

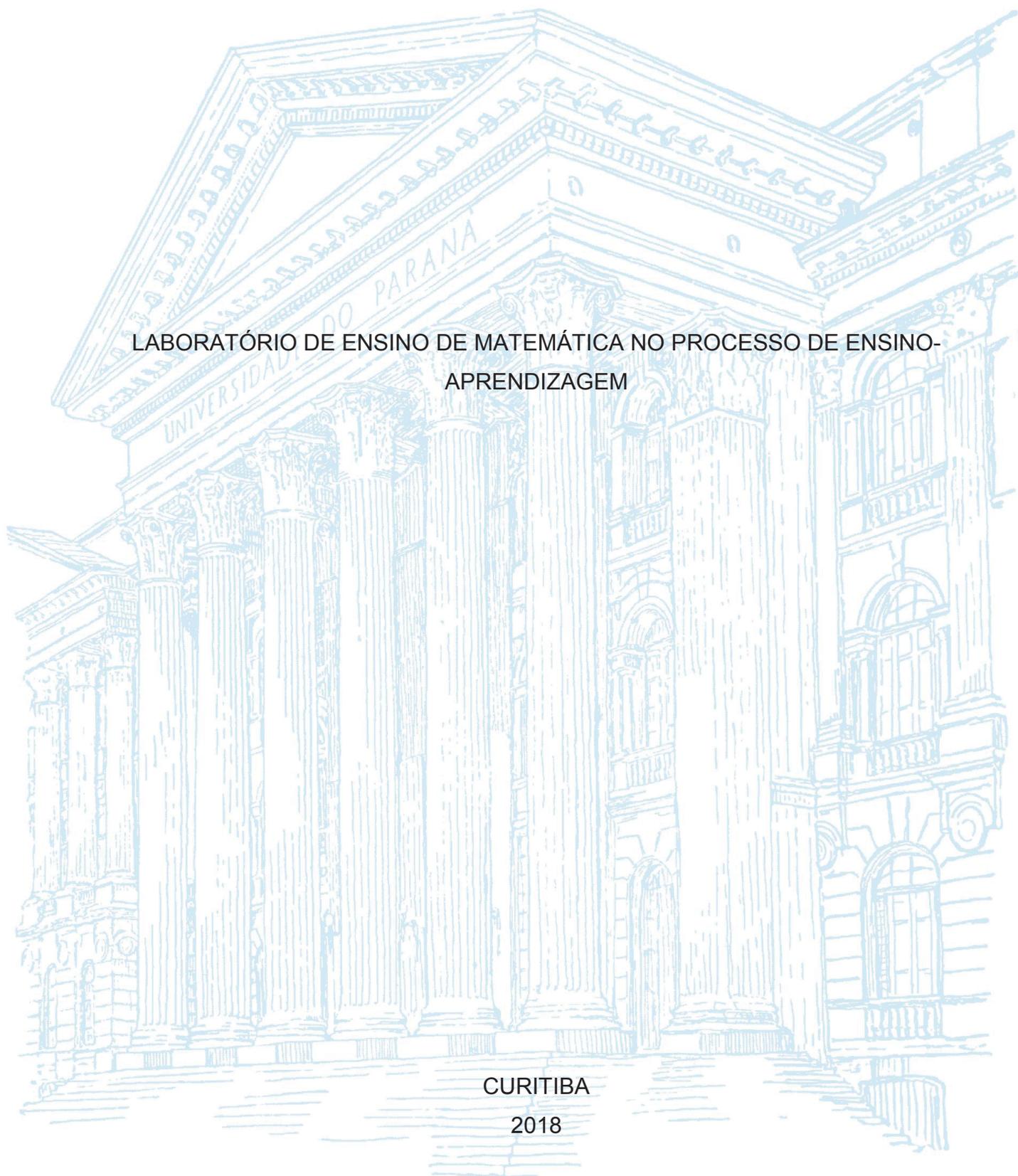
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

NATALLY PALARO DA FONSECA

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO-
APRENDIZAGEM

CURITIBA

2018



NATALLY PALARO DA FONSECA

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO-
APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Prof.^a. Dra. Elisângela de Campos

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

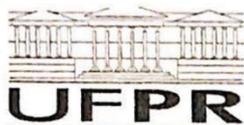
F676l Fonseca, Natally Palaro da
Laboratório de ensino de matemática no processo de ensino- aprendizagem /
Natally Palaro da Fonseca. Curitiba, 2018.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor
de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática em
Rede Nacional, 2018.

Orientadora: Elisângela de Campos

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria. I. Universidade
Federal do Paraná. II. Campos, Elisângela de. III. Título.

CDD: 510.7



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **NATALLY PALARO DA FONSECA** intitulada: **O Laboratório de Ensino de Matemática no processo de ensino-aprendizagem.**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

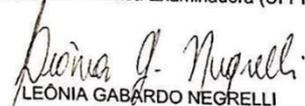
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 04 de Dezembro de 2018.



ELISÂNGELA DE CAMPOS

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



LEÔNIA GABARDO NEGRELLI

Avaliador Externo (UTFPR)



ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO

Avaliador Interno (UFPR)



Coordenador PROFMAT-UFPR

AGRADECIMENTOS

DEUS pela vida e saúde.

Aos meus pais, CIRINEU CARVALHO DA FONSECA e CÉLIA PALARO, por todo o sacrifício que fizeram por mim e me fizeram chegar onde estou.

Ao meu noivo FLÁVIO BUENO QUADROS, pelo apoio nos momentos difíceis que passei durante a graduação.

A minha orientadora ELISÂNGELA DE CAMPOS, pela ótima orientação neste trabalho e competência com que me guiou nessa jornada.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo principal a divulgação do Laboratório de Ensino de Matemática: o que é um LEM, o LEM como ambiente/sala e o que é feito no Laboratório. Para este estudo primeiramente foram pesquisados trabalhos e livros a respeito do LEM para estruturar a base teórica referente aos seus conceitos principais. Em seguida, são apresentados alguns materiais presentes em um laboratório, e também estarão citados exemplos de laboratórios de matemática de algumas instituições do Brasil. Por meio de formulários online professores responderam perguntas com relação a sua concepção de LEM. Da análise destes dados foi possível verificar que muitos professores não sabem do que se trata ou como funciona um LEM. Todos os resultados destes formulários estão presentes e organizados em forma de gráfico ou tabela. Por último consta uma atividade desenvolvida em conjunto com duas professoras e aplicada em minhas turmas por mim, em modo de sequência didática, sobre as relações métricas no triângulo retângulo, começando com a teoria de semelhança, utilizando triângulos retângulos semelhantes de papel para manipulação.

Palavras-chave: Laboratório. Ensino. Matemática. Geometria. Semelhança.

ABSTRACT

The main objective of the present work is the dissemination of the Mathematics Teaching Laboratory: what is a MTL, the MTL as environment / room and what is done in the Laboratory. For this study, papers and books about MTL were first researched to structure the theoretical basis for its main concepts. Next, some materials present in a laboratory are presented, and examples of mathematical labs from some institutions in Brazil will also be mentioned. Through online forms teachers answered questions regarding their MTL conception. From the analysis of these data it was possible to verify that many teachers do not know what it is or how an MTL works. All the results of these forms are present and organized in graph or table form. Finally, an activity developed in conjunction with two teachers and applied in my classes by me, in didactic sequence mode, on the metric relations in the right triangle, beginning with the similarity theory, using triangles similar rectangles of paper for manipulation

Keywords: Laboratory. Teaching. Mathematics. Geometry. Similarity.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – LIVRO DIDÁTICO	22
FIGURA 2 – LIVRO PARADIDÁTICO	23
FIGURA 3 – CALCULADORA CIENTÍFICA	23
FIGURA 4 – ÁBACO	24
FIGURA 5 – PAQUÍMETRO	24
FIGURA 6 – TRANSFERIDOR, COMPASSO, RÉGUA E ESQUADROS	25
FIGURA 7 – PRANCHA TRIGONOMÉTRICA.....	25
FIGURA 8 – SÓLIDOS GEOMÉTRICOS DE ACRÍLICO	26
FIGURA 9 – LEM UFMG	27
FIGURA 10 – LEM IFPI.....	28
FIGURA 11 – LABORATÓRIO UFES	28
FIGURA 12 – LEM UTFPR (CAMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO).....	29
FIGURA 13 – LEM DO CEP	31
FIGURA 14 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES.....	43
FIGURA 15 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES.....	44
FIGURA 16 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES.....	45
FIGURA 17 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES.....	46
FIGURA 18 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES.....	46
FIGURA 19 – TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	48
FIGURA 20 – TRIÂNGULO RETÂNGULO E SEUS ELEMENTOS.....	48
FIGURA 21 – PROJEÇÕES.....	51
FIGURA 22 – TRIÂNGULOS RETÂNGULOS CONGRUENTES	52
FIGURA 23 – TRÊS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS	53
FIGURA 24 – TABELA COM AS INFORMAÇÕES DOS TRÊS TRIÂNGULOS	53
FIGURA 25 –TRABALHO EM EQUIPE.....	54
FIGURA 26 – RAZÕES DE SEMELHANÇA.....	54
FIGURA 27 – TEOREMA DE PITÁGORAS	55
FIGURA 28 – QUADRO RESUMO	56

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – SOBRE A(S) INSTITUIÇÃO(ÕES) QUE LECIONA	33
GRÁFICO 2 – SOBRE O(S) NÍVEL(IS) QUE LECIONA	34
GRÁFICO 3 – A(S) INSTITUIÇÃO(ÕES) QUE LECIONA POSSUI(EM) LEM?	37
GRÁFICO 4 – O LEM DEVERIA SER IMPLANTADO NAS INSTITUIÇÕES DE ENSINO?	39

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – REVISÃO DE LITRATURA.....	19
TABELA 2 – CONCEPÇÕES DE LEM.....	36
TABELA 3 – COMO É O FUNCIONAMENTO DO LEM?	38
TABELA 4 – JUSTIFICATIVAS DA IMPLEMENTAÇÃO DO LEM.....	41

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

AA – Ângulo ângulo

CEP – Colégio Estadual do Paraná

DCE – Diretrizes Curriculares Estaduais

IFPI – Instituto Federal do Piauí

IME – Instituto de Matemática e Estatística

LABMATCEP – Laboratório de Matemática do Colégio Estadual do Paraná

LAL – Lado ângulo lado

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

LEM – Laboratório de Ensino de Matemática

LLL – Lado lado

NCTM – The Nacional Council of Teachers Of Mathematics

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PIBEX – Programa Institucional de Bolsas de Extensão

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PMM – Programa de Monitoria de Matemática

UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais

UFPR – Universidade Federal do Paraná

USP – Universidade de São Paulo

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LISTA DE SÍMBOLOS

$=$ - igual

\neq - diferente

\sim - semelhante

\cong - congruente

// - paralelos

Δ - triângulo

α – letra grega alfa

β – letra grega beta

γ – letra grega gama

\hat{A} – ângulo A

\hat{B} – ângulo B

\hat{C} – ângulo C

\overline{AB} – segmento AB

\overline{AC} – segmento AC

\overline{BC} – segmento BC

$\text{med}(\hat{A})$ – medida do ângulo A

$\text{med}(\hat{B})$ – medida do ângulo B

$\text{med}(\hat{C})$ – medida do ângulo C

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	METODOLOGIA	18
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	19
3	UM POUCO SOBRE O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA .	21
3.1	O QUE É UM LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA	21
3.2	OS MATERIAIS DO LEM	21
3.3	ALGUNS LABORATÓRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA.....	26
3.3.1	IME/USP.....	26
3.3.2	PMM/UFGM.....	27
3.3.3	IFPI.....	27
3.3.4	UFES.....	28
3.3.5	UTFPR.....	29
3.3.6	CEP	30
4	CONCEPÇÕES DE PROFESSORES SOBRE O LEM.....	33
4.1	APRESENTAÇÃO DOS DADOS.....	33
5	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	43
5.1	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS.....	43
5.2	RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	47
5.3	SUGESTÃO DE ATIVIDADE	49
5.3.1	Plano da Aula	50
5.3.2	Aplicação e Resultados	51
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS.....	59
	ANEXO 1 – QUESTIONÁRIO	59
	ANEXO 2 – ROTEIRO DE ATIVIDADES	59

1 INTRODUÇÃO

Ao ouvir o termo “Laboratório de Matemática”, uma boa parte das pessoas nem deve ter conhecimento do que se trata, ou até mesmo pode achar estranho. Quando se fala em “laboratório”, as disciplinas que vêm na mente são biologia, química e física; inclusive o cenário já é imaginado: em um laboratório de biologia há cientistas analisando algum tecido celular no microscópio, em um ambiente cercado de corpos de animais banhados no formol. Em um laboratório de química, haverá alguém misturando substâncias inflamáveis ou explosivas, onde há tubos de ensaio e béqueres com misturas; já no de física, algum cientista estará manipulando circuitos elétricos. Mas e no laboratório de matemática? O que é? Como é? O que tem lá? E o mais curioso: o que se faz lá?

