EDSON ANDRETTA

ESTUDO DEMONSTRATIVO DA INFLUÊNCIA DA PERCEPÇÃO DOS ESPAÇOS EUCLIDIANOS, LOBATSCHEWSKIANOS E RIEMANNIANOS, NA EXECUÇÃO DA PERSPECTIVA: NOVA PROPOSTA DE CURRÍCULO DE DESENHO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação. Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA
1985

ESTUDO DEMONSTRATIVO DA INFLUÊNCIA DA PERCEPÇÃO DOS ESPAÇOS EUCLIDIANOS, LOBATSCHEWSKIANOS E RIEMANNIANOS, NA EXECUÇÃO DA PERSPECTIVA: NOVA PROPOSTA DE CURRÍCULO DE DESENHO

por

EDSON ANDRETTA

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Educação, pela Comissão formada pelos professores:

ORIENTADOR: ______________________________
Prof[a]. Zélia Milléo Pavão

____

____

CO-ORIENTADOR: ______________________________
Prof. Haroldo C.A. da Costa

CURITIBA

1985

A G R A D E C I M E N T O S

São meus agradecimentos,

À bibliotecária VIRGINIA DE CASTRO RODRIGUES que revisou e enquadrou as referências bibliográficas.

O aluno monitor ROBERTO LUIZ NESTER pelo valioso auxílio que me prestou na passagem à nankin de algumas figuras intercaladas no texto.

À Dra. ZÉLIA MILLÉO PAVÃO

e

O Dr. HAROLDO C.A. DA COSTA que acompanharam e orientaram com paciência, dedicação, zelo e eficiência profissional o meu trabalho.

O Dr. ALVINO MOSER pelo estímulo e acompanhamento no início do trabalho.

ORIENTADORES

Profa. Dra. ZÉLIA MILLÉO PAVÃO
Livre Docente e Doutor em Educação
Doutor em Ciências
pela Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. HAROLDO C.A. DA COSTA
Livre Docente e Doutor em Ciências
pela Universidade Federal do Paraná

S U M Á R I O

R E S U M O

Pretende-se, neste estudo, encontrar uma diretriz indicada e que apresente vantagens práticas a respeito de como se desenvolvem as manifestações perceptivas no caso específico da geometria euclidiana e da geometria não-euclidiana.

Para estudar o papel que desempenham a percepção e a construção de um conceito de espaço, foram escolhidas as geometrias de Euclides, Lobatschewski e de Riemann.

Essas geometrias, objeto comum no meio ambiente, resultam na transformação de uma superfície plana em uma superfície limite e em uma superfície esférica; por esse motivo a percepção da criança em relação às retas é uma forma que apresenta curvatura.

Torna-se, então, de grande importância a inclusão no currículo de Desenho do paralelismo existente entre as três concepções.

A B S T R A C T

The purpose of this study was to seek for a practical guideline concerning the development of perceptive manifestations related to Euclidean as well as non-Euclidean geometry.

In order to investigate the role played by perception as well as by the construction of a concept of space,Euclid's, Lobatschewski's, and Riemann's geometries were selected.

These geometries, which are conspicuous in the environment, concern the transformations of a plane surface into a hyperbolical one and into a spherical one. Thus, the child's perception of a straight line is expressed in a curvilineal manner.

Therefore,the inclusion of the study of the parallelism among these geometries in the curriculum of drawing courses is of great importance.

1. INTRODUÇÃO

Uma das características da percepção visual do mundo é o espaço ou a distância entre o sujeito e o objeto. No entanto isso é uma qualidade da visão que não se impõe imediatamente; por isso HALL[1], denominou-a "dimensão oculta".

O que dimensiona essa visão são os objetivos, seus tamanhos, formas e cores. A distância é percebida da dimensão do mundo visual e ela se origina do movimento do organismo, que se aperfeiçoa com a idade.

Apesar das teorias da percepção se tornarem mais e mais numerosas, no fundo elas revelam até hoje os vestígios de uma divergência entre HERING[2] e HELMHOLTZ[3] ou entre o ponto de vista nativista e empirista. O primeiro procura provar que a percepção que se tem do espaço é perfeitamente explicável pelos estímulos e que a experiência humana não contribue nada para essa visão espacial. O segundo, por outro lado, é de opinião de que embora o olho humano seja perfeito em relação à enorme complexidade dos fenômenos observáveis nem por isso pode-se desprezar a experiência passada.

O conceito de espaço constitui elemento básico do pen samento, que se infiltra no espírito. Assim sendo, é impossível afastá-lo das idéias fundamentais das estruturas científicas e até mesmo dos mais elementares atos da vida cotidiana. A importância desse conceito é de tal ordem que tanto a evolução da Ciência como a sua própria evolução têm sido conseqüentes e paralelas.

À primeira vista pode parecer que essa afirmativa excede à verdade dos fatos. Todo aquele que se dispuser a fazer considerações sobre o espaço ou sua evolução, análise criteriosa e minudente, desde os ultra-realistas (Demócrito, Platão, etc.) e os ultra subjetivistas (Kant), até os relativistas (Poincaré, Minkowski, Einstein), por certo se convencerá facilmente da segunda veracidade da afirmação.

Há milênios o conceito de espaço vem suscitando polêmicas, em que a Filosofia, a Matemática, a Física, a Fisiologia, a Psicologia, a Sociologia e outras Ciências expressam suas opiniões.

Representando, hoje, um imenso papel na Ciência, as geometrias constituem o objeto principal de um vasto ramo do conhecimento. E todos sabem da luta sobre a negação do 5º postulado de Euclides do qual resultou a criação de novas geometrias, sobressaindo, entre elas, a de Riemann e a de Lobatschewski.

Os subjetivistas inclusive Kant consideravam o espaço como forma préexistente, a priori, aos sentidos e à inteligência; a construção a priori, seria segundo Dunan, dependente do concurso dos órgãos; para Leibnitz e Hume, a repre sentação subjetiva seria formada quer na presença, quer sob a influência das coisas exteriores .

Hegel concebia o espaço como a exteriorização do absoluto; uma concepção abstrata de todas as relações de coexistência era vista por Spencer. O fisiologista Muller, segundo Kant, achava que a espacialidade é intrínseca à mente, que organiza suas impressões de tal maneira construindo a idéia do espaço.

Já para os relativistas moderados, o espaço é "um ser de razão tendo o seu fundamento no mundo real" (Descartes) ; "uma relação de distância a três dimensões entre os corpos reais (teoria de Aristóteles renovada)".

O empirismo inglês entendia que o conhecimento do espaço provém da experiência pelo sentido, assim como qualquer outro conhecimento, e teve em Lotz um dos primeiros expoentes da linha empírica moderna. Ele, apesar disso, admitia, como Kant, que a espacialidade é intrínseca à mente, mas também afirma que o espaço, assim como é percebido e conhecido,é mais do que espacialidade, é uma organização, uma sistematização que provém da experiência.

Entre as citações acima, a teoria de Kant merece destaque, pela influência que teve e ainda tem para o pensamento de grande número de cientistas atuais: a forma "a priori","pura" e "necessária" à sensibilidade sensorial mas dizer anterior à lógica (a priori), nenhuma dependência mantém com os elementos na realidade exterior (pura), sendo, ainda, indispensável (necessária) à atividade sensorial.Esta forma "a prio ri", "pura", "necessária", está, no entanto, subordinada ao senso geométrico euclidiano? A geometria euclidiana é intuitiva, apreendida pelos sentidos, ou constitui também categoria absoluta a priori?

Muitas teorias divergem, aludindo, de preferência, a atributos qualitativos (real, absoluto, relativo, infinito , contínuo, homogêneo, isótropo), mas, no que se refere à geometria métrica e projetiva, todas trazem a ilusão de que proposições da geometria euclidiana davam a certeza do nosso conhecimento geométrico do espaço no universo físico . Esta ilusão que de certa maneira encontra justificativa por não terem sido previstas certas transformações que iam ser operadas no domínio da geometria, tornaria o pensamento matemático euclidiano um caso possível somente nas regiões do universo muito afastadas dos campos de gravitação.

Não previam que o conhecimento científico autorizaria que se escrevesse depois, como o fez Pontes de Miranda: A Geometria por certo que se libertou. Não, porém, das alusões, e sim tão só da alusão ao que acreditávamos fosse a intuição do espaço euclidiano. PORTELA[4]. A geometria euclidiana coincidia, no modo de ver dos racionalistas, com a do mundo real. Daí o drama metafísico de que foram partes principais Descartes, Hume e Kant.

Poincaré, filiado ao grupo dos relativistas, fundamenta suas idéias com argumentos que fazem o conceito de espaço depender de um duplo aspecto psicológico:

a) Seria impossível saber que os objetos haviam sofri do uma certa deformação se os instrumentos de medida também participassem dela. Isso aconteceria, mesmo com a deformação, apresentando maior grau de complexidade se fosse retida por lei especial, bastando que a deformação dos instrumentos se fizesse segundo a mesma lei.

b) Não se conhece, num deslocamento, a posição final do nosso corpo humano senão por intermédio das séries de sensações musculares que revelam os movimentos que se passaram de uma certa posição inicial à posição final. Isto quer dizer que sem as sensações musculares é impossível se reconhecer, num deslocamento, as posições anteriores às ocupadas no momento . A. COSTA[5].

O problema se orienta num relativismo físico, de maneira mais ampla, com os trabalhos de Lobatschewsky e Riemann, que buscam uma maior plenitude e clareza para as proposições da Geometria. Gauss, Minkowski e Einstein, procuram desfazer certas contradições da experimentação e libertar os fenômenos físicos da opressão dos sistemas de eixos com um aspecto excessivamente topológico no sentido do conhecimento relacional, reduzindo-o a uma simples questão de situar a posição dos fenômenos num sistema aberto de eixo arbitrário.

Efetivamente, Lobatschewski e Riemann, na impossibilidade de fazer do postulado de Euclides uma demonstração que satisfizesse, com o rigor necessário à Geometria, construíram novos sistemas geométricos, em cujo desenvolvimento não se encontra nenhuma contradição.

"Gauss, com o seu estudo das superfícies, propôs uma generalização dos sistemas de eixos galilianos, construindo sistemas de coordenadas curvilíneas, na própria estrutura (as chamadas coordenadas intrínsecas), em que o caso euclidiano se torna particularmente possível quando o raio de curvatura da superfície é nulo, isto é, quando os eixos são construídos numa superfície plana". PORTELA[4].

Mas foi com Riemann, que o assunto atingiu uma generalização tal que o sistema euclidiano ficou definitivamente reduzido a um caso particular, sendo possível criar-se uma geometria geral constituída de todas as propriedades invariantes em qualquer sistema.

Com as descobertas do "grupo de transformações" de Lorentz, Minkowski pôde construir o seu contínuo físico quadridimensional.

Einstein quando compôs a sua relatividade, em que o espaço era minkowskiano dava solução apenas aos casos do movimento retilíneo uniforme, não satisfazendo os outros em que o sistema de eixos sofria as influências de um campo de gravitação.

Daí o esforço de Einstein com sua "relatividade", em que o espaço se tornou não-euclidiano, ou seja, riemanniano.

Qualquer tentativa de solucionar o problema da estrutura do espaço perceptivo, cujos argumentos não se fundamentam na experiência, é ingênuo apriorismo em face da incontestável realidade científica.

A psicologia das nossas percepções espaciais, em sua gênese, evolução e contextura, cuja análise é objeto do presente estudo, é colocada em posição diversa, pois subordina o assunto a dados científicos e experimentais. Considera-se o espaço como fator cósmico, um campo físico, função da própria gravitação, condicionado às medidas dos espaços absolutos.

A sensação, a percepção, o pensamento são faces, momentos, de um mesmo fato; o pensamento tem o seu conteúdo sensorial, como a sensação tem o seu conteúdo físico.

Assim o fim que se propõe neste estudo, é demonstrar que, o espaço físico que serve de estímulo às sensações, não pode ser euclidiano conforme manifestações perceptivas do espaço na ótica do ser humano.

Considerando-se que o espaço visual e perceptivo não é euclidiano BEZEMBINDER[6]; amparado na Física relativista e nas geometrias não-euclidianas, propõe-se, também, neste estudo, formular as bases de elementos capazes de desenvolver no homem, a partir do raciocínio intuitivo que percebe o espaço como não-euclidiano, um paralelo ao senso euclidiano, a fim de que se possa sentir para compreender a nova direção relativista da ciência atual.

1.1 A EXISTÊNCIA DOS ESPAÇOS EUCLIDIANOS

Para atingir os objetivos propostos julgou-se importante apresentar, de forma sintética, noções históricas básicas sobre a existência dos espaços euclidianos, lobatschews -

kianos e riemannianos.

A grande obra de Euclides, Os Elementos, subdividida em 13 livros, constitui, sem dúvida, um dos mais notáveis compêndios de Matemática.

Embora Os Elementos contenha grande número de teoremas já demonstrados por seus predecessores, coube a Euclides o mérito de apresentar uma sistematização dos conhecimentos geométricos com uma segurança e clareza admiráveis.

Seu objetivo principal foi o de reunir, numa compilação, rigorosa e metodicamente ordenados os postulados e as demonstrações dos teoremas geométricos. Deve-se salientar, todavia, que, a par dos teoremas já demonstrados por seus predecessores, Euclides inclui muitos outros, intercalando-os no texto, no lugar adequado.

Entre as características, cumpre ressaltar a clareza da exposição, o rigor das demonstrações e o encadeamento lógico dos teoremas. Os Elementos apresenta inicialmente as definições, os postulados e os axiomas a que irá recorrer constantemente nas demonstrações dos teoremas.

Traço característico do procedimento de Euclides é o de sempre formular as proposições geométricas de forma universal e absoluta, incluindo as respectivas demonstrações. Tais demonstrações jamais se revestem de caráter experimental ou indutivo; são infalivelmente dedutivas, buscando levar às conclusões ao rigor da necessidade lógica. Dedução supõe apoio em premissas, embora a maioria das leis geométricas possam ter sua verdade comprovada a partir de premissas representadas por outras leis já anteriormente demonstradas. Assim, haverá que admitir, sem demonstração, certo número de leis que serão tomadas como premissas dos raciocínios posteriores e servirão de base para demonstração da verdade de todas as demais leis geométricas.

Ao primeiro grupo de leis Euclides denomina postulados e ao segundo, teoremas, ou proposições.

Fundamentado em cinco postulados Euclides faz repousar o sistema que oferece:

1º- Uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer;

2º- Qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para constituir uma reta;

3º- Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada;

4º- Todos os ângulos retos são iguais entre si;

5º- Por um ponto de um plano, situado fora de uma reta desse plano, pode-se traçar uma só paralela a essa reta.

Em realidade, o quinto postulado, tal como estabeleceu Euclides, tem o enunciado seguinte:

Se uma reta cortar duas outras retas, de modo que a soma dos dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, as duas retas, quando suficientemente prolongadas, se cruzarão do lado da primeira reta em que se acham os ângulos mencionados, (Figura 1).

