UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CLÁUDIO ROBERTO ÁVILA DA SILVA JÚNIOR

MODELO DE VIGA DE LEVINSON-BICKFORD: RESULTADOS DE EXISTÊNCIA, UNICIDADE DE SOLUÇÕES TEÓRICAS E ANÁLISE DE ERRO PARA SOLUÇÕES NUMÉRICAS APROXIMADAS

CURITIBA
2018

CLÁUDIO ROBERTO ÁVILA DA SILVA JÚNIOR

MODELO DE VIGA DE LEVINSON-BICKFORD: RESULTADOS DE EXISTÊNCIA, UNICIDADE DE SOLUÇÕES TEÓRICAS E ANÁLISE DE ERRO PARA SOLUÇÕES NUMÉRICAS APROXIMADAS

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio.

CURITIBA

2018

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S586m Silva Júnior, Cláudio Roberto Ávila da
Modelo de viga de Levinson-Bickford: resultados de existência, unicidade de soluções teóricas e análise de erro para soluções numéricas aproximadas / Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior. – Curitiba, 2018.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientador: Pedro Danizete Damázio. -

1. MatemáticaxEstudo e ensinoxAnálise de erros. 2. Modelo de viga de Levinson-Bickford. 3. EquaçõesxSoluções numéricas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Damázio, Pedro Danizete. III. Título.

CDD: 518.6

Bibliotecária: Vanusa Maciel - CRB - 9/1928

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **CLAUDIO ROBERTO AVILA DA SILVA JUNIOR** intitulada: **MODELO DE VIGA DE LEVINSON-BICKFORD: RESULTADOS DE EXISTÊNCIA, UNICIDADE DE SOLUÇÕES TEÓRICAS E ANÁLISE DE ERRO PARA SOLUÇÕES NUMÉRICAS APROXIMADAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 28 de Agosto de 2018.

PEDRO DANIZETE DAMAZIO
Presidente da Banca Examinadora

HIGIDIO PORTILLO OQUENDO
Avaliador Interno

FABIO ANTONIO DORINI
Avaliador Externo

SAULO POMPONET OLIVEIRA
Avaliador Interno

JAUBER CAVALCANTE DE OLIVEIRA
Avaliador Externo

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

ATA Nº024

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia vinte e oito de agosto de dois mil e dezoito às 15:30 horas, na sala Anfiteatro A, bloco PC, PPGM, foram instalados os trabalhos de arguição do doutorando **CLAUDIO ROBERTO AVILA DA SILVA JUNIOR** para a Defesa Pública de sua tese intitulada **MODELO DE VIGA DE LEVINSON-BICKFORD: RESULTADOS DE EXISTÊNCIA, UNICIDADE DE SOLUÇÕES TEÓRICAS E ANÁLISE DE ERRO PARA SOLUÇÕES NUMÉRICAS APROXIMADAS**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: PEDRO DANIZETE DAMAZIO (UFPR), HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR), FABIO ANTONIO DORINI (UTFPR), SAULO POMPONET OLIVEIRA (UFPR), JAUBER CAVALCANTE DE OLIVEIRA (UFSC). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais. A Banca Examinadora, então, reuniu-se e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O doutorando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. A aprovação no rito de defesa deverá ser homologada pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais do programa. A outorga do título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, PEDRO DANIZETE DAMAZIO, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 28 de Agosto de 2018.

PEDRO DANIZETE DAMAZIO
Presidente da Banca Examinadora

HIGIDIO PORTILLO OQUENDO
Avaliador Interno

FABIO ANTONIO DORINI
Avaliador Externo

SAULO POMPONET OLIVEIRA
Avaliador Interno

JAUBER CAVALCANTE DE OLIVEIRA
Avaliador Externo

Ao meu *amado* filho Antonio

À minha avó Delfina

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao meu filho amado Antonio, o Toninho, pela compreensão, amizade, companhia, carinho, e escolha como sua referência, ti amo meu filho!

A minha mãe Dinamar pelo carinho, atenção, firmeza e fé nas coisas boas que existem dentro de nós;

Ao meu pai Claudio pela amizade, palavra de tranquilidade e experiência, pelo seu silêncio obstinado, característico de suas conquistas;

Aos meus queridos tios Chico e Zeila, por acreditarem na minha capacidade e por sempre ocuparem os primeiros lugares da minha torcida;

A Leo pelo carinho, paciência e confiança nestes últimos dois anos;

Aos amigos conquistados durante este trabalho em especial Adriano Delfino e Rodrigo Siqueira que me acompanharam nesta caminhada;

Em especial ao meu amigo, professor, orientador Pedro D. Damazio que sempre esteve ao meu lado, que me ajudou e aconselhou para finalização deste trabalho.

"A persistência é o caminho do êxito."

Charles Chaplin

RESUMO

Neste trabalho são obtidos resultados sobre existência e unicidade de soluções dos seguintes problemas relacionados ao modelo de viga de Levinson-Bickford: a) Vibrações Forçadas; b) Flexão Estocástica. Para o problema de vibrações forçadas utiliza-se o método de Faedo-Galerkin para estabelecer um teorema de existência de soluções fortes sendo que a unicidade é obtida através da técnica de prova por contradição. O problema de flexão estocástica é obtido através da *randomização* dos coeficientes e eliminando-se a dependência temporal das soluções. A partir disso o teorema de Lax-Milgram é utilizado para obter a existência e unicidade de soluções do problema variacional abstrato associado a esta equação. A modelagem da incerteza sobre os dados é feita via variável randômica ou processo estocástico parametrizado. Utilizando-se hipóteses adequadas sobre os dados do problema são obtidos uma série de resultados para a fundamentação e consistência teórica do *método de Galerkin Estocástico* a ser utilizado para geração de soluções numéricas aproximadas. Além disso, são obtidos resultados relacionados à estimativa de erro e taxa de convergência das soluções numéricas aproximadas. Para ilustrar o desempenho destas estimativas e taxas são apresentados resultados numéricos para quatro exemplos.

Palavras-chave: *Viga de Levinson-Bickford, Método de Faedo-Galerkin, Flexão Estocástica, Teorema de Lax-Milgram , Processo Estocástico Parametrizado.*

ABSTRACT

In this work results are obtained on the existence and uniqueness of solutions to the following problems arising from the Levinson-Bickford's beam model: a) Forced Vibrations; b) Stochastic Bending. For the problem of forced vibrations the method of Faedo-Galerkin leads to a theorem of existence of strong solutions and the uniqueness is obtained through the technique of proof by contradiction. The problem of stochastic bending is obtained by *randomizing* the coefficients and eliminating the time dependence of the solutions. From this the Lax-Milgram theorem is used to obtain the existence and uniqueness of solutions to the abstract variational problem associated to this equation. The uncertainty modeling on the data is done via a random variable or parametrized stochastic process. By using appropriate hypotheses about the problem data, a series of results are obtained for the theoretical basis and consistency of the *Galerkin Stochastic method* to be used for the generation of approximate numerical solutions. In addition, results related to error estimates and convergence rate of approximate numerical solutions are obtained. To illustrate the performance of these estimates and rates results are presented numerical for four examples.

Keywords: *Levinson-Bickford Beam, Faedo-Galerkin Method, Stochastic Bending, Lax-Milgram Theorem, Parameterized Stochastic Process.*

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....158

FIGURA 2: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....158

FIGURA 3: GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....159

FIGURA 4: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....160

FIGURA 5: GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....163

FIGURA 6: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....164

FIGURA 7: GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....165

FIGURA 8: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....165

FIGURA 9: GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....169

FIGURA 10: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....170

FIGURA 11:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....171

FIGURA 12: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....171
FIGURA 13:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....174
FIGURA 14: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....175
FIGURA 15:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....176
FIGURA 16: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....177
FIGURA 17:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....179
FIGURA 18: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....179
FIGURA 19:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....180
FIGURA 20: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....180
FIGURA 21:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....183
FIGURA 22: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....183
FIGURA 23:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....184
FIGURA 24: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO

DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....184
FIGURA 25:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....187
FIGURA 26: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....188
FIGURA 27:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....188
FIGURA 28: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....189
FIGURA 29:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....192
FIGURA 30:GRÁFICO DA FUNÇÃO VALOR ESPERADO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....192
FIGURA 31: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL.....193
FIGURA 32: GRÁFICO DA FUNÇÃO VARIÂNCIA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO
DE DESLOCAMENTO ANGULAR.....194
FIGURA 33: TEMPO DE COMPUTAÇÃO.....194

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - VALORES NUMÉRICOS DE "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", TEOREMA 4.3, PARA O EXEMPLO 1 CASO (A), MODELO " *AFIM*", COM $\delta_E = \frac{1}{10}$.....161

TABELA 2 - PARÂMETROS "κ" E "γ".....162

TABELA 3 - VALORES NUMÉRICOS DE "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", TEOREMA 4.3, PARA O EXEMPLO 1 CASO (A), MODELO " *EXPONENCIAL*", COM $\delta_E = \frac{1}{10}$.....167

TABELA 4 - VALORES NUMÉRICOS DE "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", TEOREMA 4.3, PARA O EXEMPLO 1 CASO (b), MODELO " *PROCESSO ESTOCÁSTICO PARAMETRIZADO*", COM $\delta_E = \frac{1}{10}$.....172

TABELA 5 - VALORES NUMÉRICOS DE "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", TEOREMA 4.3, PARA O EXEMPLO 2 CASO (A), MODELO " *AFIM*", COM $\delta_h = \frac{1}{10}$.....177

TABELA 6 - VALORES NUMÉRICOS DE "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", TEOREMA 4.3, PARA O EXEMPLO 2 CASO (A), MODELO " *EXPONENCIAL*", COM $\delta_h = \frac{1}{10}$.....181

TABELA 7 - VALORES NUMÉRICOS DE "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", TEOREMA 4.3, PARA O EXEMPLO 2 CASO (b), MODELO " *PROCESSO ESTOCÁSTICO PARAMETRIZADO*", COM $\delta_h = \frac{1}{10}$.....185

TABELA 8 - VALORES NUMÉRICOS DE "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", TEOREMA 4.3, PARA O EXEMPLO 3 CASO (A), MODELO " *AFIM*", COM $\delta_E = \frac{1}{10}$.....190

TABELA 9 - VALORES NUMÉRICOS PARA O ERRO A *PRIORI*, "ε", NAS NORMAS "$|\cdot|$", "$\|\cdot\|_{L^\infty}$", AS MAJORAÇÕES "L" E O TEMPO DE COMPUTAÇÃO.....195

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais.

Ω: Subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{N}^n = \overbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^{n\text{-}vezes}$.

$\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}^n \cup \overbrace{(0, \cdots, 0)}^{n\text{-}entradas}$.

$f^{(n)}$: a derivada de ordem "n".

$u'(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$.

$u_t(x,t) = u'(x,t)$.

$\otimes$: Produto tensorial.

$\mu_{\boldsymbol{X}}, \mathbb{E}[\boldsymbol{X}]$: Valor esperado da variável randômica $\boldsymbol{X}$.

δ_X: Coeficiente de variação da variável randômica $\boldsymbol{X}$.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Notações, Definições e Resultados Preliminares **10**

1.1 Notações 10

1.2 Teoria da Medida e das Probabilidades 13

1.3 Análise Complexa 16

1.4 Topologias Fraca e Fraca Estrela 17

1.5 Distribuições 19

1.6 Espaços $L^p(\Omega)$ 20

1.7 Espaços de Sobolev 22

1.8 Desigualdades Importantes 25

1.9 Teoremas de Compacidade 26

1.10 Espaços de Bochner 27

1.11 Produto Tensorial 32

2 Existência e Unicidade de Soluções para o Problema de Viga de Levinson-Bickford - Caso Transitório **34**

2.1 Introdução 34

2.2 Formulação Variacional 37

2.3 Método de Faedo - Galerkin 38

2.3.1 Existência de Soluções Aproximadas 39

2.3.2 Estimativas a *Priori* e Prolongamento da Solução 46

2.3.3 Passagem ao Limite 52

2.3.4 Regularidade das Soluções 61

2.3.5 Análise das Condições Iniciais 62

2.4 Unicidade da Solução 67

3 Existência, Unicidade e Elementos para Análise de Erro das Soluções para o Problema de Viga de Levinson-Bickford - Caso Estacionário **69**

3.1 Existência e Unicidade de Soluções 70

3.2 Regularidade da Solução 73

3.3 Elementos para Análise de Erro 75

3.3.1 Introdução 75

3.3.2 Polinômios Generalizados de Caos (Esquema Askey-Wiener) 77

3.3.3 Análise Geral de Erro 89

3.3.4 Análise de Erro na Aproximação dos Dados 92

4 Análise de Erro das Soluções **98**

4.1 Introdução 98

4.2 Definições e Hipóteses para a Modelagem da Incerteza 99

4.3 Regularidade e Analiticidade das Soluções 102

4.4 Resultados para Geração e Taxas de Convergência das Soluções Numéricas Aproximadas 117

4.4.1 Método de Galerkin Estocástico 130

4.4.2 Análise de Erro das Aproximações de Galerkin 134

5 Resultados Numéricos **150**

5.1 Introdução 150

5.2 Exemplo 1 161

5.2.1 Caso (a): *Modelo Afim* 161

5.2.2 Caso (a): *Modelo Exponencial* 166

5.2.3 Caso (b): *Processo Estocástico Parametrizado* 172

5.3 Exemplo 2 177

5.3.1 Caso (a): *Modelo Afim* 177

5.3.2 Caso (a): *Modelo Exponencial* 181

5.3.3 Caso (b): *Processo Estocástico Parametrizado* 185

5.4 Exemplo 3 190

5.5 Exemplo 4 194

5.6 Síntese dos Resultados Numéricos 199

Conclusão **203**

Trabalhos Futuros **210**

Referências Bibliográficas **213**

Introdução

Um dos esforços crescentes nas áreas de matemática aplicada e engenharia é a previsão do comportamento de sistemas, através da modelagem matemática. Em particular, a análise de estruturas de engenharia tem como principal atividade a modelagem matemática de elementos estruturais, tais como barras, vigas, eixos, colunas, placas e cascas. A análise do comportamento estrutural destes elementos é feita através da modelagem matemática do comportamento mecânico em termos dos deslocamentos, deformações e tensões geradas pela aplicação de cargas. Usualmente, estes elementos são objetos, cujos domínios espaciais estão definidos em subconjuntos limitados do $\mathbb{R}^n$. No entanto, pode-se através de hipóteses *ad hoc*, (hipóteses cinemáticas), adequadas, reduzir a dimensão espacial do problema, [99]. A redução da dimensionalidade do problema apresenta muitas implicações, de natureza teórica e prática. Em geral, do ponto de vista teórico, as equações obtidas, permitem estudos sobre existência, unicidade e estabilidade assintótica de soluções. Para alguns domínios espaciais, (linhas, círculos, retângulos e etc) pode-se obter soluções teóricas exatas, enquanto que para outros domínios devem ser aplicados métodos numéricos a fim de se obter soluções numéricas aproximadas, tais como os métodos das diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos, elementos de contorno, entre outros. Neste contexto, a modelagem matemática de sistemas estruturais de engenharia fornece uma grande quantidade de temas para pesquisas aplicada e teórica em

equações diferenciais e análise numérica. Citam-se alguns modelos, amplamente estudados como as teorias de vigas de Euler-Bernoulli, Timoshenko, vigas longas e vigas curtas, respectivamente, TRUESDELL (1960) e TIMOSHENKO (1921). Enquanto que, para a modelagem matemática de flexão de placas estão as teorias de Kirchhoff (KIRCHHOFF, 1876) e Mindlin (MINDLIN, 1951) conhecidas, popularmente, por teorias de placas finas e placas semi-espessas, respectivamente. Cada teoria fornece uma variedade de temas para pesquisa; por exemplo, podem ser considerados outros fenômenos físicos, tais como vibrações livres, efeitos térmicos, piezoeletricidade, não linearidades geométricas e materiais (*grandes* gradientes de deslocamentos e comportamento não-Hookeanano), entre outros. Desta forma, para cada nova teoria proposta existem muitos aspectos e oportunidades de pesquisa teórica e aplicada a serem realizadas.

Com o advento do cálculo das variações através dos trabalhos de Johann Bernoulli (1696) e Leonard Euler (1733), conforme menciona GELFAND & FOMIN (1963), [50], foram desenvolvidos métodos baseados em princípios de mínimo de funcionais, tais como os princípios da **Mínima Energia Potencial Total** e de **Hamilton**. No contexto da análise estrutural de vigas e placas, o Princípio da Mínima Energia Potencial é aplicado a problemas estacionários, enquanto que o Princípio de Hamilton é utilizado em problemas de evolução. Estes métodos baseiam-se na definição de um problema de minimização de um funcional, com certas propriedades, cuja solução, o ponto de mínimo deste funcional está associado às equações de Euler-Lagrange. Para o caso em tela, estas equações consistem das equações de movimento do problema. A partir disso, ocorreu uma verdadeira "produção em série" de teorias de vigas e placas. A metodologia consiste em definir um conjunto de hipóteses, que conduzem a um funcional com as propriedades adequadas para assegurar a existência e unicidade de um ponto de mínimo. As hipóteses assumidas definem o âmbito da modelagem; em geral, para problemas de vigas e placas

limita-se a elasticidade linear ou não linear, relações linearizadas entre deslocamentos e deformações, e a cinemática do campo de deslocamento, (hipóteses *ad hoc*).

A teoria de viga de Euler-Bernoulli, como é conhecida atualmente, teve seu surgimento pelas idéias e experimentos de Mariotte (1689), Leibniz em 1691 desenvolveu uma teoria matemática, que descrevia as tensões em regime elástico em uma viga. Ambos se basearam em observações teóricas e experimentais feitas por Galileo, [102]. Daniel Bernoulli sugeriu a Leonard Euler para aplicar o cálculo das variações para obter a equação de uma curva elástica, e posteriormente deduziu a equação de movimento das vibrações transversais da viga. A integração desta equação de viga foi realizada por Leonard Euler. Rayleigh em 1775, acrescentou o termo de inércia rotacional, a equação de movimento da viga de Euler-Bernoulli, para melhorar os resultados das freqüências naturais, (vibrações livres), [103]. ABBAS & THOMAS (1977), [1], propuseram a incorporação de um termo à equação de viga de Euler-Bernoulli para representação do efeito de cisalhamento. Esta modificação, associada ao termo inércia rotacional, melhorou ainda mais os resultados das freqüências naturais. Uma grande desvantagem desta teoria de viga é a incapacidade de representar as tensões de cisalhamento, que se desenvolvem na seção transversal da viga. Apesar disso, devido a sua simplicidade e aproximação adequada entre os resultados teóricos e experimentais, um elemento estrutural do tipo viga de Euler-Bernoulli é muito empregado para modelagem de sistemas estruturais presentes na construção civil e de máquinas, nas industrias naval, aeroespacial, entre outras.

Em 1922 Stephen Timoshenko, [104], desenvolveu uma nova equação de movimento para vigas. O conjunto de hipóteses necessárias para obter esta teoria é similar a de Euler-Bernoulli. A hipótese cinemática assumida para o campo de deslocamentos dos pontos materiais desta viga, é definido por duas componentes de deslocamentos: uma

translação e uma rotação, ("graus de liberdade"). Na teoria de viga de Euler-Bernoulli tem-se apenas um grau de liberdade de translação, que representa o deslocamento transversal da viga. Na teoria de Timoshenko, o grau de liberdade rotação, refere-se à direção do vetor normal à seção transversal da viga. Isto proporcionou captar os efeitos dos esforços internos de cisalhamento na equação de movimento. Esta consideração permitiu melhorar a aproximação entre os resultados teóricos e experimentais para vigas desenvolvendo vibrações mecânicas em altas freqüências. Apesar disso, a teoria apresenta *falhas* para algumas aplicações. Uma delas é a *incompatibilidade* entre o campo de tensões cisalhantes e as condições de contorno da viga. Uma tentativa para corrigir este defeito é a introdução do coeficiente de cisalhamento, TIMOSHENKO (1922). Conforme cita LEVINSON (1981), *"... calculation of the "best" shear coefficient for a particular cross-section has become, over the years, a small research industry ..."*, de fato existe uma grande quantidade de artigos a cerca deste tema, podendo-se citar: KRUSZEWSKI, (1949); GOODMAN & SUTHERLAND (1951); GOODMAN (1953); COWPER (1966); KANEKO (1975); HUTCHINSON (1981); REHFIELD & MURTHY (1982); ZHANG (2013).

As chamadas "Teorias de Ordem Superior" deram um passo à frente para melhorar a representação e modelagem de elementos estruturais do tipo viga (flexão e cisalhamento), a partir do trabalho de LEVINSON (1981), [69]. Em síntese, estas teorias propõem um campo de deslocamentos com mais graus de liberdade. O objetivo é captar e modelar melhor os efeitos decorrentes do cisalhamento nas seções transversais da viga. Via de regra, nas teorias de ordem superior os graus de liberdade adicionados não possuem um "significado físico". Na apresentação da sua teoria, KANT & GUPTA (1988) citam *"... the higher order terms in the Taylor series expansion and their interpretation in terms of physical quantities is difficult ..."*. O trabalho de LEVINSON, [69], propôs uma

teoria de vigas de "terceira ordem", que apresenta *um grau* de liberdade de translação, e *dois graus* de liberdade de rotação. Um destes representa o "empenamento" da seção transversal. Posteriormente, estes graus de liberdade de rotação são manipulados, de tal forma que o campo de tensões cisalhantes (teórico), satisfaz às condições de contorno, em termos das tensões nas faces da viga. Este procedimento elimina a necessidade de utilizar-se o fator de correção ao cisalhamento sanando a deficiência presente na teoria de viga de Timoshenko. Existe uma vasta literatura especializada em pesquisa na engenharia de estruturas com a proposição de teorias de ordem superior, entre elas destacam-se: BICKFORD (1982) a partir das hipóteses cinemáticas de Levinson e utilizando o princípio de Hamilton deduziu "outras" equações de movimento para vigas; HEYLIGER & REDDY (1988) propôs uma modificação da hipótese cinemática da viga de Levinson para obter uma formulação matemática consistente para o problema variacional associado a problemas estacionários e de evolução; GANAPATHI *et al.* (1999) assumiu uma hipótese *ad hoc* que resultava numa distribuição senoidal das tensões de cisalhamento, através da seção da viga; KARAMA *et al.* (2003) assumem um modelo exponencial para distribuição de tensões cisalhantes através da seção transversal de um viga fabricada com material composto; SHI & VOYIADJIS (2011) apresentaram uma teoria de *sexta ordem* para satisfazer condições de contorno específicas, para vigas em cisalhamento. É importante mencionar que existem teorias de vigas baseadas em princípios e métodos da Teoria da Elasticidade que se desenvolvem sem utilizar as hipóteses *ad hoc* sobre o campo de deslocamentos. FAN & WIDERA (1991) utilizam um método baseado em uma expansão assintótica, que combina análise dimensional com a expansão em séries de potências de um *parâmetro* relacionado às soluções da Teoria de Elasticidade; GAO & WANG (2005) utilizam a solução Papkovich-Neuber e o *método Lur'e* para obter uma nova teoria de vigas, cujos resultados concordam com as soluções exatas da Teoria de Elasticidade.

Recentemente, a união de diferentes *expertises* nas áreas da matemática, estatística, física, engenharia, entre outras, propiciou o surgimento da área de quantificação da incerteza. Esta área tem-se mostrado muito promissora, devido à grande quantidade de oportunidades em temas de pesquisa teórica e aplicada. Ela possui várias linhas de atuação, mas um dos principais objetivos é modelar e desenvolver métodos para avaliar o comportamento de sistemas que admitam a presença da incerteza nas propriedades dos seus parâmetros de definição, [95]. De certa forma, os primórdios desta área ocorreram a partir dos ensaios de Freudenthal, que posteriormente deram origem à *Confiabilidade Estrutural*. Nas últimas décadas, a quantificação da incerteza tem sido amplamente empregada na modelagem de problemas de engenharia. O aumento da capacidade computacional instalada, assim como a proposição de novas técnicas, e metodologias de análise e solução de problemas com incerteza, *favorecem* essa tendência. Apesar disso, a simulação de Monte Carlo ainda é utilizada, como referência para avaliação de novas proposições e metodologias. Em geral, a utilização da simulação de Monte Carlo Direto, (MC), envolve um *alto* custo computacional. A sua utilização pode ser *proibitiva* para certas aplicações. Por exemplo, para problemas que apresentam não linearidades, ou de grande dimensão. Atualmente, devido à complexidade crescente dos problemas, para muitas aplicações torna-se imprescindível a utilização de métodos numéricos. Em geral, nestes métodos a solução de uma equação diferencial é aproximada pela solução de um sistema de equações algébricas. Neste contexto, se o método de simulação de Monte Carlo Direto for utilizado, então, para cada amostra estrutural, deve-se resolver um sistema de equações algébricas. Muitas aplicações na engenharia, em quantificação da incerteza, recaem neste problema matemático. Para reduzir o custo computacional do método Monte Carlo Direto, YAMAZAKI *et al.* (1988) utilizou a série de Neumann para obter as realizações do processo estocástico de deslocamentos, para um problema de elasticidade plana com

incerteza no módulo de Young; ARAÚJO & AWRUCH (1994) obtiveram a resposta de problemas estruturais estáticos não lineares e dinâmicos, com variabilidade randômica nas propriedades mecânicas; CHAKRABORTY & DEY (1996) obtiveram o valor esperado e variância do processo estocástico de resposta para problemas estruturais com incerteza sobre a geometria e propriedades mecânicas das estruturas e dos parâmetros de rigidez de uma fundação; CHAKRABORTY & DEY (1998) formularam o problema dinâmico de flexão de vigas curvas, no *domínio da freqüência* de estruturas, com incerteza sobre os parâmetros de rigidez; LEI & QIU (2000) aplicaram a série de Neumann para a análise da propagação da incerteza em estruturas, utilizando as equações de movimento; CHAKRABORT & SARKAR (2000) estimaram os momentos estatísticos do processo estocástico de deslocamento transversal de uma viga curva, apoiada em fundação de Winkler; BHATTACHARYYA & CHAKRABORTY (2002) determinaram as estatísticas para problemas tridimensionais de elasticidade linear, cujas as propriedades elásticas foram representadas por processos estocásticos gaussianos; LI *et al.* (2006) apresentam uma metodologia para obter soluções para o sistema linear, proveniente da discretização do problema estocástico; SCHEVENELS *et al.* (2007), [91], propõem uma metodologia baseada em funções de Green, e a comparam com a série de Neumann, para o caso contínuo, em um problema de propagação de ondas, em uma viga infinita apoiada em uma fundação de Winkler, com incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação. Os trabalhos que utilizam a série de Neumann têm como objetivo a redução do custo computacional, pois a inversa do operador é aproximada pelo truncamento dessa série. Dependendo do número de termos utilizados na série, pode ocorrer que o número de operações realizadas para essa aproximação, seja menor do que as operações necessárias para obter a solução exata do sistema linear. Todos os trabalhos que se sucederam ao trabalho de Yamazaki fizeram a mesma utilização da série de Neumann, diferindo apenas pela aplicação, ou seja,

o problema que foi estudado. Em 2015 foi apresentado à comunidade científica de quantificação da incerteza o método λ Neumann-Monte Carlo, (λN-MC), [11]. Este método baseia-se na série de Neumann, e apresenta grande eficiência computacional. Distingue-se dos trabalhos citados, pois não se trata de uma aplicação *imediata* da série de Neumann, uma vez que baseia-se na imposição de parâmetros, (λ), para obter uma aproximação da inversa da matriz de coeficientes do sistema linear. Estes parâmetros são determinados como solução de um problema convexo de minimização.

Apesar desta breve apresentação, pode-se constatar uma grande atividade e quantidade de pesquisa em novas teorias e proposições para a modelagem matemática do comportamento estrutural de elementos sob flexão e cisalhamento (vigas e placas). A maioria das pesquisas consultadas não apresentam estudos teóricos fundamentais, tais como existência, unicidade de soluções, para as teorias de ordem superior para vigas e placas, mesmo para problemas lineares. Para as teorias de viga de Timoshenko e placa de Mindlin, existem muitos trabalhos publicados em diversas linhas de pesquisa em matemática tais como LAGNESE & LIONS (1988). Este é um aspecto importante pois fornece um grande *nicho* de pesquisa científica em matemática. Em vista disso, propõe-se neste trabalho para a equação de viga de Levinson-Bickford apresentar resultados teóricos sobre existência e unicidade de soluções para os seguintes problemas associados a esta equação: a) **Vibrações Forçadas**; b) **Flexão Estocástica**. Para o problema (a) utiliza-se o método de Faedo-Galerkin para demonstrar o resultado de existência de soluções. Para o problema (b) demonstra-se a existência e unicidade de soluções fracas, via uma versão estocástica do Lema de Lax-Milgram, [23, 31, 14, 46, 80]. Ainda para este problema, são apresentados um conjunto de resultados teóricos relacionados a geração de soluções numéricas via método de Bubnov-Galerkin (Galerkin Estocástico) e estimativas de erro e taxas de convergência das aproximações numéricas. O desempenho destas

estimativas é apresentado no capítulo 5 através de *quatro* exemplos numéricos para o problema de flexão estocástica de viga de Levinson-Bickford. Os *polinômios generalizados de Chaos*, [54, 106, 108], são utilizados para a representação do *comportamento estocástico* das soluções numéricas aproximadas. Os resultados apresentados neste trabalho para as equações da viga de Levinson-Bickford são **inéditos**.

Capítulo 1

Notações, Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo são apresentados resultados fundamentais que serão utilizados nos capítulos posteriores. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos. São citadas as referências onde são encontrados estes resultados e as respectivas demonstrações.

1.1 Notações

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, que eventualmente poderá ser o próprio $\mathbb{R}^n$.

3. $\mathbb{N}^n = \overbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^{n\text{-}vezes}$, enquanto que $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}^n \cup \overbrace{(0, \cdots, 0)}^{n\text{-}entradas}$.

4. considere $f : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}$ denota-se $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$, com $n \in \mathbb{N}$.

5. considere $u : [0,l] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ denota-se $u'(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ ou $u_t(x,t) = u'(x,t)$.

6. Dados $f, g \in L^2(\Omega)$ então o *produto interno*, $(\cdot,\cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, entre f e g é definido como,

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx,$$

sendo $\overline{g}$ o conjugado da função g.

7. $\|u\| = \left[\int_\Omega |u(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$.

8. $\|\nabla u\| = \left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Em particular, neste trabalho, prefere-se apresentar o **multíndice** como uma "*definição*" ao invés de "*notação*". Esta ênfase decorre das operações e manipulações aritméticas, que são realizadas em lemas e teoremas presentes no capítulo 4.

Definição 1.1 *Um multíndice consiste de uma n-upla,*

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n,\ n \in \mathbb{N};$$

ou ainda, é um elemento de um conjunto n-dimensional denotado por $\mathbb{N}_0^n$.

Observações

Seguem-se algumas operações e expressões definidas em termos de multíndices, [86]. Para tanto consideram-se para algum $n \in \mathbb{N}$, fixado, $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}_0^n$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

1. Soma: $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\lambda} = \big(\alpha_1 + \lambda_1, \cdots, \alpha_n + \lambda_n\big)$;

2. Multiplicação por um escalar: Para $a \geq 0$, $a.\boldsymbol{\alpha} = \big(a.\alpha_1, \cdots, a.\alpha_n\big)$;

3. Ordem Parcial: $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i \leq \lambda_i, \quad \forall\ i \in \{1, ..., n\};$.

4. $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)$;

5. Soma de Componentes ou Módulo de um Multíndice:

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n;$$

6. Potência: $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}} = \left(\alpha_1{}^{\beta_1}\right).\cdots.\left(\alpha_n{}^{\beta_n}\right)$ e $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} = \left(x_1{}^{\beta_1}\right).\cdots.\left(x_n{}^{\beta_n}\right)$;

7. Fatorial: $\boldsymbol{\alpha}! = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i!) = (\alpha_1!).\cdots.(\alpha_n!)$;

8. Diferenciação: Seja $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ representa-se a sua derivada de ordem $|\boldsymbol{\alpha}|$, via multíndices, como sendo

$$D^{|\boldsymbol{\alpha}|}u = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial^{\,\boldsymbol{\alpha}} u = \partial^{\,\alpha_1} \cdots \partial^{\,\alpha_n} u;$$

9. Coeficientes da Binomial: $\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\lambda}} = \binom{\alpha_1}{\lambda_1}.\cdots.\binom{\alpha_n}{\lambda_n}$;

10. Fórmula de Leibniz: Sejam $u,\ v \in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, funções, então a derivada de ordem $|\boldsymbol{\alpha}|$ da "*função produto*" é definida por,

$$\partial^{\,\boldsymbol{\alpha}}(u.v) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\alpha}} \binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\lambda}} \left(\partial^{\,\boldsymbol{\alpha}} u\right).\left(\partial^{\,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\lambda}} v\right).$$

A seguir apresenta-se uma proposição que será utilizada para obter as majorações necessárias, para demonstrar a taxa de convergência das soluções numéricas aproximadas apresentadas no **Teorema 4.2**.

Proposição 1.1 *Considere* $n \in \mathbb{N}$, *fixado, e* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}_0^n$ *então,*

$$|2.\boldsymbol{\lambda}| + 1 \leq \left(2.\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1}\right)^{|\mathbf{1}|}.$$

Demonstração: Para demonstrar o resultado utilizam-se as operações *aritméticas* com multíndices, 1-6, com efeito calcula-se

$$|2.\boldsymbol{\lambda}| + 1 = \sum_{i=1}^{n} \left(2.\lambda_i\right) + 1 = \sum_{i=1}^{n} \left(2.\lambda_i + \frac{1}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(2.\lambda_i + 1\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \left(2.\lambda_i + 1\right) = \left(2.\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1}\right)^{|\mathbf{1}|}. \qquad \blacksquare$$

1.2 Teoria da Medida e das Probabilidades

Nesta seção apresentam-se algumas definições e resultados básicos, ([6], [19], [41], [81]) das Teorias da Medida e das Probabilidades, essenciais ao desenvolvimento deste trabalho. A partir disso, considera-se $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, com Ω o espaço amostral; $\mathcal{F}$ uma $\sigma-$álgebra de eventos e P uma medida de probabilidade.

Definição 1.2 *Para espaços de medida σ- finita $\left(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i\right)$, com $1 \leq i \leq n$, a tripla $\left(\bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i\right)$ é chamada de produto destes espaços de medida sendo denotada por,*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \left(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i\right).$$

Definição 1.3 *Seja X um espaço de Banach, uma função $f : \Omega \longrightarrow X$ se diz $P-$mensurável se $\exists \left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, uma seqüência de funções simples, tal que $\left\| f_n - f \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$, q.t.p. em Ω.*

Teorema 1.1 (Doob-Dynkin,[85]) *: Sejam (Ω, Σ) e (S, A) espaços mensuráveis e $f : \Omega \to S$ uma função mensurável. Então a função $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável relativa a $\sigma(f^{-1}(A))$ sse $\exists h : S \longrightarrow \mathbb{R}$, função mensurável, tal que $g = h \circ f$.*

Definição 1.4 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $(\Omega', \mathcal{F}')$ um espaço mensurável. Então, um mapeamento, $X : \Omega \longrightarrow \Omega'$, é chamado uma **variável randômica**, (com valores $\mathcal{F}'$), ou uma $(\Omega', \mathcal{F}')$-variável randômica quando, para cada $B \in \mathcal{F}$, tem-se que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$; diz-se então que X é $\mathcal{F}-$mensurável.*

Observações

1. Na definição 1.2 se $\Big\{\big(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i\big)\Big\}_{i=1}^{n}$ forem **espaços de probabilidade** então $\bigotimes_{i=1}^{n}\big(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i\big)$ é denotado como **Produto da Família de Espaços de Probabilidade**.

2. Para o caso em que $(\Omega', \mathcal{F}') = (\bar{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^n))$, sendo $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel, então $X : \Omega \longrightarrow \Omega'$ é uma **variável randômica n-dimensional**, (**vetor randômico**);

3. $\forall A \in \mathcal{F}$ a função indicadora 1_A é uma variável randômica real;

4. Uma **variável randômica simples** consiste de uma função simples, que trata-se de uma combinação linear finita de funções indicadoras de eventos, $\Big(X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . 1_{A_i}(\omega),\ com\ n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F}\ e\ \alpha_i \in \mathbb{R}^+\Big)$;

5. $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \mid B \in \mathcal{B}\}$ consiste da $\sigma-$ **álgebra gerada pela variável randômica X**, [15].

Definição 1.5 *Seja,* $\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *um vetor randômico, definido em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *$P-$integrável então o valor esperado do vetor randômico é dado por,*

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{X}] = \int_{\Omega} \boldsymbol{X}(\omega) dP(\omega).$$

Definição 1.6 *Sejam,* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *vetores randômicos definidos em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. A* ***covariânca*** *dos vetores randômicos* $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}$, $Cov : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *é definida como,*

$$Cov(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathbb{E}\Big[\big[\boldsymbol{X} - \mathbb{E}[\boldsymbol{X}]\big]\big[\boldsymbol{Y} - \mathbb{E}[\boldsymbol{Y}]\big]^T\Big].$$

Definição 1.7 *Sejam I um conjunto não vazio de índices e* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade, então a família* $\mathcal{X} = \big\{X_t \mid t \in I\big\} \subset \mathbb{R}^n-$*variáveis randômicas é chamada de*

***processo estocástico**, sendo I e $\mathcal{X}$ os espaços de parâmetros e estado, respectivamente, [6].*

Definição 1.8 *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vartheta : D \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\boldsymbol{\Xi} : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big)\Big)$ um vetor randômico. Um **processo estocástico parametrizado** consiste de uma função $\vartheta = \vartheta\big(x, \boldsymbol{\Xi}\big)$, que depende de $x \in D$ e um número finito de variáveis randômicas, $\boldsymbol{\Xi} = \big(\boldsymbol{\Xi}_1, ..., \boldsymbol{\Xi}_n\big)^T$, [56].*

Observações

1. Para $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor randômico diz-se que o valor esperado $\mathbb{E}[X]$ existe $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}\big[\ |X|\ \big] < \infty$ e conseqüentemente $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

2. Seja $\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, um vetor randômico, então sua função de *distribuição de probabilidade acumulada* é dada por,

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P_{\boldsymbol{X}}\Big(\omega \in \Omega \ \Big|\ X_1(\omega) \leq x_1 \wedge ... \wedge X_n(\omega) \leq x_n\Big), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;$$

3. Uma notação comumente utilizada para **valor esperado**, é $\mu_{\boldsymbol{X}} = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}]$;

4. Considere $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável randômica, o valor $\mu_X^{(k)} = \mathbb{E}\big[X^k\big]$, *se existir*, é chamado de **momento estatístico de ordem k** de X, com $k \in \mathbb{N}$, em particular para $k = 1$ tem-se o *valor esperado* de X;

5. Para uma variável randômica, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se sua variância como sendo $\sigma_X^2 = Cov(X, X)$, enquanto que o **coeficiente de variação** é dado por $\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$;

6. Se o espaço de parâmetros é finito ou enumerável então diz-se que o processo estocástico é **discreto**. Por outro lado, se o espaço de parâmetros for não-enumerável diz que o processo estocástico é **contínuo**;

7. Usualmente, para processos estocásticos com espaço de parâmetros contínuo, assume-se que I, pode ser $\mathbb{R}^+$, $[0, L] \subset \mathbb{R}^+$ e até mesmo subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Para este último caso são denotados por **campos randômicos espaciais**, ou simplesmente **campos randômicos**, [38], pg. 25;

8. Se $\{X_t \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ é um processo estocástico então $X_t(\cdot)$ $\forall t \in I$, fixado, é uma **n-variável randômica**, enquanto que para $\omega \in \Omega$, fixado, $X_t(\omega)$ é chamada **função amostral**, (*trajetória, realização, caminho*) do processo estocástico;

9. Para $I \subset \mathbb{R}^+$, um processo estocástico pode ser considerado como uma função de *duas* variáveis.

1.3 Análise Complexa

Nesta seção apresentam-se algumas definições e resultados clássicos de análise complexa, [40, 60, 94], necessários aos resultados apresentados no capítulo 4.

Teorema 1.2 (Teorema 1.9.1, [40] p. 13) *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função analítica, então é possível encontrar uma região, $[a,b] \subset R \subset \mathbb{C}$ na qual "$f(x)$" pode ser prolongada analiticamente, (continuação analítica), tal que "$f(z)$" é analítica em R.*

Teorema 1.3 (Teorema de Pringsheim, [40] p. 14) *: Diz-se que $f \in C^\infty[a,b]$, é uma função analítica se e somente se $\exists\ r > 0$ tal que,*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq r^n n!,\ \ \forall x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.4 (Teorema 2.2.8 p. 28, [60]) *: Sejam $R \subset \mathbb{C}^n$ e se $f : R \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica para cada variável complexa z_j, com z_i, $i \neq j$ arbitrárias, porém fixadas, então a função f é analítica em R.*

Lema 1.1 (Lema 2.2.11 p. 28, [60]) *: Seja* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, *em que* $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z_j - z_j^0 \right| \leq r,\ j = 1, ..., n \right\}$, *assumindo que esta função é analítica em* $z' = z_1, ..., z_{n-1}$, *com* z_n *fixado e que* f *é analítica e limitada em* $D' = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z_j - z_j^0 \right| \leq r',\ \ j = 1, ..., n,\ \ \left| z_{n-1} - z_{n-1}^0 \right| \leq r, \right.$ *para algum* $r' > 0$, *então* f *é analítica.*

Teorema 1.5 (Série de Taylor) *: Seja* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, *uma função holomorfa definida em* $U \subset \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in U$ *um ponto qualquer, então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n,$$

ou seja, f *é dada pela sua série de Taylor de centro* z_0 *e portanto, é uma função analítica. Além disso, converge em qualquer* $D(z_0, r_0) \subset U$, *isto é, o raio de convergência,* R, *desta série é a menor entre as distâncias de* z_0 *aos pontos de sua fronteira,* Γ.

1.4 Topologias Fraca e Fraca Estrela

Sejam E um espaço de Banach e $f \in E'$, sendo E' o dual topológico de E, designamos por $T_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por $T_f(x) = \langle f, x \rangle$. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações $(T_f)_{f \in E'}$. As demonstrações dos resultados desta seção estão presentes em Brezis (2010), [30].

Dada uma seqüência x_n em E, a notação de convergência fraca em geral é indicada por:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ fraco } \sigma(E, E'),$$

ou, simplesmente, $x_n \longrightarrow x$ fraco em E.

Proposição 1.2 *Seja* x_n *uma seqüência em* E. *Então*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *fraco* $\sigma(E,E')$, *se e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in E'$;

(ii) $x_n \longrightarrow x$ *forte em* E, *então* $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* E.

Seja E' o dual de E munido da norma $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$ e E'' o bidual munido da norma $\|\xi\| = \sup_{f\in E'} |\langle \xi, f\rangle|$. A topologia fraca estrela sobre E' também denotada por $\sigma(E', E)$ é a topologia menos fina sobre E' que torna contínua todas as aplicações $(T_x)_{x\in E}$, sendo $T_x : E' \to \mathbb{R}$ definida como $T_x(f) = \langle f, x\rangle\,, \ \forall f \in E'$.

Considere uma seqüência $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e f em E' a notação de convergência fraca - $\star$ em geral é indicada

$$f_n \rightharpoonup f \text{ fraco - } \star \text{ em } \sigma(E', E),$$

ou simplesmente $f_n \longrightarrow f$ fraco - $\star$ em $\sigma(E', E)$.

Proposição 1.3 *Seja* E *um espaço de Banach e seja* f_n *uma seqüência de* E' *então:*

(i) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$, *se e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in E$;

(ii) $f_n \longrightarrow f$ *forte em* E', *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$;

(iii) $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$, *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$;

(iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$, *então* $\|f_n\|$, *é limitada e* $\|f\| \leq lim \ \ inf \|f_n\|$;

(v) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$, *e se* $x_n \longrightarrow x$ *forte em* E, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f_n, x\rangle$;

(vi) Se E *é reflexivo e* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$, *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$.

1.5 Distribuições

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$; o suporte de f, denotado por $Supp\, f$, é o fecho em Ω do seguinte conjunto:

$$\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}.$$

Definição 1.9 *Representamos por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o conjunto das funções* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, *cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de* Ω. *Os elementos de* $C_0^\infty(\Omega)$ *são chamados de funções testes.*

O conjunto $\{f : \Omega \to \mathbb{K};\ f \in C_0^\infty(\Omega)\}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.10 *Sejam* $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $C_0^\infty(\Omega)$ *e* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Dizemos que* $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ *se:*

i) $\exists\ K \subset \Omega$, K *compacto, tal que* $Supp\, \varphi_k \subset K$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \longrightarrow D^\alpha \varphi(x)$ *uniformemente em* $x \in \Omega$.

Definição 1.11 *O espaço vetorial* $C_0^\infty(\Omega)$ *com a noção de convergência definida acima é denotado por* $\mathcal{D}(\Omega)$, *sendo chamado de* ***espaço das funções testes***.

Definição 1.12 *Uma distribuição sobre* Ω *é um funcional linear definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e contínuo em relação a noção de convergência definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *O conjunto de todas as distribuições sobre* Ω *é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \left\{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K};\ T \text{ é linear e contínuo}\right\},$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor de T aplicada ao elemento φ.

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.13 *Considere a seqüência* $\left(T_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, *diz-se que* $T_k \longrightarrow T$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *se* $\langle T_k, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.6 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho as integrais de funções mensuráveis definidas sobre a região aberta Ω são realizadas no sentido de *Lebesgue*.

Definição 1.14 *Sejam* Ω *um conjunto mensurável e* $1 \leq p \leq \infty$. *Indicamos por* $L^p(\Omega)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $\|f\|_p < \infty$ *onde:*

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}},\ \text{se } 1 \leq p < \infty;$$

e

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} ess\,|f(t)| = \inf\left\{C \in \mathbb{R}^+ \ \ / \ \ med\{t \in \Omega \ / \ |f(t)| > C\} = 0\right\}$$

$$= \inf\left\{C;\ \ |f| \leq C \ \ q.\ t.\ p.\ em\ \Omega\right\}.$$

Observações

1. As funções $\|.\|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ 1 \leq p \leq \infty,$ são normas;

2. Para o caso em que $p = 2$ adota-se a notação $\|.\|$, *em lugar de* $\|.\|_2$;

3. O espaço $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções, em que duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω;

4. Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral.

Teorema 1.6 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.15 *Seja $1 \leq p \leq \infty$; denota-se $L^p_{loc}(\Omega)$ como o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo $K \subset\subset \Omega$, sendo χ_K a função característica de K.*

Observações

1. $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das *funções localmente integráveis.*

2. Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos o funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por,

$$< T, \varphi > = < T_u, \varphi > = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

   É fácil verificar que "T" define uma distribuição sobre Ω.

3. Observa-se que a aplicação,

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto T_u \end{aligned}$$

   é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.2).

4. Da última observação tem-se que, $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

5. Notando que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ tem-se que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Lema 1.2 (Du Bois Reymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ q. t. p. em Ω.*

Definição 1.16 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é a distribuição definida por*

$$< D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Assim, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$. Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k$, sendo que "$D^\alpha u$" indica a derivada clássica de u.

1.7 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser vistos nas referências Adams [2], Brezis [30], Kesavan [64], Medeiros [76], [77] e Rivera [88].

Definição 1.17 *Um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é dito ser* **bem regular** *se a fronteira de Ω é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$.*

Definição 1.18 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indica-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. O conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de*

ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega); D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \quad |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m\Big\}.$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$, tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \|D^{\alpha}u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_{\Omega} |(D^{\alpha}u)(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty;$$

se $p = +\infty$ tem-se que

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^{\alpha}u\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\Omega)};$$

define uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações

1. $\Big(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p}\Big)$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \big(D^{\alpha}u, D^{\alpha}v\big), \quad \forall\ u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.19 *Definimos o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $C_0^{\infty}(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações:

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ então a medida de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ é nula.

3. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.20 *Suponha* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $q > 1$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Representa-se por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$, *enquanto que o dual topológico de* $H_0^m(\Omega)$ *representa-se por* $H^{-m}(\Omega)$.

Imersões de Sobolev

Teorema 1.7 (Teorema de Sobolev) *Sejam* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$, *então*

i) *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

ii) *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$;

iii) *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$;

sendo as imersões contínuas.

1.8 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = 1$ se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$). Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $f, g \in L^2(\Omega)$ então

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Desigualdade de Poincaré

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, em pelo menos uma direção, então $\exists C(\Omega) > 0$, denotada como *constante de Poincaré* para Ω, tal que,

$$\|u\| \leq C\|\nabla u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Observações:

1. A desigualdade de Poincaré também é válida se $u \in H^1(\Omega)$ e o *traço* de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ se anular apenas em subconjunto de Γ, (Brezis (2010), [30]);

2. A desigualdade de Poincaré (1.1) continua válida em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Conseqüências da Desigualdade de Poincaré

1. A norma de Sobolev $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a norma do gradiente em $L^2(\Omega)$. Isto é, $\exists C > 0$, tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

2. A norma de Sobolev $\|.\|_{H^2(\Omega)}$ é equivalente à norma do Laplaciano em $L^2(\Omega)$ para funções em $H_0^2(\Omega)$, isto é, existe $C(\Omega) > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\| \triangle u\|$, $\forall u \in H_0^2(\Omega)$. Isso segue do fato que se $u \in H_0^2(\Omega)$ e com a desigualdade de Poincaré conclui-se que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$.

1.9 Teoremas de Compacidade

Teorema 1.8 (Banach - Alaoglu - Bourbaki) *O conjunto*

$$B_{E'} = \Big\{ f \in E^{'} : \|f\| \leq 1 \Big\};$$

é compacto na topologia fraco - $\star$.

Corolário 1.1 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, limitada, então $\exists \big\{f_{n_k}\big\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge fraco.*

Corolário 1.2 *Seja E um espaço de Banach separável e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^{'}$, então $\exists \big\{f_{n_k}\big\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge fraco - $\star$.*

As demonstrações dos teorema 1.8, corolários 1.1 e 1.2 são apresentadas em [30].

Definição 1.21 *Um operador diferencial de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$ da forma*

$$L = \sum_{|\alpha|\leq m} C_{\alpha}(\boldsymbol{x}) D^{2\alpha} u, \ \ \boldsymbol{x} \in \Omega;$$

é chamado de operador elíptico se existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(\boldsymbol{x})\xi^{2\alpha} \geq C|\boldsymbol{\xi}|^{2m};$$

para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ *e para todo* $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Teorema 1.9 (Lax-Milgram, [31]) *: Seja* $\left(V, (\cdot,\cdot)_V\right)$ *um espaço de Hilbert e* $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$*, uma forma bilinear, contínua, coerciva e* $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional linear, então* $\exists u \in V$*, solução única para o problema variacional abstrato (PVA),*

$$\boldsymbol{(PVA)}\begin{cases} \text{Determinar } u \in V, \text{ tal que} \\ \\ a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Teorema 1.10 (Teorema de Regularidade Elíptica, [3]) *: Considere* $\mathcal{L}$ *um operador diferencial elíptico de ordem* $2m$*, com* $m \in \mathbb{N}$*, definido em um aberto* Ω *do* $\mathbb{R}^n$*,* $u \in D'(\Omega)$ *solução de* $\mathcal{L}u = f$*, no sentido das distribuições, com* $f \in L^2(\Omega)$*, então* $u \in H^{2m}(\Omega)$.

1.10 Espaços de Bochner

Nesta seção apresentam-se definições e resultados teóricos para os *espaços de Bochner*. Estes espaços são *essenciais* para construção de soluções fracas para equações hiperbólicas e parabólicas. Outra aplicação, importante, relaciona-se a uma generalização dos espaços L^p definidos em espaços de medidas não usuais como, por exemplo, uma medida de *probabilidades*. Os resultados apresentados são tomados de [41, 47, 67, 75, 112]. Além disso, estes resultados quando combinados, adequadamente, com teoremas clássicos sobre o produto tensorial de espaços de Hilbert, [87], possibilitará definir-se os objetos necessários à obtenção dos resultados apresentados nos capítulos 3 e 4. Nesta seção

considera-se $\left(X, \|.\|_X\right)$ um espaço de Banach e $C_0^\infty(0,T)$ o espaço das funções testes e (Ω, Σ, μ) um espaço de *medida finita.*

Definição 1.22 ("Função Bochner integrável") *Uma função $\mu-$mensurável, $f : \Omega \longrightarrow X$ se diz* ***Bochner integrável*** *se $\exists\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, uma seqüência de funções simples, [41], tal que,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left\|\left(f_n - f\right)(\omega)\right\|_X d\mu(\omega) = 0.$$

Definição 1.23 *Denotaremos por $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p < +\infty$ o conjunto das classes de funções $f : [0,T] \longrightarrow X$ mensuráveis tais que*

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se $p = \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é constituído das funções $f : [0,T] \longrightarrow X$ tais que

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess\|f(t)\|_X < \infty.$$

Definição 1.24 *O espaço*

$$C\left([0,T];X\right),$$

formado pelo espaço vetorial das funções contínuas $f : [0,T] \longrightarrow X$, munido com a norma

$$\|f\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X;$$

é um espaço de Banach.

Definição 1.25 *Sejam $w, v \in L^p(0,T;X)$, diz-se que "v" é a derivada fraca, (distribucional),*

$$w' = v;$$

tal que,

$$\int_0^T w(t)\phi'(t)dt = -\int_0^T v(t)\phi(t)dt, \quad \forall \phi \in D(0,T).$$

Teorema 1.11 *Seja* $f \in W^{1,p}(0,T;X)$, *com* $p \in [1,\infty]$, *então,*

i. $f \in C([0,T];X)$;

ii. $f(x,t) = f(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x,s)ds, \quad \forall t_0 \leq t \leq T$;

iii. $\exists\ c(T) > 0$, *tal que* $\|f\|_{C([0,T];X)} \leq c\|f\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$.

Observações:

Considerando X e Y, espaços de Banach, então são válidas as seguintes afirmações:

1. Os espaços da forma $L^p(0,T;X)$, $C([0,T];X)$, $W^{1,p}(0,T;X)$ são referidos como **Espaços de Evolução**.

2. $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, [28].

3. $L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q)$, sendo $Q = (0,T) \times \Omega$.

4. se X é um espaço de Banach, reflexivo, (ou separável), $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $\left(L^p(0,T;X)\right)' \cong L^q(0,T;X')$, (pg. 40, [113]).

5. Os espaços $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p < +\infty$ são separáveis, quando X é separável, [112].

6. Os espaços $L^p(0,T;X)$, com $1 < p < +\infty$ são reflexivos, quando X é reflexivo, [112].

7. $X \hookrightarrow Y$, então $L^q(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y)$ para $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

As próximas definições e resultados estão relacionados a espaços de Bochner definidos em um espaço de medida de probabilidades, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição 1.26 *Seja X, espaço de Banach, denota-se $L^p\big(\Omega,\mathcal{F},P;X\big)$ o conjunto das classes de funções $f:\Omega\longrightarrow X$ mensuráveis tais que,*

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)}=\left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p\,dP(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Se $p=\infty$, então $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ é constituído das funções $f:\Omega\longrightarrow X$ tais que

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P;X)}=\sup_{\omega\in(\Omega,\mathcal{F},P)} ess\big\|f(\omega)\big\|_X<\infty.$$

Observações

1. Os espaços $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ são denotados como *espaços de Bochner-Lebesgue.*

2. Da definição 1.26 tem-se que o espaço $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ é formado pelo conjunto das *funções mensuráveis* tais que $\|f\|_X\in L^p(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R})$.

Teorema 1.12 ("Propriedades dos Espaços de Bochner-Lebesgue", [41, 67, 75]) *São válidos os seguintes fatos:*

i) Para $p\in[1,\infty]$, $\Big(L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X),\|\cdot\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)}\Big)$ é um espaço de Banach.

ii) Seja $\big(X,(\cdot,\cdot)_X\big)$ um espaço de Hilbert então $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por,

$$\big(u,v\big)_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P;X)}=\int_\Omega (u(\omega),v(\omega))_X dP(\omega),\quad \forall\ u,\ v\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;X).$$

iii) Para $1\le p<q\le\infty$ tem-se as seguintes imersões contínuas:

$$L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P;X)\hookrightarrow L^q(\Omega,\mathcal{F},P;X)\hookrightarrow L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)\hookrightarrow L^1(\Omega,\mathcal{F},P;X).$$

iv) Para $p\in[1,\infty)$ as funções simples integráveis geram uma subespaço denso em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ e além disso, se $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ e X, são espaços separáveis então $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ é um espaço separável.

v) Para $p \in [1,\infty]$, $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ *é reflexivo sse* $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ *e* X *são reflexivos.*

vi) O espaço $L^1(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ *é constituído, no sentido de uma classe de equivalência, pelas funções Bochner-integráveis.*

vii) ***Desigualdade de Hölder****: para* $p \in [1,\infty]$, $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$, $g \in L^q(\Omega,\mathcal{F},P;X')$, *com* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *então* $\langle f,g\rangle \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ *e*

$$\|\langle f,g\rangle\|_{L^1(\Omega,\mathcal{F},P)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)}\|f\|_{L^q(\Omega,\mathcal{F},P;X')}.$$

viii) ***Desigualdade de Minkowski****: para* $p \in [1,\infty]$, $f,g \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$, *então* $f+g \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)$ *e*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)} + \|g\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P;X)}.$$

O resultado a seguir é conhecido como *Teorema de Compacidade de Aubin-Lions* sendo encontrado em [7].

Teorema 1.13 (Aubin-Lions) *Sejam* X_0, X *e* X_1 *espaços de Banach reflexivos. Suponha que* $X_0 \subset X \subset X_1$ *e que a imersão* $X_0 \subset\subset X$ *é compacta. Seja*

$$\mathcal{W} = \left\{ w \in L^{p_0}(0,T;X_0);\ \frac{dw}{dt} \in L^{p_1}(0,T;X_1),\ 1 < p_0, p_1 < \infty \right\};$$

munido com a norma,

$$\|w\|_W = \|w\|_{L^{p_0}(0,T;X_0)} + \left\| \frac{dw}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0,T;X_1)}.$$

Então, $\mathcal{W}$ *é um espaço de Banach e a imersão* $\mathcal{W} \subset\subset L^{p_0}(0,T;X)$ *é compacta.*

Observação: Se X e Y são espaços de Banach com $X \hookrightarrow Y$ compactamente imerso, então se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X resulta, da compacidade, que existe uma subsequência que converge forte em Y.

1.11 Produto Tensorial

Nesta seção apresentam-se definições e resultados que serão utilizados nos capítulos 3 e 4, deste trabalho. No capítulo 3 utilizam-se resultados para *geração* dos espaços das soluções variacionais, enquanto que no capítulo 4, são *extensivamente* utilizados para geração das soluções aproximadas e obtenção dos resultados sobre taxas de convergência.

Definição 1.27 *Seja Z um espaço vetorial e $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$, um mapeamento bilinear, se diz que $U : X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$, um mapeamento bilinear, satisfaz a* ***propriedade universal*** *se $\exists! \psi$, mapeamento linear, $\psi : X \otimes Y \longrightarrow Z$, tal que $\phi := \psi \circ U$, ou seja, $\phi(x, y) = \psi(x \otimes y)$, $x \in X$, $y \in Y$.*

Definição 1.28 *Considere X e Y espaços vetoriais então o* ***produto tensorial****, destes espaços, é um* ***espaço vetorial****, $X \otimes Y$, juntamente com um mapeamento bilinear, $U : X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$, $(x, y) \longmapsto x \otimes y \in X \otimes Y$, com a propriedade universal.*

Teorema 1.14 (Teorema II.10, [87], p. 52) *: Sejam $\big(M_1, \mathcal{F}_1, \mu_1\big)$ e $(M_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ espaços de medida tais que $L^2\big(M_1, \mathcal{F}_1, \mu_1\big)$ e $L^2\big(M_2, \mathcal{F}_2, \mu_2\big)$, são separáveis, então:*

i) Existe um isomorfismo único de $L^2\big(M_1, \mathcal{F}_1, \mu_1\big) \otimes L^2\big(M_2, \mathcal{F}_2, \mu_2\big)$ para $L^2\big(M_1 \times M_2, \sigma\big(M_1 \times M_2\big), \mu_1 \otimes \mu_2\big)$ tal que

$$f \otimes g \mapsto fg;$$

ii) Seja H espaço de Hilbert separável então $\exists! U : L^2\big(M_1, \mathcal{F}_1, \mu_1\big) \otimes H \longrightarrow L^2\big(M_1, \mathcal{F}_1, \mu_1; H\big)$, isomorfismo, tal que

$$U(f(x) \otimes g) \mapsto f(x)g;$$

iii) $\exists! U : L^2\big(M_1 \times M_2, \sigma\big(M_1 \times M_2\big), \mu_1 \otimes \mu_2\big) \longrightarrow L^2\big(M_1, \mathcal{F}_1, \mu_1; L^2\big(M_2, \mathcal{F}_2, \mu_2\big)\big)$ *tal que,*

$f \in L^2\big(M_1 \times M_2, \sigma\big(M_1 \times M_2\big), \mu_1 \otimes \mu_2\big)$

$$x \mapsto f(x, .).$$

Proposição 1.4 (Proposição 2, [87], p. 51) *: Sejam* $\big\{\phi_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $\big\{\psi_m\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ *bases ortonormais para os espaços de Hilbert* Φ *e* Ψ*, respectivamente, então* $\big\{\phi_k \otimes \psi_m\big\}_{k,m\in\mathbb{N}}$ *é uma base ortonormal para* $\Phi \otimes \Psi$*.*

Definição 1.29 *Sejam* X *e* Y *espaços de Hilbert, definidos no corpo dos reais,* $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$*, munidos com os produtos internos,* $(\cdot,\cdot)_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $(\cdot,\cdot)_Y : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$*. Sejam* $u,\ v \in X \otimes Y$ *tais que* $u := \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ *e* $v := \sum_{j=1}^{m} a_i \otimes b_i$*, a forma bilinear* $(\cdot,\cdot)_{X\otimes Y} : \big(X \otimes Y\big) \times \big(X \otimes Y\big) \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por,*

$$(u, v)_{X\otimes Y} := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \big(x_i, a_j\big)_X . \big(y_i, b_j\big)_X$$

define um produto interno sobre $X \otimes Y$*.*

Observações:

1. O produto interno, $(\cdot,\cdot)_{X\otimes Y}$, induz uma norma, $\|\cdot\|_{X\otimes Y}$, sobre $X \otimes Y$, [71];

2. O completamento de $X \otimes Y$, das somas finitas $u := \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, com $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X$ e $\{y_i\}_{i=1}^{n} \subset Y$, em relação ao produto interno, $(\cdot,\cdot)_{X\otimes Y}$, é um espaço de Hilbert, [14, 71].

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções para o Problema de Viga de Levinson-Bickford - Caso Transitório

2.1 Introdução

As equações de movimento da viga, originalmente, propostas por Levinson em 1981, [68], foram deduzidas a partir da segunda Lei de Newton, em termos de tensões, porém estão *erradas*. Isto decorre do fato, de que a dedução apresentada por Levinson baseia-se na descrição do campo de tensões baseado em momentos fletores de *primeira ordem*. Bickford, [24], deduz as equações de movimento aplicando o **Princípio de Hamilton**. Ao utilizar este princípio surgem, naturalmente, os momentos fletores de *ordem superior*. Este aspecto evidencia a potencialidade dos métodos baseados no cálculo das variações, pois até este trabalho, [24], tal descrição não existia ainda para estes esforços internos, (*momentos fletores e esforços cortantes*). As equações a serem abordadas

neste trabalho são as apresentadas por Bickford, [24]. A partir disso demonstra-se, neste capítulo, a *existência* e a *unicidade* de soluções para o seguinte problema de valor inicial e de contorno, (**PVI/PVC**), associado com a *equação de movimento* da viga de Bickford-Levinson:

$$
\begin{cases}
\text{Determinar } (w,\psi):[0,l]\times[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^2, \text{ tal que} \\
-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\Big(\gamma\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-16\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\Big)\Big) \\
\qquad -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\beta\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-16\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)\Big)=q(x,t); \\
\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-68\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\beta\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-68\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)\Big) \\
\qquad -\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\Big)=0,\quad x\in(0,l),\quad t>0; \\
\text{sujeita a condições iniciais e de contorno,} \\
w(x,0)=w_0(x), \\
\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=w_1(x), \\
\psi(x,0)=\psi_0(x), \\
\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)=\psi_1(x),\quad x\in[0,l] \\
w(0,t)=w(l,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)=0, \\
\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\quad \forall t\in[0,T].
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

sendo "(w,ψ)" os campos de deslocamentos transversal e angular, respectivamente, "q" o termo de *carregamento mecânico*, "ρ" massa específica, "A" área da seção transversal da viga. Enquanto que "$\gamma,\ \alpha,\ \beta:[0,l]\longrightarrow\mathbb{R}^+$" são os coeficientes de *inércia rotacional, rigidez de membrana e à flexão*, respectivamente. Para estudar a existência e unicidade de soluções para o problema definido na Eq. (2.1) são necessárias as seguintes hipóteses:

H1) **Regularidade dos dados:**

$$
\begin{cases}
(w_0,\psi_0)\in(H_0^2(0,l)\bigcap H^4(0,l))\times(H_0^1(0,l)\bigcap H^3(0,l)); \\
(w_1,\psi_1)\in H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l); \\
q\in L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big);
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

H2) **Limitação e regularidade dos coeficientes:**

$$\begin{cases} \rho \in L^{\infty}(0,l); \\ \alpha, \gamma \in H^{1}(0,l); \\ \beta \in H^{2}(0,l); \\ \exists\ 0 < \bar{\gamma}, \bar{\gamma}', \rho^{-}\bar{A}, \underline{\gamma}, \bar{\alpha}, \underline{\alpha}, \bar{\beta}, \underline{\beta} < +\infty,\ \textit{tais que}, \\ \qquad \gamma(x) \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}],\ \alpha(x) \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}],\ \beta(x) \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}],\ \forall x \in [0,l]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Para o problema definido em (2.1) busca-se uma solução na classe de funções dos espaços $L^{p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Esta função é denotada por solução forte.

