

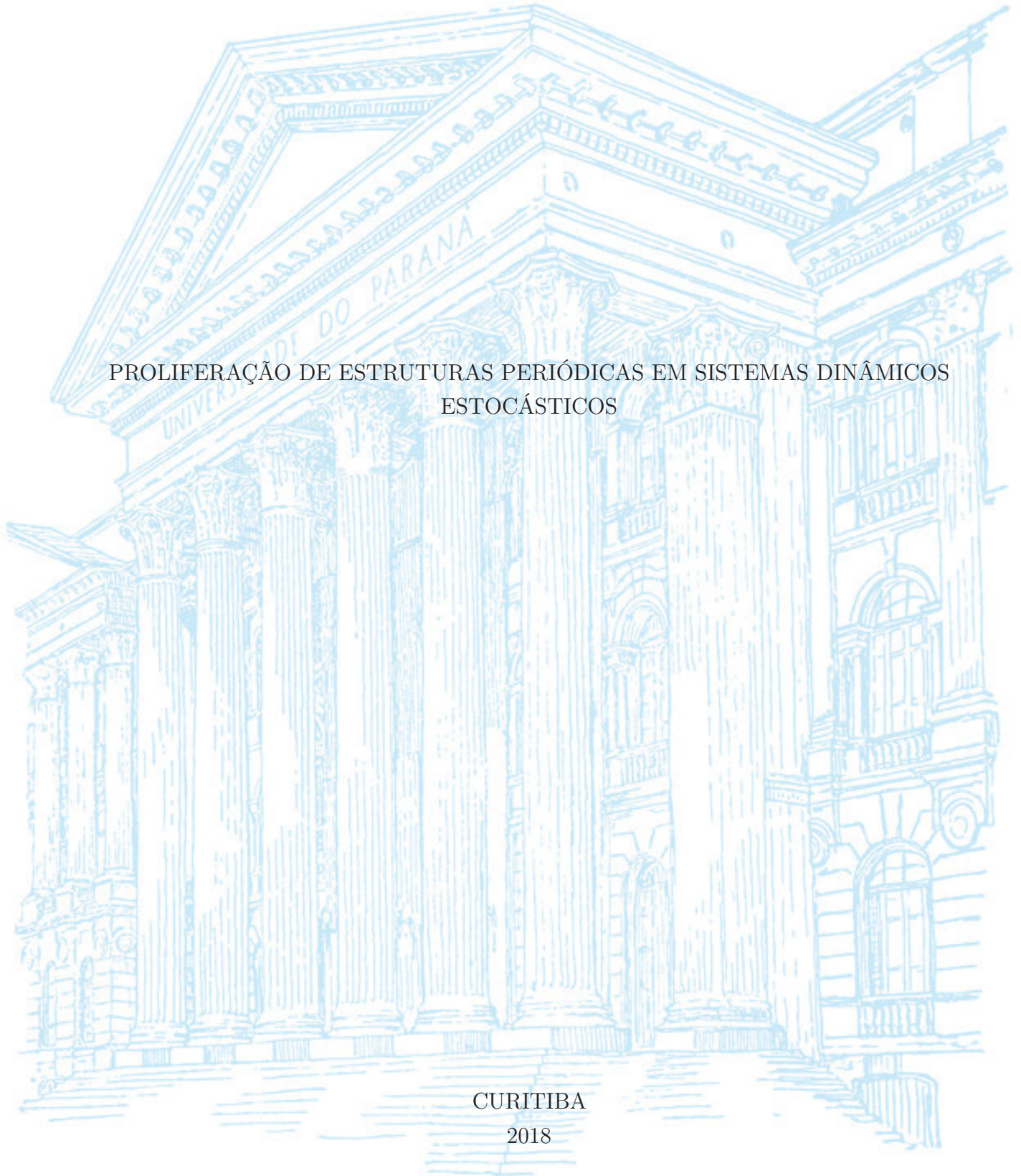
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RAFAEL MARQUES DA SILVA

PROLIFERAÇÃO DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS EM SISTEMAS DINÂMICOS  
ESTOCÁSTICOS

CURITIBA

2018



RAFAEL MARQUES DA SILVA

PROLIFERAÇÃO DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS EM SISTEMAS DINÂMICOS  
ESTOCÁSTICOS

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Marcus Werner Beims

**Coorientador:** Prof. Dr. César Manchein

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S586p

Silva, Rafael Marques da  
Proliferação de estruturas periódicas em sistemas dinâmicos estocásticos /  
Rafael Marques da Silva. – Curitiba, 2018.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

Orientador: Marcus Werner Beims. Coorientador: César Manchein.

1. Sistemas estocásticos. 2. Sistemas hamiltonianos. 3. Ruído. I.  
Universidade Federal do Paraná. II. Beims, Marcus Werner. III. Manchein,  
César. IV. Título.

CDD: 003.76

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR CIÊNCIAS DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **RAFAEL MARQUES DA SILVA** intitulada: "**Proliferação de estruturas periódicas em sistemas dinâmicos estocásticos**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 14 de Dezembro de 2018.

CESAR MANCHEIN

Presidente da Banca Examinadora (UDESC)

SERGIO ROBERTO LOPES

Avaliador Interno (UFPR)

EDSON DENIS LEONEL

Avaliador Externo (UNESP)

JOSE DANILO SZEZECH JÚNIOR

Avaliador Externo (UEPG)

## AGRADECIMENTOS

Esta tese certamente não é fruto do trabalho de uma única pessoa. Por isso, aproveito este espaço para expor minha gratidão a todos que colaboraram de alguma forma para a conclusão de mais esta etapa da minha formação acadêmica. Em especial, agradeço:

- \* a Deus, o Criador de todas as coisas, pela vida;
- \* à minha esposa Silvia, pela companhia, amor e dedicação ao longo destes quatro anos;
- \* aos meus pais Valdemiro e Maria, à minha irmã Andreia e aos meus irmãos Amarildo e Rogério, por sempre acreditarem em mim e pelo apoio incondicional;
- \* aos demais familiares, que mesmo à distância sempre me inspiraram;
- \* ao meu orientador, Prof. Dr. Marcus W. Beims, pelos ensinamentos, paciência, dedicação e apoio dispensados durante todo o doutorado;
- \* ao meu coorientador, Prof. Dr. César Manchein, pela valiosa colaboração científica e pelas discussões proveitosas sobre os mais variados temas;
- \* aos colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Física da UFPR, que colaboraram grandemente para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal;
- \* à UFPR e ao Prof. Dr. Carlos A. M. de Carvalho, pelo suporte computacional através do LFTC;
- \* à CAPES, pelo apoio financeiro.

## RESUMO

O objetivo principal desta tese é introduzir um método que permite a proliferação de estruturas periódicas no espaço de parâmetros de sistemas estocásticos, reduzindo consideravelmente o domínio caótico. A importância deste estudo se justifica uma vez que a presença de ruído em sistemas dinâmicos afeta principalmente o movimento regular. No caso de mapas, o método consiste em adicionar ao modelo um parâmetro de controle  $F_j$  de período  $k$ , o que possibilita a criação de  $k$  réplicas de uma determinada estrutura periódica. Esse procedimento foi aplicado inicialmente ao mapa quadrático, cuja simplicidade matemática permite investigar a origem desse fenômeno por meio de curvas analíticas de bifurcação e simulações numéricas. No caso de sistemas bidimensionais, a adição do parâmetro  $F_j$  às equações do mapa de Hénon gera a multiplicação de domínios periódicos no espaço de parâmetros  $(a, b)$  e, conseqüentemente, uma diminuição das combinações paramétricas que conduzem ao caos. Os efeitos da intensidade e do período  $k$  do parâmetro externo  $F_j$  foram analisados e concluiu-se que o método terá êxito sempre que a razão  $m/k$  resulta em um número inteiro, sendo  $m$  o período da estrutura que deseja-se multiplicar. Quando aplicado ao mapa catraca estocástico, esse procedimento permite aumentar a região regular do espaço de parâmetros em até 78,1%, mesmo considerando os efeitos do ruído térmico. Em sistemas a tempo contínuo, a supressão do caos está condicionada à existência de multiestabilidade. Nesse caso, o procedimento consiste em adicionar ao modelo uma função contínua periódica que quebra a simetria da força externa ao sistema e separa os atratores no espaço de fases, gerando a dissociação de estruturas regulares que encontravam-se sobrepostas inicialmente. Por fim, esta tese apresenta um estudo sobre a influência do ruído na dinâmica de sistemas Hamiltonianos, adotando como modelo o mapa padrão com ruído aditivo. Utilizando técnicas como a estatística dos tempos de recorrência e o cálculo dos expoentes de Lyapunov, demonstrou-se que para ruídos temporalmente decorrelacionados ocorre o efeito conhecido como *enhanced trapping*, que prolonga o tempo de permanência da trajetória dentro das ilhas de regularidade. Por outro lado, ruídos que apresentam correlação temporal podem gerar movimento superdifusivo.

Palavras-chave: Sistemas estocásticos. Movimento periódico. Caos. Perturbações periódicas.

## ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to introduce a method that allows the proliferation of periodic structures in the parameter space of stochastic systems, contracting the chaotic domain. The relevance of this study is justified since the noise usually induces the destruction of regular motion in dynamical systems. For maps, the method consists in adding the  $k$ -periodic parameter  $F_j$  to the model, which makes it possible to create  $k$  identical copies of periodic structures. This procedure was initially applied to the quadratic map and the origin of the replication was studied by means of analytical bifurcation functions and numerical simulations. In two-dimensional systems, the addition of the parameter  $F_j$  to the Hénon map provides the multiplication of periodic domains in the parameter space  $(a, b)$  and, consequently, a decrease of the parametric combinations that lead to chaos. The effects of changing the intensity and the period  $k$  of the external parameter  $F_j$  were analyzed, leading to the conclusion that the method will succeed each time the ratio  $m/k$  is an integer, where  $m$  is the period of the structure to be multiplied. Considering the stochastic ratchet map, the regular region in the parameter space can be enlarged about 78,1% by applying this procedure, even if the unavoidable thermal effects are taken into consideration. In differential equations, the suppression of chaos is conditioned by the existence of multistability. In this case, the procedure consists in adding to the model a periodic continuous function which breaks the symmetry of the external force and moves away attractors in the phase space, generating the dissociation of degenerated regular structures. Finally, this thesis presents a study about the influence of noise on the dynamics of Hamiltonian systems using the standard map with additive noise. By applying techniques such as recurrence time statistics and the calculation of the Lyapunov exponents, it is possible to show that for uncorrelated noises the effect known as enhanced trapping takes place, which increases the residence time of trajectories within the regular islands. On the other hand, correlated noises generate superdiffusive motion.

Keywords: Stochastic systems. Periodic motion. Chaos. Periodic perturbations.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Controle do caos	10
1.2	Movimento periódico e os efeitos do ruído	11
1.3	Objetivos e organização da tese	12
<b>2</b>	<b>Controle da dinâmica intermediária de sistemas unidimensionais</b>	<b>15</b>
2.1	O mapa quadrático	16
2.2	Expoente de Lyapunov e bifurcações	19
2.3	Composição de dois mapas quadráticos	20
2.3.1	Janelas de períodos ímpares e o dobramento de período	29
2.4	Composição de três ou mais mapas	31
2.5	Conclusões parciais	37
<b>3</b>	<b>Proliferação de Estruturas Isoperiódicas</b>	<b>38</b>
3.1	O mapa de Hénon	38
3.2	Expoentes de Lyapunov em sistemas multidimensionais	42
3.3	Estruturas Isoperiódicas e o espaço de parâmetros	45
3.4	Composição de dois Mapas de Hénon Modificados	47
3.5	Composição de três ou mais MHMs	54
3.6	Múltiplos atratores e bacias de atração	57
3.7	Multiplicação de EIPs de alta periodicidade	59
3.8	Conclusões parciais	61
<b>4</b>	<b>Separando atratores no espaço de fases para superar efeitos do ruído</b>	<b>62</b>
4.1	Sistemas estocásticos	63
4.1.1	Distribuição normal	64
4.1.2	O teorema flutuação-dissipação	65
4.2	O mapa catraca	66
4.3	O mapa catraca estocástico	70
4.3.1	Otimização de regiões com correntes não nulas	72
4.3.2	Ativação de corrente através da perturbação periódica	78
4.4	Duplicação de estruturas periódicas em sistemas a tempo contínuo	80
4.4.1	A equação de Langevin	82
4.4.2	O circuito de Chua	86
4.5	Conclusões parciais	91
<b>5</b>	<b>Explorando ilhas conservativas de sistemas com ruído</b>	<b>92</b>
5.1	Introdução à dinâmica Hamiltoniana	92



5.1.1	Sistemas Hamiltonianos integráveis . . . . .	94
5.1.2	O teorema KAM . . . . .	96
5.1.3	Estrutura do espaço de fases e o efeito <i>stickiness</i> . . . . .	99
5.2	O mapa padrão com ruído . . . . .	101
5.2.1	Condição de estabilidade do ponto central . . . . .	103
5.2.2	Tipos de ruído . . . . .	104
5.3	Dinâmica no espaço de fases . . . . .	106
5.4	Estatística dos tempos de recorrência . . . . .	108
5.5	Expoentes de Lyapunov . . . . .	112
5.6	Visitação do espaço de fases . . . . .	114
5.7	Conclusões parciais . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>118</b>
6.1	Trabalhos futuros . . . . .	121
6.2	Produção científica . . . . .	122
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>123</b>
	<b>APÊNDICE A Ortonormalização de Gram-Schmidt . . . . .</b>	<b>133</b>
	<b>APÊNDICE B Dedução do mapa catraca . . . . .</b>	<b>134</b>
	<b>APÊNDICE C Dedução do mapa padrão . . . . .</b>	<b>137</b>
	<b>APÊNDICE D Condição simplética do mapa padrão . . . . .</b>	<b>140</b>

# Capítulo 1

---

## Introdução

---

Na busca pela compreensão de um fenômeno físico através do método científico, a execução de algum tipo de experimento é indispensável. Entretanto, com o desenvolvimento das teorias matemáticas e da tecnologia, tornou-se possível aliar essas duas ferramentas poderosas para propor, testar e validar modelos que simulam de forma veraz o universo real. A utilização de sistemas dinâmicos na descrição de processos físicos teve início com os trabalhos de Isaac Newton, os quais serviram como alicerces da Mecânica Clássica [1]. Todavia, a grande maioria dos fenômenos naturais são modelados por equações matemáticas complexas que envolvem algum tipo de não linearidade, de forma que a obtenção de soluções analíticas torna-se uma tarefa nada trivial [2]. Em razão disso, somente com o advento dos computadores modernos foi possível identificar e caracterizar determinados comportamentos típicos de sistemas dinâmicos não lineares, tais como órbitas periódicas e quase-periódicas, ciclos limite, estados transientes e caos.

Atualmente, os sistemas dinâmicos não lineares são constantemente utilizados na modelagem dos mais variados tipos de fenômenos, como por exemplo: dinâmica de redes neurais [3, 4], mercado financeiro [5, 6], sistemas químicos e biológicos [7, 8], transporte anômalo [9, 10], eventos extremos [11, 12] etc. Uma característica comum a esses modelos é o fato de todos serem compostos por variáveis e parâmetros de controle. O comportamento das variáveis de um sistema pode ser verificado por meio de diagramas de bifurcação<sup>1</sup>, bacias de atração<sup>2</sup> e análise das trajetórias no espaço de fases. Entretanto, uma pequena alteração nos parâmetros de controle pode modificar bruscamente a dinâmica resultante.

Quando se trata da pesquisa científica na área de sistemas dinâmicos, um dos principais desafios é descobrir a combinação paramétrica ideal que resulta em um tipo

---

<sup>1</sup> O termo bifurcação se refere às mudanças no comportamento assintótico do sistema causadas pela variação de um ou mais parâmetros de controle [13]. Diagramas de bifurcação representam graficamente o comportamento de uma das variáveis do sistema em função do valor de um dos parâmetros.

<sup>2</sup> O conjunto de todas as condições iniciais que convergem para o mesmo atrator é denominado bacia de atração. Atrator é o nome dado ao conjunto fechado e invariante contido no espaço de fases de sistemas dissipativos para onde as trajetórias convergem após um tempo transiente. Quanto à sua dinâmica, um atrator pode ser classificado como periódico, quase-periódico ou caótico. Uma definição mais completa de atrator e bacia de atração é apresentada na Seção 3.6.

desejado de dinâmica e, além disso, determinar a generalidade de tal regra estabelecida, a fim de que possa ser aplicada a situações físicas reais. A dependência de um modelo em relação aos parâmetros de controle pode ser identificada de forma eficiente através do espaço de parâmetros, um diagrama no qual dois parâmetros formam uma grade de controle e, para cada ponto de intersecção dessa grade, utiliza-se uma ferramenta de análise para caracterizar a dinâmica resultante. Dentre essas ferramentas, as mais comuns são o período da trajetória, calculado após um tempo transiente, e o maior Expoente de Lyapunov (EL), quantidade que mede a taxa exponencial com a qual duas condições iniciais próximas se afastam com o passar do tempo. Através desse diagrama é possível conhecer as combinações paramétricas que dão origem aos diferentes comportamentos assintóticos do sistema. Se o movimento é caótico, trajetórias originárias de condições iniciais adjacentes se afastam exponencialmente à medida que o sistema evolui no tempo; nesse caso, o maior EL é positivo e o movimento é aperiódico. Por outro lado, as órbitas periódicas, cujo movimento é regular, estão sempre associadas a ELs negativos devido à convergência exponencial de condições iniciais circunvizinhas e o período do movimento equivale ao número de iterações necessárias para que a órbita retorne ao ponto de partida. No caso de combinações paramétricas nas quais ocorrem bifurcações, o maior EL se torna nulo.

## 1.1 Controle do caos

Discernir entre o comportamento regular e caótico ou, até mesmo, a possibilidade de obter domínio sobre a ocorrência desses regimes, despertou o interesse de muitos pesquisadores ao longo das últimas décadas, dada a importância do tema [14]. A dinâmica caótica se faz presente em diversas áreas e o controle do caos pode contribuir enormemente para a solução de diversos problemas tecnológicos como: o aumento da periodicidade de disparos neurais [15], a estabilização de arritmias cardíacas através da administração de estímulos elétricos [16], a transmissão de informação [17], o controle de circuitos elétricos caóticos [18], entre outros. Ter o controle sobre o comportamento caótico significa eliminá-lo ou, caso desejado, induzi-lo. O primeiro método desenvolvido para controlar o caos foi o método OGY, proposto em 1990 por Edward Ott, Celso Grebogi e James Alan Yorke [19]. Como o atrator caótico é composto por incontáveis órbitas periódicas instáveis, a estratégia desse método consiste em identificar uma dessas órbitas e adicionar uma pequena perturbação em algum parâmetro de controle do sistema a fim de estabilizá-la, evitando assim que a trajetória continue irregular.

Para que o método OGY seja aplicável, é necessário que a trajetória caótica se aproxime da órbita instável selecionada, fato esse que pode demorar a ocorrer. Outro método, conhecido como *targeting* [20], foi desenvolvido a fim de reduzir esse tempo de iteração e considera uma das principais características do caos: a dependência sensível em relação às condições iniciais escolhidas, de forma que uma ínfima alteração nessa escolha pode produzir resultados completamente diferentes. Sendo assim, torna-se possível direcionar rapidamente

a órbita de um sistema caótico para um local desejado do espaço de fases adicionando ao sistema pequenas perturbações que devem ser cuidadosamente escolhidas [20, 21]. Tanto o método OGY quanto o método *targeting* selecionam a perturbação a ser acrescida a partir de uma análise preliminar do estado do sistema, sendo por esse motivo classificados como métodos de controle com monitoramento (*feedback*). Outras teorias desenvolvidas para controle do caos consideram somente efeitos externos, sendo desnecessário o prévio conhecimento da dinâmica atual do sistema e, por esse motivo, tais métodos são denominados sem monitoramento (*nonfeedback*). Dentro dessa proposta, o controle do caos foi obtido, por exemplo, através do acréscimo de uma pequena perturbação em forma de uma função seno nas equações do oscilador de Josephson [22] e também adicionando uma função harmônica na equação de Duffing [23]. Um método analítico também foi proposto para controlar o caos no oscilador de Duffing utilizando aproximações clássicas [24].

## 1.2 Movimento periódico e os efeitos do ruído

O estudo de regiões do espaço de parâmetros que resultam em órbitas periódicas auxilia a compreensão de vários aspectos importantes da dinâmica de sistemas não lineares. Essas órbitas se conectam às cascatas de bifurcações por dobramento de período<sup>3</sup> levando à formação de órbitas sub-harmônicas que originam janelas periódicas complexas [25], denominadas Estruturas Isoperiódicas (EIPs). Através da análise do espaço de parâmetros detectou-se a ocorrência de EIPs em diferentes classes de sistemas, tais como mapas [26–28], equações diferenciais [29–31] e experimentos reais [32–34]. Recentemente, uma importante relação foi estabelecida entre a existência desses domínios e as propriedades de transporte de sistemas catraca<sup>4</sup>: combinações paramétricas localizadas dentro das EIPs geram valores ótimos de corrente de partículas [35]. Nesses modelos, o transporte de partículas é gerado pelo desequilíbrio térmico ou então pela existência de dissipação de energia aliada à ação de um potencial espacialmente assimétrico. Sistemas catraca podem modelar diversas situações físicas como, por exemplo, motores moleculares [36, 37], processos de separação de micropartículas em soluções coloidais [38] e transporte em escala nanométrica [39].

Ao considerar os efeitos da vizinhança sobre um sistema físico de interesse, faz-se necessário adotar uma abordagem estatística uma vez que o ambiente macroscópico é constituído por um grande número de elementos, sendo impossível conhecer completamente o estado inicial de todos eles. A utilização de variáveis aleatórias na modelagem de fenômenos físicos dá origem aos sistemas denominados estocásticos, termo que deriva do grego e se refere ao que está relacionado ao acaso. Enquanto um modelo determinístico prediz

<sup>3</sup> Uma bifurcação por dobramento de período ocorre quando uma órbita assintoticamente estável de período  $m$  torna-se instável com a variação de um ou mais parâmetros de controle do sistema, sendo então substituída por uma nova órbita assintoticamente estável de período  $2m$  [13]. Uma cascata de bifurcações por dobramento de período é uma seqüência infinita desse tipo de bifurcação.

<sup>4</sup> Dá-se o nome de catraca a um sistema que tem a capacidade de produzir transporte direcionado de partículas através de forças com médias nulas no espaço e no tempo.

apenas um resultado para uma determinada circunstância, um modelo estocástico prediz um conjunto de possíveis resultados cujo peso de cada um deles é determinado por uma distribuição de probabilidade [40]. A aplicabilidade desses sistemas é grande visto que flutuações macroscópicas e microscópicas erráticas, também conhecidas como ruído, são espontâneas e inerentes aos fenômenos da natureza. Por exemplo, a presença do ruído na equação de Langevin, modelo proposto para descrever o movimento Browniano executado por uma pequena partícula imersa em um fluido, simula as sucessivas colisões entre a partícula e os elementos constituintes do meio no qual ela está inserida [41]. Em um circuito eletrônico, como o circuito de Chua [42], o ruído é proveniente das flutuações térmicas nos dispositivos eletrônicos, das imprecisões nas especificações desses componentes e também das interferências de origem eletromagnética [43].

De forma geral, o ruído modifica drasticamente a dinâmica de sistemas não lineares, afetando principalmente o movimento periódico e aumentando o domínio caótico do espaço de parâmetros. Ao considerar o ruído de origem térmica em um sistema catraca, por exemplo, propondo assim um modelo mais realístico por meio da adição de uma variável estocástica, geralmente obtém-se uma redução da eficiência do transporte, uma vez que as combinações paramétricas que geram valores ótimos de corrente de partículas localizam-se nas EIPs [44]. Não obstante, a adição de ruídos clássicos [45] e quânticos [46–48] mostrou que esses domínios podem resistir a determinadas intensidades de temperatura e aos efeitos de flutuações quânticas. A presença do ruído também pode influir consideravelmente na dinâmica dos sistemas Hamiltonianos, de forma que algumas regiões inacessíveis do espaço de fases passam a ser visitadas pela trajetória quando efeitos perturbativos são considerados, também afetando as propriedades de transporte. Além disso, para essa classe de sistemas, a presença do ruído modifica o volume de conjuntos invariantes de acordo com a intensidade da perturbação [49], intensifica efeitos de aprisionamento em espalhadores caóticos [50] e altera a taxa de escape de regiões de espalhamento fazendo com que essa taxa, antes descrita por uma distribuição lei de potência, seja descrita por uma função exponencial [51, 52].

### 1.3 Objetivos e organização da tese

É farta a literatura disponível atualmente sobre o surgimento, organização e caracterização das EIPs [26–28, 53–55], assim como a quantidade de trabalhos referentes aos efeitos do ruído sobre a dinâmica periódica [45, 47, 48, 56]. Sendo assim, a principal contribuição desta tese consiste na proposição de um novo método capaz de ampliar a porção do espaço de parâmetros ocupada pelas EIPs, uma vez que o ruído afeta diretamente esses domínios fazendo com que atratores periódicos estáveis se tornem metaestáveis [57]. O método proposto utiliza-se de perturbações externas periódicas que são adicionadas ao modelo considerado, mostrando-se eficiente na multiplicação das regiões regulares do espaço de parâmetros de mapas, sistemas nos quais o tempo é uma variável discreta, e de sistemas a tempo contínuo modelados por equações diferenciais ordinárias. Esse procedimento, no

entanto, não se trata de uma nova forma de controle do caos por meio da estabilização de trajetórias instáveis como os métodos citados na Seção 1.1, nos quais a perturbação externa apenas desloca domínios periódicos para uma região de interesse, mas sim de um protocolo eficiente para suprimir o domínio caótico no espaço de parâmetros mesmo quando o ruído é considerado.

Para compreender a origem da multiplicação das EIPs no espaço de parâmetros, inicialmente foram adotados modelos mais simples do ponto de vista matemático e computacional. No Capítulo 2, o modelo utilizado foi o mapa quadrático. Após uma breve revisão bibliográfica dos principais aspectos da dinâmica desse sistema, o método proposto nesta tese é implementado na Seção 2.3 através da composição de mapas quadráticos modificados por um parâmetro externo  $F_j$ , cujo período é  $k$ . Dessa forma, é possível demonstrar que intervalos paramétricos de período  $m$  proliferam-se no diagrama de bifurcação sempre que  $\eta \in \mathbb{Z}$ , sendo  $\eta = m/k$ . Curvas analíticas de bifurcação mostram que a origem desse fenômeno se dá pela presença de novas bifurcações sela-nó<sup>5</sup> que não ocorrem para o mapa quadrático sem o parâmetro externo  $F_j$ . Essas bifurcações dão origem a  $k$  novos atratores que, quando separados por meio do aumento da intensidade do parâmetro externo, prolongam o intervalo periódico do diagrama de bifurcação. Por outro lado, se  $\eta \notin \mathbb{Z}$ , as regiões de período  $m$  passam a ter período  $m' = km$ , não havendo criação de novos atratores nesses intervalos paramétricos.

A abrangência do método para sistemas bidimensionais é testada no Capítulo 3, no qual a dinâmica do mapa de Hénon foi estudada através do diagrama de bifurcação e também do espaço de parâmetros, uma vez que esse modelo é constituído por dois parâmetros de controle. Adicionando o termo  $F_j$  ao mapa de Hénon, obtém-se a proliferação das EIPs no espaço de parâmetros, como mostram as Seções 3.4 e 3.5. As relações entre o período  $k$  de  $F_j$  e o período  $m$  das EIPs, previamente determinadas para o mapa quadrático, são mantidas para os sistemas bidimensionais. A criação de novos atratores devido à presença do parâmetro externo é comprovada através de uma análise da bacia de atração do mapa de Hénon, apresentada na Seção 3.6.

No Capítulo 4, alguns modelos de grande importância física são analisados e o método finalmente é aplicado a sistemas estocásticos. O primeiro deles é o mapa catraca, deduzido a partir da equação de Langevin e cujas aplicações científicas já foram citadas na Seção 1.2. Nesse sistema, o ruído térmico destrói grande parte das EIPs e, conseqüentemente, regiões de transporte otimizado. Entretanto, o método proposto pode ser aplicado de forma eficiente para gerar um aumento da área do espaço de parâmetros com correntes ótimas de até 78,1%, mesmo quando altas intensidades da temperatura são consideradas. Além disso, na Subseção 4.3.2 é demonstrado que a adição da perturbação externa periódica  $F_j$  é

<sup>5</sup> A bifurcação sela-nó, também conhecida como bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, é o procedimento através do qual são criadas duas órbitas periódicas, uma delas assintoticamente estável e a outra instável [13, 58].

capaz de promover o importante fenômeno da ativação de corrente em regiões específicas do espaço de parâmetros.

Também no Capítulo 4, na Seção 4.4, é apresentado um método que permite multiplicar regiões periódicas em sistemas a tempo contínuo. Para essa classe de sistemas, a duplicação de domínios regulares já foi mencionada na literatura. As Refs. [59, 60], por exemplo, mostram que esse fenômeno ocorre no espaço de parâmetros do oscilador de Josephson e do oscilador de Duffing quando adicionadas funções periódicas às equações correspondentes. Todavia, os estudos realizados até então não respondem às seguintes questões: (i) Por que é necessário adicionar uma função diferente para cada modelo? (ii) Por que, para o mesmo modelo, algumas regiões do espaço de parâmetros são multiplicadas e outras não? Para responder a essas questões e desenvolver um método completo e eficaz para sistemas a tempo contínuo, dois exemplos completamente distintos foram estudados: a equação de Langevin, que simula o efeito catraca quando escolhido um potencial assimétrico, e o circuito de Chua [42]. A ocorrência do efeito catraca em equações diferenciais é um tema de pesquisa bastante atual [61–63]. O circuito de Chua, por sua vez, é um modelo que descreve todos os comportamentos dinâmicos encontrados em um experimento de laboratório, também sendo tema recorrente de pesquisa [56, 64, 65]. No caso de sistemas a tempo contínuo, a ampliação da periodicidade no espaço de parâmetros só é possível nas regiões de multiestabilidade. Existindo pelo menos dois atratores para uma mesma combinação paramétrica, deve-se então adicionar ao modelo uma função contínua periódica que quebra a simetria da perturbação externa ao sistema e separa os atratores no espaço de fases. Dessa forma, é possível dissociar regiões regulares degeneradas no espaço de parâmetros, suprimindo assim os domínios caóticos mesmo na presença de ruído.

Os modelos utilizados nos Capítulos 2, 3 e 4 são exemplos de sistemas dissipativos, ao contrário dos sistemas Hamiltonianos, os quais preservam o volume do espaço de fases. Como essas duas classes de sistemas apresentam características e comportamentos diferentes, um capítulo desta tese foi dedicado à investigação dos efeitos do ruído em sistemas Hamiltonianos. No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos a partir da adição de perturbações aleatórias ao mapa padrão, um dos sistemas Hamiltonianos mais utilizados na literatura para estudar a transição do regime regular para o caótico. Foram testados ruídos temporalmente correlacionados e decorrelacionados, sendo que as diferenças entre esses tipos de ruído foram investigadas analisando a dinâmica no espaço de fases, a estatística dos tempos de recorrência, o valor do maior EL e também a área do espaço de fases visitada pela trajetória em função do número de iterações.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as principais conclusões obtidas com a aplicação do método proposto nesta tese aos diferentes sistemas estudados, algumas propostas para a continuidade desses trabalhos e uma relação dos artigos científicos publicados em revistas indexadas que tiveram origem nas pesquisas realizadas durante o período de doutorado.

## Capítulo 2

---

# Controle da dinâmica intermediária de sistemas unidimensionais

---

Mapas unidimensionais não inversíveis formam o grupo mais simples de sistemas que apresentam caos [66]. Por esse motivo, esses mapas são amplamente estudados com o objetivo de compreender determinados aspectos de sua dinâmica que podem ser generalizados para sistemas mais complexos. Inúmeros modelos cujas soluções resultam de relações de recorrência podem ser descritos matematicamente por meio de mapas unidimensionais como, por exemplo, o mapa logístico  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ . Esse modelo foi introduzido, em 1845, por Pierre François Verhulst para simular o crescimento populacional em uma área fechada, de forma que a variável  $x_n$  quantifica o número de indivíduos em um tempo discreto  $n$  e o parâmetro de controle  $r$ , por sua vez, representa a taxa de crescimento de uma determinada espécie [67]. Essa simples relação matemática é amplamente utilizada no estudo da dinâmica populacional de sistemas ecológicos e biológicos, e apresenta um comportamento complexo quando analisa-se a variação de  $x_n$  em função do parâmetro  $r$ . Esse comportamento foi abordado por Robert McCredie May, em 1976, no seu trabalho intitulado “*Simple mathematical models with very complicated dynamics*” [68].

O trabalho de May demonstra que sistemas extremamente simples do ponto de vista matemático podem apresentar, dependendo do parâmetro de controle, pontos fixos estáveis e instáveis, bifurcações, flutuações aleatórias etc [68]. Tais atributos tornam sistemas unidimensionais uma ferramenta importante na investigação de novas metodologias. Em razão disso, essa classe de sistemas será utilizada neste capítulo para introduzir um método que permite controlar a dinâmica intermediária de mapas compostos e multiplicar o número de estruturas periódicas no diagrama de bifurcação. Esse procedimento é fundamentado na composição de  $k$  ( $k = 2, 3, 4, 5$ ) mapas que são modificados a cada iteração pela inclusão de um parâmetro externo  $F_j$ . Após compreender a interferência de  $F_j$  na estabilidade dos pontos fixos, na ocorrência de bifurcações e na dinâmica caótica, conceitos que serão abordados no decorrer deste capítulo, torna-se possível encontrar uma relação entre o número  $k$  e o período das órbitas a fim de que o intervalo paramétrico que gera movimento



periódico sofra um acréscimo, suprimindo determinadas regiões de caos no diagrama de bifurcação. Este capítulo também é constituído por uma introdução ao mapa quadrático, sistema unidimensional utilizado no desenvolvimento do método proposto, assim como pela definição de expoente de Lyapunov, conceito teórico importante na análise dos resultados apresentados nesta tese.

## 2.1 O mapa quadrático

O sistema unidimensional que será utilizado como base para o desenvolvimento deste capítulo é denominado Mapa Quadrático (MQ), cujo comportamento dinâmico é semelhante ao do mapa logístico. O MQ é descrito matematicamente pela expressão

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2, \quad (2.1)$$

na qual  $n = 0, 1, 2, \dots$  corresponde ao tempo de iteração discreto e  $a$  é o parâmetro de não linearidade. A dinâmica de um mapa unidimensional pode ser estudada por meio de um diagrama conhecido como diagrama de bifurcação, no qual é possível identificar o surgimento, a evolução e o desaparecimento de trajetórias à medida que algum parâmetro do sistema é modificado. O termo bifurcação se refere às mudanças qualitativas no comportamento assintótico do sistema causadas pela variação de um ou mais parâmetros de controle [13].

O diagrama de bifurcação do MQ (2.1), apresentado na Fig. 2.1, tem como principal objetivo identificar o comportamento assintótico da variável  $x_n$  em função do parâmetro  $a$ . Entende-se por comportamento assintótico a trajetória obtida após um intervalo de tempo suficientemente grande, denominado tempo transiente. Esse tipo de diagrama será frequentemente utilizado ao longo desta tese e, por esse motivo, torna-se importante detalhar o procedimento computacional adotado para sua obtenção. No caso do MQ, o algoritmo é composto pelas seguintes etapas:

1. Definir um intervalo  $[a_{\min}, a_{\max}]$  para os valores do parâmetro  $a$  e um intervalo  $[x_{0\min}, x_{0\max}]$  para as condições iniciais.
2. Fixar o valor do parâmetro  $a$ .
3. Fixar o valor da condição inicial  $x_0$ .
4. Iterar o mapa (2.1) desconsiderando as primeiras  $n_{\text{trans}}$  iterações transitórias.
5. Iterar o mapa (2.1) até um tempo  $n_{\text{final}}$  e salvar os valores de  $x_n$  juntamente com o parâmetro  $a$  correspondente.
6. Escolher uma nova condição inicial  $x_0$  dentro do intervalo  $[x_{0\min}, x_{0\max}]$ .
7. Executar os passos 4 a 6 até que o número desejado de condições iniciais seja atingido.
8. Incrementar o valor do parâmetro  $a$  acrescentando uma quantidade  $\Delta a$  ao valor atual.

9. Repetir os passos 3 a 8 até que  $a = a_{\max}$ .

O tempo transiente  $n_{\text{trans}}$  utilizado no passo 4 pode variar consideravelmente dependendo da condição inicial  $x_0$  e do parâmetro  $a$ , principalmente na vizinhança das bifurcações. A escolha das condições iniciais no passo 6 pode ser feita aleatoriamente ou então dividindo o intervalo  $[x_{0_{\min}}, x_{0_{\max}}]$  em partes iguais, de acordo com o número desejado de condições iniciais. Após a execução do procedimento descrito acima, o diagrama de bifurcação é construído representando graficamente os valores de  $x_n$  em função de  $a$ . Para um parâmetro  $a$  de interesse, definindo uma reta paralela ao eixo sobre o qual a variável  $x_n$  está representada, é possível determinar o período da órbita correspondente contabilizando os pontos de intersecção dessa reta com o diagrama. Nas regiões caóticas, o diagrama de bifurcação é densamente ocupado pelas iterações do mapa.

No diagrama da Fig. 2.1 é possível observar o nascimento de um ponto fixo em  $a = a_1 = -1/4$ , cuja origem é uma bifurcação sela-nó. De forma geral, esse tipo de bifurcação é responsável pelo surgimento de duas órbitas periódicas, uma assintoticamente estável e outra instável. Um ponto fixo é definido como aquele que, após um tempo transiente, obedece à condição  $x_{n+1} = x_n$ . Em  $a = a_{12} = 3/4$  ocorre a chamada Bifurcação por Dobramento de Período (BDP), fazendo com que o ponto fixo se torne um ponto periódico de período 2.

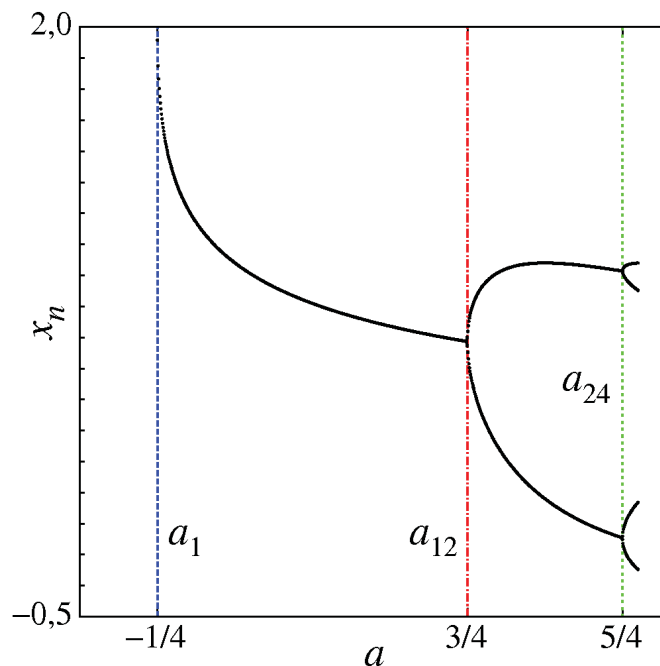


Figura 2.1 – Diagrama de bifurcação do MQ (2.1) que mostra o comportamento assintótico da variável  $x_n$  em função do parâmetro  $a$ . O intervalo  $[a_{\min}, a_{\max}]$  foi dividido igualmente em  $10^3$  partes e para cada valor de  $a$  foram utilizadas 10 condições iniciais uniformemente distribuídas no intervalo  $[-2, +2]$ . As curvas do diagrama foram construídas considerando 20 iterações de cada trajetória após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 10^5$ . As linhas verticais azul, vermelha e verde correspondem, respectivamente, aos parâmetros  $a = a_1 = -1/4$ , no qual nasce o ponto fixo,  $a = a_{12} = 3/4$  e  $a = a_{24} = 5/4$ , nos quais ocorre BDP.

Quando  $a = a_{24} = 5/4$ , ocorre uma nova BDP que dá origem ao ponto periódico de período 4.

O estudo da estabilidade de um ponto fixo, que será representado por  $x^*$ , é de extrema importância visto que outros pontos próximos podem ser repelidos ou atraídos por  $x^*$ , dependendo da sua condição de estabilidade. Um ponto fixo é classificado como assintoticamente estável se os pontos situados em sua vizinhança são atraídos para ele conforme itera-se o sistema, enquanto um ponto fixo instável repele esses mesmos pontos vizinhos. A classificação de pontos fixos quanto à condição de estabilidade para um mapa unidimensional  $f(x_n)$  é definida pela derivada  $f'(x_n)$  calculada no ponto fixo  $x_n = x^*$ , de tal forma que [13]:

- se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é um ponto fixo assintoticamente estável;
- se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é um ponto fixo instável.

A partir dessa definição é possível compreender alguns resultados apresentados na Fig. 2.1. Inicialmente, os pontos fixos do MQ são encontrados impondo a condição  $x_{n+1} = x_n$ , da qual obtém-se

$$x_{\pm}^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2a}. \quad (2.2)$$

A derivada do MQ resulta em  $f'(x_n) = -2ax_n$ , tal que  $f'(x_{\pm}^*) = 1 \mp \sqrt{1 + 4a}$ . Aplicando a condição de estabilidade supracitada conclui-se que no intervalo  $-1/4 < a < 3/4$  encontrar-se-ão dois pontos fixos, sendo um assintoticamente estável e outro instável. Para valores menores que  $a = -1/4$  não existem soluções reais e portanto não são encontrados pontos fixos, o que é corroborado pela análise numérica apresentada na Fig. 2.1. Para  $a = -1/4$  ocorre uma bifurcação sela-nó, caracterizada pelo surgimento de dois pontos fixos com condições de estabilidade opostas. Entretanto, na Fig. 2.1 não observa-se a órbita instável pois, após o transiente, todas as condições iniciais convergem para a órbita assintoticamente estável.

Tendo em vista que a classificação de um ponto fixo como assintoticamente estável ou instável é definida pelo módulo da derivada do mapa, é intuitivo afirmar que alterações na condição de estabilidade de  $x^*$  ocorrem quando  $f'(x^*)$  move-se além dos limites impostos pelos valores  $\pm 1$ . Observa-se que, conforme o parâmetro  $a$  aumenta de  $-1/4$  para  $3/4$ , o valor de  $f'(x^*)$  para o ponto fixo assintoticamente estável decresce de  $+1$  para  $-1$  e, para  $a > 3/4$ , o ponto fixo torna-se instável. Devido à instabilidade do ponto fixo quando  $a > 3/4$ , serão necessárias duas iterações para repetir o valor de  $x_n$ , dando origem à BDP de forma que, sendo  $x_1^*$  e  $x_2^*$  os novos pontos periódicos assintoticamente estáveis, obtém-se a sequência  $\{x_1^*, x_2^*, x_1^*, x_2^*, \dots\}$ . Os pontos  $x_1^*$  e  $x_2^*$  são pontos fixos do mapa composto por duas iterações de  $f(x_n)$ , tal que  $f^{(2)}(x_n) = f[f(x_n)]$  [69]. Para  $a = 5/4$  a derivada do mapa composto  $f^{(2)}$ , calculada pela regra da cadeia, cruza a barreira de valor  $-1$  dando origem a uma nova BDP e, como consequência, os pontos periódicos existentes farão parte de uma

órbita de período 4 enquanto  $a$  for maior que  $5/4$  e menor que  $a_{48}$ , valor do parâmetro  $a$  no qual ocorrerá novamente uma alteração na condição de estabilidade.

De forma geral, órbitas periódicas originárias das BDPs têm a condição de estabilidade alterada à medida que aumenta-se o valor do parâmetro  $a$ , passando de assintoticamente estáveis para instáveis. Essa mudança pode ser verificada pela derivada do mapa  $f^{(m)}(x_n)$  que, quando calculada ao longo dos pontos periódicos, passa pelo valor  $-1$  indicando a criação de  $2m$  órbitas assintoticamente estáveis, sendo possível observar o que é denominado na literatura de cascata de BDPs [13, 66].

## 2.2 Expoente de Lyapunov e bifurcações

Considere uma condição inicial típica próxima a um ponto fixo instável  $x^*$  de um mapa qualquer. Ao iterar esse mapa, a distância entre o ponto atual  $x_n$  da órbita e o ponto  $x^*$  estará aumentando. Após um tempo transiente, a órbita convergirá para um ponto fixo assintoticamente estável. Esse tipo de dinâmica, na qual o comportamento instável é transitório, é comum. Entretanto, nem sempre uma condição inicial irá convergir para uma região de estabilidade. Pode ocorrer, para determinados parâmetros, que nenhuma região estável exista e, mesmo após um longo tempo de iteração, a trajetória ainda experimente um comportamento instável. Nessa conjuntura, é classificada como caótica uma trajetória que se afasta de sua vizinhança com uma taxa exponencial à medida que o mapa é iterado [13].

Sistemas caóticos apresentam uma considerável sensibilidade quando trata-se da escolha das condições iniciais. Isso significa que condições iniciais relativamente próximas podem, após um determinado tempo, gerar resultados completamente diferentes. Uma ferramenta importante na quantificação da sensibilidade que um sistema apresenta à escolha das condições iniciais é denominada Expoente de Lyapunov (EL), que proporciona uma medida do grau de caoticidade de uma trajetória. Considere inicialmente um mapa unidimensional, tal que  $x_0$  e  $x_0 + \delta_0$  sejam duas condições iniciais vizinhas separadas por uma distância infinitesimal  $\delta_0$ . Após  $n$  iterações do mapa

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.3)$$

a distância entre esses dois pontos será  $\delta_n$ . Se  $\delta_n$  relaciona-se com  $\delta_0$  por  $|\delta_n| \sim |\delta_0|e^{\lambda n}$ , então  $\lambda$  é o EL procurado, tal que

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \right).$$

A distância  $\delta_n$  é a diferença entre a  $n$ -ésima iteração a partir do ponto  $x_0 + \delta_0$  e a  $n$ -ésima iteração a partir do ponto  $x_0$ . Sendo assim, a expressão para  $\lambda$  pode ser reescrita como

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \delta_0) - f^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right| \right),$$

na qual  $\lambda$  depende de  $\delta_0$  e de  $n$ . Admitindo que a separação entre os pontos  $x_0 + \delta_0$  e  $x_0$  é infinitesimal e considerando um número infinito de iterações, obtém-se

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \delta_0) - f^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right| \right). \quad (2.4)$$

O argumento do logaritmo da Eq. (2.4) no limite  $\delta_0 \rightarrow 0$  é a derivada de  $f^{(n)}(x)$  calculada em  $x_0$ , logo:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \frac{df^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \right). \quad (2.5)$$

Para calcular a derivada da Eq. (2.5) utiliza-se a regra da cadeia, de forma que  $\lambda$  pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|, \quad (2.6)$$

que é, por definição, o EL do mapa (2.3) e constitui uma medida da expansão ( $\lambda > 0$ ) ou da contração ( $\lambda < 0$ ) exponencial da distância  $\delta_n$ . Na Eq. (2.6),  $x_i = f^{(i)}(x_0)$  é o resultado da  $i$ -ésima iteração do mapa a partir da condição inicial  $x_0$ . No limite  $n \rightarrow \infty$  o EL não deve mais depender da condição inicial  $x_0$ , pois o atrator é inteiramente visitado independentemente do ponto de partida [69].

O EL permite a obtenção de informações relevantes com respeito a estabilidade local de uma órbita. Quando se trata de pontos fixos assintoticamente estáveis, o sinal de  $\lambda$  é negativo, uma vez que as trajetórias convergem para um único ponto. É possível também definir uma órbita caótica analisando o EL da sequência  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  obtida pela iteração de um mapa diferenciável. Tal órbita é definida como caótica se [13]:

- $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  não é assintoticamente estável;
- o EL  $\lambda$  calculado ao longo da órbita é maior que zero.

A definição supramencionada pode ser verificada nas Figs. 2.2(a) e 2.2(b) que mostram, respectivamente, o diagrama de bifurcação e o EL em função do parâmetro  $a$  para o MQ. Nos intervalos periódicos o valor de  $\lambda$  é negativo ao passo que, nos intervalos caóticos,  $\lambda > 0$ . Comparando as Figs. 2.2(a) e 2.2(b) é possível observar que  $\lambda$  torna-se nulo sempre que a órbita perde estabilidade, fato que está diretamente relacionado à ocorrência de bifurcação, como abordado anteriormente.

### 2.3 Composição de dois mapas quadráticos

Após introduzir algumas propriedades do MQ, o objetivo desta seção é compreender a influência de parâmetros externos em sua dinâmica. Usando a composição de MQs modificados a cada iteração por um parâmetro  $F_j$ , torna-se possível gerar múltiplos atratores

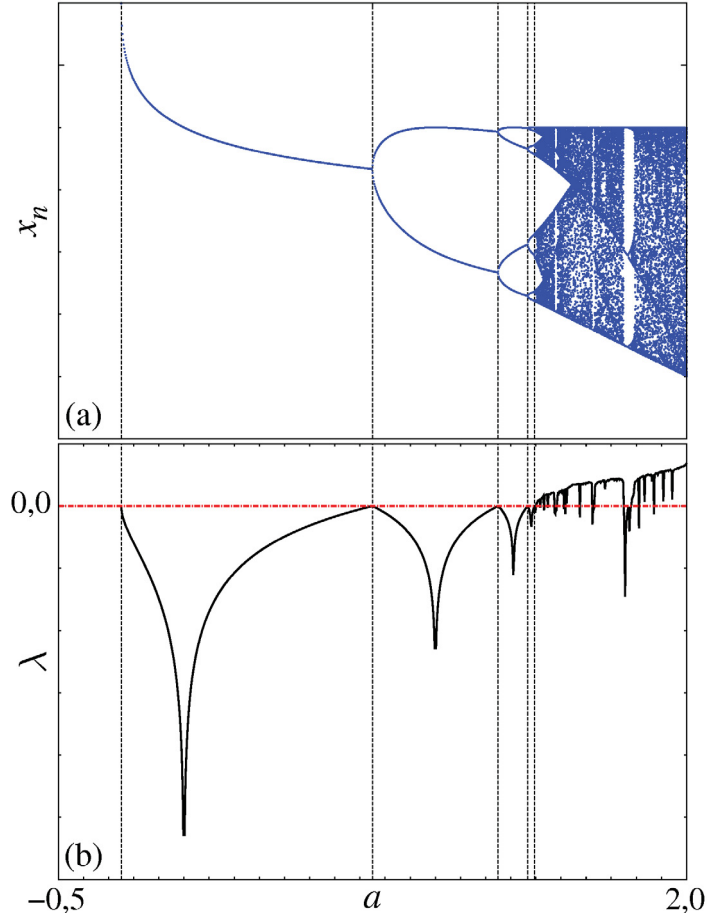


Figura 2.2 – Comparação entre (a) o diagrama de bifurcação e (b) o valor do EL para o MQ. As linhas verticais identificam os valores de  $a$  nos quais ocorre bifurcação. Para o cálculo de  $\lambda$ , o MQ foi iterado  $10^5$  vezes após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 10^5$ , utilizando uma única condição inicial  $x_0 = 0,5$ . Em (a), a variável  $x_n$  encontra-se no intervalo  $[-0,6, 1,1]$  e em (b)  $\lambda$  encontra-se no intervalo  $[-6, +1]$ . O diagrama de bifurcação apresentado em (a) foi construído utilizando o mesmo procedimento numérico descrito na Fig. 2.1.

no espaço de fases e também diagramas de bifurcação independentes que se separam à medida que a intensidade  $F$  desse parâmetro aumenta. Para isso, é necessário controlar a dinâmica das variáveis intermediárias, conceito que será abordado no decorrer desta seção. Considere inicialmente o mapa unidimensional descrito por

$$x_{n+1} = f(x_n, \vartheta, F_j), \quad (2.7)$$

no qual  $x_n$  representa o estado do sistema no tempo discreto  $n$  e cuja evolução temporal é descrita pela função  $f$ . O termo  $\vartheta$  representa todos os parâmetros intrínsecos ao sistema e  $F_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, k$ , é um parâmetro externo de período  $k$ . É possível construir um mapa composto  $\mathcal{C}^{(k)}$  aplicando o mapa (2.7)  $k$  vezes, utilizando todos os  $k$  possíveis valores de  $F_j$ , tal que

$$\mathcal{C}^{(k)} = x_{n+k}^{(c)} = f(x_{n+k-1}, \vartheta, F_k) \circ \dots \circ f(x_{n+1}, \vartheta, F_2) \circ f(x_n^{(c)}, \vartheta, F_1). \quad (2.8)$$

As variáveis com o sobrescrito  $(c)$  indicam quantidades relacionadas ao mapa composto, ou seja, que ocorrem sempre a cada  $k$  iterações, enquanto os termos  $x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$  são as variáveis intermediárias. A dinâmica de cada estado intermediário pode ser controlada e manipulada independentemente. Uma aplicação recente do conceito de dinâmica intermediária consiste na descrição da posição de partículas após meio período de tempo em fluidos caóticos [70]. Esse mesmo conceito também pode descrever a variação na concentração de reagentes intermediários em oscilações químicas [71].

Para introduzir o método que é proposto nesta tese, considere o Mapa Quadrático Modificado (MQM) descrito pela equação

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + F_j, \quad (2.9)$$

sendo  $F$  a intensidade com a qual a dinâmica é alterada. Se o período do parâmetro  $F_j$  é  $k = 2$ , adotando  $F_1 = -F$  e  $F_2 = +F$  é possível obter dois MQMs diferentes a partir da Eq. (2.9): um deles utilizando  $-F$ , que nesse caso corresponde às iterações ímpares, e outro utilizando  $+F$ , que corresponde às iterações pares, de tal forma que:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a(x_n^{(c)})^2 - F, \\ x_{n+2}^{(c)} &= 1 - ax_{n+1}^2 + F. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sendo assim, o mapa composto por esses dois MQMs é descrito por:

$$\mathcal{C}^{(k=2)} = x_{n+2}^{(c)} = 1 - a[1 - a(x_n^{(c)})^2 - F]^2 + F. \quad (2.11)$$

Na Eq. (2.11),  $x_n^{(c)}$  é a condição inicial do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , a variável  $x_{n+2}^{(c)}$  corresponde a uma iteração completa desse mapa e  $x_{n+1} = 1 - a(x_n^{(c)})^2 - F$  é a variável intermediária. Portanto, um ponto fixo de  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  obedece à relação

$$x_2^{(c)} = 1 - ax_1^2 + F = x_0^{(c)}, \quad (2.12)$$

sendo  $x_1 = 1 - a(x_0^{(c)})^2 - F$ . O ponto intermediário  $x_1$  não é um ponto fixo de  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , mas é necessário para realizar a conexão  $x_0^{(c)} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2^{(c)} = x_0^{(c)}$ . Alternando o valor de  $F$  a cada iteração torna-se possível controlar a dinâmica da órbita intermediária, promovendo mudanças significativas no diagrama de bifurcação do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ .

Os efeitos de perturbações periódicas em mapas unidimensionais já foram estudados por meio da modulação monitorada do parâmetro de não linearidade alternando a perturbação entre dois valores distintos [72], e também através do uso da função cosseno para controlar uma perturbação periódica externa [73–75]. O método proposto nesta tese para sistemas discretos, por sua vez, consiste em um método sem monitoramento baseado na modificação periódica do parâmetro externo que é adicionado à variável do sistema. Esse procedimento mostra-se mais eficiente nos casos em que a periodicidade  $k$  do parâmetro externo é alta e, além disso, pode ser facilmente generalizado para mapas bidimensionais, como será demonstrado nos Capítulos 3 e 4.

O diagrama de bifurcação do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  é apresentado na Fig. 2.3. Esse diagrama foi construído utilizando o mesmo algoritmo descrito na Seção 2.1, porém alternando o parâmetro externo  $F_j$  a cada iteração, conforme a Eq. (2.10), e separando os valores da variável intermediária, representada por  $x_n$ , dos valores da variável do mapa composto, representada por  $x_n^{(c)}$ . É interessante observar o diagrama obtido para  $F = 0$ , formado pelas curvas preta e verde das Figs. 2.3(a), 2.3(b) e 2.3(c). Esse diagrama é idêntico ao diagrama de bifurcação usual do MQ, exibido na Fig. 2.1, porém apresenta uma diferença estrutural: dentro do intervalo  $[a_{12}, a_{24}]$  existem duas órbitas de período 1 em vez de uma órbita de período 2. Para uma única condição inicial, a curva preta é formada pelos valores da variável  $x_n^{(c)}$  do mapa composto e a curva verde é formada pelos valores da variável intermediária  $x_n$ . Sendo assim, o diagrama de bifurcação do MQ é reproduzido pelo mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  com  $F = 0$  apenas se as iterações intermediárias forem consideradas ou se pelo menos duas condições iniciais diferentes que geram as órbitas de período 1 forem escolhidas. Essa é uma diferença fundamental entre o MQ e o mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  com  $F = 0$ . Para comparar com o caso  $F \neq 0$  nas demais figuras deste capítulo será utilizado o diagrama de bifurcação do MQ, sempre representado por curvas em preto. Todos os diagramas, seja do MQ ou do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k)}$ , foram construídos considerando, para cada condição inicial, um total de 20 iterações após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 10^5$ . Todos os intervalos de  $a$  analisados foram divididos igualmente em  $10^3$  valores. Informações sobre condições iniciais e intensidades do parâmetro externo  $F_j$  utilizadas em cada caso podem ser encontradas na descrição das figuras.

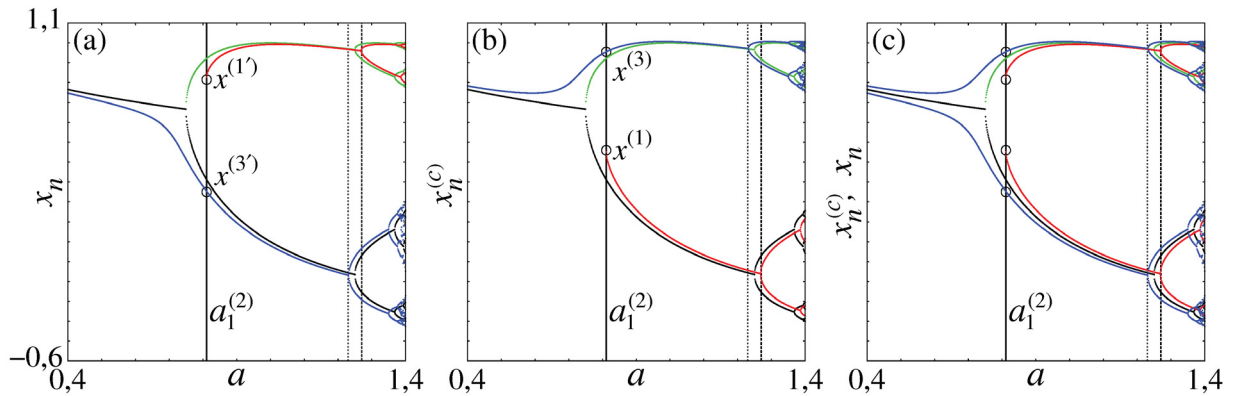


Figura 2.3 – Diagrama de bifurcação do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , descrito matematicamente pela Eq. (2.11). Em (a), (b) e (c), a curva verde representa a variável intermediária  $x_n$  e a curva preta representa a variável  $x_n^{(c)}$  do mapa composto com  $F = 0$  e condição inicial  $x_0^{(c)} = 0$ . As curvas azuis e vermelhas foram obtidas utilizando  $F = 7 \times 10^{-3}$  e como condições iniciais  $x_0^{(c)} = -0,8$  e  $x_0^{(c)} = 0$ , respectivamente. Para esse caso, a variável intermediária  $x_n$  é apresentada em (a), a variável  $x_n^{(c)}$  do mapa composto encontra-se em (b) e em (c) as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  são apresentadas simultaneamente. A linha vertical contínua indica o parâmetro  $a = a_1^{(2)}$ , no qual ocorre uma bifurcação sela-nó, enquanto as linhas pontilhada e tracejada destacam a ocorrência de BDP.



