

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

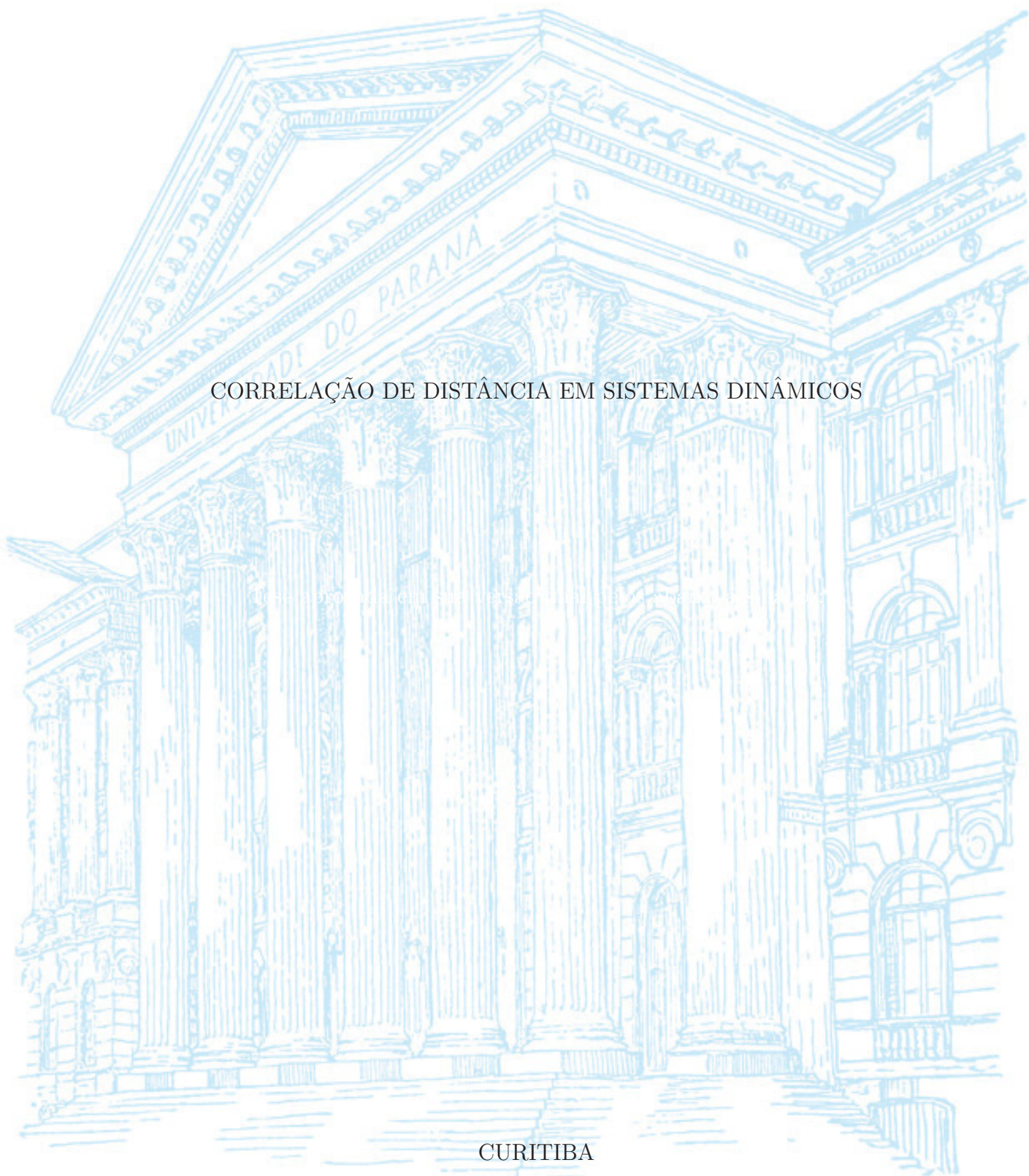
CARLOS FÁBIO DE OLIVEIRA MENDES

CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA EM SISTEMAS DINÂMICOS

Tese apresentada em cumprimento das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Controle da Universidade Federal do Paraná

CURITIBA

2018



CARLOS FÁBIO DE OLIVEIRA MENDES

CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA EM SISTEMAS DINÂMICOS

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Marcus Werner Beims

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M538c

Mendes, Carlos Fabio de Oliveira

Correlação de distância em sistemas dinâmicos / Carlos Fabio de Oliveira Mendes. – Curitiba, 2018.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

Orientador: Marcus Werner Beims.

1. Correlação (Estatística). 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3. Órbitas. 4. Fugas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Beims, Marcus Werner. III. Título.

CDD: 519.537

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **CARLOS FABIO DE OLIVEIRA MENDES** intitulada: "Correlação de distância em sistemas dinâmicos", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 13 de Dezembro de 2018.

RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

PAULO CESAR RECH

Avaliador Externo (UDESC)

MARCUS WERNER BEIMS

Orientador - Avaliador Interno (UFPR)

JOSÉ DANILO SZEZECH JÚNIOR

Avaliador Externo (UEPG)

“Dedico este trabalho a minha esposa Cíntia e aos meus filhos Felipe e Ana.”

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre estar ao meu lado e por ser o auxílio, força e proteção que sempre precisei.

Agradeço aos meus pais, por terem me proporcionado uma boa educação que servirá de alicerce para o resto da minha vida.

Aos meus filhos Felipe e Ana e a minha esposa Cíntia, que sempre me apoiou em todas as minhas decisões, e que com muito amor e carinho sempre esteve ao meu lado, mesmo em momentos difíceis, sempre me encorajando e sendo o meu suporte nas horas de fraqueza.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcus Werner Beims, por quem tenho um grande apreço e uma gratidão imensurável.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM, pelo total apoio financeiro.

Ao meu colega de grupo Rafael Marques, pelos muitos auxílios nas elaborações dos programas utilizados.

Aos meus companheiros de sala Edjan, Samuel e Alfredo pelas conversas sobre assuntos diversos.

A UFPR por me dar a oportunidade de estudar, pesquisar e crescer pessoal e profissionalmente.

*“Direi do senhor: Ele é o meu Deus, o meu refúgio
a minha fortaleza, e nele confiarei.”*

— SALMO 91

RESUMO

A correlação de distância é uma medida estatística de dependência entre vetores aleatórios com dimensões não necessariamente iguais. Sua principal característica é que sua medida será zero, somente se os vetores aleatórios forem independentes. É uma medida de associação linear e não linear entre vetores aleatórios ou variáveis aleatórias. Desta forma, o presente trabalho tem como principal objetivo, verificar a aplicabilidade da correlação de distância na descrição de propriedades relevantes de sistemas dinâmicos. Para isto, aplicamos o procedimento na análise estatística de variáveis de diferentes sistemas. Como primeira aplicação, empregamos a correlação de distância no mapa quadrático unidimensional, por ser um sistema simples que exhibe alta complexidade de fenômenos vistos em dinâmica não linear. Investigamos o fenômeno do tempo de escape de órbitas periódicas e caóticas de seus respectivos atratores, devido ao ruído gaussiano. Através dos resultados numéricos, verificamos que a correlação de distância descreve de forma qualitativa este fato. Além do mais, os resultados mostram que a correlação de distância é capaz de descrever mistura de órbitas caóticas, resultados que são comparados com outro método conhecido como intensidade de segregação. Como segunda aplicação, utilizamos a correlação de distância na caracterização dos estados quimera em uma rede de osciladores de fase acoplados de forma não local. A identificação ocorre por meio da coexistência dos estados coerentes e incoerentes dos elementos da rede, e o método se mostra efetivo neste sentido. Por fim, utilizamos a correlação de distância na análise estatística de variáveis de um sistema dinâmico real, referentes aos parâmetros físico-químicos do encontro das águas no Rio Amazonas.

Palavras-chave: Correlação (Estatística). Comportamento caótico nos sistemas. Órbitas. Fugas.

ABSTRACT

The distance correlation is a statistical measure of dependence between random vectors whose dimensions are not necessarily equal. Its main feature is that its measure will be zero only if the random vectors are independent. It is a measure of linear and non-linear association between random vectors or random variables. Thus, the main objective of this work is to verify the applicability of the distance correlation in the description of relevant properties of dynamical systems. For this, we apply the method to the statistical analysis of the variables of different systems. As a first application, we use the distance correlation in the one-dimensional quadratic map, because it is a simple system that exhibits high complexity of phenomena in nonlinear dynamics. We investigate noise induced escape times of periodic and chaotic orbits on their respective attractors. Through numerical results, we verified that the distance correlation qualitatively describes this fact. Moreover, the results show that the distance correlation is able to describe the mixing of chaotic orbits, results are compared to a method known as intensity of segregation. As a second application, we use the distance correlation in the characterization of the chimera states in a network of nonlocally coupled phase oscillators. Identification occurs through the coexistence of coherent and incoherent states of network elements and the method is effective in this direction. Finally, we used the distance correlation in the statistical analysis of variables of a real dynamical system, referring to the physical-chemical parameters of the meeting of the waters in Amazonas River.

Key-words: Correlation (Statistical). Chaotic behavior in systems. Orbits. Escape.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Representação da trajetória de um sistema contínuo que cruza a superfície de Poincaré, com os respectivos pontos marcados.	22
FIGURA 2.1 – Representação de alguns tipos de correlação entre variáveis. (a) Correlação linear positiva, (b) correlação linear negativa e (c) correlação não linear.	27
FIGURA 2.2 – Curvas plotadas a partir de: (a) equação (2.26), (b) equação (2.27), (c) equação (2.28) e (d) equação (2.29) no plano xy . Os valores de DC e ρ são dados.	35
FIGURA 3.1 – (a) Diagrama de bifurcação do mapa quadrático para o caso sem ruído na cor preta. Pontos em vermelho representam o diagrama de bifurcação com a adição do ruído (ver texto). O parâmetro r é dividido em 2250 partes igualmente espaçadas no intervalo $[-0,25; 2]$, onde calculamos 1050 iteradas com condição inicial $x_0 = 0,1$. Para cada valor de r somente os valores das iteradas de x_{1001} até x_{1050} são plotados. (b) O expoente de Lyapunov λ_Γ em preto para o mapa (3.1) e em vermelho para o mapa com ruído (3.4).	38
FIGURA 3.2 – Números de condições iniciais das órbitas que divergiram após N iterações do mapa (3.4) como uma função de Γ para os seguintes parâmetros escolhidos: (a) $r = 1,0$ (período-2), (b) $r = 1,3$ (período-4), (c) $r = 1,38$ (período-8) e (d) $r = 2,0$ (regime caótico).	42
FIGURA 3.3 – (a) Evolução temporal da correlação de distância média e correlação de Pearson média (inset) para $\Gamma = 1,0$ nos regimes: $r = 1,0$ (período-2), $r = 1,3$ (período-4), $r = 1,38$ (período-8) e $r = 2,0$ (regime caótico). (b) A correlação de distância média em função do ruído para $n = 20$	43
FIGURA 3.4 – Curvas plotadas todas em escala log-log mostrando a dependência do ruído para: (a) correlação de Pearson média, (b) curvas ajustadas de (a) com $0,2 \leq \Gamma \leq 1,0$, (c) correlação de distância média e (d) curvas ajustadas de (c) dentro do mesmo intervalo de Γ considerado em (b). Parâmetros: $r = 1,0$ (período-2), $r = 1,3$ (período-4), $r = 1,38$ (período-8) e $r = 2,0$ (regime caótico). As funções dos ajustes das curvas são mostrados na tabela 3.1.	45

- FIGURA 3.5 – (a) Energia mínima E_0 como função de r . A linha contínua é resultado da teoria de Beale e os pontos resultados da sua Simulação de Monte Carlo. Os círculos em verde são consequências dos ajustes das curvas de DC . (b) O logaritmo do tempo de tentativa em função de r . Os triângulos em laranja, são resultados da teoria de Beale e os quadrados em azul consequências de DC . [Fonte: Figuras adaptadas de (BEALE, 1989)] 47
- FIGURA 3.6 – Esquema do particionamento em S caixas do intervalo de estados $[-2, 2]$ do mapa quadrático unidimensional. 49
- FIGURA 3.7 – Intensidade de segregação I como função do tempo n (número de iteração) em escala log-log. A condição inicial é $x_0 = 0,1$ e as quantidades de caixas são $S = 10^3, 10^4$ e 10^5 50
- FIGURA 3.8 – Evolução temporal em escala log-log de: (a) $DC_n(x_{01}, x_{02})$ entre duas órbitas com condições iniciais $x_{01} = 0,1$ e $x_{02} = 0,2$ em regimes caóticos e (b) $\langle DC_n(x_{01}, x_{02}) \rangle$ para muitas CIs escolhidas aleatoriamente no intervalo $[-2, 2]$ para x_{02} 51
- FIGURA 3.9 – Evolução temporal de DC para cinco valores de r correspondentes ao regime caótico do mapa (3.1). Os valores de r observados são: 1,6, 1,7, 1,8, 1,9 e 2,0. A condição inicial considerada é $x_0 = 0,1$ e o deslocamento dos estados entre as amostras sendo $\Delta t = 1$ 52
- FIGURA 3.10 – (a) Correlação de distância para $\Delta t = 1$ e $\Delta t = 2$ e (b) o expoente de Lyapunov, ambos em função de r para o mapa quadrático (3.1). A condição inicial utilizada é $x_0 = 0,1$ e r dividido em 1000 partes igualmente espaçadas. 53
- FIGURA 3.11 – (a) Expoente de Lyapunov em função da correlação de distância para os casos de $\Delta t = 1$ e $\Delta t = 2$. As funções dos ajustes das curvas são dadas no gráfico. (b) Correlação de distância em função de Δt para: $r = 1,6, 1,7, 1,9$ e $2,0$. (c) Correlação de distância em função de Δt para duas janelas periódicas da região caótica: $r = 1,47786$ (período-6) e $r = 1,77043$ (período-3). 54
- FIGURA 4.1 – Representação esquemática de uma rede composta por M osciladores acoplados, configurando um modelo ilustrativo da condição de contorno periódica. O índice i representa cada vértice (oscilador) da rede. 58
- FIGURA 4.2 – Representações esquemáticas dos tipos de acoplamentos: (a) acoplamento local, (b) acoplamento global e (c) acoplamento não local. . . 59

- FIGURA 4.3 – Evolução espaço-temporal (esquerda) e perfil espacial (direita) para 200 osciladores, com alcance de acoplamento $R = 0,35M$. (a) e (b) para $\alpha = 1,37$, (c) e (d) para $\alpha = 1,47$ e (e) e (f) para $\alpha = 1,57$. Com t representando o tempo, i a posição dos osciladores na rede e ϕ a fase. Todos os perfis da esquerda são observados no tempo $t = 400$ 63
- FIGURA 4.4 – Correlação de distância para: $M = 100$ osciladores com parâmetros de fase sendo (a) $\alpha = 1,37$, (b) $\alpha = 1,47$ e (c) $\alpha = 1,57$; $M = 200$ osciladores com parâmetros sendo (d) $\alpha = 1,37$, (e) $\alpha = 1,47$ e (f) $\alpha = 1,57$; $M = 300$ osciladores com parâmetros sendo (g) $\alpha = 1,37$, (h) $\alpha = 1,47$ e (i) $\alpha = 1,57$ 65
- FIGURA 4.5 – Figuras em 3-D relativas à DC na rede de osciladores de fase acoplados. Rede composta por 200 osciladores com parâmetro de fase (a) $\alpha = 1,47$ e (b) $\alpha = 1,57$, e rede composta por 300 osciladores com parâmetro de fase (c) $\alpha = 1,47$ e (d) $\alpha = 1,57$ 66
- FIGURA 4.6 – Correlação de distância média $\langle DC_i \rangle$ sobre muitas CIs em função de cada oscilador individualmente da rede. Foi considerado cinco janelas temporais ao longo do tempo de integração numérica. Parâmetros: $M = 100$, $R = 0,35M$ e $\alpha = 1,47$ 68
- FIGURA 4.7 – Estabilização de quatro expoentes de Lyapunov positivos calculados ao longo das trajetórias quimera. Parâmetros: $M = 100$, $\alpha = 1,47$ e $R = 0,35M$ 69
- FIGURA 4.8 – Espectro de Lyapunov λ_i calculados para trajetórias quimera da equação (4.1) para uma rede com: (a) $M = 100$ e (b) $M = 200$ osciladores acoplados. Os valores dos alcances de acoplamento são: $R = 0,35M$ (círculos vermelhos) e $R = 0,30M$ (triângulos azuis). Parâmetro de fase: $\alpha = 1,47$ 70
- FIGURA 5.1 – Encontro das águas dos Rios Negro e Solimões e as delimitações do estado do Amazonas com a localização da cidade de Manaus. [Fontes: Figuras adaptadas das referências (BELUCO; SOUZA, 2014; NASCIMENTO, 2016).] 73
- FIGURA 5.2 – Diagrama esquemático com as principais características hidrodinâmicas de uma confluência. [Fonte: Referência (NASCIMENTO, 2016)] 75
- FIGURA 5.3 – Região do encontro das águas mostrando a localização dos pontos de coleta realizados pela sonda multiparâmetro. [Fonte: Referência (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017)] 77

- FIGURA 5.4 – Seções ADCP - Perfis de ADCP de Retorno Médio do Eco (retro-espalhamento - na unidade [dB] (escala de cores)) com a localização dos pontos de sondagem feitos com o sonda multiparâmetro. [Fonte: Referência (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017)] 78
- FIGURA 5.5 – Esboços dos diagramas esquemáticos mostrando as localizações dos pontos medidos pela sonda e a configuração de *DC* na análise estatística dos dados. Correlação de distância: (a) no Rio Negro, (c) entre o Rio Negro e confluência e (c) entre o Rio Solimões e confluência. 80
- FIGURA 5.6 – Cores secundárias obtidas pelas combinações de cores primárias. As curvas dos coeficientes de correlação seguirão estas associações. . . . 80
- FIGURA 5.7 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Temperatura e (c) Oxigênio dissolvido com suas respectivas correlações, (b) *DC*(Temp.) e (d) *DC*(Oxig.) em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para *DC*. 81
- FIGURA 5.8 – Perfis dos parâmetros físico-químicos com (a) Condutividade elétrica e (c) Turbidez com suas respectivas correlações, (b) *DC*(Cond.) e (d) *DC*(Turb.) em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para *DC*. 82
- FIGURA 5.9 – Cor marrom obtida pela combinação ds cores azul e laranja. 83
- FIGURA 5.10 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Temperatura e (c) Oxigênio com suas respectivas correlações, (b) *DC*(Temp.) e (d) *DC*(Oxig.) em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para *DC*. 84
- FIGURA 5.11 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Condutividade elétrica e (c) Turbidez com suas respectivas correlações, (c) *DC*(Cond.) e (d) *DC*(Turb.) em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para *DC*. 85
- FIGURA 5.12 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Condutividade elétrica e (c) Turbidez com suas respectivas correlações, (b) *DC*(Cond.) e (d) *DC*(Turb.) em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para *DC*. 86

LISTA DE TABELAS

- TABELA 3.1 – Para valores distintos de r , a tabela resume o período associado, o expoente de Lyapunov λ_{Γ} e as funções usadas para o ajuste de curvas das quantidades médias $\langle DC_{20} \rangle$ e $\langle \rho_{20} \rangle$. No caso caótico o período é infinito, mas como estamos apenas iterando até $N = 20$, então dizemos que o período é 20. 46
- TABELA 5.1 – Médias das principais propriedades de escoamento e características das águas dos Rios Negro e Solimões. [Fonte: Referência (TREVE-THAN *et al.*, 2015)] 74
- TABELA 5.2 – Tabela com as codificações dos pontos verticais de sondagem, suas profundidades máximas e coordenadas geográficas de localização como latitude e longitude. 79

LISTA DE SIGLAS

ADCP	– Perfilador de Corrente Doppler Acústico (<i>Acoustic Doppler Current Profile</i>)
C0R	– confluência à direita
C0CR	– confluência ao centro mais à direita
C0CL	– confluência ao centro mais à esquerda
C0L	– confluência à esquerda
CI	– condição inicial
DC	– correlação de distância (<i>distance correlation</i>)
EL	– expoente de Lyapunov
N0R	– Negro à direita
N0C	– Negro ao centro
N0L	– Negro à esquerda
S0R	– Solimões à direita
S0C	– Solimões ao centro
S0L	– Solimões à esquerda

LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma(X, Y)$	– covariância entre X e Y
$\sigma(X)$	– variância de X
$\sigma(Y)$	– variância de Y
$\rho(X, Y)$	– coeficiente correlação de Pearson
$\rho_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	– coeficiente de correlação de Pearson empírico
κ	– coeficiente de correlação de Kendal
v	– coeficiente de correlação de Spearman
$\varphi_{X,Y}(t, s)$	– função característica conjunta de X e Y
$\varphi_X(t)$	– função característica de X
$\varphi_Y(s)$	– função característica de Y
$DC(X, Y)$	– coeficiente de correlação de distância
$\sigma_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	– covariância de distância empírica entre \mathbf{X} e \mathbf{Y}
$\sigma_N(\mathbf{X})$	– variância de distância empírica de \mathbf{X}
$\sigma_N(\mathbf{Y})$	– variância de distância empírica de \mathbf{Y}
$DC_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	– coeficiente de correlação de distância empírico
Γ	– intensidade do ruído
ξ	– ruído Gaussiano
x_{n+1}	– mapa quadrático unidimensional
λ_Γ	– expoente de Lyapunov em função do ruído
E_0	– energia mínima de escape
τ_0	– tempo entre tentativas de escape
$\langle \rho_n \rangle$	– média da correlação de Pearson
$\langle DC_n \rangle$	– média da correlação de distância
α	– parâmetro: de ajuste de curva (Cap. 3); de fase de Sakagushi (Cap. 4)
β	– parâmetro de ajuste de curva
D_j	– densidade de probabilidade
Δx_j	– comprimento de uma subdivisão
$\langle D \rangle$	– média da densidade de probabilidade
$\langle D^2 \rangle$	– média da densidade de probabilidade quadrada
I	– intensidade de segregação
ϕ_i	– fase do i -ésimo oscilador
ω_i	– frequência do i -ésimo oscilador

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	SISTEMAS DINÂMICOS	19
1.1.1	Uma breve história	19
1.1.2	Definição de sistemas dinâmicos	20
1.2	MODELOS DINÂMICOS INVESTIGADOS	22
1.3	UM NOVO MÉTODO ESTATÍSTICO	23
1.4	INFORMAÇÕES ADICIONAIS E ESTRUTURA DA TESE	25
2	MODELOS ESTATÍSTICOS	26
2.1	CORRELAÇÃO DE PEARSON	26
2.1.1	Correlação de Pearson empírica	27
2.2	OUTROS MÉTODOS ESTATÍSTICOS	28
2.3	CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA	29
2.3.1	Propriedades da função característica	30
2.3.2	Correlação de distância	31
2.3.3	Covariância e correlação de distância empíricas	32
2.4	COMPARANDO AS CORRELAÇÕES DE DISTÂNCIA E PEARSON SOB A AÇÃO DE RUÍDO	34
3	CORRELAÇÃO NO MAPA QUADRÁTICO	37
3.1	O MAPA QUADRÁTICO UNIDIMENSIONAL	38
3.1.1	Expoente de Lyapunov em sistemas de tempo discreto	39
3.2	O MAPA QUADRÁTICO COM RUÍDO	40
3.3	DECAIMENTO DA CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA	42
3.3.1	DC entre o mapa e ruído	42
3.3.2	DC entre os mapas	44
3.3.3	Concordâncias entre $\langle \rho_{20} \rangle$ e $\langle DC_{20} \rangle$	44
3.3.4	Discordâncias entre $\langle \rho_{20} \rangle$ e $\langle DC_{20} \rangle$	46
3.4	MISTURA DE TRAJETÓRIAS CAÓTICAS	48
3.4.1	Qualidade de mistura pela intensidade de segregação	48

3.4.2	Qualidade de mistura pela correlação de distância	50
3.5	COMPARANDO OS ELs COM DC NO MAPA QUADRÁTICO	51
3.6	CONCLUSÕES	55
4	IDENTIFICAÇÃO DE ESTADOS QUIMERA	57
4.1	ESTADOS QUIMERA	57
4.2	TIPOS DE ACOPLAMENTOS NA REDE	58
4.3	OSCILADORES DE FASE DE KURAMOTO	59
4.4	ESTADOS QUIMERA VIA CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA	62
4.4.1	Detectando “simetria” nos estados quimera	67
4.5	ESPECTRO DOS ELs DOS ESTADOS QUIMERA	68
4.6	CONCLUSÕES	70
5	CORRELAÇÃO NA MISTURA DAS ÁGUAS	72
5.1	AMAZÔNIA E O ENCONTRO DAS ÁGUAS	72
5.2	HIDRODINÂMICA DE CONFLUÊNCIAS	74
5.3	ÁREA DE ESTUDO E INSTRUMENTAÇÃO	76
5.4	ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS DADOS COLETADOS	79
5.4.1	DC no Rio Negro	80
5.4.2	DC entre o Rio Negro e Zona de Confluência	83
5.4.3	DC entre o Rio Solimões e Zona de Confluência	85
5.5	CONCLUSÕES	86
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	88
6.1	TRABALHOS EM ANDAMENTO	89
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90
	APÊNDICE 1 – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS DEFINIÇÕES DE CO- VARIÂNCIA DE DISTÂNCIA	96
	APÊNDICE 2 – EL VIA PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT	102
2.1	PROCEDIMENTO DE GRAM-SCHMIDT	102
2.2	EQUAÇÕES LINEARIZADAS DO SISTEMA DE OSCILADORES	103
	ANEXO 1 – ARTIGOS CIENTÍFICOS	105

1 INTRODUÇÃO

Esta tese de doutoramento é um trabalho com um forte enfoque na parte teórica e numérica e com uma aplicação em um modelo real. Utilizamos a correlação de distância como principal método para descrever a dinâmica. Foram estudados aspectos relacionados ao fenômeno de escape, devido ao ruído gaussiano, das órbitas sobre os atratores em regimes periódicos e caóticos do mapa quadrático unidimensional. Estudamos aspectos relacionados à identificação dos estados quimera em uma rede de osciladores acoplados e também questões sobre análises estatísticas de parâmetros físico-químicos na mistura das águas dos Rios Negro e Solimões. Desse modo, na seção 1.1 deste capítulo, apresentaremos uma breve descrição de sistemas dinâmicos. Em seguida na seção 1.2, apresentaremos os sistemas dinâmicos utilizados com suas respectivas motivações para nossa investigação, que serão estudados nos próximos capítulos. A seção 1.3 tem por objetivo fazer uma breve revisão bibliográfica sobre a metodologia que será utilizada neste trabalho. Finalmente, na seção 1.4, relataremos sobre algumas informações adicionais e a estrutura da tese.

1.1 SISTEMAS DINÂMICOS

1.1.1 Uma breve história

As investigações sobre sistemas dinâmicos começaram a tornar-se expressivas a partir do final do século XIX com *Henri Poincaré*. Poincaré tinha como objetivo vencer uma competição internacional a respeito da prova matemática da estabilidade, ou não, do sistema solar, em homenagem ao rei Oscar II da Suécia e da Noruega no seu 60º aniversário. Poincaré desenvolveu um trabalho sobre o problema de três corpos, denominado por “*Sur le problème des trois corps et les équations de dynamique*”. Ele mostrou a existência de um movimento irregular ao relatar que a evolução de um sistema é constantemente desordenada em relação a pequenas perturbações em seu estado inicial, ou seja, que existe uma significativa sensibilidade às condições iniciais, e que tais perturbações poderiam levar a uma mudança profunda no seu estado final. Possivelmente, Poincaré foi o primeiro a detectar a existência de caos com o problema da interação de três corpos.

Os comportamentos explícitos no tempo de um sistema e sua dependência às condições iniciais começaram a ser investigados desde então. Seu trabalho é considerado o primeiro sobre a abordagem qualitativa dos sistemas dinâmicos, o que o torna pioneiro nesta área (BARROW-GREEN, 1997; POINCARÉ, 1890).

Desde então, os sistemas dinâmicos têm sido investigados nos mais diversos campos. Como exemplo, apontamos a contribuição meteorológica de Lorenz com o seu renomado atrator (LORENZ, 1963; LORENZ, 2005), o trabalho sobre a dinâmica populacional (MAY, 1976), a contribuição de Hénon com o seu memorável atrator (HÉNON, 1976), o trabalho que descreve o processo de transição de fluxo laminar para fluxo turbulento em fluidos (RUELLE; TAKENS, 1971), o estudo sobre lasers (HAKEN, 1975), a investigação sobre dispositivos ópticos não lineares (HOPF *et al.*, 1982), os estudos sobre as reações químicas (SIMOYI *et al.*, 1982) e também as pesquisas sobre plasmas com ondas não lineares (WERSINGER *et al.*, 1980), para mencionar apenas poucos.

Deve-se dizer que, durante esse tempo, o computador tornou-se uma ferramenta importante para simulações mais sofisticadas e para o auxílio nas representações gráficas, o que resultou em um formidável avanço nesta área. Com o advento da computação, simulações numéricas permitiram a investigação detalhada da dinâmica dos sistemas. Hoje conhecemos por *sistemas dinâmicos não lineares* a parte da física que estuda de forma abrangente os campos acima citados e muitos outros. O objetivo das investigações em sistemas dinâmicos é construir um modelo típico que descreva as propriedades mais gerais encontradas em tais sistemas. Na prática, estes sistemas podem ser caracterizados por um conjunto de variáveis de estado, que fornecem toda a informação sobre o estado do sistema em um determinado tempo (OTT, 1993; ALLIGOOD *et al.*, 1996; ABRAMS; STROGATZ, 2004).

Enfim, o estudo de fenômenos em sistemas dinâmicos não lineares possui um considerável campo de aplicabilidade em áreas como a engenharia, na meteorologia com a previsão do tempo, nas previsões relacionadas ao mercado financeiro, no estudo de circuitos elétricos, nas investigações sobre a evolução de epidemias, na dinâmica de populações, sistemas biológicos, entre outros. Na próxima seção mostraremos uma breve definição de sistemas dinâmicos.

1.1.2 Definição de sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é definido como sendo um sistema de equações que são responsáveis pelo processo evolutivo no tempo. Os processos evolutivos podem ser descritos por um processo de tempo contínuo ou um processo de tempo discreto. Um sistema de tempo contínuo é representado por equações diferenciais, enquanto um sistema de tempo discreto é descrito por equações de diferenças (mapas). Segundo (WIGGINS,

2003; LAYEK, 2015; CENCINI *et al.*, 2010), os sistemas dinâmicos de tempo contínuo podem ser descritos matematicamente por equações diferenciais escritas na forma

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_d), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \\ &\vdots \\ \frac{dx_d}{dt} &= f_d(x_1, x_2, \dots, x_d),\end{aligned}$$

ou em notação vetorial como

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (1.1)$$

onde $\vec{x} = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^d$ representa o estado do sistema em um tempo t , e é um vetor de dimensionalidade d , e \vec{f} uma função da variável \vec{x} . Este conjunto de equações representa um sistema dinâmico pois, para um estado inicial $\vec{x}(0)$, em princípio podemos sempre resolver as equações e obter o estado $\vec{x}(t)$ do sistema para qualquer $t > 0$. A equação (1.1) é autônoma, pois não depende explicitamente do tempo. Caso o sistema seja dependente do tempo, é chamado de não autônomo, que é descrito matematicamente por $d\vec{x}/dt = \vec{f}(\vec{x}, t)$.

Por outro lado, no sistema discreto o tempo assume valores inteiros (com n denotando variável de tempo, $n = 0, 1, 2, \dots$). Um sistema dinâmico a tempo discreto está relacionado a um mapa discreto que evolui apenas em pontos de tempo igualmente espaçados, e é escrito como $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$, onde $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d)$ é um vetor de dimensionalidade d e \vec{f} uma função de \vec{x}_n . A partir de um ponto \vec{x}_0 , podemos obter o estado \vec{x}_1 que, por sua vez, mapeia \vec{x}_2 , e assim sucessivamente. Desta forma, dada uma condição inicial \vec{x}_0 , obtemos a órbita (ou trajetória) como sendo: $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$, melhor dizendo, $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{f}(\vec{f}(\vec{x}_{n-1})) = \dots$. As equações de tempo discreto são pertinentes para a configuração de sistemas descritos por grandezas que variam somente em determinados instantes de tempo (DEVANEY, 1989).

Um sistema de tempo contínuo pode muitas vezes ser reduzido a um mapa de tempo discreto. Um mapa pode ser obtido pela discretização temporal de um fluxo. Uma maneira usual de se fazer isto é através da técnica da seção de Poincaré. A Fig. 1.1 ilustra um exemplo da seção de Poincaré no caso específico de $d = 3$. Os pontos marcados na superfície de Poincaré correspondem à órbita discreta do mapa, formando o conjunto de pontos $(\vec{x}_n : \vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots)$, sendo n o número de iteradas do mapa, e \vec{x}_0 a condição inicial.

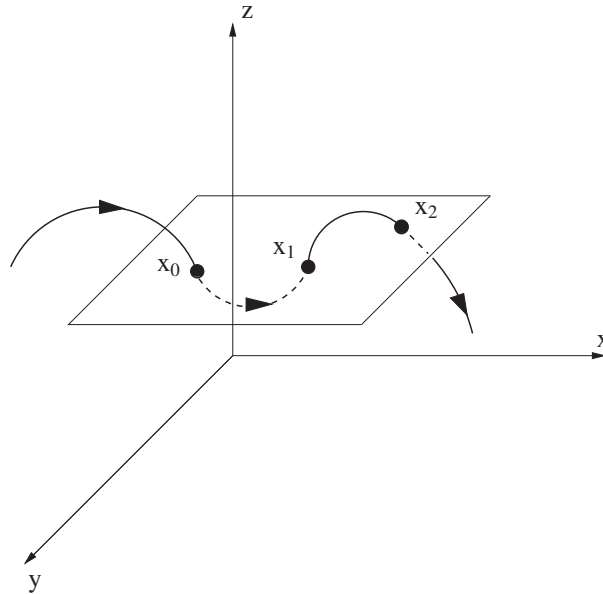


FIGURA 1.1 – Representação da trajetória de um sistema contínuo que cruza a superfície de Poincaré, com os respectivos pontos marcados.

1.2 MODELOS DINÂMICOS INVESTIGADOS

Neste trabalho, iniciaremos nossa investigação por um sistema dinâmico de tempo discreto, o **mapa quadrático unidimensional** (ALLIGOOD *et al.*, 1996; GILMORE; LEFRANC, 2011) com a investigação do fenômeno do tempo de escape de órbitas periódicas e caóticas de seus respectivos atratores, devido ao ruído gaussiano (BEALE, 1989). O segundo sistema dinâmico considerado é de tempo contínuo, uma **rede de osciladores acoplados** (SAKAGUCHI; KURAMOTO, 1986). Deste modelo, pode-se observar o fenômeno da simultaneidade de comportamentos designados como *coerentes* e *incoerentes* (KURAMOTO; BATTOGTOKH, 2002). Nesta referência, os autores afirmam que sob condições adequadas, certos padrões peculiares podem ser vistos em um arranjo de osciladores idênticos, que se separam nitidamente em dois domínios, um composto de osciladores mutuamente sincronizados com frequência única e o outro composto de osciladores dessincronizados com frequências distribuídas. A coexistência de tais comportamentos foi denominada de *estados quimera* por Abrams e Strogatz (2004). Pikovsky *et al.* (2001) define sincronização como sendo um ajuste de ritmos de objetos oscilantes devido suas interações.

