UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALINE CRISTINA AZZOLIN DE SOUSA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO: ESQUEMAS UTILIZADOS POR ESTUDANTES DE UM TERCEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE CURITIBA

CURITIBA
2018

ALINE CRISTINA AZZOLIN DE SOUSA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO: ESQUEMAS UTILIZADOS POR ESTUDANTES DE UM TERCEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE CURITIBA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção de título de Mestre em Educação.

Orientadora: Profª. Drª. Neila Tonin Agranionih

CURITIBA
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR-BIBLIOTECA DO CAMPUS REBOUÇAS
TANIA DE BARROS BAGGIO, CRB 9/760
COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Sousa, Aline Cristina Azzolin de
Resolução de problemas de divisão : esquemas utilizados por estudantes de um terceiro ano do ensino fundamental de Curitiba / Aline Cristina Azzolin de Sousa. – Curitiba, 2018.
190f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação
Orientador: Profª Drª Neila Tonin Agranionih
Inclui referências, apêndices e anexos

1. Matemática – Ensino fundamental. 2. Matemática – Ensino e estudo. 3. Prática de ensino. I. Universidade Federal do Paraná. II. Título.

CDD 510.07

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO: TEORIA E PRÁTICA DE ENSINO

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO: TEORIA E PRÁTICA DE ENSINO da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado Profissional de **ALINE CRISTINA AZZOLIN DE SOUSA**, intitulada: **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO: ESQUEMAS UTILIZADOS POR ESTUDANTES DE UM TERCEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE CURITIBA**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa. A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 27 de agosto de 2018.

NEILA TONIN AGRANIONIH (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

TANIA TERESINHA BRUNS ZIMER (UFPR)

ETTIÊNE CORDEIRO GUÉRIOS (UFPR)

p/

ALINA GALVÃO SPINILLO (UFPE)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, por ter me dado a permissão de chegar até aqui, e por toda a força concedida na concretização desta etapa. Além disso, agradeço a Ele por todas as pessoas que cruzaram meu caminho e que estão ou não aqui citadas. Dentre elas a Professora Doutora Neila Tonin Agranionh por ter me aceitado, sem ao menos me conhecer, e por ter acreditado em mim, pela confiança, pelos conselhos, pela amizade e por toda a paciência dedicada a mim durante cada uma das orientações.

Aos meus pais, Luiz e Tania, minhas bases, simplesmente por terem me feito existir, por tanto amor, por tudo o que sou, por cada oração, por terem me proporcionado educação e amor pelos estudos, e, apesar das inúmeras dificuldades, por sempre me estimularem a continuar.

Aos meus filhos, Lorenzo e Enrico, por compreenderem os momentos de ausência e a falta de paciência causada pelo cansaço e pelas noites mal dormidas e ao meu marido, Herisson, pela sua incansável boa vontade em me ajudar, incentivando-me a prosseguir.

Este trabalho certamente não seria o mesmo sem a contribuição dos amigos da turma do Mestrado Profissional em Educação da UFPR e do GPEACM, meu agradecimento por todas as discussões, encontros, dicas e principalmente pelas mensagens de apoio que fizeram toda a diferença nos momentos mais difíceis.

Aos estudantes que participaram da pesquisa e aos seus responsáveis que confiaram no meu trabalho e autorizaram a realização desta pesquisa. Sem vocês nada disso seria possível.

A direção da Escola onde trabalho, Ariana do Rocio Zem e Cristiane Rautt, pelo total apoio desde o início do ingresso no Mestrado bem como a confiança para a realização desta pesquisa na instituição.

A todos os amigos e familiares que não foram citados nesta lista de agradecimentos, mas que de uma forma ou de outra contribuíram não apenas para a minha dissertação, mas também para eu ser quem sou.

"Ninguém pode ser um caderno vazio, todos nascem pra contribuir e transformar a história!"

Paulo Freire

RESUMO

O trabalho tem como base a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud e tem como objetivo analisar as contribuições de uma intervenção pedagógica para a modificação dos esquemas de resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional de crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba-PR. A pesquisa envolveu uma intervenção composta de três etapas: entrevista inicial, ação didática, entrevista final. A coleta de dados foi realizada com 5 estudantes, sorteados dentre os 30 que participaram da ação didática, com os quais foram realizadas as entrevistas inicial e final. Nas entrevistas foram aplicados 4 problemas de divisão envolvendo as ideias de quotição e partição. A ação didática, que teve duração de 12 horas-aula, envolveu, além destes tipos de problemas, atividades de composição e decomposição de valores monetários. Na análise de dados buscou-se identificar os esquemas e os invariantes operatórios presentes nas resoluções dos estudantes.
A análise qualitativa evidenciou que estes alunos valeram-se dos seguintes esquemas tanto nas resoluções utilizando materiais diversos como naquelas em que só poderiam utilizar as cédulas e os objetos referidos no problema: distribuição um a um; recontagem das quantidades já apresentadas no problema; contagem a partir de um dado fator; dupla contagem; adições repetidas; subtrações repetidas; metades; conhecimento de fatos multiplicativos e partição e partição associada com produto, representação pictórica; e correspondência um para muitos. Utilizaram, ainda, os seguintes os esquemas: respostas sem explicação e decomposição de quantidades ao resolverem problemas tendo somente as cédulas como apoio para a resolução. As contribuições da intervenção pedagógica para a modificação dos esquemas de resolução de problemas foram evidentes, uma vez que para todos os estudantes que participaram da pesquisa houve ampliação do repertório de esquemas para as resoluções dos problemas de divisão.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Campo Conceitual Multiplicativo. Divisão. Esquemas. Invariantes operatórios.

ABSTRACT

The work is based on the Theory of Conceptual Fields proposed by Gérard Vergnaud and aims to analyze the contributions of a pedagogical intervention for the modification of the problem solving schemes of division involving the National Monetary System of children of a 3rd year of Elementary Education of the city of Curitiba-PR . The research involved an intervention composed of three stages: initial interview, didactic action, final interview. Data collection was carried out with 5 students, drawn from among the 30 who participated in the didactic action, with whom the initial and final interviews were conducted. In the interviews were applied 4 problems of division involving the ideas of quotation and partition. The didactic action, which lasted 12 hours, involved, besides these types of problems, activities of composition and decomposition of monetary values. In the data analysis we tried to identify the schemas and the operative invariants present in the students' resolutions. The qualitative analysis revealed that these students used the following schemes both in the resolutions using different materials and in those in which they could only use the notes and the objects mentioned in the problem: distribution one by one; recount of quantities already presented in the problem; counting from a given factor; double counting; repeated additions; repeated subtraction; halves; knowledge of multiplicative facts and partition and partition associated with product, pictorial representation; and correspondence one to many. They used the schemes: unanswered answers and decomposition of quantities when solving problems with only the ballots as support for resolution. The contributions of the pedagogical intervention to the modification of the problem solving schemes were evident since for all the students who participated in the research there was an expansion of the repertoire of schemes for the resolutions of the problems of division.

Keywords: Troubleshooting. Multiplicative Conceptual Field. Division. Schemes. Operative invariants.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO[1]

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB é um indicador de qualidade educacional que combina informações de desempenho em exames padronizados, como a Prova Brasil e o Saeb (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica). O impacto dos resultados destes exames para a comunidade em geral são motivos de considerações de Vianna, que argumenta a pouca influência dos resultados na comunidade escolar:

> Outro problema a considerar, no caso do SAEB, relaciona-se à validade conseqüencial, que se refere ao impacto da avaliação sobre o sistema, determinando mudanças de pensamento, gerando novos comportamentos, formando novas atitudes e promovendo novas ações. A validade conseqüencial reflete em que medida a avaliação faz realmente alguma diferença para a comunidade. Até agora a influência do SAEB, na nossa visão, tem sido bastante restrita na comunidade escolar, em que pese o sucesso jornalístico, com a publicação dos seus resultados nos vários órgãos da mídia. (VIANNA, 2003 p. 54)

Todavia são essas as avaliações atualmente utilizadas como ponto de partida para o planejamento de políticas públicas e de metas a serem alcançadas no país, conforme Souza (2011)

> Os resultados das avaliações em larga escala são um dos indicadores de avanços e deficiências das redes e escolas e trazem evidências da eficácia das próprias políticas implementadas. Embora não se possa restringir a formulação de propostas e ações educacionais aos resultados de desempenho de alunos em testes, esses se constituem em um elemento importante a ser considerado no planejamento, desde o nível central das Secretarias de Educação até as escolas. Os testes, tal como vêm sendo delineados, em geral, propiciam uma análise de habilidades dos alunos do Ensino Fundamental e médio em língua portuguesa e matemática. (SOUZA, 2011 p. 312-313)

Conforme informações obtidas no site do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Nacionais Anísio Teixeira)[2], no Brasil o Sistema de Avaliação da Educação Básica – Saeb é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala criado em 1990, com o objetivo de realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de fatores que possam interferir no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino ofertado.

---

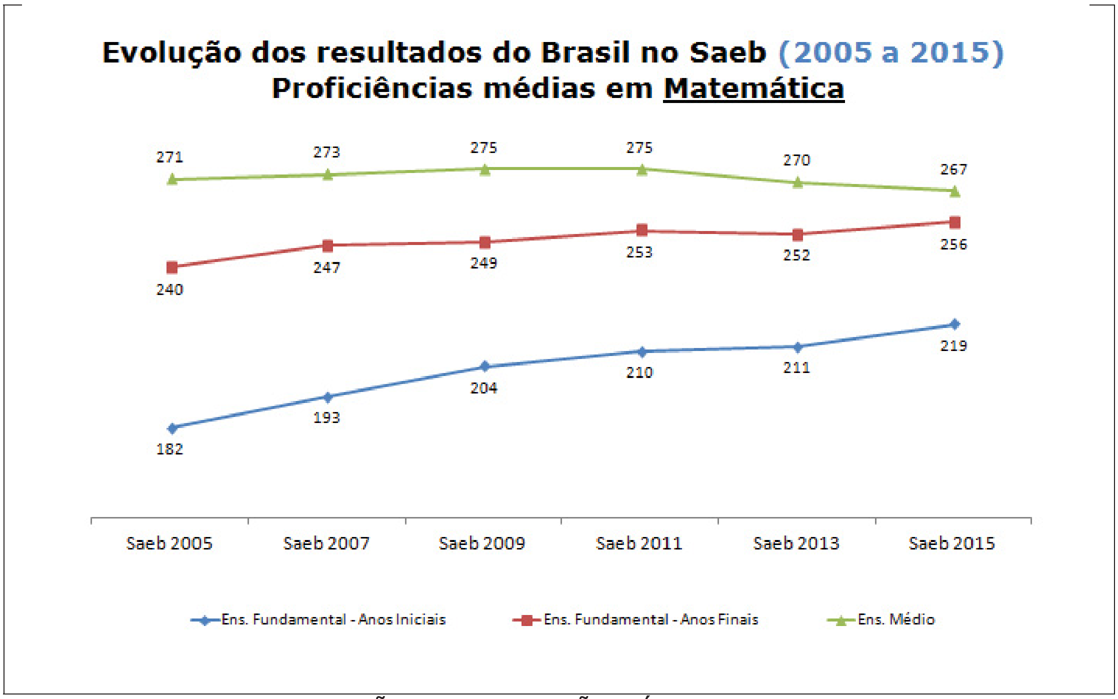
[1] As normas técnicas utilizadas nesta dissertação são as do Manual de Normatização de Documentos científicos da UFPR- 2015/2017.

[2] INEP. Disponível em: http://portal.inep.gov.br Acesso em: 10 mar. 2018.

Os dados fornecidos pelo Saeb permitem a formulação, reformulação e o monitoramento das políticas públicas nas esferas municipal, estadual e federal, visando contribuir para a melhoria da qualidade, equidade e eficiência do ensino. Tais dados também fornecem indicadores sobre fatores de influência do desempenho dos alunos nas áreas e anos avaliados.

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) foi criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) com o objetivo de medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino. É um indicador nacional que possibilita o monitoramento da qualidade da educação da população por meio de dados concretos, calculados a partir de dois componentes: a taxa de rendimento escolar (aprovação) e as médias de desempenho nos exames aplicados pelo Inep, obtidas na Prova Brasil, para escolas e municípios, e no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), para os Estados e o País, a cada dois anos.[3]

FIGURA 1- EVOLUÇÃO DOS RESULTADOS DO SAEB (2005 A 2015)



FONTE: SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA, Brasília, 2015. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf >. Acesso em: 13 mar. 2018.

3 IDEB – apresentação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/secretaria-de-educacao-basica/programas-e-acoes?id=180>. Acesso em: 10 mar. 2018.

Observa-se nos dados fornecidos pelo Saeb que o desempenho dos estudantes vem melhorando no que diz respeito ao conhecimento matemático nos anos iniciais do Ensino Fundamenta,l como pode ser visto pelo comparativo dos resultados das proficiências entre os anos de 2005 (primeiro ano da avaliação) e 2015 (o mais recentemente aplicado), de acordo com a Figura 1.

Esse índice mostrou melhora no desempenho escolar de estudantes do Ensino Fundamental em 2015 (de 182 para 219 pontos). O resultado indica que, em média, os estudantes brasileiros encontram-se no nível 4 de proficiência, em uma escala de 0 a 9, como descrito na Tabela 1.

TABELA 1 – NÍVEIS DE PROFICIÊNCIA DE ACORDO COM A PONTUAÇÃO EM MATEMÁTICA NA PROVA BRASIL EM 2015

Nível	**5º Ano**	**Nível**	**5º Ano**
Nível 1	125 – 149 pontos	Nível 6	250 – 274 pontos
Nível 2	150 – 174 pontos	Nível 7	275 – 299 pontos
Nível 3	175- 199 pontos	Nível 8	300 – 324 pontos
Nível 4	200 – 224 pontos	Nível 9	325 – 350 pontos
Nível 5	225 – 249 pontos	Nível 10	————-

FONTE: ESCALA Saeb. Disponível em: <http://academia.qedu.org.br/prova-brasil/454-2/>. Acesso em: 01 jun. 2018.

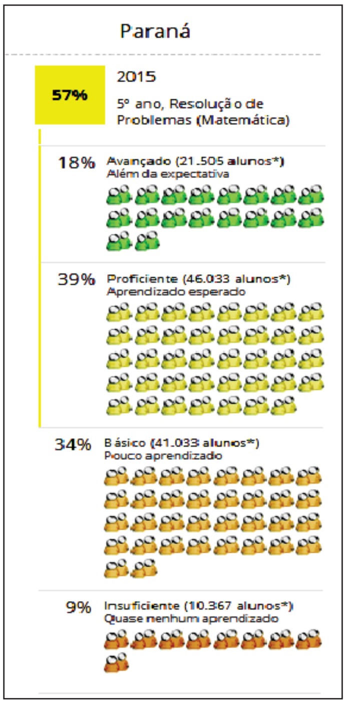
Do exame da figura Figura 2, nota-se que 9% dos estudantes do estado do PR, são classificados como insuficientes, com pontuação menor que 174, ou seja, estão, de acordo com os dados do Inep, entre os níveis 1 e 2 (que apresentam dificuldades em resolver adições, subtrações e interpretar problemas). Já 34% encontram-se no básico, que compreende pontuação entre 175 e 224, referentes aos níveis 3 e 4 (resolvem algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão, porém ainda não interpretam ou solucionam situações-problema). Dentre os estudante avaliados, 39% são considerados proficientes, com pontuação entre 225 e 274, referentes ao nível 5 (são capazes de resolver problemas envolvendo a análise do algoritmo da adição de dois números naturais; resolver problemas, no sistema monetário nacional, envolvendo adição e subtração de cédulas e moedas e problemas que envolvam a metade e o triplo de números naturais, mas ainda não solucionam problemas de divisão) e ao nível 6 (resolvem problemas que envolvem a composição e a decomposição polinomial de números naturais de até cinco ordens e problemas que utilizam a multiplicação envolvendo a noção de proporcionalidade, ainda não solucionando os problemas que envolvem a divisão). E apenas 18% está no nível avançado, com pontuação maior que 274, referentes aos níveis 7, 8 e 9, nos quais os estudantes que interpretam e resolvem situações-problema que envolvem a ideia de divisão, além de todos os demais compreendidos nos níveis 5 e 6. Os resultados apontam que no estado do Paraná, assim como em todo o Brasil, apenas uma pequena porcentagem dos estudantes alcançaram esses níveis de proficiência[4].

FIGURA 2- EVOLUÇÃO DAS PROFICIÊNCIAS EM MATEMÁTICA NA PROVA BRASIL NO PARANÁ (2015)

EVOLUÇÃO DAS PROFICIÊNCIAS EM MATEMÁTICA (2011-2015) NO BRASIL E NO PARANÁ.

LEGENDA
Avançado: Pontuação na Prova Brasil acima de 275
Proficiente: Pontuação na Prova Brasil entre 225 a 274
Básico: Pontuação na Prova Brasil entre 175 e 224
Insuficiente: Pontuação na Prova Brasil entre 0 e 174

PROFICIÊNCIA DE MATEMÁTICA NO PARANÁ EM 2015.



FONTE: EVOLUÇÃO do aprendizado: Paraná. Disponível em: <http://www.qedu.org.br/ estado/116-parana/evolucao>. Acesso em: 01 jun. 2018.

[4] ESCALA de proficiência. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/escala_proficiencia/2013/escalas_ensino_fundamental_2013.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2018.

O Indicador de Analfabetismo Funcional (INAF), criado em 2001 pelo Instituto Paulo Montenegro, em parceria com a ONG Ação Educativa, considera como habilidade matemática a capacidade de mobilizar conhecimentos associados à quantificação, à ordenação, à orientação, e também sobre suas relações, operações e representações, aplicados à resolução de problemas similares àqueles com os quais a maior parte da população brasileira se depara cotidianamente.

Em 2009 foi realizada uma pesquisa a respeito das habilidades de leitura, escrita e matemática (alfabetismo) de jovens de 15 a 24 anos, residentes nas nove principais regiões metropolitanas do país. Os dados demostraram que, mesmo nas regiões metropolitanas, onde o acesso potencial a recursos educacionais e culturais é maior, o domínio das habilidades de alfabetismo ainda é insuficiente. Apontam que apenas 40% dos jovens metropolitanos brasileiros atingem o nível pleno de alfabetismo (leem textos mais longos, analisando e relacionando suas partes, comparam e avaliam informações, distinguem fato de opinião, realizam inferências e sínteses), enquanto 38% atingem apenas o nível básico (já leem e compreendem textos de média extensão, localizam informações mesmo que seja necessário realizar pequenas inferências, leem números na casa dos milhões, resolvem problemas envolvendo uma sequência simples de operações e têm noção de proporcionalidade) e 19% não superam o nível rudimentar tanto em Língua Portuguesa quanto em Matemática (capacidade de localizar uma informação explícita em textos curtos e familiares como, por exemplo, um anúncio ou pequena carta, ler e escrever números usuais e realizar operações simples, como manusear dinheiro para o pagamento de pequenas quantias ou fazer medidas de comprimento usando a fita métrica)[5].

A análise de avaliações de larga escala internacionais revela que o Brasil está longe de atingir os índices de ensino de muitos países, inclusive de alguns considerados menos desenvolvidos economicamente. Tais dados são do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, na sigla em inglês), o qual objetiva produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes. A avaliação, realizada a cada três anos, busca verificar de que forma as escolas de cada nação participante está preparando seus estudantes.

---

[5] INAF Brasil 2011**.** Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/0B5WoZxXFQTCRWE5UY2FiMzFhZEk/view >. Acesso em: 24 abr. 2018.

A última avaliação realizada em 70 países, no ano de 2015, demonstra uma queda de pontuação nas três áreas avaliadas: ciências, leitura e matemática. O baixo desempenho do Brasil no exame o deixou ranqueado entre as piores posições: o país ficou na 63ª posição em ciências, na 59ª em leitura e na 66ª colocação em matemática.

Essas avaliações em larga escala indicam fragilidades do processo de ensino-aprendizagem de matemática no Brasil. Mesmo havendo uma visível melhora nos índices de proficiência nacional (IDEB), a comparação com outros países (PISA) deixa claro que ainda temos muito para melhorar, evidenciando a importância da implementação de políticas públicas voltadas à melhoria do ensino da matemática. Esta responsabilidade envolve as redes públicas de ensino em âmbito nacional, estadual e municipal. Em um âmbito mais específico, envolve também as escolas e os profissionais que atuam junto às crianças no Ensino Fundamental, no qual me insiro como profissional da educação.

Atuo com a turma de terceiros anos há mais de 5 anos na rede municipal de ensino de Curitiba e tendo em vista melhorar o meu desempenho enquanto docente e aprimorar minha formação continuada, busquei, em 2014, cursos de capacitação específicos na área da Matemática. Com a participação no PNAIC (Pacto Nacional Para a Alfabetização na Idade Certa – Matemática 2014) o meu planejamento passou a ser direcionado para a resolução de problemas. Percebi, de imediato, um maior interesse dos estudantes e o gosto pela matemática naturalmente surgindo. Os questionamentos foram se tornando mais elaborados e a cada desafio proposto a curiosidade e a vontade de cada estudante de se superar eram cada vez mais notáveis.

Então, percebendo a necessidade de estudar mais e motivada a refletir sobre a minha prática de sala de aula em relação ao trabalho com a matemática, busquei mais cursos nesta área. Um deles foi "*Educação Matemática- Problema não é mais problema",* ofertado pela Secretaria Municipal de Educação de Curitiba (SME) e o outro foi o "*Projeto EDUPESQUISA: Problemas matemáticos desafiadores nas práticas escolares*", realizado a partir de uma parceria da Prefeitura Municipal de Curitiba e a Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Neste último, a produção do artigo de conclusão foi mais uma motivação para aprofundar estudos nessa área, pois pude comprovar as excelentes contribuições desta metodologia para a alfabetização matemática. O trabalho consistiu em verificar se os estudantes obtinham melhor desempenho ao solucionar algoritmos de adição e subtração na forma de lista de exercícios isolados de contextos problematizadores ou se inseridos em situações nas quais fossem necessários para a solução de um problema matemático, ou ainda, se a situação partisse de um problema construído a partir de uma situação real vivenciada pelos estudantes. Este trabalho permitiu verificar que quando a criança tem um objetivo, uma razão evidente para solucionar uma operação, ela fica muito mais motivada e envolvida na resolução e essa motivação possivelmente contribui para que melhore o seu desempenho na resolução de problemas.

Ao propor situações-problema pude verificar que uma das dificuldades encontradas pelos estudantes é encontrar uma estratégia para solucionar o problema, e essa dificuldade se acentuava ainda mais quando a proposta envolvia uma operação de divisão.

A partir desta constatação, surgiu o interesse em investigar qual seria a melhor forma de ensinar divisão e quais conhecimentos os estudantes já tinham a respeito de divisão para que a partir desses fossem estabelecidos pontos de partida para o planejamento das aulas deste conteúdo. Busquei o aprofundamento destas questões na Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud por entender ser esta Teoria um potencial instrumento para compreender como ocorre a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo. Vergnaud (2009 p. 18-19) afirma que os meios usados e os caminhos usados pelos estudantes para resolver problemas ou atingir objetivos de uma tarefa escolar, são enraizados nas representações que fazem das situações, nestas representações aparecem os símbolos, os signos e também os conceitos. Na escola, mais especificamente no Ensino Fundamental, observa-se que as situações-problema que envolvem a divisão frequentemente são grandes desafios para os estudantes.

Vergnaud, em entrevista cedida à revista Pátio Pedagógica em 2012[6], afirma que “Se os professores não têm visão ampla da aprendizagem da matemática, eles tendem a ser muito rigorosos com as questões formais, com as formulações dos problemas, e isso não ajuda os alunos”. Portanto é importante que o professor

---

[6] VERGNAUD, G. Entrevista. **A matemática além dos números.** Pátio Revista Pedagógica, 13 ed. Junho/2012. Disponível em: http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alem-dos-numeros.aspx. Acesso em 28/12/1017

conheça as estratégias utilizadas por eles e a partir delas, crie novos desafios que desenvolvam novas habilidades deste aprendiz.

Em outra entrevista cedida à revista Nova Escola[7] em 2008, Vergnaud explica que a dificuldade em matemática pode ser encarada pelo fato da escola distanciar a teoria da realidade do estudante, afirmando que: “O problema é que a escola valoriza demais os símbolos e pouco a realidade. Os estudantes não veem utilidade naquilo e pensam: - Isso não me interessa. É abstrato e não serve para nada”.

A Teoria dos Campos Conceituais propõe a utilização de diferentes situações para a observação do percurso do desenvolvimento dos conceitos e das estratégias que as crianças utilizam para comprovar a sua aprendizagem. O papel do professor, nessa teoria, é o de sistematizar e propor desafios às crianças, ampliando as dificuldades para que elas evoluam no entendimento dos conceitos matemáticos a partir dos conhecimentos já existentes.

A utilização de problemas que envolvem o Sistema Monetário Nacional pode ser muito interessante, uma vez que este pode ser um facilitador, por tratar-se de uma forma cotidiana do uso dos números e operações. Nunes e Bryant (1997) afirmam que trazer a matemática para a realidade do estudante é um bom caminho para ensinar os conteúdos desta disciplina e que um meio pode ser a resolução de problemas envolvendo quantias de dinheiro.

Todas estas inquietações foram motivadoras desta pesquisa que busca esclarecer as seguintes questões: quais esquemas os estudantes de um terceiro ano de uma escola municipal de Curitiba-PR utilizam para solucionar problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional? Estes são modificados após uma intervenção pedagógica envolvendo atividades de composição e decomposição de valores monetários e resolução de problemas de participação e quotição em diferentes situações?

Para tanto, a pesquisa tem como objetivo geral analisar as contribuições de uma intervenção pedagógica para a modificação dos esquemas de resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional de crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba-PR.

---

[7] VERGNAUD, G. Entrevista. **Fala, mestre! Entrevista – Gerard Vergnaud**. Revista Nova Escola, Edição 215 – set. 2008. Disponível em: http://antigo.revistaescola.abril.com.br/edicoes/0215/aberto/mt_298583.html. Acesso em: 16/12/17

E como objetivos específicos:

- Verificar se na resolução de problemas envolvendo o Sistema Monetário Nacional os estudantes utilizam os mesmos esquemas de resolução descritas na literatura para outras situações de divisão.
- Verificar contribuições do processo de intervenção envolvendo atividades de composição e decomposição de valores monetários em diferentes situações: jogos e desafios matemáticos para a resolução de problemas de divisão envolvendo quantias de dinheiro.
- Comparar se os esquemas presentes na resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional se mantém os mesmos antes e após a realização da intervenção.

A apresentação da pesquisa está organizada em quatro capítulos. O primeiro (referencial teórico) trata da Teoria dos Campos Conceituais, os invariantes operatórios da divisão, e a operação de divisão; o segundo aborda a metodologia, revendo o problema e os objetivos da pesquisa, a população envolvida durante a pesquisa nas suas três etapas: entrevista inicial, ação didática e entrevista final, e as descrições da coleta e a análise dos dados; o terceiro traz a apresentação, a discussão e a análise dos dados de cada um dos cinco participantes da pesquisa e os resultados; o quarto capítulo apresenta as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Para possibilitar a identificação de mudanças nos esquemas utilizados na resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional por estudantes de um terceiro ano de uma escola municipal de Curitiba, os quais não conhecem a operação da divisão, antes e depois da realização de um processo de intervenção pedagógica, objetivo desta pesquisa, considera-se necessário, antes de tudo, a compreensão da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e os processos de resolução de problemas de divisão.

Neste capítulo será apresentada a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, revisadas pesquisas relativas ao Campo Conceitual multiplicativo, e, em especial, à operação de divisão.

2.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Esta Teoria foi construída a partir de inquietações do pesquisador a respeito de como pode-se melhorar o ensino de matemática. Em entrevista concedida à revista Pátio Pedagógica[8], Vergnaud afirmou que a Teoria dos Campos conceituais é "o resultado de muita pesquisa com estudantes, que nos leva a compreender como eles constroem conhecimentos matemáticos. Ela é fundamental para ensinar a disciplina, pois permite prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos" (VERGNAUD, 2012). Este conceito é reforçado quando o pesquisador afirma que:

> A teoria dos campos conceptuais é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem dessas competências complexas, nomeadamente daquelas que revelam das ciências e das técnicas. (VERGNAUD, 1996 p. 155).

Vergnaud (2009) atribui importância à Teoria dos Campos Conceituais asseverando que esta valoriza o papel de linguagem durante o aprendizado. Quando a criança descreve seus conhecimentos em palavras e consegue expressar aquilo que já conhece, pode ampliar seus conhecimentos. "Não se aprende sozinho

---

[8] VERGNAUD, G. Entrevista. **A matemática além dos números.** Pátio Revista Pedagógica, 13 ed. Junho/2012. Disponível em: http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alem-dos-números.aspx Acesso em 28/12/1017

e a estabilidade dos invariantes operatórios é reforçada por sua formulação oral e escrita.” (VERGNAUD, 2009 p. 12).

A Teoria dos Campos Conceituais não é específica da matemática, mas foi incialmente concebida com o objetivo de explicar os processos de conceitualização progressiva das estruturas aditivas e multiplicativas, as relações número-espaço e da álgebra. (VERGNAUD, 1996, 2009).

Além disso, a Teoria reforça a necessidade do professor, principalmente aquele que ensina matemática, refletir a respeito da importância de compreender os interesses de seus alunos aproximando o conhecimento escolar do conhecimento vivenciado por estes, fazendo com que o aprendizado ocorra de maneira prazerosa para todos e para cada um deles. Nesse sentido é a afirmação feita por Vergnaud na entrevista concedida à Revista Pátio Pedagógica:

> A matemática é a disciplina que, ao mesmo tempo, encanta os alunos que gostam dela e afugenta muitos outros. Além disso, os professores de matemática costumam ser pessoas que amam a matemática e não entendem muito bem por que os alunos não a compreendem. É muito difícil mudar a prática dos professores em sala de aula. Para mudá-la, não se pode dizer ao professor “Você deve fazer desse jeito ou desse outro jeito”. É preciso mudar a representação dos professores sobre a matemática, a representação da psicologia do aluno, da aprendizagem, da atividade na prática e nas situações reais. (VERGNAUD, 2012)

Ademais, em entrevista concedida para revista Nova Escola[9], Vergnaud (2008) expôs que sua Teoria pretende atuar com os agentes sociais (estudantes e professores), preocupando-se com a construção do conhecimento, bem como com o gerenciamento do ensino, das estratégias e das intervenções realizadas pelo professor. A Teoria propõe a realização de diferentes situações para a percepção do percurso do desenvolvimento dos conceitos, assim como das estratégias que os estudantes utilizam durante o processo de aprendizagem.

Assim, buscou-se na Teoria dos Campos Conceituais uma ferramenta para avaliar quais são as dificuldades apresentadas pelos estudantes e a partir deste diagnóstico adotar estratégias de ensino que favoreçam o aprendizado conforme Magina et. al. (2013):

---

[9] VERGNAUD, G. Entrevista. **Fala, mestre! Entrevista – Gerard Vergnaud**. Revista Nova Escola, Edição 215 – set. 2008. Disponível em: http://antigo.revistaescola.abril.com.br/edicoes/0215/aberto/mt_298583.html. Acesso em: 16/12/17

> A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), elaborada por Vergnaud (1988, 1994), oferece elementos para a análise das competências e dificuldades dos estudantes e constitui uma ferramenta poderosa para a construção de diagnóstico dos estudantes, a partir da análise das estratégias adotadas por esses estudantes diante de situações-problema. Isto porque ela apresenta um quadro coerente para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas. (MAGINA, et.al. 2013 p. 02)

A Teoria dos Campos Conceituais parte do princípio de que as crianças constroem conhecimento à medida que pensam sobre o assunto, vivenciam diferentes situações estabelecendo novas relações entre o novo conceito e aqueles que eram previamente conhecidos. O estudo desta teoria aponta caminhos que permitem o conhecimento de conceitos a partir de um ensino real e contextualizado, levando em conta a relação teoria-prática.

Com a finalidade de compreender como se dá a aprendizagem Vergnaud estudou e exemplificou dois grandes Campos Conceituais: O Campo Aditivo e o Campo Multiplicativo. Mas, para possibilitar a melhor compreensão de tal teoria, se faz necessário entender seus elementos principais, ou seja, o que o autor entende por esquema e por conceito.

2.1.1 Esquema

Para Pais (2001, p.02), "a noção de esquema está associada à forma invariante como as atividades são estruturadas ou organizadas diante de uma classe de situações voltadas para aprendizagem específica de um conceito". Vergnaud trouxe esse termo da teoria de Piaget e ampliou sua definição:

> Os esquemas organizam a conduta do sujeito para uma dada classe de situações, mas organizam, ao mesmo tempo, a sua acção e a actividade de representação simbólica, nomeadamente linguística que acompanha essa acção. (VERGNAUD 1996 p. 190)

O citado autor chama de esquema a organização invariante do comportamento para uma classe de situações, distinguindo duas classes de situações: Aquelas para as quais o sujeito dispõe no seu repertório as competências necessárias para a solução imediata das situações; E outras, para as quais os sujeitos não dispõem de todas as competências necessárias para a solução imediata, tornando necessário um tempo de reflexão, hesitações e tentativas, conduzindo-o ao êxito ou não.

O esquema está presente nessas duas classes de situações, mas não funciona da mesma maneira em ambas. Na primeira, diz respeito a uma grande parte de ações automatizadas, por meio de um esquema único para diferentes sujeitos, por exemplo, o uso de operações previamente aprendidas para a solução de problemas. No segundo caso, mais próximo do que será abordado nesta pesquisa, refere-se a diferentes esquemas, que podem ser testados até que possam ser acomodados, descombinados e recombinados. (VERGNAUD, 1996).

Para Vergnaud, um esquema é: [...] “uma totalidade organizada, que permite gerar uma classe de condutas diferentes, em função das características particulares de cada uma das situações das classes às quais se dirige”. (VERGNAUD, 1996 p. 180).

O esquema pode ser considerado um plano de ação, uma estratégia que abrange uma classe de passos numa certa sequência para solucionar uma situação. Ele é particular, mas pode ser esquematizado do mesmo modo por várias pessoas. Além disso, pode ser universal, ou seja, utilizado em diversas situações e, ainda, gerar diferentes sequências de ação, de coleta de informações e de controle. Em suma, o comportamento da pessoa varia, mas não a organização de seu comportamento (VERGNAUD, 1996).

2.1.2 Conceitos

Para Vergnaud (1996) um conceito envolve três conjuntos, definidos na Teoria como:

> S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);
>
> I: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);
>
> s: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significado). (VERGNAUD, 1996 p. 166).

Alguns autores (GITIRANA et. al. 2014; MAGINA, 2005) identificam o conjunto das Representações por R e não "s" (situações e procedimentos de tratamento), como o faz Vergnaud (1996). Nesta pesquisa será adotado "R", pelo entendimento que não se trata de outra definição, mas sim de uma tradução, como exposto por MAGINA (2005, p. 4):

> [...] a construção de um conceito envolve uma terna de conjuntos que, segundo a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, é chamada simbolicamente de S I R: O S é um conjunto de situações, que dá significado ao objeto em questão; o I é um conjunto de invariantes, que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto; e o R um conjunto de representações simbólicas, as quais permitem relacionar o significado desse objeto com as suas propriedades. (MAGINA, 2005, p.4)

A formação de um determinado conceito acontece a partir de relações estabelecidas com conhecimentos anteriores, motivo pelo qual Vergnaud afirma que cada indivíduo constrói seus próprios conceitos a partir de seus conhecimentos prévios e as relações que estabelece com as novas informações.

a) Situações

Para Vergnaud o termo *situação* não é necessariamente o entendido pelo senso comum por situação didática (situação – problema), mas, sim, o de tarefa ou de conjunto de tarefas. Em um campo conceitual está presente uma grande variedade de situações e o conhecimento dos estudantes ocorre a partir da resoluções destas e pelo domínio deste novo conhecimento.

"As *situações* que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações" (VERGNAUD 1996, p. 179). O que dá sentido a uma situação, tornando-a válida são os *esquemas*. Esquema, como já descrito anteriormente em outras palavras, "diz respeito à forma como a pessoa (o estudante) organiza seus invariantes de ação ao lidar com uma classe de situações." (GITIRANA et. al. 2014 p. 17). E estão presentes nas duas classes de situações anteriormente citadas: aquelas para as quais o sujeito dispõe das competências necessárias para a solução imediata e aquelas para as quais os sujeitos não dispõem de todas essas competências.

Assim, é preciso oportunizar o contato do aprendiz com diversas situações, de modo a contemplar maiores condições de ampliação e desenvolvimento cognitivo. Dessa forma toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, de naturezas e dificuldades próprias. O conjunto destas situações contribui para a formação dos conceitos e consequentemente, dos Campos Conceituais.

b) Representações

De acordo com Vergnaud (2009) uma representação reflete a realidade e é um mecanismo de simulação desta, um meio de calcular as ações a serem executadas. Esta explicação pode ser ampliada quando acresce-se a ela duas ideias:

> 1. Não existe uma representação, mas múltiplas representações, de formas diferentes e de níveis diferentes.
> 2. Existem homomorfirmos[10] não somente entre a realidade, de um lado, e as representações, de outro, mas também entre as diferentes formas de representações. (VERGNAUD, 2009, p. 300).

Ainda de acordo com Vergnaud (2009) pode-se afirmar que as representações podem ser diferentes formas de expressar pensamentos, resoluções, entre outros. Podem ser de caráter verbal, que consiste em enunciados verbais ou podem ser apenas um pensamento não descrito verbalmente sendo, dessa forma, de caráter puramente mental. Existem ainda representações algébricas, pictóricas, escritas, etc. que podem ser encontradas isoladas ou juntas nas resoluções. É, também, por meio dessas representações que ocorre o aprendizado, conforme Vergnaud (2009):

> É com ajuda simultânea dessas diferentes representações que a criança raciocina, passando de um plano a outro em função de necessidades e relações com as quais ela tem que tratar. Pensar consiste não apenas em passar de uma situação real à representação, mas em passar de uma representação à outra e a ela retornar. (VERGNAUD, 2009 p. 301).

Pode-se afirmar que, por meio das representações, os estudantes podem testar seus conhecimentos, fazer novas tentativas de raciocínio e por fim construir novos conceitos e esquemas para solucionar problemas. Os diferentes tipos de representações podem auxiliar na compreensão e na ampliação dos conhecimentos.

---

[10] Um homomorfismo é uma aplicação de um conjunto em um outro que respeita certas estruturas relacionais do conjunto de partida e do conjunto de chegada. Homomorfismo significa “mesma forma” ou “mesma estrutura” (VERGNAUD, 2009 p. 297)

> [...] as representações matemáticas são situadas e circunstanciais, construídas no decorrer da atividade e do processo de resolução. Tais representações incluem os sistemas de representação adotados (signos), os instrumentos envolvidos (material e recursos fornecidos) e as situações em que os sujeitos estão inseridos. A criação de representações simbólicas não seria, portanto, a expressão do pensamento, porém, algo que o constitui. (LAUTERT E SPINILLO, 1999 p.24)

Uma vez que a expressão simbólica constitui o pensamento e pode ser um instrumento para representar o processo de aprendizagem, ela pode ser de grande valia para o processo de ensino aprendizagem. Também pode-se entender as representações como um instrumento para avaliar a compreensão dos estudantes e o que ainda precisam desenvolver.

c) Invariantes operatórios

Para a identificação de quais invariantes operatórios os estudantes utilizam para solucionar os problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional antes e após a intervenção proposta nesta pesquisa, é de fundamental relevância compreender o que são especificamente os invariantes operatórios descritos na Teoria dos Campos Conceituais. Vergnaud (2009, p. 303) assevera que “a noção de invariante operatório aplica-se ao próprio problema da função simbólica, isto é, a passagem da realidade a representação”. Reforçando esta definição, Magina et.al. (2001) expõem uma breve explicação sobre eles:

> Os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos (feitos pelo aluno). Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso, eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas (MAGINA *et al*, 2001, p.12).

Vergnaud (2009, p. 308) afirma que “a elaboração de invariantes é instrumento decisivo na construção da representação: são os invariantes que asseguram à representação a sua eficácia”. Assevera, ainda, que são os invariantes que “[...] dão à representação seu caráter operatório” (2009 p. 308) e por esse motivo recebe essa denominação: invariante operatório.

O invariante operatório é um dos conjuntos que formam o tripleto “SIR” dos conceitos, já explorado nesta pesquisa. De acordo com Vergnaud (1996, 2009) os invariantes operatórios são compostos pelos conceitos em ação e os teoremas- em-ação. Eles permitem relacionar teoria e prática, ou seja, os esquemas que o sujeito já possui e a prática, entendida como uma situação proposta para a qual o estudante deve oferecer uma solução (VERGNAUD, 1996). Assim:

> Designam pelas expressões “conceitos-em-acto” e “teorema-em-acto” os conhecimentos contidos nos esquemas; podemos igualmente designa-los pela expressão mais global de “invariantes operatórios. (VERGNAUD, 1996, p. 160)

Magina et. al. (2001) esclarecem que os conceitos-em-ação (ou conceitos-em-ato) são uma estratégia considerada como pertinente, ou seja, adequada e eficaz para a resolução de determinada situação, normalmente estão implícitos nas resoluções. As autoras também definem teoremas-em-ação (ou teoremas-em-ato) “como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações, para resolver um problema” (MAGINA ET. AL., 2001, p.16). Eles aparecem nos comportamentos e ações dos alunos, muitas vezes ele só se torna verdadeiro após várias resoluções de situações de mesma natureza. Ele pode ser pertinente em alguns momentos e em outros não ser.

2.1.3 Os Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais afirma que conceitos matemáticos estão inseridos em Campos Conceituais, que são um conjunto de situações que envolvem uma gama de conceitos e cujo aprendizado requer a utilização de estratégias e procedimentos, conectados entre si.

A referida Teoria analisa as condições de aprendizagem conceitual, de maneira que se torne mais acessível à compreensão do aluno. Além disso, busca as filiações e rupturas dos conceitos iniciais da Matemática, considerando as ações realizadas e compreendidas pelo educando (PAIS, 2011).

Para compreender os conceitos de filiação e ruptura, imprescindível retornar à teoria de Vergnaud. O Campo Conceitual é um conjunto vasto e organizado de situações que precisa de vários esquemas, de conceitos e de representações simbólicas para solucioná-las. Os conceitos só fazem sentido em situações-problema, e para que ocorra avanço na aprendizagem, as situações necessitam ser de crescente grau de complexidade; e as situações são fundamentais para a construção dos conceitos.

De acordo com Vergnaud (1996) a Teoria dos Campos Conceituais permite localizar e estudar as *filiações e as rupturas* entre conhecimentos, também permite analisar as relações entre os diferentes Campos Conceituais. As filiações acontecem quando são utilizados conhecimentos já apreendidos como suporte para as novas aprendizagens e as rupturas, quando conceitos anteriormente consolidados não são pertinentes à resolução de nova situação.