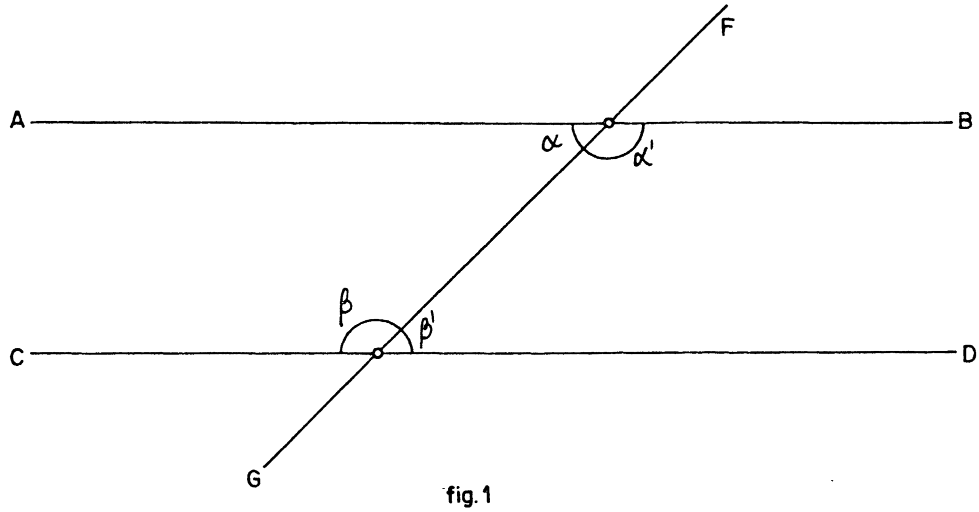

fig. 1

Sejam AB e CD as duas paralelas; FG a transversal; α e β os dois ângulos internos à esquerda de FG, e α' e β' os dois ângulos internos à direita. A soma $\alpha + \beta$ será maior, menor ou igual a dois ângulos retos.

Admite-se que, se para um par de paralelas se verifica, por exemplo, o primeiro caso ($\alpha + \beta > 2$ retos), outro tanto ocorrerá para todos os demais pares. Então, se as retas FB, ED são paralelas entre si, como são paralelas as retas FA, GC, de $\alpha + \beta > 2$ retos, deduz-ze que $\alpha' + \beta' > 2$ retos. Tem-se: $a + B + a' + B' > 4$ retos, que é absurdo. Logo, não pode ser $a + B > 2$ retos. Do mesmo modo se demonstra que não pode ser $a \; B < 2$ retos; por conseguinte, será $a + B = 2$ retos (PROCLO). BONOLA[7].

Para construir seu sistema, recorre Euclides não só aos postulados, mas, ainda, a cinco princípios básicos por ele denominados axiomas, ou noções comuns. Aparentemente, Euclides distinguia postulados de axiomas por entender que os primeiros têm específica relação com a geometria, enquanto os últimos apresentam um caráter mais geral, sendo assim enunciados: BOYER[9]

1º - Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;

2º - Se parcelas iguais forem adicionadas a quantidades iguais, os resultados serão iguais;

3º - Se parcelas iguais forem subtraídas de quantidades iguais, os resultados serão iguais;

4º - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais;

5º - O todo é maior do que a parte.

Procurou não apenas demonstrar de maneira logicamente definitiva os teoremas geométricos formulados, mas também precisar os termos dos teoremas.

Algumas das definições que aparecem são as seguintes:

-Um ponto é aquilo que não tem partes.

-Um ângulo plano é a inclinação, em relação uma com a outra, de duas retas do plano que se cruzam entre si e não estão na mesma reta.

-Quando uma reta é colocada sobre outra, de maneira que os ângulos adjacentes sejam iguais, cada um dos ângulos é chamado reto e a reta superposta é perpendicular à primeira.

O imenso caminho percorrido desde Euclides até Hilbert, passando por Klein, evidencia a importância cada vez maior da álgebra no estudo da geometria. As exceções resumem-se nos teoremas que envolvem as medidas de ângulos, porque a medida de um ângulo é a noção topológica, isto é, ligada ao conceito de continuidade. Tendo presente essa exceção, a geometria euclidiana (e o mesmo se pode dizer das geometrias não-euclidianas e da geometria projetiva) é uma simples linguagem para interpretar as definições e os teoremas da chamada teoria das formas quadráticas. Os pontos da geometria euclidiana são interpretados como vetores de um espaço vetorial para os quais se define uma forma quadrática, isto é, o produto escalar de dois vetores. Ela estuda essencialmente as noções de comprimento ou norma, de ortogonalidade e de isometria,noções usadas para analisar as bases ortogonais, os grupos de semelhança e os ângulos. O número de elementos de uma base dá a dimensão da geometria euclidiana.

Assim é que na geometria euclidiana plana a base são dois vetores, sendo cada ponto ou vetor caracterizado por duas coordenadas. Já a geometria euclidiana a três dimensões é obtida considerando-se bases com três vetores e cada ponto ou vetor com três coordenadas.

Essas são as geometrias do plano e do espaço d'<u>Os Ele</u>

mentos de Euclides, no que elas têm de mais essencial no estudo axiomático.

A exposição de Euclides não pode ser considerada como algo acabado e perfeito, mas o espírito que norteava o enfoque dado à matéria prevalece até hoje,depois dos notáveis trabalhos de Hilbert. Euclides, entretanto, reconhecia que seu 5º postulado poderia ser melhor explicitado.

1.2 A EXISTÊNCIA DOS ESPAÇOS LOBATSCHEWSKIANOS

Lobatschewski foi considerado por Clifford como o "Copérnico da Geometria", o homem que revolucionou o assunto pela criação de todo um ramo novo, a geometria de Lobatschewski, mostrando com isso que a geometria euclidiana não era absoluta como se supunha ser. Num certo sentido, a descoberta da geometria não-euclidiana desferiu um golpe devastador na filosofia kantiana, comparável ao efeito que teve sobre as concepções pitagóricas a descoberta de grandezas incomensuráveis . BOYER[8]

Em suas investigações Lobatschewski começou com a intenção de demonstrar o axioma do paralelismo pronto, advertiu que um deles conduz a resultados absolutamente inesperados.

Esse propósito consistia na utilização do método de demonstração por contradição e baseava-se na consideração seguinte: Se o axioma do paralelismo de Euclides é resultado de outros axiomas d'<u>Os Elementos</u> e se, embora se admita que atra vés de um ponto fora de uma reta, no plano determinado por esta, podem traçar-se pelo menos duas retas que não cortam a reta dada, resultará que essa suposição precoce, em seus resultados mais imediatos e mais distantes, conduzirá a uma contradição. SMOGORZHEVSKI[9]

Analisando os novos resultados conseguidos por ele , paradoxais a partir do ponto de vista da geometria euclidiana, Lobatschewski se convence de que eles formam um sistema lógico não contraditório de teoremas capazes de constituir a base de uma nova teoria científica.

Lobatschewski negou-se a aceitar a hipótese do ângulo reto, asseverando que ela não era necessária para uma geometria conseqüente. Erigiu, então, um novo conceito geométrico, assentado na hipótese do ângulo agudo, segundo o qual, por um ponto P, situado fora de uma reta dada BB', é possível traçar duas paralelas à reta BB'.

Seja (Figura 2) uma reta AB e um ponto P fora dela e

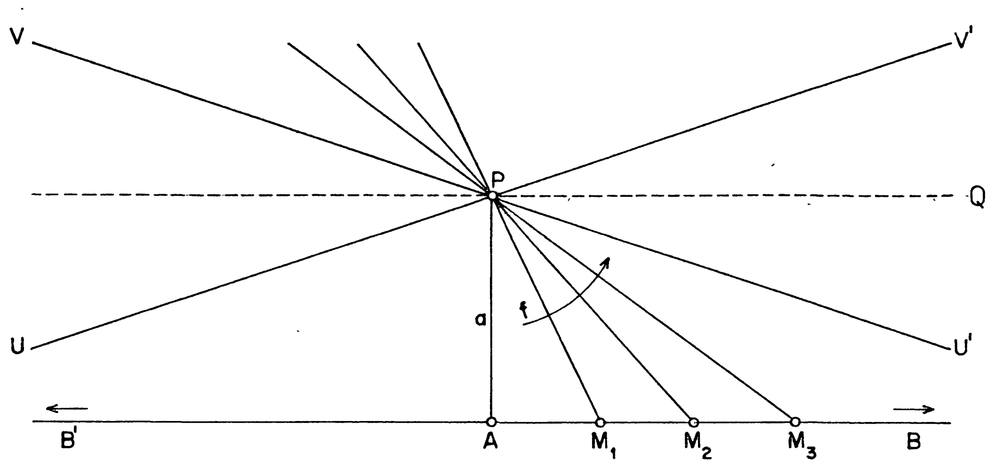

fig. 2

no plano do ponto e da reta tracemos a perpendicular única possível PA desde P a B'B. Consideremos a reta B'B indefinida e ilimitada em seus dois sentido, à direita e à esquerda.

Suponhamos desde P diferentes retas definidas por P e um ponto variável M_1, M_2, M_3,..., que se vai afastando mais e mais para a direita; a reta variável PM_1, PM_2, PM_3,..., gira ao redor do ponto P no sentido da flecha f, isto é, no sentido anti-horário. Se o ponto variável M_k se afasta indefinidamente para a direita, admitamos que a reta PM_k tende para uma posição limite PU a qual PM_k jamais poderá alcançar, posição limite como toda as retas variáveis PM_k está no plano definido por P e B'B e que Lobatschewski denomina paralela por P a B'B. O ângulo APU não tem por que ser reto, mas uma função bem determinada $\pi(a)$ da distância PA = a do ponto P à reta B'B.

Lobatschewski denomina a palavra <u>ângulo</u>, ângulo de paralelismo e indica que $\pi(a) \to 90^o$ quando $a \to 0$ e $\pi(a) \to 0$ se $a \to \infty$. MISOL[10].

Claro está é que se em vez de afastar o ponto M para a direita se o fizer para a esquerda, a reta variável, por razão de simetria, tenderia a uma segunda posição limite PU' simétrica de PU com relação a PA e de igual ângulo de paralelismo. Esta segunda reta denomina-se também paralela por P a BB'.

Como se vê, por P existem duas paralelas a B'B. Na geometria euclidiana, ambas as paralelas se confundem e são uma só reta, a qual é, por sua vez, a perpendicular PQ por P a PA. Isso quer dizer que, na geometria euclidiana, para todos os pontos P do plano se admite que o ângulo de paralelismo é tal que $\pi(a) = 90^o$.

Na geometria lobatschewskiana,prolongando as retas PU e PU' e PV e PV',respectivamente, vê-se que todas as retas indefinidas do plano traçado por P e co preendidas no ângulo UPU' e seu oposto pelo vértice VPV' encontram a reta BB' e todas as compreendidas no ângulo U'PV não encontram a reta B'B. Estas duas paralelas tampouco encontram a B'B, pois existe entre elas e as do interior do ângulo UPV' uma diferença fundamental: ao diminuir infinitamente o ângulo UPA por rotação em torno de P, a paralela passa a ser secante, e isto é possível fazer-se com a reta PS do interior do ângulo UPV' sem que a dita reta PQ deve de ser não secante. MISOL[10]. Conclui-se que nenhuma das "paralelas" de Lobatschewski intercepta a reta B'B (a que ambas são paralelas); além disso, B'B não é interceptada por qualquer outra reta que passa por P e que fica na região limitada pelas duas "paralelas". A situação se "materializa" nas geodésicas da pseudo-esfera.

Assim fundamentou-se a geometria não-euclidiana; seu axioma de paralelismo se diferencia do euclidiano e coincide com a suposição citada anteriormente, no que sucede o axioma do paralelismo de Lobatschewski. Apesar de se afirmar com segurança que nenhum dos numerosos possíveis resultados do axioma do paralelismo de Lobatschewski conduz a uma contradição.

Lobatschewski fixou a seguinte solução: assinalou que a não contradição da geometria descoberta por ele deve deduzir-se da possibilidade de reduzir a solução de qualquer pro blema geométrico a cálculos aritméticos e transformações analíticas, utilizando para isso as fórmulas da trigonometria hiperbólica deduzidas por ele mesmo. SMOGORZHEVSKI[9].

As investigações da geometria de Lobatschewski, ou da geometria hiperbólica, são muito vastas:abrangem sua parte elementar, a trigonometria, a geometria analítica e a geometria diferencial.

O descobrimento de Lobatschewski se qualifica por seus contemporâneos, inclusive por seus discípulos, como um desafio audaz às leis da lógica e do sentido comum.

Com a mesma hostilidade também havia sido acolhida a teoria heliocêntrica de Copérnico, que negava aquilo que parecia ser absolutamente evidente e afirmava aquilo que parecia ser inconcebível.

Eram requeridas considerações muito profundas para compreender a validade de duas geometrias diferentes. Na continuação expõe-se algumas das considerações mais compreensíveis.

Nos manuais escolares de Geometria, na parte "Planimetria", estuda-se o plano independente do espaço que o rodeia. Em outras palavras, a planimetria é a geometria do plano euclidiano.

Também estudou-se as geometrias de certas superfícies curvilíneas; pode servir de exemplo a geometria esférica, com amplo uso na Astronomia e em outros ramos da Geometria.

Em toda ciência os conceitos básicos são simples e importantes. Na geometria euclidiana semelhantes conceitos são o ponto, a reta e o plano.

Essas denominações permanecem também nas geometrias não-euclidianas, chamando-se reta a linha pela qual se mede a distância mais curta entre dois pontos e plano da superfície, que tem a seguinte propriedade: se dois pontos da reta pertencem a esta superfície, resultará que os pontos restantes da mesma reta também pertencem à superfície.

Por exemplo, na geometria esférica denominam-se plano e reta, respectivamente, à esfera e às circunferências de círculos maiores; terminologia oportuna, já que em qualquer geometria a reta é a linha mais simples e o plano é, igualmente, a superfície mais simples. Além disso, a primeira tem a propriedade mais importante da reta euclidiana e a segunda, a propriedade mais importante do plano euclidiano.

Apresenta-se, a seguir, algumas singularidades da geometria esférica. Para maior evidência examinar-se-á como a geometria da superfície do globo. Não é difícil compreender que duas retas desta geometria (por exemplo, dois meridianos) sempre se cortam em dois pontos do globo diametralmente opostos. Depois a soma de dois ângulos do triângulo esférico é maior que dois ângulos retos. Por exemplo, no triângulo limitado por um quarto do Equador e pelos arcos de dois meridianos (Figura 3), os três ângulos são retos.