Na natureza, é possível a observação do fenômeno da coexistência de comportamentos distintos. Existem algumas espécies de animais que no meio natural, durante o estado de repouso e sob a constante ameaça de ataque de predadores, possuem uma excelente capacidade de defesa. Isto se deve a um estado de dessincronização de uma parte de seu sistema nervoso que é responsável pelo constante estado de vigília (SANTOS, 2018; SANTOS *et al.*, 2017). Rattenborg *et al.* (2000) cita várias espécies de animais que

exibem tais comportamentos e mostra como exemplo um exame de eletroencefalograma realizado em um golfinho no final dos anos 70, onde é possível observar a coexistência de tais comportamentos. Mas, nem sempre podemos dizer que tais estados são importantes ou benéficos para os seres vivos do ponto de vista biológico, pois em seres humanos o estado de sincronismo de algumas regiões do cérebro indica certas anomalias no sistema nervoso central segundo Batista *et al.* (2010). Nesta referência, os autores argumentam que a doença de Parkinson está relacionada à sincronização dos neurônios.

O terceiro e último modelo é um sistema dinâmico real referente a mistura das águas dos Rios Negro e Solimões, localizados no Estado do Amazonas ao norte do Brasil. Portanto, nesta última parte do trabalho o principal objetivo é a utilização da correlação de distância na análise estatística de dados obtidos localmente **na região de confluência** dos dois rios. Os dados são referentes aos parâmetros físico-químicos como temperatura, condutividade elétrica, turbidez e oxigênio dissolvido. O interesse do estudo neste sistema se dá pelo fato de que ambos os rios possuem características físico-químicas totalmente diferentes. Após a junção dos rios, o processo de mistura não ocorre de forma imediata, de maneira que as águas fluem lado a lado até 100 km rio abaixo.

1.3 UM NOVO MÉTODO ESTATÍSTICO

A **correlação de distância** foi proposta no ano de 2007 (SZÉKELY *et al.*, 2007) para atestar dependência de vetores aleatórios¹ em dimensões arbitrárias. Da maioria dos interesses estatísticos aplicados a independência emerge de várias aplicações e é essencial para medir estruturas de dependências intrincadas em dados multivariados². Em quase todos os campos de aplicação da estatística, encontra-se frequentemente um problema que é preciso caracterizar por um valor numérico a força de dependência entre as variáveis. A correlação de Pearson (PEARSON, 1895) mede dependência linear entre duas variáveis. Este método tem sido amplamente utilizado na modelagem de dados financeiros, sincronização de neurônios, pesquisas atmosféricas, análises de séries temporais, reconhecimento de padrões, entre muitas outras aplicações. Entretanto, para dados multivariados mais gerais, dependências não lineares entre variáveis podem existir e desta forma a correlação de Pearson se mostra ineficiente neste sentido, de maneira que o uso da correlação de distância torna-se essencial. Após o método estatístico da correlação de Pearson ter sido proposto, outros métodos foram apontados. Como exemplo temos a correlação máxima de Rényi (RÉNYI, 1959), correlação de classificação (SPEARMAN, 1904; KENDALL, 1938), coeficiente de informação máxima (RESHEF *et al.*, 2011), entre outros.

¹Um vetor aleatório é um vetor contendo uma ou mais variáveis aleatórias. É representado por $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$.

²Na estatística multivariada, as variáveis devem ser aleatórias e interrelacionadas de tal forma que seus diferentes efeitos não podem ser interpretados de maneira significativa, separadamente.

Contribuições adicionais recentes têm mostrado a relevância da correlação de distância em estatística aplicada (SZÉKELY; RIZZO, 2009, 2012, 2013, 2014, 2017). A correlação de distância já tem se tornado significativa em muitas outras áreas da ciência, por exemplo na física foi utilizada para análise da transição clássico-quântica sobre a corrente de catraca (BEIMS *et al.*, 2015) e também usada como método de identificação de parâmetros de sistemas não lineares (SOLARES; WEI, 2015). Já na astrofísica, foi aplicada na análise das variáveis da base de dados COMBO-17 (MARTÍNEZ-GÓMEZ *et al.*, 2014). Na medicina, a correlação de distância está sendo utilizada em procedimentos de varredura características em problemas de riscos genéticos: em dados de tumores de células azuis e em dados de câncer de ovário (KONG *et al.*, 2015), na formulação da correlação entre o colesterol sérico e pressão sanguínea (BHATTACHARJEE, 2014), e também no estudo da conectividade funcional cerebral e regiões de covariância estrutural de interesse (GEERLIGS *et al.*, 2016). Neste trabalho, os autores verificaram que a similaridade entre a conectividade funcional cerebral e covariância estrutural foi maior para a correlação de distância comparado com a correlação de Pearson.

O principal objetivo deste trabalho é a utilização de um método estatístico para análise de variáveis em sistemas dinâmicos. Para isto, aplicamos a correlação de distância na análise dos dados. Usamos este método como uma forma alternativa para se extrair propriedades complexas e relevantes desses sistemas. A ideia é estabelecer a validade da correlação de distância como um método de correlação entre dados multivariados de sistemas dinâmicos. Mostraremos uma relação da correlação de distância com a estabilidade linear obtida via expoente de Lyapunov. Como primeira verificação, usamos o mapa quadrático unidimensional, que apesar de ser um modelo matemático simples, exibe uma alta complexidade de fenômenos em regime caótico. Neste sentido, a correlação de distância se mostra eficaz, pois surpreendentemente descreve corretamente o comportamento qualitativo do tempo de escape de órbitas periódicas e caóticas de seus respectivos atratores, devido ao ruído gaussiano (BEALE, 1989). Além do mais, os resultados obtidos desta investigação, mostram que a correlação de distância pode ser utilizada para descrever mistura de trajetórias caóticas (STURMAN; SPRINGHAM, 2013). Estes resultados são comparados com o método estatístico utilizado para a caracterização de mistura, conhecido como intensidade de segregação (AREF *et al.*, 2017; KRASNOPOLSKAYA; MELESHKO, 2009). Como segunda verificação, utilizamos a correlação de distância na identificação da coexistência de comportamentos distintos (estados quimera) em uma rede de osciladores de fase acoplados (KURAMOTO; BATTOGTOKH, 2002). Os resultados obtidos nos mostram que a correlação de distância pode nos auxiliar no reconhecimento de padrões desta natureza. Como última aplicação, utilizamos a correlação de distância na análise estatística de dados reais de parâmetros físico-químicos, coletados na região de mistura das águas dos Rios Negro e Solimões no Rio Amazonas.

1.4 INFORMAÇÕES ADICIONAIS E ESTRUTURA DA TESE

O desenvolvimento desta tese de doutorado é resultado de estudos iniciados em março de 2015. O período de doutoramento na Universidade Federal do Paraná, foi financiado integralmente pela **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM**. Todas as pesquisas desenvolvidas durante este período resultaram em uma publicação de um artigo numa revista científica internacional indexada, e três artigos em fase de preparação. As simulações numéricas que viabilizaram a obtenção dos resultados e que possibilitaram a realização dos trabalhos citados e apresentados nesta tese, foram executados no Laboratório de Física Teórica Computacional (LFTC) da UFPR. A linguagem de programação utilizada foi o Fortran 90 para cálculos numéricos, e para os cálculos analíticos usamos o software MAPLE-15. Para o gerador de ruído aleatório gaussiano, utilizamos a rotina Gasdev(idum) obtida da referência (PRESS *et al.*, 1992). Para o tratamento de dados, utilizamos os programas gráficos Xmgrace-5.1.25 e Gnuplot versão 5.0.

No decorrer do texto os capítulos são expostos do seguinte modo: No capítulo 2, serão apresentados os métodos estatísticos utilizados neste trabalho, juntamente com uma breve revisão bibliográfica de outros métodos existentes na literatura. No capítulo 3, analisaremos os resultados referentes ao estudo do escape de órbitas dos atratores devido ao ruído gaussiano no mapa quadrático unidimensional via correlação de distância. No capítulo 4, analisaremos os resultados relacionados ao estudo dos estados quimera em uma rede de osciladores acoplados via correlação de distância. No capítulo 5, faremos uma análise estatística sobre dados coletados referentes aos parâmetros físico-químicos dos Rios Negro e Solimões. No capítulo 6, apresentaremos nossas considerações finais. Finalmente, serão listadas as principais referências bibliográficas utilizadas ao longo do período de doutoramento. Nos apêndices constarão alguns cálculos analíticos que são referenciados no texto principal e no anexo listamos os artigos referentes à tese, o publicado e os que se encontram em fase de preparação.

2 MODELOS ESTATÍSTICOS

Neste capítulo apresentaremos em detalhes a metodologia utilizada nesta tese para aplicação nos sistemas dinâmicos considerados. Primeiramente, vamos descrever o procedimento para a obtenção da correlação de Pearson. Posteriormente, faremos uma breve revisão de outros dois modelos estatísticos existentes na literatura, as correlações de Kendall e Spearman. Em seguida, relataremos em detalhes o método estatístico da correlação de distância. Por fim, faremos comparações da correlação de Pearson com a correlação de distância em casos simples, utilizando formas básicas da geometria para apresentarmos as diferenças de suas respectivas eficácias.

Em pesquisas, frequentemente, procura-se verificar se existe relação entre duas ou mais variáveis, isto é, saber se as alterações sofridas por uma das variáveis são acompanhadas por alterações nas outras. A verificação da existência e do grau de relação entre as variáveis é o objeto de estudo da correlação. Uma vez caracterizada esta relação, procura-se descrevê-la sob uma forma matemática.

2.1 CORRELAÇÃO DE PEARSON

Começaremos nossa discussão falando a respeito do método estatístico proposto por Pearson (1895). O *coeficiente de correlação de Pearson* (ρ), também conhecido como coeficiente de correlação produto-momento, é uma medida linear de dependência entre variáveis. Considerando-se duas variáveis X e Y , os seus *valores esperados* são dados por $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$, respectivamente. Assim, a *variância* de X é dada por $\sigma^2(X) = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}[X]]^2$ que é análogo para Y , e a *covariância* entre as duas variáveis é dada pela relação $\sigma(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. O *coeficiente correlação de Pearson* é então dado pela expressão

$$\rho(X, Y) = \frac{\sigma(X, Y)}{\sqrt{\sigma(X)\sigma(Y)}}, \quad (2.1)$$

com seus valores pertencentes ao intervalo $[-1, +1]$. O valor $\rho(X, Y) = 1$ corresponde a correlação linear máxima positiva, $\rho(X, Y) = -1$ a correlação linear máxima negativa e $\rho(X, Y) = 0$ significa que não existe correlação entre as variáveis.

Sabemos que a correlação é linear quando é possível ajustarmos uma reta entre as observações. A proximidade entre as observações e a reta determina a força de correlação. A correlação é não linear, quando não é possível ajustarmos uma reta entre as observações. Na Fig. 2.1 (diagramas de dispersão) podemos verificar a exemplificação de algumas formas de correlação entre variáveis. A vantagem de construir um diagrama de dispersão é que, muitas vezes sua simples observação nos dá uma ideia de como as duas variáveis se relacionam. Na Fig. 2.1(a) temos a correlação linear positiva, na Fig. 2.1(b) a correlação linear negativa e na Fig. 2.1(c) a correlação não linear entre as variáveis.

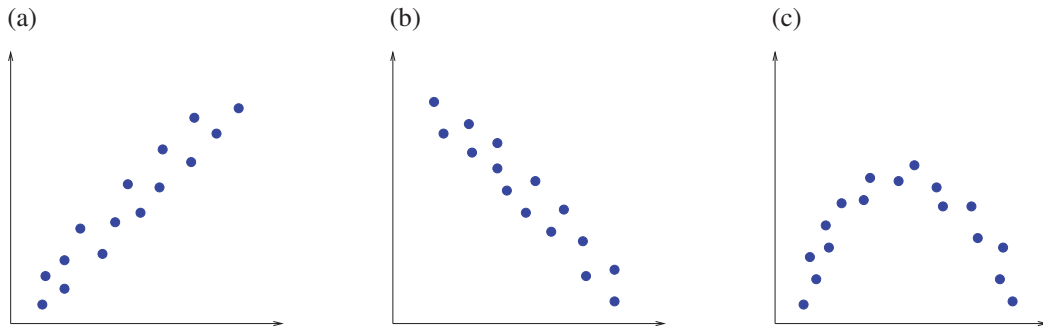


FIGURA 2.1 – Representação de alguns tipos de correlação entre variáveis. (a) Correlação linear positiva, (b) correlação linear negativa e (c) correlação não linear.

2.1.1 Correlação de Pearson empírica

Considerando uma amostra observável conjunta do tipo $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(X_k, Y_k) : k = 1, \dots, N\}$ com $N \geq 2$, a medida estatística de correlação pode ser calculada a partir do conjunto de dados com o auxílio das seguintes expressões

$$S_{XX} \equiv \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2 = \sum_{k=1}^N X_k^2 - N\bar{X}^2, \quad (2.2)$$

$$S_{YY} \equiv \sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{Y})^2 = \sum_{k=1}^N Y_k^2 - N\bar{Y}^2, \quad (2.3)$$

$$S_{XY} \equiv \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y}) = \sum_{k=1}^N X_k Y_k - N\bar{X}\bar{Y}. \quad (2.4)$$

Então o *coeficiente de correlação de Pearson empírico* pode ser obtido por substituição das relações (2.2), (2.3) e (2.4) na expressão abaixo

$$\rho_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}} \cdot \sqrt{S_{YY}}}, \quad (2.5)$$

que resulta em

$$\rho_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{Y})^2}}, \quad (2.6)$$

onde $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k$ e $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k$ são as médias aritméticas das amostras \mathbf{X} e \mathbf{Y} , respectivamente (MARTÍNEZ-GÓMEZ *et al.*, 2014; DUNN, 2010).

2.2 OUTROS MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Na literatura existem muitos métodos estatísticos de medida de associação entre variáveis, como já citado na introdução deste trabalho. Após o método estatístico da correlação de Pearson (1895) ter sido proposto, outras medidas têm sido sugeridas desde então. Vamos citar apenas dois casos, que são os modelos de Kendall (1938) e Spearman (1904). Começemos pelo método conhecido como *coeficiente de correlação de Kendall* (κ). A correlação de Kendall é uma medida estatística baseada na classificação das observações das variáveis. O coeficiente entre duas variáveis será máximo se as observações tiverem uma classificação idêntica ($\kappa = 1$), e será mínimo quando as observações tiverem uma classificação completamente diferente, $\kappa = -1$. Por classificação, entende-se a descrição das posições relativas das observações no interior de cada variável.

Assim, a partir de uma amostra conjunta $\{(X_k, Y_k) : k = 1, \dots, N\}$, com N sendo o número total de pares, podemos verificar as seguintes condições: Sejam (X_i, Y_i) e (X_j, Y_j) dois pares distintos da amostra. Serão concordantes se $X_i < X_j$ e $Y_i < Y_j$ ou se $X_i > X_j$ e $Y_i > Y_j$, e discordantes se $X_i < X_j$ e $Y_i > Y_j$ ou se $X_i > X_j$ e $Y_i < Y_j$. Denotando por η o número de pares concordantes menos o número de pares discordantes, o coeficiente de correlação de Kendall é dado pela expressão

$$\kappa = \frac{2\eta}{N(N-1)}. \quad (2.7)$$

A relação (2.7) satisfaz as seguintes propriedades: (i) κ pertence ao intervalo $[-1, 1]$; (ii) se a concordância entre as duas classificações forem iguais, o coeficiente terá valor 1; (iii) se a discordância entre as duas classificações forem uma o inverso da outra, o coeficiente terá valor -1 e (iv) se X e Y forem independentes, o coeficiente será nulo.

Passamos agora à descrição do *coeficiente de correlação de Spearman* (ν). Este método avalia com que intensidade a relação entre duas variáveis pode ser descrita pelo uso de uma função monótona³. Enquanto a correlação de Pearson avalia relações lineares

³Em matemática, uma função entre dois conjuntos ordenados é monótona quando ela preserva (ou inverte) a relação de ordem. Quando a função preserva a relação, ela é chamada de função crescente. Quando ela inverte a relação, ela é chamada de função decrescente.

como já dito anteriormente, a correlação de Spearman avalia relações monótonas, sejam elas lineares ou não. A correlação de Spearman será alta quando as observações tiverem uma classificação semelhante entre as duas variáveis, e será baixa quando tiverem uma classificação diferente entre as duas variáveis. Note a similaridade com a correlação de Kendall, pois ambas estão diretamente ligados a classificação dos elementos das variáveis.

Então, seja uma amostra conjunta $\{(X_k, Y_k) : k = 1, \dots, N\}$, a cada elemento deve ser atribuído uma classificação (posição) dentro da amostra e suas observações devem ser ordenadas de maneira que X fique em ordem crescente. Em decorrência disso, o coeficiente de Spearman pode ser calculado pela relação

$$v = 1 - \frac{6 \sum_{k=1}^N d_k^2}{N(N^2 - 1)}, \quad (2.8)$$

onde N representa o número total de pares e $d_k = \text{posição}(X_k) - \text{posição}(Y_k)$ a diferença entre duas posições de cada elemento dentro da amostra. A equação (2.8) satisfaz as seguintes propriedades: (i) se Y tende a aumentar quando X aumenta após o ordenamento de seus elementos, v será positivo; (ii) agora se Y diminui enquanto X aumenta, v será negativo; (iii) $v = 0$ se não há tendência de que Y aumente ou diminua enquanto X aumenta e (iv) v pertence ao intervalo $[-1, 1]$.

Os coeficientes de correlação de Spearman e Kendall geralmente são considerados como alternativas ao coeficiente de correlação de Pearson, pois são usados para reduzir a quantidade de cálculo e por serem menos sensíveis à não linearidade entre as variáveis. No entanto, estes modelos possuem pouca base matemática, pois estes coeficientes medem um tipo de relação diferente do coeficiente de correlação de Pearson, e são melhor vistos como medidas de um tipo diferente de associação do que como medida alternativa de correlação.

2.3 CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA

O coeficiente de correlação de distância DC (sigla utilizada do termo em inglês *distance correlation*) é uma medida estatística de dependência entre variáveis aleatórias e baseada em distâncias euclidianas. Esta medida é derivada de quantidades como *variância* e *covariância de distância*. A correlação de Pearson é sensível a uma relação não linear entre variáveis e pode ser facilmente zero se as dependências são não lineares. No entanto, a correlação de distância é igual a zero se e somente se as variáveis são independentes. Esta é uma das características fundamentais da correlação de distância e uma das vantagens em relação a correlação de Pearson. Mas, antes de falarmos sobre o método da correlação de distância apropriadamente, vamos primeiramente mostrar algumas propriedades de funções características, que são ferramentas matemáticas essenciais para a compreensão

do método.

2.3.1 Propriedades da função característica

Definição 2.3.1. A função característica de uma probabilidade de medida μ é a função $\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_\mu(t) = \int e^{itx} \mu dx. \quad (2.9)$$

Quando falamos da função característica φ_X de uma variável aleatória X , temos a função característica φ_{μ_X} de sua distribuição μ_X . Logo, a função característica de uma variável aleatória X pode ser escrita como

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E} [e^{itX}] \quad (2.10)$$

quando o valor esperado existe, em que $t \in \mathbb{R}$ é o argumento (real) da função e $i = \sqrt{-1}$ (DURRETT, 1995). Começemos com algumas propriedades que seguem diretamente da definição acima:

Proposição 2.3.1.1. Sejam X e Y variáveis aleatórias, então

1. $\varphi_X(0) = 1$ e $|\varphi_X(t)| \leq 1$, para todo t .
2. $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$, onde a barra denota o complexo conjugado.
3. Se X e Y são independentes, então $\varphi_{X,Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Demonstração.

1.

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E} [e^0] = 1 \quad (2.11)$$

e ainda

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t)| &= |\mathbb{E} [e^{itX}]| \\ &= \sqrt{\mathbb{E}^2 [\cos(tX)] + \mathbb{E}^2 [\sin(tX)]} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} [\cos^2(tX)] + \mathbb{E} [\sin^2(tX)]} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} [\cos^2(tX) + \sin^2(tX)]} \\ &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.

$$\overline{e^{itX}} = e^{-itX}. \quad (2.13)$$

3. Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes

$$\begin{aligned}
 \varphi_{X,Y}(t,s) &= \mathbb{E} [e^{i(tX+sY)}] \\
 &= \mathbb{E} [e^{itX} e^{isY}] \\
 &= \mathbb{E} [e^{itX}] \mathbb{E} [e^{isY}] \\
 &= \varphi_X(t) \varphi_Y(s),
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

□

Definição 2.3.2 (Função característica multivariada). *Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ um vetor aleatório. A função característica $\varphi_X : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ é definida como sendo*

$$\varphi_X^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp \{i \langle t, X_k \rangle\}, \tag{2.15}$$

onde $\langle t, X_k \rangle$ é o produto interno dos vetores $t = (t_1, \dots, t_N)$ e X , ambos pertencentes a \mathbb{R}^p .

2.3.2 Correlação de distância

A correlação de distância pode ser definida a partir de vetores aleatórios em dimensões arbitrárias (SZÉKELY *et al.*, 2007). Passamos agora a chamar X e Y de vetores aleatórios ao invés de variáveis aleatórias apenas. Assumindo p e q inteiros positivos, os vetores podem ser definidos como sendo $X \in \mathbb{R}^p$ e $Y \in \mathbb{R}^q$. Considerar o fato de que estes vetores podem ser definidos em quaisquer dimensões, mostra uma outra superioridade da correlação de distância comparado à correlação de Pearson.

A *covariância de distância* entre dois vetores aleatórios X e Y é definida pela expressão

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(X, Y) &= \|\varphi_{X,Y}(t, s) - \varphi_X(t) \varphi_Y(s)\|^2 \\
 &= \frac{1}{c_p c_q} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \frac{|\varphi_{X,Y}(t, s) - \varphi_X(t) \varphi_Y(s)|^2}{|t|^{1+p} |s|^{1+q}} dt ds,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

com c_p e c_q constantes (ver apêndice 1, equação (1.3)), $\|\cdot\|$ a norma euclidiana, $\varphi_X(t)$ e $\varphi_Y(s)$ funções características de X e Y , respectivamente, e $\varphi_{X,Y}(t, s)$ uma função característica conjunta. Na teoria da probabilidade, uma função característica de qualquer variável aleatória define completamente a sua distribuição de probabilidade. A função característica conjunta sob a independência de dois vetores aleatórios leva à propriedade $\sigma^2(X, Y) = 0$ se e somente se X e Y forem independentes, ou seja, $\varphi_{X,Y}(t, s) = \varphi_X(t) \varphi_Y(s)$ para todo $t \in \mathbb{R}^p$ e $s \in \mathbb{R}^q$. Podemos obter de forma similar a *variância de distância* como

sendo

$$\sigma^2(X, X) = \sigma^2(X) = \|\varphi_{X,X}(t, s) - \varphi_X(t)\varphi_X(s)\|^2, \quad (2.17)$$

que de forma análoga obtemos também para $\sigma^2(Y)$.

Portanto, o *coeficiente de correlação de distância* entre dois vetores aleatórios é definido pela relação

$$DC(X, Y) = \frac{\sigma(X, Y)}{\sqrt{\sigma(X)\sigma(Y)}}, \quad (2.18)$$

de onde podemos ver a semelhança com a equação (2.1) referente ao coeficiente de correlação de Pearson. As medidas estatísticas de (2.18) pertencem ao intervalo $[0, 1]$. Na subseção seguinte, mostraremos a forma empírica da covariância de distância e correlação de distância que envolve distância entre pares dos elementos de uma amostra conjunta observável.

2.3.3 Covariância e correlação de distância empíricas

O método computacional definido nesta subseção, será utilizado para aplicação nos sistemas dinâmicos considerados neste trabalho e obtenção dos resultados que serão discutidos em capítulos posteriores. Começemos com a seguinte pergunta: Por que não usar a metodologia apresentada na subseção 2.3.2? No apêndice 1, mostramos em detalhes que a definição de covariância de distância empírica desta subseção é equivalente à definição dada pela equação (2.16). A implementação computacional da equação (2.16) é muito mais complicada, pois envolve cálculo de integrais de distâncias euclidianas das funções características, o que tornaria o trabalho mais árduo computacionalmente. Deste modo, optamos pela escolha do procedimento mostrado nesta subseção (equação (2.21)), pois a sua implementação é muito mais simples, por se tratar de uma fórmula computacional. A estatística correspondente à covariância de distância é definida pela substituição das funções características empíricas na equação (2.16). Para detalhes dos cálculos analíticos da demonstração de equivalência entre as definições matemáticas de covariância de distância, veja o apêndice 1.

As estatísticas de dependências da distância são definidas da seguinte forma: Para uma amostra aleatória conjunta observável $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(X_k, Y_k) : k = 1, \dots, N\}$ com $X \in \mathbb{R}^p$ e $N \geq 2$, é definido para $i, j = 1, \dots, N$ a matriz

$$A_{ij} = a_{ij} - \bar{a}_{i.} - \bar{a}_{.j} + \bar{a}_{..}, \quad (2.19)$$

onde $a_{ij} = \|X_i - X_j\|_p$ é a norma euclidiana da distância entre os elementos da amostra, $\bar{a}_{i.} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij}$ e $\bar{a}_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{ij}$ são as médias aritméticas das linhas e colunas de a_{ij} , respectivamente, e a média geral definida por $\bar{a}_{..} = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}$. Similarmente para

$Y \in \mathbb{R}^q$ definida por $i, j = 1, \dots, N$, tem-se a matriz

$$B_{ij} = b_{ij} - \bar{b}_{i.} - \bar{b}_{.j} + \bar{b}_{..}, \quad (2.20)$$

com os termos b_{ij} , $\bar{b}_{i.}$, $\bar{b}_{.j}$ e $\bar{b}_{..}$ sendo similares ao que já foi mostrado para a matriz A_{ij} .

Com estas matrizes podemos calcular a *covariância de distância empírica* para uma amostra aleatória definida pela relação

$$\sigma_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i,j=1}^N A_{ij} B_{ij} \right)^{1/2}, \quad (2.21)$$

que é equivalente à equação (2.16), segundo Székely *et al.* (2007) (ver apêndice 1) e de simples implementação numérica. Podemos também calcular a *variância de distância empírica* da amostra aleatória \mathbf{X} dada pela relação

$$\sigma_N(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i,j=1}^N A_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad (2.22)$$

e também a *variância de distância empírica* da amostra aleatória \mathbf{Y} dada pela expressão

$$\sigma_N(\mathbf{Y}) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i,j=1}^N B_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Então a *correlação de distância empírica* para uma amostra aleatória conjunta (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) é dada por

$$DC_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\sigma_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sqrt{\sigma_N(\mathbf{X})\sigma_N(\mathbf{Y})}}. \quad (2.24)$$

Note que, essa técnica baseia-se somente em informações das variáveis aleatórias e que, por suposição, podem ser de qualquer grandeza. Assim, a correlação de distância necessita somente da série de dados ou informações a serem analisadas. Isso pode ser bastante relevante quando se trata de dados experimentais visto que, na grande maioria dos casos, não se conhece as equações que regem o sistema.

É fácil verificar que $DC_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é independente de escala. Em outras palavras, as amostras \mathbf{X} e \mathbf{Y} , podem ser multiplicadas por a e b (números reais) e DC permanece inalterado. Além do mais, é importante argumentar que se todos os elementos de uma amostra observável \mathbf{X} ou \mathbf{Y} forem idênticos, então teremos $\sigma_N(\mathbf{X})\sigma_N(\mathbf{Y}) = 0$ e conseqüentemente $DC_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$.

Observação. Se $\sigma_N(\mathbf{X}) = 0$, então $A_{ij} = 0$ para $i, j = 1, \dots, N$. Assim

$$A_{ij} = a_{ij} - \bar{a}_{i.} - \bar{a}_{.j} + \bar{a}_{..} = a_{ij} = |X_i - X_j|_p = 0, \quad (2.25)$$

deste modo $X_1 = \dots = X_N$.

As principais características da correlação de distância são:

- Determina correlações não lineares entre vetores aleatórios ou variáveis aleatórias;
- É zero somente se os vetores aleatórios forem independentes;
- Os vetores aleatórios podem ser de dimensões distintas;
- Simples implementação computacional.

2.4 COMPARANDO AS CORRELAÇÕES DE DISTÂNCIA E PEARSON SOB A AÇÃO DE RUÍDO

Como já mencionado anteriormente, a correlação de Pearson caracteriza dependência linear entre variáveis, enquanto que a correlação de distância é uma medida mais geral de correlação entre variáveis aleatórias. Nesta seção, vamos comparar ambas correlações em simples exemplos matemáticos, já estudados anteriormente em formas similares na referência (SOLARES; WEI, 2015). Começemos com a simples função matemática dada por

$$y_+ = x + \xi, \quad (2.26)$$

cujas curvas estão plotadas na Fig. 2.2(a) e também com as funções dadas por

$$\begin{aligned} y_+ &= x + \xi \quad \text{para } (x \leq 4), \\ y_- &= (8 - x) + \xi \quad \text{para } (x > 4), \end{aligned} \quad (2.27)$$

plotadas na Fig. 2.2(b), onde ξ é um ruído gaussiano com propriedades $\langle \xi_n \rangle = 0$ e $\langle \xi_n \xi_{n'} \rangle = \Gamma \delta_{nn'}$ onde Γ fornece a intensidade do ruído e $\delta_{nn'}$ a delta de Kronecker. Por questão de referência, a linha preta na Fig. 2.2(a) representa ($\Gamma = 0$) para a qual temos $\rho = DC = 1,0$. Quando o ruído é adicionado ($\Gamma = 0,1$), vemos os círculos vermelhos na Fig. 2.2(a), com ambas correlações sendo iguais $\rho = DC = 0,99$. Para obtermos estas curvas, dividimos o eixo- x em 100 partes igualmente espaçadas. Com isso obtemos uma sequência conjunta de dados $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{100}, y_{100})\}$, de onde podemos aplicar os métodos da correlação de Pearson e correlação de distância discutidos nas seções anteriores. Este procedimento é válido para todas as figuras apresentadas nesta seção. A Fig. 2.2(b) mostra claramente uma distinção entre ambas correlações. A função (2.27) para $\Gamma = 0$, curva em cor preta na Fig. 2.2(b), é linear com diferentes inclinações, uma positiva e outra negativa e ambas com o mesmo tamanho em x . Assim, a correlação de Pearson é 1 na parte positiva e -1 na segunda parte, levando a um resultado de medida

$\rho = 0,02$ no caso sem ruído. Adicionando um ruído com intensidade de $\Gamma = 0,1$, tais valores de correlações permanecem praticamente inalterados. A correlação de distância neste caso é $DC = 0,50$ para o caso sem ruído e $DC = 0,49$ para o caso com ruído de intensidade $\Gamma = 0,1$.

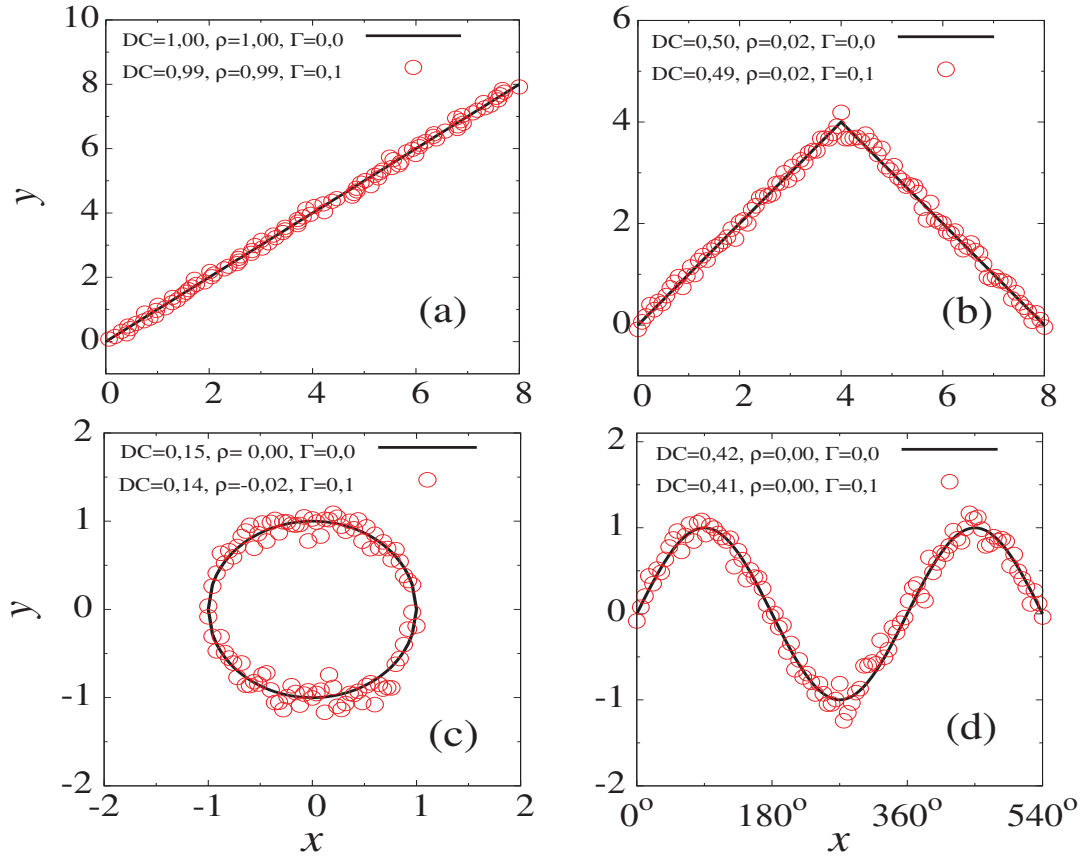


FIGURA 2.2 – Curvas plotadas a partir de: (a) equação (2.26), (b) equação (2.27), (c) equação (2.28) e (d) equação (2.29) no plano xy . Os valores de DC e ρ são dados.

Os próximos casos tratados são dados pelas equações

$$y_{\pm} = \pm\sqrt{1-x^2} + \xi, \quad (2.28)$$

que é uma curva circular com raio unitário quando $\Gamma = 0$, na cor preta mostrada na Fig. 2.2(c), e também

$$y = \text{sen } x + \xi, \quad (2.29)$$

que é uma curva senoidal para $\Gamma = 0$ mostrado na Fig. 2.2(d). Uma primeira observação a ser feita é que temos $\rho \sim 0$ nos dois casos. Pequeno desvio em torno de zero é observado quando o ruído está presente no caso da Fig. 2.2(c). Por outro lado, DC permanece quase que inalterado em ambos os casos. No caso circular da Fig. 2.2(c) ela é surpreendentemente pequena $\sim 0,15$, enquanto que na Fig. 2.2(d) tem-se $DC = 0,42$. Estes valores são quase independentes da presença do ruído. Apesar de que em todas as formas geométricas

existir obviamente uma dependência entre variáveis horizontais e verticais, a correlação de Pearson é essencialmente zero (exceto para o caso linear da Fig. 2.2(a)). A correlação de distância, por outro lado, foi capaz de detectar dependência entre as variáveis, mesmo na presença de ruído.

