximados, bem como um breve levantamento de como os métodos de solução têm sido utilizados. No capítulo 3, é discutida a base matemática do Método dos Elementos Finitos Generalizados e é mostrada a formulação matemática dos elementos de arcos finos e espessos propostos. No capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos com os modelos propostos neste trabalho e comparados com algumas soluções de referência encontradas na literatura. Por fim, no capítulo 5, é descrita a conclusão deste trabalho.



## 2 REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura deste trabalho tem como objetivo fazer um levantamento, mostrando a evolução dos métodos de solução de problemas de vibração livre, com ênfase nos Métodos Enriquecidos de elementos finitos. Outro ponto nessa revisão é mostrar como estes métodos têm sido aplicados para a solução do problema de vibração livre em elementos de arco.

Para um melhor entendimento dos métodos numéricos, o capítulo inicia com uma breve descrição matemática geral do problema de vibração em estruturas.

Na maioria das referências em língua inglesa, o arco ou viga curva no plano do carregamento (plano vertical na maioria dos casos) é denominado simplesmente de viga curva. Logo, neste trabalho o termo viga curva se refere unicamente a arcos.

### 2.1 VIBRAÇÃO DE ESTRUTURAS

Na dinâmica de estruturas se pode dividir em dois tipos de análises, a análise de vibração livre (modal) e análise de vibração forçada (transiente).

A vibração livre sem excitação, de acordo com Chopra (1995), é um fenômeno que pode ser entendido como um movimento no qual um sistema varia de maneira periódica em torno de sua posição estática, onde o mesmo inverte o sentido do movimento todas as vezes em que se alcança um ponto de máximo deslocamento comparado a condição de equilíbrio, o que também é chamado de amplitude. Nessa análise se busca obter as características dinâmicas da estrutura, frequências naturais e modos de vibração associados.

De um ponto de vista matemático, a análise dinâmica de um sistema com múltiplos graus de liberdade é entendida como um problema de valores de contorno, onde tem-se, no caso de vibração livre não amortecida, a seguinte equação (CHOPRA, 1995):

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $[\mathbf{M}]$  é a matriz de massa,  $[\mathbf{K}]$  é a matriz de rigidez,  $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$  é o vetor de acelerações generalizadas,  $\{\mathbf{u}\}$  é o vetor de deslocamentos generalizados.

Na engenharia civil, em geral, os coeficientes de amortecimento são muito baixos e por isso acabam tendo um baixo impacto na resposta de frequências naturais e nesse tipo de análise costumam ser desprezados (CHOPRA, 1995).

Em vibração livre, considerando que o deslocamento é descrito através de uma

função periódica, pode-se mostrar que a equação (2.1) pode se transformar em:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\phi\} = 0, \quad (2.2)$$

onde  $\omega$  são as frequências naturais,  $\{\phi\}$  são os modos de vibração associados à cada frequência natural.

Assim, a equação (2.2) representa um problema de autovalores generalizado, onde os autovalores são relacionados às frequências naturais de vibração e os autovetores representam os modos de vibração.

Na análise transiente, se busca obter as respostas generalizadas da estrutura no domínio do tempo. Nessa análise se obtém as respostas de deslocamentos, velocidades, acelerações, esforços, tensões, entre outros ao longo do tempo.

Em uma análise transiente existem um conjunto de forças externas que atuam ao longo tempo, causando efeitos dinâmicos na estrutura. Assim a equação de movimento dinâmico não amortecido, nesse caso, se torna (CHOPRA, 1995):

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}(t)\}, \quad (2.3)$$

onde  $\{\mathbf{f}(t)\}$  é o vetor de forças externas atuando sobre a estrutura.

A solução analítica desse sistema de equações é composta pela solução homogênea (vibração livre) e pela solução particular, que depende do carregamento atuando sobre a estrutura.

## 2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO NA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Para se resolver as equações diferenciais governantes dos problemas de vibração de estruturas pode-se optar por dois caminhos, obter a solução analítica ou utilizar um método de solução aproximado, como por exemplo, Método dos Elementos de Contorno, Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos Finitos Generalizados, entre outros.

### 2.2.1 Métodos Analíticos

Nos métodos analíticos, as soluções das equações diferenciais governantes são encontradas de maneira exata, porém acabam sendo limitados a problemas de geometria mais simples e condições de contorno muito particulares. Para problemas muito complexos acaba não sendo possível se encontrar uma solução analítica do problema.

As soluções analíticas, apesar de terem aplicações limitadas, podem ter uma importância muito grande para os métodos numéricos, pois elas fornecem resultados

que podem ser utilizados como forma de calibração dos métodos numéricos propostos e mesmo servir medir o grau de precisão de tais métodos.

Em termos de estruturas reticuladas, há vários autores que podem ser citados como tendo desenvolvido algumas soluções analíticas para vigas e barras. Por exemplo, pode-se citar Abrate (1995), Kumar e Sujith (1997), Li (2000), Raj e Sujith (2005).

No caso de elementos curvos, principal foco deste trabalho, existe solução analítica para vibração livre de anéis finos, que foi desenvolvido por Timoshenko (1955), para vibração flexional e extencional. Nesse caso, as frequências naturais de vibração de flexão, em Hertz, podem ser obtidas pela equação (TIMOSHENKO, 1955):

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E I i^2 (1 - i^2)^2}{\rho A r^4 (1 + i^2)}}, \quad (2.4)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal,  $A$  é a área da seção transversal,  $\rho$  é a massa específica,  $r$  é o raio do anel,  $i$  é o coeficiente da frequência que se deseja obter ( $i \geq 1$ ).

As frequências naturais de vibração extencional são obtidos pela expressão (TIMOSHENKO, 1955):

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E (1 + i^2)}{\rho r^2}}, \quad (2.5)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade,  $\rho$  é a massa específica,  $r$  é o raio do anel,  $i$  é o coeficiente da frequência que se deseja obter ( $i \geq 1$ ).

A solução proposta por Timoshenko (1955), dada pelas Equações (2.4) e (2.5), é usada neste trabalho como solução de referência para os modelos desenvolvidos.

Petyt e Fleischer (1971) desenvolvem solução analítica para vigas curvas finas circulares simplesmente apoiadas. Os autores arbitram uma forma periódica da solução dos deslocamentos que respeite as condições de contorno e encontram as características dinâmicas da estrutura.

Hull, Perez e Cox (2018) desenvolvem um modelo analítico para vigas curvas com seção transversal tipo T. O modelo inclui vibração no plano e fora do plano. O problema é modelado usando equações da elasticidade em duas dimensões para vibração no plano e as equações da clássica teoria de flexão de placas para vibração fora do plano em conjunto com dois conjuntos de equações de casca de Donnell, resultando em 24 equações algébricas. Essas equações são resolvidas para gerar os coeficientes de propagação de onda, o que produz uma solução para o campo de deslocamentos em todas as três dimensões. Os resultados são comparados com modelo usando o Método dos Elementos Finitos.

### 2.2.2 Método dos Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método que possui muitas aplicações no campo de análise dinâmica de estruturas e com relativo sucesso, conforme descrito em nos trabalhos de Brebbia e Nardini (1983), Carrer e Mansur (1999), Wrobel e Aliabadi (2002) e Gaul, Kogl e Wagner (2003).

Assim como no MEF, pode se obter a formulação do MEC através do Método dos Resíduos Ponderados, a diferença são as funções de ponderação utilizadas. No MEC, de acordo com Torii (2012), utiliza uma forma mais fraca do problema do que no MEF, visto que toda a exigência é passada para a função de ponderação.

No MEC, após aplicar algumas condições, as variáveis a serem determinadas se referem ao contorno do problema, o que faz com que se reduza o esforço computacional e também se facilite a discretização do problema. O cálculo das variáveis no interior do domínio do problema é feito a partir dos valores obtidos no contorno do mesmo.

Em problemas onde se necessita de alguma discretização do domínio, o método apresenta algumas limitações pois é preciso utilizar de algumas técnicas especiais. Outro ponto negativo, de acordo com Torii (2012), é que as matrizes resultantes do MEC não costumam ser simétricas e nem esparsas, fato que pode resultar em um maior esforço computacional, porque existem algoritmos específicos que aproveitam as matrizes serem esparsas e simétricas para reduzir o esforço computacional.

Além disso, para aplicar o MEC é preciso conhecer a solução fundamental associada ao problema que, além de ser matematicamente difícil de se obter, faz com que para cada problema se tenha uma solução fundamental diferente, não sendo tão generalista como o MEF.

### 2.2.3 Método de Rayleigh-Ritz

O Método de Rayleigh-Ritz consiste em uma extensão de outro método previamente existente, chamado simplesmente de Método de Rayleigh. Neste método, para se encontrar a solução do problema de valor de contorno é feito a transformação de um sistema contínuo em um sistema discreto de uma dimensão finita ( $n$ ), ou seja, num sistema de  $n$  equações e  $n$  incógnitas. Para isso, a solução aproximada é escrita na forma (CLOUGH; PENZIEN, 1975):

$$\bar{y}(x) = a_1 \cdot \phi_1(x) + a_2 \cdot \phi_2(x) + a_3 \cdot \phi_3(x) + \dots + a_n \cdot \phi_n(x) \quad (2.6)$$

onde  $\phi_i(x)$  são funções conhecidas e linearmente independentes e  $a_i$  são constantes a se determinar. Assim o problema se resume a encontrar os valores de  $a_i$  de tal modo que se obtenha os coeficientes que minimizem a energia do sistema.

Para problemas de vibração livre de estruturas, as funções  $\phi_i(x)$  são definidas como sendo um conjunto de modos admissíveis e  $a_i$  são um conjunto de amplitudes. Para obter os melhores resultados com o menor número de coordenadas, cada uma das funções admissíveis  $\phi_i(x)$  deveria ser tomada como uma aproximação do modo de vibração analítico correspondente (ARNDT, 2009).

Leung (1988) mostrou uma aplicação do Método de Rayleigh-Ritz para encontrar as frequências naturais de vigas não uniformes com diversas condições de contorno. O autor apresentou os resultados encontrados para vigas com diversas condições de contorno e, por fim, os comparou com os obtidos utilizando o Método dos Elementos Finitos. Nas comparações, o autor busca utilizar menos graus de liberdade no Método de Rayleigh-Ritz em comparação com o MEF. Os resultados encontrados foram bastante próximos ao modelo com o MEF, mostrando a eficácia do método para este problema.

#### 2.2.4 Análise Isogeométrica

A Análise Isogeométrica foi proposta por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e consiste em um modelo numérico que utiliza de discretização do domínio do problema e funções especiais do tipo NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) como funções de ponderação. No método, estas funções NURBS também são utilizadas como funções aproximadoras da geometria do objeto. O nome Isogeométrico vem desta dupla utilização das funções NURBS.

De acordo com Rauen (2014), a aplicabilidade deste método é similar ao Método dos Elementos Finitos (MEF), porém o uso das funções NURBS como aproximadoras para a geometria do objeto apresenta vantagens sobre o MEF: a não necessidade de acessar novamente o modelo para estabelecer os nós durante um refino de malha, e a descrição exata da geometria de um objeto previamente desenvolvido em ambiente CAD. Os principais refinamentos deste método de acordo com Rauen (2014) são os chamados refinamento  $h$ , refinamento  $p$  e refinamento  $k$ .

O refinamento  $h$  consiste basicamente em inserir novos nós de controle sem a alteração da ordem do polinômio de interpolação. Estes novos nós não necessariamente criam graus de liberdade interpolatórios, diferentemente do refinamento  $h$  do MEF.

O refinamento  $p$  consiste basicamente em aumentar a ordem das funções NURBS, sendo bastante semelhante ao refinamento  $p$  do MEF. Finalmente, o refinamento  $k$  consiste em utilizar simultaneamente ambos os refinamentos descritos anteriormente e foi descrito em Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Cottrell et al. (2006).

Luu, Kim e Lee (2015) utilizaram a Análise Isogeométrica para análise de

vibração livre de vigas curvas espessas laminadas com curvaturas arbitrárias. Foi utilizado um módulo de elasticidade equivalente levando em consideração os diferentes tipos de materiais com suas espessuras de camadas. A geometria e a curvatura da viga foram modeladas por funções NURBS para permitir a análise tanto de vigas com curvaturas constantes como de curvaturas variáveis. O método foi aplicado para vigas curvas circulares e elípticas. Foram feitos testes de convergência interna dos resultados, atingindo bons resultados.

#### 2.2.5 Método dos Elementos Finitos

De acordo com Torii (2012), o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sua metodologia baseada na divisão do domínio do problema em subdomínios (elementos finitos) e na geração de aproximações locais. Assim, a união das aproximações locais irá resultar na aproximação global da solução do problema.

No MEF tradicional, as funções de aproximação são funções polinomiais e isto se deve, principalmente, à facilidade de gerar polinômios que respeitem as condições de contorno essenciais do problema. Outro motivo que leva o método a adotar funções polinomiais é o fato de tais funções apresentarem facilidade em realizar operações como integração e derivação.

A principal vantagem do MEF, de acordo com Torii (2012), é que as equações básicas podem ser definidas para elementos de geometrias simples e conhecidas que, unidos, podem reproduzir o domínio original, permitindo que quase todo o tipo de domínio possa ser modelado.

Ainda de acordo com esse autor, a grande vantagem do ponto de vista computacional é que as matrizes utilizadas para resolver a maioria dos problemas são simétricas e contém muitos elementos nulos, e assim, podem ser utilizados esquemas muito eficientes para trabalhar com tais matrizes, diminuindo muito o esforço computacional.

O MEF pode apresentar problemas de precisão dependendo da malha utilizada, mas a precisão do método pode ser melhorada com a utilização dos refinamentos chamados de:  $h$ ,  $p$ ,  $hp$  e adaptativos.

O chamado refinamento  $h$  é considerado o mais simples e consiste apenas em se diminuir o tamanho dos elementos da malha anterior mantendo as características da mesma. Com um maior número de elementos as interpolações ocorrem em intervalos menores, tornando a aproximação mais precisa.

Campion e Jarvis (1996) descrevem o refinamento  $p$  como sendo o aumento do espaço de aproximação, como um MEF geralmente trabalha com espaços polinomiais, isso significa aumentar o grau do polinômio de aproximação mantendo a malha, ou

seja, aumentando o grau do polinômio pode se obter uma aproximação global melhor e mais próxima da realidade.

O chamado refinamento *hp* consiste em utilizar ambos os refinamentos citados anteriormente (refinamentos *h* e *p*) ao mesmo tempo, ou seja, aumentar o número de elementos na malha e aumentar o grau do polinômio de aproximação, ou interpolador.

Os refinamentos adaptativos podem ser aplicados nos três refinamentos citados, desde que a malha de elementos ou as funções interpoladoras ou mesmo ambas se adaptem durante a análise procurando uma solução mais precisa. Um exemplo é aumentar o número de elementos na malha em locais onde há muita variação de tensões.

Com relação à análise dinâmica de estruturas, a utilização do MEF apresenta bons resultados para as primeiras frequências, porém necessita de um grande esforço computacional para se obter uma boa precisão quando se deseja obter frequências mais elevadas.

Petyt e Fleischer (1971) desenvolveram três elementos finitos para a determinação das vibrações axiais e transversais de arcos finos. Os autores fizeram o estudo para vigas simplesmente apoiadas, e com apoios articulados e fixos. No primeiro dos elementos finitos desenvolvidos foi utilizada interpolação linear para os deslocamentos axiais e interpolação cúbica para os deslocamentos transversais. O segundo elemento utilizou termos trigonométricos nas interpolações, tanto dos deslocamentos axiais quanto dos deslocamentos transversais. Por fim, o terceiro elemento utilizou interpolação cúbica para os dois deslocamentos citados anteriormente. Os melhores resultados foram obtidos quando ambos os deslocamentos foram interpolados a partir de polinômios cúbicos. Os autores afirmaram que esta representação garante que o elemento fica mais próximo de representar melhor o deslocamento de corpo rígido.

Raveendranath, Singh e Pradhan (1999) desenvolvem um elemento de arco espesso de 2 nós, no qual os autores usam polinômio de grau 3 para representar o campo de deslocamento transversal ( $w$ ), polinômio de grau 4 para representar os campos de deslocamentos axiais ( $u$ ) e de rotação ( $\theta$ ). Os elementos desenvolvidos apresentam graus de liberdade não nodais, sendo que possuem apenas continuidade de tipo  $C^0$ . No trabalho em questão, são realizadas apenas análises estáticas mas com resultados mais precisos, tanto em deslocamentos como em esforços internos, que as soluções de referência usadas como comparação.

Raveendranath, Singh e Pradhan (2000) resolveram o problema de vibração livre de arcos utilizando o elemento de arco fino variando o grau dos polinômios interpoladores para os deslocamentos axiais ( $u$ ) e transversais ( $w$ ). Os mesmos demonstraram que, assumindo um campo de deslocamentos cúbico para  $w$  e quártico para  $u$ , os resul-



tados são melhores que aqueles elementos obtidos por uma interpolação cúbica-linear e cúbica-cúbica, por possuir mais graus de liberdade por elemento. Os resultados também demonstraram que os campos de deslocamentos cúbico-quártico ficam bastante próximos do elemento de ordem 5 para os dois deslocamentos, tendo a vantagem de possuir um número menor de graus de liberdade por elemento.

Raveendranath, Singh e Rao (2001) desenvolveram outro elemento de arco espesso, agora com 3 nós, usando polinômio de grau 6 para a representação dos deslocamentos axiais ( $u$ ) e polinômio de grau 6 para representação dos deslocamentos transversal ( $w$ ) e rotação ( $\theta$ ). No trabalho em questão, os elementos também possuem graus de liberdade não nodais e possuem apenas continuidade  $C^0$ . Foram realizadas apenas análises estáticas, apresentando excelentes resultados comparados às soluções de referência.

Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) desenvolveram um elemento de arco espesso com 4 nós com três graus de liberdade por nó usando polinômios de Lagrange de ordem 3 para a interpolação dos deslocamentos axiais, transversais e a rotação. Os resultados se mostraram em sua maioria melhores que outros trabalhos de referência encontrados na literatura.

Pan e Liu (2011) realizaram uma análise dinâmica não linear de vigas curvas utilizando elemento de viga curva espessa. No caso do trabalho em questão é considerada a não linearidade geométrica. Os autores demonstraram a convergência e a eficiência de tais modelos através de simulações numéricas dos elementos criados em comparação com um modelo utilizando o software ANSYS®, que utilizou de elementos finitos lineares (elementos de pórtico) para aproximar a geometria das vigas curvas.

Mathisen et al. (2017) realizaram uma análise estática não linear usando a teoria de vigas curvas 3D de geometria exata para obter uma família de elementos isoparamétricos de vigas curvas para grandes deformações. O trabalho comparou os resultados utilizando a geometria exata com resultados obtidos com uma formulação utilizando elementos corrotacionais.

Alguns outros trabalhos, além dos já citados, ainda resolvem o problema de vibração livre de arcos como por exemplo Sabir e Aahwell (1971), Auciello e De Rosa (1994), Krishnan e Suresh (1998) e Wu, Lin e Shaw (2013).

Outros métodos enriquecidos baseados no MEF surgiram ao longo do tempo e alguns deles são descritos a seguir.

#### 2.2.6 Método dos Modos Admissíveis

O Método dos Modos Admissíveis (MMA) é baseado em uma ideia apresentada por Craig (1981), onde se descreve que o campo de deslocamentos pode ser



representado como a combinação linear de modos admissíveis de vibração.

Partindo desta ideia, foi proposto por Engels (1992) e Ganesan e Engels (1992) o MMA para análise de vibrações em elementos de barra, viga e pórtico.

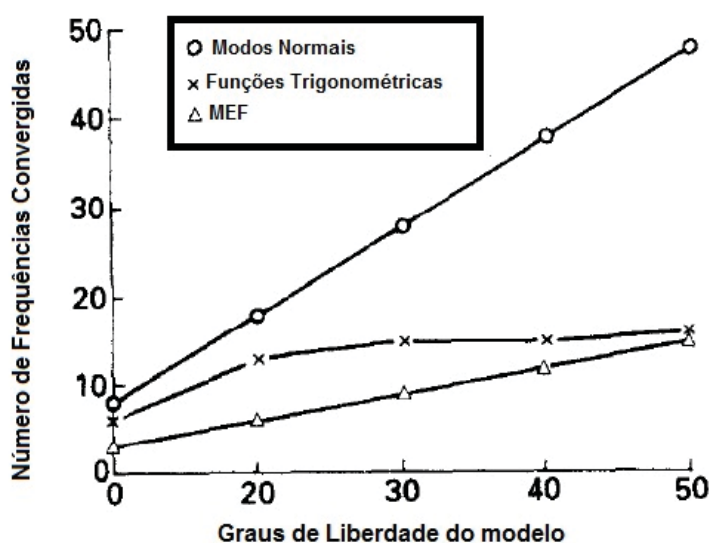
No MMA, o campo de deslocamentos é descrito como uma combinação linear de dois conjuntos de funções, sendo estes compostos pelos modos estáticos e modos de vibração admissíveis restritos na interface do elemento. Engels (1992) e Ganesan e Engels (1992) descrevem esta representação do campo de deslocamentos como completa no sentido de que qualquer grau de precisão é teoricamente possível desde que se acrescentem, em quantidade suficientes diferentes modos admissíveis restritos na interface do elemento.

De acordo com Arndt (2009) as principais vantagens deste método são: alta taxa de convergência, além de que em princípio nenhuma subdivisão dos elementos base é necessária e que o modelo gerado é hierárquico.

Ganesan e Engels (1992) apresentaram a utilização do MMA na análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli, utilizando dois tipos de modos admissíveis restritos na interface: o primeiro formado por modos de vibração livre de vigas bi engastadas ou modos normais e o segundo formado por funções trigonométricas com restrições na interface.

Os autores então apresentaram resultados para as duas formulações apresentadas para uma viga simplesmente apoiada e os compararam com os obtidos pelo MEF. O número de frequências obtidas com erro inferior a 1% estão apresentados na Figura 1.

FIGURA 1 – Comparação de frequências com erro inferior a 1% obtidas pelas formulações de MMA e MEF para viga simplesmente apoiada.



FONTE: Ganesan e Engels (1992).

### 2.2.7 Método Composto

O Método Composto (MC) foi proposto por Zeng (1998a,b,c) e é obtido utilizando as funções de forma convencionais do MEF acrescidas de um conjunto de funções enriquecedoras formadas por funções não polinomiais que são relacionadas às soluções analíticas do problema. No MC, os graus de liberdade relacionados às funções enriquecedoras não têm significado físico direto e são denominados por Zeng (1998b) como graus de liberdade  $c$ . De acordo com Arndt (2009) o método é basicamente uma combinação da versatilidade do MEF com a alta precisão das soluções analíticas.

O refinamento dos resultados pode ser feito através da diminuição do tamanho dos elementos da malha, que é chamado de refino  $h$ , assim como definido no MEF. Um segundo tipo de refinamento é o aumento da base de funções de forma. Pela construção do método este é sempre um refino hierárquico visto que o espaço de funções de forma anterior sempre está contido no novo espaço de aproximação. Este aumento da base de funções é chamado de refinamento  $c$ , conforme descrito em Zeng (1998a,b).

Zeng (1998a,b) desenvolveu o Método Composto para encontrar as frequências naturais de barras, vigas de Euler-Bernoulli e pórticos. No trabalho, dividido em duas partes, o autor descreveu e desenvolveu matematicamente todo processo para se chegar aos elementos citados. Após cada desenvolvimento, o autor aplicou as formulações encontradas para estes elementos estruturais variando o número de elementos e a quantidade de funções enriquecedoras e os comparou com a solução analítica e com uma solução utilizando o MEF.

No trabalho o autor mostra uma série de resultados variando as condições de apoio das barras. Em geral os modelos apresentam um erro inferior quando comparados ao refinamento  $h$  do MEF.

### 2.2.8 Método dos Elementos Finitos $p$ -Fourier

O Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier (MEF  $p$ -Fourier) foi proposto por Leung e Chan (1998) e consiste basicamente em aumentar a base do espaço de aproximação tradicional do MEF utilizando funções trigonométricas baseadas nos termos da série de Fourier, ao invés de aumentar o grau polinomial como no refinamento  $p$  de MEF.

De acordo com Leung e Chan (1998), as séries de Fourier são bem-comportadas e mais efetivas para a determinação dos modos e frequências de vibração mais elevadas. Os mesmos também afirmam que o uso de termos trigonométricos faz com que as limitações no uso de polinômios de grau muito elevado como funções de forma devido ao seu mau condicionamento desapareçam.

As funções enriquecedoras para os elementos com continuidade  $C^0$  e  $C^1$ , utilizados para elementos de barras e vigas de Euler-Bernoulli respectivamente, são desenvolvidas e descritas em Leung e Chan (1998) e as funções de continuidade  $C^2$  são apresentadas em Houmat (1997).

As funções enriquecedoras são obtidas de modo a não influenciarem nos graus de liberdade nodais. Por exemplo, no caso de elementos de barra ( $C^0$ ) as funções enriquecedoras devem ser nulas nos nós e no caso de elementos de vigas de Euler-Bernoulli ( $C^1$ ) além de serem nulas nos nós, as mesmas também devem possuir derivada nulas nos mesmos, visto que as derivadas neste caso também são graus de liberdade nodais (rotações).

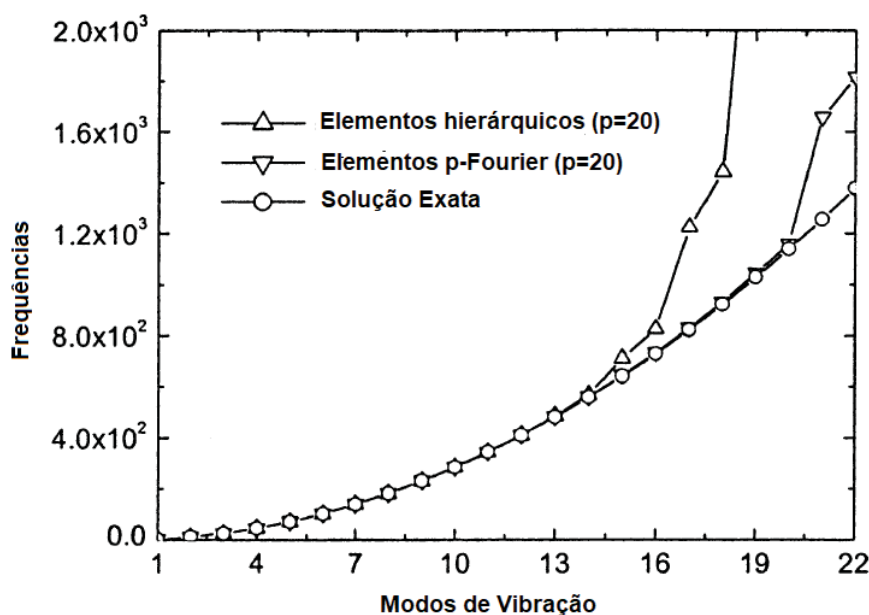
Leung e Chan (1998) aplicaram o MEF  $p$ -Fourier para vigas com diversas condições de contorno. Nos exemplos, os autores obtiveram erros bastante baixos o que mostra a eficiência do método para este tipo de elemento.

Leung et al. (2004) aplicaram o método para vibração livre de barras e placas em estado plano de tensões, além de aplicarem para um exemplo de estado plano de deformações, sempre chegando em resultados bastante aceitáveis.

Leung e Zhu (2004) apresentaram elementos para análise de arcos finos e espessos, utilizando o Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier. Os elementos de vigas curvas são muito sujeitos a travamentos de membrana e de cisalhamento e o uso de funções trigonométricas evitam estes travamentos.

Os autores aplicaram os elementos desenvolvidos para análise de vibração livre de anéis circulares finos, arcos articulados e arcos engastados e livres não uniformes. Para os casos de anéis circulares finos o MEF  $p$ -Fourier apresentou resultados mais precisos que utilizando o Método dos Elementos Finitos Hierárquico (MEFH) como pode se ver na Figura 2.

FIGURA 2 – Comparação de frequências naturais de vibração obtidas com MEFH e MEF  $p$ -Fourier com a solução analítica.



FONTE: Leung e Zhu (2004).

Para o caso de arcos tanto articulados uniformes quanto para engastados livres não uniformes, os autores também chegaram a resultados convergentes e com uma precisão bastante satisfatória, comparando com o MEF tradicional e com a solução encontrada por outros autores, demonstrando a eficiência do método para elementos de arcos.

### 2.2.9 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é baseado no Método da Partição da Unidade que foi proposto e apresentado por Melenk e Babuska (1996), Melenk e Babuska (1997), Babuska et al. (1996) e Babuska e Melenk (1997) em que os autores descrevem uma forma de gerar espaços de aproximação de funções de base quaisquer. Para tanto, os autores utilizaram um procedimento de multiplicação das funções de base por uma Partição da Unidade.

De acordo com Torii (2012), o conceito da Partição da Unidade já era conhecido a bastante tempo. Porém, a grande contribuição dos autores foi mostrar que o espaço de aproximação do Método da Partição da Unidade era capaz de herdar as propriedades de aproximação do espaço original e as propriedades de conformidade e regularidade da partição da unidade.

O MEFG foi paralelamente proposto por Babuska e outros pesquisadores (BABUSKA; CALOZ; OSBORN, 1994; MELENK; BABUSKA, 1996; BABUSKA; BA-

NERJEE; OSBORN, 2004; DUARTE; BABUSKA; ODEN, 2000) e por Duarte e Oden (DUARTE; ODEN, 1996; ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998) sob diversos nomes, entre eles: Método dos Elementos Finitos Especiais, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade, Nuvens  $hp$  e Método dos Elementos Finitos  $hp$  baseado em Nuvens. Diversos métodos sem malha recentemente propostos podem ser considerados casos especiais deste método. Outro método que utiliza o conceito da partição da unidade é o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFX) (MOES; DOLBOW; BELYTCHKO, 1993), que utiliza a sigla XFEM na língua inglesa. Segundo Fries e Beltyschko (2010), o Método da Partição da Unidade, o MEFG e o MEFX estão intimamente relacionados pelo fato de que os enriquecimentos por eles utilizados tem a mesma estrutura. Nesse sentido se pode afirmar que são métodos praticamente idênticos.

O MEFG pode ser descrito como uma modificação do MEF que compartilha diversas características dos métodos sem malha. No MEFG a aproximação local é construída empregando uma malha convencional de elementos que serve apenas para definir uma partição da unidade qualquer, sobre a qual é realizado o enriquecimento das funções de forma.

Os graus de liberdade ligados às funções enriquecedoras não possuem significado físico direto e são chamadas em Arndt (2009) como graus de liberdade de campo, enquanto os graus de liberdade ligados às funções de forma tradicionais do MEF são os graus de liberdade nodais.

Segundo Arndt (2009) entre as principais vantagens do MEFG em relação ao MEF tradicional destacam-se, primeiro, a habilidade de produzir refinamentos  $hp$  de elementos finitos com  $h$  e  $p$  não uniformes. Além da habilidade de gerar subespaços de aproximações particulares para aplicações específicas. Uma outra vantagem descrita é a possibilidade de utilizar códigos computacionais e algoritmos robustos já desenvolvidos para o MEF.

Alguns autores já aplicaram o MEFG para a solução de problemas de dinâmica, como Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2010), Torii (2012), Torii e Machado (2012), Weinhardt (2016), Shang (2016), Arndt, Machado e Scremin (2016) e Shang, Machado e Abdalla Filho (2016), dentre outros.

Arndt (2009) desenvolveu uma metodologia para aplicação do MEFG em problemas de dinâmica de estruturas. Pelo método ser baseado em nó e não em elemento, o mesmo propôs dividir a função enriquecedora em duas partes para se evitar o acoplamento dos graus de liberdade de campo dentro do próprio elemento. Assim sendo, cada função enriquecedora aplicada gera dois novos graus de liberdade no sistema, e não apenas um como seria esperado.

Arndt (2009) apresentou, ainda, um MEEG adaptativo, onde se escolhe um autovalor alvo e, na primeira iteração, com uma malha de MEF o menos refinada possível se encontra um valor aproximado para o mesmo. O valor encontrado é então incorporado ao enriquecimento do MEEG a partir da segunda iteração, quando se encontra um novo valor aproximado do mesmo que é, como feito na iteração anterior, incorporado ao enriquecimento do MEEG e assim é sucessivamente repetido para as iterações posteriores.