A importância da dinâmica intermediária no diagrama de bifurcação do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  torna-se mais evidente quando  $F = 7 \times 10^{-3}$ , caso representado pelas curvas azuis e vermelhas da Fig. 2.3, obtidas a partir de duas condições iniciais diferentes. Nas Figs. 2.3(a) e 2.3(b) encontram-se, respectivamente, as órbitas intermediárias  $x_n$  e as órbitas  $x_n^{(c)}$  que completam a iteração do mapa composto. Na Fig. 2.3(c), os valores de  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  são apresentados simultaneamente. Para  $F = 7 \times 10^{-3}$ , a partir da condição de existência de um ponto fixo do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , dada pela Eq. (2.12), obtêm-se no intervalo  $-1/4 \leq a < 0,8105174508$  quatro soluções dentre as quais duas são reais e duas são complexas, sendo o parâmetro  $a = a_1^{(2)} = 0,8105174508$  destacado pela linha vertical contínua na Fig. 2.3. Das soluções reais, somente uma satisfaz a condição de ponto fixo assintoticamente estável, solução essa representada na Fig. 2.3(b) pela curva azul que se sobrepõe à vermelha visto que, nesse intervalo, todas as condições iniciais convergem para essa órbita. A variável intermediária  $x_n$ , por sua vez, não é uma solução da equação  $x_2^{(c)} - x_0^{(c)} = 0$ , mas pode ser obtida numericamente como mostra a curva azul da Fig. 2.3(a).

Para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , as órbitas  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  não sofrem BDP em  $a_{12} = 3/4$ , como ocorre para o MQ. Quando  $a = a_1^{(2)}$ , entretanto, ocorre uma alteração significativa na dinâmica do mapa composto devido à presença de uma nova bifurcação sela-nó. Para compreender essa alteração, considere uma iteração completa do mapa composto com condição inicial  $x_0^{(c)} = x$ , a fim de simplificar a notação, tal que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - ax^2 - F, \\ x_2^{(c)} &= 1 - ax_1^2 + F. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A condição a ser satisfeita para obtenção de um ponto fixo é dada por

$$1 - a(1 - ax^2 - F)^2 + F - x = 0. \quad (2.14)$$

Considerando  $a = a_1^{(2)} = 0,8105174508$  e  $F = 7 \times 10^{-3}$ , a Eq. (2.14) tem como soluções os seguintes pontos:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 0,4656081284, \\ x^{(2)} &= 0,4656835048, \\ x^{(3)} &= 0,9544367463, \\ x^{(4)} &= -1,885728379. \end{aligned}$$

Substituindo esses quatro pontos fixos no módulo da derivada do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , dado por  $|\mathcal{C}'^{(k=2)}| = 4a^2(1 - ax^2 - F)x$ , verifica-se que apenas  $x^{(1)}$  e  $x^{(3)}$  são assintoticamente estáveis. No entanto, quando a órbita intermediária  $x_1 = 1 - ax^2 - F$  é considerada numericamente, em  $a = a_1^{(2)}$  surgem dois novos pontos fixos com mesma condição de estabilidade,  $x^{(1')} = 0,8172871692$  e  $x^{(3')} = 0,2546595313$ . Nas Figs. 2.3(a) e 2.3(b) é possível observar que o par de pontos  $(x^{(1)}, x^{(1)})$  dá origem às órbitas representadas pelas curvas vermelhas e o

par de pontos  $(x^{(3)}, x^{(3)})$ , por sua vez, compõe as órbitas representadas pelas curvas azuis, existindo assim dois atratores possíveis em  $a \geq a_1^{(2)}$ .

A análise das soluções da Eq. (2.14) permite compreender a proibição da BDP  $1 \rightarrow 2$  em  $a = 3/4$  para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ . No caso do MQ, a periodicidade  $m$  da órbita aumenta por meio de uma BDP pois o número de soluções da equação  $x_m - x = 0$  também aumenta. Considerando o mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , desde o nascimento do ponto fixo existem quatro soluções para  $x$ . Ocorre que, para  $a < a_1^{(2)}$ , existem apenas duas soluções reais (uma assintoticamente estável) ao passo que, para  $a > a_1^{(2)}$ , existem quatro soluções reais (duas assintoticamente estáveis) até a ocorrência de uma nova bifurcação. Portanto, em  $a = a_1^{(2)}$  não é possível ocorrer BDP pois não há aumento do número de soluções, sendo que a criação de um novo par de órbitas assintoticamente estáveis nesse valor de parâmetro é devido à bifurcação sela-nó, como será demonstrado analiticamente na sequência desta seção. Nota-se que, conforme cresce o valor de  $a$ , os dois pares de órbitas convergem para os mesmos valores de  $x_n$  do MQ, como mostra a Fig. 2.4(a). Esse fato evidencia a tendência de preservar a periodicidade do mapa composto até que ocorra a BDP.

Devido ao surgimento de novas soluções reais quando  $a = a_1^{(2)}$ , nota-se uma alteração na condição de estabilidade da curva vermelha na Fig. 2.4(a). Essa alteração é corroborada pelo valor do EL  $\lambda$  calculado para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  a partir da mesma condição inicial, representado na Fig. 2.4(b) também pela cor vermelha. Para essa órbita, iniciada em  $x_0^{(c)} = 0$ , o EL torna-se nulo quando  $a = a_1^{(2)}$ . A órbita representada pela curva azul, cuja condição inicial é  $x_0^{(c)} = -0,8$ , não apresenta mudanças significativas nessa região do diagrama de bifurcação. Nas Figs. 2.4(a) e 2.4(b) também é possível observar que os pontos fixos do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  encontrados em  $a_1^{(2)}$  a partir de condições iniciais diferentes são independentes e sofrem BDP em valores distintos de  $a$ . A BDP  $1 \rightarrow 2$  do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , ou  $2 \rightarrow 4$  se consideradas as iterações intermediárias, é permitida somente em um intervalo paramétrico no qual o MQ tem período 2 e, conseqüentemente, possui quatro soluções. Os valores de  $a$  nos quais as órbitas azuis e vermelhas sofrem BDP são indicados nas Figs. 2.3 e 2.4 pelas linhas verticais pontilhada e tracejada, respectivamente.

É possível obter expressões analíticas que determinam os valores de  $a$  em que ocorrem bifurcações para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ . Como descrito anteriormente, um ponto fixo do mapa composto deve satisfazer a condição  $x_2^{(c)} - x = 0$ , que resulta na Eq. (2.14). Além disso, deve-se considerar também a equação de autovalores  $|\mathbb{J}_1^{(k=2)} - h\mathbb{I}| = 0$ , na qual  $\mathbb{J}_1^{(k=2)}$  é a matriz Jacobiana obtida após a primeira iteração do mapa composto,  $h$  o autovalor e  $\mathbb{I}$  a matriz identidade. No caso de  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , como trata-se de um sistema unidimensional, a matriz Jacobiana equivale à própria derivada do sistema, de forma que  $|\mathbb{J}_1^{(k=2)} - h\mathbb{I}| = 0$  dá origem à seguinte equação:

$$4a^2(1 - ax^2 - F)x - h = 0. \quad (2.15)$$

O próximo passo consiste em eliminar a variável  $x$  calculando o resultante entre os polinômios

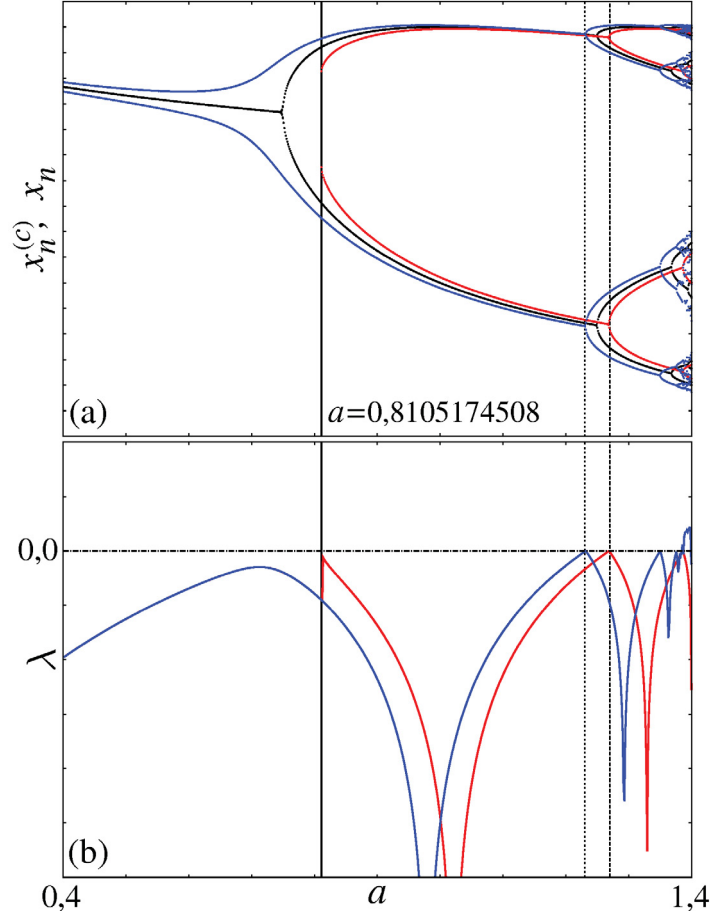


Figura 2.4 – (a) Diagrama de bifurcação do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  com  $F = 7 \times 10^{-3}$  (curvas azuis e vermelhas), considerando as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$ . A curva preta representa o diagrama de bifurcação do MQ. Em (b), o valor do EL  $\lambda$  calculado para  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  é apresentado em função do parâmetro  $a$ . As curvas azuis e vermelhas, tanto em (a) como em (b), foram obtidas utilizando as condições iniciais  $x_0^{(c)} = -0,8$  e  $x_0^{(c)} = 0$ , respectivamente. As linhas verticais destacam os valores de  $a$  nos quais ocorre bifurcação. Para o cálculo de  $\lambda$  foram consideradas  $10^5$  iterações após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 10^5$ . Em (a), as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  encontram-se no intervalo  $[-0,6, 1,1]$  e em (b)  $\lambda$  encontra-se no intervalo  $[-3, +1]$ .

(2.14) e (2.15), fixando um valor para  $h$ . Desse modo, obtém-se a equação  $W_m^{(k=2)}(a, F) = 0$  que contém informações sobre a condição de estabilidade do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  nas regiões do diagrama de bifurcação que correspondem ao período 1. Para a execução desse procedimento, foi utilizado o sistema algébrico computacional Maple 15.

Escolhendo inicialmente  $h = 1$ , condição necessária para ocorrência de uma bifurcação sela-nó, obter-se-á a equação  $W_1^{(k=2)}(a, F) = 0$  que, para um determinado parâmetro  $F$ , tem como soluções os valores de  $a$  nos quais órbitas de período 1 do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  são criadas, tal que

$$W_1^{(k=2)}(a, F) = 256a^4F^4 - (512a^4 + 1536a^3 + 288a^2)F^2 + W_1(a)W_{1 \rightarrow 2}(a) = 0. \quad (2.16)$$

De forma alternativa, a equação  $W_{1 \rightarrow 2}^{(k=2)}(a, F) = 0$  é obtida impondo a condição necessária para ocorrência de BDP para o mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , ou seja,  $h = -1$ . A equação resultante

é

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(k=2)}(a, F) = 256a^4 F^4 - (512a^4 + 1536a^3 + 160a^2)F^2 + W_{2 \rightarrow 4}(a) = 0. \quad (2.17)$$

As Eqs. (2.16) e (2.17) foram descritas como funções das condições de contorno do diagrama de bifurcação do MQ, tal que  $W_1(a) = (4a + 1) = 0$  é a expressão que determina o valor  $a = -1/4$  no qual ocorre bifurcação sela-nó,  $W_{1 \rightarrow 2}(a) = (4a - 3)^3 = 0$  determina a BDP  $1 \rightarrow 2$  que ocorre em  $a = 3/4$  e  $W_{2 \rightarrow 4}(a) = (16a^2 + 8a + 5)(4a - 5)^2 = 0$ , por sua vez, determina a BDP  $2 \rightarrow 4$ , tendo como soluções os parâmetros  $a = 5/4$  e  $a = -1/4 \pm 1/2i$ . Nota-se que, para o mapa composto, ocorre o acoplamento entre  $W_1(a)$  e  $W_{1 \rightarrow 2}(a)$  de forma que a BDP  $1 \rightarrow 2$  do MQ agora está inserida na Eq. (2.16) que determina os parâmetros em que ocorre bifurcação sela-nó, provando analiticamente a proibição da BDP em  $a = 3/4$  para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ . Fazendo  $F = 7 \times 10^{-3}$  e resolvendo  $W_1^{(k=2)}(a, F) = 0$ , são encontrados os valores de  $a$  nos quais nascem as órbitas de período 1 do mapa composto representadas pelas curvas azuis e vermelhas nas Figs. 2.3 e 2.4. O primeiro valor é  $a_1^{(1)} = -0,2499992344$ , no qual nasce o primeiro par de pontos fixos assintoticamente estáveis. O segundo par nasce em  $a_1^{(2)} = 0,8105174508$ , valor esse caracterizado pela separação entre as curvas azuis e vermelhas originadas de diferentes condições iniciais.

Para a Eq. (2.17), considerando  $F \neq 0$ , é possível obter duas soluções reais que indicam a ocorrência de duas BDPs em valores diferentes de  $a$ . Se  $F = 7 \times 10^{-3}$ , as soluções reais obtidas correspondem aos parâmetros  $a_{12}^{(1)} = 1,231673306$ , no qual ocorre a BDP da órbita representada pela curva azul, e  $a_{12}^{(2)} = 1,268801427$ , no qual ocorre a BDP da órbita representada pela curva vermelha. Esses valores encontram-se destacados, respectivamente, pelas linhas verticais pontilhada e tracejada contidas na Fig. 2.5(b), tornando evidente o processo de duplicação e separação das regiões periódicas. O mesmo intervalo paramétrico é considerado na Fig. 2.5(a), porém utilizando o MQ.

A duplicação de regiões periódicas no diagrama de bifurcação do mapa obtido pela composição de dois MQMs ( $k = 2$ ) continua ocorrendo em todos os intervalos cujo período correspondente é par, como exemplificado nas Figs. 2.6(a) e 2.6(b) para o caso de uma região de período 6. No entanto, a duplicação nesse intervalo não é resultado da proibição da BDP, como discutido anteriormente. A Fig. 2.6(b) exemplifica a duplicação de uma órbita de período par que nasce a partir de uma bifurcação sela-nó após uma região de caos. O processo de duplicação é resultado da criação de dois atratores de mesmo período em dois diferentes valores de  $a$ , sendo a órbita azul obtida a partir da condição inicial  $x_0^{(c)} = -0,8$  e a vermelha obtida a partir da condição inicial  $x_0^{(c)} = 0$ . A diferença entre os valores de  $a$  nos quais nascem essas duas órbitas é determinada pela intensidade  $F$  do parâmetro externo  $F_j$ . Nesse caso, a BDP não é proibida pois a órbita de período 6 do MQ corresponde a uma órbita de período 3 do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , sendo o número de soluções de ambos os casos equivalentes nesse intervalo.

Os resultados desta seção mostram o processo de duplicação de regiões periódicas

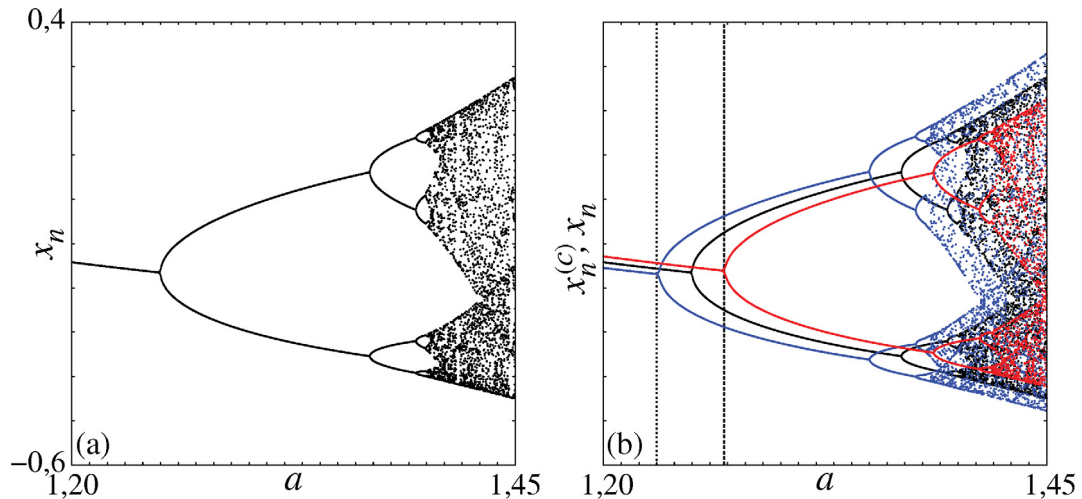


Figura 2.5 – Diagrama de bifurcação do MQ em (a) e do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  para  $F = 7 \times 10^{-3}$  em (b) (curvas azul e vermelha), destacando o intervalo paramétrico no qual ocorre BDP. As curvas azul e vermelha representam as mesmas órbitas das Figs. 2.3 e 2.4, geradas a partir das condições iniciais  $x_0^{(c)} = -0,8$  e  $x_0^{(c)} = 0$ , respectivamente. As linhas verticais indicam a ocorrência de BDP das órbitas do mapa composto em diferentes valores de  $a$ .

a partir da composição de dois MQMs e a importância da dinâmica intermediária nesse processo. Numericamente, é possível constatar que órbitas de períodos maiores são mais sensíveis ao valor de  $F$  e, por esse motivo, a intensidade do parâmetro externo deve ser cuidadosamente escolhida, dependendo do intervalo paramétrico que deseja-se duplicar. Os diagramas de bifurcação apresentados nesta seção foram construídos utilizando a sequência

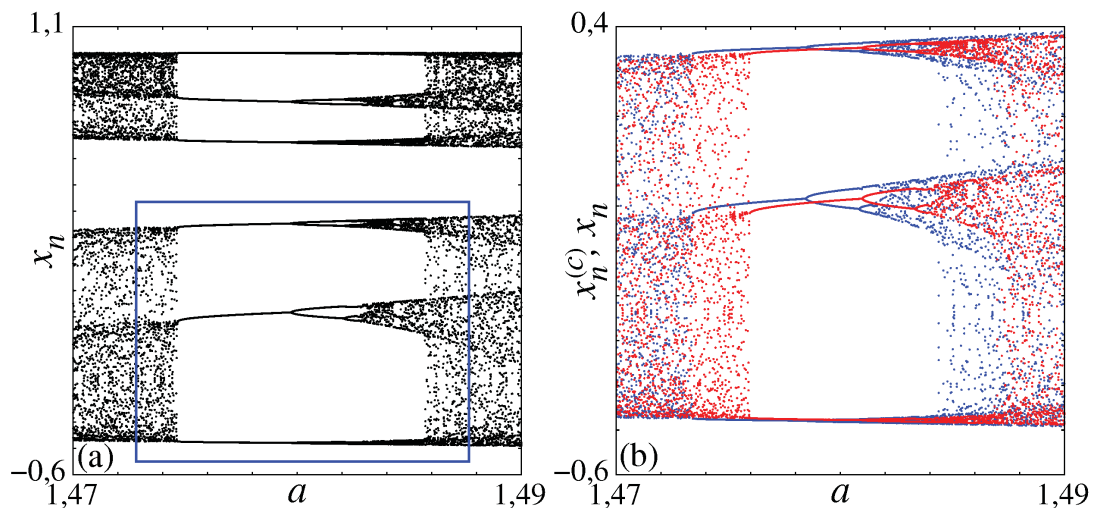


Figura 2.6 – (a) Diagrama de bifurcação do MQ que destaca uma região de período 6. Em (b), uma ampliação da região delimitada pelo retângulo azul de (a) é apresentada com as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , usando  $F = 5 \times 10^{-4}$ . As órbitas representadas pelas curvas azul e vermelha são obtidas a partir das mesmas condições iniciais das Figs. 2.3, 2.4 e 2.5.

$\{-F, +F, -F, +F, \dots\}$ . Uma simples troca do sinal de  $F$  faz com que as órbitas intermediárias se tornem órbitas do mapa composto e, conseqüentemente, as órbitas do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  atuais se tornam intermediárias.

### 2.3.1 Janelas de períodos ímpares e o dobramento de período

Para o caso da composição de dois MQMs ( $k = 2$ ), dependendo do período da órbita analisada, podem ocorrer dois fenômenos:

- (i). a duplicação de uma região periódica, que ocorre quando duas órbitas independentes sofrem BDP em valores diferentes de  $a$  gerando um prolongamento do intervalo de regularidade no diagrama de bifurcação;
- (ii). o dobramento de período, que ocorre em intervalos que apresentam periodicidade ímpar.

O segundo item é caracterizado pela duplicidade do período original da órbita quando consideradas as iterações intermediárias, não gerando alterações no intervalo do parâmetro  $a$  no qual existe regularidade, ao contrário do que ocorre no fenômeno descrito no item (i).

No diagrama de bifurcação, intervalos de período  $m$  podem surgir após uma região de caos, sendo esses intervalos conhecidos como janelas de periodicidade  $m$ . Um exemplo desse comportamento encontra-se na Fig. 2.7(a), que apresenta uma janela de período 3 após uma região caótica no diagrama de bifurcação do MQ. No caso do MQM com um parâmetro externo  $F_j$  de período  $k = 2$ , uma órbita de período 3 pode ser composta pelas seguintes etapas:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - ax^2 - F, \\ x_2^{(c)} &= 1 - ax_1^2 + F, \\ x_3 &= 1 - a(x_2^{(c)})^2 - F. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Se  $F = 0$ , a sequência (2.18) consistirá em uma órbita de período 3 do MQ se os valores de  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  forem considerados. Para esse cenário, eliminando a variável  $x$  entre a equação  $x_3 - x = 0$  e o polinômio característico resultante da equação de autovalores, conclui-se que o parâmetro  $a$  no qual ocorre o nascimento da órbita de período 3 do MQ é  $a = 7/4$ , valor esse representado pela linha horizontal azul na Fig. 2.7(a). Para a equação  $x_3 - x = 0$ , considerando  $a = 7/4$  e  $F = 0$ , são encontradas oito soluções e somente três delas correspondem a pontos assintoticamente estáveis. São esses pontos que dão origem à órbita de período 3 e estão localizados exatamente em:  $x^{(1)} = -0,7439644205$ ,  $x^{(2)} = 0,03140464687$  e  $x^{(3)} = 0,9982740593$ .

Após seu nascimento, esse ponto periódico dá origem a uma cascata de BDPs na qual órbitas de períodos  $m = 3 \times 2^l$  são sucessivamente criadas, com  $l = 1, 2, 3, \dots$ . A partir de cada um dos três ramos existentes nessa janela surgirá uma região caótica e, à

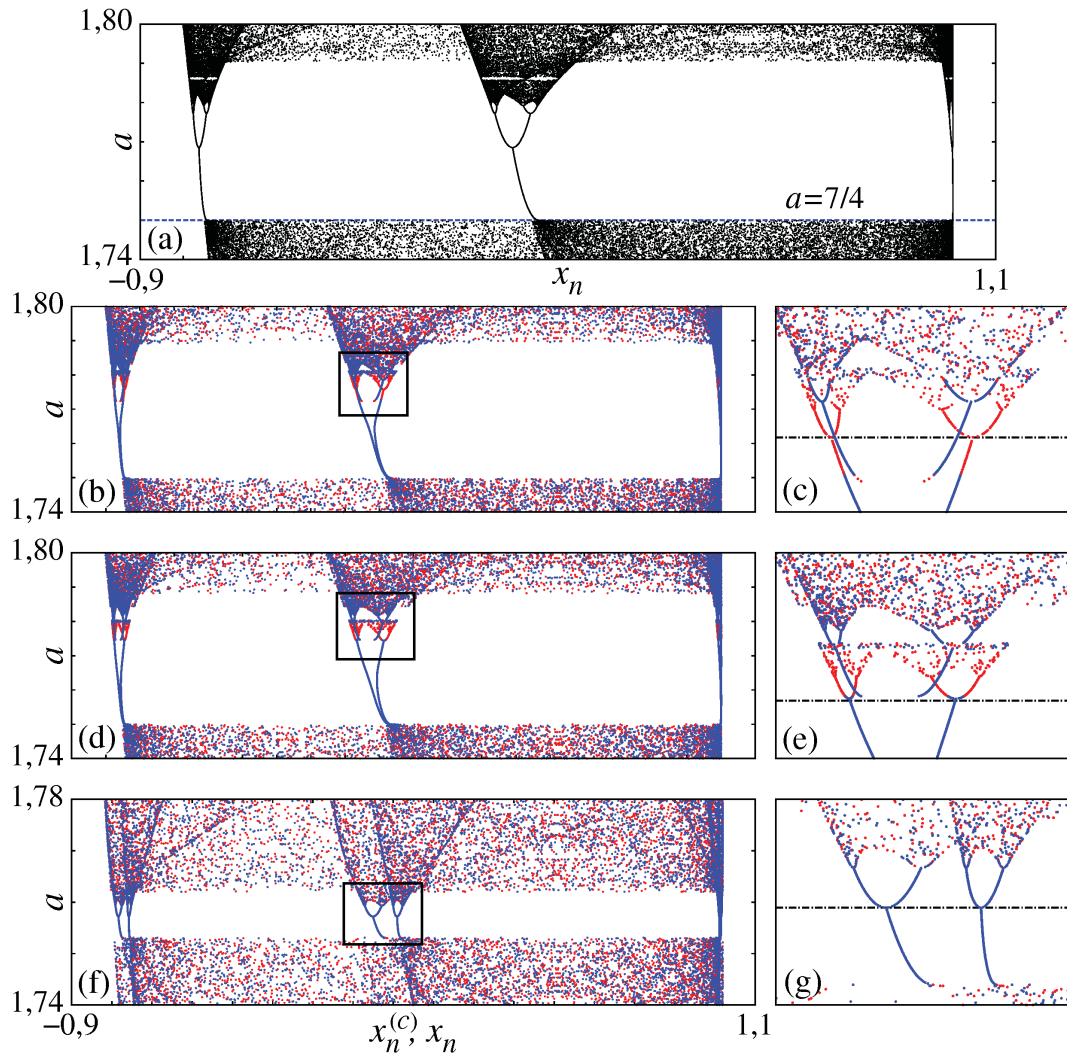


Figura 2.7 – (a) Diagrama de bifurcação do MQ mostrando o nascimento de uma janela de período 3 em  $a = 7/4$  (linha azul). O diagrama de bifurcação do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  nessa mesma região é apresentado em (b) para  $F = 2 \times 10^{-4}$ , em (d) para  $F = 1 \times 10^{-3}$  e em (f) para  $F = 5 \times 10^{-3}$ . As curvas azul e vermelha foram obtidas a partir das condições iniciais  $x_0^{(c)} = -0,8$  e  $x_0^{(c)} = 0$ , respectivamente. As figuras (c), (e) e (g) mostram uma magnificação da região delimitada pelo quadrado preto das figuras (b), (d) e (f), nessa ordem, e as linhas horizontais indicam o valor de  $a$  no qual ocorre BDP.

medida que o parâmetro  $a$  cresce, essas três regiões se tornarão abruptamente uma única região de caos no diagrama de bifurcação. Sendo assim, torna-se relevante compreender o que acontece com a órbita de período 3 do MQ quando  $F \neq 0$  para o mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ . A primeira conclusão é que, se  $F \neq 0$ , a variável  $x_3$  na Eq. (2.18) é obtida após uma iteração e meia do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ . Isso ocorre pois o termo  $-F$  é repetido, porém não se repete o termo  $+F$ , tornando-se impossível satisfazer a condição  $x_3 - x = 0$ . Ao determinar os pontos que satisfazem a condição  $x_3 - x = 0$  para  $F \neq 0$ , oito soluções são obtidas e nenhum desses pontos é assintoticamente estável. Dessa forma conclui-se que, se a variável intermediária  $x_n$  for considerada, não poderá existir período ímpar quando  $k$  for um número par. A órbita de período 3 do MQ torna-se uma órbita de período 6 do

mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  com  $F \neq 0$ , como mostram as Figs. 2.7(b), 2.7(d) e 2.7(f). Essa alteração ocorre pois, nessa região do diagrama de bifurcação, o mapa composto completa sua órbita com a sequência  $\{-F, +F, -F, +F, -F, +F\}$ . Essas figuras exemplificam o fenômeno do dobramento de período que ocorre para trajetórias que inicialmente tinham período ímpar. No entanto, apesar do período ser dobrado, apenas um atrator é encontrado de forma que as órbitas representadas pelas cores azul e vermelha encontram-se sobrepostas nesse intervalo paramétrico.

Como citado anteriormente, o aumento do parâmetro  $a$  do MQ dá origem a uma cascata de BDPs em cada um dos três ramos criados em  $a = 7/4$ . A primeira ocorrência de BDP, em  $a = 1,768529153$ , será responsável pela transição do período 3 para o período 6, passando de oito para 64 soluções. Todavia, devido à dinâmica intermediária do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  com  $F \neq 0$ , o período 3 é extinto e dá lugar a uma órbita de período 6, de forma que a equação  $x_6^{(c)} - x = 0$  possui 64 soluções e, conseqüentemente, a BDP  $3 \rightarrow 6$  torna-se proibida. Nesse cenário, se  $F = 2 \times 10^{-4}$ , uma nova órbita assintoticamente estável surge em  $a = 1,7723483906$  por meio de uma bifurcação sela-nó, dando início ao processo de duplicação da janela de período 6 exemplificado nas Figs. 2.7(b) e 2.7(c). Sendo assim, a origem da duplicação dessa região do diagrama de bifurcação é a proibição da BDP  $3 \rightarrow 6$  e a criação de uma nova órbita periódica do mapa composto visto que, para  $a < 1,768529153$ , o número de soluções das equações que descrevem as condições de estabilidade do MQ e do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  são incompatíveis. É importante ressaltar a diferença entre esse caso e aquele apresentado na Fig. 2.6, no qual a duplicação da janela de período 6 do MQ também ocorre através da criação de duas órbitas de período 3 do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  (período 6 quando considerados os valores intermediários  $x_n$ ). Nessa janela não há incompatibilidade entre o número de soluções das equações  $x_6 - x = 0$  (MQ) e  $x_6^{(c)} - x = 0$  (mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ ) e, conseqüentemente, a ocorrência de BDP não é proibida.

Os diagramas de bifurcação apresentados nas Figs. 2.7(d) e 2.7(e) foram construídos utilizando  $F = 1 \times 10^{-3}$ . Aumentando o valor de  $F$  é possível notar o afastamento entre as duas janelas de período 6 que foram criadas pela composição de dois MQMs, gerando uma região caótica entre elas. Para  $F = 5 \times 10^{-3}$ , caso representado nas Figs. 2.7(f) e 2.7(g), uma das janelas é absorvida pela região caótica e não é mais possível observar a duplicação. Com isso, conclui-se que o valor de  $F$  deve ser escolhido adequadamente a fim de otimizar o intervalo do parâmetro  $a$  no qual determinada periodicidade é encontrada. Além disso, o aumento de  $F$  torna mais nítido o dobramento de período de 3 (MQ) para 6 (mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  com  $F \neq 0$ ), de forma que todos os seis ramos sofrem BDP no mesmo valor de  $a$ , como destacado pela linha horizontal preta nas Figs. 2.7(c), 2.7(e) e 2.7(g).

## 2.4 Composição de três ou mais mapas

A próxima etapa desse estudo consiste em aumentar o período do parâmetro externo  $F_j$  de  $k = 2$  para  $k = 3$ , a fim de verificar como o número de mapas utilizados na composição



de  $\mathcal{C}^{(k)}$  altera a dinâmica observada no diagrama de bifurcação. Para isso, propõe-se a sequência  $\{-F, 0, +F, -F, 0, +F, \dots\}$  que dá origem ao mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  formado pelas seguintes iterações:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a(x_n^{(c)})^2 - F, \\ x_{n+2} &= 1 - ax_{n+1}^2, \\ x_{n+3}^{(c)} &= 1 - ax_{n+2}^2 + F. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nesse caso,  $x_{n+1}$  e  $x_{n+2}$  são variáveis intermediárias e  $x_{n+3}^{(c)}$  completa uma iteração do mapa composto. O diagrama de bifurcação desse sistema, construído utilizando  $F = 1 \times 10^{-2}$  e considerando um intervalo paramétrico que contém a órbita de período 1 do MQ e também as primeiras BDPs, é apresentado na Fig. 2.8.

Dada uma condição inicial  $x_0^{(c)} = x$ , um ponto fixo do mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  satisfaz a condição  $x_3^{(c)} - x = 0$ , tal que:

$$1 - a[1 - a(1 - ax^2 - F)^2]^2 + F - x = 0. \quad (2.20)$$

Da equação de autovalores  $|\mathbb{J}_1^{(k=3)} - h\mathbb{I}| = 0$ , obtém-se

$$8a^3[1 - a(1 - ax^2 - F)^2](1 - ax^2 - F)x - h = 0. \quad (2.21)$$

Ao calcular o resultante em  $x$  entre os polinômios (2.20) e (2.21) e estabelecer  $h = 1$ , efetuando o mesmo procedimento descrito na Seção 2.3, obter-se-á a equação  $W_1^{(k=3)}(a, F) = 0$ , de forma que

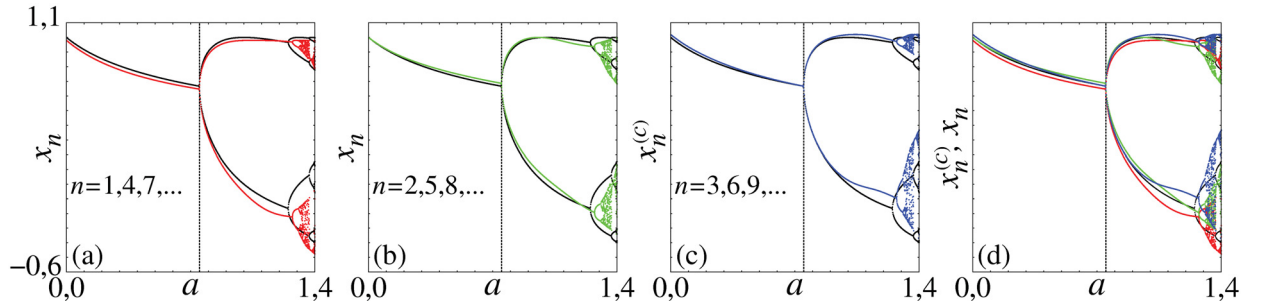


Figura 2.8 – Diagrama de bifurcação do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  com  $F = 1 \times 10^{-2}$ . Em (a) (curva vermelha) e (b) (curva verde) encontram-se as variáveis intermediárias  $x_n$  para  $n = 1, 4, 7, \dots$  e  $n = 2, 5, 8, \dots$ , respectivamente. Em (c), a variável  $x_n^{(c)}$  do mapa composto é representada pela curva azul, sendo  $n = 3, 6, 9, \dots$ , e em (d), todas as variáveis são apresentadas simultaneamente. Em todos os casos o diagrama de bifurcação do MQ é representado pela curva preta e a linha vertical pontilhada indica o parâmetro em que ocorre BDP.

$$\begin{aligned}
W_1^{(k=3)}(a, F) = & 16777216a^{10}F^{10} - 16777216a^9(2a^2 - 2a - 3)F^9 + 16777216a^8(a^4 - 2a^3 \\
& - 7a^2 - 5a + 3)F^8 + 1048576a^8(160a^3 + 64a^2 - 352a - 287)F^7 \\
& - 1048576a^6(64a^6 - 368a^4 - 351a^3 - 145a^2 + 336a + 49)F^6 - 8192a^5 \times \\
& (28672a^6 + 36864a^5 - 10240a^4 - 110080a^3 - 43008a^2 + 31360a + 6517)F^5 \\
& + 8192a^4(12288a^8 + 4096a^6 - 61056a^5 + 18560a^4 - 86016a^3 + 14847a^2 \\
& - 6517a - 2401)F^4 + 8192a^4(12288a^7 - 24576a^6 - 20480a^5 + 110976a^4 \\
& - 43008a^3 - 62720a^2 + 19551a + 7203)F^3 - 256a^3(4a - 7)(256a^4 + 64a^3 \\
& - 704a^2 + 1092a + 245)(16a^2 - 4a + 7)^2F^2 + (4a + 1)(4a - 7)^3(16a^2 - 4a \\
& + 7)^4 = 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

A equação  $W_{1 \rightarrow 2}^{(k=3)}(a, F) = 0$ , por sua vez, é obtida fazendo  $h = -1$ , tal que

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 2}^{(k=3)}(a, F) = & 16777216a^{10}F^{10} - 16777216a^9(2a^2 - 2a - 3)F^9 + 16777216a^8(a^4 - 2a^3 \\
& - 7a^2 - 5a + 3)F^8 + 1048576a^8(160a^3 + 64a^2 - 352a - 291)F^7 \\
& - 1048576a^6(64a^6 - 368a^4 - 355a^3 - 141a^2 + 336a + 45)F^6 - 8192a^5 \times \\
& (28672a^6 + 36864a^5 - 10240a^4 - 112128a^3 - 43008a^2 + 28800a + 4941)F^5 \\
& + 8192a^4(12288a^8 + 4096a^6 - 62592a^5 + 18048a^4 - 86016a^3 + 12807a^2 \\
& - 4941a - 729)F^4 + 8192a^4(12288a^7 - 24576a^6 - 20480a^5 + 109440a^4 \\
& - 43008a^3 - 57600a^2 + 14823a + 2187)F^3 - 256a^3(64a^3 - 128a^2 + 72a \\
& - 81)(4096a^6 - 10752a^4 + 19968a^3 - 3072a^2 + 792a - 81)F^2 + (4a - 3) \times \\
& (16a^2 + 12a + 3)(64a^3 - 128a^2 + 72a - 81)^3 = 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Resolvendo a Eq. (2.22) para  $F = 1 \times 10^{-2}$ , serão encontrados os valores de  $a$  nos quais ocorre bifurcação sela-nó, responsável pelo surgimento de órbitas de período 1 do mapa composto. O primeiro ponto fixo assintoticamente estável do mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  nasce em  $a = -0,2499986123$ , valor próximo de  $a = -1/4$ , característico do MQ. A partir desse parâmetro, a Eq. (2.20) tem oito soluções sendo que apenas duas são reais e uma representa o ponto fixo assintoticamente estável, até que ocorra uma nova bifurcação. A órbita encontrada analiticamente nesse intervalo é representada pela curva azul da Fig. 2.8(c) e é formada pelas iterações  $x_n^{(c)}$  do mapa composto. As outras duas órbitas existem devido à presença das iterações intermediárias e são representadas nas Figs. 2.8(a) (curva vermelha) e 2.8(b) (curva verde). A junção dessas três curvas, que correspondem aos três MQMs que formam o mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$ , faz com que o menor período existente nesse caso seja o período 3, como mostra a Fig. 2.8(d).

Na Fig. 2.8(d) também é possível observar que todas as órbitas sofrem BDP no mesmo valor de  $a$ , sendo esse parâmetro determinado pela expressão  $W_{1 \rightarrow 2}^{(k=3)}(a, F) = 0$ ,

descrita na Eq. (2.23). A primeira BDP do mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  ocorre em  $a = 0,7501116953$ , valor indicado pela linha vertical pontilhada na Fig. 2.8. É importante notar que, como as órbitas intermediárias  $x_n$  e as órbitas  $x_n^{(c)}$  do mapa composto sofrem BDP nesse mesmo parâmetro, para o caso  $k = 3$  não ocorre aumento dos intervalos de  $a$  que correspondem aos períodos  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$  do MQ. Por outro lado, essas órbitas têm seu período multiplicado por um fator  $k = 3$  quando  $F \neq 0$ .

Como descrito na Subseção 2.3.1, a órbita de período 3 do MQ nasce quando  $a = 7/4 = 1,75$ . Para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  com  $F = 1 \times 10^{-2}$ , a Eq. (2.22) possui quatro soluções, o que sugere a ocorrência de outras três bifurcações sela-nó além da que ocorre em  $a = -0,2499986123$ . Os pontos fixos do mapa composto que nascem a partir dessas bifurcações tornam-se órbitas de período 3 quando contabilizadas as iterações intermediárias. A Fig. 2.9(a) apresenta os diagramas de bifurcação do MQ (em preto) e do mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  com  $F = 1 \times 10^{-2}$  (em azul) e mostra que, quando  $F \neq 0$ , a triplicação da janela de período 3 do MQ ocorre devido ao surgimento de órbitas assintoticamente estáveis em diferentes valores de  $a$ . Esses parâmetros, determinados pela Eq. (2.22), são  $a = 1,713290717$ ,  $a = 1,755114346$  e  $a = 1,782595701$ , e podem ser identificados na Fig. 2.9(b) pelas linhas verticais contínua, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Para compreender a origem da triplicação da janela de período 3, torna-se necessário determinar os valores de  $x$  que são soluções da Eq. (2.20) para cada valor de  $a$  em que ocorre bifurcação sela-nó, adotando sempre  $F = 1 \times 10^{-2}$ . Para  $a = 1,713290717$  são encontradas oito soluções, sendo quatro reais e somente  $x = 1,008245545$  assintoticamente estável. O ponto localizado em  $(a, x) = (1,713290717, 1,008245545)$  no diagrama de bifurcação da

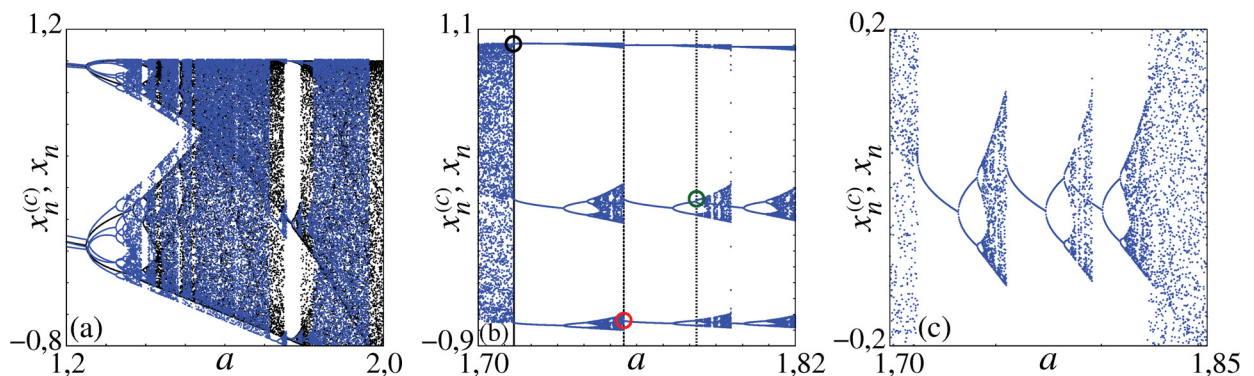


Figura 2.9 – Diagrama de bifurcação do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  considerando um intervalo que contém uma janela de período 3 do MQ. Em (a), as curvas preta e azul correspondem ao diagrama de bifurcação do MQ e do mapa composto usando  $F = 1 \times 10^{-2}$ , respectivamente. Em (b), apenas o diagrama do mapa composto é apresentado, considerando as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$ . A figura (b) enfatiza a triplicação da janela de período 3, ocasionada pelo nascimento de três pontos fixos assintoticamente estáveis do mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  em três diferentes valores de  $a$ , sendo esses valores indicados pelas linhas verticais pretas e círculos de diferentes cores. Em (c) encontra-se uma magnificação da figura (b) que demonstra o aumento do intervalo de  $a$  no qual existe a órbita de período 3.

Fig. 2.9(b) é destacado pelo círculo preto e mostra o nascimento de uma órbita. Como o período 1 do mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  é formado por três pontos periódicos, para esse mesmo valor de  $a$  outras duas órbitas surgem devido às iterações intermediárias  $x_n$ . Utilizando o parâmetro  $a = 1,755114346$ , são encontradas seis soluções reais e somente  $x = -0,7395202027$  é assintoticamente estável, sendo o ponto  $(a, x) = (1,755114346, -0,7395202027)$  destacado pelo círculo vermelho na Fig. 2.9(b). Os outros dois pontos novamente são obtidos a partir das iterações intermediárias de  $\mathcal{C}^{(k=3)}$ . Por fim, para  $a = 1,782595701$  ocorre o nascimento de mais um ponto fixo estável do mapa composto em  $x = 0,02912284617$ , ponto destacado pelo círculo verde. Para esse mesmo valor de  $a$  existem outras duas órbitas intermediárias que completam a triplicação da janela de período 3, destacada pela magnificação desse intervalo exibida na Fig. 2.9(c). O mesmo ocorre para a triplicação da janela de período 6 com  $F = 2 \times 10^{-3}$ , apresentada nas Figs. 2.10(a) e 2.10(b).

Em geral, a triplicação das órbitas cujo período é múltiplo de três ocorre da seguinte forma quando  $F \neq 0$ : em uma região de período 3 surgirão três pontos fixos do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  em diferentes valores de  $a$  que, juntamente com outros dois pontos resultantes das iterações intermediárias, formarão três órbitas de período 3 que se estenderão por um determinado intervalo de  $a$ . No caso da janela de periodicidade 6, em três diferentes valores de  $a$  surgirão órbitas de período 2 do mapa  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  e mais quatro pontos intermediários, formando assim um conjunto de três órbitas de período 6.

Aumentando o período do parâmetro externo  $F_j$  para  $k = 4$ , obtém-se o mapa  $\mathcal{C}^{(k=4)}$ , cujo diagrama de bifurcação é apresentado nas Figs. 2.11(a) e 2.11(b). Esses diagramas foram construídos utilizando a sequência  $\{-F, +F/2, -F/2, +F, \dots\}$ . A alternância de sinal

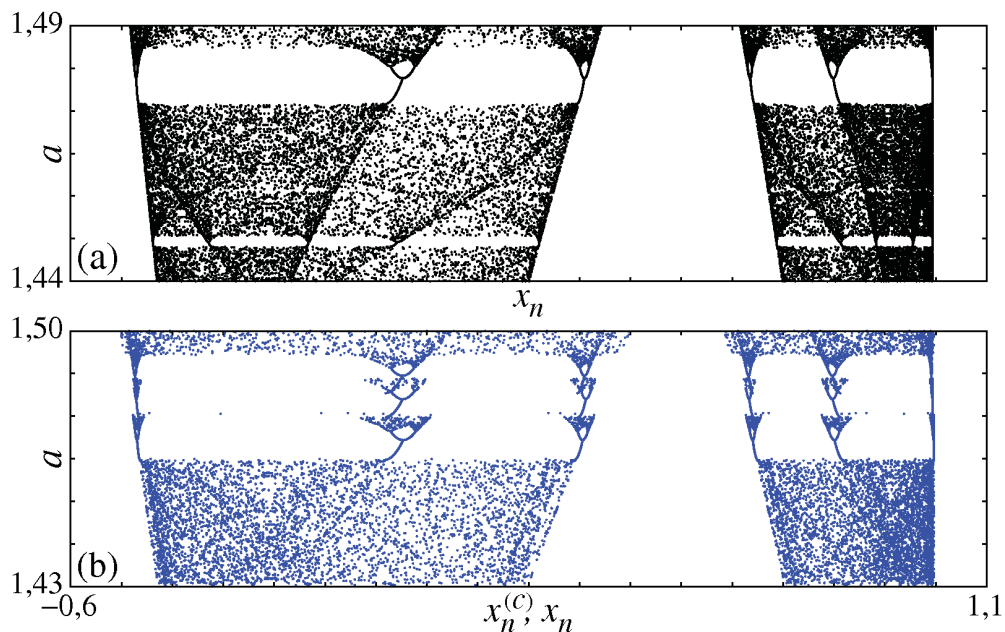


Figura 2.10 – Diagrama de bifurcação do MQ em (a) e do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=3)}$  em (b), destacando a triplicação da janela de período 6 para  $F = 2 \times 10^{-3}$ .

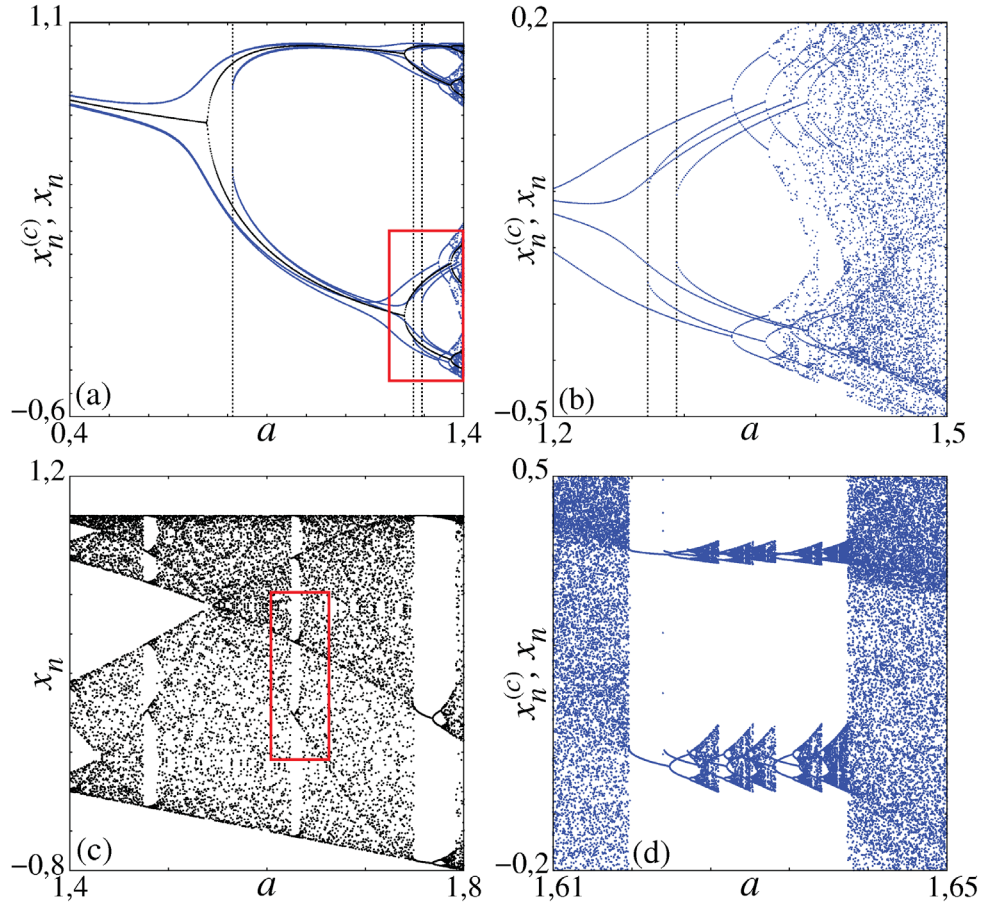


Figura 2.11 – Diagrama de bifurcação dos casos  $k = 4$  e  $k = 5$ . Em (a), as curvas azuis foram obtidas considerando as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  do mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=4)}$  formado pela sequência  $\{-F, +F/2, -F/2, +F, \dots\}$ , usando  $F = 1 \times 10^{-2}$ , enquanto a curva preta representa o diagrama de bifurcação do MQ. A figura (b) mostra uma magnificação da região delimitada pelo retângulo vermelho da figura (a), e as linhas verticais pontilhadas em (a) e (b) indicam os parâmetros em que ocorre bifurcação sela-nó para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=4)}$ . A figura (c) mostra um intervalo do diagrama de bifurcação do MQ que contém uma janela de período 5. Uma ampliação da região delimitada pelo retângulo vermelho da figura (c) é apresentada em (d), destacando a quintuplicação da janela de período 5 a partir das variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  do mapa  $\mathcal{C}^{(k=5)}$ , obtido utilizando a sequência  $\{-F, +F/2, 0, -F/2, +F, \dots\}$  com  $F = 2 \times 10^{-3}$ .

durante o processo de iteração do mapa composto permite obter uma separação maior entre as estruturas periódicas sem aumentar a intensidade  $F$  do parâmetro externo. Caso uma sequência diferente seja aplicada, apenas o tamanho do intervalo de  $a$  no qual encontram-se as estruturas multiplicadas será alterado, desde que o período  $k$  seja mantido. Para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=4)}$ , a condição de existência de um ponto fixo é dada pela equação  $x_4^{(c)} - x = 0$ . Se  $F = 1 \times 10^{-2}$ , um ponto fixo assintoticamente estável nasce em  $a = -0,2499989263$  e nesse caso, devido às órbitas intermediárias, o menor período encontrado é 4. Nessa região do diagrama não apenas a BDP  $1 \rightarrow 2$  do MQ é proibida, mas também a BDP  $2 \rightarrow 4$  não ocorre devido ao número insuficiente de soluções da equação resultante da condição de estabilidade do MQ. Nota-se que o processo de quadruplicação é idêntico ao caso  $k = 2$  de forma que, em  $a = 0,8133633778$ , surge uma nova solução assintoticamente estável que dá

origem a outro atrator. Aumentando o valor de  $a$ , duas novas bifurcações sela-nó ocorrem em  $a = 1,2719968358$  e  $a = 1,2942250355$ . Sendo assim, a criação de quatro novos pontos fixos assintoticamente estáveis no intervalo  $[-0,2499989263, 1,2942250355]$  gera quatro atratores diferentes que serão responsáveis pela quadruplicação das regiões com períodos múltiplos de quatro. As demais órbitas terão a periodicidade multiplicada por  $k = 4$ , sendo que os intervalos de  $a$  nos quais elas existem permanecerão inalterados. Os valores de  $a$  em que ocorre a criação de novos atratores são indicados pelas linhas verticais nas Figs. 2.11(a) e 2.11(b).

Para  $k = 5$ , o mapa  $\mathcal{C}^{(k=5)}$  é composto por cinco MQMs que podem ser gerados a partir da sequência  $\{-F, +F/2, 0, -F/2, +F, \dots\}$ . Os pontos fixos desse mapa devem satisfazer a condição  $x_5^{(c)} - x = 0$ . Nesse caso, apresentado nas Figs. 2.11(c) e 2.11(d), somente regiões do diagrama de bifurcação que contêm janelas cujo período é múltiplo de cinco serão quintuplicadas, o que ocorre a partir de um processo semelhante ao do caso  $k = 3$ . Na janela de período 5 do MQ exibida na Fig. 2.11(c), ao considerar o mapa  $\mathcal{C}^{(k=5)}$  com  $F \neq 0$ , observa-se o nascimento de pontos fixos assintoticamente estáveis do mapa composto em cinco diferentes valores de  $a$  sendo que, em cada um desses parâmetros, outras quatro órbitas são geradas a partir das iterações intermediárias. Dessa forma, dá-se origem à quintuplicação da janela de período 5 do MQ, como mostra a Fig. 2.11(d).

## 2.5 Conclusões parciais

Neste capítulo, o método de multiplicação de estruturas periódicas proposto nesta tese foi introduzido por meio da análise do diagrama de bifurcação do mapa  $\mathcal{C}^{(k)}$ , composto por  $k$  MQs que foram modificados por um parâmetro externo  $F_j$  de período  $k$ . As curvas analíticas de bifurcação  $W_1^{(k)}(a, F) = 0$  obtidas para os casos  $k = 2$  e  $k = 3$  mostram que, quando  $F \neq 0$ , ocorrem  $k$  bifurcações sela-nó que geram  $k$  novas órbitas assintoticamente estáveis, possibilitando assim a proliferação das estruturas periódicas no diagrama de bifurcação quando consideradas as variáveis intermediárias  $x_n$ . Além disso, essas órbitas são independentes e sofrem BDPs em valores diferentes do parâmetro  $a$ . Sendo assim, é possível controlar o tamanho do intervalo paramétrico no qual encontra-se determinada periodicidade por meio do aumento ou da diminuição da intensidade  $F$  do parâmetro externo.

Após a apresentação de diversos resultados numéricos obtidos para  $k = 2, 3, 4$  e  $5$ , e observando as alterações causadas pelo parâmetro  $F_j$  em regiões do diagrama de bifurcação de diferentes periodicidades, é possível obter uma relação entre o período  $k$  do parâmetro externo  $F_j$ , que corresponde ao número de mapas modificados utilizados na composição de  $\mathcal{C}^{(k)}$ , e o período  $m$  da estrutura que deseja-se multiplicar. Definindo  $\eta = m/k$ , verifica-se que são geradas  $k$  réplicas de uma janela de período  $m$  sempre que  $\eta \in \mathbb{Z}$ . Caso essa relação não seja satisfeita, as estruturas de período  $m$  passam a ter período  $m' = km$ .

## Capítulo 3

---

### Proliferação de Estruturas Isoperiódicas

---

A possibilidade de controlar a dinâmica de sistemas não lineares com mais de uma dimensão por meio de pequenas perturbações é um tema de grande interesse atualmente [76–80]. Para isso, torna-se relevante conhecer a combinação paramétrica que resulta em determinado tipo de dinâmica de forma que, nesse quesito, a descoberta de regiões periódicas imersas em domínios caóticos do espaço de parâmetros, as denominadas Estruturas Isoperiódicas (EIPs), foi de grande importância. As EIPs, tema principal deste capítulo, podem ser encontradas no espaço de parâmetros de diferentes classes de sistemas dinâmicos não lineares, como por exemplo: circuitos elétricos teóricos [81] e experimentais [34], modelos de lasers semicondutores [82], modelos de crescimento de células cancerígenas [83] e sistemas catraca clássicos [35, 45, 84] e quânticos [46–48]. O objetivo deste capítulo é ampliar o método introduzido no Capítulo 2 para mapas bidimensionais a fim de aumentar o número de EIPs no espaço de parâmetros, visto que combinações paramétricas escolhidas dentro dessas estruturas conduzem a uma dinâmica regular. Para isso, será utilizado o mapa de Hénon, uma extensão do MQ capaz de reproduzir os principais aspectos da dinâmica de sistemas bidimensionais dissipativos.

Neste capítulo, além da generalização dos conceitos de estabilidade de pontos fixos e EL para sistemas com mais de uma dimensão, serão apresentados resultados analíticos e numéricos da aplicação do método de composição de mapas bidimensionais modificados por um parâmetro externo  $F_j$  de período  $k$ . Ao analisar a dinâmica do mapa composto por meio do espaço de parâmetros, observa-se a proliferação de EIPs e, conseqüentemente, a supressão das combinações paramétricas que geram movimento caótico. O número de estruturas de regularidade geradas no espaço de parâmetros depende do período  $k$  e a separação entre essas estruturas, por sua vez, depende da intensidade  $F$  do parâmetro externo.

#### 3.1 O mapa de Hénon

Em 1963, Edward Lorenz propôs, a partir de simplificações das equações de Navier-Stokes para fluidos, um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem que apresen-

tava trajetórias instáveis e aperiódicas quando pequenas modificações nas condições iniciais eram impostas [85]. Assim como o sistema de Lorenz, uma trajetória descrita pelo Mapa de Hénon (MH) [86], sistema discreto proposto por Michel Hénon em 1976, também pode convergir para um atrator caótico dependendo das condições iniciais escolhidas. Entretanto, esse mapa consiste em um sistema consideravelmente mais simples do ponto de vista matemático e computacional, além de reproduzir qualitativamente todas as propriedades essenciais do sistema de Lorenz.

