

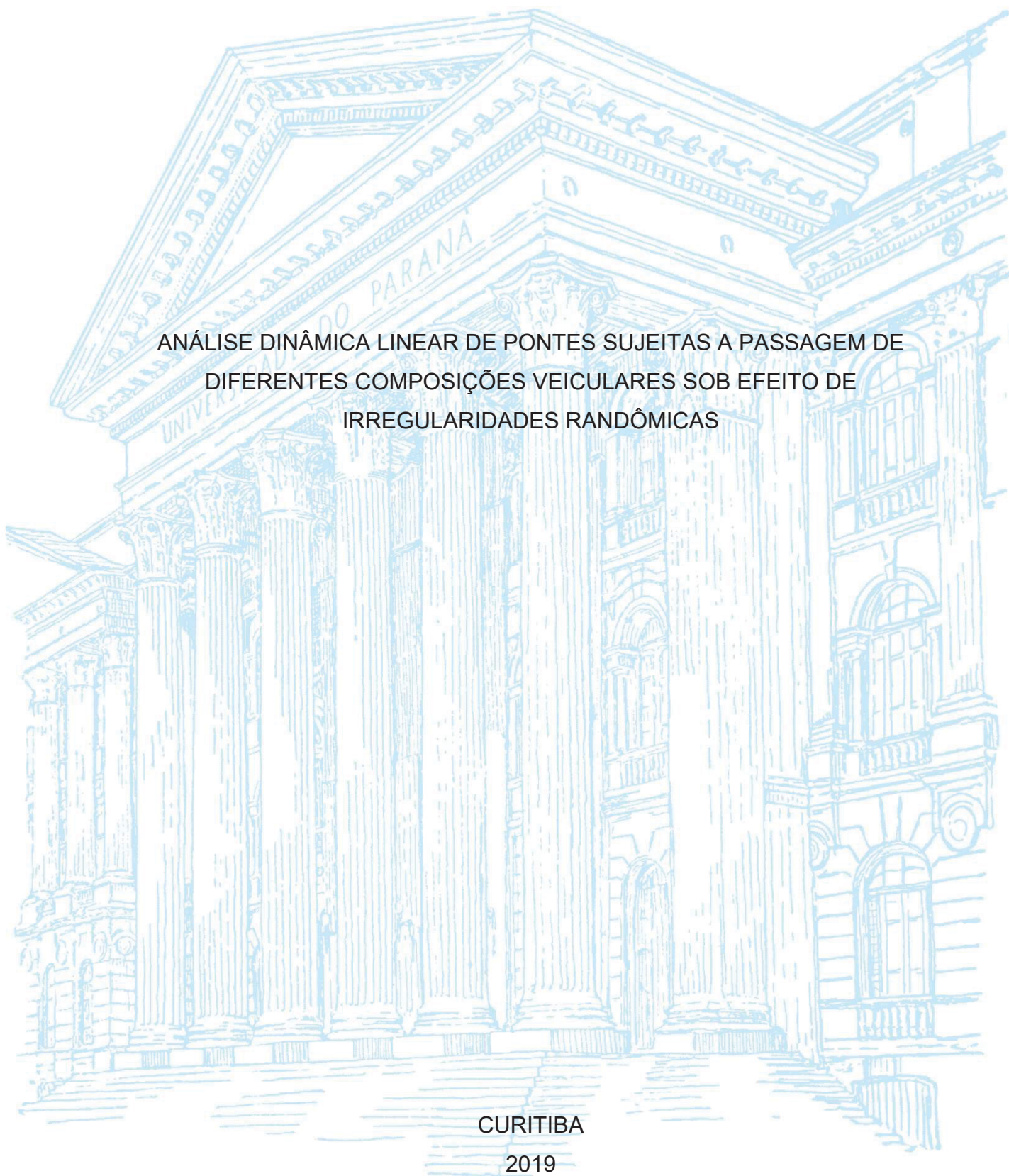
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DIEGO GABRIEL METZ

ANÁLISE DINÂMICA LINEAR DE PONTES SUJEITAS A PASSAGEM DE
DIFERENTES COMPOSIÇÕES VEICULARES SOB EFEITO DE
IRREGULARIDADES RANDÔMICAS

CURITIBA

2019



DIEGO GABRIEL METZ

ANÁLISE DINÂMICA LINEAR DE PONTES SUJEITAS A PASSAGEM DE
DIFERENTES COMPOSIÇÕES VEICULARES SOB EFEITO DE
IRREGULARIDADES RANDÔMICAS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Mecânica dos Sólidos Computacional, dos Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M596a Metz, Diego Gabriel

Análise dinâmica linear de pontes sujeitas a passagem de diferentes composições veiculares sob efeito de irregularidades randômicas [recurso eletrônico] / Diego Gabriel Metz , 2019.

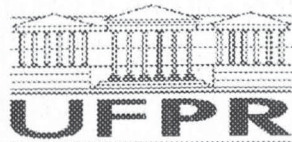
Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Mecânica dos Sólidos Computacional, dos Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

1. Veículos a motor - dinâmica. 2. Pontes. I. Universidade Federal do Paraná. II. Machado, Roberto Dalledone. III. Título.

CDD 629.2

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563



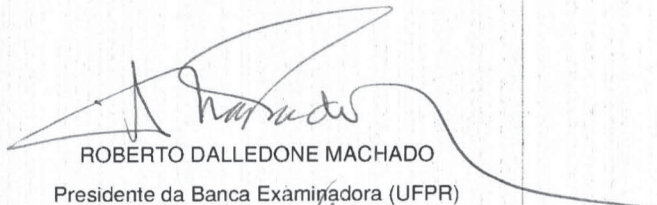
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS
EM ENGENHARIA - 40001016030P0

TERMO DE APROVAÇÃO

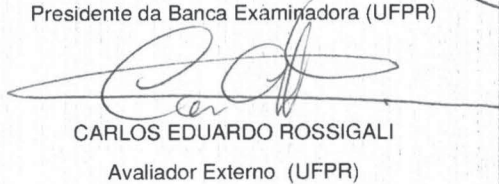
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **DIEGO GABRIEL METZ** intitulada: **ANÁLISE DINÂMICA LINEAR DE PONTES SUJEITAS A PASSAGEM DE DIFERENTES COMPOSIÇÕES VEICULARES SOB EFEITO DE IRREGULARIDADES RANDÔMICAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

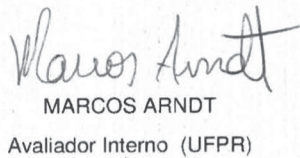
CURITIBA, 14 de Março de 2019.



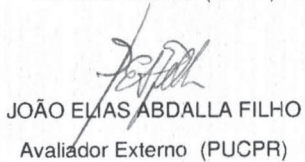
ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



CARLOS EDUARDO ROSSIGALI
Avaliador Externo (UFPR)



MARCOS ARNDT
Avaliador Interno (UFPR)



JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO
Avaliador Externo (PUCPR)

Dedico este trabalho a Deus, que certamente se fez presente em todos os momentos firmes e trêmulos. Aos meus amados pais, Roberto Metz e Laura de Brito Metz, e à minha amada irmã Keila Aline Metz, que representam tudo o que sou, justificam tudo o que faço e me tornam alguém melhor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, desejo externar meu mais profundo agradecimento a Deus, por não apenas esmerar a minha vida, mas também redimi-la. Por não me regozijar com benesses percíveis, mas com a graça incessante. Pelo desígnio de não me livrar de todos os desertos, mas atravessá-los comigo. Por não me tirar do mundo, mas me livrar do mal.

Agradeço aos meus amados pais Roberto Metz e Laura de Brito Metz, pelo amor incondicional, pela compreensão, pela paciência, pelo apoio e incentivo, pela imprescindível presença e pela segurança nos momentos de maior necessidade.

À minha amada irmã Keila Aline Metz pelo zelo, pelo carinho e por sempre confiar em mim.

Ao Professor Roberto Dalledone Machado pela enobrecedora orientação, pelo companheirismo, pela grande amizade e por me encorajar a suceder este estudo. Saliento o apoio incondicional prestado, a forma interessada e extraordinária para a realização deste trabalho. As suas críticas construtivas, as discussões e reflexões foram fundamentais ao longo de todo o percurso.

Ao Professor Carlos Eduardo Rossigali pela grande ajuda sempre ofertada, pelo conhecimento e por ser uma pessoa de bem.

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) pela oportunidade de integrar a este grupo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro.

Aos Professores do PPGMNE pelo conhecimento transmitido, pela excelência acadêmica e pelas orientações durante o curso.

E a todos aqueles que, embora não citados, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

*Aqueles que mergulham no mar
das aflições trazem pérolas raras para
cima.*

Charles Haddon Spurgeon

RESUMO

No dimensionamento de pontes rodoviárias brasileiras, por norma, os efeitos dinâmicos reais são simplificados ao serem substituídos por carregamentos estáticos equivalentes majorados. Entretanto, este procedimento não reproduz a ação real do tráfego de veículos nas pontes rodoviárias. Ao admitir as análises dinâmicas em modelos lineares, obtêm-se resultados que oscilam em torno da resposta estática estrutural. Diversos trabalhos, no entanto, demonstram que a consideração das cargas estáticas equivalentes acaba se tornando maior do que as respostas dinâmicas reais em modelos lineares. Tendo em vista o desenvolvimento de novos modelos de cargas móveis para representar adequadamente a ação do tráfego real, este trabalho procura analisar pontes sujeitas a composições de cargas simulando a passagem de veículos pesados, com características dinâmicas. Neste trabalho, empregam-se modelos veiculares com 4, 5, 9 e 15 graus de liberdade. As irregularidades da via tendem a excitar o veículo dinamicamente, o que por sua vez desencadeia vibrações adicionais na estrutura da ponte, além daquelas produzidas por seu próprio movimento. O perfil longitudinal do pavimento foi obtido por geração aleatória a partir de uma função de densidade espectral de irregularidades de pavimentos. Nos modelos de ponte rodoviária apresentados neste trabalho são usados elementos finitos da viga de *Euler-Bernoulli*, com o amortecimento estrutural determinado pelo método de *Rayleigh*. A solução numérica da equação diferencial de movimento do sistema veículo-ponte, obtida através do equilíbrio dinâmico linear, é calculada por meio do método de *Newmark*. Para a análise dinâmica linear dos sistemas, são desenvolvidas rotinas computacionais em linguagem de programação *Python*. Investigando as respostas da ponte submetida a diferentes composições veiculares, notou-se que a velocidade do veículo e o estado de conservação do pavimento influenciam bastante nas respostas dinâmicas da estrutura e nos fatores de amplificação dinâmica, em situações extremas.

Palavras-chave: Dinâmica Veicular. Modelagem Computacional Veicular. Interação Dinâmica. Método dos Elementos Finitos. Ponte Rodoviária.

ABSTRACT

Standard methods for the design of Brazilian highway bridges simplify the real dynamic effects by replacing them by equivalent static loading. This simplification does not represent the action of the real traffic on highway bridges. When considering dynamic analysis in linear models, the responses obtained are around the static structural one. Several works, however, demonstrated that the consideration of equivalent static loads ends up becoming larger than the actual dynamic response in linear models. Intending to develop new load models to better simulate the real traffic, this work analyses bridges subject to load compositions simulating the passage of heavy vehicles with dynamic characteristics. In this study, vehicular models with 4, 5, 9 and 15 degrees of freedom were used. The road irregularities tend to excite the vehicle dynamically which in turn triggers additional vibrations in the bridge structure besides those produced by its own movement. The longitudinal profile of the pavement was obtained by random generation based on a spectral density function of the pavement roughness. The bridge is modeled using *Euler- Bernoulli* beam elements, with structural damping determined by the Rayleigh method. The differential equation of motion of the vehicle-bridge system is obtained through linear dynamic equilibrium and is solved by the *Newmark* method. The linear dynamic analysis of the system was coded in *Python*. By analyzing the dynamic responses of the bridge submitted to different vehicular compositions, it was noted that the vehicle speed and the pavement conditions greatly influence the dynamic responses of the structure and the dynamic amplification factors, for extreme situations.

Key-words: Vehicular Dynamics. Vehicular Computational Modelling. Dynamic Interaction. Finite Element Method. Highway Bridge.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOB UMA MASSA MÓVEL.....	18
FIGURA 2 – SISTEMA VEÍCULO E ESTRUTURA.....	19
FIGURA 3 – UM QUARTO DE VEÍCULO ATRAVESSANDO A ESTRUTURA	20
FIGURA 4 – VEÍCULO DE 3 EIXOS TRAFEGANDO SOBRE A PONTE.....	23
FIGURA 5 – CAMINHÃO LEVE DE 2 EIXOS DO TIPO 4x2.....	25
FIGURA 6 – CAMINHÃO MÉDIO DE 3 EIXOS DO TIPO 6x2/6x4.....	26
FIGURA 7 – CONJUNTO CAMINHÃO-TRATOR 4X2 E SEMIRREBOQUE DE 3 EIXOS	26
FIGURA 8 – CONJUNTO DE VEÍCULOS DE CARGA DO TIPO BITREM DE 9 EIXOS	27
FIGURA 9 – ELEMENTO DIFERENCIAL PARA A VIGA DE <i>EULER-BERNOULLI</i> ...	42
FIGURA 10 – ELEMENTO FINITO DE VIGA E SEUS GRAUS DE LIBERDADE.....	47
FIGURA 11 – FUNÇÕES POLINOMIAIS CÚBICAS DE <i>HERMITE</i>	49
FIGURA 12 – MODELO VEICULAR COM 4 GRAUS DE LIBERDADE.....	56
FIGURA 13 – DIGRAMAS DE CORPO LIVRE (DCL) E DE FORÇA RESULTANTE (DFR) DA MASSA SUSPensa m_v	57
FIGURA 14 – DIGRAMAS DE CORPO LIVRE (DCL) E DE FORÇA RESULTANTE (DFR) DA MASSA DO EIXO i	59
FIGURA 15 – MODELO VEICULAR COM 5 GRAUS DE LIBERDADE.....	61
FIGURA 16 – MODELO VEICULAR COM 9 GRAUS DE LIBERDADE.....	65
FIGURA 17 – DIAGRAMA DE COMPATIBILIDADE DAS ROTAÇÕES E DOS DESLOCAMENTOS DAS MASSAS SUSPENSAS.....	69
FIGURA 18 – MODELO VEICULAR COM 15 GRAUS DE LIBERDADE.....	77
FIGURA 19 – PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DO PERFIL DE IRREGULARIDADE LONGITUDINAL.....	93
FIGURA 20 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A UMA CARGA HARMÔNICA SENOIDAL	102
FIGURA 21 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A UMA CARGA PONTUAL MÓVEL.....	108
FIGURA 22 – SISTEMA VEÍCULO, COM 4 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE ...	113
FIGURA 23 – SISTEMA VEÍCULO, COM 5 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE ...	117
FIGURA 24 – SISTEMA VEÍCULO, COM 9 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE ...	120

FIGURA 25 – SISTEMA VEÍCULO, COM 15 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE	123
FIGURA 26 – SISTEMA SIMPLIFICADO DO TREM-TIPO DA NBR-7188	138

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – PERFIL LONGITUDINAL DE IRREGULARIDADE DA PISTA EM COM ESTADO DE CONSERVAÇÃO $\alpha = 0,20 \cdot 10^{-6} (m^2/m/ciclo)$...	94
GRÁFICO 2 – PERFIL LONGITUDINAL DE IRREGULARIDADE DA PISTA EM ESTADO DE CONSERVAÇÃO REGULAR $\alpha = 4,00 \cdot 10^{-6} (m^2/m/ciclo)$	95
GRÁFICO 3 – PERFIL LONGITUDINAL DE IRREGULARIDADE DA PISTA EM ESTADO DE CONSERVAÇÃO RUIM $\alpha = 10,00 \cdot 10^{-6} (m^2/m/ciclo)$	96
GRÁFICO 4 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$	106
GRÁFICO 5 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$	106
GRÁFICO 3 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$	107
GRÁFICO 7 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$	110
GRÁFICO 8 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$	111
GRÁFICO 9 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$	111
GRÁFICO 10 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE.....	115
GRÁFICO 11 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE.....	115
GRÁFICO 12 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE.....	116
GRÁFICO 13 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE.....	118

GRÁFICO 14 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE	118
GRÁFICO 15 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE	119
GRÁFICO 16 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE	121
GRÁFICO 17 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE	121
GRÁFICO 18 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE	122
GRÁFICO 19 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE	124
GRÁFICO 20 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE	124
GRÁFICO 21 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE	125
GRÁFICO 22 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 4 GRAUS DE LIBERDADE	126
GRÁFICO 23 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 5 GRAUS DE LIBERDADE	127
GRÁFICO 24 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 9 GRAUS DE LIBERDADE	127

GRÁFICO 25 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 15 GRAUS DE LIBERDADE.....	128
GRÁFICO 26 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 4 GRAUS DE LIBERDADE.....	129
GRÁFICO 27 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 5 GRAUS DE LIBERDADE.....	129
GRÁFICO 28 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 9 GRAUS DE LIBERDADE.....	130
GRÁFICO 29 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 15 GRAUS DE LIBERDADE.....	130
GRÁFICO 30 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 4 GRAUS DE LIBERDADE.....	131
GRÁFICO 31 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 5 GRAUS DE LIBERDADE.....	131
GRÁFICO 32 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 9 GRAUS DE LIBERDADE.....	132
GRÁFICO 33 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 15 GRAUS DE LIBERDADE.....	132
GRÁFICO 34 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 2 EIXOS.....	133
GRÁFICO 35 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 3 EIXOS.....	134

GRÁFICO 36 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 5 EIXOS.....	134
GRÁFICO 37 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 9 EIXOS.....	135
GRÁFICO 38 – RESPOSTA PSEUDO ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA PARA O MODELO SIMPLIFICADO DA NBR-7188 (2013).....	139

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CLASSIFICAÇÃO DO PERFIL LONGITUDINAL DE ACORDO COM PADRÃO DA ISO	92
TABELA 2 – CORRELAÇÃO OBSERVADA ENTRE AS CLASSIFICAÇÕES DAS CONDIÇÕES DO PAVIMENTO ADOTADAS NO BRASIL E PELA ISO	92
TABELA 3 – PARÂMETROS DAS IRREGULARIDADES DA PISTA	97
TABELA 4 – PARÂMETROS DA VIGA E DA FORÇA APLICADA	105
TABELA 5 – PARÂMETROS DA VIGA E DA FORÇA MÓVEL	110
TABELA 6 – PARÂMETROS DA VIGA.....	112
TABELA 7 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 4 GRAUS DE LIBERDADE ...	114
TABELA 8 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 5 GRAUS DE LIBERDADE ...	117
TABELA 8 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 9 GRAUS DE LIBERDADE ...	120
TABELA 10 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 15 GRAUS DE LIBERDADE.....	123
TABELA 11 – FATOR DE AMPLIFICAÇÃO DINÂMICA DE DESLOCAMENTO DOS SISTEMAS	136

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	14
1.1.1	Objetivo Geral.....	14
1.1.2	Objetivos Específicos	15
1.2	JUSTIFICATIVA.....	15
1.3	LIMITAÇÕES DO TRABALHO	16
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2	REVISÃO DA LITERATURA	17
2.1	COMPORTAMENTO DINÂMICO EM PONTES	17
2.2	CONFIGURAÇÕES DE VEÍCULOS	24
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	28
3.1	DINÂMICA LAGRANGIANA	28
3.1.1	Princípio de <i>D'Alembert</i>	29
3.1.2	Coordenadas Generalizadas e Equações de <i>Lagrange</i>	31
3.2	PRINCÍPIO VARIACIONAL DE <i>HAMILTON</i>	36
3.3	TEORIA DA VIGA DE <i>EULER-BERNOULLI</i>	40
3.3.1	Equação de <i>Euler-Bernoulli</i>	40
3.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	44
3.4.1	Elemento finito de viga de <i>Euler-Bernoulli</i>	46
3.5	MODELOS VEICULARES COM IRREGULARIDADE ACOPLADA.....	54
3.5.1	Modelo veicular com 4 graus de liberdade	55
3.5.2	Modelo veicular com 5 graus de liberdade	60
3.5.3	Modelo veicular com 9 graus de liberdade	65
3.5.4	Modelo veicular com 15 graus de liberdade	76
3.5.5	Vetor de Forças Nodais Equivalentes.....	86
3.6	IRREGULARIDADE LONGITUDINAL DA PISTA	90
3.7	MODELO DINÂMICO LINEAR DESACOPLADO ENTRE VEÍCULO, IRREGULARIDADE E ESTRUTURA	97
4	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	100
4.1	VALIDAÇÃO NUMÉRICA	100
4.1.1	Viga de <i>Euler-Bernoulli</i> Sob Carga Harmônica Senoidal.....	100
4.1.2	Viga de <i>Euler-Bernoulli</i> Sob Carga Pontual Móvel	107

4.2	ANÁLISE NUMÉRICA	112
4.2.1	Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 4 Graus de Liberdade e Estrutura	113
4.2.2	Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 5 Graus de Liberdade e Estrutura	117
4.2.3	Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 9 Graus de Liberdade e Estrutura	120
4.2.4	Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 15 Graus de Liberdade e Estrutura	122
4.2.5	Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo, Irregularidade e Estrutura sob Efeito de Diferentes Condições dos Pavimentos	125
4.2.6	Fator de Amplificação Dinâmica de Deslocamentos.....	133
4.2.7	Ações em Pontes Conforme a NBR-7188 (2013).....	137
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	139
5.1	RESUMO E CONCLUSÕES	140
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	141
	REFERÊNCIAS.....	143

1 INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento de pontes rodoviárias submetidas a cargas dinâmicas é, atualmente, um tema bastante explorado por diversos pesquisadores em universidades e institutos de pesquisa em todo o mundo. O interesse por este assunto advém da importância de se conhecer de forma mais realista a resposta destas obras de arte quando submetidas às suas condições normais de uso. Deve-se considerar também os fatores adicionais provocados pela evolução de diferentes composições de veículos rodoviários de carga hoje existentes, o aumento de capacidade dos mesmos, e a redução das seções dos elementos estruturais das pontes por conta da qualidade dos novos materiais empregados.

As pontes devem ser projetadas de forma a proporcionarem adequadamente condições de segurança com relação à sua ruptura, associadas aos Estados Limites Últimos (ELU), e condições satisfatórias de serviço, relacionadas com os Estados Limites de Serviço (ELS). A fim de conhecer as tensões e deformações de maneira mais precisa nos elementos estruturais constituintes das pontes e viadutos, é imprescindível que os modelos matemáticos utilizados representem a estrutura de forma mais realística (ALMEIDA, 2006).

Atualmente, a Norma Brasileira para projeto de pontes (ABNT/NBR-7187, 2003) considera de maneira simplificada os efeitos dinâmicos reais ao serem substituídos por carregamentos estáticos equivalentes majorados. Porém, este procedimento não reproduz a ação real do tráfego de veículos nas pontes rodoviárias e mostra-se, por vezes, insatisfatória para atender, em serviço, os critérios de vibrações e deformações excessivas.

No Brasil, assim como em outros países, o desenvolvimento do tráfego de veículos tem se caracterizado pela multiplicidade de configurações dos veículos, tais como o acréscimo de peso, velocidade e volume de tráfego. À medida que o volume ou a tipologia do tráfego de veículos sofre alteração com maior pertinência, uma questão relevante é saber se as pontes e os pavimentos rodoviários estão aptos a suportar o tráfego atual de veículos comerciais, uma vez que não foram projetados para tais circunstâncias (ROSSIGALI, 2013).

Vale acrescentar que no Brasil, devido às más condições de conservação das rodovias, a ação dinâmica do carregamento imposto pelos veículos é amplificada, uma vez que as forças exercidas por estes sobre a ponte em função da interação acoplada entre os veículos e as irregularidades são bastante significativas (ALMEIDA, 2006).

Na atualidade, existem muitas metodologias de análise dinâmica de pontes que foram desenvolvidas por diferentes pesquisadores, cada um deles dando ênfase ao estudo de algum parâmetro específico, que vão desde verificações experimentais e teóricas até modelagens numéricas. Com o avanço da tecnologia computacional e, principalmente com o emprego do método dos elementos finitos (MEF), o estudo de vibrações em pontes tornou-se mais sofisticado.

Nos últimos trinta anos foram publicados vários trabalhos a respeito do comportamento dinâmico de pontes e veículos, em especial pesquisas de modelos matemáticos relacionados ao problema de interação dinâmica entre a estrutura da ponte e do veículo. O método dos elementos finitos tem sido muito utilizado para a modelagem dos sistemas estruturais, bem como a dinâmica veicular e a dinâmica de multicorpos que estudam e desenvolvem modelos matemáticos de veículos (BEGHETTO, 2006).

Diante do panorama descrito acima, percebe-se que o estudo dos efeitos dinâmicos induzidos pelo tráfego de veículos pesados é de suma importância, pois irá contribuir para uma melhor compreensão dos fenômenos dinâmicos em pontes rodoviárias.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem por objetivo geral analisar os efeitos dinâmicos obtidos da interação desacoplada entre veículo e estrutura para diferentes composições veiculares rodoviárias, considerando as suas velocidades, e levando em conta as irregularidades da pista.

1.1.2 Objetivos Específicos

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

- a) Propor modelos matemáticos de veículo complexos, dando prosseguimento às investigações anteriores (MELO, 2007; MENDONÇA, 2009; ROSSIGALI, 2013; ARAUJO, 2014);
- b) Comparar as respostas dinâmicas obtidas para diferentes composições de veículo;
- c) Desenvolver uma análise extensa de modo a avaliar os efeitos das irregularidades da pista, definidas segundo modelo não determinístico;
- d) Não há descolamento do veículo com a superfície das irregularidades ao se verificar a força atuante na roda;
- e) Analisar os efeitos do fator de amplificação dinâmica ao se variar velocidades do veículo e associado às irregularidades da pista.

1.2 JUSTIFICATIVA

À medida que as técnicas executivas, os materiais aplicados na construção e as ferramentas computacionais evoluíram, os engenheiros dispuseram de uma gama de alternativas no que concerne à concepção estrutural e na avaliação de estruturas existentes, criando um novo contexto no âmbito dos projetos estruturais.

Tal panorama, por sua vez, compreende também o âmbito das pontes rodoviárias, ramo em que tem sido constatada a exigência de maiores vãos e alturas, maiores solicitações e menores dimensões dos elementos estruturais para resisti-los, o que acarreta em peças mais esbeltas e submetidas a ações até então não consideradas. Nessa perspectiva, os efeitos dinâmicos não podem mais ser desconsiderados.

Por norma, o dimensionamento de pontes permite admitir as ações dinâmicas dos veículos de modo simplificado, tratando as solicitações dinâmicas como cargas estáticas afetadas por um coeficiente de impacto. Embora muito comum, tal procedimento torna as estruturas capazes de resistir

às solicitações superiores às realmente necessárias e, por vezes, passa a desprezar os critérios de vibrações e deformações excessivas. Diante desse cenário, advém a necessidade de investigar a margem de segurança e estabilidade da estrutura diante das novas circunstâncias dos veículos que circulam pelas rodovias.

Conseqüentemente, o emprego de modelos matemáticos, que levem em consideração as configurações dinâmicas tanto da ponte quanto dos veículos que nela trafegam, se faz necessário para um dimensionamento mais consciente, no qual se saiba de forma mais exata as grandezas dos esforços e deslocamentos a que a ponte estará submetida quando da sua utilização.

1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

O presente trabalho foi desenvolvido pressupondo algumas simplificações teóricas e limitações como:

- a) A interação entre o veículo, irregularidades da via e ponte é feita de forma desacoplada;
- b) Na modelagem da ponte utilizam-se elementos finitos unidimensionais de viga de *Euler-Bernoulli*;
- c) A excitação dinâmica da ponte deve a passagem do veículo. Tal excitação é ocasionada pelo efeito inercial do corpo principal em consequência das irregularidades da pista;
- d) Os modelos matemáticos veiculares são coplanares, ou seja, as análises dos veículos são bidimensionais.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A dissertação foi estruturada em seis capítulos, de forma a sintetizar e descrever as atividades desenvolvidas para cumprir com os objetivos propostos. Uma descrição sumária de cada um destes capítulos é apresentada a seguir:

No Capítulo 1 é realizada uma introdução geral do trabalho, procurando contextualizar e justificar o assunto abordado, assim como os objetivos gerais e específicos e a organização do trabalho.

No Capítulo 2 apresenta-se a síntese bibliográfica de trabalhos que abordam temas relevantes para a análise em questão e que serviram de base para as considerações adotadas nesta dissertação.

No Capítulo 3 apresentam-se os conceitos básicos para o estudo dos efeitos dinâmicos através da interação entre veículo, ponte e irregularidade veículo-estrutura, os aspectos relacionados à modelagem numérica do sistema e o estudo das metodologias numéricas para a resolução dos problemas dinâmicos.

O Capítulo 4 trata do estudo das respostas dinâmicas a partir da interação desacoplada entre veículo e ponte rodoviária. São implementadas e validadas metodologias numéricas para simular o comportamento dinâmico linear de vigas com cargas harmônicas e em movimento. Ademais, são realizadas análises dinâmicas de pontes sujeitas a composições veiculares complexas sob efeito de irregularidades não determinísticas.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões obtidas nesta pesquisa, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica de trabalhos que abordam os efeitos dinâmicos em veículos e pontes, seção 2.1, e modelos veiculares utilizados no presente trabalho, seção 2.2.

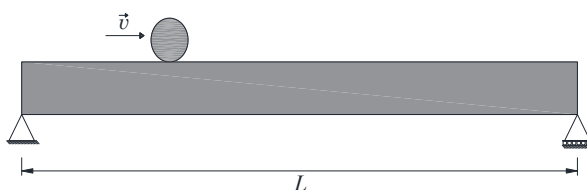
2.1 COMPORTAMENTO DINÂMICO EM PONTES

O estudo do problema de vibrações em pontes iniciou-se na segunda metade do século XIX, em decorrência do surgimento de novos veículos mais rápidos e pesados.

Tanto no trabalho de Melo (2007) como em Almeida (2006) pode-se encontrar uma síntese histórica na abordagem do problema. A primeira análise foi

introduzida por Willis (1849), que deduziu uma equação de movimento baseada em um modelo constituído de uma massa com velocidade constante atravessando uma viga simplesmente apoiada, flexível e de massa desprezível. No mesmo ano, Stokes (1849) obteve a solução analítica dessa equação de movimento, utilizando, para tal, uma técnica de expansão em séries.

FIGURA 1 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOB UMA MASSA MÓVEL



FONTE: Adaptado de Willis (1849).

A subsequente contribuição é apresentada por Krylov (1905), considera uma carga com massa desprezível em comparação com a viga e assim avalia o problema equivalente a uma força constante deslocando-se sobre a estrutura.

Inglis (1934) demonstra que a resposta dinâmica de uma viga simplesmente apoiada com um carregamento móvel, em qualquer instante, tem a forma de seu primeiro modo de vibração. Deste modo, o número de graus de liberdade da estrutura reduz-se para apenas um.

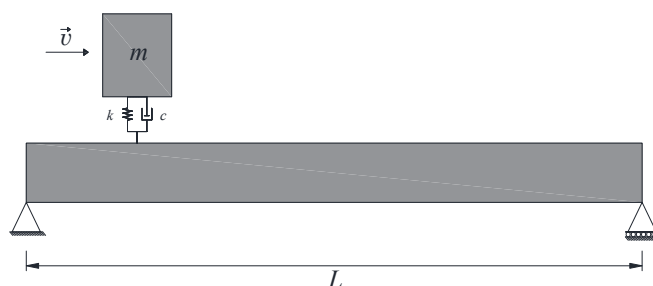
Pode-se citar uma vasta lista de autores (LOONEY, 1944; AYRE, FORD e JACOBSEN, 1950; HILLERBORG, 1951) que se utilizam da abordagem de modelos simplificados do veículo e da estrutura para analisar o problema de interação dinâmica em pontes.

A partir dos anos 70, com os avanços em métodos numéricos orientados à computação, o estudo de vibrações em pontes passa a ser desenvolvido com base no método dos elementos finitos.

Deve-se destacar a importância do método dos elementos finitos que, pela sua simplicidade e pelo seu vasto campo de aplicação, é hoje um procedimento numérico universalmente consagrado. Através dele, discretizando-se o meio contínuo de modo sistemático e uniforme, foi possível a realização de análises tão sofisticadas quanto precisas (MACHADO, 1983).

Huang e Veletsos (1970) idealizam o veículo em uma configuração mais realista, ou seja, o modelo é composto pela associação de uma massa rígida conectada a um sistema de suspensão formado por uma mola e um amortecedor.

FIGURA 2 – SISTEMA VEÍCULO E ESTRUTURA



FONTE: Adaptado de Huang e Veletsos (1970).

Yoshida e Weaver (1971), e Dailey, Caywood e O'Connor (1973), aplicam o método dos elementos finitos na análise do comportamento dinâmico de pontes. Esse método apresenta-se satisfatoriamente vantajoso para modelos de pontes bi ou tridimensionais.

Gupta e Trail-Nash (1980) adotam o modelo de veículo proposto por Huang e Veletsos (1970) para apurar os efeitos produzidos pela ação simultânea da frenagem e oscilação inicial do veículo, bem como a deslocamento vertical da ponte, a qual é modelada como uma viga e como uma placa.

Wu, Lee e Lai (1987) utilizam o método dos elementos finitos para a análise de respostas dinâmicas de placas sujeitas à ação de cargas móveis. Admitem-se os efeitos da excentricidade, da velocidade da carga móvel e o comprimento do vão.

Carneiro (1986, *apud* MELO, 2007, p. 24) apresenta um método de análise para viga de pontes, para diversas condições de apoio e restrições, com massas concentradas e sob a ação de cargas móveis.

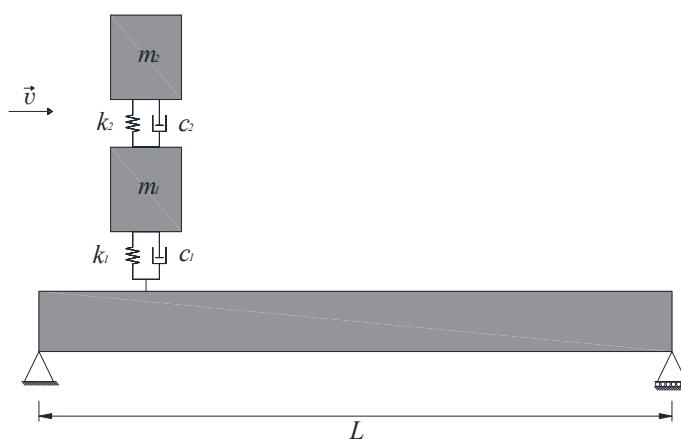
Ao final dos anos 80, passou-se a considerar os efeitos produzidos pelas irregularidades da pista no comportamento das estruturas rodoviárias, uma vez que tais irregularidades potencializam a ação dinâmica sobre a mesma.

Ferreira (1991, *apud* ALMEIDA, 2006, p. 31) emprega, em suas investigações, o mesmo procedimento de análise utilizado por Carneiro (1986). No entanto, propõe um modelo de veículo constituído por duas massas vinculadas a conjuntos de molas e amortecedores por um único eixo. Estabelece um estudo característico sobre os efeitos causados pela ação das cargas móveis nos tabuleiros das pontes rodoviárias, em consequência da mobilidade dos veículos e da influência dos mesmos sobre as irregularidades da pista.

Li e Fafitis (1995) analisaram a resposta dinâmica de pontes, sujeitas à veículos em movimento, considerando a irregularidade da pista. Um conjunto trator e semirreboque é modelado como dois corpos rígidos submetidos à translação vertical e rotação. Avalia-se o fator de amplificação dinâmica de acordo com os parâmetros empregados nas irregularidades do tipo harmônica senoidal. Uma comparação entre resultados numéricos e experimentais de uma ponte com viga simplesmente apoiada, com seção em T, é apresentada.

Esmailzadeh e Jalili (2003) apresentaram modelos computacionais simplificados que simulam veículos e que correspondem a um quarto de veículo e metade de veículo. A relação entre as características de vibração da ponte e a velocidade do veículo é analisada, o que resulta em uma busca por uma velocidade específica que determina os valores máximos da deflexão dinâmica e o momento fletor da estrutura.

FIGURA 3 – UM QUARTO DE VEÍCULO ATRAVESSANDO A ESTRUTURA



FONTE: Adaptado de Esmailzadeh e Jalili (2003).

Ren, Zhao e Harik (2004) realizaram um estudo, tanto numérico quanto experimental, de uma ponte rodoviária real de aço em arco no estado de Kentucky, nos EUA. A análise foi feita somente com o vão central, onde se localiza a estrutura em arco. Introduziram-se acelerômetros devidamente calibrados para as medições. As barras do arco foram modeladas por elementos finitos de pórtico espacial com 12 graus de liberdade por elemento. Os pilares-parede e a plataforma da ponte foram modelados com elementos finitos de placas.

Law e Zhu (2005) realizaram estudos numéricos e experimentais sobre as respostas dinâmicas de pontes, modeladas como vigas simplesmente apoiadas e contínuas. Desenvolve-se um modelo veicular articulado com 7 graus de liberdade para a análise numérica submetido a irregularidades randômicas. Após uma avaliação computacional preliminar, o desempenho do sistema foi então testado em um caminhão protótipo real. Um ajuste fino do sistema é realizado através de uma série de testes experimentais, focando tanto no conforto quanto no manuseio do veículo. Observou-se também os efeitos de frenagem sobre a estrutura, a qual gera uma força impulsiva equivalente.

Almeida (2006) desenvolveu uma análise paramétrica da resposta dinâmica, deslocamentos e esforços de pontes rodoviárias, devido à travessia de veículos de diversos tipos sobre um pavimento irregular. São considerados quatro modelos distintos para representar os veículos de comboio, sendo estes: veículos com um eixo e uma massa, viaturas com um eixo e duas massas, veículos com dois eixos e três massas e caminhões com três eixos e quatro massas. A variação da velocidade dos veículos gerou espectros de resposta dinâmica para modelos estruturais isostáticos, com e sem balanços nas extremidades, para seções estruturais do tipo caixão em concreto armado.

Bernardes (2006), baseado no proposto por Yang e Yau (1997), elaborou um modelo matemático massa-mola-amortecedor da interação entre veículo e estrutura admitindo o sistema de veículo acoplado ao da ponte ferroviária, ou seja, as vibrações do veículo afetam as respostas dinâmicas da ponte e vice-versa. O modelo desenvolvido considera também a irregularidade da via.

Melo (2007) obtém fatores de amplificação dinâmica resultantes da passagem de veículos monolíticos de 3 eixos, avaliados sob diversas condições de pavimento, velocidade, peso e possibilidade de obstáculos na pista.

Santos (2007) realizou uma modelagem matemática e, através da correlação das respostas numéricas e experimentais, validou as respostas dinâmicas do sistema com dados experimentais do problema de interação dinâmica entre veículo, irregularidade e estrutura.

Beghetto (2011) estudou a interação dinâmica tridimensional entre veículo e ponte ferroviária admitindo a mecânica de contato entre as rodas e os trilhos, mediante a variação de velocidade e a existência das irregularidades da via.

Rossigali (2013) elaborou uma base de dados representativa do tráfego de veículos pesados em rodovias brasileiras. Esta base de dados é composta por informações como a composição do tráfego e as distribuições de probabilidades do peso total e das distâncias entre eixos. Notou-se que, em pontes de pequenos vãos, a situação crítica em termos de esforços solicitantes é o fluxo livre de veículos, com a conseqüente amplificação dinâmica. Com o intuito de avaliar essa ação, estudou-se o comportamento dinâmico das pontes mediante a passagem de um caminhão articulado de 5 eixos.