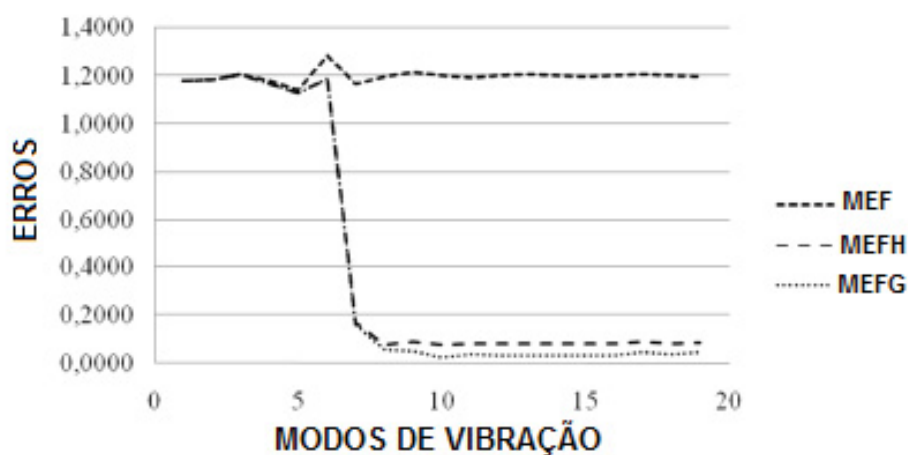
Em Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2010) o MEEG foi aplicado para análise de vibração livre de barras e treliças e os resultados comparados com a solução analítica e modelos utilizando o MEF e MC. Os resultados encontrados para as simulações de barra engastada e livre uniforme, barra engastada e livre com variação de material e de área de seção transversal e barras com variações senoidais e polinomiais de seção transversal indicam maior precisão do MEEG e MEEG adaptativo se comparados com o MEF e o MC. Já para a simulação de treliça composta por 15 barras, os resultados mostram-se inferiores aos resultados encontrados com o MC e MEF. Sabe-se que o MEF e métodos enriquecidos possuem convergência monotônica superior, ou seja, se os resultados encontrados pelo MEEG foram menores que os encontrados pelos outros métodos, os mesmos devem estar mais próximos da solução exata do problema.

Arndt, Machado e Scremin (2016) foi aplicado o MEEG adaptativo para vibração livre vigas de Euler-Bernoulli e pórticos obtendo também resultados precisos.

Em Torii (2012) e Torii e Machado (2012) foi apresentada uma formulação para análise dinâmica de barras e treliças utilizando o MEEG. O processo de integração no tempo é feito utilizando o Método da Superposição Modal e o método de Newmark. Os autores ressaltam que podem haver erros numéricos tanto do processo de integração numérica, quanto da aproximação por elementos finitos, inerente do método. Para minimizar os erros de integração numérica, os autores diminuem o intervalo de tempo ou mudam o número de modos considerados na superposição Modal. A diminuição do erro do MEF é feita utilizando uma aproximação com a maior acurácia possível, com uma malha o mais refinada possível.

Nos modelos simulados foram comparados, além do MEEG, o MEF e o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH). Nos exemplos estudados, os resultados encontrados sugerem que o MEEG apresenta erros menores que os outros dois métodos, como pode ser visto na Figura 3.

FIGURA 3 – Erros encontrados nos modelos para barra engastada e livre sujeita a carregamento harmônico com 21 graus de liberdade.



FONTE: Torii e Machado (2012).

Weinhardt (2016) estudou algumas técnicas para estabilização do MEFG para análise dinâmica. Uma das técnicas proposta pelo autor foi a substituição do parâmetro  $\beta$ , presente nas funções enriquecedoras propostas por Arndt (2009), que tinha o formato:

$$\beta_j = j \pi \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

por um parâmetro  $\beta$  estabilizado, com o formato:

$$\bar{\beta}_j = \left[ 2(j-1) + \frac{\beta_1}{\pi} \right] \pi \quad j = 1, 2, \dots \quad \beta_1 = \frac{3}{4} \pi \quad (2.8)$$

Petrolli (2016) estudou a sensibilidade da construção numérica da matriz de massa e de rigidez do MEFG para vibração livre de barra e viga de Euler-Bernoulli. A autora comparou o número de condição da matriz de massa gerada pelo MEFG com outros métodos enriquecidos como o MEF p-Fourier e MC. Foi ainda verificada a relação entre o número de condição da matriz de massa e a precisão necessária para estabilidade numérica do MEFG.

Piedade Neto e Proença (2016) utilizaram o MEFG para análise linear e não linear. O objetivo dos autores foi estudar a acurácia e estabilidade numérica para problemas de dinâmica estrutural. Os autores fizeram análises para uma viga em balanço e uma torre de aço.

Debella (2018) aplicou o MEFG para realizar uma análise transiente (resposta no domínio do tempo) de barras e vigas de Euler-Bernoulli. O objetivo principal foi propor uma técnica para identificação dos modos preponderantes no problema para reduzir a matriz modal para o processo de integração no tempo. Os exemplos de barra



acabaram mostrando a eficiência da técnica sendo possível reduzir a matriz modal e se obter respostas mais estáveis na análise transiente com menor custo computacional.

Malacarne (2018) propôs o uso do indicador de erro de Friberg para o MEFG. O objetivo do autor ao utilizar o mesmo foi identificar quais elementos da malha possuem uma influência maior no resultado de uma frequência alvo. Esta técnica tem o objetivo de enriquecer apenas os elementos com maior influência para evitar enriquecer a malha inteira e, conseqüentemente, diminuir o esforço computacional necessário.

Weinhardt et al. (2018) apresentaram algumas técnicas de estabilização do MEFG aplicado para barras com variação de seção transversal, tendo sido realizadas tanto análises modais quanto transientes nos exemplos abordados. Os resultados acabaram reafirmando a eficácia da técnica de estabilização proposta por Weinhardt (2016), agora para barras com seção variável.

Os trabalhos demonstram que o MEFG apresenta resultados bastante satisfatórios em problemas de dinâmica de estruturas.



### 3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA VIBRAÇÃO DE ARCOS

Neste capítulo são apresentadas a formulação matemática do Método dos Elementos Finitos Generalizados, as funções de forma e funções de enriquecimento utilizadas e as matrizes de massa e rigidez dos elementos de arco fino e espessos.

#### 3.1 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO MEFG

O MEFG, conforme dito anteriormente, utiliza o Método da Partição da Unidade proposto por Melenk e Babuska (1996) para incorporar o enriquecimento local ao subespaço de aproximação. A utilização do MPU para incorporar o enriquecimento é feita para que as funções de enriquecimento herdem as propriedades da partição da unidade.

De acordo com Torii (2012), o MPU pode ser visto como um método alternativo ao MEF para se gerar espaços de aproximação com propriedades de conformidade e regularidade quaisquer.

Melenk e Babuska (1996) colocam que a ideia básica do método está centrada na construção da Partição da Unidade, definida como apresentado a seguir.

**Definição 3.1** Seja  $\Omega \subset R^n$  um conjunto aberto,  $\{\Omega_i\}$  uma cobertura aberta de  $\Omega$  satisfazendo uma condição de sobreposição ponto a ponto dada por

$$\exists M \in N \quad \forall x \in \Omega \quad \text{card} \{i | x \in \Omega_i\} \leq M, \quad (3.1)$$

seja  $\{\varphi_i\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{\Omega_i\}$  satisfazendo

$$\text{suporte}(\varphi_i) \subset \text{fechamento}(\Omega_i) \quad \forall i, \quad (3.2)$$

$$\sum_i \varphi_i \equiv 1 \quad \text{em } \Omega_i, \quad (3.3)$$

$$\|\varphi_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_\infty, \quad (3.4)$$

$$\|\nabla \varphi_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_g}{\text{diam} \Omega_i}, \quad (3.5)$$

onde  $C_\infty$  e  $C_g$  são duas constantes. Então  $\{\varphi_i\}$  é chamada uma partição da unidade  $(M, C_\infty, C_g)$  subordinada a uma cobertura  $\{\Omega_i\}$ . A partição da unidade  $\{\varphi_i\}$  possui grau  $m \in N_0$  se  $\{\varphi_i\} \subset C^m(R^n)$ . Os subdomínios  $\{\Omega_i\}$  são chamados subcoberturas.

De acordo com Torii (2012), na definição (3.1) a constante  $M$  da equação (3.1) controla o número de subcoberturas que podem se sobrepôr em um mesmo ponto dentro do domínio do problema  $\Omega$ . A equação (3.2) indica que as funções  $\{\varphi_i\}$  devem ser não nulas apenas dentro da subcobertura às quais estão vinculadas. A equação (3.3) evidencia a característica mais marcante da partição da unidade, o fato das funções  $\{\varphi_i\}$  que a compõem devem resultar na unidade quando somadas no domínio. E as equações (3.4) e (3.5) indicam que as funções  $\{\varphi_i\}$  devem ser limitadas e possuir derivadas limitadas.

Com a definição de partição da unidade pode-se definir o espaço de aproximação do MPU.

**Definição 3.2** Seja  $\{\Omega_i\}$  uma cobertura aberta de  $\Omega \subset R^n$  e seja  $\{\varphi_i\}$  uma partição da unidade subordinada a  $\{\Omega_i\}$ . Seja um dado espaço  $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ . Então o espaço

$$V_{MPU} = \sum_i \varphi_i V_i = \left\{ \sum_i \varphi_i v_i \mid v_i \in V_i \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (3.6)$$

é chamado de espaço de MPU. O espaço de MPU possui grau  $m$  se  $V_{MPU} \subset C^m(\Omega)$ . Os espaços  $V_i$  são chamados aqui de espaços de base.

O seguinte teorema é apresentado em Melenk e Babuska (1996) e apresenta as propriedades de aproximação de um espaço do MPU.

**Teorema 3.1** Seja um dado  $\Omega \subset R^n$ . Sejam  $\{\Omega_i\}$ ,  $\{\varphi_i\}$  e  $\{V_i\}$  como nas definições 3.1 e 3.2. Seja  $u \in H^1(\Omega)$  a função a ser aproximada. Assumindo que os espaços de aproximação locais  $V_i$  tenham as seguintes propriedades: em cada subcobertura  $\Omega_i \cap \Omega$ ,  $u$  pode ser aproximado por uma função  $v_i \in V_i$  tal que

$$\|u - v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_1(i) \quad \text{e} \quad (3.7)$$

$$\|\nabla(u - v_i)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_2(i), \quad (3.8)$$

então a função:

$$u_{ap} = \sum_i \varphi_i v_i \in V \subset H^1(\Omega) \quad (3.9)$$

satisfaz

$$\|u - u_{ap}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M} C_\infty \left\{ \sum_i \varepsilon_1^2(i) \right\}^{1/2}, \quad (3.10)$$

$$\|\nabla(u - u_{ap})\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M} \left\{ \sum_i \left( \frac{C_g}{\text{diam}\Omega_i} \right)^2 \varepsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \varepsilon_2^2(i) \right\}^{1/2}. \quad (3.11)$$

O Teorema 3.1 mostra, de acordo com Torii (2012), que o espaço do MPU será semelhante aos espaços de base  $V_i$ . Da equação (3.10) pode-se notar que, a não ser por uma constante, a diferença entre a função  $u_{ap}$  e a função original  $u$  será delimitada pelas diferenças individuais das funções  $v_i \in V_i$  utilizadas. O mesmo ocorre para o gradiente da função aproximada, como mostrado na equação (3.11). Conseqüentemente, é de se esperar que a utilização do espaço MPU seja capaz de obter resultados semelhantes aos resultados que seriam obtidos ao se utilizar o espaço de aproximação local  $V_i$ , desde que  $v_i \in V_i$  sejam boas aproximações para  $u$ .

Com os conceitos do MPU é possível escrever que a solução aproximada do MEFG é composta da soma de duas parcelas:

$$u_h^e = u_{MEF}^e + u_{ENR}^e, \quad (3.12)$$

com

$$u_{MEF}^e = \sum_{i=1}^n F_i u_i \quad (3.13)$$

e

$$u_{ENR}^e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{nl} G_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^2 \eta_i \left( \sum_{j=1}^{nl} \Phi_{ij} a_{ij} \right) \quad (3.14)$$

onde:  $u_{MEF}^e$  é a parcela descrita pelas funções de forma clássicas do MEF,  $u_{ENR}^e$  é a parcela descrita pelas funções de enriquecimento,  $F_i$  são as funções de forma clássicas do MEF,  $u_i$  são os graus de liberdade nodais relacionados às funções de forma clássicas do MEF,  $\eta_i$  são as funções partição da unidade,  $G_{ij}$  são as funções de forma enriquecidas (resultante do produto da partição da unidade pela função de enriquecimento),  $\Phi_{ij}$  são as funções de enriquecimento,  $a_{ij}$  são os graus de liberdade de campo relacionados às funções de enriquecimento,  $n$  é o número de funções ligadas aos graus de liberdade nodais,  $nl$  é o número de níveis de enriquecimento.

As funções de enriquecimento são escolhidas de forma que possam incorporar os aspectos particulares do problema estudado. As funções partição da unidade formam a base de aproximação a ser enriquecida e, portanto, influenciam diretamente as características do espaço de aproximação enriquecido. (WEINHARDT, 2016).

Pode-se construir inúmeros tipos de partição da unidade utilizando polinômios de Lagrange, polinômios de Legendre, polinômios de Lobatto, funções de Shepard, funções trigonométricas, funções Heaviside, entre outros.

Os polinômios de Lagrange são facilmente obtidos e os polinômios lineares foram utilizados por Arndt (2009) e Torii (2012) para a construção do MEFG trigonomé-

trico, por isso serão utilizados neste trabalho. Os polinômios de Lagrange podem ser construídos a partir da seguinte expressão

$$L_i^k(\xi) = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^k (\xi - s_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^k (s_i - s_j)}, \quad (3.15)$$

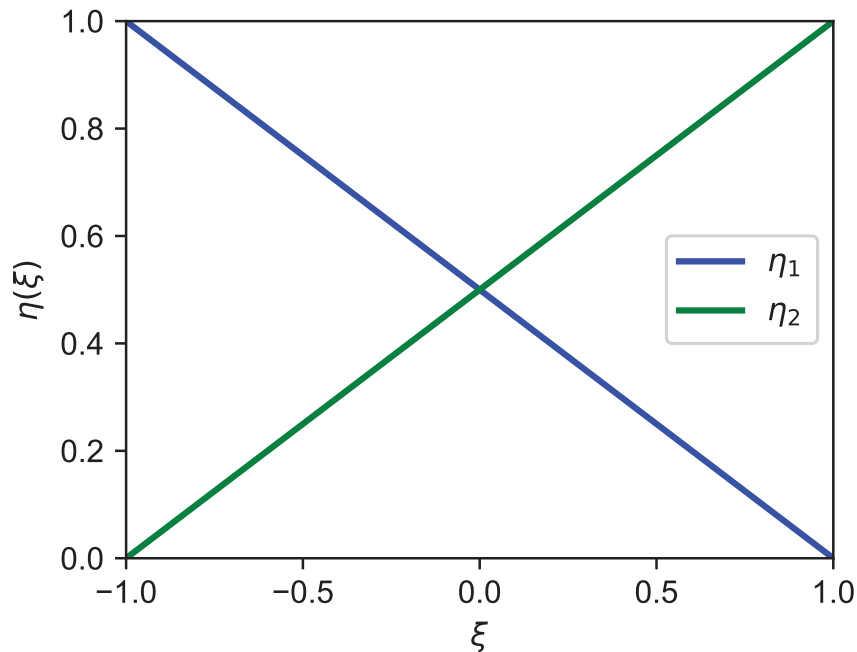
onde  $s_i, s_j$  são conjuntos de números distintos que representam os nós,  $L_i^k$  são os polinômios de Lagrange associados aos nós  $s_i$ .

A partição da unidade linear Lagrangeana no domínio  $[-1, 1]$ , é definida como (Figura 4):

$$\eta_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (3.16)$$

$$\eta_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (3.17)$$

FIGURA 4 – Partição da Unidade Lagrangeana Linear.



FONTE: o Autor (2018).

Outra partição da unidade que foi utilizada neste trabalho é uma partição cúbica que é formada por dois polinômios de Hermite de nível 1. Os polinômios de Hermite são obtidos através da interpolação unidimensional de Hermite, dada pela expressão:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{nnos} \left[ H_{0i}^r v_i + H_{1i}^r \left( \frac{dv}{dx} \right)_i + \cdots + H_{ri}^r \left( \frac{d^r v}{dx^r} \right)_i \right] \quad (3.18)$$

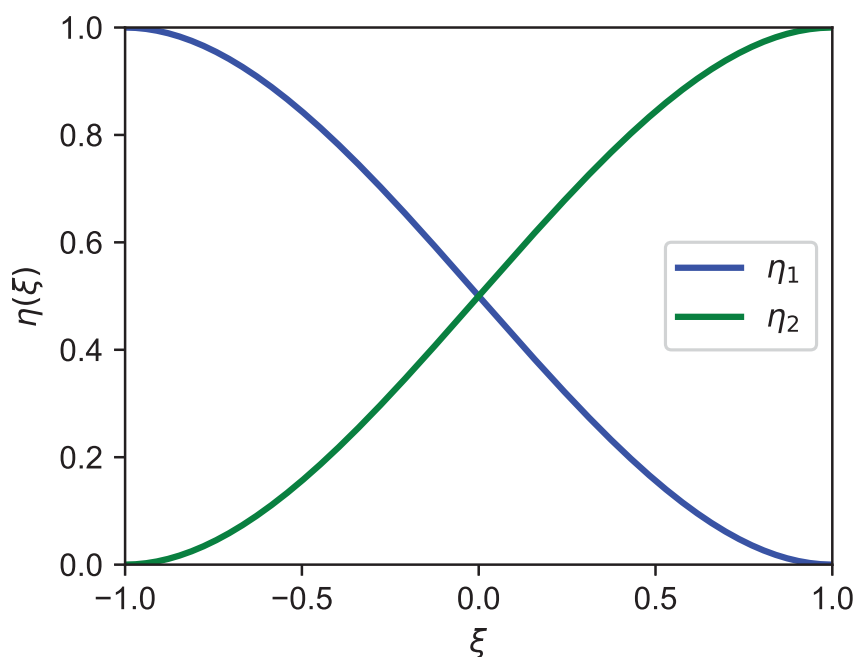
onde  $H_{ji}^r$  é um polinômio de Hermite de nível  $r$  relativo ao nó  $i$  e à derivada de ordem  $j$  de  $v$ .

No domínio  $[-1, 1]$  os polinômios de nível 1 que formam uma partição da unidade são descritos através das expressões e pela Figura 5 a seguir:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.19)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.20)$$

FIGURA 5 – Partição da Unidade Cúbica.



FONTE: o Autor (2018).

## 3.2 FUNÇÕES DE FORMA

Nesta seção são mostradas as funções de forma clássicas do MEF para os elementos de arcos, e algumas propostas de funções de forma enriquecidas para o MEFG.

### 3.2.1 Funções de Forma Classe $C^0$

O elemento classe  $C^0$  é definido a partir de interpolação linear, e é comumente utilizado para elementos de barra de MEF. As funções de forma lineares clássicas do MEF que formarão as funções de forma clássicas do MEF da Equação (3.13) são definidas no domínio  $[-1, 1]$  como:

$$F_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (3.21)$$

$$F_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (3.22)$$

onde  $\xi = \frac{2s}{L} - 1$ ,  $s$  é sistema de coordenadas curvilíneas,  $L$  é o comprimento do elemento.

A seguir são propostos, com base em outros trabalhos, dois conjuntos de funções de forma para o MEFG, além de uma alternativa para um MEFH também proposto para servir como termo de comparação e validação do MEFG. Nas funções de forma enriquecidas apresentadas a seguir podem ser utilizadas tanto a partição da unidade linear quanto a cúbica. A partição da unidade mais adequada será verificada nas simulações numéricas apresentadas no próximo capítulo.

### 3.2.1.1 Funções de enriquecimento $C^0$ baseadas em Leung e Zhu (2004)

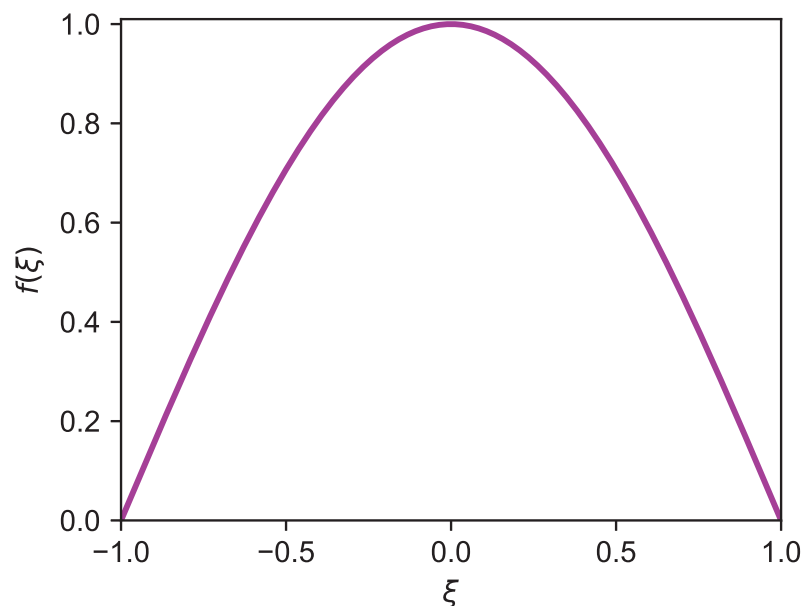
Como primeira alternativa de funções enriquecedoras  $C^0$  foram usadas as funções utilizadas em Leung e Zhu (2004) para o MEF  $p$ -Fourier.

As funções enriquecedoras definidas em Leung e Chan (1998) e utilizadas em Leung e Zhu (2004) para arcos e são definidas como:

$$\Phi_j = \text{sen} \left[ j\pi \left( \frac{\xi + 1}{2} \right) \right] \quad \text{com } j \geq 1 \quad (3.23)$$

A Figura 6 apresenta essa função enriquecedora para  $j = 1$ .

FIGURA 6 – Função de Enriquecimento  $\Phi_j$ , para  $j = 1$ .



FONTE: o Autor (2019).

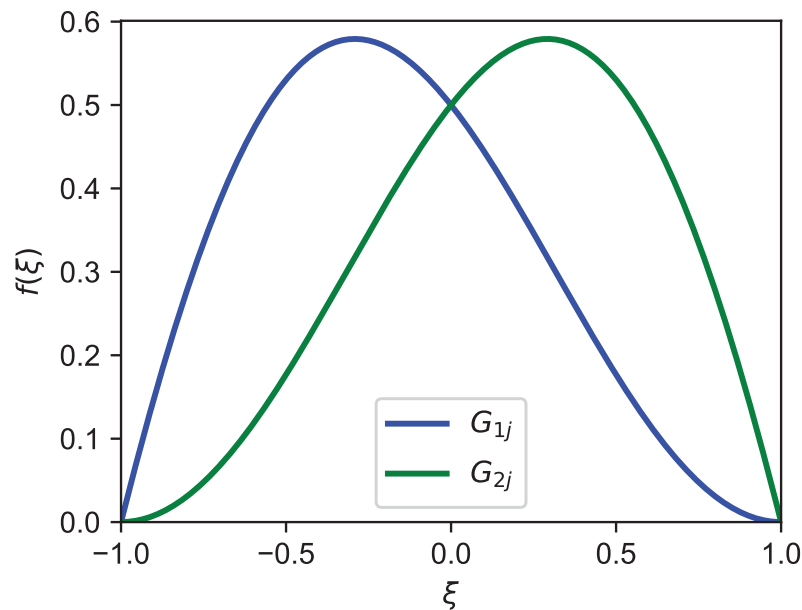
Para cada nível de enriquecimento ( $j$ ) é feita a multiplicação da função  $\Phi_j$  pela partição da unidade, assim para cada nível de enriquecimento tem-se duas funções de forma enriquecidas:

$$G_{1j} = \eta_1 \cdot \Phi_j \quad (3.24)$$

$$G_{2j} = \eta_2 \cdot \Phi_j \quad (3.25)$$

As funções  $G_{1j}$  e  $G_{2j}$  são utilizadas como funções de de forma enriquecidas definidas na Equação (3.14), e estão apresentadas graficamente quando utilizada a partição da unidade linear (Eq. (3.16) e (3.17)) na Figura 7. Cabe ressaltar que com esta maneira de construção das funções de forma enriquecidas, cada novo nível de enriquecimento gera dois novos graus de liberdade de campo.

FIGURA 7 – Funções  $G_{1j}$  e  $G_{2j}$  para elemento  $C^0$  com  $j = 1$  e com partição da unidade linear.



FONTE: O Autor (2019).

### 3.2.1.2 Funções de enriquecimento $C^0$ baseadas em Arndt (2009)

A segunda alternativa de funções enriquecedoras foram utilizadas por Arndt (2009) para enriquecimento de elementos de barras no MEEG, e foram levemente modificadas em Torii (2012) e Weinhardt (2016). As funções de enriquecimento no domínio  $[-1, 1]$  são definidas como:

$$\gamma_{1j} = \text{sen}[\beta_j (1 + \xi)] \quad (3.26)$$

$$\gamma_{2j} = \text{sen}[\beta_j (\xi - 1)] \quad (3.27)$$

$$\varphi_{1j} = \cos[\beta_j (1 + \xi)] - 1 \quad (3.28)$$

$$\varphi_{2j} = \cos[\beta_j (\xi - 1)] - 1 \quad (3.29)$$

com  $\beta_j = \left(2j - \frac{5}{4}\right) \pi$ .

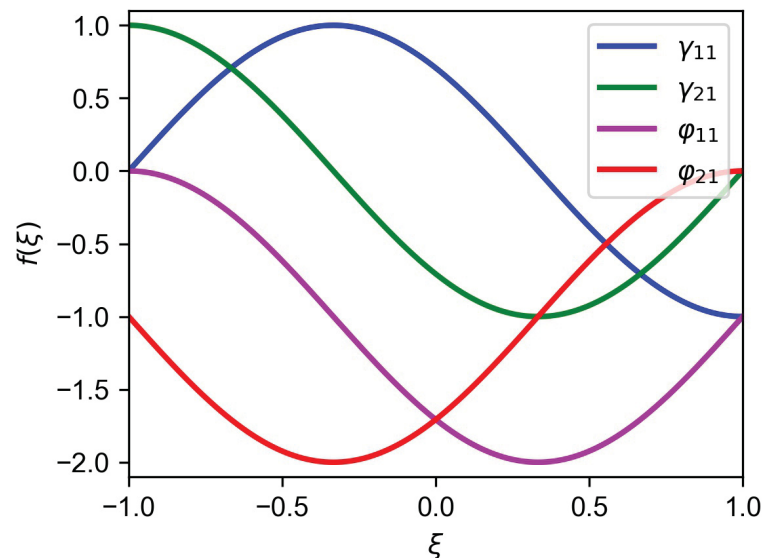
Neste caso a parcela  $u_{ENR}^e$  pode ser reescrita como:

$$u_{ENR} = \sum_{i=1}^2 \eta_i \left[ \sum_{j=1}^n (\gamma_{ij} a_{ij} + \varphi_{ij} b_{ij}) \right] \quad (3.30)$$

onde  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são os graus de liberdade de campo e  $\eta_i$  são as funções partição da unidade.

Na Figura 8 estão mostradas as funções de enriquecimento para  $j = 1$ .

FIGURA 8 – Funções de Enriquecimento propostas por Arndt (2009) para  $j = 1$ .



FONTE: o Autor (2019).

Neste conjunto de funções de enriquecimento são acrescentados 4 graus de liberdade de campo para cada nível de enriquecimento.

### 3.2.1.3 Funções de enriquecimento $C^0$ do MEFH

Apesar do MEFH não ser considerado um método enriquecido baseado no MEF e sim apenas um refinamento  $p$  hierárquico do MEF, a forma de entendê-lo é similar aos métodos enriquecidos assim, neste trabalho ele será abordado como um método enriquecido. Porém, destaca-se que esse enriquecimento não é considerado



MEFG por não haver a multiplicação pela partição da unidade para geração das funções de forma enriquecidas. A parcela  $u_{ENR}^e$  para funções de forma  $C^0$  do MEFH pode ser escrita como:

$$u_{ENR}^e = \sum_{i=1}^{nl} l_{i+2} b_i \quad (3.31)$$

onde  $b_i$  são os graus de liberdade de campo e  $l_{i+2}$  são os polinômios de Lobatto que são obtidos pela seguinte expressão no domínio  $[-1, 1]$  (SOLÍN; SEGETH; DOLEZEL, 2004):

$$l_k(x) = \frac{1}{\|L_{k-1}\|_2} \int_{-1}^x L_{k-1}(\xi) d\xi \quad (3.32)$$

com:

$$\|L_{k-1}\|_2 = \int_{-1}^1 L_{k-1}^2(x) dx = \sqrt{\frac{2}{2k-1}} \quad (3.33)$$

onde  $L_k$  são:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1; \\ L_1(x) &= x; \\ L_k(x) &= \frac{2k-1}{k} x L_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} L_{k-2} \quad \text{para } k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Funções de Forma Classe $C^1$

As funções de forma  $C^1$  da parcela do MEF são definidas pelos polinômios cúbicos de Hermite que, no domínio  $[-1, 1]$  são definidos através das seguintes equações:

$$F_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.35)$$

$$F_2 = \frac{L}{8} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (3.36)$$

$$F_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.37)$$

$$F_4 = \frac{L}{8} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (3.38)$$

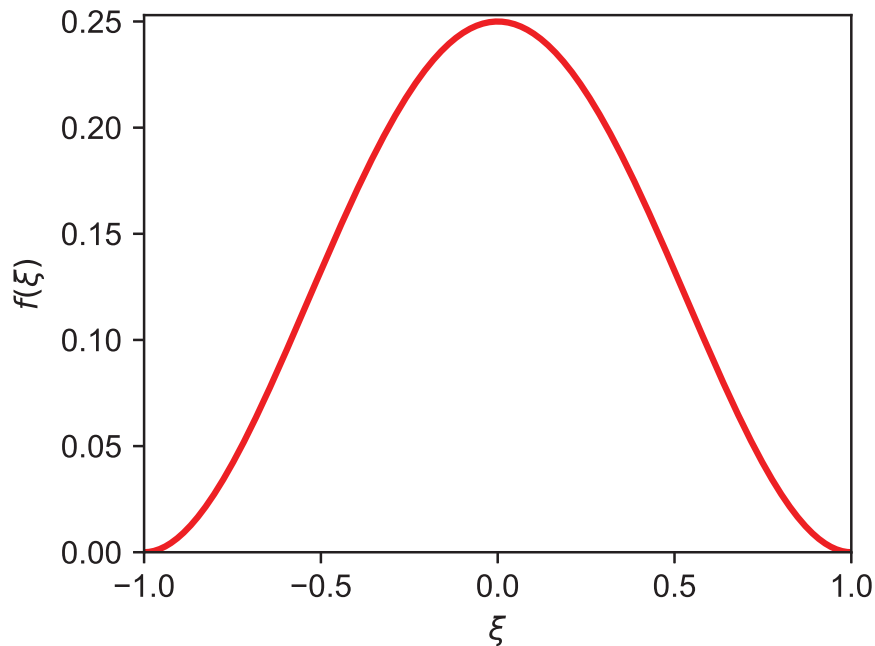
A seguir, são propostos, com base em outros trabalhos, dois conjuntos de funções de forma enriquecidas para o MEFG, além de uma alternativa para um MEFH também proposto para servir como termo de comparação e validação do MEFG. Nas funções de forma enriquecidas apresentadas a seguir podem ser utilizadas tanto a partição da unidade linear quanto a cúbica. A partição da unidade mais adequada será verificada nas simulações numéricas apresentadas no próximo capítulo.

### 3.2.2.1 Funções de enriquecimento $C^1$ baseadas em Leung e Zhu (2004)

O primeiro conjunto de funções enriquecedoras foram propostas por Leung e Chan (1998) e utilizadas em Leung e Zhu (2004) utilizando a técnica do MEF  $p$ -Fourier e são descritas pela expressão (Figura 9):

$$\Phi_j = \left( \frac{1 - \xi^2}{4} \right) \text{sen} \left[ j\pi \left( \frac{\xi + 1}{2} \right) \right] \text{ com } j \geq 1 \quad (3.39)$$

FIGURA 9 – Função de Enriquecimento  $\Phi_j$  baseadas em Leung e Zhu (2004), para  $j = 1$ .



FONTE: O Autor (2019).

Para cada nível de enriquecimento ( $j$ ) é feito a multiplicação da função  $\Phi_j$  pela partição da unidade, conforme as equações (3.24) e (3.25). As funções resultantes é que de fato serão utilizadas como funções de forma enriquecidas do MEFG. Na Figura 10 estão as funções  $G_{1j}$  e  $G_{2j}$  para o primeiro nível de enriquecimento utilizando partição da unidade linear.

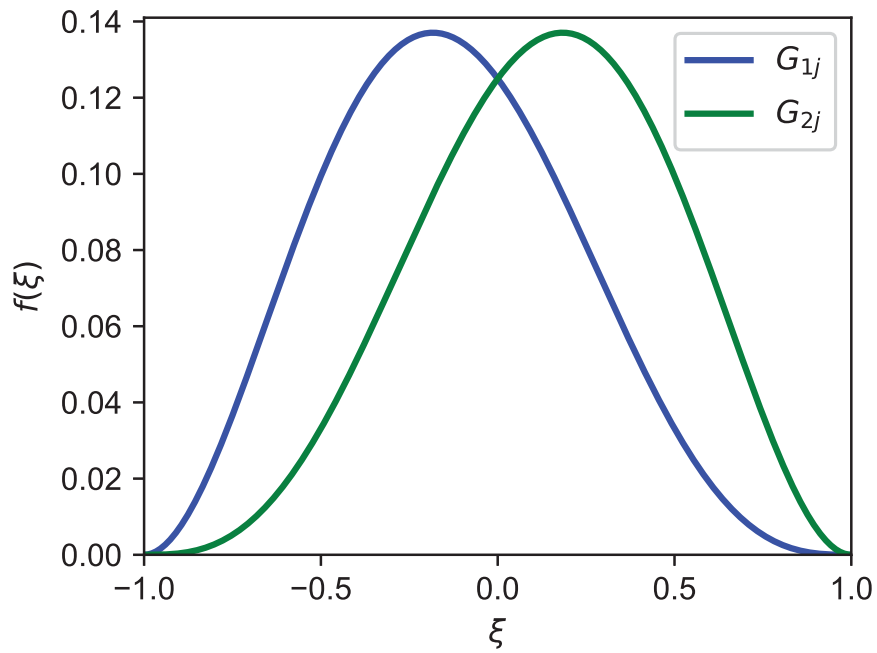
Neste conjunto de funções de enriquecimento são acrescentados 2 graus de liberdade de campo para cada nível de enriquecimento.