Para entendermos o conceito de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), vamos inicialmente analisar o significado da palavra LABORATÓRIO. Segundo o Dicionário Unesp de Português Contemporâneo, o laboratório é o

“1. Local onde se realizam experiências, investigações científicas, análises, revelações fotográficas. 2. Atividade que serve como experiência ou aprendizado; oficina [...].”

Observamos que nas duas definições a palavra “experiência(s)” se faz presente, e exatamente este é o nosso foco. Laboratório é um ambiente voltado à experimentação. Nos laboratórios de biologia, química e física, cada um possui seus próprios materiais, porém todos tem um objetivo em comum: fazer experimentos.

Partindo desta definição, somos levados a concluir que o LEM é um lugar de “experimentos matemáticos”. Mas, o que seria um experimento matemático? É possível tal coisa vindo da matemática?

Nós professores de matemática observamos que muitas pessoas (seja aluno, pai de aluno e até nossos próprios parentes) têm em mente que a matemática é feita somente de “continhas” chatas, nunca pode se tornar interessante, nunca poderá ser concreta pois é abstrata demais. Contraditório, pois segundo uma pesquisa feita pela Ipsos Media CT – uma empresa de pesquisa de mercado – em 2014 (apud Redação

Bem Paraná, 2014¹), a matéria predileta entre crianças de 6 a 9 anos é a matemática. Por que este gosto muda com o tempo? Sabemos que no Ensino Fundamental I as crianças trabalham bastante com o lúdico e com o concreto, com jogos e brinquedos pedagógicos, com o material dourado e o ábaco. Não seria esse o (ou um dos) porquê?

Segundo o NCTM (The Nacional Council of Teachers Of Mathematics), em “An Agenda for Actions” publicada em 1980², as três primeiras recomendações para o ensino de matemática são que o ponto central da matemática deve ser a resolução de problemas; as capacidades básicas em Matemática devem ser definidas de forma que sejam incluídas mais atividades práticas e contextualizadas do que facilidades de cálculo; e é preciso que os programas de Matemática tirem todas as vantagens das capacidades das calculadoras e dos computadores em todos os níveis de ensino. Pensando nesta perspectiva de contemplar a contextualização e metodologias é que o LEM entra como protagonista. E melhor ainda, não somente para os pequenos, mas estende-se até o nível universitário.

Meu primeiro contato com o LEM foi em 2012 no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) em que participava de um grupo de alunos da graduação, éramos responsáveis por elaborar materiais para compor o acervo de um Laboratório de um Colégio público. Em 2015, fiz os estágios da disciplina Prática de Docência no CEP (Colégio Estadual do Paraná), a maior parte do tempo eu ajudava nas atividades do Laboratório, nos 2 semestres. No último trimestre de 2016, já formada, retornei ao laboratório CEP como laboratorista.

Aliando todo o meu interesse pelo laboratório com a necessidade da manipulação, decidi que este seria o tema principal do trabalho. Muitos professores não têm conhecimento sobre o LEM, portanto esta pesquisa ajudará a divulgar esse conceito.

Sendo assim, esta pesquisa tem por objetivo geral a divulgação de questões relacionadas ao Laboratório de Ensino de Matemática: concepções, materiais e funcionamento. Os objetivos específicos englobam: ampliar os conhecimentos acerca do LEM (o que é, como funciona, o que tem lá); verificar como está sendo usado (se

¹ Disponível em: <<https://www.bemparana.com.br/noticia/matematica-e-a-materia-favorita-dos-alunos->> acesso em nov. 2018.

² Disponível em: <<https://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/index.html>> acesso em jan. 2019.

está) nas escolas; pesquisar as concepções que professores de matemática têm sobre o Laboratório de Matemática; e finalizar descrevendo o desenvolvimento de uma atividade.

1.1 METODOLOGIA

Esta pesquisa possui cinco fases. A primeira fase constitui-se do embasamento teórico; primeiro foram pesquisados trabalhos, artigos e pesquisas sobre o tema laboratório de matemática; para a segunda fase foram pesquisadas informações sobre laboratórios das instituições pelo Brasil. A terceira procurou-se constatar sobre as concepções de laboratório para alguns professores; para isso foi aplicado um questionário *on-line*; a quarta fase foi elaboração e aplicação de uma atividade de laboratório para uma turma de Ensino Fundamental. E a última fase foi a de escrita e apresentação de todos os dados e conclusões das fases anteriores.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A principal bibliografia utilizada é o artigo de Lorenzato (2009), em capítulo publicado em seu livro “O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores” explica com detalhes a teoria que sustenta o LEM. No início, Lorenzato salienta a importância de cada profissional ter o seu próprio ambiente de trabalho, inclusive o professor. No decorrer o texto explica o que é um LEM, como se dá a sua construção, os materiais utilizados e termina com exemplos de aplicações de atividades que podem ser desenvolvidas.

Uma pesquisa muito interessante foi feita por Barreto (2014) em sua dissertação. A autora escreve sobre as concepções gerais do LEM, visitou 3 laboratórios para coleta de dados e aplicação de questionários sobre o funcionamento de cada um; analisando os dados, lançou uma proposta de aula baseada em suas conclusões.

Para a aplicação do questionário, o estudo de Refosco e Bassoi [2008?] foi de grande importância. As autoras também aplicaram um questionário para professores, indagando sobre o que eles entendiam por laboratório e a sua importância no ensino aprendizagem.

Estas foram as pesquisas principais; a tabela seguinte ilustra um panorama de alguns dos trabalhos que de certa forma contribuíram para o embasamento teórico deste trabalho.

TABELA 1 – REVISÃO DE LITERATURA

AUTOR	OBJETIVO	METODOLOGIA	PRODUTO/CONCLUSÃO
Lorenzato (2009)	Mostrar concepções, possibilidades e limites do LEM	Descrição de todos os elementos referentes ao LEM	Sugestão de atividades, juntamente com análise dos possíveis erros dos estudantes
Barreto (2014)	Mostrar as atuações e contribuições dos laboratórios e elaborar a construção de um LEM.	Visitas aos laboratórios e aplicação de questionários	Proposta de laboratórios em dois campi do Instituto Federal da Bahia
Gonçalves, Silva (2008)	Proposta de implantação de LEM nas escolas	Forte revisão bibliográfica, análise da utilização do LEM pelos professores e discussões	Aplicações de atividades, compartilhamento de experiências, vantagens e dificuldades acerca do LEM

Silva, Silva (2004)	Argumentar sobre a importância do LEM	Definir o LEM; estruturar a argumentação em itens: aspectos gerais, objetivos do LEM, implicações na didática, e apresentação do ambiente do LEM	O LEM é um ambiente privilegiado para o ensino aprendizagem; se usado adequadamente, promove melhoria no aprendizado dos alunos
Turrioni (2004)	Discutir abordagens para a formação de professores de matemática e como o LEM contribui nessas abordagens	Pesquisa qualitativa em um laboratório, com finalidade exploratória	O laboratório estudado foi inicialmente utilizado para o desenvolvimento profissional dos alunos da licenciatura; e depois foi usado para o desenvolvimento de pesquisas
Refosco, Bassoi (2008)	Investigar a existência e o uso do LEM nas escolas; identificar a concepção de professores acerca do laboratório; averiguar o uso dos materiais didáticos	Aplicação de questionário para uma amostra de 93 professores de matemática	Raras escolas possuem LEM; a concepção mais presente foi de uma sala-ambiente; os professores declaram fazer uso de materiais concretos
Ribas, Barone, Basso (2007)	Apresentar uma reflexão sobre o ensino-aprendizagem de matemática e o uso de materiais; levantar a utilização de tecnologias computacionais nesse processo	Aborda a resolução de problemas, com ênfase em desafios lógicos	Apresenta um protótipo de laboratório virtual de matemática para ser utilizado na abordagem

FONTE: A autora (2018)

3 UM POUCO SOBRE O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA (LEM)

3.1 O QUE É UM LEM?

Há várias definições e concepções acerca do que é um LEM; seja uma sala-ambiente, um depósito de materiais ou uma sala de estudos de matemática, muitos autores escreveram sobre o assunto, e poderemos ver que todos têm pontos em comum.

Lorenzato (2012), por exemplo, define o LEM de várias formas. Segundo ele, pode ser um local da escola onde os materiais são guardados, se tornando uma espécie de depósito; pode ser uma sala onde os professores preparam suas aulas e tiram dúvidas dos alunos; ou um ambiente destinado à criação e aplicação de aulas experimentais.

Rêgo e Rêgo (2012) descrevem que o LEM é o lugar próprio para o aluno experimentar e para o professor avaliar, livre da pressão do tradicionalismo da sala de aula, e também testar novos materiais e metodologias.

Ewbank (1971) usa o termo “laboratório de matemática” não apenas para denotar uma sala, mas um processo. Além de ser uma sala para experimentos matemáticos, o termo também é usado para a abordagem diferenciada em que os alunos fazem e descobrem matemática por eles mesmos, na própria sala de aula.

Para Silva e Silva (2004), o laboratório é um lugar onde os conhecimentos matemáticos são construídos e os recursos didáticos, materiais e propostas didáticas ganham vida; a criatividade e o dinamismo, individual ou em grupo, se expandem e tornam o trabalho mais eficaz e prazeroso.

3.2 OS MATERIAIS DO LEM

Acerca dos materiais presentes num LEM, os autores são praticamente unânimes. Lorenzato (2012) faz uma lista com vários materiais: livros, jogos, figuras, sólidos, calculadoras, instrumentos de medidas, problemas e questões de vestibulares, etc. De maneira similar fazem Silva & Silva (2004) e muitos outros autores.

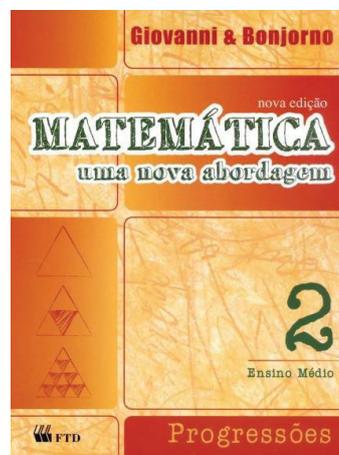
Gonçalves & Silva classificam os materiais do laboratório em categorias: equipamento tecnológico (calculadoras, computadores, *softwares*, etc); material didático para a geometria (sólidos, compassos, círculos trigonométricos, etc);

mobiliário (lousa, mesas, armários, etc); e por fim, materiais diversos (paquímetro, bússola, livros, etc).

Nota-se que os materiais que podem compor um LEM são dos mais diversos tipos, desde uma revista em quadrinhos até um software para o estudo de geometria dinâmica. Vejamos agora um pouco sobre os materiais mais citados entre os autores, estão:

- **Livros didáticos:** Segundo Furlani (2005), é um recurso do ensino, ligado a programas educacionais coerentes com a política pedagógica de cada escola e vinculado com uma política educacional maior, como a estabelecida pelo Governo Federal com a LDB (Lei de Diretrizes e Bases) – Lei 9493/96 e os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) - e também as DCE (Diretrizes Curriculares Estaduais), aqui no Estado do Paraná. São os livros comuns nas escolas, das disciplinas de Matemática, Português, História, Geografia, etc. Na matemática, podemos citar autores famosos de livros didáticos, como Luiz Roberto Dante, Gelson Iezzi, Giovanni Bonjorno, etc.

FIGURA 1 – LIVRO DIDÁTICO



FONTE: Site da Livraria Saraiva (2018)³

- **Livros paradidáticos:** Ainda segundo Furlani, são livros cujo conhecimento científico tangenciam as disciplinas do currículo oficial, sendo um complemento para os livros didáticos. Tais livros abordam um assunto em específico

³ Disponível em: < <https://www.saraiva.com.br/matematica-uma-nova-abordagem-2-ano-ensino-medio-progressoes-2-ed-2011-3691213.html> > Acesso em jul. 2018.

(meio ambiente, educação sexual, por exemplo). Um famoso livro paradidático no campo da matemática é “As Aventuras de Anselmo Curioso” de Jean Pierre-Petit.