O MH é descrito matematicamente pela expressão

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= bx_n,\end{aligned}\tag{3.1}$$

na qual  $x_n$  e  $y_n$  são variáveis calculadas a tempos discretos e  $a$  e  $b$  são parâmetros de controle, tal que  $a > 0$ . A partir da Eq. (3.1) nota-se que, quando  $b = 0$ , o MH é reduzido ao MQ descrito pela Eq. (2.1). Dependendo dos valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , o MH pode originar trajetórias que ocupam regiões fechadas do espaço de fases ou trajetórias que divergem. Para compreender alguns aspectos básicos da dinâmica do MH, a condição de estabilidade de pontos fixos de mapas unidimensionais, tratada na Seção 2.1, deve ser estendida para o caso bidimensional. Para isso, considere o mapa

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{3.2}$$

que possui um ponto fixo  $\mathbf{s} = (x^*, y^*)$  cuja condição de estabilidade pode ser determinada através do cálculo dos autovalores da matriz Jacobiana  $\mathbb{J}_1(\mathbf{s})$  no ponto fixo, tal que:

$$|\mathbb{J}_1(\mathbf{s}) - h\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial x_n} - h & \frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(\mathbf{s})}{\partial x_n} & \frac{\partial g(\mathbf{s})}{\partial y_n} - h \end{vmatrix} = 0.\tag{3.3}$$

A partir da Eq. (3.3), obtém-se a equação característica

$$h^2 - h\text{Tr}\mathbb{J}_1(\mathbf{s}) + \text{Det}\mathbb{J}_1(\mathbf{s}) = 0,\tag{3.4}$$

que contém duas soluções para  $h$  que podem ser reais ou complexas. Para  $h_{1,2}$  reais, o sistema é assintoticamente estável se  $-1 < h_{1,2} < 1$ , mas instável se  $h_1$  ou  $h_2$  for maior que a unidade em valor absoluto. Se  $|h_{1,2}| < 1$ , tem-se um atrator; se  $|h_{1,2}| > 1$ , tem-se um repulsor. Quando  $|h_1| < 1$  e  $|h_2| > 1$ , ou vice-versa, obter-se-á um ponto de sela hiperbólico que, por sua vez, é classificado como um ponto fixo instável [13]. Esse método pode ser estendido para o caso de um sistema de dimensão  $\mathcal{D}$ , para o qual obtém-se uma matriz  $\mathbb{J}_1$  de dimensão  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ .

É possível obter expressões analíticas que definem os limites entre regiões de diferentes periodicidades para mapas bidimensionais procedendo de forma bastante parecida



com aquela abordada na Seção 2.3. Para o MH, a Eq. (3.2) é obtida com  $f = 1 - ax_n^2 + y_n$  e  $g = bx_n$ , de tal forma que uma órbita de período  $m$  deve satisfazer as condições  $f_m(x, y, a, b) - x = 0$  e  $g_m(x, y, a, b) - y = 0$  simultaneamente. Também para uma órbita de período  $m$ , a equação de autovalores resulta em

$$M_m(x, y, a, b, h) \equiv |\mathbb{J}_m(x, y, a, b) - h\mathbb{I}| = 0, \quad (3.5)$$

na qual  $h$  corresponde ao autovalor que controla a condição de estabilidade da órbita de período  $m$ . Uma vez que a ocorrência de bifurcações está sujeita à existência de pelo menos um autovalor  $h = \pm 1$ , o índice 1,2 da notação  $h_{1,2}$  será omitido por simplicidade. Sendo assim, obter-se-ão três equações que envolvem as variáveis  $x$  e  $y$  assim como os parâmetros de controle  $a$  e  $b$ , que podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} X_m(x, y, a, b) &\equiv f_m(x, y, a, b) - x = 0, \\ Y_m(x, y, a, b) &\equiv g_m(x, y, a, b) - y = 0, \\ M_m(x, y, a, b, h) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para um dado período  $m$  com determinados parâmetros  $a$  e  $b$ , as duas primeiras equações determinam as soluções para as variáveis  $x$  e  $y$ , enquanto a equação  $M_m = 0$ , através da magnitude do autovalor  $h$ , define a estabilidade dessas soluções [28].

O próximo passo consiste em eliminar a variável  $y$  entre as equações  $X_m$  e  $M_m$  e também entre  $Y_m$  e  $M_m$ , obtendo dois polinômios que envolvem somente as quantidades  $(x, a, b, h)$ . Por fim, calcula-se o resultante entre esses dois polinômios para eliminar a variável  $x$ , resultando finalmente em uma única equação  $S_m(a, b, h) = 0$ . Para ocorrer bifurcação sela-nó é necessária a existência de pelo menos um autovalor igual a 1. Por outro lado, quando  $h = -1$ , ocorre uma BDP. Sendo assim, aplicando esse procedimento para as órbitas de períodos 1 e 2 do MH, obtêm-se as equações

$$S_1(a, b, h = +1) = 4a + 1 - 2b + b^2 = 0, \quad (3.7)$$

$$S_{1 \rightarrow 2}(a, b, h = -1) = 4a - 3 + 6b - 3b^2 = 0, \quad (3.8)$$

$$S_{2 \rightarrow 4}(a, b, h = -1) = 4a - 5 + 6b - 5b^2 = 0. \quad (3.9)$$

A expressão  $S_1(a, b) = 0$  estabelece o nascimento do ponto fixo assintoticamente estável, enquanto  $S_{1 \rightarrow 2}(a, b) = 0$  e  $S_{2 \rightarrow 4}(a, b) = 0$  determinam as BDPs por meio das quais surgem as órbitas de períodos 2 e 4, respectivamente.

Os pontos fixos do MH são encontrados a partir da condição  $x^* = 1 - ax^{*2} + bx^*$ , tal que:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, & y_1^* &= bx_1^*, \\ x_2^* &= \frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, & y_2^* &= bx_2^*. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir da Eq. (3.7) conclui-se que em  $a_1 = -(1-b)^2/4$  ocorre uma bifurcação sela-nó, dando origem aos pontos  $\mathbf{s}_1 = (x_1^*, y_1^*)$  e  $\mathbf{s}_2 = (x_2^*, y_2^*)$ . Substituindo  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$  na Eq. (3.3), é possível verificar que para valores de  $a$  maiores que  $-(1-b)^2/4$  o ponto  $\mathbf{s}_2$  é instável, enquanto o ponto  $\mathbf{s}_1$  é assintoticamente estável no intervalo  $-(1-b)^2/4 < a < 3(1-b)^2/4$ . Das Eqs. (3.8) e (3.9) obtêm-se os parâmetros  $a_{12} = 3(1-b)^2/4$  e  $a_{24} = (5b^2 - 6b + 5)/4$ , respectivamente, nos quais ocorre BDP. A Fig. 3.1 apresenta o diagrama de bifurcação da variável  $x_n$  em função do parâmetro  $a$  para o MH com o valor de  $b$  fixado em  $b = 0,3$ . Nessa figura, os valores de  $a_1$ ,  $a_{12}$  e  $a_{24}$  são indicados pelas linhas verticais azul, vermelha e verde, nessa ordem.

Na Fig. 3.1 é possível verificar que a variável  $x_n$  passa por seguidas bifurcações, dando origem à cascata de BDPs que conduzirá ao caos. A Fig. 3.2 apresenta o espaço de fases do MH com  $b = 0,3$  e mostra que, dependendo do parâmetro  $a$  escolhido, diferentes tipos de atratores podem ser obtidos. Nas Figs. 3.2(a) e 3.2(b) encontram-se os atratores de períodos 4 e 16, respectivamente. À medida que  $a$  cresce, surgem atratores caóticos (Figs. 3.2(c), 3.2(e) e 3.2(f)), exceto em algumas janelas periódicas como a obtida para  $a = 1,23485$ , parâmetro que resulta no atrator de período 7 representado na Fig. 3.2(d).

O MH consiste em um sistema dissipativo, ou seja, que tem o volume do espaço de fases contraído devido à existência de um atrator. Para um mapa dissipativo, essa contração é quantificada por um fator  $|\text{Det } \mathbb{J}|$  para cada iteração [87], de forma que para o MH, a

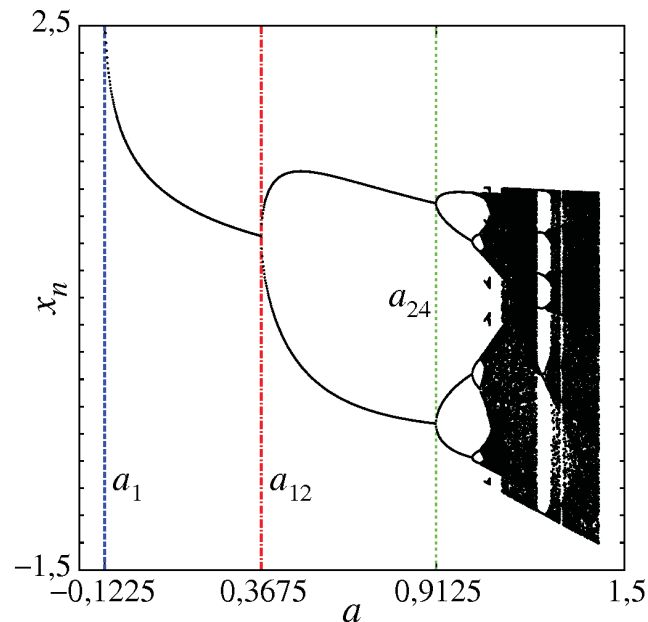


Figura 3.1 – Diagrama de bifurcação da variável  $x_n$  do MH (3.1) em função do parâmetro  $a$ , com  $b = 0,3$ . As linhas verticais azul, vermelha e verde correspondem aos valores  $a_1 = -0,1225$ ,  $a_{12} = 0,3675$  e  $a_{24} = 0,9125$ , respectivamente. Esse diagrama foi construído utilizando o mesmo procedimento descrito na Fig. 2.1.

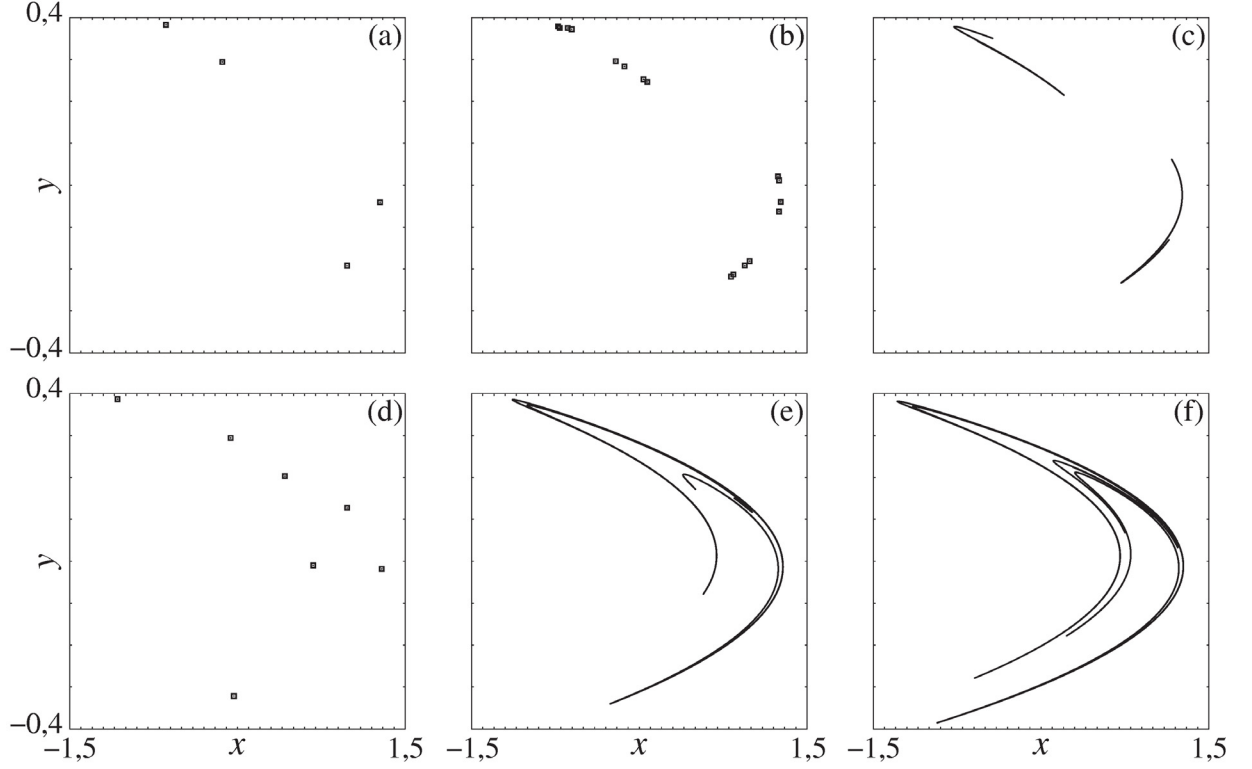


Figura 3.2 – Espaço de fases do MH com  $b = 0,3$  e (a)  $a = 0,9825$ , (b)  $a = 1,05512$ , (c)  $a = 1,09529$ , (d)  $a = 1,23485$ , (e)  $a = 1,27991$  e (f)  $a = 1,4$ . Os atratores foram construídos utilizando  $10^4$  iterações após um tempo transiente de  $10^5$  iterações iniciadas no ponto instável  $(x_0, y_0) = (0,63135448, 0,18940634)$ , mesma condição inicial usada na Ref. [86].

partir da Eq. (3.1), obtém-se

$$\text{Det } \mathbb{J}(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b. \quad (3.11)$$

Isso significa que, a cada iteração, o espaço de fases do MH é contraído em uma proporção constante  $b$ .

### 3.2 Expoentes de Lyapunov em sistemas multidimensionais

Assim como a condição de estabilidade de pontos fixos, a definição de EL, introduzida na Seção 2.2, também pode ser generalizada para sistemas multidimensionais. Para um mapa  $\mathcal{D}$ -dimensional, definido por

$$\mathbf{r}_{n+1} = f_i(\mathbf{r}_n), \quad (i = 1, \dots, \mathcal{D}), \quad (3.12)$$

é possível obter  $\mathcal{D}$  ELs que correspondem às  $\mathcal{D}$  dimensões linearmente independentes do espaço de fases nas quais o elemento de volume inicial pode se expandir ou contrair, formando o que é conhecido na literatura como espectro de Lyapunov [88–91]. Tratando-se de uma órbita  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\}$  de período  $m$ , sua estabilidade será determinada pelos autovalores

da matriz  $\mathbb{J}_m(\mathbf{r}_0)$ , tal que:

$$\mathbb{J}_m(\mathbf{r}_0) = \mathbb{J}(\mathbf{r}_{m-1}) \cdot \mathbb{J}(\mathbf{r}_{m-2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{J}(\mathbf{r}_0). \quad (3.13)$$

No caso de órbitas não periódicas, obtém-se a matriz  $\mathbb{J}_n(\mathbf{r}_0)$  que corresponde ao produto de  $n$  matrizes Jacobianas calculadas nos  $n$  pontos que compõem a trajetória. Nesse caso, o papel dos autovalores da matriz  $\mathbb{J}_n(\mathbf{r}_0)$  é medir a taxa de expansão ou contração dos  $\mathcal{D}$  eixos ortogonais do sistema. A instabilidade exponencial dos comprimentos dos eixos ortogonais se reflete diretamente no espectro de autovalores da matriz  $\mathbb{A}(\mathbf{r}_0)$ , definida por

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{J}_n^T(\mathbf{r}_0) \mathbb{J}_n(\mathbf{r}_0)]^{\frac{1}{2n}}. \quad (3.14)$$

As condições de existência desse limite são estabelecidas pelo teorema multiplicativo de Oseledec [92]. Por tratar-se de uma matriz hermitiana,  $\mathbb{A}(\mathbf{r}_0)$  possui  $\mathcal{D}$  autovalores  $h_i(\mathbf{r}_0)$  reais e positivos, de forma que os respectivos logaritmos definem os ELs

$$\lambda_i^\infty = \ln[h_i(\mathbf{r}_0)]. \quad (3.15)$$

O teorema multiplicativo de Oseledec garante que o espectro de Lyapunov será o mesmo para todas as condições iniciais escolhidas dentro de um domínio ergódico do sistema. Usualmente, o espectro de Lyapunov é listado em ordem decrescente, tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\mathcal{D}},$$

sendo que o sinal de igualdade se refere a multiplicidade dos expoentes, que pode ocorrer no caso da existência de autovalores degenerados. O EL máximo  $\lambda_1$  é um importante indicativo de caos no sistema pois, sendo ele positivo, ocorre divergência exponencial em pelo menos uma direção do espaço de fases.

Um método numérico para o cálculo do EL máximo  $\lambda_1$  foi desenvolvido por Giancarlo Benettin *et. al.*, e pode ser resumido da seguinte forma [93]: considere que  $\mathbf{r}_0$  corresponde à condição inicial de uma trajetória de referência e  $\mathbf{v}_0$  representa a condição inicial de uma trajetória próxima, sendo a distância entre elas dada por  $d_0 = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0|$ . Ao final de um determinado intervalo de tempo finito  $t$ , a distância entre essas trajetórias será  $d_1 = |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{r}_1|$ . No início do próximo intervalo, deve-se escolher um novo vetor  $\mathbf{v}_1$  de forma que o vetor  $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{r}_1)$  tenha a mesma direção que  $(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{r}_1)$ , porém seu módulo seja  $d_0$ , como ilustra a Fig. 3.3. Após escolher o vetor  $\mathbf{v}_1$  adequadamente, o sistema é iterado até que se obtenha a distância  $d_2$  ao final do segundo intervalo de tempo  $t$ . Esse procedimento é repetido por  $l$  intervalos de tempos iguais, resultando na sequência de distâncias  $\{d_j\}$ , na qual  $j = 1, \dots, l$ . O EL máximo calculado a tempo finito é então definido pela expressão [93, 94]

$$\lambda_1 = \frac{1}{lt} \sum_{j=1}^l \ln \left( \frac{d_j}{d_0} \right). \quad (3.16)$$

Na Eq. (3.16), o limite  $d_0 \rightarrow 0$  referente à distância inicial entre as trajetórias foi omitido. Todavia, ele deve ser sempre obedecido.

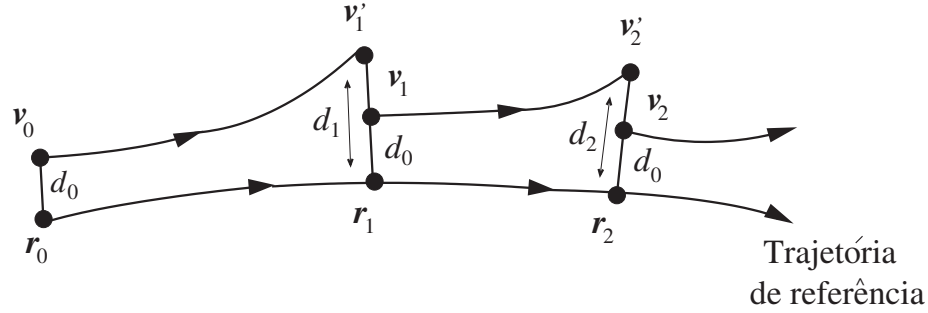


Figura 3.3 – O EL máximo é determinado a partir de uma sequência de distâncias  $\{d_j\}$  entre a trajetória de referência e uma trajetória adjacente. Cada distância  $d_j$  é obtida após um intervalo de tempo finito  $\epsilon$ , no início de cada intervalo, a distância entre as trajetórias é ajustada para que seja equivalente à distância inicial  $d_0$ . Figura construída com base na ilustração da pág. 41 da Ref. [94].

No que se refere ao espectro de ELs, utiliza-se uma abordagem na qual a evolução temporal do sistema é tratada simultaneamente no espaço de fases e no espaço tangente [95–97], sendo esse último o espaço formado por uma base de vetores ortonormais centrada na trajetória de referência. Primeiramente, da condição inicial  $\mathbf{r}_0$ , obtém-se uma trajetória de referência a partir da iteração do mapa  $\mathcal{D}$ -dimensional que define o movimento do centro de uma hipersfera. Por outro lado, a trajetória dos pontos que se encontram na superfície dessa hipersfera é determinada com o auxílio das equações linearizadas, responsáveis por descrever a evolução temporal dos  $\mathcal{D}$  eixos principais independentes  $\{\mathbf{w}_n^i\}_{i=1}^{\mathcal{D}}$  que formam o espaço tangente, como representado na Fig. 3.4 para o caso bidimensional. A evolução temporal de um vetor tangente  $\mathbf{w}_n^i$  é obtida através da linearização do mapa (3.12), dada pela relação

$$\mathbf{w}_{n+1}^i = \mathbb{J}(\mathbf{r}_n)\mathbf{w}_n^i. \quad (3.17)$$

Desse modo, itera-se o mapa com uma condição inicial  $\mathbf{r}_0$  e, simultaneamente, iteram-se as

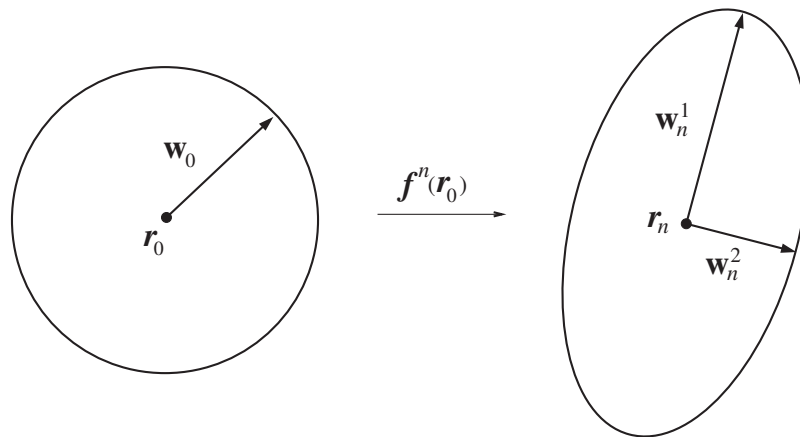


Figura 3.4 – Evolução temporal de um disco de raio  $w_0$  em torno de um ponto inicial  $\mathbf{r}_0$ . Após  $n$  iterações, o disco se transforma em uma elipse cujos eixos principais são  $\mathbf{w}_n^1$  e  $\mathbf{w}_n^2$ . Figura construída com base na ilustração da pág. 194 da Ref. [13].

equações linearizadas (3.17) para uma condição inicial de dimensão  $\mathcal{D}$  que define uma base ortonormal  $\{\mathbf{w}_0^1, \mathbf{w}_0^2, \dots, \mathbf{w}_0^{\mathcal{D}}\}$ . No entanto, a execução desse procedimento conduz ao rápido crescimento do módulo dos vetores  $\mathbf{w}_n^i$ , fazendo com que eles se alinhem ao longo da direção de maior taxa de expansão local. Dessa forma, os ângulos entre os vetores tornam-se muito pequenos, impossibilitando a distinção entre as direções dos vetores devido à capacidade computacional limitada [13].

Por esse motivo, além de renormalizar os vetores  $\mathbf{w}_n^i$  a cada intervalo de tempo  $t$ , torna-se necessário substituí-los por um novo conjunto de vetores ortogonais que preserva o subespaço linear do conjunto antigo, sendo que essa substituição pode ser realizada através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, o qual encontra-se detalhado no Apêndice A. Os  $\mathcal{D}$  vetores  $\mathbf{w}_0^i$  escolhidos inicialmente formam um hiperparalelepípedo de  $\mathcal{D}$  dimensões, de forma que, iterando o conjunto de equações linearizadas e efetuando o processo de ortonormalização a cada intervalo  $t$ , obter-se-á

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{D}} \lambda_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lt} \sum_{j=1}^l \ln \mathcal{V}_j^{(\mathcal{D})}, \quad (3.18)$$

sendo  $\mathcal{V}_j^{(\mathcal{D})}$  o volume do hiperparalelepípedo  $\mathcal{D}$ -dimensional ao final do  $j$ -ésimo intervalo de tempo, antes do processo de ortonormalização. Subtraindo o resultado obtido para o volume que abrange  $\mathcal{D} - 1$  vetores daquele obtido quando utiliza-se o volume total [66], encontra-se a expressão

$$\lambda_{\mathcal{D}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lt} \sum_{j=1}^l \ln \left( \frac{\mathcal{V}_j^{(\mathcal{D})}}{\mathcal{V}_j^{(\mathcal{D}-1)}} \right), \quad (3.19)$$

que é o  $\mathcal{D}$ -ésimo EL. Numericamente, é impossível respeitar o limite  $l \rightarrow \infty$ . Portanto, torna-se necessário truncar o cálculo dos expoentes  $\lambda_i$  em determinado instante de tempo [93,97,98].

### 3.3 Estruturas Isoperiódicas e o espaço de parâmetros

No caso de sistemas unidimensionais que dependem somente de um parâmetro, como por exemplo o MQ, a dinâmica pode ser analisada com o auxílio de um diagrama de bifurcação que relaciona diretamente a variável do sistema com o único parâmetro de controle. Nesse diagrama é possível encontrar regiões periódicas imersas em extensos domínios caóticos. No entanto, extrair informações sobre a dinâmica de sistemas que dependem de mais de um parâmetro é uma tarefa mais complicada. Isso porque diferentes combinações paramétricas podem levar a diferentes comportamentos, de forma que uma análise mais eficaz é obtida por meio de um diagrama que considera a variação simultânea de dois parâmetros e pode ser denominado espaço de parâmetros bidimensional, plano de parâmetros, ou simplesmente espaço de parâmetros, nomenclatura que será adotada nesta tese. Esse diagrama consiste em uma grade bidimensional cujos eixos correspondem a dois parâmetros de controle do sistema estudado. Para cada ponto de intersecção dessa grade, avalia-se a dinâmica resultante através de um indicador como, por exemplo, o valor do maior EL ou o período da órbita

correspondente. Para o MH, esse tipo de diagrama foi estudado primeiramente em 1993 por Jason A. C. Gallas, que registrou a ocorrência de extensas regiões cujo comportamento dinâmico é essencialmente periódico, as chamadas Estruturas Isoperiódicas (EIPs) [26]. De acordo com a Ref. [26], grande parte das EIPs tem um aspecto que lembra camarões (“*shrimps*”), sendo constituídas por um corpo principal com periodicidade  $m$  seguido de uma sucessão de domínios gerados por BDPs.

Um exemplo de EIP pode ser verificado na Fig. 3.5, que apresenta uma região específica do espaço de parâmetros  $(a, b)$  do MH. Na Fig. 3.5(a), as cores indicam o período da órbita encontrada para cada combinação paramétrica  $(a, b)$ , de forma que a EIP contida nesse intervalo possui um corpo principal de período 7, representado pela cor laranja. Através de BDPs, o corpo principal dá origem às regiões de períodos 14 e 28, indicadas pelas cores azul e cinza, respectivamente. Parâmetros  $a$  e  $b$  escolhidos nas regiões de cor preta, por sua vez, resultam em órbitas caóticas. O mesmo diagrama pode ser obtido utilizando como ferramenta de análise o maior EL  $\lambda_1$ , como mostra a Fig. 3.5(b), sendo que a paleta de cores posicionada à direita dessa figura indica o valor de  $\lambda_1$  calculado para cada combinação paramétrica. Claramente conclui-se que regiões do espaço de parâmetros que geram órbitas periódicas possuem o maior EL negativo. Por outro lado, para combinações  $(a, b)$  que geram órbitas caóticas, o valor de  $\lambda_1$  se torna positivo. A Fig. 3.5(b) evidencia a complexidade de uma EIP, sendo que a busca por uma melhor compreensão de alguns aspectos estruturais desses domínios motivou diversos estudos ao longo das últimas décadas [27, 53–55, 99].

Como já abordado na Seção 3.1, uma bifurcação sela-nó ocorre quando um dos autovalores assume o valor  $h = 1$  e uma BDP ocorre para  $h = -1$ . No espaço de parâmetros

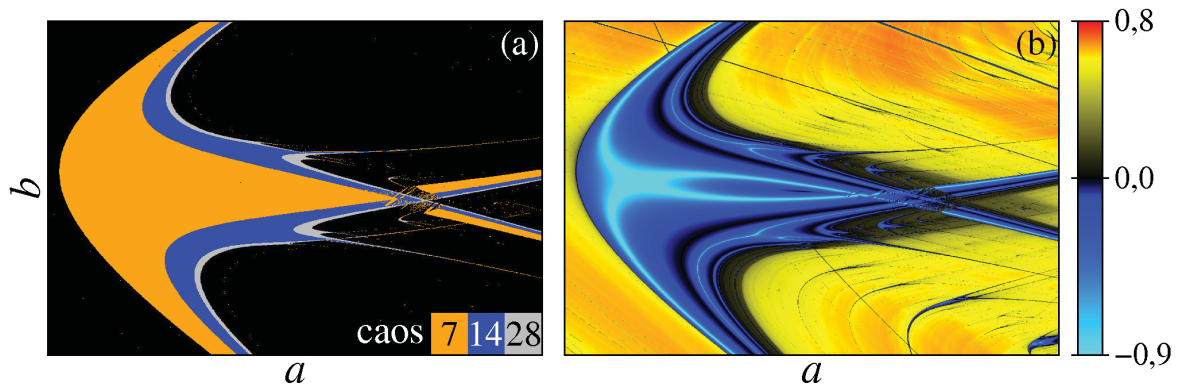


Figura 3.5 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do MH, descrito pela Eq. (3.1), que destaca uma EIP de período principal 7. Os intervalos de  $a$  e  $b$  considerados,  $[a_{\min}, a_{\max}] = [1,225, 1,295]$  e  $[b_{\min}, b_{\max}] = [0,26, 0,33]$ , formam uma grade de  $10^3 \times 10^3$  pontos equidistantes. Em (a), para cada ponto  $(a, b)$  do espaço de parâmetros, a cor correspondente representa o período da órbita contabilizado após um tempo transiente de  $10^5$  iterações. Na figura (b), a grandeza indicada pelas cores é o valor do maior EL calculado ao longo de uma trajetória de  $5 \times 10^6$  iterações, obtida após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 10^6$ . Em ambas as figuras e para todas as combinações paramétricas  $(a, b)$ , a única condição inicial utilizada foi  $(x_0, y_0) = (0,01, 0,05)$ .

do MH, as curvas de bifurcação sela-nó e de BDP são linhas que delimitam a existência de regiões de diferentes períodos, como as representadas na Fig. 3.5(a) pelas diferentes cores. No sentido de crescimento do parâmetro  $a$ , a separação entre as regiões caótica e periódica se dá por uma curva de bifurcação sela-nó, responsável pela origem de órbitas cujo período corresponde ao período principal da EIP que, no caso da Fig. 3.5(a), trata-se do período 7. Após a ocorrência da bifurcação sela-nó, a EIP é composta por um conjunto de parâmetros que resultam em órbitas de mesmo período, sendo que em sua região mais interna encontra-se uma estrutura superestável composta por arcos parabólicos, conhecida na literatura como “esqueleto” [100] ou “espinha” [53] da EIP. Tratando-se de sistemas unidimensionais, o esqueleto corresponde a um ponto crítico posicionado entre duas bifurcações, para o qual  $|f'(x^*)| = 0$ . No caso do MH, o esqueleto também ocorre entre bifurcações e é formado por duas parábolas, representadas na Fig. 3.5(b) pela cor ciano. Essa cor é atribuída ao menor valor encontrado para  $\lambda_1$  de forma que, nas regiões próximas ao esqueleto,  $h \rightarrow 0$  e  $\lambda_1 \rightarrow -\infty$ . Ainda no sentido de crescimento do parâmetro  $a$ ,  $\lambda_1$  volta a crescer até tornar-se nulo, dando origem à BDP nas regiões representadas pela cor preta na Fig. 3.5(b). Após a BDP, surge a região de período 14, representada pela cor azul na Fig. 3.5(a). Esse domínio também possui esqueleto e perde estabilidade com o aumento de  $a$ , até que uma nova BDP ocorre dando origem a uma cascata de BDPs. De fato, estruturas com períodos maiores podem ser visualizadas ao fazer sucessivas ampliações das regiões do espaço de parâmetros que se encontram nas proximidades das BDPs.

Os resultados numéricos que serão apresentados neste capítulo consistem, em sua grande maioria, em espaços de parâmetros  $(a, b)$  obtidos para o MH ou para mapas compostos derivados do MH. Esses diagramas foram construídos utilizando uma grade de  $10^3 \times 10^3$  pontos equidistantes e, para caracterizar a dinâmica obtida a partir de cada combinação paramétrica, foram calculados o período e o valor do maior EL de uma única trajetória, cuja condição inicial é  $(x_0, y_0) = (0,01, 0,05)$ . Após descartar as primeiras  $10^5$  iterações, a contagem do período foi realizada considerando o número de iterações necessárias para que o ponto inicial da órbita se repetisse com acurácia de  $10^{-8}$ . O maior EL  $\lambda_1$  de cada combinação paramétrica, por sua vez, foi calculado ao longo de uma trajetória de  $5 \times 10^6$  iterações, obtida após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 10^6$ . Informações adicionais sobre procedimentos numéricos, intervalos paramétricos e valores de parâmetros externos adotados em cada caso serão disponibilizadas na descrição de cada figura.

### 3.4 Composição de dois Mapas de Hénon Modificados

Adicionando o parâmetro externo  $F_j$  à variável  $x_{n+1}$  do MH, obtém-se um novo mapa que será denominado Mapa de Hénon Modificado (MHM), descrito matematicamente pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n + F_j, \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned} \tag{3.20}$$



O MHM se reduz ao MQM, descrito pela Eq. (2.9), quando  $b = 0$ . Adotando um parâmetro externo  $F_j$  com período  $k = 2$ , tal que  $F_1 = -F$  e  $F_2 = +F$ , a composição dos dois MHMs obtidos através da alternância do sinal de  $F_j$  na Eq. (3.20) origina o mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ , tal que

$$\mathcal{H}^{(k=2)} = \begin{cases} x_{n+2}^{(c)} = 1 - ax_{n+1}^2 + y_{n+1} + F, \\ y_{n+2}^{(c)} = bx_{n+1}, \end{cases} \quad (3.21)$$

sendo  $x_{n+1} = 1 - a(x_n^{(c)})^2 + y_n^{(c)} - F$  e  $y_{n+1} = bx_n^{(c)}$ . Assim como no Capítulo 2, as variáveis com sobrescrito  $(c)$  correspondem às variáveis do mapa composto e  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$  são variáveis intermediárias. Sendo as condições iniciais do mapa composto  $x_0^{(c)} = x$  e  $y_0^{(c)} = y$ , um ponto fixo de  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  deve obedecer às seguintes condições:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - a(1 - ax^2 + y - F)^2 + bx + F = x, \\ y_2 &= b(1 - ax^2 + y - F) = y. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Utilizando o mesmo procedimento descrito na Seção 3.1, torna-se possível determinar as curvas analíticas que delimitam os intervalos paramétricos de períodos 1 e 2 do mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  em função dos parâmetros  $a, b$  e  $F$ . Inicialmente, a partir das condições descritas na Eq. (3.22) para a existência de um ponto fixo do mapa (3.21), obtêm-se as equações

$$X_1^{(k=2)}(x, y, a, b, F) = 1 - a(1 - ax^2 + y - F)^2 + bx + F - x = 0, \quad (3.23)$$

$$Y_1^{(k=2)}(x, y, a, b, F) = b(1 - ax^2 + y - F) - y = 0. \quad (3.24)$$

Ademais, a matriz Jacobiana obtida após uma iteração do mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  é dada por

$$\mathbb{J}_1^{(k=2)} = \begin{bmatrix} 4a^2(1 - ax^2 + y - F)x + b & -2a(1 - ax^2 + y - F) \\ -2abx & b \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

de tal forma que a equação de autovalores  $|\mathbb{J}_1^{(k=2)} - h\mathbb{I}| = 0$  resulta em

$$M_1^{(k=2)}(x, y, a, b, F, h) = h^2 - h[2b + 4a^2x - 4a^3x^3 + 4a^2xy - 4a^2xF] + b^2 = 0. \quad (3.26)$$

As Eqs. (3.23), (3.24) e (3.26) dependem das variáveis  $x$  e  $y$  assim como dos parâmetros  $a, b$  e  $F$ . O objetivo, no entanto, é obter funções que dependam somente dos parâmetros. Para isso, elimina-se inicialmente a variável  $y$  calculando o resultante entre as Eqs. (3.23) e (3.26) e também entre (3.24) e (3.26) obtendo, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} G_1(x, a, b, F, h) &= 16h^2a^4x^2 + 16h^2a^4x^3b + 16h^2a^4x^2F - 16h^2a^4x^3 \\ &\quad + 4ah^3b - 6ah^2b^2 + 4ahb^3 - ah^4 - ab^4 = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} G_2(x, a, b, F, h) &= bh^2 - 2hb^2 + b^3 - h^2 + 2hb + 4ha^2x - 4ha^3x^3 \\ &\quad - 4ha^2xF - b^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A próxima etapa consiste em calcular o resultante em  $x$  entre as Eqs. (3.27) e (3.28), obtendo dessa forma um único polinômio  $S_m^{(k=2)}(a, b, F, h)$  que depende somente dos parâmetros e do autovalor. O autovalor  $h$  pode assumir os valores  $\pm 1$ , de forma que  $h = 1$ , condição necessária para ocorrência de bifurcação sela-nó, determina o nascimento da órbita de período 1 para o mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ , ao passo que  $h = -1$  determina o nascimento da órbita de período 2 através de uma BDP. Sendo assim, fazendo inicialmente  $h = 1$ , a equação resultante é

$$S_1^{(k=2)}(a, b, F) = 256a^4F^4 - 32a^2[9b^4 - 36b^3 + (48a + 54)b^2 - (96a + 36)b + 16a^2 + 48a + 9]F^2 + S_1(a, b)[S_{1 \rightarrow 2}(a, b)]^3 = 0, \quad (3.29)$$

sendo  $S_1(a, b)$  e  $S_{1 \rightarrow 2}(a, b)$  expressões descritas pelas Eqs. (3.7) e (3.8), cujas soluções determinam a ocorrência da bifurcação sela-nó e da BDP  $1 \rightarrow 2$  no MH, respectivamente. De forma equivalente, fazendo  $h = -1$ , obter-se-á

$$S_{1 \rightarrow 2}^{(k=2)}(a, b, F) = 256a^4F^4 - 32a^2[5b^4 - 36b^3 + (48a + 46)b^2 - (96a + 36)b + 16a^2 + 48a + 5]F^2 + S'_{2 \rightarrow 4}(a, b)[S_{2 \rightarrow 4}(a, b)]^2 = 0, \quad (3.30)$$

tal que  $S_{2 \rightarrow 4}(a, b)$  é dado pela Eq. (3.9), que determina a BDP  $2 \rightarrow 4$  do MH. O termo  $S'_{2 \rightarrow 4}(a, b)$ , por sua vez, é descrito por

$$S'_{2 \rightarrow 4}(a, b) = [5b^4 + 4b^3 + (8a - 2)b^2 + (16a + 4)b + 16a^2 + 8a + 5]. \quad (3.31)$$

Atribuindo valores para  $b$  e  $F$ , as Eqs. (3.29) e (3.30) estabelecem os valores de  $a$  nos quais ocorrem bifurcação sela-nó e BDP, respectivamente. Para  $b = 0,3$  e  $F = 1 \times 10^{-2}$ , por exemplo, a primeira bifurcação sela-nó do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  é verificada em  $a = -0,1224992349$ , valor próximo ao parâmetro  $a = a_1 = -0,1225$  encontrado para o MH através da Eq. (3.7). Utilizando os mesmos valores de  $b$  e  $F$  supracitados, uma nova bifurcação sela-nó é encontrada em  $a = 0,4057246526$ , valor esse indicado pela linha vertical tracejada no diagrama da Fig. 3.6(a), no qual a curva preta representa os valores da variável  $x_n$  do MH e as curvas azuis representam as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ . Essa figura mostra que o procedimento de duplicação das janelas de periodicidade par do MH é idêntico ao caso unidimensional, uma vez que a BDP  $1 \rightarrow 2$  que ocorre em  $a = a_{12} = 0,3675$  para o MH, valor determinado através da expressão  $S_{1 \rightarrow 2}(a, b = 0,3) = 0$ , torna-se proibida para o mapa composto devido ao acoplamento de  $S_1(a, b)$  e  $S_{1 \rightarrow 2}(a, b)$  na Eq. (3.29). Além disso, os dois atratores gerados pelas bifurcações sela-nó do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  são independentes e sofrem BDP em valores diferentes de  $a$ , indicados pelas linhas verticais na Fig. 3.6(b). Tais valores são encontrados substituindo  $b = 0,3$  e  $F = 1 \times 10^{-2}$  na Eq. (3.30), de forma que a primeira BDP ocorre em  $a = 0,8997278943$  e a segunda ocorre em  $a = 0,9256911379$ . Esses parâmetros substituem a única solução real obtida para o MH através da equação  $S_{2 \rightarrow 4}(a, b = 0,3) = 0$ , que resulta em  $a = a_{24} = 0,9125$ .

O diagrama de bifurcação da Fig. 3.6 exemplifica o fenômeno que consiste no prolongamento do intervalo do parâmetro  $a$  para uma determinada periodicidade, assim

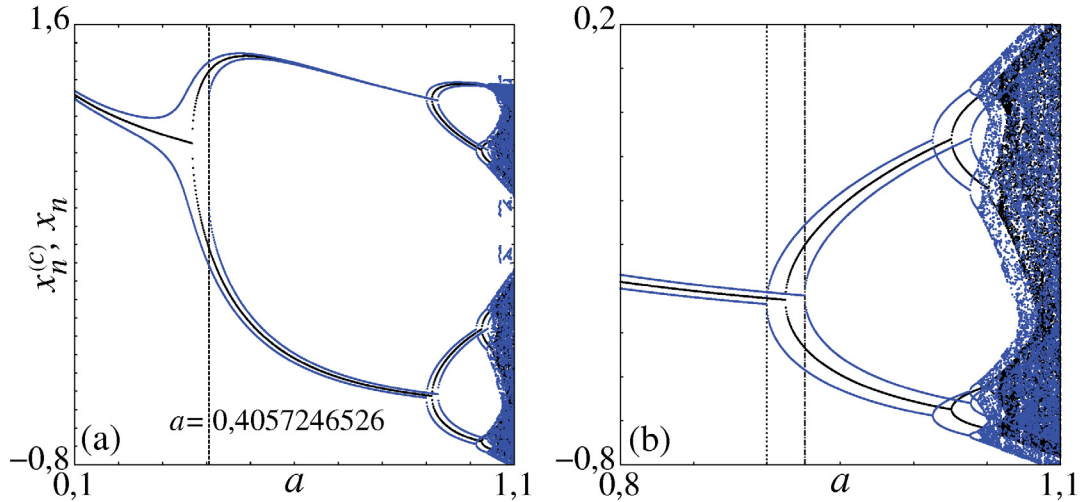


Figura 3.6 – Diagrama de bifurcação do MH (curva preta) e do mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  com  $b = 0,3$  e  $F = 1 \times 10^{-2}$  (curvas azuis), considerando as variáveis  $x_n$  e  $x_n^{(c)}$ . O intervalo  $[a_{\min}, a_{\max}]$  foi dividido em  $10^3$  partes iguais e, para cada parâmetro  $a$ , 10 condições iniciais  $(x_0, y_0)$  foram geradas fixando  $y_0 = 0,05$  e escolhendo valores de  $x_0$  igualmente espaçados no intervalo  $[-1, +1]$ . As curvas do diagrama foram construídas considerando 20 iterações de cada trajetória após descartar as primeiras  $10^5$  iterações. Em (a), a linha vertical representa o valor do parâmetro  $a$  no qual ocorre a segunda bifurcação sela-nó do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ . Em (b), as duas linhas verticais indicam a ocorrência de BDP no mapa composto.

como feito para o mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$  no Capítulo 2. No entanto, um único valor de  $b$  foi analisado, sendo que a variação simultânea dos parâmetros  $a$  e  $b$  possibilita uma visão mais ampla da dinâmica do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ . Sendo assim, o estudo do espaço de parâmetros  $(a, b)$  torna-se indispensável para determinar como o parâmetro externo  $F_j$  modifica as EIPs e os domínios caóticos originalmente encontrados para o MH. A Fig. 3.7 apresenta o espaço de parâmetros do mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ , considerando o período da órbita resultante de cada combinação paramétrica  $(a, b)$ . O diagrama da Fig. 3.7(a), obtido com  $F = 0$ , corresponde ao espaço de parâmetros do MH [26, 27]. É importante destacar que, para os diagramas apresentados no decorrer deste capítulo, o período das órbitas do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  foi determinado contabilizando o número de iterações dos MHMs, ou seja, as variáveis intermediárias  $x_n$  e  $y_n$  também foram consideradas e não somente as variáveis  $x_n^{(c)}$  e  $y_n^{(c)}$  do mapa composto. Isso permite uma melhor comparação com os resultados obtidos para o MH e também, como detalhado na Seção 2.3, mostra o papel fundamental da dinâmica intermediária na proliferação de regiões periódicas. Sendo assim, como as iterações intermediárias foram consideradas, é possível afirmar que o espaço de parâmetros obtido para o mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  com  $F = 0$  é idêntico àquele obtido para o MH.

A escolha de um par de parâmetros  $(a, b)$  localizado dentro de uma EIP dará origem a uma órbita regular no espaço de fases, cujo período será o mesmo que o indicado pela cor da EIP, conforme a paleta de cores posicionada acima da Fig. 3.7. No caso de parâmetros escolhidos fora das EIPs, dois comportamentos diferentes podem ser encontrados: uma

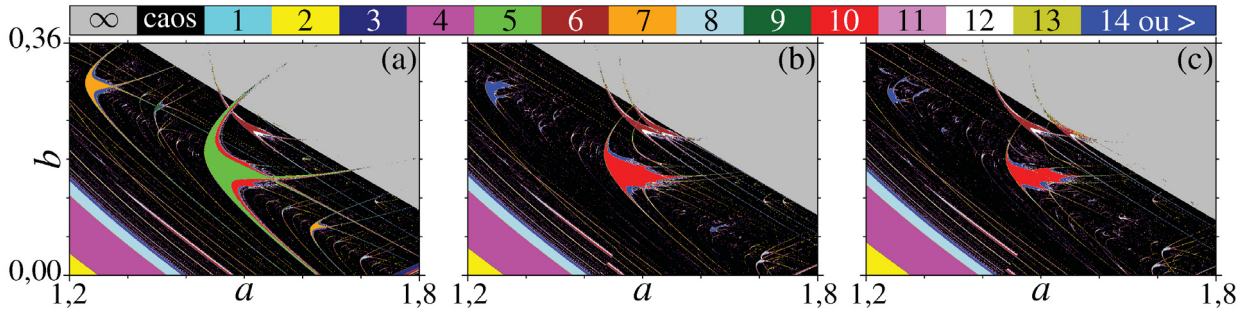


Figura 3.7 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  utilizando (a)  $F = 0$ , (b)  $F = 5 \times 10^{-3}$  e (c)  $F = 1 \times 10^{-2}$ . As regiões preenchidas pelas cores cinza e preta geram trajetórias divergentes e caóticas, respectivamente. Nas demais combinações paramétricas, a cor corresponde ao período da órbita resultante.

trajetória caótica será obtida se os parâmetros coexistirem na região de cor preta, ou ocorrerá a divergência da trajetória quando a combinação paramétrica escolhida for representada pela cor cinza. Nas Figs. 3.7(b) e 3.7(c), que representam os casos  $F = 5 \times 10^{-3}$  e  $F = 1 \times 10^{-2}$ , respectivamente, observa-se que as EIPs que apresentavam período principal par no caso  $F = 0$  mantêm o mesmo período e são duplicadas, de forma que cada uma dessas EIPs dá origem a outra idêntica. Por outro lado, as EIPs cujo período principal é ímpar quando  $F = 0$  não são duplicadas e sofrem apenas o dobramento de período. A mesma conclusão obtida para o caso unidimensional pode ser estendida para o caso bidimensional de tal modo que, quando o número  $k$  de mapas modificados usados na composição for par, o mapa composto apenas completará uma órbita após um número par de iterações, proibindo a existência de períodos ímpares. Além disso, o menor período encontrado quando  $F \neq 0$  será o período  $k$ , visto que as iterações intermediárias são consideradas.

Uma melhor visualização da multiplicação do número de EIPs no espaço de parâmetros pode ser obtida ao analisar separadamente intervalos que contêm EIPs de períodos principais pares e ímpares. Iniciando pelo caso par, a Fig. 3.8 mostra regiões do espaço de parâmetros nas quais se encontram uma EIP de período principal 8 e outra de período principal 10. As Figs. 3.8(a) e 3.8(b) mostram que a EIP de período principal 8, representado pela cor amarela, é duplicada quando  $F \neq 0$  e seu período permanece inalterado. O mesmo ocorre para a EIP de período principal 10 (cor cinza) nas Figs. 3.8(e) e 3.8(f). Nas Figs. 3.8(c), 3.8(d), 3.8(g) e 3.8(h), as mesmas EIPs foram analisadas, porém as cores representam o maior EL, sendo que a magnitude de  $\lambda_1$  é indicada pela paleta de cores posicionada à direita das respectivas figuras. O valor do maior EL possibilita uma análise mais detalhada da dinâmica encontrada no interior das EIPs, destacando a região de superestabilidade (esqueleto) representada pela cor ciano. Também é possível identificar as curvas de BDP, caracterizadas pela cor preta que indica o valor  $\lambda_1 = 0$ . Além disso, torna-se evidente que as EIPs geradas quando  $F \neq 0$  são idênticas às originais, possuindo mesmas condições de estabilidade e curvas de bifurcação, de forma que não só a região periódica no espaço de parâmetros é duplicada, mas também toda a dinâmica característica de uma EIP ocorrerá

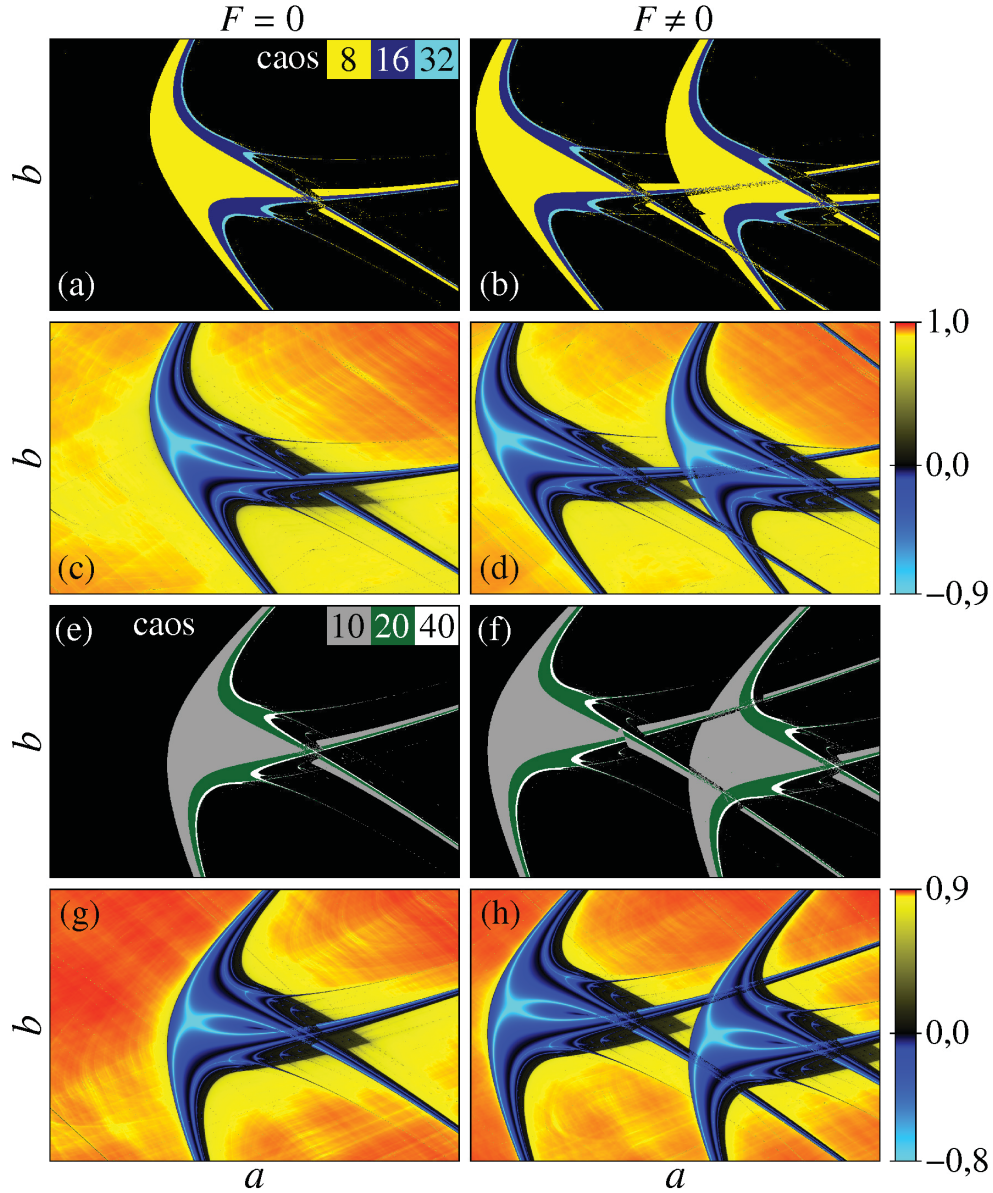


Figura 3.8 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ . Em (a), (b), (e) e (f), as cores indicam o período da órbita para cada combinação de parâmetros e em (c), (d), (g) e (h) as cores indicam o maior EL. A EIP de período principal 8 encontra-se nos intervalos  $[a_{\min}, a_{\max}] = [1,719, 1,736]$  e  $[b_{\min}, b_{\max}] = [0,110, 0,118]$ , enquanto a EIP de período principal 10 encontra-se em  $[a_{\min}, a_{\max}] = [1,6726, 1,6794]$  e  $[b_{\min}, b_{\max}] = [0,1417, 0,1441]$ . Nos casos em que  $F \neq 0$ , foram utilizados os valores  $F = 1,2 \times 10^{-3}$  para a EIP de período principal 8 e  $F = 5 \times 10^{-4}$  para a EIP de período principal 10.

em duplicidade, incluindo o nascimento da EIP através de uma bifurcação sela-nó, região de superestabilidade em sua parte mais interna, perda de estabilidade e sucessivas BDPs.

A distância entre EIPs idênticas no espaço de parâmetros, assim como ocorre no diagrama de bifurcação, é determinada pela intensidade do parâmetro externo  $F_j$ , como mostra a Fig. 3.9 para as mesmas EIPs de períodos principais 8 e 10 já analisadas na Fig. 3.8. Nas Figs. 3.9(a), 3.9(b) e 3.9(c), o aumento gradativo da intensidade  $F$  faz com que as EIPs de período principal 8 se distanciem, assim como mostram as Figs. 3.9(d),

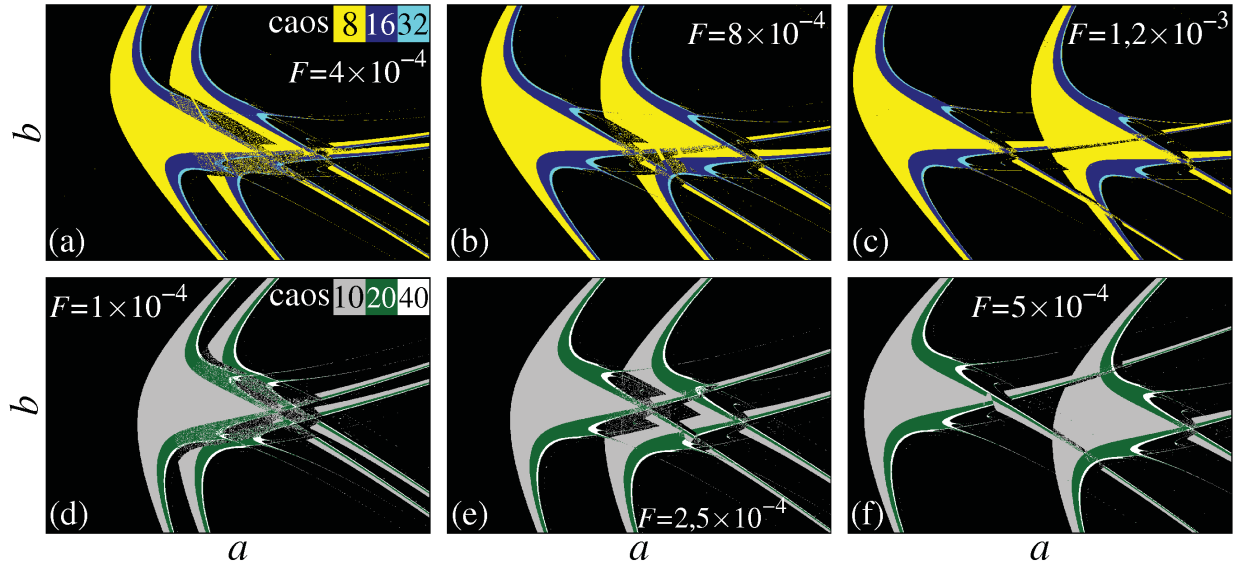


Figura 3.9 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  para diferentes intensidades do parâmetro externo  $F_j$ , indicadas em cada figura. As EIPs de períodos principais 8 e 10 encontram-se nos mesmos intervalos descritos na Fig. 3.8.

3.9(e) e 3.9(f) para a EIP de período principal 10. Além disso, EIPs de maior periodicidade ocupam regiões menores do espaço de parâmetros e, conseqüentemente, são mais sensíveis ao incremento de  $F$ , como pode ser observado ao comparar as intensidades utilizadas em cada um dos casos.

Na composição de dois MHMs ( $k = 2$ ), devido à dinâmica intermediária do mapa composto, períodos ímpares tornam-se proibidos quando  $F \neq 0$ . Com isso, uma EIP de período  $m$  ímpar passa a ter período  $m' = 2m$ . O dobramento de período no espaço de parâmetros foi estudado com maiores detalhes na Fig. 3.10, que apresenta a EIP de período

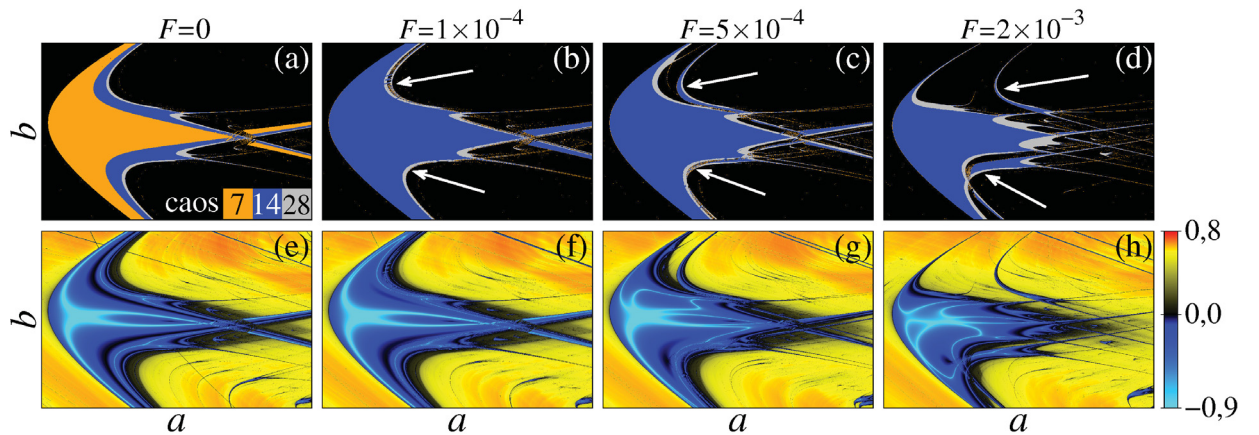


Figura 3.10 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  que destaca a EIP de período principal 7 contida nos intervalos  $[a_{\min}, a_{\max}] = [1,225, 1,295]$  e  $[b_{\min}, b_{\max}] = [0,26, 0,33]$ . Em (a), (b), (c) e (d) as cores representam o período da órbita e em (e), (f), (g) e (h) representam o valor do maior EL  $\lambda_1$ . Os valores de  $F$  usados em cada caso são indicados acima de cada coluna de figuras.

principal 7, representado pela cor laranja. Quando  $F \neq 0$ , o período principal da EIP passa a ser  $m' = 2 \times 7 = 14$  (cor azul), sendo que nenhuma cópia dessa estrutura é criada visto que  $\eta = m/k = 7/2 \notin \mathbb{Z}$ . Por outro lado, regiões secundárias de períodos 14 e 28 passam a sofrer o processo de duplicação sem alterar a periodicidade, como indicam as setas brancas nas Figs. 3.10(b), 3.10(c) e 3.10(d). Além disso, analisando as Figs. 3.10(e)–3.10(h) que apresentam a mesma EIP, porém utilizando o maior EL, é possível verificar que o esqueleto do corpo principal que era composto por duas parábolas quando  $F = 0$  passa a ser composto por quatro curvas, indicando um aumento da região de superestabilidade no interior da EIP. No entanto, o corpo principal não é duplicado e a área por ele ocupada no espaço de parâmetros permanece a mesma. Os domínios de períodos 14 e 28, cuja origem é a cascata de BDPs iniciada no corpo principal, são duplicados e suas réplicas se afastam da EIP à medida que  $F$  aumenta.

