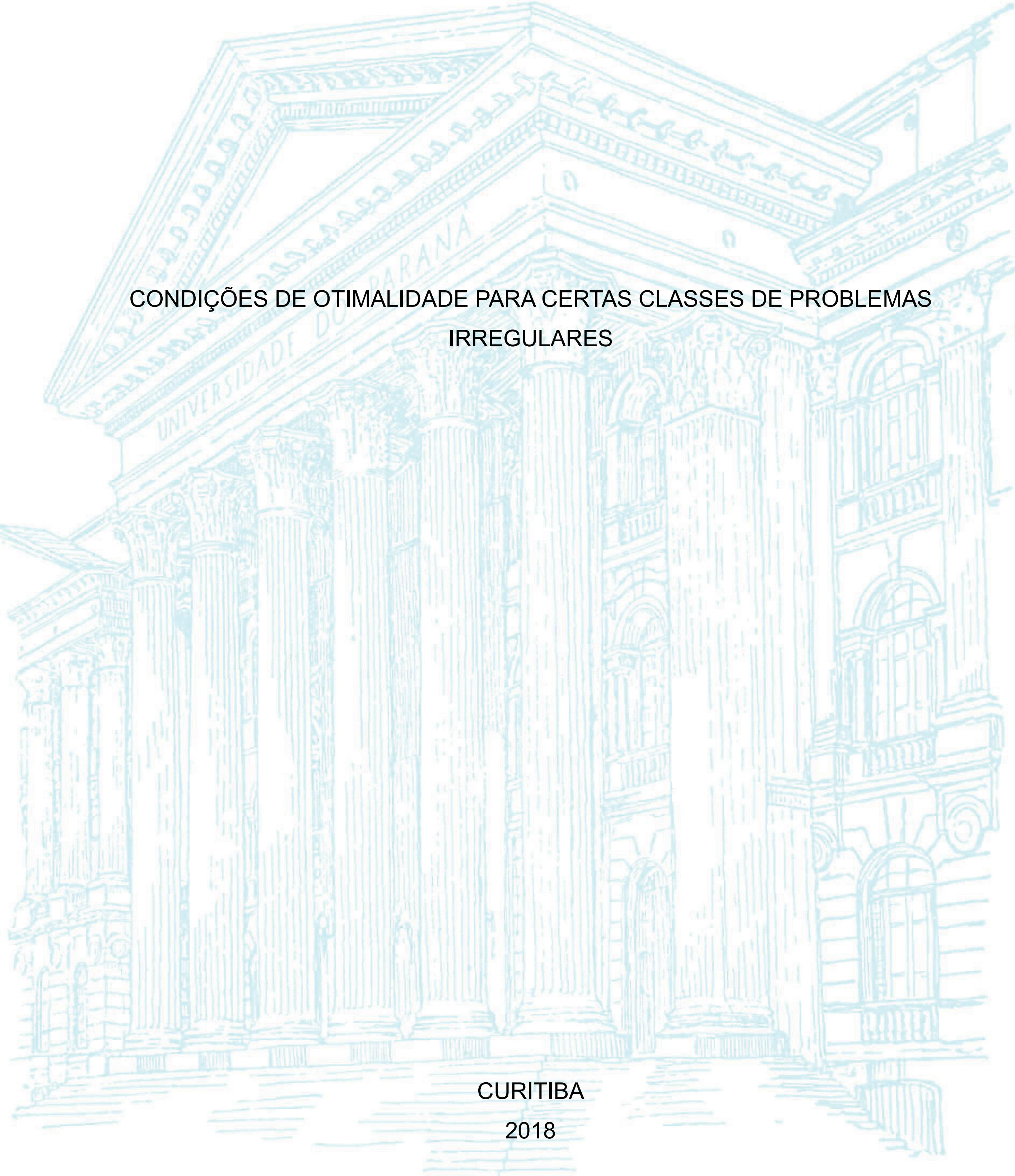
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ADSON SAMPAIO MELO



CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE PARA CERTAS CLASSES DE PROBLEMAS IRREGULARES

CURITIBA

2018

ADSON SAMPAIO MELO

CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE PARA CERTAS CLASSES DE PROBLEMAS IRREGULARES

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lucelina Batista dos Santos.

CURITIBA
2018

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M528c Melo, Adson Sampaio

Condições de otimalidade para certas classes de problemas irregulares / Adson Sampaio Melo. – Curitiba, 2018.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientadora: Lucelina Batista dos Santos. -

1. Programação (Matemática). 2. Otimização matemática. 3. Problemas irregulares. I. Universidade Federal do Paraná. II. Santos, Lucelina Batista dos. III.Título.

CDD: 519.76

Bibliotecária: Vanusa Maciel - CRB - 9/1928

ATA Nº026

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia doze de novembro de dois mil e dezoito às 10:00 horas, na sala Sala de Seminários. , Setor de Ciências Exatas. Centro Politécnico/UFPR , foram instalados os trabalhos de arguição do doutorando **ADSON SAMPAIO MELO** para a Defesa Pública de sua tese intitulada **Condições de otimalidade para certas classes de problemas irregulares**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: LUCELINA BATISTA DOS SANTOS (UFPR), MARIA BEATRIZ HERNANDEZ JIMENEZ (PO), MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR (UTA/Chile), PRISCILA SAVULSKI FERREIRA (UTFPR/PR), JOSÉ ALBERTO RAMOS FLOR (UFPR), ADILSON JOSE VIEIRA BRANDAO (UFSCAR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais. A Banca Examinadora, então, reuniu-se e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O doutorando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. A aprovação no rito de defesa deverá ser homologada pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais do programa. A outorga do título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, LUCELINA BATISTA DOS SANTOS, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 12 de Novembro de 2018.

LUCELINA BATISTA DOS SANTOS
Presidente da Banca Examinadora

MARIA BEATRIZ HERNANDEZ JIMENEZ
Avaliador Externo

MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR
Avaliador Externo

PRISCILA SAVULSKI FERREIRA
Avaliador Externo

JOSÉ ALBERTO RAMOS FLOR
Avaliador Interno

ADILSON JOSE VIEIRA BRANDAO
Avaliador Externo

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **ADSON SAMPAIO MELO** intitulada: **Condições de otimalidade para certas classes de problemas irregulares**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 12 de Novembro de 2018.

LUCELINA BATISTA DOS SANTOS
Presidente da Banca Examinadora

MARIA BEATRIZ HERNANDEZ JIMENEZ
Avaliador Externo

MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR
Avaliador Externo

PRISCILA SAVULSKI FERREIRA
Avaliador Externo

JOSÉ ALBERTO RAMOS FLOR
Avaliador Interno

ADILSON JOSE VIEIRA BRANDAO
Avaliador Externo

Agradecer a Deus, a força infinita que
rege o universo.

Agradecimentos

Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que contribuíram para que este trabalho de tese fosse concluído.

Não poderia deixar de agradecer, primeiramente, a Professora Lucelina pelos diversos momentos de apoio, trocas de ideias, discussões e tempo dedicado para conosco. Uma parceria que começou a ser construída a cerca de dois anos e que certamente continuará proporcionando outros tantos desafios e conquistas.

Gostaria de agradecer a todos os professores do Programa que, de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação neste período de doutoramento. Agradecer aos colegas de curso, a Cinthia, secretária do Programa, e a Tia do cafezinho.

Agradecer aos membros da banca pela presença de cada um neste acontecimento e também por suas contribuições.

Quero fazer um agradecimento especial a minha instituição de origem, a Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, pela oportunidade de qualificar minha carreira docente.

Agradecer a minha família por todo apoio.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky

Resumo

O foco deste trabalho é o estudo de condições de otimalidade para algumas classes de problemas irregulares com um e vários objetivos. Estas condições são expostas em duas partes: na primeira parte tratamos dos problemas mono-objetivo apresentando condições necessárias de otimalidade para problemas em que as restrições são absolutamente degeneradas e também para problemas em que a restrição de igualdade é irregular. Para os casos de degeneração absoluta propomos duas generalizações das condições de qualificação LICQ e MFCQ e os casos de irregularidade da restrição de igualdade são analisados através da Teoria da p-regularidade. Ainda no caso escalar, descrevemos algumas propriedades do conjunto de multiplicadores associado ao problema com restrições absolutamente degeneradas e aplicamos os resultados obtidos a problemas de Controle Ótimo Discreto. A segunda parte é dedicada aos problemas multiobjetivos com degenerações absoltutas e irregularidade na restrição de igualdade. Estes são tratados com as generalizações das condições de qualificação LICQ e MFCQ, a p-regularidade e condições de regularidade obtidas da relação entre o cone contingente e uma generalização do conceito de cone linearizado. Ademais, obtemos unicidade do conjunto de multiplicadores associado ao problema multiobjetivo com restrições absolutamente degeneradas.

Palavras-chave: Condições de Otimalidade, Problemas Absolutamente Degenerados, Problemas Irregulares, p-Regularidade.

Abstract

The focus of this work is the study of optimality conditions for some classes of irregular problems with one and several objectives. These conditions are presented in two parts: in the first part we deal with the mono-objective problems presenting the necessary conditions of optimality for problems in which the constraints are absolutely degenerate and also for problems in which the equality constraint is irregular. For the cases of absolute degeneration we propose two generalizations of the LICQ and MFCQ qualification conditions and the cases of irregularity of the equality constraint are analyzed through the p-regularity theory. Still in the scalar case, we describe some properties of the set of multipliers associated with the problem with absolutely degenerate constraints and apply the results obtained to problems of Optimal Discrete Control. The second part is dedicated to multiobjective problems with absolute degeneration and irregularity in the equality constraint. These are treated with the generalizations of the LICQ and MFCQ qualification conditions, the p-regularity and regularity conditions obtained from the relation between the contingent cone and a generalization of the linearized cone concept. In addition, we obtain the uniqueness of the set of multipliers associated with the multiobjective problem with absolutely degenerate constraints.

Keywords: Optimality Conditions, Absolutely Degenerate Problems, Irregular Problems, p-Regularity.

Lista de Notações

$2^{\mathbb{A}}$	Família de subconjuntos de $\mathbb{A}$
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$	Derivada parcial da função f com respeito a variável x_i em x_0
$\inf \mathbb{A}$	Ínfimo do conjunto $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}\backslash\mathbb{B}$	Diferença entre os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$
$\mathbb{B}_{\varepsilon}\left(x_0\right)$	Bola centrada em x_0 e raio ε
$\mathbb{C}^*$	Dual do cone $\mathbb{C}$
$\mathbb{X}'$	Espaço dual topológico do espaço de Banach $\mathbb{X}$
$\mathscr{H}$	Métrica de Hausdorff
$\mathscr{L}_k\left(\mathbb{X}, \mathbb{Y}\right)$	Espaço das aplicações k lineares de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$
$\mathscr{M}_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$	Espaço vetorial das matrizes reais com m linhas e n colunas
$\overline{\mathbb{A}}$	Fecho do conjunto $\mathbb{A}$
$\sup \mathbb{A}$	Supremo do conjunto $\mathbb{A}$
$\\|B\\|_{\infty}$	Norma do máximo da matriz B
$\\|x\\|_p$	Norma-p do vetor x
B^t	Matriz transposta de B
$f^{(1)}(x_0)h$	Derivada da função f em x_0 na direção h
$f^{(k)}(x_0)$	Derivada de ordem k da função f em x_0
$Im(f)$	Conjunto imagem da função f
$Ker^k f^{(k)}(x_0)$	k-Kernel de f em x_0
xy	Produto interno canônico entre os vetores x e y
$\text{conv}\mathbb{A}$	Envoltória convexa do conjunto $\mathbb{A}$

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento do mundo como o conhecemos é resultado de uma incansável busca por otimizar os processos que regem a vida das pessoas. Desde os primórdios o homem pensa em formas de criar, modificar ou substituir uma tecnologia em outra para aumentar seus conhecimentos, aumentar a velocidade de produção, reduzir os seus custos e maximizar lucro. Os problemas de determinação de máximos ou mínimos aparecem naturalmente numa variedade muito grande de situações em Física, Econômia, Engenharia e suas aplicações.

Um dos mais antigos problemas de máximos e mínimos na História da Matemática é de cunho geométrico, o chamado Problema Isoperimétrico Clássico: encontrar, dentre as curvas planas fechadas de comprimento fixado, aquela que engloba a maior área. Podemos citar ainda, o problema proposto por Johann Bernoulli em 1696 em que, dados dois pontos A e B em um plano vertical, encontrar a curva que uma partícula descreve saindo de A e chegando em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade, problema este que hoje conhecemos como o Problema da Braquistócrona. Também podemos pensar como um problema de Otimização, o Princípio de Fermat, que estabelece que de todos os caminhos possíveis para ir de um ponto a outro, a luz segue aquele que é percorrido no tempo mínimo. Estes são alguns dentre tantos outros problemas clássicos em que uma certa função deve tomar um valor máximo ou mínimo.

Os problemas de Otimização estão presentes ao longo de toda a História da Matemática, todavia, um marco fundamental aconteceu no século XVII, com o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral [14], o que veio auxiliar na determinação de condições necessárias e suficientes para a solução destes tipos de problemas.

A Otimização Matemática, também conhecida por Programação Matemática, é uma ramificação da Matemática e o que basicamente diz respeito a esta área é a caracterização e procura de minimizadores, ou maximizadores, de uma função num certo conjunto que muitas vezes é definido por equações e inequações algébricas. Problemas definidos por equações e inequações algébricas são denominados problemas restritos. As primeiras condições de otimalidade para problemas desta natureza foram obtidas por Fritz-John [48] em 1948 e posteriormente por Kuhn e Tucker [54]. Mais tarde foi descoberto que as condições de Kuhn-Tucker já tinham sido estabelecidas em 1939 por William Karush. Assim as condições de Kuhn-Tucker passaram a ser chamadas de condições de Karush-Kuhn-Tucker.

As condições obtidas por Karush-Kuhn-Tucker derivam, obviamente de um minimizador do problema mais também de uma hipótese adicional [83], conhecida como Condição de Qualificação de Guignard (CQG) [33, 36]. Como é bem conhecido, a condição de qualificação CQG em muitos casos é difícil de ser verificada e com o objetivo de se garantir esta condição, várias outras hipóteses adicionais foram propostas. Estas novas hipóteses são chamadas de Condições de Qualificação de Restrição. Duas das mais conhecidas e utilizadas entre as Condições de Qualificação de Restrição são: a Condição de Qualificação de Independência Linear (LICQ) e a Condição de Qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) [45, 83]. Em muitos problemas de Otimização restrito LICQ ou MFCQ podem não ser satisfeitas numa solução do problema. Em nosso trabalho, problemas desta natureza serão denominados irregulares. A seguir citamos alguns pesquisadores e trabalhos direcionados a questão da irregularidade do problema de Otimização.

Brezhneva e Tretyakov [15] em 2003, consideram problemas de Otimização irregulares com restrições de igualdade entre espaços de Banach. A abordagem é baseada na Teoria da p-regularidade e para problemas de Otimização com restrição p-regular, são formuladas condições necessárias para otimalidade. Além disto, na segunda parte do trabalho é considerada uma generalização do conceito de p-regularidade que é utilizada para propor novas condições necessárias generalizadas para problemas de Otimização, em que a restrição de igualdade não é regular e também não é p-regular.

Avakov, Arutyunov e Izmailov [4] em 2007, derivam condições necessárias de otimalidade para problemas com restrição de desigualdade e igualdade quando estas restrições não cumprem a condição de qualificação MFCQ no minimizador. As análises são baseadas no conceito da 2-regularidade para funções definidas entre espaços de Banach.

Szczepanik e Tretyakov [92] em 2008, apresentam um novo método para resolver problemas de Otimização irregulares com restrições de desigualdade. Os resultados são baseados na Teoria da p-regularidade e na reformulação das restrições de desigualdade como igualdades, sendo que os gradientes são linearmente dependentes e para o qual o sistema Lagrangeano é singular na solução do problema de Otimização. Um sistema Lagrangeano baseado na p-regularidade é proposto para procurar candidatos a minimizador do problema inicial. Além disto, um método numérico similar ao Método de Newton é apresentado para obtenção desta solução.

Bednarczuk e Tretyakov [7] em 2016, apresentam uma aplicação da Teoria da p-regularidade na análise de problemas irregulares com restrição de igualdade. A análise baseia-se na construção do operador do p-fator, o que permite analisar os problemas de Otimização no caso irregular. É investigada a redutibilidade de um problema irregular para um sistema regular de equações que não dependem da função objetivo.

Bednarczuk e Tretyakov [8] em 2017, apresentam uma descrição do cone tangente ao conjunto caracterizado por restrições de igualdade sendo que o operador que as define é irregular em um certo ponto de interesse. Para isso, é introduzido o conceito de aplicação p-regular modificado, o que generaliza o conceito da p-regularidade. Com o uso deste, novas condições de otimalidade para uma ampla classe de problemas de Otimização irregulares com restrições de igualdade são provadas.

Brezhneva e Tretyakov [21] em 2017, apresentam uma análise de ordem superior das condições de otimalidade necessárias para problemas com restrições de desigualdade. O artigo aborda o caso quando o problema é irregular e é verificado que as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker se reduzem a uma forma específica contendo apenas a função objetivo. Além disto, para algumas outras classes de problemas nos quais as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-

-Tucker não são satisfeitas, por causa da irregularidade, são propostas condições necessárias para estes problemas. Para formular estas condições de otimalidade, são introduzidas novas qualificações de restrição.

Neste trabalho provamos alguns resultados (condições necessárias de otimalidade) baseando-nos no Teorema de Dubovitskii-Milyutin [31].

Em 1962, Dubovitskii e Milyutin, encontraram condições necessárias de otimalidade, na forma de uma equação estabelecida em termos de funcionais lineares, sendo que por meio desta, podemos estabelecer condições necessárias de otimalidade para uma extensa classe de problemas. Em virtude disto um grande número de trabalhos na área de Otimização são baseados no Teorema de Dubovitskii-Milyutin para estabelecer condicões de otimalidade, tanto para problemas mono-objetivo quanto para multiobjetivo, diferenciáveis ou não diferenciáveis, de dimensão finita ou infinita. Podemos citar alguns exemplos como: [13, 24, 31, 38, 39, 51, 56, 57, 96].

O problema de Controle Ótimo Discreto consiste basicamente em otimizar uma certa função, sujeito a um sistema que evolui por passos. A função a ser minimizada depende de uma variável que descreve o estado do sistema em cada passo e de uma variável de controle que intervém no comportamento do sistema. Então procura-se controlar o sistema de maneira ótima ao longo dos passos determinados, de acordo com o objetivo previamente fixado. Um dos resultados principais da Teoria de Controle Ótimo Discreto é o chamado Princípio do Máximo de Pontryagin [41, 64, 65], o qual estabelece condições necessárias de otimalidade para tais problemas. É conhecido que um problema de Controle Ótimo Discreto pode ser reescrito na forma de um problema de Programação Matemática e isto cria um viés interessante do ponto de vista da aplicabilidade dos resultados conhecidos da Otimização nestes tipos de problemas. Neste trabalho daremos algumas aplicações em Controle Ótimo Discreto.

Estamos interessados também nos problemas de Programação multiobjetivo. Em muitas situações nos deparamos com problemas de tomadas de decisões que surgem em diversas áreas como Engenharia, Economia, Administração, Internet, Biomedicina, Teoria dos Jogos, dentre outros. Tais problemas possuem mais de um objetivo fixados como metas pelo decisor e, geralmente, não é possível minimizar simultaneamente todos os objetivos, sujeitos às restrições do problema, o que leva a várias noções de otimalidade para o problema de Otimização multiobjetivo. Os primeiros resultados no campo da Otimizaçao multiobjetivo são devidos à Pareto [73] que em seu célebre trabalho *"Cours d'Economie Politique"* introduz o conceito de solução eficiente. Intuitivamente, um ponto é chamado eficiente quando não é possível melhorar nenhum objetivo sem piorar algum outro objetivo. Esta noção de otimalidade tem sido amplamente utilizada na Economia, pois é intimamente ligada à chamada Teoria do Bem-Estar Social [69].

A partir de 1960, seguindo o trabalho de Pareto, ocorre um grande crescimento nas áreas em que se aplicam os processos de tomada de decisão com múltiplos objetivos. Vários trabalhos surgiram neste campo tentando obter condições necessárias e suficientes para determinar e caracterizar pontos que satisfazem a restrição do problema (pontos factíveis) que tenham características semelhantes à definição de Pareto. Neste processo, foi necessário introduzir conceitos matemáticos importantes para relacionar estes pontos com os objetivos.

Em Otimização multiobjetivo as condições necessárias de otimalidade são um tópico importante e grande parte dos resultados conhecidos em Otimização escalar se estendem para

Programação multiobjetivo. No entanto, para termos condições de otimalidade é preciso que algumas hipóteses do problema sejam satisfeitas. Muitas vezes essas hipóteses são as mesmas condições de qualificação de restrição da Otimização Escalar e outras tantas são hipóteses que precisam ser satisfeitas pelas restrições e as funções objetivo do problema. Estas últimas são chamadas de condições de regularidade. Em qualquer um dos casos estas hipóteses são necessárias para garantir as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker que se estendem para o caso multiobjetivo também. Para os problemas irregulares multiobjetivo existem poucos resultados na literatura especializada e também por isto estamos interessados no estudo destes problemas. Os problemas em que alguma condição de qualificação de restrição ou de regularidade é verificada, alguns pesquisadores tem trabalhos relacionados com as condições de otimalidade para estes.

Em 1991, Wang [98], apresenta condições de otimalidade de segunda ordem para os problemas de Programação multiobjetivo com restrições de desigualdade e de igualdade. Duas qualificações de restrição de segunda ordem fracas são introduzidas e, com base nelas, são obtidas várias condições necessárias de segunda ordem para uma solução fracamente eficiente local. Duas condições suficientes de segunda ordem também são apresentadas.

Em 1994, Maeda [61], introduz uma condição de regularidade e obtém as condições necessárias de tipo Karush-Kuhn-Tucker para a eficiência. Neste trabalho também é garantida a positividade do multiplicador associado a cada função objetivo quando esta condição de regularidade é satisfeita.

Em 2000, Bigi e Castellani [11], estabelecem uma condição de otimalidade de segunda ordem para Otimização multiobjetivo com restrições mistas. Esta condição é expressa como a incompatibilidade de sistemas lineares não homogêneos. Quando a restrição é dada em termos de desigualdades e igualdades, ela pode ser transformada em uma regra de multiplicadores do tipo John, usando um Teorema de Alternativa de Motzkin não homogêneo. Além disto, adicionando hipóteses fracas de regularidade de segunda ordem, as condições do tipo Karush-Kuhn-Tucker são deduzidas.

Em 2012, Burachik e Rizvi [23], consideram problemas de Otimização multiobjetivo diferenciáveis com restrições de desigualdade. Neste artigo, os autores introduzem os conceitos de condições de Karush-Kuhn-Tucker fraca e forte. As condições de otimalidade fracas de Karush-Kuhn-Tucker são verificadas para tais problemas quando nem todos os multiplicadores das funções objetivo são zero, enquanto as fortes condições de Karush-Kuhn-Tucker são válidas quando todos os multiplicadores das funções objetivo são positivas. Neste trabalho é apresentada uma nova condição de regularidade sob a qual as condições de otimalidade fracas de Karush-Kuhn-Tucker são verificadas. Além disto, é provado que para uma outra nova condição de regularidade as fortes condições de Karush-Kuhn-Tucker são mantidas quando são condideradas uma solução propriamente eficiente do problema.

Neste trabalho estabelecemos condições necessárias de otimalidade para algumas classes de problemas irregulares mono e multiobjetivos.

No caso mono-objetivo, através do Teorema de Dubovitskii-Milyutin apresentamos condições necessárias de otimalidade para problemas escalares com restrições de desigualdade e igualdade, sendo que estas restrições são absolutamente degeneradas no minimizador. Neste caso, supondo uma condição de qualificação de restrição similar à condição de qualificação LICQ obtemos condições necessárias de otimalidade que independem da paridade das ordens de degenaração das restrições do problemas, melhorando assim o resultado obtido por Brezhneva e Tretyakov em [16]. Além disto, através do Teorema de Alternativa de Motzkin e assumindo uma nova condição de qualificação de restrição similar à condição de qualificação MFCQ, apresentamos condições necessárias de otimalidade para problemas com restrições absolutamente degeneradas no minimizador, porém neste caso são levadas em consideração a paridade da ordem destas degenerações, o que também aperfeiçoa o resultado alcançado por Brezhneva e Tretyakov em [21]. Com esta nova regra de multiplicadores para problemas cujas restrições são absolutamente degeneradas no minimizador, obtemos propriedades de convexidade, unicidade e compacidade para o conjunto de multiplicadores que satisfazem a esta regra. Para problemas irregulares com restrição de igualdade e sob hipótese da p-regularidade, apresentamos uma demonstração alternativa, via Teorema de Dubovitskii-Milyutin, das condições necessárias de otimalidade obtidas por Izmailov e Tretyakov em [20, 42]. Ainda fazendo uso do conceito da p-regularidade e propondo uma nova condição de qualificação de restrição análoga à MFCQ, obtemos condições otimalidade tipo Karush-Kuhn-Tucker para uma classe de problemas com restrição de desigualdade e igualdade, sendo que a restrição de igualdade é irregular e consequentemente as condições de qualificação LICQ e MFCQ não são satisfeitas. Esta última aprimora o resultado obtido por Izmailov e Tretyakov em [20, 42]. Por fim, provamos duas condições de otimalidade em Controle Ótimo Discreto com restrição de igualdade tanto no controle quanto no estado. A primeira delas são condições necessárias e este resultado, de uma certa maneira, generaliza o Princípio do Máximo de Pontryagin para esta classe de problemas. Na segunda condição de otimalidade, estabelecemos condições suficientes para o referido problema, novamente reescrevendo-o como um problema de Programação Matemática obtemos condições suficientes de otimalidade para o problema de Controle Ótimo Discreto.

Em contexto de Otimização multiobjetivo, fazendo as adequações necessárias, boa parte dos resultados obtidos na forma escalar são estendidos para o caso multiobjetivo. Para problemas com restrição de desigualdade e igualdade absolutamente degenaradas na solução e assumindo uma condição de qualificação similar à MFCQ, obtemos condições necessárias para otimalidade, no sentido da eficiência fraca. Mais do que isto, propomos duas novas condições de regularidade que garantem, por meio do Teorema de Alternativa de Tucker [63], a positividade de cada multiplicador associado à função objetivo, uma delas quando assumimos a eficiência da solução do problema e a outra quando adotamos a eficiência própria. Estes dois últimos resultados são similares aos resultados obtidos por Maeda em [61] e Burachik e Rizvi em [23], respectivamente. Com uma nova regra de multiplicadores associados ao problema com restrições absolutamante degeneradas na solução do problema e introduzindo uma condição análoga à MFCQ [10, 12], garantimos a unicidade dos multiplicadores nesta regra. Por fim, utilizando o conceito da p-regularidade, conseguimos condições necessárias de otimalidade para problemas de Otimização multiobjetivo com restrição de igualdade e desigualdade, cuja restrição não satisfaz LICQ na solução.

Organizamos este trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 2, fixamos algumas notações e apresentamos algumas definições e alguns resultados essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Expomos algumas definições fundamentais para estabelecermos e aplicarmos o Teorema de Dubovitskii-Milyutin.

No Capítulo 3 tratamos especificamente do caso mono-objetivo. Obtemos condições necessárias de otimalidade para problemas com restrição de desigualdade e igualdade absolutamente degeneradas no minimizador a partir de novas condições de qualificação de restrição, sendo que uma destas condições provém do Teorema de Dubovitskii-Milyutin e as demais do Teorema de Alternativa de Motzkin. Descrevemos algumas propriedades do conjunto de multiplicadores que satisfazem as regras análogas às Karush-Kuhn-Tucker obtidas. Sob hipóteses de p-regularidade damos uma demosntração alternativa, por meio do Teorema de Dubovitskii-Milyutin, das condições necessárias de otimalidade para uma certa classe de problemas irregulares com restrição de igualdade e enunciamos condições suficiente para otimalidade. Novamente sob hipótese de p-regularidade e propondo uma nova condição de qualificação similar à MFCQ derivamos, por meio do Teorema de Alternativa de Motzkin, condições necessárias de otimalidade para uma certa classe de problemas irregulares com restrição de desigualdade e igualdade. Para finalizarmos este capítulo, aplicamos dois dos resultados vistos a problemas de Controle Ótimo Discreto, demonstrando condições necessárias e suficientes de otimalidade para este problema.

O Capítulo 4 é destinado ao caso multiobjetivo. Provamos condições necessárias de otimalidade para problemas absolutamente degenerados com restrições mistas, no sentido da eficiência fraca a partir das condições de qualificação de restrição propostas. Ademais, propomos novas condições de regularidade e com uso destas derivamos condições necessárias de otimalidade, no sentido da eficiência e da eficiência própria, para problemas com restrições de desigualdade e igualdade absolutamente degenerada na solução, sendo que estas duas últimas são obtidas através do Teorema de Alternativa de Tucker, fato crucial para determinarmos a positividade do multiplicador associado a função objetivo. Assumindo uma hipótese a respeito das funções envolvidas no problema, mostramos unicidade dos multiplicadores que satisfazem a igualdade tipo Karush-Kuhn-Tucker. Por fim, revelamos condições necessárias de otimalidade tipo Karush-Kuhn-Tucker para uma classe de problemas irregulares, novamente sob hipótese da p-regularidade.

Finalizamos com o Capítulo 5 apontando algumas possibilidades de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares Técnicos e o Teorema de Dubovitskii-Milyutin

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e teoremas que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Como alguns destes resultados são bastante conhecidos da Análise Real e da Análise Funcional as demonstrações serão omitidas e para maiores detalhes sugerimos consultar [3, 40, 53, 58, 86].

2.1 Preliminares Técnicos

Ao longo deste capítulo, a menos que façamos menção contrária, os conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são espaços de Banach, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$ é um aberto não-vazio e x_0 é um ponto fixado de $\mathbb{X}$. Além disto, denotamos por $\mathbb{X}'$ o espaço dual topológico do espaço de Banach $\mathbb{X}$, constituído de todos os funcionais lineares contínuos sobre $\mathbb{X}$. O espaço $\mathbb{X}'$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\| = \sup \{f(x); x \in \mathbb{X}, \|x\| = 1\}.$$

No que se segue, recordamos o conceito de convexidade.

Definição 2.1. *Um conjunto $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}$ é convexo quando o segmento*

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{X},$$

para todo $x, y \in \mathbb{X}$.

Definição 2.2. *Sejam $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$. A soma vetorial $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ é denominado uma combinação convexa de $x_1, ..., x_n$ quando $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, sendo $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$. O conjunto de todas as combinações convexas de elementos de $\mathbb{C}$ é denominado envoltória convexa de $\mathbb{C}$. Denotamos esse conjunto por conv $(\mathbb{C})$.*

Observação 2.1. *A envoltória convexa de $\mathbb{C}$ também pode ser definida como a interseção de todos os conjuntos convexos que contém $\mathbb{C}$. Logo, a envoltória convexa de $\mathbb{C}$ é o menor conjunto convexo que contém $\mathbb{C}$.*

Definição 2.3. *Dizemos que um funcional linear $f \in \mathbb{X}'$ separa dois conjuntos $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ e $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{X}$ quando existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y),$$

para todo $x \in \mathbb{A}$ *e* $y \in \mathbb{B}$.

Se os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ tem determinadas propriedades e são disjuntos, o próximo resultado mostra que existe um funcional separando os dois conjuntos. Este resultado é conhecido como Teorema de Separação e uma demostração do mesmo pode ser vista em [Teorema 2.14, [1]].

Teorema 2.1 (Teorema de Separação)**.** *Sejam* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ *e* $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{X}$ *não vazios, disjuntos, convexos e* $\mathbb{A}$ *aberto. Então existe um funcional* $f \in \mathbb{X}'$ *não nulo separando* $\mathbb{A}$ *e* $\mathbb{B}$.

Introduzimos a seguir dois conjuntos muito importantes para os nossos propósitos.

Definição 2.4. *Um subconjunto* $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}$ *é um cone com vértice na origem, quando para todo* $t \geq 0$ *e* $d \in \mathbb{C}$ *tem-se* $td \in \mathbb{C}$. *Dizemos que* $\mathbb{C}$ *é um cone com vértice em* x_0, *quando* $\mathbb{C} - x_0$ *é um cone com vértice na origem.*

Definição 2.5. *Seja* $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}$ *um cone com vértice em* x_0. *Definimos o cone dual de* $\mathbb{C}$, *denotado por* $\mathbb{C}^*$, *como o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos não negativos em* $\mathbb{C}$, *isto é,*

$$\mathbb{C}^* = \{f \in \mathbb{X}'; f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}\}.$$

Observação 2.2. *O cone* $\mathbb{C}^*$ *tem vértice em zero. Além disto, para* $\mathbb{C} = \{0\}$, *temos* $\mathbb{C}^* = \mathbb{X}'$, *pois caso contrário, deveria existir um funcional* $f \in \mathbb{X}'$ *e algum* $x \in \mathbb{C}$ *tal que* $f(x) < 0$, *o que é um absurdo, já que* $\mathbb{C} = \{0\}$.

No exemplo a seguir ilustramos a Definição 2.5.

Exemplo 1. *Seja* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$. *Então* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$.

Agora veremos alguns conceitos e resultados relacionados com a diferenciabilidade de uma função.

Consideramos uma função $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{Y}$.

Definição 2.6. *A função* f *é diferenciável ou Fréchet-diferenciável em* x_0 *quando existe um operador linear contínuo* $D : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *tal que para todo* $h \in \mathbb{X}$, *temos*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + D(h) + r(h),$$

sendo $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

O operador linear D *é denotado por* $f^{(1)}(x_0)$ *e é denominado derivada ou derivada de Fréchet da função* f *em* x_0. *Ainda, quando* f *é diferenciável em todos os pontos de* $\mathbb{U}$, *dizemos simplesmente que* f *é diferenciável.*

As derivadas de ordem superior são definidas intuitivamente. Suponhamos que f *é* $(k-1)$*-vezes diferenciável. Então sua derivada de ordem* $(k-1)$ *é uma aplicação*

$$f^{(k-1)} : \mathbb{U} \longrightarrow \mathscr{L}_{k-1}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),$$

sendo $\mathscr{L}_{k-1}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *o espaço das aplicações* k *lineares contínuas de* $\mathbb{X}$ *em* $\mathbb{Y}$.

Se $f^{(k-1)}$ *for diferenciável em* x_0*, dizemos que* f *é* k *vezes diferenciável em* x_0*. Usando o isomorfismo canônico*

$$\mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathscr{L}_{k-1}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) \approx \mathscr{L}_k(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),$$

identificamos $f^{(k)}(x_0)$*, a derivada de* $f^{(k-1)}$ *em* x_0*, como a aplicação* k*-linear*

$$f^{(k)} : \mathbb{U} \longrightarrow \mathscr{L}_k(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),$$

que denominamos de k*-ésima derivada de* f *em* x_0*. Quando existe para todo* $x \in \mathbb{U}$*, dizemos que* f *é* k*-vezes diferenciável em* $\mathbb{U}$.

Podemos definir a derivada da função $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ ao longo de uma direção $h \in \mathbb{X}$.

Definição 2.7. *A derivada de* $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *em* x_0 *segundo a direção* h *é o limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

quando tal limite existe. Neste caso, denotamos este limite por $f^{(1)}(x_0)h$.

Quando f é Fréchet-diferenciável em x_0, então f admite derivada segundo qualquer direção $h \in \mathbb{X}$.

Denotamos $x \in \mathbb{R}^n$ como o vetor coluna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ denotamos xy como o produto interno canônico entre os vetores x e y, ou seja,

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Além disto, convecionamos que

$$x \in \mathbb{R}^n_+ \Leftrightarrow x_i \geq 0, i = 1, ..., n.$$

Particularmente, quando $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ é Fréchet-diferenciável em x_0, então $f^{(1)}(x_0)$ é o vetor gradiente da função f em x_0, isto é,

$$f^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix},$$

sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ a derivada parcial da função f com respeito a variável x_i em x_0. Além disto, a derivada de f em x_0 segundo uma direção $h \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$f^{(1)}(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i,$$

ou seja, a derivada de f em x_0 segundo uma direção $h \in \mathbb{R}^n$ é o produto interno entre gradiente de f em x_0 e o vetor h.

Sendo a função $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em x_0, então o operador linear $f^{(1)}(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser representado através de uma matriz em relação as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, matriz esta denominada de Jacobiana de f em x_0 e definida como a seguir

$$f^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} \left(f_1^{(1)}(x_0)\right)^t \\ \vdots \\ \left(f_m^{(1)}(x_0)\right)^t \end{bmatrix},$$

sendo $\left(f_i^{(1)}(x_0)\right)^t$, $i = 1, ..., m$, o transposto do gradiente da função f_i. Usaremos indistintamente a forma matricial ou a forma analítica da derivada da função f em x_0.