Definição 2.1 ***(Solução Forte)****: Chama-se* ***solução forte*** *para o problema definido na Eq. (2.1) o par de funções* $(w,\psi) : [0,l] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que,*

$$\begin{cases} w \in L^{\infty}(0,T; H_0^2(0,l) \cap H^4(0,l)); \\ w_{tt} \in L^{\infty}(0,T; H^2(0,l)); \\ \psi \in L^{\infty}(0,T; H_0^1(0,l) \cap H^3(0,l)); \\ \psi_{tt} \in L^{\infty}(0,T; H^1(0,l)); \end{cases} \tag{2.4}$$

satisfazendo a equação,

$$\begin{cases} -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(\gamma\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 16\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)\Big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\beta\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 16\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)\Big) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 68\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\beta\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 68\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)\Big) - \alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big) = 0,\ \textit{q.t.p. em}\ (0,l) \times (0,T); \end{cases}$$

sujeita às seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} w(x,0) = w_0(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x),\ \textit{q.t.p. em}\ [0,l]. \end{cases}$$

A partir disso, *enuncia-se* o teorema de existência e unicidade de soluções fortes para o PVC/PVI definido na Eq. (2.1).

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade de Soluções Fortes) *: Considerando que os coeficientes e dados iniciais atendam às hipóteses* ***H1*** *e* ***H2****, Eqs (2.2) e (2.3), respectivamente, então o PVI/PVC definido na Eq. (2.1) possui solução única conforme definida na Eq. (2.4).*

Demonstração: Para obter a **existência** de soluções será utilizado o método de **Faedo-Galerkin** que será apresentado nas próximas seções, enquanto que **unicidade** da solução é demonstrada utilizando-se a técnica de *contradição.*

2.2 Formulação Variacional

Nesta seção apresenta-se o problema variacional associado ao problema de valor inicial e valor de contorno, definido na Eq. (2.1). O problema variacional é definido no seguinte espaço de funções:

$$V = \Big(\big(H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big); (\cdot,\cdot)_V\Big);$$

sendo $(\cdot,\cdot)_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ o produto interno definido como segue:

$$\big((u,\varphi),(v,\phi)\big)_V = \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(x)dx, \quad \forall (u,\varphi),(v,\phi) \in V. \tag{2.5}$$

O espaço V é um espaço de Hilbert e, *sem perda de generalidade*, para simplificar as manipulações assume-se $q \equiv 0$. A partir disso, o problema variacional é obtido multiplicando-se as Eqs. (2.1a,b) por v e ϕ, respectivamente; e integrando-se em $[0,l]$ e somando-se as

equações resultantes chega-se ao problema variacional:

$$
\begin{cases}
\text{Determinar } (w,\psi), \text{ tal que } \forall (v,\phi) \in V, \\
\Big(\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t), v\Big) + 4\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)(t)\Big), \frac{\partial v}{\partial x} - 4\phi\Big) + 4\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma \frac{\partial \psi}{\partial t}(t)\Big), \phi\Big) \\
+\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(t)\Big), \frac{\partial v}{\partial x}\Big) + \Big(\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) + 4\Big(\beta\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) \\
+\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)(t), \frac{\partial v}{\partial x} + \phi\Big) + 4\Big(\beta \frac{\partial \psi}{\partial x}(t), \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) = 0, \quad t > 0; \\
\text{sujeito a,} \\
w(x,0) = w_0(x); \\
\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x); \\
\psi(x,0) = \psi_0(x); \\
\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x), \ q.t.p. \ \ em \ \ [0,l].
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

2.3 Método de Faedo - Galerkin

O método de Faedo-Galerkin será utilizado para *demonstrar* a existência de soluções globais do problema de Cauchy (2.1) associado com a equação de Bickford-Levinson. De forma geral, este método desenvolve-se nas seguintes etapas:

i) **Existência de soluções locais aproximadas**: projetar o problema em subespaços de dimensão finita definindo-se o *problema variacional aproximado*, a partir disso, gera-se um PVI e aplica-se o *Teorema de Caractheodory* para se obter as soluções locais, ou aproximações de Galerkin;

ii) **Estimativas a *priori* e prolongamento da solução**: do problema variacional aproximado obtém-se limitantes para as aproximações de Galerkin e suas derivadas e utilizando-se o *Teorema do Prolongamento* estender as soluções locais aproximadas para um intervalo $[0,T] \subset \mathbb{R}$;

iii) **Passagem ao Limite**: Das estimativas a *priori* e limitações sobre as soluções variacionais aproximadas são extraídas subsequências, fracamente convergentes, em espaços

de evolução;

iv) **Análise da Condições Iniciais**: verifica-se que a solução fraca - $\star$, obtida na etapa anterior satisfaz às condições iniciais.

2.3.1 Existência de Soluções Aproximadas

É importanto observar que a equação de movimento, Eq. (2.1), não possui termos *não lineares*, e como conseqüência disso será obtida uma solução aproximada *global*. Notando que os espaços de Sobolev $H^m(0,l)$ são espaços de Hilbert *separáveis*, pode-se tomar uma *base Hilbertiana* para V, [30]. Sejam então, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bases para $H_0^2(0,l)$ e $H_0^1(0,l)$, respectivamente, tais que $u_k \in H_0^2(0,l) \cap H^4(0,l)$ e $\phi_k \in H_0^1(0,l) \cap H^3(0,l)$, e $V_m \subset V$ um subespaço de dimensão finita gerado pelas m - *primeiras* funções destas bases, ou seja:

$$V_m = [u_1, \cdots, u_m] \times [\phi_1, \cdots, \phi_m]; \tag{2.7}$$

é um subespaço de V com dimensão finita. Para o problema variacional apresentado na Eq. (2.3) procuram-se soluções aproximadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) u_j(x); \\ \psi_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) \phi_j(x); \end{cases} \tag{2.8}$$

sendo g_{jm}, h_{jm}, $1 \leq j \leq m$, funções reais definidas em algum intervalo $[0,\, t_m)$ e satisfazendo às condições iniciais. Isso produz o problema variacional aproximado. O problema variacional aproximado consiste em mostrar que existe uma função $(w_m, \psi_m) : [0,\, t_m) \to V_m$,

para algum $t_m > 0$, que satisfaz

$$
\begin{cases}
\text{Determinar } (w_m, \psi_m), \text{ tal que } \forall (v,\phi) \in V_m, \\
\Big(\rho A \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t), v\Big) + 4\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big)(t)\Big), \frac{\partial v}{\partial x} - 4\phi\Big) + 4\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma \frac{\partial \psi_m}{\partial t}(t)\Big), \phi\Big) \\
+\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t)\Big), \frac{\partial v}{\partial x}\Big) + \Big(\beta \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) + 4\Big(\beta\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) \\
+\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w_m}{\partial x} + \psi_m\Big)(t), \frac{\partial v}{\partial x} + \phi\Big) + 4\Big(\beta \frac{\partial \psi}{\partial x}(t), \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) = 0, \quad t > 0; \\
w_m(x,0) = w_{0m}(x); \\
\frac{\partial w_m}{\partial t}(x,0) = w_{1m}(x); \\
\psi_m(x,0) = \psi_{0m}(x); \\
\frac{\partial \psi_m}{\partial t}(x,0) = \psi_{1m}(x), q.t.p. \ \ em \ \ [0,l];
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

com w_{0m}, w_{1m}, ψ_{0m}, $\psi_{1m} \in V_m$, tais que $w_{0m} \xrightarrow{m\to\infty} w_0$, $\psi_{0m} \xrightarrow{m\to\infty} \psi_0$ convergem forte em V e $w_{1m} \xrightarrow{m\to\infty} w_1$, $\psi_{1m} \xrightarrow{m\to\infty} \psi_1$ convergem forte em $H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)$. Das bases $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e da hipótese H1, Eq. (2.2), os *dados iniciais* admitem a seguinte representação:

$$
\begin{cases}
w_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, u_j(x); \\
w_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j\, u_j(x); \\
\psi_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j\, \phi_j(x); \\
\psi_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\, \phi_j(x);
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

e portanto, é natural propor que

$$
\begin{cases}
w_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\, u_j(x); \\
w_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j\, u_j(x); \\
\psi_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} e_j\, \phi_j(x); \\
\psi_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j\, \phi_j(x).
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

É importante observar que "(w_m, ψ_m)" não satisfaz os dados iniciais da Eq. (2.1), pois estão definidas em V_m. Para obter as soluções locais, ou aproximações Galerkin

manipulam-se as equações que definem o PVI/PVC, Eq. (2.1). Para tanto multiplica-se a Eq. (2.1.b) por "$-\frac{4}{17}$", somando-se com a Eq. (2.1.b) e tomando-se na equação resultante $w = w_m$ e $\psi = \psi_m$, multiplicando por $u_i \in [u_1, \cdots, u_m]$ e integrando-se em $(0, l)$ obtém-se,

$$\sum_{j=1}^{m} \Big[b_{ji} g''_{jm}(t) + c_{ji} g_{jm}(t) + d_{ji} h_{jm}(t) \Big] = 0, \quad i \in \{1, \cdots, m\}; \tag{2.12}$$

sendo

$$\begin{cases} b_{ji} = \big(\rho A u_j, u_i\big) + \frac{21}{17}.\big(\gamma u'_j, u'_i\big); \\ c_{ji} = \big(\alpha u'_j, u'_i\big) + \big(\beta u''_j, u''_i\big); \\ d_{ji} = \big(\alpha \phi'_j, u'_i\big). \end{cases} \tag{2.13}$$

Exaurindo-se o conjunto de índices a Eq. (2.12) pode ser reescrita na representação **vetor-matriz** como sendo,

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}''(t) + 0\boldsymbol{h}''(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{h}(t) = 0; \tag{2.14}$$

sendo $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$, 0 a matriz *nula* e $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funções vetoriais,

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}(t) = \big(g_{1m}(t), \cdots, g_{mm}(t)\big)^T; \\ \boldsymbol{h}(t) = \big(h_{1m}(t), \cdots, h_{mm}(t)\big)^T. \end{cases} \tag{2.15}$$

Da hipótese H2, Eq. (2.3.e), multiplicando-se a Eq. (2.1.b) por "γ^{-1}", tomando-se $w = w_m$ e $\psi = \psi_m$ e multiplicando-se a equação resultante por $\phi_i \in [\phi_1, \cdots, \phi_m]$ e integrando-se em $(0, l)$ obtém-se,

$$\sum_{j=1}^{m} \Big[e_{ji} g''_{jm}(t) + k_{ji} h''_{jm}(t) + m_{ji} g_{jm}(t) + r_{ji} h_{jm}(t) \Big] = 0, \quad i \in \big\{1, \cdots, m\big\}; \tag{2.16}$$

sendo

$$\begin{cases} e_{ji} = 16.\big(u'_j, \phi_i\big); \\ k_{ji} = -68.(\phi_j, \phi_i); \\ m_{ji} = -\Big(\frac{16}{\gamma}\big(\beta u''_j\big)', \phi_i\Big) - \Big(\frac{\alpha}{\gamma} u'_j, \phi_i\Big); \\ r_{ji} = -\Big(\frac{\alpha}{\gamma}\phi_j, \phi_i\Big) + \Big(\frac{68}{\gamma}\big(\beta u'_j\big)', \phi_i\Big). \end{cases} \tag{2.17}$$

Exaurinado-se o conjunto de índices a Eq. (2.16) pode ser reescrita na representação **vetor-matriz** como sendo,

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{g}''(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{h}''(t) + \boldsymbol{M}\boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{R}\boldsymbol{h}(t) = 0. \tag{2.18}$$

sendo $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ matrizes. Das Eqs. (2.14) e (2.18) define-se o seguinte sistema de EDO's,

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}\boldsymbol{g}''(t) + 0\boldsymbol{h}''(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{h}(t) = 0; \\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{g}''(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{h}''(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{R}\boldsymbol{h}(t) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Definindo-se $Y_m : [0, t_m) \longrightarrow \mathbb{R}^{4m}$ cujas entradas são as seguintes

$$y_{im}(t) = \begin{cases} g'_{im}(t), & 1 \leq i \leq m; \\ h'_{(i-m)m}(t), & m+1 \leq i \leq 2m; \\ g_{(i-2m)m}(t), & 2m+1 \leq i \leq 3m; \\ h_{(i-3m)m}(t), & 3m+1 \leq i \leq 4m. \end{cases} \tag{2.20}$$

Sabendo-se que $Y'_m(t) = \frac{dY_m}{dt}(t)$ e da Eq. (2.20) tem-se,

$$y'_{im}(t) = \begin{cases} g''_{im}(t), & 1 \leq i \leq m; \\ h''_{(i-m)m}(t), & m+1 \leq i \leq 2m; \\ g'_{(i-2m)m}(t), & 2m+1 \leq i \leq 3m; \\ h'_{(i-3m)m}(t), & 3m+1 \leq i \leq 4m. \end{cases} \tag{2.21}$$

Das Eqs. (2.19) - (2.21) definem-se as seguintes matrizes,

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{K} & \\ 0 & & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}; \\ \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{D} \\ & -\boldsymbol{M} & -\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{I} & & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Das condições iniciais tem-se que

$$\begin{cases} g'_{im}(0) = c_i, & 1 \leq i \leq m; \\ h'_{(i-m)m}(0) = e_i, & m+1 \leq i \leq 2m; \\ g_{(i-2m)m}(0) = d_i, & 2m+1 \leq i \leq 3m; \\ h_{(i-3m)m}(0) = f_i, & 3m+1 \leq i \leq 4m. \end{cases} \tag{2.23}$$

Notando que $Y_m(0) = [y_{im}(0)]_{4m\times 1}$ e da Eq. (2.23) tem-se que

$$y_{im}(0) = \begin{cases} g_{im}(0), & 1 \leq i \leq m; \\ h_{im}(0), & m+1 \leq i \leq 2m; \\ g'_{im}(0), & 2m+1 \leq i \leq 3m; \\ h'_{im}(0), & 3m+1 \leq i \leq 4m. \end{cases} \tag{2.24}$$

Das definições apresentadas nas Eqs. (2.22)-(2.24) chega-se a um sistema de EDO's lineares de segunda ordem a ser resolvido para $\left\{y_{im}(t)\right\}_{i=1}^{4m}$, representado da seguinte forma,

$$\begin{cases} \text{Determinar } Y_m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{4m} \text{ tal que,} \\ \mathcal{A}Y'_m(t) = \mathcal{K}Y_m(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}; \\ \text{sujeito a} \\ Y_m(0) = Y_0. \end{cases} \tag{2.25}$$

O PVI definido na Eq. (2.25) possui solução se *existir* $\mathcal{A}^{-1}$. Isso é assegurado pelo seguinte lema:

Lema 2.1 *: A matriz $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{4m}(\mathbb{R})$ definida na Eq. (2.22.a) é inversível.*

Demonstração: Notando-se que $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{4m}(\mathbb{R})$ é uma matriz por *blocos* e utilizando-se a *fórmula* para inversa de *matrizes blocos*, Eq. (0.7.3.1), pg. 18 de [61], tem-se que,

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{K} \end{pmatrix}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix};$$

das definições expressas nas Eqs. (2.13) e (2.17) aplicando, novamente, a *fórmula* para inversa de *matrizes blocos* chega-se,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & 0 \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{K} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & 0 \\ -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{K}^{-1} \end{pmatrix}.$$

A partir disso, deve-se verificar a existência das matrizes $\boldsymbol{B}^{-1}$ e $\boldsymbol{K}^{-1}$. Para tanto, utilizando-se o fato de que estas matrizes são *quadradas* pelo *resultado* expresso na pg. 88 de [73], basta mostrar que as colunas destas matrizes são *linearmente independentes*. É fácil *ver* a partir da Eq. (2.13.b), que $\boldsymbol{K}$ consiste de uma matriz *diagonal*. As entradas da diagonal principal são não-nulas, e desta forma a matriz $\boldsymbol{K}^{-1}$ existe. A matriz $\boldsymbol{B}$ não possui esta *esparsidade*, pois **não** pode-se usar a propriedade de *ortogonalidade* dos elementos da base Hilbertiana, conforme a definição das entradas, Eq. (2.13.a). Desta forma, deve-se mostrar que a *independência linear* das colunas da matriz $\boldsymbol{B}$. Com efeito avalia-se,

$$\theta_1.\begin{Bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b_1} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \cdots + \theta_m.\begin{Bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b_m} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \theta_i.b_{ji} = 0, \quad \forall j \in \{1, \cdots, m\};$$

ou ainda,

$$\theta_1.b_{j1} + \cdots + \theta_m.b_{jm} = 0, \quad \forall j \in \{1, \cdots, m\}.$$

Desta última *identidade* e da definição das entradas da matriz $\boldsymbol{B}$ apresentada na Eq. (2.13.a),

$$0 = \theta_1.b_{j1} + \cdots + \theta_m.b_{jm} = \theta_1.\left[\left(\rho A u_j, u_1\right) + \frac{21}{17}.\left(\gamma u'_j, u'_1\right)\right] + \cdots + \theta_m.\left[\left(\rho A u_j, u_m\right) + \frac{21}{17}.\left(\gamma u'_j, u'_m\right)\right]$$

$$= \left(\rho A u_j, \theta_1.u_1 + \cdots + \theta_m.u_m\right) + \frac{21}{17}.\left(\gamma u'_j, \theta_1.u'_1 + \cdots + \theta_m.u'_m\right), \quad \forall j \in \{1, \cdots, m\}.$$

Multiplicando-se a equação anterior por θ_j com $j \in \{1, \cdots, m\}$ e somando-se as equações geradas

$$\left(\sqrt{\rho A}.\sum_{j=1}^{m}\theta_j.u_j, \sqrt{\rho A}.\sum_{j=1}^{m}\theta_j.u_j\right) + \frac{21}{17}.\left(\sqrt{\gamma}.\sum_{j=1}^{m}\theta_j.u_j', \sqrt{\gamma}.\sum_{j=1}^{m}\theta_j.u_j'\right) = 0.$$

Notando que a última equação possui *parcelas positivas* então *sem perda de generalidade* toma-se

$$\left(\sqrt{\rho A}.\sum_{j=1}^{m}\theta_j.u_j, \sqrt{\rho A}.\sum_{j=1}^{m}\theta_j.u_j\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\rho A}.\sum_{j=1}^{m}\theta_j.u_j(x) = 0, \quad q.t.p. \quad em \quad [0, l].$$

Da hipótese (H2), Eq. (2.3.e), e do fato de u_j's serem elementos de uma base Hilbertiana tem-se então, que a única *escolha* possível para a combinação linear nula é $\theta_1 = \cdots = \theta_m = 0$, e portanto as colunas da matriz são *linearmente independentes* e o resultado está demonstrado. ■

A partir disso, definido-se uma matriz $\mathcal{F} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}$ reformula-se o PVI definido na Eq. (2.25) como sendo

$$\begin{cases} \text{Determinar } Y_m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{4m} \text{ tal que,} \\ Y_m'(t) = \mathcal{F}Y_m(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+; \\ \text{sujeito a} \\ Y_m(0) = Y_0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Do **Teorema 4.1** pg. 75 de [37] tem-se que o PVI definido na Eq. (2.26) tem solução única dada por,

$$Y_m(t) = Y_0 e^{t.\mathcal{F}}, \quad t \in [0, T] \subseteq \mathbb{R}^+. \tag{2.27}$$

Utilizando-se este resultado nas Eqs. (2.11) e (2.8) são obtidas as soluções *globais* aproximadas de Galerkin.

2.3.2 Estimativas a *Priori* e Prolongamento da Solução

Na etapa anterior foram obtidas *soluções aproximadas globais* e portanto não se faz necessário o *prolongamento* das soluções aproximadas. Nesta seção, mesmo sem ter ainda demonstrado a *existência* da solução são obtidas estimativas para as aproximações de Galerkin, denotadas por "estimativas *a priori*". Para tanto é necessário utilizar-se as hipóteses sobre os dados iniciais. Para um $t \in [0,T]$, fixado, tem-se que $\big(w_m(t), \psi_m(t)\big) \in V_m$, a partir disso, toma-se na Eq. (2.9), $v = w_m(t)$ e $\phi = \psi_m(t)$,

$$
\begin{cases}
\Big(\rho A \frac{\partial w_m}{\partial t}(t), \frac{\partial w_m}{\partial t}(t)\Big) + 4\Big(\gamma.\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big)(t), \Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big)(t)\Big) \\
+4.\Big(\gamma.\frac{\partial \psi_m}{\partial t}(t), \frac{\partial \psi_m}{\partial t}(t)\Big) + \Big(\gamma.\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t), \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t)\Big) + \Big(\beta.\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}(t)\Big) \\
+4.\Big(\beta.\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial x}\Big)(t), \Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial x}\Big)(t)\Big) + 4.\Big(\beta.\frac{\partial \psi}{\partial x}(t), \frac{\partial \phi}{\partial x}(t)\Big) \\
+\Big(\alpha.\Big(\frac{\partial w_m}{\partial x} + \psi_m\Big)(t), \Big(\frac{\partial w_m}{\partial x} + \psi_m\Big)(t)\Big) = \Big(\rho A w_{m1}, w_{m1}\Big) + 4.\Big(\gamma.\psi_{m1}, \psi_{m1}\Big) \\
+4.\Big(\gamma.\Big(\frac{\partial w_{m1}}{\partial x} - 4\psi_{m1}\Big), \frac{\partial w_{m1}}{\partial x} - 4\psi_1\Big) + 4.\Big(\beta.\Big(\frac{\partial^2 w_{m0}}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\Big), \frac{\partial^2 w_{m0}}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi_{m0}}{\partial x}\Big) \\
+\Big(\gamma.\frac{\partial w_{m1}}{\partial x}, \frac{\partial w_{m1}}{\partial x}\Big) + \Big(\beta.\frac{\partial^2 w_{m0}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_{m0}}{\partial x^2}\Big) + \Big(\alpha.\Big(\frac{\partial w_{m0}}{\partial x} + \psi_{m0}\Big), \frac{\partial w_{m0}}{\partial x} + \psi_{m0}\Big) \\
+4.\Big(\beta.\frac{\partial \psi_{m0}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{m0}}{\partial x}\Big), \quad \forall t \in [0, t_m); \\
\text{sujeito a} \\
w_m(x,0) = w_{0m}(x); \\
\psi_m(x,0) = \psi_{0m}(x); \\
\frac{\partial w_m}{\partial x}(x,0) = w_{1m}(x); \\
\frac{\partial \psi_m}{\partial x}(x,0) = \psi_{1m}(x), \quad \forall x \in [0,l].
\end{cases}
\tag{2.28}
$$

Utilizando-se na Eq. (2.28) a regularidade dos dados iniciais, hipótese (H1), e a limitação nos coeficientes, hipótese (H2), chega-se a seguinte majoração,

$$
\begin{cases}
\Big\|\frac{\partial w_m}{\partial t}(t)\Big\|^2 + \Big\|\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big)(t)\Big\|^2 + \Big\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}(t)\Big\|^2 + \Big\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t)\Big\|^2 + \Big\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}(t)\Big\| \\
+\Big\|\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial x}\Big)(t)\Big\|^2 + \Big\|\Big(\frac{\partial w_m}{\partial x} + \psi_m\Big)(t)\Big\|^2 + \Big\|\frac{\partial \psi_m}{\partial x}(t)\Big\|^2 \leq C, \quad \forall t \in [0, t_m).
\end{cases}
\tag{2.29}
$$

Da Eq. (2.30) são válidas as seguintes estimativas,

$$\begin{cases} \left\| \frac{\partial w_m}{\partial t}(t) \right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\| \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \right)(t) \right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\| \frac{\partial \psi_m}{\partial t}(t) \right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\| \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t) \right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\| \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}(t) \right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\| \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right)(t) \right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\| \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} + \psi_m \right)(t) \right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\| \frac{\partial \psi_m}{\partial x}(t) \right\| \leq \sqrt{C}, \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Em vista disso tem-se que as seqüências,

$$\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)_{m \in \mathbb{N}}, \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} \right)_{m \in \mathbb{N}}, \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \right)_{m \in \mathbb{N}}, \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)_{m \in \mathbb{N}};$$

$$\left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)_{m \in \mathbb{N}}, \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right)_{m \in \mathbb{N}}, (\psi_m)_{m \in \mathbb{N}};$$

são limitadas em $L^\infty(0,T;L^2(0,l))$. Da construção das aproximações de Galerkin, Eq. (2.8), e das limitações apresentadas na Eq. (2.30) tem-se que $(w_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l)\big)$ e $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,l)\big)$.

O objetivo a seguir é realizar novas estimativas a *priori*, no intervalo $[0,T]$, para mostrar que a sequência de soluções aproximadas, $\Big\{(w_m)_{m \in \mathbb{N}}, (\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}\Big\}$, converge para uma função (w,ψ), em um certo sentido, $(fraco - \star)$. Isto permite mostrar, por passagem ao limite de $\Big\{(w_m)_{m \in \mathbb{N}}, (\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}\Big\}$ no problema variacional aproximado, se obtenha que (w,ψ) seja solução do problema variacional abstrato, Eq. (2.6). Para se obter limitações para $\Big\{(w_m'')_{m \in \mathbb{N}}, (\psi_m'')_{m \in \mathbb{N}}\Big\}$, deve-se estimar $\big(w_m''(0), \psi_m''(0)\big)$ em $L^2(0,l)$. Diferenciando-se a Eq. (2.1.b) em relação a "x" e multiplicando-se a Eq. (2.1.a) por "$-\frac{17}{4}$" e somando-se

as equações resultantes chega-se ao seguinte problema:

$$\begin{cases} \text{Determinar } (w,\psi):[0,l]\times[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^2, \text{ tal que} \\ 17\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-21\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\Big(\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\Big) \\ \qquad\qquad -21\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\Big)\Big)=0, \quad x\in(0,l), \quad t>0; \\ \text{sujeita a condições iniciais e de contorno,} \\ w(x,0)=w_0(x); \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=w_1(x); \\ \psi(x,0)=\psi_0(x); \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0)=\psi_1(x), \quad \forall x\in[0,l]; \\ w(0,t)=w(l,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)=0; \\ \psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \quad \forall t\in[0,T]. \end{cases} \tag{2.31}$$

Uma majoração útil para limitação sobre a seqüência $\Big(\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^2\partial t^2}\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ é obtida fazendo-se $w=w_m$ e $\psi=\psi_m$ na Eq. (2.31), multiplicando-se por "$\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^2\partial t^2}$" e integrando-se em $[0,l]$,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^2\partial t^2}(t)\right\| \leq \frac{m\acute{a}x\{17.\rho\bar{.}A,21.\bar{\gamma}',21.\bar{\alpha}\}}{21.\bar{\gamma}}.\Bigg[\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|+\left\|\frac{\partial^3 w_m}{\partial x\partial t^2}(t)\right\| \\ +\left\|\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}+\psi_m\right)(t)\right\|+\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}(t)\right\|+\left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial x}(t)\right\|\Bigg], \quad \forall t\in[0,t_m). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Tomando-se $w=w_m$ e $\psi=\psi_m$ na Eq. (2.31), multiplicando-se por "$\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}$" e integrando-se em $[0,l]$, obtém-se a seguinte desigualdade,

$$\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2+\left\|\frac{\partial^3 w_m}{\partial x\partial t^2}(t)\right\|^2\leq C\Big[\big\|w_m(t)\big\|_{H^2}+\big\|\psi_m(t)\big\|_{H^1}\Big]\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|, \quad \forall t\in[0,t_m). \tag{2.33}$$

Da Eq. (2.33) valem as seguintes majorações,

$$\begin{cases} \left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|\leq C\Big[\big\|w_m(t)\big\|_{H^2}+\big\|\psi_m(t)\big\|_{H^1}\Big]; \\ \left\|\frac{\partial^3 w_m}{\partial x\partial t^2}(t)\right\|^2\leq C\Big[\big\|w_m(t)\big\|_{H^2}+\big\|\psi_m(t)\big\|_{H^1}\Big]\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|, \quad \forall t\in[0,t_m). \end{cases} \tag{2.34}$$

Considerando que, $w_{2m}(x)=\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(x,0)$ e $\frac{\partial w_{2m}}{\partial x}(x)=\frac{\partial^3 w_m}{\partial x\partial t^2}(x,0)$, utilizam-se os dados

iniciais ao avaliar a Eq.(2.33) em $t = 0$,

$$\begin{cases} \|w_{2m}\| \leq C\Big[\|w_0\|_{H^4} + \|\psi_0\|_{H^3}\Big]; \\ \left\|\frac{\partial w_{2m}}{\partial x}\right\| \leq C\Big[\|w_0\|_{H^4} + \|\psi_0\|_{H^3}\Big], \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.35}$$

É necessário se obter uma estimativa para "$\| \psi_{2m} \|$". Para tanto tomando-se na Eq. (2.1.b), $w(t) = w_m(t)$ e $\psi(t) = \psi_m(t)$, multiplicando-se por $\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(t)$ e integrando-se em $[0, l]$ obtém-se,

$$\|\psi_{2m}\| \leq C\Big[\|w_0\|_{H^4} + \|\psi_0\|_{H^3}\Big], \quad \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{2.36}$$

A Eq. (2.36) mostra que a função "ψ_{2m}" é limitada pelos dados iniciais do problema, hipótese H2, Eq. (2.3). Além disso, da definição dos dados iniciais tem-se que,

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 \psi_{0m}}{\partial t^2}(x) = \psi_{2m}(x).$$

Por outro lado, da Eq. (2.8.b)

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(x, 0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d^2 h_{jm}}{dt^2}(0)\phi_j(x) = \sum_{j=1}^{m} e_j \phi_j(x).$$

Da limitação expressa na Eq. (2.35) e da ortogonalidade dos elementos da base, para algum $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \frac{d^2 g_{jm}}{dt^2}(0) = d_j; \\ \frac{d^2 h_{jm}}{dt^2}(0) = e_j, \ m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.37}$$

Definindo-se $Z_m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{4m}$ como sendo, $Z_m(t) = \frac{dY_m}{dt}(t)$ e derivando-se em relação a "t" a Eq. (2.26), obtém-se o seguinte problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \text{Determinar } Z_m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{4m} \text{ tal que,} \\ Z_m'(t) = \mathcal{F} Z_m(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}; \\ Z_m(0) = Z_0; \end{cases} \tag{2.38}$$

sendo $Z_m(t) = [z_{im}(t)]_{4m\times 1}$, cujas componentes são dadas por,

$$z_{im}(t) = \begin{cases} g'_{im}(t), & 1 \le i \le m; \\ h'_{(i-m)m}(t), & m+1 \le i \le 2m; \\ g''_{(i-2m)m}(t), & 2m+1 \le i \le 3m; \\ h''_{(i-3m)m}(t), & 3m+1 \le i \le 4m; \end{cases} \tag{2.39}$$

com condições iniciais,

$$z_{im}(0) = \begin{cases} g'_{im}(0) = b_j, & 1 \le i \le m; \\ h'_{(i-m)m}(0) = c_j, & m+1 \le i \le 2m; \\ g''_{(i-2m)m}(0) = d_j, & 2m+1 \le i \le 3m; \\ h''_{(i-3m)m}(0) = e_j, & 3m+1 \le i \le 4m. \end{cases} \tag{2.40}$$

Novamente, do **Teorema 4.1** pg. 75 de [37] tem-se que o PVI definido na Eq. (2.38) tem solução única, no intervalo $[0,T]$, dada por

$$Z_m(t) = Z_0 e^{t.\mathcal{F}}, \quad t \in [0,T] \subseteq \mathbb{R}^+. \tag{2.41}$$

Utilizando-se este resultado nas Eqs. (2.39) e (2.8) são obtidas as soluções aproximadas de Galerkin *globais* e portanto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{d^2 g_{jm}}{dt^2}(t) u_j(x); \\ \dfrac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{d^2 h_{jm}}{dt^2}(t) \phi_j(x). \end{cases} \tag{2.42}$$

A Eq. (2.42) representa as derivadas parciais, em relação ao tempo, das soluções aproximadas do sistema de EDP's representado na Eq. (2.6). Os coeficientes das combinações lineares que definem "$\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}$" e "$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}$" são as componentes do vetor $Z_m(t)$, solução do sistema de EDO's. Para obter as estimativas a *priori* toma-se na Eq. (2.6), $w(t) = w_m(t)$, $\psi(t) = \psi_m(t)$, $v = \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)$, $\phi = \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(t)$ e a "*derivação sob o sinal de integração*" obtém-se,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\rho A}\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2 + 4\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\gamma}.\left(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2} - 4\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}\right)(t)\right\|^2 + \frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\gamma}.\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2}(t)\right\|^2 \\ + \frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\beta}.\frac{\partial^3 w_m}{\partial t \partial x^2}(t)\right\|^2 + 4.\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\beta}.\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t)\right\|^2 + 4.\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\beta}.\left(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial t} - 4\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial t}\right)(t)\right\|^2 \\ + \frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\alpha}.\left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right)(t)\right\|^2 + 4.\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\gamma}.\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2 = 0, \quad \forall t \in [0, t_m). \end{cases} \tag{2.43}$$

Integrando-se a Eq. (2.86) em um intervalo $[0,t) \subseteq [0,T]$ e utilizando-se a hipótese sobre os dados iniciais, Eqs. (2.3), chega-se

$$\left\{\begin{array}{l} \left\|\sqrt{\rho A}\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\gamma}\Big(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2} - 4\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}\Big)(t)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\gamma}.\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2}(t)\right\|^2 \\ +\left\|\sqrt{\beta}.\frac{\partial^3 w_m}{\partial t \partial x^2}(t)\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\beta}.\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t)\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\beta}.\Big(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial t} - 4\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial t}\Big)(t)\right\|^2 \\ +\left\|\sqrt{\alpha}.\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big)(t)\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\gamma}.\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2 = \left\|\sqrt{\rho A}.w_{2m}\right\|^2 + \left\|\sqrt{\gamma}.\frac{\partial w_{2m}}{\partial x}\right\|^2 \\ +4.\left\|\sqrt{\gamma}.\Big(\frac{\partial w_{2m}}{\partial x} - 4\psi_{2m}\Big)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\beta}.\frac{\partial^2 w_{1m}}{\partial x^2}\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\beta}.\frac{\partial w_{1m}}{\partial x}\right\|^2 \\ +4.\left\|\sqrt{\beta}.\Big(\frac{\partial^2 w_{1m}}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi_{1m}}{\partial x}\Big)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\alpha}.\Big(\frac{\partial w_{1m}}{\partial x} + \psi_{1m}\Big)\right\|^2 \\ +4.\left\|\sqrt{\gamma}.\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2, \quad \forall t \in [0,T]. \end{array}\right. \tag{2.44}$$

Das hipóteses sobre os coeficientes, Eqs. (2.3), obtém-se a seguinte desigualdade,

$$\left\{\begin{array}{l} \{\sqrt{\underline{\rho A}}, \sqrt{\underline{\gamma}}, \sqrt{\underline{\beta}}\}\left[\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2 + 4\left\|\Big(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2} - 4\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}\Big)(t)\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2}(t)\right\|^2\right. \\ +\left\|\frac{\partial^3 w_m}{\partial t \partial x^2}(t)\right\|^2 + 4\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t)\right\|^2 + 4\left\|\Big(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial t} - 4\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial t}\Big)(t)\right\|^2 \\ \left.+\left\|\Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big)(t)\right\|^2 + 4\left\|\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(t)\right\|^2\right] \leq \left\{\sqrt{\bar{\rho A}}, \sqrt{\bar{\gamma}}, \sqrt{\bar{\beta}}\right\}\left(\|w_{2m}\|^2 + \right. \\ \left\|\frac{\partial w_{2m}}{\partial x}\right\|^2 + 4\left\|\frac{\partial w_{2m}}{\partial x} - 4\frac{\partial \psi_{1m}}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 w_{1m}}{\partial x^2}\right\|^2 + 4\left\|\frac{\partial w_{1m}}{\partial x}\right\|^2 \\ \left.+4\left\|\frac{\partial w_{1m}}{\partial x} - 4\frac{\partial \psi_{1m}}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial w_{1m}}{\partial x} + \psi_{1m}\right\|^2 + 4\|\psi_{2m}\|^2\right), \quad \forall t \in [0,t) \subset [0,T]. \end{array}\right. \tag{2.45}$$

Da hipótese H1, Eq. (2.2), representação dos dados inicias, Eq. (2.11), e da Eq. (2.32) obtém-se as seguintes majorações,

$$\left\{\begin{array}{l} \left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t)\right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\|\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2}(t)\right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\|\frac{\partial^3 w_m}{\partial t \partial x^2}(t)\right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\|\frac{\partial^4 w_m}{\partial t^2 \partial x^2}(t)\right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}(t)\right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\|\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial t}(t)\right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}(t)\right\| \leq \sqrt{C}; \\ \left\|\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}(t)\right\| \leq \sqrt{C}, \quad \forall t \in [0,T], \ m \in \mathbb{N}. \end{array}\right. \tag{2.46}$$

2.3.3 Passagem ao Limite

Nesta seção, faz-se a *passagem ao limite* das soluções aproximadas globais. Das limitações das seqüências e de resultados de compacidade em espaços de evolução, obtém-se os limites fracos das seqúências. Tais limites tratam-se das soluções fracas e suas derivadas, do seguinte problema variacional abstrato:

$$\begin{cases} \text{Determinar } (w,\psi) \in V, \text{ tal que } \forall (v,\phi) \in V, \\ -\Big(\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t), v\Big) - \Big(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(\gamma\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 16\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)(t)\Big), v\Big) \\ \qquad \Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)(t), \frac{\partial v}{\partial x}\Big) - \Big(\beta\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 16\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) = 0; \\ \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 68\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)(t)\Big), \phi\Big) + \Big(\beta\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 68\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)(t), \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) \\ \qquad\qquad -\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)(t), \phi\Big) = 0, \quad t > 0; \\ \text{sujeito a,} \\ w(x,0) = w_0(x); \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x); \\ \psi(x,0) = \psi_0(x); \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x), \ q.t.p. \ \ em \ \ [0,l]. \end{cases} \tag{2.47}$$

Deve-se estudar o limite de cada uma das parcelas da equação variacional, Eq. (2.47). As convergências destas seqüências para os seus limites fracos serão obtidas em $D'(0,T)$. Para isso serão utilizados resultados relacionados a imersões, continência e reflexividade em espaços de evolução. Das limitações apresentadas na Eq. (2.46) conclui-se que,

$$\begin{cases} \Big(\frac{\partial w_m}{\partial t}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial t}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \\ \Big(\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^2 \partial t^2}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial t}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial^3 w_m}{\partial x \partial t^2}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \\ \Big(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial \psi_m}{\partial x}\Big)_{m\in\mathbb{N}}, \Big(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\Big)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.48}$$

Das Eqs. (2.30) e (2.46) tem-se que tomando-se $p = 2$ e $q = +\infty$ e para $X \hookrightarrow Y$, espaços de Banach, obtém-se

$$\begin{cases} (w_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \left(\frac{\partial w_m}{\partial t}\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(0,l)); \\ (\psi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(0,l)); \\ \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;L^2(0,l)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.49}$$

Dos fatos apresentados na Eq.(2.49) e sabendo que as seqüências são limitadas em espaços de Banach utiliza-se o teorema 1.8, (**Banach - Alaoglu - Bourbaki**), e 1.13 para se obter subseqüências convergentes fraco - $\star$ para os seguintes limites,

$$\begin{cases} w_{m_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} w, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \frac{\partial w_{m_k}}{\partial t} \overset{\star}{\rightharpoonup} v, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \frac{\partial w_{m_k}^2}{\partial t^2} \overset{\star}{\rightharpoonup} g, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \psi_{m_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} \psi, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)); \\ \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t} \overset{\star}{\rightharpoonup} p, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)); \\ \frac{\partial^2 \psi_{m_k}}{\partial t^2} \overset{\star}{\rightharpoonup} h, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.50}$$

Estudam-se, separadamente, as convergências apresentadas na Eq. (2.50):

• $\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t} \overset{\star}{\rightharpoonup} v, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)).$

Da Eq. (2.49.b) define-se o seguinte conjunto,

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial w_m}{\partial t} \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l)\big) \;\middle|\; \left\| \frac{1}{\sqrt{C}}.\frac{\partial w_m}{\partial t}(t) \right\| \leq 1, \;\; \forall t \in [0,T] \right\}.$$

O conjunto $\mathcal{B}$ conforme teorema 1.8 é compacto na topologia fraco - $\star$ e, além disso,

sabendo-se que $H_0^2(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ é um espaço de Hilbert separável. Tomando-se na observação 1.10, item (iv), $X = L^2(0,l)$ e $p = 1$ obtém-se $\Big(L^1(0,T;L^2(0,l))\Big)' \cong L^\infty(0,T;L^2(0,l))$ e do ítem (v) da observação 1.10 tem-se que,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \big(w_{m_k}(t),\varphi(t)\big)dt \xrightarrow{m_k\to\infty} \int_0^T \big(w(t),\varphi(t)\big)dt, \quad \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(0,l)); \\ \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t),\vartheta(t)\right)dt \xrightarrow{m_k\to\infty} \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t),\vartheta(t)\right)dt, \quad \forall \vartheta \in L^1(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.51}$$

Tomando-se $u \in H_0^2(0,l)$ e $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ e definindo-se

$$\begin{cases} \varphi(x,t) = u(x).\phi'(t); \\ \vartheta(x,t) = u(x).\phi(t). \end{cases} \tag{2.52}$$

Colocando-se a Eq. (2.52.a) na Eq. (2.51.a) obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_0^T \big(w_{m_k}(t),\varphi(t)\big)dt = \int_0^T \big(w_{m_k}(t),u.\phi'(t)\big)dt = \big(w_{m_k}(t),u\big).\phi(t)\Big|_0^T \\ - \int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t),u\right).\phi(t)dt = -\int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t),\varphi(t)\right)dt. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Das convergências apresentadas na Eq. (2.50.a) e (2.50.b) tem-se,

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t),\varphi(t)\right)dt \xrightarrow{m_k\to\infty} -\int_0^T \big(v(t),\varphi(t)\big)dt; \\ \displaystyle\int_0^T \big(w_{m_k}(t),u\big).\phi'(t)dt \xrightarrow{m_k\to\infty} \int_0^T \big(w(t),u\big).\phi'(t)dt. \end{cases} \tag{2.54}$$

Das Eqs. (2.53) e (2.59) chega-se,

$$\int_0^T \big(w(t),u\big).\phi'(t)dt = -\int_0^T \big(v(t),u\big).\phi(t)dt = \int_0^T \big(-v(t).\phi(t),u\big)dt;$$

$$\int_0^T \big(w(t).\phi'(t),u\big)dt = \int_0^T \big(v(t),u\big).\phi(t)dt = \int_0^T \big(v(t).\phi(t),u\big)dt;$$

$$\left(\int_0^T w(t).\phi'(t)dt,u\right) = \left(\int_0^T -v(t).\phi(t)dt,u\right);$$

$$\left(\int_0^T w(t).\phi'(t)dt + \int_0^T v(t).\phi(t)dt,u\right) = 0, \quad \forall u \in H_0^2(0,l).$$

Da última identidade e da definição 1.25 tem-se que,

$$\begin{cases} i)\ v = \dfrac{\partial w}{\partial t}; \\ ii)\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.55}$$

• $\underline{\frac{\partial w_{m_k}^2}{\partial t^2} \overset{\star}{\rightharpoonup} g, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)).}$

Da Eq. (2.49.c) define-se o seguinte conjunto,

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \in L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,l)\big) \;\middle|\; \left\| \frac{1}{\sqrt{C}}.\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}(t) \right\| \leq 1, \;\; \forall t \in [0,T] \right\}.$$

Tem-se os seguintes fatos, o conjunto $\mathcal{B}$ conforme teorema 1.8 é compacto na topologia fraco - $\star$ e $H_0^2(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ é um espaço de Hilbert separável. Analogamente, tomando-se na observação 1.10, ítem (iv), $X = L^2(0,l)$ e $p = 1$ obtém-se $\Big(L^1(0,T;L^2(0,l))\Big)' \cong L^\infty(0,T;L^2(0,l))$ e 1.10, ítem (v). A partir disso, as convergências fraco - $\star$, apresentadas nas Eqs. (2.50.b), (2.50.c) e (2.55), são *identificadas* como,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t), \varphi(t) \right) dt \xrightarrow{m_k \to \infty} \int_0^T \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t), \varphi(t) \right) dt, \quad \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(0,l)); \\ \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(t), \vartheta(t) \right) dt \xrightarrow{m_k \to \infty} \int_0^T \big(g(t), \vartheta(t) \big) dt, \quad \forall \vartheta \in L^1(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.56}$$

Tomando-se $u \in H_0^1(0,l)$ e $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ e definindo-se

$$\begin{cases} \varphi(x,t) = u(x).\phi'(t); \\ \vartheta(x,t) = u(x).\phi(t). \end{cases} \tag{2.57}$$

Colocando-se na Eq. (2.56.a) a Eq. (2.57.a) obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t), \varphi(t) \right) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t), u.\phi'(t) \right) dt = \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t), u \right).\phi(t) \Big|_0^T \\ - \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(t), u \right).\phi(t) dt = - \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(t), \vartheta(t) \right) dt. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Das convergências apresentadas nas Eqs. (2.56) - (2.58) tem-se,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(t), u \right).\phi'(t) dt \xrightarrow{m_k \to \infty} - \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t), u \right).\phi(t) dt; \\ \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(t), u \right).\phi(t) dt \xrightarrow{m_k \to \infty} \int_0^T \big(g(t), u \big).\phi(t) dt. \end{cases} \tag{2.59}$$

Das Eqs. (2.55) e (2.59) tem-se,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t), u \right).\phi'(t) dt = - \int_0^T \big(g(t), u \big).\phi(t) dt = \int_0^T \big(- g(t).\phi(t), u \big) dt;$$

$$\left(\int_0^T \frac{\partial w}{\partial t}(t).\phi'(t)dt, u \right) = \left(\int_0^T -g(t).\phi(t)dt, u \right);$$

$$\left(\int_0^T \frac{\partial w}{\partial t}(t).\phi'(t)dt + \int_0^T g(t).\phi(t)dt, u \right) = 0, \quad \forall u \in H_0^1(0,l).$$

Da última identidade e da definição 1.25 tem-se que,

$$\begin{cases} i)\ g = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ ii)\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \in L^\infty(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.60}$$

Os limites na topologia fraco - $\star$ das Eqs. (2.50.d)-(2.50.e) são estabelecidos de forma similar, aos obtidos nas Eqs. (2.50.a) - (2.50.c).

$$\begin{cases} w_{m_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} w, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \frac{\partial w_{m_k}}{\partial t} \overset{\star}{\rightharpoonup} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \frac{\partial w_{m_k}^2}{\partial t^2} \overset{\star}{\rightharpoonup} \frac{\partial w^2}{\partial t^2}, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)); \\ \psi_{m_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} \psi, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)); \\ \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t} \overset{\star}{\rightharpoonup} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)); \\ \frac{\partial^2 \psi_{m_k}}{\partial t^2} \overset{\star}{\rightharpoonup} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.61}$$

A partir disso, com auxílio do teorema 1.13, (Teorema de Compacidade de Aubin-Lions), obtém-se limites nas topologias "L^2". Para tanto sabendo-se que $H_0^2(0,l) \subset\subset L^2(0,l)$, toma-se no teorema 1.13, $X_0 = H_0^2(0,l)$ e $X = X_1 = L^2(0,l)$ define-se o seguinte conjunto,

$$\mathcal{W} = \left\{ w : [0,l] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; w \in L^2\big(0,T;H_0^2(0,l)\big);\ w'(t) \in L^2\big(0,T;L^2(0,l)\big) \right\};$$

munido com a norma,

$$\|w\|_{\mathcal{W}} = \|w\|_{L^2(0,T;H_0^2(0,l))} + \|w'\|_{L^2(0,T;L^2(0,l))};$$

tem-se então que $\mathcal{W}$ é um espaço de Banach e $\mathcal{W} \subset\subset L^2\big(0,T;H_0^2(0,l)\big)$ está *compactamente* imerso. Considerando que $L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l)\big) \hookrightarrow L^2\big(0,T;H_0^2(0,l)\big)$ e $L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big) \hookrightarrow$

$L^2\big(0,T;L^2(0,l)\big)$, resulta que as seqüências $\big(w_m\big)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^2\big(0,T;H_0^2(0,l)\big)$ e $\big(w'_m\big)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^2\big(0,T;L^2(0,l)\big)$ são limitadas nestes espaços. Da imersão compacta pode-se extrair subseqüências, $\big(w_{m_k}\big)_{m_k\in\mathbb{N}} \subset \big(w_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$, tais que

$$w_{m_k} \xrightarrow{m_k\to\infty} w, \quad \text{em } L^2\big(0,T;H_0^2(0,l)\big). \tag{2.62}$$

Sabendo-se que $H_0^2(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ implica, do ítem (III) da observação 1.10, tomando-se $Q = (0,T)\times(0,l)$ tem-se

$$w_{m_k} \xrightarrow{m_k\to\infty} w, \quad \text{em } L^2\big((0,T)\times(0,l)\big);$$

e de um resultado clássico da teoria de medida para seqüências convergentes em "$L^p(Q)$" obtém-se

$$w_{m_k} \xrightarrow{m_k\to\infty} w, \quad \text{em } L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big). \tag{2.63}$$

A convergência apresentada na Eq. (2.63) é estendida as derivadas distribucionais até ordem 2, resultando que $w \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l)\big)$. Além disso, notando que $\big(w'_m\big)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(0,l))$, e considerando que $\mathcal{W} \subset\subset L^2\big(0,T;L^2(0,l)\big)$ extrai-se uma subseqüência, $\big(w_{m_k}\big)_{m_k\in\mathbb{N}} \subset \big(w_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$, convergente

$$w'_{m_k} \xrightarrow{m_k\to\infty} w', \quad \text{em } L^2\big(0,T;L^2(0,l)\big). \tag{2.64}$$

Deve-se mostrar a partir do problema variacional aproximado, Eq. (2.47), que as seqüências, Eq (2.61) convergem no sentido de $D'(0,T)$, para um limite relacionado a solução do PVA, Eq. (2.47). Da convergência expressa na Eq. (2.61.a), e sabendo-se que $L^\infty(0,T;H_0^2(0,l)) \subset \Big(L^1\big(0,T;H_0^2(0,l)\big)\Big)'$, tem-se que,

$$\left\langle \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}, \phi \right\rangle \xrightarrow{m_k\to\infty} \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0,T;H_0^2(0,l)). \tag{2.65}$$

Tomando-se $\phi(x,t) = v(x)\theta(t)$, com $\theta \in D(0,T) \subset L^1(0,T)$ e $v \in H_0^2(0,l)$, em vista disso calcula-se,

$$\left\langle \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}, \phi \right\rangle = \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}\phi \right)(x,t)dxdt = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(t), v \right) \theta(t) dt.$$

Da continuidade do produto interno resulta que,

$$\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(t), v \right) \xrightarrow{m_k \to \infty} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t), v \right), \quad \text{em} \quad D'(0,T), \quad \forall v \in H_0^2(0,l); \tag{2.66}$$

converge no sentido de $D'(0,T)$. Em vista da convergência expressa na Eq. (2.61.a) e sabendo-se que $H_0^2(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ tem-se que,

$$\frac{\partial w_{m_k}^2}{\partial x^2} \overset{\star}{\rightharpoonup} \frac{\partial w^2}{\partial x^2}, \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,l)). \tag{2.67}$$

A Eq. (2.67) significa que,

$$\left\langle \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x^2}, \phi \right\rangle \xrightarrow{m_k \to \infty} \left\langle \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x^2}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0,T;L^2(0,l)). \tag{2.68}$$

Tomando-se na Eq. (2.67) $\phi(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)\theta(t)$, com $\theta \in D(0,T) \subset L^1(0,T)$ e $v \in H_0^2(0,l)$,

$$\left\langle \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x^2}, \phi \right\rangle = \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x^2} \phi \right)(x,t) dx dt = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) \theta(t) dx dt$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \theta(t) dt \xrightarrow{m_k \to \infty} \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \theta(t) dt, \quad \forall \theta \in D(0,T).$$

Desta forma tem-se que,

$$\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \xrightarrow{m_k \to \infty} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad \forall v \in H_0^2(0,l); \tag{2.69}$$

no sentido de $D'(0,T)$.

Da convergência expressa na Eq. (2.61.e) tem-se que,

$$\left\langle \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}, \phi \right\rangle \xrightarrow{m_k \to \infty} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0,T;H_0^1(0,l)). \tag{2.70}$$

Tomando-se $\phi(x,t) = v(x)\theta(t)$, com $\theta \in D(0,T) \subset L^1(0,T)$ e $v \in H_0^1(0,l)$ calcula-se,

$$\left\langle \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}, \phi \right\rangle = \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t} \phi \right)(x,t) dx dt = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(x,t) v(x) \theta(t) dx dt$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(t), v \right)_{L^2} \theta(t) dt \xrightarrow{m_k \to \infty} \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t), v \right)_{L^2} \theta(t) dt, \quad \forall \theta \in D(0,T).$$

Desta forma tem-se que,

$$\left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(t), v\right) \xrightarrow{m_k \to \infty} \left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(t), v\right), \quad \forall v \in H_0^1(0,l); \tag{2.71}$$

no sentido de $D'(0,T)$. Este resultado pode ser estendido, para justificar a seguinte convergência, em $D'(0,T)$,

$$\left\langle \gamma \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}, \phi \right\rangle \xrightarrow{m_k \to \infty} \left\langle \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0,T; H_0^1(0,l));$$

da definição 1.25 tem-se que $\forall v \in H_0^2(0,l)$ e $\theta \in D(0,T)$,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}\right)(t), v\right)\theta(t)dt = -\int_0^T \left(\gamma \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(t), v\right)\theta'(t)dt. \tag{2.72}$$

Combinando-se os resultados anteriores apresentados nas Eqs. (2.70) e (2.72) obtém-se,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}\right), \phi \right\rangle &= -\left\langle \gamma \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \xrightarrow{m_k \to \infty} -\left\langle \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma \frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \phi \right\rangle \quad \forall \phi \in L^1(0,T; H_0^1(0,l)). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Deve-se mostrar a convergência,

$$\left\langle \beta \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial x}, \phi \right\rangle \xrightarrow{m_k \to \infty} \left\langle \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in L^1\big(0,T; L^2(0,l)\big).$$

Para isso, da convergência expressa na Eq. (2.61.d) tem-se que

$$\langle \psi_{m_k}, \phi \rangle \xrightarrow{m_k \to \infty} \langle \psi, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in L^1\big(0,T; H_0^1(0,l)\big).$$

Tomando-se $\phi(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x)\theta(t)$, com $\theta \in D(0,T) \subset L^1(0,T)$ e $v \in H_0^1(0,l)$, com efeito calcula-se,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial x}, \phi \right\rangle &= \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial x}\phi\right)(x,t)dxdt = -\int_0^T \int_0^l \psi_{m_k}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x)\theta(t)dxdt \\ &= -\int_0^T \left(\psi_{m_k}(t), \frac{\partial v}{\partial x}\right)\theta(t)dt \xrightarrow{m_k \to \infty} -\int_0^T \left(\psi(t), \frac{\partial v}{\partial x}\right)\theta(t)dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(t), v\right)\theta(t)dt, \quad \forall \theta \in D(0,T). \end{aligned}$$

A partir deste fato, e tomando-se $\phi(x,t) = u(x)\theta(t)$, em que $u(x) = \left(\frac{1}{\beta}v\right)(x)$ e $\theta \in L^1(0,T)$ e $v \in H_0^1(0,l)$, verifica-se,

$$\left|\left\langle \beta\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial x},\phi\right\rangle - \left\langle \beta\frac{\partial\psi}{\partial x},\phi\right\rangle\right| = \left|\left\langle \beta\left(\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\phi\right\rangle\right|$$

$$= \left|\int_0^T\int_0^l \left(\beta\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial x}\phi - \beta\frac{\partial\psi}{\partial x}\phi\right)(x,t)dxdt\right| = \left|\int_0^T\int_0^l \left(\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(x,t)v(x)\theta(t)dxdt\right|$$

$$= \left|-\int_0^T\int_0^l (\psi_{m_k} - \psi)(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x)\theta(t)dxdt\right| \xrightarrow{m_k\to\infty} 0.$$

Desta forma,

$$\left(\beta\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial x}(t),v\right) \xrightarrow{m_k\to\infty} \left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}(t),v\right), \quad \forall v \in H_0^1(0,l); \tag{2.74}$$

no sentido de $D'(0,T)$.

Estuda-se, para a passagem do limite das seqüências em $D'(0,t)$, a convergência da seguinte parcela,

$$\left\langle \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t},\phi\right\rangle \xrightarrow{m_k\to\infty} \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t},\phi\right\rangle, \quad \forall\phi \in L^1(0,T;H_0^1(0,l)).$$

Identificando-se $L^\infty(0,T;H_0^1(0,l))$ como um subespaço de $(L^1(0,T;H_0^1(0,l)))'$ e tomando-se $\phi(x,t) = v(x)\theta'(t)$, com $v \in H_0^2(0,l)$ e $\theta \in D(0,T) \subset L^1(0,T)$ avalia-se,

$$\left\langle \frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t},\phi\right\rangle = \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t}(t),\phi(t)\right)dt = \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t}(t),v\right)\theta'(t)dxdt$$

$$\xrightarrow{m_k\to\infty} \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}(t),v\right)\theta'(t)dt.$$

Da proposição tem-se que $\forall v \in H_0^1(0,l)$ chega-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t}(t)\right),v\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t}(t),v\right) \xrightarrow{m_k\to\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t},v\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right),v\right); \tag{2.75}$$

em $D'(0,T)$. Se valendo desta última convergência, tomando-se $\phi(x,t) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x).\theta(t)$ com $v \in H_0^1(0,l)$ e $\theta \in D(0,T) \subset L^1(0,T)$ da continuidade do produto interno tem-se,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t}(t),-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t}\right)(t),v\right) \xrightarrow{m_k\to\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial x\partial t}\right)(t),v\right)\\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)(t),v\right).\end{aligned} \tag{2.76}$$

Baseando-se nas convergências apresentadas nas Eqs. (2.66) - (2.76) e fazendo-se no problema variacional aproximado "$m_k \longrightarrow \infty$" resulta que os limites das subseqüências apresentadas na Eq. (2.61) satisfazem, $\forall (v,\phi) \in V$ no sentido de $D'(0,T)$ o problema variacional,

$$\begin{cases} \Big(\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t), v\Big) - \Big(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(\gamma\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 16\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)(t)\Big), \frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\ \qquad\qquad -\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)(t), \frac{\partial v}{\partial x}\Big) - \Big(\beta\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 16\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) = 0; \\ \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 68\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)(t)\Big), \phi\Big) + \Big(\beta\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 68\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)(t), \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) - \Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)(t), \phi\Big) = 0. \end{cases}$$

e conseqüentemente, no sentido de $D'((0,l)\times(0,T))$ tem-se

$$\begin{cases} -\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(\gamma\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 16\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)\Big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\beta\Big(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 16\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)\Big) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 68\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\beta\Big(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 68\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)\Big) - \alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big) = 0. \end{cases} \tag{2.77}$$

Na próxima seção utilizando-se o teorema 1.10 obtém-se a *regularidade* da solução "(w,ψ)".