### 3.2.2.2 Funções de enriquecimento $C^1$ baseadas em Arndt (2009)

O segundo conjunto de funções de enriquecimento  $C^1$  utiliza funções que foram utilizadas para elementos de vigas em Arndt (2009) e Debella (2018) no MEFG. Essas funções são descritas pela seguinte expressão (Figura 11).

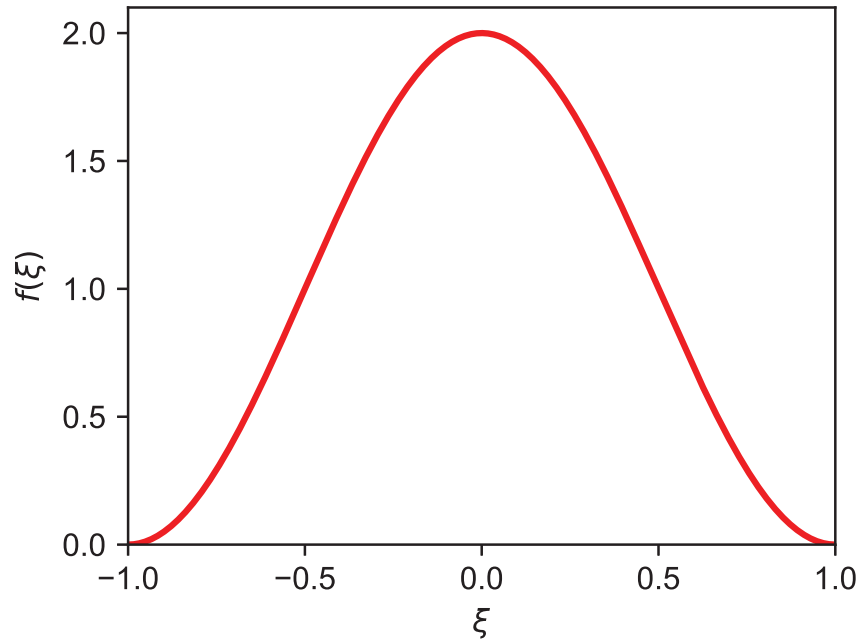
$$\Phi_j = \cos \left[ (j - 1) \left( \frac{\xi + 1}{2} \right) \pi \right] - \cos \left[ (j + 1) \left( \frac{\xi + 1}{2} \right) \pi \right] \text{ com } j \geq 1 \quad (3.40)$$

FIGURA 10 – Funções  $G_{1j}$  e  $G_{2j}$   $C^1$  com  $j = 1$  e partição da unidade linear.



FONTE: O Autor (2019).

FIGURA 11 – Função de Enriquecimento  $\Phi_j$  baseadas em Arndt (2009), para  $j = 1$ .



FONTE: O Autor (2019).

Essas funções de enriquecimento são multiplicadas por uma função partição da unidade e as funções de forma enriquecidas obtidas conforme as Equações (3.24) e (3.25) para cada nível de enriquecimento. Assim como no conjunto de funções de enriquecimento  $C^1$  anterior, cada nível de enriquecimento acrescenta dois graus de

liberdade extras no problema.

### 3.2.2.3 Funções de enriquecimento $C^1$ do MEFH

Para as funções de forma  $C^1$  do MEFH a parcela  $u_{ENR}^e$  pode ser escrita como:

$$u_{ENR}^e = \sum_{i=1}^{nl} f_{i+4} b_i \quad (3.41)$$

onde  $b_i$  são os graus de liberdade de campo.

As funções  $f_r$  são os polinômios de Bardell que são obtidos pela seguinte expressão (BARDELL, 1996):

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{r-2n-1} \quad (3.42)$$

onde  $r!! = r(r-2) \cdots (2 \text{ ou } 1)$ ,  $0!! = (-1)!! = 1$ ,  $r/2$  indica a sua própria parte inteira e  $r \geq 5$ .

Cabe ressaltar que o MEFH embora possa ser considerado como um método enriquecido não pode ser definido como MEFH por que a parcela enriquecida não é construída utilizando uma partição da unidade.

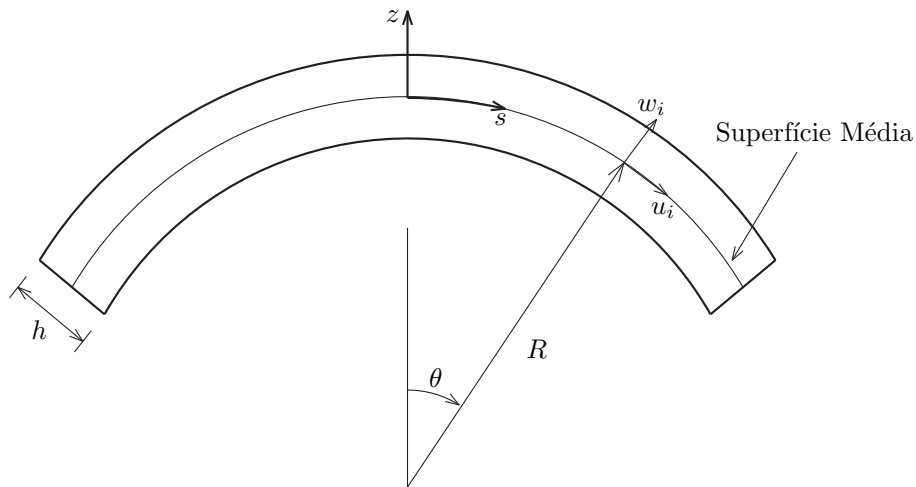
## 3.3 ELEMENTOS DE ARCO

Nesta seção são apresentadas as formulações e a obtenção das matrizes de massa e de rigidez para elementos de arcos finos e espessos, bem como as combinações de funções de forma para o MEFH desenvolvidas neste trabalho.

### 3.3.1 Elemento de Arco Fino

O elemento de arco fino é desenvolvido em Dawe (1974), Raveendranath, Singh e Pradhan (2000), Leung e Zhu (2004) e Leissa e Qatu (2011) e o campo de deslocamentos é descrito em função do deslocamento axial ( $u$ ) e deslocamento transversal ( $w$ ) no sistema de coordenadas curvilínea ( $s$ - $z$ ) conforme a Figura 12.

FIGURA 12 – Elemento de Arco Fino.



FONTE: Adaptado de Leissa e Qatu (2011)

Dawe (1974), Raveendranath, Singh e Pradhan (2000), Leung e Zhu (2004) e Leissa e Qatu (2011) descrevem que, através da teoria clássica de casca, a deformação axial ( $\varepsilon$ ), a rotação ( $\phi$ ) e a mudança de curvatura ( $\chi$ ) podem ser descritos em função dos deslocamentos e de suas derivadas, da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R}, \quad (3.43)$$

$$\phi = \frac{u}{R} - \frac{dw}{ds}, \quad (3.44)$$

e

$$\chi = \frac{1}{R} \frac{du}{ds} - \frac{d^2w}{ds^2}, \quad (3.45)$$

onde  $R$  é o raio de curvatura da viga,  $s$  ordenada longitudinal na direção da circunferência.

A deformação num ponto qualquer ( $\bar{\varepsilon}$ ) é descrita por:

$$\bar{\varepsilon}(s, z) = \varepsilon(s) + \frac{z}{R} \quad (3.46)$$

A força normal à seção transversal ( $N$ ) e o momento fletor ( $M$ ) resultantes são as integrais da deformação axial ao longo da espessura do arco ( $h$ ):

$$[N, M] = b \int_{-h/2}^{h/2} [1, z] \sigma dz \quad (3.47)$$

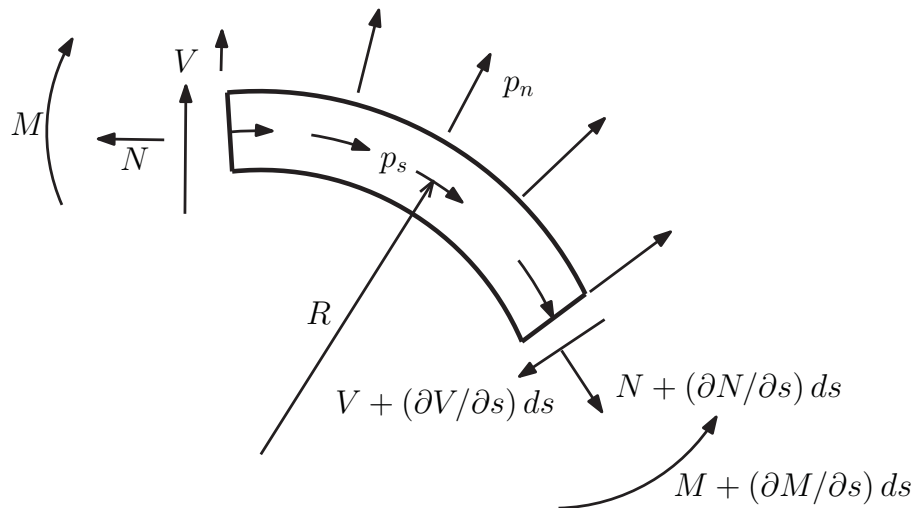
onde:  $N = EA\varepsilon$ ;  $M = EI\kappa$ ;  $E$  é o módulo de elasticidade;  $A$  é a área da seção transversal e  $b$  é a largura da seção transversal.

As equações de movimento podem ser obtidas considerando um elemento diferencial do arco com espessura  $h$  e comprimento da superfície média  $ds$ , conforme

a Figura 13, e assumindo as forças externas e internas na direção de  $s$  e  $z$ , e os momentos fletores. As equações de equilíbrio dinâmico resultantes são (LEISSA; QATU, 2011):

$$\begin{aligned}\sum F_s &= \frac{\partial N}{\partial s} + \frac{V}{R} + p_s = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \sum F_n &= -\frac{N}{R} + \frac{\partial V}{\partial s} + p_n = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \sum M &= \frac{\partial M}{\partial s} - V = 0,\end{aligned}\tag{3.48}$$

FIGURA 13 – Um elemento diferencial de arco fino.



FONTE: Adaptado de Leissa e Qatu (2011)

onde  $V$  é a força cisalhante resultante,  $\rho$  é a massa específica e  $p_s$  e  $p_n$  são as componentes tangencial e normal à superfície média do arco das forças externas (ou forças de corpo) respectivamente. Isolando  $V$  na terceira equação em (3.48) e substituindo a mesma na segunda equação, as equações se tornam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial s} + p_s &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ -\frac{N}{R} + \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} + p_n &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{3.49}$$

Multiplicando a segunda equação de (3.49) por -1 e substituindo (3.43), (3.45) e (3.47) em (3.49), as equações podem ser expressas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_s \\ p_n \end{bmatrix},\tag{3.50}$$

onde

$$L_{11} = EA \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{EI}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad L_{22} = EI \frac{\partial^4}{\partial s^4} + \frac{EA}{R^2} \quad \text{e} \quad L_{12} = L_{21} = \frac{EA}{R} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{D}{R} \frac{\partial^3}{\partial s^3}.$$

As expressões de energia de deformação ( $U$ ), energia cinética ( $T$ ) e o trabalho realizado pelas forças externas ( $W$ ) são então escritas da seguinte maneira (RAVEENDRANATH; SINGH; PRADHAN, 1999; LEUNG; ZHU, 2004; LEISSA; QATU, 2011):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EA \varepsilon^2 + EI \chi^2) ds, \quad (3.51)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) ds, \quad (3.52)$$

e

$$W = \int_0^L (p_\alpha u + p_n w) ds. \quad (3.53)$$

O campo de deslocamentos pode então ser escrito como:

$$u = \sum_{i=1}^n P_i \cdot u_i \quad (3.54)$$

e

$$w = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot w_i \quad (3.55)$$

onde  $P_i$  é a  $i$ -ésima função de forma relacionada a  $u$ ,  $Q_i$  é a  $i$ -ésima função de forma relacionada a  $w$ ,  $u_i$  é o  $i$ -ésimo grau de liberdade relacionado aos deslocamentos axiais,  $w_i$  é o  $i$ -ésimo grau de liberdade relacionado aos deslocamentos transversais e  $n$  é o número de funções de forma.

Seja  $\{q\}$  um vetor contendo os graus de liberdade relacionados a  $u$  e  $w$  na forma

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

e sendo  $\{N_P\}$  um vetor formado pelas funções de forma  $P_i$  e  $\{N_Q\}$  um vetor formado pelas funções de forma  $Q_i$

$$\{N_P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{N_Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

e escrevendo ainda

$$\{\overline{N}_P\} = \begin{Bmatrix} N_P \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \{\overline{N}_Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_Q \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

de tal modo que  $\{\overline{N}_P\}$  e  $\{\overline{N}_Q\}$  tenham a mesma dimensão e que ela seja igual a dimensão de  $\{q\}$ , pode-se então descrever os campos de deslocamentos como:

$$u = \{\overline{N}_P\}^T \{q\} \text{ e } w = \{\overline{N}_Q\}^T \{q\} \quad (3.59)$$

O Lagrangiano em termos dos graus de liberdade para vibração livre, é escrito como:

$$L = T - U + W = \frac{1}{2} \left( \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} - \{q\}^T [K] \{q\} \right) + \{q\}^T \{f\} \quad (3.60)$$

Aplicando as propriedades do cálculo variacional na Equação (3.60), a equação do movimento para vibração não amortecida de elementos de arcos finos se torna:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{f\} \quad (3.61)$$

onde, as matrizes de rigidez e massa elementares são escritos da seguinte forma:

$$[K]^e = \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{d\overline{N}_P}{ds} + \frac{\overline{N}_Q}{R} \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{d\overline{N}_P}{ds} - \frac{d^2\overline{N}_Q}{ds^2} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\overline{N}_P}{ds} + \frac{\overline{N}_Q}{R} \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{d\overline{N}_P}{ds} - \frac{d^2\overline{N}_Q}{ds^2} \end{Bmatrix} ds \quad (3.62)$$

$$[M]^e = \int_0^L \rho A \begin{Bmatrix} \overline{N}_P \\ \overline{N}_Q \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \overline{N}_P \\ \overline{N}_Q \end{Bmatrix} ds \quad (3.63)$$

$$\{f\}^e = \int_0^L \begin{Bmatrix} p_\alpha \\ p_n \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \overline{N}_P \\ \overline{N}_Q \end{Bmatrix} ds \quad (3.64)$$

A seguir são mostrados os elementos finitos desenvolvidos para o elemento de arco fino para o MEFG.

### 3.3.1.1 Elementos Finitos de Arco Fino

Os elementos de arco fino possuem dois deslocamentos que são interpolados separadamente,  $u$  e  $w$ . O deslocamento axial ( $u$ ) possui, em sua forma fraca, apenas a exigência de derivada de primeira ordem não nula, por isso podem ser usadas



tanto as funções de forma classe  $C^0$  quanto as funções de forma classe  $C^1$  para a sua interpolação. O deslocamento transversal ( $w$ ), por sua vez, possui exigência de derivada de segunda ordem não nula, por isso a sua interpolação não pode ser feita pelas funções de forma classe  $C^0$  e sim, pelo menos, pelas funções classe  $C^1$ .

Os elementos finitos desenvolvidos possuem a nomenclatura "LC" quando são usadas as funções classe  $C^0$  para interpolação de  $u$  e funções classe  $C^1$  para interpolação de  $w$ , sendo que o "L" significa interpolação por funções classe  $C^0$  e o "C" significa interpolação por funções classe  $C^1$ . Por sua vez, os elementos com a nomenclatura "CC" usam as funções de forma classe  $C^1$  para a interpolação de ambos os deslocamentos.

Na tabela a seguir estão os elementos desenvolvidos com suas respectivas funções de enriquecimento.

TABELA 1 – Elementos Finitos de Arcos Finos Desenvolvidos.

Nomenclatura	Deslocamentos	Parcela de MEF	Funções de Enriquecimento
MEFG - LC 1	$u$	Linear ( $C^0$ )	Leung e Zhu (2004)
	$w$	Cúbico ( $C^1$ )	Leung e Zhu (2004)
MEFG - CC 1	$u$	Cúbico ( $C^1$ )	Leung e Zhu (2004)
	$w$	Cúbico ( $C^1$ )	Leung e Zhu (2004)
MEFG - LC 2	$u$	Linear ( $C^0$ )	Arndt (2009)
	$w$	Cúbico ( $C^1$ )	Arndt (2009)
MEFG - CC 2	$u$	Cúbico ( $C^1$ )	Arndt (2009)
	$w$	Cúbico ( $C^1$ )	Arndt (2009)
MEFH - LC	$u$	Linear ( $C^0$ )	Polinômios de Lobatto
	$w$	Cúbico ( $C^1$ )	Polinômios de Bardell
MEFH - CC	$u$	Cúbico ( $C^1$ )	Polinômios de Bardell
	$w$	Cúbico ( $C^1$ )	Polinômios de Bardell

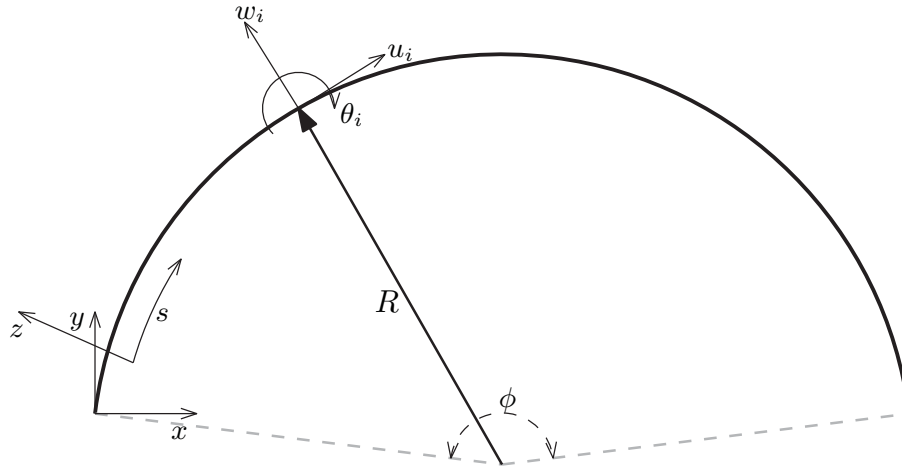
FONTE: O Autor (2019).

### 3.3.2 Elemento de Arco Espesso

O elemento de arco espesso leva em conta o efeito da deformação transversal ao cisalhamento, cujo desenvolvimento encontra-se apresentado em Raveendranath, Singh e Rao (2001) e Leung e Zhu (2004). A Figura 14 apresenta o esquema do elemento e os seus deslocamentos.

Considerando as deformações de extensão, de flexão e de cisalhamento no plano  $x-y$ , os campos de deslocamentos axial ( $\bar{u}$ ) e transversal ( $\bar{w}$ ) do elemento de arco

FIGURA 14 – Geometria e sistema de coordenadas para elementos de arco espesso.



FONTE: Adaptado de Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008).

podem ser escritos como:

$$\bar{u}(x, y, t) = u(y, t) + x\theta(y, t) \quad (3.65)$$

$$\bar{w}(x, y, t) = w(y, t) \quad (3.66)$$

onde  $u$  e  $w$  são os deslocamentos tangenciais e normais, respectivamente, no eixo médio do arco,  $\theta$  é a rotação da seção transversal e  $t$  é o tempo.

A deformação axial ( $\varepsilon$ ), a deformação de flexão ( $\kappa$ ) e a deformação de cisalhamento ( $\gamma$ ) são expressas no sistema de coordenadas curvilíneas ( $s$ - $z$ ) em termos dos deslocamentos e suas derivadas da seguinte forma (RAVEENDRANATH; SINGH; RAO, 2001; LEUNG; ZHU, 2004).

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} \quad (3.67)$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.68)$$

$$\gamma = \theta + \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} \quad (3.69)$$

onde  $R$  é o raio de curvatura da viga.

As expressões de energia de deformação ( $U$ ), energia cinética ( $T$ ) e trabalho das forças externas ( $W$ ) podem ser expressas como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (E A \varepsilon^2 + E I \kappa^2 + k G A \gamma^2) ds, \quad (3.70)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A \dot{u}^2 + \rho A \dot{w}^2 + \rho I \dot{\theta}^2) ds, \quad (3.71)$$

e

$$W = \int_0^L (p_\alpha u + p_n w + m_n \theta) ds, \quad (3.72)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade transversal,  $A$  é a área da seção transversal,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal,  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $k$  é o fator de correção ao cisalhamento,  $\rho$  é a massa específica,  $p_\alpha$  é o carregamento tangencial distribuído,  $p_n$  é o carregamento axial distribuído e  $m_n$  é o momento distribuído.

O campo de deslocamentos pode ser descrito como:

$$u = \sum_{i=1}^n P_i \cdot u_i, \quad (3.73)$$

$$w = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot w_i, \quad (3.74)$$

e

$$\theta = \sum_{i=1}^n J_i \cdot \theta_i \quad (3.75)$$

onde  $P_i$  é a  $i$ -ésima função de forma relacionada a  $u$ ,  $Q_i$  é a  $i$ -ésima função de forma relacionada a  $w$ ,  $J_i$  é a  $i$ -ésima função de forma relacionada a  $\theta$ ,  $u_i$  é o  $i$ -ésimo grau de liberdade relacionado aos deslocamentos axiais,  $w_i$  é o  $i$ -ésimo grau de liberdade relacionado aos deslocamentos transversais,  $\theta_i$  é o  $i$ -ésimo grau de liberdade relacionado à rotação da seção transversal e  $n$  é o número de funções de forma.

Seja  $\{q\}$  um vetor contendo os graus de liberdade relacionados a  $u$ ,  $w$  e  $\theta$  na forma

$$\{q\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

e sejam  $\{N_P\}$  um vetor formado pelas funções de forma  $P_i$ ,  $\{N_Q\}$  um vetor formado pelas funções de forma  $Q_i$  e  $\{N_J\}$  um vetor formado pelas funções de forma  $J_i$

$$\{N_P\} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \quad \{N_Q\} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \{N_J\} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

e escrevendo

$$\{\overline{N_P}\} = \begin{Bmatrix} \{N_P\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\overline{N_Q}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \{N_Q\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\overline{N_J}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \{N_J\} \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

de tal modo que  $\{\overline{N_P}\}$ ,  $\{\overline{N_Q}\}$  e  $\{\overline{N_J}\}$  tenham a mesma dimensão e que ela seja igual a dimensão de  $\{q\}$ . Pode-se descrever os campos de deslocamentos como:

$$u = \{\overline{N_P}\}^T \{q\}, \quad w = \{\overline{N_Q}\}^T \{q\} \quad \text{e} \quad \theta = \{\overline{N_J}\}^T \{q\} \quad (3.79)$$

O Lagrangiano em termos dos graus de liberdade para vibração livre, então é escrito como

$$L = T - U + W = \frac{1}{2} \left( \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} - \{q\}^T [K] \{q\} \right) + \{q\}^T \{f\}. \quad (3.80)$$

Aplicando as propriedades do cálculo variacional na Equação (3.80), a equação do movimento para vibração não amortecida de elementos de arco espesso se torna

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{f\}, \quad (3.81)$$

onde, as matrizes de rigidez, massa e vetor de forças elementares são escritos da seguinte forma:

$$[K]^e = \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{d\overline{N_P}}{ds} + \frac{\overline{N_Q}}{R} \\ \frac{d\overline{N_J}}{ds} \\ \overline{N_J} + \frac{d\overline{N_Q}}{ds} - \frac{\overline{N_P}}{R} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & kGA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\overline{N_P}}{ds} + \frac{\overline{N_Q}}{R} \\ \frac{d\overline{N_J}}{ds} \\ \overline{N_J} + \frac{d\overline{N_Q}}{ds} - \frac{\overline{N_P}}{R} \end{Bmatrix} ds \quad (3.82)$$

$$[M]^e = \int_0^L \begin{Bmatrix} \overline{N_P} \\ \overline{N_Q} \\ \overline{N_J} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{N_P} \\ \overline{N_Q} \\ \overline{N_J} \end{Bmatrix} ds \quad (3.83)$$

$$\{f\}^e = \int_0^L \begin{Bmatrix} p_\alpha \\ p_n \\ m_n \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \overline{N_P} \\ \overline{N_Q} \\ \overline{N_J} \end{Bmatrix} ds \quad (3.84)$$

A seguir são mostradas as funções de forma usadas na interpolação dos deslocamentos descritos.

### 3.3.2.1 Elementos Finitos de Arcos Espessos

No elemento de arco espesso os três deslocamentos ( $u$ ,  $w$  e  $\theta$ ) possuem apenas exigência de derivada de primeira ordem não nula, por isso os três são interpolados através das funções de forma classe  $C^0$ . São então desenvolvidos dois elementos de MEF, o primeiro elemento finito o MEF E1 usa as funções baseadas em Leung e Zhu (2004) como funções de enriquecimento, enquanto o segundo elemento finito o MEF E2 usa as funções baseadas em Arndt (2009) como funções de enriquecimento conforme a tabela a seguir.

TABELA 2 – Elementos Finitos de Arco Espesso Desenvolvidos.

<b>Nomenclatura</b>	<b>Deslocamentos</b>	<b>Parcela de MEF</b>	<b>Funções de Enriquecimento</b>
MEFG E1	$u$	Linear ( $C^0$ )	Leung e Zhu (2004)
	$w$	Linear ( $C^0$ )	Leung e Zhu (2004)
	$\theta$	Linear ( $C^0$ )	Leung e Zhu (2004)
MEFG E2	$u$	Linear ( $C^0$ )	Arndt (2009)
	$w$	Linear ( $C^0$ )	Arndt (2009)
	$\theta$	Linear ( $C^0$ )	Arndt (2009)

FONTE: O Autor (2019).

## 4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo será dividido em duas seções sendo uma referente à simulações numéricas usando os elementos finitos de arcos finos desenvolvido e o segundo referente aos elementos de arco espesso também desenvolvidos, a fim de verificar a precisão e eficiência dos elementos propostos.

Todas as rotinas de cálculo foram implementadas em PYTHON® (2018) utilizando as bibliotecas NUMPY e SCIPY, para operações com matrizes e para operações científicas respectivamente.

### 4.1 ANÁLISES DE VIBRAÇÃO LIVRE DE ARCOS FINOS

Nesta seção são realizadas análises de vibração livre utilizando elementos de arco fino. Os exemplo foram retirados de outros trabalhos disponíveis na literatura ou exemplos criados para o presente trabalho.

#### 4.1.1 Modelo do Anel Circular

Uma das poucas soluções analíticas disponíveis na literatura e que podem ser usadas como termo de comparação no presente trabalho é a solução analítica para anéis desenvolvida por Timoshenko (1955). Por ser uma solução considerada "exata" a mesma será usada para um teste da convergência dos elementos propostos.

O dados usados para o anel são os mesmos usados em Raveendranath, Singh e Pradhan (2000) e Leung e Zhu (2004) a fim de usar destes trabalhos como termo de comparação também. Os dados do anel são mostrados na Tabela 3.

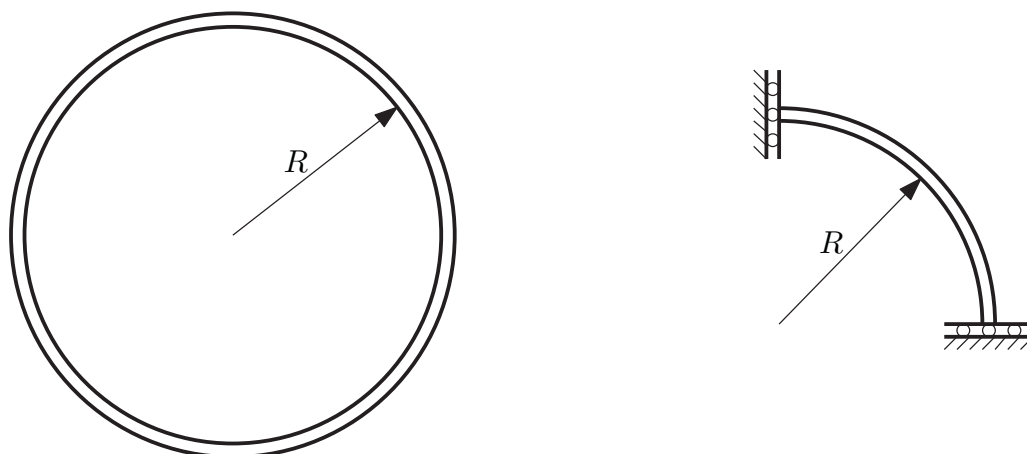
TABELA 3 – Dados do anel circular.

Dados	Valor
<b>Seção Transversal</b>	0,9525 mm x 0,9525 mm
<b>Raio de Curvatura</b>	0,3048 m
<b>Massa Específica</b>	1827,44 kg/m <sup>3</sup>
<b>Módulo de Elasticidade</b>	$1,31 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>

FONTE: o Autor (2019).

Dada a simetria do anel, é modelado um quarto do mesmo, com condições de contorno de simetria conforme a Figura 15. A modelagem de um quarto do anel faz com que apenas as frequências pares do anel sejam obtidas numericamente.

FIGURA 15 – Anel circular e modelo de um quarto do anel.



FONTE: o Autor (2019).

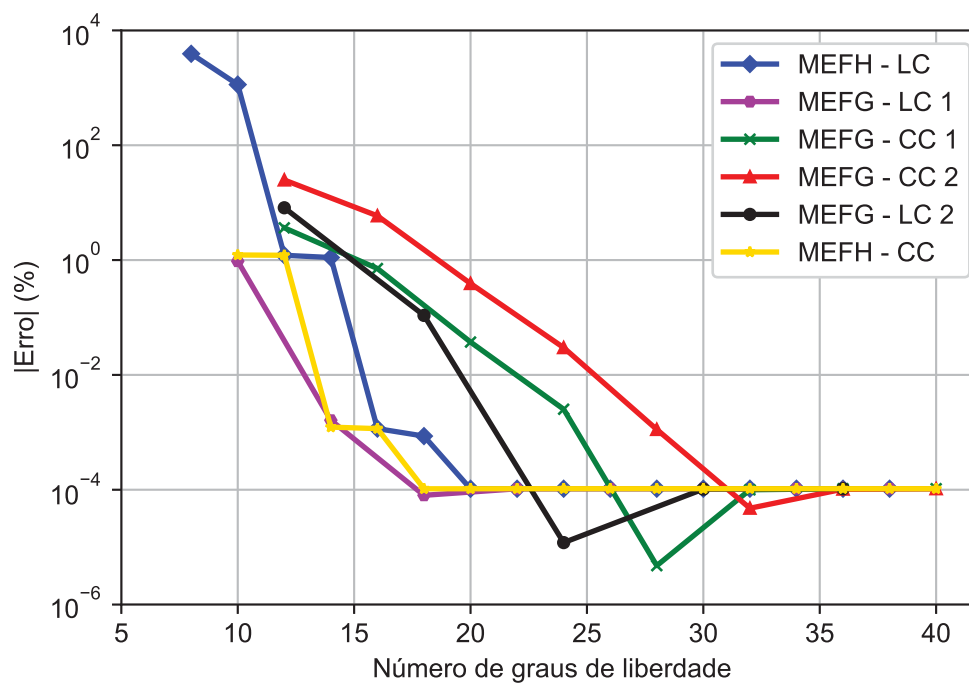
Inicialmente são analisados os erros relativos quatro primeiras frequências pares em relação à solução de Timoshenko (1955) a medida que se aumenta o número de graus de liberdade através de um refinamento  $p$  do MEFH e do MEFG. O erro foi calculado segundo a expressão

$$\text{erro} = \left| \frac{\omega_{apro} - \omega_{anali}}{\omega_{anali}} \right| 100\%, \quad (4.1)$$

onde  $\omega_{anali}$  é a frequência analítica e  $\omega_{apro}$  é frequência obtida numericamente.