### 3.5 Composição de três ou mais MHMs

Uma composição de três MHMs ( $k = 3$ ) pode ser obtida pela sequência:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a(x_n^{(c)})^2 + y_n^{(c)} - F, & y_{n+1} &= bx_n^{(c)}, \\ x_{n+2} &= 1 - ax_{n+1}^2 + y_{n+1}, & y_{n+2} &= bx_{n+1}, \\ x_{n+3}^{(c)} &= 1 - ax_{n+2}^2 + y_{n+2} + F, & y_{n+3}^{(c)} &= bx_{n+2}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

de forma que um ponto fixo do mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=3)}$  deve ser solução das equações  $x_3^{(c)} - x = 0$  e  $y_3^{(c)} - y = 0$ , dadas as condições iniciais  $x_0^{(c)} = x$  e  $y_0^{(c)} = y$ . O espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=3)}$  com  $F = 0$  é apresentado nas Figs. 3.11(a), 3.11(c) e 3.11(e), considerando diferentes intervalos paramétricos. Esses mesmos intervalos são novamente apresentados nas Figs. 3.11(b), 3.11(d) e 3.11(f), respectivamente, utilizando  $F = 5 \times 10^{-3}$ ,  $F = 8 \times 10^{-3}$  e  $F = 2 \times 10^{-3}$ , nessa ordem. Na Fig. 3.11(a) são encontradas EIPs de períodos principais 9 (ciano), 11 (branco) e 12 (verde). Quando  $F \neq 0$ , somente as regiões de períodos 9 e 12 são triplicadas, enquanto a EIP de período principal 11 é reduzida a ponto de não ser identificada na Fig. 3.11(b). A Fig. 3.11(c) apresenta uma EIP de período principal 6 (marrom) e parte de uma grande EIP de período principal 5 (verde escuro). Quando  $F \neq 0$ , caso representado pela Fig. 3.11(d), somente a EIP de período principal 6 é triplicada, enquanto a outra estrutura contida nesse intervalo passa a ter período  $m' = 3 \times 5 = 15$ , representado pela cor azul. Por fim, observa-se novamente a triplicação das EIPs cujo período principal é múltiplo de três ao comparar a Fig. 3.11(e), para  $F = 0$ , com a Fig. 3.11(f), para  $F \neq 0$ . Nesse caso, as EIPs de períodos principais 9 (ciano) e 12 (verde) são triplicadas enquanto as demais sofrem a triplicação do período, visto que  $\eta = m/k \notin \mathbb{Z}$ . Esse fenômeno pode ser verificado através da EIP cujo período principal é 7 quando  $F = 0$ , indicado pela cor amarela na Fig. 3.11(e). Quando  $F \neq 0$ , essa região passa a ter período  $m' = 3 \times 7 = 21$ , representado pela cor azul na Fig. 3.11(f).

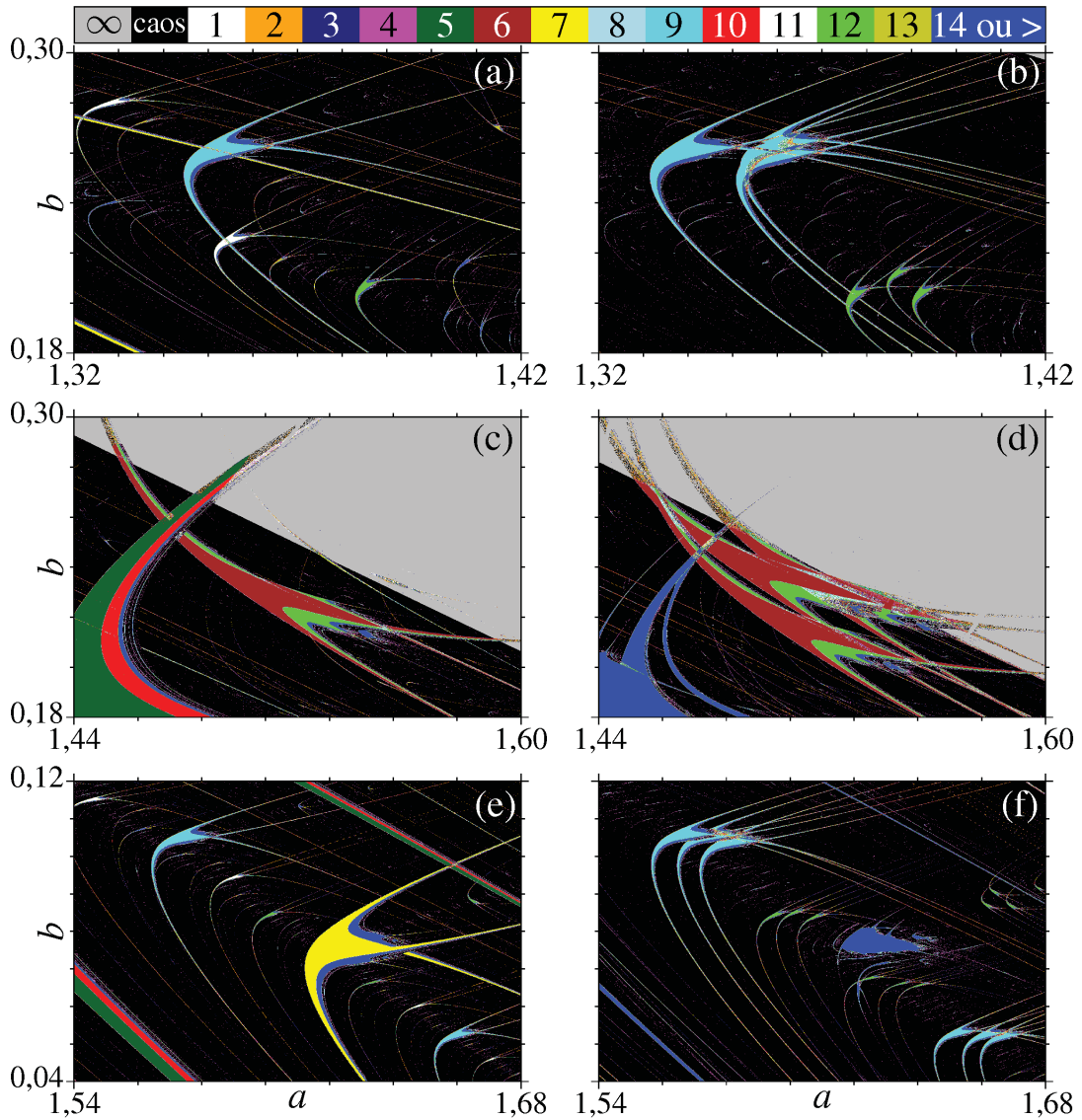


Figura 3.11 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=3)}$  com as cores indicando o período da órbita. As figuras (a), (c) e (e) representam o caso  $F = 0$ , que é idêntico ao MH visto que a dinâmica intermediária foi considerada. As figuras (b), (d) e (f) foram obtidas utilizando  $F = 5 \times 10^{-3}$ ,  $F = 8 \times 10^{-3}$  e  $F = 2 \times 10^{-3}$ , respectivamente.

Na Fig. 3.12 encontram-se os resultados obtidos a partir da composição de quatro, cinco e seis MHMs. O caso  $k = 4$ , com  $F = 0$  e  $F = 1 \times 10^{-2}$ , é apresentado nas Figs. 3.12(a) e 3.12(b), respectivamente. Para obter o mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=4)}$ , foi utilizada a sequência  $\{-F, +F/2, -F/2, +F, \dots\}$ . Quando  $F \neq 0$ , a EIP de período principal 8 da Fig. 3.12(a) é quadruplicada, aumentando o número de combinações paramétricas que geram órbitas dessa periodicidade. Para  $k = 5$ , a sequência  $\{-F, +F/2, 0, -F/2, +F, \dots\}$  foi aplicada a fim de obter o mapa  $\mathcal{H}^{(k=5)}$ . Para esse sistema, o período das órbitas é representado nos diagramas das Figs. 3.12(c), para  $F = 0$ , e 3.12(d), para  $F = 2 \times 10^{-3}$ . Na Fig. 3.12(c) são encontradas EIPs de períodos principais 15 (verde), 16 (azul) e 20 (vermelho), e a Fig. 3.12(d) mostra a quintuplicação das EIPs com períodos principais múltiplos de cinco. Essa proliferação de



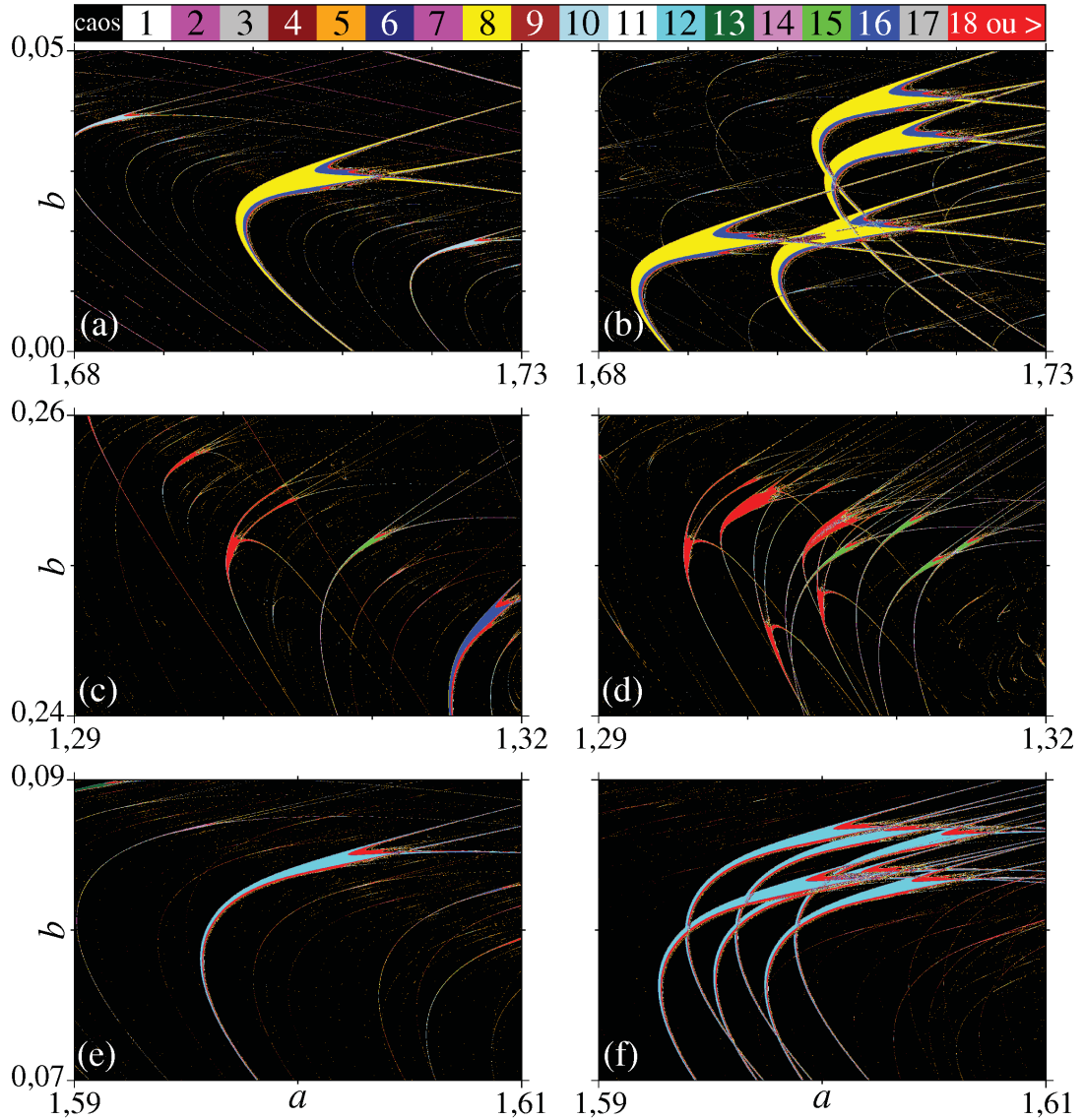


Figura 3.12 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  com as cores indicando o período das órbitas do mapa  $\mathcal{H}^{(k=4)}$  em (a) ( $F = 0$ ) e (b) ( $F = 1 \times 10^{-2}$ ),  $\mathcal{H}^{(k=5)}$  em (c) ( $F = 0$ ) e (d) ( $F = 2 \times 10^{-3}$ ), e  $\mathcal{H}^{(k=6)}$  em (e) ( $F = 0$ ) e (f) ( $F = 2 \times 10^{-3}$ ). Como a dinâmica intermediária foi considerada na contagem do período, os diagramas (a), (c) e (e) coincidem com os resultados obtidos para o MH. As sequências utilizadas para a composição de quatro, cinco e seis MHMs foram  $\{-F, +F/2, -F/2, +F, \dots\}$ ,  $\{-F, +F/2, 0, -F/2, +F, \dots\}$  e  $\{-F, +F/2, -F/4, +F/4, -F/2, +F, \dots\}$ , respectivamente.

estruturas periódicas que ocorre quando  $F \neq 0$  resulta em um aumento considerável das regiões de periodicidades 15 e 20 no espaço de parâmetros. O mesmo procedimento pode ser adotado para sextuplicar EIPs cujo período principal é múltiplo de seis, utilizando para isso a sequência  $\{-F, +F/2, -F/4, +F/4, -F/2, +F, \dots\}$ . Os resultados para  $k = 6$  são apresentados nas Figs. 3.12(e) e 3.12(f) utilizando  $F = 0$  e  $F = 2 \times 10^{-3}$ , respectivamente. Percebe-se que a EIP de período principal 12 (ciano) é sextuplicada, ao passo que a de periodicidade 14 (violeta) desaparece quando  $F \neq 0$ . Em todos os casos apresentados, a multiplicação de EIPs é resultado da ocorrência de  $k$  bifurcações sela-nó em diferentes pontos

$(a, b)$  do espaço de parâmetros. Além disso, ao variar o número  $k$  de MHMs que formam o mapa composto, confirma-se que a razão  $\eta = m/k$  deve resultar em um número inteiro para que ocorra a proliferação de domínios periódicos, sendo  $m$  o período principal da EIP.

### 3.6 Múltiplos atratores e bacias de atração

Através do estudo da bacia de atração do mapa composto, é possível mostrar que a multiplicação de EIPs no espaço de parâmetros é uma consequência da multiplicação do número de atratores no espaço de fases. As definições de atrator e bacia de atração podem ser introduzidas através do conjunto limite positivo  $\mathcal{L}^+(\mathbf{x})$  de um ponto  $\mathbf{x}$ , ou seja, o conjunto de todos os pontos limites da trajetória  $f^n(\mathbf{x})$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Sendo  $V$  a variedade de dimensão  $\mathcal{D}$  sobre a qual define-se  $f$ , um conjunto fechado  $\mathcal{A} \subset V$  é chamado atrator se a bacia de atração  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ , conjunto formado por todos os pontos  $\mathbf{x} \in V$  para os quais  $\mathcal{L}^+(\mathbf{x}) \subset \mathcal{A}$ , tem medida  $\mathcal{D}$ -dimensional de Lebesgue positiva e, além disso, não existe um subconjunto fechado menor  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ , de forma que  $\mathcal{B}(\mathcal{A}') = \mathcal{B}(\mathcal{A})$  [101]. Sendo assim, existe uma probabilidade não nula de que  $\mathcal{L}^+(\mathbf{x}) = \mathcal{A}$  quando  $\mathbf{x}$  é um ponto escolhido aleatoriamente, de acordo com alguma distribuição de probabilidade, nas proximidades de  $\mathcal{A}$ .

A Fig. 3.13 apresenta as bacias de atração dos mapas  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  e  $\mathcal{H}^{(k=3)}$  para  $a = 1,51$  e  $b = 0,23$ , combinação de parâmetros localizada no centro da EIP de período principal 6 (cor marrom) das Figs. 3.7(a) e 3.11(c), ambas obtidas com  $F = 0$ . Se consideradas as iterações intermediárias do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  com  $F = 0$ , a bacia de atração encontrada é idêntica à bacia de atração do MH quando calculada para os mesmos valores de  $a$  e  $b$ . Para construir o diagrama da Fig. 3.13(a), que representa o caso  $F = 0$ , uma grade de  $10^3 \times 10^3$  condições iniciais foi formada e, para cada par  $(x_0^{(c)}, y_0^{(c)})$ , a dinâmica do mapa composto foi analisada após um transiente de  $10^7$  iterações. As condições iniciais que convergem para o atrator de período 6, indicado pelos círculos brancos na Fig. 3.13(a), são representadas pela cor azul e formam a bacia de atração desse atrator. Por outro lado, condições iniciais que geram trajetórias divergentes são representadas pela cor cinza.

Na maior parte dos casos estudados, assim como para o MH, uma bacia de atração consiste em um conjunto aberto que contém discos de raio  $\delta$ , sendo  $\delta$  uma medida de incerteza, de tal modo que todos os pontos escolhidos dentro desses discos pertencem à mesma bacia de atração [102]. No entanto, existem sistemas cujas bacias de atração não exibem esses discos, de forma que um ponto escolhido aleatoriamente tem probabilidade não nula de pertencer à bacia  $\mathcal{B}(\mathcal{A}_1)$  do atrator  $\mathcal{A}_1$  e probabilidade não nula de pertencer à bacia  $\mathcal{B}(\mathcal{A}_2)$  de outro atrator  $\mathcal{A}_2$ . Como resultado, a bacia do atrator  $\mathcal{A}_1$  apresenta buracos e, por esse motivo,  $\mathcal{B}(\mathcal{A}_1)$  é chamada de bacia crivada.

A Fig. 3.13(b) foi obtida usando o mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  com  $F = 1 \times 10^{-3}$  e, nesse caso, a EIP de período principal 6 e sua réplica recém gerada continuam sobrepostas. Devido à

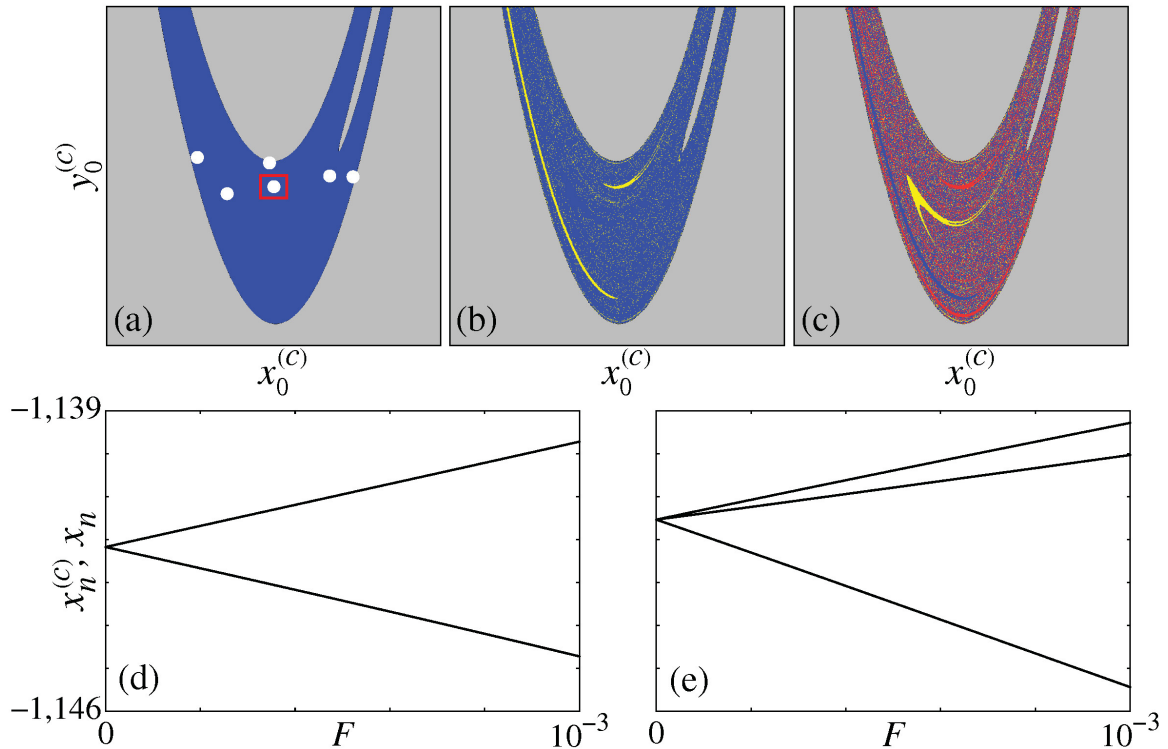


Figura 3.13 – Bacias de atração do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  em (a) ( $F = 0$ ) e (b) ( $F = 1 \times 10^{-3}$ ), e do mapa  $\mathcal{H}^{(k=3)}$  em (c) ( $F = 1 \times 10^{-3}$ ). Essas bacias de atração encontram-se no intervalo  $[x_{0_{\min}}^{(c)}, x_{0_{\max}}^{(c)}] = [y_{0_{\min}}^{(c)}, y_{0_{\max}}^{(c)}] = [-2, 5, +2, 5]$  e foram construídas fixando os parâmetros  $a = 1,51$  e  $b = 0,23$ , o que corresponde a uma EIP de período principal 6 no espaço de parâmetros. A região cinza é formada por condições iniciais que divergem e as regiões azuis, amarelas e vermelhas representam as condições iniciais que conduzem aos diferentes atratores gerados quando  $F \neq 0$ . As Figs. (d) e (e) mostram a duplicação e a triplicação, respectivamente, do ponto orbital destacado pelo quadrado vermelho na figura (a), ponto esse que compõe o atrator de período 6.

sobreposição dessas duas EIPs, para a combinação paramétrica  $(a, b) = (1,51, 0,23)$  é possível obter dois atratores de período 6 no espaço de fases. Por esse motivo, a Fig. 3.13(b) apresenta duas bacias de atração parcialmente crivadas e que encontram-se entrelaçadas [101], sendo tais bacias representadas pelas cores azul e amarela. Essas bacias são ditas parcialmente crivadas pois alguns domínios desses conjuntos não apresentam buracos. O mesmo ocorre para o mapa  $\mathcal{H}^{(k=3)}$ , para o qual são encontradas três bacias de atração parcialmente crivadas referentes aos três diferentes atratores de período 6, sendo essas bacias representadas na Fig. 3.13(c) pelas cores azul, amarela e vermelha. As Figs. 3.13(d) e 3.13(e) mostram, respectivamente, a duplicação e a triplicação do atrator de período 6 através da separação de um ponto orbital, indicado pelo quadrado vermelho na Fig. 3.13(a), em relação aos novos pontos criados quando  $F \neq 0$ , sendo essa separação uma consequência do aumento da intensidade  $F$  do parâmetro externo.

### 3.7 Multiplicação de EIPs de alta periodicidade

As EIPs estudadas nas Seções 3.4 e 3.5 apresentam períodos relativamente pequenos e possuem a tradicional forma de camarão. Essa classe de EIPs pode ser encontrada no espaço de parâmetros dos mais variados tipos de sistemas [26, 34, 35, 103–105], de forma que suas principais propriedades foram extensivamente estudadas nas últimas décadas [27, 28, 53–55]. No entanto, outros tipos de EIPs podem ser encontradas como, por exemplo, as janelas compostas, EIPs que apresentam formas mais complexas e cujo período pode ser alto [106]. O objetivo desta seção é mostrar que o método proposto nesta tese para multiplicar EIPs também é válido para tais estruturas, desde que  $\eta = m/k \in \mathbb{Z}$ .

O primeiro exemplo é apresentado na Fig. 3.14 para a duplicação de uma EIP de período 18, utilizando o mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ . Observando a Fig. 3.14(a), construída usando  $F = 0$ , esse domínio periódico pode ser erroneamente interpretado como duas EIPs tipo camarão que encontram-se sobrepostas. No entanto, trata-se de uma única EIP de

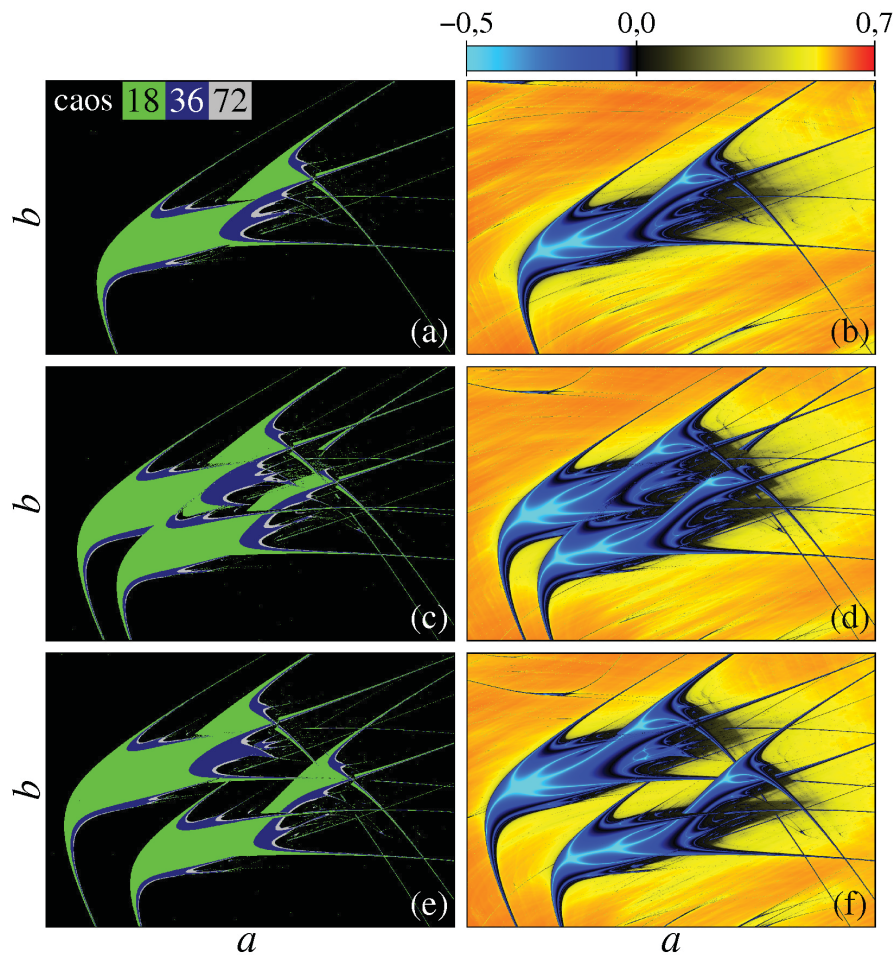


Figura 3.14 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  nos intervalos  $[a_{\min}, a_{\max}] = [1,289, 1,302]$  e  $[b_{\min}, b_{\max}] = [0,259, 0,268]$ . As cores representam o período da órbita em (a) para  $F = 0$ , (c) para  $F = 6 \times 10^{-4}$  e (e) para  $F = 1 \times 10^{-3}$ . Em (b), (d) e (f), as cores indicam o valor do maior EL obtido quando consideradas as mesmas intensidades do parâmetro externo  $F_j$  das figuras (a), (c) e (e), respectivamente.

período 18 cujo esqueleto é formado por quatro curvas superestáveis [106], como mostra a Fig. 3.14(b), na qual as cores representam o maior EL. Quando  $F \neq 0$ , ocorre a duplicação da EIP uma vez que  $\eta = 18/2 \in \mathbb{Z}$ . Além disso, aumentando o valor de  $F$  é possível ampliar a distância entre as EIPs, como mostram as Figs. 3.14(c) e 3.14(e). Porém, analisando as Figs. 3.14(d) e 3.14(f), observa-se que as duas estruturas de período 18 não são totalmente idênticas visto que o aumento de  $F$  gera, em uma das EIPs, uma maior separação entre as curvas superestáveis.

As Figs. 3.15(a), 3.15(c) e 3.15(e) mostram a duplicação de uma EIP de período 40, novamente usando o mapa composto  $\mathcal{H}^{(k=2)}$ . Para esse caso, analisando o valor do maior EL nas Figs. 3.15(b), 3.15(d) e 3.15(f), também é possível observar que as duas EIPs de mesmo período são idênticas apenas quando pequenas intensidades do parâmetro externo  $F_j$  são aplicadas. De forma geral, observa-se que as janelas compostas são mais sensíveis ao incremento de  $F$ . Para EIPs mais complexas, portanto, quando  $F \neq 0$ , torna-se possível

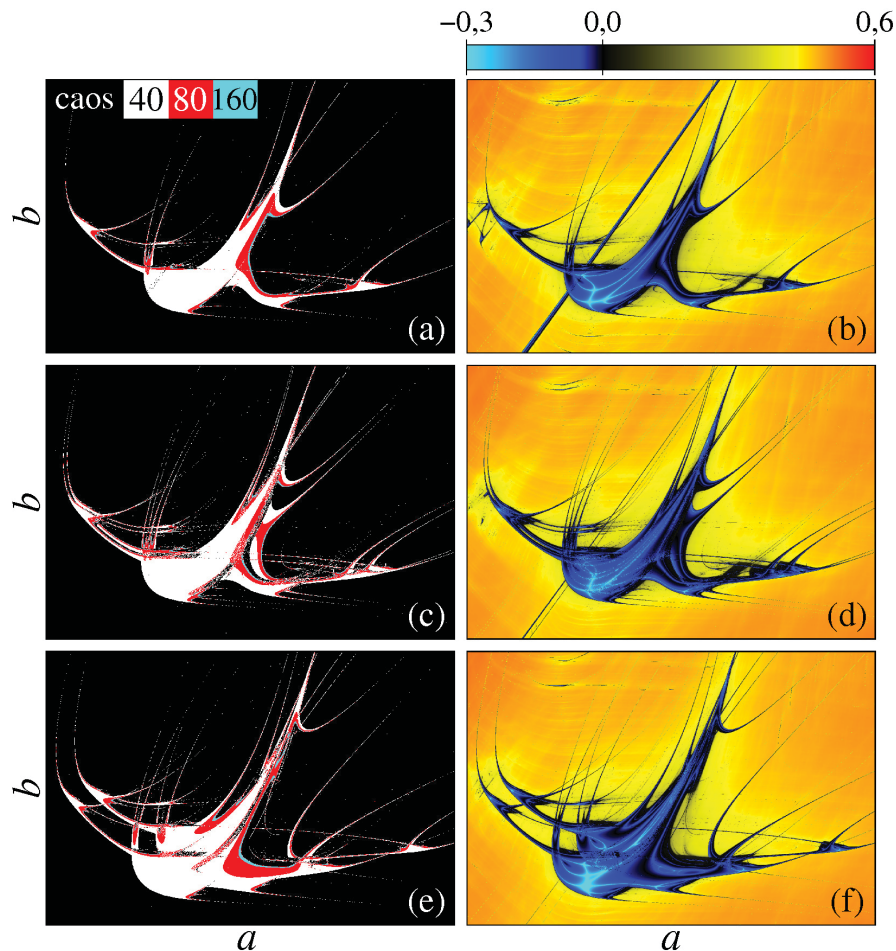


Figura 3.15 – Espaço de parâmetros  $(a, b)$  do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  nos intervalos  $[a_{\min}, a_{\max}] = [1,1703, 1,1722]$  e  $[b_{\min}, b_{\max}] = [0,34200, 0,34235]$ . As cores representam o período da órbita em (a) para  $F = 0$ , (c) para  $F = 2 \times 10^{-6}$  e (e) para  $F = 1 \times 10^{-5}$ . Em (b), (d) e (f), as cores indicam o valor do maior EL obtido quando consideradas as mesmas intensidades do parâmetro externo  $F_j$  das figuras (a), (c) e (e), respectivamente.

gerar cópias idênticas que mudam sua estrutura interna rapidamente à medida que o valor de  $F$  aumenta.

### 3.8 Conclusões parciais

Neste capítulo, o fenômeno da proliferação de EIPs no espaço de parâmetros foi apresentado por meio da composição de MHMs. A utilização do espaço de parâmetros com o auxílio de ferramentas auxiliares, como a contagem de períodos e o valor do maior EL, possibilita uma visão ampla da influência do parâmetro externo  $F_j$  na dinâmica do mapa composto  $\mathcal{H}^{(k)}$ . Os resultados apresentados nas Seções 3.4 e 3.5 mostram que as EIPs do MH seguem as mesmas regras de multiplicação que as regiões periódicas do mapa composto por MQMs, estudado no Capítulo 2, de forma que a razão  $\eta$  entre o período principal  $m$  da EIP e o número  $k$  de MHMs utilizados na composição deve resultar em um número inteiro, ou seja,  $\eta \in \mathbb{Z}$ , tal que  $\eta = m/k$ . Caso essa condição não seja satisfeita, o período principal  $m$  da EIP será aumentado para  $m' = km$ , de forma que esse domínio não será multiplicado no espaço de parâmetros.

Além da multiplicação de EIPs no espaço de parâmetros, a composição de mapas modificados pelo parâmetro externo  $F_j$  possibilita a criação de  $k$  atratores no espaço de fases. Dessa forma, novas bacias de atração parcialmente crivadas serão encontradas para uma mesma combinação de parâmetros, dando origem ao entrelaçamento dessas bacias, como apresentado na Seção 3.6. Na Seção 3.7, EIPs de alta periodicidade que assumem formas complexas foram estudadas e, mesmo para esses casos, a multiplicação de estruturas periódicas é possível sempre que a condição  $\eta \in \mathbb{Z}$  for respeitada.

## Capítulo 4

---

### Separando atratores no espaço de fases para superar efeitos do ruído

---

O método desenvolvido nos Capítulos 2 e 3, que possibilita a proliferação de domínios periódicos no espaço de parâmetros, pode ser aplicado a sistemas dinâmicos nos quais as EIPs estão intimamente relacionadas com grandezas físicas de grande interesse. Um desses modelos é o mapa catraca, sistema dinâmico discreto que apresenta transporte direcionado mesmo que existam apenas forças com médias espacial e temporal nulas atuando sobre a partícula. Tal sistema comporta em seu espaço de parâmetros regiões regulares e caóticas, existindo uma conexão entre o tipo de dinâmica e efeitos de otimização do transporte. Como consequência, o aumento do domínio periódico por meio da composição de mapas catraca modificados por um parâmetro externo  $F_j$  gera um aumento das regiões do espaço de parâmetros que disponibilizam correntes de partículas cuja magnitude é diferente de zero, de forma que novas combinações paramétricas podem ser utilizadas no intuito de obter transporte direcionado. Além disso, com esse procedimento, torna-se possível postergar os efeitos do ruído térmico responsável pelo aumento do domínio caótico no espaço de parâmetros e pela consequente redução das regiões que geram valores ótimos de corrente de partículas.

Este capítulo também é composto por uma seção destinada ao estudo de dois sistemas dinâmicos modelados por equações diferenciais: a equação de Langevin e o circuito de Chua. Para essa classe de sistemas, a multiplicação de domínios periódicos só é possível em regiões de multiestabilidade e ocorre por meio da adição de funções periódicas que quebram a simetria da perturbação externa. Dessa forma, torna-se possível separar diferentes atratores no espaço de fases e dissociar regiões periódicas que encontram-se sobrepostas no espaço de parâmetros. O método introduzido neste capítulo para sistemas a tempo contínuo permite aumentar significativamente a região regular do espaço de parâmetros mesmo quando os efeitos do ruído são considerados, e sua aplicabilidade abrange os mais variados modelos que apresentam multiestabilidade. O principal objetivo deste capítulo é mostrar a eficiência do método de multiplicação de EIPs em sistemas com ruído e, portanto, uma seção será

usada para introduzir brevemente as principais características dos sistemas estocásticos que simulam as perturbações aleatórias do ambiente.

## 4.1 Sistemas estocásticos

Para que um modelo matemático se aproxime ao máximo da realidade, os efeitos da vizinhança sobre o sistema considerado não devem ser desprezados, o que torna a descrição desse problema físico extremamente difícil. Devido ao ambiente externo ser constituído por um grande número de elementos que se comportam de formas diferentes, torna-se necessário o emprego de métodos estatísticos para compreender a influência de efeitos microscópicos sobre as propriedades macroscópicas do sistema. Com isso, as variáveis dinâmicas de um determinado sistema podem ser modeladas como sendo aleatórias, respeitando uma distribuição de probabilidade, dando origem a uma equação estocástica responsável por descrever matematicamente um processo estocástico.

Em 1905, Albert Einstein propôs uma explicação para o deslocamento irregular de grãos de pólen suspensos em água, denominado de movimento Browniano<sup>1</sup>, sugerindo que esse movimento era causado pelas recorrentes colisões do grão de pólen com as moléculas do fluido. Além disso, Einstein também afirmou que tais moléculas se locomoviam de forma tão complicada que o efeito dessas colisões sobre o grão de pólen poderia ser descrito apenas em termos probabilísticos [41]. O trabalho de Einstein chamou a atenção para a utilização da estatística na descrição matemática de processos naturais, e sua explicação para o movimento Browniano pode ser considerada como o início da modelagem estocástica [107]. Investigações experimentais subsequentes, apoiadas no desenvolvimento de técnicas de microscopia, revelaram que esse fenômeno é bem mais geral, ocorrendo em suspensões de diversos tipos de partículas microscópicas em fluidos não muito viscosos. Outros exemplos de processos estocásticos incluem flutuações no mercado de ações e nas taxas de câmbio, fluxo turbulento de um líquido ou gás, variações no campo magnético da Terra e flutuação da corrente em um circuito elétrico devido à agitação térmica das moléculas que compõem os condutores.

Um processo estocástico corresponde a uma família de variáveis aleatórias  $\mathcal{X}(t)$ , com  $t \in \mathcal{T}$ , cuja evolução temporal pode seguir diferentes caminhos, dependendo da distribuição de probabilidade que governa a evolução do processo. O conjunto  $\mathcal{T}$  pode ser discreto ou contínuo e, sendo discreto, o processo estocástico pode ser chamado de sequência de números aleatórios. É possível obter os valores  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$  de  $\mathcal{X}(t)$  nos tempos  $t_1, t_2, \dots$  e assumir que existe uma densidade de probabilidade conjunta  $P(\mathcal{X}_1, t_1; \mathcal{X}_2, t_2; \dots)$  que descreve completamente o sistema. Uma importante consideração no contexto de processos estocásticos a tempo discreto é a suposição Markoviana. Um processo Markoviano consiste em um processo estocástico que, conhecendo-se o valor de  $\mathcal{X}_t$ , o valor de  $\mathcal{X}_s$  para  $s > t$  não

<sup>1</sup> O movimento Browniano foi primeiramente observado pelo botânico Robert Brown, em 1827.



é influenciado pelos valores de  $\mathcal{X}_u$ , com  $u < t$ . Em outras palavras, a probabilidade de se obter um comportamento particular do sistema não depende do comportamento passado quando seu estado atual é completamente conhecido.

#### 4.1.1 Distribuição normal

Considerando uma partícula de massa  $\mu$  que executa um movimento Browniano e supondo que seu deslocamento é restrito a uma dimensão, de forma que a sua posição é descrita pela variável  $x(t)$ , é possível utilizar a segunda lei de Newton para obter uma equação diferencial que governa a dinâmica dessa partícula, tal que<sup>2</sup>

$$\mu\ddot{x} + U'(x, t) = -\nu\dot{x} + \Omega(t). \quad (4.1)$$

Nessa equação, conhecida como equação de Langevin,  $U(x, t)$  é um potencial periódico no espaço cujo período é  $L$ , ou seja,  $U(x + L, t) = U(x, t)$ , e  $\mathcal{F}(x, t) = -U'(x, t)$  é uma força externa que atua sobre a partícula. O lado esquerdo da Eq. (4.1) representa a parte conservativa da dinâmica da partícula, enquanto o lado direito contém os termos sujeitos aos efeitos do ambiente [108]. As sucessivas colisões entre a partícula e as moléculas que formam o meio no qual ela está inserida causam dois efeitos distintos: (i) uma força aleatória  $\Omega(t)$ , ou um ruído, que atua sobre a partícula e a mantém executando um movimento irregular e incessante; (ii) uma força dissipativa que depende das características do meio, representada pelo termo  $\nu\dot{x}$ . Isso sugere que a força dissipativa e a força aleatória devem estar relacionadas, visto que têm a mesma origem. De fato, como será demonstrado na Subseção 4.1.2, essa relação é manifestada pelo teorema flutuação-dissipação.

O fato de a força dissipativa não depender da posição  $x(t)$  demonstra que não há direção preferencial para o movimento da partícula. Isso indica que, devido à origem em comum, a força  $\Omega(t)$  também não deve ter uma direção preferencial, de forma que  $\langle \Omega(t) \rangle = 0$  para todo  $t$ , sendo a média  $\langle \dots \rangle$  tomada sobre realizações independentes do ruído  $\Omega(t)$ . Além disso, como o movimento Browniano é um exemplo de processo Markoviano a tempo contínuo [40], pode-se assumir que as flutuações aleatórias são temporalmente decorrelacionadas, isto é,  $\langle \Omega(t)\Omega(t') \rangle = 0$  se  $t \neq t'$ . Por fim, o fato de a força dissipativa atuar permanentemente no tempo indica que o mesmo ocorrerá com a força aleatória, ou seja, o termo  $\Omega(t)$  não poderá ser composto por impulsos extremamente intensos e raros, mas sim por um grande número de pequenas contribuições independentes. Devido ao teorema do limite central<sup>3</sup>, o efeito de todas essas contribuições sobre a partícula será definido por uma distribuição normal, também conhecida como distribuição Gaussiana. Se uma variável aleatória  $\mathcal{X}$  é distribuída de acordo com uma distribuição normal com média  $\mathcal{M}$  e variância

<sup>2</sup> Na Eq. (4.1) os pontos correspondem às derivadas temporais e a linha corresponde à derivada espacial.

<sup>3</sup> De forma simplificada, o teorema do limite central afirma que, para uma amostra de tamanho  $N$  na qual as variáveis aleatórias  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$  são independentes e igualmente distribuídas com média zero e variância finita, a soma  $N^{-1/2}[\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_N]$  converge para uma distribuição normal quando  $N \rightarrow \infty$ .

$\sigma^2 > 0$ , sua função densidade de probabilidade é descrita por

$$P(\mathcal{X}; \mathcal{M}, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{X} - \mathcal{M}}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (4.2)$$

O caso no qual  $\mathcal{M} = 0$  e  $\sigma^2 = 1$  é conhecido como distribuição normal padrão [109].

#### 4.1.2 O teorema flutuação-dissipação

Na equação de Langevin (4.1), tanto a força aleatória como a força dissipativa independem da posição da partícula em qualquer instante de tempo  $t$ . Sendo assim, o ambiente no qual a partícula está inserida pode ser interpretado como um grande banho térmico cujas propriedades não são alteradas pelo comportamento da partícula. O objetivo desta subseção é analisar algumas propriedades estatísticas do ruído  $\Omega(t)$  e, uma vez que o potencial  $U(x, t)$  não altera qualquer uma dessas propriedades, pode-se considerar  $U'(x, t) = 0$  na Eq. (4.1) [108]. Nesse caso, sendo  $v(t) = \dot{x}(t)$  a velocidade da partícula, a solução para a Eq. (4.1) é descrita pela expressão

$$v(t) = v(t_0)e^{-\tilde{\nu}(t-t_0)} + \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^t dt' e^{-\tilde{\nu}(t-t')} \Omega(t'), \quad (4.3)$$

na qual  $\tilde{\nu} = \nu/\mu$ . Como  $\langle \Omega(t) \rangle = 0$ , a média da velocidade  $v(t)$  da partícula é dada por

$$\langle v(t) \rangle = v(t_0)e^{-\tilde{\nu}(t-t_0)}. \quad (4.4)$$

A partir do desvio da média  $\Delta v = v(t) - \langle v(t) \rangle$  para a velocidade, considerando que  $\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v(t)^2 \rangle - \langle v(t) \rangle^2$  e supondo que a distribuição da velocidade no equilíbrio seja uma distribuição de Maxwell-Boltzmann, tal que  $\langle v(t) \rangle = 0$ , pode-se escrever a velocidade quadrática média como

$$\langle v(t)^2 \rangle = \frac{1}{\mu^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' e^{-\tilde{\nu}(2t-t'-t'')} \langle \Omega(t') \Omega(t'') \rangle, \quad (4.5)$$

na qual definiu-se o limite inferior  $t_0 = -\infty$ . Devido às propriedades do ruído  $\Omega(t)$  definidas previamente, dentre as quais estabeleceu-se que  $\langle \Omega(t) \Omega(t') \rangle = 0$  para  $t \neq t'$ , o integrando da segunda integral será diferente de zero somente quando  $t' = t''$ . Dessa forma, definindo o limite superior da segunda integral como  $t = +\infty$ , obtém-se

$$\langle v(t)^2 \rangle = \frac{1}{\mu^2} \int_{-\infty}^t dt' e^{-2\tilde{\nu}(t-t')} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \langle \Omega(t') \Omega(t'') \rangle. \quad (4.6)$$

Uma vez que as propriedades estatísticas do ruído  $\Omega(t)$  são invariantes sobre translações temporais, a segunda integral da Eq. (4.6) pode ser reescrita da seguinte forma [108]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle \Omega(t) \Omega(t') \rangle = 2\nu\mu \langle v(t)^2 \rangle, \quad (4.7)$$

sendo essa expressão válida para todo tempo  $t$ . Considerando que a partícula encontra-se em equilíbrio térmico com sua vizinhança a determinada temperatura  $T$ , torna-se válido o teorema da equipartição da energia

$$\frac{1}{2}\mu\langle v(t)^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T, \quad (4.8)$$

sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann. Substituindo a Eq. (4.8) na Eq. (4.7) e considerando que  $\langle \Omega(t)\Omega(t') \rangle$  deve ser zero quando  $t \neq t'$ , obtém-se o teorema flutuação-dissipação

$$\langle \Omega(t)\Omega(t') \rangle = 2\nu k_B T \delta(t - t'), \quad (4.9)$$

formulado originalmente por Harry Nyquist, em 1928, ao considerar a força eletromotriz em condutores gerada por agitações térmicas [110]. Na Eq. (4.9),  $2\nu k_B T$  é a intensidade do ruído e  $\delta(t)$  é a função Delta de Dirac [108].

Os resultados obtidos para a velocidade média e para a velocidade quadrática média podem ser utilizados para estudar o comportamento da variável  $x(t)$ , que descreve o deslocamento da partícula Browniana. É possível demonstrar que, quando  $U(x, t) = 0$ , o deslocamento quadrático médio da partícula é dado por

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2\mathcal{Q}t,$$

sendo  $\mathcal{Q} = k_B T / \nu$  o coeficiente de difusão, determinado pioneiramente por Albert Einstein em seu trabalho sobre o movimento Browniano [41]. Esse resultado mostra inicialmente que, para tempos longos, a difusão não depende da massa da partícula. Ademais, o desvio padrão é proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido, sendo essa uma característica de processos estocásticos.

A equação de Langevin foi o primeiro exemplo de equação diferencial estocástica utilizada na descrição de um processo físico real. Cada uma das soluções dessa equação representa uma trajetória aleatória diferente e, usando apenas as propriedades básicas do ruído  $\Omega(t)$ , é possível obter resultados importantes sobre o movimento da partícula Browniana. As ideias originais de Einstein ainda são bastante modernas e podem ser aplicadas às mais diversas áreas da ciência, como na física da matéria condensada [111], na investigação de sistemas granulares [112, 113] e na difusão de sólitons em substratos [114], para citar apenas alguns exemplos.

## 4.2 O mapa catraca

O Mapa Catraca (MC) é um modelo discreto que simula o transporte direcionado de matéria ocasionado pelo efeito conhecido como efeito catraca (*ratchet effect*). A importância desse modelo consiste na presença de correntes de partículas diferentes de zero, para determinadas combinações paramétricas, mesmo quando as médias espacial e temporal das forças aplicadas são nulas, sendo que o direcionamento do transporte ocorre através da quebra

da simetria espaço-temporal [8, 36, 108]. Recentemente, a relação entre o valor da corrente de partículas gerada por mapas catraca e a presença de EIPs no espaço de parâmetros foi estabelecida para os casos determinístico [35, 84], estocástico [45] e quântico [47].

Um dos primeiros dispositivos tipo catraca foi introduzido por Richard Feynman, que imaginou um motor capaz de gerar movimento macroscópico a partir de forças de origem microscópica e que supostamente violaria a segunda lei da termodinâmica [115]. As ideias de Feynman sobre o efeito catraca foram adaptadas ao contexto da biologia e aplicadas ao estudo do transporte de proteínas no interior de células por meio dos motores moleculares, moléculas que utilizam-se de reações químicas e de um ambiente em desequilíbrio térmico para gerar transporte direcionado [116–119]. Devido à grande influência das flutuações térmicas do ambiente intracelular sobre o movimento das macromoléculas, a dinâmica descrita por uma proteína pode ser considerada igual à dinâmica de uma partícula Browniana superamortecida, na qual o termo inercial  $\ddot{x}$  é negligenciado e as forças atuantes geram velocidades em vez de acelerações [108]. Com o avanço nas pesquisas sobre esse tipo de sistema, uma fenomenologia completamente nova passou a ser considerada na qual as flutuações térmicas tornaram-se desnecessárias para gerar movimento direcionado, sendo possível obter um sistema catraca puramente determinístico. Para isso, os requisitos indispensáveis para gerar o efeito catraca são: a existência de um termo de inércia  $\ddot{x}$ , dissipação e um potencial periódico capaz de quebrar a simetria espacial do sistema [38, 108, 120, 121]. Com a inclusão do termo inercial no modelo matemático que simula o efeito catraca, o número de equações diferenciais de primeira ordem aumenta e é possível encontrar uma dinâmica caótica para a partícula, mesmo que seu movimento seja restrito a uma única direção [120].

O transporte direcionado de matéria através da quebra da simetria espacial foi verificado experimentalmente em diferentes contextos, como por exemplo no movimento autopropelido de uma gota líquida sobre uma superfície sólida aquecida cuja base tem ranhuras na forma de dentes assimétricos [122, 123], como mostra a Fig. 4.1(a). Quando a gota entra em contato com a superfície devidamente aquecida, sua parte inferior evapora e cria uma camada isolante que impede a evaporação de toda a gota, sendo esse fenômeno conhecido como efeito Leidenfrost. Essa camada de vapor permite que a gota levite e as ranhuras assimétricas da superfície retificam o fluxo de vapor gerado pela diferença de temperatura. Com isso, uma força resultante não nula começa a atuar sobre a gota colocando-a em movimento. Esse fenômeno pode auxiliar o desenvolvimento de novas tecnologias de resfriamento de microprocessadores de alto desempenho, por exemplo [122]. Outra aplicação importante do efeito catraca consiste na separação de micropartículas de diferentes tamanhos a partir de um dispositivo constituído por um grande número de poros que encontram-se dispostos paralelamente. As paredes internas desses poros também são formadas por ranhuras assimétricas, como ilustra a Fig. 4.1(b). Ao bombear periodicamente através desses microcanais um líquido que contém duas espécies diferentes de partículas, a direção da corrente dessas partículas dependerá sensivelmente do tamanho delas, de forma

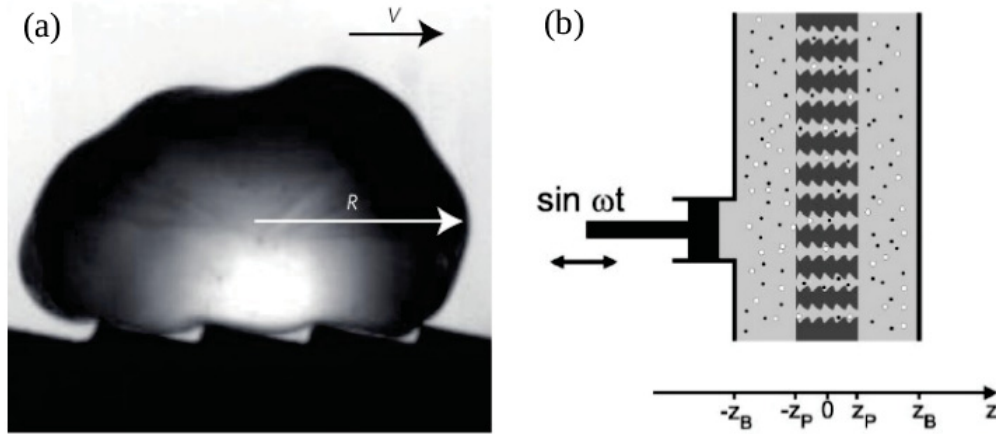


Figura 4.1 – A figura (a), retirada da Ref. [123], mostra uma gota de etanol que se desloca sobre uma chapa de latão cuja temperatura é de  $350^\circ\text{C}$ , muito acima do ponto de ebulição do etanol, de forma que a gota não evapora completamente devido ao efeito Leidenfrost. A superfície da chapa contém ranhuras em formato de dentes assimétricos com  $1,5\text{ mm}$  de comprimento e altura de  $0,3\text{ mm}$ . A seta preta indica a direção na qual a gota se desloca, e o raio equatorial da gota é  $R = 3\text{ mm}$ . Após um curto regime transiente de aceleração, a gota passa a se mover com velocidade constante de  $14\text{ cm/s}$ . A figura (b), retirada da Ref. [124], mostra a ilustração de um dispositivo formado por vários poros cujas paredes internas apresentam ranhuras assimétricas que possibilitam a separação de micropartículas de diferentes tamanhos. No dispositivo real, o comprimento longitudinal  $2z_p$  dos poros é da ordem de  $100 - 200\ \mu\text{m}$ , e a distância  $z_b - z_p$  de cada base pode atingir de  $20$  a  $200\ \mu\text{m}$ . A quantidade de poros do dispositivo varia entre  $1,5 \times 10^6$  e  $6 \times 10^6$ .

que cada espécie se concentrará em um lado diferente da base do dispositivo [124].

Considerando o movimento da partícula Browniana descrito pela Eq. (4.1), percebe-se que essa equação tem todos os requisitos necessários para gerar transporte: o termo de inércia, a dissipação e também as flutuações térmicas  $\Omega(t)$ . Caso o interesse seja estudar um sistema catraca determinístico, no qual desconsidera-se o ruído  $\Omega(t)$ , uma corrente de partículas pode ser gerada por um potencial espacialmente assimétrico e periódico no espaço e no tempo. A periodicidade é necessária para que o movimento das partículas não seja gerado por uma diferença líquida no potencial  $U(x, t)$  que dá origem à força. O MC, modelo determinístico que será utilizado nesta seção, pode ser obtido a partir da Eq. (4.1) adotando o procedimento matemático detalhado no Apêndice B. Esse sistema descreve a dinâmica de uma partícula que se move na direção  $x$ , com  $x \in (-\infty, +\infty)$ , e é expresso matematicamente por

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \gamma p_n + \mathcal{K}[\text{sen}(x_n) + 0,5 \text{sen}(2x_n + \phi)], \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo  $p_n$  o momento da partícula,  $\mathcal{K}$  o parâmetro de não linearidade e  $\gamma \in [0, 1]$  a dissipação [125]. O limite  $\gamma = 0$  corresponde ao caso superamortecido e, considerando que para a Eq. (4.10) obtém-se  $|\text{Det } \mathbb{J}| = \gamma$ , o limite conservativo corresponde a  $\gamma = 1$ . A simetria espacial é quebrada quando  $\phi \neq l\pi$ , sendo  $l$  um número inteiro. No limite conservativo, o mapa (4.10)

não produz corrente de partículas pois o sistema não é temporalmente irreversível [125].

A multiplicação de EIPs é de grande relevância no caso do MC pois possibilita que mais combinações paramétricas produzam transporte direcionado de partículas. Com esse objetivo, propõe-se que o MC (4.10) seja modificado por um parâmetro  $F_j$  de período  $k$ , dando origem ao Mapa Catraca Modificado (MCM) descrito por

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \gamma p_n + \mathcal{K}[\text{sen}(x_n) + 0,5 \text{sen}(2x_n + \phi)] + F_j, \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

É importante que o parâmetro externo respeite a condição  $\langle F_j \rangle = 0$  após  $k$  iterações do MCM (4.11). Nesse caso, o termo  $F_j$  adicionado ao momento da partícula pode ser interpretado como uma perturbação externa periódica que não tem direção preferencial e, conseqüentemente, não influencia o cálculo da corrente de partículas. Para o caso  $k = 2$ , considerando  $F_1 = -F$  e  $F_2 = +F$ , obter-se-ão dois MCMs cuja composição dá origem ao mapa composto  $\mathcal{R}^{(k=2)}$ , descrito por

$$\mathcal{R}^{(k=2)} \begin{cases} p_{n+2}^{(c)} = \gamma p_{n+1} + \mathcal{K}[\text{sen}(x_{n+1}) + 0,5 \text{sen}(2x_{n+1} + \phi)] + F, \\ x_{n+2}^{(c)} = x_{n+1} + p_{n+2}^{(c)}, \end{cases} \quad (4.12)$$

com  $p_{n+1} = \gamma p_n^{(c)} + \mathcal{K}[\text{sen}(x_n^{(c)}) + 0,5 \text{sen}(2x_n^{(c)} + \phi)] - F$  e  $x_{n+1} = x_n^{(c)} + p_{n+1}$ . Nota-se que a estrutura matemática do mapa  $\mathcal{R}^{(k)}$  é significativamente mais complexa que a dos outros modelos discretos analisados nesta tese e, por esse motivo, este capítulo é composto somente por resultados numéricos. Além disso, apenas os casos  $k = 2$  e  $k = 3$  foram considerados.