Os Campos Conceituais não podem ser considerados “caixinhas isoladas” de conhecimento. Ao contrário, como o desenvolvimento não acontece de forma linear e pontual, para adquirir um novo conhecimento em um determinado campo conceitual, o sujeito pode buscar informações em outro Campo já dominado. Isto é denominado por Vergnaud (1996) como *filiações:*

> Há certamente ligações entre raciocínio aditivo e multiplicativo, e o cálculo de multiplicação e divisão pode ser feito através de adição e subtração repetidas. Porém, diversos conceitos novos emergem no raciocínio multiplicativo, que não são necessários na compreensão das situações aditivas (NUNES; BRYANT, 1997, p.151).

Em algumas situações, porém, os conhecimentos buscados em um campo conceitual já conhecido podem ser testados e mostrarem-se inadequados ou insuficientes, sendo que a essa situação podemos chamar de *rupturas.* (GRINGS et. al., 2008).

> Quando Vergnaud (2003, p.58) fala de filiações e rupturas ele explica que quando se aprende alguma coisa nova, algumas vezes temos de nos apoiar em conhecimentos anteriores e outras vezes esses conhecimentos anteriores podem tornar-se obstáculos para o novo conhecimento. Entende-se como filiações o apoio dos novos conhecimentos em conhecimentos anteriores e rupturas quando é necessário romper com o conhecimento anterior para aquisição de novo conhecimento. (GRINGS et. al., 2008, p.8)

Entendendo que as filiações e rupturas, existentes na Teoria de Vergnaud, fazem parte da aquisição de novos conceitos, e que estas podem estar presentes nos esquemas de resoluções de problemas dos participantes da presente pesquisa, fez-se imperiosa a inclusão no referencial teórico deste trabalho.

Desde os primeiros anos de escolaridade, os conceitos de adição e subtração são abordados pelos professores em suas práticas pedagógicas. A adição e a subtração fazem parte do mesmo Campo Conceitual e, por conta disso, não é pertinente tratar tais conceitos de forma isolada, como afirma Vergnaud (1996)

> O Campo Conceitual das estruturas aditivas, é ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições e subtrações, e o conjunto dos teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. (VERGNAUD, 1996, p. 168).

A princípio, podemos pensar que o aprendizado de conceitos desse campo aparentemente seria simples, afinal crianças bem pequenas já conseguem solucionar situações que envolvem adição e subtração. Porém ao aprofundar os conhecimentos relativos a este, constatamos que o Campo Conceitual Aditivo pode apresentar situações complexas. De acordo com Magina et. al. (2001) alguns problemas desse Campo Conceitual podem ser tão complexos, que mesmo estudantes de 10 – 11 anos de idade apresentam dificuldades para resolvê-los.

As situações deste Campo Conceitual abordam conceitos inerentes à Estrutura Aditiva, como por exemplo: juntar, retirar, transformar e comparar. As situações aditivas envolvem diferentes conceitos que fazem parte dessas estruturas, dentre as quais Magina et.al. (2001) descrevem:

- Conceito de medidas (por exemplo, a magnitude 11 é maior que 7, que é maior que 4);
- Conceito de adição;
- Conceito de subtração;
- Conceito de transformação de tempo (por exemplo, “Maria possui agora....quanto possuía antes?”);
- Relação de comparação (por exemplo, “quem tem (é) mais, quem (é) tem menos?”, “quanto tem a mais, quanto tem a menos?”;
- Composição de quantidades. (MAGINA, et. al, 2001, p. 21)

De acordo com Vergnaud (1996) existem três tipos de problemas de estrutura aditiva, que podem ser classificados como: composição, transformação e comparação.

Os problemas de *composição* envolvem a ideia de juntar uma parte com outra parte (parte todo), ou subtrair uma parte do todo para obter outra parte (há 4 margaridas e 5 cravos. Quantas flores há no total?). Os problemas de *transformação* são aqueles que envolvem a ideia temporal e transformar a quantidade inicial com perda ou ganho, acréscimo e decréscimo (gastou 10, sobrou 7, quanto tinha inicialmente?). E os problemas de *comparação* que são aqueles que comparam duas quantidades tanto com ideia de adição como de subtração (Ana tem 2 anos, Maria tem 3 anos a mais. Quantos anos tem Maria?).

Ainda, existem os problemas que envolvem simultaneamente mais de um dos tipos e esses são chamados de problemas mistos.

Em relação ao Campo Conceitual Multiplicativo, Magina et. al. (2012) dizem que: "alguns conceitos matemáticos deste campo que podemos citar são: multiplicação, relação um para muitos, divisão por quota e por partição, funções, fração, razão, proporção, além de diferentes combinações entre essas situações."

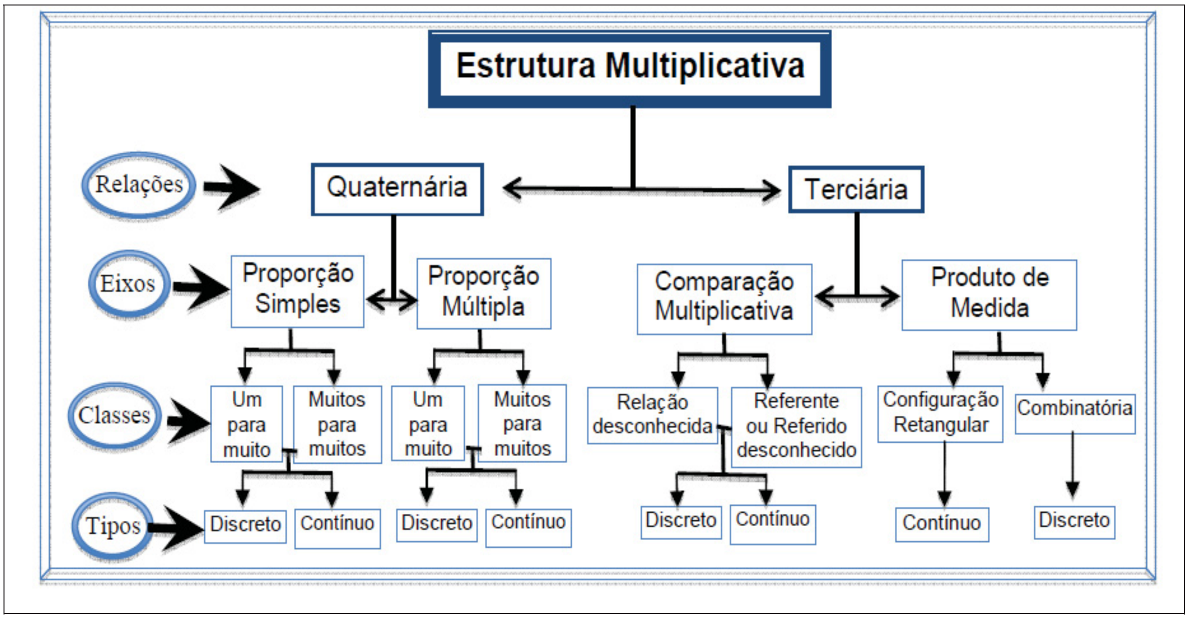
De acordo com Vergnaud (1996), o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas é um conjunto de situações nas quais a resolução implica em uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar as situações:

- Quaternárias, como as de proporção simples e múltipla;
- Ternárias, presentes em problemas de comparação multiplicativa e produto de medidas e
- Problemas do Campo Conceitual Multiplicativo que envolvem conceitos de função linear e não-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, relação, número racional, dentre outros conceitos.

Magina, et. al. (2012), ao fazerem uma releitura de Vergnaud (1983, 1988, 1990; 1994) elaboraram um esquema, (FIGURA 3) do Campo Conceitual Multiplicativo. Conforme os autores, tal esquema:

> [...] foi criado com o objetivo de sintetizar as ideias centrais desse campo. Ele está dividido em duas partes: relações quaternárias e relações ternárias. Cada uma dessas relações, por sua vez, é constituída por dois eixos. Os eixos pertencentes às relações quaternárias dividem-se em duas classes: um para muitos e muitos para muitos. Os eixos das relações ternárias encontram-se assim divididos: para o eixo comparação multiplicativa tem-se as classes: relação desconhecida e referido desconhecido; o eixo produto de medida tem as classes: configuração retangular e combinatória. Todas as classes podem usar quantidades do tipo discreta ou contínua, exceto a classe configuração retangular (apenas quantidade contínua) e combinatória (apenas quantidade discreta). (MAGINA, et.al., 2012 p.05)

FIGURA 3 – CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS



FONTE: MAGINA et.al., 2012, p.5

Conceitos de natureza multiplicativa exigem mudanças no pensamento dos indivíduos. Diferenciam-se das operações de natureza aditiva, pois estas envolvem um estado inicial, uma operação e um estado final. Já as de natureza multiplicativa (multiplicação e divisão) apresentam outros desafios, tais como: as divisões sucessivas, regras operatórias, busca de quociente, relações entre o tamanho das partes, número de partes e o tamanho do todo (VERGNAUD, 1996; NUNES E BRYANT, 1997; LAUTERT 2005).

As situações-problema e operações de multiplicação e divisão são exemplos de conceitos que não fazem sentido se estudados isoladamente, são muito mais significativos quando compreendidos dentro de um Campo Conceitual.

> O conhecimento, portanto, tem características locais. Consequentemente, todos os conceitos têm um domínio de validade restrito, o qual varia de acordo com a experiência e com o desenvolvimento cognitivo do sujeito. O caso da multiplicação e divisão são exemplos de conceitos onde não faz sentido estudá-los isoladamente, mas sim dentro de um Campo Conceitual, o das Estruturas Multiplicativas (MAGINA, et al., 2013 p. 5981)

Para a presente pesquisa, teremos como foco o conceito de divisão, especificamente, no contexto da resolução de problemas com as ideias de partição e quotição.

Pelo senso comum, a divisão é a operação inversa da multiplicação, assim como a subtração é a operação inversa da adição, porém a divisão apresenta um grau de complexidade em sua resolução muito maior do que as demais.

Uma das dificuldades, para o ensino desta operação, apontadas por Vasconcelos (2009) é a inserção do conteúdo divisão em forma linear nos livros didáticos, sendo estudado, muitas vezes, como último assunto nos anos iniciais. A autora, no entanto, salienta e reforça o entendimento adotado neste trabalho de que o estudo da divisão é parte integrante da vivência dos estudantes antes mesmo do estudo formal. Temos clareza de que cotidianamente, as crianças resolvem situações de divisão mesmo antes de escolarizadas, utilizando suas estratégias e conhecimentos que auxiliarão na aprendizagem escolar.

A operação de divisão, diferentemente do que afirma o senso comum, envolve conhecimentos além da relação oposta à multiplicação ou a ideia de parcelas equivalentes quando se reparte. Ela está no Campo Conceitual Multiplicativo porque envolve coordenação entre as ideias multiplicativas e as específicas de repartir e ainda a relação entre dividendo, divisor e quociente através do entendimento das relações que estes termos podem estabelecer entre si (CORREA, et. al. 2000).

A divisão também é considerada bastante complexa para Vergnaud (2009), que afirma:

> A divisão é uma operação complexa. Há para isso várias razões: algumas são de ordem conceitual, outras são ligadas à complexidade das regras operatórias implicadas pela divisão. (VERGNAUD, 2009, p. 190)

A divisão envolve regras operatórias complexas e requer o estabelecimento de relações diversas como: considerar o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes que deve ser o mesmo, a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes, a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes (MAGINA, 2005). Essa ideia é reforçada por Correa et. al. (2002) quando afirmam que:

> [...] A operação de divisão [...] envolve conhecimento além daquele relativo à obtenção de subconjuntos equivalentes quando se reparte. Como uma operação multiplicativa, requer a coordenação dos fatores envolvidos - dividendo, divisor e quociente – através do entendimento das relações que estes termos podem estabelecer entre si. Por exemplo, quando mantemos o

> divisor constante, o quociente varia diretamente em função do tamanho do dividendo: quanto maior o dividendo, maior será o tamanho do quociente (isto é, o tamanho da quota). (CORREA, et. al., 2002 p. 14)

Vergnaud (2009) considera a divisão uma das operações mais complexas entre as quatro operações, por diversas razões conceituais: ela nem sempre é exata, o quociente nem sempre é o resultado da aplicação do operador ao operado, pode haver restos diferentes de zero e a divisão como regra operatória nem sempre é o inverso da multiplicação.

Na realização de uma operação de divisão, o grau de dificuldade e as estratégias utilizadas podem variar, como é o caso dos problemas de isomorfismo denominados divisão por partição e divisão por quotas. "Em problemas de partição é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que esta quantidade deve ser distribuída, devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos)". (LAUTERT; SPINILLO, 2002 p. 238). Vejam-se alguns exemplos de problemas desta natureza:

a) Uma garota tem 25 reais e quer dividir igualmente entre suas 5 amigas. Com quantos reais cada amiga ficará?
b) Paguei R$ 16,00 por quatro barras de chocolate iguais. Qual o preço de uma barra de chocolate?
c) Maria comprou 15 figurinhas e tem cinco envelopes. Ela vai colocar o mesmo número de figurinhas em todos os envelopes. Quantas figurinhas ela colocará em cada envelope?

Nesse sentido, ao solucionar problemas de divisão por partição, de acordo com Lautert (2005, p.37) "é preciso considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao tamanho das partes, que o dividendo é representado pelo todo (valor/quantidade a ser dividida) e que o divisor refere-se ao número de partes em que o todo é dividido".

Já nos problemas com a ideia de quotição, Correa (2004) nos diz que a divisão normalmente é associada à percepção de repartir algo ou uma determinada quantidade por quotas.

> A divisão é uma operação matemática comumente associada a problemas envolvendo repartir uma determinada quantidade em um certo número de

> quotas, como, por exemplo, na situação em que pretendemos dividir um tanto de balas por um determinado número de crianças. Este aspecto da operação de divisão é denominado partitivo, pois envolve a separação exaustiva de uma classe em subclasses disjuntas. (CORREA, 2004, p.12)

Nos problemas de divisão com a ideia de quotas, diferentemente dos de partição, são propostas situações onde é “dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas (tamanho das partes)” (LAUTERT; SPINILLO, 2002 p. 238). Esse tipo de situação é um pouco mais incomum, porém também está presente em propostas pedagógicas das aulas de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Vejam-se alguns exemplos:

a) Uma garota tem 25 reais e quer dar 5 reais para cada uma de suas amigas. Para quantas amigas ela poderá distribuir este dinheiro?
b) Tenho R$ 16,00 e quero comprar alguns pacotes de biscoitos que custam R$ 4,00 cada pacote. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?
c) Maria comprou 15 figurinhas e vai colocar cinco figurinhas em cada envelope. Quantos envelopes ela vai precisar?

Para solucionar problemas com a ideia de quotição, Lautert (2005, p.37) afirma que “o quociente a ser obtido refere-se ao número de partes em que o todo foi dividido, que o dividendo é representado pelo todo e o divisor refere-se ao tamanho das partes”.

2.2 INVARIANTES OPERATÓRIOS DA DIVISÃO

Tanto problemas de divisão por partição como de divisão por quotas apresentam em suas resoluções pontos em comum que são chamados por Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997) de invariantes operatórios (ou princípios invariantes). Estes estão presentes na organização das ações dos estudantes ao resolver problemas de divisão. São cinco:

(1) O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes);

(2) O todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos;

(3) O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero);

(4) Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e

(5) O resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.

Estes serão os invariantes operatórios descritos na literatura, que buscar-se-á identificar nas estratégias de resoluções dos participantes desta pesquisa.

2.3 A OPERAÇÃO DE DIVISÃO

Lautert e Spinillo (1999) pesquisaram sobre a representação de conceitos matemáticos em crianças, mais especificamente sobre o conceito de divisão. As autoras investigaram como crianças de diferentes idades em séries distintas, portanto, em variados níveis de instrução sobre a divisão, representavam a mesma situações de forma gráfica e utilizando material concreto. A partir de uma sondagem, foram selecionadas para amostra apenas crianças com idades entre 5 e 8 anos, que contavam corretamente até 20 das 30 fichas apresentadas. O método consistiu em ler para as crianças, duas operações de divisão, uma por vez pedindo-se que representassem a resolução, inicialmente no papel e em seguida com fichas plásticas, da maneira que desejassem.

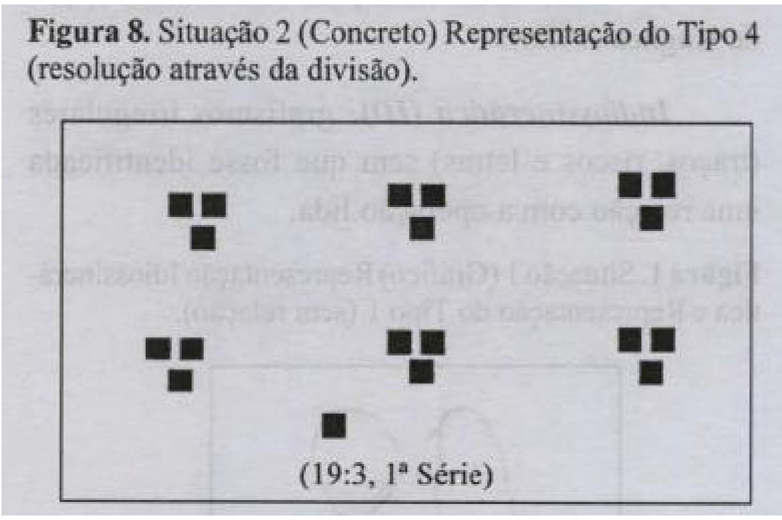
Observaram que o simbolismo matemático foi amplamente adotado pelas crianças e que a situação gráfica propiciava o aparecimento de representações mais elaboradas que a concreta. Concluíram que o conhecimento matemático e as situações exercem um impacto na forma como crianças representam seu conhecimento e que o e conhecimento é influenciado pelas suas representações.

Ao analisarem as representações destes estudantes, as autoras verificaram que estes utilizavam os conhecimentos adquiridos anteriormente, em especial a utilização de operações já conhecidas, ou que já haviam sido exploradas sistematicamente na escola, como a adição e subtração no caso de crianças até a primeira série e a operação da divisão no caso da segunda série (esses alunos já haviam aprendido sistematicamente a operação de divisão).

As pesquisadoras evidenciaram que esses alunos buscavam solucionar os problemas por meio das representações simbólicas e gráficas e em ambas foi recorrente a presença da divisão como recurso para solucionar o problema. De modo geral, as crianças nas séries investigadas representam através de grafismos de natureza simbólica. Isto foi observado, inclusive, entre as crianças do Jardim. O segundo sistema de representação mais adotado, embora pouco frequente, foi o icônico.

Um exemplo trazido na pesquisa mostra a distribuição como esquema utilizado (FIGURA 4).

FIGURA 4 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA POR MEIO DA DIVISÃO.



FONTE: LAUTERT E SPINILLO (1999, p. 30)

As pesquisadoras (1999) afirmaram que o material concreto disponibilizado na investigação limitou o aparecimento de formas mais flexíveis e elaboradas de lidar com a divisão, o que justificou a metodologia de modificar os materiais disponibilizados nas etapas das entrevistas.

Por trazer elementos referentes às representações e resoluções, Lautert e Spinillo (1999) trazem elementos importantes para a presente pesquisa.

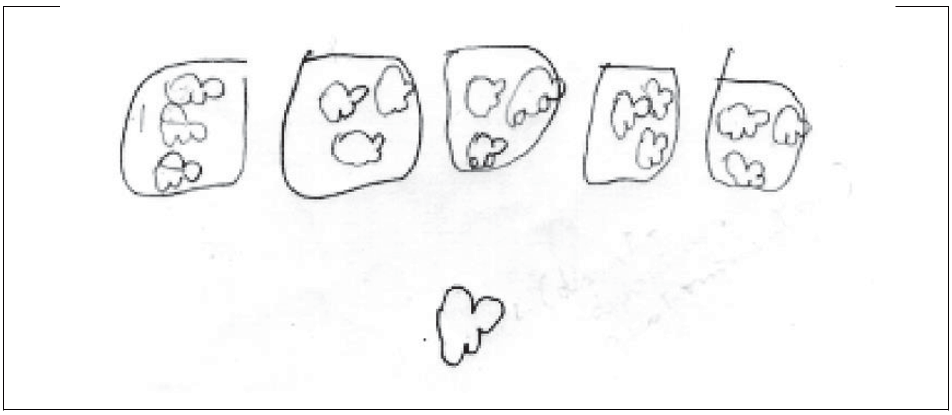
Ferreira e Lautert (2003) fizeram um estudo de caso que objetivou ilustrar a tomada de consciência através do conceito de divisão. Neste, analisaram minuciosamente a resolução de um problema de divisão por partição. Na pesquisa uma criança de 6 anos foi individualmente solicitada a representar, da forma que desejasse, a resolução do problema lido pelo examinador e teve à sua disposição lápis e papel para registrar sua estratégia. Após a representação feita pelo estudante as autoras buscaram, através de entrevista clínica, saber o que foi representado, perguntando se para a criança explicações referentes a cada grafismo representado, procurando saber que termo da divisão estava sendo contemplado.

A situação proposta, que deveria ser resolvida da maneira que o estudante achasse melhor, foi a seguinte: *"Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele tinha que colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixa?"* (FERREIRA; LAUTERT, 2003, p.550). A entrevista foi realizada oralmente, nos exemplos de perguntas e respostas:

> [...]T5 (E) .Três?! Como é que você fez pra dizer que era três? O que você estava fazendo com os dedinhos aí?
> T6(C) .Tava contando: (conta nos dedos novamente de três em três) um, dois, três, aí quatro, cinco, seis... sete,oito, nove... dez, onze, doze... treze, quatorze, quinze...dezesseis (o dedo que representa o dezesseis é contado de maneira separada e não, em conjunto de três)..
> T7 (E) .Humm. Então, faz aqui no papel, do jeitinho que você quiser. (FERREIRA; LAUTERT, 2003 p. 551)

O estudante fez a seguinte resolução:

FIGURA 5 – EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMA DE DIVISÃO



FONTE: FERREIRA; LAUTERT (2003, p. 551)

A criança investigada chegou à resposta esperada utilizando como estratégia o desenho (representação pictórica), no qual demonstrava conjuntos com a mesma quantidade de elementos para representar sua resolução. Deste modo, pode-se verificar que a criança em foco, ao lidar com um dado novo recorre a seus esquemas de adição já construídos para resolver o problema de divisão.

A pesquisa conclui que este estudante revela graus diferenciados de tomada de consciência da divisão, sem, no entanto, atingir a conceituação. Durante a entrevista, o estudante apresentou conflito cognitivo, ora respondendo com certeza, ora tendo dúvidas a respeito de suas respostas. Porém a própria entrevista possibilitou a tomada de consciência de suas resoluções, sendo capaz de fazer com que o estudante reelaborasse ou construísse “novos esquemas para lidar com o dado novo, não tomando consciência das relações entre o resto e os outros termos da divisão, as quais são imprescindíveis para a construção da conceituação desta operação” (FERREIRA; LAUTERT, 2003, p.553).

As autoras concluíram que os estudantes tem consciência de como solucionar um problema de divisão, mesmo antes de receber instrução a respeito deste conteúdo escolar. Os resultados mostraram a construção de graus diferenciados de tomada de consciência da divisão, propiciados pelas intervenções do examinador e pela presença de referentes no enunciado, sem o alcance da conceituação.

Correa (2004) teve o intuito de examinar as estratégias de resolução oral de tarefas de divisão partitiva e por quotas de crianças de 6 a 9 anos, com diferentes níveis de escolaridade em aritmética. A autora trouxe como referência Selva (1998), que descreveu as estratégias utilizadas por crianças que resolveram corretamente problemas de divisão:

> Selva (1998) descreveu cinco tipos de estratégias usadas pelas crianças que obtiveram sucesso na solução dos problemas. São elas: cinco tipos de estratégias usadas pelas crianças que obtiveram sucesso na solução dos problemas. São elas: (a) representação direta do problema usando a distribuição das quantidades; (b) representação direta com formação de grupos; (c) ensaio e erro; (d) repetição aditiva e (e) emprego de fatos conhecidos. (CORREA, 2004 p. 147)

Correa (2004) também cita Kouba (1989) que realizou um estudo transversal com crianças de 6 a 8 anos, com escolaridade entre a 1ª e 3ª séries, com o propósito de descrever as estratégias intuitivas utilizadas na resolução de problemas de multiplicação e divisão.

> A classificação das estratégias realizadas por Kouba (1989) foi baseada no grau de abstração nelas envolvido, sendo descritas cinco categorias: (a) representação direta do problema através de materiais concretos; (b) dupla contagem, isto é, contagem paralela envolvendo o número de elementos em cada conjunto e o número de conjuntos formados; (c) contagem a partir de um fator (contar de cinco em cinco, por exemplo); (d) adições e subtrações repetidas; (e) conhecimento prévio de fatos numéricos relacionados à divisão e à multiplicação. (CORREA, 2004 p. 147).

A autora, (2004) referindo-se a Mulligan (1992), que acompanhou o desenvolvimento das estratégias de solução dos problemas multiplicativos por crianças dos 7 aos 8 anos de idade, descreveu as seguintes categorias:

> Mulligan (1992), em estudo longitudinal, acompanhou o desenvolvimento das estratégias de solução dos problemas multiplicativos por crianças dos 7 aos 8 anos de idade, descrevendo as seguintes categorias: (a) grupamento: formar conjuntos equivalentes segundo as quantidades especificadas no problema; (b) grupamento por tentativa e erro: a quantidade para a formação dos grupos é estimada, uma vez que esta estimativa não esteja correta, o número de elementos nos conjuntos é aumentado ou diminuído; (c) contagem um a um das quantidades envolvidas no problema; (d) contagem envolvendo um dado fator; (e) dupla contagem; (f) adição repetida; (g) subtração repetida; (h) metades: dividir, por visualização ou concretamente, a quantidade em dois conjuntos equivalentes; (i) correspondência termo-a-termo; (j) correspondência um-para-muitos; (l) uso de conhecimentos prévios de adição; (m) uso de conhecimentos prévios de multiplicação; (n) uso de conhecimentos prévios de divisão; e (o) fatos derivados, ou seja, usar um fato numérico conhecido para encontrar outro fato numérico. (CORREA, 2004, p. 147)

O método da pesquisa de Correa (2004) consistiu em apresentar uma situação-problema de divisão por partição e uma divisão por quotas. A situação de divisão por partição consistiu em entregar para cada participante uma certa quantidade de blocos (representando comida), que deveria ser repartida entre um determinado número de ursinhos de pelúcia. Era solicitado, então, às crianças que especificassem o número de blocos que cada ursinho iria ganhar. Foram usados, neste estudo, quatro tamanhos de dividendo (4, 8, 12 e 24) e dois divisores (2 e 4).

Já na situação que envolveu a ideia de divisão por quotas, os participantes foram apresentados a uma situação na qual certa quantidade de blocos (representando comida), deveria ser distribuída para os ursinhos durante um piquenique. Para cada ursinho seria feito um pratinho, como mostrado num cartão, com uma determinada quantidade dos blocos apresentados, e assim sucessivamente até terminar o conjunto dos blocos. Perguntava-se, então, à criança quantos ursinhos poderiam ser convidados para o piquenique fazendo tal distribuição. Foram utilizados, para este estudo, quatro tamanhos de dividendo (4, 8, 12 e 24) e dois divisores (2 e 4).

O grupo de participantes da pesquisa foi composto de 80 estudantes com idades entre 6 e 9, que individualmente solucionaram as questões. A análise de dados foi feita a partir do número de respostas corretas e também da análise da forma como cada estudante explicou sua resolução. Correa (2004) organiza sua análise em 11 categorias baseadas nas estratégias descritas por Selva (1998) , Kouba (1989) e Mulligan (1992). São elas:

QUADRO 1- ESTRATEGIAS DE RESOLUÕES DE PROBLEMAS DE DIVISÃO DESCRITAS POR CORREA (2004)

(continua)

ESTRATÉGIAS DOS PARTICIPANTES		DESCRIÇÃO E EXEMPLOS
1	Respostas sem explicação	Sendo incluídas também nesta categoria respostas como “não sei”.
2	Respostas com explicação arbitrária ou idiossincrática.	Incluiu-se também nesta categoria respostas que mencionavam alguma competência ou habilidade da criança para resolver o problema. Exemplos: “eu pensei muito”, “eu sou bom em matemática”, “eu sei como fazer contas”.
3	Distribuição um a um	As crianças tentavam modelar a situação através dos dedos, correspondendo um dedo para cada ursinho por vez.
4	Recontagem das quantidades já apresentadas no problema	Geralmente a criança contava de um em um até atingir o valor do dividendo. Exemplo: [tarefa 12 ¸ 2]. A criança ia apontando alternadamente para os ursinhos, contando: “um, dois, três... doze”.
5	Contagem a partir de um dado fator	Exemplo: [tarefa 8¸ 4] - “Eu contei: dois, quatro, seis e oito. Então é dois pra cada um”. Foram classificadas nesta categoria somente as respostas em que a contagem foi realizada sem interrupções, ou seja, sem que houvesse a necessidade de se computar subtotais para cada passo.
6	Dupla contagem	a criança realizava a distribuição em cada rodada contando até alcançar o valor do dividendo. Simultaneamente, contava quantas rodadas haviam sido necessárias para completar a tarefa. Exemplo: tarefa [12 ¸ 4] -“Três. Eu contei assim: um, dois, três, quatro (levanta um dedo); cinco, seis, sete, oito (levanta outro dedo); nove, dez, onze, doze (levanta outro dedo)”.

QUADRO 1- ESTRATEGIAS DE RESOLUÕES DE PROBLEMAS DE DIVISÃO DESCRITAS POR CORREA (2004)

(conclusão)

7	Adição repetida	A criança adiciona uma determinada quantidade repetidas vezes até o valor do dividendo ser atingido. A criança geralmente precisa calcular os subtotais em cada etapa ou faz menção explícita a termos que se referem ao uso da adição como: e, mais, juntei tudo junto, etc. Exemplos: [Tarefa 12 ¸ 4] - "Três. Eu fiz três mais três, mais três, mais três. Eu comecei com dois, mas não era. Eu fui então pra três"; [Tarefa 24 ¸ 2] - "Doze. Eu comecei com 6, e eu juntei e vi que não dava. Eu juntei 7, também não deu. Juntei 8, juntei 9, juntei 10, juntei 11 e juntei 12 e fez 24".
8	Subtração repetida	A criança subtrai um valor repetidas vezes do dividendo até esgotá-lo. Exemplo: [Tarefa 4 ¸ 2] - "Dois. Porque quatro menos dois é dois. Então você põe dois ali, e dois ali".
9	Metades	A criança divide sucessivamente em metades o valor correspondente ao dividendo. Exemplo: [Tarefa 8¸ 4] - "Dois. Eu parti em quatro e depois em dois. Ficou quatro dois". É importante notar que a ideia de metade para as crianças mais jovens está fortemente relacionada à ideia de somar o mesmo número duas vezes, como no exemplo a seguir: [tarefa 24 ¸ 2] – "Se 12 e 12 é vinte e quatro e 24 cortado em metades é 12, então eu sei a resposta direto".
10	Conhecimento de fatos multiplicativos	A criança utiliza conhecimentos aprendidos sobre a divisão ou multiplicação. Exemplo [Tarefa 12 ¸ 2] - "Seis. Porque duas vezes seis é doze".
11	Partição e partição associada com produtos	A criança decompõe o dividendo em uma soma de números inteiros de modo a facilitar o cômputo. Exemplo: [Tarefa 12 ¸ 2] - "Seis. Cinco ali, cinco lá. Um ali e um lá".

FONTE: CORREA (2004, p.149). Organização AUTORA, 2018.

Na referida pesquisa a autora (2004) conclui, de maneira geral, que o desempenho das crianças foi influenciado pelo tamanho do dividendo e do divisor. Os procedimentos de dupla contagem e uso de fatos multiplicativos foram mais utilizados para a solução das tarefas de divisão por quotas enquanto que procedimentos baseados no uso de adições repetidas e estratégias envolvendo partição de quantidades foram relativamente mais empregados nos problemas de divisão partitiva. A pequena porcentagem de procedimentos baseados na subtração repetida sugere que esta não pode ser tomada como modo de representação intuitiva da divisão.

No caso da divisão partitiva, observa-se o aumento na frequência relativa de estratégias relacionadas à partição dos números, sejam em partes iguais (adição repetida e metades), sejam em parcelas diferentes (estratégia denominada pela autora (2004) neste estudo como “partição propriamente dita”).

Nas tarefas de divisão por quotas, por outro lado, Correa (2004) observou que os procedimentos de dupla contagem e uso de fatos multiplicativos foram mais utilizados. Também foram utilizadas as estratégias de distribuição (muitos para um), o raciocínio multiplicativo com associação com a tabuada, conceito de metade, adição de parcelas iguais e, em menor frequência, a subtração de parcelas iguais. Constatou-se uma pequena porcentagem de procedimentos baseados na subtração repetida, razão pela qual a referida autora sugeriu que estes não podem ser tomados como modo de representação intuitiva da divisão.

Em sua tese, que teve como objetivo investigar o efeito de uma intervenção específica sobre a compreensão do conceito de divisão com crianças, focalizando as suas dificuldades nesse domínio, Lautert (2005) fez uma pesquisa de intervenção que avaliou inicialmente 206 crianças, de idade média de 10a e 7m. Destas, foram selecionadas 100 com idade inferior a 11a e 6m e que apresentaram percentual de acertos inferior ou igual a 50. Todas eram alunas da terceira série do ensino fundamental. As crianças foras divididas em dois grupos, (um experimental e outro controle). Todas passaram por duas sessões de pré-teste (individual e coletivo) e dois momentos de pós-teste (individual e coletivo). Cada sessão envolveu 6 problemas de divisão. Apenas o grupo experimental participou da intervenção que consistiu em três sessões individuais com duração média de 70 minutos, nas quais cada criança realizou atividades que envolviam problemas de divisão como descrito no Quadro 2. O pré-teste e o pós-teste gerais envolveram um caderno de problemas, resolvido individualmente, contendo seis problemas de divisão por partição e seis de divisão por quotas.

O pré-teste e o pós-teste específicos consistiram na aplicação de três tarefas a serem realizadas em uma única sessão. A Tarefa 1 (T1) avaliou a compreensão da criança acerca das relações inversas entre quociente e divisor e foi composta por três problemas de divisão por partição e três de divisão por quotas, ambos sem resto. A Tarefa 2 (T2) avaliou a compreensão da criança sobre o significado do resto e foi composta por três problemas de divisão por partição e três de divisão por quotas, ambos com resto. A Tarefa 3 (T3) avaliou a capacidade das crianças em identificar e analisar procedimentos incorretos de divisão, consistiu em apresentar seis procedimentos incorretos de resolução de problemas de divisão, três por partição e três por quotas. Na T3, a examinadora apresentava a questão, um cartão com o procedimento correto e outro com o incorreto e a criança deveria dizer qual era o incorreto e justificar a resposta. O áudio das três tarefas foram gravados para posterior análise.

QUADRO 2- DESCRIÇÃO DO PLANEJAMENTO DA PESQUISA DE LAUTERT (2005)

Grupos	Pré-teste Geral (coletivo)	Pré-teste Específico (individual)	Intervenção	Pós-teste Específico (individual)	Pós-teste Geral (coletivo)
Controle	1ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto 2ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto	T1 – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão T2 – Julgamento do significado do resto T3 – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	-	T1 – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão T2 – Julgamento do significado do resto T3 – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	1ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto 2ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto
Experimental	1ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto 2ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto	T1 – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão T2 – Julgamento do significado do resto T3 – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	1ª Sessão Compreensão das relações inversas entre os termos 2ª Sessão Compreensão do significado do resto 3ª Sessão Compreensão de procedimentos corretos e incorretos de resolução	T1 – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão T2 – Julgamento do significado do resto T3 – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	1ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto 2ª Sessão 6 problemas com resto e sem resto

FONTE: LAUTERT, 2005, p.87

A intervenção oferecida somente para o grupo experimental ocorreu em três sessões individuais com duração média de 70 minutos. A primeira sessão teve como objetivo levar a criança a compreender a relação inversa entre o tamanho das partes e o número das partes quando o dividendo é mantido constante em problemas de divisão sem resto. Foram propostas atividades com problemas que envolveram divisão por partição e quotas, durante a sessão, realizada como entrevista clínica, houve interação entre a criança e o examinador, que explicitava o princípio geral de que existe uma relação inversa entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é constante, por exemplo:

> Se eu tenho a mesma quantidade de lápis de cor para distribuir e aumentar a quantidade de estojos vai diminuir a quantidade de lápis de cor dentro dos estojos, ou se eu tenho a mesma quantidade de lápis de cor para distribuir e diminuir a quantidade de estojos vai aumentar a quantidade de lápis de cor dentro dos estojos. (LAUTERT, 2005 p. 101)

A segunda sessão procurou levar a criança a refletir e compreender o significado do resto. A sessão seguiu os mesmos moldes da anterior, porém o examinador, desta vez explicitava o princípio geral de que o resto nunca pode ser nem maior nem igual ao número de partes ou tamanho das partes. Ao final das discussões e reflexões acerca de cada situação, era solicitado à criança que resolvesse corretamente, bem como que escrevesse sua resposta em uma folha de papel ofício, devendo conter o resultado final e a quantidade de elementos relativas ao resto.

A terceira sessão procurou levar a criança a identificar procedimentos corretos e incorretos de resoluções de problemas de divisão por partição e quotas com e sem resto, compreender a natureza do erro e propor formas mais adequadas para a resolução. Nesta sessão a criança era apresentada a diferentes situações e para cada uma delas eram mostradas duas cartelas: uma com a solução correta e outra com a incorreta. A criança deveria identificar a incorreta e corrigir o erro evidenciado. Assim como nas sessões anteriores, cada situação era discutida enfatizando os princípios da divisão que foram violados e propondo que a criança refletisse acerca da situação problema (partição ou quotas e o resto).

A autora (2005) afirma que as principais dificuldades que precisam ser superadas pelos estudantes que estão iniciando o aprendizado formal de divisão e que podem interferir na compreensão deste conceito são:

> a) Igualdade entre as partes; b) o todo deve ser distribuído entre as partes até não existir mais possibilidade de uma nova distribuição; c) as relações inversas entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é mantido constante; d) resto deve ser sempre menor que o número de partes ou tamanho das partes; e) o todo inicial é construído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes (ou vice-versa) mais o resto. (LAUTERT, 2005 p.59)

Os resultados da tese (LAUTERT, 2005) mostraram que independente da dificuldade apresentada com a divisão (relações inversas ou lidar com o resto), as crianças que receberam a intervenção alcançaram um nível de compreensão mais sofisticado nas suas resoluções. Em suas considerações, Lauterd (2005) sugere a realização de pesquisas futuras, e uma de suas sugestões é realizar uma intervenção no contexto de sala de aula, diferindo-se da pesquisa individual feita por ela, sugestão esta bastante próxima da presente pesquisa:

> Uma questão interessante seria investigar se a intervenção conduzida individualmente neste estudo seria bem sucedida se conduzida no contexto de sala de aula. Uma questão desta natureza poderia fornecer mais informações acerca do ensino, da aprendizagem, e da sequencia didática mais adequada para o contexto escolar. (LAUTERT, 2005 p. 259).

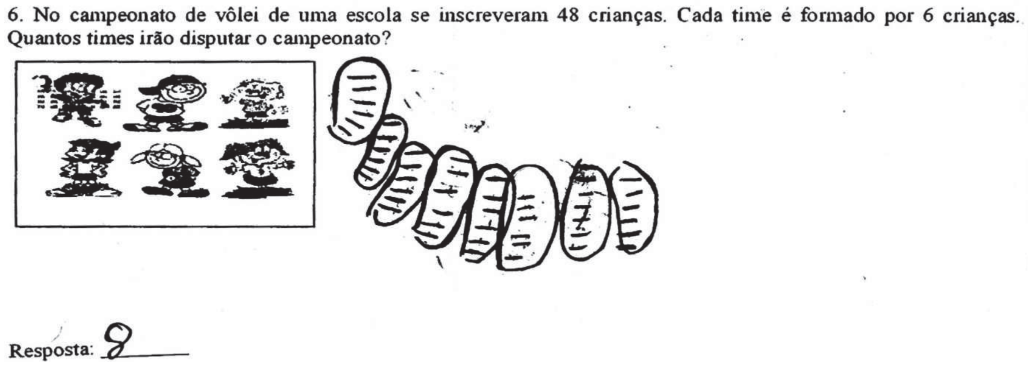
A autora (2005) afirmou, ainda, que a divisão e os números decimais estão presentes no cotidiano de todos nós, fazendo com que o uso da matemática possa ser representado de forma concreta e significativa.

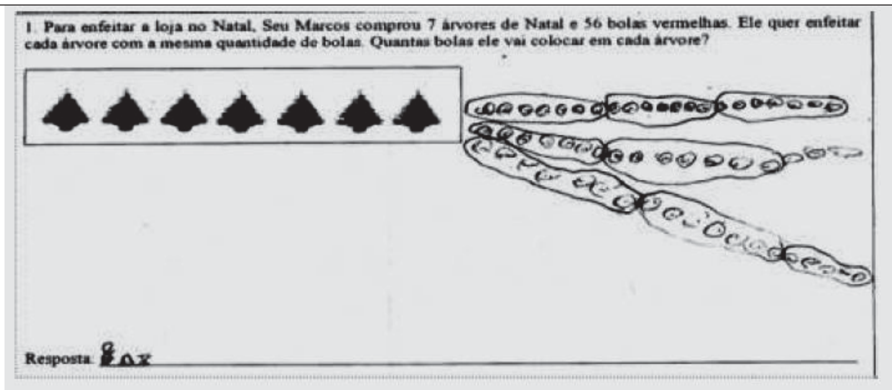
Santos et. al. (2008) realizaram uma pesquisa com o objetivo de analisar o desempenho de estudantes do Ensino Fundamental (3ª. e 5ª. séries) na resolução de diferentes problemas multiplicativos, analisando as estratégias utilizadas por parte das crianças. Investigaram como 180 crianças da 3ª e 5ª séries do Ensino Fundamental resolvem diferentes tipos de problemas de estrutura multiplicativa. Os alunos resolveram 10 problemas de estrutura multiplicativa envolvendo a ideia de correspondência um para muitos, embora com estruturas variadas (multiplicação, divisão partitiva, divisão por quotas, produto cartesiano direto e produto cartesiano inverso).

Os resultados apontaram que a maioria dos estudantes de terceira série (população mais próxima a desta pesquisa) utilizaram o desenho para representar sua resolução, desenhando o todo e agrupando em grupos iguais tanto nos problemas de divisão com a ideias de partição quanto nos de divisão por quotas, como pode-se verificar no Quadro 3, em 2 exemplos trazidos na pesquisa.