FIGURA 2 – LIVRO PARADIDÁTICO



FONTE: Sebo do Messias (2018)⁴

- **Calculadora:** conhecida de todos, é a famosa máquina de calcular. Pode ser encontrada tanto na versão “simples” quanto na científica.

FIGURA 3 – CALCULADORA CIENTÍFICA



FONTE: Lojas Americanas (2018)⁵

⁴ Disponível em: < <https://sebodomessias.com.br/livro/paradidaticos/os-misterios-da-geometria-as-aventuras-de-anselmo-curioso.aspx>> Acesso em jul. 2018.

⁵ Disponível em: <https://www.americanas.com.br/produto/369015?pfm_carac=calculadora%20cient%20C3%ADfica&pfm_index=1&pfm_page=search&pfm_pos=grid&pfm_type=search_page%20> Acesso em jul. 2018,

Podemos citar aqui também o **ábaco**, basicamente uma calculadora primitiva.

FIGURA 4 - ÁBACO



FONTE: Lojas Americanas (2018)⁶

- **Softwares:** São úteis para o estudo de geometria dinâmica e também para o estudo do comportamento das funções. Os mais conhecidos são o *GeoGebra* e o *CarMetal*.
- **Paquímetro:** Usado bastante na física, é um instrumento de medida com precisão, muito usado para medir coisas pequenas.

FIGURA 5 - PAQUÍMETRO



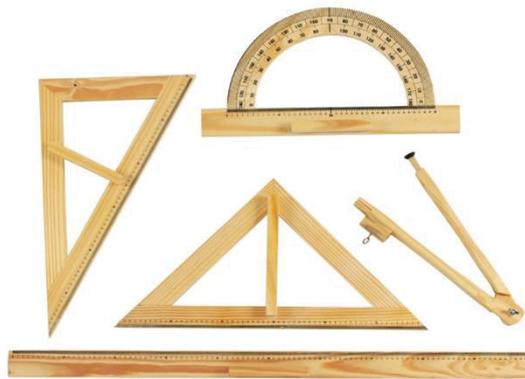
⁶

Disponível em:
<https://www.americanas.com.br/produto/121244036?DCSext.recom=RR_search_page.rr1-SolrSearchToView&nm_origem=rec_search_page.rr1-SolrSearchToView&nm_ranking_rec=8>
Acesso em jul. 2018.

FONTE: Lojas Americanas (2018)⁷

- **Compasso, régua e transferidor:** Imprescindíveis para uma aula de desenho geométrico.

FIGURA 6 – TRANSFERIDOR, COMPASSO, RÉGUA E ESQUADROS



FONTE: Site da Loja Apoio (2018)⁸

- **Ciclo trigonométrico:** Também chamado de prancha trigonométrica, auxilia muito na visualização do seno, cosseno e tangente dos arcos. Pode ser confeccionada pelos estudantes no próprio laboratório.

FIGURA 7 – PRANCHA TRIGONOMÉTRICA



FONTE: Site Matemática Animada (2018)⁹

⁷ Disponível em: <https://www.americanas.com.br/busca/paquimetro?chave_search=acterm&rc=paqu%C3%ADmetro> Acesso em jul. 2018.

⁸ Disponível em: <<http://www.lojaapoio.com.br/recurso-para-sala-de-aula/recursos-pedagogicos/kit-de-desenho-geometrico-para-professor-em-madeira>> Acesso em nov. 2018.

⁹ Disponível em: <<https://www.matematicaanimada.com.br/prancha-trigonometrica>> Acesso em jul. 2018.

- **Modelos de Sólidos geométricos:** São ocós e feitos de acrílico. Muitos alunos têm dificuldade em abstrair o tridimensional, os sólidos propiciam essa visualização, principalmente da profundidade.

FIGURA 8 – SÓLIDOS GEOMÉTRICOS DE ACRÍLICO



FONTE: Site Brink Mobil (2018)¹⁰

3.3 ALGUNS LABORATÓRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Nesta seção serão citados alguns exemplos de Laboratórios de Matemática de algumas instituições. Todas as informações foram pesquisadas nos respectivos sites da instituição, sendo os principais resultados apresentados pelo Google para “Laboratórios de Ensino de Matemática”.

3.3.1 IME/USP

O LEM do IME (Instituto de Matemática e Estatística) da USP (Universidade de São Paulo) é voltado para os professores de ensino fundamental e médio, e também para qualquer um que tenha interesse no ensino e aprendizagem de matemática.

Os objetivos são desenvolver atividades de matemática que permitam que o estudante tenha uma participação ativa; utilizar os computadores como ferramenta principal nesse processo; e proporcionar aos professores reciclagem em diversos tópicos de matemática.

¹⁰ Disponível em: <<http://www.brinkmobil.com.br/brinquedos/103/solidos-geometricos-em-acrilico/>> Acesso em jul. 2018.

São ofertados cursos dentro do programa de verão, estruturados a partir de problemas-desafio, com apostilas que possuem linguagem acessível e utilizando o computador como catalisador de todo o processo.

3.3.2 PMM/UFMG

O LEM da UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais) é um projeto do PMM (Programa de Monitoria de Matemática), onde os alunos da graduação encontram apoio para diversas atividades acadêmicas do curso, projetos de pesquisa, ensino e extensão. Lá os alunos têm aulas das disciplinas, preparam trabalhos e realizam tarefas extraclasse.

Possui biblioteca própria, videoteca e diversos materiais manipulativos, que visam o aperfeiçoamento na formação dos acadêmicos da licenciatura.

FIGURA 9 – LEM UFMG



FONTE: UFMG (2018)¹¹

3.3.3 IFPI

¹¹ Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~lem/>> Acesso em jul. 2018.

O LEM do IFPI (Instituto Federal do Piauí), campus de Teresina foi inaugurado em 2013. É um espaço onde o professor e o aluno dão expansão à criatividade, dinamizam o trabalho e enriquecem as atividades, tornando o ensino da matemática mais prazeroso.

O mesmo instituto também possui um LEM no campus Uruçuí, que foi inaugurado no dia 6 de maio de 2015 (dia da matemática), estruturado pelo PIBEX (Programa Institucional de Bolsas de Extensão) e PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência).

FIGURA 10 – LEM IFPI



FONTE: Site Projeto Educativo Mãos Dadas (2018)¹²

3.3.4 UFES

O Laboratório de Matemática da UFES (Universidade Federal do Espírito Santo) é voltado para os alunos do curso de licenciatura em matemática, lá são ministradas aulas práticas pelos professores do departamento. Também são desenvolvidas nesse ambiente as disciplinas de estágio, geometrias e toas que possuem carga horária de laboratório.

FIGURA 11 – LABORATÓRIO UFES

¹² Disponível em: < <http://pemaosdadas.blogspot.com/2018/06/projeto-labmat-leva-alunos-ao-ifpi.html> > Acesso em jul. 2018.



FONTE: Site da UFES (2018)¹³

3.3.5 UTFPR

O LEM da UTFPR está localizado no campus de Cornélio Procópio e atende os alunos do curso de licenciatura. É o local onde se ministra a disciplina Laboratório de Matemática e qualquer atividade de pesquisa e extensão que esteja relacionada ao curso.

FIGURA 12 – LEM UTFPR (CAMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO)

¹³ Disponível em: <<http://www.matematica.ufes.br/pt-br/leama>> Acesso em jul. 2018.



FONTE: Site da UTFPR (2018)¹⁴

3.3.6 CEP

Como mencionei na introdução, tive contato direto com o Laboratório de Matemática do CEP (LabmatCEP), então poderei detalhar mais a respeito deste LEM. Foi implantado em 2010, fruto de discussões do grupo de professores com o objetivo de diversificar o ensino de matemática. De acordo com o site do Laboratório, em março de 2011, foi decidida a proposta de funcionamento do laboratório

:

“a) todos os alunos deveriam ter práticas de laboratório, em todas as séries, e com periodicidade coerente; b) as práticas deveriam respeitar o tempo didático disponível; c) as práticas deveriam possuir um relatório que organizasse o trabalho de investigação por parte dos alunos; d) as práticas deveriam sempre que possível associar materiais práticos com recursos de softwares; e) o laboratório deveria ser um local de pesquisa tanto para alunos como para professores; f) os materiais e as experiências deveriam ser compartilhados, com outros professores de matemática de outras instituições de ensino.”

O primeiro passo foi buscar uma sala para o Laboratório, a Direção disponibilizou a sala 313c, no 3º andar da ala ímpar. Inicialmente a sala estava cheia

¹⁴ Disponível em: <<http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/Ofertados-neste-Campus/matematica/laboratorios/arquivos/28%20-800x683.jpg/view>> Acesso em jul. 2018.

de livros didáticos, que foram retirados pelo Professor Tony Groch. O segundo passo foi decidir a configuração do mobiliário na sala, que através de votação, foi decidido que ao redor da sala ficariam os computadores e ao meio as 12 bancadas, com 3 banquetas cada, como9 poder ser visto na figura 13.

FIGURA 13 – LEM DO CEP



FONTE: Site do LABMATCEP (Laboratório de Matemática do Colégio Estadual do Paraná) (2018)¹⁵

No tempo de laboratorista pude viver a experiência e dinâmica do laboratório. O LABMATCEP atende todas as turmas do colégio, do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, cada turma vai 4 vezes ao ano para o Laboratório para terem uma aula prática, envolvendo o conteúdo que estão aprendendo em sala de aula. Os alunos sentam em trios nas bancadas, onde já estão o roteiro de atividades e o material necessário para a aula. Inicialmente o professor laboratorista explica o que eles devem fazer e então os alunos fazem as atividades práticas e preenchem o roteiro (instrumento avaliativo). Quem corrige os roteiros é o professor laboratorista que ministrou a aula, o valor é de 1,0 na média, nota insubstituível, tendo o aluno que solicitar 2ª chamada caso falte. Também ocorrem lá aulas de robótica para estudantes do contra turno.

É importante citar que os laboratórios certamente desenvolvem diversas atividades e projetos que não estão registrados nas páginas. É uma pena, pois seria

¹⁵ Disponível em: <<http://labmatcep.wixsite.com/labmatcep/blank-yx79u>> Acesso em jul. 2018.

fundamental ter descrições no site, tanto para replicar as atividades quanto para compartilhar projetos que por vezes são comuns a várias instituições que obtiveram soluções diferentes à problemas encontrados. Podemos incluir a divulgação como parte das atividades do LEM, descrições das atividades e relatórios; em geral se faz muita coisa, mas não se registra, e isso deveria ser feito.

4 CONCEPÇÕES DE PROFESSORES SOBRE O LEM

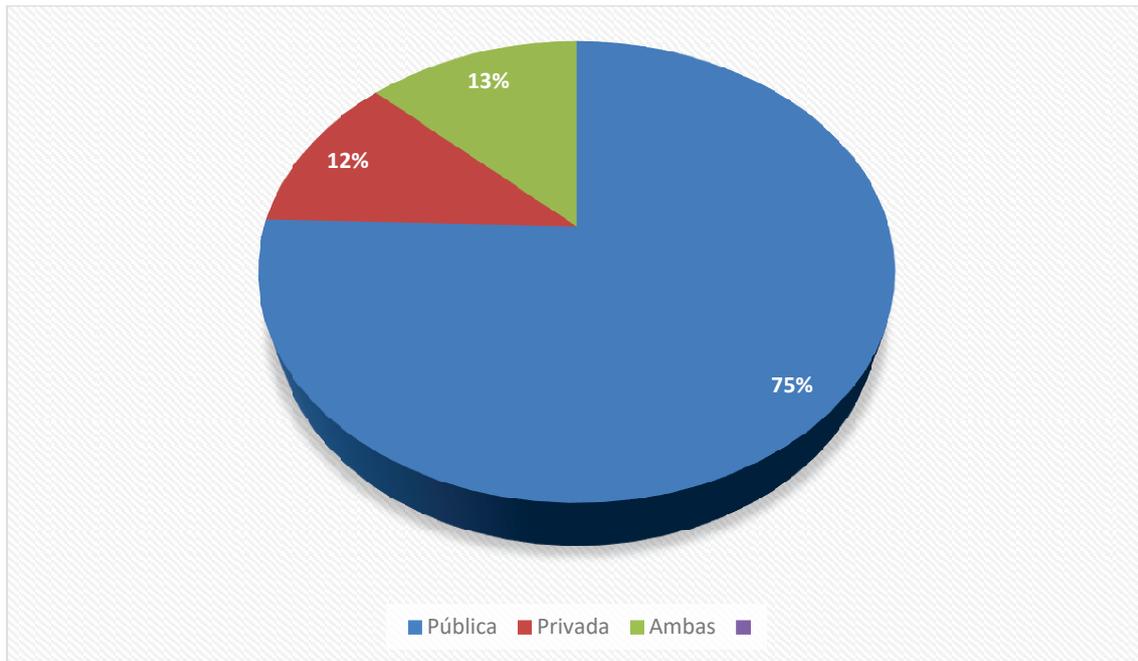
Uma primeira atividade exploratória para balizar o estudo posterior que tinha em mente, foi realizar um questionário *online* para coletar informações, com o objetivo de verificar como professores de matemática entendem o termo “Laboratório de Matemática”,. A divulgação foi realizada para os colegas da UFPR (Universidade Federal do Paraná), professores próximos (principalmente das redes sociais) e em quatro grupos de professores de uma rede social. As seis questões foram respondidas por 330 professores. Os participantes lecionam em vários níveis de ensino em instituições públicas e/ou privadas do país. As perguntas contidas nesse instrumento foram as seguintes (os *printscreens* do questionário estão todos nos anexos):