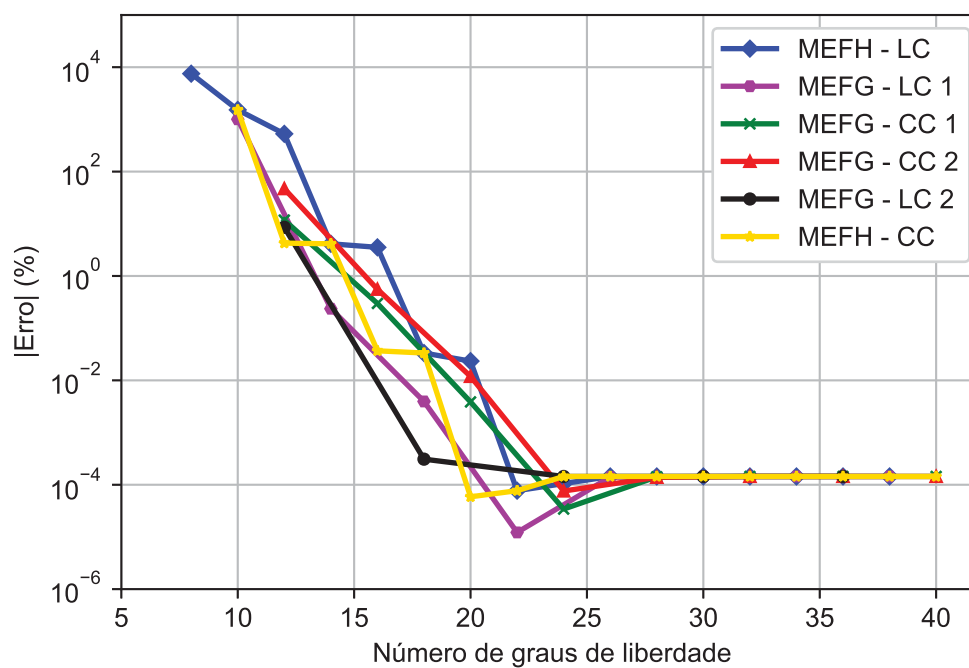
Os resultados são encontrados nas Figuras 16, 17, 18 e 19, nesta primeira análise é usada uma partição da unidade linear nos elementos de MEFG.

FIGURA 16 – Convergência da 2ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear.



FONTE: o Autor (2019).

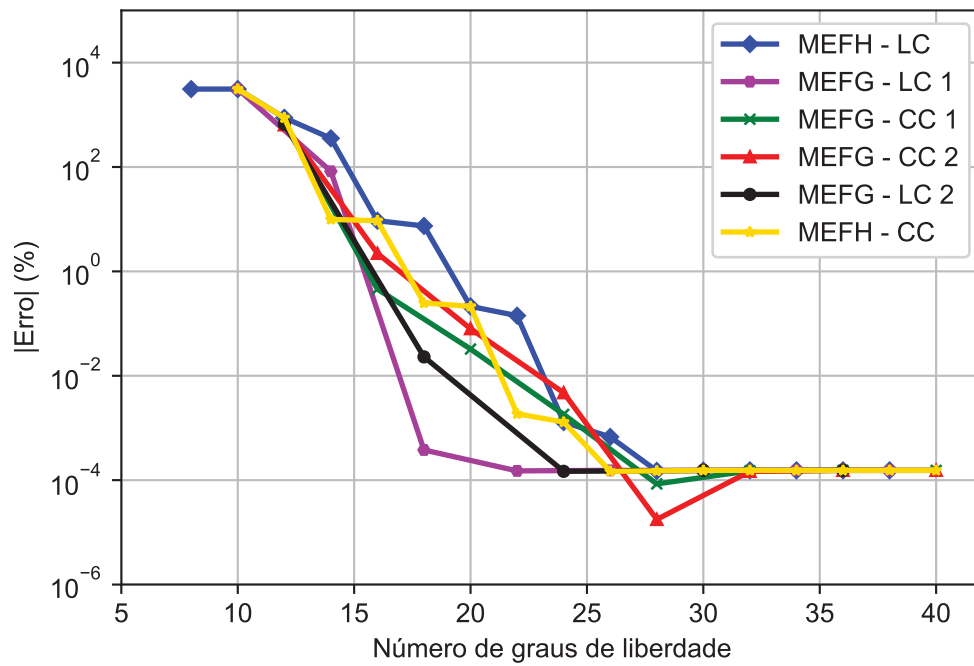
FIGURA 17 – Convergência da 4ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear.



FONTE: o Autor (2019).

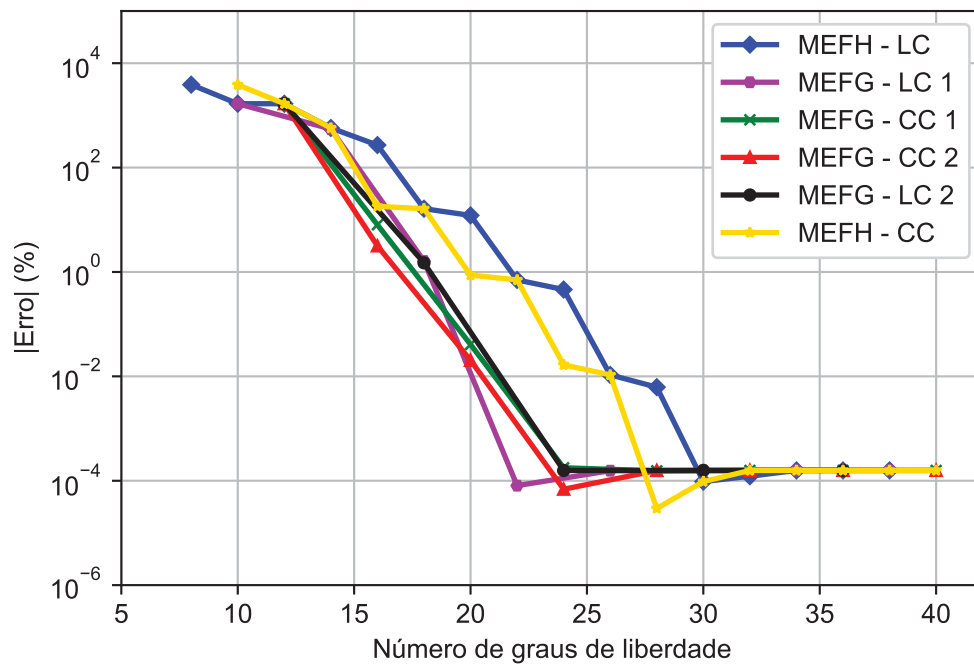


FIGURA 18 – Convergência da 6ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear.



FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 19 – Convergência da 8ª frequência natural do anel, com partição da unidade linear.



FONTE: o Autor (2019).

Com relação aos resultados dos testes de convergência apresentados nas Figuras 16, 17, 18 e 19, o primeiro ponto a se ressaltar foi que todos os elementos finitos propostos convergiram para o mesmo valor, inclusive os elementos do MEFH o que já é um bom indicativo para os elementos propostos.

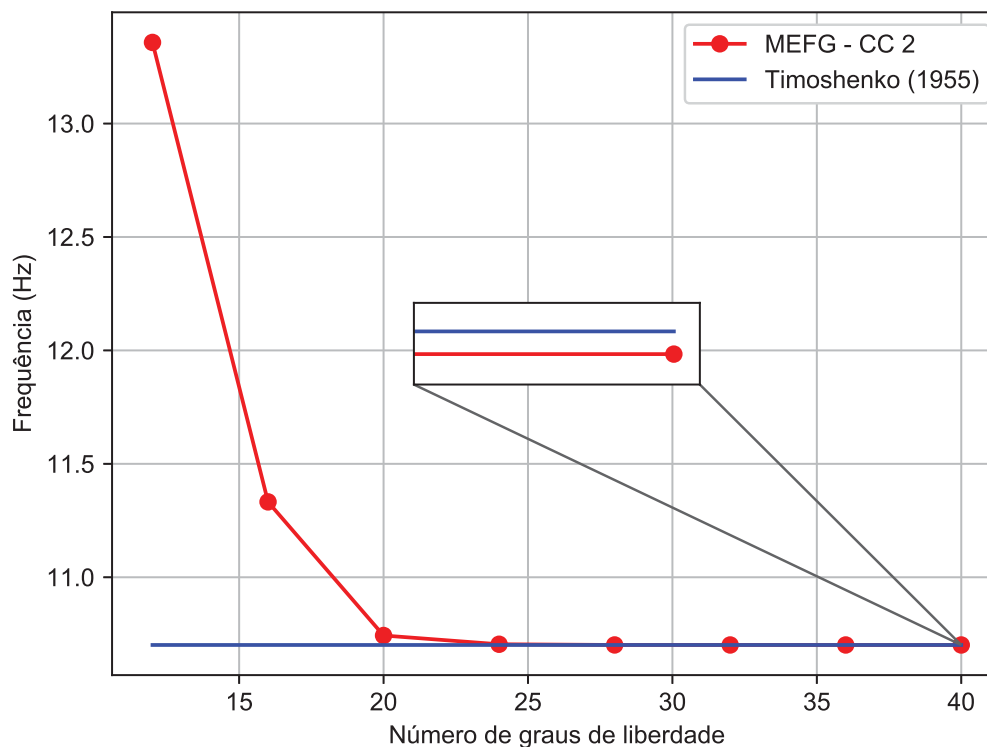
O MEFH apresentou uma convergência muito alta na segunda frequência do anel sendo melhor que alguns dos elementos de MEFG, porém, para as frequências mais altas, o MEFH passa a ter convergência cada vez pior. Para a oitava frequência do anel os elementos de MEFH possuem a pior taxa de convergência.

Para a segunda frequência do anel observa-se que as melhores taxas de convergência em ordem decrescente foram obtidas pelos elementos: foram o MEFG - LC 1, MEFG - LC 2, MEFG - CC 1 e MEFG - CC 2, porém nas outras frequências essa ordem não se manteve.

Na quarta frequência do anel o MEFG - LC 1 e o MEFG - LC 2 possuem taxa de convergência muito próximas e ligeiramente melhores que os outros dois elementos de MEFG. Na sexta frequência o MEFG - LC 1 tem a melhor taxa de convergência seguido pelo MEFG - LC 2, MEFG - CC 1 e MEFG - CC 2. Por fim, para a oitava frequência do anel os 4 elementos de MEFG apresentam taxas muito parecidas, mas observa-se que o MEFG - LC 1 e o MEFG - CC 2 tem taxas maiores e que o MEFG - LC 2 e MEFG - CC 1 possuem taxas muito semelhantes.

Em todas as análises os elementos propostos convergiram para frequências um pouco menores, erros na faixa de  $10^{-6}\%$ , que a solução analítica apresentada por Timoshenko (1955). Uma provável causa seria erro numérico das integrais ou problema com a precisão do Python® ou ainda algum truncamento na solução analítica de Timoshenko (1955). Para exemplificar é apresentada na Figura 20 os valores da primeira frequência obtida com o MEFG - CC 2 e da resposta analítica, o mesmo ocorreu para todas as análises.

FIGURA 20 – Comparação da convergência da 2ª frequência natural do anel do MEFG - CC 2 com Timoshenko (1955).



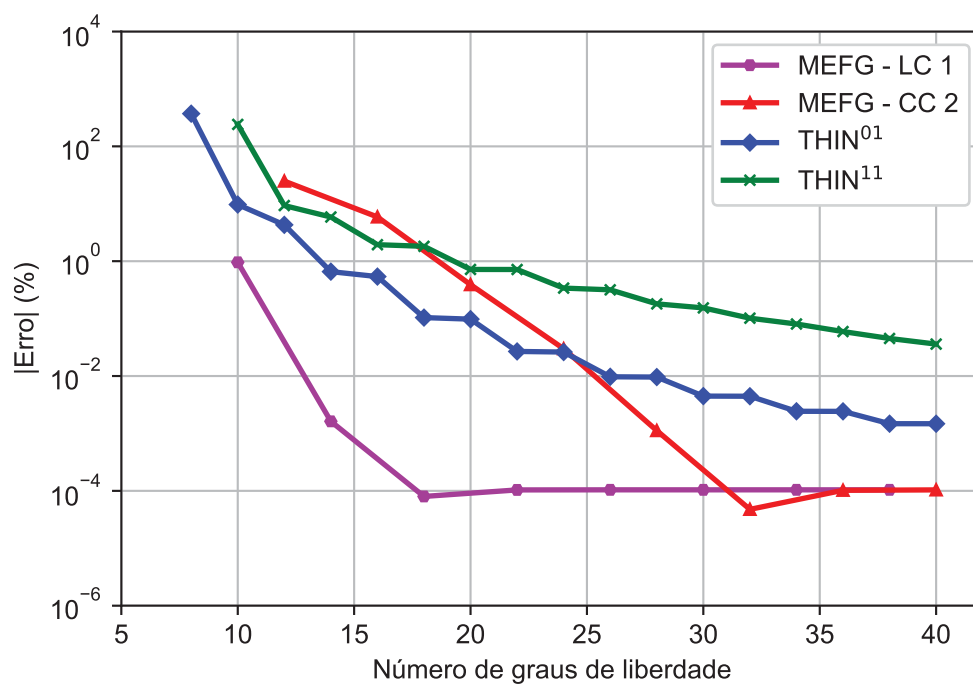
FONTE: o Autor (2019).

O MEFG - LC 1 e o MEFG - CC 2 apresentaram as melhores taxas de convergência e por isso será feita a comparação da convergência das primeiras frequências com os elementos  $THIN^{01}$  e  $THIN^{11}$  propostos em Leung e Zhu (2004).

O elemento  $THIN^{01}$  faz interpolação linear para interpolar  $u$  e cúbica para interpolação de  $w$  usando as funções apresentadas nas Equações (3.23) e (3.39) sem a multiplicação pela partição da unidade como enriquecimento. O elemento  $THIN^{11}$  faz interpolação cúbica para interpolação de  $u$  e  $w$  as funções apresentadas nas Equação (3.39) sem a multiplicação pela partição da unidade como enriquecimento.

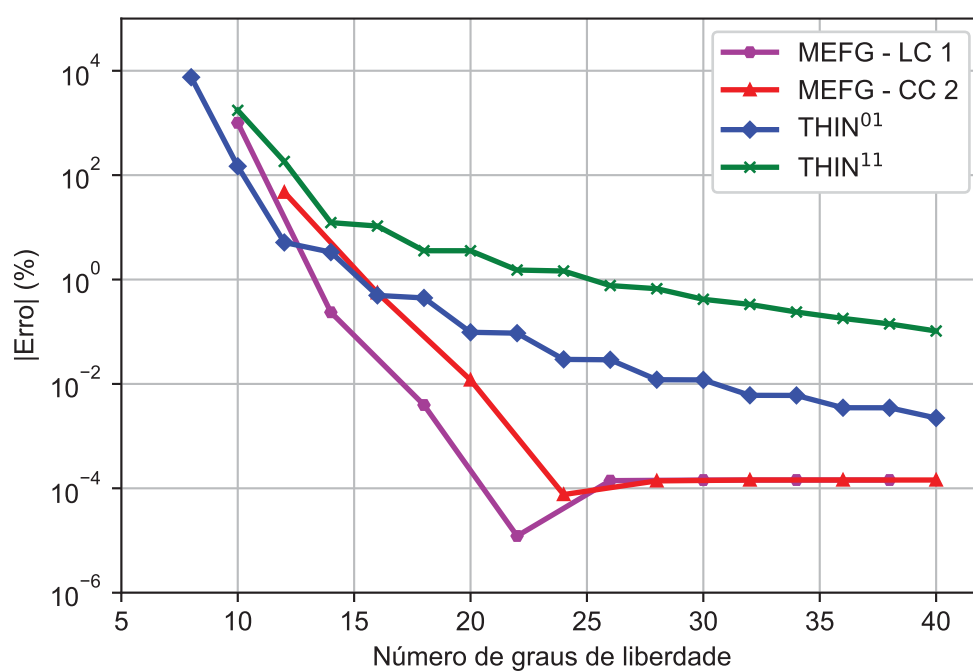
Os resultados de convergência são apresentados nas Figuras 21, 22, 23 e 24.

FIGURA 21 – Comparação da convergência da 2ª frequência natural do anel MEFG x MEF  $p$ -Fourier.



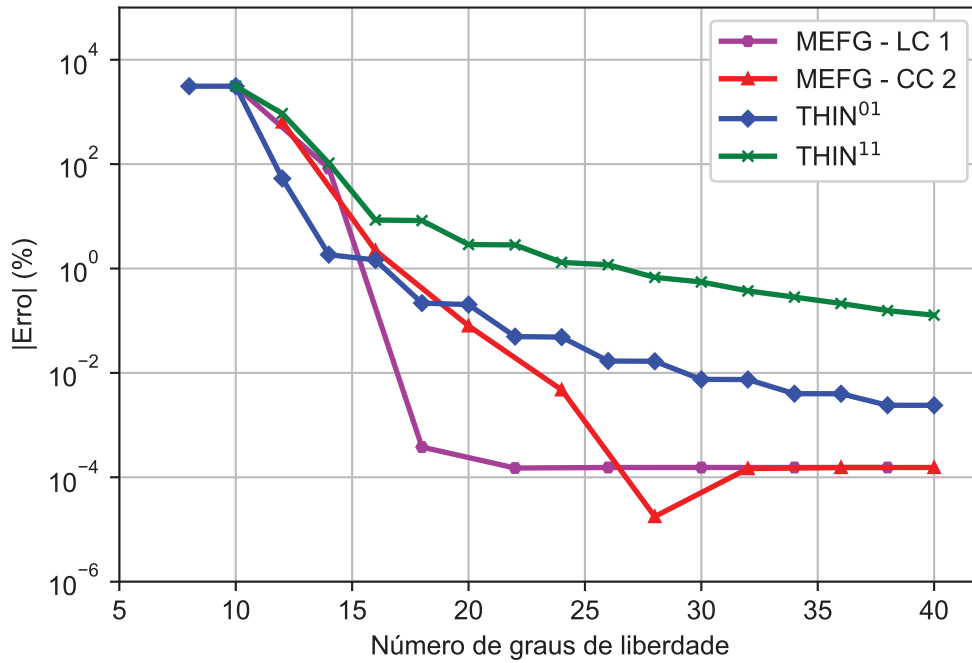
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 22 – Comparação da convergência da 4ª frequência natural do anel MEFG x MEF  $p$ -Fourier.



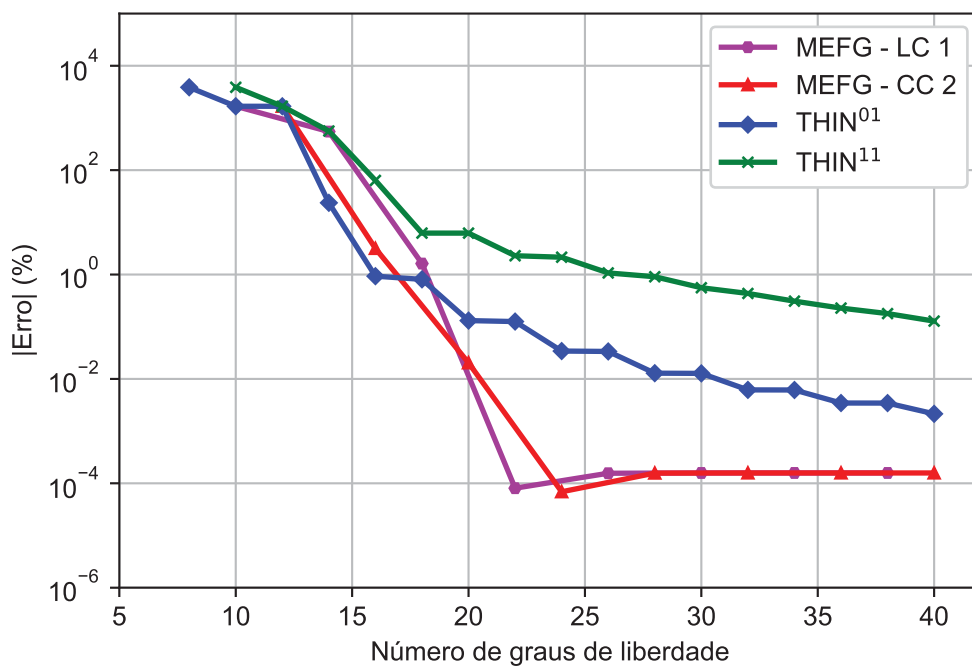
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 23 – Comparação da convergência da 6ª frequência natural do anel MEFG x MEF  $p$ -Fourier.



FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 24 – Comparação da convergência da 8ª frequência natural do anel MEFG x MEF  $p$ -Fourier.



FONTE: o Autor (2019).

Conforme pode-se notar, as taxas de convergência dos elementos de MEFG propostos são superiores às taxas dos elementos de MEF  $p$ -Fourier apresentados em Leung e Zhu (2004).

Na Tabela 4 são apresentados os valores numéricos encontrados com os MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 com 6 níveis de enriquecimento e os elementos THIN<sup>01</sup> e THIN<sup>11</sup> com 12 níveis de enriquecimento comparados com a solução analítica de Timoshenko (1955).

TABELA 4 – Frequências, em Hz, obtidas com o MEFG - LC 1, MEFG - CC 2, THIN<sup>01</sup> e THIN<sup>11</sup> comparadas com a solução analítica.

Modo	Solução Analítica	MEFG - LC 1 (30*)	MEFG - CC 2 (32*)	THIN <sup>01</sup> (30*)	THIN <sup>11</sup> (32*)
2	10,70151	10,70150	10,70150	10,70198	10,71239
4	58,03707	58,03698	58,03698	58,04399	58,23070
6	137,68832	137,68810	137,68811	137,69865	138,20104
8	249,31736	249,31696	249,31696	249,34919	250,39936

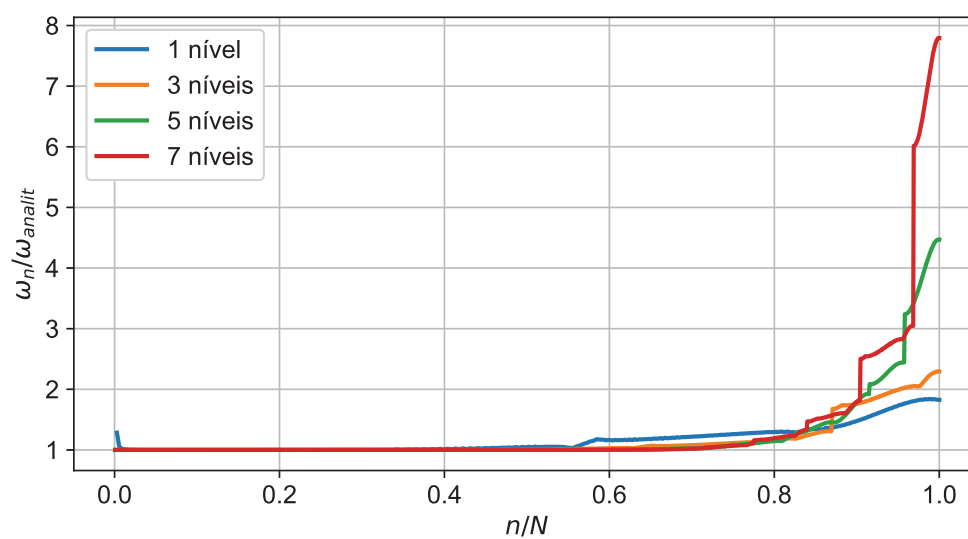
FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade..

Na sequência são apresentados os espectros de frequências para os 4 elementos de MEFG, todos compostos por 50 elementos finitos e variando o número de níveis de enriquecimento.

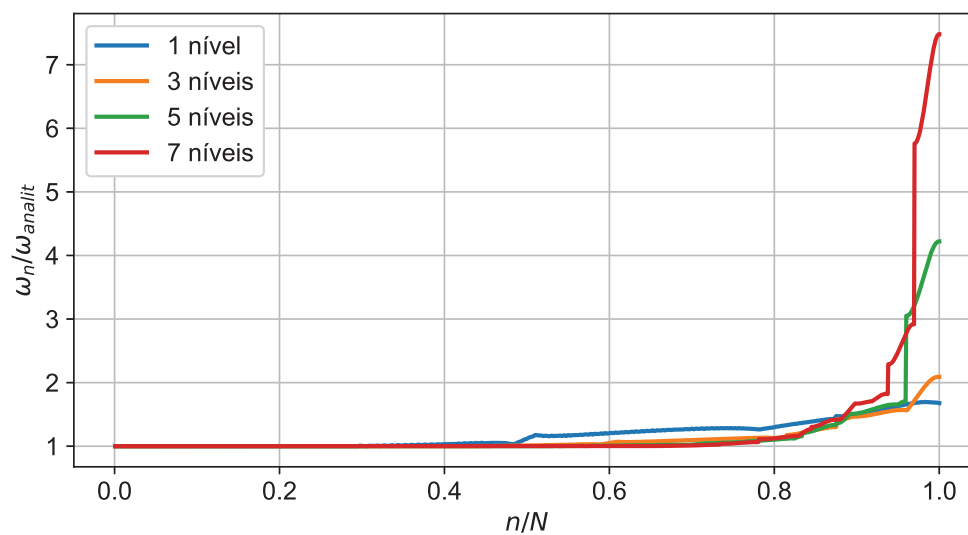
O espectro de frequências é uma maneira de mostrar o erro de todas as frequências obtidas. No eixo horizontal é plotado o índice da frequência dividido pelo número total de frequências obtidas na análise e no eixo vertical é plotada a resposta (frequência) obtida dividida pela resposta analítica. Os espectros são mostrados nas Figuras 25, 26, 27 e 28.

FIGURA 25 – Espectro de frequências do MEFG - LC 1.



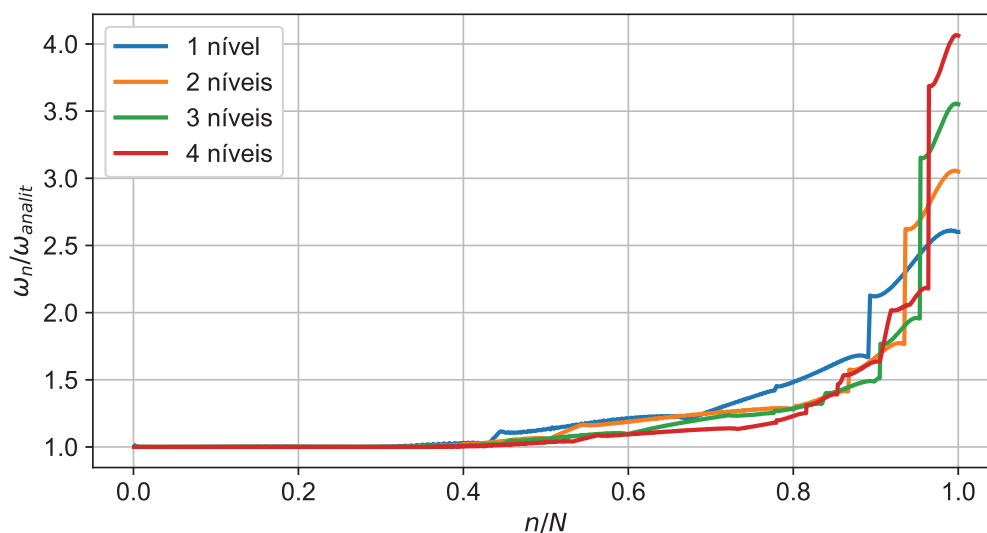
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 26 – Espectro de frequências do MEFG - CC 1.



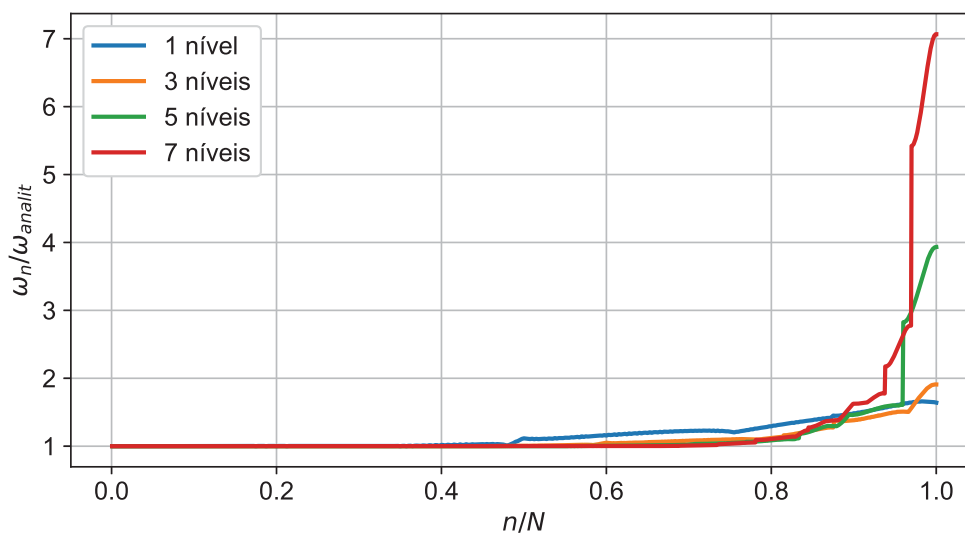
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 27 – Espectro de frequências do MEFG - LC 2.



FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 28 – Espectro de frequências do MEFG - CC 2.



FONTE: o Autor (2019).

Os espectros de frequência seguem um certo padrão os resultados se mantêm em erros inferiores a 20% até a faixa de cerca de 80% das frequências obtidas deste ponto em diante o erro passa a crescer rapidamente e quanto mais níveis de enriquecimento se acrescenta aos modelos, mais rápido o erro cresce.

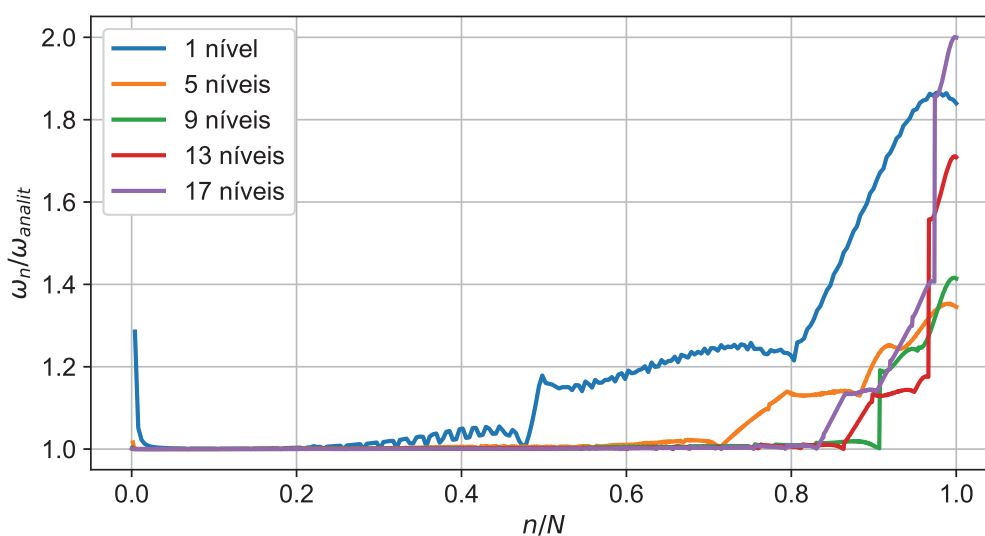
No elemento MEFG - LC 2, com 50 elementos, a partir do 5º nível de enriqueci-



mento se passa a obter modos espúrios e por isso só foi mostrado o espectro até 4 níveis de enriquecimento. Os 4 espectros obtidos foram bastante semelhantes, sendo difícil apontar qual deles é o melhor.

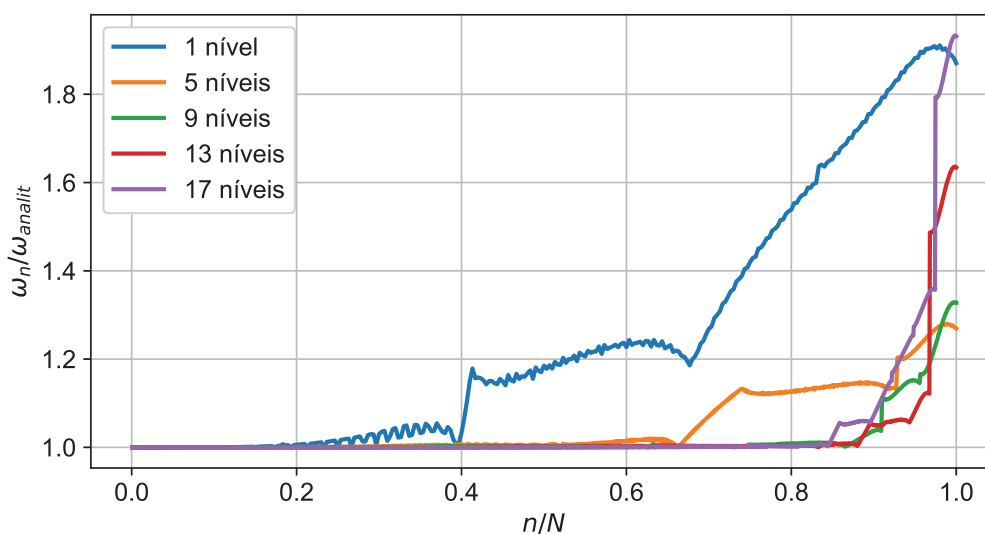
Para comparação com os resultados do MEFG foram obtidos os espectros dos elementos de MEF  $p$ -Fourier propostos em Leung e Zhu (2004), que estão apresentados nas Figuras 29 e 30.

FIGURA 29 – Espectro de frequências do elemento THIN<sup>01</sup>.



FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 30 – Espectro de frequências do elemento THIN<sup>11</sup>.

