UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

WILLIAM SFORZA

RESOLUÇÕES MATRICIAIS DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS LINEARES: ESTENDENDO O QUE FOI VISTO NO PROFMAT

CURITIBA

2019

WILLIAM SFORZA

RESOLUÇÕES MATRICIAIS DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS LINEARES: ESTENDENDO O QUE FOI VISTO NO PROFMAT

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Renato Ramos Barbosa

CURITIBA

2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S523r Sforza, William
Resoluções matriciais de equações a diferenças lineares [Recurso eletrônico] / William Sforza – Curitiba, 2019.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: José Renato Ramos Barbosa

1. Problemas de valor inicial. 2. Equações diferenciais. 3. Matemática discreta. I. Universidade Federal do Paraná. II. Barbosa, José Renato Ramos. III. Título.

CDD: 515.62

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **WILLIAM SFORZA** intitulada: **Resoluções Matriciais de Equações a Diferenças Lineares: Estendendo o que foi Visto no PROFMAT**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 25 de Março de 2019.

JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

PATRICIA SANEZ PACHECO
Avaliador Externo (UTFPR)

ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Avaliador Interno (UFPR)

RESUMO

O presente trabalho apresenta alguns métodos de resolução de equações a diferenças finitas lineares, que também são conhecidas por recorrências lineares. Inicialmente, faz-se uma revisão do processo resolutivo de recorrências de primeira e segunda ordens da forma como costumam ser estudadas em disciplinas de matemática discreta. Na sequência, com a introdução de elementos de Álgebra Linear, são apresentados métodos que possibilitam resolver recorrências lineares de qualquer ordem, utilizando sua forma matricial. Primeiro é estudado o caso da recorrência ser do tipo homogênea e, a seguir, estende-se a teoria para as equações não homogêneas. Também são apresentados exemplos que ilustram como se dá a resolução de problemas de valor inicial utilizando a teoria apresentada. Por fim, é feita uma análise do que ocorre ao calcularmos uma grande quantidade de termos de uma recorrência, por meio do Teorema do Comportamento Assintótico e sua aplicação através do método de iterações de potências.

Palavras-chave: Recorrências. Equações a diferenças. Matemática discreta. Sequências. Problema de Valor Inicial.

ABSTRACT

The present work presents some methods of solving equations to linear finite differences, which are also know as linear recurrences. Initially, it is made a review of the resolving process of first and second order recurrences as they are usually studied in discrete mathematics disciplines. Then, with the introduction of Linear Algebra elements, methods are presented that solving linear recurrences of any order, using their matrix form. First, is considered the case of recurrences to be the homogeneous type, and then the theory is extended to non homogeneous equations. Also given are examples that illustrate how to solve initial value problems using the theory presented. Finally, an analysis is made of what happens when we calculate a large number of terms of a recurrence, through the Asymptotic Behavior Theorem and its application through the method of power iterations.

Keywords: Recurrences. Differences Equations. Discrete mathematics. Sequences. Initial value problem.

SUMÁRIO

1 Introdução

Existem muitas sequências que são definidas recursivamente, isto é, por recorrência. Uma das mais conhecidas é a sequência de Fibonacci, que foi apresentada pelo matemático italiano Leonardo Pisano, no ano de 1202 [7] (CULL, 2005). Pisano, que também era conhecido como Fibonacci, propôs o seguinte problema: um casal de coelhos gera mensalmente um casal de coelhos, que se tornam adultos dois meses após o nascimento. Considerando os coelhos imortais, quantos casais serão gerados no mês n?

Para resolver, Fibonacci considerou que nos dois primeiro mêses é gerado um casal de coelhos em cada mês, e, a partir do terceiro mês, o número de casais gerados é dado pela equação

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

para n inteiro maior que 2. Tal sequência é conhecida como sequência de Fibonacci.

Nesse trabalho serão apresentados métodos para resolver equações desse tipo através dos métodos tradicionalmente vistos em cursos de Matemática Discreta, como o do PROFMAT, e também outros métodos utilizando a forma matricial e Álgebra Linear, que permitem uma análise mais completa de tais equações.

2 Recorrências

Apenas por uma questão de completude e comparação, estudaremos neste capítulo as equações a diferenças finitas considerando a abordagem que é adotada no PROFMAT, na disciplina MA12, logo no primeiro semestre do curso. Para isso, foi considerada como principal referência a parte do livro [1] (LIMA, 2006) que trata das recorrências e que norteia a bibliografia usada nas aulas do PROFMAT.

Inicialmente será mostrado o que são sequências definidas recursivamente e apresentados alguns exemplos. Depois trataremos das resoluções de recorrências lineares de primeira e segunda ordens.

2.1 Sequências Definidas Recursivamente

Uma sequência é definida recursivamente, ou por recorrência, quando podemos determinar qualquer termo através do(s) antecessor(es) imediato(s). O número de termos anteriores necessários para obter o próximo é chamado de ordem da recorrência.

Exemplo 1. Podemos definir a sequência (x_n) dos números naturais ímpares por

$$x_{n+1} = x_n + 2 \quad (n \geq 1), \quad x_1 = 1.$$

Exemplo 2. A sequência (F_n), chamada de sequência de Fibonacci, cujos termos são $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ e na qual cada termo é a soma dos dois anteriores, é definida por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0), \quad F_0 = F_1 = 1.$$

Observe que apenas a recorrência não define uma sequência. No exemplo 1 anterior, $x_{n+1} = x_n + 2$ é satisfeita por qualquer progressão aritmética de razão 2. Para que tenhamos a sequência dos números ímpares, como desejado, precisamos conhecer o primeiro termo $x_1 = 1$.

Quando cada termo de uma sequência é definido em função do seu antecessor imediato, como no exemplo 1, dizemos que a recorrência é de *primeira ordem*. Já no exemplo 2 temos uma recorrência de *segunda ordem*, pois cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos.

Quando a recorrência não possuir termos independentes de x_n dizemos que é uma recorrência *homogênea*. Caso contrário, é uma recorrência *não homogênea*. A seguir veremos métodos para resolver recorrências de primeira e segunda ordem.

2.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Uma recorrência de primeira ordem é linear se for da forma

$$x_{n+1} = ax_n + f(n),$$

com $a \in \mathbb{C}$.

Veremos no exemplo a seguir que podemos resolver sem grandes dificuldades uma recorrência homogênea linear de primeira ordem.