1. Sobre as escolas que leciona (As opções eram: “apenas pública”, “apenas privada” e “ambas”).
2. Sobre os níveis que leciona (As opções contemplavam do Ensino Fundamental I até o Ensino Superior).
3. O que você entende por Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)? (Esta pergunta era descritiva, o participante dissertava conforme seu conhecimento)
4. A(s) instituição(ões) em que leciona possui(em) LEM? (Naturalmente as opções eram “sim” ou “não”)
5. No caso de possuir, como é o funcionamento? Se puder, informe também o nome da instituição e onde se localiza. (Esta pergunta também era descritiva)
6. Na sua opinião, as instituições deveriam implantar o LEM? Por que? (Novamente o participante escreveu sua opinião)

4.1 APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Para facilitar a leitura, os dados serão organizados em gráficos com suas respectivas porcentagens. A seguir, está ilustrado o gráfico da primeira pergunta:

GRÁFICO 1 – SOBRE A(S) INSTITUIÇÃO(ES) QUE LECIONA

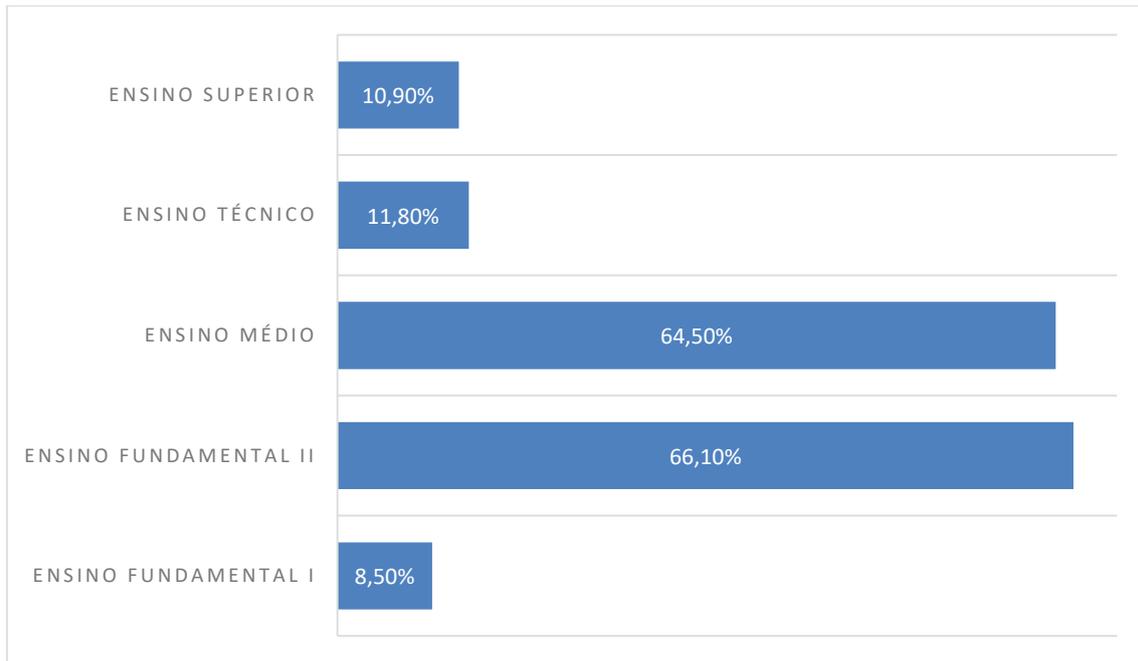


FONTE: A autora (2018).

Temos que 249 professores trabalham somente em escola(s) pública(s), totalizando aproximadamente 75%; 38 professores trabalham apenas em escola(s) privada(s), aproximadamente 11,5%; e 43 lecionam em ambas, totalizando 13%.

A próxima pergunta aborda os níveis de ensino dos professores. Note que as porcentagens não totalizam 100%, devido ao fato de alguns professores se encaixarem em mais de um nível de ensino. Temos que 8,5% dos entrevistados lecionam no Ensino Fundamental I; 66,1% no Ensino Fundamental II; 64,5% no Ensino Médio; 11,8% no Ensino Técnico; e 10,9% no Ensino Superior. As respostas dos professores que lecionam apenas no Ensino Superior foram consideradas porque ministram disciplinas e/ou cursos voltados para a formação docente. O gráfico abaixo mostra com mais clareza as porcentagens:

GRÁFICO 2 – SOBRE O(S) NÍVEL(IS) QUE LECIONA



FONTE: A autora (2018).

A terceira pergunta diz respeito à concepção de LEM por parte do participante. Como mencionado anteriormente, esta questão era aberta/dissertativa e o professor deveria escrever a sua opinião; o primeiro fato observado foi a quantidade de participantes que simplesmente escreveram a palavra “Outro” como resposta: 221, totalizando praticamente 67% da amostra. O restante das respostas (33% - 109 respostas) foi agrupado em categorias para melhor organização estatística; as categorias com suas respectivas porcentagens foram:

- 1) Espaço com materiais para ensino-aprendizagem – 22%
- 2) Ambiente para trabalhar a matemática de forma lúdica (com jogos e/ou materiais manipuláveis) – 19,3%
- 3) Local onde a matemática é provada/ensinada de forma prática/experimental/empírica/concreta – 18,3%
- 4) Lugar onde se coloca em prática a teoria aprendida em sala de aula – 8,25%
- 5) Nada/desconheço – 8,25%
- 6) Espaço para auxiliar o estudante na construção do conhecimento (individual e/ou coletivo) – 6,4%
- 7) Sala-ambiente de ensino-aprendizagem – 5,5%
- 8) Espaço para auxiliar o professor no processo de ensino – 4,6%
- 9) Local de aulas diferenciadas – 2,75%

10) Outros. Esta categoria contempla local para dinamização das aulas; local de suporte ao ensino-aprendizagem; ambiente colaborativo; espaço especial para aulas de matemática; e sala de estudos de matemática – 4,6%

A seguir uma tabela ilustrativa:

TABELA 2 – CONCEPÇÕES DE LEM

CATEGORIA	FREQUÊNCIA	PORCENTAGEM
Espaço com materiais para ensino-aprendizagem	24	22%
Ambiente para trabalhar a matemática de forma lúdica (com jogos e/ou materiais manipuláveis)	21	19,3%
Local onde a matemática é provada/ensinada de forma prática/experimental/empírica/concreta	20	18,3%
Lugar onde se coloca em prática a teoria aprendida em sala de aula	9	8,25%
Nada/desconheço	9	8,25%
Espaço para auxiliar o estudante na construção do conhecimento (individual e/ou coletivo)	7	6,4%
Sala-ambiente de ensino-aprendizagem	6	5,5%
Espaço para auxiliar o professor no processo de ensino	5	4,6%
Local de aulas diferenciadas	3	2,75%
Outros	5	4,6%
TOTAL	109	100%

FONTE: A autora (2018)

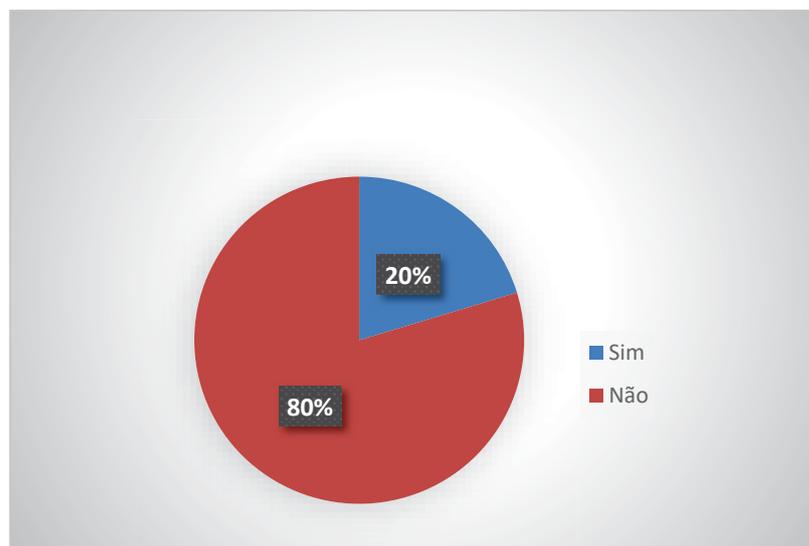
Houveram respostas interessantes e completas, que se encaixaram em mais de uma categoria; abaixo estão exemplos de respostas enviadas:

- “Um lugar onde nossos alunos podem explorar as maravilhas da matemática e onde acabam quebrando os mitos que a matemática não tem nada de interessante; além do mais foge do tradicionalismo.”

- “Local de execução prática dos conceitos teóricos abordados em sala de aula. É uma experiência pragmática das relações abstratas inseridas nos acontecimentos matemáticos.”
- “São ambientes nos quais os alunos aprendem Matemática fazendo-a (materializando o conhecimento) e usando os sistemas computacionais como ferramenta catalisadora deste processo.”
- “O laboratório de ensino de matemática seria um ambiente da escola equipado com materiais concretos, jogos e recursos tecnológicos para proporcionar um ensino de matemática pautado na curiosidade, descoberta, exploração e investigação. Muito além de um "depósito." de materiais, esse ambiente deve proporcionar ao professor uma possibilidade de desenvolvimento de aulas dinâmicas que promovam nos alunos o interesse pela matemática.”

A quarta pergunta indagava se a(s) escola(s) em que o docente trabalha possui(em) LEM. Podemos observar que 79,7% das escolas dos entrevistados não possui laboratório e somente 20,3% das escolas o possuem.

GRÁFICO 3 – A(S) INSTITUIÇÃO(ÕES) EM QUE LECIONA POSSUI(EM) LEM?



FONTE: A autora (2018)

A próxima pergunta era sobre o funcionamento do LEM na instituição em que trabalha. Novamente era uma questão dissertativa e por isso as respostas foram agrupadas em categorias em 7 categorias. Boa parte dos professores escreveram

“não possui” e “não se aplica” (que não foram contabilizados, pois a pergunta se dirigia apenas aqueles que lecionam em instituição que possui LEM), porém também haviam bons relatos que se enquadravam em mais de uma categoria. Portanto, a respeito de como funciona o LEM, foram citados:

- 1) São desenvolvidas atividades práticas, envolvendo conteúdos vistos em sala (aliando a teoria com a prática) – 28,30%
- 2) O professor usa o LEM mediante agendamento prévio – 20,75%
- 3) O LEM é utilizado na formação de docentes e/ou atividades extracurriculares e extensão (oficinas, palestras, minicursos, etc.) – 20,75%
- 4) A instituição possui uma sala (temática) com materiais, porém não possui laboratorista para orientação – 15,09%
- 5) Local para atividades de fixação – 5,66%
- 6) São realizadas atividades no contraturno (reforço, robótica, aulas para OBMEP, sala de recursos, etc.) – 5,66%
- 7) Disponibiliza materiais para serem usados pelo professor – 3,79%

A tabela a seguir ilustra os dados:

TABELA 3 – COMO É O FUNCIONAMENTO DO LEM?