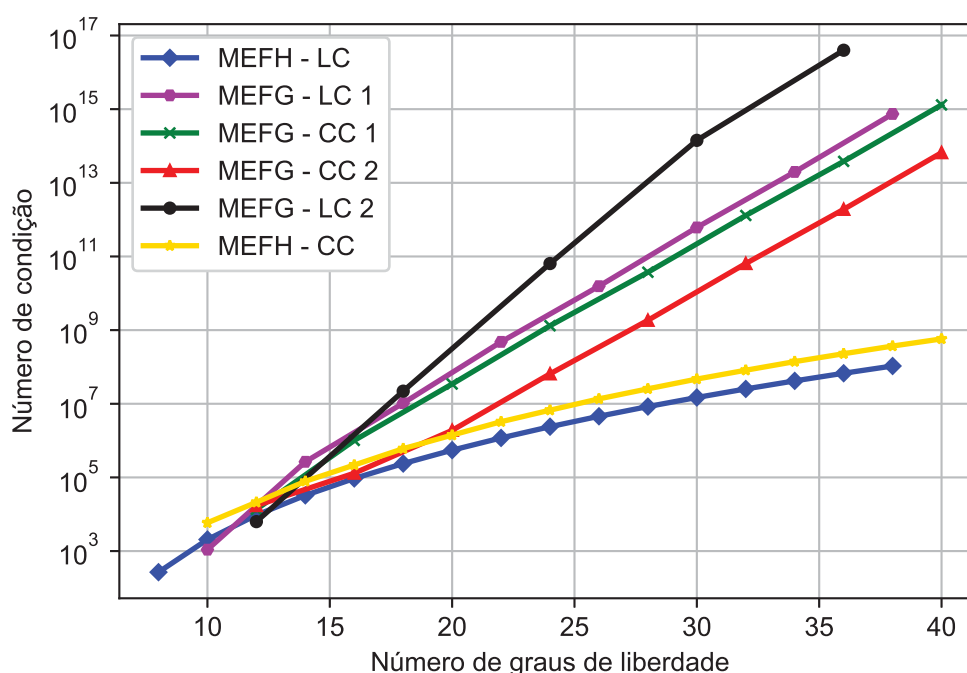


FONTE: o Autor (2019).

Na comparação com os elementos de MEFG propostos, os elementos de Leung e Zhu (2004) necessitam de mais níveis de enriquecimento para apresentarem um espectro mais estável, porém a oscilação com muitos níveis de enriquecimento ainda é um tanto elevada, mas com uma faixa de baixos erros de mais de 80% das frequências obtidas, sendo neste aspecto um pouco melhor que o MEFG.

Um problema relatado em trabalhos anteriores relacionados ao MEFG é que o número de condição da matriz de massa cresce muito a medida que se acrescentam mais níveis de enriquecimento podendo causar um mal condicionamento da solução numérica (obtenção de autovalores negativos) (PETROLI, 2016; WEINHARDT, 2016). Para avaliar a estabilidade numérica a Figura 31 apresenta a evolução do número de condição das matrizes de massa obtidas pelos elementos finitos propostos ainda utilizando apenas partição da unidade linear no MEFG.

FIGURA 31 – Número de Condição da matriz de massa, com partição da unidade linear.

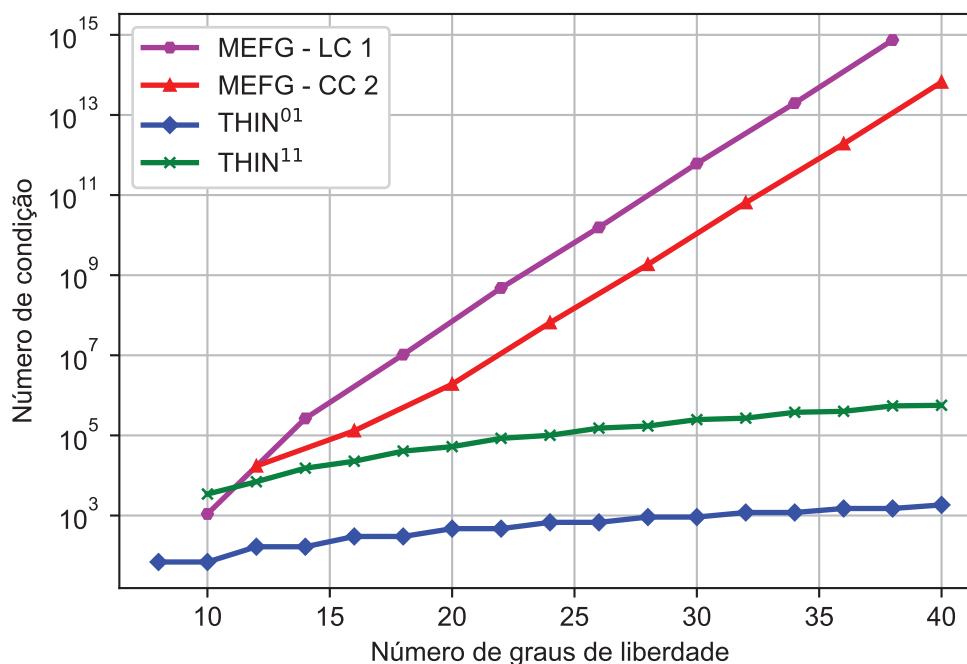


FONTE: o Autor (2019).

Como era esperado os elementos de MEFH apresentaram o menor crescimento do número de condição da matriz de massa. Dentre os elementos de MEFG o elemento MEFG - LC 2 foi o que teve o crescimento mais acentuado e o MEFG - CC 2 o que teve o menor crescimento, indicando que é o mais bem condicionado entre os elementos de MEFG. Os elementos MEFG - LC 1 e MEFG - CC 1 apresentaram uma taxa de crescimento do número de condição muito parecida e valores intermediários entre o MEFG - CC 2 e o MEFG - LC 2.

Na Figura 32 é mostrada a comparação da evolução do número de condição das matrizes de massa dos elementos MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 com os elementos THIN<sup>01</sup> e THIN<sup>11</sup> de Leung e Zhu (2004).

FIGURA 32 – Comparação do número de condição da matriz de massa dos elementos de MEFG propostos com os elementos de Leung e Zhu (2004).

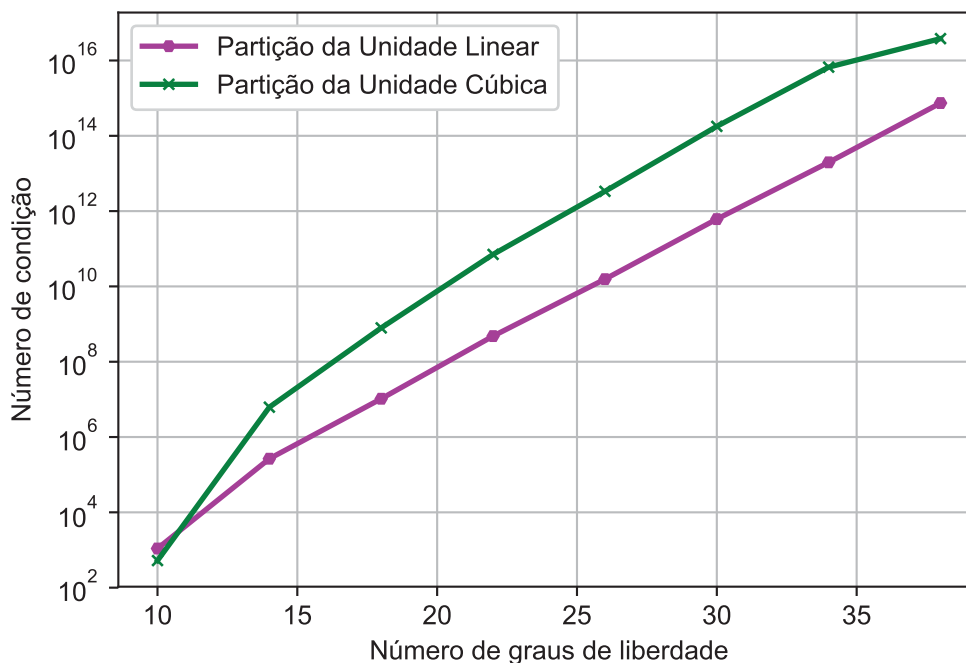


FONTE: o Autor (2019).

Observa-se que os elementos propostos em Leung e Zhu (2004) apresentam uma evolução muito menor do número de condição da matriz de massa quando comparados aos elementos de MEFG.

O MEFG - LC 1 foi o elemento com as melhores taxas de convergência para as frequências estudadas, porém teve um crescimento muito acentuado do número de condição da matriz de massa, por este motivo será testado o efeito de se usar uma partição da unidade cúbica. Primeiramente na Figura 33 está comparada a evolução do número de condição da matriz de massa do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica.

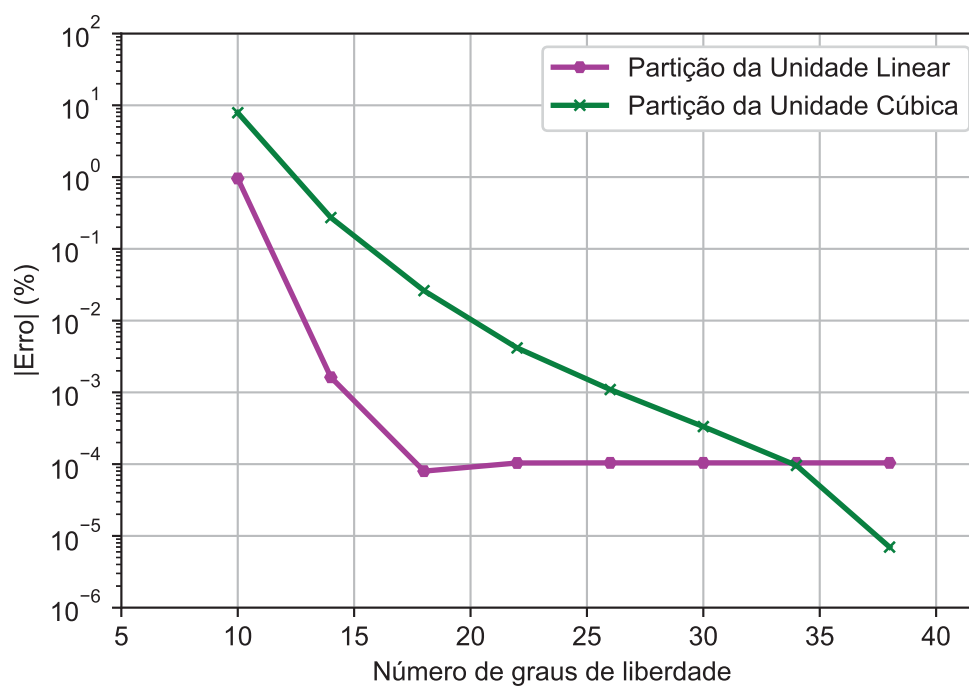
FIGURA 33 – Número de condição da matriz de massa do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica



FONTE: o Autor (2019).

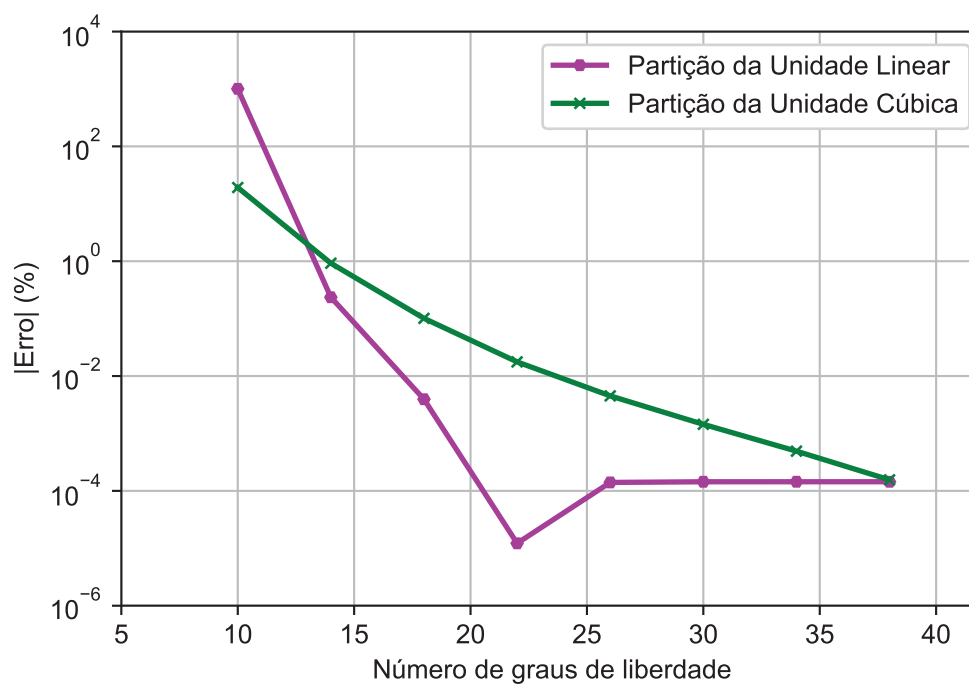
Em relação ao número de condição, o uso da partição da unidade cúbica fez com que o crescimento do número de condição fosse ainda mais acentuado em comparação ao uso da partição da unidade linear. A seguir é feita a comparação da convergência do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica, sendo os resultados mostrados nas Figuras 34, 35, 36 e 37.

FIGURA 34 – Convergência da 2ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica.



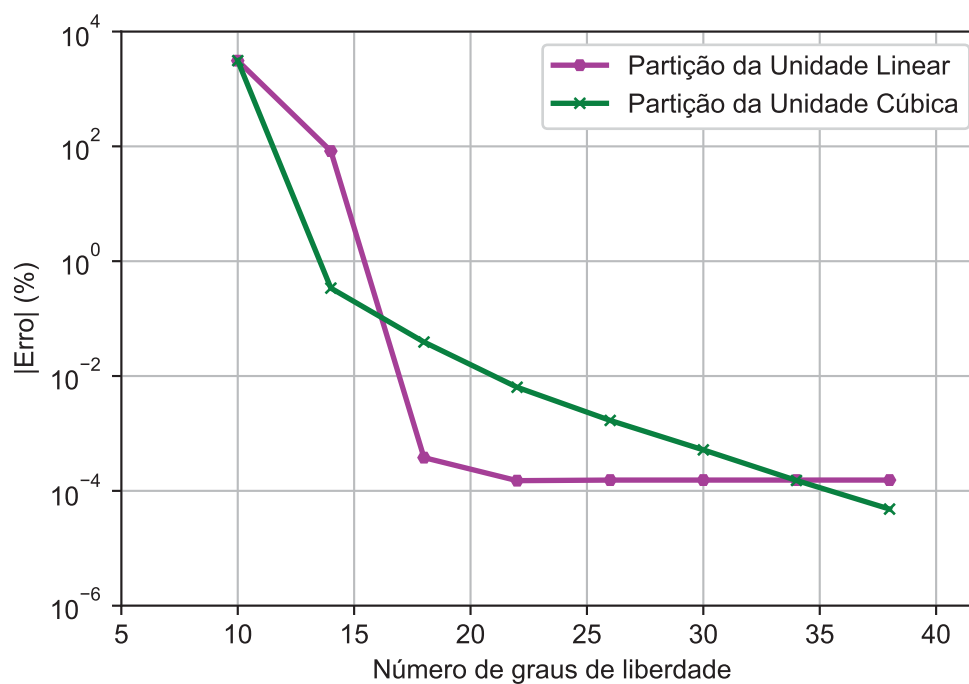
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 35 – Convergência da 4ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica.



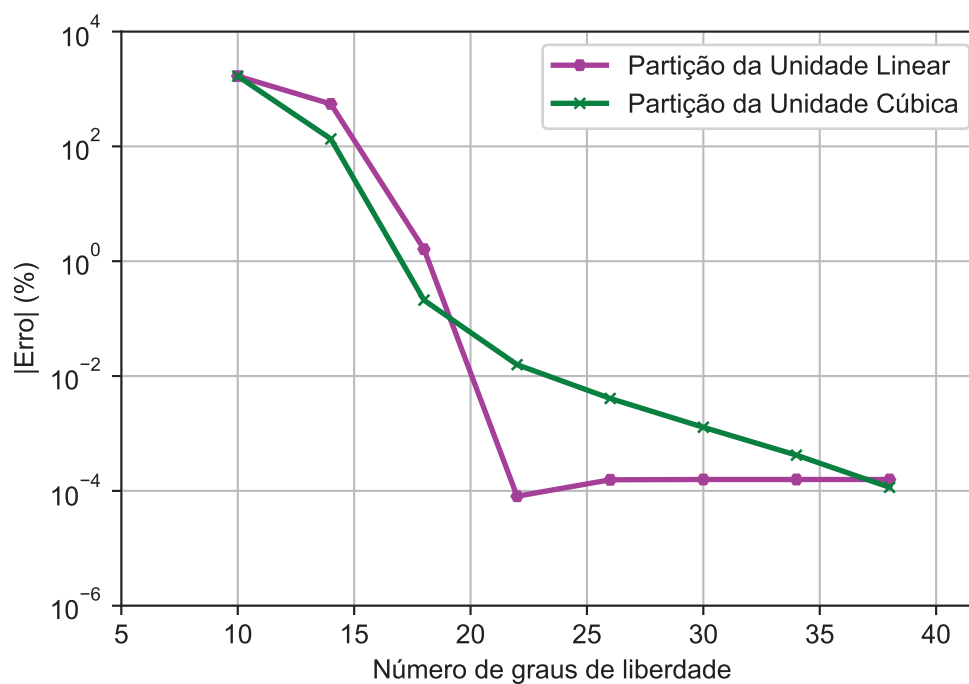
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 36 – Convergência da 6ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica.



FONTE: o Autor (2019).

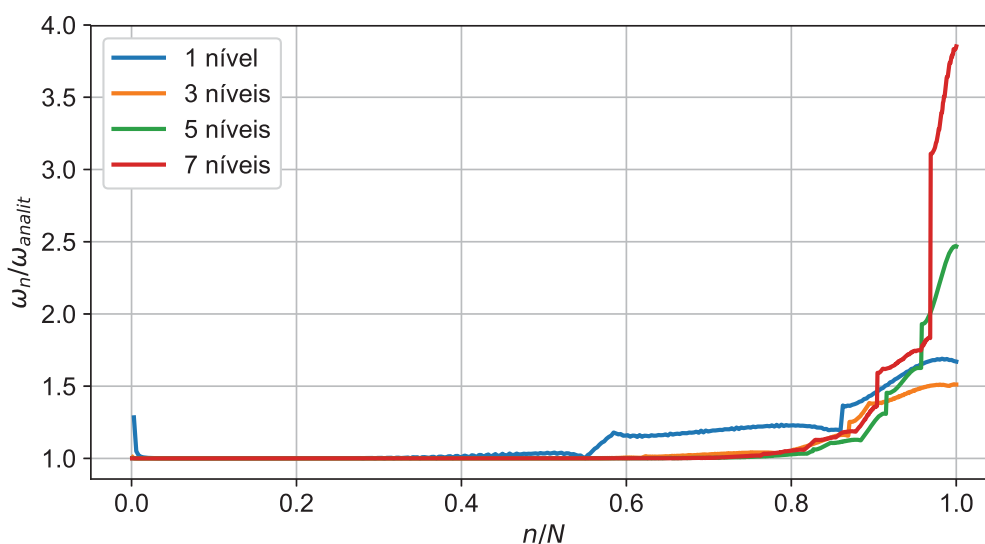
FIGURA 37 – Convergência da 8ª frequência natural do anel do MEFG - LC 1 com partição da unidade linear e cúbica.



FONTE: o Autor (2019).

As Figuras 34, 35, 36 e 37 mostram que o uso da partição da unidade cúbica também reduziu a taxa de convergência das frequências estudadas. Na Figura 38 é apresentado o espectro de frequências do MEFG - LC 1 com partição da unidade cúbica.

FIGURA 38 – Espectro de frequências do MEFG - LC 1 com partição da unidade cúbica.



FONTE: o Autor (2019).

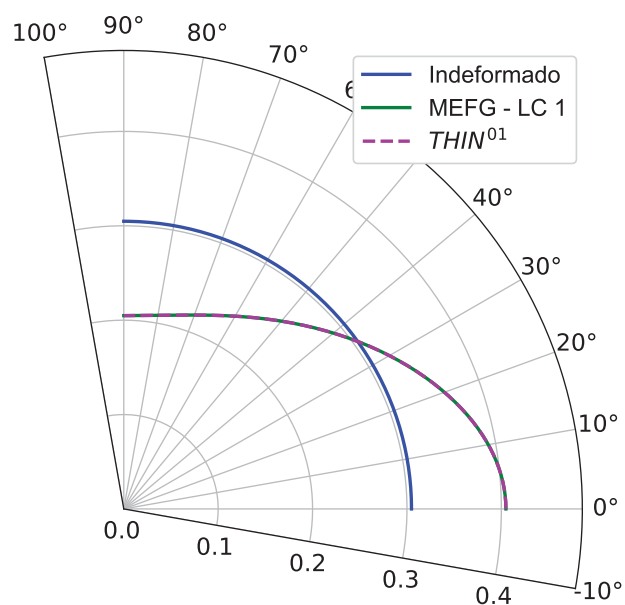
No que diz respeito a faixa de frequências com erro baixo, a partição da unidade cúbica não apresentou grande diferença comparando as Figuras 25 e 38, porém o erro das últimas frequências diminuiu, sendo que com a partição linear o erro chegava a quase 8 vezes e com a partição cúbica o erro chegou a menos de 4 vezes o valor da solução analítica.

O uso da partição da unidade cúbica acabou não apresentando ganho nem em relação ao número de condição e nem em relação à taxa de convergência das primeiras frequências, porém melhorou a respostas das últimas frequências. Apesar das últimas frequências com erro menor, os mesmos ainda são muito altos e como não houve ganho na convergência e número de condição, o uso da partição da unidade cúbica será descartado para os demais exemplos do elemento de arco fino. Nas demais análises serão usados apenas os elementos de MEFG denominados MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 com partição da unidade linear por apresentarem as melhores taxas de convergência nesta análise.

Os modos de vibração são raramente encontrados na literatura, por este motivo os mesmos são mostrados neste trabalho. Na Figura 39 é apresentado o segundo modo de vibração do anel obtido pelo elemento MEFG - LC 1 com 8 níveis de enriquecimento

e comparado com o elemento  $THIN^{01}$  proposto em Leung e Zhu (2004) com 16 níveis de enriquecimento.

FIGURA 39 – 2º modo de vibração do anel.

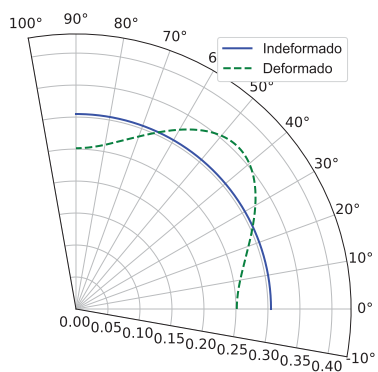
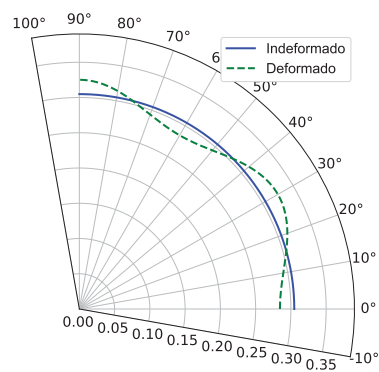
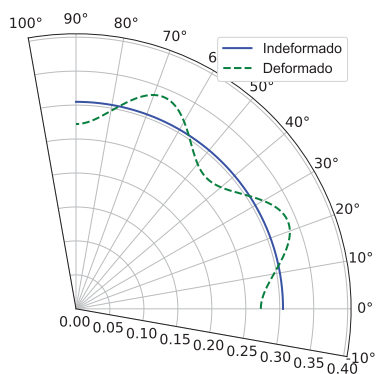
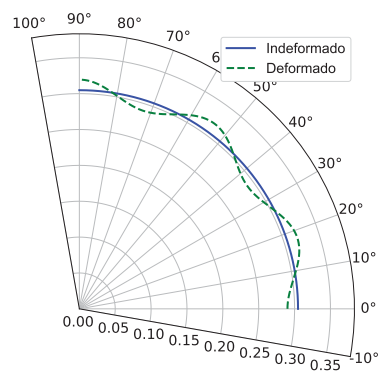
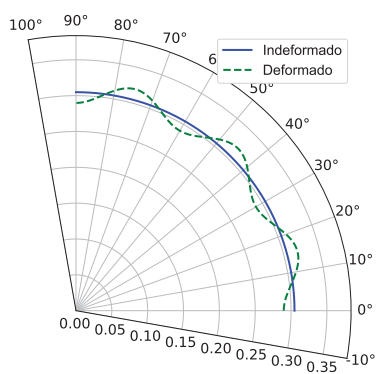
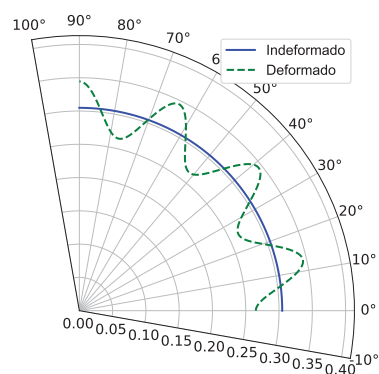
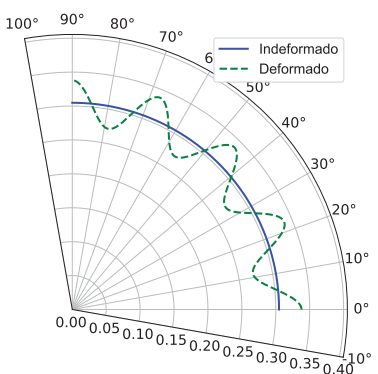
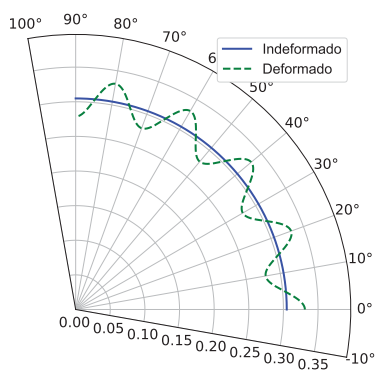


FONTE: o Autor (2019).

Conforme se observa os modos ficam sobrepostos, o que indica que as soluções dos modos convergem para um mesmo valor e servem como validação dos resultados. Na Figura 40 são apresentados os modos de 4 a 18 do anel utilizando apenas o elemento MEFG - LC 1.



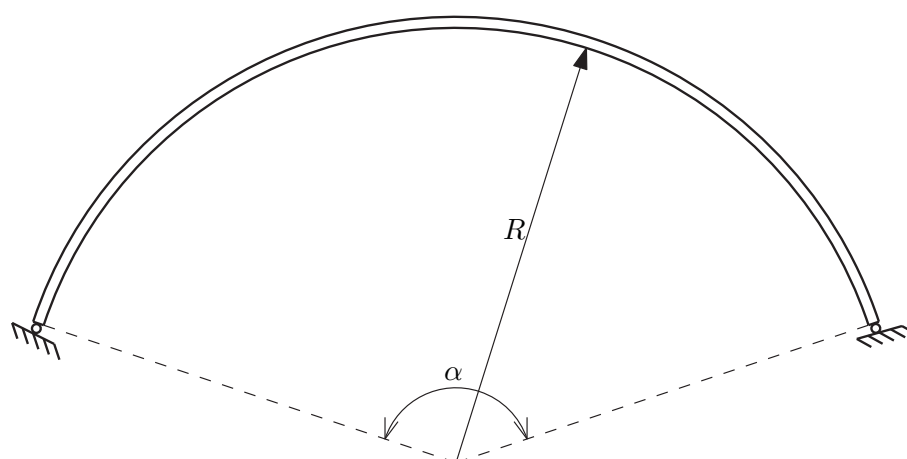
FIGURA 40 – Modos de Vibração do anel

4<sup>o</sup> Modo de vibração.6<sup>o</sup> Modo de vibração.8<sup>o</sup> Modo de vibração.10<sup>o</sup> Modo de vibração.12<sup>o</sup> Modo de vibração.14<sup>o</sup> Modo de vibração.16<sup>o</sup> Modo de vibração.18<sup>o</sup> Modo de vibração.

#### 4.1.2 Arco biarticulado com variação do ângulo de abertura

O segundo exemplo explorado com o elemento de arco fino é um arco biarticulado onde será comparada a frequência fundamental do mesmo variando o ângulo de abertura ( $\alpha$ ) de 10 a 350°. Os resultados são comparados com os resultados obtidos em Krishnan e Suresh (1998) e Leung e Zhu (2004). O esquema do arco é mostrado na Figura 41.

FIGURA 41 – Esquema do arco biarticulado variando o ângulo ( $\alpha$ ).



FONTE: o Autor (2019).

Os dados de material e seção transversal são apresentados na Tabela 5 conforme dados usados em Krishnan e Suresh (1998) e Leung e Zhu (2004).

TABELA 5 – Dados do arco biarticulado.

Dados	Valor
<b>Módulo de Elasticidade</b>	$3,04 \times 10^7$ psi
<b>Raio de curvatura</b>	12 in
<b>Massa Específica</b>	0,02736 slugs ft/ in <sup>4</sup>
<b>Área da Seção Transversal</b>	0,1563 in <sup>3</sup>
<b>Momento de Inércia</b>	$8,13 \times 10^{-4}$ in <sup>4</sup>

FONTE: o Autor (2019).

Na Tabela 6 é mostrada a evolução da precisão das frequências fundamentais dos arcos articulados com diferentes ângulos de abertura do elemento MEEG - LC 1 com partição da unidade linear e utilizando 1 elemento finito comparando com as respostas obtidas em Krishnan e Suresh (1998) e Leung e Zhu (2004).

TABELA 6 – Frequências fundamentais (rad/s) dos arcos articulados com o MEFG - LC 1.

Ângulos (graus)	2 níveis (14*)	4 níveis (22*)	6 níveis (30*)	8 níveis (38*)	Ref 1 (62*)	Ref 2 (63*)
10	5929,1858	5928,9846	5928,9842	5928,9842	5958,96	5954,70
20	2821,0890	2821,0445	2821,0444	2821,0444	2835,04	2826,60
30	2355,5736	2351,6847	2351,6821	2351,6821	2363,64	2523,70
60	568,8386	558,7577	558,7482	558,7482	561,59	562,50
90	238,4777	228,7325	228,7157	228,7156	229,88	230,65
120	123,0446	115,1301	115,1100	115,1100	115,70	116,33
150	70,6308	64,1438	64,1237	64,1236	64,45	64,96
180	42,9932	37,6920	37,6722	37,6721	37,86	38,25
210	27,0080	22,6757	22,6553	22,6552	22,77	23,06
240	17,2244	13,6162	13,5940	13,5940	13,66	13,87
270	11,0367	7,9081	7,8824	7,8824	7,92	8,06
300	7,0856	4,1968	4,1639	4,1638	4,19	4,27
330	4,6439	1,7385	1,6837	1,6836	1,70	1,73
350	3,6582	0,6215	0,4923	0,4919	0,50	0,51

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; Ref 1 - Leung e Zhu (2004); Ref 2 - Krishnan e Suresh (1998).

Primeiramente pode-se destacar que em quase todos os ângulos de abertura os resultados da frequência fundamental não apresentam diferença até nas quatro casas decimais para 6 e 8 níveis de enriquecimento. O segundo ponto a se destacar nessa análise é que os resultados do MEFG - LC 1 para todos os ângulos de abertura foram menores que os resultados de referência de Krishnan e Suresh (1998) e Leung e Zhu (2004) com menos graus de liberdade, indicando uma maior precisão para o elemento de MEFG desenvolvido<sup>1</sup>.

Na Tabela 7 está mostrada a evolução da precisão das frequências naturais dos arcos biarticulados do MEFG - CC 2 com partição da unidade linear e utilizando 1 elemento finito também em comparação com os resultados de Krishnan e Suresh (1998) e Leung e Zhu (2004).

<sup>1</sup> Weinhardt (2016) prova, matematicamente, que, para as frequências naturais, o MEFG converge por valores superiores à solução analítica do problema.

TABELA 7 – Frequências fundamentais (rad/s) dos arcos articulados com o MEFG - CC 2.

Ângulos (graus)	2 níveis (16*)	4 níveis (24*)	6 níveis (32*)	8 níveis (40*)	Ref 1 (62*)	Ref 2 (63*)
10	5930,9313	5928,9899	5928,9842	5928,9842	5958,96	5954,70
20	2821,0547	2821,0444	2821,0444	2821,0444	2835,04	2826,60
30	2351,7618	2351,6822	2351,6821	2351,6821	2363,64	2523,70
60	558,7728	558,7482	558,7482	558,7482	561,59	562,50
90	228,7323	228,7157	228,7156	228,7156	229,88	230,65
120	115,1250	115,1100	115,1100	115,1100	115,70	116,33
150	64,1377	64,1237	64,1236	64,1236	64,45	64,96
180	37,6853	37,6722	37,6721	37,6721	37,86	38,25
210	22,6680	22,6553	22,6552	22,6552	22,77	23,06
240	13,6075	13,5940	13,5940	13,5940	13,66	13,87
270	7,8986	7,8824	7,8824	7,8824	7,92	8,06
300	4,1868	4,1638	4,1638	4,1638	4,19	4,27
330	1,7287	1,6836	1,6836	1,6836	1,70	1,73
350	0,6147	0,4919	0,4919	0,4919	0,50	0,51

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; Ref 1 - Leung e Zhu (2004); Ref 2 - Krishnan e Suresh (1998).