Os dados indicaram a importância de se trabalhar com diferentes tipos de problemas em sala de aula, bem como focalizar intervenções que analisem as diferentes estruturas dos problemas multiplicativos. Os resultados obtidos mostraram que estudantes de 3ª série ainda apresentam dificuldades na resolução de problemas multiplicativos, mesmo aqueles considerados simples (multiplicação, divisão partitiva e divisão por quotas). Grande parte das dificuldades pareceu recair na falta de compreensão das relações multiplicativas envolvidas nos problemas propostos, o que os levou a resolver tais problemas por meio de uma adição ou subtração simples.

QUADRO 3 – COMPARAÇÃO DAS RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE DIVISÃO POR PARTIÇÃO E POR QUOTAS NA PESQUISA DE SANTOS et. al (2008)





FONTE: SANTOS et.al., 2008 p. 7 e 8.

Spinillo e Lautert (2011a) fizeram uma pesquisa que teve como objetivo examinar como crianças lidam com o conceito de divisão em atividades tipicamente escolares: problemas verbais e operações.

Os participantes da referida pesquisa foram sessenta crianças, igualmente distribuídas em três grupos. As crianças do Grupo 1 (média de idade: 6a 3m) não haviam sido formalmente instruídas sobre a divisão; as do Grupo 2 (média de idade: 7a 10m) já haviam iniciado o aprendizado formal sobre a divisão, resolvendo problemas e operações de divisão exata com divisor de um algarismo; e as crianças do Grupo 3 (média de idade: 8a 9m) já haviam sido formalmente instruídas sobre a divisão, usando o algoritmo de resolução em operações e problemas de divisão exata e inexata com divisor de dois algarismos.

Tal investigação consistiu em dois estudos que combinam dois tipos de suportes de representação: concreto e gráfico. O primeiro estudo tratava da representação de *operações* de divisão inexata por meio de lápis e papel e de material concreto neutro (fichas plásticas de uma mesma cor). O segundo tratava da representação de *problemas* de divisão inexata por meio de lápis e papel e de material concreto definido (objetos relativos ao enunciado dos problemas: caixas, carros, flores e vasos). Todas as crianças realizaram ambos os estudos, sendo individualmente entrevistadas em duas sessões que foram filmadas.

Os dados foram analisados a partir da maneira como a criança representava a divisão (grafismos adotados) e em função dos termos da divisão que eram representados (divisor, dividendo, quociente e resto) tanto em relação às operações, quanto em relação aos problemas. As autoras (2011a) classificaram os grafismos, nos dois estudos, da seguinte maneira:

> *Indiossincrático:* grafismos com pouca ou nenhuma relação com a operação ou problema apresentado; [...] *Pictográfico:* desenho dos objetos relativos ao enunciado;[...] *Icônico:* grafismos (traços, riscos, círculos) relativos aos elementos e às quantidades da operação ou do problema. Essas representações podiam ser exclusivamente icônicas ou combinadas com desenhos e [...] *Simbólico:* símbolos convencionais (números, sinais) e linguagem natural, podendo ser representações exclusivamente simbólicas ou combinadas com representações icônicas. (SPINILLO; LAUTERT, 2011a, p.121 e122)

As pesquisadoras (2011a) concluíram que as representações das crianças ao lidarem com operações e problemas de divisão diferem. A diferença aparece tanto em relação aos grafismos utilizados como em relação aos termos da divisão que são contemplados nessas representações.

Em relação aos grafismos, na situação em que lápis e papel eram disponibilizados, as crianças empregavam basicamente símbolos, especialmente quando representando as operações. Para as crianças que ainda não haviam sido instruídas sobre a divisão, os resultados diferem daqueles observados entre aquelas já instruídas. As já instruídas usavam grafismos simbólicos, enquanto as que as crianças não instruídas adotavam grafismos simbólicos nas operações, e grafismos simbólicos e pictográficos nos problemas. De acordo com as pesquisadoras (2011 a), isso ocorria porque nos problemas as quantidades possuíam referentes (carrinhos e caixas, flores e vasos) que podiam ser desenhados, o que não ocorria com as operações cujas quantidades não estavam associadas a algum referente.

As conclusões de Spinillo e Lautert (2011 a) ainda afirmam que, de modo geral, os termos que as crianças representavam com mais frequência eram o dividendo e o divisor. O resto foi o elemento mais omitido, mesmo entre as crianças já instruídas sobre a divisão. No que se refere aos problemas, constataram que mesmo as crianças que não haviam sido instruídas sobre a divisão, a representavam por meio da distribuição.

Spinillo e Lautert (2011b) publicaram um estudo de intervenção conduzido em um contexto experimental em que a interação adulto-criança foi marcada por atividades metacognitivas com objetivo de auxiliar na superação das dificuldades experimentadas por crianças com o conceito de divisão.

Tal investigação foi realizada com 100 crianças, com idade entre 8 e 11 anos, alunas do 4.º ano, que apresentavam dificuldades com a divisão. As crianças foram igualmente divididas em um grupo controle e um grupo experimental. As do grupo experimental participaram individualmente de uma, enquanto as crianças do grupo controle continuaram apenas com o ensino usual da divisão em sala de aula. Todos os estudantes realizaram um pré teste e um pós teste.

As atividades propostas pelas pesquisadoras (2011b) para a intervenção centravam-se nas relações inversas entre os termos da divisão e sobre o significado do resto em problemas de divisão inexata. As sessões seguiam uma sequência didática, na qual inicialmente a criança resolvia um problema de divisão, sendo solicitada a explicar a forma pela qual havia resolvido o problema. Em seguida a examinadora dizia se a resolução estava correta ou não, dava explicações, questionava e levantava alternativas a respeito das formas de resolução adotadas pela criança e por fim, explicitava as regras ou princípios invariantes da divisão que estavam presentes na atividade.

As sessões foram gravadas em vídeos e transcritas. Destas sessões foram selecionadas duas passagens extraídas de diferentes entrevistas realizadas com diferentes participantes do grupo experimental, a seguir expostas nos dois exemplos abaixo, que trazem referências de como analisar as respostas dos estudantes participantes de nossa pesquisa. Foram convencionados pelas pesquisadoras (2011 b) “E” para examinadora e “C” para criança:

Exemplo 1: Viviane preparou 18 copos de suco para o lanche e quer servir 6 copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar?

Material disponibilizado: copos e bandejas plásticas de brinquedo foram colocados diante da criança.

> E- Explica para mim como você fez [...]
> C- Eu dividi três copos para cada bandeja.
> E- Mas no problema podia colocar três copos em cada bandeja? O que dizia no problema? [...]
> C- Coloca seis copos em cada bandeja.
> E- Ah! Eu tenho que colocar seis copos em cada bandeja. Então, você tem que prestar atenção no problema, no que o problema está pedindo. Então, vamos fazer o que o problema está pedindo. Tem que ser seis copos em cada bandeja.
> C- (resolve novamente com os objetos colocando seis copos em três bandejas)
> E- Quantas bandejas ela vai precisar?
> C- Três.
>
> (SPINILLO; LAUTERT 2011b, p. 97)

Exemplo 2: Maria tem cinquenta fivelas de cabelo e quer colocá-las em oito saquinhos. Ela quer que cada saquinho tenha a mesma quantidade de fivelas. Quantas fivelas ela irá colocar em cada saquinho?

Instrução dada pela examinadora: “Eu dei um problema de divisão para uma criança resolver e ela resolveu errado. Eu quero que você descubra o erro que ela fez [...]. Agora vou mostrar como foi que essa criança fez para resolver [resolve incorretamente o problema com os objetos, colocando cinco fivelas em cada saquinho e oito fivelas fora dos saquinhos, representando o resto]” (SPINILLO; LAUTERT, 2011b, p. 99).

> [...]
> E- Primeiro, Fernanda, diz por que ela errou.
> C- Porque ela não deu a mesma quantidade.[...]
> E- Então, o que tinha o resto? Ele estava...
> C- Mais.
> E- Maior do que o número de saquinhos e quando isso ocorre...
> C- Tem que dividir.
> E- Tem que dividir, fazer uma nova rodada de distribuição e um novo resto será produzido. Então, o resto não pode ser maior e nem...
> C- Igual.
> E- Isso mesmo! O resto não pode ser nem maior e nem igual ao número de partes ou tamanho da parte, quando isso ocorre tem que continuar a distribuição, e foi o que você fez. E quantas fivelas sobraram?
> C- Duas.
> E- Então, quantas fivelas ela irá colocar em cada saquinho?
> C- Seis e vai sobrar duas.
> E- O resto, ele pode sair fora da nossa representação? [enfatiza a relação do resto com a forma de resolver o problema para que ele não seja ignorado][...]
> C- Não!

(SPINILLO; LAUTERT 2011b, p. 101)

As sessões de intervenção foram gravadas em vídeo e posteriormente transcritas. Para a análise dos resultados, as pesquisadoras utilizaram uma tabela com escores que variaram de zero a dois pontos, seguindo os seguintes critérios:

> *Zero ponto* - a criança não resolve o problema ou interpreta de forma incorreta o enunciado verbal, podendo apresentar ou não encaminhamentos de resolução através de outras operações que não a divisão[...];
> *Um ponto* - a criança interpreta corretamente o enunciado verbal, considerando a divisão, porém erra na resolução [...];
> *Dois pontos* - a criança interpreta corretamente o enunciado verbal, apresenta estratégia de resolução correta e explicita a resposta. Também recebe essa pontuação a representação que apresenta somente a resposta correta possivelmente derivada de um cálculo mental e que explicita o referente para quantidade. (SPINILLO; LAUTERT, 2011b, p. 101).

FIGURA 6- RESULTADOS DOS PRÉ E PÓS TESTES REALIZADOS NA INVESTIGAÇÃO DE SPINILLO E LAUTERT (2011 b)

TABELA 1 - NÚMERO E PERCENTUAL DE ACERTOS (ENTRE PARÊNTESES) EM CADA GRUPO NO PRÉ-TESTE E NO PÓS-TESTE

Pontuação	Grupo controle (n= 600)		Grupo experimental (n= 600)	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Zero	372 (62%)	355 (59%)	368 (61%)	108 (18%)
Um	186 (31%)	177 (30%)	196 (33%)	260 (43%)
Dois	42 (7%)	68 (11%)	36 (6%)	232 (39%)

FONTE: SPINILLO; LAUTERT, 2011b, p. 101

A partir da análise quantitativa dos resultados do nos pré e pós testes, verificou-se que os dois grupos não diferiam significativamente entre si, apresentando o mesmo nível de dificuldade. Todavia, uma analise qualitativa aponta que após a intervenção, os participantes do grupo experimental superaram as dificuldades iniciais, o que não foi observado em relação aos participantes do grupo controle. A investigação acima referida, também traz a tona a importância da tomada de consciência pela criança ao resolver um problema, pois quando esta compreende o que fez, como o fez e porque o fez, permite que a criança monitore a situação, faça os ajustamentos necessários, avalie a adequação de suas posições e as altere se necessário.

Lautert e Spinillo (2012) realizaram pesquisa na qual investigaram o efeito de uma intervenção sobre o conceito de divisão voltada para superação de tais dificuldades.

Analisaram um grupo de 100 crianças com idades entre 8 e 12 e apontaram as dificuldades que as crianças experimentam em relação ao conceito de divisão; dentre elas, a dificuldade em compreender as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e de formas inapropriadas de lidar com o resto. Os participantes foram igualmente divididos em dois grupos, um experimental e um grupo de controle. Ao Grupo Experimental foi proposta uma intervenção individual dividida em três sessões, que consistiu na resolução de problemas que eram lidos pela examinadora e pela criança, foram disponibilizados materiais manipulativos, lápis e papel. Por meio de uma entrevista clínica, foram solicitadas explicações a respeito da maneira como cada criança resolvia os problemas. Em seguida, a examinadora comentava a atividade, gerando uma discussão a respeito das formas de resolução adotadas, fossem elas corretas ou incorretas, enfatizando os princípios invariantes da divisão;

Houve um pré-teste que consistiu na resolução individual de 12 problemas de divisão apresentados por escrito; destes, dez problemas denominados computacionais (exigiam uma computação numérica para sua resolução); e dois problemas denominados não computacionais (requeriam o uso de estimativa para sua resolução). Após a intervenção realizou-se um pós-teste semelhante ao pré-teste, diferindo apenas quanto aos pares numéricos e referentes apresentados no enunciado dos problemas com intervalo de nove a dez semanas entre os dois.

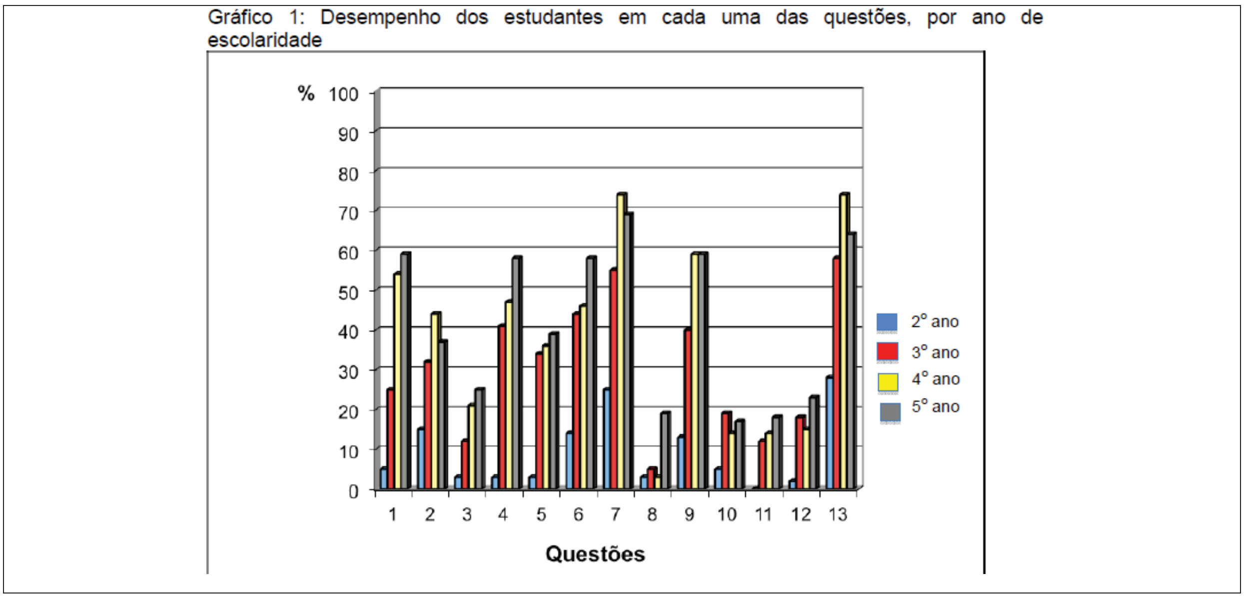
Constataram que as crianças representavam os procedimentos através da divisão, utilizando a distribuição. Os dados mostraram que as crianças que participaram da intervenção alcançaram níveis de compreensão mais sofisticados sobre os invariantes operatórios da divisão do que aquelas que não tiveram esta mesma experiência.

Concluíram que uma intervenção pode modificar as formas de resolverem os problemas e que as interferências aprimoraram os conhecimentos dos estudantes. Os resultados revelaram que as crianças do grupo experimental apresentaram um avanço expressivo tanto em termos de desempenho quanto em termos de uma compreensão sobre os invariantes operatórios da divisão, em relação àquelas que não tiveram esta mesma experiência.

Magina et.al. (2012) apresentaram e discutiram as estratégias empregadas por estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental e seus desempenhos na resolução de situações de divisão com objetivo de obter uma melhor compreensão sobre os desempenhos e estratégias dos alunos das séries iniciais ao resolver problemas no campo multiplicativo. Foi aplicado um teste, pela professora de cada turma com a supervisão dos três pesquisadores, para 349 estudantes, de 2º ao 5º anos, do Ensino Fundamental. O teste, composto de 13 situações do Campo Conceitual Multiplicativo, foi aplicado coletivamente aos estudantes que responderam individualmente.

A pesquisa foi de caráter quali-quantitativo e revelou que os problemas mais difíceis para os estudantes de todos os anos foram o que envolviam a relação *terciária (3, 8, 10 e 11)*; por outro lado, os estudantes obtiveram maior sucesso justamente naqueles problemas da relação *quaternária*, pertencente ao eixo da *proporção simples*, envolvendo a classe de *um para muitos*, que requeriam a operação de multiplicação (1, 7 e 13) e que podiam ser resolvidos sob a lógica da relação *terciária*, por exemplo: "*Maria utiliza 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Se ela fizer 3 receitas de brigadeiro, quantas colheres de chocolate ela usará*?" A explicação que os autores (2012) oferecem para esse aparente paradoxo é o pouco ou nenhum trabalho por parte da escola com problemas que envolvam as relações terciárias. Os resultados por eles encontrados foram organizados no seguinte gráfico:

FIGURA 7- RESULTADOS DO TESTE APLICADO POR MAGINA et.al. 2012



FONTE: MAGINA et.al. 2012 p.10

A pesquisa aponta ainda que esses resultados nos fazem "ponderar sobre o quanto a escola ainda precisa avançar na direção de oferecer situações-problema que permitam que os estudantes expandam seus conhecimentos no âmbito das estruturas multiplicativas" (MAGINA et. al. 2012 p. 11).

Um estudo sobre a divisão também relevante para a presente pesquisa é o de Santos et. al. (2014), no qual os autores examinam as estratégias usadas por estudantes dos 1º. e 2º. anos do Ensino Fundamental e seus desempenhos na resolução de situações-problema envolvendo a divisão. O objetivo foi investigar a maturidade cognitiva dos alunos que ainda não haviam sido expostos formalmente a esse conceito, para lidarem com situações envolvendo essa operação.

A pesquisa consistiu na aplicação de um teste diagnóstico, composto por 13 questões que contemplavam situações do Campo Conceitual Multiplicativo, aplicado coletivamente aos estudantes que responderam individualmente. A aplicação foi realizada simultaneamente nas duas turmas, conduzida pela professora de cada turma com a supervisão de três pesquisadores. Foram analisadas três dessas questões, sendo uma envolvendo a ideia de partição e as outras duas envolvendo a ideia de quotição. Foram analisados o desempenho e as estratégias empregadas pelos estudantes em três situações que envolviam a operação de divisão, sendo que uma delas contemplava a ideia de partição e as outras duas a ideia de quota. Uma dessas situações foi classificada como coleção e a outra como não coleção conforme Figura 8.

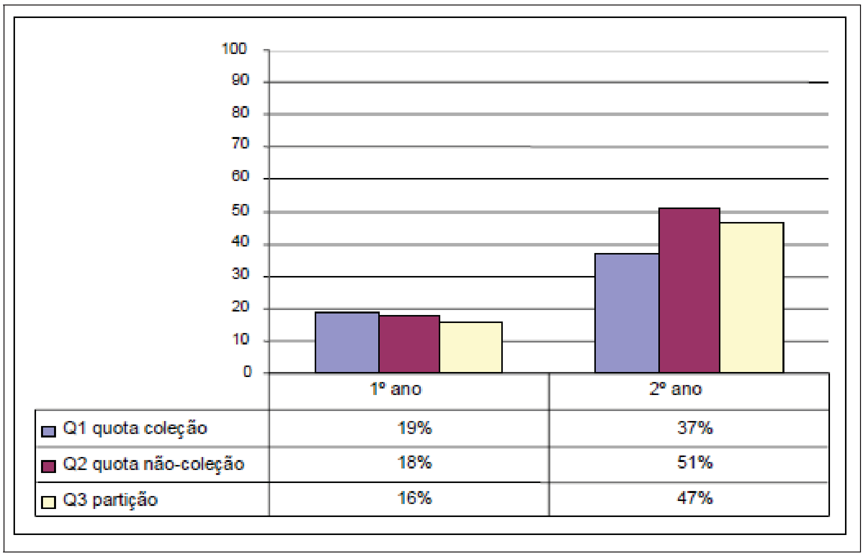
FIGURA 8- SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM A OPERAÇÃO DE DIVISÃO ANALISADAS POR SANTOS et. al. (2014)

Questão 1 (Q1) Ideia de quota – coleção	Questão 2 (Q2) Ideia de quota – não coleção	Questão 3 (Q3) Ideia de partição não coleção
Em uma caixa de chicletes vêm 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?	*João tem 24 bolas de gude para dar de presente aos seus amigos. Cada amigo vai ganhar 3 bolinhas. Quantos amigos de João ganharão bolinhas de gude?*	*A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente com seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?*

FONTE : SANTOS et. al., 2014 p. 52

Os dados da análise quantitativa apontaram que os estudantes do 1º. ano tiveram baixo desempenho nos três problemas (percentual de acerto abaixo de 20%). Os estudantes do 2º. ano apresentam desempenhos superiores aos do 1º. ano, partindo de 37% e alcançando patamar de 51%. A pesquisa apontou uma diferença estatisticamente significativa entre os dois anos, no que tange ao total de acertos nas três questões conforme o gráfico apresentado na figura 9 (SANTOS et. al. 2014, p. 54).

FIGURA 9 – RESULTADOS DA ANÁLISE QUANTITATIVA DE SANTOS et. al. (2014)



FONTE: SANTOS et. al., 2014 p. 54

A análise quantitativa revelou que tanto no 1º como no 2º ano os estudantes tiveram maior sucesso na resolução da questão de divisão por quota (Q2) do que por partição (Q3) e esta diferença não se apresentou significativa.

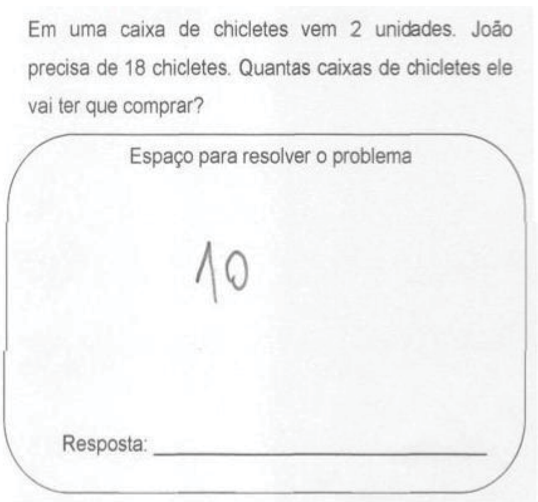
A análise qualitativa foi realizada pelos autores, a partir de uma visão holística dos dados coletados. Foram identificados, por eles, quatro níveis de estratégia, alguns dos quais (nomeadamente os 3º e 4º níveis) contendo sub-níveis, apresentados a seguir:

> *Nível 1* – Estratégia incompreensível
> Estão classificadas como estratégia incompreensível (Nível 1) aquelas respostas em que o estudante não explicita a operação realizada por ele para resolver o problema.[...]
> *Nível 2* – Estratégia de pensamento aditivo
> Na estratégia de pensamento aditivo (Nível 2), o estudante faz uma adição ou subtração usando os dados do problema em forma numérica ou pictórica.[...]
> *Nível 3* – estratégia de transição
> Na estratégia de transição (Nível 3), as ações dos estudantes mostram-se mais sofisticadas, ou seja, o estudante agrupa as cotas, pictórica ou numericamente, até chegar na quantidade total informada no problema.[...]
> *Nível 4* – estratégia de pensamento multiplicativo
> Neste nível, o estudante já utiliza estratégias bastante eficientes e claramente multiplicativas. (SANTOS et. al., 2014 p.56- 60)

Os autores observaram que a representação pictórica foi a mais utilizada entre os estudantes do 2º. ano e teve destaque equivalente à representação numérica entre os estudantes do 1º. ano. Foi por meio da representação pictórica que os estudantes desses dois anos escolares conseguiram obter maior sucesso em suas estratégias de ação. Isto se torna mais evidente nos Níveis 3 e 4, aqueles cujas estratégias são mais sofisticadas e nos quais os estudantes tiveram algum êxito. De acordo com os autores, este resultado indica que o uso da representação pictórica mostrou-se uma ferramenta eficiente para auxiliar o estudante a chegar ao resultado correto (SANTOS et. al. 2014 p.61).

QUADRO 4- EXEMPLOS DE RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE DIVISÃO EM CADA NÍVEL DESCRITO POR SANTOS et. al (2014).

NÍVEL 1

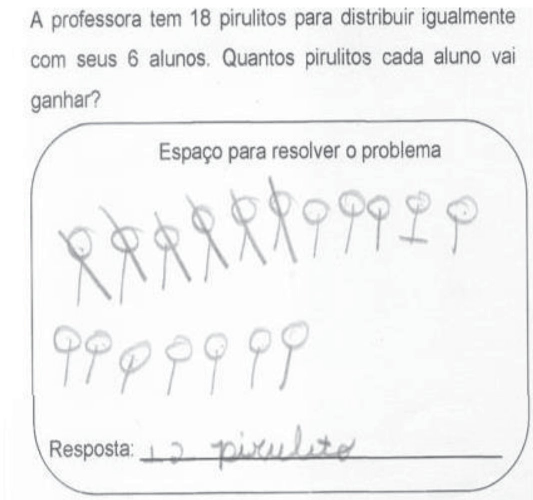

Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Espaço para resolver o problema

10

Resposta:

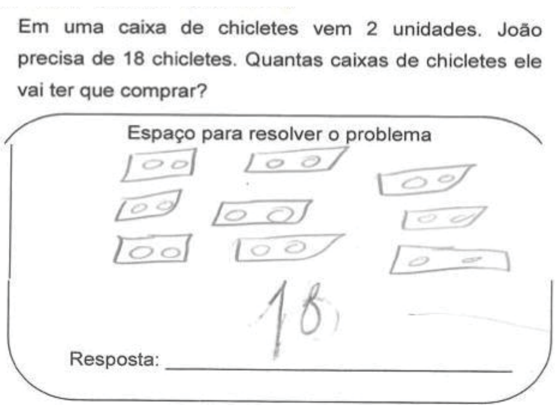
NÍVEL 2


A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente com seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?

Espaço para resolver o problema

Resposta: 12 pirulito

NÍVEL 3

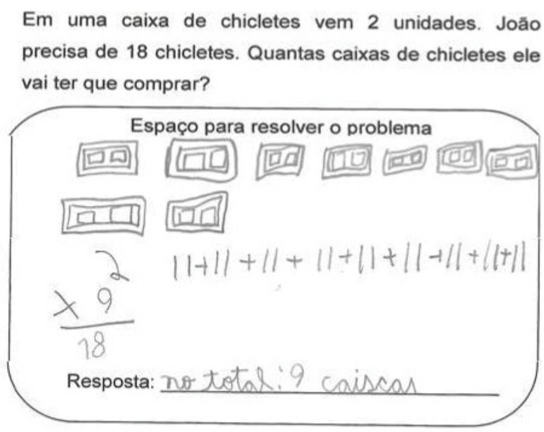

Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Espaço para resolver o problema

18

Resposta:

NÍVEL 4


Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Espaço para resolver o problema

2 × 9 = 18

Resposta: no total: 9 caiscas

FONTE: SANTOS et.al., 2014, p. 56 a 60. Quadro organizado por nós.

Os resultados da referida pesquisa indicam que houve ganhos significativos quando comparados o desempenho dos estudantes do 2º. com os do 1º. ano nas três situações analisadas. Apontam ainda que o desempenho dos estudantes não sofreu diferença significativa nas situações de quota quando comparados com a situação de partição.

Ao término deste capítulo de revisão teórica, pode-se dizer que as contribuições trazidas pelas pesquisas revisadas foram essenciais para a análise e discussão dos dados da pesquisa realizada nesta dissertação.

Inicialmente revisou-se a teoria dos Campos Conceituais, as definições de Vergnaud para Esquema, Conceitos, Situações, Representações e Invariantes Operatórios e Campos Conceituais: Aditivo e Multiplicativo. Após tal revisão, fez-se necessária a busca dos invariantes operatórios específicos da divisão. Os invariantes operatórios, descritos inicialmente por Nunes e Bryant (1997) e também evidenciados por Lauterd e Spinillo (2012) e Lauterd (2015), foram os eixos norteadores da análise e da discussão dos dados desta pesquisa.

Sobre a operação de divisão, foram revisadas as pesquisas de Lauterd e Spinillo (1999) e Ferreira e Lauterd (2003) que tratam das representações das resoluções de problemas de divisão, nas quais destacaram-se as representações pictóricas. A primeira, que retrata um estudo feito com crianças de várias idades evidenciou que estas utilizavam os conhecimentos adquiridos anteriormente, em especial de operações já conhecidas e buscavam solucionar os problemas por meio das representações simbólicas (fichas e material manipulativo) e gráficas (pictóricas). A segunda, que faz um estudo de caso de uma única criança, consolida a conclusão da pesquisa anterior, uma vez que a criança investigada utiliza-se também, como recursos os conhecimentos anteriormente adquiridos e as representações por meio de desenhos para solucionar as questões. A análise dessas pesquisas orientou a necessidade de possibilitar a utilização de material manipulativo e representações pictóricas durante a intervenção realizada na presente pesquisa.

A pesquisa de Correa (2004) evidenciou a importância das resoluções orais, nas quais o estudante expõe sua estratégia permitindo verificar quais esquemas se fazem presentes. A pesquisadora apresenta esquemas de resolução de problemas descritos por Selva (1998), Kouba (1989) e Mulligan (1002). Estes esquemas foram organizados em categorias que nortearam a análise de dados desta pesquisa. A metodologia adotada por Correa (2004) aproxima-se bastante da adotada neste trabalho e trouxe elementos relevantes, principalmente em relação à forma de apresentar os problemas de divisão por quotas e partição durante as entrevistas.

As pesquisas de Magina et. al (2012), Santos et, al (2014) tratam da resoluções de problemas do Campo Conceitual Multiplicativo e trazem resoluções de problemas de divisão. As duas pesquisas contribuíram com dados relevantes, tanto para a análise dos dados como para a definição da metodologia de pesquisa. Ambas mostram que estudantes recorrem a conhecimentos prévios para resolver problemas de divisão. A pesquisa de Santos et. al (2014) destaca os dois tipos de divisão (quotas e partição) analisados separadamente, porém nos dois casos as respostas foram parecidas concluindo que o desempenho dos estudantes não sofreu diferença significativa nas situações de quotas quando comparados com situações de partição.

As pesquisas de Spinillo e Lauterd (2011a), Spinillo e Lauterd (2011b) e Lauterd (2005) apontaram caminhos para análise dos registros das resoluções feitas pelos participantes durante a ação didática ao evidenciarem que as crianças que ainda não aprenderam a operação da divisão resolvem problemas por meio da distribuição e utilizam a representação pictórica assim como referido nas pesquisas de Lauterd e Spinillo (1999) e Ferreira e Lauterd (2003).

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa foi realizada utilizando a abordagem qualitativa, ou seja, seus resultados estão descritos de modo a não se preocupar com representatividade numérica, mas em descrever qualitativamente a forma de aprendizagem de cada estudante e a existência ou não de modificações nos processos de resolução das situações-problema, após a realização de uma intervenção pedagógica. De acordo com Goldenberg (1997) os pesquisadores que adotam a abordagem qualitativa, geralmente opõem-se ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências, já que as ciências sociais têm sua especificidade, o que pressupõe uma metodologia própria: “Desta forma, o pesquisador não pode fazer julgamentos nem permitir que seus preconceitos e crenças contaminem a pesquisa” (GOLDENBERG, 1997, p. 34).

Justifica-se a utilização da pesquisa qualitativa uma vez que esta busca explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos. A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados.

A pesquisa realizada caracteriza-se por ser uma pesquisa de intervenção. De acordo com Gil (2010) as pesquisas do tipo intervenção pedagógica têm como finalidade contribuir para a solução de problemas práticos. Para o autor, nas intervenções, a intenção é descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações sobre seus efeitos, fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes. Damiani (2012) afirma que as intervenções em Educação, em especial as relacionadas ao processo de ensino/aprendizagem, apresentam potencial para, simultaneamente, propor novas práticas pedagógicas (ou aprimorar as já existentes), produzindo conhecimento teórico nelas baseado.

> Pesquisas de intervenção procuram capturar a modificabilidade, o movimento do desenvolvimento. Partindo da ideia de que é relevante saber o que a criança sabe e traz para a situação de intervenção, procura-se viabilizar a passagem para uma maior sofisticação do raciocínio. (SPINILLO; LAUTERT, 2008 p. 317)

Nas pesquisas de intervenção o adulto tem um papel fundamental. Nesta pesquisa, a pesquisadora atuou como professora desta turma apenas durante a ação didática e pôde contar com a presença das professoras regente e corregente da turma em alguns momentos. Durante a ação didática o estudante foi participante ativo e seu pensamento e hipóteses foram evidenciados por meio da mediação da pesquisadora.

As professoras da turma foram orientadas, antes do início da intervenção, a auxiliar apenas na organização da turma evitando interferir na interpretação ou na resolução de qualquer questão, desta maneira o papel da mediação da pesquisadora não teve interferência nos dados da pesquisa.

As pesquisas de intervenção, de acordo com Spinillo e Lautert (2008, p. 303), “podem ocorrer em situações experimentais controladas (ou de laboratório) e em sala de aula”. No contexto experimental as intervenções acontecem em ambiente controlado, individualmente ou em pequenos grupos predefinidos. Diferentemente que no contexto educacional, pois neste não é possível ter controle rigoroso da intervenção, mesmo que previamente planejada. Além disso, o grupo envolvido normalmente é maior e a interação entre os participantes também não pode ser prevista.

> Na sala de aula, os participantes são alunos que não apenas interagem com o adulto (examinador ou professor), mas também interagem entre si, estabelecendo-se assim, relações múltiplas e variadas que estão inseridas em um cotexto educacional [...]. (SPINILLO; LAUTERT, 2008 p. 303)

As pesquisas de intervenção podem ter diferentes objetivos, dependendo do que é investigado. Existem pesquisas de intervenção, como afirmam Spinillo e Lautert (2008), que se voltam diretamente para o conceito ou habilidades que se objetiva desenvolver (divisão, proporção, entre outras) e aquelas que se envolvem indiretamente.

A presente pesquisa tem como foco o envolvimento direto com o conceito a ser desenvolvido, pois os estudantes, durante toda a ação didática estarão em contato com as situações de divisão.

A intervenção envolveu três fases: entrevista inicial, ação didática e entrevista final.

A primeira fase, denominada “entrevista inicial”, e a última, “entrevista final”, foram feitas por meio de entrevistas individuais. De acordo com Ludke e André (2013, p. 38), a entrevista, ao lado da observação é uma das principais técnicas de trabalho quando trata-se de pesquisas nos campo das Ciências Sociais, permite o contato mais próximo com os participantes, bem como a captação de informações de modo mais imediato:

> A grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e coerente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informação desejada [...]. Pode permitir o aprofundamento de pontos levantados por outras técnicas de coleta e a torna particularmente útil [..]. (LUDKE; ANDRÉ, 2013 p. 39).

As entrevistas foram realizadas seguindo as orientações de Delval (2002), para quem, inicialmente, o pesquisador deve entrar em contato com os responsáveis pela instituição de ensino e pelos participantes. Esta orientação foi seguida nesta pesquisa, conforme a autorização da instituição e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE – enviado aos responsáveis pelos estudantes), que foram autorizados pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFPR pelo número: 2.204.108, incluídos no anexo, resguardados os dados que identificariam a instituição.

Delval (2002) orienta que a entrevista seja realizada na própria instituição de ensino dos participantes, pois nela os estudantes estão acostumados a interagir com adultos e a responder as perguntes que estes os fazem. Também afirma que o local onde a entrevista acontece deve ser o mais silencioso, tranquilo e agradável tanto para o participante como para o entrevistador. Para a presente pesquisa, foi escolhida a biblioteca de escola, em momentos que não havia circulação de estudantes, ou uma sala de aula desocupada.

Todas as entrevistas foram gravadas em vídeo e em áudio e em seguida transcritas na íntegra para posterior análise. Esta forma é proposta por Delval (2002) quando afirma que a transcrição da entrevista é algo que facilita bastante a análise dos dados, considerando que as mesmas terão de ser revistas mais de uma vez.

Os tipos de entrevista clínica, de acordo com Delval (2002), podem variar. Elas podem ser inteiramente *abertas*, explorando com liberdade as respostas do sujeito, *semi estruturadas*, quando são perguntas são preestabelecidas, mas podem ser ampliadas e complementadas ou *estruturadas*, somente com perguntas preestabelecidas. Nesta pesquisa, as entrevistas serão semi estruturadas seguindo as orientações do autor que assim as descreve:

> Perguntas básicas comuns para todos os sujeitos, que vão sendo ampliadas e complementadas de acordo com as respostas dos sujeitos para poder interpretar o melhor possível o que vão dizendo. As respostas orientam o curso do interrogatório, mas se retorna aos temas essenciais estabelecidos inicialmente. (DELVAL, 2002, p. 147)

As perguntas que nortearam as entrevistas foram os problemas de divisão que envolveram as ideias de partição e quotas listados a seguir, na descrição da metodologia.

3.1 PROBLEMA E OBJETIVOS DA PESQUISA

A presente pesquisa de intervenção tem como objetivo responder às seguintes questões:

- Quais esquemas estudantes de um 3º ano de uma escola municipal de Curitiba-PR utilizam para solucionar problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional?

- Estes esquemas são modificados após uma intervenção pedagógica envolvendo atividades de composição e decomposição de valores monetários e resolução de problemas de participação e quotição em diferentes situações?

Tem como objetivo analisar as contribuições de uma intervenção pedagógica para a modificação dos esquemas de resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional de crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba-PR.

E como objetivos específicos:

- Verificar se na resolução de problemas envolvendo Sistema Monetário Nacional os estudantes utilizam os mesmos esquemas de resolução descritas na literatura para outras situações de divisão.

- Verificar contribuições do processo de intervenção envolvendo atividades de composição e decomposição de valores monetários em diferentes situações: jogos e desafios matemáticos para a resolução de problemas de divisão envolvendo quantias de dinheiro.

- Comparar se os esquemas presentes na resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional se mantém os mesmos antes e após a realização da intervenção.

3.2 POPULAÇÃO ENVOLVIDA

Participaram da pesquisa cinco estudantes sorteados aleatoriamente dentre os 30 estudantes de uma turma de um 3º ano do turno da tarde de uma Escola Municipal de Curitiba-PR.

A pesquisa realizou-se nas dependências da Escola durante o turno das aulas. A pesquisadora é docente na referida instituição de ensino, porém em turno contrário ao dos estudantes envolvidos.

Os responsáveis pelos estudantes foram comunicados a respeito da pesquisa e convidados a esclarecer qualquer dúvida a respeito da intervenção antes da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido-TECLE em reunião específica com a presença da direção da escola. Todos os alunos da turma obtiveram autorização dos responsáveis para participar da pesquisa.

3.3 COLETA DE DADOS

A coleta de dados envolveu um estudo piloto e posteriormente uma intervenção.

O estudo piloto foi realizado com 12 estudantes da mesma Escola Municipal em que foi realizada a pesquisa, também do 3º ano, mas não na mesma turma. Teve como objetivo verificar como os estudantes respondiam os problemas matemáticos propostos e como utilizavam o material disponibilizado. Ademais, objetivou avaliar se os problemas estavam elaborados de forma clara para os estudantes. O estudo evidenciou que ao longo das entrevistas os alunos não buscavam as cédulas de dinheiro como material de apoio, reportando-se, na maioria das vezes, ao papel e ao lápis, o que provocou a necessidade de reestruturar o planejamento das entrevistas propondo os problemas 1 e 2 (1ª entrevista) e 5 e 6 (entrevista final) com vários materiais disponíveis e os problemas 3 e 4 (entrevista inicial) e 7 e 8 (entrevista final) com apenas as cédulas fictícias de dinheiro disponíveis como material de apoio.

A intervenção envolveu três fases:

- Entrevista inicial realizada com os estudantes participantes da pesquisa: AJ, AA, BE, LO e PH;

- Ação didática realizada com toda a turma de 3º ano em que os participantes da pesquisa estavam matriculados;

- Entrevista final realizada com os mesmos estudantes que participaram da entrevista inicial.

A coleta de dados foi realizada durante a ação didática com todos os estudantes matriculados na turma de 3º ano, sendo considerados para a análise dos dados as atividades desenvolvidas somente pelos 5 alunos participantes das entrevistas.

3.3.1 Entrevista inicial

A entrevista inicial foi realizada com cinco estudantes. Foram propostos quatro problemas a cada participante individualmente, em dois momentos, ou seja, dois em um momento de entrevista e dois em outro momento.

Os problemas foram elaborados com vistas a contemplar os invariantes operatórios da divisão descritos na literatura (LAUTERT, 2005; LAUTERT; SPINILLO, 2012; NUNES; BRYANT,1997):

(1) o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes);

2) o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos;

(3) o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero);

(4) relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido;

(5) o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.

Os problemas foram elaborados tendo em vista a possibilidade de evidenciarem ou não em suas resoluções tais invariantes, permitindo assim, verificar quais invariantes operatórios descritos na literatura estão presentes nos esquemas de cada uma das resoluções propostas durante a intervenção.

No primeiro momento os estudantes resolveram dois problemas, sendo um de partição e outro de quotição; estavam à disposição cédulas de dinheiro fictícias, bonecas simbolizando personagens dos problemas, carrinhos, material de contagem (material dourado, palitos, tampinhas), papel e lápis. Os problemas foram:

1) UMA MENINA GANHOU 15 REAIS DE SUA MÃE E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ESSA QUANTIA ENTRE ELA E SUA IRMÃ. COM QUANTOS REAIS CADA MENINA FICARÁ? SOBRARÁ DINHEIRO? QUANTO? (partição)

2) UMA SENHORA TEM R$ 20,00, PARA DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE SEUS NETOS. CADA NETO GANHARÁ R$ 5,00. QUANTOS NETOS ESSA SENHORA TEM?[11] (quotição)

No segundo momento da entrevista inicial os estudantes solucionaram os outros dois problemas, sendo um de partição e outro de quotição, podendo utilizar apenas cédulas de dinheiro fictícias e carrinhos de brinquedo (objeto citado nos problemas). Os problemas foram:

3) UM GAROTO FOI COMPRAR CARRINHOS, PAGOU COM UMA CÉDULA DE R$ 20,00 E NÃO RESTOU TROCO. SABENDO QUE CADA CARRINHO CUSTOU R$ 4,00, QUANTOS CARRINHOS ELE COMPROU? (quotição)

4) PARA COMPRAR 3 CARRINHOS, UM GAROTO GASTOU 18 REAIS, SABENDO QUE TODOS TINHAM O MESMO PREÇO, QUANTO CUSTOU CADA CARRINHO? (partição)

Importante destacar que o fato da disponibilização apenas das cédulas para a segunda etapa da entrevista justifica-se pela necessidade de provocar o uso das

[11] O problema foi apresentado desta forma para as crianças. Após a aplicação da entrevista entendemos que a pergunta deveria ser: “Por quantos netos a senhora dividiu a quantia”. Resolvemos mantê-lo para a análise dos dados uma vez que durante a aplicação a pesquisadora assegurou-se de que os participantes haviam compreendido que a quantia foi dividida por todos os netos da senhora.

mesmas a partir da constatação inicial, do estudo piloto de que crianças não as usavam espontaneamente.