2.3.4 Regularidade das Soluções

Considere (w,ψ) solução da Eq. (2.77) e notando-se das Eqs. (2.66) - (2.76) que $\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\Big)$, $\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha\frac{\partial w}{\partial x}\Big)$, $\frac{\partial}{\partial x}\big(\alpha\psi\big) \in L^2(0,l)$. A partir destes fatos, o objetivo é utilizar o teorema 1.10 para obter as *regularidades desejadas* para a solução. Para tanto, multiplica-se por "$-\frac{4}{17}$" e diferenciando-se em relação a "x" a Eq. (2.77.b) chega-se,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)(t) = -\frac{17}{21}\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\Big)(t) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)(t)\Big).$$

Em vista disso, do teorema 1.10 tem-se que

$$w(t) \in H^4(0,l),\ q.t.p.\ \text{em}\ [0,T].$$

Já é sabido, Eq. (2.60.a), que $w \in L^\infty(0,T;H_0^2(0,l))$ e conseqüentemente

$$w \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l)\cap H^4(0,l)\big).$$

Para obter a regularidade para "ψ" substitui-se na Eq. (2.77.a) a função "w", com a regularidade obtida, e notando que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\Big)(t) \in L^2(0,l)$ conclui-se que "$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\beta \frac{\partial \psi}{\partial x}(t)\Big) \in L^2(0,l)$" e portanto

$$\psi(t) \in H^3(0,l),\ q.t.p.\ \text{em}\ [0,T].$$

Além disso, sabe-se que $\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,l))$ e conseqüentemente

$$\psi \in L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,l) \cap H^3(0,l)\big).$$

Desta forma conclui-se que

$$\begin{cases} w \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l) \cap H^4(0,l)\big),\ w_t \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l)\big), \\ w_{tt} \in L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,l)\big); \\ \psi \in L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,l) \cap H^3(0,l)\big),\ \psi_t \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l)\big), \\ \psi_{tt} \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big); \\ \Rightarrow (w,\psi) \in L^\infty\big(0,T;\big(H_0^2(0,l) \cap H^4(0,l)\big) \times \big(H_0^1(0,l) \cap H^3(0,l)\big)\big); \\ \Rightarrow (w_t,\psi_t) \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big); \\ \Rightarrow (w_{tt},\psi_{tt}) \in L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,l) \times L^2(0,l)\big). \end{cases}$$

2.3.5 Análise das Condições Iniciais

Verifica-se para os dados iniciais definidos na hipótese H1, Eq. (2.2), que as soluções e suas derivadas *temporais* satisfazem às condições iniciais. Para tanto deve-se

mostrar,

$$\begin{cases} w(x,0) = w_0(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x), \quad q.t.p.\ em\ x \in [0,l]. \end{cases} \tag{2.78}$$

Da representação dos dados iniciais, Eq. (2.10) e Eq. (2.11), em termos dos elementos da *base Hilbertiana* tem-se que,

$$\begin{cases} (w_{0m}, \psi_{0m}) \xrightarrow{m\to\infty} (w_0, \psi_0), \text{ em } (H_0^2(0,l) \cap H^4(0,l)) \times (H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)); \\ (w_{1m}, \psi_{1m}) \xrightarrow{m\to\infty} (w_0, \psi_0), \text{ em } H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l). \end{cases} \tag{2.79}$$

A partir disso avalia-se "$\lim_{m\to\infty} w_m(x,0)$" e "$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial w_m}{\partial x}(x,0)$", nas topologias de L^p. Para fazer isso, deve-se considerar resultados de convergência fraca. Em vista disso, toma-se $\phi(x,t) = v(x)\theta(t)$ com $v \in C_0^\infty(0,l)$ e $\theta \in C^\infty(0,T)$, tal que $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$ calcula-se,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}, \phi \right\rangle &= \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t} \phi \right)(x,t)dxdt = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt \\ &= \int_0^l \left\{ \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(w_{m_k}(x,t)\theta(t) \Big) - w_{m_k}(x,t)\theta'(t) \right] dt \right\} v(x)dx \\ &= -\big(w_{m_k}(0), v\big) - \int_0^l \int_0^T w_{m_k}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt. \end{aligned}$$

Por outro lado tem-se que,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \phi \right\rangle &= \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} \phi \right)(x,t)dxdt = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt \\ &= \int_0^l \left\{ \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(w(x,t)\theta(t) \Big) - w(x,t)\theta'(t) \right] dt \right\} v(x)dx \\ &= -\big(w(0), v\big) - \int_0^l \int_0^T w(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt. \end{aligned}$$

Da convergência fraco - $\star$ obtidas na seção anterior, Eq. (2.61),

$$\begin{cases} \langle w_{m_k}, \phi \rangle \xrightarrow{m_k\to\infty} \langle w, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0,T; H_0^2(0,l)); \\ \left\langle \frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}, \phi \right\rangle \xrightarrow{m_k\to\infty} \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0,T; H_0^2(0,l)). \end{cases} \tag{2.80}$$

Desta forma tem-se que

$$\big(w_{m_k}(0),v\big)+\int_0^l\int_0^T w_{m_k}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt \xrightarrow{m_k\to\infty} \big(w(0),v\big)+\int_0^l\int_0^T w(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.$$

Das convergências tem-se que

$$\big(w_{m_k}(0)-w(0),v\big)\xrightarrow{m_k\to\infty}0,\quad \forall v\in H_0^2(0,l).$$

Observando que $w_{0m}\xrightarrow{m\to\infty} w_0$ em $H_0^2(0,l)\cap H^4(0,l)\hookrightarrow L^2(0,l)$ tem-se então que $w_{0m}\rightharpoonup w_0$ em $L^2(0,l)$, e consequentemente, da unicidade do limite, conclui-se que,

$$w(0)=w_0.$$

Para estudar a condição inicial "$w'(0)$" utiliza-se o fato de que $w''_{m_k}\rightharpoonup w''$ fraco - $\star$ $L^\infty(0,T;\,H_0^2(0,l))$, i.e.

$$\left\langle w''_{m_k},v\right\rangle\xrightarrow{m_k\to\infty}\left\langle w'',v\right\rangle,\qquad \forall\, v\in L^1(0,T;\,H_0^2(0,l)) \tag{2.81}$$

Tomando-se $\phi(x,t)=v(x)\theta(t)$ com $v\in C_0^\infty(0,l)$ e $\theta\in C^\infty(0,T)$, tal que $\theta(0)=1$, $\theta(T)=0$ calcula-se,

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2},\phi\right\rangle &= \int_0^T\int_0^l\left(\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}\phi\right)(x,t)dxdt=\int_0^T\int_0^l\frac{\partial^2 w_{m_k}}{\partial t^2}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt\\ &=\int_0^l\left\{\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(x,t)\theta(t)\right)-\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(x,t)\theta'(t)\right]dt\right\}v(x)dx\\ &=-\left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(0),v\right)-\int_0^l\int_0^T\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.\end{aligned}$$

Analogamente ao que já foi realizado

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\phi\right\rangle &= \int_0^T\int_0^l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\phi\right)(x,t)dxdt=\int_0^T\int_0^l\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt\\ &=\int_0^l\left\{\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\theta(t)\right)-\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\theta'(t)\right]dt\right\}v(x)dx\\ &=-\left(\frac{\partial w}{\partial t}(0),v\right)-\int_0^l\int_0^T\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.\end{aligned}$$

Novamente da convergência

$$-\left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(0), v\right) - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt$$

$$\xrightarrow{m_k\to\infty} -\left(\frac{\partial w}{\partial t}(0), v\right) - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial w}{\partial t}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.$$

Da convergência apresentada na Eq. (2.79b) tem-se que

$$\left(\frac{\partial w_{m_k}}{\partial t}(0) - \frac{\partial w}{\partial t}(0), v\right) \xrightarrow{m_k\to\infty} 0, \quad \forall v \in H_0^2(0,l).$$

Observando que $w_{1m} \xrightarrow{m\to\infty} w_1$ em $H_0^2(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ tem-se então que $w_{1m} \rightharpoonup w_1$ em $L^2(0,l)$, e consequentemente conclui-se que,

$$w'(0) = w_1.$$

Para avaliar $''\psi(0)''$ toma-se $\phi(x,t) = v(x)\theta(t)$ com $v \in C_0^\infty(0,l)$ e $\theta \in C^\infty(0,T)$, tal que $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$ calcula-se,

$$\left\langle \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}, \phi \right\rangle = \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}\phi\right)(x,t)dxdt = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt$$

$$= \int_0^l \left\{ \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\psi_{m_k}(x,t)\theta(t)\Big) - \psi_{m_k}(x,t)\theta'(t) \right] dt \right\} v(x)dx$$

$$= -\big(\psi_{m_k}(0), v\big) - \int_0^l \int_0^T \psi_{m_k}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.$$

Por outro lado tem-se que,

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \phi \right\rangle = \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\phi\right)(x,t)dxdt = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt$$

$$= \int_0^l \left\{ \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\psi(x,t)\theta(t)\Big) - \psi(x,t)\theta'(t) \right] dt \right\} v(x)dx$$

$$= -\big(\psi(0), v\big) - \int_0^l \int_0^T w(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.$$

Da Eq. (2.79) sabe-se que

$$\begin{cases} \langle \psi_{m_k}, \phi \rangle \xrightarrow{m_k\to\infty} \langle \psi, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in L^1([0,T]; H_0^1(0,l)); \\ \left\langle \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}, \phi \right\rangle \xrightarrow{m_k\to\infty} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in L^1([0,T]; H_0^1(0,l)). \end{cases} \tag{2.82}$$

A partir disso obtém-se,

$$\big(\psi_{m_k}(0),v\big)+\int_0^l\int_0^T \psi_{m_k}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt \longrightarrow \big(\psi(0),v\big)+\int_0^l\int_0^T \psi(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.$$

Das convergências tem-se que

$$\big(\psi_{m_k}(0)-\psi(0),v\big)\xrightarrow{m_k\to\infty} 0, \quad \forall v\in H_0^1(0,l).$$

Observando que $\psi_{0m}\xrightarrow{m\to\infty}\psi_0$ em $\big(H_0^1(0,l)\cap H^3(0,l)\big)\hookrightarrow L^2(0,l)$ tem-se então que $\psi_{0m}\rightharpoonup \psi_0$ em $L^2(0,l)$, e consequentemente conclui-se que,

$$\psi(0)=\psi_0.$$

Para estudar a condição inicial "$\psi'(0)$"utiliza-se o fato de que $\psi''_{m_k}\rightharpoonup\psi''$ fraco -$\star$ $L^\infty(0,T;\,H_0^1(0,l))$, i.é.

$$\big\langle \psi''_{m_k},v\big\rangle \xrightarrow{m_k\to\infty} \big\langle \psi'',v\big\rangle, \qquad \forall\, v\in L^1(0,T;\,H_0^1(0,l)) \tag{2.83}$$

Tomando-se $\phi(x,t)=v(x)\theta(t)$ com $v\in C_0^\infty(0,l)$ e $\theta\in C^\infty(0,T)$, tal que $\theta(0)=1$, $\theta(T)=0$ calcula-se,

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^2\psi_{m_k}}{\partial t^2},\phi\right\rangle &= \int_0^T\int_0^l\left(\frac{\partial^2\psi_{m_k}}{\partial t^2}\phi\right)(x,t)dxdt = \int_0^T\int_0^l\frac{\partial^2\psi_{m_k}}{\partial t^2}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt\\ &= \int_0^l\left\{\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial t}(x,t)\theta(t)\right)-\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial t}(x,t)\theta'(t)\right]dt\right\}v(x)dx\\ &= -\left(\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial t}(0),v\right)-\int_0^l\int_0^T\frac{\partial\psi_{m_k}}{\partial t}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.\end{aligned}$$

Analogamente ao que foi realizado

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\phi\right\rangle &= \int_0^T\int_0^l\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\phi\right)(x,t)dxdt = \int_0^T\int_0^l\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t)v(x)\theta(t)dxdt\\ &= \int_0^l\left\{\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\theta(t)\right)-\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\theta'(t)\right]dt\right\}v(x)dx\\ &= -\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(0),v\right)-\int_0^l\int_0^T\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt.\end{aligned}$$

Por outro lado da Eq. (2.80b) tem-se que

$$-\left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(0), v\right) - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(x,t) v(x) \theta'(t) dx dt$$
$$\xrightarrow{m_k \to \infty} -\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(0), v\right) - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) v(x) \theta'(t) dx dt.$$

Da convergência apresentada na Eq. (2.79b) tem-se que

$$\left(\frac{\partial \psi_{m_k}}{\partial t}(0) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(0), v\right) \xrightarrow{m_k \to \infty} 0, \quad \forall v \in H_0^1(0,l).$$

Observando que $\psi_{1m} \xrightarrow{m \to \infty} \psi_1$ em $(H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)) \hookrightarrow L^2(0,l)$ tem-se então que $\psi_{1m} \rightharpoonup \psi_1$ em $L^2(0,l)$, e consequentemente conclui-se que,

$$\psi'(0) = \psi_1.$$

2.4 Unicidade da Solução

Para demonstrar a unicidade de soluções do **PVI/PVC** definido na Eq. (2.1) assume-se para os dados iniciais definidos na hipótese H1, Eq. (2.2), que existam pelo menos duas soluções, (v_1, ϕ_1) e (v_2, ϕ_2). A partir disso define-se,

$$\begin{cases} w = v_1 - v_2; \\ \psi = \phi_1 - \phi_2. \end{cases} \tag{2.84}$$

Subsituindo-se a Eq. (2.84) na Eq. (2.6) obtém-se

$$\begin{cases} \left(\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t), v\right) + 4.\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right)(t), \frac{\partial v}{\partial x} - 4\phi\right) + 4.\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma . \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)(t), \phi\right) \\ + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma . \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)(t), \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\beta . \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + 4.\left(\beta . \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(t), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \\ + \left(\alpha . \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)(t), \frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right) + 4.\left(\beta . \frac{\partial \psi}{\partial x}(t), \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0, \quad t > 0 \quad \forall (v, \phi) \in V; \\ w(x,0) = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0; \\ \psi(x,0) = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0, \ q.t.p. \ em \ [0,l]. \end{cases} \tag{2.85}$$

Fazendo-se na Eq. (2.85), $v = \frac{\partial w}{\partial t}(s)$ e $\phi = \frac{\partial \psi}{\partial t}(s)$, com $s \in [0,t] \subseteq [0,T]$, integrando-se em $[0,t]$ e utilizando-se as condições iniciais definidas na Eq. (2.85) obtém-se,

$$\begin{cases} \left\|\sqrt{\rho A}\frac{\partial w}{\partial t}(t)\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\gamma}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - 4\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big)(t)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(t)\right\|^2 \\ +4.\left\|\sqrt{\beta}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)(t)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t)\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\gamma}\frac{\partial \psi}{\partial t}(t)\right\|^2 \\ +\left\|\sqrt{\alpha}\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big)(t)\right\|^2 + 4.\left\|\sqrt{\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x}(t)\right\|^2 = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.86}$$

Notando que todas as parcelas são positivas em particular tem-se

$$\left\|\sqrt{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t)\right\|^2 \geq \sqrt{\underline{\beta}}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t)\right\|^2, \quad \forall t \in [0,T].$$

Do fato de que $w(t) \in H_0^2(0,l) \cap H^4(0,l)$, tem-se que $\|w(t)\|_{H^2} \leq C\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t)\right\|$, $\forall t \in [0,T]$.

A partir disso, e da Eq. (2.86) conclui-se que,

$$\|w(t)\|_{H^2} = 0, \ \forall t \in [0,T] \quad \Leftrightarrow \quad w(x,t) = 0, \ q.t.p. \text{ em } [0,l]\times[0,T];$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1(x,t) = v_2(x,t), \ q.t.p. \text{ em } [0,l]\times[0,T].$$

De forma similar observando que $\psi(t) \in H_0^1(0,l) \cap H^3(0,l)$ tem-se

$$\left\|\sqrt{\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x}(t)\right\| \geq \sqrt{\underline{\beta}}.\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}(t)\right\| \geq C.\|\psi(t)\|, \ \forall t \in [0,T].$$

Destes fatos tem-se que,

$$\|\psi(t)\| = 0, \ t \in [0,T] \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x,t) = 0, \ q.t.p. \text{ em } [0,l]\times[0,T]$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi_1(x,t) = \psi_2(x,t), \ q.t.p. \text{ em } [0,l]\times[0,T].$$

Por conseqüência o **PVI/PVC** possui solução única. ■

Capítulo 3

Existência, Unicidade e Elementos para Análise de Erro das Soluções para o Problema de Viga de Levinson-Bickford - Caso Estacionário

Neste capítulo apresenta-se através do **Teorema 3.1** um resultado sobre existência e unicidade de soluções *fracas* para o problema de flexão de uma viga de Levinson-Bickford com *incerteza* nas propriedades elásticas do material da viga. O resultado obtido baseia-se em uma *versão estocástica* do lema de Lax-Milgram, [14, 31, 23, 46, 80]. A incerteza é modelada por variáveis randômicas ou processos estocásticos parametrizados. Além disso, na seção 3.3, são apresentados resultados teóricos que serão necessários para geração de soluções numéricas aproximadas e análise de erro, [4, 5, 33, 45, 51, 63, 93, 98, 107, 108].

Para tal construção se utilizarão os resultados clássicos em espaços de Bochner apresentados na seção 1.10.

3.1 Existência e Unicidade de Soluções

O problema de flexão de vigas é definido a partir das equações de movimento da viga de Levinson-Bickford, *eliminando-se* os termos inerciais, $\left(\frac{\partial(.)}{\partial t},\ \frac{\partial^2(.)}{\partial t^2}\right)$, e a *randomização* dos coeficientes "α" e "β". As soluções, em termos dos campos de deslocamentos tranversais e angulares, dependem das variáveis espaciais e randômicas.

$$\begin{cases} \text{Determinar } (w,\psi):[0,l]\times(\Omega,\mathcal{F},P)\longrightarrow\mathbb{R}^2, \text{ tal que} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\beta\left(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-16\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)=q; \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\left(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-68\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)-\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)=0,\quad (x,\omega)\in(0,l)\times(\Omega,\mathcal{F},P); \\ \text{sujeito a condições de contorno,} \\ w(0,\omega)=w(l,\omega)=0; \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0,\omega)=\frac{\partial w}{\partial x}(l,\omega)=0; \\ \psi(0,\omega)=\psi(l,\omega)=0,\quad \forall\omega\in(\Omega,\mathcal{F},P). \end{cases} \tag{3.1}$$

Multiplicando-se a Eq. (3.1a) por $v\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H_0^2(0,l))$ e integrando-se em $(0,l)\times\Omega$,

$$\int_\Omega\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\beta\left(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-16\frac{\partial\psi}{\partial x}-q\right)\right)\right](x,\omega)v(x,\omega)dxdP(\omega)$$

$$=-\left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right),\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(\beta\left(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-16\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=(q,v),\quad \forall v\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H_0^2(0,l)).$$

Multiplicando-se a Eq. (3.1b) por $\phi\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H_0^1(0,l))$ e integrando-se em $(0,l)\times\Omega$,

$$-\int_\Omega\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\left(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-68\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right](x,\omega)\phi(x,\omega)dxdP(\omega)$$

$$=\left(\beta\left(16\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-68\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right),\phi\right),\quad \forall\phi\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H_0^1(0,l)).$$

Definindo-se $V = \Big(L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big), (\cdot,\cdot)_V\Big)$ sendo $(\cdot,\cdot)_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ produto interno definido como,

$$\big((w,\psi),(v,\phi)\big)_V = \int_\Omega \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(x,\omega)dxdP(\omega); \tag{3.2}$$

munido com este produto interno, V é um espaço de Hilbert. Somando-se estas equações chega-se ao problema variacional associado ao problema de flexão estocástica,

$$\begin{cases} \text{Determinar } (w,\psi) \in V, \text{ tal que} \\ a\big((w,\psi),(v,\phi)\big) = l((v,\phi)), \quad \forall (v,\phi) \in V; \end{cases} \tag{3.3}$$

sendo $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por,

$$\begin{aligned} a\big((w,\psi),(v,\phi)\big) = &\Big(\beta\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) + 4\Big(\beta\Big(\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\tfrac{\partial \psi}{\partial x}\Big), \tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\tfrac{\partial \phi}{\partial x}\Big) \\ &+\Big(\alpha\Big(\tfrac{\partial w}{\partial x} + \psi\Big), \tfrac{\partial v}{\partial x} + \phi\Big) + 4\Big(\beta\tfrac{\partial \psi}{\partial x}, \tfrac{\partial \phi}{\partial x}\Big); \end{aligned} \tag{3.4}$$

enquanto que o funcional linear $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$l((v,\phi)) = -(q,v). \tag{3.5}$$

Para obter a existência e unicidade de soluções fracas para o problema variacional abstrato são necessárias as seguintes hipóteses sobre os *dados do problema*, (α, β, q):

H1) **Regularidade do carregamento:**

$$q \in L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; L^2(0,l)\big); \tag{3.6}$$

H2) **Limitação e regularidade dos coeficientes "elásticos":**

$$\begin{cases} \exists 0 < \underline{\alpha}, \bar{\alpha} < +\infty \ni P\big(\omega \in \Omega \mid \alpha(x,\omega) \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \forall x \in (0,l)\big) = 1; \\ \exists 0 < \underline{\beta}, \bar{\beta} < +\infty \ni P\big(\omega \in \Omega \mid \beta(x,\omega) \in \big[\underline{\beta}, \bar{\beta}\big], \forall x \in (0,l)\big) = 1; \\ \alpha \in L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H^1(0,l)\big); \\ \beta \in L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H^2(0,l)\big). \end{cases} \tag{3.7}$$

Teorema 3.1 (Existência e Unicidade de Soluções Fracas) *: Considere que os dados do problema atendam às hipóteses, Eqs. (3.6) e (3.7), V um espaço de Hilbert, e $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, coerciva e contínua em V e $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear, então $\exists!(w,\psi) \in V$ para o problema variacional, Eq. (3.3).*

Demonstração: Para demonstrar este resultado utiliza-se uma "versão estocástica" do Lema de Lax-Milgram, [14, 23, 31, 46, 80], para tanto deve-se verificar se os objetos definidos nas Eqs. (3.4) e (3.5) atendam às hipóteses do teorema. Para a forma bilinear verifica-se,

<u>Coercividade:</u>

$$a\big((w,\psi),(w,\psi)\big) = 4\left\|\sqrt{\beta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\sqrt{\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)\right\|^2$$

$$+4.\left\|\sqrt{\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|^2 \geq \mathit{mín}\Big\{\underline{\beta},\underline{\alpha}\Big\}.\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|^2\right)$$

$$\geq \mathit{mín}\Big\{\underline{\beta},\underline{\alpha}\Big\}.\left(\frac{1}{C}\|w\|^2_{H^2} + \frac{1}{c}\|\psi\|^2_{H^1}\right) \geq \mathbf{c}\|(w,\psi)\|^2_V, \quad \forall (w,\psi) \in V;$$

sendo $\mathbf{c} = \mathit{mín}\Big\{\underline{\beta},\underline{\alpha}\Big\}.\mathit{mín}\left\{\frac{1}{C},\frac{1}{c}\right\}$ a constante de coercividade, e $C, c > 0$ as constantes de Poincaré, respectivamente.

<u>Continuidade:</u>

$$\big|a\big((w,\psi),(v,\phi)\big)\big| = \left|\left(\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + 4\left(\beta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right), \frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right) + 4\left(\beta\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right| \leq \bar{\beta}\left|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right|$$

$$+4\bar{\beta}\left|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right| + \bar{\alpha}\left|\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi, \frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right)\right| + 4\bar{\beta}\left|\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right|$$

$$\leq máx\{4\bar{\beta},\bar{\alpha}\}\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|+\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\|\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right\|\left\|\frac{\partial v}{\partial x}+\phi\right\|+\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\|\right)\leq máx\{4\bar{\beta},\bar{\alpha}\}\left[\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|\right.$$

$$+\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|+4\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|\right)\left(\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|+4\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\|\right)+\left(\left\|\frac{\partial\, w}{\partial x}\right\|+\|\psi\|\right)\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|+\|\phi\|\right)$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\|\right]\leq máx\{4\bar{\beta},\bar{\alpha}\}\left[\|w\|_{H^2}\|v\|_{H^2}+\left(\|w\|_{H^2}+4\|\psi\|_{H^1}\right)\left(\|v\|_{H^2}+4\|\phi\|_{H^1}\right)\right.$$

$$+\left(\|v\|_{H^2}+\|\phi\|_{H^1}\right)\left(\|v\|_{H^2}+\|\phi\|_{H^1}\right)\leq \mathbf{C}\|(w,\psi)\|_V\|(v,\phi)\|_V,\ \ \forall (w,\psi),(v,\phi)\in V;$$

sendo $\mathbf{C}=36.máx\{4\bar{\beta},\bar{\alpha}\}>0$ uma constante definida pelos coeficientes "α" e "β". Da definição apresentada na Eq. (3.5) é imediato que $l: V\longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear. Desta forma, pela versão estocástica do Teorema de Lax-Milgram, [14, 23, 31, 46, 80], tem-se que existe única solução para o problema variacional abstrato definido na Eq. (3.3). ■

3.2 Regularidade da Solução

Nesta seção apresenta-se um resultado de regularidade para as soluções do PVA, definido na Eq. (3.3). Para tanto deve-se impor condições de regularidade sobre os dados do problema, tais condições são definidas em espaços adequados. Desta forma são necessárias algumas definições preliminares.

Definição 3.1 *Sejam* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *um espaço de probabilidades e* X *um espaço de Banach define-se o seguinte conjunto:*

$$C^k((\Omega,\mathcal{F},P);X)=\left\{v:(\Omega,\mathcal{F},P)\to X\middle| \text{para } x\in(0,l), \text{fixado, } v(x,\cdot) \text{ possui derivadas contínuas de ordem "}k\text{" em termos de } \boldsymbol{\xi}\in(\Omega,\mathcal{F},P) \text{ e } \sup_{\boldsymbol{\xi}\in(\Omega,\mathcal{F},P)} ess\left\|v(\boldsymbol{\xi})\right\|_X<+\infty\right\};$$

munido com a norma $\|\cdot\|_{C^k}\colon C^k\to\mathbb{R}^+$ *definida como,*

$$\|\,v\,\|_{C^k}=\sup_{\boldsymbol{\xi}\in(\Omega,\mathcal{F},P)} ess\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le k}\left\|D^{|\boldsymbol{\alpha}|}v(\boldsymbol{\xi})\right\|_X;$$

$\Big(C^k\big((\Omega,\mathcal{F},P);X\big),\|\cdot\|_{C^k}\Big)$ *é um espaço de Banach.*

Lema 3.1 (Regularidade das Soluções Fracas) *: Considere* $q\in C((\Omega,\mathcal{F},P);L^2(0,l))$, $\alpha\in C((\Omega,\mathcal{F},P);H^1(0,l))$, $\beta\in C((\Omega,\mathcal{F},P);H^2(0,l))$, *tais que satisfaçam às hipóteses H1 e H2, Eqs. (3.6) e (3.7), e* $Y,Z:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$, *variáveis randômicas, então o problema definido por,*

$$\begin{aligned}\left(\beta(y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(y,z),\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{L^2(0,l)}&+4\left(\beta(y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(y,z),\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-4\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{L^2(0,l)}\\ +\left(\alpha(y)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)(y,z),\frac{\partial v}{\partial x}+\phi\right)_{L^2(0,l)}&+4\left(\beta(y)\frac{\partial\psi}{\partial x}(y,z),\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{L^2(0,l)}\\ =\big(q(z),v\big)_{L^2(0,l)},&\quad\forall(v,\phi)\in H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l);\end{aligned}\tag{3.8}$$

possui solução única, $(w,\psi)\in C\big((\Omega,\mathcal{F},P);H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)$.

Demonstração: A existência e unicidade de soluções é obtida utilizando-se o Lema de Lax-Milgram. A regularidade da solução é obtida avaliando a Eq. (3.1) em $z=Z(\omega)$ e $z'=Z(\omega')$, $\omega,\ \omega'\in\Omega$, substraindo-se as equações resultantes obtém-se,

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha\big(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\tilde{\psi}\big)\Big)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\beta\big(5\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-16\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\big)\Big)=\tilde{q};\\ -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\beta\big(16\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-68\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\big)\Big)-\alpha\big(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\tilde{\psi}\big)=0,\quad x,y\in(0,l),\quad z,z'\in\mathbb{R}^n;\end{cases}\tag{3.9}$$

sendo $\tilde{w} = w(x,y,z) - w(x,y,z')$, $\tilde{\psi} = \psi(x,y,z) - \psi(x,y,z')$ e $\tilde{q} = q(x,z) - q(x,z')$. Multiplicando-se as Eqs. (3.1.a) e (3.1.b), por "$\tilde{w}$", "$\tilde{\psi}$", integrando-se em "$(0,l)$" e usando-se a hipótese H2, Eq. (3.7), sobre os coeficientes obtém-se,

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\right)_{L^2(0,l)} + \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)_{L^2(0,l)} \leq \frac{1}{4.\underline{\beta}}\big(\tilde{q}, \tilde{w}\big).$$

Da desigualdade de Poincaré tem-se que

$$\big(\tilde{w}, \tilde{w}\big)_{H_0^2(0,l)} + \big(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\big)_{H_0^1(0,l)} \leq c.\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\right) + C.\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right).$$

Combinando-se as últimas duas desigualdades obtém-se,

$$\big(\tilde{w}, \tilde{w}\big)_{H_0^2(0,l)} + \big(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\big)_{H_0^1(0,l)} \leq C\big(\tilde{q}, \tilde{w}\big);$$

em que $C = \big(mín\,\{c, C\}\,.\underline{\beta}\big)^{-1}$. Da definição de produto interno em $H^2 \times H^1 = H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)$,

$$\big((\tilde{w}, \tilde{\psi}), (\tilde{w}, \tilde{\psi})\big)_{H^2\times H^1} \leq C\big(\tilde{q}, \tilde{w}\big);$$

Por outro lado, considerando $L^2\big((0,l)^2\big) = L^2(0,l) \times L^2(0,l)$ tem-se que,

$$\big(\tilde{q}, \tilde{w}\big)_{L^2(0,l)} = \big((\tilde{q}, 0), (\tilde{w}, \tilde{\psi})\big)_{L^2((0,l)^2)}.$$

Da hipótese sobre o dado $q \in C((\Omega, \mathcal{F}, P); L^2(0,l))$ e das definições para $\tilde{w}, \tilde{\psi}$ e $\tilde{q}$ chega-se ao resultado desejado,

$$\Big\|\big(w(y,z) - w(y,z'), \psi(y,z) - \psi(y,z')\big)\Big\|_{H^2\times H^1} \leq C \parallel q(z) - q(z') \parallel_{L^2} .$$

3.3 Elementos para Análise de Erro

3.3.1 Introdução

Nesta seção apresentam-se as análises de erro e numérica para o problema de flexão estocástica da viga de Levinson-Bickford. Os resultados que serão apresentados

baseiam-se nos teoremas sobre existência e unicidade de soluções apresentados na seção anterior e teoremas sobre produto tensorial em espaços de Hilbert, (capítulo 1). O método de Galerkin Estocástico será utilizado para obter as estimativas de erro das soluções numéricas aproximadas. O método que será utilizado nesta seção baseia-se no isomorfismo e densidade em espaços de Bochner. A partir disso, apresentam-se os resultados que serão fundamentais para o método.

Proposição 3.1 (Proposição 3.4.5, pg. 102 de [43]) *: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de medida, e $p \in [1, \infty)$. Se P é $\sigma-$ finita e $\mathcal{F}$ é gerada por uma subfamília enumerável de $\mathcal{F}$ então $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é separável.*

Teorema 3.2 (Teorema A.3.2, pg. 173 de [51]) *: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de medida e $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ separável e X espaço de Hilbert separável então existe único isomorfismo de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes X$ a $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; X)$ tal que $f \otimes g \mapsto fg$.*

Em vista desses fatos e do resultado de existência e unicidade apresentado na seção 3.1,

$$(w, \psi) \in L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big).$$

Do teorema 1.14,

$$L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big) \simeq L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^2(0,l)\big)$$

$$\times L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^1(0,l)\big);$$

e do teorema 3.2 tem-se que,

$$\begin{cases} L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^2(0,l)\big) \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes H_0^2(0,l); \\ L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^1(0,l)\big) \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes H_0^1(0,l). \end{cases} \tag{3.10}$$

Em particular, o teorema de Doob-Dynkin, (teorema 1.1), assegura que a solução do problema variacional abstrato, possua em sua definição as variáveis randômicas utilizadas para representar a incerteza nos coeficientes do problema. Neste trabalho a modelagem da incerteza é feita através de processos estocásticos parametrizados, $\vartheta : (0,l)\times(\Omega,\mathcal{F},P) \rightarrow \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$\vartheta(x,\boldsymbol{\xi}(\omega)) = \mu_\vartheta(x) + \sum_{i\in\aleph} \varphi_i(x)\xi_i(\omega), \tag{3.11}$$

sendo "μ_ϑ" o valor esperado do processo estocástico "ϑ", "$\aleph$" um conjunto, enumerável, de índices, $\xi_i(\omega) : (\Omega,\mathcal{F},P) \rightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ variáveis randômicas e $\{\varphi_i\}_{i\in\aleph} \subset L^2(0,l)$. Se $\#\aleph < \infty$ diz-se que as análises assumem a hipótese de *ruído de dimensão finita*, caso contrário tem-se a hipótese de *dimensão infinita*. Muitos trabalhos em análise de erro e numérica de "*equações diferenciais estocásticas*", (**SEDP**), utilizam a hipótese de "*ruído com dimensão finita*" para modelagem da incerteza nos coeficientes, pode-se citar [16, 23, 49, 101]. Nesta hipótese, o modelo de incerteza é definido por um conjunto finito de variáveis randômicas, podendo ser definido por um vetor randômico. Os trabalhos de Gittelson, [51, 53], ao estudarem o problema de difusão estocástica, mostraram que esta hipótese é *desnecessária* para a análise de erro.

3.3.2 Polinômios Generalizados de Caos (Esquema Askey-Wiener)

O esquema de Askey-Wiener é uma generalização dos polinômios de caos, também conhecidos como Wiener-Caos. Os polinômios de caos foram propostos, originalmente, no trabalho de Wiener (1938), [100], para estudar o problema de mecânica estatística dos gases. O teorema de Cameron-Martin (1947), [32], mostra que estes polinômios formam uma base, para um subespaço denso no espaço gerado por variáveis randômicas de segunda ordem, (variância finita). O trabalho de Ghanem e Spanos 1989, [54], realizaram uma

importante aplicação destes polinômios a problemas clássicos da mecânica dos sólidos e análise de estruturas. Foi no trabalho de Xiu et all 2002, [107], que este conjunto de polinômios recebeu a designação de "*Polinômios Generalizados de Caos*", (gPC's), que compõem o esquema Askey-Wiener. O esquema Askey-Wilson é bem conhecido, podendo-se citar uma grande quantidade de trabalhos, [4, 5, 33, 93, 98]. Basicamente ele consiste de "*famílias de polinômios ortogonais hipergeométricos que se relacionam através da imposição de valores limites sobre parâmetros que os definem*", [93]. Estes polinômios são obtidos como soluções de equações diferenciais "*hipergeométricas*". Estas equações possuem a seguinte forma,

$$(sy'')(x) + (\tau y')(x) + (\lambda y)(x) = 0, \qquad \forall x \in (a,b);$$

em que "$s(\cdot)$" e "$\tau(\cdot)$" são polinômios de graus "*dois*" e "*um*", respectivamente. Em particular para,

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)s'';$$

se as soluções particulares associadas a "λ_n" forem polinômios de grau "n", estes serão denotados por *polinômios hipergoemétricos*. Além disso, se estes polinômios forem ortogonais em $L^2_\rho(a,b)$, sendo $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma *função peso*, obtida como solução de equação diferencial, envolvendo as funções "$s(\cdot)$" e "$\tau(\cdot)$",

$$(s.\rho)'(x) = (\tau.\rho)(x), \qquad \forall x \in (a,b);$$

estes polinômios são conhecidos como "*polinômios clássicos ortogonais*" definidos em uma variável **contínua**. Para o caso em se tenham soluções para uma equação de diferença "*hipergeométricas*" com $\lambda = \lambda_n$,

$$(s+\tau)(x)y_n(x+1) - (2.s+\tau)(x)y_n(x) + s(x)y_n(x-1) + \lambda_n.y_n(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b);$$

as soluções, (y_n), são polinômios de grau "n", ortogonais em $l^2_\rho(a,b)$. Em que $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função peso*, solução de uma *equação de diferenças* com coeficientes definidos pe-

las funções "$s(\cdot)$" e "$\tau(\cdot)$". Estes polinômios do tipo hipergoemétrico são conhecidos como polinômios clássicos ortogonais definidos em uma variável **discreta**. A literatura aponta como **polinômios clássicos ortogonais** as famílias de *Hermite, Laguerre* e *Jacobi*. Apesar deste tema, aparentemente, estar "apaziguado", Andrews e Askey (1985) generalizam a definição de um conjunto de polinômios clássicos ortogonais, como *polinômios clássicos* como sendo: "*um conjunto de polinômios ortogonais é dito clássico se ele for um caso especial ou limite de* ${}_4\varphi_3$ *- polinômios ortogonais*", [4]. Koekoek e Swartouw (1998), [65], propuseram outra generalização com base nos "q-polinômios".

Definição 3.2 *Um espaço vetorial Gaussiano consiste de um espaço vetorial, cujos elementos são variáveis randômicas Gaussianas reais e simétricas,* ($\mu = 0$)*, definidas sobre algum espaço de probabilidades,* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição 3.3 *Um espaço Gaussiano de Hilbert consiste de um espaço vetorial Gaussiano com produto interno e completo.*

Observações

1. Um espaço vetorial Gaussiano é um *subespaço* de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

2. Um espaço Gaussiano de Hilbert é um subespaço vetorial *fechado* de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição 3.4 *Seja* H *um espaço vetorial Gaussiano e* $n \in \mathbb{N}_0$*, definem-se os seguintes conjuntos:*

$$P_n(H) = \Big\{ p(\xi_1, ..., \xi_m) \mid p(.) \text{ é um polinômio de grau} \leq n$$

$$\text{nas variáveis } \xi_1, ..., \xi_m \in H,\ m < +\infty \Big\};$$

e seja

$$H^{:n:} = P_n(H) \cap P_{n-1}(H)^{\perp}.$$

Para $n = 0$, $H^{:0:} = \overline{P_0(H)}$ *é o espaço das constantes.*

Observações

1. $\{P_n(H)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência *crescente* de subespaços;
2. $\overline{P_n(H)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:}$;
3. $P(H) = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n(H)$ é o espaço dos polinômios definidos em termos de elementos de H.

Teorema 3.3 (Cameron-Martin) *: Os espaços* $\{H^{:n:}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são mutuamente ortogonais e subespaços fechados em* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:} = L^2(\Omega, \sigma(H), P).$$

O resultado deste teorema é conhecido como decomposição de Wiener-Chaos, ou somente decomposição de Chaos, [63]. Portanto um elemento $X \in L^2(\Omega, \sigma(H), P)$ pode ser representado como,

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_n, \quad X_n \in H^{:n:}.$$

Corolário 3.1 *Nas condições do Teorema de Cameron-Martin e se* $\mathcal{F} = \sigma(H)$, *então* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *admite a seguinte decomposição ortogonal*

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:}.$$

Teorema 3.4 $\overline{P(H)}^{L^q} = L^q(\Omega, \sigma(H), P)$, *para* $q \in [1, \infty)$.

Originalmente o trabalho de Ghanem e Spanos, [55], modelaram a incerteza através de processos estocásticos *Gaussianos*. Em Babuska e Chatzipantelidis (2002), [13], apresentaram um importante resultado que *invalidam*, para certos casos, esta *escolha* para modelagem da incerteza. Tal aspecto é justificado, com base em resultados de existência. Por exemplo, se a incerteza sobre os dados do problema forem modelados por uma variável randômica ou um processo estocástico Gaussiano, *não é possível* obter a propriedade de *coercividade* da forma bilinear associada ao problema. Este aspecto reflete-se na **não convergência** das "soluções" numéricas aproximadas. Os resultados que seguem baseiam-se nas seguintes hipóteses sobre as variáveis randômicas, $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, utilizadas na modelagem da incerteza:

1. Possuem momentos estatísticos finitos de todas as ordens, $\xi_m \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, P),\ \forall q, m \in \mathbb{N}$;

2. As funções de distribuição de probabilidades, $F_{\xi_m}(x) = P\big(\{\omega \in \Omega \mid \Xi_m(\omega) \leq x\}\big)$, são contínuas.

Uma sequência de variáveis randômicas, $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, atendendo às hipóteses 1 e 2 são chamadas de **variáveis randômicas básicas**, [45].

Definição 3.5 (Problema do Momento de Hamburg) *Considere uma seqüência de números reais* $\left\{\mu_\xi^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, *que consiste dos momentos estatísticos de ordem "k" de uma variável randômica "ξ". A partir disso, o problema do Momento de Hamburg é definido como:*

$$\begin{cases} \textit{Determinar uma função, } F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \textit{ não decrescente tal que} \\ \mu_\xi^{(k)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_\xi(x), \qquad k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Observação:

Se o problema do Momento de Hamburg admitir *solução única* diz-se então que a função de distribuição de probabilidades é **determinada**;

Teorema 3.5 *Uma seqüência de polinômios ortogonais,* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, definidos em termos de uma variável randômica,* ξ*, satisfazendo as hipóteses 1 e 2 é densa em* $L^2(\mathbb{R},\sigma(\mathbb{R}),F_\xi)$ *sse a solução do problema do Momento é uma função de distribuição de probabilidades "determinada".*

A partir disso, se o problema do Momento possuir uma *solução determinada* para a variável randômica "ξ" então para uma família de polinômios definidos em termos desta variável tem-se do teorema 3.5 que esta família consiste de uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R},\sigma(\xi),F_\xi)$. Desta forma para cada variável randômica, $\eta = f(\xi)$, atendendo as condições do teorema de Doob-Dynkin, esta variável randômica pode ser representada através de sua série de Fourier, como segue

$$\eta = f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(\xi);$$

convergente em $L^2(\mathbb{R},\sigma(\xi),F_\xi)$ com coeficientes, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, definidos por,

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (f.p_k)(x)dF_\xi(x).$$

Os resultados anteriores são obtidos, considerando que as variáveis rândomicas são Gaussianas simétricas. Tais resultados podem ser estendidos para variáveis randômicas não-Gaussianas, conforme proposto nos trabalhos de Xiu *et all* (2002), [107]. Uma conseqüência imediata é propiciar a escolha de uma modelagem para a incerteza que satisfaça as hipóteses sobre os dados do problema. O trabalho de Basbuka & Chatzipantelidis (2002), [13], apresenta um teorema de existência de soluções *fracas*, (Teorema 3.1,

p. 4100), para o problema de difusão estocástica. Este teorema apresenta a condição necessária para existência das soluções do problema variacional ao se utilizar a série Karhunen-Loeve para a representação do coeficiente de difusão. O trabalho de Ávila, [8], aplica o método de Galerkin Estocástico para obter as aproximações numéricas de Galerkin *não convergentes*, para o problema de flexão estocástica de placas de Kirchhoff, com incerteza sobre o módulo de Young, quando modelado por um processo estocástico *Gaussiano*. Em vista disso, observa-se uma tendência nos trabalhos atuais, utilizando o método de Galerkin Estocástico, para a modelagem da incerteza através de variáveis randômicas não-Gaussianas. Nestes trabalhos considera-se que a incerteza é modelada através de processos estocásticos parametrizados definidos em termos de uma seqüência de variáveis randômicas, $\{\zeta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ definidas em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e que atendam às hipóteses relacionadas à existência/unicidade de soluções. A construção é analoga ao caso em que as variáveis randômicas são Gaussianas simétricas. A seguir são apresentados definições e resultados teóricos que generalizam os resultados anteriores (realizados para variáveis randômicas Gaussianas simétricas) para variáveis randômicas com variância finita, $\left(L^2\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)\right)$.

Definição 3.6 *Definem-se as seguintes* σ*-álgebras* $\mathcal{H}_M = \sigma\Big(\{\zeta_m\}_{m=1}^{M}\Big)$ *e* $\mathcal{H} = \sigma\Big(\{\zeta_m\}_{m\in\mathbb{N}}\Big)$.

Definição 3.7 *Seja* $\mathcal{H}_M$ *um subespaço vetorial em* $L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$ *e* $n \in \mathbb{N}_0$ *definem-se os seguintes conjuntos:*

$$\mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M) = \Big\{p(\zeta_1, ..., \zeta_M) \mid p(.) \text{ é um polinômio de grau} \leq n \text{ ,}$$

$$\text{nas variáveis randômicas, } \zeta_1, ..., \zeta_M \in \mathcal{H}_M\Big\};$$

e seja

$$\mathcal{H}_M^{:n:} = \mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M) \cap \mathcal{P}_{n-1}^M(\mathcal{H}_M)^{\perp}.$$

Para $n = 0$, $\mathcal{H}_M^{:0:} = \mathcal{P}_0^M(\mathcal{H}_M)$ *é o espaço das constantes.*

Definição 3.8 *Seja* $\mathcal{H}$ *um subespaço vetorial em* $L^2(\Omega, H, P)$ *e* $n \in \mathbb{N}_0$ *define-se o conjunto:*

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{H}) = \Big\{ p(\zeta_1, \zeta_2, ...) \mid p(.) \text{ é um polinômio de grau} \leq n \ ,$$

$$\text{nas variáveis randômicas, } \zeta_1, \zeta_2, ... \in \mathcal{H} \Big\};$$

e seja

$$\mathcal{H}^{:n:} = \overline{\mathcal{P}_n(\mathcal{H})} \cap \overline{\mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{H})}^{\perp}.$$

Para $n = 0$, $\mathcal{H}^{:0:} = \overline{\mathcal{P}_0(\mathcal{H})}$ *é o espaço das constantes.*

Definição 3.9

$$\mathcal{P}^M(\mathcal{H}_M) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M)};$$

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{H}) = \bigcup_{M=1}^{\infty} \mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M);$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathcal{H})}.$$

Observações

1. $\mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M) \subset \mathcal{P}^M(\mathcal{H}_M) \subset L^2(\Omega, \mathcal{H}_M, P), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad M \in \mathbb{N}$;

2. $\mathcal{P}_n(\mathcal{H}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{H}) \subset L^2(\Omega, \mathcal{H}, P), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$;

3. $\overline{\mathcal{P}_n(\mathcal{H})} = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}^{:k:}$;

4. $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{H})} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{:n:}$;

5. Denotam-se por *polinômios generalizados de Caos*, (gPC's), aos elementos destes conjuntos, [107].

A partir destas observações apresenta-se uma *generalização* do Teorema de Cameron-Martin. Este resultado é demonstrado no trabalho de Ernst et all 2012, [45].

Teorema 3.6 *Se* $\mathcal{P}^M(\mathcal{H}_M) = L^2(\Omega, \mathcal{H}_M, P), \quad \forall M \in \mathbb{N}$, *então* $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$.

Os corolários a seguir são consequências imediatas deste teorema, [45].

Corolário 3.2 *Considere uma variável randômica* $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$ *e* $\{\zeta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de variáveis randômicas básicas independentes. Se para cada* $M \in \mathbb{N}$ *os polinômios definidos em* $\{\zeta_m\}_{m=1}^{M}$ *são densos em* $L^2(\Omega, \mathcal{H}_M, P)$, *então a representação da variável randômica "*η*" via polinômios generalizados de Chaos converge em* $L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$.

Demonstração: Do teorema 3.6 e das hipóteses tem-se que

$$L^2(\Omega, \mathcal{H}, P) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{M=0}^{\infty}\mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M)\right)} = \overline{\bigcup_{M=0}^{\infty}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M)\right)} = \overline{\bigcup_{M=0}^{\infty}L^2(\Omega, \mathcal{H}_M, P)}. \quad \blacksquare$$

Corolário 3.3 *Considere uma variável randômica* $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$ *e* $\{\zeta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de variáveis randômicas independentes básicas. Então a representação da variável randômica* η *via polinômios generalizados de Chaos converge em média quadrática se e somente se a função de distribuição de probabilidades de cada variável randômica* ζ_m *é solução do problema do Momento de Hamburg.*

Demonstração: [45], p. 327.

Teorema 3.7 *Seja* $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, ..., \zeta_M)$, *com* $M \in \mathbb{N}$, *variáveis randômicas básicas independentes e* $\left\{p_j^{(m)}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0}$, $(m = 1, ..., M)$, *seqüências de polinômios ortonormais definidos em*

cada variável randômica básica. Então o sistema de polinômios ortonormais definidos nas variáveis randômicas básicas,

$$p_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\zeta}) = \prod_{m=1}^{M} p_{\alpha_m}^{(m)}(\zeta_m), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^M,$$

é uma base ortonormal para $L^2(\Omega, \sigma(\boldsymbol{\zeta}), P)$ *se e somente se o problema do Momento de Hamburg possui solução para cada variável randômica. Nestas condições, qualquer variável randômica* $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\boldsymbol{\zeta}), P)$ *pode ser representada através de uma série de Fourier em polinômios multivariados definidos nas variáveis randômicas básicas,* $(\zeta_1, ..., \zeta_M)$,

$$\eta = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^M} a_{\boldsymbol{\alpha}} p_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\zeta}), \qquad a_{\boldsymbol{\alpha}} = \int_{\mathbb{R}^M} (\eta . p_{\boldsymbol{\alpha}})(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{dP}_{\boldsymbol{\zeta}} \quad .$$

Observações:

1. Um exemplo de uma função de distribuição de probabilidades **não determinada** é o caso de uma variável randômica Lognormal, [45];

2. Por conseqüência disso, os polinômios generalizados de Caos, definidos em termos de uma variável randômica lognormal "ς" não são densos em $L^2\big(\mathbb{R}, \sigma(\varsigma), P_{\varsigma}\big)$;

3. A função que define a ortogonalidade dos polinômios de Stieltjes Wigert, (pg. 174, [33]), é **não determinada**;

4. O trabalho de Ernst et all (2012), [45], mostra como uma conseqüência do teorema 3.7, tomando-se uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições do teorema de **Doob-Dynkin**, que uma seqüência de polinômios generalizados de Caos, definidos em termos de uma variável randômica lognormal, utilizada para representar a variável randômica $(g \circ log)(\varsigma)$ converge para a variável randômica nula;

Considere uma variável randômica $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$ e $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de variáveis randômicas básicas independentes. Se para cada $M \in \mathbb{N}$ os polinômios definidos

em $\{\zeta_m\}_{m=1}^{M}$ são densos em $L^2(\Omega, \mathcal{H}_M, P)$, então a representação da variável randômica η via polinômios generalizados de Chaos converge em $L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$. Nos trabalhos de [16, 70, 82, 96, 108] apresentam-se várias famílias de polinômios ortogonais que geram conjuntos totais em L^2 definidos para diferentes variáveis randômicas.

Definição 3.10 *A função* $\|\cdot\|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *definida por,*

$$\|(v,\phi)\|_V = \sqrt{\big((v,\phi),(v,\phi)\big)_V}; \tag{3.12}$$

é uma norma em V*, induzida pelo produto interno definido na Eq. (3.2).*

O lema a seguir apresenta a equivalência de normas, sendo um resultado geral, mas importante para o lema 3.3, da próxima seção. Este lema fornece uma estimativa para o *erro cometido* na aproximação dos dados do problema. Para simplificação da notação nas próximas exposições define-se $|\cdot| : L^2((\Omega,\mathcal{F},P); H^2(0,l)\times H^1(0,l)) \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo,

$$\|(v,\phi)\| = \sqrt{\int_\Omega \Big[\|v(\omega)\|^2_{H^2(0,l)} + \|\phi(\omega)\|^2_{H^1(0,l)}\Big] dP(\omega)}. \tag{3.13}$$

Lema 3.2 ("Equivalência entre Normas") *: As normas* $\|\cdot\|_V$ *e* $\|\cdot\|$ *definidas em* V *e* $L^2\big((\Omega,\mathcal{F},P); H^2_0(0,l)\times H^1_0(0,l)\big)$*, respectivamente, são equivalentes,*

$$\breve{C}\|(v,\phi)\| \le \|(v,\phi)\|_V \le \|(v,\phi)\|.$$

Demonstração: Sejam $(v,\phi) \in V$ tem-se que,

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 = \int_\Omega \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\omega)\right\|^2_{L^2(0,l)} dP(\omega) \le \int_\Omega \|v(\omega)\|^2_{H^2(0,l)} dP(\omega)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \le \|v\|_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^2(0,l))};$$

analogamente tem-se para

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| \le \|\phi\|_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^1(0,l))}.$$

Desta forma chega-se,

$$\left\|(v,\phi)\right\|_V^2 = \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|^2 \leq \| v \|^2_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^2(0,l))} + \| \phi \|^2_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^1(0,l))};$$

$$\left\|(v,\phi)\right\|_V \leq \sqrt{\| v \|^2_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^2(0,l))} + \| \phi \|^2_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^1(0,l))}} = \left\|(v,\phi)\right\|.$$

Para obter a desigualdade a *esquerda*, utiliza-se a desigualdade de Poincaré. Para um $\omega \in \Omega$, fixado, tem-se

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\omega)\right\|^2_{L^2(0,l)} = \int_0^l \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\omega)\right|^2 dx \geq \int_0^l \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\omega)\right|^2 + \frac{1}{2c^2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,\omega)\right|^2\right] dx$$

$$\geq \int_0^l \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\omega)\right|^2 + \frac{1}{4c^2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,\omega)\right|^2 + \frac{1}{4c^2C^2}|v(x,\omega)|^2\right] dx \geq \tilde{C}^2 \|v(\omega)\|^2_{H^2(0,l)};$$

sendo c, C as constantes de Poincaré e $\tilde{C} = mín\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4c^2}, \frac{1}{4c^2C^2}\right\}$. $P-$integrando-se, em Ω, a desigualdade acima chega-se a

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 \geq \tilde{C}^2 \| v \|^2_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^2(0,l))}.$$

Analogamente tem-se uma desigualdade similar a anterior, tomando-se ϕ,

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|^2 \geq \tilde{c}^2 \| \phi \|^2_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^1(0,l))};$$

sendo $\tilde{c} = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2c^2}\right\}$ e c a constante de Poincaré. Das desigualdades anteriores chega-se a desigualdade a esquerda,

$$\left\|(v,\phi)\right\|_V \geq \breve{C}\left\|(v,\phi)\right\|;$$

sendo $\breve{C} = min\left\{\tilde{c}, \tilde{C}\right\}$. ■

Corolário 3.4 : $L^\infty\big((\Omega,\mathcal{F},P); H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big) \hookrightarrow L^2\big((\Omega,\mathcal{F},P); H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)$.

Demonstração: *Seja* $(v,\phi) \in L^\infty\big((\Omega,\mathcal{F},P); H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)$ *calcula-se,*

$$\|(v,\phi)\|_{L^2((\Omega,\mathcal{F},P);H^2(0,l)\times H^1(0,l))} = \sqrt{\int_\Omega \left[\|v(\omega)\|^2_{H^2(0,l)} + \|\phi(\omega)\|^2_{H^1(0,l)}\right] dP(\omega)}$$

$$\leq \sqrt{\int_\Omega \sup_{\omega\in\Omega}\Big[\big\|v(\omega)\big\|^2_{H^2(0,l)} + \big\|\phi(\omega)\big\|^2_{H^1(0,l)}\Big]dP(\omega)} \leq \sup_{\omega\in\Omega}\sqrt{\Big[\big\|v(\omega)\big\|^2_{H^2(0,l)} + \big\|\phi(\omega)\big\|^2_{H^1(0,l)}\Big]}$$

$$\sqrt{\int_\Omega dP(\omega)} \leq \sup_{\omega\in\Omega}\Big[\big\|v(\omega)\big\|_{H^2(0,l)} + \big\|\phi(\omega)\big\|_{H^1(0,l)}\Big] \leq \big\|(v,\phi)\big\|_{L^\infty((\Omega,\mathcal{F},P);H^2_0(0,l)\times H^1_0(0,l))} \quad \blacksquare$$

Corolário 3.5 *:* $L^\infty\big((\Omega,\mathcal{F},P);H^2_0(0,l)\times H^1_0(0,l)\big) \hookrightarrow V.$

Demonstração: *Seja* $(v,\phi)\in V$ *calcula-se,*

$$\Big\|\big(v,\phi\big)\Big\|_V \leq \sqrt{\int_\Omega\Big[\|v(\omega)\|^2_{H^2(0,l)} + \|\phi(\omega)\|^2_{H^1(0,l)}\Big]dP(\omega)} \leq \sup_{\omega\in\Omega}\Big[\big\|v(\omega)\big\|_{H^2(0,l)} + \big\|\phi(\omega)\big\|_{H^1(0,l)}\Big]$$

$$= \big\|(v,\phi)\big\|_{L^\infty((\Omega,\mathcal{F},P);H^2_0(0,l)\times H^1_0(0,l))} \quad \blacksquare$$

3.3.3 Análise Geral de Erro

Nesta seção apresenta-se, em linhas gerais, a análise de erro das soluções numéricas aproximadas para o problema de flexão estocástica da viga de Bickford-Levinson. A partir disso, observa-se que as fontes de erro das soluções aproximadas, via método de Galerkin - Bubnov, decorrem da aproximação dos dados do problema e das projeções em subespaços. As aproximações dos coeficientes dependerão da *quantidade* de informações disponíveis. Do ponto de vista aplicado, se tem a "*informação estatística*" até segunda ordem, tais como valor esperado e *covariância*. Em geral, para os casos em que a modelagem da incerteza é realizada através de processos estocásticos definidos, a partir de um número infinito de variáveis randômicas, realiza-se o truncamento desta representação parametrizada. Este procedimento define o problema variacional perturbado, que *insere* uma parcela de erro na análise. O erro a *priori* é definido pela *distância* entre as soluções exata e numérica aproximada. Desta forma utilizando a desigualdade triangular exibem-se os

erros cometidos nas aproximações dos coeficientes e das soluções numéricas aproximadas,

$$\overbrace{\left\|\left(w,\psi\right)-\left(w,\psi\right)_{h,p}^{M}\right\|_{V}}^{\varepsilon} \leq \overbrace{\left\|\left(w,\psi\right)-\left(w,\psi\right)^{M}\right\|_{V}}^{\varepsilon^{M}} + \overbrace{\left\|\left(w,\psi\right)^{M}-\left(w,\psi\right)_{h}^{M}\right\|_{V}}^{\varepsilon_{h}^{M}} + \underbrace{\left\|\left(w,\psi\right)_{h}^{M}-\left(w,\psi\right)_{h,p}^{M}\right\|_{V}}_{\varepsilon_{h,p}^{M}}. \tag{3.14}$$

A **primeira** parcela de erro é denotada por **erro de aproximação dos dados**, $\left(\varepsilon^{M}\right)$. Ela fornece a distância entre as soluções exatas dos problemas *original* e *perturbado*. Esta parcela indica o erro cometido nas aproximações dos coeficientes "α " e "β ". A *magnitude* deste erro depende do modelo matemático utilizado para modelagem da incerteza: **a)** Variável randômica; **b)** Processo estocástico parametrizado. Na modelagem via variáveis randômicas utilizam-se os gPC's, enquanto que na modelagem via processos estocásticos parametrizados as representações podem ser realizadas via gPC's, [48], ou série Karhunem-Loeve, [54], e até mesmo uma combinação destas representações, [39, 90]. A **segunda** parcela é denotada por **erro de discretização estocástica**, $\left(\varepsilon_{h}^{M}\right)$. Ela representa a distância entre a solução do problema perturbado e a sua, respectiva, solução numérica aproximada, decorrente da discretização do espaço de parâmetros via algum método numérico, por exemplo, métodos dos elementos finitos, diferenças finitas, elementos de contorno, entre outros. A magnitude desta parcela dependerá do método numérico sendo associada ao parâmetro "h". A **terceira** parcela refere-se ao erro entre as soluções numéricas aproximadas nos espaços de parâmetros e estocástico, sendo chamada de **erro de discretização paramétrica**, $\left(\varepsilon_{h,p}^{M}\right)$. Os parâmetros que controlam a magnitude do erro *a priori* são "h" e "p". O parâmetro "p" refere-se ao grau do polinômio generalizado de Chaos.

Neste trabalho **não** serão obtidas medidas para o *erro de aproximação dos dados*,

$\left(\varepsilon^M\right)$, tendo em vista a grande quantidade de estimativas a disposição na literatura, [12, 14, 17, 18, 23, 25, 34, 44, 58, 62, 70, 105]. Em particular para o problema de difusão estocástica definido em um domínio físico $D \subset \mathbb{R}^d$ e $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidades, com um coeficiente de difusão com função covariância "*piecewise analytic*", o trabalho de Schwab & Todor (2006), [92], apresenta no *teorema 3.5*, pg. 12, uma estimativa para a *distância* entre o coeficiente de difusão e sua representação via série Karhunem-Loeve com *ordem* M,

$$\left\|\kappa - \kappa^M\right\|_{L^\infty(D\times\Sigma)} \leq C.e^{\frac{c_2}{2}.(1-2.s).M^{\frac{1}{d}}};$$

sendo $c_2, C > 0$, $M \geq 1$ e $\forall s > 0$. O trabalho de Bieri & Schwab (2009), [26], apresenta, para o problema de difusão estocástica, uma estimativa para "ε^M",

$$\varepsilon^M \leq C_P.\left\|\kappa - \kappa^M\right\|_{L^\infty(\boldsymbol{I},\mathcal{B}(\boldsymbol{I}),P;H_0^1(0,l))}.\|q\|_{L^2(D)}; \tag{3.15}$$

sendo, C_P a constante de Poincaré, $\boldsymbol{I} = \bigtimes_{k\geq 0} I_k$ com $I_k \subset \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, "q" o termo fonte e $\varepsilon^M = \left\|u - u^M\right\|_{L^2(\boldsymbol{I},\mathcal{B}(\boldsymbol{I});H_0^1(0,l))}$. Neste trabalho **não** estuda-se o problema de *aproximação dos dados* e suas conseqüências nas soluções numéricas aproximadas. Apesar disso, no **lema 3.3**, apresenta-se uma estimativa similar à constante na Eq. (3.15). A partir disso a estimativa para o erro *a priori* das aproximações numéricas, (ε), **a ser realizada neste trabalho** é definida por,

$$\overbrace{\left\|(w,\psi) - (w,\psi)_{h,p}\right\|_V}^{\varepsilon} \leq \overbrace{\left\|(w,\psi) - (w,\psi)_h\right\|_V}^{\varepsilon_h} + \overbrace{\left\|(w,\psi)_h - (w,\psi)_{h,p}\right\|_V}^{\varepsilon_{h,p}}. \tag{3.16}$$

Para se obter a estimativa para o erro de discretização paramétrica, $\left(\varepsilon_{h,p}\right)$, a estratégia a ser utilizada baseia-se em uma combinação das técnicas utilizadas nos trabalhos de Babuska, Tempone, Beck [13, 16, 20, 21], e Bieri *et all* (2009), [25].

3.3.4 Análise de Erro na Aproximação dos Dados

Nesta seção apresenta-se a análise de erro entre as soluções exatas dos problemas original e perturbado. É importante mencionar que neste trabalho para esta parcela de erro, $\left(\varepsilon^M\right)$, não se obterão estimativas, em detrimento da modelagem da incerteza utilizada nos coeficientes dos exemplos apresentados no capítulo 5. Apesar disso, são apresentados resultados teóricos através do **teorema 3.8** e **lema 3.3**. A modelagem da incerteza sobre os dados é feita por variável randômica ou processo estocástico parametrizado. Na modelagem via variável randômica é realizada através de uma *transformação de translação*. Esta transformação consiste em obter uma variável randômica, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, em termos de uma variável randômica, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma função $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, Borel-mensurável. Ao utilizar processos estocásticos para esta modelagem as aproximações resultantes dos dados são definidas em termos de processos estocásticos parametrizados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_{m_\alpha}(x,\omega) = \sum\limits_{i\epsilon\mathcal{I}_\alpha} \alpha_i(x)\varphi_i(\omega); \\ \beta_{m_\beta}(x,\omega) = \sum\limits_{i\epsilon\mathcal{I}_\beta} \beta_i(x)\chi_i(\omega); \\ q_{m_q}(x,\omega) = \sum\limits_{i\epsilon\mathcal{I}_q} q_i(x)\upsilon_i(\omega); \end{cases} \tag{3.17}$$

sendo $\alpha_i, \beta_i, q_i : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, $\varphi_i(\omega), \chi_i(\omega), \upsilon_i(\omega)$ variáveis randômicas e $\mathcal{I}_\alpha$, $\mathcal{I}_\beta$, $\mathcal{I}_q \subset$ IN conjuntos de índices. Substituindo-se a Eq. (3.17) na forma bilinear do problema variacional, Eq. (3.4), obtém-se,

$$\begin{aligned} \tilde{a}((w,\psi),(v,\phi)) = &\left(\beta_{m_\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + 4\left(\beta_{m_\beta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \\ &+\left(\alpha_{m_\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right), \frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right) + 4\left(\beta_{m_\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

A aproximação dos coeficientes definem um novo problema variacional, **(PVA-2)**, como segue

$$\textbf{(PVA-2)}\begin{cases} \text{Determinar } (\tilde{w},\tilde{\psi}) \in V, \text{ tal que} \\ \tilde{a}\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(v,\phi)\big) = l((v,\phi)), \quad \forall (v,\phi) \in V. \end{cases} \tag{3.19}$$

O **(PVA-2)** é denotado como problema variacional perturbado, [25]. Para as estimativas que seguem é necessário obter o resultado de existência e unicidade do **(PVA-2)**, Eq. (3.19).

Teorema 3.8 (Existência e Unicidade de Soluções Fracas para o PVA-2) *: Considere que os coeficientes α_{m_α} e β_{m_β} atendam as hipóteses H1 e H2, Eqs. (3.6) e (3.7), espaço de Hilbert V, e $\tilde{a} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear, coerciva e contínua em V e $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional linear, então $\exists!(\tilde{w},\tilde{\psi}) \in V$ para o (**PVA-2**), Eq. (3.19).*

Demonstração: Deve-se verificar se a forma bilinear $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ e o funcional linear $l(\cdot)$ atendam às hipóteses do teorema,

<u>Coercividade:</u>

$$\tilde{a}\big((w,\psi),(w,\psi)\big) = 4\left\|\sqrt{\beta_{m_\beta}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\beta_{m_\beta}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\sqrt{\alpha_{m_\alpha}}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)\right\|^2$$

$$+ \left\|\sqrt{\beta_{m_\beta}}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|^2 \geq mín\left\{\sqrt{\underline{\beta}},\sqrt{\underline{\alpha}}\right\}\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\|^2\right)$$

$$\geq mín\left\{\sqrt{\underline{\beta}},\sqrt{\underline{\alpha}}\right\}\left(\frac{1}{C}\|w\|^2_{H^2} + \frac{1}{c}\|\psi\|^2_{H^1}\right) \geq \mathbf{c}\|(w,\psi)\|^2_V, \quad \forall (w,\psi) \in V;$$

sendo $\mathbf{c} = \big(mín\{\sqrt{\underline{\beta}},\sqrt{\underline{\alpha}}\}\big).\big(mín\{\frac{1}{C},\frac{1}{c}\}\big)$ a constante de coercividade, e $C, c > 0$ as constantes de Poincaŕe, respectivamente.

Continuidade:

$$\left|\tilde{a}\big((w,\psi),(v,\phi)\big)\right| = \left|\left(\beta_{m_\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+4\left(\beta_{m_\beta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-4\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\alpha_{m_\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right),\frac{\partial v}{\partial x}+\phi\right)+4\left(\beta_{m_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right| \leq 4.\left|\left(\beta_{m_\beta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-4\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right|$$

$$+\left|\left(\beta_{m_\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right|+\left|\left(\alpha_{m_\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right),\frac{\partial v}{\partial x}+\phi\right)\right|+4.\left|\left(\beta_{m_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right|$$

$$\leq \bar{\beta}\left|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right|+4\bar{\beta}\left|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-4\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right|+\bar{\alpha}\left|\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi,\frac{\partial v}{\partial x}+\phi\right)\right|$$

$$+4\bar{\beta}\left|\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right| \leq m\acute{a}x\Big\{4\bar{\beta},\bar{\alpha}\Big\}\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|+\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-4\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\|\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right\|\left\|\frac{\partial v}{\partial x}+\phi\right\|+\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\|\right) \leq m\acute{a}x\big\{4\bar{\beta},\bar{\alpha}\big\}\left[\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|\right.$$

$$+\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|+4\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|\right)\left(\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|+4\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\|\right)+\left(\left\|\frac{\partial\ w}{\partial x}\right\|+\|\psi\|\right)\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|+\|\phi\|\right)$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\|\right] \leq m\acute{a}x\big\{4\bar{\beta},\bar{\alpha}\big\}\left[\|w\|_{H^2}\|v\|_{H^2}+\Big(\|w\|_{H^2}+4\|\psi\|_{H^1}\Big)\Big(\|v\|_{H^2}+4\|\phi\|_{H^1}\Big)\right.$$

$$\left.+\Big(\|v\|_{H^2}+\|\phi\|_{H^1}\Big)\Big(\|v\|_{H^2}+\|\phi\|_{H^1}\Big)\right] \leq \mathbf{C}\,\|(w,\psi)\|_V\,\|(v,\phi)\|_V\,,\quad \forall (w,\psi),(v,\phi)\in V;$$

sendo $\mathbf{C} = 36.máx\{4\bar{\beta}, \bar{\alpha}\} > 0$ uma constante definida pela hipótese H2 sobre os coeficientes elásticos da viga, $(\alpha,\ \beta)$. Desta forma, pelo Teorema de Lax-Milgram, [14, 31], tem-se que existe única solução para o problema variacional abstrato definido na Eq. (4.7). Da definição apresentada na Eq. (3.19) é imediato que $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear. ■

Lembrando que o **(PVA-1)** é definido por,

$$\textbf{(PVA-1)} \begin{cases} \text{Determinar } (w,\psi) \in V, \text{ tal que} \\ a((w,\psi),(v,\phi)) = l((v,\phi)), \quad \forall (v,\phi) \in V. \end{cases} \tag{3.20}$$

A partir dos resultados sobre existência e unicidade dos **(PVA-1)** e **(PVA-2)**, pode-se obter o erro de aproximação dos dados, $\left(\varepsilon^M\right)$.