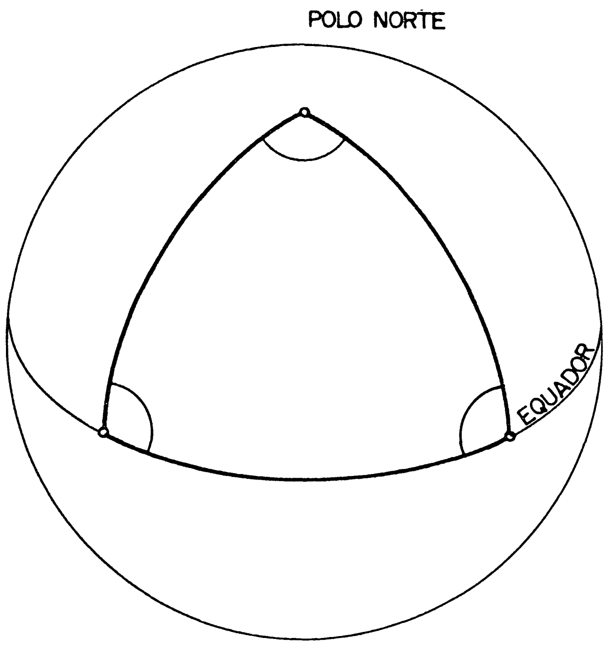

fig. 3

Considerando-se que a superfície tem duas dimensões, admite-se denominar bidimensional a geometria que estuda as figuras encontradas numa superfície determinada, e denomina-se espaço bidimensional a própria superfície. Há muito tempo se conhecem duas variedades de geometria bidimensional: a euclidiana (para o plano) e a esférica. O fato de existir uma geometria bidimensional não-euclidiana não era de grande importância para os matemáticos, pela simples razão de não se estudar a esfera no espaço euclidiano tridimensional; isto obrigava a esquecer as propriedades não-euclidianas da esfera como tal.

Como resultado das investigações, pôde-se esclarecer que só são concebíveis as superfícies com propriedades não-euclidianas, sem que também o sejam os espaços não-euclidianos tridimensionais.

A introdução do conceito das geometrias tridimensionais não-euclidianas pode provocar dúvidas sem os esclarecimentos seguintes:

Às vezes é cômodo representar em forma geométrica os resultados do estudo de uma classe de fenômenos. Por exemplo, os dados concernentes ao incremento da profundidade do trabalho freqüentemente se expõem em forma de gráficos e diagramas. Isso demonstra que mediante imagens geométricas se pode descrever diversos processos e estados reais sem relação direta com a geometria.

Por se considerar a forma gráfica como uma linha do plano euclidiano, é evidente que no exemplo exposto anteriormente se está implementando imagens da geometria euclidiana bidimensional. Em outros casos mais complicados é necessário recorrer às geometrias euclidianas e não-euclidianas tridimensionais e, inclusive, às polidimensionais. Disto não se deve deduzir que todas descrevem relações de extensão; essas são teorias que, em suas formulações, utilizam termos geométricos dos quais,falar-se-á em geral, atribuindo-lhes um conteúdo não ligado às noções espaciais. Assim, por exemplo, ao agregar ao tempo as três dimensões do espaço real em qualidade de uma quarta dimensão, introduz-se o conceito de espaço quadridimensional no qual o intervalo determinado de tempo se considera como um segmento de reta.

Na maioria dos casos semelhantes o enfoque cria somente a aparência de claridade, o que, facilita a análise do fenômeno que se estuda por esse método.

De tal modo, a construção das geometrias não-euclidianas justifica-se pela possibilidade de se utilizar suas deduções para objetos que na realidade existem. A circunstância dessas deduções se enuncia com a conclusão de que a Geometria não tem importância essencial: as fórmulas geométricas se podem modificar facilmente, de tal maneira que correspondam às propriedades dos objetos e fenômenos que se estudam.

Deve-se considerar especialmente as geometrias tridimensionais. Estas podem ser tratadas independentemente de outras aplicações que tenham, como hipóteses que pretendem descrever as propriedades do espaço real.

A questão a respeito de que essas hipóteses estão próximas da realidade somente pode ser resolvida mediante a comprovação experimental.

O trecho seguinte é muito importante para a exposição posterior: No plano euclidiano pode-se construir (assim como se faz para a esfera), não por um só procedimento o desenvolvimento do plano de Lobatschewski.

A geometria de Lobatschewski obteve reconhecimento geral nas circunstâncias seguintes: O matemático italiano Beltrami (1868) descobriu que no espaço euclidiano existe uma superfície com as mesmas propriedades do plano de Lobatschewski, melhor dizendo, de certo trecho desse plano (se se considerar como <u>retas</u> nessa superfície das linhas menores). SMOGORZHEVSKI[9].

Tal descobrimento, que há pouco tempo conduziu à cons trução de diferentes situações do plano de Lobatschewski, convencendo os sábios da logicidade das idéias do grande geometra servindo de impulso para o estudo profundo de suas obras e início a numerosas investigações no ramo da geometria não-euclidiana.

O descobrimento das geometrias não-euclidianas estabeleceu ante a Física um problema complexo: esclarecer se o espaço físico real é euclidiano, como antes pensavam; e se não for, a que tipo de espaços não-euclidianos pertence. Para a solução deste problema se requer uma comprovação experimental da validade dos axiomas, estando claro que com o aperfeiçoamento dos instrumentos de medidas aumenta a segurança dos dados experimentais obtidos e aparece a possibilidade de se penetrar em detalhes que antes escapavam da atenção dos investigadores.

Assim, pois, Lobatschewski retornou à geometria da in ›retação empírica dos axiomas como proposições que consta- ... as propriedades geométricas fundamentais do espaço e que foram concebidas por ele como resultado do experimento. Portanto, é impossível se considerar como resolvida a questão da estrutura geométrica do espaço físico real. Apesar de se observar que a teoria contemporânea da relatividade, baseada em dados, considera que o espaço real não é euclidiano e que, afinal, por suas propriedades geométricas, é muito mais complexo que o espaço de Lobatschewski, pode-se formular a seguinte pergunta: Qual das duas geometrias correspondem à realidade verdadeira, a de Euclides ou a de Lobatschewski?

Semelhante pergunta nos surge a respeito das geome -

trias bidimensionais euclidianas e esféricas. É absolutamente óbvio que ambas são válidas, pois cada uma delas tem seu campo de aplicação: não podem ser usadas as fórmulas dessas geometrias para as figuras da esfera.

O mesmo aplica-se às diversas geometrias tridimensionais: cada uma delas, por suas especificidades, encontra emprego em assunto determinado, dentro de campos onde cabe sua aplicação; apesar de cada uma delas se negar a servir a si e seus princípios, lhes é atribuído um caráter universal.

A questão referente à estrutura do espaço real pertence à Física e não pode ser resolvida com as forças da geometria pura. Sua particularidade consiste, entre outras coisas, em que nenhuma Geometria reflete as relações de extensão com absoluta exatidão.

De tal modo, a noção a respeito da estrutura geométrica do espaço real se deduz da convicção cientificamente comprovada de que uma geometria determinada descreve melhor que outras as relações reais de extensão.

Os méritos científicos do notável pensador não se esgotam com o acontecimento de que havia arrancado a imagem do axioma do paralelismo; a importância de suas investigações é imensuravelmente mais ampla.

A atitude ousada de Lobatschewski, negando-se a aceitar um axioma, abriu insuspeitos caminhos para a Matemática. O triunfo de Lobatschewski levou outros matemáticos a cogitarem da possibilidade de construir sistemas coerentes em que certos axiomas seriam abolidos.

Não há exagero quando se afirma que as geometrias não-euclidianas iriam provocar total mudança na maneira de encarar o raciocínio dedutivo, e não apenas uma parcial inovação em ramos específicos da Matemática. Na base da suposição — segundo a qual a Matemática é uma livre criação do espírito humano mas preocupado com as aplicações — está, sem dúvida, o êxito de Lobatschewski.

1.3 A EXISTÊNCIA DOS ESPAÇOS RIEMANNIANOS

Riemann imaginava uma visão global da Geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço. Suas geometrias eram não-euclidianas, num sentido, muito mais geral do que a de Lobatschewski, em que a questão é simplesmente a de quantas paralelas são possíveis por um ponto.

Riemann viu que a Geometria nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de coleções de n-uplas que são combinadas segundo certas regras.

Entre as regras mais importantes, Riemann destacou a que trata da distância entre dois pontos que estão infinitesimalmente próximos um do outro.

Riemann, inclusive, desenvolveu a partir da métrica gaussiana uma fórmula para a curvatura de uma superfície em seu espaço. A geometria plana se deduz da hipótese de Saccheri sobre o ângulo obtuso se for abandonada também a hipótese da infinitude da reta. Um modelo para essa geometria se encontra na interpretação do plano como sendo a superfície de uma esfera e de uma reta com um círculo máximo sobre a esfera (Figura 4).

A figura 4 expressa: Em um triângulo ABC de lados $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{BA}$ se verifica-se $\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 360^o$ e $d + d_1 + d_2 + d_3 = 360^o$.

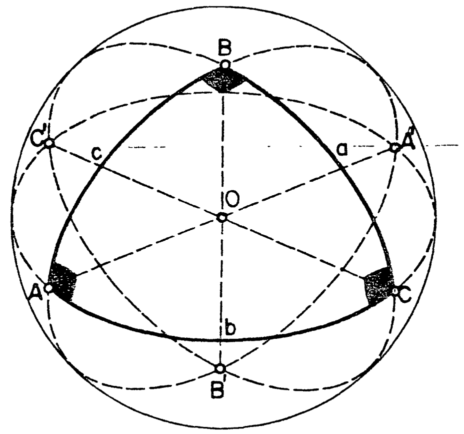

fig. 4

De fato, cortando um triedro OABC por uma superfície esférica, com centro em seu vértice, obtem-se um triângulo esférico ABC cujos lados $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ se medem pelas faces do triedro e cujos ângulos A, B e C se medem pelos diedros do triedro.

A soma A + B + C dos ângulos de um triângulo esférico é maior que dois retos. A diferença $A + B + C - 180^o$ se chama excesso esférico. Sua medida em radianos multiplicada por r^2 dá a área do triângulo esférico. O designaremos por ε.

A soma a + b + c de dois lados de um triângulo esférico (faces de um triedro) é menor que quatro retos. Chama-se perímetro e se designa por 2 p. A diferença $360^\circ - (a+b+c) = 360^\circ - 2p$ se chama defeito esférico e é designada por d.

Os círculos máximos a que pertencem os lados dividem a sua superfície esférica em oito triângulos correspondentes a outros tantos triedros, que os planos das faces do triedro OABC dividem o espaço. Entre eles é útil considerar, em ocasiões, o triângulo A'B'C' simétrico do ABC em relação ao centro (que corresponde ao triedro oposto pelo vértice e tem iguais elementos, embora em sentido oposto) e os triângulos $\Delta_1 \equiv A'BC$, $\Delta_2 \equiv AB'C$, $\Delta_3 \equiv ABC'$, chamados triângulos adjacentes, definidos por dois vértices bem como o simétrico do terceiro.

Assim, por exemplo, comparando ABC e A'BC se tem $\widehat{BC}$ comum, $\widehat{BA'} = 180^\circ - c$; $\widehat{CA'} = 180^\circ - b$; $\hat{A} = \hat{A}'$; $A'\hat{B}C = 180^\circ - \hat{B}$; $A'\hat{C}B = 180^\circ - \hat{C}$.

Essas relações permitem calcular facilmente os excessos e os defeitos dos triângulos adjacentes. Assim, chamando-se ε_1 ao excesso e d_1 ao defeito do triângulo Δ_1, se tem

$$\varepsilon_1 = (A + 180^\circ - B + 180^\circ - C) - 180^\circ = 180^\circ + A - B - C$$

$$d_1 = 360^\circ - (a + 180^\circ - b + 180 - c) = b + c = 2(p - a)$$

e analogamente a Δ_2 e Δ_3

$$\varepsilon_2 = 180^\circ + B - A - C, \qquad \varepsilon_3 = 180^\circ + C - A - B$$

$$d_2 = a + c - b = 2(p - b), \qquad d_3 = a + b - c = 2(p - c)$$

verificando-se

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 360^\circ, \qquad d + d_1 + d_2 + d_3 = 360^\circ.$$ PUIG[11].

Nesse caso, a soma A + B + C dos ângulos de um triângulo esférico é maior que dois retos, ao passo que na geometria de Lobatschewski e Bolyai (correspondendo à hipótese do ângulo agudo) a soma dos ângulos é menor que dois retos. Foi a sugestão de Riemann do estudo geral de espaços métricos com curvatura e não o caso especial da geometria sobre a esfera que, mais tarde, tornou possível a teoria da relatividade. Ao mostrar que a geometria não-euclidiana com a soma dos ângulos maior de dois retos é realizada sobre a superfície de uma esfera, Riemann essencialmente provou a consistência dos axiomas dos quais a geometria deriva.

Plücker expandiu no trabalho <u>Nova Geometria do Espaço</u> um princípio pelo qual o espaço não precisa ser pensado como uma totalidade de pontos; pode igualmente ser bem visualizado como composto de retas. A cada figura que antes fora pensada como um lugar ou totalidade de pontos, pode ser ela própria pensada como um elemento de um espaço, e a dimensionalidade do espaço corresponderá ao número de parâmetros que determinam esse elemento. Segundo o conceito de Plücker, as retas e esferas no espaço euclidiano tridimensional constituem um espaço a quatro dimensões. BOYER[8].

2. DO ESPAÇO EUCLIDIANO E SUA MANIFESTAÇÃO PERCEPTIVA

"Nada veremos se não tivermos, em nossos olhos, o meio de surpreender, de questionar e de dar forma a um número indefinido de configurações de cor e de espaço" M. PONTY[12].

O pensamento do filósofo M. Ponty é um alerta sobre a percepção visual quando diz que não tem mais que uma ligação remota com as ciências e as artes visuais, com os objetos feitos para serem vistos, e sujeitos à ação da perspectiva.

Segundo FLOCON e TATON[13] a perspectiva é o obstáculo inevitável de todo ato que procura reduzir ao plano os acontecimentos e objetos do espaço.

Por outro lado, sabe-se que a impressão luminosa que proporciona a percepção visual de um objeto decorre da excitação provocada sobre a zona sensível da retina, sob a forma de uma imagem real, produzida pelo sistema dióptrico do olho do espectador.

Se em um painel visualizar-se traços, sombras e cores de tal maneira que, observado frontalmente, com o olho do espectador postado em um ponto e uma distância determinados, provoca impressão retiniana semelhante a daquele objeto quando percebido no espaço, tendo-se o que na arte do desenho e da pintura chama-se perspectiva.

Embora se verifique a circunstância do encurvamento da porção impressionável da retina sobre a qual se forma a imagem luminosa, não é, por esse fato, desvirtuada a percepção da imagem em sua configuração geométrica. Percebem-se os elementos retilíneos e as faces planas do objeto observado sem alterações morfológicas e sem aberrações, tais como seriam notados na imagem correspondente sobre uma tela fotográfica plana com uma boa imagem focalizada.