Exemplo 3. $x_{n+1} = nx_n, \quad x_1 = 1.$

Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1, \\ x_3 &= 2x_2, \\ x_4 &= 3x_3, \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, multiplicando todas as equações, obtemos

$$x_n = (n-1)!x_1.$$

Como $x_1 = 1$, temos

$$x_n = (n-1)!.$$

□

Agora, vamos resolver a recorrência linear não homogênea de primeira ordem

$$x_{n+1} = x_n + f(n).$$

Atribuindo valores para n temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(1), \\ x_3 &= x_2 + f(2), \\ x_4 &= x_3 + f(3), \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1). \end{aligned}$$

Adicionando os termos membro a membro, obtemos

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Exemplo 4. $x_{n+1} = x_n + 2^n, \quad n > 1, \quad x_1 = 1.$

Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2, \\ x_3 &= x_2 + 2^2, \\ x_4 &= x_3 + 2^3, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Vamos agora obter a soma dos termos

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Então, observando que o segundo membro é a soma dos termos de uma progressão geométrica, temos

$$x_n = 2^n - 1.$$

□

A seguir, veremos que qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser reduzida a uma da forma $x_{n-1} = x_n + f(n)$.

Teorema 1.

Se a_n é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \tag{1}$$

em

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}.$$

Demonstração.

A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma (1) em

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Mas, como a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então $a_{n+1} = g(n)a_n$.
Segue que a equação (1) se transforma em

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Portanto

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}.$$

□

Exemplo 5. $x_{n+1} = 2x_n + 1, \quad x_1 = 1.$

Primeiramente, buscamos uma solução para $x_{n+1} = 2x_n$. Temos

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 2x_1, \\ x_3 & = & 2x_2, \\ x_4 & = & 2x_3, \\ & \vdots & \\ x_n & = & 2x_{n-1}. \end{array}$$

Substituindo, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$ e, portanto, $x_n = 2^{n-1}$ é uma solução não-nula de $x_{n+1} = 2x_n$. De acordo com o teorema anterior, façamos a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$. Com isso, obtemos

$$2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1.$$

Dividindo ambos os membros por 2^n obtemos

$$y_{n+1} = y_n + 2^{-n}.$$

Então

$$\begin{array}{rcl} y_2 & = & y_1 + 2^{-1}, \\ y_3 & = & y_2 + 2^{-2}, \\ y_4 & = & y_3 + 2^{-3}, \\ & \vdots & \\ y_n & = & y_{n-1} + 2^{-(n-1)}. \end{array}$$

Adicionando os termos membro a membro resulta em

$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)}.$$

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos

$$y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1.$$

Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e $x_1 = 1$, então $1 = 2^{1-1}y_1$ e segue que $y_1 = 1$. Logo,

$$y_n = 2 - 2^{1-n}$$

e conclui-se que

$$x_n = 2^n - 1.$$

□

Nos exemplos seguintes veremos a resolução de problemas que apresentam uma situação que recai em uma recorrência linear de primeira ordem.

Exemplo 6. Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.

Seja x_n o número de regiões que em que n retas dividem o plano. Quando acrescenta-se mais uma reta, obtemos uma nova região e o mesmo ocorre em cada intersecção dessa nova reta com cada uma das n já existentes, totalizando $n+1$ novas regiões. Temos, portanto, a equação

$$x_{n+1} = x_n + n + 1.$$

Considerando que para $n = 0$, isto é, caso não tenhamos retas, o plano possui apenas uma região, temos $x_0 = 1$. Vamos agora resolver essa recorrência pelo método visto anteriormente. Temos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 1, \\ x_2 &= x_1 + 2, \\ x_3 &= x_2 + 3, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Adicionando temos

$$x_n = x_0 + 1 + 2 + \cdots + n.$$

Então, usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, temos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \frac{(1+n)n}{2} \\ &= 1 + \frac{(1+n)n}{2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 7. Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero?

Seja x_n o número de sequências de n termos com quantidade ímpar de termos nulos. Por consequência, existem $3^n - x_n$ sequências de n termos com quantidade par de zeros. Ao acrescentarmos 1 ou 2 a cada uma das x_n sequências com número ímpar de zeros, obtemos $2x_n$ sequências de $n+1$ termos com número ímpar de zeros, e caso acrescentemos 0 às $3^n - x_n$ sequências de n termos com quantidade par de zeros, as sequências resultantes possuem $n+1$ termos com número ímpar de zeros. Temos, pelo princípio aditivo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + (3^n - x_n) \\ &= x_n + 3^n. \end{aligned}$$

E, como só há uma sequência de um termo com número ímpar de zeros, temos $x_1 = 1$. Vamos resolver a recorrência:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 3^1, \\ x_3 &= x_2 + 3^2, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Adicionando os termos membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} \\ &= 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Calculando a soma dos termos da progressão geométrica temos

$$x_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

□

2.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Primeiramente, estudaremos a resolução de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, que são equações da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ com $q \neq 0$ (se $q = 0$, a recorrência é, na verdade, de primeira ordem). Consideraremos aqui apenas o caso em que os coeficientes q e p são constantes.

Associamos a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0 \tag{2}$$

uma equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica.

Teorema 2.

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução de (2) quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração.

Substituindo $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ em (2) obtemos

$$C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) = 0.$$

Por outro lado, r_1 e r_2 são raízes. Temos

$$r_1^2 + pr_1 + q = r_2^2 + pr_2 + q = 0.$$

Daí
$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0.$$
Conclui-se então que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução independente dos valores atribuídos à C_1 e C_2.

□

Exemplo 8. A equação $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ tem equação característica $r^2 + 3r - 4 = 0$, cujas raízes são 1 e -4. De acordo com o teorema 2, todas as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$ são soluções da equação.

Teorema 3.

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções de (2) são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$.

Demonstração.

Seja y_n uma solução qualquer de (2). Vamos mostrar que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural. De fato, seja
$$z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n.$$
Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos
$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$
Por outro lado, $(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = 0$ pois y_n é solução de (2) e $(r_1^2 + pr_1 + q) = (r_2^2 + pr_2 + q) = 0$ devido a r_1 e r_2 serem raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Segue que
$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0,$$
isto é, z_n é solução de (2). Vamos considerar agora uma solução da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ que satisfaça as seguintes condições iniciais:
$$y_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \quad \text{e} \quad y_2 = C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2.$$
Temos então
$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - C_1 r_1 - C_2 r_2 &= 0, \\ z_2 &= y_2 - C_1 r_1^2 - C_2 r_2^2 &= 0. \end{aligned}$$
Mas, como $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, segue que $z_n = 0$ para todo n e qualquer solução é da forma
$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$

□

Portanto de acordo com o teorema acima, no exemplo 8, todas as soluções para a recorrência são da forma

$$a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n.$$

Caso as raízes da equação característica sejam complexas, as constantes da solução $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ podem ser escritas de modo a evitar cálculos com números complexos. Para isso, consideremos a forma trigonométrica das raízes

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{e} \quad r_2 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Temos então

$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{e} \quad r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta).$$

Assim, a solução da recorrênia homogênea de segunda ordem pode ser escrita como

$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n[(C_1 + C_2)\cos n\theta + i((C_1 - C_2)\sin n\theta].$$

Sendo $C_1 + C_2$ e $i(C_1 - C_2)$ as novas constantes arbitrárias, a solução pode ser escrita da forma

$$a_n = \rho^n(C_1' \cos n\theta + C_2' \sin n\theta).$$

Exemplo 9. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0.$

As raízes da equação característica $r^2 + r + 1 = 0$ são

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

que são complexos de módulo $\rho = 1$ e argumentos $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ e $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{3}$ respectivamente. Assim, a solução é

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n(C_1' \cos n\theta + C_2' \sin n\theta) \\ &= C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \sin\frac{n\pi}{3}. \end{aligned}$$

$\square$

Estudaremos agora o caso em que as raízes da equação característica são iguais.