Lema 3.3 ("Distância entre as soluções dos PVA-1 e PVA-2") *: Sejam (w,ψ) e $(\tilde{w},\tilde{\psi})$ soluções, respectivamente, dos (**PVA-1**) e (**PVA-2**) então $\exists C(\alpha,\beta) > 0$ tal que*

$$\left\|\left(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi}\right)\right\|_V \leq C.máx\left\{\left\|\beta-\beta_{m_\beta}\right\|_{L^\infty}, \left\|\alpha-\alpha_{m_\alpha}\right\|_{L^\infty}\right\}.\|q\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P;L^2(0,l))}.$$

Demonstração: Sejam (w,ψ), $(\tilde{w},\tilde{\psi}) \in V$, faz-se Eq. (3.20)- Eq. (3.19) e "$\pm a((\tilde{w},\tilde{\psi}),(v,\phi))$" chega-se,

$$a\big((w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi}),(v,\phi)\big) = \tilde{a}\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(v,\phi)\big) - a\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(v,\phi)\big),$$

e fazendo-se $(v,\phi) = (w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})$ nesta última identidade e usando-se as propriedades das formas bilineares,

$$a\big((w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi}),(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\big) = \tilde{a}\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\big) - a\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\big)$$

$$a\big((w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi}),(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\big) = \tilde{a}\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(w,\psi)\big) - a\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(w,\psi)\big)$$

$$+a\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(\tilde{w},\tilde{\psi})\big) - \tilde{a}\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(\tilde{w},\tilde{\psi})\big).$$

Da coercividade da forma bilinear, tem-se que

$$c\left\|(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\right\|_V^2 \leq a\big((w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi}),(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\big).$$

Por outro lado tem-se que,

$$\tilde{a}\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(w,\psi)\big)-a\big((\tilde{w},\tilde{\psi}),(w,\psi)\big)=\int_\Omega\int_0^l(\beta_{m_\beta}-\beta)\left[\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+4\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-4\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+4\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right](x,\omega)dxdP(\omega)+\int_\Omega\int_0^l(\alpha_{m_\alpha}-\alpha)\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\tilde{\psi}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)(x,\omega)dxdP(\omega)$$

$$a((\tilde{w},\tilde{\psi}),(\tilde{w},\tilde{\psi}))-\tilde{a}((\tilde{w},\tilde{\psi}),(\tilde{w},\tilde{\psi}))=\int_\Omega\int_0^l(\beta-\beta_{m_\beta})\left[\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}+4\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-4\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-4\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)+4\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right](x,\omega)dxdP(\omega)+\int_\Omega\int_0^l(\alpha-\alpha_{m_\alpha})\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\tilde{\psi}\right)\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\tilde{\psi}\right)(x,\omega)dxdP(\omega).$$

Das identidades anteriores obtém-se,

$$a\big((w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi}),(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\big)=\int_\Omega\int_0^l(\beta-\beta_{m_\beta})\left[\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\tilde{w}-w)+4\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-4\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\tilde{w}-w)-4\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\psi}-\psi)\right)+4\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\psi}-\psi)\right](x,\omega)dxdP(\omega)$$

$$\int_\Omega\int_0^l(\alpha-\alpha_{m_\alpha})\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\tilde{\psi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{w}-w)+\tilde{\psi}-\psi\right)(x,\omega)dxdP(\omega).$$

$$\leq C.máx\left\{\|\,\beta-\beta_{m_\beta}\,\|_{L^\infty},\|\,\alpha-\alpha_{m_\alpha}\,\|_{L^\infty}\right\}\|\,(\tilde{w},\tilde{\psi})\,\|_V\|\,(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\,\|_V$$

Desta última identidade e da coercividade da forma bilinear "$a(\cdot,\cdot)$" chega-se ao resultado desejado,

$$c.\left\|(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\right\|^2\leq C.máx\left\{\left\|\beta-\beta_{m_\beta}\right\|_{L^\infty},\left\|\alpha-\alpha_{m_\alpha}\right\|_{L^\infty}\right\}\left\|(\tilde{w},\tilde{\psi})\right\|_V\left\|(w-\tilde{w},\psi-\tilde{\psi})\right\|_V.\quad\blacksquare$$

Do ponto de vista de aproximações numéricas para os coeficientes "α" e "β" quando $m_\beta,m_\alpha\longrightarrow\infty,\ \Rightarrow\ \beta_{m_\beta}\longrightarrow\beta,\ L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P;H^2(0,l))\ \wedge\ \alpha_{m_\alpha}\longrightarrow\alpha,\ L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P;H^1(0,l))$ tem-se que $(\tilde{w},\tilde{\psi})\to(w,\psi)$. Neste sentido, os próximos resultados estão relacionados a

obtenção de aproximações numéricas, (w_m, χ_m), em subespaços de V com dimensão finita, $(V_m \subset V)$. Um resultado similar é mostrado em [25] para o problema de difusão estocástica.

Capítulo 4

Análise de Erro das Soluções

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se resultados teóricos para geração de soluções numéricas aproximadas via método de Bubnov-Galerkin e estimativas de erro para o problema de flexão estocástica da viga de Levinson-Bickford - caso estacionário. A análise de erro consiste em determinar a *distância* entre as soluções teóricas e numéricas aproximadas. Neste trabalho, conforme Eq. (3.16), a análise de erro realizada se limitará na determinação das **segunda** e **terceira** parcelas de erro, $\left(\varepsilon_h,\ \varepsilon_{h,p}\right)$. Para a primeira parcela de erro,$\left(\varepsilon^M\right)$, relacionada a aproximações dos coeficientes da equação "α" e "β", existe uma série de trabalhos apresentando estimativas relacionadas a aproximação dos dados, [12, 14, 17, 18, 23, 25, 34, 39, 44, 48, 58, 62, 70, 105].

4.2 Definições e Hipóteses para a Modelagem da Incerteza

Nos exemplos numéricos apresentados no capítulo 5, a modelagem da incerteza nestes coeficientes será realizada via variável randômica ou um processo estocástico parametrizado. As definições 4.1 e 4.2 são importantes para hipótese H1 nos coeficientes de rigidez "α" e "β". São apresentados os valores "*máximo*" e "*mínimo*" para estes coeficientes nas modelagens da incerteza feitas por variáveis randômicas ou processos estocásticos parametrizados, respectivamente. Para as deinições que seguem considera-se $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, com Ω o espaço amostral; $\mathcal{F}$ uma $\sigma-$álgebra de eventos e P uma medida de probabilidade.

Definição 4.1 : *Considere* $\Xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *uma variável randômica, (definição 1.4), e* $\vartheta : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathbb{R}$, *uma função cujos valores mínimo e máximo,* $(\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta})$, *são definidos por:*

$$\begin{cases} \underline{\vartheta} = \min\limits_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ \vartheta(\xi) \right\}; \\ \bar{\vartheta} = \max\limits_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ \vartheta(\xi) \right\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Definição 4.2 : *Considere* $\Xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *um vetor randômico e* $\vartheta : (0, l) \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \mathbb{R}$, *um processo estocástico parametrizado, (definição 1.8), então os seus valores mínimo e máximo,* $(\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta})$, *são definidos por:*

$$\begin{cases} \underline{\vartheta} = \min\limits_{(x, \boldsymbol{\xi}) \in [0,l] \times \mathbb{R}^n} \left\{ \vartheta(x, \boldsymbol{\xi}) \right\}; \\ \bar{\vartheta} = \max\limits_{(x, \boldsymbol{\xi}) \in [0,l] \times \mathbb{R}^n} \left\{ \vartheta(x, \boldsymbol{\xi}) \right\}. \end{cases} \tag{4.2}$$

As hipóteses, a seguir, sobre os coeficientes de rigidez "α" e "β" e no termo de carregamento "q" são necessárias para a obtenção dos resultados teóricos, relativos a análise de erro das soluções numéricas aproximadas:

H1) $\exists 0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} < +\infty$, *tal que* $P\big(\omega \in \Omega \mid \alpha(x,\omega) \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \forall x \in (0,l)\big) = 1$;

H2) $\exists 0 < \underline{\beta} \leq \bar{\beta} < +\infty$, *tal que* $P\big(\omega \in \Omega \mid \beta(x,\omega) \in \big[\underline{\beta}, \bar{\beta}\big], \forall x \in (0,l)\big) = 1$;

H3) A incerteza sobre os dados, $(\alpha,\ \beta,\ q)$, é modelada através de variáveis randômicas ou processos estocásticos definidos em termos de um vetor randômico, $\boldsymbol{\Xi} : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{\boldsymbol{\Xi}})$ cujas componentes, ξ_i, são variáveis randômicas, estatisticamente independentes, identicamente distribuídas, uniformes e definidas em $\Gamma = \bigtimes_{i=1}^{n} \Gamma_i$, com $\Gamma_i = [-1,1],\ \forall i \in \{1,...,n\}$;

H4) Considera-se que os coeficientes $\alpha \in C^{\infty}\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H^1(0,l)\big)$, $\beta \in C^{\infty}\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H^2(0,l)\big)$ e $\exists \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\left\| \left(\frac{D^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\xi}} \alpha}{\alpha} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^{\infty}(0,l)} \leq \mathbf{r}^{\boldsymbol{\nu}}_{\alpha}, \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^n \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Gamma;$$

$$\left\| \left(\frac{D^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\xi}} \beta}{\beta} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^{\infty}(0,l)} \leq \mathbf{r}^{\boldsymbol{\nu}}_{\beta}, \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^n \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Gamma;$$

H5) O termo de carregamento $q \in C^{\infty}\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; L^2(0,l)\big)$.

Observações

1. Uma variável randômica, $\boldsymbol{\Xi} : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \big([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$, que atenda à hipótese (H3) é absolutamente contínua, e além disso, tem-se que :

$$\int_{-1}^{+1} |\xi|^p . dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\xi) = \int_{-1}^{+1} |\xi|^p . \frac{1}{2} d\xi \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty;$$

portanto $\xi \in L^p(-1,1)$. Desta forma, uma variável randômica que atenda à hipótese H3 é uma **variável básica randômica**.

2. Da hipótese, (H4), com $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, fixado, tem-se para os coeficientes "α" e "β" a seguinte estimativa:

$$\left| D^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\xi}} \alpha(x, \boldsymbol{\xi}) \right| \leq \bar{\alpha} \left| \left(\frac{D^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\xi}} \alpha}{\alpha} \right)(x, \boldsymbol{\xi}) \right| \leq \bar{\alpha} \mathbf{r}^{\boldsymbol{\nu}}_{\alpha} \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^N,\ \boldsymbol{\xi} \in \Gamma \quad \forall x \in [0,l];$$

$$\Rightarrow \left\| D_{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{\nu}} \alpha(\xi) \right\|_{L^\infty(0,l)} \leq \bar{\alpha} \mathbf{r}_\alpha^{\boldsymbol{\nu}} \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^N, \ \boldsymbol{\xi} \in \Gamma;$$

analogamente tem-se

$$\Rightarrow \left\| D_{\xi}^{\boldsymbol{\nu}} \beta(\xi) \right\|_{L^\infty(0,l)} \leq \bar{\beta} \mathbf{r}_\beta^{\boldsymbol{\nu}} \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^N, \ \xi \in \Gamma.$$

3. Quando a modelagem da incerteza é realizada através de um processo estocástico parametrizado

$$\vartheta(x, \boldsymbol{\xi}) = \mu_\vartheta + \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \xi_i;$$

sendo $\mu_\vartheta > 0$ o valor esperado de ϑ, $\xi_i \in [-1, 1]$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, variáveis randômicas. Para $|\boldsymbol{\nu}| > 1$ tem-se que $\left\| D_{\xi}^{\boldsymbol{\nu}} \vartheta(\xi) \right\|_{L^\infty(0,l)} \equiv 0$, enquanto que para $|\boldsymbol{\nu}| = 1$, $\boldsymbol{\nu} = (0, ..., 0, \nu_i, 0, ..., 0)$, $D_{\xi}^{\boldsymbol{\nu}} \vartheta(x, \xi) = \varphi_{\nu_i}(x)$. Pode-se observar que,

$$\mu_\vartheta - \sum_{i=0}^{n} \|\varphi_i\|_{L^\infty(0,l)} \leq \vartheta(x, \boldsymbol{\xi}) \leq \mu_\vartheta + \sum_{i=0}^{n} \|\varphi_i\|_{L^\infty(0,l)}.$$

4. Outro modelo de incerteza muito utilizado, [17, 29, 42, 58, 59, 83, 89, 105], é obtido ao se "exponenciar" um processo estocástico parametrizado,

$$\vartheta(x, \xi) = e^{\mu_\vartheta(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \xi_i}.$$

Em muitas aplicações, quando as variáveis randômicas são gaussianas, ($\xi_i \sim N(0, 1)$, $i \in \mathbb{N}$), este modelo é utilizado para se obter um processo estocástico, que produz variáveis randômicas lognormais.

5. Os trabalhos de Xiu, [109, 110], utilizam para modelagem da incerteza, um processo estocástico, $\vartheta : (0, l) \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, da seguinte forma,

$$\vartheta(x, \boldsymbol{\xi}) = \mu_\vartheta + \sigma_\vartheta . \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k.\pi} \right)^2 sen(2k\pi x) \xi_k;$$

sendo μ_ϑ o valor esperado e σ_ϑ o desvio padrão do processo estocástico ϑ.

6. Gittelson, [51], utiliza para modelagem da incerteza sobre o coeficiente de difusão, um processo estocástico parametrizado, $\vartheta : [0,l] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$, da seguinte forma,

$$\vartheta(x,\boldsymbol{\xi}) = 1 + \frac{1}{c}.\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^m}\right).sen(k\pi x).\xi_k, \qquad x \in [0,l] \quad \wedge \quad \boldsymbol{\xi} \in [-1,1]^{\mathbb{N}};$$

sendo "γ" e "m" parâmetros e "c" definido como,

$$c = \gamma.\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^m}\right);$$

tal que $\left|\vartheta(x,\boldsymbol{\xi}) - 1\right| < \gamma, \quad x \in [0,l] \quad \wedge \quad \boldsymbol{\xi} \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$.

7. A hipótese H3 consiste da hipótese de *ruído com dimensão finita.*

4.3 Regularidade e Analiticidade das Soluções

Nesta seção apresentam-se resultados sobre analiticidade de soluções, (lemas 4.1, 4.2 e corolário 4.5). Para tanto utiliza-se um *argumento unidimensional*, [16]. Estes resultados são importantes para obtenção da *regularidade estocástica* necessária para as estimativas dos coeficientes de Fourier-Legendre e *distância* entre as soluções teóricas e aproximadas apresentadas nos lema 4.3 e teorema 4.2, respectivamente. Considerando que a modelagem da incerteza é realizada através de um vetor randômico, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, satisfazendo as hipóteses H1-H4. Fixando-se um $j \in \{1,2,...,n\}$, definem-se os seguintes objetos auxiliares, [16],

Definição 4.3 : *Considere* $\Xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *um vetor randômico então para um* $\omega \in \Omega$, *fixado, reescreve-se o vetor randômico da seguinte forma:*

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1,...,\xi_{j-1},\xi_j,\xi_{j+1},...,\xi_n\right) = \left(\xi_j,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j\right);$$

em que $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Definição 4.4 *: Considere* $\Xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *um vetor randômico, então a imagem da* $j-$*ésima componente é dada por* $\Gamma_j = \Xi_j(\Omega)$ *em que* $\Gamma_j \subset \mathbb{R}$*; a partir disso define-se*

$$\tilde{\Gamma}_j = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \Gamma_k.$$

Definição 4.5 *Da hipótese H4 tem-se que o vetor randômico,* $\Xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, possui entradas definidas por variáveis randômicas independentes, a partir disso a função densidade de probabilidade conjunta do vetor randômico,* $\tilde{\Xi}_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ *é dada por,*

$$f_{\tilde{\Xi}_j}\left(\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, ..., \xi_n\right) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} f_{\Xi_k}(\xi_k).$$

Definição 4.6 *A função de distribuição de probabilidade conjunta do vetor randômico,* $\tilde{\Xi}_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ *é dada por,*

$$F_{\tilde{\Xi}_j}\left(\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, ..., \xi_n\right) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} F_{\Xi_k}(\xi_k).$$

Definição 4.7 *Considerando as hipóteses H1-H4,* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ *um vetor randômico sobre* $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{\Xi}\right)$*, fixado, e* $\mathcal{V} = C^{\infty}\left(\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{\Xi}\right); H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\right)$ *define-se a aplicação* $a_{\boldsymbol{\xi}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\Xi}\right)$ *como sendo,*

$$\begin{aligned} a_{\boldsymbol{\xi}}\big((w,\psi),(v,\phi)\big) = &\left(4\beta(\boldsymbol{\xi}).\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi}), \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)} \\ &+\left(\beta(\boldsymbol{\xi}).\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\boldsymbol{\xi}), \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)} + \left(\left(4\beta.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi}), \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)} \\ &+\left(\alpha(\boldsymbol{\xi}).\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)(\boldsymbol{\xi}), \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Afirmações:

Para a aplicação definida na Eq. (4.3) são verdadeiras as seguintes afirmações:

1. "$a_{\boldsymbol{\xi}}$" é uma variável randômica sobre $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$.

   De fato, tomando-se no **Teorema 1.1**, (Doob-Dynkin), $\big(\Omega, \Sigma\big) = \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$ e $\big(S, A\big) = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ e $\big(w, \psi\big) \in C^{\infty}\Big(\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{\boldsymbol{\Xi}}\big); H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\Big)$, tomando-se

$$f := \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right) + 4\beta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$+\beta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right).$$

   e notando que a integral em $\big([0,l], \mathcal{B}([0,l])\big)$ de uma função mensurável é mensurável, então $a_{\boldsymbol{\xi}}$ é mensurável em $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$.

2. Das definições apresentadas nas Eqs. (3.4) e (4.3) chega-se,

$$a\big((w,\psi),(v,\phi)\big) = \int_{[-1,1]^n} a_{\boldsymbol{\xi}}\big((w,\psi),(v,\phi)\big) dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}).$$

3. Este objeto é apresentado no trabalho de Babuska *et all*, [16], na demonstração do lema 3.2, pg. 1016.

Corolário 4.1 *Para a aplicação,* $a_{\boldsymbol{\xi}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$, *definida na Eq. (4.3), valem as seguintes afirmações:*

i) $\forall (w,\psi) \in \mathcal{V},\ \exists \boldsymbol{c} > 0$ *tal que,*

$$a_{\boldsymbol{\xi}}\big((w,\psi),(w,\psi)\big) \geq \boldsymbol{c}.\left\|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|^2_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)};$$

   denota-se "$\boldsymbol{c}$*" como constante de coercividade.*

ii) $\forall (v,\phi),(w,\psi) \in \mathcal{V},\ \exists \boldsymbol{C} > 0$ *tal que,*

$$a_{\boldsymbol{\xi}}\big((w,\psi),(v,\phi)\big) \leq \boldsymbol{C}.\left\|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}.\left\|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial \phi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}.$$

Demonstração: Da definição da aplicação, Eq. (4.3), e portanto da hipótese H1, para o ítem (i), tem-se que

$$a_{\boldsymbol{\xi}}\big((w,\psi),(w,\psi)\big) = 4\left\|\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2 + \left\|\left(\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2$$

$$+\left\|\sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2 + \left\|\left(\sqrt{\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2 \geq \mathit{mín}\,\{\underline{\beta}(\boldsymbol{\xi}),\underline{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\}.\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\|^2\right.$$

$$\left.+\left\|\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|^2\right) \geq \mathit{mín}\,\{\underline{\beta}(\boldsymbol{\xi}),\underline{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\}.\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|^2\right)$$

$$\geq \mathit{mín}\,\{\underline{\beta},\underline{\alpha}\}.\left(\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|^2\right)$$

$$= \mathbf{c}.\left\|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|^2_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n \;\; e \;\; \forall (w,\psi)\in\mathcal{V};$$

sendo $\mathbf{c} = \mathit{mín}\{\underline{\beta},\underline{\alpha}\}$. Para o ítem (ii) utiliza-se a hipótese H2, para tanto toma-se $(v,\phi),(w,\psi)\in\mathcal{V}$ e calcula-se,

$$a_{\boldsymbol{\xi}}\big((v,\phi),(w,\psi)\big) \leq \left|\left(4\beta(\boldsymbol{\xi}).\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi}),\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)}\right|$$

$$+\left|\left(\left(\beta.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\boldsymbol{\xi}),\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)}\right| + \left|\left(\left(4\beta.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi}),\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)}\right|$$

$$+\left|\left(\alpha(\boldsymbol{\xi}).\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)(\boldsymbol{\xi}),\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right)(\boldsymbol{\xi})\right)_{L^2(0,l)}\right| \leq \bar{\beta}.\left\|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|.\left\|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|$$

$$+\bar{\beta}.\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\|.\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\| + 4\bar{\beta}.\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|.\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\| + \bar{\alpha}.\left\|\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|.\left\|\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \phi\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|$$

$$\leq 64\bar{\beta}.\left[\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\| + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|\right].\left[\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\| + \left\|\frac{\partial \phi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|\right] + 5\bar{\beta}.\left\|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}$$

$$.\left\|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial \phi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)} + \bar{\alpha}.\left[\left\|\frac{\partial w}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\| + \|\psi(\boldsymbol{\xi})\|\right].\left[\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\| + \|\phi(\boldsymbol{\xi})\|\right]$$

$$\leq 261\bar{\beta}.\left\|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}.\left\|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial \phi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}$$

$$+\bar{\alpha}.\left[c.\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\| + C.\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|\right].\left[c.\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi})\right\| + C.\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right\|\right]$$

$$\leq \boldsymbol{C}.\left\|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial \psi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}.\left\|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial \phi}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}, \; \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n \;\; e \;\; \forall (w,\psi)\in\mathcal{V};$$

sendo $\boldsymbol{C} = máx\Big\{261\bar{\beta}, 4.\bar{\alpha}.máx\{c, C\}\Big\}$ e "c, C" as constantes de Poincaré. ■

Corolário 4.2 *A aplicação,* $a_{\boldsymbol{\xi}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \Big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\boldsymbol{\Xi}}\Big)$, *é uniformemente limitada em* $\Big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{\boldsymbol{\Xi}}\Big)$.

Demonstração: Imediato, a partir do corolário 4.1. ■

Corolário 4.3 ("Estimativas Auxiliares") *: Para* $n, m \in \mathbb{N}$ *tais que* $0 < m \leq n$ *e sejam* $(w, \psi) \in \mathcal{V}$, *"*$\alpha$*" e "*$\beta$*" satisfazendo as hipóteses H1 e H4, então valem as seguintes estimativas:*

$$(i) \quad \left| \int_0^l \left(\frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right) (x, \boldsymbol{\xi}) dx \right| \leq c_1 . \left\| \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} . \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right) \right\|_{L^2(0,l) \times L^2(0,l)} ;$$

$$(ii) \quad \left| \int_0^l \left(\frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right) (x, \boldsymbol{\xi}) dx \right| \leq c_1 . \left\| \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} . \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right) \right\|_{L^2(0,l) \times L^2(0,l)} ;$$

$$(iii) \quad \left| \int_0^l \left(\frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} . \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) . \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) (x, \boldsymbol{\xi}) dx \right| \leq c_2 . \left\| \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} . \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right) \right\|_{L^2(0,l) \times L^2(0,l)} ;$$

$$(iv) \quad \left| \int_0^l \left(\frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) \right) (x, \boldsymbol{\xi}) dx \right| \leq \left\| \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} . \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) (\boldsymbol{\xi}) \right) \right\|_{L^2(0,l) \times L^2(0,l)} ;$$

(v) $$\left|\int_0^l \left(\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right| \leq \left\|\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\|\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}.\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)};$$

(vi) $$\left|\int_0^l \left(\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right| \leq \left\|\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\|\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}).\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)};$$

(vii) $$\left|\int_0^l \left(\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right| \leq \left\|\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\|\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}.\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)};$$

(viii) $$\left|\int_0^l \left(\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right| \leq \left\|\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left\|\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}.\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)};$$

(ix) $$\left|\int_0^l \left(\frac{\partial^n q}{\partial \xi_i^n}\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right| \leq c_3.\left\|\frac{\partial^n q}{\partial \xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}$$

$$.\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)};$$

sendo $c_1 = máx\left\{1, c_w\right\}$, $c_2 = máx\left\{1, c_\psi\right\}$ *e* $c_3 = máx\left\{1, c_w^2\right\}$, *com "*$c_w$*" e "*$c_\psi$*", as constantes de Poincare.*

Demonstração: Das hipóteses feitas sobre os dados e do resultado do corolário (3.3) tem-se que para um $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, fixado, tem-se que

$$\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}) \in H_0^2(0.l), \quad \left(\frac{\partial^n q}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}) \in L^2(0,l);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}) \in H_0^1(0,l);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}) \in L^2(0,l);$$

$$\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}),\ \left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}) \in H_0^1(0,l);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\ \in L^2(0,l).$$

Primeiramente, verifica-se que "$\left(\sqrt{\alpha}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right)(\boldsymbol{\xi}) \in L^2(0,l)$", dado que "$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \in H_0^1(0,l)$" e o coeficiente "$\alpha$" atende as hipóteses H1 e H4, estima-se

$$\int_0^l \left|\left(\sqrt{\alpha}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|^2 dx \leq \int_0^l \alpha(x,\boldsymbol{\xi}).\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|^2 dx$$

$$\leq \bar{\alpha}.\int_0^l \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|^2 dx < \infty;$$

o resultado acima é válido, também, para o coeficiente "β". A partir disso, demonstra-se a desigualdade (i),

$$\left|\int_0^l \left(\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right| \leq \int_0^l \left|\left(\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|dx = \int_0^l \left|\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}(x,\boldsymbol{\xi})\right|\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|dx$$

$$= \int_0^l \left|\left(\frac{1}{\alpha}.\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|\left|\left(\alpha.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right).\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|dx$$

$$\leq \left\|\left(\frac{1}{\alpha}.\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}\int_0^l \left|\left(\alpha.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|dx$$

$$\leq \left\|\left(\frac{1}{\alpha}.\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}\left\|\sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}.\left(\int_0^l \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(x,\boldsymbol{\xi})\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\| \left(\frac{1}{\alpha} . \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(0,l)} \left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} . \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} . \left(\int_0^l c_w^2 . \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right)(x, \boldsymbol{\xi}) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\| \left(\frac{1}{\alpha} . \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(0,l)} \left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} . \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} . \left(\int_0^l \left[c_w^2 . \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right)(x, \boldsymbol{\xi}) \right|^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right)(x, \boldsymbol{\xi}) \right|^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \left\| \left(\frac{1}{\alpha} . \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(0,l)} . \left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} . \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)}$$

$$. \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right)(\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\|_{L^2(0,l) \times L^2(0,l)} ;$$

sendo $c_1 = \sqrt{\bar{\alpha}} . máx \left\{ 1, c_w \right\}$, com "$c_w$" a constante de Poincaré. As majorações (ii)-$(viii)$ são realizadas de forma análoga, enquanto que a desigualdade (ix) é obtida utilizando-se as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Poincare, para um $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ fixado. ■

Corolário 4.4 ("Estimativas Auxiliares - II") *: Com as mesmas hipóteses do corolário 4.3 valem as seguintes estimativas:*

$$(i) \quad \left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} + \left\| \left(\sqrt{\alpha} \frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \leq C_1 \left\| q(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)};$$

$$(ii) \quad \left\| \sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} + \left\| \sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \leq C_2 \left\| q(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)};$$

sendo $C_1 = 2. \dfrac{\sqrt{\bar{\alpha}}}{\boldsymbol{c}} . máx\{c_w, c_\psi\} . c_w^2$ *e* $C_2 = 2. \dfrac{\sqrt{\bar{\beta}}}{\boldsymbol{c}} . c_w^2$*, em que "*$\boldsymbol{c}$*" é a constante de coercividade do corolário 4.1.*

Demonstração: Para a estimativa (i) da hipótese H1 e considerando que para um $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, fixado, tem-se que "$\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in H_0^2(0,l)$", faz-se uso da desigualdade de Poincaré para obter as seguintes estimativas,

$$\left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|^2_{L^2(0,l)} = \int_0^l \left| \sqrt{\alpha(x,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(x,\boldsymbol{\xi}) \right|^2 dx$$

$$\leq \bar{\alpha} \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(x,\boldsymbol{\xi}) \right|^2 dx \leq \bar{\alpha} C \int_0^l \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(x,\boldsymbol{\xi}) \right|^2 dx$$

$$\leq c \left\| \left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}(\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\|^2_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)} \leq c \left\| \frac{\partial^{n-m} q}{\partial \xi_i^{n-m}}(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \left\| \frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)}$$

sendo "$c = \bar{\alpha}.C$" e "C" a constante de Poincaré. Analogamente, para segunda parcela notando que "$\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in H_0^1(0,l)$",

$$\left\| \sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} + \left\| \left(\sqrt{\alpha} \frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \leq \sqrt{\bar{\alpha}}.c_w. \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)}$$

$$+\sqrt{\bar{\alpha}}.c_\psi. \left\| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \leq \sqrt{\bar{\alpha}}.máx\{c_w, c_\psi\}. \left[\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \right] \leq 2.\sqrt{\bar{\alpha}}.máx\left\{c_w, c_\psi\right\}. \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right) \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}$$

$$\leq C_1. \left\| q(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)};$$

sendo $C_1 = \dfrac{2.\sqrt{\bar{\alpha}}.máx\left\{c_w, c_\psi\right\}.c_w^2}{\mathbf{c}}$. Para obter a estimativa (ii), novamente, utiliza-se a hipótese sobre a limitação no coeficiente "β",

$$\left\| \sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} + \left\| \sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \leq \sqrt{\bar{\beta}}. \left[\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)} \right] \leq 2.\sqrt{\bar{\beta}}. \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}}\right) \right)(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}$$

$$\leq C_2. \left\| q(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^2(0,l)};$$

sendo $C_2 = \dfrac{2.\sqrt{\bar{\beta}}}{\mathbf{c}}$. ■

Pretende-se obter as extensões analíticas da solução, $\Big(\Psi(w),\Psi(\psi)\Big)$, para uma região do plano complexo, da seguinte forma,

$$\begin{cases} w\big(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;z\big)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^k w}{\partial\xi_j^k}\big(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;\xi_j\big)\frac{(z-\xi_j)^k}{k!};\\ \psi\big(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;z\big)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^k \psi}{\partial\xi_j^k}\big(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;\xi_j\big)\frac{(z-\xi_j)^k}{k!}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Lema 4.1 ("Regularidade Estocástica das Soluções") *: Considerando, adicionalmente, as hipóteses do corolário 4.3,*

$$\left\|\left(\frac{D^k_{\xi_n}\alpha}{\alpha}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}\le r_n^k.k!,\quad \left\|\left(\frac{D^k_{\xi_n}\beta}{\beta}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}\le r_n^k.k!,$$

$$\frac{\big\|\big(D^k_{\xi_n}q\big)(\boldsymbol{\xi})\big\|_{L^2(0,l)}}{1+\big\|q(\boldsymbol{\xi})\big\|_{L^2(0,l)}}\le\frac{r_n^k}{2^{k+1}}.k!,\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n;$$

então $\exists C>0$ *tal que*

$$\big\|D^k_{\xi_n}w(\boldsymbol{\xi})\big\|_{L^2(0,l)}\le C.r_n^k.k!,\quad \big\|D^k_{\xi_n}\psi(\boldsymbol{\xi})\big\|_{L^2(0,l)}\le C.r_n^k.k!,\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

Demonstração: Para obter as limitações nas derivadas das soluções, utiliza-se a regra generalizada de Leibinz. Derivando-se "$n-$vezes", em relação à variável randômica ξ_i, as equações de equilíbrio Eq. (3.1.a),

$$\frac{\partial^n}{\partial\xi_i^n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\beta\left(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-16\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)\right)=\frac{\partial^n}{\partial\xi_i^n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right)\right)$$

$$-\frac{\partial^n}{\partial\xi_i^n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\beta\left(5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-16\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi^n}\right)+\frac{\partial^n\psi}{\partial x^n}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\beta\left(5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi^n}\right)-16\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi^n}\right)\right)\right)\right)$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi^m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial x^{n-m}}\right)+\frac{\partial^n\psi}{\partial x^n}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi_m}\left(5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi^{n-m}}\right)-16\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi^{n-m}}\right)\right)\right]\right\}=\frac{\partial^n q}{\partial\xi_n}.$$

Multiplicando-se a equação acima pela função $\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H_0^2(0,l))$ e integrando-se em $[0,l]$,

$$\int_0^l \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \xi_i^n} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\beta \left(5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 16 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \right] \right\} (x,\xi) \frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n}(x,\boldsymbol{\xi}) dx =$$

$$- \int_0^l \left\{ \alpha \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right)^2 + \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right] + \beta \left[5 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right)^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. -16 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right] \right\} (x,\boldsymbol{\xi}) dx - \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \int_0^l \left\{ \left[\frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) + \left[\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m} \left(5 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) - 16 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right\} (x,\boldsymbol{\xi}) dx$$

$$= \int_0^l \left(\frac{\partial^n q}{\partial \xi_n} \frac{\partial^n w}{\partial \xi_n} \right)(x,\boldsymbol{\xi}) dx.$$

Fazendo-se operações similares, ou seja, diferenciando-se "$n-$vezes", em relação a variável randômica ξ_i, a equação de equilíbrio, Eq. (3.1.b), e multiplicando-se a equação resultante destas *manipulações* pela função $\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H_0^1(0,l))$ e integrando-se em $[0,l]$ chega-se

$$- \int_0^l \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \xi_i^n} \left[\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta \left(16 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 68 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \right] \right\} (x,\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n}(x,\boldsymbol{\xi}) dx =$$

$$- \int_0^l \left\{ \alpha \left[\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right)^2 + \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi^n} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right] + \beta \left[16 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) \right.\right.$$

$$\left.\left. -68 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) \right)^2 \right] (x,\boldsymbol{\xi}) dx - \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \int_0^l \left\{ \left[\frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right)^2 \right] - \left[\frac{\partial^m \beta}{\partial \xi_i^m} \left(16 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} - 68 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) \right] (x,\boldsymbol{\xi}) dx = 0.$$

Somando-se as equações anteriores,

$$- \int_0^l \left\{ \alpha \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) + \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right]^2 + 4\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) - 4 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right) \right]^2 \right.$$

$$\left. + \beta \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} \right)^2 \right] \right\} dx + \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \int_0^l \left\{ \frac{\partial^m \alpha}{\partial \xi_i^m} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi_i^n} \right) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial \xi^n} \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m} w}{\partial \xi_i^{n-m}} \right) \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_i^n} - \frac{\partial^n \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial^{n-m} \psi}{\partial \xi_i^{n-m}} \right]$$

$$+\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi^m}\left[5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)+16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\right.$$

$$\left.-16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)-68\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right]\Bigg\}dx=\int_0^l\left(\frac{\partial^n q}{\partial\xi_i^n}\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(x,\xi)dx.$$

Identificando-se os termos e utilizando a definição 4.7, "$a_{\boldsymbol{\xi}}(\cdot,\cdot)$", na equação anterior reescreve-se a equação variacional da seguinte forma,

$$a_{\boldsymbol{\xi}}\left(\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n},\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right),\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n},\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\right)=-\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\int_0^l\left\{\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi^m}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi^n}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}-\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi^n}\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\Bigg]+\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi^m}\left[5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right.$$

$$+16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)-16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)$$

$$\left.\left.-68\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right]\right\}(x,\xi)dx-\int_0^l\left(\frac{\partial^n q}{\partial\xi_i^n}\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx.$$

Do ítem (i), corolário 4.1,

$$a_{\boldsymbol{\xi}}\left(\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n},\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right),\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n},\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\right)\geq \mathrm{c}\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|^2_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}.$$

Combinando-se esta desigualdade, com a última identidade para "$a_{\boldsymbol{\xi}}(\cdot,\cdot)$" obtém-se,

$$\mathrm{c}\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|^2_{L^2(0,l)\times L^2(0,l)}\leq-\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\int_0^l\left\{\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right.\right.$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)+\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}-\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\Bigg]+\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi_i^m}\left[5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right.$$

$$\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)+16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)-16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)$$

$$\left.\left.-68\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right]\right\}(x,\xi)dx-\int_0^l\left(\frac{\partial^n q}{\partial\xi_i^n}\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx$$

$$\leq\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left|\int_0^l\left\{\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi^n}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}-\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi^n}\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\Bigg]+\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi^m}\left[5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right.$$

$$+16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)-16\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)$$

$$-68\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\Big](x,\xi)dx+\int_0^l\left(\frac{\partial^n q}{\partial\xi_i^n}\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)dx\Bigg|$$

$$\leq\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left\{\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|\right.$$

$$+\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi^m}\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|+\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|$$

$$+\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi^m}\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi^n}\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|+5\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi^m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|$$

$$+16\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi^m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|$$

$$+68\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|$$

$$\left.+16\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi^m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|\right\}+\left|\int_0^l\left(\frac{\partial^n q}{\partial\xi_i^n}\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}\right)(x,\boldsymbol{\xi})dx\right|.$$

As parcelas acima são majoradas pelas "*estimativas auxiliares*" apresentadas no corolário 4.3,

$$\left\|\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{H^2\times H^1}\leq\frac{1}{\mathbf{c}}\left\{\left\|\frac{\partial^n q}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}+68.\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left\{\left\|\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}\right.\right.$$

$$\left[\left\|\sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}+\left\|\sqrt{\alpha(\boldsymbol{\xi})}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right]+\left\|\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}$$

$$\left.\left.\left[\left\|\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{n-m}w}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}+\left\|\sqrt{\beta(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-m}\psi}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right]\right\}\right\}.$$

Do corolário 4.4 majoram-se as quantidades acima como

$$\left\|\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{H^2\times H^1}\leq\frac{1}{\mathbf{c}}\left\{\left\|\frac{\partial^n q}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}+\tilde{C}\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left[\left\|\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^m\alpha}{\partial\xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial^m\beta}{\partial\xi_i^m}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)}\right]\left\|\left(\frac{\partial^{n-m}q}{\partial\xi_i^{n-m}}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right\}.$$

Das hipóteses sobre a *limitação* nas derivadas dos dados tem-se,

$$\left\|\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{H^2\times H^1}\leq\frac{1}{\mathbf{c}}\left\{\left(1+\left\|q(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right)r_n^n.n!\right.$$

$$+\tilde{C}\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}r_n^m.m!\Big(1+\big\|q(\boldsymbol{\xi})\big\|_{L^2(0,l)}\Big)r_n^{n-m}.(n-m)!\Big\}\leq\tilde{\tilde{C}}.\Big(1+\|q(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2(0,l)}\Big).r_n^n.n!$$

$$\leq\tilde{\tilde{C}}.\Bigg(1+\|q\|_{C^\infty(\tilde{\Gamma}_j,\sigma(\tilde{\Gamma}_j),P_{\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_j};L^2(0,l))}\Bigg).r_n^n.n!\leq C.r_n^n.n!.$$

sendo $\tilde{\tilde{C}}=\dfrac{1}{\mathrm{c}}.máx\left\{1,\ \tilde{C}\right\}$ e $C=\tilde{\tilde{C}}.\Bigg(1+\|q\|_{C^\infty(\tilde{\Gamma}_j,\sigma(\tilde{\Gamma}_j),P_{\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_j};L^2(0,l))}\Bigg)$. Por outro lado tem-se que,

$$\left\|\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right\|_{H^2},\ \left\|\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right\|_{H^1}\leq\left\|\left(\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\|_{H^2\times H^1}.$$

Combinando-se as últimas desigualdades, obtém-se o resultado desejado

$$\left\|\frac{\partial^n w}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right\|_{H^2},\ \left\|\frac{\partial^n\psi}{\partial\xi_i^n}(\boldsymbol{\xi})\right\|_{H^1}\leq C.r_n^n.n!,\quad\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n.\qquad\blacksquare$$

Definição 4.8 (pg. 6 de [20]) *: Seja $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ e X um espaço de Banach; diz-se que a função $f:\Gamma\longrightarrow X$ é analítica se $\forall\boldsymbol{\xi}_0\in\Gamma$ a expansão em série de Taylor centrada em $\boldsymbol{\xi}_0$, $S_{\boldsymbol{\xi}_0}\big(f(\boldsymbol{\xi})\big)\longrightarrow f(\boldsymbol{\xi})$ converge em X numa vizinhança $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\xi}_0}$.*

A definição 4.8 amplia a noção clássica de *analiticidade*, sendo conveniente para as representações, através de séries, de elementos em $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)$. A partir desta definição e do resultado, a seguir, do lema 4.2 e *condições adicionais*, (lema 4.4), e dos resultados a seguir, (lema 4.2 e corolário 4.5), adquiri-se a *regularidade necessária*, para obter as *taxas de decaimento* dos coeficientes de Fourier-Legendre na representação das soluções numéricas aproximadas.

Lema 4.2 ("Extensão Analítica") *: Das condições do lema 4.1 as funções, $w,\ \psi:\Gamma_i\longrightarrow C^\infty\Big(\big(\tilde{\Gamma}_j,\sigma(\tilde{\Gamma}_j),P_{\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_j}\big);H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\Big)$, podem ser estendidas analiticamente para as funções $\Psi\Big(w\big(x,\tilde{\xi}_j;z\big)\Big),\ \Psi\Big(\psi\big(x,\tilde{\xi}_j;z\big)\Big),\ z\in\mathbb{C}$, a uma região do*

plano complexo,

$$\Sigma(\Gamma_j,\ \tau_j) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid d\left(z, \Gamma_j\right) \leq \tau_j \right\}.$$

Demonstração: Para a demonstração deste resultado utiliza-se um argumento unidmensional, ou seja para $x \in [0,l]$ e $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j \in \mathbb{R}^{n-1}$, fixados, expande-se em série de Taylor a solução "$\left(w(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;\xi_j), \psi(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;\xi_j)\right)$". Do lema 4.1 obtém-se que as derivadas das funções "w" e "ψ", de *todas* as ordens em relação a "ξ_j" são limitadas, e portanto, combinando-se os teoremas 1.3, 1.4 e 1.2 tem-se que as funções "w" e "ψ" podem ser estendidas analiticamente para as funções "$\Psi\left(w\left(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;z\right)\right)$" e "$\Psi\left(\psi\left(x,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j;z\right)\right)$", a uma região do plano complexo $\Sigma(\Gamma_j,\ \tau_j)$. ■

Corolário 4.5 ("Extensão Analítica da Solução") *: Das condições do lema 4.2 as funções,* $w,\ \psi : \Gamma_j \longrightarrow C^{\infty}\left(\left(\tilde{\Gamma}_j, \sigma(\tilde{\Gamma}_j), P_{\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_j}\right); H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\right),\ \forall \Gamma_j \subset \mathbb{R},\ j = 1,...,n$ *podem ser estendidas analiticamente para as funções* $\left(\Psi(w), \Psi(\psi)\right)$*, a uma região de* $\mathbb{C}^n$*,*

$$\Sigma = \bigtimes_{j=1}^{n} \Sigma(\Gamma_j,\ \tau_j).$$

Demonstração: Este resultado é obtido utilizando-se recursivamente o lema 4.2 e no sentido da definição 4.8 a solução pode ser estendida, analiticamente, para as funções "$\Psi(w)$" e "$\Psi(\psi)$" a uma região $\Sigma \subset \mathbb{C}^n$. ■

Os próximos resultados são importantes no sentido da obtenção das soluções numéricas aproximadas para o processo estocástico de solução, $\left(w,\psi\right) : \Omega \times [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

4.4 Resultados para Geração e Taxas de Convergência das Soluções Numéricas Aproximadas

Nesta seção apresentam-se os resultados teóricos relacionados as aproximações numéricas no espaço de parâmetros, $(0,l)$, e estocástico, $\left(\Omega = [-1,1]^n\right)$. São apresentados na forma de lemas, teoremas e corolários um conjunto de resultados utilizados para a geração das soluções numéricas aproximadas e obtenção das estimativas dos erros de *discretização paramétrica e estocástica*, $\left(\varepsilon_h,\ \varepsilon_{h,p}\right)$. Estas estimativas fornecerão as taxas de convergências das soluções numéricas aproximadas. Ao final desta seção apresenta-se, detalhamente o *método Estocástico de Galerkin*, utilizado para a geração das soluções numéricas aproximadas.

Definição 4.9 *: Considere* $m, n \in \mathbb{N}$ *define-se*

$$\Lambda(m,n) = \left\{\lambda \in \mathbb{N}^n | \mathcal{G}(\lambda, n) \leq m\right\};$$

como sendo o conjunto de multíndices relativo às soluções aproximadas. A função, $\mathcal{G} : \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, está relacionada à "escolha" dos elementos do espaço de aproximação. Neste trabalho denota-se "*$\Lambda(m,n)$*" como sendo o conjunto "Ansatz".*

Como pode-se observar na definição 4.9 a condição de *continência* para os multíndices, $\lambda \in \mathbb{N}^n$ é definida pela função $\mathcal{G} : \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Existem muitas "escolhas" para esta função, por exemplo, os trabalhos de Bäck *et all* (2011) e Beck *et all* (2014) utilizam $\mathcal{G}(\lambda, n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Esta escolha é conhecida por "*Total Degree Polynomial Space*", (**TD**). A escolha da função, $\mathcal{G} : \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, é *importante*, pois a dimensão do espaço de aproximação é estreitamente dependente desta. O "*Tensor Product Polynomial Space*", (**TP**) foi, originalmente, proposto no trabalho de Ghanem e Spanos (1989),

[54], em que $\mathcal{G}(\lambda, n) = \max_{i \in \{1,...,n\}} \lambda_i$. Para a escolha **TD**, a dimensão do espaço de aproximação é dada por $\#\Lambda(m,n)_{TD} = \binom{m+n}{n}$, enquanto que para **TP** a dimensão é dada por $\#\Lambda(m,n)_{TP} = (1+m)^n$. À medida que aumenta-se a *dimensão estocástica*, ou seja, mais variáveis randômicas são utilizadas na modelagem da incerteza. Em vista disso, a dimensão dos subespaços polinomiais pode crescer de forma *proibitiva* conduzindo a um efeito *indesejado*, conhecido na *literatura especializada* como "*curse of dimensionality*". Bellman (1957), [22], introduziu esta expressão com referência ao comportamento sobre crescimento *exponencial* do volume associado ao se adicionar dimensões extras ao espaço Euclideano. Do ponto de vista estatístico esta expressão refere-se ao caso em que a dimensão "n", requerida para uma amostra, crescerá *exponencialmente* com a *dimensão* dos dados. Por exemplo, ao adicionar mais dimensões exige-se que o tamanho da amostra necessário para as estimativas sobre momentos estatísticos torne-se muito grande, *inviabilizando* a análise. Pode-se constatar, comparando-se as dimensões dos subespaços de aproximação, que a escolha **TP** possui o efeito conhecido como "*curse of dimensionality*".

Observações

Para um conjunto *Ansatz* do tipo **TP** ou **TD**, tem-se as seguintes caracteríticas e propriedades:

(i) $\Lambda(0,n) = \{\overbrace{(0,...,0)}^{n}\}$;

(ii) $\Lambda(m,n) \subset \Lambda(k,n), \quad \forall\ m < k$;

(iii) $\mathbb{N}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda(m,n)$;

(iv) A função "*escolha*", $\mathcal{G} : \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, define a *dimensão da base* dos subespaços, $\left(\mathcal{P}^n, (\cdot,\cdot)_{L^2}\right) \subset L^2\left(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\Xi}\right)$, utilizados para gerar as soluções aproximadas, [20].

Dos ítens (ii) e (iv) do teorema 1.12 tem-se que $V = L^2(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P; H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l))$ é um espaço de Hilbert, separável, e portanto possui uma base ortonormal enumerável, (uma *base Hilbertiana*, [30]). A partir disso, considere um sistema ortonormal total em V, $\left\{\left(w_\lambda, \psi_\lambda\right)\right\}_{\lambda \in \mathbb{N}^n}$; a solução do P.V.A., Eq.(3.3), admite a seguinte representação

$$\begin{cases} w(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{N}^n} w_\lambda(x,\boldsymbol{\xi}); \\ \psi(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{N}^n} \psi_\lambda(x,\boldsymbol{\xi}). \end{cases} \tag{4.5}$$

No corolário 4.6 mostra-se um resultado sobre a representação das *derivadas* da solução, $(w, \psi) \in V$, via as séries apresentadas na Eq. (4.5).

Corolário 4.6 ("Derivadas das Soluções") *: As soluções do P.V.A. representadas via série, Eq. (4.5), admitem as seguintes representações para as suas derivadas,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{N}^n} \dfrac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2}(x,\boldsymbol{\xi}); \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{N}^n} \dfrac{\partial \psi_\lambda}{\partial x}(x,\boldsymbol{\xi}); \end{cases} \tag{4.6}$$

sendo $\left(w_\lambda, \psi_\lambda\right)_{\lambda \in \mathbb{N}^n}$ *uma base Hilbertiana para* V.

Demonstração: Para obter o resultado, estuda-se a convergência das somas parciais de $(w, \psi) \in V$, Eq. (4.5), solução do P.V.A.. A partir disso, para $m \in \mathbb{N}$ define-se as seguintes somas parciais,

$$\begin{cases} w_m(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_w} w_\lambda(x,\boldsymbol{\xi}); \\ \psi_m(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_\psi} \psi_\lambda(x,\boldsymbol{\xi}); \end{cases}$$

sendo "Λ_w" e "Λ_ψ" os conjuntos de *Ansatz*, (definição 4.9), com funções *escolha* "$\mathcal{G}_w$" e "$\mathcal{G}_\psi$", respectivamente. Tomando-se seqüências de somas parciais $\left\{\left(w_m, \psi_m\right)\right\}_{m \in \mathbb{N}} \subset L^2\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big)$, tais que

$$\left(w_m, \psi_m\right) \xrightarrow{m \to \infty} \left(w, \psi\right) \quad \text{em} \quad L^2\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big);$$

ou seja,

$$\big\|\big(w_m,\psi_m\big)-\big(w,\psi\big)\big\|^2_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l))}=\int_\Gamma\int_0^l\Bigg[\big(w_m-w\big)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\big(\psi_m-\psi\big)^2+\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Bigg](x,\boldsymbol{\xi})dxdP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})\xrightarrow{m\to\infty}0.$$

Da *continuidade* da forma bilinear e da *equivalência* entre as normas, lema 3.2, tem-se

$$a\Big(\big(w_m-w,\psi_m-\psi\big),\big(w_m-w,\psi_m-\psi\big)\big)\Big)\le C\big\|\big(w_m,\psi_m\big)-\big(w,\psi\big)\big\|^2_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^2\times H_0^1)}\xrightarrow{m\to\infty}0;$$

e da *coercividade* de "$a(\cdot,\cdot)$",

$$\big\|\big(w_m,\psi_m\big)-\big(w,\psi\big)\big\|_V\xrightarrow{m\to\infty}0.$$

Isto significa que $\forall\epsilon>0,\quad \exists N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}\quad \ni\quad \big\|\big(w_m,\psi_m\big)-\big(w,\psi\big)\big\|_V<\epsilon,\quad \forall m>N,$

$$\left[\int_\Gamma\int_0^l\left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2(x,\boldsymbol{\xi})dxdP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})\right]^{\frac{1}{2}}<\epsilon,\quad \forall m>N_w;$$

e

$$\left[\int_\Gamma\int_0^l\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2(x,\boldsymbol{\xi})dxdP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})\right]^{\frac{1}{2}}<\epsilon,\quad \forall m>N_\psi.$$

Tomando-se $N=max\big\{N_w,N_\psi\big\}$ tem-se que,

$$\left\|\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}<\epsilon,\quad \forall m>N.$$

Da convergência $\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, uniforme em $L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))$ e considerando que $w_m\subset L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^2(0,l)\big)$ tem-se

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{\lambda\in\mathbb{N}^n}w_\lambda\right)=\sum_{\lambda\in\mathbb{N}^n}\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2}.$$

Analogamente, tem-se $\frac{\partial\psi_m}{\partial x}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{\partial\psi}{\partial x}$, uniformemente em $L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))$, e $\psi_m\subset L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^1(0,l)\big)$ então

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{\lambda\in\mathbb{N}^n}\psi_\lambda\right)=\sum_{\lambda\in\mathbb{N}^n}\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial x}.$$

Um resultado similar pode-se obter para uma seqüência $\big\{\psi_m\big\}\subset L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^1(0,l)\big)$,

$$\psi_m\xrightarrow{m\to\infty}\psi,\quad em\quad L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^1(0,l)\big).\qquad\blacksquare$$

Corolário 4.7 ("Construção das Aproximações de Galerkin") : *Considere* $\{\phi_{\boldsymbol{\nu}}\}_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{N}^n}$ *um conjunto total e ortonormal para* $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$ *e* $\{\theta_\iota=(v_\iota,\varphi_\iota)\}_{\iota\in\mathbb{N}}$ *um conjunto total para* $H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)$*, então*

$$\begin{cases} w_{\boldsymbol{\lambda}}(x,\boldsymbol{\xi})=\big(v_\iota\otimes\phi_{\boldsymbol{\nu}}\big)(x,\boldsymbol{\xi})=v_\iota(x)\phi_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi}); \\ \psi_{\boldsymbol{\lambda}}(x,\boldsymbol{\xi})=\big(\varphi_\iota\otimes\phi_{\boldsymbol{\nu}}\big)(x,\boldsymbol{\xi})=\varphi_\iota(x)\phi_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi}); \end{cases} \tag{4.7}$$

com $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}^{n+1}$.

Demonstração: As soluções do P. V. A. são obtidas em $V=L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)\simeq L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)\otimes\big(H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)$. Notando que "$L^2\big(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$" e "$H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)$" são espaços de Hilbert separáveis cujas respectivas bases são $\{\phi_{\boldsymbol{\nu}}\}_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{N}^n}$ e $\{\theta_\iota\}_{\iota\in\mathbb{N}}$. Então pela proposição 1.4 $\big\{\{\phi_{\boldsymbol{\nu}}\}\otimes\{\theta_\iota\}\big\}_{(\iota,\ \boldsymbol{\nu})\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^n}$ é uma base para $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)\otimes\big(H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)$. De (i) e (ii), teorema 1.14, $\exists!\Sigma: L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)\otimes\big(H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)\longrightarrow V$,

$$\Sigma\big(\theta_\iota\otimes\phi_{\boldsymbol{\nu}}\big)\longmapsto\theta_\iota(x).\phi_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi}).$$

Introduzindo-se um mapeamento $\lambda:\mathbb{N}\times\mathbb{N}^n\longrightarrow\mathbb{N}^n$ obtém-se o resultado desejado. ■

Os corolários a seguir são importantes para as estimativas a cerca das aproximações realizadas em $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$, via polinômios generalizados de Caos. Além disso, estes resultados são vastamente utilizados em vários trabalhos, porém não apresentam a formalização e a sistematização. A partir desta constatação o presente trabalho apresenta a seguir um conjunto de resultados a fim de estabelecer a formalização necessária à obtenção das soluções numéricas aproximadas, via método de Bubnov-Galerkin, e suas taxas de convergências. As manipulações que seguem, utilizam-se as definições apresentadas na hipótese H3.

Teorema 4.1 ("Um Conjunto Total para $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$") : *Considere um espaço de probabilidades,* $\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$, *e* $\boldsymbol{\Xi}:\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)\longrightarrow\mathbb{R}^n$, *um vetor randômico, com entradas definidas por variáveis randômicas satisfazendo à hipótese H3, seção 4.2, e sejam* $\Big\{\phi_{\nu_i}(\xi_i)\Big\}_{\nu_i\in\mathbb{N}}$, *polinômios definidos na i-ésima variável randômica,* $\boldsymbol{\Xi}_i:\big(\Gamma_i,\mathcal{B}(\Gamma_i),P_{\boldsymbol{\Xi}_i}\big)\longrightarrow\mathbb{R}$ *e* $\phi_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi})=\bigotimes_{i=1}^{n}\phi_{\nu_i}(\xi_i)=\prod_{i=1}^{n}\phi_{\nu_i}(\xi_i)$. *Então*

$$\overline{span\Big\{\phi_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi})\Big\}_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{N}^n}}^{\,L^2}=L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big).$$

Demonstração: Ver prova do teorema 2.8, pg. 12 de [52].

Corolário 4.8 ("Propriedade $\boldsymbol{\delta}$ - Kronecker") : *Considere* $\big\{\phi_{\nu}\big\}_{\lambda\in\mathbb{N}^n}$ *um conjunto total ortonormal em* $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$ *então,*

$$\big(\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\phi_{\boldsymbol{\beta}}\big)_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}})}=\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}},\qquad\forall\quad\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\beta}\in\mathbb{N}^n.$$

Demonstração: Sejam $\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\phi_{\boldsymbol{\beta}}\in\overline{span\Big\{\phi_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi})\Big\}_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{N}^n}}^{\,L^2}=L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$

$$\big(\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\phi_{\boldsymbol{\beta}}\big)_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}})}=\int_{\Gamma}\big(\phi_{\boldsymbol{\lambda}}.\phi_{\boldsymbol{\beta}}\big)(\boldsymbol{\xi})P_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})=\int_{\bigtimes_{i=1}^{n}\Gamma_i}\Big(\bigotimes_{\lambda_i\in\lambda}\phi_{\lambda_i}(\boldsymbol{\xi})\Big).\Big(\bigotimes_{\beta_i\in\beta}\phi_{\beta_i}(\boldsymbol{\xi})\Big)\prod_{i=1}^{n}dP_{\Xi_i}(\boldsymbol{\xi})$$

$$=\int_{\bigtimes_{i=1}^{n}\Gamma_i}\prod_{i=1}^{n}\big(\phi_{\lambda_i}.\phi_{\beta_i}.f_{\boldsymbol{\Xi}_i}\big)(\xi_i)d\xi_i=\int_{\Gamma_1}\cdots\int_{\Gamma_n}\Big[\big(\phi_{\lambda_1}.\phi_{\beta_1}\big)(\xi_1)\cdots.\big(\phi_{\lambda_n}.\phi_{\beta_n}\big)(\xi_n)\Big].f_{\boldsymbol{\Xi}_1}(\xi_1)d\xi_1.\cdots$$

$$\cdots.f_{\boldsymbol{\Xi}_n}(\xi_n)d\xi_n=\Big[\int_{\Gamma_1}\big(\phi_{\lambda_1}.\phi_{\beta_1}\big)(\xi_1)f_{\boldsymbol{\Xi}_1}(\xi_1)d\xi_1\Big].\cdots.\Big[\int_{\Gamma_n}\big(\phi_{\lambda_n}.\phi_{\beta_n}\big)(\xi_n)f_{\boldsymbol{\Xi}_n}(\xi_n)d\xi_n\Big]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int_{-1}^{+1}\big(\phi_{\lambda_i}.\phi_{\beta_i}\big)(\xi_i)f_{\boldsymbol{\Xi}_i}(\xi_i)d\xi_i=\prod_{i=1}^{n}\delta_{\lambda_i\beta_i}.$$

Por hipótese $\big\{\phi_{\boldsymbol{\lambda}}\big\}_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}^n}$ é um *conjunto total ortonormal* em $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$,

$$\big(\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\phi_{\boldsymbol{\beta}}\big)_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}})}=\prod_{i=1}^{n}\delta_{\lambda_i\beta_i}=\delta_{\lambda_1\beta_1}.\cdots.\delta_{\lambda_n\beta_n}=\boldsymbol{\delta}_{\lambda\beta},\qquad\forall\quad\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\beta}\in\mathbb{N}^n;$$

portanto se $\lambda_1=\beta_1,\ \cdots,\ \lambda_n=\beta_n\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}}=1$. Por outro lado, se existir algum $i\in\{1,...,n\}$, tal que $\lambda_i\neq\beta_i\ \Rightarrow\ \delta_{\lambda_i\beta_i}=0\ \Rightarrow\ \big(\lambda\neq\beta\ \wedge\ \delta_{\lambda\beta}=0\big)$. ■

Observações

1. Neste trabalho a modelagem da incerteza é feita através de variáveis randômicas *uniformes*;

2. Para este tipo de variável randômica os *polinômios generalizados de Caos* são representados por *polinômios de Legendre* definidos nestas variáveis randômicas;

3. Conforme teorema de Doob-Dynkin, se a modelagem da incerteza é definida por um vetor de variáveis randômicas, os polinômios generalizados de Caos consistem do produto tensorial de polinômios univariados, definidos em cada variável randômica utilizada na modelagem da incerteza.

A seguir apresenta-se uma "fórmula" para obter os coeficientes "$\left(w_\iota, \psi_\iota\right)$", Eq. (4.7), para a representação das soluções aproximadas de Galerkin, (Eq. (4.5) e corolário 4.7).

Corolário 4.9 ("Coeficientes de Legendre") *: Considere a representação proposta na Eq. (4.5) e* $\left\{\phi_\lambda\right\}_{\lambda\in\mathbb{N}^n}$*, um conjunto total ortonormal para* $L^2\left(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}\right)$ *então,*

$$\begin{cases} w_{\iota(\lambda)}(x) = \displaystyle\int_\Gamma w(x,\boldsymbol{\xi})\phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}); \\ \psi_{\iota(\lambda)}(x) = \displaystyle\int_\Gamma \psi(x,\boldsymbol{\xi})\phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}). \end{cases} \tag{4.8}$$

Demonstração: Multiplicando-se a Eq. (4.5.a) por uma função $\phi_\beta \in \left\{\phi_\lambda\right\}_{\lambda\in\mathbb{N}^n}$, do corolário 4.7, e $P_{\boldsymbol{\Xi}}$- integrando-se em $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_\Gamma w(x,\boldsymbol{\xi})\phi_\beta(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_\Gamma \sum_{\lambda\in\mathbb{N}^n} w_\lambda(x,\boldsymbol{\xi})\phi_\beta(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}),$$

dos teoremas 4.9 e 4.2, respectivamente, pgs. 94 e 90, de [30] tem-se que

$$= \lim_{m\to\infty} \int_\Gamma \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} w_\lambda(x,\boldsymbol{\xi})\phi_\beta(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} \int_\Gamma w_\lambda(x,\boldsymbol{\xi})\phi_\beta(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi});$$

analisando-se, separadamente, a integral e usando-se a Eq. (4.7.a)

$$\int_{\Gamma} w_{\lambda}(x,\boldsymbol{\xi})\phi_{\beta}(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma}\big(w_{\iota}\otimes\phi_{\nu}\big)(x,\boldsymbol{\xi})\phi_{\beta}(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} w_{\iota}(x)\phi_{\nu}(\boldsymbol{\xi})\phi_{\beta}(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})$$

$$= w_{\iota}(x)\int_{\Gamma}\phi_{\nu}(\boldsymbol{\xi})\phi_{\beta}(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = w_{\iota}(x)\delta_{\nu\beta}, \quad \iota\in\mathbb{N}. \qquad \blacksquare$$

É importante mencionar que a *notação* "$(\cdot)_{\iota(\lambda)}$", apresentada na Eq. (4.8), em conformidade com a Eq. (4.7) e a "construção" do espaço das soluções numéricas aproximadas *revela* a dependência das funções utilizadas, para representar o "*comportamento espacial*" com o *polinômio generalizado de caos* indexado em "$\boldsymbol{\lambda}$".

O próximo resultado, lema 4.3, apresenta uma estimativa para a fórmula dos coeficientes, Eq. (4.8). Denotam-se por "**coeficientes de Legendre**" ao utilizar no lema 4.9 os polinômios de Legendre, como um conjunto total para $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$, [20].

Lema 4.3 ("Estimativa dos Coeficientes de Legendre") *: Nas condições do lema 4.1* $\exists C_w = C_w(\alpha,\beta,q), C_{\psi} = C_{\psi}(\alpha,\beta,q) > 0$ *tal que os coeficientes de Legendre, Eq. (4.8), podem ser estimados por,*

$$\begin{cases} \big\|w_{\iota(\lambda)}\big\|_{L^2(0,l)} \leq \dfrac{C_w}{\mathbf{2}.(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\dfrac{\big(\boldsymbol{\lambda}!\big)^2}{\big(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\big)^{\frac{1}{2}}.1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right); \\ \big\|\psi_{\iota(\lambda)}\big\|_{L^2(0,l)} \leq \dfrac{C_{\psi}}{\mathbf{2}.(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\dfrac{\big(\boldsymbol{\lambda}!\big)^2}{\big(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\big)^{\frac{1}{2}}.1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right), \ \textit{em que } \iota\in\mathbb{N} \ \ e \ \ \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}^n; \end{cases} \tag{4.9}$$

sendo $t_i = \dfrac{\lambda_i}{|\boldsymbol{\lambda}|}, \ \forall \ i\in\{1,...,n\}$.

