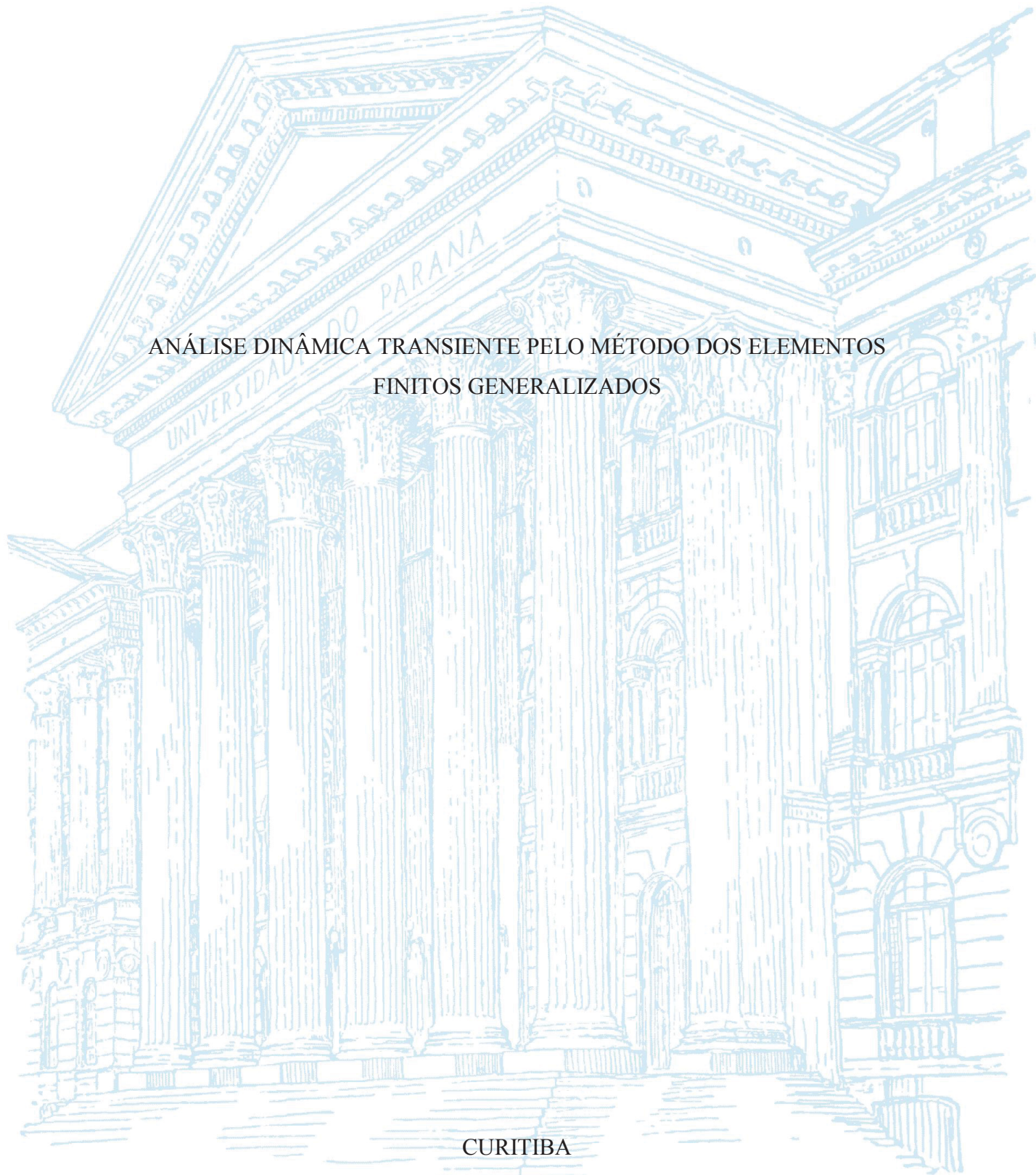


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LETICIA BARIZON COL DEBELLA

ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS GENERALIZADOS



CURITIBA

2019

LETICIA BARIZON COL DEBELLA

ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS GENERALIZADOS

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Construção Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone  
Machado

CURITIBA

2019

D286a Debella, Leticia Barizon Col

Análise dinâmica transiente pelo método dos elementos finitos generalizados [recurso eletrônico] / Leticia Barizon Col Debella – Curitiba, 2018.

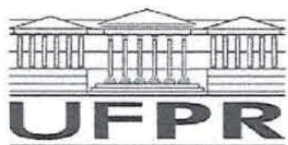
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

1. Análise dinâmica. 2. Métodos numéricos. 3. Método dos elementos finitos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Arndt, Marcos. III. Machado, Roberto Dalledone. IV. Título.  
CDD 518.25

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA DE  
CONSTRUÇÃO CIVIL

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de LETÍCIA BARIZON COL DEBELLA intitulada: **ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 20 de Abril de 2018.

MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

CARLOS EDUARDO ROSSIGALI

Avaliador Externo (UFPR)

JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO

Avaliador Externo (PUCPR)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador professor Dr. Marcos Arndt, que foi crucial para a realização deste trabalho. Ter aceitado me orientar nesta jornada foi um marco pra mim, e deixo aqui minha gratidão por esse tempo de trabalho. Estendo esse agradecimento ao coorientador deste trabalho, professor Dr. Roberto Dalledone Machado, que sempre colaborou com sugestões importantes ao desenvolvimento da pesquisa.

Devo agradecer à Rodrigo, que foi e é o grande incentivador dessa conquista. Além de todo o companheirismo ao longo dos anos, é minha inspiração diária.

Agradeço também à minha família, por entender minha ausência nos últimos anos. Em especial, agradeço à Pedro Afonso e Shenian por terem me acolhido como filha. Minha gratidão é recíproca como tal.

Agradeço por fim aos amigos que fiz no CESEC. Em especial à Patrícia, Paulo e Thamara, pelo ombro amigo nos dias difíceis, e também por toda a ajuda que me deram.

## RESUMO

O Método dos Elementos Finitos (MEF), embora amplamente utilizado como método de solução aproximada, possui algumas limitações quando aplicado na análise dinâmica. À medida que as cargas excitam as altas frequências e modos, por exemplo, o método pode perder precisão. Para melhorar a representação da resposta ao longo do tempo, o Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é usado para enriquecer o espaço de aproximação com funções apropriadas de acordo com o problema em estudo. Embora o MEFG tenha provado ser eficiente na análise dinâmica de estruturas, ainda existem questões a serem analisadas no âmbito da análise transiente. Neste contexto, o presente trabalho analisa o comportamento da resposta numérica da estrutura obtida pelo MEFG, condensando a matriz modal de forma a eliminar os modos de vibração com má aproximação. É avaliada também a influência de cada modo de vibração na resposta transiente da estrutura, e também a utilização do MEFG adaptativo. As análises foram particularizadas para exemplos de barra e de viga de Euler-Bernoulli, com o intuito de estudar a eficiência e aplicabilidade do MEFG na análise dinâmica transiente.

Palavras-chave: análise dinâmica, MEF, MEFG.

## **ABSTRACT**

The Finite Element Method (FEM), although widely used as an approximate solution method, has some limitations when applied in dynamic analysis. As the loads excite the high frequencies and modes, for example, the method may lose precision. To improve the representation of the response over the time, the Generalized Finite Element Method (GFEM) is used to enrich the approximation space with appropriate functions according to the problem under study. Although the GFEM has proven to be efficient in dynamic analysis of structures, there are still some issues to be analyzed in the scope of the transient analysis. In this context, the present work analyzes the behavior of the structural numerical response obtained by GFEM, condensing the modal matrix in order to eliminate the modes of vibration with bad approximation. The influence of each mode of vibration on the transient response of the structure, and the use of the adaptive GFEM are evaluated. Analyzes were particularized for examples of bars and Euler-Bernoulli beams, in order to study the efficiency and applicability of GFEM in dynamic transient analysis.

Keywords: dynamic analysis, FEM, GFEM.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ANÁLISES DINÂMICAS .....	33
FIGURA 2 – DESLOCAMENTOS EM FUNÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO. ...	37
FIGURA 3 – COBERTURA $\Omega_i$ DO DOMÍNIO $\Omega$ .....	47
FIGURA 4 – PARTIÇÃO DA UNIDADE DADA POR FUNÇÕES SENO E COSSENO AO QUADRADO.....	48
FIGURA 5 – CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA DO MEF, PARA ENRIQUECIMENTOS POLINOMIAIS.....	50
FIGURA 6 – FLUXOGRAMA DO PROCESSO ADAPTATIVO .....	51
FIGURA 7 – BARRA RETA COM DEFORMAÇÃO AXIAL .....	53
FIGURA 8 – ELEMENTO INFINITESIMAL DA BARRA RETA .....	54
FIGURA 9 – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS, PROPOSTA DE ARNDT (2009)....	58
FIGURA 10 – VIGA DE EULER BERNOULLI .....	59
FIGURA 11 – FLUXOGRAMA DA METODOLOGIA.....	67
FIGURA 12 – ESTIMATIVA DE ERRO.....	68
FIGURA 13 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA COMPARANDO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO DO MEF COM MEF LINEAR.....	70
FIGURA 14 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA COMPARANDO O MEF TRIGONOMÉTRICO, O MEF COM PARTIÇÃO DA UNIDADE COM FUNÇÕES DE SHEPARD EM VÁRIOS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO, E AINDA MEF LINEAR.....	70
FIGURA 15 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA COMPARANDO O MEF COM PARTIÇÃO DA UNIDADE COM FUNÇÕES RACIONAIS E ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL, EM VÁRIOS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO, E AINDA MEF LINEAR.....	71
FIGURA 16 – BARRA ENGASTADA-LIVRE COM EXCITAÇÃO EXTERNA DO TIPO DEGRAU .....	72
FIGURA 17 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA 1 ELEMENTO E 1 GRAU DE LIBERDADE – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	74
FIGURA 18 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA 1 ELEMENTO E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	74



FIGURA 19 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA 1 ELEMENTO E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	75
FIGURA 20 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA 1 ELEMENTO E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	75
FIGURA 21 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA 1 ELEMENTO E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	76
FIGURA 22 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA 1 ELEMENTO E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	76
FIGURA 23 – COMPARATIVO DE DESLOCAMENTO EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 16 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	77
FIGURA 24 – COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTO E 10 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 2 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	78
FIGURA 25 – COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 3 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 3 ELEMENTOS E 10 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	78
FIGURA 26 – COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 4 ELEMENTOS E 8 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	79
FIGURA 27 – COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 16 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	79
FIGURA 28 – COMPARATIVO DE ACELERAÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTO E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E COM 1	

ELEMENTO E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	80
FIGURA 29 – COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 2 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 2 ELEMENTOS E 10 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	80
FIGURA 30 – COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTO E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	81
FIGURA 31 – COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 16 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	81
FIGURA 32 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% E 100% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	83
FIGURA 33 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% E 100% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	83
FIGURA 34 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% E 100% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	83
FIGURA 35 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% E 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	84
FIGURA 36 – FIGURA 36: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% E 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL.....	85
FIGURA 37 – COORDENADAS GENERALIZADAS DO PROBLEMA .....	86
FIGURA 38 – FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA DEGRAU.....	87
FIGURA 39 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 1 MODO – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	88

FIGURA 40 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 1 MODO – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	88
FIGURA 41 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 1 MODO – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	89
FIGURA 42 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 10 MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	89
FIGURA 43 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 10 MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	90
FIGURA 44 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 10 MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	90
FIGURA 45 – COMPARATIVO DE ERRO MEDIDO NA RESPOSTA DA ACELERAÇÃO – BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	92
FIGURA 46 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	94
FIGURA 47 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	95
FIGURA 48 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	95
FIGURA 49 – FATOR DE INFLUÊNCIA NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	96
FIGURA 50 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 5 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	97
FIGURA 51 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 5 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	97

FIGURA 52 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 5 MODOS NO MEEG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	98
FIGURA 53 – COMPARATIVO DAS RESPOSTAS DE DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO .....	99
FIGURA 54 – BARRA ENGASTADA-LIVRE COM EXCITAÇÃO EXTERNA DE IMPULSO .....	100
FIGURA 55 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	101
FIGURA 56 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	102
FIGURA 57 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	102
FIGURA 58 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	103
FIGURA 59 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	104
FIGURA 60 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% DOS MODOS – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	104
FIGURA 61 – FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	105
FIGURA 62 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM OS 23 MODOS INDICADOS PELO FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	106
FIGURA 63 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM OS 23 MODOS INDICADOS PELO FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	106
FIGURA 64 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM OS 23 MODOS INDICADOS PELO FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	107
FIGURA 65 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO DO MEEG (23) – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	108
FIGURA 66 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	109

FIGURA 67 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	110
FIGURA 68 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	110
FIGURA 69 – FATOR DE INFLUÊNCIA NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	111
FIGURA 70 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 19 MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	112
FIGURA 71 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 19 MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	112
FIGURA 72 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 19 MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	113
FIGURA 73 – BARRA ENGASTADA-LIVRE COM EXCITAÇÃO EXTERNA HARMÔNICA .....	114
FIGURA 74 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – BARRA COM FORÇA HARMNÔNICA .....	115
FIGURA 75 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – BARRA COM FORÇA HARMNÔNICA .....	116
FIGURA 76 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – BARRA COM FORÇA HARMNÔNICA .....	116
FIGURA 77 – FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA HARMNÔNICA .....	117
FIGURA 78 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 13 MODOS .....	118
FIGURA 79 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 13 MODOS .....	118
FIGURA 80 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 13 MODOS – BARRA COM FORÇA HARMNÔNICA .....	119

FIGURA 81 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA.....	121
FIGURA 82 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA.....	121
FIGURA 83 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA.....	122
FIGURA 84 – FATOR DE INFLUÊNCIA NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA .....	122
FIGURA 85 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 13 MODOS NA MATRIZ MODAL NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA.....	123
FIGURA 86 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 13 MODOS NA MATRIZ MODAL NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA.....	123
FIGURA 87 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 13 MODOS NA MATRIZ MODAL NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA.....	124
FIGURA 88 – TRELIÇA DO EXEMPLO 7.4.....	125
FIGURA 89 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS – TRELIÇA.....	126
FIGURA 90 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS – TRELIÇA.....	126
FIGURA 91 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS – TRELIÇA.....	127
FIGURA 92 – FATOR DE INFLUÊNCIA – TRELIÇA .....	128
FIGURA 93 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 3 MODOS – TRELIÇA .....	128
FIGURA 94 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 3 MODOS – TRELIÇA .....	129
FIGURA 95 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 3 MODOS – TRELIÇA .....	129

FIGURA 96 – VIGA BI-APOIADA COM FORÇA DEGRAU APLICADA NO CENTRO.....	131
FIGURA 97 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM O MEFG COM 1 ELEMENTO E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	133
FIGURA 98 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM O MEFG COM 1 ELEMENTO E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU. ....	133
FIGURA 99 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM O MEFG COM 1 ELEMENTO E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	134
FIGURA 100 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM O MEFG COM 2 ELEMENTOS E 2 NIVEIS DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	134
FIGURA 101 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM O MEFG COM 2 ELEMENTOS E 2 NIVEIS DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	135
FIGURA 102 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM O MEFG COM 2 ELEMENTOS E 2 NIVEIS DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	135
FIGURA 103 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM O MEFG COM 4 ELEMENTOS E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	136
FIGURA 104 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM O MEFG COM 4 ELEMENTOS E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	137
FIGURA 105 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM O MEFG COM 4 ELEMENTOS E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	137
FIGURA 106 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DESLOCAMENTO COM O MEFG 2+2 E 16+2 – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	138
FIGURA 107 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS VELOCIDADE COM O MEFG 2+2 E 16+2 – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	138

FIGURA 108 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS ACDELERAÇÃO COM O MEFG 2+2 E 16+2 – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	139
FIGURA 109 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	140
FIGURA 110 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	140
FIGURA 111 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	141
FIGURA 112 – FATOR DE INFLUÊNCIA – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	142
FIGURA 113 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 1 MODO NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	143
FIGURA 114 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 1 MODO NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU .	143
FIGURA 115 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 1 MODO NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU .	144
FIGURA 116 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	146
FIGURA 117 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	146
FIGURA 118 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA DEGRAU.....	147
FIGURA 119 – VIGA ENGASTADA-LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU.....	148
FIGURA 120 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU. ....	149
FIGURA 121 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU .....	149
FIGURA 122 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU .....	150



FIGURA 123 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU .....	151
FIGURA 124 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU.....	151
FIGURA 125 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU.....	152
FIGURA 126 – FATOR DE INFLUÊNCIA – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU.....	153
FIGURA 127 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU.....	154
FIGURA 128 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU.....	155
FIGURA 129 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU.....	155
FIGURA 130 – VIGA ENGASTADA – LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA.....	157
FIGURA 131 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – MEFG MMA.....	157
FIGURA 132 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – MEFG MMA.....	158
FIGURA 133 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – MEFG MMA.....	158
FIGURA 134 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS – MEFG MMA.....	159
FIGURA 135 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS – MEFG MMA.....	160
FIGURA 136 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% DOS MODOS – MEFG MMA.....	160
FIGURA 137 – FATOR DE INFLUÊNCIA – MEFG MMA.....	162

FIGURA 138 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 1 MODO – MEFG MMA .....	163
FIGURA 139 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO.....	164
FIGURA 140 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE .....	164
FIGURA 141 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO ....	165
FIGURA 142 – HISTÓRICO DA ACELERAÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO DO TERREMOTO EL CENTRO .....	166
FIGURA 143 – FATOR DE INFLUÊNCIA – EXCITAÇÃO DE TERREMOTO.....	167
FIGURA 144 – FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM EXCITAÇÃO DE TERREMOTO .....	168
FIGURA 145 – QUATRO PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA ENGASTADA-LIVRE .....	169
FIGURA 146 – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR .....	170
FIGURA 147 – FATOR DE INFLUÊNCIA – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR .....	170
FIGURA 148 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% E 3 MODOS – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR.....	171
FIGURA 149 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% E 3 MODOS – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR .....	171
FIGURA 150 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% E 3 MODOS – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR .....	172
FIGURA 151 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR .....	173
FIGURA 152 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 2 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR .....	173

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – COMPARATIVO DE ERRO - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	91
TABELA 2 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	93
TABELA 3 – COMPARATIVO DE ERRO – MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	98
TABELA 4 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU .....	99
TABELA 5 – COMPARATIVO DE ERRO - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	107
TABELA 6 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO.....	108
TABELA 7 – COMPARATIVO DE ERRO - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	113
TABELA 8 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO .....	114
TABELA 9 – COMPARATIVO DE ERRO - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA .....	119
TABELA 10 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA .....	120
TABELA 11 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA .....	124
TABELA 12 – COMPARATIVO DE ERRO - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA .....	125
TABELA 13 – COMPARATIVO DE ERRO – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	141
TABELA 14 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	145
TABELA 15 – COMPARATIVO DE ERRO – MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE VIGA COM FORÇA DEGRAU .....	147

TABELA 16 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU .....	152
TABELA 17 – TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL – MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU .....	156
TABELA 18 – COMPARATIVO DE ERRO – MEFG MMA .....	161
TABELA 19 – COMPARATIVO DE ERRO – MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE VIGA COM MEFG MMA .....	165

## **LISTA DE QUADROS**

QUADRO 1 – SÍNTESE DOS RESULTADOS .....	178
-----------------------------------------	-----

## **LISTA DE SIGLAS**

MEF – Método dos Elementos Finitos

MEFG – Método dos Elementos Finitos Generalizados

MEFGE – Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado

MPU – Método da Partição da Unidade

PU – Partição da Unidade

MSM – Métodos Sem Malha

PVC – Problema de Valor de Contorno

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Romanas Maiúsculas

- $A$  - área da seção transversal do elemento  
 $A, B$  - constantes de integração  
 $C$  - matriz de amortecimento  
 $E$  - módulo de elasticidade do material  
 $\hat{F}_{t+\Delta t}$  - vetor de forças efetivo  
 $I(x)$  - momento de inércia da seção  
 $K$  - matriz de rigidez  
 $\hat{K}$  - matriz de rigidez efetiva  
 $L_e$  - comprimento do elemento  
 $M$  - matriz de massa  
 $M$  - subconjunto limitado de um espaço normado  $X$   
 $\bar{M}$  - momento fletor  
 $N$  - número total de graus de liberdade  
 $\mathbf{N}$  - vetor de funções de forma  
 $P$  - matriz de transformação  
 $\bar{Q}$  - esforço cortante  
 $R$  - resíduo no domínio do problema  
 $S$  - espaço de aproximação global  
 $S_i$  - espaços de aproximação local  
 $X(t)$  - vetor de deslocamentos generalizados

### Romanas Minúsculas

- $a_{ij}, b_{ij}$  - graus de liberdade de campo  
 $f(t)$  - vetor de cargas externas  
 $n$  - número de graus de liberdade  
 $n_l$  - número de níveis de enriquecimento  
 $p$  - grau do polinômio interpolador  
 $p(x, t)$  - força variável no comprimento e no tempo  
 $s$  - dimensão do espaço de aproximação  
 $s_i^j$  - funções de aproximação local do espaço  $S_i$

$t$  - tempo

$\ddot{u}(t)$  - vetor de acelerações nodais

$\dot{u}(t)$  - vetor de velocidades nodais

$u(t)$  - vetor de deslocamentos nodais

$u_p(t)$  - solução particular

$u_h(x)$  - deslocamentos aproximados

$\bar{u}$  - função aproximadora

$v(x,t)$  - deslocamento transversal

$v_h$  - campo de deslocamentos transversais aproximado

$w$  - funções teste

### Gregas Maiúsculas

$\Delta t$  - intervalo de tempo

$\Phi$  - matriz modal

$\Omega$  - domínio do problema

$\Omega_i$  - subcobertura do domínio  $\Omega$  relacionada às funções partição da unidade

$\Omega^2$  - matriz diagonal de autovalores

### Gregas Minúsculas

$\alpha_j$  - constantes

$\alpha$  e  $\delta$  - parâmetros do método de Newmark

$\beta$  - parâmetro de enriquecimento

$\gamma_j$  - funções enriquecedoras

$\eta_i$  - conjunto de funções que formam uma partição da unidade

$\theta_1$  e  $\theta_2$  - rotações nodais

$\lambda_h$  - autovalor relacionado às frequências naturais aproximadas

$\mu_i$  - modos de vibração.

$\xi$  - coordenada local

$\rho$  - massa específica do material

$\sigma_x$  - tensão normal no eixo x



$\phi_j$  - funções de forma

$\psi_i$  - funções de forma locais

$\omega$  - frequências naturais de vibração

$\omega_n$  - frequência natural de vibração correspondente ao modo  $n$ .

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>27</b>
1.1 OBJETIVO GERAL.....	28
1.1.2 Objetivos específicos.....	28
1.3 REVISÃO DA LITERATURA.....	29
1.4 RELEVÂNCIA DO TRABALHO.....	31
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	32
<b>2. ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE.....</b>	<b>33</b>
2.1 ANÁLISE MODAL.....	34
2.1.1 Vibração livre.....	34
2.1.2 Método da Superposição Modal.....	35
2.2 ANÁLISE TRANSIENTE.....	37
2.2.1 Vibração forçada.....	38
2.3 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA.....	39
2.3.1 Método de Newmark.....	39
2.4 CARREGAMENTO DE TERREMOTO.....	42
<b>3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS.....</b>	<b>43</b>
3.1 PRINCÍPIOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	43
3.2 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE (MPU).....	46
3.3 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO.....	49
3.4 MEFG ADAPTATIVO.....	50
<b>4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.....</b>	<b>53</b>
4.1 BARRA RETA (1D).....	53
4.1.1 Enriquecimento das funções de forma através do MEFG.....	57
4.1.2 MEFG adaptativo.....	59

4.2 VIGA DE EULER - BERNOULLI .....	59
4.2.1 Enriquecimento das funções de forma através do Mefg .....	63
4.2.2 Mefg adaptativo .....	64
<b>5. METODOLOGIA APLICADA .....</b>	<b>66</b>
5.1 ANÁLISE DE ERRO AO LONGO DO TEMPO .....	68
<b>6. RESULTADOS PRELIMINARES: ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO Mefg ATRAVÉS DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA.. .....</b>	<b>69</b>
<b>7. O Mefg APLICADO NA ANÁLISE TRANSIENTE EM ELEMENTOS DE BARRA.....</b>	<b>72</b>
7.1 BARRA FIXA-LIVRE COM FORÇA TIPO DEGRAU .....	72
7.1.1 Influência da malha no refinamento hierárquico do Mefg.....	73
7.1.2 Condensação da matriz modal.....	82
7.1.3 Fator de influência .....	85
7.1.4 Mefg adaptativo .....	94
7.2 BARRA FIXA-LIVRE COM FORÇA TIPO IMPULSO .....	100
7.2.1 Condensação da matriz modal.....	103
7.2.2 Fator de influência .....	105
7.2.3 Mefg adaptativo .....	109
7.3 BARRA FIXA-LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA.....	114
7.3.1 Fator de influência .....	117
7.3.2 Mefg adaptativo .....	120
7.3 O Mefg ADAPTATIVO APLICADO EM TRELIÇAS .....	125
<b>8. O Mefg APLICADO NA ANÁLISE TRANSIENTE EM ELEMENTOS DE VIGA DE EULER-BERNOULLI .....</b>	<b>131</b>
8.1 VIGA BI-APOIADA COM FORÇA DEGRAU APLICADA NO CENTRO .....	131
8.1.1 Influência da malha no refinamento hierárquico do Mefg.....	132
8.1.2 Condensação da matriz modal.....	139

8.1.3 Fator de influência .....	142
8.1.4 MEFG adaptativo .....	145
8.2 VIGA ENGASTADA-LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU .....	148
8.2.2 Condensação da matriz modal.....	150
8.2.3 Fator de influência .....	152
8.2.4 MEFG adaptativo .....	154
8.3 VIGA ENGASTADA – LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA E ENRIQUECIMENTO POR FUNÇÕES BASEADAS NO MMA .....	156
8.3.2 Condensação da matriz modal.....	159
8.3.3 Fator de influência .....	161
8.3.4 MEFG adaptativo .....	163
8.4 VIGA ENGASTADA – LIVRE COM EXCITAÇÃO DE TERREMOTO .....	166
8.5 VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR.....	169
<b>9. CONCLUSÃO .....</b>	<b>175</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>180</b>

## 1. INTRODUÇÃO

À medida que a engenharia evoluiu ao longo dos últimos anos, aumentou-se também a necessidade de análises estruturais mais precisas e confiáveis. Assim, para determinados tipos de estrutura, é necessário levar em consideração o efeito dinâmico das ações. Para a análise e descrição do comportamento dinâmico, existem na literatura métodos analíticos que de forma geral são adequados, porém, para problemas reais com geometrias complicadas, acabam sendo muito complexos. Apenas estruturas com geometrias muito simples e condições de contorno específicas possuem solução analítica conhecida para seu problema de vibração.

Para contornar o problema da dificuldade da solução analítica, existe uma forte tendência de se utilizar métodos numéricos aproximados para a solução das equações diferenciais que regem os problemas de análise estrutural. Tendência essa, facilitada devido ao advento dos computadores de última geração e da disseminação de rotinas computacionais para a análise de problemas na engenharia.

Em relação aos métodos numéricos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais conhecidos e difundidos. Apesar de ser um método robusto, existem problemas em que a formulação convencional não consegue descrever de forma satisfatória o comportamento analisado. Particularmente na dinâmica das estruturas, segundo Arndt (2009), o MEF perde precisão na análise de vibração livre quando se refere às frequências mais altas.

Assim, diversas alternativas para se obter melhores resultados com o MEF já foram propostas. Em particular, as abordagens baseadas no Método da Partição da Unidade (MPU) (BABUŠKA; MELENK, 1997; MELENK; BABUŠKA, 1996) têm mostrado bons resultados. Com base na teoria da Partição da Unidade, foi possível a inclusão na formulação do MEF de funções capazes de representar comportamentos determinados, tais como singularidades, oscilações de valores no tempo, entre outros.

A ideia de se utilizar informações particulares do problema analisado para aprimorar as características da resposta é a essência dos métodos enriquecidos, em particular, do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O MEFG pode ser entendido como uma extensão do MEF, que utiliza funções enriquecedoras relacionadas à solução da equação diferencial governante do problema, visando obter melhores resultados para problemas com descontinuidades, singularidades ou outras situações onde o MEF necessita de uma malha mais refinada.

Nesse contexto, o MEFG tem se mostrado eficiente na análise dinâmica de estruturas, em particular na análise modal (ARNDT, 2009; TORII, 2012; SHANG, 2014; WEINHARDT, 2016). Porém, ainda há a necessidade de um estudo mais detalhado referente ao comportamento do método na análise transiente, isto é, análise do deslocamento, velocidade e aceleração no domínio do tempo.

Assim, as principais contribuições deste trabalho são referentes à aplicação do MEFG com a formulação proposta por Arndt (2009), com a possibilidade de analisar a influência de cada modo de vibração da estrutura, trazendo assim resultados mais precisos e com menor custo computacional. Ainda, o MEFG adaptativo, que somente havia sido aplicado na análise modal (ARNDT et al., 2010; ARNDT et al., 2016), foi testado na dinâmica transiente. O método trouxe bons resultados e se mostrou eficiente na resposta no domínio do tempo.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é estudar a eficiência do MEFG quando aplicado na análise dinâmica transiente de estruturas reticuladas.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral proposto, pretende-se:

- a) Verificar o desempenho do MEFG em elementos de barra e viga de Euler-Bernoulli através da análise do deslocamento, velocidade e aceleração no domínio do tempo;
- b) Testar o emprego do MEFG ao se utilizar técnica da Superposição Modal, considerando apenas os modos de vibração mais precisos e mais preponderantes na matriz modal.
- c) Analisar a resposta transiente do elemento de viga de Euler-Bernoulli quando utilizado enriquecimento trigonométrico e também enriquecimento com funções baseadas no Método dos Modos Admissíveis (MMA).
- d) Aplicar e analisar o desempenho do MEFG adaptativo na análise dinâmica transiente de elementos de barras e vigas de Euler-Bernoulli.

### 1.3 REVISÃO DA LITERATURA

A análise dinâmica pode ser vista como uma abordagem mais abrangente da análise estática, uma vez que considera a variação do carregamento ao longo do tempo. Dependendo da natureza de estudo, a resposta dinâmica pode ser obtida no domínio do tempo, chamada também de “análise transiente”, ou no domínio da frequência.

No domínio do tempo, a resposta da estrutura pode ser obtida através do método da Superposição Modal, onde o sistema de equações de movimento é desacoplado a partir dos parâmetros modais previamente obtidos da estrutura. De forma alternativa, pode-se aplicar às equações de movimento um método de integração direta, que não fazem qualquer transformação nas equações diferenciais do problema dinâmico antes de efetuar a integração numérica, como na Superposição Modal.

A abordagem dos métodos de integração se desenvolveu ao longo do tempo nas mais variadas aplicações e com suas características discutidas, analisadas e melhoradas de forma muito ampla. Existe, portanto um vasto e abrangente acervo na literatura científica incluindo o desenvolvimento matemático desses métodos, sua precisão, estabilidade, convergência e implementação.

Dos textos científicos clássicos sobre análise dinâmica transiente, destaca-se o trabalho de Newmark (1959), que desenvolveu um método de solução aproximada com parâmetros  $\delta$  e  $\alpha$  que influenciam na velocidade e no deslocamento ao final de cada intervalo de tempo  $\Delta t$  (HUGHES, 2000; BATHE, 1996). Existem dois casos especiais do método de Newmark, conhecidas como o método da aceleração média e o método da aceleração linear. A diferença entre eles é, basicamente, a adoção dos valores dos parâmetros de influência  $\delta$  e  $\alpha$ .

Uma vez que algum método para as aproximações temporais tenha sido adotado, o problema torna-se em um problema de valores de contorno para cada passo de tempo discreto. Diferentes métodos de solução numérica aproximada podem ser aplicados em problemas da análise dinâmica com esta finalidade. Esses métodos numéricos, dos quais o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais difundidos, são de grande importância para definição e análise de estruturas complexas. Além do MEF, diversos métodos aproximados têm sido desenvolvidos para a análise numérica, como o Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA et al., 1991) e os Métodos Sem Malha (MSM) (LIU, 2010).

A formulação convencional de elementos finitos apresenta limitações nas análises dinâmicas, no sentido de aferir as frequências mais altas da estrutura estudada. Para alcançar boa precisão, é necessário o aumento do número de graus de liberdade, e consequentemente, do custo computacional. Para tanto, duas alternativas são conhecidas: aumento do número de elementos (refino  $h$ ) e aumento do grau das funções de interpolação (refino  $p$ ) (BATHE, 1996).

Assim, com o objetivo de se obter soluções mais precisas, principalmente para as frequências mais altas, e com menor custo computacional, vem se buscando de longa data o aprimoramento de métodos de análise computacional. Nesse contexto, a utilização de informações particulares para aprimorar as características de aproximação é a ideia central dos métodos enriquecidos, em particular do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

O MEFG foi inspirado, dentre outros, no trabalho de Melenk e Babuška (1996), e é baseado no Método da Partição da Unidade (MPU). Melenk e Babuška (1996) apresentaram a fundamentação matemática básica do MPU analisando e definindo os métodos de escolha das partições da unidade para enriquecimento do espaço de elementos finitos. Devido ao enriquecimento, o MEFG pode ser uma boa alternativa em problemas onde o comportamento da solução é conhecido a priori, como na análise de trincas e nos problemas dinâmicos em geral. Em Duarte et al. (2001), Duarte e Kim (2008), Malekan e Barros (2016) o MEFG se mostrou eficiente no problema supracitado de trincas. Barros (2002) confirmou a eficácia do MEFG em análises não lineares de estruturas, assim como Alves e Junior (2016) em materiais compósitos.

Arndt (2009), Torii (2012) e Torii et al. (2015) aplicaram o método para, principalmente, a análise modal de estruturas. Os autores concluírem que o método é capaz de obter resultados melhores que o MEF convencional. Torii e Machado (2012) aplicaram a formulação proposta por Arndt (2009) para a análise transiente de barras e treliças. Os resultados indicam que o MEFG é capaz de obter resultados mais precisos do que o MEF polinomial nos casos onde a participação dos modos com frequências de vibração elevadas sejam importantes para a análise.

No trabalho de Piedade Neto e Proença (2016) foram feitas análises dinâmicas transientes lineares e não lineares através do MEFG, com enriquecimento polinomial e com uma proposta de método de integração implícito. As formulações de matriz de massa consistente e agrupadas foram testadas, e a estabilidade e acurácia do MEFG foram analisadas. Os resultados indicaram que a formulação da matriz de massa agrupada reduz



consideravelmente o número de condição do sistema de equações, e que o método de integração proposto aplicado na formulação do MEFGE em análises dinâmicas lineares e não lineares apresenta bons resultados.

Em Shang (2016) o MEFGE foi aplicado no problema de vibração livre de vigas de Timoshenko, onde os resultados apresentados mostraram um bom comportamento do método. Ainda, em Shang et. al (2017) foi analisada a aplicação do MEFGE para o estado plano de tensões no problema de vibração livre com malhas distorcidas. Os resultados mostraram que o MEFGE mostrou bom comportamento e baixa sensibilidade à distorção da malha.

Lins et al. (2015) analisaram o MEFGE (Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável) e Weinhardt (2016) apresentou duas propostas para contornar o problema de estabilidade do método: uma baseada no MEFGE e uma estratégia de pré-condicionamento das funções de enriquecimento. Exemplos unidimensionais de análise modal e transiente foram apresentados, e os resultados mostraram que as implementações propostas captaram melhor as frequências mais elevadas, melhorando a representatividade do espectro.

Em Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2010) foi proposto o MEFGE adaptativo, um processo iterativo adaptativo baseado no MPU para análise de vibrações livres de estruturas, que permite refinar a solução para uma determinada frequência, com rápida convergência e precisão equivalente, em alguns casos até superior, ao refinamento  $p$  do MEF. Em Arndt, Machado e Scremin (2016) o MEFGE adaptativo novamente mostrou bons resultados na análise de vibração livre de vigas de Euler – Bernoulli e pórticos.

#### 1.4 RELEVÂNCIA DO TRABALHO

A aplicação do MEFGE na análise dinâmica de estruturas é um tema que vem sendo estudado nos últimos anos. Porém, havia-se a necessidade de avaliar a aplicação do método na análise transiente, ou seja, a análise dos deslocamentos, velocidades e acelerações no domínio do tempo.

A utilização do MEFGE com boa precisão e baixo custo computacional é um dos principais pontos analisados neste trabalho. Para isso, propõe-se problemas com poucos graus de liberdade, e também a redução da matriz modal, responsável por desacoplar o sistema de equações. Para que essa redução seja possível, a identificação de quantos e,

principalmente, quais modos de vibração devem ser deixados na redução da matriz modal foi um aspecto discutido neste trabalho.

Ainda, os bons resultados do MEEG adaptativo na análise modal incitaram o presente trabalho a utilizar o método, já que o mesmo não fora utilizado na análise dinâmica transiente até o presente momento.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em nove capítulos. Neste primeiro tem-se uma introdução ao assunto abordado, exibindo o contexto no qual o trabalho está inserido, bem como os objetivos a serem atingidos e a relevância do mesmo.

No segundo capítulo é apresentada uma revisão da teoria acerca da análise dinâmica transiente, englobando textos clássicos tanto sobre a análise modal, quanto sobre métodos de integração.

O terceiro capítulo diz respeito ao MEEG aplicado na análise dinâmica de estruturas, trazendo uma revisão teórica do método, bem como as formulações pertinentes.

O quarto capítulo apresenta as descrições matemáticas do problema de vibração de barra, e de viga de Euler-Bernoulli.

O capítulo cinco traz uma breve explanação da metodologia adotada.

O capítulo seis é referente aos estudos preliminares acerca do comportamento do espectro de frequência obtido pelo MEEG.

O capítulo sete diz respeito às aplicações numéricas no elemento de barra, e o capítulo oito é referente às aplicações no elemento de Viga de Euler - Bernoulli.

No nono capítulo são registradas as conclusões do trabalho e sugestões de continuidade.

## 2. ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE

Este capítulo tem o intuito de expor uma revisão bibliográfica a respeito da análise dinâmica transiente. São citados alguns conceitos importantes, bem como a formulação matemática dos dois métodos de solução utilizados no presente trabalho: Superposição Modal e método de Newmark.

Para descrever a movimentação de uma estrutura ao longo do tempo, ou seja, fazer uma análise transiente, pode-se fazer uma aproximação das variações temporais através de um método de integração direta como o Método de Newmark e o Método da Diferença Central (BATHE, 1996). Além disso, pode ser pertinente que, inicialmente, se faça uma análise modal, onde determinam-se os parâmetros modais da estrutura (frequências naturais e modos de vibração). Os métodos supracitados são referentes à resposta da estrutura no domínio do tempo, porém, uma análise dinâmica pode ser feita também no domínio da frequência. Para uma melhor compreensão das diferentes abordagens da análise dinâmica, a figura 1 apresenta as ramificações deste tipo de estudo.

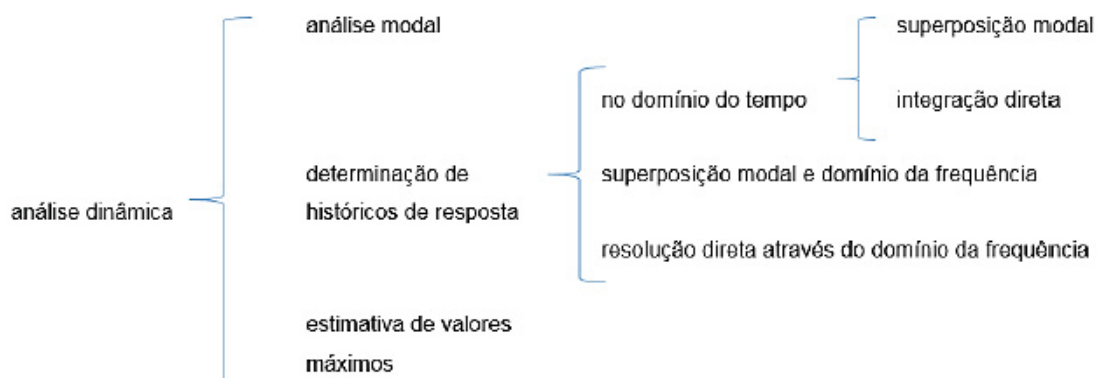


FIGURA 1: ANÁLISES DINÂMICAS  
FONTE: ADAPTADO DE SORIANO (2009).

Uma vez que este trabalho tem como objetivo central estudar o comportamento do MEFM na análise transiente, a presente revisão bibliográfica não aborda os métodos de solução no domínio da frequência.

## 2.1 ANÁLISE MODAL

A análise modal possibilita a construção de um modelo matemático representativo do comportamento dinâmico do sistema em estudo, a fim de determinar os seus parâmetros modais (frequências naturais e modos de vibração). As frequências naturais indicam a taxa de oscilação livre da estrutura depois de cessada a força que provocou o seu movimento. Em palavras similares, representa o quanto a estrutura vibra quando não há força aplicada sobre ela (SORIANO, 2009). Os modos de vibração são a forma como a estrutura vibra, relacionada a cada uma de suas frequências naturais. Ou seja, para cada frequência natural existe um modo de vibração específico.

De acordo com Chopra (1995) o movimento de um sistema contínuo, considerado linear e já discretizado em  $n$  graus de liberdade, pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais, chamada “equação de movimento” da forma:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t), \quad (2.1)$$

em que  $M$ ,  $C$  e  $K$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. O vetor de carga externo é representado por  $f(t)$ , e  $\ddot{u}(t)$ ,  $\dot{u}(t)$  e  $u(t)$  são os vetores das acelerações, velocidades e deslocamentos nodais da estrutura, respectivamente. Matematicamente a equação (2.1) representa o equilíbrio dinâmico de um sistema de múltiplos graus de liberdade, sendo de fato um sistema de  $n$  equações diferenciais lineares de segunda ordem.

### 2.1.1 Vibração livre

Na vibração livre um sistema oscila periodicamente em torno de sua posição estática, invertendo o sentido do movimento a cada vez que alcança um máximo deslocamento, também chamado de amplitude (RAO, 1995; CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1975). É no fenômeno da vibração livre que são obtidas as variáveis modais da estrutura (frequências naturais e modos de vibração). Ao considerar o problema como uma vibração livre não amortecida, as parcelas referentes ao amortecimento e ao carregamento externo são removidas da equação (2.1), resultando em:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0, \quad (2.2)$$

cuja solução analítica pode ser dada, de forma genérica, por:

$$u(t) = \mu \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (2.3)$$

onde  $\mu$  é um vetor de ordem  $n$ ,  $t$  é a variação no tempo, e  $\omega$  é a frequência natural de vibração correspondente ao modo  $n$ .

Substituindo (2.3) em (2.2), tem-se um problema de autovalores generalizados, no qual  $\mu$  e  $\omega$  podem ser determinados:

$$K\mu = \omega^2 M\mu, \quad (2.4)$$

onde  $\omega$  (autovalores) são as frequências naturais de vibração e  $\mu$  (autovetores) os correspondentes modos de vibração.

As frequências naturais e os modos de vibração de uma estrutura permitem identificar quais tipos de excitação dinâmica que podem ser nocivas à estrutura. Desta forma, o estudo do comportamento dinâmico das estruturas começa pela análise modal. Também, os modos e as frequências de vibração são informações necessárias para se aplicar o Método da Superposição Modal, que é uma das técnicas mais utilizadas para a resposta no tempo de estruturas (TORII, 2012).

### 2.1.2 Método da Superposição Modal

Através do Método da Superposição Modal, é possível transformar o sistema de  $n$  equações simultâneas (equação (2.2)) em um número equivalente de equações diferenciais desacopladas, ou seja, independentes e de fácil integração. Os modos de vibração e as frequências de vibração são previamente obtidos resolvendo-se o problema de autovalores e autovetores generalizados, já explicitado na equação (2.4) (BATHE, 1996; HUGHES, 2000), cuja solução é dada por  $n$  pares  $(\mu_i, \omega_i)$ , onde  $n$  é a ordem das matrizes de massa e de rigidez, que é igual ao número de graus de liberdade do problema.

Partindo da solução da equação (2.4), define-se então a matriz  $\Phi$  de autovetores ( $\mu$ ), e a matriz diagonal  $\Omega^2$  de autovalores ( $\omega$ ):

$$\Phi = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n], \text{ e} \quad (2.5)$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

Assim, para desacoplar o sistema, efetua-se nos elementos da equação (2.2) a pré multiplicação por  $\Phi^T$  e a pós multiplicação por  $\Phi$ , da forma:

$$\tilde{M} = \Phi^T M \Phi, \quad (2.7)$$

$$\tilde{K} = \Phi^T K \Phi, \quad (2.8)$$

$$\tilde{f} = \Phi^T f, \quad (2.9)$$

Resultando em:

$$\tilde{M}\ddot{X}(t) + \tilde{K}X(t) = \tilde{f}(t) \quad (2.10)$$

Os autovetores normalizados em relação à massa são M-ortonormais, (BATHE, 1996), isto é:

$$\mu_i^T M \mu_j = \begin{cases} = 1; & i=j \\ = 0; & i \neq j, \text{ e} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (2.12)$$

onde  $\mu_i^T$  é o vetor do perfil do i-ésimo modo e  $\omega_i$  é a i-ésima frequência natural de vibração. Partindo dessa propriedade, tem-se as relações:

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (2.13)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (2.14)$$

Como a matriz  $\Omega^2$  é diagonal, o sistema de equações dado pela equação (2.10) se reduz a  $n$  equações independentes, da forma:

$$\omega_i^2 x_i + \ddot{x}_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.15)$$

que podem ser resolvidas independentemente. A solução da equação (2.15) pode ser feita utilizando o Método de Newmark, que foi utilizado neste trabalho. Torii (2012) afirma que a Superposição Modal resulta em um esforço computacional reduzido, já que a equação (2.15) é escrita para um grau de liberdade apenas, e portanto não há a necessidade de se resolver um sistema de equações a cada passo de tempo.

Ao passo que as  $n$  equações da equação (2.15) são resolvidas para  $x_i$ , a solução do problema original será: (BATHE, 1996)

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i(t), \quad (2.16)$$

que é uma solução escrita em função dos  $n$  modos de vibração  $\mu_i$  da estrutura.

Para ilustrar o conceito empregado na análise feita na Superposição Modal, apresenta-se uma viga vertical fixada no solo, conforme esquematizado por Clough e Penzien (1975). A sua configuração final pode ser definida pela superposição adequada dos modos de vibração como mostra a figura 2.

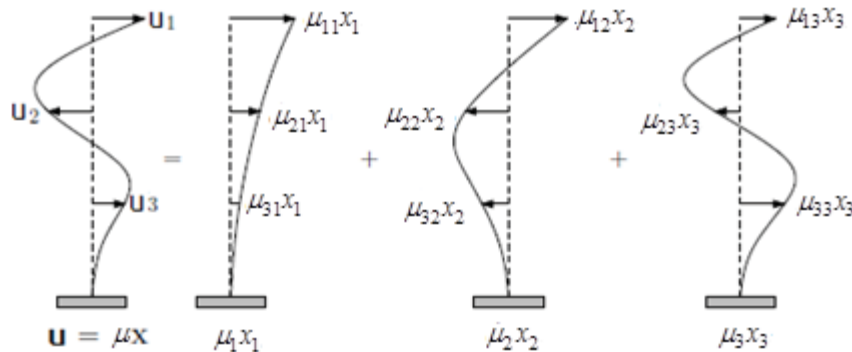


FIGURA 2: DESLOCAMENTOS EM FUNÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO.  
FONTE: ADAPTADO DE CLOUGH E PENZIEN (1975)

A grande vantagem do método decorre do fato de que, na maior parte das aplicações, se tem uma boa aproximação resolvendo apenas uma parte das equações (equação 2.15) (IBRAHIMBEGOVIC & WILSON, 1989; CHOPRA, 1995). Dessa forma, ao se excluir os modos de vibração mais altos da análise através da Superposição Modal, evita-se que os erros oriundos destes modos sejam considerados na análise, e pode-se ter uma solução mais precisa do problema.

## 2.2 ANÁLISE TRANSIENTE

Análise dinâmica transiente é uma ramificação da dinâmica estrutural, onde se obtém as respostas no domínio do tempo de uma estrutura sob a ação de cargas externas. Este tipo de análise é usado para determinar como se dá a variação no tempo dos deslocamentos, velocidades, acelerações, tensões, deformações e energia absorvida, como resposta à qualquer combinação de cargas aplicadas.

### 2.2.1 Vibração forçada

Quando forças externas agem sobre um sistema com vários graus de liberdade, o sistema sofre vibração forçada. Ao passo que a vibração livre é obtida através da solução homogênea da equação diferencial do modelo matemático da estrutura, equação (2.2), o estudo da vibração forçada corresponde à solução da equação não homogênea. A equação do movimento dinâmico não amortecido sujeito à uma força externa, fica da forma (CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1975):

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (2.17)$$

cuja solução analítica, como exposto anteriormente, é composta pela solução homogênea (vibração livre) e pela solução particular. A solução homogênea foi dada pela equação (2.3), e a solução particular depende do carregamento externo aplicado.

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade, as equações de movimento governantes são um conjunto de  $n$  equações, cuja solução se torna mais complexa a medida que o número de graus de liberdade aumenta, e/ou quando as forças atuantes são não periódicas. Independente da complexidade das funções de força externa, o sistema pode ser resolvido pelas técnicas de Superposição Modal, que desacopla as equações de movimento, de modo a se obter um conjunto de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem (CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1975).

## 2.3 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA

Dentro do contexto da análise dinâmica de estruturas, a solução direta do sistema de equações diferenciais dada pela equação (2.2) constitui-se em um problema de difícil tratamento (CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1975). Assim, os procedimentos geralmente utilizados para se obter a solução numérica no domínio do tempo da equação, são os métodos de Integração Direta ou Método da Superposição Modal, já apresentado anteriormente.

Qualquer equação do equilíbrio dinâmico de uma estrutura com  $n$  graus de liberdade pode ser resolvida no domínio do tempo por métodos de integração numérica. Assim, a equação diferencial desacoplada (equação 2.15) também pode ser resolvida de forma numérica, de acordo com Quarteroni, Sacco e Saleri (2007).

O termo “integração direta” refere-se aos métodos que não fazem qualquer transformação nas equações diferenciais do problema dinâmico antes de efetuar a



integração numérica, como na Superposição Modal. A aplicação destes métodos implica que o intervalo de tempo  $t$  durante o qual se deseja estudar a estrutura em questão, seja subdividido em intervalos de tempo  $\Delta t$ . Em cada um desses intervalos é feita uma aproximação das incógnitas do problema, no caso, deslocamentos e acelerações.

Para a aplicação dos métodos de integração direta, são determinadas as matrizes  $K$  e  $M$ , sendo inicialmente aplicadas condições iniciais no tempo zero,  $u_0$ ,  $\dot{u}_0$  e  $\ddot{u}_0$ . Na solução, o tempo total  $t$  é subdividido em  $n$  intervalos, implicando em  $\Delta t = t/n$ , encontrando-se a solução no tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t, \dots, t$ , e  $i = 1, 2, \dots, n$  (CHOPRA, 1995; CLOUGH E PENZIEN, 1975).

Existem vários métodos de integração direta e, de acordo com o instante no passo de tempo em que o equilíbrio dinâmico é realizado, eles são classificados em métodos implícitos ou explícitos.

Os métodos explícitos têm a forma:

$$u_{i+1} = f(u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i, u_{i-1}, \dots), \quad (2.18)$$

permitindo que a resposta  $u_{i+1}$  seja fornecida completamente em função das respostas obtidas nos passos  $t_i$  e  $t_{i-1}$ . De maneira geral os métodos explícitos são condicionalmente estáveis, ou seja, o passo de tempo  $\Delta t$  deve ser menor que um certo limite de estabilidade. O Método da Diferença Central é um exemplo de método explícito (BATHE, 1996).

Os métodos implícitos têm a forma:

$$u_{i+1} = f(u_i, \dot{u}_{i+1}, \ddot{u}_{i+1}, \dots), \quad (2.19)$$

necessitando das derivadas de  $u_{i+1}$  para que a resposta  $u_{i+1}$  seja obtida. Os métodos implícitos podem ser condicionalmente estáveis, como os métodos explícitos, ou incondicionalmente estáveis, quando a estabilidade numérica do problema independe do tamanho do passo de tempo  $\Delta t$ . Dentre as duas abordagens do método de Newmark, o método da aceleração linear e método da aceleração média constante, o último caracteriza-se como incondicionalmente estável.

### 2.3.1 Método de Newmark

Uma das alternativas para se resolver diretamente a equação genérica de movimento dada pela equação (2.2), ou o sistema de equações desacopladas dadas pela

equação (2.15) é utilizar o método de Newmark. Para isso, o tempo total  $t$  é discretizado em:

$$\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n\} \quad (2.20)$$

sendo

$$t_1 = t_0 + \Delta t, \quad t_2 = t_1 + \Delta t, \dots, \quad t_n = t_{n-1} + \Delta t, \quad (2.21)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo definido previamente. A solução aproximada é então avaliada nos tempos  $t_i$ .

No método de Newmark, as seguintes aproximações são consideradas (BATHE, 1996):

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1-\delta)\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (2.22)$$

e

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + [(1/2 - \alpha)\ddot{u}_t + \alpha\ddot{u}_{t+\Delta t}]\Delta t^2 \quad (2.23)$$

onde  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros que podem ser determinados para se obter diferentes propriedades de precisão e estabilidade. Além disso, considera-se que as condições iniciais  $u_0$  e  $\dot{u}_0$  são conhecidas.

Em Bathe (1996) é apresentado um algoritmo da aplicação do método de Newmark para análise dinâmica, conforme exposto a seguir. O algoritmo é válido para  $\alpha$  e  $\delta$  respeitando os valores conforme a equação (2.24). Dessa forma, é garantida a estabilidade numérica incondicional:

$$\delta \geq 0,50 \quad \text{e} \quad \alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2 \quad (2.24)$$

*Cálculos iniciais:*

1. Obter as matrizes de rigidez  $K$ , de massa  $M$ , e se for o caso, de amortecimento  $C$ ;
2. Inicializar os vetores  $u_0, \dot{u}_0, \ddot{u}_0$ ;
3. Selecionar o passo de tempo  $\Delta t$ , os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  e calcular as constantes

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad (2.25)$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (2.26)$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (2.27)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (2.28)$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad (2.29)$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (2.30)$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad (2.31)$$

$$a_7 = \Delta t \delta \quad (2.32)$$

4. Calcular a matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C \quad (2.33)$$

*Para cada passo de tempo:*

5. Calcular o vetor de forças efetivo:

$$\hat{F}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + M(a_0 u_t + a_2 \dot{u}_t + a_3 \ddot{u}_t) + C(a_1 u_t + a_4 \dot{u}_t + a_5 \ddot{u}_t) \quad (2.34)$$

6. Obter os deslocamentos no tempo  $t+\Delta t$  resolvendo o sistema

$$\hat{K} u_{t+\Delta t} = \hat{F}_{t+\Delta t} \quad (2.35)$$

7. Calcular as acelerações e as velocidades no tempo  $t+\Delta t$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = a_0 (u_{t+\Delta t} - u_t) - a_2 \dot{u}_t - a_3 \ddot{u}_t \quad (2.36)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + a_6 \ddot{u}_t + a_7 \ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (2.37)$$

No presente trabalho, os valores de  $\alpha$  e  $\delta$  foram utilizados sendo 0,5 e 0,25 respectivamente, conforme a equação (2.24), garantindo assim a estabilidade numérica do método.

Além do método de Newmark, um outro método implícito amplamente difundido é o método de Houbolt (1950). Em relação aos métodos explícitos, na literatura clássica

destaca-se o método da Diferença Central (COLLATZ, 1960; BATHE, 1996). Todos esses métodos citados sofreram modificações e aprimoramentos ao longo dos anos, com relação, principalmente, ao intervalo de tempo  $\Delta t$  utilizado, visto que o mesmo tem um forte impacto sobre o custo computacional e precisão desses métodos.

## 2.4 CARREGAMENTO DE TERREMOTO

O carregamento externo das estruturas pode ser classificado conforme a forma de variação no tempo. O carregamento de impulso, por exemplo, caracteriza-se por ser aplicado em um intervalo de tempo muito pequeno. A força degrau é um carregamento que possui o mesmo valor ao longo do tempo. O carregamento periódico pode ser entendido como aquele que possui uma mesma variação no tempo por repetidos números de ciclos. Estes carregamentos possuem variação senoidal ou cossenoidal no tempo, sendo chamados de carregamentos harmônicos. Em contrapartida, um carregamento não periódico é aquele que tem uma duração que não se repete de maneira cíclica, como nos casos de terremoto ou de explosões próximas à estrutura (CLOUGH E PENZIEN, 1975).

Para a análise de estruturas submetidas aos carregamentos de terremoto, é necessário que seja considerado um modelo matemático que possa descrever de maneira aproximada o funcionamento da estrutura. Este modelo deve permitir a obtenção de relações matemáticas entre as características essenciais da excitação e da resposta estrutural resultante. Assim, segundo Chopra (1995), uma boa forma de representar um carregamento oriundo de um terremoto é através da aceleração de base.

Para um sistema de múltiplos graus de liberdade, a inserção da aceleração de base se dá na equação de movimento do sistema, conforme exposto na equação (2.17). A diferença consiste em substituir o força excitadora  $F(t)$  por uma força equivalente, denominada  $F_{eq}(t)$ . Assim, a equação (2.17) fica da forma (CHOPRA, 1995):

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = F_{eq}(t) \quad (2.38)$$

e,

$$F_{eq}(t) = -M\iota\ddot{u}_g(t), \quad (2.39)$$

onde  $M$  é a matriz de massa,  $\iota$  é um vetor que define a direção de aplicação da excitação de base,  $\ddot{u}_g(t)$  é uma função escalar que define as acelerações da base.

Esse tipo de carregamento é aplicado em um dos exemplos do presente trabalho, e os resultados podem ser vistos no capítulo 8.

### 3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Este capítulo mostra alguns conceitos importantes para o entendimento do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). São expostos, portanto, princípios a respeito do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional, do Método da Partição da Unidade (MPU) e também sobre o MEFG adaptativo.

#### 3.1 PRINCÍPIOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), pode ser entendido como uma variação do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional. Dessa forma, é conveniente elencar algumas características do MEF aplicado na dinâmica das estruturas para a perfeita compreensão do MEFG.

O MEF é um procedimento numérico que analisa estruturas e meios contínuos, formulado através de equações diferenciais, e sujeito a condições de contorno. Ou seja, o MEF é uma ferramenta utilizada em problemas de valor de contorno (PVC) (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; HUGHES, 2000; BATHE, 1996).

Para problemas da mecânica dos sólidos, existem diferentes formulações, ou modelos básicos, que pertencem ao enfoque variacional do método. Uma delas, e a mais difundida atualmente, é a formulação baseada na aplicação localizada do método de Galerkin, que possibilitou que o MEF fosse aplicado a problemas que não possuem formulação variacional. De maneira geral, qualquer um dos Métodos dos Resíduos Ponderados (MRP) pode ser utilizado pelo MEF (CHIEN, YANG, TANG, 2003).

O MRP é um método de aproximação que surgiu a partir do Método Variacional, mas como uma proposta de se libertar da condição de extremização de um funcional. É uma classe de métodos que consiste em aproximar a variável dependente do problema por expansões em séries de funções conhecidas, chamadas funções de forma  $\phi_j$  (CAREY e ODEN, 1984). A função aproximadora  $\bar{u}$  pode ser escrita como:

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^N \phi_j \alpha_j, \quad (3.1)$$

satisfazendo as condições de contorno do problema. Os coeficientes  $\alpha_j$  são determinados anulando-se a média ponderada do resíduo no domínio do problema:

$$\int_{\Omega} w_i R . d\Omega = 0 \quad i = 1 \dots n, \quad (3.2)$$

onde  $w_i$  são as funções peso e  $R$  a função resíduo. A escolha dessas funções resulta em diferentes métodos de resíduos ponderados.