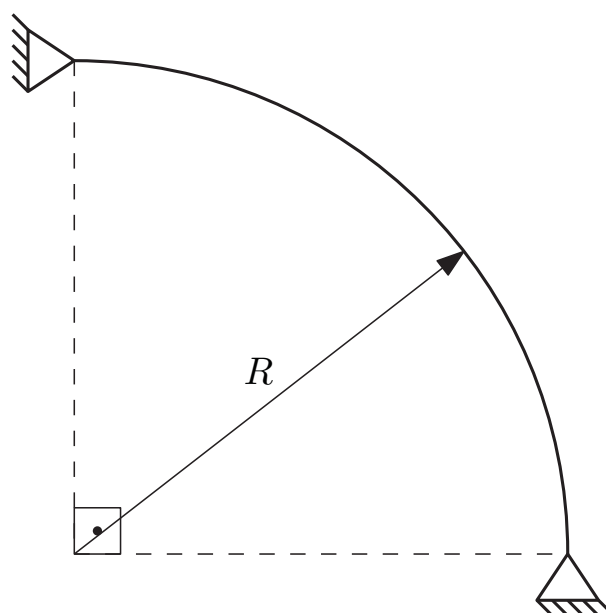
Os resultados do MEFG - CC 2 já praticamente convergem na quarta casa decimal a partir do 4º nível de enriquecimento, com exceção do ângulo de abertura  $\alpha = 10^\circ$  que ainda apresenta uma diferença mais significativa do 4º para o 6º nível de enriquecimento.

Observando os resultados das Tabelas 6 e 7 nota-se que, em ambos os casos, os elementos de MEFG propostos convergem para os mesmos valores e estes são menores que os resultados de referência de Krishnan e Suresh (1998) e Leung e Zhu (2004). Na comparação entre o MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 nota-se que o segundo converge com uma taxa um pouco maior que o primeiro para praticamente todos os ângulos de abertura.

#### 4.1.3 Arco de 90° biapoiado

Neste exemplo os resultados são comparados com o trabalho de Raveendranath, Singh e Pradhan (2000) onde é utilizado o MEF com 8 elementos finitos de 4 graus de liberdade por nó mais um grau de liberdade não nodal, resultando em 44 graus de liberdade. O arco analisado é um arco biapoiado conforme o esquema mostrado na Figura 42.

FIGURA 42 – Esquema do arco biapoiado com ângulo de abertura de 90°.



FONTE: o Autor (2019).

São modelados dois arcos, o primeiro com relação entre o raio de curvatura ( $R$ ) e raio de giração ( $r$ )  $R/r = 25$  e o segundo com a relação  $R/r = 140$ . Os resultados são apresentados em função de um parâmetro adimensional ( $C_n$ ) obtido através da expressão:

$$C_n = \omega_n L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E I}} \quad (4.2)$$

onde:  $\omega_n$  é a  $n$ ésima frequência natural;  $L$  é o comprimento do arco;  $\rho$  é a massa específica;  $A$  é a área da seção transversal;  $E$  é o módulo de elasticidade e  $I$  é o momento de inércia da seção transversal.

Os resultados do arco com a relação  $R/r = 25$  para os elementos MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 ambos com partição da unidade linear são e utilizando apenas 1 elemento finito apresentados nas Tabelas 8 e 9 respectivamente.

TABELA 8 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° biapoado com o MEFG - LC 1 e  $R/r = 25$ .

Modo	2 Níveis (14*)	4 Níveis (22*)	6 Níveis (30*)	8 Níveis (38*)	Ref (44*)
1	33,7111	33,5906	33,5906	33,5906	33,60
2	53,4649	53,4127	53,4126	53,4126	53,42
3	88,4261	88,1352	88,1351	88,1351	88,25
4	130,9837	129,9424	129,9423	129,9423	130,72
5	168,3787	159,5225	159,5223	159,5223	160,28
6	252,2983	235,9968	235,9930	235,9930	239,16

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; Ref - Raveendranath, Singh e Pradhan (2000).

TABELA 9 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° biapoado com o MEFG - CC 2 e  $R/r = 25$ .

Modo	2 Níveis (16*)	4 Níveis (24*)	6 Níveis (32*)	8 Níveis (40*)	Ref (44*)
1	33,5922	33,5906	33,5906	33,5906	33,60
2	53,4652	53,4128	53,4126	53,4126	53,42
3	88,2585	88,1352	88,1351	88,1351	88,25
4	129,9688	129,9423	129,9423	129,9423	130,72
5	160,5395	159,5223	159,5223	159,5223	160,28
6	251,4887	235,9936	235,9930	235,9930	239,16

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; Ref - Raveendranath, Singh e Pradhan (2000).

Os resultados do arco com a relação  $R/r = 140$  para os elementos MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 são apresentados nas Tabelas 10 e 11 respectivamente.

TABELA 10 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° biapoiado com o MEFG - LC 1 e  $R/r = 140$ .

Modo	2 Níveis (14*)	4 Níveis (22*)	6 Níveis (30*)	8 Níveis (38*)	Ref (44*)
1	35,2289	33,9512	33,9493	33,9493	33,95
2	84,1400	79,6219	79,6214	79,6214	79,73
3	270,0852	152,0662	152,0606	152,0606	152,68
4	319,8976	233,6873	233,6260	233,6260	235,77
5	461,8915	338,0259	337,6978	337,6978	338,44
6	728,8827	358,5149	348,9895	348,9895	355,52

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; Ref - Raveendranath, Singh e Pradhan (2000).

TABELA 11 – Precisão dos 6 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° biapoiado com o MEFG - CC 2 e  $R/r = 140$ .

Modo	2 Níveis (16*)	4 Níveis (24*)	6 Níveis (32*)	8 Níveis (40*)	Ref (44*)
1	33,9515	33,9493	33,9493	33,9493	33,95
2	79,9045	79,6220	79,6214	79,6214	79,73
3	153,6042	152,0606	152,0606	152,0606	152,68
4	293,7179	233,6261	233,6260	233,6260	235,77
5	378,0938	337,7014	337,6979	337,6978	338,44
6	668,8902	349,1063	348,9895	348,9895	355,52

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; Ref - Raveendranath, Singh e Pradhan (2000).

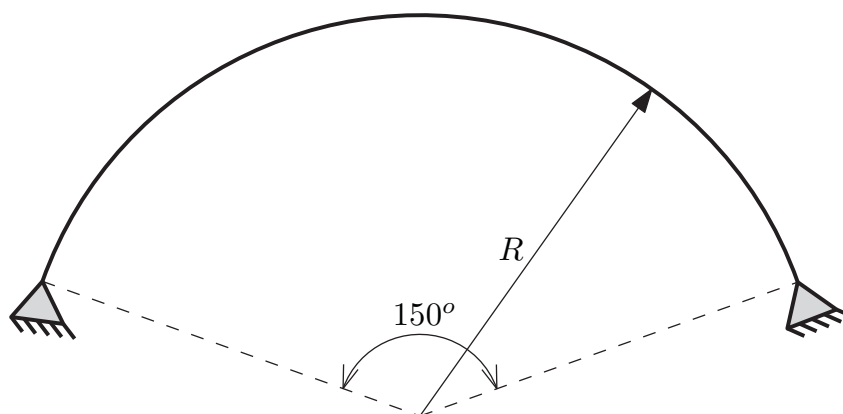
Os resultados apresentam uma evolução da precisão muito parecidas entre os elementos MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 porém com pequena superioridade para o MEFG - CC 2 que apresenta resultados mais precisos que o MEFG - LC 1 nos primeiros níveis de enriquecimento. Os resultados convergem para valores inferiores à solução de referência de Raveendranath, Singh e Pradhan (2000) o que indica que os valores obtidos no presente trabalho devem estar mais próximos da solução analítica do problema.

A variação do raio de curvatura mostrou que o maior raio faz com que a taxa de convergência diminua um pouco, porém acaba não sendo uma redução muito significativa.

#### 4.1.4 Arco de 150° biapoiado

Neste exemplo são obtidas as 10 primeiras frequências naturais de um arco biapoiado com ângulo de abertura igual a 150° (Figura 43).

FIGURA 43 – Esquema do arco biapoiado com ângulo de abertura igual a 150°.



FONTE: o Autor (2019).

Os dados de material e características físicas da seção transversal do arco utilizado neste exemplo estão dispostos na Tabela 12.

TABELA 12 – Dados do arco biapoiado com ângulo de abertura igual a 150°.

Dados	Valor
Raio de curvatura	0,75 m
Área da seção transversal	4 m <sup>2</sup>
Momento de Inércia	0,01 m <sup>4</sup>
Módulo de Elasticidade	70 GPa
Massa específica	2777 kg/m <sup>3</sup>

FONTE: o Autor (2019).

Nas Tabelas 13, 14, 15 e 16 é mostrada a convergência das 10 primeiras frequências naturais do arco estudado. Todas as análises utilizaram apenas um elemento finito variando a quantidade de níveis de enriquecimento.



TABELA 13 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoiado com o MEFG - LC 1.

Modo	2 níveis (14*)	4 níveis (22*)	6 níveis (30*)	8 níveis (38*)
1	1215,7896	1215,5985	1215,5982	1215,5982
2	1693,0987	1691,8536	1691,8506	1691,8506
3	2803,0901	2800,5711	2800,5711	2800,5711
4	3739,5413	3713,8631	3713,8243	3713,8242
5	5207,7905	5193,2035	5193,2034	5193,2034
6	6740,4089	6211,0930	6211,0890	6211,0890
7	7774,6621	7699,0031	7698,9694	7698,9694
8	10892,5221	9268,1387	9263,2216	9263,2198
9	-	10276,8299	10274,9274	10274,9274
10	-	12523,5655	12468,5120	12468,5118

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade.

TABELA 14 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoiado com o MEFG - CC 2.

Modo	2 níveis (16*)	4 níveis (24*)	6 níveis (32*)	8 níveis (40*)
1	1215,6250	1215,5983	1215,5982	1215,5982
2	1692,2686	1691,8513	1691,8506	1691,8506
3	2800,6268	2800,5711	2800,5711	2800,5711
4	3720,7815	3713,9171	3713,8245	3713,8242
5	5199,9365	5193,2040	5193,2034	5193,2034
6	6365,5562	6211,1044	6211,0890	6211,0890
7	7736,8858	7698,9698	7698,9694	7698,9694
8	10148,2873	9264,4081	9263,2244	9263,2198
9	13582,1398	10275,3286	10274,9276	10274,9274
10	17606,5463	12475,1698	12468,5122	12468,5118

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade.

TABELA 15 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoado com o MEFH - LC.

Modo	2 níveis (10*)	6 níveis (18*)	10 níveis (26*)	16 níveis (38*)
1	1244,4478	1215,5992	1215,5982	1215,5982
2	1950,0944	1692,0225	1691,8506	1691,8506
3	2868,6848	2801,0019	2800,5711	2800,5711
4	5240,8476	3721,1348	3713,8245	3713,8242
5	-	5196,4126	5193,2041	5193,2034
6	-	6328,7387	6211,2028	6211,0890
7	-	7707,4003	7698,9994	7698,9694
8	-	10083,2506	9268,1060	9263,2198
9	-	11337,0471	10276,5208	10274,9274
10	-	15023,7940	12499,3372	12468,5121

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade.

TABELA 16 – Evolução da precisão das 10 primeiras frequências naturais (Hz) do arco 150° biapoado com o MEFH - CC.

Modo	2 níveis (12*)	6 níveis (20*)	12 níveis (32*)	16 níveis (40*)
1	1234,2632	1215,5988	1215,5982	1215,5982
2	1729,0115	1691,8519	1691,8506	1691,8506
3	2846,1636	2800,5851	2800,5711	2800,5711
4	5087,9739	3720,4735	3713,8242	3713,8242
5	8144,3545	5196,2647	5193,2034	5193,2034
6	11337,3148	6250,8153	6211,0890	6211,0890
7	-	7706,2030	7698,9694	7698,9694
8	-	9994,4605	9263,2970	9263,2198
9	-	11321,4872	10274,9609	10274,9274
10	-	12831,5101	12468,6440	12468,5118

FONTE: o Autor (2019).

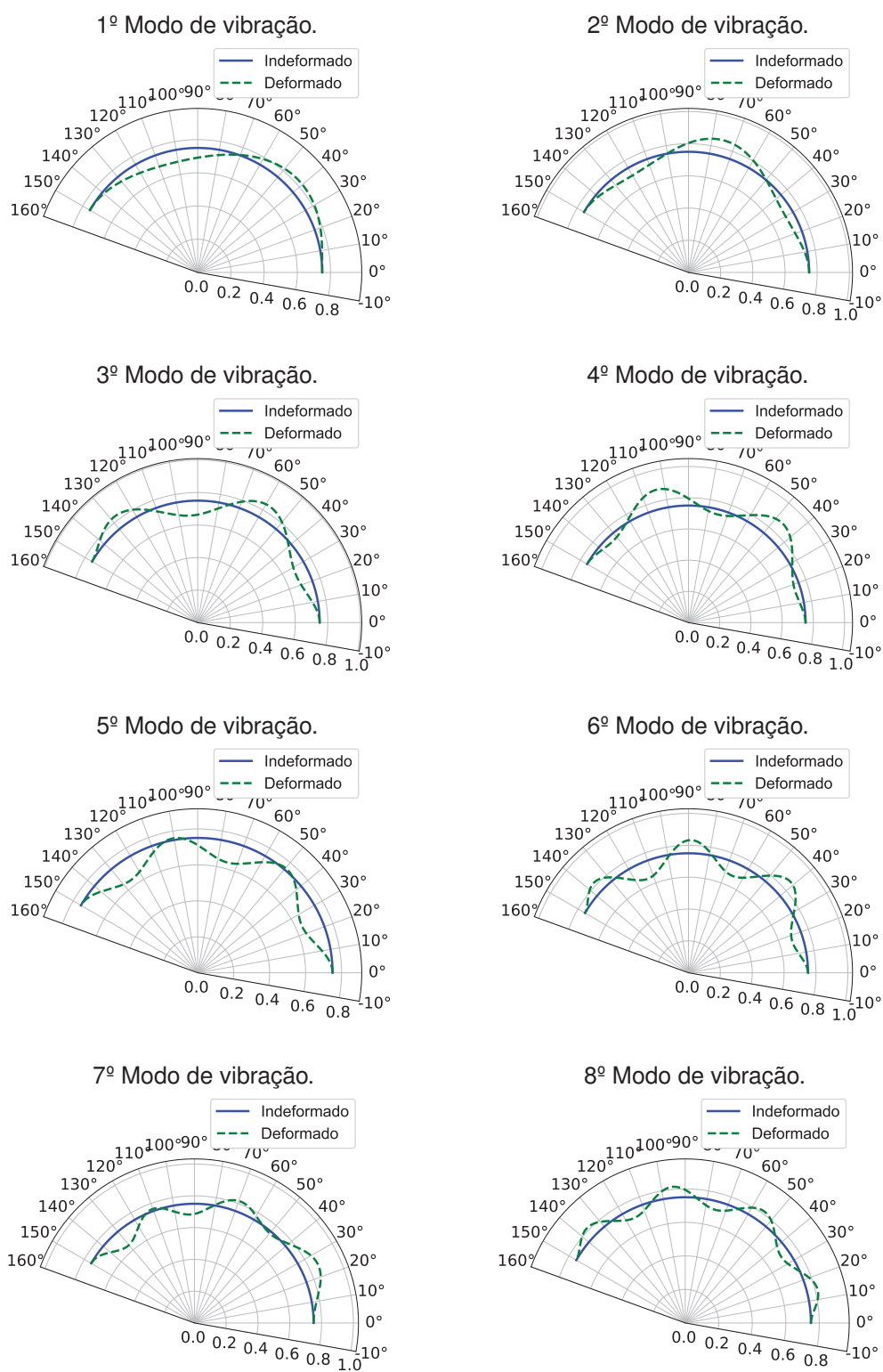
NOTA: (\*) - número de graus de liberdade.

Todos os modelos estão convergindo para os mesmos valores para as 10 frequências analisadas, sendo que apenas na 10ª frequência natural que houve uma diferença na terceira casa decimal para o MEFH - LC. A convergência segue um padrão dos outros exemplos com os elementos de MEFH tendo uma convergência ligeiramente mais rápida.

Analisando os três últimos exemplos se percebe que a evolução da precisão é menor conforme o ângulo de abertura do arco se torna mais aberto. Na Figura 44 são

apresentados os 8 primeiros modos de vibração obtidos.

FIGURA 44 – Modos de Vibração do arco biapoado com ângulo de abertura igual a  $150^\circ$ .



FONTE: o Autor (2019)

## 4.2 ANÁLISES DE VIBRAÇÃO LIVRE DE ARCOS ESPESSOS

Nesta seção são apresentadas análises de vibração livre utilizando o elemento de arcos espessos. Todos os exemplos foram retirados de trabalhos disponíveis na literatura.

### 4.2.1 Estudo do Número de Condição da Matriz de Massa

Aqui é realizada uma análise da evolução do número de condição da matriz de massa de um exemplo utilizando o elemento de arco espesso. O objetivo é analisar qual dos dois elementos propostos para o MEFG é mais estável, numericamente, e se a mudança da partição da unidade tem algum impacto significativo nessa estabilidade.

No exemplo foi estudado um arco com ângulo de abertura igual a  $90^\circ$  sem nenhuma condição de contorno, com as propriedades físicas e geométricas apresentadas na Tabela 17.

TABELA 17 – Dados do arco para estudo do número de condição da matriz de massa.

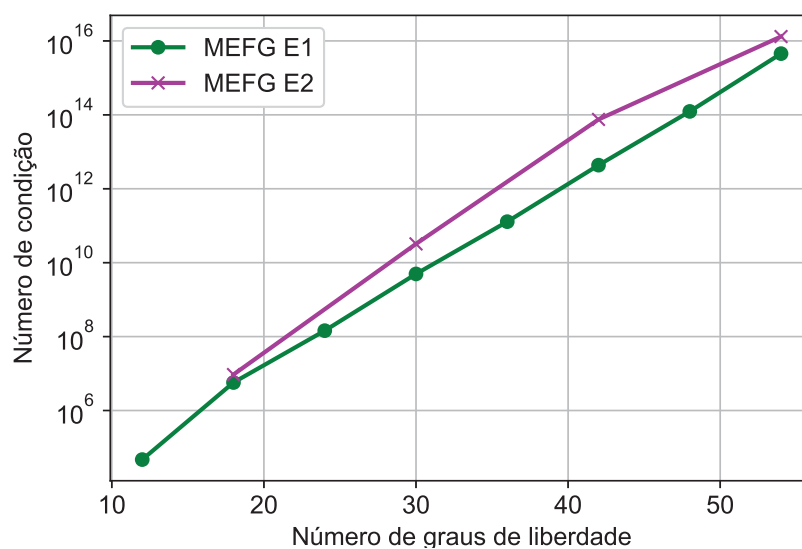
Dados	Valor
<b>Módulo de Elasticidade</b>	70 GPa
<b>Coefficiente de Poisson</b>	0,3
<b>Fator de correção do cisalhamento</b>	0,85
<b>Raio de Curvatura</b>	0,6366 m
<b>Momento de Inércia</b>	0,0016 m <sup>4</sup>
<b>Área da Seção Transversal</b>	1 m <sup>2</sup>
<b>Massa específica</b>	2777 kg/m <sup>3</sup>

FONTE: o Autor (2019).

Na Figura 45 é mostrada a evolução do número de condição da matriz de massa quando ambos os elementos utilizaram partição da unidade linear para a construção do enriquecimento do MEFG.

Nos exemplos o domínio é discretizado com apenas um elemento finito e para aumentar a quantidade de graus de liberdade são acrescentados novos níveis de enriquecimento.

FIGURA 45 – Número de Condição da Matriz de Massa, com partição da unidade linear.

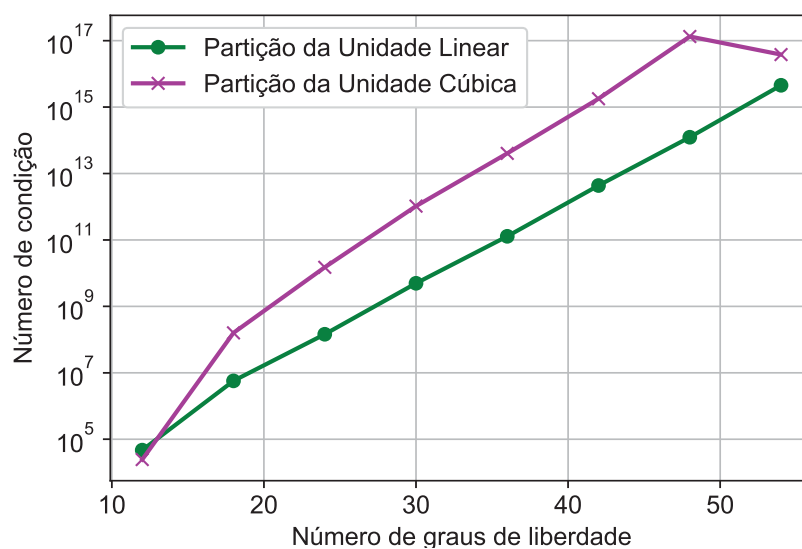


FONTE: o Autor (2019).

Analisando a Figura 45 não se percebe grandes diferenças no número de condição, embora o crescimento do MEFG E1 seja um pouco inferior ao MEFG E2.

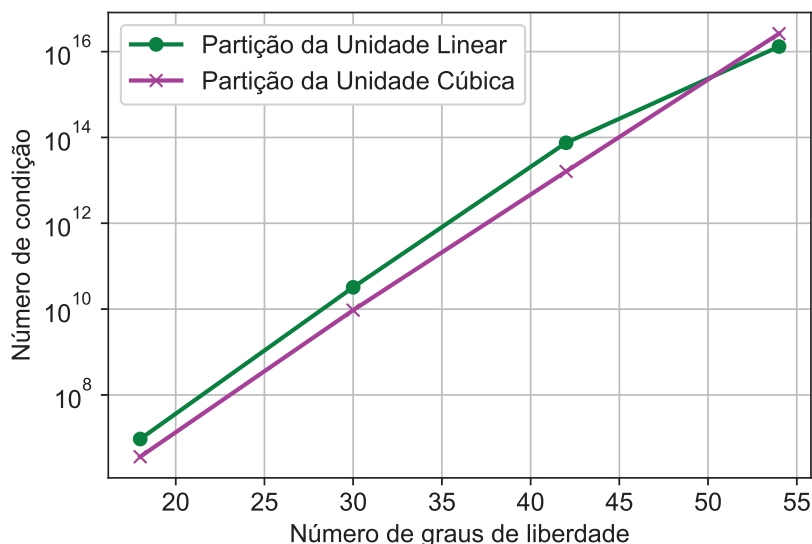
Na Figura 46 é feita a comparação do número de condição da matriz de massa do MEFG E1 com partição da unidade linear e cúbica e na Figura 47 é feita a comparação do número de condição do MEFG E2 também com partição da unidade linear e cúbica.

FIGURA 46 – Número de Condição da Matriz de Massa do MEFG E1, com partição da unidade linear e cúbica.



FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 47 – Número de Condição da Matriz de Massa do MFG E2, com partição da unidade linear e cúbica.



FONTE: o Autor (2019).

Pela Figura 46 se percebe que o uso da partição da unidade cúbica fez com que o número de condição aumentasse em relação à partição da unidade linear. Por este motivo nos exemplos futuros será usada a partição da unidade linear para o MFG E1.

O MFG E2, conforme mostra a Figura 47, não apresentou muita diferença na evolução do número de condição, porém o uso da partição da unidade cúbica fez com que este fosse um pouco menor. Logo, nos exemplos posteriores o MFG E2 usará a partição da unidade cúbica.

#### 4.2.2 Arco biarticulado com variação do ângulo de abertura

Os dados do arco espesso são encontrados em Krishnan e Suresh (1998), Raveendranath, Singh e Pradhan (1999) e Leung e Zhu (2004), e são apresentados na Tabela 18. Foi analisada aqui a variação do ângulo de abertura ( $\alpha$ ) do arco conforme a Figura 41.

As análises com o MEF  $p$ -Fourier desenvolvidos em Leung e Zhu (2004) e usados como referência neste trabalho são denominados como no artigo original como THICK-1 e THICK-2. O elemento de MEF desenvolvido em Krishnan e Suresh (1998) usado como referência é denominado E1. 1b. O elemento desenvolvido em Raveendranath, Singh e Pradhan (1999) apresenta resultados piores que os outros trabalhos, por isso não será apresentado como referência. E em todos os trabalhos citados são apresentadas apenas as frequências fundamentais.

TABELA 18 – Dados do arco articulado espesso utilizado.

Dados	Valor
Módulo de Elasticidade	$3,04 \times 10^7$ psi
Raio de curvatura	12 in
Massa Específica	0,02736 slugs ft/in <sup>4</sup>
Coefficiente de Poisson	0,3
Fator de correção do cisalhamento	0,8497
Área da Seção Transversal	0,1563 in <sup>3</sup>
Momento de Inércia	$8,13 \times 10^{-4}$ in <sup>4</sup>

FONTE: o Autor (2019).

Na Tabela 19 é apresentada a evolução da precisão da frequência do elemento MEFG E1 com partição da unidade linear e na Tabela 19 para o elemento MEFG E2 com partição da unidade cúbica.

TABELA 19 – Precisão da frequência fundamental (rad/s) do arco articulado com o elemento MEFG E1 partição da unidade linear.

Angulos (graus)	2 níveis (18*)	4 níveis (30*)	6 níveis (42*)	8 níveis (54*)	THICK-2 (12*)	THICK-1 (606*)	E1. 1b (84*)
10	5840,7894	5840,7778	5840,7778	5840,7778	5841,74	5841,47	5874,30
20	2827,5603	2827,4779	2827,4752	2827,4751	2827,63	2827,56	2823,10
30	2357,2043	2338,9870	2338,9799	2338,9799	2339,82	2339,27	2345,20
60	585,4800	560,0811	560,0684	560,0684	560,25	560,14	561,20
90	261,1331	229,6113	229,5889	229,5888	229,66	229,62	230,40
120	146,8161	115,6400	115,6075	115,6075	115,64	115,63	116,30
150	92,9600	64,4552	64,4155	64,4154	64,43	64,43	64,93
180	63,6697	37,8917	37,8481	37,8481	37,86	37,86	38,24
210	46,2589	22,8081	22,7627	22,7626	22,77	22,78	23,05
240	35,2223	13,7066	13,6591	13,6590	13,66	13,68	13,87
270	27,8656	7,9728	7,9204	7,9203	7,92	7,95	8,06
300	22,7554	4,2488	4,1841	4,1839	4,18	4,23	4,27
330	19,0788	1,7969	1,6920	1,6918	1,69	1,78	1,73
350	17,1765	0,7262	0,4950	0,4943	0,49	0,72	0,50

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade.

TABELA 20 – Precisão da frequência fundamental (rad/s) do arco articulado com o elemento MEFG E2 com partição da unidade cúbica.

Ângulos (graus)	2 níveis (18*)	4 níveis (30*)	6 níveis (42*)	8 níveis (54*)	THICK-2 (12*)	THICK-1 (606*)	E1. 1b (84*)
10	5868,9478	5831,4355	5831,3584	5831,3583	5841,74	5841,47	5874,30
20	2838,6152	2826,9173	2826,8682	2826,8681	2827,63	2827,56	2823,10
30	2338,0043	2336,2379	2336,2361	2336,2361	2339,82	2339,27	2345,20
60	562,4112	559,6993	559,6958	559,6958	560,25	560,14	561,20
90	232,5217	229,4647	229,4582	229,4582	229,66	229,62	230,40
120	118,0502	115,5549	115,5456	115,5456	115,64	115,63	116,30
150	66,2711	64,3929	64,3820	64,3820	64,43	64,43	64,93
180	39,2759	37,8402	37,8288	37,8287	37,86	37,86	38,24
210	23,9124	22,7625	22,7511	22,7511	22,77	22,78	23,05
240	14,6476	13,6636	13,6522	13,6522	13,66	13,68	13,87
270	8,8502	7,9285	7,9164	7,9164	7,92	7,95	8,06
300	5,1778	4,1963	4,1819	4,1818	4,18	4,23	4,27
330	2,9691	1,7137	1,6910	1,6909	1,69	1,78	1,73
350	2,1998	0,5492	0,4943	0,4940	0,49	0,72	0,50

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade.

Analizando os dois elementos de MEFG desenvolvidos se percebe que o MEFG E2 apresentou uma maior taxa de convergência em comparação com o MEFG E1. Na comparação com os resultados de referência se percebe que os dois elementos de MEFG apresentaram resultados menores, ou seja aparentemente mais precisos, que os obtidos com os elementos THICK-1 de Leung e Zhu (2004) e o E1. 1b de Krishnan e Suresh (1998), porém o elemento THICK-2 de Leung e Zhu (2004) apresenta, com apenas 12 graus de liberdade, resultados muito próximos aos obtidos com os dois elementos de MEFG desenvolvidos.

#### 4.2.3 Arco biapoiado com ângulo de abertura de 90°

Os dados do exemplo do arco espesso com ângulo de abertura de 90° aqui estudado podem ser encontrados em Einsenberger e Efraim (2001) e Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) e estão apresentados na Tabela 21. O esquema do arco é apresentado na Figura 42.



TABELA 21 – Dados do arco 90° biapoado.

Dados	Valor
Módulo de Elasticidade	70 GPa
Raio de curvatura	0,75 m
Massa Específica	2777 kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson	0,3
Fator de correção do cisalhamento	0,85
Área da Seção Transversal	4 m <sup>2</sup>
Momento de Inércia	0,01 m <sup>4</sup>

FONTE: o Autor (2019).

Em Einsenberger e Efraim (2001) e Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) é apresentado um parâmetro adimensional ( $C_n$ ) ao invés da frequência, o parâmetro é obtido pela Equação (4.2) apresentada anteriormente.

Em Einsenberger e Efraim (2001) o estudo é realizado utilizando o MEF com elemento finito de 3 graus de liberdade por nó e dois nós por elemento, não é informado quantos elementos foram utilizados nas análises. Em Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) é utilizado MEF com 10 elementos com 4 nós por elemento e 3 graus de liberdade por nó totalizando 44 graus de liberdade no total.

Nas Tabelas 22 e 23 são apresentadas as convergências dos 10 primeiros parâmetros adimensionais para o MEF E1 e MEF E2 respectivamente com 1 elemento finito.

TABELA 22 – 10 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° biapoado com o MEF E1.

Modo	2 níveis (18*)	4 níveis (30*)	6 níveis (42*)	8 níveis (54*)	Ref 1	Ref 2 (44*)
1	29,37551	29,27996	29,27990	29,27990	29,280	29,304
2	33,30563	33,30493	33,30492	33,30492	33,305	33,243
3	68,83937	67,12352	67,12352	67,12352	67,124	67,123
4	80,47276	79,97083	79,97081	79,97081	79,971	79,950
5	133,59291	107,85168	107,85111	107,85111	107,851	107,844
6	152,47795	143,66392	143,61754	143,61754	143,618	143,679
7	227,73503	156,78591	156,66557	156,66557	156,666	156,629
8	304,81366	193,55645	190,47711	190,47709	190,477	190,596
9	312,86477	225,86638	225,36120	225,36115	225,361	225,349
10	321,77082	280,13587	234,53334	234,52351	234,524	234,809

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) número de graus de liberdade; Ref 1 - Einsenberger e Efraim (2001); Ref 2 - Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008)

TABELA 23 – 10 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° biapoado com o MEFG E2.