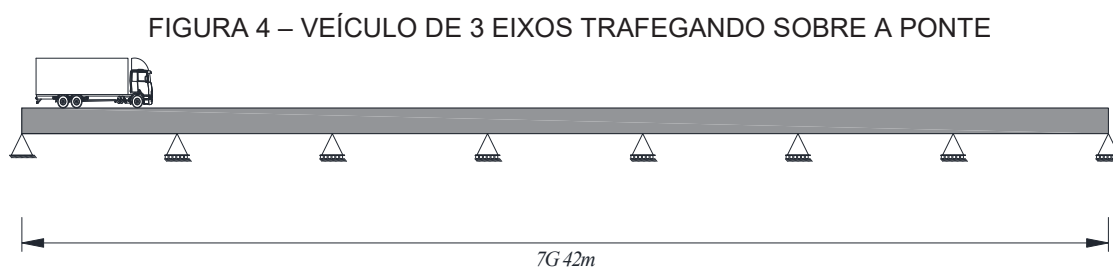
Araujo (2014) fez uma avaliação comparativa entre duas modelagens computacionais para o problema de interação dinâmica entre veículos de carga, a irregularidade da pista e a estrutura de ponte rodoviária. Em um modelo, a superestrutura é unidimensional e a solução é feita através da superposição dos modos; no outro, a ponte é tridimensional com elementos de casca, cuja solução é mediante ao método dos elementos finitos com coordenadas nodais. Mediante a comparação dos resultados numéricos pretende-se determinar critérios em que o modelo unidimensional represente adequadamente o comportamento dinâmico do modelo tridimensional.

Abeche (2015) analisou as respostas dinâmicas obtidas da interação desacoplada entre um veículo e uma ponte ferroviária, considerando as irregularidades da via e um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano a fim de representar o comportamento do concreto da estrutura caracterizado à tração e à compressão, por meio de uma análise dinâmica não linear.

Yin *et al.* (2016) estudaram a vibração de um sistema acoplado entre veículo e estrutura rodoviária, considerando os efeitos de trincas e rugosidades superficiais da pista. Dois modelos de veículo foram introduzidos: um modelo veicular com 1 grau de liberdade e um modelo matemático de veículo com 7 graus de liberdade. Foram investigados elementos estruturais de pontes representadas por uma viga simplesmente apoiada e uma viga contínua com três vãos uniformes. No estudo de vibração de pontes com fissuras, usou-se uma mola rotacional sem massa para descrever a flexibilidade local induzida por uma rachadura.

Koç e Esen (2017) determinaram as forças dinâmicas que atuam no veículo, considerando um sistema dinâmico entre o veículo com 6 graus de liberdade, a estrutura rodoviária e a irregularidade superficial da pista. A interação acoplada foi caracterizada por uma viga simplesmente apoiada e metades de veículos com 4 e 6 graus de liberdade, respectivamente. Além da estrutura flexível, as condições da estrada foram adicionadas ao modelo como irregularidades de superfície aleatórias e não aleatórias. As forças dinâmicas no modelo veicular, os efeitos da velocidade do veículo, flexibilidade da ponte, rigidez do pneu e irregularidades, aleatórias ou não aleatórias, da pista no conforto do passageiro foram amplamente investigados.

Nguyen, Tran e Hoang (2017) empregaram o método de elementos finitos para investigar a resposta dinâmica de uma ponte de viga contínua devido à passagem de um veículo de três eixos, considerando os efeitos de frenagem sobre a estrutura. Além disso, os fatores de impacto dinâmico, investigados numericamente, são validados experimentalmente em uma estrutura de ponte real.



FONTE: Adaptado de Nguyen, Tran e Hoang (2017).

Paraskeva, Dimitrakopoulos e Zeng (2017) analisaram o comportamento dinâmico de uma ponte sismicamente excitada, considerando a interação acoplada entre veículo e estrutura simultaneamente. Os resultados mostram que as condições superficiais da estrada influenciam fortemente no sistema dinâmico, mesmo quando a componente vertical da excitação do terremoto é significativa.

Kameshwar e Padgett (2018) avaliam os efeitos dinâmicos de pontes, admitindo a interação acoplada entre veículo e estrutura, submetidos a terremotos. Para este propósito, empregam-se vigas simplesmente apoiadas, com parâmetros geométricos variáveis, sob 3 tipos diferentes de caminhões estacionários colocados sobre a mesma. Análises de sensibilidade também são realizadas para determinar os parâmetros da ponte que alteram significativamente na presença de veículos.

Metz *et al.* (2018a) avaliaram as respostas dinâmicas a partir da interação desacoplada entre veículo e ponte rodoviária, empregando modelos matemáticos veiculares com 4, 5 e 9 graus de liberdade, elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* e irregularidades harmônicas senoidais da via.

Imai (2018) investigou as respostas dinâmicas não lineares de pontes de concreto armado, mediante a interação dinâmica entre um veículo simplificado com 1 grau de liberdade, considerando a geometria da seção transversal variada e com taxa de armadura realista. A análise dinâmica considerou a danificação no concreto.

2.2 CONFIGURAÇÕES DE VEÍCULOS

No Brasil, a utilização do transporte rodoviário vem se estabelecendo desde a década de 50, associada à implantação da indústria automobilística no país e às necessidades de integração do território nacional. À medida que o transporte rodoviário se desenvolveu, houve necessidade de veículos automotivos com maior capacidade de carga para suprir a necessidade de escoamento de grandes cargas por conta da escassez de linhas férreas.

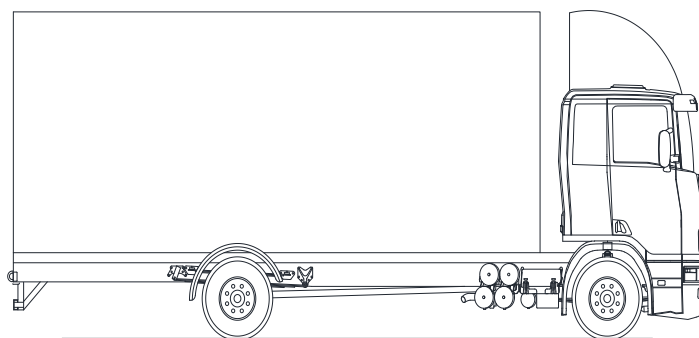
Em 2005 chegou-se a cifra de 1,5 milhões de caminhões fabricados, colocando o Brasil como o quinto maior produtor mundial de veículos pesados,

segundo a ANFAVEA - Associação Nacional de Veículos Automotores (MELO, 2018).

Após a sequência evolutiva da legislação de trânsito brasileira, destacam-se os tipos de veículos abordados neste trabalho como os principais representantes da matriz rodoviária do transporte de cargas, baseando-se no trabalho de Melo (2018):

- a) Caminhão 4x2: Utilizado para o transporte de curta distância e principalmente na distribuição urbana. Encontram-se nas vias públicas os caminhões leves de 2 eixos, do tipo 4x2, conhecido popularmente como *caminhão toco*, conforme ilustrado na FIGURA 5.

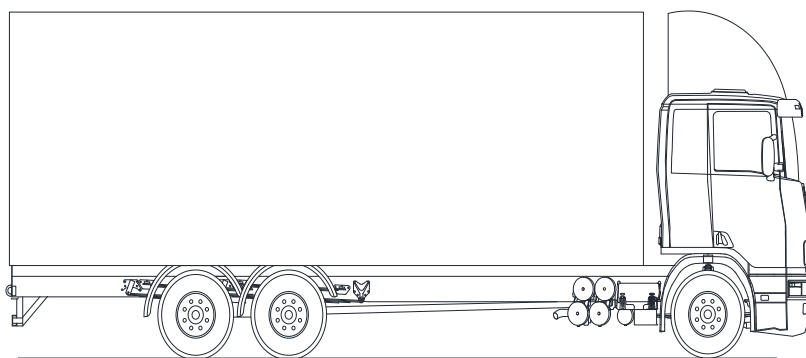
FIGURA 5 – CAMINHÃO LEVE DE 2 EIXOS DO TIPO 4X2



FONTE: Melo (2018).

- b) Caminhão 6x2/6x4: O segundo tipo é o caminhão de 3 eixos, utilizado principalmente em distâncias curtas e médias. Este modelo possui um peso bruto total de 23 toneladas, podendo ser do tipo 6x2 ou ainda 6x4. O caminhão do tipo 6x2 possui tração apenas no segundo eixo e é conhecido como *caminhão trucado*. Enquanto na 6x4, apresenta a tração no segundo e terceiro eixos, e é conhecido como *caminhão traçado*. A FIGURA 6 procura ilustrar o modelo descrito.

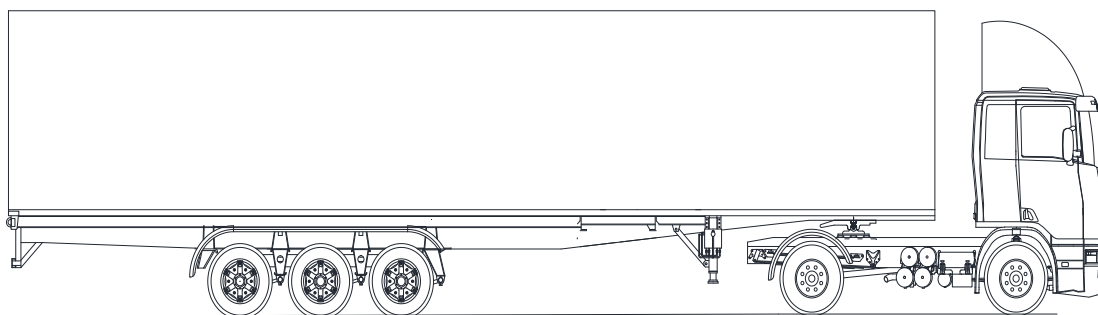
FIGURA 6 – CAMINHÃO MÉDIO DE 3 EIXOS DO TIPO 6X2/6X4



FONTE: Melo (2018).

- c) Caminhão-Trator 4x2 e semirreboque: Trata-se de um conjunto de veículos de carga, formado por uma unidade tratora e um veículo rebocado, neste caso um semirreboque. Especificamente o conjunto da FIGURA 7 é formado por um caminhão-trator de 2 eixos do tipo 4x2 e um semirreboque de 3 eixos, totalizando 5 eixos no conjunto. Este possui um peso bruto total combinado de 41,5 toneladas e uma capacidade de carga aproximadamente de 26 toneladas, dependendo do peso próprio do conjunto. O modelo veicular possui uma única articulação e o acoplamento entre os veículos é garantido pelos componentes chamados de *quinta roda* no veículo de tração e o *pino-rei* no veículo rebocado.

FIGURA 7 – CONJUNTO CAMINHÃO-TRATOR 4X2 E SEMIRREBOQUE DE 3 EIXOS

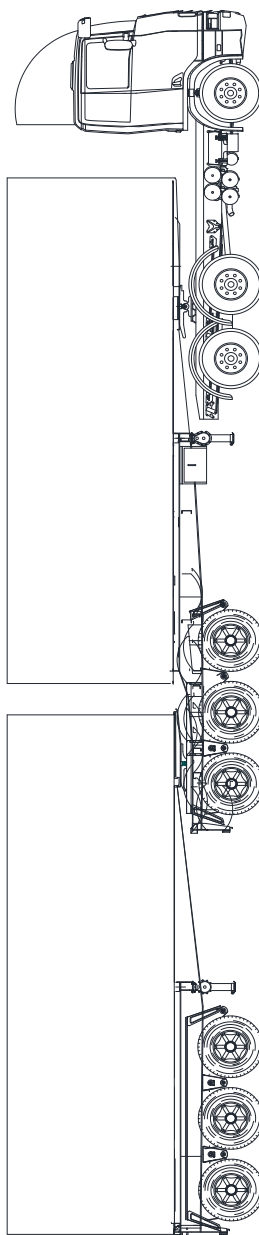


FONTE: Melo (2018).

- d) Bitrem de 9 eixos: Conhecido nas estradas como *bitrenção* ou *superbitrem*, trata-se de uma nova Combinação de Veículos de Carga – CVC, autorizada pela resolução nº 211 do Conselho

Nacional de Trânsito (CONTRAN, 2006), formada por 3 eixos com uma *quinta roda* traseira de seu chassi e mais um segundo semirreboque também de 3 eixos. Esse conjunto possui um peso bruto total combinado de 74 toneladas, uma capacidade de carga líquida de aproximadamente 52 toneladas, com duas articulações e 9 eixos no total. A FIGURA 8 representa a configuração especificada.

FIGURA 8 – CONJUNTO DE VEÍCULOS DE CARGA DO TIPO BITREM DE 9 EIXOS



FONTE: Melo (2018).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica abrange a mecânica clássica, a teoria da viga de *Euler-Bernoulli*, o método dos elementos finitos (MEF), modelos matemáticos veiculares, a irregularidade superficial da ponte e os sistemas dinâmicos lineares, com a intenção de fazer uma recapitulação da fundamentação teórica envolvida na temática discutida.

3.1 DINÂMICA LAGRANGIANA

Os fundamentos da mecânica lagrangiana foram introduzidos por volta de 1770 por Joseph Louis Lagrange, muito tempo depois do trabalho de *Newton*, o qual revolucionou a matemática e a física com a sua famosa *Lei de Newton* (LOPES, 2006). O ponto de vista da mecânica de *Newton* é basicamente vetorial, e nela o conceito de força desempenha um papel proeminente. O ponto de vista lagrangiano da mecânica dá mais relevo a uma função escalar que está definida no espaço de fase. Considere-se um campo de forças f que deriva de um potencial V . Enquanto a energia total é a soma $E = T + V$ da energia cinética mais a energia potencial, o lagrangiano é a diferença $T - V = \mathcal{L}$.

A base do tratamento de *Lagrange* se inicia com o princípio do ‘trabalho virtual nulo’ sistematizado por *D’Alembert* em seu *Traité de Dynamique* em 1758 (GOLDSTEIN, 2002). *Lagrange* reformula esse princípio para uni-lo ao contexto do cálculo das variações elaborado por *Euler* e, conseqüentemente, desenvolveram-se técnicas matemáticas poderosas.

A formulação lagrangiana da mecânica estabelece como descrever formalmente fenômenos físicos através de coordenadas generalizadas. Essas coordenadas formam um espaço multidimensional abstrato, o espaço de configurações lagrangiana, no qual a trajetória do sistema como um todo caracteriza uma única curva. O princípio variacional de *Lagrange* e *Euler* nos permite encontrar essa curva utilizando como requisito uma propriedade global da mesma, enunciada no princípio de *Hamilton*, como será visto na seção 3.2.

3.1.1 Princípio de *D'Alembert*

Para uma partícula, tem-se a seguinte expressão que relaciona a força que atua em uma massa em função da sua aceleração (GOLDSTEIN, 2002)

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1)$$

em que \vec{F} é a força externa atuante e \vec{p} é o impulso linear da partícula. O impulso linear, por sua vez, é dado por:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2)$$

onde m é a massa e \vec{v} o vetor velocidade da partícula.

Substituindo a Eq. (2) em (1), obtém-se a segunda lei de *Newton*, a qual estabelece que a mudança do movimento é proporcional à ação da força motriz e se realiza na direção em que esta força atua.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3)$$

Um conjunto de deslocamentos virtuais sobre o sistema é definido como pequenas alterações instantâneas $\delta\vec{w}_i$, que são compatíveis com as forças e os vínculos, restrições de natureza geométrica ou cinemática que limitam o movimento, ao qual o sistema encontra-se sujeito.

O deslocamento denomina-se virtual para diferenciá-lo de uma mudança verdadeira do sistema que pode ocorrer em um intervalo de tempo dt , durante o qual as forças e as condições de vínculo podem mudar. Como premissa, impor que o sistema esteja em equilíbrio é dizer que a força total que atua sobre cada partícula seja nula $\vec{F}_i = \vec{0}$. Consequentemente o produto escalar $\vec{F}_i \delta\vec{w}_i$, que corresponde o trabalho da força \vec{F}_i sobre o deslocamento $\delta\vec{w}_i$, torna-se nulo (MONTROYA, 2009).

Assumindo todas as N partículas do sistema, tem-se que a soma de todos os respectivos produtos também deve ser zero

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{w}_i = 0 \quad (4)$$

Usando o fato de que a força resultante \vec{F}_i sobre a i -ésima partícula pode ser decomposta em uma força aplicada \vec{F}_i^a e a força de restrição \vec{f}_i , de modo que

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{f}_i \quad (5)$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (4), resulta em

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \delta \vec{w}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \delta \vec{w}_i = 0 \quad (6)$$

Limitando-nos ao conjunto suficientemente amplo de circunstâncias em que o trabalho virtual das forças de vínculo é zero, resulta no *princípio dos trabalhos virtuais*

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \delta \vec{w}_i = 0 \quad (7)$$

Este princípio permite exprimir a condição de equilíbrio para sistemas vinculados em termos somente das forças aplicadas.

Ao afirmar que as variações $\delta \vec{w}_i$ não sejam iguais a zero, implica em geral que $\vec{F}_i^a \neq 0$. Isto ocorre em consequência dos deslocamentos virtuais $\delta \vec{w}_i$ não serem plenamente independentes, posto que esses devem satisfazer às condições de vínculo. Para eliminar as variações $\delta \vec{w}_i$, deve-se dirigir o *princípio dos trabalhos virtuais* a uma forma que contenha os deslocamentos virtuais em termos de coordenadas generalizadas, que são independentes entre si. As equações dos trabalhos virtuais satisfazem esta exigência através da exclusão das forças \vec{f}_i , mas somente para o caso estático. Aplica-se então uma estratégia primeiramente realizada por Jakob Bernoulli e, em seguida, aperfeiçoada por Jean D'Alembert (MONTROYA, 2009). Assim sendo, pode-se reescrever a Eq. (1) para uma partícula

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad (8)$$

em que a Eq. (8) parte de um princípio variacional estático equivalente às leis de *Newton* para a dinâmica.

Segundo a interpretação de *D'Alembert*, cada partícula do sistema encontra-se em “equilíbrio” sob uma força resultante que é a soma da força real com uma “força efetiva invertida” igual a $-\dot{\vec{p}}_i$. Esta força adicional fictícia é uma força de inércia existente no referencial que acompanha o movimento da partícula, isto é, no qual ela permanece em repouso (LEMOS, 2007). Portanto, substituindo a Eq. (8) na Eq. (6) e admitindo as forças de vínculo, tem-se

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{w}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \delta \vec{w}_i = 0 \quad (9)$$

Usando novamente a decomposição descrita na Eq. (5) e supondo que os vínculos sejam ideais, temos o Princípio de *D'Alembert*:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^a - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{w}_i = 0 \quad (10)$$

Este princípio representa uma extensão do princípio dos trabalhos virtuais a sistemas mecânicos em movimento. No caso de sistemas vinculados, o princípio de *D'Alembert* constitui um avanço relativamente à formulação newtoniana porque exclui qualquer referência às forças de vínculo.

3.1.2 Coordenadas Generalizadas e Equações de *Lagrange*

Neste tópico é apresentada a elucidação das coordenadas generalizadas e equações de *Lagrange*, tendo como principal influência os trabalhos de Goldstein (2002), Lemos (2007) e Kelly (2007).

O princípio de *D'Alembert* ainda exige trabalhar com mais coordenadas do que o necessário, pois não apenas os $\delta \vec{w}_i$ não são independentes como também, em muitos casos, as próprias posições \vec{w}_i . Em sistemas holônomos, sistemas nos quais as partículas dependem somente das coordenadas e do tempo, é possível introduzir certo número n de variáveis independentes, denotadas genericamente por q_1, \dots, q_n e denominadas *coordenadas generalizadas*, de sorte que: (a) o vetor posição de cada partícula é determinado univocamente em cada instante pelos valores dos q 's; (b) os

vínculos, holônomos, são identicamente satisfeitos se expressos em termos dos q 's.

Seja um sistema mecânico constituído por N partículas sujeitas aos p vínculos holônomos

$$\begin{aligned} f_1(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N, t) \\ \vdots \\ f_p(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N, t) \end{aligned} \quad (11)$$

Das $3N$ coordenadas $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ apenas $n = 3N - p$ podem ser tomadas como independentes entre si, e diz-se que o sistema possui n graus de liberdade. É possível introduzir n coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n em termos das quais

$$\vec{w}_i = \vec{w}_i(q_1, \dots, q_n, t), i = 1, \dots, N \quad (12)$$

e as Eqs. (11) são identicamente satisfeitas. Em linguagem geométrica, pode-se dizer que as Eqs. (11) definem uma hipersuperfície de dimensão n em um espaço de dimensão $3N$ e a Eq. (12) são as equações paramétricas dessa hipersuperfície.

Uma vez introduzidas coordenadas generalizadas via a Eq. (12), os deslocamentos virtuais $\delta\vec{w}_i$, podem ser apresentados em termos dos deslocamentos virtuais independentes δq_k através de

$$\delta\vec{w}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\vec{w}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (13)$$

posto que o tempo deve permanecer fixo. No entanto,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{w}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\vec{w}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial\vec{w}_i}{\partial t} \quad (14)$$

Uma vez que as forças de vínculo são desconsideradas no princípio de *D'Alembert*, daqui em diante será desprezado o superescrito identificador de forças aplicadas, ou seja, $\vec{F}_i^a \equiv \vec{F}_i$. Assim, empregando a Eq. (13), o trabalho virtual das forças aplicadas torna-se

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{w}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \delta q_k \equiv \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (15)$$

no qual

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \quad (16)$$

é, por definição, a k -ésima componente da força generalizada. Como os q_k não tem necessariamente dimensão de comprimento, os Q_k não têm necessariamente dimensão de força; mas o produto de ambas sempre tem a dimensão de trabalho (LEMOS, 2007).

A outra parcela compreendida no princípio de *D'Alembert* é

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \delta \vec{w}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \delta \vec{w}_i = \sum_{i,k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (17)$$

Aplicando a regra do produto para as derivadas na parcela direta da Eq. (17), tem-se a identidade

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right) \right\} \quad (18)$$

No último termo da Eq. (18) pode-se utilizar a seguinte determinação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right) &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right) &= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (19)$$

em que foi empregada a Eq. (14) e assim, pode-se tratar os q 's e \dot{q} 's como grandezas independentes, de modo que as derivadas parciais em relação aos q 's tratam os \dot{q} 's como constantes e vice-versa. Além disso, a partir da Eq. (14) deduz-se imediatamente

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \quad (20)$$

Substituindo a Eq. (20) na Eq. (18) e sabendo que $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} \right)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right\} \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (21)$$

onde

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (22)$$

é a energia cinética do sistema. Levando as Eqs. (15), (17) e (21) em (10), resulta

$$\sum_{k=1}^n \left\{ Q_k - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \right\} \delta q_k = 0 \quad (23)$$

Visto que δq 's são respectivamente independentes e arbitrários, a Eq. (23) só pode ser satisfeita se o termo de cada δq_k for nulo. Infere-se, deste modo, as n equações

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (24)$$

as quais são denominadas usualmente como Equações de *Lagrange*.

Como Q_k é uma força generalizada, pode-se defini-la como a variação da energia potencial do sistema em relação à coordenada generalizada. Para sistemas conservativos, estas forças podem ser obtidas a partir da função V

que é denominada energia potencial do sistema (GOLDSTEIN, 2002). Esta fórmula representa a força necessária para vencer o campo

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (25)$$

Assim, inserindo a Eq. (25) em (24) tem-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad (26)$$

Dado que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, a Eq. (26) é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad (27)$$

Definindo a função de *Lagrange* ou, simplesmente, lagrangiana \mathcal{L} por

$$\mathcal{L} = T - V \quad (28)$$

as equações de movimento do sistema podem ser escritas na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (29)$$

A Eq. (29) descreve o movimento de um sistema de uma maneira estática de forma similar ao Princípio de *D'Alembert*, mas em termos de energia. É possível utilizar várias formas de funções dissipativas, quando o sistema não for conservativo. Quando parte da energia do sistema for dissipada por elementos submetidos a forças que sejam proporcionais à sua velocidade, é possível acrescentar uma parcela à equação de *Lagrange* utilizando uma função dissipativa R , na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (30)$$

onde R é denominada função de dissipação de *Rayleigh* (LEMOS, 2007), a qual é uma função que depende da velocidade e representa a dissipação do sistema.

3.2 PRINCÍPIO VARIACIONAL DE HAMILTON

De todas as formulações da dinâmica clássica, a mais concisa tem a forma de um princípio variacional. Conforme ideias típicas do século XVIII, das quais Maupertuis foi um dos pioneiros, dentre todas as alternativas à sua disposição, a natureza segue o curso mais econômico de acordo com algum critério de comparação entre as diversas possibilidades. O princípio diferencial de *D'Alembert*, do qual se deduzem as equações de *Lagrange*, exprime a lei fundamental do movimento em termos da configuração instantânea do sistema e de desvios infinitesimais da referida configuração. É possível reformular a lei dinâmica fundamental como um princípio integral, que leva em conta o movimento completo do sistema durante um intervalo de tempo finito (LEMOS, 2007). O princípio de *Hamilton* restringe as leis da mecânica a uma proposição segunda a qual, contraposto com todos os movimentos possíveis, o movimento real é aquele para o qual é mínima uma certa quantidade - a *ação* - cujo valor depende do movimento do sistema em sua totalidade.

O movimento de qualquer partícula do sistema pode ser descrito em função das coordenadas escolhidas. Para uma partícula de massa m e vetor posição \vec{w} , a partir da segunda lei de *Newton*, podemos escrever (KELLY, 2007)

$$\vec{F} + \sum_{i=1}^p \vec{f}_i = m\ddot{\vec{w}} \quad (31)$$

em que \vec{F} é a resultante das forças externas e $\sum_{i=1}^p \vec{f}_i$ refere-se às forças restritivas provenientes de outras partículas no sistema.

O trabalho realizado por todas as forças para levar o sistema de uma configuração inicial \vec{w}_1 a uma configuração final \vec{w}_2 é definido por

$$\int_{\vec{w}_1}^{\vec{w}_2} \vec{F} d\vec{w} + \sum_{i=1}^p \int_{\vec{w}_1}^{\vec{w}_2} \vec{f}_i d\Delta\vec{w} = \int_{\vec{w}_1}^{\vec{w}_2} m\ddot{\vec{w}} d\vec{w} \quad (32)$$

no qual $\Delta\vec{w}$ representa o vetor da variação em seu referencial. O trabalho realizado pelas forças externas é dado por

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{w}_1}^{\vec{w}_2} \vec{F} d\vec{w} \quad (33)$$

O termo do lado direito da Eq. (31) é

$$\int_{\vec{w}_1}^{\vec{w}_2} m \ddot{\vec{w}} d\vec{w} = \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{\vec{w}} \frac{d\vec{w}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\vec{w}}\dot{\vec{w}})}{dt} dt = \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{w}}\dot{\vec{w}} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \quad (34)$$

A energia cinética da partícula é dada por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{w}}\dot{\vec{w}} \quad (35)$$

A Eq. (32) torna-se

$$W_{1 \rightarrow 2} + \sum_{i=1}^p \int_{\vec{w}_1}^{\vec{w}_2} \vec{f} d\Delta\vec{w} = T_2 - T_1 \quad (36)$$

onde T_1 e T_2 representam, respectivamente, a energia cinética da partícula nos instantes t_1 e t_2 .

Uma equação similar pode ser escrita para cada partícula do sistema. Quando todas as equações são adicionadas, considerando que a força agindo da partícula A para a partícula B é igual e oposta à força atuando da B para A , o trabalho total realizado pelas forças internas é zero (KELLY, 2007).

Sabendo-se que a energia cinética total do sistema é a soma da energia cinética de cada partícula, e o trabalho total é a soma do trabalho realizado por todas as forças externas, o princípio geral do trabalho e energia torna-se

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad (37)$$

Da Eq. (37), exposta acima, resulta que o trabalho e a energia cinética em qualquer instante são funcionais das coordenadas generalizadas, com os δq 's independentes entre si e arbitrários, exceto pelas condições nos extremos $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$, $k = 1, \dots, n$. Destaque-se que é a mútua independência

das coordenadas generalizadas que assegura que cada uma delas pode ser variada independentemente das demais.

A variação do vetor posição é

$$\begin{aligned}\delta\vec{w} &= \vec{w}(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n) - \vec{w}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \delta\vec{w} &= \frac{\partial\vec{w}}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{w}}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial\vec{w}}{\partial q_n}\delta q_n\end{aligned}\quad (38)$$

Dispondo o produto escalar na Eq. (31) com a Eq. (38), segue que

$$\vec{F}\delta\vec{w} + \sum_{i=1}^p \vec{f}_i\delta\Delta\vec{w} = (m\ddot{\vec{w}})\delta\vec{w}\quad (39)$$

A variação no trabalho, usando a definição da Eq. (33) é

$$\delta W = \vec{F}\delta\vec{w}\quad (40)$$

O trabalho definido na Eq. (40) é denominado de trabalho virtual. Derivando $\dot{\vec{w}}\delta\vec{w}$ em relação a t, obtém-se

$$\frac{d(\dot{\vec{w}}\delta\vec{w})}{dt} = \ddot{\vec{w}}\delta\vec{w} + \dot{\vec{w}}\frac{d(\delta\vec{w})}{dt}\quad (41)$$

A ordem da variação e da diferenciação podem ser trocadas, isto é, $\delta(dy) = d(\delta y)$ (MIGOTTO, 2011). Portanto, a Eq. (41) pode ser escrita na forma

$$\ddot{\vec{w}}\delta\vec{w} = \frac{d(\dot{\vec{w}}\delta\vec{w})}{dt} - \dot{\vec{w}}\delta\dot{\vec{w}}\quad (42)$$

Nota-se ainda que

$$\delta(\dot{\vec{w}}\dot{\vec{w}}) = \delta\dot{\vec{w}}\dot{\vec{w}} + \dot{\vec{w}}\delta\dot{\vec{w}} = 2\dot{\vec{w}}\delta\dot{\vec{w}}\quad (43)$$

O emprego da Eq. (43) em (42) e subsequentemente na Eq. (39), tem-se

$$\delta W + \left(\sum_{i=1}^p \vec{f}_i\right)\delta\Delta\vec{w} = m\frac{d(\dot{\vec{w}}\delta\vec{w})}{dt} - \delta\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{w}}\dot{\vec{w}}\right)\quad (44)$$

A variação da energia cinética para a partícula é

$$\delta T = \delta \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{w}} \dot{\vec{w}} \right) \quad (45)$$

logo a Eq. (44) torna-se

$$\delta T + \delta W + \left(\sum_{i=1}^p \vec{f}_i \right) \delta \Delta \vec{w} = m \frac{d(\dot{\vec{w}} \delta \vec{w})}{dt} \quad (46)$$

A Eq. (46) é escrita para uma única partícula. Uma equação similar pode ser escrita para cada partícula do sistema. Adicionando todas as equações tem-se que

$$\delta T + \delta W = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d(\dot{\vec{w}} \delta \vec{w})}{dt} \quad (47)$$

O trabalho virtual total das forças entre as partículas é zero.

Forças externas atuando no sistema podem ser conservativas (mola, gravidade) ou não conservativas (amortecedor). O trabalho realizado pelas forças conservativas pode ser determinado a partir da energia potencial, $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$, tal que $\delta W = -\delta V$ (KELLY, 2007).

O trabalho virtual total é

$$\delta W = \delta W_{NC} - \delta V \quad (48)$$

onde δW_{NC} é o trabalho realizado por todas as forças não conservativas. Desta forma, a Eq. (47) pode ser escrita na forma

$$\delta T - \delta V + \delta W_{NC} = m \frac{d(\dot{\vec{w}} \delta \vec{w})}{dt} \quad (49)$$

Integrando a Eq. (49) em t , variando em t_1 e t_2 , tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{NC}) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d(\dot{\vec{w}} \delta \vec{w})}{dt} dt = [m \dot{\vec{w}} \delta \vec{w}] \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \quad (50)$$

As variações nas coordenadas generalizadas são definidas de modo que sejam iguais a zero em t_1 e t_2 . Assim, o lado direito da Eq. (50) é zero, e

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{NC}) dt = 0 \quad (51)$$

Empregando-se a Eq. (28), a qual define-se o funcional lagrangiano, a Eq. (51) torna-se

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{L} + \delta W_{NC}) dt = 0 \quad (52)$$

A Eq. (52) é o princípio estendido de *Hamilton*. Se todas as forças são conservativas, $\delta W_{NC} = 0$, a Eq. (51) é reduzida para

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (53)$$

Se a ordem da variação e integração podem ser permutadas, a Eq. (53) é dada por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (54)$$

o qual é referido na literatura como princípio de *Hamilton* (KELLY, 2007).

3.3 TEORIA DA VIGA DE *EULER-BERNOULLI*

A teoria clássica de *Euler-Bernoulli* considera vigas prismáticas uniformes, de seção transversal constante, com comprimento longitudinal como dimensão predominante.

3.3.1 Equação de *Euler-Bernoulli*

A viga de *Euler-Bernoulli* é um modelo que inclui a energia de deformação devido à flexão e à energia cinética devido ao deslocamento

lateral, mas ignora distorção por cisalhamento e inércia rotacional (KELLY, 2007). A equação de movimento pode ser obtida usando o princípio variacional de *Hamilton*. A energia potencial total de uma viga uniforme devido à flexão é definida como

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_0^L f(x, t) w dx \quad (55)$$

em que w representa o deslocamento transversal e os parâmetros geométricos L e I , representam respectivamente o comprimento da viga e o momento de inércia, enquanto as grandezas E e $f(x, t)$ são, respectivamente, o módulo de elasticidade do material e a força transversal por unidade de comprimento aplicada sobre a superfície da viga.

A energia cinética para o elemento diferencial, conforme a FIGURA 9, é descrita como

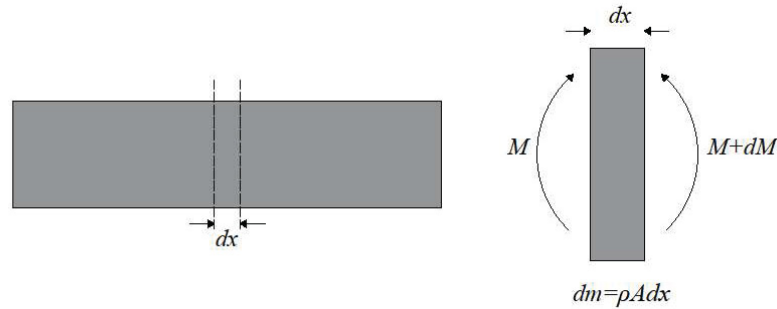
$$dT = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (56)$$

sendo ρ a massa específica do material e A a área da seção transversal. A equação da energia cinética total da viga é representada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (57)$$

Aplicando o princípio de *Hamilton*, a Eq. (53) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \left[\delta \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - 2\delta \int_0^L f(x, t) w dx \right] \right\} dt = 0 \quad (58)$$

FIGURA 9 – ELEMENTO DIFERENCIAL PARA A VIGA DE *EULER-BERNOULLI*

FONTE: O autor (2019).

Admitindo que, na parcela correspondente à energia cinética total da Eq. (58), a ordem entre a variação e a integral possa ser trocada (MIGOTTO, 2011), obtém-se

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dx \right] dt \quad (59)$$

Invertendo a ordem de integração na Eq. (59) e aplicando a integração por partes em relação a t , temos

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = \int_0^L \rho A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx \right] dt \quad (60)$$

Assim, sabendo que o termo da variação em t_1 e t_2 é igual a zero e alterando novamente a ordem de integração, a Eq. (60) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx dt \quad (61)$$

Agora, tendo em vista o termo da energia potencial, e sabendo que a ordem da variação pode ser modificada tem-se (MIGOTTO, 2011)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - 2\delta \int_0^L f(x,t) w dx \right] dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f(x,t) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{62}$$

Empregando a integração por partes em relação a x a Eq. (62) fica

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - 2\delta \int_0^L f(x,t) w dx \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=L} dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \delta w \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx \right\} dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f(x,t) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{63}$$

Substituindo as Eqs. (61) e (63) em (58) obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(E(L)I(L) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (L,t) \right) \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x} (L,t) \right) \right] \right\} dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(E(0)I(0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (0,t) \right) \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x} (0,t) \right) \right] \right\} dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (L,t) \delta w(L,t) \right] \right\} dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (0,t) \delta w(0,t) \right] \right\} dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - f(x,t) \right] \delta w dx dt = 0
\end{aligned} \tag{64}$$

Aplicando o Lema de *Dubois-Reymond*, (KELLY, 2007), em que cada termo da Eq. (64) deve ser zero independentemente, resulta

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - f(x,t) = 0 \tag{65}$$

que é referida como equação de *Euler-Bernoulli* para vigas.

Decorrem naturalmente, a partir do princípio de *Hamilton*, as condições de contorno (KELLY 2007)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (0, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w(0, t) = 0 \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (L, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w(L, t) = 0 \quad (67)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (0, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} (0, t) = 0 \quad (68)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (L, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} (L, t) = 0 \quad (69)$$

Duas condições de contorno são necessárias em cada extremidade da viga. A geometria do problema define estas condições.

3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção é apresentada a fundamentação teórica do método dos elementos finitos (MEF), tendo como respaldo o trabalho de Soriano (2003).

O método dos elementos finitos surgiu em 1955 como evolução da análise matricial de modelos reticulados, concebida no início da década de 1930 na indústria aeronáutica britânica, com o advento de computadores digitais e devido à necessidade de projetar estruturas de modelos contínuos. Os primeiros elementos foram concebidos por engenheiros aeronáuticos para a análise de distribuição de tensões em chapas de asa de avião. Sua formulação foi tratada pioneiramente por Argyris e Kelsey em 1955, republicada em 1960, e por Turner, Clough, Martin e Topp em 1956 (SORIANO, 2003).

Gallagher e Padlog (1963) foram os primeiros a estabelecer campos de deslocamentos e cargas críticas em vigas e placas, com elementos finitos, admitindo o efeito da não linearidade geométrica. Archer (1963) empregou

campos de deslocamentos em elemento finito com o intuito de estabelecer a matriz de massa consistente. Desta forma, em 1963, havia aplicações de elementos finitos em problemas estáticos, de não linearidade e dinâmicos. Tal formulação do elemento foi desenvolvida através do princípio dos deslocamentos virtuais, porém não havia critérios que certificassem a convergência para a solução exata.

Melosh (1963) expôs uma formulação do método dos elementos finitos fundamentando-se na minimização do funcional de energia potencial total. Veubeke (1965) atestou a definição do método dos elementos finitos a partir de outros funcionais da mecânica dos sólidos deformáveis. Entretanto, verificou-se que os fundamentos do método já haviam sido instituídos por Lord Rayleigh em 1870, por Walther Ritz em 1909 e por Richard Courant (1943). Consequentemente, mostrou-se que o método dos elementos finitos é um caso particular do método de *Rayleigh-Ritz*. Desta forma, estabeleceram-se critérios de convergência e verificou-se que o método poderia ser empregado em qualquer problema de meio contínuo regido por funcional. Essa é a denominada formulação variacional (SORIANO, 2003).

A consistência matemática da formulação variacional proporcionou a extensão do método dos elementos finitos à solução de diversos problemas do meio contínuo, como problemas de meios porosos, transferência de calor e eletrostáticos, retratados primeiramente nos trabalhos de Zienkiewicz e Cheung (1965), Zienkiewicz *et al.* (1966) e Wilson e Nickell (1966).