Para investigar os efeitos da perturbação  $F_j$ , foi construído o espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$  do mapa composto  $\mathcal{R}^{(k)}$  para  $k = 2$  e  $k = 3$ , utilizando  $\phi = \pi/2$  e diferentes valores de  $F$ , como mostra a Fig. 4.2. Nesses diagramas, para cada combinação paramétrica contida na grade formada por  $10^3 \times 10^3$  pontos equidistantes, o período da trajetória iniciada em  $(x_0^{(c)}, p_0^{(c)}) = (0,1, 0,1)$  foi contabilizado após um tempo transiente de  $5 \times 10^6$  iterações. Assim como nos capítulos anteriores, todas as iterações intermediárias foram consideradas. A Fig. 4.2(a) mostra o espaço de parâmetros obtido utilizando o mapa  $\mathcal{R}^{(k=2)}$  com  $F = 0$ . Como as variáveis intermediárias  $x_n$  e  $p_n$  foram incluídas na contagem do período, esse resultado é idêntico àquele obtido para o MC (4.10), já publicado na Ref. [35]. Na Fig. 4.2(a) observa-se uma região caótica em preto e EIPs de períodos principais 1 (verde), 2 (azul) e 3 (ciano), conforme indica a paleta de cores. Ao considerar novamente o mapa  $\mathcal{R}^{(k=2)}$ , porém adotando uma intensidade  $F = 0,1$  para a perturbação externa, obtém-se o espaço de parâmetros apresentado na Fig. 4.2(b), que mostra a duplicação das EIPs de período principal 2. Por outro lado, regiões cujo período principal é ímpar não são duplicadas, mas têm sua periodicidade dobrada conforme a regra estabelecida no Capítulo 2. Observa-se que a EIP de período principal 3, representada na Fig. 4.2(a) pela cor ciano, é praticamente destruída pela perturbação externa, dando origem a uma pequena região vermelha de período principal 6 na Fig. 4.2(b). A Fig. 4.2(c), obtida usando  $F = 0,2$ , mostra

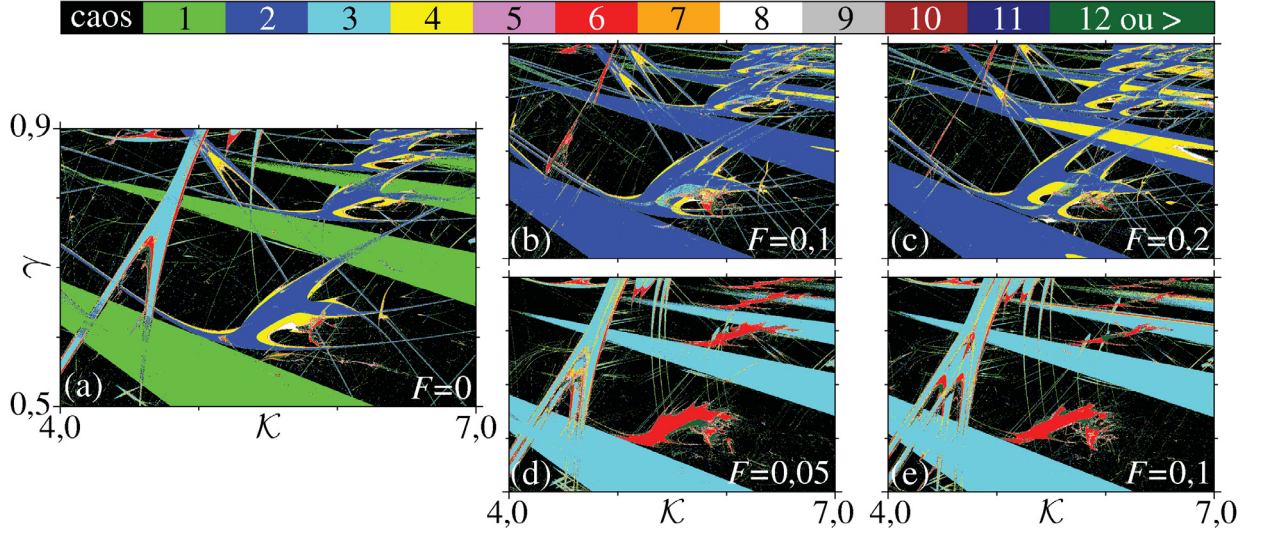


Figura 4.2 – Espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$  com as cores representando o período da órbita do mapa composto  $\mathcal{R}^{(k)}$ . Em (a), (b) e (c), a sequência de perturbações  $\{-F, +F, -F, +F, \dots\}$  de período  $k = 2$  foi utilizada com intensidades  $F = 0$ ,  $F = 0,1$  e  $F = 0,2$ , respectivamente. O caso  $F = 0$  corresponde ao MC (4.10), cujo espaço de parâmetros pode ser encontrado na Ref. [35]. As figuras (d) e (e) foram obtidas considerando uma perturbação de período  $k = 3$  cuja sequência é  $\{-F, 0, +F, \dots\}$ , utilizando  $F = 0,05$  e  $F = 0,1$ , respectivamente.

claramente que a intensidade  $F$  da perturbação externa controla a separação entre as EIPs idênticas geradas pela composição de MCMs.

Aumentando o período da perturbação  $F_j$  de  $k = 2$  para  $k = 3$ , usando a sequência  $\{-F, 0, +F, \dots\}$ , obtém-se o mapa composto  $\mathcal{R}^{(k=3)}$ . Nesse caso, apresentado nas Figs. 4.2(d) e 4.2(e) com intensidades  $F = 0,05$  e  $F = 0,1$ , respectivamente, somente as EIPs cujo período principal é múltiplo de três são triplicadas. Esse fato pode ser verificado na triplicação da EIP de período principal 3, preenchida pela cor ciano na Fig. 4.2(a). Esses resultados corroboram as regras introduzidas nos capítulos anteriores: sendo  $m$  o período principal da EIP, a multiplicação desses domínios no espaço de parâmetros ocorre quando  $\eta = m/k \in \mathbb{Z}$  e, quando essa condição não é satisfeita, as órbitas geradas pelo mapa composto passarão a ter período  $m' = km$ .

### 4.3 O mapa catraca estocástico

Um modelo mais real para o mapeamento do efeito catraca pode ser obtido ao considerar as flutuações térmicas do ambiente no qual a partícula está inserida. A fim de simular a influência dessas flutuações, será adicionado ao modelo do MC um termo estocástico conforme proposto na Ref. [44], tal que o ruído é descrito por  $\sqrt{2(1-\gamma)k_B T}\psi_n$ , com  $k_B = 1$  sendo a constante de Boltzmann e  $T$  a intensidade da temperatura. A variável  $\psi_n$  representa um ruído normal, ou seja,  $\langle \psi_n \rangle = 0$  e  $\langle \psi_n \psi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$ . Dessa forma, obtém-se

o modelo denominado Mapa Catraca Estocástico (MCE), cuja expressão matemática é:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \gamma p_n + \mathcal{K}[\text{sen}(x_n) + 0,5 \text{sen}(2x_n + \phi)] + \sqrt{2(1-\gamma)k_B T} \psi_n, \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para investigar os efeitos do ruído no espaço de parâmetros do MCE, utilizou-se o maior EL, a fim de obter uma medida do grau de estocasticidade das trajetórias geradas pelas diferentes combinações paramétricas. O método numérico adotado para determinar o espectro de Lyapunov de um modelo com mais de uma dimensão foi introduzido na Seção 3.2. No caso de sistemas perturbados aleatoriamente, a obtenção dos ELs ocorre por meio de uma técnica similar, sendo necessário apenas substituir a trajetória determinística  $\mathbf{r}_n$  pela trajetória perturbada  $\mathbf{r}_n^{(p)}$  [126, 127]. Essa substituição é válida uma vez que, para o MCE (4.13), o termo estocástico independe das variáveis  $x_n$  e  $p_n$ , de forma que a dinâmica do espaço tangente, cuja evolução temporal é determinada pela Eq. (3.17), não é afetada pelo ruído. Para calcular o maior EL  $\lambda_1$  para cada um dos  $10^3 \times 10^3$  pontos  $(\mathcal{K}, \gamma)$  dos diagramas apresentados na Fig. 4.3, foi considerada uma única trajetória de  $5 \times 10^6$  iterações cuja condição inicial é  $(x_0, p_0) = (0, 1, 0, 1)$ . O tempo transiente utilizado nessas simulações foi  $n_{\text{trans}} = 10^6$ .

A Fig. 4.3(a) apresenta o espaço de parâmetros obtido utilizando o MCE com  $T = 0$ . Nesse caso, a Eq. (4.13) torna-se idêntica à Eq. (4.10), que descreve a dinâmica

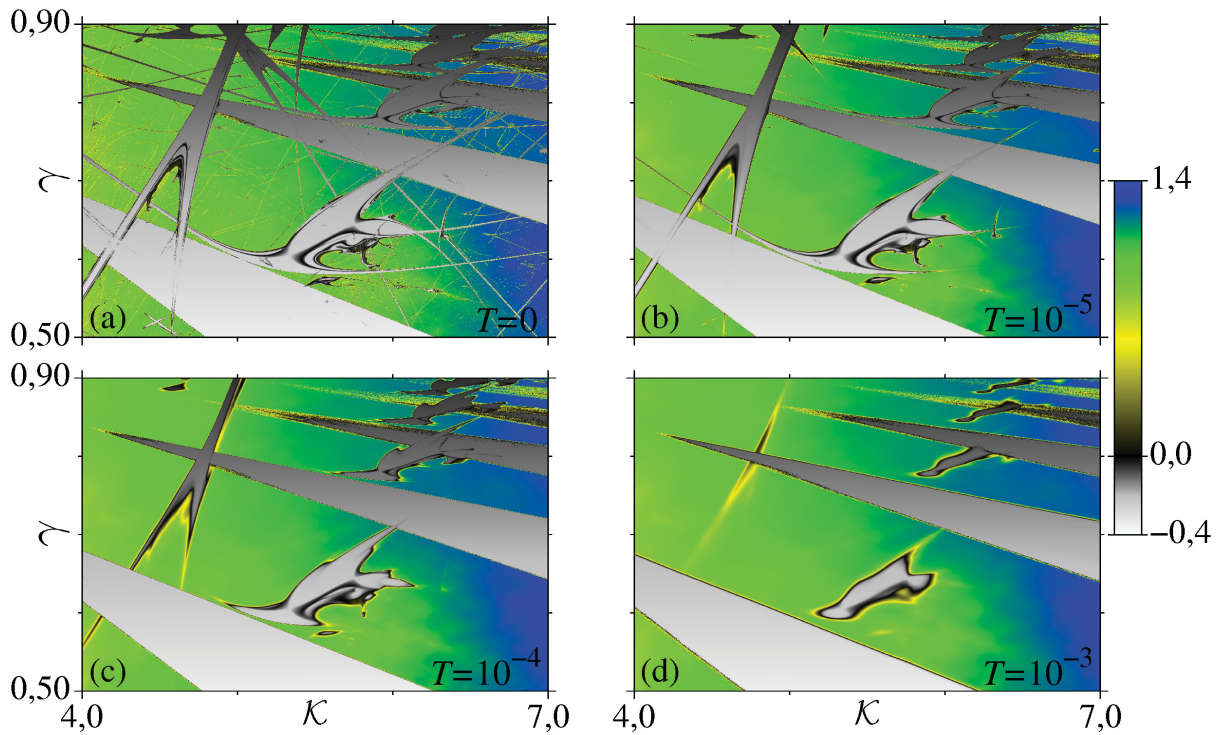


Figura 4.3 – Espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$  do MCE (4.13) com as cores indicando o valor do maior EL, calculado para uma única trajetória de  $5 \times 10^6$  iterações após descartar um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 10^6$ , sendo a condição inicial  $(x_0, p_0) = (0, 1, 0, 1)$ . A intensidade da temperatura utilizada em cada caso encontra-se indicada na figura.



do MC. Como esperado, para combinações paramétricas localizadas no interior das EIPs obtém-se  $\lambda_1 \leq 0$ , valores representados pelas cores branca, cinza e preta. Fora das EIPs, como visto na Fig. 4.2(a), a dinâmica caótica se faz presente e conseqüentemente o valor do maior EL torna-se positivo, sendo indicado na Fig. 4.3 pelas cores amarela, verde e azul. Quando  $T \neq 0$ , caso representado nas Figs. 4.3(b), 4.3(c) e 4.3(d), obtidas utilizando  $T = 10^{-5}$ ,  $T = 10^{-4}$  e  $T = 10^{-3}$ , nessa ordem, nota-se que algumas regiões que apresentavam movimento periódico são destruídas, aumentando o domínio caótico do espaço de parâmetros. As primeiras regiões de regularidade que tornam-se caóticas estão localizadas nas antenas das EIPs, de forma que tais combinações paramétricas passam a ser preenchidas pelas cores amarela e verde-claro quando o ruído é considerado. Esses domínios, no entanto, apresentam valores de  $\lambda_1$  menores do que seus entornos originalmente caóticos, os quais são preenchidos pelas cores verde-escuro e azul. Para  $T = 10^{-3}$ , caso exibido na Fig. 4.3(d), grande parte das EIPs é destruída, e valores positivos de  $\lambda_1$  predominam no espaço de parâmetros.

Para compreender como a presença do ruído altera o valor do maior EL, deve-se considerar não apenas o estado assintótico do sistema, mas também os estados transientes que ocorrem devido à existência de conjuntos invariantes não atrativos [128]. Um exemplo importante desses conjuntos é a sela caótica, constituída pela intersecção de uma variedade estável com uma instável. Uma trajetória iniciada nas proximidades de uma sela caótica exibe movimento caótico por um tempo finito antes de ser repelida e atingir seu estado assintótico. Nesse caso, diz-se que o caos é transiente [129]. No entanto, a presença de um termo estocástico pode modificar o tempo de permanência da trajetória na vizinhança de uma sela caótica, antecipando ou adiando o fim do regime transiente. Além disso, o ruído tem a capacidade de transformar domínios estáveis (atratores) em metaestáveis pois, de tempos em tempos, retira a órbita do atrator conduzindo-a novamente a um estado transiente [57]. Sendo assim, o termo estocástico afeta principalmente regiões do espaço de parâmetros cujo estado assintótico é regular, pois a órbita ao ser expelida do atrator pelo ruído apresentará um comportamento caótico por determinado intervalo de tempo. Portanto, o aumento do valor de  $\lambda_1$  ocorre devido à possibilidade da mesma trajetória, quando perturbada, experimentar diferentes tipos de dinâmica.

A Fig. 4.3 também mostra que as EIPs de período menor são mais resistentes aos efeitos do ruído, sendo as EIPs de período principal 1 menos afetadas que as EIPs de período principal 2, por exemplo. Combinações paramétricas que dão origem a trajetórias caóticas, por sua vez, são mais robustas, não apresentando alterações significativas no valor do maior EL. Para esses domínios, considerando pequenas intensidades do ruído, verifica-se apenas a destruição do padrão fractal do atrator caótico em pequena escala [130].

### 4.3.1 Otimização de regiões com correntes não nulas

A quantidade de maior interesse em sistemas catraca, no que se refere às propriedades de transporte, é a corrente de partículas  $\mathcal{J}$  definida através de uma média dupla do momento

$p_n$ , tal que

$$\mathcal{J} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p_n^{(i)} \right], \quad (4.14)$$

sendo  $M$  o número de condições iniciais e  $N$  o número total de iterações. A relação entre o valor de  $\mathcal{J}$  e a ocorrência de EIPs no espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$  do MC (4.10) foi estudada na Ref. [35], na qual observou-se que altas correntes são encontradas nas EIPs distribuídas ao longo de direções preferenciais do espaço de parâmetros. No caso estocástico, devido à destruição de uma porção cada vez maior desses domínios à medida que o valor de  $T$  aumenta, ocorre a diminuição das regiões que disponibilizam valores ótimos de  $\mathcal{J}$  [45]. Sendo assim, a proposta desta subseção é aplicar o método de multiplicação de EIPs ao MCE a fim de ampliar o número de combinações paramétricas que geram correntes diferentes de zero e verificar a robustez desse procedimento sob efeitos do ruído. Para isso, foi adicionada a perturbação periódica  $F_j$  ao MCE (4.13) dando origem ao modelo denominado Mapa Catraca Estocástico Modificado (MCEM), expresso matematicamente por:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \gamma p_n + \mathcal{K}[\text{sen}(x_n) + 0,5 \text{sen}(2x_n + \phi)] + \sqrt{2(1-\gamma)k_B T} \psi_n + F_j, \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para verificar a relação entre a existência de EIPs e a ocorrência de transporte direcionado no espaço de parâmetros de um sistema catraca, foi considerado o mesmo intervalo das Figs. 4.2 e 4.3, porém calculando a corrente  $\mathcal{J}$  de cada combinação paramétrica  $(\mathcal{K}, \gamma)$  para o mapa resultante da composição de  $k = 2$  MCEMs. Os resultados dessa análise são apresentados na Fig. 4.4 para diferentes valores de  $F$  e também para diferentes intensidades da temperatura. Nessa figura, o espaço de parâmetros foi dividido em uma grade de  $800 \times 800$  pontos equidistantes e a corrente  $\mathcal{J}$  foi calculada a partir da Eq. (4.14) utilizando  $M = 10201$  condições iniciais igualmente distribuídas no intervalo  $[x_{0_{\min}}^{(c)}, x_{0_{\max}}^{(c)}] = [p_{0_{\min}}^{(c)}, p_{0_{\max}}^{(c)}] = [-2\pi, 2\pi]$ , a fim de que a escolha de  $x_0^{(c)}$  e  $p_0^{(c)}$  não estabeleça uma direção de movimento preferencial. Para cada trajetória, foi descartado um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 5 \times 10^4$  e a média temporal foi obtida sobre  $N = 5 \times 10^4$  iterações, considerando as intermediárias.

A composição de dois MCEMs, obtidos a partir da Eq. (4.15) utilizando  $F_1 = -F$  e  $F_2 = +F$ , dá origem ao mapa composto  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  que, diferentemente do mapa  $\mathcal{R}^{(k=2)}$  (4.12), leva em consideração os efeitos do ruído térmico intrínseco ao ambiente. A Fig. 4.4(a) mostra o espaço de parâmetros do mapa  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  com  $F = T = 0$ , e as cores indicam o valor da corrente  $\mathcal{J}$  conforme definido na paleta de cores. A cor preta representa correntes nulas e, ao comparar com as Figs. 4.2(a) e 4.3(a), observa-se que grande parte das combinações paramétricas com essa cor estão relacionadas ao movimento caótico. As cores verde e branca representam correntes positivas e as cores vermelha e amarela representam correntes negativas. Comparando novamente a Fig. 4.4(a) com a Fig. 4.2(a), observa-se que os domínios que geram valores não nulos de  $\mathcal{J}$  estão localizados no interior das EIPs. Na Fig.

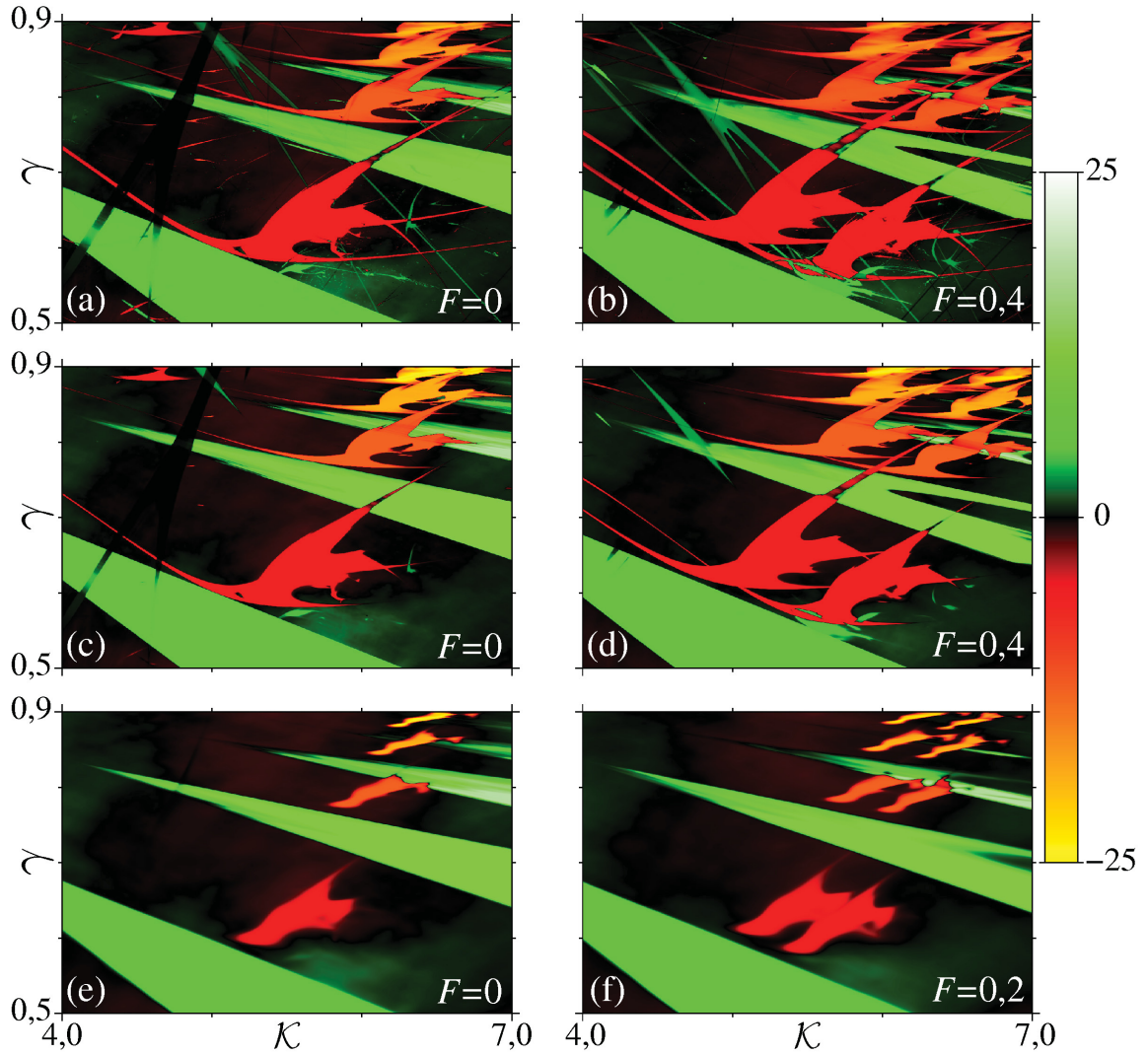


Figura 4.4 – Espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$  do mapa composto  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  com as cores indicando o valor da corrente de partículas  $\mathcal{J}$  calculada sobre  $M = 10201$  condições iniciais uniformemente distribuídas e  $N = 5 \times 10^4$  iterações após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 5 \times 10^4$ . As figuras (a) e (b) mostram os resultados para  $T = 0$ , (c) e (d) para  $T = 10^{-5}$  e (e) e (f) para  $T = 10^{-3}$ . A intensidade da perturbação externa que foi utilizada em cada caso encontra-se indicada na figura. Tais valores de  $F$  foram selecionados a fim de maximizar a área ocupada pelas EIPs de período principal 2, conforme será discutido na Fig. 4.6.

4.4(a) nota-se que, ao longo da direção preferencial na qual as EIPs de períodos principais 1 e 2 se organizam, no sentido de crescimento dos parâmetros  $\mathcal{K}$  e  $\gamma$ , o valor absoluto  $|\mathcal{J}|$  da corrente total aumenta em  $2\pi$  para combinações paramétricas localizadas no interior das EIPs de mesma periodicidade. Por esse motivo, a EIP de período principal 1 tende a alterar sua cor de verde para branco e a EIP de período principal 2, por sua vez, passa de vermelho para amarelo [45, 128]. Na Fig. 4.4(b) é apresentado o caso com  $F = 0,4$ , ainda para temperatura nula  $T = 0$ . Como esperado, ocorre a duplicação das EIPs de período principal 2, uma vez que trata-se da composição de  $k = 2$  MCEMs. Com essa duplicação, obtém-se um aumento significativo da área do espaço de parâmetros na qual encontram-se as correntes negativas.

A Fig. 4.4(c) mostra o caso  $T = 10^{-5}$ , utilizando  $F = 0$ . Nessa figura observa-se que, ao considerar os efeitos do ruído térmico sobre a dinâmica do sistema, a área do espaço de parâmetros que contribui com valores não nulos de corrente diminui. Como verificado na Fig. 4.3(b), que mostra o valor do maior EL para o MCE com  $T = 10^{-5}$ , a destruição das estruturas regulares inicia-se pelas combinações paramétricas localizadas nas antenas das EIPs, de forma que tais regiões deixam de gerar valores ótimos de corrente. Entretanto, considerando o caso  $F \neq 0$ , apresentado na Fig. 4.4(d) para  $F = 0,4$ , é possível obter um aumento considerável das regiões do espaço de parâmetros que dispõem correntes negativas (regiões vermelhas e amarelas), associadas às EIPs de periodicidade  $m = 2$  do caso determinístico. Por outro lado, as EIPs de período principal 1 que apresentam correntes positivas (regiões verdes e brancas) tendem a ser destruídas com o aumento da intensidade  $F$  da perturbação, assim como a EIP de período principal 3, que não apresenta valores significativos de corrente.

O caso com temperatura  $T = 10^{-3}$  e  $F = 0$ , apresentado na Fig. 4.4(e), mostra que mesmo considerando altas intensidades de ruído as regiões mais internas das EIPs continuam gerando correntes diferentes de zero, sendo tais regiões as únicas que apresentam movimento regular na Fig. 4.3(d), obtida com mesmo valor de  $T$ . Nota-se também que, elevando a temperatura de  $T = 10^{-5}$  para  $T = 10^{-3}$ , a quantidade de combinações paramétricas que geram correntes nulas aumenta consideravelmente, mostrando que as flutuações térmicas do ambiente, quando muito intensas, podem alterar as características determinísticas do transporte. A Fig. 4.4(f) exhibe os resultados obtidos utilizando  $F = 0,2$ , mantendo a temperatura  $T = 10^{-3}$ . Devido à diminuição das estruturas regulares, essa intensidade da perturbação externa é suficiente para separar as EIPs de período principal 2 e aumentar de forma significativa as regiões do espaço de parâmetros com correntes negativas.

Para quantificar a eficiência do método de proliferação de EIPs na presença da temperatura, propõe-se analisar a área do espaço de parâmetros do mapa composto  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  que contém correntes negativas, comparando os casos  $F = 0$  e  $F \neq 0$ . Com esse objetivo, o mesmo intervalo paramétrico da Fig. 4.4 é exibido na Fig. 4.5, porém considerando apenas as combinações paramétricas  $(\mathcal{K}, \gamma)$  nas quais  $\mathcal{J} < -5$ , indicadas pelos pontos vermelhos. Dessa forma, a porcentagem da área do espaço de parâmetros ocupada por esses domínios, representada por  $A(\%)$ , é facilmente calculada através da razão entre o número de pontos vermelhos e o número total de pontos do espaço de parâmetros, a saber,  $6,4 \times 10^5$  pontos. As Figs. 4.5(a) e 4.5(b) mostram o caso  $T = 0$  com  $F = 0$  e  $F = 0,4$ , respectivamente. Para  $F = 0$ , as combinações paramétricas que resultam em correntes  $\mathcal{J} < -5$  correspondem à 10,9% do espaço de parâmetros e, para  $F = 0,4$ , esse mesmo domínio corresponde à 17,8%, gerando um aumento de 63,3%. Quando a temperatura  $T$  aumenta, o crescimento da região com  $\mathcal{J} < -5$  é ainda mais significativo. As Figs. 4.5(c) ( $F = 0$ ) e 4.5(d) ( $F = 0,4$ ) mostram os resultados para  $T = 10^{-5}$ . Com essa temperatura, a área considerada aumenta de 9,8% para 17,4%, o que significa um ganho de 77,5%. Por fim, o caso  $T = 10^{-3}$  é apresentado nas

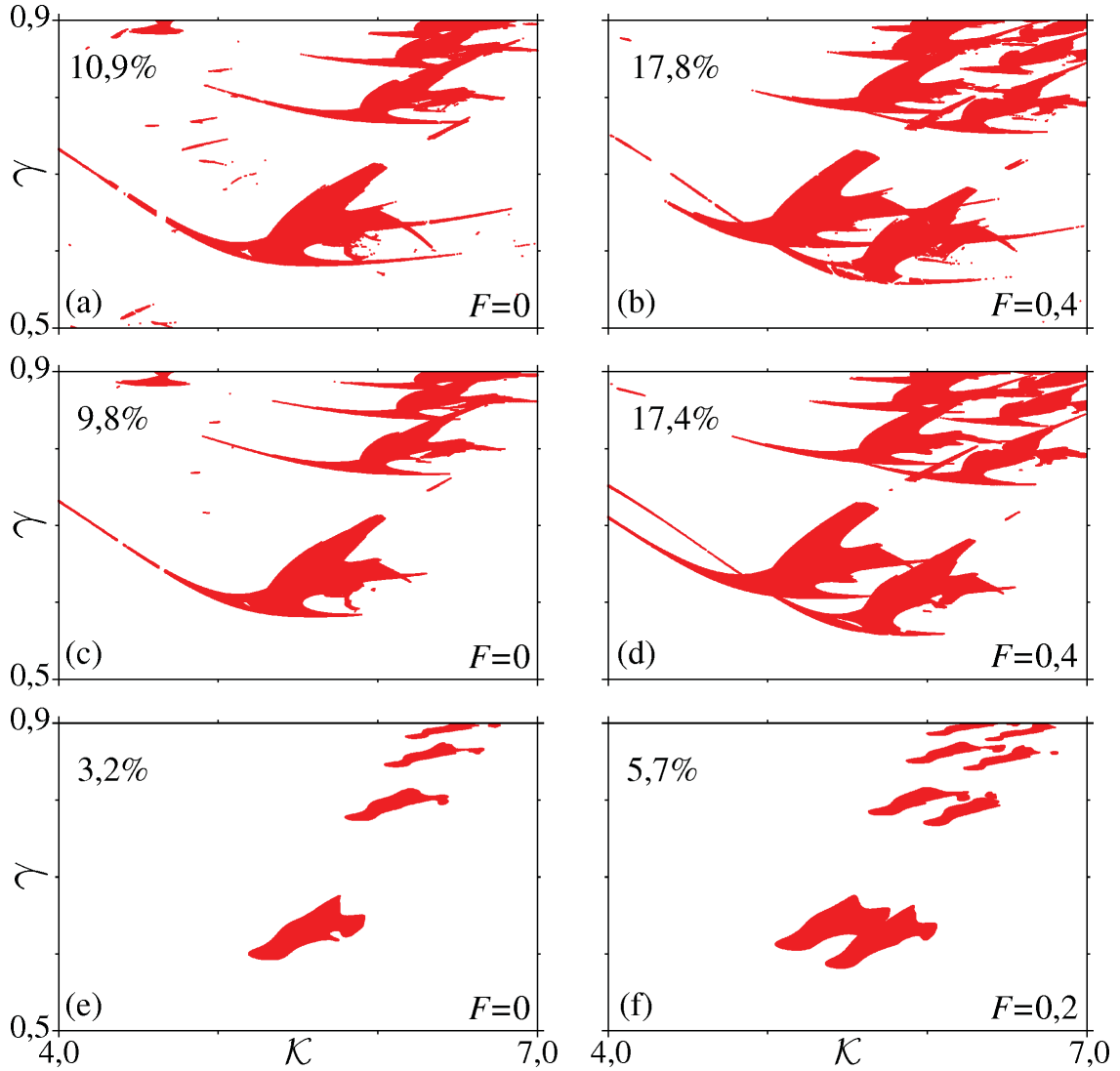


Figura 4.5 – Espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$  do mapa composto  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  no qual os pontos vermelhos indicam as combinações paramétricas que resultam em correntes  $\mathcal{J} < -5$ . As figuras (a) e (b) mostram os resultados para  $T = 0$ , (c) e (d) para  $T = 10^{-5}$  e (e) e (f) para  $T = 10^{-3}$ . Em cada figura encontram-se indicadas a intensidade  $F$  da perturbação externa utilizada e a porcentagem da área do espaço de parâmetros ocupada pelos pontos vermelhos.

Figs. 4.5(e) e 4.5(f) e o crescimento da área  $A(\%)$  é de 78,1%, aumentando de 3,2% ( $F = 0$ ) para 5,7% ( $F = 0,2$ ).

As intensidades  $F$  da perturbação externa utilizadas nas Figs. 4.4 e 4.5,  $F = 0,4$  para  $T = 0$  e  $T = 10^{-5}$  e  $F = 0,2$  para  $T = 10^{-3}$ , foram escolhidas pois são as que maximizam a região do espaço de parâmetros com correntes  $\mathcal{J} < -5$ . Esses valores ótimos, definidos por  $\tilde{F}^{(T)}$ , podem ser observados na Fig. 4.6, que mostra o comportamento da área  $A(\%)$  em função da intensidade  $F$  para as temperaturas  $T = 0$ ,  $T = 10^{-5}$  e  $T = 10^{-3}$ . As curvas da Fig. 4.6 apresentam um aumento gradativo de  $A(\%)$  à medida que  $F$  aumenta, até que a intensidade da perturbação externa alcança o valor  $\tilde{F}^{(T)}$ , que pode variar de acordo com a temperatura  $T$ . Após o valor ótimo  $\tilde{F}^{(T)}$ , ocorre um decaimento de  $A(\%)$

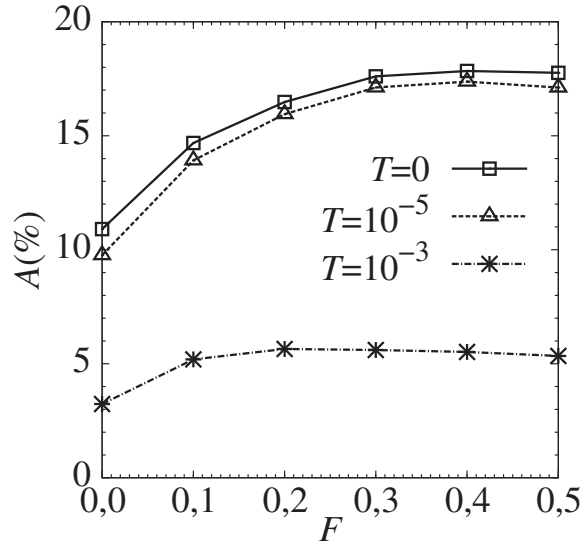


Figura 4.6 – Porcentagem da área do espaço de parâmetros que corresponde às combinações paramétricas  $(\mathcal{K}, \gamma)$  que geram correntes  $\mathcal{J} < -5$  em função da intensidade  $F$  da perturbação externa, considerando diferentes valores de temperatura  $T$ . A área  $A(\%)$  foi determinada através da razão entre o número de combinações paramétricas com  $\mathcal{J} < -5$ , representadas pelos pontos vermelhos da Fig. 4.5, e o número total de pontos do espaço de parâmetros, que corresponde a  $6,4 \times 10^5$  pontos.

uma vez que perturbações  $F_j$  muito intensas podem deslocar as EIPs para fora do intervalo considerado no espaço de parâmetros.

A partir das curvas da Fig. 4.6 também é possível determinar a diminuição da área do espaço de parâmetros ocupada por correntes  $\mathcal{J} < -5$  em virtude do aumento da temperatura. Considerando inicialmente o caso  $F = 0$  e  $T = 0$ , o valor de  $A(\%)$  é 10,9%. Aumentando a temperatura  $T$  e mantendo  $F = 0$ , devido à destruição parcial das EIPs, a área ocupada por regiões com correntes  $\mathcal{J} < -5$  corresponde à 9,8% do espaço de parâmetros quando  $T = 10^{-5}$  e 3,2% quando  $T = 10^{-3}$ , gerando uma redução de 10,1% no primeiro caso e de 70,6% no segundo caso. Esses resultados mostram a importância do desenvolvimento de técnicas capazes de superar os efeitos do ruído em sistemas realísticos, uma vez que tais efeitos não podem ser negligenciados. Para isso, o método de proliferação de EIPs a partir da adição de perturbações externas periódicas apresenta-se como uma alternativa bastante eficiente. Comparando o valor de  $A(\%)$  para  $F = 0$  e  $T = 0$  (10,9%) com o valor obtido quando considerados os valores ótimos de  $F$ , ou seja,  $\tilde{F}^{(10^{-5})} = 0,4$  e  $\tilde{F}^{(10^{-3})} = 0,2$ , que resultam em  $A(\%) = 17,4\%$  e  $A(\%) = 5,7\%$ , respectivamente, obtém-se um ganho de 59,6% mesmo quando  $T = 10^{-5}$ , e um decréscimo de apenas 47,7% quando  $T = 10^{-3}$ , atenuando a perda considerável de 70,6% que ocorre quando  $F = 0$ . Com isso, conclui-se que o método proposto é capaz de postergar a destruição de regiões periódicas causada pelo ruído. Entretanto, é necessária uma análise prévia da região que deseja-se aumentar e então deve-se escolher adequadamente o período  $k$  e a intensidade  $F$  da perturbação externa.

### 4.3.2 Ativação de corrente através da perturbação periódica

A Ref. [45] mostra que, em determinada região do espaço de parâmetros do MCE, a corrente de partículas é ativada ao invés de ser destruída quando a temperatura  $T$  aumenta. Essa mesma região foi estudada para o mapa composto  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  e a corrente  $\mathcal{J}$  para cada combinação paramétrica  $(\mathcal{K}, \gamma)$ , calculada a partir do mesmo número de condições iniciais  $M$  e de iterações  $N$  usados na Subseção 4.3.1, é apresentada na Fig. 4.7. Na Fig. 4.7(a), que mostra o caso  $T = F = 0$ , é possível identificar parte de uma EIP denominada não cuspidal [84, 131]. Esse tipo de domínio periódico, juntamente com as EIPs do tipo camarão e cuspidal, são padrões genéricos que aparecem no espaço de parâmetros de sistemas dissipativos do tipo catraca [35]. Com o aumento da temperatura para  $T = 10^{-5}$  e  $T = 10^{-3}$ , observa-se o fenômeno da ativação de corrente nas Figs. 4.7(b) e 4.7(c), respectivamente. Apesar da destruição de EIPs causada pelo ruído térmico, uma região com corrente negativa é gerada em torno do ponto  $\mathcal{K} = 2,5$ ,  $\gamma = 0,85$ , combinação paramétrica representada pelo círculo azul.

Além da ativação de corrente por meio do aumento da temperatura, também é possível gerar correntes não nulas nas vizinhanças da EIP não cuspidal considerando a perturbação periódica  $F_j$ , mesmo quando  $T = 0$ . Nas Figs. 4.7(d) e 4.7(e) o mapa  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  novamente foi considerado, porém usando  $F = 0,05$  e  $F = 0,1$ , respectivamente, com  $T = 0$  para ambos os casos. Comparando a Fig. 4.7(a) com as Figs. 4.7(d) e 4.7(e) é possível observar que, com o aumento da intensidade  $F$  da perturbação, uma grande região amarela surge em torno do círculo azul, indicando a ativação da corrente negativa nesse domínio do espaço de parâmetros. Entretanto, diferentemente do caso no qual a ativação ocorre por

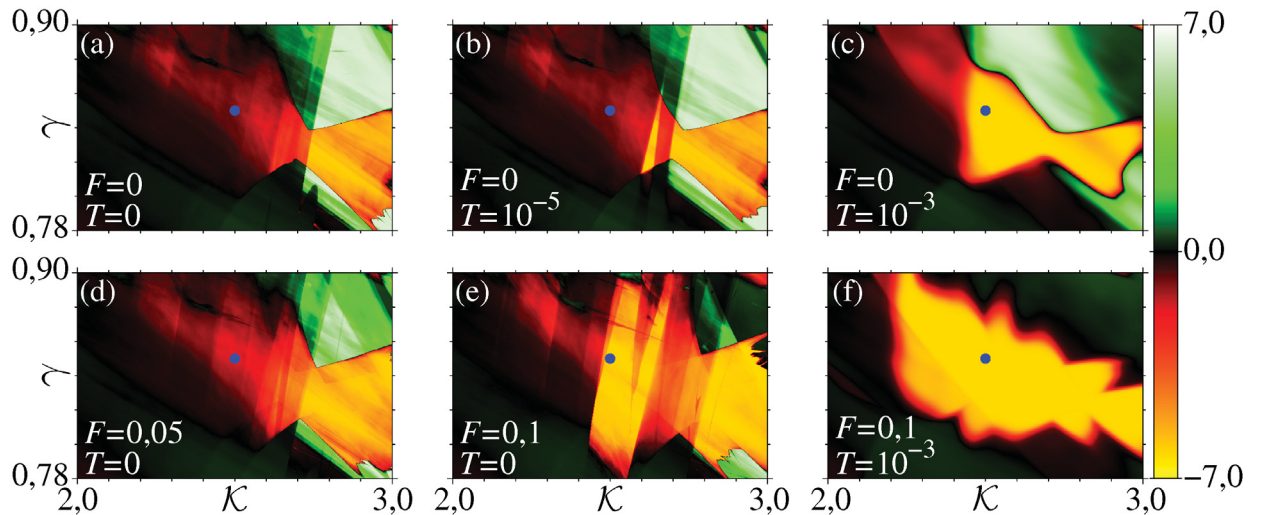


Figura 4.7 – Espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$  no qual as cores indicam o valor da corrente de partículas  $\mathcal{J}$  calculada para o mapa  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$ , considerando um intervalo específico em que ocorre o fenômeno da ativação da corrente negativa através do aumento da temperatura e da intensidade da perturbação externa periódica. Os valores de  $F$  e  $T$  utilizados estão indicados em cada figura. Em todos os casos, o círculo azul destaca o ponto  $(\mathcal{K}, \gamma) = (2,5, 0,85)$ .

meio do aumento da temperatura, a EIP não cuspidal não é destruída quando apenas a perturbação periódica é considerada. Além disso, mesmo se  $T \neq 0$ , ao adicionar o termo  $F_j$  torna-se possível ativar a corrente negativa em grande parte do espaço de parâmetros, como mostra a Fig. 4.7(f). Utilizando o mesmo método comparativo apresentado na Subseção 4.3.1, é possível quantificar a efetividade da ativação de corrente através da temperatura e através da perturbação  $F_j$ . Comparando a porcentagem da área do espaço de parâmetros ocupada por combinações paramétricas que geram correntes  $\mathcal{J} < -5$  nas Figs. 4.7(a) e 4.7(c), o aumento de  $A(\%)$  usando apenas a ativação térmica é de 109%. No entanto, adotando  $T = 10^{-3}$  e  $F = 0,1$ , caso apresentado na Fig. 4.7(f), o aumento da região com correntes  $\mathcal{J} < -5$  é de 359% quando comparado ao caso  $T = F = 0$ , apresentado na Fig. 4.7(a).

A ativação de corrente por meio do aumento da temperatura ou da intensidade da perturbação externa periódica pode ser compreendida analisando o diagrama de bifurcação do mapa  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  que considera o comportamento assintótico das variáveis  $p_n$  e  $p_n^{(c)}$  em função do parâmetro  $\mathcal{K}$ , como mostra a Fig. 4.8. Para construir esse diagrama, o parâmetro  $\gamma = 0,85$

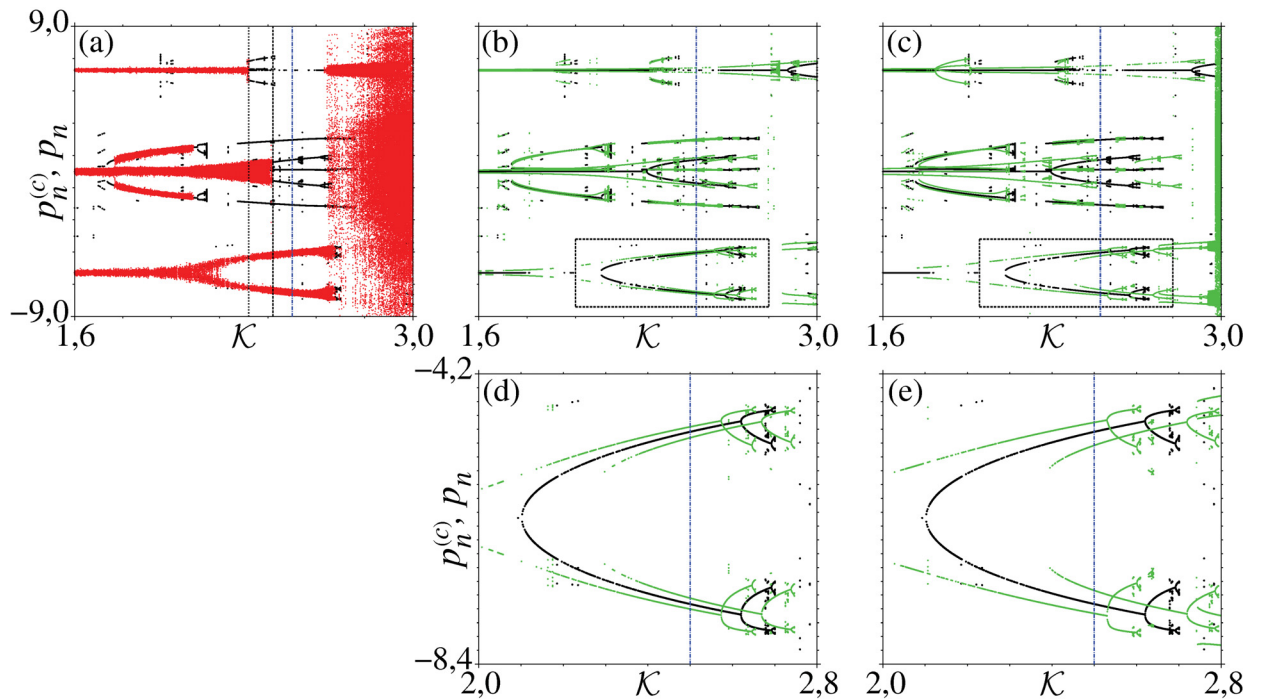


Figura 4.8 – Diagrama de bifurcação do mapa  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  que mostra o comportamento assintótico das variáveis  $p_n$  e  $p_n^{(c)}$  em função do parâmetro  $\mathcal{K}$ , com  $\gamma = 0,85$ . Em todas as figuras, as curvas pretas representam o caso  $F = T = 0$  e a linha vertical azul indica o parâmetro  $\mathcal{K} = 2,5$ . Na figura (a), os pontos vermelhos definem o diagrama obtido com  $T = 10^{-3}$  e  $F = 0$ , e as linhas verticais pretas pontilhada ( $\mathcal{K} = 2,32$ ) e tracejada ( $\mathcal{K} = 2,42$ ) indicam, de forma aproximada, os valores de  $\mathcal{K}$  nos quais ocorre a destruição dos atratores localizados em  $p = +2\pi$  e  $p = 0$ . As curvas verdes em (b) e (c) representam o diagrama de bifurcação do caso com temperatura nula obtido com  $F = 0,05$  e  $F = 0,1$ , respectivamente. As figuras (d) e (e) mostram magnificações das regiões delimitadas pelos retângulos pontilhados pretos das figuras (b) e (c), nessa ordem.



foi fixado e o intervalo  $[\mathcal{K}_{\min}, \mathcal{K}_{\max}] = [1,6, 3,0]$ , no qual encontra-se a região que apresenta ativação de corrente, foi dividido em  $10^3$  partes iguais. Para cada combinação paramétrica  $(\mathcal{K}, \gamma = 0,85)$  foram selecionadas 25 condições iniciais que encontram-se uniformemente distribuídas no intervalo  $[x_{0_{\min}}^{(c)}, x_{0_{\max}}^{(c)}] = [p_{0_{\min}}^{(c)}, p_{0_{\max}}^{(c)}] = [-2\pi, 2\pi]$ . Após um tempo transiente  $n_{\text{trans}} = 5 \times 10^6$ , as curvas do diagrama foram obtidas considerando 20 iterações de cada trajetória. O caso  $F = T = 0$  é representado, em todas as figuras, pelas curvas pretas. Os pontos vermelhos da Fig. 4.8(a) representam o caso  $T = 10^{-3}$  com  $F = 0$ . Esse diagrama revela a coexistência de mais de um atrator para uma mesma combinação paramétrica, sendo essa propriedade conhecida como multiestabilidade. A Fig. 4.8(a) mostra que o atrator localizado em  $p = +2\pi$  é destruído quando  $\mathcal{K} \approx 2,32$ , valor indicado pela linha vertical pontilhada de cor preta. Para  $\mathcal{K} \approx 2,42$ , parâmetro indicado pela linha vertical tracejada preta, todos os atratores posicionados simetricamente em torno de  $p = 0$  são destruídos. Dessa forma, resta apenas o atrator de período 2 localizado em torno de  $p = -2\pi$ , responsável por gerar a corrente de valor negativo  $\mathcal{J} = -2\pi$  nessa região do espaço de parâmetros. A linha vertical azul indica o parâmetro  $\mathcal{K} = 2,5$ , mostrando que para a combinação paramétrica  $\mathcal{K} = 2,5$ ,  $\gamma = 0,85$ , representada na Fig. 4.7 pelo círculo azul, resta apenas o atrator localizado em  $p = -2\pi$  quando  $T = 10^{-3}$ , justificando assim a ativação térmica da corrente negativa pela quebra da simetria dos atratores na direção do momento.

Analisando o diagrama de bifurcação do mapa  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  com temperatura nula e  $F \neq 0$ , representado nas Figs. 4.8(b), 4.8(c), 4.8(d) e 4.8(e) pelas curvas verdes, é possível verificar que nenhum atrator é destruído e que a corrente negativa surge através do nascimento de um novo atrator localizado em torno de  $p = -2\pi$  quando  $\mathcal{K} \approx 2,29$ , como mostra a Fig. 4.8(b), obtida usando  $F = 0,05$ , e a Fig. 4.8(d), que corresponde a uma magnificação da região delimitada pelo retângulo pontilhado preto da Fig. 4.8(b). Com o nascimento de um novo atrator na parte negativa do momento, a corrente  $\mathcal{J}$  se torna negativa mesmo que o atrator localizado em torno de  $p = +2\pi$  não seja destruído. Aumentando a intensidade da perturbação para  $F = 0,1$ , os dois atratores localizados em torno de  $p = -2\pi$  se afastam, como mostram as Figs. 4.8(c) e 4.8(e), essa última sendo uma ampliação da região delimitada pelo retângulo pontilhado preto da Fig. 4.8(c). A separação desses atratores ao longo da direção do parâmetro  $\mathcal{K}$  explica a ativação da corrente negativa ao longo da direção horizontal do espaço de parâmetros  $(\mathcal{K}, \gamma)$ , como mostram as Figs. 4.7(d) e 4.7(e), também obtidas usando  $F = 0,05$  e  $F = 0,1$ , respectivamente.

#### 4.4 Duplicação de estruturas periódicas em sistemas a tempo contínuo

A forma mais usual de descrever a dinâmica de um sistema físico é por meio de equações diferenciais. Considerando um sistema no qual o tempo  $t$  varia continuamente, sua evolução temporal é definida por

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = f_i[\mathbf{r}(t)], \quad (i = 1, \dots, \mathcal{D}), \quad (4.16)$$

sendo  $\mathbf{r}(t)$  um vetor de dimensão  $\mathcal{D}$ . A Eq. (4.16) é um sistema dinâmico visto que, para qualquer estado inicial  $\mathbf{r}(0)$ , é possível resolver as  $\mathcal{D}$  equações diferenciais para obter o estado futuro  $\mathbf{r}(t)$  em um tempo  $t > 0$ . É comum na literatura se referir a sistemas a tempo contínuo como fluxos.

Nos capítulos anteriores, a proliferação de EIPs foi estudada para sistemas discretos e demonstrou-se que o número de EIPs geradas no espaço de parâmetros está diretamente relacionado aos  $k$  atratores criados pela composição de  $k$  mapas modificados por um parâmetro externo  $F_j$ , cujo período é  $k$ . No caso de sistemas a tempo contínuo o processo é diferente, visto que não ocorrem iterações discretas e, conseqüentemente, também não ocorre a sucessiva composição de sistemas modificados por um termo periódico. Para que um sistema a tempo contínuo seja perturbado periodicamente, deve-se adicionar ao modelo uma função contínua periódica, sendo a adição desse termo perturbativo insuficiente para gerar novos atratores no espaço de fases. Dessa forma, a multiplicação de EIPs ocorre apenas em regiões do espaço de parâmetros que apresentam a propriedade de multiestabilidade, uma característica de sistemas dissipativos que consiste na existência de dois ou mais atratores para um mesmo conjunto de parâmetros de controle. Sendo assim, deve-se adicionar ao sistema uma função adequada capaz de mover em direções opostas os diferentes atratores encontrados no espaço de fases, ocasionando a separação dos domínios periódicos que encontram-se sobrepostos no espaço de parâmetros. Esse método será desenvolvido nas próximas subseções utilizando como exemplos dois sistemas físicos completamente distintos: a equação de Langevin e o circuito eletrônico de Chua.

Como visto na Seção 4.1, um modelo matemático que simula determinado fenômeno físico deve considerar os efeitos perturbativos do ambiente. Para isso, torna-se necessário adicionar ao modelo uma variável aleatória  $g(t)$  que dá origem a um sistema dinâmico estocástico. Como soluções analíticas exatas para essa classe de sistemas não podem ser encontradas, lança-se mão de algoritmos numéricos. No caso de equações diferenciais determinísticas, o método de integração mais utilizado é o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RKIV) [132]. No entanto, para equações diferenciais estocásticas, esse método não pode ser aplicado diretamente pois a variância da função  $g(t)$  pode ser infinita, de forma que o RKIV deve ser aperfeiçoado. Com esse objetivo, alguns algoritmos foram desenvolvidos nas últimas décadas para resolver numericamente equações diferenciais perturbadas por diferentes tipos de ruído [133–136].

O método de integração utilizado nesta seção é o Runge-Kutta Estocástico de quarta ordem (RKEIV), apresentado na Ref. [135] para ruídos que seguem a distribuição normal e na Ref. [136] para ruídos coloridos, os quais apresentam algum tipo de correlação temporal. Para integrar numericamente uma equação diferencial estocástica cuja variável aleatória  $g(t)$  é um ruído normal, isto é, distribuído conforme a densidade de probabilidade (4.2) e que satisfaz as condições  $\langle g(t) \rangle = 0$  e  $\langle g(t)g(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ , o algoritmo RKEIV adiciona ao RKIV, em cada etapa da integração, termos proporcionais a  $\sqrt{D\Delta t}[c_i\psi_1(t) + d_i\psi_2(t)]$ , com  $i = 1, \dots, 4$ ,

sendo  $D$  a intensidade do ruído,  $\Delta t$  o passo de integração,  $c_i$  e  $d_i$  constantes e  $\psi_1(t)$  e  $\psi_2(t)$  variáveis aleatórias normalmente distribuídas com  $\langle \psi_i(t) \rangle = 0$  e  $\langle \psi_i(t)\psi_i(t') \rangle = \delta(t - t')$ , sendo  $i = 1, 2$  [135, 136].

#### 4.4.1 A equação de Langevin

Um sistema a tempo contínuo capaz de simular catracas clássicas pode ser obtido a partir da equação de Langevin (4.1), separando as partes espacial e temporal da força não dissipativa proveniente do potencial  $U(x, t)$ . Sendo assim, esse termo pode ser interpretado como a soma entre uma força oriunda de um potencial que depende apenas da posição  $x$  da partícula e uma força periódica em  $t$ , essa última responsável por tirar o sistema do equilíbrio. Considerando uma partícula de massa  $\mu = 1$ , as equações diferenciais estocásticas que modelam esse sistema são dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\nu v + \kappa \mathcal{F}(x) + B \text{sen}(\omega t) + \Omega(t), \\ \dot{x} &= v.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Na Eq. (4.17), o parâmetro  $\kappa$  controla a altura do potencial,  $B$  controla a intensidade da força externa periódica e  $\nu$  é o coeficiente de viscosidade do meio. A força  $\mathcal{F}(x)$  é derivada de um potencial de período  $L$ , tal que  $\mathcal{F}(x + L) = \mathcal{F}(x)$ . Por sua vez, a força  $B \text{sen}(\omega t)$  tem frequência  $\omega$  e período  $\tau = 2\pi$ . Os resultados apresentados nesta subseção foram obtidos escolhendo uma função  $\mathcal{F}(x)$  assimétrica do tipo

$$\mathcal{F}(x) = 0,7 \text{sen}(2x) + \cos(x),\tag{4.18}$$

de forma que a equação de Langevin (4.17) que simula o efeito catraca pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\nu v + \kappa[0,7 \text{sen}(2x) + \cos(x)] + B \text{sen}(\omega t) + \Omega(t), \\ \dot{x} &= v.\end{aligned}\tag{4.19}$$

A função  $\Omega(t)$  é um ruído normal com média  $\langle \Omega(t) \rangle = 0$  e satisfaz o teorema flutuação-dissipação (4.9). Dessa forma, do ponto de vista prático, a intensidade  $D$  do ruído utilizada no método RKEIV é  $D = \nu k_B T$ , sendo  $k_B = 1$ . Em todas as simulações numéricas os parâmetros  $\kappa$  e  $\omega$  foram fixados em  $\kappa = 5$  e  $\omega = 1$ , e o espaço de parâmetros  $(B, \chi = e^{-\nu})$  da Eq. (4.19) foi construído utilizando uma grade de  $800 \times 800$  pontos equidistantes.

Nos diagramas da Fig. 4.9, as cores representam o valor da corrente de partículas  $\mathcal{J}_c$  do caso contínuo, calculada através da média da velocidade  $v(t)$  sobre as condições iniciais e sobre o tempo. Para obter  $\mathcal{J}_c$ , foram escolhidas 625 condições iniciais igualmente distribuídas no intervalo  $[x(0)_{\min}, x(0)_{\max}] = [v(0)_{\min}, v(0)_{\max}] = [-2\pi, 2\pi]$  e a média temporal foi calculada sobre um tempo de integração  $t = 1256638\Delta t$  após descartar um transiente  $t = 94248\Delta t$ , com  $\Delta t = 10^{-2}$ . A Fig. 4.9(a) apresenta o caso com temperatura nula, e o valor da corrente é definido pela paleta de cores. Nessa figura observa-se que as combinações paramétricas que geram correntes nulas predominam, exceto em três regiões nas quais

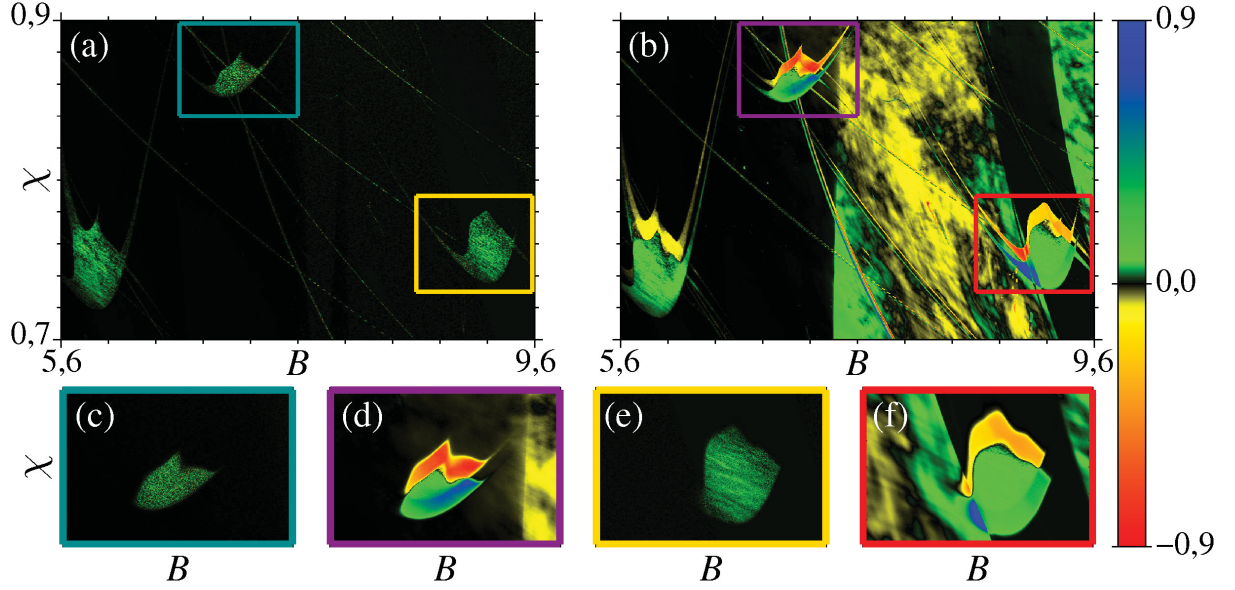


Figura 4.9 – Espaço de parâmetros  $(B, \chi)$  da equação de Langevin (4.19) para  $\kappa = 5$  e  $\omega = 1$ , com as cores indicando o valor da corrente  $\mathcal{J}_c$ . A figura (a) mostra o caso sem a força externa (4.20) e com temperatura nula. As figuras (c) e (e) são magnificações das regiões da figura (a) delimitadas pelos retângulos ciano e amarelo, respectivamente, porém usando  $T = 10^{-4}$ . As figuras (b), (d) e (f) foram obtidas adicionando a força externa (4.20), com intensidade  $F = 0,3$ , à equação de Langevin (4.19). O caso com temperatura nula é apresentado em (b) enquanto (d) e (f) mostram os efeitos do ruído térmico sobre as JPs destacadas pelos retângulos violeta e vermelho da figura (b), nessa ordem, usando  $T = 10^{-4}$ .

são encontradas correntes positivas de magnitude pequena, representadas pela cor verde. Esses domínios serão denominados Janelas Periódicas (JPs) pois, apesar de originarem trajetórias periódicas no espaço de fases, não possuem as mesmas propriedades das EIPs descritas na Seção 3.3. No entanto, assim como as EIPs, as JPs também são destruídas pelo ruído térmico, de forma que as regiões do espaço de parâmetros que geram correntes não nulas diminuem à medida que a intensidade  $T$  da temperatura aumenta. Os efeitos da temperatura sobre esses domínios periódicos são demonstrados nas Figs. 4.9(c) e 4.9(e) para as JPs destacadas, respectivamente, pelos retângulos ciano e amarelo da Fig. 4.9(a), usando  $T = 10^{-4}$ .