Teorema 4.

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução de $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração

Se as raízes são iguais, então $r = -\frac{p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ na recorrência $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ e agrupando os termos convenientemente temos

$$C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r (2r + p).$$

Mas $r^2 + pr + q = 0$ porque r é raíz e $2r + p = -2\frac{p}{2} + p = 0$. Então

$$C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r (2r + p) = C_1 r^n 0 + C_2 n r^n 0 + C_2 r^n r = 0.$$

$\square$

Assim como no caso de raízes distintas, pode-se mostrar que se as raízes da equação característica são iguais, $r_1 = r_2 = r$, todas as soluções de (2) são da forma $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$.

Exemplo 10. A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$ possui raízes $r_1 = r_2 = 2$, tem por solução

$$x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n.$$

Agora, veremos um procedimento que resolve alguns tipos de recorrências de segunda ordem não homogêneas.

Teorema 5.

Se a_n é uma solução de

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = f(n) \tag{3}$$

então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação (3) em

$$y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = 0.$$

Demonstração.

Fazendo a substituição $x_n = a_n + y_n$ na equação (3) obtemos

$$a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n + y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = f(n).$$

Mas

$$a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = f(n),$$

pois a_n é solução de (3). Temos então

$$y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = f(n) - f(n) = 0.$$

$\square$

Portanto, o processo de resolução de uma recorrência não homogênea constitui-se de duas partes: resolvemos a equação homogênea associada, como já visto anteriormente, e encontramos, por tentativas, uma solução qualquer da equação não homogênea.

Exemplo 11. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8 = n + 3^n$.

A equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$ tem raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da equação homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8 = 0$ é

$$h_n = C_1 2^n + C_2 4^n.$$

Agora vamos procurar uma solução particular da recorrência $x_{n+2}-6x_{n+1}+8 = n+3^n$. Se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8$ teremos $t_n = n + 3^n$. Percebemos entâo que t_n é a soma de um polinômio de primeiro grau com uma exponencial de base 3. Ou seja,

$$t_n = An + B + C3^n.$$

Substituindo em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8 = n + 3^n$, obtemos

$$3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n.$$

Então, t_n é solução se $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ e $-C = 1$. Logo,

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{4}{9}, \quad C = -1.$$

Daí

$$t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

A solução da recorrência é a soma de h_n com t_n

$$x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

□

A seguir, veremos a resolução de problemas de matemática que recaem em recorrências lineares de segunda ordem.

Exemplo 12. Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas sementes serão produzidas daqui a n anos?

Após $n + 2$ anos, as plantas com mais de um ano produzem 44 sementes cada e as plantas com um ano, ou seja, aquelas plantadas depois de $n+1$ anos, produzem 21 sementes cada. Seja x_{n+2} o número de sementes produzidas daqui a $n + 2$ anos. Temos

$$x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44x_n + 44x_{n-1} + \cdots + 44x_1 + 44 \quad \text{e}$$

$$x_{n+1} = 21x_n + 44x_{n-1} + \cdots + 44x_1 + 44$$

Subtraindo da primeira a segunda equação obtemos

$$x_{n+2} - 22x_{n+1} - 23x_n = 0.$$

No início, planta-se só uma semente e no primeiro ano teremos 21 novas sementes produzidas, isto é, $x_0 = 1$ e $x_1 = 21$. A equação característica $x^2 - 22x - 23 = 0$ tem raízes $x_1 = -1$ e $x_2 = 23$. Então a solução é

$$x_n = C_1(-1)^n + C_2 23^n.$$

Agora vamos determinar as constantes C_1 e C_2 para os valores iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 21$. Note que

$$x_0 = C_1(-1)^0 + C_2 23^0 = C_1 + C_2 = 1;$$
$$x_1 = C_1(-1)^1 + C_2 23^1 = -C_1 + 23C_2 = 21.$$

Resolvendo tal sistema obtemos $C_1 = \dfrac{11}{12}$ e $C_2 = \dfrac{1}{12}$.
Portanto, a expressão que representa o número de sementes produzidas após n anos é

$$x_n = \frac{11}{12}(-1)^n + \frac{1}{12}23^n.$$

□

Exemplo 13. Mostre que

$$\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$$

é, para todo n natural, um número inteiro.

Vamos mostrar que

$$\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$$

é solução de uma recorrência linear de segunda ordem com coeficientes inteiros. Para isso, $1-\sqrt{5}$ e $1+\sqrt{5}$ devem ser as raízes da equação característica $x^2 + bx + c = 0$. Pela soma e produto das raízes, sabemos que

$$-b = 1 - \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} \quad \text{e} \quad c = (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}).$$

Então $b = -2$ e $c = -4$. Daí, temos a equação característica

$$x^2 - 2x - 4 = 0,$$

que está associada à recorrência $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 4x_n = 0$. Determinaremos agora os dois primeiros termos, que caracterizam a sequencia. Temos

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^0 + \dfrac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^0 = 2; \\ \\ x_1 = \dfrac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^1 + \dfrac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^1 = 1. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$$

é solução da recorrência $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 4x_n = 0$ com $x_0 = 2$ e $x_1 = 1$, ou seja, é um número inteiro para todo n natural.

3 Pré requisitos de Álgebra Linear

Este pequeno capítulo contém alguns resultados de Álgebra Linear que serão úteis no desenvolvimento do trabalho. São teoremas vistos em cursos de Álgebra Linear e que podem ser encontrados em livros da disciplina. O objetivo é, com isso, tornar mais dinâmica a leitura do próximo capítulo, onde trataremos as equações a diferenças lineares matricialmente.

Teorema 6.

Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ordenada de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso da forma

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

de modo único [3] (ANTON, 2001).

Teorema 7.

Sejam V e W espaços vetoriais. Em um isomorfismo $T : V \to W$, a imagem de uma base de V é uma base de W. Além disso, a aplicação inversa T^{-1} também é um isomorfismo [6] (KOZAKEVICH, 2011).

Teorema 8.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são autovalores distintos de uma matriz $n \times n$ com autovetores associados $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes [5] (LEON, 1998).