A correlação de distância aplicada aos quatro casos tratados nesta seção, já serve como verificação de que este método estatístico é mais eficaz na medida de dependência não linear entre variáveis em relação a correlação de Pearson. Em todos os casos, exceto o linear em que a correlação de Pearson é efetivo na medida por definição, DC sempre esteve com seus valores medidos muito acima dos obtidos por ρ . Nos próximos capítulos, aplicaremos a correlação de distância na análise de variáveis de sistemas dinâmicos.

3 CORRELAÇÃO NO MAPA QUADRÁTICO

Para compreendermos o papel da correlação de distância no contexto de sistemas dinâmicos não lineares, neste capítulo faremos comparações de medidas de correlação entre o mapa quadrático com um ruído gaussiano e também entre dois mapas quadráticos, um sendo o mapa quadrático unidimensional usual e o outro sendo o mesmo mapa incluindo um ruído gaussiano.

No estudo de sistemas dinâmicos não lineares, o elemento conhecido como atrator é de fundamental importância. Para a compreensão do que é um atrator, exige-se alguma familiaridade com outras noções, tais como condições iniciais, bacias de atração, entre outras. Um atrator é uma representação matemática abstrata que pode ser exibido por um espaço de fases particular que revele aspectos importantes da dinâmica de tal sistema. Quando os dados são plotados no espaço de fases representando o valor da variável de interesse em cada momento, conforme o sistema muda no tempo, os pontos compõem uma trajetória que é chamada de retrato de fase. Certos retratos de fase exibem então o atrator como os conjuntos de pontos estáveis do sistema dinâmico, ou seja, os locais em que a dinâmica do sistema é atraída após fenômenos transitórios terem desaparecido. Uma outra definição importante é a bacia de atração. A bacia de atração representa o conjunto de condições iniciais de um sistema, que quando se encontra sob evolução temporal, tendem na direção do atrator. Para uma verificação detalhada sobre estes temas, citamos por exemplo as referências (OTT, 1993; ALLIGOOD *et al.*, 1996; ABRAMS; STROGATZ, 2004).

Em um sistema dinâmico também pode ocorrer o fenômeno conhecido como bifurcação. Quando ocorrem bifurcações, o retrato de fase assume um novo tipo de padronização espacial, isto é, o que anteriormente estava escrito na estabilidade em si sofre uma instabilidade resultando em novas configurações. A seguir, veremos o diagrama de bifurcação do mapa quadrático unidimensional. Em seções posteriores deste capítulo, veremos que a correlação de distância reproduz qualitativamente o fenômeno do tempo de escape de órbitas dos atratores, devido ao ruído gaussiano, em regiões de comportamentos periódicos e caóticos. Este fenômeno foi primeiramente investigado por Beale (1989), utilizando outra metodologia.

3.1 O MAPA QUADRÁTICO UNIDIMENSIONAL

O mapa quadrático unidimensional é um sistema dinâmico de tempo discreto (ALLIGOOD *et al.*, 1996; GILMORE; LEFRANC, 2011) que é dado pela simples relação

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (3.1)$$

onde $f(x_n) = r - x_n^2$, $r \in [-0,25; 2]$ é um parâmetro de controle, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, representa o número de iterações do mapa e $x_n \in [-2, 2]$ representa o estado do sistema no tempo n . No estudo de caos a utilização de mapas não lineares fornece a vantagem da observação de comportamento caótico para sistemas unidimensionais, enquanto para equações diferenciais de primeira ordem, isto somente é possível a partir de três dimensões.

Por referência, plotamos o conhecido diagrama de bifurcação que pode ser visto na Fig. 3.1(a) (na cor preta). Órbitas periódicas de período-1 ($-0,25 \leq r < 0,75$), período-2 ($0,75 \leq r < 1,25$) e período-4 ($1,25 \leq r < 1,37$) podem ser notadas na figura. Para valores de r menores que $-0,25$, todas as condições iniciais divergem para $-\infty$. Uma bifurcação tangente ocorre em $r = -0,25$, onde uma órbita de período-1 é criada, e ela persiste de

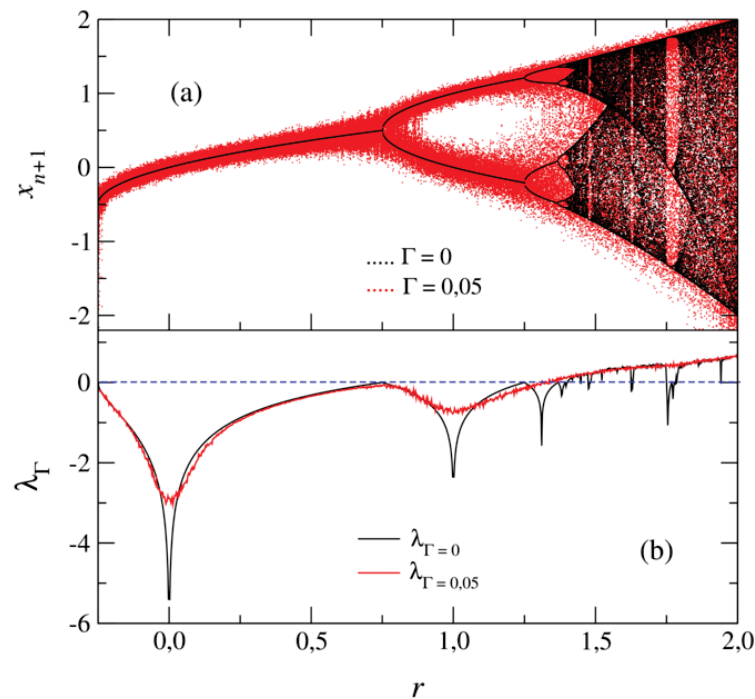


FIGURA 3.1 – (a) Diagrama de bifurcação do mapa quadrático para o caso sem ruído na cor preta. Pontos em vermelho representam o diagrama de bifurcação com a adição do ruído (ver texto). O parâmetro r é dividido em 2250 partes igualmente espaçadas no intervalo $[-0,25; 2]$, onde calculamos 1050 iterações com condição inicial $x_0 = 0,1$. Para cada valor de r somente os valores das iterações de x_{1001} até x_{1050} são plotados. (b) O expoente de Lyapunov λ_Γ em preto para o mapa (3.1) e em vermelho para o mapa com ruído (3.4).

$r = -0,25$ até $r = 0,75$. Em $r = 0,75$, a órbita de período-1 perde estabilidade onde ocorre uma bifurcação (dobramento de período) e então é substituída por uma órbita periódica de período-2. Aumentando os valores do parâmetro r , uma sequência de bifurcações de dobramentos de períodos ocorrem até o regime caótico ser alcançado. Para $r > 2,0$ todas as condições iniciais divergem para $-\infty$.

3.1.1 Expoente de Lyapunov em sistemas de tempo discreto

O expoente de Lyapunov (EL) λ quantifica o movimento caótico. Ele é um indicador conveniente da sensibilidade a pequenas perturbações de órbitas características dos atratores caóticos. É utilizado como medida quantitativa para a dependência sensível das condições iniciais. O EL de um mapa unidimensional fornece a taxa exponencial média da divergência de condições iniciais infinitesimalmente próximas. Para um sistema discreto na forma $x_{n+1} = f(x_n)$ dado em (3.1) e para uma órbita iniciando em x_0 , define-se o EL como sendo

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dx_n}{dx_0} \right|, \quad (3.2)$$

notando que a derivada pode ser avaliada pela regra da cadeia em termos de derivadas de f nas iterações intermediárias

$$\begin{aligned} dx_n/dx_0 &= (dx_n/dx_{n-1})(dx_{n-1}/dx_{n-2}) \dots (dx_2/dx_1)(dx_1/dx_0) \\ &= f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \dots f'(x_1)f'(x_0), \end{aligned}$$

de forma que (3.2) torna-se

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (3.3)$$

onde f' é a derivada da função f em relação a x .

A Fig. 3.1(b) mostra os ELs do mapa quadrático dado pela relação (3.1) (curva na cor preta). Para $\lambda < 0$ as órbitas são regulares. A órbita é atraída para um ponto fixo estável ou pontos regulares (órbita periódica). Quanto mais negativo é o expoente, maior a estabilidade da órbita. Nos pontos de bifurcações, o expoente de Lyapunov é nulo, ou seja, $\lambda = 0$. Se $\lambda > 0$, a evolução do sistema é sensível às condições iniciais e portanto a dinâmica é caótica. Se há comportamento caótico, as órbitas originárias de condições iniciais muito próximas afastam-se exponencialmente com o tempo. É evidente que no intervalo do parâmetro $-0,25 \leq r \lesssim 1,4$, todos os ELs são menores ou iguais a zero. Quando $1,4 \lesssim r \leq 2,0$, os ELs são positivos, e conseqüentemente caracterizando uma dinâmica caótica, com exceção de algumas janelas periódicas que surgem nessa região mostrando valores negativos de λ .

3.2 O MAPA QUADRÁTICO COM RUÍDO

O mapa quadrático unidimensional com a adição de um ruído é dado pela relação

$$y_{n+1} = f(y_n) + \xi_n, \quad (3.4)$$

onde $f(y_n) = r - y_n^2$, que é a mesma representação de (3.1), ξ_n um ruído gaussiano com propriedades

$$\langle \xi_n \rangle = 0, \quad (3.5)$$

$$\langle \xi_n \xi_{n'} \rangle = \Gamma \delta_{nn'}, \quad (3.6)$$

com Γ sendo a intensidade do ruído e $\delta_{nn'}$ a delta de Kronecker. Na Fig. 3.1(a) temos o “diagrama de bifurcação” do mapa (3.4) para um ruído de amplitude $\Gamma = 0,05$ (pontos vermelhos). Podemos observar nesta figura que não mais existem órbitas periódicas, mas somente algumas semelhanças (correlações) com o mapa quadrático usual (3.1). Na Fig. 3.1(b) o EL do mapa (3.4) é representado pela curva na cor vermelha. O mapa (3.4) foi estudado há alguns anos atrás no contexto de escape (fuga) de órbitas dos atratores devido ao ruído gaussiano (BEALE, 1989).

Segundo as referências (KAUTZ, 1988; BEALE, 1989), taxa de escape (R) é definida como sendo a soma das contribuições de todos os possíveis caminhos de escape, que começam no atrator e terminam nos contornos da bacia de atração, e é dado pela relação

$$R = \sum_{\text{caminhos}} \sum_{N=0}^{\infty} P_N. \quad (3.7)$$

Um dado caminho de escape, significa que uma órbita do sistema vai do atrator até o limite de bacia de atração em algum tempo τ . No caso do mapa quadrático, este limite é dado pelos valores do intervalo $[-2, 2]$. Estes valores representam a separação com a outra região cujo atrator se encontra no infinito. A contribuição para R de um determinado caminho é assumida como sendo proporcional à probabilidade P_N de que o caminho ocorra. A probabilidade é dada pela relação

$$P_N = F \exp \left[-\frac{1}{2\Gamma} \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n^2 \right], \quad (3.8)$$

onde F é um fator de normalização.

Desta forma, Beale (1989) define a energia para um dado caminho de escape como

sendo (ver equação (3.4))

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (y_{n+1} - f(y_n))^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \xi_n^2. \quad (3.9)$$

O caminho de escape de uma órbita mais provável é aquele em que a energia é mínima. O valor de E para este caminho é a energia mínima de escape E_0 . Portanto, a taxa de escape será dada pela expressão

$$R \approx \frac{1}{\tau_0} \exp \left[-\frac{E_0}{\Gamma} \right], \quad (3.10)$$

com τ_0 sendo o tempo entre as tentativas de escape, que é proporcional ao número de caminhos que esta órbita percorre até o escape com energia mínima.

Nas simulações numéricas descartamos um transiente de $N = 10^3$ iteradas do mapa antes de o ruído ser adicionado no sistema, a fim de garantirmos que as órbitas estivessem no atrator. Diferentemente do caso apresentado por Beale, onde era possível considerar como divergência o caso em que as órbitas se encontrassem apenas fora dos contornos da bacia de atração, aqui consideramos como divergência de uma órbita o caso em que o módulo de seu estado no tempo n seja dado por $|y_n| \geq 10^3$. O nosso propósito aqui é quantificar o número de CIs das órbitas que divergem após um determinado número de iterações. Para isto, vamos entender como ocorre o processo de escape das órbitas do mapa (3.4), considerando o limite de divergência citado. Deste modo, quantificamos o número de CIs das órbitas que divergiram a partir da escolha de uma quantidade fixa de CIs das órbitas que não divergiram. Como isto foi feito? Iteramos o mapa N vezes a partir de CIs escolhidas aleatoriamente dentro da bacia de atração, de onde então escolhemos um número finito de CIs das órbitas que não divergiram, dentre as muitas que foram testadas pelo mapa no limite de divergência. A cada CI selecionada por não divergência da órbita, uma grande quantidade de órbitas divergiram, e exatamente estas que foram quantificadas. Na Fig. 3.2 mostramos em escala semi-log a quantidade de CIs das órbitas que divergiram após $N = 10, 20, 30$ e 40 iterações como uma função de Γ , a partir da escolha de 500 CIs de órbitas que não divergiram. É visível que na medida que aumentamos gradualmente os valores de Γ , o número CIs das órbitas que divergem cresce substancialmente.

A Fig. 3.2(a) mostra o caso do parâmetro $r = 1,0$ que pertence a uma dinâmica regular de período-2 como mostrado no diagrama de bifurcação do mapa sem ruído (ver Fig. 3.1). As Figuras 3.2(b) e 3.2(c) mostram os casos regulares de período-4 ($r = 1,3$) e período-8 ($r = 1,38$), respectivamente, e a Fig. 3.2(d) o caso do regime caótico ($r = 2,0$). Claramente é possível observarmos a existência de um valor crítico Γ_{crit} , a partir do qual muitas órbitas divergem após N iterações. Analisando as curvas da Fig. 3.2 para todos

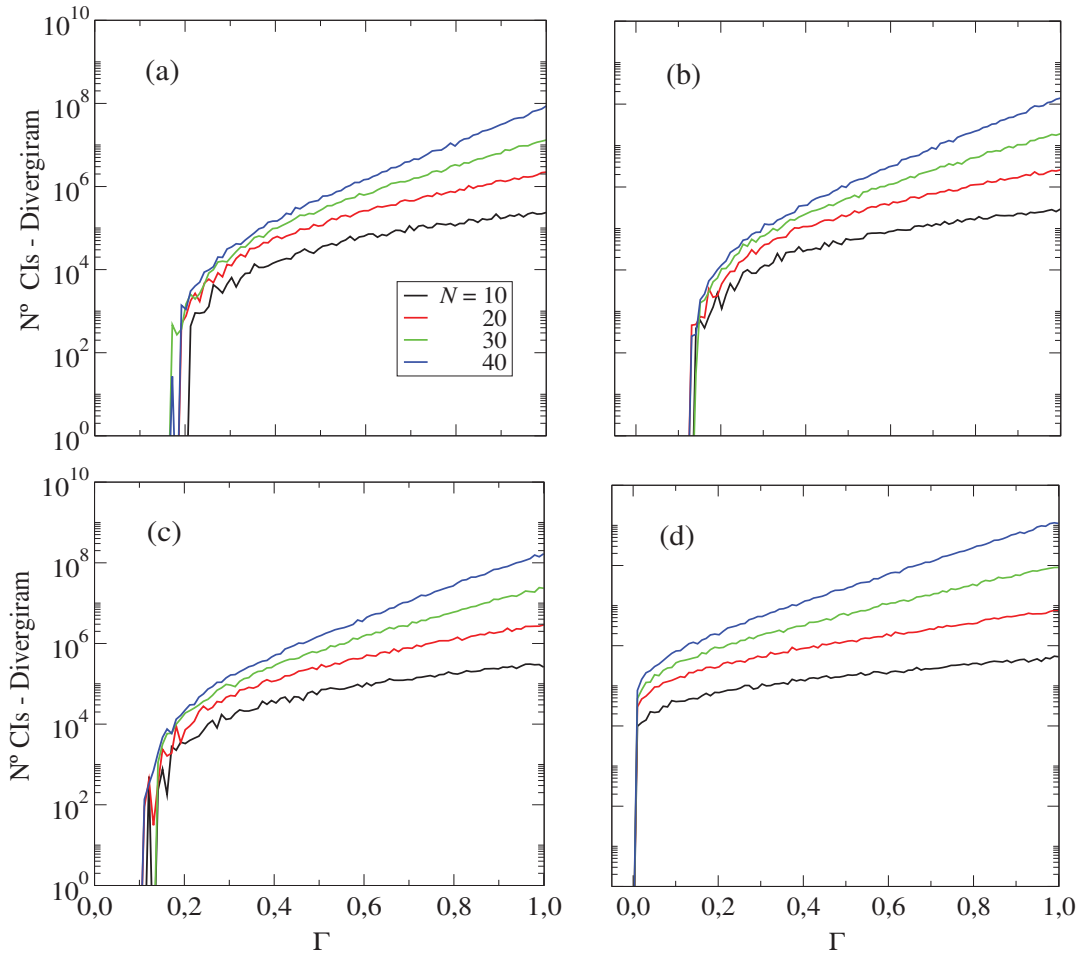


FIGURA 3.2 – Números de condições iniciais das órbitas que divergiram após N iterações do mapa (3.4) como uma função de Γ para os seguintes parâmetros escolhidos: (a) $r = 1,0$ (período-2), (b) $r = 1,3$ (período-4), (c) $r = 1,38$ (período-8) e (d) $r = 2,0$ (regime caótico).

os casos regulares mostrados, estimamos que $\Gamma_{crit} \approx 0,2$ representa bem todos os casos periódicos. O valor crítico diminui quando r aumenta, pois no regime caótico observa-se que $\Gamma_{crit} \rightarrow 0$. Comportamento similar foi observado por Beale (1989), onde uma energia mínima E_0 quase nula (proporcional a Γ_{crit}^2) é necessária para a ocorrência do escape de órbitas do atrator caótico devido ao ruído gaussiano.

3.3 DECAIMENTO DA CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA

3.3.1 DC entre o mapa e ruído

Nesta subseção vamos analisar os coeficientes de correlação ρ e DC entre os estados x_n gerados pelo mapa quadrático (3.1) com o ruído gaussiano. Onde a amostra $\{\mathbf{X} = (x_{n+1}) : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ é obtida pelo mapa (3.1) e a amostra $\{\mathbf{Y} = (\xi_{n+1}) :$

$n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ obtida por um ruído gaussiano. Utilizamos 2×10^4 CIs selecionadas aleatoriamente e igualmente espaçadas no intervalo $[-2, 2]$. A partir disso, obtemos a média da correlação de Pearson $\langle \rho_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle$ e a média da correlação de distância $\langle DC_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle$. Por questão de simplicidade vamos escrever as médias dos coeficientes como sendo $\langle \rho_n \rangle \equiv \langle \rho_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle$ e $\langle DC_n \rangle \equiv \langle DC_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle$. As quantidades médias $\langle \rho_n \rangle$ e $\langle DC_n \rangle$ são plotadas na Fig. 3.3(a) para quatro regimes dinâmicos do mapa (3.1), especificamente $r = 1,0$ para qual o estado x_n pertence ao período-2, $r = 1,3$ ao período-4, $r = 1,38$ ao período-8 e $r = 2,0$ ao atrator caótico. Aqui usamos para a curva de período-2 a cor vermelha, verde para período-4, azul para período-8 e magenta para o movimento caótico.

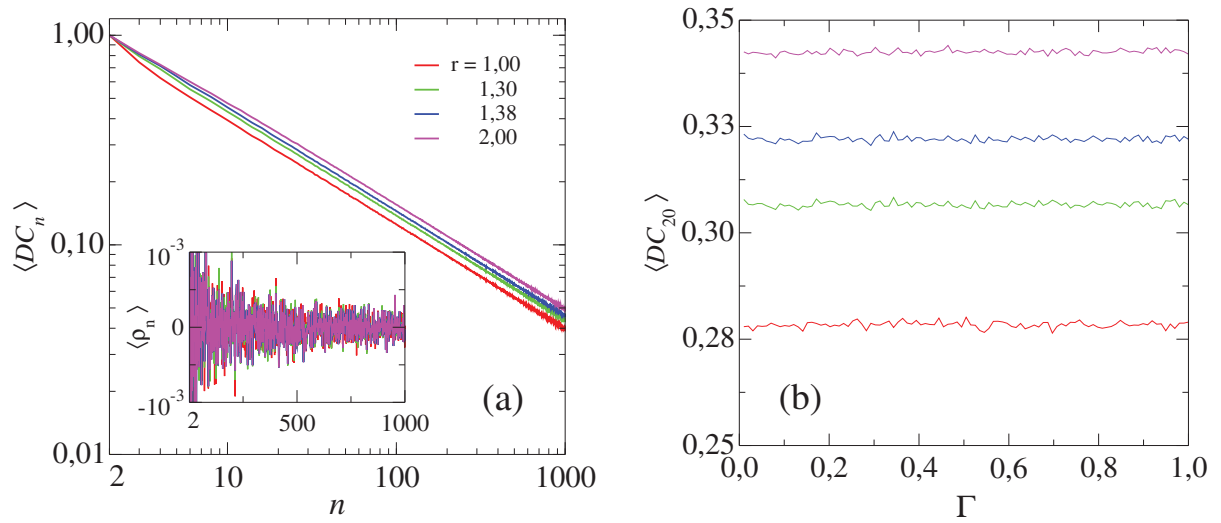


FIGURA 3.3 – (a) Evolução temporal da correlação de distância média e correlação de Pearson média (inset) para $\Gamma = 1,0$ nos regimes: $r = 1,0$ (período-2), $r = 1,3$ (período-4), $r = 1,38$ (período-8) e $r = 2,0$ (regime caótico). (b) A correlação de distância média em função do ruído para $n = 20$.

Na Fig. 3.3(a) os resultados mostram que enquanto $\langle \rho_n \rangle$ (gráfico interno) oscila em torno de zero, a correlação de distância média decai com lei de potência inversa⁴, ou seja, $\langle DC_n \rangle \propto n^{-0,5}$. É interessante observar que, curiosamente, para tempos pequenos ($n \lesssim 5$), $\langle DC_n \rangle$ decai muito mais rápido para pequenos valores de r , tal que para $n = 20$, por exemplo, o valor $\langle DC_{20} \rangle$ é diferente para cada r e permanece independente de Γ , como pode ser visto na Fig. 3.3(b). A condição das curvas de $\langle DC_{20} \rangle$ serem constantes nesta figura, é uma consequência direta da invariância de escala nos valores dos elementos de $\{\mathbf{Y}\}$, pois alteramos apenas a magnitude de Γ de forma gradual. A invariância de escala da correlação de distância foi mencionada na seção 2.3.3 do capítulo 2. Um ponto interessante a ser notado é que a correlação de distância entre o regime caótico e o ruído é maior do que entre o regime periódico e o ruído. Na Fig. 3.3(b) podemos notar que,

⁴Uma lei é dita lei de potência se entre dois escalares x e y ela é tal que a relação pode ser escrita na forma: $y = ax^k$ onde a é constante de proporcionalidade e k o expoente, ambos constantes.

quanto menor o período, menor é o valor de $\langle DC_{20} \rangle$. Notamos que os valores de $\langle DC_{20} \rangle$ entre o ruído e *dois* pontos regulares (período-2), é menor do que os valores de $\langle DC_{20} \rangle$ entre o ruído e *quatro* pontos regulares (período-4), e assim por diante. Em outras palavras, podemos representar esta sequência como sendo

$$\langle DC_{20}^{(2)} \rangle < \langle DC_{20}^{(4)} \rangle < \langle DC_{20}^{(8)} \rangle < \dots < \langle DC_{20}^{(20)} \rangle, \quad (3.11)$$

com $\langle DC_n^{(p)} \rangle$ sendo a média da correlação de distância, p (sobrescrito) representando período- p do mapa e $n = 20$. No regime caótico o período é infinito, mas como estamos iterando o mapa até $N = 20$, então dizemos que o período neste caso é $p = 20$. Portanto, para um dado tempo $n \gtrsim 5$, concluimos que $\langle DC_n \rangle$ assume valores que dependem do *número de pontos* dos atratores.

3.3.2 DC entre os mapas

Agora vamos analisar os coeficientes de correlação ρ e DC entre os estados x_n gerados pelo mapa quadrático usual (3.1) com os estados y_n gerados pelo mapa com ruído (3.4). Consequentemente teremos a amostra $\{\mathbf{X} = (x_{n+1}) : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ obtida de (3.1) e a amostra $\{\mathbf{Y} = (y_{n+1}) : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ que é obtida por (3.4). A finalidade agora será determinar as correlações entre o caso sem ruído (linhas pretas na Fig. 3.1(a)) e o caso com ruído (pontos vermelhos na Fig. 3.1(a)) para valores específicos do parâmetro r e diferentes valores de Γ que consideramos no intervalo $[0, 1]$. Após descartarmos um transiente de $N = 10^3$ iteradas do mapa quadrático, para cada CI determinamos os coeficientes $\rho_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ e $DC_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ entre ambas as séries temporais considerando somente $N = 20$ iteradas. Neste caso não consideramos tempos maiores pois devido ao ruído, muitos estados y_n divergiram, o que dificultou as escolhas de CIs das órbitas que pudessem ir além do tempo considerado ($N > 20$). Com isso escolhemos 2×10^4 CIs de órbitas que não divergiram para $N = 20$. Aqui as CIs também são selecionadas aleatoriamente e igualmente espaçadas no intervalo $[-2, 2]$, com isso nos possibilitando a verificação das quantidades médias $\langle \rho_{20} \rangle$ e $\langle DC_{20} \rangle$.

3.3.3 Concordâncias entre $\langle \rho_{20} \rangle$ e $\langle DC_{20} \rangle$

Na Fig. 3.4 apresentamos as curvas das médias de $\langle \rho_{20} \rangle$ e $\langle DC_{20} \rangle$ plotadas na mesma escala log-log. Observando nas Figuras 3.4(a) e 3.4(c), notamos que para $\Gamma = 0$ ambas as correlações são máximas, por este motivo não foram mostradas. Para o movimento periódico observamos que ambas as correlações são iguais a 1 para valores de Γ menores que $\sim 0,03$. No regime caótico a correlação de Pearson média é $\sim 0,33$ e a correlação de distância média $\sim 0,46$. Para um ruído com intensidade $\Gamma = 0,1$ temos para a órbita de período-2: $\langle DC_{20}^{(2)} \rangle = 0,88$ e $\langle \rho_{20}^{(2)} \rangle = 0,82$, para período-4: $\langle DC_{20}^{(4)} \rangle =$

0,76 e $\langle \rho_{20}^{(4)} \rangle = 0,63$, período-8: $\langle DC_{20}^{(8)} \rangle = 0,67$ e $\langle \rho_{20}^{(8)} \rangle = 0,50$ e ainda para o regime caótico: $\langle DC_{20}^{(20)} \rangle = 0,35$ e $\langle \rho_{20}^{(20)} \rangle = 0,17$. Deste modo, notamos que em todos os casos temos $\langle DC \rangle > \langle \rho \rangle$, mostrando que DC é mais robusta na medida de correlação entre os mapas devido aos efeitos de ruído. Ambas as correlações começam a decrescer a partir de $\Gamma \gtrsim 0,1$ para os regimes periódicos. Assim, para DC com $\Gamma \sim 0,1$ notamos que

$$\langle DC_{20}^{(2)} \rangle > \langle DC_{20}^{(4)} \rangle > \langle DC_{20}^{(8)} \rangle > \dots > \langle DC_{20}^{(20)} \rangle. \quad (3.12)$$

O fato de DC possuir maiores valores nos regimes com os menores períodos como mostrado em (3.12), pode estar relacionado à *estabilidade* do EL. Para os diferentes regimes periódicos, podemos ver na tabela (3.1) que os ELs ($\lambda_{\Gamma=0}$) seguem a sequência: $\lambda (r = 1,0) < \lambda (r = 1,3) < \lambda (r = 1,38)$. Logo, quanto menor for o EL, mais resistentes serão as órbitas sob a ação do ruído, de maneira que a correlação entre os dois mapas possuam valores altos. No caso de atratores caóticos ($\lambda > 0$), a correlação exibe baixos valores, pois as órbitas são menos estáveis sob ruído.

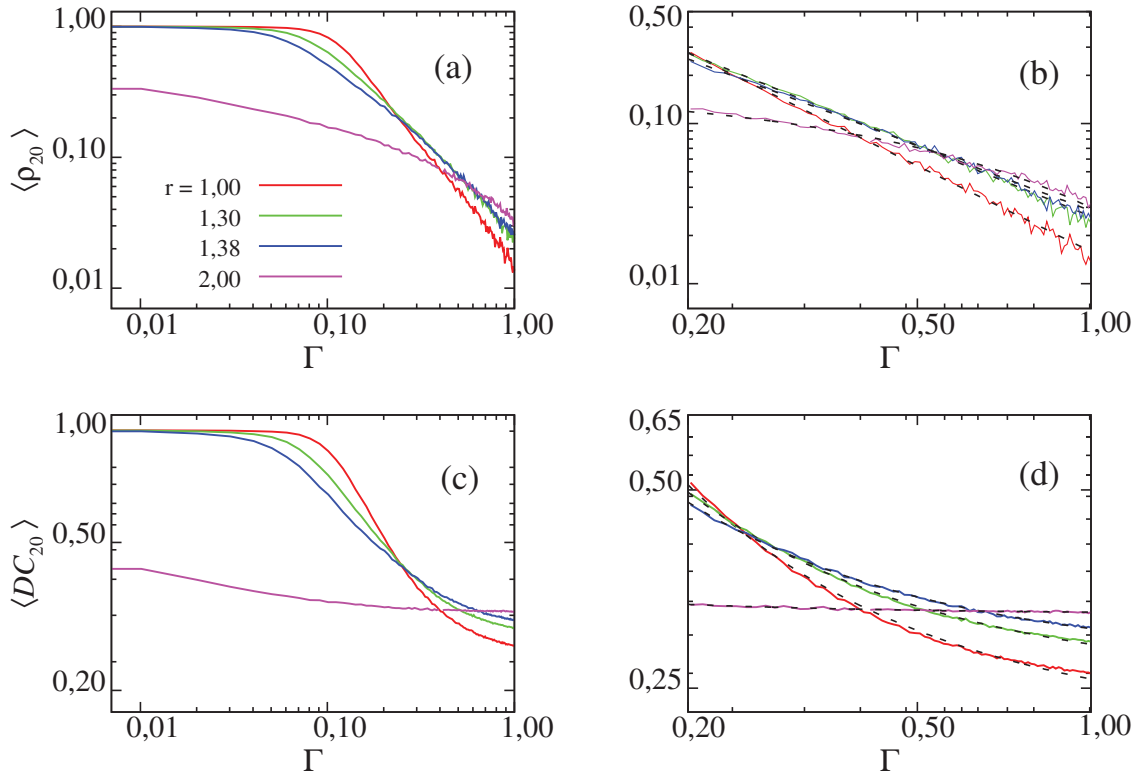


FIGURA 3.4 – Curvas plotadas todas em escala log-log mostrando a dependência do ruído para: (a) correlação de Pearson média, (b) curvas ajustadas de (a) com $0,2 \leq \Gamma \leq 1,0$, (c) correlação de distância média e (d) curvas ajustadas de (c) dentro do mesmo intervalo de Γ considerado em (b). Parâmetros: $r = 1,0$ (período-2), $r = 1,3$ (período-4), $r = 1,38$ (período-8) e $r = 2,0$ (regime caótico). As funções dos ajustes das curvas são mostrados na tabela 3.1.

Para valores $\Gamma > \Gamma_{crit} \approx 0,2$, ambas as correlações se cruzam em torno de \sim

TABELA 3.1 – Para valores distintos de r , a tabela resume o período associado, o expoente de Lyapunov λ_Γ e as funções usadas para o ajuste de curvas das quantidades médias $\langle DC_{20} \rangle$ e $\langle \rho_{20} \rangle$. No caso caótico o período é infinito, mas como estamos apenas iterando até $N = 20$, então dizemos que o período é 20.

r	Período- p	$\lambda_{\Gamma=0}$	$\langle DC_{20}^{(p)} \rangle \sim \alpha e^{\beta/\Gamma}$	$\langle \rho_{20}^{(p)} \rangle$
1,00	2	$-\infty$	$\sim 0,2178 e^{0,169/\Gamma}$	$\sim 0,0158 \Gamma^{-1,78}$
1,30	4	$-0,42$	$\sim 0,2551 e^{0,133/\Gamma}$	$\sim 0,0263 \Gamma^{-1,46}$
1,38	8	$-0,33$	$\sim 0,2757 e^{0,110/\Gamma}$	$\sim 0,0285 \Gamma^{-1,36}$
2,00	20	$0,69$	$\sim 0,3239 e^{0,006/\Gamma}$	$\sim 0,1680 e^{-1,73 \Gamma}$

0,24 e em $\Gamma > 0,24$ seus valores mudam entre os regimes periódicos e caótico onde as curvas se invertem, em comparação com o caso $\Gamma = 0,1$ por exemplo. Melhor dizendo, para $\Gamma > 0,24$ temos $\langle DC_{20}^{(2)} \rangle < \langle DC_{20}^{(4)} \rangle < \langle DC_{20}^{(8)} \rangle < \dots < \langle DC_{20}^{(20)} \rangle$ que é similar a desigualdade observada na relação (3.11), e os valores numéricos $\langle DC_{20}^{(p)} \rangle$ em $\Gamma = 1,0$ são muito similares daqueles mostrados na Fig. 3.3(b). Isto significa que, para grandes valores de Γ , ou seja, ruído com grandes amplitudes, os regimes dinâmicos distintos do mapa com ruído (3.4) não são mais detectados por DC , sendo que agora somente o comportamento do ruído gaussiano conduz a dinâmica do sistema. Portanto, apenas os regimes dinâmicos do mapa (3.1) são relevantes neste caso. Das curvas ajustadas nas Figuras 3.4(b) e 3.4(d) cujos valores dos ajustes que estão mostrados na tabela (3.1), concluímos que para $\Gamma \rightarrow \infty$, enquanto que a correlação de Pearson aproxima-se de zero, a correlação de distância aproxima-se de α , qual claramente concorda com os valores de $\langle DC_{20}^{(p)} \rangle$ da Fig. 3.3(b).