Seja $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é de classe $\mathscr{C}^k(\mathbb{U})$, ou $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{U})$ quando existem e são contínuas em $\mathbb{U}$ todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual k das funções coordenadas de f. Determina-se a k-ésima derivada de f no ponto x_0 como a aplicação k-linear

$$f^{(k)}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{\text{k cópias}} \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

sendo que

$$f^{(k)}(x_0)(x_1, ..., x_k) = \begin{bmatrix} f_1^{(k)}(x_0)(x_1, ..., x_k) \\ \vdots \\ f_m^{(k)}(x_0)(x_1, ..., x_k) \end{bmatrix},$$

para todo $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$. Além da aplicação multilinear $f^{(k)}(x_0)$ ser simétrica e contínua, a mesma é também limitada, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|f^{(k)}(x_0)(x_1, ..., x_k)\| \leq C\|x_1\|...\|x_k\|$$

para toda $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$. Veja [70, 93].

Podemos associar a aplicação $f^{(k)}(x_0)$ a uma $k-$forma

$$f^{(k)}(x_0)[\cdot]^k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definida como

$$f^{(k)}(x_0)[x]^k = f^{(k)}(x_0)\left(\underbrace{x, ..., x}_{\text{k vezes}}\right).$$

O conjunto

$$Ker^k f^{(k)}(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n ; f^{(k)}(x_0)\,[h]^k = 0 \right\}$$

é o k-Kernel da aplicação $f^{(k)}(x_0)[\cdot]^k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Observação 2.3. *Em virtude da multilinearidade da aplicação $f^{(k)}(x_0)$, temos*

$$f^{(k)}(x_0)[h+w]^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k)}(x_0)\,[h]^{k-i}\,[w]^i\,,$$

sendo $\displaystyle\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ *e* $f^{(k)}(x_0)\,[h]^{k-i}\,[w]^i = f^{(k)}(x_0)\left(\underbrace{h,...,h}_{k-i},\underbrace{w,...,w}_{i}\right)$.

Evidentemente, para cada vetor h fixado podemos definir o operador linear

$$f^{(k)}(x_0)[h]^{k-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

como

$$f^{(k)}(x_0)[h]^{k-1}x = f^{(k)}(x_0)\left(\underbrace{h,...,h}_{k-1},x\right)\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Similarmente para as funções $f_i^{(k)}(x_0)[h]^{k-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,...,m$, temos funcionais lineares definidos como a seguir

$$f_i^{(k)}(x_0)[h]^{k-1}x = f_i^{(k)}(x_0)(h,...,h,x).$$

A seguir enunciamos mais um clássico teorema e algumas considerações. A demostração deste resultado pode ser encontrada em [Teorema 3.8.1, [53]].

Teorema 2.2 (Teorema de Representação de Riesz)**.** *Seja $(\mathbb{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}})$ um espaço de Hilbert. Então, para todo $f \in \mathbb{H}'$, existe um único $x_f \in \mathbb{H}$ tal que*

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle_{\mathbb{H}}\,,$$

sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ o produto interno do espaço $\mathbb{H}$.

O Teorema de Riesz (Teorema 2.2) estabelece uma correspondência biunívoca entre os vetores do espaço de Hilbert $\mathbb{R}^n$ e seu dual, ou melhor, cada funcional é determinado unicamente por um vetor do espaço $\mathbb{R}^n$ e vice-versa. Desta forma, nos capítulos que se seguem trataremos sem distinções o funcional $f_i^{(k)}(x_0)[h]^{k-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e o seu correspondente vetor no espaço $\mathbb{R}^n$.

Em virtude do isomorfismo entre o espaço vetorial dos operadores lineares $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e o espaço vetorial das matrizes reais $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, usaremos sem distinções a forma analítica do operador linear $f^{(k)}(x_0)[h]^{k-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ou a sua representação matricial a seguir

$$f^{(k)}(x_0)[h]^{k-1} = \begin{bmatrix} \left(f_1^{(k)}(x_0)[h]^{k-1}\right)^t \\ \vdots \\ \left(f_m^{(k)}(x_0)[h]^{k-1}\right)^t \end{bmatrix}.$$

O clássico Teorema do Valor Médio [Página 27, [40]] será de muita valia em nossas análises. A seguir enunciamos este importante resultado.

Teorema 2.3 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{Y}$ uma função diferenciável no segmento $\{x_0 + th; t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{U}$. Então*

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|f^{(1)}(x_0 + th) - T\right\| . \|h\|,$$

sendo $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ um operador linear contínuo.

Agora apresentamos o conceito de multifunções e alguns resultados a respeito. Para maiores detalhes consulte [3, 40].

Definição 2.8. *Sejam $\mathbb{A}$ um conjunto não vazio e $2^{\mathbb{B}}$ a família de subconjuntos de $\mathbb{B}$. Uma função $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow 2^{\mathbb{B}}$ é denominada de multifunção.*

Sejam $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{X}$. Consideramos a função

$$d(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \sup_{x\in\mathbb{X}_1} d(x, \mathbb{X}_2),$$

sendo $d(x, \mathbb{X}_2) = \inf_{y\in\mathbb{X}_2} d(x, y)$. O máximo entre os números $d(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ e $d(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)$ define a distância de Hausdorff ($\mathscr{H}$) entre os conjuntos $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, isto é,

$$\mathscr{H}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \max\{d(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2), d(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)\}.$$

Considerando a família dos subconjuntos fechados de $\mathbb{X}$, logo a métrica de Hausdorff fica bem definida. Em outras palavras, se definirmos a seguinte família de conjuntos

$$\mathscr{F}(\mathbb{X}) = \left\{\mathbb{F} \in 2^{\mathbb{X}}; \mathbb{F} \text{ é não vazio, limitado e fechado}\right\},$$

então $(\mathscr{F}(\mathbb{X}), \mathscr{H})$ é um espaço métrico.

O próximo resultado enunciado é uma versão do Teorema do Ponto Fixo para multifuncões. Para isto, precisamos definir uma contração em contexto de multifunções.

Definição 2.9. *Sejam $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $\Phi : \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{X}}$ uma multifunção. Dizemos que Φ é uma contração quando existe um número $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$\mathscr{H}(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \theta d(x_1, x_2),$$

para todo x_1, $x_2 \in \mathbb{Y}$.

Uma demonstração dos dois próximos resultados podem ser vistas em [Lemas 1 e 2, [40]].

Teorema 2.4 (Princípio da Contração para Multifunções)**.** *Sejam* $(\mathbb{X}, d)$ *um espaço métrico e* $\Phi : \mathbb{B}_\varepsilon(x_0) \longrightarrow 2^{\mathbb{X}}$ *uma multifunção, sendo* $\Phi(x) \neq \emptyset$ *fechado para todo* $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{X}; d(x, x_0) < \varepsilon\}$*. Suponhamos que exista um número* $\theta \in (0,1)$ *tal que*

(i) $\mathscr{H}(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \theta d(x_1, x_2)$*, para todo* $x_1, x_2 \in B_\varepsilon(x_0)$*;*

(ii) $d(x_0, \Phi(x_0)) < (1-\theta)\varepsilon$*.*

Então para qualquer η *satisfazendo a desigualdade*

$$d(x_0, \Phi(x_0)) < \eta < (1-\theta)\varepsilon,$$

existe um ponto fixo $x \in \mathbb{B}_{\frac{\eta}{1-\theta}}(x_0)$ *para* Φ*, isto é,*

$$x \in \Phi(x).$$

Além disto, dentre os pontos x *que satisfazem estas condições existe um tal que*

$$d(x, x_0) \leq \frac{2}{1-\theta} d(x_0, \Phi(x_0)).$$

Teorema 2.5. *Sejam* $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{X}$ *variedades lineares translações de um subespaço vetorial. Então,*

$$\mathscr{H}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \inf\{\|x_1 - x_2\|; x_i \in \mathbb{X}_i, i = 1, 2\},$$

sendo $\mathscr{H}$ *a métrica de Hausdorff.*

Em algumas situações a variedade linear do teorema anterior é uma translação do kernel de um operador linear. Este fato pode ser verificado no próximo teorema e uma demonstração do mesmo pode ser encontrada em [Teorema 6.4, [59]].

Teorema 2.6. *Sejam* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *um operador linear e* $b \in Im(T)$*. Então a variedade linear* $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n; Tx = b\}$ *é uma translação do subespaço vetorial* $Ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^n; Tx = 0\}$*, ou seja,*

$$\mathbb{L} = \widetilde{x} + Ker(T),$$

para algum $\widetilde{x} \in \mathbb{L}$*.*

Para um operador linear contínuo $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ consideramos a multifunção

$$\Phi : \mathbb{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{X}},$$

definida como

$$\Phi(x) = x - \{T\}^{-1} g(x),$$

sendo g uma funcão de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ tal que $Im(g) \subseteq Im(T)$ e $\{T\}^{-1} : \mathbb{Y} \longrightarrow 2^{\mathbb{X}}$ é definida como

$$\{T\}^{-1} y = \{x \in \mathbb{X}; T(x) = y\}. \tag{2.1}$$

Observação 2.4. *Suponhamos $\widehat{x} \in \mathbb{X}$ fixado tal que $g(\widehat{x}) \in Im(T)$. Então*

$$\Phi(\widehat{x}) = \{x \in \mathbb{X}; T(\widehat{x} - x) = g(\widehat{x})\} = \widetilde{x} + Ker(T),$$

sendo $\widetilde{x}$ tal que $T(\widehat{x} - \widetilde{x}) = g(\widehat{x})$.

Teorema 2.7. *Seja $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ um operador linear contínuo e $\{T\}^{-1}$ é definida como em* (2.1). *Consideramos*

$$\left\|\{T\}^{-1}\right\| = \sup_{y \in \mathbb{Y}} \left\{\|y\|^{-1} \inf\left\{\|x\|; x \in \mathbb{X}, T(x) = y\right\}\right\}. \tag{2.2}$$

Se $Im(T) = \mathbb{Y}$, então $\left\|\{T\}^{-1}\right\| < \infty$.

Para maiores detalhes deste resultado veja [Lema 3, [40]].

A seguir observamos uma propriedade a respeito da igualdade (2.2).

Proposição 2.1. *Se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um operador linear sobrejetor. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\|\{\alpha T\}^{-1}\right\| \leq \frac{C}{\alpha},$$

sendo $\alpha > 0$.

Demonstração. De fato, seja $y \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha > 0$. Em virtude do Teorema 2.7, temos

$$\left\|\{\alpha T\}^{-1}\right\| = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{\|y\|^{-1} \inf\left\{\|x\|; x \in \mathbb{R}^n, \alpha T x = y\right\}\right\} < \infty.$$

Notamos que $\inf\left\{\|x\|; x \in \mathbb{R}^n, \alpha T x = y\right\}$ é o valor ótimo do seguinte problema de Otimização

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } \|x\| \\ \text{Sujeito a } \alpha T x = y \end{array} \tag{2.3}$$

Como o operador linear T é sobrejetor, logo $\widehat{x} = \alpha^{-1} T^t \left(TT^t\right)^{-1} y$ é um minimizador do Problema (2.3) [32, 100], sendo T^t o operador adjunto de T. Além disto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha T x = y$, temos

$$T\left(x - \widehat{x}\right) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \left(x - \widehat{x}\right)^t \widehat{x} &= \alpha^{-1} \left(x - \widehat{x}\right)^t T^t \left(TT^t\right)^{-1} y \\ &= \alpha^{-1} \left(T\left(x - \widehat{x}\right)\right)^t \left(TT^t\right)^{-1} y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\left(x - \widehat{x}\right)^t$ e $\widehat{x}$ são ortogonais e desta forma

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|\widehat{x} + x - \widehat{x}\|^2 \\ &= \|\widehat{x}\|^2 + \|x - \widehat{x}\|^2 \\ &\geq \|\widehat{x}\|^2, \end{aligned}$$

isto é, $\|\widehat{x}\| = \inf\{\|x\|\,; x \in \mathbb{R}^n, \alpha T x = y\}$. Agora denotando $\widehat{T} = T^t\left(TT^t\right)^{-1}$, obtemos

$$\|\widehat{x}\| = \alpha^{-1}\|\widehat{T}y\| \text{ e } \frac{\|\widehat{T}y\|}{\|y\|} \leq \|\widehat{T}\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|\{\alpha T\}^{-1}\right\| &= \sup_{y\in\mathbb{R}^m}\left\{\|y\|^{-1}\inf\{\|x\|\,; x\in\mathbb{R}^n, \alpha T x = y\}\right\} \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^m}\left\{\|y\|^{-1}\alpha^{-1}\left\|\widehat{T}y\right\|\right\} \\
&\leq \alpha^{-1}\left\|\widehat{T}\right\| \\
&\leq \alpha^{-1}C,
\end{aligned}$$

sendo $C = \left\|\widehat{T}\right\|$. ■

Em Otimização, muitas condições necessárias de otimalidade derivam de algum dos vários teoremas de alternativa, como pode ser visto por exemplo em [11, 16, 23, 47, 60, 61, 98]. Neste sentido, o Teorema de Alternativa Motzkin e Tucker será de grande valia em nosso trabalho. Para estes teoremas adotamos as seguintes convenções.

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}
x = y &\Leftrightarrow x_i = y_i, i = 1, ..., n \\
x \geqq y &\Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, ..., n \\
x \geq y &\Leftrightarrow x \geqq y \text{ e } x \neq y \\
x > y &\Leftrightarrow x_i > y_i, i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Teorema 2.8 (Teorema de Alternativa de Motzkin)**.** *Consideramos as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \neq 0$, $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{s\times n}$. Então exatamente uma das seguintes condições deve ocorrer:*

(i) O sistema

$$\begin{cases} Ax > 0 \\ Bx \geqq 0 \\ Cx = 0 \end{cases}$$

tem uma solução $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) O sistema

$$\begin{cases} A^t y_1 + B^t y_2 + C^t y_3 = 0 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geqq 0 \end{cases}$$

tem solução $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$.

Teorema 2.9 (Teorema de Alternativa de Tucker)**.** *Consideramos as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \neq 0$, $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{s\times n}$. Então exatamente uma das seguintes condições deve ocorrer:*

(i) O sistema

$$\begin{cases} Ax \geq 0 \\ Bx \geqq 0 \\ Cx = 0 \end{cases}$$

tem uma solução $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) O sistema

$$\begin{cases} A^t y_1 + B^t y_2 + C^t y_3 = 0 \\ y_1 > 0, y_2 \geqq 0 \end{cases}$$

tem solução $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$.

Para maiores detalhes destes dois últimos teoremas veja [Teoremas 1 e 2, [63]].

A próxima seção é dedicada a mais uma ferramenta útil para estabelecermos condições necessárias de otimalidade.

2.2 Teorema de Dubovitskii-Milyutin

Dubovitskii e Milyutin desenvolveram condições necessárias de otimalidade na forma de uma equação baseados na Teoria da Análise Funcional. Neste trabalho, apresentamos alguns resultados obtidos através da aplicação do resultado obtido por Dubovitskii e Milyutin. Como segue abordaremos este resultado e para isto consideramos o seguinte problema de Otimização

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar f(x)} \\ &\text{Sujeito a x} \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i, \end{aligned} \tag{2.4}$$

sendo $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_i \subseteq \mathbb{X}$, $i = 1, ..., n$, são conjuntos com interior não vazio e $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \mathbb{X}$ possivelmente não possui pontos interiores.

Numa linguagem mais formal, os conjuntos $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, representam as restrições de desigualdades e $\mathbb{Q}_{n+1}$ as restrições de igualdade do problema.

Os seguintes conceitos são fundamentais para a aplicação do Teorema de Dubovitskii-Milyutin e maiores detalhes podem ser vistos em [26, 31].

Definição 2.10. *Dizemos que um vetor h é uma direção de descida de f no ponto x_0, quando existem uma vizinhança $\mathbb{V}$ de h, $\alpha < 0$ e $t_0 > 0$, tais que para todo $t \in (0, t_0)$ e qualquer $v \in \mathbb{V}$, tivermos*

$$f(x_0 + tv) \leq f(x_0) + t\alpha.$$

Denotamos por $\mathscr{D}(f, x_0)$ o conjunto das direções de descida de f no ponto x_0. A função f é dita regular de descida quando $\mathscr{D}(f, x_0)$ é convexo.

Definição 2.11. *Seja $\mathbb{Q}_i$ um conjunto de restrições de desigualdade. Dizemos que um vetor h é uma direção factível para $\mathbb{Q}_i$ no ponto x_0, quando existem uma vizinhança $\mathbb{V}$ de h e $t_0 > 0$, tais que para todo $t \in (0, t_0)$ e qualquer $v \in \mathbb{V}$, tivermos*

$$x_0 + tv \in \mathbb{Q}_i.$$

Denotamos por $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_i, x_0)$ o conjunto das direções factíveis para $\mathbb{Q}_i$ no ponto x_0. A restrição $\mathbb{Q}_i$ é dita regular quando $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_i, x_0)$ é convexo.

Definição 2.12. *Seja $\mathbb{Q}_{n+1}$ o conjunto de restrições de igualdade. Dizemos que um vetor h é uma direção tangente a $\mathbb{Q}_{n+1}$ no ponto x_0, quando existe $t_0 > 0$, tal que para todo $t \in (0, t_0)$ existe um vetor*

$$x(t) = x_0 + th + r(t) \in \mathbb{Q}_{n+1}$$

e o vetor $r(t) \in \mathbb{X}$ é tal que para qualquer vizinhança $\mathbb{V}$ de zero, $\dfrac{1}{t} r(t) \in \mathbb{V}$ para t suficientemente pequeno, ou equivalentemente, $\|r(t)\| = o(t)$. Denotamos por $\mathscr{T}(\mathbb{Q}_{n+1}, x_0)$ o conjunto das direções tangentes a $\mathbb{Q}_{n+1}$ no ponto x_0. A restrição $\mathbb{Q}_{n+1}$ é dita regular quando $\mathscr{T}(\mathbb{Q}_{n+1}, x_0)$ é convexo.

Observamos algumas propriedades dos cones definidos anteriormente.

Observação 2.5. *Sejam $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_i, x_0)$, $\mathscr{D}(f, x_0)$ e $\mathscr{T}(\mathbb{Q}_{n+1}, x_0)$ o conjunto das direções factíveis, de descida e tangentes, respectivamente.*

(i) $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_i, x_0)$ é um cone aberto com vértice em 0, $i = 1, ..., n$;

(ii) $\mathscr{D}(f, x_0)$ é um cone aberto com vértice em 0;

(iii) $\mathscr{T}(\mathbb{Q}_{n+1}, x_0)$ é um cone com vértice em 0.

O Teorema enunciado a seguir será de fundamental importância na obtenção da condição necessária de otimalidade para o Problema (2.4). A igualdade resultante do teorema é conhecida como Equação de Euler-Lagrange, cuja demonstração é baseada no Teorema de Separação (Teorema 2.1) e pode ser encontrada em [Lema 5.11, [31]].

Teorema 2.10 (Equação de Euler-Lagrange)**.** *Sejam $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n+1$, cones convexos com vértices em 0, sendo $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n$, abertos. Então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset$ se, e somente se, existem funcionais lineares $g_i \in \mathbb{C}_i^*$, $i = 1, ..., n+1$, não todos nulos, tais que*

$$\sum_{i=1}^{n+1} g_i = 0.$$

Agora, recordamos o conceito de minimizador local para o Problema (2.4).

Definição 2.13. *Dizemos que $x_0 \in \mathbb{Q} = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ é um minimizador local do Problema (2.4) quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in B_\delta(x_0) \cap \mathbb{Q}$. Caso $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in B_\delta(x_0) \cap \mathbb{Q}$ dizemos que x_0 é um minimizador local estrito. Ainda se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{Q}$, x_0 é um minimizador global do Problema (2.4).*

Por fim, enunciamos e provamos um dos principais resultados deste capítulo.

Teorema 2.11 (Teorema de Dubovitskii-Milyutin). *Seja $x_0 \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ um minimizador local do Problema (2.4). Suponha que f é regular de descida em x_0, com direções de descida no cone $\mathbb{C}_0$; as restrições de desigualdade $\mathbb{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, são regulares em x_0, com direções factíveis nos cones $\mathbb{C}_i$, $i = 1, ..., n$, a restrição de igualdade $\mathbb{Q}_{n+1}$ é regular em x_0, com direções tangentes no cone $\mathbb{C}_{n+1}$. Então existem funcionais lineares contínuos $g_i \in \mathbb{C}_i^*$, $i = 0, ..., n+1$, não todos nulos, que satisfazem a equação*

$$\sum_{i=0}^{n+1} g_i = 0.$$

Demonstração. Primeiramente provaremos que a condição necessária para x_0 ser um minimizador local de (2.4) é

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset,$$

isto é, nenhuma direção de descida de f pode ser factível para todas as restrições.

Com efeito, suponhamos que isto é falso, logo existe $h \in \mathbb{C}_i$, $i = 0, ..., n+1$. Da definição dos cones $\mathbb{C}_i$, $i = 0, ..., n$, existem uma vizinhança $\mathbb{V}$ de h e $t_0 > 0$ tal que, para todo $t \in (0, t_0)$ e $v \in \mathbb{V}$, temos

$$x_0 + tv \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathbb{Q}_i$$

e $x_0 + tv$ satisfaz a desigualdade

$$f(x_0 + tv) \leq f(x_0) + t\alpha$$

para algum $\alpha < 0$.

Como h é uma direção tangente, logo o vetor $x(t) = x_0 + th + r(t) \in \mathbb{Q}_{n+1}$, sendo $\|r(t)\| = o(t)$. Seja $t_1 > 0$ tal que para todo $t \in (0, t_1)$, $\frac{1}{t}r(t) \in \mathbb{V} - h$, isto é, $\overline{h}(t) = h + \frac{1}{t}r(t) \in \mathbb{V}$. Agora para $0 < t < \min\{t_0, t_1\}$ o vetor $x(t) = x_0 + t\overline{h}(t)$ satisfaz

$$x(t) = x_0 + t\overline{h}(t) = x_0 + th + r(t) \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathbb{Q}_i$$

e

$$x(t) = x_0 + t\overline{h}(t) = x_0 + th + r(t) = x_0 + tv \in \mathbb{Q}_{n+1},$$

para $v \in \mathbb{V}$. Em outras palavras, $x(t)$ é factível para o Problema (2.4) e também satisfaz a desigualdade

$$f(x(t)) = f(x_0 + t\overline{h}(t)) \leq f(x_0) + t\alpha < f(x_0).$$

Porém, isto contradiz o fato de x_0 ser um minimizador local do Problema (2.4). Portanto,

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset.$$

Além disto, $\mathbb{C}_i$, $i = 0, ..., n$ são cones abertos convexos e $\mathbb{C}_{n+1}$ é um cone convexo, logo aplicando o Teorema 2.10 concluímos o resultado. ∎

Existem variantes do Teorema de Dubovitskii-Milyutin, além de versões para Otimização multiobjetivo no sentido da eficiência fraca e da eficiência. Estas podem ser encontradas em [24, 51, 52, 56, 96].

Ainda sob as hipóteses do Teorema de Dubovitskii-Milyutin, se $x_0 \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ é um minimizador local do Problema (2.4), então existem funcionais $g_i \in \mathbb{C}_i^*$, $i = 0, ..., n+1$, tais que

$$\sum_{i=0}^{n+1} g_i = 0.$$

Sob certas condições podemos garantir que o funcional g_0 associado ao dual do cone das direções de descida ($\mathbb{C}_0^*$) é diferente de zero. Observamos este fato a seguir.

Observação 2.6. *Sob as hipóteses do Teorema* 2.11 *e sendo* $\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}_i \neq \emptyset$. *Então* $g_0 \neq 0$.

Com efeito, suponhamos que $g_0 = 0$. Do Teorema de Dubovitskii-Milyutin, temos

$$\sum_{i=1}^{n+1} g_i = \sum_{i=0}^{n+1} g_i - g_0 = 0.$$

O que implica, pelo Lema 2.10, que $\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}_i = \emptyset$, uma contradição. Portanto, $g_0 \neq 0$.

Segue do Teorema de Dubovitskii-Milyutin que para determinarmos condições necessárias para um minimizador local de um problema definido como em (2.4), devemos determinar o cone de direções de descida, o cone de direções factíveis e o cone de direções tangentes, além disto determinar seus respectivos duais. A seguir vemos que sob certas condições podemos determinar tais cones e seus respectivos duais.

Teorema 2.12. *Consideramos uma função* $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(i) Suponhamos que $h \in \mathscr{D}(f, x_0)$ *e* $f^{(1)}(x_0)$ *existe, então*

$$f^{(1)}(x_0)h < 0;$$

(ii) Seja f *diferenciável em* x_0, *então*

$$\mathscr{D}(f, x_0) = \left\{h \in \mathbb{X}; f^{(1)}(x_0)h < 0\right\}$$

e f *é regular de descida.*

Para maiores detalhes veja [Teoremas 2.10, 2.11 e 2.12, [26]].

Teorema 2.13. *Consideramos uma função* $g : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e definimos o seguinte conjunto*

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{U}; g(x) \leq g(x_0)\}.$$

(i) O cone de direções de descida está contido no cone de direções factíveis, ou seja,

$$\mathscr{D}(g, x_0) \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{Q}, x_0);$$

(ii) Se g *é diferenciável e* $g^{(1)}(x_0) \neq 0$*, então*

$$\mathscr{F}(\mathbb{Q}, x_0) = \left\{h \in \mathbb{X}; g^{(1)}(x_0)h < 0\right\}.$$

Para maiores detalhes veja [Teoremas 2.14 e 2.15, [26]].

Observação 2.7. *Se* x_0 *pertence ao interior de* Q*, então* $\mathscr{F}(\mathbb{Q}, x_0) = \mathbb{X}$ *e, consequentemente,* $\mathscr{F}^*(\mathbb{Q}, x_0) = \{0\}$*. Portanto, nos interessam apenas os casos em que* x_0 *está na fronteira de* Q*.*

Finalmente, o cone de direções tangentes pode ser determinada por meio do Teorema de Lyusternik e uma prova deste teorema pode ser encontrada em [Página 109, [1]].

Teorema 2.14 (Teorema de Lyusternik)**.** *Sejam* $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *diferenciável,* $\mathbb{U}$ *uma vizinhança de* x_0*,* $F(x_0) = 0$ *e suponhamos que* $F^{(1)}(x_0)$ *é sobrejetor. Então o conjunto de direções tangentes para o conjunto* $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{X}; F(x) = 0\}$ *no ponto* x_0 *é o kernel do operador linear* $F'(x_0)$*, isto é,*

$$\mathscr{T}(\mathbb{Q}, x_0) = KerF^{(1)}(x_0).$$

Quando a sobrejetividade do operador linear $F^{(1)}(x_0)$ não é satisfeita, garantimos apenas a inclusão $\mathscr{T}(\mathbb{Q}, x_0) \subseteq KerF^{(1)}(x_0)$. Neste caso, veremos no Capítulo 2 que é possível obtermos o cone das direções tangentes, por meio de uma generalização do Teorema de Lyusternik.

Vimos como construir os cones fundamentais para certas classes de problemas e para aplicarmos o Teorema de Dubovitskii-Milyutin é essencial o conhecimento dos seus respectivos cones duais. Sob certas condições, os cones duais podem ser facilmente calculados, utilizando os resultados que seguem.

Teorema 2.15. *(i) Se* $\mathbb{C}$ *um subespaço vetorial de* $\mathbb{X}$*, então*

$$\mathbb{C}^* = \{f \in \mathbb{X}'; f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{X}\};$$

(ii) Se $f \in \mathbb{X}'$ *um funcional linear fixado e* $\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{X}; f(x) \geq 0\}$*, então*

$$\mathbb{C}^* = \{\lambda f; \lambda \geq 0\}.$$

Para maiores detalhes veja [Teoremas 2.19 e 2.20, [26]].

Com este último resultado finalizamos este capítulo e nos demais capítulos encontram-se os principais resultados deste trabalho.

Capítulo 3

Condições Necessárias de Otimalidade: Caso Mono - Objetivo

Nosso intuito neste capítulo é discutirmos condições de otimalidade específicas para o problema de Otimização que consiste de

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar f(x)} \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M} = \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F, \end{array} \tag{3.1}$$

sendo $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto não vazio,

$$\mathbb{M}_g = \{x \in \mathbb{U}; g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., s\}, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\}, \tag{3.3}$$

$F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^s$ são suficientemente diferenciáveis.

Denotamos por

$$\mathbb{I} = \{1, ..., s\},$$

$$\mathbb{J} = \{1, ..., m\},$$

$$\mathbb{I}(x_0) = \{i \in \mathbb{I}; g_i(x_0) = 0\} \text{ o conjunto das restrições ativas em } x_0$$

e

$$s_0 = |\mathbb{I}(x_0)| \text{ é a cardinalidade do conjunto } \mathbb{I}(x_0).$$

O clássico Teorema de Karush-Kuhn-Tucker [45, 83], ou simplesmente Teorema de KKT, estabelece condições necessárias de otimalidade para problemas definidos como em (3.1).

Teorema 3.1. *Seja x_0 um minimizador local de (3.1) e supondo que alguma condição de qualificação é satisfeita em x_0. Então, existem vetores, ou multiplicadores de Lagrange, $\mu \in \mathbb{R}^s_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j F_j^{(1)}(x_0) &= 0, && (3.4) \\ \mu_i g_i(x_0) &= 0, i \in \mathbb{I}. && (3.5) \end{aligned}$$

No Teorema de KKT é assumido que alguma condição de qualificação é satisfeita em x_0 e esta hipótese especial é uma forma de garantir a igualdade entre o dual do cone tangente e o dual do cone linearizado. Esta igualdade é fundamental para derivar as condições de otimalidade de KKT [83] e é conhecida como Condição de Qualificação de Guignard. A mesma foi introduzida por Guignard [36] para dimensão infinita e reformulada para o caso de dimensão finita por Gould e Tolle [33]. A Condição de Qualificação de Guignard tem um destaque especial entre as condições de qualificação, porque ela é a mais fraca condição de qualificação conhecida na literatura, no sentido que ela é obtida sempre que qualquer outra condição de qualificação é válida [28, 82, 89].

Definição 3.1. *Dizemos que a Condição de Qualificação de Guignard (GCQ) é satisfeita em* x_0 *se*

$$\mathscr{T}^*(\mathbb{M}, x_0) = \mathscr{L}^*(\mathbb{M}, x_0),$$

sendo que

$$\mathscr{T}(\mathbb{M}, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n; \exists\, (x_n) \subseteq \mathbb{C} \ e \ (t_n) \subseteq \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \ tal\ que\ x_n \to x_0 \ e \ t_n(x_n - x_0) \to d\}$$

é o cone contingente e

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n; g_i^{(1)}(x_0)d \leq 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \ e \ F^{(1)}(x_0)d = 0\}$$

é o cone linearizado.

O fato a seguir é bem conhecido na literatura especializada e para maiores detalhes sugerimos ver [Lema 7.24, [83]].

Proposição 3.1. *Seja* x_0 *um minimizador local do Problema* (3.1). *Então*

$$f^{(1)}(x_0) \in \mathscr{T}^*(\mathbb{M}, x_0),$$

sendo $\mathscr{T}^*(\mathbb{M}, x_0)$ *o cone dual do cone contingente* $\mathscr{T}(\mathbb{M}, x_0)$.

A Condição de Qualificação de Independência Linear é talvez a mais conhecida dentre as condições de qualificação e também a mais forte [28, 82, 89], no sentido que a Condição de Qualificação de Independência Linear implica nas demais condições de qualificação conhecidas na literatura especializada.

Definição 3.2. *Dizemos que a Condição de Qualificação de Independência Linear (LICQ) é satisfeita em* x_0 *se*

$$g_i^{(1)}(x_0), i \in \mathbb{I}(x_0) \ e \ F_j^{(1)}(x_0), j \in \mathbb{J}$$

são linearmente independentes.

Um dos motivos do sucesso da condição de qualificação LICQ deve-se a simplicidade em ser enunciada e verificada. Apesar desta simplicidade, existem muitos problemas em que as igualdades (3.4) e (3.5) são verificadas no minimizador do problema, para $\mu \in \mathbb{R}^s_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ sem que LICQ seja satisfeita [Exemplo 7.38, [83]]. Por outro lado, LICQ é a única condição de qualificação conhecida que garante existência e unicidade dos multiplicadores de Lagrange associados as igualdades (3.4) e (3.5), como é mostrado na Referência [97]. Com objetivo de enfraquecer LICQ outras variantes tem sido propostas e dentre estas destacamos a Condição de Qualificação de Mangasarian-Fromovitz.

Definição 3.3. *Dizemos que a Condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) é satisfeita em x_0 quando existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\begin{aligned} g_i^{(1)}(x_0)z &< 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(1)}(x_0)z &= 0, j \in \mathbb{J} \end{aligned}$$

e $F_j^{(1)}(x_0), j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes.

Pode-se mostrar que se LICQ é satisfeita em x_0, então MFCQ é satisfeita em x_0, isto é, a condição MFCQ é mais fraca do que LICQ [45, 83]. Além disto, MFCQ equivale a compacidade do conjunto dos multiplicadores associados a (3.4) e (3.5), como é provado em [29].

A seguir temos um panorama das relações entre as condições de qualificação que citamos aqui e num contexto geral.

$$\boxed{\text{LICQ}} \longrightarrow \boxed{\text{MFCQ}} \longrightarrow \boxed{\text{GCQ}}$$

$$\boxed{\text{Qualquer Condição de Qualificação}} \longrightarrow \boxed{\text{GCQ}}$$

3.1 Problemas Absolutamente Degenerados com Restrições de Desigualdade e Igualdade

Nesta seção, apresentaremos novas condições de qualificação e provaremos condições necessárias de otimalidade para o problema de Otimização restrita definidos como em (3.1), em que as condições de qualificação LICQ e MFCQ falham e em algumas situações qualquer outra condição de qualificação também não é satisfeita. Um ponto importante a respeito das condições de qualificação LICQ e MFCQ é que ambas dependem diretamente da derivada de primeira ordem das funções envolvidas nas restrições do Problema (3.1). Em muitos exemplos a primeira derivada das funções envolvidas na restrição do Problema (3.1) podem ser nulas no minimizador e, consequentemente, as condições de qualificação LICQ e MFCQ não podem ser usadas. Por exemplo, consideramos o seguinte problema:

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar } f(x) = x_3^2 - x_1 - x_2 \\ &\textit{Sujeito a } x \in \mathbb{M} = \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F, \end{aligned}$$

sendo

$$\mathbb{M}_g = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_2 + x_1) \leq 0\}$$

e

$$\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{R}^3; F(x) = 2x_3^3 - x_2^3 + x_1^3 = 0\}.$$

Primeiramente, afirmamos que $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um minimizador global do Problema (2). Com efeito, observamos que x_0 é factível e

$$g(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_2 + x_1) \leq 0 \Rightarrow -x_2 - x_1 \geq 0.$$

Como $x_3^2 \geq 0$ e para todo x factível, temos

$$f(x) = x_3^2 - x_1 - x_2 \geq 0 = f(x_0).$$

Logo x_0 é um minimizador global do Problema (2). Agora, notamos que

$$g^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 2x_2x_1 + 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 \\ 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow g^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 \\ -3x_2^2 \\ 6x_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow F^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e claramente as condições de qualificação LICQ e MFCQ falham neste caso. Mais do que isto, na verdade nenhuma condição de qualificação é satisfeita em x_0. Com efeito, observamos que o cone linearizado do conjunto factível é dada por

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0) = \mathbb{R}^3,$$

logo o seu dual é

$$\mathscr{L}^*(\mathbb{M}, x_0) = \{0\}.$$

Por outro lado, sabemos pela Proposição 3.1 que $f^{(1)}(x_0) \in \mathscr{T}^*(\mathbb{M}, x_0)$. Como

$$f^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

isto significa que $\mathscr{L}^*(\mathbb{M}, x_0) \neq \mathscr{T}^*(\mathbb{M}, x_0)$, ou seja, GCQ não é satisfeita em x_0 e, consequentemente, qualquer outra condição de qualificação não pode ser satisfeita em x_0.

A seguir formalizamos um Problema Absolutamente Degenerado.

Definição 3.4. *Seja que x_0 um minimizador local do Problema (3.1). Consideramos os seguintes casos de degenerações absolutas*

$$g_i^{(r)}(x_0) = 0, i \in \mathbb{I}(x_0), r = 1, ..., q-1, \tag{3.6}$$

e

$$F^{(r)}(x_0) = 0, r = 1, ..., p-1 \tag{3.7}$$

sendo $p, q \geq 2$. Dizemos que o problema definido como em (3.1) é um Problema Absolutamente Degenerado quando as restrições do referido problema satisfazem as degenerações absolutas definidas como em (3.6) e (3.7).

Evidentemente, problemas absolutamente degenerados constituem uma classe de problemas irregulares, já que não são satisfeitas LICQ e MFCQ em x_0.

No decorrer desta seção assumiremos que o problema (3.1) satisfaz as degenerações absolutas dadas em (3.6) e (3.7). Além disto, observamos que num contexto geral podemos verificar facilmente que nenhuma outra condição de qualificação é satisfeita em x_0 quando $f^{(1)}(x_0) \neq 0$. Desta forma, propomos novas condições necessárias de otimalidade para o Problema (3.1), com o custo do aumento na ordem de diferenciabilidade das funções envolvidas nas restrições do problema. Para isto, apresentamos ao longo desta seção duas novas condições de qualificação similares às LICQ e MFCQ.