Além da determinação desses problemas, Cheung e Zienkiewicz (1965) foram os primeiros a empregar o método em interação solo-estrutura. Zienkiewicz e Cheung (1967) publicaram o primeiro livro exclusivamente aplicado ao método dos elementos finitos, e Zienkiewicz *et al.* (1968) utilizaram procedimento iterativo nesse método em análise de fissuras em meios elásticos.

Subsequentemente à concepção da formulação variacional, Szabo e Lee (1966) constataram que o método poderia ser formulado diretamente a partir das equações diferenciais e suas respectivas condições de contorno para problemas em meios contínuos, como o método dos resíduos ponderados de *Galerkin*.

Herrmann (1972) corroborou a equivalência entre o elemento finito formulado através do funcional de energia potencial total e o método dos mínimos quadrados de resíduos de tensões. Lynn e Arya (1973) formularam o método dos elementos finitos baseado no método dos mínimos quadrados, que também é um caso de método de resíduos ponderados. Assim, a aplicação do método dos elementos finitos englobou problemas não regidos por funcionais.

Semelhante à formulação variacional, na formulação de resíduos do método dos elementos finitos, arbitram-se campos de variáveis no elemento em função dos correspondentes valores nodais. A partir das equações algébricas (obtidas através das formulações direta, variacional ou de resíduos), que regem o comportamento aproximado de cada um dos subdomínios (denominados elementos finitos), monta-se o sistema de equações da malha de elementos como um todo, denominado sistema global, que, juntamente com as condições de contorno ainda não atendidas ao se arbitrar o(s) campo(s) de variável(eis) nos subdomínios, permite a determinação dos valores nodais de definição desse(s) campo(s). Pode-se, então, retornar à análise de cada elemento isoladamente para determinação de incógnitas em qualquer um de seus pontos (SORIANO, 2003).

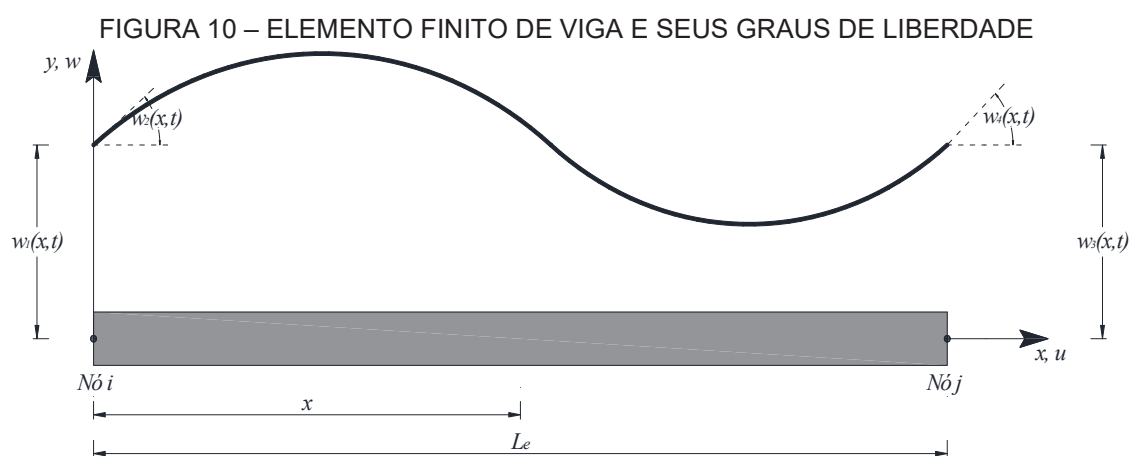
Através dessa conceitualização do método dos elementos finitos, objetiva-se transmitir ao leitor a concepção do método e sua relevância, bem como o seu desenvolvimento progressivo, proporcionando solução a problemas que, há algumas décadas, não eram compreendidos.

3.4.1 Elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli*

Neste tópico é feita a revisão teórica sobre os elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* no intuito de melhor compreender o método. A fundamentação teórica denotada neste tópico teve grande influência dos trabalhos de Beghetto (2006), Beghetto (2011) e Abeche (2015).

Os elementos finitos de viga são originados pela subdivisão, inicialmente, do domínio da viga em subdomínios de dimensões finitas tais que o conjunto de todos os subdomínios seja igual ao domínio original. Em seguida, sobre cada subdomínio, isoladamente, adota-se um comportamento aproximado e local

para as incógnitas do problema. A FIGURA 10 apresenta um elemento finito de viga e seus respectivos graus de liberdade, em que L_e representa o comprimento do elemento finito delimitado entre os nós i e j , $w_1(x, t)$ e $w_2(x, t)$ caracterizam o deslocamento transversal e a rotação do nó i , respectivamente. Analogamente, $w_3(x, t)$ e $w_4(x, t)$ representam, o deslocamento transversal e a rotação do nó j , respectivamente. Particulariza-se o presente modelo ao elemento de viga com quatro deslocamentos nodais de coordenada dimensional x .



FONTE: O autor (2019).

A fim de satisfazer as condições de contorno essenciais da equação diferencial de quarta ordem, Eq. (65), que governa o problema de flexão de vigas, deve-se adotar uma função polinomial completa e contínua que represente o campo de deslocamento w . É escolhida então uma função cúbica, pois existem quatro condições de contorno essenciais (CRAIG, 1981; CHOPRA, 1995; BATHE, 1996)

$$w(x, t) = c_1 + c_2 \frac{x}{L_e} + c_3 \left(\frac{x}{L_e} \right)^2 + c_4 \left(\frac{x}{L_e} \right)^3 \quad (70)$$

em que as condições de contorno essenciais são

$$\begin{aligned}
w_1(x, t) &= w(0, t) = c_1 \\
w_2(x, t) &= w'(0, t) = \frac{c_2}{L_e} \\
w_3(x, t) &= w(L_e, t) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\
w_4(x, t) &= w'(L_e, t) = \frac{c_2}{L_e} + \frac{2c_3}{L_e} + \frac{3c_4}{L_e}
\end{aligned} \tag{71}$$

onde $w' = \frac{dw}{dx} = \theta$ representa a primeira derivada em relação a x , que corresponde à rotação. Obtendo os valores de c_i para $i = 1, 2, 3, 4$ e substituindo-os na Eq. (70), obtém-se

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) w_i(x, t) \tag{72}$$

em que $\psi_i(x)$ são as funções de forma, funções coordenadas, ou funções de interpolação para o elemento finito de viga e são representadas respectivamente por

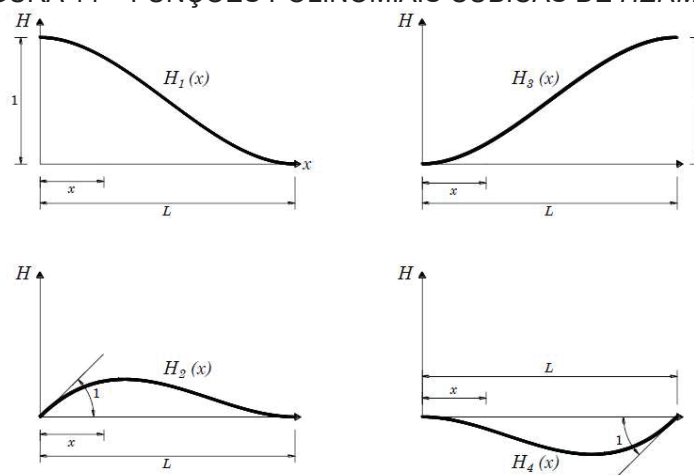
$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= H_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 \\
\psi_2(x) &= H_2(x) = L_e\left(\frac{x}{L_e}\right) - 2L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 \\
\psi_3(x) &= H_3(x) = 3\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 \\
\psi_4(x) &= H_4(x) = -L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^3
\end{aligned} \tag{73}$$

As funções de forma, ou interpoladoras, $H_i(x)$ são designadas como funções polinomiais cúbicas de *Hermite*, que satisfazem as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}
H_1(0) &= 1 & H_1'(0) &= 0 & H_1(L_e) &= 0 & H_1'(L_e) &= 0 \\
H_2(0) &= 0 & H_2'(0) &= 1 & H_2(L_e) &= 0 & H_2'(L_e) &= 0 \\
H_3(0) &= 0 & H_3'(0) &= 0 & H_3(L_e) &= 1 & H_3'(L_e) &= 0 \\
H_4(0) &= 0 & H_4'(0) &= 0 & H_4(L_e) &= 0 & H_4'(L_e) &= 1
\end{aligned} \tag{74}$$

As ilustrações gráficas destas funções são apresentadas na FIGURA

FIGURA 11 – FUNÇÕES POLINOMIAIS CÚBICAS DE HERMITE



FONTE: Abeche (2015).

Uma vez conhecendo a equação da energia cinética total da viga de *Euler-Bernoulli*, a energia cinética do elemento finito de viga pode ser representada como

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A (\dot{w})^2 dx \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A \left[\sum_{i=1}^4 H_i(x) \dot{w}_i(x, t) \right] \left[\sum_{j=1}^4 H_j(x) \dot{w}_j(x, t) \right] dx \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[\int_0^{L_e} \rho A H_i(x) H_j(x) dx \right] \dot{w}_i(x, t) \dot{w}_j(x, t) \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{ij} \dot{w}_i(x, t) \dot{w}_j(x, t) \\
 T &= \frac{1}{2} \{\dot{w}_e\}^T [M_e] \{\dot{w}_e\}
 \end{aligned} \tag{75}$$

em que ρ , A e $(\dot{\cdot})$ representam respectivamente a massa específica do material, a área da seção transversal e a primeira derivada em relação ao tempo. A matriz de massa pode ser obtida empregando-se as funções de forma da seguinte maneira

$$M_{ij} = \int_0^{L_e} \rho A \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \int_0^{L_e} \rho A H_i(x) H_j(x) dx$$

$$[M_e] = \rho A L_e \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L_e}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13L_e}{420} \\ \frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} & \frac{13L_e}{420} & \frac{3L_e^2}{420} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L_e}{420} & \frac{13}{35} & -\frac{11L_e}{210} \\ -\frac{13L_e}{420} & -\frac{3L_e^2}{420} & -\frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} \end{bmatrix} \quad (76)$$

sendo ρ e A constantes.

Admitindo a equação da energia potencial total de uma viga uniforme, a energia potencial devido à flexão do elemento finito de viga pode ser representado da seguinte maneira

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI (w'')^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI \left[\sum_{i=1}^4 H_i''(x) w_i(x, t) \right] \left[\sum_{j=1}^4 H_j''(x) w_j(x, t) \right] dx$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[\int_0^{L_e} EI H_i''(x) H_j''(x) dx \right] w_i(x, t) w_j(x, t) \quad (77)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{ij} w_i(x, t) w_j(x, t)$$

$$V = \frac{1}{2} \{w_e\}^T [K_e] \{w_e\}$$

A matriz de rigidez do elemento finito de viga $[K_e]$ pode ser obtida utilizando-se as funções de forma, portanto

$$K_{ij} = \int_0^{L_e} EI\psi_i''(x)\psi_j''(x)dx = \int_0^{L_e} EIH_i''(x)H_j''(x)dx$$

$$[K_e] = \frac{EI}{L_e} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 4 & -\frac{6}{L_e} & 2 \\ -\frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} & \frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 2 & -\frac{6}{L_e} & 4 \end{bmatrix} \quad (78)$$

para E e I constantes.

Os esforços externos aplicados ao elemento finito de viga podem ser escritos como

$$\{F_{e_i}(t)\} = \int_0^{L_e} f(x)H_i dx \quad (79)$$

no qual tem-se a distribuição nodal do esforços para o carregamento transversal uniformemente distribuído a seguir

$$\{F_e(t)\}^T = \left\{ \frac{f(x)L_e}{2} \quad \frac{f(x)L_e^2}{12} \quad \frac{f(x)L_e}{2} \quad -\frac{f(x)L_e^2}{12} \right\} \quad (80)$$

Reescrevendo a equação lagrangiana de movimento, apresentada no tópico 1.1.2, substituem-se adequadamente as coordenadas generalizadas pelos graus de liberdade e as forças conservativas pelos esforços nodais (BEGHETTO, 2011 *apud* ABEICHE, 2015, p. 70), tem-se

$$\{F_e(t)\} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{w}_e\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{w_e\}} + \frac{\partial V}{\partial \{w_e\}} \quad (81)$$

Utilizando-se a energia cinética T explicitada na Eq. (75), a energia potencial de deformação V indicada na Eq. (76) e os esforços externos nodais $F_{e_i}(t)$ na equação lagrangeana de movimento obtêm-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial w_i} + \frac{\partial V}{\partial w_i} = F_{e_i}$$

$$\text{onde } T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{ij} \dot{w}_i \dot{w}_j$$

$$\text{onde } V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{ij} w_i w_j$$

$$\sum_{j=1}^4 M_{ij} \dot{w}_i \dot{w}_j + \sum_{j=1}^4 K_{ij} w_i w_j = F_{e_i} \quad (82)$$

Reformulando na forma matricial, obtêm-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{w}_e\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{w_e\}} + \frac{\partial V}{\partial \{w_e\}} = \{F_e(t)\}$$

$$\text{onde } T = \frac{1}{2} \{\dot{w}_e\}^T [M_e] \{\dot{w}_e\}$$

$$\text{onde } V = \frac{1}{2} \{w_e\}^T [K_e] \{w_e\}$$

$$[M_e] \{\ddot{w}_e\} + [K_e] \{w_e\} = \{F_e(t)\} \quad (83)$$

em que, na equação do movimento, a primeira parcela representa as forças inerciais e a segunda parcela caracteriza as forças elásticas. Os vetores de aceleração e de deslocamento elementares são dados através da seguinte relação

$$\{\ddot{w}_e\}^T = \{\ddot{w}_1 \quad \ddot{w}_2 \quad \ddot{w}_3 \quad \ddot{w}_4\} \quad \text{e} \quad \{w_e\}^T = \{w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4\} \quad (84)$$

Para a viga toda subdividida convenientemente em n elementos, respeitando a conectividade dos elementos e as condições de contorno, têm-se

$$\begin{aligned}
[M_P] &= \sum_{e=1}^n [M_e] \\
[K_P] &= \sum_{e=1}^n [K_e] \\
\{F_P(t)\} &= \sum_{e=1}^n \{F_e(t)\} \\
\{u_P\} &= \sum_{e=1}^n \{w_e\} \\
\{\ddot{u}_P\} &= \sum_{e=1}^n \{\ddot{w}_e\}
\end{aligned} \tag{85}$$

onde $[M_P]$ é a matriz global de massa, $[K_P]$ a matriz global de rigidez, $\{u_P\}$ e $\{\ddot{u}_P\}$ são, respectivamente, os vetores globais de deslocamentos e acelerações, e $\{F_P(t)\}$ representa o vetor de forças externas aplicadas à viga.

Assim sendo, pode-se escrever as equações de movimento da estrutura na forma matricial

$$[M_P]\{\ddot{u}_P\} + [K_P]\{u_P\} = \{F_P(t)\} \tag{86}$$

Para incluir o amortecimento no sistema, emprega-se o método de *Rayleigh* (CHOPRA, 1995). Consequentemente, a matriz de amortecimento do sistema é obtida mediante uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez

$$[C_P] = \alpha_P [M_P] + \beta_P [K_P] \tag{87}$$

sendo

$$\alpha_P = \frac{2\zeta_P \omega_{n_1} \omega_{n_2}}{\omega_{n_1} + \omega_{n_2}} \quad \text{e} \quad \beta_P = \frac{2\zeta_P}{\omega_{n_1} + \omega_{n_2}} \tag{88}$$

onde ω_{n_1} e ω_{n_2} correspondem à primeira frequência natural de vibração e à segunda frequência natural de vibração, respectivamente. Neste trabalho foram consideradas somente as duas primeiras frequências naturais de vibração do sistema. O coeficiente ζ_P representa a razão de amortecimento da estrutura que é estimada em função do tipo da estrutura (CHOPRA, 1995).

A resposta analítica das frequências naturais para vigas uniformes biapoiadas e seus respectivos modos naturais de vibração podem ser obtidos segundo Chopra (1995), pelas relações

$$\omega_{n_i} = \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \phi_i(x) = \text{sen}\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (89)$$

onde ω_{n_i} e $\phi_i(x)$, representam respectivamente as frequências naturais de vibração e os modos naturais de vibração, enquanto ρ e A são, respectivamente, a massa específica do material e a área da seção transversal.

Introduzindo o amortecimento no sistema, pode-se escrever a equação matricial de movimento do sistema, apresentado na Eq. (86), como

$$[M_P]\{\ddot{u}_P\} + [C_P]\{\dot{u}_P\} + [K_P]\{u_P\} = \{F_P(t)\} \quad (90)$$

no qual $[C_P]$ e $\{\dot{u}_P\}$ representam a matriz de amortecimento e o vetor de velocidades do sistema, respectivamente.

3.5 MODELOS VEICULARES COM IRREGULARIDADE ACOPLADA

A presente seção procura apresentar os principais modelos matemáticos que descrevem e representam veículos em movimento sobre uma viga reta. Neste trabalho, empregam-se modelos veiculares com 4, 5, 9 e 15 graus de liberdade.

Os modelos computacionais implementados consideram a passagem de um veículo composto pela associação de corpos rígidos coplanares conectados em sistemas de suspensões, em que cada sistema de suspensão é formado por uma mola elástica linear e um amortecedor com comportamento viscoso linear.

Os corpos rígidos são projetados de maneira indeformável. No entanto, os efeitos de amortecimento e rigidez das rodas são contemplados através de outros sistemas de suspensões. Em outras palavras, são considerados os efeitos dinâmicos lineares de problemas de contato. Os modelos matemáticos dos veículos monolíticos de 4 e 5 graus de liberdade podem ser encontrados

em Almeida (2006), Melo (2007) e Mendonça (2009). Em contrapartida, os modelos veiculares de 9 e 15 graus de liberdade respectivamente, são propostos por Rossigali (2013).

Para a dedução das equações de movimento de cada veículo utiliza-se como base o princípio de *D'Alembert*, onde é realizado um equilíbrio dinâmico de forças considerando-se as forças de inércia que aparecem no sistema conforme sugerido por Goldstein (2002). Assim, considerando o equilíbrio dinâmico do veículo, a equação governante pode ser escrita como

$$[M_V]\{\ddot{u}_V\} + [C_V]\{\dot{u}_V\} + [K_V]\{u_V\} = \{F_V(t)\} \quad (91)$$

onde $[M_V]$, $[C_V]$ e $[K_V]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do veículo, $\{\ddot{u}_V\}$, $\{\dot{u}_V\}$ e $\{u_V\}$ representam os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do modelo veicular e, finalmente, $\{F_V(t)\}$ representa o vetor de forças externas. Para a integração temporal da Eq. (91), utiliza-se o método de *Newmark* com aceleração média.

Nos modelos com interação dinâmica, são descritos os modelos matemáticos do veículo acoplado na irregularidade das vias. A interação entre o veículo, irregularidades da via e ponte é feita de forma desacoplada. Assim, obtêm-se as forças produzidas pelo modelo acoplado entre veículo e irregularidade e transmitem-se os esforços à ponte de forma desacoplada. Serão descritos seus componentes e a formulação das equações de movimento baseando-se no trabalho de Abeche (2015). Assim, esta seção está subdividida em diferentes casos de modelos veiculares para uma irregularidade conhecida.

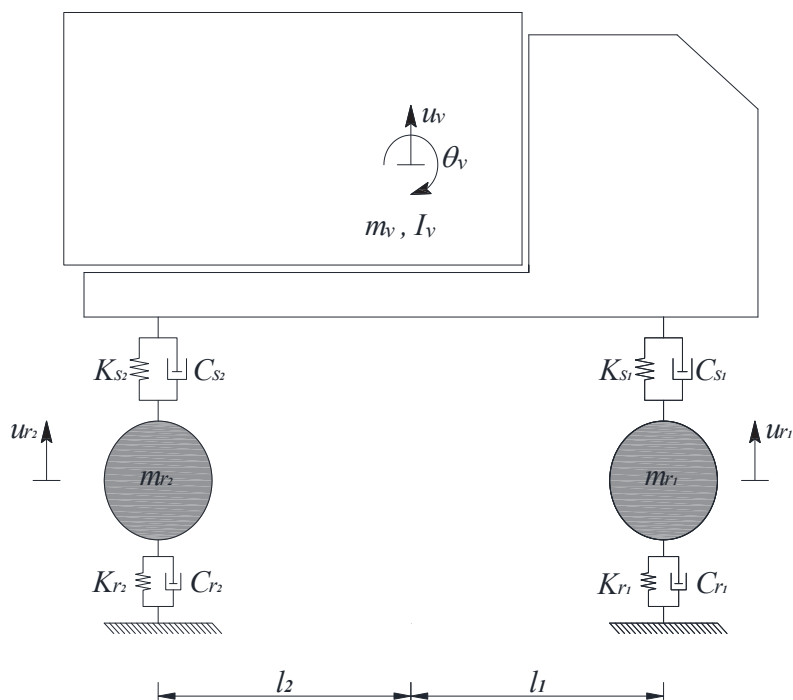
3.5.1 Modelo veicular com 4 graus de liberdade

O modelo de veículo com 4 graus de liberdade, que também constitui um sistema massa-mola-amortecedor, se baseia no veículo “Classe 12” preconizado pela norma brasileira NBR-7188 (1984). Porém, é importante ressaltar que este embasamento diz respeito apenas às dimensões e ao número de eixos do veículo, pois a referida norma considera que o carregamento imposto pelo mesmo é constituído por um par de forças

concentradas que apresentam módulos constantes e iguais entre si ao longo do tempo.

Apresenta-se esquematicamente na FIGURA 12, o modelo matemático que será utilizado para formulação das equações de movimento do veículo de dois eixos composto por quatro graus de liberdade: o deslocamento vertical u_v e a rotação θ_v do corpo principal, e as translações verticais u_{r_1} e u_{r_2} das massas localizadas dos conjuntos eixo-roda-pneu.

FIGURA 12 – MODELO VEICULAR COM 4 GRAUS DE LIBERDADE

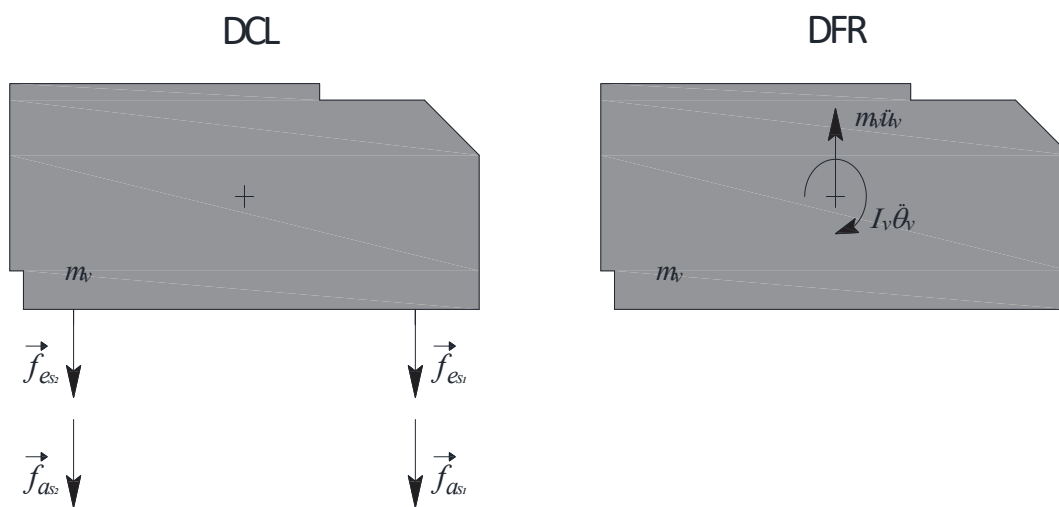


FONTE: O autor (2019).

Neste modelo, a massa suspensa do veículo se apoia sobre as suspensões formadas pelo conjunto mola-amortecedor. Estas, por sua vez, estão ligadas aos eixos, aqui simulados pelo conjunto massa-mola-amortecedor. Essa configuração incorpora os efeitos dinâmicos causados pela interação entre a massa suspensa e as massas locais dos eixos. Os parâmetros globais do modelo são a massa do corpo principal, m_v e o momento de inércia, I_v , a massa da roda dianteira, m_{r_1} , e a massa da roda traseira, m_{r_2} , as grandezas de rigidez da mola (K_{s_1} , K_{s_2} , K_{r_1} e K_{r_2}) e os coeficientes de amortecimento dos amortecedores para a suspensão do veículo (C_{s_1} , C_{s_2} , C_{r_1} e C_{r_2}).

Por possuir quatro graus de liberdade, este modelo de veículo tem seu movimento descrito por quatro equações diferenciais de movimento. Desta forma, obtêm-se por equilíbrio das forças verticais e dos momentos em relação ao centro de massa, as equações de movimento para cada grau de liberdade baseadas na segunda lei de *Newton*. Na FIGURA 13 são mostrados os diagramas de corpo livre e de força resultante da massa suspensa m_v do modelo matemático com 4 graus de liberdade.

FIGURA 13 – DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE (DCL) E DE FORÇA RESULTANTE (DFR) DA MASSA SUSPENSA m_v



FONTE: O autor (2019).

Primeiramente são obtidas as equações de translação e rotação para a massa suspensa

$$m_v \ddot{u}_v = - \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) \quad (92)$$

$$I_v \ddot{\theta}_v = \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) l_i \quad (93)$$

onde, \vec{f}_{e_i} e \vec{f}_{a_i} são, respectivamente, a força elástica e a força de amortecimento correspondentes à suspensão do veículo no eixo i , enquanto l_i representa a distância do eixo i ao centro de massa do corpo principal e,

finalmente, $\ddot{\theta}_v$ corresponde a aceleração angular da massa suspensa do veículo.

Considerando-se devidamente as forças atuantes no veículo, as Eqs (92) e (93) podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} m_v \ddot{u}_v &= -C_{s_1} [\dot{u}_v - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_v)] - K_{s_1} [u_v - (u_{r_1} - l_1 \theta_v)] \\ &\quad - C_{s_2} [\dot{u}_v - (l_2 \dot{\theta}_v + \dot{u}_{r_2})] - K_{s_2} [u_v - (l_2 \theta_v + u_{r_2})] \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} I_v \ddot{\theta}_v &= -\{C_{s_1} [\dot{u}_v - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_v)] + K_{s_1} [u_v - (u_{r_1} - l_1 \theta_v)]\} l_1 \\ &\quad + \{C_{s_2} [\dot{u}_v - (l_2 \dot{\theta}_v + \dot{u}_{r_2})] + K_{s_2} [u_v - (l_2 \theta_v + u_{r_2})]\} l_2 \end{aligned} \quad (95)$$

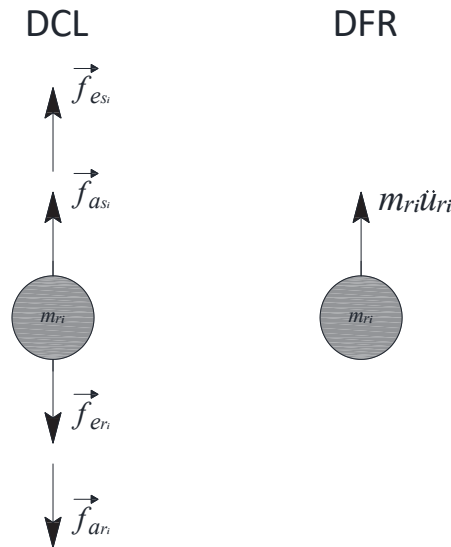
O veículo, ao atravessar a ponte com velocidade v , devido a sua ação dinâmica, excita a estrutura. Tal excitação é ocasionada pelo efeito inercial do corpo principal em consequência das irregularidades da via, representadas por $y(t)$. Assim, têm-se as forças resistivas elásticas e amortecedoras exercidas pelos dispositivos de mola e amortecedor em cada ponto i de contato entre os pneus do veículo e o pavimento aderente à superfície da estrutura. A força resistiva elástica que age na mola e a força resistiva devido ao amortecimento, são representadas respectivamente como

$$\vec{f}_{e_{r_i}} = K_{r_i} [u_{r_i}(t) - y_i(t)] \quad (96)$$

$$\vec{f}_{a_{r_i}} = C_{r_i} [\dot{u}_{r_i}(t) - \dot{y}_i(t)] \quad (97)$$

A FIGURA 14 representa os diagramas de corpo livre e de força resultante para a massa do eixo em cada ponto de contato i .

FIGURA 14 – DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE (DCL) E DE FORÇA RESULTANTE (DFR) DA MASSA DO EIXO i



FONTE: O autor (2019).

Desta forma, a equação de translação da massa do eixo i do veículo transitando sobre uma superfície irregular é dada por

$$m_{r_i} \ddot{u}_{r_i} = \vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}} - \vec{f}_{e_{r_i}} - \vec{f}_{a_{r_i}} \quad (98)$$

Conforme a FIGURA 14, a Eq. (98) torna-se, para os eixos dianteiro e traseiro, respectivamente

$$m_{r_1} \ddot{u}_{r_1} = C_{s_1} [\dot{u}_v - (l_1 \dot{\theta}_v + \dot{u}_{r_1})] + K_{s_1} [u_v - (l_1 \theta_v + u_{r_1})] - K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] - C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] \quad (99)$$

$$m_{r_2} \ddot{u}_{r_2} = C_{s_2} [\dot{u}_v - (\dot{u}_{r_2} - l_2 \dot{\theta}_v)] + K_{s_2} [u_v - (u_{r_2} - l_2 \theta_v)] - K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] - C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] \quad (100)$$

Aplicando-se o princípio de *D'Alembert*, obtém-se assim as seguintes equações de movimento para o veículo de 4 graus de liberdade

$$m_v \ddot{u}_v + (C_{s_1} + C_{s_2}) \dot{u}_v + (C_{s_1} l_1 - C_{s_2} l_2) \dot{\theta}_v - C_{s_1} \dot{u}_{r_1} - C_{s_2} \dot{u}_{r_2} + (K_{s_1} + K_{s_2}) u_v + (K_{s_1} l_1 - K_{s_2} l_2) \theta_v - K_{s_1} u_{r_1} - K_{s_2} u_{r_2} = 0 \quad (101)$$

$$I_v \ddot{\theta}_v + (C_{s_1} l_1 - C_{s_2} l_2) \dot{u}_v + (C_{s_1} l_1^2 + C_{s_2} l_2^2) \dot{\theta}_v - C_{s_1} l_1 \dot{u}_{r_1} + C_{s_2} l_2 \dot{u}_{r_2} + (K_{s_1} l_1 - K_{s_2} l_2) u_v + (K_{s_1} l_1^2 + K_{s_2} l_2^2) \theta_v - K_{s_1} l_1 u_{r_1} + K_{s_2} l_2 u_{r_2} = 0 \quad (102)$$

$$m_{r_1} \ddot{u}_{r_1} - C_{s_1} \dot{u}_v - C_{s_1} l_1 \dot{\theta}_v + (C_{s_1} + C_{r_1}) \dot{u}_{r_1} - K_{s_1} u_v - K_{s_1} l_1 \theta_v + (K_{s_1} + K_{r_1}) u_{r_1} = C_{r_1} \dot{y}_1(t) + K_{r_1} y_1(t) \quad (103)$$

$$m_{r_2} \ddot{u}_{r_2} - C_{s_2} \dot{u}_v + C_{s_2} l_2 \dot{\theta}_v + (C_{s_2} + C_{r_2}) \dot{u}_{r_2} - K_{s_2} u_v + K_{s_2} l_2 \theta_v + (K_{s_2} + K_{r_2}) u_{r_2} = C_{r_2} \dot{y}_2(t) + K_{r_2} y_2(t) \quad (104)$$

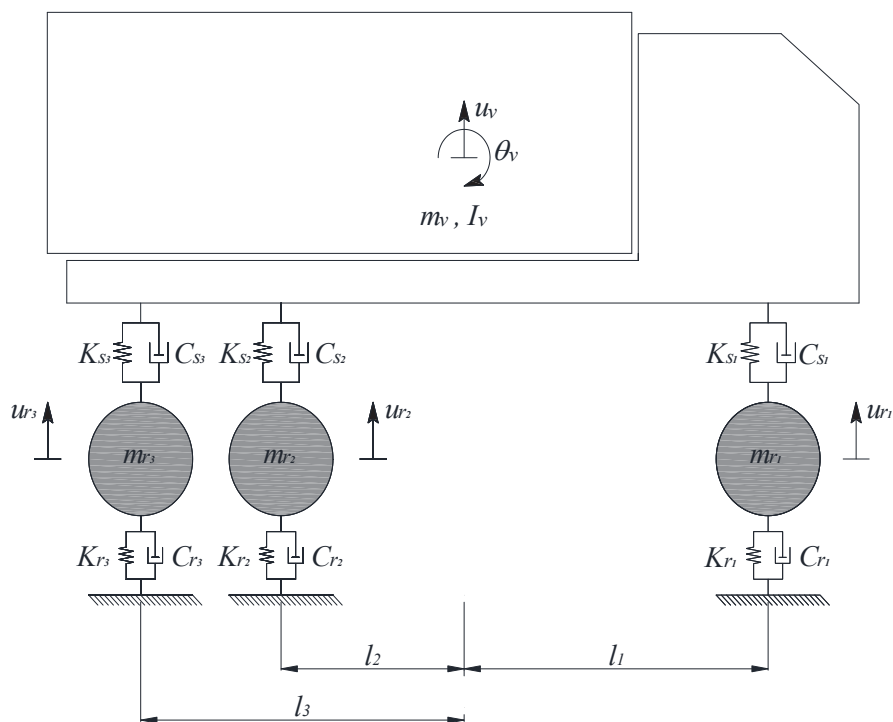
Colocando-se as acelerações, velocidades e deslocamentos em evidência, e escrevendo o sistema de equações resultante na forma matricial temos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{\theta}_v \\ \ddot{u}_{r_1} \\ \ddot{u}_{r_2} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} C_{s_1} + C_{s_2} & C_{s_1} l_1 - C_{s_2} l_2 & -C_{s_1} & -C_{s_2} \\ C_{s_1} l_1 - C_{s_2} l_2 & C_{s_1} l_1^2 + C_{s_2} l_2^2 & -C_{s_1} l_1 & C_{s_2} l_2 \\ -C_{s_1} & -C_{s_1} l_1 & C_{s_1} + C_{r_1} & 0 \\ -C_{s_2} & C_{s_2} l_2 & 0 & C_{s_2} + C_{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{\theta}_v \\ \dot{u}_{r_1} \\ \dot{u}_{r_2} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{s_1} + K_{s_2} & K_{s_1} l_1 - K_{s_2} l_2 & -K_{s_1} & -K_{s_2} \\ K_{s_1} l_1 - K_{s_2} l_2 & K_{s_1} l_1^2 + K_{s_2} l_2^2 & -K_{s_1} l_1 & K_{s_2} l_2 \\ -K_{s_1} & -K_{s_1} l_1 & K_{s_1} + K_{r_1} & 0 \\ -K_{s_2} & K_{s_2} l_2 & 0 & K_{s_2} + K_{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ \theta_v \\ u_{r_1} \\ u_{r_2} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{r_1} \dot{y}_1(t) + K_{r_1} y_1(t) \\ C_{r_2} \dot{y}_2(t) + K_{r_2} y_2(t) \end{Bmatrix} \quad (105) \end{aligned}$$

3.5.2 Modelo veicular com 5 graus de liberdade

Este modelo apresenta-se semelhantemente ao modelo de veículo com 4 graus de liberdade. Entretanto, a maior parcela dos veículos de carga no cenário rodoviário nacional é composta por caminhões de três eixos. A FIGURA 15 ilustra o modelo mecânico plano.

FIGURA 15 – MODELO VEICULAR COM 5 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

em que os parâmetros físicos m_{r_3} , $(K_{s_3}$ e $K_{r_3})$ e $(C_{s_3}$ e $C_{r_3})$, representam respectivamente a massa da terceira roda, as grandezas de rigidez da mola e os coeficientes de amortecimento dos amortecedores para a suspensão do veículo.