CATEGORIA	FREQUÊNCIA	PORCENTAGEM
São desenvolvidas atividades práticas, envolvendo conteúdos vistos em sala (aliando a teoria com a prática)	15	28,30%
O professor usa o LEM mediante agendamento prévio	11	20,75%
O LEM é utilizado na formação de docentes e/ou atividades extracurriculares e extensão (oficinas, palestras, minicursos, etc.)	11	20,75%
A instituição possui uma sala (temática) com materiais, porém não possui laboratorista para orientação	8	15,09%
Local para atividades de fixação	3	5,66%
São realizadas atividades no contraturno (reforço, robótica, aulas para OBMEP, sala de recursos, etc.)	3	5,66%

Disponibiliza materiais para serem usados pelo professor	2	3,79%
TOTAL	53	100%

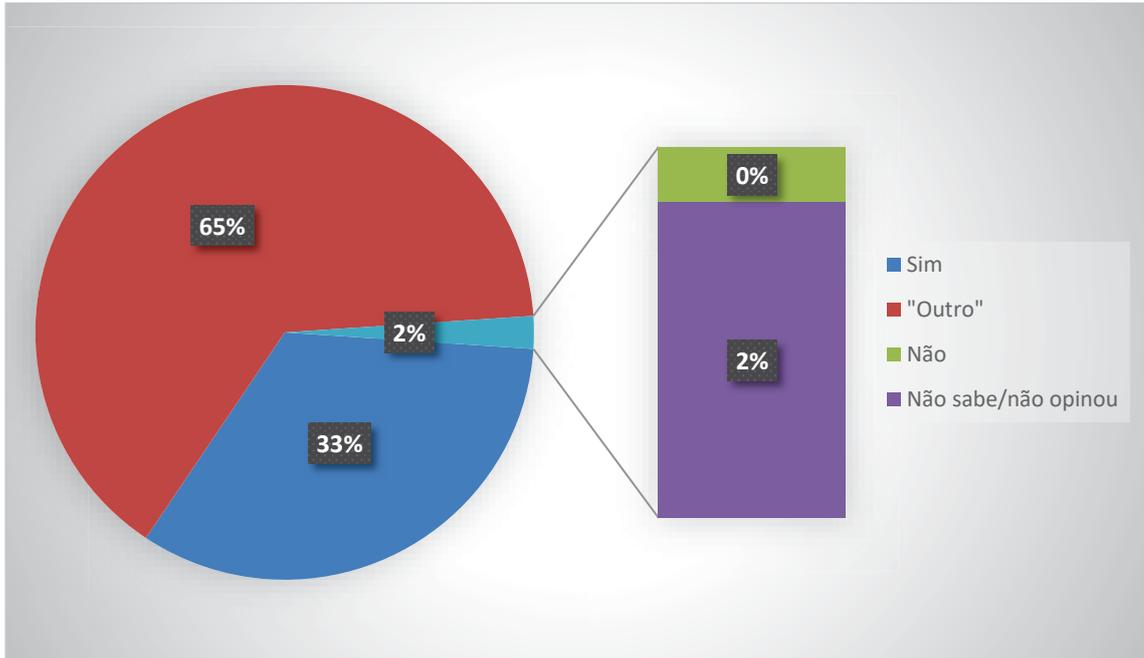
FONTE: A autora (2018)

Também podemos citar aqui algumas respostas interessantes à esta pergunta:

- “No decorrer do tempo as práticas vão se tornando cada vez mais elucidativas no aspecto didático, esclarecedoras no aspecto construtivo e sofisticadas no tratamento da informação pretendida.”
- “No laboratório de Matemática da escola onde trabalho, tem um professor de Matemática contratado pela Secretaria do Estado, esse profissional ministra aulas de reforço no contraturno para alunos de qualquer série. Também é desenvolvido um projeto de Lego, voltado para a Robótica intitulado "Robotic League" o qual participa de diversos campeonatos. Além do mais são desenvolvidas mini oficinas sobre diversos temas, de acordo com cada série. Também são realizados simulados com questões de edições passadas da OBMEP. Este ano será realizada a Primeira Feira de Matemática.”
- “O laboratório funciona em uma sala específica equipada com materiais adequados com professor laboratorista. Todos os alunos realizam práticas avaliativas pelo menos quatro vezes durante o ano letivo.”

A sexta e última pergunta era dissertativa e englobava duas etapas, a primeira indagava se o professor era a favor da implantação do LEM. Assim como anteriormente, a quantidade de opiniões apenas escrito “outro” se sobressaiu: 64,54%, equivalente a 213 respostas; 110 concordam com a implantação (33,33% em porcentagem); 6 pessoas não sabem ou não opinaram (1,81%); e curiosamente, uma pessoa discorda com a implantação do LEM nas instituições (0,32%). O gráfico de setores a seguir apresenta os dados com maior clareza:

GRÁFICO 4 – O LEM DEVERIA SER IMPLANTADO NAS INSTITUIÇÕES DE ENSINO?



FONTE: A autora (2018)

A segunda parte da pergunta era a justificativa do “sim” ou do “não”. As respostas também foram agrupadas em categorias, lembrando que houveram respostas que não possuíam justificativa e também aquelas que se enquadravam em mais de uma. As categorias são 11:

- 1) Torna a aula atrativa/dinâmica e estimula o interesse dos alunos – 21,10%
- 2) Torna o ensino próximo da realidade dos estudantes (a prática e/ou concreto aliados com a teoria) – 20,18%
- 3) Contribui para a aprendizagem significativa – 18,34%
- 4) Dá mais ferramentas, recursos e/ou instrumentos pedagógicos ao professor – 9,17%
- 5) Ajuda o aluno a criar estratégias e desenvolver o raciocínio lógico – 7,34%
- 6) Possibilita aos alunos a manipulação e manuseamento de objetos – 6,42%
- 7) Auxilia na construção do conhecimento matemático – 5,50%
- 8) Melhora o ensino – 5,50%
- 9) Proporciona enriquecimento da aula – 2,75%
- 10) Melhora a relação professor-aluno – 1,85%
- 11) Os alunos gostam (ou iriam gostar) – 1,85%

A tabela abaixo resume os dados obtidos:

TABELA 4 – JUSTIFICATIVAS DA IMPLEMENTAÇÃO DO LEM

CATEGORIA	FREQUÊNCIA	PORCENTAGEM
Torna a aula atrativa/dinâmica e estimula o interesse dos alunos	23	21,10%
Torna o ensino próximo da realidade dos estudantes (a prática e/ou concreto aliados com a teoria)	22	20,18%
Contribui para a aprendizagem significativa	20	18,34%
Dá mais ferramentas, recursos e/ou instrumentos pedagógicos ao professor	10	9,17%
Ajuda o aluno a criar estratégias e desenvolver o raciocínio lógico	8	7,34%
Possibilita aos alunos a manipulação e manuseamento de objetos	7	6,42%
Auxilia na construção do conhecimento matemático	6	5,50%
Melhora o ensino	6	5,50%
Proporciona enriquecimento da aula	3	2,75%
Melhora a relação professor-aluno	2	1,85%
Os alunos gostam (ou iriam gostar)	2	1,85%
TOTAL	109	100%

FONTE: A autora (2018)

Novamente obtivemos ótimas justificativas para a implantação do LEM, podemos destacar as seguintes:

- “Com certeza! Acredito que esse tipo de ambiente tem muito a contribuir com o ensino e com a aprendizagem da Matemática, tendo em vista que grande parte dos alunos considera a Matemática como uma disciplina difícil e meramente teórica. Além de que, por meio do LEM, os docentes podem ter maiores chances de tornar essa disciplina mais atrativa para os alunos, para

então motivá-los a serem coautores na busca pela construção de conhecimento matemático.”

- “Ele [o LEM] contribui muito com o aprendizado do aluno, é motivador e cooperativo. Os alunos realizam as práticas pedagógicas em grupo o que traz uma relação de interação e descobertas. As aulas ficam mais dinâmicas e os alunos sempre querem voltar ao laboratório.”
- “O aluno será incentivado a trilhar os passos que um matemático segue em sua busca por novos resultados, tendo a oportunidade de descobrir na prática como "funciona" a Matemática e de sentir o prazer das descobertas intelectuais.”

Não poderíamos deixar de fora a justificativa curiosa da única pessoa que se posicionou contra a implementação do LEM:

- “Os alunos não estão preparados psicologicamente para receber este ensino [...]. Quando as escolas públicas tiverem quadros decentes para escrever equações sobre qualquer tema e sobre a verdadeira matemática (valores e compromisso em aprender) então a escola pública fará sua presença de não mascarar o ensino [...].”

Com efeito, todas as respostas às perguntas da pesquisa foram de grande importância, revelando fatos relevantes para enriquecer este estudo.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção consta uma sugestão de atividade relacionada ao tema “Relações Métricas no Triângulo Retângulo”, voltada para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A atividade foi desenvolvida recentemente pelas professoras Jeane de Britto – laboratorista do LABMATCEP – e Antônia Dotto – professora do Ensino Médio Regular do CEP, e aplicada nas aulas de laboratório para as turmas de 9ºs anos do colégio; porém me permitiram a adaptação e aplicação para meus alunos para fins de pesquisas acadêmicas e também para elaboração da descrição da aula e seu plano, seguindo minha própria metodologia.

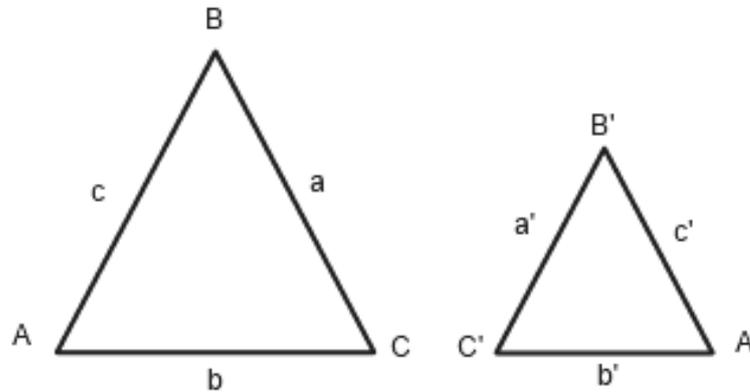
Esta seção está dividida em duas partes, a primeira traz a teoria sobre semelhança de triângulos e a segunda uma sugestão de atividade para o Laboratório de Matemática, abordando um pouco a respeito da teoria por trás das relações métricas do triângulo retângulo e semelhança de triângulos.

5.1 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Após toda a teoria de Proporcionalidade e Semelhança de Figuras, vamos ser mais específicos e tratar somente sobre triângulos. Para abordar a semelhança de triângulos neste trabalho usamos os livros “Vontade de Saber Matemática”, livro didático de Joamir Souza, e “Geometria Moderna”, livro acadêmico de Moise & Downs.

Definição: Dois triângulos são ditos **semelhantes** se os ângulos internos correspondentes forem congruentes e os lados correspondente proporcionais. Indicamos por $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (ΔABC é semelhante ao triângulo $\Delta A'B'C'$)

FIGURA 14 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES



FONTE: A autora (2018)

Podemos imediatamente escrever as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{med } (\hat{A}) &= \text{med } (\hat{A}') \\ \text{med } (\hat{B}) &= \text{med } (\hat{B}') \\ \text{med } (\hat{C}) &= \text{med } (\hat{C}') \end{aligned} \quad \text{e} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Dada a definição de triângulos semelhantes, seguimos com os teoremas fundamentais sobre semelhança:

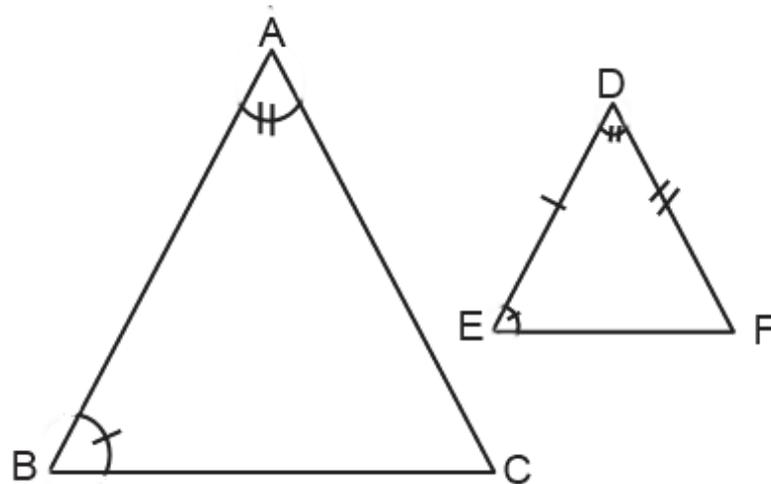
Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados, então ela divide-os em segmentos proporcionais. A recíproca deste teorema é igualmente verdadeira.

A partir deste, damos continuidade com os três teoremas (casos) de semelhança de triângulos.

Teorema 1 (AA – Ângulo Ângulo): Se dois triângulos possuírem dois ângulos correspondentes congruentes, então eles serão semelhantes.