3.3.4 Discordâncias entre $\langle \rho_{20} \rangle$ e $\langle DC_{20} \rangle$

Após discutirmos algumas similaridades entre as correlações, analisamos agora as diferenças entre elas, as quais estão principalmente relacionadas aos seus comportamentos qualitativos como função de Γ . As Figuras 3.4(b) e 3.4(d) mostram os melhores ajustes das curvas relacionadas aos dados, que estão mostradas na tabela 3.1. Podemos ver que as curvas para a correlação de Pearson média podem ser bem ajustadas por uma lei de potência inversa nos regimes periódicos ($r = 1,0, 1,3$ e $1,38$) e decaimento exponencial na região caótica ($r = 2,0$). Em contrapartida, a correlação de distância média segue a seguinte função

$$\langle DC_{20}^{(p)} \rangle \propto \alpha \exp \left[\frac{\beta}{\Gamma} \right] \quad (3.13)$$

tanto para as regiões regulares quanto para a região caótica, com α e β sendo parâmetros de ajuste. Notamos que, este é o exato comportamento qualitativo do tempo de escape ($\tau \approx 1/R$) mostrado na referência (BEALE, 1989) e observado na seção 3.2. Desta forma,

tornando-se evidente que a correlação de distância é eficaz na constatação do fenômeno de escape de órbitas do mapa quadrático devido ao ruído gaussiano.

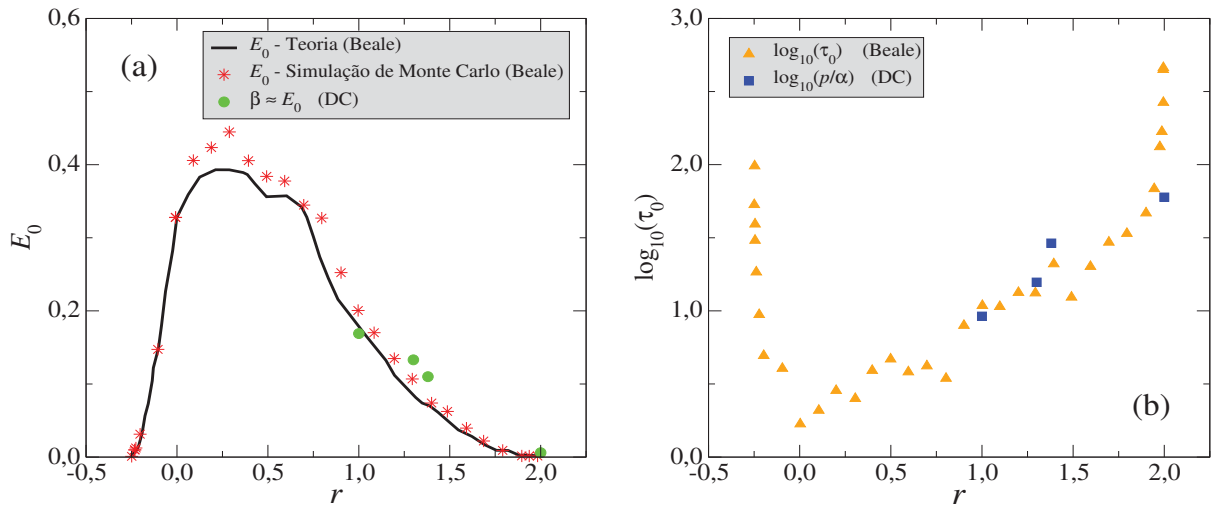


FIGURA 3.5 – (a) Energia mínima E_0 como função de r . A linha contínua é resultado da teoria de Beale e os pontos resultados da sua Simulação de Monte Carlo. Os círculos em verde são consequências dos ajustes das curvas de DC . (b) O logaritmo do tempo de tentativa em função de r . Os triângulos em laranja, são resultados da teoria de Beale e os quadrados em azul consequências de DC . [Fonte: Figuras adaptadas de (BEALE, 1989)]

Assim, comparando os valores de β da tabela 3.1 com os valores de E_0 da Fig. 3 da referência (BEALE, 1989), podemos afirmar que $\beta \approx E_0$, como pode ser visto no gráfico da Fig. 3.5(a). Nesta figura adaptamos os nossos resultados obtidos à Fig. 3 de Beale (1989), sendo as curvas mostradas de seu trabalho em linha contínua (cor preta) representando os resultados de sua teoria e os pontos (cor vermelha) sendo os resultados de sua simulação de Monte Carlo. Os quatro pontos na cor verde, representam os valores de β dos ajustes das curvas da correlação de distância. É perceptível que dois pontos estão muito próximos das curvas e outros dois sobre as curvas. Além disso, comparando também os valores de α com a Fig. 5 de (BEALE, 1989), observamos parcialmente que $\log_{10}(p/\alpha) \approx \log_{10}(\tau_0)$, com p sendo o período da órbita. Na Fig. 3.5(b) adaptamos os nossos resultados, pontos quadrados na cor azul ao gráfico de Beale, de onde concluímos que para este caso, também verificamos fortes evidências que validam as afirmações de que DC reproduz qualitativamente este tipo de comportamento dinâmico. Temos então o parâmetro de ajuste adimensional $\alpha \approx p/\tau_0$ que é exatamente o período da órbita dividido pelo tempo de escape. Desta forma, concluímos que a correlação de distância média devidamente descreve o tempo de escape τ da órbita de um atrator devido ao ruído

através da relação

$$\begin{aligned}
\tau &\approx \tau_0 \exp(\beta/\Gamma) \approx \frac{\tau_0^2 p}{p \tau_0} \exp(\beta/\Gamma) \\
&\approx \frac{\tau_0^2}{p} \alpha \exp(\beta/\Gamma) \\
&\approx \frac{\tau_0^2}{p} \langle DC_N \rangle.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.4 MISTURA DE TRAJETÓRIAS CAÓTICAS

Em dinâmica caótica fechada, um atrator ocupa um volume finito no espaço de fases. Trajetórias que partem de CIs próximas, além de permanecerem confinadas em uma certa região do espaço de fases, devem ainda se distanciar exponencialmente com o passar do tempo. O mecanismo responsável para que trajetórias se afastem exponencialmente no tempo e ocupem uma região limitada no espaço de fases, são devido aos repetidos esticamentos (*stretching*) e dobras (*folding*) das trajetórias. O fluxo responsável pela geração de um atrator normalmente contrai um volume de CIs em uma direção, pois o sistema é dissipativo, e estica-o na outra, levando à sensibilidade às CIs. Uma condição suficiente para um sistema ser misturado é a dependência sensível às CIs (BEAUREGARD *et al.*, 1993). Trajetórias caóticas que se esticam e dobram, estão se misturando. A propriedade de mistura garante o decaimento de correlações. A sensibilidade exponencial implica na perda constante de informações e, portanto, dificulta a previsibilidade a longo prazo. Estudos sobre o processo de mistura em mapas dissipativos podem ser encontrados nas referências (BORGES; TIRNAKLI, 2004; HAYDN *et al.*, 2005).

A finalidade da presente seção é verificar a utilidade da correlação de distância na descrição estatística da qualidade de mistura de órbitas em regimes caóticos. Para isto, usamos o mapa quadrático (3.1) para a geração das órbitas. Os resultados obtidos pela correlação de distância, são comparados com os resultados de outra medida estatística de qualidade de mistura, intitulada por intensidade de segregação (DANCKWERTS, 1952; AREF *et al.*, 2017; KRASNOPOLSKAYA; MELESHKO, 2009). É importante mencionar que, enquanto a correlação de distância é determinada comparando pares de conjunto de dados \mathbf{X} e \mathbf{Y} , a intensidade de segregação é obtida por considerar apenas um conjunto de dados.

3.4.1 Qualidade de mistura pela intensidade de segregação

A *intensidade de segregação* (I) é uma medida estatística de qualidade de mistura que, concede a informação relacionada a distribuição de densidade em cada fragmentação de um espaço maior, no tempo (DANCKWERTS, 1952; AREF *et al.*, 2017; KRASNOPOL-

SKAYA; MELESHKO, 2009). Para medir I , é prático o uso do método baseado em grades. Assim, dividindo o domínio em caixas de tamanho Δ tem-se

$$I = \frac{\langle (D_j - \langle D \rangle)^2 \rangle}{\langle D \rangle (1 - \langle D \rangle)}, \quad (3.15)$$

onde D_j é a densidade de probabilidade da caixa j que é dada pela relação

$$D_j = \frac{\text{quantidade medida}}{N}, \quad (3.16)$$

com N sendo o número total de observações. No nosso caso, dividimos o intervalo de estados $[-2, 2]$ do mapa quadrático em S caixas de comprimento Δx_j ($j = 1, \dots, S$) como mostrado no esquema da Fig. 3.6. Com isto, iteramos o mapa N vezes, e então calculamos densidade de probabilidade com que cada caixa é visitada pela órbita usando a equação (3.16).

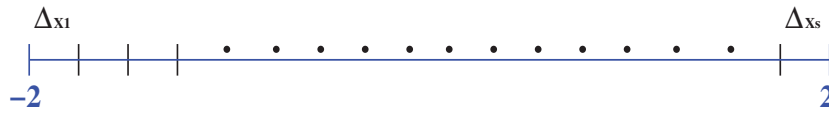


FIGURA 3.6 – Esquema do particionamento em S caixas do intervalo de estados $[-2, 2]$ do mapa quadrático unidimensional.

Após o cálculo da densidade de probabilidade D_j de cada caixa, podemos então obter outras medidas, como a média de D_j relacionada a soma de todas as caixas dada pela relação

$$\langle D \rangle = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S D_j, \quad (3.17)$$

e também a média da densidade quadrada D_j^2 que é dada por

$$\langle D^2 \rangle = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S D_j^2. \quad (3.18)$$

Um estado final de mistura definido pela intensidade de segregação é caracterizado pela estatística mínima da densidade quadrada, que é $\langle (D_j - \langle D \rangle)^2 \rangle \equiv \langle D^2 \rangle - \langle D \rangle^2 \rightarrow 0$. Assim, quando I tende a zero com a evolução do tempo, o resultado é um ótimo estado de mistura.

Na Fig. 3.7 mostramos o decaimento de I em função do tempo n (número de iteração) em escala log-log, para uma órbita com CI $\leftrightarrow x_0 = 0,1$ em regime caótico do mapa (3.1), com o parâmetro $r = 2,0$ e a quantidade de caixas sendo $S = 10^3, 10^4$ e 10^5 . Para isto, consideramos $n = 10^4$ iteradas do mapa, após o descarte de um transiente de $n = 4 \times 10^3$. Pudemos observar que, até iterações em torno de $n = 200$, tem-se um

decaimento com lei de potência inversa para todos os valores de S . Somente para o caso de $S = 10^5$, o decaimento com lei de potência inversa existe para todo o intervalo de tempo considerado. Logo, decaimento em lei de potência inversa satisfaz a proporcionalidade: $I \propto n^{-1,0}$.

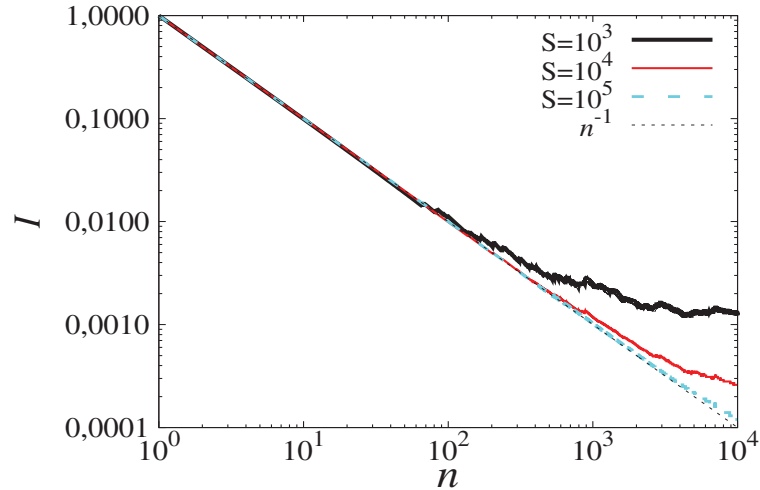


FIGURA 3.7 – Intensidade de segregação I como função do tempo n (número de iteração) em escala log-log. A condição inicial é $x_0 = 0,1$ e as quantidades de caixas são $S = 10^3$, 10^4 e 10^5 .

3.4.2 Qualidade de mistura pela correlação de distância

Para calcularmos a correlação de distância entre duas órbitas caóticas, precisamos de um par de amostras \mathbf{X} e \mathbf{Y} . Estas amostras são obtidas de órbitas iniciadas por duas CIs distintas no atrator caótico do mapa quadrático (3.1), que consideramos ser $x_{01} = 0,1$ e $x_{02} = 0,2$. Assim, iteramos o mapa para estas CIs em um tempo de $n = 2 \times 10^3$. De modo que, obtemos uma sequência de dados na forma $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(x_{01}, y_{01} = x_{02}), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots, (x_N, y_N)\}$. A Fig. 3.8(a) mostra em escala log-log DC como função do tempo para valores distintos de r , sendo $r = 1,6, 1,7, 1,8, 1,9$ e $2,0$ todos em regime caótico.

Da mesma forma como I , se DC tende a zero com a evolução do tempo, pode ser considerada como uma medida estatística válida de qualidade de estados misturados. A forte oscilação observada no comportamento de DC na Fig. 3.8(a) desaparece quando mais CIs são consideradas (10^3 CIs). Isto pode ser visto na Fig. 3.8(b), de onde consideramos $x_{01} = 0,1$ para obtermos os dados correspondentes à órbita da amostra \mathbf{X} e x_{02} escolhidas aleatoriamente e igualmente espaçadas no intervalo $[-2, 2]$ para compor a amostra \mathbf{Y} . Podemos ainda observar na Fig. 3.8(b) que as curvas da correlação de distância média

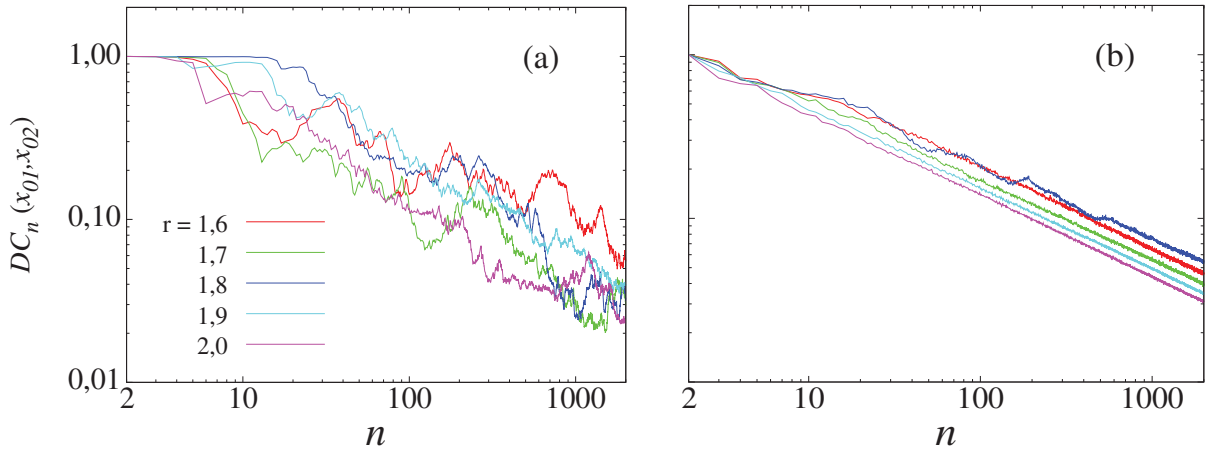


FIGURA 3.8 – Evolução temporal em escala log-log de: (a) $DC_n(x_{01}, x_{02})$ entre duas órbitas com condições iniciais $x_{01} = 0,1$ e $x_{02} = 0,2$ em regimes caóticos e (b) $\langle DC_n(x_{01}, x_{02}) \rangle$ para muitas CIs escolhidas aleatoriamente no intervalo $[-2, 2]$ para x_{02} .

sobre muitas CIs, decaem com lei de potência inversa na forma

$$\langle DC_n(x_{01}, x_{02}) \rangle \propto n^{-0,5}. \quad (3.19)$$

Portanto, o decaimento da correlação de distância média (Fig. 3.8(b)) pode ser relacionada com o decaimento da intensidade de segregação (Fig. 3.7(b)), na forma

$$\begin{aligned} \langle DC_n(x_{01}, x_{02}) \rangle &\propto \sqrt{I} \\ &\propto \sqrt{n^{-1,0}} \\ &\propto n^{-0,5}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Deste modo, mostrando que DC pode ser uma medida apropriada de qualidade de mistura entre órbitas numa dinâmica caótica.

3.5 COMPARANDO OS ELs COM DC NO MAPA QUADRÁTICO

Agora vamos relacionar a correlação de distância com os expoentes de Lyapunov do mapa quadrático (3.1). O conteúdo apresentado nesta seção ainda está sob investigação. O objetivo agora é a verificação da existência de alguma relação entre as medidas de DC e EL, pois se ambas possuem algum vínculo, poderemos então obter os ELs a partir de DC . Assim, através de DC poderemos identificar um determinado comportamento dinâmico de um sistema, sendo ele periódico e ainda determinando o seu período e também sendo ele caótico. Como fizemos esta associação? Para o cálculo de DC , utili-

zamos apenas uma série temporal dos estados (uma órbita) de uma determinada CI para compor a amostra $\{\mathbf{X}\}$, e desta mesma série obtemos o conjunto de dados da amostra $\{\mathbf{Y}\}$ fazendo apenas um deslocamento dos estados da série no tempo. Optamos apenas pelo uso de uma única série de estados para obtermos DC , pois se calcularmos DC entre duas órbitas distintas em regime caótico, voltaríamos ao problema da qualidade de mistura discutida na seção 3.4 (Fig. (3.8)). Um outro motivo seria devido o valor do EL não ser dependente da CI, e sim da trajetória.

Assim, devemos considerar a seguinte representação para a sequência conjunta de dados (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) como sendo $\{\mathbf{X} \Rightarrow (x_{n+1}) : x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ e $\{\mathbf{Y} \Rightarrow (x_{n+1} = y_{n+1}) : x_{1+\Delta t}, x_{2+\Delta t}, x_{3+\Delta t}, \dots, x_{N+\Delta t}\}$, com ambas amostras contendo a mesma quantidade de estados e sendo obtidas pelo mapa (3.1). A sequência em \mathbf{Y} com o deslocamento relacionado à iteração do mapa, nos permite calcular DC para quaisquer valores do parâmetro r , e assim obter o perfil de DC em função de r . Representamos o deslocamento de uma determinada quantidade de iteradas entre as amostras por Δt , que é um número inteiro positivo. Então, para verificarmos o comportamento de DC ao longo do tempo, temos na Fig. 3.9 a sua evolução temporal para cinco valores específicos de r correspondentes ao regime caótico do mapa, com a CI definida por $x_0 = 0,1$ e o deslocamento entre as amostras por $\Delta t = 1$. Nesta figura temos a curva na cor preta correspondente à $r = 1,6$, em vermelho para $r = 1,7$, em verde para $r = 1,8$, em azul para $r = 1,9$ e em laranja para

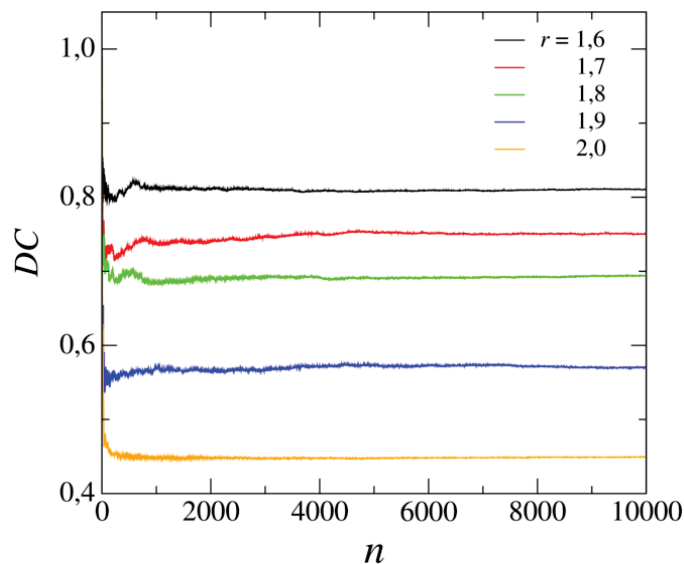


FIGURA 3.9 – Evolução temporal de DC para cinco valores de r correspondentes ao regime caótico do mapa (3.1). Os valores de r observados são: 1,6, 1,7, 1,8, 1,9 e 2,0. A condição inicial considerada é $x_0 = 0,1$ e o deslocamento dos estados entre as amostras sendo $\Delta t = 1$.

$r = 2,0$. Podemos notar que DC converge para um valor específico após um determinado tempo. Neste caso, iteramos o mapa até $n = 10000$, mas notamos que a convergência já

ocorre a partir de $n \sim 5000$. Usamos estes valores assintóticos para a comparação com os ELs.

A partir dos coeficientes assintóticos alcançados para muitos valores de r no intervalo $1,25 \leq r \leq 2,0$, podemos traçar os valores de DC em função de r . Logo, na Fig. 3.10(a) podemos notar o comportamento de DC (curvas em azul e laranja) em relação a r . Neste caso, consideramos dois valores de deslocamento, sendo dados por $\Delta t = 1$ e $\Delta t = 2$, num tempo total de $n = 7000$. Em comparação direta com os ELs do mapa quadrático exibidos na Fig. 3.10(b), podemos notar que DC diminui e λ aumenta à medida que incrementamos r . Percebemos também que, DC consegue identificar as janelas periódicas que ocorrem em certos valores específicos de r na região caótica. Como exemplo, podemos notar a maior janela periódica de período-3 que se encontra em uma região para valores de r ligeiramente maiores que 1,75, sendo representada por um aumento em DC , e as outras janelas menos evidentes sendo caracterizadas por alguns picos nas curvas. É importante relatarmos que DC foi calculado a partir das órbitas periódicas de período-4 ($r \geq 1,25$) até o regime caótico ($r \leq 2,0$).

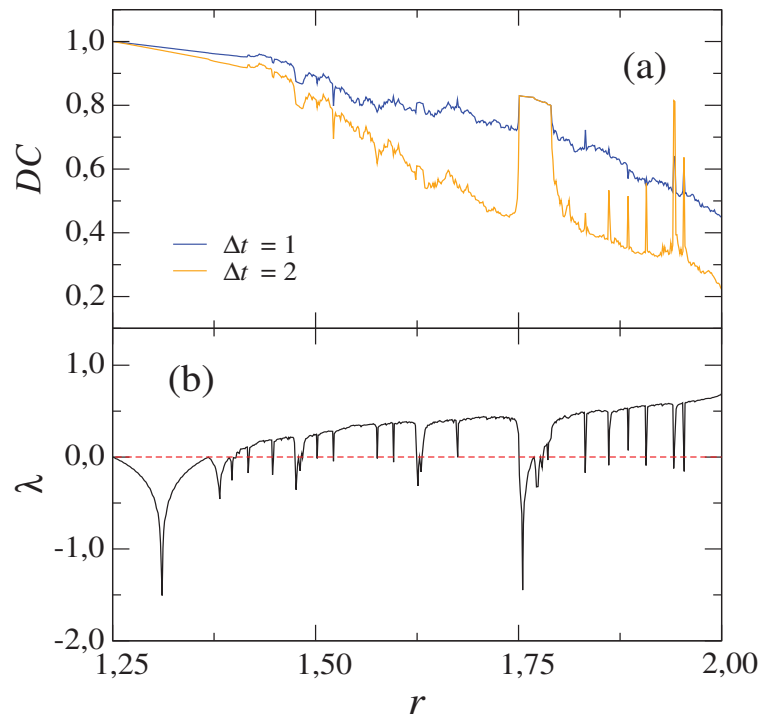


FIGURA 3.10 – (a) Correlação de distância para $\Delta t = 1$ e $\Delta t = 2$ e (b) o expoente de Lyapunov, ambos em função de r para o mapa quadrático (3.1). A condição inicial utilizada é $x_0 = 0,1$ e r dividido em 1000 partes igualmente espaçadas.

Equiparando os ELs em função dos dois casos de DC , $\Delta t = 1$ e $\Delta t = 2$, podemos verificar as relações resultantes dessas combinações. Na Fig. 3.11(a) podemos notar que tanto os pontos em círculos na cor laranja, quanto os pontos quadrados em verde, exibem uma relação linear em grande parte dos ELs positivos com DC . Para $\lambda(DC) \rightarrow \Delta t = 1$

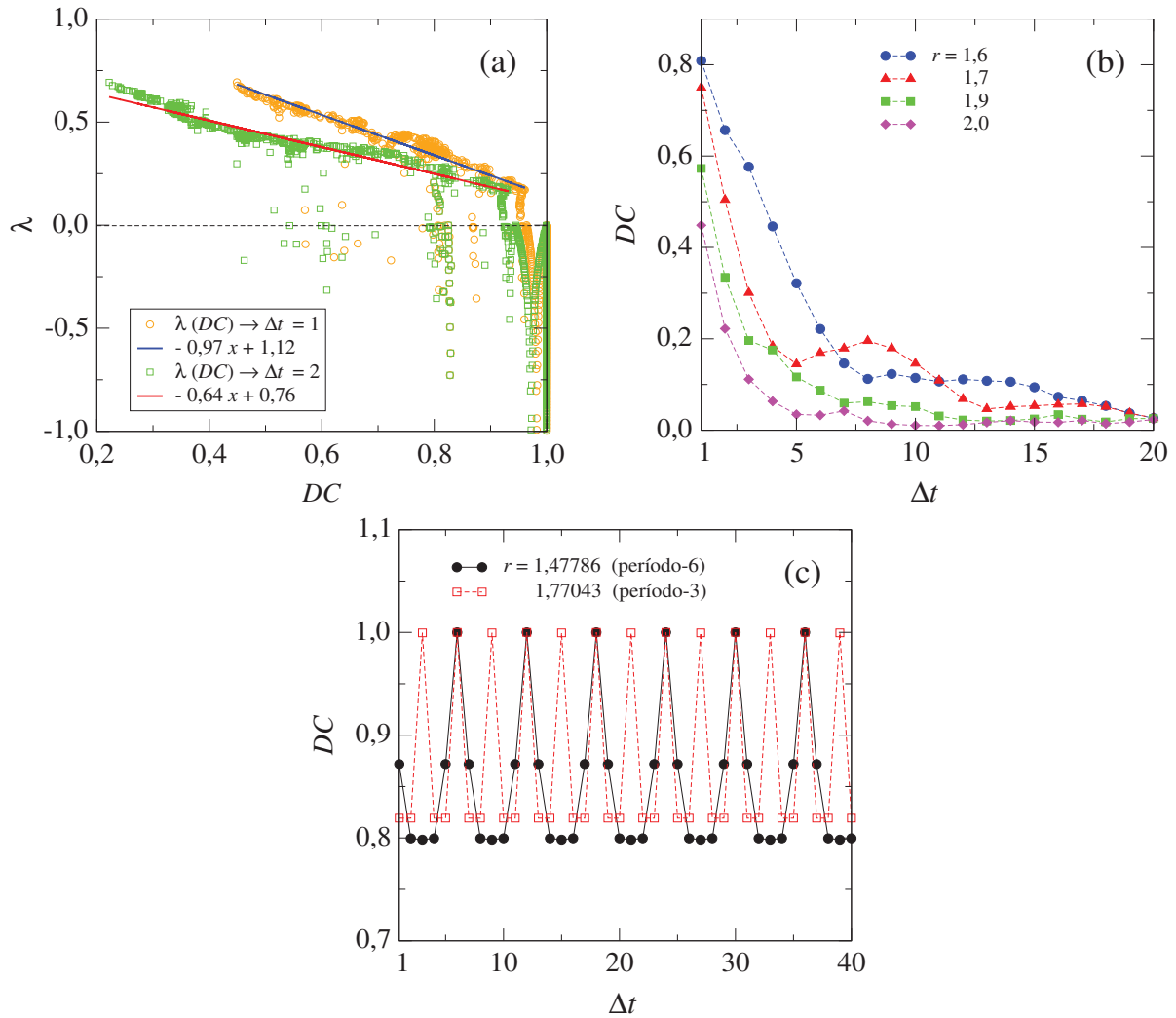


FIGURA 3.11 – (a) Expoente de Lyapunov em função da correlação de distância para os casos de $\Delta t = 1$ e $\Delta t = 2$. As funções dos ajustes das curvas são dadas no gráfico. (b) Correlação de distância em função de Δt para: $r = 1,6$, $1,7$, $1,9$ e $2,0$. (c) Correlação de distância em função de Δt para duas janelas periódicas da região caótica: $r = 1,47786$ (período-6) e $r = 1,77043$ (período-3).

temos o ajuste linear da curva $\propto -0,97x + 1,22$ (curva azul), e para $\lambda(DC) \rightarrow \Delta t = 2$ a função de ajuste $\propto -0,64x + 0,76$ (curva vermelha), onde x representa DC . À medida que Δt aumenta, notamos que maior será o alongamento da curva $\lambda(DC)$, com os pontos tendendo na direção de baixos valores em DC . Abaixo da linha tracejada, temos os ELs associados aos maiores coeficientes de correlação, ou seja, órbitas estáveis possuem ELs negativos e por consequência maiores coeficientes DC . Na Fig. 3.11(b) temos representado o comportamento de DC para os parâmetros $r = 1,6$, $1,7$, $1,9$ e $2,0$, em função de Δt . Notamos que todas as curvas convergem para zero em $\Delta t = 20$.

Na Fig. 3.11(c) temos DC em função de Δt para duas janelas periódicas do regime caótico: $r = 1,47786$ (período-6) e $r = 1,77043$ (período-3). Nesta figura podemos

notar que DC consegue identificar um comportamento periódico de uma órbita, pois na medida que os valores de Δt vão sendo incrementados, os valores de DC vão se repetindo periodicamente. Logo, quando Δt for exatamente igual ao período da órbita, o valor de DC será máximo, ou seja, $DC = 1,0$.

3.6 CONCLUSÕES

A correlação de distância (SZÉKELY *et al.*, 2007) é um modelo estatístico bem definido capaz de medir dependências entre vetores aleatórios de dados multivariados. A propriedade relevante é que será zero somente se os vetores aleatórios forem independentes. Além do mais, os vetores aleatórios podem ser de qualquer dimensão. Como detalhado na introdução, a correlação de distância tem sido recentemente aplicada em áreas distintas da ciência moderna. No nosso caso, estudamos o método para compreendermos processos dinâmicos complexos, no mapa quadrático em regimes periódicos e caóticos submetidos a um ruído gaussiano. Em outras palavras, determinamos a correlação de distância (i) entre o mapa quadrático (3.1) e sinal de ruído gaussiano, e (ii) entre o mapa (3.1) e o mapa quadrático (3.4) com o ruído gaussiano adicionado. Resultados são comparados a correlação de Pearson, que somente detecta dependências lineares entre dados de um espaço amostral.

Em geral, verificamos que os valores correspondentes a correlação de distância são sempre maiores que os valores da correlação de Pearson. No caso (i), enquanto a correlação de Pearson é aproximadamente zero para todos os tempos considerados, a correlação de distância sofre um decaimento no tempo com *lei de potência* $\langle DC_n \rangle \propto n^{-0,5}$ e ainda é capaz de detectar tamanhos distintos de atratores do mapa quadrático (3.1). No caso (ii), ambas correlações são mais resistentes ao ruído para trajetórias com *menores* expoentes de Lyapunov para o caso sem ruído. Assim, a estabilidade linear local de trajetórias afeta ambas correlações para pequenos valores de ruído. Para grandes valores de ruído, para quase todas as condições iniciais do mapa (3.4) divergem muito rapidamente, e ambas correlações são sensíveis ao número de pontos que os atratores contém, isto é, o tamanho dos atratores.

A correlação de distância também detecta não linearidades. Em distinção à correlação de Pearson, verificamos que o decaimento qualitativo da correlação de distância como uma função da intensidade do ruído é equivalente ao comportamento de escape de trajetórias de atratores devido ao ruído gaussiano (BEALE, 1989). Isto significa que somente a correlação de distância detecta dinâmica não lineares complexas, envolvendo processos de escape. Além disso, para o caso do mapa quadrático sem ruído, a correlação de distância também é capaz de quantificar o grau de mistura entre trajetórias caóticas. Este fato é confirmado por comparação com o método da intensidade de segregação, que

é um modelo estabelecido na literatura na quantificação de mistura.

4 IDENTIFICAÇÃO DE ESTADOS QUIMERA

Em redes de osciladores acoplados, a simultaneidade de comportamentos distintos foi primeiramente investigada por Kuramoto e Battogtokh (2002), cujo trabalho afirma que sob condições adequadas, certos padrões peculiares podem ser vistos em um arranjo de osciladores idênticos, que se separam nitidamente em dois domínios, um composto de osciladores mutuamente sincronizados com frequência única e o outro composto de osciladores dessincronizados com frequências distribuídas. Neste capítulo, esses padrões serão investigados via utilização do método estatístico da correlação de distância.

4.1 ESTADOS QUIMERA

Em determinadas redes de osciladores acoplados pode ser observado o fenômeno da coexistência de dois comportamentos distintos: uma região mutuamente sincronizada e outra região completamente dessincronizada. Kuramoto e Battogtokh (2002) verificaram a existência de um certo padrão que consistia em dois domínios espaciais distintos em uma rede de osciladores acoplados. Uma região que aparentava ser contínua e suave que denominaram de domínio espacial coerente, e outra região que aparentava ter perdido essa continuidade, que denominaram de domínio espacial incoerente. Em sistemas acoplados, dependendo da forma e da intensidade de interação entre os elementos, pode ocorrer a existência de tais comportamentos simultaneamente. A coexistência destes comportamentos espaciais em uma rede de osciladores, foi denominado de estados quimera por Abrams e Strogatz (2004), termo usado da mitologia grega que se deve a sua característica espacial híbrida que é semelhante a um animal constituído de várias partes distintas. A constatação de estados quimera no estudo das redes de osciladores acoplados é exatamente a coexistência de duas regiões com características distintas. Uma região é dita coerente quando há uma forte relação entre os elementos, onde todos possuem o mesmo comportamento ao longo do tempo, caso contrário é dita incoerente.

Na literatura, são encontradas poucas técnicas para diagnosticar e existência dos estados quimera. Estudos recentes sobre estados quimera em sistemas acoplados, indicam a importância de sua investigação e formas de identificar a sua existência (SANTOS *et al.*, 2015; OLMÍ *et al.*, 2015; BLAHA *et al.*, 2016; BANERJEE; SIKDER, 2018). Atualmente,

o interesse no estudo de estados quimera, é devido à detecção de estados com propriedades que correspondem a quimera em sistemas reais. Tais sistemas, incluem objetos de natureza biológica, química e eletrônica por exemplo (MARK *et al.*, 2012; HAGERSTROM *et al.*, 2012; GAMBUZZA *et al.*, 2014). Portanto, o objetivo deste capítulo é a aplicação da correlação de distância como uma ferramenta alternativa para a investigação da coexistência de estados distintos em sistemas dinâmicos. Para isto, utilizamos uma rede de osciladores de fase acoplados proposto por SAKAGUCHI e KURAMOTO (1986). Sobre os gráficos obtidos de DC entre os osciladores da rede, além de nos auxiliarem na identificação dos estados quimera, eles também nos dão a informação de quão um oscilador está correlacionado com outro oscilador distinto da rede.