Definição 3.5. *Dizemos que a Condição de Qualificação de Independência Linear com respeito a $h \in \mathbb{R}^n$ (abreviadamente: h-LICQ) é satisfeita em x_0 se*

$$g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}, i \in \mathbb{I}(x_0) \text{ e } F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$$

são linearmente independentes.

Para problemas com restrições de desigualdade o conceito anterior coincide com a condição de qualificação proposta por Brezhneva e Tretyakov em [Definição 4, [16]]. Além disto, quando $q = p = 1$, então h-LICQ coincide com LICQ.

Para provarmos nosso primeiro resultado, enunciamos e provamos uma série de resultados auxiliares. Primeiramente, definimos os seguintes conjuntos

$$\mathbb{H}_g(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n; g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^q = 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \right\} \tag{3.8}$$

e

$$\mathbb{H}_F(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n; F^{(p)}(x_0)\,[h]^p = 0 \right\}. \tag{3.9}$$

Observamos que os conjuntos $\mathbb{H}_g(x_0)$ e $\mathbb{H}_F(x_0)$ anteriores nada mais são do que o q-Kernel de g e o p-Kernel de F, ambos em x_0, respectivamente.

Lema 3.1. *Sejam $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0 e que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é válida em x_0. Então, existem $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma aplicação $y : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que*

$$F(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0$$

e

$$g_i(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0, i \in \mathbb{I}(x_0),$$

sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha)$.

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$, $R > 1$, $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{R}$, $s_0 = |\mathbb{I}(x_0)|$ e $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é satisfeita em x_0. Suponhamos ainda, sem perda de generalidade, que $\|h\| = 1$ e $p \geq q$. Definimos a multifunção $\Phi : \mathbb{B}_\varepsilon(0) \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ por

$$\Phi(y) = y - \{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\,\Pi(x_0 + \alpha h + y),$$

sendo $\Gamma(\alpha h) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{s_0+m}$ o operador linear definido como

$$\Gamma(\alpha h) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1}\right)^t \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1}\right)^t \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(F_1^{(p)}(x_0)\,[\alpha h]^{p-1}\right)^t \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(F_m^{(p)}(x_0)\,[\alpha h]^{p-1}\right)^t \end{bmatrix} = \alpha^{p-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(q-1)!}\left(g_{i_1}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}\right)^t \\ \vdots \\ \frac{1}{(q-1)!}\left(g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}\right)^t \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(F_1^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right)^t \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(F_m^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right)^t \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

e

$$\Pi(x_0+\alpha h+y) = \begin{bmatrix} \alpha^{p-q} g_{i_1}(x_0+\alpha h+y) \\ \vdots \\ \alpha^{p-q} g_{i_{r_0}}(x_0+\alpha h+y) \\ F_1(x_0+\alpha h+y) \\ \vdots \\ F_m(x_0+\alpha h+y) \end{bmatrix}.$$

Em virtude da hipótese h-LICQ é imediato que o operador linear $\Gamma(\alpha h)$ é sobrejetor.

Mostramos a seguir que a multifunção Φ atende às hipóteses do Princípio da Contração para Multifunções (Teorema 2.4). De fato, seja $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$, logo da sobrejetividade do operador $\Gamma(\alpha h)$, existe $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Gamma(\alpha h)\widehat{x} = \Pi(x_0+\alpha h+x),$$

isto é,

$$\widehat{x} \in \{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\Pi(x_0+\alpha h+x).$$

Logo, $x - \widehat{x} \in \Phi(x)$ e daí $\Phi(x) \neq \emptyset$.

Agora verificamos que $\Phi(x)$ é fechado. Com efeito, suponhamos uma sequência $(z_n) \subseteq \Phi(x)$ tal que $z_n \to z$. Logo para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado temos,

$$z_n = x - q_n,$$

sendo

$$q_n \in \{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\,\Pi(x_0+\alpha h+x),$$

ou equivalentemente,

$$\Gamma(\alpha h)(x - z_n) = \Pi(x_0+\alpha h+x). \tag{3.11}$$

Fazendo $n \to \infty$ na igualdade (3.11), temos

$$\Gamma(\alpha h)(x - z) = \Pi(x_0+\alpha h+x),$$

isto é,

$$x - z \in \{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\,\Pi(x_0+\alpha h+x)$$

e assim, $z = x - (x - z) \in \Phi(y)$.

Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ e $\mathscr{H}(\Phi(y_1), \Phi(y_2))$ a distância entre $\Phi(y_1)$ e $\Phi(y_2)$ pela métrica de Hausdorff $\mathscr{H}$. Aplicando o Teorema 2.5 combinado com o Teorema 2.6 e a Observação 2.4, obtemos

$$\mathscr{H}(\Phi(y_1), \Phi(y_2)) = \inf\{\|z_1 - z_2\|\,; z_i \in \Phi(y_i), i = 1, 2\},$$

sendo que $z_i = y_i - x_i$ e x_i é tal que $\Gamma(\alpha h)x_i = \Pi(x_0 + \alpha h + y_i)$.

Agora fazendo $v_i = \Pi(x_0 + \alpha h + y_i)$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(\Phi(y_1), \Phi(y_2)) &= \inf\{\|z_1 - z_2\|\,; \Gamma(\alpha h)(y_i - z_i) = v_i, i = 1, 2\} \\
&= \inf\{\|z_1 - z_2\|\,; \Gamma(\alpha h)(z_1 - z_2) = \Gamma(\alpha h)(y_1 - y_2) + v_2 - v_1\} \\
&\leq \left\|\{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\right\| \|v_1 - v_2 - \Gamma(\alpha h)(y_1 - y_2)\| \qquad (3.12) \\
&\leq \left\|\{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\right\| \sup_{t\in[0,1]} \left\|\widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| \|y_1 - y_2\| \qquad (3.13) \\
&\leq \frac{C}{\alpha^{p-1}} \sup_{t\in[0,1]} \left\|\widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| \|y_1 - y_2\|, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

sendo

$$\widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h) = \Pi^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)) - \Gamma(\alpha h),$$

as desigualdades (3.12) e (3.13) foram obtidas através dos Teoremas 2.7 e 2.3, respectivamente, e a desigualdade (3.14) por meio da Proposição 2.1.

Por expansão de Taylor de $\Pi^{(1)}$, temos

$$\Pi^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)) =$$

$$= \begin{bmatrix}
\alpha^{p-q}\left(g_{i_1}^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t \\
\vdots \\
\alpha^{p-q}\left(g_{i_{s_0}}^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t \\
\left(F_1^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t \\
\vdots \\
\left(F_m^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
\dfrac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_1 - y_2)]^{q-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\
\vdots \\
\dfrac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_1 - y_2)]^{q-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\
\dfrac{1}{(p-1)!}\left(F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_1 - y_2)]^{p-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\
\vdots \\
\dfrac{1}{(p-1)!}\left(F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_1 - y_2)]^{p-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1})
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q-1}{j}g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q-1}{j}g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j}F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j}F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\left\|\widehat{\Gamma}(t,\alpha,y_1,y_2,h)\right\|_\infty = \left\|\Pi^{(1)}(x_0+\alpha h+y_2+t(y_2-y_1))-\Gamma(\alpha h)\right\|_\infty =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j}F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j}F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \end{bmatrix} \right\|_\infty .$$

Desta forma, para algum $\widehat{i} \in \mathbb{I}(x_0)$, temos

$$\left\|\widehat{\Gamma}(t,\alpha,y_1,y_2,h)\right\|_\infty =$$

$$\begin{aligned} &= \left\|\frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}[\alpha h]^{q-1-j}[y_2+t(y_1-y_2)]^j + o(\alpha^{p-1})\right\|_1 \\ &\leq \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1 \|\alpha h\|_1^{q-1-j}\|y_2+t(y_1-y_2)\|_1^j + o(\alpha^{p-1}) \\ &\leq \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1 \alpha^{q-1-j}\left(\frac{3\alpha}{R}\right)^j + o(\alpha^{p-1}) \\ &= \frac{\alpha^{p-1}}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1 \left(\frac{3}{R}\right)^j + o(\alpha^{p-1}) \\ &\leq \alpha^{p-1}\frac{3^{q-1}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1}{R(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j} + o(\alpha^{p-1}). \end{aligned}$$

Ou ainda, para algum $\widehat{j} \in \mathbb{J}$, temos

$$\left\|\widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\|_{\infty} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{(p-1)!} F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0) \sum_{j=1}^{p-1} \binom{q-1}{j} \alpha^{p-1-j} [h]^{p-1-j} [y_2 + t(y_1 - y_2)]^j + o(\alpha^{p-1}) \right\|_1 \\
&\leq \frac{1}{(p-1)!} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{q-1}{j} \left\| F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0) \right\|_1 \|\alpha h\|_1^{p-1-j} \|y_2 + t(y_1 - y_2)\|_1^j + o(\alpha^{p-1}) \\
&\leq \frac{1}{(p-1)!} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p-1}{j} \left\| F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0) \right\|_1 \alpha^{p-1-j} \left(\frac{3\alpha}{R} \right)^j + o(\alpha^{p-1}) \\
&= \frac{\alpha^{p-1}}{(q-1)!} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p-1}{j} \left\| F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0) \right\|_1 \left(\frac{3}{R} \right)^j + o(\alpha^{p-1}) \\
&\leq \alpha^{p-1} \frac{3^{p-1} \left\| F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0) \right\|_1}{R(p-1)!} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p-1}{j} + o(\alpha^{p-1}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\|\widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| \leq \frac{C_1 \alpha^{p-1}}{R} + o(\alpha^{p-1}), \tag{3.15}$$

sendo

$$C_1 = \frac{3^{q-1} \left\| g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0) \right\|_1}{(q-1)!} \sum_{j=1}^{q-1} \binom{q-1}{j}$$

ou

$$C_1 = \frac{3^{p-1} \left\| F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0) \right\|_1}{(p-1)!} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p-1}{j}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(\alpha^{p-1}) - \dfrac{C_1 \alpha^{p-1}}{R}}{\alpha^{p-1}} = -\frac{C_1}{R} < 0.$$

Logo, para α suficientemente pequeno, temos

$$o(\alpha^{p-1}) < \frac{C_1 \alpha^{p-1}}{R}$$

e por (3.15), obtemos

$$\left\|\widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| < \frac{2C_1 \alpha^{p-1}}{R}. \tag{3.16}$$

Tomando $R \geq 4CC_1$ e em virtude das desigualdades (3.14) e (3.16), temos

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}(\Phi(y_1), \Phi(y_2)) &\leq \frac{C}{\alpha^{p-1}} \sup_{t\in[0,1]} \left\| \widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h) \right\| \|y_1 - y_2\| \\
&\leq \frac{2CC_1\alpha^{p-1}}{R\alpha^{p-1}} \|y_1 - y_2\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\| .
\end{aligned}
$$

Logo, Φ é uma contração.

Denotamos por $d(0, \Phi(0))$ a distância entre 0 e $\Phi(0)$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
d(0, \Phi(0)) &= \inf \{\|x\| \,; x \in \Phi(0)\} \\
&= \inf \{\|x\| \,; \Gamma(\alpha h)x = \Pi(x_0 + \alpha h)\} \\
&\leq \left\| \{\Gamma(\alpha h)\}^{-1} \right\| \|\Pi(x_0 + \alpha h)\| \qquad (3.17) \\
&\leq \frac{C}{\alpha^{p-1}} \left\| \begin{bmatrix} \alpha^{p-q} g_{i_1}(x_0 + \alpha h) \\ \vdots \\ \alpha^{p-q} g_{i_{s_0}}(x_0 + \alpha h) \\ F_1(x_0 + \alpha h) \\ \vdots \\ F_m(x_0 + \alpha h) \end{bmatrix} \right\| \qquad (3.18) \\
&= \frac{C}{\alpha^{p-1}} \left\| \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{q!} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^q + o(\alpha^p) \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{q!} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^q + o(\alpha^p) \\ \frac{F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h]^p}{p!} + o(\alpha^p) \\ \vdots \\ \frac{F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h]^p}{p!} + o(\alpha^p) \end{bmatrix} \right\| \\
&= \frac{C}{\alpha^{p-1}} o(\alpha^p) \\
&= o(\alpha),
\end{aligned}
$$

sendo que novamente utilizamos o Teorema 2.7 e a Proposição 2.1 nas desigualdades (3.17) e (3.18), respectivamente.

Assim, para $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e em virtude do Teorema 2.4 existe uma aplicação $y(\alpha) : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$y(\alpha) \in \Phi(y(\alpha)),$$

isto é,

$$g_i(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0, i \in \mathbb{I}(x_0)$$

e

$$F(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0.$$

Ainda devido o Teorema 2.4, temos

$$\begin{aligned} \|y(\alpha)\| &\leq \frac{2}{1-1/2} d(0, \Phi(0)) \\ &= o(\alpha). \end{aligned}$$

Para o caso em que $q > p$, basta considerarmos

$$\Gamma(\alpha h) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(q-1)!} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{(q-1)!} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1} \\ \frac{\alpha^{q-p}}{(p-1)!} F_1^{(p)}(x_0)\,[\alpha h]^{p-1} \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{q-p}}{(p-1)!} F_m^{(p)}(x_0)\,[\alpha h]^{p-1} \end{bmatrix} = \alpha^{q-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(q-1)!} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{(q-1)!} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} \\ \frac{1}{(p-1)!} F_1^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!} F_m^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \end{bmatrix},$$

$$\Pi(x_0 + \alpha h + y) = \begin{bmatrix} g_{i_1}(x_0 + \alpha h + y) \\ \vdots \\ g_{i_{s_0}}(x_0 + \alpha h + y) \\ \alpha^{q-p} F_1(x_0 + \alpha h + y) \\ \vdots \\ \alpha^{q-p} F_m(x_0 + \alpha h + y) \end{bmatrix}$$

e o restante da prova segue de forma análoga ao caso em que $p \geq q$. ■

Lema 3.2. *Sejam $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0 e que existam $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é válida em x_0 e $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tais que*

$$F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} w = 0 \ \text{ e } \ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} w = 0, i \in \mathbb{I}(x_0).$$

Então, existem $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma aplicação $y : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0$$

e

$$g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0, i \in \mathbb{I}(x_0),$$

sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$.

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$, $\varepsilon = \alpha^{3/2}$, $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é satisfeita em x_0. Suponhamos $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}w = 0$, $g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}w = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$. Suponhamos ainda, sem perda de generalidade, que $\|h\| = \|w\| = 1$ e $p \geq q$. Definimos a multifunção $\Psi : \mathbb{B}_\varepsilon(0) \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ por

$$\Psi(y) = y - \{\Gamma(\alpha h)\}^{-1} \Pi(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y),$$

sendo $\Gamma(\alpha h) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{s_0+m}$ definido como em (3.10) e

$$\Pi(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y) = \begin{bmatrix} \alpha^{p-q} g_{i_1}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y) \\ \vdots \\ \alpha^{p-q} g_{i_{s_0}}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y) \\ F_1(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y) \\ \vdots \\ F_m(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y) \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar de forma análoga à prova do Lema 3.1 que a multifunção Ψ atende as hipóteses do Princípio da Contração para Multifunções (Teorema 2.4).

Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ e $\mathscr{H}(\Psi(y_1), \Phi(y_2))$ a distância entre $\Psi(y_1)$ e $\Psi(y_2)$ pela métrica de Hausdorff $\mathscr{H}$. Aplicando novamente o Teorema 2.5 combinado com o Teorema 2.6 e a Observação 5, temos

$$\mathscr{H}(\Psi(y_1), \Psi(y_2)) = \inf\{\|z_1 - z_2\| ; z_i \in \Psi(y_i), i = 1, 2\},$$

sendo que $z_i = y_i - x_i$ e x_i é tal que $\Gamma(\alpha h)x_i = \Pi(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}h + y_i)$.

Agora fazendo $u_i = \Pi(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}h + y_i)$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(\Psi(y_1), \Psi(y_2)) &= \inf\{\|z_1 - z_2\| ; \Gamma(\alpha h)(y_i - z_i) = u_i, i = 1, 2\} \\ &= \inf\{\|z_1 - z_2\| ; \Gamma(\alpha h)(z_1 - z_2) = \Gamma(\alpha h)(y_1 - y_2) + u_2 - u_1\} \\ &\leq \left\|\{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\right\| \|u_1 - u_2 - \Gamma(\alpha h)(y_1 - y_2)\| \qquad (3.19) \\ &\leq \left\|\{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\right\| \sup_{t\in[0,1]} \left\|\widetilde{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h, w)\right\| \|y_1 - y_2\| \qquad (3.20) \\ &\leq \frac{C}{\alpha^{p-1}} \sup_{t\in[0,1]} \left\|\widetilde{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h, w)\right\| \|y_1 - y_2\|, \qquad (3.21) \end{aligned}$$

sendo

$$\widetilde{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h) = \Pi^{(1)}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_2 - y_1)) - \Gamma(\alpha h),$$

as desigualdades (3.19) e (3.20) foram obtidas em por meio dos Teoremas 2.7 e 2.3, respectivamente, e a desigualdade (3.21) vem da Proposição 2.1.

Por expansão de Taylor de $\Pi^{(1)}$, temos

$$\Pi^{(1)}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)) =$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha^{p-q}\left(g_{i_1}^{(1)}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t \\ \vdots \\ \alpha^{p-q}\left(g_{i_{s_0}}^{(1)}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t \\ \left(F_1^{(1)}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t \\ \vdots \\ \left(F_m^{(1)}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1))\right)^t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^{q-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^{q-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^{p-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^{p-1}\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q-1}{j} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[\alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q-1}{j} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[\alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j} F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[\alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j} F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[\alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\left\|\widetilde{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h, w)\right\|_\infty =$$
$$= \left\|\Pi^{(1)}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y_2 + t(y_2 - y_1)) - \Gamma(\alpha h)\right\|_\infty$$

$$
= \left\| \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_2-y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1-j}[\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_2-y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \dfrac{1}{(p-1)!}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j} F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_2-y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{(p-1)!}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j} F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-1-j}[\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_2-y_1)]^j\right)^t + o(\alpha^{p-1}) \end{bmatrix} \right\|_\infty .
$$

Desta forma, para algum $\widehat{i} \in \mathbb{I}(x_0)$, temos

$$
\left\|\widetilde{\Gamma}(t,\alpha,y_1,y_2,h,w)\right\|_\infty =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!} g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0) \sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}[\alpha h]^{q-1-j}[\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_1-y_2)]^j + o(\alpha^{p-1}) \right\|_1 \\
&\leq \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1 \|\alpha h\|_1^{q-1-j}\left\|\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_1-y_2)\right\|_1^j + o(\alpha^{p-1}) \\
&\leq \frac{\alpha^{p-q}}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1 \alpha^{q-1-j}\left(4\alpha^{3/2}\right)^j + o(\alpha^{p-1}) \\
&= \frac{\alpha^{p-1}}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1 4^j\alpha^{j/2} + o(\alpha^{p-1}) \\
&\leq \alpha^{p-1}\frac{4^{q-1}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\alpha^{j/2} + o(\alpha^{p-1}).
\end{aligned}
$$

Ou, para algum $\widehat{j} \in \mathbb{J}$, temos

$$
\left\|\widehat{\Gamma}(t,\alpha,y_1,y_2,h)\right\|_\infty =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{(p-1)!} F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0) \sum_{j=1}^{p-1}\binom{q-1}{j}\alpha^{p-1-j}[h]^{p-1-j}[\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_1-y_2)]^j + o(\alpha^{p-1}) \right\|_1 \\
&\leq \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=1}^{p-1}\binom{q-1}{j}\left\|F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0)\right\|_1 \|\alpha h\|_1^{p-1-j}\left\|\alpha^{3/2}w + y_2 + t(y_1-y_2)\right\|_1^j + o(\alpha^{p-1}) \\
&\leq \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j}\left\|F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0)\right\|_1 \alpha^{p-1-j}\left(4\alpha^{3/2}\right)^j + o(\alpha^{p-1}) \\
&\leq \alpha^{p-1}\frac{4^{p-1}\left\|F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0)\right\|_1}{(p-1)!}\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j}\alpha^{j/2} + o(\alpha^{p-1}).
\end{aligned}
$$

Desta forma,

$$\left\|\widetilde{\Gamma}(t,\alpha,y_1,y_2,h,w)\right\| \leq \beta(\alpha)\alpha^{p-1} + o(\alpha^{p-1}), \tag{3.22}$$

sendo

$$\beta(\alpha) = \frac{4^{p-1}\left\|g_{\widehat{i}}^{(q)}(x_0)\right\|_1}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{q-1}\binom{q-1}{j}\alpha^{j/2}$$

ou

$$\beta(\alpha) = \frac{4^{p-1}\left\|F_{\widehat{j}}^{(p)}(x_0)\right\|_1}{(p-1)!}\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j}\alpha^{j/2}.$$

Por outro lado, em virtude das desigualdades (3.21) e (3.22), temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(\Psi(y_1),\Psi(y_2)) &\leq \frac{C}{\alpha^{p-1}}\sup_{t\in[0,1]}\left\|\widetilde{\Gamma}(t,\alpha,y_1,y_2,h,w)\right\|\|y_1-y_2\| \\
&\leq \frac{\alpha^{p-1}C}{\alpha^{p-1}}\left(\theta(\alpha)+\frac{o(\alpha^{p-1})}{\alpha^{p-1}}\right)\|y_1-y_2\| \\
&\leq C\left(\beta(\alpha)+\frac{o(\alpha^{p-1})}{\alpha^{p-1}}\right)\|y_1-y_2\| \\
&\leq \theta(\alpha)\|y_1-y_2\|,
\end{aligned}$$

sendo

$$\theta(\alpha) = C\left(\beta(\alpha)+\frac{o(\alpha^{p-1})}{\alpha^{p-1}}\right)$$

e

$$\lim_{\alpha\to 0}\theta(\alpha) = 0.$$

Logo, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que Ψ é uma contração.

Denotamos por $d(0,\Psi(0))$ a distância entre 0 e $\Psi(0)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
d(0,\Psi(0)) &= \inf\{\|x\|\,;x\in\Psi(0)\} \\
&= \inf\left\{\|x\|\,;\Gamma(\alpha h)x = \Pi(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w)\right\} \\
&\leq \left\|\{\Gamma(\alpha h)\}^{-1}\right\|\left\|\Pi(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w)\right\| \qquad (3.23) \\
&\leq \frac{C}{\alpha^{p-1}}\left\|\begin{bmatrix}\alpha^{p-q}g_{i_1}(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w)\\ \vdots \\ \alpha^{p-q}g_{i_{s_0}}(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w)\\ F_1(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w)\\ \vdots \\ F_m(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w)\end{bmatrix}\right\| \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{C}{\alpha^{p-1}} \left\| \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{q!} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w]^q + o(\alpha^{p+1/2}) \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{q!} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w]^q + o(\alpha^{p+1/2}) \\ \frac{1}{p!} F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w]^p + o(\alpha^{p+1/2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{p!} F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w]^p + o(\alpha^{p+1/2}) \end{bmatrix} \right\| \\
&= \frac{C}{\alpha^{p-1}} \left\| \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{p-q}}{q!} \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-j}[\alpha^{3/2} w]^j + o(\alpha^{p+1/2}) \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{p-q}}{q!} \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-j}[\alpha^{3/2} w]^j + o(\alpha^{p+1/2}) \\ \frac{1}{p!} \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} F_1^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-j}[\alpha^{3/2} w]^j + o(\alpha^{p+1/2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{p!} \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} F_m^{(p)}(x_0)[\alpha h]^{p-j}[\alpha^{3/2} w]^j + o(\alpha^{p+1/2}) \end{bmatrix} \right\| \\
&= C\alpha^{3/2} \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{q!} \sum_{j=2}^{q} \binom{q}{j} \alpha^{(j-1)/2} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[h]^{q-j}[w]^j + \frac{o(\alpha^{p+1/2})}{\alpha^{p+1/2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{q!} \sum_{j=2}^{q} \binom{q}{j} \alpha^{(j-1)/2} g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[h]^{q-j}[w]^j + \frac{o(\alpha^{p+1/2})}{\alpha^{p+1/2}} \\ \frac{1}{p!} \sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} \alpha^{(j-1)/2} F_1^{(p)}(x_0)[h]^{p-j}[w]^j + \frac{o(\alpha^{p+1/2})}{\alpha^{p+1/2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{p!} \sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} \alpha^{(j-1)/2} F_m^{(p)}(x_0)[h]^{p-j}[w]^j + \frac{o(\alpha^{p+1/2})}{\alpha^{p+1/2}} \end{bmatrix} \right\| \qquad (3.25) \\
&= o(\alpha^{3/2}),
\end{aligned}
$$

sendo que novamente utilizamos o Teorema 2.7 e a Proposição 2.1 nas desigualdades (3.23) e (3.24), respectivamente. Além disto, utilizamos as igualdades $F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}w = 0$, $g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}w = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ em (3.25).

Assim, para $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e em virtude do Teorema 2.4 existe uma aplicação $y(\alpha) : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$y(\alpha) \in \Psi(y(\alpha)),$$

isto é,

$$g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0, i \in \mathbb{I}(x_0)$$

e

$$F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} \|y(\alpha)\| &\leq \frac{2}{1-\theta(\alpha)} d(0, \Psi(0)) \\ &= o(\alpha^{3/2}). \end{aligned}$$

Para o caso em que $q > p$, basta considerarmos

$$\Gamma(\alpha h) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(q-1)!} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{(q-1)!} g_{i_{r_0}}^{(q)}(x_0)[\alpha h]^{q-1} \\ \frac{\alpha^{q-p}}{(p-1)!} F_1^{(p)}(x_0)\,[\alpha h]^{p-1} \\ \vdots \\ \frac{\alpha^{q-p}}{(p-1)!} F_m^{(p)}(x_0)\,[\alpha h]^{p-1} \end{bmatrix} = \alpha^{q-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(q-1)!} g_{i_1}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{(q-1)!} g_{i_{r_0}}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} \\ \frac{1}{(p-1)!} F_1^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{(p-1)!} F_m^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \end{bmatrix},$$

$$\Pi(x_0 + \alpha h + y) = \begin{bmatrix} g_{i_1}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y) \\ \vdots \\ g_{i_{r_0}}(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y) \\ \alpha^{q-p} F_1(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y) \\ \vdots \\ \alpha^{q-p} F_m(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y) \end{bmatrix}$$

e o restante da prova segue de forma análoga ao caso em que $p \geq q$. ■

Lema 3.3. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.1), $f \in \mathscr{C}(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0 e que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é válida em x_0. Então,*

$$f^{(1)}(x_0)h = 0.$$

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que $f^{(1)}(x_0)h < 0$. De acordo com o Lema 3.1, existe uma curva $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + y(\alpha)$, sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$ tal que

$$F(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0$$

e

$$g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0, i \in \mathbb{I}(x_0).$$

Além disto, para todo $i \notin \mathbb{I}(x_0)$ podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que $g_i(x(\alpha)) < 0$. Assim, $x(\alpha)$ é factível para o Problema (3.1) para algum $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

Agora usando a expansão de Taylor da função f, temos

$$\begin{aligned} f(x(\alpha)) &= f(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) \\ &= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(\alpha h + y(\alpha)) + o(\alpha) \\ &= f(x_0) + \alpha f^{(1)}(x_0)h + f^{(1)}(x_0)y(\alpha) + o(\alpha) \\ &\leq f(x_0) + \alpha f^{(1)}(x_0)h + \left\| f^{(1)}(x_0) \right\| \| y(\alpha)) \| + o(\alpha). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x(\alpha)) - f(x_0)}{\alpha} &\leq \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\alpha f^{(1)}(x_0)h + \left\| f^{(1)}(x_0) \right\| \| y(\alpha)) \| + o(\alpha)}{\alpha} \right) \\ &= f^{(1)}(x_0)h < 0, \end{aligned}$$

por hipótese de contradição. Isto garante a existência de um $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f(x(\alpha)) = f(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) < f(x_0),$$

o que contradiz o fato de x_0 ser um minimizador local do Problema (3.1).

Para o caso em que $f^{(1)}(x_0)h > 0$, observamos que o vetor $-h$ cumpre as hipóteses deste Lema e o raciocínio anterior pode ser repetido para $-f^{(1)}(x_0)h < 0$. Portanto, $f^{(1)}(x_0)h = 0$. ∎

Lema 3.4. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.1), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0 e que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é válida em x_0. Seja $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que*

$$F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}w = 0 \text{ e } g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}w \leq 0, i \in \mathbb{I}(x_0).$$

Então

$$f^{(1)}(x_0)w \geq 0.$$

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que exista $w \neq 0$ tal que

$$F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}w = 0, \ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}w \leq 0, i \in \mathbb{I}(x_0)$$

e

$$f^{(1)}(x_0)w < 0.$$

Consideramos os conjuntos a seguir

$$\mathbb{I}_0 = \left\{ i \in \mathbb{I}(x_0); g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}w = 0 \right\}$$

e

$$\mathbb{I}_- = \left\{ i \in \mathbb{I}(x_0); g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}w < 0 \right\}.$$

Notamos que os vetores $F_j(x_0)[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ e $g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}, i \in \mathbb{I}_0$ são linearmente independentes. Logo, pelo Lema 3.2, existe uma curva $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)$, sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$, tal que

$$g_i(x(\alpha)) = g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0, i \in \mathbb{I}_0$$

e

$$F(x(\alpha)) = F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0.$$

Além disto, para cada $i \in \mathbb{I}_-$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
g_i(x(\alpha)) &= g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) \\
&= \frac{1}{q!} g_i^{(q)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)]^q + o(\alpha^{q+1/2}) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} g_i^{(q)}(x_0)\,[\alpha h]^{q-j} \left[\alpha^{3/2} w + y(\alpha)\right]^j + o(\alpha^{q+1/2}) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{j=1}^{q} \alpha^{q+j/2} \binom{q}{j} g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-j} \left[w + \frac{y(\alpha)}{\alpha^{3/2}}\right]^j + o(\alpha^{q+1/2}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} \frac{g_i(x(\alpha))}{\alpha^{q+1/2}} &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha))}{\alpha^{q+1/2}} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{1}{q!} \sum_{j=1}^{q} \alpha^{\frac{j-1}{2}} \binom{q}{j} g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-j} \left[w + \frac{y(\alpha)}{\alpha^{3/2}}\right]^j + \frac{o(\alpha^{q+1/2})}{\alpha^{q+1/2}} \right) \\
&= \frac{1}{(q-1)!} g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} w < 0.
\end{aligned}$$

Assim, existe $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que $g_i(x(\alpha)) \leq 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e para $i \notin \mathbb{I}(x_0)$ podemos garantir ainda a existência de $\alpha > 0$ tal que $g_i(x(\alpha)) < 0$. Desta forma, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)$ é factível para o Problema (3.1).

Por outro lado, usando a expansão de Taylor da função f, temos

$$\begin{aligned}
f(x(\alpha)) &= f(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) \\
&= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(\alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) + o(\alpha^{3/2}) \\
&= f(x_0) + \alpha^{3/2} f^{(1)}(x_0) w + f^{(1)}(x_0) y(\alpha) + o(\alpha^{3/2}) \\
&\leq f(x_0) + \alpha^{3/2} f^{(1)}(x_0) w + \left\| f^{(1)}(x_0) \right\| \|y(\alpha)\| + o(\alpha^{3/2}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x(\alpha)) - f(x_0)}{\alpha^{3/2}} &\leq \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\alpha^{3/2} f^{(1)}(x_0) w + \left\| f^{(1)}(x_0) \right\| \|y(\alpha)\| + o(\alpha^{3/2})}{\alpha^{3/2}} \right) \\
&= f^{(1)}(x_0) w < 0,
\end{aligned}$$

pela hipótese de absurdo. Isto garante novamente a existência de $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f(x(\alpha)) = f(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) < f(x_0),$$

o que contradiz o fato de x_0 ser um minimizador local do Problema (3.1), concluindo a demonstração do lema. ■

Agora podemos enunciar e provar o primeiro resultado desta seção. A demonstração deste teorema será baseada no Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11). Para isto, consideraremos um problema auxiliar baseado nas hipóteses do Teorema 3.2 e que surge naturalmente nas entrelinhas dos Lemas 3.3 e 3.4. Um fato fundamental desta técnica do problema auxiliar é o fato de que o vetor h, considerado na hipótese, é um minimizador global do mesmo. Além disto, como verificaremos o mesmo é um problema de Programação Linear e a independência linear dos vetores $F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}$, $j \in \mathbb{J}$, também terá sua importância, visto que usaremos o Teorema de Lyusternik (Teorema 2.14) para determinarmos o cone tangente. Além disto, devido à diferenciabilidade das funções envolvidas poderemos construir os demais cones fundamentais para aplicação do Teorema de Dubovitskii-Milyutin. Esta técnica do problema auxiliar combinada com o Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11) foi utilizada em [96] e este nos inspirou na elaboração desta demonstração.

Teorema 3.2. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema* (3.1), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$ *e* $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. *Suponhamos que as degenerações* (3.6) *e* (3.7) *são satisfeitas em x_0 e que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é válida em x_0. Então, existem vetores $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}^s_+$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} &= 0, &(3.26)\\ \mu_i g_i(x_0) &= 0, i \in \mathbb{I}. &(3.27) \end{aligned}$$

Demonstração. Consideramos o problema auxiliar

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } \widetilde{f}(x_0)(x) \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0) \cap \mathbb{M}_{\widetilde{g}}(x_0), \end{array} \tag{3.28}$$

sendo

$$\widetilde{f}(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

é definida como

$$\widetilde{f}(x_0)(x) = f^{(1)}(x_0)x,$$

$$\widetilde{g}_i(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i \in \mathbb{I}(x_0)$$

é definida como

$$\widetilde{g}_i(x_0)(x) = g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\,x$$

e

$$\widetilde{F}(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

é definida como

$$\widetilde{F}(x_0)(x) = F^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\,x.$$

Além disto,

$$\mathbb{M}_{\widetilde{g}}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \widetilde{g}_i(x_0)(x) \leq 0, i \in \mathbb{I}(x_0)\},$$

e

$$\mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n; \widetilde{F}(x_0)(x) = 0\right\}.$$

Claramente, as aplicações $\widetilde{f}(x_0)$, $\widetilde{g}_i(x_0)$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $\widetilde{F}(x_0)$ são diferenciáveis e h é factível para Problema (3.28). Assim, devido aos Lemas 3.4 e 3.3, temos

$$\widetilde{f}(x_0)(x) = f^{(1)}(x_0)x \geq 0 = f^{(1)}(x_0)h = \widetilde{f}(x_0)(h),$$

para todo x factível para o Problema (3.28). Logo, h é um minimizador global do Problema (3.28).

Para finalizarmos a demonstração, aplicaremos o Teorema Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11) no Problema (3.28). Para isto, basta determinarmos o cone das direções de descida para $\widetilde{f}(x_0)$ em h, o cone das direções factíveis para $\mathbb{M}_{\widetilde{g}}(x_0)$ em h, o cone tangente a $\mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0)$ em h e o respectivo dual de cada um destes.