Para aumentar a área do espaço de parâmetros que disponibiliza correntes de partículas não nulas, deve-se adicionar à equação de Langevin (4.19) uma nova força externa periódica  $F(t)$ . No entanto, a média temporal de  $F(t)$  calculada ao longo de um ciclo deve ser nula para não gerar movimento em uma direção preferencial. Sendo assim, uma função que satisfaz tais condições é

$$F(t) = F \cos(2t). \quad (4.20)$$

De forma intencional, a força externa  $F(t)$  foi definida com uma frequência  $\omega'$  diferente da frequência  $\omega$  da força  $B \sin(\omega t)$  e também com uma diferença de fase  $2\pi$ , a fim de que a simetria temporal da força externa total da equação de Langevin (4.19) seja quebrada.

O efeito dessa quebra de simetria é apresentado na Fig. 4.9(b), para  $T = 0$ , usando uma força externa com intensidade  $F = 0,3$ . Como resultado, obtém-se um aumento significativo da área do espaço de parâmetros que apresenta valores não nulos para a corrente. Mesmo quando os efeitos do ruído térmico são considerados, adotando  $T = 10^{-4}$ , esse ganho continua sendo relevante, como mostram as Figs. 4.9(d) e 4.9(f) que são magnificações das JPs destacadas na Fig. 4.9(b) pelos retângulos violeta e vermelho, respectivamente.

Simulações adicionais realizadas em outros intervalos do espaço de parâmetros  $(B, \chi)$  mostraram que não é possível duplicar todas as JPs quando a força externa (4.20) é adicionada à equação de Langevin. A duplicação apenas ocorre nos domínios que apresentam multiestabilidade e é resultado da quebra da simetria da força externa ao sistema. Para explicar o procedimento de multiplicação de JPs em sistemas a tempo contínuo, o mesmo intervalo do espaço de parâmetros  $(B, \chi)$  da Fig. 4.9 foi considerado, porém substituindo o valor da corrente  $\mathcal{J}_c$  pelo número de atratores periódicos encontrados para uma mesma combinação paramétrica. Esse resultado é apresentado na Fig. 4.10(a) para o sistema sem a força externa  $F(t)$ , e o número de atratores periódicos em cada região é indicado na paleta de cores. Para construir esse espaço de parâmetros, o intervalo estudado foi dividido em uma grade de  $800 \times 800$  pontos e, para cada par de parâmetros  $(B, \chi)$ , a média temporal  $\langle v(t) \rangle$  da velocidade foi calculada para 25 trajetórias cujas condições iniciais encontram-se distribuídas igualmente no intervalo  $[x(0)_{\min}, x(0)_{\max}] = [v(0)_{\min}, v(0)_{\max}] = [-2\pi, 2\pi]$ . Comparando o valor de  $\langle v(t) \rangle$  obtido para cada trajetória é possível identificar atratores periódicos distintos e contabilizá-los. As regiões nas quais encontram-se apenas atratores caóticos são facilmente reconhecidas pelo valor do maior EL, e são indicadas na Fig. 4.10(a) pela cor cinza.

Ao efetuar uma comparação entre as Figs. 4.9(a) e 4.10(a), percebe-se que apenas regiões com pelo menos três atratores periódicos geram correntes não nulas. As regiões da Fig. 4.10(a) preenchidas pelas cores azul e laranja, apesar de serem periódicas, não geram valores significativos de corrente pois os atratores estão posicionados simetricamente em torno de  $v(t) = 0$ . Para explicar a origem do valor pequeno de  $\mathcal{J}_c$  dentro das JPs, os três atratores periódicos encontrados para  $B = 7,1$  e  $\chi = 0,865$  são apresentados na Fig. 4.10(c), sendo a localização dessa combinação paramétrica indicada pela seta preta da Fig. 4.10(a). É possível observar que o atrator azul encontra-se posicionado simetricamente em  $v(t) = 0$ , de forma que a média temporal de uma trajetória sobre esse atrator é  $\langle v(t) \rangle = 0$ . Por outro lado, trajetórias que convergem para os atratores verde e vermelho têm médias temporais  $\langle v(t) \rangle = 2$  e  $\langle v(t) \rangle = -2$ , respectivamente. No entanto, ao investigar a bacia de atração dessa combinação paramétrica escolhendo 160801 condições iniciais  $(x(0), v(0))$  igualmente distribuídas no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ , verifica-se que 44,21% das condições iniciais convergem para o atrator azul, 28,93% convergem para o atrator verde e 26,86% convergem para o atrator vermelho. Como as trajetórias pertencentes ao atrator azul não contribuem para o cálculo de  $\mathcal{J}_c$  e a bacia de atração do atrator verde, cuja média temporal  $\langle v(t) \rangle$  é positiva, é sensivelmente maior que a bacia de atração do atrator vermelho, a corrente resultante é

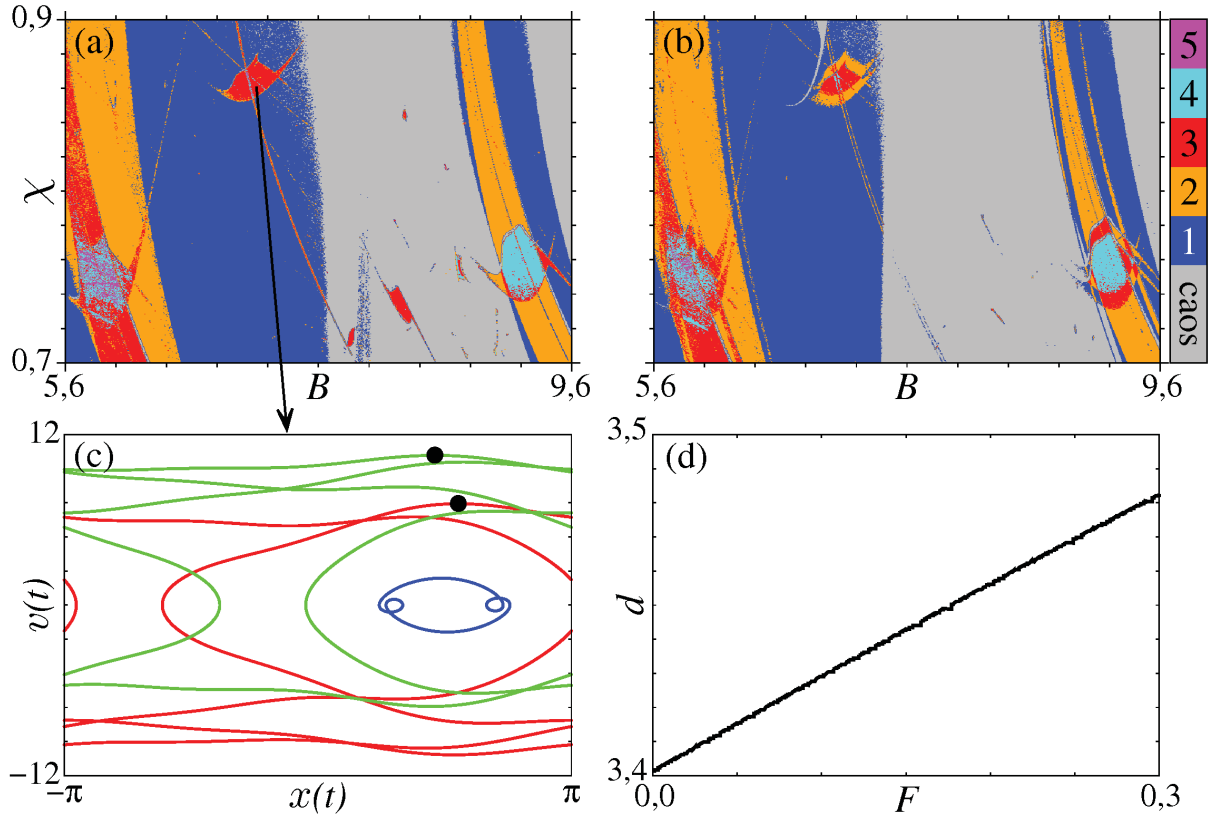


Figura 4.10 – As figuras (a) e (b) mostram o espaço de parâmetros  $(B, \chi)$  da equação de Langevin (4.19), para  $\kappa = 5$  e  $\omega = 1$ , com as cores representando o número de atratores periódicos encontrados para cada combinação paramétrica, exceto na região cinza que contém apenas atratores caóticos. Em (a) foi utilizada a equação de Langevin sem a força externa (4.20), e em (b) essa força foi considerada com intensidade  $F = 0,3$ , ambos os casos com temperatura nula. O espaço de fases do caso exibido na figura (a), considerando  $B = 7,1$  e  $\chi = 0,865$  (seta preta), é apresentado em (c) e é constituído por três atratores periódicos diferentes, indicados pelas linhas azul, verde e vermelha. Os círculos pretos representam o valor máximo da velocidade  $v(t)$  encontrado nos atratores verde e vermelho, e a figura (d) mostra o aumento da distância  $d$  entre esses círculos à medida que a intensidade  $F$  da força externa (4.20) cresce, indicando a separação dos atratores no espaço de fases.

positiva e de valor  $\mathcal{J}_c \approx 0,041293$ .

Ao adicionar a força externa (4.20) à equação de Langevin, utilizando  $F = 0,3$ , ocorrem alterações no número de atratores periódicos dentro das JPs, como é possível observar no espaço de parâmetros da Fig. 4.10(b). A Fig. 4.10(d) mostra a distância  $d$  entre os valores máximos da velocidade  $v(t)$  encontrados para os atratores verde e vermelho da Fig. 4.10(c), sendo esses valores indicados pelos círculos pretos. Observa-se que  $d$  aumenta com o valor de  $F$ , sinalizando a separação desses atratores no espaço de fases. Como consequência dessa separação, na Fig. 4.10(b) é possível notar que os três atratores são encontrados simultaneamente apenas para combinações paramétricas que situam-se na parte central da JP correspondente, indicada pela seta preta na Fig. 4.10(a), visto que apenas essa região continua sendo representada pela cor vermelha quando a força externa (4.20) é adicionada.

No entanto, na parte superior e na parte inferior dessa mesma JP, a cor laranja indica que apenas dois estados estacionários distintos são encontrados para uma mesma combinação paramétrica: os atratores azul e vermelho da Fig. 4.10(c) coexistem na parte superior e os atratores azul e verde da Fig. 4.10(c) coexistem na parte inferior. Com isso, a parte superior da JP é caracterizada por uma corrente de partículas negativa, representada pela cor vermelha nas Figs. 4.9(b) e 4.9(d). Por outro lado, na parte inferior obtém-se um valor positivo para  $\mathcal{J}_c$ , que é representado pela cor azul nessas mesmas figuras. Percebe-se que, além do aumento da área das JPs, a separação dos atratores periódicos com médias temporais  $\langle v(t) \rangle$  opostas gera valores absolutos de corrente muito maiores, o que torna-se evidente ao observar a diferença de tonalidade das cores que preenchem as Figs. 4.9(a) e 4.9(b). Comparando essas duas figuras, o aumento da área do espaço de parâmetros ocupada por correntes cujo valor absoluto é  $|\mathcal{J}_c| > 0,1$  é de 85% quando a força externa (4.20) é adicionada à equação de Langevin (4.19), considerando uma intensidade  $F = 0,3$ .

#### 4.4.2 O circuito de Chua

O circuito de Chua foi proposto originalmente por Leon Ong Chua [42], em 1983, para demonstrar a existência do comportamento caótico em experimentos reais. Esse circuito eletrônico, representado esquematicamente na Fig. 4.11, é composto por um resistor  $R$  e por três elementos de armazenamento de energia: dois capacitores,  $C_1$  e  $C_2$ , e um indutor,  $L$ .

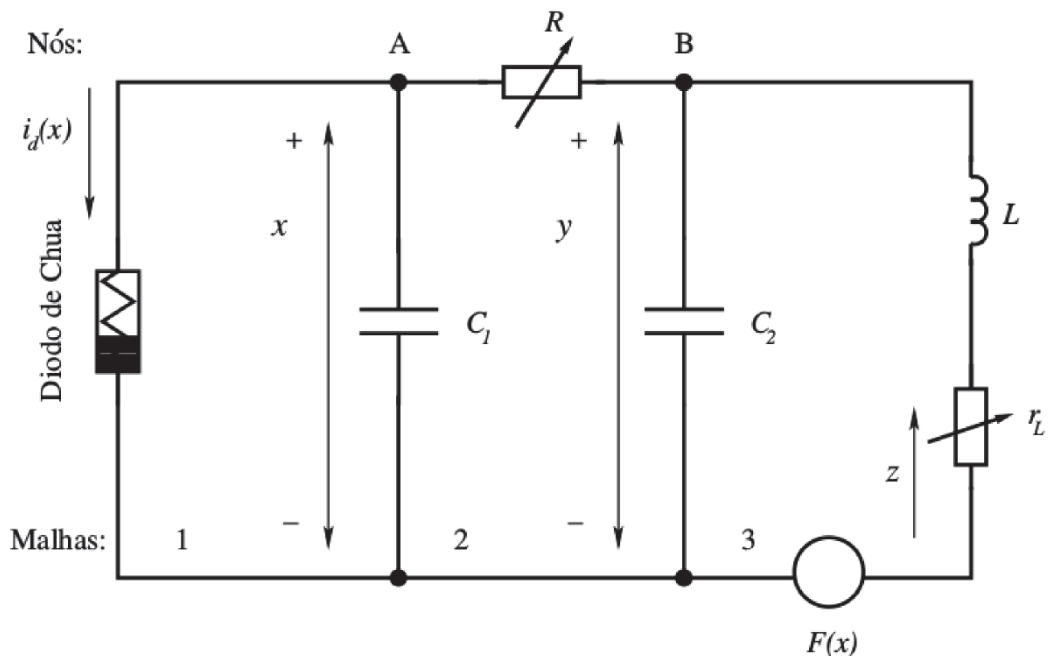


Figura 4.11 – Representação do circuito de Chua com realimentação contendo um resistor  $R$ , dois capacitores,  $C_1$  e  $C_2$ , e um indutor  $L$  ligado em série com o forçamento  $F(x)$ . As variáveis  $x$  e  $y$  representam as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, e a variável  $z$  é a corrente que atravessa o indutor. Os números 1, 2 e 3 indicam as malhas do circuito e as letras A e B representam os nós. Figura retirada da Ref. [137].

indicado pela letra  $L$ , cuja resistência interna é  $r_L$ . As variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$  e a corrente que passa pelo indutor  $L$ , respectivamente. A não linearidade do circuito está presente no dispositivo denominado diodo de Chua, e a corrente  $i_d(x)$  é uma função linear por partes baseada nas características elétricas desse dispositivo. A dinâmica desse sistema pode ser modificada periodicamente ao adicionar um dispositivo que realimenta a tensão do capacitor  $C_1$ , ligando-o em série com o indutor do circuito, como mostra a Fig. 4.11 [137, 138]. Os efeitos de uma realimentação periódica e assimétrica  $F(x)$  foram analisados na Ref. [137], propondo uma função definida por

$$F(x) = A[\text{sen}(x) + F \cos(\varpi x)],$$

que é assimétrica quando  $F \neq 0$  e  $\varpi \neq 1$ , sendo  $A$  a amplitude de realimentação e  $F$  a amplitude da parte assimétrica.

O sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica do circuito de Chua com realimentação é obtido através das leis de Kirchhoff, considerando as tensões e as correntes nas malhas 2 e 3 e nos nós A e B da Fig. 4.11. Dessa forma, obtém-se [137]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{(y-x)}{RC_1} - \frac{i_d(x)}{C_1}, \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{(x-y)}{RC_2} + \frac{z}{C_2}, \\ \dot{z} &= \frac{dz}{dt} = -\frac{y}{L} - z\left(\frac{r_L}{L}\right) - \frac{F(x)}{L}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Fazendo  $A \rightarrow 0$ , o forçamento  $F(x)$  tende a zero e então obter-se-á o circuito de Chua original [30, 32, 139], sem realimentação. Esse conjunto de equações diferenciais pode ser simplificado e adimensionalizado a partir de uma escolha adequada de variáveis paramétricas, possibilitando a redução do número de parâmetros sem alterar o comportamento do sistema. As novas variáveis  $X, Y$  e  $Z$  do sistema são obtidas através das variáveis antigas pelas relações  $X = x/B_p, Y = y/B_p$  e  $Z = zR/B_p$ , sendo  $B_p$  um parâmetro relacionado à inclinação da curva  $i_d(x)$ , tendo dimensão de tensão. Os novos parâmetros são  $\alpha = C_2/C_1, \beta = R^2C_2/L, \zeta = Rr_L C_2/L, \tilde{t} = t/RC_2$  e  $\mathcal{I}(X) = i_d(x)R/B_p$ . Com isso, obtém-se um novo conjunto de variáveis  $X, Y, Z$  de forma que o sistema denominado Circuito de Chua Adimensional com Realimentação (CCAR) é descrito por [137, 140]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{dX}{d\tilde{t}} = \alpha [Y - X - \mathcal{I}(X)], \\ \dot{Y} &= \frac{dY}{d\tilde{t}} = X - Y + Z, \\ \dot{Z} &= \frac{dZ}{d\tilde{t}} = -\beta Y - \zeta Z - \left(\frac{\beta}{B_p}\right) F(X) + \Psi(\tilde{t}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

A função linear por partes é dada por  $\mathcal{I}(X) = c_2 X + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)(|X + 1| - |X - 1|)$ , com  $c_1$  e  $c_2$  sendo parâmetros de controle. Com a adimensionalização do sistema, o forçamento



periódico assimétrico se torna

$$F(X) = A[\text{sen}(B_p X) + F \cos(\varpi B_p X)]. \quad (4.23)$$

No CCAR (4.22), a função aleatória  $\Psi(\tilde{t})$  descreve os efeitos do ruído inerente ao sistema e obedece à distribuição normal, tal que  $\langle \Psi(\tilde{t}) \rangle = 0$  e  $\langle \Psi(\tilde{t})\Psi(\tilde{t}') \rangle = 2D\delta(\tilde{t} - \tilde{t}')$ , sendo  $D$  a intensidade do ruído. Como não existe uma relação direta entre os efeitos dissipativos do circuito e a temperatura, para o CCAR não é válido o teorema flutuação-dissipação (4.9). Sendo assim,  $\Psi(\tilde{t})$  pode abranger os diferentes tipos de ruído que influenciam as propriedades eletrônicas do sistema. Os resultados apresentados nesta subseção foram obtidos fixando os parâmetros  $\beta = 50$ ,  $c_1 = -1,13996128$ ,  $c_2 = -0,7120006131$ ,  $A = 0,01$ ,  $B_p = 2,2$  e  $\varpi = 3$ . Os parâmetros  $\alpha$  e  $\zeta$ , assim como a intensidade  $F$  do termo assimétrico de  $F(X)$ , foram variados.

No caso do CCAR, as regiões regulares existentes no espaço de parâmetros  $(\alpha, \zeta)$  são EIPs do tipo camarão [30, 56]. Para esse sistema, o aumento da área ocupada por uma EIP é de grande importância pois, caso isso ocorra, crescem as chances de reproduzir experimentalmente a dinâmica observada numericamente para uma combinação paramétrica localizada em uma dessas estruturas, uma vez que o resultado experimental pode ser alterado devido aos efeitos do ruído e às imprecisões das especificações dos dispositivos eletrônicos utilizados. Para multiplicar as EIPs, torna-se necessário inicialmente identificar os domínios que apresentam multiestabilidade. Com esse objetivo, a Fig. 4.12 apresenta o espaço de parâmetros  $(\alpha, \zeta)$  construído a partir de uma grade de  $900 \times 900$  pontos, sendo o número de atratores periódicos em cada região indicado pelas cores. Os diferentes atratores periódicos de uma mesma combinação paramétrica foram identificados comparando o valor do menor EL  $\lambda_3$  obtido para 64 trajetórias cujas condições iniciais foram escolhidas uniformemente no intervalo  $[X_{\min}, X_{\max}] = [Y_{\min}, Y_{\max}] = [Z_{\min}, Z_{\max}] = [-0,2, 0,2]$ . O valor do menor EL foi analisado pois trata-se da quantidade que apresenta maior variação quando as trajetórias convergem para diferentes estados assintóticos, permitindo diferenciar os atratores com maior precisão. Os ELs foram calculados utilizando um tempo de integração  $\tilde{t} = 5 \times 10^6 \Delta\tilde{t}$  após descartar um transiente de mesmo tamanho, sendo  $\Delta\tilde{t} = 10^{-2}$ . O resultado do caso sem ruído ( $D = 0$ ) é apresentado na Fig. 4.12(a) com  $F = 0$ , ou seja, considerando um forçamento periódico composto apenas pelo termo  $F(X) = A\text{sen}(B_p X)$ . As regiões nas quais somente um atrator periódico é encontrado são indicadas pela cor azul, enquanto as regiões laranjas apresentam multiestabilidade. As combinações paramétricas representadas pela cor cinza, por sua vez, dão origem à dinâmica caótica, que durante o procedimento numérico pode ser identificada pelo valor do maior EL  $\lambda_1$ . A Fig. 4.12(c) mostra os dois atratores periódicos que são encontrados no espaço de fases  $(X, Y, Z)$  para  $\alpha = 24,06$  e  $\zeta = -0,31$ , combinação de parâmetros localizada na EIP indicada pela seta preta da Fig. 4.12(a).

Admitindo valores  $F \neq 0$  para a Eq. (4.23), obter-se-á um forçamento periódico assimétrico em  $X$  que quebra a simetria do sistema nessa direção do espaço de fases,

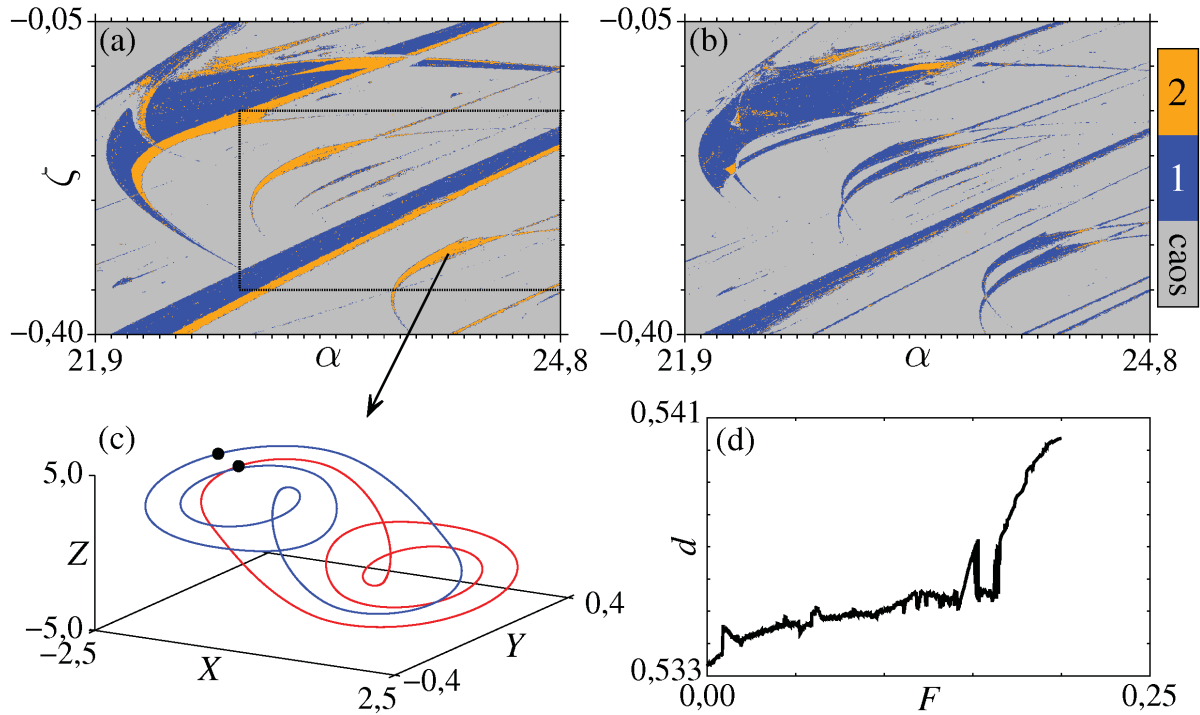


Figura 4.12 – As figuras (a) e (b) mostram o espaço de parâmetros  $(\alpha, \zeta)$  do CCAR (4.22), com a cor cinza indicando a existência de atratores caóticos e as demais cores representando o número de atratores periódicos encontrados para cada combinação paramétrica. Considerando o caso sem ruído ( $D = 0$ ), os diagramas (a) e (b) foram obtidos utilizando o forçamento (4.23) com  $F = 0$  e  $F = 0,3$ , respectivamente. Na figura (c), os dois atratores periódicos encontrados em  $(\alpha, \zeta) = (24,06, -0,31)$ , ponto do espaço de parâmetros indicado pela seta preta da figura (a), são representados no espaço de fases pelas curvas azul e vermelha. Em (d) é possível verificar o movimento relativo entre esses atratores em função da intensidade  $F$ , sendo  $d$  a distância na direção  $X$  do espaço de fases entre os círculos pretos da figura (c), que representam o valor máximo obtido para a variável  $Z$  em cada atrator.

possibilitando a separação dos atratores periódicos da Fig. 4.12(c). Considerando o espaço de parâmetros do CCAR com  $F = 0,3$ , caso apresentado na Fig. 4.12(b), observa-se que somente as EIPs laranjas da Fig. 4.12(a) são duplicadas. A multiplicação de uma EIP com dois atratores periódicos do caso  $F = 0$  origina duas EIPs com apenas um atrator periódico quando  $F = 0,3$ , sendo essas novas EIPs representadas pela cor azul na Fig. 4.12(b). O forçamento  $F(X)$  assimétrico gera um movimento relativo entre os atratores, como mostra a Fig. 4.12(d) na qual  $d$  é a distância na direção  $X$  do espaço de fases entre os círculos pretos da Fig. 4.12(c), que representam o valor máximo de  $Z$  de cada atrator. O gráfico da Fig. 4.12(d) mostra que os atratores se afastam à medida que  $F$  aumenta até que, para  $F \approx 0,20$ , não é mais possível encontrá-los para uma mesma combinação paramétrica.

Após identificar as EIPs que apresentam multiestabilidade e duplicá-las considerando o termo assimétrico do forçamento  $F(X)$ , a próxima etapa consiste em verificar a eficiência desse procedimento na presença de ruído. Para isso, uma magnificação da região da Fig. 4.12(a) delimitada pelo retângulo pontilhado preto é apresentada na Fig. 4.13, utilizando

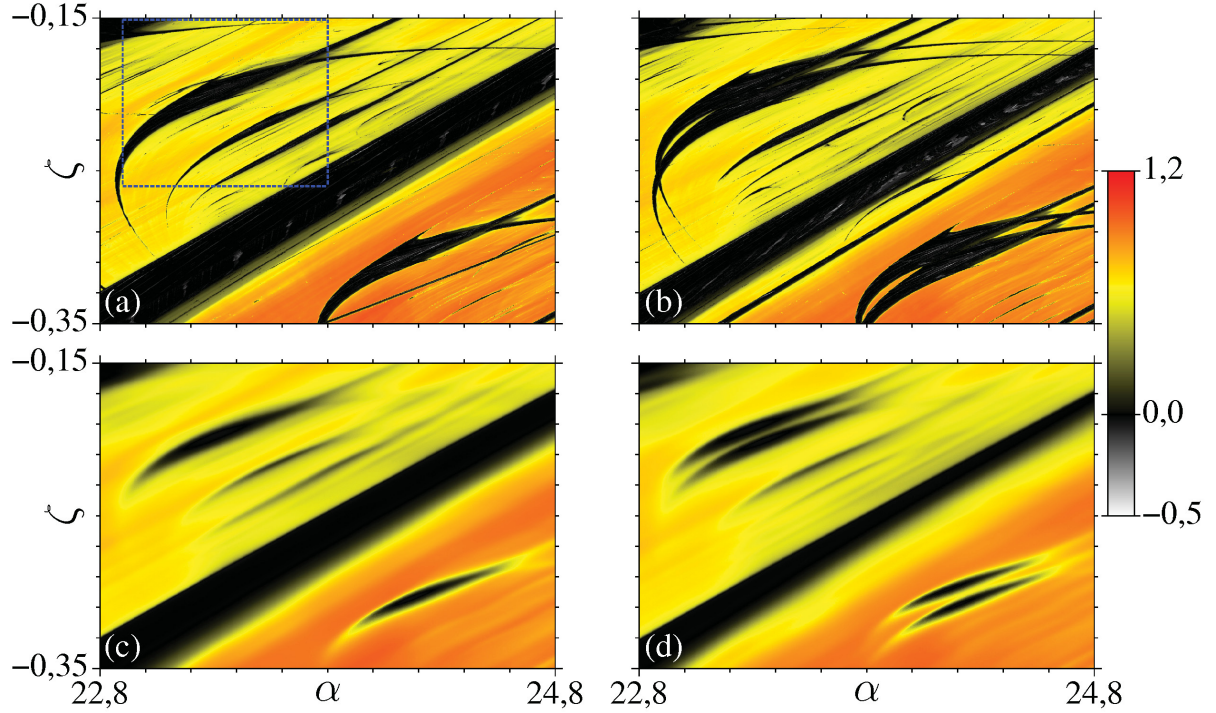


Figura 4.13 – Espaço de parâmetros  $(\alpha, \zeta)$  do CCAR (4.22) com as cores representando o valor do maior EL  $\lambda_1$ . O intervalo paramétrico considerado corresponde à região delimitada pelo retângulo pontilhado preto da Fig. 4.12(a). Os valores utilizados para a intensidade  $F$  do termo assimétrico de  $F(X)$  e para a intensidade  $D$  do ruído foram: (a)  $F = 0$ ,  $D = 0$ , (b)  $F = 0,2$ ,  $D = 0$ , (c)  $F = 0$ ,  $D = 10^{-5}$  e (d)  $F = 0,2$ ,  $D = 10^{-5}$ . O retângulo pontilhado azul da figura (a) delimita a região do espaço de parâmetros considerada para quantificar o aumento da área regular obtido ao duplicar as EIPs que apresentam multiestabilidade.

uma grade de  $10^3 \times 10^3$  pontos. Nesse caso, as cores representam o maior EL  $\lambda_1$  para cada combinação paramétrica  $(\alpha, \zeta)$ , calculado para um tempo de integração  $\tilde{t} = 5 \times 10^6 \Delta \tilde{t}$  após um transiente de  $\tilde{t} = 2 \times 10^6 \Delta \tilde{t}$ . As regiões regulares, domínios nos quais  $\lambda_1 \leq 0$ , são preenchidas pelas cores preta, cinza e branca. As combinações paramétricas que geram movimento caótico ( $\lambda_1 > 0$ ), por sua vez, são indicadas pelas cores amarela e vermelha, e correspondem à região cinza da Fig. 4.12(a). O espaço de parâmetros do CCAR sem ruído é apresentado nas Figs. 4.13(a) e 4.13(b), construídas utilizando  $F = 0$  e  $F = 0,2$ , respectivamente. Nessas figuras é possível observar novamente que apenas as EIPs que apresentam multiestabilidade são duplicadas. No entanto, a região periódica encontrada no centro da Fig. 4.13(a) é parcialmente destruída quando  $F \neq 0$ , uma vez que nessa EIP existe apenas um atrator<sup>4</sup>. É possível quantificar o aumento da área regular, ou seja, na qual  $\lambda_1 \leq 0$ , considerando a seção do espaço de parâmetros delimitada na Fig. 4.13(a) pelo retângulo pontilhado azul, que exclui grandes EIPs que contêm apenas um atrator. Comparando essa mesma região nas Figs. 4.13(a) e 4.13(b), o aumento foi de 52,6% quando  $F = 0,2$ . Considerando os efeitos do ruído na dinâmica do CCAR, definindo uma intensidade

<sup>4</sup> A região periódica encontrada na parte central da Fig. 4.13(a) constitui uma das antenas de uma EIP cujo corpo principal pertence a outro intervalo paramétrico.

$D = 10^{-5}$ , obtêm-se as Figs. 4.13(c) e 4.13(d) que representam os casos  $F = 0$  e  $F = 0,2$ , respectivamente. Mesmo o ruído sendo responsável pela destruição de grande parte das EIPs, a utilização do termo assimétrico do forçamento (4.23) gera um aumento de 57,8% na região periódica, considerando novamente a mesma seção do espaço de parâmetros delimitada pelo retângulo pontilhado azul da Fig. 4.13(a).

## 4.5 Conclusões parciais

Ao adicionar a perturbação  $F_j$  de período  $k$  ao MC, observa-se que as regras já estabelecidas nos Capítulos 2 e 3 são corroboradas, de forma que a razão  $\eta = m/k$  entre o período principal  $m$  da EIP e o período  $k$  da perturbação externa deve ser um número inteiro para que ocorra a proliferação de estruturas periódicas no espaço de parâmetros. Caso contrário, o novo período principal da EIP será  $m' = km$ , e o domínio regular não será multiplicado. Adotando esse mesmo procedimento, porém para o caso estocástico, é possível aumentar a área do espaço de parâmetros com correntes  $\mathcal{J} < -5$  em 77,5% para  $T = 10^{-5}$  e em 78,1% para  $T = 10^{-3}$ . Ademais, os resultados da Subseção 4.3.2 mostram que a criação de um novo atrator, que ocorre devido à composição dos mapas modificados pela perturbação externa  $F_j$ , pode ativar correntes não nulas em determinadas regiões do espaço de parâmetros que apresentam multiestabilidade.

No caso de sistemas a tempo contínuo, apenas as estruturas periódicas multiestáveis podem ser multiplicadas. Para isso, é necessário adicionar ao modelo uma função periódica capaz de quebrar a simetria da perturbação externa ao sistema. No caso da equação de Langevin, a simetria temporal da força externa foi quebrada ao adicionar o termo  $F(t) = F \cos(2t)$ . Com o aumento da intensidade  $F$ , os atratores são separados na direção  $v(t)$  do espaço de fases, dando origem a JPs que apresentam valores opostos de corrente no espaço de parâmetros. Com essa separação foi possível aumentar em 85% a área que disponibiliza correntes cujo valor absoluto é maior do que 0,1. Para o CCAR, os atratores têm simetria nas variáveis  $X, Y, Z$ , e apenas são separados no espaço de fases quando o termo  $F \cos(3B_p X)$  é adicionado à função  $F(X)$ . Dessa forma, é possível separar EIPs multiestáveis no espaço de parâmetros e obter um aumento da área na qual  $\lambda_1 \leq 0$  de 57,8%, mesmo quando os efeitos do ruído são considerados.

## Capítulo 5

---

### Explorando ilhas conservativas de sistemas com ruído

---

Ao contrário dos sistemas dissipativos, os conservativos têm como propriedade fundamental a conservação do volume do espaço de fases. Uma classe especial de sistemas conservativos é a formada pelos sistemas Hamiltonianos, que podem descrever diversas situações físicas como, por exemplo, a dinâmica dos corpos celestes, as trajetórias das linhas de campo magnético em plasmas, as propriedades de mistura em fluidos e o espalhamento caótico, tanto o caso clássico como o quântico. Considerando que a dinâmica de sistemas Hamiltonianos é fundamentalmente diferente da dinâmica de sistemas dissipativos, é importante dedicar uma parte desta tese para investigar como o ruído modifica as propriedades gerais desses sistemas.

O principal objetivo deste capítulo é identificar os efeitos da adição de ruído na dinâmica de sistemas Hamiltonianos a fim de testar a robustez dos resultados determinísticos. Do ponto de vista físico, o ruído é capaz de incorporar ao modelo perturbações que foram negligenciadas em uma primeira descrição do sistema. Inicialmente, uma breve revisão bibliográfica sobre o formalismo de Hamilton será apresentada, na qual conceitos como variáveis ação-ângulo, integrabilidade, teorema KAM e efeito *stickiness* são abordados. Na sequência, serão apresentados os principais resultados obtidos ao estudar os efeitos do ruído através da adição de uma sequência de números aleatórios à dinâmica do mapa de Chirikov-Taylor, mais conhecido na literatura como mapa padrão. Para compreender os diferentes comportamentos dinâmicos desse modelo, foram calculadas quantidades como a estatística dos tempos de recorrência, o maior EL e a área do espaço de fases ocupada pela trajetória em função do número de iterações.

#### 5.1 Introdução à dinâmica Hamiltoniana

A dinâmica de um sistema Hamiltoniano com  $N$  graus de liberdade é descrita por uma função escalar  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , denominada função Hamiltoniana do sistema, sendo  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  as coordenadas e os momentos generalizados, respectivamente. Para determinar as funções  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{p}(t)$  que descrevem a evolução temporal

das coordenadas e dos momentos generalizados e definem as trajetórias do sistema no espaço de fases  $\Gamma$  de dimensão  $2N$ , é necessário resolver o conjunto de  $2N$  equações diferenciais de primeira ordem conhecidas como equações de Hamilton, definidas por

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.1)$$

nas quais o ponto representa a derivada temporal. Um caso especial desse formalismo ocorre quando a função Hamiltoniana não apresenta dependência temporal de forma explícita, sendo  $H = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ . Nesse caso, a derivada parcial  $\partial H/\partial t$  é nula e o sistema é denominado autônomo. Como consequência, o valor da função Hamiltoniana  $H$  permanece constante pois, utilizando as Eqs. (5.1), obtém-se

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (5.2)$$

Desse modo, sendo a função Hamiltoniana equivalente à energia total  $E$  do sistema, conclui-se que no caso autônomo a energia é uma quantidade conservada.

Em algumas situações, dependendo das coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  escolhidas, a resolução das equações de movimento de Hamilton pode se tornar complexa. No entanto, uma transformação do conjunto das coordenadas e momentos generalizados  $q_i$  e  $p_i$  em um novo conjunto formado por  $\tilde{q}_i$  e  $\tilde{p}_i$ , sendo  $i = 1, \dots, N$ , pode tornar essa tarefa trivial, desde que  $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_i, p_i, t)$  e  $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_i, p_i, t)$  constituam uma transformação canônica, ou seja, uma transformação de coordenadas que preserva a forma das equações de Hamilton. Para isso, é necessário que exista alguma função  $\tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$  tal que as equações de Hamilton em termos das novas coordenadas sejam descritas por [141]

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}. \quad (5.3)$$

Transformações canônicas são obtidas através de funções geradoras  $\mathcal{G}$ , de forma que  $\mathcal{G}$  deve ser função de pelo menos uma variável nova ( $\tilde{\mathbf{q}}$  ou  $\tilde{\mathbf{p}}$ ) e uma antiga ( $\mathbf{q}$  ou  $\mathbf{p}$ ).

Uma abordagem mais compacta e elegante do formalismo Hamiltoniano, conhecida como notação simplética, pode ser introduzida a fim de evidenciar algumas relações de simetria inerentes a esses sistemas [142]. Considere inicialmente a matriz  $\mathbb{M}$  de dimensão  $2N \times 2N$ , tal que

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_N & \mathbb{I}_N \\ -\mathbb{I}_N & \mathbb{O}_N \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

sendo  $\mathbb{O}_N$  a matriz nula de dimensão  $N \times N$  e  $\mathbb{I}_N$  a matriz identidade de mesma dimensão. Se  $\tilde{\mathbf{x}}$  corresponde a uma matriz coluna de dimensão  $2N \times 1$ , de forma que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

então as Eqs. (5.1) podem ser representadas pela seguinte expressão:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}. \quad (5.6)$$

Uma transformação de coordenadas e momentos generalizados  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} = (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$  é canônica se satisfaz a equação

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}, \quad (5.7)$$

sendo  $\tilde{H}$  a nova função Hamiltoniana. Como  $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} = \tilde{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}})$ , a derivada temporal de  $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$  é dada por

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}{dt} = \mathbb{J} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}, \quad (5.8)$$

na qual  $\mathbb{J}_{ij} = \partial X_i / \partial x_j$  é a matriz Jacobiana da transformação. Substituindo a Eq. (5.6) na Eq. (5.8), é possível mostrar que [142]

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}{dt} = \mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T \cdot \frac{\partial H}{\partial \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}, \quad (5.9)$$

sendo  $\mathbb{J}^T$  a matriz transposta de  $\mathbb{J}$ . Ao comparar as Eqs. (5.7) e (5.9), percebe-se que a estrutura do sistema Hamiltoniano é conservada e, conseqüentemente, a transformação proposta é canônica se a matriz  $\mathbb{J}$  for simplética, ou seja, se obedece à condição

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \mathbb{M}. \quad (5.10)$$

O módulo do determinante de uma matriz simplética é igual a unidade, visto que, da Eq. (5.10),

$$\det(\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T) = \det(\mathbb{J})^2 \det(\mathbb{M}) = \det(\mathbb{M}) = 1. \quad (5.11)$$

Uma consequência direta da relação (5.11) é a conservação do volume do espaço de fases mesmo quando aplicam-se transformações canônicas. Como a mudança de variável  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} = \tilde{\mathbf{x}}(t + \tau)$  é uma transformação canônica [141], a evolução temporal também preserva o volume do espaço de fases, de forma que o teorema de Liouville, o qual afirma que a densidade de pontos representativos de um sistema no espaço de fases permanece constante no tempo [1], é satisfeito.

### 5.1.1 Sistemas Hamiltonianos integráveis

Uma função  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  é uma constante de movimento de um sistema Hamiltoniano se  $df/dt = 0$  conforme  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{p}(t)$  evoluem no tempo. No caso de sistemas Hamiltonianos autônomos,  $H$  é uma constante de movimento, como demonstrado na Eq. (5.2). Ao calcular a derivada temporal da função  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , assumindo que não há dependência temporal explícita, tal que  $\partial f / \partial t = 0$ , obter-se-á

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (5.12)$$

A expressão encontrada ao lado direito da Eq. (5.12) é denominada colchetes de Poisson de  $f$  e  $H$ , e pode ser abreviada pela notação  $[f, H]$  [66]. De forma geral, para duas funções quaisquer  $g_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $g_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , define-se

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}}. \quad (5.13)$$

Nota-se que  $[g_1, g_2] = -[g_2, g_1]$  e, desse modo,  $f$  será uma constante de movimento de um sistema Hamiltoniano autônomo se  $[f, H] = 0$ .

Na Mecânica Clássica, as constantes de movimento (ou integrais de movimento) são responsáveis pela evolução regular das trajetórias de um sistema em uma região bem definida do espaço de fases. Se duas constantes de movimento  $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $f_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  satisfazem a condição  $[f_i, f_j] = 0$ , diz-se que  $f_i$  e  $f_j$  estão em involução [66]. Essas constantes de movimento serão independentes entre si se, e somente se, for impossível escrever cada uma delas como função de outra constante de movimento.

Um sistema Hamiltoniano com  $N$  graus de liberdade que possui  $N$  constantes de movimento independentes em involução é denominado integrável. A dinâmica desse tipo de sistema pode ser investigada com maior facilidade quando lança-se mão de coordenadas canônicas denominadas variáveis ação-ângulo. Essa transformação canônica permite reduzir o espaço de fases de dimensão  $2N$  para um espaço efetivo de dimensão  $N$ , de forma que as variáveis ação  $\mathbf{J}$  são definidas em termos da integral sobre um período completo da órbita no plano  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , tal que

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}. \quad (5.14)$$

Para um sistema integrável é possível escrever  $p_i = p_i(q_i; f_1, \dots, f_N)$  e, conseqüentemente,  $J_i$  será função somente das  $N$  constantes de movimento  $f_i$ . Sendo  $H$  uma das constantes de movimento, então a nova função Hamiltoniana  $\tilde{H}$  é simplesmente a Hamiltoniana original expressa em termos das variáveis ação [143]. As coordenadas conjugadas a  $\mathbf{J}$  são as variáveis ângulo  $\Phi$ , e a transformação canônica  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\Phi, \mathbf{J})$  deve satisfazer as equações de movimento (5.3), através das quais obter-se-ão

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}), \\ \dot{\mathbf{J}} &= -\frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial \Phi} = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

A Eq. (5.15) mostra que as variáveis ação são constantes e que as variáveis ângulo são funções lineares no tempo, ou seja,

$$\Phi_i(t) = \Phi_i(0) + \omega_i t, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (5.16)$$

As constantes  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{J})$  podem ser interpretadas como um vetor velocidade angular que determina as trajetórias sobre um toro de dimensão  $N$  [66], como exemplificado na Fig. 5.1 para o caso



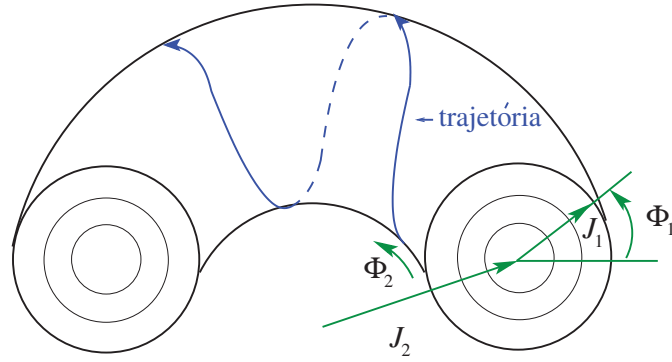


Figura 5.1 – Trajetória descrita por uma condição inicial de um sistema integrável com dois graus de liberdade ( $N = 2$ ). Figura construída com base na ilustração da pág. 165 da Ref. [87].

$N = 2$ . Nessa figura, o toro é constituído por dois raios constantes,  $J_1$  e  $J_2$ , e duas variáveis angulares  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , que representam os ângulos poloidal e toroidal, respectivamente. O movimento descrito pela trajetória sobre esse toro será periódico se  $\omega_1/\omega_2$  for racional, dando origem a um toro racional, também denominado toro ressonante, sobre o qual a trajetória formará uma curva fechada. Todavia, se  $\omega_1/\omega_2$  for irracional, depois de transcorrido um tempo suficientemente longo, a trajetória retorna a uma posição arbitrariamente próxima do ponto de partida sobre o toro, mas não se fecha. Esse tipo de movimento é denominado quase-periódico e o toro resultante é chamado irracional ou não ressonante. Para sistemas com  $N$  graus de liberdade, as trajetórias sobre um toro são definidas como periódicas quando obedecem à condição de comensurabilidade, ou condição de ressonância, tal que

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (5.17)$$

sendo  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$  um vetor cujas componentes são números inteiros, com  $m_i \neq 0 \forall i$ . Trajetórias quase-periódicas, por outro lado, não obedecem a essa condição, e as frequências  $\omega_i$  são então denominadas incomensuráveis.

Para um sistema integrável, a região acessível do espaço de fases é finita e o toro de dimensão  $N$  corresponde a uma variedade compacta. Usando as variáveis canônicas definidas pela Eq. (5.15), as constantes  $J_i$  definem em que toro o sistema se encontra, ao passo que as variáveis  $\Phi_i(t)$  para um determinado instante de tempo definem a posição da trajetória no toro. Uma órbita iniciada em um desses toros permanece nele para sempre, e por isso eles também são denominados toros invariantes [144].

### 5.1.2 O teorema KAM

O conjunto de problemas físicos integráveis é bastante restrito, pois a não integrabilidade se manifesta em sistemas mecânicos extremamente simples como, por exemplo, o pêndulo duplo. Outro exemplo relevante de um problema não integrável é o movimento dos planetas ao redor do Sol. A massa de todos os planetas equivale a menos de 1% da massa do Sol e, por esse motivo, como uma primeira aproximação, pode-se desconsiderar a

interação entre planetas e tratar individualmente a interação de cada planeta com o Sol. Como resultado, obtém-se um sistema integrável formado por planetas não interagentes que orbitam o Sol, sendo que cada planeta descreve sua elipse kepleriana independentemente dos demais. Por outro lado, se a interação entre os planetas for considerada, o movimento descrito pelas leis de Kepler para cada planeta será levemente alterado. Deve-se então recorrer à teoria clássica de perturbação para tratar esse tipo de problema da mecânica celeste.

Diferentes métodos foram desenvolvidos para calcular os efeitos perturbativos em um sistema, mas todos eles conduzem a séries de potências divergentes e nenhuma informação de longo prazo pode ser obtida sobre o movimento dos corpos envolvidos no problema. A razão dessa divergência é a ocorrência dos pequenos denominadores, combinações lineares das frequências  $\omega_i$  características do caso integrável (sem perturbação) que aparecem nos denominadores dos termos perturbativos de ordens superiores. Quando essas combinações lineares se aproximam da condição de ressonância, dada pela Eq. (5.17), esses denominadores tendem a zero e os termos correspondentes das séries de potências divergem. Esse tipo de adversidade não é uma característica unicamente de problemas da mecânica celeste, mas sim de todos os sistemas mecânicos não integráveis quando tratados com o auxílio da teoria clássica de perturbação [145].

O estudo do efeito de pequenas perturbações em um sistema Hamiltoniano foi chamado de problema fundamental da mecânica por Jules Henri Poincaré [146]. Em alguns casos, a função Hamiltoniana  $H(\Phi, \mathbf{J})$  de um sistema não integrável pode ser dividida em uma parte integrável  $H_0$ , que depende apenas das variáveis ação, e uma parte não integrável representada como uma perturbação  $H_1$ , tal que

$$H(\Phi, \mathbf{J}) = H_0(\mathbf{J}) + \epsilon H_1(\Phi, \mathbf{J}), \quad (5.18)$$

sendo  $\epsilon$  um parâmetro de perturbação. Se  $\epsilon H_1$  é suficientemente pequeno quando comparado a  $H_0$ , o sistema resultante é denominado quase-integrável. Para tal situação, torna-se relevante determinar quão robusta é a integrabilidade do sistema quando  $\epsilon \neq 0$  e como se comportam as trajetórias do sistema na presença da perturbação. As respostas para essas questões foram obtidas através dos trabalhos matemáticos de Andrey N. Kolmogorov [147], Jürgen K. Moser [148] e Vladimir I. Arnold [149], que promoveram um substancial avanço no estudo de sistemas quase-integráveis. Em 1954, Kolmogorov iniciou a pesquisa sobre o tema e conjecturou o que aconteceria com o sistema quando adicionado um termo perturbativo à sua função Hamiltoniana. A versão atual desse teorema foi resultado das contribuições de Moser (1962) e Arnold (1963), e ficou conhecido como teorema KAM, cujo nome é uma homenagem aos cientistas envolvidos.

O teorema KAM utiliza-se de um método de rápida convergência que possibilita interromper a influência dos pequenos denominadores que aparecem em todos os termos da expansão em séries de potências, sendo esse método comparável ao método de Newton-

Raphson para encontrar raízes de equações algébricas [145]. Tal teorema concentra-se especialmente na estabilidade estrutural dos toros não ressonantes (irracionais), aqueles para os quais existe a independência linear das frequências  $\omega_i$ . De acordo com o teorema KAM, esses toros não serão destruídos, mas apenas ligeiramente deformados quando pequenas perturbações  $\epsilon \ll 1$  são consideradas.

Todavia, a aplicabilidade desse teorema se restringe aos casos nos quais a Hamiltoniana não perturbada  $H_0(\mathbf{J})$  é não degenerada [87], tal que

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0(\mathbf{J})}{\partial J_i \partial J_j} \right| = \det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \right| \neq 0. \quad (5.19)$$

A condição de não degenerescência garante que a Hamiltoniana não perturbada é uma função não linear das variáveis ação e, conseqüentemente, que as frequências  $\omega_i$  definem de forma unívoca apenas um toro [150]. Além disso, é necessário que as frequências sejam suficientemente irracionais, isto é, que existam números reais positivos  $c$  e  $r$ , tal que  $r > N$ , de forma que seja satisfeita a condição diofantina

$$|\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}| \geq c |\mathbf{m}|^{-r}.$$

Os toros não ressonantes que obedecem à condição diofantina não serão destruídos para pequenas perturbações ( $\epsilon \ll 1$ ), e são denominados toros KAM ou superfícies KAM. O último toro KAM que será destruído é aquele cujas razões entre as frequências não perturbadas estão mais próximas do número “mais irracional” [87].

Para compreender o significado do termo “mais irracional”, inicialmente deve-se citar o fato de que um número irracional  $R$  pode ser aproximado de forma única por um número racional por meio de frações continuadas infinitas, tal que

$$R = m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{m_3 + \frac{1}{m_4 + \dots}}}, \quad (5.20)$$

sendo  $m_1, m_2, \dots$  números inteiros [66]. De forma simplificada, escreve-se  $R = [m_1, m_2, \dots]$ . Truncando a fração em um certo valor  $m_n$ , é possível obter um número racional relativamente próximo ao número irracional  $R$ , sendo que a melhor aproximação é obtida quando os números  $m_i$  assumem grandes valores. Dessa forma, o número “mais irracional” é definido como aquele que se aproxima mais lentamente do valor inteiro da fração (5.20). Tal número, conhecido como razão áurea, é definido por [94]

$$R_a = [1, 1, 1, 1, \dots] = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}. \quad (5.21)$$

Sendo assim, os toros KAM mais irracionais são aqueles cujas razões entre as frequências são aproximadas por frações continuadas na forma da Eq. (5.21). Tais superfícies são as mais difíceis de serem destruídas.

### 5.1.3 Estrutura do espaço de fases e o efeito *stickiness*

O teorema KAM prevê a sobrevivência dos toros não ressonantes, porém não fornece informações sobre o que ocorre com os toros ressonantes em sistemas perturbados. O destino desses toros é determinado pelo teorema de Poincaré-Birkhoff, que estabelece que os toros ressonantes destruídos dão origem a um número par de pontos fixos, sendo metade pontos fixos elípticos e metade pontos fixos hiperbólicos [143]. Os pontos elípticos, também chamados de ressonâncias, são estáveis e possuem autovalores imaginários puros, sendo que condições iniciais próximas a esses pontos originam trajetórias que os circundam e formam as chamadas ilhas de regularidade. Se uma magnificação for feita em torno de um ponto elíptico, uma sequência de novos pontos elípticos poderá ser observada nessa região, de tal modo que cada ressonância resulta em um padrão complexo que se repete progressivamente em escalas menores.

No caso dos pontos hiperbólicos, os autovalores são reais e da forma  $h_1 = 1/h$  e  $h_2 = h$ , sendo  $h$  um número real tal que  $h > 1$ . A curva associada ao autovalor  $1/h$ , denotada por  $V^{(s)}$ , é denominada variedade estável; a curva associada ao autovalor  $h$ , denotada por  $V^{(u)}$ , é chamada de variedade instável. Os pontos da curva  $V^{(s)}$  serão mapeados na direção do ponto fixo e os pontos da curva  $V^{(u)}$ , por sua vez, se afastarão do ponto fixo [94]. Nesse cenário, surgem os pontos fixos conhecidos como homoclínicos e heteroclínicos. Uma órbita é chamada de homoclínica quando liga um ponto homoclínico  $P$  a ele mesmo, como mostra a Fig. 5.2(a). Por outro lado, uma órbita é classificada como heteroclínica quando conecta dois pontos hiperbólicos distintos  $P$  e  $Q$ , conhecidos como pontos heteroclínicos [66,94]. As órbitas heteroclínicas, representadas na Fig. 5.2(b), também são conhecidas como separatrizes, uma vez que delimitam a região onde existe movimento periódico.

Em sistemas Hamiltonianos, as regiões próximas aos pontos hiperbólicos são mais susceptíveis às pequenas perturbações devido à ocorrência dos emaranhados homoclínicos e heteroclínicos, que correspondem às sucessivas intersecções das variedades estáveis e instáveis. Por esse motivo, as trajetórias nas vizinhanças dos pontos hiperbólicos apresentam sensibilidade às condições iniciais, e o movimento caótico pode ser encontrado nas proximidades das separatrizes mesmo para pequenos valores de  $\epsilon$ . Com o aumento da perturbação, as separatrizes são destruídas e o caos se faz presente em uma região cada vez

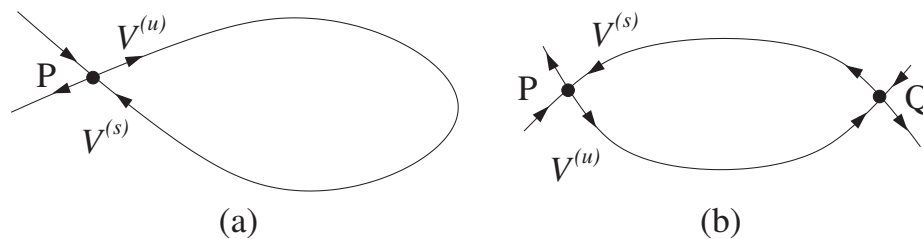


Figura 5.2 – Exemplos de uma órbita homoclínica em (a) e de órbitas heteroclínicas em (b). Figura construída com base na ilustração da pág. 68 da Ref. [94].

maior do espaço de fases, região essa conhecida como mar estocástico ou mar caótico. Para determinados valores de perturbação, domínios caóticos podem coexistir com regiões de movimento periódico (ilhas de regularidade), e o espaço de fases resultante dessa combinação de movimentos é denominado espaço de fases dividido.

A coexistência de domínios com diferentes comportamentos é o motivo pelo qual ocorre a quebra de ergodicidade em sistemas Hamiltonianos. Na Mecânica Estatística, a fim de evitar o cálculo de médias temporais em intervalos de tempo excessivamente longos, supõe-se que o sistema visita uniformemente toda a região do espaço de fases energeticamente disponível, a chamada superfície de energia. Através dessa hipótese, conhecida como hipótese ergódica, torna-se possível substituir médias temporais por médias sobre a superfície de energia no espaço de fases, o que significa supor que o tempo de permanência em uma dada região do espaço de fases é proporcional ao volume da região, e todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis ao longo de um período de tempo suficientemente longo. Sendo assim, um sistema é ergódico se uma trajetória típica pode visitar todo o espaço de fases para tempos longos, o que só é possível se não existirem curvas invariantes que funcionam como barreiras no espaço de fases. Dessa forma, se o espaço de fases for completamente caótico, a dinâmica observada assemelha-se à dinâmica de um sistema ergódico.

Analisar o comportamento de trajetórias em um espaço de fases dividido não é uma tarefa simples, pois a geometria (bordas) dos toros KAM é desconhecida e, sem conhecer a estrutura exata do espaço de fases, é impossível desenvolver uma abordagem analítica rigorosa. Além disso, existem regiões localizadas nas bordas das ilhas de regularidade que “aprisionam” trajetórias, e são conhecidas como singularidades ou regiões de aprisionamento. Uma singularidade pode ser comparada a uma armadilha ou, mais especificamente, uma Quase-Armadilha Dinâmica (QAD), uma vez que armadilhas absolutas são proibidas em sistemas conservativos [151].

Nesse cenário surge um tipo de dinâmica conhecida como caos fraco, caracterizado pelo comportamento intermitente de trajetórias caóticas que esporadicamente apresentam movimento quase regular por longos, porém finitos, intervalos de tempo nas vizinhanças das estruturas regulares. O aprisionamento de trajetórias em QADs é denominado efeito *stickiness*, e a ocorrência desse fenômeno depende da estrutura topológica do espaço de fases. Diferentes teorias foram desenvolvidas a fim de explicar a origem do efeito *stickiness*, mas não existe um consenso na literatura sobre esse assunto. Todavia, a explicação mais aceita é que esse efeito ocorre devido à existência dos *cantori* [152, 153], barreiras na forma de um conjunto de Cantor formadas por estruturas remanescentes de um toro KAM destruído pelo aumento da perturbação.

A transformação de um toro KAM em um *cantorus* ocorre para um determinado parâmetro do sistema dinâmico em questão. Esse tipo de barreira pode ser descrita como um toro no qual existem infinitas entradas geradas pela sobreposição das cadeias de ilhas

vizinhas. À medida que aumenta a perturbação do sistema, uma camada caótica é formada na região interna do último toro KAM que, por sua vez, não permite a conexão entre a camada caótica interna e o mar caótico que o cerca. Após a destruição parcial desse toro e a formação do *cantorus*, as entradas características desse tipo de barreira, ilustradas na Fig. 5.3, são muito pequenas e, portanto, as órbitas caóticas permanecem por longos tempos dentro do *cantorus* antes de escapar para o mar caótico, dando origem ao efeito *stickiness* [154, 155].