4.2 TIPOS DE ACOPLAMENTOS NA REDE

Antes de iniciarmos a descrição sobre a coexistência de estados coerentes e incoerentes denominado de estados quimera em um sistema acoplado, vamos primeiramente verificar a forma da rede de osciladores que utilizamos na nossa investigação. Neste trabalho, os vértices de índice i da rede representam os osciladores (sítio), e as arestas as ligações entre eles. Para o caso de uma rede composta por uma quantidade M de osciladores acoplados e condições de contorno periódicas, o sítio de índice $i = M + 1$ corresponderá ao sítio de índice $i = 1$. Na Fig. 4.1 os círculos rotulados por $i = 1, 2, 3, \dots, M$ representam os vértices da rede e as arestas caracterizam as conexões entre eles. Este esquema configura um modelo exemplificado da condição de contorno periódica da rede de osciladores acoplados, considerados nesta pesquisa.

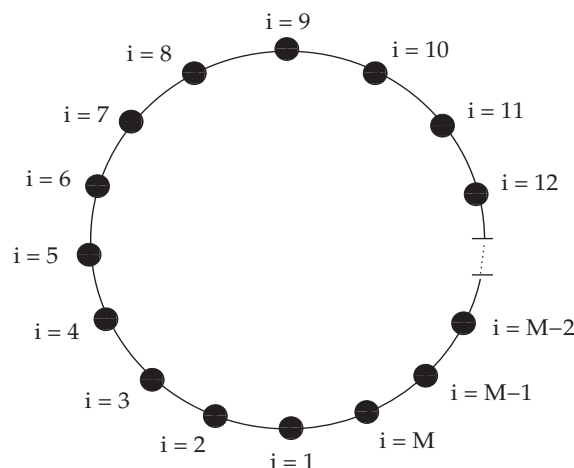


FIGURA 4.1 – Representação esquemática de uma rede composta por M osciladores acoplados, configurando um modelo ilustrativo da condição de contorno periódica. O índice i representa cada vértice (oscilador) da rede.

Existem muitas maneiras de acoplamentos entre vértices de uma rede, e tais

maneiras podem ser vistas nas representações esquemáticas da Fig. 4.2 para fins de comparação. Na Fig. 4.2(a) temos um exemplo de acoplamento com primeiros vizinhos entre os vértices da rede, e este tipo de acoplamento é conhecido como *acoplamento local*. Esta forma de acoplamento não será utilizada neste trabalho, está ilustrada apenas com o objetivo de compararmos as diferenças com os outros modelos. Vale a pena ressaltar que estas representações esquemáticas são detalhadas somente com doze vértices, pois são apenas para efeitos ilustrativos. No entanto, a nossa rede será composta por uma quantidade muito maior de osciladores acoplados.

Uma outra forma de topologia bem conhecida está ilustrada no esquema da Fig. 4.2(b). Nesta figura podemos observar que cada elemento interage com todos os demais, ou seja, todos estão conectados com todos. Este tipo de acoplamento é denominado por *acoplamento global*. Este caso também não será utilizado na nossa investigação. O tipo de acoplamento que será levado em conta neste trabalho está ilustrado na Fig. 4.2(c), que é conhecido por *acoplamento não local*. Este é um tipo de acoplamento em que há atalhos na rede e o vértice de índice i pode estar conectado aos elementos de índice $\{i - R, \dots, i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2, \dots, i + R\}$, onde R é um número inteiro que representa o alcance do acoplamento, como mostrado na Fig. 4.2(c). É fácil ver que podemos obter uma rede com acoplamento global através de uma rede acoplada de forma não local fazendo $R \rightarrow M$, desta forma todos os elementos da rede possuirão ligações com todos os demais.

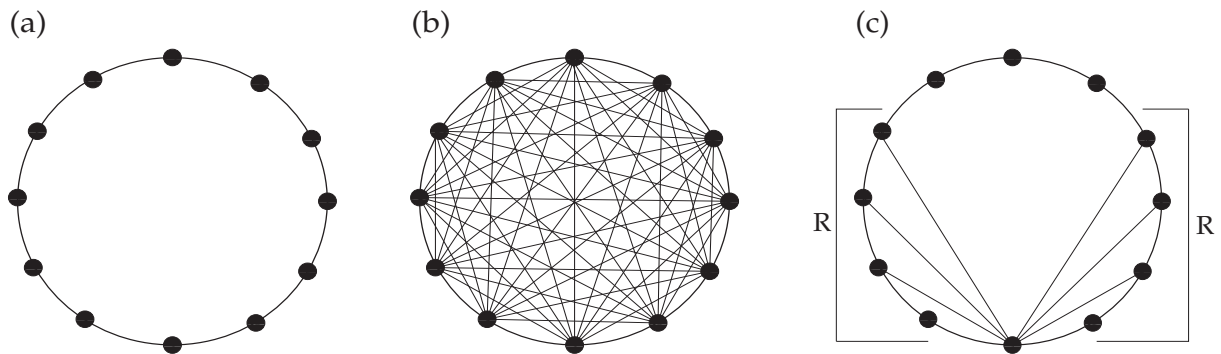


FIGURA 4.2 – Representações esquemáticas dos tipos de acoplamentos: (a) acoplamento local, (b) acoplamento global e (c) acoplamento não local.

4.3 OSCILADORES DE FASE DE KURAMOTO

Estados quimera já foram descobertos em redes com topologia de acoplamentos diferentes. Em particular, os estados quimera foram obtidos para os casos de acopla-

mento global, não local e local, como exemplificado por uma rede neural Hindmarsh Rose mostrado na referência (BERA *et al.*, 2016). No entanto, nos limitaremos ao caso do acoplamento não local em uma rede de osciladores, usando como base de nossa investigação os trabalhos de Kuramoto e Strogatz. Logo, para um acoplamento não local é possível obtermos a coexistência de estados distintos em uma rede de osciladores de fase acoplados. A condição de acoplamento não local possui várias aplicações em diversos ramos da ciência, como por exemplo na neurociência, sistemas eletroquímicos, osciladores químicos, para mencionar apenas poucos (OMELCHENKO *et al.*, 2011). Segundo a referência (WOLFRUM *et al.*, 2011), para que seja possível a observação de estados quimera em um sistema de osciladores acoplados, são necessárias as seguintes condições:

- Um meio discreto, particularmente representado por um grande número de osciladores distribuídos no espaço;
- Um acoplamento não local que fornece uma interação entre subpopulações locais com um intervalo de acoplamento diferente do acoplamento global e local;
- Um parâmetro de atraso de fase bem ajustado.

Desta maneira, nosso sistema de investigação consiste de uma quantidade M de osciladores de fase acoplados, de forma não local. Para isto, usamos o modelo proposto por SAKAGUCHI e KURAMOTO (1986), que é frequentemente empregado como um modelo básico para o estudo numérico e analítico dos estados da quimera, e é dado pela equação diferencial

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{2R} \sum_{k=i-R}^{i+R} \text{sen}(\phi_i - \phi_k + \alpha), \quad (4.1)$$

com $i = 1, 2, \dots, M$ sendo o índice do oscilador na rede, ϕ_i a fase do i -ésimo oscilador, ω_i a frequência natural dos osciladores, R o alcance do acoplamento e $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ o parâmetro de atraso de fase de Sakaguchi (SAKAGUCHI; KURAMOTO, 1986). Considerando o caso em que todos os osciladores da rede sejam idênticos, a frequência pode ser definida como sendo $\omega_i = 0$, como mostrado na referência (ABRAMS; STROGATZ, 2004).

A equação (4.1) é composta por uma função de interação senoidal que depende da diferença de fases entre dois osciladores e contém explicitamente um parâmetro de atraso de fase. Cada oscilador i sofre influência de uma quantidade específica de outros osciladores da rede que depende do alcance de acoplamento. Desta equação é possível a existência de acoplamento puramente local, até acoplamento global, variando-se apenas o valor de R . Um outro fator a ser notado sobre a rede representada pela equação (4.1), é a condição de contorno periódica na forma $M + i = i$.

As condições iniciais são dadas de acordo com as referências (ABRAMS; STROGATZ, 2004; ABRAMS; STROGATZ, 2006), pela expressão

$$\phi_0 = 6\eta \exp(-0,76x^2), \quad (4.2)$$

onde x é determinado no intervalo $[-\pi, +\pi]$ com seus valores igualmente distribuídos e η escolhido aleatoriamente no intervalo $[-1/2, +1/2]$. Segundo ABRAMS e STROGATZ (2006), o efeito desta relação é dar ao sistema um estado inicial, colocando-o em um ambiente parcialmente coerente e outro ambiente parcialmente incoerente. Que é exatamente uma distribuição aleatória com um envelope gaussiano para a distribuição inicial das fases. A forma da quimera em geral, depende das CIs escolhidas cuidadosamente. Utilizamos o método de integração Runge-Kutta de 4ª ordem para solucionar numericamente a equação diferencial (4.1). Este método de integração pode ser obtido na referência (PRESS *et al.*, 1992) em linguagem de programação Fortran 90.

Para identificarmos os estados quimera na rede de osciladores acoplados, fizemos o uso do método estatístico da correlação de distância entre os M osciladores constituintes da rede. Os coeficientes de DC são obtidos pela equação (2.24) considerando a seguinte igualdade

$$DC_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = DC_N(\Phi_{i,k}, \Phi_{j,k}), \quad (4.3)$$

onde $i, j = 1, 2, \dots, M$ são os índices de dois osciladores distintos da rede e $k = 1, 2, \dots, N$ representando as posições da sequência das fases obtidas ao longo do tempo de integração, com N configurando o número total de fases de cada oscilador. A amostra conjunta (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de dois diferentes osciladores da rede são dadas na forma: $\mathbf{X} = \Phi_{i,k} = \{\phi_{i,1}, \phi_{i,2}, \phi_{i,3}, \dots, \phi_{i,N}\}$ e $\mathbf{Y} = \Phi_{j,k} = \{\phi_{j,1}, \phi_{j,2}, \phi_{j,3}, \dots, \phi_{j,N}\}$.

Com isso, podemos calcular numericamente o coeficiente de correlação de distância entre dois osciladores distintos da rede. Veremos que a partir desta proposta será possível identificarmos e diferenciarmos as regiões que exibem comportamentos de sincronização e de dessincronização de fases, pertencentes aos osciladores da rede. Entende-se por sincronização quando todos os elementos da rede oscilam com a mesma frequência, e dessincronização quando as frequências são distribuídas. Deste modo, poderemos diagnosticar a existência de estados quimera. Além de nos auxiliar na identificação de tais estados, uma outra característica importante de DC é que sua medida quantifica o grau de correlação que um determinado oscilador possui com outro oscilador distinto da rede, levando em conta toda a série das fases obtidas ao longo do tempo. Pois, quanto mais próximos são os valores das fases entre os osciladores distintos, maior será a correlação entre eles.

4.4 ESTADOS QUIMERA VIA CORRELAÇÃO DE DISTÂNCIA

Antes de iniciarmos a nossa discussão a respeito da correlação de distância na identificação de estados quimera, vamos primeiramente apresentar os três comportamentos distintos, considerando apenas uma pequena mudança no valor do parâmetro de fase α . A solução numérica da equação (4.1) é obtida através do método de integração Runge-Kutta de 4ª ordem e ainda com passo fixo de integração sendo $dt = 5 \times 10^{-2}$. A Fig. 4.3 exemplifica os três comportamentos dinâmicos que podem existir a partir de uma pequena variação no valor de α em uma rede composta por $M = 200$ osciladores acoplados. Os valores referentes ao alcance de acoplamento R e também os valores do parâmetro α que são considerados neste trabalho, são os mesmos utilizados nas referências (SANTOS *et al.*, 2015; SANTOS, 2018).

Na Fig. 4.3(a) está apresentado a evolução espaço-temporal da equação (4.1) para o valor do parâmetro de atraso de fase $\alpha = 1,37$ e alcance de acoplamento $R = 0,35M$. Nesta figura pode ser observado que as fases dos osciladores estão em completo sincronismo, após ser descartado um transiente de $t = 250$ unidades de tempo. Nota-se que o sistema possui um comportamento sincronizado no intervalo de tempo $250 \leq t \leq 500$. Já na Fig. 4.3(b), mostra-se o perfil das fases dos osciladores no instante de tempo $t = 400$, e percebe-se o comportamento coletivo dos osciladores na rede, onde todos possuem a mesma fase ϕ que varia igualmente no intervalo $[-\pi, +\pi]$. Podemos notar também que não consideramos tempos de integração muito longos, pois já é possível a observação do fenômeno para este intervalo de tempo avaliado. Deste modo, temos a rede espacialmente coerente.

Outro comportamento que pode ser observado da equação (4.1) está apresentado na Fig. 4.3(c) (evolução espaço-temporal) e Fig. 4.3(d) (perfil espacial). Neste caso, podemos notar a coexistência espacial de dois comportamentos dinâmicos distintos para $\alpha = 1,47$. Desta forma, uma parte do sistema possui sincronização e a outra dessincronização de fases. Na Fig. 4.3(c) temos a coexistência espacial de estados coerentes e incoerentes, e conseqüentemente, temos a existência de estados quimera. Nesta figura é possível observarmos a existência de duas regiões (bordas) que apresentam um certo sincronismo entre os osciladores. Na região central, não é notado este comportamento coletivo, onde prevalece um aparente desordenamento de fases. Para obtenção desta figura, também descartamos um transiente de $t = 250$ unidades de tempo. Na Fig. 4.3(d) temos o perfil espacial das fases no tempo $t = 400$.

Na Fig. 4.3(e) podemos notar que a rede se encontra espacialmente desordenada, pois os osciladores da rede não possuem um comportamento dinâmico sincronizado após o transiente ter sido descartado. Observa-se que as fases se modificam de oscilador para

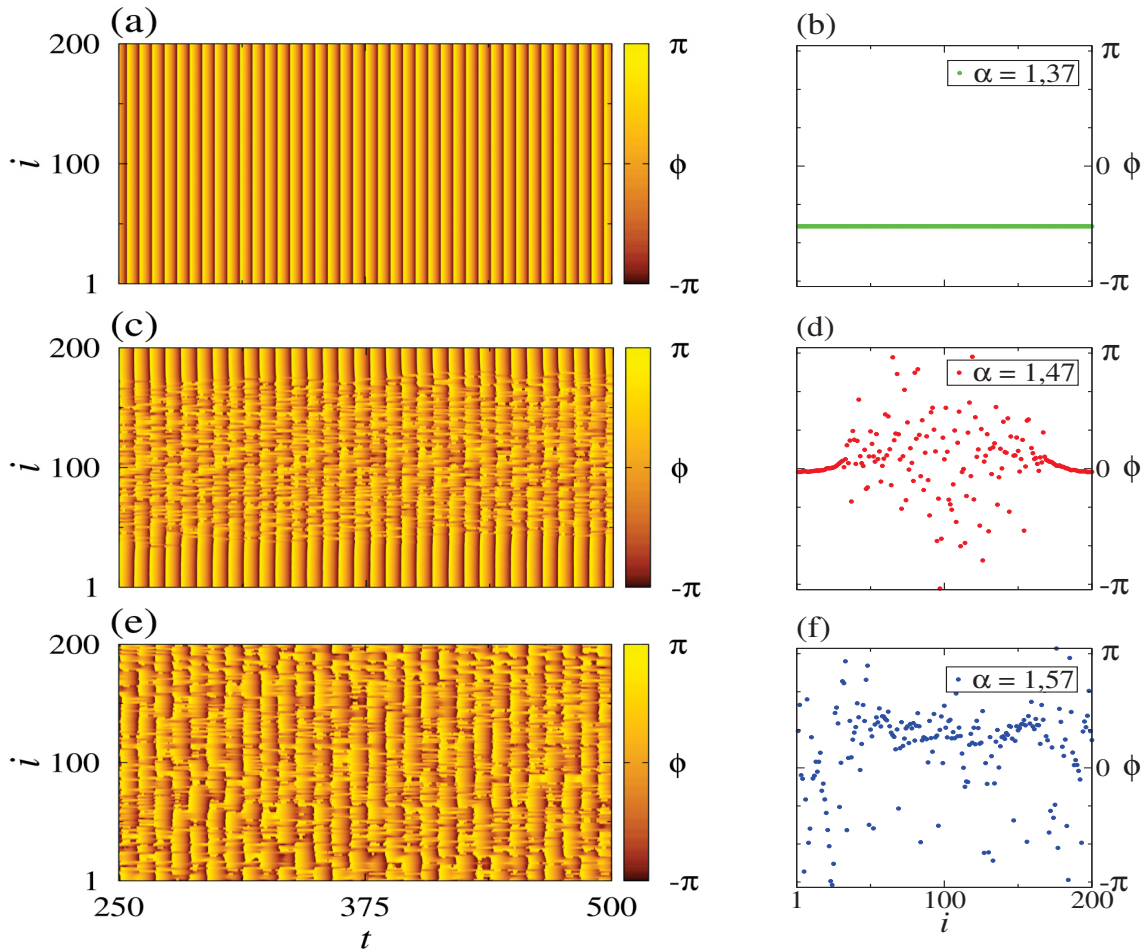


FIGURA 4.3 – Evolução espaço-temporal (esquerda) e perfil espacial (direita) para 200 osciladores, com alcance de acoplamento $R = 0,35M$. (a) e (b) para $\alpha = 1,37$, (c) e (d) para $\alpha = 1,47$ e (e) e (f) para $\alpha = 1,57$. Com t representando o tempo, i a posição dos osciladores na rede e ϕ a fase. Todos os perfis da esquerda são observados no tempo $t = 400$.

oscilador à medida que o tempo passa. Esse caso pode ser melhor percebido se observarmos a Fig. 4.3(f) em $t = 400$, onde nota-se que as fases encontram-se distribuídas desordenadamente no intervalo $[-\pi, +\pi]$. Neste caso, o perfil espacial das fases dos osciladores exemplificam a completa perda de sincronismo da rede. Para este caso o valor do parâmetro de fase é dado por $\alpha = 1,57$.

Conforme mencionado no início deste capítulo, podemos utilizar os coeficientes de correlação de distância para diagnosticarmos a existência de tais comportamentos. Nas referências (SANTOS *et al.*, 2015; SANTOS, 2018), os autores exibem estes comportamentos a partir do perfil espacial da rede, utilizando a matriz de recorrência. Santos *et al.* (2015) associam os estados (fases) dos osciladores da rede a um vetor \vec{w}_i , de modo que a matriz de recorrência seja o resultado da relação dos estados de todos os elementos da

rede. Dessa forma, definem a matriz de recorrência pela relação

$$RP_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|), \quad (4.4)$$

onde $\Theta(\cdot)$ representa uma função degrau, ε o raio de retorno para qual considera-se uma trajetória recorrente e $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana. Logo, se \vec{w}_i encontra-se na vizinhança de \vec{w}_j , tem-se a indicação de que as fases são recorrentes, com $RP_{i,j} = 1$, caso contrário, $RP_{i,j} = 0$. Consequentemente, resultando em uma matriz binária.

No nosso caso, consideramos toda a série temporal das fases para a obtenção de DC entre os osciladores da rede, um ponto de vista diferente do que foi mostrado por Santos *et al.* (2015), mas com o mesmo objetivo que é identificar a coexistência de comportamentos distintos, e DC se mostra eficaz neste sentido. Na Fig. 4.4 podemos ver a aplicação da correlação de distância em três sistemas de tamanhos distintos, sendo alterado a quantidade de elementos da rede, $M = 100, 200$ e 300 osciladores acoplados, e também os valores de α . Na Fig. 4.4(a) mostramos o caso para $M = 100$ osciladores, onde temos o comportamento sincronizado, com o valor de α sendo $1,37$. Note que, para este caso temos o mesmo comportamento dinâmico entre os elementos da rede, de forma que a medida de DC é máxima em todas as combinações possíveis, tendo portanto a figura preenchida pela cor amarela. Na escala de cores, DC varia de mínima correlação em coloração roxa, até a máxima correlação em cor amarela.

Observando a Fig. 4.4(b), nota-se que ela é formada por regiões preenchidas por cores diferenciadas, onde nas regiões em que as cores são intensas (bordas extremas - cor amarela) são correspondentes as partes do sistema em que existe sincronismo entre os elementos, representando as maiores correlações. Neste caso, temos a identificação da região coerente. Na diagonal temos a correlação máxima entre os osciladores, pois DC corresponde a $\Phi_{i,k} = \Phi_{j,k}$ ($i = j$). As regiões mais centralizadas das bordas preenchidas pelas colorações roxas e laranjas, representam uma correlação moderada entre os osciladores, pois é correspondente entre as partes sincronizadas com as regiões dessincronizadas. E na região central da figura, vemos a coloração roxa mais escura preenchendo o espaço, que refere-se ao domínio dessincronizado. Logo, a região está relacionada a parte incoerente da rede. Portanto, DC se mostra efetivo na identificação simultânea de comportamentos distintos (*estados quimera*). Já na Fig. 4.4(c) notamos algumas poucas regiões mostrando uma correlação mais moderada, com a maior parte preenchida pela coloração roxa, dessa forma caracterizando uma rede completamente dessincronizada.

Para a rede composta por 200 osciladores, temos DC apresentado nas Figs. 4.4(d), 4.4(e) e 4.4(f). A dinâmica exibindo o comportamento coletivo sincronizado está exposto na Fig. 4.4(d) com DC sendo máximo em todas as combinações possíveis. Os estados quimera são constatados na Fig. 4.4(e). Neste caso, além das regiões com maiores correlações (bordas extremas na cor amarela), e da região mais centralizada com

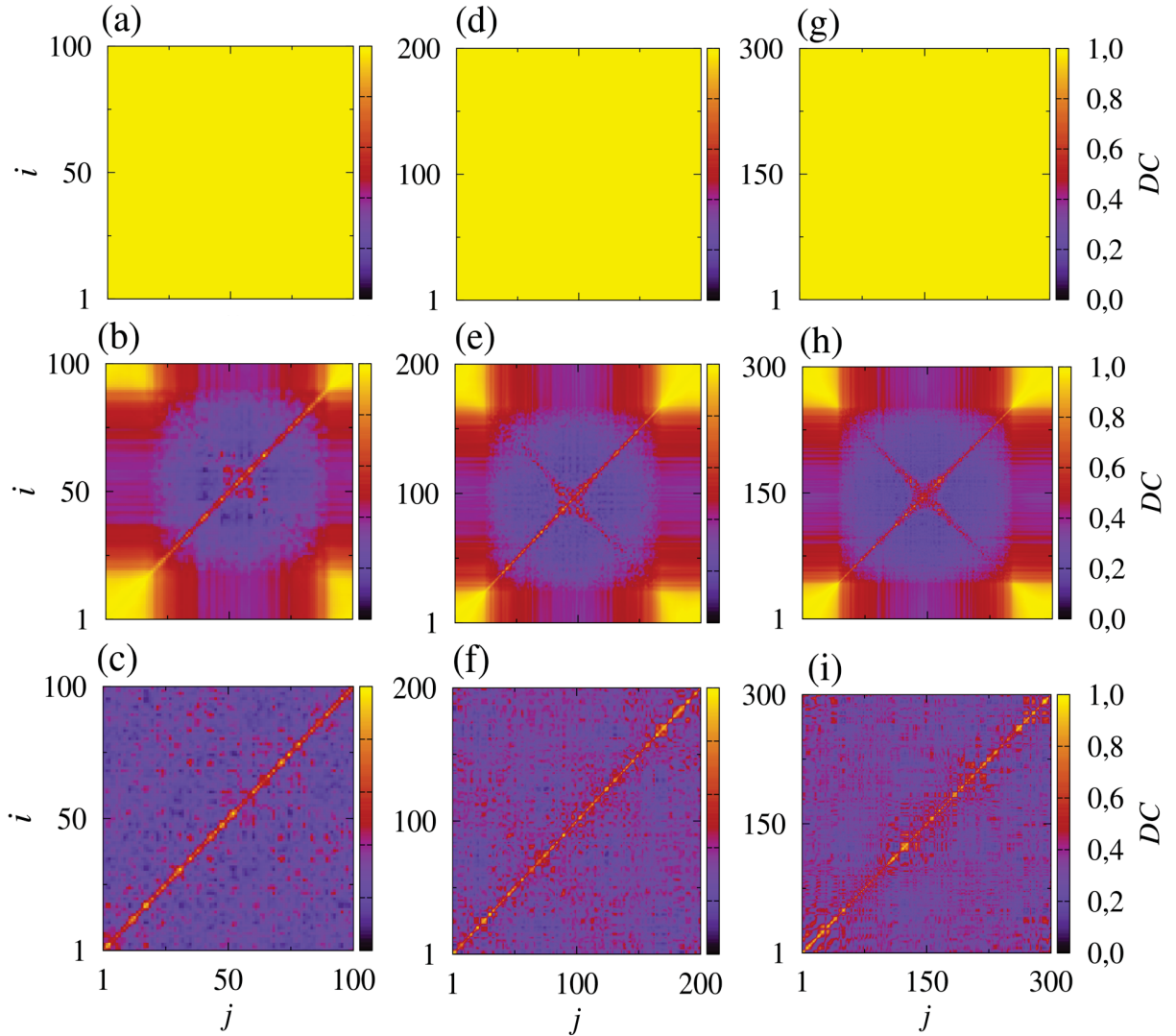


FIGURA 4.4 – Correlação de distância para: $M = 100$ osciladores com parâmetros de fase sendo (a) $\alpha = 1,37$, (b) $\alpha = 1,47$ e (c) $\alpha = 1,57$; $M = 200$ osciladores com parâmetros sendo (d) $\alpha = 1,37$, (e) $\alpha = 1,47$ e (f) $\alpha = 1,57$; $M = 300$ osciladores com parâmetros sendo (g) $\alpha = 1,37$, (h) $\alpha = 1,47$ e (i) $\alpha = 1,57$.

as menores correlações (roxo), é possível observarmos alguns pontos na outra diagonal com com uma correlação moderada entre os osciladores, mostrando que mesmo na região incoerente, alguns osciladores mantêm um comportamento aparentemente simétrico dentro dessa região, com isso alcançando valores apreciáveis de correlação. Na Fig. 4.4(f) está mostrado o caso da identificação da dinâmica completamente desordenada da rede. Neste caso, podemos notar muito mais regiões com correlações moderadas entre os osciladores, do que no caso mostrado pela Fig. 4.4(c).

Agora expandindo o tamanho da rede para 300 osciladores acoplados, temos DC exibido nas Figuras 4.4(g), 4.4(h) e 4.4(i), cujas interpretações podem ser associadas aos dois casos anteriores. Na Fig. 4.4(h) que representa a identificação dos estados

quimera, é perceptível que os padrões são bem mais nítidos que nos dois casos anteriores, de onde concluímos que na medida em que M aumenta, melhor fica a nitidez dessas regiões com comportamentos dinâmicos distintos. No contexto da região correspondente à dinâmica completamente incoerente é possível observarmos algumas pequenas regiões nas vizinhanças da diagonal expressando altos valores de correlação. Para uma melhor visualização a respeito de DC nas dinâmicas associadas aos cenários da Fig. 4.4, vamos agora mostrá-las em 3-D (Fig. 4.5) para os casos das redes compostas por 200 e 300 osciladores somente, com os parâmetros de fase $\alpha = 1,47$ e $1,57$.

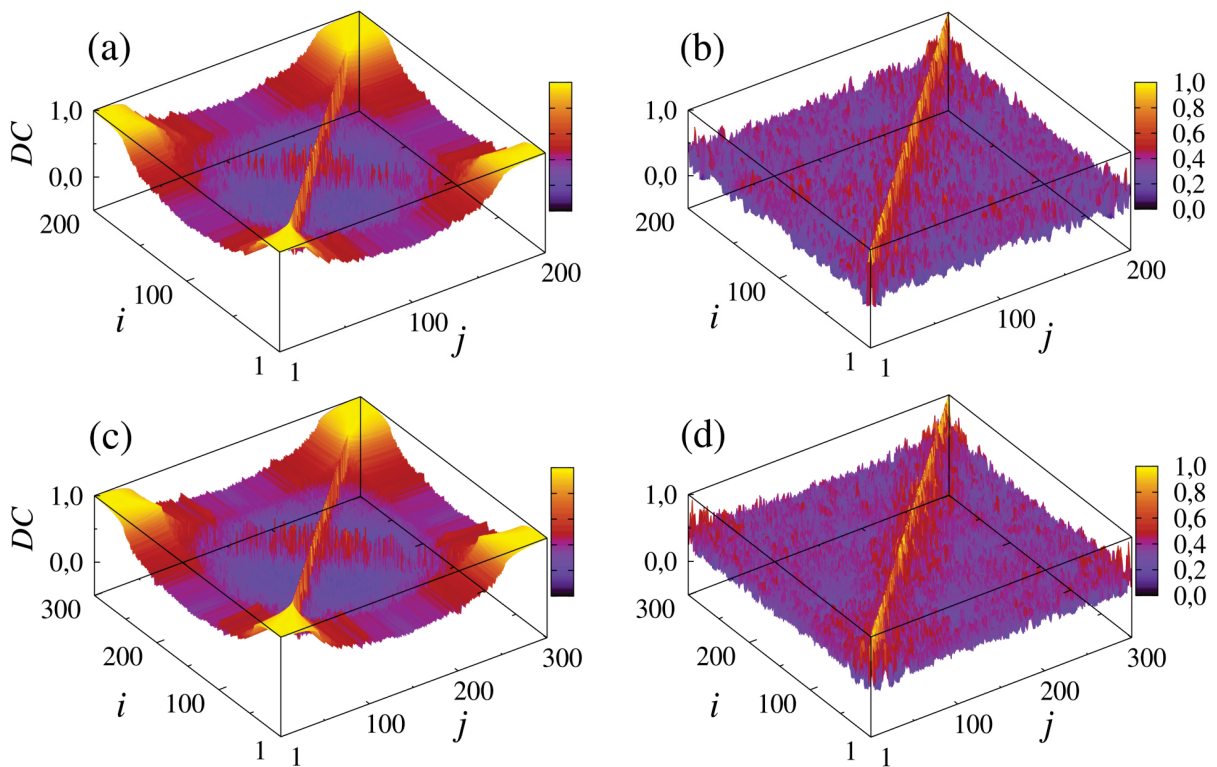


FIGURA 4.5 – Figuras em 3-D relativas à DC na rede de osciladores de fase acoplados. Rede composta por 200 osciladores com parâmetro de fase (a) $\alpha = 1,47$ e (b) $\alpha = 1,57$, e rede composta por 300 osciladores com parâmetro de fase (c) $\alpha = 1,47$ e (d) $\alpha = 1,57$.

Na Fig. 4.5(a) temos o caso da rede composta por 200 osciladores acoplados e parâmetro $\alpha = 1,47$. Nesta figura podemos agora diferenciar as regiões também por diferentes alturas correspondentes à DC , além das cores evidentemente. Nos quatro cantos do gráfico notamos a maior elevação em cor amarela, que é relativa à máxima correlação, e parte roxa mais centralizada, que condiz com a parte incoerente da rede. Podemos ainda notar alguns “picos” de correlação entre alguns osciladores da parte dessincronizada, mostrando que dentro desta região aparentemente pode existir um certo comportamento simétrico entre eles. Este fato vai ser melhor esclarecido na subseção 4.4.1, onde será mostrado que esta “simetria” na região caótica dos estados quimera, pode ser observado na rede considerando tempos não muito longos de integração.

A Fig. 4.5(b) retrata o caso em que os osciladores da rede se encontram completamente dessincronizados. Podemos notar nesta figura que, com exceção da diagonal que exibe alta correlação, todo o resto é preenchido pelas cores correspondentes à baixos valores de DC . Obviamente são constatados vários picos que exibem uma correlação moderada, indicando que mesmo toda a rede estando dessincronizada, a correlação de distância ainda identifica certas coerências entre os elementos da rede. Comportamentos semelhantes podem ser vistos nas Figuras 4.5(c) e 4.5(d), só que agora para uma rede composta por 300 osciladores de fase acoplados.

4.4.1 Detectando “simetria” nos estados quimera

O propósito desta seção é investigar a observação feita a respeito da existência de certas simetrias nas dinâmicas associadas aos osciladores pertencentes à região dessincronizada da rede, para tempos não muito longos de integração numérica. Até o momento temos considerado para a observação dos estados quimera e os outros dois comportamentos dinâmicos, o intervalo temporal $250 \leq t \leq 500$. Portanto, calculamos a correlação de distância na forma $DC_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = DC_N(\Phi_{i,k}, \Phi_{i,k})$, com $i = 1, 2, \dots, M$ representando os osciladores da rede e $k = 1, 2, \dots, N$ a posição das fases na série temporal. As amostras são dadas por: (i) $\mathbf{X} = \Phi_{i,k}$ a partir das CIs $\rightarrow \phi_0$ dadas pela equação (4.2), e (ii) $\mathbf{Y} = \Phi_{i,k}$ para as CIs $\rightarrow \phi_0 + \eta \times 10^{-3}$, onde ϕ_0 também é dado pela equação (4.2) só que agora somado com uma quantidade η escolhida aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$. Assim, integramos o sistema duplamente várias vezes para muitas CIs.

De modo que, calculamos a correlação de distância média pela relação

$$\langle DC_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{CI=1}^n DC_{i,CI} \quad (4.5)$$

com $CI = 1, 2, \dots, n$ representando o número total de CIs utilizadas. E ainda ao invés de calcularmos $\langle DC_i \rangle$ considerando toda a série temporal de Φ no intervalo $250 \leq t \leq 500$, dividimos este intervalo em cinco janelas intermediárias de tempo. Assim, considerando os intervalos na forma: $270 \leq t_1 \leq 300$, $320 \leq t_2 \leq 350$, $370 \leq t_3 \leq 400$, $420 \leq t_4 \leq 450$ e $470 \leq t_5 \leq 500$. Na Fig. 4.6 podemos ver a média da correlação de distância para cada oscilador da rede, considerando 2×10^3 CIs em cinco intervalos de tempo específicos. Temos a curva de $\langle DC_i \rangle$ para o intervalo de tempo t_1 representado pela cor preta, t_2 em vermelho, t_3 em verde, t_4 em azul e t_5 em magenta. Neste gráfico podemos notar que entre os osciladores de 1 a 20 e de 80 a 100 aproximadamente, a média $\langle DC_i \rangle$ exibe altos valores de coeficientes, constatando dessa forma os osciladores sincronizados da rede.