Denotamos por $\mathbb{C}_0$ o cone das direções de descida para $\widetilde{f}(x_0)$ em h. Como $\widetilde{f}(x_0)$ é linear, temos

$$\widetilde{f}(x_0) = \widetilde{f}^{(1)}(x_0)(h),$$

sendo que $\widetilde{f}^{(1)}(x_0)(h)$ denota a derivada de ordem um da função $\widetilde{f}(x_0)$. Assim, em virtude do Teorema 2.12 e 2.15, respectivamente, temos

$$\mathbb{C}_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n; \widetilde{f}(x_0)(x) < 0\right\} \tag{3.29}$$

e

$$\mathbb{C}_0^* = \left\{-\theta\widetilde{f}(x_0); \theta = \theta(h) \geq 0\right\}. \tag{3.30}$$

Para cada $i \in \mathbb{I}(x_0)$ fixado, denotamos por $(\mathbb{C}_1)_i$, o cone das direções factíveis para $\mathbb{M}_{\widetilde{g}_i}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \widetilde{g}_i(x_0)(x) \leq 0\}$ em h. Como $\widetilde{g}_i(x_0)$ é linear, temos

$$\widetilde{g}_i(x_0) = \widetilde{g}_i^{(1)}(x_0)(h).$$

Assim, em virtude dos Teoremas 2.12 e 2.15, respectivamente, temos

$$(\mathbb{C}_1)_i = \{x \in \mathbb{R}^n; \widetilde{g}_i(x_0)(x) < 0\}$$

e

$$(\mathbb{C}_1^*)_i = \{-\theta \widetilde{g}_i(x_0); \mu_i = \mu_i(h) \geq 0\}.$$

Denotamos por $\mathbb{C}_2$ o cone das direções tangentes a $\mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0)$ em h. Podemos determinar o cone tangente a $\mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0)$ em h utlizando o Teorema de Lyusternik (Teorema 2.14) e, para isto, é necessário a sobrejetividade do operador $\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h)$. Em virtude da linearidade das componentes da restrição de igualdade do problema auxiliar, temos

$$\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h) = F^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}.$$

Portanto, a sobrejetividade do operador $\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h)$ segue diretamente da independência linear dos vetores $F^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$. Agora, aplicando o Teorema de Lyusternik (Teorema 2.14), segue que

$$\mathbb{C}_2 = Ker\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h).$$

E, segundo o Teorema 2.15, o seu dual é definido como

$$\mathbb{C}_2^* = \{x; xy = 0, \forall y \in \mathbb{C}_2\}. \tag{3.31}$$

Observamos que para todo $x \in \mathbb{C}_2^*$, temos

$$x \in \left[Ker\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h)\right]^{\perp} = Im\left[\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h)\right]^t,$$

ou seja, existe $-\lambda \in \mathbb{R}^m$, sendo $\lambda = \lambda(h)$, tal que

$$x = -\left[\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h)\right]^t \lambda.$$

Logo,

$$\mathbb{C}_2^* = \left\{-\left[\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h)\right]^t \lambda; \lambda \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

Podemos expressar o operador $\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h)$ numa forma matricial como a seguir

$$\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h) = \begin{bmatrix} \left(F_1^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}\right)^t \\ \vdots \\ \left(F_m^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right)^t \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left[(\widetilde{F}(x_0))^{(1)}(h)\right]^t \lambda &= \left[\; F_1^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} \cdots F_m^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \;\right] \lambda \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}.\end{aligned}$$

Assim podemos escrever o dual $\mathbb{C}_2^*$ da seguinte forma

$$\mathbb{C}_2^* = \left\{ -\sum_{j=1}^{m} \lambda_i F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}, \lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Assim, conhecemos todos os cones duais fundamentais para aplicarmos o Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11). Seja $x \in \mathbb{R}^n$ qualquer e do Teorema de Dubovitskii-Milyutin, temos

$$\begin{aligned}0 &= \left(\theta \widetilde{f}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i \widetilde{g}_i(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right) x \\ &= \theta \widetilde{f}(x_0)x + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i \widetilde{g}_i(x_0)x + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\, x \\ &= \theta f^{(1)}(x_0)x + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\, x + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\, x \\ &= \left(\theta f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right) x.\end{aligned}$$

Logo,

$$\theta f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0,$$

sendo $\mu_i = 0$, $i \notin \mathbb{I}(x_0)$, o que implica em $\mu_i g_i(x_0) = 0$, $i \in \mathbb{I}$, provando (3.27). Resta verificarmos que $\theta \neq 0$, mas isto segue diretamente da hipótese h-LICQ, o que prova (3.26). ∎

Exemplo 3. *Retornamos ao Exemplo 2 para ilustrarmos o teorema que acabamos de demonstrar.*

$$\begin{array}{l}\textit{Minimizar } f(x) = x_3^2 - x_1 - x_2 \\ \textit{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F,\end{array} \tag{3.32}$$

sendo

$$\mathbb{M}_g = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_2 + x_1) \leq 0\},$$

$$\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{R}^3; F(x) = 2x_3^3 - x_2^3 + x_1^3 = 0\}$$

e $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um minimizador global do Problema (2). Notamos que

$$f^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow f^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 2x_2x_1 + 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 \\ 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow g^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 + 6x_1 & 2x_1 + 2x_2 & 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 & 6x_2 + 2x_1 & 2x_3 \\ 2x_3 & 2x_3 & 2x_2 + 2x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow g^{(2)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g^{(3)}(x_0)[h]^2 = \begin{bmatrix} 6h_1^2 + 4h_1h_2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 \\ 2h_1^2 + 4h_1h_2 + 6h_2^2 + 2h_3^2 \\ 4h_1h_3 + 4h_2h_3 \end{bmatrix},$$

$$g^{(3)}(x_0)[h]^3 = 6h_1^3 + 6h_1^2h_2 + 6h_1h_2^2 + 6h_1h_3^2 + 6h_2h_3^2 + 6h_2^3,$$

$$\mathbb{H}_g(x_0) = \left\{h \in \mathbb{R}^3; h_1^3 + h_1^2h_2 + h_1h_2^2 + h_1h_3^2 + h_2h_3^2 + h_2^3 = 0\right\},$$

$$F^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 \\ -3x_2^2 \\ 6x_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow F^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -6x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 12x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow F^{(2)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F^{(3)}(x_0)[h]^2 = \begin{bmatrix} 6h_1^2 \\ -6h_2^2 \\ 12h_3^2 \end{bmatrix},$$

$$F^{(3)}(x_0)[h]^3 = 6h_1^3 - 6h_2^3 + 12h_3^3$$

e

$$\mathbb{H}_F(x_0) = \left\{h \in \mathbb{R}^2; h_1^3 - h_2^3 + 2h_3^3 = 0\right\}.$$

Claramente LICQ e MFCQ falham em x_0. Por outro lado, tomando

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0),$$

obtemos

$$g^{(3)}(x_0)[h]^2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } F^{(3)}(x_0)[h]^2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

e observamos que h-LICQ é satisfeita em x_0. Além disto, a relação

$$\begin{aligned} 0 &= f^{(1)}(x_0) + \mu g^{(3)}(x_0)[h]^2 + \lambda F^{(3)}(x_0)[h]^2 \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se cumpre para $\mu = \frac{1}{6}$ e $\lambda = 0$. Portanto, existem $\mu \in \mathbb{R}^s_+\backslash\{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo (3.26) e (3.27).

Vimos no Teorema 3.2 que se a condição h-LICQ é satisfeita em x_0 para um h específico, estabelecemos uma regra de multiplicadores para o Problema (3.1), sendo que as ordens q e p nas igualdades (3.6) e (3.7) não são necessariamente iguais. Como discutimos anteriormente, uma condição de qualificação similar à LICQ, em nosso caso h-LICQ, é ainda uma hipótese muito forte. Podemos enfraquecer esta hipótese, por exemplo propondo uma outra condição de qualificação análoga à MFCQ, porém necessitaremos fazer algumas considerações nas hipóteses das duas próximas condições necessárias de otimalidade para problemas definidos como em (3.1), satisfazendo (3.6) e (3.7) no minimizador do problema. Mais especificamente, quando q é par podemos garantir que $f^{(1)}(x_0)h = 0$ e também mostraremos que o multiplicador associado a restrição g é igual a zero. No caso em que q é ímpar a igualdade $f^{(1)}(x_0)h = 0$ não é necessariamente verdadeira. Para isto, enunciamos mais uma condição de qualificação.

Definição 3.6. *Dizemos que a Condição de Qualificação de Mangasarian-Fromovitz com respeito a h (abreviadamente: h-MFCQ) é satisfeita em x_0 quando existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$
\begin{aligned}
g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}z &< 0, i \in \mathbb{I}(x_0) && (3.33)\\
F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}z &= 0, j \in \mathbb{J} && (3.34)
\end{aligned}
$$

e $F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes.

Na condição de qualificação anterior incorporamos a restrição de igualdadade na condição de qualificação proposta por Brezhneva e Tretyakov em [21]. Além disto, quando q=p=1 na definição anterior, logo h-MFCQ coincide com MFCQ.

Um vez fixado um vetor $h \in \mathbb{R}^n$, assim como no caso clássico temos a mesma relação entre h-LICQ e h-MFCQ, como podemos ver na proposição a seguir.

Proposição 3.2. *Se h-LICQ é satisfeita em x_0, então h-MFCQ é satisfeita em x_0.*

Demonstração. Suponhamos que h-LICQ é satisfeita em x_0 e $\mathbb{I}(x_0) = \{i_1, ..., i_{s_0}\}$. Consideramos a matriz

$$A = \left(g_{i_1}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} \cdots g_{i_{s_0}}^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} F_1^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} \cdots F_m^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}\right)$$

e $b \in \mathbb{R}^{s_0+m}$ definido por $b_i = -1$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $b_i = 0$, $i \notin \mathbb{I}(x_0)$.

Observamos que as colunas da matriz A são linearmente independentes e isto implica que o sistema $A^t x = b$ tem solução. Sendo $d \in \mathbb{R}^n$ uma solução deste sistema, temos

$$
\begin{aligned}
g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d &< 0, i \in \mathbb{I}(x_0)\\
F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d &= 0, j \in \mathbb{J}.
\end{aligned}
$$

Como $F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes, logo h-MFCQ é satisfeita em x_0. ■

Nossa primeira condição de otimalidade foi obtida através do Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11). Muitas das condições necessárias de otimalidade derivam de algum teorema de alternativa e para isto é necessário a insolubilidade de um determinado sistema. Neste sentido, o próximo resultado é crucial para obtermos mais uma condição necessária de otimalidade.

Teorema 3.3. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.1), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g_i \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0, sendo q par e que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-MFCQ é válida em x_0. Então o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f^{(1)}(x_0)d & < & 0 \\ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d & \leq & 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d & = & 0, j \in \mathbb{J} \end{array} \right. \tag{3.35}$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{R}^n$ o vetor que satisfaz a Definição 3.6. Primeiramente, mostraremos que $f^{(1)}(x_0)h = 0$. Com efeito, suponhamos por absurdo que $f^{(1)}(x_0)h < 0$. Como os vetores $F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes, seque pelo Lema 3.2 que existe uma curva $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}z + y(\alpha)$, sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$, tal que

$$F(x(\alpha)) = F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}z + y(\alpha)) = 0.$$

Agora, para cada $i \in \mathbb{I}(x_0)$ fixado e usando a expansão de Taylor de g_i, temos

$$\begin{aligned} g_i(x(\alpha)) &= g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}z + y(\alpha)) \\ &= \frac{1}{q!}g_i^{(q)}(x_0)[\alpha h + \alpha^{3/2}z + y(\alpha)]^q + o(\alpha^{q+1/2}) \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}g_i^{(q)}(x_0)\,[\alpha h]^{q-j}\left[\alpha^{3/2}z + y(\alpha)\right]^j + o(\alpha^{q+1/2}) \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{j=1}^{q}\alpha^{q+j/2}\binom{q}{j}g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-j}\left[z + \frac{y(\alpha)}{\alpha^{3/2}}\right]^j + o(\alpha^{q+1/2}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0}\frac{g_i(x(\alpha))}{\alpha^{q+1/2}} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{g_i(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}z + y(\alpha))}{\alpha^{q+1/2}} \\ &= \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{q!}\sum_{j=1}^{q}\alpha^{\frac{j-1}{2}}\binom{q}{j}g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-j}\left[z + \frac{y(\alpha)}{\alpha^{3/2}}\right]^j + \frac{o(\alpha^{q+1/2})}{\alpha^{q+1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{(q-1)!}g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}z < 0. \end{aligned}$$

Assim, existe $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que $g_i(x(\alpha)) < 0$. Desta forma, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y(\alpha)$ é factível para o Problema (3.1).

Por outro lado, usando a expansão de Taylor da função f, temos

$$\begin{aligned} f(x(\alpha)) &= f(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}z+y(\alpha)) \\ &= f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(\alpha h+\alpha^{3/2}z+y(\alpha))+o(\alpha^{3/2}) \\ &= f(x_0)+\alpha f^{(1)}(x_0)h+\alpha^{3/2}f^{(1)}(x_0)z+f^{(1)}(x_0)y(\alpha)+o(\alpha^{3/2}) \\ &\leq f(x_0)+\alpha f^{(1)}(x_0)h+\alpha^{3/2}f^{(1)}(x_0)z+\left\|f^{(1)}(x_0)\right\|\|y(\alpha)\|+o(\alpha^{3/2}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x(\alpha))-f(x_0)}{\alpha} &\leq \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\alpha f^{(1)}(x_0)h+\alpha^{3/2}f^{(1)}(x_0)z+\left\|f^{(1)}(x_0)\right\|\|y(\alpha)\|+o(\alpha^{3/2})}{\alpha}\right) \\ &= \lim_{\alpha\to 0}\left(f^{(1)}(x_0)h+\alpha^{1/2}f^{(1)}(x_0)z+\alpha^{1/2}\frac{\left\|f^{(1)}(x_0)\right\|\|y(\alpha)\|+o(\alpha^{3/2})}{\alpha^{3/2}}\right) \\ &= f^{(1)}(x_0)h<0. \end{aligned}$$

Isto garante novamente a existência de $\alpha>0$ suficientemente pequeno tal que

$$f(x(\alpha))=f(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}z+y(\alpha))<f(x_0),$$

uma contradição já que x_0 é um minimizador local do Problema (3.1).

Para o caso $-f^{(1)}(x_0)h<0$, observamos que $-h\in\mathbb{H}_F(x_0)$ e os vetores $F_j^{(p)}(x_0)[-h]^{p-1}, j\in\mathbb{J}$ são linearmente independentes. Logo, podemos reaplicar o Lema 3.2 para $-z$ e novamente encontrarmos uma curva $\widehat{x}(\alpha)=x_0-\alpha h-\alpha^{3/2}z+\widehat{y}(\alpha)$, sendo $\|\widehat{y}(\alpha)\|=o(\alpha^{3/2})$, tal que

$$F(\widehat{x}(\alpha))=F(x_0-\alpha h-\alpha^{3/2}z+\widehat{y}(\alpha))=0.$$

Devido ao fato de q ser par, concluímos que $g_i^{(q)}(x_0)[-h]^{q-1}(-z)<0,\ i\in\mathbb{I}(x_0)$. Analogamente, podemos encontrar $\alpha>0$ suficientemente pequeno tal que $\widehat{x}(\alpha)=x_0-\alpha h-\alpha^{3/2}z+\widehat{y}(\alpha)$ é factível para (3.1) e que

$$f(\widehat{x}(\alpha))=f(x_0-\alpha h-\alpha^{3/2}z+\widehat{y}(\alpha))<f(x_0),$$

uma contradição. Portanto, $f^{(1)}(x_0)h=0$.

Suponhamos que $d\in\mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (3.35) e, sem perda de generalidade, podemos supor que $f^{(1)}(x_0)(z+d)<0$. Novamente, da independência linear dos vetores $F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1},\ j\in\mathbb{J}$ combinado com a aplicação do Lema 3.2 no vetor $z+d$, podemos encontrar uma curva $\widetilde{x}(\alpha)=x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}(z+d)+\widetilde{y}(\alpha)$, sendo $\|\widetilde{y}(\alpha)\|=o(\alpha^{3/2})$, tal que

$$F(\widetilde{x}(\alpha))=F(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}(z+d)+\widetilde{y}(\alpha))=0.$$

Além disto, de forma análoga ao que foi feito no início da demonstração, podemos encontrar $\alpha>0$ suficientemente pequeno tal que a curva $\widetilde{x}(\alpha)=x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}(z+d)+\widetilde{y}(\alpha)$ é factível para o Problema (3.1). Por outro lado, é possível encontrarmos $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f(x(\alpha)) = f(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(z+d) + y(\alpha)) < f(x_0),$$

uma contradição. Portanto, o sistema (3.35) não tem solução. ■

Teorema 3.4. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.1), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g_i \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0, sendo q par e que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-MFCQ é válida em x_0. Então, existe um vetor $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tal que*

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0. \tag{3.36}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.3, o sistema (3.35) não tem solução. Assim, em virtude do Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), existem vetores $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^{s_0}$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0.$$

Agora para o vetor $-h \in \mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)$ e observando que da paridade de q obtemos $g_i^{(q)}(x_0)[-h]^{q-1}(-z) < 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$. Logo, pelo Teorema 3.3, o sistema

$$\begin{cases} f^{(1)}(x_0)d & < & 0 \\ g_i^{(q)}(x_0)[-h]^{q-1}d & \leq & 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(p)}(x_0)[-h]^{p-1}d & = & 0, j \in \mathbb{J} \end{cases}$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$. Logo, a existência $\beta = \beta(h) \in \mathbb{R}_+^{s_0}$ e $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \beta_i g_i^{(q)}(x_0)[-h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \theta_j F_j^{(p)}(x_0)[-h]^{p-1} = 0$$

é garantida pelo Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8).

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} -f^{(1)}(x_0) &= \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} && (3.37) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} -\beta_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \theta_j F_j^{(p)}(x_0)[-h]^{p-1}. && (3.38) \end{aligned}$$

Seja $z \in \mathbb{R}^n$ tal que satisfaz a Definição 3.6. Fazendo o produto interno de z com os vetores definidos como em (3.37) e (3.38), obtemos

$$0 \geq \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}z = \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} -\beta_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}z \geq 0.$$

Logo, $\sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}z = \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} -\beta_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}z = 0$ e isto implica em $\mu_i = \beta_i = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$, provando (3.36) e completando a prova do teorema. ■

Como vimos na demonstração do Teorema 3.4, o fato da ordem q ser par é fundamental para garantirmos que $f^{(1)}(x_0)h = 0$. No caso em que q é ímpar e assumindo h-MFCQ em x_0, a igualdade $f^{(1)}(x_0)h = 0$ não é necessariamente verdadeira e por isto introduzimos esta informação como hipótese no próximo teorema.

Teorema 3.5. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.1), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g_i \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0, sendo q ímpar, que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-MFCQ é válida em x_0 e $f^{(1)}(x_0)h = 0$. Então o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f^{(1)}(x_0)d & < & 0 \\ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d & \leq & 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d & = & 0, j \in \mathbb{J} \end{array} \right. \tag{3.39}$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Notamos que na prova do Teorema 3.3 usamos a hipótese de q ser par para verificarmos que $f^{(1)}(x_0)h = 0$. Como assumimos este fato nas hipóteses, a prova do Teorema 3.5 segue a mesma argumentação do Teorema 3.3 a partir do ponto que supomos, por absurdo, que o sistema (3.39) tem solução. ■

A seguir demonstramos mais condições necessárias de otimalidade para o Problema (3.1).

Teorema 3.6. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.1), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g_i \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (3.6) e (3.7) são satisfeitas em x_0, sendo q ímpar, que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-MFCQ é válida em x_0 e $f^{(1)}(x_0)h = 0$. Então, existem vetores $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}^s_+$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0 \tag{3.40}$$

$$\mu_i g_i(x_0) = 0, i \in \mathbb{I}. \tag{3.41}$$

Demonstração. A prova segue diretamente do Teorema 3.5 combinado com o Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), o que garante a existência de vetores $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}^{s_0}_+$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0.$$

Tomando $\mu_i = 0$, $i \notin \mathbb{I}(x_0)$ provamos (3.40) e como $g_i(x_0) = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$, obtemos (3.41) concluindo a prova do teorema. ■

Como vimos é possível enfraquecer h-LICQ, porém com dois casos a considerarmos: quando a ordem de degeneração q é par ou ímpar. No Teorema 3.1 de [21] a condição necessária de otimalidade depende apenas da função objetivo e em nosso caso quando q é par o sistema tipo KKT depende apenas da função objetivo e da restrição de igualdade, pois neste caso é possível mostrar que os multiplicadores associados a restrição de desigualdade são todos nulos. No caso em que q é ímpar adicionamos a hipótese $f^{(1)}(x_0)h = 0$ para algum $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$. Porém, neste caso não podemos garantir que os multiplicadores associado a restrição de desigualdade são nulos.

No diagrama a seguir mostramos um panorama dos resultados que provamos nesta seção. Para isto, consideramos como hipótese adicional:

$$\begin{aligned} H_1 &: \text{ h-LICQ é satisfeita em } x_0 \\ H_2 &: \text{ h-MFCQ é satisfeita em } x_0,\ f^{(1)}(x_0)h = 0 \text{ e q é ímpar} \\ H_3 &: \text{ h-MFCQ é satisfeita em } x_0 \text{ e q é par} \end{aligned}$$

sendo $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$.

$$\boxed{f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0,\ \mu_i \geq 0 \text{ e } \mu_i g_i(x_0) = 0}$$

$$\uparrow\ \boxed{+\ H_1 \text{ ou } H_2}$$

$$\boxed{x_0 \text{ é um minimizador local do Problema (3.1) (absolutamente degenerado)}}$$

$$\downarrow\ \boxed{+\ H_3}$$

$$\boxed{f^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0}$$

3.2 Estrutura do Conjunto de Multiplicadores

Nesta seção estabelecemos algumas propriedades para o conjunto de multiplicadores do Problema (3.1) que satisfazem (3.6) e (3.7) no caso em que alguma "h-condição de qualificação" é válida em x_0. Como vimos, supondo que x_0 é um minimizador do Problema (3.1) e que para algum $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ específico fixado atendendendo as hipóteses das condições necessárias de otimalidade da seção anterior, podemos garantir a existência de multiplicadores $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^{s_0}$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \;=\; 0. \tag{3.42}$$

A seguir definimos alguns conjuntos relacionados com o Problema (3.1) com o quais relacionaremos propriedades dos multiplicadores. Para isto, definimos a família de funções em que x_0 é um minimizador local do Problema (3.1) e satifaz as degenerações (3.6) e (3.7), ou seja,

$$\mathscr{F} = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U}); x_0 \text{ é minimizador local de (3.1) e satisfaz (3.6) e (3.7)} \right\} \tag{3.43}$$

e o conjunto de multiplicadores que satisfazem (3.42)

$$\Lambda(f,h) = \left\{ (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^{s_0} \times \mathbb{R}^m; \text{(3.42) é satisfeita} \right\}. \tag{3.44}$$

Para os casos não degenerados, isto é, nos casos em que $g_i^{(1)}(x_0) \neq 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$, $F_j^{(1)}(x_0) \neq 0$, $j \in \mathbb{J}$ e $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{U})$, a família de funções $\mathscr{F}$ e o conjunto de multiplicadores $\Lambda(f,h)$, definidos como em (3.43) e (3.44), respectivamente, coincidem com a família de funções e o conjunto de multiplicadores associados ao Problema (3.1) definidos no trabalho de Wachsmuth [97]. Logo este conjunto de multiplicadores não depende do vetor h e desta forma $\Lambda(f,h) = \Lambda(f)$. Neste caso, Gould e Tolle [33] provavaram que $\Lambda(f)$ é não vazio para toda $f \in \mathscr{F}$ se, e somente se, GCQ é satisfeita em x_0, Gauvin [29] mostrou que $\Lambda(f)$ é não vazio e limitado se, e somente se, MFCQ é satisfeita em x_0, Wachsmuth [97] mostrou que LICQ é a condição de qualificação mais fraca que garante existência e unicidade dos multiplicadores de Lagrange. Por fim, Kyparisis [55] provou que uma variante de MFCQ é equivalente à unicidade dos multiplicadores de Lagrange. No entanto, a aplicabilidade desta versão estrita de MFCQ requer a existência de multiplicadores de Lagrange e, portanto, a mesma não é considerada uma condição de qualificação em si.

Baseado nos resultados citados anteriormente e levando-se em consideração as novas regras de multiplicadores obtidas na seção anterior, uma questão natural que surge em nossas análises é quais propriedades podemos obter para o conjunto de multiplicadores de Lagrange associados ao Problema (3.1) que satisfaz (3.6) e (3.7). Algumas destas propriedades descrevemos nos próximos teoremas.

Para os próximos resultados consideramos um $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ específico fixado.

Teorema 3.7. *O conjunto $\Lambda(f,h)$ é fechado e convexo para toda $f \in \mathscr{F}$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{F}$ e consideramos a sequência $(\mu^n, \lambda^n) \subseteq \Lambda(f,h)$ tal que $\mu^n \to \mu$ e $\lambda^n \to \lambda$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i^n g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^n F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0. \tag{3.45}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (3.45), temos

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0.$$

Logo, $\Lambda(f,h)$ é fechado.

Sejam (μ^1, λ^1) e $(\mu^2, \lambda^2) \in \Lambda(f, h)$. Mostraremos que

$$\big((1-t)\mu^1 + t\mu^2, (1-t)\lambda^1 + t\lambda^2\big) \in \Lambda(f, h),$$

para todo $t \in [0, 1]$. De fato, como (μ^1, λ^1) e $(\mu^2, \lambda^2) \in \Lambda(f, h)$, temos

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i^1 g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^1 F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0. \tag{3.46}$$

e

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i^2 g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0. \tag{3.47}$$

Agora, multiplicando (3.46) por $(1-t)$, (3.47) por t e somando ambas, temos

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} ((1-t)\mu_i^1 + t\mu_i^2) g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} ((1-t)\lambda_j^1 + t\lambda_j^2) F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0.$$

Portanto, $\Lambda(f, h)$ é convexo. ■

A seguir estabelecemos propriedade de existência e unicidade para o conjunto de multiplicadores.

Teorema 3.8. *O conjunto $\Lambda(f, h)$ é unitário para toda $f \in \mathscr{F}$ se, e somente se, h-LICQ é satisfeita em x_0.*

Demonstração. Segundo h-LICQ, suponhamos que os vetores $g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}, i \in \mathbb{I}(x_0)$, $F_j(x_0)\,[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes. Sejam (μ^1, λ^1) e $(\mu^2, \lambda^2) \in \Lambda(f, h)$ logo,

$$\sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} (\mu_i^1 - \mu_i^2) g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j^1 - \lambda_j^2) F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0.$$

Como os vetores $g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}, i \in \mathbb{I}(x_0)$, $F_j(x_0)\,[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes, logo $\mu_i^1 = \mu_i^2$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $\lambda_j^1 = \lambda_j^2$, $j \in \mathbb{J}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Lambda(f, h)$ é unitário, para todo $f \in \mathscr{F}$. Definimos a função

$$\widehat{f} = -\sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} g_i.$$

Notamos que

$$\widehat{f}(x_0) = -\sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} g_i(x_0) = 0$$

e

$$\widehat{f}(x) = -\sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} g_i(x) \geq 0 = \widehat{f}(x_0),$$

para todo x factível. Logo, x_0 é minimizador global de $\widehat{f}$, ou seja, $\widehat{f} \in \mathscr{F}$. Além disto,

$$\widehat{f}^{(1)}(x_0) = -\sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} g_i^{(1)}(x_0) = 0.$$

Assim,

$$\widehat{f}^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} 0.g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} 0.F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0,$$

isto é, $\Lambda(\widehat{f}, h) = \{(0,0)\}$.

Sejam $s_0 = |\mathbb{I}(x_0)|$, $\alpha \in \mathbb{R}^{s_0}$ e $\beta \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \alpha_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0.$$

Observamos que

$$\widehat{f}^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \alpha_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0.$$

Como $\Lambda(\widehat{f}, h) = \{(0,0)\}$, logo $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e portanto, h-LICQ é satisfeita em x_0. ■

No próximo teorema relacionamo a limitação do conjunto de multiplicadores com a condição h-MFCQ.

Teorema 3.9. *(i) Se existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $\Lambda(f, h)$ é limitado e não vazio, então h-MFCQ é satisfeita em x_0;*

(ii) Se h-MFCQ é satisfeita em x_0, então $\Lambda(f, h)$ é limitado e não vazio para toda $f \in \mathscr{F}$.

Demonstração. (i) Seja $f \in \mathscr{F}$ tal que $\Lambda(f, h)$ é limitado e não vazio. Consideramos o problema de Programação Linear Primal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f^{(1)}(x_0)y \\ &\text{Sujeito a } g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\, y \leq -1, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ &\qquad\qquad F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\, y = 0, j \in \mathbb{J} \end{aligned} \tag{3.48}$$

e o seu dual

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} -\mu_i \\ &\text{Sujeito a } f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0 \\ &\qquad \mu_i \geq 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Por hipótese, $\Lambda(f,h)$ é não vazio, logo o conjunto factível do Problema (3.49) é não vazio. Além disto, notamos que $\sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} -\mu_i \leq 0$ para todo μ factível, isto é, a função objetivo do problema dual é limitada superiormente. Desta forma, pelo Teorema de Dualidade em Programação Linear [Teorema 5.1.2, [45]], o problema primal tem solução, isto é, existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{array}{rcl} g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\,d & < & 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\,d & = & 0, j \in \mathbb{J}. \end{array}$$

Resta verificarmos que $F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes. De fato, suponhamos por absurdo que $F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ são linearmente dependentes. Fixamos $\mu_i \geq 0, i \in \mathbb{I}(x_0)$ e como $\Lambda(f,h)$ é não vazio para toda $f \in \mathscr{F}$, temos

$$\sum_{j=1}^{m} F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\,\lambda_j = f^{(1)}(x_0) - \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}. \tag{3.50}$$

Podemos escrever a igualdade (3.50) numa forma matricial como a seguir

$$A\lambda = b,$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a matriz cujas linhas são os vetores $F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}, j \in \mathbb{J}$ e

$$b = f^{(1)}(x_0) - \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}.$$

Da hipótese de absurdo concluímos que $posto(A) < m$, logo podemos escolher $n - posto(A)$ variáveis do sistema $A\lambda = b$ e as outras variáveis serão dadas em função destas. Assim, podemos encontrar uma solução fora de qualquer bola e isto contradiz o fato de $\Lambda(f,h)$ ser limitado. Portanto, h-MFCQ é satisfeita em x_0.

(ii) Suponhamos que h-MFCQ é satisfeita em x_0. Logo, existem $\mu_i \geq 0, i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tais que satisfazem (3.42) e desta forma, $\Lambda(f,h)$ é não vazio para toda $f \in \mathscr{F}$. Agora, suponhamos que $\Lambda(f,h)$ não é limitado, logo existe uma sequência $((\mu^n,\lambda^n)) \subseteq \Lambda(f,h)$ tal que $\|(\mu^n,\lambda^n)\| \to \infty$. Podemos encontrar uma sequência (passando para uma subsequência se necessário) de forma que $\dfrac{(\mu^n,\lambda^n)}{\|(\mu^n,\lambda^n)\|} \to (\mu^0,\lambda^0) \neq 0$. Agora observamos que

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i^n g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^n F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0. \tag{3.51}$$

Dividindo (3.51) por $\|(\mu^n,\lambda^n)\|$ e fazendo $n \to \infty$, temos

$$\sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i^0 g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0.$$

Por fim, de acordo com o Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), o sistema

$$\begin{aligned} g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\,y &< 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\,y &= 0, j \in \mathbb{J} \end{aligned}$$

não tem solução na variável y, o que contradiz o fato de h-MFCQ ser válida em x_0. Portanto, $\Lambda(f,h)$ é limitado e não vazio para toda $f \in \mathscr{F}$. ■

No próximo teorema relacionamos a compacidade do conjunto de multiplicadores com h-MFCQ.

Teorema 3.10. *(i) Se existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $\Lambda(f,h)$ é compacto e não vazio, então h-MFCQ é satisfeita em x_0;*

(ii) Se h-MFCQ é satisfeita em x_0, então $\Lambda(f,h)$ é compacto e não vazio para toda $f \in \mathscr{F}$.

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 3.7 e 3.9. ■

Os resultados expressados pelos Teoremas 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 são análogos aos resultados obtidos por Gauvin [29] e Wachsmuth [97], no sentido que uma vez fixado um vetor $h \in \mathbb{R}^n$ específico, o conjunto de multiplicadores que satisfazem a igualdade (3.42) também é convexo e fechado, h-LICQ é uma condição necessária e suficiente para a unicidade dos multiplicadores que satisfazem (3.42) e h-MFCQ é uma condição necessária e suficiente para a compacidade do conjunto dos multiplicadores que satisfazem (3.42).

3.3 Problemas Irregulares com Restrição de Igualdade

Nesta seção, propomos condições de otimalidade para uma classe de problemas irregulares formulados como a seguir

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar f(x)} \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_F, \end{array} \tag{3.52}$$

sendo $\mathbb{M}_F$ definido como em (3.3).

Como é bem conhecido da literatura, o Teorema de Lyusternik (Teorema 2.14) é uma ferramenta útil para construção do cone das direções tangentes ao conjunto

$$\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\},$$

em x_0 quando o operador linear $F^{(1)}(x_0)$ é sobrejetor e, consequentemente, LICQ é satisfeita em x_0. Nestes casos, o cone das direções tangentes pode ser obtido via derivada de primeira ordem, mais especificamente, este cone coincide com o núcleo do operador linear $F^{(1)}(x_0)$. Nestas situações quando x_0 é um minimizador local do Problema (3.52), o Teorema de KKT garante a existência de um vetor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(1)}(x_0) = 0,$$

já que LICQ é verificada em x_0. Por outro lado, quando a sobrejetividade do operador $F^{(1)}(x_0)$ é violada, ou equivalentemente, LICQ não é satisfeita em x_0, é garantido apenas a inclusão do cone das direções tangentes no núcleo do operador linear $F^{(1)}(x_0)$. Veremos que em algumas situações é possível obtermos o cone das direções tangentes, porém com o custo do aumento da ordem de diferenciabilidade das funções envolvidas. Particularmente, estamos interessados nos casos em que o operador linear $F^{(1)}(x_0)$ não é sobrejetivo, ou seja, nos casos em que o Problema (3.52) é irregular.

No que se segue, recordamos o conceito de uma aplicação irregular.

Definição 3.7. *(Brezhneva e Tretyakov [20]) Dizemos que a aplicação $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é regular em x_0 quando*

$$ImF^{(1)}(x_0) = \mathbb{R}^m. \tag{3.53}$$

A aplicação F é irregular quando (3.53) *não é satisfeita.*

Consideramos agora o caso em que a condição de regularidade (3.53) não é válida e para tratarmos destes casos faremos uso de um operador linear específico [8, 15, 19, 20, 75, 92], o qual descrevemos sua construção a seguir.

Suponhamos que para um número natural p, seja possível uma decomposição em soma direta do espaço vetorial $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_p, \tag{3.54}$$

sendo $\mathbb{Y}_1 = ImF^{(1)}(x_0)$ e os demais subespaços são definidos da seguinte maneira:

Definimos $\mathbb{Z}_2$ o subespaço complementar para $\mathbb{Y}_1$ com respeito a $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Z}_2$$

e $P_{\mathbb{Z}_2} : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ a projeção definida como

$$P_{\mathbb{Z}_2}(y) = z_2,$$

sendo $y = y_1 + z_2$ e $y_1 \in \mathbb{Y}_1$ e $z_2 \in \mathbb{Z}_2$.

Definimos $\mathbb{Y}_2 = span\left(ImP_{\mathbb{Z}_2}F^{(2)}(x_0)\,[\cdot]^2\right)$ e indutivamente, temos

$$\mathbb{Y}_i = span\left(ImP_{\mathbb{Z}_i}F^{(i)}(x_0)\,[\cdot]^i\right), i = 2, ..., p-1, \tag{3.55}$$

sendo $\mathbb{Z}_i$ o subespaço complementar para $\mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_{i-1}$ com respeito a $\mathbb{R}^m$, $i = 2, ..., p$, e

$$P_{\mathbb{Z}_i} : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Y}_{i-1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_i \longrightarrow \mathbb{Z}_i$$

é a projeção definida como

$$P_{\mathbb{Z}_i}(y) = z_i, i = 2, ..., p,$$

sendo $y = y_1 + ... + y_{i-1} + z_i$, $y_i \in \mathbb{Y}_i$ e $z_i \in \mathbb{Z}_i$.

Finalmente, definimos $\mathbb{Y}_p = \mathbb{Z}_p$ e p é escolhido como o número natural mínimo para o qual (3.54) é válido.

Consideramos as seguintes aplicações

$$\phi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p, \tag{3.56}$$

definidas como

$$\phi_i(y) = P_i F(y),$$

sendo $y = y_1 + ... + y_i + ... + y_p$, $y_i \in \mathbb{Y}_i$ e

$$P_i : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_p \longrightarrow \mathbb{Y}_i$$

é a projeção $P_i(y) = y_i$.

Definição 3.8. *(Brezhneva e Tretyakov [20]) Seja $h \in \mathbb{R}^n$ um vetor fixado. O operador linear $\Phi_p(h) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definido como*

$$\Phi_p(h) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}$$

é denominado operador p-fator.

Para cada $i = 1, ..., p$ fixado no operador linear anterior, o fator $\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}$ é um operador linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{Y}_i$, sendo $\mathbb{Y}_i$ definido como em (3.55). Além disto, temos

$$\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1} = P_i F^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}.$$

Particularmente, para $i = 1$, obtemos

$$\phi_1^{(1)}(x_0) = F^{(1)}(x_0).$$

Agora podemos recordar a definição da p-regularidade segundo Tretyakov e Brezhneva.

Definição 3.9. *(Brezhneva e Tretyakov [20]) Seja $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sendo $\mathbb{U}$ um aberto e $F \in \mathscr{C}^p(\mathbb{U})$. Dizemos que a aplicação F é p-regular em x_0 com respeito a $h \in \mathbb{R}^n$ quando*

$$Im\Phi_p(h) = \mathbb{R}^m.$$

Além disto, dizemos que a aplicação F é p-regular em x_0 quando F é p-regular com respeito a qualquer $h \neq 0$ no conjunto

$$\mathbb{H}_F(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n; \phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^i = 0, i = 1, ..., p \right\}. \tag{3.57}$$

Observamos que a p-regularidade definida anterior generaliza o conceito de regularidade da Definição 3.7. Ademais, para o caso absolutamente degenerado, considerado na Seção 2.2, o conjunto $\mathbb{H}_F(x_0)$ definido como em (3.57) coincide com o conjunto definido como em (3.9).

A Teoria da p-regularidade tem sido utilizada em diversos ramos da Matemática como em Geometria (caracterização do espaço tangente a uma variedade), em Sistemas Dinâmicos, em Análise Numérica (obtenção de uma variante do Método de Newton, quando a correspondente matriz Hessiana não é inversível), em Cálculo Variacional e em Equações Diferenciais. Nas referências [7, 8, 9, 15, 18, 19, 20, 34, 35, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 91, 92, 94, 95] podemos evidenciar aplicações da Teoria da p-regularidade.