Verifica-se que sobre uma superfície de conformação plana essa finalidade da impressão, que a representação perspectiva deve proporcionar, é melhor assegurada. Tanto assim que o plano do quadro é generalizado.

A direção axial do fluxo luminoso que atravessa os meios refringentes do órgão visual confunde-se com a do eixo ótico, ou eixo principal do cristalino, e é normal à porção da superfície da retina sobre a qual a imagem se forma.

Deverá, pois, o quadro, no traçado perceptivo, dispor-se em ordem a que o seu plano seja perpendicular ao eixo do raio principal, assim chamado de eixo da pirâmide visual, determinada pelo feixe de raios luminosos que promanam do setor do espaço a ser figurado em perspectiva e que convergem no olho do observador a ponto de vista. Entretanto uma óptica geométrica, formulada de maneira bastante geral por Euclides, permitiu o estabelecimento de uma relação entre as quantidades aparentes e imagem visual. De acordo com ela, os raios visuais são retas emitidas pelo olho e formam um cone ou uma pirâmide cujo vértice é formado pelo órgão da vista.

Alberti (1493) sistematiza pela primeira vez, em uma teoria coerente, as conquistas da ciência pictórica, em seu Trattato della Pintura, obtendo de acordo com essa definição, que: o quadro é apenas um plano, levado perpendicularmente à pirâmide ou visual do qual o vértice está no olho do pintor (observador) e a base nos objetos representados. FLOCON e TATON[13]. Supõe-se, portanto que o quadro é a interceptação, ponto por ponto, de uma realidade percebida ou tal como poderia tê-lo sido.

O método que decorre dessas observações, a costruzione legittima, ou seja, segundo as leis de Euclides, parte de noções de planta e elevação e constrói duas projeções paralelas preliminares, a partir das quais é montada a figura. Nos dois desenhos preparatórios — os esquemas horizontal e vertical — o cone visual é representado por triângulos cujos vértices comuns são ocupados pelo observador. Uma reta, representando a secção do quadro, corta perpendicularmente estes triângulos e os pontos de intersecção dos lados destes com a reta — altura e largura do quadro — dão as coordenadas do desenho perspectivo. Nesta construção, bastante abstrata, o ponto de fuga das oblíquas paralelas não é um dado do problema; é mais uma conseqüência do método e um meio de controlá-lo. (Figura 5).

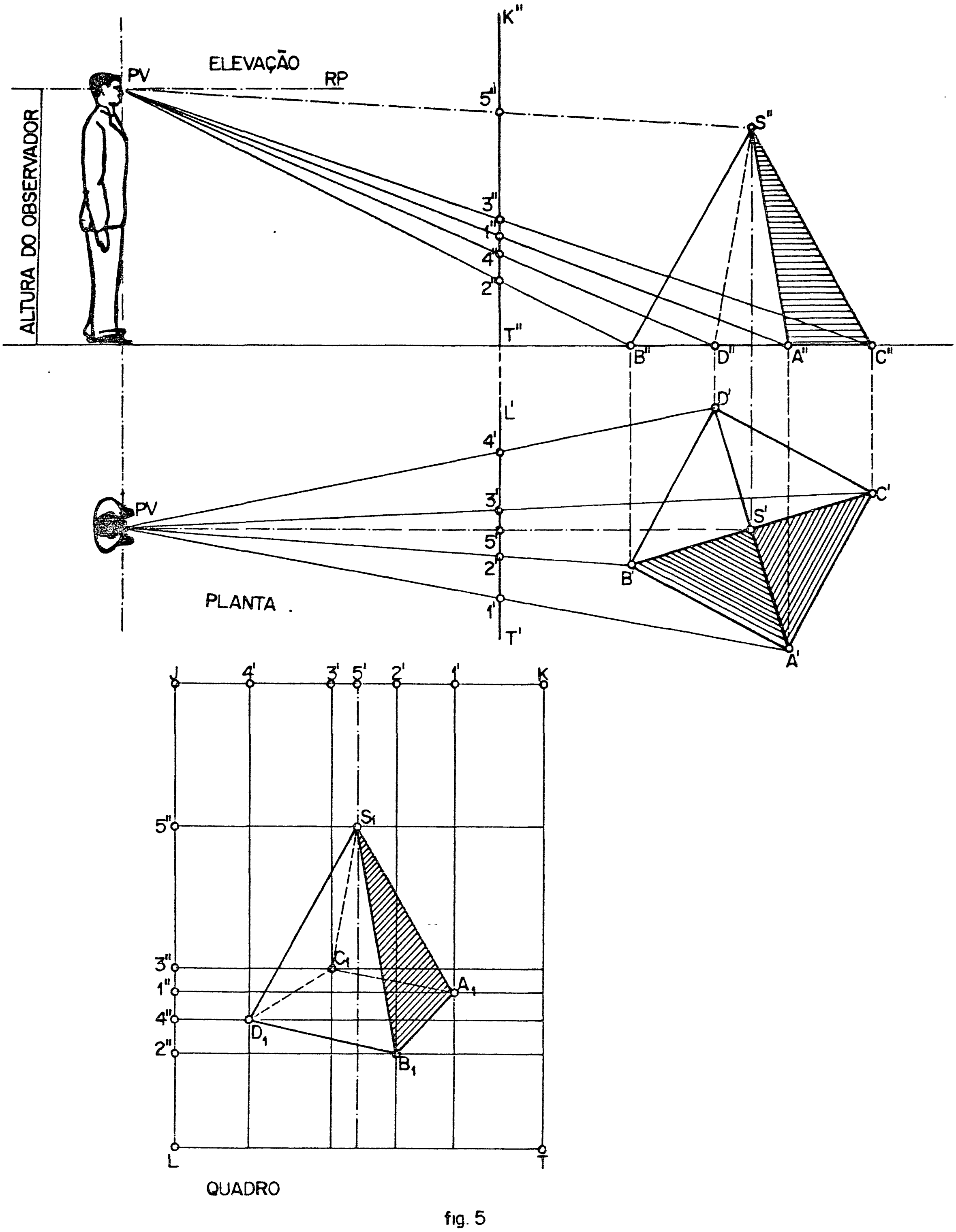

fig. 5

Sendo o quadro definido como um plano cortando perpendicularmente o eixo do cone visual, o espectador deveria colocar-se no ponto de vista, para vê-lo da maneira mais correta. Leonardo da Vinci já o havia dito expressamente: "Apenas uma pessoa de cadá vez pode estar no lugar ideal para ver o quadro. FLOCON e TATON[13].

Realmente, a distância do ponto de vista ao quadro determina todas as relações dos objetos entre si e suas dimensões recíprocas. Por exemplo: os diâmetros das colunas aumentam lateralmente à medida que se afastam do ponto de fuga; as esferas, em idênticas condições, tornam-se elipsóides; os diâmetros dos quadrados, situados em direções oblíquas, podem aumentar indefinidamente. São conseqüências lógicas de uma construção que conserva o paralelismo das perpendiculares e das horizontais paralelas ao quadro. Essas deformações não perturbam o pensamento rigoroso dos geômetras, mas chocam o pintor em sua referência à natureza que pretende imitar.

Leonardo da Vinci trata do problema das esferas em perspectiva, em que o ângulo visual que indica ao ponto de vista as grandezas aparentes diminui menos rápido que o aumento do grande eixo da elipse que representa a secção cônica interceptada pelo quadro. A partir daí, ele demonstra que só a interceptação do cone visual por uma esfera, da qual o ponto de vista seja o centro, poderia explicar a diminuição aparente das esferas. FLOCON e TATON[13].

As atividades perceptivas e principalmente as explorações utilizam, por exemplo, movimentos do olhar que estão comprometidos com as imagens visuais. Mas deduz Piaget que, à medida que a imagem procura imitar a percepção, os movimentos evocadores reproduzirão (e, portanto, reencontrarão) os movimentos exploratórios da percepção, exatamente ao nível das atividades sensório-motoras que a dirigem. FAGUNDES[14].

Em perspectiva teórica, todo o espaço é supostamente ilimitado como em Geometria; ele ocupa em relação ao ponto de vista V no raio visual principal RV e no plano de projeção ou quadro uma posição (de frente ou de fuga) e uma situação particular (ver Figura 6).

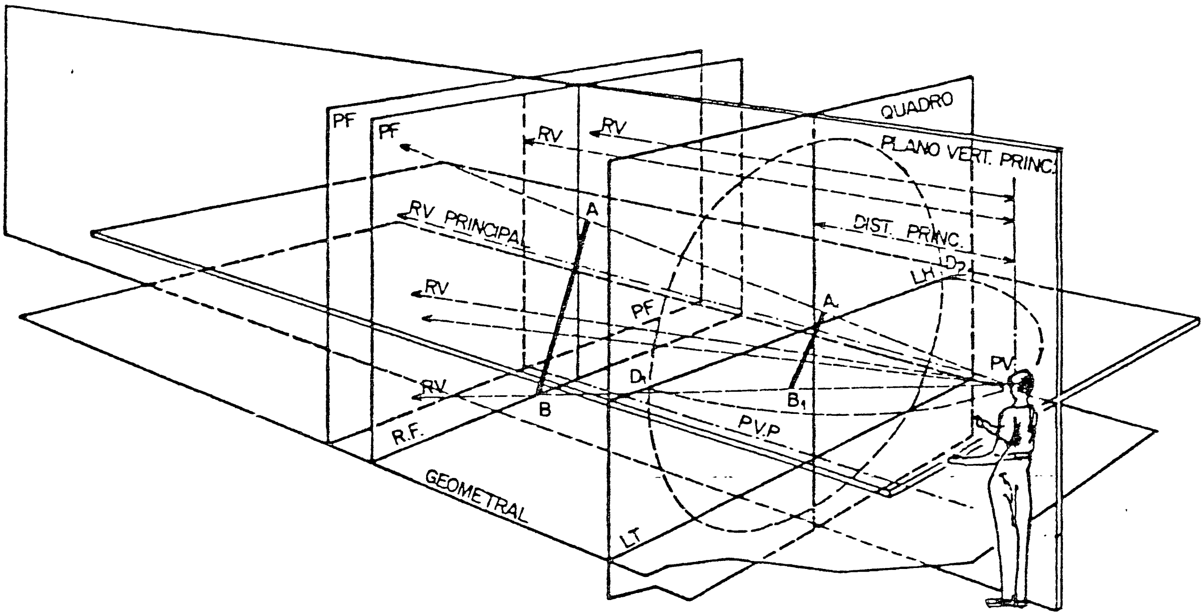

fig. 6

Do mesmo modo, toda reta do espaço, que também é supostamente ilimitada, ocupa em relação a esses mesmos elementos, tanto em um plano determinado como na intersecção de dois planos ou perpendicular a um plano, uma posição (de frente ou de fuga) e uma situação particular.

Em perspectiva, a posição e a situação no espaço de um plano ou de uma reta são representadas sobre o plano de projeção: para a reta, pelas posições de dois de seus pontos imagem, pela sua intersecção t e pelo ponto de fuga F da sua imagem; para o plano, pelas posições de duas de suas retas imagem, pela sua intersecção TT' e pela linha de fuga uu' da sua imagem. Na figura 6 um segmento ou grandeza real AB de uma reta (de frente ou de fuga) tem por imagem, sobre o plano de projeção, uma grandeza imagem AB (de frente ou de fuga).

Existe, entre uma grandeza imagem A_1B_1 e uma grandeza real AB que ela representa, uma relação A_1B_1 que, segundo a posição (de frente ou de fuga) da grandeza real $\frac{A_1B_1}{AB}$, é definida geometricamente pela Lei da Degradação Linear, se a grandeza AB está de frente, ou, pela Lei da Deformação Linear, se a grandeza AB está em posição de fuga. OLMER[15].

Em perspectiva, a imagem de um sólido sendo formada por todos os pontos imagem representando os pontos aparentes desse sólido, faz com que todo traçado da imagem perspectiva repouse sobre o traçado de um ponto imagem A_1 que representa um ponto A do espaço.

Este ponto da imagem A pode ser determinado por uma das três operações que seguem:

1º- Cálculo das coordenadas imagem do ponto de imagem A_1 sobre o plano de projeção: estas coordenadas imagem que também podem ser obtidas através dos traçados gráficos representam as três coordenadas perspectivas do ponto A do espaço; isto é, sua altura, distância lateral e distância em profundidade com relação aos três planos perpendiculares entre si.

2º- Traçado, considerando o ponto imagem A_1 como intersecção com o plano de projeção, do raio visual traçado do ponto de vista V ao ponto A do espaço.

3º- Traçado, sobre o plano de projeção, das imagens perspectivas de duas retas passando pelo ponto A do espaço; o ponto de intersecção das imagens perspectivas destas duas retas é o ponto imagem A_1.

3. O ESPAÇO LOBATSCHEWSKIANO E SUA MANIFESTAÇÃO PERCEPTIVA

Na impossibilidade de se dar ao postulado de Euclides uma demonstração que satisfizesse, com o rigor necessário, o espírito da Geometria, impuseram-se novos conceitos de paralelas, sobre as quais se ergueram,sistemas geométricos lógicos, mais aproximados dos dados reais da experiência no domínio do infinitamente pequeno e do infinitamente grande, negando a existência de retas no conceito euclidiano e construindo suas figuras não num plano, mas numa superfície de raio de curvatura positivo ou negativo.

Duas classes de geometrias se distinguem pelas suas aplicações ao estudo dos fenômenos do macrocosmo e do microcosmo. São elas:

a) a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois retos;

b) a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos.

Na superfície de curvatura negativa a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico é menor que dois ângulos retos. Este resultado caracteriza a geometria pseudo-esférica. (Hipótese do ângulo agudo - Lobatschewski).

Minding e Codazzi chegaram às fórmulas da trigonometria da pseudo-esférica que satisfazem os elementos dos triângulos geodésicos das superfícies de curvatura negativa, multiplicando os lados por $i = \sqrt{-1}$ e mantendo fixos os ângulos dos triângulos esféricos. As fórmulas,assim encontradas, coincidem com as da geometria de Lobatschewski-Bolyai. BONOLA[7].

Considerado no aspecto integral, o espaço é lobatschewskiano ou riemanniano.

Os trabalhos de Gauss sobre as propriedades das superfícies, procurando estudá-las pela sua própria estrutura intrínseca, desprezando qualquer referência a sistemas de eixos situados para fora de seus limites no espaço, serviram de apoio ao desenvolvimento na física destas concepções novas, unificando-as num corpo de doutrina que permitiu a Minkowski construir sua teoria física do espaço.

O tempo não é mais independente como se evidencia da quarta equação do grupo de Lorentz, sendo criado o contínuo espaço-tempo em que este último entra sob o aspecto de imaginária $i = \sqrt{-1}$,fazendo lembrar a observação de Minding e Codazi: "Se nas fórmulas trigonométricas da esfera se mantem fixos os ângulos e se multiplicam os lados $i = \sqrt{-1}$, obter-se-ão as relações a que satisfazem os elementos dos triângulos geodésicos das superfícies de curvatura constante negativa. BONOLA[7].