As entrevistas foram filmadas e transcritas para posterior análise. Os instrumentos de pesquisa foram filmadora, gravador de áudio, fichas de resolução de problemas.

3.3.2 A ação didática

A ação didática teve duração de 12 horas aulas, divididas em 6 encontros de duas aulas geminadas. Semanalmente os estudantes tiveram dois encontros de 4 aulas com duração total de 3 semanas.

Durante a ação didática toda a classe foi desafiada a solucionar problemas semelhantes aos das entrevistas ou envolvendo maiores dificuldades, utilizando estratégias variadas (em grupos, com jogos, utilizado mídias, calculadoras, objetos manipulativos, e outros). Além disso, foram abordados conteúdos matemáticos, tais como: sistema de numeração decimal com ênfase em composição e decomposição de números; sistema de medidas, em específico, Sistema Monetário Nacional, situações problemas de divisão por partição e por quotição conforme o roteiro apresentado no Quadro 5.

QUADRO 5 – ROTEIRO DA AÇÃO DIDÁTICA

AULA 1	Apresentação do Sistema Monetário Nacional: suas cédulas e moedas; composição e decomposição de valores utilizando dinheiro.
AULA 2	Aplicação e resolução de problemas de divisão por partição envolvendo o Sistema Monetário Nacional.
AULA 3	Aplicação e resolução de problemas de divisão por quotas envolvendo o Sistema Monetário Nacional.
AULA 4	Jogo de tabuleiro envolvendo o Sistema Monetário Nacional e situações-problema de divisão. Interação e mediação durante o jogo.
AULA 5	Jogo de tabuleiro envolvendo o Sistema Monetário Nacional e situações-problema de divisão. Interação e mediação durante o jogo.
AULA 6	Jogo de tabuleiro envolvendo o Sistema Monetário Nacional e situações-problema de divisão. Interação e mediação durante o jogo.

FONTE: A autora 2018

Problemas que envolveram troca e destroca de valores de dinheiro, e situações de divisão por quotas e partição envolvendo Sistema Monetário Nacional foram explorados em sala de aula, abordando diferentes estratégias de resoluções, sempre exemplificando e discutindo no grande grupo os resultados obtidos e os diferentes caminhos seguidos para chegar ao mesmo resultado. Nesta etapa didática o papel dos adultos envolvidos foi de mediador. As professoras da turma foram orientadas pela pesquisadora a não interferir nas resoluções dos estudantes, apenas auxiliando na organização da turma, principalmente nos momentos de jogos.

Durante a ação didática a pesquisadora teve papel de professora e mediadora. Nos momentos de explicações orais e de discussão das diferentes estratégias de resolução manteve-se como mediadora, deixando os estudantes como protagonistas, problematizando para que pudessem perceber os erros, os acertos e as diferentes formas possíveis de solucionar uma mesma questão.

Todas as explicações partiram de questionamentos e dúvidas dos estudantes a partir das problematizações sugeridas pela pesquisadora. As estratégias de resoluções partiram sempre das hipóteses dos estudantes, que inicialmente eram direcionadas ao grande grupo para discussão. A partir destas discussões a pesquisadora realizava novos questionamentos para que todos chegassem juntos aos resultados esperados.

Conforme Vergnaud (1990), o desenvolvimento cognitivo se dá, principalmente, através do desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas, no intuito de possibilitar ao sujeito enfrentar e dominar a gama de situações que lhe são apresentadas, sendo necessário, portanto, dar toda atenção aos aspectos conceituais que envolvem os esquemas. Por esse motivo cada uma das aulas da ação didática envolveu problemas diferentes, buscando propiciar aos estudantes um repertório de diferentes esquemas possíveis.

a) Aula 1

Na aula 1, a turma foi organizada em duplas e os estudantes foram desafiados a resolver cinco situações, de mesma estrutura, que envolveram composição de quantias de dinheiro. Os referentes envolvidos foram o dinheiro e as cédulas. O objetivo da atividade foi provocar a composição e a decomposição de quantias de dinheiro a partir do manuseio das cédulas, oportunizando maior familiaridade com as trocas e destrocas próprias do Sistema Monetário Nacional. Os alunos tinham disponíveis para apoio cédulas de dinheiro fictícias (cada dupla recebeu 10 cédulas de cada valor existente no Sistema Monetário Nacional vigente, incluindo cédulas de 1 real que substituíram as moedas), papel e lápis. As situações propostas foram: - Como é possível compor 50 reais utilizando essas cédulas? Em seguida, foram sugeridos outros valores para serem compostos com as cédulas (20, 120, 147, 37).

Após foram propostos dois problemas com a ideia de decompor as quantias de dinheiro. O primeiro problema que os estudantes solucionaram foi:

UMA MENINA TROCOU UMA CÉDULA DE CINQUENTA REAIS SOMENTE POR CÉDULAS DE CINCO. COM QUANTAS CÉDULAS ELA FICOU?

O segundo problema proposto foi:

A CAIXA DE UM MERCADO PRECISA TROCAR CINQUENTA REAIS POR CÉDULAS DE 5. QUANTAS CÉDULAS DE 5 ELA PRECISA?

Foram analisadas e discutidas no grande grupo as estratégias de resolução dos problemas. Cada dupla explicou sua solução e a mesma foi debatida, estando corretas ou não as diferentes estratégias foram comentadas.Por fim, os grupos foram desfeitos, e individualmente, os estudantes solucionaram a ficha de problemas (QUADRO 6).

QUADRO 6 – FICHA DE PROBLEMAS DA AULA 1 – AÇÃO DIDÁTICA

1. UMA MENINA TROCOU UMA CÉDULA DE VINTE REAIS SOMENTE POR CÉDULAS DE CINCO. COM QUANTAS CÉDULAS ELA FICOU?
2. A CAIXA DE UM MERCADO PRECISA TROCAR CINQUENTA REAIS POR CÉDULAS DE 10. QUANTAS CÉDULAS DE 10 ELA PRECISA?
3. UM GAROTO VAI TROCAR 10 REAIS POR CÉDULAS DE 2 REAIS. COM QUANTAS CÉDULAS DE 2 REAIS ELE VAI FICAR?
4. O CAIXA DA PADARIA PRECISA TROCAR 50 REAIS POR CÉDULAS MENORES. O GERENTE DEU 3 CÉDULAS DE 10 E 4 CÉDULAS DE CINCO REAIS. A TROCA ESTÁ CORRETA? EXPLIQUE:

FONTE: A autora 2018

Após a resolução de cada situação (QUADRO 6) pelos alunos, as fichas foram recolhidas. Em seguida, cada uma delas foi comentada e discutida coletivamente, enfatizando as diferentes formas de compor e decompor uma mesma quantidade de dinheiro.

b) Aula 2

Considerando que na aula anterior os participantes já tiveram experiências com trocas e destrocas de valores monetários, neste segundo momento os referentes envolvidos nos problemas foram dinheiro e pessoas em situações de divisão com a ideia de partição envolvendo valores do Sistema Monetário Nacional.

Esta aula teve como objetivo promover situações de divisão com a ideia de partição utilizando-se das cédulas do dinheiro, ou seja, compondo e decompondo as quantias referenciadas nos problemas durante a resolução dos problemas de divisão. Para tanto, a classe foi organizada em duplas e foram disponibilizadas cédulas de dinheiro fictícias suficientes para solucionar os problemas, papel e lápis.

Para contextualizar as situações de divisão por partição, inicialmente foi proposta uma situação a partir do lanche oferecido na escola naquele dia:

- Tenho aqui na bandeja, trinta pedaços de bolo e vou distribuir igualmente entre vocês (trinta estudantes). Todos devem ganhar a mesma quantidade e não pode sobrar. Quantos pedaços de bolo cada um vai ganhar?

O próximo problema partiu de uma situação que envolveu material concreto (palito de sorvete):

- Como posso distribuir igualmente 20 palitos para 5 crianças? Esta mesma situação (20:5), foi explorada em um contexto que envolveu quantias de dinheiro: como posso dividir 20 reais igualmente entre cinco crianças?

A terceira situação explorada foi: - Como posso dividir 15 reais entre três crianças?

As próximas situações foram escritas no quadro, uma de cada vez, e os estudantes organizados em duplas deveriam solucioná-los.

UMA GAROTA TEM 18 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE ELA E SUA IRMÃ. QUANTO DINHEIRO CADA MENINA IRÁ RECEBER?

MARIA FOI À FEIRA COM 20 REAIS. COMPROU 4 FRUTAS DE MESMO VALOR E NÃO SOBROU DINHEIRO. QUANTO CUSTOU CADA FRUTA?

Após solucionados pelas duplas, esses dois problemas foram discutidos e as diferentes estratégias de resolução foram expostas. Os estudantes foram orientados a desfazer as duplas e a eles foi entregue uma ficha de problemas para que resolvessem individualmente, as quais também passaram a compor a coleta de dados da pesquisa.

QUADRO 7 – FICHA DE PROBLEMAS DA AULA 2 – AÇÃO DIDÁTICA

1- UMA GAROTA TEM 19 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE ELA E SUA IRMÃ. QUANTO CADA MENINA IRÁ RECEBER? SOBRARÁ DINHEIRO? Partição 2- MARCIA FOI À FEIRA COM 25 REAIS. COMPROU 5 FRUTAS DE MESMO VALOR E NÃO SOBROU DINHEIRO. QUANTO CUSTOU CADA FRUTA? Partição 3- ALICE TEM 30 REAIS E VAI DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE SUAS TRÊS FILHAS. QUANTO DINHEIRO CADA MENINA IRÁ GANHAR? Partição 4- CARMEN VAI COMPRAR CAMISETAS. ELA TEM 50 REAIS. ESSE VALOR É SUFICIENTE PARA 2 CAMISETAS E NÃO SOBRA NADA DE DINHEIRO. QUANTO CUSTA CADA CAMISETA? Partição

FONTE: A autora 2018

c) Aula 3

A aula 3, que teve por objetivo promover situações de divisão por quotas, seguiu a seguinte sequência: inicialmente, foram discutidos e resolvidos coletivamente alguns problemas de quotição. Neste momento foram sanadas dúvidas e exploradas as diferentes formas de resolução. Em seguida os estudantes foram distribuídos em duplas e desafiados a resolver situações-problema de divisão por quotas envolvendo o Sistema Monetário Nacional vigente. Foram disponibilizadas cédulas de dinheiro fictícias suficientes para solucionar tais questões, papel e lápis. Após concluírem as resoluções, todas as situações propostas foram resolvidas e discutidas no grande grupo. Inicialmente os estudantes foram apresentados a uma situação de divisão por quotas a partir, novamente, do lanche:

TENHO AQUI NA BANDEJA, TRINTA MAÇÃS PARA DISTRIBUIR IGUALMENTE ENTRE VOCÊS (TRINTA ESTUDANTES). TODOS VÃO GANHAR UMA MAÇÃ. QUANTOS ESTUDANTES HÁ NA SALA?

O próximo problema partiu de uma situação que envolveu material concreto (palito de sorvete):

SE DISTRIBUIR IGUALMENTE 20 PALITOS, DE MODO QUE CADA CRIANÇA RECEBA 5 PALITOS, QUANTAS CRIANÇAS RECEBERÃO PALITOS?

Em duplas, foi proposto aos estudantes que solucionassem as seguintes situações:

UMA MENINA TEM 8 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODAS AS SUAS PRIMAS. CADA UMA GANHARÁ 2 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTAS PRIMAS ELA TEM?

CAROLINA LEVOU 17 REAIS PARA COMPRAR SANDUICHES. ELA PAGOU 5 REAIS POR CADA UM E SOBRARAM 2 REAIS. QUANTOS SANDUÍCHES ELA COMPROU?

Após a finalização destas duas resoluções, as estratégias foram explicadas e debatidas no grande grupo, explorando o fato de existir mais de uma solução para o mesmo problema. Após a discussão os estudantes desfizeram as duplas e a eles foi entregue a ficha para resolução individual.

QUADRO 8 – FICHA DE PROBLEMAS DA AULA 3 – AÇÃO DIDÁTICA

1- UMA MENINA TEM 8 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODAS AS SUAS COLEGAS DA CLASSE DE BALÉ. CADA UMA GANHARÁ 2 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTAS COLEGAS ELA TEM NA CLASSE DE BALÉ? 2- RAQUEL TEM 40 REAIS E VAI DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODOS OS SEUS VIZINHOS DE CONDOMÍNIO. CADA UM VAI GANHAR 10 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTOS VIZINHOS ELA TEM? 3- BIANCA VAI COMPRAR CHOCOLATE. ELA VAI GASTAR 16 REAIS EM BARRAS IGUAIS QUE CUSTAM 4 REAIS. QUANTAS BARRAS ELA VAI COMPRAR? 4- DANIEL LEVOU 12 REAIS PARA COMPRAR SANDUÍCHES. ELE PAGOU 5 REAIS EM CADA UM E SOBRARAM 2 REAIS. QUANTOS SANDUÍCHES ELE COMPROU?

FONTE: A autora 2018

d) Aula 4

A aula 4 teve como objetivo discutir e retomar os conteúdos trabalhados na aulas anteriores a partir de um jogo. Este é um importante instrumento pedagógico sugerido pela Secretaria Municipal de Educação (SME) e por esse motivo foi adotado como metodologia nesta pesquisa.

> Como proposta metodológica, o trabalho com jogos é sistematizado por meio de um planejamento que evidencie a intencionalidade pedagógica, contemplando objetivos, conteúdos, encaminhamentos e critérios de avaliação. Assim, em situações de jogos matemáticos, há a possibilidade de verificarmos como os(as) estudantes estão abordando e compreendendo as questões matemáticas que surgem, nas quais fazemos intervenções, proporcionando reflexões sobre o modo como eles(as) estão formulando suas ideias, estratégias de resolução e sistematizações (CURITIBA, 2016 p.14).

Os estudantes foram apresentados ao Jogo de Tabuleiro “QUEM DIVIDE GANHA”, prosseguindo pela seguinte sequência: a turma foi organizada com os estudantes em grupos de cinco componentes. Tomou-se o cuidado em distribuir os estudantes que fizeram parte das entrevistas, de modo que cada um ficasse em um grupo diferente, para que tivessem contato com várias estratégias diferentes entendendo que cada estudante possui diferentes conhecimentos a partir de suas próprias experiências cotidianas. Consideramos a hipótese de que caso ficassem sempre nas mesmas equipes, as respostas na entrevista final poderiam ficar parecidas em função da interação entre os participantes.

Cada um dos grupos recebeu um tabuleiro do jogo. As regras do jogo foram disponibilizadas juntamente com os tabuleiros. Foi feita a leitura e explicação do jogo no grande grupo e a pesquisadora disponibilizou-se a repetir e auxiliar os grupos quando necessário até que todos os estudantes obtivessem compreensão e autonomia ao jogar. Neste dia a pesquisadora contou com o auxílio das professoras regente e corregente da turma.

O jogo nomeado “QUEM DIVIDE GANHA” (Apêndice 1) foi desenvolvido pela pesquisadora e utilizado durante as aulas de intervenção. Consiste em um jogo de tabuleiro, no qual é possível explorar a composição e decomposição de quantias de dinheiro e divisão por partição e por quotas.

e) Aula 5

A aula 5 teve o mesmo objetivo da aula 4. Foi dividida em dois momentos: no primeiro momento, a turma foi organizada em grupos de cinco, de maneira que os grupos ficassem com componentes diferentes da aula anterior, mas lembrando de deixar os participantes das entrevistas em grupos distintos e o jogo foi realizado. No segundo momento, os problemas selecionados pelos estudantes durante o jogo foram resolvidos coletivamente, discutindo as maiores dificuldades e refletindo sobre as diferentes formas de resolução de um mesmo problema.

f) Aula 6

A aula 6 ocorreu da mesma forma e com os mesmos objetivos das aulas 4 e 5. Porém, ao final os estudantes resolveram uma ficha de situações que envolveram divisões por partição e por quotas envolvendo sistema monetário e composição e decomposição de quantias de dinheiro. Os problemas foram:

QUADRO 9– FICHA DE PROBLEMAS DA AULA 6 – AÇÃO DIDÁTICA

1- UMA GAROTA TEM 15 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE ELA E TODAS AS SUAS PRIMAS. CADA UMA GANHARÁ 5 REAIS. QUANTAS PRIMAS ELA TEM? Quotas

2- CAROLINA LEVOU 16 REAIS PARA COMPRAR CANETAS. ELA PAGOU 5 REAIS EM CADA CANETA E SOBROU 1 REAL. QUANTAS CANETAS ELA COMPROU? Quotas

3- MARINA VAI COMPRAR BISCOITOS. ELA TEM 24 REAIS. ESSE VALOR É SUFICIENTE PARA 6 PACOTES E NÃO SOBRA NADA DE DINHEIRO. QUANTO CUSTA CADA PACOTE DE BISCOITO? Partição

4- JOSÉ FOI À SORVETERIA COM 21 REAIS. COMPROU 7 PICOLÉS DE MESMO VALOR E NÃO SOBROU DINHEIRO. QUANTO CUSTOU CADA PICOLÉ? Partição

5- BRUNO PRECISA TROCAR 50 REAIS POR CÉDULAS MENORES. O CAIXA DO BANCO DEU 2 CÉDULAS DE 10, 4 CÉDULAS DE 5 E 6 DE 2 REAIS. A TROCA ESTÁ CORRETA?EXPLIQUE Composição e decomposição

FONTE:A autora (2018)

3.3.3 Entrevista final

A entrevista final foi realizada seguindo os mesmos critérios da inicial e com os mesmos participantes, que novamente resolveram 4 problemas em dois momentos, de modo que resolveram dois problemas em cada momento.

No primeiro momento os estudantes resolveram um problema de divisão por partição e um de divisão por quota. Estavam à disposição: cédulas de dinheiro fictícias, bonecas simbolizando personagens dos problemas, material de contagem (material dourado, palitos, tampinhas), papel e lápis. Os problemas foram:

5) UM GAROTO GANHOU 13 REAIS DE SUA MÃE E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ESSA QUANTIA ENTRE ELE E SEU MELHOR AMIGO. COM QUANTOS REAIS CADA MENINO FICARÁ? SOBRARÁ DINHEIRO? QUANTO? Partição

6) DONA LOURDES TEM R$ 30,00, PARA DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE SEUS SOBRINHOS. CADA SOBRINHO GANHARÁ R$ 6,00. QUANTOS SOBRINHOS ESSA DONA LOURDES TEM? Quotição

No segundo momento os estudantes solucionaram os outros dois problemas com estrutura semelhante àqueles da primeira etapa utilizando-se apenas das cédulas de dinheiro fictícias, bonequinhas e carrinhos de brinquedo e gibis (objeto citado no problema). Os problemas foram:

7) PARA COMPRAR 5 BRINQUEDOS, UMA MENINA GASTOU 25 REAIS, SABENDO QUE TODOS TINHAM O MESMO PREÇO, QUANTO CUSTOU CADA BRINQUEDO? Partição

8) UMA MENINA FOI COMPRAR GIBIS, PAGOU COM UMA CÉDULA DE R$ 20,00 E NÃO RESTOU TROCO, SABENDO QUE CADA GIBI CUSTOU R$ 4,00, QUANTOS GIBIS ELA COMPROU? Quotição

Como já referido anteriormente, em relação à entrevista inicial, os problemas foram elaborados tendo em vista a possibilidade de evidenciarem ou não em suas resoluções os invariantes operatórios da divisão descritos na literatura (LAUTERT, 2005; LAUTERT; SPINILLO, 2012; NUNES; BRYANT,1997):

(1) o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes);

2) o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos;

(3) o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero);

(4) relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e

(5) o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.

As entrevistas foram filmadas e transcritas para posterior análise. Os instrumentos de pesquisa foram filmadora, gravador de áudio, fichas de resolução de problemas.

3.4 ANÁLISE DOS DADOS

Uma das maneiras facilitadoras da análise sugeridas por Delval (2002) é iniciá-la pela leitura das transcrições e somente após essa leitura inicial categorizar os elementos que serão destacados em cada uma delas. Em seguida o autor sugere que sejam feitas várias leituras das transcrições, quase ao ponto de decorá-las ao mesmo tempo em que são feitas anotações das informações relevantes. Nesta pesquisa, realizamos a leitura inicial de todas as transcrições das entrevistas e buscamos identificar os invariantes operatórios e os esquemas presentes nas resoluções de cada estudante entrevistado.

Os dados da pesquisa foram organizados a partir da análise das resoluções de cada um dos participantes durante cada uma das três etapas da intervenção: entrevista inicial, ação didática e entrevista final.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesta capítulo será abordada a descrição das resoluções dos problemas de cada um dos estudantes participantes da pesquisa durante os três momentos da coleta de dados. Será apresentada a resolução de todos os problemas das entrevistas inicial, os considerados relevantes (em relação aos esquemas utilizados) durante a ação didática e na entrevista final.

Como já evidenciado no Capítulo 3, cada uma das entrevistas foi realizada em dois momentos. No primeiro foram propostas duas situações: uma envolvendo a ideia de divisão por partição e a outra divisão por quotas. Para este momento estavam disponíveis vários materiais. No segundo momento, também foram propostas duas situações: uma envolvendo a ideia de divisão por partição e a outra divisão por quotas. Porém, desta vez, os estudantes tiveram apenas as cédulas de dinheiro fictícias e materiais representando objetos citados nos problemas para solucioná-las, como indicado no Quadro 10.

QUADRO 10 – DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS DAS ENTREVISTAS

ENTREVISTA INICIAL		
PROBLEMA	NATUREZA	MATERIAS DISPONIBILIZADOS
1) Uma menina ganhou 15 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ela e sua irmã. Com quantos reais cada menina ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?	PARTIÇÃO	• Cédulas de dinheiro fictícias; • Bonecas; • Material de contagem (material dourado, palitos, tampinhas), • Papel e lápis e borracha.
2) Uma senhora tem R$ 20,00, para dividir igualmente entre seus netos. Cada neto ganhará R$ 5,00. Quantos netos essa senhora tem?	QUOTIÇÃO	
3) Um garoto foi comprar carrinhos, pagou com uma cédula de R$ 20,00 e não restou troco. Sabendo que cada carrinho custou R$ 4,00, quantos carrinhos ele comprou?	QUOTIÇÃO	• Cédulas de dinheiro fictícias e • Carrinhos.
4) Para comprar 3 carrinhos, um garoto gastou 18 reais, sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada carrinho?	PARTIÇÃO	
ENTREVISTA FINAL		
5) Um garoto ganhou 13 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ele e seu melhor amigo. Com quantos reais cada menino ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?	PARTIÇÃO	• Cédulas de dinheiro fictícias; • Carrinhos; • Material de contagem (material dourado, palitos, tampinhas), • Papel lápis e borracha.
6) Dona Lourdes tem R$ 30,00, para dividir igualmente entre seus sobrinhos. Cada sobrinho ganhará R$ 6,00. Quantos sobrinhos essa dona Lourdes tem?	QUOTIÇÃO	
7) Para comprar 5 brinquedos, uma menina gastou 25 reais, sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada brinquedo?	PARTIÇÃO	• Cédulas de dinheiro fictícias e • Carrinhos (brinquedos).
8) Uma menina foi comprar gibis, pagou com uma cédula de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada gibi custou R$ 4,00, quantos gibis ela comprou?	QUOTIÇÃO	• Cédulas de dinheiro fictícias e • Gibis.

FONTE: A autora (2018)

Em relação à ação didática, será apresentada a análise das resoluções dos problemas relativos às Fichas de Problemas dos participantes da pesquisa nas Aulas 1, 2, 3 e 6, conforme Quadro 11.

QUADRO 11- PROBLEMAS DA ACÃO DIDÁTICA

1- Problemas da aula 1 – COMPOSIÇAO E DECOMPOSIÇÃO DE QUANTIAS
1. Uma menina trocou uma cédula de vinte reais somente por cédulas de cinco. Com quantas cédulas ela ficou? 2. A caixa de um mercado precisa trocar cinquenta reais por cédulas de 10. Quantas cédulas de 10 ela precisa? 3. Um garoto vai trocar 10 reais por cédulas de 2 reais. Com quantas cédulas de 2 reais ele vai ficar? 4. Caixa da padaria precisa trocar 50 reais por cédulas menores. O gerente deu 3 cédulas de 10 e 4 cédulas de cinco reais. A troca está correta? Explique:
2- Problemas da aula 2 - PARTICÃO
1. Uma garota tem 19 reais e quer dividir igualmente entre ela e sua irmã. Quanto cada menina irá receber? Sobrará dinheiro? 2. Marcia foi à feira com 25 reais. Comprou 5 frutas de mesmo valor e não sobrou dinheiro. Quanto custou cada fruta? 3. Alice tem 30 reais e vai dividir igualmente entre suas três filhas. Quanto dinheiro cada menina irá ganhar? 4. Carmen vai comprar camisetas. Ela tem 50 reais. Esse valor é suficiente para 2 camisetas e não sobra nada de dinheiro. Quanto custa cada camiseta?
3- Problemas da aula 3.- QUOTIÇÃO
1. Uma menina tem 8 reais e quer dividir igualmente entre todas as suas colegas da classe de balé. Cada uma ganhará 2 reais e não sobrará dinheiro. Quantas colegas ela tem na classe de balé? 2. Raquel tem 40 reais e vai dividir igualmente entre todos os seus vizinhos de condomínio. Cada um vai ganhar 10 reais e não sobrará dinheiro. Quantos vizinhos ela tem? 3. Bianca vai comprar chocolate. Ela vai gastar 16 reais em barras iguais que custam 4 reais. Quantas barras ela vai comprar? 4. Daniel levou 12 reais para comprar sanduíches. Ele pagou 5 reais em cada um e sobraram 2 reais. Quantos sanduíches ele comprou?
4- Problemas da aula 6 – COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO, PARTIÇÃO E QUOTAS
1- Uma garota tem 15 reais e quer dividir igualmente entre ela e todas as suas primas. Cada uma ganhará 5 reais. Quantas primas ela tem? 2- Carolina levou 16 reais para comprar canetas. Ela pagou 5 reais em cada caneta e sobrou 1 real. Quantas canetas ela comprou? 3- Marina vai comprar biscoitos. Ela tem 24 reais. Esse valor é suficiente para 6 pacotes e não sobra nada de dinheiro. Quanto custa cada pacote de biscoito? 4- José foi à sorveteria com 21 reais. Comprou 7 picolés de mesmo valor e não sobrou dinheiro. Quanto custou cada picolé? 5- Bruno precisa trocar 50 reais por cédulas menores. O caixa do banco deu 2 cédulas de 10, 4 cédulas de 5 e 6 de 2 reais. A troca está correta? Explique:

FONTE: A AUTORA 2018

Serão expostos os esquemas e os invariantes operatórios presentes nas resoluções de cada um dos 5 participantes da pesquisa, comparando com os descritos na literatura, a fim de verificar se aconteceram modificações desses esquemas. Os invariantes operatórios descritos na literatura por Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997) e já citados nesta pesquisa, que buscou-se identificar serão: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos; o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado[12] pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero); relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.

Os esquemas que buscou-se identificar, que já foram descritos na literatura serão os 11, sintetizados por Correa (2004) a partir daqueles descritos por Selva (1998, apud CORREA, 2004), Kouba (1989 apud CORREA, 2004) e Mulligan (1992 apud CORREA, 2004) que estão exemplificados nesta pesquisa no Quadro 1. São eles: resposta sem explicação; resposta com explicação arbitrária; distribuição um a um; recontagem das quantidades descritas no problema; contagem a partir de um dado fator; dupla contagem; adição repetida; subtração repetida; metades; conhecimentos de fatos multiplicativos e partição.

4.1 OS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DO ESTUDANTE AJ.

4.1.1 Entrevista inicial

a) Problemas de partição

- Problema 1 – materiais diversos

Uma menina ganhou 15 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ela e sua irmã. Com quantos reais cada menina ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

AJ escolheu inicialmente as cédulas de dinheiro para solucionar o problema. Separou uma cédula de 10 e uma de 5 (quinze reais). Observou as cédulas olhando para as restantes.

[12] Será utilizada nesta análise também o termo “soma das partes” ao descrever este invariante, uma vez que esta também se caracteriza como uma multiplicação.

[...]
AJ. Estou tentando .....tipo assim.....pegar mais 10.....mais 5 e mais 10 para tentar ser igual.
[...]
*AJ. Aqui tinha 15, né? Daí eu pensei assim....Esses dois pra minha irmã (*mostra 15 reais- uma cédula de 10 e outra de 5*) e essa aqui (*aponta os outros 15*) pra mim.*
P. Você daria 15 para cada uma?
AJ. Afirma com a cabeça.
[...]
Reconta o dinheiro em silêncio.
AJ. Trinta né?

Notou-se que AJ buscou separar a quantidade de cédulas possíveis de serem dadas a cada personagem do problema. O estudante buscou cédulas semelhantes a serem dadas a cada menina: 1 cédula de 10 e outra de 5 reais para uma das meninas e 1 cédula de 10 e outra de 5 para a outra. Buscou igualar as quantidades de cédulas a serem dadas para cada personagem. No entanto, percebeu que o total da quantia em dinheiro representada pelas cédulas era maior do que a quantia proposta para ser dividida na situação-problema. Observou-se aqui que AJ tentou igualar as partes, pois embora não partindo da divisão do montante inicial, mas intenta assegurar a mesma quantidade para cada uma.

Neste esquema foi possível observar que AJ não considerou o invariante descrito por Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997), de que o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes). Não realizou a divisão da quantidade inicial referida, porém, em sua tentativa, notamos que a ideia de que cada envolvido deveria receber a mesma quantidade de dinheiro esteve muito presente.

Ao perceber o erro AJ retomou a tentativa de resolução utilizando outro esquema: a distribuição um a um, já descrito por Correa (2004), como apresentado no Quadro 1 desta pesquisa. Pegou papel sulfite e lápis e em silêncio desenhou 15 bolinhas em uma linha e mais duas embaixo representando as meninas. A seguir ligou uma bolinha a uma "menina" repetindo a ação até findarem-se as bolinhas. Finalizou e olhou para a pesquisadora sem falar nada utilizando o esquema da *representação pictórica,* que não está listado por Correa (2004), vide Quadro 1, mas foi amplamente discutido por Ferreira e Lautert (2003).

P. O que aconteceu ai?
AJ. Aconteceu que sobrou uma (apontou para o desenho)

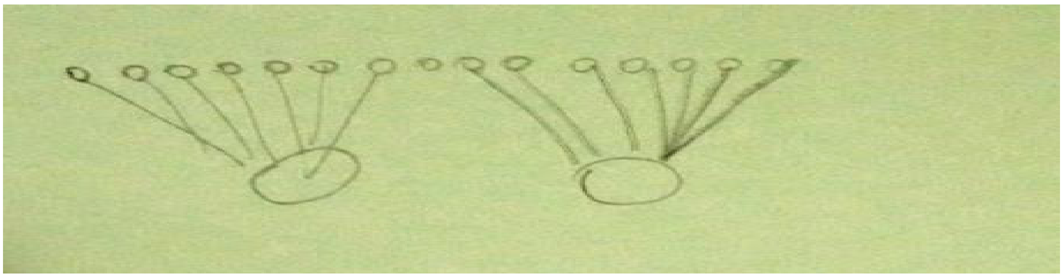
P. E quanto cada uma ganhou?

AJ refez a contagem de bolinhas que correspondeu a cada menina. Olhou para a pesquisadora sorrindo e disse com segurança:

AJ. 7.
P. 7para cada uma? E sobrou? Quanto?
AJ. Um
P. Qual você acha que está correta, a sua primeira resposta, ou essa?
AJ. Essa.
P. Com certeza?
AJ. Sim.

Percebeu-se neste ponto que AJ precisou transformar o valor 15 reais em unidades. Somente assim conseguiu realizar a divisão utilizando esquema de distribuir uma bolinha para cada menina, ou seja, um para um, como pode-se observar na Figura 10.

FIGURA 10 - PROBLEMA 1 AJ



FONTE: Dados da pesquisa

Inicialmente AJ buscou solucionar o problema com as cédulas de dinheiro tentando dar a mesma quantidade (valor) para cada personagem do problema ao invés de dividir o valor inicial. No entanto, ao buscar uma nova resolução para o problema, desconsiderou o valor das cédulas e pensou no valor total a ser dividido como unidades, representando pictoricamente o esquema de distribuição um a um. Nesta resolução considerou que o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos e reconheceu o resto como não sendo possível de distribuir entre as meninas na situação-problema.

É relevante ressaltar que AJ não conseguiu chegar ao resultado utilizando dinheiro e que precisou pensar em unidades para poder, por meio da representação pictórica, colocar em ação o esquema de distribuição um a um, ou seja, a correspondência termo a termo usada para realizar a divisão.

- Problema 4 – somente cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 3 carrinhos, um garoto gastou 18 reais, sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada carrinho?

AJ observou as cédulas, os carrinhos e pareceu refletir sobre o que fazer. Em seguida apanhou duas cédulas de 2 reais e releu o problema silenciosamente segurando as duas cédulas.

P. O que você está pensando?
AJ. (sorri timidamente) *Não sei.*

A pesquisadora insistiu que AJ tentasse solucionar a questão, porém após insistência na recusa, para que não houvesse constrangimento da participante a entrevista foi interrompida.

Todavia verificou-se que já no primeiro problema AJ não conseguiu solucionar a questão utilizando-se do dinheiro fictício. Como nesta proposta não poderia utilizar-se de outros materiais AJ sentiu-se insegura para continuar a sua tentativa. Pode-se identificar como esquema o que Correa (2004) denomina como respostas sem explicação, a partir da resposta dada: “não sei”.

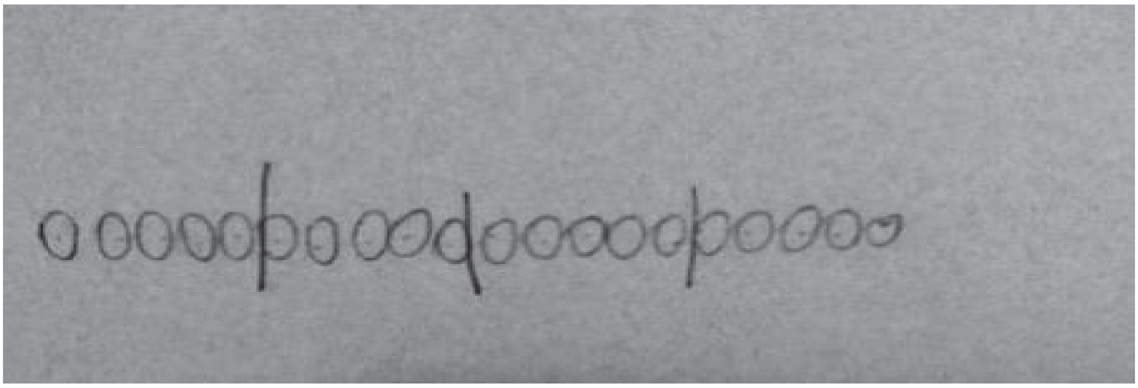
b) Problemas de quotição

- Problema 2 – materiais diversos

Uma senhora tem R$ 20,00, para dividir igualmente entre seus netos. Cada neto ganhará R$ 5,00. Quantos netos essa senhora tem?

Para a solução desta situação AJ escolheu lápis e papel, ficou em silêncio por alguns instantes, pensativa para tentar solucionar a questão. Em seguida iniciou a resolução desenhando 20 bolinhas enfileiradas. Olhou em volta buscando por outros materiais. Esboçou uma fala, não disse nada e olhou novamente para o desenho. Fez a contagem de 5 bolinhas e com um traço as agrupou. Repetiu a ação até findarem as bolinhas. Conforme vemos na figura 11:

FIGURA 11 - PROBLEMA 2 AJ.



FONTE: Dados da pesquisa

O estudante apenas observou a resolução como que concluída, todavia permaneceu em silêncio até ser questionado pela pesquisadora:

> *P. O que você descobriu ai?*
> *AJ. Eu acho que ela tem quatro netos.*
> *P. Por que você acha que ela tem quatro netos?*
> *AJ. Porque eu juntei aqui (*aponta para o primeiro grupo de bolinhas*) mais aqui (*aponta para o segundo*) aqui, mais aqui...*
> *P. E deu quanto?*
> *AJ. 4.*
> *P. 4 netos?*
> *AJ. Afirma com a cabeça.*

Mais uma vez AJ chegou ao resultado fazendo uso do esquema de representação pictórica, descrito como estratégia na pesquisa de Ferreira e Lautert (2003), já exposto nesta pesquisa e exemplificado na Figura 4. Desta vez não se fez presente o esquema de distribuição para realizar a divisão, mas sim a formação de conjuntos com o mesmo número de elementos, associando os esquemas de adições repetidas e contagem a partir de um dado fator. (Correa, 2004)

Verificou-se que AJ demonstrou compreender que o todo deve (20) ser dividido igualmente e distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 3 – cédulas e objetos referidos no problema

Um garoto foi comprar carrinhos, pagou com uma cédula de 20 reais e não restou troco, sabendo que cada carrinho custou 4 reais, quantos carrinhos ele comprou?

Para esta resolução, AJ pegou o monte de cédulas de dinheiro e separou uma de 20 reais. Olhou para as demais cédulas buscando uma solução. Apanhou o maço de cédulas de 2 reais, porém logo em seguida devolveu todas as cédulas, ignorando a possibilidade de decompor o 20 em valores menores. Tentou outra estratégia pegando um dos carrinhos disponíveis. Parou, pensou e pegou mais 1 carrinho. Refez a leitura do problema e apanhou mais 2 carrinhos (totalizando 4). Organizou os carrinhos lado a lado e olhou para a cédula de 20 reais anteriormente separada e disse:

AJ. Ahhhh esse não dá.
P. O que não dá?
AJ Olha para a pesquisadora e faz sinal de negativo com a cabeça.
P. O que você acha que não deu? O que aconteceu?
AJ. Olha para o material que separou sobre a mesa e novamente faz sinal de negativo com a cabeça.
*AJ. Esse daqui (*aponta para a cédula de 20*) não dá pra.... não vai dar (*aponta para os quatro carrinhos*).*
P. Não vai ser suficiente?
AJ. Não vai ser.
P. Por quê?
AJ. Por que aqui não dá pra dar resposta.
P. Qual resposta?
AJ. Nenhuma.
P. Então tenta fazer de uma outra forma.

Pode-se notar que o fato do problema envolver “uma cédula de 20” apresentou um desafio a mais: o de decompor esse valor em valores menores. Mas possivelmente esteve presente a intenção de dividir esse valor entre 4 carrinhos quando AJ colocou os carrinhos lado a lado.

Na tentativa de solucionar a questão, AJ devolveu os carrinhos na caixa e segurou a cédula de 20 reais na mão. Observou as outras cédulas e disse:

AJ. Esse aí é muito difícil.

A pesquisadora, na tentativa de estimular e encorajar a participante para que não acontecesse uma desistência, buscou aproximar o problema de uma situação real.

> *P. [...] Você quer ir no mercado comprar coisas que custam 4 reais. Quantas coisas vai poder comprar?*
> *AJ. Vinte ???*
> *[...]*
> *AJ. Esse está muito difícil.* (desiste de resolver)

Assim como na questão 4, para evitar constrangimento da participante, a pesquisadora não insistiu em uma nova tentativa.

Fica claro que AJ não conseguiu solucionar os problemas quando não pode se reportar às representações pictóricas e que apresentou dificuldade para solucionar as questões que envolvem diretamente as quantias de dinheiro. Também percebemos que AJ não considerou o fato da cédula representar unidades. Pode-se identificar como esquema o que Correa (2004) denomina como respostas sem explicação, entendendo que o problema não foi solucionado, portanto correspondendo à resposta “não sei”.

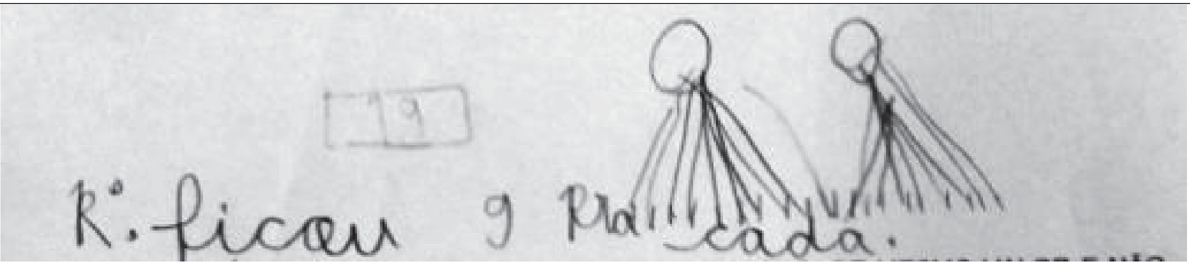
4.1.2 Ação didática

Na aula 2 que teve por objetivo a compreensão de problemas de divisão com a ideia de partição, os estudantes resolveram problemas de divisão por partição.

No primeiro problema analisado, percebeu-se que AJ utilizou os mesmos esquemas da entrevista inicial: a representação pictórica e a distribuição um a um. Porém, neste caso AJ, não percebeu a existência do resto, determinando apenas a quantia recebida por cada garota do problema em questão, como vemos a seguir, na Figura 12.

FIGURA 12 – PROBLEMA 3 AJ.

UMA GAROTA TEM 19 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE ELA E SUA IRMÃ. QUANTO CADA MENINA IRÁ RECEBER? SOBRARÁ DINHEIRO?

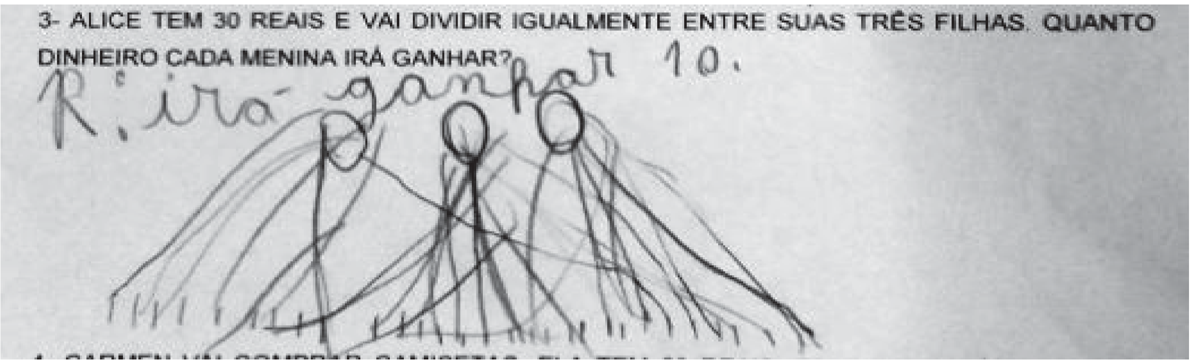


FONTE: Dados da pesquisa

Em outro problema AJ novamente utilizou a representação pictórica e a distribuição um a um, desta vez chegando ao resultado esperado, após algumas tentativas como pode-se ver na Figura 13:

FIGURA 13 – PROBLEMA 4 AJ.