O próximo teorema é uma generalização do Teorema de Lyusternik (Teorema 2.14) e apresenta uma possibilidade de construção do cone das direções tangentes quando a condição de regularidade da Definição 3.7 não for contemplada.

Teorema 3.11 (Lyusternik Generalizado). *Sejam $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sendo $\mathbb{U}$ uma vizinhança de x_0, $F \in \mathscr{C}^p(\mathbb{U})$ e F é p-regular em x_0. Então, o cone das direções tangentes ao conjunto $\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\}$ no ponto x_0 coincide com o conjunto $\mathbb{H}_F(x_0)$, ou seja,*

$$\mathscr{T}\mathbb{M}_F(x_0) = \mathbb{H}_F(x_0).$$

Para maiores detalhes veja [Teorema 2.5, [20]].

Em alguns trabalhos como [2, 5, 41, 43, 44, 96] o termo “2-regularidade” é utilizado. A seguir relacionamos o conceito da 2-regularidade utilizada neste trabalho com dois outros encontrados em outros trabalhos.

Se $p = 2$, o operador 2-fator $\Phi_2(h) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser definido como a seguir

$$\Phi_2(h) = F^{(1)}(x_0) + P^{\perp}F^{(2)}(x_0)h, h \in \mathbb{R}^n,$$

sendo $P^{\perp}$ a matriz de projeção em $(ImF'(x_0))^{\perp}$ e

$$h \in \mathbb{H}_F = \left\{h \in \mathbb{R}^n; F^{(1)}(x_0)h = 0, P^{\perp}F^{(2)}(x_0)\left[h\right]^2 = 0\right\}.$$

Neste caso, a 2-regularidade no sentido de Brezhneva e Tretyakov coincide com a 2-regularidade no sentido de Avakov [Definição 11.1, [2]].

Vivanco Orellana introduz em [96] a noção de 2-regularidade através da igualdade entre o conjunto

$$\mathbb{H}(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n; \exists x_h \in \mathbb{R}^n,\ F^{(1)}(x_0)h = 0,\ F^{(1)}(x_0)x_h + F^{(2)}[h]^2 = 0\}$$

e o cone das direções tangentes ao conjunto $\mathbb{M}_F$, ou seja, segundo Vivanco Orellana um ponto x_0 é 2-regular se

$$\mathbb{H}(x_0) = \mathscr{T}\mathbb{M}_F(x_0).$$

Agora observamos que se a 2-regularidade de F em x_0 no sentido de Brezhneva e Tretyakov é verificada, então pelo Teorema de Lyusternik Generalizado (Teorema 3.11), temos

$$\mathbb{H}(x_0) = \mathscr{T}\mathbb{M}_F(x_0),$$

isto é, a noção de 2-regularidade no sentido de Brezhneva e Tretyakov implica na noção de 2-regularidade segundo Vivanco Orellana.

Uma vez conhecido o operador p-fator é possível obtermos uma generalização da função Lagrangeana clássica como vemos na definição seguinte.

Definição 3.10. *(Brezhneva e Tretyakov [20]) A função Lagrangeana p-fator*

$$\mathscr{L}_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{pn} \longrightarrow \mathbb{R}$$

do Problema (3.52) *com respeito a* $h \in \mathbb{R}^n$ *associada ao operador p-fator da Definição* 3.8 *é*

$$\mathscr{L}_p\left(x, h, \lambda_0, \lambda\right) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(i-1)}(x)\left[h\right]^{i-1}\lambda_i,$$

sendo $\lambda_0 = \lambda_0(h)$*,* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ *e* $\lambda_i = \lambda_i(h), i = 1, ..., p$*.*

Observação 3.1. *A Lagrangeana p-fator reduz-se a Lagrangeana clássica quando* $p = 1$*.*

Com efeito, no caso em que $p = 1$, temos

$$\mathbb{Y}_1 = \mathbb{R}^m \text{ e } \phi_1 = P_1 F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{Y}_1,$$

sendo $P_1 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{Y}_1$ o operador identidade. Logo, $\phi_1 = F$ e segue que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1\left(x, h, \lambda_0, \lambda\right) &= \lambda_0 f(x) + \phi_1(x)\lambda \\ &= \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(x).\end{aligned}$$

Como foi dito anteriormente, nos casos em que LICQ não é satisfeita em x_0 isto implica diretamente na irregularidade da aplicação F. Para problemas desta classe, Izmailov e Tretyakov [42], demonstram novas condições necessárias de otimalidade. Estas condições de otimalidade são enunciadas em outros trabalhos como [15, 17, 19, 20, 95]. Apresentamos uma demonstração alternativa, via Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11), para estas condições necessárias de otimalidade. Para isto, enunciamos e provamos uma série de lemas auxiliares.

Lema 3.5. *Seja* $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$*. Suponhamos que exista* $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \backslash \{0\}$ *tal que* F *é p-regular em* x_0 *com respeito a* h*. Então, existem* $\alpha_0 > 0$ *suficientemente pequeno e uma aplicação* $y : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$F(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0,$$

sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha)$*.*

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$ e $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \backslash \{0\}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\|h\| = 1$ e $\displaystyle\sum_{i=2}^{p} \left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\| < 1$. Definimos a multifunção $\Lambda : \mathbb{B}_\alpha(0) \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ por

$$\Lambda(y) = y - \left\{\Phi_p(h)\right\}^{-1} F(x_0 + \alpha h + y),$$

sendo $\Phi_p(h) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ o operador p-fator da Definição 3.8.

Em virtude da sobrejetividade do operador linear $\Phi_p(h)$, é fácil verificarmos que a multifunção Λ atente as hipóteses do Princípio da Contração para Multifunções (Teorema 2.4).

Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{B}_\alpha(0)$ e $\mathscr{H}(\Lambda(y_1), \Lambda(y_2))$ a distância entre $\Lambda(y_1)$ e $\Lambda(y_2)$ pela métrica de Hausdorff $\mathscr{H}$. Aplicando o Teorema 2.5 combinado com o Teorema 2.6 e a Observação 2.4, temos

$$\mathscr{H}(\Lambda(y_1), \Lambda(y_2)) = \inf \{\|z_1 - z_2\| \,;\, z_i \in \Lambda(y_i), i = 1, 2\},$$

sendo que $z_i = y_i - x_i$ e x_i é tal que $\Phi_p(h)x_i = F(x_0 + \alpha h + y_i)$.

Agora fazendo $w_i = F(x_0 + \alpha h + y_i)$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(\Lambda(y_1), \Lambda(y_2)) &= \inf \{\|z_1 - z_2\| \,;\, \Phi_p(h)(y_i - z_i) = w_i, i = 1, 2\} \\
&= \inf \{\|z_1 - z_2\| \,;\, \Phi_p(h)(z_1 - z_2) = \Phi_p(h)(y_1 - y_2) + w_2 - w_1\} \\
&\leq \left\|\{\Phi_p(h)\}^{-1}\right\| \|w_1 - w_2 - \Phi_p(h)(y_1 - y_2)\| \qquad (3.58) \\
&\leq C \sup_{t \in [0,1]} \left\|\widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| \|y_1 - y_2\|. \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

sendo $C = \left\|\{\Phi_p(h)\}^{-1}\right\| < \infty$ em consequência do Teorema 2.7 e

$$\widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h) = F^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)) - \Phi_p(h).$$

Além disto, as desigualdades (3.58) e (3.59) foram obtidas, respectivamente, em virtude dos Teoremas 2.7 e 2.3.

Por expansão de Taylor de $F^{(1)}$, temos

$$F^{(1)}(x_0 + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)) = F^{(1)}(x_0) + \frac{1}{2}F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)] + o(\alpha).$$

Logo,

$$\left\|\widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| = \left\|\frac{1}{2}F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)] + o(\alpha) + \sum_{i=2}^{p} \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\|$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| &= \left\|\frac{1}{2}F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)] + \sum_{i=2}^{p} \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} + o(\alpha)\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)]\right\| + \sum_{i=2}^{p} \left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\| + o(\alpha) \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|F^{(2)}(x_0)\right\| \|[\alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)]\| + \sum_{i=2}^{p} \left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\| + o(\alpha) \\
&< 2\alpha \left\|F^{(2)}(x_0)\right\| + \sum_{i=2}^{p} \left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\| + o(\alpha).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|\widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| < 2\alpha \left\|F^{(2)}(x_0)\right\| + \sum_{i=2}^{p} \left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\| + o(\alpha). \qquad (3.60)$$

Por outro lado,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(\alpha) - 2\alpha \left\| F^{(2)}(x_0) \right\|}{\alpha} = -2 \left\| F^{(2)}(x_0) \right\| < 0.$$

Logo, para α suficientemente pequeno, temos

$$o(\alpha) < 2\alpha \left\| F^{(2)}(x_0) \right\|$$

e por (3.60), obtemos

$$\left\| \widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h) \right\| < 4\alpha \left\| F^{(2)}(x_0) \right\| + \sum_{i=2}^{p} \left\| \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} \right\|. \tag{3.61}$$

Em virtude das desigualdades (3.59) e (3.61), temos

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(\Lambda(y_1), \Lambda(y_2)) &\leq \frac{C}{\alpha^{p-1}} \sup_{t \in [0,1]} \left\| \widehat{\Gamma}(t, \alpha, y_1, y_2, h) \right\| \|y_1 - y_2\| \\ &\leq \left(4\alpha \left\| F^{(2)}(x_0) \right\| + \sum_{i=2}^{p} \left\| \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} \right\| \right) \|y_1 - y_2\| \\ &\leq \theta(\alpha) \|y_1 - y_2\|, \end{aligned}$$

sendo

$$\theta(\alpha) = \left(4\alpha \left\| F^{(2)}(x_0) \right\| + \sum_{i=2}^{p} \left\| \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} \right\| \right).$$

Como

$$\lim_{\alpha \to 0} \theta(\alpha) = \sum_{i=2}^{p} \left\| \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} \right\| < 1,$$

logo podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que Φ é uma contração.

Denotamos por $d(0, \Lambda(0))$ a distância entre 0 e $\Lambda(0)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} d(0, \Phi(0)) &= \inf \{ \|x\| ; x \in \Lambda(0) \} \\ &= \inf \{ \|x\| ; \Phi_p(h)x = F(x_0 + \alpha h) \} \\ &\leq \left\| \{\Phi_p(h)\}^{-1} \right\| \left\| F(x_0) + F^{(1)}(x_0)h + o(\alpha) \right\| \\ &= o(\alpha). \end{aligned}$$

Assim, para $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e em virtude do Teorema 2.4 existe uma aplicação $y(\alpha) : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$y(\alpha) \in \Lambda(y(\alpha)),$$

isto é,

$$F(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} \|y(\alpha)\| &\leq \frac{2}{1-\theta(\alpha)} d(0, \Lambda(0)) \\ &= o(\alpha). \end{aligned}$$

■

Lema 3.6. *Seja $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que exista $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \setminus \{0\}$ tal que F é p-regular em x_0 com respeito a h. Seja $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $F^{(1)}(x_0)w = 0$. Então, existem $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma aplicação $y : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0,$$

sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$.

Demonstração. Sejam $\varepsilon = \alpha^{3/2}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \setminus \{0\}$ e $w \neq 0$ tal que $F^{(1)}(x_0)w = 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|h\| = \|w\| = 1$ e $\sum_{i=2}^{p} \left\| \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} \right\| < 1$. Definimos a multifunção $\Delta : \mathbb{B}_\varepsilon(0) \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ por

$$\Delta(y) = y - \{\Phi_p(h)\}^{-1} F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y).$$

O restante da demonstração segue de forma análoga ao que foi feito na demonstração do lema anterior. ■

Lema 3.7. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.52), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que exista $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \setminus \{0\}$ tal que F é p-regular em x_0 com respeito a h. Então,*

$$f^{(1)}(x_0)h = 0.$$

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que $f^{(1)}(x_0)h < 0$. De acordo com o Lema 3.5, existe uma curva $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + y(\alpha)$, sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$ tal que

$$F(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) = 0,$$

isto é, $x(\alpha)$ é factível para o Problema (3.52).

Agora usando a expansão de Taylor da função f e usando a hipótese do absurdo $f^{(1)}(x_0)h < 0$, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f(x(\alpha)) = f(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) < f(x_0),$$

o que contradiz o fato de x_0 ser um minimizador local do Problema (3.52).

Para o caso em que $-f^{(1)}(x_0)h < 0$, observamos que para o vetor $-h$ também temos $F^{(1)}(x_0)(-h) = 0$ e considerando-se a multifunção

$$\Lambda(y) = y - \{\Phi_p(h)\}^{-1} F(x_0 - \alpha h + y)$$

assim como foi feito no Lema 3.5, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno e uma curva $x : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(\alpha) = x_0 - \alpha h + y(\alpha) \text{ e } F(x(\alpha)) = 0.$$

Agora basta repetir o raciocínio para caso em que $f^{(1)}(x_0)h < 0$ e chegamos novamente num absurdo. Portanto, $f^{(1)}(x_0)h = 0$. ■

Lema 3.8. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema* (3.52), *$f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que exista $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ tal que F é p-regular em x_0 com respeito a h. Então, para todo $w \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ tal que $F^{(1)}(x_0)w = 0$, temos*

$$f^{(1)}(x_0)w \geq 0.$$

Demonstração. A demonstração segue supondo, por absurdo, que exista $w \neq 0$ tal que $F^{(1)}(x_0)w = 0$ e $f^{(1)}(x_0)w < 0$. Em virtude do Lema 3.6, é possível encontrarmos uma curva $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y(\alpha)$, sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$, tal que

$$F(x(\alpha)) = F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y(\alpha)) = 0.$$

Usando a igualdade provada no Lema 3.7, isto é, $f^{(1)}(x_0)h = 0$ e a hipótese de absurdo $f^{(1)}(x_0)w < 0$, juntamente com a expansão de Taylor de f, é possível encontrarmos $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f(x(\alpha) = f(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}w + y(\alpha)) < f(x_0).$$

Isto contradiz o fato de x_0 ser um minimizador local do Problema (3.52). Portanto, segue o resultado do Lema. ■

A seguir mostramos as condições necessárias de otimalidade obtidas por Izmailov e Tretyakov.

Teorema 3.12. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema* (3.52), *$f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que exista $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ tal que F é p- regular em x_0 com respeito a h. Então, existem $\lambda_i = \lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p$, tais que*

$$\mathscr{L}^{(1)}_{p_x}(x_0, h, 1, \lambda) = f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \left[\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\right]^t \lambda_i = 0,$$

sendo $\mathscr{L}^{(1)}_{p_x}(x_0, h, 1, \lambda)$ a primeira derivada da função Lagrangeana p-fator em relação a variável x, $\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}, i = 1, ..., p$ são os fatores do operador p-fator da Definido 3.8, *$\mathbb{Y}_1 = ImF^{(1)}(x_0)$, $\mathbb{Y}_i, i = 2, ..., p-1$, são definidos como em (*3.55*) e $\mathbb{Y}_p$ é tal que $\mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_p$.*

Demonstração. A ideia da demonstração, novamente, é criarmos um problema auxiliar o qual aplicaremos o Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11). Primeiramente, observamos que a p-regularidade de F em x_0 com respeito a h nos garante a existência de uma decomposição em soma direta do espaço $\mathbb{R}^m$ da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_p,$$

Além disto, temos

$$\mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_p \cong \mathbb{Y}_1 \times \cdots \times \mathbb{Y}_p.$$

Por construção, as aplicações $\phi_i = P_i F$, $i = 1, ..., p$, dadas em (3.56) tem imagem no respectivo subespaço $\mathbb{Y}_i$, logo $Im\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} \subseteq \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p$. Usando estas ideias fica bem definida a aplicação

$$\widetilde{F}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{\text{p cópias}} \longrightarrow \mathbb{Y}_1 \times \cdots \times \mathbb{Y}_p,$$

definida como a seguir

$$\widetilde{F}(x_0)(x_1, ..., x_p) = \left(\phi_1^{(1)}(x_0)x_1, ..., \phi_p^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}x_p\right). \tag{3.62}$$

Por outro lado, definimos a função objetivo do problema auxiliar

$$\widetilde{f}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{\text{p cópias}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

como

$$\widetilde{f}(x_0)(x_1, ..., x_p) = f^{(1)}(x_0)x_1.$$

Claramente, $\widetilde{f}(x_0)$ e $\widetilde{F}(x_0)$ são diferenciavéis.

Agora estabelecemos o problema de Otimização auxiliar, o qual aplicaremos o Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11).

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } \widetilde{f}(x_0)(x_1, ..., x_p) \\ \text{Sujeito a } (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0), \end{array} \tag{3.63}$$

sendo

$$\mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0) = \left\{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n ; \widetilde{F}(x_0)(x_1, ..., x_p) = 0\right\}. \tag{3.64}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} h \in \mathbb{H}_F(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^i = 0, i = 1, ..., p \\ &\Leftrightarrow \quad \widetilde{F}(x_0)(h, ..., h) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (h, ..., h) \in \mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0). \end{aligned}$$

Logo, $(h, ..., h)$ é factível para o Problema (3.63). Além disto, por conta do Lema 3.8, temos

$$\widetilde{f}(x_0)(x_1, ..., x_p) = f^{(1)}(x_0)x_1 \geq 0,$$

para todo $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0)$.

Para nossos propósitos é necessário que $(h, ..., h)$ seja um minimizador do Problema (3.63) e isto segue diretamente do Lema 3.7, pois $(h, ..., h)$ é factível para o problema auxiliar e temos

$$\widetilde{f}(x_0)(h, ..., h) = f^{(1)}(x_0)h = 0.$$

Desta forma, $(h, ..., h)$ é minimizador global para o problema auxiliar.

Agora devemos construir os cones de descida e tangente em $(h, ..., h)$ do problema auxiliar e seus respectivos duais.

Denotamos por $\mathbb{C}_0$ o cone das direções de descida de $\widetilde{f}(x_0)$ em $(h, ..., h)$. Logo, $\mathbb{C}_0$ e seu dual seguem como em (3.29) e (3.30), respectivamente. Desta forma,

$$\mathbb{C}_0 = \left\{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n; \widetilde{f}(x_0)(x_1, ..., x_p) < 0\right\}$$

e

$$\mathbb{C}_0^* = \left\{-\theta \widetilde{f}(x_0); \theta \geq 0\right\}.$$

Denotamos por $\mathbb{C}_1$ o cone das direções tangente a $\mathbb{M}_{\widetilde{F}}(x_0)$ em $(h, ..., h)$. Para construirmos o conjunto $\mathbb{C}_1$ através do Teorema 2.14 é necessário a sobrejetividade do operador $\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)$, fato este que verificamos a seguir. Devido à linearidade das componentes da restrição de igualdade do problema auxiliar, temos

$$\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h) = \widetilde{F}(x_0).$$

Seja $(w_1, ..., w_p) \in \mathbb{Y}_1 \times \cdots \times \mathbb{Y}_p$. Por hipótese, temos $Im\Phi_p(h) = \mathbb{R}^m$, logo para cada $w_i \in \mathbb{Y}_i$, $i = 1, ..., p$, existe $z_i \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Phi_p(h)(z_i) = \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} z_i = w_i, i = 1, ..., p.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)(z_1, ..., z_p) &= \left(\phi_1^{(1)}(x_0)z_1, ..., \phi_p^{(p)}(x_0) [h]^{p-1} z_p\right) \\ &= (w_1, ..., w_p). \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Teorema de Lyusternik (Teorema 2.14), segue que

$$\mathbb{C}_1 = Ker\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h).$$

Segundo o Teorema 2.15, o dual de $\mathbb{C}_1$ é definido como

$$\mathbb{C}_1^* = \{(x_1, ..., x_p); (x_1, ..., x_p)(y_1, ..., y_p) = 0, \forall (y_1, ..., y_p) \in \mathbb{C}_1\},$$

sendo $(x_1, ..., x_p)(y_1, ..., y_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$ e $x_i y_i$ o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

Por outro lado, para todo $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{C}_1^*$, temos

$$(x_1, ..., x_p) \in \left[Ker\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)\right]^{\perp} = Im\left[\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)\right]^t,$$

ou seja, existem $-\lambda_i \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p$, sendo $\lambda_i = \lambda_i(h)$, tais que

$$(x_1, ..., x_p) = -\left[\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)\right]^t (\lambda_1, ..., \lambda_p).$$

Logo,

$$\mathbb{C}_1^* = \left\{-\left[\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)\right]^t (\lambda_1, ..., \lambda_p); \lambda_i \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p\right\}.$$

Podemos expressar o operador $\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)$ numa forma matricial como a seguir

$$\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h) = \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)}(x_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \phi_p^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{F}^{(1)}(x_0)(h, ..., h)\right]^t \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)}(x_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \phi_p^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left[\phi_1^{(1)}(x_0)\right]^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \left[\phi_p^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right]^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left[\phi_1^{(1)}(x_0)\right]^t \lambda_1 \\ \vdots \\ \left[\phi_p^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right]^t \lambda_p \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim podemos escrever o dual $\mathbb{C}_1^*$ em termos dos fatores do operador p-fator da seguinte forma

$$\mathbb{C}_1^* = \left\{-\left(\left[\phi_1^{(1)}(x_0)\right]^t \lambda_1, ..., \left[\phi_p^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right]^t \lambda_p\right); \lambda_i \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p\right\}.$$

Conhecendo os cones duais fundamentais, consideramos agora $(x_1, ..., x_1) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$, sendo x_1 um vetor qualquer e do Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[\theta\widetilde{f}(x_0) + \left(\left[\phi_1^{(1)}(x_0)\right]^t \lambda_1, ..., \left[\phi_p^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right]^t \lambda_p\right)\right](x_1, ..., x_1) \\
&= \theta\widetilde{f}(x_0)(x_1, ..., x_1) + \left(\left[\phi_1^{(1)}(x_0)\right]^t \lambda_1, ..., \left[\phi_p^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right]^t \lambda_p\right)(x_1, ..., x_1) \\
&= \theta f^{(1)}(x_0)x_1 + \sum_{i=1}^{p}\left[\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\right]^t \lambda_i x_1 \\
&= \left[\theta f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p}\left[\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\right]^t \lambda_i\right] x_1.
\end{aligned}
$$

Concluindo que

$$\theta f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p}\left[\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\right]^t \lambda_i = 0.$$

Resta apenas verificarmos que $\theta \neq 0$, o que segue diretamente da Observação 2.6, já que $(h, ..., h) \in \mathbb{C}_1$, isto é, $\mathbb{C}_1 \neq \emptyset$. ■

O resultado anterior já é conhecido na literatura [18, 20, 42] e nossa contribuição é apresentarmos uma demonstração alternativa, via Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11).

Exemplo 4. *Segue um exemplo para ilustrarmos o teorema que acabamos de demonstrar,*

$$
\begin{array}{l}
\textit{Minimizar } f(x) = x_4 + x_1^2 \\
\textit{Sujeito a } x \in M_F = \{x \in \mathbb{R}^4; x_4 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}.
\end{array}
\tag{3.65}
$$

Sejam $F_1(x) = x_4 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ e $F_2(x) = x_3^2 - x_1^2 - x_2^2$. Afirmamos que $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um minimizador do Problema (3.65). Com efeito, observamos primeiramente que x_0 é factível,

$$F_1(x) = x_4 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \Rightarrow x_4 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$$

e

$$F_2(x) = x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_3^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Logo,

$$f(x) = x_4 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0 = f(x_0).$$

Portanto, x_0 é um minimizador global do Problema (3.65).

Agora, notamos que

$$f^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$F^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & 1 \\ -2x_1 & -2x_2 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$F^{(2)}(x_0)h = \begin{bmatrix} 2h_1 & -2h_2 & -2h_3 & 0 \\ -2h_1 & -2h_2 & 2h_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que $ImF^{(1)}(x_0) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2$, isto é, F é irregular em x_0. Por outro lado, fazendo $\mathbb{Y}_1 = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\mathbb{Y}_2 = \mathbb{Y}_1^{\perp} = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, logo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Y}_2$. Desta forma, a projeção ortogonal

$$P^{\perp} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Y}_2$$

dada por

$$P^{\perp}(x) = P^{\perp}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tem sua forma matricial igual a

$$P^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P^{\perp}F^{(2)}(x_0)h &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2h_1 & -2h_2 & -2h_3 & 0 \\ -2h_1 & -2h_2 & 2h_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2h_1 & -2h_2 & 2h_3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$P^{\perp}F^{(2)}(x_0)[h]^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2h_1^2 - 2h_2^2 + 2h_3^2 \end{bmatrix}.$$

Assim, operador 2-fator $\Phi_2(h) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definido como

$$\begin{aligned} \Phi_2(h) &= F^{(1)}(x_0) + P^{\perp}F^{(2)}(x_0)h \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2h_1 & -2h_2 & 2h_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2h_1 & -2h_2 & 2h_3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_F(x_0) &= \left\{h \in \mathbb{R}^4; F^{(1)}(x_0)h = 0, P^{\perp}F^{(2)}(x_0)[h]^2 = 0\right\} \\ &= \left\{h \in \mathbb{R}^n; h_4 = 0, h_3^2 = h_1^2 + h_2^2\right\}. \end{aligned}$$

Observamos que para todo $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ temos $Im\Phi_2(h) = \mathbb{R}^2$, ou seja, F é 2-regular em x_0. Particularmente, para $h = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_F(x_0)$ obtemos

$$P^{\perp}F^{(2)}(x_0)h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Y}_1$ e $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Y}_2$. Logo, a relação

$$\begin{aligned} 0 &= f^{(1)}(x_0) + \left(F^{(1)}(x_0)\right)^t \lambda + \left(P^{\perp}F^{(2)}(x_0)h\right)^t \beta \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta_2 \\ 2\beta_2 \\ 2\sqrt{2}\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se cumpre para $\lambda_1 = -1$ e $\beta_2 = 0$.

Para finalizarmos esta seção, enunciamos a seguir condições suficiente para que x_0 seja um minimizador local estrito do problema irregular definido como em (3.52).

Teorema 3.13. *Sejam $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que F é p- regular em x_0 e que exista $\lambda_i = \lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p$ tal que*

$$\mathscr{L}^{(1)}_{px}(x_0, h, 1, \lambda) = f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \left[\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right]^t \lambda_i = 0.$$

Se existem $\alpha > 0$ e multiplicadores $\theta_i = \dfrac{2}{i(i+1)}\lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p$, tais que

$$\mathscr{L}^{(2)}_{pxx}(x_0, h, 1, \theta)[h]^2 \geq \alpha\|h\|^2,$$

para todo $h \in \mathbb{H}_F(x_0)$ e sendo $\mathscr{L}^{(2)}_{pxx}(x_0, h, 1, \theta)$ a segunda derivada da função Lagrangeana p-fator em relação a variável x. Então x_0 é um minimizador local estrito do Problema (3.52).

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [Teorema 3.3, [15]]. Nosso objetivo em enunciarmos este último resultado é estabelecermos condições suficientes em Controle Ótimo Discreto. Mais do que isto, na Seção 3.5 daremos duas aplicações destes dois últimos resultados em Controle Ótimo Discreto.

3.4 Problemas Irregulares com Restrição de Desigualdade e Igualdade

Nosso intuito nesta seção é determinarmos condições necessárias de otimalidade para o problema de Otimização que consiste em

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar f(x)} \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F, \end{array} \tag{3.66}$$

sendo $\mathbb{M}_g$ e $\mathbb{M}_F$ definidos como em (3.2) e (3.3), respectivamente, e a aplicação F é irregular no minimizador do problema. Na Seção 2.3 tinhamos um problema de Otimização apenas com restrição de igualdade e no Problema (3.66) incorporamos a restrição de desigualdade. Observamos que a irregularidade da aplicação F em x_0 significa que LICQ e MFCQ não são satisfeitas, em outras palavras, o Problema (3.66) é uma problema irregular. Para obtermos novas condições necessárias de otimalidade desta classe de problemas, propomos uma nova condição de qualificação que pode ser vista como uma generalização da Condição de Qualificação de Mangasarian-Fromovitz.

Definição 3.11. *Dizemos que a Condição de Qualificação de Mangasarian-Fromovitz Generalizada com respeito a h (abreviadamente: h-GMFCQ) é satisfeita em x_0 quando F é p-regular em x_0 com respeito a h e existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$g_i^{(1)}(x_0)z < 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \tag{3.67}$$

$$\Phi_p(h)z = 0, \tag{3.68}$$

sendo $\Phi_p(h)$ o operador p-fator da Definição 3.8.

Notamos que no caso em que $p = 1$, o operador p-fator é igual $F^{(1)}(x_0)$ e a sobrejetividade deste equivale a independência linear dos vetores $F_j^{(1)}(x_0)$, $j \in \mathbb{J}$, logo h-GMFCQ coincide com MFCQ.

Teorema 3.14. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema (3.66), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que exista $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\setminus\{0\}$ tal que h-GMFCQ é satisfeita em x_0, $g_i^{(1)}(x_0)h = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $f^{(1)}(x_0)h = 0$. Então o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f^{(1)}(x_0)d & < & 0 \\ g_i^{(1)}(x_0)d & \leq & 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ \phi_i(x_0)[h]^{i-1}d & = & 0, i = 1, ..., p, \end{array} \right. \tag{3.69}$$

sendo $\phi_i(x_0)[h]^{i-1}$, $i = 1, ..., p$ os fatores do operador p-fator, não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{R}^n$ o vetor que satisfaz a Definição 3.11. Suponhamos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (3.69) e podemos supor que $f^{(1)}(x_0)(z + d) < 0$. Da sobrejetividade do operador $\Phi_p(h)$ combinado com a aplicação do Lema 3.6 ao vetor $z + d$, podemos encontrar uma curva $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(z + d) + y(\alpha)$, sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$, tal que

$$F(x(\alpha)) = F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(z + d) + y(\alpha)) = 0.$$

Além disto, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$g(x(\alpha)) = g(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(z+d) + y(\alpha)) \leq 0.$$

Por outro lado,

$$f(x(\alpha)) = f(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(z+d) + y(\alpha)) < f(x_0),$$

para algum $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, contradizendo o fato de x_0 ser um minimizador local do Problema (3.66). Portanto, o sistema (3.69) não tem solução. ■

A seguir mostramos uma nova condição necessária de otimalidade para o Problema (3.66).

Teorema 3.15. *Sejam x_0 um minimizador local do Problema* (3.66), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ *e* $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. *Suponhamos que exista* $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \backslash \{0\}$ *tal que h-GMFCQ é satisfeita em* x_0, $g_i^{(1)}(x_0)h = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ *e* $f^{(1)}(x_0)h = 0$. *Então, existem vetores* $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^s$ *e* $\lambda_j = \lambda_j(h) \in \mathbb{Y}_j, j = 1, ..., p$, *tais que*

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{p} \left[\phi_j^{(j)}(x_0)\,[h]^{j-1}\right]^t \lambda_j = 0 \quad (3.70)$$

$$\mu_i g_i(x_0) = 0, i \in \mathbb{I}. \quad (3.71)$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.14 o sistema (3.69) não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$. Combinando este fato com o Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), existem vetores $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^{s_0}$ e $\lambda_j = \lambda_j(h) \in \mathbb{Y}_j$, $j = 1, ..., p$, tais que

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{p} \left[\phi_j^{(j)}(x_0)\,[h]^{j-1}\right]^t \lambda_j = 0.$$

Fazendo $\mu_i = 0$, $i \notin \mathbb{I}(x_0)$, concluímos (3.70). Como $g_i(x_0) = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$, temos (3.71) o que completa a prova. ■

Como vimos anteriormente, uma vez fixado um vetor $h \in \mathbb{R}^n$ indexado a alguma das novas condições de qualificação que apresentamos até aqui, em alguns casos é possível mostrarmos que $f^{(1)}(x_0)h = 0$. Para o problema desta seção esta igualdade não é necessariamente verdadeira, porém em algumas situações podemos obter um vetor h de forma que $f^{(1)}(x_0)h = 0$. Desta forma, para nossos própositos introduzimos esta informação nas hipóteses do teorema anterior.

3.5 Aplicações em Controle Ótimo Discreto

Modelos matemáticos de numerosos sistemas dinâmicos são construídos de forma discreta, usando equações de diferenças. Muitos sistemas tecnológicos, econômicos, sociais ou biológicos são discretos por sua própria natureza [49, 50, 71, 101]. Além disto, os sistemas discretos são encontrados na resolução de problemas de Controle Ótimo contínuos por meio de métodos numéricos [74]. Assim, o Controle Ótimo Discreto tem importância significativa.

Nesta seção aplicamos alguns resultados da Seção 3.3 em problemas de Controle Ótimo Discreto. Formulamos o problema de Controle Ótimo Discreto, com restrições de igualdade tanto no controle quanto no estado e, então, demonstramos condições de otimalidade para estes problemas, sendo as necessárias por meio do Teorema 3.12 e as suficientes através do Teorema 3.13. Para isto, consideramos o seguinte problema de Controle Ótimo Discreto

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(x_i, u_i) \\ \text{Sujeito a } x_{i+1} = \phi_i(x_i, u_i),\ i = 0, ..., N-1 \\ \qquad\qquad g_i(u_i) = 0,\ i = 0, ..., N-1 \\ \qquad\qquad K(x_0, x_N) = 0, \end{array} \tag{3.72}$$

sendo $\Phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g_i : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ são funções suficientemente diferenciáveis.

Aqui $x_i \in \mathbb{R}^n$ é uma variável de estado, $u_i \in \mathbb{R}^r$ é uma variável de controle e N é o número de passos. Denotamos uma trajetória por

$$x = (x_0, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$$

e um controle por

$$u = (u_0, ..., u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{rN}.$$

Evidentemente que o par (x_0, u) define uma trajetória x, já que os demais vetores x_i, $i = 1, ..., N$, são obtidos através da relação $x_{i+1} = \phi(x_i, u_i)$. Desta forma, por conveniência quando nos referirmos ao par (x, u) fica subtendido que estamos fazendo referência ao (x_0, u). O problema de Otimização discreta é minimizar a função

$$f : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como

$$f(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(x_i, u_i),$$

no conjunto factível do Problema (3.72).

Definição 3.12. *Dizemos que (x, u) é um processo factível para o Problema (3.72) quando satisfaz as restrições do referido problema de Controle Ótimo Discreto. Dizemos que o processo $(\widehat{x}, \widehat{u})$ é um processo ótimo quando*

$$f(\widehat{x}, \widehat{u}) \leq f(x, u) \tag{3.73}$$

para todo processo factível (x, u) do Problema (3.72). Além disto, dizemos que $(\widehat{x}, \widehat{u})$ é um processo ótimo estrito quando é satisfeita a desigualdade estrita em (3.73) para todo processo factível (x, u) do Problema (3.72).