Consoante à metodologia utilizada na formulação matemática do modelo veicular com 4 graus de liberdade, as equações do movimento para a massa suspensa do veículo com 5 graus de liberdade são dadas por

$$m_v \ddot{u}_v = - \sum_{i=1}^3 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) \quad (106)$$

$$I_v \ddot{\theta}_v = \sum_{i=1}^3 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) l_i \quad (107)$$

Considerando-se devidamente as forças atuantes no veículo, as Eqs (106) e (107) podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
m_v \ddot{u}_v &= -C_{s_1} [\dot{u}_v - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_v)] - K_{s_1} [u_v - (u_{r_1} - l_1 \theta_v)] \\
&- C_{s_2} [\dot{u}_v - (l_2 \dot{\theta}_v + \dot{u}_{r_2})] - K_{s_2} [u_v - (l_2 \theta_v + u_{r_2})] \\
&- C_{s_3} [\dot{u}_v - (l_3 \dot{\theta}_v + \dot{u}_{r_3})] - K_{s_3} [u_v - (l_3 \theta_v + u_{r_3})]
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
I_v \ddot{\theta}_v &= -\{C_{s_1} [\dot{u}_v - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_v)] + K_{s_1} [u_v - (u_{r_1} - l_1 \theta_v)]\} l_1 \\
&+ \{C_{s_2} [\dot{u}_v - (l_2 \dot{\theta}_v + \dot{u}_{r_2})] + K_{s_2} [u_v - (l_2 \theta_v + u_{r_2})]\} l_2 \\
&+ \{C_{s_3} [\dot{u}_v - (l_3 \dot{\theta}_v + \dot{u}_{r_3})] + K_{s_3} [u_v - (l_3 \theta_v + u_{r_3})]\} l_2
\end{aligned} \tag{109}$$

Igualmente ao elucidado mediante a Eq. (98), a equação de movimento da massa do eixo i do veículo transitando sobre uma superfície irregular é dada por

$$\begin{aligned}
m_{r_1} \ddot{u}_{r_1} &= C_{s_1} [\dot{u}_v - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_v)] + K_{s_1} [u_v - (u_{r_1} - l_1 \theta_v)] \\
&- K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] - C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)]
\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
m_{r_2} \ddot{u}_{r_2} &= C_{s_2} [\dot{u}_v - (l_2 \dot{\theta}_v - \dot{u}_{r_2})] + K_{s_2} [u_v - (l_2 \theta_v - u_{r_2})] \\
&- K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] - C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)]
\end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
m_{r_3} \ddot{u}_{r_3} &= C_{s_3} [\dot{u}_v - (l_3 \dot{\theta}_v - \dot{u}_{r_3})] + K_{s_3} [u_v - (l_3 \theta_v - u_{r_3})] \\
&- K_{r_3} [u_{r_3}(t) - y_3(t)] - C_{r_3} [\dot{u}_{r_3}(t) - \dot{y}_3(t)]
\end{aligned} \tag{112}$$

Considerando-se o princípio de *D'Alembert*, obtêm-se as equações de translação e rotação do corpo principal, e as equações de translação da massa de cada eixo, respectivamente

$$\begin{aligned}
m_v \ddot{u}_v &+ (C_{s_1} + C_{s_2} + C_{s_3}) \dot{u}_v + (C_{s_1} l_1 - C_{s_2} l_2 - C_{s_3} l_3) \dot{\theta}_v - C_{s_1} \dot{u}_{r_1} - C_{s_2} \dot{u}_{r_2} \\
&- C_{s_3} \dot{u}_{r_3} + (K_{s_1} + K_{s_2} + K_{s_3}) u_v + (K_{s_1} l_1 - K_{s_2} l_2 - K_{s_3} l_3) \theta_v - K_{s_1} u_{r_1} \\
&- K_{s_2} u_{r_2} - K_{s_3} u_{r_3} = 0
\end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}
I_v \ddot{\theta}_v &+ (C_{s_1} l_1 - C_{s_2} l_2 - C_{s_3} l_3) \dot{u}_v + (C_{s_1} l_1^2 + C_{s_2} l_2^2 + C_{s_3} l_3^2) \dot{\theta}_v - C_{s_1} l_1 \dot{u}_{r_1} \\
&+ C_{s_2} l_2 \dot{u}_{r_2} + C_{s_3} l_3 \dot{u}_{r_3} + (K_{s_1} l_1 - K_{s_2} l_2 - K_{s_3} l_3) u_v + (K_{s_1} l_1^2 + K_{s_2} l_2^2 + K_{s_3} l_3^2) \theta_v \\
&- K_{s_1} l_1 u_{r_1} + K_{s_2} l_2 u_{r_2} + K_{s_3} l_3 u_{r_3} = 0
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
& m_{r_1} \ddot{u}_{r_1} - C_{s_1} \dot{u}_v - C_{s_1} l_1 \dot{\theta}_v + (C_{s_1} + C_{r_1}) \dot{u}_{r_1} \\
& - K_{s_1} u_v - K_{s_1} l_1 \theta_v + (K_{s_1} + K_{r_1}) u_{r_1} = C_{r_1} \dot{y}_1(t) + K_{r_1} y_1(t)
\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
& m_{r_2} \ddot{u}_{r_2} - C_{s_2} \dot{u}_v + C_{s_2} l_2 \dot{\theta}_v + (C_{s_2} + C_{r_2}) \dot{u}_{r_2} \\
& - K_{s_2} u_v + K_{s_2} l_2 \theta_v + (K_{s_2} + K_{r_2}) u_{r_2} = C_{r_2} \dot{y}_2(t) + K_{r_2} y_2(t)
\end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned}
& m_{r_3} \ddot{u}_{r_3} - C_{s_3} \dot{u}_v + C_{s_3} l_3 \dot{\theta}_v + (C_{s_3} + C_{r_3}) \dot{u}_{r_3} \\
& - K_{s_3} u_v + K_{s_3} l_3 \theta_v + (K_{s_3} + K_{r_3}) u_{r_3} = C_{r_3} \dot{y}_3(t) + K_{r_3} y_3(t)
\end{aligned} \tag{117}$$

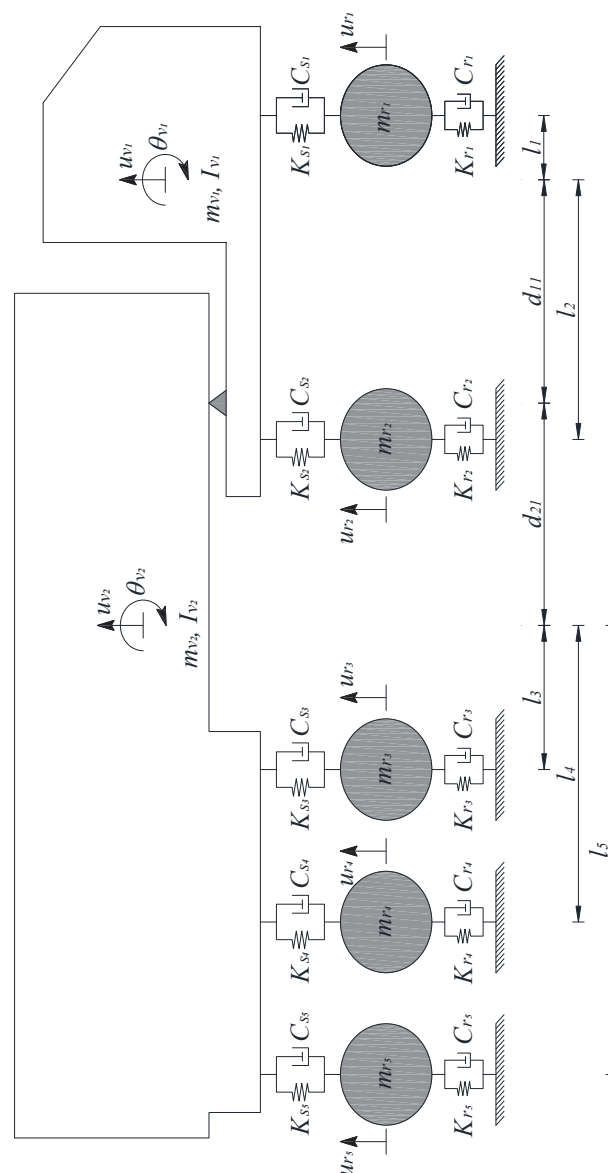
Ordenando os deslocamentos, velocidades e acelerações em evidência, este sistema de equações, na forma matricial, é escrito como

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_v \\ \ddot{\theta}_v \\ \ddot{u}_{r_1} \\ \ddot{u}_{r_2} \\ \ddot{u}_{r_3} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} C_{S_1} + C_{S_2} + C_{S_3} & C_{S_1} l_1 - C_{S_2} l_2 - C_{S_3} l_3 & 0 & 0 & 0 \\ C_{S_1} l_1 - C_{S_2} l_2 - C_{S_3} l_3 & C_{S_1} l_1^2 + C_{S_2} l_2^2 + C_{S_3} l_3^2 & -C_{S_1} l_1 & C_{S_2} l_2 & C_{S_3} l_3 \\ -C_{S_1} & -C_{S_2} & -C_{S_3} & 0 & 0 \\ -C_{S_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{S_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{\theta}_v \\ \dot{u}_{r_1} \\ \dot{u}_{r_2} \\ \dot{u}_{r_3} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} K_{S_1} + K_{S_2} + K_{S_3} & K_{S_1} l_1 - K_{S_2} l_2 - K_{S_3} l_3 & -K_{S_1} & -K_{S_2} & -K_{S_3} \\ K_{S_1} l_1 - K_{S_2} l_2 - K_{S_3} l_3 & K_{S_1} l_1^2 + K_{S_2} l_2^2 + K_{S_3} l_3^2 & -K_{S_1} l_1 & K_{S_2} l_2 & K_{S_3} l_3 \\ -K_{S_1} & -K_{S_2} & -K_{S_3} & 0 & 0 \\ -K_{S_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{S_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ \theta_v \\ u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{r_1} \dot{y}_1(t) + K_{r_1} y_1(t) \\ C_{r_2} \dot{y}_2(t) + K_{r_2} y_2(t) \\ C_{r_3} \dot{y}_3(t) + K_{r_3} y_3(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{118}$$

3.5.3 Modelo veicular com 9 graus de liberdade

A formulação matemática do modelo veicular com 9 graus de liberdade, deste item 3.5.3, teve como principal influência o trabalho de Rossigali (2013). Apresenta-se esquematicamente, na FIGURA 16, o modelo matemático utilizado para a formulação das equações de movimento do semirreboque de 5 eixos, tipificado com 9 graus de liberdade: a translação vertical e a rotação de cada parte suspensa (u_{v_1} , u_{v_2} , θ_{v_1} e θ_{v_2}), e as 5 translações verticais das massas dos conjuntos eixo-rodas-pneus (u_{r_1} , u_{r_2} , u_{r_3} , u_{r_4} e u_{r_5}).

FIGURA 16 – MODELO VEICULAR COM 9 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

Os parâmetros globais do modelo são as massas das partes , m_{v_1} e m_{v_2} , os momentos de inércia dos mesmos corpos rígidos, I_{v_1} e I_{v_2} , as massas dos conjuntos eixos-rodas-pneus, m_{r_1} , m_{r_2} , m_{r_3} , m_{r_4} e m_{r_5} , as grandezas de rigidez da mola (K_{s_1} , K_{s_2} , K_{s_3} , K_{s_4} , K_{s_5} , K_{r_1} , K_{r_2} , K_{r_3} , K_{r_4} e K_{r_5}) e os coeficientes de amortecimento dos amortecedores para a suspensão do veículo (C , C_{s_2} , C_{s_3} , C_{s_4} , C_{s_5} , C_{r_1} , C_{r_2} , C_{r_3} , C_{r_4} e C_{r_5}).

Os comprimentos longitudinais l_i , mostrados na FIGURA 16, medem a distância do eixo i em relação ao centro de massa, da parte à qual o eixo i pertence. Uma vez que as equações do sistema veicular com 9 graus de liberdade compreendem mais termos que as dos veículos monolíticos, admitiram-se as distâncias auxiliares d'_{i1} , entre o eixo i e a quinta roda 1, são dadas por

$$d'_{i1} = l_i + s_i d_{11} \quad (119)$$

sendo as variáveis auxiliares s_i , que têm módulo igual à unidade e são fatores de ajuste de sinal das distâncias auxiliares e das rotações. Quando a massa suspensa em questão estiver na abcissa do eixo i , acima da sua posição estática de equilíbrio, s_i é positiva (ROSSIGALI, 2013).

De acordo com o sistema coplanar da FIGURA 16, aplicando-se em cada corpo rígido a segunda lei de *Newton*, obtêm-se através do balanço das forças verticais e dos momentos em relação ao centro de massa as equações de movimento associadas a cada grau de liberdade. Portanto, as equações de translação e rotação das massas suspensas são definidas por

$$m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} = - \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) - \vec{R}_1 \quad (120)$$

$$I_{v_1} \ddot{\theta}_{v_1} = \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) l_i + \vec{R}_1 d_{11} \quad (121)$$

$$m_{v_2} \ddot{u}_{v_2} = - \sum_{i=3}^5 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) + \vec{R}_1 \quad (122)$$

$$I_{v_2} \ddot{\theta}_{v_2} = \sum_{i=3}^5 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) l_i + \vec{R}_1 d_{21} \quad (123)$$

em que \vec{R}_1 é a força estática de contato entre a unidade tratora e o semirreboque, cuja vinculação é realizada entre o pino rei e a quinta roda.

Com a incógnita da força de contato \vec{R}_1 , isola-se esta variável, a partir da equação de translação da primeira massa suspensa, e substitui-se nas Eqs. (121), (122) e (123) respectivamente. Assim

$$\vec{R}_1 = -m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} - \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) \quad (124)$$

e, conseqüentemente as equações de translação e rotação de cada parte suspensa tornam-se

$$I_{v_1} \ddot{\theta}_{v_1} = \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) l_i - \left[m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} + \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) \right] d_{11} \quad (125)$$

$$m_{v_2} \ddot{u}_{v_2} + m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} = - \sum_{i=1}^5 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) \quad (126)$$

$$I_{v_2} \ddot{\theta}_{v_2} = \sum_{i=3}^5 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) l_i - \left[m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} + \sum_{i=1}^2 (\vec{f}_{e_{s_i}} + \vec{f}_{a_{s_i}}) \right] d_{21} \quad (127)$$

Considerando-se adequadamente as forças atuantes no veículo, as Eqs (125), (126) e (127) podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} I_{v_1} \ddot{\theta}_{v_1} = & \{C_{s_1} [\dot{u}_{v_1} - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_{v_1})] + K_{s_1} [u_{v_1} - (u_{r_1} - l_1 \theta_{v_1})]\} (-l_1 - d_{11}) \\ & + \{C_{s_2} [\dot{u}_{v_1} - (l_2 \dot{\theta}_{v_1} + \dot{u}_{r_2})] + K_{s_2} [u_{v_1} - (l_2 \theta_{v_1} + u_{r_2})]\} (l_2 - d_{11}) \\ & - m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} d_{11} \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned}
m_{v_2} \ddot{u}_{v_2} + m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} = & -\{C_{s_1}[\dot{u}_{v_1} - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_{v_1})] + K_{s_1}[u_{v_1} - (u_{r_1} - l_1 \theta_{v_1})]\} \\
& -\{C_{s_2}[\dot{u}_{v_1} - (l_2 \dot{\theta}_{v_1} + \dot{u}_{r_2})] + K_{s_2}[u_{v_1} - (l_2 \theta_{v_1} + u_{r_2})]\} \\
& -\{C_{s_3}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_3} - l_3 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_3}[u_{v_2} - (u_{r_3} - l_3 \theta_{v_2})]\} \\
& -\{C_{s_4}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_4} - l_4 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_4}[u_{v_2} - (u_{r_4} - l_4 \theta_{v_2})]\} \\
& -\{C_{s_5}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_5} - l_5 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_5}[u_{v_2} - (u_{r_5} - l_5 \theta_{v_2})]\}
\end{aligned} \tag{129}$$

$$\begin{aligned}
I_{v_2} \ddot{\theta}_{v_2} = & -\{C_{s_1}[\dot{u}_{v_1} - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_{v_1})] + K_{s_1}[u_{v_1} - (u_{r_1} - l_1 \theta_{v_1})]\}d_{21} \\
& -\{C_{s_2}[\dot{u}_{v_1} - (l_2 \dot{\theta}_{v_1} + \dot{u}_{r_2})] + K_{s_2}[u_{v_1} - (l_2 \theta_{v_1} + u_{r_2})]\}d_{21} - m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} d_{21} \\
& +\{C_{s_3}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_3} - l_3 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_3}[u_{v_2} - (u_{r_3} - l_3 \theta_{v_2})]\}l_3 \\
& +\{C_{s_4}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_4} - l_4 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_4}[u_{v_2} - (u_{r_4} - l_4 \theta_{v_2})]\}l_4 \\
& +\{C_{s_5}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_5} - l_5 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_5}[u_{v_2} - (u_{r_5} - l_5 \theta_{v_2})]\}l_5
\end{aligned} \tag{130}$$

Realizando as operações pertinentes, mediante a Eq. (98), obtêm-se as equações de movimento das massas dos conjuntos eixo-rodas-pneus

$$\begin{aligned}
m_{r_1} \ddot{u}_{r_1} = & C_{s_1}[\dot{u}_{v_1} - (\dot{u}_{r_1} - l_1 \dot{\theta}_{v_1})] + K_{s_1}[u_{v_1} - (u_{r_1} - l_1 \theta_{v_1})] \\
& -K_{r_1}[u_{r_1}(t) - y_1(t)] - C_{r_1}[\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)]
\end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
m_{r_2} \ddot{u}_{r_2} = & C_{s_2}[\dot{u}_{v_1} - (l_2 \dot{\theta}_{v_1} - \dot{u}_{r_2})] + K_{s_2}[u_{v_1} - (l_2 \theta_{v_1} - u_{r_2})] \\
& -K_{r_2}[u_{r_2}(t) - y_2(t)] - C_{r_2}[\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)]
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
m_{r_3} \ddot{u}_{r_3} = & C_{s_3}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_3} - l_3 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_3}[u_{v_2} - (u_{r_3} - l_3 \theta_{v_2})] \\
& -K_{r_3}[u_{r_3}(t) - y_3(t)] - C_{r_3}[\dot{u}_{r_3}(t) - \dot{y}_3(t)]
\end{aligned} \tag{133}$$

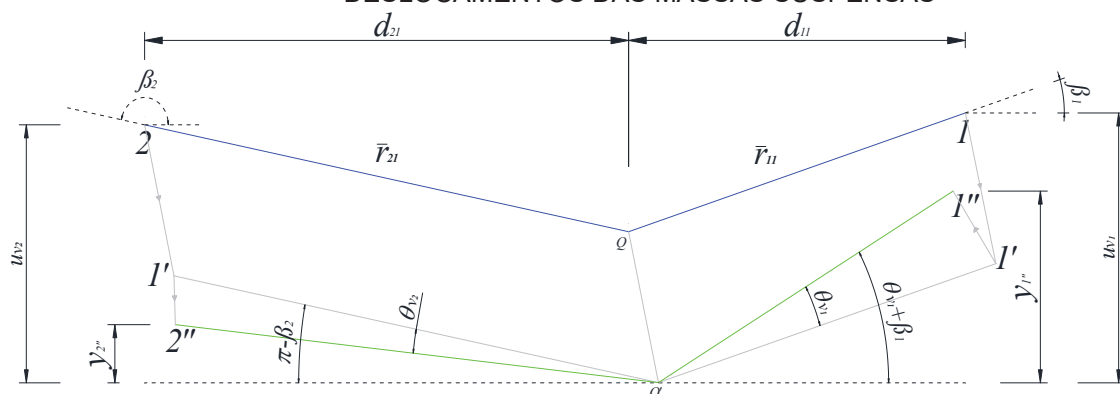
$$\begin{aligned}
m_{r_4} \ddot{u}_{r_4} = & C_{s_4}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_4} - l_4 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_4}[u_{v_2} - (u_{r_4} - l_4 \theta_{v_2})] \\
& -K_{r_4}[u_{r_4}(t) - y_4(t)] - C_{r_4}[\dot{u}_{r_4}(t) - \dot{y}_4(t)]
\end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
m_{r_5} \ddot{u}_{r_5} = & C_{s_5}[\dot{u}_{v_2} - (\dot{u}_{r_5} - l_5 \dot{\theta}_{v_2})] + K_{s_5}[u_{v_2} - (u_{r_5} - l_5 \theta_{v_2})] \\
& -K_{r_5}[u_{r_5}(t) - y_5(t)] - C_{r_5}[\dot{u}_{r_5}(t) - \dot{y}_5(t)]
\end{aligned} \tag{135}$$

Precedentemente às ações dinâmicas de translação vertical e rotação de cada parte suspensa, a quinta roda Q encontra-se em repouso. Os ângulos β_1 e β_2 , mensurados no sentido anti-horário, indicados na FIGURA 17,

caracterizam as inclinações iniciais da unidade tratora e do semirreboque respectivamente.

FIGURA 17 – DIAGRAMA DE COMPATIBILIDADE DAS ROTAÇÕES E DOS DESLOCAMENTOS DAS MASSAS SUSPENSAS



FONTE: Adaptado de Rossigali (2013).

A FIGURA 13 explicita os giros das partes suspensas 1 e 2, respectivamente. Os segmentos de reta \bar{r}_{11} e \bar{r}_{21} conectam a quinta roda Q aos pontos com a mesma abscissa dos centros de massa do cavalo mecânico e do semirreboque. Assim, a partir da conformação inicial, tem-se

$$\bar{r}_{11} = \frac{d_{11}}{\cos(\beta_1)} \quad e \quad \bar{r}_{21} = \frac{d_{21}}{\cos(\beta_2)} \quad (136)$$

Após o primeiro movimento, de translação, a quinta roda Q e os pontos 1 e 2 encontram-se em Q' , $1'$ e $2'$, respectivamente. Seguidamente a rotação, os segmentos de reta \bar{r}_{11} e \bar{r}_{21} giram, em correspondência à quinta roda Q' , das grandezas θ_{v1} e θ_{v2} , no sentido anti-horário. Subsequentemente, os ângulos dos eixos longitudinais dos corpos suspensos em relação à abscissa são correspondentes a $\theta_{v1} + \beta_1$ e $\pi - \theta_{v2} - \beta_2$, respectivamente. Portanto, os deslocamentos verticais dos pontos $1''$ e $2''$, em relação à posição da quinta roda Q' , são dados por

$$y_{1''} = \bar{r}_{11} \text{sen}(\theta_{v1} + \beta_1) \quad e \quad y_{2''} = \bar{r}_{21} \text{sen}(\pi - \theta_{v2} - \beta_2) \quad (137)$$

Substituindo a Eq. (136) e admitindo as funções trigonométricas de seno e cosseno, para a adição e subtração entre dois arcos, têm-se

$$y_1'' = d_{11}[tg(\beta_1) \cos(\theta_{v_1}) + \text{sen}(\theta_{v_1})] \quad (138)$$

$$y_2'' = -d_{21}[tg(\beta_2) \cos(\theta_{v_2}) + \text{sen}(\theta_{v_2})] \quad (139)$$

Presumindo que as rotações θ_{v_1} e θ_{v_2} contêm dimensões ínfimas, pode-se pressupor que $\text{sen}(\theta_{v_1}) \cong \theta_{v_1}$ e $\text{sen}(\theta_{v_2}) \cong \theta_{v_2}$, portanto

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{v_1}) &\cong \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{v_1})} \\ \cos(\theta_{v_1}) &\cong \sqrt{1 - \theta_{v_1}^2} \quad \text{e} \quad \cos(\theta_{v_2}) \cong 1 \\ \cos(\theta_{v_1}) &\cong 1 \end{aligned} \quad (140)$$

Assim, as expressões dos deslocamentos verticais nos pontos 1' e 2', para pequenas rotações, podem ser aproximadas por

$$y_1'' \cong d_{11}[tg(\beta_1) + \theta_{v_1}] \quad (141)$$

$$y_2'' \cong -d_{21}[tg(\beta_2) + \theta_{v_2}] \quad (142)$$

O deslocamento vertical da quinta roda Q' , após as ações de translação e rotação do sistema, é determinado pela seguinte igualdade

$$u_{Q'} = u_{v_1} - y_1'' = u_{v_2} - y_2'' \quad (143)$$

Admitindo os dois últimos termos desta dupla igualdade, tem-se a relação entre os deslocamentos u_{v_1} e u_{v_2} . E ainda, substituindo as Eqs. (141) e (142) em (143), tem-se

$$u_{v_1} - u_{v_2} = d_{11}[tg(\beta_1) + \theta_{v_1}] + d_{21}[tg(\beta_2) + \theta_{v_2}] \quad (144)$$

Ao avaliar a Eq. (144), observa-se que quando levada para a representação matricial, a matriz de mssa do sistema acoplado entre veículo e irregularidade da pista teria uma linha nula, ou seja, inviabilizaria a resposta numérica da integração temporal. Conseqüentemente, a derivada de segunda ordem em relação ao tempo da Eq. (144) é igual a (ROSSIGALI, 2013)

$$\ddot{u}_{v_1} - \ddot{u}_{v_2} = d_{11}\ddot{\theta}_{v_1} + d_{21}\ddot{\theta}_{v_2} \quad (145)$$

posto que os ângulos iniciais β_1 e β_2 são constantes.

Explicitando-se as Eqs. (128) a (135) e a Eq. (145), e empregando às distâncias auxiliares estabelecidas através da Eq. (119), chega-se às equações de compatibilidade de deslocamentos, translação e rotação para o modelo veicular com 9 graus de liberdade

$$\ddot{u}_{v_1} - d_{11}\ddot{\theta}_{v_1} - \ddot{u}_{v_2} - d_{21}\ddot{\theta}_{v_2} = 0 \quad (146)$$

$$\begin{aligned} & -m_{v_1}d_{11}\ddot{u}_{v_1} - I_{v_1}\ddot{\theta}_{v_1} + (-C_{s_1}d'_{11} + C_{s_2}d'_{21})\dot{u}_{v_1} + (-C_{s_1}l_1d'_{11} - C_{s_2}l_2d'_{21})\dot{\theta}_{v_1} \\ & + (C_{s_1}d'_{11})\dot{u}_{r_1} + (-C_{s_2}d'_{21})\dot{u}_{r_2} + (-K_{s_1}d'_{11} + K_{s_2}d'_{21})u_{v_1} \\ & + (-K_{s_1}l_1d'_{11} - K_{s_2}l_2d'_{21})\theta_{v_1} + (K_{s_1}d'_{11})u_{r_1} + (-K_{s_2}d'_{21})u_{r_2} = 0 \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} & m_{v_1}\ddot{u}_{v_1} + m_{v_2}\ddot{u}_{v_2} + (C_{s_1} + C_{s_2})\dot{u}_{v_1} + (C_{s_1}l_1 - C_{s_2}l_2)\dot{\theta}_{v_1} + (C_{s_3} + C_{s_4} + C_{s_5})\dot{u}_{v_2} \\ & + (C_{s_3}l_3 + C_{s_4}l_4 + C_{s_5}l_5)\dot{\theta}_{v_2} - C_{s_1}\dot{u}_{r_1} - C_{s_2}\dot{u}_{r_2} - C_{s_3}\dot{u}_{r_3} - C_{s_4}\dot{u}_{r_4} - C_{s_5}\dot{u}_{r_5} \\ & + (K_{s_1} + K_{s_2})u_{v_1} + (K_{s_1}l_1 - K_{s_2}l_2)\theta_{v_1} + (K_{s_3} + K_{s_4} + K_{s_5})u_{v_2} \\ & + (K_{s_3}l_3 + K_{s_4}l_4 + K_{s_5}l_5)\theta_{v_2} - K_{s_1}u_{r_1} - K_{s_2}u_{r_2} - K_{s_3}u_{r_3} - K_{s_4}u_{r_4} - K_{s_5}u_{r_5} = 0 \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} & -m_{v_1}\ddot{u}_{v_1}d_{21} - I_{v_2}\ddot{\theta}_{v_2} - d_{21}(C_{s_1} + C_{s_2})\dot{u}_{v_1} + d_{21}(-C_{s_1}l_1 + C_{s_2}l_2)\dot{\theta}_{v_1} \\ & + (C_{s_3}l_3 + C_{s_4}l_4 + C_{s_5}l_5)\dot{u}_{v_2} + (C_{s_3}l_3^2 + C_{s_4}l_4^2 + C_{s_5}l_5^2)\dot{\theta}_{v_2} + C_{s_1}d_{21}\dot{u}_{r_1} \\ & + C_{s_2}d_{21}\dot{u}_{r_2} - C_{s_3}l_3\dot{u}_{r_3} - C_{s_4}l_4\dot{u}_{r_4} - C_{s_5}l_5\dot{u}_{r_5} - d_{21}(K_{s_1} + K_{s_2})u_{v_1} \\ & + d_{21}(-K_{s_1}l_1 + K_{s_2}l_2)\theta_{v_1} + (K_{s_3}l_3 + K_{s_4}l_4 + K_{s_5}l_5)u_{v_2} + K_{s_1}d_{21}u_{r_1} \\ & (K_{s_3}l_3^2 + K_{s_4}l_4^2 + K_{s_5}l_5^2)\theta_{v_2} + K_{s_2}d_{21}u_{r_2} - K_{s_3}l_3u_{r_3} - K_{s_4}l_4u_{r_4} - K_{s_5}l_5u_{r_5} = 0 \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} & m_{r_1}\ddot{u}_{r_1} - C_{s_1}\dot{u}_{v_1} - C_{s_1}l_1\dot{\theta}_{v_1} + (C_{s_1} + C_{r_1})\dot{u}_{r_1} - K_{s_1}u_{v_1} - K_{s_1}l_1\theta_{v_1} \\ & + (K_{s_1} + K_{r_1})u_{r_1} = C_{r_1}\dot{y}_1(t) + K_{r_1}y_1(t) \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} & m_{r_2}\ddot{u}_{r_2} - C_{s_2}\dot{u}_{v_1} + C_{s_2}l_2\dot{\theta}_{v_1} + (C_{s_2} + C_{r_2})\dot{u}_{r_2} - K_{s_2}u_{v_1} + K_{s_2}l_2\theta_{v_1} \\ & + (K_{s_2} + K_{r_2})u_{r_2} = C_{r_2}\dot{y}_2(t) + K_{r_2}y_2(t) \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} & m_{r_3}\ddot{u}_{r_3} - C_{s_3}\dot{u}_{v_2} - C_{s_3}l_3\dot{\theta}_{v_2} + (C_{s_3} + C_{r_3})\dot{u}_{r_3} - K_{s_3}u_{v_2} - K_{s_3}l_3\theta_{v_2} \\ & + (K_{s_3} + K_{r_3})u_{r_3} = C_{r_3}\dot{y}_3(t) + K_{r_3}y_3(t) \end{aligned} \quad (152)$$

$$m_{r_4} \ddot{u}_{r_4} - C_{s_4} \dot{u}_{v_2} - C_{s_4} l_4 \dot{\theta}_{v_2} + (C_{s_4} + C_{r_4}) \dot{u}_{r_4} - K_{s_4} u_{v_2} - K_{s_4} l_4 \theta_{v_2} + (K_{s_4} + K_{r_4}) u_{r_4} = C_{r_4} \dot{y}_4(t) + K_{r_4} y_4(t) \quad (153)$$

$$m_{r_5} \ddot{u}_{r_5} - C_{s_5} \dot{u}_{v_2} - C_{s_5} l_5 \dot{\theta}_{v_2} + (C_{s_5} + C_{r_5}) \dot{u}_{r_5} - K_{s_5} u_{v_2} - K_{s_5} l_5 \theta_{v_2} + (K_{s_5} + K_{r_5}) u_{r_5} = C_{r_5} \dot{y}_5(t) + K_{r_5} y_5(t) \quad (154)$$

Por fim, para o modelo matemático com 9 graus de liberdade, a equação matricial que caracteriza o problema é apresentada como

$$\begin{bmatrix} M_{vv} & 0 \\ 0 & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{u}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{vv} & C_{vr} \\ C_{rv} & C_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{u}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vr} \\ K_{rv} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_r(t) \end{Bmatrix} \quad (155)$$

Diferentemente dos veículos monolíticos, as matrizes $[M_V]$, $[C_V]$ e $[K_V]$ do veículo de 9 graus de liberdade são particionadas em até 4 submatrizes. Na nomenclatura adotada, denominam-se cada parcela com um subscrito “v” que representa os graus de liberdade do veículo, ou “r” que representa os graus de liberdade dos conjuntos eixo-roda-pneu. Desta forma, obtêm-se as seguintes matrizes de massa, amortecimento e rigidez

$$[M_{vv}] = \begin{bmatrix} 1 & -d_{11} & -1 & -d_{21} \\ -m_{v_1} d_{11} & -I_{v_1} & 0 & 0 \\ m_{v_1} & 0 & m_{v_2} & 0 \\ -m_{v_1} d_{21} & 0 & 0 & -I_{v_2} \end{bmatrix} \quad (156)$$

$$[M_{rr}] = \begin{bmatrix} m_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_5} \end{bmatrix} \quad (157)$$

$$[C_{vp}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sum_{i=1}^2 s_i C_{s_i} d'_{i1} & -\sum_{i=1}^2 C_{s_i} l_i d'_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^2 C_{s_i} & \sum_{i=1}^2 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=3}^5 C_{s_i} & \sum_{i=3}^5 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=3}^5 s_i C_{s_i} l_i^2 \\ -d_{21} \sum_{i=1}^2 C_{s_i} & -d_{21} \sum_{i=1}^2 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=3}^5 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=3}^5 s_i C_{s_i} l_i^2 & \sum_{i=3}^5 s_i C_{s_i} l_i^3 \end{bmatrix} \quad (158)$$

$$[C_{rr}] = \begin{bmatrix} C_{s_1} + C_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{s_2} + C_{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{s_3} + C_{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{s_4} + C_{r_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s_5} + C_{r_5} \end{bmatrix} \quad (159)$$

$$[C_{vr}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{s_1} d'_{11} & -C_{s_2} d'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -C_{s_1} & -C_{s_2} & -C_{s_3} & -C_{s_4} & -C_{s_5} \\ C_{s_1} d_{21} & C_{s_2} d_{21} & -C_{s_3} l_3 & -C_{s_4} l_4 & -C_{s_5} l_5 \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$[C_{rv}] = \begin{bmatrix} -C_{s_1} & -C_{s_1}l_1 & 0 & 0 \\ -C_{s_2} & -C_{s_2}l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{s_3} & -C_{s_3}l_3 \\ 0 & 0 & -C_{s_4} & -C_{s_4}l_4 \\ 0 & 0 & -C_{s_5} & -C_{s_5}l_5 \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$[K_{rv}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sum_{i=1}^2 s_i K_{s_i} d_{i1} & -\sum_{i=1}^2 K_{s_i} l_i d_{i1} & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^2 K_{s_i} & \sum_{i=1}^2 s_i K_{s_i} l_i & \sum_{i=3}^5 K_{s_i} & \sum_{i=3}^5 s_i K_{s_i} l_i \\ -d_{21} \sum_{i=1}^2 K_{s_i} & -d_{21} \sum_{i=1}^2 s_i K_{s_i} l_i & \sum_{i=3}^5 s_i K_{s_i} l_i & \sum_{i=3}^5 s_i K_{s_i} l_i^2 \end{bmatrix} \quad (162)$$

$$[K_{rr}] = \begin{bmatrix} K_{s_1} + K_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{s_2} + K_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{s_3} + K_{r_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{s_4} + K_{r_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (163)$$

$$[K_{yy}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{S_1} d'_{11} & -K_{S_2} d'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -K_{S_1} & -K_{S_2} & -K_{S_3} & -K_{S_4} & -K_{S_5} \\ K_{S_1} d'_{21} & K_{S_2} d_{21} & -K_{S_3} l_3 & -K_{S_4} l_4 & -K_{S_5} l_5 \end{bmatrix} \quad (164)$$

$$[K_{yy}] = \begin{bmatrix} -K_{S_1} & -K_{S_1} l_1 & 0 & 0 \\ -K_{S_2} & K_{S_2} l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{S_3} & -K_{S_3} l_3 \\ 0 & 0 & -K_{S_4} & -K_{S_4} l_4 \\ 0 & 0 & -K_{S_5} & -K_{S_5} l_5 \end{bmatrix} \quad (165)$$

Enquanto os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e o vetor de forças externas são apresentados como

$$\{\ddot{u}_v\} = \{\ddot{u}_{v_1} \quad \ddot{\theta}_{v_1} \quad \ddot{u}_{v_2} \quad \ddot{\theta}_{v_2}\}^T \quad (166)$$

$$\{\ddot{u}_r\} = \{\ddot{u}_{r_1} \quad \ddot{u}_{r_2} \quad \ddot{u}_{r_3} \quad \ddot{u}_{r_4} \quad \ddot{u}_{r_5}\}^T \quad (167)$$

$$\{\dot{u}_v\} = \{\dot{u}_{v_1} \quad \dot{\theta}_{v_1} \quad \dot{u}_{v_2} \quad \dot{\theta}_{v_2}\}^T \quad (168)$$

$$\{\dot{u}_r\} = \{\dot{u}_{r_1} \quad \dot{u}_{r_2} \quad \dot{u}_{r_3} \quad \dot{u}_{r_4} \quad \dot{u}_{r_5}\}^T \quad (169)$$

$$\{u_v\} = \{u_{v_1} \quad \theta_{v_1} \quad u_{v_2} \quad \theta_{v_2}\}^T \quad (170)$$

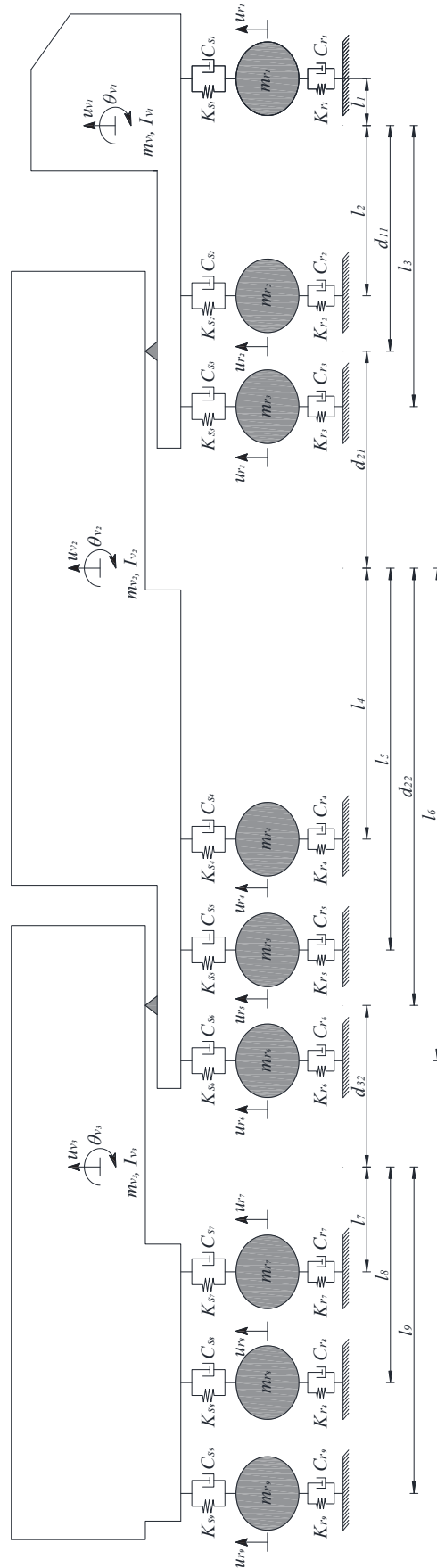
$$\{u_r\} = \{u_{r_1} \quad u_{r_2} \quad u_{r_3} \quad u_{r_4} \quad u_{r_5}\}^T \quad (171)$$

$$\{F_r(t)\} = \begin{Bmatrix} C_{r_1}\dot{y}_1(t) + K_{r_1}y_1(t) \\ C_{r_2}\dot{y}_2(t) + K_{r_2}y_2(t) \\ C_{r_3}\dot{y}_3(t) + K_{r_3}y_3(t) \\ C_{r_4}\dot{y}_4(t) + K_{r_4}y_4(t) \\ C_{r_5}\dot{y}_5(t) + K_{r_5}y_5(t) \end{Bmatrix} \quad (172)$$

3.5.4 Modelo veicular com 15 graus de liberdade

Seja um conjunto do tipo bitrem de 9 eixos conforme ilustrado na FIGURA 18.

FIGURA 18 – MODELO VEICULAR COM 15 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

O modelo veicular representado graficamente, na FIGURA 18, trata-se de uma Combinação de Veículos de Carga (CVC), sancionada pela Resolução nº 211 do Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN, 2006). Este conjunto é constituído por uma combinação de 3 veículos acoplados, sendo uma unidade tratora e dois semirreboques de 3 eixos cada, em série.

O modelo matemático é composto por 15 graus de liberdade: a translação vertical e a rotação de cada uma das três partes suspensas (u_{v_1} , u_{v_2} , u_{v_3} , θ_{v_1} , θ_{v_2} e θ_{v_3}), e as 9 translações verticais das massas dos conjuntos eixo-rodas-pneus (u_{r_1} , u_{r_2} , u_{r_3} , u_{r_4} , u_{r_5} , u_{r_6} , u_{r_7} , u_{r_8} e u_{r_9}).

As distâncias auxiliares para o veículo articulado de 15 graus de liberdade são estabelecidas como

$$d'_{i1} = l_i + s_i d_{11}, i \leq 3 \quad (173)$$

$$d'_{i2} = l_i - s_i d_{32}, 7 \leq i \leq 9 \quad (174)$$

em que as variáveis auxiliares s_i possuem a mesma convenção adotada na seção 3.5.3.