O método de Galerkin é o mais utilizado entre aqueles baseados em resíduos ponderados. A característica principal deste método é que se escolhe como funções peso  $w_i$  as próprias funções de forma  $\phi_j$ . Assim,

$$w_i = \phi_i, \text{ e} \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega} \phi_i R . d\Omega = 0 \quad i = 1 \dots n, \quad (3.4)$$

No campo unidimensional  $\mathbb{R}^1$ , pode-se estabelecer a aproximação para o campo dos deslocamentos, como é mostrado na equação 3.1

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \alpha_j, \quad (3.5)$$

no qual  $u_h(x)$  são os deslocamentos aproximados,  $\phi_j$  são as funções de forma do problema global, e  $\alpha_j$  são as constantes, as quais tem seus valores coincidentes com os valores discretos da função  $u_h(x)$  nos nós. A construção adequada das funções  $\phi_j$  é justamente o papel do MEF.

No MEF, o domínio  $\Omega$  do problema é subdividido em elementos menores, e cada elemento mapeia uma região do domínio. É a chamada malha de elementos finitos. Essa malha possui elementos de geometria simples dotados de nós, onde o MEF propõe a construção de aproximações para os campos das incógnitas de interesse no interior desses elementos, mediante interpolação dos valores nodais (LIU, 2010).

Pelo uso da malha, as equações diferenciais que regem o problema de valor de contorno podem ser expressas, de forma equivalente, por expressões integrais sobre o domínio de interesse. Admitindo que as incógnitas sejam combinações lineares das funções de forma do domínio elementar, as integrais sobre o domínio passam a ser representadas pela soma das integrais sobre o domínio de cada elemento, obtendo-se assim um conjunto de equações elementares. Essa estratégia permite a implementação computacional de procedimentos padronizados para a obtenção de cada contribuição elementar, ou seja, as matrizes da equação de movimento do sistema. O problema global se processa, portanto, mediante somatório das contribuições de todos os elementos,

respeitando a indexação e conectividade nodal, resultando em um sistema de equações para o domínio completo (SORIANO, 2009, LIU, 2010, TORRES, 2008).

A malha de elementos, e as funções de forma interferem diretamente na qualidade da solução do problema. Assim, as soluções numéricas obtidas através do MEF podem ser melhoradas mediante algumas técnicas de refino. Uma delas tem a ideia de manter o tamanho dos elementos, e conseqüentemente da malha, mas aumentar a ordem de aproximação dentro dos elementos. Essa técnica é conhecida como refino  $p$ , onde  $p$  representa a ordem do polinômio interpolador utilizado. A segunda técnica mantém a ordem polinomial das funções de interpolação dos elementos, enquanto o tamanho dos mesmos é modificado, ou seja, a malha é refinada. Esse procedimento é conhecido como refino  $h$ . Por fim, pode-se unir as duas ideias, aumentando-se a ordem dos polinômios e reduzindo o tamanho dos elementos. Essa técnica é chamada de refino  $hp$  (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; HUGHES, 2000; BATHE, 1996;).

Ainda nesse sentido, o processo de construção da malha de elementos finitos pode requerer um considerável esforço computacional (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; CAREY e ODEN, 1984), tornando a aplicação do MEF muito custosa computacionalmente, sendo ineficiente nesses casos. Torres (2008) afirma que uma das limitações do MEF relaciona-se ao fato de o método correntemente gerar aproximações com base em funções interpoladoras polinomiais, cuja qualidade é diretamente proporcional à geometria e ao tipo de elemento. Essa característica pode mostrar-se particularmente ineficaz na simulação de fenômenos que implicam na ocorrência de elevados gradientes de deformações e, conseqüentemente, tensões e daqueles que, de uma forma geral, implicam em grande distorção da geometria dos elementos.

Assim, diversas alternativas para se obter melhores resultados com o MEF já foram propostas. Uma delas, possui a ideia central de se utilizar informações particulares para aprimorar as características da resposta. Essa técnica é a essência dos métodos enriquecidos, em particular, do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

O Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) é baseado no Método da Partição da Unidade (MPU), proposto por Melenk e Babuška (1996). Tem por objetivo principal o enriquecimento do elemento finito através da construção de um subespaço de funções aproximadoras de solução pré-estabelecida. Este subespaço tem por objetivo melhorar os resultados locais e globais, quando comparado com o MEF convencional. A seguir serão apresentados alguns aspectos importantes do MEFG.

### 3.2 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE (MPU)

O método da Partição da Unidade, apresentado formalmente por Babuška e Melenk (1997) surgiu como um método sem malha que introduziu um conceito inovador: a possibilidade de definir aproximações que usam outras funções na base, além de polinômios, convenientemente escolhidas de acordo com o problema estudado.

O objetivo deste método era ultrapassar uma limitação do MEF: a aproximação feita unicamente por funções polinomiais. Para Babuška e Melenk (1997) os espaços locais de aproximação polinomial podem não ter as propriedades mais adequadas para as aproximações associadas a problemas muito específicos, como por exemplo, problemas com soluções oscilatórias.

Conforme a própria terminologia permite entender, partição da unidade (PU) é um conjunto de funções onde a soma de seus valores é igual à unidade em qualquer ponto do suporte. Ou seja, as funções de forma  $\phi_j$  definidas por um método de aproximação formam uma partição da unidade se:

$$\sum_{j=1}^n \phi_j(x) = 1, \quad x \in \Omega \quad (3.6)$$

Quando a propriedade da equação (3.6) se verifica, então a aproximação tem, pelo menos, consistência de ordem zero, ou seja, ao menos o polinômio constante  $p(x) = 1$  é reproduzido de forma exata.

Outra definição clássica do MPU é: seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $\Omega_i$  uma cobertura aberta de  $\Omega$  satisfazendo uma condição de sobreposição em cada ponto:

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{contagem}\{i \mid x \in \Omega_i\} \leq M \quad (3.7)$$

A fim de compreender melhor a equação (3.7), a figura 3 mostra as subcoberturas  $\Omega_i$  de forma que  $\Omega \subset \left[ \bigcup \Omega_i \right]$ .



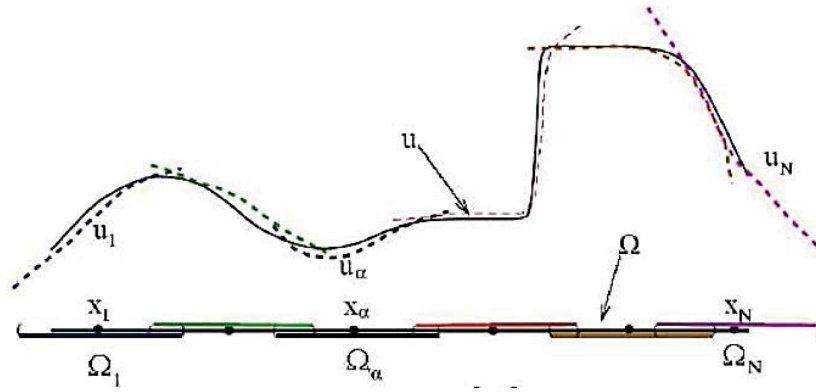


FIGURA 3: COBERTURA  $\Omega_i$  DO DOMÍNIO  $\Omega$   
 FONTE: DUARTE, BABUŠKA E ODEN (2000).

O parâmetro  $M$  controla o número de subcoberturas que podem se sobrepor em um mesmo ponto dentro do domínio  $\Omega$ .

Outra propriedade importante do método é em relação ao suporte das funções. Seja  $\{\eta_i\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\Omega_i$  satisfazendo a seguinte condição:

$$\text{sup}(\eta_i) \subset \text{fechamento}(\Omega_i) \quad \forall i \quad (3.8)$$

A equação (3.8) mostra que as funções devem ser não nulas apenas dentro da subcobertura às quais estão vinculadas.

Com as definições da PU citadas nas equações (3.6) a (3.8), é possível apresentar a definição do espaço de aproximação do MPU (Melenk e Babuška, 1996). O conjunto de funções da partição da unidade  $\{\eta_i\}$  permite obter um conjunto enriquecido de funções de aproximação. Pode-se obter um conjunto de funções  $S_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$  sobre cada subdomínio  $(\Omega_i \cap \Omega)$ , de tal forma que os deslocamentos  $u$  possam ser bem aproximados neste subdomínio. Seja um conjunto de funções que localmente representem bem o deslocamento  $u$ :

$$S_i = \{s_i^j\}_{j=1}^m \quad (3.9)$$

Então, o espaço global  $S$  utilizado para aproximar  $u$  em  $\Omega$  é obtido da forma:

$$S = \sum_i \eta_i S_i = \left\{ \sum_i \eta_i s_i^j \mid s_i^j \in S_i \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (3.10)$$

Ou seja, de forma mais simplista, a solução aproximada para deslocamentos em qualquer ponto  $x$  do domínio é dada por:

$$u_h(x) = \sum_i \sum_{s_i^j \in S_i} \eta_i s_i^j(x) a_{ij} \quad (3.11)$$

onde  $a_{ij}$  são os graus de liberdade (LIU, 2010).

As funções de forma utilizadas no MEF Lagrangeano são um exemplo de PU. Isso torna-se perceptível ao se analisar a figura 4, onde estão representadas as funções para polinômios de Lagrange de ordem  $k = 1$ . A condição imposta pela equação (3.6) é respeitada, pois a soma de todas as funções de forma globais,  $\phi_i$ , resulta na unidade em todo o domínio (Torii, 2012). Na figura 4 também percebe-se que cada função  $\phi_i$  é definida dentro de dois elementos adjacentes, exceto pela função  $\phi_1$  e  $\phi_4$

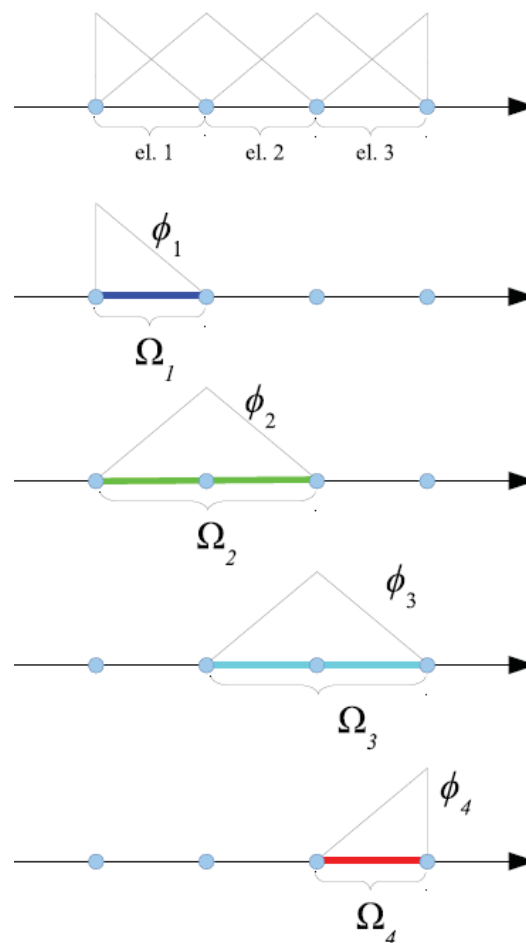


FIGURA 4: PARTIÇÃO DA UNIDADE DADA POR FUNÇÕES LINEARES DO MEF LAGRANGEANO  
 FONTE: TORII (2012)

Segundo Weinhardt (2016), é possível construir inúmeros tipos de PU, utilizando por exemplo, os Polinômios de Legendre, Polinômios Racionais (funções Shepard), Polinômios de Lobatto, entre outros. Dentre a gama de alternativas, no presente trabalho foram escolhidas PU a partir dos polinômios de Lagrange. PU's Lagrangeanas foram

utilizadas também nos trabalhos de Arndt (2009) e Torii (2012) como base para o MEFG trigonométrico, devido a sua consagração nas implementações com o MEF e simplicidade de construção. Weinhardt (2016) utilizou, além desses, polinômios racionais (funções Shepard), mas a PU lagrangeana apresentou melhor aproximação das frequências naturais nos exemplos analisados pelo autor.

### 3.3 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO

As funções de enriquecimento do MEFG devem ser escolhidas de forma a representar um comportamento desejado da solução. Entre as funções especiais que podem ser utilizadas como enriquecimentos, destacam-se as funções contínuas polinomiais, as descontínuas e as singulares, que podem ser utilizadas para se modelar características locais como as trincas, vazios ou microestruturas (BABUŠKA et al., 2004). Já as funções trigonométricas modelam as características da resposta dinâmica estrutural (ARNDT, 2009; TORII, 2012).

O MPU permite construir um espaço de aproximação com a regularidade desejada, independente dos espaços de aproximação locais, preservando as propriedades destes espaços. A aproximação da solução proposta pelo MEFG no domínio do elemento mestre  $\Omega_e$  pode ser escrito como combinação das componentes (ARNDT, MACHADO e SCREMIN, 2010):

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} \quad (3.12)$$

onde  $u_{MEF}$  é a componente do MEF baseada nos graus de liberdade nodais e  $u_{ENRIQ}$  é a componente de enriquecimento gerada pela partição da unidade e baseada nos graus de liberdade de campo.

O enriquecimento da aproximação é realizado seguindo as técnicas e conceitos do método das nuvens  $hp$  (ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998), que permite a ampliação no espaço da aproximação para obter uma melhora na sua qualidade, obtido pela multiplicação das funções PU por funções linearmente independentes, que são as funções de enriquecimento (LIU, 2010).

Na figura 5 compreende-se melhor as funções enriquecidas, para um domínio bidimensional. Na parte superior da figura 5 é representada a função PU de uma determinada nuvem de elementos, que nesse caso são as funções de forma do MEF tradicional e, na parte central encontra-se a função de enriquecimento, nesse caso

polinomial, para caracterização do problema local. Na parte inferior, mostra-se a união das duas funções, PU e enriquecimento.

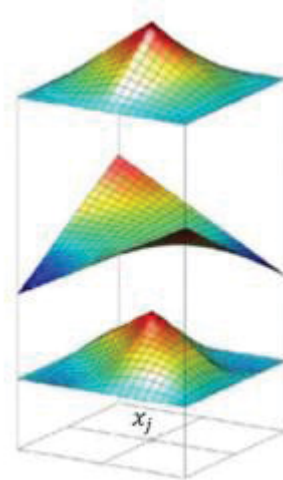


FIGURA 5: CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA DO MEFG, PARA ENRIQUECIMENTOS POLINOMIAIS.

FONTE: ADAPTADO DE EVANGELISTA JR ET AL. (2013).

### 3.4 MEFG ADAPTATIVO

O MEFG adaptativo, proposto por Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2010), é um processo iterativo cujo principal objetivo é aumentar a precisão de uma frequência (autovalor) relacionada a um modo de vibrar escolhido, cuja ordem é denominada de “ordem alvo”. O fluxograma da figura 6 representa o processo adaptativo.

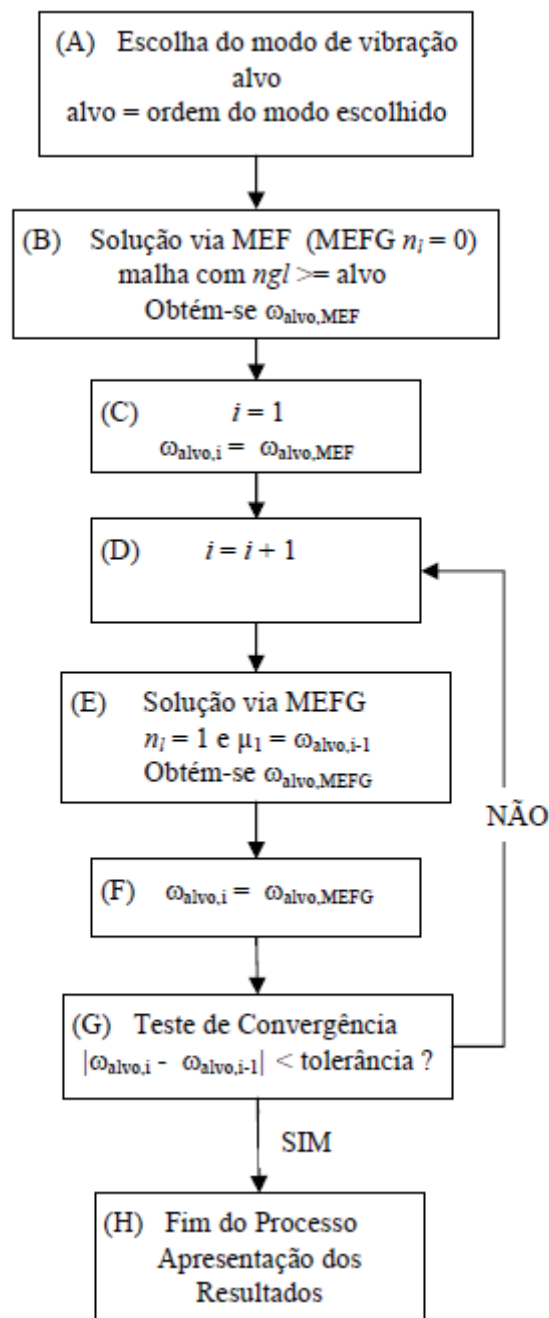


FIGURA 6: FLUXOGRAMA DO PROCESSO ADAPTATIVO  
FONTE: ARNDT (2009)

Neste fluxograma,  $\omega_{alvo}$  corresponde à frequência relacionada ao modo alvo. O primeiro passo do processo adaptativo do MEFG (blocos A a C) consiste na obtenção de uma primeira aproximação da frequência alvo pelo MEF. A malha de elementos finitos usada na análise deve ser refinada o suficiente para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo. Para tanto, basta utilizar uma malha com número de graus de liberdade efetivos, após a introdução das condições de contorno, igual ou maior que a ordem da

frequência alvo, e que seja capaz de representar a geometria do problema. Os passos subsequentes (blocos D a G) consistem na aplicação do MEFG com apenas um nível de enriquecimento ( $n_1 = 1$ ) para a mesma malha de elementos finitos, utilizando como frequência  $\mu_j$  ( $j = 1$ , blocos D e E) das funções enriquecedoras, a frequência alvo obtida no passo anterior. Ao longo do processo iterativo nenhum refinamento da malha é realizado.

Segundo Arndt (2009), devido às características de adaptatividade à frequência alvo do MEFG adaptativo, para cada frequência à determinar, é necessário executar uma nova análise diferente tomando-a como frequência alvo.

Ainda em relação ao método, nos trabalhos de Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2010) e Arndt, Machado e Scremin (2016) o MEFG adaptativo mostrou-se um processo preciso e de rápida convergência, sendo mais preciso que o refinamento  $h$  do MEF convencional.

#### 4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Os capítulos 2 e 3 explicitaram a teoria envolvendo o MEF e o MEFG, além de conceitos importantes a respeito da análise dinâmica transiente. Para que as aplicações deste trabalho fiquem expostas de forma clara, é necessário evidenciar a formulação matemática do problema de vibração livre de barras e vigas de Euler Bernoulli. As formulações iniciam-se pela dedução da equação diferencial que governa o problema. Então, a solução aproximada através do MEF é apresentada, para que em seguida o enriquecimento nas funções de forma através do MEFG possa ser explicitado.

##### 4.1 BARRA RETA (1D)

Considera-se uma barra com deformação axial (Figura 7) onde as seções transversais planas e normais ao eixo da barra após a deformação permanecem planas e normais. A barra possui área da seção transversal  $A$ , e o material é elástico, linear e homogêneo, tendo módulo de elasticidade  $E$ , e massa específica  $\rho$ .

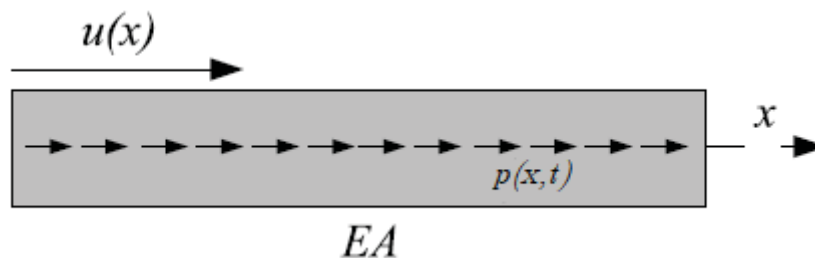


FIGURA 7: BARRA RETA COM DEFORMAÇÃO AXIAL

FONTE: TORII (2012)

Analisando-se um elemento infinitesimal com comprimento  $dx$  tem-se o diagrama da figura 8. A força  $P$  indicada é oriunda da tensão no eixo  $x$  ( $\sigma_x$ ), e a força  $p$  varia tanto no comprimento  $x$  quanto no tempo  $t$ . Considera-se essa força  $p$  uniformemente distribuída.

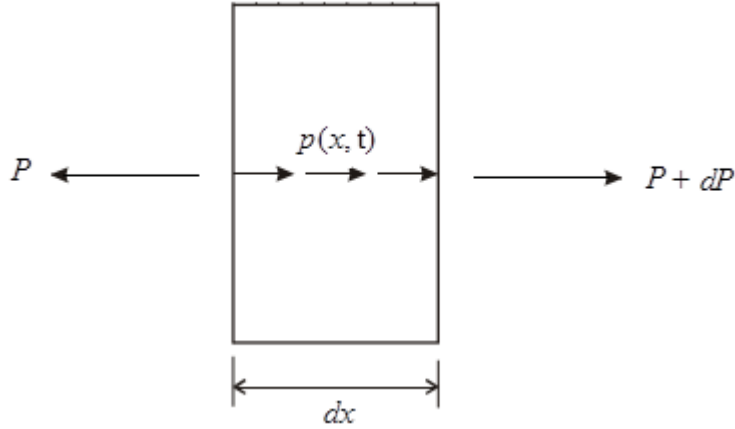


FIGURA 8: ELEMENTO INFINITESIMAL DA BARRA RETA

FONTE: ARNDT (2009)

Através do somatório de forças, tem-se o equilíbrio dinâmico da forma:

$$-P + (P + dP) + p(x, t)dx = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (4.1)$$

onde  $u$  é o deslocamento na direção longitudinal.

Então, dividindo a equação (4.1) por  $dx$ , tem-se:

$$\frac{dP}{dx} + p(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

Sabendo que a força  $P$  é resultando da tensão  $\sigma_x$ , e que o material é elástico linear, através da Lei de Hooke, tem-se a relação:

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow P = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3)$$

Admitindo  $E$  e  $A$  constantes, tem-se por fim:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(x, t) \quad (4.4)$$

Para se obter a forma integral do problema dinâmico, multiplica-se a equação (4.4) por uma função teste  $w(x)$  e integra-se no domínio  $\Omega = [a, b]$ , resultando em:

$$EA \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w d\Omega = \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w d\Omega - \int_{\Omega} p w d\Omega \quad (4.5)$$

Integrando por partes a primeira parcela da equação (4.5) obtém-se:

$$\left[ wEA \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\Gamma} - \int_{\Omega} EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega = \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w d\Omega - \int_{\Omega} p w d\Omega, \quad (4.6)$$

sendo  $\Gamma$  o contorno. Rearranjando, obtém-se a forma fraca do problema:



$$EA \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} w d\Omega = \left[ wEA \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\Gamma} + \int_{\Omega} p w d\Omega \quad (4.7)$$

A solução aproximada  $u_h(x)$  pode ser escrita, na forma discreta em uma base  $N$ -dimensional, da seguinte forma:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j u_j(x), \quad (4.8)$$

onde  $\phi_j$  são as funções de forma globais, e  $u_j$  são os respectivos graus de liberdade. Aplicando o Método de Galerkin, tem-se:

$$EA \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} u_j \right) \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} w_i \right) d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial u_j^2}{\partial t^2} \phi_j \right) \sum_{i=1}^N \phi_i w_i d\Omega = \quad (4.9)$$

$$EA \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} u_j \right) \Big|_{\Gamma} \sum_{i=1}^N \phi_i w_i + \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^N \phi_i w_i d\Omega$$

Como a função teste é arbitrária, os valores dos coeficientes  $w_i$  são quaisquer. Assim a equação (4.9) será satisfeita quando:

$$EA \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega + \rho A \sum_{j=1}^N \ddot{u}_j \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega = \quad (4.10)$$

$$EA \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} u_j \right) \Big|_{\Gamma} \phi_i + \int_{\Omega} p \phi_i d\Omega \quad i = 1..,n$$

Resultando no seguinte sistema de equações:

$$Ku + M\ddot{u} = F, \quad (4.11)$$

onde  $K$  é a matriz rigidez, dada por:

$$K_{ij} = EA \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega, \quad (4.12)$$

$M$  é a matriz massa, dada por:

$$M_{ij} = \rho A \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega, \quad (4.13)$$

e  $F$  é o vetor de forças externas:

$$F_i = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \phi_i \right]_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} p \phi_i d\Omega \quad (4.14)$$

Para resolver o sistema de equações dado pela equação (4.11) é necessário aplicar um método de integração no tempo. As alternativas clássicas para se resolver este

problema de forma numérica são o Método de Newmark e o Método da Superposição Modal, já apresentados anteriormente.

Para o caso de vibração livre de barra reta, onde  $E$ ,  $A$  e  $\rho$  são constantes e  $p(x,t)=0$ , a equação (4.10) fica:

$$EA \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega + \rho A \sum_{j=1}^N \ddot{u}_j \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.15)$$

Na forma matricial, a equação (4.15) remete à equação de movimento do problema de vibração livre, exposto na equação (2.2). De forma análoga ao exposto no capítulo 2, o problema de autovalor generalizado fica da forma:

$$Ku = \lambda_h Mu \quad (4.16)$$

onde  $K$  é a matriz de rigidez e  $M$  é a matriz de massa definidas nas equações (4.12) e (4.13) respectivamente. Na equação (4.16),  $\lambda_h$  são os autovalores relacionados às frequências naturais aproximadas  $\omega_h$ , e os vetores  $u$  são os autovetores correspondentes aos modos de vibração da barra. As frequências naturais aproximadas  $\omega_h$  são obtidas através da relação:

$$\omega_h = \sqrt{\lambda_h} \quad (4.17)$$

Depois de discretizar o domínio do problema  $\Omega(0, L)$  em subdomínios dos elementos  $\Omega_e(0, L_e)$ , é necessário determinar a contribuição de cada elemento através dos coeficientes da matriz de rigidez elementar  $K_{ij}^e$ , e dos coeficientes da matriz de massa elementar  $M_{ij}^e$ , obtidos por:

$$K_{ij}^e = EA \int_{\Omega_e} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} d\Omega_e, \quad (4.18)$$

$$M_{ij}^e = \rho A \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j d\Omega_e, \quad (4.19)$$

onde  $\psi_i$  são as funções de forma locais.

A solução através do método clássico de elementos finitos no domínio do elemento mestre  $\Omega_e$  pode ser expressa matricialmente, de forma generalizada:

$$u_h^e(\xi) = N^T q, \quad (4.20)$$

onde  $N$  é a matriz das funções de forma locais,  $q$  é o vetor dos deslocamentos. Analisando o elemento de barra uniforme com dois nós, e um grau de liberdade por nó, os termos da solução aproximada da equação (4.20), são definidos no domínio do elemento mestre como:

$$N^T = [\psi_1 \quad \psi_2], \quad (4.21)$$

$$q^T = [u_1 \quad u_2], \quad (4.22)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos nodais,  $\psi_1 = \frac{1+\xi}{2}$  e  $\psi_2 = \frac{1-\xi}{2}$  para  $\Omega_e(-1,1)$ .

#### 4.1.1 Enriquecimento das funções de forma através do MEEG

No presente trabalho, as funções enriquecedoras são trigonométricas, propostas por Arndt (2009) e posteriormente adaptadas por Torii (2012), Weinhardt (2016) e Weinhardt et al. (2015), que representem a solução analítica geral do problema. Desta forma, segundo Torii (2012), é possível obter resultados bastante precisos para os modos de vibração.

A formulação pode ser escrita na forma de um método enriquecido, cuja solução aproximada no domínio do elemento mestre de dois nós  $\Omega_e(-1,1)$  é dada por:

$$u_h^e(\xi) = u_{MEF}^e + u_{ENRIQ}^e \quad (4.23)$$

$$u_{MEF}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) u_i \quad (4.24)$$

$$u_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) \left[ \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}(\xi) a_{ij} + \varphi_{ij}(\xi) b_{ij} \right] \quad (4.25)$$

onde  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são os graus de liberdade de campo e  $\eta_i$  representa a Partição da Unidade do MEF.

A PU dada pelas funções lineares do MEF Lagrangeano em função do elemento mestre são dadas por:

$$\begin{cases} \eta_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \\ \eta_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \end{cases} \quad (4.26)$$

As funções de enriquecimento para o domínio em questão, baseadas em Arndt (2009) e Torii et al. (2015) são:

$$\begin{cases} \gamma_{1j} = \text{sen}(\beta_j(1+\xi)); \\ \gamma_{2j} = \text{sen}(\beta_j(\xi-1)); \\ \varphi_{2j} = \text{cos}(\beta_j(1+\xi)) - 1; \\ \varphi_{1j} = \text{cos}(\beta_j(\xi-1)) - 1; \end{cases} \quad (4.27)$$

para  $j = 1, 2, \dots, nl$ , sendo  $nl$  o número de níveis de enriquecimento, e o parâmetro  $\beta$  é dado por  $\beta_j = \frac{3}{4}\pi j$ .

No trabalho de Weinhardt (2016), a fim de estabilizar o método, foi proposta uma modificação do parâmetro  $\beta$ , intitulada “Modificação Heurística”, ficando da forma  $\beta_j = \left(2j - \frac{5}{4}\right)\pi$ . Como a modificação heurística apresentou bons resultados no que diz respeito a estabilidade do método, no presente trabalho esta modificação sugerida pelo autor supracitado foi utilizada.

Na figura 9 é possível observar as funções de enriquecimento da equação (4.27) com  $\beta = \frac{3}{4}\pi$ .

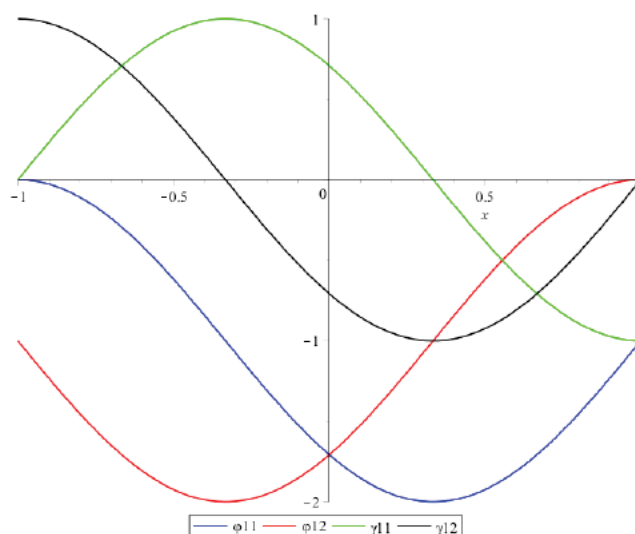


FIGURA 9: FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS, PROPOSTA DE ARNDT (2009)

FONTE: PETROLI (2016)

#### 4.1.2 MEEG adaptativo

As funções de enriquecimento utilizadas no presente trabalho e dadas na equação (4.27) são baseadas na proposta de enriquecimento trigonométrico de Arndt (2009). Torii (2012) propôs uma modificação sutil das funções de enriquecimento trigonométricas, onde foi removida a influência do comprimento do elemento  $Le$ , desvinculando o parâmetro  $\beta_j$  dos parâmetros do material. Porém, a formulação adaptativa do MEEG neste trabalho foi utilizada com as funções trigonométricas originais de Arndt (2009), que são semelhantes às já expostas na equação (4.27), e no domínio do elemento mestre  $\Omega_e(0,1)$  são da forma:

$$\begin{cases} \gamma_{1j} = \text{sen}(\beta_j L_e \xi); \\ \gamma_{2j} = \text{sen}(\beta_j L_e (\xi - 1)); \\ \varphi_{2j} = \text{cos}(\beta_j L_e \xi) - 1; \\ \varphi_{1j} = \text{cos}(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1; \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\beta_j = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \mu_j \quad (4.29)$$

onde  $Le$ ,  $E$  e  $\rho$  são o comprimento, o módulo de elasticidade e a massa específica do elemento, respectivamente, e  $\mu_j$  é a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$ .

A rotina de solução do MEEG adaptativo já foi exposta no capítulo 3, e o organograma de solução também já foi exposto na figura 6.

#### 4.2 VIGA DE EULER - BERNOULLI

Para o caso do elemento de viga de Euler-Bernoulli, são considerados os deslocamentos transversais ao eixo da viga, conforme a figura 10.

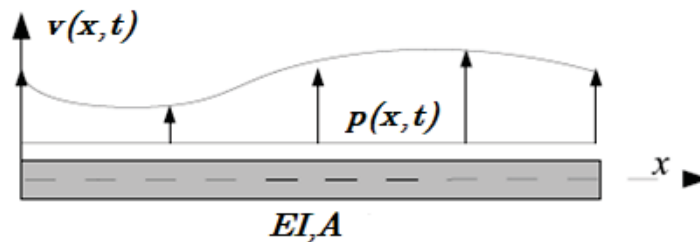


FIGURA 10: VIGA DE EULER BERNOULLI

FONTE: TORII (2012)

Aplicando o equilíbrio dinâmico, a equação diferencial parcial que rege os deslocamentos em uma viga de Euler - Bernoulli com seção uniforme é da forma (CLOUGH; PIENZIEN, 1975):

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (4.30)$$

onde  $A=A(x)$  é a área da seção transversal,  $I=I(x)$  é o momento de inércia em relação ao eixo de flexão,  $E=E(x)$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\rho$  é a massa específica,  $p$  é a força transversal aplicada por unidade de comprimento, e  $t$  é o tempo. A solução  $v=v(x, t)$  deve satisfazer as condições iniciais e de contorno. Por simplicidade, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a área e a massa específica são tomadas como constantes ao longo da viga.

A forma fraca do problema pode ser obtida aplicando o método dos resíduos ponderados, ou seja, multiplicando o resíduo pela função teste  $w(x)$  e integrando no domínio:

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} w d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w d\Omega = \int_{\Omega} p(x) w d\Omega \quad (4.31)$$

Integrando o termo da esquerda por partes, duas vezes, resulta em:

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} w d\Omega = EI \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} w \right]_{\partial\Omega} - EI \int_{\Omega} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega, \text{ e} \quad (4.32)$$

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega = EI \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{\partial\Omega} - EI \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Omega \quad (4.33)$$

Substituindo as equações (4.33) e (4.32) na (4.31) resulta na forma fraca:

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w d\Omega = \int_{\Omega} p(x) w d\Omega + EI \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{\partial\Omega} - EI \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} w \right]_{\partial\Omega} \quad (4.34)$$

Os dois últimos termos da equação (4.34) representam as condições de contorno naturais.

Da resistência dos materiais, tem-se:

$$\bar{M} = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad e \quad (4.35)$$

$$\bar{Q} = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (4.36)$$

onde  $\bar{M}$  e  $\bar{Q}$  são, respectivamente, o momento fletor e o esforço cortante. Assim, a equação (4.32) transforma-se em:

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w d\Omega = \int_{\Omega} p(x) w d\Omega + \bar{M} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\partial\Omega} - \bar{Q} w \Big|_{\partial\Omega} \quad (4.37)$$

Utilizando o Método de Galerkin, de forma similar à barra:

$$\begin{aligned} EI \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left( \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} v_j \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} w_i \right) d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left( \frac{d^2 v_j}{dt^2} \phi_j \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} p(x) \sum_{i=1}^n \phi_i w_i d\Omega - \bar{M} \sum_{i=1}^n \left( \frac{d \phi_i}{dx} w_i \right) \Big|_{\partial\Omega} + \bar{Q} \sum_{i=1}^n \phi_i w_i \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Rearranjando:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n EI \int_{\Omega} \left( \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) d\Omega v_j + \rho A \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left( \frac{d^2 v_j}{dt^2} \phi_j \right) d\Omega \right] w_i = 0 \quad (4.39)$$

$$- \int_{\Omega} p(x) \phi_i d\Omega - \bar{M} \frac{d \phi_i}{dx} \Big|_{\partial\Omega} + \bar{Q} \phi_i \Big|_{\partial\Omega}$$

como a função teste é arbitrária, os valores dos coeficientes  $w_i$  são quaisquer. Assim a equação (4.39) será satisfeita quando:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n EI \int_{\Omega} \left( \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) d\Omega v_j + \rho A \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left( \frac{d^2 v_j}{dt^2} \phi_j \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} p(x) \phi_i d\Omega - \bar{M} \frac{d \phi_i}{dx} \Big|_{\partial\Omega} + \bar{Q} \phi_i \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Matricialmente, a equação (4.40) fica da forma:

$$Ku + M\ddot{u} = F, \quad (4.41)$$

que é igual à equação (4.11) referente ao elemento de barra. No caso de vigas, as matrizes de rigidez, de massa, e das forças externas são dadas, respectivamente por:

$$K_{ij}^e = EI \int_{\Omega^e} \left( \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) d\Omega^e \quad (4.42)$$

$$M_{ij}^e = \rho A \int_{\Omega^e} \phi_i \phi_j d\Omega^e \quad (4.43)$$

$$F_i^e = \int_{\Omega^e} p(x) \phi_i d\Omega + \bar{M} \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{\alpha\Omega^e} - \bar{Q} \phi_i \Big|_{\alpha\Omega^e} \quad (4.44)$$

Da equação (4.30) nota-se que os deslocamentos transversais em vigas são governados por uma equação diferencial parcial de quarta ordem. Essa diferença, de acordo com Torii (2012) faz com que a abordagem utilizada para construir as aproximações do MEF para este problema seja diferente daquela utilizada para o problema de barras, onde a equação diferencial associada é de segunda ordem. Ou seja, as funções de forma utilizadas devem ser diferentes. Assim, a formulação tradicional do MEF para problemas de vigas de Euler-Bernoulli utiliza os polinômios cúbicos de Hermite como funções de aproximação (TORII, 2012). Neste caso cada elemento possui quatro graus de liberdade: deslocamentos transversais e rotações nos nós inicial e final.

Para encontrar as variáveis modais da equação (4.41), as forças externas  $p$  são nulas, e o procedimento é idêntico ao citado no item 4.1 para o elemento de barra.

A solução através do método clássico de elementos finitos no domínio do elemento mestre  $\Omega_e$  pode ser expressa matricialmente, de forma generalizada:

$$v_h^e(\xi) = N^T q, \quad (4.45)$$

ou, explicitando os 4 graus de liberdade do elemento,

$$v_h^e(\xi) = \psi_1^e(\xi)v_1 + \psi_2^e(\xi)\theta_1 + \psi_3^e(\xi)v_2 + \psi_4^e(\xi)\theta_2 \quad (4.46)$$

e,

$$N^T = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4], \quad (4.47)$$

$$q^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2], \quad (4.48)$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  são os deslocamentos nodais e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais.



#### 4.2.1 Enriquecimento das funções de forma através do MEEG

As funções de enriquecimento utilizadas no elemento de viga são trigonométricas, propostas por Arndt (2009).

A formulação pode ser escrita na forma de um método enriquecido, cuja solução aproximada no domínio do elemento mestre de dois nós  $\Omega_e(0,1)$  é dada por:

$$v_h^e(\xi) = v_{MEF}^e + v_{ENRIQ}^e \quad (4.49)$$

e

$$v_{MEF}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) (\phi_{1i}(\xi) v_i + \phi_{2i}(\xi) \theta_i), \quad (4.50)$$

$$v_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i \left[ \sum_{j=1}^{n_i} \gamma_j(\xi) a_{ij} \right], \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} \phi_{11} = -2\xi^2 + \xi + 1 \\ \phi_{12} = 3\xi - 2\xi^2 \\ \phi_{21} = L_e(\xi - \xi^2) \\ \phi_{22} = L_e(\xi^2 - \xi) \end{cases} \quad (4.52)$$

onde  $a_{ij}$  são os graus de liberdade de campo,  $n_i$  é o número de níveis de enriquecimento,  $\phi_{1i}$  e  $\phi_{2i}$  são as funções associadas aos graus de liberdade nodais,  $\gamma_j$  são as funções enriquecedoras,  $v_i$  os deslocamentos nodais,  $\theta_i$  as rotações nodais, e  $\eta_i$  são as partições da unidade do MEF, dadas por:

$$\begin{cases} \eta_1 = 1 - \xi \\ \eta_2 = \xi \end{cases} \quad (4.53)$$

Em relação às funções enriquecedoras, Arndt (2009) propôs três alternativas: as mesmas funções analíticas empregadas no Método Composto, as funções de forma dos modos normais utilizadas no Método dos Modos Admissíveis (MMA) (ENGELS, 1992), e ainda, funções trigonométricas utilizadas também no MMA. No presente trabalho, as funções de enriquecimento utilizadas para o elemento de viga de Euler-Bernoulli são as funções trigonométricas e as funções baseadas no MMA. As funções trigonométricas no domínio do elemento mestre, são da forma:

$$\gamma_j = \cos[(j-1)\pi\xi] - \cos[(j+1)\pi\xi] \quad (4.54)$$

para  $j = 1, 2, \dots, nl$ , sendo  $nl$  o número de níveis de enriquecimento.

As funções enriquecedoras baseadas no MMA, no domínio do elemento mestre, são da forma:

$$\gamma_j = \cos(\lambda_j \xi) - \frac{1 + (-1)^j e^{-\lambda_j}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} \operatorname{sen}(\lambda_j \xi) - \frac{e^{-\lambda_j \xi} - (-1)^j e^{-\lambda_j(1-\xi)}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} \quad (4.55)$$

onde  $\lambda_j$  são os autovalores obtidos pela solução da equação característica:

$$\cos(\lambda_r) - \frac{2e^{-\lambda_r}}{1 + e^{-2\lambda_r}} = 0 \quad (4.56)$$

#### 4.2.2 MEEG adaptativo

Assim como no elemento de barra, a formulação do MEEG adaptativo tem algumas modificações com o exposto nas equações (4.50) a (4.56), no que diz respeito às funções da partição da unidade  $\eta$  e funções de enriquecimento  $\phi$  e  $\gamma$ .

De acordo com Arndt (2009), a solução aproximada do MEEG adaptativo no domínio do elemento mestre  $\Omega_e(0,1)$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}_h^e(\xi) = \mathbf{v}_{MEF}^e + \mathbf{v}_{ENRIQ}^e \quad (4.57)$$

e

$$\mathbf{v}_{MEF}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 [\eta_i \mathbf{u}_i + \phi_i \boldsymbol{\theta}_i], \quad (4.58)$$

$$\mathbf{v}_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i \left[ \sum_{j=1}^{n_i} (\gamma_{1ij} \mathbf{a}_{ij} + \gamma_{2ij} \mathbf{b}_{ij} + \gamma_{3ij} \mathbf{c}_{ij} + \gamma_{4ij} \mathbf{d}_{ij}) \right], \quad (4.59)$$

onde  $\eta_i$  são as funções da partição da unidade,  $\phi_i$  são as funções de forma do MEF convencional associadas às rotações nodais e  $\gamma_{kij}$  são as funções enriquecedoras dadas por:

$$\eta_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (4.60)$$

$$\eta_2 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (4.61)$$

$$\phi_1 = L_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (4.62)$$

$$\phi_2 = L_e(\xi^3 - \xi^2) \quad (4.63)$$

$$\gamma_{11j} = \cos(\beta_j L_e \xi) - 1 \quad (4.64)$$

$$\gamma_{12j} = \cos(\beta_j L_e (1 - \xi)) - 1 \quad (4.65)$$

$$\gamma_{21j} = \text{sen}(\beta_j L_e \xi) - \beta_j L_e \xi \quad (4.66)$$

$$\gamma_{22j} = \text{sen}(\beta_j L_e (1 - \xi)) - \beta_j L_e (1 - \xi) \quad (4.67)$$

$$\gamma_{31j} = e^{-\beta_j L_e \xi} + \beta_j L_e \xi - 1 \quad (4.68)$$

$$\gamma_{32j} = e^{-\beta_j L_e (1 - \xi)} + \beta_j L_e (1 - \xi) - 1 \quad (4.69)$$

$$\gamma_{41j} = e^{-\beta_j L_e (1 - \xi)} - (\beta_j L_e \xi + 1)e^{-\beta_j L_e} \quad (4.70)$$

$$\gamma_{42j} = e^{-\beta_j L_e (1 - \xi)} - [\beta_j L_e (1 - \xi) + 1]e^{-\beta_j L_e} \quad (4.71)$$

$$\beta_j = \sqrt[4]{\frac{\mu_j^2 \rho A}{EI}} \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (4.72)$$

sendo  $n_l$  o número de níveis de enriquecimento,  $L_e$  o comprimento do elemento,  $E$ ,  $A$ ,  $I$  e  $\rho$  o módulo de elasticidade, a área da seção transversal, o momento de inércia e a massa específica do elemento, respectivamente,  $u_i$  e  $\theta_i$  os deslocamentos e rotações nodais, respectivamente,  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  os graus de liberdade de campo associados às funções enriquecedoras  $\gamma_{kij}$ , e  $\mu_j$  a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$ .

## 5. METODOLOGIA APLICADA

O presente trabalho foi desenvolvido seguindo um roteiro de uma série de passos metodológicos. Assim, a metodologia é desenvolvida da seguinte maneira:

**1. Formulação do problema:** o estudo iniciou-se analisando o comportamento do MEFG na análise dinâmica transiente. Para isso, alguns trabalhos como os de Arndt (2009), Garcia, Rossi e Linzmaier (2010), Torii (2012), Shang (2014), Weinhardt (2016), e Shang, Machado e Abdalla Filho (2016) formaram a base para a análise desse comportamento. Posteriormente, uma revisão bibliográfica a respeito dos métodos de solução no domínio do tempo, bem como a respeito do MEF e do MEFG foi realizada.

Partindo disto, alguns aspectos a respeito do MEFG na formulação transiente tornaram-se objeto de estudo, como por exemplo um número razoável de elementos e, principalmente de níveis de enriquecimento a ser utilizado. Também, outro objeto de estudo foi quantos modos de vibração, e mais precisamente quais modos são necessários levar em conta na análise. Ainda, utilizar o MEFG adaptativo (Arndt, 2009) partindo da identificação dos modos mais preponderantes na resposta.

**2. Implementação:** As matrizes dos elementos de barra e viga de Euler-Bernoulli provenientes do MEFG foram desenvolvidas no programa de manipulação simbólica Maple (MAPLESOFT, 2015). No caso do MEFG adaptativo, as matrizes elementares são oriundas do trabalho de Arndt (2015). As demais rotinas computacionais utilizadas foram implementadas no programa MATLAB (MATHWORKS, 2014).

A rotina computacional utiliza a formulação do MEFG para a obtenção das matrizes de massa e rigidez da estrutura. Nessas matrizes, o enriquecimento trigonométrico proposto por Arndt (2009) foi testado. Também, no caso das vigas de Euler-Bernoulli foi analisado o enriquecimento das funções baseadas no MMA. Então, o Método da Superposição Modal é aplicado, a fim de desacoplar o sistema de equações do problema. Depois de desacoplado, o sistema de equações é resolvido pelo Método de Newmark com acelerações constantes, que traz como resultado os deslocamentos, velocidades e acelerações em função do tempo. Essas variáveis são comparadas com soluções de referência, que para alguns poucos casos são as soluções analíticas, e também com as obtidas através do MEF com um teste de convergência prévio. A figura 11 mostra um fluxograma que resume as etapas utilizadas neste trabalho

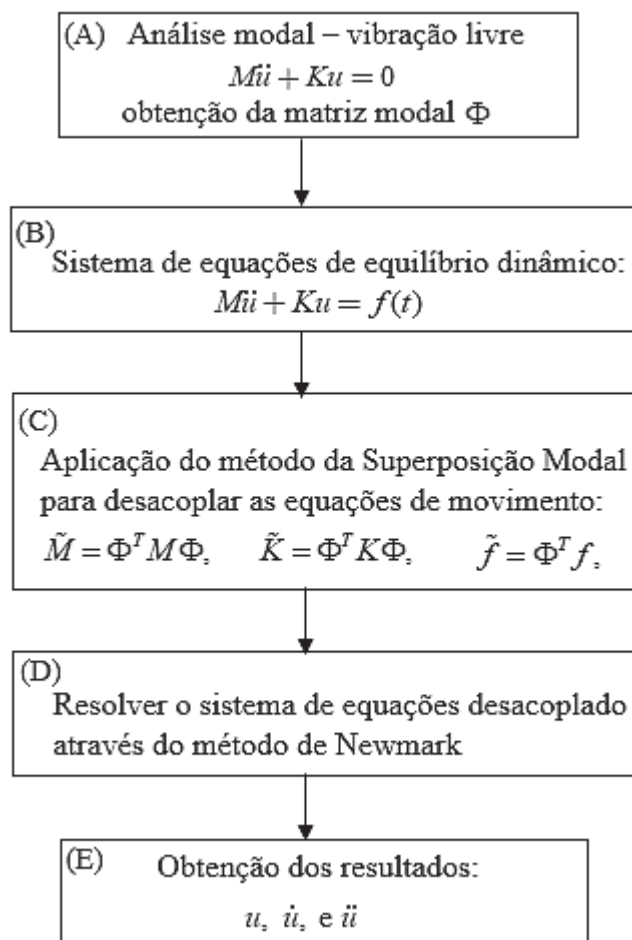


FIGURA 11: FLUXOGRAMA DA METODOLOGIA

Após uma primeira obtenção de resultados, conforme mostra a figura 11, as análises a respeito da matriz modal são então feitas. A matriz é reduzida a uma certa porcentagens de modos, proveniente dos resultados preliminares do capítulo 6, e as etapas C, D e E são reprocessadas.

Um coeficiente, denominado fator de influência é proposto, e permite a identificação dos modos de vibração mais preponderantes da estrutura em análise. Após a aferição desses modos, os mesmos são os únicos a serem deixados na matriz modal, e novamente as etapas C, D e E são reprocessadas.

Ainda, após a identificação dos modos de vibração mais preponderantes da estrutura, o MEEG adaptativo é implementado, e os resultados são comparados entre si.

## 5.1 ANÁLISE DE ERRO AO LONGO DO TEMPO

O presente trabalho utiliza uma abordagem para avaliação de erro presente em Torii e Machado (2010) e em Torii (2012). A formulação é baseada na proposta de Bathe (1996) e foi adaptada para a análise transiente.

A formulação trata-se do erro da resposta aproximada  $u_h(x,t)$  em relação à solução analítica do problema  $u(x,t)$ , para uma dada posição  $x = x_0$  fixa, no intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$ , e pode ser definido como:

$$e \approx \sum_{i=1}^n \Delta t |\Delta u^{(i)}| = \sum_{i=1}^n \Delta t |u^{(i)} - u_h^{(i)}|, \quad (5.1)$$

onde  $n$  é o número de passos de tempo utilizado,  $u^{(i)}$  é a solução analítica do problema (ou de referência) no passo de tempo  $(i)$  para  $x = x_0$ ,  $u_h^{(i)}$  é a solução aproximada no passo de tempo  $(i)$  para  $x = x_0$ , e  $\Delta t$  é o passo de tempo utilizado.

O erro da equação (5.1) pode ser avaliado eficientemente uma vez que utiliza apenas valores discretos no tempo e, portanto, o esforço computacional envolvido é pequeno (TORII, 2012). A ideia central do erro é apresentada na figura 12.

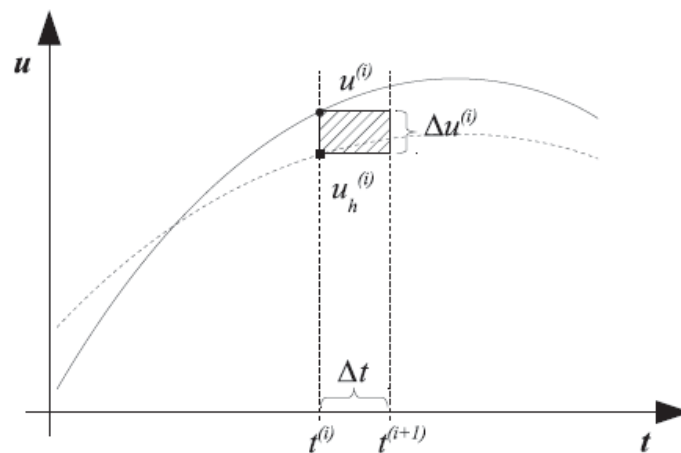


FIGURA 12: ESTIMATIVA DE ERRO  
FONTE: TORII (2012)

O erro calculado de acordo com a equação (5.1) no caso do deslocamento possui unidade dada por comprimento x tempo. No caso da velocidade a unidade é comprimento, e na aceleração é comprimento por tempo.

## 6. RESULTADOS PRELIMINARES: ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO MEFG ATRAVÉS DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA

A fim de analisar a resposta transiente de elementos de barra e viga de Euler-Bernoulli, inicialmente avalia-se o comportamento do MEFG através de espectros de frequência encontrados na literatura. Desse estudo, parte-se para a análise transiente, onde efetivamente são calculados os deslocamentos, velocidades e acelerações.

O espectro de frequências representa, basicamente, o processo de normalização das frequências naturais da estrutura em estudo. De acordo com Weinhardt (2016), é uma forma de representação que permite a comparação de diversas abordagens, como enriquecimentos e refinamentos, sem a necessidade de igualar o número de graus de liberdade.

No espectro de frequências, o eixo das abscissas representa os  $n$ -ésimos graus de liberdade ( $n$ ), que são normalizados em função do número total de graus de liberdade ( $N$ ), ou seja,  $\tilde{n} = n / N$ . Com isso, facilita-se a comparação entre espectros de frequências com diferentes números de graus de liberdade. No eixo das ordenadas tem-se a relação  $\omega_h / \omega$  que é a frequência natural aproximada  $\omega_h$  dividida pela frequência natural numérica  $\omega$ . Quanto mais próxima de 1,0 essa relação, melhor é a resposta numérica obtida, conforme exposto por Hughes (2000).

No trabalho de Shang, Machado e Abdalla Filho (2016), expresso na figura 13, um exemplo de vibração livre de uma viga bi-apoiada, utilizando enriquecimento trigonométrico foi utilizado para comparar a acurácia do MEFG com 2, 3 e 4 níveis de enriquecimento, em comparação com o MEF linear.

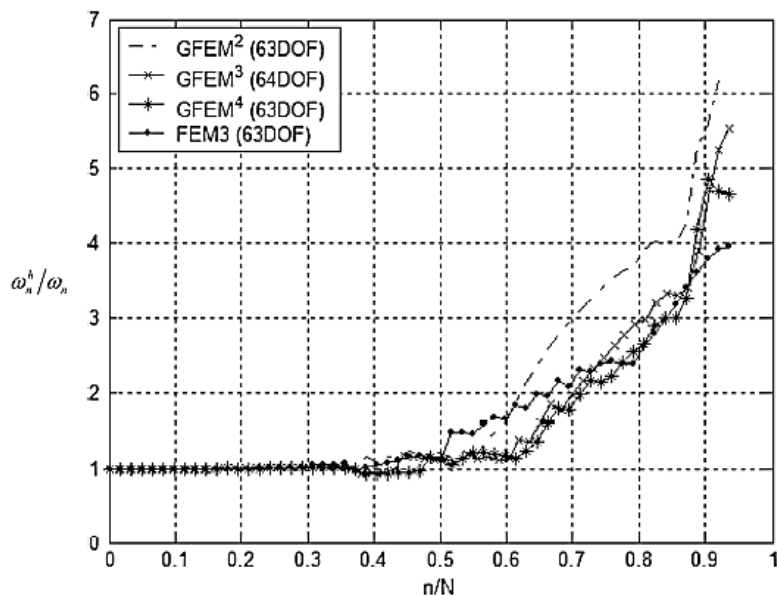


FIGURA 13: ESPECTRO DE FREQUÊNCIA COMPARANDO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO DO MFG COM MEF LINEAR.

FONTE: SHANG, MACHADO E ABDALLA FILHO (2016)

No trabalho de Weihardt (2016), figura 14, a aplicação foi particularizada para um elemento de barra bi-engastada sujeita a vibração livre. O autor, visando a estabilidade do método, fez a aplicação do MFG com enriquecimento trigonométrico, e comparou com o MFG com Partição da Unidade definida a partir das funções de Shepard, funções trigonométricas, e ainda com o MEF Lagrangiano.

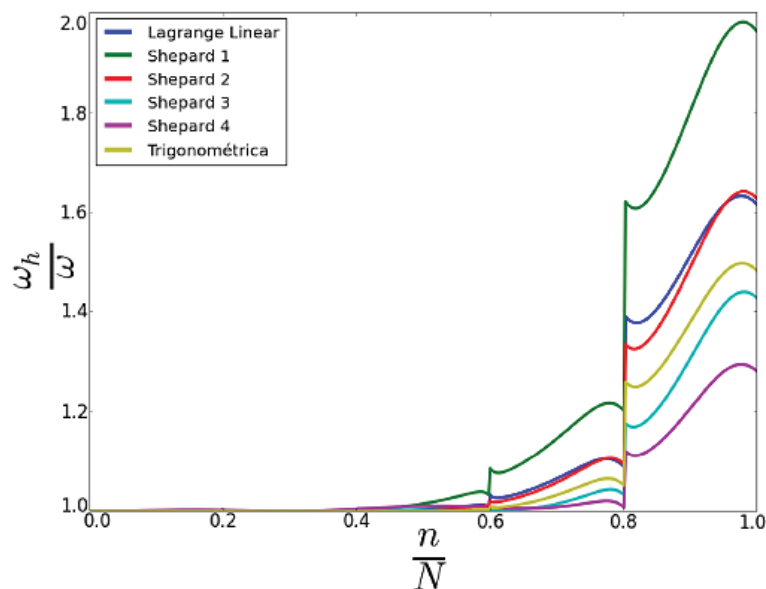


FIGURA 14: ESPECTRO DE FREQUÊNCIA COMPARANDO O MFG TRIGONOMÉTRICO, O MFG COM PARTIÇÃO DA UNIDADE COM FUNÇÕES DE SHEPARD EM VÁRIOS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO, E AINDA MEF LINEAR.

FONTE: WEIHARDT (2015)



O trabalho de Garcia, Rossi e Linzmaier (2010), figura 15, também foi um exemplo de barra bi-engastada, e foi aplicado o MEFG com Partição da Unidade definida a partir de funções racionais e enriquecimento polinomial, com 3 níveis de enriquecimento, e comparou com o MEF linear.