ALICE TEM 30 REAIS E VAI DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE SUAS TRÊS FILHAS. QUANTO DINHEIRO CADA MENINA IRÁ GANHAR?



FONTE: Dados da pesquisa

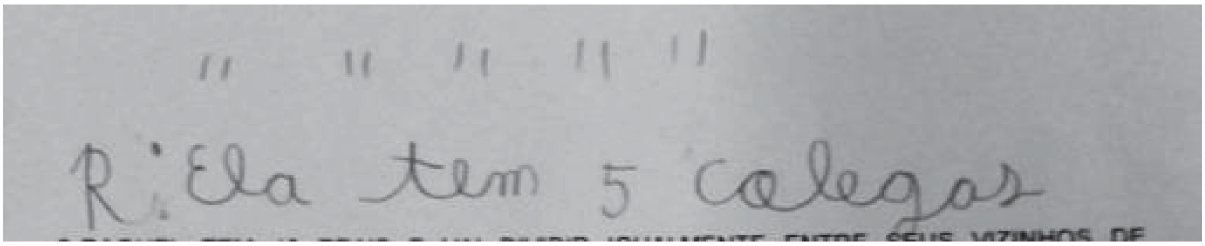
Nas resoluções das situações-problema propostas na aula 3, que remeteu à problemas de divisão por quotas, AJ fez uso de um esquema da contagem a partir de um dado fator associado à representação pictórica.

Chamou a atenção da pesquisadora o fato de parecer mais segura em sua resolução, agora com menos tentativas, contou e recontou os risquinhos, duas vezes, um a um, até chegar a 10, como se estivesse conferindo. Porém considerou 10 reais, e não 8, como estava no enunciado e por esse motivo, AJ não acertou a resposta para o problema, como vemos na Figura 14.

FIGURA 14 – PROBLEMA 5 AJ.

UMA MENINA TEM 8 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODAS AS SUAS COLEGAS

DA CLASSE DE BALÉ. CADA UMA GANHARÁ 2 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTAS COLEGAS ELA TEM?



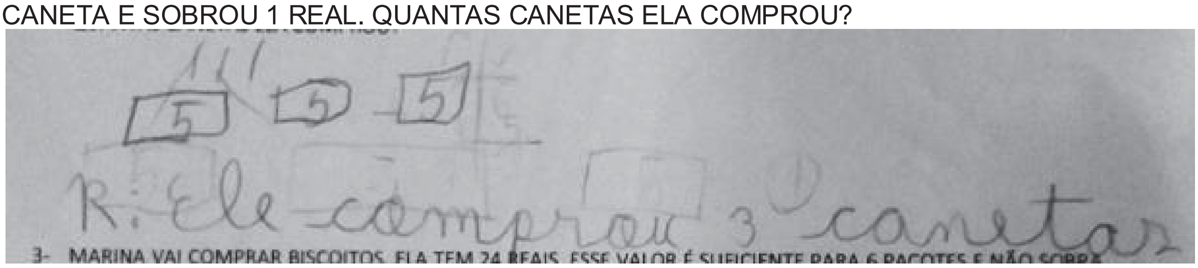
FONTE: Dados da pesquisa

Na última aula (aula 6), os estudantes foram desafiados a solucionar problemas de divisão por partição, por quotas e de composição e decomposição, com o mesmo grau de dificuldade daqueles presentes no jogo “Quem divide ganha” (APÊNDICE 1)

Desta vez AJ conseguiu chegar às soluções. No problema analisado, com a ideia de quotas, AJ valeu-se de um esquema diferente dos percebidos nas resoluções anteriores, utilizou novamente o esquema da representação pictórica, porém desta vez associada à composição da quantia inicial a partir das adições repetidas, (5+5+5) como exposto na Figura 15

FIGURA 15 – PROBLEMA 6 AJ.

CAROLINA LEVOU 16 REAIS PARA COMPRAR CANETAS. ELA PAGOU 5 REAIS EM CADA CANETA E SOBROU 1 REAL. QUANTAS CANETAS ELA COMPROU?



FONTE: Dados da pesquisa.

Em síntese, pode-se afirmar que os esquemas que se fizeram presentes durante as resoluções propostas durante a ação didática por AJ foram: a representação pictórica associada à distribuição um a um e adições repetidas.

Também pode-se perceber que AJ compreende que nas situações de divisão o todo deve ser distribuído em quantidades iguais e deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos; além de perceber a existência do resto.

4.1.3 Entrevista final

a) Problemas de partição

- Problema 5 – materiais diversos

Um garoto ganhou 13 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ele e seu melhor amigo. Com quantos reais cada menino ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

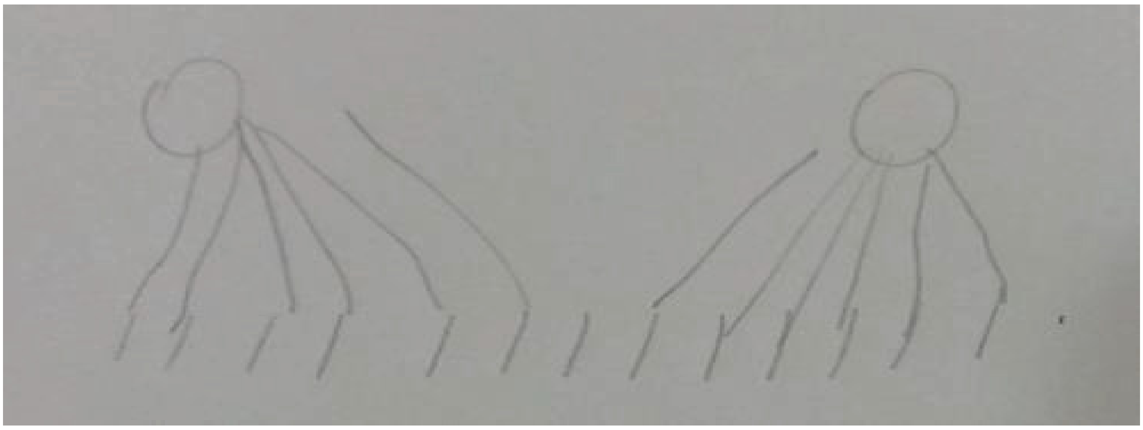
Para a resolução desta situação AJ apanhou 13 reais (uma cédula de 10, uma de 2 e uma de 1). Arrumou uma ao lado da outra, observou por algum tempo e foi questionada pela pesquisadora:

> *P. O que você está pensando em fazer?*
> *AJ. De dividir assim. Calma aí.* (pega as cédulas que havia separado e devolve. Então pega o papel e o lápis)

Da mesma forma que resolveu os problemas 1 e 3 da entrevista inicial, AJ recorreu à representação pictórica, desenhou na folha 2 círculos. Embaixo deles fez 13 risquinhos. Iniciou uma divisão ligando os risquinhos um a um aos círculos. Parou e observou.

Percebeu-se que AJ precisou transformar a quantidade 13 em unidades. Somente assim conseguiu realizar a divisão utilizando esquema de distribuir um risquinho para cada menino, ou seja, os esquemas de representação pictórica associada à distribuição um a um (FIGURA 16). Considerou que o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos e reconheceu o resto como não sendo possível de distribuir entre os meninos na situação-problema.

FIGURA 16 – PROBLEMA 7 AJ.



FONTE: Dados da pesquisa.

P. O que aconteceu?
AJ. Sobrou um.
P. Mas quanto que cada um vai ganhar?
AJ. 6.
P. Como que você pensou para resolver esse problema?
AJ. Eu coloquei duas cabeças, que é ele e o amigo dele. Fiz risquinhos até contar 13, e dividi.
P. E como que você dividiu?
AJ. Pegando o lápis e pegando os risquinhos e indo até a cabeça.
[...]
P. Então. Quanto cada um ganhou?
AJ. [...] 6.

Nesta primeira tentativa AJ utilizou o mesmo esquema e estavam presentes os mesmos invariantes operatórios da resolução do problema 1 da entrevista inicial. Após interferência da pesquisadora no sentido de provocar o uso das cédulas, o participante fez uma segunda tentativa:

P. Por que será que você não conseguiu resolver usando o dinheiro?
AJ. Porque eu pensei na minha cabeça que dava pra fazer assim.
P. Você achou mais fácil?
AJ. Afirma com a cabeça.
P. Mas se você tivesse que fazer com dinheiro, não tivesse outro jeito, como você faria?
AJ. Pegaria uma cédula de 10....
P. Pode pegar...
AJ. Uma de 10, uma de 2 e uma de 1.
P. E como você dividiria esse dinheiro entre duas pessoas?
*AJ. Dava 10 pra esse. E esse ficava com 3. (*separa as cédulas desta forma 10+3).

Notou-se que a estudante conseguiu compor o valor referido no problema utilizando as cédulas (10 + 3= 13) mas utilizando estas cédulas não conseguiu realizar a distribuição equitativa do valor em questão. Novamente foi questionada pela pesquisadora:

> *[...]*
> *P. Quando você estava no jogo e a pessoa não conseguia dividir. Como faziam?*

Sorrindo e aparentando estar segura de sua ação, AJ devolveu todas as cédulas e fez sinal negativo com a cabeça, parecendo refletir sobre a questão. Em seguida apanhou duas cédulas de 5, uma de 2 e uma de 1.

Com esta ação, a participante demonstrou que consegue compor a quantia de dinheiro de diferentes formas e evidenciou que reconhece que quantidades de dinheiro podem ser transformadas em unidades simples e compostas de diferentes formas. E continuou sua resolução.

> *[...]*
> *P. Como que você faria a divisão?*
> *AJ. 5....5... (*separa as duas cédulas de 5 na mesa e segura as cédulas de 2 e de 1*) Não ia dar certo.*
> *P. Por que?*
> AJ. Olha para a cédula de 2 fazendo sinal negativo com a cabeça.
> *P. O que pode fazer com essa cédula de 2?*
> *AJ. Como é cédula de 2. Um ia ficar com 7 e o outro com 6.*
> *P. Não tem outras formas?*
> *AJ.* Faz que não com a cabeça. *Assim que eu faria.*

Desta vez AJ avançou na sua resolução utilizando as cédulas de dinheiro. Conseguiu manter a percepção de que o todo (13) deve ser dividido ate que não haja mais possibilidade de uma nova rodada de distribuição. Porém desta vez não atentou para a necessidade da divisão ser equitativa e da presença do resto.

Pode-se afirmar que AJ não modificou esquema para a resolução deste problema daquele utilizado na entrevista inicial: manteve a representação pictórica, e utilizou a decomposição da quantidade inicial para realizar a divisão. Todavia, desta vez, realizou a tentativa de solucionar a questão utilizando as cédulas de dinheiro, aproximando-se da resposta esperada.

- Problema 7 – cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 5 brinquedos, uma menina gastou 25 reais. Sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada brinquedo?

Para a solução desta situação AJ apanhou uma cédula de 5 e uma de 10 reais. Colocou um brinquedo sobre a cédula de 5. Pegou um segundo brinquedo e ameaçou colocar sobre a cédula de 10. Mas desistiu e foi questionada pela pesquisadora:

> *P. O que você está pensando?*
> *AJ. Pegar a mesma cédula para colocar embaixo do carrinho.*

Então, AJ colocou um carrinho em cima da cédula de 10. Em seguida pegou mais uma cédula de 10 e coloca um terceiro carrinho sobre ela e disse:

> *AJ. Agora deu 25.*

Diferentemente da entrevista inicial, desta vez AJ tentou solucionar o problema utilizando as cédulas. Notamos que o esquema de decompor a quantidade inicial (25) , esteve presente. A solução estava incorreta, pelo fato de AJ não ter atentado à necessidade da divisão ser equitativa. Este fato foi questionado pela pesquisadora.

> *P. Ok, mas tem um dado do problema ..... todos tem o mesmo preço....deste jeito que você fez....todos estão com mesmo preço?*
> AJ Faz que não com a cabeça.
> *P. Como você pode fazer para que todos tenham o mesmo preço?*

Em uma nova tentativa, AJ devolveu as cédulas de 10 e trocou-as por cédulas de 5, totalizando 5 cédulas. Pegou mais 2 carrinhos e colocou um carrinho em cima de cada cédula, permanecendo em silêncio até ser questionada.

> *P. Quantos brinquedos ela comprou?*
> *AJ. 5.*

P. Ok, mas me explica... Quando você viu que não estava certo, o que você fez para mudar?
AJ. Colocar cédulas de 5.
[...]
P. Quantas cédulas de 5 você pegou para cada cédula de 10?
[...]
AJ. Duas.

Desta vez AJ chegou à resposta esperada utilizando apenas as cédulas e os carrinhos. Nesta resolução o esquema presente foi o da decomposição da quantidade inicial (25) associado ao esquema de distribuição um a um (um carrinho para cada cédula após a decomposição). O esquema de decomposição de quantidades, não foi descrito por Correa (2004) todavia foi assim denominado pela relevância para a resolução deste problema, pois a realização de trocas dos valores por cédulas menores facilitou a resolução. AJ compreendeu que o todo (25) deveria ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e até que não existisse a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

b) Problemas de quotição

- Problema 6 - materiais diversos

Dona Lourdes tem R$ 30,00, para dividir igualmente entre todos os seus sobrinhos. Cada sobrinho ganhará R$ 6,00. Quantos sobrinhos Dona Lourdes tem?

Na tentativa de solucionar esta questão AJ pegou o lápis parecendo pensar silenciosamente. Segurou o lápis pensativa e arriscou escrever algo por duas vezes, porém desistiu. Enfim fez 30 risquinhos, um ao lado do outro. Contou 6 e fez um risco maior, separando em grupos, utilizando o esquema de contagem a partir de um dado fator. Repetiu a ação até finalizarem os risquinhos e disse:

AJ. 5.
P. Me explica como você pensou para dizer que são 5.
AJ. Por que eu fui contando de 6 em 6. Fiz trinta risquinhos e fui riscando quando dava 6.

Assim como nas resoluções anteriores AJ reportou-se ao esquema da representação pictórica, e a distribuição um a um. Foi encorajada pela pesquisadora a resolver a questão de outra forma:

> *P. Muito bem! Mas se você precisasse fazer isso com o dinheiro. Você iria conseguir?*
> *AJ. Faz que não com a cabeça.*
> *P. Por que não?*
> *AJ. Porque daí poderia passar do número ou podia baixar do número.*
> *P. Mas tenta fazer. Imagine os sobrinhos e o dinheiro e veja se é possível.*

Para esta segunda tentativa AJ apanhou duas cédulas de 20 reais. Em seguida as observou lado a lado e devolve. Apanhou uma cédula de 10, ficou observando e disse:

> *AJ. Não sei como faz*.

A pesquisadora insistiu para que AJ fizesse uma nova tentativa, então o estudante pegou uma cédula de 5 e uma de 1 real e colocou-as na mesa. Em seguida repetiu a ação 4 vezes, formando 5 grupos de 6 reais. Ao finalizar olhou para a pesquisadora indicando que acabou.

> *P.Ok! O que temos ai?*
> *AJ. 5.*

Como já sabia que a cada neto caberia a quantia de 6 reais, compôs esse valor 5 vezes e distribuiu para cada neto. Ou seja, aqui utilizou o esquema de distribuição um a um.

Apresentou compreensão de que o todo deve ser distribuído em quantidades iguais e distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 8

Uma menina foi comprar gibis, pagou com uma cédula de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada gibi custou R$ 4,00, quantos gibis ela comprou?

Para tentar solucionar a questão, AJ refez a leitura do problema silenciosamente. Tirou 3 gibis da pilha e os organizou lado a lado. Parou por um momento e ficou observando até ser questionado pela pesquisadora:

> *P. O que você está pensando?*
> *[...]*
> *AJ. Eu estou tentado fazer igual até chegar 20.*
> *P. De quanto em quanto, até chegar 20?*
> *AJ. 4.*

Por meio desta resposta, pudemos verificar que desta vez AJ teve mais segurança ao solucionar o problema utilizando apenas as cédulas fictícias e o objeto referido na situação. Pensou 20 reais como unidades simples e procurou compor essa quantidade formando grupos iguais, utilizado como esquema as adições repetidas destes grupos, para compor 20, como podemos observar na sequência das suas ações. Apontando para cada um dos 3 gibis que havia separado anteriormente, AJ foi contando mentalmente e falando:

> *AJ. 4...8...12*

Em seguida apanhou mais 2 gibis (totalizando 5) e continuou sua contagem:

> *AJ. 16...20.*
> *AJ. 5*
> *P. Quantos gibis ela comprou?*
> *AJ.5.*
> *P. Como que você fez? Me explica direitinho. Eu quero entender como você pensou.*
> *AJ. Eu peguei os gibis e fui contando de quatro em quatro.*

Nota-se que nesta resolução de AJ esteve presente o esquema de composição da quantidade 20 a partir de adições repetidas associadas à contagem a partir de um dado fator.

4.1.4 Discussão das resoluções os problemas de AJ: esquemas e invariantes operatórios.

- Quanto aos esquemas

Nos problemas 1 e 4 da entrevista inicial, que envolveram situações de partição, AJ não obteve êxito quando tentou utilizar as cédulas de dinheiro. Obteve êxito quando utilizou a representação pictórica e a distribuição um a um, ou seja, quando pensou no valor a ser distribuído como unidades simples.

Quando pensou no valor como a quantidade total a ser divida, ignorou o valor do montante inicial e buscou resolver o problema 1 igualando as partes a serem dadas a cada uma das personagens do problema e não se sentiu segura em buscar uma solução para o Problema 4.

Nos problemas 2 e 3 que envolveram situações de quotição, AJ também não obteve êxito quando tentou utilizar cédulas de dinheiro. Mas, obteve êxito no problema 2 com o uso de papel e lápis e os esquemas de representação pictórica, adições repetida, distribuição um a um e contagem a partir de um dado fator. Ao colocar os carrinhos lado a lado buscou atribuir um valor a cada um, o que não foi possível perceber na resolução do problema 3, por não considerar a possibilidade de decompor o 20 em valores menores.

Durante a ação didática, as cédulas estiveram à disposição dos alunos para a resolução das Fichas de Problemas. AJ não buscou utilizá-las para a resolução dos problemas. Os esquemas observados ao longo das resoluções de problemas propostas nas aulas foram: a representação pictórica (que esteve presente em todas as resoluções), a contagem a partir de um dado fator e distribuição um a um e que foram recorrentes tanto nas situações que envolveram divisões com ideias de partição como nas com ideias de quotas. Observou-se também o esquema de adições repetidas na resolução de um problema de partição da aula 6, (FIGURA 14).

Nas resoluções dos problemas com a ideia de partição da entrevista final, no Problema 5, AJ não obteve êxito inicialmente ao resolver utilizando as cédulas fictícias, embora tenha decomposto o valor 13 em 10 + 2 +1, não conseguiu perceber como realizar a divisão a partir destes valores. Ao buscar o esquema da representação pictórica resolve o problema pela distribuição um a um. Ao ser desafiada a usar as cédulas, decompõe novamente o 13, agora em 5 + 5 + 2 +1, ou seja, pelo esquema de decomposição de quantidades. A partir daí distribui uma cédula de 5 para cada personagem e se depara com o problema de como distribuir igualmente a cédula de 1 e a de 2 reais para cada um. Percebe que os valores são diferentes, embora a quantidade de cédulas seja a mesma, mas conclui que um receberá 5 + 2 e outro receberá 5 + 1, atendo-se à quantidade de cédulas e não ao valor. Neste problema, obteve êxito ao pensar no valor como unidades e representar pictoricamente a distribuição um a um das mesmas a cada personagem do problema, porém não manteve o esquema ao utilizar as cédulas.

No Problema 7 fica evidente o esquema de AJ de tentar fazer corresponder uma cédula para cada carrinho ao tentar distribuir igualmente uma cédula para cada carrinho, embora com valores diferentes. Embora tenha decomposto o valor 25 em 10 + 10 + 5, ao dividir procura distribuir equitativamente a quantidade de cédulas e não o valor inicial 25. Ao ser problematizada pelo fato da necessidade de todos os carrinhos terem o mesmo preço, busca uma nova decomposição: 5 + 5 + 5 + 5 + 5 e obtém êxito ao fazer corresponder um carrinho para cada cédula. Ou seja, novamente divide a quantidade de cédulas e não o valor em dinheiro. Os esquemas identificados foram: decomposição de quantidades e a distribuição um a um.

Da análise dos problemas de quotição da entrevista final, verificou-se que na resolução do problema 6 o esquema utilizado por AJ foi a contagem a partir de um fator tanto na representação pictórica quanto com as cédulas. Quando desafiada a trabalhar com as cédulas ela compõe com as cédulas o valor 6 como 5 + 1, cinco vezes e a partir daí, distribui a composição de cédulas (5 + 1) para cada "neto", ou seja, usa o esquema de distribuição um a um. Observou-se que aqui AJ já conhecia o valor de cada quota, e, no caso, distribuiu as quotas aos netos.

Já no problema 8, AJ não se vale da representação pictórica na resolução mas de adições repetidas associadas à contagem a partir de um fator. Também não se utiliza das cédulas ou da ideia do valor do dinheiro mas da quantidade 20, valor esse que busca compor tendo como referencial a quota 4.

Para comparar as modificações dos esquemas de resolução de AJ, durante as entrevistas e na ação didática apresentamos um quadro comparando cada etapa:

QUADRO 12- ESQUEMAS PRESENTES NAS RESOLUCÓES DE AJ

DE PROBLEMAS DE PARTIÇÃO		
ENTREVISTA INICIAL	AÇÃO DIDÁTICA	ENTREVISTA FINAL
Com uso de diferentes materiais	• Representação pictórica; • Distribuição um a um; • Contagem a partir de um dado fator e • Adições repetidas.	Com uso de diferentes materiais
• **Representação pictórica** e • Distribuição um a um.		• **Representação pictórica** • **Decomposição de quantidades** e • Distribuição um a um.
Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.		Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.
• Respostas sem explicação.		• Distribuição um a um e • **Decomposição de quantidades.**
DE PROBLEMAS DE QUOTIÇÃO		
Com uso de diferentes materiais	• Representação pictórica; • Distribuição um a um e • Contagem a partir de um dado fator.	Com uso de diferentes materiais
• **Representação pictórica**; • Adições repetidas • Distribuição um a um e • Contagem a partir de um dado fator		• Contagem a partir de um dado fator • Distribuição um a um e • **Representação pictórica.**
Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.		Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.
• Respostas sem explicação.		• Adições repetidas e • Contagem a partir de um dado fator.

FONTE: DADOS DA PESQUISA, 2018.

Pode-se afirmar que houve mudanças de esquemas de resoluções dos problemas de AJ, ao compararmos os identificados em cada etapa da intervenção principalmente em relação aos problemas para os quais não foram disponibilizados lápis e papel, inviabilizando o uso do esquema de representação pictórica. Identificamos durante as resoluções de AJ esquemas diferentes daqueles descritos por Correa (2004), são eles: representação pictórica; decomposição de quantidades e igualar as partes, em destaque no Quadro 12. Esta mudança de esquemas revela que a intervenção teve papel fundamental para a ampliação do repertório utilizado por AJ, facilitando suas resoluções e trazendo mais segurança ao estudante para a realização das atividades propostas.

- Quantos aos invariantes operatórios

Ao analisarmos os invariantes operatórios identificados nas resoluções de AJ foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos. Estes invariantes operatórios mantiveram-se constantes durante as três etapas da intervenção.

Porém não identificamos em nenhuma das resoluções de AJ os invariantes operatórios referentes à relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero) e o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido, como vemos no Quadro 13. Apesar de entender que o estudante compreende que o todo é constituído pela soma das partes e que percebe a existência do resto.

QUADRO 13- INVARIANTES OPERATÓRIOS PRESENTES NAS RESOLUCÓES DE AJ

INVARIANTES OPERATÓRIOS DESCRITOS POR Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997)	AJ		
	EI	AD	EF
1 O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).	X	X	X
2 O todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.	X	X	X
3 O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero). *			
4 Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido.			
5 O resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.			
EI- entrevista Inicial AD- Ação Didática EF – Entrevista Final			

FONTE: DADOS DA PESQUISA, 2018

Em síntese, pudemos notar que a AJ modificou os esquemas utilizados nas resoluções. Principalmente na resolução do problema 8 no qual a representação pictórica deu lugar às adições repetidas e contagem a partir de um dado fator, além de observarmos a presença da decomposição de quantidades durante a entrevista final. A modificação nos esquemas de AJ também ficou evidente pelo fato de que deste estudante não apresenta, alem da entrevista inicial, respostas sem explicações, ou seja, durante a ação didática e a entrevista final, conseguiu finalizar todas as resoluções o que não havia ocorrido durante a entrevista inicial.

Também é possível afirmar que AJ manteve constantes os invariantes operatórios durante todo o processo de intervenção como vimos no Quadro 13.

O fato dos problemas envolverem quantias de dinheiro interferiu nos esquemas identificados nas resoluções de AJ, pois em alguns momentos a necessidade de utilizar apenas as cédulas fictícias dificultou e até mesmo impossibilitou as resoluções, o que não aconteceu enquanto o estudante conseguiu transformar tais quantias em unidades simples.

4.2 OS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DO ESTUDANTE AA

4.2.1 Entrevista inicial

a) Problemas de partição

- Problema 1- materiais diversos

Uma menina ganhou 15 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ela e sua irmã. Com quantos reais cada menina ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

Inicialmente AA analisou o problema e refez a leitura silenciosamente. Em seguida olhou para a pesquisadora e aparentando estar em duvida na sua afirmação disse:

> *AA. É ímpar.*
> *P. É ímpar e....*
> *AA. E daí não dá pra..... uma vai ficar com um a mais, e outra vai ficar com um a menos.*

P. Então resolve pra mim. [...] Gostei da sua hipótese, [...]. Só que eu quero saber quanto vai sobrar e quanto cada uma vai ganhar. Pode usar o material que você quiser.

O que percebeu-se aqui foi que AA demonstrou ter consciência de que um número ímpar não pode ser dividido igualmente por dois. Em seguida, AA pegou papel e lápis, ameaçou fazer algum registro, mas nem sequer o iniciou e disse:

AA.Eu acho que eu nem preciso.
P. Ok. Então pode dizer.
AA. É...... calma.... coloca as mãos na frente do rosto. 7 pra cada.
P. 7 pra cada. Como que você pensou?
AA. Por causa que 7 mais 7 é 14.... e 15 ... é ímpar. Tirei 1, ficou 14. Daí eu pensei nisso.
P. Ok. Então como ficou a resposta.
AA. Cada uma ganhará 7 reais e sobrará 1 real.

Foi possível perceber que nas estratégias de resolução de AA estiveram presentes os seguintes invariantes operatórios: divisão equitativa das partes; o todo deve ser distribuído até que não exista possibilidade de uma nova rodada de distribuição. Pensou em 15 como unidades decompondo-as em dois grupos de 7 mais 1. Valeu-se do esquema citado por Correa (2004) denominado "metades" ao corresponder 7 a uma menina e 7 a outra, sobrando 1 unidade.

- Problema 4 - cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 3 carrinhos, um garoto gastou 18 reais, sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada carrinho?

Para solucionar esta questão, inicialmente AA releu silenciosamente o problema, olhou para os materiais, parecendo avaliá-los, e inicia uma contagem nos dedos.

P. O que você está pensado?
AA. Eu estou pensando que se fossem 2 carrinhos eu saberia a resposta.
[...]
AA. 9. E marca 9 dedos nas mãos. *9 mais 9... 18.*

Nesta primeira resposta foi possível avaliar que AA utilizou-se da decomposição do número em duas partes iguais, ou seja, o esquema denominado por Correa (2004) como “metades”. Para chegar a esta conclusão AA transformou a quantia total em unidades simples e não fez a utilização das cédulas de dinheiro.

> *P. Ok. Mas são 3 carrinhos. Quanto custa cada um, nesta situação?*
> *AA. 6 cada carrinho.*
> *P. Como você pensou para chegar a esta resposta?*
> *AA. Porque 6 mais 6 são 12. E 12 mais 6 são 18.*

Desta vez, compôs o 18 em 3 grupos de 6, utilizando adições repetidas. Fez corresponder 6 para cada um dos carrinhos fazendo uso do esquema de contagem a partir de um dado fator. Percebeu-se na resolução destes 2 problemas que AA compreendeu que o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e que o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

Também notou-se que AA reportou-se à ideia aditiva, o que pode denotar uma filiação com este Campo Conceitual. O que também ocorreu no estudo de Correa (2004) que teve o intuito de examinar as estratégias de resolução oral de tarefas de divisão partitiva e por quotas de crianças de 6 a 9 anos, no qual conclui que nos problemas de divisão partitiva uma das estratégias utilizadas na resolução foi a de adição de partes iguais.

b) Problemas de quotição

- Problema 2 – materiais diversos

Uma senhora tem R$ 20,00, para dividir igualmente entre seus netos. Cada neto ganhará R$ 5,00. Quantos netos essa senhora tem?

Para a solução desta situação de divisão por quotas, AA ficou alguns instantes em silêncio. Observou o problema e refez a leitura silenciosamente atentando e apontando para as quantidades. Ficou mais alguns instantes em silêncio, parecendo contar mentalmente e disse com segurança:

> *AA. Já sei.*
> *P. Quantos?*
> *AA. 4.*
> *P. Por que você pensou que são 4?*

> *AA. Olha ....*(e mostra com os dedos*)....um neto ganhou 5. Daí deu 5. Daí outro neto ganhou 5 (*segura 2 dedos). *Deu 10. Daí outro neto ganhou 15* (segura 3 dedos), *quer dizer 5. Daí deu 15. Daí o outro neto ganhou 5* (segura 4 dedos*)... 20.*

Nesta resolução AA valeu-se, assim como no problema 4, dos esquemas de adições repetidas e contagem a partir de um dado fator, para compor a quantia inicial. Notou-se aqui também que AA transformou a quantidade de dinheiro em unidades simples e realizou cálculos mentais para solucionar as questões sem a necessidade da utilização de materiais.

Manteve nesta resolução o entendimento dos seguintes invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e que o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 3

Um garoto foi comprar carrinhos, pagou com uma cédula de 20 reais e não restou troco, sabendo que cada carrinho custou 4 reais, quantos carrinhos ele comprou?

Para solucionar esta questão, AA releu duas vezes em silêncio o problema. Não demonstrou intenção de utilizar os materiais disponíveis e respondeu, aparentando estar em duvida:

> *AA. É..... vou pensar...80.*
> *P. 80. O que?*
> *AA. Ahhh....não.....não, não não. É por causa que eu pensei 20 vezes 4. E não é assim.*

Notamos que AA inicialmente multiplicou os dados numéricos do problema. Todavia, mesmo sem a interferência da pesquisadora, percebeu o equívoco e tentou novamente. Olhou para os materiais disponíveis, pensou e disse:

> *AA. Eu estou pensando aqui.*
> *P. Muito bem. Mas o que você está pensando?*
> *AA. Estou pensando de 4 em 4 até chegar no 20.*
> *P. Ahhh. E como que faz isso?*
> *AA. Ó.... 4 mais 4: 8. Mais 4 mais 4: 8. 4 mais 4..... calma.... eu acho que eu já sei quantos carrinhos ele comprou.*
> *P. Quantos?*

A. 5.

Também neste último problema da entrevista inicial AA utilizou o esquema de adições repetidas para compor a quantidade de dinheiro. Esta ação reforçou o entendimento de que este é o esquema recorrente em suas soluções.

Os invariantes operatórios identificados durante a resolução de AA foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

4.2.2 Ação didática

Durante a ação didática, AA participou ativamente e se dispôs a resolver todas as situações propostas.

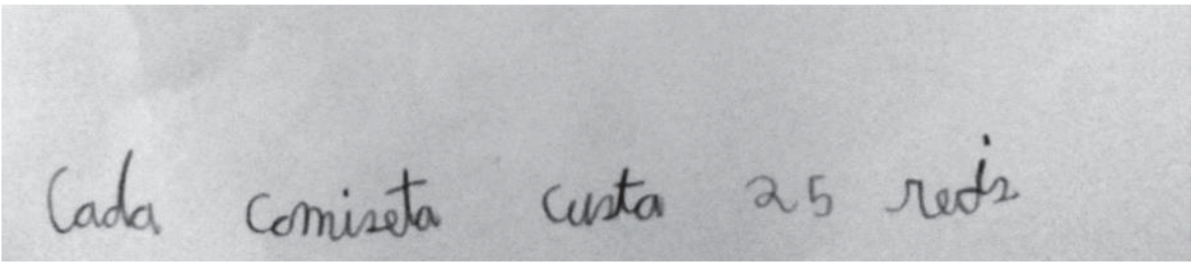
Na aula 2 que teve por objetivo a compreensão de problemas de divisão com a ideia de partição AA, da mesma forma que durante a entrevista inicial, utilizou o cálculo mental associado esquemas de contagem a partir de dado fator e adições repetidas para solucionar os problemas.

Durante a resolução das situações escritas, notamos que o estudante utilizava os dedos como suporte para a contagem e conferência de suas respostas. Mais uma vez, não apresentou dificuldades, acertando todas as questões propostas. Em nenhum momento, mesmo durante a atividade em dupla, AA demonstrou interesse de utilizar as cédulas de dinheiro ou os demais materiais disponibilizados. Na Figura 17, quando questionado a respeito de sua resolução, AA respondeu que 25 é a metade de cinquenta, portanto cada uma custaria 25 reais. Percebeu-se, então, que aqui além dos esquemas já citados, se faz presente a ideia de metades ao solucionar problemas de divisão.

Durante esta resolução pode-se perceber que estão presentes na resolução de AA os seguintes invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

FIGURA 17 – PROBLEMA 1 AA

CARMEN VAI COMPRAR CAMISETAS. ELA TEM 50 REAIS. ESSE VALOR É SUFIECINTE PARA 2 CAMISETAS E NÃO SOBRA NADA DE DINHEIRO. QUANTO CUSTA CADA CAMISETA?

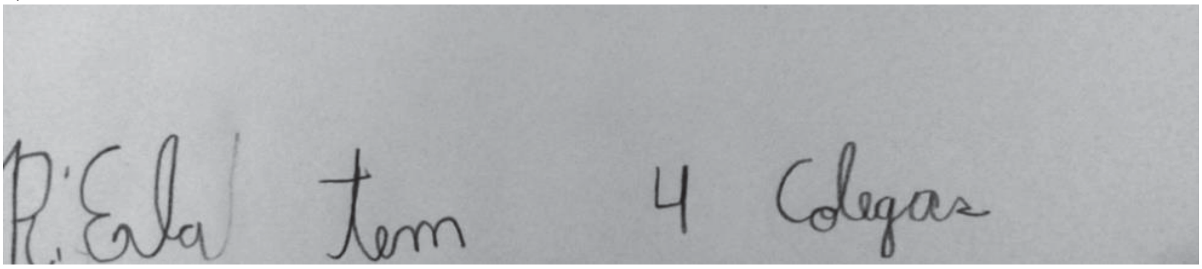


FONTE: DADOS DA PESQUISA.

Na terceira aula, onde foi explorada a ideia de divisão por quotas, mais uma vez pode-se notar que AA calculava mentalmente dividindo o todo em duas partes iguais, identificando-se por meio de suas explicações orais das, resoluções os esquemas de metades, adições repetidas e contagem a partir de um dado fator. Os invariantes operatórios mantiveram–se os mesmos: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos, como vemos na Figura 18.

FIGURA 18 – PROBLEMA 2 AA.

UMA MENINA TEM 8 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODAS AS SUAS COLEGAS DA CLASSE DE BALÉ. CADA UMA GANHARÁ 2 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTAS COLEGAS ELA TEM?



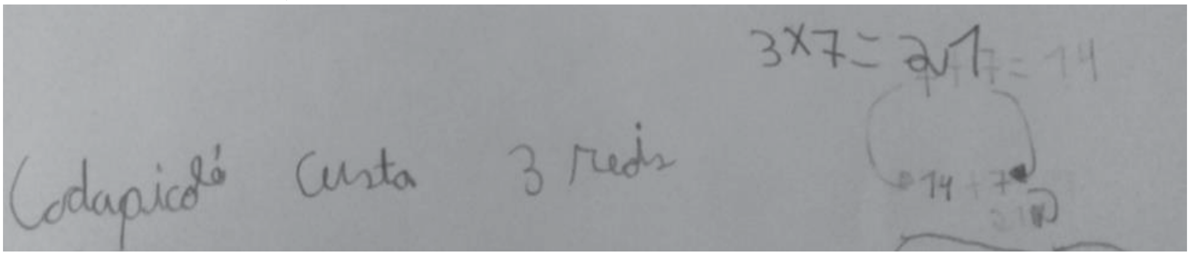
FONTE: DADOS DA PESQUISA.

Ainda na ação didática, durante a aula 6, AA modificou o esquema de resolução das questões, como podemos verificar nos exemplos a seguir:

Neste problema (FIGURA 19) o esquema presente foi o conhecimento de fatos multiplicativos. O uso da multiplicação (operação inversa) evidenciou a mudança de estratégias de resolução ao longo da ação didática. Neste caso o cálculo mental deu lugar ao registro da operação utilizada.

FIGURA 19 – PROBLEMA 3 AA.

JOSÉ FOI À SORVETERIA COM 21 REAIS. COMPROU 7 PICOLÉS DE MESMO VALOR E NÃO SOBROU DINHEIRO. QUANTO CUSTOU CADA PICOLÉ?

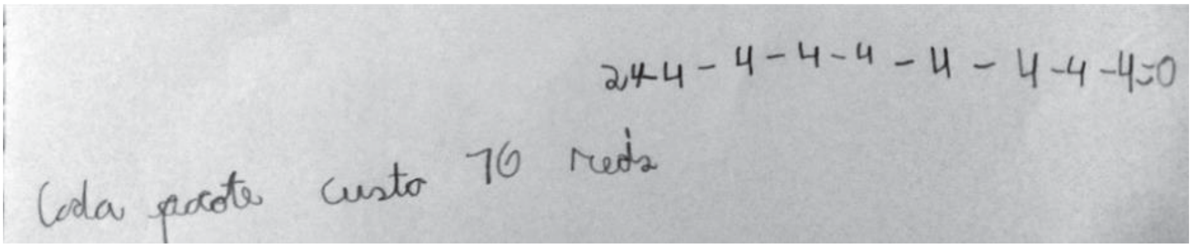


FONTE: DADOS DA PESQUISA.

Nesta outra situação (FIGURA 20), AA apresentou um esquema que não havia utilizado em nenhum outro momento: subtrações repetidas. Este esquema também foi observado por Correa (2004), que afirma que este é um esquema possível, porém não aparece com a mesma frequência dos demais descritos em sua pesquisa. Pode-se verificar que em suas resoluções o estudante compõe as quantidades de diferentes maneiras, ora por adições repetidas, ora por subtrações repetidas e ora por multiplicação, conseguindo chegar ao resultado correto por diferentes meios.

FIGURA 20 – PROBLEMA 4 AA

MARINA VAI COMPRAR BISCOITOS. ELA TEM 24 REAIS. ESSE VALOR É SUFICIENTE PARA 6 PACOTES E NÃO SOBRA NADA DE DINHEIRO. QUANTO CUSTA CADA PACOTE DE BISCOITO?



FONTE: DADOS DA PESQUISA

Também pode-se perceber, na aula 6, que estavam presentes nas resoluções de AA os seguintes invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

4.2.3 Entrevista final

a) Problemas de partição .

- Problema 5 – materiais diversos

Um garoto ganhou 13 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ele e seu melhor amigo. Com quantos reais cada menino ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

Para a resolução desta situação, AA analisou a questão e refez a leitura. Sem utilizar nenhum dos materiais disponibilizados respondeu:

> *AA. 6*
> *P. Como que você pensou?*
> *AA. Por que 6 mais 6 é 12.*

Com a intenção de verificar como AA resolveria a questão utilizando as cédulas de dinheiro, a pesquisadora perguntou como faria se tivesse que resolver com este material. O estudante, pegou 2 cédulas de 5 reais e 3 de 1 real, AA e respondeu:

> *AA. Daria 6 pra cada (*fez 2 grupos de 6 reais com as cédulas*) e deixaria 1 de fora*.

Ainda com a intenção de analisar as diferentes formas de representar a mesma resolução, a pesquisadora questionou de que maneira faria se precisasse representar "no papel", esta resolução. Com bastante segurança, parecendo ter certeza de sua resposta AA representou da seguinte forma:

6+6=12+1=13

Notou-se em todas as resoluções de AA que o esquema presente foi o de metades (CORREA, 2004). Já os invariantes operatórios presentes foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 7- cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 5 brinquedos, uma menina gastou 25 reais. Sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada brinquedo?

Para solucionar esta questão AA foi rápido e seguro. Já na primeira leitura feita pela pesquisadora e sem utilizar nenhum dos materiais disponibilizados, respondeu:

> *AA. 5.*
> *P. Como que você chegou nesta resposta?*
> *AA. Eu contei de 5......10.....15.....20.....25.*
> *P. Mas por que você resolveu contar de cinco em cinco?*
> *[...]*
> *AA. Eu pensei 5x5 daí eu já sabia o resultado que era 25.*

Nesta resolução AA pensa o valor em dinheiro em unidades simples e realiza cálculos mentais para solucionar as questões sem a necessidade da utilização de materiais. Porém notou-se uma modificação no esquema utilizado, uma vez que agora AA utilizou a ideia multiplicativa na resolução do problema de divisão com ideia de partição, além dos esquemas utilizados na entrevista inicial.

Quanto aos invariantes operatórios, identificou-se a manutenção daqueles utilizados em resoluções anteriores: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

b) Problemas de quotição

- Problema 6 - materiais diversos

Dona Lourdes tem R$ 30,00, para dividir igualmente entre todos os seus sobrinhos. Cada sobrinho ganhará R$ 6,00. Quantos sobrinhos essa Dona Lourdes tem?

Diferentemente das demais resoluções, desta vez AA não resolveu por meio da estratégia de cálculo mental, contagem a partir de um dado fator e do esquema de adição repetidas até compor o valor a ser dividido. Pegou papel e lápis e registrou a seguinte operação:

6+6= 12 +6 = 18+6= 24+6= 30

Em seguida, contou as parcelas, certificando-se da resolução e respondeu:

AA. 5 sobrinhos.
P. Você tem certeza?
AA. Sim

Com a intenção de verificar se AA modifica a estratégia quando utiliza outra maneira de representação, a pesquisadora pediu que o estudante resolvesse a questão utilizando as cédulas de dinheiro fictícias. Para tanto, AA agrupou as cédulas e organiza 5 grupos de 6 reais (uma cédula de 5 e uma de 1 em cada). Refez a contagem, certificando-se que totalizou 30 reais. Olhou para a pesquisadora, sinalizando que terminou e respondeu:

AA . 5 sobrinhos.