Demonstração: Demonstra-se, apenas, a estimativa para a Eq. (4.9.a). Para a estimativa apresentada na Eq. (4.9.b) a demonstração *é análoga.* Para $\lambda\in\Lambda(m,n)$ e notando que $\Gamma = \displaystyle\bigtimes_{i=1}^{n}\Gamma_i$ sendo $\Gamma_i = \boldsymbol{\Xi}_i(\Gamma)$, $\Gamma_i = [-1,1], \quad \forall \ i\in\{1,...,n\}$. Além disso, tem-se que $dP_{\boldsymbol{\Xi}} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_{\boldsymbol{\Xi}_i}(\xi_i)d\xi_i$. Para um $\phi_{\lambda}\in\big\{\phi_{\nu}\big\}_{\nu\in\mathbb{N}^n}$, do conjunto total ortonormal do corolário 4.9, o coeficiente de Legendre associado a este polinômio é dado por,

$$w_{\iota(\lambda)}(x) = \int_{\Gamma} w(x,\boldsymbol{\xi})\phi_{\lambda}(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{[-1,1]^n} w(x,\boldsymbol{\xi})\prod_{i=1}^{n}\phi_{\lambda_i}(\xi_i)\prod_{i=1}^{n} f_{\boldsymbol{\Xi}_i}(\xi_i)d\xi_i$$

$$= \int_{[-1,1]^n} w(x,\boldsymbol{\xi}) \prod_{i=1}^{n} \phi_{\lambda_i}(\xi_i) \prod_{i=1}^{n} f_{\boldsymbol{\Xi}_i}(\xi_i) d\xi_i = \int_{[-1,1]^n} w(x,\boldsymbol{\xi}) \prod_{i=1}^{n} \phi_{\lambda_i}(\xi_i) f_{\boldsymbol{\Xi}_i}(\xi_i) d\xi_i$$

$$= \int_{[-1,1]} \cdots \left[\int_{[-1,1]} w(x,\boldsymbol{\xi}).\big(\phi_{\lambda_1} f_{\boldsymbol{\Xi}_1}\big)(\xi_1) d\xi_1 \right] \cdots .\big(\phi_{\lambda_n} f_{\boldsymbol{\Xi}_n}\big)(\xi_n) d\xi_n.$$

Com a modelagem da incerteza utilizada, o coeficiente de Legendre, consiste de "*integrais iteradas*". A estimativa inicia-se pelo integrando *mais interno*, e com o auxilio da fórmula de **Rodriguez**, pg. 246 de [40], para os polinômios de Legendre ortonormalizados,

$$\phi_{\lambda_i}(\xi_i) = (-1)^{\lambda_i} \frac{\sqrt{2\lambda_i + 1}}{2^{\lambda_i} \lambda_i!} \frac{d^{\lambda_i}}{d\xi_i^{\lambda_i}} \big(1 - \xi_i^2\big)^{\lambda_i}.$$

Substituindo-se na identidade acima para o coeficiente de Legendre chega-se

$$w_{\iota(\lambda)}(x) = \int_{[-1,1]} \cdots \left[\int_{[-1,1]} w(x,\boldsymbol{\xi}).(-1)^{\lambda_1} \frac{\sqrt{2\lambda_1 + 1}}{2^{\lambda_1} \lambda_1!} \frac{d^{\lambda_1}}{d\xi_1^{\lambda_1}} \big(1 - \xi_1^2\big)^{\lambda_1} f_{\boldsymbol{\Xi}_1}(\xi_1) d\xi_1 \right]$$

$$\cdots .(-1)^{\lambda_n} \frac{\sqrt{2\lambda_n + 1}}{2^{\lambda_n} \lambda_n!} \frac{d^{\lambda_n}}{d\xi_n^{\lambda_n}} \big(1 - \xi_n^2\big)^{\lambda_n} f_{\boldsymbol{\Xi}_n}(\xi_n) d\xi_n = \frac{(-1)^{|\boldsymbol{\lambda}|}}{2^{|\boldsymbol{\lambda}|} \boldsymbol{\lambda}!} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{2\lambda_i + 1}$$

$$\int_{[-1,1]} \cdots \left[\int_{[-1,1]} w(x,\boldsymbol{\xi}).\frac{d^{\lambda_1}}{d\xi_1^{\lambda_1}} \big(1 - \xi_1^2\big)^{\lambda_1} f_{\boldsymbol{\Xi}_1}(\xi_1) d\xi_1 \right] \cdots .\frac{d^{\lambda_n}}{d\xi_n^{\lambda_n}} \big(1 - \xi_n^2\big)^{\lambda_n} f_{\boldsymbol{\Xi}_n}(\xi_n) d\xi_n.$$

Fazendo-se uso da regularidade das soluções, lemas 4.1 e 4.2, e usando-se a *integração por partes* chega-se a seguinte identidade,

$$w_{\iota(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^{|\boldsymbol{\lambda}|}}{2^{|\boldsymbol{\lambda}|} \boldsymbol{\lambda}!} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{2\lambda_i + 1} \int_{[-1,1]} \cdots \left[\int_{[-1,1]} D_{\boldsymbol{\lambda}}^{|\boldsymbol{\lambda}|} w(x,\boldsymbol{\xi}) \big(1 - \xi_1^2\big)^{\lambda_1} f_{\boldsymbol{\Xi}_1}(\xi_1) d\xi_1 \right]$$

$$\cdots \big(1 - \xi_n^2\big)^{\lambda_n} f_{\boldsymbol{\Xi}_n}(\xi_n) d\xi_n.$$

Da identidade acima e do lema 4.1 e do teorema 2.1 de [20] estima-se a norma em $L^2(0,l)$,

$$\big\| w_{\iota(\lambda)} \big\|_{L^2(0,l)} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{2\lambda_i + 1}}{2^{\lambda_i} \lambda_i!} \int_{[-1,1]} \cdots \left[\int_{[-1,1]} \big\| D_{\boldsymbol{\lambda}}^{|\boldsymbol{\lambda}|} w(\boldsymbol{\xi}) \big\|_{L^2(0,l)} \big(1 - \xi_1^2\big)^{\lambda_1} f_{\boldsymbol{\Xi}_1}(\xi_1) d\xi_1 \right]$$

$$\cdots \big(1 - \xi_n^2\big)^{\lambda_n} f_{\boldsymbol{\Xi}_n}(\xi_n) d\xi_n \leq \tilde{\tilde{C}}. \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{2\lambda_i + 1}}{2^{\lambda_i} \lambda_i!} \int_{[-1,1]} \cdots$$

$$\left\{ \int_{[-1,1]} \left[1 + \big\| q(\boldsymbol{\xi}) \big\|_{L^2(0,l)} \right] \big(1 - \xi_1^2\big)^{\lambda_1} f_{\boldsymbol{\Xi}_1}(\xi_1) d\xi_1 \right\} \cdots \big(1 - \xi_n^2\big)^{\lambda_n} f_{\boldsymbol{\Xi}_n}(\xi_n) d\xi_n$$

$$\leq \tilde{\tilde{C}}. \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{2\lambda_i + 1}}{2^{\lambda_i} \lambda_i!} \left[1 + \max_{\boldsymbol{\xi} \epsilon [-1,1]^n} \big\| q(\boldsymbol{\xi}) \big\|_{L^2(0,l)} \right]$$

$$\int_{[-1,1]}\cdots\left\{\int_{[-1,1]}\left(1-\xi_1^2\right)^{\lambda_1} f_{\Xi_1}(\xi_1)d\xi_1\right\}\cdots\left(1-\xi_n^2\right)^{\lambda_n} f_{\Xi_n}(\xi_n)d\xi_n$$

$$\leq \tilde{\tilde{C}}.\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i!r_i^{\lambda_i}}{\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}\left[1+\max_{\boldsymbol{\xi}\in[-1,1]^n}\left\|q(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right].$$

Nesta etapa considerando o fato de que $\lambda_i,\ r_i>0,\ \forall i\in\{1,...,n\}$ utiliza-se para $x>0$ a identidade $x=e^{\,ln(x)}$ e as *propriedades* das funções exponencial e logarítmo natural.

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i!r_i^{\lambda_i}}{\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}=\frac{\lambda_1!r_1^{\lambda_1}}{\sqrt{2\lambda_1+1}\left(2\lambda_1\right).\cdots.\left(\lambda_1+1\right)}.\cdots$$

$$.\frac{\lambda_n!r_n^{\lambda_n}}{\sqrt{2\lambda_n+1}\left(2\lambda_n\right).\cdots.\left(\lambda_n+1\right)}=\frac{\lambda_1!r_1^{\lambda_1}.\cdots.\lambda_n!r_n^{\lambda_n}}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\lambda_1!.\cdots.\lambda_n!\right).\left(r_1^{\lambda_1}.\cdots.r_n^{\lambda_n}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i!\right).\left(\prod_{i=1}^{n}r_i^{\lambda_i}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i!}{\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}.\left(\prod_{i=1}^{n}r_i^{\lambda_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i!}{\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.ln(r_i)\right).$$

Da notação multíndice e sabendo-se que a função logarítmo é *côncava* tem-se que,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.ln\left(r_i\right)=|\boldsymbol{\lambda}|.\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{|\boldsymbol{\lambda}|}.ln\left(r_i\right)=\sum_{i=1}^{n}t_i.ln\left(r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right)\leq ln\left(\sum_{i=1}^{n}t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right).$$

A partir disso tem-se que

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i!r_i^{\lambda_i}}{\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}\leq\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i!}{\sqrt{2\lambda_i+1}\left(2\lambda_i\right).\cdots.\left(\lambda_i+1\right)}.\left(\sum_{i=1}^{n}t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right).$$

Retornando-se a estimativa chega-se a

$$\left\|w_{\iota(\lambda)}\right\|_{L^2(0,l)}\leq\frac{C_w}{\mathbf{2}.(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\frac{\left(\boldsymbol{\lambda}!\right)^2}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.\left(\sum_{i=1}^{n}t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right);$$

sendo

$$C_w=\tilde{\tilde{C}}.\left[1+\max_{\boldsymbol{\xi}\in[-1,1]^n}\left\|q(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right],$$

sendo $\tilde{\tilde{C}}$ a constante definida no lema 4.1. Majorações similares são realizadas para o coeficiente "$\psi_{\iota(\lambda)}$", e o resultado está demonstrado. ■

Em particular, o trabalho Cohen et all (2011), [35], apresenta taxas de convergência para os coeficientes de Legendre independentes da dimensão estocástica, (número de variáveis randômicas). Nesse trabalho, o objeto de estudo é o problema de difusão estocástica com incerteza no coeficiente de difusão, que é modelado por um processo estocástico parametrizado. Este modelo exibe uma dependência afim entre o coeficiente de difusão e as variáveis randômicas utilizadas na definição do processo estocástico. Nestas condições, os autores obtém *taxas de decaimento* para os coeficientes de Legendre, que não dependem da dimensão estocástica. Apesar das hipóteses do lema 4.3 exigirem mais *regularidade* e *limitação*, apresenta um resultado com maior abrangência, pois *não fixa* um modelo matemático para o processo estocástico utilizado na modelagem da incerteza, (por exemplo, modelos *afim*, *exponencial*, etc.), para obter as taxas de decaimento dos coeficientes de Legendre. Apesar disso, é importante destacar que uma variedade muito ampla de trabalhos sobre equações diferenciais elípticas com coeficientes estocásticos faz uso para a modelagem da incerteza via processos estocásticos a *sucessiva* de alguma ordem da série Karhunen-Loeve, a qual trata-se de uma representação *afim* do coeficiente.

Lema 4.4 ***("Condição para Convergência Uniforme dos Coeficientes de Legendre")****: Nas condições do Lema 4.3 e considerando uma seqüência de conjuntos Ansatz,* $\Lambda(m_0, n) \subset \Lambda(m, n)$ *quando* $m_0 \longrightarrow \infty$ *a condição suficiente para convergência uniforme dos coeficientes de Legendre, Eq. (4.8), é que* $\sum_{i=1}^{n} r_i < \frac{2}{n}$ *sendo* $r_i's$ *aqueles constantes no lema [?].*

Demonstração: Este resultado é obtido com auxílio do "critério de Cauchy para convergência uniforme". Para tanto toma-se uma seqüência $\{(w_k, \psi_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ e verifica-se sob quais condições esta seqüência é de Cauchy na norma de $L^{\infty}\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\Xi}; H_0^2(0,l) \times$

$H_0^1(0,l)\big)$. Da propriedade (ii) dos conjuntos de Ansatz considere $m,n \in \mathbb{N}$ e sem perda de generalidade, $m > n \geq 1 \longrightarrow \Lambda(n,n) \subset \Lambda(m,n)$ e, por hipótese, admite-se que elementos desta seqüência são representados pela Eq. (4.8). Em vista disso, calcula-se a *distância* entre dois elementos da seqüência,

$$\Big\|\big(w_m,\psi_m\big)-\big(w_n,\psi_n\big)\Big\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\times L^2(0,l))} = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Gamma}\Big\{\big\|(w_m-w_n)(\boldsymbol{\xi})\big\|_{L^2(0,l)} + \big\|(\psi_m-\psi_n)(\boldsymbol{\xi})\big\|_{L^2(0,l)}\Big\}.$$

Desta forma, se $\|w_m-w_n\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2(0,l))} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e $\|\psi_m-\psi_n\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^1(0,l))} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, então $\Big\|\big(w_m,\psi_m\big)-\big(w_n,\psi_n\big)\Big\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\times L^2(0,l))} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. A partir disso, avalia-se qual a *condição* deve ser *imposta*, para que elementos da seqüência $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ apresentem este comportamento. Definindo-se $\mathcal{S} = \Lambda(m,n)\setminus\Lambda(n,n)$, estima-se

$$\|w_m-w_n\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} = \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)}\big(w\otimes\phi\big)_\lambda - \sum_{\lambda\in\ \Lambda(n,n)}\big(w\otimes\phi\big)_\lambda\Big\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}$$

$$= \Big\|\sum_{\lambda\in\ \mathcal{S}}\big(w\otimes\phi\big)_\lambda\Big\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \sum_{\lambda\in\mathcal{S}}\big\|\big(w\otimes\phi\big)_\lambda\big\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}.$$

Notando que $\mathcal{S}\subset\big(\Lambda(n,n)\big)^c = \mathcal{W}$ obtém-se

$$\|w_m-w_n\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \sum_{\lambda\in\mathcal{W}}\big\|\big(w\otimes\phi\big)_\lambda\big\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}$$

$$\leq \sum_{\lambda\in\mathcal{W}}\|w_\lambda\|_{L^2(0,l)}\|\phi_\lambda\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}})} \leq C\sum_{\lambda\in\mathcal{W}}\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}}}.\frac{\big(\mathbf{2}.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\big)^{\boldsymbol{\beta}.\mathbf{1}}}{\big(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\big)^{\mathbf{1}}}.\left(\sum_{i=1}^{n}t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right).$$

Ao *termo* da série cabe a seguinte majoração,

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}}}.\frac{\big(\mathbf{2}.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\big)^{\boldsymbol{\beta}.\mathbf{1}}}{\big(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\big)^{\mathbf{1}}} \leq \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}}}.\frac{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\beta}.\mathbf{1}}}{\big(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\big)^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{1}}}.$$

Observando que,

$$\mathbf{2}.\mathbf{2}^{\boldsymbol{\beta}.\mathbf{1}} = \big(\overbrace{2\cdot\ldots\cdot 2}^{n-fatores}\big).\big(\overbrace{\sqrt{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2}}^{n-fatores}\big) = \overbrace{\big(2.\sqrt{2}\big)\cdot\ldots\cdot\big(2.\sqrt{2}\big)}^{n-fatores} = \Big(\big(2.\sqrt{2}\big).\mathbf{1}\Big)^{\mathbf{1}} < \infty.$$

Desta forma, $\exists C > 0$, constante independente de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ tal que $\overbrace{\left(2.\sqrt{2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(2.\sqrt{2}\right)}^{n-fatores} = \left(\left(2.\sqrt{2}\right).\mathbf{1}\right)^{\mathbf{1}} \leq C < \infty$. A partir disso, com auxílio da *fórmula da binomial generalizada de Newton*, [21], majora-se a estimativa anterior como,

$$\left\|w_m - w_n\right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq C \sum_{\lambda\in\mathcal{W}} \frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}}.\left(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\beta.\mathbf{1}}}.\left(\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right) \leq C \sum_{\lambda\in\mathcal{W}} \frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}}}.\sum_{i=1}^{n}\left(t_i.r_i^{|\boldsymbol{\lambda}|}\right)$$

$$\leq C \sum_{\lambda\in\mathcal{W}} \frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}}}.\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{2}\right)^{|\boldsymbol{\lambda}|}.\frac{|\boldsymbol{\lambda}|!}{\boldsymbol{\lambda}!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{|\boldsymbol{\lambda}|=k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{2}\right)^{|\boldsymbol{\lambda}|}.\frac{|\boldsymbol{\lambda}|!}{\boldsymbol{\lambda}!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(n.\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{2}\right)^{|\boldsymbol{\lambda}|}.$$

Analisando-se, separadamente, observa-se que para se ter o comportamento de uma seqüència de Cauchy, é necessário a *convergência* da soma acima. Em vista disso impõe-se a seguinte condição para o termo acima,

$$n.\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{2} < 1, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{W}.$$

Desta forma conclui-se que $\sum_{i=1}^{n} r_i < \frac{2}{n}$, pelo critério de Cauchy, pg. 168 [72], a seqüência $\left\{w_m\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* em $L^\infty\left(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H_0^2(0,l)\right)$. *A menos* de diferentes constantes nas majorações o mesmo resultado vale para a seqüència $\left\{\psi_m\right\}_{m\in\mathbb{N}}$, e portanto o resultado do teorema está demonstrado. ■

O **Lema 4.3** tem repercusões teóricas e práticas. Do ponto de vista prático o resultado fornece o decaimento dos coeficientes de Fourier-Legendre. Isto revela o comportamento das aproximações numéricas. Enquanto que em termos das representações das soluções teóricas, via série de Fourier-Legendre, ele será utilizado no próximo teorema, para obter a taxa de convergència das aproximações numéricas.

4.4.1 Método de Galerkin Estocástico

Nesta seção apresenta-se o *método de Galerkin Estocástico*, que trata-se do método de Bubnov-Galerkin, [78], aplicado ao problema de flexão estocástica da viga de Levinson-Bickford, Eq. (3.1). Baseando-se nos resultados de existência e unicidade apresentados na seção 3.1 utiliza-se o método de Galerkin para obter soluções numéricas aproximadas. Do teorema 1.14 tem-se que $L^2\big((\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P);H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)\simeq L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P)\otimes\big(H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\big)$. O *espaço de aproximação* é obtido pelo produto tensorial de subespaços de dimensão finita. Estes subespaços são gerados pelo truncamento de conjuntos totais ortonormais. O conjunto dos *polinômios generalizados de Caos*, munido da topologia forte adequada, é utilizado para gerar seqüências capazes de representar e aproximar, arbtitrariamente, elementos de $\Big(L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi}\big),(\cdot,\cdot)\Big)$, enquanto que, os elementos de $\big(H_0^2(0,l)\times H_0^1(0,l),(\cdot,\cdot)_{H^2\times H^1}\big)$ são representados por **aproximações globais**. Originalmente, o método de Bubnov-Galerkin utiliza uma seqüência de funções denotada por *sistema de coordenadas*, linearmente independentes, e buscam-se soluções na forma de combinações linares. Os coeficientes desta combinação são obtidos impondo-se a condição de ortogonalidade, [78]. Baseando-se nestas características o método Estocástico de Galerkin, se desenvolve nas seguintes etapas:

- **Construção do espaço das soluções aproximadas.**

  a) Escolha dos conjuntos totais a serem utilizados:

$$\begin{cases} \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \overline{span\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\left(\frac{n.\pi.x}{l}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}}^{H^2} = H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l); \\ \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \overline{span\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\left(\frac{n.\pi.x}{l}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}}^{H^1} = H_0^1(0,l); \\ \mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M) = \Big\{p(\zeta_1,...,\zeta_M)\mid p(.)\ \textit{é um polinômio de Legendre} \\ \qquad \textit{com grau}\leq n,\ \textit{nas variáveis randômicas},\ \zeta_1,...,\zeta_M\in\mathcal{H}_M\Big\}; \end{cases} \tag{4.10}$$

b) Geração do subespaço.

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{m_w} = \Big(span\big\{w_n\big\}_{n=1}^{m_w},\ (\cdot,\cdot)_{H^2}\Big),\ \mathcal{W}_{m_w} \subset H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l); \\ \Phi_{m_\phi} = \Big(span\big\{\phi_n\big\}_{n=1}^{m_\phi},\ (\cdot,\cdot)_{H^1}\Big),\ \Phi_{m_\phi} \subset H_0^1(0,l); \\ \mathcal{P}_m^M(\mathcal{H}_M) = \bigcup_{n=0}^{m} \mathcal{P}_n^M(\mathcal{H}_M),\ \mathcal{P}_m^M(\mathcal{H}_M) \subset L^2\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}\big). \end{cases} \tag{4.11}$$

O subespaço de *aproximação*, $V_h \subset V$, é obtido pelo produto tensorial dos subespaços sendo definido por,

$$V_h = \mathcal{P}_m^M(\mathcal{H}_M) \bigotimes \Big(\mathcal{W}_{m_w} \times \Phi_{m_\phi}\Big).$$

- **Definir a "*candidata*" a solução aproximada.**

As soluções numéricas aproximadas, ou "*aproximações de Galerkin*", conforme Eq. (4.5) e corolário 4.7, possuem a seguinte forma,

$$\begin{cases} \tilde{w}(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{v\in\Upsilon} w_v(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{m_w} \sum_{\lambda\in\Lambda} w_{i\lambda} w_i(x) \phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}); \\ \tilde{\psi}(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\theta\in\Theta} \psi_\theta(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{m_\psi} \sum_{\varsigma\in\Sigma} \psi_{i\varsigma} \psi_i(x) \phi_{\boldsymbol{\varsigma}}(\boldsymbol{\xi}); \end{cases} \tag{4.12}$$

sendo $\big\{w_{i\lambda},\ \psi_{i\varsigma}\big\}$ coeficientes da combinação linear, enquanto que $\big\{\Upsilon,\ \Theta\big\}$ são conjuntos de multíndices definidos por,

$$\begin{cases} \Upsilon = \Big\{(i,\lambda) \in \mathbb{N}^{M+1} \Big|\ i \in \big\{1,...,m_w\big\}\ \wedge\ \lambda \in \Lambda(m,M)\Big\}; \\ \Theta = \Big\{(i,\varsigma) \in \mathbb{N}^{M+1} \Big|\ i \in \big\{1,...,m_\phi\big\}\ \wedge\ \lambda \in \Sigma(m,M)\Big\}. \end{cases}$$

- **Obtenção do sistema de equações de Bubnov-Galerkin.**

O sistema de equações de Bubnov-Galerkin é obtido com um procedimento similar ao que foi realizado para obter o PVA, Eq. (3.3). Para tanto, toma-se $(v,\phi) = \big(w_v, \phi_\theta\big)$, multiplica-se a Eq. (3.1a) por "w_v" e com medida produto $\mu = \mu_{\mathcal{B}}.P_{\boldsymbol{\Xi}}$, μ-integrando-se na região $(0,l) \times [-1,1]^M$, obtém-se,

$$\left(\alpha\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} + \tilde{\psi}\right), \frac{\partial w_v}{\partial x}\right) + \left(\beta\left(5\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2} - 16\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2}\right) + 16.\int_\Gamma \left(\beta\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial w_v}{\partial x}\right)(l,\boldsymbol{\xi}) dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})$$

$$-16.\int_{\Gamma}\left(\beta\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial w_v}{\partial x}\right)(0,\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})=(q,w_v),\quad \forall w_v\in\left\{w_n\right\}_{n=1}^{m_w}\bigotimes\mathcal{P}_m^M(\mathcal{H}_M).$$

De forma análoga, multiplica-se a Eq. (3.1b) por "ϕ_θ", μ-integra-se na região $(0,l)\times[-1,1]^M$,

$$\left(\beta\left(16\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-68\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right),\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)-\left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\tilde{\psi}\right),\phi_\theta\right)=0,\quad \forall\phi_\theta\in\left\{w_n\right\}_{n=1}^{m_w}\bigotimes\mathcal{P}_m^M(\mathcal{H}_M).$$

Substituindo-se os "*candidatos*" a soluções aproximadas, Eq. (4.12), nas últimas equações chega-se,

$$\sum_{i=1}^{m_w}\sum_{\lambda\in\Lambda}\left[\left(\alpha\frac{\partial w_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\frac{\partial w_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right)+5\left(\beta\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right)\right]w_{i\lambda}+\sum_{i=1}^{m_\psi}\sum_{\varsigma\in\Sigma}\left[\left(\alpha\psi_i\phi_{\boldsymbol{\varsigma}},\frac{\partial w_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right)\right.$$

$$-16.\left(\beta.\frac{\partial\psi_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\varsigma}},\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right)+16.\int_{\Gamma}\beta(l,\boldsymbol{\xi}).\left(\psi_i'.w_j'\right)(l).\left(\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right).(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})$$

$$\left.-16.\int_{\Gamma}\beta(0,\boldsymbol{\xi}).\left(\psi_i'.w_j'\right)(0).\left(\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right).(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})\right]\psi_{i\varsigma}=\left(q,w_j.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right),\quad \forall(j,\boldsymbol{\nu})\in\left\{1,...,m_w\right\}\times\Lambda.$$

$$\sum_{i=1}^{m_w}\sum_{\lambda\in\Lambda}\left[16.\left(\beta\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\frac{\partial\psi_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right)-\left(\alpha\frac{\partial w_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}},\psi_j.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right)\right]w_{i\lambda}-\sum_{i=1}^{m_\psi}\sum_{\varsigma\in\Sigma}\left[68.\left(\beta\frac{\partial\psi_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\varsigma}},\frac{\partial\psi_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\alpha.\psi_i.\phi_{\boldsymbol{\varsigma}},\psi_j.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right)\right]\psi_{i\varsigma}=0,\quad \forall(j,\boldsymbol{\iota})\in\left\{1,...,m_\psi\right\}\times\Sigma.$$

Variando-se os índices, em seus respectivos conjuntos de índices, $\left\{\Upsilon,\ \Theta\right\}$, através da representação **vetor-matriz**, formula-se o problema via sistema de equações de Bubnov-Galerkin,

$$\begin{cases}\text{Determinar }\left(\mathbf{W},\boldsymbol{\Psi}\right)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q,\text{ tal que}\\ \mathbb{K}_w\mathbf{W}+\mathbb{M}_\psi\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{F};\\ \mathbb{M}_w\mathbf{W}+\mathbb{K}_\psi\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{0};\end{cases}\tag{4.13}$$

considerando $m_\Lambda=|\Lambda|$ e $m_\Sigma=|\Sigma|$ então $p=m_w.m_\Lambda$ e $q=m_\psi.m_\Sigma$, $\mathbb{K}_w\in\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$, $\mathbb{M}_\psi,\in\mathbb{M}_{pq}(\mathbb{R})$, $\mathbb{M}_w\in\mathbb{M}_{qp}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{K}_\psi\in\mathbb{M}_q(\mathbb{R})$ matrizes, $\mathbf{W}\in\mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\Psi}\in\mathbb{R}^q$ e $\mathbf{F}\in\mathbb{R}^p$ vetores. Para definir as entradas destes objetos deve-se estabelecer a correspondência entre

índices e multíndices,

$$\begin{cases} i_w = (r_w - 1).m_\Lambda + r_{\boldsymbol{\lambda}}; \\ j_w = (s_w - 1).m_\Lambda + s_{\boldsymbol{\lambda}}; \\ i_\psi = (r_\psi - 1).m_\Sigma + r_{\boldsymbol{\varsigma}}; \\ j_\psi = (s_\psi - 1).m_\Sigma + s_{\boldsymbol{\varsigma}}; \end{cases}$$

em que $r_w, s_w \in \{1, ..., m_w\}$, $r_\psi, s_\psi \in \{1, ..., m_\psi\}$, $r_{\boldsymbol{\lambda}}$ e $s_{\boldsymbol{\lambda}}$ correspondem a enumeração de um elemento $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, enquanto que $r_{\boldsymbol{\varsigma}}$ e $s_{\boldsymbol{\varsigma}}$ correspondem a enumeração do elemento $\boldsymbol{\varsigma} \in \Sigma$. A partir disso, definem-se as entradas dos vetores e matrizes,

$$\begin{cases} \mathbb{K}_w = \left[k^w_{i_w j_w}\right]_{p\times p}, & k^w_{i_w j_w} = \left(\alpha \dfrac{\partial w_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}}, \dfrac{\partial w_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right) + 5\left(\beta \dfrac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}}, \dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right); \\ \mathbb{M}_\psi = \left[m^\psi_{i_\psi j_\psi}\right]_{p\times q}, & m^\psi_{i_\psi j_\psi} = \left(\alpha\psi_i\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}, \dfrac{\partial w_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right) + 16.\left(\beta.\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}, \dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right) \\ & \qquad +16.\left(\psi_i'.w_j'\right)(l).\int_\Gamma \beta(l,\boldsymbol{\xi}).\left(\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right).(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) \\ & \qquad -16.\left(\psi_i'.w_j'\right)(0).\int_\Gamma \beta(0,\boldsymbol{\xi}).\left(\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right).(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}); \\ \mathbb{M}_w = \left[m^w_{i_w j_w}\right]_{q\times p}, & m^w_{i_w j_w} = 16.\left(\beta \dfrac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}}, \dfrac{\partial \psi_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right) - \left(\alpha \dfrac{\partial w_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\lambda}}, \psi_j.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right); \\ \mathbb{K}_\psi = \left[k^\psi_{i_\psi j_\psi}\right]_{q\times q}, & k^\psi_{i_\psi j_\psi} = -68.\left(\beta \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}, \dfrac{\partial \psi_j}{\partial x}.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right) - \left(\alpha.\psi_i.\phi_{\boldsymbol{\varsigma}}, \psi_j.\phi_{\boldsymbol{\iota}}\right); \\ \mathbf{F} = [f_{i_w}]_{p\times 1}, & f_{i_w} = \left(q, w_j.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right); \\ \mathbf{W} = \left(w_{1\lambda_1}, ..., w_{m_w\lambda_1}, ..., w_{1\lambda_i}, ..., w_{m_w\lambda_i}, ..., w_{1\lambda_{m_\Lambda}}, ..., w_{m_w\lambda_{m_\Lambda}}\right)^T; \\ \mathbf{\Psi} = \left(\psi_{1\varsigma_1}, ..., \psi_{m_\psi\varsigma_1}, ..., \psi_{1\varsigma_i}, ..., \psi_{m_\psi\varsigma_i}, ..., \psi_{1\varsigma_{m_\Lambda}}, ..., \psi_{m_\psi\varsigma_{m_\Sigma}}\right)^T. \end{cases}$$

Das definições acima, as matrizes "$\mathbb{K}_w$" e "$\mathbb{K}_\psi$" são **simétricas** e **positivo definidas**. O espaço das soluções numéricas aproximadas, conforme o método de Galerkin, é $V_h = \left(\mathcal{P}^M_n(\mathcal{H}_M) \otimes \left(\{w_n\}_{n=1}^{m_w} \times \{\phi_n\}_{n=1}^{m_\psi}\right), (\cdot,\cdot)_V\right)$. Na próxima seção apresenta-se uma *estimativa* para a distância entre dois elementos de uma sequência de soluções numéricas aproximadas, $\left\{\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right)\right\} \subset V_h$. O primeiro índice refere-se ao número de elementos dos espaços, de dimensão finita, gerados por $\{w_n\}_{n=1}^{m_w}$ ou $\{\phi_n\}_{n=1}^{m_\psi}$, enquanto que o segundo índice refere-se ao número de elementos do espaço gerado por $\mathcal{P}^M_n(\mathcal{H}_M)$.

4.4.2 Análise de Erro das Aproximações de Galerkin

Nesta seção apresentam-se três resultados teóricos, os teoremas 4.2, 4.3 e o corolário 5.6 relacionados a análise de erro das soluções numéricas aproximadas, $\left(\varepsilon_h,\ \varepsilon_{h,p}\right)$, para o problema variacional, associado à flexão estocástica de vigas de Levinson-Bickford. As soluções numéricas aproximadas consistem de combinações lineares, Eq. (4.12), cujos coeficientes são obtidos como solução do sistema linear expresso na Eq. (4.13).

Teorema 4.2 ("Taxa de Convergência das Soluções Numéricas") *: Nas condições do lema 4.4* $\exists \mathbb{C}_w = \mathbb{C}_w(n), \mathbb{C}_\psi = \mathbb{C}_\psi(n) > 0$ *tal que,*

$$\begin{cases} \|w - w_m\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \mathbb{C}_w.\Gamma(n,m+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{m+1}}).(m+1)}; \\ \|\psi - \psi_m\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \mathbb{C}_\psi.\Gamma(n,m+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{m+1}}).(m+1)}; \end{cases} \tag{4.14}$$

para um $\boldsymbol{\lambda_{m+1}} \in \mathbb{N}^n$*, tal que* $\boldsymbol{\lambda_{m+1}} = |\boldsymbol{\lambda}| = m+1$

$$\begin{cases} \mathbb{C}_w = \dfrac{C_w}{\sqrt{3}}.\left(\dfrac{n}{a}.e^{-a}\right)^n; \\ \mathbb{C}_\psi = \dfrac{C_\psi}{\sqrt{3}}.\left(\dfrac{n}{a}.e^{-a}\right)^n; \\ \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \left|log\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{|\boldsymbol{\lambda}|}\right).r_i\right)\right|; \end{cases} \tag{4.15}$$

sendo $a = log(2)$*,* $\{C_w,\ C_\psi\}$ *constantes do lema 4.3 e* $r_i \in (0,1),\ \forall\ i \in \{1,...,n\}$*.*

Demonstração: Neste teorema obtém-se a taxa de convergência das soluções numéricas aproximadas. Para tanto, toma-se uma seqüência, $\left(w_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$, que seja seqüência de Cauchy na norma $L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2(0,l))$. A partir disso, estima-se a *distância* entre dois elementos da seqüência, "w_m" e "w_n" , e tomando-se *sem perda de generalidade*, $m > n \geq 1$ e fazendo-se $m \longrightarrow \infty$ obtém-se via as representações propostas na Eq. (4.7.a),

$$\|w-w_m\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} = \left\| \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}^n} (w\otimes\phi)_{\boldsymbol{\lambda}} - \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(m,n)} (w\otimes\phi)_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}$$

$$= \left\| \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(\Lambda(m,n))^c} (w\otimes\phi)_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(\Lambda(m,n))^c} \left\|(w\otimes\phi)_{\boldsymbol{\lambda}}\right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}$$

$$\leq \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(\Lambda(m,n))^c} \|w_{\boldsymbol{\lambda}}\|_{L^2(0,l)}\|\phi_{\boldsymbol{\lambda}}\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}})} \leq \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(\Lambda(m,n))^c} \frac{C_w}{(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\frac{2^{|\boldsymbol{\lambda}|}.\left(\boldsymbol{\lambda}!\right)^2}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.\frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}}}.\left(\prod_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_i}\right).$$

Estuda-se separadamente os fatores da desigualdade anterior,

$$\frac{\left(\boldsymbol{\lambda}!\right)^2}{(2.\boldsymbol{\lambda})!} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_i!).(\lambda_i!)}{(2.\lambda_i).(2.\lambda_i-1).\cdots.(2.\lambda_i-(\lambda_i-1)).(\lambda_i!)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{2.\lambda_i}.\frac{\lambda_i-1}{2.\lambda_i-1}.\frac{\lambda_i-2}{2.\lambda_i-2}.\frac{\lambda_i-3}{2.\lambda_i-3}.\cdots.\frac{1}{\lambda_i+1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}.\frac{\lambda_i-1}{2.\lambda_i-1}.\frac{\lambda_i-2}{2.(\lambda_i-1)}.\frac{\lambda_i-3}{2.\lambda_i-3}.\frac{\lambda_i-4}{2.(\lambda_i-2)}.\frac{\lambda_i-5}{2.\lambda_i-5}.\frac{\lambda_i-6}{2.(\lambda_i-3)}.\frac{\lambda_i-7}{2.\lambda_i-7}.\cdots$$

$$\cdot.\frac{\lambda_i-(\lambda_i-2)}{2.\lambda_i-(\lambda_i-2)}.\frac{\lambda_i-(\lambda_i-1)}{2.\lambda_i-(\lambda_i-1))} \leq \frac{1}{2}.\overbrace{\frac{1}{2}.\cdots.\frac{1}{2}}^{\text{“}\lambda_i-1\text{” vezes}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{\lambda_i}}.$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\boldsymbol{\lambda}!\right)^2}{(2.\boldsymbol{\lambda})!} = \frac{1}{2^{|\boldsymbol{\lambda}|}}.$$

Desta forma tem-se,

$$\frac{1}{(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\frac{2^{|\boldsymbol{\lambda}|}.\left(\boldsymbol{\lambda}!\right)^2}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.\frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}}}.\left(\prod_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_i}\right).C_w = \frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}}}.\frac{1}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.\left(\prod_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_i}\right).C_w. \tag{4.16}$$

Analisam-se, separadamente, os fatores da desigualdade apresentadas na Eq. (4.16). Para o primeiro fator tem-se

$$\frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{\lambda_i+1}} = \prod_{i=1}^{n} exp\left(log\left(\frac{1}{2^{\lambda_i+1}}\right)\right) = exp\left(log\left(\frac{1}{2^{\lambda_1+1}}\right)\right).\cdots.exp\left(log\left(\frac{1}{2^{\lambda_n+1}}\right)\right)$$

$$= exp\left(\sum_{i=1}^{n} log\left(\frac{1}{2^{\lambda_i+1}}\right)\right).$$

Para a *i-ésima* parcela do somatório, no argumento da função “$log(\cdot)$”, tem-se a seguinte identidade,

$$log\left(\frac{1}{2^{\lambda_i+1}}\right) = log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_i+1}\right) = (\lambda_i+1).log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} log\left(\frac{1}{2^{\lambda_i+1}}\right) = -log(2).(n+|\boldsymbol{\lambda}|);$$

conseqüentemente chega-se

$$\frac{1}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}}} = exp\big(-log(2).(n+|\boldsymbol{\lambda}|)\big).$$

Denotando-se $a = log(2)$ e sabendo-se que $n = |\mathbf{1}|$, com $\mathbf{1} \in \mathbb{N}^n$ a identidade anterior pode ser reescrita como sendo,

$$\frac{1}{\mathbf{2^{\lambda+1}}} = e^{-a.|\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}|}.$$

Examina-se, neste momento, o segundo fator da Eq. (4.16)

$$\frac{1}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(2.\lambda_i+1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(2.\lambda_1+1\right)}}.\cdots.\frac{1}{\sqrt{\left(2.\lambda_n+1\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(2.\lambda_i+1\right).\cdots\left(2.\lambda_n+1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(2.\lambda_i+1\right)}}.$$

Para obter uma majoração para este fator, utiliza-se o resultado apresentado na **Proposição 1.1**, capítulo 1, da seguinte forma

$$\left(2.|\boldsymbol{\lambda}|+1\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}} \leq \left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}.$$

Em vista disso, o segundo fator admite a seguinte majoração,

$$\frac{C_w}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}} \leq \frac{C_w}{\left(2.|\boldsymbol{\lambda}|+1\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.$$

Para o último fator da Eq. (4.16)

$$\prod_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{n} exp\Big(log\Big(r_i^{\lambda_i}\Big)\Big) = exp\Big(log\Big(r_1^{\lambda_1}\Big)\Big).\cdots.exp\Big(log\Big(r_n^{\lambda_n}\Big)\Big)$$

$$= exp\left(\sum_{i=1}^{n} log\Big(r_i^{\lambda_i}\Big)\right) = exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.log\big(r_i\big)\right).$$

Do lema 4.4 tem-se que $r_i \in \left(0, \frac{2}{n}\right),\ \forall i \in \{1,...,n\}$ e $t_i = \frac{\lambda_i}{|\boldsymbol{\lambda}|}$ com $t_i \in [0,1],\ \forall i \in \{1,...,n\}$ e da propriedade de *concavidade* da função "$log(\cdot)$" chega-se à seguinte majoração,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.log\big(r_i\big) = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\lambda}|.\frac{\lambda_i}{|\boldsymbol{\lambda}|}.log\big(r_i\big) = |\boldsymbol{\lambda}|.\sum_{i=1}^{n} t_i.log\big(r_i\big) \leq |\boldsymbol{\lambda}|.log\left(\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i\right).$$

Exponenciando-se a última desigualdade,

$$exp\left(|\boldsymbol{\lambda}|.log\left(\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i\right)\right) = e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda}).|\boldsymbol{\lambda}|};$$

sendo

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \left| log\left(\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i \right) \right|.$$

Desta forma obtém-se para o terceiro fator da Eq. (4.16) a seguinte majoração,

$$\prod_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_i} \leq e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda}).|\boldsymbol{\lambda}|}.$$

A partir disso, das desigualdades anteriores, a Eq. (4.16) pode ser majorada como segue,

$$\frac{1}{\mathbf{2^{\lambda+1}}}.\frac{C_w}{(2.\boldsymbol{\lambda}+1)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.\left(\prod_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_i} \right) \leq \frac{C_w}{(2.|\boldsymbol{\lambda}|+1)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).|\boldsymbol{\lambda}|-a.|\mathbf{1}|}.$$

Por conseqüência chega-se,

$$\frac{C_w}{(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\frac{2^{|\boldsymbol{\lambda}|}.(\boldsymbol{\lambda}!)^2}{(2.\boldsymbol{\lambda}+1)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.\frac{1}{\mathbf{2^{\lambda+1}}}.\left(\prod_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_i} \right) \leq \frac{C_w}{(2.|\boldsymbol{\lambda}|+1)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).|\boldsymbol{\lambda}|-a.|\mathbf{1}|}.$$

Conseqüentemente a *distância* entre as soluções *exata* e *aproximada* é dado por,

$$\|w - w_m\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2(0,l))} \leq \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(\Lambda(m,n))^c} \frac{C_w}{(2.|\boldsymbol{\lambda}|+1)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}.e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).|\boldsymbol{\lambda}|-a.|\mathbf{1}|}$$

$$\leq \frac{C_w.e^{-a.|\mathbf{1}|}}{\sqrt{2.m+3}}. \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(\Lambda(m,n))^c} e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).|\boldsymbol{\lambda}|} \leq \frac{C_w.e^{-a.|\mathbf{1}|}}{\sqrt{3}}. \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(\Lambda(m,n))^c} e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).|\boldsymbol{\lambda}|}.$$

Em virtude dos termos da série acima dependerem de *multíndices*, a soma parcial da última desigualdade deve ser tratada com mais *cautela* do que, usualmente, se tratam as séries definidas em termos *apenas* de índices. Nesta etapa cabe a seguinte exposição, notando que $\boldsymbol{\lambda} \in (\Lambda(m,n))^c$ tem-se que $|\boldsymbol{\lambda}| > m$. Em vista disso, para um $m \in \mathbb{N}$, fixado, e tomando-se $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta} \in (\Lambda(m,n))^c$, tais que $|\boldsymbol{\lambda}| = |\boldsymbol{\beta}| > m$, não se tem *necessariamente* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\beta}$. Desta forma, estes elementos apesar de possuírem o mesmo *módulo*, em geral, são diferentes, mas *pertencem* ao conjunto de índices da soma. Como tem-se que $n \in \mathbb{N}$, o número de variáveis randômicas envolvidas está fixado e é finito. Desta forma, a multiplicidade dos elementos que estão no conjunto multíndice, $(\Lambda(m,n))^c$, que possuem o mesmo *módulo* é

finita, mas contribuem com a soma parcial da série apresentada na desigualdade acima. Para encontrar quantos termos estão *de fato* envolvidos na soma parcial, formula-se o seguinte problema, [26]:

$$\begin{cases} \text{Para } m' \in \mathbb{N}, \text{ fixado, tal que } m' > m \text{ encontrar } \boldsymbol{\lambda} \in (\Lambda(m,n))^c \\ \text{soluções da equação:} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_q = m'; \\ \text{tais que,} \\ \lambda_i > 0, \ \forall i \in 1, ..., q, \text{com } q \leq n. \end{cases} \tag{4.17}$$

O objetivo em definir o problema acima, não reside em determinar as soluções para equação algébrica, mas a dimensão do conjunto solução. Este é um problema comum a análise combinatória. A partir disso, considerando somente entradas não-nulas com $\boldsymbol{\lambda} \in (\Lambda(m,n))^c$, tal que $|\boldsymbol{\lambda}| = m+1$, $k = m+1$ o problema definido na Eq. (4.17) tem um conjunto solução com "$\binom{k}{q}$" elementos. Baseando-se em um argumento de contagem tem-se a seguinte identidade

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in (\Lambda(m,n))^c} e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).|\boldsymbol{\lambda}|} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{q} \binom{n}{s}.\binom{k}{s} e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).k}.$$

Nota-se que para $1 \leq q \leq n$, o produto dos coeficientes das combinações admite a seguinte identidade:

$$\binom{n}{s}.\binom{k}{s} = \frac{n!}{s!.(n-s)!}.\frac{k!}{s!.(k-s)!} = \frac{n.(n-1).\cdots.(n-s)!}{s!.(n-s)!}.\frac{k.(k-1).\cdots.(k-s)!}{s!.(k-s)!}$$

$$= \frac{n.(n-1).\cdots.(n-s+1)}{s!}.\frac{k.(k-1).\cdots.(k-s+1)}{s!}.$$

Analisa-se, separadamente, um dos fatores

$$\frac{n.(n-1).\cdots.(n-s+1)}{s!} = \frac{(n-s+(s-0))}{s}.\frac{(n-s+(s-1))}{(s-1)}.\cdots$$

$$\cdots.\frac{(n-s+(s-(s-2)))}{(s-(s-2)))}.\frac{(n-s+(s-(s-1)))}{(s-(s-1)))}$$

$$= \left(\frac{n-s}{s}+1\right).\left(\frac{n-s}{s-1}+1\right).\cdots.\left(\frac{n-s}{s-(s-2)}+1\right).\left(\frac{n-s}{s-(s-1)}+1\right) = \prod_{j=0}^{s-1}\left(\frac{n-s}{s-j}+1\right).$$

Desta forma, ao produto dos coeficientes das combinações cabe a seguinte identidade,

$$\binom{n}{s}.\binom{k}{s} = \prod_{j=0}^{s-1}\frac{(k-j).(n-j)}{(s-j)^2}.$$

Esta identidade pode ser majorada por,

$$\prod_{j=0}^{s-1}\frac{(k-j).(n-j)}{(s-j)^2} \leq \prod_{j=0}^{s-1}(k-j).(n-j) \leq (k.n)^{s-1}.$$

A *soma* sobre o índice "s" é majorada como segue,

$$\sum_{s=0}^{q}\binom{n}{s}.\binom{k}{s} = \sum_{s=0}^{q}\prod_{j=0}^{s-1}\frac{(k-j).(n-j)}{(s-j)^2} \leq \sum_{s=0}^{q}(k.n)^{s-1} \leq q.(k.n)^{q-1} \leq \left(n^n\right).k^{n-1}.$$

Em vista das últimas majorações a série admite a seguinte majoração,

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}\sum_{s=0}^{q}\binom{n}{s}.\binom{k}{s}e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).k} \leq \left(n^n\right).\sum_{k=m+1}^{+\infty}k^{n-1}.e^{-(a+\theta(\boldsymbol{\lambda})).k}$$

$$\leq \left(n^n\right).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{m+1}}).(m+1)}.\sum_{k=m+1}^{+\infty}k^{n-1}.e^{-a.k}.$$

Verifica-se que a série acima é *convergente*, via *Teste da Razão*, tomando-se $b_k = k^{n-1}.e^{-a.k}$ avalia-se,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^{n-1}}{k^{n-1}}.\frac{e^{-a.(k+1)}}{e^{-a.k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|1+\frac{1}{k}\right|.e^{-a} = e^{-a} < 1.$$

Portanto, a série acima é *uniformemente convergente*, para algum limite "L". Uma cota superior para a série é dada por,

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}k^{n-1}.e^{-a.k} \leq \int_{m+1}^{+\infty}x^{n-1}.e^{-a.x}dx = \left(\frac{1}{a}\right)^n.\int_{m+1}^{+\infty}x^{n-1}.e^{-x}dx = \left(\frac{1}{a}\right)^n.\Gamma(n,m+1);$$

sendo $\Gamma(n,m+1)$ a função "*Gama Incompleta*". É importante observar que para um $n \in \mathbb{N}$, fixado, $\lim_{m\to\infty}\Gamma(n,m+1) = 0$. A partir disso, para a *distância* entre as soluções *exata* e *aproximada numérica*, obtém-se

$$\|w - w_m\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \frac{C_w}{\sqrt{3}}.\left(\frac{n}{a}.e^{-a}\right)^n.\Gamma(n,m+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{m+1}}).(m+1)}.$$

Uma estimativa análoga é obtida para a distância entre as soluções exata e numérica aproximada para "ψ", Eq. (4.14.b). ■

O próximo resultado, teorema 4.3, apresenta estimativas para a distância entre elementos da seqüência de Cauchy, cujo limite da seqüência é a solução do P.V.A. Estas estimativas são úteis no sentido de *medir* as aproximações numéricas obtidas pelo método de Bubnov-Galerkin.

Teorema 4.3 ("Distância entre Elementos da Seqüência de Cauchy") *: Nas condições do Teorema 4.2, para uma seqüência* $\left\{\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right)\right\} \subset L^\infty\left(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\right)$ *vale a seguinte estimativa para a distância entre seus elementos,*

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right) - \left(w_{n_w q_w}, \psi_{n_\psi q_\psi}\right)\right| \leq \sqrt{\left(\frac{l}{m_w.\pi}\right)^4 + \left(\frac{l}{m_\psi.\pi}\right)^2}.\frac{1}{\boldsymbol{c}}.\left\|q\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \\ \quad +\mathbb{C}_w.\Gamma(n, p_w+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_w+1}}).(p_w+1)} + \mathbb{C}_\psi.\Gamma(n, p_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_\psi+1}}).(p_\psi+1)} \\ \quad +\sqrt{\left(\frac{l}{n_w.\pi}\right)^4 + \left(\frac{l}{n_\psi.\pi}\right)^2}.\frac{1}{\boldsymbol{c}}.\left\|q\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} + \mathbb{C}_w.\Gamma(n, q_w+1) \\ \quad .e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_w+1}}).(q_w+1)} + \mathbb{C}_\psi.\Gamma(n, q_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_\psi+1}}).(q_\psi+1)}; \\ \textit{sendo } \mathbb{C}_w \textit{ e } \mathbb{C}_\psi, \textit{ as constantes do Teorema 4.2.} \end{array}\right.$$

Demonstração: Notando que $L^\infty(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H^2(0,l) \times H_0^1(0,l)) \hookrightarrow L^\infty(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; L^2(0,l) \times L^2(0,l))$, para quaisquer dois elementos da seqüência, $\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right), \left(w_{n_w q_w}, \psi_{n_\psi q_\psi}\right) \in \left\{\left(w_m, \psi_n\right)\right\}_{m,n \in \mathbb{N}}$, calcula-se a distância entre esses elementos, através da norma em $L^2\left(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; L^2(0,l) \times L^2(0,l)\right)$,

$$\left|\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right) - \left(w_{n_w q_w}, \psi_{n_\psi q_\psi}\right)\right| \leq \overbrace{\left|\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right) - \left(w_{p_w}, \psi_{p_\psi}\right)\right|}^{1} + \overbrace{\left|\left(w_{p_w}, \psi_{p_\psi}\right) - \left(w, \psi\right)\right|}^{2}$$

$$+ \overbrace{\left|\left(w_{q_w}, \psi_{q_\psi}\right) - \left(w_{n_w q_w}, \psi_{n_\psi q_\psi}\right)\right|}^{3} + \overbrace{\left|\left(w, \psi\right) - \left(w_{q_w}, \psi_{q_\psi}\right)\right|}^{4}.$$

As parcelas 1 e 2 são similares as parcelas 3 e 4, portanto para se obter estimativas para a distância entre os elementos basta analisar, separadamente. Por exemplo as parcelas 1 e 2 e depois estender as estimativas obtidas, adequando-se os índices, para as parcelas 3 e 4. A partir disso, estuda-se a parcela 1,

$$\left|\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right) - \left(w_{p_w}, \psi_{p_\psi}\right)\right| = \left|\left(w_{m_w p_w} - w_{p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi} - \psi_{p_\psi}\right)\right|;$$

da notação para norma em $L^2\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; L^2(0,l) \times L^2(0,l)\big)$, Eq. (3.13), para tanto observa-se

$$\begin{aligned}\left|\left(w_{m_w p_w} - w_{p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi} - \psi_{p_\psi}\right)\right|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\left\|\left(w_{m_w p_w} - w_{p_w}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\left(\psi_{m_\psi p_\psi}\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. -\psi_{p_\psi}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2_{L^2(0,l)}\right] dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_\Gamma \left\|\left(w_{m_w p_w} - w_{p_w}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2_{L^2(0,l)} dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) \\ &\quad + \int_\Gamma \left\|\left(\psi_{m_\psi p_\psi} - \psi_{p_\psi}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2_{L^2(0,l)} dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) \\ = \overbrace{\left\|w_{m_w p_w} - w_{p_w}\right\|^2_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}}^{1a} &+ \overbrace{\left\|\psi_{m_\psi p_w} - \psi_{p_\psi}\right\|^2_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\xi}};L^2(0,l))}}^{1b}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

A partir disso analisa-se o integrando da parcela 1a, através da sua representação pelo corolário 4.7,

$$\begin{aligned}\left(w_{m_w p_w} - w_{p_w}\right)(x,\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^{m_w} \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)} w_{i(\boldsymbol{\lambda})}(x)\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}) - \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)} w_{\boldsymbol{\lambda}}(x)\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)}\left[\sum_{i=1}^{m_w} w_{i(\boldsymbol{\lambda})}(x)\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}) - w_{\boldsymbol{\lambda}}(x)\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi})\right] \\ &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)}\left[\sum_{i=1}^{m_w} w_{i(\boldsymbol{\lambda})}(x) - w_{\boldsymbol{\lambda}}(x)\right].\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi});\end{aligned}$$

retornando-se com a última identidade para o integrando e usando-se o corolário 4.8 chega-se,

$$\int_\Gamma \left\|\left(w_{m_w p_w} - w_{p_w}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|^2_{L^2(0,l)} dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Lambda(p_w,n)} \int_\Gamma \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{m_w} w_{i(\boldsymbol{\lambda})} - w_{\boldsymbol{\lambda}}\right)(x)$$

$$.\left(\sum_{j=1}^{m_w} w_{j(\boldsymbol{\nu})} - w_{\boldsymbol{\nu}}\right)(x).\left(\phi_{\boldsymbol{\lambda}}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right)(\boldsymbol{\xi}) dx dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Lambda(p_w,n)} \left(\int_0^l \left(\sum_{i=1}^{m_w} w_{i(\boldsymbol{\lambda})} - w_{\boldsymbol{\lambda}}\right)(x)\right.$$

$$\cdot\left(\sum_{j=1}^{m_w} w_{j(\boldsymbol{\nu})} - w_{\boldsymbol{\nu}}\right)(x)dx\Bigg)\cdot\left(\int_{\Gamma}\left(\phi_{\boldsymbol{\lambda}}.\phi_{\boldsymbol{\nu}}\right)(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})\right) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)}\int_0^l\left(\sum_{i=1}^{m_w} w_{i(\boldsymbol{\lambda})} - w_{\boldsymbol{\lambda}}\right)^2(x)dx$$

$$\Longrightarrow \left\|w_{m_w p_w} - w_{p_w}\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_w,n)}\left\|\sum_{n=1}^{m_w} w_{n(\boldsymbol{\lambda})} - w_{\boldsymbol{\lambda}}\right\|^2_{L^2(0,l)}}.$$

A identidade acima mostra que a distância entre elementos $w_{m_w p_w}, w_{p_w} \in L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};$ $L^2(0,l))$ é igual a distância entre os elementos $\sum_{i=1}^{m_w} w_{n(\boldsymbol{\lambda})}, w_{\boldsymbol{\lambda}} \in L^2(0,l),\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(p_w,n)$. Esta estimativa revela a "qualidade" das aproximações numéricas, que dependerá do método numérico utilizado. Neste trabalho o método utilizado baseia-se em aproximações numéricas *globais*, a partir de subconjuntos totais, ortonormais, com dimensão finita. A partir disso o elemento "$w_{\boldsymbol{\lambda}}^{m_w}$" é representado por,

$$w_{\boldsymbol{\lambda}}^{m_w}(x) = \sum_{n=1}^{m_w} w_{n(\boldsymbol{\lambda})}(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\sum_{n=1}^{m_w} w_{n\boldsymbol{\lambda}}.sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big).$$

Desta forma a estimativa para a distância é baseada na estimativa, clássica, dos coeficientes de Fourier. Notando que $\overline{\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big)\right\}_{n\in\mathbb{N}}}^{H^2} = H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l)$ e $w_{\boldsymbol{\lambda}} \in H^2(0,l),\ \forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}^n$, admite a seguinte representação via série de Fourier,

$$w_{\boldsymbol{\lambda}}(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\sum_{n\in\mathbb{N}} w_{n\boldsymbol{\lambda}}.sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big);$$

sendo

$$w_{n\boldsymbol{\lambda}} = \int_0^l w_{\boldsymbol{\lambda}}(x).sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big)dx.$$

A partir destas definições pode-se estimar a distância entre os elementos "$w_{\boldsymbol{\lambda}}^{m_w}$" e "$w_{\boldsymbol{\lambda}}$",

$$\left(\sum_{n=1}^{m_w} w_{n(\boldsymbol{\lambda})} - w_{\boldsymbol{\lambda}}\right)(x) = -\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\sum_{n=m_w+1}^{\infty} w_{n\boldsymbol{\lambda}}.sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big).$$

Notando que $w_{\boldsymbol{\lambda}} \in H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l)$ e considerando uma representação para esta, admite-se a seguinte identidade,

$$w_{n\boldsymbol{\lambda}} = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\int_0^l w_{\boldsymbol{\lambda}}(x).sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big)dx = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{l}{n.\pi}\right).\int_0^l w'_{\boldsymbol{\lambda}}(x).cos\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big)dx$$

$$= -\left(\frac{l}{n.\pi}\right)^2.\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\int_0^l w''_{\boldsymbol{\lambda}}(x).sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big)dx = -\left(\frac{l}{n.\pi}\right)^2.w''_{n\boldsymbol{\lambda}}.$$

A partir desta identidade consegue-se estimar a distância entre os elementos "$w_{\boldsymbol{\lambda}}^{m_w}$" e "$w_{\boldsymbol{\lambda}}$",

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_w} w_{n(\boldsymbol{\lambda})} - w_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l \left(\sum_{n=m_w+1}^{\infty} w_{n\boldsymbol{\lambda}}.sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big) \right)^2 dx = \sum_{m=m_w+1}^{\infty} \sum_{n=m_w+1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{l}}.w_{m\boldsymbol{\lambda}} \right)$$

$$.\left(\sqrt{\frac{2}{l}}.w_{n\boldsymbol{\lambda}} \right). \int_0^l sen\Big(\frac{m.\pi.x}{l}\Big).sen\Big(\frac{n.\pi.x}{l}\Big)dx = \sum_{m=m_w+1}^{\infty} \sum_{n=m_w+1}^{\infty} w_{m\boldsymbol{\lambda}}.w_{n\boldsymbol{\lambda}}.\delta_{mn}$$

$$= \sum_{m=m_w+1}^{\infty} w_{m\boldsymbol{\lambda}}^2 = \sum_{m=m_w+1}^{\infty} \left(\left(\frac{l}{m.\pi} \right)^2 .w''_{m\boldsymbol{\lambda}} \right)^2 \leq \left(\frac{l}{m_w.\pi} \right)^4 . \sum_{m=1}^{\infty} \left(w''_{m\boldsymbol{\lambda}} \right)^2 = \left(\frac{l}{m_w.\pi} \right)^4 .\left\| w''_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{L^2(0,l)}^2 .$$

Desta forma a parcela 1 é estimada por,

$$\left\| w_{m_w p_w} - w_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \left(\frac{l}{m_w.\pi} \right)^2 .\sqrt{\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \left\| w''_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{L^2(0,l)}^2} .$$

Dos corolários 4.7 e 4.8, tem-se que para uma solução fraca $w_{p_w} \in L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)) \hookrightarrow L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))$ calcula-se,

$$\left\| w''_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}^2 = \int_\Gamma \int_0^l \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} w''_{\boldsymbol{\lambda}}(x).\psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}) \right)^2 dx dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Lambda} \int_\Omega \int_0^l \left(w''_{\boldsymbol{\lambda}}.w''_{\boldsymbol{\nu}} \right)(x)$$

$$.\left(\psi_{\boldsymbol{\lambda}}.\psi_{\boldsymbol{\nu}} \right)(\boldsymbol{\xi})dx dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Lambda} \left(\int_0^l \left(w''_{\boldsymbol{\lambda}}.w''_{\boldsymbol{\nu}} \right)(x)dx \right).\left(\int_\Gamma \left(\psi_{\boldsymbol{\lambda}}.\psi_{\boldsymbol{\nu}} \right)(\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) \right).$$

Novamente, do corolário 4.8

$$\left\| w''_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}^2 = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Lambda} \left(\int_0^l \left(w''_{\boldsymbol{\lambda}}.w''_{\boldsymbol{\nu}} \right)(x)dx \right).\delta_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\nu}} = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \int_0^l \left(w''_{\boldsymbol{\lambda}} \right)^2(x)dx$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \left\| w''_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{L^2(0,l)}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left\| w''_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \left\| w''_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{L^2(0,l)}^2} .$$

Desta identidade, a majoração da parcela 1a é reescrita como,

$$\left\| w_{m_w p_w} - w_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \left(\frac{l}{m_w.\pi} \right)^2 .\left\| w''_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} .$$

Da definição da norma em V, Eq. (3.2), e coercividade, obtém-se

$$\left\| w''_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \left\| (w_{p_w},\psi_{p_w}) \right\|_V \leq \frac{1}{\mathbf{c}}.\left\| q \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} .$$

Finalmente, para a parcela 1a tem-se a seguinte majoração,

$$\left\| w_{m_w p_w} - w_{p_w} \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \left(\frac{l}{m_w.\pi} \right)^2 .\frac{1}{\mathbf{c}}.\left\| q \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} .$$

Da mesma forma, analisa-se o integrando da parcela 1b,

$$\left(\psi_{m_\psi p_\psi} - \psi_{p_\psi}\right)(x,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_\psi,n)} \left[\sum_{i=1}^{m_\psi} \psi_{i(\boldsymbol{\lambda})}(x) - \psi_{\boldsymbol{\lambda}}(x)\right].\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}).$$

retornando-se com a última identidade para o integrando e usando-se, novamente, o corolário 4.8 chega-se,

$$\left\|\psi_{m_\psi p_\psi} - \psi_{p_\psi}\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p_\psi,n)} \left\|\sum_{i=1}^{m_\psi} \psi_{i(\boldsymbol{\lambda})} - \psi_{\boldsymbol{\lambda}}\right\|^2_{L^2(0,l)}}.$$

Notando que $\psi_{\boldsymbol{\lambda}} \in H_0^1(0,l)$ e considerando uma representação para esta admite-se a seguinte identidade,

$$\psi_{\boldsymbol{\lambda}}(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_{n\boldsymbol{\lambda}}.sen\left(\frac{n.\pi.x}{l}\right);$$

sendo

$$\psi_{n\boldsymbol{\lambda}} = \int_0^l \psi_{\boldsymbol{\lambda}}(x).sen\left(\frac{n.\pi.x}{l}\right)dx.$$

A partir destas definições pode-se estimar a distância entre os elementos "$\psi_{\boldsymbol{\lambda}}^{m_\psi}$" e "$\psi_{\boldsymbol{\lambda}}$",

$$\left(\psi_{\boldsymbol{\lambda}}^{m_\psi} - \psi_{\boldsymbol{\lambda}}\right)(x) = \left(\sum_{n=1}^{m_\psi} \psi_{i(\boldsymbol{\lambda})} - \psi_{\boldsymbol{\lambda}}\right)(x) = -\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\sum_{n=m_\psi+1}^{\infty} \psi_{n\boldsymbol{\lambda}}.sen\left(\frac{n.\pi.x}{l}\right).$$

Notando que $\psi_{\boldsymbol{\lambda}} \in H_0^1(0,l)$ e considerando uma representação para esta admite-se a seguinte identidade,

$$\psi_{n\boldsymbol{\lambda}} = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).\int_0^l \psi_{\boldsymbol{\lambda}}(x).sen\left(\frac{n.\pi.x}{l}\right)dx = \left(\frac{l}{n.\pi}\right).\psi'_{n\boldsymbol{\lambda}}.$$

A partir desta majoração consegue-se estimar a distância entre os elementos "$w_{\boldsymbol{\lambda}}^{m_w}$" e "$w_{\boldsymbol{\lambda}}$",

$$\left\|\sum_{n=1}^{m_\psi} \psi_{n(\boldsymbol{\lambda})} - \psi_{\boldsymbol{\lambda}}\right\|^2_{L^2(0,l)} \leq \left(\frac{l}{m_\psi.\pi}\right)^2.\left\|\psi'_{\boldsymbol{\lambda}}\right\|^2_{L^2(0,l)}.$$

Desta identidade, a majoração da parcela 1b é reescrita como,

$$\left\|\psi_{m_\psi p_\psi} - \psi_{p_\psi}\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \left(\frac{l}{m_\psi.\pi}\right).\left\|\psi'_{p_\psi}\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}.$$

Novamente, da definição da norma em V, Eq. (3.2), e coercividade, obtém-se

$$\left\|\psi'_{p_\psi}\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \left\|\left(w_{p_w},\psi_{p_\psi}\right)\right\|_V \leq \frac{1}{\mathbf{c}}.\left\|q\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}.$$

Finalmente, para a parcela 1b tem-se a seguinte majoração,

$$\left\|\psi_{m_\psi p_\psi}-\psi_{p_\psi}\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \leq \left(\frac{l}{m_\psi.\pi}\right).\frac{1}{\mathbf{c}}.\left\|q\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}.$$

Das majorações obtidas para as parcelas 1a e 1b, a parcela 1 assume a seguinte majoração,

$$\left|\left(w_{m_w p_w},\psi_{m_\psi p_\psi}\right)-\left(w_{p_w},\psi_{p_\psi}\right)\right| \leq \sqrt{\left(\frac{l}{m_w.\pi}\right)^4+\left(\frac{l}{m_w.\pi}\right)^2}.\frac{1}{\mathbf{c}}.\left\|q\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}.$$

A parcela 2 é majorada utilizando-se a imersão $L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\times L^2(0,l)) \hookrightarrow L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\times L^2(0,l))$

$$\left|\left(w_{p_w},\psi_{p_\psi}\right)-\left(w,\psi\right)\right| \leq \left\|\left(w_{p_w},\psi_{p_\psi}\right)-\left(w,\psi\right)\right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\times L^2(0,l))}.$$

E da definição desta norma tem-se que,

$$\left\|\left(w_{p_w},\psi_{p_\psi}\right)-\left(w,\psi\right)\right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\times L^2(0,l))} = \left\|\left(w_{p_w}-w,\psi_{p_\psi}-\psi\right)\right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\times L^2(0,l))}$$

$$= \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|\left(\left(w_{p_w}-w\right)(\boldsymbol{\xi}),\left(\psi_{p_\psi}-\psi\right)(\boldsymbol{\xi})\right)\right|\right\} \leq \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|\left(w_{p_w}-w\right)(\boldsymbol{\xi})\right|\right\}+\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|\left(\psi_{p_\psi}-\psi\right)(\boldsymbol{\xi})\right|\right\}$$

$$= \left\|w_{p_w}-w\right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}+\left\|\psi_{p_\psi}-\psi\right\|_{L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}.$$

Do teorema 4.2 tem-se para a parcela 2

$$\left|\left(w_{p_w},\psi_{p_\psi}\right)-\left(w,\psi\right)\right| \leq \mathbb{C}_w.\Gamma(n,p_w+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_w+1}}).(p_w+1)}$$

$$+\mathbb{C}_\psi.\Gamma(n,p_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_\psi+1}}).(p_\psi+1)}.$$

A partir das majorações para as parcelas 1 e 2, readequando-se os índices para as parcelas 3 e 4, chega-se ao resultado desejado,

$$\left|\left(w_{m_w p_w},\psi_{m_\psi p_\psi}\right)-\left(w_{n_w q_w},\psi_{n_\psi q_\psi}\right)\right| \leq \sqrt{\left(\frac{l}{m_w.\pi}\right)^4+\left(\frac{l}{m_\psi.\pi}\right)^2}.\frac{1}{\mathbf{c}}.\left\|q\right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}$$

$$+\mathbb{C}_w.\Gamma(n,p_w+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_w+1}}).(p_w+1)}+\mathbb{C}_\psi.\Gamma(n,p_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_\psi+1}}).(p_\psi+1)}$$

$$+\sqrt{\left(\frac{l}{n_w.\pi}\right)^4+\left(\frac{l}{n_\psi.\pi}\right)^2}.\frac{1}{\mathbf{c}}.\|q\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}+\mathbb{C}_w.\Gamma(n,q_w+1)$$

$$.e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_w+1}}).(q_w+1)}+\mathbb{C}_\psi.\Gamma(n,q_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_\psi+1}}).(q_\psi+1)}.$$

Uma aplicação imediata do teorema 4.3 é apresentada no corolário, a seguir, em que apresenta-se uma estimativa para a *distância* entre a soluções exata e numérica aproximada o "erro *a priori*", Eq. (3.16), (ε).