Demonstração: Como temos por hipótese que os ângulos internos são congruentes, basta mostrar que os lados serão proporcionais. Considere dois triângulos, ΔABC e ΔDEF , que possuem dois ângulos internos congruentes:

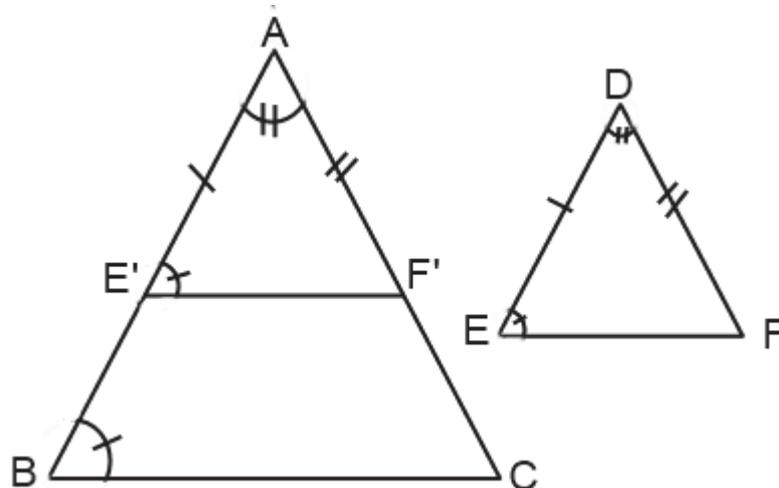
FIGURA 15 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES



FONTE: A Autora (2018)

Precisamos mostrar que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Sem perda de generalidade, vamos mostrar que a primeira dessas equações é válida. Considere E' e F' pontos de \overline{AB} e \overline{AC} , tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$, como ilustra a figura:

FIGURA 16 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES



FONTE: A autora (2018)

Temos dois casos a considerar:

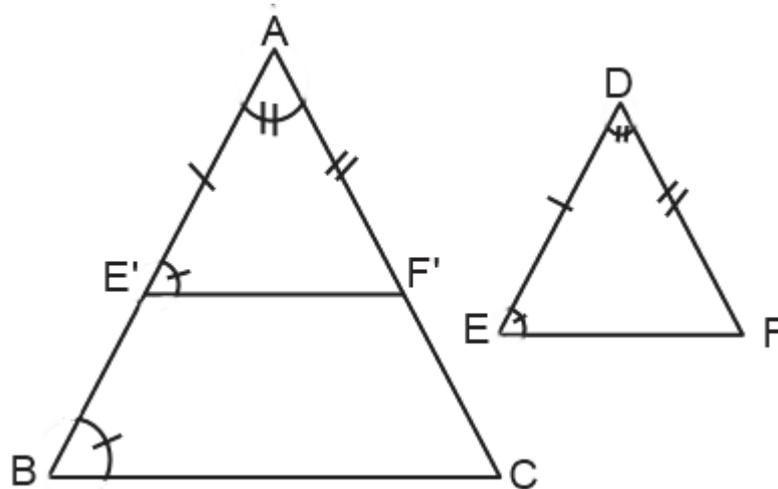
1) Se $E' = B$, então $\triangle AE'F'$ e $\triangle ABC$ são o mesmo triângulo, e nesse caso, $AB = AE'$ e $AC = AF'$. Logo, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ($\triangle ABC$ é congruente ao triângulo $\triangle DEF$) e portanto $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, pois cada uma dessas frações é igual a 1. De modo análogo é possível demonstrar as outras duas igualdades. Logo, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

2) Se $E' \neq B$, então $\overline{E'F'}$ e \overline{BC} serão paralelos. Pelo teorema da proporcionalidade, teremos que $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{DF'}$, como $AE' = DE$ e $AF' = DF$, segue que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Analogamente, é possível mostrar as outras igualdades. Portanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Teorema 2 (LAL – Lado Ângulo Lado): Se dois triângulos possuírem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles congruentes, então os triângulos serão semelhantes.

Demonstração: Sejam E' e F' pontos de \overline{AB} e \overline{AC} tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

FIGURA 17 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES



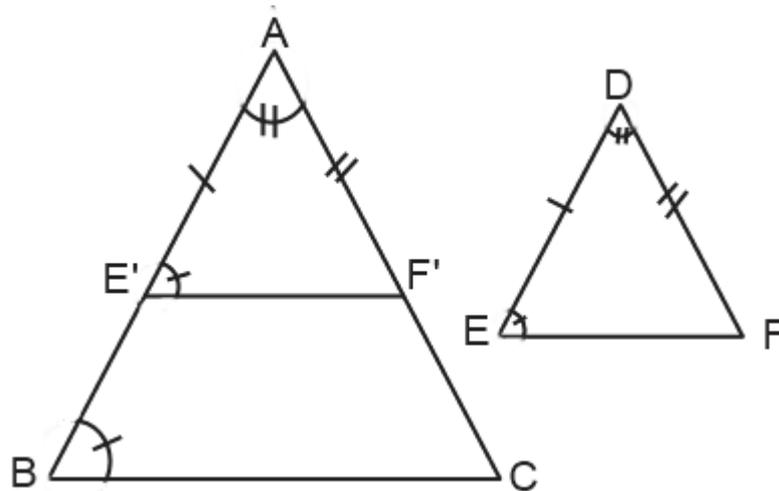
FONTE: A Autora (2018)

Por LAL, temos que $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$. Portanto $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Pela recíproca do Teorema da Proporcionalidade, teremos que $\overline{E'F'} \parallel \overline{BC}$, então o ângulo \hat{B} é congruente ao ângulo $\angle AE'F'$. Como o ângulo \hat{A} é congruente a ele mesmo, recaímos ao caso AA em que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$. Mas $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$, portanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Teorema 3 (LLL – Lado Lado Lado): Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então eles serão semelhantes.

Demonstração: Novamente, considere E' e F' pontos de \overline{AB} e \overline{AC} tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

FIGURA 18 – PAR DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES



FONTE: A Autora (2018)

Por hipótese, temos que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ e também que $AE' = DE$ e $AF' = DF$, substituindo, concluímos que $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Como o ângulo \hat{A} é sempre congruente a ele mesmo, temos que $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$, pelo caso LAL anterior.

Por definição de semelhança, temos que $\frac{EF'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$, portanto, podemos afirmar que

$$1) AE' = DE \text{ (hipótese), então } EF' = \frac{AE'}{AB} BC = \frac{DE}{AB} BC$$

$$2) EF = \frac{DE}{AB} BC \text{ (também da hipótese)}$$

Logo, $EF' = EF$ e portanto, $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ (por LLL). E portanto, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, como queríamos demonstrar.

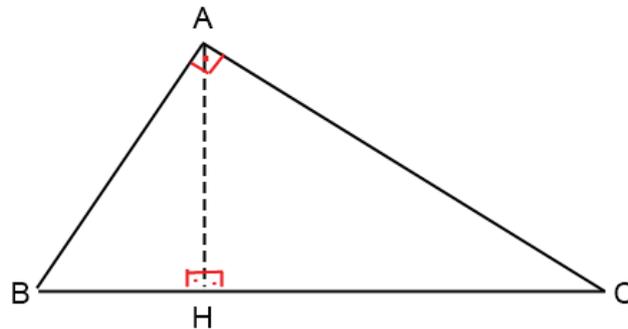
Depois de estudados os casos de semelhança, prosseguimos com as relações métricas no triângulo retângulo.

5.2 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Teorema: Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois outros triângulos retângulos, que são semelhantes ao maior e, conseqüentemente, semelhantes entre si.

Demonstração: Considere o triângulo retângulo:

FIGURA 19 – TRIÂNGULO RETÂNGULO



FONTE: A Autora (2018)

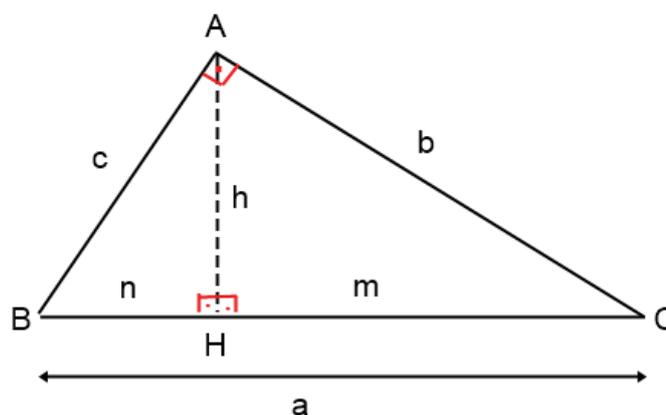
Note que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$ têm um par de ângulos correspondentes congruentes (o ângulo \widehat{B} que é comum aos dois e o ângulo reto), portanto, pelo caso AA, $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

Analogamente acontece nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$, possuem ambos um ângulo reto e um ângulo em comum, portanto $\triangle ABC \sim \triangle HAC$. De modo similar, é possível mostrar que $\triangle HBA \sim \triangle HAC$.

Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$.

A partir da semelhança destes triângulos, podemos estabelecer algumas relações entre as medidas de seus lados, que estão descritas a seguir:

FIGURA 20 – TRIÂNGULO RETÂNGULO E SEUS ELEMENTOS



Fonte: A Autora (2018)

a: medida da hipotenusa

b e c: medidas dos catetos

h: medida da altura relativa à hipotenusa

m e n: medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa (sendo $a = m + n$)

Em relação aos triângulos ΔABC e ΔABH , temos:

- $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow a.h = b.c$
- $\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a.n$
- $\frac{c}{n} = \frac{b}{h} \rightarrow c.h = b.n$

Em relação aos triângulos ΔABH e ΔAHC , temos:

- $\frac{c}{b} = \frac{h}{m} \rightarrow c.m = b.h$
- $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow h^2 = m.n$
- $\frac{c}{b} = \frac{n}{h} \rightarrow c.h = b.n$

Finalmente, em relação aos triângulos ΔABC e ΔAHC , temos:

- $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a.m$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \rightarrow a.h = b.c$
- $\frac{c}{h} = \frac{b}{m} \rightarrow c.m = b.h$

Portanto, as relações são:

- 1) $ch = bn$
- 2) $cm = bh$
- 3) $ah = bc$
- 4) $b^2 = am$
- 5) $c^2 = na$
- 6) $h^2 = mn$

5.3 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Para aplicação desta atividade, foram escolhidas duas turmas de 9ºs anos de um colégio situado no bairro Bacacheri, em Curitiba, onde leciono. O colégio não possui um espaço física para LEM, então a atividade teve que ser adaptada para a

sala de aula usual, fato que não impediu sua aplicação. A seguir se encontra o plano de aula (escrito por mim) da atividade.

5.3.1 Plano da Aula

Aqui se encontram os objetivos e detalhamento de cada etapa da atividade:

Assunto: Geometria Plana

Assunto específico: Relações métricas no triângulo retângulo

Objetivo: Entender o porquê das relações métricas; aguçar o pensamento dedutivo matemático do aluno.

Pré-requisito: Semelhança de triângulos

Série/ano: 9º ano do Ensino Fundamental

Duração: Aproximadamente 3 ou 4 aulas

Recursos didáticos: Giz e quadro; Projetor e/ou lousa digital (opcional)

Materiais utilizados pelos alunos: Roteiro de atividades; régua e esquadros; tesoura; triângulos retângulos de papel criativo.

Descrição da aula: Os alunos farão essa atividade em trios, previamente definidos por eles (ou pelo professor, se necessário). Primeiramente, será entregue a cada trio o roteiro de atividades (o modelo de roteiro encontra-se no anexo 1), que é dividido em 5 etapas, um roteiro para cada trio.

ETAPA 1: Será explicado/revisado o conceito de projeção, com exemplos simples de projeção de segmentos e pontos (pode ser em slides, se disponível projetor ou lousa digital). Em seguida, eles responderão à primeira questão.

ETAPA 2: É neste momento que os alunos manipularão triângulos retângulos. Serão lidas coletivamente as instruções presentes no roteiro. Os estudantes identificarão catetos, hipotenusa, altura, projeções e ângulos internos dos triângulos, dando nome a todos estes elementos. Depois cortarão um dos triângulos, pela altura, onde ficarão com 3 triângulos retângulos. Para finalizar, eles preencherão uma tabela presente no roteiro, para organizar todos esses elementos de cada triângulo.

ETAPA 3: Para esta etapa, será lembrado o conceito de semelhança, razão e lados homólogos. O professor auxiliará os alunos a concluir que os três triângulos retângulos são semelhantes entre si, para isso os alunos poderão sobrepor um triângulo no outro para facilitar as conclusões. Os alunos deverão escrever todas as

razões de semelhança de todos os pares triângulos (grande com médio; grande com pequeno; e médio com pequeno), e partir delas concluírem as relações métricas.