Nesta resolução AA fez uso dos esquemas de adições repetidas e contagem a partir de um dado fator para compor a quantidade inicial e os invariantes operatórios identificados foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos; O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes e que o todo é formado pela adição das partes.

- Problema 8- cédulas e objetos referidos no problema

Uma menina foi comprar gibis, pagou com uma cédula de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada gibi custou R$ 4,00, quantos gibis ela comprou?

Para esta resolução, AA sequer esperou a conclusão da leitura da questão. Respondeu prontamente:

AA. 5.
P. Ok. Mas como que você chegou na resposta?
AA. Eu contei de 4 em 4.
P. Mas porque de 4 em 4?
AA. Por que ela falou que cada gibi custa 4.
P. E como que você pensou na sua cabeça? Me explica.

AA. Eu estava contando nos dedos 4.....8.....12....16...20.

Da mesma forma que no problema anterior, AA valeu-se dos esquemas de adições repetidas e contagem a partir de um dado fator, mantendo os invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos; e que o todo é formado pela adição das partes.

Com a intenção de verificar diferentes estratégias, quando exigidas outras representações, a pesquisadora sugeriu que AA solucionasse a questão de outra forma e apontou para os materiais disponibilizados. O estudante apanha cédulas de 2 reais, formando grupos de 4 reais e organizando-os lado a lado. Formou 5 grupos, contou mentalmente e indicando que finalizou a resolução, apontou e disse:

AA. 5.

Percebeu-se que AA representou a quantidade a ser dada com as cédulas, mas não resolveu a partir das mesmas. A solução foi feita utilizando novamente os esquemas de adições repetidas e contagem a partir de um dado fator, mantendo os mesmos invariantes operatórios.

4.2.4 Discussão das resoluções os problemas de AA: esquemas e invariantes operatórios.

- Quanto aos esquemas

Na entrevista inicial, nos problemas de partição AA não utilizou as cédulas de dinheiro para a resolução. No problema 1 decompôs o 15 em 7 + 7 + 1 mentalmente, valendo-se do esquemas de “metades” identificado por Correa (2004). No problema 4 num primeiro momento buscou repetir o mesmo esquema, não obtendo êxito por não se tratar de metade e sim de uma divisão por 3. Reorganizou o esquema fazendo adições repetidas e contagem a partir de um fator *6 mais 6 são 12 e 12 mais 6 são 18* e atribui 6 a cada um dos carrinhos, como sendo uma quota para cada carrinho.

Na entrevista inicial, nos problemas de quotição (Problemas 2 e 3) valeu-se esquemas de adições repetidas e contagem a partir de um dado fator para compor o valor inicial, não usando as cédulas, mas o cálculo mental, do mesmo modo como fez na resolução dos problemas de partição.

Durante a ação didática, os esquemas observados ao longo das resoluções de problemas propostas tanto com a ideia de divisão por partição como nos que envolveram a ideia de quotas, foram: contagem a partir de dado fator; adições repetidas e metades. Porém em um dos problemas da aula 6 que envolveu a ideia de divisão por partição esteve presente o esquema de subtrações repetidas (FIGURA 19) e também nesta aula, identificou-se o uso de um novo esquema: conhecimento de fatos multiplicativos (FIGURA 18), que esteve presente também em um problema com ideia de partição.

Na entrevista final, nos problemas de partição, AA também se vale do esquema de “metades”, decompondo o 13 em 6 + 6 + 1 no Problema 5, concluindo que cabe 6 reais a cada menino. Ao ser desafiado a pensar como fazer isso com as cédulas de dinheiro, decompôs o valor 13 de acordo com os valores das cédulas: 5 + 5 + 1 + 1 + 1, formando 2 grupos de cédulas: 5 + 1 e separando o resto 1. No problema 7 também utiliza o conhecimento dos fatos multiplicativos associados à adições repetidas para encontrar a quota que caberia a cada brinquedo. Ao resolver a divisão, busca a quota que cabe a cada um, mesmo se tratando de um problema de partição.

Nos problemas de quotição, na entrevista final, no Problema 6 AA dividiu a partir do esquema de adições repetidas buscando quantas vezes a quota 6 poderia ser distribuída. Ao ser desafiado a fazê-lo com cédulas, forma 5 grupos de 1 cédula de 5 + 1 cédula de 1, ou seja, 6 reais e atribui um grupo a cada sobrinho usando o esquema de contagem a partir de um dado fator e adições repetidas. No problema 8 usou os mesmos esquemas para compor o valor de 20 reais e distribuí-los entre os gibis.

Pode-se observar as modificações dos esquemas de resolução de AA, durante as entrevistas e na ação didática no Quadro 14.

QUADRO 14- ESQUEMAS PRESENTES NAS RESOLUÇÕES DE AA

PROBLEMAS DE PARTIÇÃO		
ENTREVISTA INICIAL	AÇÃO DIDÁTICA	ENTREVISTA FINAL
Com uso de diferentes materiais	• Contagem a partir de dado fator; • Adições repetidas; • Subtrações repetidas; • Metades e • Conhecimento de fatos multiplicativos.	Com uso de diferentes materiais
• Metades.		• Metades.
Entrevista inicial com uso de cédulas e objetos referidos na questão.		Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.
• Adições repetidas; • Contagem a partir de um fator e • Metades.		• Conhecimento de fatos multiplicativos e • Adições repetidas.
PROBLEMAS DE QUOTIÇÃO		
Com uso de diferentes materiais	• Contagem a partir de dado fator; • Adições repetidas e • Metades.	Com uso de diferentes materiais
• Adições repetidas e • Contagem a partir de um dado fator.		• Adições repetidas, • Contagem a partir de um dado fator.
Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.		Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.
• Adições repetidas.		• Adições repetidas e • Contagem a partir de um dado fator.

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Pode-se afirmar que houve mudanças de esquemas de resoluções dos problemas de AA, principalmente quando identificamos o esquema que diz respeito ao conhecimento de fatos multiplicativos durante a ação didática e entrevista final demonstrando que a intervenção proporcionou a ampliação e modificação de esquemas utilizados por este estudante nas resoluções de problemas de divisão.

- Quanto aos invariantes operatórios

Os invariantes operatórios identificados nas resoluções de AA foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos. Estes invariantes operatórios mantiveram-se constantes durante as três etapas da intervenção. Porém não foram identificados em nenhuma das resoluções de AA os invariantes operatórios referentes à relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero) e o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido. O estudante compreende que o todo é constituído pela soma das partes e que percebe a existência do resto, como exposto no Quadro 15.

QUADRO 15- INVARIANTES OPERATÓRIOS PRESENTES NAS RESOLUÇÕES DE AA

INVARIANTES OPERATÓRIOS DESCRITOS POR Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997)	AA		
	EI	AD	EF
O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).	X	X	X
O todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.	X	X	X
O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero). *			X
Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido.			
O resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.			
EI- entrevista Inicial AD- Ação Didática EF – Entrevista Final			

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Em síntese, pode-se notar que a AA modificou os esquemas utilizados nas resoluções evidenciando que a intervenção proporcionou a ampliação e modificação de esquemas utilizados por este estudante nas resoluções de problemas de divisão, principalmente quando identificou-se o esquema que diz respeito ao conhecimento de fatos multiplicativos durante a ação didática e entrevista final. Também é possível afirmar que AA manteve constantes os invariantes operatórios durante todo o processo de intervenção como vimos no Quadro 13.

O fato dos problemas envolverem quantias foi relevante para as resoluções de AA, especialmente quando foi preciso utilizar somente as cédulas de dinheiro, uma vez que o estudante decompôs as quantias de dinheiro de modo a poder utilizar este material para a resolução.

4.3 OS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DO ESTUDANTE BE

4.3.1 Entrevista inicial

a) Problemas de partição

- Problema 1- materiais diversos

Uma menina ganhou 15 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ela e sua irmã. Com quantos reais cada menina ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

Ao iniciar a entrevista a pesquisadora realizou a leitura do problema e questionou se houve o entendimento da questão. BE não respondeu aos questionamentos iniciais, olhou para o material disponível e pegou algumas tampinhas. Em silêncio, BE organizou as tampinhas em 2 grupos pegando todas as tampinhas disponíveis, sem contar. Desfez os grupos e apenas separou 15 tampinhas. Conferiu a quantidade e usando as duas mãos, separou uma tampinha para cada lado ao mesmo tempo, formando dois grupos, até perceber que restou uma tampinha desagrupada. E disse:

BE. Sobrou uma.
P. Ok, mas qual é a questão do problema?

O estudante olhou para a pesquisadora e mexeu os ombros parecendo dizer que não compreendeu. A pesquisadora refez a leitura do problema. BE conta a quantidade de tampinhas em cada um dos grupos e responde:

BE. 7
P. Sobrará dinheiro?
BE. Sim
P. Quanto?
BE.1
P. E como que você pensou para fazer esse problema?
*BE. Eu pensei em ir contando assim. (*e mostra as tampinhas*).*
[...] E assim eu entendo.
*P. Você fez isso para entender (*contar as tampinhas*). Mas você teria outra forma de resolver esse problema?*

BE. Não.

Notou-se que BE solucionou este problema realizando como esquema a distribuição um a um pensando na quantidade 15 em unidades. Utilizou material de contagem como recurso para a resolução, procurando igualar as quantidades de tampinhas para cada menina. Os invariantes operatórios que identificamos nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

É relevante ressaltar que BE conseguiu chegar ao resultado utilizando as tampinhas, porém não tentou resolver de outra forma mesmo após as questões da pesquisadora.

- Problema 4 - cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 3 carrinhos, um garoto gastou 18 reais, sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada carrinho?

Para solucionar este problema BE observou as cédulas de dinheiro disponíveis, em seguida, apanhou 18 reais (uma cédula de 10 e 4 cédulas de 2 reais), em seguida observou o dinheiro e refez a leitura do problema silenciosamente. Decidiu trocar sua cédula de 10 por 5 cédulas de 2 ficando com 9 cédulas de 2 reais nas mãos. BE agrupou as cédulas em 3 grupos de 6 reais (3 cédulas de 2 reais a cada vez). Olhou para pesquisadora indicando que finalizou a resolução.

P. O que você pensou?
BE. Eu pensei.... eu peguei 18 reais com 2 e dividi por 3 carrinhos que ele tinha comprado. Ai ficou 6 pra cada carrinho.
P. Quanto custou cada carrinho?
BE. 6 reais.

Para solucionar esta situação BE compôs o valor 18 com as cédulas considerando os seus valores: uma cédula de 10 e 4 cédulas de 2 reais . Percebeu que desta forma não conseguiria distribuir 6 reais a cada carrinho, então destrocou a cédula de 10 por 5 cédulas de 2 obtendo 9 cédulas de 2. A seguir fez corresponder 3 cédulas de 2 para cada um dos 3 carrinhos, entregando uma quota de 6 reais para cada um dos carrinhos (distribuição um a um). Percebe-se na resolução deste problema a presença dos seguintes invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

c) Problemas de quotição

- Problema 2 – materiais diversos

Uma senhora tem R$ 20,00, para dividir igualmente entre seus netos. Cada neto ganhará R$ 5,00. Quantos netos essa senhora tem?

Após a leitura realizada pela pesquisadora BE refez a leitura silenciosamente. Em seguida apanhou uma cédula de 20 reais e olha alguns instantes para ela. Ao perceber certa insegurança ao resolver a questão, a pesquisadora interferiu:

P. O que você está pensando?
BE. Não dá;
P. O que não dá?
BE. Ela tem uma só.

Nesta primeira tentativa foi possível perceber que o estudante não conseguiu realizar a divisão pelo fato de considerar “20 reais” uma única unidade, por visualizá-la e entendê-la como uma cédula e não como representando o valor 20. A pesquisadora aguardou mais alguns instantes e percebeu que BE não iria solucionar a questão e decidiu interferir, relembrando a estratégia utilizada pelo estudante no problema 1:

P. E se fossem 20 tampinhas ela conseguiria dividir?
BE. Aí sim.
P. Então faz pra eu ver.

BE pega as 20 tampinhas e distribui uma a uma, formando 4 grupos de 5 tampinhas (uma tampinha para cada grupo)

P. Deu certo?

BE. Faz que sim com a cabeça.
P. Então se ela desse 5 tampinhas para cada neto. Quantos netos ela teria?
BE. 4.

Percebeu-se aqui que BE utilizou do esquema distribuição um a um (uma tampinha para cada grupo) aparentando já saber que deveria formar 4 grupos. Possivelmente fez o cálculo da divisão 20 : 5 = 4 e apenas representou a divisão que realizou utilizando o esquema de distribuição um a um. Não atribuiu, portanto, a quota de 5 reais para cada grupo como seria o esperado na divisão por quotas.

Quanto aos invariantes operatórios, os que identificados foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

Com o intuito de verificar se BE conseguiria lidar com a quantia de dinheiro, a pesquisadora insistiu que o BE o fizesse:

P. E com dinheiro como você pode fazer?
BE. Como dinheiro não dá certo.
P. Você não quer tentar?
BE. Não dá. E pega novamente a nota de 20.
P. Você não pode formar 20 reais de outra forma.
BE. Mexe a cabeça fazendo sinal negativo.
P. Ok.

Para não causar constrangimento ao participante que já se mostrava inquieto a pesquisadora não insistiu mais na resolução desta situação.

- Problema 3 - cédulas e objetos referidos no problema

Um garoto foi comprar carrinhos, pagou com uma nota de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada carrinho custou R$ 4,00, quantos carrinhos ele comprou?

Após a leitura do problema, o estudante apanhou uma cédula de 20 reais. Olhou para as demais cédulas e para o problema. Apanhou 10 cédulas de 2 reais. A seguir colocou 2 cédulas de 2 em um monte, 2 cédulas de 2 em outro, e assim sucessivamente, formando 5 grupos de 4 reais.

BE. 5.
P. Como que você pensou?

> *BE. Eu pensei.... como 2 mais 2 é 4. Então aqui.... (*aponta para o problema*) cada carrinho é 4. Eu peguei 20 dinheiros, tudo de 2 .... 2 mais 2, mais 2, mais 2, (*aponta para os agrupamentos*) que deu 20.*
> *P. Ok.*

Por meio desta resolução pode-se afirmar que BE decompôs 20 em parcelas de 2 ao pegar 10 cédulas de 2. Em seguida dividiu as cédulas em 5 grupos pelo esquema um para muitos (4 para cada carrinho). Os esquemas presentes nesta resolução foram a decomposição de quantidades e correspondência um para muitos.

Os invariantes operatórios observados nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

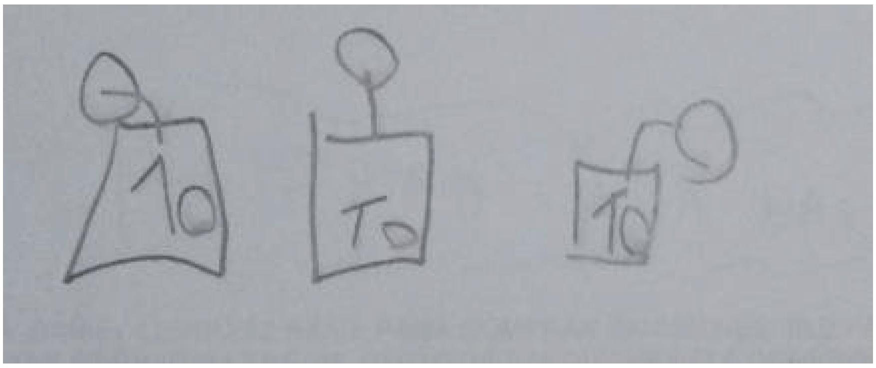
4.3.2 Ação didática

Durante a ação didática, BE participou atentamente das aulas, porém não participou com contribuições orais. Durante a primeira aula observou as estratégias apresentadas pelos colegas demonstrando interesse.

Na aula 2, ao solucionar os problemas de divisão por partição, BE mostrou-se bastante seguro, não participou oralmente, mas foi possível perceber que estava muito atento, solucionando os desafios propostos em dupla. Na resolução da ficha de problemas, identificamos os seguintes esquemas: adições repetidas e contagem a partir de um dado fator associadas à representação pictórica, como vemos no exemplo da Figura 21. Os invariantes operatórios presentes nas resoluções de BE durante esta aula foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

FIGURA 21 – PROBLEMA 1 BE.

ALICE TEM 30 REAIS E VAI DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE SUAS TRÊS FILHAS. QUANTO DINHEIRO CADA MENINA IRÁ GANHAR?

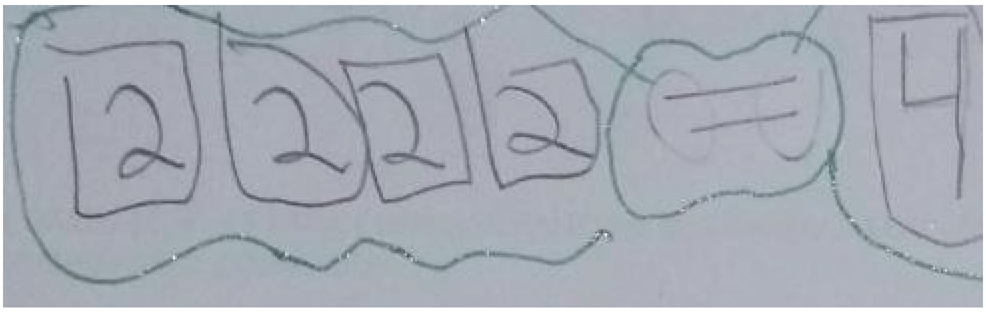


FONTE: DADOS DA PESQUISA

Na terceira aula, BE utilizou para solucionar os problemas de quotição os esquemas: adições repetidas e contagem a partir de um dado fator o que proporcionou o acerto de suas respostas como vemos no exemplo a seguir, nesta resolução a representação indica a soma 2+2+2+2 compondo a quantia inicial 8, porém a resposta ao lado do sinal de igual (4) índica a resposta para o problema, ou seja a quantidade de quotas que foram possíveis (FIGURA 22).

FIGURA 22 – PROBLEMA 2 BE.

UMA MENINA TEM 8 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODAS AS SUAS COLEGAS DA CLASSE DE BALÉ. CADA UMA GANHARÁ 2 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTAS COLEGAS ELA TEM NA CLASSE DE BALÉ?

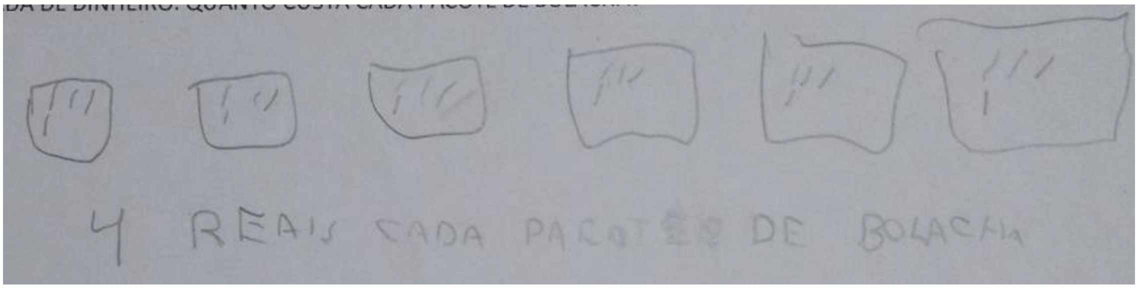


FONTE: DADOS DA PESQUISA

Na última aula (aula 6), após a aplicação do Jogo, BE mostrou-se bastante confiante para solucionar a ficha de problemas. Um deles que chamou a atenção da pesquisadora foi o de divisão por quotas, no qual verificou-se uma forma diferenciada de resolução. Inicialmente, BE desenhou os 6 pacotes de biscoitos e após fez um risquinho em cada pacote, contando, até concluir a contagem equivalente aos 24 risquinhos, ou seja, representou pictoricamente os objetos referidos no problema e se valeu do esquema de distribuição um a um, representado pictoricamente a solução. O esquema de representação pictórica associado à distribuição um a um não havia sido observado nas fichas anteriores de BE e por este motivo evidenciamos este exemplo (FIGURA 24)

FIGURA 24 – PROBLEMA 3 BE.

MARINA VAI COMPRAR BISCOITOS. ELA TEM 24 REAIS. ESSE VALOR É SUFICIENTE PARA 6 PACOTES E NÃO SOBRA NADA DE DINHEIRO. QUANTO CUSTA CADA PACOTE DE BISCOITO?



FONTE: DADOS DA PESQUISA

4.3.3 Entrevista final

a) Problemas de partição

- Problema 5 - materiais diversos

Um garoto tem 13 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ele e seu melhor amigo. Com quantos reais cada menino ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

Logo após a finalização da leitura da situação feita pela pesquisadora, BE rapidamente respondeu:

BE. 6.
P. Por que você acha que são 6?
BE. Porque não tem nenhuma continha que dá 13.
P. Que continha? Não entendi. Como assim?
BE. Assim... 6 mais 6 é 12. Mais um 13.

P. Por que mais 1?
BE. Esse mais 1 é o 13.
P. Quanto que cada menino vai ganhar?
BE. 6.
P. E vai sobrar dinheiro?
BE. Sim.
P. Quanto?
BE. 1.

A pesquisadora sugeriu que PH utilizasse outro meio para explicar sua solução. O estudante utilizou papel e lápis e fez a seguinte representação:

6+6=12

Por meio desta resolução pode-se afirmar que o estudante valeu-se do esquema de metades descrito por Correa (2004). Também observou-se que decompõe a quantidade 13 em 6+ 6 + 1 considerando o 1 como necessário para compor formar o 13 a partir das adição das duas metades do 12.

Para certificar-se de como BE encontrou o 6, é novamente questionado pela pesquisadora e aponta para a cabeça, referindo-se ao cálculo mental. Nesse momento a pesquisadora faz outros questionamentos:

P. Vieram outros números na sua cabeça, além do 6?
BE. Por que 7 mais 7 "é 14".
BE. 5 mais 5 "dá 10".

A partir destas respostas pode-se confirmar que BE se vale do esquema de metades (Correa, 2014) ao decompor mentalmente o número em duas partes iguais. Diante disso a pesquisadora sugeriu outra estratégia para solucionar tal situação:

P. Entendi... Você testou esses números. Mas se você tivesse que fazer com o dinheirinho. Como você faria?

O estudante apanhou duas cédulas de 5 reais e 3 cédulas de 1 real. Em seguida separou em 2 grupos iguais com 6 reais destacou o "resto" (uma cédula de 1 real) que ficou na sua mão finalizando sua resolução. A partir desta explicação pode-se afirmar que o estudante utilizou os mesmos esquemas e invariantes operatórios descritos na resolução anterior.

Os invariantes operatórios identificados nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 7 - cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 5 brinquedos, uma menina gastou 25 reais. Sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada brinquedo?

Para solucionar esta questão BE foi rápido e seguro. Logo após a finalização da leitura feita pela pesquisadora e sem utilizar nenhum dos materiais disponibilizados, respondeu:

BE. 5.
P. Como que você sabe?
BE. 5+5+5+5+5 é 25.
P.Então mostre pra mim com dinheirinho. Como que você faz isso?
B. 5...10....15...20....25....(fala enquanto pega e organiza, lado a lado 5 notas de 5 reais).
P. E é o valor de cada brinquedo?
BE. Faz que sim com a cabeça.
P. Me explique como pensou na sua cabeça para você descobrir esse 5.
BE. 5 mais 5 é 10. Mais 3 de cinco é 25.
P. Mas como você sabia que era 5.
BE. Eu usei a continha na minha cabeça. 5+5+5+5+5
P. Mas você testou outros números antes do 5?
BE. Não.

Por meio destas respostas pode-se perceber que BE utilizou o esquema de adições repetidas. Estavam presentes também as estratégias de cálculo mental.

Os invariantes operatórios que identificamos nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

b) Problemas de quotição

- Problema 6 - materiais diversos

Dona Lourdes tem R$ 30,00, para dividir igualmente entre todos os seus sobrinhos. Cada sobrinho ganhará R$ 6,00. Quantos sobrinhos essa Dona Lourdes tem?

Rapidamente após a leitura da questão feita pela pesquisadora, BE respondeu com segurança:

> *BE. 3.*
> *P.Por que você acha que são 3?*
> *BE. 12+12+12 é 30*
> *P. 12+12+12 são 30? Será que é isso mesmo.*

Notou-se que nesta resolução BE repetiu o esquema utilizado na resolução da situação 7 ao decompor o 30 pela soma de *12+12+12* tentando solucionar a questão pelo mesmo esquema: adições repetidas. Não se deu conta do erro num primeiro momento. A pesquisadora sugeriu uma nova solução e o estudante fez a cálculo no papel para conferir: *12+12+12.* Olhou a resposta (36), fez sinal negativo com a cabeça e foi questionado pela pesquisadora:

> *P. Mas eu não entendi. Por que você usou o 12 se ela vai dar 6 reais para cada um?*

O estudante ficou em silêncio e foi incentivado a iniciar novamente a resolução a partir de uma nova leitura feita pela pesquisadora. BE tentou resolver utilizando as cédulas de dinheiro, para tanto apanhou cédulas de 2 reais contando de 2 em 2 até totalizar 30 reais, ou seja, valendo-se do esquema de contagem a partir de um dado fator. Em seguida, o estudante formou grupos de 6 reais (com 3 cédulas de 2): um grupo – 3 cédulas de 2; outro grupo: 3 cédulas de 2, e assim até utilizar todas as cédulas separadas, totalizando 5 grupos. Ao finalizar os grupos respondeu:

> *BE. Ela tem 5 sobrinhos.*
> *P. Como que você descobriu?*
> *BE. Eu fui contando de um em um (*apontando para os grupos) *e deu 5.*

Nesta resolução percebeu-se que BE compôs a quantia inicial de dinheiro utilizando as cédulas de 2 reais pelo esquema de contagem a partir de um dado fator. Na sequência, formou as quotas pré-estabelecidas no problema e atribuiu-as a cada grupo. Os esquemas presentes foram o da decomposição da quantia inicial por adições repetidas na primeira tentativa e contagem de um dado fator na segunda.

Notou-se que os invariantes operatórios presentes nas resoluções de BE foram mantidos: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 8 - cédulas e objetos referidos no problema

Uma menina foi comprar gibis, pagou com uma cédula de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada gibi custou R$ 4,00, quantos gibis ela comprou?

Após a leitura realizada pela pesquisadora, BE mostrou-se bastante confiante e logo iniciou a resolução, o estudante apanhou 5 gibis, contou-os e respondeu:

> *BE. 5*
> *P. Como que você pensou?*
> *BE. 4....8...12....16...20 (*fala cada um dos números deslocando 1 dos 5 gibis que havia separado, para uma pilha*).*

Notou-se por meio desta resolução que BE utilizou o esquema de contagem a partir de um dado fator ao deslocar e separar os gibis. A pesquisadora questionou qual foi a estratégia que o estudante utilizou.

> *P. Explica melhor... Como você pensou? Por que você foi do 4 para o 8?*
> *BE. Por que 4 mais 4 são 8. Mais 4 : 16, mais 4 : 20 (e assim por diante)*

A partir desta explicação pode-se afirmar que o estudante utilizou, além da contagem, o esquema de adições repetidas para compor a quantidade inicial. Identificou-se que os invariantes operatórios presentes foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

4.3.4 Discussão das resoluções os problemas de BE: esquemas e invariantes operatórios.

- Quanto aos esquemas

Na entrevista inicial, ao resolver os problemas de partição, observou-se que no Problema 1 BE utilizou material de contagem (tampinhas) transformando o valor (15 reais) em unidades simples e utilizou-se do esquema denominado por Correa (2004) por distribuição um a um, não utilizando as cédulas de dinheiro. Já no Problema 4, quando precisou usá-las, BE decompôs a quantidade inicial (18) de modos diferentes, inicialmente utilizando uma cédula de 10 mais 4 cédulas de 2 reais (10 + 2 +2 +2 + 2). Percebendo que desta forma não conseguiria chegar à solução, fez a decomposição de outra forma, pegando 9 cédulas de 2 reais , ou seja, (2+2+2+2+2+2+2+2+2). Com estas cédulas distribuiu de forma a corresponder uma quota de 3 cédulas para cada carrinho.

Nos problemas de divisão por quotição, na entrevista inicial, durante a resolução do Problema 2, inicialmente BE não conseguiu solucionar usando cédulas pelo fato de não pensar a cédula de 20 como representando um valor equivalente a 20 unidades, mas sim como 1 unidade, por se tratar de uma única cédula. Então, incentivado pela pesquisadora pegou o material de contagem (tampinhas) para recomeçar a resolução. Realizou o esquema de distribuição um a um (uma tampinha para cada grupo) possivelmente já sabia que deveria formar 4 grupos, por ter realizado mentalmente cálculo da divisão 20 : 5 = 4 e apenas representou a divisão que realizou utilizando o esquema de distribuição um a um. Não atribuiu, portanto a quota de 5 reais para cada grupo como seria o esperado na divisão por quotas em busca de determinar quantos grupos deveria formar, mas já formou a quantidade de 4 grupos ao distribuir um para cada grupo.

Já durante a resolução do Problema 3, onde precisava utilizar as cédulas, BE utilizou a mesma estratégia do Problema 4 de decompor o valor inicial em cédulas de 2 reais. Compôs o valor 4 reais com 2 cédulas de 2 e atribuiu a quota de 4 reais para cada carrinho, encontrando assim a quantidade de carrinhos possíveis de serem compradas com 20 reais. Os esquemas presentes nesta resolução foram a decomposição de quantidades e correspondência um para muitos.

Durante a ação didática, os esquemas observados ao longo das resoluções de problemas propostas com a ideia de divisão por partição foram representação pictórica; adições repetidas; contagem a partir de um dado fator e distribuição um a um como vemos na (FIGURA 22). Nos que envolveram a ideia de quotas, os esquemas identificados foram: representação pictórica; adições repetidas e contagem a partir de um dado fator.

Nos problemas de partição da entrevista final, a análise da resolução do problema 5 revelou que BE decompôs a quantia inicial (13) em 6+6+1, ou seja, em unidades simples e a partir de cálculo mental valendo-se esquema de metades sem fazer relação com o Sistema Monetário. Ao ser desafiado a pensar com as cédulas compôs o valor 13 com duas cédulas de 5 reais e 3 cédulas de 1 real: 5 + 5 +1 +1 + 1. Como já sabia que o resultado seria 6, separou as cédulas em dois grupos de 6 ficando com uma cédula de 1 na mão, reconhecendo que esse valor seria o resto, ou seja, atribuindo uma quota de 6 para cada menino. No problema 7 BE, ao resolver a partição implícita no problema vale-se do esquema de adições repetidas calculando mentalmente. Quando solicitado a representar o que fez com o dinheiro, o fez considerando o valor da cédula de 5 e compõe a quantia inicial (5+5+5+5+5) mantendo o esquema de adições repetidas.

Nos problemas de divisão por quotição, da entrevista final, verificou-se que na resolução do problema 6, BE inicialmente decompõe mentalmente o valor (30) valendo-se do esquema de adições repetidas (12+12+12), formando 3 quotas, porém ao ser questionado pela pesquisadora notou o equívoco e reiniciou a resolução. Desta vez, utilizando corretamente as cédulas de dinheiro e o esquema da distribuição um a um chegou à resposta esperada da situação. Os esquemas presentes foram o da decomposição da quantia inicial por adições repetidas na primeira tentativa e contagem de um dado fator na segunda. Já no problema 8, BE decompôs o valor inicial utilizando corretamente os valores da cédulas de dinheiro, em seguida esquema de contagem a partir de um dado fator associado às adições repetidas para solucionar a questão. Para comparar as modificações dos esquemas de resolução de BE, durante as entrevistas e na ação didática apresentamos um quadro comparando cada etapa.

QUADRO 16- ESQUEMAS PRESENTES NAS RESOLUÇÕES DE BE

PROBLEMAS PARTIÇÃO		
ENTREVISTA INICIAL	AÇÃO DIDÁTICA	ENTREVISTA FINAL
Com uso de diferentes materiais	• Adições repetidas; • Representação pictórica; • Contagem a partir de um dado fator e • Distribuição um a um.	Com uso de diferentes materiais
• Distribuição um a um.		• Metades.
Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.		Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.
• **Correspondência um para muitos.**		• Adições repetidas.
PROBLEMAS DE QUOTIÇÃO		
Com uso de diferentes materiais	• Adições repetidas; • Representação pictórica e • Contagem a partir de um dado fator	Com uso de diferentes materiais
• Distribuição um a um.		• Adições repetidas; • Distribuição um a um; • **Decomposição de quantidades** e • Contagem a partir de um dado fator.
Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.		Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.
• **Decomposição de quantidades e** • **Correspondência um para muitos.**		• Adições repetidas e • Contagem a partir de um dado fator.

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Pode-se afirmar que houve mudanças de esquemas nas resoluções de BE principalmente quando identificamos o esquema correspondência um para muitos, que esteve presente apenas na entrevista inicial. Relevante para a pesquisa também o fato da identificação na representação pictórica apenas na ação didática, sendo que os materiais de contagem estavam disponíveis e não foram buscados por BE durante esta etapa da intervenção. Percebeu-se também que as adições repetidas não foram identificadas na entrevista inicial, mas foram sendo percebidas com frequência nas demais etapas, demonstrando uma significativa mudança de esquemas ao longo da intervenção, assim como o esquema de metades, que só foi identificado na entrevista final, demonstrando que a intervenção foi relevante para a ampliação do repertório de esquemas deste estudante.

-Quanto aos invariantes operatórios

Os invariantes operatórios identificados nas resoluções de BE foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos. Estes invariantes operatórios mantiveram-se constantes durante as três etapas da intervenção.

Não foram identificados, porém, em nenhuma das resoluções de BE os invariantes operatórios referentes à relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero) e o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido, como vemos no Quadro 17. No entanto, ficou evidente que o estudante compreende que o todo é constituído pela soma das partes e que percebe a existência do resto.

QUADRO 17- INVARIANTES OPERATÓRIOS PRESENTES NAS RESOLUÇÕES DE BE

INVARIANTES OPERATÓRIOS DESCRITOS POR Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997)	BE		
	EI	AD	EF
O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).	X	X	X
O todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.	X	X	X
O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero). *			
Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido.			
O resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.			
EI- entrevista Inicial AD- Ação Didática EF – Entrevista Final			

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Em síntese, pode-se afirmar que houve mudanças de esquemas de resoluções dos problemas de BE ao longo da intervenção. Já os invariantes operatórios mantiveram-se constantes durante toda a ação didática.

Uma situação de destaque durante esta análise foi o fato de que lidar com quantias de dinheiro foi relevante para o estabelecimento dos esquemas a serem utilizados pelo estudante. Notou-se que, na entrevista inicial, quando o problema mencionou uma cédula de 20 reais, inicialmente inviabilizou a resolução por BE. Porém, quando a pesquisadora sugeriu substituir a quantia de dinheiro por outros materiais de apoio, a resolução foi rápida e correta. Todavia, após a realização da ação didática, essa questão não mais se repetiu, de modo que em todas as situações que seguiram BE utilizou a decomposição do valor em quantias referentes às cédulas existentes, demonstrando que, ao modificar seus esquemas, por meio do contato com diferentes estratégias de resolução, pode consolidar seus próprios esquemas de resolução.

4.4 OS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DO ESTUDANTE PH.

4.4.1 Entrevista inicial

a) Problemas de partição

- Problema 1 – materiais diversos

Uma menina ganhou 15 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ela e sua irmã. Com quantos reais cada menina ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

Após a apresentação da atividade feita pela pesquisadora, rapidamente PH refez a leitura silenciosa do problema. O estudante iniciou a resolução, olhando para os materiais disponíveis. Apanhou cédulas de dinheiro (uma de 10 e uma de 5 reais). Largou as cédulas e apanhou papel e lápis. Esboçou um desenho e disse:

> *PH. Menos 10. Por causa que cada um vai ficar com 5 e dai ela ficou com 10 reais. Daí a Irmã ficou com 5 só. (*mostrando novamente as cédulas, demonstrando que uma ficaria com 10 e a outra 5 reais*)*

Nesta primeira tentativa, percebemos que o PH não compreendeu a divisão equitativa das partes, mesmo quando explícita no texto do problema. O esquema utilizado aqui foi o de decomposição da quantidade (10+5), mas, sem obter êxito na resolução. Por esse motivo, a pesquisadora insistiu para que o estudante apresentasse uma nova tentativa:

> *P. Mas aí ela dividiu igualmente pras duas?*
> *PH. Não.*
> *[...]*
> *P. Tem outra forma de dividir? Se fosse você e seu irmão, você acharia justo?*
> *PH. Não.*
> *P. Como que você faria?*
> *PH. Eu daria o outro 5 para outra pessoa.*
> *P. Você pode me explicar melhor?*
> *PH. Eu ficaria com 5, meu irmão com 5, e daria 5 para outra pessoa.*

Nesta resolução pode-se afirmar que PH utilizou a decomposição de quantidades como esquema associado à distribuição um a um (uma cédula para cada menino, e uma cédula “sobrando”: (5 + 5 + 5). A necessidade de distribuir o todo (15) em partes “justas” o fez acrescentar mais um personagem ao problema, e fazendo isso distribuiu o todo em partes iguais (divisão equitativa das partes).

- Problema 4 - cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 3 carrinhos, um garoto gastou 18 reais, sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada carrinho?

Após a leitura realizada pela pesquisadora, o estudante apanhou 18 reais (uma cédula de 10 e 4 cédulas de 2). Pegou um dos carrinhos da cesta, parou e observou o dinheiro, manuseando as cédulas com o intuito de observar todas. Em seguida disse:

> *PH. Um carrinho valia 10. O outro 4 e o outro 4.*

Nesta primeira reposta, PH, assim como no Problema 1, valeu-se do esquema da decomposição de quantidades do valor inicial para dividi-lo entre os carrinhos, mas não fez a divisão equitativa das cédulas, mesmo quando explícita no problema, então foi questionado pela pesquisadora:

> *P. [...] No problema não dizia que todos tinham o mesmo preço?*

PH trocou a cédula de 10 por 5 cédulas de 2. Em seguida devolveu todas as cédulas de 2 e apanhou 3 cédulas de 5 reais. Devolveu as cédulas de 5 e guardou o carrinho. Então disse:

> *PH. Vou começar de novo.*
> *P. Sem problemas... O que você está pensado agora?*
> *PH. Estou pensado que se pudesse ser diferente era fácil, mas como tem que ser igual está difícil.*
> .

Em seguida o estudante observou as cédulas por alguns segundos, sorriu e fez sinal negativo com a cabeça. Então realizou algumas tentativas nas quais agrupou as cédulas de dinheiro de diferentes formas. Inicialmente apanhou apenas cédulas de 2 reais e dividiu-as em 2 grupos. Percebeu que não chegaria à resposta e tentou apanhar algumas cédulas de 1 real. Neste momento foi questionado pela pesquisadora:

> *P. Me explique o que você está fazendo.*
> *PH. Estou tentando juntar as notinhas de 2* (forma um grupo com 4 notas - 8 reais e forma outro grupo também com 4 cédulas de 2*), mas aí da 16 (*apontando para o segundo grupo igual*). Mas daí vai dar errado (*olha para as duas cédulas de 1 real que tem nas mãos*), por que todos os carrinhos tem o mesmo preço. Daí vai dar mais que o preço.*
> *[...]*
> *P. Mas cada carrinho iria custar quanto?*
> *PH .8.....*
> *Coloca cada uma das cédulas de 1 real em cada grupo, ficando com 2 grupos de 9 reais.*
> *[...]*
> *PH. 8.....16......18 deu certo.*
> *P. Minha pergunta é. Quanto custou cada carrinho?*
> *Olha para os dois grupos de 9, pensativo, e conclui:*
> *PH. 8....8...e...2*

Mesmo tendo feito a divisão equitativa das partes considerando uma divisão por 2 e não por 3 como solicitado no problema, PH, não realizou a distribuição equitativa das partes que compunha o todo inicial 18, ao concluir que o resultado da divisão seria 8+ 8 + 2 . Todavia compreendeu as diferentes formas de decompor e compor os valores em dinheiro. A pesquisadora insistiu para que PH realizasse mais uma tentativa:

> *P. Ok, mas aí você atendeu ao problema? Todos têm o mesmo preço?*
> *PH. Ahnnn . então 8*
> *[...]*
> *P. Mas nesse caso, vai gastar só 18?*
> *PH. Não por que tem a mais que 18.*
> *[...]*
> *PH. 24.*

Neste momento percebemos que PH realizou a distribuição equitativa das partes, utilizando novamente o esquema denominado decomposição de quantidades. Porém não atentou para a quantia estabelecida pela situação proposta no problema e foi incentivado a realizar uma nova tentativa.

> *P. Ele teria 24 reais?*
> *PH. Sim....mas ele só tinha 18 né?*
> *[...]*
> *PH. 18. Então ele não tinha 24. Ele compra só 2 carrinhos que dá o preço.*

Percebeu-se, neste ponto, que o estudante modificou o problema e buscou uma estratégia equivocada. A pesquisadora fez alguns questionamentos a respeito da interpretação da pergunta da situação para que o estudante retomasse o contexto, o problema foi lido mais uma vez e PH respondeu, após pensar em silêncio por um tempo:

> *PH....7....(e pega 5 cédulas de 5) 15.... não .... é mais. 14*
> *P. 14?*
> *[...]*
> *PH. 6*
> *P. Mas mostre pra mim. Como seria se cada um custasse 6.*
> O estudante agrupa as cédulas de 2 reais formando 2 grupos de 6 reais.
> *PH. 2 de 6. 12.*
> *[...]*
> *PH. 12 mais 6....* (conta nos dedos*).....deu o preço exato (sorri). 18. Cada um custa 6, daí dá pra comprar com 18 reais.*
> *P. ok.*

Após todas estas tentativas, PH percebeu que obteve êxito em sua resolução, decompondo a quantia 18 valendo-se do esquema de adições repetidas (2+2+2+2+2+2+2+2) e em seguida distribuindo-as em 3 grupos (3 cédulas de 2 reais em cada quota). Após formar os 3 grupos, colocou cada carrinho em cada grupo. Os invariantes operatórios identificados, após todas as tentativas de resolução desta questão foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos e o todo inicial é constituído pela soma das partes.

b) Problemas de quotição

- Problema 2 – materiais diversos

Uma senhora tem R$ 20,00, para dividir igualmente entre seus netos. Cada neto ganhará R$ 5,00. Quantos netos essa senhora tem?