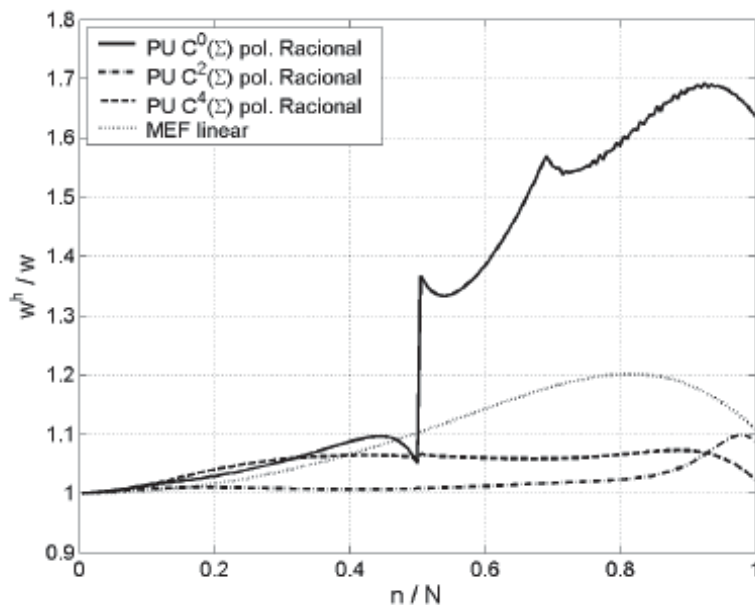


FIGURA 15: ESPECTRO DE FREQUÊNCIA COMPARANDO O MEFG COM PARTIÇÃO DA UNIDADE COM FUNÇÕES RACIONAIS E ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL, EM VÁRIOS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO, E AINDA MEF LINEAR.  
 FONTE: GARCIA, ROSSI E LINZMAIER (2010)

Dessa forma, pode-se concluir que dentre as aplicações do MEFG supracitadas, a faixa de modos com boa aproximação gira em torno dos 50%. Porém, o trabalho de Garcia, Rossi e Linzmaier (2010), utiliza enriquecimento polinomial, e foi o que apresentou pior aproximação nessa faixa de modos. Analisando a figura 13 e 14, dos quais os autores utilizam o enriquecimento trigonométrico, a faixa de modos aceitáveis está em torno de 60%. Portanto, como o presente trabalho também fará a utilização do MEFG com enriquecimento trigonométrico, a faixa de modos adotada para as análises iniciais, a qual a matriz modal será condensada, será de 60%.

## 7. O MEEG APLICADO NA ANÁLISE TRANSIENTE EM ELEMENTOS DE BARRA

Os casos analisados a seguir permitem avaliar o desempenho e a precisão do elemento generalizado de barra reta, quando aplicado o MEEG na análise transiente. São apresentados exemplos de barra fixa – livre com 3 tipos diferentes de força aplicada: força tipo degrau, força de impulso, e força harmônica. Também, para complementar o estudo, um exemplo de treliça é analisado.

Nestes exemplos foram adotados parâmetros unitários, com  $\sqrt{E/\rho} = c = 1$ ,  $A = 1$  m<sup>2</sup> e  $L = 1$  m.

### 7.1 BARRA FIXA-LIVRE COM FORÇA TIPO DEGRAU

O primeiro exemplo trata-se de uma barra fixa - livre com uma excitação externa do tipo degrau aplicada em sua extremidade livre. Para a discretização temporal, o intervalo de estudo de 20 segundos foi analisado em passos de  $10^{-2}$  segundos, mas por vezes, por questão de visibilidade das respostas, o intervalo de tempo mostrado nas figuras é menor. Os gráficos das respostas transientes são relativos aos nó da extremidade livre da barra, e a figura 16 mostra a barra do exemplo em questão.

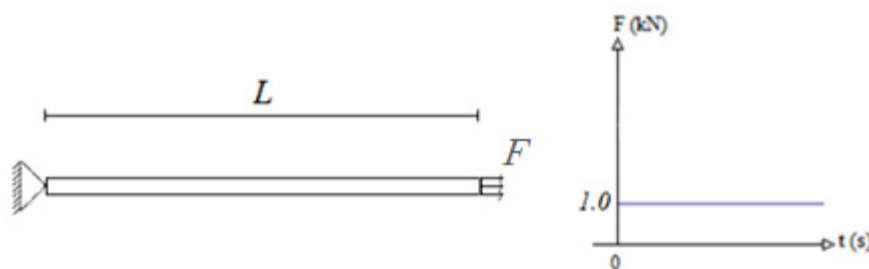


FIGURA 16: BARRA FIXA-LIVRE COM EXCITAÇÃO EXTERNA DO TIPO DEGRAU

Para as análises deste exemplo, a solução obtida com o MEEG é comparada com duas soluções de referência: a obtida através do refinamento  $h$  do MEF convencional, e a solução analítica de Nowacki (1963). Para a solução com MEF, foi feito inicialmente um teste de convergência, modificando o número de elementos da malha do problema. O exemplo foi analisado com 10, 20, 50, 70 e 100 graus de liberdade, e somente a partir de 70 a resposta mostrou-se convergente. Dessa forma, foram utilizados 100 graus de

liberdade. A solução proposta por Nowacki (1963; *apud* MONTEIRO, 2009), citada também no trabalho de Shang (2014) é da forma de uma série infinita:

$$u(x,t) = \frac{8f_0L}{\pi^2EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \left( 1 - \cos \left( \frac{2n-1}{2L} \pi ct \right) \right) \right] \quad (7.1)$$

onde  $f_0$  é a intensidade da força aplicada,  $L$  o vão da barra,  $E$  o módulo de elasticidade,  $A$  a área da seção transversal,  $c = \sqrt{E/\rho}$ . De forma análoga, a velocidade e a aceleração são dadas por:

$$\dot{u}(x,t) = \frac{4f_0c}{\pi EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \left( \operatorname{sen} \left( \frac{2n-1}{2L} \pi ct \right) \right) \right] \quad (7.2)$$

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{2f_0c^2}{LEA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{n-1} \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \left( \cos \left( \frac{2n-1}{2L} \pi ct \right) \right) \right] \quad (7.3)$$

Para obter a solução analítica do problema, nas séries das equações (7.1) a (7.3) foram utilizados 500 termos.

### 7.1.1 Influência da malha no refinamento hierárquico do MEFG

Para uma análise inicial, alterou-se a quantidade de elementos na barra em questão, a fim de verificar a eficiência do refinamento hierárquico do MEFG. Essa análise inicial visa obter a solução transiente do problema de barra fixa – livre com uma boa relação entre graus de liberdade e precisão. Assim, para 1, 2, 3, 4 e 16 elementos foram testados 1, 2, 4, 6, 8 e 10 níveis de enriquecimento. Para algumas análises o intervalo de tempo mostrado nos gráficos foi reduzido, a fim de melhorar a visualização. Nos gráficos, a legenda, por exemplo, “MEFG (1+2)” significa que foi utilizado o MEFG com 1 elemento e 2 níveis de enriquecimento, utilizando a formulação dada nas equações (4.23) a (4.27). Alguns dos resultados dos deslocamentos, velocidades e acelerações podem ser vistos nas figuras 17 a 22 a seguir.

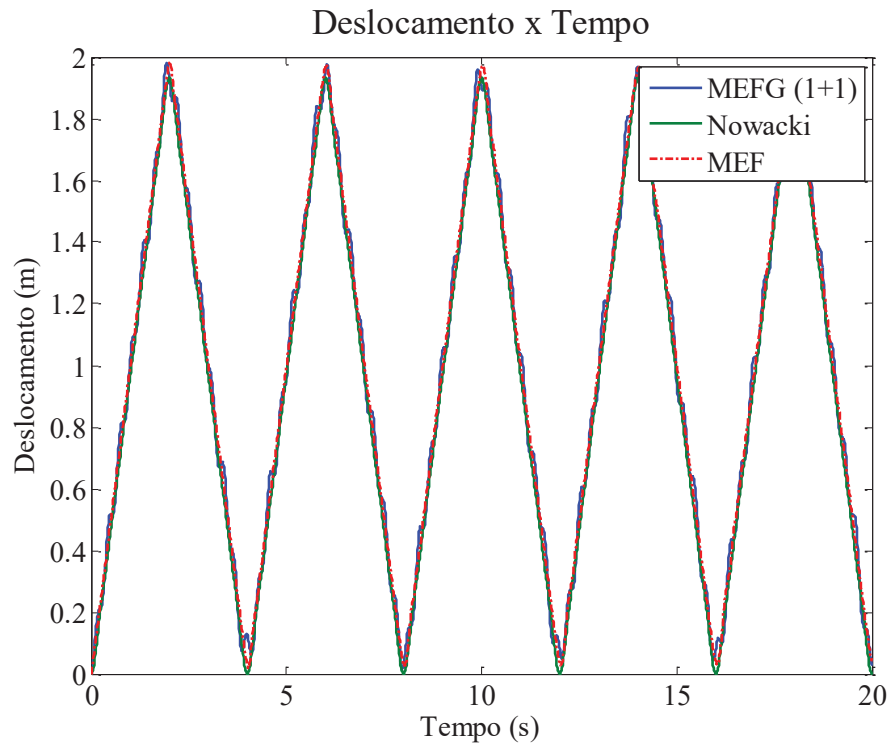


FIGURA 17: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA 1 ELEMENTO E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

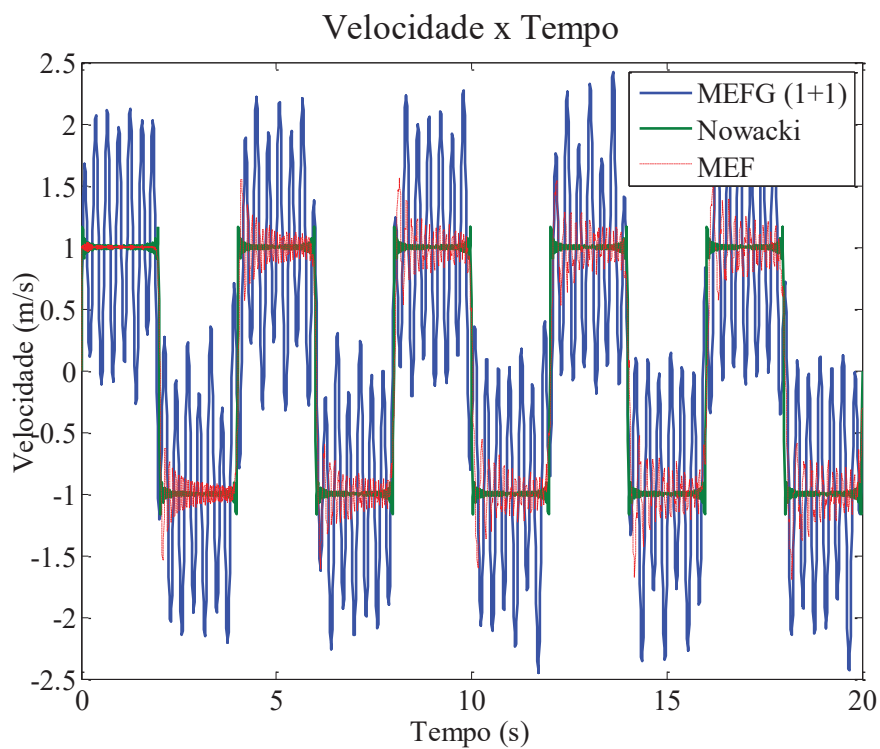


FIGURA 18: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA 1 ELEMENTO E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

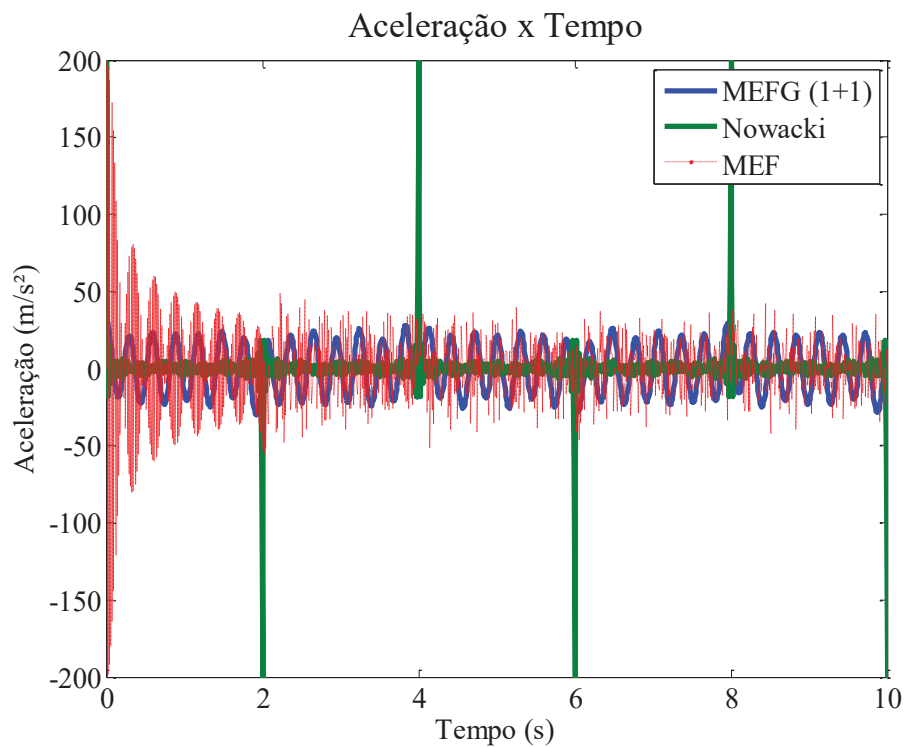


FIGURA 19: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA 1 ELEMENTO E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

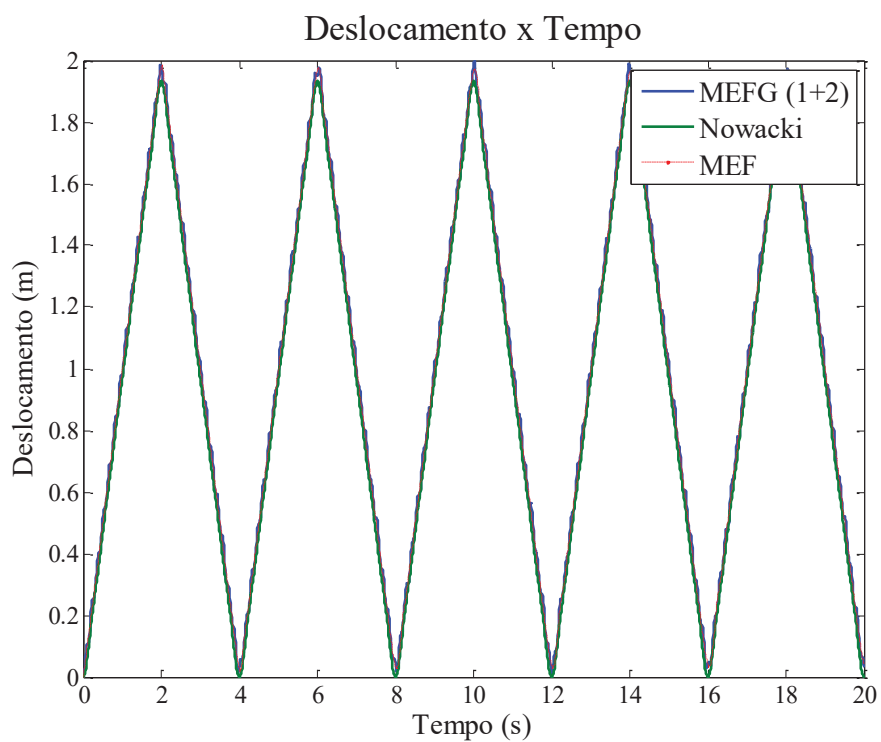


FIGURA 20: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA 1 ELEMENTO E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

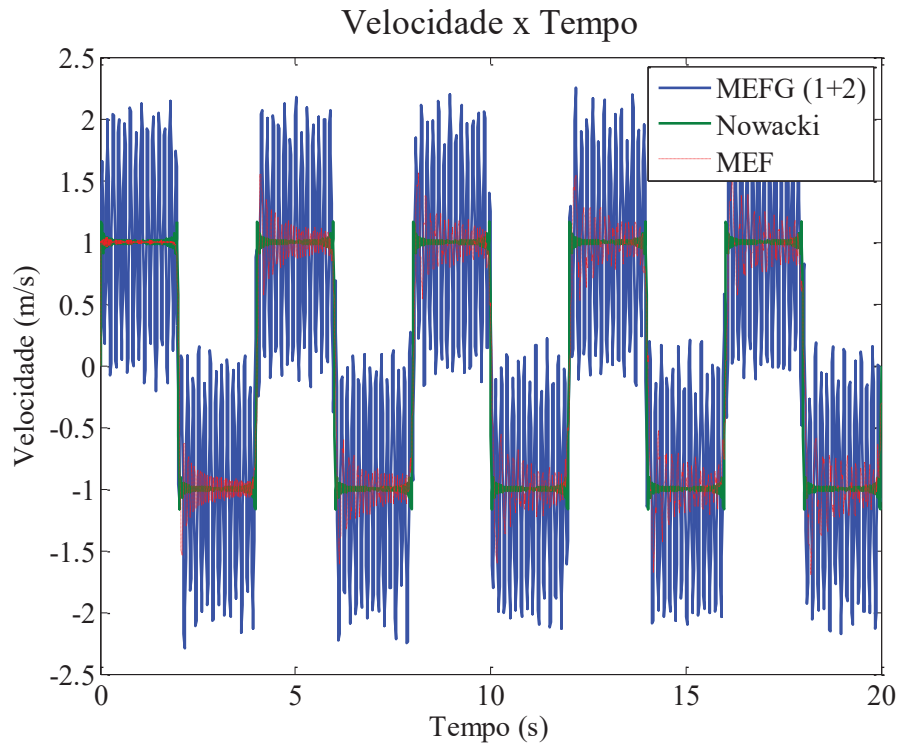


FIGURA 21: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA 1 ELEMENTO E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

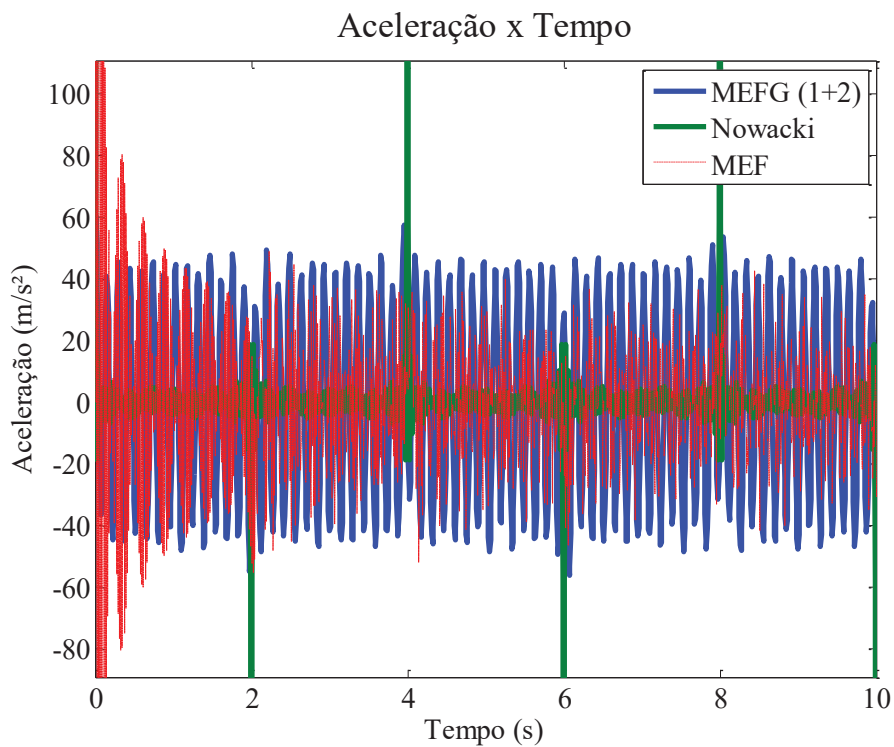


FIGURA 22: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA 1 ELEMENTO E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Ao observar as figuras 17 a 22 percebe-se que os deslocamentos do problema analisado não apresentam modificações significativas no seu comportamento. Mesmo que o nível de enriquecimento aumente, os resultados de deslocamento permaneceram muito semelhantes entre si. A resposta de deslocamentos em função do tempo também permanece similar quando aumenta-se o número de elementos. A figura 23 mostra os resultados de deslocamento para 1 elemento e 2 níveis de enriquecimento, e com 16 elementos e 2 níveis de enriquecimento, a fim de mostrar essa pouca variação.

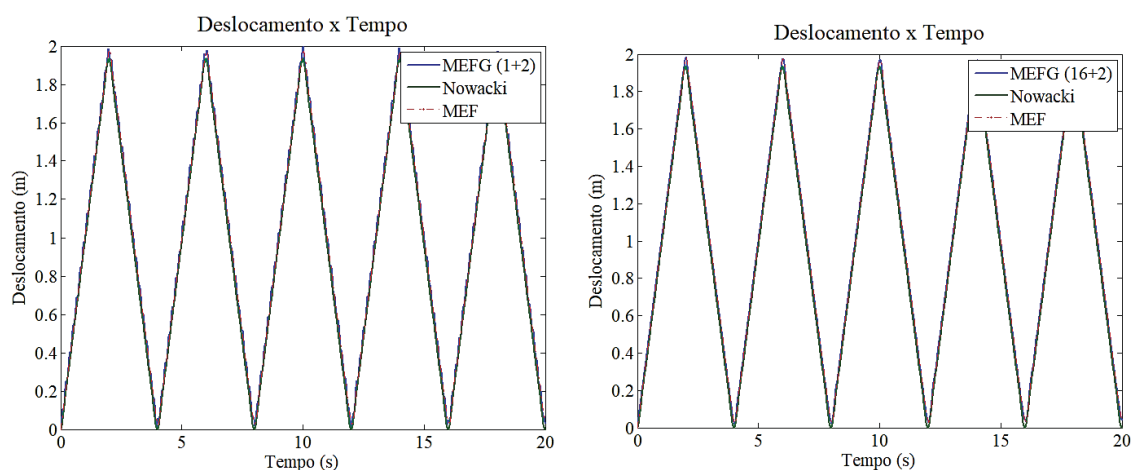


FIGURA 23: COMPARATIVO DE DESLOCAMENTO EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 16 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Essa similaridade do comportamento permaneceu tanto no refino  $h$ , quanto no aumento de níveis de enriquecimento desta análise inicial, e portanto, os demais gráficos de deslocamento foram suprimidos. Essa característica dos deslocamentos já fora observada em Debella et al. (2017a), que embora tenha analisado elemento de viga de Euler-Bernoulli, observou-se que a aproximação da resposta de deslocamento pouco varia em função do refinamento.

Em relação às velocidades, percebeu-se que não houveram mudanças significativas em seu comportamento no acréscimo de níveis de enriquecimento quando o número de elementos era baixo. A figura 24 mostra os resultados com 1 elemento e 10 níveis de enriquecimento, e com 2 elementos e 4 níveis de enriquecimento, a fim de mostrar essa pouca variação nos resultados.

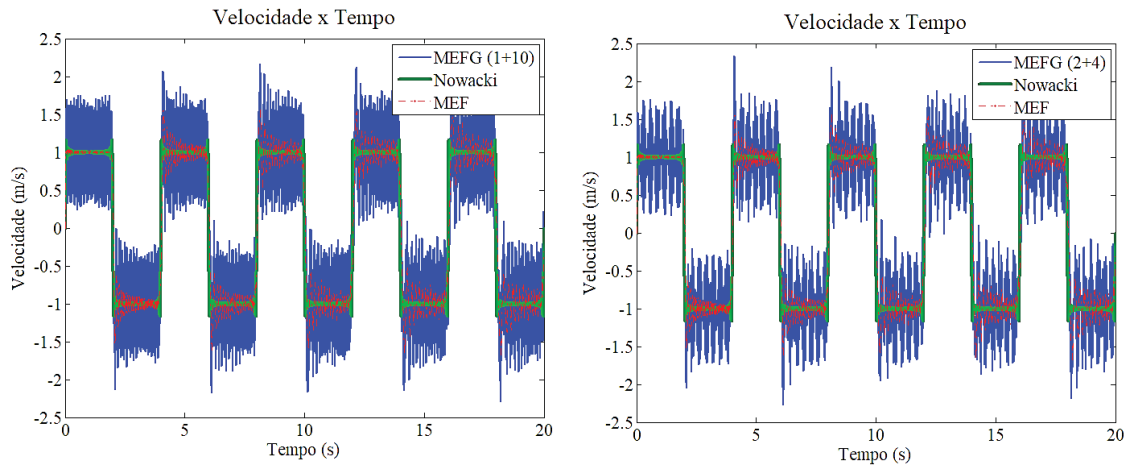


FIGURA 24: COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTO E 10 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 2 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Os resultados de velocidade para o exemplo proposto mostraram-se com melhor aproximação a partir de 3 elementos, e também, a partir daí continuaram melhorando, ao passo que aumentava-se o número de níveis de enriquecimento. As figuras 25 e 26 mostram os resultados quando o problema é analisado com 3 e 4 elementos, variando os níveis de enriquecimento.

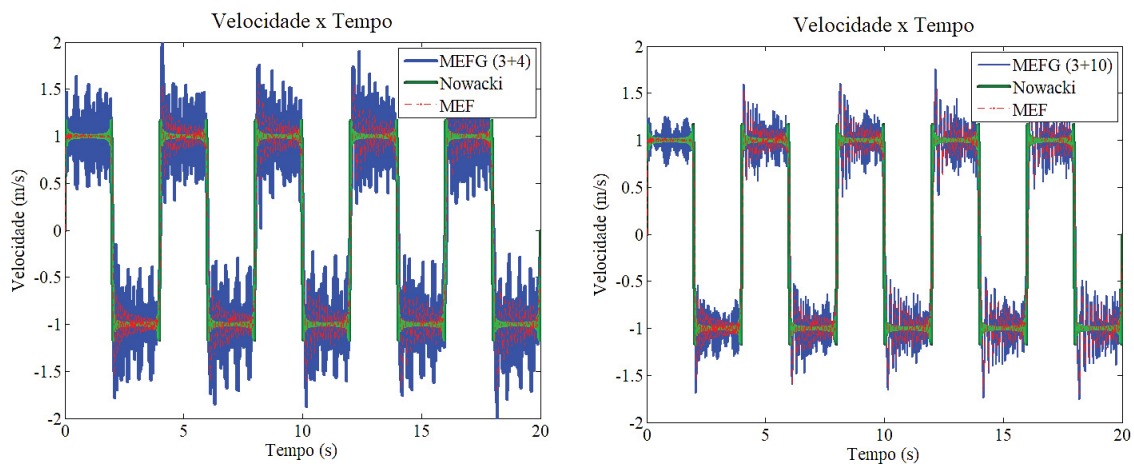


FIGURA 25: COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 3 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 3 ELEMENTOS E 10 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU



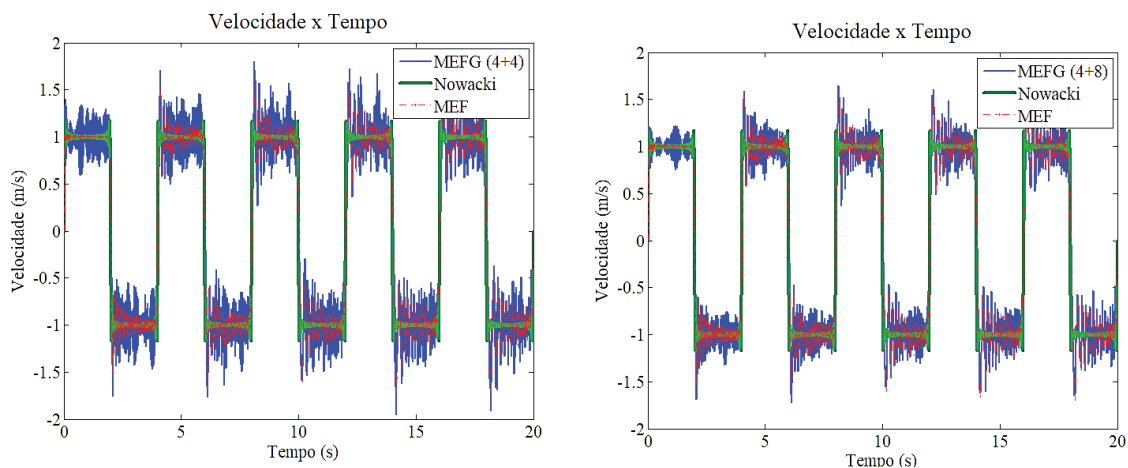


FIGURA 26: COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 4 ELEMENTOS E 8 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Como dito anteriormente, a resposta das velocidades apresenta melhor aproximação à medida que o número de elementos aumenta. Porém, os resultados obtidos com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento (68 graus de liberdade) mantém razoavelmente o mesmo comportamento quando comparado com a resposta obtida com 16 elementos e 2 níveis de enriquecimento (144 graus de liberdade), como mostra a figura 27.

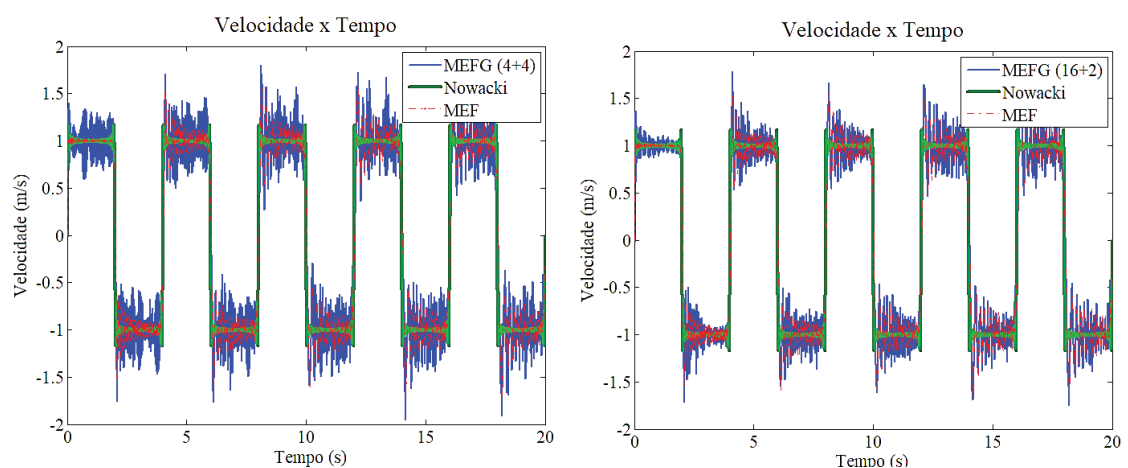


FIGURA 27: COMPARATIVO DE VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 16 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Nas figuras 25 a 27 percebe-se que a resposta da velocidade em função do tempo sofre perturbações nos trechos de descontinuidade, independentemente do número de elementos utilizado na análise. Mesmo com 16 elementos, essas perturbações não são

atenuadas, ou seja, a resposta da velocidade não possui melhora significativa na sua aproximação quando o número de elementos aumenta.

A respeito das acelerações percebeu-se uma tendência ao aumento das perturbações das respostas do Mefg à medida que aumenta-se o número de níveis de enriquecimento, como pode ser observado nas figuras 28 e 29.

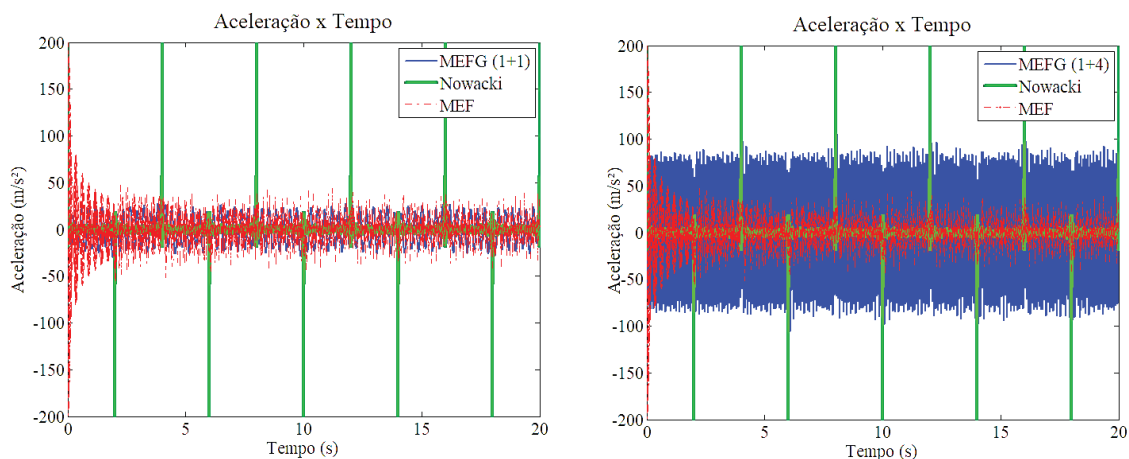


FIGURA 28: COMPARATIVO DE ACELERAÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTO E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E COM 1 ELEMENTO E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

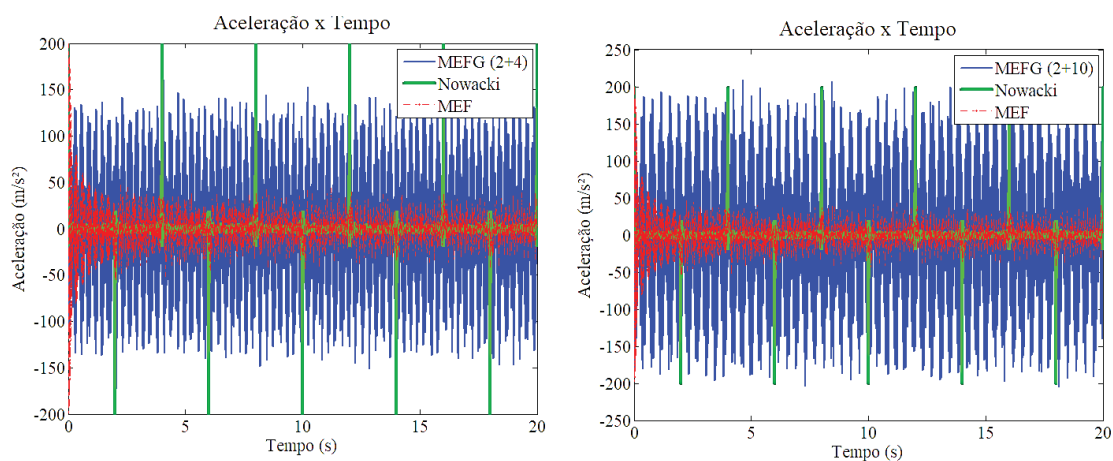


FIGURA 29: COMPARATIVO DE ACELERAÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 2 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 2 ELEMENTOS E 10 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Ainda no caso das acelerações, a resposta mostrou um comportamento com menos perturbações em alguns pontos à medida que aumentou-se o número de elementos. A figura 30 mostra a diferença na análise com 1 elemento e 4 níveis de enriquecimento, e com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento.

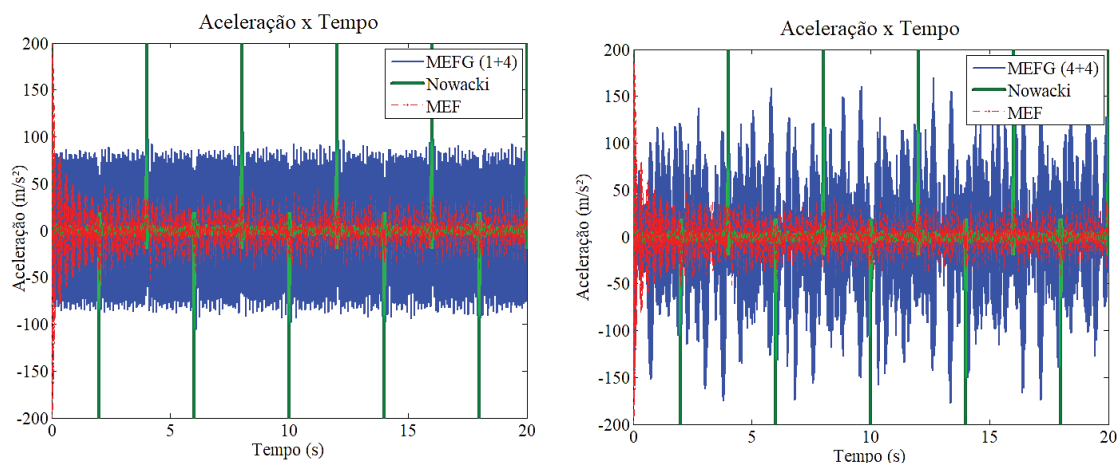


FIGURA 30: COMPARATIVO DE ACELERAÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 1 ELEMENTO E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Por fim, de forma análoga às velocidades, a resposta não possui melhora significativa quando o problema é modelado com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento, em comparação com 16 elementos e 2 níveis de enriquecimento. A resposta com 16 elementos e 2 níveis de enriquecimento tem os picos de aceleração mais atenuados quando comparada com a análise feita com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento. Ainda assim, ambas as respostas possuem muitas perturbações quando comparadas com a solução de Nowacki (1963), e até mesmo quando comparadas com a solução obtida por MEF. A figura 31 exemplifica essa situação.

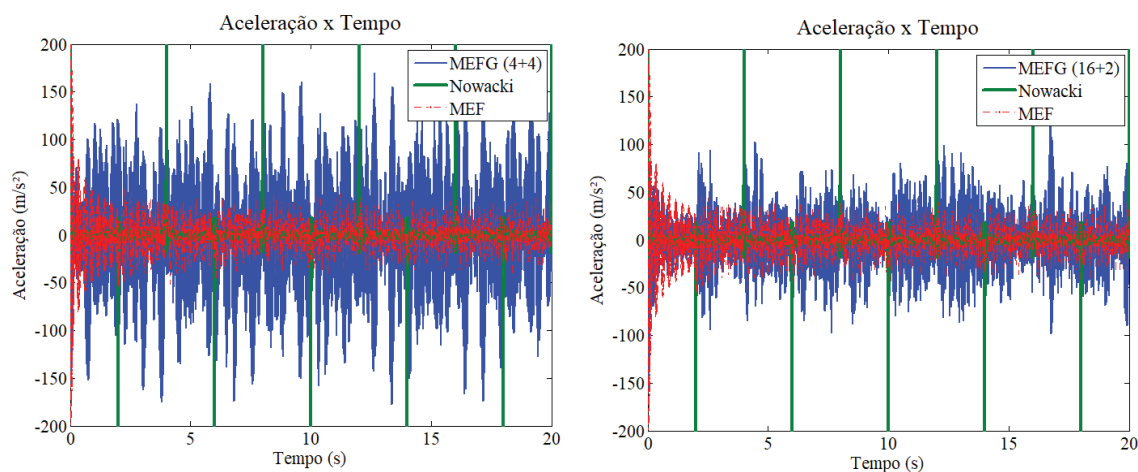


FIGURA 31: COMPARATIVO DE ACELERAÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO COM 4 ELEMENTOS E 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E COM 16 ELEMENTOS E 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

De uma forma geral, através desta análise inicial de mudança de malha pode-se perceber que as respostas obtidas com poucos elementos, possuem um comportamento menos preciso quando comparadas com as respostas obtidas com mais elementos. Mesmo aumentando-se o número de níveis de enriquecimento, a resposta transiente de velocidade e aceleração só mostrava-se mais semelhante às soluções de referência à medida que aumentava-se o número de elementos.

Entretanto, analisando os resultados com, por exemplo, 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento, e com 16 elementos e 2 níveis de enriquecimento, percebeu-se que o aumento no número de elementos do problema não necessariamente melhora de forma significativa a resposta. Com um número maior de elementos, a resposta fica com o comportamento mais similar às respostas de referência, mas ainda assim não completamente satisfatória.

Dessa forma, em virtude das respostas obtidas com essa análise inicial, nas próximas análises é utilizada uma modelagem com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento.

### 7.1.2 Condensação da matriz modal

Partindo dos resultados preliminares de estudo dos espectros de frequência, o presente exemplo é analisado com a presença dos 60% primeiros modos (41 dos 69) na matriz modal. O intervalo de tempo mostrado nos gráficos é menor, a fim de visualizar melhor os resultados. As figuras 32 a 34 mostram o deslocamento, a velocidade e a aceleração, com a matriz modal completa em comparação com a matriz com 60% dos modos.

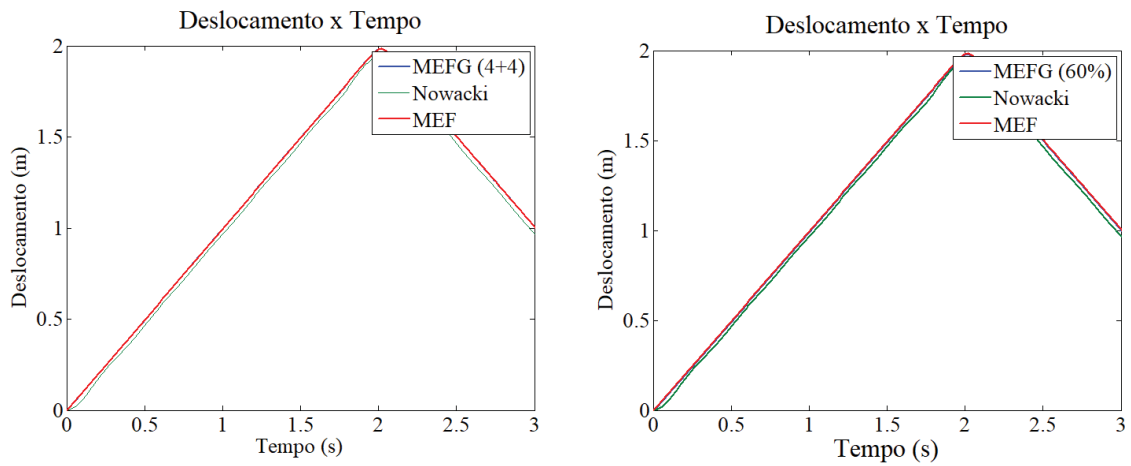


FIGURA 32: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% e 100% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

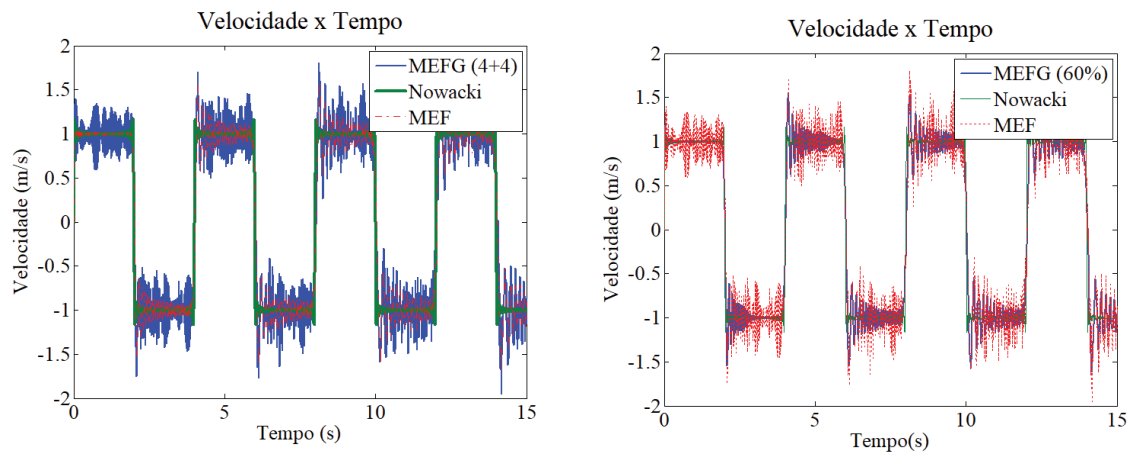


FIGURA 33: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% e 100% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

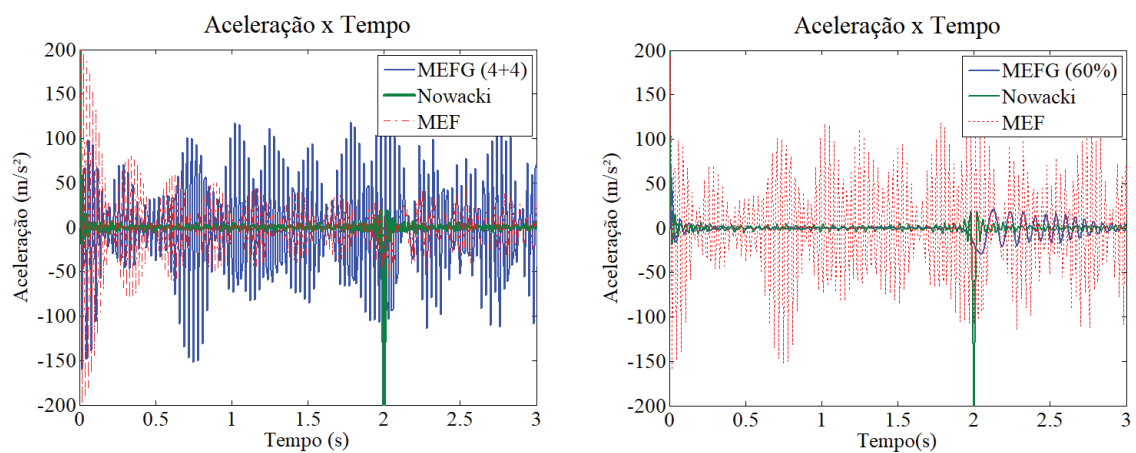


FIGURA 34: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% e 100% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Ao analisar as figuras 32 a 34, percebe-se que as respostas de velocidade e aceleração utilizando 60% dos modos mostraram-se, de forma geral, com menos perturbações quando comparadas com a resposta utilizando 100% dos modos. Ou seja, ao utilizar na análise transiente apenas os modos com boa aproximação, a resposta mostrou-se mais semelhante às soluções de referência. As figuras 35 e 36 mostram um comparativo entre a resposta de velocidade e aceleração nos primeiros três segundos da análise obtida com 100% e 60% dos modos, a fim de reforçar essas diferenças entre as respostas.

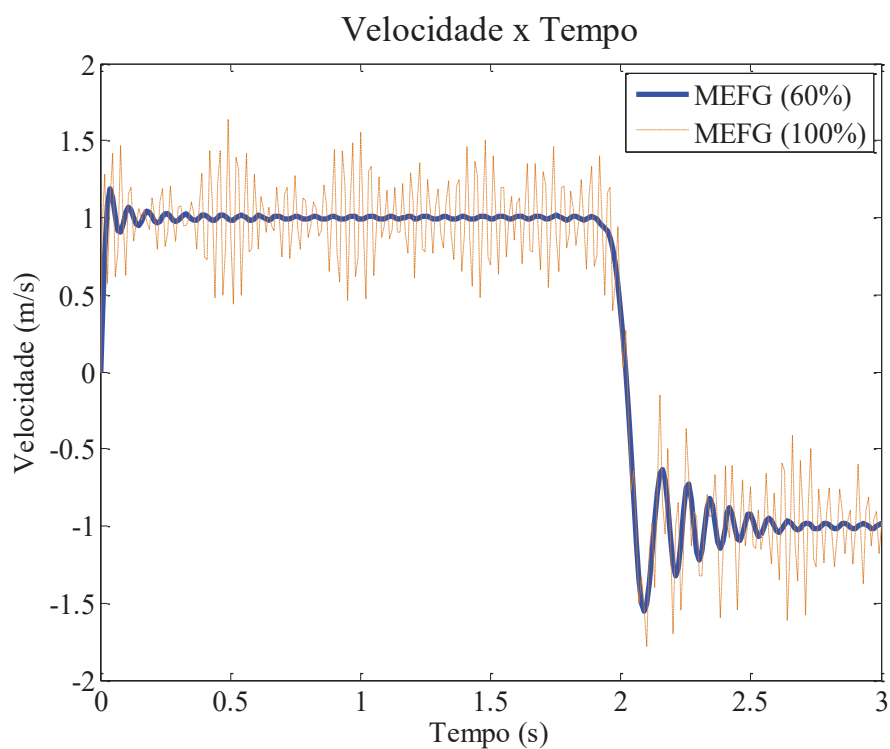


FIGURA 35: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% E 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

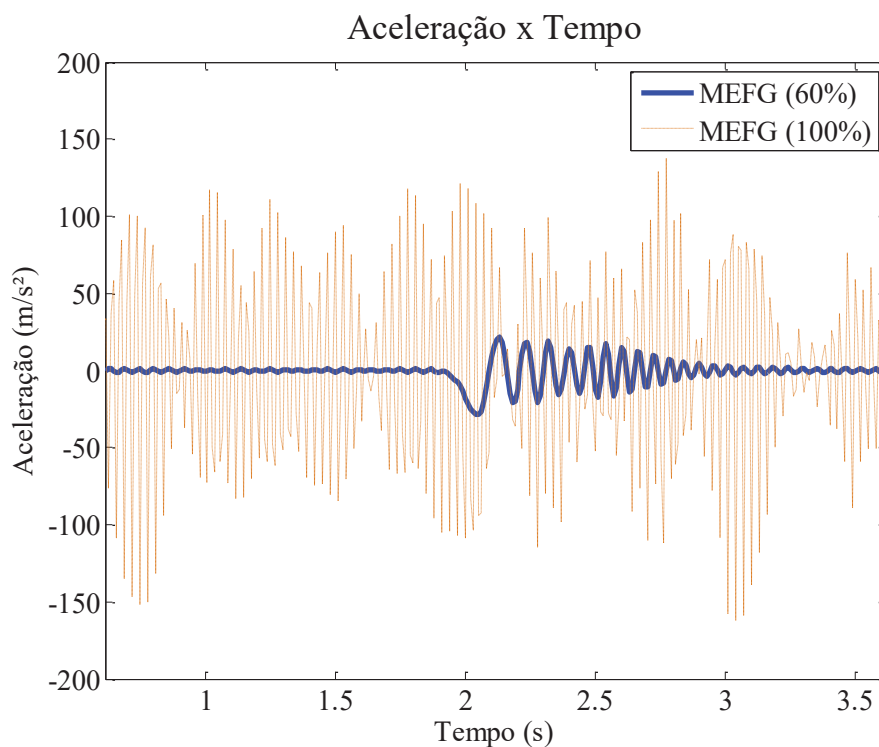


FIGURA 36: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% E 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

### 7.1.3 Fator de influência

Partindo dos resultados expostos, e com a intenção de saber qual a influência de cada modo na resposta transitente da estrutura, utilizou-se inicialmente como parâmetro de análise as coordenadas generalizadas do problema. Essas, são as respostas diretas obtidas pelo Método de Newmark, e podem ser um indicativo de quais modos contribuem mais com a resposta da estrutura (Chopra, 1995). A figura 37 mostra o gráfico dessas coordenadas generalizadas.

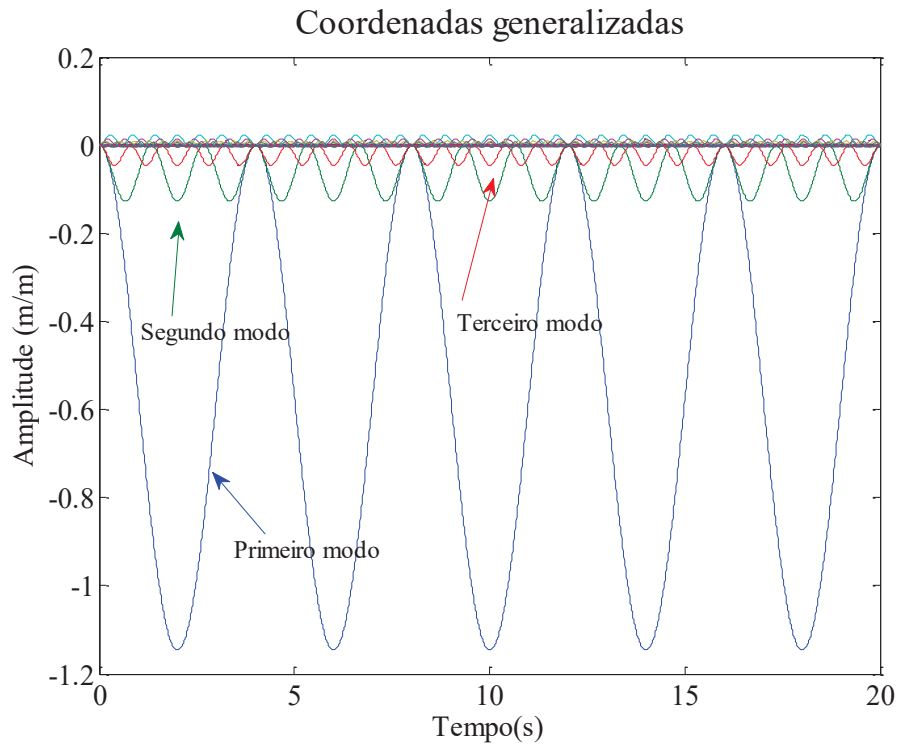


FIGURA 37: COORDENADAS GENERALIZADAS DO PROBLEMA

Ao analisar a figura 37, nota-se a predominância dos modos 1, 2 e 3, os quais nesse caso são os modos com mais influência na resposta. Ainda, a fim de quantificar e explorar essa influência de cada coordenada generalizada, é proposta um fator baseado na área abaixo das curvas de cada coordenada generalizada, da forma:

$$A_i = \sum_{j=1}^m |q_i(j\Delta t)| \Delta t, \quad (7.4)$$

$$f_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{nM} A_j}$$

onde  $f_i$  é denominado “fator de influência”, que foi normalizado a fim de facilitar a visibilidade,  $q_i$  são as coordenadas generalizadas,  $nM$  o número de modos,  $m$  o número de passos de tempo  $\Delta t$  utilizados na análise. Assim, a figura 38 mostra o resultado do fator de influência para esse problema, obtido através da equação 7.4.



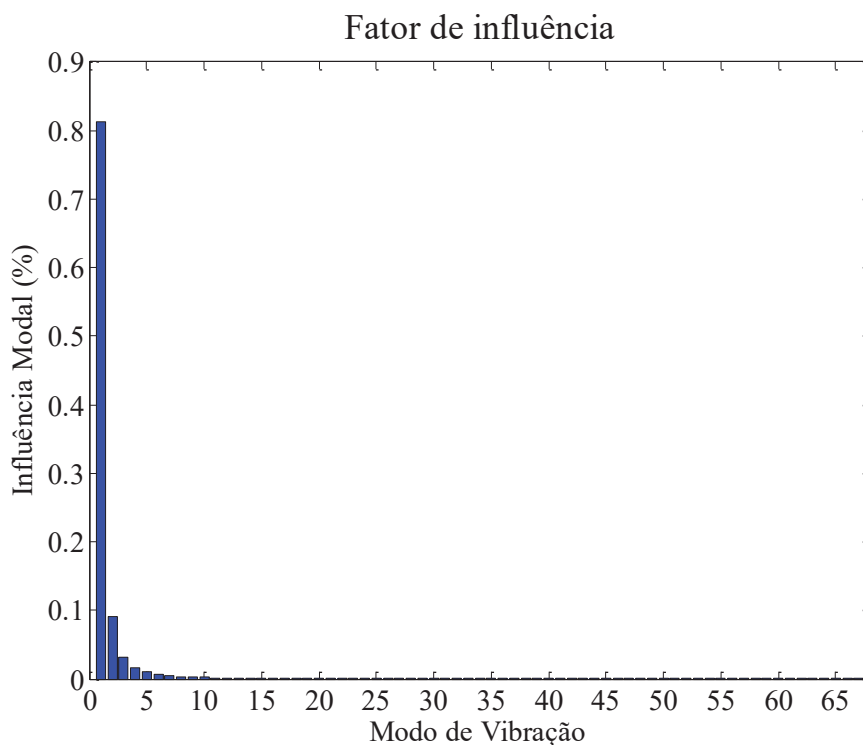


FIGURA 38: FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Analisando a figura 38, nota-se que pelo fator de influência pode-se perceber de forma mais clara quais são os modos mais preponderantes na resposta transiente da estrutura, quando comparados com as coordenadas generalizadas. Através da figura 38, nota-se a preponderância do primeiro modo de vibração, com a influência um pouco mais presente dos modos 2 até o 10. Dessa forma, o problema é analisado primeiramente com a presença apenas do primeiro modo de vibração, que sozinho representa 84,4% da influência modal do problema. As figuras 39 a 41 mostram os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração com a presença apenas do primeiro modo de vibração na matriz modal.

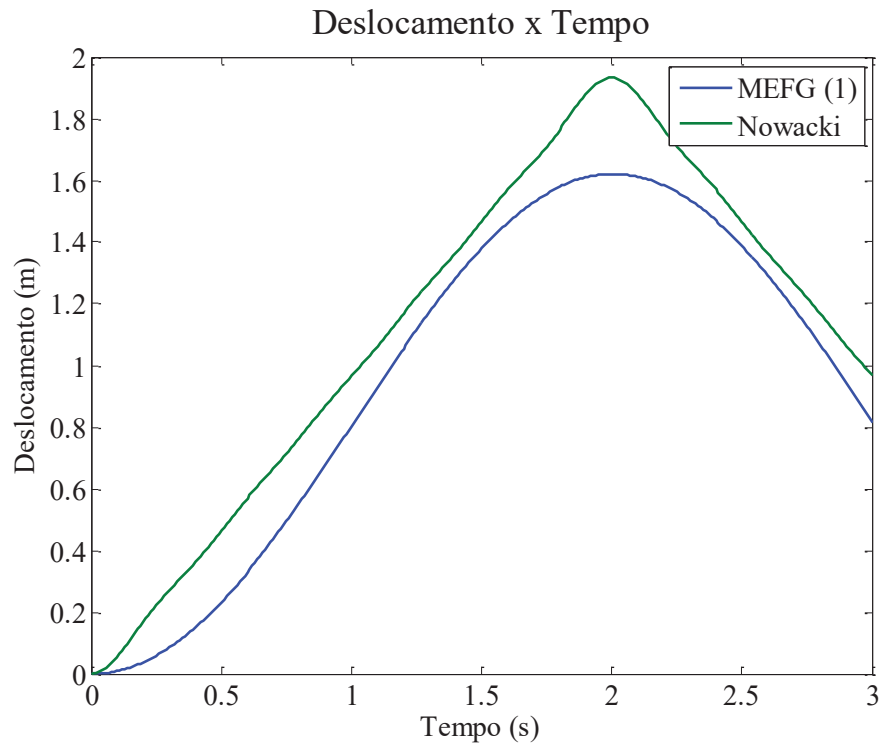


FIGURA 39: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 1 MODO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

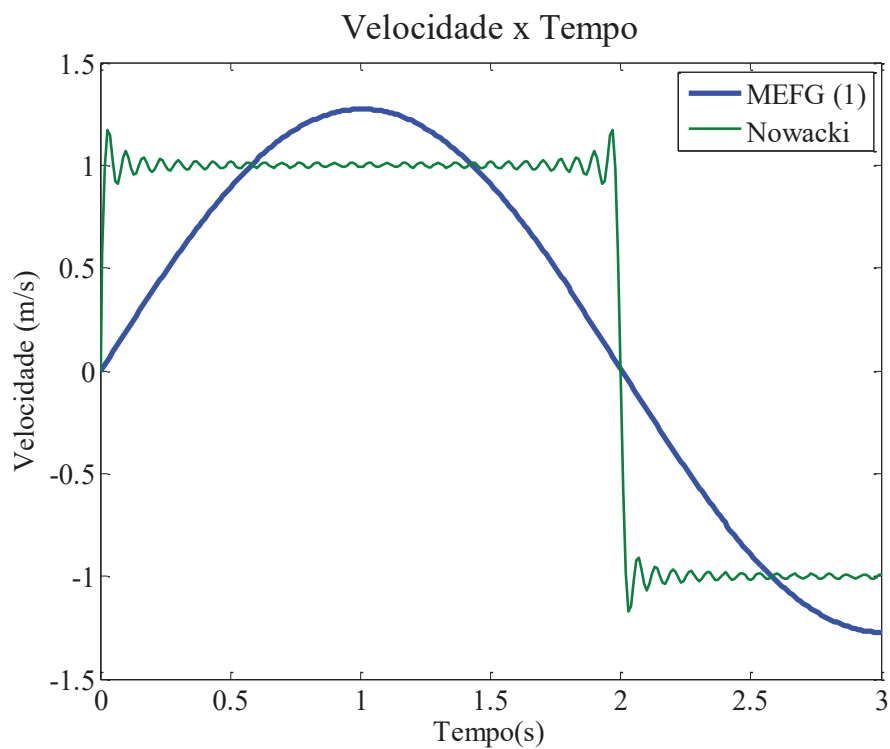


FIGURA 40: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 1 MODO – BARRA COM FORÇA DEGRAU

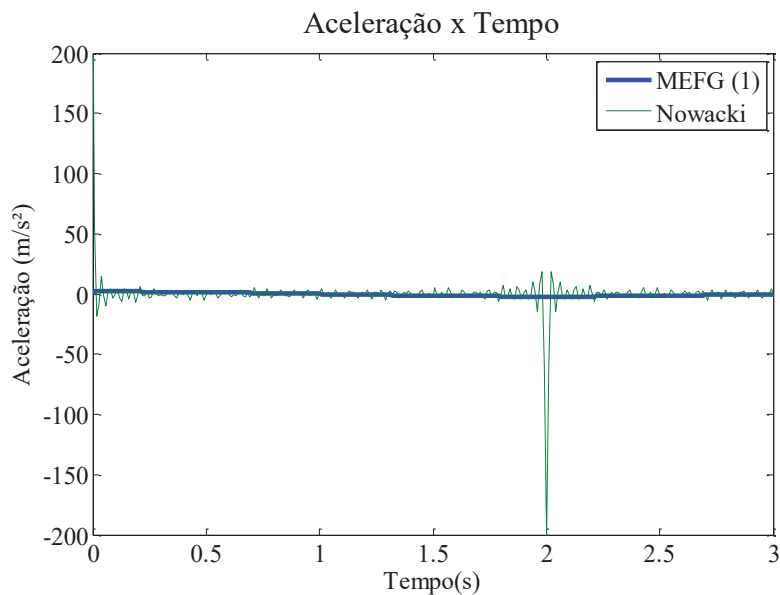


FIGURA 41: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 1 MODO –  
BARRA COM FORÇA DEGRAU

Percebe-se nas figuras 39 a 41 que a resposta apenas com o primeiro modo não representa o real comportamento da estrutura. Assim, a resposta é analisada com a presença dos 10 primeiros modos, que, segundo o fator de influência, são os mais predominantes na resposta da estrutura. As figuras 42 a 44 mostram os resultados.