Utilizando a mesma metodologia, aplicada na formulação das equações de movimento para o modelo matemático de veículo com 9 graus de liberdade, têm-se as seguintes equações de compatibilidade de deslocamentos, translação e rotação para o modelo veicular com 15 graus de liberdade

$$\ddot{u}_{v_1} - d_{11} \ddot{\theta}_{v_1} - \ddot{u}_{v_2} - d_{21} \ddot{\theta}_{v_2} = 0 \quad (175)$$

$$\begin{aligned} & -m_{v_1} d_{11} \ddot{u}_{v_1} - I_{v_1} \ddot{\theta}_{v_1} + (-C_{s_1} d'_{11} - C_{s_2} d'_{21} + C_{s_3} d'_{31}) \dot{u}_{v_1} \\ & + (-C_{s_1} l_1 d'_{11} + C_{s_2} l_2 d'_{21} - C_{s_3} l_3 d'_{31}) \dot{\theta}_{v_1} + (C_{s_1} d'_{11}) \dot{u}_{r_1} + (C_{s_2} d'_{21}) \dot{u}_{r_2} \\ & + (-C_{s_3} d'_{31}) \dot{u}_{r_3} + (-K_{s_1} d'_{11} - K_{s_2} d'_{21} + K_{s_3} d'_{31}) u_{v_1} \\ & + (-K_{s_1} l_1 d'_{11} + K_{s_2} l_2 d'_{21} - K_{s_3} l_3 d'_{31}) \theta_{v_1} + (K_{s_1} d'_{11}) u_{r_1} + (K_{s_2} d'_{21}) u_{r_2} \\ & + (-K_{s_3} d'_{31}) u_{r_3} = 0 \end{aligned} \quad (176)$$

$$\begin{aligned}
& m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} + m_{v_2} \ddot{u}_{v_2} + m_{v_3} \ddot{u}_{v_3} + (C_{S_1} + C_{S_2} + C_{S_3}) \dot{u}_{v_1} \\
& + (C_{S_1} l_1 - C_{S_2} l_2 - C_{S_3} l_3) \dot{\theta}_{v_1} + (C_{S_4} + C_{S_5} + C_{S_6}) \dot{u}_{v_2} + (C_{S_4} l_4 + C_{S_5} l_5 + C_{S_6} l_6) \dot{\theta}_{v_2} \\
& + (C_{S_7} + C_{S_8} + C_{S_9}) \dot{u}_{v_3} + (-C_{S_7} l_7 - C_{S_8} l_8 - C_{S_9} l_9) \dot{\theta}_{v_3} - C_{S_1} \dot{u}_{r_1} - C_{S_2} \dot{u}_{r_2} \\
& - C_{S_3} \dot{u}_{r_3} - C_{S_4} \dot{u}_{r_4} - C_{S_5} \dot{u}_{r_5} - C_{S_6} \dot{u}_{r_6} - C_{S_7} \dot{u}_{r_7} - C_{S_8} \dot{u}_{r_8} - C_{S_9} \dot{u}_{r_9} \\
& + (K_{S_1} + K_{S_2} + K_{S_3}) u_{v_1} + (K_{S_1} l_1 - K_{S_2} l_2 - K_{S_3} l_3) \theta_{v_1} + (K_{S_4} + K_{S_5} + K_{S_6}) u_{v_2} \\
& + (K_{S_4} l_4 + K_{S_5} l_5 + K_{S_6} l_6) \theta_{v_2} + (K_{S_7} + K_{S_8} + K_{S_9}) u_{v_3} \\
& + (-K_{S_7} l_7 - K_{S_8} l_8 - K_{S_9} l_9) \theta_{v_3} - K_{S_1} u_{r_1} - K_{S_2} u_{r_2} - K_{S_3} u_{r_3} - K_{S_4} u_{r_4} \\
& - K_{S_5} u_{r_5} - K_{S_6} u_{r_6} - K_{S_7} u_{r_7} - K_{S_8} u_{r_8} - K_{S_9} u_{r_9} = 0
\end{aligned} \tag{177}$$

$$\begin{aligned}
& -m_{v_1} \ddot{u}_{v_1} d_{21} - I_{v_2} \ddot{\theta}_{v_2} + m_{v_3} \ddot{u}_{v_3} d_{22} - d_{21} (C_{S_1} + C_{S_2} + C_{S_3}) \dot{u}_{v_1} \\
& + d_{21} (-C_{S_1} l_1 + C_{S_2} l_2 + C_{S_3} l_3) \dot{\theta}_{v_1} + (C_{S_4} l_4 + C_{S_5} l_5 + C_{S_6} l_6) \dot{u}_{v_2} \\
& + (C_{S_4} l_4^2 + C_{S_5} l_5^2 + C_{S_6} l_6^2) \dot{\theta}_{v_2} + C_{S_1} d_{21} \dot{u}_{r_1} + C_{S_2} d_{21} \dot{u}_{r_2} + C_{S_3} d_{21} \dot{u}_{r_3} \\
& - C_{S_4} l_4 \dot{u}_{r_4} - C_{S_5} l_5 \dot{u}_{r_5} - C_{S_6} l_6 \dot{u}_{r_6} - C_{S_7} d_{22} \dot{u}_{r_7} - C_{S_8} d_{22} \dot{u}_{r_8} - C_{S_9} d_{22} \dot{u}_{r_9} \\
& - d_{21} (K_{S_1} + K_{S_2} + K_{S_3}) u_{v_1} + d_{21} (-K_{S_1} l_1 + K_{S_2} l_2 + K_{S_3} l_3) \theta_{v_1} \\
& + (K_{S_4} l_4 + K_{S_5} l_5 + K_{S_6} l_6) u_{v_2} + (K_{S_4} l_4^2 + K_{S_5} l_5^2 + K_{S_6} l_6^2) \theta_{v_2} \\
& + K_{S_1} d_{21} u_{r_1} + K_{S_2} d_{21} u_{r_2} + K_{S_3} d_{21} u_{r_3} - K_{S_4} l_4 u_{r_4} - K_{S_5} l_5 u_{r_5} - K_{S_6} l_6 u_{r_6} \\
& - K_{S_7} d_{22} u_{r_7} - K_{S_8} d_{22} u_{r_8} - K_{S_9} d_{22} u_{r_9} = 0
\end{aligned} \tag{178}$$

$$\ddot{u}_{v_2} - d_{22} \ddot{\theta}_{v_2} - \ddot{u}_{v_3} - d_{32} \ddot{\theta}_{v_3} = 0 \tag{179}$$

$$\begin{aligned}
& m_{v_3} d_{32} \ddot{u}_{v_3} - I_{v_3} \ddot{\theta}_{v_3} + (C_{S_7} d'_{72} + C_{S_8} d'_{82} + C_{S_9} d'_{92}) \dot{u}_{v_3} \\
& + (-C_{S_7} l_7 d'_{72} - C_{S_8} l_8 d'_{82} - C_{S_9} l_9 d'_{92}) \dot{\theta}_{v_3} + (-C_{S_7} d'_{72}) \dot{u}_{r_7} + (-C_{S_8} d'_{82}) \dot{u}_{r_8} \\
& + (-C_{S_9} d'_{92}) \dot{u}_{r_9} + (K_{S_7} d'_{72} + K_{S_8} d'_{82} + K_{S_9} d'_{92}) u_{v_3} \\
& + (-K_{S_7} l_7 d'_{72} - K_{S_8} l_8 d'_{82} - K_{S_9} l_9 d'_{92}) \theta_{v_3} + (-K_{S_7} d'_{72}) u_{r_7} + (-K_{S_8} d'_{82}) u_{r_8} \\
& + (-K_{S_9} d'_{92}) u_{r_9} = 0
\end{aligned} \tag{180}$$

$$\begin{aligned}
& m_{r_1} \ddot{u}_{r_1} - C_{S_1} \dot{u}_{v_1} - C_{S_1} l_1 \dot{\theta}_{v_1} + (C_{S_1} + C_{r_1}) \dot{u}_{r_1} - K_{S_1} u_{v_1} - K_{S_1} l_1 \theta_{v_1} \\
& + (K_{S_1} + K_{r_1}) u_{r_1} = C_{r_1} \dot{y}_1(t) + K_{r_1} y_1(t)
\end{aligned} \tag{181}$$

$$\begin{aligned}
& m_{r_2} \ddot{u}_{r_2} - C_{S_2} \dot{u}_{v_1} + C_{S_2} l_2 \dot{\theta}_{v_1} + (C_{S_2} + C_{r_2}) \dot{u}_{r_2} - K_{S_2} u_{v_1} + K_{S_2} l_2 \theta_{v_1} \\
& + (K_{S_2} + K_{r_2}) u_{r_2} = C_{r_2} \dot{y}_2(t) + K_{r_2} y_2(t)
\end{aligned} \tag{182}$$

$$\begin{aligned}
& m_{r_3} \ddot{u}_{r_3} - C_{S_3} \dot{u}_{v_1} + C_{S_3} l_3 \dot{\theta}_{v_1} + (C_{S_3} + C_{r_3}) \dot{u}_{r_3} - K_{S_3} u_{v_1} + K_{S_3} l_3 \theta_{v_1} \\
& + (K_{S_3} + K_{r_3}) u_{r_3} = C_{r_3} \dot{y}_3(t) + K_{r_3} y_3(t)
\end{aligned} \tag{183}$$

$$m_{r_4} \ddot{u}_{r_4} - C_{s_4} \dot{u}_{v_2} - C_{s_4} l_4 \dot{\theta}_{v_2} + (C_{s_4} + C_{r_4}) \dot{u}_{r_4} - K_{s_4} u_{v_2} - K_{s_4} l_4 \theta_{v_2} + (K_{s_4} + K_{r_4}) u_{r_4} = C_{r_4} \dot{y}_4(t) + K_{r_4} y_4(t) \quad (184)$$

$$m_{r_5} \ddot{u}_{r_5} - C_{s_5} \dot{u}_{v_2} - C_{s_5} l_5 \dot{\theta}_{v_2} + (C_{s_5} + C_{r_5}) \dot{u}_{r_5} - K_{s_5} u_{v_2} - K_{s_5} l_5 \theta_{v_2} + (K_{s_5} + K_{r_5}) u_{r_5} = C_{r_5} \dot{y}_5(t) + K_{r_5} y_5(t) \quad (185)$$

$$m_{r_6} \ddot{u}_{r_6} - C_{s_6} \dot{u}_{v_2} - C_{s_6} l_6 \dot{\theta}_{v_2} + (C_{s_6} + C_{r_6}) \dot{u}_{r_6} - K_{s_6} u_{v_2} - K_{s_6} l_6 \theta_{v_2} + (K_{s_6} + K_{r_6}) u_{r_6} = C_{r_6} \dot{y}_6(t) + K_{r_6} y_6(t) \quad (186)$$

$$m_{r_7} \ddot{u}_{r_7} - C_{s_7} \dot{u}_{v_3} + C_{s_7} l_7 \dot{\theta}_{v_3} + (C_{s_7} + C_{r_7}) \dot{u}_{r_7} - K_{s_7} u_{v_3} + K_{s_7} l_7 \theta_{v_3} + (K_{s_7} + K_{r_7}) u_{r_7} = C_{r_7} \dot{y}_7(t) + K_{r_7} y_7(t) \quad (187)$$

$$m_{r_8} \ddot{u}_{r_8} - C_{s_8} \dot{u}_{v_3} + C_{s_8} l_8 \dot{\theta}_{v_3} + (C_{s_8} + C_{r_8}) \dot{u}_{r_8} - K_{s_8} u_{v_3} + K_{s_8} l_8 \theta_{v_3} + (K_{s_8} + K_{r_8}) u_{r_8} = C_{r_8} \dot{y}_8(t) + K_{r_8} y_8(t) \quad (188)$$

$$m_{r_9} \ddot{u}_{r_9} - C_{s_9} \dot{u}_{v_3} + C_{s_9} l_9 \dot{\theta}_{v_3} + (C_{s_9} + C_{r_9}) \dot{u}_{r_9} - K_{s_9} u_{v_3} + K_{s_9} l_9 \theta_{v_3} + (K_{s_9} + K_{r_9}) u_{r_9} = C_{r_9} \dot{y}_9(t) + K_{r_9} y_9(t) \quad (189)$$

Assim como o modelo veicular articulado de 9 graus de liberdade, as matrizes $[M_V]$, $[C_V]$ e $[K_V]$ do modelo matemático de 15 graus de liberdade são particionadas em até 4 submatrizes conforme a Eq. (155). Desta forma, obtêm-se as seguintes matrizes de massa, amortecimento e rigidez

$$[M_{vv}] = \begin{bmatrix} 1 & -d_{11} & -1 & -d_{21} & 0 & 0 \\ -m_{v_1} d_{11} & -I_{v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{v_1} & 0 & m_{v_2} & 0 & m_{v_3} & 0 \\ -m_{v_1} d_{21} & 0 & 0 & -I_{v_2} & m_{v_3} d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_{22} & -1 & -d_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{v_3} d_{32} & -I_{v_3} \end{bmatrix} \quad (190)$$

$$[M_{rr}] = \begin{bmatrix} m_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{r_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_9} \end{bmatrix} \quad (191)$$

$$[C_{vv}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sum_{i=1}^3 s_i C_{s_i} d'_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^3 C_{s_i} & -\sum_{i=1}^3 C_{s_i} l_i d'_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{21} \sum_{i=1}^3 C_{s_i} & \sum_{i=1}^3 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=4}^6 C_{s_i} & \sum_{i=4}^6 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=7}^9 C_{s_i} & \sum_{i=7}^9 s_i C_{s_i} l_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{21} \sum_{i=1}^3 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=4}^6 s_i C_{s_i} l_i & \sum_{i=4}^6 s_i C_{s_i} l_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sum_{i=7}^9 s_i C_{s_i} d'_{i2} & \sum_{i=7}^9 s_i C_{s_i} l_i d'_{i2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (192)$$

$$[C_{rr}] = \begin{bmatrix} C_{s_1} + C_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{s_2} + C_{r_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{s_3} + C_{r_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{s_4} + C_{r_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s_5} + C_{r_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s_6} + C_{r_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s_7} + C_{r_7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s_8} + C_{r_8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s_9} + C_{r_9} \end{bmatrix} \quad (193)$$

$$[C_{vr}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{s_1}d'_{11} & C_{s_2}d'_{21} & -C_{s_3}d'_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{s_1} & -C_{s_2} & -C_{s_3} & -C_{s_4} & -C_{s_5} & -C_{s_6} & -C_{s_7} & -C_{s_8} & -C_{s_9} \\ C_{s_1}d_{21} & C_{s_2}d_{21} & C_{s_3}d_{21} & -C_{s_4}l_4 & -C_{s_5}l_5 & -C_{s_6}l_6 & -C_{s_7}d_{22} & -C_{s_8}d_{22} & -C_{s_9}d_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{s_7}d'_{72} & -C_{s_8}d'_{82} & -C_{s_9}d'_{92} \end{bmatrix} \quad (194)$$

$$[K_{rp}] = \begin{bmatrix} -K_{s_1} & -K_{s_1}l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{s_2} & -K_{s_2}l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{s_3} & -K_{s_3}l_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{s_4} & -K_{s_4}l_4 & 0 & 0 & -K_{s_7} & -K_{s_7}l_7 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{s_5} & -K_{s_5}l_5 & 0 & 0 & -K_{s_8} & -K_{s_8}l_8 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{s_6} & -K_{s_6}l_6 & 0 & 0 & -K_{s_9} & -K_{s_9}l_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(199)

Enquanto os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e o vetor de forças externas são apresentados como

$$\{\ddot{u}_v\} = \{\ddot{u}_{v_1} \quad \ddot{\theta}_{v_1} \quad \ddot{u}_{v_2} \quad \ddot{\theta}_{v_2} \quad \ddot{u}_{v_3} \quad \ddot{\theta}_{v_3}\}^T \quad (200)$$

$$\{\ddot{u}_r\} = \{\ddot{u}_{r_1} \quad \ddot{u}_{r_2} \quad \ddot{u}_{r_3} \quad \ddot{u}_{r_4} \quad \ddot{u}_{r_5} \quad \ddot{u}_{r_6} \quad \ddot{u}_{r_7} \quad \ddot{u}_{r_8} \quad \ddot{u}_{r_9}\}^T \quad (201)$$

$$\{\dot{u}_v\} = \{\dot{u}_{v_1} \quad \dot{\theta}_{v_1} \quad \dot{u}_{v_2} \quad \dot{\theta}_{v_2} \quad \dot{u}_{v_3} \quad \dot{\theta}_{v_3}\}^T \quad (202)$$

$$\{\dot{u}_r\} = \{\dot{u}_{r_1} \quad \dot{u}_{r_2} \quad \dot{u}_{r_3} \quad \dot{u}_{r_4} \quad \dot{u}_{r_5} \quad \dot{u}_{r_6} \quad \dot{u}_{r_7} \quad \dot{u}_{r_8} \quad \dot{u}_{r_9}\}^T \quad (203)$$

$$\{u_v\} = \{u_{v_1} \quad \theta_{v_1} \quad u_{v_2} \quad \theta_{v_2} \quad u_{v_3} \quad \theta_{v_3}\}^T \quad (204)$$

$$\{u_r\} = \{u_{r_1} \quad u_{r_2} \quad u_{r_3} \quad u_{r_4} \quad u_{r_5} \quad u_{r_6} \quad u_{r_7} \quad u_{r_8} \quad u_{r_9}\}^T \quad (205)$$

$$\{F_r(t)\} = \left\{ \begin{array}{l} C_{r_1}\dot{y}_1(t) + K_{r_1}y_1(t) \\ C_{r_2}\dot{y}_2(t) + K_{r_2}y_2(t) \\ C_{r_3}\dot{y}_3(t) + K_{r_3}y_3(t) \\ C_{r_4}\dot{y}_4(t) + K_{r_4}y_4(t) \\ C_{r_5}\dot{y}_5(t) + K_{r_5}y_5(t) \\ C_{r_6}\dot{y}_6(t) + K_{r_6}y_6(t) \\ C_{r_7}\dot{y}_7(t) + K_{r_7}y_7(t) \\ C_{r_8}\dot{y}_8(t) + K_{r_8}y_8(t) \\ C_{r_9}\dot{y}_9(t) + K_{r_9}y_9(t) \end{array} \right\} \quad (206)$$

3.5.5 Vetor de Forças Nodais Equivalentes

O sistema numérico considera a passagem do veículo na irregularidade da pista e transmite os esforços gerados entre o veículo e irregularidade de forma desacoplada para a análise dinâmica linear, ou seja, os efeitos dinâmicos da ponte não afetam as forças provocadas entre o acoplamento do veículo em trânsito e as irregularidades (ABECHE, 2015).

Estes esforços são obtidos através das contribuições do peso próprio do veículo e dos esforços inerciais. Também contribuem para a composição destas forças as parcelas amortecedoras e elásticas das rodas, associadas às irregularidades da pista. Neste sentido, os vetores de forças provenientes pelo contato entre o veículo de 4 graus de liberdade e o pavimento são definidos por

$$\begin{aligned} \{F_{r_1}(t)\} &= \left[m_v \frac{l_2}{(l_1 + l_2)} + m_{r_1} \right] g + C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] \\ &+ K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] \end{aligned} \quad (207)$$

$$\begin{aligned} \{F_{r_2}(t)\} &= \left[m_v \frac{l_1}{(l_1 + l_2)} + m_{r_2} \right] g + C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] \\ &+ K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] \end{aligned} \quad (208)$$

sendo g a aceleração da gravidade.

Para o modelo veicular com 5 graus de liberdade, a força exercida pelo veículo sobre a estrutura é

$$\begin{aligned} \{F_{r_1}(t)\} &= \left[m_v \frac{\left(\frac{l_2+l_3}{2}\right)}{l_1 + \left(\frac{l_2+l_3}{2}\right)} + m_{r_1} \right] g + C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] \\ &+ K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] \end{aligned} \quad (209)$$

$$\begin{aligned} \{F_{r_2}(t)\} &= \left[\frac{1}{2} m_v \frac{l_1}{l_1 + \left(\frac{l_2+l_3}{2}\right)} + m_{r_2} \right] g + C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] \\ &+ K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] \end{aligned} \quad (210)$$

$$\begin{aligned} \{F_{r_3}(t)\} &= \left[\frac{1}{2} m_v \frac{l_1}{l_1 + \left(\frac{l_2+l_3}{2}\right)} + m_{r_3} \right] g + C_{r_3} [\dot{u}_{r_3}(t) - \dot{y}_3(t)] \\ &+ K_{r_3} [u_{r_3}(t) - y_3(t)] \end{aligned} \quad (211)$$

Em se tratando do modelo veicular articulado com 9 graus de liberdade, a força para cada eixo é dada por

$$\{F_{r_1}(t)\} = \left\{ \frac{\left[m_{v_1} l_2 + \frac{m_{v_2} l'}{(l' + d_{21})} (l_2 - d_{11}) \right]}{(l_1 + l_2)} + m_{r_1} \right\} g + C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] \quad (212)$$

$$+ K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)]$$

$$\{F_{r_2}(t)\} = \left\{ \frac{\left[m_{v_1} + \frac{m_{v_2} l'}{(l' + d_{21})} (1 + l_2 - d_{11}) \right]}{(l_1 + l_2)} + m_{r_2} \right\} g + C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] \quad (213)$$

$$+ K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)]$$

$$\{F_{r_3}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_2} l' d_{21}}{l_3 + l_4 + l_5 + 3d_{21}} + m_{r_3} \right\} g + C_{r_3} [\dot{u}_{r_3}(t) - \dot{y}_3(t)] \quad (214)$$

$$+ K_{r_3} [u_{r_3}(t) - y_3(t)]$$

$$\{F_{r_4}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_2} l' d_{21}}{l_3 + l_4 + l_5 + 3d_{21}} + m_{r_4} \right\} g + C_{r_4} [\dot{u}_{r_4}(t) - \dot{y}_4(t)] \quad (215)$$

$$+ K_{r_4} [u_{r_4}(t) - y_4(t)]$$

$$\{F_{r_5}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_2} l' d_{21}}{l_3 + l_4 + l_5 + 3d_{21}} + m_{r_5} \right\} g + C_{r_5} [\dot{u}_{r_5}(t) - \dot{y}_5(t)] \quad (216)$$

$$+ K_{r_5} [u_{r_5}(t) - y_5(t)]$$

onde $l' = \frac{l_3 + l_4 + l_5}{3}$.

Finalmente, o veículo com 15 graus de liberdade, a força é dada, para cada eixo do mesmo, por

$$\{F_{r_1}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_2}l'' - \frac{m_{v_3}l'''}{(l'''+d_{32})}(d_{22}-l'')}{l''+d_{21}} \left[1 - \frac{d_{11}+l_1}{(l_2+l_3+2l_1)} \right] + m_{v_1} \left[1 - \frac{l_1}{(l_2+l_3+2l_1)} \right] \right\} g + C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] + K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] \quad (217)$$

$$\{F_{r_2}(t)\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_{v_2}l'' - \frac{m_{v_3}l'''}{(l'''+d_{32})}(d_{22}-l'')}{l''+d_{21}} \left[\frac{d_{11}+l_1}{(l_2+l_3+2l_1)} \right] + \frac{m_{v_1}l_1}{(l_2+l_3+2l_1)} \right\} g + C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] + K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] \quad (218)$$

$$\{F_{r_3}(t)\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_{v_2}l'' - \frac{m_{v_3}l'''}{(l'''+d_{32})}(d_{22}-l'')}{l''+d_{21}} \left[\frac{d_{11}+l_1}{(l_2+l_3+2l_1)} \right] + \frac{m_{v_1}l_1}{(l_2+l_3+2l_1)} \right\} g + C_{r_3} [\dot{u}_{r_3}(t) - \dot{y}_3(t)] + K_{r_3} [u_{r_3}(t) - y_3(t)] \quad (219)$$

$$\{F_{r_4}(t)\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{[\frac{m_{v_3}l'''}{(l'''+d_{32})} + m_{v_2}]d_{21}}{(l_4+l_5+l_6+3d_{21})} \right\} g + C_{r_4} [\dot{u}_{r_4}(t) - \dot{y}_4(t)] + K_{r_4} [u_{r_4}(t) - y_4(t)] \quad (220)$$

$$\{F_{r_5}(t)\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{[\frac{m_{v_3}l'''}{(l'''+d_{32})} + m_{v_2}]d_{21}}{(l_4+l_5+l_6+3d_{21})} \right\} g + C_{r_5} [\dot{u}_{r_5}(t) - \dot{y}_5(t)] + K_{r_5} [u_{r_5}(t) - y_5(t)] \quad (221)$$

$$\{F_{r_6}(t)\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\left[\frac{m_{v_3} l'''}{(l'''+d_{32})} + m_{v_2} \right] d_{21}}{(l_4 + l_5 + l_6 + 3d_{21})} \right\} g + C_{r_6} [\dot{u}_{r_6}(t) - \dot{y}_6(t)] + K_{r_6} [u_{r_6}(t) - y_6(t)] \quad (222)$$

$$\{F_{r_7}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_3} d_{32}}{(l_7 + l_8 + l_9 + 3d_{32})} \right\} g + C_{r_7} [\dot{u}_{r_7}(t) - \dot{y}_7(t)] + K_{r_7} [u_{r_7}(t) - y_7(t)] \quad (223)$$

$$\{F_{r_8}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_3} d_{32}}{(l_7 + l_8 + l_9 + 3d_{32})} \right\} g + C_{r_8} [\dot{u}_{r_8}(t) - \dot{y}_8(t)] + K_{r_8} [u_{r_8}(t) - y_8(t)] \quad (224)$$

$$\{F_{r_9}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_3} d_{32}}{(l_7 + l_8 + l_9 + 3d_{32})} \right\} g + C_{r_9} [\dot{u}_{r_9}(t) - \dot{y}_9(t)] + K_{r_9} [u_{r_9}(t) - y_9(t)] \quad (225)$$

em que $l'' = \frac{l_4+l_5+l_6}{3}$ e $l''' = \frac{l_7+l_8+l_9}{3}$ respectivamente.

3.6 IRREGULARIDADE LONGITUDINAL DA PISTA

Nesta seção é feita a revisão teórica sobre a rugosidade do pavimento com direcionamento característico à modelagem das irregularidades não determinísticas. A fundamentação teórica realizada nesta seção teve grande influência dos trabalhos realizados por Melo (2007), Santos (2007), Mendonça (2009), Rossigali (2013) e Araujo (2014).

Os efeitos dinâmicos da passagem dos veículos sobre as pontes se originam da interação entre os sistemas veiculares e das estruturas, tendo as irregularidades do pavimento como meio gerador e de transferência das forças

de interação, que excitam a massa do veículo, amplificando o carregamento dinâmico aplicado à estrutura (ROSSIGALI, 2013).

O perfil longitudinal da rugosidade de uma rodovia pode ser tomado como um processo aleatório estacionário e ergódico com média nula (MELO, 2007). Para a descrição da superfície de uma estrada podem ser utilizadas funções de densidade espectral obtidas experimentalmente a partir das quais são gerados perfis de irregularidade longitudinal.

Em Honda *et al.* (1982, *apud* MELO, 2007, p. 35; *apud* SANTOS, 2007, p. 49; *apud* MENDONÇA, 2009, p. 65), por exemplo, o espectro que caracteriza a irregularidade superficial para pontes rodoviárias é obtido, experimentalmente, na aferição de 84 trilhas de roda em 56 pontes diferentes no Japão. Estas pontes possuíam diferentes concepções estruturais como sistema de viga simples e contínuas, treliças e arcos, e pavimentos em concreto e em asfalto.

Como modelo matemático adota-se, para a representação da densidade espectral das irregularidades $\phi(\cdot)$, a função exponencial proposta por Honda *et al.* (1982), utilizada também por outros autores (MELO, 2007; SANTOS, 2007; MENDONÇA, 2009; ROSSIGALI, 2013 e ARAUJO, 2014), por

$$\phi(\omega_k) = \bar{\alpha}(\omega_k)^{-\beta} \quad (226)$$

onde ω_k é a frequência da irregularidade em ciclos por metro, $\bar{\alpha}$ é o coeficiente espectral de rugosidade que depende do estado de conservação do pavimento, o qual pode ser classificado em 5 categorias de acordo com a *International Organization for Standardization* (ISO), conforme a TABELA 1, e β é o expoente que depende do material que constitui o pavimento: 2,03 para pavimentos asfálticos e 1,85 para pavimentos em concreto.

TABELA 1 – CLASSIFICAÇÃO DO PERFIL LONGITUDINAL DE ACORDO COM PADRÃO DA ISO

Condição do Pavimento	$\bar{\alpha}(\text{m}^2/(\text{m}/\text{ciclo}))$
Muito Boa	$\bar{\alpha} \leq 0,24 \cdot 10^{-6}$
Boa	$0,24 \cdot 10^{-6} < \bar{\alpha} \leq 1,00 \cdot 10^{-6}$
Regular	$1,00 \cdot 10^{-6} < \bar{\alpha} \leq 4,00 \cdot 10^{-6}$
Ruim	$4,00 \cdot 10^{-6} < \bar{\alpha} \leq 16,00 \cdot 10^{-6}$
Muito Ruim	$\bar{\alpha} > 16,00 \cdot 10^{-6}$

FONTE: HONDA *et al.* (1982 apud MELO, 2007, p. 36; apud SANTOS, 2007, p. 50; apud MENDONÇA, 2009, p. 67; apud ROSSIGALI, 2013, p. 169).

Entretanto, no Brasil, a classificação dos pavimentos em função do grau de rugosidade é feita através da escala *International Roughness Index* (IRI) (DNIT/IPR, 2011). Tal grandeza referencial é ajustável para todos os sistemas de medição. Desta forma, a TABELA 2 apresenta os valores de acordo com o DNIT/IPR.

TABELA 2 – CORRELAÇÃO OBSERVADA ENTRE AS CLASSIFICAÇÕES DAS CONDIÇÕES DO PAVIMENTO ADOTADAS NO BRASIL E PELA ISO

Condição do Pavimento	$\bar{\alpha}(\text{m}^2/(\text{m}/\text{ciclo}))$	IRI (m/km)
Excelente	$\bar{\alpha} \leq 0,24 \cdot 10^{-6}$	$IRI \leq 1,90$
Excelente à Regular	$0,24 \cdot 10^{-6} < \bar{\alpha} \leq 1,00 \cdot 10^{-6}$	$1,90 < IRI \leq 3,80$
Regular à Péssimo	$\bar{\alpha} > 1,00 \cdot 10^{-6}$	$IRI > 3,80$

FONTE: Melo (2007) e Rossigali (2013).

Verifica-se que, dentro de cada intervalo de variação da classificação ISO, na TABELA 2, é possível observar mais de uma classificação das condições do pavimento de acordo com a IRI no Brasil.

Com a finalidade de gerar um conjunto de amostras de irregularidades, propõe-se a discretização de $y(x)$. Deste modo, aproxima-se a distribuição das irregularidades por uma série finita de harmônicos, dada por

$$y(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos(2\pi\omega_k x + \varphi_k) \quad (227)$$

onde $y(x)$ é a irregularidade aleatória do pavimento, α_k é a amplitude de irregularidade, ω_k é a frequência de irregularidade estabelecida, φ_k é o ângulo de fase aleatório definido no intervalo $[0, 2\pi]$, x é a posição do eixo do veículo

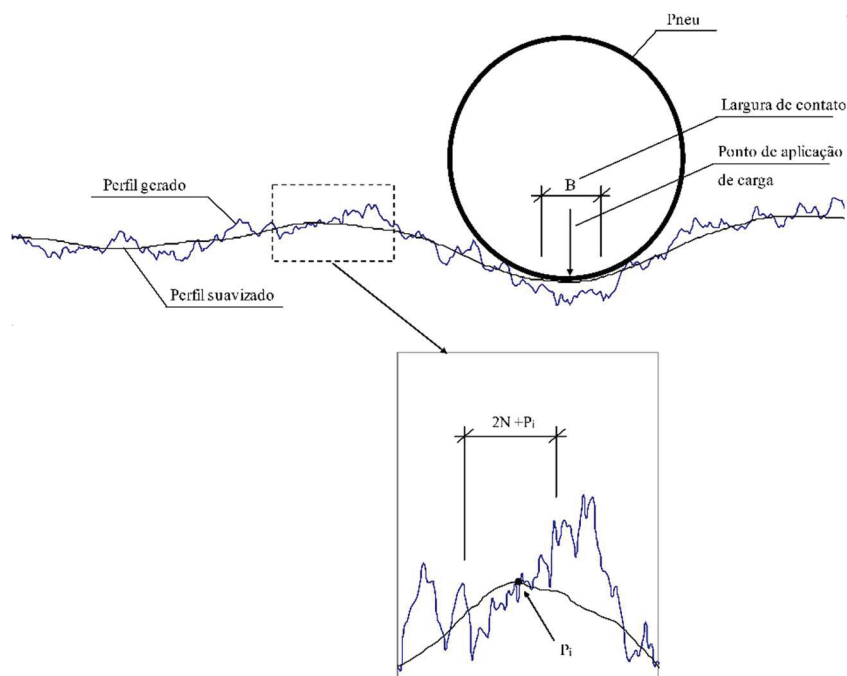
ao longo da sua trajetória e N é o número total de termos da série. O parâmetro α_k é expresso por

$$\alpha_k^2 = 4\phi(\omega_k)\Delta\omega \quad (228)$$

em que $\Delta\omega$ representa o incremento da frequência de irregularidade.

O perfil da irregularidade do pavimento foi submetido a uma suavização para que se pudesse considerar a área de contato entre os pneus e o pavimento de forma mais realística. Para a suavização foi aplicado um processo conhecido como média móvel, onde se substitui cada ponto P_i do perfil original pelo valor da média aritmética calculada entre N pontos à esquerda e N pontos a direita de P_i , além é claro do próprio valor da amplitude em P_i (MELO, 2007). A FIGURA 19 representa uma conformação idealizada do processo de aplicação da média móvel. Neste trabalho foi adotado o comprimento da área de contato entre o pneu e o pavimento, B , como igual à 15 cm.

FIGURA 19 – PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DO PERFIL DE IRREGULARIDADE LONGITUDINAL

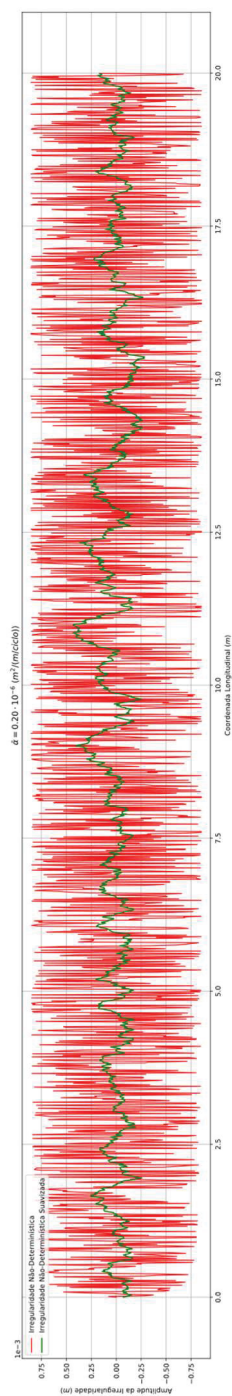


FONTE: Melo (2007).

Neste trabalho foram utilizadas as condições de pavimento asfáltico boa, regular e ruim com os parâmetros $\bar{\alpha}$ igual à $0,20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / (\text{m}/\text{ciclo})$,

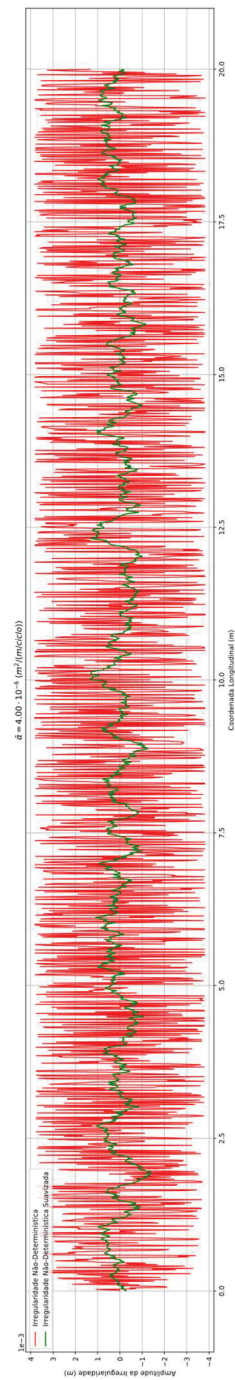
$4,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m}/\text{ciclo})$ e $10,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m}/\text{ciclo})$, respectivamente. Os GRÁFICOS 1, 2 e 3 apresentam a geração aleatória do perfil de irregularidades da pista para as condições de conservação supracitadas. Em vermelho temos o sinal gerado bruto e em verde o sinal suavizado pela média móvel.

GRÁFICO 1 – PERFIL LONGITUDINAL DE IRREGULARIDADE DA PISTA EM BOM ESTADO DE CONSERVAÇÃO ($\bar{\alpha} = 0,20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m}/\text{ciclo})$)



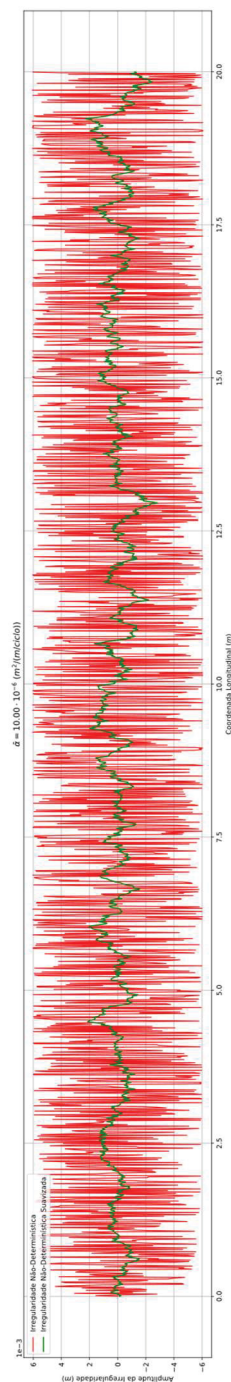
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 2 – PERFIL LONGITUDINAL DE IRREGULARIDADE DA PISTA EM ESTADO DE CONSERVAÇÃO REGULAR ($\bar{\alpha} = 4,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m}/\text{ciclo})$)



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 3 – PERFIL LONGITUDINAL DE IRREGULARIDADE DA PISTA EM ESTADO DE CONSERVAÇÃO RUIM ($\bar{\alpha} = 10,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m}/\text{ciclo})$)



FONTE: O autor (2019).

A TABELA 3 apresenta os parâmetros de entrada utilizados nesta simulação. Adotou-se os mesmos ângulos de fase aleatórios para os diferentes estados de conservação da pista.

TABELA 3 – PARÂMETROS DAS IRREGULARIDADES DA PISTA

Parâmetros	Valor	Unidade (SI)
ω	150,00	rad/s
$\Delta\omega$	$9,2 \cdot 10^{-2}$	rad/s
k	1620,00	Passos
β	2,03	–

FONTE: O autor (2019).

Ao analisar os GRÁFICOS 1, 2 e 3, percebe-se que o processo de suavização transfigura as amplitudes das irregularidades, porém, mantém-se as características da série finita de harmônicos.

3.7 MODELO DINÂMICO LINEAR DESACOPLADO ENTRE VEÍCULO, IRREGULARIDADE E ESTRUTURA

O modelo adotado no presente trabalho está baseado no proposto por Yang e Yau (1997), considerando pontes de seções transversais constantes sem variação da inércia.