Modo	1 nível (18*)	2 níveis (30*)	3 níveis (42*)	4 níveis (54*)	Ref 1	Ref 2 (44*)
1	29,29697	29,27992	29,27990	29,27990	29,280	29,304
2	33,32401	33,30499	33,30492	33,30492	33,305	33,243
3	68,96256	67,12356	67,12352	67,12352	67,124	67,123
4	80,43660	79,97092	79,97081	79,97081	79,971	79,950
5	131,05212	107,85119	107,85111	107,85111	107,851	107,844
6	152,50470	143,66200	143,61754	143,61754	143,618	143,679
7	227,70380	156,77669	156,66557	156,66557	156,666	156,629
8	304,81214	193,16522	190,47709	190,47709	190,477	190,596
9	309,79545	225,82320	225,36119	225,36115	225,361	225,349
10	318,93157	278,37539	234,53217	234,52351	234,524	234,809

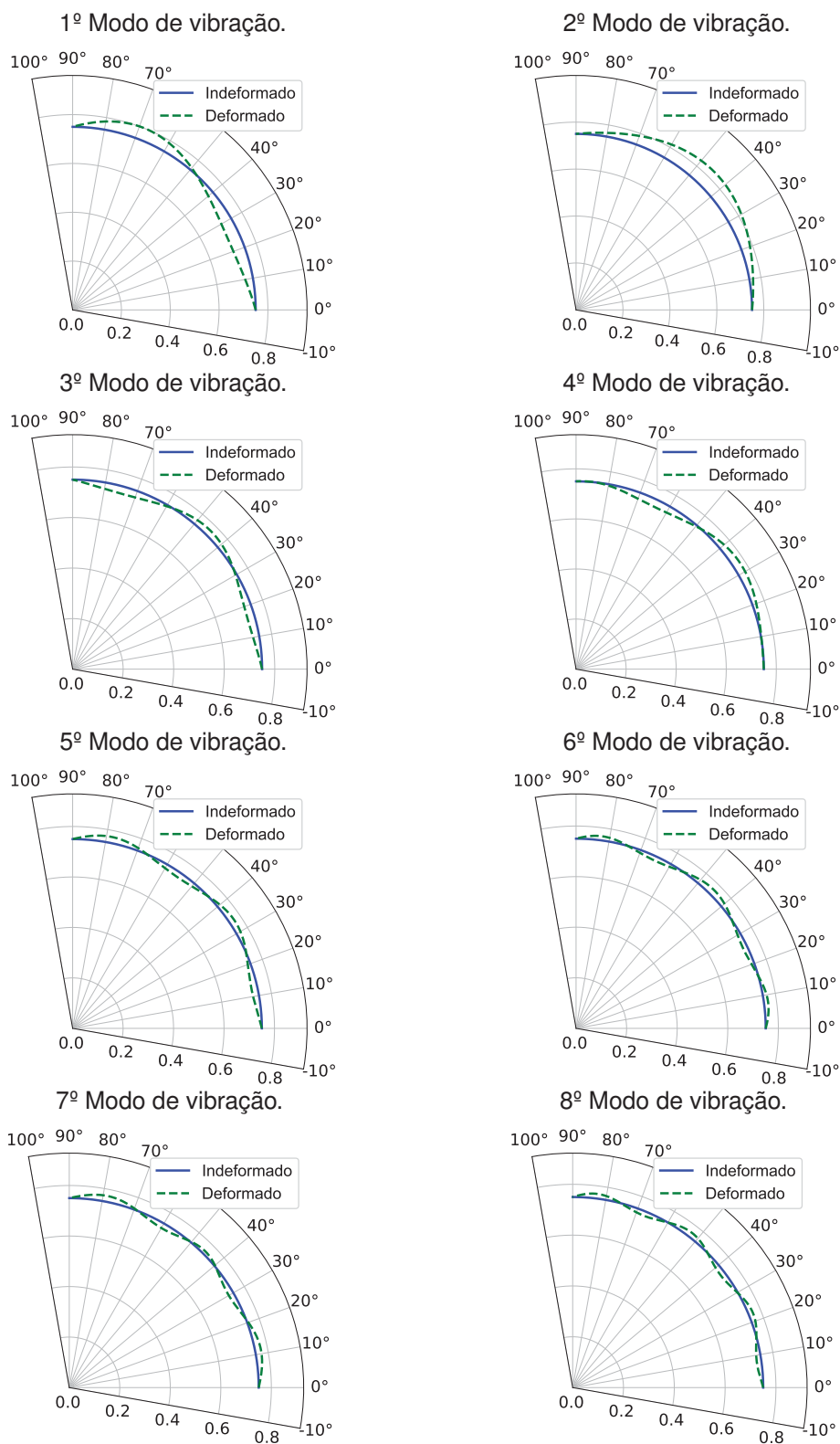
FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) número de graus de liberdade; Ref 1 - Einsenberger e Efraim (2001); Ref 2 - Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008)

Assim como no exemplo anterior o MEFG E2 apresentou resultados mais precisos que o MEFG E1 com número menor de níveis de enriquecimento. Os resultados do MEFG chegam a valores extremamente próximos aos obtidos em Einsenberger e Efraim (2001) e Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) o que acaba servindo como uma validação dos mesmos. Neste exemplo o modelo de Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) apresentou valores menores, portanto mais precisos, para a 2<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 9<sup>a</sup> frequências naturais.

Os 8 primeiros modos de vibração obtidos com MEFG E1 com 8 níveis de enriquecimento estão apresentados na Figura 48.

FIGURA 48 – Modos de Vibração do arco espesso biapoiado com ângulo de abertura igual a  $90^\circ$ .



FONTE: o Autor (2019)

Embora pareçam invertidos os modos são muito semelhantes aos apresentados em Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) portanto, validando os modos aqui obtidos.

#### 4.2.4 Arco biengastado com ângulo de abertura de $90^\circ$

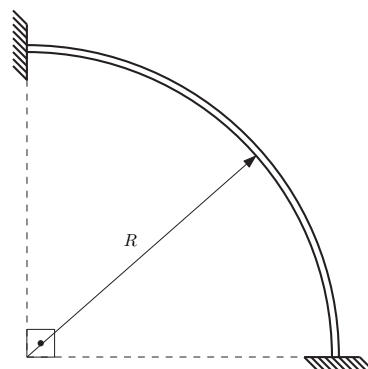
O arco aqui estudado tem propriedades retiradas dos trabalhos de Einsenberger e Efraim (2001) e Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008), com as propriedades físicas e geométricas apresentadas na Tabela 24 e o esquema do arco apresentado na Figura 49.

TABELA 24 – Dados do arco espesso  $90^\circ$  engastado.

Dados	Valor
Módulo de Elasticidade	70 GPa
Raio de curvatura	0,6366 m
Massa Específica	2777 kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson	0,3
Fator de correção do cisalhamento	0,85
Área da Seção Transversal	1 m <sup>2</sup>
Momento de Inércia	0,0016 m <sup>4</sup>

FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 49 – Esquema do arco biengastado.



FONTE: o Autor (2019).

Assim como no exemplo anterior, Einsenberger e Efraim (2001) e Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) apresentam o parâmetro adimensional  $C_n$  apresentado na Equação (4.2). Ao invés das frequências naturais, nas Tabelas 25 e 26 são mostradas as convergências dos 10 primeiros parâmetros para o MEF E1 e MEF E2 respectivamente com 1 elemento finito. As referências utilizam os mesmos elementos de MEF descritos no exemplo anterior

TABELA 25 – 10 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° engastado com o MEFG E1.

Modo	2 níveis (18*)	4 níveis (30*)	6 níveis (42*)	8 níveis (54*)	Ref 1	Ref 2 (44*)
1	36,72935	36,70221	36,70219	36,70219	36,703	36,657
2	42,41161	42,26315	42,26293	42,26293	42,264	42,289
3	85,20288	82,23165	82,23159	82,23159	82,233	82,228
4	90,86340	84,48906	84,48904	84,48904	84,491	84,471
5	161,84674	122,30335	122,30289	122,30289	122,305	122,298
6	167,23451	155,01386	154,94066	154,94066	154,945	154,998
7	241,63618	168,52165	168,19834	168,19834	168,203	168,174
8	338,73814	208,88817	204,46725	204,46723	204,472	204,599
9	354,41808	239,53494	238,98475	238,98467	238,992	238,973
10	384,12593	300,96222	249,02336	249,00551	249,011	249,320

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) número de graus de liberdade; Ref 1 - Einsenberger e Efraim (2001); Ref 2 - Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008)

TABELA 26 – 10 primeiros parâmetros  $C_n$  do arco 90° engastado com o MEFG E2.

Modo	1 nível (18*)	2 níveis (30*)	3 níveis (42*)	4 níveis (54*)	Ref 1	Ref 2 (44*)
1	36,70268	36,70219	36,70219	36,70219	36,703	36,657
2	42,40652	42,26331	42,26293	42,26293	42,264	42,289
3	85,13955	82,23229	82,23159	82,23159	82,233	82,228
4	91,31922	84,48916	84,48904	84,48904	84,491	84,471
5	161,88585	122,30360	122,30289	122,30289	122,305	122,298
6	164,61927	155,00814	154,94066	154,94066	154,945	154,998
7	241,60059	168,49447	168,19834	168,19834	168,203	168,174
8	332,38039	208,35466	204,46723	204,46723	204,472	204,599
9	354,44875	239,48818	238,98473	238,98467	238,992	238,973
10	384,14332	299,14140	249,02105	249,00551	249,011	249,320

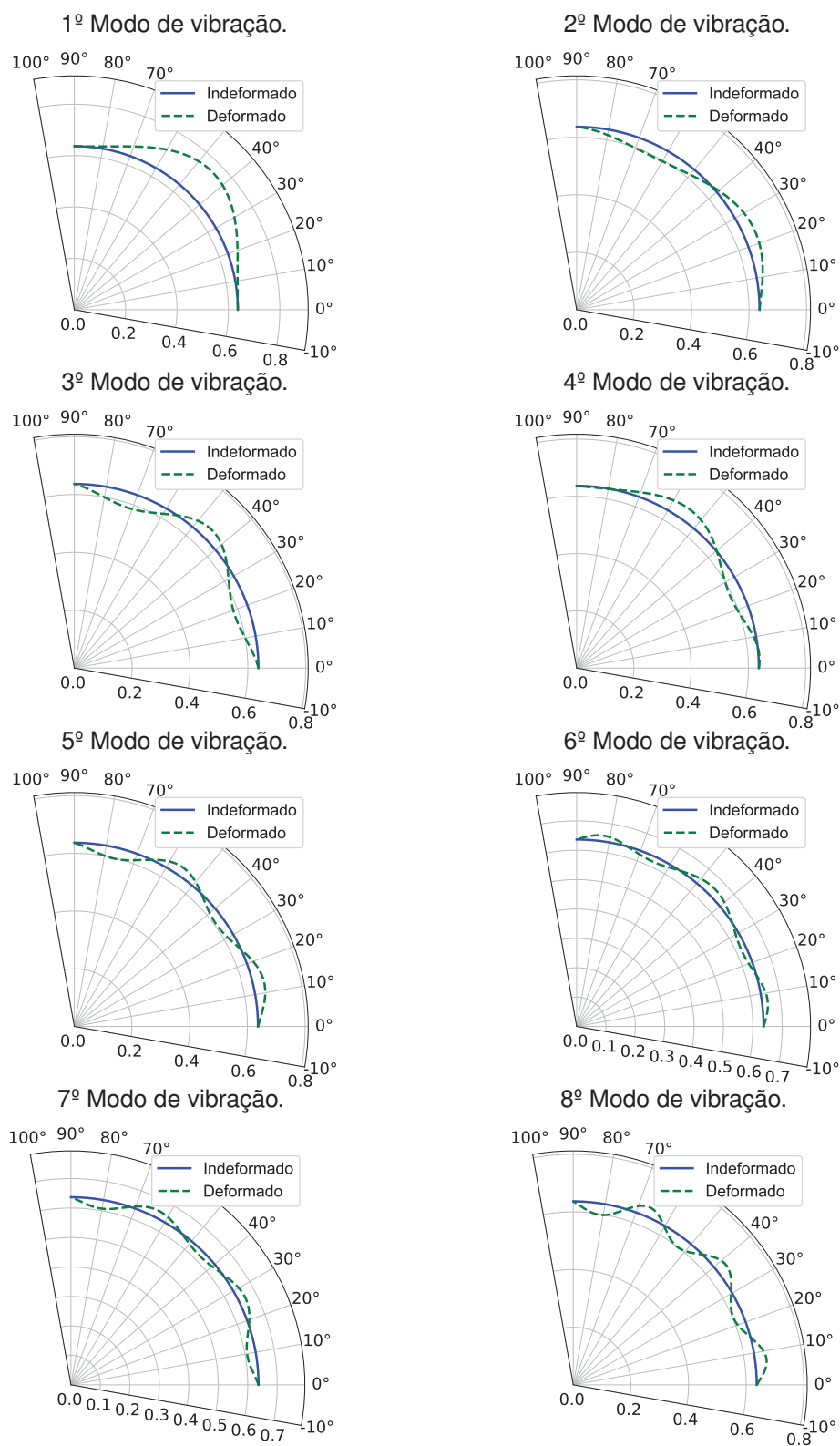
FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) número de graus de liberdade; Ref 1 - Einsenberger e Efraim (2001); Ref 2 - Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008)

Analisando os resultados dos elementos de MEFG propostos se percebe que elas são bem parecidas, porém o MEFG E2 apresenta resultados melhores já para os primeiros níveis de enriquecimento. Neste exemplo o modelo proposto por Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) chega em valores menores nas 5 frequências ímpares analisadas, mas os elementos de MEFG aqui propostos chegam a valores próximos.

Os 8 primeiros modos de vibração obtidos com MEFG E1 com 8 níveis de enriquecimento estão apresentados na Figura 50.

FIGURA 50 – Modos de Vibração do arco espesso biengastado com ângulo de abertura igual a  $90^\circ$ .

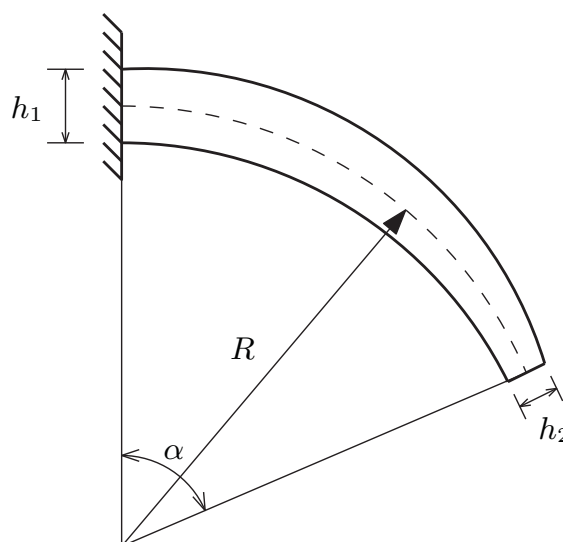


FONTE: o Autor (2019)

#### 4.2.5 Arco em balanço com seção variável

O arco estudado nesse exemplo possui uma extremidade engastada e a outra livre e a altura da seção transversal varia linearmente ao longo do comprimento do arco, conforme o esquema apresentado na Figura 51.

FIGURA 51 – Esquema do arco em balanço com seção variável



FONTE: o Autor (2019).

O arco possui a relação entre a altura da seção da extremidade em balanço ( $h_2$ ) e a extremidade engastada ( $h_1$ ) igual a  $h_2 = h_1/2$ . O fator de correção ao cisalhamento é igual a 0,83, o coeficiente de Poisson é igual a 0,3 e a seção transversal é retangular com espessura constante.

Foram analisados dois tipos de arcos, sendo eles possuindo a relação do comprimento do arco ( $L$ ) e o raio de giração da seção engastada ( $r_1$ ) de  $L/r_1 = 10$  e de  $L/r_1 = 20$ , onde o raio de giração é igual a  $r_1 = \sqrt{I_1/A_1}$ .

Os resultados obtidos com os modelos de MEFG propostos foram comparados com o elemento THICK-1 cujos resultados foram apresentados em Leung e Zhu (2004) e com resultados apresentados em Rossi e Laura (1993) e Raveendranath, Singh e Rao (2001).

Para a comparação dos resultados são obtidos os 3 primeiros parâmetros adimensionais ( $C_n$ ) obtidos pela Equação (4.2), utilizando a área e momento de inércia da extremidade engastada.

Nas Tabelas 27 e 28 são apresentadas as convergências dos 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para o MEFG E1 e MEFG E2 respectivamente para o ângulo  $\alpha$  igual a  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  e  $40^\circ$  e a relação  $L/r_1$  igual a 10.

TABELA 27 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEFG E1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e  $L/r_1 = 10$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
10°	2 níveis (18*)	3,56151	13,70025	28,95367
	4 níveis (30*)	3,56033	13,68618	28,88486
	6 níveis (42*)	3,56033	13,68616	28,88476
	8 níveis (54*)	3,56033	13,68616	28,88476
	THICK-1	3,562	13,70	28,92
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	2,575	13,65	28,62
	Rossi e Laura (1993)	3,552	13,69	29,05
20°	2 níveis (18*)	3,56773	13,48325	28,92451
	4 níveis (30*)	3,56644	13,46964	28,85590
	6 níveis (42*)	3,56644	13,46963	28,85579
	8 níveis (54*)	3,56644	13,46963	28,85579
	THICK-1	3,569	13,47	28,88
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,581	13,43	28,60
	Rossi e Laura (1993)	3,557	13,48	29,03
40°	2 níveis (18*)	3,59251	12,81625	28,83245
	4 níveis (30*)	3,59095	12,80321	28,76465
	6 níveis (42*)	3,59095	12,80319	28,76454
	8 níveis (54*)	3,59095	12,80319	28,76454
	THICK-1	3,596	12,77	28,75
	Rossi e Laura (1993)	3,579	12,84	28,98

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004)



TABELA 28 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEFG E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e  $L/r_1 = 10$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
10°	1 nível (18*)	3,56938	13,69007	28,91846
	2 níveis (30*)	3,56035	13,68621	28,88491
	3 níveis (42*)	3,56033	13,68616	28,88476
	4 níveis (54*)	3,56033	13,68616	28,88476
	THICK-1	3,562	13,70	28,92
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	2,575	13,65	28,62
	Rossi e Laura (1993)	3,552	13,69	29,05
20°	1 nível (18*)	3,57636	13,47423	28,88949
	2 níveis (30*)	3,56646	13,46967	28,85594
	3 níveis (42*)	3,56644	13,46963	28,85579
	4 níveis (54*)	3,56644	13,46963	28,85579
	THICK-1	3,569	13,47	28,88
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,581	13,43	28,60
	Rossi e Laura (1993)	3,557	13,48	29,03
40°	1 nível (18*)	3,60386	12,81005	28,79830
	2 níveis (30*)	3,59097	12,80323	28,76469
	3 níveis (42*)	3,59095	12,80319	28,76454
	4 níveis (54*)	3,59095	12,80319	28,76454
	THICK-1	3,596	12,77	28,75
	Rossi e Laura (1993)	3,579	12,84	28,98

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004).

Nesta primeira parte dos resultados se percebem taxas de convergência do MEFG E1 e MEFG E2 muito parecidas porém, diferentemente dos outros exemplos apresentados, o MEFG E1 apresenta precisão um pouco superior quando se incluem os primeiros níveis de enriquecimento.

Comparando os resultados com as soluções de referência se percebe que algumas vezes as soluções de referência apresentam resultados menores, como por exemplo, com o ângulo de abertura igual a 10° em que os resultados de Raveendranath, Singh e Rao (2001) são menores para os três parâmetros  $C_n$  estudados.

Nas Tabelas 29 e 30 são apresentadas as convergências dos 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para o MEFG E1 e MEFG E2, respectivamente, para o ângulo  $\alpha$  igual a 60°, 80° e 90° e ainda com a relação  $L/r_1$  igual a 10.

TABELA 29 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEFG E1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e  $L/r_1 = 10$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
60°	2 níveis (18*)	3,63373	12,05682	28,76997
	4 níveis (30*)	3,63204	12,04324	28,70374
	6 níveis (42*)	3,63204	12,04323	28,70363
	8 níveis (54*)	3,63204	12,04323	28,70363
	THICK-1	3,642	11,99	28,64
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,648	12,01	28,48
	Rossi e Laura (1993)	3,616	12,10	28,97
80°	2 níveis (18*)	3,69149	11,32707	28,87867
	4 níveis (30*)	3,69008	11,31188	28,81477
	6 níveis (42*)	3,69008	11,31187	28,81467
	8 níveis (54*)	3,69008	11,31187	28,81467
	THICK-1	3,705	11,24	28,71
	Rossi e Laura (1993)	3,667	11,38	29,11
90°	2 níveis (18*)	3,72673	10,98824	29,04998
	4 níveis (30*)	3,72562	10,97189	28,98701
	6 níveis (42*)	3,72561	10,97187	28,98691
	8 níveis (54*)	3,72561	10,97187	28,98691
	THICK-1	3,744	10,89	28,87
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,743	10,95	28,83
	Rossi e Laura (1993)	3,699	11,04	29,30

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004).

TABELA 30 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEFG E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e  $L/r_1 = 10$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
60°	1 nível (18*)	3,64840	12,05321	28,73783
	2 níveis (30*)	3,63207	12,04327	28,70377
	3 níveis (42*)	3,63204	12,04323	28,70363
	4 níveis (54*)	3,63204	12,04323	28,70363
	THICK-1	3,642	11,99	28,64
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,648	12,01	28,48
	Rossi e Laura (1993)	3,616	12,10	28,97
80°	1 nível (18*)	3,70874	11,32584	28,85034
	2 níveis (30*)	3,69011	11,31191	28,81480
	3 níveis (42*)	3,69008	11,31187	28,81467
	4 níveis (54*)	3,69008	11,31187	28,81467
	THICK-1	3,705	11,24	28,71
	Rossi e Laura (1993)	3,667	11,38	29,11
90°	1 nível (18*)	3,74460	10,98817	29,02425
	2 níveis (30*)	3,72565	10,97192	28,98704
	3 níveis (42*)	3,72561	10,97187	28,98691
	4 níveis (54*)	3,72561	10,97187	28,98691
	THICK-1	3,744	10,89	28,87
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,743	10,95	28,83
Rossi e Laura (1993)	3,699	11,04	29,30	

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004).

Na segunda parte dos resultados as taxas de convergências do MEFG E1 e MEFG E2 continuam bastante próximas, mas com o MEFG E1 possuindo resultados levemente menores, portanto mais precisos para os primeiros níveis de enriquecimento

Assim como para as análises com ângulos entre 10° e 40° o os resultados dos modelos de MEFG aqui propostos chegaram a valores extremamente próximos aos resultados de referência, porém em alguns casos os resultados de Rossi e Laura (1993), Raveendranath, Singh e Rao (2001) e Leung e Zhu (2004) foram menores.

Nas Tabelas 31 e 32 são apresentadas as convergências dos 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para o MEFG E1 e MEFG E2, respectivamente, para o ângulo  $\alpha$  igual a 10°, 20° e 40° e a relação  $L/r_1$  igual a 20.

TABELA 31 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEFG E1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e  $L/r_1 = 20$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
10°	2 níveis (18*)	3,75871	16,73911	39,59976
	4 níveis (30*)	3,75346	16,69719	39,43174
	6 níveis (42*)	3,75345	16,69715	39,43090
	8 níveis (54*)	3,75345	16,69715	39,43090
	THICK-1	3,757	16,72	39,49
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,766	16,71	39,32
	Rossi e Laura (1993)	3,743	16,66	39,47
20°	2 níveis (18*)	3,76563	16,58648	39,91723
	4 níveis (30*)	3,75992	16,54280	39,75861
	6 níveis (42*)	3,75991	16,54276	39,75784
	8 níveis (54*)	3,75991	16,54276	39,75783
	THICK-1	3,764	16,56	39,81
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,772	16,56	39,66
	Rossi e Laura (1993)	3,749	16,51	39,80
40°	2 níveis (18*)	3,79287	16,03566	41,21429
	4 níveis (30*)	3,78587	15,98502	41,07619
	6 níveis (42*)	3,78586	15,98497	41,07559
	8 níveis (54*)	3,78586	15,98497	41,07558
	THICK-1	3,792	16,00	41,11
	Rossi e Laura (1993)	3,775	15,96	41,13

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004).

TABELA 32 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEFG E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 10°, 20° e 40° e  $L/r_1 = 20$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
10°	1 nível (18*)	3,78852	16,70620	39,51100
	2 níveis (30*)	3,75353	16,69730	39,43195
	3 níveis (42*)	3,75345	16,69715	39,43091
	4 níveis (54*)	3,75345	16,69715	39,43090
	THICK-1	3,757	16,72	39,49
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,766	16,71	39,32
	Rossi e Laura (1993)	3,743	16,66	39,47
20°	1 nível (18*)	3,79859	16,55462	39,83749
	2 níveis (30*)	3,76000	16,54291	39,75878
	3 níveis (42*)	3,75991	16,54276	39,75784
	4 níveis (54*)	3,75991	16,54276	39,75783
	THICK-1	3,764	16,56	39,81
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,772	16,56	39,66
	Rossi e Laura (1993)	3,749	16,51	39,80
40°	1 nível (18*)	3,83694	16,00795	41,15923
	2 níveis (30*)	3,78596	15,98513	41,07629
	3 níveis (42*)	3,78586	15,98497	41,07559
	4 níveis (54*)	3,78586	15,98497	41,07558
	THICK-1	3,792	16,00	41,11
	Rossi e Laura (1993)	3,775	15,96	41,13

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004).

Por fim nas Tabelas 33 e 34 são apresentadas as convergências dos 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para o MEFG E1 e MEFG E2 respectivamente para o ângulo  $\alpha$  igual a 60°, 80° e 90° e ainda com a relação  $L/r_1$  igual a 20.

TABELA 33 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEFGE1, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e  $L/r_1 = 20$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
60°	2 níveis (18*)	3,83717	15,28068	43,29388
	4 níveis (30*)	3,82945	15,21883	43,15346
	6 níveis (42*)	3,82943	15,21877	43,15295
	8 níveis (54*)	3,82943	15,21877	43,15294
	THICK-1	3,837	15,23	43,17
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,842	15,23	43,13
	Rossi e Laura (1993)	3,817	15,20	43,23
80°	2 níveis (18*)	3,89794	14,45682	45,89923
	4 níveis (30*)	3,89116	14,38017	45,71140
	6 níveis (42*)	3,89115	14,38009	45,71087
	8 níveis (54*)	3,89115	14,38009	45,71087
	THICK-1	3,901	14,39	45,72
	Rossi e Laura (1993)	3,877	14,37	45,81
90°	2 níveis (18*)	3,93467	14,04925	47,30699
	4 níveis (30*)	3,92903	13,96419	47,06778
	6 níveis (42*)	3,92902	13,96411	47,06720
	8 níveis (54*)	3,92902	13,96411	47,06720
	THICK-1	3,940	13,97	47,06
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,942	13,97	47,06
	Rossi e Laura (1993)	3,913	13,95	47,19

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004).

TABELA 34 – 3 primeiros parâmetros  $C_n$  para arco em balanço com seção variável com o MEF E2, com ângulos ( $\alpha$ ) iguais a 60°, 80° e 90° e  $L/r_1 = 20$ .

Ângulo (graus)	Resultados	$C_1$	$C_2$	$C_3$
60°	1 nível (18*)	3,89502	15,25995	43,25936
	2 níveis (30*)	3,82956	15,21896	43,15351
	3 níveis (42*)	3,82944	15,21877	43,15295
	4 níveis (54*)	3,82943	15,21877	43,15294
	THICK-1	3,837	15,23	43,17
	Raveendranath, Singh e Rao (2001)	3,842	15,23	43,13
	Rossi e Laura (1993)	3,817	15,20	43,23
80°	1 nível (18*)	3,96688	14,44614	45,87936
	2 níveis (30*)	3,89129	14,38031	45,71142
	3 níveis (42*)	3,89115	14,38009	45,71088
	4 níveis (54*)	3,89115	14,38009	45,71087
	THICK-1	3,901	14,39	45,72
	Rossi e Laura (1993)	3,877	14,37	45,81
90°	1 nível (18*)	4,00659	14,04480	47,29315
	2 níveis (30*)	3,92916	13,96435	47,06779
	3 níveis (42*)	3,92902	13,96411	47,06720
	4 níveis (54*)	3,92902	13,96411	47,06720
	THICK-1	3,940	13,97	47,06
	Rossi e Laura (1993)	3,913	13,95	47,19

FONTE: o Autor (2019).

NOTA: (\*) - número de graus de liberdade; THICK-1 - Leung e Zhu (2004).

Observa-se para os arcos com relação  $L/r_1 = 20$  o mesmo padrão de comportamento dos métodos estudados.

Neste exemplo, apesar das soluções de referência serem melhores algumas vezes, os resultados obtidos pelos modelos propostos para MEF foram muito próximas das referências o que serve como validação dos modelos que foram propostos neste trabalho.

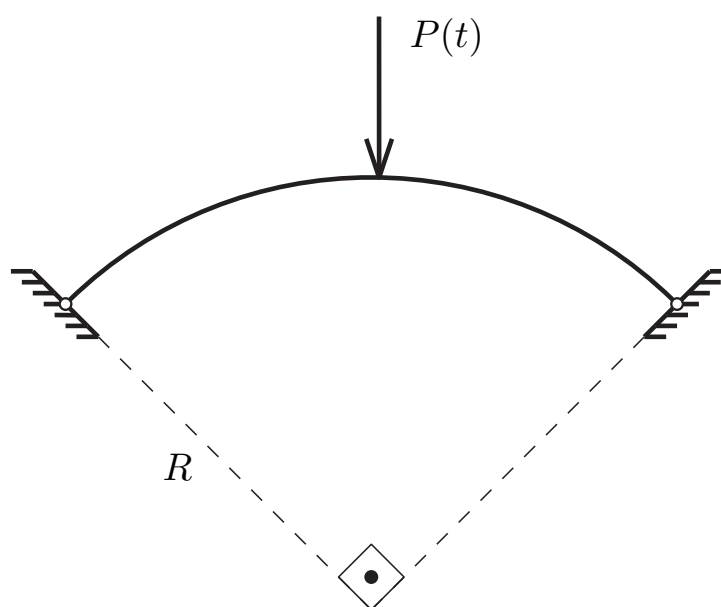
#### 4.3 ANÁLISE TRANSIENTE DE ARCOS

Na ausência de uma solução analítica ou até uma outra solução aproximada de referência na literatura, se optou por usar uma solução com malha refinada utilizando o MEF para arcos finos baseado no trabalho de Raveendranath, Singh e Pradhan (2000), onde se tem um elemento de 2 nós com 4 graus de liberdade por nó, como referência.

Nesta análise será usado o elemento de arco fino aqui denominado como MEFG - LC 1.

Os dados do arco são os mesmos apresentados na Tabela 24 e o esquema de mesmo é apresentado na Figura 52, o ponto de aplicação da carga é o centro do arco.

FIGURA 52 – Esquema do arco para a análise transiente.



FONTE: o Autor (2019).

Foram realizadas análises para dois carregamentos, um carregamento harmônico e uma carga tipo pulso retangular. Para o processo de integração no tempo foi utilizado o método de Newmark com aceleração constante conforme algoritmo disponível em Bathe (1996) e passo de tempo de 0,0001 segundos.

#### 4.3.1 Análise do Carregamento tipo Harmônico

Nesse caso, o carregamento ( $P(t)$ ), em Newton, será conforme a seguinte expressão:

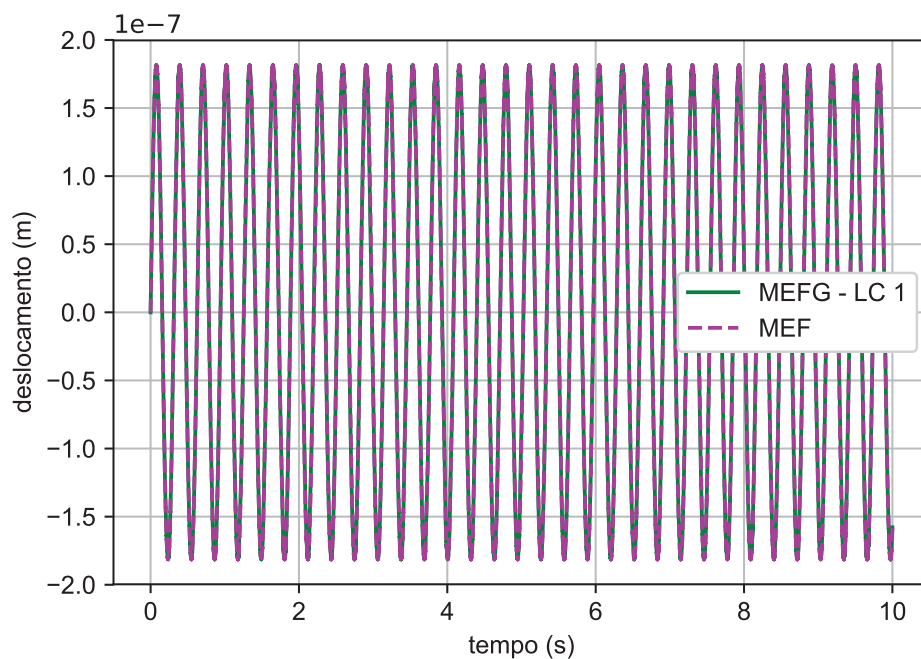
$$P(t) = 10000 \text{ sen}(20t), \quad (4.3)$$

com o tempo ( $t$ ) em segundos.

Nas Figuras 53, 54 e 55 são apresentados os deslocamentos, velocidades e acelerações ao longo tempo na direção radial no ponto de aplicação da força usando o MEFG - LC 1 e o MEF de referência. A malha de MEF utilizada é composta por 400 elementos finitos (1604 graus de liberdade) e a de MEFG com 2 elementos finitos e 6 níveis de enriquecimento (57 graus de liberdade).

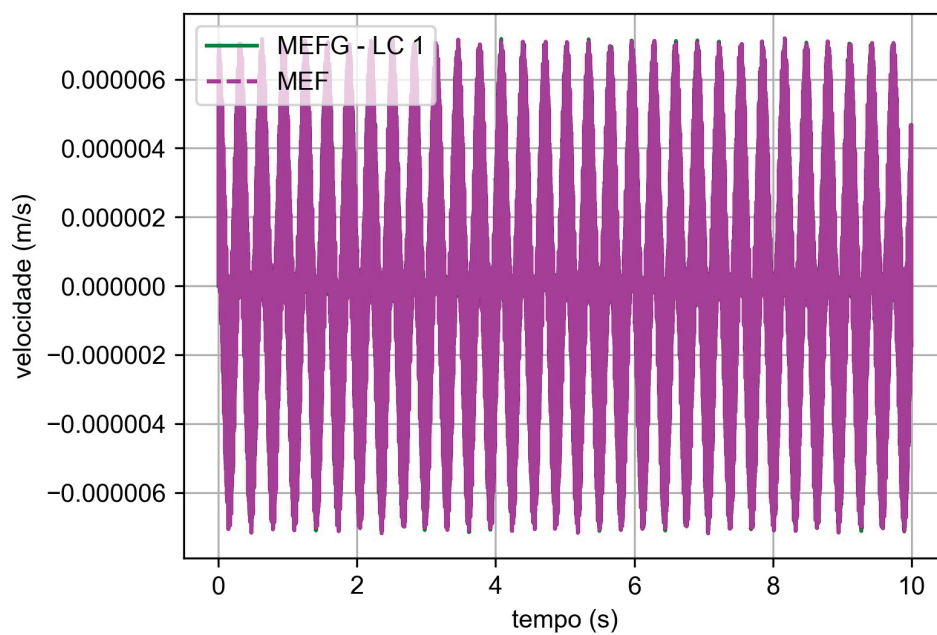


FIGURA 53 – Resposta de deslocamentos sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF.