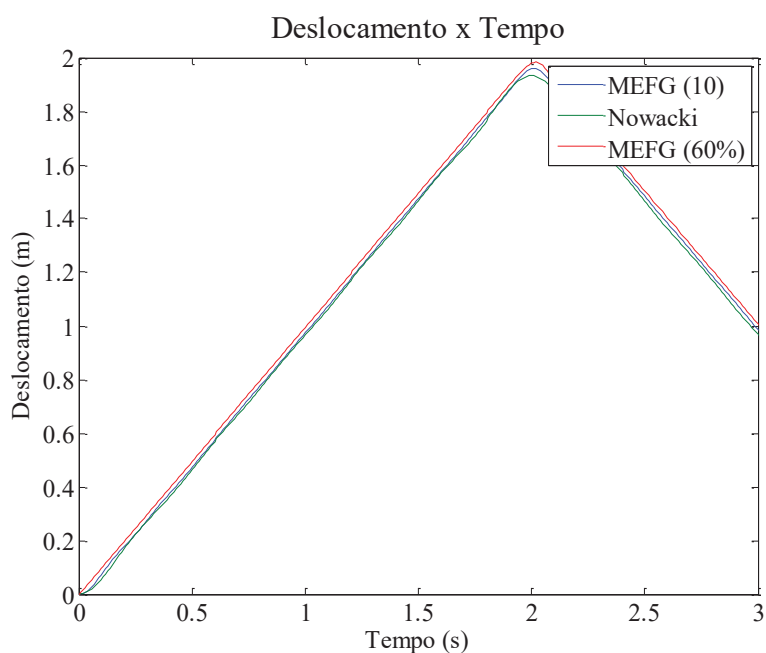


FIGURA 42: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 10 MODOS  
NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

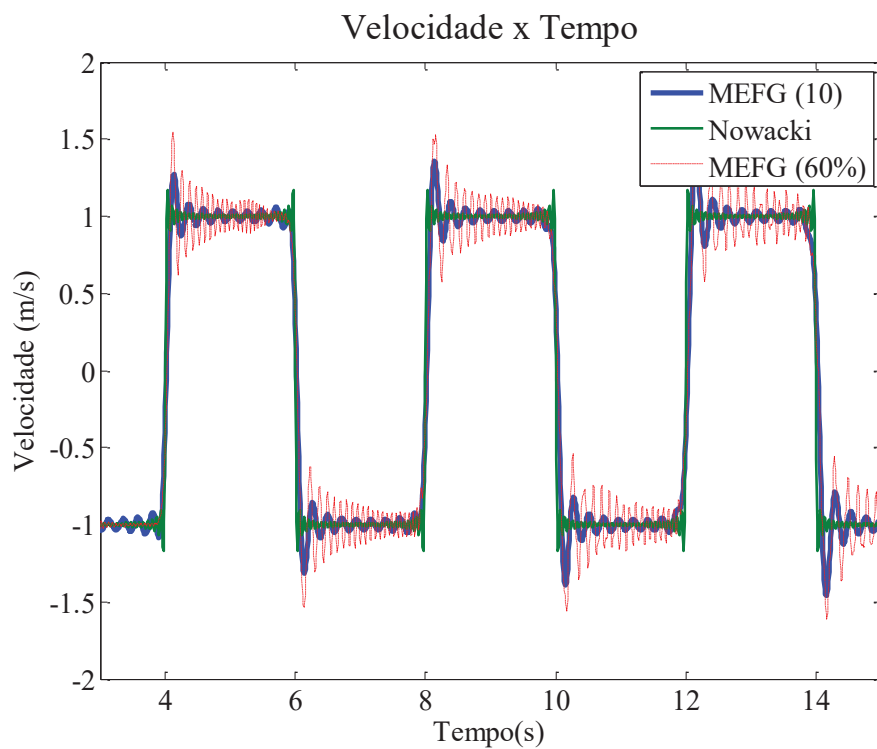


FIGURA 43: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 10 MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

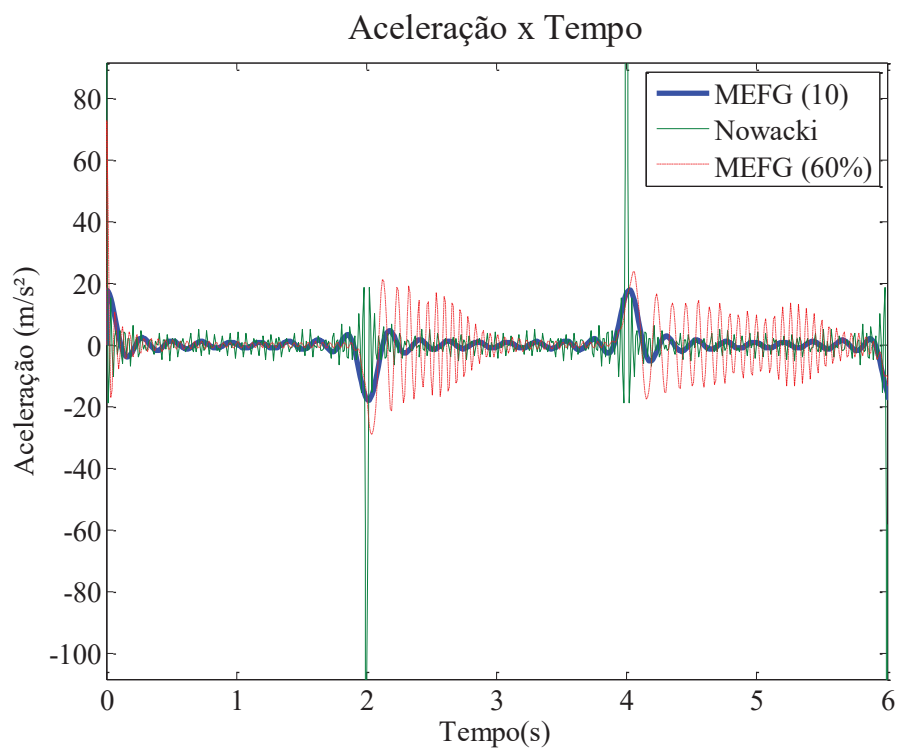


FIGURA 44: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 10 MODOS NA MATRIZ MODAL – BARRA COM FORÇA DEGRAU

Observando as figuras 42 a 44 percebe-se que as respostas transientes de deslocamento, velocidade e aceleração com 10 modos de vibração mostraram-se com melhor aproximação em relação à resposta de referência, quando comparadas com a resposta obtida com 60% dos mesmos. No caso da velocidade, a parcela presente nos patamares da onda quadrada mostram-se muito mais estáveis. Na resposta da aceleração, a resposta mostrou-se bem mais estável e similar à solução analítica. Assim, de forma geral, a resposta com 10 modos de vibração mostrou-se a mais semelhante à solução analítica dentre as análises feitas neste exemplo.

Para analisar os resultados obtidos, a tabela 1 mostra o comparativo de erro (equação 5.1) entre as respostas.

TABELA 1: COMPARATIVO DE ERRO - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU

	Erro no deslocamento (m.s)	Erro na velocidade (m)	Erro na aceleração (m/s)
MEF	0,096	0,011	0,680
MEFG 100%	0,096	0,014	0,146
MEFG 60%	0,082	0,007	0,638
MEFG 10	0,036	0,009	0,604
MEFG 1	0,456	0,177	0,900

Na tabela 1 percebe-se que os menores erros no deslocamento ocorreram quando a matriz modal é utilizada com os 10 modos de vibração indicados pelo fator de influência. Nesse caso, e também nas análises com a matriz modal com 60% dos modos, o MEFG mostrou-se mais preciso que o MEF convencional. Importante observar que o erro da equação (5.1) não se mostrou eficiente na medida da velocidade e da aceleração. Em relação à velocidade, pode-se perceber na figura 43 que a resposta com 10 modos de vibração mostra uma melhora em relação a velocidade com 60% dos modos. Nos patamares da onda quadrada principalmente, a resposta com 10 modos tende a se estabilizar e a ficar mais próxima da solução analítica. Mesmo assim, a tabela 1 mostra um erro maior na resposta da velocidade com 10 modos de vibração em relação à resposta com 60% dos modos. Na aceleração essa medida é ainda mais contraditória, visto que na figura 44 percebe-se que a resposta com 10 modos de vibração é muito mais próxima à resposta analítica do que as outras análises feitas. Porém, a tabela 1 mostra que o erro da solução obtida com 100% dos modos é menor que a solução com 60% e 10 modos.

A medida do erro ser contraditória nesses casos pode ser explicada pela forma com que o mesmo é medido. Na figura 12, e de acordo com a teoria envolvendo a medida do erro, pode ser observado que o mesmo é uma aproximação da área entre os gráficos

de resposta ( $\acute{A}rea \approx e \approx \Delta t \times (u_h - u)$ ). Assim, quando duas soluções comparativas apresentam muita diferença no comportamento, essa área pode não representar exatamente o contexto da resposta. A figura 45 exemplifica essa questão, mostrando um aumento no gráfico de acelerao, onde a região em cinza simboliza o erro calculado pela equao (5.1), e a região em rosa simboliza o erro que efetivamente deveria ser calculado (rea entre os dois gráficos de resposta).

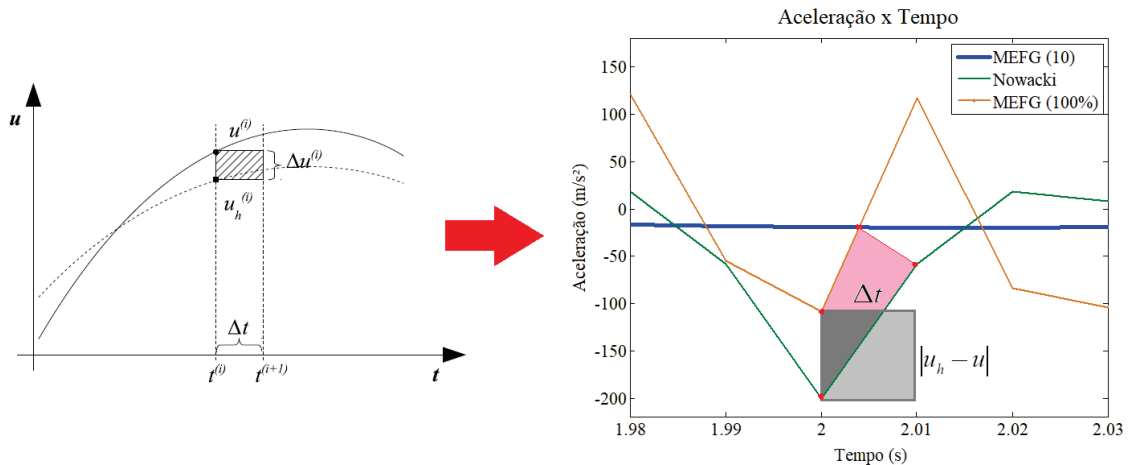


FIGURA 45: COMPARATIVO DE ERRO MEDIDO NA RESPOSTA DA ACELERAO

A figura 45 mostra que a área que representa o erro ao longo do tempo nem sempre consegue representar a real diferença entre as respostas. No caso da figura, a área em cinza se distancia muito da real área que representaria o erro entre a soluço analítica e a soluço do MEFG com 100% da matriz modal, representada pelo polígono em rosa. Assim, nas próximas análises a medida do erro se limitar à resposta em termos apenas de deslocamento, onde as curvas de resposta são mais semelhantes entre si, e a medida de erro pode ser aplicada de forma eficiente.

Outro ponto importante a ressaltar é que o fator de influência mostrou a preponderância do primeiro modo, e utilizar somente este em análises dinâmicas é uma prática comum na literatura (Wamsler, 2009; Palermo et al., 2015). Porém, para um comportamento mais coerente em termos de deslocamento, velocidade e acelerao no regime transiente, para este exemplo, a soluço ótima é obtida com os 10 primeiros modos, que somam aproximadamente 98,5% da influência modal.

Portanto, neste exemplo de barra, utilizar na análise transiente os modos mais preponderantes na resposta encontrados a partir do proposto fator de influência, além de ser um problema computacionalmente mais eficiente, traz respostas com melhor

aproximação. A velocidade mostra-se mais estabilizada e mais semelhante à solução de Nowacki (1963). A aceleração mostra-se, de forma geral, com o comportamento mais estável, e o deslocamento mantém sua boa aproximação mesmo utilizando 10 modos na análise. Para evidenciar a eficiência computacional da análise com menos modos, a tabela 2 mostra o tempo decorrido na análise computacional quando o programa MATLAB computa a rotina para a análise feita com o MEF, com o MEFG com 100% da matriz modal, e com o MEFG com 10 modos. A medida do tempo é dada no início da Superposição Modal, e finalizada no cálculo dos deslocamentos, velocidades e acelerações, após a solução pelo Método de Newmark. O intervalo da análise foi este, visto que as matrizes elementares do problema são obtidas através do software Maple, e não seria viável medir o tempo total em dois softwares distintos.

TABELA 2: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEF	0,08264
MEFG 100% (1)	0,05445
MEFG 10 (2)	0,01882
SOMA DAS ETAPAS (1) E (2)	0,07327

Através da tabela 2, percebe-se o tempo decorrido na análise através do MEF convencional é ainda maior do que a soma das duas etapas necessárias para a análise do fator de influência: o MEFG com 100% da matriz modal e o reprocessamento com a matriz modal com 10 modos. Ou seja, mesmo o fator de influência sendo uma análise *a posteriori*, o tempo decorrido é menor quando comparado com o MEF. Esse ganho computacional pode ser mais expressivo ao estender a análise para uma estrutura mais complexa ou com mais elementos.

Tendo em vista que o fator de influência mostra os modos mais preponderantes da estrutura, o MEFG adaptativo pode ser aplicado na análise transiente, sendo que a frequência alvo é justamente àquela relacionada com o modo de vibração mais preponderante, conforme segue-se.

#### 7.1.4 MEFG adaptativo

Nesta análise, o MEFG adaptativo é aplicado para obter a resposta transiente da estrutura. Para o exemplo de barra com força degrau aplicada na extremidade livre, o fator de influência (figura 38) mostrou a predominância do 10 primeiros modos de vibração, com predominância do primeiro. Também, a resposta transiente obtida com o MEFG tradicional com a presença apenas desses 10 modos mostrou-se mais precisa em comparação com as outras análises. Assim, os resultados do MEFG com 10 modos são comparados com os resultados obtidos através do MEFG adaptativo com a frequência alvo sendo a primeira. A matriz modal obtida pelo MEFG adaptativo é utilizada com 100% dos modos, depois com os mais predominantes, segundo seu fator de influência. Foram utilizadas 3 graus de liberdade na primeira iteração, e 15 nas duas subsequentes. As figuras 46 a 48 a seguir apresentam os resultados desta análise.

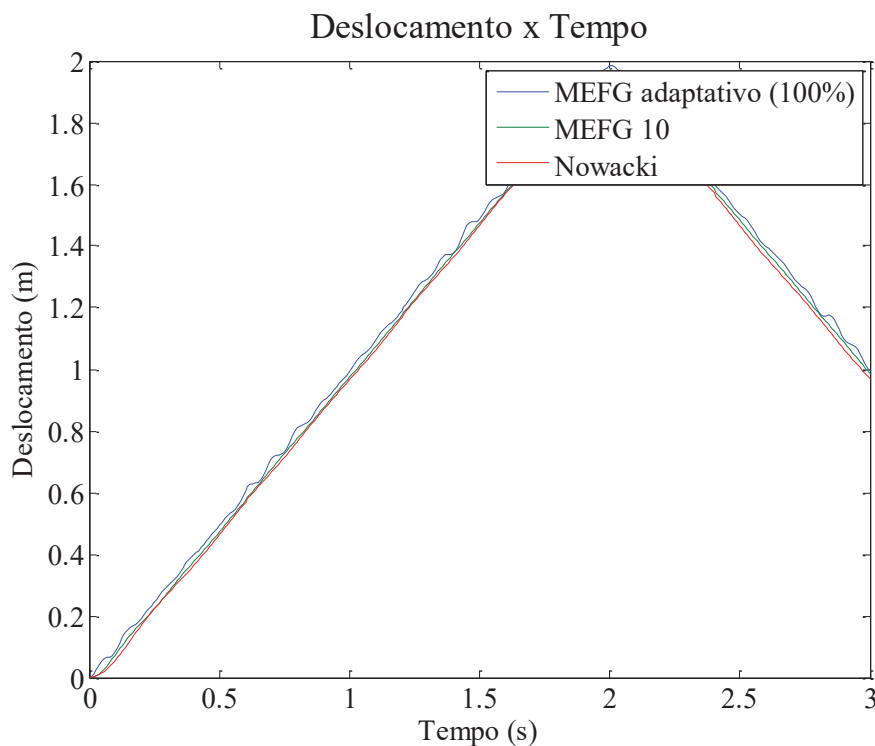


FIGURA 46: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU



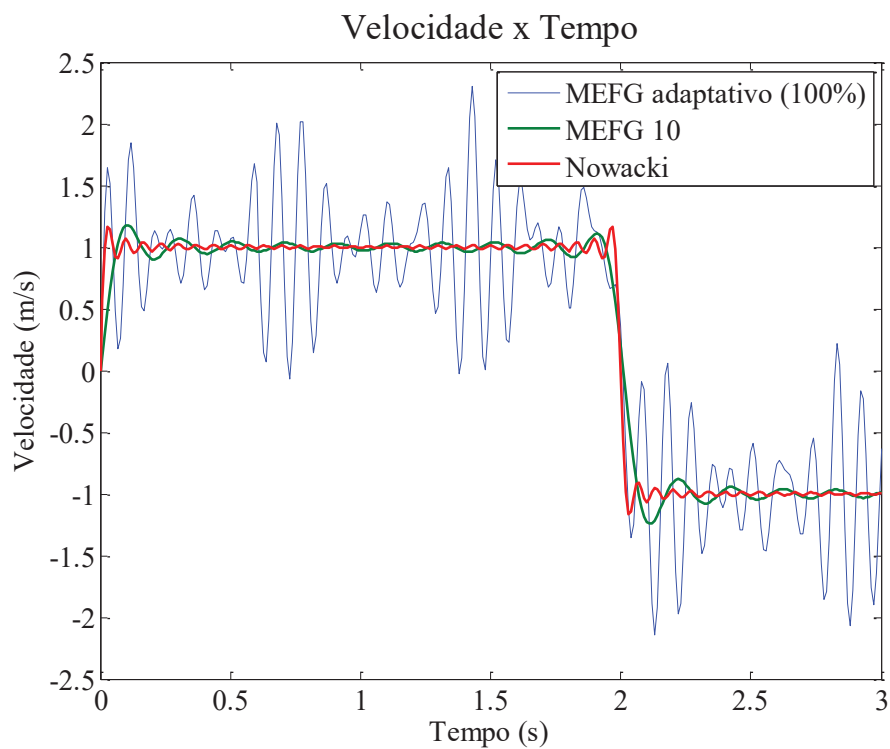


FIGURA 47: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU

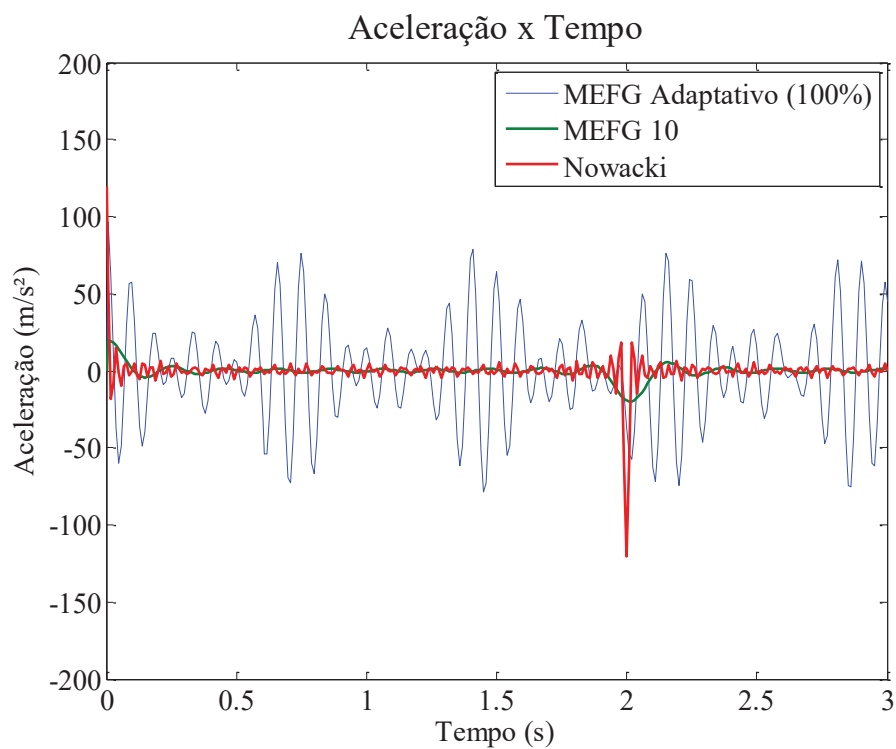


FIGURA 48: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU

Através das figuras 46 a 48 foi possível perceber que as respostas de deslocamento, velocidade e aceleração obtidas através do MEEG adaptativo com 100% dos modos na matriz mostram-se bem instáveis quando comparadas com a solução de referência. Assim, o fator de influência é mostrado na figura 49, com a intenção de identificar os modos mais predominantes na análise com o MEEG adaptativo.

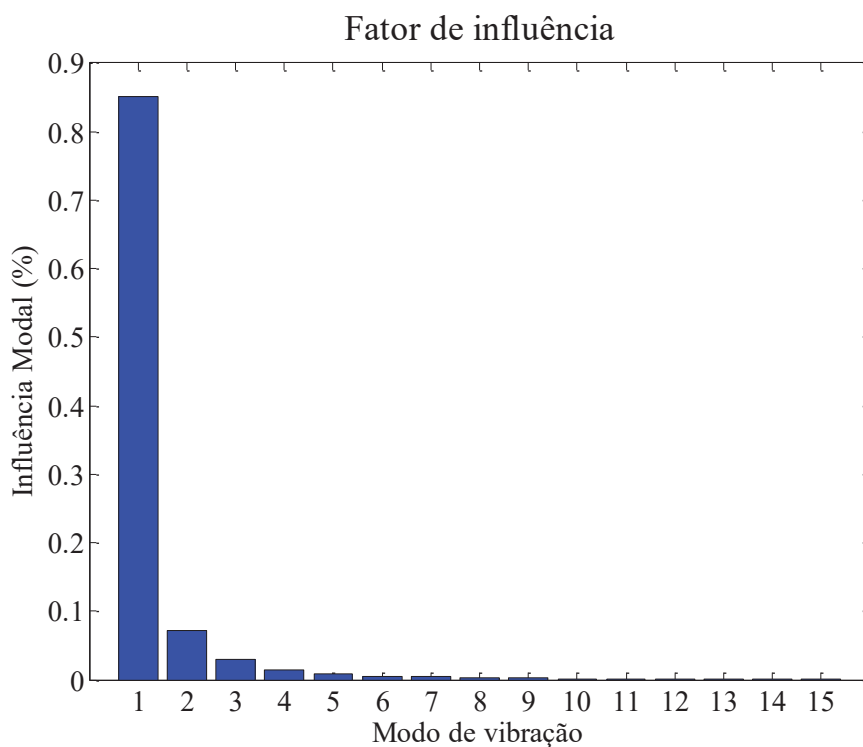


FIGURA 49: FATOR DE INFLUÊNCIA NO MEEG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU

A figura 49 mostra que os modos mais predominantes no caso do MEEG adaptativo são os 5 primeiros. A mudança desta análise para a feita com o MEEG tradicional (exemplo 7.1.3) é que nesse caso, o MEEG adaptativo possui menos graus de liberdade. Assim, os 5 primeiros modos, que somam 97,8% da influência modal, são deixados na matriz modal e as respostas podem ser vistas nas figuras 50 a 52.

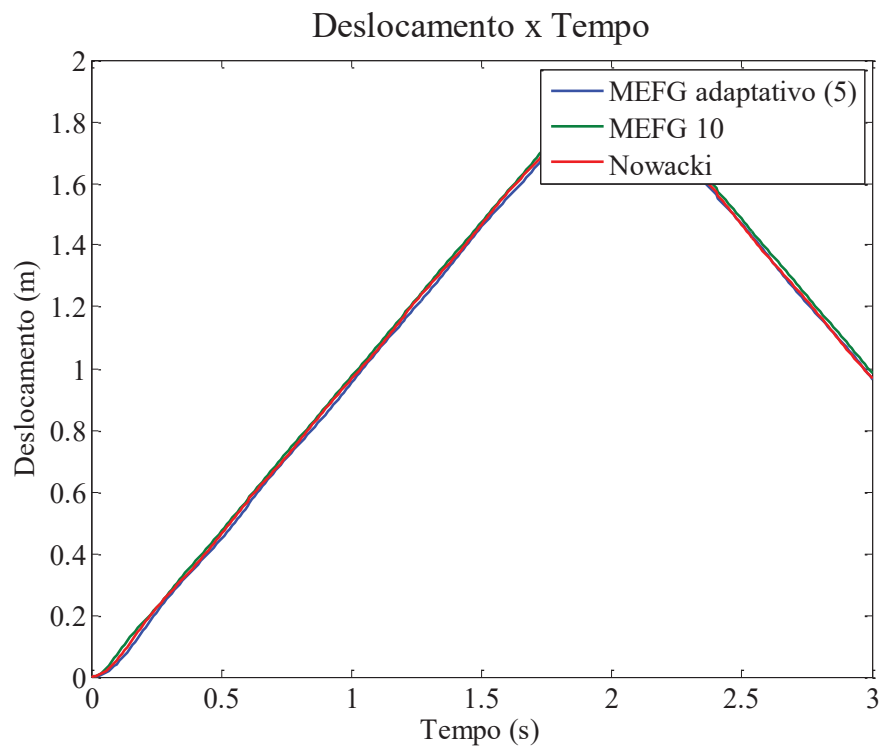


FIGURA 50: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 5 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU

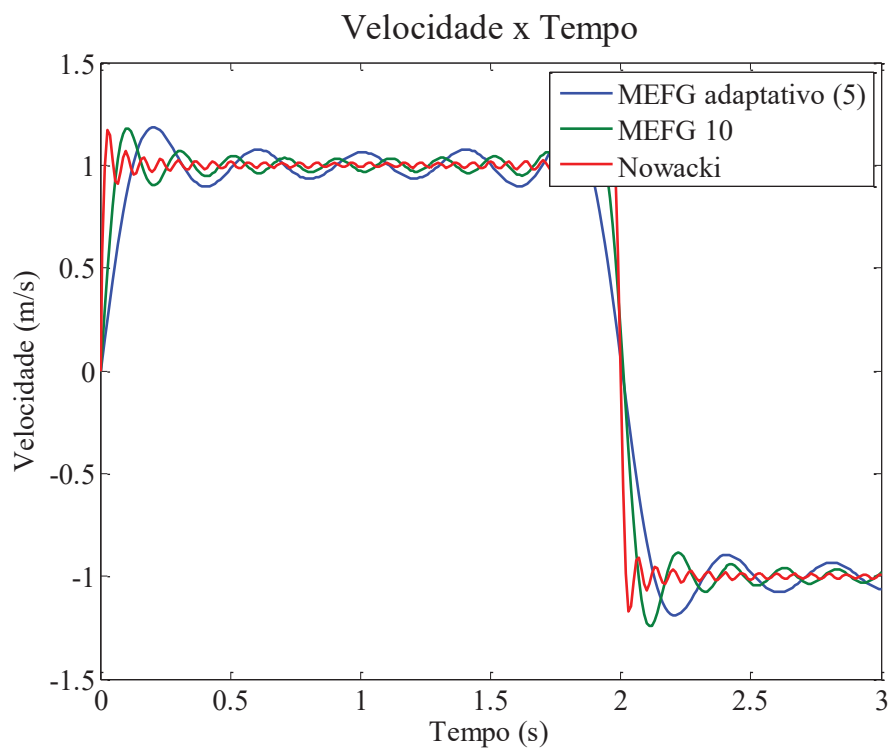


FIGURA 51: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 5 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU

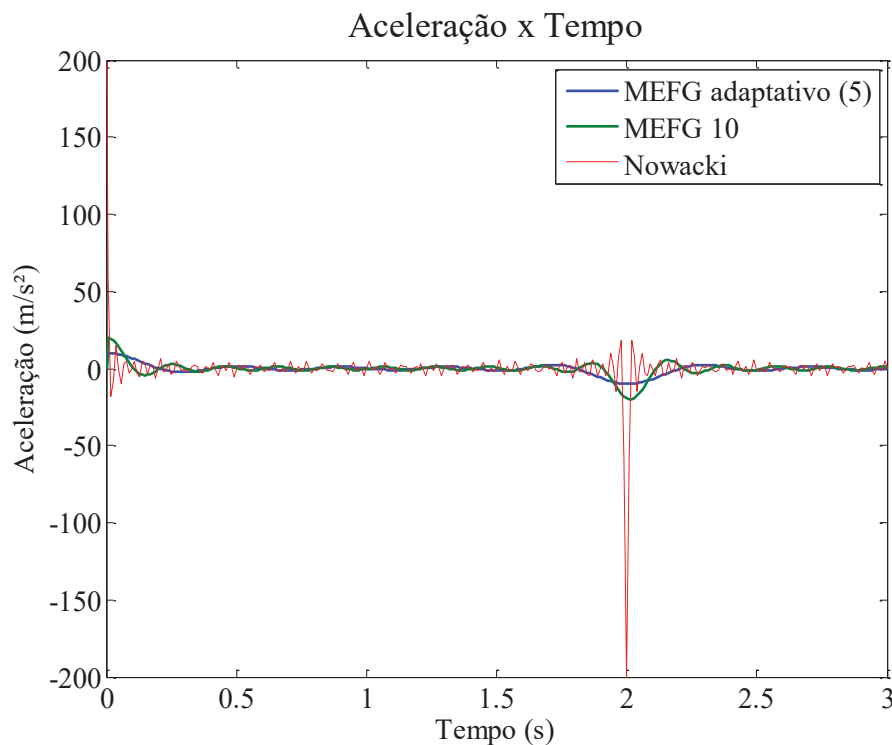


FIGURA 52: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 5 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - BARRA COM FORÇA DEGRAU

As figuras 50 a 52 mostram que, assim como nas análises feitas com o MEFG, o MEFG adaptativo mostra melhora na sua resposta transiente quando utilizada a matriz modal com os modos predominantes do problema. A resposta em termos de velocidade e aceleração mostram-se muito mais semelhantes à solução de referência, e os deslocamentos permanecem com boa precisão. Para elucidar melhor os resultados obtidos, a tabela 3 mostra o comparativo de erro em relação aos deslocamentos, e a figura 53 mostra uma aproximação do gráfico dos deslocamentos ao longo do tempo, a fim de mostrar a melhora na resposta numérica.

TABELA 3: COMPARATIVO DE ERRO – MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU

	Erro no deslocamento (m.s)
MEFG 10	0,036
MEFG adaptativo (100%)	0,096
MEFG adaptativo (5)	0,025

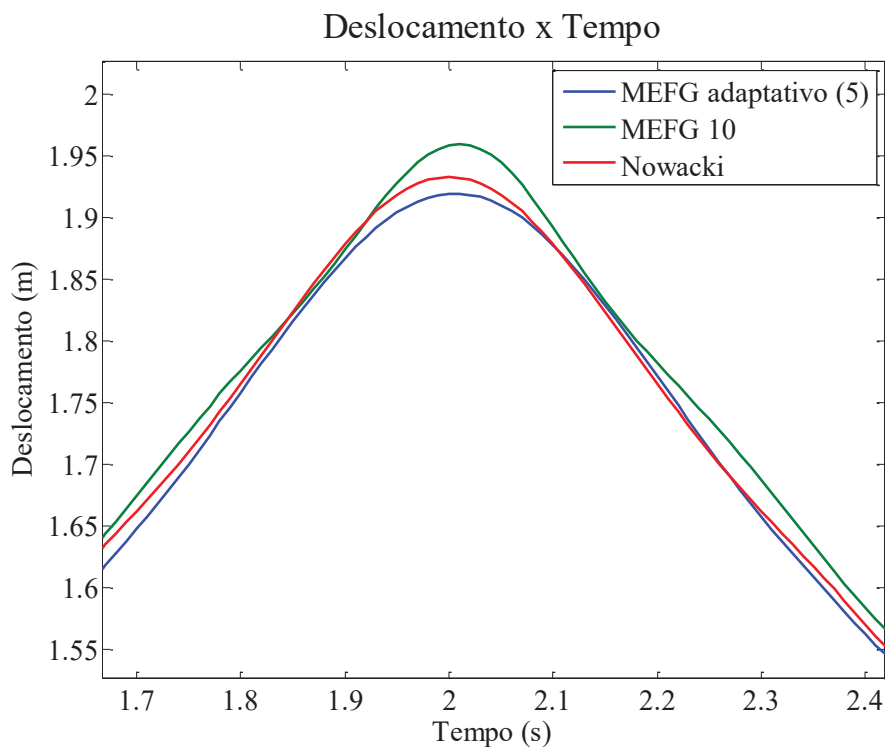


FIGURA 53: COMPARATIVO DAS RESPOSTAS DE DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO

Através da tabela 3 percebe-se que o Mefg adaptativo mostrou-se mais preciso que o Mefg, e com um número bem reduzido de graus de liberdade (15 contra 68). Assim, neste exemplo, o Mefg adaptativo torna-se vantajoso na análise transiente. A tabela 4 mostra o tempo decorrido na análise para que fique mais evidente o ganho no custo computacional.

TABELA 4: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - Mefg ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA DEGRAU

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEFG (10)	0,01882
MEFG adaptativo (5)	0,00493

Neste exemplo, portanto, utilizar o Mefg adaptativo com a frequência alvo sendo escolhida a partir do fator de influência traz respostas mais precisas e com um menor custo computacional, em comparação com a utilização do Mefg convencional e até mesmo do MEF.

## 7.2 BARRA FIXA-LIVRE COM FORÇA TIPO IMPULSO

Neste exemplo, a barra fixa – livre está sujeita a uma força de impulso  $F = 10 \text{ kN}$  na sua extremidade livre em um intervalo de 0 a  $10^{-2}$  segundos. A resposta transiente diz respeito ao nó da extremidade livre da barra. A figura 54 mostra a barra do exemplo em questão.

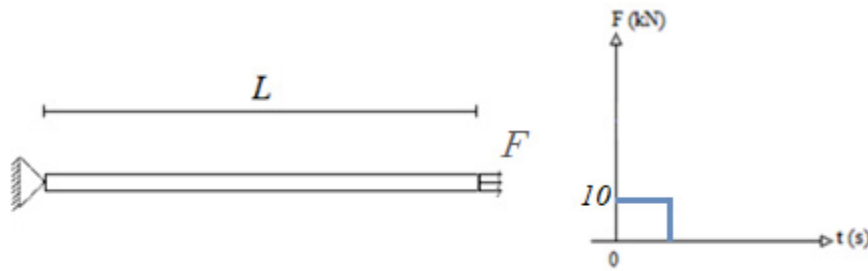


FIGURA 54: BARRA FIXA-LIVRE COM EXCITAÇÃO EXTERNA DE IMPULSO

Para este exemplo, a solução obtida com o MEFG é comparada com duas soluções de referência: a obtida através do MEF convencional, e a proposta analítica de Chopra (1995). Para a solução com MEF, foi feito inicialmente um teste de convergência, modificando o número de elementos lineares na malha. O exemplo foi analisado com 10, 20, 50, 70 e 100 graus de liberdade, e somente a partir de 70 a resposta mostrou-se convergente. Dessa forma, foram utilizados 100 graus de liberdade. A solução proposta por Chopra (1995) é da forma:

$$u(x,t) = \frac{8f_0L}{\pi^2EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ u(t_d) \cos(\omega_n(t-t_d)) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n(t-t_d)) \right] \quad (7.5)$$

$$u(t_d) = \frac{8f_0L}{\pi^2EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left( 1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi c t_d}{2L}\right) \right) \right] \quad (7.6)$$

onde  $f_0$  é a intensidade da força aplicada,  $L$  o vão da barra,  $E$  o módulo de elasticidade,  $A$  a área da seção transversal,  $c = \sqrt{E/\rho}$ . De forma análoga, a velocidade e a aceleração são dadas pelas equações (7.7) e (7.8) respectivamente.

$$\dot{u}(x,t) = \frac{8f_0L}{\pi^2EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -u(t_d) \omega_n \text{sen}(\omega_n(t-t_d)) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \omega_n \cos(\omega_n(t-t_d)) \right] \quad (7.7)$$

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{8f_0L}{\pi^2EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -u(t_d)\omega_n^2 \cos(\omega_n(t-t_d)) - \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \omega_n^2 \text{sen}(\omega_n(t-t_d)) \right] \quad (7.8)$$

As equações supracitadas são válidas para  $t > t_d$ , sendo  $t_d$  o tempo de aplicação da força impulsiva. Para  $t < t_d$  a viga se comporta como no item 7.1 (aplicação de uma força degrau), e portanto valem as equações (7.1) a (7.3).

Para este exemplo, as análises são feitas com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento, de forma análoga ao exemplo anterior (item 7.1). Assim, as figuras 55 a 57 mostram os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo, respectivamente.

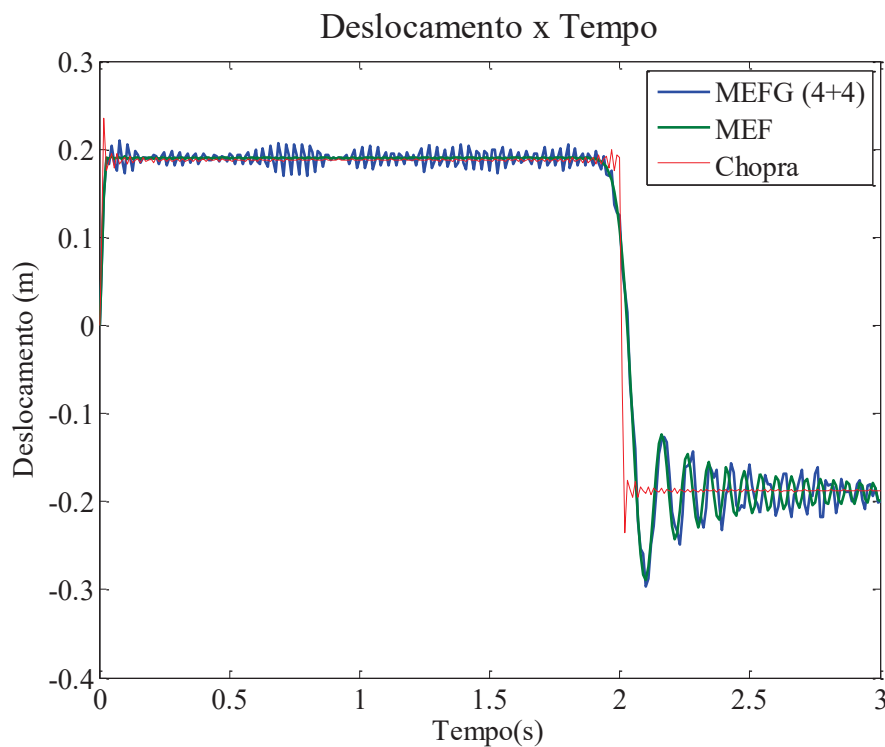


FIGURA 55: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – BARRA COM FORÇA IMPULSO

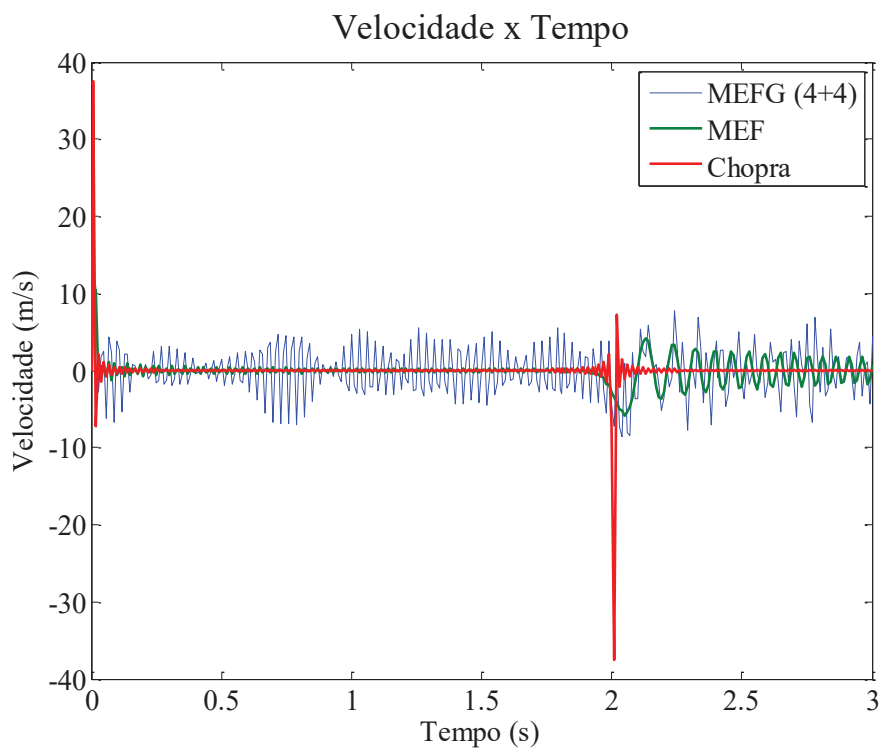


FIGURA 56: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – BARRA COM FORÇA IMPULSO

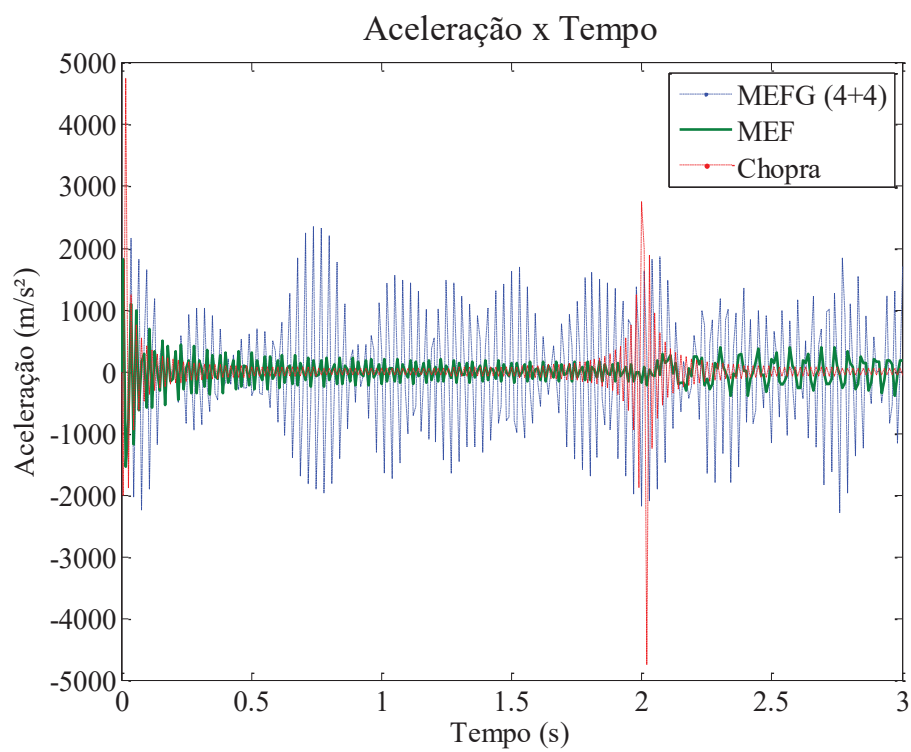


FIGURA 57: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – BARRA COM FORÇA IMPULSO



Através das figuras 55 a 57 percebe-se que a resposta obtida através do MEEG possui discrepâncias significativas com relação à solução de referência. Tanto velocidade quanto aceleração tiveram elevada perturbação no seu resultado devido ao carregamento e descarregamento da força impulsiva. O deslocamento é mais semelhante à solução de referência, mesmo possuindo regiões de instabilidade na resposta.

### 7.2.1 Condensação da matriz modal

Buscando um comportamento mais estável da resposta, a mesma análise é repetida utilizando a matriz modal com 60% dos modos, conforme mostram as figuras 58 a 60.

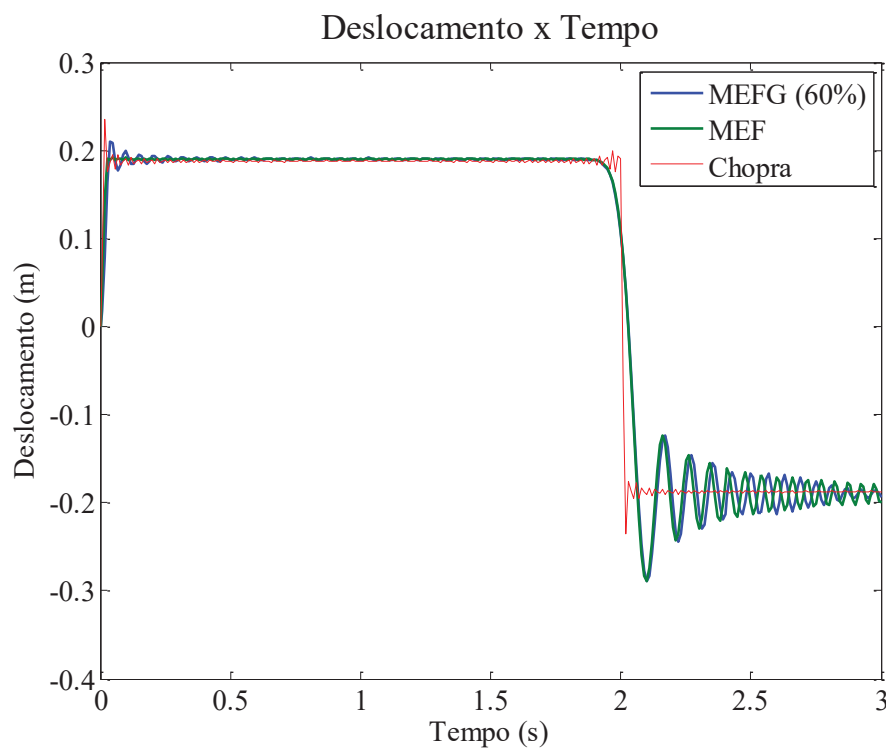


FIGURA 58: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS – BARRA COM FORÇA IMPULSO

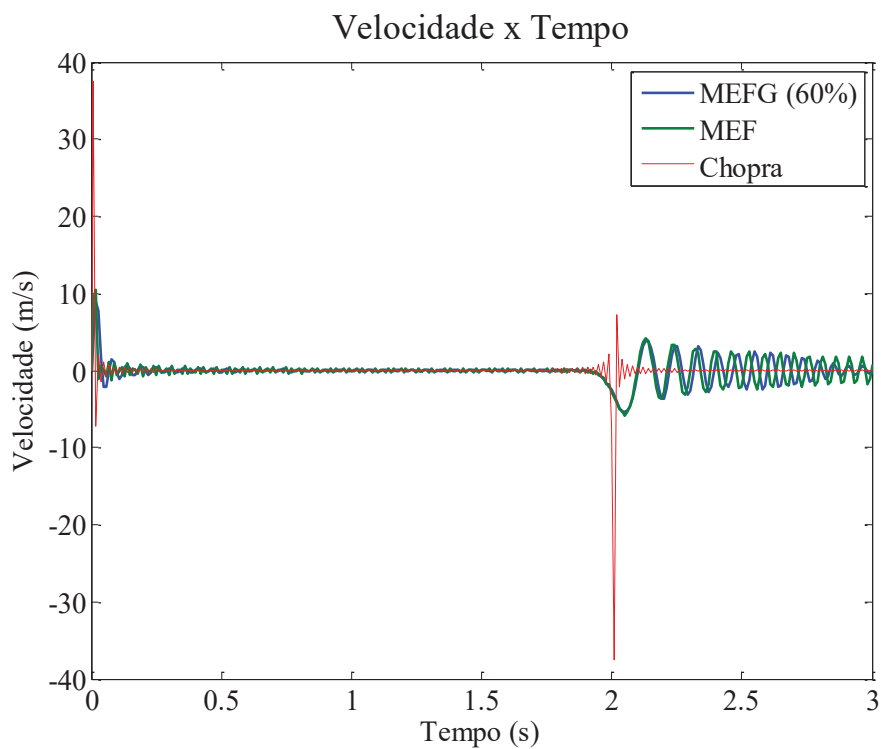


FIGURA 59: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS  
– BARRA COM FORÇA IMPULSO

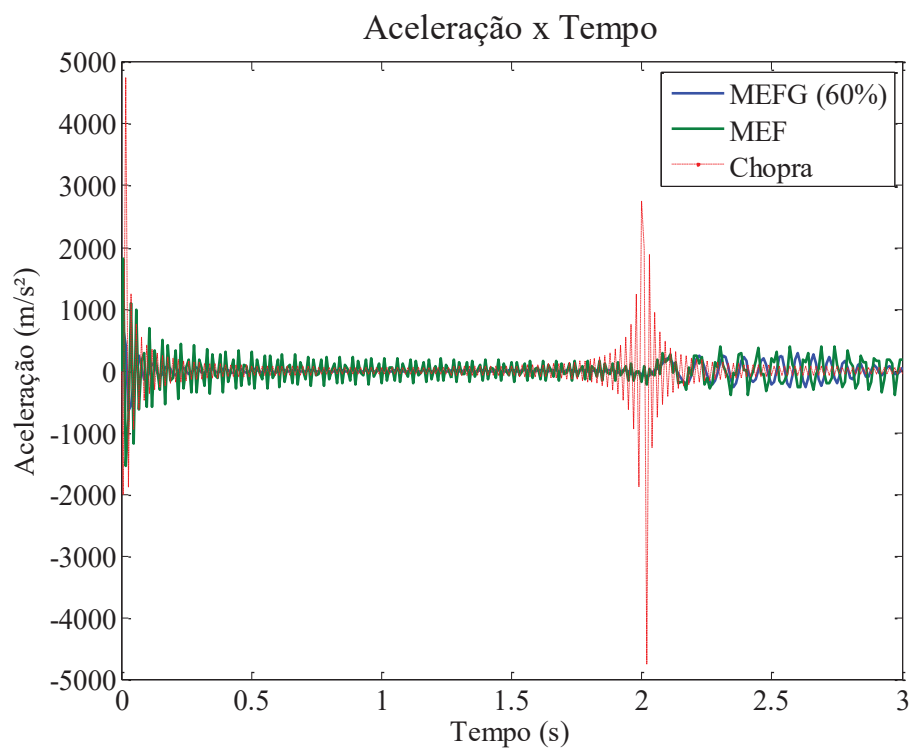


FIGURA 60: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% DOS MODOS  
– BARRA COM FORÇA IMPULSO

Analisando as figuras 58 a 60 percebe-se que a resposta transiente mostrou-se, no geral, mais semelhante à solução de referência ao se utilizar 60% dos modos na matriz modal. Os picos de velocidade mostraram-se mais estáveis no início da análise, onde há a aplicação da força impulsiva. A aceleração também mostrou-se mais semelhante à solução de referência. Em relação aos deslocamentos, também se mostraram mais precisos com relação à solução de Chopra (1995).

### 7.2.2 Fator de influência

A fim de identificar os modos mais preponderantes neste exemplo, o fator de influência é mostrado na figura 61.

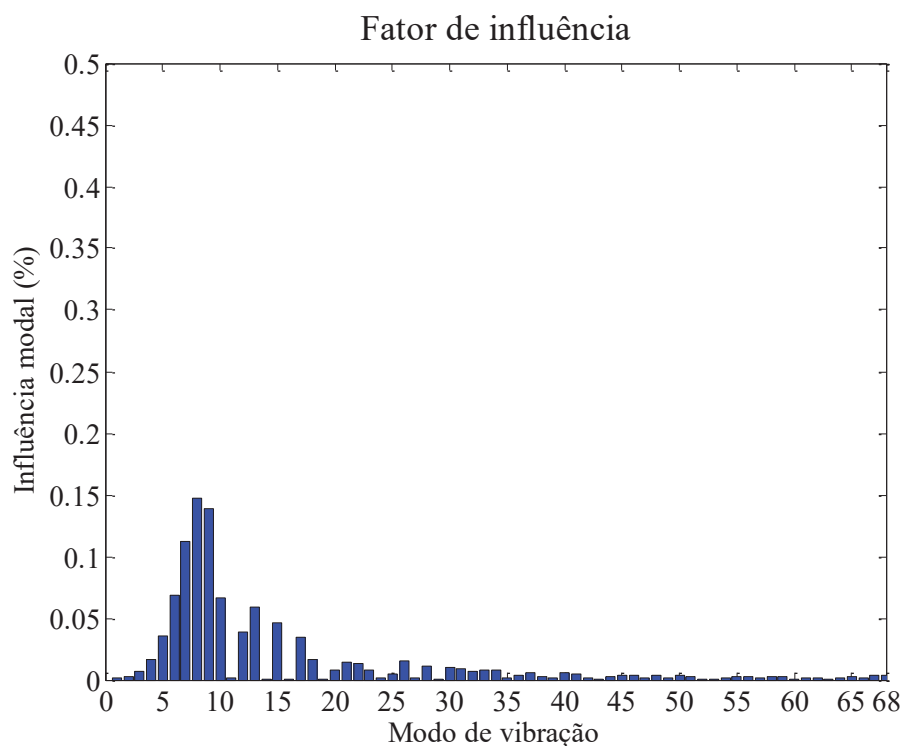


FIGURA 61: FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO

Pela análise do fator de influência, os modos mais preponderantes neste exemplo são os 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34. A soma da influência modal desses modos representa 90,5% da contribuição modal do problema. Dessa forma, o problema é analisado novamente com a presença apenas destes 23 modos, conforme exposto nas figuras 62 a 65.

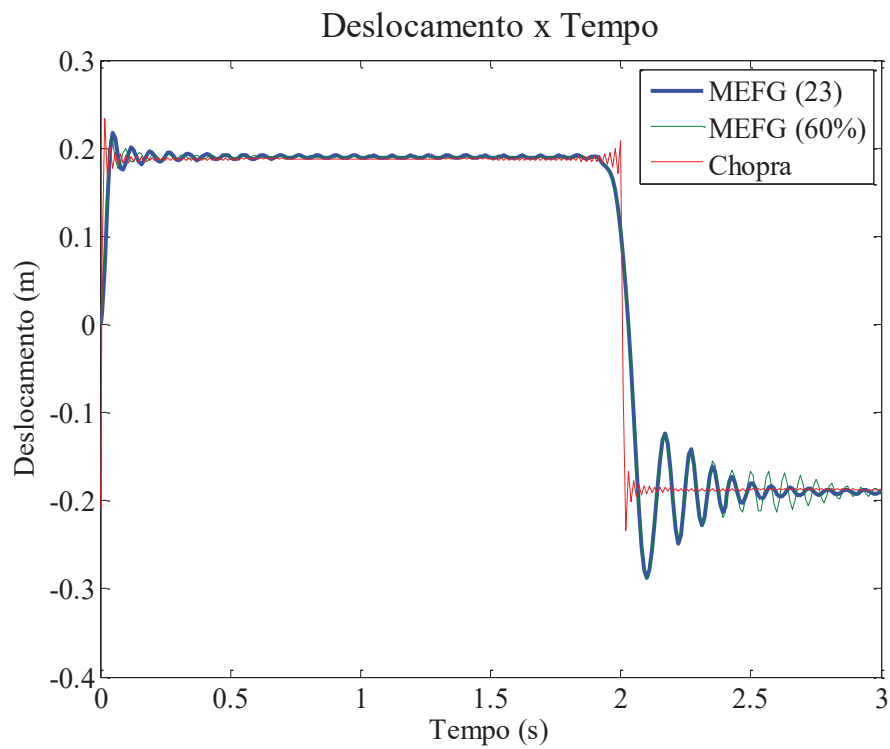


FIGURA 62: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM OS 23 MODOS INDICADOS PELO FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO

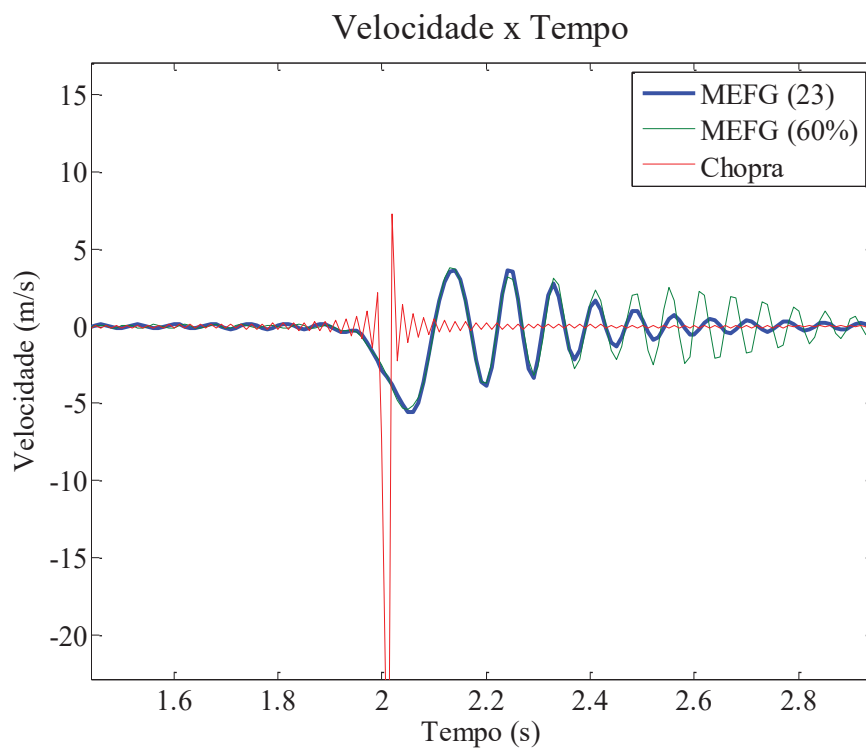


FIGURA 63: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM OS 23 MODOS INDICADOS PELO FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO

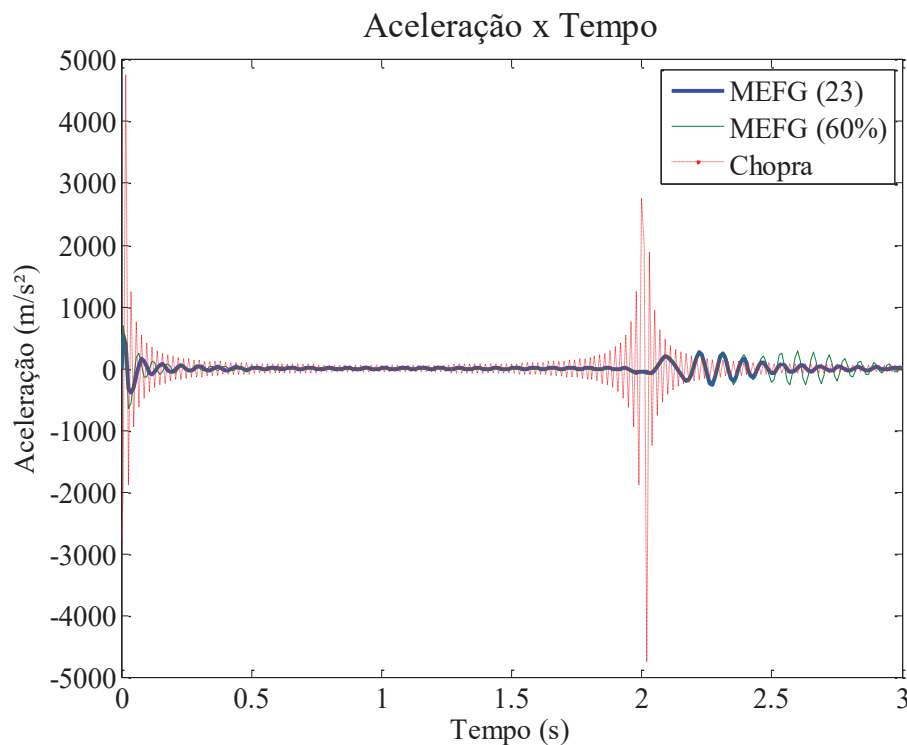


FIGURA 64: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM OS 23 MODOS INDICADOS PELO FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA IMPULSO

As figuras 62 a 64 mostram que a solução obtida com 60% e com os 23 modos são bem semelhantes. A resposta transiente com 23 modos de vibração mostra-se ainda mais estável em determinados trechos, e mais semelhante à solução de referência. Dessa forma, utilizar os 23 modos identificados pelo fator de influência resulta em um esforço computacional menor, com uma precisão semelhante. A tabela 5 mostra o comparativo de erro no deslocamento, a fim de elucidar melhor a diferença nas respostas.