Se considerarmos

$$\mathscr{F} : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^{k}$$

definida como

$$\mathscr{F}(x,u) = (F(x,u), G(u), K(x_0, x_N)), \tag{3.74}$$

sendo

$$F : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}^{nN}$$

é definida como

$$F(x,u) = (F_1(x,u), ..., F_N(x,u))$$

e

$$F_{i+1}(x,u) = x_{i+1} - \phi_i(x_i, u_i), i = 0, ..., N-1, \tag{3.75}$$

$$G : \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}^{mN}$$

definida como

$$G(u) = (g_0(u_0), ..., g_{N-1}(u_{N-1})),$$

podemos rescrever o Problema (3.72) como o seguinte problema de Programação Matemática

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x,u) \\ \text{Sujeito a } \mathscr{F}(x,u) = 0. \end{array} \tag{3.76}$$

Em virtude dos vários índices que usaremos no decorrer desta seção, teremos algumas dificuldades notacionais relativas a forma de denotarmos a derivada de primeira e segunda ordem das funções envolvidas no Problema (3.72). Desta forma, usaremos nesta seção uma notação diferente do restante do trabalho. Prosseguindo, mostramos as derivadas de primeira e segunda ordem de algumas funções envolvidas no Problema de Controle Ótimo Discreto (3.72). A primeira derivada de $\mathscr{F}$ em $(\widehat{x}, \widehat{u})$, definida para cada $(y,v) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ é operador

$$\nabla\mathscr{F}(\widehat{x}, \widehat{u}) : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^{k}$$

definido como

$$\nabla\mathscr{F}(\widehat{x}, \widehat{u})(y,v) = (\nabla F(\widehat{x}, \widehat{u})(y,v), \nabla G(\widehat{x}, \widehat{u})(y,v), \nabla K(\widehat{x}, \widehat{u})(y,v)),$$

sendo

$$\nabla F_{i+1}(\widehat{x},\widehat{u})(y,v) = y_{i+1} - \nabla_x \phi_i(\widehat{x},\widehat{u})y_i - \nabla_u \phi_i(\widehat{x},\widehat{u})v_i, i = 0,...,N-1,$$

$$\nabla G_{i+1}(\widehat{u})v = \nabla g_i(\widehat{u}_i)v_i, i = 0,...,N-1$$

e

$$\nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)y = \nabla_{x_0} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)y_0 + \nabla_{x_N} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)y_N.$$

A segunda derivada de $\mathscr{F}$ em $(\widehat{x},\widehat{u})$, definida para $(y,v),(z,w) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ segue como

$$\nabla^2 \mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(y,v)(z,w) = (\nabla^2 F(\widehat{x},\widehat{u})(y,v)(z,w), \nabla^2 G(\widehat{x},\widehat{u})(y,v)(z,w), \nabla^2 K(\widehat{x},\widehat{u})(y,v)(z,w)),$$

sendo

$$\begin{aligned}\nabla^2 F_{i+1}(\widehat{x},\widehat{u})(y,v)(z,w) &= -\nabla^2_{xx}\phi_i(\widehat{x},\widehat{u})y_i z_i - \nabla^2_{xu}\phi_i(\widehat{x},\widehat{u})y_i w_i \\ &- \nabla^2_{ux}\phi_i(\widehat{x},\widehat{u})v_i z_i - \nabla^2_{uu}\phi_i(\widehat{x},\widehat{u})v_i w_i, i = 0,...,N-1,\end{aligned}$$

$$\nabla^2 G_{i+1}(\widehat{u})vw = \nabla^2 g_{i+1}(\widehat{u}_i)v_i w_i, i = 0,...,N-1$$

e

$$\begin{aligned}\nabla^2 K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)yz &= \nabla^2_{x_0x_0} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)y_0 z_0 + \nabla^2_{x_0x_N} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)y_0 z_N \\ &+ \nabla^2_{x_Nx_0} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)y_N z_0 + \nabla^2_{x_Nx_N} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)y_N z_N\end{aligned}$$

Introduzimos a função Lagrangeana 2-fator para o Problema (3.76)

$$\mathscr{L}_2 : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como

$$\mathscr{L}_2(x,u,h,v,\alpha_0,\tau) = \alpha_0 f(x,u) + \mathscr{F}(x,u)\tau_1 + P\nabla\mathscr{F}(x,u)(h,v)\tau_2, \tag{3.77}$$

sendo $P : \mathbb{Y} = \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow (Im\mathscr{F}(x,u))^\perp$ a projeção ortogonal e $\tau = (\tau_1,\tau_2) \in Im\mathscr{F}(x,u) \times (Im\mathscr{F}(x,u))^\perp$. Além disto, podemos introduzir o operador 2-fator como a seguir

$$\Psi_2(h,v) : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^k$$

e

$$\Psi_2(h,v) = \nabla\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u}) + P\nabla^2\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(h,v). \tag{3.78}$$

Como vimos na Seção 3.3, a aplicação $\mathscr{F}$ é 2-regular em $(\widehat{x},\widehat{u})$ com respeito a (h,v) quando

$$Im\Psi_2(h,v) = \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^k. \tag{3.79}$$

Se $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um minimizador para o Problema (3.76), ou equivalentemente, $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um processo ótimo para o Problema (3.72) e a condição (3.79) é verificada para (h,v) tal que

$$\nabla\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(h,v) = P\nabla^2\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})[(h,v)]^2 = 0,$$

temos $\alpha_0 = 1$ em $\nabla_{(x,u)}\mathscr{L}_2(\widehat{x},\widehat{u},h,v,\alpha_0,\lambda) = 0$.

Nas nossas análises necessitamos que a aplicação $\mathscr{F}$ no Problema (3.76) seja 2-regular em $(\widehat{x}, \widehat{u})$ com respeito a (h, v). Desta forma, precisamos estabelecer condições para que isto ocorra. A seguir, faremos algumas considerações neste sentido.

Sejam $(\widehat{x}, \widehat{u})$ factível para o Problema (3.72). Definimos para um $(\widehat{h}, \widehat{v}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ fixado o operador linear

$$N(\widehat{h}, \widehat{v}) : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^{k}$$

por

$$N(\widehat{h}, \widehat{v})(h, v) = (x_0, ..., x_{N-1}, y_0, ..., y_{N-1}, z),$$

sendo que para $k = 0, ..., N-1$,

$$y_k = \nabla^2 g_k(\widehat{u}_k)\widehat{v}_k v_k,$$

$$x_k = -\nabla^2_{xx}\phi_k(\widehat{x}_k, \widehat{u}_k)\widehat{h}_k h_k - \nabla^2_{uu}\phi_k(\widehat{x}_k, \widehat{u}_k)\widehat{v}_k v_k - \nabla^2_{xu}\phi_k(\widehat{x}_k, \widehat{u}_k)\widehat{h}_k v_k - \nabla^2_{xu}\phi_k(\widehat{x}_k, \widehat{u}_k)h_k\widehat{v}_k$$

e

$$z = \nabla^2_{x_0x_0}K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N)\widehat{h}_0 h_0 + \nabla^2_{x_Nx_N}K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N)\widehat{h}_k h_N + \nabla^2_{x_0x_N}K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N)\widehat{h}_0 h_N + \nabla^2_{x_0x_N}K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N)h_0\widehat{h}_N.$$

Seja $M(\widehat{h}, \widehat{v}) : \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{rN} \longrightarrow \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^{k}$ o operador linear definido como

$$M(\widehat{h}, \widehat{v})(h_0, v) = N(\widehat{h}, \widehat{v})(h_0, h_1, ..., h_N, v),$$

sendo que para todo $k = 1, ..., N$,

$$h_k = \prod_{s=0}^{k-1}\nabla_x\phi_s(\widehat{x}_s, \widehat{u}_s)h_0 + \sum_{j=0}^{k-2}\prod_{j<s\leq k-1}\nabla_x\phi_s(\widehat{x}_s, \widehat{u}_s)\nabla_u\phi_j(\widehat{x}_j, \widehat{u}_j)v_j + \nabla_u\phi_{k-1}(\widehat{x}_{k-1}, \widehat{u}_{k-1})v_{k-1}.$$

Seja $\mathbb{Q} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^{k}\}$ o conjunto solução do seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{aligned}
-(\nabla_x\phi_0(\widehat{x}_0, \widehat{u}_0))^t u_0 + (\nabla_{x_0}K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N))^t w &= 0\\
u_i - (\nabla_x\phi_{i+1}(\widehat{x}_{i+1}, \widehat{u}_{i+1}))^t u_{i+1} &= 0, i = 0, ..., N-2\\
u_{N-1} + (\nabla_{x_N}K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N))^t w &= 0\\
-(\nabla_x\phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i))^t u_i + (\nabla g_i(\widehat{u}_i))^t v_i &= 0, i = 0, ..., N-1.
\end{aligned}$$

Denotamos por $\mathscr{P}$ o projetor ortogonal sobre o subespaço vetorial $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^{k}$, logo $Im\mathscr{P} = \mathbb{Q}$.

Sejam B_i, $i = 0, ..., N-1$, as matrizes

$$\begin{array}{rcl} B_0 & = & \nabla_{x_0} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N) + \prod_{s=0}^{N-1} \nabla_x \phi_s(\widehat{x}_s, \widehat{u}_s) \\ B_i & = & \nabla_{x_N} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N) \nabla_x \phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i) \nabla_x \phi_{i+1}(\widehat{x}_{i+1}, \widehat{u}_{i+1}) ... \nabla_x \phi_{N-1}(\widehat{x}_{N-1}, \widehat{u}_{N-1}) \nabla_u \phi_{i-1}(\widehat{x}_{i-1}, \widehat{u}_{i-1}) \\ B_N & = & \nabla_{x_N} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_N) \nabla_u \phi_{N-1}(\widehat{x}_{N-1}, \widehat{u}_{N-1}) \end{array}$$

e seja B o operador linear definido pela seguinte matriz em blocos

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_N \\ 0 & \nabla g_0(\widehat{u}_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \nabla g_{N-1}(\widehat{u}_{N-1}) \end{bmatrix},$$

sendo que por 0 denotamos a matriz nula de tamanho correspondente.

Seja L a matriz em bloco a seguir

$$L = \begin{bmatrix} B \\ \mathscr{P} M(\widehat{h}, \widehat{v}) \end{bmatrix}.$$

Notamos que $dim(kerL)$ é a dimensão do conjunto de todos os vetores (h_0, v) de tal modo que

$$L(h_0, v) = 0.$$

Lema 3.9. *Seja $(h, v) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ fixado. Se*

$$l = n + rN - mN - k, \tag{3.80}$$

sendo $l = dim(KerL)$. Então a aplicação $\mathscr{F}$ é 2-regular em $(\widehat{x}, \widehat{u})$ com respeito a (h, v).

Para maiores detalhes do lema anterior veja [Lema 3.1, [66]].

Teorema 3.16. *Sejam $(\widehat{x}, \widehat{u})$ um processo ótimo do Problema (3.72), $\Phi_i \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$, $\phi_i \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$, $g_i \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^r)$, $i = 0, ..., N-1$ e $K \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Suponhamos que exista $(\widehat{h}, \widehat{v}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ tal que a igualdade (3.80) é satisfeita e, para todo $i = 0, ..., N-1$, valem as igualdades*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla g_i(\widehat{u}_i)\widehat{v}_i & = & 0 \\ P_i^2 \nabla^2 g_i(\widehat{u}_i)\widehat{v}_i\widehat{v}_i & = & 0 \\ \nabla_x \phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i)\widehat{h}_i & = & \widehat{h}_{i+1} - \nabla_u \phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i)\widehat{v}_i \\ P^3 \nabla^2_{x_0 x_0} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_n)\widehat{h}_0\widehat{h}_0 & = & -P^3 \nabla^2_{x_0 x_N} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_n)\widehat{h}_0\widehat{h}_N \\ P^1_{i+1} \nabla^2_{xx} \phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i)\widehat{h}_i\widehat{v}_i & = & -P^1_{i+1} \nabla^2_{xu} \phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i)\widehat{h}_i\widehat{v}_i \\ & - & P^1_{i+1} \nabla^2_{ux} \phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i)\widehat{v}_i\widehat{h}_i \\ & - & P^1_{i+1} \nabla^2_{uu} \phi_i(\widehat{x}_i, \widehat{u}_i)\widehat{v}_i\widehat{v}_i \\ \nabla_{x_0} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_n)\widehat{h}_0 & = & -\nabla_{x_N} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_n)\widehat{h}_N \\ & - & P^3 \nabla^2_{x_N x_0} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_n)\widehat{h}_N\widehat{h}_0 \\ & - & P^3 \nabla^2_{x_N x_N} K(\widehat{x}_0, \widehat{x}_n)\widehat{h}_N\widehat{h}_N, \end{array} \right. \tag{3.81}$$

sendo

$$P^1_{i+1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \left(Im\nabla F^1_{i+1}(\widehat{x},\widehat{u})\right)^{\perp}, \tag{3.82}$$

$$P^2_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \left(Im\nabla g^1_i(\widehat{u})\right)^{\perp} \tag{3.83}$$

e

$$P^3 : \mathbb{R}^k \longrightarrow (Im\nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N))^{\perp} \tag{3.84}$$

projeções ortogonais. Então existem $\widehat{\beta} \in \mathbb{R}^k$, $\widehat{\gamma} \in \mathbb{R}^k$, $\widehat{\alpha} \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}^{nN}$, $\widehat{\mu} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ *tais que*

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_0 &= (\nabla_{x_0} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n))^t\,\widehat{\beta} && (3.85)\\
&+ \left(P^3\nabla^2_{x_0x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\widehat{h}_0 + P^3\nabla^2_{x_0x_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)h_N\right)^t\widehat{\gamma}\\
\widehat{\alpha}_i &= \nabla_x H_i(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},\widehat{\alpha}_{i+1},\widehat{\theta}_i), i = 1,...,N-1 && (3.86)\\
\widehat{\alpha}_N &= -\left(\nabla_{x_N} K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\right)^t\,\widehat{\beta} && (3.87)\\
&- \left(P^3\nabla^2_{x_Nx_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\widehat{h}_0 + P^3\nabla^2_{x_Nx_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\widehat{h}_N\right)^t\widehat{\gamma}\\
\left(\nabla_u g_i(\widehat{u}_i)\right)^t\widehat{\mu}_i &= \nabla_u H_i(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},\widehat{\alpha}_{i+1},\widehat{\theta}_i) - \left(P^2_i\nabla^2 g_i(\widehat{u}_i)\widehat{v}_i\right)^t\widehat{\lambda}_i, i = 0,...,N-1, && (3.88)
\end{aligned}$$

sendo

$$H_i : \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como

$$H_i(x,u,h,v,\eta,\nu) = \phi_i(x_i,u_i)\eta - P^1_{i+1}\left(\nabla_x\phi_i(x_i,u_i)h_i + \nabla_u\phi_i(x_i,u_i)v_i\right)\nu, i = 0,...,N-1$$

a função Hamiltoniana 2-fator do Problema (3.72).

Demonstração. Consideramos o Problema de Programação Matemática (3.76) obtido do Problema de Controle Ótimo Discreto (3.72). Além disto, para todo $(y,w) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ e $(\widehat{h},\widehat{v})$ considerado na hipótse, podemos escrever o operador 2-fator definido como em (3.78) da forma a seguir

$$\begin{aligned}
\Psi_2(\widehat{h},\widehat{v})(y,w) &= \nabla\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(y,w) + P\nabla^2\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(\widehat{h},\widehat{v})(y,w)\\
&= (\nabla F(\widehat{x},\widehat{u})(y,w) + P^1\nabla^2 F(\widehat{x},\widehat{u})(\widehat{h},\widehat{v})(y,w),\\
&\quad \nabla G(\widehat{u})w + P^2\nabla^2 G(\widehat{u})\widehat{v}w,\\
&\quad \nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)(y_0,y_N) + P^3\nabla^2 K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)(\widehat{h}_0,\widehat{h}_N)(y_0,y_N)),
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
&\nabla F(\widehat{x},\widehat{u})(y,w) + P^1\nabla^2 F(\widehat{x},\widehat{u})(\widehat{h},\widehat{v}) =\\
&= \Big(\nabla F_1(\widehat{x},\widehat{u})(y_0,w_0) + P^1_1\nabla^2 F_1(\widehat{x},\widehat{u})(\widehat{h}_0,\widehat{v}_0)(y_0,w_0),...,
\end{aligned}$$

$$\nabla F_N(\widehat{x},\widehat{u})(y_{N-1},w_{N-1}) + P_N^1\nabla^2 F_N(\widehat{x},\widehat{u}))(\widehat{h}_{N-1},\widehat{v}_{N-1})(y_{N-1},w_{N-1})\Big)$$

e

$$\begin{aligned}
&\nabla F_{i+1}(\widehat{x},\widehat{u})(y_i,w_i) + P_{i+1}^1\nabla^2 F_{i+1}(\widehat{x},\widehat{u})(\widehat{h}_i,\widehat{v}_i)(y_i,w_i) = \\
&= y_{i+1} - \nabla_x\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)y_i - \nabla_u\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)w_i - \\
&-P_{i+1}^1\nabla_{xx}^2\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{h}_i y_i - P_{i+1}^1\nabla_{xu}^2\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{h}_i w_i - \\
&-P_{i+1}^1\nabla_{ux}^2\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{v}_i y_i - P_{i+1}^1\nabla_{uu}^2\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{v}_i w_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla G(\widehat{u})w + P^2\nabla^2 G(\widehat{u})\widehat{v}w = \\
&= \big(\nabla g_0(\widehat{u}_0)w_0 + P_0^2\nabla^2 g_0(\widehat{u})\widehat{v}_0 w_0, ..., \\
&\nabla g_{N-1}(\widehat{u}_{N-1})w_{N-1} + P_{N-1}^2\nabla^2 g_{N-1}(\widehat{u}_{N-1}))\widehat{v}_{N-1}w_{N-1}\big)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)(y_0,y_N) + P^3\nabla^2 K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)(\widehat{h}_0,\widehat{h}_N)(y_0,y_N) = \\
&= \nabla_{x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)y_0 + \nabla_{x_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)y_N + \\
&+P^3\nabla_{x_0x_0}^2 K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\widehat{h}_0 y_0 + P^3\nabla_{x_0x_N}^2 K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\widehat{h}_0 y_N + \\
&+P^3\nabla_{x_Nx_0}^2 K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\widehat{h}_N y_0 + P^3\nabla_{x_Nx_N}^2 K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\widehat{h}_N y_N.
\end{aligned}$$

Fazendo $(y,w) = (\widehat{h},\widehat{v})$ e de acordo com o sistema de equações (3.81) é fácil verificarmos que

$$(\widehat{h},\widehat{v}) \in \mathbb{H}_{\mathscr{F}}(\widehat{x},\widehat{u}) = \{(h,v) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}; \nabla\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(h,v) = 0,\ P\nabla^2\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})[(h,v)]^2 = 0\}.$$

Em virtude da igualdade (3.80) assumida na hipótese e do Lema 3.9, temos que a aplicação $\mathscr{F}$ é 2-regular em $(\widehat{x},\widehat{u})$ com respeito a $(\widehat{h},\widehat{v})$. Assim, pelo Teorema 3.12, existe $\widehat{\tau} = (\widehat{\tau}_1,\widehat{\tau}_2) \in Im\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u}) \times (Im\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u}))^\perp$ tal que

$$\nabla_{(x,u)}\mathscr{L}_2(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},1,\widehat{\tau}) = \nabla f(\widehat{x},\widehat{u}) + (\nabla\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u}))^t\,\widehat{\tau}_1 + \Big(P\nabla\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(\widehat{h},\widehat{v})\Big)^t\,\widehat{\tau}_2 = 0.$$

Podemos reescrever a Lagrangeana 2-fator em função das variáveis do Problema (3.72) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_2(x,u,h,v,1,\tau) &= \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i,u_i) + \sum_{i=0}^{N-1} F_{i+1}(x,u)\alpha_{i+1} + \sum_{i=0}^{N-1} g_i(u_i)\mu_i + K(x_0,x_n)\beta \\
&+ \sum_{i=0}^{N-1} P_{i+1}^1\nabla F_{i+1}(x,u)(h,v)\theta_{i+1} + \sum_{i=0}^{N-1} P_i^2\nabla g_i(u)v\lambda_i + P^3\nabla K(x_0,x_n)h\gamma,
\end{aligned}$$

sendo

$$\tau_1 = (\alpha,\mu,\beta) \in Im\nabla F(\widehat{x},\widehat{u}) \times Im\nabla G(\widehat{u}) \times Im\nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)$$

e

$$\tau_2 = (\theta,\lambda,\gamma) \in (Im\nabla F(\widehat{x},\widehat{u}))^\perp \times (Im\nabla G(\widehat{u}))^\perp \times (Im\nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N))^\perp.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_0}\mathscr{L}_2(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},1,\widehat{\tau}) &= \nabla_x f_0(\widehat{x}_0,\widehat{u}_0) - (\nabla_x\phi_0(\widehat{x}_0,\widehat{u}_0))^t\widehat{\alpha}_1 + (\nabla_{x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n))^t\widehat{\beta}\\
&- (P_1^1\nabla^2_{xx}\phi_0(\widehat{x}_0,\widehat{u}_0)\widehat{h}_0 + P_1^1\nabla^2_{xu}\phi_0(\widehat{x}_0,\widehat{u}_0)v_0))^t\widehat{\theta}_1\\
&+ (P^3\nabla^2_{x_0x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_0 + P^3\nabla^2_{x_0x_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_0)^t\widehat{\gamma}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\widehat{\alpha}_0 = \nabla_x H_0(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},\widehat{\alpha}_1,\widehat{\theta}_1)$, obtemos

$$
\widehat{\alpha}_0 = (\nabla_{x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n))^t\widehat{\beta} + (P^3\nabla^2_{x_0x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_0 + P^3\nabla^2_{x_0x_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_0)^t\widehat{\gamma}
$$

o que prova a igualdade (3.85).

Para $i = 1, ..., N-1$, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_i}\mathscr{L}_2(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},1,\widehat{\tau}) &= \nabla_x f_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i) - (\nabla_x\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i))^t\widehat{\alpha}_{i+1} + \widehat{\alpha}_i\\
&- (P_1^1\nabla^2_{xx}\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{h}_i + P_1^1\nabla^2_{xu}\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)v_i))^t\widehat{\theta}_{i+1}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ou equivalentemente, temos

$$
\widehat{\alpha}_i = \nabla_x H_i(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},\widehat{\alpha}_{i+1},\widehat{\theta}_{i+1}),
$$

provando a igualdade (3.87).

Por fim, para $i = 0, ..., N-1$, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_{u_i}\mathscr{L}_2(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},1,\widehat{\tau}) &= \nabla_u f_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i) - (\nabla_u\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i))^t\widehat{\alpha}_{i+1}\\
&+ (\nabla g_i(\widehat{u}_i))^t\widehat{\mu}_i + (\nabla^2 g_i(\widehat{u}_i)\widehat{v}_i)^t\widehat{\lambda}_i\\
&- (P_{i+1}^1\nabla^2_{ux}\phi_i(\widehat{u}_i)\widehat{h}_i + P_{i+1}^2\nabla^2_{uu}\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{v}_i))^t\widehat{\theta}_{i+1}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\nabla_u H_i(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},\widehat{\alpha}_{i+1},\widehat{\theta}_{i+1}) = (\nabla g_i(\widehat{u}_i))^t\widehat{\mu}_i + (\nabla^2 g_i(\widehat{u}_i)\widehat{v}_i)^t\widehat{\lambda}_i
$$

provando a igualdade (3.88) e concluímos a demonstração. ■

No próximo resultado provamos condições suficientes para um processo ótimo do Problema (3.72).

Teorema 3.17. *Sejam* $\Phi_i \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$, $\phi_i \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$, $g_i \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^r)$, $i = 0, ..., N-1$, *e* $K \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Suponhamos que para todo* $(\widehat{h},\widehat{v}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ *e* $i = 0, ..., N-1$, *satisfazendo o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\nabla g_i(\widehat{u}_i)\widehat{v}_i & = & 0 \\
P_i^2\nabla^2 g_i(\widehat{u}_i)\widehat{v}_i\widehat{v}_i & = & 0 \\
\nabla_x\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{h}_i & = & \widehat{h}_{i+1} - \nabla_u\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{v}_i \\
P^3\nabla^2_{x_0x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_0\widehat{h}_0 & = & -P^3\nabla^2_{x_0x_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_0\widehat{h}_N \\
P^1_{i+1}\nabla^2_{xx}\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{h}_i\widehat{v}_i & = & -P^1_{i+1}\nabla^2_{xu}\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{h}_i\widehat{v}_i \\
 & - & P^1_{i+1}\nabla^2_{ux}\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{v}_i\widehat{h}_i \\
 & - & P^1_{i+1}\nabla^2_{uu}\phi_i(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\widehat{v}_i\widehat{v}_i \\
\nabla_{x_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_0 & = & -\nabla_{x_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_N \\
 & - & P^3\nabla^2_{x_Nx_0}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_N\widehat{h}_0 \\
 & - & P^3\nabla^2_{x_Nx_N}K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_n)\widehat{h}_N\widehat{h}_N,
\end{array}\right. \tag{3.89}$$

sendo que as aplicações P^1_{i+1}, P^2_i e P^3 são as projeções ortogonais definidas como em (3.82), (3.83) *e* (3.84)*, respectivamente, vale a igualdade* (3.80)*. Além disto, se existem $\alpha > 0$ e um multiplicador $\widehat{\tau} = (\widehat{\tau}_1, \widehat{\tau}_2)$, que dependem de $(\widehat{h}, \widehat{v})$, tais que*

$$\widehat{\tau}_1 = (\widehat{\alpha}, \widehat{\mu}, \widehat{\beta}) \in Im\nabla F(\widehat{x},\widehat{u}) \times Im\nabla G(\widehat{u}) \times Im\nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N), \tag{3.90}$$

$$\widehat{\tau}_2 = (\widehat{\theta}, \widehat{\lambda}, \widehat{\gamma}) \in (Im\nabla F(\widehat{x},\widehat{u}))^\perp \times (Im\nabla G(\widehat{u}))^\perp \times (Im\nabla K(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N))^\perp, \tag{3.91}$$

$$\widehat{\pi}_1 = \widehat{\tau}_1,\ \widehat{\pi}_2 = \frac{1}{3}\widehat{\tau}_2, \tag{3.92}$$

$$\nabla_{(x,u)}\mathscr{L}_2(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},1,\widehat{\tau}) = 0 \tag{3.93}$$

e

$$\nabla^2_{(x,u)(x,u)}\mathscr{L}_2(\widehat{x},\widehat{u},\widehat{h},\widehat{v},1,\widehat{\pi})[(\widehat{h},\widehat{v})]^2 \geq \alpha\|(\widehat{h},\widehat{v})\|^2, \tag{3.94}$$

para todo $(\widehat{h},\widehat{v}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ que satisfaz o sistema de equações (3.89)*. Então, $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um processo ótimo estrito para o Problema* (3.72)*.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que para qualquer $(\widehat{h},\widehat{v}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}$ satisfazendo o sistema de equações (3.89), temos

$$(\widehat{h},\widehat{v}) \in \mathbb{H}_{\mathscr{F}}(\widehat{x},\widehat{u}) = \{(h,v)\mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{rN}; \nabla\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})(h,v) = 0,\ P\nabla^2\mathscr{F}(\widehat{x},\widehat{u})[(h,v)]^2 = 0\}$$

e vale a igualdade $l = n + rN - mN - k$. Assim, pelo Lema 3.9 a aplicação $\mathscr{F}$ é 2-regular em $(\widehat{x},\widehat{u})$. Além disto, das hipóteses (3.90), (3.91), (3.92), (3.93) e (3.94) combinadas com o Teorema 3.13, concluímos que $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um minimizador local estrito do Problema (3.76), ou equivalentemente, $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um processo ótimo estrito do Problema (3.72). ■

Na referência [66], Marinkovic mostra condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para o Problema de Controle Ótimo Discreto (3.72). No referido trabalho estas condições são provadas sob a hipótese de 2-regularidade juntamente com a 2-normalidade da aplicação $\mathscr{F}$ e também através da função Lagrangeana clássica. Observamos que o conceito da 2-regularidade necessita do uso de uma projeção ortogonal, mas esta projeção não aparece nestas condições necessárias de otimalidade obtidas por Marinkovic. Além disto, em [64] Marinkovic novamente estabelece condições necessárias de otimalidade de primeira ordem agora utilizando apenas a 2-regularidade. Porém, neste trabalho é utilizada a função generalizada de Lagrange (ou função de Avakov-Lagrange) [2, 5] e neste último trabalho as condições necessárias de otimalidade não aparecem em termos da projeção ortogonal. Nosso resultado é baseado no conceito da 2-regularidade, todavia utilizamos a função Lagrangeana 2-fator e isto implica que a projeção ortogonal é refletida no resultado final que provamos. Por outro lado, nosso resultado generaliza o Princípio do Máximo Discreto para problemas com restrições de igualdade no estado e no controle [41, 65], no sentido que o Teorema 3.16 coincide com o Princípio do Máximo Discreto quando a aplicação $\mathscr{F}$ é regular.

Por fim, faremos uma comparação de alguns resultados conhecidos na literatura com os resultados que obtivemos nesta seção.

Capítulo 4

Condições Necessárias de Otimalidade: Caso Multiobjetivo

Nosso intuito neste capítulo é obtermos alguns dos resultados vistos no Capítulo 2 para problemas de Programação multiobjetivo. Para isto, consideramos o seguinte problema de Otimização multiobjetivo

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) = (f_1(x), ..., f_\ell(x)) \\ \text{Sujeito a x} \in \mathbb{M} = \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F, \end{array} \tag{4.1}$$

sendo $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ diferenciável, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto não vazio,

$$\mathbb{M}_g = \{x \in \mathbb{U}; g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., s\}, \tag{4.2}$$

e

$$\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\}, \tag{4.3}$$

sendo $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^s$ são suficientemente diferenciáveis.

Denotamos por

$$\mathbb{K} = \{1, ..., \ell\},$$

$$\mathbb{I} = \{1, ..., s\},$$

$$\mathbb{J} = \{1, ..., m\},$$

$$\mathbb{I}(x_0) = \{i \in \mathbb{I}; g_i(x_0) = 0\}$$

e

$$s_0 = |\mathbb{I}(x_0)|.$$

Em geral, não é possível minimizar todas as funções objetivo do Problema (4.1) e, desta forma, o conceito de otimalidade pode ser estabelecido de outras maneiras. A seguir definimos alguns tipos de solução para o Problema (4.1).

Definição 4.1. *(i) $x_0 \in \mathbb{M}$ é solução fracamente eficiente local (ou solução Pareto fraca local) do Problema* (4.1) *quando existe uma vizinhança $\mathbb{V}$ e não existe $x \in \mathbb{M} \cap \mathbb{V}$, $x \neq x_0$ tal que $f_k(x) < f_k(x_0)$ para $k \in \mathbb{K}$;*

(ii) $x_0 \in \mathbb{M}$ é solução eficiente local (ou solução Pareto local) do Problema (4.1) *quando existe uma vizinhança $\mathbb{V}$ e não existe $x \in \mathbb{M} \cap \mathbb{V}$, $x \neq x_0$ tal que $f_k(x) \leq f_k(x_0)$ para $k \in \mathbb{K}$, com a desigualdade estrita para pelo menos um k;*

(iii) $x_0 \in \mathbb{M}$ é solução propriamente eficiente local do Problema (4.1) *quando ela é eficiente local e se existe $C > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{K}$*

$$\frac{f_k(x_0) - f_k(x)}{f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)} \leq C$$

para algum k_0 tal que $f_{k_0}(x_0) < f_{k_0}(x)$ quando $x \in \mathbb{M} \cap \mathbb{V}$ e $f_k(x) < f_k(x_0)$.

Observação 4.1. *É imediato das definições anteriores que*

$$\boxed{\textit{Sol. prop. eficiente}} \Longrightarrow \boxed{\textit{Sol. eficiente}} \Longrightarrow \boxed{\textit{Sol. frac. eficiente}}$$

Podemos escalarizar o Problema (4.1), obtendo uma família de problemas de Otimização escalar, de tal maneira que as soluções do problema multiobjetivo podem ser obtidas como soluções de um problema clássico de Programação Não Linear. Uma das formas de escalarizarmos o problema multiobjetivo é pelo Método da Ponderação, como vemos a seguir.

Seja $\mathbb{W} = \{w \in \mathbb{R}^{\ell}; w_k \geq 0,\ k \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{k=1}^{\ell} w_k = 1\}$. Para cada $w \in \mathbb{W}$, consideramos o seguinte problema escalar

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \sum_{k=1}^{\ell} w_k f_k(x) \\ &\text{Sujeito a x} \in \mathbb{M} = \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Proposição 4.1. *(i) Se existe $w \in \mathbb{W}$ tal que $w_k \geq 0$, $k \in \mathbb{K}$ e x_0 é uma solução do Problema* (4.4)*. Então x_0 é solução eficiente do Problema* (4.1)*;*

(ii) Se existe $w \in \mathbb{W}$ tal que $w_k > 0$, $k \in \mathbb{K}$ e x_0 é uma solução do Problema (4.4)*. Então x_0 é solução propriamente eficiente do Problema* (4.1).

Para maiores detalhes veja [Teorema 1, [30]].

Outras formas de escalarização para o problema multiobjetivo tem sido propostas como podemos ver, por exemplo, nos trabalhos [22, 25, 68, 81, 87, 88, 90, 99].

As considerações feitas no início do Capítulo 3 a respeito das restrições do Problema (3.1) e das condições de qualificação ainda são válidas no contexto da Otimização multiobjetivo. Neste sentido, uma vez assumindo que GCQ ou qualquer outra condição de qualificação é válida na solução do Problema (4.1), o Teorema de KKT se estende para Otimização multiobjetivo como vemos a seguir.

Teorema 4.1. *Seja x_0 uma solução fracamente eficiente local do Problema (4.1) e supondo que alguma condição de qualificação é satisfeita em x_0. Então, existem vetores $\theta \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}^{s}_{+}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^{m}$ tais que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(1)}(x_0) &= 0, \\ \mu_i g_i(x_0) &= 0, i \in \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Para maiores detalhes veja [25, 46, 68, 87].

4.1 Problemas Absolutamente Degenerados com Restrições de Desigualdade e Igualdade

Consideramos o seguinte problema de Otimização multiobjetivo

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) = (f_1(x), ..., f_l(x)) \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M} = \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F, \end{array} \tag{4.5}$$

sendo $\mathbb{M}_g$ e $\mathbb{M}_F$ definidos como em (4.2) e (4.3), respectivamente.

A seguir definimos para o caso multiobjetivo um Problema Absolutamente Degenerado.

Definição 4.2. *Seja que x_0 uma solução local do Problema (4.5). Consideramos os seguintes casos de degenerações absolutas*

$$g_i^{(r)}(x_0) = 0, i \in \mathbb{I}(x_0), r = 1, ..., q-1, \tag{4.6}$$

e

$$F^{(r)}(x_0) = 0, r = 1, ..., p-1 \tag{4.7}$$

sendo $p, q \geq 2$. Dizemos que o problema definido como em (4.5) é um Problema Absolutamente Degenerado quando as restrições do referido problema satisfazem as degenerações absolutas definidas como em (4.6) e (4.7).

A solução do Problema (4.5) a partir deste momento será considerada fracamente eficiente, eficiente ou propriamente eficiente e conforme necessário faremos referência a cada uma destas soluções. É claro que, nos casos de degeneração absoluta das restrições, as condições de qualificação LICQ e MFCQ falham, logo temos um problema irregular. Mais do que isto, veremos que não temos informações sobre as Condições de Regularidade Generalizada de Abadie e Guignard introduzidas, respectivamente, por Burachik e Rizvi em [23] e Maeda em [61]. Como segue, para cada uma destas condições, apresentaremos um novo tipo de condição de qualificação ou de regularidade, em que poderemos restabelecer condições necessárias de otimalidade para problemas absolutamente degenerados definidos como em (4.5).

O seguinte teorema é crucial para estabelecermos condições de otimalidade do tipo Karush--Kuhn-Tucker, quando x_0 é uma solução fracamente eficiente e h-MFCQ é satisfeita em x_0, para algum $h \in \mathbb{R}^n$ específico.

Teorema 4.2. *Sejam x_0 uma solução fracamente eficiente local do Problema (4.5), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (4.6) e (4.7) são satisfeitas em x_0, que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-MFCQ é válida em x_0 e $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$. Então o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcll} f_k^{(1)}(x_0)d & < & 0, & k \in \mathbb{K} \\ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d & \leq & 0, & i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d & = & 0, & j \in \mathbb{J} \end{array}\right. \tag{4.8}$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponhamos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (4.8) e seja $z \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz o sistema da Definição 3.6. Da independência linear dos vetores $F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}$, $j \in \mathbb{J}$ combinado com o Lema 3.1, podemos encontrar uma curva $x : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(d+z) + y(\alpha) \text{ e } F(x(\alpha)) = 0,$$

sendo que $\alpha_0 > 0$ é suficientemente pequeno e $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$.

De forma completamente análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.3, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que $x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(d+z) + y(\alpha)$ é factível para o Problema (4.5).

Por outro lado, usando a expansão de Taylor de f_k, para cada $k \in \mathbb{K}$ fixado, temos

$$\begin{array}{rcl} f_k(x(\alpha)) & = & f_k(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(d+z) + y(\alpha)) \\ & = & f_k(x_0) + f_k^{(1)}(x_0)(\alpha h + \alpha^{3/2}(d+z) + y(\alpha)) + o(\alpha^{3/2}) \\ & = & f_k(x_0) + \alpha f_k^{(1)}(x_0)h + \alpha^{3/2} f_k^{(1)}(x_0)(d+z) + f_k^{(1)}(x_0)y(\alpha) + o(\alpha^{3/2}) \\ & \leq & f_k(x_0) + \alpha f_k^{(1)}(x_0)h + \alpha^{3/2} f_k^{(1)}(x_0)(d+z) + \left\| f_k^{(1)}(x_0) \right\| \|y(\alpha)\| + o(\alpha^{3/2}). \end{array}$$

Logo, usando as desigualdades $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$ e $f_k^{(1)}(x_0)d < 0$, $k \in \mathbb{K}$, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f_k(x(\alpha)) = f_k(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(d+z) + y(\alpha)) < f_k(x_0),$$

uma contradição já que x_0 é uma solução fracamente eficiente local do Problema (4.5). Desta forma, o sistema (4.8) não tem solução. ■

A seguir mostramos condições necessárias de otimalidade, no sentido da eficiência fraca, para problema absolutamente degenerado definido como em (4.5).

Teorema 4.3. *Sejam x_0 uma solução fracamente eficiente local do Problema (4.5), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (4.6) e (4.7) são satisfeitas* *em x_0, que exista $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$ tal que h-MFCQ é válida em x_0 e $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$. Então existem vetores $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{0\}$, $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^s$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} &= 0 \qquad (4.9) \\ \mu_i g_i(x_0) &= 0, i \in \mathbb{I}. \qquad (4.10) \end{aligned}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 4.2 o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} f_k^{(1)}(x_0)d & < & 0, & j \in \mathbb{K} \\ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d & \leq & 0, & i \in \mathbb{I}(x_0) \\ F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d & = & 0, & j \in \mathbb{J} \end{array} \right.$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$. Então, pelo Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), existem $\theta \in \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^{s_0}$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\ell} \theta_j f_j^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0.$$

Fazendo $\mu_i = 0$, $i \notin \mathbb{I}(x_0)$, concluímos (4.9). Como $g_i(x_0) = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$, temos (4.10) o que completa a prova. ■

Provamos na Proposição 3.2 que uma vez fixado um $h \in \mathbb{R}^n$ específico, temos que h-LICQ implica h-MFCQ. Assim, o próximo resultado é uma consequência direta da Proposição 3.2 e do Teorema 4.3.