ETAPA 4: Nesta etapa, os alunos devem concluir o Teorema de Pitágoras através de duas relações métricas: $b^2 = am$ e $c^2 = na$, somando-as e colocando “a” em evidência. Depois, escrever “por extenso” a relação (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos). E por último verificar a validade do teorema aplicando nos 3 triângulos de papel.

ETAPA 5: Nesta última etapa, os alunos preencherão o quadro resumo: escrever todas as relações que acharam e escreverão todas por extenso como no item anterior.

Avaliação: Os alunos serão avaliados pela participação (interação nas explicações, bom trabalho em equipe e disciplina durante a prática) e também pelo preenchimento correto do roteiro.

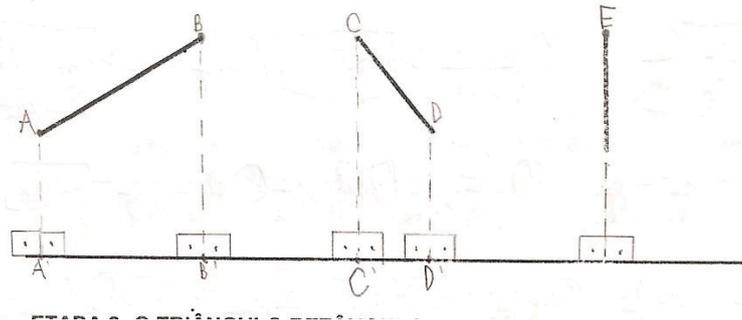
5.3.2 Aplicação e Resultados

Como mencionado no início, foram escolhidas duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, turma A e turma B; a turma A precisou de 5 aulas para concluir, já a turma B, 4 aulas, foram nítidas as diferenças de uma turma para outra. Para a realização desta atividade, já haviam sido trabalhados todos os conceitos de Semelhança de Triângulos e superficialmente as Relações Métricas no Triângulo Retângulo (apenas apresentadas “prontas” e os alunos apenas substituíam valores para encontrar outros), então estas aulas serviram como uma justificativa de tudo que eles já haviam estudado.

Enquanto os alunos iam se organizando nos trios (alguns em duplas), foi escrito no quadro o conceito de projeção, com alguns exemplos de projeções de segmentos e pontos. O conceito foi explicado e os exemplos foram feitos, a partir daí as equipes responderam a etapa 1; nenhuma turma teve dificuldade neste momento.

FIGURA 21 - PROJEÇÕES

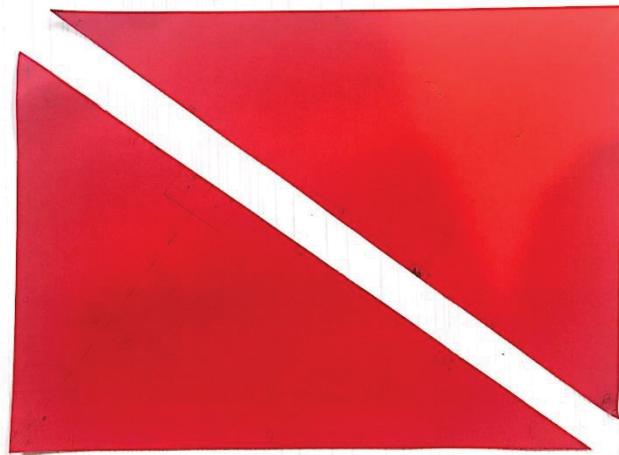
Faça as projeções dos segmentos de reta a seguir



FONTE: A Autora (2018)

Para a etapa 2, foram distribuídas folhas de Papel Criativo, uma folha para cada equipe. Primeiro os estudantes deviam riscar a diagonal e cortá-la, resultando em dois triângulos retângulos congruentes.

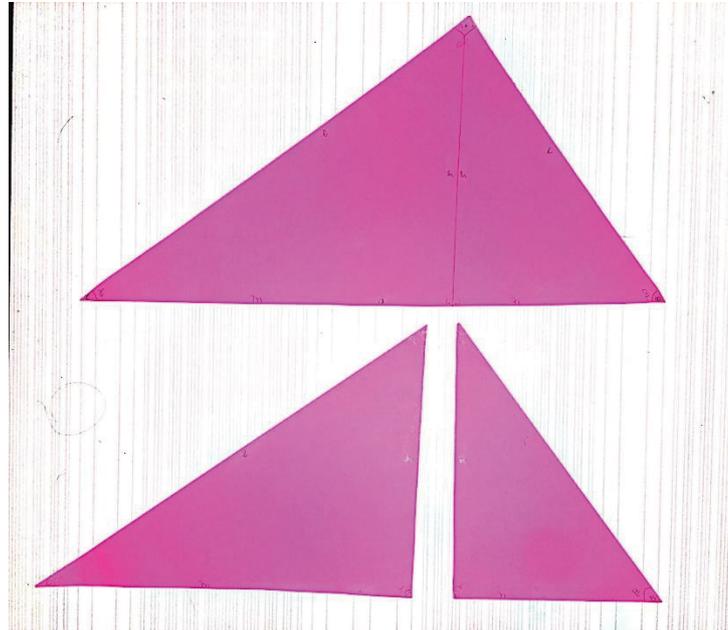
FIGURA 22 – TRIÂNGULOS RETÂNGULOS CONGRUENTES



FONTE: A Autora (2018)

Em seguida, identificaram e nomearam (escrevendo) cada elemento dos dois triângulos: hipotenusa (**a**), cateto maior (**b**) e cateto menor (**c**), e seus ângulos internos: α (o ângulo reto), β e γ . Depois, com o auxílio do esquadro, os alunos traçaram e identificaram a altura (**h**) em relação à hipotenusa dos dois triângulos; logo após, cortaram um dos triângulos, resultando em três (um grande, um médio e um pequeno). A turma A apresentou erros ao traçar a altura, algumas não estavam perpendiculares, seja pela falta de esquadro ou pelo erro no manuseio.

FIGURA 23 – TRÊS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS



Fonte: A Autora (2018)

Depois de cortados, os alunos foram induzidos a concluir quais seriam os ângulos internos dos dois triângulos menores, sobrepondo-os no maior, até concluírem que também seriam α , β e γ ; e por fim, que os três triângulos eram semelhantes entre si pelo caso AA.

O último item da etapa 2 era o preenchimento da tabela, onde os estudantes deveriam escrever os lados de cada triângulo, visto que nos triângulos menores, a hipotenusa e catetos não seriam mais **a**, **b** ou **c**.

FIGURA 24 – TABELA COM AS INFORMAÇÕES DOS TRÊS TRIÂNGULOS

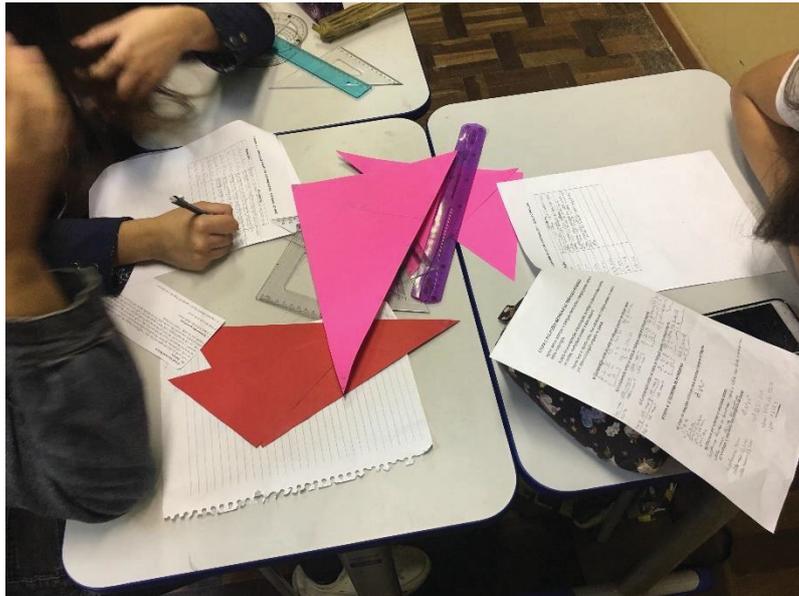
c) Preencha a tabela:

Triângulo Grande	Triângulo Médio	Triângulo Pequeno
Hipotenusa: a	Hipotenusa: b	Hipotenusa: c
Cateto maior: b	Cateto maior: m	Cateto maior: h
Cateto menor: c	Cateto menor: h	Cateto menor: m
Ângulos internos: $\alpha \beta \gamma$	Ângulos internos: $\beta \gamma \alpha$	Ângulos internos: $\alpha \beta \gamma$

FONTE: A Autora (2018)

No decorrer da(s) aula(s), foi possível perceber certa dificuldade por parte dos alunos no trabalho em equipe; a todo momento era salientado por mim como poderiam trabalhar: “enquanto um da equipe presta atenção na explicação das instruções, o(s) outro(s) vai terminando os últimos detalhes do preenchimento do roteiro”.

FIGURA 25 – TRABALHO EM EQUIPE



FONTE: A autora

Na etapa 3, explicou-se aos alunos que eles deveriam comparar os triângulos e usar as razões de semelhança “multiplicando cruzado” para concluir as relações métricas. Ambas as turmas tiveram equipes com dificuldades, principalmente na identificação dos lados homólogos, e também por erros no preenchimento da tabela da etapa anterior; a turma B apresentou mais facilidade na organização e entendimento desta etapa.

FIGURA 26 – RAZÕES DE SEMELHANÇA

a) Comparação entre os lados do triângulo grande e do triângulo médio:

$$\frac{\text{hip grande}}{\text{hip médio}} = \frac{\text{cat. menor g.}}{\text{cat menor m.}} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{m} \quad \begin{cases} 1 = \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow ah = bc \\ 2 = \frac{c}{h} = \frac{b}{m} \Rightarrow cm = bh \end{cases}$$

b) Comparação entre os lados do triângulo médio e do triângulo pequeno:

$$\frac{m}{c} = \frac{h}{m} = \frac{b}{a} = \quad \begin{cases} 1 = \frac{m}{c} = \frac{h}{m} \Rightarrow hc \\ 2 = \frac{h}{m} = \frac{b}{a} \Rightarrow ah = bm \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = \frac{a}{c} = \frac{b}{m} \Rightarrow bm = ac \\ 3 = \frac{m}{c} = \frac{h}{a} \Rightarrow ah = mc \end{cases}$$

c) Comparação entre os lados do triângulo grande e do triângulo pequeno:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} = \frac{b}{h} = \quad \begin{cases} 1 = \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow cm \\ 2 = \frac{c}{m} = \frac{b}{h} \Rightarrow bh = cm \\ 3 = \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow ah = bc \end{cases}$$

ETAPA 4: O TEOREMA DE PITÁGORAS

FONTE: A Autora (2018)

Para a etapa 4, deveriam ser usadas duas relações da etapa anterior para encontrar o Teorema de Pitágoras, somando-as e verificando o Teorema, como pode ser visto a seguir na figura 27. No item b, eles tinham que escrever por extenso o teorema, houve dificuldade no início, mas depois de esclarecido o que é “escrever por extenso” ocorreu tudo sem grandes dificuldades. No item c eles deveriam medir um dos triângulos de papel (combinamos que seria somente o maior) e verificar a veracidade do teorema; muitos ficaram um pouco confusos porque não estava sendo verificado com exatidão, mas aproximado, então debatemos a respeito do porquê disto.

FIGURA 27 – TEOREMA DE PITÁGORAS

ETAPA 4: O TEOREMA DE PITÁGORAS

a) Usar as relações métricas para encontrar o teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot n \\ + b^2 &= a \cdot m \\ \hline b^2 + c^2 &= a \cdot n + a \cdot m \\ b^2 + c^2 &= a(n+m) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= b^2 + c^2 = a \cdot a \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

b) Escreva por extenso o resultado obtido

Hipotenusa (a) quadrado igual a soma dos quadrados dos catetos (b e c).

c) Verifique o resultado nos triângulos de papel

FONTE: A Autora (2018)

Para finalizar, na quinta e última etapa, as equipes preencheram o quadro-resumo, escrevendo cada relação encontrada e também por extenso. Foram

observados pequenos erros de atenção, como a confusão de qual elemento seria cada letra: houve confusão entre **a** e **h** (alguns escreveram h como a hipotenusa) e também com **m** e **n** (confundiam a projeção do cateto maior com a projeção do menor).