Gauss imaginou um sistema de curvas construído de maneira que com seu auxílio se pudesse determinar a posição geométrica de um ponto qualquer da superfície, demonstrando ainda que o contínuo tridimensional de Euclides, homogêneo e isótropo, só é possível em casos de regiões limitadas do universo.

Veja-se como Gauss apresenta a concepção de seu sistema de eixo:

Traça-se uma família de curvas u e v, caracterizando-se cada uma por um número (Figura 7).

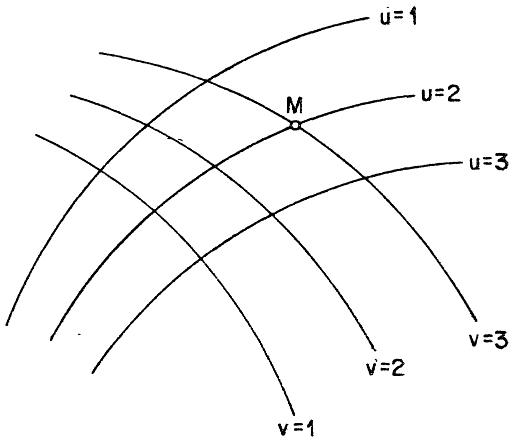

fig. 7

Entre as curvas de valor u = 1 e v = 2 imaginar-se-á um número infinito de curvas correspondentes a todos os números reais compreendidos entre 1 e 2.

Tem-se assim um sistema de curvas u e de curvas v infinitamente aproximadas e a cada ponto M da superfície correspondem valores bem determinados de v e de u — valores que são designados de coordenadas de Gauss.

Exemplificando, o ponto M representado na figura tem por coordenadas de Gauss:

$$u = 2$$

e

$$v = 3.$$

Em casos especiais é possível escolher retas ortogonais para as curvas u e v e só então ter-se-á que os pontos da superfície considerada constituem um contínuo euclidiano. PORTELA[16].

Vê-se que Lobatschewski estendeu analiticamente ao espaço os resultados de sua própria hiperbólica.

Primeiramente apresenta-se a demonstração do seguinte teorema: A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor que dois retos (2d).

Seja o triângulo retângulo ABC na Figura 8.

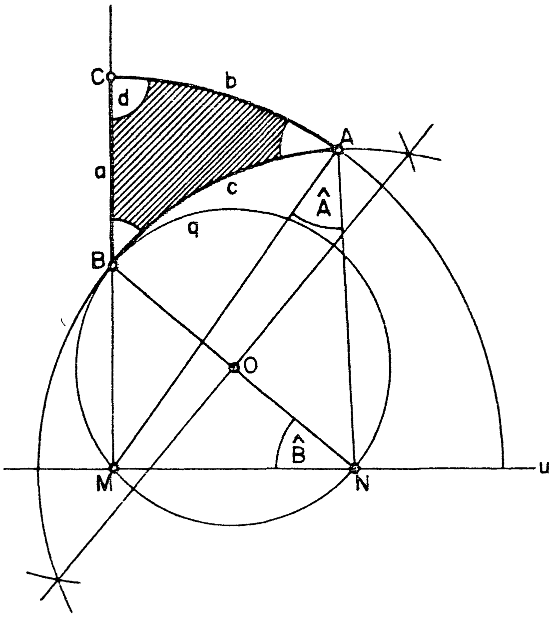

fig. 8

Seus lados a, b e c se apresentam, respectivamente, em forma de um segmento da perpendicular euclidiana da reta u e de um arco de circunferência com centros em M e N. O ângulo C é reto. O ângulo A é igual ao ângulo entre as tangentes das circunferências b e c no ponto A, o mesmo acontecendo com o ângulo entre os raios NA e MA destas circunferências, de modo que o ângulo $\hat{B} = B\hat{N}M$.

Constrói-se um segmento BN, como diâmetro à circunferência euclidiana q; esta tem só um ponto comum B com a circunferência c, pois o seu diâmetro é o raio da circunferência c. Pelo ponto A que se encontra fora do círculo limitado pela circunferência q e, por conseguinte,

$$\hat{A} = M\hat{A}N < M\hat{B}N.$$

Em virtude da igualdade $\widehat{MBN} + \hat{B} = d$, teremos:

$$\hat{A} + \hat{B} < d;$$

por isso,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2d.$$ c.q.d. SMOGORZHEVSKI[9].

Considera-se, assim, um plano α e um par de pontos A_1, A_2 em α; se os pontos A_1, A_2, deslocam-se, posições sucessivas e infinitamente próximas do triângulo OA_1A_2, a projeção A_1, A_2 dos pontos ocupará posições do triângulo OA_1A_2, também sucessiva e infinitamente próximas descrevendo na superfície S o triângulo $OA_1'A_2'$. Diz-se que o triângulo $OA_1'A_2'$ e a projeção cônica ou central do triângulo OA_1A_2 na superfície limite S.

Cabe, aqui a seguinte notação:

$$A_1A_2 = d, \quad OA_1 = r_1, \quad OA_2 = r_2,$$

$$A_1OA_2 = \theta, \quad \overset{\frown}{OA_1'} = \rho_1, \quad \overset{\frown}{OA_2'} = \rho_2.$$ (Figura 9).

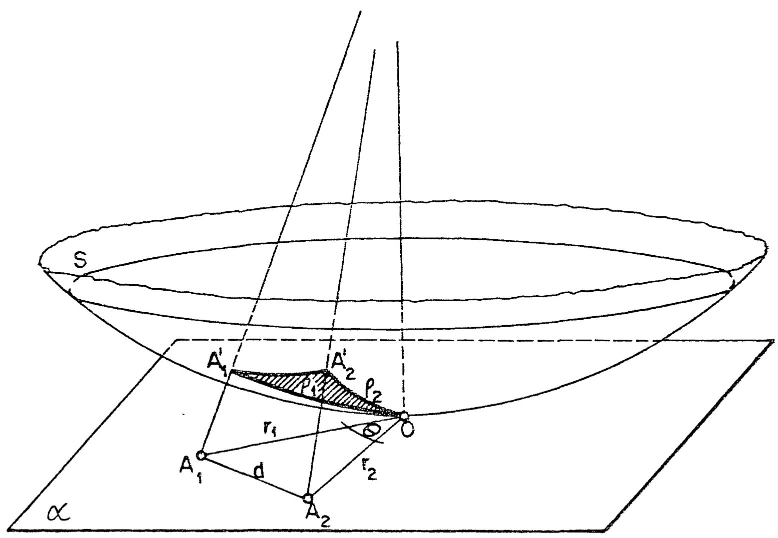

fig. 9

4. O ESPAÇO RIEMANNIANO E SUA MANIFESTAÇÃO PERCEPTIVA

Riemann foi quem primeiro previu a influência do conteúdo material do espaço sobre a quadrática diferencial que se constitui como característica da natureza de vários tipos possíveis de espaço. No seu caso, os coeficientes são funções das variáveis, variando, por sua vez, continuamente, de ponto a ponto; e de maneira alguma podem se tornar constantes, pois assim recair-se-á no caso euclidiano.

Com essas descobertas, o "grupo de transformações de Lorentz, Minkowski, pôde construir o seu contínuo físico quadridimensional. E Einstein, em síntese admirável,compôs a sua relatividade restrita, em que o espaço era minkowskiano.

Daí o segundo esforço genial de Einstein com sua "relatividade generalizada", em que o espaço se tornou não-euclidiano, mas precisamente, riemanniano.

Os próprios relativistas esforçam-se por distinguir, nitidamente, os dados do tempo dos dados do espaço. E se eles aparecem fundidos num só invariante, é por necessidade de uma generalização maior, em face das dificuldades encontradas na medida dos intervalos elementares do universo.

Riemann genialmente generalizou as geometrias, tornando-as também ciências experimentais, que vieram adaptar-se melhor às realidades objetivas, e um horizonte novo, mais amplo, foi descortinado para o conhecimento mais perfeito, por isso mais próximo do real, dos fenômenos da natureza em suas aplicações.

A Riemann coube a prioridade de encontrar um sistema de geometria conciliável com a hipótese do ângulo obtuso de Saccheri, considerando discutível, além do das paralelas, o postulado que considera a reta infinita, substituindo esse conceito pelo de ilimitada. Ele dá importância capital à distinção entre infinito e ilimitado.

O quadrilátero ABCD abaixo é chamado quadrilátero de Saccheri se $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ e DA = DB. Seja N o ponto médio de $\overline{DC}$ e M o ponto médio de $\overline{AB}$ (Figura 10).

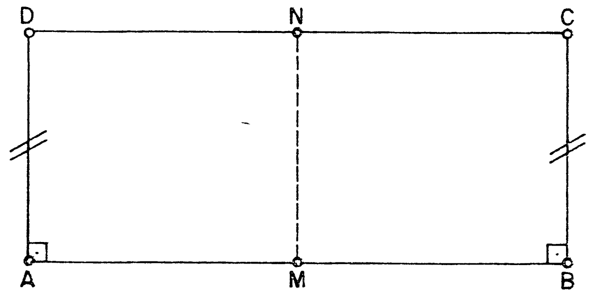

fig 10

É fácil provar que $\overline{MN} \perp \overline{DC}$, $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ e $\hat{D} = \hat{C}$. Os ângulos D e C são chamados ângulos de topo do quadrilátero de Saccheri. Três hipóteses diferentes podem ser consideradas.

(A) os ângulos do topo são agudos;

(B) são retos;

(C) são obtusos.

A hipótese (A) leva à geometria hiperbólica; a hipótese (B) leva à euclidiana; a hipótese (C) leva à geometria elíptica (Riemann). No caso da hipótese (C) somente se os axiomas da geometria absoluta forem modificados de maneira a permitir que a reta seja finita, embora ilimitada, com relações circulares de ordem em vez de relações lineares. ADLER[17].

O que Riemann considera indiscutível é a imitabilidade do espaço, propriedade ajustável indiferentemente às hipóteses da reta infinita e da reta finita. Partiu de uma região do plano, a chamada região normal, considerando como postulados as proposições elementares reveladas pelos sentidos, relativas à congruência da reta, admitindo que as propriedades da região inicialmente considerada se possam estender em torno de um ponto qualquer do plano, porém nunca ao plano inteiro. Assim criou a geometria mais geral possível, encontrando o sistema uma interpretação firme na geometria das superfícies de curvatura constante.

É importante notar que essa harmonia só se verifica quando a análise está subordinada a um conceito diferencial. Ao contrário, se se procura um sentido integral, encarando a superfície inteira para analisar a geometria numa superfície de curvatura constante, as propriedades fundamentais da região normal deixam de ser válidas.

Dois planos foram por ele considerados completos para sua geometria: o plano-esfera e o plano elíptico.

Os fundamentos de sua geometria espacial procuram dar aos postulados uma significação de rigorosa certeza, indiscutivelmente condicionados à experiência e verificáveis apenas em escalas limitadas. Tomando-se por base as coordenadas, representar-se-ão os pontos por x_1, x_2 e x_3. A qualquer linha, pois, corresponderão três equações paramétricas:

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t),$$

procurando-se determinar uma função (s) do parâmetro (t), que expresse o comprimento de um arco de curva, sabendo-se que o comprimento deste arco é igual à soma dos comprimentos em que o podemos supor dividido; verificar-se-á que essa determinação só será completa quando for conhecida a distância elementar (ds) de dois pontos infinitamente próximos tendo para coordenadas:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3,$$

$$x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2, \; x_3 + dx_3.$$

Riemann parte de hipóteses que vêm satisfazer de modo mais simples, assumindo como expressão elementar do quadrado da distância (ds^2) uma forma quadrática, sempre positiva, nas diferentes variáveis, ou seja:

$$ds^2 = \sum a_{ij} dx_i dx_j,$$

na qual as a_{ij} são funções de x_1, x_2 e x_3.

Admitindo o princípio de superposição das figuras, demonstra-se que as funções a_{ij} devem ser de tal natureza que permitam, após mudança do sistema de coordenadas, que (ds^2) tome a forma:

$$ds^2 = \frac{dx_1 + dx_2 + d_3^2}{1 + \frac{k}{4}\,(x_1^2 + x_1^2 + x_3^2)} \, .$$

A constante K, semelhante à de Gauss, foi denominada por Riemann de curvatura do espaço.

Para os valores positivo, nulo e negativo desta constante, tem-se os espaços de curvatura positiva, nula e negativa. BONOLA[7].

O primeiro tipo de espaço, de curvatura positiva, caracteriza-se pelo fato de em qualquer dos seus planos valer a geometria esférica ou elíptica de Riemann.O segundo tipo, de curvatura nula, identifica-se com a geometria de Euclides. O terceiro, de curvatura negativa, permite em qualquer dos seus planos a existência do sistema pseudo-esférico de Lobatschewski-Bolyai.

Vê-se, assim, que Riemann estendeu analiticamente ao espaço os resultados de sua geometria nas superfícies. Se o plano é uma região limitada — a chamada região normal de superfície curva — e se fora do plano, num ponto de vista integral, inexiste a geometria euclidiana, num espaço com idênticas propriedades só em regiões limitadas, especialíssimas, será válida a construção de Euclides.

4.1 CAMPO DE VISÃO

O campo visual tem pequena zona central em que se fazem as imagens da visão direta e, em torno dela, uma outra zona que se vai gradativamente diluindo, perdendo nitidez, à proporção que se afasta do centro, e onde se formam as imagens da visão indireta.

O feixe de projeções angulares, de perspectivas, que o constitui, tem a forma de um cone e qualquer secção ortogonal desse cone é circular, assim como sua própria base é constituída pela calota de uma esfera. Nem a secção nem a calota, é necessário que se esclareça, são perfeitamente circulares e esféricas; sofrem ambas uma deformação no sentido sagital; o ângulo vertical é de 150°: PORTELA[4]. Onde está, pois, a manifestação deste campo?

Até a sua conformação geral, esférica, ligeiramente achatada, tendendo para elíptica, é riemanniana, embora sua estrutura intrínseca não ser homogênea, nem isótropa, nem contínua.

Observando as margens de uma estrada em que viage num veículo de velocidade que ultrapasse a dos movimentos costumeiros, ver-se-á que sofrem uma encurvatura, parecendo que se vão abrindo à proporção que o veículo avança e que se vão fechando para trás, dando a idéia de que se encontram animadas de movimento circular.

O encurvamento parecerá tanto mais acentuado quanto maior for a velocidade de que se esteja animado e quanto mais distantes estiverem as margens observadas.

Diante desse exemplo, em que se praticou a observação de um objeto, em estado de movimento ou não, em que as percepções de sua imagem visual foram apreendidas encurvando-a ou contraindo-a, onde está a euclidianidade das manifestações perceptivas visuais?