Corolario 4.1. *Sejam x_0 uma solução fracamente eficiente local do Problema (4.5), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ e $g \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (4.6) e (4.7) são satisfeitas em x_0, que exista $h \in \mathbb{H}_g(x_0) \setminus \{0\}$ tal que h-LICQ é válida em x_0 e $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$. Então existem vetores $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{0\}$, $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^s$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que valem (4.9) e (4.10).*

Demonstração. A prova segue imediatamente devido à Proposição 3.2 e o Teorema 4.3. ■

Considerando problemas escalares apenas com restrição de desigualdade, Brezhneva e Tretyakov mostram em [21] que se x_0 é um minimizador local, que satisfaz (4.6), sendo q par e h-MFCQ válida em x_0 para alguns $h \in \mathbb{H}_g(x_0) \setminus \{0\}$, então devemos ter a igualdade $f_1^{(1)}(x_0)h = 0$. No contexto de Otimização multiobjetivo, não temos necessariamente $f_k^{(1)}(x_0)h = 0$, $k \in \mathbb{K}$. Portanto, para obtermos condições necessárias de otimalidade é necessário introduzirmos a hipótese $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$ no Teorema 4.2. No exemplo a seguir, ilustramos este fato.

Exemplo 5.

$$\begin{array}{l} \textit{Minimizar } f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} \\ \textit{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_g = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1x_2 + x_1^2 \leq 0\} \end{array} \qquad (4.11)$$

Seja $f_1(x) = x_1 - 2x_2$, $f_2(x) = x_2^3 - x_1$ e $g(x) = x_1x_2 + x_1^2$. Primeiramente, notamos que o conjunto solução do sistema

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) = x_1 - 2x_2 & < & 0 \\ f_2(x) = x_2^3 - x_1 & < & 0 \end{array}$$

intercepta o conjunto factível do Problema (4.11) somente na origem, logo $x_0 = 0$ é uma solução fracamente eficiente do Problema (4.11). É fácil verificarmos que

$$f_1^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad f_2^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} x_2 + 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow g^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g^{(2)}(x_0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g^{(2)}(x_0)h = \begin{bmatrix} 2h_1 + h_2 \\ h_1 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbb{H}_g(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^2; h_1^2 + h_1 h_2 = 0\}.$$

Além disto, para $h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_g(x_0)$ temos

$$f_1^{(1)}(x_0)h = -2 < 0, \quad f_2^{(1)}(x_0)h = 0 \text{ e } g^{(2)}(x_0)[h] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notamos que $z = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ satisfaz a condição (3.33), isto é, h-MFCQ é válida em x_0. Portanto, a igualdade a seguir

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \theta_1 f_1(x_0) + \theta_1 f_1(x_0) + \mu_1 g^{(2)}(x_0)[h] \\ & = & \theta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

é verificada para $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \mu$. Logo, podemos encontrar θ e μ que satisfazem o Teorema 4.3.

Deste ponto em diante, faremos uma distinção entre condição de qualificação e condição de regularidade [23, 33, 61]. Como vimos até agora, uma condição de qualificação precisa ser cumprida pelas restrições do problema, já uma condição de regularidade precisa ser cumprida tanto pelas funções objetivo quanto pelas restrições do problema. Acrescentamos ainda que tanto as condições de qualificação como as condições de regularidade são condições impostas aos dados do problema para garantirmos que toda solução do problema é um ponto que satifaz as condições KKT. Muitas pesquisas das condições de otimalidade dependem do cone contingente, do cone linearizado e das relações entre eles. Estas relações são usadas em muitas condições de qualificação e/ou de regularidade. A partir deste ponto, obtemos nossas condições necessárias de otimalidade através de alguns cones. Usaremos a seguinte definição em nossas análises.

Definição 4.3. *Seja $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^n$. O cone contingente (ou de Bouligand) de $\mathbb{C}$ em x_0 é o conjunto definido como*

$$\mathscr{T}_C(\mathbb{C}, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n; \exists\, (x_n) \subseteq \mathbb{C} \text{ e } (t_n) \subseteq \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \text{ tal que } x_n \to x_0 \text{ e } t_n(x_n - x_0) \to d\}.$$

Observamos que o conjunto $\mathscr{T}_C(\mathbb{C}, x_0)$ é um cone não vazio e fechado. O cone contingente é convexo se o conjnto $\mathbb{C}$ é convexo. Se $\mathbb{C}$ não é convexo, então $\mathscr{T}_C(\mathbb{C}, x_0)$ pode não ser convexo. Para maiores detalhes destes fatos veja [6].

Consideramos os seguintes conjuntos para um $x_0 \in \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F$ e $j, k \in \mathbb{K}$ fixados:

$$\mathbb{M}^k = \{x \in \mathbb{R}^n; f_k(x) \leq f_k(x_0), \quad x \in \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F\}, \tag{4.12}$$

$$\mathbb{Q}^j = \{x \in \mathbb{R}^n; f_k(x) \leq f_k(x_0), \quad k \in \mathbb{K}, \quad k \neq j, \quad x \in \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F\} \tag{4.13}$$

e

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n; f_k(x) \leq f_k(x_0), \quad k \in \mathbb{K}, \quad x \in \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F\}. \tag{4.14}$$

Notamos que $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{k=1}^{\ell} \mathbb{M}^k$ e $\mathbb{Q}^j = \bigcap\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\ell} \mathbb{M}^k$.

Para problemas com restrição de desigualdade, o conjunto $\mathbb{M}^k$ em (4.12) coincide com o conjunto apresentado nos trabalhos de Rizvi [84, 85]. Analogamente, os conjuntos $\mathbb{Q}^j$ e $\mathbb{Q}$ em (4.13) e (4.14), respectivamente, coincidem com os conjuntos que foram apresentados no trabalho de Maeda [61].

Para cada $j, k \in \mathbb{J}$ fixados, lembramos os cones linearizados para os conjuntos $\mathbb{M}^k$ e $\mathbb{Q}^j$

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}^k, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n; f_k^{(1)}(x_0)d \leq 0, \ g_i^{(1)}(x_0)d \leq 0, \ i \in \mathbb{I}(x_0), \ F^{(1)}(x_0)d = 0\} \tag{4.15}$$

e

$$\mathscr{L}(\mathbb{Q}^j, x_0) = \{d; f_k^{(1)}(x_0)d \leq 0, \ k \in \mathbb{K}, \ k \neq j, \ g_i^{(1)}(x_0)d \leq 0, \ i \in \mathbb{I}(x_0), \ F^{(1)}(x_0)d = 0\}. \tag{4.16}$$

Para $\mathbb{M} = \mathbb{Q} = \bigcap\limits_{k=1}^{\ell} \mathbb{M}^k$, temos

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n; f_k^{(1)}(x_0)d \leq 0, \ k \in \mathbb{K}, \quad g_i^{(1)}(x_0)d \leq 0, \quad i \in \mathbb{I}(x_0), \ F^{(1)}(x_0)d = 0\}.$$

Sejam $h \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{K}$ fixados. Definimos o seguinte cone

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}^k, x_0, h) = \{d \in \mathbb{R}^n; f_k^{(1)}(x_0)d \leq 0, \ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d \leq 0, \ i \in \mathbb{I}(x_0), \ F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d = 0\}.$$

Obviamente $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h)$ é definido como

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) = \{d; f_k^{(1)}(x_0)d \leq 0, \ k \in \mathbb{K}, \ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d \leq 0, \ i \in \mathbb{I}(x_0), \ F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d = 0\}.$$

Além disto, é claro que $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) = \mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h)$ e $\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h)$ é um cone não vazio, convexo e fechado.

Nos casos em que $p = q = 1$, os cones $\mathscr{L}(\mathbb{M}^k, x_0, h)$ e $\mathscr{L}(\mathbb{Q}^j, x_0, h)$ coincidem com os cones $\mathscr{L}(\mathbb{M}^k, x_0)$ e $\mathscr{L}(\mathbb{Q}^j, x_0)$, respectivamente. Além disto, valem as inclusões

$$\mathbb{T}(\mathbb{M}^k, x_0) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{M}^k, x_0), k \in \mathbb{K} \tag{4.17}$$

e

$$\mathbb{T}(\mathbb{Q}^j, x_0) \subseteq \mathbb{L}(\mathbb{Q}^j, x_0), j \in \mathbb{K}. \tag{4.18}$$

Para maiores detalhes destas inclusões veja [45, 83].

Da inclusão (4.17), temos

$$\bigcap_{k=1}^{\ell} \mathbb{T}(\mathbb{M}^k, x_0) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\ell} \mathscr{L}(\mathbb{M}^k, x_0) = \mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0).$$

Além disto, por (4.18) e como $\mathscr{L}(\mathbb{Q}^j, x_0)$ é um cone convexo e fechado, temos

$$\bigcap_{k=1}^{\ell} \overline{conv\mathbb{T}(\mathbb{Q}^j, x_0)} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\ell} \mathscr{L}(\mathbb{Q}^j, x_0) = \mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0).$$

Agora, consideramos as inclusões

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\ell} \mathbb{T}(\mathbb{M}^k, x_0)$$

que é denominada de Condição de Regularidade de Abadie Generalizada (GARC) [23] e

$$\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\ell} \overline{conv\mathbb{T}(\mathbb{Q}^j, x_0)}$$

que é denominada de Condição de Regularidade de Guignard Generalizada (GGRC) [61].

Quando consideramos problemas com restrição de desigualdade, os cones linearizados (4.15) e (4.16) coincidem com os cones linearizados apresentados nos trabalhos de Burachik [23] e Maeda [61], respectivamente. Além disto, Burachik e Rizvi [23] asseguram a existência de multiplicadores positivos associados a cada uma das funções objetivo, quando é assumido GARC. Similarmente, Maeda [61] também garante a existência de multiplicadores positivos associados a cada uma das funções objetivo, supondo GGRC.

Se a degeneração (4.6) é satisfeita na solução do Problema (4.5), as condições de regularidade GARC e/ou GGRC podem não ser verificadas, como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo 6.

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar } f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 1 \end{bmatrix} \\ &\textit{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_g = \{x \in \mathbb{R}^2; -x_1x_2 \leq 0,\ x_1^2 - 8x_2^3 \leq 0\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Na figura a seguir temos a representação gráfica do conjunto factível do Problema (4.19).

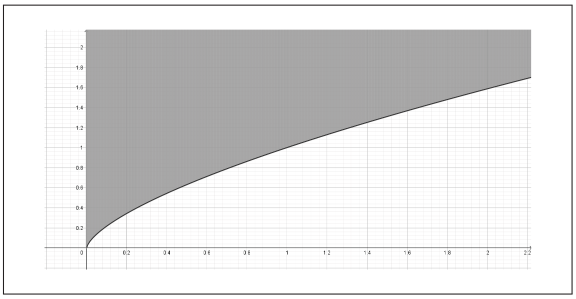


Figura 4.1: Conjunto Factível do Problema (4.19)

Primeiramente, afirmamos que $x_0 = 0$ é uma solução propriamente eficiente do Problema (4.19). De fato, sejam $f_1(x) = x_1 - x_2$, $f_2(x) = x_1 + 2x_2 - 1$, $g_1(x) = -x_1x_2$ e $g_2(x) = x_1^2 - 8x_2^3$. Consideramos $w = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, logo $\sum_{j=1}^{2} w_j f_j(x) = x_1 - \frac{1}{3}$ e o problema ponderado para w é definido como

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } x_1 - \dfrac{1}{3} \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_g, \end{array}$$

sendo x_0 um minimizador global. Logo, em virtude da Proposição 4.1, x_0 é uma solução propriamente eficiente do Problema (4.19). É fácil verificarmos que

$$f_1^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; f_2^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$g_1^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow g_1^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_2^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -24x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow g_2^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_1^{(2)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$g_2^{(2)}(x_0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow g_2^{(2)}(x_0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, a relação

$$\theta_1 f_1^{(1)}(x_0) + \theta_2 f_2^{(1)}(x_0) + \mu_1 g_1^{(1)}(x_0) + \mu_2 g_2^{(1)}(x_0) = 0$$

é verificada apenas no caso em que $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Portanto, GARC e GGRC falham, como também verificaremos de outra forma a seguir.

Representamos graficamente os conjuntos

$$\mathbb{M}^1 = \mathbb{Q}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 - x_2 \leq 0, \quad x \in \mathbb{M}_g\}$$

e

$$\mathbb{M}^2 = \mathbb{Q}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0, \quad x \in \mathbb{M}_g\}.$$

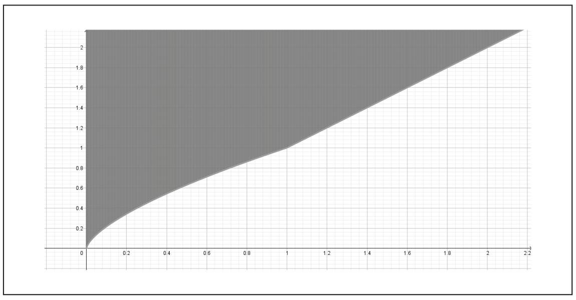


Figura 4.2: Conjunto $\mathbb{M}^1$

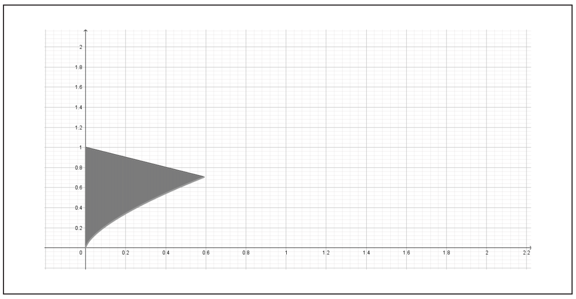


Figura 4.3: Conjunto $\mathbb{M}^2$

É fácil verificarmos que

$$\mathscr{T}_C(\mathbb{M}^1, x_0) = \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^2, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^2; d_1 = 0, d_2 \geq 0\},$$

$$\mathscr{T}_C(\mathbb{M}^2, x_0) = \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^1, x_0) = \{0\},$$

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}^1, x_0) = \mathscr{L}(\mathbb{Q}^2, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^2; d_1 - d_2 \leq 0\},$$

e

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}^2, x_0) = \mathscr{L}(\mathbb{Q}^1, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^2; d_1 + 2d_2 \leq 0\}.$$

Logo,

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^2; d_1 + 2d_2 \leq 0,\ d_1 - d_2 \leq 0\} \nsubseteq \bigcap_{k=1}^{2} \mathscr{T}_C(\mathbb{M}^k, x_0) = \{0\}$$

e

$$\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^2; d_1 + 2d_2 \leq 0,\ d_1 - d_2 \leq 0\} \nsubseteq \bigcap_{k=1}^{2} \overline{conv\, \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^k, x_0)} = \{0\},$$

ou seja, GARC e GGRC não são satisfeita em x_0.

Por outro lado, para $h = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos os seguintes cones

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}^1, x_0, h) = \mathscr{L}(\mathbb{Q}^2, x_0, h) = \{d \in \mathbb{R}^2; d_1 \geq 0,\ d_1 - d_2 = 0\},$$

e

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}^2, x_0, h) = \mathscr{L}(\mathbb{Q}^1, x_0, h) = \{d \in \mathbb{R}^2; d_1 + 2d_2 \leq 0,\ d_1 \geq 0,\ \ -d_1 + d_2 \leq 0\}$$

cujas representações gráficas são vistas a seguir.

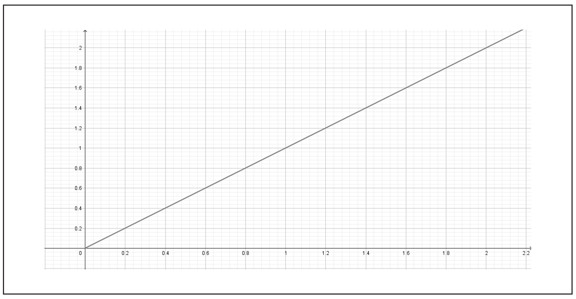


Figura 4.4: Cone $\mathbb{L}\left(\mathbb{M}^1, x_0, h\right)$

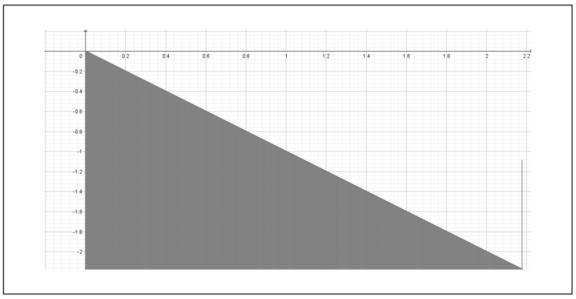


Figura 4.5: Cone $\mathbb{L}\left(\mathbb{M}^2, x_0, h\right)$

Agora observamos que

$$\mathscr{T}_C(\mathbb{M}^1, x_0) = \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^2, x_0) \nsubseteq \mathscr{L}(\mathbb{Q}^2, x_0, h) = \mathscr{L}(\mathbb{M}^1, x_0, h),$$

$$\mathscr{T}_C(\mathbb{M}^2, x_0) = \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^1, x_0) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{Q}^1, x_0, h) = \mathscr{L}(\mathbb{M}^2, x_0, h),$$

$$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) = \{0\} \subseteq \mathscr{T}_C(\mathbb{M}^1, x_0)$$

e

$$\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h) = \{0\} \subseteq \overline{conv\mathscr{T}_C(\mathbb{M}^1, x_0)}.$$

Notamos que nestes casos não temos necessariamente as inclusões $\mathscr{T}_C(\mathbb{M}^k, x_0) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{M}^k, x_0, h)$, $k \in \mathbb{K}$ e $\mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^j, x_0) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{Q}^j, x_0, h)$, $j \in \mathbb{K}$.

Nosso objetivo é estabelecermos novas condições necessárias de otimalidade para o Problema (4.5), sendo que as degenerações (4.6) e (4.7) ocorrem na solução do problema, através de relações entre os cones contingente e os cones definidos como em (4.15) e (4.16). Em outras palavras, se para algum $k_0 \in \mathbb{K}$ e $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, uma das inclusões $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) \subseteq \mathscr{T}_C(\mathbb{M}^{k_0}, x_0)$ ou $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) \subseteq \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^{k_0}, x_0)$ é satisfeita na solução do Problema (4.5), mostraremos novas condições necessárias de otimalidade para problemas absolutamente degenerados. Mais do que isto, assim como nos resultados obtidos por Maeda [61] e Burachik e Rizvi [23] garantimos a existência de multiplicadores estritamente positivos associados as funções objetivo. Além disto, comparando as próximas condições necessárias de otimalidade com as obtidas anteriormente, quando a condição de qualificação h-MFCQ é verificada em x_0, para um $h \neq 0$ no q-Kernel de g, temos mais liberdade na escolha do vetor h, no sentido que este não pertence a nenhum outro conjunto pré-estabelecido.

O seguinte teorema é fundamental para provarmos nossas condições necessárias de otimalidade, quando x_0 é uma solução propriamente eficiente e a hipótese $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) \subseteq \mathscr{T}_C\left(\mathbb{M}^{k_0}, x_0\right)$ é verificada, para algum $k_0 \in \mathbb{K}$ e $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Teorema 4.4. *Sejam x_0 uma solução propriamente eficiente do Problema (4.5), $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^q(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^p(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (4.6) e (4.7) são satisfeitas em x_0 e que exista $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) \subseteq \mathscr{T}_C\left(\mathbb{M}^{k_0}, x_0\right)$, para algum $k_0 \in \mathbb{K}$. Então o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_k^{(1)}(x_0)d & \leq & 0, k \in \mathbb{K} \text{ e } \exists k_1 \in \mathbb{K}, k_1 \neq k_0, \text{ tal que } f_{k_1}^{(1)}(x_0)d < 0 \\ g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d & \leq & 0, i \in \mathbb{I}(x_0), \\ F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d & = & 0, j \in \mathbb{J} \end{array}\right. \tag{4.20}$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponhamos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (4.20). Além disto, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\begin{array}{rcl} f_1^{(1)}(x_0)d & < & 0, \\ f_k^{(1)}(x_0)d & \leq & 0, k = 2, ..., l. \end{array}$$

Logo, $d \in \mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h)$ e como $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) \subseteq \mathscr{T}_C\left(\mathbb{M}^{k_0}, x_0\right)$, para algum $k_0 \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$, temos $d \in \mathscr{T}_C\left(\mathbb{M}^{k_0}, x_0\right)$. Portanto, existem sequências $(x_n) \subseteq \mathbb{M}^{k_0}$ e $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ tais que

$$x_n \to x_0 \quad e \quad t_n(x_n - x_0) \to d.$$

Colocando $z_n = t_n(x_n - x_0) \to d$ e por expansão de Taylor de f_1, temos

$$\begin{array}{rcl} t_n(f_1(x_n) - f_1(x_0)) & = & f_1^{(1)}(x_0)t_n(x_n - x_0) + o(\|x_n - x_0\|)t_n \\ & = & f_1^{(1)}(x_0)z_n + o\left(\dfrac{\|z_n\|}{t_n}\right)t_n \\ & = & f_1^{(1)}(x_0)z_n + \dfrac{o\left(\dfrac{\|z_n\|}{t_n}\right)}{\dfrac{\|z_n\|}{t_n}}\|z_n\|. \end{array} \tag{4.21}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (4.21), obtemos

$$t_n(f_1(x_n) - f_1(x_0)) \to f_1^{(1)}(x_0)d.$$

Como $f_1^{(1)}(x_0)d < 0$ e $t_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $f_1(x_n) < f_1(x_0)$, para todo $n \geq n_0$. Reescrevendo esta subsequência, se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$f_1(x_n) < f_1(x_0) \quad e \quad f_{k_0}(x_n) \leq f_{k_0}(x_0)\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora para qualquer $n \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto

$$\mathbb{K}_n = \{k \geq 2; f_k(x_n) > f_k(x_0)\} \subseteq \{2, ..., l\}.$$

Afirmamos que $\mathbb{K}_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, se $\mathbb{K}_n = \emptyset$ para algum n, então para todo $k \geq 2$, em particular para $k = k_0$, temos $f_k(x_n) \leq f_k(x_0)$. Além disto, $f_1(x_n) < f_1(x_0)$ e isto contradiz a eficiência de x_0. Logo, $\mathbb{K}_n \neq \emptyset$.

Denotamos por $\mathscr{P}$ a família de subconjuntos do conjunto finito $\{2, ..., l\}$. Consideramos a função $\Psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathscr{P}$ definida como $\Psi(n) = \mathbb{K}_n$. Como o conjunto $\mathscr{P}$ é finito, deve existir um subconjunto $\widehat{\mathbb{K}} \in Im\Psi$ tal que $\Psi^{-1}\left(\widehat{\mathbb{K}}\right) = \{n \in \mathbb{N}; \Psi(n) = \widehat{\mathbb{K}}\}$ é infinito e $\widehat{\mathbb{K}} \neq \emptyset$ porque $\Psi(n) = \mathbb{K}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos as subsequências $(x_n)_{n\in\Psi^{-1}(\widehat{\mathbb{K}})} \subseteq \mathbb{M}^{k_0}$ e $(z_n)_{n\in\Psi^{-1}(\widehat{\mathbb{K}})} \subseteq \mathbb{R}^n$, sendo que $z_n = t_n(x_n - x_0) \to d$.

Agora, por expansão de Taylor de f_k, para cada $k \in \widehat{\mathbb{K}}$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
f_k(x_n) - f_k(x_0) &= f_k^{(1)}(x_0)(x_n - x_0) + o(\|x_n - x_0\|) \\
&= f_k^{(1)}(x_0)\frac{z_n}{t_n} + o(\frac{\|z_n\|}{t_n}) \\
&= f_k^{(1)}(x_0)\frac{d}{t_n} + f^{(1)}(x_0)\frac{z_n - d}{t_n} + o\left(\frac{\|z_n\|}{t_n}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$f_k^{(1)}(x_0)d + f_k^{(1)}(x_0)(z_n - d) + \frac{o\left(\frac{\|z_n\|}{t_n}\right)}{\frac{\|z_n\|}{t_n}}\|z_n\| > 0. \tag{4.22}$$

Fazendo, $n \to \infty$ em (4.22), obtemos $f_k^{(1)}(x_0)d \geq 0$ e assim, $f_k^{(1)}(x_0)d = 0$, $k \in \widehat{\mathbb{K}}$.

Usando a expansão de Taylor de f_1 e f_k, para cada $k \in \widehat{\mathbb{K}}$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
f_1(x_n) - f_1(x_0) &= f_1^{(1)}(x_0)(x_n - x_0) + o_1(\|x_n - x_0\|), \\
f_k(x_n) - f_k(x_0) &= f_k^{(1)}(x_0)(x_n - x_0) + o_k(\|x_n - x_0\|),
\end{aligned}$$

sendo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_1(\|x_n - x_0\|)}{\|x_n - x_0\|} = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{o_k(\|x_n - x_0\|)}{\|x_n - x_0\|} = 0.$$

É fácil verificarmos que

$$\lim_{n\to\infty} t_n o_1(\|x_n - x_0\|) = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} t_n o_k(\|x_n - x_0\|) = 0, k \in \widehat{\mathbb{K}}$$

Agora fixando $k \in \widehat{\mathbb{K}}$, podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(x_0) - f_1(x_n)}{f_k(x_n) - f_k(x_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-f_1^{(1)}(x_0)t_n(x_n - x_0) - t_n o_1(\|x_n - x_0\|)}{f_k^{(1)}(x_0)t_n(x_n - x_0) + t_n o_k(\|x_n - x_0\|)}.$$

Observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(-f_1^{(1)}(x_0)t_n(x_n - x_0) - t_n o_1(\|x_n - x_0\|\right) = -f_1^{(1)}(x_0)d > 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_k^{(1)}(x_0)t_n(x_n - x_0) + t_n o_k(\|x_n - x_0\|\right) = f_k^{(1)}(x_0)d = 0^+.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(x_0) - f_1(x_n)}{f_k(x_n) - f_k(x_0)} = +\infty,$$

contradizendo a eficiência própria de x_0. Portanto, o sistema (4.20) não tem solução. ■

Agora podemos demonstrar condições necessárias de otimalidade para problemas definidos com (4.5), sentido da eficiência própria. Neste caso, mostraremos a existência de multiplicadores estritamente positivos associados as funções objetivo.

Teorema 4.5. *Sejam x_0 uma solução propriamente eficiente do Problema (4.5), $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^q(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^p(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (4.6) e (4.7) são satisfeitas em x_0 e que exista $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) \subseteq \mathscr{T}_C(\mathbb{M}^{k_0}, x_0)$, para algum $k_0 \in \mathbb{K}$. Então existem vetores $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}^\ell_+ \backslash \{0\}$, $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}^s_+$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} &= 0 && (4.23) \\ \mu_i g_i(x_0) &= 0, i \in \mathbb{I} && (4.24) \\ \theta_k &> 0, k \in \mathbb{K}. && (4.25) \end{aligned}$$

Demonstração. Em virtude do Teorema 4.4, o sistema (4.20) não tem solução. Então, de acordo com o Teorema de Alternativa de Tucker (Teorema 2.9), existem $\theta \in \mathbb{R}^\ell_+ \backslash \{0\}$ com $\theta_k > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^{s_0}_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0.$$

Fazendo $\mu_i = 0$, $i \notin \mathbb{I}(x_0)$, obtemos (4.23). Como $g_i(x_0) = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$, temos (4.24), o que completa a prova do Teorema. ■

Para problemas com restrição de desigualdade definidos como em (4.5) e quando $q = 1$, o resultado anterior generaliza o Teorema 4.3 em [23], no sentido que $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) = \mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0)$ e a inclusão $\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0) \subseteq \mathscr{T}_C\left(\mathbb{M}^{k_0}, x_0\right)$ para algum $k_0 \in \mathbb{K}$ é uma hipótese mais fraca do que GARC.

Retornando ao Exemplo 6, a igualdade a seguir

$$
\begin{aligned}
0 &= \theta_1 f_1(x_0) + \theta_1 f_1(x_0) + \mu_1 g_1^{(2)}(x_0)[h] + \mu_2 g_2^{(2)}(x_0)[h] \\
&= \theta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

é válida para $\theta_1 = \dfrac{4}{3}\mu_2 + \mu_1$ e $\theta_2 = \dfrac{2}{3}\mu_2$. Como $\mu_1 \geq 0$ e $\mu_2 \geq 0$, evidentemente podemos encontrar θ_1 e θ_2 estritamante positivos satisfazendo a igualdade anterior.

Dando prosseguimento, novamente mostraremos que sob certas condições um determinado sistema não tem solução e isto será importante para obtermos uma nova condição necessária de otimalidade para problemas absolutamente degenerados. Para isto, assumimos que é válida a inclusão $\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h) \subseteq \overline{conv \mathscr{T}_C\left(\mathbb{Q}^{k_0}, x_0\right)}$, para algum $k_0 \in \mathbb{K}$. Além disto, consideramos a eficiência como solução do Problema (4.5), que é um tipo de solução mais fraca do que a eficiência própria.

Teorema 4.6. *Sejam x_0 uma solução eficiente do Problema* (4.5), $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^q(\mathbb{U})$ *e* $F \in \mathscr{C}^p(\mathbb{U})$. *Suponhamos que a degeneração* (4.6) *é satisfeita em x_0 e que exista $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que $\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h) \subseteq \overline{conv \mathscr{T}_C\left(\mathbb{Q}^{k_0}, x_0\right)}$, para algum $j_0 \in \mathbb{K}$. Então o sistema*

$$
\left\{
\begin{aligned}
f_k^{(1)}(x_0)d &\leq 0, k \in \mathbb{K} \quad e \quad f_{k_0}^{(1)}(x_0)d < 0 \\
g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}d &\leq 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\
F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}d &= 0, j \in \mathbb{J}
\end{aligned}
\right.
\tag{4.26}
$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponhamos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (4.26). Sem perda de generalidade, assumimos que

$$
\begin{aligned}
f_1^{(1)}(x_0)d &< 0, \\
f_k^{(1)}(x_0)d &\leq 0, k = 2, ..., l.
\end{aligned}
$$

Logo, $d \in \mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h)$ e como $\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h) \subseteq \overline{conv \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^1, x_0)}$, isto implica que $d \in \overline{conv \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^1, x_0)}$. Portanto, existe uma sequência $(d_m) \subseteq conv \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^1, x_0)$ tal que

$$d_m \to d.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, existem números $k_m \in \mathbb{N}$, $\lambda_{mk} \geq 0$ e $d_{mk} \in \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^1, x_0)$, $k = 1, ..., k_m$, tais que

$$\sum_{k=1}^{k_m} \lambda_{mk} = 1 \text{ e } \sum_{k=1}^{k_m} \lambda_{mk} d_{mk} = d_m.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $k = 1, ..., k_m$ fixados, como $d_{mk} \in \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^1, x_0)$, existem sequências $(x_{mk}^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^1$ e $(t_{mk}^n) \subseteq \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, tais que

$$x_{mk}^n \to x_0 \text{ e } t_{mk}^n (x_{mk}^n - x_0) \to d_{mk}.$$

Como $(x_{mk}^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^1$ e por causa da eficiência de x_0, temos $f_1(x_{mk}^n) \geq f_1(x_0)$. Fazendo $z_{mk}^n = t_{mk}^n (x_{mk}^n - x_0) \to d_{mk}$ e da expansão de Taylor de f_1, temos

$$\begin{aligned} t_{mk}^n (f_1(x_{mk}^n) - f_1(x_0)) &= f_1^{(1)}(x_0) t_{mk}^n (x_{mk}^n - x_0) + o(\|x_{mk}^n - x_0\|) t_{mk}^n \\ &= f_1^{(1)}(x_0) z_{mk}^n + o\left(\frac{\|z_{mk}^n\|}{t_{mk}^n}\right) t_{mk}^n \\ &= f_1^{(1)}(x_0) z_{mk}^n + \frac{o\left(\frac{\|z_{mk}^n\|}{t_{mk}^n}\right)}{\frac{\|z_{mk}^n\|}{t_{mk}^n}} \|z_{mk}^n\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$f_1^{(1)}(x_0) z_{mk}^n + \frac{o\left(\frac{\|z_{mk}^n\|}{t_{mk}^n}\right)}{\frac{\|z_{mk}^n\|}{t_{mk}^n}} \|z_{mk}^n\| \geq 0. \tag{4.27}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (4.27), obtemos

$$f_1^{(1)}(x_0) d_{mk} \geq 0.$$

Em virtude da linearidade do produto interno, temos

$$f_1^{(1)}(x_0) d_m = \sum_{k=1}^{k_m} \lambda_{mk} f_1^{(1)}(x_0) d_{mk} \geq 0. \tag{4.28}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (4.28), obtemos

$$f_1^{(1)}(x_0) d \geq 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, o sistema (4.26) não tem solução. ■

Teorema 4.7. *Sejam x_0 uma solução eficiente do Problema (4.5), $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^q(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^p(\mathbb{U})$. Suponhamos que as degenerações (4.6) e (4.7) são satisfeitas em x_0 e que exista $h \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ tal que $\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h) \subseteq \overline{conv \mathscr{T}_C(\mathbb{Q}^{j_0}, x_0)}$, para algum $j_0 \in \mathbb{K}$. Então existem vetores $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^\ell\backslash\{0\}$ e $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^s$ tais que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} &= 0 \\ \mu_i g_i(x_0) &= 0, i \in \mathbb{I} \\ \theta_k &> 0, k \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Demonstração. Segue de forma análoga à demonstração do Teorema 4.5. ■

Similarmente ao comentário que fizemos após o Teorema 4.5, se $q = 1$ o Teorema 4.7 generaliza o Teorema 3.2 em [61], pois a inclusão $\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0) \subseteq \overline{conv\mathscr{T}_C\left(\mathbb{Q}^{k_0}, x_0\right)}$, para algum $k_0 \in \mathbb{K}$ é uma hipótese mais fraca do que GGRC.

Sejam as seguintes hipóteses:

H_1:h-MFCQ é satisfeita em x_0, $h \in (\mathbb{H}_g(x_0) \cap \mathbb{H}_F(x_0)) \setminus \{0\}$, $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$ e x_0 é solução fracamente eficiente local;
H_2:$\mathscr{L}(\mathbb{M}, x_0, h) \subseteq \mathscr{T}_C\left(\mathbb{M}^{k_0}, x_0\right)$, para algum $k_0 \in \mathbb{K}$, $h \in \mathbb{R}^n$ e x_0 é uma solução propriamente eficiente;
H_3:$\mathscr{L}(\mathbb{Q}, x_0, h) \subseteq \overline{conv\mathscr{T}_C\left(\mathbb{Q}^{j_0}, x_0\right)}$, para algum $j_0 \in \mathbb{K}$, $h \in \mathbb{R}^n$ e x_0 é uma solução eficiente.

No diagrama a seguir mostramos um panorama dos resultados que provamos nesta seção.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{s} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0,\ \mu_i \geq 0 \text{ e } \mu_i g_i(x_0) = 0}$$

$$\Big\uparrow \ \boxed{+\ H_1}$$

$$\boxed{x_0 \text{ é uma solução do Problema (4.1) (absolutamente degenerado)}}$$

$$\boxed{+\ H_2 \text{ ou } H_3}\ \Big\downarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{s} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)[h]^{p-1} = 0,\ \mu_i \geq 0 \text{ e } \mu_i g_i(x_0) = 0,\ \theta_k > 0}$$

4.2 Estrutura do Conjunto de Multiplicadores

Similarmente a Seção 2.2, pretendemos estabelecer propriedades para o conjunto de multiplicadores associados ao Problema (4.5) que satisfaz as degenerações (4.6) e (4.7) na solução do problema. Vimos que se x_0 é um solução (ou fracamente eficiente local, ou eficiente ou propriamente eficiente) do Problema (4.5) e para algum $h \in \mathbb{R}^n$ específico que atende as hipóteses das condições necessárias de otimalidade estabelecidas na seção anterior, podemos garantir a existência de multiplicadores $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^{\ell} \setminus \{0\}$, $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^s$ e $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\sum_{k=1}^{m} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0 \tag{4.29}$$

$$\mu_i g_i(x_0) = 0, i \in \mathbb{I}. \tag{4.30}$$

Consideramos os seguintes conjuntos

$$\mathscr{F} = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U}); x_0 \text{ é uma solução de (4.5) e satisfaz (4.6) e (4.7)} \right\},$$

$$\Lambda(f,h) = \left\{ (\theta,\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^\ell_+ \times \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^m; \text{(4.29), (4.30) são satisfeitas e } \|\theta\| = 1 \right\}$$

e

$$\Lambda(f,\theta,h) = \left\{ (\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^m; (\theta,\mu,\lambda) \in \Lambda(f,h) \right\}.$$

Como podemos observar nos Exemplos 5 e 6, apesar das hipóteses adicionais serem verificadas em $x_0 = 0$, não temos unicidade dos multiplicadores. Uma vez existindo tais multiplicadores satisfazendo (4.29) e (4.30), podemos garantir a unicidade destes. Para isto, introduzimos uma nova "condição de regularidade" que pode ser vista como uma variante de h-MFCQ.