Teorema 9.

Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n autovetores linearmente independentes $v_1, \ldots v_n$ associados à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente. Então as matrizes

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP,$$

ou seja, A é diagonalizável. Reciprocamente, se A é diagonalizável, então ela possui n autovetores linearmente independentes [2] (SANTOS, 2013).

Teorema 10.

Dada uma transformação linear $T : V \to V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = av$ $(a \neq 0)$ também é autovetor de T associado à λ [4] (BOLDRINI, 1980).

Teorema 11.

Se k é um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e X é um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e X é um autovetor associado [3] (ANTON, 2001).

4 Equações a Diferenças Finitas Lineares

Chamamos de recorrência (ou equação a diferença finita) linear de ordem k a um operador

$$L[s_n] = s_n - c_1 s_{n-1} - c_2 s_{n-2} - \ldots - c_k s_{n-k} \tag{4}$$

onde $n \geq k$ e $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$.

Caso $L[s_n] = 0$, dizemos que a recorrência é *homogênea*. Substituindo n por $n + k$ na equação (4), podemos escrever uma recorrência homogênea na forma

$$s_{n+k} = c_1 s_{n+k-1} + c_2 s_{n+k-2} + \ldots + c_k s_n. \tag{5}$$

Se

$$L[s_n] = \psi(n) \tag{6}$$

com $\psi : \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\} \to \mathbb{C}$, dizemos que a equação é *não homogênea*.

Quando são dados os números $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$ e queremos encontrar uma expressão geral para s_n, temos um Problema de Valor Inicial (PVI).

Teorema 12.

Todo PVI de uma recorrência finita homogênea possui solucão única.
Demonstração.

Existência da solução.

Verificamos a existência de solução utilizando indução em n.

Como $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$, então, para $n = 0$ na equação (5), temos

$$s_k = c_1 \alpha_{k-1} + \ldots + c_k \alpha_0.$$

Vamos supor que obtemos $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+k-1}$ (Hipótese de Indução). Então, de acordo com a equação (5), temos também

$$s_{n+k} = c_1 s_{n+k-1} + \ldots + c_k s_n.$$

Como já conhecemos $s_{n+1}, \ldots, s_{n+k-1}$, então existe s_{n+k}, que é uma combinação linear dos termos anteriores.

Unicidade da solução.

Sejam (α_n) e (β_n) soluções de um mesmo PVI. Assim temos

$$\alpha_i = \beta_i, \quad i = 0, \ldots, k-1.$$

Então, de acordo com a equação (5) (escrita na notação de somatório), temos

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \sum_{i=1}^{k} c_i\alpha_{k-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i\beta_{k-i} \\ &= \beta_k.\end{aligned}$$

De modo análogo, podemos observar para os próximos termos:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k} c_i\alpha_{k+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i\beta_{k+1-i} \\ &= \beta_{k+1}, \\ \alpha_{k+2} &= \sum_{i=1}^{k} c_i\alpha_{k+2-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i\beta_{k+2-i} \\ &= \beta_{k+2}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Podemos verificar, deste modo que $\alpha_n = \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Denotaremos por $\mathcal{X}$ o conjunto de todas as soluções de uma recorrência homogênea.

Teorema 13.

Se $(s_n^{(i)}) \in \mathcal{X}$, $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e

$$s_n = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i s_n^{(i)}\right),$$

então $(s_n) \in \mathcal{X}$.

Demonstração.

De fato, se escrevermos o termo s_{n+k}, temos

$$s_{n+k} = \sum_{i=1}^{m} a_i s_{n+k}^{(i)}.$$

Vamos escrever $s_{n+k}^{(i)}$ como na equação (5). Assim

$$s_{n+k} = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{k} c_j s_{n+k-j}^{(i)}.$$

Reagrupando as constantes temos

$$s_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{m} a_i s_{n+k-j}^{(i)}.$$

Mas, via (5),

$$\sum_{i=1}^{m} a_i s_{n+k-j}^{(i)} = s_{n-k+j}.$$

Então

$$s_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j s_{n-k+j}.$$

□

Portanto, como descrito no teorema 13, (s_n) é solução da equação homogênea, ou seja, uma combinação linear de soluções de uma recorrência homogênea também é solução da mesma recorrência.

Agora vamos calcular a dimensão de $\mathcal{X}$.

Teorema 14.

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{X} & \to & \mathbb{C}^k \\ (s_n) & \mapsto & (s_{k-1}, \ldots, s_1, s_0)^T \end{array}$$

é um isomorfismo.

Demonstração.

Primeiramente, note que a função π está bem definida, pois pelo teorema 12, cada sequência em $\mathcal{X}$ tem uma única sequência de dados iniciais, isto é, uma sequência $(s_n) \in \mathcal{X}$

não pode estar associada a duas sequências de k dados iniciais pois isso contraria o PVI.

π é sobrejetora pois, como vimos no teorema 12, para qualquer sequência de dados iniciais $(s_{k-1}, \ldots, s_1, s_0)$, existe uma sequência $(s_n) \in \mathcal{X}$ satisfazendo tais dados.

π é injetora, também devido à unicidade da solução de um PVI (teorema 12).

π é linear. De fato, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $(x_n), (y_n) \in \mathcal{X}$. Temos

$$\pi(\alpha(x_n) + \beta(y_n)) = (\alpha x_{k-1} + \beta y_{k-1}, \ldots, \alpha x_0 + \beta y_0)^T.$$

Usando as propriedades da soma de vetores e de produto por escalar, temos

$$\pi(\alpha(x_n) + \beta(y_n)) = \alpha(x_{k-1}, \ldots, x_0)^T + \beta((y_{k-1}, \ldots, y_0)^T = \alpha\pi(x_n) + \beta\pi(y_n).$$

□

Como π é isomorfismo, pelo teorema 7, π^{-1} leva uma base de $\mathbb{C}^k$ em uma base de $\mathcal{X}$. Então, sendo $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base canônica de $\mathbb{C}^k$, $\{\pi^{-1}(e_1), \ldots, \{\pi^{-1}(e_k)\}$ é base para $\mathcal{X}$. De acordo com o teorema 6 qualquer solução pode ser escrita como combinação linear dos vetores $\{\pi^{-1}(e_1), \ldots, \pi^{-1}(e_k)\}$.