Se o campo visual não é euclidiano, conseqüentemente, suas manifestações perceptivas também não o são.

Se se traçar uma reta horizontal bastante extensa que possa cortar, de uma margem a outra, um campo de visão, e se for mirado no centro, ver-se-á encurvar-se. E é o que acontece com a linha do horizonte, que se apresenta curva ao ser humano.

Se, por outro lado, traçar-se uma reta vertical, também bastante extensa, e se procurar fazer uma visão direta em um ponto do espaço, ver-se-á que ela sofre uma deformação, ou seja, um encurvamento tanto maior quanto mais afastado dela estiver o ponto mirado.

Esses dois exemplos demonstram bem que, à proporção que se vai afastando do campo de visão direta e a imagem se vai fazendo mais para a margem do campo visual, sofre ela um encurvamento. Assim, apenas no foco, ou zona mui restrita (diferencial), as imagens se fazem euclidianas; apenas no foco (região normal no sistema de Riemann) é possível a homogeneidade e isotropia das imagens; a impossibilidade de euclidianizá-las,porém, começa desde que se procure estender ao campo visual todo, as propriedades desse foco, porquanto as imagens já se não fazem perceptivas euclidianas, sofrendo um encurvamento em virtude de não ser homogênea nem isótropa a zona do campo em que se encontram.

Esses exemplos são tidos comumente por ilusões ópticas, mas, não passam de ilusões da vista, pois, se alguma coisa no caso foi iludida, esta há de ser a educação que se mostrou insuficiente para fazer nascer esperanças às naturais manifestações perceptivas.

A fim de se evitar os inconvenientes da perspectiva euclidiana — deformações laterais, conservação do paralelismo das perpendiculares, campo de visão estreito, ponto de vista obrigatório — propõe-se uma manifestação perceptiva com o campo visual completo, uma "tendência" mais completa à apreensão da localização recíproca dos objetos no espaço. FLOCON e TATON[13].

Contudo, admitida uma "tendência" perceptiva no espaço riemanniano, isto é, sobre uma superfície esférica, será necessário aceitar igualmente sua conseqüência mais chocante em relação aos hábitos visuais: a representação de algumas retas por curvas. Na figura 11 representa-se a perspectiva de uma esfera na qual se representa um triângulo de Riemann.

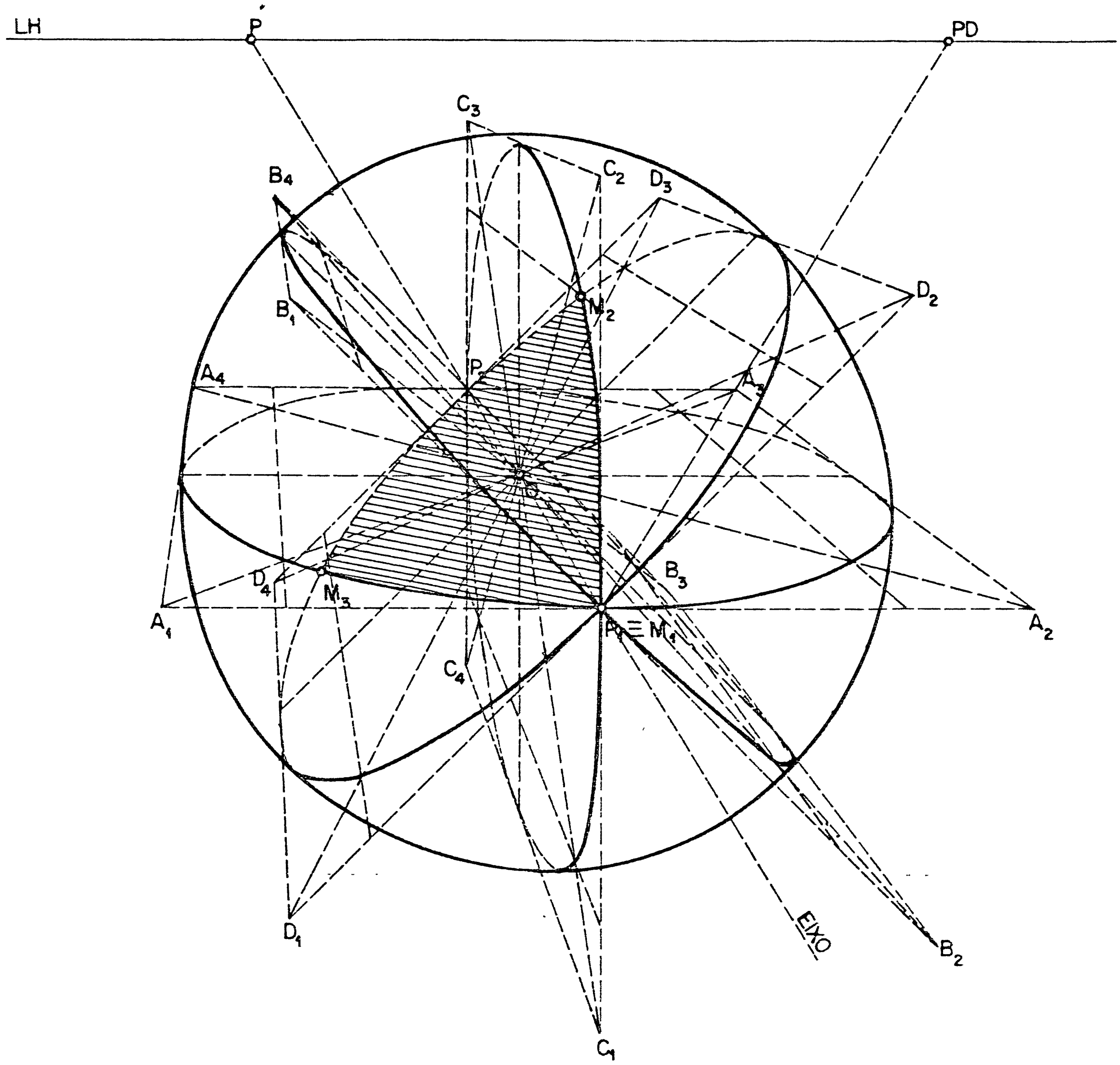

fig. 11

Essa maneira de representação, será largamente compensada pela conquista de maior proporcionalidade na visão espacial e por uma impressão mais profunda e ampla do espaço, objetivo de toda perspectiva; sem falar na vantagem adicional representada pela independência do ponto de vista ganha pelo espectador.

Num primeiro estágio, o observador medirá ou avaliará os ângulos que pontos característicos dos objetos formam entre si e com o observador. Esses ângulos, cujo vértice comum está situado no ponto de vista do observador, só poderão ser montados de maneira rigorosa sobre uma superfície esférica, na forma de arcos.

Em um segundo estágio, um círculo de raio qualquer servirá de plano do quadro. O perímetro deste círculo representa, portanto, o limite do campo visual, correspondendo a um ângulo de 180°. A linha do horizonte torna-se o diâmetro horizontal do quadro, desde que este seja suposto em posição vertical. Todo ponto do espaço é localizado por duas medidas angulares α e β, referidas ao eixo vertical do quadro e a um eixo perpendicular a ele. Estas medidas são representadas no quadro por duas grandezas: um raio formando um ângulo α com a vertical, e um ponto sobre ele, situado a uma distância do centro equivalente ao comprimento de arco correspondente ao ângulo β. O raio total representa um quarto do círculo máximo. (Figura 12).

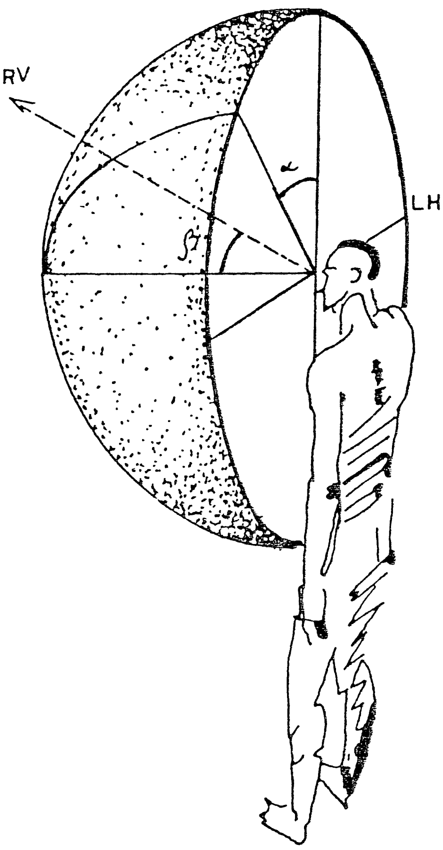

fig. 12

As retas em geral, arcos de círculo máximo sobre o <u>hemisfério de projeção</u> imaginário, tornam-se, no plano do quadro, ou seja, na construção perspectiva, arcos de círculo ou segmentos de arco de círculo, cuja corda é sempre o diâmetro do plano do quadro, exceção feita às retas que se confundem com um diâmetro. FLOCON e TATON[13].

A perspectiva sobre uma superfície esférica possibilita a integração de todos os elementos do campo visual no plano do quadro.

5. DISCUSSÃO SOBRE A IMPORTÂNCIA DAS DIFERENTES MANIFESTAÇÕES PERCEPTIVAS PARA O CURRÍCULO DE DESENHO

O presente estudo permite que se proponham novos instrumentos para as manifestações perceptivas relativas aos espaços euclidianos e não-euclidianos.

É necessário que se superem as velhas fórmulas, sugerindo outras novas, em consonância com o desenvolvimento científico atual. Para esse fim existe exuberante material experimental e métodos que são testados e aprovados pelos grandes avanços que se têm empreendido no domínio do conhecimento.

É óbvio que não se pretende destruir o acervo científico que a inteligência humana vem construindo através dos séculos. O que se propõe num esforço de síntese é que o pensamento antigo seja reconhecido como caso particular das novas teorias.

O esforço de Riemann superou mas não destruiu o esforço de Euclides: as geometrias novas, superando-a, não destruíram a velha geometria.

Até hoje a Psicologia, e com ela a Pedagogia, aceitam a tese de que o conceito de espaço depende exclusivamente das sensações visuais, tácteis e motoras, que, no entender, de B. PORTELA[4], são simples concomitantes projetivos e métricos das impressões espaciais puras. Não se quer dizer com isso,que seja relegado a segundo plano o valor das sensações nas percepções do espaço.

Importa lembrar que as impressões métricas e projetivas trazem deformações resultantes da experiência sobre formas artificiais euclidianas, advindo daí processos de abstração tendentes a euclidianizar a forma das coisas e fatos naturais.

E todos conhecem, neste particular, o valor da educação, principalmente pelo papel desempenhado pela Geometria Descritiva e pelo Desenho.

Percebe-se claramente que a criança vai elaborando a representação mental das suas manifestações perceptivas da realidade exterior por intermédio de uma série de processos de análise e síntese, em função da experiência que o currículo lhe oferece.

E como o currículo até hoje só tem oferecido modelos euclidianos, parece claro que a criança não poderá,analisando formas euclidianas, organizar sua síntese perceptiva das coisas exteriores, senão dentro da estrutura da geometria euclidiana.

Em virtude da ação disciplinadora da Geometria Descritiva e do Desenho, substituindo os modelos não-euclidianos por modelos artificiais euclidianos, a criança, tendo diante de si modelos deformados, acaba por deformar também sua percepção habituando-se a pensar por processos excessivamente abstratos embora lógicos.

Basta lembrar os objetivos do Desenho e da Geometria Descritiva para compreender a extensão e profundidade do valor destas disciplinas na educação da percepção estruturando a visão e a motricidade, criam um recurso perceptivo representativo, para o julgamento das formas, das distâncias, das dimensões e das perspectivas. Note-se que todos esses fins se reduzem, no fundo, a questões de métrica e projetiva.

A descoberta de que as propriedades do espaço real não podem resultar de considerações a priori, é a principal conseqüência dos sistemas não-euclidianos. As concepções modernas da estrutura do universo físico são totalmente contrárias à estrutura euclidiana do espaço físico.

O grau de aproximação que atingem nas experiências , faz crer que a geometria euclidiana não representa os fenômenos na vizinhança das massas gravitacionais, e que se torna necessário, para isso, recorrer à noção de espaço curvo. AMOROSO COSTA[5].

Se a geometria euclidiana não é intuitiva, o conhecimento dela, ou nela fundamentado, será abstrato, não só no sentido de que não esvazia suficientemente os fenômenos de seus conteúdos relacionais, mas apenas nas relações simétricas e principalmente no sentido de que não encontra apoio nas representações da realidade nos sentidos. E quanto mais se repete (o que se faz no ensino) na consciência a fórmula euclidiana, tanto mais o espírito se habitua a afastar-se das condições concretas fornecidas pela experiência, para pensar em termos de "puras" relações que, no caso, são deformadas. PORTELA[4]. Euclides Roxo, em seu livro "Matemática na Educação Secundária", diz: "As experiências executadas por Judd e Cowling sobre o desenvolvimento "perceptual" mostram o contraste entre o modo como o espírito procede no desenvolvimento não científico das idéias de forma e de arranjo espacial e os tipos de análise característicos da Geometria. Nesse contraste entre a percepção do espaço e as generalizações da Geometria, vê Judd a razão por que muitos alunos não entendem a Geometria. PORTELA[4].

Da afirmativa de Judd, percebe-se que ele põe em relevo o contraste entre a simplicidade da experiência vulgar das noções de forma e de espaço e a complicada abstração do sistema geométrico dominante, na análise científica do espaço, sem se afastar, contudo, do sentido euclidiano.

Como, porém, se compreenderia esse contraste, se a geometria de Euclides fosse intuitiva, a que é dominada pelos sentidos?

Esta é uma questão muito profunda:

A criança entra em contacto com o mundo exterior e observa que todos os seus atos estão sujeitos às influências de forças que ela não compreende, e que tudo é atraído para a Terra; experimenta, assim, as influências da gravitação, e ar ranja o equilíbrio do seu corpo.

Na procura contínua de adaptar-se, livrando-se de certos acidentes, exercita as suas possibilidades sensoriais , principalmente visuais e motoras. Por meio dessas sensações , organiza a síntese da manifestação perceptiva do espaço. E, como é visto no espaço riemanniano e sua manifestação perceptica, não sendo euclidianas as referidas sensações perceptivas, as experiências comuns, concretas, do espaço se distanciam dos postulados e teoremas da geometria vulgar.

Daí não se entender por que ela se apresenta como irreal, em contraste com a experiência espontânea não-euclidiana que possui.

Outros argumentos ainda podem ser considerados:

Alguns aviadores, depois de algumas horas de vôo, voltando a novos exames, passam a responder, a certos testes de orientação, de maneira diferente da que haviam respondido num primeiro exame, isto é, antes de voar.