Corolário 4.10 ("Erro *a priori*") *: Nas condições do teorema 4.2, para uma seqüência* $\left\{\left(w_{n_wq_w},\psi_{n_\psi q_\psi}\right)\right\}\subset L^\infty(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2(0,l)\times H_0^1(0,l))$ *vale a seguinte estimativa para o erro a priori, Eq. (3.16),*

$$\begin{cases}\left|\left(w,\psi\right)-\left(w_{n_wq_w},\psi_{n_\psi q_\psi}\right)\right|\leq\sqrt{\left(\frac{l}{n_w.\pi}\right)^4+\left(\frac{l}{n_\psi.\pi}\right)^2}.\frac{1}{\boldsymbol{c}}.\|q\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}\\ \qquad+\mathbb{C}_w.\Gamma(n,q_w+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_w+1}}).(q_w+1)}+\mathbb{C}_\psi.\Gamma(n,q_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_\psi+1}}).(q_\psi+1)};\\ \textit{sendo } \mathbb{C}_w \textit{ e } \mathbb{C}_\psi, \textit{ as constantes do teorema 4.2.}\end{cases}$$

Demonstração: Sabendo-se que $\left(w_{m_wp_w},\psi_{m_\psi p_\psi}\right)\xrightarrow{m_w,p_w,m_\psi,p_\psi\to\infty}\left(w,\psi\right)$, sem perda de generalidade, assume-se que $1\leq n_w<m_w$, $1\leq q_w<p_w$, $1\leq n_\psi<m_\psi$ e $1\leq q_\psi<p_\psi$ faz-se $m_w,p_w,m_\psi,p_\psi\longrightarrow+\infty$, e o resultado está demonstrado. ■

Lema 4.5 (Desigualdades para Valor Esperado e Variância) *: Seja* $v\in L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\big)$ *então são válidas as seguintes estimativas,*

i) $\|\mu_v\|\leq\|v\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}$;

ii) $\|\sigma_v\|\leq\|v\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}$.

Demonstração: Para todo $x \in [0,l]$, fixado, da definição 1.26 tem-se que $v(x,\cdot) \in L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$. A partir disso, usando-se as definições 1.5 e 1.6 calcula-se

$$\sigma^2_{v(x)} = \mathbb{E}\Big[\big(v(x)-\mu_{v(x)}\big)^2\Big] = \int_\Gamma \big(v(x,\boldsymbol{\xi})-\mu_{v(x)}\big)^2 dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_\Gamma v^2(x,\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) - \mu^2_{v(x)};$$

$$\Longrightarrow \quad \mu^2_{v(x)} + \sigma^2_{v(x)} = \int_\Gamma v^2(x,\boldsymbol{\xi})dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}).$$

Notando que $\sigma^2_{v(x)},\ \mu^2_{v(x)} \geq 0,\ \forall x \in [0,l]$ e integrando-se, em $[0,l]$, obtém-se a demonstração dos ítens (i) e (ii). ■

Lema 4.6 ("Convergência em Valor Esperado") *: Seja* $\Big\{w_{m,p}\Big\}_{m,p\in\mathbb{N}} \subset L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2_0(0,l)\big)$ *tal que* $w_{m,p} \xrightarrow{m,p\to\infty} w$ *em* $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2_0(0,l)\big)$ *então* $\mu_{w_{m,p}} \xrightarrow{m,p\to\infty} \mu_w$ *em* $L^2(0,l)$.

Demonstração: Notando que $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2_0(0,l)\big) \hookrightarrow L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\big)$, então $w_{m,p},\ w \in L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l)\big)$, para todo $m,p \in \mathbb{N}$. Do lema 4.5 ítem (i) tem-se que, $\big\|\mu_w-\mu_{w_{m,p}}\big\| \leq \big\|w-w_{m,p}\big\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \xrightarrow{m,p\to\infty} 0.$ ■

Teorema 4.4 ("Erro *a priori* em Valor Esperado") *: Seja* $\Big\{w_{m,p}\Big\}_{m,p\in\mathbb{N}} \subset L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2(0,l)\cap H^1_0(0,l)\big)$ *tal que* $w_{m,p} \xrightarrow{m,p\to\infty} w$ *em* $L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2(0,l)\cap H^1_0(0,l)\big)$ *então vale a seguinte estimativa,*

$$\big\|\mu_w - \mu_{w_{m,p}}\big\| \leq \left(\frac{l}{m\pi\sqrt{\boldsymbol{c}}}\right)^2 \cdot \big\|q\big\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))}.$$

Demonstração: Da definição dos coeficientes de Legendre, corolário 4.9, tem-se que

$$\begin{cases} w(x,\boldsymbol{\xi}) = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}_0^n} w_{\boldsymbol{\lambda}}(x)\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}); \\ w_{m,p}(x,\boldsymbol{\xi}) = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(p,n)} \sum_{k=1}^{m} w_{k\boldsymbol{\lambda}}(x)\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi}). \end{cases}$$

Notando que $\boldsymbol{\lambda}_0 = (0,...,0)$ e para $x \in [0,l]$, fixado, do teorema 1.1, definição 1.5, corolário

4.8 e considerando $\phi_{\boldsymbol{\lambda}_0}(\boldsymbol{\xi}) = 1$ calculam-se os *valores esperados* de "$w(x,\cdot)$" e "$w_{m,p}(x,\cdot)$",

$$\mu_w(x) = \int_\Gamma w(x,\boldsymbol{\xi}) dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_\Gamma \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}_0^n} w_{\boldsymbol{\lambda}}(x)\phi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\xi})\phi_{\boldsymbol{\lambda}_0}(\boldsymbol{\xi}) dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}_0^n} w_{\boldsymbol{\lambda}}(x)\delta_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_0} = w_{\boldsymbol{\lambda}_0}(x);$$

$$\mu_{w_{m,p}}(x) = \int_\Gamma w_{m,p}(x,\boldsymbol{\xi}) dP_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{m} w_{k\boldsymbol{\lambda}_0}(x) = w_{m\boldsymbol{\lambda}_0}(x).$$

Notando que $\overline{span\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\left(\frac{n.\pi.x}{l}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}}^{H^2} = H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l)$ tem-se que

$$w_{k\boldsymbol{\lambda}_0}(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).w_{k\boldsymbol{\lambda}_0}.sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right), \quad k\in\mathbb{N};$$

sendo

$$w_{k\boldsymbol{\lambda}_0} = \int_0^l w_{m\boldsymbol{\lambda}_0}(x).\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right)dx, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Observando que $w_{\boldsymbol{\lambda}_0}\in H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l)\hookrightarrow L^2(0,l)$,

$$w_{\boldsymbol{\lambda}_0}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\tilde{w}_{k\boldsymbol{\lambda}_0}.\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).$$

Desta forma calcula-se a *distância*, em $L^2(0,l)$,

$$\left\|\mu_w-\mu_{w_{m,p}}\right\|^2 = \int_0^l\left(\mu_w-\mu_{w_{m,p}}\right)^2(x)dx = \int_0^l\left(w_{\boldsymbol{\lambda}_0}-w_{m\boldsymbol{\lambda}_0}\right)^2(x)dx = \int_0^l\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\tilde{w}_{k\boldsymbol{\lambda}_0}.\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)\right.$$

$$\left.sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right)-\sum_{k=1}^{m}w_{k\boldsymbol{\lambda}_0}.\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right)\right]^2(x)dx = \sum_{k=m+1}^{+\infty}\tilde{w}_{k\boldsymbol{\lambda}_0}^2+\sum_{k=1}^{m}\left(\tilde{w}_{k\boldsymbol{\lambda}_0}-w_{k\boldsymbol{\lambda}_0}\right)^2.$$

Por outro lado do lema 4.6 tem-se $\mu_{w_{m,p}}\xrightarrow{m,p\to\infty}\mu_w \;\Rightarrow\; \left\|\mu_w-\mu_{w_{m,p}}\right\|\xrightarrow{m,p\to\infty}0$ e portanto,

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}\tilde{w}_{k\boldsymbol{\lambda}_0}^2+\sum_{k=1}^{m}\left(\tilde{w}_{k\boldsymbol{\lambda}_0}-w_{k\boldsymbol{\lambda}_0}\right)^2\xrightarrow{m\to\infty}0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{w}_{k\boldsymbol{\lambda}_0}=w_{k\boldsymbol{\lambda}_0},\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Desta forma $w_{m\boldsymbol{\lambda}_0}\xrightarrow{m\to\infty}w_{\boldsymbol{\lambda}_0}$ em $L^2(0,l)$. Agora, deve-se obter um *majorante*, para tanto utiliza-se a *regularidade* de $w\in L^2\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\boldsymbol{\Xi}};H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l)\big)$. Da definição do *coeficiente de Fourier*,

$$w_{k\boldsymbol{\lambda}_0} = \int_0^l w_{m\boldsymbol{\lambda}_0}(x).\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right).sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right)dx = -\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2.\int_0^l w''_{m\boldsymbol{\lambda}_0}(x).\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)$$

$$.sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right)dx = -\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2.w''_{k\boldsymbol{\lambda}_0}, \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Para obter a relação entre "$\|\mu_{w''}\|$" e "$\|q\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi};L^2(0,l))}$", para todo $x \in [0,l]$, fixado, calcula-se

$$\mu_{w''(x)} = \mathbb{E}\big[w''(x)\big] = \left(1, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x)\right)_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi})} = \int_\Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\boldsymbol{\xi}) dP_{\Xi}(\boldsymbol{\xi}) \leq \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) \right\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi})}.$$

Da desigualdade anterior obtém-se a seguinte estimativa,

$$\int_0^l \mu^2_{w''(x)} dx \leq \int_0^l \int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 (x,\boldsymbol{\xi}) dP_{\Xi} dx = \int_\Gamma \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 (x,\boldsymbol{\xi}) dx dP_{\Xi}$$

$$\leq \int_\Gamma \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 (x,\boldsymbol{\xi}) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 (x,\boldsymbol{\xi}) \right] dx dP_{\Xi} \leq \big\|(w,\psi)\big\|_V^2.$$

Por outro lado tem-se que,

$$\boldsymbol{c}.\big\|(w,\psi)\big\|_V^2 \leq a\big((w,\psi),(w,\psi)\big) = l\big((w,\psi)\big) \leq \|q\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi};L^2(0,l))}.\big\|(w,\psi)\big\|_V;$$

$$\Rightarrow \quad \big\|(w,\psi)\big\|_V \leq \frac{1}{\boldsymbol{c}}.\|q\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi})}.$$

Combinando-se as últimas desigualdades,

$$\|\mu_{w''}\| \leq \frac{1}{\boldsymbol{c}}.\|q\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi})}.$$

Em vista das desigualdades obtidas, estima-se a *distância*, em $L^2(0,l)$ entre "μ_w" e "$\mu_{w_{m,p}}$",

$$\big\|\mu_w - \mu_{w_{m,p}}\big\|^2 = \int_0^l \big(w_{\boldsymbol{\lambda}_0} - w_{m\boldsymbol{\lambda}_0}\big)^2(x)dx = \sum_{k=m+1}^{+\infty} w^2_{k\boldsymbol{\lambda}_0} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(-\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 . w''_{k\boldsymbol{\lambda}_0} \right)^2$$

$$\leq \left(\frac{l}{m\pi}\right)^4 . \sum_{k=1}^{+\infty} \big(w''_{k\boldsymbol{\lambda}_0}\big)^2 \leq \left(\frac{l}{m\pi}\right)^4 . \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}_0^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \big(w''_{k\boldsymbol{\lambda}}\big)^2 = \left(\frac{l}{m\pi}\right)^4 . \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|^2_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi};L^2(0,l))}$$

$$\leq \left(\frac{l}{m\pi}\right)^4 . \left(\frac{1}{\boldsymbol{c}}\right)^2 . \|q\|^2_{L^2(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma),P_{\Xi})}. \qquad \blacksquare$$

É importante observar que a *estimativa* de erro entre as funções valor esperado do processo estocástico de deslocamento transversal e a sua respectiva aproximação numérica independe da dimensão do *espaço de aproximação* gerado pelos GPc's. Esta estimativa depende apenas do *desempenho* do método numérico utilizado para aproximar o *comportamento determinístico*, (variável *espacial*).

Capítulo 5

Resultados Numéricos

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se quatro exemplos numéricos para um problema de flexão estocástica de viga Levinson-Bickford. Para todos os exemplos a viga está definida em uma região $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 < x < l,\ -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2},\ -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\right\}$. Da definição do domínio espacial da viga, "D", tem-se que a seção tranversal da viga refere-se à figura plana de um "*retângulo*" com base "b" e altura "h". Para os **exemplos 1, 2** e **3** a viga é submetida a um carregamento determinístico $q(x) = q_0,\ \forall x \in (0,l)$, enquanto que no **exemplo 4** admite-se incerteza, também, no carregamento. A partir disso, formula-se o

problema de flexão de viga de Levinson-Bickford, [24], da seguinte forma,

$$\begin{cases} \text{Determinar } (w,\psi):[0,l]\times(\Omega,\mathcal{F},P)\longrightarrow\mathbb{R}^2, \text{ tal que} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\beta\left(5\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-16\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)=q; \\ -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\beta\left(16\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-68\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)-\alpha\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)=0, \quad (x,\omega)\in(0,l)\times(\Omega,\mathcal{F},P); \\ \text{sujeito a condições de contorno,} \\ w(0,\omega)=w(l,\omega)=0; \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,\omega)=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,\omega)=0; \\ \psi(0,\omega)=\psi(l,\omega)=0; \\ \left(\beta.\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)(0,\omega)=\left(\beta.\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)(l,\omega), \quad \forall\omega\in(\Omega,\mathcal{F},P); \end{cases} \tag{5.1}$$

sendo "α" e "β" coeficientes de rigidez, para este caso, definidos por,

$$\begin{cases} \alpha=\frac{8}{15}.G.A; \\ \beta=\frac{1}{105}.E.I; \end{cases} \tag{5.2}$$

sendo "E" e "$G=\frac{E}{2.(1-\nu)}$" os módulos de Young e cisalhamento transversal, respectivamente, "ν" coeficiente de Poisson, "$A=b.h$" a área da seção transversal e "$I=\frac{b.h^3}{12}$" o segundo momento estático de área. É importante observar que o coeficiente de Poisson e os módulos de Young e cizalhamento transversal são *propriedades mecânicas* do material da viga, [99]. Para todos exemplos utilizam-se as seguintes propriedades mecânicas materiais e geométricas:

$$\begin{cases} \mu_E=210\ GPa; \\ \nu=\frac{3}{10}; \\ l=1\ m; \\ b=\frac{1}{40}\ m; \\ \mu_h=\frac{1}{20}\ m; \end{cases} \tag{5.3}$$

sendo "μ_E", "μ_h" os valores esperados do módulo de Young e altura da viga, respectivamente, e "l" o "vão" da viga, (*distância entre os apoios*). Assume-se que os valores

esperados **não** apresentam variação ao longo do vão da viga.

A propagação da incerteza, através do modelo de viga, ocorre pela "*randomização*" dos coeficientes "α" e "β". No primeiro exemplo assume-se incerteza sobre módulo de Young, enquanto que no segundo exemplo a incerteza está sobre a "*altura*" da viga. Da definição dos coeficientes de rigidez, Eq. (5.2), pode-se constatar, em ambos exemplos, que a incerteza é induzida nestes coeficientes é através do módulo de Young ou altura da viga. Enquanto que para os exemplos 3 e 4 a modelagem da incerteza é feita por variáveis randômicas, para os exemplos 1 e 2 a modelagem da incerteza é feita para dois casos:

a) Variável Randômica;

b) Processo Estocástico Parametrizado, Eq. (3.11).

Em ambos casos são utilizadas variáveis randômicas uniformes e estatisticamente independentes. Para o caso (a), o espaço de probabilidades, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, é definido tomando-se $\Omega = [-1,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([-1,1])$ e $P = F_{\Xi}$, sendo $F_{\Xi} : [-1,1] \longrightarrow [0,1]$ a função de distribuição de probabilidade acumulada, de uma variável randômica $\Xi : ([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), F_{\Xi}) \longrightarrow \mathbb{R}$, com função densidade de probabilidade $f_{\Xi}(\xi) = \frac{1}{2}, \quad \forall \xi \in [-1,1]$. Para este caso são determinadas soluções numéricas aproximadas para duas variáveis randômicas, que são obtidas a partir de modelos "*afim*" e "*exponencial*". Estes modelos tratam-se de transformações afim e exponencial aplicadas a uma variável randômica. Na literatura, [27, 97, 56, 84, 111], este procedimento consiste da aplicação de uma transformação, adequada, sobre um processo estocástico gaussiano para obter um processo estocástico não gaussiano, sendo denotado como "*processo de translação*". Tomando-se no teorema 1.1, (Doob-Dynkin), $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]))$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ espaços "$\mathcal{B}$ - mensuráveis" e $f, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funções mensuráveis e $g = h \circ f$ então $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável e portanto da definição

1.4 é uma variável randômica. Um exemplo clássico, amplamente, difundido e utilizado na literatura, de tal transformação, é "*exponenciar*" uma variável randômica ou processo estocástico gaussiano, para obter uma variável randômica ou processo estocástico "*Lognormal*". Para um parâmetro $\vartheta : ([-1,1],\mathcal{B}([-1,1]),F_{\Xi}) \longrightarrow \Big([\underline{\vartheta},\bar{\vartheta}],\mathcal{B}\big([\underline{\vartheta},\bar{\vartheta}]\big)\Big)$, modelado via variável randômica, caso (a) com modelo afim,

$$\vartheta(\xi) = \mu_{\vartheta} + \sqrt{3}.\sigma_{\vartheta}.\xi, \qquad \xi \in [-1,1]; \tag{5.4}$$

sendo "μ_{ϑ}" e "σ_{ϑ}" os valor esperado e desvio padrão do parâmetro "ϑ", respectivamente. O modelo exponencial, para este parâmetro, toma a seguinte forma,

$$\vartheta(\xi) = \kappa.e^{\gamma.\xi}, \qquad \xi \in [-1,1]; \tag{5.5}$$

sendo "κ" e "γ" parâmetros tais que,

$$\begin{cases} \mu_{\vartheta} = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \kappa.e^{\gamma.\xi}.\frac{1}{2}d\xi = \left(\frac{\kappa}{\gamma}\right).senh(\gamma); \\ \sigma_{\vartheta}^2 = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \Big(\kappa.e^{\gamma.\xi} - \mu_{\vartheta}\Big)^2.\frac{1}{2}d\xi = \left(\frac{\mu_{\vartheta}.\gamma}{\sqrt{2}.senh(\gamma)}\right)^2.\left[\frac{senh(2.\gamma)}{\gamma} - 2.\left(\frac{senh(\gamma)}{\gamma}\right)^2\right]; \\ \delta_{\vartheta} = \dfrac{\sigma_{\vartheta}}{\mu_{\vartheta}}. \end{cases}$$

Sendo conhecidos μ_{ϑ} e σ_{ϑ}, os parâmetros "κ" e "γ" são determinados, como soluções do seguinte problema,

$$\begin{cases} \text{Determinar } \kappa,\ \gamma \in \mathbb{R} \text{ tais que,} \\ 2.\Big(1+\delta_{\vartheta}^2\Big).\big(senh(\gamma)\big)^2 - \gamma.senh(2.\gamma) = 0; \\ \kappa = \dfrac{\mu_{\vartheta}.\gamma}{2.senh(\gamma)}. \end{cases} \tag{5.6}$$

No caso (b), para $M \in \mathbb{N}$ tomando-se $\Omega = [-1,1]^M$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}\big([-1,1]^M\big)$ e $P_{\Xi} = F_{\Xi}$, sendo $F_{\Xi} : [-1,1]^M \longrightarrow [0,1]$ a função de distribuição de probabilidade acumulada, de um vetor randômico $\Xi : \Big([-1,1]^M,\mathcal{B}\big([-1,1]^M\big),F_{\Xi}\Big) \longrightarrow \Big(\mathbb{R}^M,\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^M\big)\Big)$, com função densidade de probabilidade $f_{\Xi}(\xi) = \left(\frac{1}{2}\right)^M$. Este vetor possui entradas, definidas por variáveis randômicas uniformes estatisticamente independentes. Para um parâmetro

$\vartheta : (0,l) \times \Big([-1,1]^M, \mathcal{B}\big([-1,1]^M\big), F_{\boldsymbol{\Xi}}\Big) \longrightarrow \mathbb{R}$, modelado via processo estocástico parametrizado definido por,

$$\vartheta(x,\boldsymbol{\xi}) = \mu_\vartheta + \chi . \sum_{k=1}^{n} \left[cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k-1} \right]; \tag{5.7}$$

sendo "χ" um parâmetro relacionado a variância do processo estocástico.

São obtidas soluções numéricas para diferentes coeficientes de dispersão, $\left(\delta_\vartheta = \frac{\sigma_\vartheta}{\mu_\vartheta}\right)$:

$$\begin{aligned} &1) \quad \delta_\vartheta = \tfrac{1}{10}; \\ &2) \quad \delta_\vartheta = \tfrac{1}{5}; \\ &3) \quad \delta_\vartheta = \tfrac{3}{10}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Para o exemplo 1 caso (a), modelo afim, são obtidas soluções numéricas para os três casos de coeficiente de dispersão, enquanto que, ainda, para este exemplo com modelo exponencial são obtidas soluções numéricas para os casos 1 e 2 para o coeficiente de dispersão. Para o caso (b), deste exemplo, obtém-se soluções numéricas para o casos 1 para o coeficiente de dispersão. Para o exemplo 2 caso (a), modelos afim e exponencial, são obtidas soluções numéricas para os três casos de coeficiente de dispersão, enquanto que, para o caso (b) obtém-se soluções numéricas para o caso 1 para o coeficiente de dispersão. Finalmente, para o exemplo 3 caso (a), modelo afim, são obtidas soluções numéricas para os três casos de coeficiente de dispersão.

Em concordância com as definições 4.1 e 4.2, Eqs (4.1) e Eqs (4.2), respectivamente, deve-se verificar para os exemplos 1 e 2 que os modelos de incerteza utilizados para os casos (a) e (b), atendam as hipóteses H1-H4. Para o exemplo 1 caso (a), modelos afim e exponencial verifica-se que estes atendem a hipótese H1. Deve-se mostrar a existência de "$\underline{\vartheta}$" e "$\bar{\vartheta}$", respectivamente, os valores numéricos mínimo e máximo para coeficiente "ϑ". Para o modelo afim calcula-se a partir das Eqs. (4.1) e (5.4) com $n = 1$ os valores

numéricos mínimo e máximo do parâmetro "ϑ", são definidos por,

$$\begin{cases} \underline{\vartheta} = \min\limits_{\xi\in[-1,1]} \left\{\mu_\vartheta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi\right)\right\}; \\ \bar{\vartheta} = \max\limits_{\xi\in[-1,1]} \left\{\mu_\vartheta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi\right)\right\}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Desta forma, as hipóteses H1 e H2 são satisfeitas, para modelagem da incerteza conforme o caso (a) com modelo afim, para os coeficientes "α" e "β", para os valores numéricos dos coeficientes de dispersão. A hipótese H3 é satisfeita, pois a linearidade da transformação afim, a menos de um isomorfismo, preserva a natureza da variável randômica $\Xi : \left([-1,1],\mathcal{B}\left([-1,1]\right),F_\Xi\right) \longrightarrow \mathbb{R}$. Além disso, o modelo afim propicia que $\vartheta \in C^\infty\left(\left([-1,1],\mathcal{B}\left([-1,1]\right),F_\Xi\right);L^\infty(0,l)\right)$, ademais

$$\left(\frac{D_\xi\vartheta}{\vartheta}\right)(\xi) = \frac{1}{\mu_\vartheta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi\right)}.\frac{d}{d\xi}\left(\mu_\vartheta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi\right)\right) = \frac{\sqrt{3}.\delta_\vartheta}{1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi};$$

$$\left\|\left(\frac{D_\xi\vartheta}{\vartheta}\right)(\xi)\right\|_{L^\infty(0,l)} = \frac{\sqrt{3}.\delta_\vartheta}{1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi}, \quad \forall\xi\in[-1,1].$$

Em vista da útlima identidade, para que a hipótese H4 seja satisfeita é necessário se impor condições sobre o domínio da variável randômica "ξ" ou no coeficiente de dispersão da variável randômica "ϑ",

$$\frac{\sqrt{3}.\delta_\vartheta}{1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi} < 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_\vartheta.(1-\xi) < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \forall\xi\in[-1,1], \quad \Rightarrow \quad \delta_\vartheta < \frac{\sqrt{3}}{6}. \tag{5.10}$$

A partir disso, para o caso (a) com modelo afim, o coeficiente de dispersão deve atender, simultaneamente, as Eqs. (5.9) e (5.10).

Um caso importante em que são obtidas soluções numéricas aproximadas, é quando a incerteza no coeficiente de rigidez "β" é induzida pela *altura da viga*. Isto ocorre no exemplo 2, considerando $g(t) = t^3$, que é uma função contínua, e portanto mensurável o parâmetro com incerteza é definido, para esta situação, como "$\vartheta(\xi) = \left(g\circ h\right)(\xi)$". Novamente, usando o teorema 1.1 tem-se para esta situação "ϑ" é uma variável randômica. A partir disso, verifica-se, para esta representação, as condições necessárias para que os

modelos afim e exponencial, atendam as hipóteses H1-H4. Primeiramente, verificam-se estas condições para o modelo afim,

$$\vartheta(\xi) = \left(\mu_\vartheta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\vartheta.\xi\right)\right)^3 = \mu_\vartheta^3.\left[1+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)+9.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^2+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^3\right]. \tag{5.11}$$

Das Eqs. (4.1) e (5.11) obtém-se os valores máximos e mínimos para "ϑ",

$$\begin{aligned}
\underline{\vartheta} &= \min_{\xi\in[-1,1]}\left\{\mu_\vartheta^3.\left[1+3.\sqrt{3}.(\delta_\vartheta.\xi)+9.(\delta_\vartheta.\xi)^2+3.\sqrt{3}.(\delta_\vartheta.\xi)^3\right]\right\} \\
&= \mu_\vartheta^3.\left(1-3.\sqrt{3}.\delta_\vartheta+9.\delta_\vartheta^2-3.\sqrt{3}.\delta_\vartheta^3\right); \\
\bar{\vartheta} &= \max_{\xi\in[-1,1]}\left\{\mu_\vartheta^3.\left[1+3.\sqrt{3}.(\delta_\vartheta.\xi)+9.(\delta_\vartheta.\xi)^2+3.\sqrt{3}.(\delta_\vartheta.\xi)^3\right]\right\} \\
&= \mu_\vartheta^3.\left(1+3.\sqrt{3}.\delta_\vartheta+9.\delta_\vartheta^2+3.\sqrt{3}.\delta_\vartheta^3\right).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

A hipótese H3 é satisfeita, naturalmente, pela escolha da modelagem da incerteza via variável randômica uniforme. Verificam-se as condições necessárias sobre os parâmetros estatísticos, $(\mu_\vartheta, \sigma_\vartheta)$,

$$\left\|\left(\frac{D_\xi\vartheta}{\vartheta}\right)(\xi)\right\|_{L^\infty(0,l)} = \left|\frac{1}{\mu_\vartheta^3.\left[1+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)+9.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^2+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^3\right]}.\frac{d}{d\xi}\left(\mu_\vartheta^3.\left[1+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+9.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^2+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^3\right]\right)\right| = \left|\frac{3.\sqrt{3}.\delta_\vartheta+18.\delta_\vartheta^2.\xi+9.\sqrt{3}.\delta_\vartheta^3.\xi^2}{1+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)+9.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^2+3.\sqrt{3}.\left(\delta_\vartheta.\xi\right)^3}\right|, \qquad \forall\xi\in[-1,1].$$

Para esta situação, em que a incerteza é modelada por uma transformação afim, por um parâmetro definido pela Eq. (5.10), a hipótese H4 não é atendida para os valores numéricos do coeficiente de dispersão apresentados na Eq. (5.8). Para o modelo exponencial obtém-se os valores máximos e mínimos para "ϑ", para tanto utiliza-se as definições apresentadas na Eq. (4.1),

$$\begin{aligned}
\underline{\vartheta} &= \min_{\xi\in[-1,1]}\left\{\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))}\right\} = \mu_\vartheta.\left(1+\delta_\vartheta^2\right).\frac{2}{1+e^{2.\gamma(\delta_\vartheta)}} > 0; \\
\bar{\vartheta} &= \max_{\xi\in[-1,1]}\left\{\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))}\right\} = \mu_\vartheta.\left(1+\delta_\vartheta^2\right).\frac{2.e^{2.\gamma(\delta_\vartheta)}}{e^{2.\gamma(2.\delta_\vartheta)}-1} < +\infty, \qquad \left(\gamma(\delta_\vartheta)>0\right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Observa-se na Eq. (5.13), que os valores máximos e mínimos para "ϑ" apresentam dependência com "γ". Este parâmetro é solução do problema definido na Eq. (5.6) que, por

sua vez, depende do valor numérico do coeficiente de dispersão, (δ_ϑ). Para o exemplos propostos neste capítulo, os valores numéricos para "γ" são positivos e finitos. Estuda-se, agora, as condições necessárias, para que a hipótese H4 seja válida para o caso (a) modelo exponencial,

$$\left\| \left(\frac{D_\xi^\nu \vartheta}{\vartheta} \right)(\xi) \right\|_{L^\infty(0,l)} = \left| \frac{2.senh(\gamma(\delta_\vartheta)).e^{-\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta)} . \frac{d^\nu}{d\xi^\nu} \left(\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))} \right) \right| \\ = \left| \gamma(\delta_\vartheta)^\nu \right| \qquad \Rightarrow \qquad \left| \gamma(\delta_\vartheta) \right| < 1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Para os exemplos apresentados, a escolha dos valores numéricos para coeficiente de dispersão na incerteza, baseia-se no atendimento da condição imposta sobre o coeficiente "γ", Eq. (5.14). Avalia-se o caso em que o parâmetro "ϑ", com modelo exponencial assume a seguinte foma,

$$\vartheta(\xi) = \left(\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta)}{2.senh(\gamma(\delta_\vartheta))} \right)^3 .e^{3.\gamma(\delta_\vartheta.\xi)} \tag{5.15}$$

Das definições apresentadas nas Eqs. (4.1) e (5.15) obtém-se

$$\underline{\vartheta} = \min_{\xi \in [-1,1]} \left\{ \left(\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))} \right)^3 \right\} = \left(\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{-\gamma(\delta_\vartheta)}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))} \right)^3 > 0; \\ \bar{\vartheta} = \max_{\xi \in [-1,1]} \left\{ \left(\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))} \right)^3 \right\} = \left(\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{\gamma(\delta_\vartheta)}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))} \right)^3 < +\infty, \quad \left(\gamma(\delta_\vartheta) > 0 \right). \tag{5.16}$$

Avalia-se as condições necessárias para que a hipótese H4 seja satisfeita, para tanto calcula-se,

$$\left\| \left(\frac{D_\xi^\nu \vartheta}{\vartheta} \right)(\xi) \right\|_{L^\infty(0,l)} = \left| \frac{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta)).e^{-3.\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta)} . \frac{d^\nu}{d\xi^\nu} \left(\frac{\mu_\vartheta.\gamma(\delta_\vartheta).e^{3.\gamma(\delta_\vartheta).\xi}}{2.senh(2.\gamma(\delta_\vartheta))} \right) \right| \\ = \left| 3^\nu.\gamma(\delta_\vartheta)^\nu \right| < 1; \qquad \Rightarrow \qquad \left| \gamma(\delta_\vartheta) \right| < \frac{1}{3}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \tag{5.17}$$

Desta forma, para o exemplo 2 caso (a), modelo exponencial, da Eq. (5.15) e Tabela 5.2 conclui-se que os valores numéricos para os coeficientes de dispersão, são aqueles apresentados nas Eqs. (5.8.1) e (5.8.2).

Estudam-se as condições necessárias para os exemplos 1 e 2, caso (b), em que a modelagem da incerteza nos coeficientes de rigidez "α" e "β" é realizada através de um processo estocástico parametrizado, Eq. (5.15). A variância do processo estocástico, conforme definição (1.5) é determinada por,

$$\sigma_{\vartheta}^2(x) = \int_{[-1,1]^n} \Big(\vartheta - \mu_{\vartheta}\Big)^2 (x,\boldsymbol{\xi}).F_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d\xi} = \chi^2.\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left[cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).cos\left(\frac{l.\pi.x}{l}\right)\right.$$
$$\int_{[-1,1]^n} \xi_{2.k}\xi_{2.l}.\frac{1}{2^n}\boldsymbol{d\xi} + cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).sen\left(\frac{l.\pi.x}{l}\right).\int_{[-1,1]^n} \xi_{2.k}\xi_{2.l-1}.\frac{1}{2^n}\boldsymbol{d\xi}$$
$$+sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).sen\left(\frac{l.\pi.x}{l}\right).\int_{[-1,1]^n} \xi_{2.k-1}\xi_{2.l-1}.\frac{1}{2^n}\boldsymbol{d\xi} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).sen\left(\frac{l.\pi.x}{l}\right)$$
$$\left.\cdot\int_{[-1,1]^n} \xi_{2.k-1}\xi_{2.l-1}.\frac{1}{2^n}\boldsymbol{d\xi} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).cos\left(\frac{l.\pi.x}{l}\right)\int_{[-1,1]^n} \xi_{2.k-1}\xi_{2.l}.\frac{1}{2^n}\boldsymbol{d\xi}\right].$$
$$\sigma_{\vartheta}^2(x) = \chi^2.n.\frac{1}{3},\ \forall x \in [0,l], \qquad \Rightarrow \qquad \chi = \sqrt{\frac{3}{n}}.\sigma_{\vartheta}.$$

Desta forma, o processo estocástico parametrizado toma a seguinte forma,

$$\vartheta(x,\boldsymbol{\xi}) = \mu_{\vartheta} + \sqrt{\frac{3}{n}}.\sigma_{\vartheta}.\sum_{k=1}^{n}\left[cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k-1}\right]. \tag{5.18}$$

Em vista disso, verifica-se as condições necessárias para o exemplo 1, modelagem da incerteza via processo estocástico parametrizado, conforme Eq. (5.18) para que sejam atendidas as hipóteses H1-H4. Da Eq. (4.2), definição 4.2, determinam-se os valores numéricos mínimo e máximo,"$\underline{\vartheta}$" e "$\bar{\vartheta}$", respectivamente, para coeficiente "ϑ".

$$\underline{\vartheta} = \min_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,l]\times[-1,1]^n}\left\{\mu_{\vartheta} + \sqrt{\frac{3}{n}}.\sigma_{\vartheta}.\sum_{k=1}^{n}\left[cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k-1}\right]\right\}$$

$$= \mu_{\vartheta} + \sqrt{\frac{3}{n}}.\sigma_{\vartheta}.\min_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,l]\times[-1,1]^n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k-1}\right]\right\} \geq \mu_{\vartheta}$$

$$\bar{\vartheta} = \max_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,l]\times[-1,1]^n}\left\{\mu_{\vartheta} + \sqrt{\frac{3}{n}}.\sigma_{\vartheta}.\sum_{k=1}^{n}\left[cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k-1}\right]\right\}$$

$$= \mu_\vartheta + \sqrt{\frac{3}{n}}.\sigma_\vartheta.\max_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,l]\times[-1,1]^n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[cos\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k} + sen\left(\frac{k.\pi.x}{l}\right).\xi_{2.k-1}\right]\right\}$$

Avalia-se as condições necessárias para que a hipótese H4 seja satisfeita, para tanto calcula-se,

$$\begin{cases} \left\|\left(\dfrac{D^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\xi}}\vartheta}{\vartheta}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)} = \left|\delta_{2.k\nu_j}.cos\left(\dfrac{k.\pi.y}{l}\right) + \delta_{2.k-1\nu_j}.sen\left(\dfrac{k.\pi.y}{l}\right)\right| \\ \qquad .\dfrac{1}{\left|\sqrt{\dfrac{n}{3.\delta_\vartheta}} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[cos\left(\dfrac{k.\pi.y}{l}\right).\xi_{2.k} + sen\left(\dfrac{k.\pi.y}{l}\right).\xi_{2.k-1}\right]\right|}, \quad |\boldsymbol{\nu}| = 1; \\ \left\|\left(\dfrac{D^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\xi}}\vartheta}{\vartheta}\right)(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^\infty(0,l)} = 0, \quad \boldsymbol{\nu}\in\mathbb{N}^n \ \wedge\ |\boldsymbol{\nu}| > 1. \end{cases} \tag{5.19}$$

As soluções numéricas são obtidas utilizando-se o método de Bubnov-Galerkin cujo espaço de aproximação é obtido via produto tensorial de espaços. Os resultados numéricos apresentados referem-se aos lema 4.3 e o teorema 4.3. São tomadas seqüências $\left\{\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right)\right\} \subset V_h$. Para tanto é necessário calcular-se as constantes presentes nestas estimativas:

1. **Estimativa dos Coeficientes de Fourier - Legendre**, (lema 4.3):

$$\begin{cases} \left\|w_{\iota(\lambda)}\right\|_{L^2(0,l)} \leq \dfrac{C_w}{\mathbf{2}.(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\dfrac{\left(\boldsymbol{\lambda}!\right)^2}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i^{|\lambda|}\right); \\ \left\|\psi_{\iota(\lambda)}\right\|_{L^2(0,l)} \leq \dfrac{C_\psi}{\mathbf{2}.(2.\boldsymbol{\lambda})!}.\dfrac{\left(\boldsymbol{\lambda}!\right)^2}{\left(2.\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}.\mathbf{1}}}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i.r_i^{|\lambda|}\right), \text{ em que } \iota\in\mathbb{N} \text{ e } \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}^n. \end{cases}$$

2. **Distância entre Elementos da Seqüência de Cauchy**, (teorema 4.2):

$$\begin{cases} \left|\left(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\right) - \left(w_{n_w q_w}, \psi_{n_\psi q_\psi}\right)\right| \leq \sqrt{\left(\dfrac{l}{m_w.\pi}\right)^4 + \left(\dfrac{l}{m_\psi.\pi}\right)^2}.\dfrac{1}{\breve{C}}.\left\|q\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} \\ \quad +\mathbb{C}_w.\Gamma(n,p_w+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_w+1}}).(p_w+1)} + \mathbb{C}_\psi.\Gamma(n,p_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{p_\psi+1}}).(p_\psi+1)} \\ \quad +\sqrt{\left(\dfrac{l}{n_w.\pi}\right)^4 + \left(\dfrac{l}{n_\psi.\pi}\right)^2}.\dfrac{1}{\breve{C}}.\left\|q\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),P_{\boldsymbol{\Xi}};L^2(0,l))} + \mathbb{C}_w.\Gamma(n,q_w+1) \\ \quad .e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_w+1}}).(q_w+1)} + \mathbb{C}_\psi.\Gamma(n,q_\psi+1).e^{-\theta(\boldsymbol{\lambda_{q_\psi+1}}).(q_\psi+1)}. \end{cases}$$

Para determinação das estimatitvas são necessárias as definições das constantes "$\mathbb{C}_w$","$\mathbb{C}_\psi$" e "$\breve{C}$". Abaixo segue a relação de constantes e os resultados teóricos das quais se originam,

$$
\begin{cases}
c = \sqrt{l}, \quad \text{constantes de imersão, } H_0^1(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l); \\
C = l, \quad \text{constantes de imersão, } H_0^2(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l); \\
\tilde{c} = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2c^2}\right\}; \\
\tilde{C} = \left(2.máx\left\{\sqrt{\alpha},\ 68.\sqrt{\beta}\right\}\right).\left(máx\left\{máx\left\{c^2,\ C^2\right\},\ 2c\right\}\right), \qquad \textbf{(Lema 4.1)}; \\
\breve{C} = min\left\{\tilde{c}, \tilde{C}\right\}, \qquad \textbf{(Lema 3.2)}; \\
\mathbf{c} = mín\left\{\underline{\beta}, \underline{\alpha}\right\}, \qquad \textbf{(Corolário 4.1)}; \\
\tilde{\tilde{C}} = \dfrac{1}{\mathbf{c}}.máx\left\{1,\ \tilde{C}\right\}, \qquad \textbf{(Lema 4.1)}; \\
C_w = \tilde{\tilde{C}}.\left[1 + \max\limits_{\boldsymbol{\xi}\in[-1,1]^n} \left\|q(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right], \qquad \textbf{(Lema 4.3)}; \\
C_\psi = \tilde{\tilde{C}}.\left[1 + \max\limits_{\boldsymbol{\xi}\in[-1,1]^n} \left\|q(\boldsymbol{\xi})\right\|_{L^2(0,l)}\right], \qquad \textbf{(Lema 4.3)}; \\
\mathbb{C}_w = \dfrac{C_w}{\sqrt{3}}.\left(\dfrac{n}{a}.e^{-a}\right)^n, \qquad \textbf{(Teorema 4.2)}; \\
\mathbb{C}_\psi = \dfrac{C_\psi}{\sqrt{3}}.\left(\dfrac{n}{a}.e^{-a}\right)^n, \qquad \textbf{(Teorema 4.2)}; \\
\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \left|log\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\lambda_i}{|\boldsymbol{\lambda}|}\right).r_i\right)\right|, \qquad \textbf{(Teorema 4.2)}; \\
0 < r_i < 1, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}, \qquad \textbf{(Lema 4.4)}.
\end{cases}
\tag{5.20}
$$

Para os modelos de incerteza utilizados, caso (a), (variável randômica), e caso (b), (processo estocástico parametrizado), os valores máximos e mínimos para os coeficientes "α" e "β", conforme as definições 4.1 e 4.2, Eqs. (4.1) e (4.2), respectivamente. Para obter a soluções numéricas aproximadas, via *método de Galerkin Estocástico*, foi desenvolvido e implementado um código computacional, executado em um computador **ASUS G 75W**, com um processador **i7** e **32 Gb** de memória RAM.

5.2 Exemplo 1

Neste exemplo a incerteza está sobre o módulo de Young. Da definição dos coeficientes "α" e "β", Eq. (5.2), é facil ver que a incerteza se propaga através do modelo de flexão de vigas de Levinsons-Bickford.

5.2.1 Caso (a): *Modelo Afim*

A modelagem matemática do módulo de Young, via variável randômica, caso (a), é dada por,

$$E(\xi) = \mu_E + \sqrt{3}.\sigma_E.\xi, \qquad \xi \in [-1,1]; \tag{5.21}$$

sendo "σ_E" o desvio padrão do módulo de Young e $\Xi : \left([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), P_{\Xi}\right) \longrightarrow \xi$ uma variável randômica com distribuição de probabilidades uniforme. Da Eq. (5.2.a) e notando que "$\sigma = \delta.\mu$" tem-se que,

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) = \frac{8}{15}.(G.A)(\xi) = \frac{8}{15}.\frac{\mu_E + \sqrt{3}.\sigma_E.\xi}{2.(1-\nu)}.A = \frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.A \\ +\sqrt{3}.\frac{8}{15}.\frac{\sigma_E}{2.(1-\nu)}.A.\xi = \mu_\alpha.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\alpha.\xi\Big); \end{aligned} \tag{5.22}$$

enquanto que da Eq. (5.2.b) toma a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \beta(\xi) = \frac{1}{105}.(E.I)(\xi) = \frac{1}{105}.(\mu_E + \sqrt{3}.\sigma_E.\xi).I = \frac{1}{105}.\mu_E.I \\ +\sqrt{3}.\frac{1}{105}.(\sigma_E.I).\xi = \mu_\beta.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\beta.\xi\Big). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Das Eqs. (5.22), (5.23) e da definição 4.1, Eq. (4.1), obtém-se os valores máximos e mínimos para os coeficientes "α" e "β",

$$\begin{cases} \underline{\alpha} = \min\limits_{\xi\in[-1,1]} \Big\{\mu_\alpha.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\alpha.\xi\Big)\Big\} = \mu_\alpha.\Big(1 - \sqrt{3}.\delta_\alpha\Big); \\ \bar{\alpha} = \max\limits_{\xi\in[-1,1]} \Big\{\mu_\alpha.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\alpha.\xi\Big)\Big\} = \mu_\alpha.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\alpha\Big); \\ \underline{\beta} = \min\limits_{\xi\in[-1,1]} \Big\{\mu_\beta.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\beta.\xi\Big)\Big\} = \mu_\beta.\Big(1 - \sqrt{3}.\delta_\beta\Big); \\ \bar{\beta} = \max\limits_{\xi\in[-1,1]} \Big\{\mu_\beta.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\beta.\xi\Big)\Big\} = \mu_\beta.\Big(1 + \sqrt{3}.\delta_\beta\Big). \end{cases}$$

Nas figuras 5.1 e 5.2 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento transversal da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica com transformação afim. As aproximações numéricas foram obtidas no espaço de aproximação "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). São apresentados os gráficos para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento para os três valores numéricos do coeficiente de dispersão do módulo de Young, conforme Eq. (5.8).

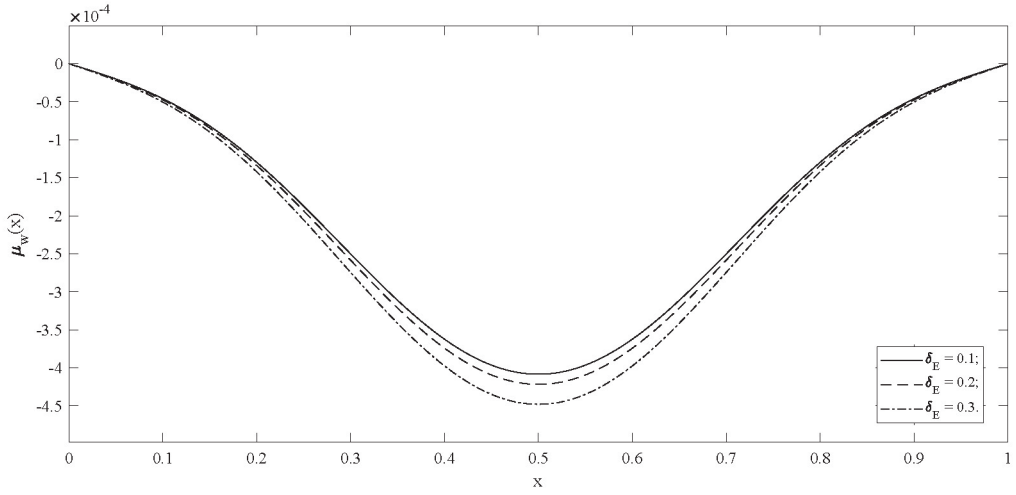

Figura 5.1: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

Nas figuras 5.3 e 5.4 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica, com transformação afim. As aproximações numéricas foram obtidas no espaço de aproximação "$\Phi_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). São apresentados os gráficos para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular, para os três valores numéricos do coeficiente de dispersão do módulo de Young, conforme

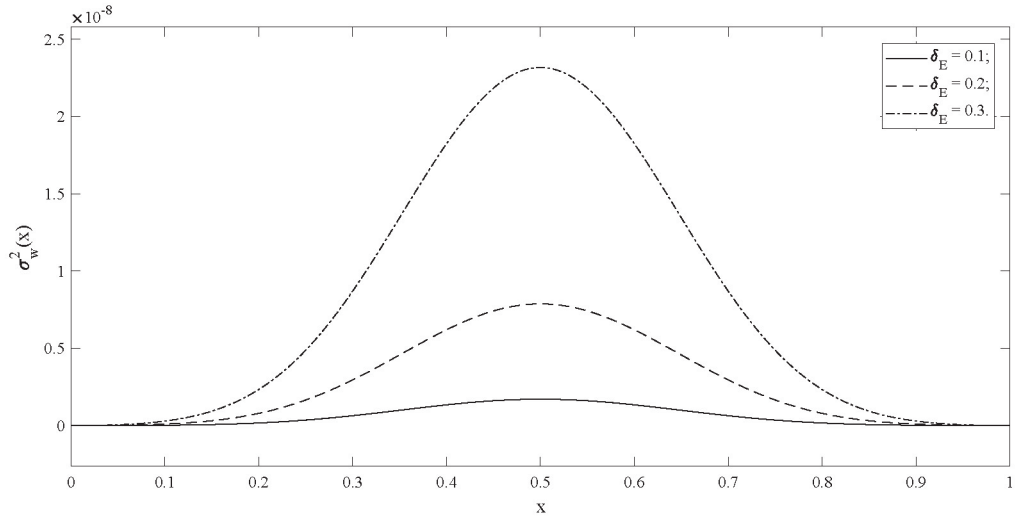

Figura 5.2: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

Eq. (5.8).

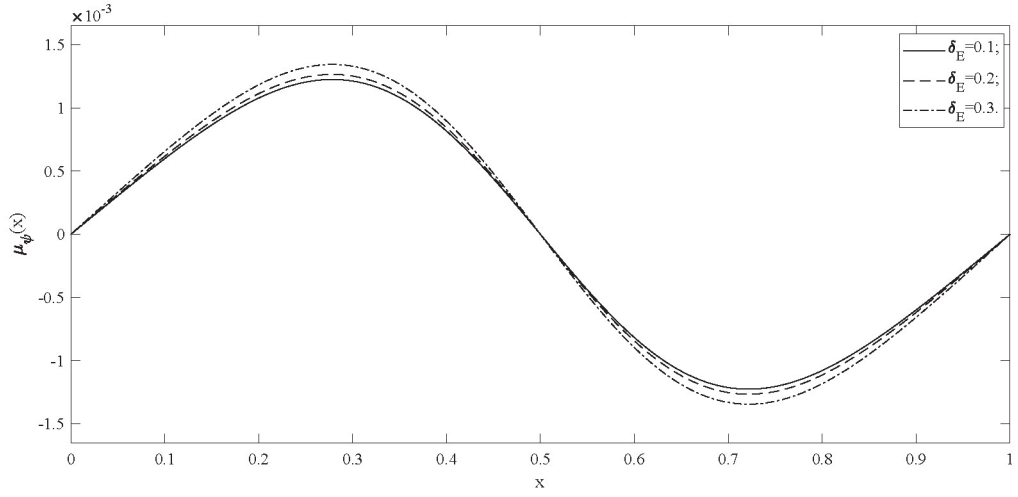

Figura 5.3: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

Primeiramente, apesar da incerteza presente nas propriedades do sistema serem modeladas por uma variável randômica a resposta é um processo estocástico, (*processo estocástico de deslocamento*). Observa-se, a tendência, que a medida que se aumenta o coeficiente de dispersão do módulo de Young, aumentam-se os valores numéricos da

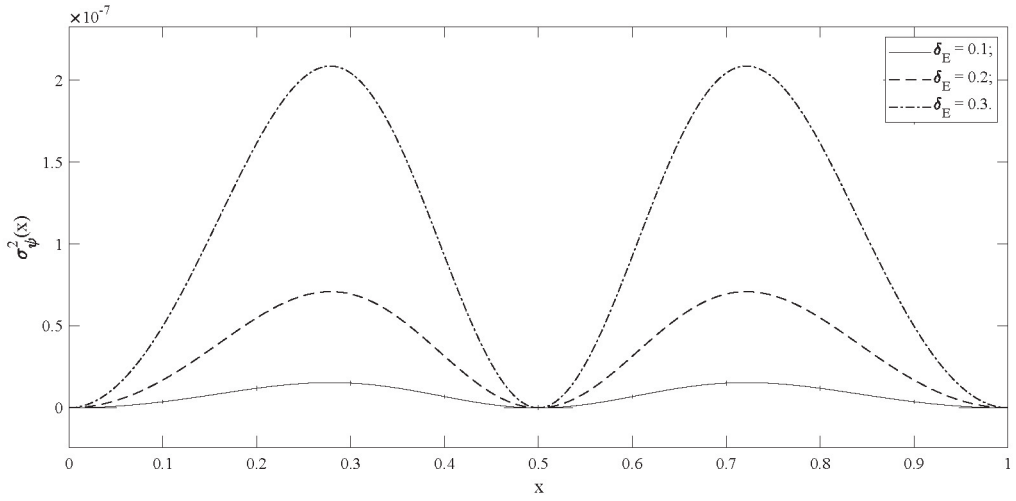

Figura 5.4: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

função de valor esperado do processo estocástico de deslocamento, figuras 5.1 e 5.3. Esse comportamento, também é constatado para a função variância, figuras 5.2 e 5.4. A propagação da incerteza através do modelo de viga, em termos do coeficiente de dispersão dos processos estocástico de deslocamentos transversal e angular é, discretamente, superior ao coeficiente de dispersão do módulo de Young. Por exemplo, para $\delta_E = 0.3$ tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.33982763896993$.

Na Tabela 5.1 apresentam-se os valores numéricos da *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy dada no Teorema 4.3, $\left(\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|\right)$, para o exemplo 1 caso (a), modelo " *afim*", com $\delta_E = \frac{1}{10}$, para o espaço de aproximação, "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). As majorações, propostas no teorema , estão na ordem de "10^4", superando *muitas vezes* a distância entre dois elementos "$w_{m_w p_w}$" e "$w_{n_w q_w}$". Este comportamento é justificado pela *grande diferença* na ordem de grandeza dos coeficientes "$\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\beta}} = 146700$".

Examinado-se as entradas, na Tabela 5.1, pode-se observar o comportamento de seqüência de Cauchy para os elementos $\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)$, $\left(w_{nq},\psi_{nq}\right) \in \left\{\left(w_{m_w p_w},\psi_{m_\psi p_\psi}\right)\right\}$ com $m,p,n,q,m_w,p_w,m_\psi,p_\psi \in \mathbb{N}$. Por exemplo, de forma geral, ao se fixar um elemento (m,p)

Tabela 5.1: Valores numéricos de "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", Teorema 4.3, para o exemplo 1 caso (a), modelo " *afim*", com $\delta_E = \frac{1}{10}$.

	(n,q)				
		(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	(1,1)	1.539043853069858e-04	1.539366188350441e-04	1.539369762310765e-04	1.539369798070835e-04
	(1,2)	1.539037412775308e-04	1.539354559739692e-04	1.539358093049985e-04	1.539358128495560e-04
	(1,3)	1.539037374505753e-04	1.539354480800897e-04	1.539357973460458e-04	1.539358008591471e-04
	(1,4)	1.539037374304060e-04	1.539354480284479e-04	1.539357972629477e-04	1.539358007445990e-04
	(2,1)	0	1.434701684505775e-06	1.451468084641227e-06	1.451683010139094e-06
	(2,2)	1.434701684505775e-06	0	1.269776330727151e-07	1.284429432635487e-07
	(2,3)	1.451468084641227e-06	1.269776330727151e-07	0	1.116870101346223e-08
(m,p)	(2,4)	1.451683010139094e-06	1.284429432635487e-07	1.116870101346223e-08	0
	(3,1)	6.273914291362789e-04	6.273675696273747e-04	6.273674083190549e-04	6.273674072696718e-04
	(3,2)	6.275580492776977e-04	6.275180887511018e-04	6.275178012289431e-04	6.275177992028458e-04
	(3,3)	6.275599807029920e-04	6.275198940472795e-04	6.275194803548228e-04	6.275194773523952e-04
	(3,4)	6.275600004877848e-04	6.275199128563738e-04	6.275194981875939e-04	6.275194942090292e-04
	(4,1)	7.366851883299843e-04	7.366612858608876e-04	7.366611204021979e-04	7.366611192911963e-04
	(4,2)	7.368733288251432e-04	7.368339124882474e-04	7.368336254200894e-04	7.368336233680111e-04
	(4,3)	7.368754930202917e-04	7.368359551513198e-04	7.368355465141544e-04	7.368355435213517e-04
	(4,4)	7.368755151021579e-04	7.368359762930372e-04	7.368355667151537e-04	7.368355627818124e-04

e variando-se os índices $(n,q) \in \left\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\right\}$ observa-se que a *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy "aumenta" a medida que os elmentos se "afastam". De forma similar, ao se fixar um elemento (n,q) e variando-se os índices $(n,q) \in \left\{(m,p)\right\}_{m,p=1,..,4}$ observa-se que a *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy "aumenta" a medida que os elmentos se "afastam". Em particular, para os elementos da seqüência da forma $\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)$ e $\left(w_{mq},\psi_{mq}\right)$, $(m = n)$, se observaram os "menores" valores numéricos para a *distância* entre elementos.

5.2.2 Caso (a): *Modelo Exponencial*

Neste caso a modelagem da incerteza, ainda é realizada, via variável randômica, através da exponenciação de uma variável randômica, com densidade de probabilidade uniforme. A partir disso, modela-se a incerteza no módulo de Young por uma variável randômica definida por,

$$E(\xi) = \frac{\mu_E.\gamma}{2.senh(\gamma)}.e^{\gamma.\xi}, \qquad \xi \in [-1,1];$$

sendo "γ" a solução do problema definido na Eq. (5.6). A variável randômica $\Xi : \left([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), P_{\Xi}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ tem uma distribuição de probabilidades uniforme. Para este exemplo, usando-se a definição do coeficiente "α", Eqs. (5.2.a) e da *transformação exponencial* proposta tem-se

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) = \frac{8}{15}.(G.A)(\xi) = \frac{8}{15}.\frac{E(\xi)}{2.(1-\nu)}.A = \frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right).A \\ = \frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.A.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma.\xi}}{2.senh(\gamma)}\right) = \mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right); \end{aligned} \tag{5.24}$$

enquanto que da Eq. (5.2.b), o coeficiente "β" assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \beta(\xi) = \frac{1}{105}.(E.I)(\xi) = \frac{1}{105}.\left(\frac{\mu_E.\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right).I = \frac{1}{105}.(\mu_E.I).\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right) \\ = \mu_\beta.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Das Eqs. (5.24), (5.25) e da definição 4.1, Eq. (4.1), obtém-se os valores máximos e mínimos para os coeficientes "α" e "β",

$$\begin{cases} \underline{\alpha} = \min\limits_{\xi\in[-1,1]} \left\{\mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right)\right\} = \mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{-\gamma}}{2.senh(\gamma)}\right); \\ \bar{\alpha} = \max\limits_{\xi\in[-1,1]} \left\{\mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right)\right\} = \mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma}}{2.senh(\gamma)}.\right); \\ \underline{\beta} = \min\limits_{\xi\in[-1,1]} \left\{\mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma\xi}}{2.senh^3(\gamma)}\right)\right\} = \mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{-3\gamma}}{2.senh^3(\gamma)}\right); \\ \bar{\beta} = \max\limits_{\xi\in[-1,1]} \left\{\mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma\xi}}{2.senh^3(\gamma)}\right)\right\} = \mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma}}{2.senh^3(\gamma)}\right). \end{cases}$$

Na Tabela 5.2, para $\mu_E = 210\ GPa$, são tabulados os valores numéricos dos parâmetros "κ" e "γ", Eq. (5.6), correspondentes aos diferentes valores numéricos para o coeficiente de dispersão do módulo de Young, Eq. (5.8).

Tabela 5.2: Parâmetros "κ" e "γ".

δ_E	κ	γ
$\frac{1}{10}$	104475787836.232	0.173378397072128
$\frac{1}{5}$	102912621273.832	0.347799350832916

Nas figuras 5.5 e 5.6 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento transversal da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica com transformação exponencial, Eq. (5.5). Os gráficos apresentados são obtidos para dois valores numéricos do coeficiente de dispersão do módulo de Young, "$\delta_E = \frac{1}{10}$" e "$\delta_E = \frac{1}{5}$". As aproximações numéricas foram obtidas para o espaço de aproximação "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$".

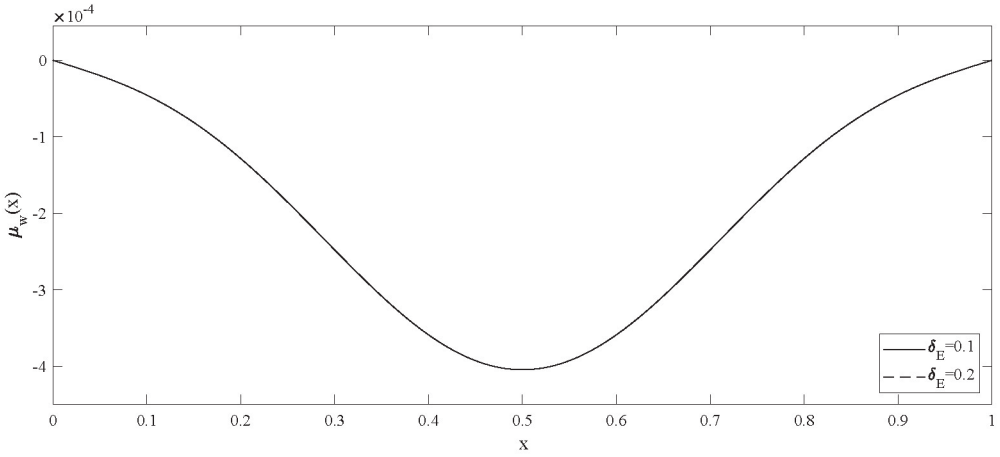

Figura 5.5: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

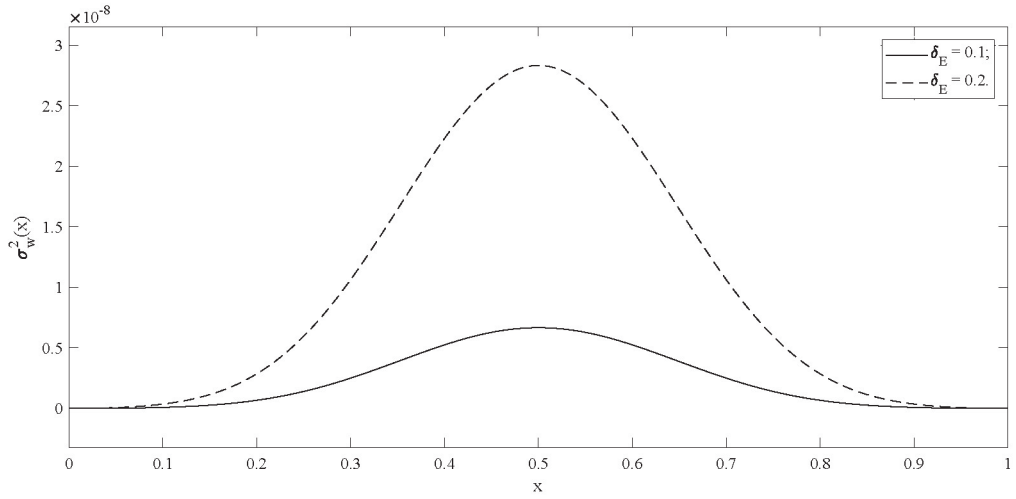

Figura 5.6: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

De forma, similar ao que foi observado no exemplo anterior, figuras 5.1 e 5.2, os valores numéricos das funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento aumentaram, a medida que aumentava o valor numérico do coeficiente de dispersão do módulo de Young, conforme pode ser constatado nas figuras 5.5 e 5.6. No entanto, a propagação da incerteza na resposta, representada pelo valor máximo do coeficiente de dispersão do processo estocástico de deslocamento transversal, não apresentou variações em relação ao coeficiente de dispersão do módulo de Young. De fato para $\delta_E = 0.1$ tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.0999999999956811$, enquanto que para $\delta_E = 0.2$ tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.199999999607687$.

Nas figuras 5.7 e 5.8 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica com transformação exponencial, Eq. (5.5). Para atender as hipóteses do teorema 4.3 as aproximações numéricas para estas funções são obtidas para dois valores numéricos do coeficiente de dispersão do módulo de Young, "$\delta_E = \frac{1}{10}$" e "$\delta_E = \frac{1}{5}$". As

aproximações numéricas foram obtidas para um espaço de aproximação "$\Phi_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$".