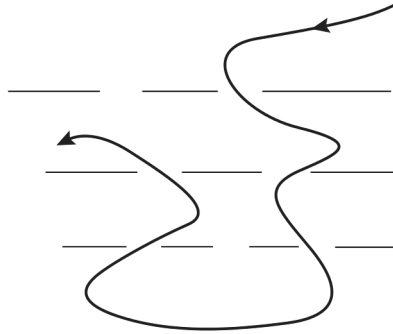


Figura 5.3 – Ilustração de uma trajetória atravessando as entradas dos *cantori*. Figura retirada da Ref. [151].

## 5.2 O mapa padrão com ruído

Um dos modelos mais utilizados para estudar a transição da dinâmica regular para caótica em sistemas Hamiltonianos é o mapa de Chirikov-Taylor [156], mais conhecido como mapa padrão, descrito matematicamente pela expressão

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \operatorname{sen}(x_n) \quad [\operatorname{mod} 2\pi], \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} \quad [\operatorname{mod} 2\pi], \end{aligned} \quad (5.22)$$

na qual os valores das variáveis  $x_n$  e  $p_n$  encontram-se no intervalo  $[0, 2\pi]$  do espaço de fases, e  $K$  é o parâmetro de não linearidade. O mapa (5.22) pode ser obtido através de um modelo físico que consiste em uma barra rígida com uma das extremidades sujeita à ação de pulsos periódicos e que gira com determinada velocidade angular. A dinâmica desse sistema, conhecido como rotor pulsado, é descrita pela coordenada generalizada  $x$  e pelo momento conjugado  $p$ , que representam a posição e o momento angular da barra, respectivamente. Maiores detalhes sobre esse modelo e a dedução do mapa padrão a partir da sua função Hamiltoniana são apresentados no Apêndice C. No Apêndice D, a condição simplética descrita pela Eq. (5.10) é testada para o mapa padrão, comprovando que esse sistema é de fato Hamiltoniano.

Para estudar os efeitos do ruído em sistemas Hamiltonianos, propõe-se modificar a dinâmica do mapa padrão acrescentando números aleatórios independentes a cada iteração, de

tal forma que o modelo utilizado neste capítulo é descrito por [157]

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \frac{K}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x_n) + \frac{D\xi_n}{2\pi} \quad [\text{mod } 1], \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} \quad [\text{mod } 1], \end{aligned} \quad (5.23)$$

no qual as variáveis  $x_n$  e  $p_n$  encontram-se no intervalo  $[0, 1]$  e não mais no intervalo  $[0, 2\pi]$ . O parâmetro de não linearidade  $K$  assume apenas valores positivos, sendo o valor desse parâmetro diretamente responsável pela configuração topológica do espaço de fases. À medida que aumenta-se o valor de  $K$ , os toros KAM são destruídos e a região estocástica do espaço de fases aumenta. A variável  $\xi_n$ , por sua vez, é uma variável aleatória que representa o efeito do ruído a cada iteração e  $D$ , também um parâmetro positivo, é responsável por controlar a intensidade desse efeito sobre o sistema.

Analisando o mapa padrão (5.23) sem ruído ( $D = 0$ ), verifica-se a existência de dois pontos fixos  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$  localizados nas coordenadas  $(x_1^*, p_1^*) = (0, 0)$  e  $(x_2^*, p_2^*) = (1/2, 0)$ , respectivamente. Para verificar as condições de estabilidade desses pontos fixos, recorre-se à equação característica (3.4), na qual  $\mathbb{J}_1(\mathbf{s})$  é a matriz Jacobiana do mapa padrão calculada em um ponto fixo  $\mathbf{s}$ . Como provado na Eq. (5.11), o determinante de uma matriz simplética é igual a 1 e, portanto, as soluções da Eq. (3.4) são

$$h_{1,2} = \frac{\operatorname{Tr} \mathbb{J}_1(\mathbf{s}) \pm \sqrt{[\operatorname{Tr} \mathbb{J}_1(\mathbf{s})]^2 - 4}}{2}. \quad (5.24)$$

Na Eq. (5.24) podem ocorrer os seguintes casos:

- (i).  $\operatorname{Tr} \mathbb{J}_1(\mathbf{s}) > 2$ , sendo os autovalores reais e positivos;
- (ii).  $\operatorname{Tr} \mathbb{J}_1(\mathbf{s}) < -2$ , sendo os autovalores reais e negativos;
- (iii).  $-2 < \operatorname{Tr} \mathbb{J}_1(\mathbf{s}) < 2$ , de forma que os autovalores são complexos conjugados de magnitude 1, tal que  $h_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ .

Os casos (i) e (ii) correspondem a um ponto fixo hiperbólico, e o caso (iii) corresponde a um ponto fixo elíptico. Do ponto de vista da estabilidade linear, os casos (i) e (ii) geram órbitas vizinhas que divergem exponencialmente da órbita periódica (instabilidade linear), ao passo que, no caso (iii), as órbitas vizinhas não se afastam (estabilidade linear) [66]. Dessa forma, conclui-se que um ponto fixo será estável se for satisfeita a condição  $|\operatorname{Tr} \mathbb{J}_1(\mathbf{s})| < 2$ . Utilizando o mapa (5.23) e considerando o caso sem ruído  $D = 0$ , obter-se-á a matriz Jacobiana  $\mathbb{J}_1(\mathbf{s})$  tal que:

$$\mathbb{J}_1(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} 1 & K \cos(2\pi x^*) \\ 1 & 1 + K \cos(2\pi x^*) \end{bmatrix},$$

de forma que

$$|\operatorname{Tr} \mathbb{J}_1(\mathbf{s})| = |2 + K \cos(2\pi x^*)| < 2. \quad (5.25)$$

A substituição dos pontos fixos  $\mathbf{s}_1 = (x_1^*, p_1^*) = (0, 0)$  e  $\mathbf{s}_2 = (x_2^*, p_2^*) = (1/2, 0)$  na Eq. (5.25) dá origem às inequações  $|2 + K| < 2$  e  $|2 - K| < 2$ , respectivamente. Da primeira inequação conclui-se que o ponto fixo  $\mathbf{s}_1$  é sempre instável, uma vez que  $K$  é sempre positivo. Por outro lado, a partir da inequação  $|2 - K| < 2$ , conclui-se que o ponto fixo  $\mathbf{s}_2$  será elíptico se  $K < 4$  e hiperbólico se  $K > 4$ . Esses dois casos podem ser verificados nas Figs. 5.4(a) e 5.4(b), nas quais o espaço de fases do mapa padrão é apresentado para  $K = 3,28$  e  $K = 4,23$ , respectivamente. Para  $K = 3,28$ , o ponto fixo encontrado em  $(x_2^*, p_2^*) = (1/2, 0)$  é estável e uma cadeia de ilhas em torno desse ponto é formada quando escolhidas diferentes condições iniciais. No caso do espaço de fases obtido com o parâmetro de não linearidade  $K = 4,23$ , as trajetórias são repelidas quando se aproximam do centro da ilha de regularidade principal, local no qual encontra-se o ponto fixo hiperbólico.

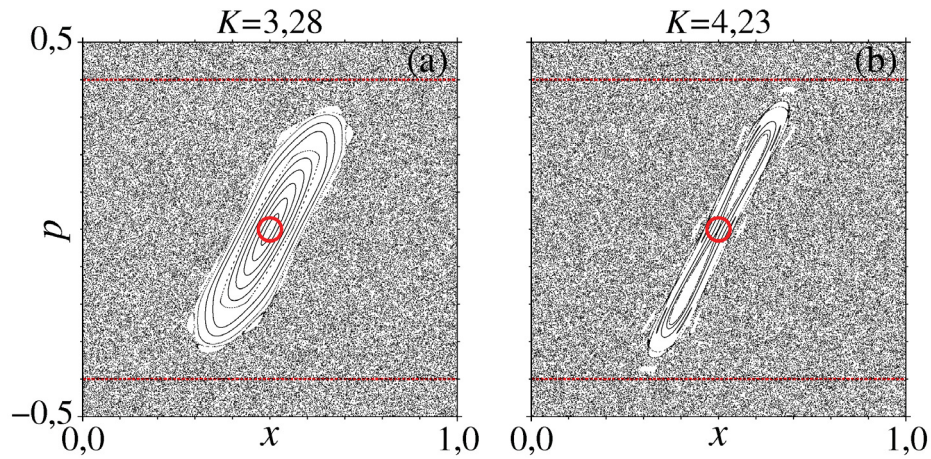


Figura 5.4 – Espaço de fases do mapa padrão com (a)  $K = 3,28$  e (b)  $K = 4,23$ . Essas figuras foram construídas utilizando  $10^2$  condições iniciais, cada uma delas iterada  $1,2 \times 10^5$  vezes. O ponto fixo localizado em  $(x_2^*, p_2^*) = (1/2, 0)$ , destacado pelo círculo vermelho, é elíptico em (a) e hiperbólico em (b). As linhas vermelhas delimitam a região de recorrência utilizada para contabilizar a estatística dos tempos de recorrência, conforme detalhado na Seção 5.4.

### 5.2.1 Condição de estabilidade do ponto central

Para o caso com ruído, no qual  $D \neq 0$ , não existirão mais órbitas periódicas, pois a variável  $\xi_n$  assumirá um valor diferente em cada tempo  $n$ . Por exemplo, o ponto fixo  $(x_2^*, p_2^*) = (1/2, 0)$  existente para o caso  $D = 0$  não será mais um ponto fixo quando  $D \neq 0$ , visto que o ruído altera sua localização a cada iteração. Por esse motivo, o ponto “fixo”  $\mathbf{s}_2$  localizado no centro da ilha de regularidade será denominado ponto central do mapa padrão com ruído (5.23). É possível analisar a condição de estabilidade do ponto central considerando apenas uma iteração do sistema, de forma que essa análise permite demonstrar que a presença de pequenos ruídos  $D\xi_n/(2\pi)$  não altera os resultados obtidos para o caso  $D = 0$ .



A matriz Jacobiana  $\mathbb{J}_1$  para uma iteração do mapa padrão (5.23) é dada por:

$$\mathbb{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & K \cos(2\pi x_n) \\ 1 & 1 + K \cos(2\pi x_n) \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

A posição do ponto central após uma iteração, no caso  $D \neq 0$ , corresponde a

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ x_1 &= -\frac{1}{(2\pi)} \arcsen[(D\xi_n)/K], \end{aligned}$$

de forma que, usando a relação  $\cos[\arcsen(x)] = \sqrt{1-x^2}$ , a matriz Jacobiana (5.26) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \pm K \sqrt{1 - (D\xi_n)^2/K^2} \\ 1 & 1 \pm K \sqrt{1 - (D\xi_n)^2/K^2} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Os autovalores  $h_{1,2}$  da matriz (5.27) são determinados pela Eq. (5.24), sendo o traço da matriz  $\mathbb{J}_1$  dado por:

$$\text{Tr } \mathbb{J}_1 = 2 \pm \sqrt{K^2 - (D\xi_n)^2}. \quad (5.28)$$

A condição de estabilidade do ponto central também é determinada pela inequação  $|\text{Tr } \mathbb{J}_1| < 2$ . Ao considerar o sinal positivo na Eq. (5.28) conclui-se que, para uma única iteração, os pontos fixos serão instáveis para qualquer valor de  $K$  e de  $D\xi_n$ . Por outro lado, ao considerar o sinal negativo, as condições de estabilidade já obtidas para os casos  $K = 3,28$  e  $K = 4,23$  permanecem inalteradas quando  $|D\xi_n| \leq 1$ , sendo esse o intervalo adotado para analisar a influência do ruído no mapa padrão no decorrer deste capítulo.

Os resultados descritos nesta subseção são importantes pois mostram analiticamente que, para determinadas intensidades de ruído, a condição de estabilidade do ponto central não é alterada. Esse fato garante que os comportamentos que serão analisados posteriormente resultam exclusivamente da adição do ruído ao sistema, e não de uma eventual mudança na estabilidade do ponto central. Sendo assim, nas próximas seções serão estudados os efeitos do ruído na dinâmica do mapa padrão com  $K = 3,28$ , caso no qual o ponto central é elíptico (Fig. 5.4(a)), e com  $K = 4,23$ , cujo ponto central é hiperbólico (Fig. 5.4(b)). O intervalo do parâmetro  $D$  será  $[0, 1]$ ; a variável  $\xi_n$ , por sua vez, assume valores  $-1 \leq \xi_n \leq 1$ , garantindo a manutenção da condição de estabilidade do ponto central.

### 5.2.2 Tipos de ruído

A fim de gerar um *ensemble* de números aleatórios  $\xi_n$  que simule os efeitos do ruído e verificar como a distribuição de probabilidade desses números interfere na dinâmica do mapa padrão, foram escolhidas três diferentes distribuições:

- (i). distribuição normal com  $\langle \xi_n \rangle = 0$  e variância 0,22, considerando apenas os números aleatórios contidos no intervalo  $-1 \leq \xi_n \leq 1$ ;
- (ii). distribuição uniforme, definida de forma que os números aleatórios se encontrem no intervalo  $-1 \leq \xi_n \leq 1$ ;
- (iii). distribuição com Correlação Lei de Potência (CLP), que consiste em uma sequência de números aleatórios escolhidos no intervalo  $-1 \leq \xi_n \leq 1$  e cuja correlação temporal decai na forma de uma lei de potência.

As sequências de números aleatórios  $\xi_n$  que seguem as distribuições normal e uniforme podem ser obtidas facilmente através de rotinas computacionais [132], sendo a principal característica dessas sequências a ausência de correlações temporais, ou seja, são ruídos Markovianos. Todavia, as sequências de números aleatórios que apresentam CLP foram obtidas com o auxílio de equações determinísticas, como será detalhado a seguir, e diferem totalmente das outras duas sequências supracitadas, uma vez que a perda de memória entre os estados passados e o estado presente ocorre de forma lenta. A fim de simplificar a linguagem adotada no decorrer deste capítulo, os ruídos  $\xi_n$  definidos a partir das distribuições (i), (ii) e (iii), apresentadas na Fig. 5.5, serão denominados ruído normal, ruído uniforme e ruído CLP, respectivamente. É importante citar que, ao gerar uma sequência de números aleatórios escolhidos de acordo com uma distribuição normal cuja variância é 0,22, podem surgir números tais que  $|\xi_n| > |1|$ . Na prática, isso ocorre em menos de 0,001% das iterações e esses números são descartados a fim de preservar o intervalo estabelecido em todas as distribuições.

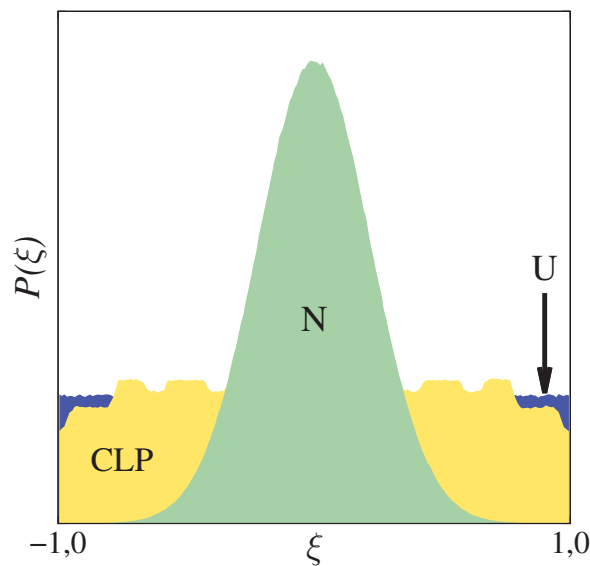


Figura 5.5 – Distribuições de probabilidade utilizadas para gerar números aleatórios  $\xi_n$ , tal que  $-1 \leq \xi_n \leq 1$ . As curvas verde, azul e amarela representam as distribuições normal (N), uniforme (U) e CLP, respectivamente.

Uma sequência de números aleatórios  $\xi_n$  que apresenta correlação temporal pode ser obtida através de equações determinísticas. Para um sistema dinâmico cujo espaço de fases é completamente caótico, espera-se que a autocorrelação  $C(\tau) = \langle f(t - \tau)f(t) \rangle$  de uma determinada quantidade  $f(t)$  decaia exponencialmente com  $\tau$  [87,158]. No entanto, para um espaço de fases dividido, diversas investigações numéricas comprovaram que  $C(\tau)$  decai de acordo com uma lei de potência [159–162], tal que  $C(\tau) \propto \tau^{-\rho}$ , apresentando evidências de um expoente universal  $\rho \approx 0,5$  para sistemas Hamiltonianos bidimensionais [161]. Além disso, outra propriedade importante desses sistemas é a estocasticidade apresentada por suas trajetórias em determinadas regiões do espaço de fases. Considere, por exemplo, o mapa padrão descrito por

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \end{aligned} \tag{5.29}$$

de forma que o momento  $I_n$  é definido no intervalo  $[-1, 1]$  e  $\theta_n$  no intervalo  $[0, 1]$ . Utilizando o parâmetro de não linearidade  $K = 2,6$ , obtém-se um espaço de fases dividido no qual toros KAM e uma grande região caótica coexistem [163,164]. Para uma dada condição inicial desse sistema, conjectura-se que o movimento nas proximidades dos pontos homoclínicos é aleatório [87]. Nesse sentido, a definição de aleatoriedade se baseia na observação de que a informação contida em uma sequência aleatória não pode ser comprimida ou reduzida a uma forma mais compacta. Devido à caoticidade presente em grande parte do espaço de fases, cada condição inicial dará origem a uma única trajetória, de forma que a sequência  $\xi_n = I_n$  pode ser considerada aleatória e temporalmente correlacionada. Como o momento  $I_n$  do mapa (5.29) encontra-se no intervalo  $-1 \leq I_n \leq 1$ , essa sequência será utilizada para gerar o ruído CLP que perturba o mapa padrão (5.23).

### 5.3 Dinâmica no espaço de fases

O espaço de fases do mapa padrão (5.23) com parâmetros de não linearidade  $K = 3,28$  e  $K = 4,23$ , quando desprezados os efeitos do ruído, é composto por uma grande ilha de regularidade cercada pelo mar caótico. A coexistência desses dois tipos de regimes forma um espaço de fases dividido, como mostram as Figs. 5.4(a) e 5.4(b). Quando  $D \neq 0$ , condições iniciais escolhidas no mar caótico podem originar trajetórias que transpassam as barreiras formadas pelos toros KAM e percorrem regiões no interior da grande ilha de regularidade, o que não é possível no caso  $D = 0$ . O espaço de fases do mapa padrão com ruído é apresentado nas Figs. 5.6(a)–5.6(i) para  $K = 3,28$  e nas Figs. 5.6(j)–5.6(r) para  $K = 4,23$ . Na primeira linha de figuras, 5.6(a)–5.6(c) e 5.6(j)–5.6(l), são apresentados os casos com ruído normal. Nas figuras da segunda linha, 5.6(d)–5.6(f) e 5.6(m)–5.6(o), e da terceira linha, 5.6(g)–5.6(i) e 5.6(p)–5.6(r), foram utilizados, respectivamente, ruído uniforme e ruído CLP. A intensidade  $D$  do ruído utilizada em cada caso encontra-se descrita

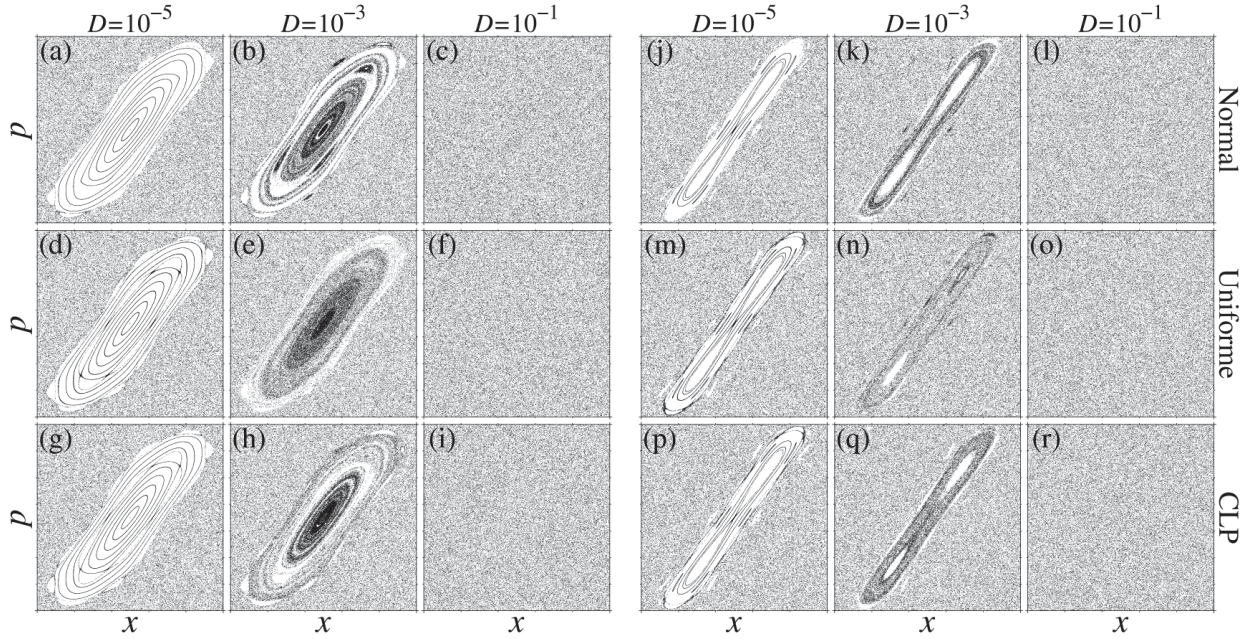


Figura 5.6 – Espaço de fases do mapa padrão com ruído (5.23), considerando os intervalos  $[x_{\min}, x_{\max}] = [0,25, 0,75]$  e  $[p_{\min}, p_{\max}] = [-0,35, 0,35]$ , com  $K = 3,28$  ((a)-(i)) e  $K = 4,23$  ((j)-(r)), utilizando diferentes intensidades de ruído que encontram-se indicadas acima de cada coluna. A primeira, a segunda e a terceira linha de figuras apresentam os resultados obtidos considerando os casos com ruído normal, ruído uniforme e ruído CLP, nessa ordem. Em todas as simulações foram utilizadas  $10^2$  condições iniciais, cada uma iterada  $3 \times 10^5$  vezes.

sobre cada coluna de figuras. Para gerar os espaços de fases da Fig. 5.6, as mesmas  $10^2$  condições iniciais da Fig. 5.4 foram utilizadas.

Analisando inicialmente o caso  $K = 3,28$  com  $D = 10^{-5}$ , apresentado nas Figs. 5.6(a), 5.6(d) e 5.6(g), nota-se que a presença do ruído afeta, de forma sutil, somente algumas órbitas dentro da ilha de regularidade, principalmente quando utilizados os ruídos uniforme e CLP. O caso mais emblemático na descrição dos efeitos do ruído no mapa padrão é  $D = 10^{-3}$ , utilizado nas Figs. 5.6(b), 5.6(e) e 5.6(h). Nessas figuras é possível visualizar alguns toros que são completamente penetrados por trajetórias caóticas e outras regiões que continuam inacessíveis. O aumento da densidade de pontos em regiões específicas no interior da ilha de regularidade indica uma intensificação do efeito *stickiness* nesses domínios, o que será tratado com maiores detalhes na Seção 5.4. Para essa sequência de figuras observa-se que a região acessível do espaço de fases depende do tipo de ruído utilizado. Usando o ruído uniforme com intensidade  $D = 10^{-3}$ , as trajetórias podem percorrer a maior parte do espaço de fases; porém, ao usar o ruído normal com a mesma intensidade, diversas regiões no interior da ilha de regularidade continuam inacessíveis. Isso significa que, quando considerado um mesmo número de iterações, as trajetórias caóticas visitam uma porção maior do espaço de fases quando o mapa padrão é perturbado por ruídos gerados a partir de distribuições de probabilidade cujos valores extremos de  $\xi_n$  são mais prováveis, como observa-se na Fig. 5.5. Aumentando a intensidade do ruído para  $D = 10^{-1}$ , aparentemente

obtém-se uma dinâmica caótica por todo o espaço de fases. Todavia, a partir da análise feita na Subseção 5.2.1, sabe-se que a estabilidade do ponto central é mantida e reminiscências do movimento regular são esperadas.

Os resultados obtidos para o caso  $K = 4,23$  são similares ao caso  $K = 3,28$ , de forma que a existência de um ponto central hiperbólico não influencia significativamente o processo de ocupação da ilha de regularidade por trajetórias caóticas. Um fato interessante pode ser verificado nas Figs. 5.6(k), 5.6(n) e 5.6(q), que mostram o caso  $D = 10^{-3}$ . Observa-se nessas figuras que as últimas regiões do espaço de fases a serem preenchidas são os focos da hipérbole gerada pelas trajetórias repelidas pelo ponto central. É importante citar que, para uma melhor visualização da dinâmica no espaço de fases, cada trajetória foi iterada  $3 \times 10^5$  vezes, valor relativamente pequeno quando comparado aos intervalos de tempo utilizados nas Seções 5.4, 5.5 e 5.6, nas quais os efeitos do ruído foram investigados utilizando a estatística dos tempos de recorrência, o maior EL e a área do espaço de fases percorrida pela trajetória em função do tempo, respectivamente. Entretanto, os resultados apresentados nesta seção têm o objetivo de estudar o processo de ocupação da ilha de regularidade, e não o comportamento assintótico do sistema.

## 5.4 Estatística dos tempos de recorrência

Uma importante consequência da conservação do volume do espaço de fases de sistemas Hamiltonianos é o teorema das recorrências de Poincaré, enunciado em 1890 por Jules Henri Poincaré. Esse teorema afirma que, para um espaço de fases limitado e com energia fixa, uma trajetória irá retornar às regiões próximas do ponto inicial após um determinado intervalo de tempo [165], como ilustra a Fig. 5.7. Informações relevantes sobre esse teorema são obtidas através da distribuição de probabilidade  $P(\tau)$  de um conjunto de amostras  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ , com  $n \rightarrow \infty$ , sendo  $\tau$  o tempo transcorrido até que a trajetória retorne a uma região específica do espaço de fases, a chamada região de recorrência. No caso com tempo contínuo,  $P(\tau)$  é a função densidade de probabilidade e  $P(\tau)d\tau$  é a probabilidade de encontrar o tempo de recorrência  $\tau_i$  entre  $\tau_i$  e  $\tau_i + d\tau_i$ , sendo essa distribuição normalizada:

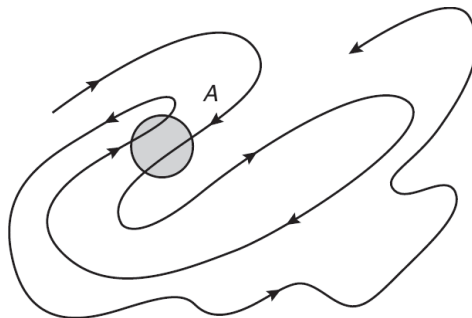


Figura 5.7 – Ilustração da recorrência de uma trajetória ao domínio  $A$  do espaço de fases após um determinado intervalo de tempo. O domínio  $A$  é denominado região de recorrência. Figura retirada da Ref. [151].

$$\int_0^{\infty} P(\tau) d\tau = 1. \quad (5.30)$$

Numericamente, é conveniente obter a probabilidade de se encontrar um tempo de recorrência  $\tau'$  com valor maior que  $\tau$ , ou seja,

$$P_{\text{cum}}(\tau) \equiv \int_{\tau}^{\infty} P(\tau') d\tau', \quad (5.31)$$

sendo  $P(\tau')$  a função densidade de probabilidade de  $\tau'$ . A quantidade  $P_{\text{cum}}(\tau)$  é conhecida como distribuição cumulativa dos tempos de recorrência, ou ainda Estatística dos Tempos de Recorrência (ETR). Na prática, observa-se que quanto maior for o tempo  $\tau$  considerado, menor será a probabilidade de que ocorra uma recorrência nesse tempo. Por esse motivo, a função  $P_{\text{cum}}(\tau)$  é representada por uma curva decrescente. A generalização para o caso com tempo discreto é direta, e então a ETR é dada por

$$P_{\text{cum}}(\tau) \equiv \sum_{\tau'=\tau}^{\infty} P(\tau'). \quad (5.32)$$

O objetivo da análise feita a partir da ETR é encontrar a melhor equação que reproduz o comportamento da curva  $P_{\text{cum}}(\tau)$ . Os casos mais comuns são curvas que seguem as leis de decaimento exponencial e de potência. O comportamento do tipo exponencial para  $P_{\text{cum}}(\tau)$  em função do tempo de recorrência  $\tau$  é uma propriedade de sistemas totalmente caóticos, com espaço de fases ergódico, ou seja, no qual toda a região tem a mesma probabilidade de ser visitada. Esse tipo de comportamento é resultado dos sucessivos retornos da trajetória à região de recorrência, sendo que o tempo de recorrência é curto. Todavia, quando trata-se de um sistema cujo espaço de fases é composto por ilhas de regularidade e domínios caóticos, a trajetória poderá ser aprisionada nas proximidades dessas ilhas e permanecer nessa região por longos períodos de tempo, não retornando à região de recorrência devido ao efeito *stickiness*. Quando tal efeito ocorre, observa-se um decaimento lento da distribuição  $P_{\text{cum}}(\tau)$ , resultando em uma lei de potência do tipo [160, 161, 165, 166]

$$P_{\text{cum}}(\tau) \sim \frac{1}{\tau^{\varphi}}, \quad (5.33)$$

sendo  $\varphi$  o expoente de decaimento. De acordo com a literatura, quando adiciona-se ruído a sistemas Hamiltonianos com espaço de fases dividido, é possível observar o comportamento conhecido como *enhanced trapping*. Esse fenômeno é representado por um decaimento ainda mais lento, também na forma de lei de potência, que ocorre para tempos intermediários nas curvas que representam a ETR [50, 161] e também nas distribuições de probabilidade dos tempos de sobrevivência das trajetórias nas regiões próximas ao ponto fixo [167]. O *enhanced trapping* é resultado da potencialização do efeito *stickiness* nas QADs, uma vez que, na presença de ruído, as trajetórias têm a possibilidade de vagar dentro das ilhas de regularidade, adiando ainda mais seu retorno à região de recorrência. A proposta desta seção é investigar a relação do *enhanced trapping* com a intensidade  $D$  do ruído, com o tipo

de distribuição utilizada para gerar  $\xi_n$  e também com a condição de estabilidade do ponto central.

Nas Figs. 5.8(a)–5.8(c) são apresentadas as curvas da ETR para o mapa padrão (5.23) com  $K = 3,28$ , usando os três diferentes tipos de ruído. A região de recorrência no espaço de fases foi definida no mar caótico, e é indicada na Fig. 5.4 pelas linhas horizontais vermelhas em  $p = -0,4$  e  $p = 0,4$ , de forma que todos os domínios do espaço de fases  $(x, p)$  contidos nos intervalos  $-0,5 \leq p \leq -0,4$  e  $0,4 \leq p \leq 0,5$ , com  $0 \leq x \leq 1$ , formam a região de recorrência. É possível mostrar que a ETR é independente da escolha da região de recorrência desde que tal região seja formada apenas por domínios caóticos, não englobando QADs [168]. O caso  $D = 0$  é representado pela curva preta, que é caracterizada por um decaimento na forma de lei de potência  $P_{\text{cum}}(\tau) \propto \tau^{-\varphi}$ , com  $\varphi = 1,55$ , devido ao efeito *stickiness* característico de sistemas com espaço de fases dividido. Nas Figs. 5.8(a) e 5.8(b), nas quais são apresentados os resultados obtidos utilizando os ruídos normal e uniforme, respectivamente, observa-se que para intensidades de ruído  $D \geq 10^{-2}$  não são

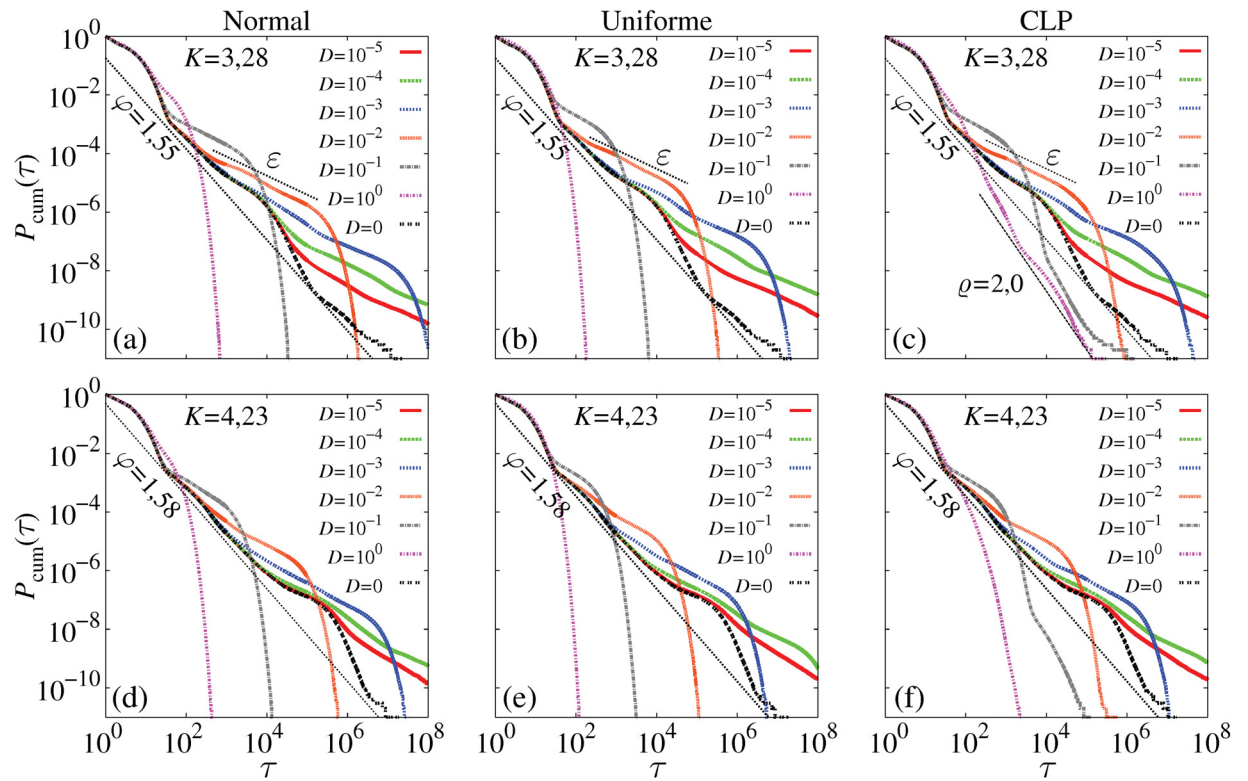


Figura 5.8 – ETR  $P_{\text{cum}}(\tau)$  obtida a partir de uma amostra de  $10^{12}$  tempos de recorrência  $\tau$  do mapa padrão com ruído (5.23). Na primeira e na segunda linha de figuras encontram-se os casos  $K = 3,28$  e  $K = 4,23$ , respectivamente, e o tipo de ruído utilizado é indicado acima de cada coluna. O intervalo de tempo no qual obtém-se um decaimento na forma de lei de potência com expoente  $\varepsilon \approx 0,65$  está relacionado à ocorrência do *enhanced trapping* no interior da ilha de regularidade. Por outro lado, o decaimento na forma de lei de potência com expoente  $\varrho = 2,0$ , apresentado pela curva magenta em (c), está relacionado ao movimento superdifusivo.

mais encontradas recorrências a tempos longos, e o comportamento da ETR deixa de ser representado por uma lei de potência e passa a ser descrito por um decaimento exponencial.

Ainda considerando  $K = 3,28$ , observa-se a ocorrência do *enhanced trapping* nos casos em que a intensidade do ruído encontra-se no intervalo  $10^{-3} \leq D \leq 10^{-1}$ , independentemente do tipo de ruído. Esse fenômeno é caracterizado pelo decaimento da ETR na forma de lei de potência com expoente  $\varepsilon \approx 0,65$ , consideravelmente menor que  $\varphi$ , e é uma consequência do aprisionamento de trajetórias em determinados domínios no interior da ilha de regularidade, como pode ser verificado nos espaços de fases das Figs. 5.6(b), 5.6(e) e 5.6(h) nas regiões com maior densidade de pontos. O decaimento suave da ETR nesses intervalos de tempo é devido à diminuição do número de recorrências. Isso acontece pois, estando a trajetória no interior da ilha de regularidade, existe uma probabilidade não nula de ocorrer uma sequência  $\xi_n$  de números aleatórios que mantém a trajetória aprisionada, retardando assim seu retorno à região de recorrência. Quando o ruído CLP é utilizado, caso apresentado na Fig. 5.8(c), observa-se um decaimento na forma de lei de potência para a ETR mesmo quando  $D = 1$  (curva magenta). No entanto, conforme mostra a Fig. 5.6(i), para  $D \geq 10^{-1}$  o espaço de fases se torna aparentemente ergódico, de forma que o decaimento da ETR deveria ser exponencial, como nas curvas magentas das Figs. 5.8(a) e 5.8(b), obtidas utilizando ruídos temporalmente decorrelacionados. O decaimento da curva magenta da Fig. 5.8(c) segue a relação  $P_{\text{cum}}(\tau) \propto \tau^{-\rho}$ , com  $\rho = 2,0$ , o que caracteriza um movimento superdifusivo no espaço de fases. É interessante observar, ainda na Fig. 5.8(c), que para  $D = 10^{-3}$  e  $D = 10^{-2}$  ocorre um decaimento exponencial para tempos longos e, ao aumentar o valor de  $D$ , o decaimento na forma de lei de potência volta a ocorrer. Esse comportamento sugere que quanto maior for a intensidade  $D$  do ruído, maior será a influência do mapa padrão auxiliar (5.29) na dinâmica do mapa padrão (5.23), visto que a relação  $\xi_n = I_n$  acopla indiretamente esses dois sistemas.

Os resultados para o mapa padrão com parâmetro de não linearidade  $K = 4,23$ , no qual o ponto central é instável, são apresentados nas Figs. 5.8(d)–5.8(f). Nesse caso o *enhanced trapping* não é tão eficiente por dois motivos: a região de aprisionamento no interior da ilha de regularidade é menor, como observa-se nas Figs. 5.6(k), 5.6(n) e 5.6(q), e o ponto hiperbólico mantém as trajetórias afastadas do centro da ilha, facilitando o retorno dessas trajetórias ao mar caótico. Como consequência, a curva magenta da Fig. 5.8(f), obtida ao utilizar o ruído CLP e  $D = 1$ , não decai na forma de lei de potência como ocorre com a curva de mesma cor na Fig. 5.8(e), que corresponde ao caso  $K = 3,28$ . Isso significa que o efeito *stickiness* presente no ruído CLP devido à relação  $\xi_n = I_n$  não é suficiente para gerar o mesmo efeito no mapa padrão (5.23) quando o ponto central é instável. Outra importante conclusão obtida através do cálculo da ETR é que as curvas do caso  $K = 3,28$ , assim como para  $K = 4,23$ , não apresentam alterações significativas quando utiliza-se ruído normal ou ruído uniforme.



## 5.5 Expoentes de Lyapunov

Com o objetivo de identificar alterações na dinâmica do mapa padrão devido ao aumento da intensidade  $D$  do ruído, o maior EL  $\lambda_1$  foi calculado para  $10^6$  trajetórias cujas condições iniciais formam uma grade de  $10^3 \times 10^3$  pontos equidistantes no espaço de fases. Para determinar  $\lambda_1$ , cada trajetória foi iterada  $2 \times 10^6$  vezes. A Fig. 5.9 foi construída considerando o caso sem ruído ( $D = 0$ ), e as cores representam o valor do maior EL calculado a partir de cada condição inicial. Nas Figs. 5.9(a) e 5.9(b), obtidas com  $K = 3,28$  e  $K = 4,23$ , respectivamente, observa-se claramente que condições iniciais localizadas dentro da ilha de regularidade dão origem a trajetórias regulares, de tal modo que  $\lambda_1 \sim 0$  (pontos amarelos), com exceção das regiões próximas ao ponto central hiperbólico na Fig. 5.9(b), cujo valor de  $\lambda_1$  é sensivelmente maior que zero (pontos vermelhos). Trajetórias cujas condições iniciais  $(x_0, p_0)$  estão localizadas no mar caótico são caracterizadas por altos valores de  $\lambda_1$ , sendo esses pontos representados pela cor ciano. Todavia, devido ao efeito *stickiness*, trajetórias caóticas iniciadas nas proximidades da ilha de regularidade apresentam valores intermediários de  $\lambda_1$  e, conseqüentemente, tais condições iniciais são representadas pelos pontos azuis.

Quando os efeitos do ruído são considerados, alterações sensíveis são observadas no valor de  $\lambda_1$  à medida que aumenta-se gradativamente o valor de  $D$ . Os resultados dessa análise são apresentados nas Figs. 5.10(a)–5.10(i) para  $K = 3,28$  e 5.10(j)–5.10(r) para  $K = 4,23$ , e o gradiente de cores utilizado para cada valor de  $K$  é o mesmo da Fig. 5.9. Nesses casos, o ruído normal foi usando na primeira linha de figuras, o ruído uniforme na segunda linha e o ruído CLP na terceira linha. É possível observar, inicialmente, que o aumento da intensidade  $D$  do ruído faz com que as trajetórias caóticas penetrem na ilha

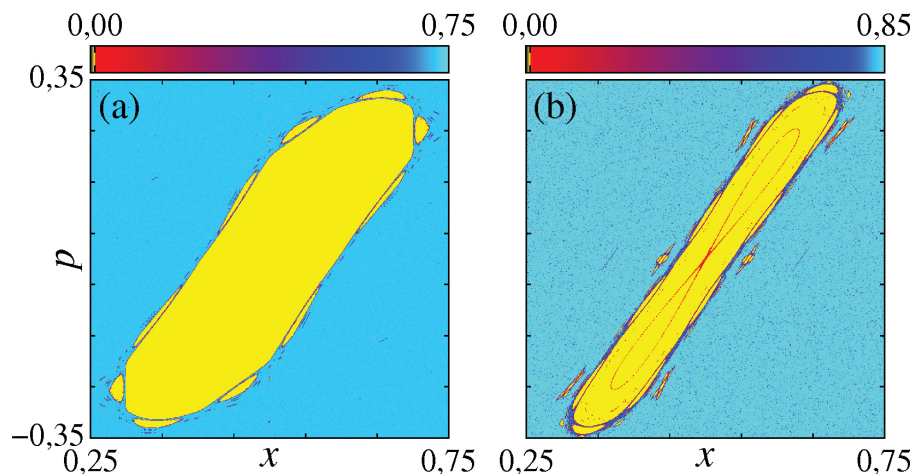


Figura 5.9 – Espaço de fases do mapa padrão (5.23), com  $D = 0$ , dividido em uma grade de  $10^3 \times 10^3$  pontos igualmente espaçados que representam as condições iniciais  $(x_0, p_0)$  de trajetórias formadas por  $2 \times 10^6$  iterações. A cor de cada ponto representa o valor do maior EL  $\lambda_1$  calculado ao longo da trajetória correspondente, e é definida de acordo com a paleta de cores posicionada acima de cada figura. Em (a), o valor do parâmetro de não linearidade é  $K = 3,28$ ; em (b),  $K = 4,23$ .

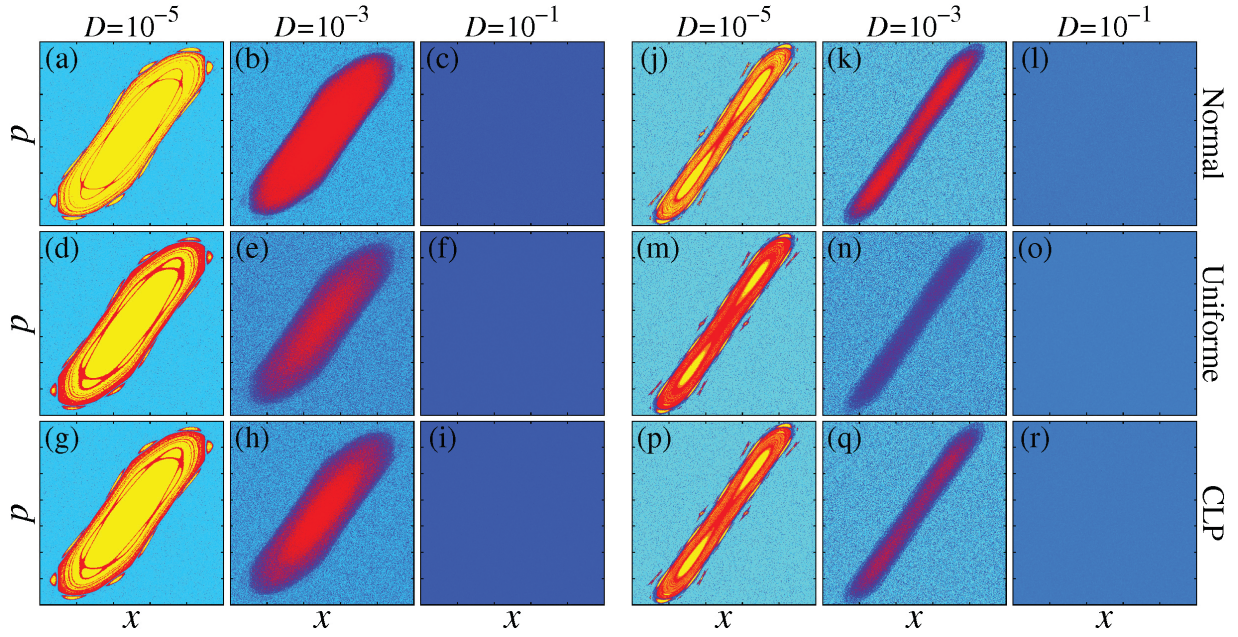


Figura 5.10 – Espaço de fases do mapa padrão com ruído (5.23) dividido em uma grade de  $10^3 \times 10^3$  pontos igualmente espaçados que representam as condições iniciais  $(x_0, p_0)$  de trajetórias formadas por  $2 \times 10^6$  iterações. As cores representam o valor do maior EL  $\lambda_1$  calculado ao longo de cada trajetória, e são definidas pela paleta da Fig. 5.9(a) no caso  $K = 3,28$  ((a)-(i)) e pela paleta da Fig. 5.9(b) no caso  $K = 4,23$  ((j)-(r)). Na primeira, na segunda e na terceira linha de figuras encontram-se os resultados obtidos usando ruído normal, ruído uniforme e ruído CLP, nessa ordem. O valor da intensidade  $D$  é indicado acima de cada coluna.

de regularidade em todos os casos considerados, de forma que os toros KAM não são mais barreiras intransponíveis que separam as regiões de movimento caótico e regular. Para  $D = 10^{-1}$  (Figs. 5.10(c), 5.10(f) e 5.10(i) para  $K = 3,28$  e 5.10(l), 5.10(o) e 5.10(r) para  $K = 4,23$ ), o espaço de fases se torna totalmente caótico e o mesmo valor de  $\lambda_1$  é obtido para todas as condições iniciais, fato esse que corrobora os resultados apresentados nas Seções 5.3 e 5.4, os quais sugerem que o espaço de fases se torna ergódico quando  $D \geq 10^{-1}$ . Entretanto, na Seção 5.4 foi demonstrado que ao usar o ruído CLP e altos valores de  $D$ , a curva da ETR apresenta um decaimento na forma de lei de potência quando  $K = 3,28$ , sendo esse o único caso em que a ergodicidade aparente do espaço de fases não corrobora os resultados obtidos através da ETR.

Quando diferentes tipos de ruído são adicionados ao sistema, as trajetórias se comportam de formas diferentes e, conseqüentemente, esses diferentes comportamentos refletem no valor do maior EL. Ao perturbar o mapa padrão usando o ruído normal, caso representado na Fig. 5.10(a) para  $K = 3,28$  e na Fig. 5.10(j) para  $K = 4,23$ , é possível notar que as trajetórias não são afetadas de forma significativa quando  $D = 10^{-5}$ . No entanto, usando o ruído uniforme (Fig. 5.10(d) para  $K = 3,28$  e 5.10(m) para  $K = 4,23$ ) e o ruído CLP (Fig. 5.10(g) para  $K = 3,28$  e 5.10(p) para  $K = 4,23$ ), obtém-se um número maior de trajetórias que se tornam instáveis mesmo sendo geradas a partir de condições iniciais que

se localizam no interior da ilha de regularidade, o que é evidente pela quantidade maior de pontos vermelhos nesses casos quando comparados ao caso com ruído normal.

Os resultados obtidos com intensidade  $D = 10^{-3}$  são apresentados nas Figs. 5.10(b), 5.10(e) e 5.10(h) para  $K = 3,28$  e nas Figs. 5.10(k), 5.10(n) e 5.10(q) para  $K = 4,23$ . A ausência de pontos amarelos nessas figuras indica que nenhuma condição inicial  $(x_0, p_0)$  dá origem a uma trajetória totalmente regular. Ao usar ruído uniforme (Figs. 5.10(e) e 5.10(n)), valores altos de  $\lambda_1$  ( $\geq 0,5$ ) são obtidos para trajetórias cujas condições iniciais se localizam dentro da ilha de regularidade. Ademais, ao aumentar a intensidade do ruído de  $D = 10^{-5}$  para  $D = 10^{-3}$  no caso  $K = 4,23$ , observa-se um aumento considerável na magnitude de  $\lambda_1$  das trajetórias iniciadas nas regiões próximas ao ponto central hiperbólico. Por outro lado, para  $K = 3,28$ , as vizinhanças do ponto central continuam gerando trajetórias relativamente regulares (Fig. 5.10(e)).

Como já citado anteriormente, o espaço de fases obtido para o caso  $D = 10^{-1}$  é aparentemente ergódico. No entanto, é importante observar que o valor de  $\lambda_1$  encontrado para todas as combinações  $(x_0, p_0)$  é menor que o valor de  $\lambda_1$  calculado ao longo de uma trajetória caótica do mapa padrão sem ruído. Esse fato torna-se evidente ao comparar a tonalidade da cor ciano encontrada no mar caótico da Fig. 5.9(a) com a tonalidade da cor ciano que cobre todo o espaço de fases das Figs. 5.10(c), 5.10(f) e 5.10(i) para o caso  $K = 3,28$ . Da mesma forma, para o caso  $K = 4,23$ , uma comparação entre a cor que preenche o mar caótico do mapa padrão sem ruído na Fig. 5.9(b) e a cor de todo o espaço de fases das Figs. 5.10(l), 5.10(o) e 5.10(r) conduz à mesma conclusão. A diminuição do valor de  $\lambda_1$  para uma trajetória perturbada é um resultado importante que contém algumas informações sobre a dinâmica do sistema e sobre a topologia do espaço de fases. Sabe-se que o ruído permite que uma trajetória caótica penetre na ilha de regularidade. Quando isso ocorre, tal trajetória descreve um movimento predominantemente regular enquanto a sequência de números aleatórios  $\xi_n$  não for capaz de fazê-la retornar ao mar caótico, sendo o valor do maior EL diretamente afetado por esse movimento. Desse modo conclui-se que, apesar do espaço de fases parecer totalmente caótico, os toros KAM ainda exercem influência sobre a dinâmica do sistema, uma vez que o ruído não modifica a topologia do espaço de fases. Essa conclusão é geral, não importando o tipo de ruído utilizado para perturbar o mapa padrão, nem mesmo a condição de estabilidade do ponto central.

## 5.6 Visitação do espaço de fases

Esta seção tem como objetivo investigar como a trajetória percorre os diferentes domínios do espaço de fases à medida que crescem o número de iterações e a intensidade do ruído. Na Fig. 5.11 é apresentada a porcentagem da área do espaço de fases  $A(\%)$  que foi visitada em função do número de iterações  $n$ , considerando uma trajetória iniciada no mar caótico, tal que  $x_0 = 0,159146$  e  $p_0 = -0,470110$ . Para obter  $A(\%)$ , o espaço de fases foi dividido em  $10^6$  quadrados de mesma área, de forma que cada quadrado visitado pela

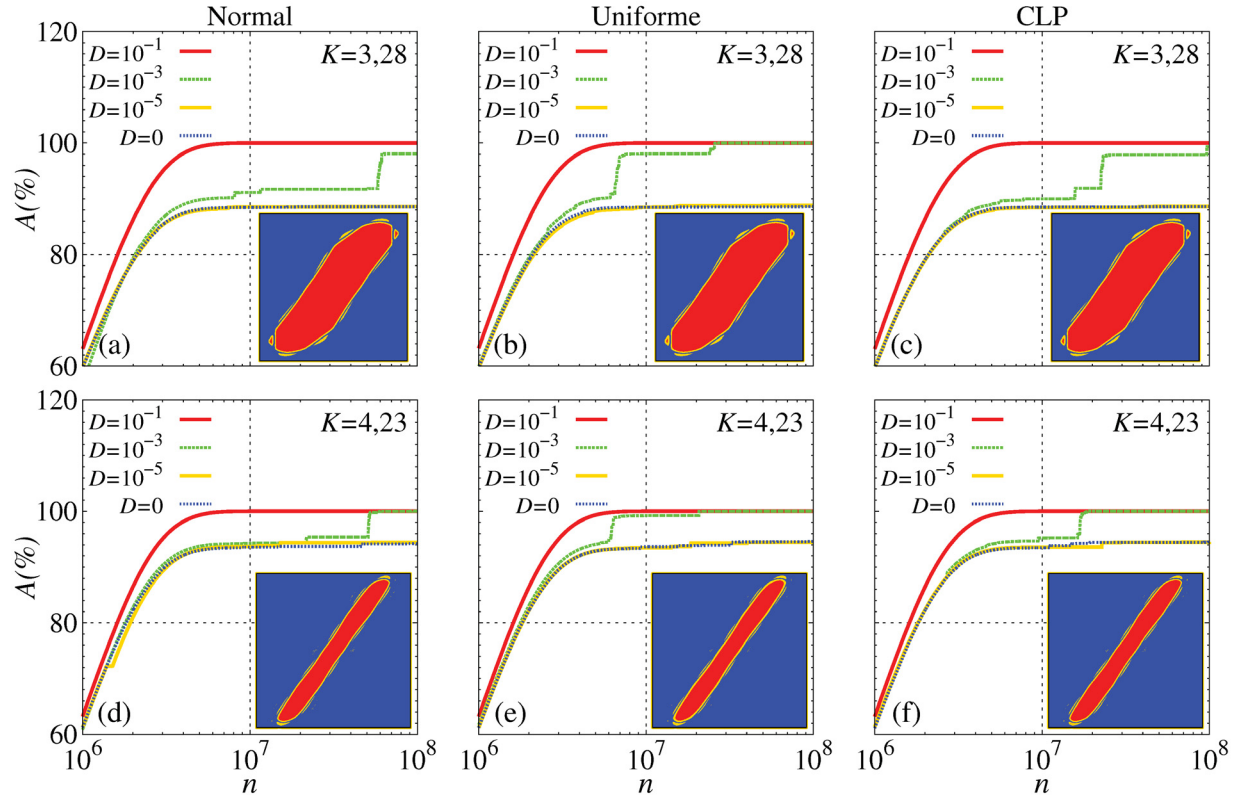


Figura 5.11 – Porcentagem da área do espaço de fases  $A(\%)$  visitada pela trajetória em função do número de iterações para diferentes intensidades  $D$  e para os três tipos de ruído usando  $K = 3,28$  em (a)-(c) e  $K = 4,23$  em (d)-(f). As subfiguras mostram as regiões ocupadas pela trajetória em cada caso após  $10^8$  iterações. Os pontos azuis indicam os domínios do espaço de fases visitados para  $D = 0$ , enquanto os pontos azuis + amarelos e azuis + amarelos + vermelhos indicam os domínios do espaço de fases visitados pela trajetória caótica para  $D = 10^{-5}$  e para  $D = 10^{-1}$ , respectivamente. Em todos os casos foi considerada a mesma trajetória iniciada no mar caótico, tal que  $(x_0, p_0) = (0,159146, -0.470110)$ .

trajetória é contabilizado somente uma vez. Com o aumento do número de iterações  $n$ , mais quadrados são visitados e a quantidade  $A(\%)$  para um valor específico de  $n$  é calculada pela razão entre o número total de quadrados visitados e o número total de quadrados existentes no espaço de fases. Para o caso  $D = 0$ , o valor máximo de  $A(\%)$  está associado à área do mar caótico, visto que a trajetória não pode penetrar na ilha de regularidade. Com o aumento gradativo de  $D$ , regiões regulares passam a ser visitadas pela trajetória caótica e o valor máximo de  $A(\%)$  também aumenta. Para o caso  $D = 10^{-1}$ , como esperado, é possível visitar todo o espaço de fases. As curvas vermelhas da Fig. 5.11 mostram que a trajetória caótica tem acesso a 100% do espaço de fases após  $n \approx 7 \times 10^6$  iterações, independentemente do tipo de ruído utilizado e da condição de estabilidade do ponto central.

Efetuada uma comparação entre os casos  $D = 0$  (curvas azuis) e  $D = 10^{-5}$  (curvas amarelas), poucas diferenças são encontradas no valor de  $A(\%)$ , e torna-se necessário observar os diferentes domínios do espaço de fases que foram visitados pela trajetória em cada um desses casos. As subfiguras apresentadas na Fig. 5.11 mostram o espaço de fases do mapa

padrão com ruído, e as cores, que estão relacionadas às diferentes intensidades  $D$  do ruído, representam os quadrados que foram visitados ao menos uma vez ao longo das  $10^8$  iterações da trajetória caótica. Os pontos azuis indicam a área visitada pela trajetória no caso  $D = 0$  e os pontos azuis + amarelos indicam a área visitada para  $D = 10^{-5}$ . Sendo assim, os pontos amarelos representam regiões regulares que trajetórias caóticas do mapa padrão sem ruído não têm acesso. As subfiguras mostram que, quando  $D = 10^{-5}$ , a trajetória visita regiões delimitadas pelas ressonâncias de maior período localizadas no entorno da grande ilha de regularidade, o que explica a pequena diferença entre os valores de  $A(\%)$  para os casos  $D = 0$  e  $D = 10^{-5}$ . Em intervalos de tempo específicos, a trajetória permanece presa nessas pequenas ilhas e o valor de  $A(\%)$  do caso  $D = 10^{-5}$  (curva amarela) é menor do que para o caso  $D = 0$  (curva azul), como observa-se nas Figs. 5.11(d) para  $n \approx 1,6 \times 10^6$  e 5.11(f) para  $n \approx 1,8 \times 10^7$ .

Os resultados mais interessantes dessa análise foram obtidos ao usar  $D = 10^{-3}$ , caso representado pelas curvas verdes. As Figs. 5.11(d), 5.11(e) e 5.11(f) mostram que, com  $K = 4,23$ , o espaço de fases é completamente explorado para todos os tipos de ruído quando  $D = 10^{-3}$ . Por outro lado, com  $K = 3,28$ , a trajetória somente percorre 100% do espaço de fases quando utiliza-se o ruído uniforme e após um número considerável de iterações,  $n \approx 2,8 \times 10^7$ , como mostra a curva verde na Fig. 5.11(b). As Figs. 5.11(a) e 5.11(c), obtidas usando, respectivamente, ruído normal e ruído CLP, mostram que algumas regiões continuam inacessíveis mesmo após  $10^8$  iterações. Também é possível notar em todas as curvas verdes um aumento repentino de  $A(\%)$ , o que significa que a penetração na ilha ocorre de forma abrupta em valores específicos de  $n$ . É importante enfatizar que os resultados apresentados nesta seção foram obtidos a partir de uma mesma condição inicial que encontra-se no mar caótico. Caso outra condição inicial for escolhida, as curvas podem ser levemente alteradas, mas as principais conclusões aqui descritas continuam válidas.