Assim, a solucão de um PVI com condições iniciais $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$ é

$$\alpha_0\pi^{-1}(e_k) + \ldots + \alpha_{k-1}\pi^{-1}(e_1).$$

No entanto, $\{\pi^{-1}(e_1), \ldots, \pi^{-1}(e_k)\}$ pode não ser a base mais simples para representar a solução de um PVI, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 14.

$$s_{n+2} = s_{n+1} + s_n, \quad s_0 = -1, s_1 = 3.$$

Utilizando a fórmula apresentada anteriormente, a solução será

$$s_n = 3\pi^{-1}(e_1) + (-1)\pi^{-1}(e_2).$$

Calculando π^{-1} para $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ temos

$$\pi^{-1}(e_1) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots),$$

$$\pi^{-1}(e_2) = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots).$$

Então, a solução é

$$\begin{aligned} s_n &= 3(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots) - 1(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots) \\ &= (-1, 3, 2, 5, 7, 12, \ldots). \end{aligned}$$

4.1 Forma Matricial

Vamos agora escrever uma equação a diferença finita na forma matricial. Para isso, definimos

$$S_n = \begin{bmatrix} s_{n+k-1} \\ \vdots \\ s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix}.$$

Consideremos a matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde as constantes $c_1, \ldots, c_k$ são os coeficientes da recorrência, como definido na equação (5). Tal matriz C é chamada de *matriz companheira*.

Escrevemos uma recorrência homogênea na forma matricial como

$$S_{n+1} = CS_n. \tag{7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_1 &= CS_0, \\ S_2 &= CS_1 = CCS_0 = C^2S_0, \\ &\vdots \\ S_n &= CS_{n-1} = C^nS_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Definiremos também o polinômio

$$c(x) = x^k - c_1x^{k-1} - \ldots - c_{k-1}x - c_k,$$

que é chamado de *polinômio característico*. As raízes desse polinômio são os autovalores da matriz C.

Teorema 15.

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ as raízes distintas de $c(x)$ com multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$ respectivamente. Daí, (s_n) é solução da equação (5) se, e somente se,

$$s_n = a_1(n)\lambda_1^n + \ldots + a_t(n)\lambda_t^n$$

é seu n-ésimo termo e cada a_i é polinômio em n de grau menor que m_i .

Será apresentada a seguir a demonstração desse teorema na situação em que todos os autovalores são distintos. Nesse caso, o n-ésimo termo da solução é

$$s_n = a_1\lambda_1^n + \ldots + a_k\lambda_k^n, \quad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}.$$

Demonstração.

Seja λ autovalor de C e considere o vetor $v_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)$. Temos

$$\begin{aligned} Cv_\lambda &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} \\ \lambda^{k-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \ldots + c_k, \lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda)^T. \end{aligned}$$

Mas $c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \ldots + c_k = \lambda^k$, pois $c(\lambda) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} Cv_\lambda &= (\lambda^k, \lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda)^T \\ &= \lambda(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T \\ &= \lambda v_\lambda, \end{aligned}$$

e conclui-se que v_λ é autovetor associado ao autovalor λ.

Agora, definimos $s_n = \lambda^n$. Pela equação (8), temos $S_n = C^n S_0$ e $S_0 = v_\lambda$. Considerando que v_λ é autovetor, de acordo com o teorema 11 segue que

$$S_n = \lambda^n v_\lambda.$$

Multiplicando à esquerda por C

$$\begin{aligned} CS_n &= C\lambda^n v_\lambda \\ &= \lambda^n C v_\lambda \\ &= \lambda^{n+1} v_\lambda \\ &= S_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, $(s_n) \in \mathcal{X}$ com vetor inicial $S_0 = v_\lambda$, ou seja, de acordo com o teorema 14, $\pi^{-1}(v_\lambda) = (\lambda^n) \in \mathcal{X}$. Do teorema 8, sabemos que $\{v_{\lambda_1}, \ldots, v_{\lambda_k}\}$ é base de $\mathbb{C}^k$ e novamente pelo teorema 14, concluímos que $\{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ é base de $\mathcal{X}$. Logo, a solução geral é da forma

$$s_n = a_1\lambda_1^n + \ldots + a_k\lambda_k^n, \quad \text{com} \quad a_1, \ldots a_k \in \mathbb{C}.$$

$\square$

Veremos agora dois exemplos de como resolver problemas de valor inicial utilizando o teorema 15. O primeiro com autovalores distintos e o segundo com autovalores repetidos.

Exemplo 15. Vamos encontrar a solução da recorrência

$$s_{n+2} = 3s_{n+1} - 2s_n, \quad s_0 = 2, s_1 = 3.$$

A recorrência tem polinômio característico

$$ch(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ e as soluções serão dadas por

$$s_n = a_1 2^n + a_2 1^n.$$

Devemos agora determinar os valores a_1 e a_2, utilizando os dados iniciais

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, segue que $a_1 = a_2 = 1$. Assim, a solução da recorrência é

$$s_n = 2^n + 1.$$

□

Exemplo 16. Encontraremos solução da recorrência

$$s_{n+3} = 3s_{n+2} - 4s_n, \quad s_0 = 0, s_1 = 1 \quad \text{e} \quad s_2 = 2.$$

A matriz companheira é

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, com multiplicidades $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$ respectivamente. A solução será, de acordo com o teorema 15, da forma

$$s_n = a_1(n)2^n + a_2(n)(-1)^n,$$

onde $a_1(n) = c_0 n + c_1$ e $a_2(n) = c_2$.

Basta agora determinar as constantes c_0, c_1 e c_2. Para isso, construímos um sistema com o auxílio dos dados iniciais do problema. Escalonando a matriz temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} \end{bmatrix},$$

onde a primeira matriz é a matriz aumentada e a segunda a sua matriz escalonada reduzida. Então $c_0 = \frac{1}{6}$, $c_1 = \frac{2}{9}$ e $c_2 = -29$. Logo, a solução do PVI é

$$s_n = \left(\frac{1}{6}n + \frac{2}{9}\right) 2^n - \frac{2}{9}(-1)^n.$$

□

4.2 Equações não Homogêneas

Seja $\{(x_n^{(1)}), \ldots, (x_n^{(k)})\}$ base para $\mathcal{X}$ (soluções da equação homogênea), isto é,

$$L[x_n^{(1)}] = \ldots = L[x_n^{(k)}] = 0.$$

Considerando L um operador linear, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ temos

$$L\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}\right] = 0.$$

Pela linearidade de L podemos separar as constantes, obtendo

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L[x_n^{(i)}] = 0.$$

Vimos no teorema 13 que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)} \in \mathcal{X}$. Também temos que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_0^{(i)}, \ldots, x_{k-1}^{(i)})^T = (s_0, \ldots, s_{k-1})^T,$$

pois $\alpha_1 x_j^{(1)} + \ldots + \alpha_k x_j^{(k)} = s_j$ para $j = 0, \ldots, k-1$.