Para o intervalo de $20 \lesssim i \lesssim 80$, notamos entre as curvas os diferentes comportamentos na região mais centralizada. Podemos ver que a curva em preto, correspondente

à janela t_1 , na parte central a correlação entre os osciladores da rede aumenta significativamente. Esta ação retrata o fato de que os osciladores da região dessincronizada, ainda exibem comportamentos com certa simetria, fazendo com que $\langle DC_i \rangle$ sofra um acréscimo. E isso é notado apenas para tempos curtos de integração após o descarte de um transiente. Observamos que para estes tempos, os osciladores mais desordenados da rede não são os mais centralizados, e sim os que se encontram localizados mais ao extremo da parte desordenada. A caoticidade se transporta para a região mais centralizada com a evolução temporal. À medida que o tempo passa, notamos que essa “simetria” diminui, até que a correlação entre os osciladores dessincronizados alcançam valores de $\langle DC_i \rangle$ bem similares, oscilando com uma pequena diferença entre eles.

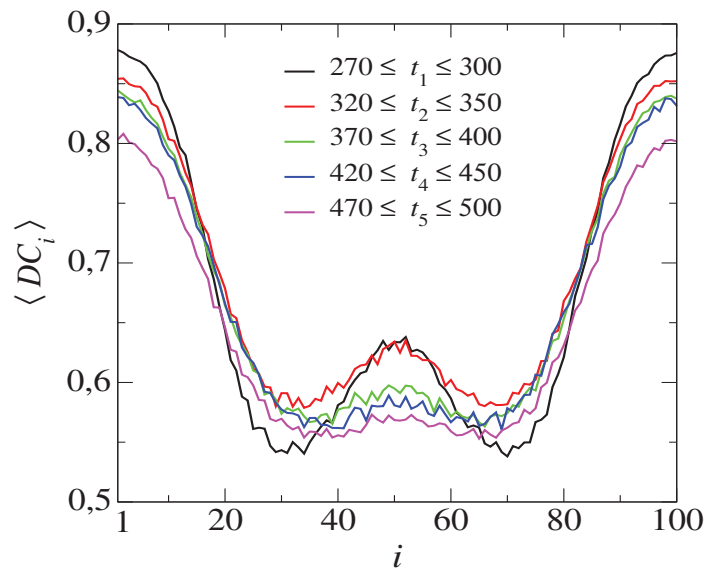


FIGURA 4.6 – Correlação de distância média $\langle DC_i \rangle$ sobre muitas CIs em função de cada oscilador individualmente da rede. Foi considerado cinco janelas temporais ao longo do tempo de integração numérica. Parâmetros: $M = 100$, $R = 0,35M$ e $\alpha = 1,47$.

4.5 ESPECTRO DOS ELs DOS ESTADOS QUIMERA

Nesta seção, apresentamos nossos resultados numéricos a respeito do espectro de Lyapunov dos estados de quimera. Em particular, discutiremos o comportamento dos ELs como uma função do número de osciladores da rede e do alcance de acoplamento. Para os cálculos numéricos, além de ser utilizado o método de integração Runge-Kutta de 4ª ordem como já mencionado, usamos também o algoritmo padrão para obtenção dos ELs usando o procedimento de ortonormalização de Gram-Schmidt (WOLF *et al.*, 1985). As simulações geralmente abrangem um tempo longo para que se consiga uma estabilização dos ELs em um nível satisfatório de precisão. Como exemplo, a Fig. 4.7 mostra a evolução temporal dos quatro maiores ELs positivos se estabilizando bem após um cálculo de 30000 unidades

de tempo, em uma rede composta por $M = 100$ osciladores acoplados e um alcance de acoplamento $R = 0,35M$. A metodologia analítica via ortonormalização de Gram-Schmidt bem como o processo para a obtenção das equações linearizadas de (4.1), podem ser vistas no Apêndice 2.

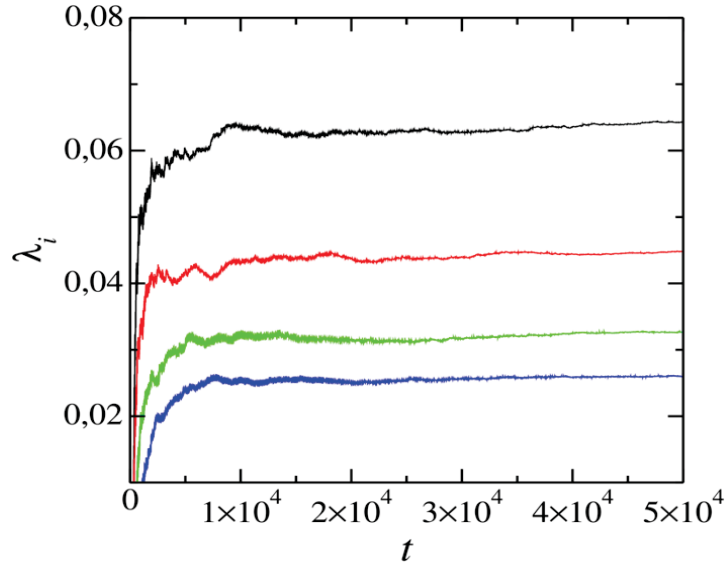


FIGURA 4.7 – Estabilização de quatro expoentes de Lyapunov positivos calculados ao longo das trajetórias quimera. Parâmetros: $M = 100$, $\alpha = 1,47$ e $R = 0,35M$.

A fim de compararmos os espectros de Lyapunov para diferentes valores de acoplamento, representamos a sequência dos ELs (λ_i) de forma decrescente como uma função do reescalonamento $(i - 1)/(M - 1)$. Note que, reescalonamos os índices dos sítios da rede de forma que tenhamos o intervalo $[0, 1]$. A Fig. 4.8 mostra o espectro de Lyapunov para os estados quimera no sistema dado pela equação (4.1). Na Fig. 4.8(a) consideramos a rede com $M = 100$ osciladores acoplados, $\alpha = 1,47$ e dois valores de alcance de acoplamento $R = 0,35M$ e $0,30M$. Como pode ser visto nesta figura, apresentamos o espectro de Lyapunov apenas para dois valores diferentes de alcance de acoplamento, que são correspondentes a diferentes tamanhos da região coerente do sistema. Pode-se observar que quase não há diferença para os ELs positivos, enquanto a parte estável do espectro é deslocada, levando a um número crescente de expoentes fortemente estáveis para R crescente. Além disso, pode ser visto que os expoentes positivos decaem com o aumento de R .

A Fig. 4.8(b) retrata o caso da rede composta por 200 osciladores, considerando os mesmos parâmetros do caso anterior. Nesta figura podemos notar que o aumento de M , resulta no decaimento dos ELs positivos em relação ao caso anterior. Concluímos dessa forma que, tanto o aumento de R quanto o de M , resultam no decaimento dos ELs positivos. Uma investigação detalhada sobre o comportamento dos espectros de Lyapunov para uma rede composta por um grande número de osciladores acoplados, pode ser

encontrado na referência (WOLFRUM *et al.*, 2011). Neste trabalho os autores mostram que dentro da região incoerente (osciladores dessincronizados), os ELs correspondentes tendem a zero quando $M \rightarrow \infty$.

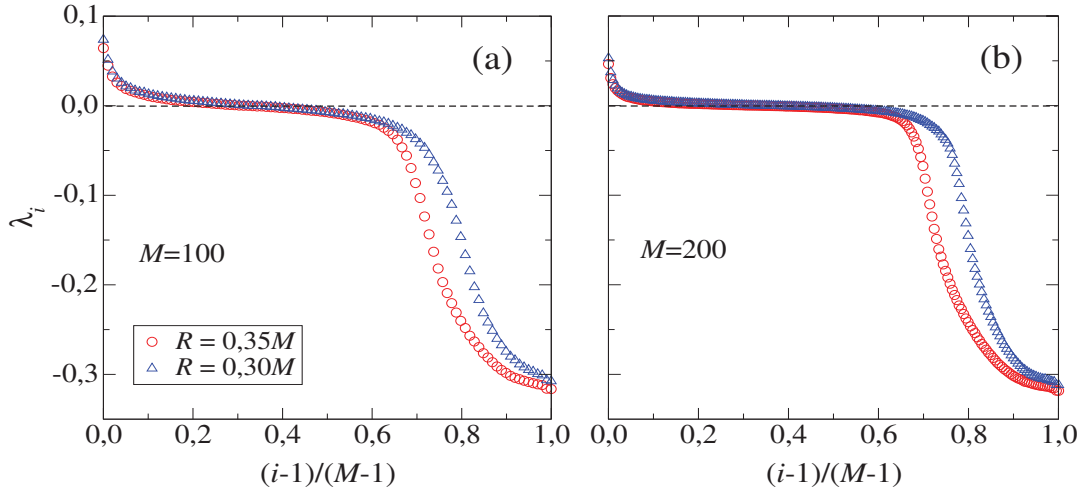


FIGURA 4.8 – Espectro de Lyapunov λ_i calculados para trajetórias quimera da equação (4.1) para uma rede com: (a) $M = 100$ e (b) $M = 200$ osciladores acoplados. Os valores dos alcances de acoplamento são: $R = 0,35M$ (círculos vermelhos) e $R = 0,30M$ (triângulos azuis). Parâmetro de fase: $\alpha = 1,47$.

4.6 CONCLUSÕES

Nesta parte da tese, estudamos o método estatístico da correlação de distância aplicado a uma rede de osciladores acoplados (SAKAGUCHI; KURAMOTO, 1986), com o objetivo de identificarmos a simultaneidade da existência dos estados sincronizados e dessincronizados entre os osciladores da rede. A existência concomitante destes dois estados também conhecidos como estados coerentes e incoerentes, é denominada por *estados quimera* (ABRAMS; STROGATZ, 2004). Verificamos que a observação dos estados quimera em uma rede de osciladores acoplados, está diretamente ligada à quantidade de osciladores que compõem a rede, ao acoplamento entre os osciladores que deve ser do tipo não local, à um parâmetro de atraso que deve ser bem ajustado e ainda as CIs que devem ser escolhidas cuidadosamente.

Através da correlação de distância, foi possível verificarmos a coexistência dos estados coerentes e incoerentes da rede, nos possibilitando dessa forma, diagnosticar a existência dos estados quimera no sistema. Essa caracterização de estados sucedeu-se pela diferenciação na escala de cores correspondentes à cada nível de intensidade de correlação. Vimos ainda que, para tempos não muito longos de integração numérica, foi possível notarmos um certo comportamento coerente nos osciladores mais centralizados na região dessincronizada da rede, mostrando maiores valores de DC em comparação com os outros

localizados mais a borda dessa região. E por fim, verificamos os ELs para uma rede composta de 100 e outra de 200 osciladores acoplados, de onde notamos que a mudança no valor do alcance de acoplamento, resulta em um aumento da quantidade dos ELs estáveis.

5 CORRELAÇÃO NA MISTURA DAS ÁGUAS

Após a utilização da correlação de distância na descrição de propriedades de sistemas dinâmicos teóricos apresentados nos capítulos anteriores, neste capítulo, mostraremos a aplicação da correlação de distância na análise de dados de um sistema dinâmico real, referente às águas dos Rios Negro e Solimões. Após a junção destes rios, suas águas fluem lado a lado por quilômetros sem que aconteça o processo de mistura. Faremos uma análise estatística de dados coletados localmente de parâmetros físico-químicos como temperatura, condutividade elétrica, turbidez e oxigênio dissolvido. O objetivo é fazer uma análise destes parâmetros, em diferentes pontos da região de confluência via correlação de distância, sabendo que ambos os rios possuem características físico-químicas totalmente diferentes. Os dados coletados foram fornecidos pelo professor Dr. Marco Ianniruberto, Geofísico da UnB, e ainda é um estudo em andamento.

5.1 AMAZÔNIA E O ENCONTRO DAS ÁGUAS

A Amazônia é uma floresta úmida de folhas largas que cobre a maior parte da bacia amazônica na América do Sul. Esta bacia cobre 7 milhões de quilômetros quadrados, dos quais 5,5 milhões são cobertas por floresta tropical. A maioria da floresta está contida no Brasil, com 60% da floresta, seguida pelo Peru com 13% e partes menores na Colômbia, Venezuela, Equador, Bolívia, Guiana, Suriname e Guiana Francesa. Seu principal rio é conhecido como *Rio Amazonas*, que tem aproximadamente 7000 afluentes e 1100 rios tributários, entre os quais destacamos os dois rios mais conhecidos, Negro e Solimões (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017). A *confluência* dos Rios Negro e Solimões está localizada próxima da cidade de Manaus, capital do estado do Amazonas, no norte do Brasil e é conhecida localmente por **encontro das águas** (ver Fig. 5.1).

O encontro das águas é um fenômeno natural visto em muitos rios da região, e os fatores para que isso aconteça variam de questões geológicas, climáticas, térmicas ou até mesmo o tamanho ou a acidez dos rios. Segundo Trevethan *et al.* (2015), a bacia do Rio Negro possui uma área de 687 000 km², e está localizada ao norte das encostas do escudo das Guianas, enquanto a bacia do Solimões possui uma área de 2 150 000 km² e está localizado a oeste, com suas águas ricas em sedimentos originários dos Andes. Esses

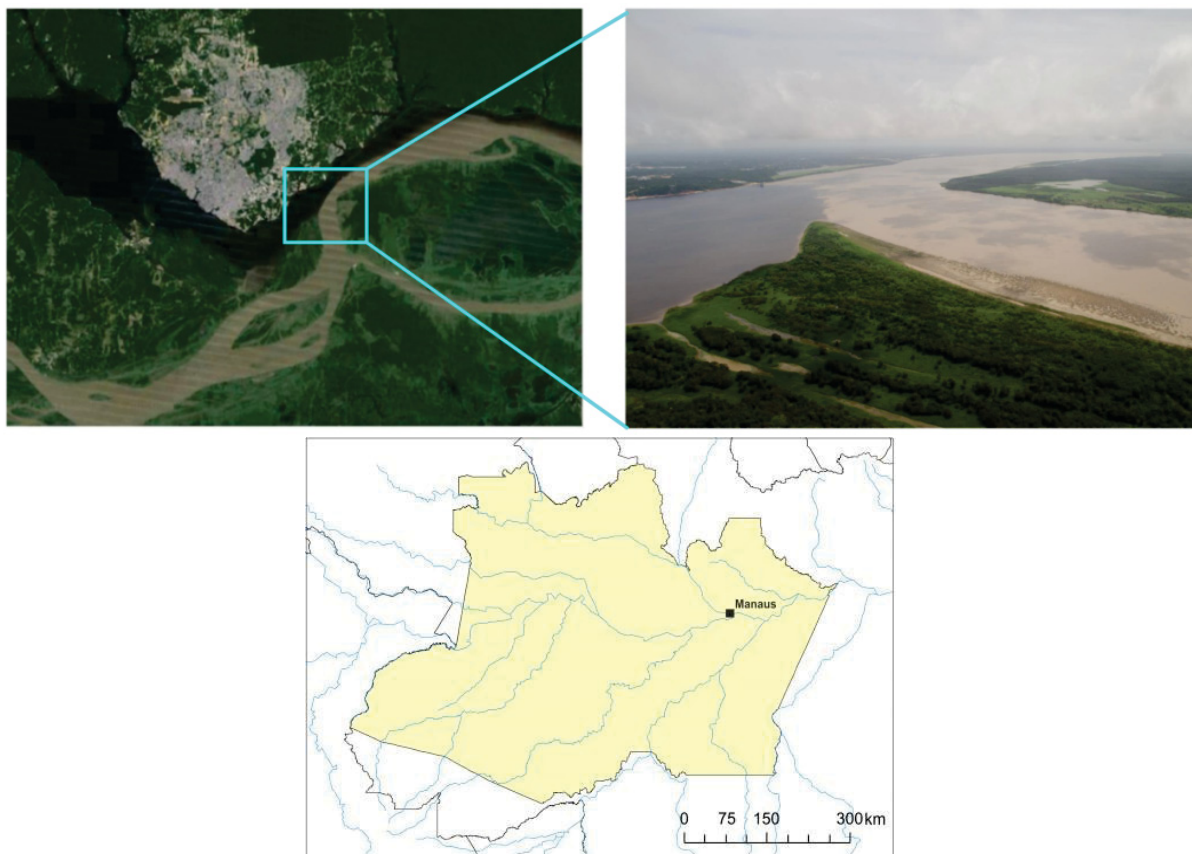


FIGURA 5.1 – Encontro das águas dos Rios Negro e Solimões e as delimitações do estado do Amazonas com a localização da cidade de Manaus. [Fontes: Figuras adaptadas das referências (BELUCO; SOUZA, 2014; NASCIMENTO, 2016).]

rios possuem parâmetros físico-químicos totalmente diferentes. A região está localizada na faixa neotectônica transcorrente que se estende de leste a oeste na parte central da Bacia Amazônica (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017; FRANZINELLI, 2011).

As águas escuras do Rio Negro possuem valores de pH menores que 7,0 e, portanto, são ácidas. Isso se deve a uma grande quantidade de substâncias orgânicas dissolvidas da drenagem dos solos arenosos adjacentes ao rio que possui como vegetação o prado, a campinarana ou a caatinga amazônica. Esta cor é o resultado dos ácidos húmicos⁵ resultantes da decomposição do húmus no solo que são lentamente transportados para o rio. O Rio Solimões é caracterizado pela alta concentração de sedimentos em suspensão constituídos principalmente por argilas⁶ e siltes⁷, o que torna sua coloração na cor marrom.

⁵O ácido húmico é o principal componente das substâncias húmicas, que por sua vez é o principal constituinte orgânico do solo. É produzido a partir da biodegradação da matéria orgânica morta. É um dos principais componentes orgânicos de rios, lagos e oceanos.

⁶As argilas são formadas pelas alterações das rochas, ela pode ser encontrada próxima de rios, muitas vezes formando barrancos nas margens. No solo, é componente comum das lamias ou barros, como são conhecidos popularmente. Ela corresponde aos minerais que apresentam tamanho inferior a 4 μm em uma rocha.

⁷Chama-se silte todo e qualquer fragmento de mineral ou rocha menor do que areia fina e maior do

A coloração da água vem da terra que esses rios arrancam das montanhas quando descem. Quando estes dois rios se encontram na confluência, é perceptível que o processo de mistura não acontece de forma imediata, e esta separação dos rios lado a lado pode ser vista até 100 km à jusante. Na Tabela 5.1, pode ser observado as diferentes características entre os dois rios.

TABELA 5.1 – Médias das principais propriedades de escoamento e características das águas dos Rios Negro e Solimões. [Fonte: Referência (TREVETHAN *et al.*, 2015)]

Rios	Q (m ³ /s)	A (m ²)	U (m/s)	L (m)	P (m)	D (kg/m ³)	pH
Solimões	63 380	40,174	1,34	1700	25,0	995,443	7,2
Negro	24 030	67,173	0,4	2700	25,2	995,293	5,4

Legenda:

Q = descarga;

A = área de seção transversal;

U = magnitude da velocidade da seção trasversal;

L = largura;

P = profundidade;

D = densidade da água.

Uma outra característica importante sobre o encontro das águas é que, esta região pode ser um possível abrigo de unidades evolutivas significativas⁸ para peixes amazônicos. A referência (ARDURA *et al.*, 2013), exhibe alguns resultados referentes à dois dos mais importantes peixes da Bacia Amazônica, **Curimatã** (*Prochilodus nigricans*) e **Tambaqui** (*Colossoma macropomum*), com observação destes peixes em diferentes áreas, a fim de identificar zonas comuns de diversidade. A conclusão dos autores sobre esta investigação é que, embora tanto o Curimatã quanto o Tambaqui exibam uma estruturação populacional pouco profunda, a população de ambas as espécies que habitam a área do encontro das águas apresentam significativa diferenciação genética com todos os demais pontos de amostragem. E ainda argumentam que essa área (próxima de Manaus) pode ser considerada como um abrigo para unidades evolutivas significativas para estes peixes amazônicos.

5.2 HIDRODINÂMICA DE CONFLUÊNCIAS

Conforme os fluxos de dois rios tributários se fundem e se ajustam à geometria das confluências, alterações na hidrodinâmica e na morfologia ocorrem dentro e imediatamente

que argila e que na escala de Wentworth, de amplo uso em geologia, corresponde a diâmetro $> 4 \mu\text{m}$ e $< 64 \mu\text{m}$.

⁸Uma Unidade Evolutiva Significativa (UES) é um dos conceitos que definem uma unidade biológica, que pode ser sintetizada como uma ou várias populações que são reprodutivamente isoladas de outras e que constituem uma parte importante do legado genético de uma espécie.

a jusante da confluência segundo Mosley (1976). A região onde a hidrodinâmica local é influenciada pela convergência e realinhamento dos fluxos combinados na confluência é conhecida como Zona Hidrodinâmica da Confluência de acordo com Kentworthy e Rhoads (1995). De acordo com as referências (MOSLEY, 1976; BEST, 1987), a hidrodinâmica e a morfologia dentro da zona hidrodinâmica de confluência são influenciadas por: (i) planta da confluência; (ii) ângulo de junção da confluência; (iii) taxa de fluxo de momento dos fluxos e (iv) nível de concordância entre os canais na entrada da confluência. Além do mais, sabe-se que quaisquer diferenças nas características da água como por exemplo a temperatura, condutividade elétrica, concentração de sedimentos em suspensão entre os dois fluxos, podem afetar os processos locais sobre a confluência (KENTWORTHY; RHOADS, 1995).

Segundo as referências (BEST, 1987; NASCIMENTO, 2016), as características hidrodinâmicas na zona de confluência são descritas por (ver Fig. 5.2):

1. Uma zona de estagnação relativa do fluxo próximo do canto da confluência à montante;
2. Uma região de deflexão do fluxo, em que cada corrente entra na área da confluência;
3. Uma zona de separação do fluxo, à jusante da confluência;
4. Uma área de velocidade máxima;
5. Uma área de recuperação gradual do fluxo à jusante da zona de separação de fluxo.

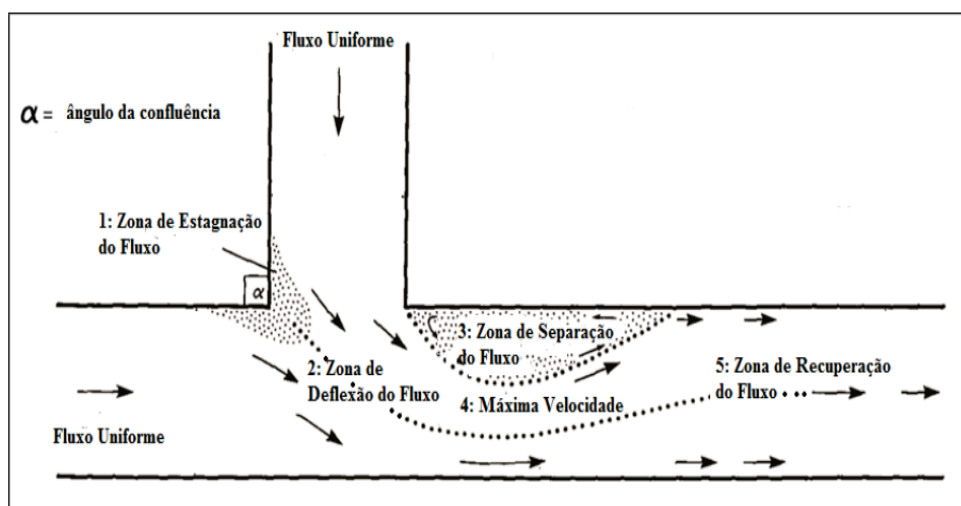


FIGURA 5.2 – Diagrama esquemático com as principais características hidrodinâmicas de uma confluência. [Fonte: Referência (NASCIMENTO, 2016)]

O diagrama esquemático da Fig. 5.2 ilustra as características hidrodinâmicas de uma confluência. Dois fluxos uniformes com diferentes direções e provenientes de

diferentes canais, se encontram na confluência. Logo após a junção dos rios existe uma região que é chamada de zona de estagnação do fluxo, onde as águas de ambos os rios permanecem sem fluir, e em seguida sofrem uma deflexão em relação a direção dos fluxos, que dependendo do ângulo da confluência, esta deflexão pode ser mais acentuada para um determinado fluxo. Próximo à zona deflexão de fluxo, se encontra uma região onde as águas de um dos rios fica circulando dentro das limitações dessa área, que leva o nome de zona de separação de fluxo. Assim, os fluxos lado a lado alcançam uma velocidade máxima em uma região posterior a zona de deflexão de fluxo, e logo depois gradualmente recuperam suas velocidades.

Uma característica importante das confluências naturais é o desenvolvimento de uma interface de mistura entre os fluxos convergentes devido a contrastes nas características da água como temperatura, concentração de sedimentos em suspensão, entre outros, dos dois rios (RHOADS; SUKHODOLOV, 2008). Segundo Rhoads e Kentworthy (1998) esses contrastes nas características da água, podem ser responsáveis pela formação de uma camada de estratificação lateral entre os fluxos confluentes que limita a quantidade de mistura dentro da zona de confluência. Aqui apresentamos alguns resultados referentes a análise de dados coletados sobre a confluência dos Rios Negro e Solimões, que é uma das maiores confluências da Terra. Estes resultados são principalmente focados na análise estatística dos parâmetros físico-químicos coletados durante pesquisa de campo, no qual o Prof. Dr. Marco Ianniruberto, Geofísico da UnB fez parte, e que generosamente compartilhou conosco.

5.3 ÁREA DE ESTUDO E INSTRUMENTAÇÃO

Os dados foram coletados em diferentes pontos do braço de cada rio. Na Fig. 5.3 podemos ver a localização da área de estudo onde as medições foram realizadas pela **Sonda Multiparâmetro YSI Exo 2**. A sonda Multiparâmetro é um instrumento à prova d'água que realiza medições de vários parâmetros da água como turbidez⁹, pH, condutividade elétrica, oxigênio dissolvido, temperatura entre outros. Em uma única imersão, ele mostra os resultados de todas as medições simultaneamente (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017). A relação estatística destas propriedades é determinada pelo coeficiente de correlação DC , dado pela equação (2.24) entre os dados amostrais como função da profundidade dos rios nos diferentes pontos de coleta.

Um outro equipamento utilizado é o **Perfilador de Corrente Doppler Acústico** (sigla em inglês de ADCP - *Acoustic Doppler Current Profile*), que é um perfilador de corrente hidroacústica que mede a velocidade das partículas na coluna de água a partir

⁹Turbidez é uma propriedade física dos fluidos que se traduz na redução da sua transparência devido à presença de materiais em suspensão que interferem a passagem da luz através do fluido.

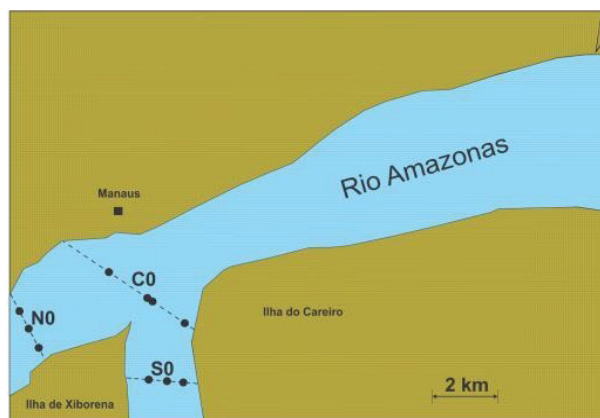


FIGURA 5.3 – Região do encontro das águas mostrando a localização dos pontos de coleta realizados pela sonda multiparâmetro. [Fonte: Referência (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017)]

de um princípio físico de propagação de ondas sonoras conhecido como efeito Doppler (NASCIMENTO, 2016; FILIZOLA, 2009). O ADCP utiliza a propagação, reflexão e espalhamento do sinal acústico através da coluna d'água, e estas ondas são de frequência, tais como 75, 150, 300, 600, 1200 e 2400 kHz, dependendo do modelo do equipamento. Este tipo de equipamento é capaz de obter perfis de velocidade atuais através da coluna de água ou em apenas uma faixa específica de profundidade.

O perfilador de corrente Doppler acústico é amplamente utilizado em medições de corrente em estuários, oceanos e também em rios. Este equipamento consiste em quatro transdutores acústicos, de onde a variação de frequência desses pulsos devido aos difusores presentes na água, causam a reflexão e espalhamento desses feixes, de onde parâmetros como velocidade de corrente, vazão e concentração de sedimentos podem ser determinados, já que está diretamente relacionado à velocidade do fluxo e ao tamanho das partículas suspensas na água (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017; TREVETHAN *et al.*, 2015). Conforme o aparelho vai emitindo pulsos acústicos e medindo as velocidades, também está realizando uma batimetria à medida que vai lendo o fundo.

Na Fig. 5.4 temos os perfis medidos pelo ADCP com os pontos de coleta indicados no Rio Solimões pela codificação S0R (Solimões à margem direita), S0C (Solimões ao centro) e S0L (Solimões à margem esquerda), no rio Negro por N0R, N0C e N0L e também na confluência indicada por C0R, C0CR, C0CL e C0L. No gráfico superior da Fig. 5.4 temos o perfil ADCP referente à seção transversal do Rio Solimões. Nesta figura podemos notar que em grande parte está preenchida pela cor verde, que é referente a uma intensidade de retorno acústico no intervalo de 90 e 96[dB]. Mais à direita, essa intensidade diminui, e a coloração vai tornando-se mais azulada e dessa forma exibindo uma intensidade acústica de retorno na faixa de 83 a 90[dB]. Estas altas intensidades do sinal acústico de retorno, é devido a grande quantidade de sedimentação suspensa nas águas do

Rio Solimões. Ainda podemos notar que nas máximas profundidades próximas ao solo, essa intensidade sobe para uma faixa de 96 e 102[dB], mostrando que a quantidade de sedimentos nesta transversal é bem maior ao fundo do rio. Podemos notar ainda que a profundidade do rio cresce da margem esquerda (~ 5 m) para a margem direita (~ 56 m) consideravelmente.

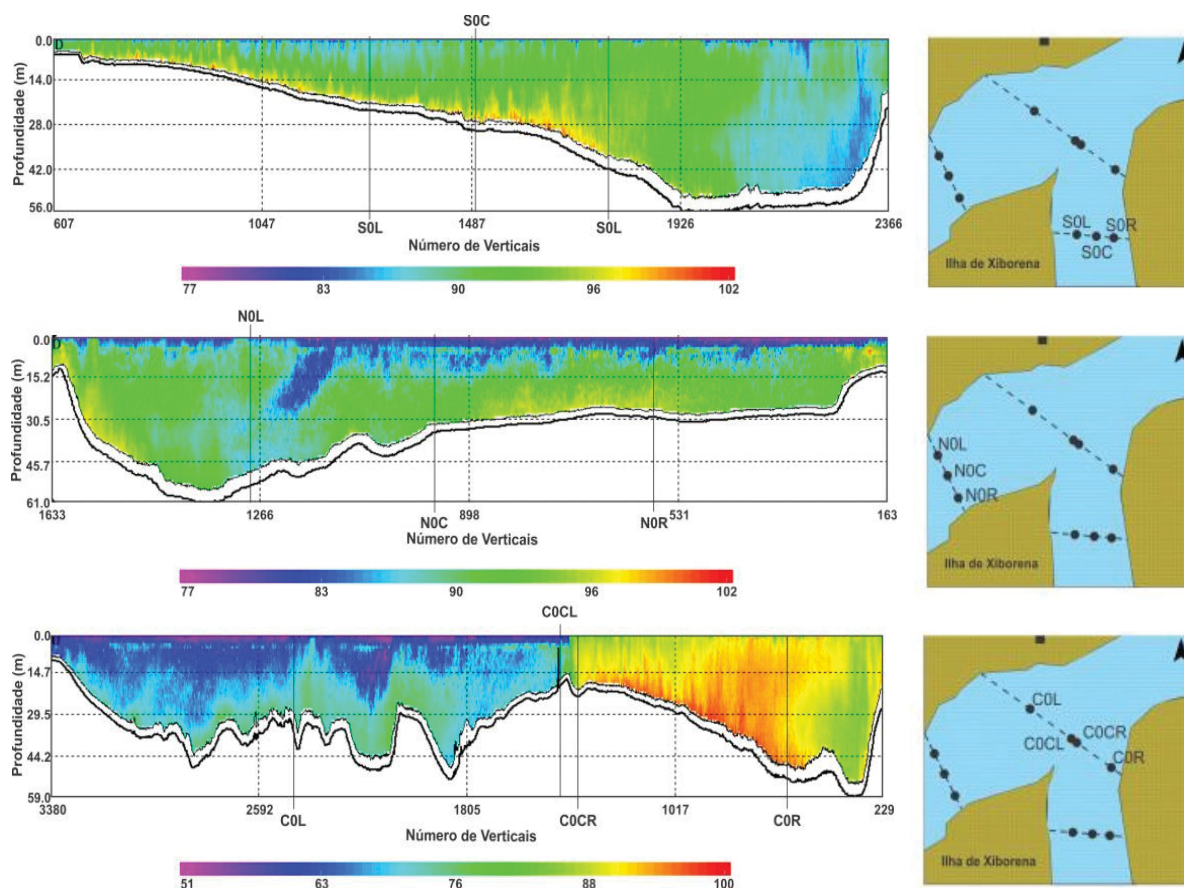


FIGURA 5.4 – Seções ADCP - Perfis de ADCP de Retorno Médio do Eco (retroespalhamento - na unidade [dB] (escala de cores)) com a localização dos pontos de sondagem feitos com o sonda multiparâmetro. [Fonte: Referência (TURQUETTI; IANNIRUBERTO, 2017)]

No gráfico intermediário da Fig. 5.4 temos o perfil ADCP pertencente à seção transversal do Rio Negro. Podemos notar que próximo à superfície em torno dos ~ 7 m de profundidade, a transversal possui uma coloração azul, indicando a intensidade acústica em torno de 83[dB], mostrando que para esta profundidade a quantidade de sedimentação na água é muito pequena. Mais ao fundo, podemos perceber o verde juntamente com o azul preenchendo uma grande parte da figura, de forma que o sinal acústico de retorno varia entre 83 e 96[dB]. Deste modo, é perceptível que a quantidade de sedimentação suspensa nas águas do Rio Negro é bem menor que a do Rio Solimões. No gráfico inferior da Fig. 5.4 está apresentado o perfil ADCP da seção da zona de confluência. Nesta figura podemos ver que a diferença no sinal acústico de retorno é bem maior na parte

da transversal do Rio Solimões, variando entre 88 e 100[dB] com cor amarela e laranja preenchendo a figura. Na parte da seção pertencente ao Rio Negro, a coloração é mais azulada, com sinal de retorno acústico variado entre 63 e 76[dB].

Na tabela 5.2 temos os valores correspondentes à profundidade máxima nos pontos verticais da sondagem de acordo com as codificações correspondentes, e também a localização de cada ponto através das coordenadas geográficas¹⁰.

TABELA 5.2 – Tabela com as codificações dos pontos verticais de sondagem, suas profundidades máximas e coordenadas geográficas de localização como latitude e longitude.