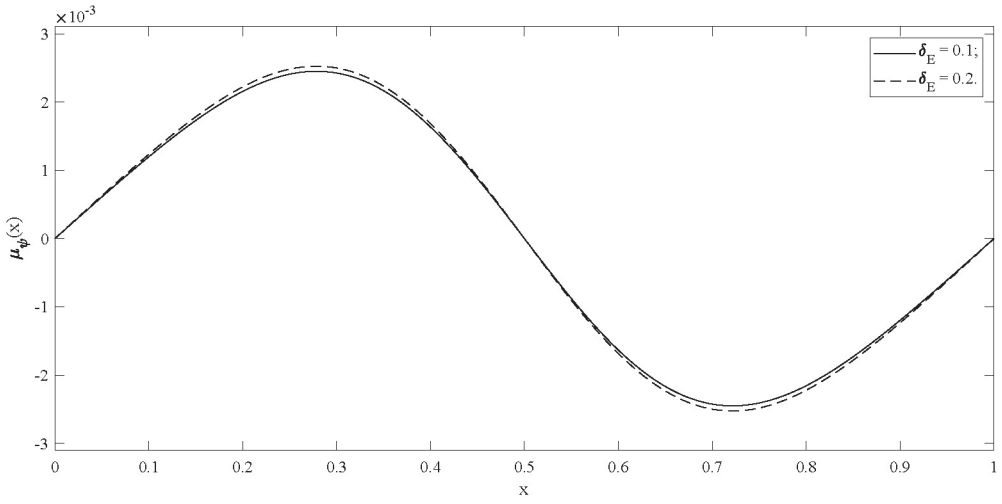

Figura 5.7: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

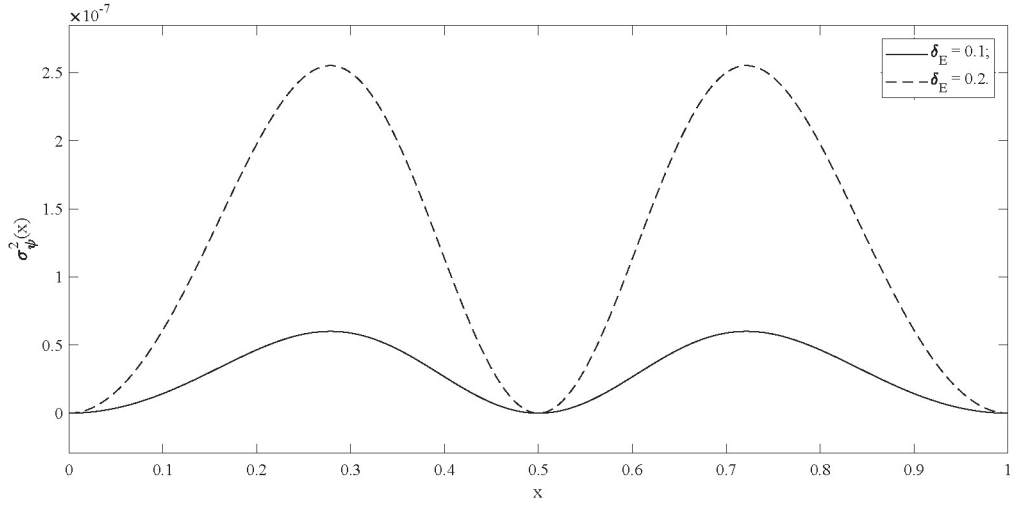

Figura 5.8: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

De forma, similar ao que foi observado no exemplo anterior, figuras 5.3 e 5.4, os valores numéricos das funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular aumentaram, a medida que aumentava o coeficiente de dispersão, conforme pode ser constatado nas figuras 5.7 e 5.8. No entanto, a propagação da incerteza

na resposta, em termos do valor máximo do coeficiente de dispersão do processo estocástico de deslocamento angular não apresenta variações em relação ao coeficiente de dispersão do módulo de Young. De fato para $\delta_E = 0.1$ tem-se $\left\|\delta_\psi\right\|_{L^\infty} = 0.0999999999956448$, enquanto que para $\delta_E = 0.2$ tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.199999999607671$.

Na Tabela 5.3 apresentam-se os valores numéricos da *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy dada no Teorema 4.3, $\left(\left|\left(w_{mp}, \psi_{mp}\right) - \left(w_{nq}, \psi_{nq}\right)\right|\right)$, para o exemplo 1 caso (a), modelo "*exponencial*", com $\delta_E = \frac{1}{10}$, para diversas "combinações" para a base do espaço de aproximação, "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). As majorações, propostas no teorema estão na ordem de "10^6", superando muitas vezes a distância entre dois elementos "$w_{m_w p_w}$" e "$w_{n_w q_w}$". Este comportamento é justificado pela *grande diferença* na ordem de grandeza dos coeficientes "$\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\beta}} = 146230$".

Tabela 5.3: Valores numéricos de "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", Teorema 4.3, para o exemplo 1 caso (a), modelo "*exponencial*" com $\delta_E = \frac{1}{10}$.

	(n,q)				
		(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	(1,1)	3.215513065368147e-04	3.219038768289405e-04	3.219065259287223e-04	3.219065365272231e-04
	(1,2)	3.215434663799542e-04	3.218919110953938e-04	3.218945180714544e-04	3.218945285090281e-04
	(1,3)	3.215434422605786e-04	3.218918447795808e-04	3.218944374638253e-04	3.218944477932663e-04
	(1,4)	3.215434422522677e-04	3.218918446099550e-04	3.218944371860655e-04	3.218944474880566e-04
	(2,1)	0	5.855615239226717e-06	5.925127949665315e-06	5.925524330468581e-06
	(2,2)	5.855615239226717e-06	0	3.442951203732642e-07	3.472182605192807e-07
	(2,3)	5.925127949665315e-06	3.442951203732642e-07	0	1.508861884330294e-08
(m,p)	(2,4)	5.925524330468581e-06	3.472182605192807e-07	1.508861884330294e-08	0
	(3,1)	1.310804324037763e-03	1.310518514341817e-03	1.310517450551923e-03	1.310517449043909e-03
	(3,2)	1.312606525707278e-03	1.312192798968745e-03	1.312190426043397e-03	1.312190419530176e-03
	(3,3)	1.312620946885478e-03	1.312205914216485e-03	1.312203097712973e-03	1.312203087843541e-03
	(3,4)	1.312621006814869e-03	1.312205969157767e-03	1.312203149298104e-03	1.312203138576692e-03
	(4,1)	1.539150975726454e-03	1.538865578399486e-03	1.538864479105319e-03	1.538864477357406e-03
	(4,2)	1.541189978790426e-03	1.540781327797753e-03	1.540778967170102e-03	1.540778960599836e-03
	(4,3)	1.541206118046339e-03	1.540796208647951e-03	1.540793420618882e-03	1.540793410814804e-03
	(4,4)	1.541206184694129e-03	1.540796270489009e-03	1.540793479226183e-03	1.540793468601195e-03

5.2.3 Caso (b): *Processo Estocástico Parametrizado*

Para este caso a modelagem da incerteza é feita por um processo estocástico parametrizado. A partir disso, o módulo de Young, $E:(0,l)\times\big([-1,1]^2,\mathcal{B}\big([-1,1]^2\big)\big)\longrightarrow\mathbb{R}$ é definido por,

$$E(x,\boldsymbol{\xi})=\mu_E+\frac{\sqrt{3}}{2}.\sigma_E.\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1+sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big]. \tag{5.26}$$

São obtidas soluções numéricas aproximadas para os processos estocásticos de deslocamentos transversal e angular para um coeficiente de dispersão no módulo de Young de "$\delta_E=\frac{1}{10}$". O vetor randômico, $\Xi:\big([-1,1]^2,\mathcal{B}([-1,1]^2),P_{\Xi}\big)\longrightarrow\boldsymbol{\xi}$, possui em suas entradas variáveis randômicas estatisticamente independentes, com distribuição de probabilidades uniforme. Para este exemplo, substituindo-se a definição do módulo de Young, Eq. (5.26) na definição do coeficiente "α", Eqs. (5.2.a) tem-se

$$\begin{aligned}\alpha(x,\xi)=\frac{8}{15}.(G.A)(x,\xi)=\frac{8}{15}.\frac{E(x,\xi)}{2.(1-\nu)}.A=\frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.A+\frac{8}{15}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sigma_E}{2.(1-\nu)}\\ .\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1+sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big]=\mu_\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}.\sigma_\alpha.\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1+sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big];\end{aligned} \tag{5.27}$$

sendo "$\mu_\alpha=\frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.A$" e "$\sigma_\alpha=\frac{8}{15}.\frac{\sigma_E}{2.(1-\nu)}.A$". De forma análoga obtém-se para o coeficiente "β", Eq. (5.2.b), subsituindo-se a definição do módulo de Young, Eq. (5.26),

$$\begin{aligned}\beta(x,\xi)=\frac{1}{105}.(E.I)(x,\xi)=\frac{1}{105}.(\mu_E.I)+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{105}.(\sigma_E.I).\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1\\ +sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big]=\mu_\beta+\frac{\sqrt{3}}{2}.\sigma_\beta.\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1+sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big].\end{aligned} \tag{5.28}$$

sendo "$\mu_\beta=\frac{1}{105}.(\mu_E.I)$" e "$\sigma_\beta=\frac{1}{105}.(\sigma_E.I)$". Das Eqs. (5.27), (5.35) e da definição 4.2, Eq. (4.2), obtém-se os valores máximos e mínimos para os coeficientes "α" e "β",

$$\begin{cases}\bar{\alpha}=\max\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\alpha(x,\boldsymbol{\xi})\big\}=\mu_\alpha-\sqrt{6}.\sigma_\alpha;\\ \underline{\alpha}=\min\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\alpha(x,\boldsymbol{\xi})\big\}=\mu_\alpha.\big(1+\sqrt{6}.\delta_\alpha\big);\\ \bar{\beta}=\max\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\beta(x,\boldsymbol{\xi})\big\}=\mu_\beta-\sqrt{6}.\sigma_\beta;\\ \underline{\beta}=\min\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\beta(x,\boldsymbol{\xi})\big\}=\mu_\beta.\big(1+\sqrt{6}.\delta_\alpha\big).\end{cases}$$

Nas figuras 5.9 e 5.10 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento transversal da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada por um processo estocástico parametrizado, Eq. (5.26). As aproximações numéricas foram obtidas para um espaço de aproximação "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4^2(\mathcal{H}_2)$" sendo "$\mathcal{H}_2 = \sigma\big(\xi_1,\ \xi_2\big)$", conforme definição 3.6.

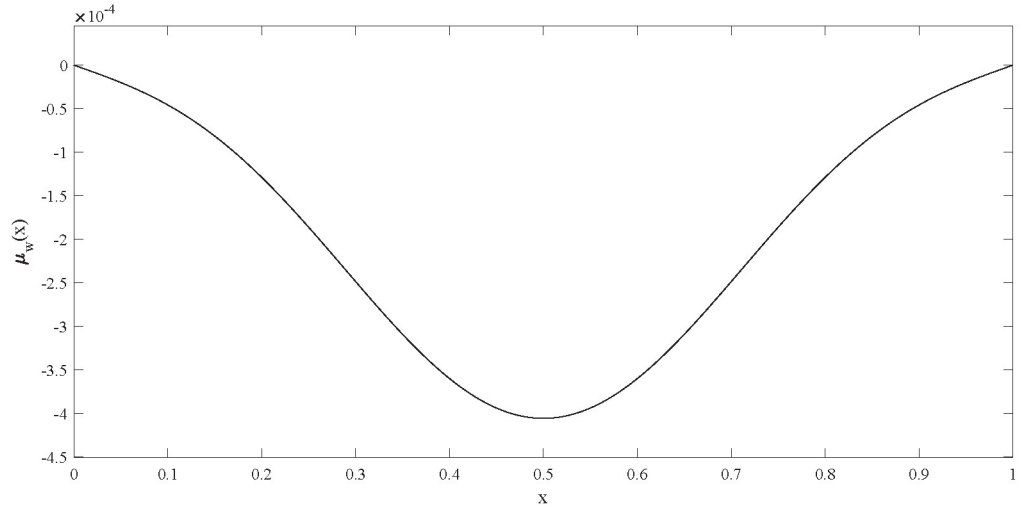

Figura 5.9: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

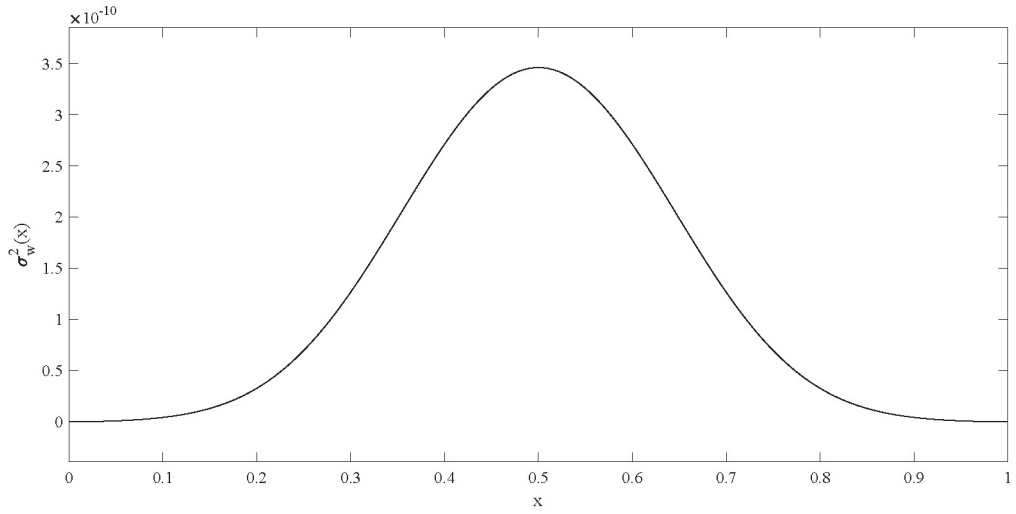

Figura 5.10: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

Comparando-se as figuras 5.1 e 5.2, para "$\delta_E = \frac{1}{10}$", com as figuras 5.9 e 5.10, constata-se um comportamento similar da função valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento transversal, em que a incerteza no módulo de Young é modelada por variável randômica e processo estocástico parametrizado, respectivamente, casos (a) e (b) com "$\delta_E = \frac{1}{10}$". No entanto, para o caso (b) a propagação da incerteza na resposta é menor. O valor máximo do coeficiente de dispersão do processo estocástico de deslocamento transversal é inferior ao coeficiente de dispersão do módulo de Young. De fato para $\delta_E = \frac{1}{10}$ para o caso (a) tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.101224806612686$, enquanto que para o caso (b) tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.0458736058810897$. Desta forma, para este exemplo, a incerteza se propagou-se mais *intensamente* para a modelagem via variável randômica do que por processo estocástico parametrizado.

Nas figuras 5.11 e 5.12 são apresentados gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada por um processo estocástico parametrizado. Estas aproximações numéricas foram obtidas para

um espaço de aproximação "$\Phi_4 \otimes \mathcal{P}_4^2(\mathcal{H}_2)$".

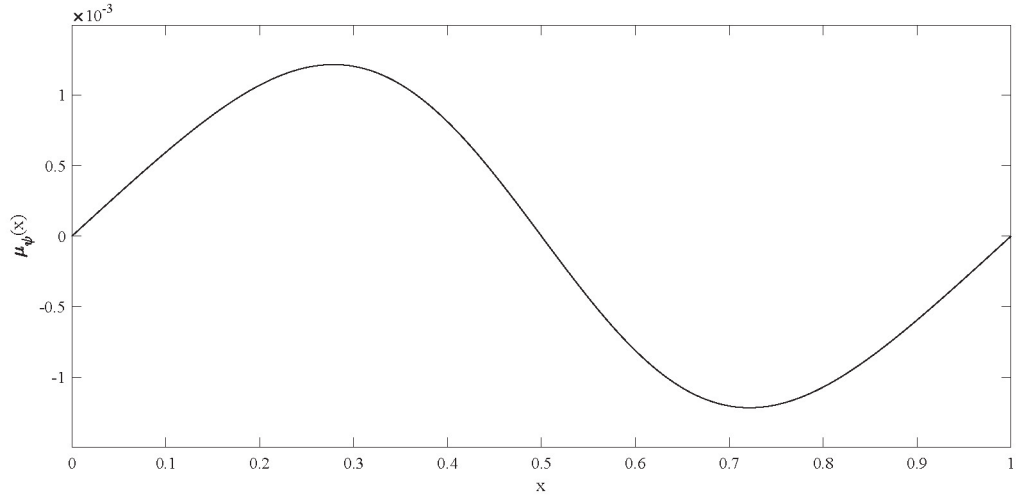

Figura 5.11: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

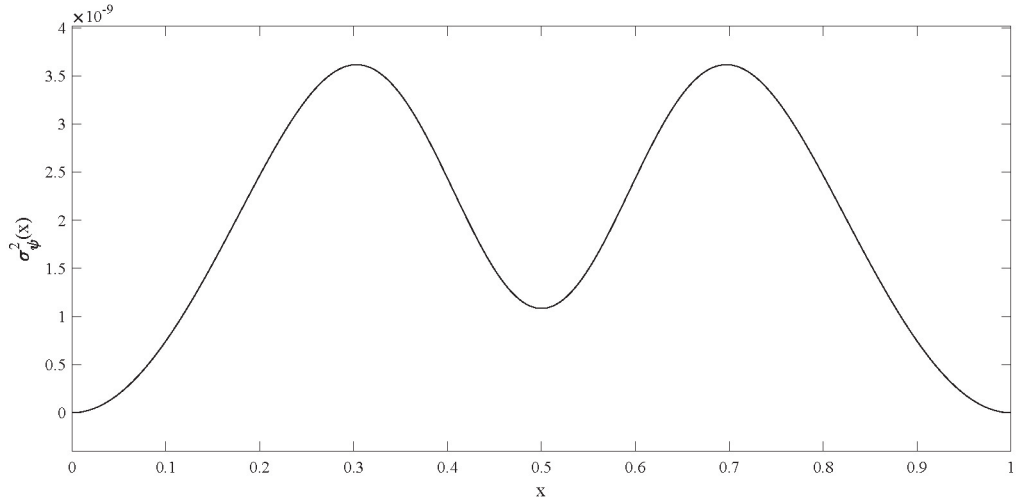

Figura 5.12: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

Na Tabela 5.4 apresentam-se os valores numéricos da *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy dada no Teorema 4.3, $\left(\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|\right)$, para o exemplo 1 caso (b), modelo "*processo estocástico parametrizado*", com $\delta_E = \frac{1}{10}$, para diversas "combinações" do espaço de aproximação, "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). As majorações, propostas no teorema estão na ordem de "10^6", superando muitas vezes a distância entre dois elementos "$w_{m_w p_w}$" e "$w_{n_w q_w}$". Este comportamento é justificado pela *grande* diferença na ordem de grandeza dos coeficientes "$\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\beta}} = 146700$".

Tabela 5.4: Valores numéricos de "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", Teorema 4.3, para o exemplo 1 caso (b), modelo "*processo estocástico parametrizado*" com $\delta_E = \frac{1}{10}$.

	(n,q)			
(m,p)		(2,1)	(2,2)	(2,3)
	(1,1)	1.519381907662571e-04	1.519406229326384e-04	3.218944474880566e-04
	(1,2)	1.519381703927566e-04	1.519405875744072e-04	1.519405990810317e-04
	(1,3)	1.519381708874763e-04	1.519405880023389e-04	1.519405997686947e-04

Comparando-se os resultados apresentados no exemplo 1, em termos da norma-L^∞ do valor esperado para o caso (a) com $\delta_E = \frac{1}{10}$ tem-se $\left\|\mu_w^{(a)}\right\|_{L^\infty} = 0.000408372389609891$, enquanto que para o caso (b) tem-se $\left\|\mu_w^{(b)}\right\|_{L^\infty} = 0.000405547778438725$. O desvio percentual relativo em termos da norma-L^∞ do valor esperado, $\frac{\left|\left\|\mu_w^{(a)}\right\|_{L^\infty}-\left\|\mu_w^{(b)}\right\|_{L^\infty}\right|}{\left\|\mu_w^{(b)}\right\|_{L^\infty}}.100\% = 0.696492823124357\%$. Por outro lado, a norma-L^∞ da variância para o caso (a) tem-se $\left\|\sigma_w^{2,(a)}\right\|_{L^\infty} = 1.70878197513405.10^{-9}$, enquanto que para o caso (b) tem-se $\left\|\sigma_w^{2,(b)}\right\|_{L^\infty} = 3.46106544606003.10^{-10}$. O desvio percentual relativo, em termos da norma-L^∞ da função variância, $\frac{\left|\left\|\mu_w^{(a)}\right\|_{L^\infty}-\left\|\mu_w^{(b)}\right\|_{L^\infty}\right|}{\left\|\mu_w^{(b)}\right\|_{L^\infty}}.100\% = 393.715591850271\%$.

5.3 Exemplo 2

Neste exemplo a incerteza está no parâmetro geométrico relacionado a "*altura*", (h). Da mesma forma como no exemplo 1, a incerteza se propaga através do modelo de flexão de vigas de Levinsons-Bickford através dos coeficientes "α" e "β", Eq. (5.2).

5.3.1 Caso (a): *Modelo Afim*

A modelagem da incerteza na "*altura da viga*", via variável randômica, caso (a), através de um modelo "*afim*" é dada por,

$$h(\xi) = \mu_h + \sqrt{3}.\sigma_h.\xi, \qquad \xi \in [-1,1];$$

sendo "μ_h" e "σ_h" o valor esperado e desvio padrão da altura da "*altura da viga*" e $\Xi : \left([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), P_{\Xi}\right) \longrightarrow \xi$, uma variável randômica com distribuição de probabilidade uniforme. São obtidos resultados numéricos para três valores numéricos do coeficiente de dispersão do módulo de Young, Eq. (5.8). Para este exemplo assume-se $E = \mu_E$ e da definição do coeficiente "α", Eq. (5.2.a), tem-se que,

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \frac{8}{15}.(G.A)(\xi) = \frac{8}{15}.\frac{E}{2.(1-\nu)}.(b.h)(\xi) = \frac{8}{15}.\frac{E}{2.(1-\nu)}.b.(\mu_h + \sqrt{3}.\sigma_h.\xi) \\ &= \frac{8}{15}.\frac{E}{2.(1-\nu)}.b.\mu_h + \sqrt{3}.\frac{8}{15}.\frac{E}{2.(1-\nu)}.(b.\sigma_h).\xi = \frac{8}{15}.G.\mu_A \\ &\quad + \sqrt{3}.\frac{8}{15}.G.\sigma_A.\xi = \mu_\alpha + \sqrt{3}.\sigma_\alpha.\xi;\end{aligned} \tag{5.29}$$

sendo "$\mu_\alpha = \frac{8}{15}.G.(b.\sigma_h)$" e "$\sigma_\alpha = \frac{8}{15}.G.\sigma_A$". Da Eq. (5.2.b)

$$\begin{aligned}\beta(\xi) &= \frac{1}{105}.(E.I)(\xi) = \frac{1}{105}.E.\frac{b.h^3(\xi)}{12} = \frac{1}{105}.\frac{E.b}{12}.(\mu_h + \sqrt{3}.\sigma_h.\xi)^3 \\ &= \frac{1}{105}.\frac{E.b}{12}.\left(\mu_h^3 + 3.\sqrt{3}.\mu_h^2.\sigma_h.\xi + 9.\mu_h.\sigma_h^2.\xi^2 + 3.\sqrt{3}.\sigma_h^3.\xi^3\right) \\ &= \mu_\beta.\left[1 + 3.\sqrt{3}.\frac{\xi}{\delta_h} + 9.\left(\frac{\xi}{\delta_h}\right)^2 + 3.\sqrt{3}.\left(\frac{\xi}{\delta_h}\right)^3\right];\end{aligned} \tag{5.30}$$

sendo "$\mu_\beta = \frac{1}{105}.E.\frac{b.\mu_h^3}{12}$" e "$\delta_h = \frac{\mu_h}{\sigma_h}$". Das Eqs. (4.1), (5.29) e (5.30), para este exemplo, os valores máximos e mínimos para os coeficientes "α" e "β" são dados por,

$$\begin{cases} \underline{\alpha} = \min\limits_{\xi\epsilon[-1,1]} \left\{\mu_\alpha.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\alpha.\xi\right)\right\} = \mu_\alpha.\left(1-\sqrt{3}.\delta_\alpha\right); \\ \bar{\alpha} = \max\limits_{\xi\epsilon[-1,1]} \left\{\mu_\alpha.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\alpha.\xi\right)\right\} = \mu_\alpha.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\alpha\right); \\ \underline{\beta} = \min\limits_{\xi\epsilon[-1,1]} \left\{\mu_\beta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\beta.\xi\right)\right\} = \mu_\beta.\left(1-\sqrt{3}.\delta_\beta\right); \\ \bar{\beta} = \max\limits_{\xi\epsilon[-1,1]} \left\{\mu_\beta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\beta.\xi\right)\right\} = \mu_\beta.\left(1+\sqrt{3}.\delta_\beta\right). \end{cases}$$

Nas figuras 5.13 e 5.14 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância para o processo estocástico de deslocamento transversal da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada por uma variável randômica com transformação afim, Eq. (5.5). As aproximações numéricas para o processo estocástico de deslocamento transversal foram obtidas para espaços de aproximação "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$".

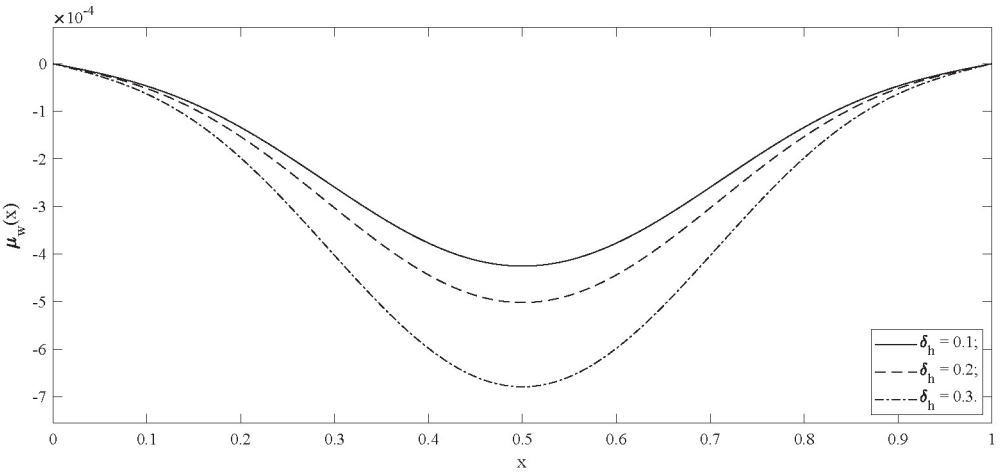

Figura 5.13: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

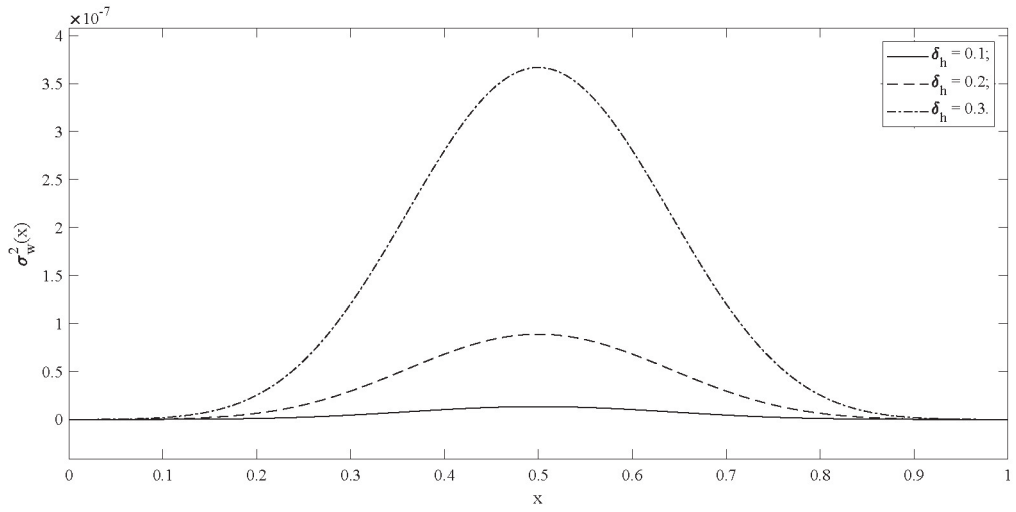

Figura 5.14: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

Nas figuras 5.15 e 5.16 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas das funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica, com transformação exponencial. As aproximações numéricas foram obtidas para o espaço de aproximação "$\Phi_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$".

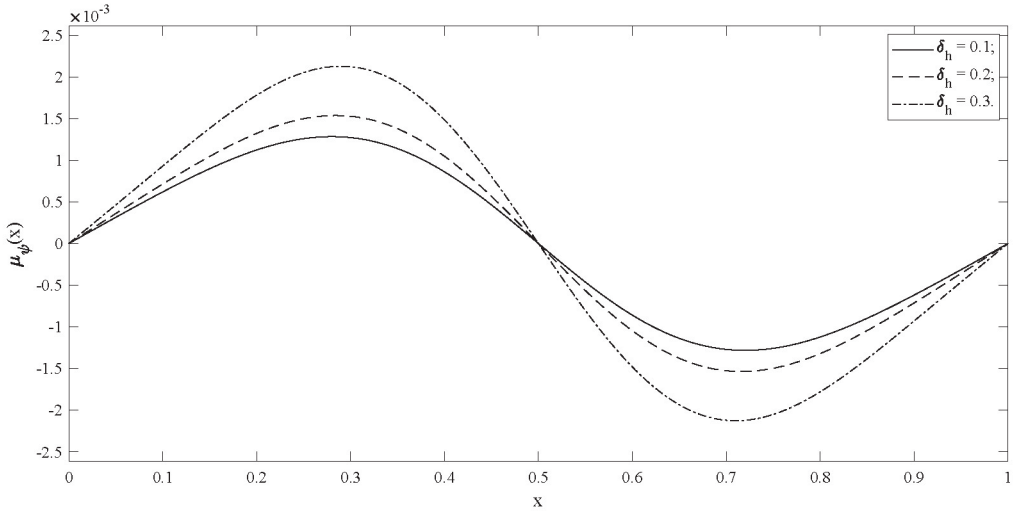

Figura 5.15: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

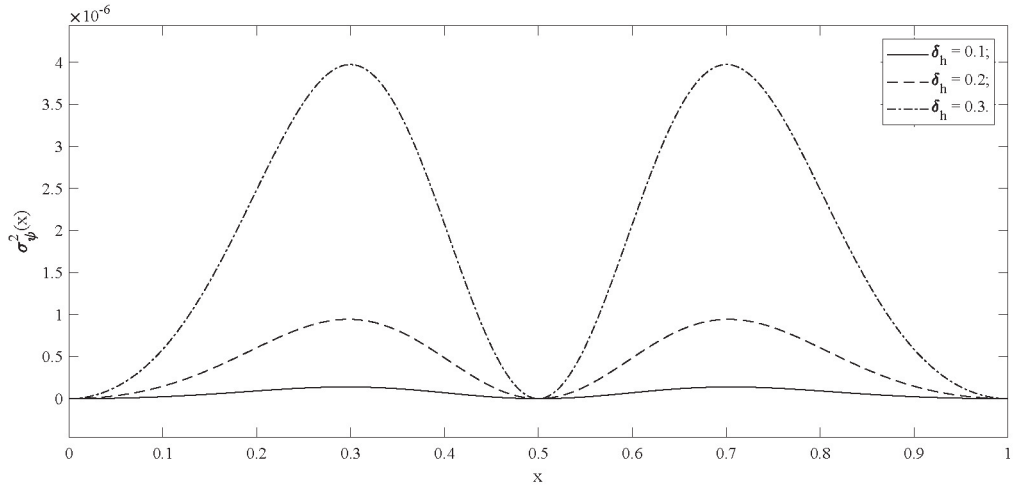

Figura 5.16: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

Similarmente ao que foi obervado no exemplo anterior, figuras 5.7 e 5.8, os valores numéricos das funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular aumentaram, a medida que aumentava o coeficiente de dispersão, conforme pode ser constatado nas figuras 5.15 e 5.16. No entanto, a propagação da incerteza na resposta, representada pelo valor máximo do coeficiente de dispersão do processo estocástico de deslocamento angular, não apresenta variações em relação ao coeficiente de dispersão do módulo de Young. De fato para $\delta_E = \frac{1}{10}$ tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.0999999999956448$, enquanto que para $\delta_E = \frac{1}{5}$ tem-se $\left\|\delta_w\right\|_{L^\infty} = 0.199999999607671$. Na Tabela 5.5 apresentam-se os valores numéricos da *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy dada no Teorema 4.3, $\left(\left|\left(w_{mp}, \psi_{mp}\right) - \left(w_{nq}, \psi_{nq}\right)\right|\right)$, para o exemplo 2 caso (a), modelo "*afim*", com $\delta_E = \frac{1}{10}$, para diversas "combinações" para a base do espaço de aproximação, "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). As majorações, propostas no teorema estão na ordem de "10^6", superando muitas vezes a distância entre dois elementos "$w_{m_w p_w}$" e "$w_{n_w q_w}$". Este comportamento é justificado pela grande diferença na ordem de grandeza dos coeficientes "$\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\beta}} = 498560$".

Tabela 5.5: Valores numéricos de "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", Teorema 4.3, para o exemplo 2 caso (a), modelo "*afim*" com $\delta_h=\frac{1}{10}$.

	(n,q)				
		(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	(1,1)	1.544096963419090e-04	1.544543280421656e-04	1.544548093434707e-04	1.544620943709376e-04
	(1,2)	1.544089846256319e-04	1.544530511939427e-04	1.544535275586846e-04	1.544608179486508e-04
	(1,3)	1.544089802680191e-04	1.544530424022655e-04	1.544535144199873e-04	1.544608086045984e-04
	(1,4)	1.544089808270149e-04	1.544530429267972e-04	1.544535149108476e-04	1.544608124244853e-04
	(2,1)	0	1.613572459772098e-06	1.634006603442638e-06	1.999031135108504e-06
	(2,2)	1.613572459772098e-06	0	1.393751270300973e-07	1.180647439121342e-06
	(2,3)	1.634006603442638e-06	1.393751270300973e-07	0	1.186996105479341e-06
(m,p)	(2,4)	1.999031135108504e-06	1.180647439121342e-06	1.186996105479341e-06	0
	(3,1)	6.609829789072139e-04	6.609283223755104e-04	6.609279574262554e-04	6.609262147690144e-04
	(3,2)	6.632003382753143e-04	6.630891250854602e-04	6.630882504081902e-04	6.630870372873407e-04
	(3,3)	6.632428004673255e-04	6.631304463394799e-04	6.631290764226011e-04	6.631283036071281e-04
	(3,4)	6.632422279961302e-04	6.631298926969605e-04	6.631285043124594e-04	6.631286939145808e-04
	(4,1)	8.042649307094887e-04	8.042032581584048e-04	8.042028358426254e-04	8.042010228147115e-04
	(4,2)	8.108362734235627e-04	8.106896143677237e-04	8.106884263607456e-04	8.106874127853780e-04
	(4,3)	8.110749714361715e-04	8.109252200847949e-04	8.109229798634201e-04	8.109229030720500e-04
	(4,4)	8.110421619744197e-04	8.108930999937347e-04	8.108911359228206e-04	8.108821996973593e-04

5.3.2 Caso (a): *Modelo Exponencial*

A modelagem da incerteza na "*altura da viga*", via variável randômica, caso (a), através de um modelo "*exponencial*" é dada por,

$$h(\xi)=\frac{\mu_h.\gamma}{2.senh(\gamma)}.e^{\gamma.\xi},\qquad \xi\in[-1,1];$$

sendo "γ" a solução do problema definido na Eq. (5.6). A variável randômica $\Xi:\left([-1,1],\mathcal{B}([-1,1]),P_{\Xi}\right)\longrightarrow\xi$, tem uma distribuição de probabilidade uniforme. São obtidos resultados numéricos para dois valores numéricos para o coeficiente de dispersão do módulo de Young, "$\delta_E=\frac{1}{10}$" e "$\delta_E=\frac{1}{5}$". Para este exemplo, da Eq. (5.3), assume-se $E=\mu_E$, e da definição para o coeficiente "α" e "κ", Eqs. (5.2.a) e (5.6.b), respectivamente,

tem-se que,

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \frac{8}{15}.(G.A)(\xi) = \frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.(b.h)(\xi) = \frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.b.\left(\frac{\mu_h.\gamma}{2.senh(\gamma)}.e^{\gamma\xi}\right) \\ &= \frac{8}{15}.\frac{\mu_E}{2.(1-\nu)}.b.\mu_h.\left(\frac{e^{\gamma.\xi}\gamma}{2.senh(\gamma)}\right) = \mu_\alpha.\left(\frac{e^{\gamma\xi}\gamma}{2.senh(\gamma)}\right);\end{aligned} \tag{5.31}$$

sendo "$\mu_\alpha = \frac{8}{15}.G.(b.\sigma_h)$" e "$\sigma_\alpha = \frac{8}{15}.G.\sigma_A$". Da Eq. (5.2.b)

$$\begin{aligned}\beta(\xi) &= \frac{1}{105}.(E.I)(\xi) = \frac{1}{105}.\mu_E.\frac{b.h^3(\xi)}{12} = \frac{1}{105}.\frac{\mu_E.b}{12}.\left(\frac{\mu_h.\gamma}{2.senh(\gamma)}.e^{\gamma\xi}\right)^3 \\ &= \frac{1}{105}.\mu_E.\frac{b.\mu_h^3}{12}.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma\xi}}{8.senh^3(\gamma)}\right) = \mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma\xi}}{8.senh^3(\gamma)}\right);\end{aligned} \tag{5.32}$$

sendo "$\mu_\beta = \frac{1}{105}.E.\frac{b.\mu_h^3}{12}$" e "$\delta_h = \frac{\mu_h}{\sigma_h}$". Das Eqs. (5.31), (5.32) e da definição 4.1, Eq. (4.1), obtém-se os valores máximos e mínimos para os coeficientes "α" e "β",

$$\begin{cases} \underline{\alpha} = \min\limits_{\xi\in[-1,1]}\left\{\mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}.\right)\right\} = \mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{-\gamma}}{2.senh(\gamma)}\right); \\ \bar{\alpha} = \max\limits_{\xi\in[-1,1]}\left\{\mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma\xi}}{2.senh(\gamma)}\right)\right\} = \mu_\alpha.\left(\frac{\gamma.e^{\gamma}}{2.senh(\gamma)}\right); \\ \underline{\beta} = \min\limits_{\xi\in[-1,1]}\left\{\mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma\xi}}{8.senh^3(\gamma)}\right)\right\} = \mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{-3\gamma}}{8.senh^3(\gamma)}\right); \\ \bar{\beta} = \max\limits_{\xi\in[-1,1]}\left\{\mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma\xi}}{8.senh^3(\gamma)}\right)\right\} = \mu_\beta.\left(\frac{\gamma^3.e^{3\gamma}}{8.senh^3(\gamma)}\right). \end{cases}$$

Nas figuras 5.17 e 5.18 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento transversal da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica com transformação exponencial, Eq. 5.5. As aproximações numéricas foram obtidas para o espaço de aproximação "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\boldsymbol{\sigma}(\xi))$".

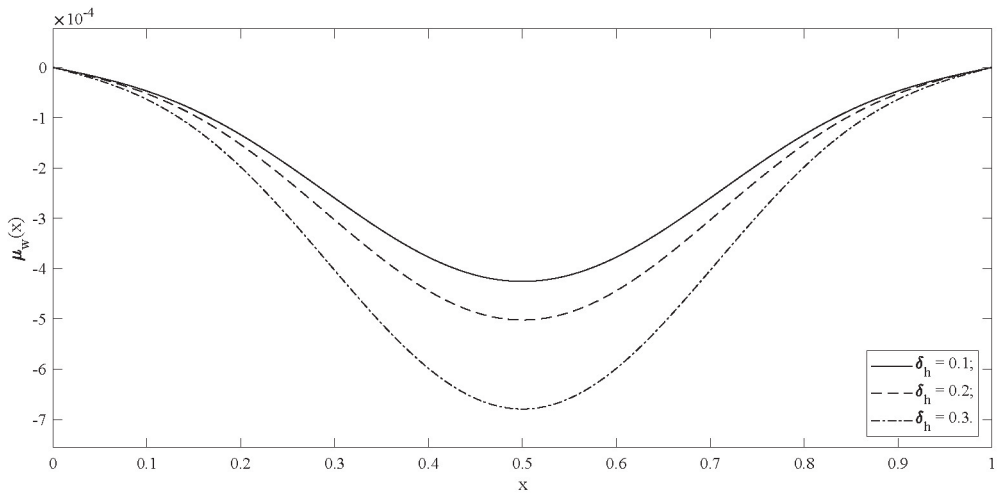

Figura 5.17: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

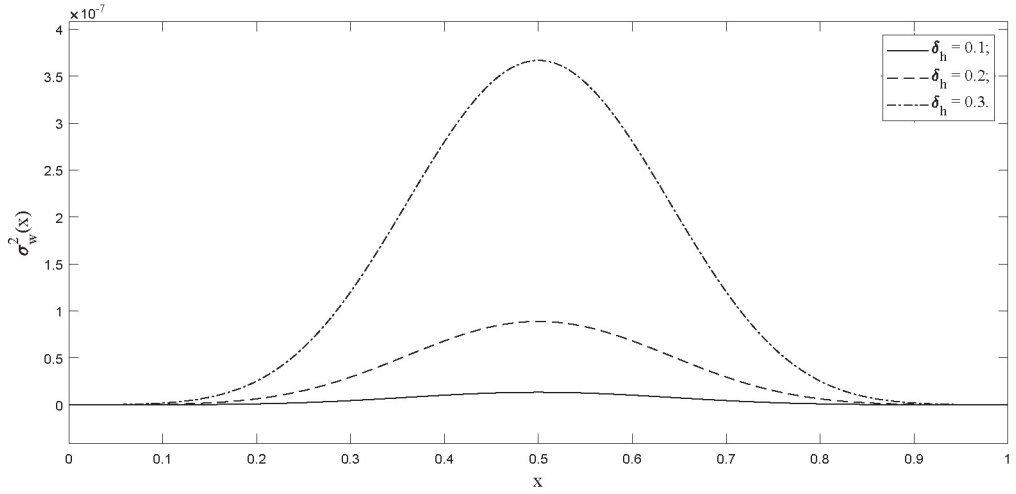

Figura 5.18: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

Nas figuras 5.19 e 5.20 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica com transformação exponencial, Eq. (5.5). As aproximações numéricas foram obtidas para um espaço de aproximação "$\Phi_4 \otimes \mathcal{P}_4(\boldsymbol{\sigma}(\Xi))$".

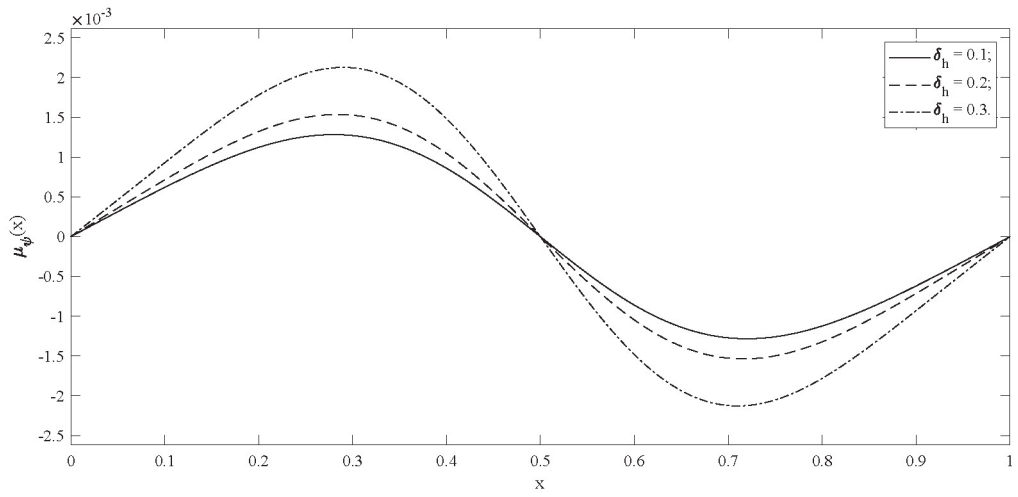

Figura 5.19: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

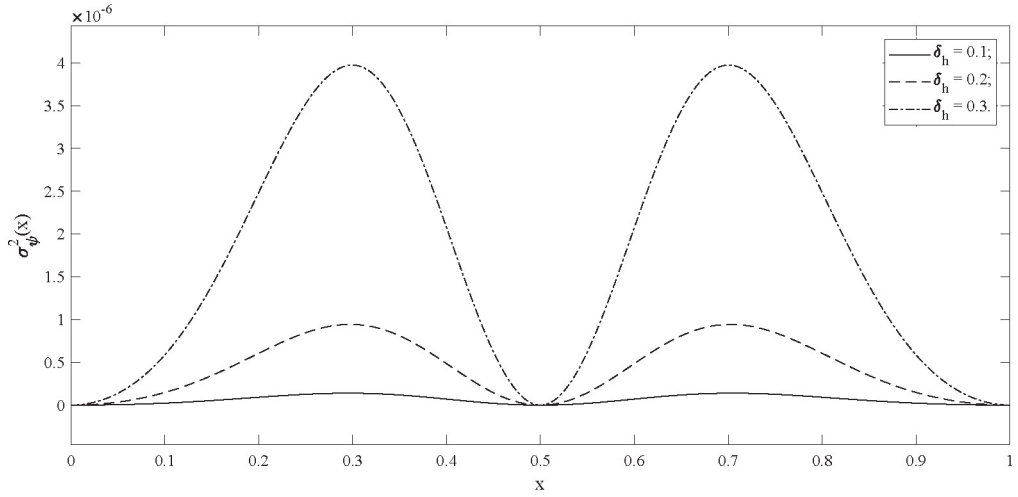

Figura 5.20: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

Na Tabela 5.6 apresentam-se os valores numéricos da *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy dada no Teorema 4.3, $\left(\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|\right)$, para o exemplo 2 caso (a), modelo "*exponencial*", com $\delta_h = \frac{1}{10}$, para diversas "combinações" para a base do espaço de aproximação, "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). As majorações, propostas no teorema na ordem de "10^6", superando muitas vezes a distância entre dois elementos "$w_{m_w p_w}$" e "$w_{n_w q_w}$". Este comportamento é justificado pela *grande* diferença na ordem

de grandeza dos coeficientes "$\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\beta}} = 1653100$".

Tabela 5.6: Valores numéricos de "$\left|\left(w_{mp}, \psi_{mp}\right) - \left(w_{nq}, \psi_{nq}\right)\right|$", Teorema 4.3, para o exemplo 2 caso (a), modelo "*exponencial*" com $\delta_h = \frac{1}{10}$.

	(n,q)				
		(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	(1,1)	3.315249929497734e-04	3.315501312111076e-04	3.315501790321878e-04	3.315534629857030e-04
	(1,2)	3.315244806912367e-04	3.315493696777971e-04	3.315494168202481e-04	3.315526995862802e-04
	(1,3)	3.315244802736429e-04	3.315493686200724e-04	3.315494155434906e-04	3.315526977504602e-04
	(1,4)	3.315244814209047e-04	3.315493697666294e-04	3.315494166896333e-04	3.315526987687615e-04
	(2,1)	0	1.530252358510856e-06	1.535182697205539e-06	1.985185450429539e-06
	(2,2)	1.530252358510856e-06	0	4.618524133425346e-08	1.250508569178844e-06
	(2,3)	1.535182697205539e-06	4.618524133425346e-08	0	1.245281197163022e-06
(m,p)	(2,4)	1.985185450429539e-06	1.250508569178844e-06	1.245281197163022e-06	0
	(3,1)	2.744172204484123e-03	2.744142481069922e-03	2.744142447907663e-03	2.744141827280072e-03
	(3,2)	2.745042272026727e-03	2.744999140367546e-03	2.744999070100233e-03	2.744998385206234e-03
	(3,3)	2.745043041864365e-03	2.744999886467767e-03	2.744999811129135e-03	2.744999113279646e-03
	(3,4)	2.745192164214831e-03	2.745148700165324e-03	2.745148564721405e-03	2.745137556978796e-03
	(4,1)	6.359318212584068e-03	6.359275173021818e-03	6.359275121569208e-03	6.359274332806334e-03
	(4,2)	6.384082830668223e-03	6.383990344058572e-03	6.383990156286951e-03	6.383989132576071e-03
	(4,3)	6.384402920698937e-03	6.384309523282361e-03	6.384309223386567e-03	6.384307914141797e-03
	(4,4)	6.522392138933291e-03	6.522290729028802e-03	6.522288253896262e-03	6.522048301024533e-03

5.3.3 Caso (b): *Processo Estocástico Parametrizado*

A modelagem da incerteza na "*altura da viga*" é feita por um processo estocástico parametrizado. A partir disso, a "*altura da viga*", $h : (0,1) \times \left([-1,1]^2, \mathcal{B}\left([-1,1]^2\right)\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por,

$$\begin{cases} h(x,\boldsymbol{\xi}) = \mu_h + \sigma_h.\mathcal{Q}(x,\boldsymbol{\xi}); \\ \mathcal{Q}(x,\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1 + sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big], \qquad \forall \boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1,\xi_2\right) \in [-1,1]^2. \end{cases} \tag{5.33}$$

São obtidas soluções numéricas aproximadas, para os processos estocásticos de deslocamentos transversal e angular para um coeficiente de dispersão na "*altura da viga*" de

"$\delta_h = \frac{1}{10}$". O vetor randômico, $\Xi : \left([-1,1]^2, \mathcal{B}([-1,1]^2), P_{\Xi}\right) \longrightarrow \boldsymbol{\xi}$, possui em suas entradas variáveis randômicas com distribuição de probabilidade uniforme, estatisticamente independentes. Para este exemplo toma-se $E = \mu_E$, Eq. (5.3.a) e substituindo-se a definição da "*altura da viga*", Eq. (5.33), na definição do coeficiente "α", Eqs. (5.2.a), tem-se

$$\begin{aligned}\alpha(x,\boldsymbol{\xi}) = \frac{8}{15}.(G.A)(x,\boldsymbol{\xi}) = \frac{8}{15}.G.b.h(x,\xi) = \frac{8}{15}.G.b.\mu_h + \frac{8}{15}.G.b.\sigma_h.\frac{\sqrt{3}}{2} \\ .\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1 + sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big] = \mu_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}.\sigma_\alpha.\Big[cos\big(\pi.x\big).\xi_1 \\ +sen\big(\pi.x\big).\xi_2\Big] = \mu_\alpha + \sigma_\alpha.\mathcal{Q}(x,\boldsymbol{\xi});\end{aligned} \tag{5.34}$$

sendo "$\mu_\alpha = \frac{8}{15}.G.b.\mu_h$" e "$\sigma_\alpha = \frac{8}{15}.G.b.\sigma_h$". De forma análoga obtém-se para o coeficiente "β", Eq. (5.2.b), subsituindo-se a definição da "*altura da viga*", Eq. (5.33.a),

$$\begin{aligned}\beta(x,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{105}.(E.I)(x,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{105}.E.\left(\frac{b.h^3}{12}\right)(x,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{105}.E.\frac{b.\mu_h^3}{12}.\Big[1 + 3.\delta_h.\mathcal{Q}(x,\boldsymbol{\xi}) \\ +3.\delta_h^2.\mathcal{Q}^2(x,\boldsymbol{\xi}) + \delta_h^3.\mathcal{Q}^3(x,\boldsymbol{\xi})\Big] = \beta_0.\Big[1 + 3.\delta_h.\mathcal{Q}(x,\boldsymbol{\xi}) \\ +3.\delta_h^2.\mathcal{Q}^2(x,\boldsymbol{\xi}) + \delta_h^3.\mathcal{Q}^3(x,\boldsymbol{\xi})\Big];\end{aligned} \tag{5.35}$$

sendo "$\beta_0 = \frac{1}{105}.E.\frac{b.\mu_h^3}{12}$". Da definição 4.2, Eq. (4.2), e das Eqs. (5.34) e (5.35) obtém-se os valores máximos e mínimos dos coeficientes "α" e "β",

$$\begin{cases}\underline{\alpha} = \min\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\alpha(x,\boldsymbol{\xi})\big\} = \mu_\alpha.\big(1 + \sqrt{6}.\delta_h\big); \\ \bar{\alpha} = \max\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\alpha(x,\boldsymbol{\xi})\big\} = \mu_\alpha.\big(1 - \sqrt{6}.\delta_h\big); \\ \underline{\beta} = \min\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\beta(x,\boldsymbol{\xi})\big\} = \beta_0.\Big[1 + 3.\Big(\sqrt{2}.\delta_h\Big) + 3.\Big(\sqrt{2}.\delta_h\Big)^2 + \Big(\sqrt{2}.\delta_h\Big)^3\Big]; \\ \underline{\beta} = \max\limits_{(x,\boldsymbol{\xi})\in[0,1]\times[-1,1]^2}\big\{\beta(x,\boldsymbol{\xi})\big\} = \beta_0.\Big[1 - 3.\Big(\sqrt{2}.\delta_h\Big) + 3.\Big(\sqrt{2}.\delta_h\Big)^2 - \Big(\sqrt{2}.\delta_h\Big)^3\Big].\end{cases}$$

Nas figuras 5.21 e 5.22 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento transversal da viga, respectivamente, para o caso em que a modelagem da incerteza é representada por um processo estocástico parametrizado, Eq. (5.33). As aproximações numéricas foram obtidas para um espaço de aproximação "$\mathcal{W}_3 \otimes \mathcal{P}_3(\boldsymbol{\sigma}(\Xi))$".

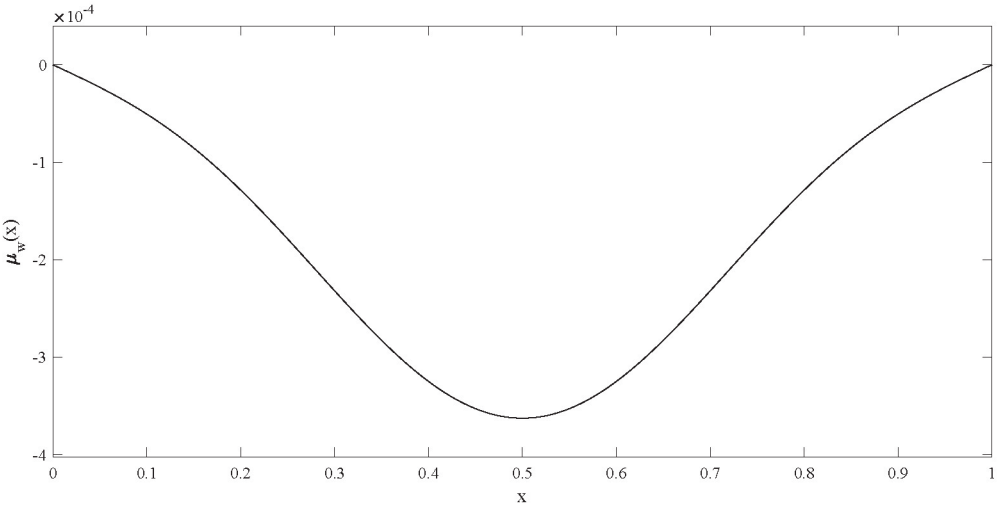

Figura 5.21: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

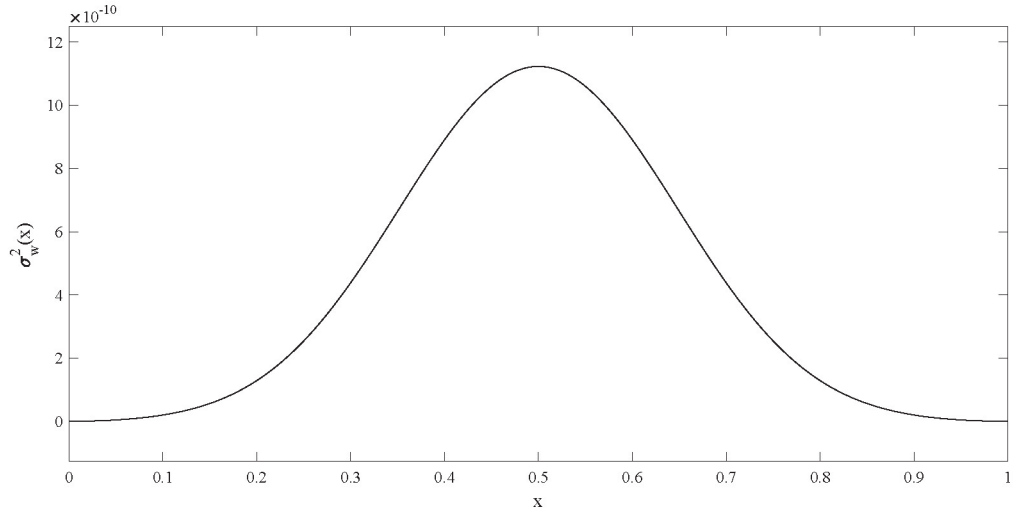

Figura 5.22: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

Para este exemplo, $\|\delta_w\|_{L^\infty} = 0.0924282774641959$, enquanto que para os casos (a), com transformações afim e exponencial, respectivamente, tem-se $\|\delta_w\|_{L^\infty} = 0.271847129406572$ e $\|\delta_w\|_{L^\infty} = 0.338276289117756$, para $\delta_h = \frac{1}{10}$. A partir disso, constata-se que a modelagem da incerteza através, de um processo estocástico parametrizado, propaga-se menos intensamente através do modelo de viga.

Nas figuras 5.23 e 5.24 são apresentados, respectivamente, os gráficos das aproximações numéricas das funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular da viga. As aproximações numéricas foram obtidas para um espaço de aproximação"$\Phi_3 \otimes \mathcal{P}_3(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}))$".

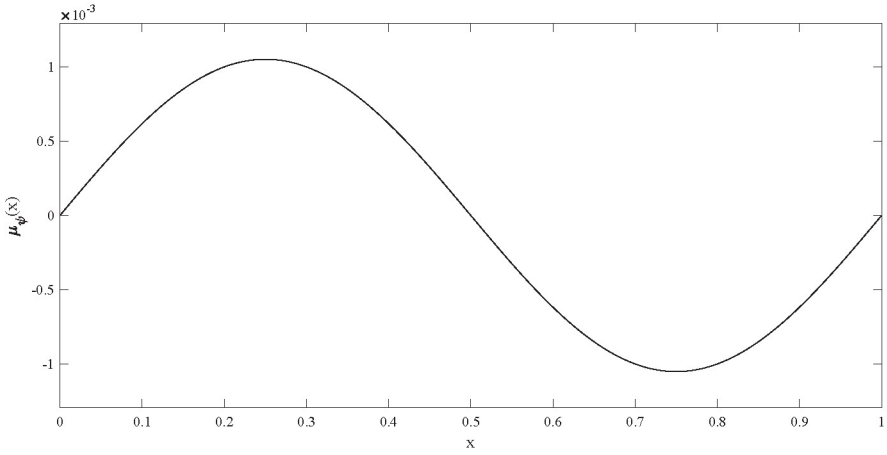

Figura 5.23: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

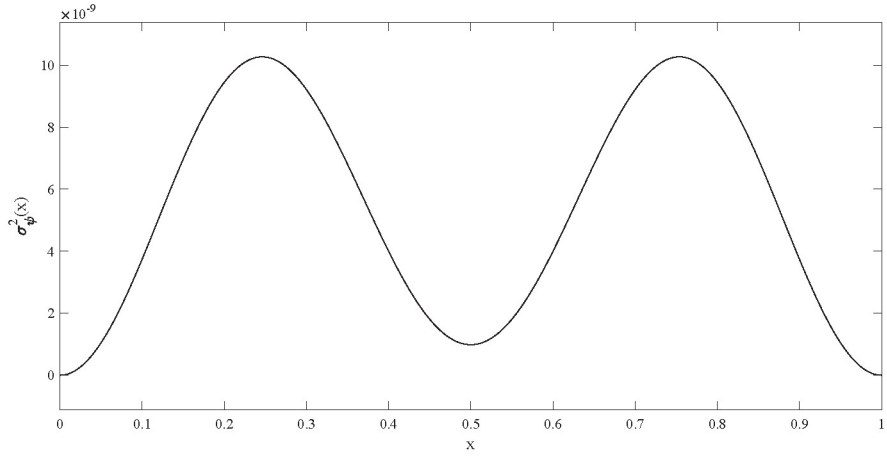

Figura 5.24: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

Para este exemplo, $\left\|\sigma_{\phi}^{2}\right\|_{L^{\infty}} = 9.88357315503672.10^{-9}$, enquanto que para os casos (a), com transformações afim e exponencial, respectivamente, tem-se $\left\|\sigma_{\phi}^{2}\right\|_{L^{\infty}} = 6.04471764454958.10^{-8}$ e $\left\|\delta_{w}\right\|_{L^{\infty}} = 4.32883138844297.10^{-7}$, para $\delta_h = \frac{1}{10}$. Novamente, a propagação da incerteza através do modelo de flexão de viga, é *menor* para esta modelagem da incerteza.

Na Tabela 5.7 apresentam-se os valores numéricos da *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy dada no Teorema 4.3, $\left(\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|\right)$, para o exemplo 2 caso (b), modelo "*processo estocástico parametrizado*", com $\delta_h = \frac{1}{10}$, para diversas "combinações" para a base do espaço de aproximação, "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). As majorações estão na ordem de "10^6", superando *muitas vezes* a distância entre dois elementos "$w_{m_w p_w}$" e "$w_{n_w q_w}$". Este comportamento é justificado pela *grande* diferença na ordem de grandeza dos coeficientes "$\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\beta}} = 214600$".

Tabela 5.7: Valores numéricos de "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", Teorema 4.3, para o exemplo 2 caso (b), modelo "*processo estocástico parametrizado*" com $\delta_h = \frac{1}{10}$.

	(n,q)			
(m,p)		(2,1)	(2,2)	(2,3)
	(1,1)	1.519381907662571e-04	1.519406229326384e-04	1.519406346627043e-04
	(1,2)	1.519381703927566e-04	1.519405875744072e-04	1.519405990810317e-04
	(1,3)	1.519381708874763e-04	1.519405880023389e-04	1.519405997686947e-04
	(2,1)	0	1.912148595627233e-07	1.928966547432566e-07
	(2,2)	1.912148595627233e-07	0	1.771682043597641e-08
	(2,3)	1.928966547432566e-07	1.771682043597641e-08	0
	(3,1)	6.236374385589878e-04	6.236336464359649e-04	6.236336303968378e-04
	(3,2)	6.237441009371258e-04	6.237401997119859e-04	6.237401806093485e-04
	(3,3)	6.237446320510781e-04	6.237407352446983e-04	6.237407201945144e-04

5.4 Exemplo 3

Neste exemplo apresenta-se uma aplicação, em que se evidencia a "versatilidade" dos polinômios generalizados de caos. Por exemplo, para a incerteza modelada por uma variável randômica definida por,

$$\vartheta(\xi) = \mu_\vartheta + \sqrt{2}.\sigma_\vartheta.cos(\pi.\xi), \qquad \xi \in [-1,1]. \tag{5.36}$$

Para este modelo de incerteza é possível, conforme as Eq. (4.1), estabelecer "$\underline{\vartheta}$" e "$\bar{\vartheta}$" necessárias para o atendimento das hipóteses H1 e H2. No entanto a hipótese H4 não é satisfeita para este modelo de incerteza, Eq. (5.36), com efeito estima-se,

$$\left\| \left(\frac{D_\xi^n \vartheta}{\vartheta} \right)(\xi) \right\|_{L^\infty(0,l)} \leq \frac{\sqrt{2}.\pi^n}{\frac{1}{\delta_\vartheta} - \sqrt{2}} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < n < \frac{1}{log(\pi)}.\frac{\underline{\vartheta}}{\sqrt{2}.\delta_\vartheta}.$$

Portanto,

$$\exists n \in \mathbb{N},\ tal\ que\ \left\| \left(\frac{D_\xi^n \vartheta}{\vartheta} \right)(\xi) \right\|_{L^\infty(0,l)} \geq 1, \qquad \forall \xi \in [-1,1].$$

A partir disso, para atendimento da hipótese H4 define-se o modelo de incerteza como sendo,

$$\vartheta(\zeta) = \mu_\vartheta + \sqrt{2}.\sigma_\vartheta.cos\left(\frac{\zeta}{\pi}\right), \qquad \zeta \in \left[-\pi^2, \pi^2\right]. \tag{5.37}$$

Em particular, para este caso, as aproximações realizadas a partir dos polinômios de Legendre não são adequados. Eles são polinômios ortogonais, com produto interno definido no intervalo $[-1,1]$ e densos em $L^2(-1,1)$. Para a variável randômica, $\boldsymbol{Z} : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \left([-\pi^2, \pi^2], \mathcal{B}([-\pi^2, \pi^2])\right)$ e portanto deve-se redefinir os polinômios de Legendre para este intervalo. Para tanto realiza-se uma transformação afim, pg. 180 [66], para a mudança de variável, $\xi = \dfrac{\zeta}{\pi^2}$. Esta transformação preserva a ortogonalidade do conjunto de polinômios, ao se ortonormaliza-los em relação a "*função peso*", $\rho(\zeta) = \dfrac{1}{2.\pi^2}$ conforme teorema obtém-se um conjunto total em $L^2\left(-\pi^2, \pi^2\right)$. Desta forma, para esse modelo de incerteza,

$$\left\| \left(\frac{D_\zeta^n \vartheta}{\vartheta} \right)(\zeta) \right\|_{L^\infty(0,l)} \leq \frac{1}{\pi^n.\left(\frac{1}{\sqrt{2}.\delta_\vartheta} - 1\right)}, \qquad \zeta \in \left[-\pi^2, \pi^2\right].$$

Notando, dos exemplos anterioes, que $\delta_\vartheta \leq \frac{3}{10}$ conclui-se que esta modelagem da incerteza, Eq. (5.37), satisfaz a hipótese H4. São apresentados resultados numéricos para o caso em que a modelagem da incerteza é realizada via variável randômica, Eq. (5.37), e com incerteza sobre o módulo de Young,

$$E(\zeta) = \mu_E + \sqrt{2}.\sigma_E.cos\left(\frac{\zeta}{\pi}\right), \qquad \zeta \in \left[-\pi^2, \pi^2\right].$$

São obtidas aproximações numéricas para os processos estocásticos de deslocamentos transversal e angular para dois valores numéricos do coeficiente de variação do módulo de Young, $\delta_E \in \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right\}$.