## 5.7 Conclusões parciais

Neste capítulo, os efeitos causados por perturbações aleatórias na dinâmica do mapa padrão foram estudados utilizando três diferentes tipos de ruído. Para o caso  $K = 3,28$ , no qual o ponto central do mapa padrão é estável, as curvas da ETR mostram que o efeito *stickiness* se torna mais robusto quando a intensidade do ruído é  $10^{-5} \leq D \leq 10^{-4}$ . Para intensidades  $10^{-3} \leq D \leq 10^{-1}$ , em determinados intervalos de tempo, a ETR apresenta um decaimento na forma de lei de potência com expoente  $\varepsilon \approx 0,65$ , indicando a ocorrência do efeito conhecido como *enhanced trapping*. Quando um decaimento exponencial é obtido para a ETR, observa-se que a ilha de regularidade é completamente explorada pela trajetória, tanto para o caso  $K = 3,28$  como para  $K = 4,23$ . No entanto, ao adicionar o ruído CLP com intensidade  $D \geq 10^{-1}$  ao mapa padrão com  $K = 3,28$ , mesmo o espaço de fases sendo completamente visitado pela trajetória, a ETR segue uma lei de potência cujo expoente de decaimento é  $\varrho = 2,0$ , valor que representa um movimento superdifusivo através da ilha de

regularidade.

Na Seção 5.5 foi observado que, para altos valores de  $D$ , o valor do maior EL de uma trajetória caótica do mapa padrão com ruído é menor que o valor de  $\lambda_1$  obtido para uma trajetória caótica do mapa padrão determinístico. Essa diferença ocorre pois apenas o ruído permite que trajetórias caóticas penetrem nas ilhas e executem, por determinado intervalo de tempo, um movimento aproximadamente regular. Os resultados da Seção 5.6 mostram que, dos três tipos de ruído utilizados, o ruído uniforme permite que uma área maior do espaço de fases seja visitada pela trajetória, considerando um mesmo número de iterações em todos os casos.

## Capítulo 6

---

### Considerações Finais

---

O fato de sistemas dinâmicos não lineares serem susceptíveis a drásticas mudanças de comportamento, quando submetidos a pequenas perturbações, foi extensivamente utilizado nas últimas décadas para promover técnicas de controle do caos nos mais variados tipos de sistemas [19–24, 72, 74]. Grande parte desses métodos de controle consiste em adicionar ao modelo estudado pequenas perturbações que deslocam estruturas periódicas para uma região de interesse do espaço de parâmetros, a fim de estabilizar trajetórias caóticas. No entanto, após o comportamento regular ser obtido, ele apenas é válido para um pequeno domínio paramétrico específico, de forma que perturbações externas podem fazer com que a trajetória se torne instável novamente. Assim sendo, o objetivo do estudo desenvolvido nesta tese foi propor um método capaz de aumentar o número de combinações paramétricas que geram movimento periódico, garantindo a manutenção da estabilidade das trajetórias mesmo quando pequenas intensidades de ruído são acrescentadas ao sistema.

O método proposto para multiplicar estruturas periódicas foi introduzido no Capítulo 2, utilizando o Mapa Quadrático (MQ). Se um parâmetro  $F_j$  de período  $k = 2$  for adicionado ao MQ, sendo  $F_1 = -F$  e  $F_2 = +F$ , por exemplo, obtém-se dois Mapas Quadráticos Modificados (MQMs): o MQ modificado pelo parâmetro  $-F$  e o MQ modificado pelo parâmetro  $+F$ . As sucessivas iterações desses dois MQMs dão origem ao mapa composto  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ , cujas curvas analíticas de bifurcação são funções do parâmetro de não linearidade  $a$  e também do parâmetro externo  $F$ . A curva  $W_1^{(k=2)}(a, F) = 0$  mostra que, ao compor dois MQMs, são obtidas duas bifurcações sela-nó para valores diferentes de  $a$ , que dão origem às duas órbitas assintoticamente estáveis de período 1 do mapa  $\mathcal{C}^{(k=2)}$ . Essas órbitas obtidas analiticamente são mapeadas pelas variáveis  $x_n^{(c)}$  do mapa composto que, juntamente com as variáveis intermediárias  $x_n$ , dão origem ao processo de duplicação e separação das regiões de período par no diagrama de bifurcação. Por outro lado, ainda considerando o caso  $k = 2$ , os períodos ímpares tornam-se proibidos, pois a composição de dois mapas ocasiona a duplicidade do número de órbitas assintoticamente estáveis quando as iterações intermediárias são consideradas. Observando os resultados obtidos para  $k = 3$ ,  $k = 4$  e  $k = 5$ , conclui-se que, para ocorrer a proliferação de regiões periódicas, é indispensável que

a razão  $\eta = m/k$  entre a periodicidade  $m$  da órbita correspondente e o número  $k$  de MQMs utilizados na composição resulte em um número inteiro, ou seja,  $\eta \in \mathbb{Z}$ . Caso contrário, as órbitas geradas pelo mapa composto passarão a ter período  $m' = km$ .

Para o Mapa de Hénon (MH), é possível construir um espaço de parâmetros  $(a, b)$  no qual observa-se a coexistência de domínios caóticos e periódicos, esses últimos denominados Estruturas Isoperiódicas (EIPs). Aplicando o método ao MH, é possível multiplicar as EIPs escolhendo adequadamente o período e a intensidade do parâmetro  $F_j$ , o que leva a uma diminuição considerável do domínio caótico no espaço de parâmetros, como mostram os resultados do Capítulo 3. Analisando o espaço de parâmetros do mapa  $\mathcal{H}^{(k=2)}$  com o valor do maior Expoente de Lyapunov (EL)  $\lambda_1$ , conclui-se que as EIPs criadas quando  $F \neq 0$  são idênticas às originais, de forma que não só o domínio regular é multiplicado, mas também toda a dinâmica característica do sistema ocorrerá  $k$  vezes, incluindo o nascimento da EIP através de uma bifurcação sela-nó, a região de superestabilidade em sua parte mais interna, a perda de estabilidade e as sucessivas Bifurcações por Dobramento de Período (BDPs). Os resultados das Seções 3.4 e 3.5 mostram que a proliferação de EIPs apenas ocorre quando as mesmas regras estabelecidas para o mapa composto por MQMs são satisfeitas, de forma que a razão  $\eta$  entre o período principal  $m$  da EIP e o número  $k$  de Mapas de Hénon Modificados (MHMs) utilizados na composição deve resultar em um número inteiro. Caso contrário, o período principal  $m$  da EIP será aumentado para  $m' = km$ , e esse domínio não será multiplicado no espaço de parâmetros. Assim como para o caso unidimensional, a composição de mapas bidimensionais modificados pelo parâmetro externo  $F_j$  também gera  $k$  atratores no espaço de fases, sendo que as bacias de atração desses atratores são parcialmente crivadas e encontram-se entrelaçadas.

No caso de sistemas estocásticos, esse método mostrou-se bastante eficiente na recuperação de regiões periódicas que são afetadas pelo ruído. Para o Mapa Catraca (MC), sistema no qual as EIPs concentram combinações paramétricas que conduzem a valores ótimos para a corrente de partículas  $\mathcal{J}$ , verificou-se que as réplicas das EIPs geradas pelo mapa  $\mathcal{R}_T^{(k=2)}$  composto por Mapas Catraca Estocásticos Modificados (MCEMs) são tão resistentes aos efeitos do ruído térmico quanto às originais, proporcionando um aumento da área do espaço de parâmetros com  $\mathcal{J} < -5$  de 77,5% para  $T = 10^{-5}$  e de 78,1% para  $T = 10^{-3}$ . Sob ação da temperatura, o sistema perde estabilidade primeiramente nas bordas das EIPs, sendo a parte central desses domínios mais resistente. Aumentando a área do espaço de parâmetros ocupada pelas EIPs, automaticamente aumenta-se também a intensidade do ruído necessária para destruir completamente esses domínios, de tal forma que o procedimento adotado para multiplicar EIPs é capaz de garantir a estabilidade do sistema mesmo quando ruídos mais intensos são aplicados.

Tratando-se de sistemas a tempo contínuo, a multiplicação de estruturas periódicas ocorre por meio de um processo diferente. No entanto, a essência do método é a mesma: deve-se adicionar ao modelo uma perturbação periódica adequada. A principal diferença



entre mapas e equações diferenciais é que, para o caso contínuo, a adição de um termo periódico não é capaz de criar novos atratores, como ocorre no caso discreto devido ao processo de composição. Sendo assim, apenas os domínios do espaço de parâmetros que apresentam multiestabilidade poderão ser multiplicados. Cada atrator periódico no espaço de fases corresponde a um domínio regular no espaço de parâmetros. Caso existam dois atratores periódicos no espaço de fases de uma única combinação paramétrica, então existem duas estruturas periódicas no espaço de parâmetros associadas a esses atratores. Portanto, quando há multiestabilidade, a estrutura periódica correspondente é degenerada e, para quebrar essa degenerescência e desunir essas estruturas, é necessário quebrar a simetria do sistema e separar esses atratores no espaço de fases.

O primeiro sistema a tempo contínuo considerado foi a equação de Langevin, cujos resultados foram apresentados na Subseção 4.4.1. Como o potencial  $U(x)$  escolhido é assimétrico em  $x$ , esse sistema apresenta apenas simetria temporal, que encontra-se no termo perturbativo  $B\text{sen}(\omega t)$ . A fim de quebrar essa simetria, foi adicionada ao modelo uma nova força externa  $F(t) = F \cos(2t)$ , que apresenta uma diferença de fase  $2\pi$  em relação ao termo já existente e também uma frequência angular diferente. Dessa forma, aumentando a intensidade  $F$ , é possível mover os atratores em direções opostas no espaço de fases e separar as estruturas periódicas degeneradas no espaço de parâmetros, proporcionando um aumento de 85% na área que disponibiliza correntes  $\mathcal{J}_c$  cujo valor absoluto é maior do que 0,1. No caso do Circuito de Chua Adimensional com Realimentação (CCAR), apresentado na Subseção 4.4.2, os atratores são simétricos nas variáveis  $X, Y$  e  $Z$ . Se o forçamento  $F(X)$  for composto apenas por uma função periódica, tal que  $F(X) = A\text{sen}(B_p X)$ , as EIPs degeneradas se movem na mesma direção do espaço de parâmetros, e não obtém-se aumento da região regular. Entretanto, quando o termo assimétrico  $F \cos(3B_p X)$  é adicionado à função  $F(X)$ , a simetria na variável  $X$  é quebrada, e torna-se possível separar os atratores no espaço de fases e dissociar as EIPs no espaço de parâmetros, obtendo um aumento da área periódica de 57,8% quando os efeitos do ruído são considerados.

Os resultados apresentados ao longo desta tese demonstram que o método desenvolvido é bem sucedido em sua proposta. A ampliação de determinado domínio paramétrico que é afetado pelo ruído é de extrema importância quando pretende-se reproduzir em laboratório os resultados obtidos numericamente. Suponha que deseja-se investigar a dinâmica do circuito de Chua experimentalmente para uma combinação paramétrica  $(\alpha, \zeta)$  que, para o modelo teórico, resulta em uma dinâmica periódica. Nesse caso, os parâmetros de controle estão diretamente relacionados às propriedades físicas dos dispositivos experimentais, tais como a resistência, a indutância e a capacitância. Durante a execução do experimento no laboratório, os ruídos intrínsecos ao ambiente e também as imprecisões características dos dispositivos eletrônicos, especificadas pela margem de erro percentual, podem alterar a dinâmica do sistema, de forma que o resultado obtido pode ser completamente diferente daquele esperado para a configuração do circuito. Esse problema é ainda mais evidente

quando a combinação paramétrica localiza-se na borda de uma EIP, região que certamente será afetada pelo ruído. Dessa forma, se o aumento do domínio periódico no espaço de parâmetros experimental por meio do forçamento assimétrico  $F(X)$  for superior à incerteza das especificações dos dispositivos, o método garante que essas flutuações não modificarão a dinâmica do sistema.

Os efeitos de perturbações aleatórias em sistemas Hamiltonianos também foram investigados, utilizando como modelo o mapa padrão com ruído aditivo. De forma geral, as curvas da Estatística dos Tempos de Recorrência (ETR) mostram que o efeito *stickiness* se torna mais robusto quando a intensidade do ruído é  $10^{-5} \leq D \leq 10^{-4}$ , independentemente do tipo de ruído. A partir da ETR também observa-se que, para determinados intervalos de tempo e de intensidade  $D$ , obtém-se um decaimento na forma de lei de potência cujo expoente é  $\varepsilon \approx 0,65$ , indicando a ocorrência do efeito conhecido como *enhanced trapping*. Quando a curva da ETR apresenta um decaimento exponencial, nota-se que a ilha de regularidade é completamente explorada pela trajetória e o espaço de fases se torna aparentemente ergódico. Apenas quando adiciona-se ruído com Correlação Lei de Potência (CLP) de alta intensidade a um mapa padrão com  $K = 3,28$ , para o qual o ponto central é elíptico, a ETR não apresenta um decaimento exponencial, mesmo que o espaço de fases seja completamente preenchido pela trajetória. Para esse caso, foi encontrado um decaimento na forma de lei de potência cujo expoente é  $\varrho = 2,0$ , o que representa um movimento superdifusivo através da ilha de regularidade.

Analisando o valor do maior EL de trajetórias caóticas do mapa padrão com ruído para  $D = 10^{-1}$  e do mapa padrão sem ruído, observa-se que  $\lambda_1$  do caso perturbado é menor que do caso determinístico. Isso ocorre pois a trajetória perturbada pode penetrar nas ilhas e executar um movimento regular por determinado intervalo de tempo, gerando uma diminuição do valor de  $\lambda_1$ . Sendo assim, mesmo não existindo mais regiões proibidas no espaço de fases, reminiscências das ilhas de regularidade podem ser percebidas através do valor do EL, uma vez que o ruído não altera a configuração topológica do espaço de fases. Em relação aos tipos de ruído, verifica-se que o ruído uniforme permite que uma área maior do espaço de fases seja visitada pela trajetória. De forma geral, os resultados do Capítulo 5 mostram que não é o tipo de distribuição de probabilidade utilizada para gerar  $\xi_n$  que exerce maior influência na dinâmica de sistemas Hamiltonianos perturbados, mas sim o desvio padrão da distribuição. Quando comparados os resultados obtidos adotando valores de  $K$  que resultam em diferentes condições de estabilidade para o ponto central, observa-se que a transição de um espaço de fases dividido para um totalmente caótico através do aumento gradativo de  $D$  ocorre mais rapidamente para o caso no qual o ponto central é instável.

## 6.1 Trabalhos futuros

O método de proliferação de estruturas regulares por meio da adição de perturbações periódicas mostrou-se bastante geral e aplicável aos mais variados tipos de modelos discretos

e também contínuos, desde que a condição da multiestabilidade seja satisfeita. Visto o sucesso desse procedimento na geração de transporte direcionado em sistemas catraca, uma proposta de trabalho consiste em estudar os efeitos da perturbação externa em um modelo que simula o movimento de duas partículas Brownianas acopladas elasticamente, sendo o movimento de cada uma delas descrito por uma equação de Langevin. Esse tipo de sistema pode ser utilizado na investigação do fenômeno de reversão da corrente e também para estudar as condições para as quais ocorre sincronização [169]. Para esse mesmo modelo, é possível ainda modificar o tipo de acoplamento, adotando por exemplo um potencial de Lennard-Jones, o qual é aplicável na descrição das interações entre monômeros de uma única molécula de DNA [170–172].

## 6.2 Produção científica

Os principais resultados apresentados nesta tese deram origem aos artigos científicos que encontram-se listados a seguir, em ordem cronológica:

1. Manchein, C.; Da Silva, R. M.; Beims, M. W. *Proliferation of stability in phase and parameter spaces of nonlinear systems*. **Chaos**, v. 27, n. 8, p. 081101, 2017.
2. Da Silva, R. M.; Manchein, C.; Beims, M. W. *Controlling intermediate dynamics in a family of quadratic maps*. **Chaos**, v. 27, n. 10, p. 103101, 2017.
3. Da Silva, R. M.; Manchein, C.; Beims, M. W. *Exploring conservative islands using correlated and uncorrelated noise*. **Phys. Rev. E**, v. 97, n. 2, p. 022219, 2018.
4. Da Silva, R. M.; Manchein, C.; Beims, M. W. *Optimizing thermally affected ratchet currents using periodic perturbations*. **Physica A**, v. 508, p. 454-460, 2018.
5. Da Silva, R. M.; Nicolau, N. S.; Manchein, C.; Beims, M. W. *Steering multiattractors to overcome parameter inaccuracy and noise effects*. **Phys. Rev. E**, v. 98, n. 3, p. 032210, 2018.

---

## Referências

---

- [1] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5a. ed. Belmont: Brooks/Cole Thomson Learning, 2004.
- [2] SCOTT, A. C. **The Nonlinear Universe: Chaos, Emergence, Life**. Nova York: Springer-Verlag, 2007.
- [3] SOMPOLINSKY, H.; CRISANTI, A.; SOMMERS, H. J. Chaos in random neural networks. **Phys. Rev. Lett.**, v. 61, n. 3, p. 259–262, 1988.
- [4] BATISTA, C. A. S. et al. Chaotic phase synchronization in scale-free networks of bursting neurons. **Phys. Rev. E**, v. 76, n. 1, p. 016218, 2007.
- [5] BOUCHAUD, J.-P.; MATA CZ, A.; POTTERS, M. Leverage effect in financial markets: The retarded volatility model. **Phys. Rev. Lett.**, v. 87, n. 22, p. 228701, 2001.
- [6] DANIELS, M. G. et al. Quantitative model of price diffusion and market friction based on trading as a mechanistic random process. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, n. 10, p. 108102, 2003.
- [7] KREE, R.; SCHAUB, B.; SCHMITTMANN, B. Effects of pollution on critical population dynamics. **Phys. Rev. A**, v. 39, n. 4, p. 2214–2221, 1989.
- [8] JÜLICHER, F.; AJDARI, A.; PROST, J. Modeling molecular motors. **Rev. Mod. Phys.**, v. 69, n. 4, p. 1269–1282, 1997.
- [9] PLEROU, V. et al. Economic fluctuations and anomalous diffusion. **Phys. Rev. E**, v. 62, n. 3, p. R3023–R3026, 2000.
- [10] LUTZ, E. Fractional Langevin equation. **Phys. Rev. E**, v. 64, n. 5, p. 051106, 2001.
- [11] BUNDE, A. et al. Long-term memory: A natural mechanism for the clustering of extreme events and anomalous residual times in climate records. **Phys. Rev. Lett.**, v. 94, n. 4, p. 048701, 2005.
- [12] KRÜGER, T. S. et al. Mechanism for stickiness suppression during extreme events in Hamiltonian systems. **Phys. Rev. E**, v. 91, n. 6, p. 062903, 2015.
- [13] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. Nova York: Springer-Verlag, 1996.
- [14] BOCCALETTI, S. et al. The control of chaos: Theory and applications. **Phys. Rep.**, v. 329, n. 3, p. 103–197, 2000.

- [15] SCHIFF, S. J. et al. Controlling chaos in the brain. **Nature**, v. 370, p. 615–620, 1994.
- [16] GARFINKEL, A. et al. Controlling cardiac chaos. **Nature**, v. 257, p. 1230–1235, 1992.
- [17] HAYES, S.; GREBOGI, C.; OTT, E. Communicating with chaos. **Phys. Rev. Lett.**, v. 70, n. 20, p. 3031–3034, 1993.
- [18] HUNT, E. R. Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: The diode resonator. **Phys. Rev. Lett.**, v. 67, n. 15, p. 1953–1955, 1991.
- [19] OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. **Phys. Rev. Lett.**, v. 64, n. 11, p. 1196–1199, 1990.
- [20] SHINBROT, T. et al. Using chaos to direct trajectories to targets. **Phys. Rev. Lett.**, v. 65, n. 26, p. 3215–3218, 1990.
- [21] SHINBROT, T. et al. Using small perturbations to control chaos. **Nature**, v. 363, p. 411–417, 1993.
- [22] BRAIMAN, Y.; GOLDBIRSCHE, I. Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations. **Phys. Rev. Lett.**, v. 66, n. 20, p. 2545–2548, 1991.
- [23] QU, Z. et al. Phase effect in taming nonautonomous chaos by weak harmonic perturbations. **Phys. Rev. Lett.**, v. 74, n. 10, p. 1736–1739, 1995.
- [24] KAPITANIAK, T. Controlling chaotic oscillators without feedback. **Chaos Soliton Fract.**, v. 2, n. 5, p. 519–530, 1992.
- [25] FRASER, S.; KAPRAL, R. Analysis of flow hysteresis by a one-dimensional map. **Phys. Rev. A**, v. 25, n. 6, p. 3223–3233, 1982.
- [26] GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the Hénon map. **Phys. Rev. Lett.**, v. 70, n. 18, p. 2714–2717, 1993.
- [27] GALLAS, J. A. C. Dissecting shrimps: Results for some one-dimensional physical models. **Physica A**, v. 202, n. 1, p. 196–223, 1994.
- [28] GALLAS, J. A. C. Units: Remarkable points in dynamical systems. **Physica A**, v. 222, n. 1, p. 125–151, 1995.
- [29] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C.; UEDA, Y. Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator. **Phys. Rev. E**, v. 77, n. 2, p. 026217, 2008.
- [30] ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua’s circuit. **Phys. Lett. A**, v. 372, n. 27, p. 4793–4798, 2008.
- [31] STEGEMANN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. Some two-dimensional parameter spaces of a Chua system with cubic nonlinearity. **Chaos**, v. 20, n. 2, p. 023103, 2010.
- [32] ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. Theoretical and experimental time series analysis of an inductorless Chua’s circuit. **Physica D**, v. 233, n. 1, p. 66–72, 2007.

- [33] CARDOSO, J. C.; ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M. Complex periodic structures in bi-dimensional bifurcation diagrams of a RLC circuit model with a nonlinear NDC device. **Phys. Lett. A**, v. 373, n. 23, p. 2050–2053, 2009.
- [34] STOOP, R.; BENNER, P.; UWATE, Y. Real-world existence and origins of the spiral organization of shrimp-shaped domains. **Phys. Rev. Lett.**, v. 105, n. 7, p. 074102, 2010.
- [35] CELESTINO, A. et al. Ratchet transport and periodic structures in parameter space. **Phys. Rev. Lett.**, v. 106, n. 23, p. 234101, 2011.
- [36] ASTUMIAN, R. D. Thermodynamics and kinetics of a Brownian motor. **Science**, v. 276, n. 5314, p. 917–922, 1997.
- [37] ASTUMIAN, R. D.; HÄNGGI, P. Brownian motors. **Phys. Today**, v. 55, n. 11, p. 33–39, 2002.
- [38] ROUSSELET, J. et al. Directional motion of Brownian particles induced by a periodic asymmetric potential. **Nature**, v. 370, p. 446–447, 1994.
- [39] LINKE, H. et al. A quantum dot ratchet: Experiment and theory. **Europhys. Lett.**, v. 44, n. 3, p. 341–347, 1998.
- [40] PINSKY, M. A.; KARLIN, S. **An Introduction to Stochastic Modeling**. 4a. ed. Burlington: Elsevier, 2011.
- [41] EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. **Ann. Phys.**, v. 322, n. 8, p. 549–560, 1905.
- [42] CHUA, L. O. The genesis of Chua’s circuit. **Int. J. Electron. Commun.**, v. 46, n. 4, p. 250–257, 1992.
- [43] MOTCHENBACHER, C. D.; CONNELLY, J. A. **Low-noise Electronic System Design**. Nova York: A Wiley-Interscience Publication, 1993.
- [44] CARLO, G. G.; SPINA, M. E. Thermal effects on chaotic directed transport. **Phys. Rev. E**, v. 79, n. 2, p. 026212, 2009.
- [45] MANCHEIN, C.; CELESTINO, A.; BEIMS, M. W. Temperature resistant optimal ratchet transport. **Phys. Rev. Lett.**, v. 110, n. 11, p. 114102, 2013.
- [46] CARLO, G. G. Quantum isoperiodic stable structures and directed transport. **Phys. Rev. Lett.**, v. 108, n. 21, p. 210605, 2012.
- [47] BEIMS, M. W. et al. Quantum-classical transition and quantum activation of ratchet currents in the parameter space. **Phys. Rev. E**, v. 91, n. 5, p. 052908, 2015.
- [48] CARLO, G. G. et al. Correspondence behavior of classical and quantum dissipative directed transport via thermal noise. **Phys. Rev. E**, v. 93, n. 4, p. 042133, 2016.
- [49] MILLS, P. The influence of noise on a classical chaotic scatterer. **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, v. 11, n. 8, p. 899–906, 2006.
- [50] ALTMANN, E. G.; ENDLER, A. Noise-enhanced trapping in chaotic scattering. **Phys. Rev. Lett.**, v. 105, n. 24, p. 244102, 2010.

- [51] SEOANE, J. M.; SANJUÁN, M. A. Exponential decay and scaling laws in noisy chaotic scattering. **Phys. Lett. A**, v. 372, n. 2, p. 110–116, 2008.
- [52] SEOANE, J. M. et al. Effect of noise on chaotic scattering. **Phys. Rev. E**, v. 79, n. 4, p. 047202, 2009.
- [53] BARRETO, E. et al. From high dimensional chaos to stable periodic orbits: The structure of parameter space. **Phys. Rev. Lett.**, v. 78, n. 24, p. 4561–4564, 1997.
- [54] BAPTISTA, M. S.; GREBOGI, C.; BARRETO, E. Topology of windows in the high-dimensional parameter space of chaotic maps. **Int. J. Bifurc. Chaos**, v. 13, n. 9, p. 2681–2688, 2003.
- [55] FAÇANHA, W.; OLDEMAN, B.; GLASS, L. Bifurcation structures in two-dimensional maps: The endoskeletons of shrimps. **Phys. Lett. A**, v. 377, n. 18, p. 1264–1268, 2013.
- [56] PREBIANCA, F.; ALBUQUERQUE, H. A.; BEIMS, M. W. Describing intrinsic noise in Chua’s circuit. **Phys. Lett. A**, v. 382, n. 35, p. 2420–2423, 2018.
- [57] LAI, Y.-C.; TÉL, T. **Transient Chaos: Complex Dynamics in Finite Time Scales**. Nova York: Springer-Verlag, 2011.
- [58] STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. 1a. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.
- [59] MEDEIROS, E. S. et al. Replicate periodic windows in the parameter space of driven oscillators. **Chaos Soliton Fract.**, v. 44, n. 5, p. 982–989, 2011.
- [60] MEDEIROS, E. S. **Fenomenologias no Espaço de Parâmetros de Osciladores Caóticos**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- [61] BRAMWELL, S. T. A ratchet made of tiny magnets. **Nat. Mater.**, v. 16, p. 1053–1054, 2017.
- [62] BROX, J. et al. Spectroscopy and directed transport of topological solitons in crystals of trapped ions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 119, n. 15, p. 153602, 2017.
- [63] DING, H. et al. Ultra-fast vapor generation by a graphene nano-ratchet: A theoretical and simulation study. **Nanoscale**, v. 9, n. 48, p. 19066–19072, 2017.
- [64] STANKEVICH, N. V. et al. Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit. **Int. J. Bifurc. Chaos**, v. 27, n. 12, p. 1730038, 2017.
- [65] PENG, G.; MIN, F. Multistability analysis, circuit implementations and application in image encryption of a novel memristive chaotic circuit. **Nonlinear Dynamics**, v. 90, n. 3, p. 1607–1625, 2017.
- [66] OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. 1a. ed. Nova York: Cambridge University Press, 1993.
- [67] SCHUSTER, H. G. **Deterministic Chaos: An Introduction**. Weinheim: VCH, 1995.

- [68] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, p. 459–467, 1976.
- [69] FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos, Uma Introdução**. São Paulo: Edgard-Blucher LTDA, 1995.
- [70] AREF, H. et al. Frontiers of chaotic advection. **Rev. Mod. Phys.**, v. 89, n. 2, p. 025007, 2017.
- [71] NOYES, R. M. Oscillations in chemical systems. XII. Applicability to closed systems of models with two and three variables. **J. Chem. Phys.**, v. 64, n. 4, p. 1266–1269, 1976.
- [72] NANDI, A. et al. The phase-modulated logistic map. **Chaos**, v. 15, n. 2, p. 023107, 2005.
- [73] SANJU; VARMA, V. S. Quadratic map modulated by additive periodic forcing. **Phys. Rev. E**, v. 48, n. 3, p. 1670–1675, 1993.
- [74] MIRUS, K. A.; SPROTT, J. C. Controlling chaos in low- and high-dimensional systems with periodic parametric perturbations. **Phys. Rev. E**, v. 59, n. 5, p. 5313–5324, 1999.
- [75] LEONEL, E. D.; SILVA, J. K. L. da; KAMPHORST, S. O. Transients in a time-dependent logistic map. **Physica A**, v. 295, n. 1, p. 280–284, 2001.
- [76] DANCA, M.-F.; CHATTOPADHYAY, J. Chaos control of Hastings–Powell model by combining chaotic motions. **Chaos**, v. 26, n. 4, p. 043106, 2016.
- [77] DANCA, M.-F.; KUZNETSOV, N. V.; CHEN, G. Approximating hidden chaotic attractors via parameter switching. **Chaos**, v. 28, n. 1, p. 013127, 2018.
- [78] YUAN, W.-J. et al. Adaptive control of dynamical synchronization on evolving networks with noise disturbances. **Phys. Rev. E**, v. 97, n. 2, p. 022211, 2018.
- [79] PAWAR, S. A. et al. Characterization of forced response of density stratified reacting wake. **Chaos**, v. 28, n. 2, p. 023108, 2018.
- [80] WANG, G. et al. Coexisting multiple attractors and riddled basins of a memristive system. **Chaos**, v. 28, n. 1, p. 013125, 2018.
- [81] CABEZA, C. et al. Periodicity hubs and wide spirals in a two-component autonomous electronic circuit. **Chaos Soliton Fract.**, v. 52, p. 59–65, 2013.
- [82] KOVANIS, V.; GAVRIELIDES, A.; GALLAS, J. A. C. Labyrinth bifurcations in optically injected diode lasers. **Eur. Phys. J. D**, v. 58, n. 2, p. 181–186, 2010.
- [83] GALLAS, M. R.; GALLAS, M. R.; GALLAS, J. A. C. Distribution of chaos and periodic spikes in a three-cell population model of cancer. **Eur. Phys. J. Special Topics**, v. 223, n. 11, p. 2131–2144, 2014.
- [84] CELESTINO, A. et al. Stable structures in parameter space and optimal ratchet transport. **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, v. 19, n. 1, p. 139–149, 2014.
- [85] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **J. Atmos. Sci.**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.



- [86] HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Commun. Math. Phys.**, v. 50, n. 1, p. 69–77, 1976.
- [87] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and Chaotic Dynamics**. 2a. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1992.
- [88] SANO, M.; SAWADA, Y. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. **Phys. Rev. Lett.**, v. 55, n. 10, p. 1082–1085, 1985.
- [89] YAMADA, M.; OHKITANI, K. Lyapunov spectrum of a model of two-dimensional turbulence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 60, n. 11, p. 983–986, 1988.
- [90] JANAKI, T. M. et al. Computation of the Lyapunov spectrum for continuous-time dynamical systems and discrete maps. **Phys. Rev. E**, v. 60, n. 6, p. 6614–6626, 1999.
- [91] SZEZECH, J. D.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems. **Phys. Lett. A**, v. 335, n. 5–6, p. 394–401, 2005.
- [92] OSELEDEC, V. I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. **Trans. Moscow Math. Soc.**, v. 19, p. 179–210, 1968.
- [93] BENETTIN, G.; GALGANI, L.; STRELCYN, J.-M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. **Phys. Rev. A**, v. 14, n. 6, p. 2338–2345, 1976.
- [94] REICHL, L. E. **The Transition To Chaos: Conservative Classical Systems And Quantum Manifestations**. 2a. ed. Nova York: Springer-Verlag, 2004.
- [95] BENETTIN, G.; FROESCHLE, C.; SCHEIDECKER, J. P. Kolmogorov entropy of a dynamical system with an increasing number of degrees of freedom. **Phys. Rev. A**, v. 19, n. 6, p. 2454–2460, 1979.
- [96] BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 1: Theory. **Meccanica**, v. 15, n. 1, p. 09–20, 1980.
- [97] BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. **Meccanica**, v. 15, n. 1, p. 21–30, 1980.
- [98] WOLF, A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D**, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985.
- [99] ENDLER, A.; GALLAS, J. A. C. Arithmetical signatures of the dynamics of the Hénon map. **Phys. Rev. E**, v. 65, n. 3, p. 036231, 2002.
- [100] GLASS, L.; PEREZ, R. Fine structure of phase locking. **Phys. Rev. Lett.**, v. 48, n. 26, p. 1772–1775, 1982.
- [101] ALEXANDER, J. C. et al. Riddled basins. **Int. J. Bifurc. Chaos**, v. 2, n. 4, p. 795–813, 1992.
- [102] MCDONALD, S. W. et al. Fractal basin boundaries. **Physica D**, v. 17, n. 2, p. 125–153, 1985.

- [103] BONATTO, C.; GARREAU, J. C.; GALLAS, J. A. C. Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO<sub>2</sub> laser. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, n. 14, p. 143905, 2005.
- [104] BARRIO, R. et al. Global organization of spiral structures in biparameter space of dissipative systems with Shilnikov saddle-foci. **Phys. Rev. E**, v. 84, n. 3, p. 035201, 2011.
- [105] FRANCKE, R. E.; PÖSCHEL, T.; GALLAS, J. A. C. Zig-zag networks of self-excited periodic oscillations in a tunnel diode and a fiber-ring laser. **Phys. Rev. E**, v. 87, n. 4, p. 042907, 2013.
- [106] LORENZ, E. N. Compound windows of the Hénon-map. **Physica D**, v. 237, n. 13, p. 1689–1704, 2008.
- [107] GARDINER, C. W. **Handbook of Stochastic Methods**. 2a. ed. Berlim: Springer-Verlag, 1990.
- [108] REIMANN, P. Brownian motors: Noisy transport far from equilibrium. **Phys. Rep.**, v. 361, n. 2, p. 57–265, 2002.
- [109] SCHAY, G. **Introduction to Probability with Statistical Applications**. Boston: Birkhäuser, 2007.
- [110] NYQUIST, H. Thermal agitation of electric charge in conductors. **Phys. Rev.**, v. 32, n. 1, p. 110–113, 1928.
- [111] FREY, E.; KROY, K. Brownian motion: A paradigm of soft matter and biological physics. **Ann. Phys.**, v. 14, n. 1-3, p. 20–50, 2005.
- [112] BRILLIANTOV, N. V.; PÖSCHEL, T. Self-diffusion in granular gases: Green–Kubo versus Chapman–Enskog. **Chaos**, v. 15, n. 2, p. 026108, 2005.
- [113] BODROVA, A. et al. Intermediate regimes in granular Brownian motion: Superdiffusion and subdiffusion. **Phys. Rev. Lett.**, v. 109, n. 17, p. 178001, 2012.
- [114] BORROMEO, M.; MARCHESONI, F. Noise-assisted transport on symmetric periodic substrates. **Chaos**, v. 15, n. 2, p. 026110, 2005.
- [115] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. Ratchet and pawl. In: **The Feynman Lectures on Physics**. Reading: Addison-Wesley, 1963. v. 1, cap. 46.
- [116] MAGNASCO, M. O. Forced thermal ratchets. **Phys. Rev. Lett.**, v. 71, n. 10, p. 1477–1481, 1993.
- [117] ASTUMIAN, R. D.; BIER, M. Fluctuation driven ratchets: Molecular motors. **Phys. Rev. Lett.**, v. 72, n. 11, p. 1766–1769, 1994.
- [118] PROST, J. et al. Asymmetric pumping of particles. **Phys. Rev. Lett.**, v. 72, n. 16, p. 2652–2655, 1994.
- [119] ZHOU, H.-X.; CHEN, Y.-d. Chemically driven motility of Brownian particles. **Phys. Rev. Lett.**, v. 77, n. 1, p. 194–197, 1996.
- [120] JUNG, P.; KISSNER, J. G.; HÄNGGI, P. Regular and chaotic transport in asymmetric periodic potentials: Inertia ratchets. **Phys. Rev. Lett.**, v. 76, n. 18, p. 3436–3439, 1996.

- [121] DENISOV, S. et al. Broken space-time symmetries and mechanisms of rectification of ac fields by nonlinear (non)adiabatic response. **Phys. Rev. E**, v. 66, n. 4, p. 041104, 2002.
- [122] LINKE, H. et al. Self-propelled Leidenfrost droplets. **Phys. Rev. Lett.**, v. 96, n. 15, p. 154502, 2006.
- [123] LAGUBEAU, G. et al. Leidenfrost on a ratchet. **Nat. Phys.**, v. 7, p. 395–398, 2011.
- [124] KETTNER, C. et al. Drift ratchet. **Phys. Rev. E**, v. 61, n. 1, p. 312–323, 2000.
- [125] WANG, L. et al. Ratchet effect and the transporting islands in the chaotic sea. **Phys. Rev. Lett.**, v. 99, n. 24, p. 244101, 2007.
- [126] CRUTCHFIELD, J. P.; FARMER, J. D.; HUBERMAN, B. A. Fluctuations and simple chaotic dynamics. **Phys. Rep.**, v. 92, n. 2, p. 45–82, 1982.
- [127] MAYER-KRESS, G.; HAKEN, H. The influence of noise on the logistic model. **J. Stat. Phys.**, v. 26, n. 1, p. 149–171, 1981.
- [128] CELESTINO, A. **Investigação do Espaço de Parâmetros de Catracas Clássicas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2013.
- [129] LAI, Y.-C.; ZYCZKOWSKI, K.; GREBOGI, C. Universal behavior in the parametric evolution of chaotic saddles. **Phys. Rev. E**, v. 59, n. 5, p. 5261–5265, 1999.
- [130] STEFAŃSKI, K. Fluctuations and structure of attractors — simple tests on the Hénon mapping. **Phys. Lett. A**, v. 92, n. 7, p. 315–318, 1982.
- [131] ENDLER, A.; GALLAS, J. A. C. Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points. **C. R. Math.**, v. 342, n. 9, p. 681–684, 2006.
- [132] PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing**. 2a. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [133] SANCHO, J. M. et al. Analytical and numerical studies of multiplicative noise. **Phys. Rev. A**, v. 26, n. 3, p. 1589–1609, 1982.
- [134] FOX, R. F. Numerical simulations of stochastic differential equations. **J. Stat. Phys.**, v. 54, n. 5, p. 1353–1366, 1989.
- [135] HONEYCUTT, R. L. Stochastic Runge-Kutta algorithms. I. White noise. **Phys. Rev. A**, v. 45, n. 2, p. 600–603, 1992.
- [136] HONEYCUTT, R. L. Stochastic Runge-Kutta algorithms. II. Colored noise. **Phys. Rev. A**, v. 45, n. 2, p. 604–610, 1992.
- [137] NICOLAU, N. dos S. **Implicações de um Forçamento Periódico e Assimétrico na Dinâmica do Circuito de Chua**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2017.
- [138] PREBIANCA, F. **Estudo de um Circuito de Chua com Realimentação Tipo Seno**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2014.

- [139] ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of a Chua circuit. **Int. J. Circ. Theor. Appl.**, v. 40, n. 2, p. 189–194, 2010.
- [140] PARLITZ, U. Lyapunov exponents from Chua's circuit. **J. Circuit. Syst. Comp.**, v. 3, n. 2, p. 507–523, 1993.
- [141] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3a. ed. São Francisco: Addison-Wesley, 2002.
- [142] CENCINI, M.; CECCONI, F.; VULPIANI, A. **Chaos: From Simple Models to Complex Systems**. Danvers: World Scientific, 2010.
- [143] SILVA, R. M. da. **Efeito Stickiness em Sistemas Conservativos: Uma Abordagem Estatística**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2015.
- [144] LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- [145] ARNOLD, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. 2a. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1989.
- [146] POINCARÉ, J. H. **Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste**. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
- [147] KOLMOGOROV, A. N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, v. 98, p. 527–530, 1954.
- [148] MOSER, J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. **Nach. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl II**, v. 1, p. 1–20, 1962.
- [149] ARNOLD, V. I. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. **Uspekhi Mat. Nauk**, v. 18, n. 5, 1963.
- [150] JOSÉ, J. V.; SALETAN, E. J. **Classical Dynamics: A Contemporary Approach**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [151] ZASLAVSKY, G. M. **Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics**. Nova York: Oxford University Press, 2005.
- [152] MEISS, J. D.; OTT, E. Markov-tree model of intrinsic transport in Hamiltonian systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 55, n. 25, p. 2741–2744, 1985.
- [153] HANSON, J. D.; CARY, J. R.; MEISS, J. D. Algebraic decay in self-similar Markov chains. **J. Stat. Phys.**, v. 39, n. 3-4, p. 327–345, 1985.
- [154] EFTHYMIPOULOS, C.; CONTOPOULOS, G.; VOGLIS, N. Cantori, islands and asymptotic curves in the stickiness region. **Celest. Mech. Dyn. Astr.**, v. 73, n. 1-4, p. 221–230, 1999.
- [155] CONTOPOULOS, G.; HARSOULA, M. Stickiness effects in conservative systems. **Int. J. Bifurc. Chaos**, v. 20, n. 7, p. 2005–2043, 2010.

- [156] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. **Phys. Rep.**, v. 52, n. 5, p. 263–379, 1979.
- [157] KARNEY, C. F. F.; RECHESTER, A. B.; WHITE, R. B. Effect of noise on the standard mapping. **Physica D**, v. 4, n. 3, p. 425–438, 1982.
- [158] BUNIMOVICH, L. A.; SINAI, Y. G. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. **Commun. Math. Phys.**, v. 78, n. 4, p. 479–497, 1981.
- [159] MEISS, J. D. et al. Correlations of periodic, area-preserving maps. **Physica D**, v. 6, n. 3, p. 375–384, 1983.
- [160] KARNEY, C. F. F. Long-time correlations in the stochastic regime. **Physica D**, v. 8, n. 3, p. 360–380, 1983.
- [161] CHIRIKOV, B. V.; SHEPELYANSKY, D. L. Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems. **Physica D**, v. 13, n. 3, p. 395–400, 1984.
- [162] ARTUSO, R. Correlation decay and return time statistics. **Physica D**, v. 131, n. 1–4, p. 68–77, 1999.
- [163] MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. Conservative generalized bifurcation diagrams. **Phys. Lett. A**, v. 377, n. 10–11, p. 789–793, 2013.
- [164] SILVA, R. M. da; BEIMS, M. W.; MANCHEIN, C. Recurrence-time statistics in non-Hamiltonian volume-preserving maps and flows. **Phys. Rev. E**, v. 92, n. 2, p. 022921, 2015.
- [165] SHEPELYANSKY, D. L. Poincaré recurrences in Hamiltonian systems with a few degrees of freedom. **Phys. Rev. E**, v. 82, n. 5, p. 055202, 2010.
- [166] SILVA, R. M. da et al. Characterizing weak chaos using time series of Lyapunov exponents. **Phys. Rev. E**, v. 91, n. 6, p. 062907, 2015.
- [167] KRUSCHA, A.; KETZMERICK, R.; KANTZ, H. Biased diffusion inside regular islands under random symplectic perturbations. **Phys. Rev. E**, v. 85, n. 6, p. 066210, 2012.
- [168] SALA, M.; ARTUSO, R.; MANCHEIN, C. Anomalous dynamics and the choice of Poincaré recurrence set. **Phys. Rev. E**, v. 94, n. 5, p. 052222, 2016.
- [169] VINCENT, U. E. et al. Current reversals and synchronization in coupled ratchets. **Phys. Rev. E**, v. 82, n. 4, p. 046208, 2010.
- [170] STREEK, M. et al. Mechanisms of DNA separation in entropic trap arrays: A Brownian dynamics simulation. **J. Biotechnol.**, v. 112, n. 1-2, p. 79–89, 2004.
- [171] STREEK, M. et al. Two-state migration of DNA in a structured microchannel. **Phys. Rev. E**, v. 71, n. 1, p. 011905, 2005.
- [172] RETKUTE, R.; GLEESON, J. P. Role of interaction on noise-induced transport of two coupled particles in Brownian ratchet devices. **Fluct. Noise Lett.**, v. 6, n. 3, p. L263–L277, 2006.

## APÊNDICE A

---

### Ortonormalização de Gram-Schmidt

---

Dada uma base  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ , o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt permite construir, através da combinação linear dos vetores  $\mathbf{w}_i$ , uma nova base ortonormal  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Para isso, define-se inicialmente um vetor unitário

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|}. \quad (\text{A.1})$$

Em seguida, define-se um segundo vetor normalizado tal que:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1}{|\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1|}, \quad (\text{A.2})$$

sendo  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ , ou seja,  $\mathbf{v}_1$  é ortogonal a  $\mathbf{v}_2$ . O procedimento é repetido quantas vezes for necessário, sendo possível generalizá-lo pela seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_i = \left( \mathbf{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j)\mathbf{v}_j \right) \beta_j, \quad (\text{A.3})$$

de tal forma que  $\beta_j$  é dado por

$$\beta_j = \frac{1}{\left| \mathbf{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j)\mathbf{v}_j \right|}. \quad (\text{A.4})$$

## APÊNDICE B

---

### Dedução do mapa catraca

---

A equação que descreve o movimento em uma dimensão de uma partícula Browniana, desconsiderando as forças de caráter aleatório, é dada por

$$\mu\ddot{x} = -\nu\dot{x} - U'(x, t). \quad (\text{B.1})$$

Seja a velocidade da partícula  $v = \dot{x}$ , essa equação diferencial de segunda ordem pode ser representada por duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{v} = -\frac{\nu}{\mu}v - \frac{U'(x, t)}{\mu}, \quad (\text{B.2a})$$

$$\dot{x} = v. \quad (\text{B.2b})$$

Para gerar transporte direcionado de partículas em um modelo descrito pelas Eqs. (B.2a) e (B.2b), deve-se especificar  $U(x, t)$  de tal modo que esse potencial seja periódico na posição  $x$  e no tempo  $t$ , além de ser assimétrico em  $x$ . Para obter o Mapa Catraca (MC), a dependência temporal pode ser imposta a partir de uma série de Deltas de Dirac periódicas em  $t$ , enquanto a assimetria espacial pode ser introduzida por meio de um potencial do tipo

$$U(x, t) = \kappa[\cos(x) + 0,25 \cos(2x + \phi)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (\text{B.3})$$

no qual  $\tau$  é o período do potencial que gera a série de impulsos  $\mathcal{F}(x, t) = -dU/dx$ , tal que

$$\mathcal{F}(x, t) = \kappa[\text{sen}(x) + 0,5 \text{sen}(2x + \phi)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (\text{B.4})$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . A intensidade desses pulsos depende da posição da partícula e da amplitude  $\kappa$ . A forma do potencial, por sua vez, depende da intensidade do termo assimétrico e da fase  $\phi$ .

Considerando inicialmente um período de tempo no qual não ocorre o impulso e definindo  $\tilde{\nu} = \nu/\mu$ , obter-se-á a partir da Eq. (B.2a)

$$\dot{v} = -\tilde{\nu}v, \quad (\text{B.5})$$

cuja solução é

$$v(t) = v(0)e^{-\tilde{\nu}t}. \quad (\text{B.6})$$

O deslocamento no período  $\tau$  pode ser calculado substituindo a Eq. (B.6) na Eq. (B.2b), tal que

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^\tau v(t)dt = \frac{v(0)}{\tilde{\nu}}(1 - e^{-\tilde{\nu}\tau}), \quad (\text{B.7})$$

na qual foram utilizadas as notações  $x_n = x(0)$  e  $x_{n+1} = x(\tau)$ . Definindo  $\gamma = e^{-\tilde{\nu}\tau}$ , a Eq. (B.7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\tau v(0)(1 - \gamma)}{|\ln \gamma|}. \quad (\text{B.8})$$

O próximo passo consiste em integrar a Eq. (B.2a) em um intervalo de tempo entre dois impulsos, incluindo o impulso inicial mas não incluindo o impulso final [47]. Especificamente, o intervalo de integração é  $n\tau - \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$ , com  $\epsilon$  sendo uma quantidade infinitesimal positiva. Dessa forma, sendo  $\tilde{\kappa} = \kappa/\mu$ , obtém-se:

$$\int_{v(n\tau-\epsilon)}^{v[(n+1)\tau-\epsilon]} dv = -\tilde{\nu} \int_{n\tau-\epsilon}^{(n+1)\tau-\epsilon} v dt + \tilde{\kappa} \int_{n\tau-\epsilon}^{(n+1)\tau-\epsilon} [\text{sen}(x) + 0,5 \text{sen}(2x + \phi)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) dt. \quad (\text{B.9})$$

Usando a Eq. (B.2b) e definindo os limites

$$\begin{aligned} x_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(n\tau - \epsilon), \\ v_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v(n\tau - \epsilon), \\ x_{n+1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x[(n+1)\tau - \epsilon], \\ v_{n+1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v[(n+1)\tau - \epsilon], \end{aligned}$$

a Eq. (B.9) pode ser reescrita como:

$$v_{n+1} - v_n = -\tilde{\nu}(x_{n+1} - x_n) + \tilde{\kappa} \int_{n\tau-\epsilon}^{(n+1)\tau-\epsilon} [\text{sen}(x) + 0,5 \text{sen}(2x + \phi)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) dt. \quad (\text{B.10})$$

A única contribuição da função Delta de Dirac na Eq. (B.10) será no tempo  $t = n\tau$ , de forma que

$$v_{n+1} - v_n = -\tilde{\nu}(x_{n+1} - x_n) + \tilde{\kappa}[\text{sen}(x_n) + 0,5 \text{sen}(2x_n + \phi)]. \quad (\text{B.11})$$

A variação  $(x_{n+1} - x_n)$  na posição da partícula é dada pela Eq. (B.8). No entanto, como ocorre um impulso no intervalo de tempo considerado, esse deslocamento será idêntico ao deslocamento de uma partícula em um fluido de viscosidade  $\nu$  a temperatura nula que recebeu no início do movimento um impulso que a fez aumentar em  $\kappa[\text{sen}(x) + 0,5 \text{sen}(2x + \phi)]$  o seu momento cinético inicial  $\mu v_n$  [128], ou seja, para o intervalo considerado, obtém-se

$$v(0) = v_n + \tilde{\kappa}[\text{sen}(x_n) + 0,5 \text{sen}(2x_n + \phi)]. \quad (\text{B.12})$$



Sendo assim, a variação  $(x_{n+1} - x_n)$  no intervalo entre dois impulsos é obtido substituindo a Eq. (B.12) na Eq. (B.8), tal que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\tau(1 - \gamma)\{v_n + \tilde{\kappa}[\text{sen}(x_n) + 0,5\text{sen}(2x_n + \phi)]\}}{|\ln \gamma|}. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo a Eq. (B.13) na Eq. (B.11), considerando que  $\tilde{\nu} = |\ln \gamma|/\tau$  e fazendo as devidas simplificações matemáticas, obter-se-á

$$v_{n+1} = \gamma v_n + \gamma \tilde{\kappa}[\text{sen}(x_n) + 0,5\text{sen}(2x_n + \phi)]. \quad (\text{B.14})$$

Definindo o parâmetro  $\mathcal{K} = \tau(1 - \gamma)\tilde{\kappa}/|\ln \gamma|$  e os momentos

$$p_n = \frac{v_n \tau(1 - \gamma)}{\gamma |\ln \gamma|}, \quad p_{n+1} = \frac{v_{n+1} \tau(1 - \gamma)}{\gamma |\ln \gamma|},$$

as equações do MC podem ser encontradas multiplicando a Eq. (B.14) por  $\tau(1 - \gamma)/\gamma |\ln \gamma|$ , e também considerando a Eq. (B.13), tal que:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \gamma p_n + \mathcal{K}[\text{sen}(x_n) + 0,5\text{sen}(2x_n + \phi)], \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

## APÊNDICE C

### Dedução do mapa padrão

O modelo físico conhecido como rotor pulsado consiste em uma barra rígida de momento de inércia  $I$  e comprimento  $L$ , com uma das extremidades fixada em um pivô sem atrito e a outra livre para girar, como mostra a Fig. C.1. A extremidade livre está sujeita a uma força periódica vertical de intensidade  $K/L$ , aplicada nos tempos  $t = 0, \tau, 2\tau, \dots, n\tau$ . Usando a coordenada generalizada  $x$ , que representa a posição angular da barra em relação à vertical, e o momento conjugado  $p$ , que representa o momento angular, a Hamiltoniana do sistema é dada por [151]

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2I} + K \cos(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (\text{C.1})$$

sendo  $\delta(t - n\tau)$  a função Delta de Dirac. A partir das equações de Hamilton (5.1), é possível obter as equações de movimento do rotor pulsado utilizando para isso a função Hamiltoniana (C.1). Dessa forma, obter-se-ão as seguintes expressões:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{I}, \quad (\text{C.2a})$$

$$\frac{dp}{dt} = K \sin(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (\text{C.2b})$$

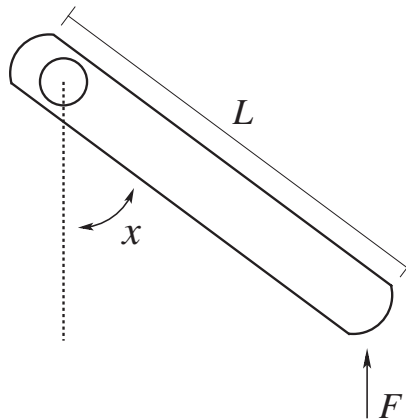


Figura C.1 – Ilustração do rotor pulsado.

A Eq. (C.2b) mostra que  $p$  é constante entre dois impulsos, mas varia de forma descontínua a cada impulso. Por outro lado, como é possível verificar a partir da Eq. (C.2a), a posição  $x$  varia linearmente com o tempo entre dois impulsos e é contínua no momento exato do impulso. Essas situações são representadas graficamente na Fig. C.2.

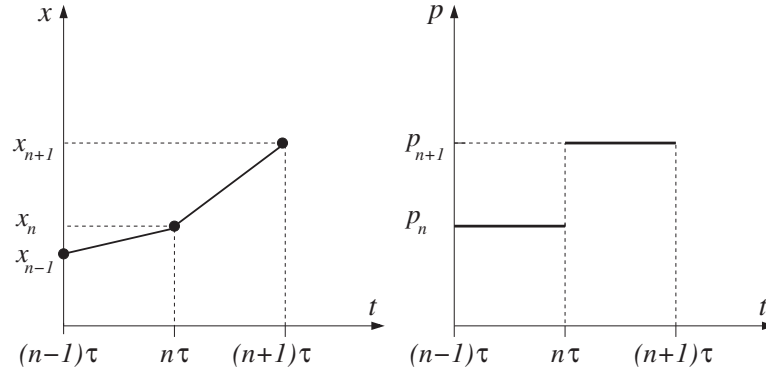


Figura C.2 – Dependência temporal do momento angular  $p$  e da posição angular  $x$  do rotor pulsado. Figura construída com base na ilustração da pág. 138 da Ref. [94].

Para obter o mapa padrão, é necessário integrar as Eqs. (C.2a) e (C.2b) em um intervalo de tempo  $n\tau - \epsilon < t < n\tau + \epsilon$ , no qual ocorre a ação da força impulsiva exatamente no tempo  $t = n\tau$ , e em outro intervalo  $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$ , no qual não há aplicação de força, uma vez que se trata de um intervalo entre dois impulsos consecutivos. Nesses intervalos,  $\epsilon$  representa uma quantidade infinitesimal.

A fim de simplificar a notação que será empregada na sequência da dedução, serão definidas as seguintes grandezas:

$$p_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau - \epsilon),$$

$$p_n^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau + \epsilon),$$

$$p_{n+1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = (n+1)\tau - \epsilon),$$

tal que a mesma convenção é adotada para a posição  $x$ . Integrando inicialmente a Eq. (C.2a) no intervalo  $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$ , lembrando que esse intervalo localiza-se entre dois impulsos e por isso  $p$  é uma constante, obtém-se a seguinte expressão:

$$x[(n+1)\tau - \epsilon] - x[n\tau + \epsilon] = \frac{p(n\tau + \epsilon)}{I}(\tau - 2\epsilon).$$

Da integração da Eq. (C.2b) obtém-se

$$p[(n+1)\tau - \epsilon] - p[n\tau + \epsilon] = 0,$$

uma vez que  $\delta(t - n\tau) = 0$  nesse intervalo. Aplicando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , essas expressões podem ser reescritas como:

$$x_{n+1} - x_n^* = \frac{p_n^*}{I}\tau, \quad (\text{C.3a})$$

$$p_{n+1} - p_n^* = 0. \quad (\text{C.3b})$$

Efetuada a integração no intervalo  $n\tau - \epsilon < t < n\tau + \epsilon$ , no qual ocorre a aplicação da força no instante  $t = n\tau$ , obtêm-se a partir das Eqs. (C.2a) e (C.2b) as respectivas expressões:

$$x[n\tau + \epsilon] - x[n\tau - \epsilon] \simeq \frac{p(n\tau - \epsilon)}{I}\epsilon + \frac{p(n\tau + \epsilon)}{I}\epsilon, \quad (\text{C.4a})$$

$$p[n\tau + \epsilon] - p[n\tau - \epsilon] \simeq K\text{sen}[x(n\tau - \epsilon)]. \quad (\text{C.4b})$$

Para encontrar a Eq. (C.4a), foram utilizadas as propriedades de integração de funções impróprias, uma vez que o momento  $p$  apresenta descontinuidade no intervalo de integração. A aplicação do limite  $\epsilon \rightarrow 0$  nas Eqs. (C.4a) e (C.4b) resulta em:

$$x_n^* - x_n = 0, \quad (\text{C.5a})$$

$$p_n^* - p_n = K\text{sen}(x_n). \quad (\text{C.5b})$$

Isolando  $x_n^*$  e  $p_n^*$  nas Eqs. (C.5a) e (C.5b), respectivamente, e substituindo os resultados nas Eqs. (C.3a) e (C.3b), obter-se-á

$$p_{n+1} = p_n + K\text{sen}(x_n),$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\tau}{I}p_{n+1}.$$

Definindo  $\tau/I = 1$ , surge a forma conhecida do mapa padrão, descrita matematicamente por [66, 94]

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K\text{sen}(x_n) & [\text{mod } 2\pi], \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} & [\text{mod } 2\pi]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

## APÊNDICE D

---

### Condição simplética do mapa padrão

---

Conforme demonstrado no Apêndice C, o mapa padrão é descrito matematicamente pela Eq. (C.6). Para provar que esse sistema é Hamiltoniano, deve-se mostrar que a condição simplética

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \mathbb{M} \quad (\text{D.1})$$

é satisfeita, sendo  $\mathbb{J}$  a matriz Jacobiana do sistema e  $\mathbb{M}$  a matriz definida pela Eq. (5.4). No caso do mapa padrão (C.6),  $\mathbb{J}$  é dada por:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \partial p_{n+1}/\partial p_n & \partial p_{n+1}/\partial x_n \\ \partial x_{n+1}/\partial p_n & \partial x_{n+1}/\partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K \cos(x_n) \\ 1 & 1 + K \cos(x_n) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

A partir da Eq. (D.2) obtém-se facilmente a matriz transposta  $\mathbb{J}^T$ . A substituição de  $\mathbb{J}$  e  $\mathbb{J}^T$  na Eq. (D.1) resulta em:

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \begin{bmatrix} 1 & K \cos(x_n) \\ 1 & 1 + K \cos(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ K \cos(x_n) & 1 + K \cos(x_n) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Efetuando o procedimento de multiplicação de matrizes, levando em conta que o produto entre matrizes é associativo, obtém-se:

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \begin{bmatrix} (-K \cos(x_n) + K \cos(x_n)) & (-K \cos(x_n) + 1 + K \cos(x_n)) \\ (-1 - K \cos(x_n) + K \cos(x_n)) & (-1 - K \cos(x_n) + 1 + K \cos(x_n)) \end{bmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{M}, \quad (\text{D.5})$$

mostrando de fato que o mapa padrão integra a classe de sistemas Hamiltonianos.