FIGURA 28 – QUADRO RESUMO

ETAPA 5 – ORGANIZANDO AS INFORMAÇÕES - QUADRO RESUMO

Relação	Por extenso
$ah = bc$	hipotenusa multiplicada pela altura igual a soma dos catetos maiores vezes cateto menor
$cm = bh$	cateto menor vezes projeção do cateto maior igual a cateto maior vezes a altura
$b^2 = am$	cateto maior ao quadrado igual a hipotenusa vezes a projeção do cateto maior
$b \cdot m = ch$	cateto maior vezes a projeção do cateto maior igual a cateto menor vezes altura
$h^2 = nm$	altura ao quadrado igual a projeção do cateto menor vezes a projeção do cateto maior
$bh = cm$	cateto maior vezes a altura igual a cateto menor vezes a projeção do cateto maior
$c^2 = an$	cateto menor ao quadrado igual a hipotenusa vezes a projeção do cateto menor
$ch = nb$	cateto menor vezes a altura igual a projeção do cateto menor vezes o cateto maior
$cb = ah$	cateto menor vezes cateto maior igual a hipotenusa vezes altura

FONTE: A Autora (2018)

Em suma, a atividade foi satisfatória e o objetivo alcançado; anteriormente os alunos já haviam estudado toda a teoria de semelhança de triângulos, porém a parte de Relações Métricas superficialmente, somente fórmulas que para eles não tinham sentido. A partir desta atividade além de explicar o porquê de tudo e fazer com que eles percebessem que na matemática “nada cai do céu”, também ajudou no trabalho em equipe.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos objetivos específicos deste trabalho foi aumentar meus conhecimentos acerca do LEM, e posso afirmar que foi bem alcançado. A partir do referencial teórico da seção 2 e das análises das respostas dos professores na seção 4, podemos entender a existência de duas concepções de LEM: uma descrita como “laboratório físico”, ou seja, trata-se o laboratório como um espaço, uma sala em que ocorrem os experimentos matemáticos e aulas diferenciadas; podemos exemplificar com a seguinte resposta recebida no formulário: “[O LEM é] Um espaço devidamente equipado com materiais e recursos didáticos, o qual tem como objetivo auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos”. O segundo conceito, eu adjetivei como “filosófico”, se baseia na essência do laboratório, a própria aula em si, o experimento e a manipulação, sem enfoque num espaço em específico para isso; como exemplo, temos a frase: “[O LEM é] Uma metodologia de ensino da matemática que amplia a construção dos conhecimentos do aluno ao investigar, modelar ou resolver um problema e ao manipular os materiais didáticos”. Sabe-se que tanto o espaço físico quanto a experimentação são importantes, portanto, o ideal seria unir as duas concepções, como descreve a frase: “É um espaço físico que permite aos usuários uma aprendizagem significativa, mas também pode ser um espaço virtual capaz de permitir aos estudantes aprendizagem em diferentes ambientes”; exatamente o que diz Ewbank (1971), que cita o laboratório como uma abordagem matemática diferenciada. Como nem toda escola conta com um espaço físico próprio para laboratório, cabe ao docente levar o laboratório para a própria sala de aula, desta forma entendemos que a segunda concepção seja a mais interessante.

Com relação às respostas obtidas no formulário, foi observado que o LEM ainda deve ser divulgado dentro do campo da Educação Matemática, visto que muitos professores não têm conhecimento do assunto. Foi informado que muitas escolas possuem materiais concretos que podem ser usados, porém há casos em que o professor não sabe como utilizá-los, nem como relacionar com os conteúdos em sala de aula. O LEM não deve somente ser implantado nas escolas, é preciso antes de tudo capacitar os docentes para que façam um bom uso, começando pelos cursos de licenciatura e focando na formação continuada.

A respeito da atividade proposta, foram evidentes as diferenças entre uma turma e outra. Por mais que os alunos tenham a mesma idade e acesso aos mesmos

conteúdos, uma turma foi mais participativa e apresentou pouquíssima dificuldade no andamento da aula, sendo necessárias 4 horas-aula para conclusão; a outra foi mais calada e mais lenta, foi preciso de 5 horas-aula.

Na aplicação os alunos já haviam tido contato com todas as relações métricas, então o objetivo era justificar estas relações. Nem todos demonstraram empolgação, mas conseguiram assimilar o conceito de semelhança, aplicar o princípio da proporcionalidade, entender escrever as relações por extenso. Outra alternativa seria com que eles construíssem essas relações, ou seja, concluíssem partindo apenas dos conhecimentos de semelhança de triângulos as relações métricas do triângulo retângulo. Independente da forma como será utilizada a finalidade de ter uma atividade investigativa, um experimento matemático é o mesmo.

Em suma, tenho em mente que os objetivos da pesquisa foram cumpridos da melhor forma possível: aumentei meus conhecimentos, como foi dito anteriormente; levantei os dados com uma amostra aleatória razoável e ampla, ajudando nas conclusões; e pude elaborar e aplicar uma atividade um pouco diferente do tradicional, chamando a atenção dos alunos, saindo da rotina e facilitando o entendimento. Espero também que o objetivo principal venha a ser cumprido, que este trabalho ajude na divulgação do Laboratório de Ensino de Matemática, que a pesquisa da Ipos citada na introdução desse trabalho a respeito da disciplina escolar favorita venha a ser comprovada também para os alunos do Ensino Fundamental II e Médio, e que o laboratório, hoje ainda como coadjuvante, venha a ser protagonista de todo esse processo.

REFERÊNCIAS

BARRETO, C. S. – **Laboratório de ensino de matemática: conhecendo avaliando e construindo**. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória da Conquista, 2014.

BORBA, F. S. – **Dicionário Unesp do português contemporâneo**. Editora: Piá, Curitiba, 2011.

Colégio Estadual do Paraná. **LabmatCEP**: fundamentação, c2018. Página Inicial. Disponível em: <
<http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/Ofertados-neste-Campus/matematica/laboratorios/laboratorio-de-ensino-de-matematica>> Acesso em jul. 2018.

COSTA, C. L. – **A utilização do laboratório de matemática para o ensino e aprendizagem de trigonometria no 2º ano do ensino médio**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.

EWBANK, W. A. **The mathematics laboratory: what? why? when? how?** The Arithmetic Teacher, Vol. 18, No. 8 (DECEMBER 1971), pp. 559-564.

FURLANI, J. **O bicho vai pegar! – Um olhar pós estruturalista à educação sexual a partir de livros paradidáticos infantis**. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Porto Alegre, 2005.

GONÇALVES, A. R.; SILVA, A. L. – **O uso do laboratório do ensino da matemática**. Disponível em: < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/82-4.pdf>>. Acesso em 13 jun 2018

GOUGH, N. **Laboratories in school: material places, mythic spaces**. Disponível em: < <https://catalogue.nla.gov.au/Record/5557283>>. Acesso em: 13 jun 2018.

Instituto Federal do Piauí. **Labmat**, c2018. Página Inicial. Disponível em: < <http://labmatifpi.wixsite.com/labmatifpi/sobre>> Acesso em: jul. 2018.

LORENZATO, S. et al. – **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Editora: Autores Associados, 3ª edição, Campinas, 2009.

Matemática é a matéria preferida dos alunos. **Bem Paraná**, 2014. Disponível em < <https://www.bemparana.com.br/noticia/matematica-e-a-materia-favorita-dos-alunos->> Acesso em: jul. 2018.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. Jr. **Geometria Moderna**. Editora: Edgard Blucher, São Paulo, 1975.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). **An Agenda for Action**. Reston, VA: Author.

PASHA, K.; RAO, N. J.; VEERABABU, P. – **Importance of mathematics laboratories in high school level**. Disponível em: < <http://www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/vol1-issue4/F0142428.pdf>>. Acesso em: 13 jun 2018.

REFOSCO, M. I; BASSOI, T. S – **O laboratório de ensino de matemática nas escolas públicas do paraná e as concep es dos professores**. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_mar_ideisa_ita_refosco.pdf>. Acesso em: 12 jun 2018.

RIBAS, D. R.; BARONE, D. A.; BASSO, M. V. – **O uso de um laboratório virtual de matemática no processo de ensino-aprendizagem**. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educa o. Rio Grande do Sul, CINTED, v.5, n.2, dezembro 2007.

SCUSSHEIM, J. Y. A **Mathematics Laboratory, Alive and Well**. The Arithmetic Teacher, Vol. 25, No. 8 (May 1978), pp. 15-21.

SILVA, R. C.; SILVA, J. R. – **O papel do laboratório no ensino de matemática**. In: VII Encontro Nacional de Educa o Matemática. Recife, 2004.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. – **Vontade de Saber Matemática**, 9  ano. Editora FTD, 2  edic o, São Paulo, 2012.

TURRIONI, A. M. S. – **O laboratório de educa o matemática na forma o inicial de professores**. Disserta o (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Pós-Gradua o em Educa o Matemática. Rio Claro, 2004.

Universidade Federal do Espírito Santo. **Laboratórios**, c2018. Página Inicial. Disponível em: <<http://www.matematica.ufes.br/pt-br/laborat%C3%B3rios>> Acesso em: jul. 2018.

Universidade Federal de Minas Gerais. **Laboratório de Ensino de Matemática**, c2018. Página Inicial. Disponível em: < <http://www.mat.ufmg.br/~lem/>> Acesso em: jul. 2018.

Universidade de São Paulo. **Laboratório de Ensino de Matemática**, c2018. Página inicial. Disponível em: < <https://www.ime.usp.br/lem/>> Acesso em: jul. 2018.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná. **Laboratório de Ensino de Matemática**, c2018. Página inicial. Disponível em: <<http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/Ofertados-neste-Campus/matematica/laboratorios/laboratorio-de-ensino-de-matematica>> Acesso em: jul. 2018.

ANEXO 1 – QUESTIONÁRIO

Laboratório de Ensino de Matemática

Obrigada por responder

Sobre a(s) instituição(ões) que leciona *

- Pública
- Privada
- Ambas

Sobre o nível de ensino que leciona *

- Ensino Fundamental I
- Ensino Fundamental II
- Ensino Médio
- Ensino Técnico
- Ensino Superior

O que você entende por Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)? *

Texto de resposta longa

A(s) instituição(ões) em que leciona possui(em) LEM? *

Sim

Não

No caso de possuir, como é o funcionamento? Se puder, informe também o nome da instituição e onde se localiza

Texto de resposta curta

Na sua opinião, as instituições deveriam implantar o LEM? Por que? *

Texto de resposta longa

ANEXO 2 – ROTEIRO DE ATIVIDADES

ETAPA 1: PROJEÇÕES

Faça as projeções dos segmentos de reta a seguir



ETAPA 2: O TRIÂNGULO RETÂNGULO E SEUS SEGMENTOS

a) Utilizando os triângulos de papel, identifique a **hipotenusa e os catetos** (maior e menor). Na sequência, **trace a altura** relativa à hipotenusa, identifique as **projeções** dos catetos sobre ela.

Cada **vértice** dos triângulos deve ser identificado com **letra maiúscula** (A, B, C), os **lados opostos** aos vértices deste triângulo com letras **minúsculas** (a, b, c) e a **altura** relativa à hipotenusa denominada “h”. As **projeções** dos catetos sobre a hipotenusa serão representadas pelas letras “m” e “n”.

Identifique os **ângulos** de cada triângulo e nomeie-os com letras gregas (α , β , γ).

b) Recortar **apenas um** dos triângulos (recorte na altura h), para obter outros 2 triângulos.

c) Preencha a tabela:

Triângulo Grande	Triângulo Médio	Triângulo Pequeno
Hipotenusa:	Hipotenusa:	Hipotenusa:
Cateto maior:	Cateto maior:	Cateto maior:

Cateto menor:	Cateto menor:	Cateto menor:
Ângulos internos:	Ângulos internos:	Ângulos internos:

ETAPA 3: RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Agora vamos sobrepor o triângulo médio sobre o triângulo grande e verificar os lados homólogos.

A partir da sobreposição, dos triângulos, identifique os lados homólogos, escreva as razões, multiplique cruzado e ache relações

Depois faça a mesma coisa, mas sobrepondo o triângulo pequeno no médio e por último o triângulo pequeno no grande.

a) Comparação entre os lados do triângulo grande e do triângulo médio:

b) Comparação entre os lados do triângulo médio e do triângulo pequeno:

c) Comparação entre os lados do triângulo grande e do triângulo pequeno:

ETAPA 4: O TEOREMA DE PITÁGORAS

a) Usar as relações métricas para encontrar o teorema de Pitágoras

b) Escreva por extenso o resultado obtido

c) Verifique o resultado nos triângulos de papel

ETAPA 5 – ORGANIZANDO AS INFORMAÇÕES - QUADRO RESUMO

Relação	Por extenso