Após a leitura do problema e questionado se compreendeu o problema, PH refez a leitura da situação e o repetiu em voz baixa. Em seguida fez uma contagem mental e apanhou uma cédula de 20 reais. Dispensou a cédula de 20 e apanhou 4 cédulas de 5 reais, ou seja, valeu-se dos esquemas de decomposição de quantidades associado às adições repetidas (5+5+5+5) . Enquanto apanhava as cédulas fez uma contagem de 5 em 5 (contagem a partir de um dado fator), recitando em voz baixa: "cinco, dez, quinze, vinte" e agrupou as 4 cédulas na mão. Conferiu a contagem e afirmou:

> *PH. Ela tem 4 netos.*
> *P. Como que você descobriu isso?*
> *PH. Descobri que eu não precisava da nota de 20 nem da nota de 10. Daí eu peguei as de 5, daí eu descobri que 4 notas de 5 fica igual a 20. Então se ela tem 20 e vai dar 5 para cada neto, então ela tem 4 netos.*
> *P. Ok.*

Diferentemente dos Problemas 1 e 4, desta vez PH realizou a divisão equitativa das partes logo na primeira tentativa. Em seguida valeu-se do esquema de contagem a partir de um dado fator para solucionar o problema. Foram mantidos os mesmos invariantes operatórios da resolução anterior: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 3 - cédulas e objetos referidos no problema

Um garoto foi comprar carrinhos, pagou com uma nota de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada carrinho custou R$ 4,00, quantos carrinhos ele comprou?

Em um primeiro momento, o estudante olhou o material e retirou 2 carrinhos da caixa. Seguiu contando todos os carrinhos disponíveis. E respondeu que compraria todos. Então a pesquisadora lê novamente ao problema e exemplifica:

> *P. Por exemplo... Eu estou vendendo esses carrinhos. Cada um custa 4 reais. Quantos você consegue comprar com 20?*

Neste momento o estudante aparentou ter compreendido a situação e olhando para todo material disponibilizado reiniciou a resolução:

> *PH. Então... 4* (e apanha 1 carrinho*), 8 (* apanha outro carrinho), *12 (*mais um carrinho*), 14 (*mais um*), 16* (outro*), 18 (*outro*), 20 (*outro*). (*Conta os carrinhos dispostos lado a lado*).*
> *Ele comprou só 7 carrinhos.*
> *P. Tem certeza?*
> *PH. Afirma com a cabeça.*

Ao realizar esta estratégia PH utilizou o esquema de contagem a partir de um dado fator associado a distribuição um a um (um grupo de cédulas para cada carrinho), porém, perdeu-se na contagem e a partir de "12" contou de 2 em 2 (nesta hipótese equivocada, cada cédula equivaleria a quantia 1). Por esse motivo não chegou à reposta correta e foi incentivado a conferir sua resposta.

> *P. Certeza? Ele conseguiu comprar todos esses carrinhos?*

Após a pergunta, PH apanhou as cédulas de 2 reais que havia utilizado na primeira tentativa e distribuiu duas a duas (4 reais) em cima dos carrinhos que havia separado. Em seguida recitou a contagem de 4 em 4 como havia feito anteriormente "quatro, oito, doze, (para e conta nos dedos, pensa alto...) dez.... doze mais 2....(faz sinal de negativo com a cabeça) (agrupa mais 4 reais e coloca um carrinho em cima) dezesseis, (pensa alto ... 16 +4... conta nos dedos), (apanha mais 2 cédulas de 2 reais , coloca um carrinho em cima... 20). E reponde com segurança:

PH. 5 carrinhos.

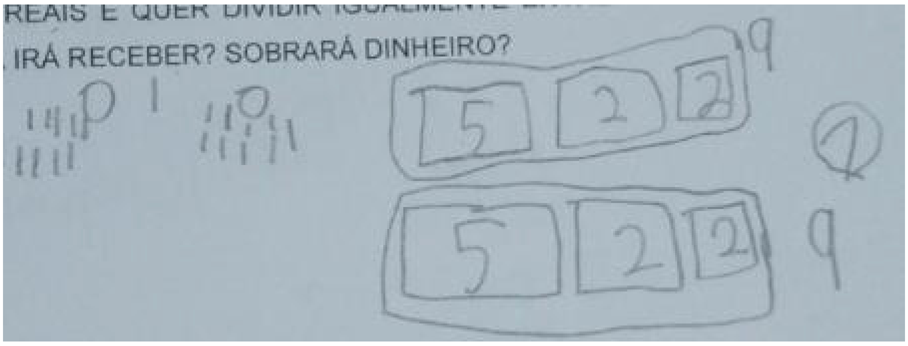
Nesta última resolução pode-se verificar que PH utilizou como esquemas as adições repetidas e a contagem a partir de um dado fator associados à distribuição um a um (uma quota de 4 reais para cada gibi) e a decomposição de quantias de dinheiro, chegando ao resultado esperado. Os invariantes operatórios presentes nesta resolução, também se mantiveram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

4.4.2 Ação didática

Durante a ação didática, PH foi um dos estudantes da turma que mais se destacaram nas participações orais. Na aula 2, na ficha de resolução dos problemas, o estudante valeu-se da composição e decomposição de quantidades. Em todas as situações que foram resolvidas corretamente, PH levou em conta o fato dos problemas envolverem dinheiro e representou suas estratégias por meio de desenhos das cédulas do Sistema Monetário Nacional vigente. Os esquemas que observamos nas resoluções de problemas de divisão com a ideia de partição durante esta aula foram: representação pictórica associada à distribuição um a um, decomposição de quantidades, adições repetidas e contagem a partir de um dado fator. Já os invariantes operatórios identificados foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos. Como vemos no exemplo da Figura 25.

FIGURA 25 – PROBLEMA 1 PH.

UMA GAROTA TEM 19 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE ELA E SUA IRMÃ. QUANTO CADA MENINA IRÁ RECEBER? SOBRARÁ DINHEIRO?

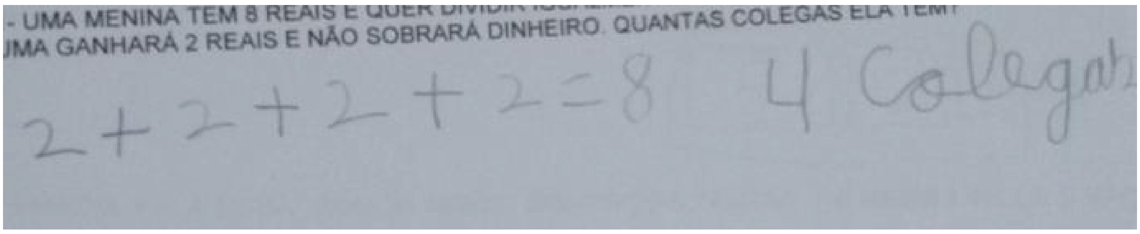


FONTE: DADOS DA PESQUISA

Já na aula 3, durante as explanações orais dos problemas que envolviam a ideia de divisão por quotas, PH participou e contribuiu ativamente com estratégias de resolução e na ficha de problemas chegou à resposta esperada em todas as situações. Usou os esquemas de adições repetidas e de contagem a partir de um dado fator para compor e decompor as quantidades referidas nas questões. Os invariantes operatórios observados também foram os mesmos da aula anterior: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos, conforme exemplo da Figura 26.

FIGURA 26 – PROBLEMA 2 PH

UMA MENINA TEM 8 REAIS E QUER DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODAS AS SUAS COLEGAS DA CLASSE DE BALÉ. CADA UMA GANHARÁ 2 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTAS COLEGAS ELA TEM NA CLASSE DE BALÉ?

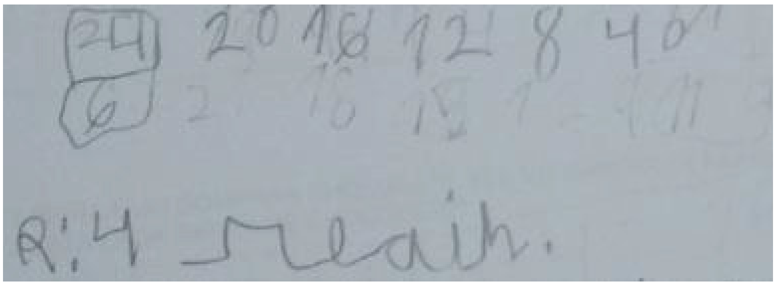


FONTE: DADOS DA PESQUISA

Na última aula, verificamos que PH utilizou esquemas diferentes daqueles utilizados antes da aplicação do Jogo. Desta vez percebemos que estiveram presentes os esquemas de subtrações repetidas e contagem a partir de um dado fator. Os invariantes operatórios identificados nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos, como vemos no exemplo da Figura 27.

FIGURA 27 – PROBLEMA 3 PH

MARINA VAI COMPRAR BISCOITOS. ELA TEM 24 REAIS. ESSE VALOR É SUFICIENTE PARA 6 PACOTES E NÃO SOBRA NADA DE DINHEIRO. QUANTO CUSTA CADA PACOTE DE BISCOITO?



FONTE: DADOS DA PESQUISA

4.4.3 Entrevista final

a) Problemas de partição

- Problema 5 - Materiais diversos

> Um garoto tem 13 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ele e seu melhor amigo. Com quantos reais cada menino ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

Para a resolução desta situação PH contou, utilizando as mãos, de 1 a 13. Em seguida apanhou uma cédula de 10 reais e 3 de 1 real (10+1+1+1). Trocou a cédula de 10 por duas de 5 reais compondo a quantia 13 de outra forma (5+5+1+1+1) e as duas cédulas de 5 reais afastadas na mesa. Colocou uma cédula de 1 real sobre cada uma das cédulas de 5 reais, deixando uma cédula de 1 real entre os 2 grupos e disse com muita segurança:

PH. Vai ter 11 reais para cada um e vai sobrar 1 real.

Ao resolver esta questão PH utilizou as cédulas de dinheiro que compunham tal quantidade de duas maneiras diferentes (10+1+1+1) e (5+5+1+1+1) demonstrando que o esquema de decompor quantidade. Após esse primeiro passo valeu-se do esquema de partição e partição associada com produtos (CORREA, 2004). O estudante realizou corretamente a divisão, inclusive percebendo a presença do resto. Porém ao verbalizar a resposta equivocou-se ao responder 11. Ao perceber o equívoco a pesquisadora questionou o estudante na tentativa de estimula-lo a também perceber:

P. Cada um vai ganhar 11 reais. Por quê?

Rapidamente PH olhou para sua resolução e sorriu, percebendo sua falha, em seguida respondeu:

PH. 6 reais.

Com a intenção de buscar mais informações a respeito da resolução a pesquisadora questionou:

P. Como que você pensou para fazer isso?
PH. Eu troquei a nota de 10 pelas notas de 5 porque eu precisava. Porque antes de pensar nisso eu pensei que uma de 10 não dava pra separar. As duas de 5 dava para separar. Igual dá pra fazer com as de 1 real.

A partir desta explicação pode-se afirmar que PH utilizou novamente o esquema de decompor as quantidades para solucionar os problemas de divisão. Os invariantes operatórios presentes na resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais, divisão equitativa das partes e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 7- cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 5 brinquedos, uma menina gastou 25 reais. Sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada brinquedo?

Para solucionar esta questão PH foi rápido e seguro. Já na primeira leitura feita pela pesquisadora e sem utilizar nenhum dos materiais disponibilizados, respondeu:

> *PH. 5 reais.*
> *P. Como que você sabe?*
> *PH. Porque essa continha eu já sabia, porque a professora mandou uma lição dessa. Tinham 5 crianças e 25 balões, e era pra dividir igualmente pra cada.*

Pode-se afirmar que PH resolveu corretamente esta situação, porém, a partir de sua explicação, é possível pensar que o estudante memorizou a resposta a partir de uma situação anteriormente solucionada. Por esse motivo a pesquisadora sugeriu que PH solucionasse de outra forma e explicasse como pensou para fazê-lo:

> *P. Ok. Mas se você tivesse que fazer usando o dinheirinho. Como você faria?*
> *PH. Eu iria pegar 5 notas de 5 (*apanha as 5 cédulas e segura nas mãos*). Porque dá 25. Porque cada brinquedo ia custar 5 reais.*
> *P. Muito bem. Mas me explique como que você pensou.*
> *[...]*
> *PH. Bom.... 5 brinquedos e ela tinha 25. Se eu pegasse uma de 20 e uma de 5 não ia dar pra "mim separar" . Daí pego as 5 notas que dá para separar certinho. Dai cada brinquedo custou 5 reais.*

A partir desta explicação, pode-se afirmar que PH resolveu a situação, utilizando o esquema de decompor as quantidades associada às adições repetidas e ao esquema de distribuição um a um, uma vez que cada cédula estava associada a um dos carrinhos. Os invariantes operatórios identificados foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

b) Problemas de quotição

- Problema 6- materiais diversos

> Dona Lourdes tem R$ 30,00, para dividir igualmente entre todos os seus sobrinhos. Cada sobrinho ganhará R$ 6,00. Quantos sobrinhos essa Dona Lourdes tem?

Para solucionar o problema PH apanhou 3 cédulas de 10 reais (10+10+10). Em seguida, realizou uma troca: apanha uma cédula de 5 reais e uma de 1 real e as agrupa colocando uma sobre a outra. Repetiu esta ação mais duas vezes, formando 3 grupos de 6 reais (5+1) e inicia uma contagem com os dedos. Apanhou mais 6 reais e falou baixinho (18) em seguida fez mais uma contagem nos dedos e parou, fazendo sinal negativo com a cabeça. Até aí havia montado 4 grupos de 6 reais. No último grupo, ao invés de contar 6, contou 7 reais, não conseguindo concluir a resolução.

Por fim foi questionado pela pesquisadora:

> *P. O que você está pensando?*

Neste momento o estudante refletiu sobre sua resolução e pareceu perceber um equívoco. Ainda em silêncio observou toda a sua resolução e finalmente respondeu:

> *PH. 5! Ela tem 5! Somei 1.*
> *P. Por que são 5?*
> *PH. Porque quando eu fui fazer eu confundi 1. Um a mais eu confundi com 7 uma vez. Agora que eu contei direito deu certinho. Ela tem 5 sobrinhos.*

A partir desta resposta podemos afirmar que PH valeu-se do esquema de adições repetidas para compor a quantia sugerida na situação proposta (30 reais) com 6+6+6+6+6. Além disso, PH utilizou a partição e partição associada com produtos como esquema para a divisão. A partir do questionamento da pesquisadora PH explicou sua resolução:

> *P. Como que você pensou? Por que você pegou essas cédulas?*
> *PH. Eu peguei 30. Aí eu fui pegando 6 para cada sobrinho. Aí quando eu cheguei "no quatro", daí eu vi que eu confundi o número, daí eu vi que ela tinha 5.*

Mais uma vez notou-se que PH valeu-se da adição de parcelas iguais para explicar sua resolução e também verificamos que os invariantes operatórios presentes nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 8- - cédulas e objetos referidos no problema

Uma menina foi comprar gibis, pagou com uma cédula de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada gibi custou R$ 4,00, quantos gibis ela comprou?

Após a leitura realizada pela pesquisadora, PH mostrou-se bastante confiante e logo iniciou a resolução:

> *PH. Se custa 4 (apanha duas cédulas de 2. Pega um dos gibis e coloca os 4 reais em cima. Repete a ação em 10 gibis.) Ela comprou 10 gibis.*

O estudante afirmou com bastante convicção sua resposta, aparentando ter certeza de sua resolução. Notou-se que os esquemas utilizados foram: a composição da quantia por meio de adições repetidas e distribuição um a um (uma quota de 4 reais para cada gibi). Todavia percebeu-se que o estudante não atentou ao valor da cédula utilizada (atribuiu o valor 2 para cada quota, ou seja, valor 1 a cada cédula). Por esse motivo foi questionado pela pesquisadora:

> *P. Ela comprou 10 gibis, cada um a 4 reais. É isso?*
> *PH. Aham*
> *P. Quanto ele gastou no total (apontando para os gibis que o estudante separou.)*
> *PH. Faz a contagem das cédulas que estão sobre os gibis. 2...4....6....8...10..(até 20) 20 reais certinho.*

Percebendo que o PH permaneceu sem fazer relação do valor referente a cada cédula, a pesquisadora propôs uma nova resolução:

> *P. Ok. Então eu vou pedir para você fazer uma coisa. Junte todo o dinheirinho que está em cima dos gibis na sua mão e conte.*
> *[...]*
> *PH. Inicia a contagem em voz alta, de um em um. Pára ao chegar no 2 (*parece perceber o erro) *reinicia a contagem de dois em dois. 2...4....6...8... e pára. Eu estava contando errado.*

P. O que aconteceu então?
PH. Eu tinha que contar de 2 em 2.

Após essa interferência, a pesquisadora sugeriu que PH reiniciasse a resolução do problema. Desta vez o estudante separou 10 cédulas de 2 reais (2+2+2+2+2+2+2+2+2+2) em suas mãos (totalizando 20 reais) contando de 4 em 4 (ao mesmo tempo em que separa 2 cédulas de 2) até chegar à 20, ou seja, valeu-se do esquema de contagem a partir de um dado fator associado a ideia de adições repetidas. Em seguida, colocou sobre cada gibi 2 cédulas de 2 reais até que estas acabassem pela distribuição um para um (uma quota de 4 reais pera cada gibi) portanto 5 gibis. E respondeu:

PH. Só 5 gibis.
P. Quantos gibis ela compra?
PH. 5
P. E o que você tinha errado antes?
PH. Eu estava contando de 2 em 2. (não atentando para o valor da cédula, neste caso, deveria realizar a contagem a partir do fator 4)

Desta vez, o fato do problema envolver quantias de dinheiro interferiu na resolução causando certa dificuldade. Depois de sanado o equivoco, porém, a resolução foi finalizada corretamente. Ao responder "só 5 gibis" nota-se que PH fez referência a algo que poderia indicar a presença do invariante operatório: relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido. No entanto, não foram obtidos elementos que confirmem a presença do mesmo nessa resolução, uma vez que PH pode apenas ter constatado que errou e atribuído o erro ao fato de ter contado de 2 em 2. Os outros invariantes operatórios presentes nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

A pesquisadora pediu para que PH solucionasse o problema de outra forma a fim de perceber mudanças de esquemas ao mudar a forma de representação.

P. Será que tem outra forma de você resolver esse problema?
PH. Aham
P. Como?
PH. Eu ia de cabeça. [...] Era 20 reais.... Eu ia contar de trás e dai ia dar 5 gibis.

P. Como assim.... Como você ia contar de trás?
PH. Eu pegava 20 (pega uma cédula de 20) e ia contando 4 pra trás (pega duas cédulas de 2).
P. E quanto daria? Faz pra eu ver.
O estudante pega as cédulas de 2 reais disponíveis e fala baixinho
PH. 20 ....16...12....8.....4...
Enquanto organiza 5 grupos de 4 reais ao lado da cédula de 20.

Nesta última tentativa, PH utilizou o esquema de subtrações repetidas para decompor a quantidade (20). Desta vez o estudante preocupou-se em manter o valor da cédula ao lidar com quantia de dinheiro, demonstrando que podem ser utilizados esquemas diferentes para a mesma situação, quando modificadas as formas de representação.

4.4.4 Discussão das resoluções os problemas de PH: esquemas e invariantes operatórios.

- Quanto aos esquemas

Nos problemas de partição da entrevista inicial, durante a resolução do Problema 1 o estudante tenta solucionar a questão usando o esquema de decomposição de quantidades (10+5), utilizando as cédulas de dinheiro. Como já afirmamos anteriormente, este esquema não havia sido descrito por Correa (2004). Nele o estudante não utiliza outra estratégia senão a de decompor a quantia inicial referida na situação-problema proposta (10+5). Não consegue finalizar sua resolução desta maneira e tenta decompor a quantidade de outra maneira, associando a adições repetidas (5+5+5) e distribuição um a um (uma quota de 5 reais para cada personagem) levando em conta o valor das cédulas, porém, também desta forma, não chega à resposta esperada por não identificar que a quantia inicial deve ser distribuída até que não exista possibilidade de uma nova distribuição e referiu-se aos 5 reais que restaram como possível de ser dividido a uma terceira pessoa não referida no problema. No Problema 4, novamente PH decompõe corretamente a quantidade inicial 18 (10+2+2+2+2) utilizando as cédulas de dinheiro e pelo esquema de decomposição de quantidades associada a adições repetidas, porém a partir desta decomposição não chega ao resultado e tenta outras formas de compor a quantia 18. Somente após várias tentativas chegou à resposta esperada ao decompor 18 pelo esquema de contagem a partir de um dado fator associado a adições repetidas: 2+2+2+2+2+2+2+2+2 ou seja, 9 cédulas de 2 reais e distribuí-las em 3 quotas de 6 reais (3 cédulas de 2 reais) associando cada uma delas a um carrinho.

Nas resoluções dos problemas de quoticão da entrevista inicial, observou-se no Problema 2 que PH utilizou corretamente a decomposição do valor inicial (20) utilizando as cédulas (5+5+5+5) pela decomposição de quantidades associada a adições repetidas e à contagem a partir de um dado fator. Também ficou muito claro nesta resolução que PH compreendeu que as situações que envolvem quantidades de dinheiro podem ser resolvidas de uma forma diferente, uma vez que não transformou as quantias de dinheiro em unidades simples mas utilizou as cédulas para chegar ao resultado esperado, ou seja, o estudante operou utilizando os valores das cédulas existentes no Sistema Monetário Nacional vigente. Já durante a resolução do Problema 3, PH utilizou os seguintes esquemas: contagem a partir de um dado fator associado distribuição um a um (um grupo de cédulas para cada carrinho), porém, perdeu-se na contagem e a partir de "12" contou de 2 em 2 (nesta hipótese equivocada, cada cédula equivaleria a quantia 1). Em uma nova tentativa, após perceber o erro, valeu-se da decomposição da quantidade 20, desta vez a partir do esquema de adições repetidas (4+4+4+4+4) e contagem a partir de um dado fator associados à distribuição um a um (uma quota de 4 reais para cada gibi) e a decomposição de quantias de dinheiro. Novamente PH considerou os valores das cédulas para solucionar a questão e operou utilizando os valores das cédulas existentes no Sistema Monetário Nacional vigente.

Os esquemas identificados durante a ação didática, ao longo das resoluções de problemas propostas com a ideia de divisão por partição foram: representação pictórica, decomposição de quantidades, adições repetidas e contagem a partir de um dado fator. Nos que envolveram quotição os esquemas identificados foram: representação pictórica, adições repetidas e a contagem a partir de um dado fator. Nas resoluções realizadas durante a aula 6, na última atividade da ação didática identificamos pela primeira vez nas resoluções de PH o esquema de subtrações repetidas que foi associado à contagem a partir de um dado fator como exposto na Figura 26.

Nos problemas de partição da entrevista final, na resolução do problema 5, novamente utilizou as cédulas de dinheiro e decompôs a quantia iniciais (13) em 5+5+1+1, ou seja, pelo esquema de decomposição de quantidades associada à partição e partição associada a produtos. Vale ressaltar que o fato do problema envolver valores monetários modificou o esquema, pois o estudante decompôs a quantia 18 de modo a respeitar os valores das cédulas existentes em suas tentativas.

No problema 7, ao ser instigado pela pesquisadora a demonstrar uma resolução, PH assim como na resolução anterior decompôs a quantia inicial 25 associada às adições repetidas (5+5+5+5+5) utilizando as cédulas corretamente e chegou à resposta correta valendo-se dos esquemas de decomposição de quantidades associada às adições repetidas e ao esquema de distribuição um a um (uma quota de 5 reais a cada brinquedo).

Nos problemas de divisão por quotição, da entrevista final na resolução do problema 6, PH inicialmente apanhou as cédulas para a resolução, porém foi por meio de cálculo mental que o estudante valeu-se dos esquemas adições repetidas e partição e partição associada com produtos e chegou à resposta esperada. Já no problema 8, valeu-se de esquemas de adições repetidas ao compor a quantidade 20 em (2+2+2+2+2+2+2+2+2+2) associada à contagem a partir de um dado fator e à distribuição um para um (uma quota de 4 reais pera cada gibi) portanto 5 gibis. Além destes identificamos na resolução PH um esquema diferente dos utilizados por ele na entrevista inicial: o das subtrações repetidas (CORREA, 2004) associadas à decomposição de quantidades.

Para comparar as modificações dos esquemas de resolução de PH, durante as entrevistas e na ação didática convém destacar o quadro abaixo, comparando cada etapa:

QUADRO 18- ESQUEMAS PRESENTES NAS RESOLUCÓES DE PH

<table>
<tr><th colspan="3">PROBLEMAS DE PARTIÇÃO</th></tr>
<tr><th>ENTREVISTA INICIAL</th><th>AÇÃO DIDÁTICA</th><th>ENTREVISTA FINAL</th></tr>
<tr><td>Com uso de diferentes materiais</td><td rowspan="4">• Representação pictórica;
• Decomposição de quantidades;
• Adições repetidas;
• Contagem a partir de um dado fator;
• Subtrações repetidas e
• Dupla contagem.</td><td>Com uso de diferentes materiais</td></tr>
<tr><td>• Decomposição de quantidades;
• Distribuição um a um e
• Adições repetidas.</td><td>• Decomposição de quantidades e
• Partição e partição associada com produtos</td></tr>
<tr><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td></tr>
<tr><td>• Decomposição de quantidades e
• Adições repetidas .</td><td>• Decomposição de quantidades
• Adições repetidas e
• Distribuição um a um.</td></tr>
<tr><th colspan="3">PROBLEMAS DE QUOTIÇÃO</th></tr>
<tr><td>Com uso de diferentes materiais</td><td rowspan="4">• Representação pictórica;
• Adições repetidas e
• Contagem a partir de um dado fator.</td><td>Com uso de diferentes materiais</td></tr>
<tr><td>• Decomposição de quantidades;
• Adições repetidas e
• Contagem a partir de um dado fator.</td><td>• Adições repetidas e
• partição e partição associada com produtos</td></tr>
<tr><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td></tr>
<tr><td>• Distribuição um a um;
• Adições repetidas;
• Contagem a partir de um dado fator e
• Decomposição de quantidades.</td><td>• Adições repetidas
• Contagem a partir de um dado fator,
• Distribuição um a um,
• Decomposição de quantidades e
• Subtrações repetidas.</td></tr>
</table>

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Pode-se afirmar que houve mudanças de esquemas de resoluções dos problemas de PH, inclusive pelo fato da identificação do esquema de partição e partição associada com produtos na resolução do problema 5, em destaque no Quadro 18. A representação pictórica foi um esquema que foi identificado somente durante a ação didática, etapa na qual o estudante não utilizou nenhum dos materiais disponíveis, sendo este um fator importante. Além disso, outra situação de destaque durante esta análise foram os esquemas presentes nas resoluções feitas pelo estudante feitas com cédulas. Notamos que para PH, tanto no Problema 1 de entrevista inicial como Problema 5 da entrevista final o valor de cada cédula foi relevante para a resolução, uma vez que um dos esquemas presentes nestas duas resoluções foi a decomposição de quantidades de acordo com os valores referentes às cédulas existentes no sistema monetário vigente.

- Quanto aos invariantes operatórios

Os invariantes operatórios identificados nas resoluções de PH foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos. Estes invariantes operatórios mantiveram-se constantes durante as três etapas da intervenção. Não foram identificadas, porém, em nenhuma das resoluções de PH, os invariantes operatórios referentes à relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero) e o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido. O estudante compreende que o todo é constituído pela soma das partes e que percebe a existência do resto, como demonstrado no Quadro 19.

QUADRO 19- INVARIANTES OPERATÓRIOS PRESENTES NAS RESOLUÇÓES DE PH

INVARIANTES OPERATÓRIOS DESCRITOS POR Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997)	PH		
	EI	AD	EF
O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).	X	X	X
O todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.	X	X	X
O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero). *			
Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido.			
EI- entrevista Inicial AD- Ação Didática EF – Entrevista Final			

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Em síntese, pode-se afirmar que houve mudanças dos esquemas e dos invariantes operatórios durante as três etapas da intervenção. O que é relevante ressaltar é a identificação da menção a um invariante operatório que não havia sido identificado anteriormente: relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido (problema 8). Pode-se dizer também que os invariantes operatórios mantiveram-se constantes durante as três etapas da ação didática.

O fato das situações envolverem quantias de dinheiro foi relevante para a modificação das estratégias de resolução de PH. Na entrevista inicial, ao lidar com as cédulas fictícias houve certa dificuldade para chegar à resposta esperada. Porém durante a ação didática e a entrevista final, essa dificuldade não mais se repetiu. A partir da ação didática, em todas as resoluções, foram respeitados os valores de cada cédula sem a necessidade de transformá-las em unidades simples.

Em alguns momentos, como por exemplo, na resolução do Problema 8, os esquemas identificados foram diferentes na mesma situação. Esse fato corrobora para que possamos afirmar que diferentes esquemas podem estar presentes para a mesma situação, quando modificadas as formas de representação.

4.5 OS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DO ESTUDANTE LO.

4.5.1 Entrevista inicial

a) Problemas de partição

- Problema 1- materiais diversos

Uma menina ganhou 15 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ela e sua irmã. Com quantos reais cada menina ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

O estudante LO inicialmente escutou a leitura feita pela pesquisadora, refez a leitura silenciosamente e em voz alta. Apanhou papel e lápis. Esboçou uma tentativa de escrever ou desenhar algo. Desistiu e respondeu:

LO. Vai sobrar 5 reais.
P. Por quê? Como que você pensou?

> *LO. Ela ganhou 15. Dividiu 5 com a irmã dela, pegou 5 pra ela, vai sobrar 5 reais. 10 mais 5 é 15.*

Notamos que nesta primeira tentativa de LO esteve presente o esquema de adições repetidas (5+5+5). Porém o estudante não obteve êxito em sua reposta por não considerar que o resto não pode ser igual ao tamanho das partes.

Notou-se que LO pensa o valor de R$ 15,00 (em dinheiro) como 5+5+5, não havendo possibilidade de outras composições ou a transformação em unidades simples. Podemos afirmar também que LO percebe a quantidade da questão como dinheiro e tenta decompô-la com as cédulas disponíveis. Porém não percebe que existem outras composições possíveis utilizando cédulas diferentes de R$ 5,00. Todavia não responde corretamente a questão, mas logo percebe o equívoco e antes mesmo de ser questionado pela pesquisadora diz:

> *LO. Dava.*
> *[...]*

LO iniciou uma nova tentativa de resolução utilizado lápis e papel, e olhou para os demais materiais. A pesquisadora interferiu e disse que poderia utilizar o que desejasse para resolver. O estudante, então, pegou tampinhas de garrafa e em seguida organizou-as em 2 grupos, distribuindo uma para cada grupo. Ficou com 6 tampinhas em um grupo e 5 no outro. Após realizar conferência, contado todas as tampinhas separadas nos grupos e disse:

> *LO. Dá 11.*
> Nota que os grupos estão desiguais e diz*:*
> *LO. Falta uma.* E coloca mais uma tampinha, igualando os grupos*.*
> *LO. Dá 12.*
> *P. O que você está me respondendo?*
> *LO. Que cada uma ganha 6.*
> *P. Vai sobrar dinheiro?*
> *LO. Vai sobrar 2.* Olha para suas mãos como buscando uma resposta.
> *P. Me mostra. Com o material ou com os dedos.*
> *LO. Tem 6 (*aponta para um grupo de tampinhas*) mais 2 (*mostra uma das mãos, com 4 dedos divididos em 2 grupos de 2 e a outra mão com um grupo de 3 dedos*) e sobra 3.*
> *P. Tem 3 reais ainda? [...]*

> *LO. Da pra dar mais 1. 7! (*coloca mais uma tampinha em cada grupo*) e dai não dá mais pra dividir.*
> *P. Por que não dá mais para dividir?*
> *LO. Porque só tem um real.*
> *P. Com quanto cada uma ficou?*
> *LO. 7.*
> *P. Sobrou dinheiro?*
> *LO. 1.*

Nesta segunda tentativa pudemos perceber que tentou compor a quantidade 15 utilizando diferentes materiais: tampinhas e dedos. LO precisou ser constantemente questionado, demonstrando insegurança na resolução da questão. Porém foi possível perceber que LO percebeu a existência do resto e que o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.

> *P. Tem certeza que é isso? Você teria outra forma de me mostrar?*
> Afirma com a cabeça e rapidamente guarda as tampinhas.
> *LO. Com dinheirinho.*

LO pegou 3 cédulas de 5 reais, separou-as em 2 grupos na mesa e manteve uma cédula de 5 reais na mão.

> *LO. Sobrou 5.*
> Devolve a cédula de 5, pega duas de 1.
> *LO. Daí vai dar um para cada um. (*junta com as de cinco inicialmente colocadas, ficando R$ 6,00 em cada grupo*).*

Após várias tentativas, LO não conseguiu resolver a questão utilizando as cédulas. Afirmou que só conseguiria usando as tampinhas. Apesar da notável dificuldade em chegar a uma solução, apresentou uma tentativa de compor a quantidade 15 de diferentes formas utilizando as cédulas de dinheiro. Porém não conseguiu fazer as trocas corretamente.

Identificamos o invariante operatório: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).

- Problema 4 - cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 3 carrinhos, um garoto gastou 18 reais, sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada carrinho?

O estudante LO apanhou 3 carrinhos da cesta refez a leitura do problema e apontou para cada um deles como se estivesse contando mentalmente e afirmou:

> *LO. É só fazer 9 mais 9.*
> *P. Por que 9 mais 9?*
> *LO. Cada carrinho custa 9 reais. (*separa 2 dos seus 3 carrinhos) *9 mais 9 são 18.*

Nesta primeira afirmação pode-se notar que LO utilizou o esquema denominado por Correa (2004) como “metades”. Estiveram presentes os seguintes invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

Por meio desta resolução verificou-se que LO compôs a quantidade 18, como 9+9. Porém fez a distribuição apenas em duas partes, ignorando os dados do problema. Neste momento foi alertado pela pesquisadora, que pediu que o estudante fizesse uma nova leitura da questão. Após a nova leitura LO inicia uma nova tentativa de resolução.

> *LO. Eu tinha pensado 5. Quer dizer 4.*
> *P. Por quê?*
> *LO. 4 um. 4 o outro e 4 o outro (*apontando para os carrinhos*).*
> *P. Por que você mudou de ideia?*
> *LO. Por que não dava ... (*aponta para os 2 primeiros carrinhos*) ai mais 4. 9...10...11...12. (*contando nos dedos*).*
> *P. E é isso? 4 cada um?*
> *LO. Não porque ele gastou 18.*

Nesta segunda tentativa LO manteve o pensamento de igualar as partes e percebeu que o todo (18) não tinha sido distribuído totalmente. Nesta tentativa LO utilizou o esquema da recontagem das quantidades já apresentadas no problema descrito por Correa (2004) e exemplificado no Quadro 1. Porém ainda não conseguiu chegar à resposta da situação.

Após perceber o equívoco LO fez uma nova reorganização, colocando os 3 carrinhos lado a lado.

> *LO. Aqui são 12* (aponta para os dois primeiros carrinhos e conta nos dedos) *13...14...15...16...17...18 Deu 18!*
> *[...]*
> *LO. 4 reais. Não... 6 reais! .*
> *P. Já que está na dúvida, faz de novo, para conferir.*
> *LO. 6 mais 6....12. Mais 6....18. Isso! 6 reais cada um.*

Percebemos que LO, na primeira fala manteve o esquema da recontagem das quantidades já apresentadas no problema (CORREA, 2004) e não chegou à resposta esperada. Porém, ao associar este esquema ao das adições repetidas finalizou sua resolução, trazendo a resposta adequada. Nota-se que os invariantes operatórios presentes foram os mesmos da tentativa anterior.

b) Problemas de quotição

- Problema 2 – materiais diversos

Uma senhora tem R$ 20,00, para dividir igualmente entre seus netos. Cada neto ganhará R$ 5,00. Quantos netos essa senhora tem?

Após a leitura do problema, quando questionado pela pesquisadora LO respondeu logo em seguida:

> *LO. 5 mais 5 mais 5..... 3!.*
> *P. 3 netos?*
> *LO. Afirma com a cabeça. E diz: Ela vai dar 5 pra um, 5 pra outro e 5 pra outro. E vai sobrar 5 para ela também.*

Nesta tentativa podemos afirmar que LO, distribuiu as partes de forma equitativa e utilizou-se do esquema de adições repetidas para compor o todo, realizando corretamente a divisão ao encontrar 4 quotas de 5 reais, porém equivocou-se ao atribuir uma delas à personagem do problema que distribuiu as quotas.

Em seguida a pesquisadora insistiu para que LO refletisse a respeito de sua resolução fazendo mais uma leitura da situação que resultou na seguinte resposta:

> *P. Vai sobrar 5 pra ela? Mas o problema dizia que sobrava 5 pra ela?*
> *LO. Faz que não com a cabeça.*
> *P. O problema diz que ela vai dar todo o dinheiro para os netos.*
> *LO. Todo para os netos?*

> *P. Veja o problema.*
> *LO. Tá....Vai dar 6 reais para cada um.*
> *P. No problema diz que cada um vai ganhar quanto?*
> *P. Faça de conta que você é essa senhora. Como que você resolveria esse problema?*

Na tentativa de solucionar a questão, LO analisou os materiais e pegou as cédulas de dinheiro fictícias, inicialmente apanhou duas de 5 e uma de 10 reais na mão. Observou as cédulas restantes e em seguida, trocou-as, apanhando duas cédulas de 10 reais e pensou em voz alta:

> *LO. 10 mais 10 é 20. Menos 5, menos 5 .... Que daí dá cinco. Menos 5...Que dá zero.*
> E em seguida responde apontando para os dedos da mão:
>
> *LO. 3!*

Desta vez, notou-se que LO tentou fazer a decomposição da quantia 20, por meio de subtrações repetidas, porém não o fez de forma correta e foi incentivado pela pesquisadora a imaginar uma situação mais próxima à realidade:

> *P. Faça de conta que você é essa senhora que quer dividir o dinheiro.*

Para tentar solucionar a questão LO trocou as cédulas por material de contagem. Separou 20 tampinhas na mesa, destas, separou 5, em seguida separou mais 5, e assim sucessivamente até que se esgotassem as tampinhas. Na medida em que ia retirando as tampinhas e separando - as em grupos de 5 o estudante ia falando baixinho:

> *LO. Menos 5, menos 5, menos 5...*

Fazendo o uso de material de contagem (tampinhas) ao mesmo tempo em que transforma a quantia em dinheiro referida no problema (20) em unidades simples, LO manteve com esquema as subtrações repetidas ao terminar seus agrupamentos, afirmou com segurança:

> *LO. Eles vão ficar com 5?*

Neste momento notou-se que a resposta encontrada não respondeu à questão do problema e mais uma vez a pesquisadora fez uma interferência:

> *P. O problema diz que cada neto fica com 5 reais. Mas queremos descobrir quantos netos ela tem.*

Após esse esclarecimento feito pela pesquisadora, LO pareceu ter se desmotivado, ameaçou desistir, mas olhou o material dividido na mesa e respondeu:

> *LO. Ela vai ter 4 então.*
> *P. Por quê?*
> *LO. Porque ela tem 20 reais, ela vai dividir 5, mais 5, mais 5 mais 5.*
> *P. Então me mostre.*

Neste ponto, notou-se que o estudante justifica a resposta da questão utilizando um esquema diferente daquele que utilizou anteriormente para encontrar a solução: por meio da composição da quantidade 20 (5+5+5+5) pelo esquema de adições repetidas. Ainda assim, a pesquisadora buscou compreender quais foram os caminhos percorridos para que LO chegasse à resposta e insistiu para que o estudante explicasse como resolveu.

> *LO. [...] Tem 20 moedas.... Vai dividir 5 com um* (e coloca a mão em um dos grupos de 5 tampinhas) *5 com o outro* (e repete a ação*), 5 com o outro e 5 com o outro.*
> *P. Então, quantos netos ela tem?*
> *LO. 4.*

Durante as tentativas de resolução deste problema, identificamos os seguintes invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

- Problema 3 - cédulas e objetos referidos no problema

Um garoto foi comprar carrinhos, pagou com uma nota de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada carrinho custou R$ 4,00, quantos carrinhos ele comprou?

Em um primeiro momento, o estudante olhou o material disponibilizado e refez a leitura do problema silenciosamente. Após a finalização da leitura, respondeu com segurança:

> *LO. 4.*
> *P. Por que você acha que são 4?*
> *LO. Custou 4 cada.*
> *P. Sim. Custou 4 reais cada carrinho. Mas quantos ele comprou?*

A partir desta resposta, pode-se perceber que inicialmente LO não compreendeu a questão, porém após o questionamento da pesquisadora reiniciou sua resolução. O estudante olhou pra os materiais disponíveis e perguntou se não poderia utilizar papel e lápis. Ao deparar-se com a resposta negativa olhou para os materiais disponíveis e apanhou uma cédula de 20 reais. Colocou a cédula de 20 reais à sua frente, separada das demais e em voz alta, contando nos dedos, LO iniciou uma contagem regressiva (19, 18, 17...) e a cada 4 números LO segurava 1 dedo utilizado o esquema da dupla contagem (CORREA, 2004) ordem decrescente, porém esqueceu de segurar o último dedo e quando finalizou, disse :

> *LO. 4.*
> *P.4 carrinhos?*
> *LO. Faz que sim com a cabeça.*
> *P. como você pensou?*
> *LO. Fiz 4 vezes menos 4?*
> *P. Você tem certeza da sua resposta?*
> *LO. Afirma com a cabeça.*
> *P. Você poderia me mostrar de outro jeito essa resolução?*
> *LO. Se tiver papel eu consigo.*
> *P. E com o dinheirinho....?*
> *LO. Daí eu não consigo.*

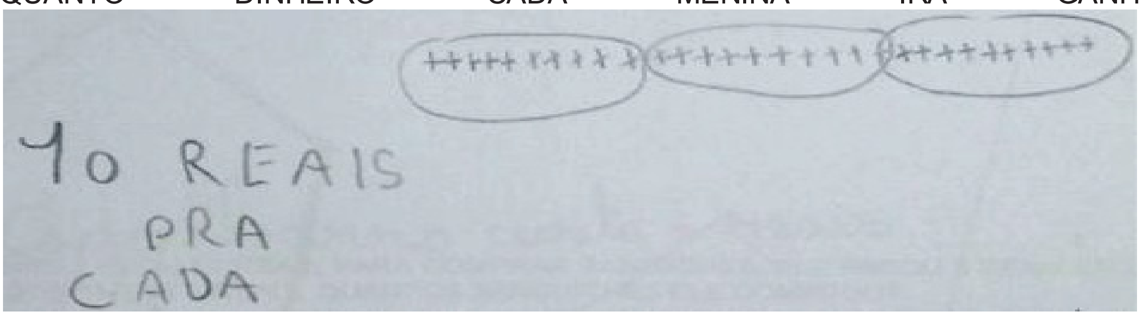
Nesta última tentativa, LO não chegou à resposta esperada e não houve mais insistência por parte da pesquisadora porque o estudante mostrou-se cansado para uma nova tentativa. Ainda assim, pode-se perceber que LO utilizou como esquema as subtrações repetidas nessa última tentativa de explicar como resolveu o problema. Ademais, percebeu-se que o estudante não teve segurança para utilizar o dinheiro fictício para uma nova tentativa. Os invariantes operatórios que identificamos nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

4.5.2 Ação didática

Durante a ação didática, LO participou ativamente e resolveu todas as situações propostas. Na aula 2, ao realizar a divisão por partição, LO apresentou a quantidade (30) com risquinhos, em seguida os recontou, formando grupos de 10 risquinhos em cada conjunto, nesta resolução vimos que o estudante representou a quantia de dinheiro em unidades e chegou à resposta esperada, mesmo não atentando ao fato de estar lidando com quantias de dinheiro, como pode-se verificar na Figura 28:

FIGURA 28 – PROBLEMA 1 LO

ALICE TEM 30 REAIS E VAI DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE SUAS TRÊS FILHAS. QUANTO DINHEIRO CADA MENINA IRÁ GANHAR?