Como pode ser apurado na literatura clássica (SORIANO, 2003; BATHE, 1996; CHOPRA, 1995), para a modelagem da ponte podem ser utilizados elementos finitos unidimensionais de viga de *Euler-Bernoulli*. Particulariza-se o presente modelo ao elemento de viga com quatro deslocamentos nodais de coordenada dimensional x , e cujas matrizes elementares de rigidez e de massa são dadas, respectivamente, por

$$[M_e] = \rho A L_e \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L_e}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13L_e}{420} \\ \frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} & \frac{13L_e}{420} & \frac{3L_e^2}{420} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L_e}{420} & \frac{13}{35} & -\frac{11L_e}{210} \\ -\frac{13L_e}{420} & -\frac{3L_e^2}{420} & -\frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$[K_e] = \frac{EI}{L_e} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 4 & -\frac{6}{L_e} & 2 \\ -\frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} & \frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 2 & -\frac{6}{L_e} & 4 \end{bmatrix} \quad (78)$$

em que os parâmetros geométricos L_e , A e I , representam respectivamente o comprimento do elemento, a área de seção transversal e o momento de inércia, enquanto as grandezas físicas ρ e E são, respectivamente, a massa específica e o módulo de elasticidade do material.

Para calcular as forças nodais equivalentes às solicitações no interior dos elementos, para qualquer forma de solicitação, seja estática ou dinâmica, de posição e intensidade fixas ou variáveis, é necessário encontrar os esforços dinâmicos em cada elemento (ABECHE, 2015). Os esforços externos aplicados ao elemento finito de viga podem ser escritos como

$$\{F_e(t)\} = \int_0^{L_e} f(x,t)[H]^T dx \quad (229)$$

onde $[H]$ possui as funções polinomiais cúbicas de *Hermite* conforme mostrado a seguir

$$[H] = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L_e} \right) + 2 \left(\frac{x}{L_e} \right)^2 \\ \frac{L_e}{8} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{L_e} \right) + \frac{x^3}{L_e^2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L_e} \right) - 2 \left(\frac{x}{L_e} \right)^2 \\ -\frac{L_e}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{L_e} \right) + \frac{x^3}{L_e^2} \end{array} \right\} \quad (230)$$

onde x corresponde à coordenada longitudinal em que se encontram os pontos de contato das rodas em cada elemento. Referindo-se à velocidade do veículo como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (231)$$

Torna-se a coordenada longitudinal x em função do tempo, assim, conforme Beghetto (2006) e Abeche (2015), a Eq. (230) fica

$$[H^*] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{vt}{L_e} \right) + 2 \left(\frac{vt}{L_e} \right)^2 \\ \frac{L_e}{8} - \frac{vt}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{(vt)^2}{L_e} \right] + \frac{(vt)^3}{L_e^2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{vt}{L_e} \right) - 2 \left(\frac{vt}{L_e} \right)^2 \\ -\frac{L_e}{8} - \frac{vt}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{(vt)^2}{L_e} \right] + \frac{(vt)^3}{L_e^2} \end{pmatrix} \quad (232)$$

Uma vez que as forças aplicadas na estrutura são resultantes da passagem do veículo pelas irregularidades da pista, substitui-se o vetor de forças nodais equivalentes $\{F_r(t)\}$ na Eq. (229). Desta forma, integrando esta equação, obtém-se o vetor de força externa elementar produzido pela excitação de base do veículo

$$\{F_e(t)\} = -\{F_r(t)\}[H^*] \quad (233)$$

em que o sinal negativo, expresso na Eq. (233), é atribuído em virtude do sistema convencional adotado.

Uma vez determinadas as matrizes elementares de rigidez e massa e o vetor de força elementar, são montadas as matrizes globais da estrutura por meio da conectividade de cada elemento. Considerando a matriz de amortecimento definida pelo método de *Rayleigh*, obtém-se a equação global de movimento para a ponte, conforme Abeche (2015)

$$[M_p]\{\ddot{u}_p\} + [C_p]\{\dot{u}_p\} + [K_p]\{u_p\} = \{F_p(t)\} \quad (234)$$

onde $[M_p]$ é a matriz global de massa, $[C_p]$ a matriz global de amortecimento e $[K_p]$ a matriz global de rigidez, $\{u_p\}$, $\{\dot{u}_p\}$ e $\{\ddot{u}_p\}$ são, respectivamente, os vetores globais de deslocamentos, velocidades e acelerações, e $\{F_p(t)\}$ é o

vetor de força externa. Para a integração temporal da Eq. (234), utiliza-se o método de *Newmark* com aceleração média (METZ *et al.*, 2018b).

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo é realizada a validação dos algoritmos, formulados através do método dos elementos finitos (MEF), contrapondo os resultados obtidos mediante as soluções analíticas. Posteriormente, analisam-se vigas sujeitas às ações dinâmicas de composições veiculares complexas e que não são contempladas pelas normas de projeto, sob o efeito de irregularidades não-determinísticas da via.

4.1 VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Serão apresentados, nesta seção, os testes para validação da formulação matemática confrontando as respostas obtidas analiticamente com os resultados numéricos, utilizando problemas clássicos encontrado na literatura e desenvolvidos pelo autor.

4.1.1 Viga de *Euler-Bernoulli* Sob Carga Harmônica Senoidal

A solução para o problema de vibração forçada de uma viga, simplesmente apoiada, pode ser determinada com a utilização do princípio da superposição de modos (RAO, 2009). Para isso, supõe-se que o deslocamento vertical da viga é

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)q_n(t) \quad (235)$$

em que $W_n(x)$ é o n -ésimo modo de vibração da viga, e $q_n(t)$ é a resposta temporal da coordenada generalizada do n -ésimo modo (RAO, 2009), ou função característica que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$EI \frac{\partial^4 W_n(x)}{\partial x^4} - \omega_n^2 \rho A W_n(x) = 0; n = 1, 2, \dots \quad (236)$$

A equação geral para a vibração lateral forçada de uma viga uniforme, é dada por

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - f(x, t) = 0 \quad (237)$$

Substituindo a Eq. (235) na equação de *Euler-Bernoulli*, para o caso de vibração forçada, Eq. (65), obtemos

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^4 W_n(x)}{\partial x^4} q_n(t) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (238)$$

Tendo em vista a Eq. (236), a Eq. (237) pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \quad (239)$$

Multiplicando a Eq. (238) por $W_m(x)$, integrando ao longo da viga e aplicando a premissa de ortogonalidade temos

$$\frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{\rho A b} Q_n(t) \quad (240)$$

onde $Q_n(t)$ é a força generalizada condizente a $q_n(t)$

$$Q_n(t) = \int_0^L f(x, t) W_n(x) dx \quad (241)$$

e a constante b é representado por

$$b = \int_0^L W_n^2(x) dx \quad (242)$$

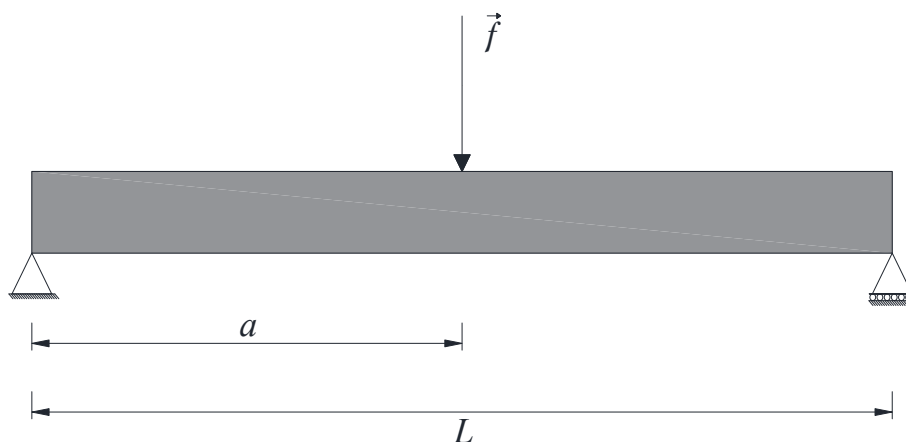
A Eq. (239) pode ser reconhecida como, fundamentalmente, a mesma equação de movimento de um sistema não amortecido com um grau de liberdade (RAO, 2009). Empregando a integral de *Duhamel*, a Eq. (239) fica

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega t) + B_n \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \text{sen}[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (243)$$

onde os dois primeiros termos do lado direito da igualdade representam a vibração transitória da viga, e o terceiro termo representa a vibração em regime permanente (RAO, 2009).

A FIGURA 20 ilustra o problema de vibração em uma viga simplesmente apoiada, do tipo isostática, sujeita a uma força harmônica senoidal $f(t) = f_0 \text{sen}(\omega t)$, aplicada em $x = a$.

FIGURA 20 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A UMA CARGA HARMÔNICA SENOIDAL



FONTE: O autor (2019).

Os modos de vibração de uma viga simplesmente apoiada são dados por

$$W_n(x) = \text{sen}(\beta_n x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (244)$$

onde

$$\beta_n L = n\pi \quad (245)$$

As condições iniciais podem ser expressas como

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{w}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) = 0 \quad (246)$$

Assim, aplicando tais condições na Eq. (235) obtêm-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n = 0 \quad (247)$$

Por consequência, a Eq. (242) detém apenas unicamente o termo da vibração em regime permanente

$$q_n(t) = \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \text{sen}[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (248)$$

onde

$$b = \int_0^L W_n^2(x) dx = \int_0^L \text{sen}^2(\beta_n x) dx = \frac{L}{2} \quad (249)$$

Admitindo $f(x, t)$ como a força de excitação externa aplicada sobre a viga, conforme evidenciado na FIGURA 20, obtêm-se

$$f(x, t) = f_0 \text{sen}(\omega t) \delta(x - a) \quad (250)$$

em que $\delta(x - a)$ é a função delta de *Dirac*. Desta forma, a força generalizada $Q_n(t)$, apresentada na Eq. (240), torna-se

$$Q_n(t) = \int_0^L f_0 \text{sen}(\omega t) \delta(x - a) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = f_0 \text{sen}(\omega t) \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \quad (251)$$

Consequentemente, substituindo as Eqs. (248) e (250) em (247) resulta em

$$q_n(t) = \frac{2}{\rho A L \omega_n} \int_0^t f_0 \text{sen}(\omega \tau) \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \text{sen}[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (252)$$

Empregando a integração por partes em relação à τ , a Eq. (251) fica

$$q_n(t) = \frac{2f_0}{\rho AL\omega_n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} [\omega_n \operatorname{sen}(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\omega_n t)] \quad (253)$$

Substituindo a resposta temporal da coordenada generalizada e o modo de vibração na Eq. (235), tem-se a seguinte expressão para a resposta de uma viga simplesmente apoiada excitada por uma força harmônica senoidal localizada em a

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f_0}{\rho AL\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) \right] \quad (254)$$

As respostas dinâmicas de velocidade e aceleração da estrutura são obtidas a partir da primeira e segunda derivada em relação ao tempo, respectivamente

$$\dot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f_0}{\rho AL\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [\omega \cos(\omega t) - \omega \cos(\omega_n t)] \quad (255)$$

$$\ddot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f_0}{\rho AL\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [\omega \omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) - \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)] \quad (256)$$

4.1.1.1 Análise Numérica da Viga de *Euler-Bernoulli* Sob Carga Harmônica Senoidal

Com o intuito de comprovar o modelo matemático para a análise dinâmica linear, a partir da teoria clássica de vigas ou de *Euler-Bernoulli*,

utiliza-se uma viga simplesmente apoiada que suporta um carregamento estacionário do tipo $\vec{f} = f_0 \text{sen}(\omega t)$ tal como ilustrado na FIGURA 20.

A TABELA 4 apresenta os dados de entrada, como as propriedades geométricas e do material, e os parâmetros da carga pulsante harmônica.

TABELA 4 – PARÂMETROS DA VIGA E DA FORÇA APLICADA

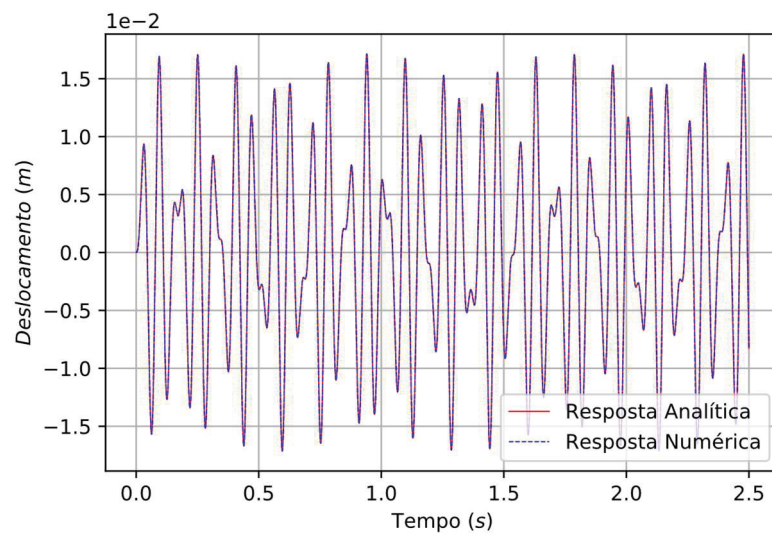
Parâmetros	Valor	Unidade (SI)
L	2,00	m
I	$1,55 \cdot 10^{-8}$	m^4
A	$1,71 \cdot 10^{-4}$	m^2
E	$2,00 \cdot 10^{11}$	N/m^2
ρ	$7,85 \cdot 10^3$	Kg/m^3
f_0	100,00	N
ω	81,76	rad/s
a	1,00	m

FONTE: O autor (2019).

Na discretização por elementos finitos, utiliza-se uma malha unidimensional contendo 100 elementos. Enquanto o método implícito de integração direta, método de *Newmark* (MACHADO, 1983), os valores dos parâmetros γ e β são 0,25 e 0,5 respectivamente.

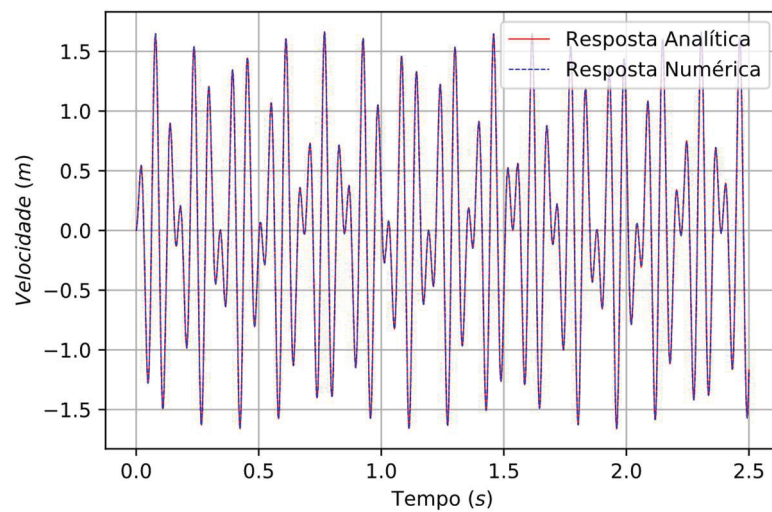
Os GRÁFICOS 4, 5 e 6 ilustram as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração no centro da estrutura para uma carga pontual estacionária para diferentes variações temporais. As respostas numéricas obtidas foram confrontadas com a solução analítica. Foram utilizadas as 10 primeiras frequências naturais de vibração da estrutura, (FERREIRA, 2013), para a concepção da resposta analítica. O tempo máximo de análise foi de 2,5 s.

GRÁFICO 4 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA COM VARIÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$



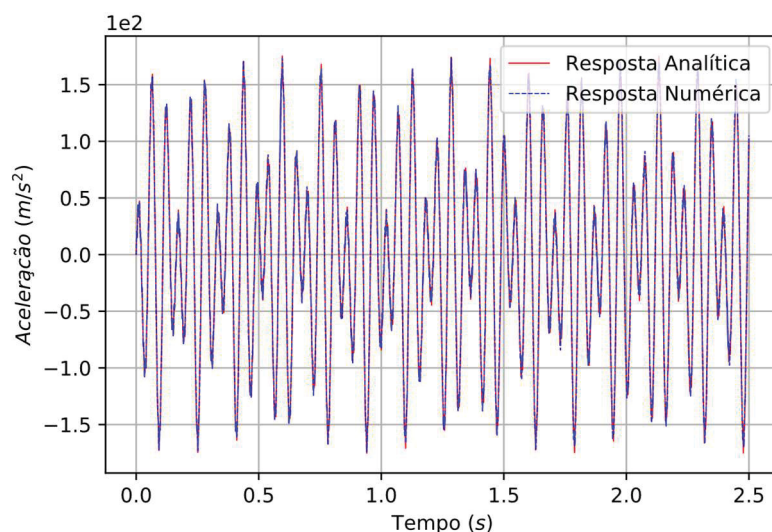
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 5 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA COM VARIÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 6 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA COM VARIÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$



FONTE: O autor (2019).

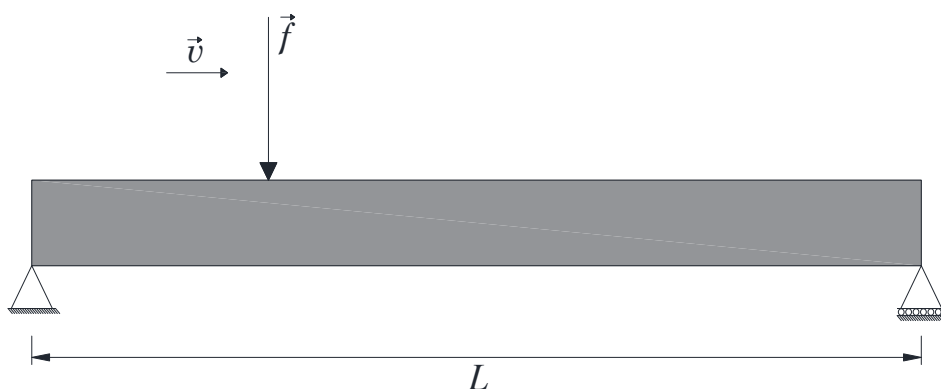
Nas simulações numéricas efetuadas do modelo, notou-se que a solução computacional convergiu para as respostas analíticas à medida que o incremento temporal da integração implícita, método de *Newmark*, decresceu. Desse modo, o passo de tempo, $\Delta t = 0,0001 s$, será adotado nas análises subsequentes.

4.1.2 Viga de *Euler-Bernoulli* Sob Carga Pontual Móvel

Considere a força vertical constante \vec{f} em movimento ao longo de uma viga simplesmente apoiada, de comprimento L , como modelo dinâmico com interação simplificada de um veículo.

Posto que a força externa atuante excita dinamicamente a estrutura, constituindo um problema de vibração forçada, é possível determinar as respostas dinâmicas aplicando a Eq. (235). A FIGURA 21 representa o modelo matemático descrito.

FIGURA 21 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A UMA CARGA PONTUAL MÓVEL



FONTE: O autor (2019).

onde a velocidade constante da carga móvel v definida pela Eq. (231).

Pretendendo determinar a resposta analítica para este caso, a partir do princípio da superposição de modos, deixa-se a abcissa x em função do tempo através da velocidade v para a equação característica da força generalizada Q_n (TIMOSHENKO, 1974)

$$Q_n(t) = \int_0^L f \delta(x - vt) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = f \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \quad (257)$$

em que $\delta(x - vt)$ é a função delta de *Dirac*.

Substituindo-se a Eq. (256) em (247), correspondente à resposta temporal da coordenada generalizada para a viga bi-apoiada, obtém-se

$$q_n(t) = \frac{2}{\rho AL \omega_n} \int_0^t f \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v \tau}{L}\right) \operatorname{sen}[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (258)$$

Aplicando a integração por partes em relação à τ , a Eq. (257) pode ser escrita como

$$q_n(t) = \frac{2f}{\rho AL \omega_n \left[\left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 - \omega_n^2 \right]} \left\{ \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \operatorname{sen}(\omega_n t) - \omega_n \operatorname{sen}\left[\left(\frac{n\pi v}{L}\right) t\right] \right\} \quad (259)$$

Substituindo a Eq. (258) e o modo de vibração, Eq. (243), na Eq. (235), obtém-se a resposta dinâmica de deslocamento da viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga pontual móvel

$$w(x, t) = \frac{2f}{\rho AL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n \left[\left(\frac{n\pi v}{L} \right)^2 - \omega_n^2 \right]} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left\{ \left(\frac{n\pi v}{L} \right) \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen} \left[\left(\frac{n\pi v}{L} \right) t \right] \right\} \quad (260)$$

As respostas dinâmicas de velocidade e aceleração da viga, são obtidas a partir da primeira e segunda derivada em relação ao tempo, respectivamente

$$\dot{w}(x, t) = \frac{2f}{\rho AL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n \left[\left(\frac{n\pi v}{L} \right)^2 - \omega_n^2 \right]} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left\{ \left(\frac{n\pi v}{L} \right) \omega_n \cos(\omega_n t) - \omega_n \left(\frac{n\pi v}{L} \right) \cos \left[\left(\frac{n\pi v}{L} \right) t \right] \right\} \quad (261)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}(x, t) &= \frac{2f}{\rho AL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n \left[\left(\frac{n\pi v}{L} \right)^2 - \omega_n^2 \right]} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left\{ \omega_n \left(\frac{n\pi v}{L} \right)^2 \text{sen} \left[\left(\frac{n\pi v}{L} \right) t \right] - \left(\frac{n\pi v}{L} \right) \omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) \right\} \end{aligned} \quad (262)$$

4.1.2.1 Análise Numérica da Viga de *Euler-Bernoulli* Sob Carga Pontual Móvel

A TABELA 5 apresenta os dados de entrada, como a discretização por elementos finitos, propriedades geométricas e do material, a intensidade da carga e a velocidade com que a mesma atravessa a estrutura.

TABELA 5 – PARÂMETROS DA VIGA E DA FORÇA MÓVEL

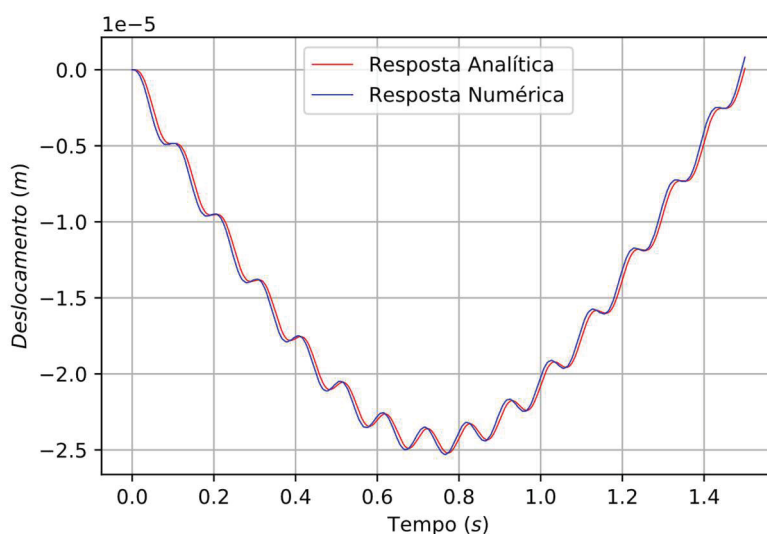
Parâmetros	Valor	Unidade (SI)
L	15,00	m
I	0,48	m^4
A	2,724	m^2
E	$3,0 \cdot 10^{10}$	N/m^2
ρ	2569,75	kg/m^3
f	50,00	N
v	10,00	m/s

FONTE: O autor (2019).

Na discretização por elementos finitos e a aplicação do método de *Newmark*, utilizaram-se os mesmos números de elementos e os parâmetros Δt , γ e β , respectivamente, já estabelecidos no item 4.1.1.1. Enquanto a representação da resposta analítica, empregou-se 25001 pontos.

O GRÁFICO 7 ilustra os deslocamentos dinâmicos lineares no centro da estrutura para uma carga pontual em movimento.

GRÁFICO 7 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001 s$



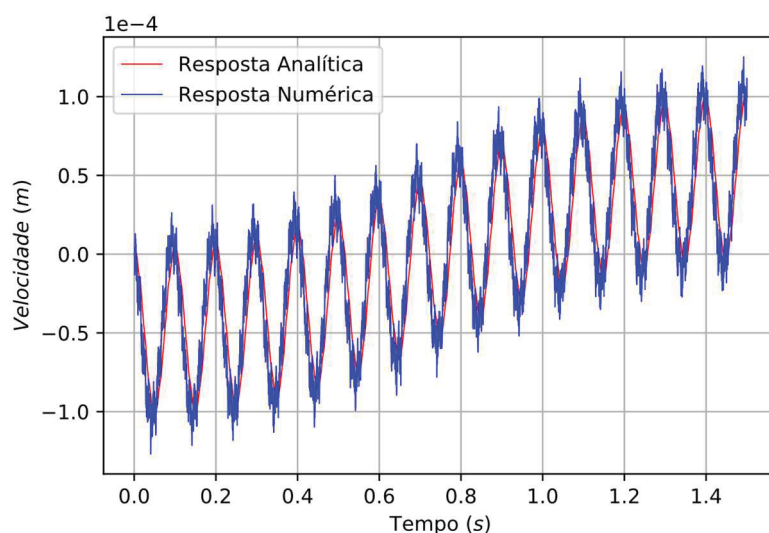
FONTE: O autor (2019).

O GRÁFICO 7 mostra equivalência qualitativa entre a solução analítica e numérica, com valores máximos de deslocamento de $2,52 \cdot 10^{-5}$ e $2,53 \cdot 10^{-5}$, respectivamente. A implementação efetuada no presente trabalho está compatível com os resultados esperados. Consta-se que a

defasagem existente, na ordem de 10^{-7} , está relacionada com o processo de integração no tempo.

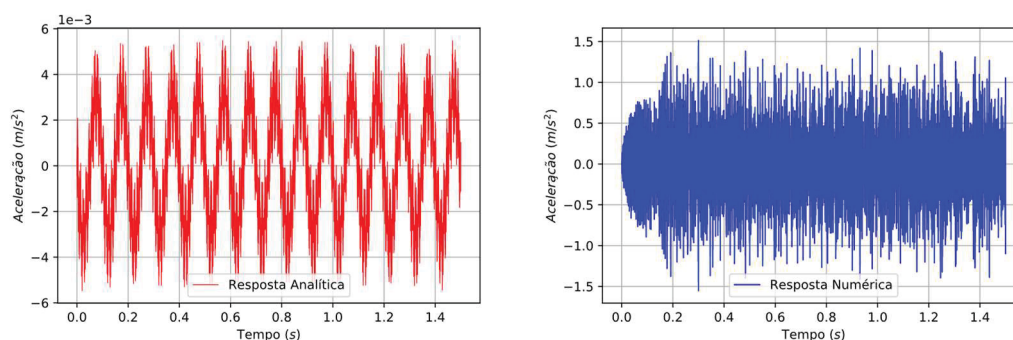
O GRÁFICO 8 apresenta as velocidades obtidas no centro da ponte. As acelerações obtidas no centro da ponte são apresentadas no GRÁFICO 9.

GRÁFICO 8 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001$ s



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 9 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA COM VARIAÇÃO TEMPORAL DE $\Delta t = 0,0001$ s



FONTE: O autor (2019).

Ao analisar os GRÁFICOS 8 e 9, à medida que a ordem das respostas dinâmicas no tempo aumenta, os resultados tornam-se imprecisos. Isto deve-se ao fato da formulação convencional do método dos elementos finitos (MEF) apresentar limitações quando se deseja aumentar o grau de aproximação do elemento, pois requer que as funções de interpolação sejam modificadas

completamente. E ainda, o método de integração temporal, Método de *Newmark*, utilizado para resolver a equação global de movimento para a ponte não corresponde a todo instante de tempo t , mas somente em intervalos de tempo discretos separados por Δt . Desta forma, a implementação efetuada no presente trabalho está compatível com os resultados esperados.

4.2 ANÁLISE NUMÉRICA

Nesta seção são descritos os resultados das simulações computacionais realizadas com os modelos matemáticos apresentados no capítulo anterior.

O veículo transeunte, em velocidade constante, atravessa uma ponte rodoviária com 20 m de vão que possui irregularidades não determinísticas, em sua pista, considerando-se o pavimento asfáltico de qualidade regular, $\beta = 2,03$ e $\bar{\alpha} = 2,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / (\text{m}/\text{ciclo})$. Tais premissas são aplicadas nos tópicos de 4.2.1 a 4.2.4. e as análises estão sujeitas às mesmas series randômicas desenvolvidas na seção 3.6.

A interação entre os sistemas se dá através das irregularidades da pista. Não há descolamento do veículo com a superfície das irregularidades ao se verificar a força atuante na roda, sendo esta uma verificação da condição de segurança, estabilidade e até mesmo conforto para o sistema.

Deve-se ressaltar que em cada ponto de contato i do veículo com a irregularidade da pista, leva em conta a defasagem da parte à qual o eixo i do veículo se encontra.

A TABELA 6 apresenta os parâmetros físicos e geométricos da ponte, diferenciando apenas a velocidade e as características do veículo.

TABELA 6 – PARÂMETROS DA VIGA

Parâmetros	Valor	Unidade (SI)
L	20,00	m
I	0,48	m^4
A	2,724	m^2
E	$3,0 \cdot 10^{10}$	N/m^2
ρ	2569,75	kg/m^3

FONTE: O autor (2019).

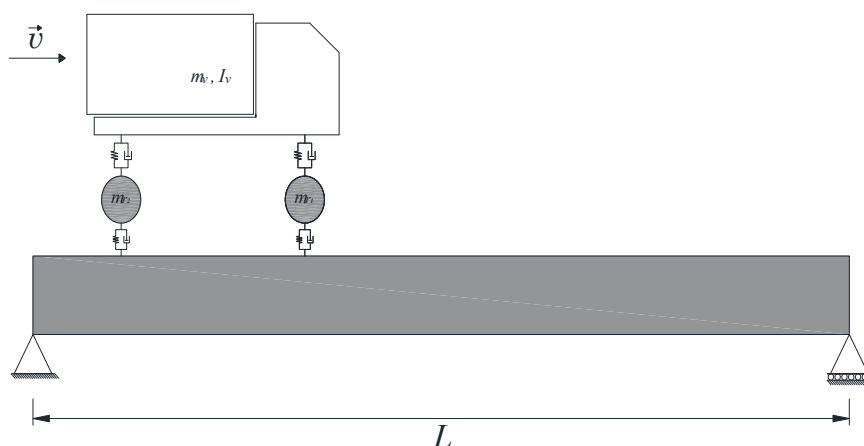
No presente trabalho, foram obtidas as frequências naturais de vibração da estrutura numericamente, sendo os valores de $35,39 \text{ rad/s}$ e $141,55 \text{ rad/s}$ correspondentes à primeira frequência e à segunda frequência natural de vibração, respectivamente.

Para atingir o objetivo do trabalho, desenvolveu-se uma modelagem computacional em linguagem de programação *Python*, considerando todo o respaldo teórico anteriormente abordado. Na discretização pelo Método dos Elementos Finitos e a aplicação do método de *Newmark*, utilizaram-se as mesmas grandezas já determinadas no item 4.1.1.1. No entanto, admitiu-se a matriz de amortecimento calculada pelo método de *Rayleigh* no modelo dinâmico, através de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez. A taxa de amortecimento crítica da estrutura adotada foi de 3% (ABECHE, 2015).

4.2.1 Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 4 Graus de Liberdade e Estrutura

Na presente análise, toma-se como exemplo um modelo de veículo, com 4 graus de liberdade no intuito de se comparar as respostas dinâmicas lineares da estrutura para diferentes velocidades de tráfego do veículo. A FIGURA 22 representa o veículo, com velocidade constante v , passando pela ponte e suas condições de contorno.

FIGURA 22 – SISTEMA VEÍCULO, COM 4 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE



FONTE: O autor (2019).

Na TABELA 7, apresentam-se os valores das massas dos corpos rígidos e os parâmetros das suspensões do modelo veicular em estudo.

TABELA 7 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 4 GRAUS DE LIBERDADE

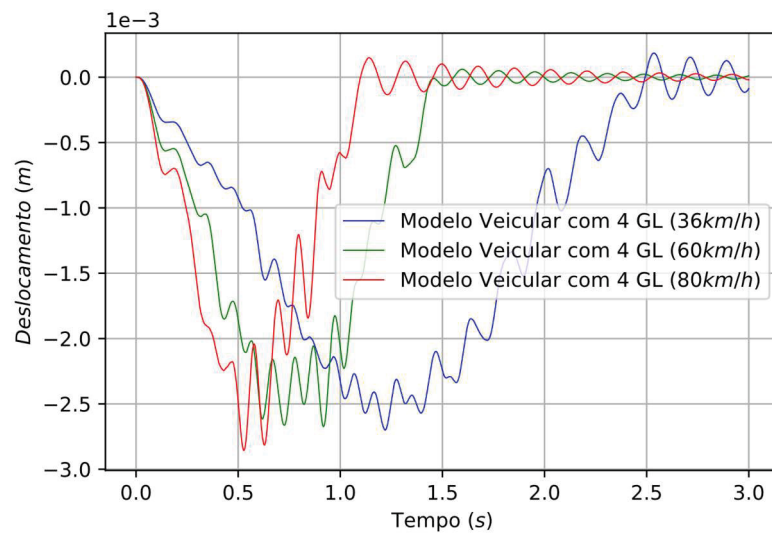
Características Dinâmicas	Valor	Unidade (SI)
m_v	22233	kg
m_{r1}	635	kg
m_{r2}	1066	kg
I_v	53000	m^4
K_{s1}	58000	N/m
K_{s2}	1180000	N/m
C_{s1}	6000	Ns/m
C_{s2}	12000	Ns/m
K_{r1}	1680000	N/m
K_{r2}	3360000	N/m
C_{r1}	2000	Ns/m
C_{r2}	4000	Ns/m
l_1	2,5	m
l_2	2,5	m

FONTE: Melo (2007).

Os pneus são modelados como um conjunto de molas e amortecedores que conectam os eixos ao pavimento. Os valores para os parâmetros de rigidez e o coeficiente de amortecimento estão fundamentados na literatura (MELO, 2007).

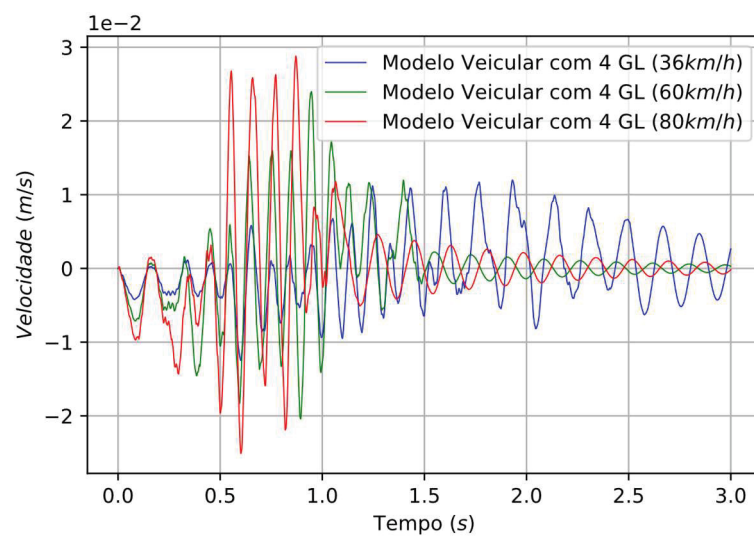
Os GRAFICOS 10, 11 e 12 mostram as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração no centro da estrutura. Os resultados são comparados para o veículo trafegando às velocidades de $10,00 \text{ m/s} \cong 36 \text{ km/h}$, $16,67 \text{ m/s} \cong 60 \text{ km/h}$ e $22,22 \text{ m/s} \cong 80 \text{ km/h}$, respectivamente.

GRÁFICO 10 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE



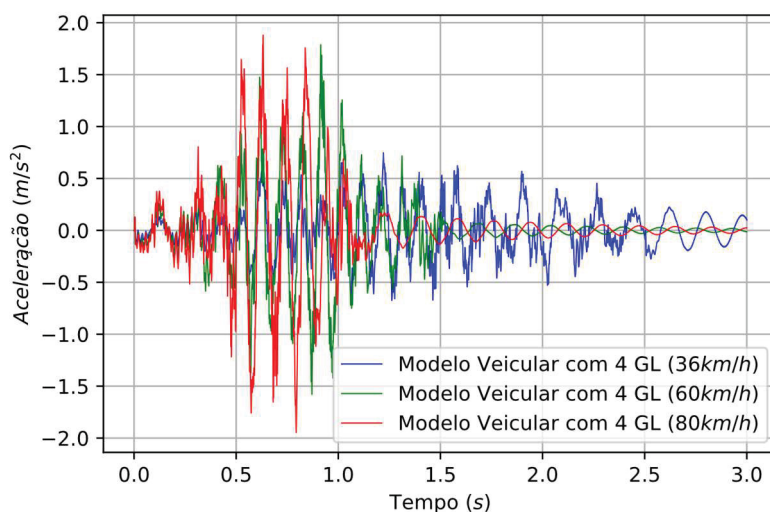
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 11 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 12 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

No GRÁFICO 10, observam-se as respostas dinâmicas de deslocamento no centro da estrutura sob o efeito do modelo de veículo, com 4 graus de liberdade, para diferentes velocidades. Notam-se diferentes respostas das pontes. No centro do vão os máximos valores são maiores na análise do veículo a 80 km/h . No entanto, à medida que a velocidade da composição veicular aumenta, o tempo que a estrutura está sob excitação do mesmo diminui. Assim, o veículo trafegando a 36 km/h permanece sobre a ponte durante $2,5 \text{ s}$, enquanto este, percorrendo a uma velocidade de 60 km/h , continua na estrutura por $1,49 \text{ s}$ e, finalmente, o veículo se locomovendo a 80 km/h atua na estrutura por $1,12 \text{ s}$.

Ao analisar o GRÁFICO 11, constatam-se que as respostas dinâmicas de velocidade, no centro da ponte, são maiores à passagem do veículo a altas velocidades. O amortecimento estrutural aparece de forma mais clara ao se analisar o GRÁFICO 11. É possível notar um maior tempo de oscilação e amplitude das respostas dinâmicas de velocidade do veículo a 80 km/h .

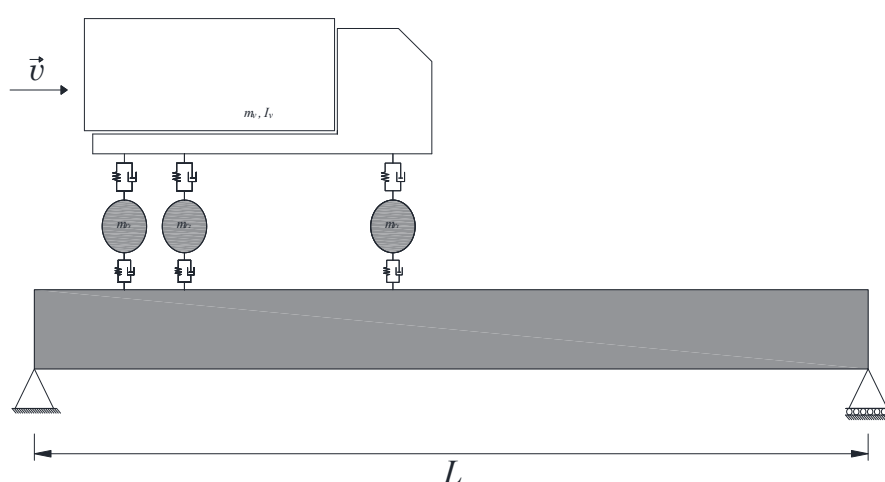
Igualmente ao constatado nas respostas anteriores, ao avaliar o GRÁFICO 12, observa-se que as respostas dinâmicas de aceleração são maiores ao tráfego do modelo a altas velocidades com picos de $1,90 \text{ m/s}^2$. Constata-se o fenômeno de batimento nos primeiros instantes de tempo,

caracterizado pela ocorrência de uma rápida oscilação com a baixa variação de amplitude (INMAN, 1996 *apud* ABEICHE, 2015, p. 132).