Temos ainda que os vetores $\{(x_0^{(i)}, \ldots, x_{k-1}^{(i)})^T : i = 1, \ldots, k\}$ são linearmente independentes, pois caso contrário teríamos que o vetor inicial de uma das sequências $(x_n^{(i)})$

seria combinação linear dos demais, e nesse caso, $\{(x_n^{(i)}) : i = 1, \ldots, k\}$ seria linearmente dependente, contrariando a afirmação de que $\{x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$ é base para $\mathcal{X}$. Portanto, resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_0^{(i)} = s_0, \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_1^{(i)} = s_1, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{k-1}^{(i)} = s_{k-1}, \end{cases}$$

de k equações podemos obter os $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ para um PVI.

Vamos agora determinar um método para resolver a equação (6), isto é, o caso em que a equação não seja homogênea.

Seja (p_n) uma solução particular da equação não homegênea e (h_n) solução geral da equação homogênea associada. Pelo que vimos anteriormente

$$h_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}, \quad L[h_n] = 0$$

e temos $L[p_n] = \psi(n)$. Então, pela linearidade de L

$$\begin{aligned} L[h_n + p_n] &= L[h_n] + L[p_n] \\ &= 0 + L[p_n] \\ &= \psi(n). \end{aligned}$$

Daí, $h_n + p_n$ é solução da equação não homogênea.

Resumindo, para resolver o PVI

$$L[s_n] = \psi(n), \quad s_0 = \beta_0, \ldots, s_{k-1} = \beta_{k-1}$$

precisamos encontrar $s_n = h_n + p_n$ satisfazendo as condições iniciais, ou seja, devemos obter:

- Solução particular (p_n) da equação não homogênea;
- Solução geral (h_n) da equação homogênea associada;
- As constantes de s_n, resolvendo o sistema de k equações lineares nas variáveis $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dado por

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_0^{(i)} = s_0, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{k-1}^{(i)} = s_{k-1}.$$

O teorema a seguir mostra como encontrar a solução particular da equação não homogênea no caso em que $L[s_n] = \lambda^n p(n)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p(n) \in \mathbb{C}[x]$.

Teorema 16.

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ autovalores distintos de C de multiplicidade $m_1, \ldots, m_t$ respectivamente, e seja

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}, \\ m_i, & se \quad \lambda = \lambda_i. \end{cases}$$

Daí existe $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, de grau não maior que o grau de $p(x)$, tal que

$$(p_n) = (\lambda^n n^\delta q(n))$$

é solução particular da equação não homogênea.

Por ser muito complexa e extensa, a demonstração desse teorema será omitida aqui, no entanto, ela pode ser encontrada com detalhes em [7] (CULL, 2005).

A seguir veremos exemplos de como resolver problemas de valor inicial utilizando esse teorema.

Exemplo 17. Considere o PVI

$$s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2} + 2^n n, \quad s_0 = 5, s_1 = 4.$$

Vamos primeiro determinar a solução da equação homogênea, desconsiderando o termo $2^n n$. A equação tem polinômio característico

$$ch(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Obtemos assim os autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ com multiplicidades $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$ respectivamente. Daí temos a solução da equação homogênea

$$h_n = a_1 2^n + a_2 3^n, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

Agora vamos determinar uma solução particular para a equação não homogênea. Temos

$$\delta = 1 \quad \text{(2 é autovalor de multiplicidade 1)}$$

e

$$q(x) = ax + b \in \mathbb{C}[x] \quad \text{(pois p(x) tem grau 1)}.$$

Então

$$p_n = 2^n n(an + b)$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ é solução particular. Substituindo s_n por p_n na equação inicial, temos

$$p_n = 5p_{n-1} - 6p_{n-2} + 2^n n.$$

Então

$$2^n n(an+b) = 5.2^{n-1}(n-1)[a(n-1)+b] - 6.2^{n-2}(n-2)[a(n-2)+b] + 2^n n,$$

$$2^n(an^2+bn) = 5.2^{n-1}(n-1)(an-a+b) - 3.2^{n-1}(n-2)(an-2a+b) + 2^n n.$$

Dividindo ambos os membros por 2^{n-1}

$$2an^2+2bn = 5[an^2-(2a-b)n+a-b] - 3[an^2-(4a-b)n+4a-2b] + 2n,$$

$$2an^2+2bn = 2an^2+(2a+2b+2)n-7a+b.$$

Para que os polinômios sejam iguais devemos ter

$$\begin{cases} 2a = 2a, \\ 2b = 2a+2b+2, \\ 0 = -7a+b. \end{cases}$$

Daí, $a=-1, b=-7$. Segue que

$$p_n = 2^n(-n^2-7n)$$

A solução deve ser $s_n = h_n + p_n$. Substituindo h_n e p_n já encontrados, temos

$$s_n = a_1 2^n + a_2 3^n + 2^n(-n^2-7n).$$

Agora vamos determinar a_1 e a_2 através dos dados iniciais $s_0 = 5$ e $s_1 = 4$.

$$\begin{cases} \text{Para} \quad n=0: \quad 5 = a_1 + a_2; \\ \text{Para} \quad n=1: \quad 4 = 2a_1 + 3a_2 - 16. \end{cases}$$

Obtemos $a_1 = -5$ e $a_2 = 10$. Portanto, a solução do PVI é

$$s_n = -5.2^n + 10.3^n + 2^n(-n^2-7n).$$

Podemos testar a solução encontrada, por exemplo, para $n=2$. Usando a equação dada no problema, temos

$$s_2 = 5s_1 - 6s_0 + 2^2.2 = -2,$$

que é o mesmo valor que encontramos calculando s_2 com a solução que encontramos:

$$s_2 = -5.2^2 + 10.3^2 + 2^2(-2^2-7.2) = -2.$$

Exemplo 18.

$$s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \quad s_0 = 0, s_1 = 1.$$

O polinômio característico associado à equação homogênea é

$$ch(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Então, $\lambda_1 = 2$ é autovalor de multiplicidade $m_1 = 2$. Daí,

$$h_n = (a_1 n + a_2)2^n, \quad \text{com} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

é solução da equação homogênea. Temos $\delta = 0$, pois 3 não é raíz de $ch(x)$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$, já que $p(x) = 1$. Nesse caso,

$$p_n = 3^n a$$

é uma solução particular. Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$, substituindo temos

$$3^n a = 4.3^{n-1}a - 4.3^{n-2}a + 3^n.$$

Dividindo por 3^{n-2} obtemos

$$3^2 a = 4.3a - 4a + 3^2.$$

Logo, $9a = 8a + 9$ e, portanto, $a = 9$. Assim,

$$p_n = 3^n.9 = 3^{n+2}.$$

Como $s_n = h_n + p_n = (a_1 n + a_2)2^n + 3^{n+2}$, vamos determinar as constantes a_1 e a_2 a partir dos dados iniciais.

$$\begin{cases} \text{Para} \quad n = 0: \quad 0 = a_2 + 9, \\ \text{Para} \quad n = 1: \quad 1 = 2a_1 + 2a_2 + 27. \end{cases}$$