Nas figuras 5.25 e 5.26 são apresentados, respectivamente, os gráficos das aproximações numéricas das funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento transversal da viga. As aproximações numéricas foram obtidas para o espaço de aproximação "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\boldsymbol{\sigma}(\Xi))$".

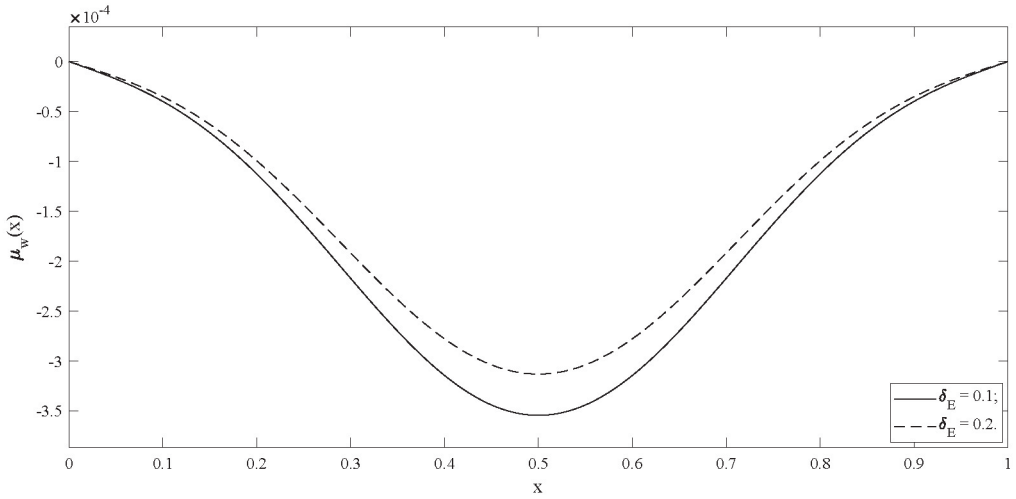

Figura 5.25: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

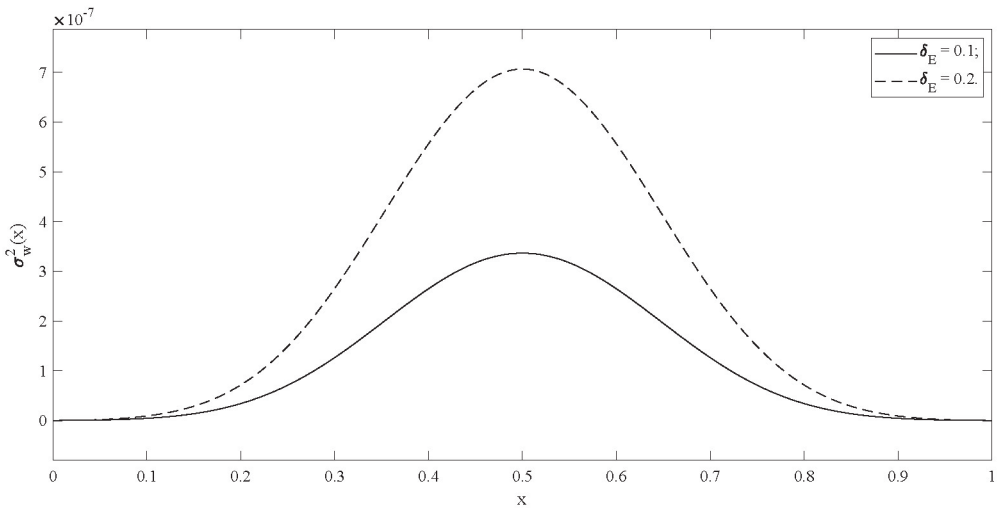

Figura 5.26: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

Nas figuras 5.27 e 5.28 são apresentados os gráficos das aproximações numéricas das funções valor esperado e variância, respectivamente, do processo estocástico de deslocamento angular da viga. As aproximações numéricas foram obtidas para o espaço de aproximação"$\Phi_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$".

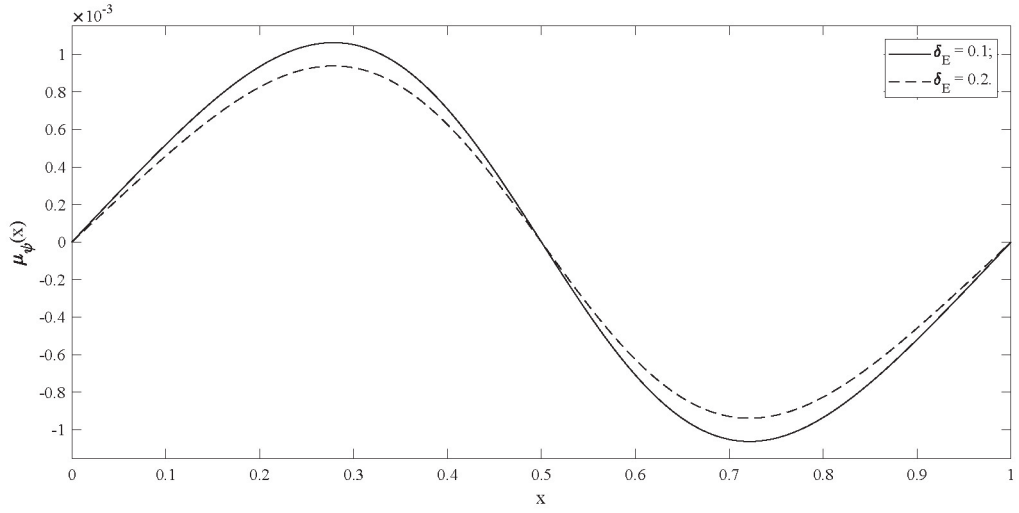

Figura 5.27: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

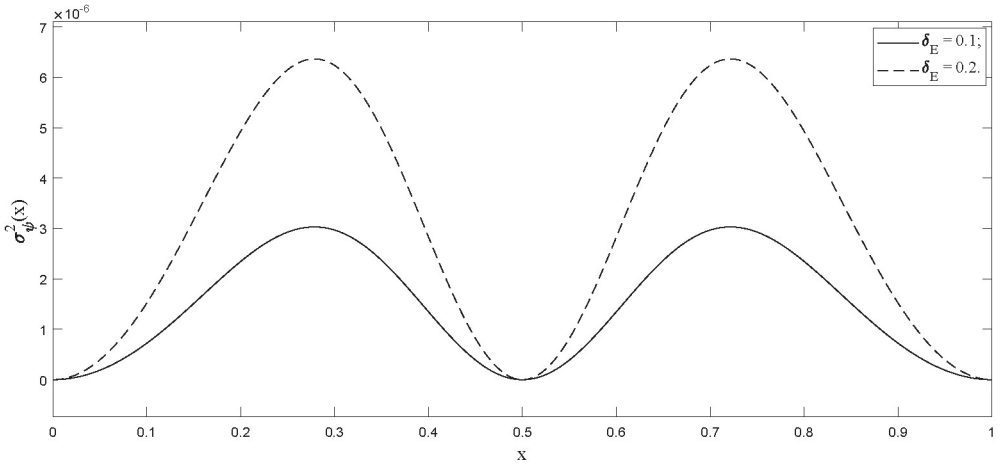

Figura 5.28: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

Na Tabela 5.8 apresentam-se os valores numéricos da *distância* entre os elementos da seqüência de Cauchy dada no Teorema 4.3, $\left(\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|\right)$, para o exemplo 3 caso (a), modelo "*afim*", com $\delta_E = \frac{1}{10}$, para diversas "combinações" de elementos do espaço de aproximação, "$\mathcal{W}_4 \otimes \mathcal{P}_4(\sigma(\xi))$", Eq. (4.11). As majorações estão na ordem de "10^6", superando muitas vezes a distância entre dois elementos "$w_{m_w p_w}$" e "$w_{n_w q_w}$". Este comportamento é justificado pela *grande* diferença na ordem de grandeza dos coeficientes "$\frac{\bar{\alpha}}{\beta} = 137440$".

Tabela 5.8: Valores numéricos de "$\left|\left(w_{mp},\psi_{mp}\right)-\left(w_{nq},\psi_{nq}\right)\right|$", Teorema 4.3, para o exemplo 3 caso (a), modelo "*afim*" com $\delta_E=\frac{1}{10}$.

	(n,q)				
		(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	(1,1)	1.516091812456903e-04	3.192613415315265e-04	3.192613415315265e-04	4.806395308652317e-04
	(1,2)	1.479266303358518e-04	3.140566464204056e-04	3.140566464204057e-04	4.749851034932053e-04
	(1,3)	1.479266303358518e-04	3.140566464204056e-04	3.140566464204057e-04	4.749851034932053e-04
	(1,4)	1.464348373950786e-04	3.099760760881624e-04	3.099760760881625e-04	4.701473776745786e-04
	(2,1)	0	1.680906372988944e-04	1.680906372988944e-04	3.296205397958282e-04
	(2,2)	1.680906372988944e-04	0	5.494036160681062e-20	1.615527575931511e-04
	(2,3)	1.680906372988944e-04	5.494036160681062e-20	0	1.615527575931510e-04
(m,p)	(2,4)	3.296205397958282e-04	1.615527575931511e-04	1.615527575931510e-04	0
	(3,1)	6.180350267614999e-04	4.516619893224768e-04	4.516619893224767e-04	2.937584875332477e-04
	(3,2)	1.447240948286549e-03	1.280252332215396e-03	1.280252332215396e-03	1.120141491203556e-03
	(3,3)	1.447240948286548e-03	1.280252332215395e-03	1.280252332215395e-03	1.120141491203555e-03
	(3,4)	2.244087286413352e-03	2.076979260984888e-03	2.076979260984888e-03	1.916556403481114e-03
	(4,1)	7.256988682665375e-04	5.609347732589283e-04	5.609347732589282e-04	4.052915281300115e-04
	(4,2)	1.669065842229758e-03	1.503276721147455e-03	1.503276721147455e-03	1.344544602123251e-03
	(4,3)	1.669065842229760e-03	1.503276721147457e-03	1.503276721147457e-03	1.344544602123252e-03
	(4,4)	2.575666687151701e-03	2.409660739975805e-03	2.409660739975805e-03	2.250427164724365e-03

5.5 Exemplo 4

Neste exemplo admite-se que a incerteza está sobre os coeficientes "α", "β" e no carregamento da viga, "q". A incerteza nos coeficientes é induzida pelo módulo de Young, conforme Eqs. (5.21)-(5.23), com $\delta_E=\frac{1}{10}$. O objetivo deste exemplo é mostrar a estimativa apresentada no corolário 5.6. Esta estimativa é para o erro a *priori*, Eq. (3.16). Desta forma deve-se conhecer a solução teórica do problema para determinar a *distância* da solução numérica aproximada. Notando que o problema de flexão estocástica de viga de Levinson-Bickford, definido na Eq. (5.1), consiste de um sistema de EDP's, formado por duas equações a ser resolvido para as *funções incógnitas*, "$w=w(x,\xi)$" e "$\psi=\psi(x,\xi)$". A estratégia a ser utilizada para "obter" as soluções teóricas, consiste em

admitir que a solução teórica para o deslocamento transversal, (w), tem a seguinte forma,

$$w(x,\xi) = \left(\frac{10^{-2}}{2+\xi}\right).sen\left(\frac{\pi.x}{l}\right), \qquad \forall (x,\xi) \in [0,l]\times[-1,1]. \tag{5.38}$$

É importante notar que a função que define o deslocamento transversal atende as condições de contorno e também é um elemento de $C^{\infty}\big([-1,1],\mathcal{B}([-1,1]),P_{\Xi};C^{\infty}(0,l)\big)$. A partir disso com $\xi \in [-1,1]$, fixado, subsitui-se na Eq. (5.1.b) obtendo-se o seguinte PVC a ser resolvido para "$\psi_{\xi}(x) = \psi(x,\xi)$",

$$\begin{cases} \text{Determinar } \psi_{\xi} : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ \dfrac{d^2\psi_{\xi}}{dx^2}(x) - \gamma.\psi_{\xi}(x) = g_{\xi}(x), \qquad \forall x \in (0,l); \\ \text{sujeito a} \\ \psi_{\xi}(0) = 0 \\ \psi_{\xi}(l) = 0; \end{cases} \tag{5.39}$$

sendo $\gamma = \frac{21}{34.(1+\nu).h^2}$ e $g_{\xi} : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por,

$$g_{\xi}(x) = \left(\frac{10^{-2}}{2+\xi}\right).\left(\frac{\pi}{l}\right).\left[\gamma - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right].cos\left(\frac{\pi.x}{l}\right). \tag{5.40}$$

A solução teórica do PVC, Eq. (5.39), é obtida via *método dos coeficientes a determinar* sendo dada por

$$\begin{cases} \psi(x,\xi) = C_1(\xi).e^{\sqrt{\gamma}.x} + C_2(\xi).e^{-\sqrt{\gamma}.x} + C_3(\xi).cos\left(\frac{\pi.x}{l}\right); \\ C_1(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\gamma}.\frac{l}{2}}}{2.senh(\sqrt{\gamma}.\frac{l}{2})}.C_3(\xi); \\ C_2(\xi) = -\frac{e^{\sqrt{\gamma}.\frac{l}{2}}}{2.senh(\sqrt{\gamma}.\frac{l}{2})}.C_3(\xi); \\ C_3(\xi) = \left(\frac{10^{-2}}{2+\xi}\right).\left(\frac{\pi}{l}\right).\frac{\gamma-\frac{4}{17}.(\frac{\pi}{l})^2}{\gamma-(\frac{\pi}{l})^2}. \end{cases} \tag{5.41}$$

Substituindo-se as Eqs. (5.38) e (5.41) na Eq. (5.39.b) determina-se o termo de carregamento "$q = q(x,\xi)$". Por conseguinte, aplica-se o método de Galerkin Estocástico, com este termo de carregamento e coeficientes "α" e "β". O espaço de aproximação, $\Big(\mathcal{W}_n \otimes \mathcal{P}_q(\sigma(\xi))\Big)$, é obtido fazendo-se variar os *índices*, $\Big(n,\ q \in \{1,...,10\}\Big)$. Nas figuras 5.29 e 5.30 apresentam-se os gráficos das funções de valor esperado para o processo estocástico de deslocamento transversal e angular, respectivamente, "$\mu_w(x) \times x$" e "$\mu_{\psi}(x) \times x$".

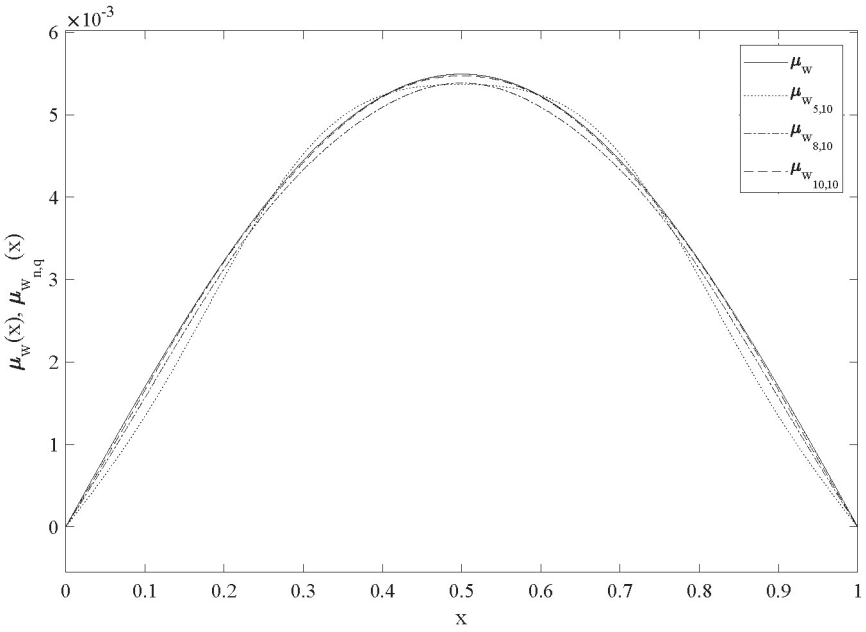

Figura 5.29: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

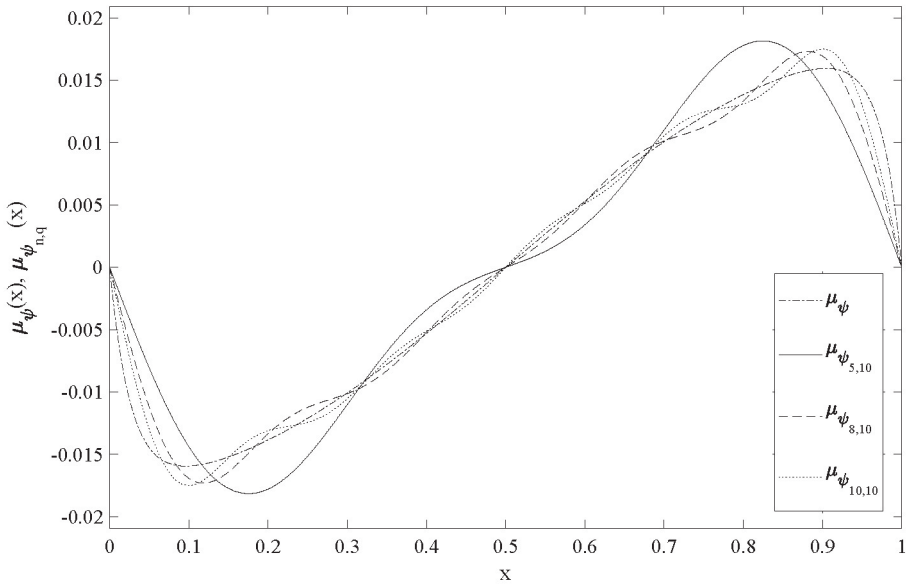

Figura 5.30: Gráfico da função "*Valor Esperado*" do processo estocástico de deslocamento angular.

Nas figuras 5.31 e 5.32 apresentam-se os gráficos das funções variância para os processos estocásticos de deslocamento transversal e angular, respectivamente, "$\sigma_w^2(x)\times x$" e "$\sigma_\psi^2(x)\times x$". Na figura 5.33 apresenta-se a evolução do tempo de computação em termos do número de elementos dos espaços de aproximação. Pode-se observar que o *tempo de computações* é sensível ao número de elementos utilizados para gerar o espaço de aproximação. Por exemplo, tomando-se $n = q = 1$ tem-se que $\left(\mathcal{W}_1 \otimes \mathcal{P}_1(\sigma(\xi))\right)$ ou $\left(\Phi_1 \otimes \mathcal{P}_1(\sigma(\xi))\right)$ são gerados, cada um, por dois elementos cujas soluções numéricas aproximadas são obtidas com um tempo de computação, $t = 4.390625\ s$. Enquanto que para $\left(\mathcal{W}_{10} \otimes \mathcal{P}_{10}(\sigma(\xi))\right)$ e $\left(\Phi_{10} \otimes \mathcal{P}_{10}(\sigma(\xi))\right)$, possuem cento e dez, (110), elementos cujas soluções numéricas aproximadas são obtidas com um tempo de computação, $t = 74914.125\ s$.

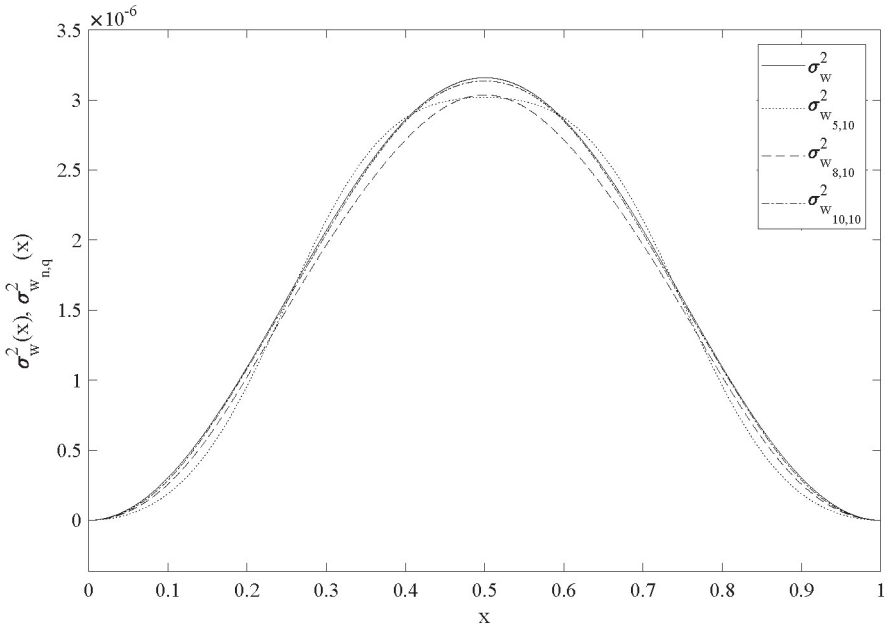

Figura 5.31: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento transversal.

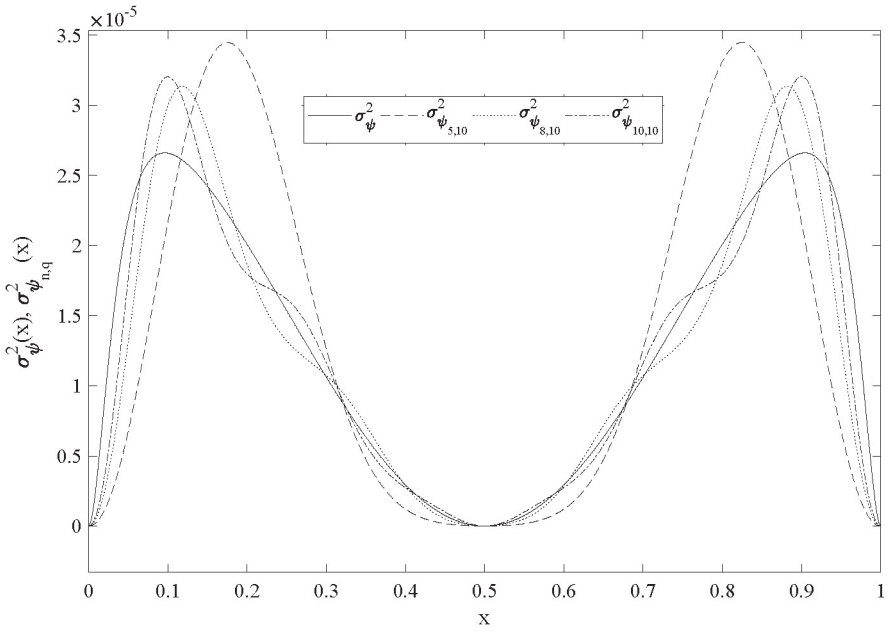

Figura 5.32: Gráfico da função "*Variância*" do processo estocástico de deslocamento angular.

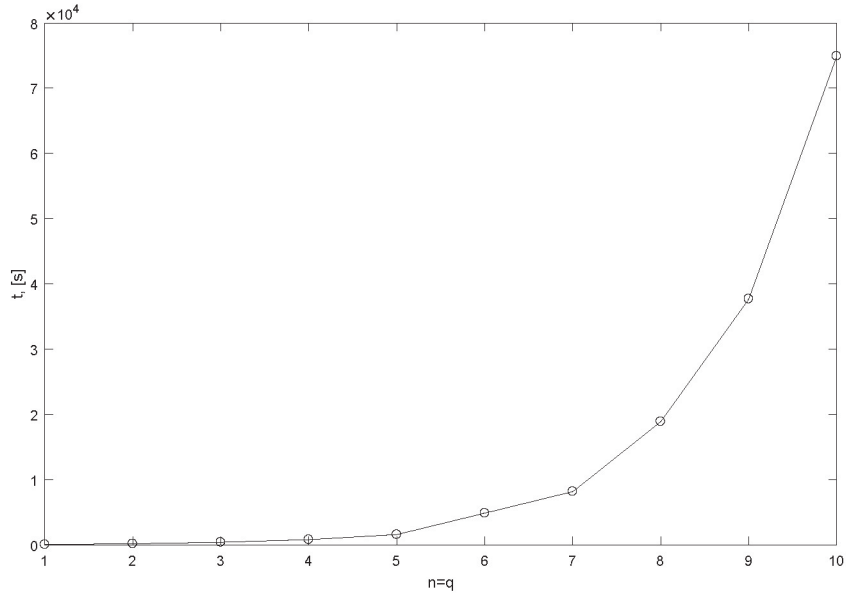

Figura 5.33: Tempo de computação.

Na Tabela 5.9 são apresentados os valores numéricos do erro a *priori*, $\left(\varepsilon\right)$, em termos das normas "$|\cdot|$", "$\|\cdot\|_{L^\infty}$", as majorações, "L", para o erro a *priori* propostas no

corolário 5.6 e tempo de computação "t".

Tabela 5.9: Valores numéricos para o erro a *priori*, "ε", nas normas "$|\cdot|$", "$\|\cdot\|_{L^\infty}$", as majorações "L" e o tempo de computação.

(n,q)	$\lvert(w,\psi)-(w_{nq},\psi_{nq})\rvert$	$\lVert(w,\psi)-(w_{nq},\psi_{nq})\rVert_{L^\infty}$	L	$t\ [s]$
(4,10)	0.00316231354284591	0.0038730190358549	521255,536725629	1572,73
(10,5)	0.00151489122613082	0.00185788871768812	336772,110021482	5331,08
(10,10)	0.00108158163036443	0.00132466101447066	260234,162441434	74914,13

Observando os valores tabulados e o comportamento dos gráficos das figuras 5.29 - 5.32 constata-se que a medida que aumenta-se a dimensão do espaço de aproximação, V_m, o erro a *priori* diminui e as funções de valor esperado e variância dos processos estocásticos de deslocamento transversal e angular obtidas a partir das soluções numéricas aproximadas *avizinham-se* destas funções obtidas a partir das soluções teóricas, Eqs. (5.38) e (5.41).

5.6 Síntese dos Resultados Numéricos

Nesta seção comenta-se, em linhas gerais, para os exemplos propostos os resultados numéricos e teóricos, teorema 4.3, obtidos e o desempenho das aproximações numéricas. Foram realizados experimentos numéricos para quatro exemplos para um problema de flexão de viga de Levinson-Bickford. Para os exemplos 1 e 2 sendo obtidas as soluções numéricas aproximadas para os processos estocásticos de deslocamento e angular e para suas respectivas funções de valor esperado e variância. A modelagem da incerteza dos coeficientes é feita por variável randômica e processo estocástico parametrizado que correspondem, respectivamente, aos casos (a) e (b). Para o exemplo 1 admite-se incerteza sobre o módulo de Young, enquanto que, para o exemplo 2 a incerteza está sobre o parâmetro geométrico relacionado a "*altura*" da seção transversal da viga. No exemplo

3 a modelagem da incerteza é feita por um "processo de translação" de uma variável randômica com densidade de probabilidade uniforme, definida em "$\left[-\pi^2, \pi^2\right]$". Para todos os exemplos, independentemente da modelagem da incerteza, as soluções numéricas aproximadas foram processos estocásticos. Outro aspecto, de ordem geral, é que foi atendida, para os exemplos 1-3, a majoração proposta no teorema 4.3, enquanto que para o exemplo 4 o corolário apresentou resultados adequados.

No exemplo 1 caso (a), com modelo exponencial, obteve-se valores numéricos superiores, em relação ao modelo afim, para a função valor esperado do processo estocástico de deslocamento transversal. Da mesma forma, para esta modelagem, os valores numéricos da função variância do processo estocástico de deslocamento transversal foram superiores ao modelo afim. Comparando-se os valores numéricos das funções valor esperado e variância, para os casos (a) e (b), com $\delta_E = \frac{1}{10}$, o caso (a) apresentou valores numéricos inferiores para a função valor esperado e superiores para a função variância do processo estocástico de deslocamento transversal. Observa-se um comportamento semelhante para as funções valor esperado e variância do processo estocástico de deslocamento angular. Desta forma, a modelagem da incerteza via processo estocástico parametrizado apresentou *menor* propagação da incerteza. É importante mencionar, que a incerteza sobre o módulo de Young propaga-se, linearmente, sobre os coeficientes "α" e "β".

No exemplo 2, observou-se a maior propagação da incerteza, no sentido de terem sido obtidos os maiores valores numéricos para a função variância dos processos estocástico de deslocamentos transversal e angular. Para o caso (a) obtiveram-se valores numéricos próximos, entre os coeficientes de dispersão da resposta e do módulo de Young e altura da seção transversal. Para o caso (b) foi observado valores numéricos inferiores para o coeficiente de variação da resposta em relação aos dos coeficientes de dispersão para o

módulo de Young e altura da seção transversal. A partir disso, a modelagem da incerteza via processo estocástico parametrizado apresentou menor propagação da incerteza através do modelo de viga.

No exemplo 3, a incerteza está sobre o módulo de Young sendo modelada por uma variável randômica uniforme definida em $\left[-\pi^2, \pi^2\right]$. Observou-se a maior propagação da incerteza, no sentido de terem sido obtidos os maiores valores numéricos para a função variância dos processos estocástico de resposta. Para todos os casos de modelagem da incerteza a resposta foi um processo estocástico. Para o caso (a) obtiveram-se valores numéricos próximos, entre os coeficientes de dispersão da resposta e do módulo de Young e altura da seção transversal. Para o caso (b) foi observado valores numéricos inferiores para o coeficiente de variação da resposta em relação aos dos coeficientes de dispersão para o módulo de Young e altura da seção transversal. A partir disso, a modelagem da incerteza via processo estocástico parametrizado apresentou menor propagação da incerteza através do modelo de viga.

O exemplo 4 difere dos anteriores, no sentido de que para este exemplo, as soluções teóricas são conhecidas, enquanto que nos outros exemplos isso não ocorria. A partir disso, com o termo de carregamento determinado com base nas soluções teóricas aplicou-se o método de Galerkin Estocástico. O desempenho das soluções numéricas aproximadas foi adequado e satisfizeram as majorações propostas no corolário 5.6. Ao examinar os resultados obtidos pode-se afirmar que as soluções numéricas para o processo estocástico de deslocamento transversal apresentaram melhores aproximações em relação as soluções numéricas para o processo estocástico de deslocamento angular.

De forma geral, a *distância* entre elementos da sequência de soluções foi "*fortemente*" majorada. É importante observar que tal comportamento deve-se ao fato de que

a diferença numérica da ordem de grandeza entre os coeficientes é muito **pronunciada**. Tal circustância decorre da natureza dos coeficientes. Enquanto que "G", um parâmetro de *Lamé*, "E" o módulo de Young, possuem a *mesma* ordem de grandeza. Por outro lado, das definições de "área" e do "momento de inércia de área", Eq. (5.2), e notando que "$b, h < 1$" apresentam-se, pelo menos, "cinco" ordens de grandezas entre estes parâmetros. Para o exemplo 1 caso (a) tem-se "$\underline{\beta}$ = 340.411374211575", "$\underline{\alpha}$ = 35193298.9954121", "$\bar{\beta}$ = 701.255292455091" e "$\bar{\alpha}$ = 72499008.6968956" observa-se, a partir da Eq. (5.20), que a discrepância dos valores numéricos se propala através das estimativas apresentadas no teorema 4.3.

Nas Tabelas 5.3-5.8, através da análise dos valores tabulados pode-se observar, em linhas gerais, o comportamento dos elementos da seqüência de Cauchy. Fixando-se $(n, q) \in \mathbb{N}^2$ os elementos da sequência $\left\{\left(w_{mp}, \psi_{mp}\right)\right\}$, com $m, p = 1, ..., 4$, observa-se que a medida que os elementos se "afastam" ocorre o "aumento" da *distância* entre os elementos. Nota-se que a *distância* entre elementos da seqüência da forma $\left(w_{mp}, \psi_{mp}\right)$ e $\left(w_{mq}, \psi_{mq}\right)$, $(m = n)$, se observaram os "menores" valores numéricos para a *distância* entre elementos.

Conclusão

Este trabalho consiste de uma pesquisa para a obtenção do título de doutorado na área de Equações Diferenciais no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, com a orientação do professor Dr. Pedro Danizete Damazio. Nesta pesquisa foram obtidos resultados teóricos e práticos para as equações de vigas de Levinson-Bickford, referentes aos seguintes problemas: **a) Vibrações Forçadas**; **b) Flexão Estocástica**. Estas equações foram deduzidas por Bickford (1982), [24], baseando-se nas hipóteses cinemáticas propostas por Levinson (1981), [68]. Bickford utilizou o **Princípio de Hamilton** para derivar as equações de movimento da viga. O **problema (a)** consiste do caso transitório, linear, relacionado a equação de viga de Levinson-Bickford, enquanto que para o **problema (b)** trata-se da equação de flexão estocástica, que é obtida através da "randomização" dos coeficientes elásticos, $(\alpha,\ \beta)$, presentes na equação de movimento, em regime estacionário. Para este problema obtém-se resultados teóricos sobre existência e unicidade de soluções fracas e um conjunto de resultados teóricos para as aproximações numéricas obtidas via *método de Galerkin Estocástico*, tais como: conjuntos totais, geração de soluções aproximadas, estimativas de erro, taxa de convergência das soluções numéricas aproximadas. Para *ilustrar* os resultados relativos as estimativas e taxas de convergência das soluções numéricas aproximadas são resolvidos quatro, (04), exemplos numéricos com incerteza nos coeficientes *elásticos* da viga. Para

a modelagem da incerteza são utilizadas variáveis randômicas ou processos estocásticos parametrizados. Para todos exemplos, as majorações propostas nas estimativas foram atendidas. Portanto neste trabalho apresentaram-se resultados de existência/unicidade de soluções para duas equações para a viga de Levinson-Bickford, estimativas de erro de soluções numéricas e suas taxas de convergência para o problema de flexão estocástica, (**problema (b)**). É importante mencionar que os resultados apresentados neste trabalho, para estas equações, são **inéditos**.

No capítulo 2 apresenta-se no **Teorema 2.1** o resultado que refere-se a existência e unicidade de soluções fortes para o **problema (a)**. Este resultado foi obtido através da aplicação do método de Faedo-Galerkin, que se desenvolve nas seguintes etapas: obtenção de soluções *globais* aproximadas de Galerkin, utilizando-se o **Lema 2.1**; estimativas a *priori*; passagem ao limite de subseqüências fraco-$\star$ convergentes; regularidade das soluções; análise das condições iniciais. O resultado de unicidade de solução foi obtido através da *técnica de contradição*. Optou-se pela utilização do método de Faedo-Galerkin pela *robustez* e utilização da sua estrutura para obter as soluções numéricas aproximadas para o problema estacionário.

No capítulo 3 apresentam-se resultados teóricos relacionados existência/unicidade de soluções fracas, análise de erro e numérica das soluções aproximadas do problema de *flexão estocástica* de vigas de Levinson-Bickford. O resultado de existência e unicidade de soluções fracas é apresentado no **Teorema 3.1**. Para obtê-lo são realizadas hipóteses relacionadas a limitação uniforme em probabilidade sobre os coeficientes elásticos e o termo de *carregamento* a fim de aplicar-se uma *versão estocástica* do teorema de Lax-Milgram, [14, 23, 31, 46, 80]. Além disso são apresentados um conjunto de definições e resultados clássicos que são combinados, adequadamente, para obter as seguintes contribuições:

Corolário 3.2, **Lema 3.1**, **Lema 3.2**, **Teorema 3.8** e **Lema 3.3**. Este conjunto de resultados tem como objetivo dar consistência e sentido às representações das soluções numéricas via *método de Galerkin Estocástico.*

No capítulo 4 apresenta-se um conjunto de resultados teóricos relacionados a análise de erro, taxas de convergências das soluções numéricas aproximadas e a formulação do *método de Galerkin Estocástico* para o problema de flexão estocástica. Estes resultados teóricos são apresentados na forma de teoremas, lemas e corolários como segue: **Corolário 4.1**, **Corolário 4.3**, **Lema 4.1**, **Lema 4.2**, **Corolário 4.5**, **Corolário 4.6**, **Corolário 4.7**, **Corolário 4.8**, **Corolário 4.9**, **Lema 4.3**, **Lema 4.4**, **Teorema 4.2**, **Teorema 4.3**, **Corolário 5.6** e **Lema 4.5**. Em particular, os resultados dos **Teorema 4.2**, **Teorema 4.3** e o **Corolário 5.6** são avaliados, através de *experimentos numéricos* no capítulo 5. O **Teorema 4.3** consiste de um resultado teórico que apresenta uma estimativa da *distância* entre dois elementos da seqüência, "$\big(w_{m_w p_w}, \psi_{m_\psi p_\psi}\big)$" e "$\big(w_{n_w q_w}, \psi_{n_\psi q_\psi}\big)$", das soluções numéricas aproximadas. Este resultado apresenta as parcelas relativas aos erros cometidos decorrentes das aproximações dos espaços "$H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)$" e "$L^2\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}\big)$", pelo truncamento de conjuntos totais enumeráveis nestes espaços. Isto evidencia a "*estrutura tensorial*", para a representação, via isomorfismo, de elementos de "$L^2\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_{\boldsymbol{\Xi}}; H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)\big)$". O "*comportamento estocástico*" das soluções numéricas aproximadas é representado por *polinômios generalizados de caos.* Enquanto que o "*comportamento determinístico*" é representado por um conjunto de funções, com cardinalidade finita, de um conjunto total em $H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)$. Para esta representação comete-se um erro de aproximação. Para obter as estimativas para este erro, utilizam-se estimativas para os coeficiente de Fourier das soluções teóricas. É importante destacar que no lema 4.6 e teorema 4.4 apresentam-se resultados relativos a convergência e taxas para a função valor esperado obtida a partir

das aproximações numéricas para o processo estocástico de deslocamento. Em particular no teorema 4.4 mostra-se que o erro da função valor esperado depende apenas da *qualidade* da aproximação no *espaço de parâmetros*, (*comportamento espacial*). Ou seja o desempenho das soluções numéricas, para aproximação da função valor esperado, depende do método numérico utilizado para a geração do espaço de aproximação.

No capítulo 5 são obtidas soluções numéricas aproximadas, via método de Galerkin Estocástico, para quatro problemas de flexão estocástica da viga de Levinson-Bickford. No primeiro exemplo, a incerteza está no módulo de Young, enquanto que no segundo exemplo está sobre a "*altura da viga*". São avaliados os resultados apresentados no **Teorema 4.3**, para dois elementos de uma seqüência de solucões aproximadas. Para todos exemplos a desigualdade apresentada neste teorema **não foi violada**. Observou-se na seção "*Síntese dos Resultados*" que os valores numéricos dispares para os coeficientes elásticos influenciam no desempenho destas estimativas. Em termos práticos, para os modelos de incerteza utilizados nos exemplos apresentados, satisfazendo as hipóteses H1-H4, as soluções numéricas obtidas **concordaram** com os resultados teóricos. De forma geral, para o caso (a), em que a incerteza é representada por um *modelo afim*, os resultados indicaram um desempenho satisfatório das aproximações numéricas obtidas com "*poucos*" polinômios de caos. Enquanto que para o *modelo exponencial*, em geral, para se atingir uma aproximação estipulada em termos da *distância* entre elementos da seqüência, foram necessários mais elementos para a base do espaço de aproximação. Em particular para o exemplo 1, caso (a) - modelo afim, a distância entre os elementos da seqüência de aproximação não apresenta redução sensível, em relação ao modelo exponencial. Isto evidencia a influência do modelo de incerteza no desempenho do método de Galerkin Estocástico na representação de soluções numéricas aproximadas. Para os modelos de incerteza utilizados no capítulo 5 a condição necessária para o **Lema 4.4** é restritiva do ponto de vista

da capacidade e desempenho dos polinômios generalizados de caos. Neste exmeplo, para o modelo de incerteza do tipo variável randômica para o módulo de Young o processo estocástico de deslocamento apresentou maior dispersão que para a modelagem feita via processo estocástico parametrizado. Apesar disso, os maiores tempos de computação para as soluções numéricas aproximadas foram para a modelagem da incerteza, nos coeficientes "α" e "β", através de processos estocásticos parametrizados. O exemplo 2 apresenta valores numéricos superiores para variância dos processos estocásticos de solução. Isto indica que quando a incerteza está sobre o parâmetro geométrico relacionado a "*altura da viga*" a dispersão *induzida* no coeficiente elástico "β" propaga-se mais "*intensamente*", do que para o exemplo 1. Apesar disso, o valor esperado e variância dos processos estocásticos de deslocamentos transversal e angular obtidos a partir das aproximações numéricas apresentaram resultados adequados. O *tempo de computação* aumenta sensivelmente a medida que acrescentam-se mais elementos na base do espaço de aproximação. Por outro lado, deve-se observar que foram constatados desvios discretos nas *distâncias* entre elementos da seqüência de aproximação, (**Teorema 4.3**). Desta forma, comparando-se os resultados numéricos das distâncias para diferentes dimensões dos subespaços de aproximação são obtidos bons resultados em termos da distância, com poucos elementos para base. Consequentemente, para estes subespaços, os tempos de computação são menores viabilizando a utilização do método de Estocástico de Galerkin para estes casos. No exemplo 3 apresenta-se um modelo de incerteza que **não atende** a hipótese H4, a partir disso, propõe-se a redefinição do modelo de incerteza para que a hipótese H4 seja satisfeita. A partir disso, através de uma *transformação afim* redefine-se os elementos da base dos *polinômios generalizados de caos.* O exemplo 4 teve como objetivo avaliar o desempenho das majorações propostas no **Corolário 5.6**. Diferentemente dos exemplos anteriores, em que a solução teórica não era conhecida. Para este exemplo utilizando-se uma escolha para o

processo estocástico de deslocamento transversal, obteve-se com o auxílio do "*método dos coeficientes a determinar*", a solução teórica para o processo estocástico de deslocamento angular. Desta forma, determina-se o "*carregamento mecânico*" compatível com o campo de deslocamentos da viga. Neste exemplo a incerteza estava sobre o módulo de Young, sendo modelada por uma variável randômica obtida via uma transformação *afim*. As majorações foram atendidas e obtiveram-se resultados satisfatórios. As soluções numéricas aproximadas para o processo estocástico de deslocamento transversal, apresentaram melhores aproximações para as respectivas funções valor esperado e variância. Observou-se melhores aproximações para as soluções numéricas obtidas com espaços de aproximação com dimensão maior. A estratégia utilizada para obter este exemplo mostra-se atraente, no sentido de envolver técnicas conhecidas e ter como resultado soluções teóricas para um problema com incerteza.

Além disso, o trabalho apresentou uma aplicação não usual, porém conhecida, [67], de equações diferenciais estocásticas. Esta aplicação traz consigo a necessidade do emprego de resultados mais abstratos pertencentes a *Teoria da Medida*. Apesar disso, se ampliarmos os *ambientes* em que residem objetos, tais como, o domínio de definição dos operadores, modelagem dos coeficientes, termos fontes, tornam-se fundamentais as *generalizações* das definições, operações e resultados *consagrados* nas aplicações usuais de equações diferenciais em *espaços de Sobolev*. Neste contexto, resultados recentes e avançados desempenham um *papel fundamental* para estas aplicações já conhecidas, mas ainda não presentes nas *rotinas* dos cursos de *Teoria da Medida* e *Equações Diferenciais*. Por exemplo, a propriedade de *Radon Nikodin*, (RNP), para espaços de Banach, descoberta nos anos 70's, está estreitamente relacionada a caracterizações e resultados tais como dualidade, separabilidade e compacidade em espaços "$L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$", [41]. A partir disso, estes resultados, não tão *corriqueiros* tem estensão natural a espaços de So-

bolev, "$W^{m,p}(\Omega, \Sigma, \mu; X)$", para *funções vetoriais* definidos em espaços de medidas mais abstratos que a medida, usual, de *Borel-Lebesgue*, "$\big([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda\big)$". A partir disso existem, no mínimo, muitas aplicações e oportunidades de pesquisa "*em aberto*" no que tange, apenas em aplicações.

Trabalhos Futuros

Neste trabalho obtiveram-se resultados teóricos sobre existência e unicidade de soluções para os problemas de Vibrações Forçadas e Flexão Estocástica para viga de Levinson-Bickford. Este modelo de viga pertence as chamadas "Teorias de Ordem Superior" e incorpora, em sua proposta, a modelagem do efeito das tensões cisalhantes. Atualmente existem outras teorias de ordem superior, que trazem novas propostas para tratar as tensões cisalhantes e, além disso, captam outros efeitos tais como: inércia rotacional, "empenamento" das seções transversais, [57]. A partir disso citam-se algumas **propostas para trabalhos futuros**:

1. Reproduzir os resultados teóricos sobre existência e unicidade, estimativas de erro de soluções numéricas, taxas de convergência obtidos neste trabalho a **novas** teorias de flexão de vigas e equações de movimento.

2. Aplicar o método de **Semigrupos** para obter resultados de existência, unicidade e conseguir resultados teóricos sobre o **comportamento assintótico** das soluções para equação de movimento relativa ao problema de de Vibrações Forçadas da viga de Levinson-Bickford.

3. **Acrescentar** *termos não-lineares* na equação de movimento da viga de Levinson-Bickforde e aplicar o método de Faedo-Galerkin para obter a existência e unicidade

de soluções.

4. **Aplicar** o método Estocástico de Galerkin ao problema de Vibrações Forçadas, e a randomização desta equação através de seus coeficientes, Eq. (2.1).

5. Do ponto de vista da modelagem da incerteza, atualmente, esforços estão sendo direcionados na modelagem de processos estocástico não gaussianos, em vista disso, desenvolver **novas** proposições para modelagem da incerteza.

6. Muitos resultados podem ser obtidos, no sentido da avaliação e estimativas de erro das representações obtidas via *polinômios generalizados de caos*. Neste trabalho a geração de subespaços densos em "$H_0^2(0,l)$" e "$H_0^1(0,l)$" é feita por conjuntos totais ortonormais de dimensão finita, em vista disso, aplicar o **método dos elementos finitos** para geração dos "*subespaços de aproximação*".

7. Em detrimento dos tempos de computação serem elevados, utilizar o **método de Colocação** para *discretização* dos espaços de parâmetros ou estocástico.

8. As estimativas da distância entre soluções numéricas aproximadas, como mencionado, nos capítulos 4 e 5, baseados nos resultados teóricos apresentou restrições e, para os exemplos propostos apresentaram pouca acurácia, desta forma cabe **melhorar** as estimativas no sentido de produzir melhores aproximações com menos restrições com relação a coeficientes de dispersão das propriedades elásticas, ("α" e "β").

9. **Adicionar** a equação do problema de Flexão Estocástica de viga de Levinson-Bickford, termos não lineares, como por exemplo, termos difusivos e reativos, não lineares, correspondentes aos modelos de Pasternak e Winkler, respectivamente, para fundações de vigas.

10. A extensão natural dos resultados obtidos neste trabalho ao problema de **Flexão Estocástica de Placas de Reddy-Levinson**.

Referências Bibliográficas

Bibliografia

[1] ABBAS, B. A. H.; THOMAS, J.; *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration 51, p. 123-137, 1977.

[2] ADAMS, R. A.; *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[3] AGMON, S.; DOUGLIS, H.; NIRENBERG, L; *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 17, 35-92, 1964.

[4] ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; *Classical orthogonal polynomials*, Polynomes Orthogonaux et Applications, Lecture Notes in Mathematics 1171, Springer, 1985.

[5] ASKEY, R.; WILSON, J.; *Some Basic Hypergeometric Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials*, Memoirs of the American Mathematical Society, n. 319, Providence, RI, 1985.

[6] ARNOLD, L.; *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Wiley Interscience, New York, p. 244, 1973.

[7] AUBIN, J. P.; *Approximation of elliptic boundary value problems*, Wiley Interscience, New York, 1972.

[8] ÁVILA, S. Jr., C. R.; *Application of the Galerkin method to stochastic bending of Kirchhoff plates*, Doctoral Thesis, Department of Mechanical Engineering, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil, 2004.

[9] ÁVILA, S. Jr., C. R.; BECK, A. T.; ROSA, E.; *Solution of the Stochastic Beam Bending Problem by Galerkin Method and the Askey-Wiener Scheme*, Latin American Journal of Solids and Structures, n. 6, p. 51-72, 2009.

[10] ÁVILA, S. Jr., C. R.; BECK, A. T.; *Chaos-Galerkin Solution of Stochastic Timoshenko Bending Problems*, Computers Structures 89, p. 599-611, 2011.

[11] ÁVILA S. Jr., C. R.; BECK, A. T.; *A Fast Convergence Parameter for Monte Carlo - Neumann Solution of Linear Stochastic Systems*, ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering, v. 1, p. 1-9, 2015.

[12] AZEVEDO, J. S.; WISNIEWSKI, F.; OLIVEIRA, S. P.; *A Galerkin method with two-dimensional Haar basis functions for the computation of the Karhunen-Loève expansion*, Computational and Applied Mathematics, v. 37, n. 2, p. 1825-1846, 2018.

[13] BABUSKA, I.; CHATZIPANTELIDIS, P; *On solving elliptic stochastic partial differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 191, n. 3738, p. 4093-4122, 2002.

[14] BABUSKA, I.; TEMPONE, R.; ZOURARIS, G. E.; *Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, v. 42, n. 2, p. 800825, 2004.

[15] BILLINGSLEY, P.; *Probability and Measure*, JOHN WILEY SONS, 3a ed., p. 266, 1986.

[16] BABUSKA, I.; NOBILE, F.; TEMPONE, R.; *A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data*, SIAM Journal on Numerical Analysis v. 45, n. 3 , p. 1005-1034, 2007.

[17] BACHMAYR, M.; COHEN, A.; MIGLIORATI, G.; *Representations of Gaussian Random Fields and Approximation of Elliptic PDEs with Lognormal Coefficients*, Journal of Fourier Analysis and Applications, n. 68, 2017.

[18] BÄCK, J.; NOBILE, F.; TAMELLINI, L.; TEMPONE, R.; *Stochastic spectral Galerkin and collocation methods for PDEs with random coefficients: A numerical comparison*, Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations, eds. J. S. Hesthaven and E. M. Ronquist, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, v. 76, p. 4362, 2011.

[19] BAUER, H.; *Probability Theory*, ed. Walter de Gruyter, Berlin, p. 540, 1996.

[20] BECK, J.; NOBILE, F.; TAMELLINI, L.; TEMPONE, R.; *Convergence of quasi-optimal stochastic Galerkin methods for a class of PDEs with random coefficients*, Computers Mathematics with Applications, v. 67, n. 4, p. 732751, 2014.

[21] BECK, J.; TEMPONE, R.; NOBILE, F.; TAMELLINI, L.; *On the Optimal Polynomial Approximation of Stochastic PDES by Galerkin and Collocation Methods*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, v. 22, n. 9, 2012.

[22] BELLMAN, R. E.;*Dynamic programming*, Princeton University Press, p. 363, 1957.

[23] BESPALOV, A.; POWELL, C. E.; SILVESTER, D.; *A Priori Error Analysis of Stochastic Galerkin Mixed Approximations of Elliptic PDEs with Random*

Data, SIAM Journal on Numerical Analysis, v. 50, n. 4, p. 20392063, 2012.

[24] BICKFORD, W. B.; *A consistent higher order beam theory*, Developments Theoretical and Applied Mechanics, 11, p. 137150, 1982.

[25] BIERI, M.; ANDREEV, R.; SCHWAB, CH.; *Sparse tensor discretization of elliptic PDEs*, SIAM Journal on Scientific Computing, v. 31, n. 6, p. 42814304, 2009.

[26] BIERI, M.; SCHWAB, CH.; *Sparse high order FEM for elliptic sPDEs*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, n. 198, p. 11491170, 2009.

[27] BOCCHINI, P.; DEODATIS, G.; *Critical Review and Latest Developments of a Class of Simulation Algorithms for Strongly Non-Gaussian Random Fields*, Probabilistic Engineering Mechanics, v. 23, p. 393-407, 2008.

[28] BOUBARKI, N.; *Intégration*, Hermann, Paris, 1966.

[29] BONIZZONI, F.; NOBILE, F.; *Perturbation Analysis for the Darcy Problem with Log-Normal Permeability*, SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, v. 2, n.1, p. 223-244, 2014.

[30] BREZIS, H.; *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer Science Business Media, New York, 2010.

[31] BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R.; *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer Verlag, New York, 1994.

[32] CAMERON, R. H.; MARTIN, W. T.; *The Orthogonal Development of Nonlinear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals*, Annals of Mathematics, n. 48, p. 385, 1947.

[33] CHIHARA, T. S.; *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[34] COHEN, A.; DEVORE, R.; SCHWAB, C.; *Convergence rates of best n-term Galerkin approximations for a class of elliptic sPDEs*, Foundations of Computational Mathematics, v. 10, p. 615646, 2010.

[35] COHEN, A.; DEVORE, R.; SCHWAB, C.; *Analytic regularity and polynomial approximation of parametric and stochastic PDEs*, Analysis and Applications, v. 10, n. 1, p. 1147, 2011.

[36] COHEN, A.; CHKIFA, M. A., R.; SCHWAB, C.; *Breaking the curse of dimensionality in sparse polynomial approximation of parametric PDEs*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, v. 103, n. 2, p.400-428, 2015.

[37] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N.; *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, p. 441, 1955.

[38] CHRISTAKOS, G.; *Random Field Models in Earth Sciences*, Dover Publications, p. 512, 2005.

[39] DAI, H.; ZHENG, Z.; MA, H.; *An explicit method for simulating non-Gaussian and non-stationary stochastic processes by Karhunen-Loève and polynomial chaos expansion*, Mechanical Systems and Signal Processing, n. 115, p. 113, 2019.

[40] DAVIS, P. J.; *Interpolation and Approximation*, Dover, p. 410, 1975.

[41] DIESTEL, J.; UHL, J. J.; *Vector measures*, Mathematical Surveys and Monongraphs 15, American Mathematical Society, p. 335, 1977.

[42] DOLGOV, S.; KHOROMSKIJ, B. N.; LITVINENKO, A.; MATTHIES, H. G.; *Polynomial Chaos Expansion of Random Coefficients and the Solution of Sto-*

chastic Partial Differential Equations in the Tensor Train Format, SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, v. 3, n. 1, p. 1109-1135, 2015.

[43] COHN, D. L.; *Measure Theory*, Springer New York, Second Edition, p. 466, 2013.

[44] EIGEL, M.; GITTELSON, C.; SCHWAB, CH.; ZANDER, E.; *Adaptive stochastic Galerkin FEM*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, n. 270, p. 247-269, 2014.

[45] ERNST, O. G.; MUGLER, A.; STARKLOFF, H. J.; ULLMANN, E.; *On the convergence of generalized polynomial chaos expansions*, ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis, v. 46, n. 02, p. 317-339, 2012.

[46] ERNST, O. G.; SPRUNGK, B.; *Stochastic Collocation for Elliptic PDEs with Random Data: The Lognormal Case*, Sparse Grids and Applications, p. 29-53, 2012.

[47] EVANS, L. C.; *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[48] FIELD, R. V.; GRIGORIU, A. M.; *On the accuracy of the polynomial chaos approximation*, Probabilistic Engineering Mechanics, v. 19, p. 6580, 2004.

[49] FRAUENFELDER, P.; SCHWAB, C.; TODOR, R. A.; *Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, n. 194, p. 205228, 2005.

[50] GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V.; *Calculus of Variations*, Prentice Hall, 1963.

[51] GITTELSON, C. J.; *Adaptive Galerkin methods for parametric and stochastic operator equations*, Ph.D. thesis, ETH Zürich, 2011, ETH Dissertation No. 19533, 2011.

[52] GITTELSON, C. J.; *Stochastic Galerkin approximation of operator equations with infinite dimensional noise*, Tech. Report 2011-10, Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich, 2011.

[53] GITTELSON, C. J.; *An adaptive stochastic Galerkin method for random elliptic operators*, Mathematics of Computation, v. 82, n. 283, p. 15151541, 2013.

[54] GHANEM, R.; SPANOS, P. D.; *Stochastic Finite Element Expansion for Random Media*, Journal of Engineering Mechanics, v. 115, n. 5, p. 1035-1053, 1989.

[55] GHANEM, R.; SPANOS, P. D.; *Spectral Stochastic Finite-Element Formulation for Reliability Analysis*, Journal of Engineering Mechanics, v. 117, n. 10, p. 2351-2372, 1991.

[56] GRIGORIU, M.; *Stochastic Calculus Applications in Science and Engineering*, Springer Science, p. 784, 2002.

[57] GHUGAL; Y., M.; SHARMA; R. A; *A refined shear deformation theory for flexure of thick beams*, Latin American Journal of Solids and Structures, v.8, n.2, 2011.

[58] HOANG, V. H.; SCHWAB, C.; *N-Term Wiener Chaos Approximation Rates for Elliptic PDES with Lognormal Gaussian Random Inputs*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences v. 24, n. 4, p. 797-826, 2014.

[59] HONDA, R.; GHANEM R.; KITAHARA, M.; *Spectral Stochastic Finite Element Method for Log-Normal Uncertainty*, Journal of Applied Mechanics, v. 7, p. 391-398, 2004.

[60] HÖRMANDER, L.; *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Third ed., North Holland Mathematical Library, North Holland, p. 268, 1990.

[61] HORN, R. A.; JOHNSON, C. R.; *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2013.

[62] HUANG, H.; QUEK, S.; PHOON K.; *Convergence study of the truncated Karhunen Loeve expansion for simulation of stochastic processes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 52, n. 9, p. 10291043, 2001.

[63] JANSON, S.; *Gaussian Hilbert Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, p. 340, 1997.

[64] KESAVAN, S.; *Topics in functional analysis and applications*, Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[65] KOEKOEK, R.; SWARTTOUW, R. F.; *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Delft University of Technology, 1998.

[66] KREYSZIG, E.; *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, New York, p. 708, 1978.

[67] KREUTER, M.; *Sobolev Spaces of Vector-valued Functions*, Master Thesis, Ulm University Faculty of Mathematics and Economies, p. 69, 2015.

[68] LEVINSON, M.; *A new rectangular beam theory*, Journal of Sound and Vibration, n. 74, p. 81-87, 1981.

[69] LEVINSON, M.; *On Bickford's consistent higher order beam theory*, Mechanics Research Communications, v. 12, n. 1, p. 1-9, 1985.

[70] LI, N.; ZHAO, J.; XINLONG, F.; GUI, D.; *Generalized polynomial chaos for the convection diffusion equation with uncertainty*, International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 97, n. 1, p. 289-300, 2016.

[71] LIGHT, W. A.; CHENEY, E. W.; *Approximation Theory in Tensor Product Spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p. 158, 1985.

[72] LIMA, E. L.; *Espaços Métricos*, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, p. 299, 1977.

[73] LIMA, E. L.; *Álgebra Linear*, IMPA, Rio de Janeiro, p. 357, 2014.

[74] LIONS, J. L.; *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineaires*, Gauthier - Villars, Paris, 1969.

[75] MA, T. W.; *Banach-Hilbert Spaces, Vector Measures and Group Representations*, World Scientific, p. 622, 2002.

[76] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H.; *Iniciação aos espaços de Sobolev*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[77] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H.; *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais*, Textos de Métodos Matemáticos nº9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[78] MIKHLIN, S. G.; *The Numerical Performance of Variational Methods*, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, Netherlands, 1971.

[79] MORTICI, C.; *Orthogonal Basis in Sobolev Space* $H_0^1(a,b)$, STUDIA UNIV. BABES¸BOLYAI, MATHEMATICA, v. XLIX, n. 2, 2004.

[80] MUGLER, A.; STARKLOFF, H. J.; *On elliptic partial differential equations with random coefficients*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, v. 56, n. 2, p. 473-487, 2011.

[81] OKSENDAL, B.; *Stochastic Differential Equations an Introduction with Applications*, Sixth Edition, Springer, p. 360, 2004.

[82] OZEN, H. C.; BAL, G.; *A dynamical polynomial chaos approach for long-time evolution of SPDEs*, Journal of Computational Physics, v. 343, n. 15, p. 300-323, 2017.

[83] PETTERSSON, P.; TCHELEPI, H. A.; *Stochastic Galerkin framework with locally reduced bases for nonlinear two-phase transport in heterogeneous formations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 310, p. 367-387, 2016.

[84] POPESCU, R.; DEODATIS, G.; PREVOST, J. H.; *Simulation of homogeneous non - Gaussian stochastic vector fields*, Probabilistic Engineering Mechanics, v. 13, n. 1, p. 113, 1998.

[85] RAO, M. M.; RANDALL, J. S.; *Probability Theory with Applications*, Springer, 2nd edition, p. 530, 2006.

[86] RAYMOND, X. S.; *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, CRC Press, p. 118, 1991.

[87] REED, M.; SIMON, B.; *Methods of Mathematical Physics: Functional Analysis*, v. 1, Academic Press, 1980.

[88] RIVERA, J. E. M.; *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* Textos Avançados, LNCC, Rio de Janeiro, 1999.

[89] RUPERT, C. P.; MILLER, C. T.; *An analysis of polynomial chaos approximations for modeling single-fluid-phase flow in porous medium systems*, Journal of Computational Physics, v. 226, n. 2, p. 2175-2205, 2007.

[90] SAKAMOTO, S.; GHANEM, R.; *Polynomial chaos decomposition for the simulation of non-gaussian nonstationary stochastic processes*, Journal of Engineering Mechanics, v. 128, n. 2, p. 190-201, 2002.

[91] SCHEVENELS, M.; LOMBAERT, G.; DEGRANDE, G.; CLOUTEAU, D.; *The wave propagation in a beam on a random elastic foundation*, Probabilistic Engineering Mechanics, v. 22, p. 150-158, 2007.

[92] SCHWAB, C.; TODOR, R. A.; *Karhunen - Loève approximation of random fields by generalized fast multipole methods*, Journal of Computational Physics, v. 217, n. 1, p. 100-122, 2006.

[93] SCHOUTENS, W.; *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*, Springer, New York, 2000.

[94] SOARES; M. G.; *Cálculo em uma Variável Complexa*, IMPA, p. 196, 2009.

[95] SULLIVAN, T. J.; *Introduction to Uncertainty Quantification*, Springer, 2015.

[96] SHI, W.; ZHANG, C.; *Generalized polynomial chaos for nonlinear random delay differential equations*, Applied Numerical Mathematics, v. 115, p. 16-31, 2017.

[97] SOONG, T. T.; GRIGORIU, M.; *Random vibration of mechanical and structural systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1993.

[98] SZEGÖ, G.; *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1939.

[99] WANG, C. M.; REDDY, J. N.; LEE, K. H.; *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*, Kidlington (UK), Elsevier, 2000.

[100] WIENER, N.; *The Homogeneous Chaos*, American Journal of Mathematics, n. 60, p. 897936.

[101] TODOR, R. A.; SCHWAB, C.; *Convergence rates for sparse chaos approximations of elliptic problems with stochastic coefficients*, IMA Journal of Numerical Analysis, v. 27, n. 2, p. 232-261, 2007.

[102] TRUESDELL, C.; *The rational mechanics of exible or elastic bodies*, Vendi-tioni Exponunt Orell Fussli Turici, 1960.

[103] TIMOSHENKO, S. P.; *History of strength of materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.

[104] TIMOSHENKO, S. P.; *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*, Philosophical, Magazine, v. 43, p. 122-131, 1922.

[105] ULLMANN, E.; ELMAN, H. C.; ERNST, O. G. ; *Efficient iterative solvers for stochastic Galerkin discretizations of log-transformed random diffusion problems*, SIAM Journal on Scientific Computing, v. 34, p. 659 - 682, 2012.

[106] XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E.; *Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, n. 191, p. 4927-4948, 2002.

[107] XIU, D.; LUCOR, D.; SU, C.H.; KARNIADAKIS, G.E.; *Stochastic modeling of flow-structure iterations using generalized polynomial chaos*, Journal of Fluids Engineering, n. 124, p. 51 - 59, 2002.

[108] XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E.; *The Wiener Askey polynomial chaos for stochastic differential equations*, SIAM Journal on Scientific Computing, n. 24, p. 619 644, 2002.

[109] XIU, D.; HESTHAVEN, J. S.; *High-order collocation methods for differential equations with random inputs*, SIAM Journal on Scientific Computing, n. 27, p. 1118 1139, 2005.

[110] XIU, D.; SHEN, J.; *Efficient stochastic Galerkin methods for random diffusion equations*, Journal of Computational Physics, n. 228, p. 266 281, 2009.

[111] YAMAZAKI, F.; SHINOZUKA, M.,; *Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields*, Journal of Engineering Mechanics, n. 114, p. 1183-1197, 1988.

[112] ZEIDLER, E.; *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A: Linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York Inc., 1990.

[113] ZENISEK, A.; *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and their Finite Element Approximations*, Academic Press Ltd., London, 1990.