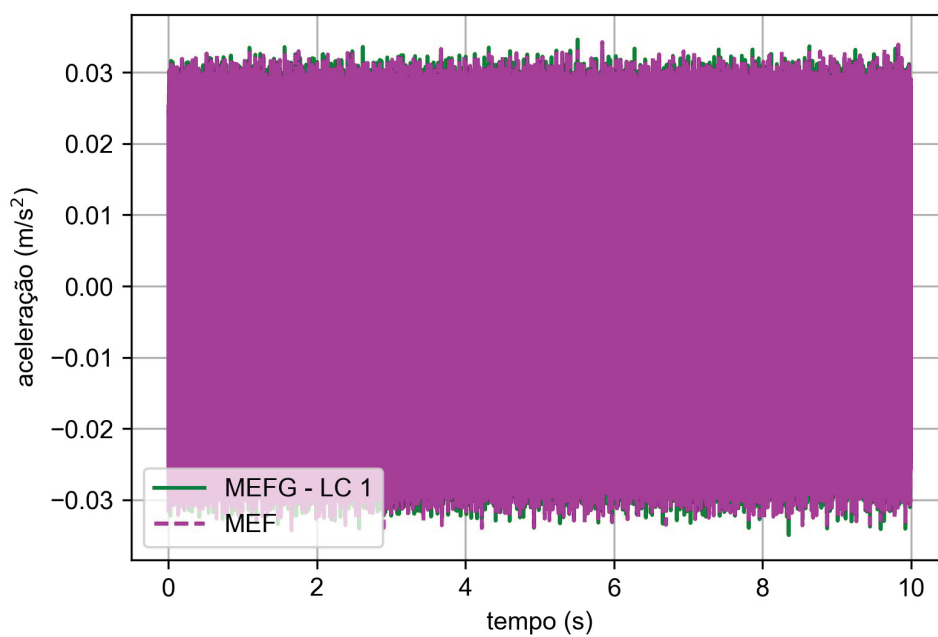
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 54 – Resposta de velocidade sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

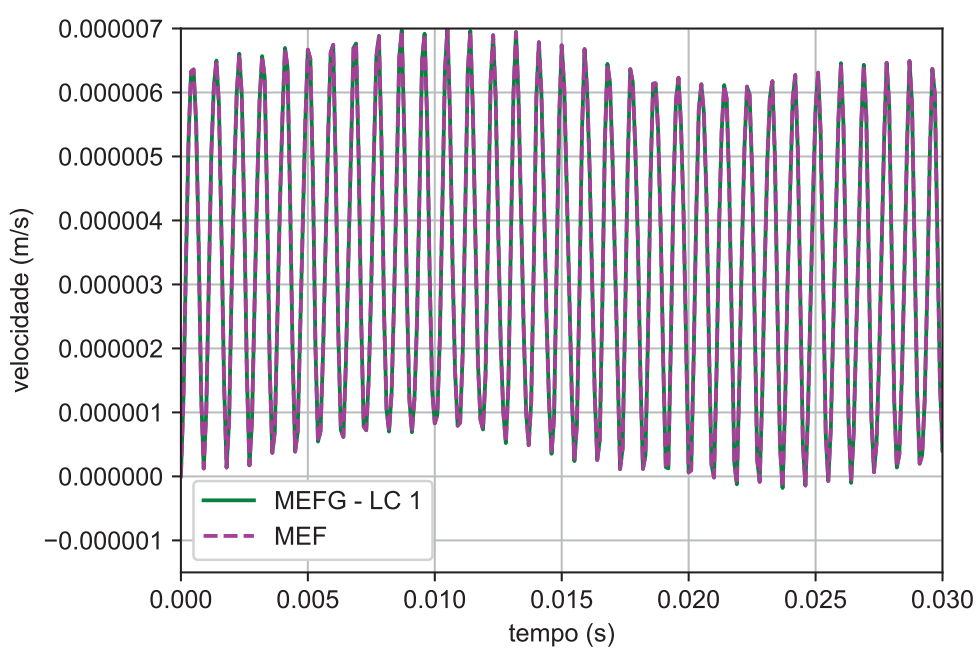
FIGURA 55 – Resposta de aceleração sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

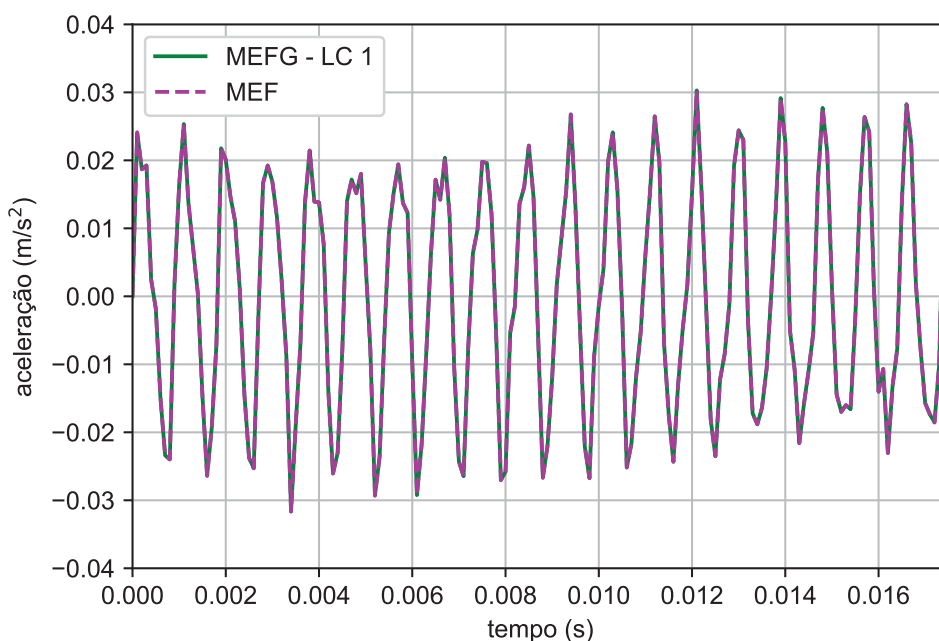
Como as resposta de velocidade aceleração foram altamente oscilatórias, nas Figuras 56 e 57 são apresentados o trecho inicial das análises para melhor visualização.

FIGURA 56 – Resposta de velocidade, trecho inicial, sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 57 – Resposta de aceleração, trecho inicial, sob força harmônica MEFG - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

Conforme pode-se observar os resultados tanto de deslocamentos, velocidades e acelerações do MEFG - LC 1 e do MEF foram extremamente próximos sendo que visualmente não se percebe diferença entre um e outro, lembrando que a análise com MEFG possui um número muito inferior de graus de liberdade.

#### 4.3.2 Carregamento tipo pulso retangular

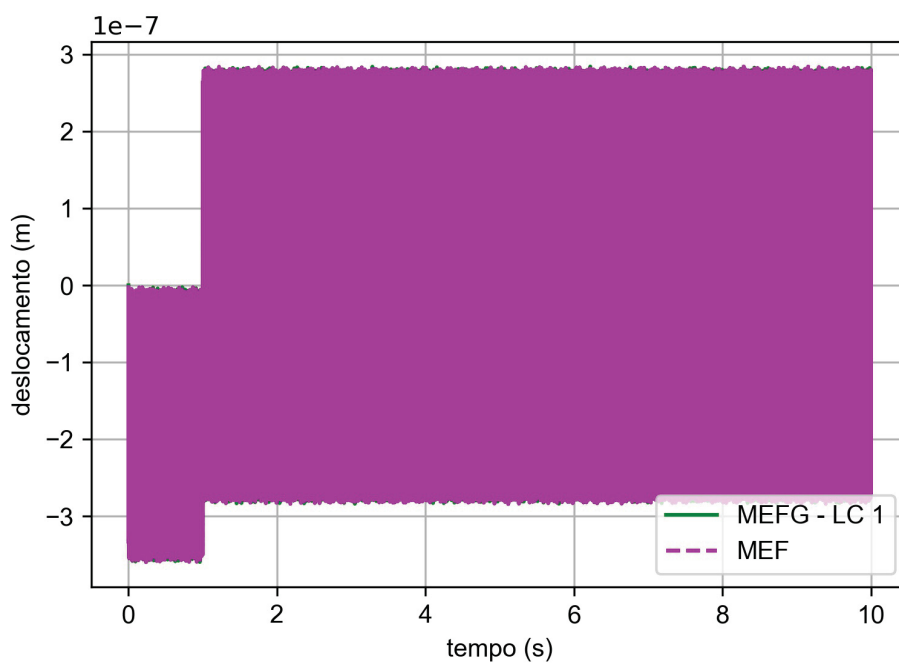
Nesse caso, o carregamento ( $P(t)$ ), em Newton, será conforme a seguinte expressão:

$$P(t) = \begin{cases} 10000, & \text{se } t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 1 \end{cases}, \quad (4.4)$$

com o tempo ( $t$ ) em segundos.

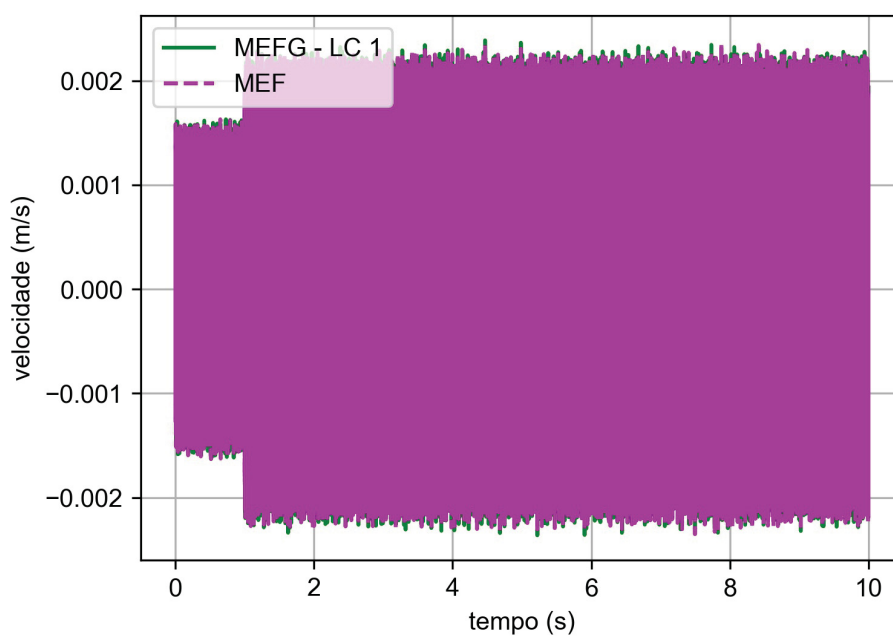
Nas Figuras 58, 59 e 60 são apresentados os deslocamentos, velocidades e acelerações ao longo tempo na direção radial no ponto de aplicação da força usando o MEFG - LC 1 e o MEF de referência. A malha de MEF utilizada é composta por 400 elementos finitos (1604 graus de liberdade) e a de MEFG com 2 elementos finitos e 6 níveis de enriquecimento (57 graus de liberdade).

FIGURA 58 – Resposta de deslocamentos sob força tipo impulso retangular MEF - LC 1 x MEF.



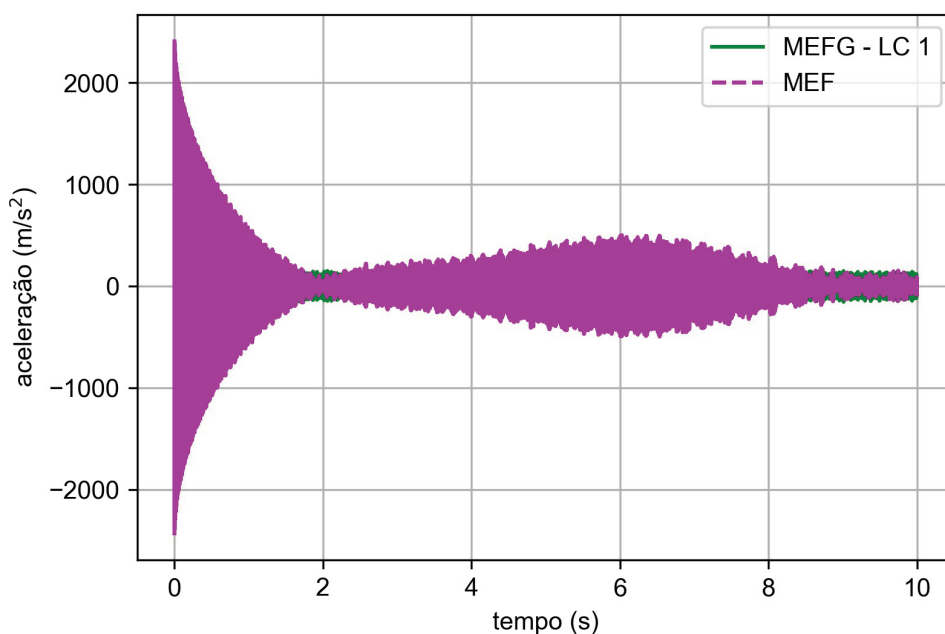
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 59 – Resposta de velocidade sob força tipo impulso retangular MEF - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

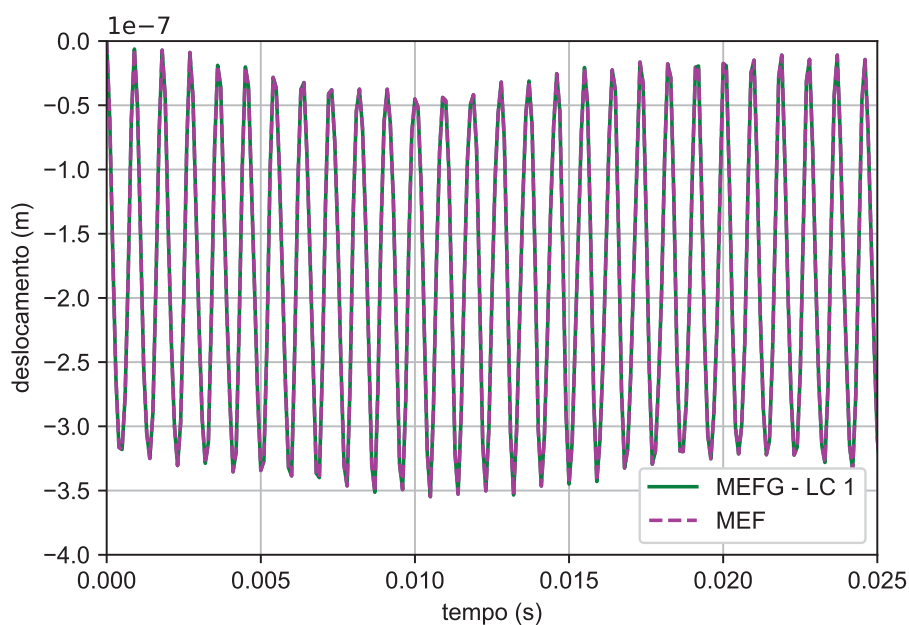
FIGURA 60 – Resposta de aceleração sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

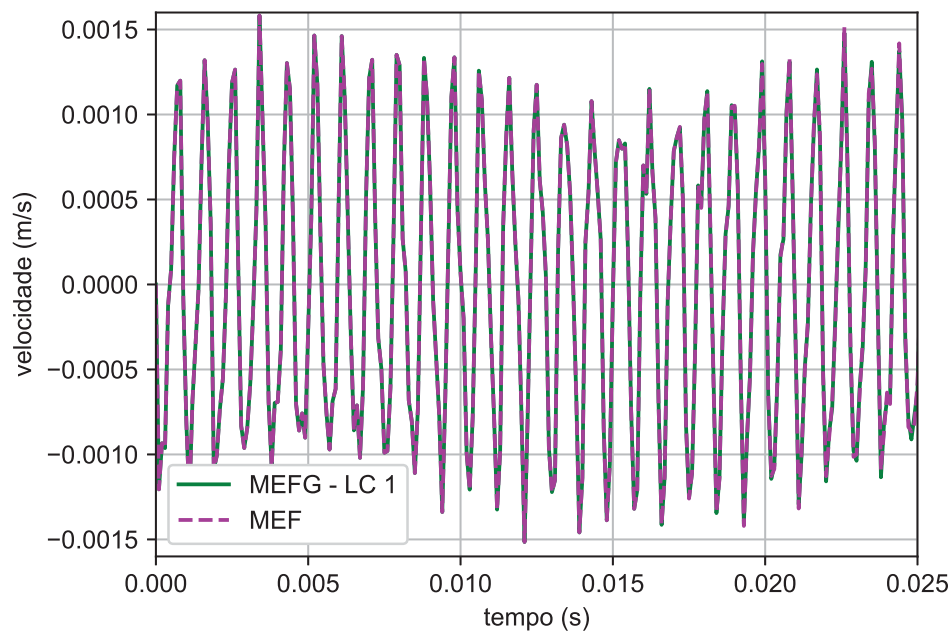
Como os resultados de deslocamentos, velocidade e acelerações foram altamente oscilatórios nas Figuras 61, 62 e 63 são apresentados os resultados no início da análise.

FIGURA 61 – Resposta de deslocamentos, trecho inicial, sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF.



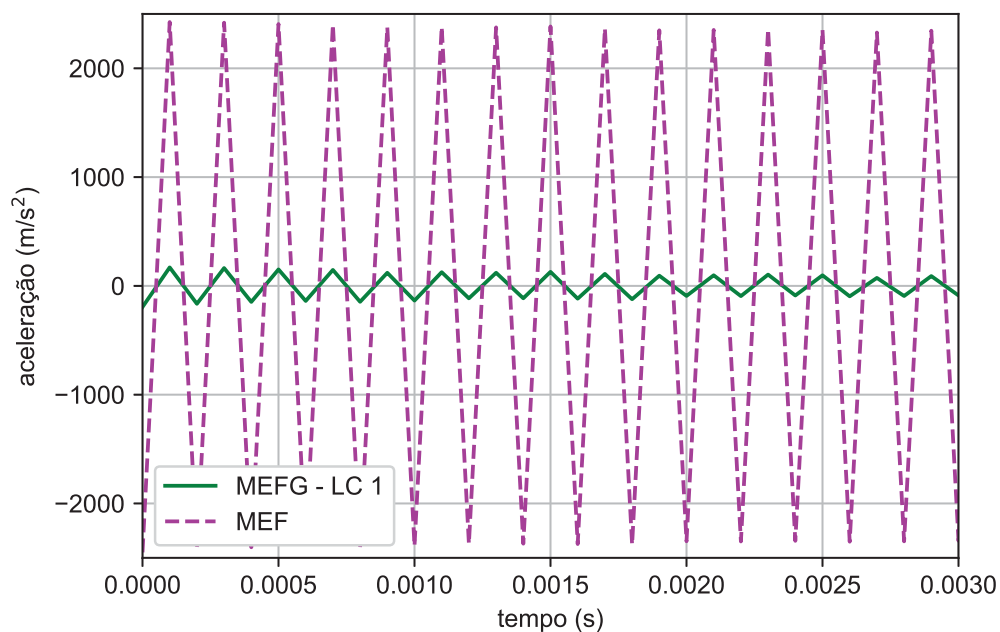
FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 62 – Resposta de velocidade, trecho inicial, sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

FIGURA 63 – Resposta de aceleração, trecho inicial, sob força tipo impulso retangular MEFG - LC 1 x MEF.



FONTE: o Autor (2019).

Neste exemplo as respostas de deslocamentos e velocidades na comparação entre o MEF - LC 1 e o MEF foram muito próximas, sendo visualmente difícil apontar diferenças entre os dois porém, a resposta de acelerações foi bastante diferente, indicando que é necessário um maior refinamento para o MEF no caso do carregamento tipo impulso.

## 5 CONCLUSÕES

No presente trabalho foram apresentados duas formulações matemáticas para elementos de arcos, na análise dinâmica, e alternativas de funções de forma, funções de enriquecimento e partição da unidade para utilizar no MEFG resultando em 4 elementos de MEFG para arcos finos e 2 elementos de MEFG para arcos espessos. Para validação dos resultados, os mesmos foram comparados com soluções referência presentes na literatura ou modelos utilizando malhas refinadas.

Na vibração livre, os resultados demonstraram a eficácia dos elementos de MEFG desenvolvidos principalmente nos elementos de arcos finos, que apresentaram taxas de convergência superiores a métodos propostos em outros trabalhos. Os elementos MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 apresentaram os melhores resultados nas análises. Cabe ressaltar que no exemplo em que se possuía solução analítica de referência, apesar dos elementos de MEFG propostos apresentarem maior taxa de convergência, os elementos de Leung e Zhu (2004) apresentam um espectro de frequências com uma faixa maior de frequências com baixos erros.

Um ponto a se ressaltar com relação aos MEFG - LC 1 e MEFG - CC 2 é que, assim como todos os elementos de MEFG, o número de condição cresce de maneira muito acentuada a medida que se acrescentam mais níveis de enriquecimento, por isso deve-se tomar cuidado com o mau condicionamento do problema, não sendo recomendado enriquecer os elementos com mais do que 5 ou 6 níveis. O uso de partição da unidade cúbicas acabou não representando grandes ganhos em comparação com a partição da unidade linear, por isso utilizou-se a partição da unidade linear para os elementos de MEFG de arco fino.

No caso dos elementos de arco espesso todos os resultados foram extremamente próximos às soluções de referência da literatura, porém por vezes alguns métodos aparentemente apresentaram uma precisão melhor com menos graus de liberdade. Por não haver soluções analíticas como referência não se pode fazer uma análise do erro do espectro de frequências e sim apenas das primeiras frequências que são apresentadas em outros trabalhos.

O uso da partição da unidade cúbica acabou apresentando pequenos ganhos para o MEFG E2 e por isso foi adotada para este elemento. O MEFG E1 acabou apresentando melhores ganhos com a partição da unidade linear e por ela foi adotada.

Os dois elementos de MEFG de arco espessos denominados como MEFG E1 e MEFG E2 apresentaram boa convergência e resultados muito parecidos e evolução do número de condição da matriz de massa muito próximos entre si, por isso é difícil



apontar o melhor entre eles. Para evitar o mau condicionamento do problema não é recomendado enriquecer mais que 6 níveis o MEFG E1 e mais que 3 níveis o MEFG E2.

Na análise transiente, foi utilizado o elemento MEFG - LC 1 comparado com elemento de MEF com malha refinada e dois tipos de carregamento; harmônico e tipo impulso retangular. No carregamento harmônico as respostas de deslocamento, velocidade e aceleração foram extremamente próximas entre o MEF e o MEFG. No carregamento tipo impulso retangular as respostas de deslocamento e velocidade foram muito próximas, porém as respostas de aceleração ainda necessitariam de um maior refino para o MEFG.

## 5.1 SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

Como sugestões de continuidade do trabalho propõe-se as seguintes alternativas:

- Estudar a aplicação do MEFG adaptativo para arcos;
- Estudo da utilização de outras partições da unidade para a construção das funções de forma enriquecidas;
- Estudo de técnicas de estabilização numérica do MEFG para arcos;
- Estudar outras funções de enriquecimento para arcos espesso;
- Desenvolver formulações de MEFG para cascas;
- Estudar a utilização a técnica de Debella (2018) para se reduzir a matriz modal para a análise transiente.

## REFERÊNCIAS

- ABRATE, S. Vibration of non-uniform rods and beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 4, p. 703–716, 1995.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. 2009. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. Accurate assessment of natural frequencies for uniform and non-uniform Euler-Bernoulli beams and frames by adaptive generalized finite element method. **Engineering Computations**, n. 33, p. 1586–1609, 5 2016.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 6, p. 659–672, 2010.
- AUCIELLO, N. M.; DE ROSA, M. A. Free Vibrations of circular arches: a review. **Journal of Sound and Vibration**, v. 4, n. 176, p. 433–458, 1994.
- BABUSKA, I.; ANDERSSON, B.; GUO, B.; MELENK, J. M.; OH, H. S. Finite element method for solving problems with singular solutions. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 74, p. 51–70, 1996.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Generalized finite element methods: main ideas, results, and perspective. **International Journal of Computational Methods**, v. 1, n. 67, p. 67–103, 2004.
- BABUSKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, p. 945–981, 4 1994.
- BABUSKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.
- BARDELL, N. S. An engineering application of the h-p version of the finite element method to the static analysis of a Euler-Bernoulli beam. **Computers & Structures**, v. 59, n. 2, p. 195–211, 1996.
- BATHE, K. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- BREBBIA, C.; NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 2, n. 4, p. 228–233, 1983.

- CAMPION, S. D.; JARVIS, J. L. An investigation of the implementation of the p-version finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 23, p. 1–21, 1996.
- CARRER, J.; MANSUR, W. Stress and velocity in 2D transient elastodynamic analysis by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 3, p. 233–245, 1999.
- CHIN, E. B.; LASSERRE, J. B.; SUKUMAR, N. Modeling crack discontinuities without element-partitioning in the extended finite element method. **International Journal of numerical methods in engineering**, v. 110, p. 1021–1048, 2017.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- COTTRELL, J. A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 5257–5296, 2006.
- CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: an Introduction to Computer Methods**. New York: John Wiley, 1981.
- DAWE, D. J. Numerical studies using circular arch finite elements. **Computers and Structures**, v. 4, p. 729–740, 1974.
- DEBELLA, L. B. C. **Análise Dinâmica Transiente pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná.
- DUARTE, C. A. M.; BABUSKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers and Structures**, v. 77, p. 215–232, 2000.
- DUARTE, C. A. M.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237–262, 1996.
- EINSENBURGER, M.; EFRAIM, E. In-plane vibrations of shear deformable curved beams. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 52, p. 1221–1234, 2001.
- ENGELS, R. C. Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 114, p. 3–9, 1992.
- FRIES, T. P.; BELTYSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, p. 253–304, 2010.
- GANESAN, N.; ENGELS, R. C. Hierarchical Bernoulli-Euler beam finite elements. **Computers & Structures**, v. 43, n. 2, p. 297–304, 1992.

GAUL, L.; KOGL, M.; WAGNER, M. **Boundary Element Methods for Engineers and Scientists**. Berlin: Springer, 2003.

HOU MAT, A. An alternative hierarchical finite elemento formulation applied to plate vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 206, n. 2, p. 201–215, 1997.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135–4195, 2005.

HULL, A. J.; PEREZ, D.; COX, D. L. An analytical model of a curved beam with a T shaped cross section. **Journal of Sound and Vibration**, v. 416, p. 29–54, 2018.

KERGRENE, K.; BABUSKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method and associated iterative chemes; application to interface problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 305, p. 1–36, 2016.

KRISHNAN, A.; SURESH, Y. J. A simple cubic linear elemento for static and free vibration analyses of curved beams. **Computers and Structures**, v. 68, p. 473–489, 1998.

KUMAR, B. M.; SUJITH, R. I. Exact solutions for the longitudinal vibration of nonuniform rods. **Journal of Sound and Vibration**, v. 207, n. 5, p. 721–729, 1997.

LEISSA, A. W.; QATU, M. S. **Vibrations of Continuous Systems**. [S.I.]: McGraw-Hill, 2011.

LEUNG, A. Y. T. Integration of beam functions. **Computers & Structures**, v. 29, n. 6, p. 1087–1094, 1988.

LEUNG, A. Y. T.; CHAN, J. K. W. Fourier p-Element for the analysis of beam and plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 212, n. 1, p. 179–185, 1998.

LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B. Fourier p-elements for curved beam vibrations. **Thin-Walled Structures**, v. 42, p. 39–57, 2004.

LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B.; ZHENG, J.; YANG, H. Analytic trapezoidal Fourier p element for vibrating plane problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, p. 67–81, 2004.

LI, Q. S. Exact solutions for free longitudinal vibration of stepped non-uniform rods. **Applied Acoustics**, v. 60, p. 13–28, 2000.

LUU, A. T.; KIM, N.; LEE, J. NURBS-based isogeometric vibration analysis of generally laminated deep curved beams with variable curvature. **Composite Structures**, v. 119, p. 150–165, 2015.

MALACARNE, M. F. **O Indicador de Erro de Friberg Empregado no Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica de Estruturas**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná.

MALEKAN, M.; SILVA, L. L.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, S. L. S. Two-dimensional fracture modeling with the generalized/extended finite element method: An object-oriented programming approach. **Advances in Engineering Software**, v. 115, p. 168–193, 2018.

MATHISEN, K. M.; BAZILEVS, Y.; HAUGEN, B.; HELGEDAGSRUD, T. A.; KVAMSDAL, T.; OKSTAD, K. M.; RAKNES, B. A Comparative Study of Beam Element Formulations for Nonlinear Analysis: Corotational vs Geometrically Exact Formulations. **National Conference on Computational Mechanics**, 2017.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. Approximation with Harmonic and Generalized Harmonic Polynomials in the Partition of Unity Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 4, p. 607–632, 1997.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 289–314, 1996.

MOES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, p. 131–150, 1993.

ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, p. 117–126, 1998.

PAN, K. Q.; LIU, J. Y. Geometric nonlinear dynamic analysis of curved beams using curved beam element. **Acta Mechanica Sinica**, v. 27, n. 6, p. 1023–1033, 2011.

PASK, J. E.; SUKUMAR, N. Partition of unity finite element method for quantum mechanical materials calculations. **Extreme Mechanics Letters**, v. 11, p. 8–17, 2016.

PETROLI, T. **Condicionamento do Problema de Autovalores Obtido do Método dos Elementos Finitos Generalizados na Dinâmica de Estruturas**. 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná.

PETYT, M.; FLEISCHER, C. C. Free vibration of a curved beam. **Journal of Sound and Vibration**, v. 18, n. 1, p. 1–30, 1971.

PIEADADE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B. Generalized Finite Element Method in linear and nonlinear structural dynamic analyses. **Engineering Computations**, v. 33, p. 806–830, 3 2016.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. **Python**<sup>®</sup>: Language Reference. [S.l.: s.n.], 2018. Disponível em: <<https://www.python.org/>>.

RAJ, A.; SUJITH, R. I. Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods. **Journal of Sound and Vibration**, v. 283, p. 1018–1030, 2005.

RAUEN, M. **Análise Isogeométrica Aplicada aos Problemas de Vibração Livre na Mecânica das Estruturas**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná.

RAVEENDRANATH, R.; SINGH, G.; PRADHAN, B. A Two-Noded Locking-Free Shear Flexible Curved Beam Element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 44, p. 265–280, 1999.

RAVEENDRANATH, R.; SINGH, G.; PRADHAN, B. Free vibration of arches using a curved beam element based on a coupled polynomial displacement. **Computers and Structures**, v. 78, p. 583–590, 2000.

RAVEENDRANATH, R.; SINGH, G.; RAO, G. V. A three-noded shear-flexible curved beam element based on coupled displacement field interpolations. **Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 51, p. 85–101, 2001.

REN, X.; GUAN, X. Three dimensional crack propagation through mesh-based explicit representation for arbitrarily shaped cracks using the extended finite element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 177, p. 218–238, 2017.

ROSSI, R. E.; LAURA, P. A. A. Dynamic stiffening of an arch clamped at one end and free at the other. **Journal of Sound and Vibration**, v. 160, p. 190–192, 1993.

SABIR, A. B.; AAHWELL, D. G. A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 18, n. 4, p. 555–563, 1971.

SHANG, H. Y. Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 7012–7033, 2016.

SHANG, H. Y.; MACHADO, R. D.; ABDALLA FILHO, J. E. Dynamic analysis of Euler–Bernoulli beam problems using the Generalized Finite Element Method. **Computers and Structures**, n. 173, p. 109–122, 2016.

SOLÍN, P.; SEGETH, K.; DOLEZEL, I. **Higher-Order Finite Element Methods**. [S.l.]: CRC Press, 2004.

TIMOSHENKO, S. **Vibration Problems in Engineering**. New York: Van Nostrand, 1955.

TORII, A. J. **Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, n. 3, p. 1–31, 2012.

WEINHARDT, P. O. **Estudo da Estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica**. 2016. Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal do Paraná.

WEINHARDT, P. O.; DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. GFEM stabilization techniques applied to dynamic analysis of non-uniform section bars. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 11, p. 64–84, 2018.

WROBEL, L.; ALIABADI, M. **The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures**. Chichester: Wiley, 2002.

WU, J. S.; LIN, F. T.; SHAW, H. J. Free in-plane vibration analysis of a curved beam (arch) with arbitrary various concentrated elements. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 7588–7610, 2013.

YANG, F.; SEDAGHATI, R.; ESMAILZADEH, E. Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 318, p. 850–867, 2008.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C0 element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 619–658, 1998. a.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part II: C1 element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 659–696, 1998. b.

ZENG, P. Introduction to composite element method for structural analysis in engineering. **Key Engineering Materials**, v. 145-149, p. 185–190, 1998. c.