TABELA 5: COMPARATIVO DE ERRO - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO

	Erro no deslocamento (m.s)
MEF	6,16E-03
MEFG 100%	6,11E-03
MEFG 60%	5,30E-03
MEFG 23	4,96E-03

Através da tabela 5 percebe-se que o erro na resposta transiente de deslocamento utilizando os modos indicados pelo fator de influência é menor em comparação com o MEFG com 60% dos modos. Para representar a melhora na resposta transiente de deslocamento, a figura 65 mostra um aumento no gráfico da resposta ao longo do tempo,

onde se percebe que principalmente no patamar da onda quadrada, o MEFG tende a ficar bem mais estável e similar à solução analítica em comparação com o MEF.

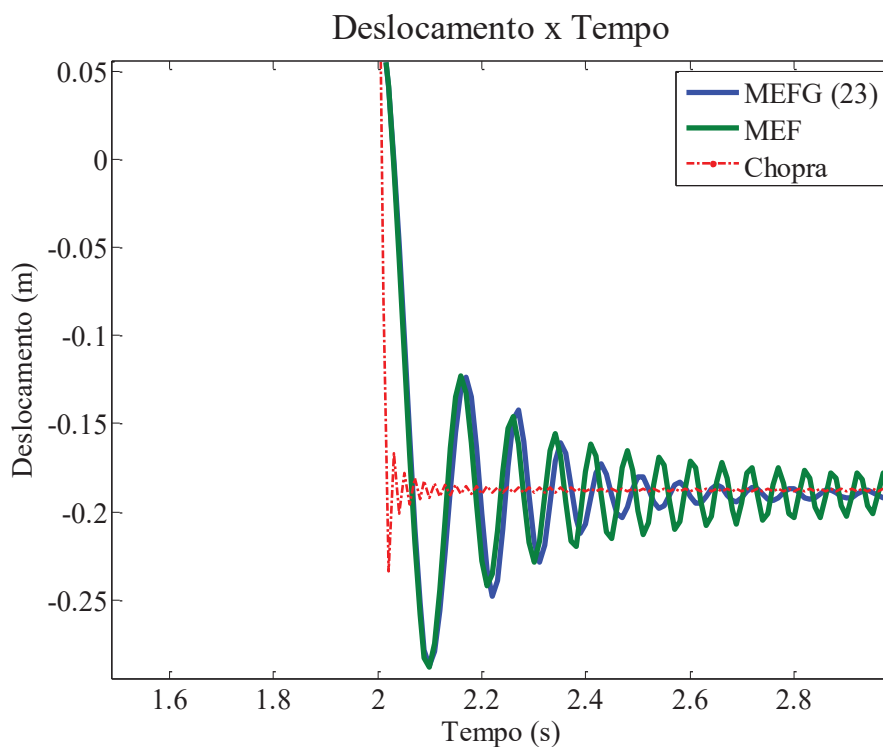


FIGURA 65: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO DO MEFG (23) – BARRA COM FORÇA IMPULSO

Assim, torna-se vantajoso novamente a identificação dos modos mais influentes, para obter uma resposta mais precisa e com menor custo computacional. A tabela 6 mostra o tempo decorrido nas análises.

TABELA 6: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEF	0,1162
MEFG 100% (1)	0,05201
MEFG 23 (2)	0,01927
SOMA DAS ETAPAS (1) E (2)	0,07127

Na tabela 6 percebe-se que a soma da etapa (1) que é o processamento com o MEFG com a matriz modal completa, e da etapa (2) que é o reprocessamento com os 23

modos indicados no fator de influência, ainda é menor que o tempo total decorrido da análise com o MEF. Então mesmo o fator de influência sendo uma análise *a posteriori*, a resposta com os modos indicados por ele se mostra, além de mais precisa do que com a matriz modal completa, mais ágil computacionalmente.

### 7.2.3 MEFG adaptativo

Para este exemplo, o fator de influência (figura 63) mostrou a predominância de 23 modos de vibração. Assim, os resultados do MEFG com esses 23 modos são comparados com os resultados obtidos através do MEFG adaptativo. A frequência alvo é a 8ª, visto que através do fator de influência percebeu-se que é a mais preponderante, conforme pode ser visto na figura 61. Foram utilizados 8 graus de liberdade na primeira iteração, e 40 nas duas subsequentes. Também, a matriz modal obtida pelo MEFG adaptativo é utilizada inicialmente com 100% dos modos, e depois com os modos mais preponderantes apenas. As figuras 66 a 68 apresentam os resultados iniciais.

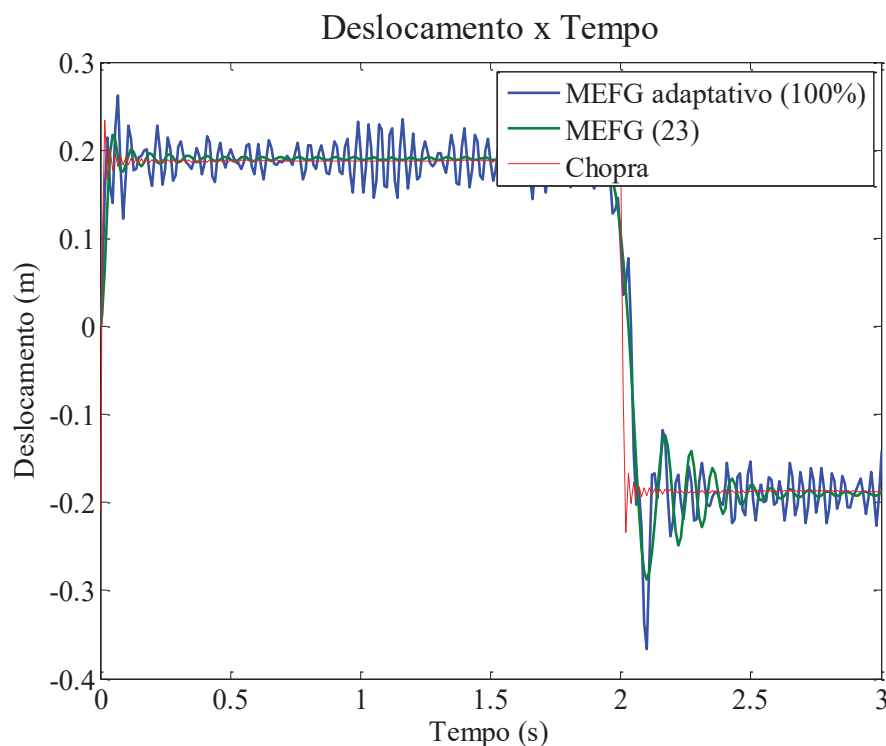


FIGURA 66: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO

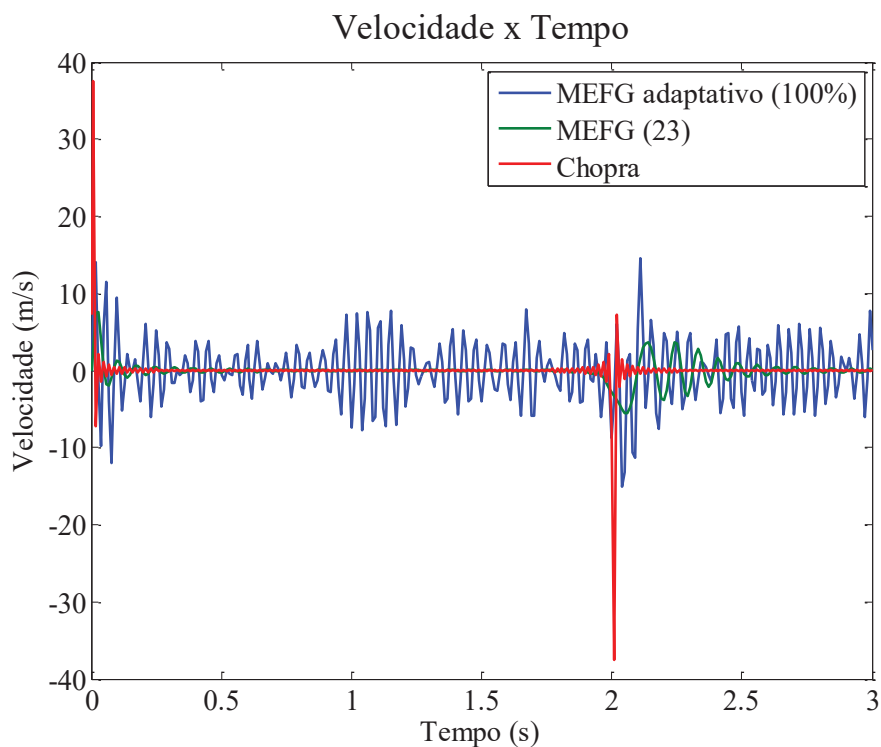


FIGURA 67: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO

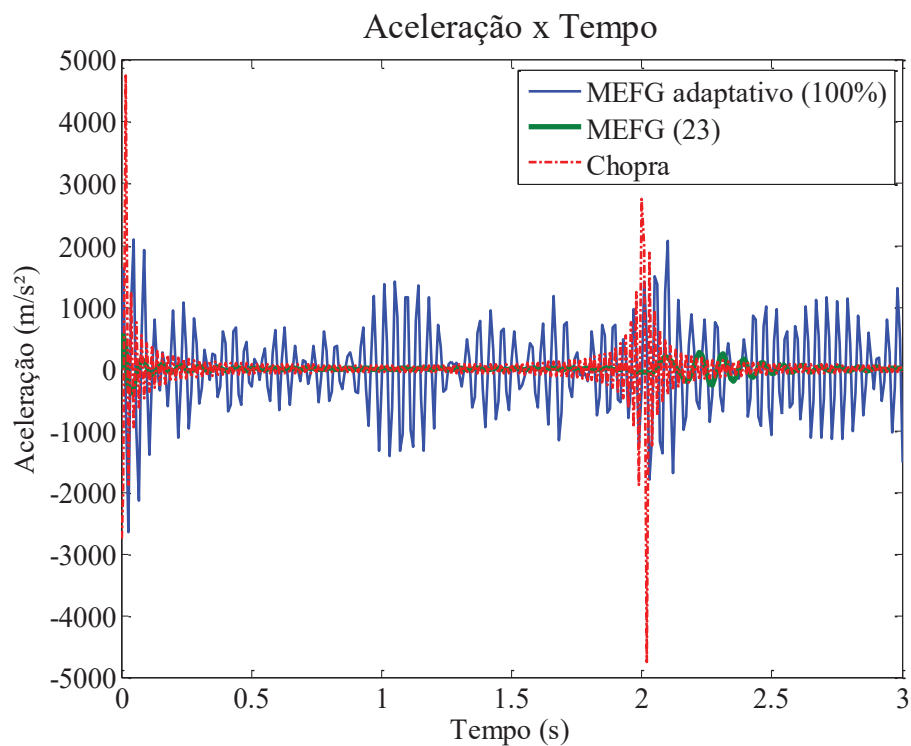


FIGURA 68: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO



Através das figuras 66 a 68 percebe-se que a resposta obtida através do MEEG adaptativo com a matriz modal completa mostra-se bem discrepante em relação à obtida com o MEEG com 23 modos. Principalmente em relação à velocidade e aceleração, a resposta mostra-se bem instável. Assim, para que seja possível utilizar a matriz com menos modos, o fator de influência para o MEEG adaptativo é exposto na figura 69.

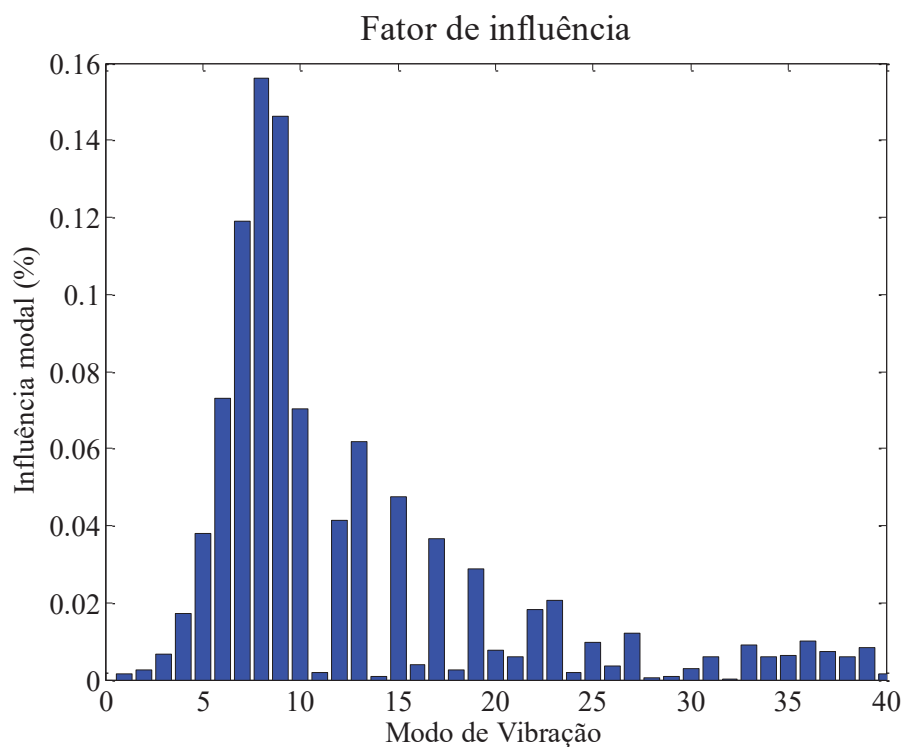


FIGURA 69: FATOR DE INFLUÊNCIA NO MEEG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO

Através do fator de influência, pode-se indicar os modos preponderantes: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 25, 27, 33, 36, 39. Assim, a matriz modal é condensada, e é deixada a presença desses 19 modos apenas. As figuras 70 a 72 mostram esses resultados.

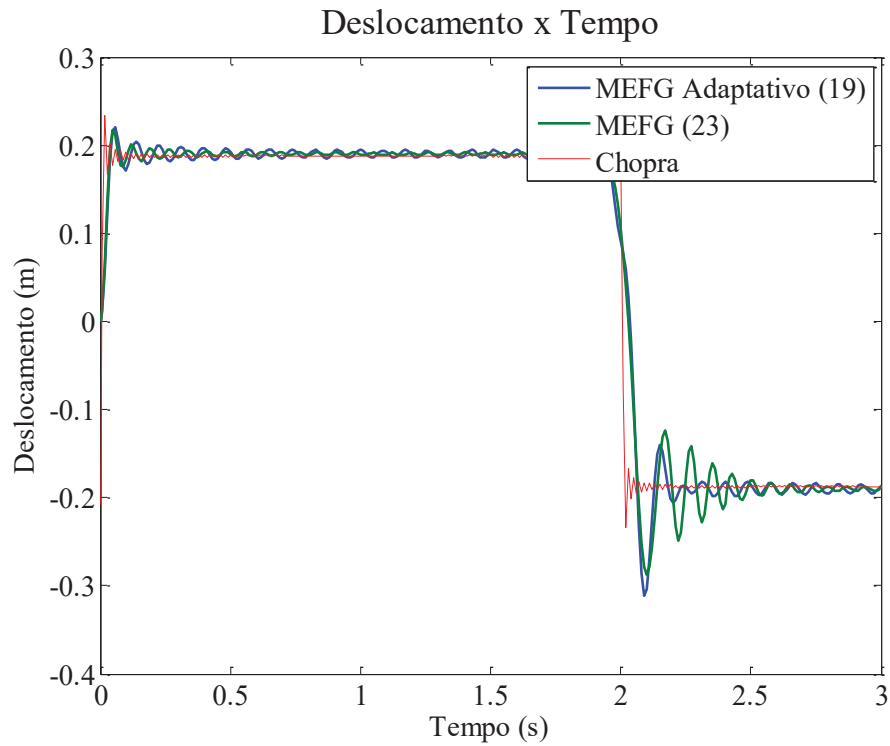


FIGURA 70: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 19 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO

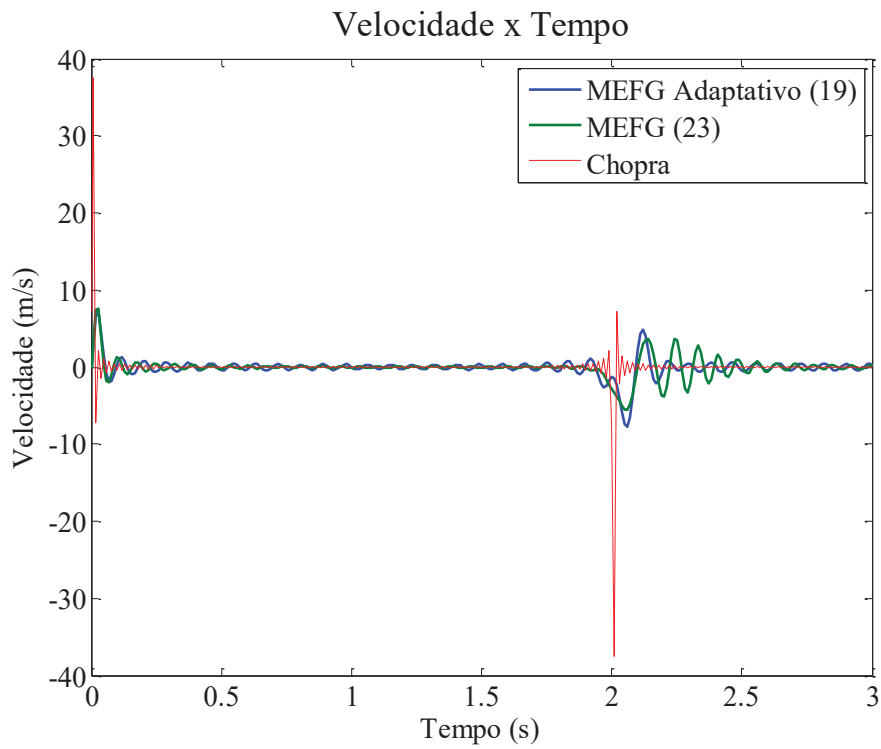


FIGURA 71: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 19 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO

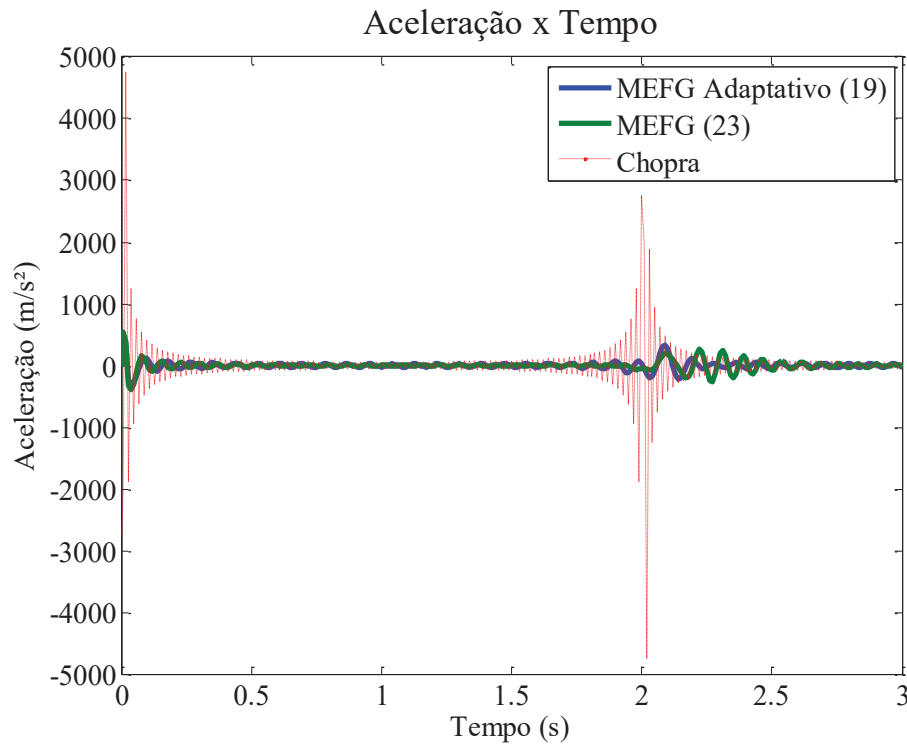


FIGURA 72: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 19 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA IMPULSO

As figuras 70 a 72 mostram que, assim como nas análises feitas com o MEFG, o MEFG adaptativo mostra melhora na sua resposta transiente quando utilizada a matriz modal com os modos predominantes do problema. As respostas transientes mostraram-se mais coerentes que a própria análise feita com o MEFG convencional. A exemplo dos deslocamentos, nos patamares da onda quadrada o MEFG adaptativo mostrou-se mais estável e sem grandes perturbações. Nem a resposta com o MEFG convencional, e nem a resposta com o MEF com 100 graus de liberdade (item 7.2.1) se aproximam tanto desse comportamento. A tabela 7 mostra o erro em relação a solução analítica do MEFG adaptativo, do MEFG adaptativo com a matriz condensada, e do MEFG com 23 modos.

TABELA 7: COMPARATIVO DE ERRO - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO

	Erro no deslocamento (m.s)
MEFG 23	4,96E-03
MEFG adaptativo (100%)	6,46E-03
MEFG adaptativo (19)	4,75E-03

A tabela 7 mostra que de fato a resposta transiente com o MEFG adaptativo usando a matriz modal condensada traz resultados mais precisos em comparação com o MEFG tradicional, também com a matriz modal condensada.

O MEFG adaptativo, portanto, conseguiu resultados com boa precisão e com um número menor de graus de liberdade que o MEFG tradicional (40 contra 68). Para mostrar o ganho no custo computacional do MEFG adaptativo com a presença apenas dos modos predominantes, a tabela 8 traz o tempo decorrido na análise computacional do MEFG com 23 modos, e do MEFG adaptativo com 8.

TABELA 8: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA IMPULSO

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEFG (23)	0,01927
MEFG adaptativo (19)	0,01879

### 7.3 BARRA FIXA-LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA

Neste exemplo a barra fixa – livre está sujeita a uma força harmônica  $F = f \cdot \text{sen}(\omega t)$  com  $f = 1 \text{ kN}$  e  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  na sua extremidade livre. A resposta transiente é em relação ao nó central da barra. A figura 73 mostra a barra do exemplo em questão.

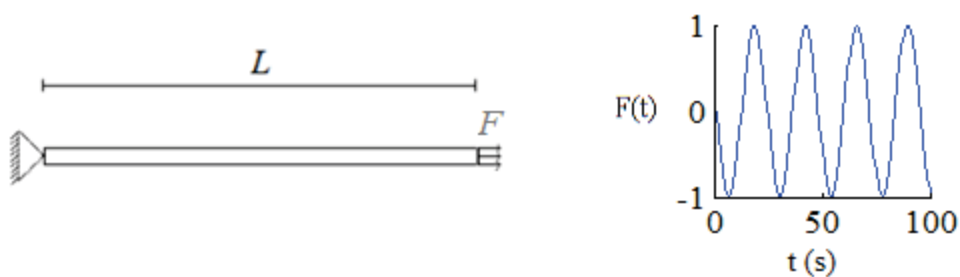


FIGURA 73: BARRA FIXA-LIVRE COM EXCITAÇÃO EXTERNA HARMÔNICA

Para este exemplo, as análises pelo MEFG também são feitas com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento. A solução de referência utilizada neste exemplo é a solução resolvida através de técnicas descritas por Pinchover e Rubinstein (2005), onde o deslocamento em função do tempo é da forma:

$$u(x,t) = f.x.\text{sen}(\omega t) + f \sum_{i=1}^{\infty} \{ \text{sen}(K_n x) [C_n \text{sen}(K_n ct) + B_n(t)] \}, \quad (7.9)$$

$$C_n = -\frac{A_n \omega}{K_n c}, \quad (7.10)$$

$$B_n(t) = \frac{A_n \omega^2 \text{sen}(\omega t)}{K_n^2 c^2 - \omega^2} - \frac{A_n \omega^3 \text{sen}(K_n ct)}{K_n^3 c^3 - c K_n \omega^2}, \quad (7.11)$$

$$A_n = \frac{-2[K_n \cos(K_n) - \text{sen}(K_n)]}{K_n^2} \quad (7.12)$$

$$K_n = \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \quad (7.13)$$

A solução através do MEF foi obtida com 100 graus de liberdade, analogamente aos exemplos anteriores, e a solução analítica foi obtida com 500 termos nas séries das equações (7.9) a (7.13).

As figuras 74 a 76 mostram os resultados para deslocamentos velocidade e aceleração em função do tempo.

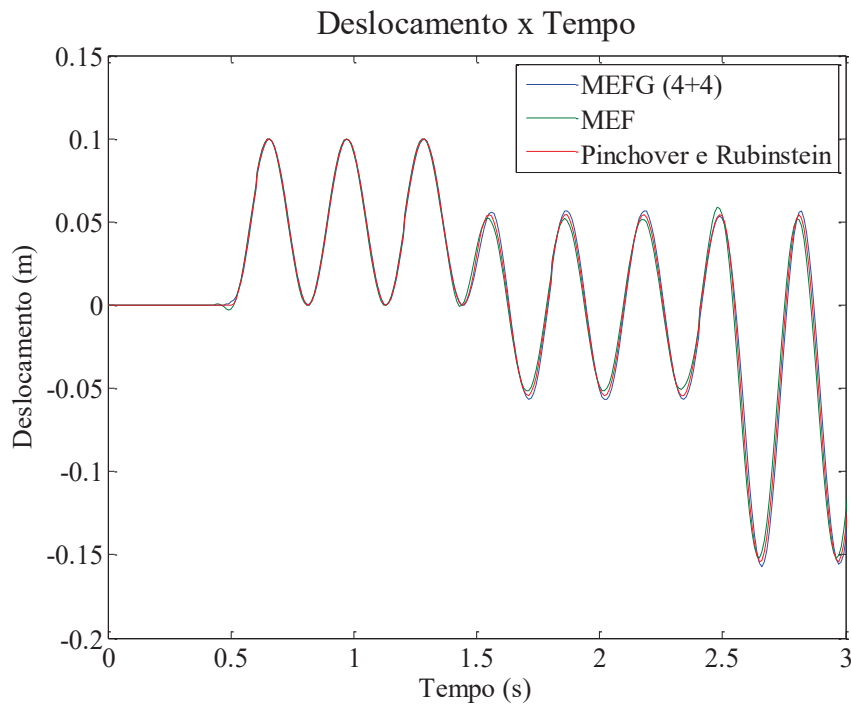


FIGURA 74: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

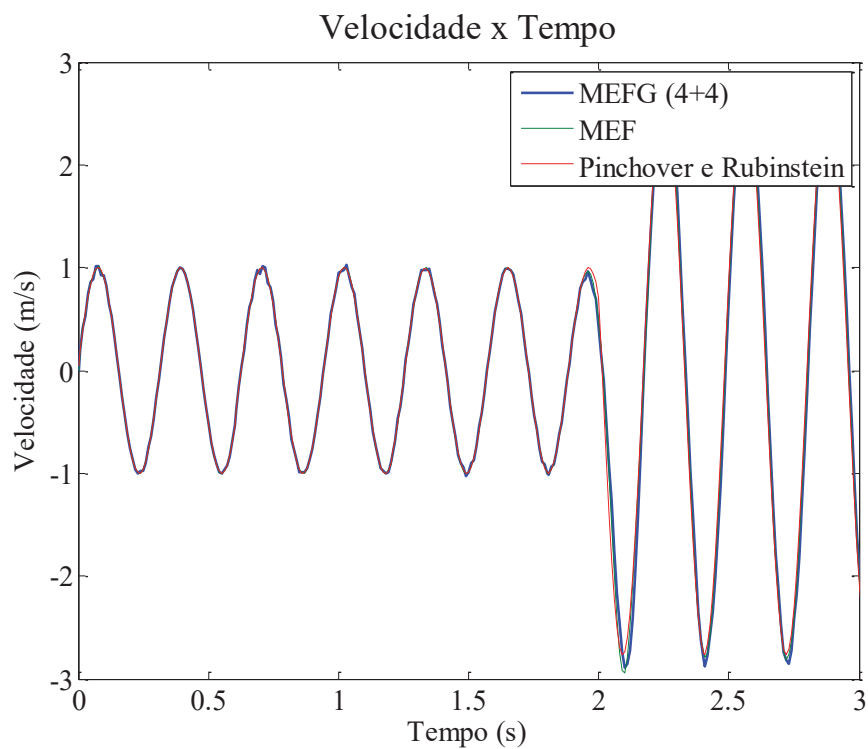


FIGURA 75: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

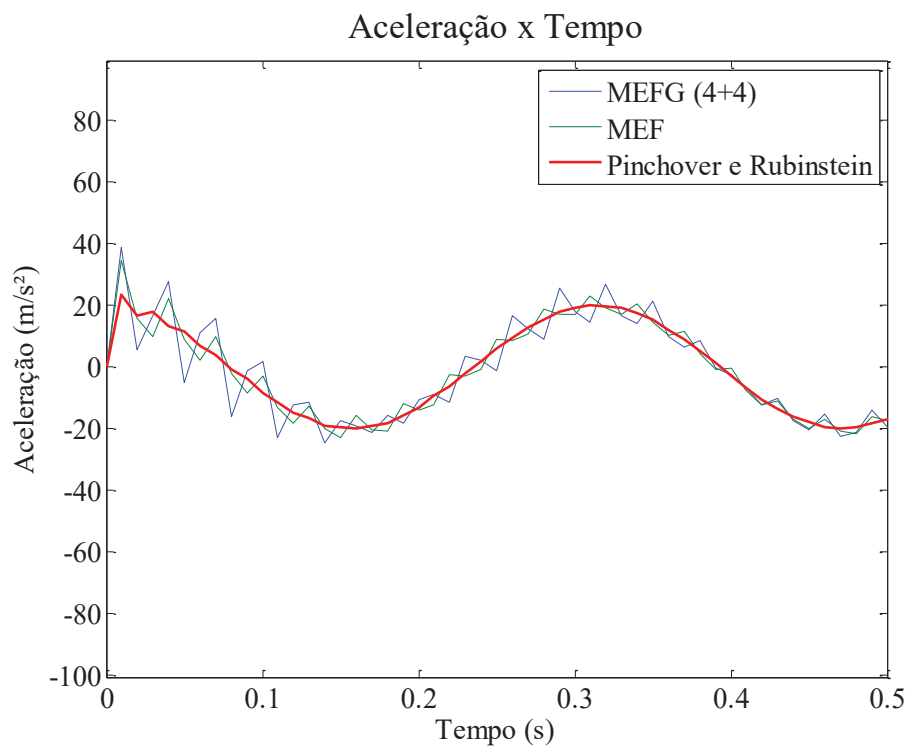


FIGURA 76: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

Através das figuras 74 a 76 percebe-se que neste as respostas tanto do MEFG quanto do MEF são muito semelhantes entre si e em relação à solução de referência. Assim, para dar continuidade nas análises, o fator de influência é mostrado a seguir.

### 7.3.1 Fator de influência

Neste exemplo, ao condensar a matriz para que ficasse com 60% dos modos de vibração, os resultados foram muito semelhantes aos encontrados nas figuras 74 a 76. Devido a essa pouca variação na resposta transiente, esses resultados foram suprimidos.

Dando continuidade às análises, para aferir os modos de vibração mais preponderantes, a equação 7.4 é aplicada, e o fator de influência para este exemplo é mostrado na figura 77.

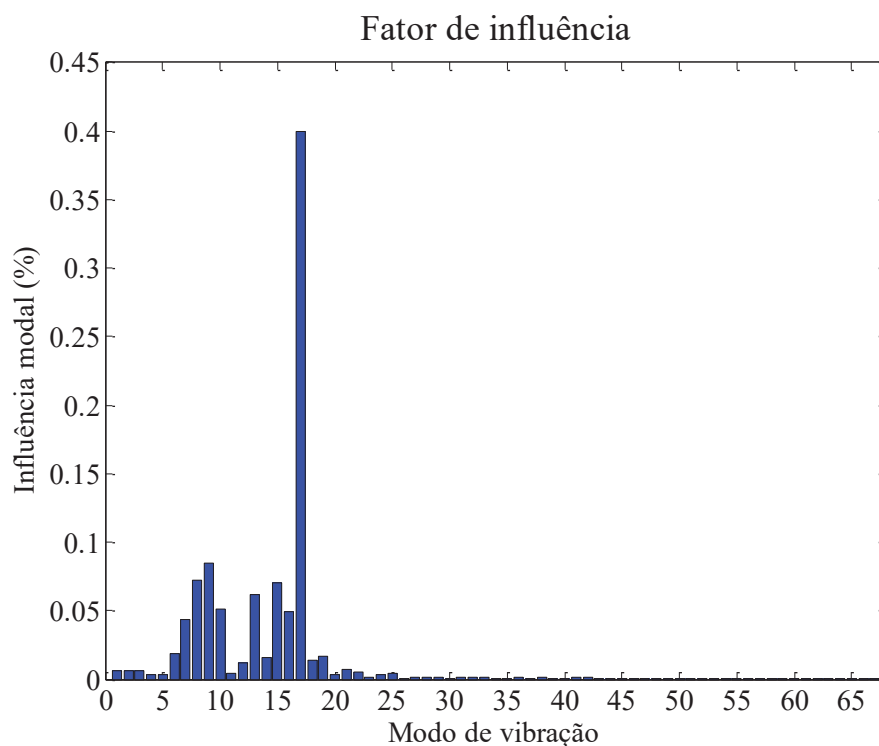


FIGURA 77: FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

Analisando o fator de influência deste exemplo, percebe-se que os modos preponderantes são os 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19 que somam 95,1% de toda a influência modal. Assim, o exemplo é analisado com a presença apenas desses 13 modos, conforme exposto nas figuras 78 a 80.

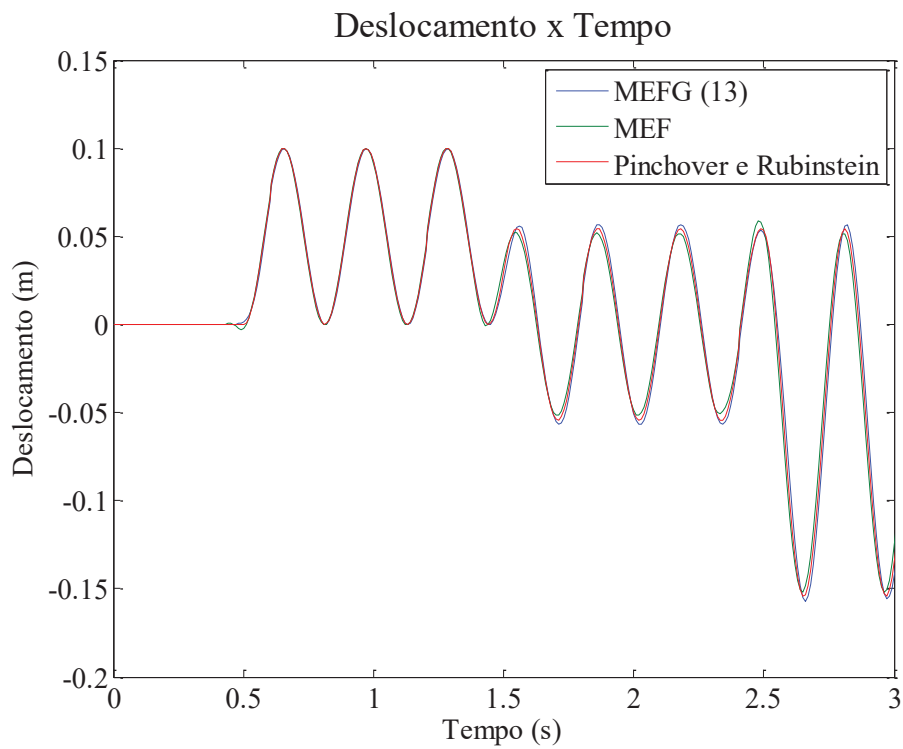


FIGURA78: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 13 MODOS –  
BARRA COM FORÇA HARMNÔNICA

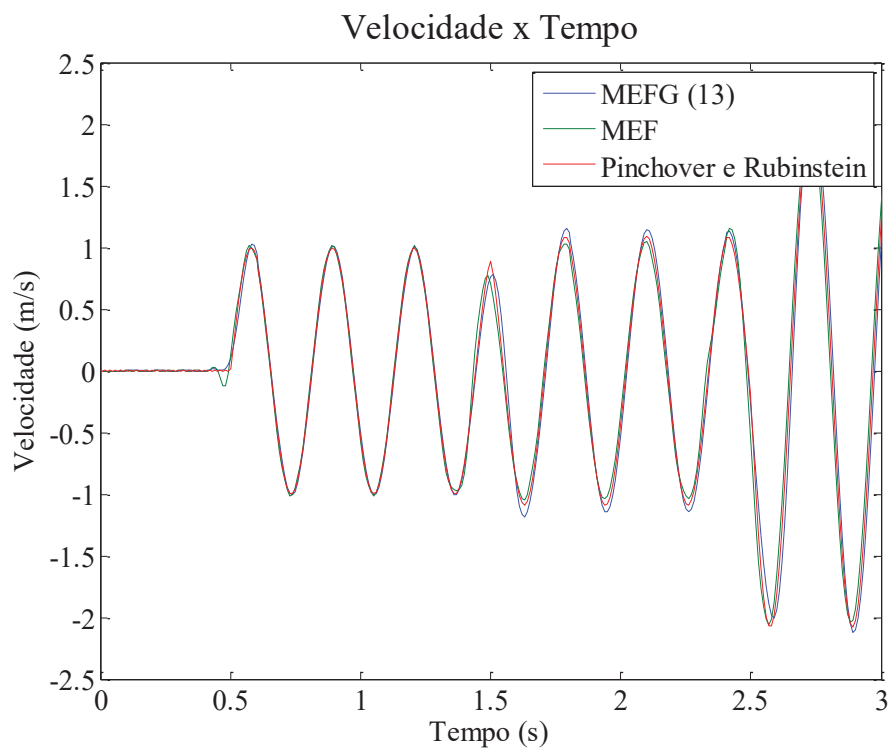


FIGURA 79: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 13 MODOS –  
BARRA COM FORÇA HARMNÔNICA



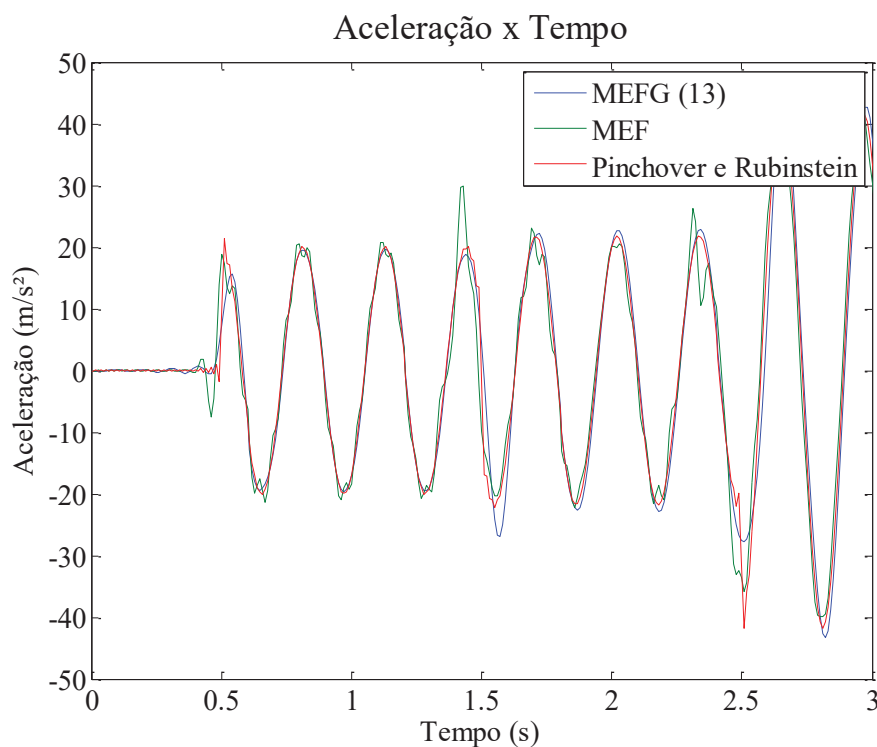


FIGURA 80: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 13 MODOS – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

Ao observar as figuras 78 a 80 percebe-se que a resposta de deslocamento, velocidade e aceleração manteve-se com boa aproximação em relação à solução de referência, similares às obtidas já com a matriz modal completa. Dessa forma, utilizar apenas os modos indicados pelo fator de influência resulta em uma resposta transiente com boa aproximação, mas com um menor custo computacional. A tabela 9 mostra o comparativo de erro.

TABELA 9: COMPARATIVO DE ERRO - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

	Erro no deslocamento (m.s)
MEF	2,992E-03
MEFG 100%	1,527E-03
MEFG 60%	1,524E-03
MEFG 13	1,513E-03

Na tabela 9 percebe-se que, novamente, a resposta transiente utilizando apenas os modos mais preponderantes traz bons resultados. Pela tabela, houve uma diminuição pouco significativa no erro em relação ao deslocamento, mas o fato de eliminar uma boa

parcela dos modos de vibração da matriz modal, reduz o problema computacional a ser resolvido, e mantem a boa precisão dos resultados.

Assim, sabendo que a análise com o fator de influência é *a posteriori*, a tabela 10 traz o tempo decorrido na análise com o MEF tradicional em comparação com a soma das etapas que contemplam a solução através do MEFG com 100% dos modos, e com os 13 modos indicados pelo fator de influência.

TABELA 10: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEF	0,09733
MEFG 100% (1)	0,05339
MEFG 13 (2)	0,01992
SOMA DAS ETAPAS (1) E (2)	0,07331

Na tabela 10 pode-se perceber que o tempo decorrido com o MEF é maior que a soma das etapas que envolvem a análise *a posteriori* pelo fator de influência. Esse ganho computacional pode ser mais significativo em uma estrutura mais complexa, composta por mais elementos de barra.

### 7.3.2 MEFG adaptativo

Para o exemplo de barra com força harmônica aplicada na extremidade livre, o fator de influência (figura 77) mostrou a predominância de 13 modos de vibração. Assim, os resultados do MEFG com esses 13 modos são comparados com os resultados obtidos através do MEFG adaptativo. A frequência alvo será a 17<sup>a</sup>, visto que através do fator de influência, percebeu-se que é a mais preponderante. Dessa forma, foram usados 18 graus de liberdade na primeira iteração, e 90 nas duas subsequentes. Também, a matriz modal obtida pelo MEFG adaptativo é utilizada inicialmente com 100% dos modos, e depois com os modos mais preponderantes. As figuras 81 a 83 apresentam os resultados.

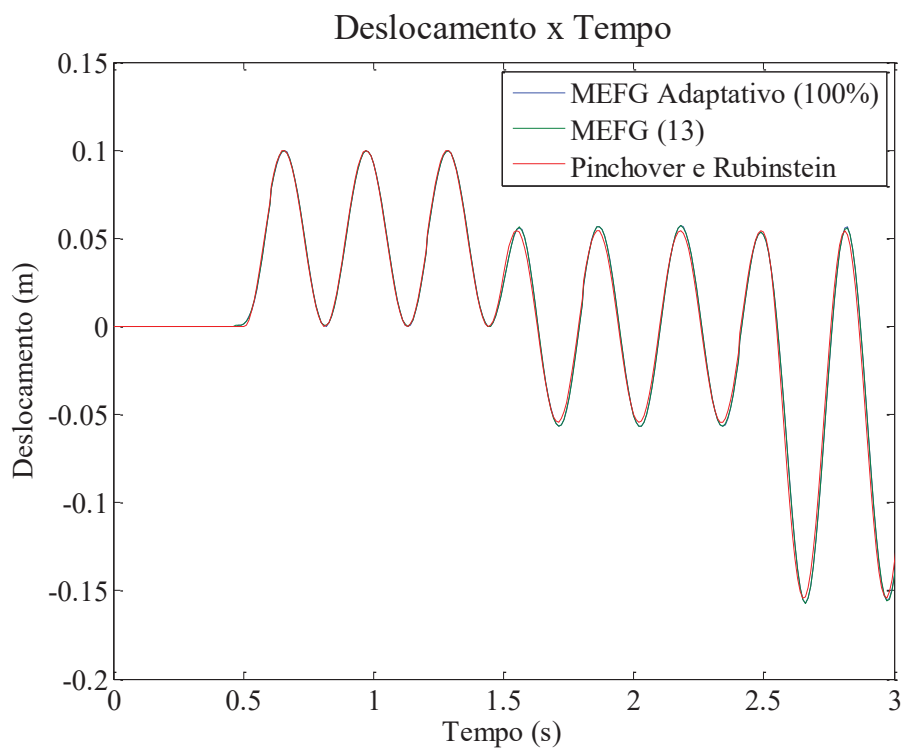


FIGURA 81: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

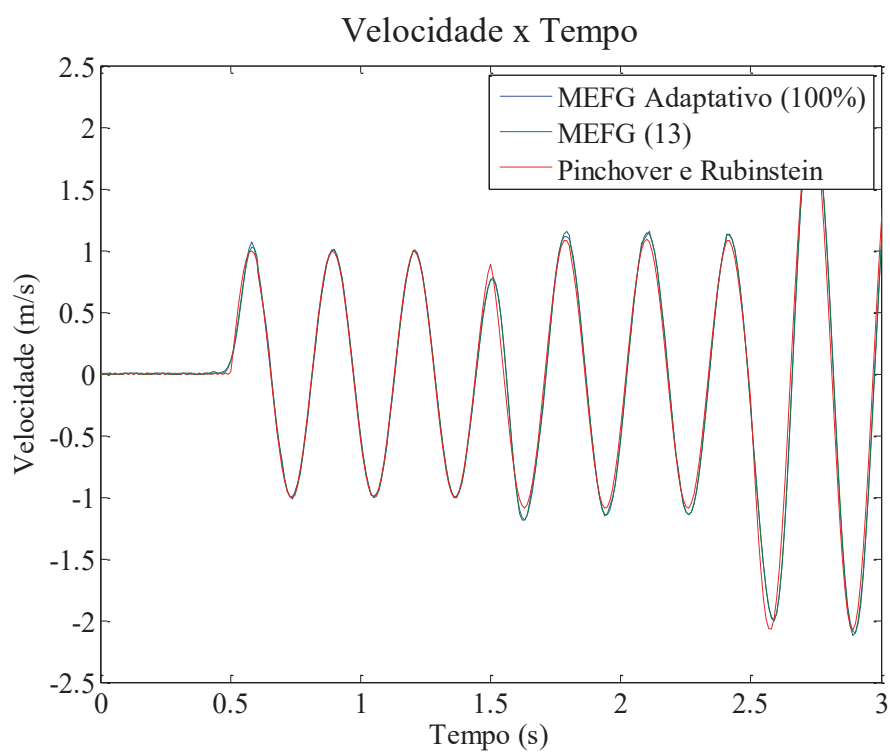


FIGURA 82: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

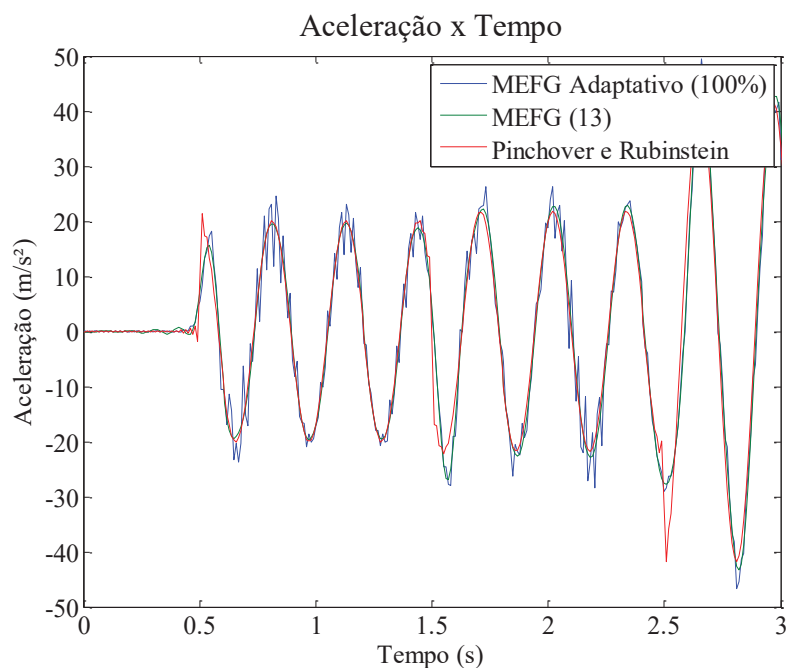


FIGURA 83: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

Através das figuras 81 a 83 percebe-se que, no geral, a resposta obtida através do MEFG adaptativo se aproxima muito da obtida com o MEFG com 13 modos. A aceleração nesse caso mostrou uma certa instabilidade na resposta, mesmo mantendo a tendência da resposta ao longo do tempo. Assim, para que seja possível utilizar a matriz com menos modos, o fator de influência é novamente exposto na figura 84.

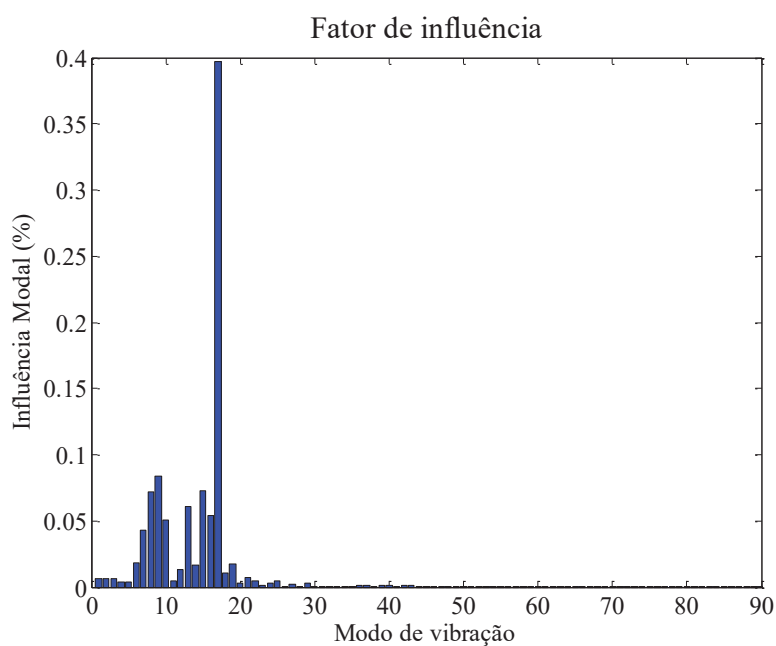


FIGURA 84: FATOR DE INFLUÊNCIA NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

Importante ressaltar que apesar da mudança no número de graus de liberdade, a excitação externa permaneceu a mesma. Dessa forma, como já exposto anteriormente, os modos mais preponderantes são os mesmos apresentados na análise utilizando o Mefg (item 7.3.2). Então, os modos são os 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16 e 17, 18 e 19, que somam 93,2% da influência modal. As figuras 85 a 87 mostram os resultados para a análise feita com a presença apenas desses 13 modos na matriz modal.

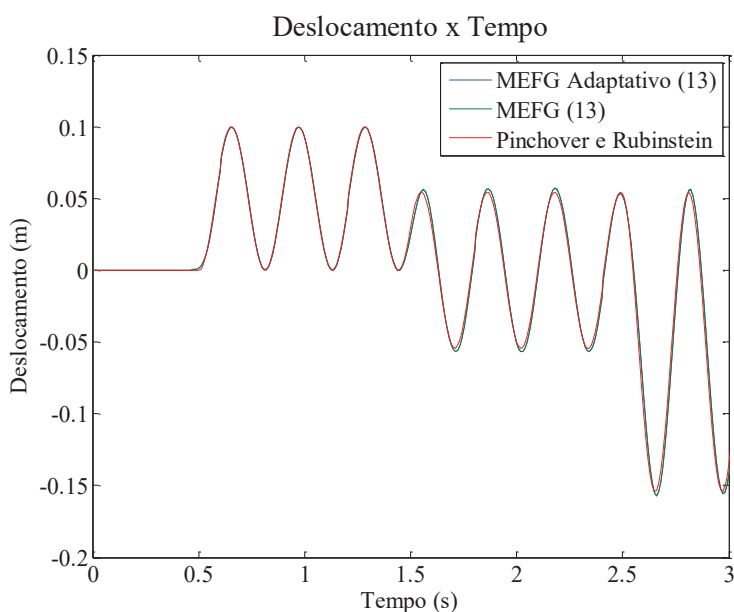


FIGURA 85: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 9 MODOS NA MATRIZ MODAL NO Mefg ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

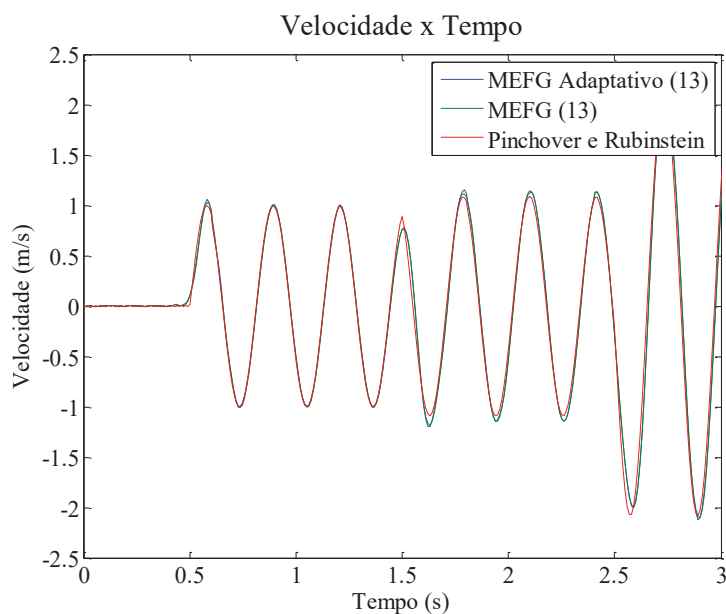


FIGURA 86: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 9 MODOS NA MATRIZ MODAL NO Mefg ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

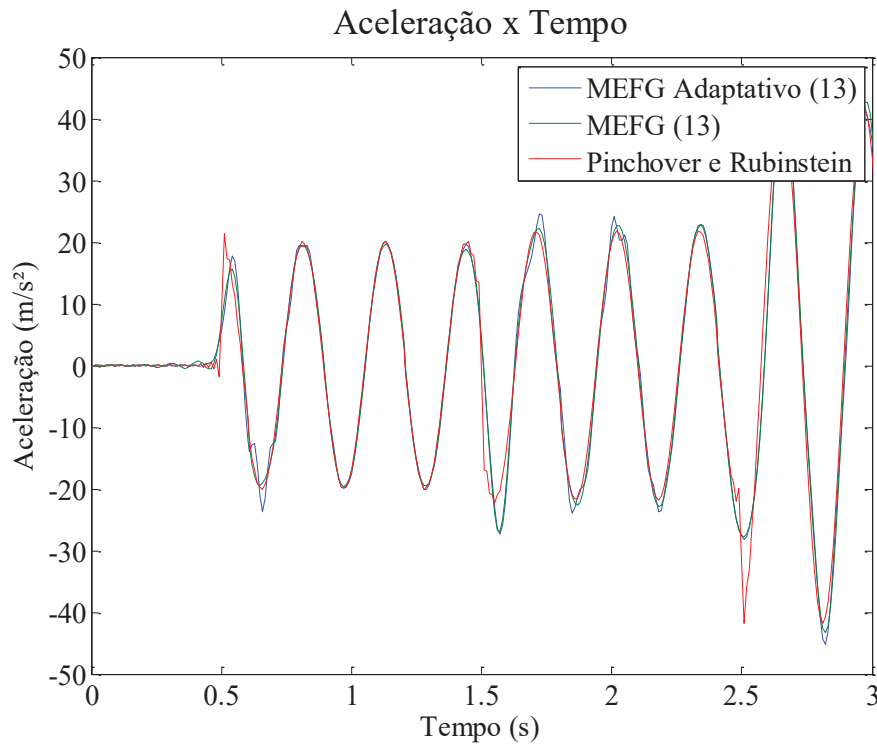


FIGURA 87: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 9 MODOS NA MATRIZ MODAL NO MEFG ADAPTATIVO – BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

Percebe-se através das figuras 85 a 87 que o MEFG adaptativo se assemelha muito com a solução obtida através do MEFG convencional. Neste caso, como a frequência meta foi a 17ª, o número de graus de liberdade do problema é 90. Dessa forma, a análise com o MEFG adaptativo tem mais graus de liberdade que a análise com o MEFG (90 contra 68), e o tempo decorrido na análise foi maior, conforme mostra a tabela 11.

TABELA 11 - TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEFG 13	0,01992
MEFG adaptativo 13	0,02234

Mesmo com o aumento no tempo decorrido na análise, a resposta com o MEFG adaptativo mostrou bom comportamento na análise transiente, sendo levemente mais preciso que o MEFG tradicional, como mostra a tabela 12.