4.2.2 Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 5 Graus de Liberdade e Estrutura

Neste exemplo utiliza-se o modelo veicular com 5 graus de liberdade. A FIGURA 23 mostra o veículo transeunte.

FIGURA 23 – SISTEMA VEÍCULO, COM 5 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE



FONTE: O autor (2019).

Os parâmetros utilizados para obtenção das respostas dinâmicas para o veículo e estrutura, de acordo com o modelo analítico exposto no tópico 3.5.2, são os mesmos adotados para o veículo com 4 graus de liberdade. Contudo, diferenciam-se apenas pelo eixo adicional, terceira roda, e o afastamento dos eixos em relação ao centro de gravidade. A TABELA 8 expõe os parâmetros complementares do veículo, segundo Melo (2007).

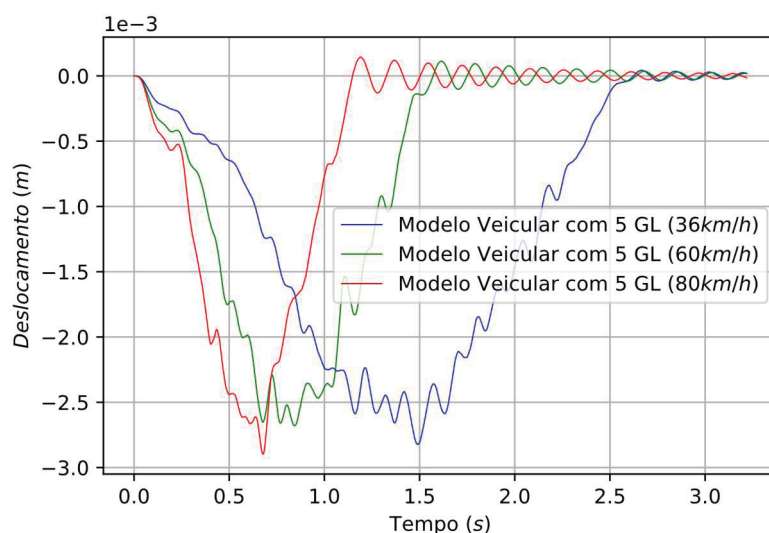
TABELA 8 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 5 GRAUS DE LIBERDADE

Características Dinâmicas	Valor	Unidade (SI)
m_{r_3}	1066	kg
K_{s_3}	1180000	N/m
C_{s_3}	12000	Ns/m
K_{r_3}	3360000	N/m
C_{r_3}	4000	Ns/m
l_1	3,98	m
l_2	0,82	m
l_3	2,12	m

FONTE: Melo (2007).

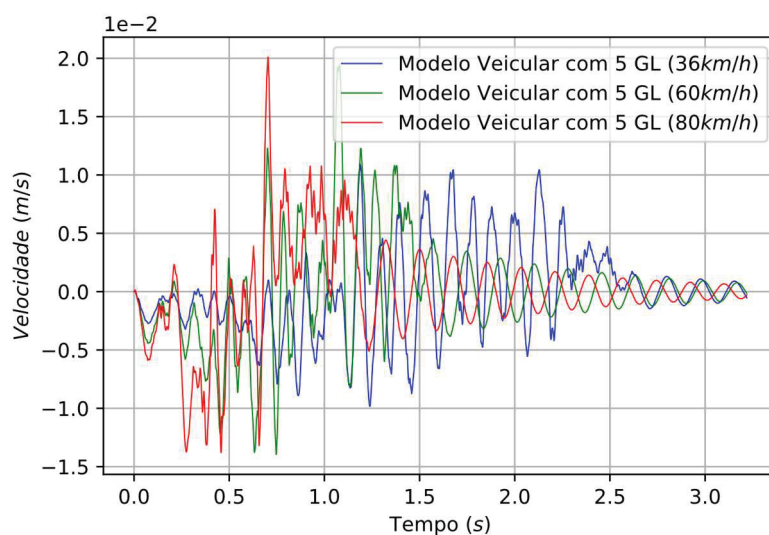
Os GRÁFICOS 13, 14 e 15 representam as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração no centro da estrutura. Para a comparação dos efeitos dinâmicos foram adotadas as mesmas velocidades prescritas no tópico 4.2.1.

GRÁFICO 13 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE



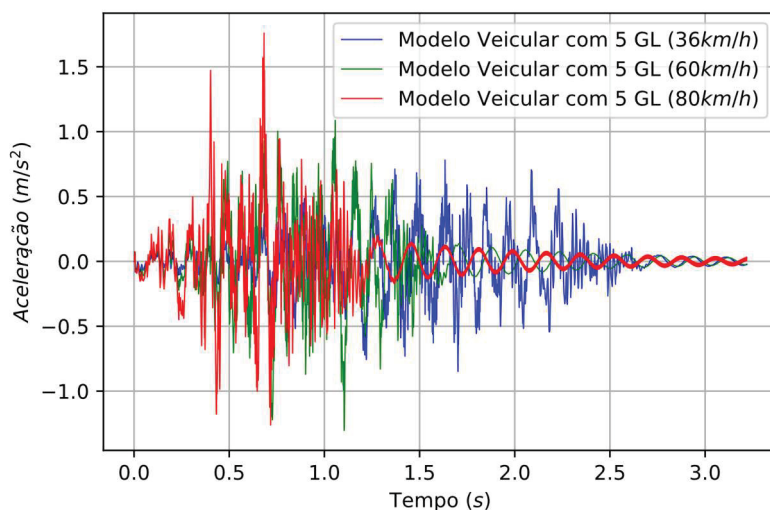
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 14 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 15 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

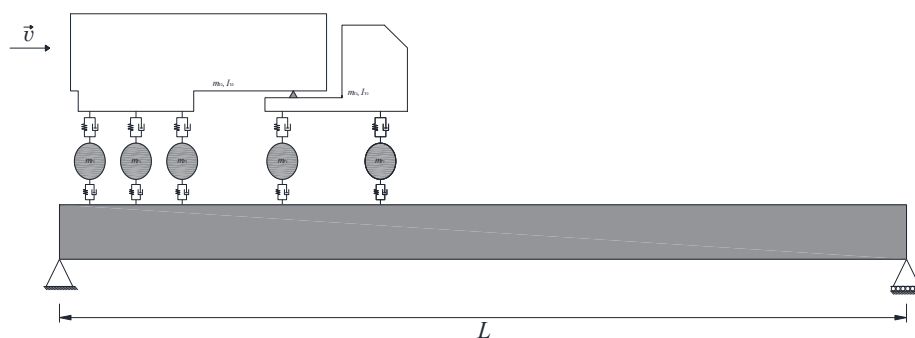
Similarmente ao observado na análise anterior, no GRÁFICO 13, nota-se que as respostas dinâmicas de deslocamento no centro da estrutura são maiores quando o veículo transita a 80 km/h. Similarmente constatado no tópico 4.2.2., conforme a velocidade do veículo aumenta, o tempo que a estrutura está sob efeito do mesmo diminui.

Nos GRÁFICO 14 e 15, observam-se a ocorrência de uma rápida oscilação com uma variação baixa de amplitude. Isso ocorre devido a superposição de ondas de mesma direção e amplitudes e frequências próximas, podendo induzir a estrutura a vibrar próximo ao modo de vibração natural, potencializando as vibrações e gerando desconforto. Tal fenômeno é conhecido como batimento (INMAN, 1996 *apud* ABEICHE, 2015, p. 132). As repostas sob o efeito das altas velocidades em que o veículo trafega possuem maiores variações de amplitude dentro do mesmo intervalo de tempo. Analisando o amortecimento, pode-se concluir que para o mesmo instante de tempo as respostas dinâmicas de aceleração são as últimas a serem estabilizadas se comparadas às respostas dinâmicas de velocidade e de deslocamento.

4.2.3 Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 9 Graus de Liberdade e Estrutura

Neste exemplo, usa-se o modelo matemático de veículo com 9 graus de liberdade. A FIGURA 24 representa o veículo passante.

FIGURA 24 – SISTEMA VEÍCULO, COM 9 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE



FONTE: O autor (2019).

Na TABELA 8 apresentam-se os valores das massas dos corpos rígidos e os parâmetros das suspensões do modelo veicular em estudo.

TABELA 9 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 9 GRAUS DE LIBERDADE

Características Dinâmicas	Valor	Unidade (SI)
m_{v1}	9100	kg
m_{v2}	38742	kg
$m_{r1} = m_{r2} = m_{r3} = m_{r4} = m_{r5}$	980	kg
I_{v1}	53787	m^4
I_{v2}	415081	m^4
$K_{s1} = K_{s2} = K_{s3} = K_{s4} = K_{s5}$	1180000	N/m
$C_{s1} = C_{s2} = C_{s3} = C_{s4} = C_{s5}$	12000	Ns/m
$K_{r1} = K_{r2} = K_{r3} = K_{r4} = K_{r5}$	3360000	N/m
$C_{r1} = C_{r2} = C_{r3} = C_{r4} = C_{r5}$	4000	Ns/m
l_1	1,83	m
l_2	2,37	m
l_3	1,13	m
l_4	2,37	m
l_5	3,62	m
d_{11}	2,05	m
d_{21}	5,27	m

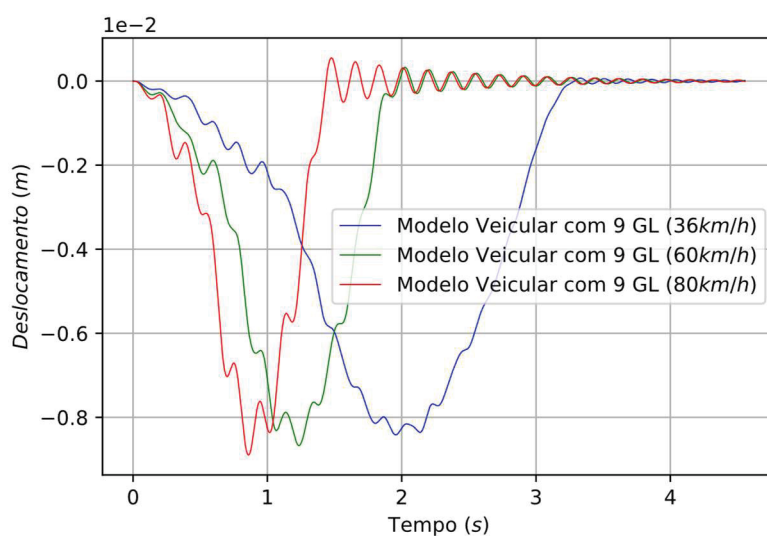
FONTE: Melo (2018).

As características físicas utilizadas nas simulações numéricas, foram obtidas a partir do trabalho de Melo (2018). Segundo a lei da balança, Portaria nº 86 (DENATRAN, 2006), o peso bruto total combinado (PBTC), máximo

permitido, é de 41,5 toneladas. Porém, no presente modelo, considera-se um PBTC de 52,74 toneladas, evidenciando o excesso de peso veicular em rodovias.

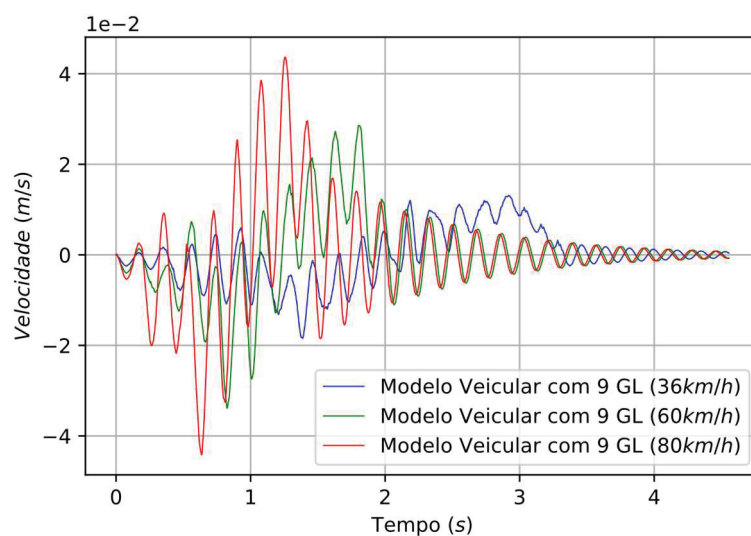
Os GRÁFICOS 16, 17 e 18 traduzem as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração no centro da estrutura. Os resultados são confrontados para diferentes velocidades de tráfego do veículo.

GRÁFICO 16 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE



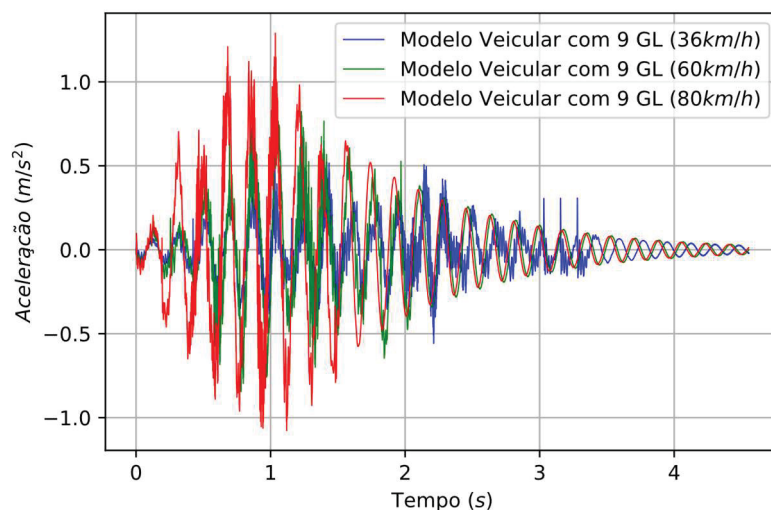
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 17 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 18 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE



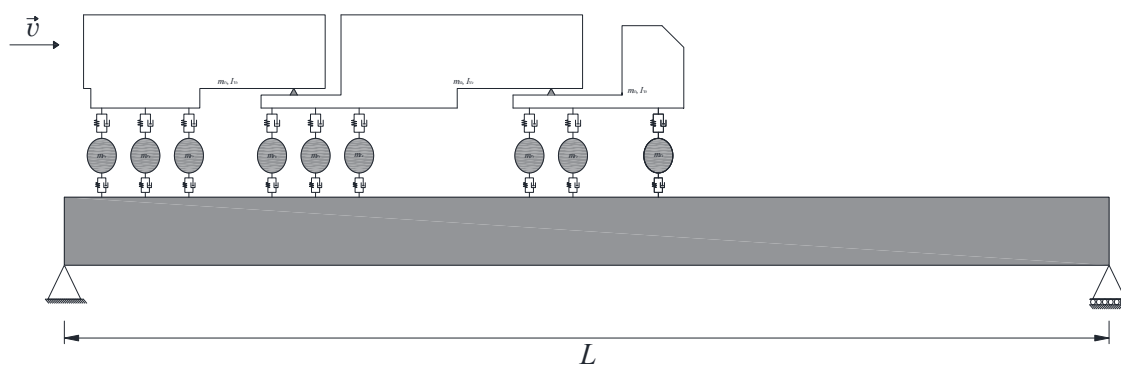
FONTE: O autor (2019).

Novamente, com o modelo utilizado, o GRÁFICO 16 ratifica a hipótese de que as respostas dinâmicas lineares de deslocamento são mais significativas quando veículos pesados trafegam em alta velocidade. Ao observar os GRÁFICOS 17 e 18, os picos em ambas as respostas dinâmicas de velocidade e de aceleração ocorreram em torno do tempo de passagem do veículo no centro do vão da ponte. Apesar de não ser enfatizado intencionalmente, é possível observar o amortecimento estrutural do sistema.

4.2.4 Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo com 15 Graus de Liberdade e Estrutura

Para a simulação dinâmica do sistema dispõe-se do modelo veicular de 9 eixos, composto por 15 graus de liberdade. A FIGURA 25 retrata o conjunto mecânico coplanar percorrendo a estrutura.

FIGURA 25 – SISTEMA VEÍCULO, COM 15 GRAUS DE LIBERDADE, E PONTE



FONTE: O autor (2019).

Na TABELA 10 consideraram-se os parâmetros do veículo pesado conforme as especificações fornecidas pelo trabalho de Melo (2018).

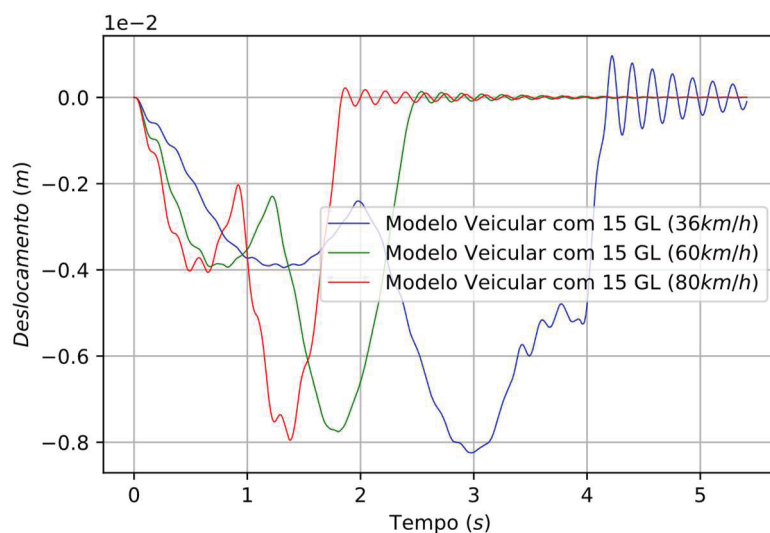
TABELA 10 – PARÂMETROS PARA O VEÍCULO DE 15 GRAUS DE LIBERDADE

Características Dinâmicas	Valor	Unidade (SI)
m_{v_1}	9100	kg
$m_{v_2} = m_{v_3}$	38742	kg
$m_{r_1} = m_{r_2} = m_{r_3} = m_{r_4} = m_{r_5}$	980	kg
$m_{r_6} = m_{r_7} = m_{r_8} = m_{r_9}$	980	kg
I_{v_1}	53787	m^4
$I_{v_2} = I_{v_3}$	415081	m^4
$K_{s_1} = K_{s_2} = K_{s_3} = K_{s_4} = K_{s_5}$	1180000	N/m
$K_{s_6} = K_{s_7} = K_{s_8} = K_{s_9}$	1180000	N/m
$C_{s_1} = C_{s_2} = C_{s_3} = C_{s_4} = C_{s_5}$	12000	Ns/m
$C_{s_6} = C_{s_7} = C_{s_8} = C_{s_9}$	12000	Ns/m
$K_{r_1} = K_{r_2} = K_{r_3} = K_{r_4} = K_{r_5}$	3360000	N/m
$K_{r_6} = K_{r_7} = K_{r_8} = K_{r_9}$	3360000	N/m
$C_{r_1} = C_{r_2} = C_{r_3} = C_{r_4} = C_{r_5}$	4000	Ns/m
$C_{r_6} = C_{r_7} = C_{r_8} = C_{r_9}$	4000	Ns/m
l_1	1,83	m
l_2	1,37	m
l_3	2,74	m
l_4	2,96	m
l_5	4,21	m
l_6	5,46	m
l_7	1,21	m
l_8	2,37	m
l_9	3,36	m
d_{11}	2,05	m
d_{21}	4,32	m
d_{22}	4,84	m
d_{32}	5,27	m

FONTE: Melo (2018).

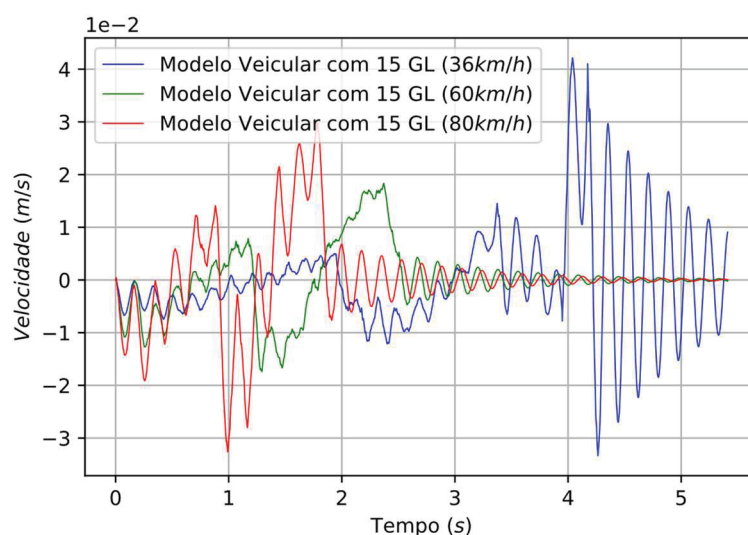
Os GRÁFICOS 19 e 20 apresentam os deslocamentos verticais e velocidades obtidas no centro da ponte. As acelerações obtidas no centro da ponte são apresentadas no GRÁFICO 21.

GRÁFICO 19 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE



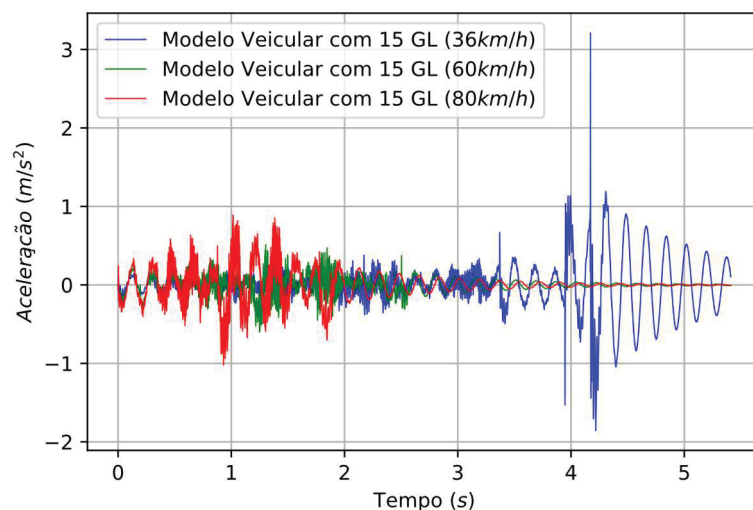
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 20 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 21 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA VIGA SOB EFEITO DE UM VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

Ao observar o GRÁFICO 19, notam-se grandes deslocamentos nos primeiros instantes de tempo, com maiores magnitudes do que nos demais, para o veículo com velocidade de 80 km/h . No entanto, as maiores respostas foram obtidas na ponte sob efeito do veículo transeunte com velocidade de 36 km/h , posto que o veículo permanece por mais tempo na estrutura. Nos instantes de tempo $0,91 \text{ s}$, $1,36 \text{ s}$ e $1,96 \text{ s}$, para o modelo veicular trafegando às velocidades de 36 km/h , 60 km/h e 80 km/h , respectivamente, notam-se pontos de inflexão nas respostas de deslocamentos. Este fenômeno ocorre quando a composição veicular encontra-se completamente sobre a ponte.

Tanto no GRÁFICO 20 como no GRÁFICO 21, constata-se que as maiores amplitudes das respostas dinâmicas lineares de velocidade e aceleração ocorrem após o veículo sair da ponte. Analisando o amortecimento, pode-se concluir que para o mesmo instante de tempo as respostas dinâmicas de aceleração são as últimas a serem estabilizadas se comparadas às respostas dinâmicas de velocidade e de deslocamento.

4.2.5 Análise Dinâmica Linear da Interação entre Veículo, Irregularidade e Estrutura sob Efeito de Diferentes Condições dos Pavimentos

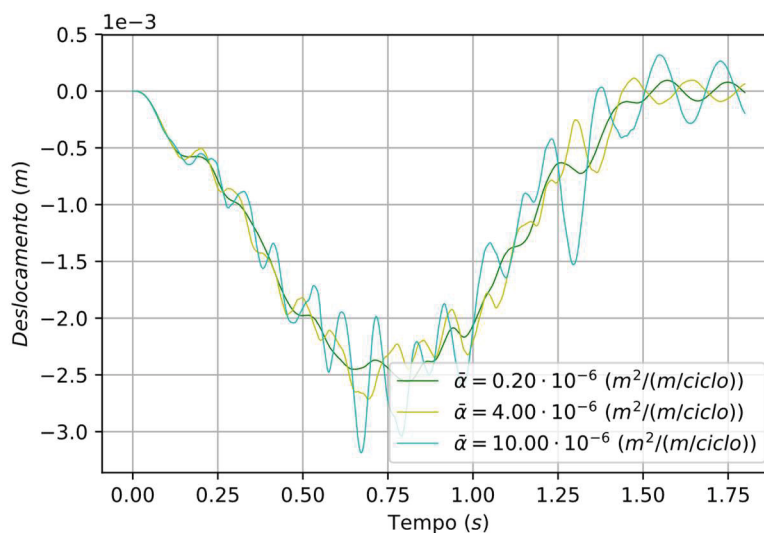
As irregularidades excitam o veículo que, por sua vez, despertam vibrações adicionais na estrutura da ponte além daquelas causadas por seu

próprio movimento. Uma forma muito comum de irregularidades em pontes rodoviárias, são as irregularidades randômicas.

Nesse sentido, imaginem-se os mesmos exemplos, porém ao invés de diferenciar as velocidades de cada modelo veicular, varia-se agora o estado de conservação do pavimento. Todos os veículos trafegam a uma velocidade de $16,67 \text{ m/s} \cong 60 \text{ km/h}$. A presente análise ocorre para três condições distintas da via: muito boa com $\bar{\alpha} = 0,20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m/ciclo})$; regular e ruim para $\bar{\alpha} = 4,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m/ciclo})$ e $\bar{\alpha} = 10,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/(\text{m/ciclo})$, respectivamente. Igualmente nas análises desenvolvidas dos itens anteriores desta seção, os modelos de veículo estão sujeitos às mesmas series randômicas desenvolvidas na seção 3.6.

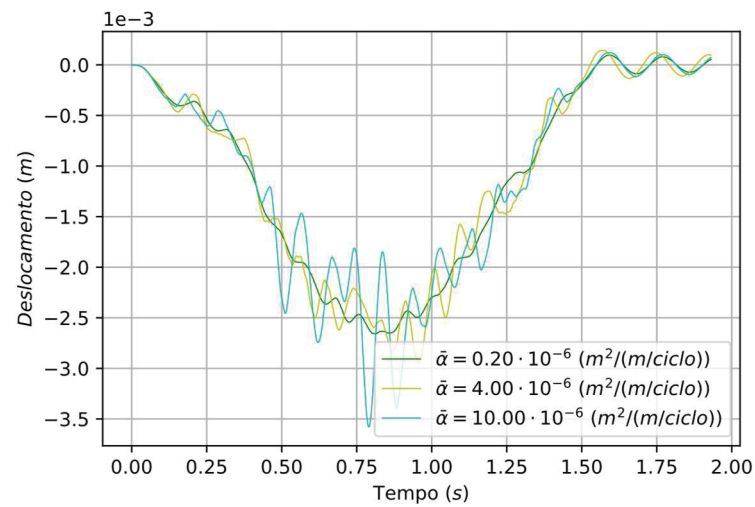
Os GRÁFICOS 22, 23, 24 e 25 mostram as respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte para os veículos de 4, 5, 9 e 15 graus de liberdade, respectivamente, percorrendo a estrutura.

GRÁFICO 22 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 4 GRAUS DE LIBERDADE



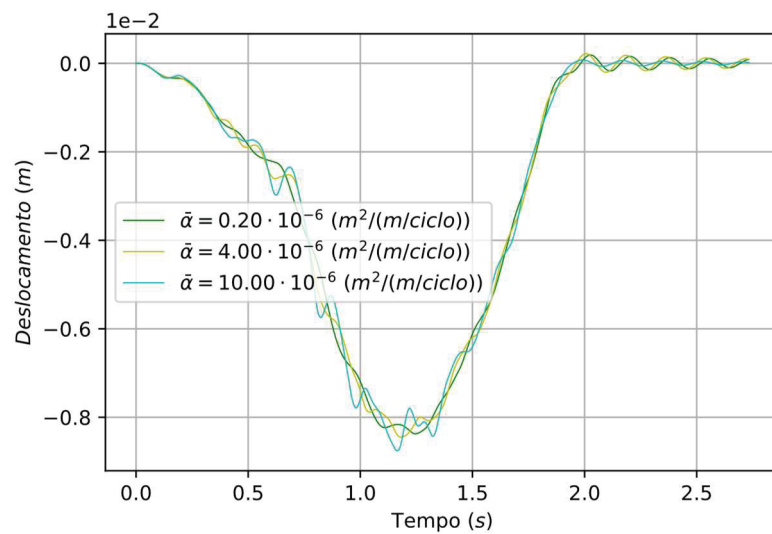
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 23 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 5 GRAUS DE LIBERDADE



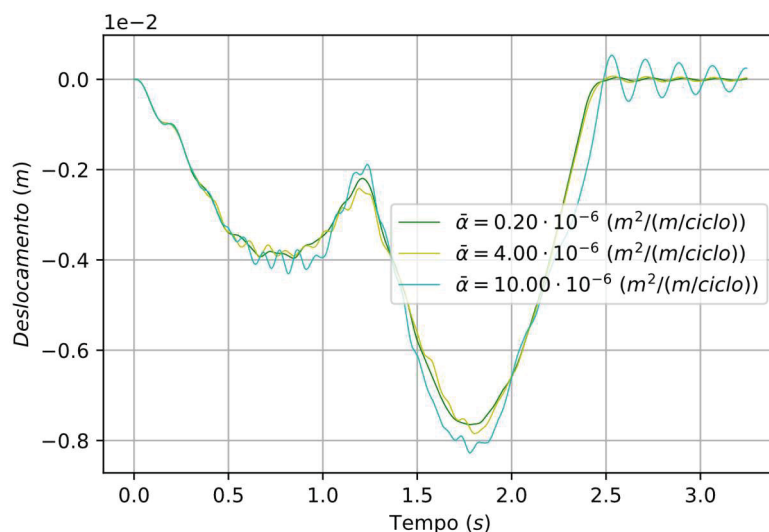
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 24 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 9 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 25 – RESPOSTA DINÂMICA DE DESLOCAMENTO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DE UMA COMPOSIÇÃO VEICULAR COM 15 GRAUS DE LIBERDADE

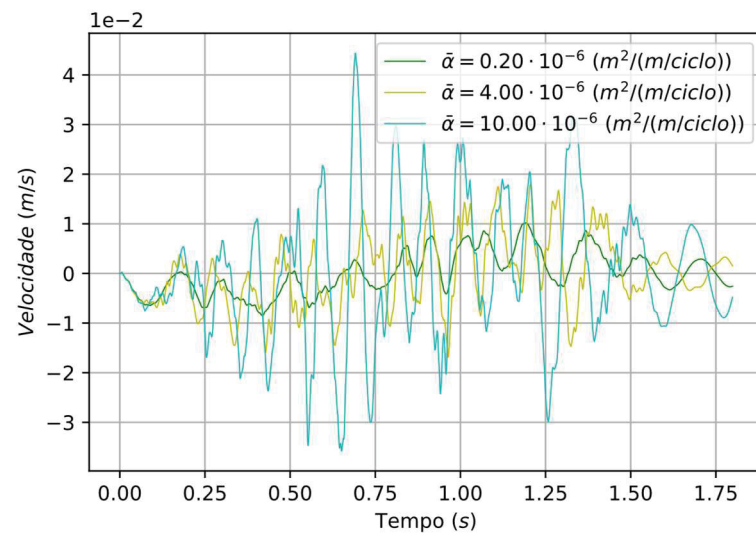


FONTE: O autor (2019).

Ao analisar os GRÁFICOS 22, 23, 24 e 25, podem-se observar as respostas dinâmicas de deslocamento para os diferentes casos de irregularidades. Naturalmente, os deslocamentos obtidos na análise com condições de irregularidades ruins são maiores do que para as demais irregularidades. Assim, deve-se observar que para os veículos monolíticos de 2 e 3 eixos, os efeitos resultantes das irregularidades da pista mau estado de conservação são mais severas.

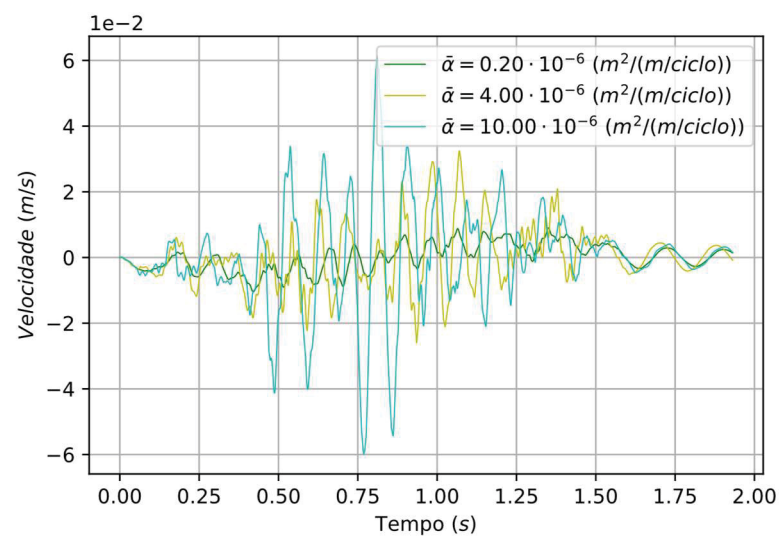
Os GRÁFICOS 26, 27, 28 e 29 mostram as respostas dinâmicas de velocidade no centro da ponte, considerando as quatro composições veiculares.

GRÁFICO 26 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE



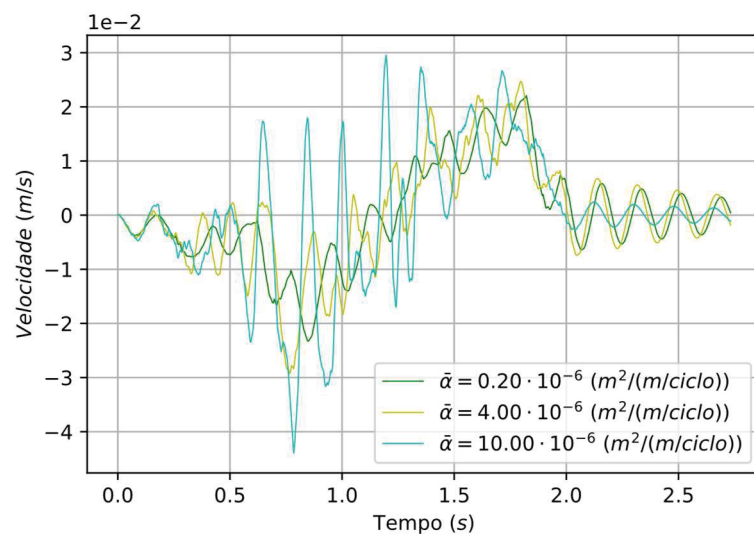
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 27 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE



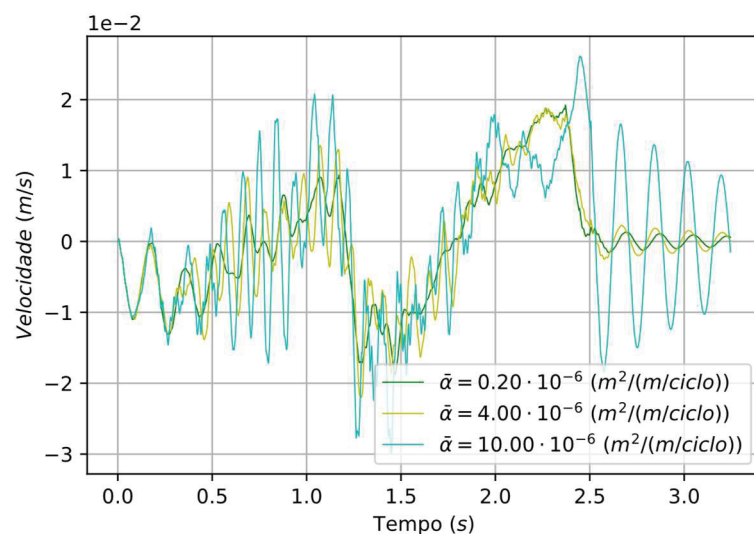
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 28 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

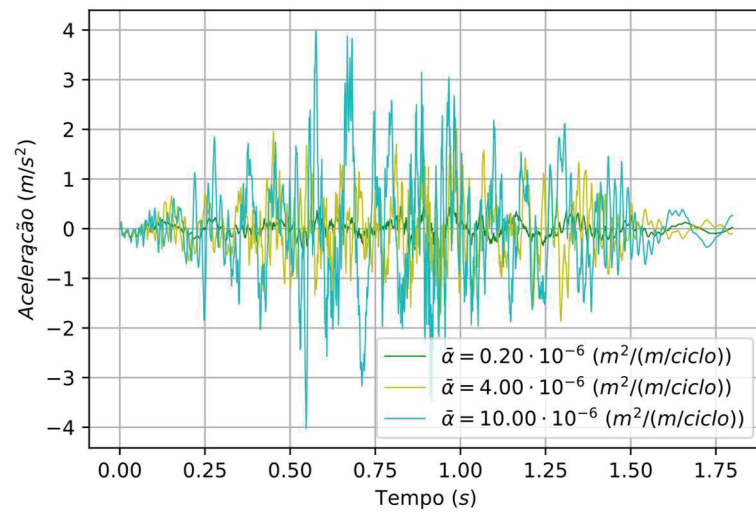
GRÁFICO 29 – RESPOSTA DINÂMICA DE VELOCIDADE NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

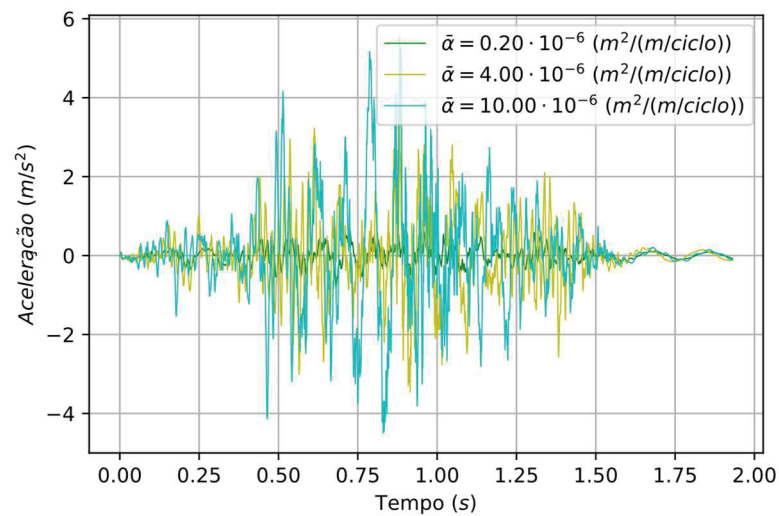
Os GRÁFICOS 30, 31, 32 e 33 apresentam as respostas dinâmicas de aceleração dos nós centrais das vigas.