Codificação	Profundidade máxima de sondagem (m)	Latitude (S)	Longitude (W)
N0L	28,657	3° 8.658999'	59° 56.284337'
N0C	28,711	3° 8.888819'	59° 56.089219'
N0R	19,394	3° 9.117234'	59° 55.890613'
S0L	9,397	3° 9.414018'	59° 53.974707'
S0C	19,464	3° 9.408101'	59° 53.666975'
S0R	28,639	3° 9.404340'	59° 53.411289'
C0L	19,453	3° 7.709932'	59° 54.948618'
C0CL	9,409	3° 8.087631'	59° 54.205346'
C0CR	9,538	3° 8.109557'	59° 54.144525'
C0R	28,847	3° 8.409386'	59° 53.525086'

5.4 ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS DADOS COLETADOS

Nesta seção mostraremos os resultados da correlação de distância na análise estatística dos parâmetros físico-químicos das águas dos Rios Negro, Solimões e Amazonas. Primeiro aplicamos a correlação de distância na análise estatística dos dados coletados nos pontos do mesmo rio, e depois aplicamos entre os pontos cruzados como mostra a Fig. 5.5. Nesta figura temos as indicações dos pontos medidos pela sonda multiparâmetro e ainda a configuração de *DC* entre os parâmetros nestes pontos, indicado pelas linhas azuis. Para facilitar a análise de *DC* entre pontos de sondagem, usamos as combinações de cores de acordo com a Fig. 5.6. Onde teremos como base para os perfis medidos as cores primárias como vermelho, verde e azul. Para as combinações entre eles tem-se as cores secundárias como magenta, ciano e amarelo. Seguindo esse caminho, poderemos analisar as curvas de correlação entre os diferentes pontos de coleta. As curvas de *DC* serão representadas pelas cores resultantes da combinação de outras duas.

¹⁰O sistema de coordenadas geográficas é uma forma de representação cartográfica usada para a localização de qualquer ponto na superfície da Terra. Este sistema é composto por linhas imaginárias, chamadas de *Latitude* e *Longitude*.

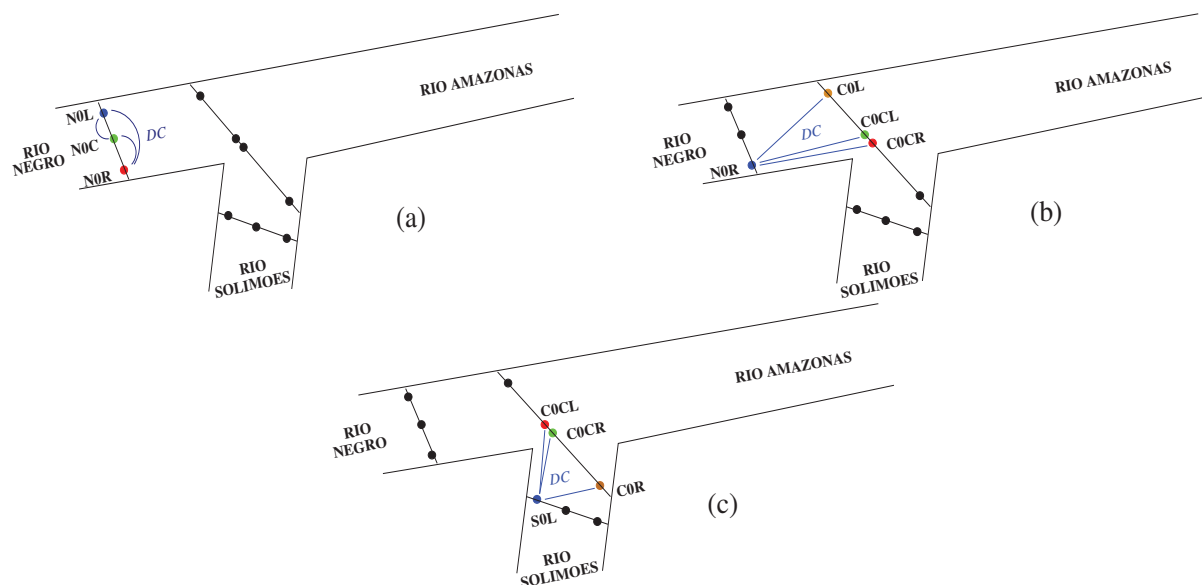


FIGURA 5.5 – Esboços dos diagramas esquemáticos mostrando as localizações dos pontos medidos pela sonda e a configuração de DC na análise estatística dos dados. Correlação de distância: (a) no Rio Negro, (c) entre o Rio Negro e confluência e (c) entre o Rio Solimões e confluência.



FIGURA 5.6 – Cores secundárias obtidas pelas combinações de cores primárias. As curvas dos coeficientes de correlação seguirão estas associações.

5.4.1 DC no Rio Negro

As profundidades máximas das medições realizadas pela sonda no Rio Negro são: $N0R = 19,394$ m, $N0C = 28,711$ m e $N0L = 28,657$ m como mostrado na tabela 5.2. Como os dados considerados para a análise são aqueles obtidos pela sonda no sentido de dentro para fora do rio, ou seja, do fundo para a superfície, então consideramos profundidades a partir de 1,0 m da superfície para a obtenção das curvas dos coeficientes de correlação, descartando os dados coletados para profundidades menores que esta, pois a sonda para estas distâncias já se encontra em processo de retirada das águas, o que pode alterar os valores reais dos parâmetros. Na Fig. 5.5(a) temos o esquema da configuração de DC na análise dos dados coletados no Rio Negro.

Na Fig. 5.7 temos o perfil da temperatura em função da profundidade e o perfil do oxigênio dissolvido, com suas respectivas correlações. A temperatura é um fator que

influencia praticamente todos os processos físicos, químicos e biológicos que ocorrem na água. Dessa forma, na Fig. 5.7(a) temos perfil da temperatura em função da profundidade nos diferentes pontos, sendo NOR representado na cor vermelha, NOC na cor verde e NOL na cor azul. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade aferidos a partir dos quais a correlação de distância na análise dos dados é aplicada. Podemos perceber que a temperatura das águas do Rio Negro está em torno de 29°C. Por uma questão de padronização, a unidade usual de temperatura para fins de monitoramento hidrológico é o grau Celsius - °C. Na Fig. 5.7(b) está mostrado o coeficiente DC da temperatura entre os três pontos nas diferentes combinações. Inicialmente exibem diferentes valores de correlação, e à medida que a profundidade aumenta, a correlação converge para um mesmo valor em torno dos 19 m com $DC \sim 0,8$, ou seja, DC é o mesmo na profundidade

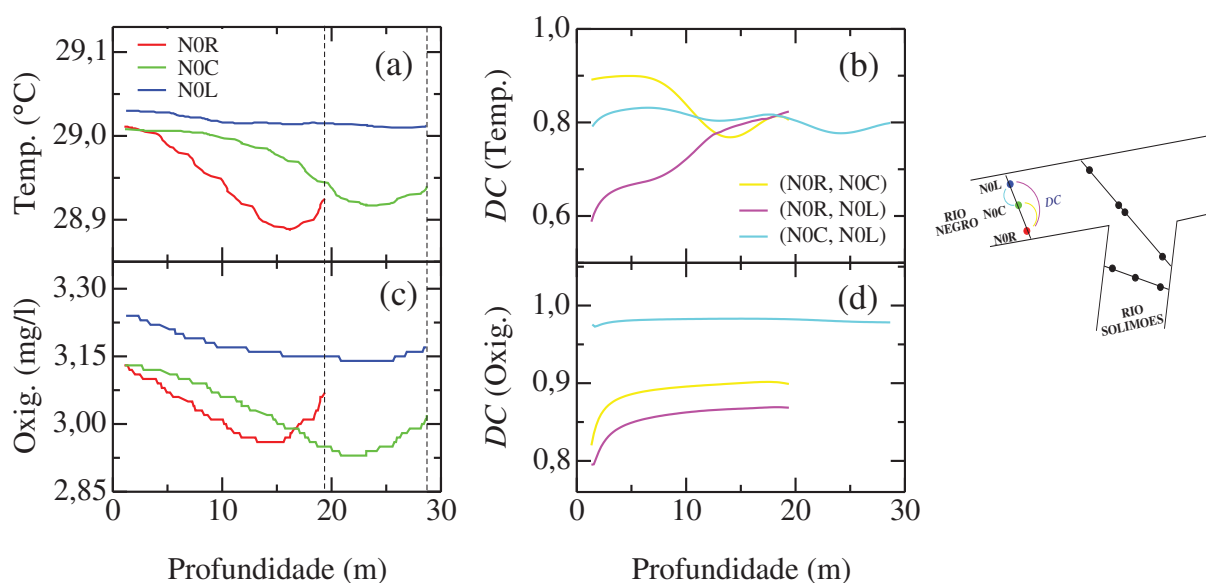


FIGURA 5.7 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Temperatura e (c) Oxigênio dissolvido com suas respectivas correlações, (b) $DC(\text{Temp.})$ e (d) $DC(\text{Oxig.})$ em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para DC .

do Rio Negro, embora as temperaturas sejam diferentes.

A Fig. 5.7(c) exibe o perfil do oxigênio em relação a profundidade nos três pontos aferidos pela sonda. Podemos ver no gráfico que os valores do oxigênio estão no intervalo de 2,9 a 3,2 mg/l. À medida que a profundidade aumenta, a concentração de oxigênio sofre uma minúscula queda em torno dos 15 a 20 m e depois cresce. Na Fig. 5.7(d) podemos notar que as curvas em amarelo (NOR, NOC) e magenta (NOR, NOL) são similares, apresentando uma pequena diferença entre elas, e mostrando uma boa correlação entre os pontos em relação ao oxigênio até 20 m de profundidade. No caso da curva em ciano (NOC, NOL), podemos perceber que a correlação entre estes pontos é maior que as outras duas, com $DC \sim 0,99$. Se verificarmos na Fig. 5.7(c), podemos ver que as curvas NOC

(verde) e N0L (azul) são similares. Note que, DC é maior que no caso da temperatura e, novamente, a tendência é que nas profundezas eles estejam mais correlacionados

A condutividade elétrica mede a capacidade que a água tem de transmitir corrente elétrica e está diretamente relacionada à concentração de espécies iônicas dissolvidas, principalmente inorgânicas. A unidade de medida relacionada a este parâmetro físico é o $\mu\text{S}/\text{cm}$, onde S é a unidade Siemens do Sistema Internacional de Unidades (SI). Na Fig. 5.8(a) está mostrado o perfil da condutividade elétrica em função da profundidade. Os valores da condutividade são baixos, o que é devido a baixa concentração de sedimentos em suspensão no Rio Negro, variando entre 13 e 20 $\mu\text{S}/\text{cm}$. Podemos ver que a curva N0R (vermelho) cresce à medida que aumenta a profundidade, e em torno de 15 m, sofre uma redução. Para N0C (verde), notamos uma similaridade com N0R, onde cresce até

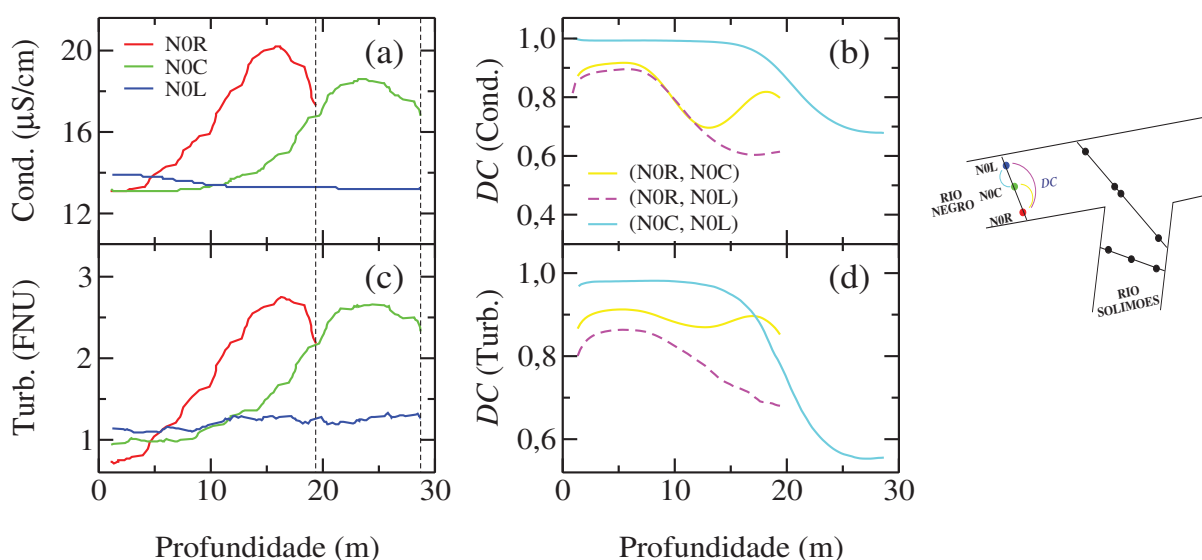


FIGURA 5.8 – Perfis dos parâmetros físico-químicos com (a) Condutividade elétrica e (c) Turbidez com suas respectivas correlações, (b) $DC(\text{Cond.})$ e (d) $DC(\text{Turb.})$ em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para DC .

25 m de profundidade, e depois decresce. A curva N0L (azul) é quase constante em torno de 13 $\mu\text{S}/\text{cm}$. Na Fig. 5.8(b) nota-se que a curva (N0R, N0C) (amarelo) e a curva (N0R, N0L) (magenta - tracejada) exibem uma similaridade até os 12 m de profundidade aproximadamente, e depois a curva amarela cresce e magenta decai. Na curva em ciano, DC se mantém em torno de $\sim 0,99$ até 15 m, e a partir daí decai suavemente.

Na Fig. 5.8(c) temos o perfil da turbidez em função da profundidade. Este parâmetro está relacionado à quantidade de sedimentação na água. A turbidez das águas é causada pela dispersão dos raios luminosos devido à presença de partículas em suspensão. A presença de sólidos, modifica as condições de iluminação das águas e o alcance da radiação luminosa. Na Fig. 5.8(c) podemos notar que as curvas são similares à con-

ductividade elétrica. A diferença acontece apenas na escala de medida, onde varia entre 0,5 a 3 FNU. A unidade de turbidez é o FNU (Unidade Nefelométricas de Formazina) de acordo com a Norma (ISO7027, 2016). Assim, a Fig. 5.8(d) exibe um comportamento aproximado ao da Fig. 5.8(b), diferenciando apenas na curva (N0C, N0L) (ciano), onde sofre um decaimento mais acentuado.

5.4.2 DC entre o Rio Negro e Zona de Confluência

Nesta subseção vamos mostrar a correlação de distância entre pontos de coleta do Rio Negro e Zona de Confluência (Rio Amazonas). Com isso, apresentamos outra combinação de cores, a cor marrom como sendo o resultado da mistura entre as cores azul e laranja (ver Fig. 5.9). Pois, nas figuras relativas aos perfis dos parâmetros, outra curva será adicionada, em razão de que agora usaremos a correlação de distância entre pontos cruzados (ver Fig. 5.5(b)).



FIGURA 5.9 – Cor marrom obtida pela combinação ds cores azul e laranja.

As profundidades máximas das medições realizadas pela sonda são: C0CR = 9,538 m, C0CL = 9,409 m e C0L = 19,453 m (ver tabela 5.2). Na Fig. 5.10(a) mostra-se o perfil da temperatura em função da profundidade. Temos a curva em azul (N0R) pertencente ao Rio Negro e as curvas C0CR (vermelho), C0CL (verde) e C0L (laranja - tracejada) relacionadas à confluência. Notamos que as curvas N0R, C0CL e C0L variam minimamente entre 28 e 29°C, devido serem pontos pertencentes às águas do Rio Negro. Desta maneira, somente a curva C0CR exibe uma medida de temperatura ligeiramente maior que 28°C, pois é um ponto localizado nas águas do Solimões. Na Fig. 5.10(b) percebe-se que as curvas (N0R, C0CR) (magenta) e (N0R, C0CL) (ciano) exibem alta correlação. A curva (N0R, C0L) (marrom) mostra uma baixa correlação até 10 m de profundidade, que é devido ao fato de que o volume de água que transcorre por C0L, são as águas que passaram pelas vizinhanças de N0L. Se observarmos na Fig. 5.7(b), percebemos que a curva (N0R, N0L) confirma as baixas medidas para esta profundidade. Se verificarmos as curvas N0R e C0L da Fig. 5.10(a), aparentemente deveríamos afirmar que estes pontos estão correlacionados, pois exibem perfil similar. No entanto, *DC* mostra que apesar de estarem localizados sobre as águas do mesmo rio, estão totalmente descorrelacionados à baixas profundidades.

Na Fig. 5.10(c) temos o oxigênio em relação a profundidade. Notamos que as curvas N0R (azul), C0CL (verde) e C0L (laranja) possuem valores ligeiramente maiores que C0CR (vermelho), variando entre 2,9 e 3,3 mg/l. Essa diferença é devido C0CR está

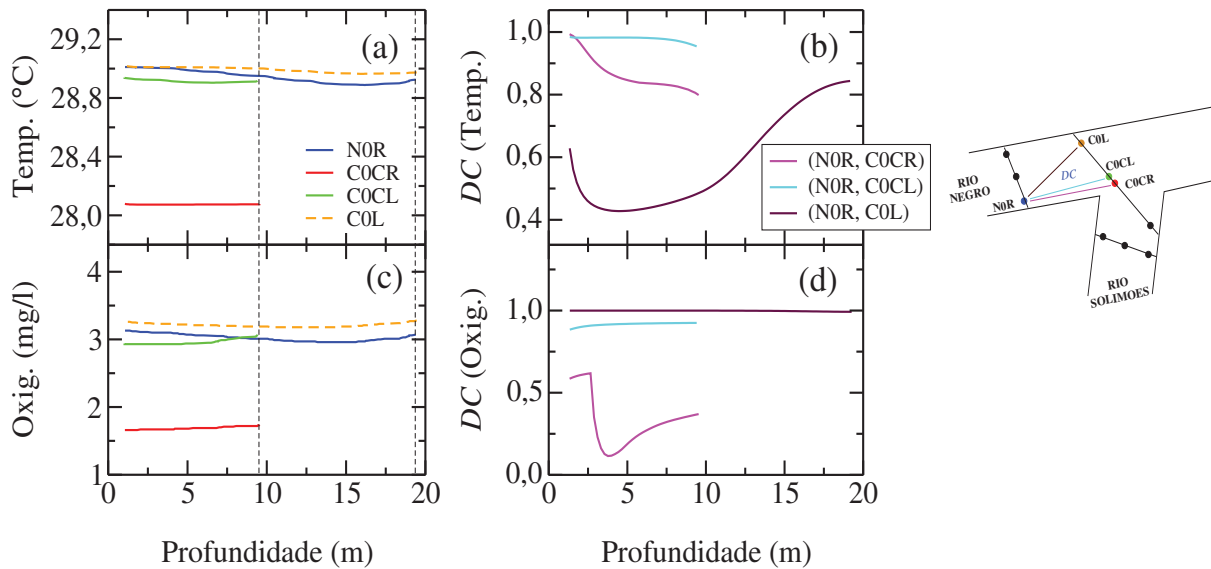


FIGURA 5.10 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Temperatura e (c) Oxigênio com suas respectivas correlações, (b) $DC(\text{Temp.})$ e (d) $DC(\text{Oxig.})$ em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para DC .

localizado sobre as águas do Solimões. A medida do oxigênio de C0CR está em torno de 1,7 mg/l. Observamos na Fig. 5.10(d) que, como já esperado, a correlação entre NOR e C0CR (curva magenta) é baixa, devido estarem em localidades de diferentes rios, pois em relação ao oxigênio mantiveram suas características distintas. A curva (NOR, C0CL) (ciano) exibe uma alta medida de correlação com $DC \sim 0,9$ e a curva (NOR, C0L) (marrom) com $DC \sim 1,0$.

A Fig. 5.11 exibe os perfis da condutividade elétrica e turbidez. Na Fig. 5.11(a) nota-se que a medida da condutividade elétrica em C0CR difere dos outros pontos, estando constante em $80 \mu\text{S}/\text{cm}$. Na Fig. 5.11(b) não temos a curva (NOR, C0CR) (magenta), pois todos os dados medidos em C0CR são iguais. Pois, da definição mostrada na seção 2.3.3 do capítulo 2, foi mostrado que, se todos os elementos de uma amostra \mathbf{X} ou \mathbf{Y} forem iguais, então tem-se $\sigma_N(\mathbf{X})\sigma_N(\mathbf{Y}) = 0$. Em relação à curva (NOR, C0CL) e a curva (NOR, C0L) nota-se que após 7,5 m de profundidade sofrem um decaimento de forma similar.

Na Fig. 5.11(c) temos a turbidez em função da profundidade. As curvas NOR, C0CL e C0L possuem baixas medidas de turbidez, variando entre 0,5 e 3,5 FNU, e podem ser vistas no gráfico interno da Fig. 5.11. A medida de C0CR oscila entre 30 e 50 FNU. Verificando a correlação de distância entre eles, percebe-se na Fig. 5.11(d) que a curva (NOR, C0CR) possui baixos valores, devido a grande oscilação dos dados em C0CR. Já as curvas (NOR, C0CL) e (NOR, C0L), possuem alta correlação com $DC \sim 1,0$ até 10 m, e logo após (NOR, C0L) decai.

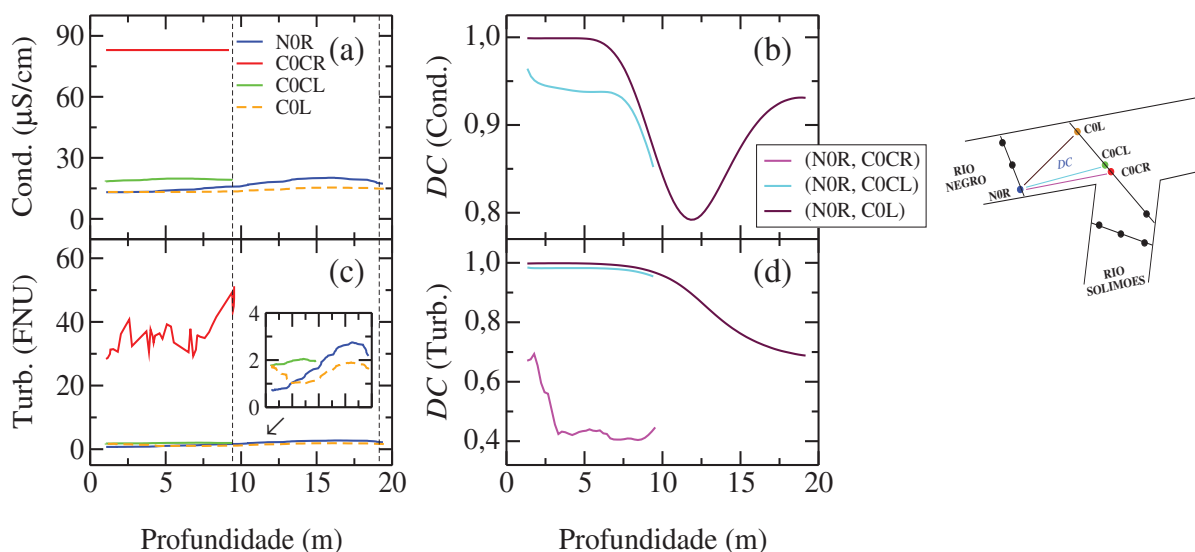


FIGURA 5.11 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Condutividade elétrica e (c) Turbidez com suas respectivas correlações, (b) $DC(Cond.)$ e (d) $DC(Turb.)$ em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para DC .

5.4.3 DC entre o Rio Solimões e Zona de Confluência

Por fim, fizemos a correlação cruzada entre os parâmetros do Rio Solimões e Zona de Confluência (ver Fig. 5.5(c)). Nesta subseção retrataremos apenas o caso da condutividade elétrica e turbidez. Representamos a vertical S0L pela cor azul, C0CR pela cor verde, C0CL em vermelho e C0R em laranja. Em relação à condutividade elétrica exibida na Fig. 5.12(a), notamos as medidas de S0L, C0CR e C0R variam entre 76 e 80 $\mu\text{S}/\text{cm}$, valores bem acima de C0CL que está em torno de 17 $\mu\text{S}/\text{cm}$. Os dados coletados de C0CR são todos iguais, o que nos impossibilitou na verificação de DC entre S0L e C0CR na Fig. 5.12(b). A curva (S0L,C0CL) (magenta) possui medida de correlação em torno de $DC \sim 0,94$. Apesar de serem pontos aferidos de rios distintos, a correlação de distância identificar a invariância entre os dados de C0CL. Sobre a curva (S0L,C0R) (marrom), a correlação é máxima, mostrando que tanto a margem esquerda quanto a margem direita, estão altamente correlacionadas.

Referente à turbidez, também notamos que na curva C0CL, as medidas estão muito abaixo das outras curvas, como mostrado na Fig. 5.12(c). Em C0CL a turbidez está próxima de zero, praticamente invariante com a profundidade. As medidas em S0L, C0CR e C0R variam entre 15 e 90 FNU. Notamos que para C0CR e C0R, a oscilação nas medidas é alta. Na Fig. 5.12(d) podemos ver que (S0L, C0CL) exibe uma correlação moderada em torno de $DC \sim 0,6$. Para as curvas (S0L, C0CR) e (S0L, C0R), notamos que são similares, exibindo uma boa correlação para baixas profundidades, e um decaimento com o aumento da profundidade. Isso esclarece que mesmo sendo pontos pertencentes as

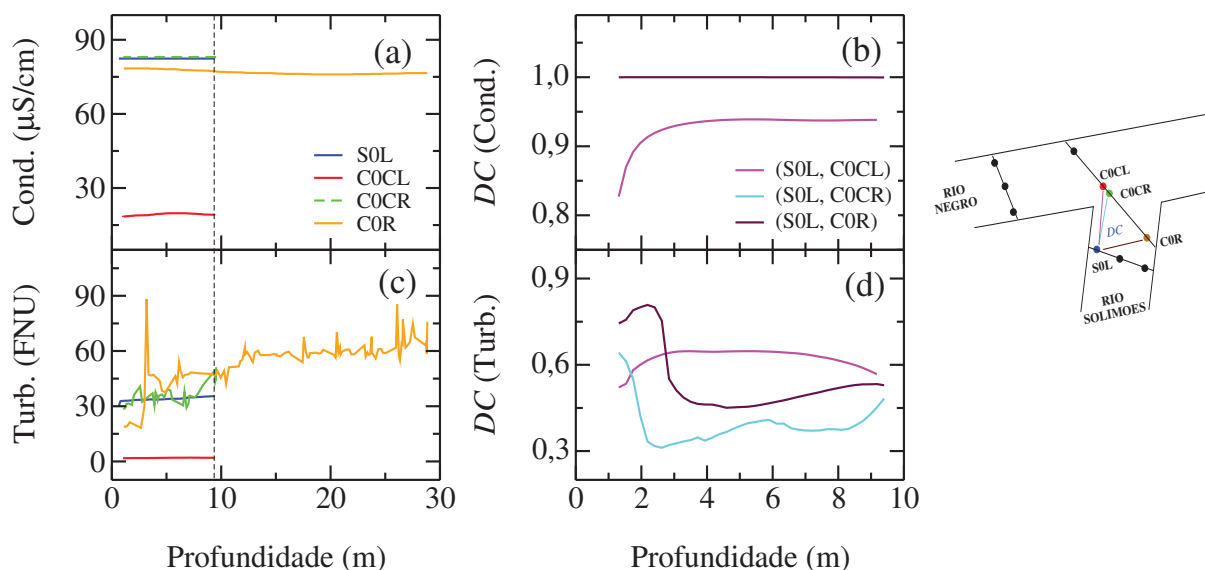


FIGURA 5.12 – Perfis dos parâmetros físico-químicos como (a) Condutividade elétrica e (c) Turbidez com suas respectivas correlações, (b) $DC(Cond.)$ e (d) $DC(Turb.)$ em função da profundidade. As linhas tracejadas verticais indicam os limites de profundidade para DC .

águas do mesmo rio, a oscilação dos valores medidos são muito altas.

5.5 CONCLUSÕES

Nesta última parte da tese, verificamos a aplicação da correlação de distância na análise estatística de dados correspondentes aos parâmetros físico-químicos de um sistema dinâmico real, o *encontro das águas* dos Rios Negro e Solimões. Vimos que as águas dos dois rios são provenientes de diferentes canais, e quando se encontram na região de confluência, não acontece o processo de mistura entre as águas de forma imediata. As águas fluem lado a lado, de forma que esta separação pode ser vista até 100 km rio abaixo após sua junção. Assim, a partir dos dados coletados localmente em diferentes pontos dos rios pela Sonda Multiparâmetro, referentes aos parâmetros físico-químicos como a temperatura, condutividade elétrica, turbidez e oxigênio, utilizamos a correlação de distância na análise estatística destes parâmetros entre diferentes pontos. Obviamente, por se tratar de um estudo que está em andamento, muito ainda precisa ser estudado. Medidas de correlação entre outros parâmetros são necessárias para o estudo de propriedades físico-químicas das águas dessa região próxima da cidade de Manaus. De maneira que tenhamos um melhor entendimento das relações entre estes parâmetros na região de confluência.

Devido a propriedade de invariância de escala da correlação de distância, algumas combinações entre pontos de rios distintos mostraram uma alta medida de correlação, de forma que em relação à certos parâmetros, as águas em diferentes pontos de coleta

se mostraram correlacionados. Mesmo que uma dessas regiões não tenha influência na medida de outra região. De uma forma geral, acreditamos que a correlação de distância possa ser uma ferramenta alternativa na análise de dados de sistemas dinâmicos reais. O seguimento desta pesquisa se dá pelo fato da simples pergunta: A partir da análise estatística dos dados via correlação de distância, é possível obtermos alguma informação a respeito da influência desses parâmetros na separação das águas dos Rios Negro e Solimões na região de confluência? Esta questão ainda está sob investigação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A *correlação de distância* é um modelo proposto por Székely *et al.* (2007) para atestar independência conjunta de vetores aleatórios com dimensões arbitrárias em estatística multivariada, e sua principal propriedade é que será zero se e somente se as variáveis aleatórias forem independentes. A estatística multivariada estuda o tratamento de diversas variáveis simultaneamente, mesmo quando não se conhece o modelo teórico das relações entre elas. A correlação de distância é uma das técnicas que pode ser aplicada quando há uma grande quantidade de dados, na intenção de medir estruturas de dependências intrincadas entre os dados. Em quase todos os campos de aplicação da estatística, encontra-se frequentemente um problema que é preciso caracterizar por um valor numérico a força de dependência entre as variáveis.

Nesta tese, aplicamos a correlação de distância, na descrição de importantes propriedades complexas em sistemas dinâmicos. Vimos que a correlação de distância é um modelo estatístico capaz de medir dependências entre vetores aleatórios. Como foi descrito no capítulo 1, a correlação de distância já vem sendo aplicada em muitas áreas da ciência moderna, como na própria estatística, na física, na astrofísica, na medicina, entre outros. Como verificação do modelo em sistemas dinâmicos não lineares, estudamos o método aplicado ao mapa quadrático unidimensional que é um sistema de tempo discreto, com o propósito de investigarmos o comportamento qualitativo do tempo de escape de órbitas dos atratores, devido ao ruído gaussiano. Surpreendentemente a correlação de distância descreve este comportamento. Além disso, se mostra efetivo na descrição do processo de mistura entre órbitas caóticas no mapa quadrático. Fato confirmado por comparação com a intensidade de segregação que é um modelo de caracterização de mistura, de onde observamos que em ambos os modelos, decaem com a lei de potência inversa.

Verificamos também a aplicação da correlação de distância na descrição de fenômenos não lineares em um sistema de tempo contínuo, a rede de osciladores de fase acoplados (SAKAGUCHI; KURAMOTO, 1986), com a intenção de diagnosticarmos a simultaneidade da existência de estados coerentes e incoerentes (estados quimera) entre os osciladores da rede. Vimos que a existência dos estados quimera está diretamente relacionado à quantidade de osciladores na rede, ao tipo de acoplamento entre eles e também relacionado à um parâmetro de atraso de fase bem ajustado. Nesse contexto, a correlação de distância mostrou-se hábil com a caracterização dos estados quimera através dos di-

ferentes níveis de intensidades de correlação, nos possibilitando assim, distinguirmos tais comportamentos simultaneamente na rede.

Finalmente investigamos a aplicação da correlação de distância na análise estatística de dados referentes aos parâmetros físico-químicos das águas dos Rios Negro e Solimões. Analisamos dados relacionados a temperatura, condutividade elétrica, turbidez e oxigênio dissolvido. Através dos resultados, observamos que na grande maioria dos casos, a correlação de distância foi capaz de distinguir, as águas do Rio Negro das águas do Solimões através dos valores de seus coeficientes. Portanto, de modo geral, acreditamos que a correlação de distância pode ser um modelo estatístico apropriado para a descrição de comportamentos complexos em sistemas dinâmicos, tanto teóricos quanto reais. Claramente faz-se necessário o seu uso em outros sistemas, para que possamos ter uma visão mais ampliada de sua aplicabilidade.

6.1 TRABALHOS EM ANDAMENTO

Existem alguns pontos relacionados as investigações apresentadas neste trabalho que ainda estão sendo analisados. A seguir serão listados os principais problemas que ainda estão em aberto:

- ◇ Estamos estudando a correlação de distância na análise de séries temporais utilizando o mapa quadrático unidimensional como gerador destas séries, com o propósito de podermos associar os ELs de um sistema dinâmico, que a princípio poderá ser teórico ou experimental com os coeficientes DC , a fim de obtermos uma nova forma de caracterização de comportamentos distintos em um sistema dinâmico.
- ◇ Em relação a uma rede de osciladores acoplados, se verificado a questão acima, poderemos propor uma forma de associar cada EL à cada oscilador distinto da rede, através dos coeficientes de correlação de distância. Desta maneira, conseguiremos identificar os ELs específicos de cada oscilador.
- ◇ Estamos também analisando novos dados referentes as seções ADCP dos Rios Negro e Solimões fornecidos pelo prof. Dr Marco Ianniruberto, com a ideia de tentarmos relacionar as curvas de DC com as seções ADCP, para uma verificação mais consistente destes resultados e também para validar de forma substancial o método.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. Chimera states for coupled oscillators. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 93, p. 174102, 2004.
- ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 16, p. 21–37, 2006.
- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. [S.l.]: Springer, 1996.
- ARDURA, A.; GOMES, V.; LINDE, A. R.; MOREIRA, J. C.; HORREO, J. L.; VAZQUEZ, E. G. The meeting of waters, a possible shelter of evolutionary significant units for amazonian fish. **Conservation Genetics**, v. 14, p. 1185–1192, 2013.
- AREF, H.; BLAKE, J. R.; BUDISIC, M.; CARDOSO, S. S. S.; CARTWRIGHT, J. H. E.; CLERCX, H. J. H.; EL'OMARI, K.; FEUDEL, U.; GOLESTANIAN, R.; GOUILLART, E.; HEIJST, G. F.; KRASNOPOLSKAYA, T. S.; LE'GUER, Y.; MACKAY, R. S.; MELESHKO, V. V.; METCALFE, G.; MEZIC, I.; MOURA, A. P. S.; PIRO, O.; SPEETJENS, M. F. M.; STURMAN, R.; THIFFEAULT, J. L.; TUVAL, I. Frontiers of chaotic advection. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 89, p. 025007, 2017.
- BANERJEE, A.; SIKDER, D. Transient chaos generates small chimeras. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 98, p. 032220, 2018.
- BARROW-GREEN, J. **Poincaré and the Three Body Problem, History of Mathematics**. [S.l.]: American Mathematical Society; London Mathematical Society, 1997.
- BATISTA, C. A. S.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L.; BATISTA, A. M. Delayed feedback control of bursting synchronization in a scale-free neuronal network. **Neural Networks**, v. 23, p. 114–124, 2010.
- BEALE, P. Noise-induced escape from attractors in one-dimensional maps. **Phys. Rev. A**, v. 40, p. 3998–4003, 1989.
- BEAUREGARD, O. C. D.; MOHAMMAD-DJAFARI, A.; DEMOMENT, G. **Maximum Entropy and Bayesian Methods**. 1. ed. [S.l.]: Springer Netherlands, 1993. (Fundamental Theories of Physics 53).
- BEIMS, M. W.; SCHLESINGER, M.; MANCHEIN, C.; CELESTINO, A.; PERNICE, A.; STRUNZ, W. T. Quantum-classical transition and quantum activation of ratchet currents in the parameter space. **Phys. Rev. E**, v. 91, p. 052908, 2015.
- BELUCO, A.; SOUZA, P. K. Energy at the junction of the rivers negro and solimões, contributors of the amazon river, in the brazilian amazon. **International Scholarly Research Notices**, v. 2014, p. 1–10, 2014.