TABELA 12 - COMPARATIVO DE ERRO - MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE BARRA COM FORÇA HARMÔNICA

	Erro no deslocamento (m.s)
MEFG 13	1,513E-03
MEFG adaptativo (100%)	1,512E-03
MEFG adaptativo (13)	1,511E-03

Assim, de forma geral, o MEFG mostra-se um método com bom comportamento na análise transiente de barras. As respostas de deslocamento, velocidade e aceleração melhoram tanto em precisão quanto em eficiência computacional ao passo que a matriz modal é condensada.

Para atingir o objetivo de análise de estruturas reticuladas, um exemplo de treliça é mostrado no item 7.4, onde apenas o MEFG adaptativo é testado com relação à condensação da matriz modal a partir do fator de influência.

#### 7.4 O MEFG ADAPTATIVO APLICADO EM TRELIÇAS

Com o intuito de expandir as análises transientes, o presente exemplo analisa uma treliça através do MEFG adaptativo, conforme a figura 88.

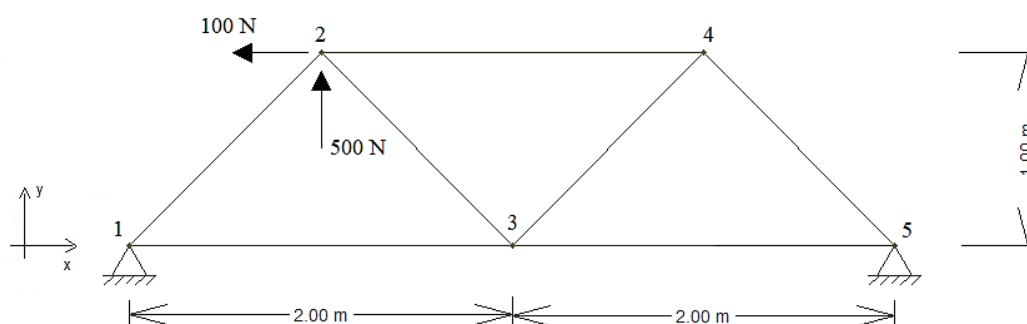


FIGURA 88: TRELIÇA DO EXEMPLO 7.4

O carregamento aplicado no nó 2 da treliça trata-se de duas forças tipo degrau, que são constantes ao longo do tempo. O intervalo de tempo analisado foi de 10 segundos, mas os resultados são mostrados em um intervalo menor, a fim de melhorar a visibilidade.

Os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração obtidos com o MEFG adaptativo são comparados com os resultados do MEF tradicional, com 6 graus de liberdade, e com o MEF com refinamento  $h$ , proposta de Cittadin (2017), que contém 24 graus de liberdade.

Inicialmente os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração obtidos com o MEEG adaptativo são relacionados com a frequência alvo sendo a primeira, visto que, com o fator de influência obtido com o MEF tradicional, não foi possível verificar com exatidão qual era o modo de vibrar preponderante. Tal dificuldade é devido aos poucos graus de liberdade do problema (6, já que são 5 nós com duas condições de contorno de apoio rígido). Os resultados para essa primeira análise podem ser vistos nas figuras 89 a 91.

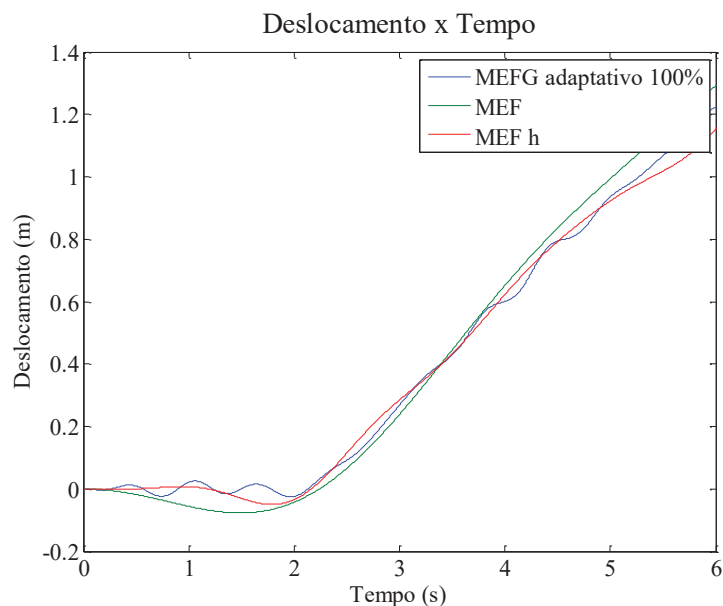


FIGURA 89: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS – TRELIÇA

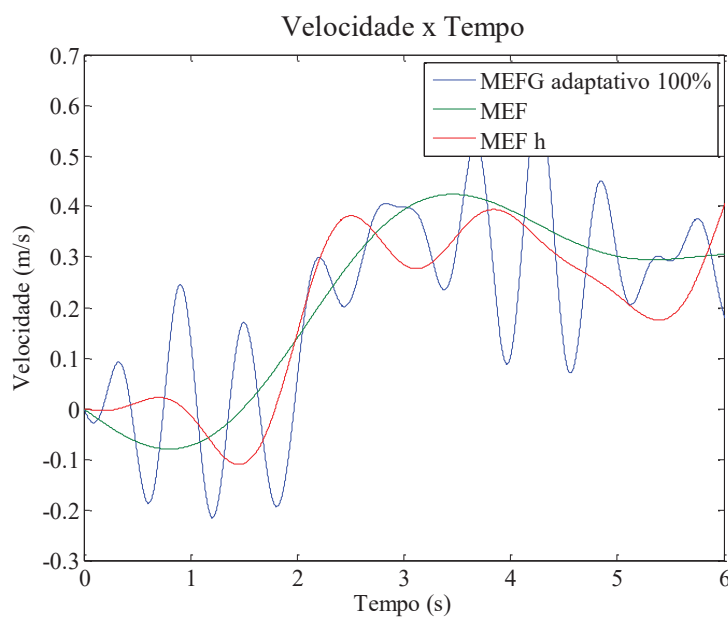


FIGURA 90: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% DOS MODOS - TRELIÇA



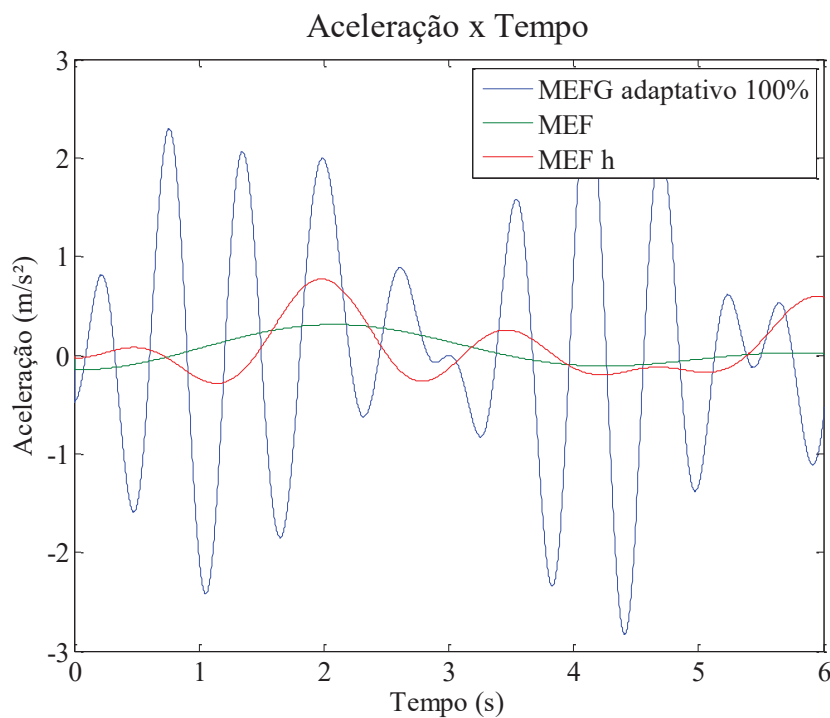


FIGURA 91: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% DOS MODOS - TRELIÇA

Nas figuras 89 a 91 pode-se perceber que no resultado de deslocamento e velocidade, as respostas do MEFG adaptativo, do MEF tradicional e do MEF  $h$  tem um comportamento semelhante, mesmo a resposta do MEFG adaptativo sendo bem mais oscilatória que a dos outros métodos. A resposta obtida através do MEF e do MEF  $h$  é mais suave ao longo do tempo, diferente da obtida com o MEFG adaptativo, que é bastante instável. Em relação à aceleração, a resposta obtida com o MEFG adaptativo mostra a oscilação bem acentuada, e o MEF tradicional e o MEF  $h$  mais similares entre si.

Assim como nos exemplos 7.1 a 7.3, a matriz modal obtida através do MEFG adaptativo é condensada de acordo com o fator de influência, o qual é mostrado na figura 92.

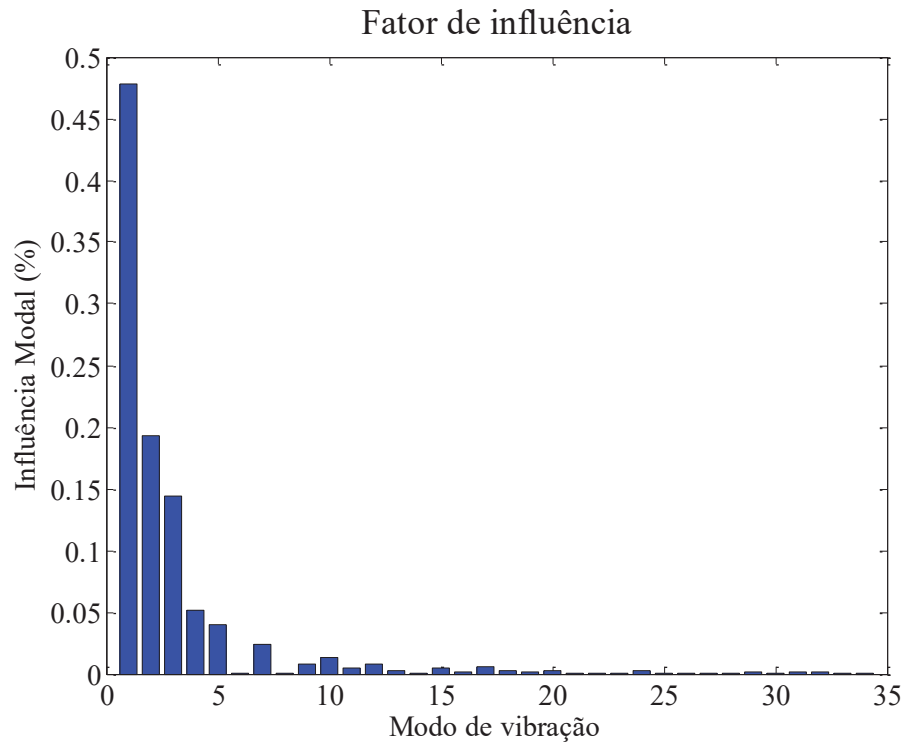


FIGURA 92: FATOR DE INFLUÊNCIA - TRELIÇA

Conforme o fator de influência da figura 92, percebe-se a preponderância dos 5 primeiros modos de vibração. Assim, a matriz modal do problema é reduzida à esses 5 primeiros modos de vibração, e os resultados podem ser vistos nas figuras 93 a 95.

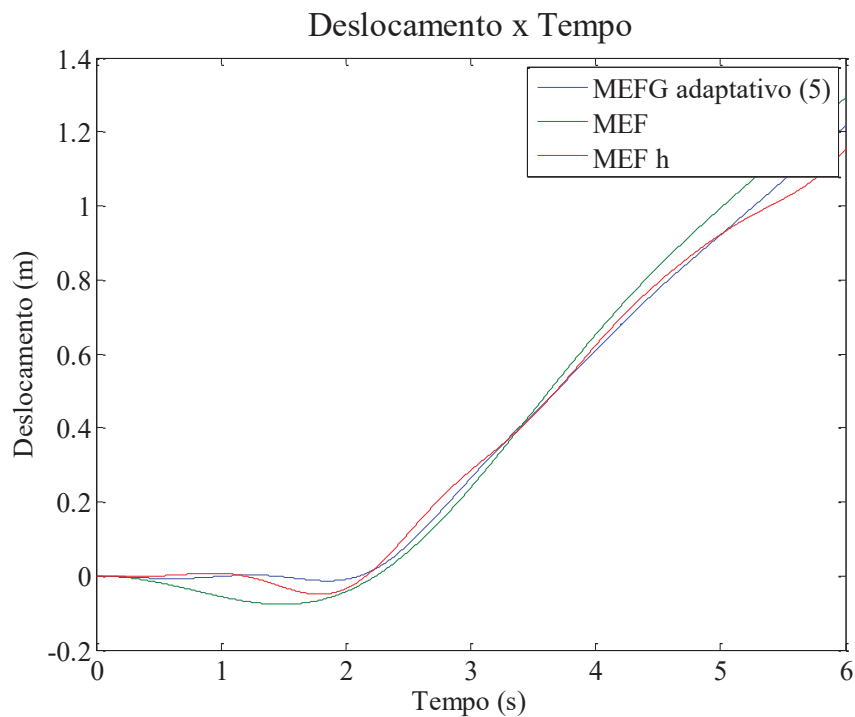


FIGURA 93: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 5 MODOS - TRELIÇA

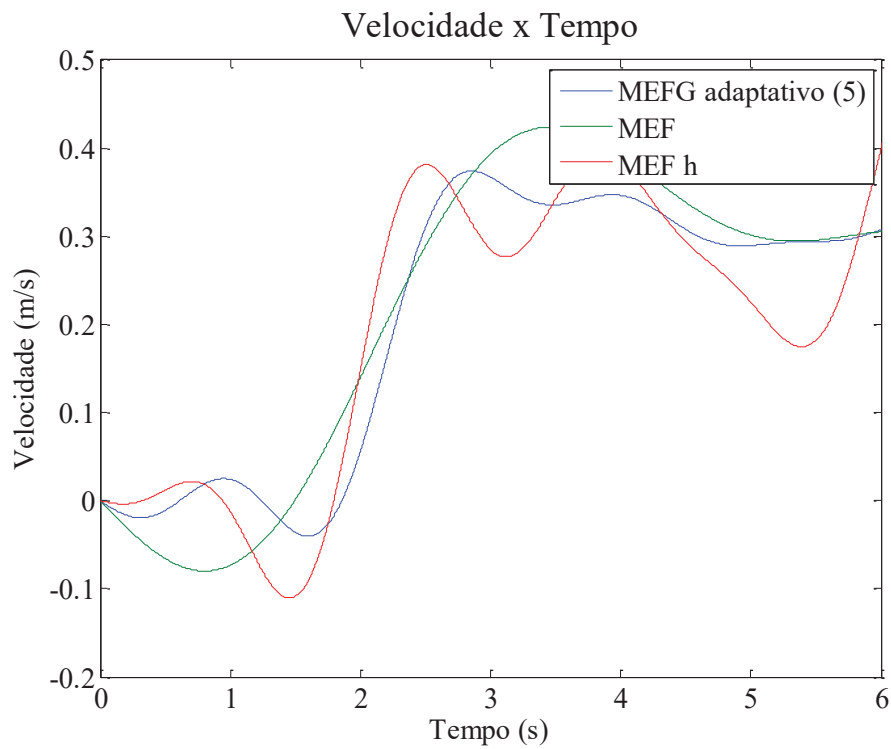


FIGURA 94: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 5 MODOS -  
TRELIÇA

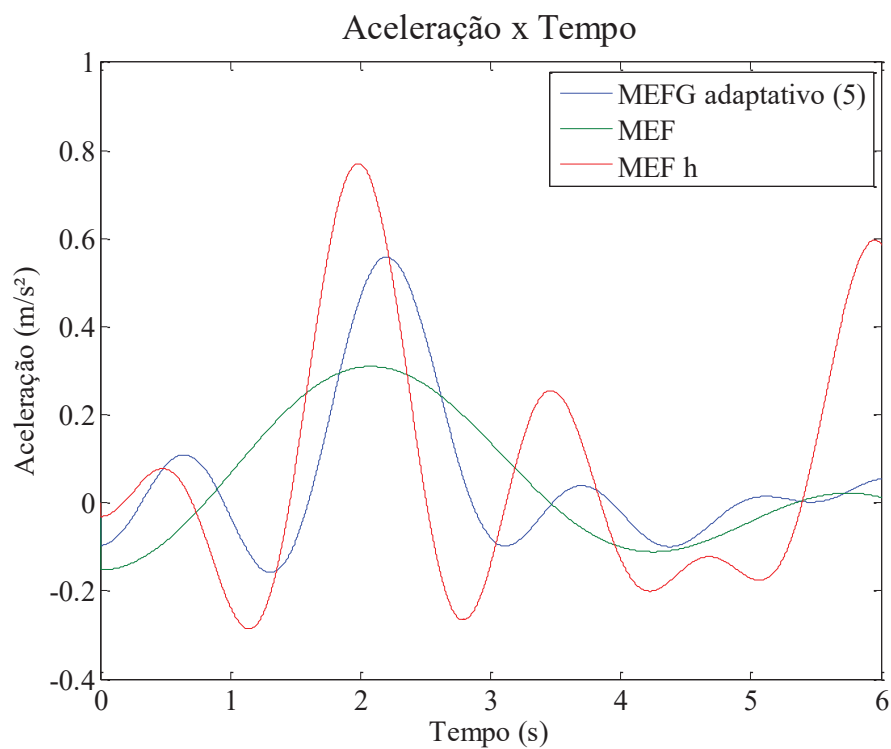


FIGURA 95: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 5 MODOS -  
TRELIÇA

Nas figuras 93 a 95 percebe-se que ao condensar a matriz modal em função dos modos de vibração mais predominantes, a resposta transiente fica mais semelhante às duas respostas de referência. Com a matriz reduzida, a resposta transiente se mostra mais suave ao longo do tempo, como também pôde ser observado nos exemplos 7.1 a 7.3 quando a matriz modal era condensada.

Percebe-se também que os poucos graus de liberdade do MEF não são capazes de representar a oscilação nos resultados transientes. Quando o exemplo é analisado com o MEF  $h$  e com o MEFG adaptativo, os graus de liberdade aumentam, e os resultados acabam convergindo para um comportamento similar.

Ainda, as análises mostradas nesse exemplo foram repetidas para o MEFG adaptativo com a frequência alvo sendo a terceira. Os resultados foram muito semelhantes aos apresentados, e por isso foram suprimidos.

## 8. O MEEG APLICADO NA ANÁLISE TRANSIENTE EM ELEMENTOS DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

Os casos analisados a seguir permitem avaliar o desempenho e a precisão do elemento de viga de Euler-Bernoulli do MEEG, quando aplicado na análise transiente. São apresentados 4 casos diferentes de força aplicada: força tipo degrau, uma viga com dois tipos diferentes de carga externa, um carregamento que simula um terremoto e ainda um carregamento que simula o terceiro modo de vibrar da estrutura. O enriquecimento utilizado nas aplicações é o trigonométrico (Arndt, 2009), e para critério de comparação, o enriquecimento baseado no Método dos Modos Admissíveis (MMA) também é analisado em um exemplo de carregamento harmônico aplicado.

Nestes exemplos foram adotados parâmetros unitários, com  $E = 1 \text{ kN/m}^2$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $I = 1 \text{ m}^4$ . Para a discretização temporal, o intervalo de estudo de 20 segundos foi analisado em passos de  $2,5 \times 10^{-3}$  segundos. Os gráficos da resposta transiente são apresentados em sua maioria em um intervalo de tempo menor, a fim de melhorar a visibilidade das análises.

### 8.1 VIGA BI-APOIADA COM FORÇA DEGRAU APLICADA NO CENTRO

O primeiro exemplo trata-se de uma viga bi-apoiada com uma excitação externa do tipo degrau aplicada em seu centro. As análises são referentes ao nó central da viga. A figura 96 mostra a viga do exemplo em questão.

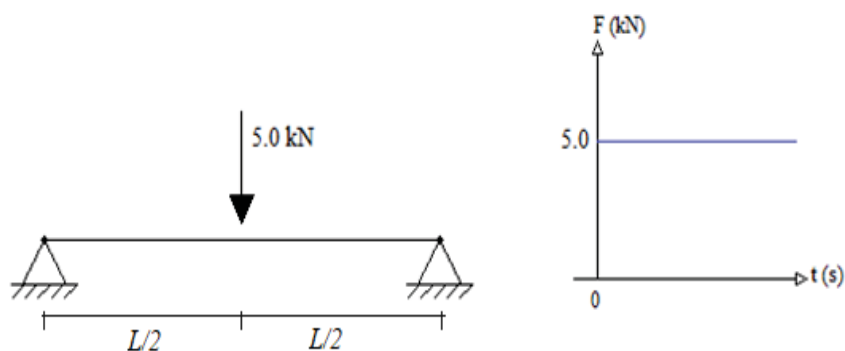


FIGURA 96: VIGA BI-APOIADA COM FORÇA DEGRAU APLICADA NO CENTRO

Para as análises deste exemplo, a solução obtida com o MEEG é comparada com a solução analítica dada por Chopra (1995), e também com a solução obtida através do MEF convencional. Para a solução com MEF, foi feito inicialmente um teste de

convergência, modificando o número de elementos cúbicos na malha. O exemplo foi analisado com 20, 50, 70 e 100 graus de liberdade, e dessa forma, foi utilizado 100 graus de liberdade. A solução do deslocamento em função do tempo proposta por Chopra (1995) é da forma:

$$u_{L/2}(t) = \frac{2f_0L^3}{\pi^4EI} \left[ \frac{1 - \cos(\omega_1 t)}{1^4} + \frac{1 - \cos(\omega_3 t)}{3^4} + \frac{1 - \cos(\omega_5 t)}{5^4} + \frac{1 - \cos(\omega_7 t)}{7^4} + \dots \right] \quad (8.1)$$

onde  $f_0$  é a intensidade da força aplicada,  $L$  o vão da viga,  $E$  o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia da seção transversal e  $\omega_n$  a  $n$ -ésima frequência natural do sistema.

De forma análoga ao deslocamento, a velocidade e aceleração são dadas por:

$$\dot{u}_{L/2}(t) = \frac{2f_0L^3}{\pi^4EI} \left[ \frac{\omega_1 \text{sen}(\omega_1 t)}{1^4} + \frac{\omega_3 \text{sen}(\omega_3 t)}{3^4} + \frac{\omega_5 \text{sen}(\omega_5 t)}{5^4} + \frac{\omega_7 \text{sen}(\omega_7 t)}{7^4} + \dots \right] \quad (8.2)$$

$$\ddot{u}_{L/2}(t) = \frac{2f_0L^3}{\pi^4EI} \left[ \frac{\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)}{1^4} + \frac{\omega_3^2 \cos(\omega_3 t)}{3^4} + \frac{\omega_5^2 \cos(\omega_5 t)}{5^4} + \frac{\omega_7^2 \cos(\omega_7 t)}{7^4} + \dots \right] \quad (8.3)$$

Para obter a resposta analítica do problema, foram utilizados 500 termos nas séries apresentadas nas equações (8.1) a (8.3).

### 8.1.1 Influência da malha no refinamento hierárquico do MEEG

Para uma análise inicial, busca-se verificar a eficiência do MEEG quando varia-se o número de graus de liberdade do problema. De forma análoga ao capítulo 7 que tratou do elemento de barra, essa análise inicial visa obter a solução transiente do problema com uma boa relação entre graus de liberdade e precisão. Assim, para 1, 2, 3, 4 e 16 elementos foram testados 1, 2, 4, 6, 8 e 10 níveis de enriquecimento. Para algumas análises o intervalo de tempo mostrado nos gráficos foi reduzido, a fim de melhorar a visualização. Nos gráficos, a legenda, por exemplo, “MEEG (1+2)” significa que foi utilizado o MEEG com 1 elemento e 2 níveis de enriquecimento. Alguns dos resultados dos deslocamentos, velocidades e acelerações podem ser vistos nas figuras 97 a 102 a seguir.

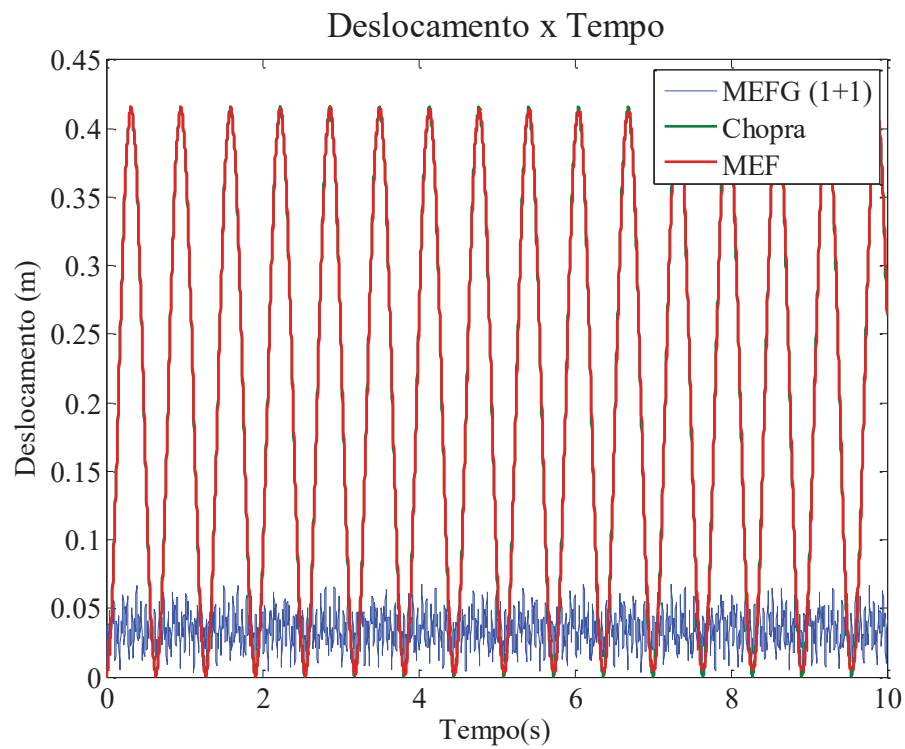


FIGURA 97: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM O MEFG COM 1 ELEMENTO E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

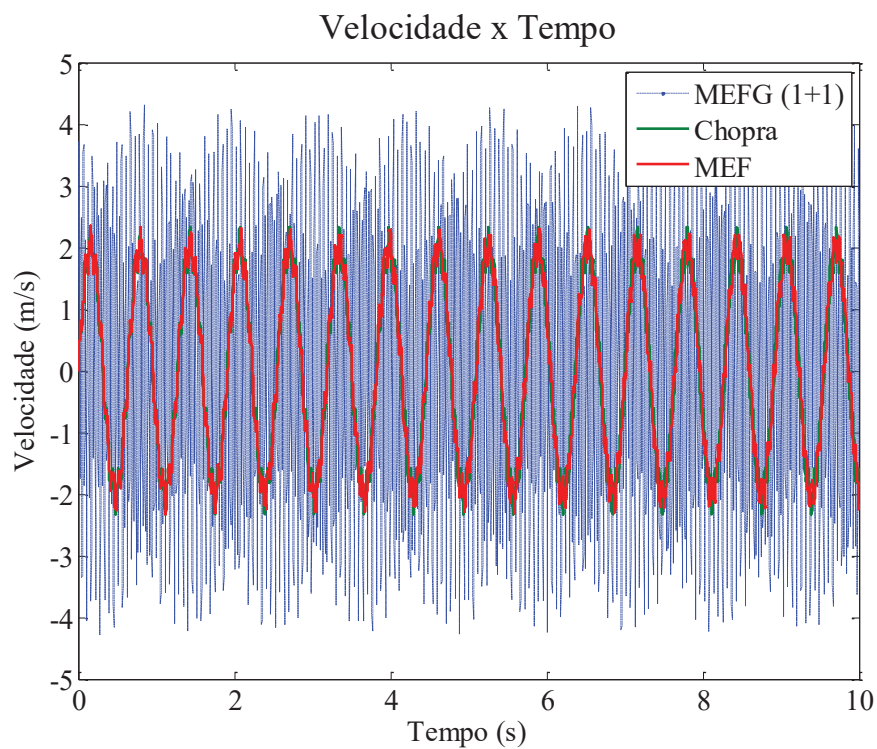


FIGURA 98: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM O MEFG COM 1 ELEMENTO E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

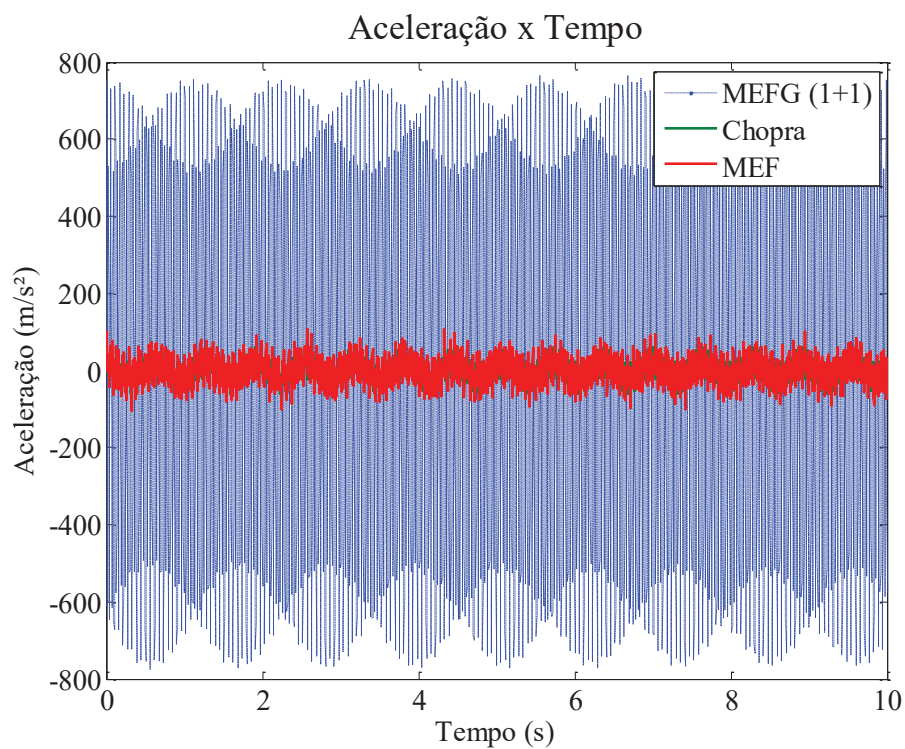


FIGURA 99: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM O MEFG COM 1 ELEMENTO E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

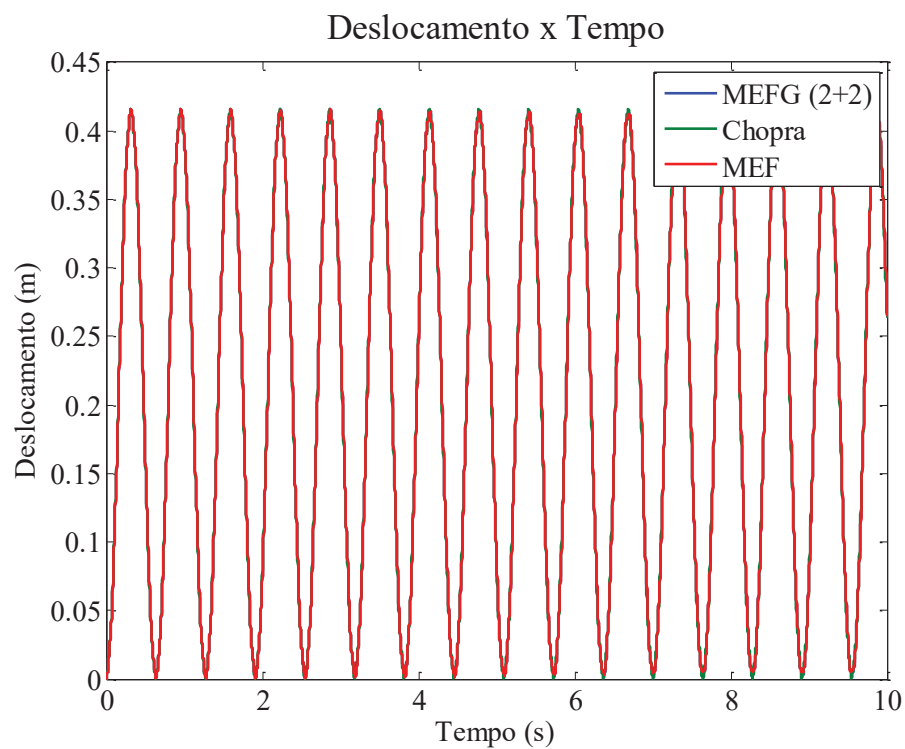


FIGURA 100: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM O MEFG COM 2 ELEMENTOS E 2 NIVEIS DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU



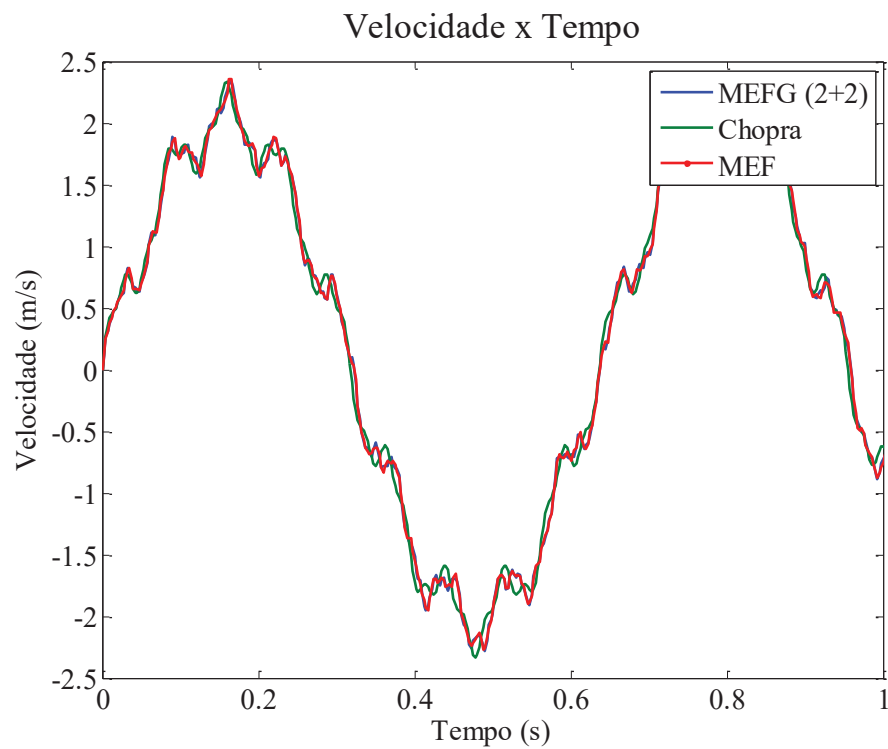


FIGURA 101: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM O Mefg COM 2 ELEMENTOS E 2 NIVEIS DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

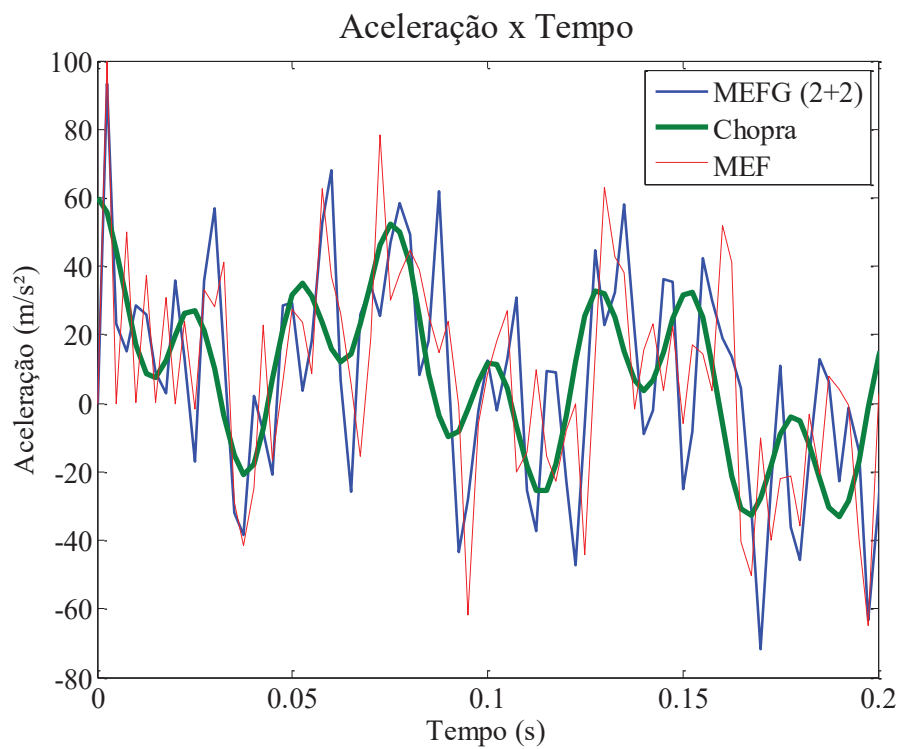


FIGURA 102: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM O Mefg COM 2 ELEMENTOS E 2 NIVEIS DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

Percebe-se ao analisar as figuras 97 a 99 que com 1 elemento e 1 nível de enriquecimento, a resposta transiente não é coerente. As demais análises contendo 1 elemento foram suprimidas, pois a resposta não obteve melhora significativa. Em contrapartida, as figuras 100 a 102 mostraram que com 2 elementos e com 2 níveis de enriquecimento, a resposta já se aproxima muito mais da solução de referência. Para aferir as respostas transientes com mais elementos, as figuras 103 a 105 mostram os resultados com 4 elementos e um nível de enriquecimento.

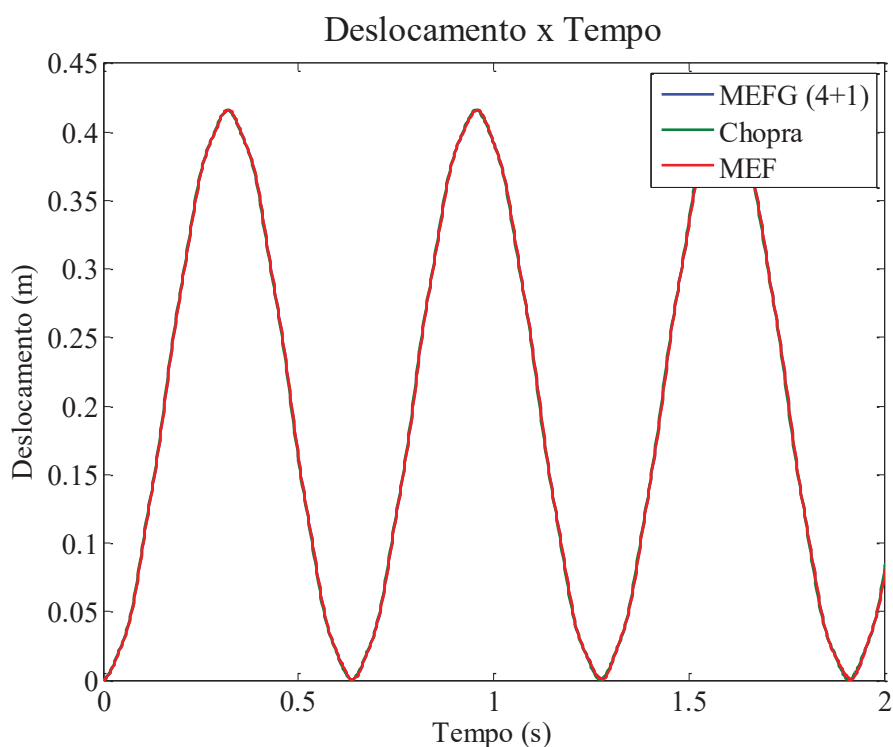


FIGURA 103: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM O MEF(4+1) COM 4 ELEMENTOS E 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

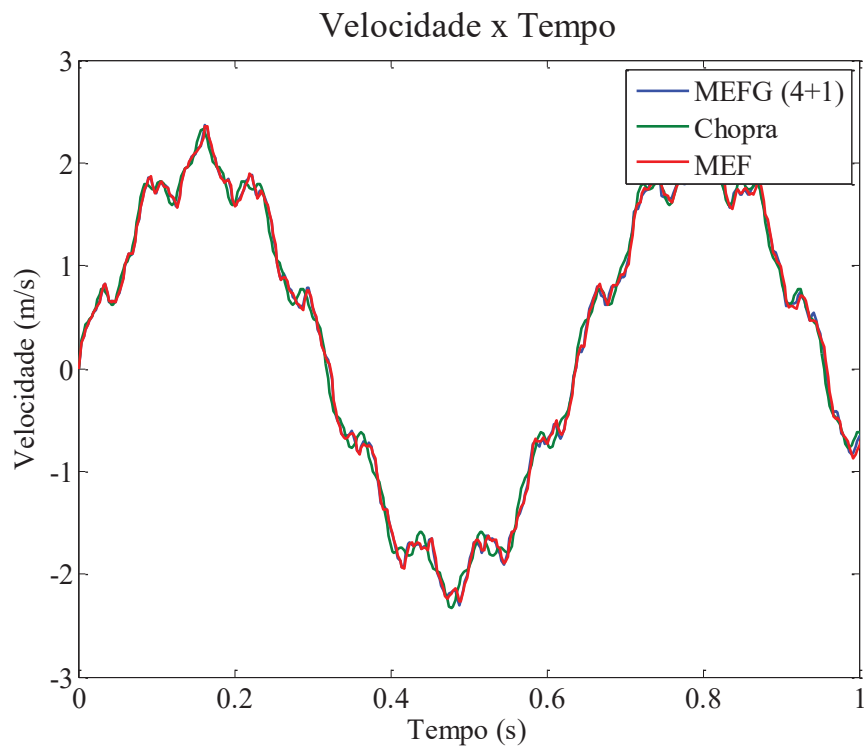


FIGURA 104: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM O MEFG COM 4 ELEMENTOS E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

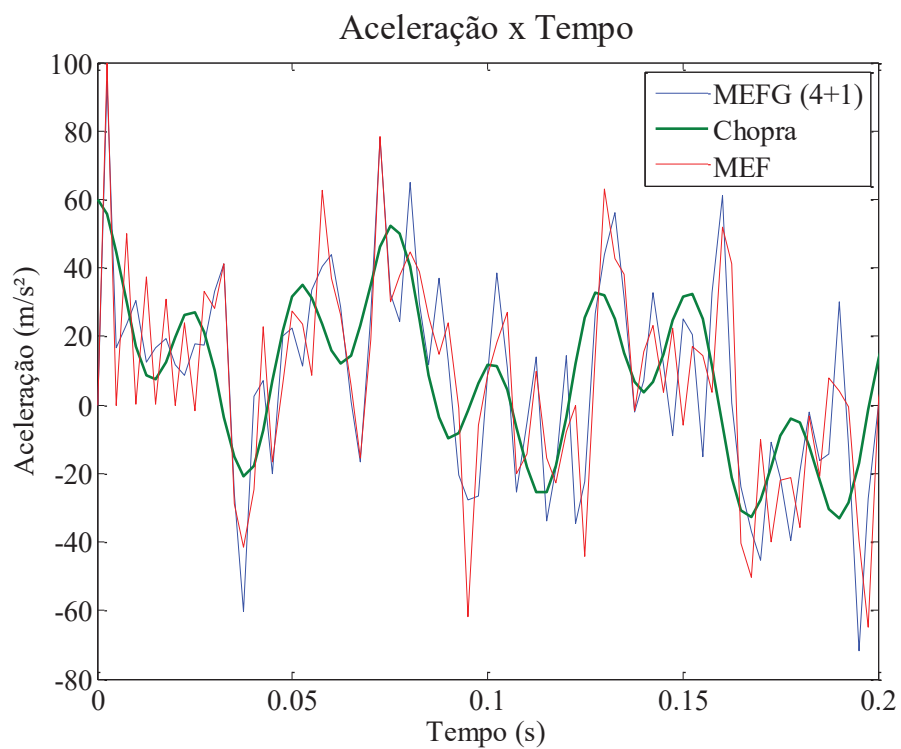


FIGURA 105: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS ACELERAÇÃO COM O MEFG COM 4 ELEMENTOS E 1 NIVEL DE ENRIQUECIMENTO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

Nas figuras 103 a 105 foi possível perceber que a resposta transiente mantém sua precisão ao passo que o refino  $h$  (aumento do número de elementos) é feito. Assim, a resposta com 2 elementos e 2 níveis de enriquecimento (12 graus de liberdade) se assemelha muito com as respostas obtidas com 4 elementos e 1 nível de enriquecimento (16 graus de liberdade). Assim, as figuras 106 a 108 mostra a semelhança entre os resultados com 2 elementos e 2 níveis de enriquecimento em comparação com as análises feitas com 16 elementos e 2 níveis de enriquecimento.

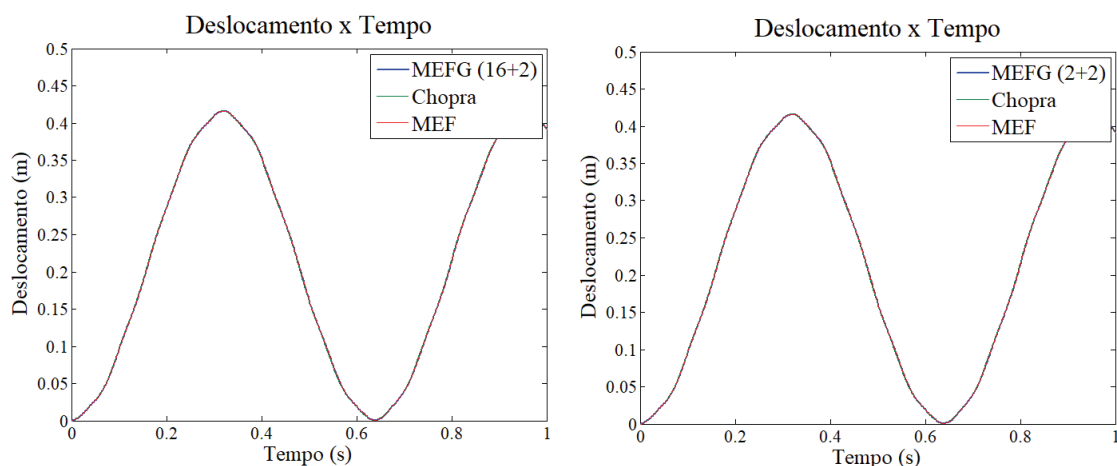


FIGURA 106: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DESLOCAMENTO COM O MFG 2+2 E 16+2 – VIGA COM FORÇA DEGRAU

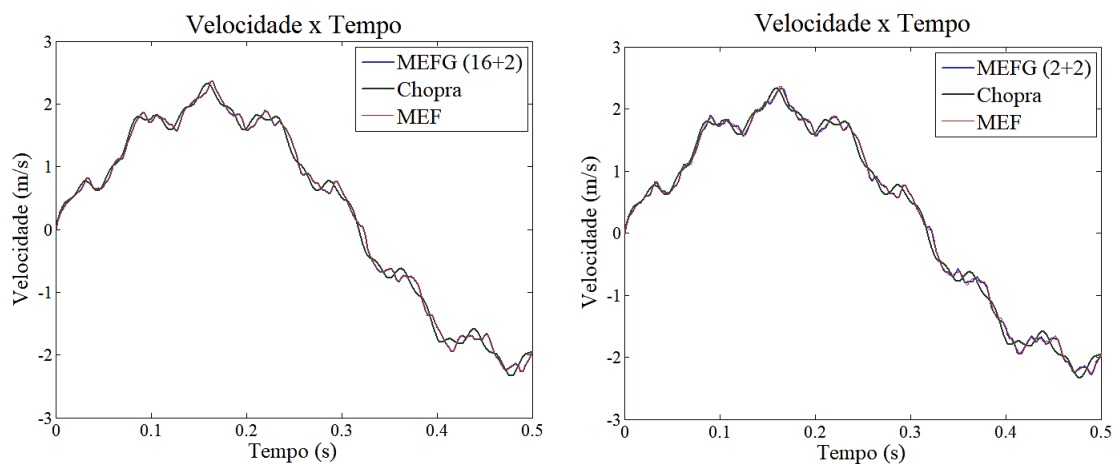


FIGURA 107: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS VELOCIDADE COM O MFG 2+2 E 16+2 – VIGA COM FORÇA DEGRAU

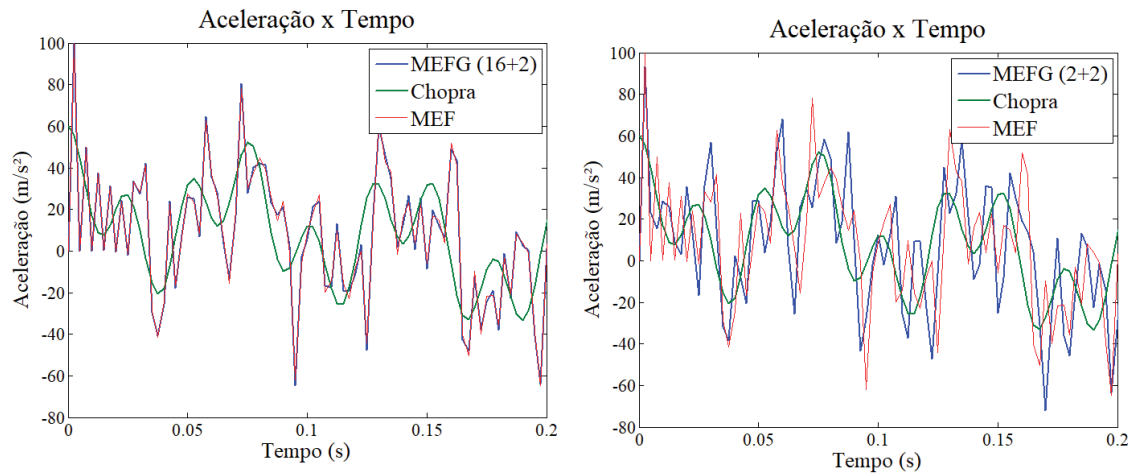


FIGURA 108: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS ACDELERAÇÃO COM O MEF 2+2 E 16+2 – VIGA COM FORÇA DEGRAU

Nas figuras 106 a 108 pode-se perceber que a resposta com 2 elementos e 2 níveis de enriquecimento é muito semelhante à resposta obtida com 16 elementos e 2 níveis de enriquecimento. Sendo assim, nas próximas análises deste exemplo, será utilizada uma malha com 2 elementos e 2 níveis de enriquecimento.

### 8.1.2 Condensação da matriz modal

Partindo dos resultados preliminares de estudo dos espectros de frequência, o presente exemplo será analisado com a presença de 60% dos modos na matriz modal (8 dos 14 modos). As figuras 109 a 111 mostram o deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente.

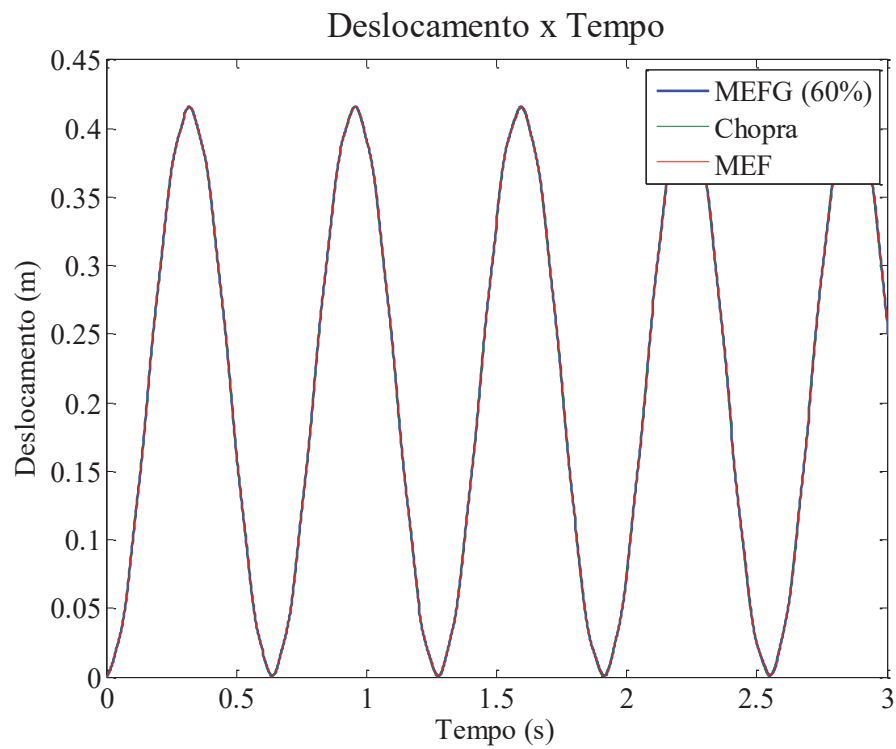


FIGURA 109: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU

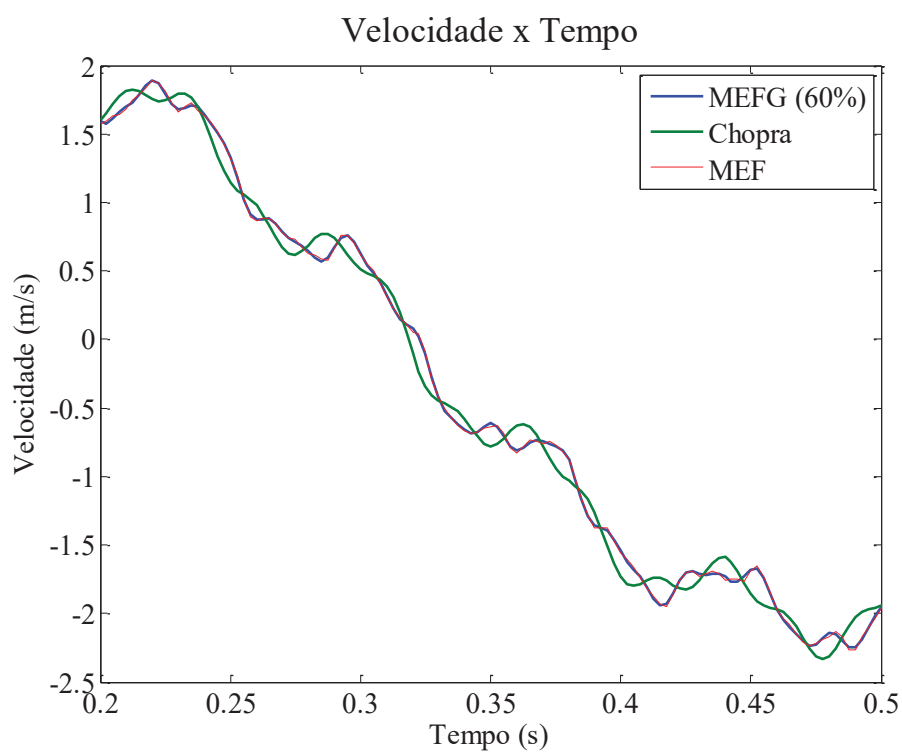


FIGURA 110: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU

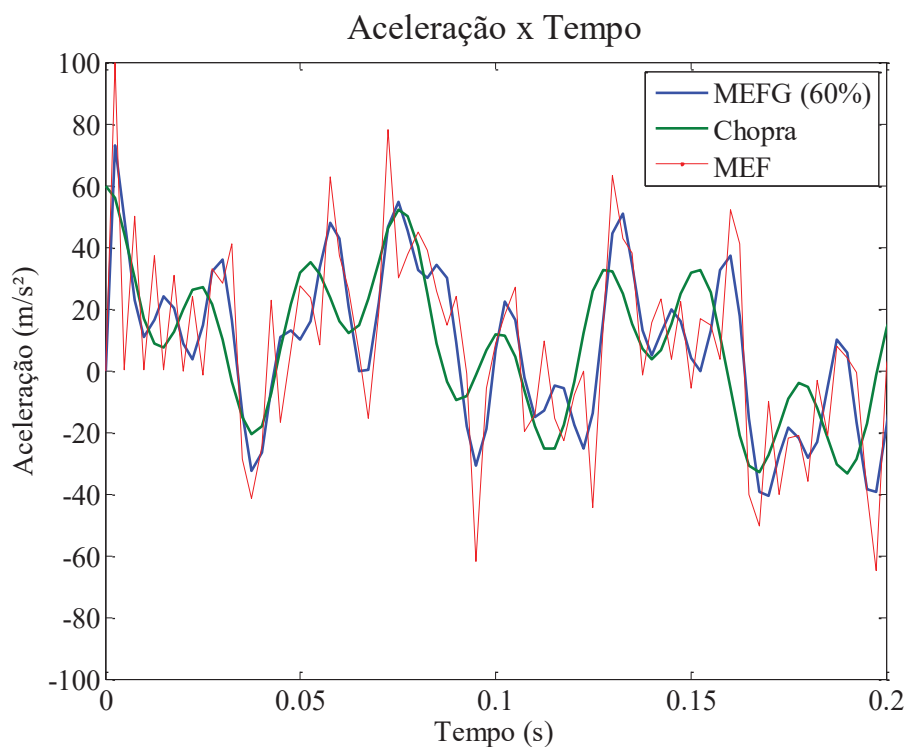


FIGURA 111: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU

Analisando as figuras 109 a 111 percebe-se que a resposta transiente em termos de deslocamento não muda de forma significativa, quando comparada com a análise feita com a matriz modal completa (figura 100). Esse comportamento dos deslocamentos no elemento de viga já fora observado em Debella et al. (2017b). Neste exemplo de viga, a velocidade mostra-se muito similar à solução obtida por MEF. A aceleração por sua vez, mostra-se muito mais próxima da solução analítica de referência em comparação com o MEF.

Para representar melhor a diferença na resposta do deslocamento, já que visualmente torna-se difícil analisar, a tabela 13 mostra o comparativo de erro.

TABELA 13: COMPARATIVO DE ERRO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

	Erro no deslocamento (m.s)
MEF	3,34E-04
MEFG 100%	3,21E-04
MEFG 60%	1,52E-04

### 8.1.3 Fator de influência

Dando continuidade na investigação da influência dos modos de vibração na resposta transiente, a figura 112 mostra o fator de influência do exemplo em questão.

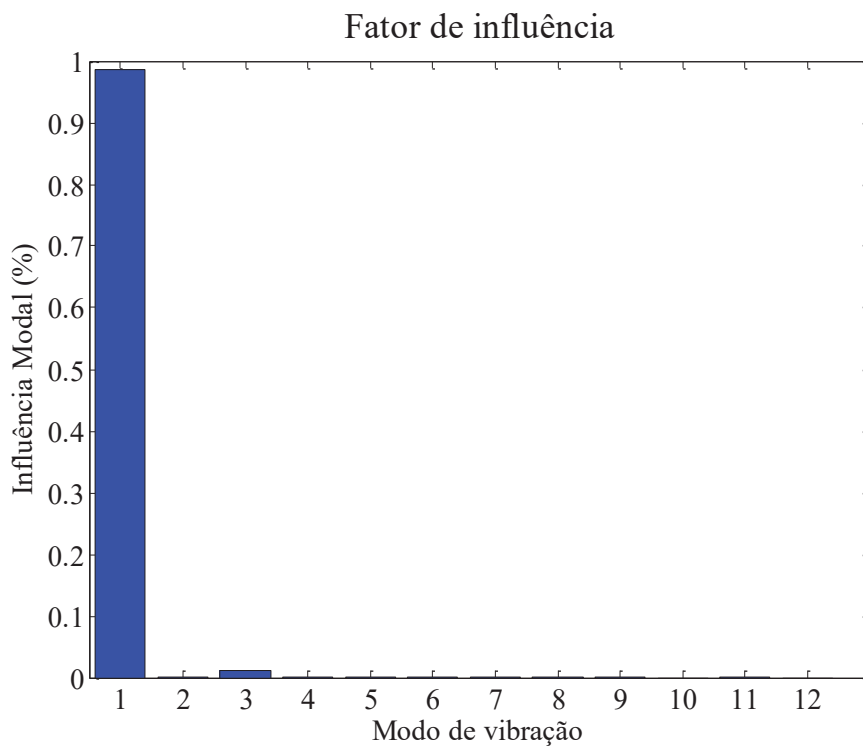


FIGURA 112: FATOR DE INFLUÊNCIA – VIGA COM FORÇA DEGRAU

Na figura 112 percebe-se a preponderância do primeiro modo na resposta deste exemplo, que sozinho representa 98,5% de toda a influência modal. Assim, as figuras 113 a 115 mostram a resposta transiente do problema com a presença apenas deste primeiro modo.