Só se pode compreender isso no caso em que o espaço natural que experimentou, ao voar, distante de todos os modelos artificiais euclidianos, lhes permita novos conceitos perceptivos de distância, de forma, de dimensão, de perspectiva, em suma, um senso mais amplo de um espaço livre daquele geometrismo rígido, fechado, cúbico, das atividades que são desenvolvidas em terra.

Não estarão nesse caso também a grande maioria das cha-

-madas ilusões ópticas?Acredita-se que sim.Conforme VURPILLOT[18] pode-se conceber dois tipos de efeitos possíveis sobre ilusão: um aumento e uma diminuição. Todos os dois provêm da mesma fonte: a atividade perceptiva do sujeito. Essa atividade perceptiva cresce com a idade. Sendo assim, VURPILLOT[18] é de opinião que os fenômenos evidenciados por ela ficarão mais intensos com a idade: atividade de comparação, de análise e de relacionamento.

Quanto mais o sujeito analisa a linha dos traços, melhor ele percebe as relações existentes entre seus elementos; isto explica por que a ilusão tende a aumentar com a repetição. Argumenta VURPILLOT[18] que se as duas conseqüências opostas da atividade perceptiva fossem da mesma força em todas as idades, elas se compensariam e não se notaria nenhuma evolução genética da ilusão.

A natureza da estrutura perspectiva, as curvas dentro das quais se passam os fenômenos físicos, até os arranjos moleculares dos estados da matéria, tudo aí está demonstrado que as relações do real com o sensório não se fazem da maneira euclidiana. PORTELA[4].

E como se explica o fato desses espaços não serem euclidianos na realidade e passarem a sê-lo no pensamento?

A resposta mais razoável é que o ensino tradicional. cria o hábito da abstração. O raciocínio se desenvolve,assim, como caso particular, operando num campo de intuições nulas onde, só se torna possível o paralelismo de Euclides.

Em face de tudo que se viu, poderá o currículo, no que tange às percepções do espaço, dar novos rumos ao Desenho e à Geometria Descritiva? Acredita-se que sim, bastando que se procure criar novos valores mentais, não permitindo que o pensamento seja usurpado por fórmulas representativas artificiais — as impostas pela velha geometria.

Em síntese, se o espaço sensorial não é euclidiano e se se der a deformação euclidiana por intermédio das sensações visuais e motoras em virtude de suas características métricas e projetivas adquiridas por processos educativos, pergunta-se: É possível modificar a estrutura mental do homem relativa às percepções espaciais, tornando-a não-euclidiana?

A impossibilidade de tornar não-euclidiana a estrutura mental do homem no que diz respeito às percepções espaciais permite afirmar que em condições especiais deve-se:

a) fundamentar uma Geometria métrica em face a hipóteses não-euclidianas;

b) fundamentar uma Geometria projetiva em face das mesmas hipóteses;

c) subordinar, às propriedades métricas e projetivas acima citadas.

A fundamentação de uma geometria métrica não-euclidiana fica estabelecida pelos estudos de Riemann. Efetivamente, abandonado o postulado da reta infinita e aceito o da sua ilimitabilidade, partindo de uma região limitada à chamada região normal, demonstra-se a impossibilidade de se estender à superfície inteira as propriedades da região estudada.

BONOLA[7] se estende a uma fundamentação de uma geometria projetiva em face dos sistemas não-euclidianos e da impossibilidade, neste caso, de subordinar as propriedades métricas das figuras às suas propriedades projetivas.

São dele as expressões: "Se no espaço é válida a geometria de Riemann, a fundamentação da Geometria projetiva não oferece dificuldade alguma pelo fato de se encontrarem desde logo verificadas as propriedades gráficas que estão na base da projetiva ordinária depois da introdução dos 'entes' impróprios".

Para subordinar as propriedades métricas às projetivas, é preciso considerar as primeiras não como propriedades gráficas das figuras em si, mas como relações gráficas dessas figuras com entidades métricas fundamentais, ficando, dessa maneira, satisfeitas as duas últimas condições.

Se se puder dar direção métrica projetiva às geometrias não-euclidianas, bastará que se lhe condicione as sensações visuais para se ter se modificado a nossa estrutura mental relativa às percepções do espaço, harmonizando-a com o espaço geométrico e o físico.

Aqui, neste processo de condicionamento, começa a obra educativa. E como em fase preparatória,no presente estudo propõe-se descrever elementos intuitivos-experimentais da geometria não-euclidiana, baseados:

a) em dados perceptivos imediatos dos fatos naturais, procurando desde cedo, antes que se estruture o hábito do espaço euclidiano, desenvolver na criança a compreensão do espaço ilimitado, mas finito;

b) na experiência pela construção de figuras (retas, ângulos, polígonos, círculos) no plano, nas superfícies interior e exterior da esfera e em outras superfícies curvas, para destacar as mudanças de propriedades da mesma figura quando construída em superfícies diferentes.

O enunciado que as propriedades das figuras sofrem quando são construídas em superfície que não a plana pode causar estranheza pois se está acostumado a alguma coisa inteiramente diversa: não o é, porém, para a criança, que ainda não possui nenhum hábito geométrico. O simples enunciado,por exemplo, de que a distância mais curta entre dois pontos pode deixar de ser um segmento de reta, parece absurdo, uma vez que se está habituado a pensar no plano.

Se se tomar dois pontos afastados em uma superfície curva, a linha que os une há de forçocamente acompanhar a curvatura da superfície e, neste caso,é claro que a distância entre eles não poderá ser um segmento de reta e sim uma curva.

Os serviços prestados pelo teorema de Lobatschewski são valiosos, haja visto que na figura 8 da pág. 41, a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos de qualquer triângulo são menores que dois ângulos retos e proporcionais à superfície do triângulo.

Se na superfície limite se fizer variar a área do triângulo, construindo-o menor ou maior, a simples abertura dos ângulos fará a criança compreender, de imediato, a veracidade da proposição.

É possível fazê-lo também para a geometria de Riemann:

1º- Por um ponto fora de uma geodésia não se pode tirar nenhuma paralela à referida geodésia. Realmente,se se traçar na superfície de uma esfera um círculo máximo (geodésia), por qualquer ponto da esfera que se trace uma outra geodésia (círculo máximo), encontrar-se-ão ambas em dois pontos opostos.

2º- Todas as perpendiculares a uma geodésia se encontram em um ponto eqüidistante a todas elas; isso equivale dizer que por um ponto fora de uma geodésia se pode tirar mais de uma perpendicular a ela. Se se traçar um círculo máximo,levantando-se várias perpendiculares, verificar-se-á que todas elas se encontrarão em um ponto eqüidistante, que será pólo de todos os círculos máximos de que fazem parte as perpendiculares.

3º- A soma dos ângulos de um triângulo qualquer é maior que a soma de dois ângulos retos. A diferença chama-se excesso do triângulo. E a área do triângulo é proporcional ao seu excesso. Isso significa que quanto maior for o triângulo, tanto maior será também a diferença entre a soma dos seus ângulos e a de dois retos. Realmente, se se construir um triângulo qualquer na superfície de uma esfera, os seus lados, abaulados, abrirão mais os seus ângulos, e quanto maior for a área do triângulo tanto maior será essa abertura.

O teorema de Gauss que sintetiza os casos de Lobatschewski e Riemann presta inestimáveis estudos, haja visto que a diferença, a igualdade e o excesso da soma dos ângulos internos de um triângulo sobre dois ângulos retos dependem do raio de curvatura da superfície. Construindo um triângulo qualquer na superfície limite (raio de curvatura negativo), na plana (raio de curvatura nulo) e na superfície esférica (raio de curvatura positivo), simples variação da soma e seus ângulos internos convencerá logo a criança da modalidade da superfície.

Do ponto de vista da didática o acima exposto deve ter caráter estritamente empírico, não apenas se convidando os alunos à construção das figuras, mas também exercitando-os na medida das superfícies, ângulos, polígonos, etc., de tal maneira e até que estes percebam que essas figuras geométricas sofrem processos perceptivos.

c) no estudo de certos gráficos, resultantes das experiências da Física, com as relações tipológicas das variações de certos fatores;

d) na aplicação do sistema de eixos polares;

e) em noções elementares e bem esclarecidas da métrica e projetiva não-euclidianas;

f) na noção de geometria projetiva, esforçando-se por empregar a métrica de Riemann; depois o desenvolvimento da Geometria Projetiva e da Geometria Descritiva que melhor se ajuste às propriedades das manifestas perceptivas no campo visual, e fundir os conceitos métricos nos projetivos.

Em primeiro lugar, deve-se desenvolver na criança a noção de "geometria parcial", que, no dizer de AMOROSO COSTA[5] é o conjunto das propriedades geométricas que não sofrem alterações quando se realizam as transformações pertencentes a um grupo determinado.

O valor dos elementos da geometria intuitivo-experimental, que aqui se propõe, fundamenta-se:

1º - <u>no aspecto experimental</u>:

Aos que pensam serem as geometrias não-euclidianas um sonho irrealizável, um domínio do conhecimento puramente discursivo, sem rélações prováveis com a realidade, responde-se com o pensamento de AMOROSO COSTA[5]: "Pode parecer que a geometria euclidiana formada e desenvolvida em contacto com a experiência externa seja a única adequada aos resultados das medidas físicas — e nesse caso as outras geometrias não passariam de puras abstrações, destituídas de interesse prático". Nenhuma medida, por mais requintada que venha a ser a técnica empírica, permitirá jamais concluir que o espaço é realmente euclidiano, o que corresponderia a um valor infinito da constante K. Na verdade os triângulos da experiência se apresentam ora como lobatschewskianos, ora como riemannianos, com diferenças e excessos sempre muito pequenos, mas diferentes de zero.

2º - <u>no caso da intuição</u>:

Não é necessário negar os argumentos expandidos pela geometria de Euclides. Tudo que, no particular, se tem dito da Geometria de Euclides é valido e,com maior soma de razões, para o presente estudo. "Não se pode tudo demonstrar e não se pode tudo definir;e será sempre preciso recorrer à intuição." Poincaré. PORTELA[4].

3º - <u>nos assuntos geométricos para a questão do espaço perceptivo:</u>

O indivíduo cria pelo sensório as suas percepções do espaço e quando procura representá-las geometricamente opera dentro da Geometria. Os elementos geométricos são o vocabulário para a linguagem espacial. De fato, basta lembrar os dois fins máximos da Geometria a perceptiva das formas, a perceptiva das grandezas espaciais,para poder defini-la como a Ciência do espaço na composição e análise das teorias das formas, das grandezas e relações espaciais.

A geometria untuitivo-experimental tem por fim fazer a criança trabalhar com matéria geométrica mais real, desenvolvendo uma intuição que afaste o pensamento da criança dos rígidos cânones do euclidianismo.

Do ponto de vista da epistemologia geométrica, Piaget (1972) lembra que a opinião comum era a de ver inicialmente,a intuição espacial essencialmente como uma leitura perceptiva do mundo exterior e a seguir uma leitura de imagens que a percepção fornecia, ou poderia fornecer. FAGUNDES[14]. "Ela é a inteligência elementar do espaço em nível ainda não formalizado", afirma Piaget. FAGUNDES[14].

A dinâmica da Geometria leva a criança a fazer uma interpretação inteligente das figuras, cada vez com maior precisão, exercitando-a na linguagem para expressar as imagens que as figuras despertam.

Segundo alguns autores, ela deve ser iniciada muito cedo, aos 7 ou 8 anos, fazendo apelo insistente às sugestões sensoriais e perceptivas, que são fatores essenciais para compreender as demonstrações que hão de vir numa futura fase de generalização.

E deve, dos 13 aos 17 anos, quando já estiver bem organizado o senso da perspectiva, avançar pelo caminho da Geometria não-euclidiana.

6. CONCLUSÕES

O espaço real das sensações é função da experiência física porque a ação se manifesta sob a forma de atividade sensório-motora regulando as percepções.

Os sistemas sensoriais, como forma anatômica dos canais semicirculares, hão de reproduzir a forma geométrica do espaço real das sensações.

Os campos sensoriais e perceptivos não são euclidianos porque não há homogeneidade e isotropia nesse espaço;suas propriedades subordinam-se às das proposiçoes geométricas nao-euclidianas.

O espaço perceptivo também não é, na realidade, euclidiano; as influências persistentes da educação,principalmente com o Desenho e a Geometria Descritiva, é que o têm tornado euclidianos.

E quanto mais se repetem pelo ensino as fórmulas euclidianas, mais o espírito se afasta das condições concretas fornecidas pela realidade, firmando-se o hábito de pensar em termos deformados.

Se é possível, pela Matemática, dar uma direção métrico-projetiva (subordinada às propriedades métrica às projetivas) às geometrias não-euclidianas, condicionam as percepções visuais para se modificar a estrutura mental no aspecto das percepções do espaço, tornando-a não-euclidiana.

Se as geometrias existem simultaneamente e devem ser encaradas como geometrias dinâmicas, isto é, sujeitas a transformações sucessivas, mediante leis angulares, por que não as considerar no currículo escolar?

7. OBRAS CITADAS

01. ROZESTRATEN, Reinier J.A. Estudos psicofísicos da percepção visual espacial em pequena e grande escala; fracionamento de distâncias e elaboração de uma escala subjetiva em dists, estudo genético da ilusão de Oppel-Kundt. Ribeirão Preto, 1978. Tese de Livre Docência. Universidade de São Paulo, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto. 186p.

02. HERING, E. Beiträge zur Physiologie I, 1861, p.66-69.

03. HELMHOLTZ, H. Handbuch der physiologischen Optik III, 1866, p. 159.

04. PORTELA, B. A noção do espaço: idéias novas dentro da psicologia e suas conseqüências para a pedagogia. Tese para concurso da cadeira de Noções de Psicologia Geral e Psicologia Educacional do Instituto de Educação. São Luiz do Maranhão, 1943. 50 p.

05. COSTA, A. Idéias fundamentais da matemática. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1971. 330 p.

06. BEZEMBINDER, TH. G.G. On the Consistency of Distance Comparisons in Binocular Visual Space, Nijmegen: Psychologisch Laboratorium, Vakoroep, Mathematische Psychologie, 1977, Internal report 77 MA 03.

07. BONOLA, Roberto. Geometrias no euclidianas; exposicion historico-criticas de su desarrollo. Trad. de Luiz Gutierrez del Arroyo, Madrid, Espasa-Calpe, 1951. 224 p.

08. BOYER, Carl Benjamin. História da matemática. Trad. de Elza F. Gomide. São Paulo, E. Blücher, 1974, 488 p.

09. SMOGORZHEVSKI, A.S. A cerca de la geometria de Lobatschewski. Moscow, Mir, 1978. 80 p.

10. MISOL ALONSO, F. Nociones de geometria projectiva. 4 ed. Madrid, Aguado, s.d. 849 p.

11. PUIG, ADAM Curso de geometria métrica. 4 ed. Madrid, Nuevas, 1954. 2v.

12. PONTY, MERLEAU M. Fenomenologia da percepção. Trad.de Reginaldo di Piero, Rio de Janeiro, Gallimard,1945, 465 p.

13. FLOCON, A. & TATON, R. A perspectiva. Trad. de Raimundo Rodrigues Pereira. São Paulo, Difusão Européia do Livro, 1967. 135 p.