BERA, B. K.; GHOSH, D.; LAKSHMANAN, M. Chimera states in bursting neurons. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 93, p. 012205, 2016.

BEST, J. Flow dynamics at river channel confluences: implications for sediment transport and bed morphology. **Society of Economic Paleontologists and Mineralogists**, v. 39, p. 27–35, 1987.

BHATTACHARJEE, A. Distance correlation coefficient: An application with bayesian approach in clinical data analysis. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**, v. 13, n. 1, p. 354–366, 2014.

BLAHA, K.; BURRUS, R. J.; OROZCO-MORA, J. L.; RUIZ-BELTRÁN, E.; SIDDIQUE, A. B.; HATAMIPOUR, V. D.; SORRENTINO, F. Symmetry effects on naturally arising chimera states in mechanical oscillator networks. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 26, n. 11, p. 116307, 2016.

BORGES, E. P.; TIRNAKLI, U. Mixing and relaxation dynamics of the hénon map at the edge of chaos. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 193, n. 1, p. 148 – 152, 2004.

CENCINI, M.; CECONNI, F.; VULPIANI, A. **Chaos from Simple Models to Complex System**. 1nd. ed. [S.l.]: World Scientific, 2010.

DANCKWERTS, P. V. The definition and measurement of some characteristics of mixtures. **Applied Scientific Research, Section A**, v. 3, n. 4, p. 279–296, 1952.

DEVANEY, R. **An introduction to chaotic dynamical systems**. 2nd. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989.

DUNN, P. F. **Measurement, Data Analysis, and Sensor**. 2nd. ed. [S.l.]: CRC Press, 2010.

DURRETT, R. **Probability Theory: Theory and Examples (2ed, Duxbury 1996)**. 2. ed. [S.l.]: Duxbury Press, 1995.

FILIZOLA, N. Study of the variability in suspended sediments discharge at manacapuru, amazon river, brazil. **Latin American Journal of Sedimentology and Basin Analysis**, v. 16, p. 93–99, 2009.

FRANZINELLI, E. Características morfológicas da confluência dos rios negro e solimões. **Revista Brasileira de Geociências**, v. 41, p. 587–596, 2011.

GAMBUZZA, L. V.; BUSCARINO, A.; CHESSARI, S.; FORTUNA, L.; MEUCCI, R.; FRASCA, M. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 90, p. 032905, 2014.

GEERLIGS, L.; CAM-CAN; HENSON, R. N. Functional connectivity and structural covariance between regions of interest can be measured more accurately using multivariate distance correlation. **NeuroImage**, v. 135, p. 16 – 31, 2016.

GILMORE, R.; LEFRANC, M. **The topology of chaos**. 2nd. ed. [S.l.]: WILEY-VCH Verlag, 2011.

- HAGERSTROM, A. M.; MURPHY, T. E.; ROY, T.; HÖVEL, P.; OMELCHENKO, I.; SCHÖLL, E. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. **Nature Physics**, v. 8, p. 658–661, 2012.
- HAKEN, H. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. **Phys. Lett.**, v. 53A, p. 77, 1975.
- HAYDN, N.; LUNEDI, E.; ROSSI, L.; TURCHETTI, G.; VAIENTI, S. Multiple returns for some regular and mixing maps. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 15, n. 3, p. 033109, 2005.
- HÉNON, M. A two-dimensional map with a strange attractor. **Comm. Math. Phys.**, v. 50, p. 69–77, 1976.
- HOPF, F. A.; KAPLAN, D. L.; GIBBS, H. M.; SHOEMAKER, R. L. Bifurcations to chaos in optical bistability. **Phys. Rev.**, v. 25A, p. 2172, 1982.
- ISO7027. **Water quality - Determination of turbidity**. 2016. Disponível em: <<https://www.iso.org/standard/62801.html>>.
- KAUTZ, R. L. Thermally induced escape: The principle of minimum available noise energy. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 38, p. 2066–2080, 1988.
- KENDALL, M. G. A new measure of rank correlation. **Biometrika**, v. 30, p. 81–93, 1938.
- KENTWORTHY, S.; RHOADS, B. Hydrologic control of spatial patterns of suspended sediment concentration at a stream confluence. **Journal of Hydrology**, v. 168, p. 251–263, 1995.
- KONG, J.; WANG, S.; WAHBA, G. Using distance covariance for improved variable selection with application to learning genetic risk models. **Statistics in Medicine**, v. 34, n. 10, p. 1708–1720, 2015.
- KRASNOPOLSKAYA, T.; MELESHKO, V. **Analysis and Control of Mixing with an Application**. 1st. ed. [S.l.]: Springer, 2009.
- KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. **Nonlinear Phenomena in Complex Systems**, v. 5, p. 380–385, 2002.
- LAYEK, G. C. **An Introduction to Dynamical Systems and Chaos**. 1st. ed. [S.l.]: Springer, 2015.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130–141, 1963.
- LORENZ, E. N. **The Essence of Chaos**. [S.l.]: CRC, 2005.
- MARK, R. T.; NKOMO, S.; SHOWALTER, K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. **Nature Physics**, v. 8, p. 662–665, 2012.

- MARTÍNEZ-GÓMEZ, E.; RICHARDS, M. T.; RICHARDS, D. S. P. Distance correlation methods for discovering associations in large astrophysical databases. **The Astrophysical Journal**, v. 781, p. 39, 2014.
- MAY, R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, p. 459–467, 1976.
- MOSLEY, P. An experimental study of channel confluences. **Journal of Geology**, v. 84, p. 535–562, 1976.
- NASCIMENTO, A. Z. A. **Características Hidro-Geomorfológicas do baixo curso dos Rios Solimões e Negro, e sua confluência, Amazônia, Brasil**. [S.l.]: Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, 2016.
- OLMI, S.; MARTENS, E. A.; THUTUPALLI, S.; TORCINI, A. Intermittent chaotic chimeras for coupled rotators. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 92, p. 030901, 2015.
- OMELCHENKO, I.; MAISTRENKO, Y.; HÖVEL, P.; SCHÖLL, E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 106, p. 234102, 2011.
- OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993.
- PEARSON, K. Note on regression and inheritance in the case of two parents. **Proceedings of the Royal Society of London**, The Royal Society, v. 58, p. 240–242, 1895.
- PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta Math.**, v. 13, p. 1–271, 1890.
- PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. **Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing**. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. (Fortran Numerical Recipes 1).
- RATTENBORG, N. C.; AMLANER, C. J.; LIMA, S. L. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep. **Neuroscience and Biobehavioral Reviews**, v. 24, p. 817–842, 2000.
- RÉNYI, A. On measures of dependence. **Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica**, v. 10, p. 441–451, 1959.
- RESHEF, D. N.; RESHEF, Y. A.; FINUCANE, H. K.; GROSSMAN, S. R.; MCVEAN, G.; TURNBAUGH, P. J.; LANDER, E. S.; MITZENMACHER, M.; SABETI, P. C. Detecting novel associations in large data sets. **Science**, v. 334, p. 1518, 2011.
- RHOADS, B.; KENTWORTHY, S. Time-averaged flow structure in the central region of a stream confluence. **Surface Processes and Landforms**, v. 23, p. 171–191, 1998.
- RHOADS, B.; SUKHODOLOV, A. Lateral momentum flux and the spatial evolution of flow within a confluence mixing interface. **Water Resources Research**, v. 22, 2008.

RUELLE, D.; TAKENS, F. On the nature of turbulence. **Commun. Math. Phys.**, v. 20, p. 167–192, 1971.

SAKAGUCHI, H.; KURAMOTO, Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. **Progress of Theoretical Physics**, v. 76, p. 576–581, 1986.

SANTOS, M.; SZEZECH, J.; BORGES, F.; IAROSZ, K.; CALDAS, I.; BATISTA, A.; VIANA, R.; KURTHS, J. Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 101, p. 86 – 91, 2017.

SANTOS, M. S. **Recorrência espacial aplicada ao estudo de estados quimera**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2018.

SANTOS, M. S.; SZEZECH, J. D.; BATISTA, A. M.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Recurrence quantification analysis of chimera states. **Phys. Lett. A**, v. 379, p. 2188–2192, 2015.

SIMOYI, R. H.; WOLF, A.; SWINNEY, H. L. One dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction. **Phys. Rev. Lett.**, v. 49, p. 245, 1982.

SOLARES, J. R. A.; WEI, H.-L. Nonlinear model structure detection and parameter estimation using a novel bagging method based on distance correlation metric. **Nonlinear Dynamics**, v. 82, p. 201–215, 2015.

SPEARMAN, C. The proof and measurement of association between two things. **The American Journal of Psychology**, University of Illinois Press, v. 15, p. 72–101, 1904.

STURMAN, R.; SPRINGHAM, J. Rate of chaotic mixing and boundary behavior. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 87, p. 012906, 2013.

SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L. Brownian distance covariance. **Ann. Appl. Stat.**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 3, p. 1236–1265, 2009.

SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L. On the uniqueness of distance covariance. **Statistics & Probability Letters**, v. 82, p. 2278–2282, 2012.

SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L. The distance correlation t-test of independence in high dimension. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 117, p. 193–213, 2013.

SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L. Partial distance correlation with methods for dissimilarities. **Annals of Statistics**, v. 42, p. 2382–2412, 2014.

SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L. The energy of data. **Ann. Rev. Stat. App.**, v. 4, p. 447–479, 2017.

SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L.; BAKIROV, N. K. Measuring and testing dependence by correlation of distances. **Ann. Statist.**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 35, p. 2769–2794, 2007.

TREVETHAN, M.; MARTINELLI, A.; OLIVEIRA, M.; IANNIRUBERTO, M.; C., G. Fluid mechanics, sediment transport and mixing about the confluence pf negro and solimões rivers, manaus, brazil. **IIAHR World Congress-Netherlands**, 2015.

TURQUETTI, G. N.; IANNIRUBERTO, M. Análise comparativa das características acústicas e físico-químicas das águas dos rios negro e solimões no encontro das águas. **Fifteenth International Congress of the Brazilian Geophysical Society-SBGf**, 2017.

WERSINGER, J. M.; FINN, J. M.; OTT, E.; LAVAL, G.; GRESILLON, D. **Intrinsic Stochasticity in Plasmas**. [S.l.]: Les Editions de Physique, Courtaboeuf, Orsay, France, 1980.

WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2003.

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D**, v. 16, p. 285–317, 1985.

WOLFRUM, M.; OMEL'CHENKO, O. E.; YANCHUK, S.; MAISTRENKO, Y. L. Spectral properties of chimera states. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 21, n. 1, p. 013112, 2011.

APÊNDICE 1 - EQUIVALÊNCIA ENTRE AS DEFINIÇÕES DE COVARIÂNCIA DE DISTÂNCIA

Embora a avaliação numérica da integral (2.16) pareça ser difícil, de fato pode-se mostrar que as estatísticas resultantes são dadas por um fórmula computacional explícita (2.21). Vamos mostrar aqui que uma relação pode ser derivada da outra naturalmente, e uma abordagem simples é definir $\sigma(X, Y)$ em termos de funções características empíricas. Mas antes de mostrarmos o procedimento analítico desta equivalência, vamos primeiramente definir um Lema derivado da referência (SZÉKELY *et al.*, 2007), que é de fundamental importância para as argumentações seguintes.

Lema 1. *Se $0 < \alpha < 2$, então para todo $x \in \mathbb{R}^d$ temos*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos \langle t, x \rangle}{|t|_d^{d+\alpha}} dt = C(d, \alpha) |x|_d^\alpha \quad (1.1)$$

onde

$$C(d, \alpha) = \frac{2\pi^{d/2}\Gamma(1 - \alpha/2)}{\alpha 2^\alpha \Gamma((d + \alpha)/2)}. \quad (1.2)$$

No caso mais simples, $\alpha = 1$, a constante do Lema 1 é dada por

$$\begin{aligned} c_d = C(d, 1) &= \frac{2\pi^{d/2}\Gamma(1 - 1/2)}{2\Gamma((d + 1)/2)} = \frac{\pi^{d/2} \overbrace{\Gamma(1/2)}^{=\sqrt{\pi}}}{\Gamma((d + 1)/2)} \\ &= \frac{\pi^{d/2}\pi^{1/2}}{\Gamma((d + 1)/2)} = \frac{\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d + 1)/2)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Agora vamos mostrar que a covariância de distância empírica (2.21) é uma consequência direta de (2.16). Seja (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) um espaço amostral conjunto de (X, Y) , define-se a covariância como sendo

$$\sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \| \varphi_{X,Y}^N(t, s) - \varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s) \|^2, \quad (1.4)$$

ou seja, reescrevemos em termos de funções características empíricas. Onde temos

$$\varphi_{X,Y}^N(t, s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp \{i\langle t, X_k \rangle + i\langle s, Y_k \rangle\} \quad (1.5)$$

que é uma função característica empírica da amostra conjunta $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)\}$, e ainda

$$\varphi_X^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp \{i\langle t, X_k \rangle\} \quad (1.6)$$

$$\varphi_Y^N(s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp \{i\langle s, Y_k \rangle\} \quad (1.7)$$

que são as funções características marginais das amostras de X e de Y , respectivamente.

O Lema 1 implica que, existe constantes c_p e c_q , tal que para todo $X \in \mathbb{R}^p$ e $Y \in \mathbb{R}^q$ tenha-se

$$\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1 - \exp \{i\langle t, X \rangle\}}{|t|_p^{1+p}} dt = c_p |X|_p, \quad (1.8)$$

$$\int_{\mathbb{R}^q} \frac{1 - \exp \{i\langle s, Y \rangle\}}{|s|_q^{1+q}} ds = c_q |Y|_q, \quad (1.9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} \frac{1 - \exp \{i\langle t, X \rangle + i\langle s, Y \rangle\}}{|t|_p^{1+p} |s|_q^{1+q}} dt ds = c_p c_q |X|_p |Y|_q. \quad (1.10)$$

Da relação (1.4) temos a seguinte configuração

$$\begin{aligned} \|\varphi_{X,Y}^N(t, s) - \varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)\|^2 &= (\varphi_{X,Y}^N(t, s) - \varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)) \left(\overline{\varphi_{X,Y}^N(t, s)} - \overline{\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)} \right) \\ &= \underbrace{\varphi_{X,Y}^N(t, s) \overline{\varphi_{X,Y}^N(t, s)}}_{(I)} - \underbrace{\varphi_{X,Y}^N(t, s) \overline{\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)}}_{(II)} - \underbrace{\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s) \overline{\varphi_{X,Y}^N(t, s)}}_{(III)} + \\ &\quad \underbrace{\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s) \overline{\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)}}_{(IV)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

com a barra superior representando o complexo conjugado das funções características.

Agora vamos começar por solucionar (I), de modo que temos

$$\begin{aligned} \varphi_{X,Y}^N(t, s) \overline{\varphi_{X,Y}^N(t, s)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\langle t, X_k \rangle + i\langle s, Y_k \rangle} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{-i\langle t, X_l \rangle - i\langle s, Y_l \rangle} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N e^{i\langle t, X_k - X_l \rangle} e^{i\langle s, Y_k - Y_l \rangle} \end{aligned}$$

$$\varphi_{X,Y}^N(t, s) \overline{\varphi_{X,Y}^N(t, s)} = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \cos \langle t, X_k - X_l \rangle \cos \langle s, Y_k - Y_l \rangle. \quad (1.12)$$

Usando o Lema 1, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} \frac{(1 - \cos \langle t, X_k - X_l \rangle)(1 - \cos \langle s, Y_k - Y_l \rangle)}{|t|_p^{1+p} |s|_q^{1+q}} dt ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{(1 - \cos \langle t, X_k - X_l \rangle)}{|t|_p^{1+p}} dt \int_{\mathbb{R}^q} \frac{(1 - \cos \langle s, Y_k - Y_l \rangle)}{|s|_q^{1+q}} ds \\ &= c_p |X_k - X_l|_p c_q |Y_k - Y_l|_q \\ &= c_p c_q |X_k - X_l|_p |Y_k - Y_l|_q. \end{aligned} \quad (1.13)$$

De forma que a relação (1.12) torna-se

$$\varphi_{X,Y}^N(t, s) \overline{\varphi_{X,Y}^N(t, s)} = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |X_k - X_l|_p |Y_k - Y_l|_q. \quad (1.14)$$

Solucionando (II), temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{X,Y}^N(t, s) \overline{\varphi_X^N(t) \varphi_Y^N(s)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\langle t, X_k \rangle + i\langle s, Y_k \rangle} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{-i\langle t, X_l \rangle} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{-i\langle s, Y_m \rangle} \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N e^{i\langle t, X_k - X_l \rangle} e^{-i\langle s, Y_k - Y_m \rangle} \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N \cos \langle t, X_k - X_l \rangle \cos \langle s, Y_k - Y_m \rangle. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Seguindo o mesmo passo anterior, pelo Lema 1 obtém-se um resultado similar ao mostrado em (1.13), de forma que (1.15) é reescrita como sendo

$$\varphi_{X,Y}^N(t, s) \overline{\varphi_X^N(t) \varphi_Y^N(s)} = \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N |X_k - X_l|_p |Y_k - Y_m|_q. \quad (1.16)$$

Para o caso (III), o procedimento é bem similar ao tomado em (II), de forma

que temos

$$\begin{aligned}
 \varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)\overline{\varphi_{X,Y}^N(t,s)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\langle t, X_k \rangle} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{i\langle s, Y_l \rangle} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{-i\langle t, X_m \rangle - i\langle s, Y_m \rangle} \\
 &= \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N e^{i\langle t, X_k - X_m \rangle} e^{i\langle s, Y_l - Y_m \rangle} \\
 &= \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N \cos \langle t, X_k - X_m \rangle \cos \langle s, Y_l - Y_m \rangle \\
 &= \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N |X_k - X_m|_p |Y_l - Y_m|_q. \tag{1.17}
 \end{aligned}$$

Por último temos o caso (IV) que é dado por

$$\begin{aligned}
 \varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)\overline{\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\langle t, X_k \rangle} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\langle s, Y_k \rangle} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{-i\langle t, X_l \rangle} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{-i\langle s, Y_l \rangle} \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N e^{i\langle t, X_k - X_l \rangle} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^{N^2} e^{i\langle s, Y_k - Y_l \rangle} \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \cos \langle t, X_k - X_l \rangle \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \cos \langle s, Y_k - Y_l \rangle. \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

Do Lema 1 temos as seguintes integrais

$$\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1 - \cos \langle t, X_k - X_l \rangle}{|t|_p^{1+p}} dt = c_p |X_k - X_l|_p \tag{1.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}^q} \frac{1 - \cos \langle s, Y_k - Y_l \rangle}{|s|_q^{1+q}} ds = c_q |Y_k - Y_l|_q. \tag{1.20}$$

De forma que a equação (1.18) torna-se

$$\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)\overline{\varphi_X^N(t)\varphi_Y^N(s)} = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |X_k - X_l|_p \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |Y_k - Y_l|_q. \tag{1.21}$$

Portanto, vamos substituir as equações (1.14), (1.16), (1.17) e (1.21) em (1.11)

para obtermos

$$\begin{aligned}
 \sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |X_k - X_l|_p |Y_k - Y_l|_q - \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N |X_k - X_l|_p |Y_k - Y_m|_q \\
 &\quad - \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N |X_k - X_m|_p |Y_l - Y_m|_q + \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |X_k - X_l|_p \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |Y_k - Y_l|_q \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |X_k - X_l|_p |Y_k - Y_l|_q + \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |X_k - X_l|_p \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N |Y_k - Y_l|_q \\
 &\quad - \frac{2}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N |X_k - X_l|_p |Y_k - Y_m|_q. \tag{1.22}
 \end{aligned}$$

A equação (1.22) pode ser reescrita como

$$\sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N a_{kl} b_{kl} + \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N a_{kl} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N b_{kl} - \frac{2}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N a_{kl} b_{km}. \tag{1.23}$$

Por simplicidade vamos reescrever cada termo do lado direito da expressão (1.23) como sendo

$$S_1 = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N a_{kl} b_{kl} \tag{1.24}$$

$$S_2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N a_{kl} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N b_{kl} = \bar{a}_{..} \bar{b}_{..} \tag{1.25}$$

$$N^2 S_2 = N^2 \bar{a}_{..} \bar{b}_{..} = \frac{a_{..}}{N} \sum_{l=1}^N \frac{b_{..l}}{N} = \sum_{k,l=1}^N \bar{a}_{k.} \bar{b}_{.l} \tag{1.26}$$

$$S_3 = \frac{1}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N a_{kl} b_{km} = \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N a_{k.} b_{k.} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{a}_{k.} \bar{b}_{k.} \tag{1.27}$$

onde usou-se as igualdades $a_{k.} = n \bar{a}_{k.}$, $a_{.l} = n \bar{a}_{.l}$, $b_{k.} = n \bar{b}_{k.}$ e $b_{.l} = n \bar{b}_{.l}$. Desta forma expressão (1.23) torna-se

$$\begin{aligned}
 \sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= S_1 + S_2 - 2S_3 \\
 N^2 \sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= N^2(S_1 + S_2 - 2S_3) \\
 &= N^2 S_1 - N^2 S_3 - N^2 S_3 + N^2 S_2 \\
 &\quad - N^2 S_3 + N^2 S_3 + N^2 S_2 - N^2 S_2 \\
 &\quad - N^2 S_3 + N^2 S_2 + N^2 S_3 - N^2 S_2 \\
 &\quad + N^2 S_2 - N^2 S_2 - N^2 S_2 + N^2 S_2. \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

Agora reescrevendo termo a termo da expressão acima, obtemos assim

$$\begin{aligned}
 N^2\sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \sum_{k,l=1}^N a_{kl}b_{kl} - \sum_{k=1}^N a_k.\bar{b}_k. - \sum_{l=1}^N a_{.l}\bar{b}_{.l} + a_{..}\bar{b}_{..} \\
 &\quad - \sum_{k=1}^N \bar{a}_k.b_{k.} + N \sum_{k=1}^N \bar{a}_k.\bar{b}_k. + \sum_{k,l=1}^N \bar{a}_k.\bar{b}_{.l} - N \sum_{k=1}^N \bar{a}_k.\bar{b}_{..} \\
 &\quad - \sum_{l=1}^N \bar{a}_{.l}b_{.l} + \sum_{k,l=1}^N \bar{a}_{.l}\bar{b}_k. + N \sum_{l=1}^N \bar{a}_{.l}\bar{b}_{.l} - N \sum_{l=1}^N \bar{a}_{.l}\bar{b}_{..} \\
 &\quad + \bar{a}_{..}b_{..} - N \sum_{k=1}^N \bar{a}_{..}\bar{b}_k. - N \sum_{l=1}^N \bar{a}_{..}\bar{b}_{.l} + N^2\bar{a}_{..}\bar{b}_{..} \tag{1.29}
 \end{aligned}$$

que numa forma compacta fica

$$N^2\sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{k,l=1}^N \begin{pmatrix} a_{kl}b_{kl} & -a_{kl}\bar{b}_k. & -a_{kl}\bar{b}_{.l} & +a_{kl}\bar{b}_{..} \\ -\bar{a}_k.b_{kl} & +\bar{a}_k.\bar{b}_k. & +\bar{a}_k.\bar{b}_{.l} & -\bar{a}_k.\bar{b}_{..} \\ -\bar{a}_{.l}b_{kl} & +\bar{a}_{.l}\bar{b}_k. & +\bar{a}_{.l}\bar{b}_{.l} & -\bar{a}_{.l}\bar{b}_{..} \\ +\bar{a}_{..}b_{kl} & -\bar{a}_{..}\bar{b}_k. & -\bar{a}_{..}\bar{b}_{.l} & +\bar{a}_{..}\bar{b}_{..} \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Portanto, podemos ver que a expressão (1.30) nada mais é que a própria *covariância de distância empírica* dada pela equação (2.21), mostrada na subseção 2.3.3 do capítulo 2. Pois da expressão (1.30) temos

$$\begin{aligned}
 \sigma_N^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N (a_{kl} - \bar{a}_k. - \bar{a}_{.l} + \bar{a}_{..}) (b_{kl} - \bar{b}_k. - \bar{b}_{.l} + \bar{b}_{..}) \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N A_{kl}B_{kl}. \tag{1.31}
 \end{aligned}$$

Ou ainda

$$\sigma_N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k,l=1}^N A_{kl}B_{kl} \right)^{1/2}. \tag{1.32}$$

APÊNDICE 2 - EL VIA PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Definiremos aqui o procedimento analítico-computacional para a obtenção do EL do sistema de osciladores acoplados de Kuramoto, representado pela equação diferencial (4.1). Para isto, usamos a metodologia computacional definida na referência (WOLF et al., 1985), como base de nossos cálculos numéricos. Neste artigo os autores mostram detalhadamente como calcular o Lyapunov de sistemas dinâmicos não lineares via processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.

2.1 PROCEDIMENTO DE GRAM-SCHMIDT

Sabe-se que os ELs são definidos pela evolução a longo prazo dos eixos de uma esfera infinitesimal de estados. Este procedimento poderia ser implementado definindo os eixos principais com CIs cujas separações sejam muito pequenas e ainda evoluindo com as equações não lineares. Um problema com essa abordagem é que, em um sistema caótico, não podemos garantir a condição de pequenas separações por tempos longos, necessários para a convergência do espectro. Segundo WOLF *et al.* (1985) esse problema pode ser evitado com o uso de uma abordagem de espaço de fase mais espaço tangente. Uma trajetória (o centro da esfera) é definida pela ação das equações não lineares para uma determinada CI. Trajetórias de pontos na superfície da esfera são definidas pela ação das equações linearizadas de movimento em pontos infinitesimalmente separados da trajetória.

Para implementar este procedimento, a trajetória é criada pela integração das equações não lineares para alguma CI. Simultaneamente, as equações linearizadas são integradas para diferentes CIs definindo um quadro arbitrariamente orientado de n vetores ortonormais. Cada vetor irá divergir em magnitude, mas que em um sistema caótico, cada vetor tende a seguir na direção local de crescimento mais rápido. Com isso, o colapso em direção a uma direção comum faz com que a orientação do espaço tangente de todos os vetores do eixo se torne indistinguível. Então para a solução desse problema, se faz necessário uso repetido do procedimento de Gram-Schmidt.

As equações linearizadas agindo em um quadro inicial de vetores ortonormais re-

sulta num conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Então a ortonormalização de Gram-Schmidt fornece o seguinte conjunto ortonormal $\{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ \mathbf{v}'_2 &= \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1\|} \\ &\cdot \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \cdot \\ \mathbf{v}'_n &= \frac{\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_{n-1} \rangle \mathbf{v}'_{n-1} - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1}{\|\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_{n-1} \rangle \mathbf{v}'_{n-1} - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1\|}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2 EQUAÇÕES LINEARIZADAS DO SISTEMA DE OSCILADORES

O método descrito acima pode ser empregado tanto para um sistema discreto como para um sistema dinâmico em tempo contínuo. Uma observação a ser feita é que para um sistema dinâmico unidimensional a tempo discreto como o caso do mapa quadrático descrito no Capítulo 3, não utilizamos a metodologia acima. Naquele caso, por questão de simplicidade se fez necessário apenas o uso da metodologia descrita na subseção 3.1.1, sem a utilização do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para a obtenção dos ELs. Mas obviamente o método descrito aqui poderia ser implementado naquele caso sem nenhum problema.

A linearização da equação (4.1) se dá pelo processo descrito abaixo:

$$\begin{pmatrix} \delta\phi_{1+t+dt} \\ \delta\phi_{2+t+dt} \\ \delta\phi_{3+t+dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\phi_{M+t+dt} \end{pmatrix} = J_i \begin{pmatrix} \delta\phi_{1t} \\ \delta\phi_{2t} \\ \delta\phi_{3t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\phi_{Mt} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

com ϕ_i sendo a fase do oscilador, $J_i = J_{i_t}$ a matriz Jacobiana e $i = 1, 2, \dots, M$ represen-

tando a posição do sítio (oscilador) na rede. Temos então

$$\begin{pmatrix} \delta\phi_{1_{t+dt}} \\ \delta\phi_{2_{t+dt}} \\ \delta\phi_{3_{t+dt}} \\ \vdots \\ \delta\phi_{M_{t+dt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\dot{\phi}_1/\partial\phi_1 & \partial\dot{\phi}_1/\partial\phi_2 & \partial\dot{\phi}_1/\partial\phi_3 & \dots & \partial\dot{\phi}_1/\partial\phi_M \\ \partial\dot{\phi}_2/\partial\phi_1 & \partial\dot{\phi}_2/\partial\phi_2 & \partial\dot{\phi}_2/\partial\phi_3 & \dots & \partial\dot{\phi}_2/\partial\phi_M \\ \partial\dot{\phi}_3/\partial\phi_1 & \partial\dot{\phi}_3/\partial\phi_2 & \partial\dot{\phi}_3/\partial\phi_3 & \dots & \partial\dot{\phi}_3/\partial\phi_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial\dot{\phi}_M/\partial\phi_1 & \partial\dot{\phi}_M/\partial\phi_2 & \partial\dot{\phi}_M/\partial\phi_3 & \dots & \partial\dot{\phi}_M/\partial\phi_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\phi_{1_t} \\ \delta\phi_{2_t} \\ \delta\phi_{3_t} \\ \vdots \\ \delta\phi_{M_t} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

de onde pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 \delta\phi_{1_{t+dt}} &= \frac{\partial\dot{\phi}_1}{\partial\phi_1}\delta\phi_{1_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_1}{\partial\phi_2}\delta\phi_{2_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_1}{\partial\phi_3}\delta\phi_{3_t} + \dots + \frac{\partial\dot{\phi}_1}{\partial\phi_M}\delta\phi_{M_t} \\
 \delta\phi_{2_{t+dt}} &= \frac{\partial\dot{\phi}_2}{\partial\phi_1}\delta\phi_{1_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_2}{\partial\phi_2}\delta\phi_{2_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_2}{\partial\phi_3}\delta\phi_{3_t} + \dots + \frac{\partial\dot{\phi}_2}{\partial\phi_M}\delta\phi_{M_t} \\
 \delta\phi_{3_{t+dt}} &= \frac{\partial\dot{\phi}_3}{\partial\phi_1}\delta\phi_{1_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_3}{\partial\phi_2}\delta\phi_{2_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_3}{\partial\phi_3}\delta\phi_{3_t} + \dots + \frac{\partial\dot{\phi}_3}{\partial\phi_M}\delta\phi_{M_t} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \delta\phi_{M_{t+dt}} &= \frac{\partial\dot{\phi}_M}{\partial\phi_1}\delta\phi_{1_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_M}{\partial\phi_2}\delta\phi_{2_t} + \frac{\partial\dot{\phi}_M}{\partial\phi_3}\delta\phi_{3_t} + \dots + \frac{\partial\dot{\phi}_M}{\partial\phi_M}\delta\phi_{M_t}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

correspondendo assim, ao conjunto de equações linearizadas do sistema de osciladores acoplados de Kuramoto. Aqui, M representa o número de osciladores acoplados de forma não local, e não o total de osciladores da rede.

Sabendo que a equação diferencial que rege o sistema é dada na forma

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \frac{1}{2R} \sum_{k=i-R}^{i+R} \text{sen}(\phi_i - \phi_k + \alpha), \quad (2.5)$$

então cada derivada que compreende as equações linearizadas deve seguir a expressão da Jacobiana descrita analiticamente por

$$J_i = -\frac{1}{2R} \sum_{k=i-R}^{i+R} \cos(\phi_i - \phi_k + \alpha). \quad (2.6)$$

A equação (2.6) nos permite calcular os ELs através do algoritmo padrão descrito na referência (WOLF *et al.*, 1985).

ANEXO 1 - ARTIGOS CIENTÍFICOS

Neste anexo, listamos todos os artigos do período de doutoramento: o publicado e os que se encontram em fase de preparação.

- Mendes, C. F. O., Beims, M. W., *Distance correlation detecting Lyapunov instabilities, noise-induced escape times and mixing*, Physica A, **512** 721-730 (2018).
- Mendes, C. F. O., Silva, R. M., Beims, M. W., *Distance correlation detecting chimera states*, (em preparação).
- Mendes, C. F. O., Ianniruberto, M., Beims, M.W., *Distance correlation in the statistical analysis of physical-chemical parameters of meeting of the waters in Amazonas River*, (em preparação).
- Mendes, C. F. O., Beims, M.W., *Distance correlation detecting Lyapunov exponent in time series analysis*, (em preparação).

Physica A 512 (2018) 721–730

Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa

Distance correlation detecting Lyapunov instabilities, noise-induced escape times and mixing

Carlos F.O. Mendes, Marcus W. Beims*

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-980 Curitiba, PR, Brazil

HIGHLIGHTS

- Distance correlation measuring nonlinearities in dynamical systems.
- Describing noise-induced escape times using the distance correlation.
- Lyapunov exponents and correlation decay.

ARTICLE INFO

Article history:
Received 17 April 2018
Available online xxxx

Keywords:
Distance correlation
Chaos
Noise
Escape times
Mixing

ABSTRACT

The properties of the statistical method of distance correlation between multivariate data are analysed in the context of nonlinear dynamical systems. The distance correlation between the noisy and the noiseless quadratic maps are studied in periodic and chaotic regimes. Results are compared to the classical method of Pearson's correlation. While distance and Pearson's correlations are affected by the Lyapunov exponent from the noiseless orbits, only the distance correlation is able to recognize the correct qualitative behaviour of noise-induced escape times decays and the mixing of chaotic trajectories. In addition, the distance correlation is capable of detecting distinct size of attractors. The main goal of this work is to establish the validity of the distance correlation as an method of correlation between multivariate data in dynamical systems.

© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.