Segue que $a_1 = -4$ e $a_2 = -9$ e a solução do PVI é dada por

$$s_n = (-4n - 9)2^n + 3^{n+2}.$$

Verificando a solução para $n = 2$:

$$\begin{aligned} s_2 &= 4s_1 - 4s_0 + 3^2 \\ &= 4.1 - 4.0 + 9 \\ &= 13 \\ &= -68 + 81 \\ &= (-4.2 - 9)2^2 + 3^{2+2}. \end{aligned}$$

Exemplo 19.

$$s_n = 2s_{n-1} + 4s_{n-2} - 8s_{n-3} + (-1)^n n, \quad s_0 = 1, s_1 = 2, s_2 = 3.$$

A equação tem polinômio característico

$$ch(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 2)^2.$$

As raízes são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$, com multiplicidades $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$ respectivamente. Assim, a solução geral da equação homogênea é

$$h_n = a_1(-2)^n + a_2 2^n + a_3 n 2^n.$$

Para encontrar uma solução particular, observamos que $\delta = 0$, pois -1 não é raíz do polinômio característico e que $q(x) = ax + b$. A solução particular será da forma

$$p_n = (-1)^n(an + b).$$

Substituindo a solução particular na equação inicial temos

$$p_n = 2p_{n-1} + 4p_{n-2} - 8p_{n-3} + (-1)^n n.$$

Então

$$(-1)^n(an+b) = 2(-1)^{n-1}[a(n-1)+b]+4(-1)^{n-2}[a(n-2)+b]-8(-1)^{n-3}[a(n-3)+b]+(-1)^n n.$$

Dividindo por $(-1)^{n-3}$, segue que

$$-an - b = 2(an - a + b) - 4(an - 2a + b) - 8(an - 3a + b) - n.$$

Portanto,

$$-an - b = (-10a - 1)n + 30a - 10b.$$

Segue que $a = -\dfrac{1}{9}$ e $b = -\dfrac{10}{27}$. Assim,

$$p_n = -(-1)^n(\frac{1}{9}n + \frac{10}{27}).$$

Como $s_n = p_n + h_n$, temos

$$s_n = a_1(-2)^n + a_2 2^n + a_3 n 2^n - (-1)^n(\frac{1}{9}n + \frac{10}{27}).$$

Com os dados iniciais do problema obtemos:

$$\begin{cases} s_0 = a_1 + a_2 + \dfrac{10}{27} = 1 \\ s_1 = (-2)a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{10}{27} = 2 \\ s_2 = 4a_1 + 4a_2 + 8a_3 - \dfrac{2}{9} - \dfrac{10}{27} = 3 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos $a_1 = \dfrac{3}{16}$, $a_2 = \dfrac{511}{432}$ e $a_3 = -\dfrac{17}{72}$. A solução do PVI é

$$s_n = \frac{3}{16}(-2)^n + \frac{511}{432}2^n - \frac{17}{72}n2^n - (-1)^n(\frac{1}{9}n + \frac{10}{27}).$$

Testando a solução, por exemplo, para $n = 3$, pela recorrência temos

$$\begin{aligned} s_3 &= 2s_2 + 4s_1 - 8s_0 + (-1)^3 3 \\ &= 6 + 8 - 8 - 3 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a solução encontrada temos

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{3}{16}(-2)^3 + \frac{511}{432}2^3 - \frac{17}{72}32^3 - (-1)^3(\frac{1}{9}3 + \frac{10}{27}) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{511}{54} - \frac{51}{9} + \frac{19}{27} \\ &= 3. \end{aligned}$$

4.3 Comportamento Assintótico

Vamos agora estudar o comportamento de uma recorrência quando n tende ao infinito. Para isso, primeiro veremos um lema que nos permite calcular a solução de um PVI sem a necessidade de calcular potências de matrizes, da maneira que vimos na equação (8).

Lema 1.

Dada uma recorrência homogênea s_n, se a matriz companheira C é diagonalizável, se P é a matriz cujas colunas são os autovetores $C_1, \ldots, C_k$ de C associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respectivamente, e sejam $R_1, \ldots, R_k$ as linhas de P^{-1}. Então R_i é autovetor linha associado à λ_i, com $i = 1, \ldots, k$ e qualquer solução $S_{n+1} = CS_n$ pode ser escrita como

$$S_n = \sum_{i=1}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i.$$

Demonstração.

Como C é diagonalizável, de acordo com o teorema 9, temos

$$D = P^{-1}CP,$$

onde D é a matriz diagonal com os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e P é a matriz cujas colunas são os autovetores $C_1, \ldots, C_k$ de C. Multiplicando à direita por P^{-1}, temos

$$DP^{-1} = P^{-1}C.$$

Portanto R_i é autovetor linha associado à λ_i, pois

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_k \end{bmatrix}$$

Implica que $R_iC = \lambda_i R_i$. Como $P^{-1}P = I$, temos

$$R_iC_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Escrevendo S_0 como combinação linear de $C_1, \ldots, C_k$, temos

$$S_0 = a_1C_1 + \ldots + a_kC_k.$$

Multiplicando à direita por R_i

$$\begin{aligned} R_iS_0 &= R_i(a_1C_1 + \ldots + a_kC_k) \\ &= a_1R_iC_1 + \ldots + a_iR_iC_i + \ldots + a_kR_iC_k \\ &= a_iR_iC_i \\ &= a_i. \end{aligned}$$

Como $S_n = C^nS_0$, temos

$$\begin{aligned} S_n &= C^n[(R_1S_0)C_1 + \ldots + (R_kS_0)C_k] \\ &= \sum_{i=1}^{k} C^n(R_iS_0)C_i. \end{aligned}$$

E como C_i é autovetor coluna assocido ao autovalor λ_i, reescrevemos a equação na forma

$$S_n = \sum_{i=1}^{k}(R_iS_0)\lambda_i^nC_i.$$

$\square$

A seguir veremos a resolução de um PVI usando o lema 1. A vantagem em relação à fórmula $S_n = C^nS_0$ é que não precisamos calcular potências da matriz C, sendo necessário apenas encontrar os autovalores e os autovetores coluna e linha.

Exemplo 20. Considere o PVI

$$x_{n+2} = -3x_{n+1} + 4x_n, \quad x_0 = 0, x_1 = 1.$$

Os dados iniciais são representados pelo vetor

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz companheira é

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -4$. Desses autovalores obtemos os autovetores v_1 e v_2 através das equações $(C - \lambda_1 I)v_1 = 0$ e $(C - \lambda_2 I)v_2 = 0$. Temos então

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Podemos agora construir as matrizes P, P^{-1} e D:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o lema 1, temos

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{5}.1 - \frac{4}{5}.0\right) 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{5}.1 - \frac{1}{5}.0\right) (-4)^n \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{5}(-4)^n \\ -\frac{1}{5}(-4)^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}(-4)^n \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(-4)^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Definição. Se C tem $t \leq k$ autovalores tais que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_t|,$$

então λ_1 é o autovalor *dominante* de C. Se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, então λ_1 é o autovalor *estritamente dominante* de C.