14. FAGUNDES, LEA DA CRUZ A psicogênese do conceito de superfície unilateral. Porto Alegre, 1977.Tese, Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

15. OLMER, P. Perspective artistique. Paris, Plon, 1943 . 2 v.

16. PORTELA, B. Da função dos canais semi-circulares.São Luiz do Maranhão, 1941. 35 p. Tese para concurso a cadeira de Fisiologia da Escola de Farmácia e Odontologia de São Luiz do Maranhão.

17. ADLER, IRVING. Matemática e desenvolvimento mental . Trad. de Anita Rondon Berardinelli. São Paulo, Cultrix, 1970.

18. VURPILLOT, E. La percepcion de l'espace. IN:FRAISSE, P. & PIAGET,J. Traité de psychologie experimentale. Paris, PUF, 1967.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. ALGAN, T.A. Perspectiva artística. Labor, Barcelona, 1951, 450 p.

02. BACHELARD, Gaston. O novo espírito científico. Trad. de Antonio José Pinto Ribeiro. São Paulo, Ed. 70, s.d.

03. BAIRD, J.C. Psychological analysis of visual space. London, Pergamon Press, 1970.

04. BARBARIN, P. La geométrie non euclidienne. Paris. Gauthier-Villars, 1928, 176 p.

05. BERKIN, N.M. Representacion de figuras espaciales. Moscow, Mir, 1977, 87 p.

06. BUSEMANN, Herbert. Planes eigth analogues to Euclidean angular bisectors. Math. Scand., 35:5-11, 1975.

07. CASTRUCCI, Benedito. Fundamentos da Geometria: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro, Livro Técnico e Científico, 1978. 195 p.

08. COXETER, H.S.M. Introduction to geometry. New York, J. Wiley, 1961. 443 p.

09. DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben. The mathematical experience. Boston, Houghton Miffilm Co., 1982. 440 p.

10. DAY, R.H. Percepção humana. Trad. de Maria Tereza Ferreira Maldonado. Rio de Janeiro, Livro Técnico e Científico, 1972. 189 p.

11. EFIMOV, N.V. Higher geometry. Translated from the russian by P.C. Sinha. Moscow, Mir, 1980, 560 p.

12. ESPAÇO. IN: ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de filosofia. São Paulo, Mestre Jou, 1970, p. 329, 566.

13. EUCLIDES, IN: ENCICLOPEDIA Universal Ilustrada Europeo Americana, Madrid, Espasa Calpe, s.d. v. 22. p. 1278-86.

14. EUCLIDES. IN: FERRATER MORA, José. Diccionario de filosofia. Buenos Aires, Sudamericana, 1958. p. 464.

15. FELISOV, A.I. Acerca de la demonstracion en geometria. Moscow, Mir, 1980. 64 p.

16. FUCHS, R. Walter. El libro de la matematica moderna. Barcelona, Omega, 1968.

17. GALCERAN, Monica Maria. Sobre a problemática do espaço e da espacialidade nas artes plásticas.Rio de Janeiro, INL. 150 p.

18. GANS, David. An introduction to non euclidean geometry. New York, Academic Press, 1973. 235 p.

19. GREGORY, R.L. Olho e cérebro. Trad. de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro, Zahar, 1979.

20. HARDY, G.H. O que é geometria? Trad. de Haroldo C.A. da Costa. Separata de Bol. da Sociedade Paranaense de Matemática, 4(3), 1961. 20 p.

21. HOCHBERG, E. Julian. Percepção. Trad. de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro, Zahar, 1982, 179 p.

22. HODGE, W.V.D. Nova visão da geometria. Trad. de Haroldo C.A. da Costa. Separata de Bol. da Sociedade Paranaense de Matemática, 2(3), 1961, 20 p.

23. KULCZYCKI, Sefan. Non euclidean geometry. Translated from the polish by Stanislaw Knapowski. London, Oxford, 1961. 208 p.

24. LACEY, Hugh. A linguagem do espaço e do tempo. Trad. de Marcos Barbosa de Oliveira, São Paulo, Perspectiva, 1972. 265 p.

25. LOBATSCHESWKI. IN: ENCICLOPEDIA Americana Internacional Edition. New York, Encyclopedia Americana Co., 1970. v. 17, p. 631-2.

26. LORIA, Gino. Guida allo studio della storia delle matematiche. Milano, Ulrico Hoepli, 1916. 64 p.

27. _____. Scritti, conferenze, discorsi sula storia delle matematiche. Padova, CELAM, 1937. 589 p.

28. LOSEE, John. Introdução histórica à filosofia da ciência. Trad. de Bonsas Cimpleris. Belo Horizonte, Ed. Itatiaia, 1979. 229 p.

29. MANNO, A. Giacomo. A filosofia da matemática. Trad. de Almino José Rodrigues. São Paulo, Ed. 70, s. d. 303 p.

30. PERCEPÇÃO. IN: ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de filofia. São Paulo, Mestre Jou, 1970. p. 722-6.

31. PERCEPCION. IN: MORA FERRATER, José. Diccionario de filosofia. Buenos Aires, Sudamericana, 1958. p. 1040-8.

32. PIAGET, J. & INHELDER, B. La representation de l'espace chez l'enfant. Paris, PUF, 1947. 581 p.

33. _____; _____; SZEMINSKA, A. La géometrie spontanée de l'enfant. Paris, PUF, 1948.

34. PRICE, Derek, Jolla. A ciência desde a Babilônia. Trad. de Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Belo Horizonte, Itatiaia, 1976. 189 p.

35. QUAINTENNE, E. Tratado metódico de perspectivas. ed. Buenos Aires, Sudamericana, 1953.

36. SHIROKOV, P.A. A sketch of the fundamentals of Lobachevskian geometry. Groningen, P. Noordhoff, 1964. 88 p.

37. SZYBIAK, A. A model of hyperbolic stereometry based on the algebra of quaternions. Colloquium Mathematicum, 32(2):277-84, 1975.

38. VERNON, M.D. Percepção e experiência. Trad. de Dante Moreira Leite. São Paulo, Perspectiva, 1974. 336 p.

39. WARNOCK, G.J. The phylosophy of perception. London, Oxford, 1968. 154 p.

40. ZAGE, Wayne M. The geometry of binocular visual space. Mathematics magazine. 53(5): 298-93, Nov. 1980.

7. OBRAS CITADAS

01. ROZESTRATEN,Reinier J.A. Estudos psicofísicos da percepção visual espacial em pequena e grande escala ; fracionamento de distâncias e elaboração de uma escala subjetiva em dists, estudo genético da ilusão de Oppel-Kundt. Ribeirão Preto, 1978. Tese de Livre Docência. Universidade de São Paulo, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto. 186p.

02. HERING,E. Beiträge zur Physiologie I, 1861, p.66-69.

03. HELMHOLTZ, H. Handbuch der physiologischen Optik III, 1866, p. 159.

04. PORTELA,B. A noção do espaço: idéias novas dentro da psicologia e suas conseqüências para a pedagogia. Tese para concurso da cadeira de Noções de Psicologia Geral e Psicologia Educacional do Instituto de Educação. São Luiz do Maranhão, 1943. 50 p.

05. COSTA, A. Idéias fundamentais da matemática. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1971. 330 p.

06. BEZEMBINDER, TH. G.G. On the Consistency of Distance Comparisons in Binocular Visual Space, Nijmegen:Psychologisch Laboratorium, Vakoroep, Mathematische Psychologie, 1977, Internal report 77 MA 03.

07. BONOLA, Roberto. Geometrias no euclidianas;exposicion historico-criticas de su desarrollo. Trad. de Luiz Gutierrez del Arroyo, Madrid, Espasa-Calpe, 1951 . 224 p.

08. BOYER, Carl Benjamin. História da matemática. Trad.de Elza F. Gomide. São Paulo, E. Blücher, 1974, 488 p.

09. SMOGORZHEVSKI, A.S. A cerca de la geometria de Lobatschewski. Moscow, Mir, 1978. 80 p.

10. MISOL ALONSO, F. Nociones de geometria projectiva. 4 ed. Madrid, Aguado, s.d. 849 p.

11. PUIG, ADAM Curso de geometria métrica. 4 ed. Madrid, Nuevas, 1954. 2v.

12. PONTY, MERLEAU M. Fenomenologia da percepção. Trad.de Reginaldo di Piero, Rio de Janeiro, Gallimard,1945, 465 p.

13. FLOCON, A. & TATON, R. A perspectiva. Trad. de Raimundo Rodrigues Pereira. São Paulo, Difusão Européia do Livro, 1967. 135 p.

14. FAGUNDES, LEA DA CRUZ A psicogênese do conceito de superfície unilateral. Porto Alegre, 1977.Tese, Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

15. OLMER, P. Perspective artistique. Paris, Plon, 1943 . 2 v.

16. PORTELA, B. Da função dos canais semi-circulares.São Luiz do Maranhão, 1941. 35 p. Tese para concurso a cadeira de Fisiologia da Escola de Farmácia e Odontologia de São Luiz do Maranhão.

17. ADLER, IRVING. Matemática e desenvolvimento mental . Trad. de Anita Rondon Berardinelli. São Paulo, Cultrix, 1970.

18. VURPILLOT, E. La percepcion de l'espace. IN:FRAISSE, P. & PIAGET,J. Traité de psychologie experimentale. Paris, PUF, 1967.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. ALGAN, T.A. Perspectiva artística. Labor, Barcelona, 1951, 450 p.

02. BACHELARD, Gaston. O novo espírito científico. Trad. de Antonio José Pinto Ribeiro. São Paulo, Ed. 70, s.d.

03. BAIRD, J.C. Psychological analysis of visual space. London, Pergamon Press, 1970.

04. BARBARIN, P. La geométrie non euclidienne.Paris.Gauthier-Villars, 1928, 176 p.

05. BERKIN, N.M. Representacion de figuras espaciales. Moscow, Mir, 1977, 87 p.

06. BUSEMANN, Herbert. Planes eith analogues to Euclidean angular bisectors. Math. Scand., 35:5-11, 1975.

07. CASTRUCCI, Benedito. Fundamentos da Geometria: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro, Livro Técnico e Científico, 1978. 195 p.

08. COXETER, H.S.M. Introduction to geometry. New York, J. Wiley, 1961. 443 p.

09. DAVIS, Philip. The mathematical experience originally published. Boston, Houghton Mifflen, 1981.

10. DAY, R.H. Percepção humana. Trad. de Maria Tereza Ferreira Maldonado.Rio de Janeiro,Livro Técnico e Científico, 1972. 189 p.

11. EFIMOV, N.V. Higher geometry. Translated from the russian by P.C. Sinha. Moscow, Mir, 1980, 560 p.

12. ESPAÇO. IN: ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de filosofia. São Paulo, Mestre Jou, 1970, p. 329, 566.

13. EUCLIDES, IN: ENCICLOPEDIA Universal Ilustrada Europeo Americana, Madrid, Espasa Calpe, s.d. v. 22. p. 1278-86.

14. EUCLÍDES. IN: FERRATER MORA, José. Diccionario de filosofia. Buenos Aires, Sudamericana, 1958. p. 464.

15. FELISOV, A.I. Acerca de la demonstracion en geometria. Moscow, Mir, 1980. 64 p.

16. FUCHS, R. Walter. El libro de la matematica moderna. Barcelona, Omega, 1968.

17. GALCERAN, Monica Maria. Sobre a problemática do espaço e da espacialidade nas artes plásticas. Rio de Janeiro, INL. 150 p.

18. GANS, David. An introduction to non euclidean geometry. New York, Academic Press, 1973. 235 p.

19. GREGORY, R.L. Olho e cérebro. Trad. de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro, Zahar, 1979.

20. HARDY, G.H. O que é geometria? Trad. de Haroldo C.A. da Costa. Separata de Bol. da Sociedade Paranaense de Matemática, 4(3), 1961. 20 p.

21. HOCHBERG, E. Julian. Percepção. Trad. de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro, Zahar, 1982, 179 p.

22. HODGE, W.V.D. Nova visão da geometria. Trad. de Haroldo C.A. da Costa. Separata de Bol. da Sociedade Paranaense de Matemática, 2(3), 1961, 20 p.

23. KULCZYCKI, Sefan. Non euclidean geometry. Translated from the polish by Stanislaw Knapowski. London, Oxford, 1961. 208 p.

24. LACEY, Hugh. A linguagem do espaço e do tempo. Trad. de Marcos Barbosa de Oliveira, São Paulo, Perspectiva, 1972. 265 p.

25. LOBATSCHESWKI. IN: ENCICLOPEDIA Americana Internacional Edition. New York, Encyclopedia Americana Co., 1970. v. 17, p. 631-2.

26. LORIA, Gino. Guida allo studio della storia delle matematiche. Milano, Ulrico Hoepli, 1916. 64 p.

27. _____. Scritti, conferenze, discorsi sula storia delle matematiche. Padova, CELAM, 1937. 589 p.

28. LOSEE, John. Introdução histórica à filosofia da ciência. Trad. de Borisas Cimpleris. Belo Horizonte, Ed. Itatiaia, 1979. 229 p.

29. MANNO, A. Giacomo. A filosofia da matemática. Trad. de Almino José Rodrigues. São Paulo, Ed. 70, s. d. 303 p.

30. PERCEPÇÃO. IN: ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de filofia. São Paulo, Mestre Jou, 1970. p. 722-6.

31. PERCÉPCION. IN: MORA FERRATER, José. Diccionario de filosofia. Buenos Aires, Sudamericana, 1958. p. 1040-8.

32. PIAGET, J. & INHELDER, B. La representation de l'espace chez l'enfant. Paris, PUF, 1947. 581 p.

33. ____; ____; SZEMINSKA, A. La géometrie spontanée de l'enfant. Paris, PUF, 1948.

34. PRICE, Derek, Jolla. A ciência desde a Babilônia. Trad. de Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Belo Horizonte, Itatiaia, 1976. 189 p.

35. QUAINTENNE, E. Tratado metódico de perspectivas. ed. Buenos Aires, Sudamericana, 1953.

36. SHIROKOV, P.A. A sketch of the fundamentals of Lobachevskian geometry. Groningen, P. Noordhoff, 1964. 88 p.

37. SZYBIAK, A. A model of hyperbolic stereometry based on the algebra of quaternions. Colloquium Mathematicum, 32(2):277-84, 1975.

38. VERNON, M.D. Percepção e experiência. Trad. de Dante Moreira Leite. São Paulo, Perspectiva, 1974. 336 p.

39. WARNOCK, G.J. The phylosophy of perception. London, Oxford, 1968. 154 p.

40. ZAGE, Wayne M. The geometry of binocular visual space. Mathematics magazine. 53(5): 298-93, Nov. 1980.