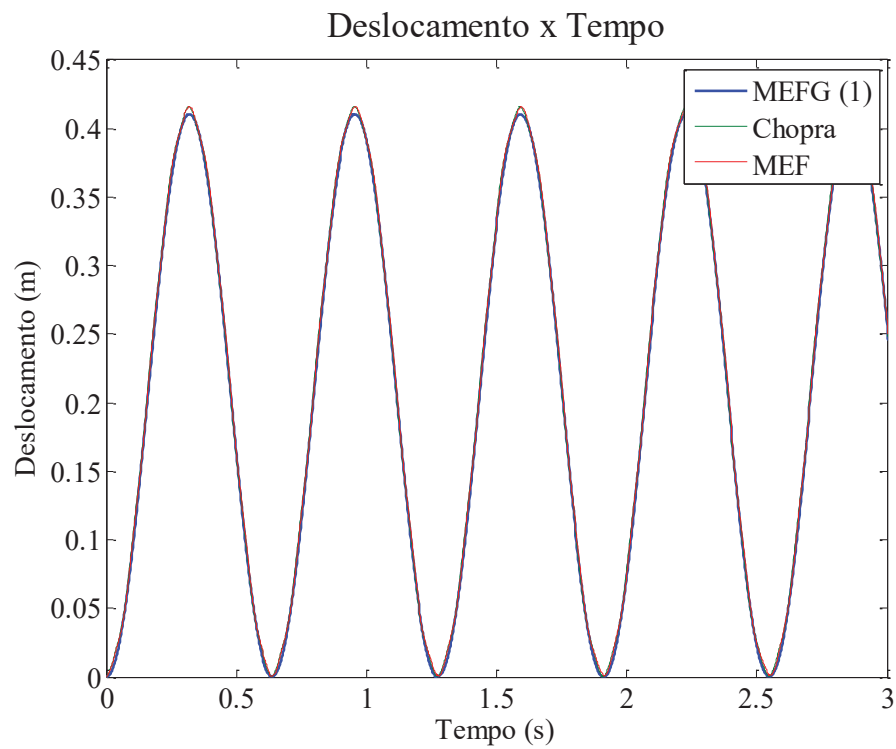


FIGURA 113: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 1 MODO NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU

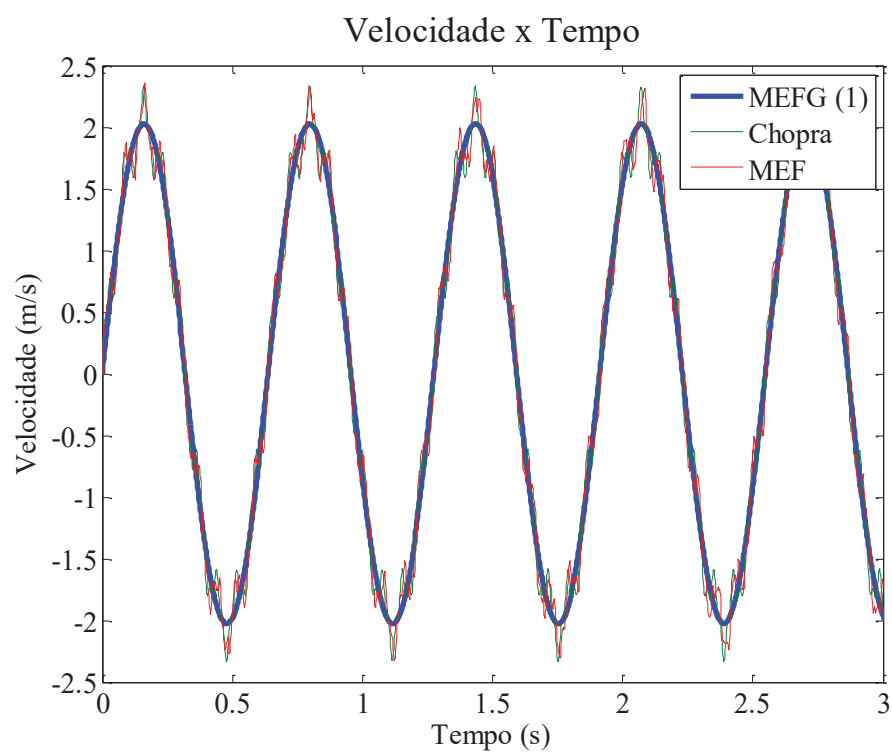


FIGURA 114: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 1 MODO NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU

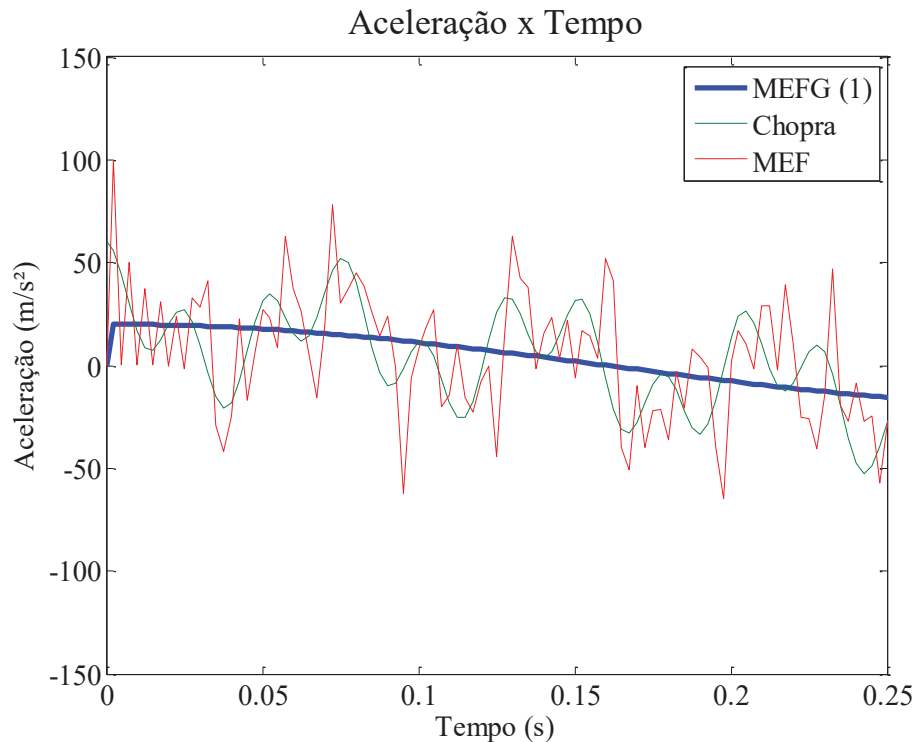


FIGURA 115: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 1 MODO NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA DEGRAU

Percebe-se, ao analisar as figuras 113 a 115 que apesar do primeiro modo representar quase 100% da influência modal, apenas ele não é suficiente para obter precisão na resposta transiente deste exemplo. Ou seja, apesar do primeiro modo ser o suficiente para manter uma certa coerência na resposta ao longo do tempo, é necessária a presença de mais modos para que a resposta consiga representar corretamente o comportamento da estrutura. Isso já fora observado no capítulo 7 em relação ao elemento de barra.

Neste exemplo, com 4 modos de vibração presentes na matriz modal, a resposta mostrou comportamento coerente ao longo do tempo. Porém, como esse número não foi passível de identificação pelo fator de influência, a situação que se mostrou mais favorável à precisão dos resultados foi a matriz com 60% dos modos de vibração, já que essa informação a respeito dessa porcentagem é embasada nos espectros de frequências apresentados no capítulo 6. Assim, a tabela 14 mostra o tempo decorrido na análise para 100%, 60% dos modos e também com o MEF.

TABELA 14: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL– VIGA COM FORÇA DEGRAU

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEF	0,10613
MEFG 100%	0,04168
MEFG 60%	0,03079

Por fim, neste primeiro exemplo de viga, percebe-se uma dificuldade em obter uma resposta transiente precisa baseada apenas na identificação dos modos mais preponderantes do problema. Essa dificuldade é devida ao fato de que o primeiro modo de vibração da estrutura possui muito mais influência na resposta que os demais e, somente ele não é suficiente para representar o comportamento da estrutura.

#### 8.1.4 MEFG adaptativo

Para este exemplo, o fator de influência (figura 112) mostrou a predominância do primeiro modo de vibração, que representa 98,5% da influência modal. Assim, os resultados do MEFG são comparados com os resultados obtidos através do MEFG adaptativo, sendo a frequência alvo a primeira. Foram utilizados 4 graus de liberdade na primeira iteração, e 20 nas duas iterações subsequentes. As figuras 116 a 118 mostram o resultado transiente de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente.

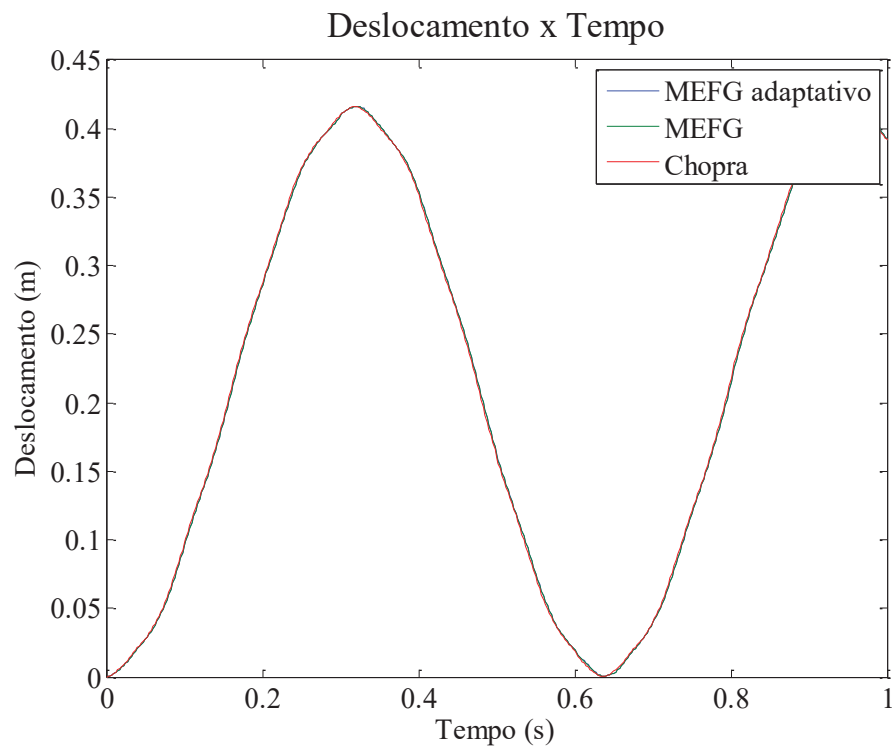


FIGURA 116: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

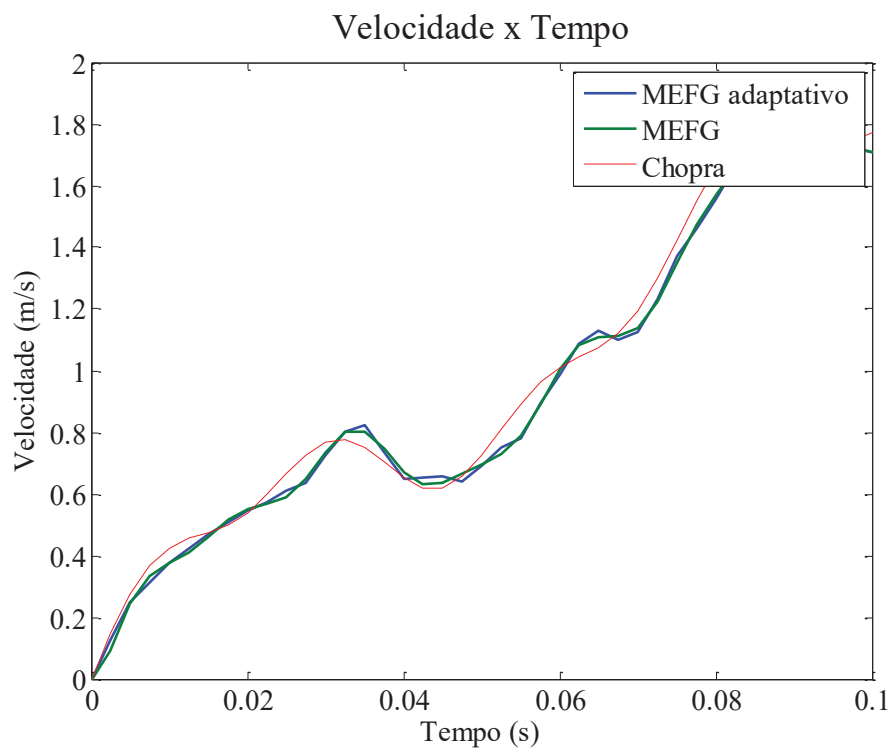


FIGURA 117: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

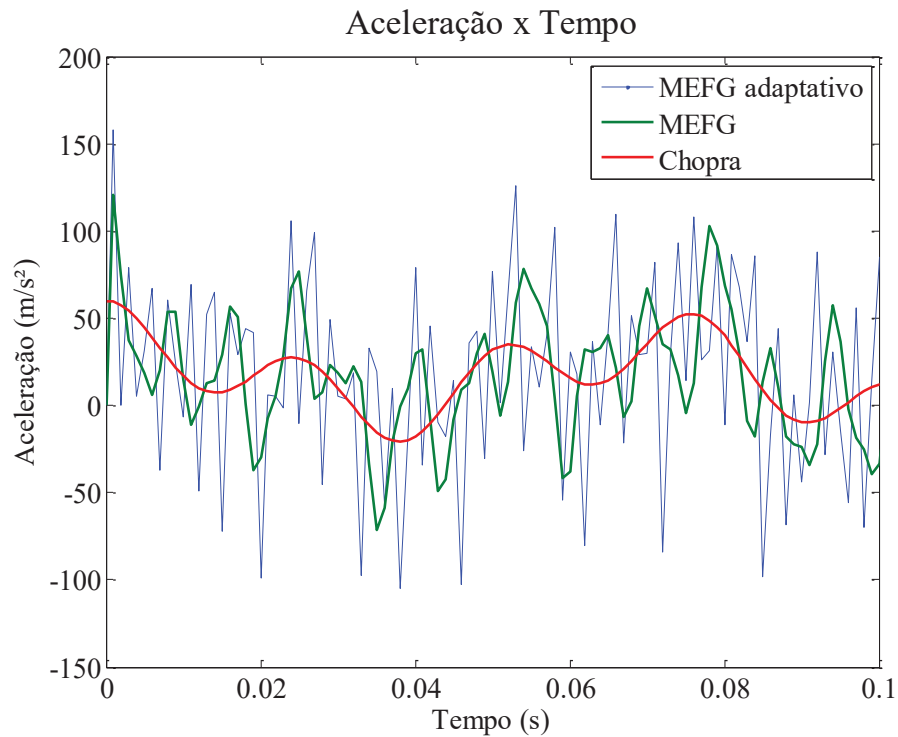


FIGURA 118: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO NO MEFG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA DEGRAU

Ao analisar as figuras 116 a 118 percebe-se que o comportamento da resposta transiente em termos de deslocamento e velocidade mostrou boa precisão em relação à solução de referência. No caso da aceleração, tanto o MEFG quanto o MEFG adaptativo mostraram-se com certa discrepância.

O MEFG adaptativo foi testado com a matriz modal condensada a 60% dos modos de vibração, e o comparativo de erro pode ser visto na tabela 15. Os gráficos da resposta transiente foram suprimidos, pois visualmente a resposta mostrou-se muito similar às obtidas nas figuras 116 a 118. A matriz modal contendo apenas o primeiro modo de vibração não foi suficiente para demonstrar uma resposta coerente ao longo do tempo, assim como nos exemplos anteriores. Logo, esses resultados não foram apresentados.

TABELA 15: COMPARATIVO DE ERRO – MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE VIGA COM FORÇA DEGRAU

	Erro no deslocamento (m.s)
MEF	3,34E-04
MEFG	3,21E-04
MEFG (60%)	1,52E-04
MEFG adaptativo	3,14E-04
MEFG adaptativo (60%)	2,01E-04

Analisando a tabela 15 percebe-se que o MEFG adaptativo mostra uma pequena melhora na precisão da resposta de deslocamento em comparação com o MEFG tradicional e com o MEF. Quando a matriz modal é condensada, ambos os métodos, MEFG e MEFG adaptativo, melhoram sua resposta, e o erro com relação à solução de referência nesses dois casos ficam muito próximos. Neste exemplo em particular de viga, o MEFG tradicional com 2 elementos e 2 níveis de enriquecimento (12 graus de liberdade, item 8.1.1) já trouxe bons resultados, sendo vantajoso em termos de agilidade computacional.

## 8.2 VIGA ENGASTADA-LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

Neste exemplo uma viga engastada está sujeita a uma força harmônica  $F = f_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$  com  $f_0 = 1 \text{ kN}$  e  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$  aplicada na extremidade livre da viga, e também uma força de degrau de  $F = 1,5 \text{ kN}$  aplicada à  $2/3$  da extremidade fixa. As análises são referentes ao nó da extremidade livre da viga. A figura 119 mostra a viga do exemplo em questão.

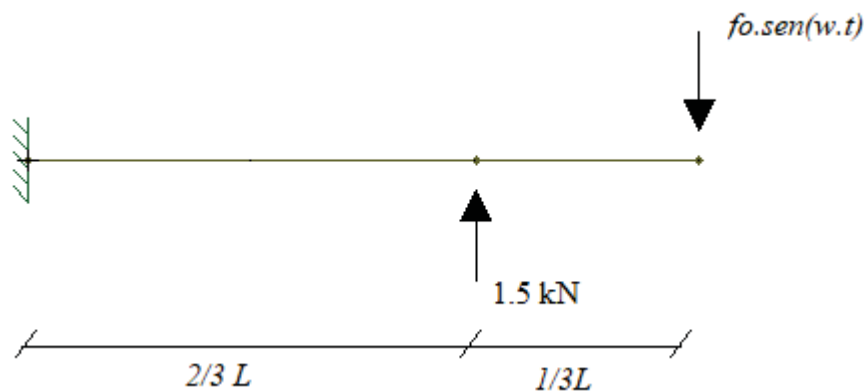


FIGURA 119: VIGA ENGASTADA-LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

Para as análises, a solução obtida com o MEFG com 6 elementos e 2 níveis de enriquecimento é comparada com a solução obtida através do MEF convencional. O aumento no número de elementos se justifica pela configuração da aplicação das forças, pois com 2 elementos (utilizados no exemplo 8.1) não seria possível uma força aplicada à  $2/3$  do seu início. Para a solução com MEF foi feito inicialmente um teste de convergência, e por fim foram utilizados 160 graus de liberdade. Neste exemplo, os gráficos das respostas de deslocamentos, velocidade e aceleração são, por vezes,

mostrados em um intervalo de tempo menor, por questões de visibilidade das diferenças de respostas. As figuras 120 a 122 mostram os resultados para deslocamentos velocidade e aceleração em função do tempo.

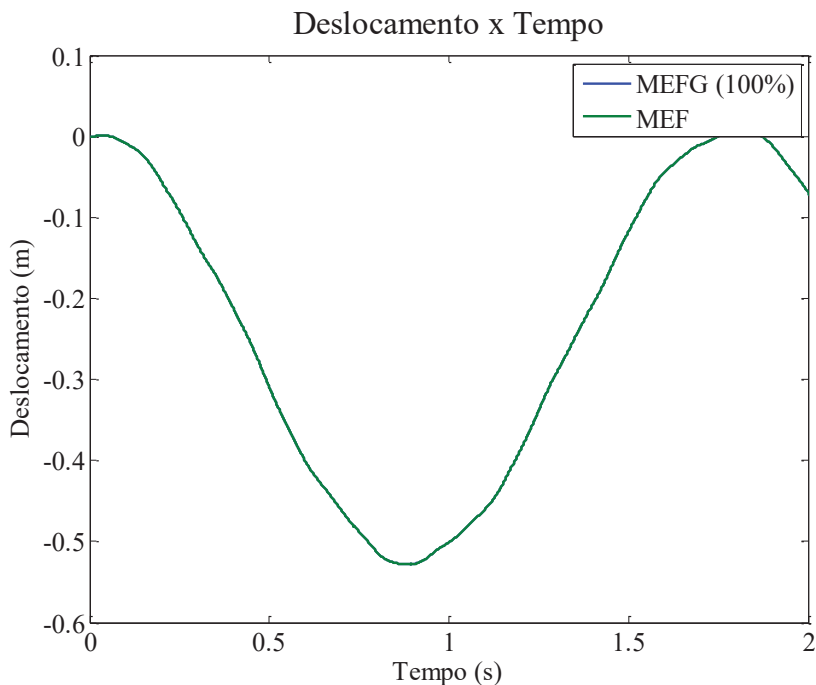


FIGURA 120: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

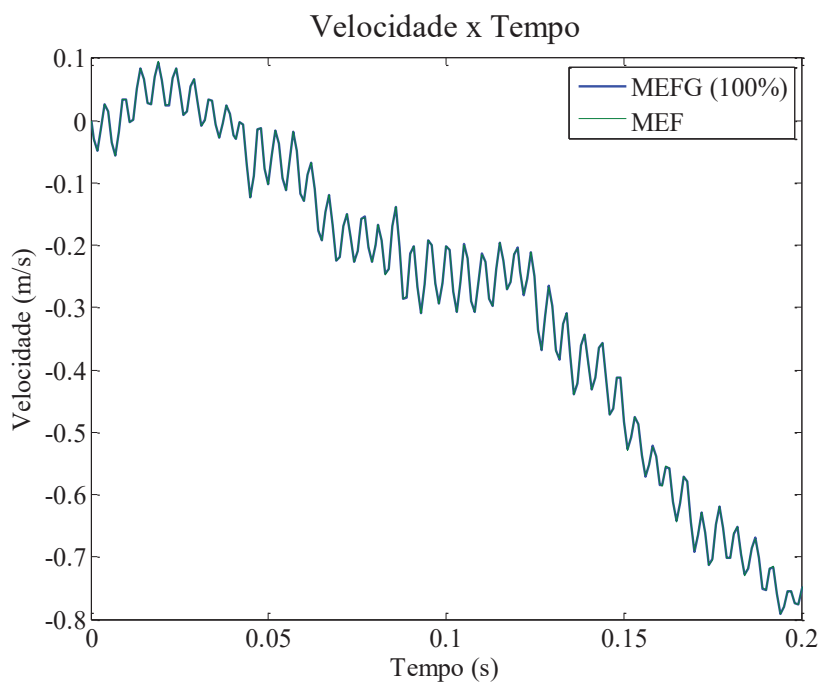


FIGURA 121: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

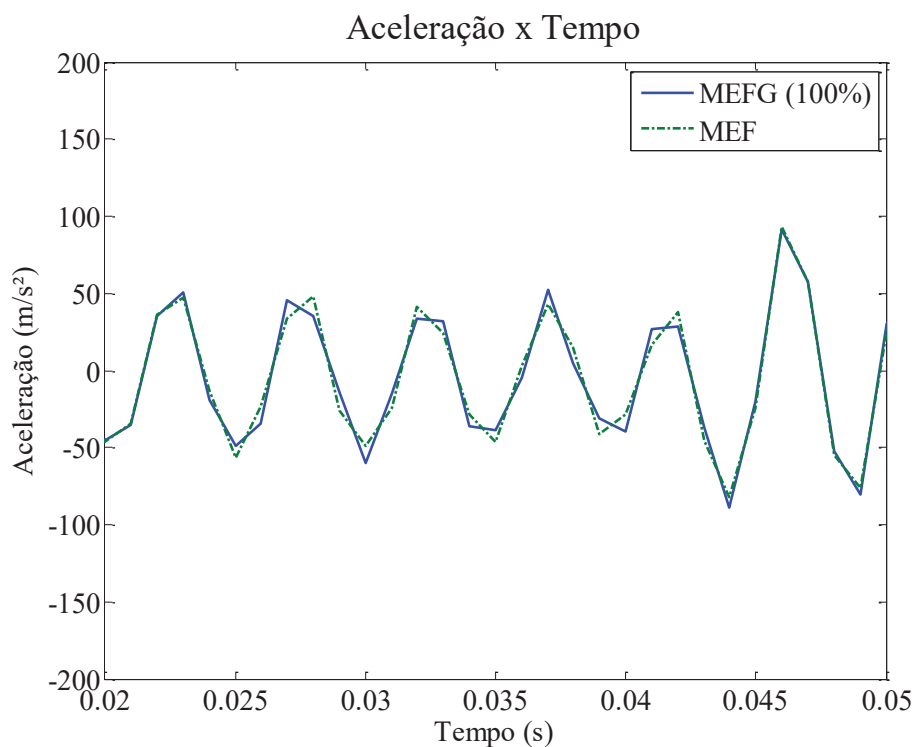


FIGURA 122: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

Nas figuras 120 a 122 foi possível perceber que a resposta transiente do MEEG em termos de deslocamento, velocidade e aceleração mostra-se muito próxima da solução de referência. Mesmo com essa boa precisão nessa primeira análise, visando mais agilidade computacional, as análises a respeito da matriz modal seguem conforme já exposto nos exemplos anteriores.

### 8.2.1 Condensação da matriz modal

Analogamente aos exemplos anteriores, as figuras 123 a 125 mostram a resposta transiente de deslocamento, velocidade e aceleração para a matriz modal com 60% dos modos de vibração.



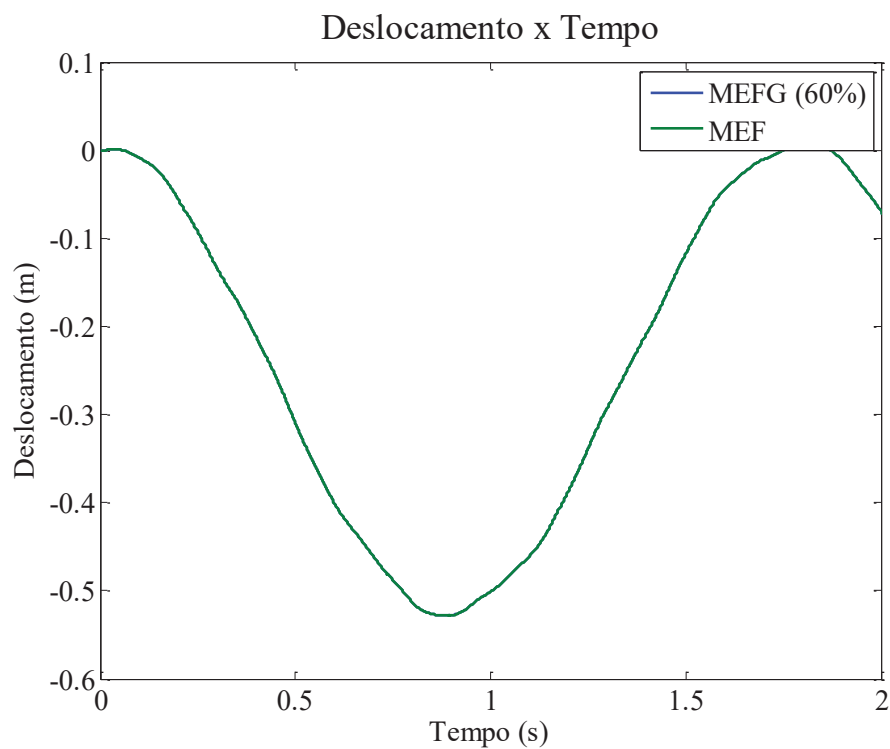


FIGURA 123: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

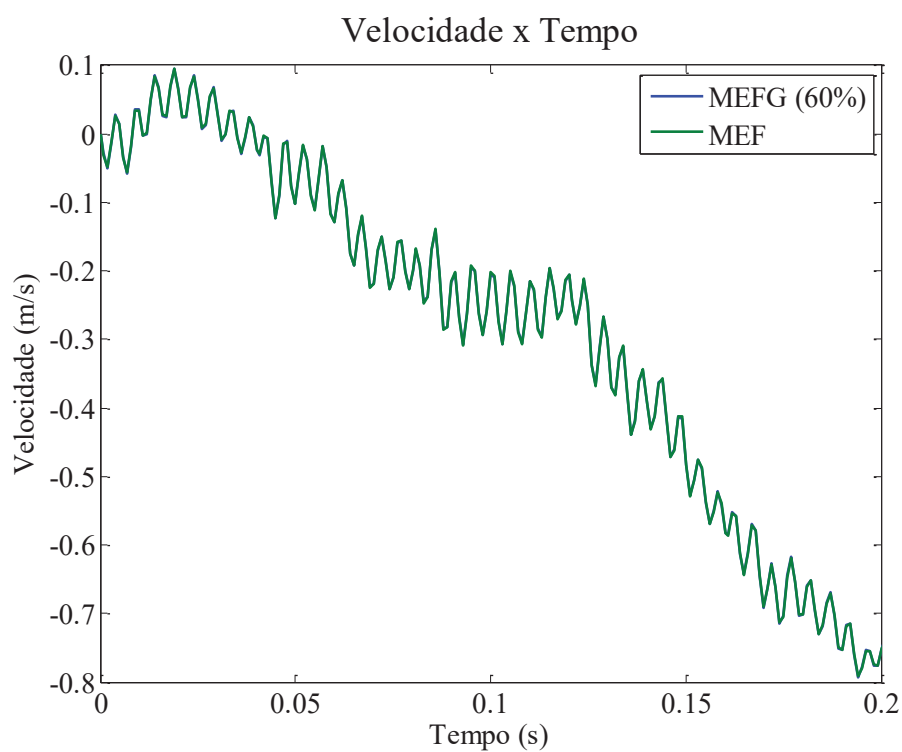


FIGURA 124: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

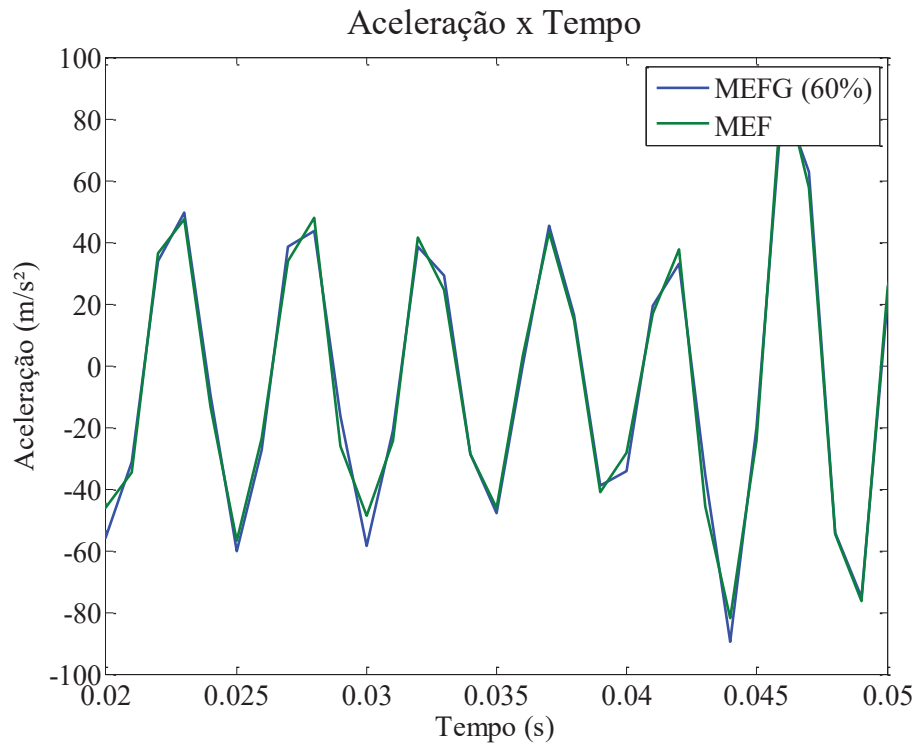


FIGURA 125: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS ACELERAÇÃO COM 60% DOS MODOS NA MATRIZ MODAL – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

Através das figuras 123 a 125, percebe-se novamente que a resposta obtida com o Mefg é muito semelhante à solução de referência. Respostas essas, bem similares àquelas obtidas com a matriz modal completa.

Novamente portanto, percebe-se que utilizar menos modos na matriz modal traz uma resposta transiente com boa aproximação, e com menor custo computacional. A tabela 16 mostra o tempo decorrido na análise, reforçando essa constatação.

TABELA 16: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEF	0,11276
Mefg 100%	0,06708
Mefg 60%	0,03254

### 8.2.2 Fator de influência

Com a intenção de mostrar quais os modos mais preponderantes na análise, a figura 126 mostra o fator de influência para este exemplo.

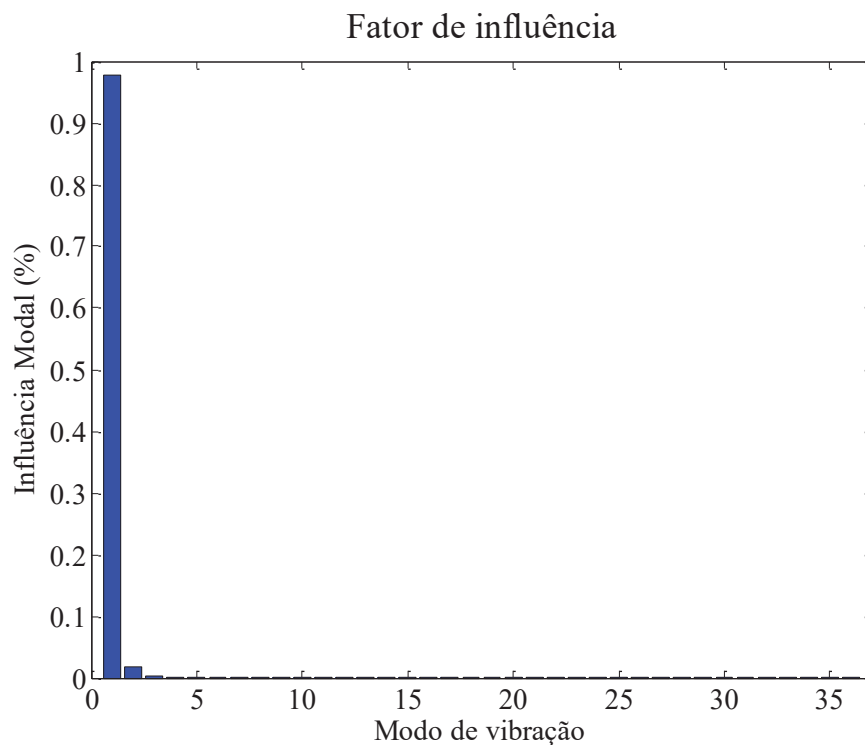


FIGURA 126: FATOR DE INFLUÊNCIA – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

Na figura 126 pode-se perceber a preponderância do primeiro modo de vibração na estrutura, que sozinho representa 97,8% de toda contribuição modal. Apesar desse primeiro modo representar quase que a totalidade da contribuição modal, a resposta transiente com a presença apenas deste não traz bons resultados. Os gráficos, portanto, foram suprimidos.

Para este exemplo, a resposta mostrou-se com comportamento coerente ao longo do tempo ao serem deixados os primeiros 3 modos na matriz modal. Assim como no exemplo 8.1, esse número não é indicado pelo fator de influência, e também não é um valor padrão a ser utilizado, visto que no exemplo 8.1 o número mínimo de modos para uma resposta coerente foi 4. Dessa forma, é razoável que se use os 60% dos modos de vibração embasados pelos espectros de frequência, pois os valores obtidos com essa porcentagem de modos apresenta uma precisão tão boa quanto com a matriz modal completa, mas é mais eficiente computacionalmente (tabela 16).

### 8.2.3 MEEG adaptativo

Para este exemplo, o fator de influência (figura 126) mostrou a predominância do primeiro modo de vibração. Assim, os resultados da resposta transiente do MEEG adaptativo com a frequência alvo sendo a primeira, com 6 graus de liberdade na primeira iteração e 30 nas duas subsequentes são mostrados nas figuras 127 a 129.

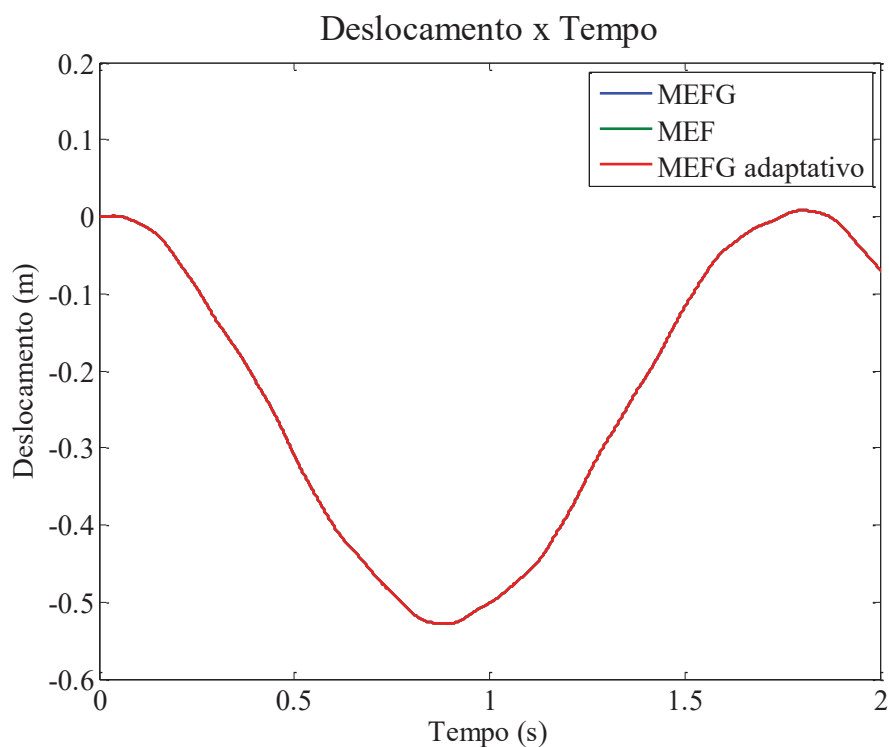


FIGURA 127: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO NO MEEG ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

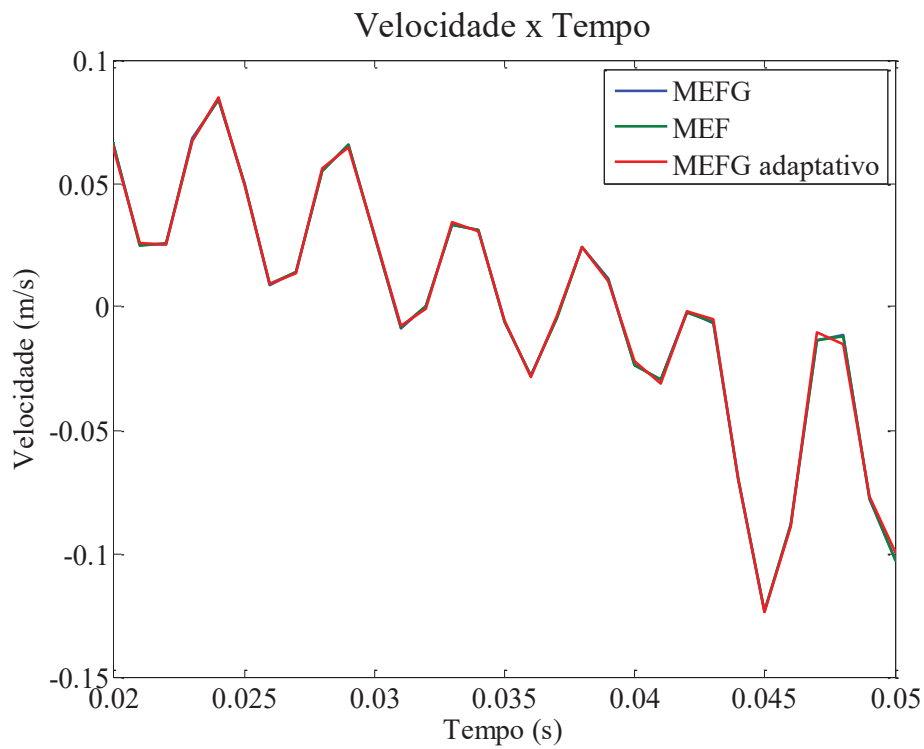


FIGURA 128: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE NO Mefg ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

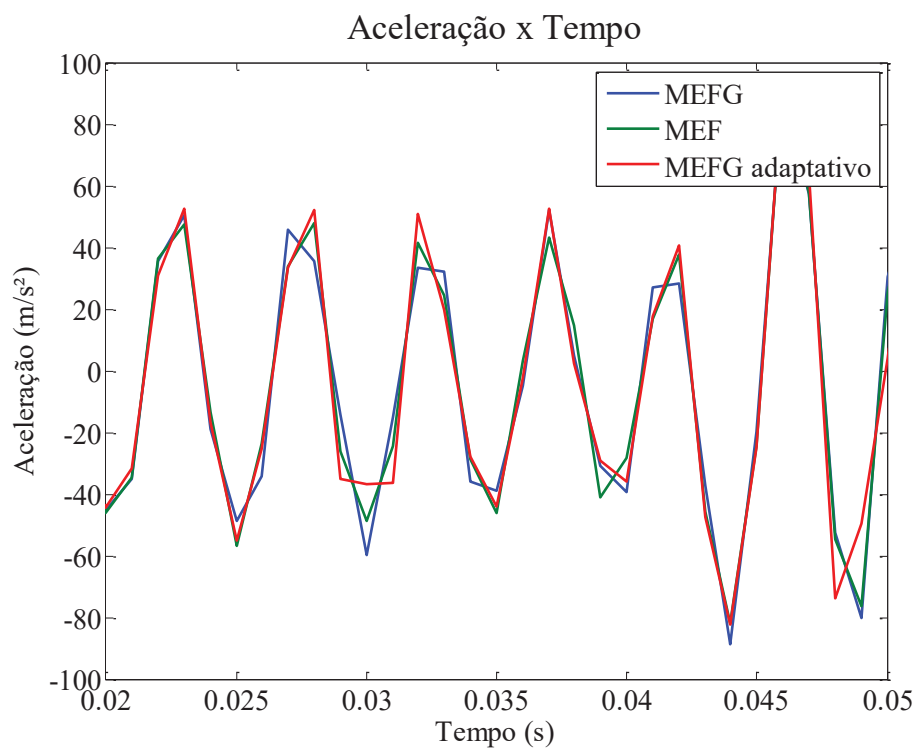


FIGURA 129: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO NO Mefg ADAPTATIVO – VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

Analisando as figuras 127 a 129 percebe-se que a resposta obtida com o MEFG adaptativo se assemelha muito às respostas obtidas com o MEFG tradicional e também com a resposta obtida pelo MEF.

O MEFG adaptativo torna-se vantajoso neste exemplo, visto que foi utilizado um menor número de graus de liberdade para a solução do problema (30 no adaptativo, e 36 no MEFG tradicional). Esse número reduzido de graus de liberdade acarreta em menos tempo de processamento, conforme mostra a tabela 17.

TABELA 17: TEMPO DECORRIDO NA ANÁLISE COMPUTACIONAL– MEFG ADAPTATIVO DO EXEMPLO DE VIGA COM FORÇA HARMÔNICA E DEGRAU

	Tempo decorrido na análise computacional (s)
MEF	0,11276
MEFG	0,06708
MEFG adaptativo	0,05983

Em síntese, nos dois exemplos de viga de Euler-Bernoulli (exemplo 8.1 e 8.2) tanto o MEFG tradicional quanto o MEFG adaptativo mostraram-se precisos, e também vantajosos em termos de custo computacional. Em ambos os exemplos, o enriquecimento foi à base de funções trigonométricas, conforme exposto anteriormente. Assim, para extrapolar as análises em relação ao elemento de viga de Euler-Bernoulli, o exemplo 8.3 testa o enriquecimento através das funções do MMA.

### 8.3 VIGA ENGASTADA – LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA E ENRIQUECIMENTO POR FUNÇÕES BASEADAS NO MMA

Neste exemplo de viga, as funções enriquecedoras são as baseadas no Método dos Modos Admissíveis (MMA) (equações (4.55) e (4.56)). A viga de Euler-Bernoulli nesse caso é engastada-livre com uma força harmônica aplicada na sua extremidade livre, conforme a figura 130. As análises feitas são análogas aos exemplos anteriores, e neste exemplo a resposta transiente em termos de deslocamento, velocidade e aceleração são comparadas com a solução de referência (MEF com 160 graus de liberdade) e também com o MEFG com enriquecimento trigonométrico utilizando a matriz modal completa.



FIGURA 130: VIGA ENGASTADA – LIVRE COM FORÇA HARMÔNICA

As figuras 131 a 133 mostram os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente. Os gráficos são mostrados no intervalo de 0,3 a 0,4 segundos, para melhor visibilidade dos resultados.

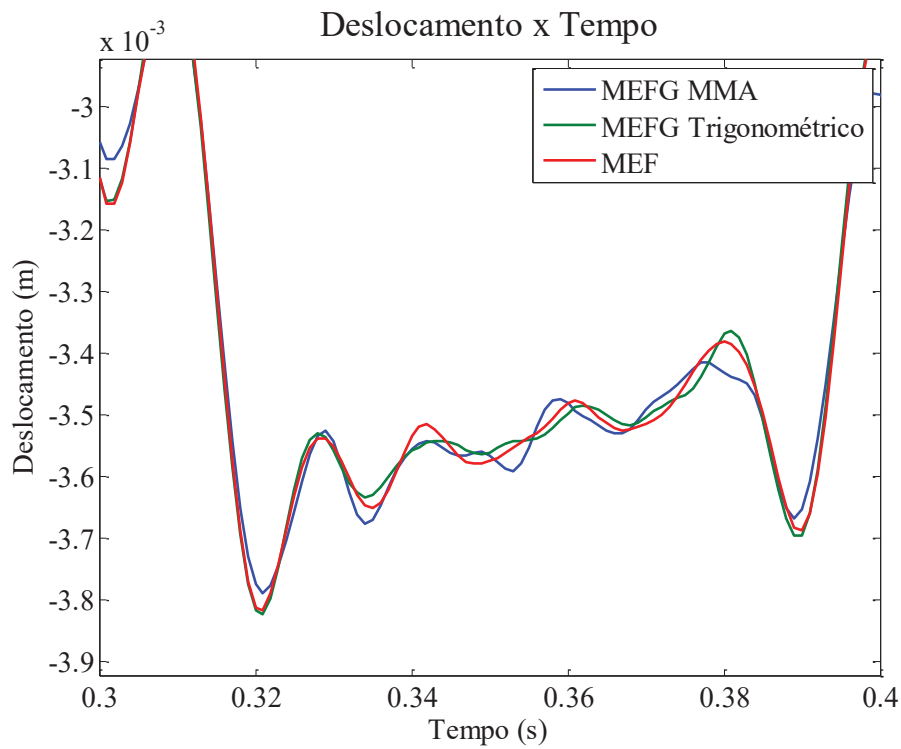


FIGURA 131: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO – MEFG MMA

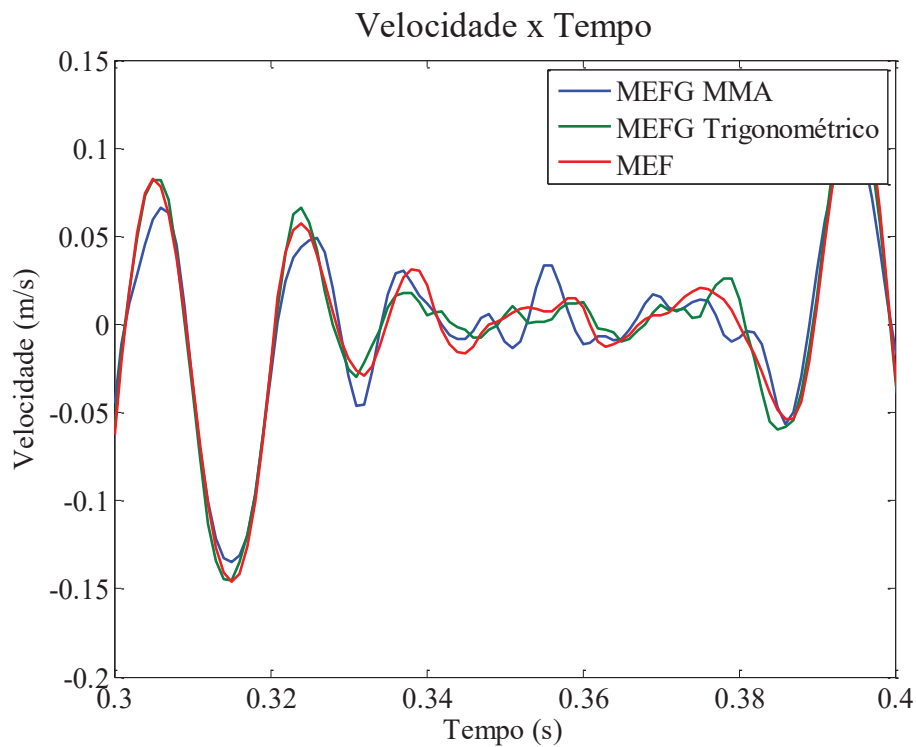


FIGURA 132: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE – MEFG MMA

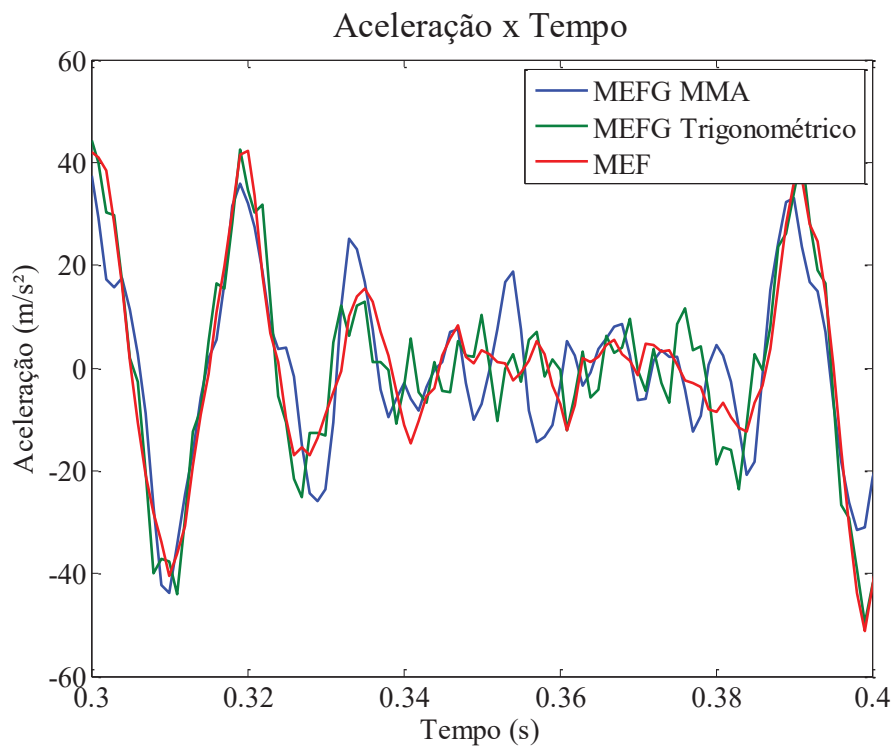


FIGURA 133: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO – MEFG MMA

Analisando as figuras 131 a 133 percebe-se que visualmente o MEFG trigonométrico se aproxima um pouco mais da solução de referência em comparação com



o MCFG MMA. A fim de continuar as análises, a matriz modal será condensada à 60% do seu total de modos, conforme já exposto.

### 8.3.1 Condensação da matriz modal

As figuras 134 a 136 mostram o deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo utilizando a matriz modal com 60% dos modos de vibração.

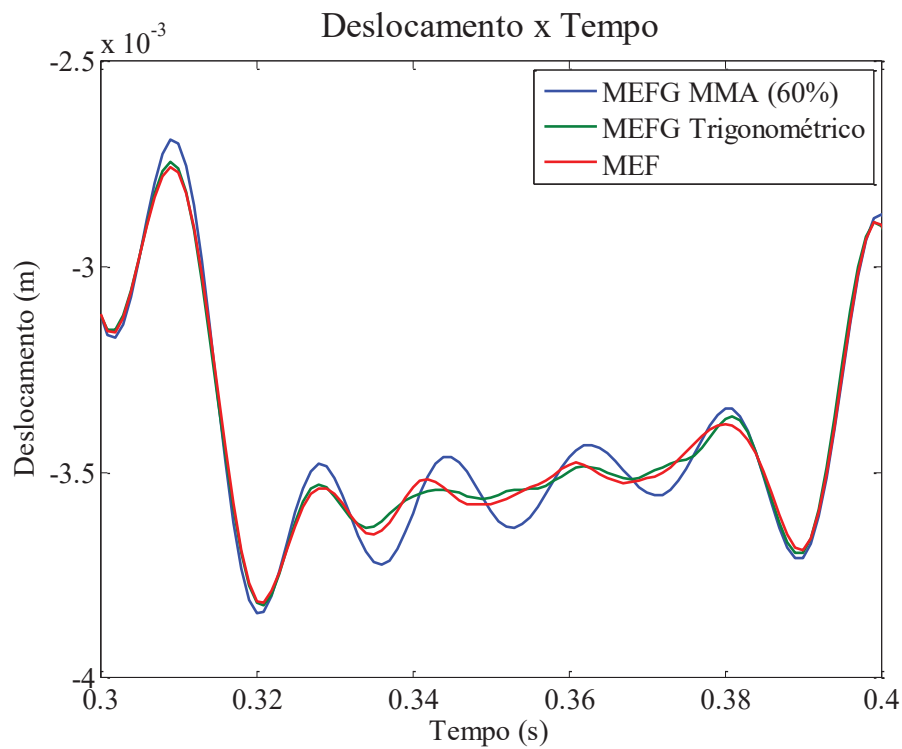


FIGURA 134: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 60% DOS MODOS – MCFG MMA

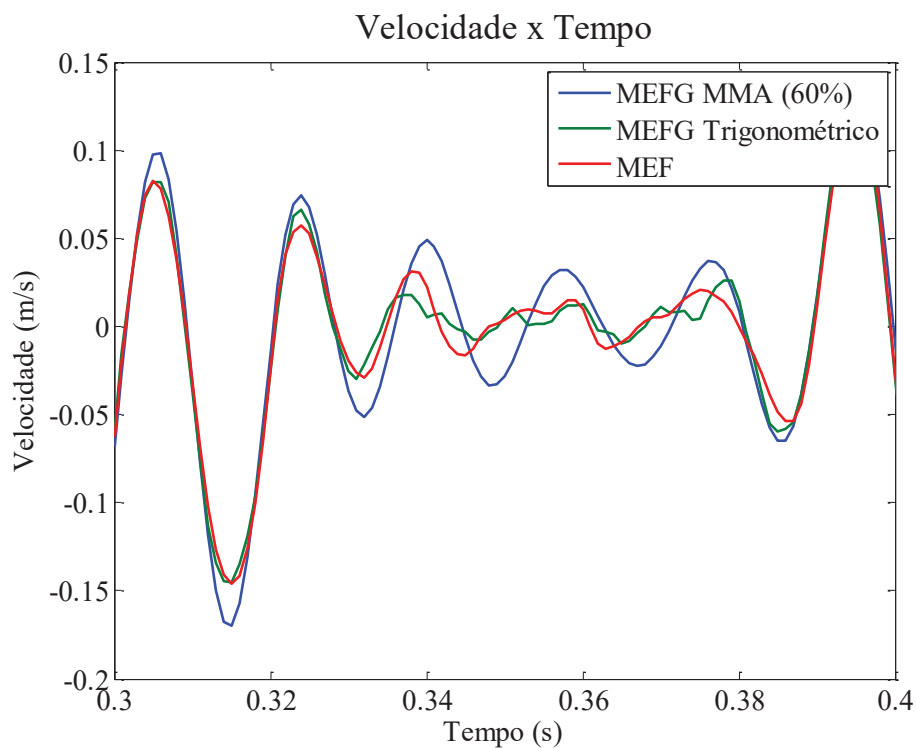


FIGURA 135: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 60% DOS MODOS  
– MEFG MMA

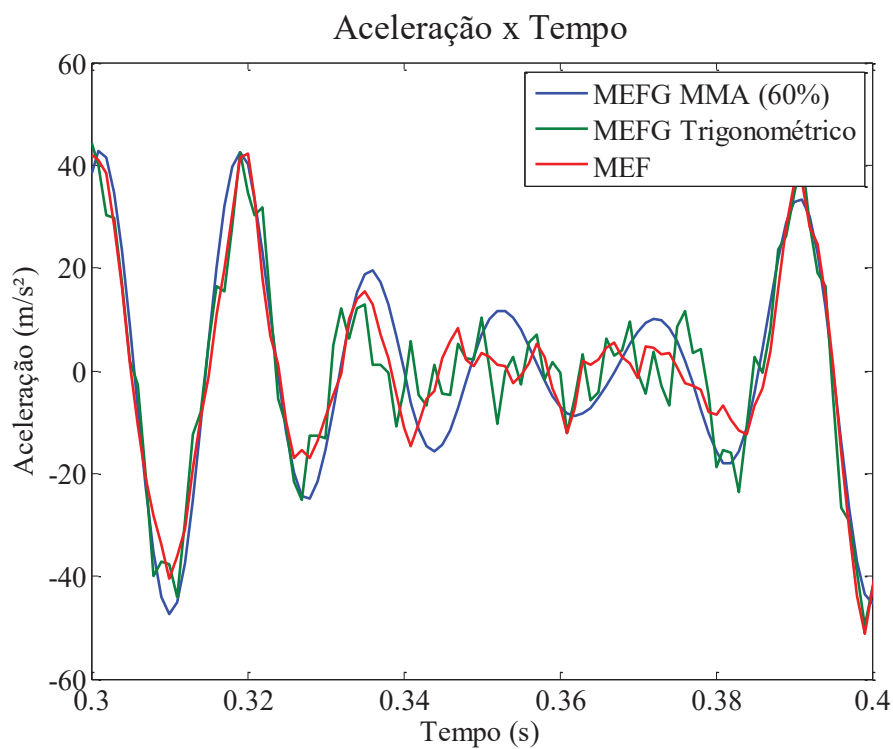


FIGURA 136: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 60% DOS  
MODOS – MEFG MMA

Através das figuras 134 a 136 percebe-se pouca diferença na resposta transiente em comparação com os resultados obtidos com a matriz modal completa (figuras 130 a 132). Devido à dificuldade em visualizar a diferença nas análises, a tabela 18 mostra o comparativo de erro nas respostas de deslocamento. O erro da equação 5.1 foi calculado em relação ao MEF tradicional (solução de referência) neste exemplo, e não em relação à uma solução analítica, pois a mesma não era conhecida pela autora.