Teorema 17. *(Teorema do Comportamento Assintótico)*

Se λ é um autovalor estritamente dominante simples de C diagonalizável então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = \frac{R' S_0}{R' C'} C',$$

sendo C' e R' quaisquer autovetores coluna e linha, respectivamente, de C correspondente a λ.

Desse teorema podemos concluir que:

- Se $R'S_0 \neq 0$ então S_n converge para um múltiplo de C' ;
- Se $R'S_0 = 0$ então S_n converge mais lentamente do que $|\lambda|^n$.

Demonstração.
Seja $\lambda = \lambda_1$ autovalor estritamente dominante simples de C. De acordo com o lema 1 podemos escrever a solução de um PVI como

$$S_n = \sum_{i=1}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i.$$

Separando a primeira parcela da adição, temos

$$S_n = (R_1 S_0) \lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i.$$

Dividindo ambos os membros por λ^n, obtemos

$$\frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0) C_1 + Y_n,$$

onde

$$Y_n = \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0) \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n C_i.$$

Note que $Y_n \in \mathbb{C}^k$ e cada coordenada j de Y_n corresponde à coordenada j de C_i. Aplicando a propriedade de que o módulo do produto é menor ou igual ao produto dos módulos, temos

$$\begin{aligned} |Y_n|_j &= \left| \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0) \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n (C_i)_j \right| \\ &\leq \sum_{i=2}^{k} \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^n |R_i S_0| |C_i| j. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > \lambda_i$ para qualquer $i \in 2, \ldots, k$, então $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n = 0$. Daí,

$$\lim_{n\to\infty} |Y_n|_j = 0.$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0) C_1,$$

sendo C_1 autovetor coluna e R_1 autovetor linha de C associado a λ_1, conforme especificado no lema 1. Como, por hipótese, λ_1 é autovalor simples, de acordo com o teorema 10,

$$R' = \alpha R_1, \alpha \in \mathbb{C}$$

é um autovetor qualquer associado à λ_1. Então, como $R_1C_1 = 1$, temos

$$R'C_1 = \alpha R_1 C_1 = \alpha.$$

Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} R'S_0 &= \alpha R_1 S_0 \\ &= (R'C_1)R_1S_0. \end{aligned}$$

Tomando

$$R_1S_0 = \left(\frac{R'S_0}{R'C_1}\right) \quad \text{e} \quad C_1 = C',$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = \frac{R'S_0}{R'C'}C'.$$

□

A vantagem de estudar o $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\lambda^n}$ usando o Teorema do Comportamento Assintótico é que precisamos determinar apenas o autovalor dominante simples, um autovetor coluna dominante e um autovetor linha dominante. Exitem métodos computacionais que calculam autovalores e autovetores dominantes. Veremos a seguir um deles: o Método de Iteração de Potências.

4.3.1 Método de Iteração de Potências

Quando multiplicamos um vetor pela matriz C, este vetor move-se na direção de C'. Por exemplo, considerando a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_0 = [2 \quad 3]^T,$$

temos o autovalor dominante $\lambda = 2$ e um autovetor é, por exemplo, $C' = [2 \quad 1]^T$. Daí, de acordo com a equação (7), temos

$$\begin{aligned} X_1 &= C^1X_0 = CX_0 = [7 \quad 3]^T \approx 3[2,33 \quad 1]^T, \\ X_2 &= C^2X_0 = CX_1 = [13 \quad 7]^T \approx 7[1,86 \quad 1]^T, \\ X_3 &= C^3X_0 = CX_2 = [27 \quad 13]^T \approx 13[2,08... \quad 1]^T, \\ X_4 &= C^4X_0 = CX_3 = [53 \quad 27]^T \approx 27[1,96 \quad 1]^T, \\ &\vdots \\ X_n &\approx k[2 \quad 1]^T. \end{aligned}$$

Na i-ésima iterada, para limitar o crescimento das componentes do vetor X_i , calculamos

$$U_{i-1} = \frac{X_{i-1}}{||X_{i-1}||}$$

e

$$X_i = CU_{i-1}.$$

Obtemos assim uma boa aproximação para C'. Veremos agora como obter uma aproximação para λ.

Considerando uma matriz companheira C com autovalor dominante λ e autovetor dominante X, temos

$$X\lambda = CX.$$

Multiplicando à esquerda por X^T, obtemos

$$X^T X\lambda = X^T CX.$$

Segue que

$$\lambda = \frac{X^T CX}{X^T X}.$$

Conseguimos assim calcular o autovalor dominante a partir do autovetor dominante, o qual já vimos anteriormente como obter uma aproximação.

O método de iteração de potências pode ser programado no software MATLAB. Para isso, precisamos inserir a matriz C, o vetor X das condições iniciais e o número n de iteradas que desejamos realizar, e o software nos dá o autovalor dominante e um autovetor associado, sendo que, quanto maior for n, melhor será a aproximação obtida.

Vamos calcular o autovalor dominante e um autovetor associado para a recorrência de Fibonacci

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_0 = 0, x_1 = 1$$

usando o método de iteração de potências no MATLAB.

Primeiramente, inserimos a matriz C e o vetor inicial $X0$.

```
>> C = [1  1; 1  0];
>> X0 = [1  0];
```

Aplicamos então a função `[lam, X] = powerit(C, X, n)` que calcula o autovetor X associado ao autovalor dominante λ, para um número n de iterações. Usaremos para o exemplo $n = 20$.

```
>> [lam, X] = powerit(C, X0, 20);
X =
1.37638
0.85065.
```

Normalizando o vetor temos

```
>> U = X/norm(X)
U = 0.85065  0.52573.
```

Finalmente, calculamos uma aproximação para λ

$>>$ `lam` $=$ `U'` $*$ `X`;
`lam` $=$ `1.6180`.
Portanto, o autovalor dominante é aproximadamente $\lambda = 1,6180$, com autovetor associado $X = \begin{bmatrix} 1,37638 \\ 0,85065 \end{bmatrix}$.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, E. et al. ***A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2***. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] SANTOS, R. J. ***Introdução á Álgebra Linear***. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2013.

[3] ANTON, H., RORRES, C. ***Álgebra Linear com Aplicações***. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[4] BOLDRINI, J. L. et al. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[5] LEON, S. J. ***Álgebra Linear com Aplicações***. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

[6] KOZAKEVICH, D. N., Bean S. E. ***Álgebra Linear I***. 2 ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.

[7] CULL, P., FLAHIVE, M., ROBSON, R. ***Difference equations, from rabbit to chaos***. Springer, 2005.