GRÁFICO 30 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE



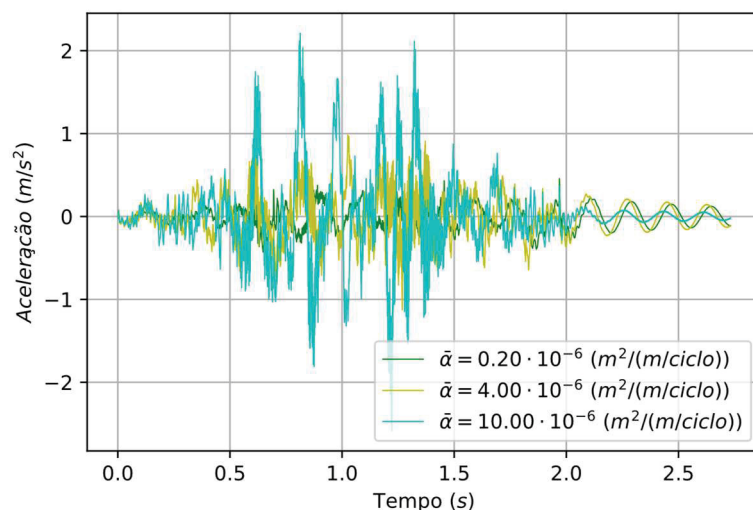
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 31 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE



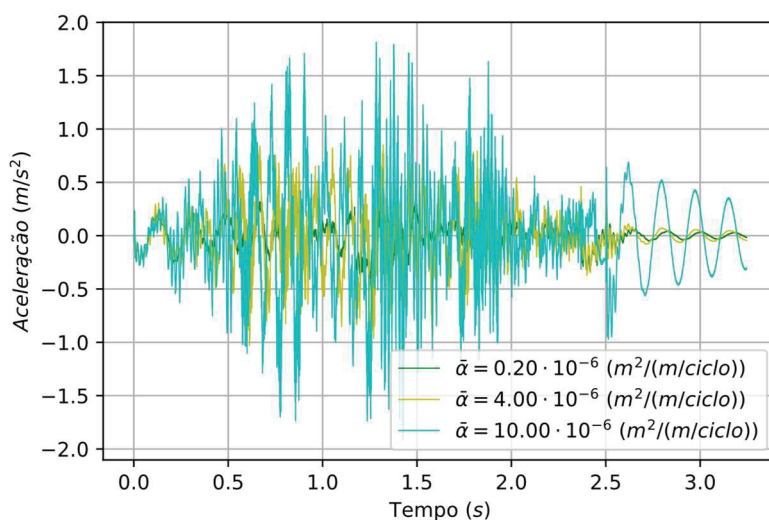
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 32 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 9 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 33 – RESPOSTA DINÂMICA DE ACELERAÇÃO NO CENTRO DA ESTRUTURA SOB AÇÃO DO VEÍCULO COM 15 GRAUS DE LIBERDADE



FONTE: O autor (2019).

É possível observar o fenômeno do batimento nas respostas dinâmicas de velocidade e aceleração obtidas das formas de irregularidades não determinísticas (INMAN, 1996 *apud* ABEICHE, 2015, p. 132). As velocidades e acelerações com influência do pior estado de conservação possuem maiores variações de amplitude dentro do mesmo intervalo de tempo.

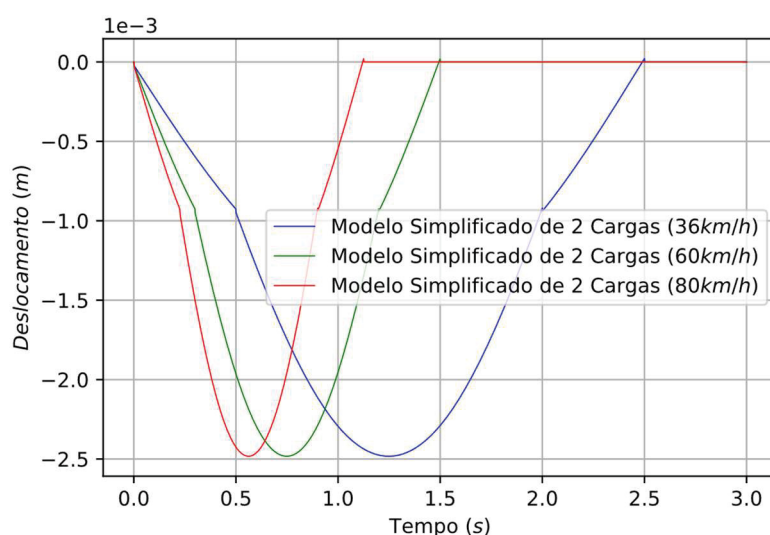
4.2.6 Fator de Amplificação Dinâmica de Deslocamentos

O comportamento dinâmico linear da ponte é estabelecido com base na consideração do efeito da mobilidade do veículo com a interação deste com as irregularidades do pavimento. Este tópico apresenta um estudo paramétrico com a intenção de proporcionar uma melhor compreensão das características físicas mais influentes nas respostas dinâmicas do sistema.

Para estudar o efeito dinâmico da ponte perante o comportamento estático, foram realizados estudos pseudo-estáticos a fim de registrar a ação das forças do modelos de interação simplificada, nas quais considera-se apenas o peso próprio do veículo.

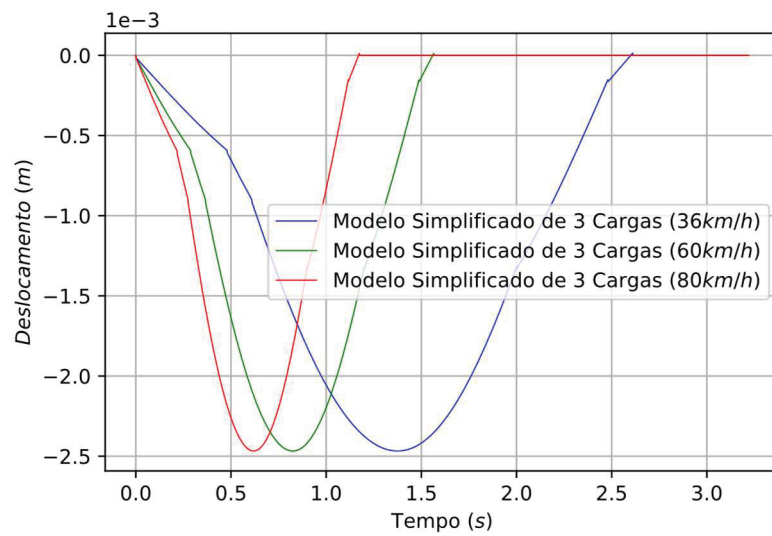
Segundo Romero (2002) e Montoya (2009) a análise pseudo-estática é um procedimento que efetua múltiplas verificações estáticas movendo o carregamento para cada instante de tempo, assim obtêm-se registros no tempo dos deslocamentos estáticos. Os GRÁFICOS 34, 35, 36 e 37 demonstram as respostas pseudo-estáticas para os modelos simplificados de veículos transeuntes às velocidades de 36 km/h, 60 km/h e 80 km/h, respectivamente, para a mesma estrutura avaliada nos tópicos anteriores.

GRÁFICO 34 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 2 EIXOS



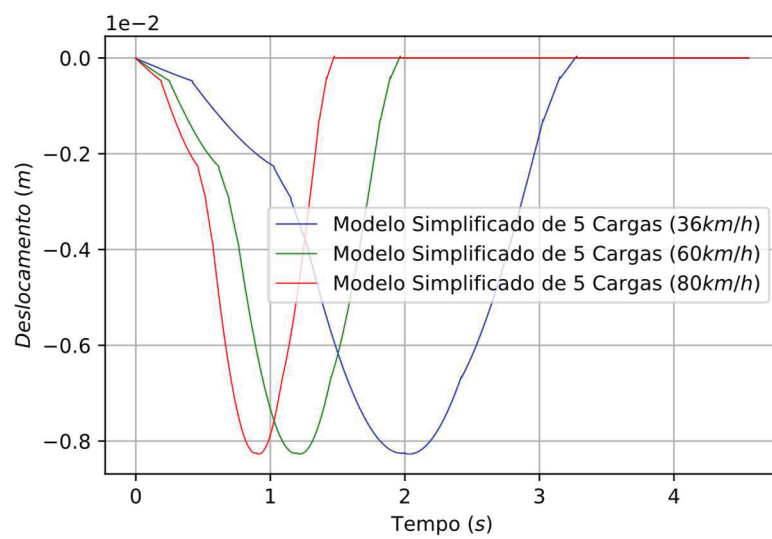
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 35 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 3 EIXOS



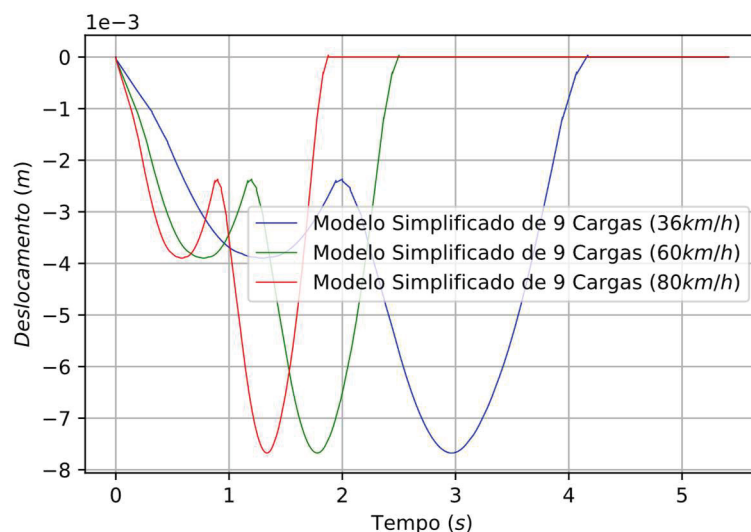
FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 36 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 5 EIXOS



FONTE: O autor (2019).

GRÁFICO 37 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA SOB AÇÃO DO MODELO DE INTERAÇÃO SIMPLIFICADA DE 9 EIXOS



FONTE: O autor (2019).

Ao analisar os GRÁFICOS 34, 35, 36 e 37, observam-se que os deslocamentos máximos em cada modelo de interação simplificada são iguais para as distintas velocidades de tráfego. Ou seja, as velocidades das cargas móveis não afetam nas respostas pseudo-estáticas. Ao observar o GRÁFICO 37, nota-se ainda um comportamento análogo ao fenômeno descrito no item 4.2.4.

Define-se o fator de amplificação dinâmica como sendo a relação entre o valor da grandeza dinâmica e seu correspondente estático máximo. Logo,

$$FAD = \frac{\zeta_D}{\zeta_E} \quad (262)$$

onde ζ_D é o máximo deslocamento vertical devido à passagem do veículo em velocidade e ζ_E é o maior deslocamento estático. Na TABELA 11 apresentam-se os fatores de amplificação dinâmica dos sistemas.

TABELA 11 – FATOR DE AMPLIFICAÇÃO DINÂMICA DE DESLOCAMENTO DOS SISTEMAS

Modelo de Interação	$\bar{\alpha}(m^2/(m/ciclo))$	v (km/h)	ζ_E (m)	ζ_D (m)	FAD
4 Graus de Liberdade	0,20 10^{-6}	36,00	2,48 10^{-3}	2,50 10^{-3}	1,008
		60,00	2,48 10^{-3}	2,58 10^{-3}	1,040
		80,00	2,48 10^{-3}	2,69 10^{-3}	1,085
	4,00 10^{-6}	36,00	2,48 10^{-3}	2,67 10^{-3}	1,076
		60,00	2,48 10^{-3}	2,71 10^{-3}	1,093
		80,00	2,48 10^{-3}	3,11 10^{-3}	1,254
	10,00 10^{-6}	36,00	2,48 10^{-3}	2,80 10^{-3}	1,129
		60,00	2,48 10^{-3}	3,27 10^{-3}	1,318
		80,00	2,48 10^{-3}	3,13 10^{-3}	1,262
5 Graus de Liberdade	0,20 10^{-6}	36,00	2,46 10^{-3}	2,71 10^{-3}	1,102
		60,00	2,46 10^{-3}	2,64 10^{-3}	1,073
		80,00	2,46 10^{-3}	2,63 10^{-3}	1,069
	4,00 10^{-6}	36,00	2,46 10^{-3}	2,74 10^{-3}	1,114
		60,00	2,46 10^{-3}	2,89 10^{-3}	1,175
		80,00	2,46 10^{-3}	3,14 10^{-3}	1,276
	10,00 10^{-6}	36,00	2,46 10^{-3}	2,96 10^{-3}	1,203
		60,00	2,46 10^{-3}	3,58 10^{-3}	1,455
		80,00	2,46 10^{-3}	4,12 10^{-3}	1,675
9 Graus de Liberdade	0,20 10^{-6}	36,00	8,25 10^{-3}	8,31 10^{-3}	1,007
		60,00	8,25 10^{-3}	8,29 10^{-3}	1,005
		80,00	8,25 10^{-3}	8,38 10^{-3}	1,015
	4,00 10^{-6}	36,00	8,25 10^{-3}	8,44 10^{-3}	1,023
		60,00	8,25 10^{-3}	8,52 10^{-3}	1,033
		80,00	8,25 10^{-3}	8,53 10^{-3}	1,034
	10,00 10^{-6}	36,00	8,25 10^{-3}	8,41 10^{-3}	1,019
		60,00	8,25 10^{-3}	8,72 10^{-3}	1,057
		80,00	8,25 10^{-3}	9,30 10^{-3}	1,127
15 Graus de Liberdade	0,20 10^{-6}	36,00	7,60 10^{-3}	7,41 10^{-3}	0,975
		60,00	7,60 10^{-3}	7,69 10^{-3}	1,012
		80,00	7,60 10^{-3}	7,94 10^{-3}	1,045
	4,00 10^{-6}	36,00	7,60 10^{-3}	8,40 10^{-3}	1,105
		60,00	7,60 10^{-3}	7,84 10^{-3}	1,031
		80,00	7,60 10^{-3}	8,09 10^{-3}	1,064
	10,00 10^{-6}	36,00	7,60 10^{-3}	8,14 10^{-3}	1,071
		60,00	7,60 10^{-3}	7,86 10^{-3}	1,034
		80,00	7,60 10^{-3}	8,52 10^{-3}	1,121

FONTE: O autor (2019).

Ao analisar a TABELA 11, observa-se que o fator amplificação dinâmica varia com o estado de conservação da via e a velocidade de tráfego do veículo.

As respostas dos deslocamentos obtidas no modelo dinâmico são nitidamente maiores que as respostas obtidas no modelo pseudo-estático, já que é considerada a contribuição da parcela inercial na equação de movimento.

Observando o FAD , constata-se que as ações provenientes das irregularidades da pista em péssimo estado de conservação são mais severas.

Pode-se constatar que as maiores magnitudes do *FAD* pertencem aos modelos veiculares com 4 e 5 graus de liberdade, atingindo valores de 1,318 e 1,675, respectivamente.

Apesar dos maiores valores de *FAD* estarem associados a veículos leves, modelo matemático com 5 graus de liberdade, os maiores deslocamentos dinâmicos são originados da passagem dos veículos com 9 e 15 graus de liberdade, com deslocamentos máximos de $9,30 \cdot 10^{-3} m$ e $8,52 \cdot 10^{-3} m$, respectivamente. Ao analisar as respostas numéricas do veículo de 9 graus de liberdade, observa-se que embora o *FAD* não seja o maior, os maiores deslocamentos ocorreram para tal modelo veicular em questão.

4.2.7 Ações em Pontes Conforme a NBR-7188 (2013)

Aqui faz-se uma análise da atuação das cargas móveis na viga em estudo de acordo com a norma “NBR-7188: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas”, cuja versão em vigor é a de 2013 .

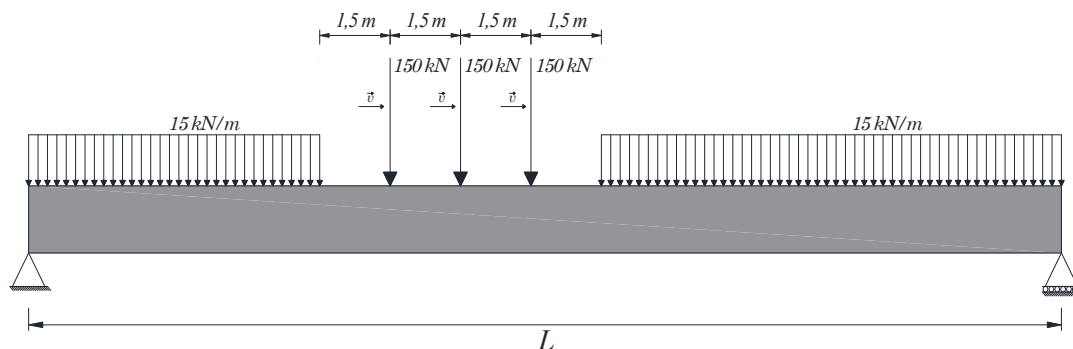
Segundo a norma brasileira (ABNT/NBR-7188, 2013), a carga rodoviária padrão nas rodovias brasileiras é definida por um veículo tipo de $450 kN$ circundado por uma carga uniformemente distribuída de $5 kN/m^2$. O trem-tipo é composto por 6 rodas, cada qual com uma carga de $75 kN$, em eixos com igual espaçamento de $1,5 m$ e uma área de ocupação de $18 m^2$ ($3 m \times 6 m$).

Ainda conforme a NBR-7188 (2013), “a carga móvel assume uma posição qualquer na pista com as rodas na posição mais desfavorável”. Aplica-se também a carga de multidão na posição mais desfavorável, independente das faixas de tráfego do veículo.

O trem-tipo de norma inclui um veículo hipotético padronizado com 6 rodas e uma carga de multidão em toda a área da ponte exceto aonde se encontra o veículo. Neste trabalho, simplificadamente, considerou-se a carga de multidão ocupando faixas de mesma largura do veículo, $3 m$, apenas à frente e atrás do mesmo. Logo, não se considerou a carga de multidão no restante da área da ponte. Para fins de um carregamento linear equivalente, considerou-se sobre o eixo da viga a carga total de cada eixo do veículo, $2 \times 75 kN$, e o carregamento resultante de multidão, $3 m \times 5 kN/m^2$, tal como

se observa na FIGURA 26. Desta forma, obtém-se 15 kN/m para a carga de multidão e 150 kN para a carga móvel por eixo do trem-tipo.

FIGURA 26 – SISTEMA SIMPLIFICADO DO TREM-TIPO DA NBR-7188



FONTE: O autor (2019).

Neste tópico, analisa-se uma viga biapoiada com cargas de multidão e 3 forças verticais constantes percorrendo a estrutura. Nesta simulação usa-se a análise pseudo-estática apresentada no tópico precedente (ROMERO, 2002; MONTROYA, 2009).

Ressalta-se que, embora sejam utilizadas simplificações das cargas, tornando-as coplanares, são desconsiderados efeitos dos acostamento e faixas de segurança. Desta forma, o GRÁFICO 38 mostra a resposta pseudo-estática para o modelo simplificado de cargas móveis transeuntes à velocidade de 36 km/h , para a mesma estrutura avaliada nos tópicos anteriores.

Segundo a NBR-7188 (2013), “a carga concentrada Q e a carga distribuída q , são os valores da carga móvel aplicados no nível do pavimento, iguais aos valores característicos ponderados pelos coeficientes de impacto vertical (CIV), do número de faixas (CNF) e de impacto adicional (CIA) abaixo definidos”

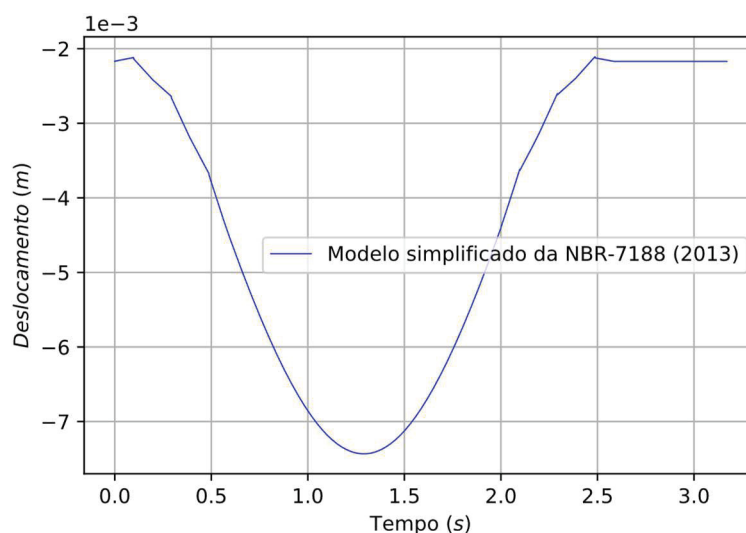
$$Q = (F)(CIV)(CNF)(CIA) \quad \text{e} \quad q = (f)(CIV)(CNF)(CIA) \quad (263)$$

em que F e f representam, respectivamente, a carga móvel concentrada e a carga uniformemente distribuída.

Utiliza-se um coeficiente de impacto vertical, para as cargas concentradas e distribuídas, igual à 1,30 (NBR-7188, 2013). Os coeficientes de

impacto adicional e o de número de faixas foram considerados unitários uma vez que a presente simulação é coplanar.

GRÁFICO 38 – RESPOSTA PSEUDO-ESTÁTICA NO CENTRO DA VIGA PARA O MODELO SIMPLIFICADO DA NBR-7188 (2013)



FONTE: O autor (2019).

Observa-se que, no GRÁFICO 38, a deflexão máxima no centro da ponte é de $7,43 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Ao confrontar a presente análise aos modelos matemáticos veiculares de 9 e 15 graus de liberdade, com deslocamentos máximos de $9,30 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ e $8,52 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, respectivamente, pode-se dizer que os critérios de norma não asseguram efeitos dinâmicos provocados por tais composições.

Assim, como sugestão para trabalhos futuros, compete investigar com maior profundidade se o trem-tipo da norma brasileira responde bem aos veículos que trafegam atualmente nas rodovias.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inúmeras conclusões encontram-se distribuídas ao longo dos capítulos anteriores. Neste capítulo, resumem-se apenas as observações mais importantes e as sugestões relativas ao tema desenvolvido, de modo a permitir a implementação de trabalhos futuros.

5.1 RESUMO E CONCLUSÕES

Este trabalho teve por objetivo estudar a interação dinâmica entre um veículo e uma ponte rodoviária considerando-se diferentes composições veiculares, frente a uma velocidade constante e à presença de irregularidades da pista.

Para contribuir com a elaboração de modelos de cargas móveis no Brasil que representem o tráfego real, desenvolveram-se modelos veiculares rodoviários através da associação de corpos rígidos interconectados a sistemas de suspensões. Determinaram-se as equações dos deslocamentos das suspensões, baseando-se nos movimentos dos graus de liberdade do veículo. Foi estudado o método dos elementos finitos (MEF) de modo a compreender os elementos de viga de *Euler-Bernoulli*. No que tange à modelagem de irregularidades não determinísticas, o ponto de partida desta abordagem foi a representação da função das irregularidades, $y(t)$, com base em sua densidade espectral obtida experimentalmente.

Com o intuito de se verificar a precisão dos valores obtidos com os modelos matemáticos propostos, desenvolveram-se simulações numéricas contrapondo os resultados obtidos mediante as soluções analíticas. Na seção 4.1, utilizaram-se os problemas clássicos encontrados na literatura. Ao analisar a viga de *Euler-Bernoulli* sob carga harmônica, à medida que a ordem no tempo das respostas dinâmicas aumenta, os resultados tornam-se imprecisos. Isto deve-se a formulação convencional do método dos elementos finitos (MEF) apresentar limitações quando se deseja aumentar o grau de aproximação do elemento e a integração numérica temporal de *Newmark* resolver o sistema em intervalos de tempos discretos separados por Δt .

Investigando as respostas da ponte submetida a diferentes composições veiculares, na sessão 4.2, observa-se que a velocidade do veículo é um fator que influencia bastante na resposta da estrutura. Veículos trafegando a altas velocidades produz em grandes amplitudes nas respostas dinâmicas de deslocamento. Constata-se que as ações provenientes das irregularidades da pista influenciam bastante nas respostas dinâmicas da ponte e nos fatores de amplificação dinâmica, em situações extremas.

Por fim, concluiu-se que os modelos veiculares propostos são capazes de representar a ação do tráfego de composições veiculares reais sobre a estrutura. O qual, possivelmente, a NBR-7188 (2013) não atenda as ações dinâmicas dos atuais veículos rodoviários.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho abordou apenas alguns aspectos relacionados ao estudo dos efeitos dinâmicos em pontes rodoviárias, colaborando com novos dados, esclarecendo alguns aspectos e suscitando novas dúvidas. Algumas propostas para trabalhos futuros estão mais próximas de serem implementadas na rotina atual. Outras, no entanto, demandam um maior estudo em diferentes áreas.

Considerar outros modelos de irregularidade para o pavimento: triangulares periódicas, retangulares periódicas, pulso triangular e pulso retangular, por exemplo.

Uma vez que o modelo utilizado considera o acoplamento apenas entre o veículo e as irregularidades da via, porém transmite os esforços gerados pelo sistema de forma desacoplada para a ponte, uma sugestão é considerar modelos acoplados entre as solicitações e as respostas estruturais.

Aumento no número de veículos transitando sucessivamente na ponte durante a análise dinâmica, representando assim de forma mais realística o tráfego de veículos.

Novas configurações estruturais de pontes, para complementar as condições para as quais a solução com o modelo unifilar pode ser adotada como representativa da modelagem mais completa, como por exemplo o caso de ponte esconsa.

Analisar modelos bidimensionais ou tridimensionais, em elementos finitos, da estrutura.

Visto que a concepção das irregularidades da pista é feita por séries harmônicas não determinísticas, uma sugestão interessante para trabalhos futuros é fazer uma análise estatística através do método de *Monte Carlo*.

Utilizar o método α – HHT (Hilber, Hughes e Taylor) para obter as respostas dinâmicas de aceleração com mais acurácia, via integração numérica da equação do movimento da estrutura.

Investigar com maior profundidade se o trem-tipo da norma brasileira (ABNT/NBR-7188, 2013), representa o tráfego rodoviário atual. Dessa forma, formular um modelo de veículo com 3 eixos equivalente que represente composições veiculares mais complexas.

Cabe ainda, estender o estudo aqui apresentado para análises com resultados em termos de esforços, já que estes são os principais parâmetros utilizados no dimensionamento do projeto estrutural.

REFERÊNCIAS

- ABECHE, Thiago de Oliveira. **Modelagem Computacional da Interação Dinâmica Desacoplada entre Viga e Veículo Considerando as Irregularidades da Via e a Mecânica do Dano Contínuo**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUC-PR, Curitiba, PR, Brasil, 2015.
- ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas. **Carga Móvel em Ponte Rodoviária e Passarela de Pedestre – NBR 7188**. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1984.
- ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas. **Carga Móvel Rodoviária em Pontes, Viadutos, Passarelas e Outras Estruturas – NBR 7188**. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2013.
- ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas. **Projeto de Pontes de Concreto Armado e de Concreto Protendido – NBR 7187**. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- ALMEIDA, Ricardo Santos de. **Análise de Vibrações em Pontes Rodoviárias Induzidas pelo Tráfego de Veículos sobre Pavimentos Irregulares**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.
- ARAUJO, Andréa Oliveira de. **Modelos Analítico-Numéricos para Interação Dinâmica Veículo-Pavimento-Estrutura de Ponte Rodoviária**. Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.
- ARCHER, John S. **Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems**. Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society, 4 (89): 161-178, 1963.
- AYRE, Robert S.; FORD, George, and JACOBSEN, Lydik S. **Transverse Vibration of a Two Span Beam under Action of a Moving Constant Force**. Journal of Applied Mechanics, 17 (1): 1-12, 1950.
- BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- BEGHETTO, Fernando Luiz Martinechen. **Efeitos Dinâmicos em Modelo de Veículo e Ponte Ferroviária diante da Variação de Velocidade e Irregularidades Verticais da Via**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUC-PR, Curitiba, PR, Brasil, 2006.
- BEGHETTO, Fernando Luiz Martinechen. **Modelagem Tridimensional da Interação Dinâmica entre Veículo e Ponte Ferroviária Considerando Contato Roda-Trilho, Irregularidades da Via e Variação da Velocidade**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUC-PR, Curitiba, PR, Brasil, 2011.

BERNARDES, Valdeci. **Desenvolvimento de um Modelo Massa-Mola-Amortecedor Móvel Acoplado a Viga Reta para Análise Dinâmica.** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUC-PR, Curitiba, PR, Brasil, 2006.

CARNEIRO, Ronaldson José de França Mendes. **Análise de Pontes Rodoviárias sob Ação de Cargas Móveis.** Dissertação de Mestrado, PUC-RIO, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1986.

CHEUNG, Yau Kai & ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil. **Plates and Tanks on Elastic Foundations – An Application of Finite Element Method.** International Journal of Solids Structures, 4 (1): 451-461, 1965.

CHEUNG, Yau Kai & ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil. **Plates and Tanks on Elastic Foundations – An Application of Finite Element Method.** International Journal of Solids Structures, 4 (1): 451-461, 1965.

CHOPRA, Anil Kumar. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering.** Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.

CONTRAN, Conselho Nacional de Trânsito. **Resolução nº 211: Requisitos Necessários à Circulação de Combinações de Veículos de Carga- CVC.** Brasília, DF, Brasil, 2006.

COURANT, Richard. **Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations.** Bulletin of American Mathematic Society, 1 (49): 1-23, 1943.

CRAIG, Roy R. **Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods.** J. Wiley & Sons, New York, 1981.

DAYLEY, George; CAYWOOD, William C. & O'CONNOR, JAMES S. A **General Purpose Computer Program for the Dynamic Simulation of Vehicle-Guideway Interactions.** AIAA Journal, 11 (3): 278-282, 1973.

DENATRAN, Departamento Nacional de Trânsito. **Portaria nº: 86.** Brasília, DF, Brasil, 2006.

DNIT/IPR, Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes – Instituto de Pesquisas Rodoviárias. Publicação nº 745: **Manual de Gerência de Pavimentos.** Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2011.

ESMAILZADEH, Ebrahim & JALILI, Nader. **Vehicle–Passenger–Structure Interaction of Uniform Bridges Traversed by Moving Vehicles.** Journal of Sound and Vibration, 260 (4): 611-635, 2003.

FERREIRA, K. I. I. **Avaliação do Critério para Cálculo dos Efeitos das Cargas Móveis em Pontes Rodoviárias.** Dissertação de Mestrado, PUC-RIO, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.

FERREIRA, Luan Jose Franchini. **Resposta Temporal de Vigas com Vibro-Impacto Utilizando Modelos de Força de Contato,** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, 2013.

FRÝBA, Ladislav. **Vibration of Solids and Structures under Moving Loads**. Groningen: Noordhoff International Publishing, 59 (9): 489-489, 1972.

GALLAGHER, Richard H. & PADLOG, John. **Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis**. AIAA Journal, 6 (1): 1437-1439, 1963.

GOLDSTEIN, Herbert. **Classical Mechanics**. Addison Wesley, New York, 2002.

GUPTA, Rajesh K. & TRAIL-NASH, William R. **Bridge Dynamic Loading due to Road Surface Irregularities and Breaking of Vehicle**. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 106 (4): 641-658, 1980.

HERRMANN, Leonard R. **Interpretation of Finite Element Procedure as Stress Error Minimization Procedure**. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 5 (98): 1333-1336, 1972.

HILLERBORG, Arne. **Dynamics Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders**. Doctor Thesis, Department of Bridge Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1951.

HONDA, Hideyuki; KAJIKAWA, Yasuo & KOBORI, Tameo. **Spectra of Road Surface Roughness on Bridges**. Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 108(ST9):1956-66, 1982.

HUANG, Tseng & VELETOS, Anestis Stavrou. **Analyses of Dynamic Response of Highway Bridges**. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1 (96): 593-620, 1970.

INGLIS, Charles E. **A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges**. Cambridge University Press, 18 (231): 329-330, 1934.

IMAI, Ana Paula. **Análise do Comportamento Dinâmico Não Linear de Vigas de Pontes de Concreto Armado com Seção e Distribuição de Armaduras Variáveis Através da Interação Entre Veículo e Ponte e da Mecânica do Dano**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, UFPR, Curitiba, PR, Brasil, 2018.

INMAN, Daniel J. **Engineering Vibration**. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

KAMESHWAR, Sabarethinam & PADGETT, Jamie E. **Effect of Vehicle Bridge Interaction on Seismic Response and Fragility of Bridges**. Earthquake Engineering Structural Dynamics, 47 (3): 697-713, 2018.

KELLY, Samuel Graham. **Advanced Vibration Analysis**. Taylor & Francis Group, New York, 2007.

KOÇ, Mehmet Akif & ESEN, Ismail. **Modelling and Analysis of Vehicle-Structure-Road Coupled Interaction Considering Structural Flexibility, Vehicle Parameters and Road Roughness**. Journal of Mechanical Science and Technology, 31 (5): 2057-2074, 2017.

KRYLOV, Alexei Nikolaievich. **Über Die Erzwungenen Schwingungen von Gleichförmigen Elastischen Stäben**. *Mathematische Annalen*, 61 (2): 211-234, 1905.

LAW, Siuseong. S. & ZHU, Xinqun Q. **Bridge Dynamic Responses due to Road Surface Roughness and Braking of Vehicle**. *Journal of Sound and Vibration*, 282(3-5): 805-830, 2005.

LEMOS, Nivaldo. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

LI, Cheng Yu & FAFITS, Apostolos. **Effect of Bridge Deck Roughness on Bridge Response**. *Proceedings of Seventh CMEM - Computational Methods and Experimental Measurements*, 10: 485-492, 1995.

LOONEY, Charles T. G. **Impact on Railway Bridges**. *University of Illinois Bulletin*, 42 (352): 1-334, 1944.

LOPES, Artur Oscar. **Introdução à Mecânica Clássica**. São Paulo: EDUSP – Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

LOWAN, Arnold N. **On Transverse Oscillations of Beams Under the Action of Moving Variable Loads**, *Philosophical Magazine*, 19 (127): 708-715, 1935.

LYN, Paul P. & ARYA, Santosh K. **Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6 (1): 75-88, 1978.

MACHADO, Roberto Dalledone. **Análise Dinâmica Não-Linear de Sistemas Rígido-Flexíveis**, Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1983.

MELO, Eduardo Souza de. **Interação Dinâmica Veículo-Estrutura em Pequenas Pontes Rodoviárias**. Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

MELO, Rubem Penteado de. **Análise Dinâmica de Veículos Articulados com Carga Líquida**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUC-PR, Curitiba, PR, Brasil, 2018.

MELOSH, Robert J. **Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method**. *AIAA Journal*, 7 (1): 19631-1637, 1963.

MENDONÇA, Raphael Faria de. **Geração de Dados para Modelo Dinâmico de Cargas Móveis em Pontes**. Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2009.

METZ, Diego Gabriel; MACHADO, Roberto Dalledone; ARNDT, Marcos e ROSSIGALI, Carlos Eduardo. **Comportamento Dinâmico Linear de Pontes a Partir do Modelo de Interação Dinâmica para Diferentes Modelos**

Veiculares sob Efeito das Irregularidades da Via. XIII Simpósio de Mecânica Computacional, 2018a.

METZ, Diego Gabriel; MACHADO, Roberto Dalledone; ARNDT, Marcos e ROSSIGALI, Carlos Eduardo. **Comportamento Dinâmico Linear de Pontes com Veículos em Movimento.** X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2018b.

MIGOTTO, Dionéia. **Autofunções e Frequências de Vibração do Modelo Euler-Bernoulli para Vigas Não Clássicas,** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSM, Santa Maria, RS, Brasil, 2011.

MONTOYA, Rodolfo Carlos Alvarado. **Desenvolvimento de Algoritmo e Implementação Computacional para a Análise Dinâmica de Pontes Ferroviárias Considerando Interação Veículo-Estrutura.** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFPA, Belém, PA, Brasil, 2009.

NGUYEN, Xuan-Toan; TRAN, Van-Duc & HOANG, Nhat-Duc. **A Study on the Dynamic Interaction between Three-Axle Vehicle and Continuous Girder Bridge with Consideration of Braking Effects.** Journal of Construction Engineering, 1-12, 2017.

PARASKEVA, Themelina. S.; DIMITRAKOPOULOS, Ellias G. & ZENG, Qing. **Dynamic Vehicle–Bridge Interaction under Simultaneous Vertical Earthquake Excitation.** Bulletin of Earthquake Engineering, 15 (1): 71-95, 2017.

RAO, Singiresu. **Vibrações Mecânicas.** Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

REN, Wei-Xing.; ZHAO, Tong & HARIK, Issam E. **Experimental and Analytical Modal Analysis of Steel Arch Bridge.** Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineering, 130 (7): 1022–1031. 2004.

ROMERO, Pedro Museros. **Interacción Vehículo-Estructura y Efectos de Resonancia em Puentes Isostáticos de Ferrocarril para Líneas de Alta Velocidad.** Tesis Doctorales, Universidad Politécnica de Madrid, UPM, Madrid, España, ES, 2002.

ROSSIGALI, Carlos Eduardo. **Atualização do Modelos de Cargas Móveis para Pontes Rodoviárias de Pequenos Vãos no Brasil.** Tese de Doutorado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2013.

SANTOS, Emerson Figueiredo dos. **Análise e Redução de Vibrações em Pontes Rodoviárias.** Tese de Doutorado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2007.

SORIANO, Humberto Lima. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas.** São Paulo: EDUSP – Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

STOKES, George Gabriel. **Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges**. Cambridge University Press, 8: 178-220, 1849.

SZABO, Barna A. and LEE, George C. **Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1 (3): 301-310

TIMOSHENKO, Stephen Prokofievich. **On the Forced Vibrations of Bridges**. Philosophical Magazine and Journal of Science, 43(257): 1018-1019, 1922.

TIMOSHENKO, Stephen Prokofievich. **Vibration Problems in Engineering**. John Wiley & Sons, New York, 1974.

VEUBEKE, Baudouin F. **Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method**. John Wiley e Sons, 1 (9): 145-197, 1965.

WILLIS, Robert. **Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures**. Stationary Office, London, 1849.

WILSON, Edward L. & NICKELL, Robert E. **Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis**. Nuclear Engineering and Design, 4 (3): 276-286, 1966.

WU, Jong-Shyong; LEE, Ming-Ling & LAI, Tser-Shyong. **The Dynamic Analysis of a Flat Plate under a Moving Load by the Finite Element Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24 (4): 743-762, 1987.

YANG, Yeong-Bin. & YAU, Jong-Dar. **Vehicle-Bridge Interaction Element for Dynamic Analysis** Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineering, (123) 11: 15121-8, 1997.

YIN, Xinfeng; LIU, Yang; LU, Deng & KONG, Xuan. **Dynamic Behavior of Damaged Bridge with Multi-Cracks Under Moving Vehicular Loads**. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 16 (10): 1750019-21, 2016.

YOSHIDA, David M. & WEAVER, William. **Finite Element Analysis of Beams and Plates with Moving Loads**. International Association Bridge Structural Engineering, 31 (1): 79-195, 1971.

ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil & CHEUNG, Yau Kai. **Finite Element in the Solution of Field Problems**. The Engineer, 1 (200): 507-510, 1965.

ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil & CHEUNG, Yau Kai. **The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics**. McGraw-Hill Publishing Company Ltd, 1967.

ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil; MAYER, Paul & CHEUNG, Yau Kai. **Solution of Anisotropic Seepage Problems in Finite Elements**. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1 (92): 111-120, 1966.

ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil; VALLIAPPAN, Somasundaram & KING, Ian P.
Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material. *Géotechnique*, 1 (18):
56-66, 1968.