TABELA 18: COMPARATIVO DE ERRO – MEFG MMA

	Erro no deslocamento (m.s)
MEFG MMA 100%	1,31E-07
MEFG MMA 60%	1,30E-07
MEFG Trigonométrico	6,13E-08

Na tabela 18 fica mais evidente a diferença no resultado transiente entre as análises feitas com a matriz modal completa e condensada a 60% dos modos. Percebe-se que com 60% dos modos, o resultado teve uma melhora na precisão, em comparação com a solução de referência. Mesmo com essa melhora, o enriquecimento trigonométrico ainda mostrou-se mais preciso.

### 8.3.2 Fator de influência

O fator de influência utilizando o MEFG MMA do exemplo em questão é mostrado na figura 137.

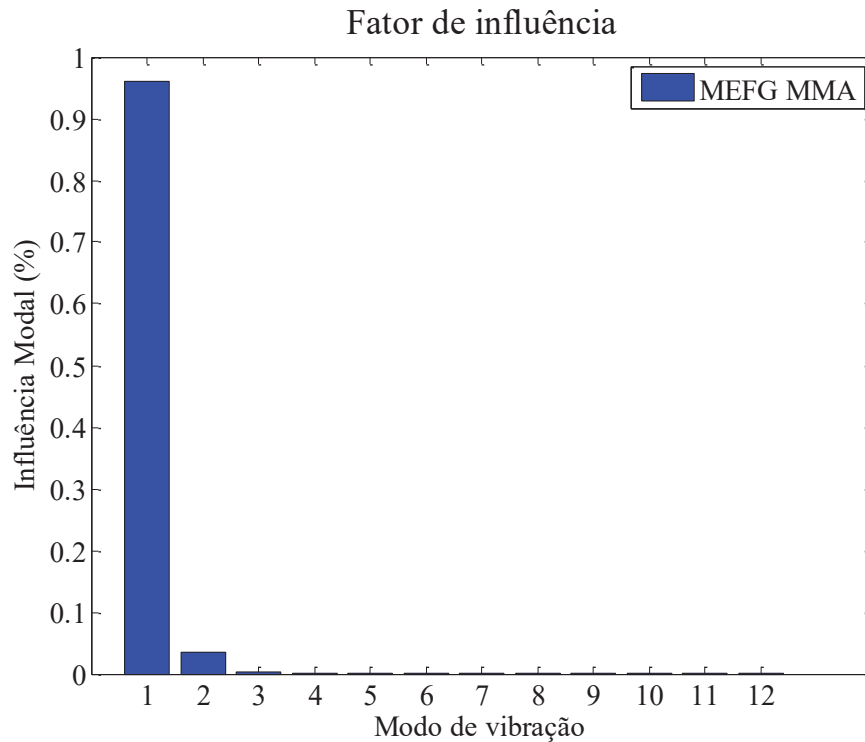


FIGURA 137: FATOR DE INFLUÊNCIA – MEFG MMA

O fator de influência da figura 136 mostra que o modo de vibração predominante neste exemplo é o primeiro. Assim, análogo aos exemplos anteriores, as análises foram repetidas com a presença apenas desse modo. Porém, como também já observado nos exemplos anteriores, apenas um modo de vibração presente na matriz modal não é suficiente para representar o comportamento da estrutura, apesar desse único modo representar quase 100% da influência modal do problema. Apenas o gráfico de deslocamento (figura 138) é mostrado para reiterar essa afirmação. Os demais gráficos foram suprimidos.

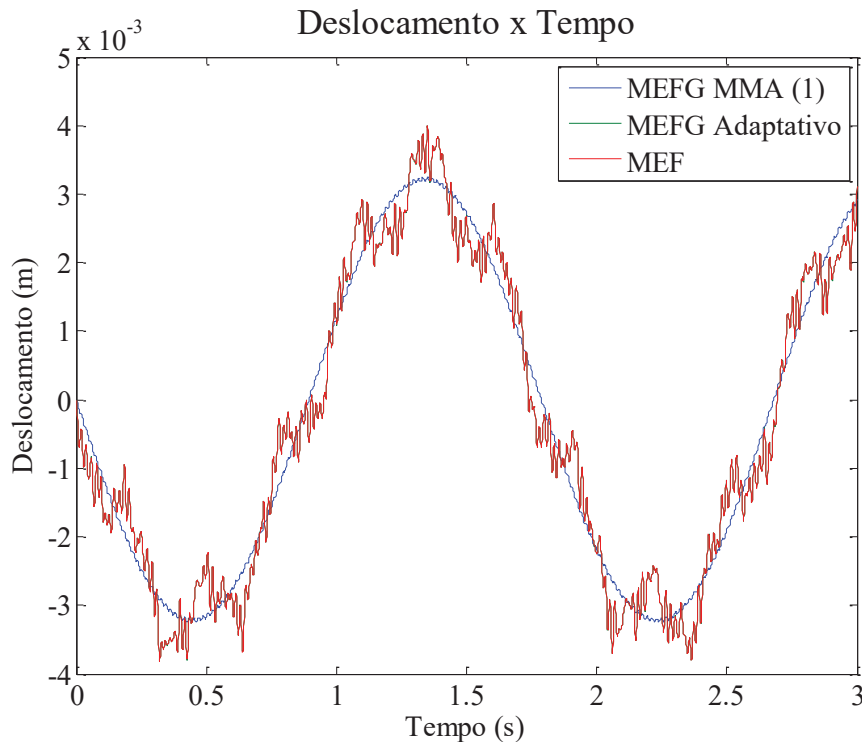


FIGURA 138: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 1 MODO – MEFG MMA

Neste exemplo foram necessários 3 modos de vibração para que a resposta mostrasse coerência com a apresentada com 100% dos modos. Analogamente aos exemplos 8.1 e 8.2, esse valor não foi indicado pelo fator de influência, e não segue um padrão em todos os exemplos.

Assim, como última verificação deste exemplo, o MEFG adaptativo é testado e comparado com o MEFG MMA.

### 8.3.3 MEFG adaptativo

Nos exemplos 8.1 e 8.2 o MEFG adaptativo foi comparado com o MEFG trigonométrico, e mostrou-se mais preciso em alguns casos. Assim, o mesmo é analisado neste exemplo, e comparado com o MEFG MMA e também com a solução de referência, que nesse caso é a obtida com o MEF com 160 graus de liberdade. A frequência alvo do MEFG adaptativo nesse caso foi a primeira, devido à sua predominância. Foram utilizados 6 graus de liberdade na primeira iteração e 30 nas duas subsequentes. As figuras 139 a 141 mostram os resultados em questão.

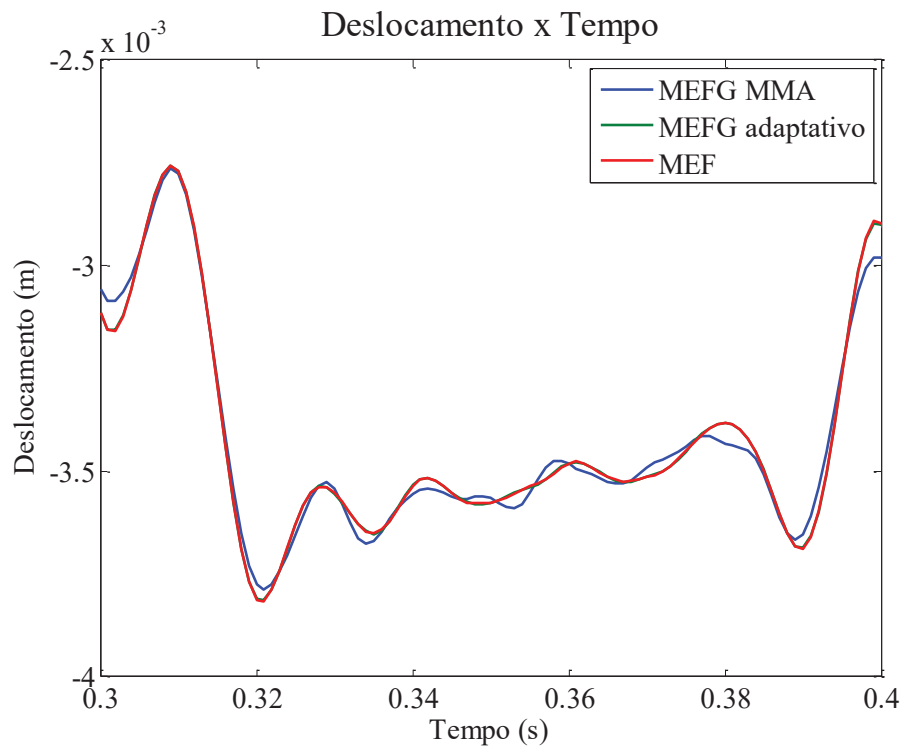


FIGURA 139: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO

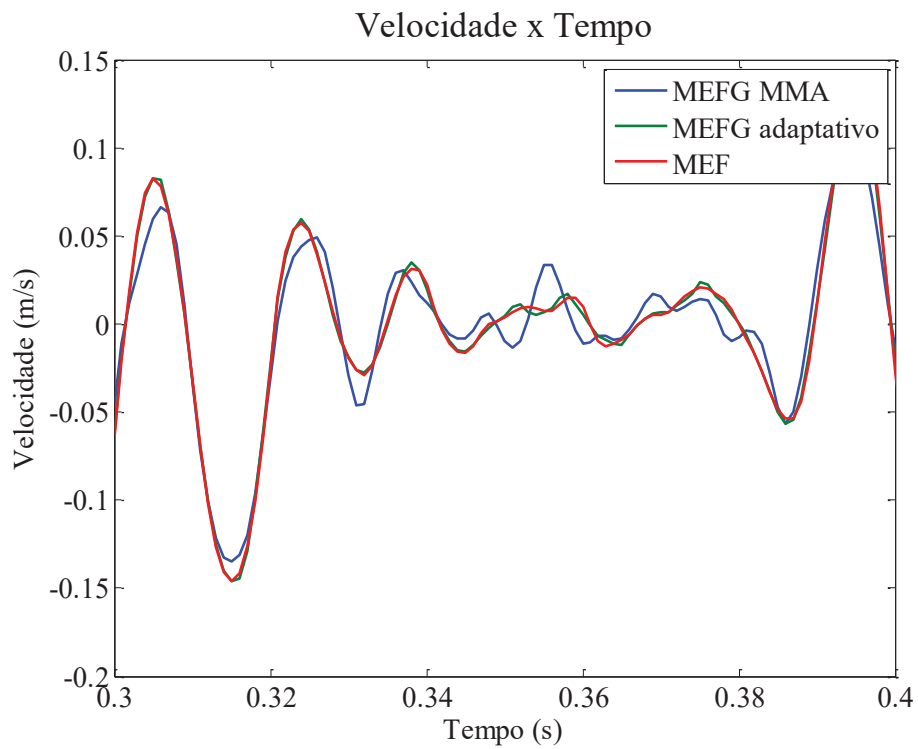


FIGURA 140: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE

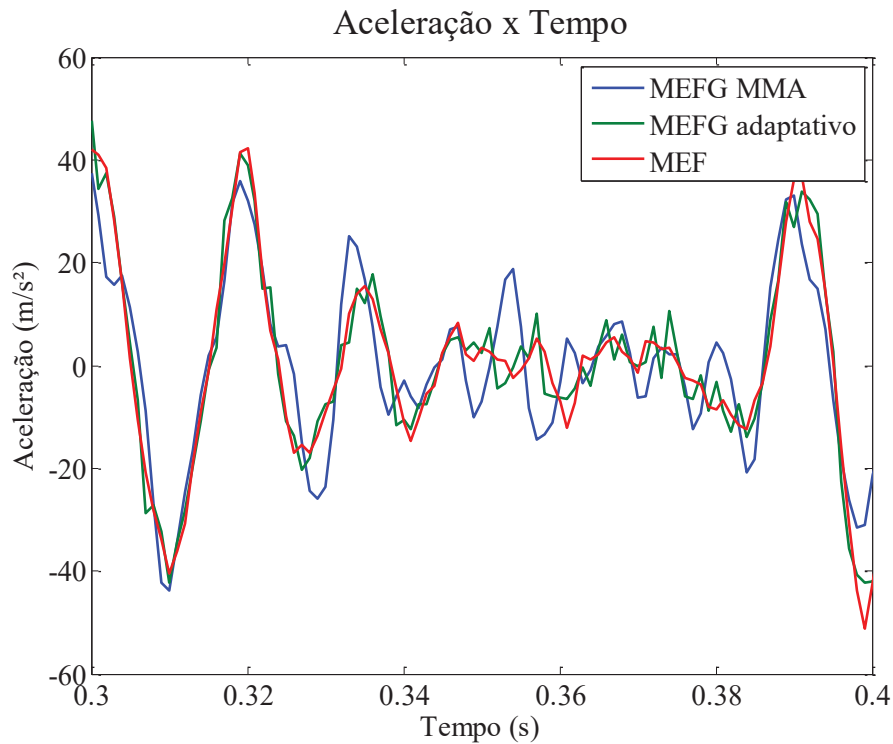


FIGURA 141: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO

Nas figuras 139 a 141 percebe-se que visualmente o MEFG adaptativo se aproxima mais da solução de referência em comparação com o MEFG MMA. Para que a diferença nas respostas seja melhor avaliada, a tabela 19 mostra o erro nas respostas transientes de deslocamento entre o MEFG adaptativo, o MEFG MMA, e entre o MEFG trigonométrico em relação à solução de referência obtida com o MEF com 160 graus de liberdade.

TABELA 19: COMPARATIVO DE ERRO – MEFGADAPTATIVO DO EXEMPLO DE VIGA COM MEFG MMA

	Erro no deslocamento (m.s)
MEFG MMA	1,31E-07
MEFG Trigonométrico	6,13E-08
MEFG adaptativo	3,60E-09

Percebe-se na tabela 19 que o MEFG adaptativo mostrou-se mais precisos em comparação com o MEFG trigonométrico (12 graus de liberdade) e com o MEFG MMA (12 graus de liberdade). Dentre as 3 análises, o MEFG MMA mostrou-se com a menor precisão em relação à solução de referência, mesmo condensando a matriz modal. Assim, não é vantajosa sua utilização nesse caso.

#### 8.4 VIGA ENGASTADA-LIVRE COM EXCITAÇÃO DE TERREMOTO

Neste exemplo analisa-se o comportamento de uma viga de Euler-Bernoulli sujeita a aplicação de uma excitação externa de terremoto, dada por uma excitação de base conforme teoria exposta no capítulo 2 (equação 2.38 e 2.39). A força externa aplicada é dada por (CHOPRA, 1995):

$$F_{eq}(t) = -M\ddot{u}_g(t), \quad (8.4)$$

onde, nesse caso,  $M$  é a matriz de massa obtida pelo MEF,  $\iota$  é o vetor de aplicação da força, que nesse caso é aplicada nos nós referentes ao MEF (graus de liberdade nodais), e  $\ddot{u}_g(t)$  são escalares que definem a aplicação da força. Neste trabalho, o vetor  $\ddot{u}_g(t)$  corresponde aos dados obtidos do terremoto El Centro (Wang e Xu, 2013; Mitrani et al. 2017; VibrationData, 2017), conforme a figura 142.

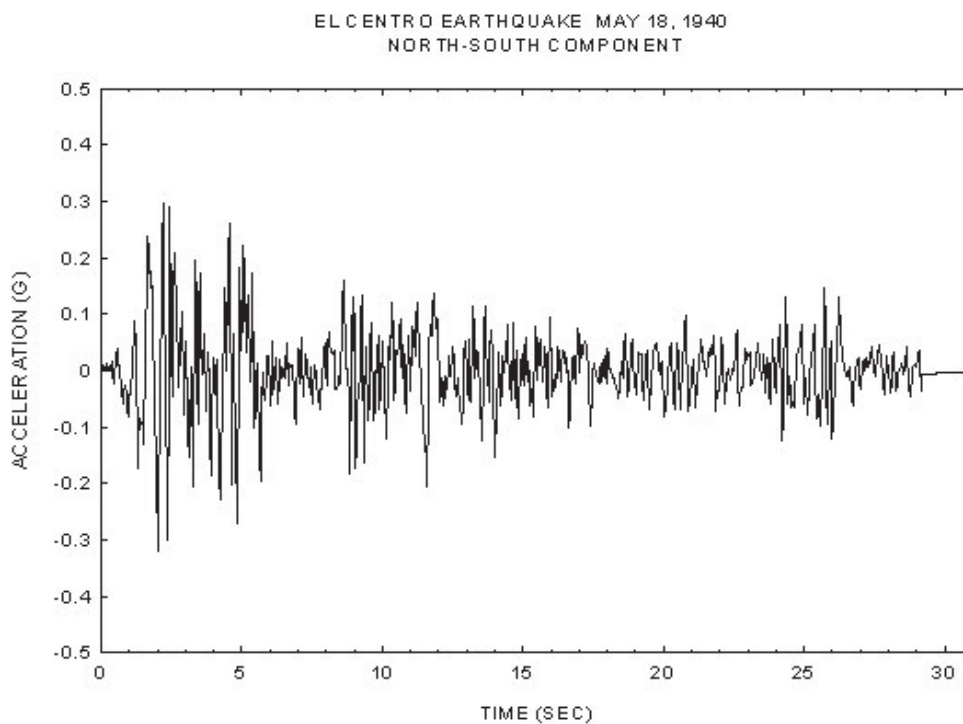


FIGURA 142: HISTÓRICO DA ACELERAÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO DO TERREMOTO EL CENTRO

FONTE: VIBRATION DATA, 2017

A ideia da aplicação de uma carga de terremoto baseia-se no fato de que esse tipo de carregamento pode excitar as frequências mais altas de uma estrutura. Sabendo que os exemplos 8.1 a 8.3 mostraram aplicações em elementos de viga de Euler-Bernoulli onde



o primeiro modo de vibração era o predominante na análise, o carregamento de terremoto é aplicado e o fator de influência mostrado na figura 143.

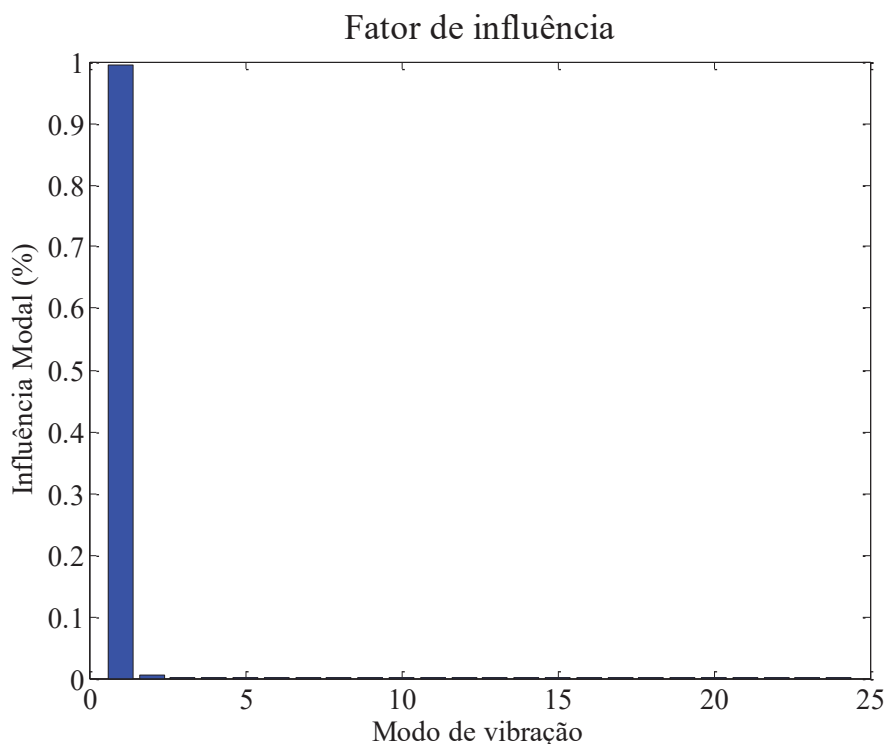


FIGURA 143: FATOR DE INFLUÊNCIA – EXCITAÇÃO DE TERREMOTO

Na figura 142 pode-se perceber que o modo de vibração mais predominante na análise é o primeiro, de forma análoga aos exemplos anteriores (8.1 a 8.3). O fator de influência ainda foi testado para diferentes graus de liberdade, diferentes condições de contorno da viga e também para diferentes intervalos de tempo, dando sempre o mesmo resultado.

Ainda, a aceleração de base foi testada no elemento de barra (capítulo 7), e o fator de influência deste elemento pode ser visto na figura 144.

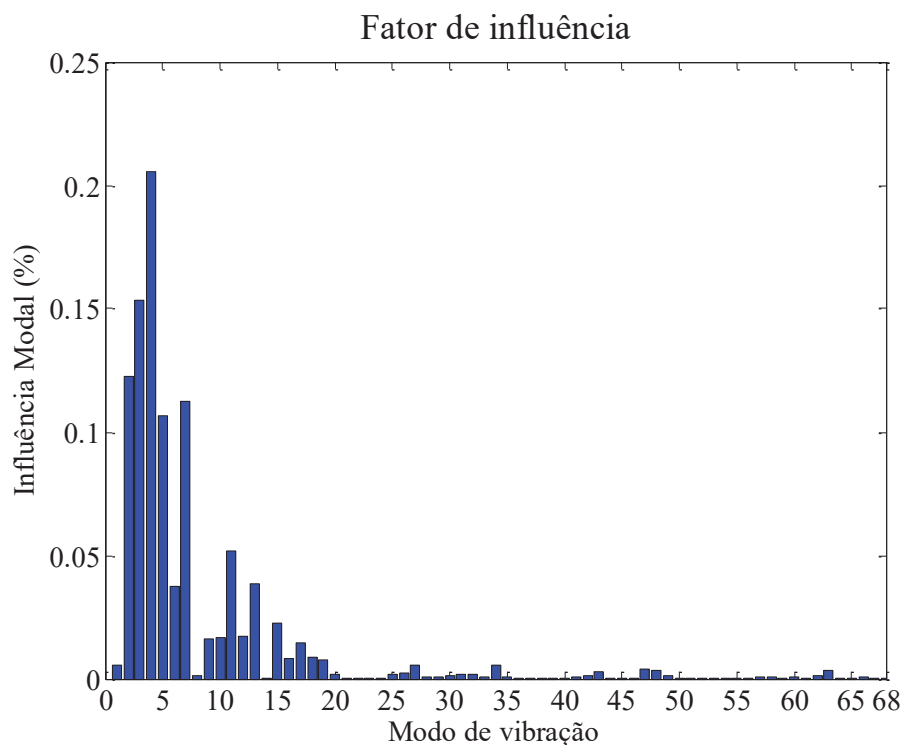


FIGURA 144: FATOR DE INFLUÊNCIA – BARRA COM EXCITAÇÃO DE TERREMOTO

Na figura 143 pode-se perceber que para o elemento de barra, diferentemente do elemento de viga de Euler-Bernoulli, alguns modos de vibração mais elevados são excitados com o carregamento de terremoto.

O fato dos modos de vibração mais altos do elemento de viga de Euler-Bernoulli não serem facilmente excitados, pode ter relação com os efeitos de flexão da estrutura. A primeira frequência e consequentemente o primeiro modo de vibrar estão mais relacionados com os efeitos de flexão provocados, que é o efeito predominante neste tipo de estrutura, em comparação com os outros modos de vibrar (Campuzano et al., 2013). A figura 145 mostra os 4 primeiros modos de vibrar de uma viga engastada-livre, a fim de observar como o primeiro modo está ligeiramente associado à deformada da viga devido aos esforços de flexão causados por um carregamento externo.

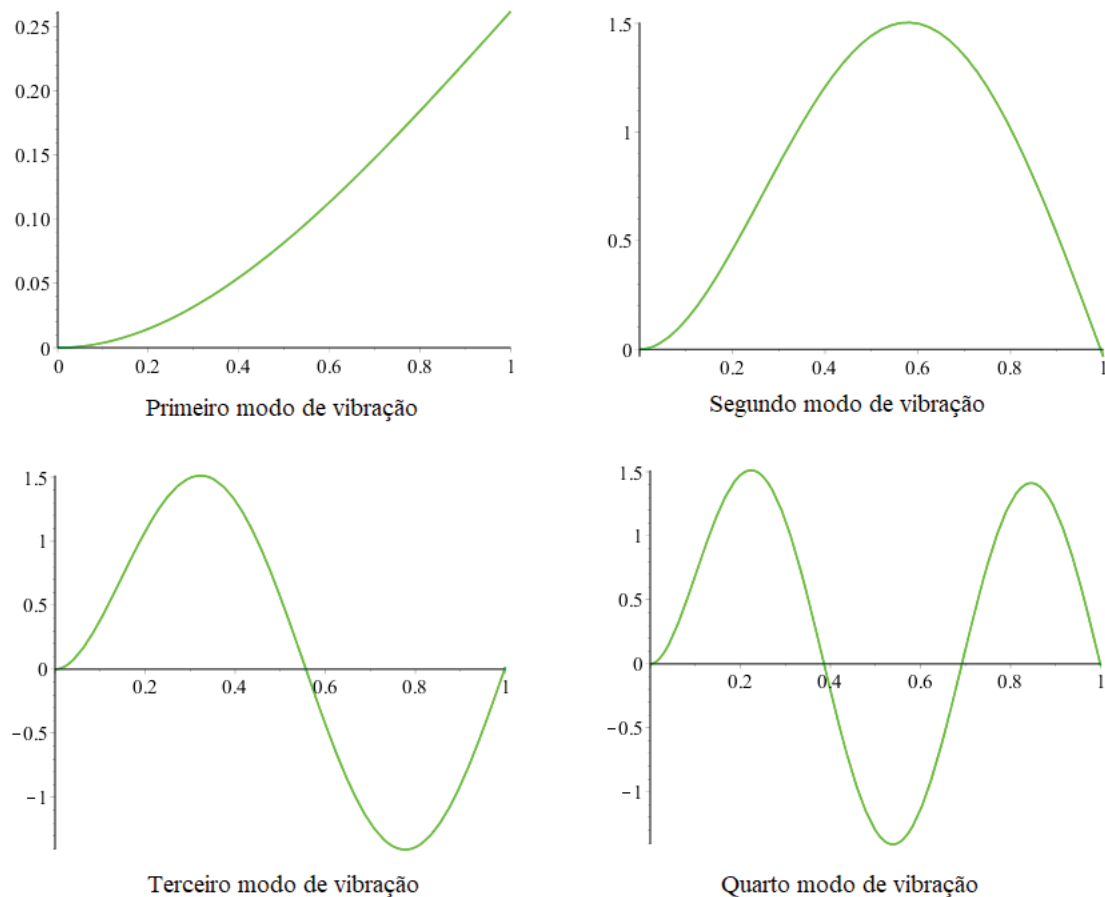


FIGURA 145: QUATRO PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA ENGASTADA-LIVRE

Assim, as demais análises a respeito do MEFG aplicado neste exemplo foram suprimidas, pois são similares aos já expostos anteriormente.

### 8.5 VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

Nos exemplos 8.1 a 8.4 percebeu-se a predominância do primeiro modo de vibração para o elemento de viga de Euler – Bernoulli. Conforme exposto anteriormente, esse comportamento pode ser justificado pela proximidade da configuração deformada do elemento devido aos esforços de flexão e do primeiro modo de vibração, conforme exposto na figura 145. Assim, neste exemplo, a viga em questão possui um carregamento que provoca uma deformação no elemento muito semelhante ao seu terceiro modo de vibrar, conforme a figura 146.

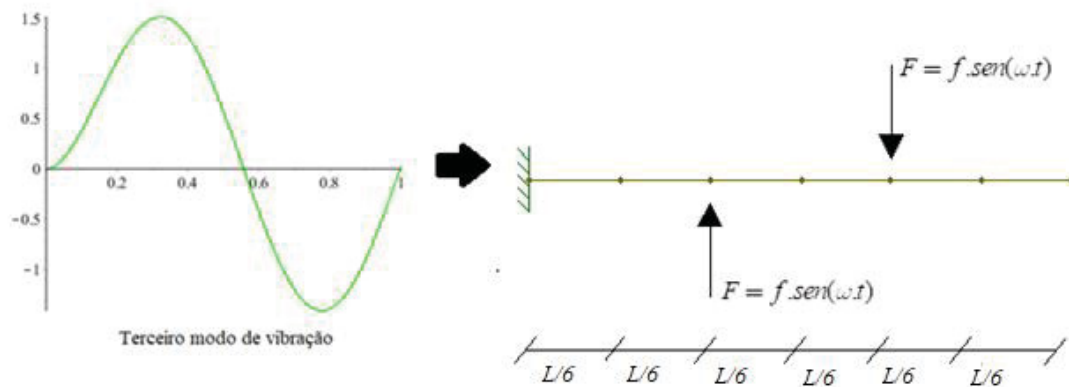


FIGURA 146: VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

O carregamento harmônico possui  $f = 1 \text{ kN}$  e  $\omega = 61,5 \text{ rad/s}$ , que é uma frequência muito próxima da terceira frequência natural da estrutura ( $\omega_3 = 61,68 \text{ rad/s}$ ). Para as análises feitas com o MEFG trigonométrico foram utilizados 6 elementos e um nível de enriquecimento (24 graus de liberdade), e o intervalo de análise foi de 7 segundos. O MEF foi utilizado com 160 graus de liberdade.

Assim, o fator de influência é mostrado na figura 147, a seguir.

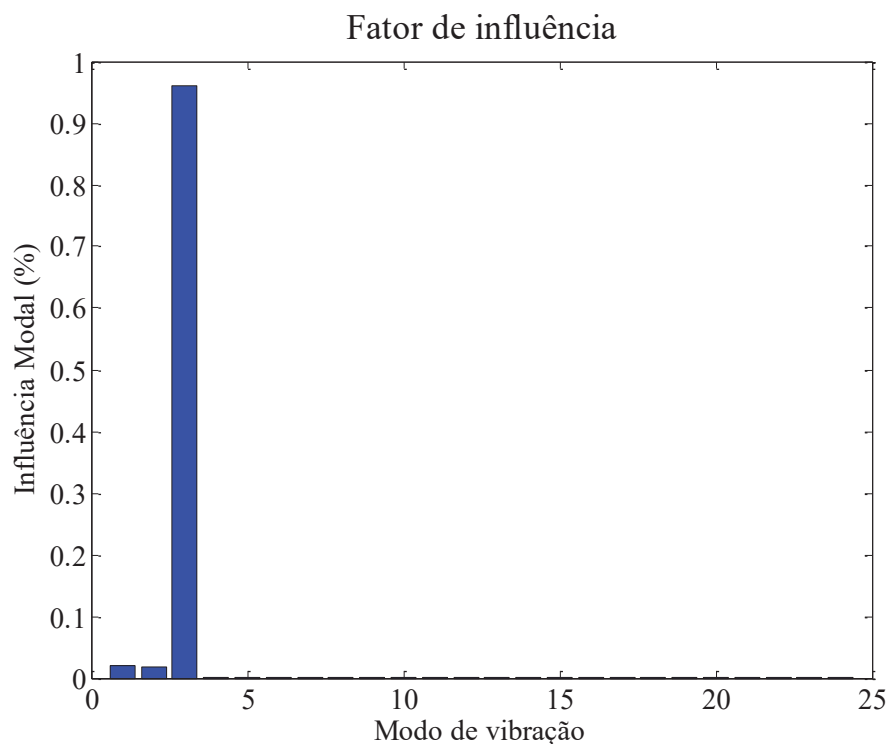


FIGURA 147: FATOR DE INFLUÊNCIA – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

Percebe-se ao analisar a figura 147 que o terceiro modo de vibração da viga foi o mais excitado, reiterando a ideia de que o modo de vibração mais preponderante da estrutura depende do carregamento atuante na mesma.

Assim, os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo com 100% dos modos na matriz modal e com a presença dos 3 primeiros modos, são mostrados nas figuras 148 a 150.

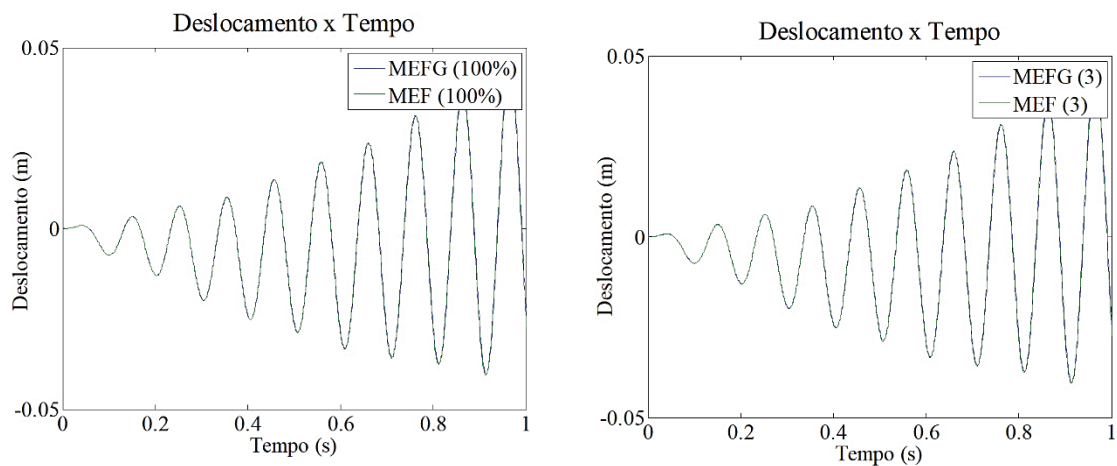


FIGURA 148: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% E 3 MODOS – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

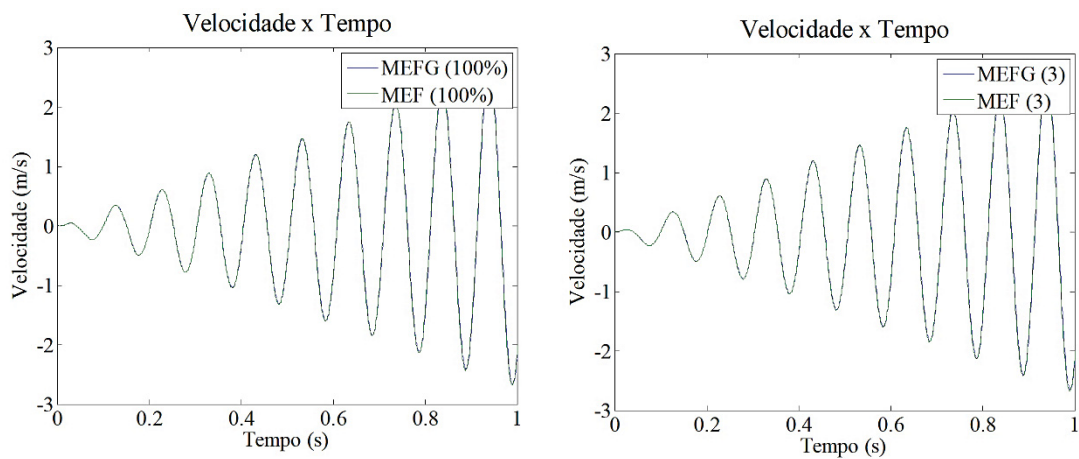


FIGURA 149: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE COM 100% E 3 MODOS – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

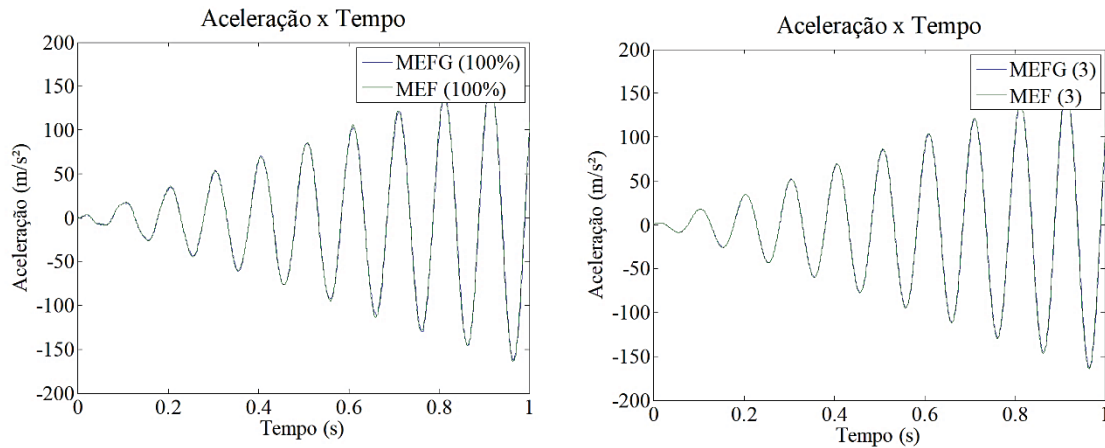


FIGURA 150: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO COM 100% E 3 MODOS – VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

Observa-se nas figuras 148 a 150 que para este exemplo de viga, os resultados obtidos através do MEF e do MEFG de deslocamento, velocidade e aceleração são muito semelhantes. Mesmo com ambas matrizes modais tendo os 3 primeiros modos de vibração, a resposta permanece com o mesmo comportamento.

#### 8.5.1 MEFG adaptativo

Assim, o presente exemplo é analisado com o MEFG adaptativo, sendo a frequência alvo a terceira, com 4 graus de liberdade na primeira iteração, e 20 nas três duas iterações subsequentes. A figura 151 mostra o resultado transiente de deslocamento com a matriz modal completa, e a figura 152 mostra o resultado para a matriz modal limitada aos 3 primeiros modos de vibração.

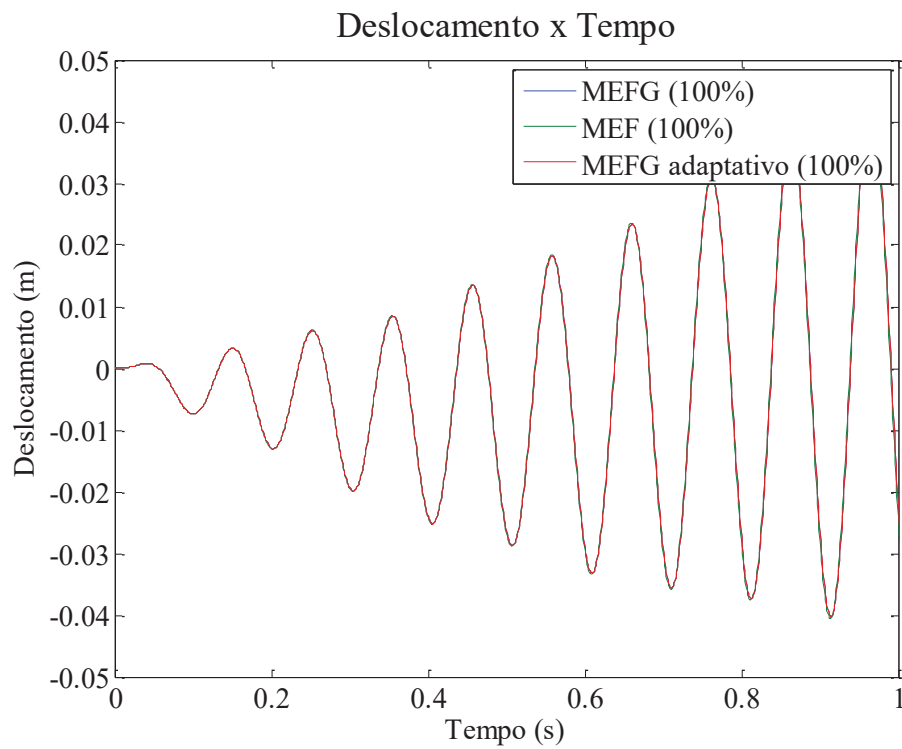


FIGURA 151: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO COM 100% DOS MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

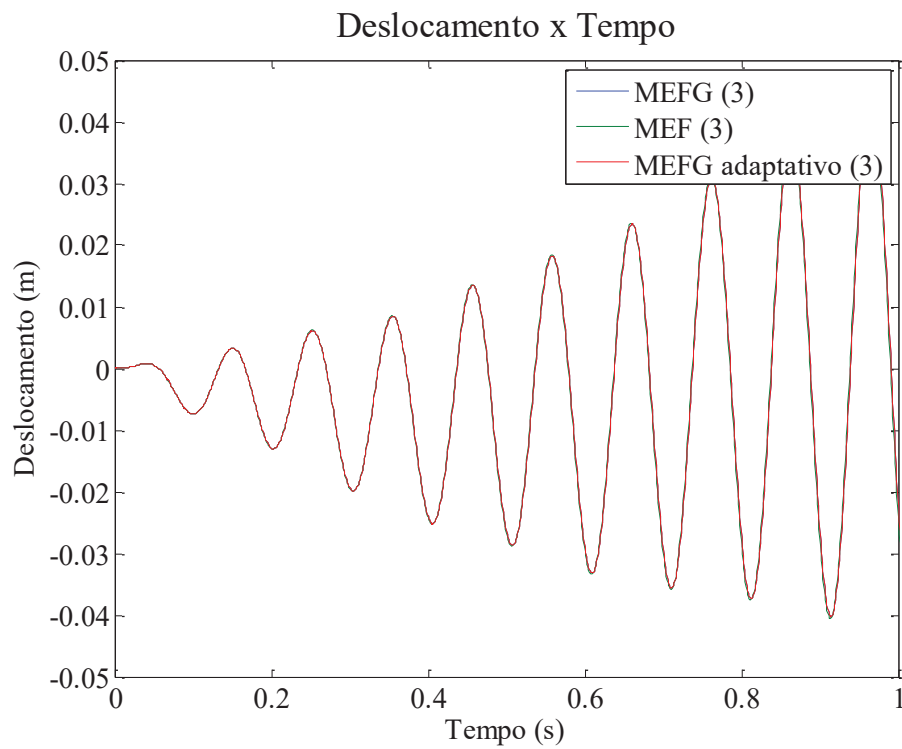


FIGURA 152: RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO 3 MODOS NO MEFG ADAPTATIVO - VIGA COM CARREGAMENTO SIMILAR AO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

Nas figuras 151 e 152 percebe-se que novamente os resultados entre o MEF, MEFG e MEFG adaptativo foram muito semelhantes. Os resultados de velocidade e aceleração tiveram o mesmo comportamento, e por isso foram suprimidos.

Neste exemplo, diferente dos apresentados em 8.1 a 8.4, o modo de vibração mais preponderante não foi o primeiro. Nesse caso, foi possível obter resultados coerentes com a presença dos 3 primeiros modos de vibração na matriz modal, indicados pelo fator de influência. Apesar disso, as respostas obtidas com MEF, MEFG e MEFG adaptativo foram muito semelhantes entre si na questão do comportamento ao longo do tempo, e como o problema não possui solução analítica, não é possível aferir qual dos métodos possui maior precisão.



## 9. CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo avaliar o comportamento do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na análise dinâmica transiente de estruturas reticuladas. Para tanto, inicialmente foram estudados os espectros de frequência obtidos com o método em trabalhos presentes na literatura. Assim, inicialmente foi possível perceber que o MEFG possui boa aproximação em aproximadamente 60% das frequências naturais obtidas na análise, e conseqüentemente dos modos de vibrar. Partindo desse princípio, esses mesmos 60% do total de modos de vibração foram deixados na matriz modal, que é a responsável por desacoplar o sistema de equações através do Método da Superposição Modal. As respostas transientes de deslocamento, velocidade e aceleração mostraram melhor aproximação com essa condensação da matriz modal em todos os exemplos analisados, em comparação com a resposta obtida com a matriz modal completa. Essas respostas foram mais precisas inclusive que o Método dos Elementos Finitos (MEF) tradicional, que foi analisado com um número muito maior de graus de liberdade. Ainda, como o tamanho da matriz foi reduzido, o problema se tornou mais eficiente computacionalmente.

Para identificar quais modos de vibração são mais preponderantes na resposta transiente da estrutura, um coeficiente denominado “fator de influência” foi proposto para essa finalidade. Partindo da identificação dos modos mais preponderantes, esses mesmos são os únicos deixados na matriz modal, e a resposta transiente de deslocamento, velocidade e aceleração é novamente calculada.

Para o primeiro exemplo, elemento de barra, os deslocamentos mostraram uma resposta mais precisa quando apenas os modos de vibração mais predominantes eram deixados na matriz modal. A velocidade e a aceleração também mostraram um comportamento muito mais semelhante às soluções analíticas de referência, além de um ganho no custo computacional devido à matriz modal estar reduzida a poucos modos de vibração.

Para o segundo exemplo de aplicação, elemento de viga de Euler-Bernoulli, a resposta obtida inicialmente com a matriz modal completa era menos discrepante da solução de referência, se comparada com as respostas do elemento de barra com a matriz modal completa. Ao serem utilizados 60% dos modos na matriz modal, a resposta transiente mostrava melhores resultados, mas essa melhora foi muito menos expressiva em comparação com a mesma situação no elemento de barra. O fator de influência para

os elementos de viga indicou a predominância basicamente do primeiro modo de vibrar, mesmo modificando condições de contorno, intervalo de tempo e carregamento externo. Assim, com somente o primeiro modo de vibração presente na matriz modal, a resposta transiente em termos de deslocamento, velocidade e aceleração não mostrou comportamento semelhante à solução de referência.

Ainda nestes exemplos onde o primeiro modo de vibração era o predominante, não foi possível aferir a quantidade de modos necessário para que a resposta transiente da matriz modal condensada tivesse um comportamento coerente. Como o fator de influência não indicava outro modo senão o primeiro, a escolha da quantidade de modos a ser utilizada na matriz modal foi possível em alguns exemplos apenas por testes sucessivos. Dessa forma, utilizar os 60% dos modos na matriz modal, que é uma porcentagem embasada através dos estudos preliminares, é uma medida razoável para se obter uma precisão tão boa quanto com a matriz completa, mas com mais eficiência computacional.

Devido à essa problemática em excitar os modos mais altos do elemento de viga de Euler-Bernoulli, uma aceleração de base que representa o carregamento de um terremoto foi testado. Apesar do carregamento que simula uma situação extrema, o fator de influência mostrou novamente a predominância do primeiro modo de vibração. Esse comportamento pode ser justificado pela predominância dos efeitos de flexão no elemento de viga, e o seu primeiro modo de vibração representar a deformação do elemento devido à esses esforços.

Ainda com a intenção de excitar os modos mais altos do elemento de viga, um carregamento que resulta em uma deformação semelhante ao terceiro modo de vibrar foi aplicado, fazendo com que o modo de vibração mais preponderante fosse o terceiro. Porém, nesta análise, as respostas de deslocamento, velocidade e aceleração obtidas com o MEF e com o MEFG foram muito semelhantes. O MEFG adaptativo também foi testado, sendo que a frequência alvo neste caso foi a terceira. O método reproduziu a precisão nas as respostas já obtidas com o MEF e o MEFG.

Também no elemento de viga de Euler-Bernoulli, o enriquecimento através das funções baseadas no MMA foi testado, juntamente com o processo de identificação dos modos e condensação da matriz modal. As funções de enriquecimento do MMA mostraram-se menos precisas em comparação com o enriquecimento trigonométrico, mesmo após a redução da matriz modal. Assim, sua utilização na análise transiente não

se fez satisfatória nos casos analisados, sendo que o enriquecimento trigonométrico trouxe melhores resultados.

Também, na intenção de aprimorar a eficiência computacional do MEEG na análise transiente, foram testados diversos tamanhos de malha (refino  $h$ ) e níveis de enriquecimento, a fim de elencar um número razoável de graus de liberdade do problema que aliasse baixo custo computacional e precisão. No elemento de barra percebeu-se que mesmo com um número razoável de elementos e níveis de enriquecimento, a resposta obtida através do MEEG mantinha incoerências em relação à solução analítica. A resposta transiente de deslocamento, velocidade e aceleração só mostrou melhora significativa com o processo de condensação da matriz modal. O elemento de viga, em contrapartida, mostrou resultados mais coerentes com poucos elementos e níveis de enriquecimento, e a melhora nos resultados com o processo de condensação da matriz modal foi menos significativa que o elemento de barra.

Para concluir o estudo, utilizou-se o MEEG adaptativo, e o mesmo mostrou boa precisão nas análises feitas. Tanto no elemento de barra quanto no elemento de viga de Euler-Bernoulli, o método foi capaz de obter respostas com um erro muito pequeno em relação à solução de referência. Nos exemplos de barra, as respostas obtidas com o MEEG adaptativo foram mais precisas que o MEEG tradicional, e com um custo computacional reduzido devido ao número menor de graus de liberdade. No elemento de viga de Euler-Bernoulli, apesar da precisão na resposta, em alguns casos o número de graus de liberdade maior em comparação com o MEEG tradicional representa uma desvantagem da utilização do método. De forma geral, o MEEG adaptativo mostrou melhora na resposta ao passo que a matriz modal era utilizada com 60% dos modos, e depois com os modos mais preponderantes, indicados pelo fator de influência.

Para elucidar melhor as conclusões das análises apresentadas neste trabalho, o quadro 1 mostra a síntese dos resultados.

QUADRO 1: SÍNTESE DOS RESULTADOS

<b>SÍNTESE DOS RESULTADOS</b>					
	<b>INFLUÊNCIA DA MALHA</b>	<b>MATRIZ MODAL COM 60% DOS MODOS DE VIBRAÇÃO</b>	<b>FATOR DE INFLUÊNCIA</b>	<b>MATRIZ MODAL REDUZIDA</b>	<b>MEFG adaptativo</b>
<b>ELEMENTO DE BARRA</b>	Mais elementos e níveis de enriquecimento para obtenção de uma resposta ainda com certas incoerências em relação à solução de referência.	Resultados com boa aproximação, bem mais semelhantes às soluções de referência, se comparados aos resultados com a matriz modal completa.	Os modos mais predominantes na análise mudam bastante conforme a excitação externa. O fator de influência é capaz de identificá-los.	Resultados mais precisos ainda em comparação com os obtidos com a matriz modal com 60% dos modos. A matriz modal estando bastante reduzida significa um aumento na eficiência computacional do problema.	Bom comportamento na análise transiente. Ao se utilizar somente os modos mais predominantes na matriz modal, os resultados são mais precisos que o MEFG tradicional, e com menos graus de liberdade, melhorando a agilidade computacional.
<b>ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI</b>	Com poucos elementos e níveis de enriquecimento já possui um resultado preciso.	Resultados mostram melhora na precisão, mas essa melhora é menos expressiva que no elemento de barra.	O modo de vibração predominante da estrutura é geralmente o primeiro, mesmo modificando as condições do problema.	Como o modo de vibração mais predominante é o primeiro, os resultados com a presença apenas deste não são satisfatórios. É razoável utilizar 60% dos modos na matriz modal, sendo que é um valor embasado teoricamente, mostra precisão, e reduz o problema computacional	Bom comportamento na análise transiente, com melhora sutil nas respostas ao passo que a matriz modal é utilizada com 60% dos modos de vibração.

Importante ressaltar que as análises feitas em barras, onde por vezes as frequências mais altas da estrutura eram excitadas, tanto o MEFG quanto o MEFG adaptativo mostraram-se métodos precisos e eficientes, principalmente devido à condensação da matriz modal. Já nas análises feitas em vigas de Euler-Bernoulli, essas vantagens não foram tão acentuadas devido à dificuldade de se excitar os modos mais altos das estruturas. Quando a análise se atem aos modos mais baixos, o MEF tradicional, que possui menos graus de liberdade que os métodos em questão, é capaz de obter respostas com uma precisão considerável. Mesmo assim, as análises em vigas de Euler-Bernoulli foram capazes de mostrar que o MEFG e o MEFG adaptativo são métodos aplicáveis e eficientes na análise transiente, sendo razoável maiores estudos em estruturas onde as frequências mais altas predominem. Aconselha-se a extensão dessas análises em elementos 2-D, e também em estruturas mais complexas, como pórticos contendo um número considerável de elementos.

Enfim, os resultados deste trabalho reiteraram a eficiência do MEFG e do MEFG adaptativo, já observados em Arndt (2009) e Torii (2012), mostrando que os métodos possuem bom comportamento na análise dinâmica transiente. O presente trabalho analisou os métodos supracitados nas particularidades da dinâmica transiente em dois tipos diferentes de elementos, dando abertura à extensão dessas análises nos demais elementos existentes na literatura, como treliças e estado plano de tensões.

Ainda como sugestão de trabalhos futuros, pode-se pesquisar um coeficiente que indique os modos de vibração predominantes da estrutura *a priori*, ou seja, na etapa pré-processamento. A identificação e condensação da matriz modal também podem ser objetos de estudo, com o intuito de automatizar essas etapas, partindo da indicação dos modos de vibração mais preponderantes. Por fim, sugere-se testar o emprego do MEFG e do MEFG adaptativo em problemas transientes amortecidos e também não lineares.

## REFERENCIAS

- ALVES, G. S.; JUNIOR, F. E. Método Dos Elementos Finitos Generalizados Com Enriquecimento De Interface Para Materiais Compósitos. **CILAMCE 2016 Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2016.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. Tese (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Paraná, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.; SCREMIN, A. Accurate assessment of natural frequencies for uniform and non-uniform Euler-Bernoulli beams and frames by adaptive generalized finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 329, n. 6, p. 659–672, 2010.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. **Engineering Computations**, v. 33, n. 5, p. 1586-1609, 2016.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.
- BABUŠKA, I., BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Generalized finite element methods: main ideas, results, and perspective. **Technical Report 04-08, TICAM**, University of Texas at Austin, 2004.
- BARROS, F. B. **Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas**. Tese (Tese de Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2002.
- BATHE, K. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J.; TASSOULAS, J. L. Boundary elements: an introductory course. **Journal of Applied Mechanics**. v.58, p.860, 1991.
- CAMPUZANO, J. E.; CASTRO, R.; ÁVILA, S.; DOZ, G. Plataforma de ensaios dinâmicos: estudos preliminares, projeto e construção. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**, v. 6, no. 1, 2013.
- CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements**. New Jersey: Prentice-Hall, 1984(b). v. 3: Computational aspects.
- CHIEN, C.; YANG, C.; TANG, J. Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous galerkin finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 39, n. 7, p. 561–580, 2003.

- CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- CITTADIN, C. C. **Aplicação de refinamento h e p do Método dos Elementos Finitos na análise de vibração livre de treliças planas**. Trabalho de Finalização de Curso. Universidade Federal do Paraná, 2017.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- COLLATZ, L. **The numerical treatment of differential equations**. Berlin, Springer Verlag, 1960.
- DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. The Generalized Finite Element Method applied to dynamic transient analysis of Euler-Bernoulli beams. **CILAMCE 2017 Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2017 (a).
- DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. The Generalized Finite Element Method applied to dynamic transient analysis. **COBEM 2017 Proceedings of the XXIV International Congress of Mechanical Engineering**, 2017 (b).
- DUARTE, C. A.; HAMZEH, O. N.; LISZKA, T. J.; TWORZYDLO, W. W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 2227-2262, 2001.
- DUARTE, C. A.; KIM, D. J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 2227-2262, 2008.
- DUARTE, C.A., BABUŠKA, I., ODEN, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computer & Structures**, v. 77, p. 215-232, 2000.
- ENGELS, R. C. Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 114, p. 3-9, 1992.
- EVANGELISTA Jr, F.; ROESLER, J. R.; DUARTE, C.A. Two scale Approach Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures using the Generalized Finite Element Method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, p. 1991-2002, 2013.
- GARCIA, O. A.; ROSSI, R.; LINZMAIER, P.R. Método de Elementos Finitos Generalizados com alta regularidade na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidas. **VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, 2010
- HOUBOLT, J.C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. **Journal of the Aeronautical Sciences**, 17, pp. 540-550, 1950.

- HUGHES, T. J. R. **The finite element method**. Linear static and dynamic finite element analysis. 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 826 p., 2000.
- IBRAHIMBEGOVIC, A., WILSON, E. L. Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping. **Computers & Structures**, n. 33, p. 523-531, 1989.
- LINS, R.; FERREIRA, M.; PROENÇA, S.; DUARTE, C. An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the stable generalized/extended finite element method. **Computational Mechanics**, v. 56, p. 947-965, 2015.
- LIU, G.R. **Meshfree Methods: moving beyond the Finite Elements Method**. 2 ed. Boca Raton, CRC Press. 2010.
- MALEKAN, M.; BARROS, F. B. Well-conditioning global-local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics. **Computational Mechanics**, v. 58, p.819, 2016
- MAPLESOFT. **Maple 15**. Waterloo, ON: Maplesoft, 2015.
- MATHWORKS. **MATLAB 2014a**. Natick, MA: The Mathworks Inc., 2014.
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 289-314, 1996.
- MITRANI, V.B.; O'DAY, J. E.; NORRIS, T. B.; ADEBAYO, O. W.; Development and Dissemination of the El Centro Health Disparities Measures Library. **Journal of Nursing Scholarship**, v. 49, p. 564-571, 2017.
- MONTEIRO, C. S. G. **Novos operadores de captura via o método dos elementos finitos aplicado a problemas de propagação de ondas**. Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, 2009.
- NEWMARK, N.M. A method of computation for structural dynamics. **ASCE Journal of Engineering Mechanics Division**, 85, 67-94, 1959.
- NOWACKI, W. **Dynamic of Elastic Systems**, New York, John Wiley & Sons. Inc., 1963.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, p. 117-126, 1998.
- PALERMO, M.; STEFANO, S.; GASPARINI, G.; TROMBETTI, T.; Seismic Modal Contribution Factors. **Bulletin of Earthquake Engineering**, v. 13, p. 2867-2891, 2015.



PETROLI, T. **Condicionamento Do Problema De Autovalores Obtido Do Método De Elementos Finitos Generalizados Na Dinâmica De Estruturas**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná, 2016.

PIEIDADE NETO, D.; PROENCA, S. P. B. Generalized Finite Element Method in linear and nonlinear structural dynamic analyses. **Engineering Computations**, Vol. 33 Issue: 3, pp.806-830, 2016.

PINCHOVER, Y.; RUBINSTEIN, J. **An Introduction to Partial Differential Equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical Mathematics**. 2nd Edition. Berlin, 2007. ISBN 0939-2475.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 3 ed. Reading: Addison-Wesley, 1995.

SHANG, Y. H. **Análise dinâmica elastoplástica de problemas da mecânica de sólidos via métodos enriquecidos de elementos finitos**. Tese (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2014.

SHANG H. Y. Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis. **Applied mathematical modelling**. v. 40 p. 7012-7033, 2016.

SHANG H. Y., MACHADO R. D., ABDALLA FILHO, J. E. Dynamic analysis of Euler-Bernoulli beam problems using the Generalized Finite Element Method. **Computers and Structures**. v. 173 p. 109-122, 2016.

SHANG H. Y., MACHADO R. D., ABDALLA FILHO, J. E. Numerical analysis of plane stress free vibration in severely distorted mesh by Generalized Finite Element Method. **European journal of mechanics. A, Solids**. v. 62 p. 50-66, 2017.

SORIANO, H. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. Ciência Moderna, 2009. ISBN 9788573938807.

TORII, A. J. **Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Paraná, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 9, n. 3, p. 1–31, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. GFEM for modal analysis of 2D wave equation. **Engineering Computations**, v. 32, n. 6, p. 1779–1801, aug 2015. ISSN 0264-4401. Disponível em: <<http://www.emeraldinsight.com/doi/10.1108/EC-07-20140144>>.

TORRES, D. A. F. **Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Placas Laminadas Compostas Inteligentes**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

VIBRATION DATA, 2017. Disponível em: < <http://www.vibrationdata.com/elcentro>>. Acesso em novembro de 2017.

WAMSLER, M. The role of actual modal-contributions versus frequency to optimize the structure. **Engineering with Computers**, v.25, p. 131-138, 2009.

WANG R. L.; XU L. Earthquake response analysis with travelling-wave for a long-span steel truss-arc railway bridge. **Advances in Structural Engineering**, vol. 18, Issue 8, p. 1365-1370, 2013.

WEINHARDT, P. O. **Estudo da Estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná, 2016.

WEINHARDT, P. D. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. O Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a análise dinâmica: tipos de enriquecimento, escolha da partição da unidade e técnicas de pré condicionamento. **CILAMCE 2015 Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2015.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**: The Basis. 5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.