Definição 4.4. *Dizemos que a Condição de Qualificação Mangasarian-Fromovitz estrita com respeito a $h \in \mathbb{R}^n$ e ao índice $s \in \mathbb{K}$ (abreviadamente: h-SMFRC$_s$) é satisfeita em x_0, quando existem multiplicadores $\overline{\theta} = \overline{\theta}(h) \in \mathbb{R}^\ell_+$, $\overline{\mu} = \overline{\mu}(h) \in \mathbb{R}^s_+$ e $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(h) \in \mathbb{R}^m$ que satisfazem* (4.29), (4.30) *e para os conjuntos de índices*

$$\mathbb{K}_+ = \{k \in \mathbb{K}; \theta_k > 0\},$$
$$\mathbb{I}_+ = \{i \in \mathbb{I}(x_0); \mu_i > 0\}$$

e

$$\mathbb{I}_0 = \mathbb{I}(x_0) - \mathbb{I}_+$$

valem as seguintes condições:

(i) $f_k^{(1)}(x_0)$, $k \in \mathbb{K}_+$ e $k \neq s$, $g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}$, $i \in \mathbb{I}_+$, $F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}$, $j \in \mathbb{J}$ são linearmente independentes;

(ii) Existe $w_s \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_k^{(1)}(x_0)w_s & < & 0, k \notin \mathbb{K}_+, k \neq s \\ g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\,w_s & < & 0, i \in \mathbb{I}_0 \\ f_k^{(1)}(x_0)w_s & = & 0, k \in \mathbb{K}_+, k \neq s \\ g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\,w_s & < & 0, i \in \mathbb{I}_+ \\ F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\,w_s & = & 0, j \in \mathbb{J}. \end{array} \right. \tag{4.31}$$

No caso em que p=q=1 o conceito anterior coincide com o que foi introduzido por Bigi e Castellani em [Definição 2, [12]]. Além disto, a condição anterior é um requisito bastante forte, no sentido de que a solubilidade do sistema de equações (4.31) força alguns componentes fixos de alguns dos multiplicadores serem zero, como mostra o seguinte lema.

Lema 4.1. *Seja $\left(\overline{\theta},\overline{\mu},\overline{\lambda}\right) \in \Lambda(f,h)$ e suponhamos que o sistema de equações* (4.31) *admite solução para algum $s \in \mathbb{K}_+$. Se $(\theta',\mu',\lambda') \in \Lambda(f,h)$. Então*

$$\{k \in \mathbb{K}; \theta'_k > 0\} \subseteq \mathbb{K}_+ \text{ e } \{i \in \mathbb{I}; \mu'_i > 0\} \subseteq \mathbb{I}_+.$$

Demonstração. Seja $w_s \in \mathbb{R}^n$ uma solução do sistema de equações (4.31) para algum $s \in \mathbb{K}_+$. Como $\left(\overline{\theta}, \overline{\mu}, \overline{\lambda}\right) \in \Lambda(f, h)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{k=1}^{\ell} \overline{\theta}_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \overline{\mu}_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda}_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\right) w_s \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \overline{\theta}_k f_k^{(1)}(x_0) w_s + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \overline{\mu}_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\, w_s + \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda}_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\, w_s \\ &= \overline{\theta}_s f_s^{(1)}(x_0) w_s \end{aligned}$$

Além disto, $\overline{\theta}_s > 0$ e isto implica que $f_s^{(1)}(x_0) w_s = 0$. Logo, w_s é solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_k^{(1)}(x_0) w_s & < & 0, k \notin \mathbb{K}_+ \\ g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\, w_s & < & 0, i \in \mathbb{I}_0 \\ f_k^{(1)}(x_0) w_s & = & 0, k \in \mathbb{K}_+ \\ g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1}\, w_s & = & 0, i \in \mathbb{I}_+ \\ F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}\, w_s & = & 0, j \in \mathbb{J}. \end{array} \right.$$

De acordo com o Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), o sistema

$$\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}(x_0)} \mu_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0 \tag{4.32}$$

não tem solução $(\theta, \mu, \lambda) \in \Lambda(f, h)$ tal que $\theta_k \geq 0$, $k \notin \mathbb{K}_+$ e $\mu_i \geq 0$, $i \in \mathbb{I}_0$, sendo um dos $\mu_i \neq 0$. Por outro lado, como $(\theta', \mu', \lambda') \in \Lambda(f, h)$, então é solução do sistema (4.32). Desta forma, se $k_0 \in \{k \in \mathbb{K}; \theta' > 0\}$, logo $\theta'_{k_0} > 0$ e da solubilidade de $(\theta', \mu', \lambda')$ em (4.32), concluímos que $k_0 \in \mathbb{K}_+$, ou seja, $\{k \in \mathbb{K}; \theta'_k > 0\} \subseteq \mathbb{K}_+$. Analogamente, temos $\{i \in \mathbb{I}; \mu'_i > 0\} \subseteq \mathbb{I}_+$ e concluímos a demonstração do lema. ■

Teorema 4.8. *Seja* $\left(\overline{\theta}, \overline{\mu}, \overline{\lambda}\right) \in \Lambda(f, h)$. *Então,* $\Lambda(f, h)$ *é um conjunto unitário se, e somente se, h-SMFRC*$_s$ *é satisfeita em* x_0, *para todo* $s \in \mathbb{K}_+$.

Demonstração. Seja $s \in \mathbb{K}_+$ e suponhamos, por absurdo, que h-SMFRC$_s$ não é satisfeita em x_0. Logo, a independência linear dos vetores $f_k^{(1)}(x_0)$, $k \in \mathbb{K}_+$ e $k \neq s$, $g_i^{(q)}(x_0)[h]^{q-1}$, $i \in \mathbb{I}_+$, $F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1}$, $j \in \mathbb{J}$, não ocorre e isto implica na igualdade a seguir

$$\sum_{k=1}^{\ell} \theta'_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu'_i g_i^{(q)}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j F_j^{(p)}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0,$$

sendo que θ', λ' e μ' não são todos nulos e tais que $\theta'_s = 0$, $\mu'_i = 0$, para todo $i \notin \mathbb{I}(x_0)$. Ou ainda, o sistema de equações (4.31) não tem solução e isto implica, pelo Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), na igualdade a seguir

$$\sum_{k=1}^{\ell} \theta'_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu'_i g_i^{q}(x_0)\,[h]^{q-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j F_j^{p}(x_0)\,[h]^{p-1} = 0,$$

sendo que θ', λ' e μ' não são todos nulos e tais que $\theta'_s = 0$, $\mu'_i = 0$, para todo $i \notin \mathbb{I}(x_0)$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\max\left\{\left|\theta'_k\right|; k\in\mathbb{K}\right\} < \min\left\{\overline{\theta}_k; k\in\mathbb{K}_+\right\},$$

e

$$\max\left\{\left|\mu'_i\right|; i\in\mathbb{I}_+\right\} < \min\left\{\overline{\mu}_i; i\in\mathbb{I}_+\right\}.$$

Então,

$$\theta'_k+\overline{\theta}_k\geq 0, k\in\mathbb{K}$$

e

$$\mu'_i+\overline{\mu}_i\geq 0, i\in\mathbb{I}.$$

Consideramos $\beta=\left\|\theta'+\overline{\theta}\right\|^{-1}$ e observamos que $\beta(\theta'+\overline{\theta},\mu'+\overline{\mu},\lambda'+\overline{\lambda})\in\Lambda(f,h)$. Por hipótese $\Lambda(f,h)$ é unitário, logo

$$\beta(\theta'_k+\overline{\theta}_k)=\overline{\theta}_k, k\in\mathbb{K},$$

$$\beta(\mu'_i+\overline{\mu}_i)=\overline{\mu}_i, i\in\mathbb{I}$$

e

$$\beta(\lambda'_j+\overline{\lambda}_j)=\overline{\lambda}_j, j\in\mathbb{J}.$$

Por outro lado, como $\theta'_s=0$ e $\overline{\theta}_s\neq 0$, concluímos que $\beta=1$. Assim, $\theta'=0$, $\lambda'=0$ e $\mu'=0$, uma contradição.

Reciprocamente, sejam $(\theta',\mu',\lambda')\in\Lambda(f,h)$ e $s\in\mathbb{K}$ tal que $\theta'_s\neq 0$. Logo, de acordo com o Lema 4.1, temos $\theta'_k=0$, para todo $k\notin\mathbb{K}_+$ e $\mu'_i=0$, para todo $i\notin\mathbb{I}$. Assim, $s\in\mathbb{K}_+$ e obtemos

$$0 = \sum_{k\in\mathbb{K}_+}\left(\beta\theta'_k-\overline{\theta}_k\right)f_k^{(1)}(x_0)+\sum_{i\in\mathbb{I}_+}\left(\beta\mu'_i-\overline{\mu}_i\right)g_i^{(q)}(x_0)\left[h\right]^{q-1}+\sum_{j=1}^{m}\left(\beta\lambda'_j-\overline{\lambda}_j\right)F_j^{(p)}(x_0)\left[h\right]^{p-1},$$

sendo $\beta=\dfrac{\overline{\theta}_s}{\theta'_s}$. Logo,

$$0 = \sum_{\substack{k\in\mathbb{K}_+\\ k\neq s}}\left(\beta\theta'_k-\overline{\theta}_k\right)f_k^{(1)}(x_0)+\sum_{i\in\mathbb{I}_+}\left(\beta\mu'_i-\overline{\mu}_i\right)g_i^{(q)}(x_0)\left[h\right]^{q-1}+\sum_{j=1}^{m}\left(\beta\lambda'_j-\overline{\lambda}_j\right)F_j^{(p)}(x_0)\left[h\right]^{p-1}.$$

Como os vetores $f_k^{(1)}(x_0)$, $k\in\mathbb{K}_+$ e $k\neq s$, $g_i^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}$, $i\in\mathbb{I}_+$, $F_j^{(p)}(x_0)\left[h\right]^{p-1}$, $j\in\mathbb{J}$ são linearmente independentes, temos

$$\begin{aligned}\beta\theta'_k &= \overline{\theta}_k, k\in\mathbb{K}_+,\\ \beta\mu'_i &= \overline{\mu}_i(h), i\in\mathbb{I}_+,\\ \beta\lambda'_j &= \overline{\lambda}_j, j\in\mathbb{J}.\end{aligned}$$

Isto garante que $\beta(\theta',\lambda',\mu')=(\overline{\theta},\overline{\lambda},\overline{\mu})$. Além disto,

$$1=\left\|\overline{\theta}\right\|=\left\|\beta\theta'\right\|=\beta\left\|\theta'\right\|=\beta.$$

Portanto $(\theta',\lambda',\mu')=(\overline{\theta},\overline{\lambda},\overline{\mu})$, o que conclui a demonstração. ∎

Se $q = p = 1$ e no caso escalar, o conjunto de índices $\mathbb{K}_+$ consiste apenas de um único índice correspondente da função objetivo e, consequentemente, h-SMFCQ$_s$ coincide com a variante da condição da qualificação MFCQ proposta por Kyparisis em [55]. Além disto, em [27] os autores demonstram condições necessárias para a limitação do conjunto de multiplicadores para o caso não degenerado.

4.3 Problemas Irregulares com Restrição de Desigualdade e Igualdade

Nosso objetivo nesta seção é estabelecermos condições necessárias de otimalidade para problemas multiobjetivo irregulares, ou seja, problemas multiobjetivo tais que a restrição de igualdade é irregular, no sentido da Definição 3.7. Sendo mais específico, mostraremos uma extensão do Teorema 3.12 para Otimização multiobjetivo e com este intuito, consideramos o seguinte problema multiobjetivo

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) = (f_1(x), ..., f_l(x)) \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M} = \mathbb{M}_g \cap \mathbb{M}_F, \end{array} \tag{4.33}$$

sendo $\mathbb{M}_g$ e $\mathbb{M}_F$ definidos como em (4.2) e (4.3), respectivamente.

Sejam que x_0 uma solução fracamente eficiente local de (4.33) e F irregular em x_0. Sendo F p-regular em x_0 com respeito a $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$, para problemas de Otimização multiobjetivo definidos como em (4.33), não temos necessariamente $f^{(1)}(x_0)h = 0$, ou equivalentemente, $f_k^{(1)}(x_0)h = 0$, $k \in \mathbb{K}$. Assim, introduzindo a informação $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$ como hipótese podemos enunciar e provar um resultado de insolubilidade de determinado sistema e consequentemente, por meio de um teorema de alternativa adequado, demonstrarmos uma versão do Teorema 3.15 para problemas multiobjetivo.

Teorema 4.9. *Sejam x_0 uma solução fracamente eficiente local do Problema* (4.33), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ *e* $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. *Suponhamos que exista $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ tal que h-GMFCQ é satisfeita em x_0, $g_i^{(1)}(x_0)h = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ e $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$. Então o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_k^{(1)}(x_0)d & < & 0, k \in \mathbb{K} \\ g_i^{(1)}(x_0)d & \leq & 0, i \in \mathbb{I}(x_0) \\ \phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\, d & = & 0, i = 1, ..., p, \end{array} \right. \tag{4.34}$$

sendo $\phi_i(x_0)[h]^{i-1}$, $i = 1, ..., p$ os fatores do operador p-fator, não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{R}^n$ o vetor satisfazendo a Definição 3.11. Suponhamos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (4.34) e podemos supor que $f_k^{(1)}(x_0)(z + d) < 0$, $k \in \mathbb{K}$. Da hipótese de p-regularidade de F em x_0 com respeito a $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ e do Lema 3.6, é possível encontrarmos $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma curva $x : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(z + d) + y(\alpha) \text{ e } F(x(\alpha)) = 0,$$

sendo $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$.

Por expansão de Taylor de f_k, para cada $k \in \mathbb{K}$ fixado e das desigualdades $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$ e $f_k^{(1)}(x_0)d < 0$, $k \in \mathbb{K}$, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f_k(x(\alpha)) = f_k(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2}(z+d) + y(\alpha)) < f_k(x_0).$$

Isto contradiz a eficiência fraca local do Problema (4.33) e, portanto, o sistema (4.34) não tem solução. ■

Teorema 4.10. *Sejam x_0 uma solução fracamente eficiente local do Problema* (4.33), $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ *e* $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. *Suponhamos que exista* $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ *tal que h-GMFCQ é satisfeita em* x_0, $g_i^{(1)}(x_0)h = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$ *e* $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$. *Então, existem* $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^{\ell}\backslash\{0\}$, $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^s$ *e* $\lambda_i = \lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i$, $i = 1, ..., p$, *tais que*

$$\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i g^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \left[\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\right]^t \lambda_i = 0 \tag{4.35}$$

$$\mu_i g_i(x_0) = 0, i \in \mathbb{I}. \tag{4.36}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 4.9, o sistema (4.34) não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema de Alternativa de Motzkin (Teorema 2.8), existem $\theta \in \mathbb{R}_+^{\ell}\backslash\{0\}$, $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}_+^{s_0}$ e $\lambda_i \in \mathbb{Y}_i$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i\in\mathbb{I}(x_0)} \mu_i g^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \left[\phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\right]^t \lambda_i = 0,$$

Fazendo $\mu_i = 0$, $i \notin \mathbb{I}(x_0)$, concluímos (4.35). Como $g_i(x_0) = 0$, $i \in \mathbb{I}(x_0)$, temos (4.36) o que completa a prova. ■

Para problemas irregulares escalar com restrição de igualdade, apresentamos na Seção 3.3 uma prova alternativa do Teorema 3.12, sendo que o mesmo foi provado através de um problema auxiliar juntamente com o Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11). No caso multiobjetivo não é possível utilizarmos a mesma técnica do problema auxiliar, pois não podemos garantir que $f_k^{(1)}(x_0)h = 0$, $k \in \mathbb{K}$, fato crucial no caso escalar para garantirmos que um vetor adequado (que depende de h) é um minimizador global do referido problema auxiliar utilizado na demonstração do Teorema 3.12. As condições necessárias de otimalidade provadas no Teorema 4.10 para os problemas definidos em (4.33) é uma extensão em Programação multiobjetivo do Teorema 3.15.

Capítulo 5

Conclusões e Possibilidades de Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho estudamos algumas condições de otimalidade para certas classes de problemas irregulares com um e com vários objetivos. Apresentamos condições necessárias de otimalidade para problemas monobjetivo com restrição de desigualdade e igualdade absolutamente degeneradas propondo condições de qualificação similares às condições de qualificação LICQ e MFCQ. O ganho nestes resultados se deve a incorporação das restrições de igualdade aos problemas e a inclusão do caso em que a ordem de degeneração da restrição de desigualdade definida em (3.6) é ímpar. Desta maneira, os resultados que obtemos melhoram os resultados obtidos por Brezhneva e Tretyakov em [16, 21].

Em contexto de Otimização multiobjetivo e problemas com restrição mista absolutamente degenerados, estabelecemos condições necessárias de otimalidade, no sentido da eficência fraca, sendo que utilizamos principalmente a condição de qualificação h-MFCQ e também obtemos, como consequência, outro resultado supondo h-LICQ. À vista disto, extendemos os resultados obtidos por Brezhneva e Tretyakov em [16, 21]. Ainda neste contexto, propomos novas condições de regularidade a partir de relações entre o cone contingente e um cone similar ao cone linearizado, sendo que provamos condições necessárias de otimalidade, no sentido da eficiência e da eficiência própria, e com estas mostramos a existência de multiplicadores estritamente positivos associados as funções objetivo. Isto posto, estes resultados melhoram e são correlatos aos resultados obtidos Maeda em [61] e Burachik e Rizvi em [23].

Para as condições necessárias de otimalidade de problemas escalares com restrição de igualdade irregular, propostas por Izmailov e Tretyakov em [20, 42], uma prova alternativa utilizando o Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.11) foi apresentada. Além disto, os problemas com restrições de igualdade e desigualdade, nos casos mono e multiobjetivo, em que ocorre irregularidade na restrição de igualdade, propomos, por meio do operador p-fator, uma condição de qualificação similar à condição de qualificação MFCQ e provamos condições necessárias de otimalidade para estes. Assim, para espaços de dimensão finita, melhoramos os resultados obtidos por Izmailov e Tretyakov em [20, 42].

Descrevemos propriedades do conjunto de multiplicadores que satisfazem condições análogas às condições de KKT para as classes de problemas irregulares abordadas neste trabalho. Estes resultados são correlatos aos resultados obtidos por Gauvin em [29], Wachsmuth em [97] e Bigi em [12].

Além disto, aplicamos alguns dos resultados obtidos para problemas de Programação Matemática Irregulares a problemas de Controle Ótimo Discreto, obtendo condições suficientes de otimalidade e condições necessárias que de certa maneira generalizam o Princípio do Máximo Discreto vistos em [41, 65].

5.2 Possibilidades de Trabalhos Futuros

No que se segue, apontamos algumas possibilidades de trabalhos futuros.

- Recentemente, Bednarczuk e Tretyakov [8] introduziram o conceito da p-regularidade modificado, através de um operador p-fator modificado. Este novo conceito generaliza a p-regularidade que usamos neste trabalho e para este novo tipo de regularidade são apresentadas novas condições necessárias de otimalidade para problemas irregulares com restrição de igualdade. Uma possibilidade de prosseguimento de trabalho é a extensão destas novas condições necessárias para Otimização multiobjetivo, bem como, a introdução da restrição de desigualdade e aplicabilidade destes resultados aos problemas de Controle Ótimo (em tempo discreto e contínuo).

- Em problemas de Otimização monobjetivo com restrição de desigualdade o Teorema de KKT pode não ser aplicável para uma certa classe de problemas. Por exemplo, quando ocorre alguma degeneração na restrição ativa do problema, ou melhor, se pelo menos uma das restrições ativas tem derivada nula no minimizador, é possível que a regra de multiplicadores seja violada. Brezhneva e Tretyakov mostram no artigo [21] que sob certas condições é possível obter condições de otimalidade para problemas deste tipo. Uma possibilidade de trabalho é a de extensão para problemas multiobjetivos destas condições necessárias de otimalidade e a perspectiva de incorporar a tais problemas, também, as restrições de igualdade.

- Szczepanik e Tretyakov [92] propõem uma variante do método de Newton para resolver o sistema Lagrangeano p-fator para problemas escalares com restrição de desigualdade, por meio de variáveis de folga. Uma possibilidade de investigação é pensarmos numa variante do Método de Newton para encontrarmos uma solução para os sistemas Lagrangeano p-fator decorrentes dos Teoremas 3.15 e 4.10.

- Uma questão natural que surge quando condições necessárias de otimalidade são apresentadas é como fica a "garantia" de que o ponto satisfazendo tais condições necessárias de otimalidade seja uma solução do problema. Desta forma, uma outra possibilidade de trabalho é procurarmos estabelecer condições suficientes de otimalidade para as classes de problemas irregulares estudadas neste trabalho. Isto poderia ser feito através da informação das derivadas de ordem superior [20, 21] ou através da convexidade generalizada [37, 67, 72] das funções envolvidas no problema.

- Como é bem conhecido, um problema de Controle Ótimo Discreto pode ser reformulado como um problema de Programaçao Matemática. Marinkovic [64, 66], mostra uma condição suficiente para que a aplicação de igualdade do problema de Programação Matemática, obtida das restrições de igualdade tanto no controle quanto no estado, seja 2-regular. Uma possibilidade futura é investigarmos outras condições que garantam a 2-regularidade da aplicação de igualdade do problema de Programação Matemática.

- Outro ponto que podemos destacar é que usualmente não conhecemos os valores exatos dos parâmetros de um sistema de controle ou esses valores estão sujeitos a perturbações. Portanto, é importante conhecer o controle dependendo dos parâmetros do modelo. Assim sendo, o status de uma solução não pode ser compreendido sem informações sobre a sensibilidade e a estabilidade. Neste contexto, uma alternativa de trabalho futuro é verificarmos a possibilidade de obtermos um teorema de sensibilidade e estabilidade para problemas de Controle Ótimo Discreto, com restrições de igualdade tanto no controle quanto no estado, adequando as ideias utilizadas por Malanowski em [62] e em termos da 2-regularidade e da 2-regularidade modificada.

Bibliografia

[1] Alekseev, V. M. e Tikhomirov, V. M., et al. *Optimal control.* Soviet Math., Consultants Bureau, Nova York, EUA, 1987.

[2] Arutyunov, A. V. *Optimality conditions: Abnormal and Degenerate Problems*, vol. 526. Springer Science & Business Media, Dordrecht, Holanda, 2013.

[3] Aubin, J. P. e Frankowska, H. *Set-Valued Analysis. Systems and Control: Foundations and Applications*, vol. 2. Birkhuser, Boston, EUA, 1990.

[4] Avakov, E. R. e Arutyunov, A. V., et al. Necessary conditions for an extremum in a mathematical programming problem. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 256*, 1 (2007), 2–25.

[5] Avakov, E. R. Extremum conditions for smooth problems with equality-type constraints. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 25*, 3 (1985), 24–32.

[6] Bazaraa, M. S. e Goode, J. J., et al. On the cones of tangents with applications to mathematical programming. *Journal of Optimization Theory and Applications 13*, 4 (1974), 389–426.

[7] Bednarczuk, E. M. e Tretyakov, A. A. On reductibility of degenerate optimization problems to regular operator equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics 56*, 12 (2016), 1992–2000.

[8] Bednarczuk, E. M. e Tretyakov, A. A. p-regular nonlinearity: Tangency at singularity in degenerate optimization problems. *Mathematical Methods of Operations Research* (2017), 1–16.

[9] Belash, K. N. e Tretyakov, A. A. Methods for solving degenerate problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 28*, 4 (1988), 90–94.

[10] Bigi, G. *Optimality and Lagrangian regularity in vector optimization.* Tese de doutorado, Universidade de Pisa, Pisa, Itália, 1999.

[11] Bigi, G. e Castellani, M. Second order optimality conditions for differentiable multiobjective problems. *RAIRO-Operations Research 34*, 4 (2000), 411–426.

[12] Bigi, G. e Castellani, M. Uniqueness of kkt multipliersin multiobjective optimization. *Applied Mathematics Letters 17*, 11 (2004), 1285–1290.

[13] Boltânskij, V. G. *Optimal control of discrete systems.* Halsted Press, Sydney-Canberra, Austrália, 1978.

[14] Boyer, C. B. e Merzbach, U. C. *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, EUA, 2011.

[15] Brezhneva, O. A. e Tretyakov, A. A. Optimality conditions for degenerate extremum problems with equality constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization 42*, 2 (2003), 729–745.

[16] Brezhneva, O. A. e Tretyakov, A. A. The p-th order necessary optimality conditions for inequality-constrained optimization problems. *Computational Science and Its Applications-ICCSA 2003* (2003), 963–964.

[17] Brezhneva, O. A. e Tretyakov, A. A. The pth-order optimality conditions for inequality constrained optimization problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 63*, 5 (2005), 1357–1366.

[18] Brezhneva, O. A. e Tretyakov, A. A. The p-factor-Lagrange methods for degenerate nonlinear programming. *Numerical Functional Analysis and Optimization 28*, 9-10 (2007), 1051–1086.

[19] Brezhneva, O. A. e Tretyakov, A. A. Come back to lagrange. The p-factor analysis of optimality conditions. *Numerical Functional Analysis and Optimization 31*, 8 (2010), 871–891.

[20] Brezhneva, O. A. e Tretyakov, A. A. The p-th order optimality conditions for degenerate inequality constrained optimization problems. *Pure Appl. Math 1*, 2 (2010), 198–223.

[21] Brezhneva, O. A. e Tretyakov, A. A. When the Karush-Kuhn-Tucker theorem fails: Constraint qualifications and higher-order optimality conditions for degenerate optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications 174*, 2 (2017), 367–387.

[22] Burachik, R. S. e Kaya, C. Y., et al. A new scalarization technique to approximate pareto fronts of problems with disconnected feasible sets. *Journal of Optimization Theory and Applications 162*, 2 (2014), 428–446.

[23] Burachik, R. S. e Rizvi, M. M. On weak and strong kuhn-tucker conditions for smooth multiobjective optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications 155*, 2 (2012), 477–491.

[24] Censor, Y. Pareto optimality in multiobjective problems. *Applied Mathematics and Optimization 4*, 1 (1977), 41–59.

[25] Chankong, V. e Haimes, Y. Y. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, Sytem Science and Engineering*, vol. 8. North Holland, Nova York, EUA, 1983.

[26] Chorobura, A. P. Condições de otimalidade para problemas com um e com vários objetivos: Abordagem através do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2015.

[27] Dutta, J. e Lalitha, C. S. Bounded sets of KKT multipliers in vector optimization. *Journal of Global Optimization 36*, 3 (2006), 425–437.

[28] Eustaquio, R. G. Condições de otimalidade e de qualificação para problemas de programação não linear. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2007.

[29] Gauvin, J. A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming. *Mathematical Programming 12*, 1 (1977), 136–138.

[30] Geoffrion, A. M. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of mathematical analysis and applications 22*, 3 (1968), 618–630.

[31] Girsanov, I. V. *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems*, vol. 67. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Nova York, 1972.

[32] Golub, G. H. e Van Loan, C. F. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, EUA, 1996.

[33] Gould, F. J. e Tolle, J. W. A necessary and sufficient qualification for constrained optimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics 20*, 2 (1971), 164–172.

[34] Grzegorczyk, W. e Medak, B., et al. Generalization of p-regularity notion and tangent cone description in the singular case. *Annales Universitatis Mariae Curie 66*, 2 (2012), 63–79.

[35] Grzegorczyk, W. e Medak, B., et al. Application of p-regularity theory to nonlinear boundary value problems. *Boundary Value Problems 2013*, 1 (2013), 251.

[36] Guignard, M. Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space. *SIAM Journal on Control 7*, 2 (1969), 232–241.

[37] Hernández-Jiménez, B. *Convexidad generalizada en problemas de optimización no regulares*. Tese de doutorado, Universidade de Sevilha, Sevilha, Espanha, 2007.

[38] Hilscher, R. e Zeidan, V. Discrete optimal control: second order optimality conditions. *The Journal of Difference Equations and Applications 8*, 10 (2002), 875–896.

[39] Hilscher, R. e Zeidan, V. Second order sufficiency criteria for a discrete optimal control problem. *The Journal of Difference Equations and Applications 8*, 6 (2002), 573–603.

[40] Ioffe, A. D. e Tihomirov, V. M. *Theory of extremal problems, Studies in mathematics and its applications*, vol. 6. North–Holland, Amsterdam, Holanda, 1979.

[41] Isoton, C. *Algumas contribuições em controle ótimo discreto*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2017.

[42] Izmailov, A. F. e Tretyakov, A. A. *Factor-analysis of nonlinear mappings*. Nauka, Moscow, Rússia, 1994. (in Russian).

[43] Izmailov, A. F. 2-regularity and branching theorems. *Journal of Mathematical Sciences 104*, 1 (2001), 830–846.

[44] Izmailov, A. F. Bifurcation theorems via the 2-regularity theory. *Journal of Mathematical Sciences 110*, 2 (2002), 2438–2451.

[45] Izmailov, A. F. e Solodov, M. V. *Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*, vol. 1. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

[46] Jahn, J. *Vector optimization*. Springer, Berlim, Alemanha, 2009.

[47] Jeyakumar, V. e Li, G., et al. Robust duality for generalized convex programming problems under data uncertainty. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 75*, 3 (2012), 1362–1373.

[48] John, F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In *Traces and emergence of nonlinear programming*. Springer, 2014, pp. 197–215.

[49] Kaliszky, S. e Lógó, J. Discrete optimal design of elasto-plastic trusses using compliance and stability constraints. *Structural optimization 15*, 3-4 (1998), 261–268.

[50] Kong, X. e Wu, H., et al. Discrete optimal control for Birkhoffian systems. *Nonlinear Dynamics 74*, 3 (2013), 711–719.

[51] Kotarski, W. On some specification of the Dubovicki-Milutin Theorem for Pareto optimal problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 14*, 3 (1990), 287–291.

[52] Kotarski, W. *Some problems of optimal and Pareto optimal control for distributed parameter systems*. Universidade da Silésia, Katowice, Polônia, 1997.

[53] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. Inc., Nova York, EUA, 1989.

[54] Kuhn, H. W. e Tucker, A. W. Nonlinear programming. In *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (1951), pp. 481–492.

[55] Kyparisis, J. On uniqueness of Kuhn-Tucker multipliers in nonlinear programming. *Mathematical Programming 32*, 2 (1985), 242–246.

[56] Łedzewicz-Kowalewska, U. On some specification of the Dubovitskii-Milyutin method. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 10*, 12 (1986), 1367–1371.

[57] Ledzewicz-Kowalewska, U. Application of some specification of the Dubovitskii-Milyutin method to problems of optimal control. *Nonlinear Anal. Theory Methods Applic. 12*, 2 (1988), 101–108.

[58] Lima, E. L. *Análise no Rn, Coleção Matemática Universitária*, vol. 2. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.

[59] Lima, E. L. *Álgebra linear, Coleção Matemática Universitária*. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.

[60] Maciel, M. C. e Santos, S. A., et al. On second-order optimality conditions for vector optimization. *Journal of optimization theory and applications 149*, 2 (2011), 332–351.

[61] Maeda, T. Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: differentiable case. *Journal of Optimization Theory and Applications 80*, 3 (1994), 483–500.

[62] Malanowski, K. Stability and sensitivity analysis of discrete optimal-control problems. *Problems of Control and Information 20*, 3 (1991), 187–200.

[63] Mangasarian, O. L. *Nonlinear programming, Classics in Applied Mathematics*, vol. 10. SIAM, Philadelphia, EUA, 1994.

[64] Marinković, B. Optimality conditions for discrete optimal control problems. *Optimisation Methods and Software 22*, 6 (2007), 959–969.

[65] Marinković, B. Optimality conditions in discrete optimal control problems with state constraints. *Numerical Functional Analysis and Optimization 28*, 7-8 (2007), 945–955.

[66] Marinković, B. 2-regularity and 2-normality conditions in discrete optimal control problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization 29*, 11-12 (2008), 1286–1298.

[67] Martin, D. H. The essence of invexity. *Journal of optimization Theory and Applications 47*, 1 (1985), 65–76.

[68] Miettinen, K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston, EUA, 1999.

[69] Moulin, H. e Fogelman-Soulié, F. *La convexité dans les mathématiques de la décision*. Hermann, Paris, França, 1979.

[70] Mujica, J. *Complex analysis in Banach spaces, North-Holland Mathematics Studies*, vol. 120. North-Holland, Amsterdam, Holanda, 1986.

[71] Murata, Y. *Optimal control methods for linear discrete-time economic systems*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Nova York, 2012.

[72] Osuna-Gómez, R. e Beato-Moreno, A., et al. Generalized convexity in multiobjective programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 233*, 1 (1999), 205–220.

[73] Pareto, V. *Cours d'économie politique*, vol. 1. Librairie Droz, Genebra, Suíça, 1964.

[74] Propoi, A. I. Elements of the theory of optimal discrete processes. *M.: Nauka* (1973).

[75] Prusińska, A. e Tretyakov, A. A. On existence of solutions to degenerate nonlinear optimization problems. *Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization 27*, 1 (2007), 151–164.

[76] Prusińska, A. e Tretyakov, A. A. P-order necessary and sufficient conditions for optimality in singular calculus of variations. *Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization 30*, 2 (2010), 269–279.

[77] Prusińska, A. e Tretyakov, A. A. On the existence of solutions to nonlinear equations involving singular mappings with non-zero p-kernel. *Set-Valued and Variational Analysis 19*, 3 (2011), 399–416.

[78] Prusińska, A. e Tretyakov, A. A. Necessary p-th order optimality conditions for irregular lagrange problem in calculus of variations. *Mathematical Communications 19*, 3 (2014), 561–572.

[79] Prusińska, A. e Tretyakov, A. A. p-regularity theory: Tangent cone description in the singular case. *Ukrainian Mathematical Journal 67*, 8 (2016).

[80] Prusińska, A. e Tretyakov, A. A. The p-order maximum principle for an irregular optimal control problem. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki 57*, 9 (2017), 1471–1476.

[81] Rahmo, E. D. e Studniarski, M. A new global scalarization method for multiobjective optimization with an arbitrary ordering cone. *Applied mathematics 8*, 02 (2017), 154.

[82] Ramos, A. *Tópicos em Condições de Otimalidade para Otimização não linear*. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2015.

[83] Ribeiro, A. A. e Karas, E. W. *Otimização Contínua: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Cengage Learning, São Paulo, Brasil, 2013.

[84] Rizvi, M. M. e Hanif, M., et al. First-order optimality conditions in multiobjective optimization problems: differentiable case. *GANIT: Journal of Bangladesh Mathematical Society 29* (2009), 99–105.

[85] Rizvi, M. M. e Nasser, M. New second-order optimality conditions in multiobjective optimization problems: differentiable case. *Journal of the Indian Institute of Science 86*, 3 (2006), 279.

[86] Rudin, W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., Nova York, EUA, 1991.

[87] Sawaragi, Y. e Nakayama, H., et al. *Theory of Multiobjective Optimization*, vol. 176. Elsevier, Amsterdam, Holanda, 1985.

[88] Soleimani-Damaneh, M. e Zamani, M. On Benson's scalarization in multiobjective optimization. *Optimization letters 10*, 8 (2016), 1757–1762.

[89] Solodov, M. V. Constraint qualifications. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science* (2010).

[90] Song, W. e Yao, G. Homotopy method for a general multiobjective programming problem. *Journal of Optimization Theory and Applications 138*, 1 (2008), 139–153.

[91] Szczepanik, E. e Prusińska, A., et al. The p-factor method for nonlinear optimization. *Schedae Informaticae 21* (2012), 141–157.

[92] Szczepanik, E. e Tretyakov, A. A. p-factor methods for nonregular inequality-constrained optimization problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 69*, 12 (2008), 4241–4251.

[93] Torres, E. R. *Hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach*. Tese de doutorado, Universidade de Sao Paulo, São Paulo, Brasil, 2015.

[94] Tretyakov, A. A. e Szczepanik, E. Irregular optimization models and p-order Kuhn-Tucker optimality conditions. *Journal of Computer and Systems Sciences International 53*, 3 (2014), 384–391.

[95] Tretyakov, A. A. e Marsden, J. E. Factor-analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory. *Commun. Pure Appl. Anal 2*, 4 (2003), 425–445.

[96] Vivanco Orellana, V. N. *Problemas de extremos regulares y no regulares, vía Formalismo de Dubovitskii-Milyutin: Aplicación a problemas de control óptimo*. Tese de doutorado, Universidade de Sevilha, Sevilha, Espanha, 2013.

[97] Wachsmuth, G. On LICQ and the uniqueness of Lagrange multipliers. *Operations Research Letters 41*, 1 (2013), 78–80.

[98] WANG, S. Y. Second-order necessary and sufficient conditions in multiobjective programming. *Numerical Functional Analysis and Optimization 12*, 1-2 (1991), 237–252.

[99] WANG, S. Y. e LI, Z. F. Scalarization and lagrange duality in multiobjective optimization. *Optimization 26*, 3-4 (1992), 315–324.

[100] WATKINS, D. *Fundamentals of Matrix Computations, Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts*. John Wiley & Sons, Inc., Nova York, EUA, 2010.

[101] ZHANG, L. e HUANG, Q. Discrete optimal control method based on the optimal strategy of fishing. *Discrete Dynamics in Nature and Society 2015* (2015).