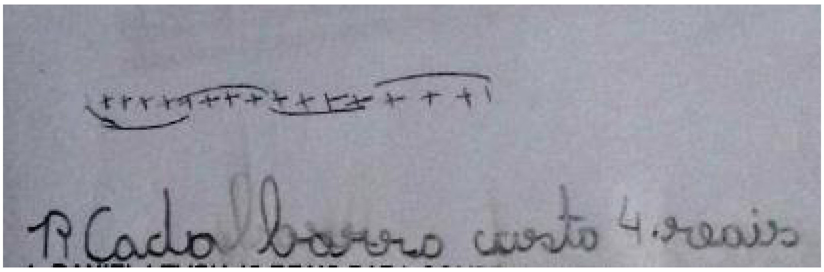
FONTE: DADOS DA PESQUISA

Observou-se que LO valeu-se do esquema de representação pictórica, descrito como estratégia na pesquisa de Ferreira e Lautert (2003), já exposto nesta pesquisa e exemplificado na Figura 4 e denominado nesta pesquisa como esquema associado à contagem a partir de um dado fator. Neste caso, provavelmente LO já sabia que o resultado era 10, por se tratar de uma quantia exata e utilizou o fator 10 para a sua contagem. Os invariantes operatórios aqui identificados foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

Na aula 3, LO utilizou para solucionar a situação de divisão por quotas o esquema de representar pictoricamente a quantidade referida no problema com risquinhos. Em seguida foi contando de 4 em 4, valor de cada barra de chocolate, e organizando em grupos, até totalizar 4, ou seja utilizou o esquema de contagem a partir de um dado fator associado à representação pictórica. Desta forma chegou à resposta correta, como pode ser constatado na Figura 29:

FIGURA 29 – PROBLEMA 2 LO

BIANCA VAI COMPRAR CHOCOLATE. ELA VAI GASTAR 16 REAIS EM BARRAS IGUAIS QUE CUSTAM 4 REAIS. QUANTAS BARRAS ELA VAI COMPRAR?

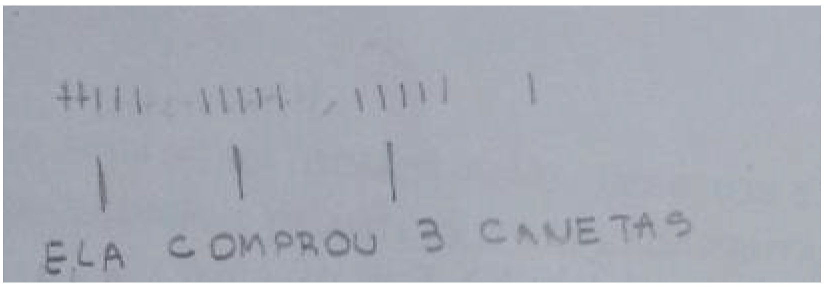


FONTE: DADOS DA PESQUISA

Na última aula (aula 6), LO conseguiu responder corretamente a todas as situações propostas. Em um dos problemas, utilizou o esquema de representação pictórica, ao mesmo tempo em que realizou a contagem a partir de um dado fator (5 reais) e dupla contagem pelo fato de cada grupo representar uma caneta. Desta forma chegou à solução esperada inclusive remetendo-se a presença do resto, como denota-se da figura 30.

FIGURA 30 – PROBLEMA 3 LO.

CAROLINA LEVOU 16 REAIS PARA COMPRAR CANETAS. ELA PAGOU 5 REAIS EM CADA CANETA E SOBROU 1 REAL. QUANTAS CANETAS ELA COMPROU?



FONTE: DADOS DA PESQUISA

A partir da análise desta última resolução identificamos os seguintes invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

4.5.3 Entrevista final

a) Problemas de partição

- Problema 5 – materiais diversos

Um garoto tem 13 reais de sua mãe e quer dividir igualmente essa quantia entre ele e seu melhor amigo. Com quantos reais cada menino ficará? Sobrará dinheiro? Quanto?

Para a resolução desta situação LO apanha o lápis e o papel em seguida, responde:

LO. 6
P. 6! O que?
LO. 6 reais para cada um.
P. E vai sobrar dinheiro?
LO. Vai sobrar 1 real.
P. Como você pensou?

Pega o lápis e desenha 13 risquinhos e risca os seis primeiros.

P. Por que você colocou esses risquinhos aí? Me explica.
LO. Fiz 13 risquinhos dai risquei 1....2....3...4....5....6...dai o outro ficou com 6 também.
P. E porque você me disse que sobrou 1?
LO. Por causa que ele tinha 13 reais. Queria dividir entre esse amigo ó (e aponta para o papel – faz um risco maior separando os risquinhos em 2 grupos) cada um ficou com 6 (reconta de1 em 1, os risquinhos do papel).
P[...]
P. Teria outro jeito de resolver.
LO. Não.

A partir desta resposta pode-se afirmar que LO utilizou como esquemas a representação pictórica associada à ideia de metade. Os invariantes operatórios identificados foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos. LO percebeu a existência do resto e que o todo é formado pela soma das partes mais o resto.

- Problema 7 - cédulas e objetos referidos no problema

Para comprar 5 brinquedos, uma menina gastou 25 reais. Sabendo que todos tinham o mesmo preço, quanto custou cada brinquedo?

Logo após a finalização da leitura do problema pela pesquisadora, LO sem manusear nenhum material, respondeu com segurança:

LO. 5.
P.Por que você acha que é 5?
LO. Porque 10 mais 10 é 20. Mais 5..... 25....
Aí, 25 menos 5......20. Menos 5......15. Menos 5 ......10. Menos 5......5. Menos 5 ....zero.

A partir desta resposta foi possível perceber que LO utilizou como esquemas para solucionar a divisão, a estratégia do cálculo mental, e os esquemas presentes foram: adições e subtrações repetidas. Foi pedido para que LO demonstrasse de outra forma sua resolução:

P. E tem outro jeito de você me mostrar isso?
LO. Faz que não com a cabeça.
P. Que tal você me mostrar usando o dinheirinho?

Em um primeiro momento, o estudante não se sente motivado a resolver o problema de outra maneira, porém, após a insistência da pesquisadora, o faz. Inicialmente o estudante apanhou 5 cédulas de 5 reais, compondo a quantia 25 reais (5+5+5+5+5), e as organizou lado a lado. E seguida afastou-as, falando a cada movimento:

*LO. 5 pra um brinquedo (*arrasta a cédula separando das outras*). 5 pra outro brinquedo.....* (repete a ação até findarem as cédulas).

Desta vez LO, assim como no Problema 5, utilizou como esquema as adições repetidas para a composição da quantia inicial, mas agora também realizou a distribuição um a um (uma cédula para cada brinquedo). Neste caso, LO não precisou transformar a quantia referida no problema em unidades simples. Nesta resolução os invariantes operatórios presentes foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

c) Problemas de quotição

- Problema 6 – materiais diversos

Dona Lourdes tem R$ 30,00, para dividir igualmente entre todos os seus sobrinhos. Cada sobrinho ganhará R$ 6,00. Quantos sobrinhos essa Dona Lourdes tem?

Para solucionar esta situação, respondeu rapidamente logo após a leitura feita pela pesquisadora:

> *LO. 6*
> *P. Então, quantos sobrinhos ela tem?*
> *LO. 3?*
> *P. Por que você acha que é 3? Me explique.*
> *LO. Porque..... 30 menos 6..... 30 menos 12.... (*conta nos dedos.) *18.*

Assim como nas situações 5 e 7, LO utilizou a estratégia do cálculo mental, não fazendo uso de nenhum dos materiais disponibilizados. Manteve-se também aqui, o uso dos esquemas de decomposição da quantidade e subtrações repetidas, porém não finalizou seu raciocínio. Os invariantes operatórios presentes nesta tentativa equivocada de resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais, divisão equitativa das partes e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

Percebendo o erro, a pesquisadora pediu para que o estudante mostrasse outra forma de solucionar a questão:

> *P. Você pode me mostrar outra forma de resolver este problema? Você pode usar o dinheirinho.*
> *LO. Mas daí eu não sei fazer.*
> *P. Você não que tentar?*
> *LO. Não. Porque eu já sei que ela tem 3 sobrinhos.*

Por meio desta resposta pode-se afirmar que o fato do problema ser pautado em valores de dinheiro e o material disponibilizado para a resolução ser constituído apenas por cédulas fictícias, inviabilizou a resolução de LO.

- Problema 8 - cédulas e objetos referidos no problema

Uma menina foi comprar gibis, pagou com uma cédula de R$ 20,00 e não restou troco, sabendo que cada gibi custou R$ 4,00, quantos gibis ela comprou?

Para solucionar esta situação LO apanhou 4 cédulas de 5 reais, as organizou lado a lado e por alguns instantes ficou em silêncio, observando-as. Organizou as cédulas em 2 grupos de 8 reais e segurou a cédula restante, analisou e contou em voz baixa. Em seguida, juntou as cédulas em sua mão, em silêncio, até o momento em que foi questionado pela pesquisadora:

> *P. Quantos gibis ela comprou?*
> *LO. 5?*
> *P. Por que você acha que são 5?*
> *LO. Por causa que 20 reais menos 4 fica 16. Menos 4 (conta subtraído 1 a 1 nos dedos) 12. Daí menos 4 ...11...10...9...8. daí 7...6...5...4....(mostra os dedos indicando que chegou em zero e ignora as cédulas separadas)*

Pode-se afirmar, a partir desta resolução, que LO novamente fez uso do esquema referente à recontagem (em ordem decrescente) das quantidades já apresentadas no problema, como esquema associado ao esquema de subtrações repetidas. Os invariantes identificados nesta resolução foram: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes) e o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.

4.5.4 Discussão das resoluções dos problemas de LO: esquemas e invariantes operatórios.

- Quanto aos esquemas

Nos problemas de partição da entrevista inicial, na resolução do Problema 1, LO em uma primeira tentativa transformou o valor inicial 15 em unidades simples não fazendo menção de utilizar as cédulas de dinheiro e utilizou os esquemas de adições repetidas (5+5+5) e contagem a partir de um dado fator, mas não obteve êxito em sou resposta, pois considerou como resto uma quantidade igual a cada uma das partes. Na segunda tentativa, utilizando material de contagem (tampinhas), valeu-se do esquema de distribuição um a um para formar dois grupos de tampinhas. Ao tentar resolver o problema novamente com cédulas, buscou o esquema de adições repetidas como na primeira tentativa, 5+5+5. Forma 2 grupos de 5 reais e fica com 5 na mão. Troca esta cédula de 5 reais por 2 de 1 real e distribui uma para cada grupo, ficando com dois grupos de 6 reais. Percebeu que não obteve êxito e argumentou não conseguir resolver.

Já no Problema 4, pensando em decompor mentalmente a quantidade 18 (9+9), valeu-se do esquema de metades, mas não atentou-se ao fato de tratar de uma divisão por 3 e não por 2, quando foi alertado pela pesquisadora. Na segunda tentativa LO compõe a quantidade 18 por meio do esquema de recontagem das quantidades já apresentadas no problema descrito por Correa (2004), mas ainda assim não chega à solução. Na terceira tentativa LO refaz a recontagem das quantidades já apresentadas no problema e associa este esquema às adições repetidas, desta vez, sem auxílio de material chega à resposta esperada.

Nos problemas de quotição, da entrevista inicial, LO ao solucionar o problema 2, fez uma primeira tentativa de resolução decompondo 20 em 5 + 5 +5 + 5, associado a adições repetidas, sem obter êxito por atribuir uma quota equivocadamente à personagem do problema. Na segunda tentativa, utilizou as cédulas fictícias, valendo-se do esquema de subtrações repetidas (20-5-5-5-5=0). Em um segundo momento, fazendo uso de material manipulativo (tampinhas), transformou o valor 20 em unidades simples e separou-as de 5 em 5, enquanto falava: menos 5, menos 5, até findarem as tampinhas, ou seja, valeu-se do esquema de subtrações repetidas formando 4 grupos e respondeu corretamente a questão. Foi desafiado a resolver utilizando as cédulas de dinheiro e em nova tentativa decompôs novamente a quantia inicial (20) em 5+5+5+5 e por meio dos esquemas de adições repetidas conseguiu solucionar o problema.

Já durante a resolução do Problema 3, LO contou nos dedos para a resolução da questão e durante a explicação oral de sua resolução iniciou uma contagem regressiva (19, 18, 17...). A cada 4 número LO segurava 1 dedo. Foram identificados os seguintes esquemas: dupla contagem e subtrações repetidas.

Os esquemas identificados durante a ação didática, ao longo das resoluções de problemas propostos com a ideia de divisão por partição foram: representação pictórica e adições repetidas e contagem a partir de um dado fator (FIGURA 27). Nos que envolveram a ideia de quotas, os esquemas identificados nas resoluções de LO foram: representação pictórica; contagem a partir de um dado fator (FIGURA 28) e representação pictórica associada à dupla contagem (FIGURA 29).

Nos problemas de partição da entrevista final, durante a resolução do problema 5, LO não reportou-se às cédulas de dinheiro. Observou-se o esquema denominado por Correa (2004) como “metades” na resolução do problema. Ao explicar como havia pensado, ao fazer 13 risquinhos e destes separar 6 para cada menino, valeu-se da representação pictórica. Ao ser desafiado pela pesquisadora a utilizar as cédulas, recusou afirmando que não conseguiria. Nesta resolução o fato do estudante transformar a quantia em dinheiro trazida no problema em unidades simples, chegando à resposta adequada, mas recusar-se a representar a resolução com as cédulas demonstra que o fato da situação envolver o Sistema Monetário foi um fator diferencial para a resolução.

No problema 7, LO decompôs a quantidade inicial (25) de acordo com os valores das cédulas 5+5+5+5+5, ou seja, por adições repetidas, e distribuiu uma cédula para cada brinquedo para isto valeu-se dos esquemas de subtrações repetidas associadas ao esquema de distribuição um a um.

Nas resoluções dos problemas de quotição, da entrevista final no problema 6, LO ao pensar em 30 como 6-6-6-6-6, porém não conseguiu finalizar a resolução e foi desafiado a tentar finalizar seu pensamento utilizando as cédulas. Neste momento o estudante desistiu de fazer novas tentativas, ao pensar que sua resposta inicial (6) estaria correta. Em função desta resposta podemos afirmar que o fato do problema ser pautado em valores de dinheiro e o material disponibilizado para a resolução ser constituído apenas por cédulas fictícias, inviabilizou a resolução de LO. Na resolução do Problema 8, utilizando as cédulas de dinheiro ao compor a quantidade inicial (20) com 4 cédulas de 5 reais, e utilizando material de contagem (dedos) recitando (20, menos 4, 16. Menos 4, 12....até chegar a zero). Chegou ao resultado ao utilizar os dedos como material de contagem e valendo-se dos esquema de recontagem (em ordem decrescente) das quantidades já apresentadas no problema, associado ao esquema de subtrações repetidas.

Para comparar as modificações dos esquemas de resolução de LO, durante as entrevistas e na ação didática, convém apresentar um quadro comparando cada etapa:

QUADRO 20- ESQUEMAS PRESENTES NAS RESOLUÇÕES DE LO

<table>
<tr><th colspan="3">PROBLEMAS DE PARTIÇÃO</th></tr>
<tr><th>ENTREVISTA INICIAL</th><th>AÇÃO DIDÁTICA</th><th>ENTREVISTA FINAL</th></tr>
<tr><td>Com uso de diferentes materiais</td><td rowspan="4">• Representação pictórica;
• Adições repetidas e
• Contagem a partir de um dado fator.</td><td>Com uso de diferentes materiais</td></tr>
<tr><td>• Adições repetidas e
• Contagem a partir de um dado fator .</td><td>• Representação pictórica e
• Metades.</td></tr>
<tr><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td></tr>
<tr><td>• Adições repetidas
• Metades e
• Recontagem das quantidades já apresentadas no problema.</td><td>• Adições repetidas;
• Subtrações repetidas e
• Distribuição um a um.</td></tr>
<tr><th colspan="3">PROBLEMAS DE QUOTIÇÃO</th></tr>
<tr><td>Com uso de diferentes materiais</td><td rowspan="4">• Representação pictórica;
• Contagem a partir de um dado fator e
• Dupla contagem.</td><td>Com uso de diferentes materiais</td></tr>
<tr><td>• Adições repetidas e
• Subtrações repetidas.</td><td>• Subtrações repetidas e
• Decomposição de quantidades.</td></tr>
<tr><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td><td>Com uso de cédulas e objetos referidos na questão.</td></tr>
<tr><td>• Dupla contagem e
• Subtrações repetidas.</td><td>• Recontagem das quantidades já apresentadas no problema e
• Subtrações repetidas.</td></tr>
</table>

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Pode-se afirmar que houve mudanças de esquemas de resoluções dos problemas de LO, se comprados os esquemas identificados em cada etapa da intervenção os esquemas de representação pictórica e de decomposição de quantidades foram identificados apenas na entrevista final. O que verificou-se também foi o fato de que, após a realização da intervenção, LO ficou mais seguro nas suas tentativas de resolução e utilizou um vasto repertório de esquemas.

-Quanto aos invariantes operatórios

A análise dos invariantes operatórios identificados nas resoluções deste estudante, revela que os invariantes operatórios mantêm-se constantes com exceção do invariante: o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido. Não foram identificados, porém, em nenhuma das resoluções de LO os invariantes operatórios referentes à relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero) e o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido. O estudante compreende que o todo é constituído pela soma das partes e que percebe a existência do resto, como exposto no 21:

QUADRO 21- INVARIANTES OPERATÓRIOS PRESENTES NAS RESOLUÇÕES DE LO

INVARIANTES OPERATÓRIOS DESCRITOS POR Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997)	LO		
	EI	AD	EF
O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).	X	X	X
O todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.	X	X	X
O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero).			
Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido.			
O resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.			
EI- entrevista Inicial AD- Ação Didática EF – Entrevista Final			

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Em síntese, pode-se que houve modificações tanto nos esquemas como nos invariantes operatórios identificados nas resoluções de LO ao longo das três etapas da intervenção e, ainda, os invariantes operatórios mantiveram-se constantes durante as três etapas.

O fato dos problemas envolverem quantias de dinheiro foi um fator que dificultou as resoluções de LO. Em muitos momentos o estudante transformou os valores monetários em unidades simples para solucionar as questões. Nas ocasiões em que foi exigida a utilização das cédulas fictícias, em todas as etapas da intervenção, ora LO desistiu de realizar a atividade (Ex. Problema 6), ora utilizou os dedos das mãos (material de contagem) para responder à questão. Ainda assim pode-se dizer que a intervenção teve papel positivo para este estudante, uma vez que ampliou o seu repertório de esquemas e troe mais segurança para as suas resoluções.

4.6 ESQUEMAS E INVARIANTES OPERATÓRIOS PRESENTES NAS RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS AO LONGO DA PESQUISA

Os esquemas identificados nas resoluções dos problemas dos participantes da pesquisa foram:

1- Respostas sem explicação – descrito por Correa (2004) como sendo incluídas nesta categoria respostas como “não sei”, como ocorreu com a participante AJ, durante a entrevista inicial.

2- Distribuição um a um – segundo Correa (2004), ocorre quando as crianças correspondem um dedo para cada objeto. Em nosso caso o identificamos quando os participantes corresponderam uma cédula ou uma quota de cédulas para cada objeto ou personagem do problema. Este esquema foi identificado nas resoluções de AJ, BE, PH e LO.

3- Recontagem das quantidades já apresentadas no problema – este esquema foi identificado por Correa (2004) quando a criança contava de um em um até atingir o valor do dividendo. Foi identificado nas resoluções do estudante LO quando fez a contagem de um em um da quantia referida no problema.

4- Contagem a partir de um dado fator - Correa (2004) identificou este esquema quando o estudante fez a contagem da quantia total a partir do fator explicitado no problema. Ex. na situação 8:2 quando conta: dois, quatro, seis e oito. Ou conta na situação 12:3: três, seis, nove e doze. Identificou-se este esquema nas resoluções de todos os cinco participantes desta pesquisa, quando usavam as cédulas de dinheiro e quando transformavam o valor a ser dividido em unidades simples.

5- Dupla contagem - De acordo com Correa (2004), este esquema é identificado quando a criança realiza a distribuição em cada rodada contando até alcançar o valor do dividendo. Simultaneamente, conta quantas rodadas são necessárias para completar a tarefa. Ex. na situação 12:4 a criança conta: um, dois, três, quatro (levanta um dedo); cinco, seis, sete, oito (levanta outro dedo); nove, dez, onze, doze (levanta outro dedo) e em seguida conta os dedos levantados. Identificamos este esquema também nas representações pictóricas e quando a criança fez a contagem dos grupos de cédulas formados. Os participantes que valeram-se deste esquema foram: PH e LO.

6- Adições repetidas - este esquema foi identificado por Correa (2004) quando a criança adiciona uma determinada quantidade repetidas vezes até o valor do dividendo a ser atingido. Ex. na situação 15:5 a criança faz 5+5+5. Identificamos este esquema nas resoluções de todos os cinco participantes desta pesquisa, tanto com cédulas quanto com outros materiais.

7- Subtrações repetidas – de acordo com Correa (2004), este esquema é identificado quando a criança subtrai um valor do dividendo repetidas vezes até esgotá-lo. Ex. na situação 20: 5; a criança faz (20 - 5 = 15) (15 - 5 = 10) (10 - 5 = 5) (5 – 5 = 0). Este esquema foi identificado nas resoluções de AA, PH e LO, tanto com cédulas quanto com outros materiais.

8- Metades – de acordo com Correa (2004) este esquema está presente quando a criança divide sucessivamente em metades o valor correspondente ao dividendo. Ex. na situação 18: 2 a criança responde afirmando que a resposta é 9, uma vez que 9+9 são 18. Identificou-se este esquema nas resoluções de AA, BE e LO tanto com cédulas quanto com outros materiais.

9- Conhecimento de fatos multiplicativos – segundo Correa (2004) A criança utiliza conhecimentos aprendidos sobre a divisão ou multiplicação. Ex. na situação 12:2 a criança responde “Seis. Porque duas vezes seis são doze”. O participante que valeu-se deste esquema nesta pesquisa foi AA.

10- Partição e partição associada com produtos - A criança decompõe o dividendo em uma soma de números inteiros de modo a facilitar o cômputo. Ex. na situação 12:2 o estudante faz; “Seis. Cinco ali, cinco lá. Um ali e um lá”. Nesta pesquisa, identificamos este esquema quando os participantes fizeram esta ação utilizando as cédulas. Foram eles: AA e PH.

11- Representação pictórica - quando o estudante representa a situação por meio de desenhos (risquinhos, bolinhas etc. no caso desta pesquisa, as cédulas de dinheiro desenhadas também representaram este esquema). Esta estratégia foi denominada “esquema” em nossa pesquisa. Porém, foi bastante referida por Ferreira e Lautert (2003) como estratégia para a resolução de problemas de divisão. Identificou-se este esquema nas resoluções de AJ, BE, PH e LO.

12- Decomposição de quantidades – este “esquema” foi denominado assim na pesquisa pelo fato de não tratar apenas da decomposição de quantidades por meio de adições e subtrações repetidas, mas ao fato de envolver diretamente a decomposição a partir dos valores de parcelas diferentes ou as que foram feitas a partir de valores referentes às cédulas de dinheiro. Este esquema foi identificado nas resoluções de AJ, BE, PH e LO.

13- Correspondência um para muitos – este esquema foi nomeado nesta pesquisa em uma resolução do Problema 3 do estudante BE ao atribuir 1 carrinho para cada 2 cédulas de 2 reais. Este esquema não foi descrito por

Correa (2004). É identificado por Magina et. al. (2012) como uma das classes das relações quaternárias do campo conceitual multiplicativo.

Para obter uma visão geral dos esquemas utilizados na entrevista inicial, ação didática e entrevista final e com o objetivo de analisar as modificações ocorridas durante o processo de intervenção, apresentou-se um quadro indicando os esquemas que cada estudante utilizou em cada uma das etapas.

Os dados foram organizados de maneira que não fossem repetidos esquemas que foram identificados mais de uma vez em cada etapa, a fim de deixar mais clara a comparação entre as etapas da pesquisa. Os esquemas em destaque são os que foram identificados em apenas uma ou duas das etapas, demonstrando a modificação existente.

Pode-se afirmar, a partir dos dados do Quadro 22, que para todos os participantes da pesquisa os esquemas utilizados durante as três etapas da intervenção se mantiveram, como fica evidente ao serem listados lado a lado em todas as etapas. Também ficam evidentes os esquemas que foram identificados em apenas uma ou duas etapas da intervenção, pois estes estão em destaque no Quadro 22.

Para o estudante AJ, os esquemas que se mantiveram durante todo o processo de intervenção foram: representação pictórica; distribuição um a um; contagem a partir de um dado fator e adições repetidas. O esquema de decomposição de quantidades foi identificado apenas na entrevista final, o que evidencia que houve mudança dos esquemas de AJ durante a intervenção. Esta modificação também fica clara pelo fato deste estudante apresentar respostas sem explicação (não sei) durante a entrevista inicial e não repetir este esquema durante as outras duas etapas.

QUADRO 22- COMPARAÇÕES DOS ESQUEMAS UTILIZADOS PELOS PARTICIPANTES

ESTUDANTE	ENTREVISTA INICIAL	AÇÃO DIDÁTICA	ENTREVISTA FINAL
AJ	• Representação pictórica; • Distribuição um a um; • **Respostas sem explicação;** • Adições repetidas e • Contagem a partir de um dado fator.	• Representação pictórica; • Distribuição um a um; • Contagem a partir de um dado fator e • Adições repetidas.	• Representação pictórica; • Distribuição um a um; • Contagem a partir de um dado fator; • Adições repetidas; • **Decomposição de quantidades.**
AA	• Adições repetidas; • Contagem a partir de um fator. • Metades.	• Adições repetidas; • Contagem a partir de dado fator; • **Subtrações repetidas**; • Metades e • **Conhecimento de fatos multiplicativos.**	• Adições repetidas; • Metades; • Contagem a partir de um dado fator; • **Partição e partição associada com produtos e** • **Conhecimento de fatos multiplicativos.**
BE	• Distribuição um a um; • **Decomposição de quantidades** e • **Correspondência um para muitos.**	• **Representação pictórica;** • Distribuição um a um. • **Adições repetidas e** • **Contagem a partir de um dado fator.** •	• Distribuição um a um; • **Metades;** • **Decomposição de quantidades;** • **Adições repetidas e** • **Contagem a partir de um dado fator.**
PH	• Decomposição de quantidades; • Adições repetidas; • Contagem a partir de um dado fator e • **Distribuição um a um.**	• **Representação pictórica;** • Decomposição de quantidades; • Adições repetidas; • Contagem a partir de um dado fator; • **Subtrações repetidas e** • **Dupla contagem**.	• Decomposição de quantidades; • Adições repetidas; • Contagem a partir de um dado fator; • **Subtrações repetidas;** • **Partição e partição associada com produtos e** • **Distribuição um a um.**
LO	• Recontagem das quantidades já apresentadas no problema; • **Subtrações repetidas;** • **Adições repetidas;** • **Contagem a partir de um dado fator e** • **Dupla contagem**	• Recontagem das quantidades já apresentadas no problema; • **Adições repetidas.** • **Representação pictórica;** • **Contagem a partir de um dado fator e** • **Dupla contagem.**	• Recontagem das quantidades já apresentadas no problema; • **Metades;** • **Subtrações repetidas**; • **Representação pictórica;** • **Adições repetidas;** • **Distribuição um a um.** • **Decomposição de quantidades e** • **Metades.**

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Nas resoluções dos problemas do estudante AA, os esquemas identificados em todas as etapas da intervenção foram: adições repetidas e contagem a partir de um fator e metades. Este estudante fez usos de diferentes esquemas em todas as etapas. O esquema denominado por Correa (2004) como partição e partição associada com produtos esteve presente apenas na entrevista final assim como as subtrações repetidas foram identificadas apenas durante a ação didática. O esquema de conhecimento de fatos multiplicativos foi identificado na ação didática e na entrevista final.

Durante as resoluções de BE, o esquema que se manteve nas três etapas da intervenção foi o de: distribuição um a um. Já o esquema denominado metades esteve presente apenas na entrevista final, assim como o esquema de representação pictórica foi identificado apenas durante a ação didática e o de correspondência um para muitos apenas na entrevista inicial. Os esquemas adições repetidas, contagem a partir de um dado fator e decomposição de quantidades foram identificados em duas das três etapas.

Para o estudante PH, os esquemas que se mantiveram durante as três etapas da intervenção foram: decomposição de quantidades, adições repetidas e contagem a partir de um dado fator. O esquema de distribuição um a um esteve presente durante as duas entrevistas mas não foi identificado durante as resoluções da ação didática. As subtrações repetidas foram identificadas tanto na ação didática como na entrevista final, porém não foi utilizado na entrevista inicial. O esquema de dupla contagem foi identificado apenas durante a ação didática e o esquema de partição e partição associada a produtos foi identificado somente na entrevista final. Percebeu-se nas resoluções de PH a utilização de vários esquemas diferentes e ficou evidente o aumento do repertório destes esquemas ao longo de cada uma das etapas.

Durante as resoluções de LO, o esquema que se manteve constante em todas as etapas foi a recontagem das quantidades já apresentadas no problema. Este estudante apresentou o maior número de esquemas dentre os cinco participantes da pesquisa, e evidenciamos o aumento gradual do número de esquemas utilizados a cada etapa da intervenção. As adições e subtrações repetidas estiveram presentes durante as duas entrevistas e não foram identificadas durante a ação didática. Já os esquemas da contagem a partir de um dado fator e dupla contagem foram identificados na entrevista inicial e na ação didática. A representação pictórica foi identificada tanto na ação didática como na entrevista final. Os esquemas de decomposição de quantidades e metades foram identificados apenas na entrevista final. O fato de LO ter utilizados muitos esquemas diferentes revela que a intervenção contribuiu para o aumento de seu repertório de resoluções.

QUADRO 23 – INVARIANTES OPERATÓRIOS DESCRITOS NA LITERATURA UTILIZADOS NAS TRÊS ETAPAS DA INTEVENÇÃO PELOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

INVARIANTES OPERATÓRIOS DESCRITOS POR Lautert (2005), Lautert e Spinillo (2012) e Nunes e Bryant (1997)	AJ			AA			BE			PH			LO		
	EI	AD	EF	EI	AD	EF	EI	AD	EF	EI	AD	EF	EI	AD	EF
O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
O todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero).						X									
Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido.															
O resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.															
EI- entrevista Inicial AD- Ação Didática EF – Entrevista Final															

FONTE: DADOS DA PESQUISA 2018

Os invariantes operatórios: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes), o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos, foram identificados em todas as resoluções dos cinco estudantes, demonstrando que entendimento da distribuição em partes iguais nos problemas de divisão foi constante durante as três etapas da intervenção.

Identificou-se, apenas durante a entrevista final, em uma das resoluções de PH a menção ao invariante que se refere à relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido.

O invariante operatório que se refere à afirmação de que todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero) foi identificado em apenas uma das resoluções da entrevista final do estudante AA. Todavia pode-se afirmar que todos os participantes, em alguma das etapas da intervenção compreenderam que o todo é formado pela soma das partes.

O invariante que afirma que o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido não foi identificado nas resoluções de nenhum dos participantes, porém podemos afirmar que para os cinco participantes está clara a percepção da existência do resto.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos específicos da presente pesquisa foram: verificar se na resolução de problemas envolvendo Sistema Monetário Nacional os estudantes utilizam os mesmos esquemas de resolução descritas na literatura para outras situações de divisão; verificar contribuições do processo de intervenção envolvendo atividades de composição e decomposição de valores monetários em diferentes situações: jogos e desafios matemáticos para a resolução de problemas de divisão envolvendo quantias de dinheiro; comparar se os esquemas presentes na resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional se mantém os mesmos antes e após a realização da intervenção e verificar se os esquemas utilizados na resolução dos problemas só com cédulas são os mesmos dos que na resolução com outros materiais.

Pode-se concluir que na resolução de problemas envolvendo Sistema Monetário Nacional os estudantes utilizam os mesmos esquemas de resolução para outras situações de divisão, descritos na literatura por Correa (2004) quando disponibilizados materiais diversos. São eles: distribuição um a um; recontagem das quantidades já apresentadas no problema; contagem a partir de um dado fator; dupla contagem; adições repetidas; subtrações repetidas; metades; conhecimento de fatos multiplicativos e partição e partição associada com produto. Identificou-se, porém, além destes, outros três esquemas: representação pictórica; decomposição de quantidades e correspondência um para muitos.

No entanto, observou-se que quando os estudantes são desafiados a resolver os problemas utilizando apenas as cédulas de dinheiro, usam os mesmos descritos anteriormente, em especial, em maior frequência o de decomposição a partir dos valores das cédulas, como por exemplo: 18 = 5+1+5+1+5+1.

Ao comparar se os esquemas presentes na resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional se mantém os mesmos antes e após a realização da intervenção, conclui-se que houve modificação nos esquemas dos cinco estudantes que participaram desta pesquisa.

O estudante AJ modificou os esquemas utilizados nas resoluções, especialmente na entrevista final, quando, ao solucionar o Problema 8, no qual a representação pictórica deu lugar às adições repetidas e contagem a partir de um dado fator, além de observarmos a presença da decomposição de quantidades durante a entrevista final. A modificação nos esquemas de AJ também ficou evidente pelo fato deste estudante não apresentar, além da entrevista inicial, respostas sem explicações, ou seja, durante a ação didática e a entrevista final, conseguiu finalizar todas as resoluções o que não havia ocorrido durante a entrevista inicial.

O estudante AA modificou os esquemas utilizados nas resoluções. Principalmente quando identificado o esquema que diz respeito ao conhecimento de fatos multiplicativos durante a ação didática e entrevista final.

Pode-se concluir que houve mudanças de esquemas de resoluções dos problemas de BE ao longo da intervenção. O fato do esquema de distribuição um para muitos estar presente apenas na entrevista inicial e a representação pictórica na ação didática reafirma essa mudança. Além disso, o que fica evidente durante toda a intervenção é a modificação na maneira de realizar as resoluções, demonstrando a cada etapa mais segurança ao responder as questões.

Nas resoluções do estudante PH, um exemplo do que mais evidenciou a mudança dos esquemas presentes nas resoluções é o fato do esquema de partição e partição associada com produtos ser identificado apenas na entrevista final.

O estudante LO foi o que mais evidenciou as modificações dos esquemas, pois apresentou um aumento gradual dos esquemas identificados em cada uma das três etapas da intervenção.

Ao verificarmos as contribuições do processo de intervenção envolvendo atividades de composição e decomposição de valores monetários em diferentes situações, pode-se concluir que possivelmente cada etapa da intervenção teve papel fundamental para a modificação dos esquemas presentes nas resoluções dos estudantes.

Para AJ, o fato de não apresentar respostas sem explicações nas duas últimas etapas demonstra que além de modificar os esquemas, a intervenção contribuiu para o aprendizado deste estudante.

O fato dos problemas envolverem quantias de dinheiro foi relevante para as resoluções de AA, especialmente quando foi preciso utilizar somente as cédulas de dinheiro, uma vez que o estudante decompôs as quantias de dinheiro de modo a poder utilizar este material para a resolução.

Já para BE o fato dos problemas envolverem quantias de dinheiro foi relevante. Diferentemente da entrevista inicial, após a realização da ação didática, BE utilizou corretamente a decomposição do valor em quantias referentes às cédulas existentes, demonstrando que o estudante, ao modificar seus esquemas, por meio do contato com diferentes estratégias de resolução, pode consolidar seus próprios esquemas de resolução.

O fato das situações envolverem quantias de dinheiro foi relevante também para a modificação dos esquemas de resolução de PH. Na entrevista inicial, ao lidar com as cédulas fictícias houve certa dificuldade para chegar à resposta esperada. Porém durante a ação didática e a entrevista final, essa dificuldade não mais se repetiu. A partir da ação didática, em todas as resoluções, foram respeitados os valores de cada cédula sem a necessidade de transformá-las em unidades simples. Em alguns momentos, como por exemplo, na resolução do Problema 8, os esquemas identificados foram diferentes na mesma situação. Esse fato corrobora para que possa-se afirmar que diferentes esquemas podem estar presentes para a mesma situação, quando modificadas as formas de representação, indicando uma contribuição deste processo de intervenção.

Quanto ao fato dos problemas envolverem quantias de dinheiro foi um fator que dificultou inicialmente o processo de resolução dos problemas para o estudante LO. Em muitos momentos ele transformou os valores monetários em unidades simples para solucionar as questões. Nas ocasiões em que foi exigida a utilização das cédulas fictícias, em todas as etapas da intervenção, ora LO desistiu de realizar a atividade (Ex. Problema 6), ora utilizou os dedos das mãos (material de contagem) para responder à questão. Ainda assim, pode-se dizer que a intervenção teve papel positivo para este estudante, uma vez que ampliou o seu repertório de esquemas e trouxe mais segurança para as suas resoluções.

Ao analisar as contribuições da intervenção pedagógica para a modificação dos esquemas de resolução de problemas de divisão, portanto, pode-se afirmar que estas contribuições foram evidentes uma vez que para todos os estudantes que participaram da pesquisa houve ampliação do repertório de esquemas para as resoluções dos problemas de divisão.

Além destes objetivos traçados inicialmente nesta pesquisa, percebeu-se que podemos analisar a partir dos resultados outros aspectos relevantes trazidos a partir dos dados aqui apresentados e discutidos.

Em relação às diferenças entre os esquemas presentes durante a resolução dos problemas de partição e quotição, observou-se que nas resoluções do estudante AJ, tanto nos problemas de partição quanto nos de quotição, os esquemas presentes foram: representação pictórica, distribuição um a um, respostas sem explicação, contagem a partir de um fator, adições repetidas e decomposição de quantidades. O esquema identificado apenas em um dos problemas de partição foi a decomposição de quantidades.

Nas resoluções do estudante AA os esquemas identificados tanto nos problemas de partição como nos de quotição foram os seguinte: adições repetidas e contagem a partir de um dado fator. Já os esquemas metades, subtrações repetidas e conhecimentos de fatos multiplicativos foram identificados apenas nas situações que envolveram a ideia de partição.

Observou-se que nas resoluções de BE, tanto nos problema de partição como nos quotição, os esquemas presentes foram: distribuição um a um, representação pictórica, contagem a partir de um dado fator, correspondência um para muitos e adições repetidas. Já o esquema metade esteve presente apenas nos problemas com ideia de partição, bem como o esquema de decomposição de quantidades esteve presente apenas nos problemas com ideia de quotição.

Nas resoluções de PH os esquemas identificados tanto nos problemas de partição como nos de quotição foram: decomposição de quantidades, distribuição um a um, adições repetidas, representação pictórica, contagem a partir de um dado fator, subtrações repetidas, partição e partição associada com produtos. O esquema de dupla contagem foi identificado apenas em problemas de partição.

Os esquemas identificados nas resoluções de LO tanto nos problemas de partição como nos de quota foram: adições repetidas, contagem a partir de um dado fator, recontagem das quantidades já apresentadas no problema, representação pictórica e subtrações repetidas. O esquema metade foi identificado apenas nos problemas de partição e os esquemas de dupla contagem e decomposição de quantidades foram identificados apenas nos problemas com a ideia de quotição.

A partir desta comparação, pode-se concluir que os esquemas presentes nas resoluções de cada um dos estudantes podem ser bastante diversificados. O fato das situações envolverem as ideias de partição ou quotas, aparentemente não foi, nesta pesquisa, o principal fator de modificações dos esquemas, uma vez que os mesmos esquemas estiveram presentes em ambas resoluções do mesmos estudante e esquemas diferentes foram identificados na resolução da mesma situação por estudantes diferentes.

Observou-se que a cada resolução, ou mesmo durante a resolução de um mesmo problema, os esquemas identificados podem ser diferentes e também que quando o estudante era desafiado a resolver ou representar a solução encontrada para um determinado problema novamente, nem sempre utilizava o mesmo esquema, o que evidencia que o esquema pode ser modificado a partir de diferentes formas de representação. Todavia a análise não foi aprofundada nesta direção, ficando como sugestão para uma próxima pesquisa.

Considerou-se importante aprofundar a análise em relação a verificar se os esquemas utilizados na resolução dos problemas só com cédulas são os mesmos dos que na resolução com diferentes materiais. Ainda, poder-se-ia dar continuidade a esta pesquisa focando em quais seriam os esquemas presentes nas resoluções de problemas que envolvem outros conteúdos da matemática como por exemplo: adições, subtrações, frações, etc. ou ainda verificar se os esquemas que identificamos continuam os mesmos depois que os estudantes aprendem formalmente a operação de divisão.

Ao analisar quais são os esquemas presentes nas resoluções de problemas de divisão de estudantes, verificou-se que os conhecimentos que estes trazem deste conteúdo são muito amplos e é a partir destes conhecimentos que pode-se aprimorar a prática, desde o planejamento das aulas, no sentido de adequá-las à realidade dos mesmos. A partir dos resultados desta pesquisa professores podem conhecer as estratégias utilizadas pelos estudantes e a partir delas, trazer para suas aulas novos desafios que promovam o desenvolvimento de novas habilidades e de novos conhecimentos.

Como já exposto, a Teoria dos Campos Conceituais propõe a utilização de diferentes situações para a observação do percurso do desenvolvimento dos conceitos e das estratégias que as crianças utilizam para comprovar a sua aprendizagem. O papel do professor, a partir dessa teoria, é o de sistematizar e propor desafios às crianças, ampliando as dificuldades para que evoluam no entendimento dos conceitos matemáticos a partir dos conhecimentos já existentes. A ação didática aqui proposta pode ser incorporada ou remodelada de acordo com a realidade de cada turma ou escola, como sequência didática e ficará à disposição dos professores da SME (Secretaria Municipal de Educação) como uma das contribuições desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

AMADEU, M. S. U. S. et. al. **Manual de normatização de documentos científicos de acordo com as normas da ABNT.** Curitiba: Editora UFPR, 2015.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças**. Estudos de Psicologia**, v. 9, n. 1, Natal, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/epsic/v9n1/22390.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2018.

CORREA, J. et. al. A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. **Estudos de Psicologia**, Natal, v. 5, n.1, 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/epsic/v5n1/a02v05n1.pdf>. Acesso em 16 mar. 2018.

CURITIBA. **Currículo do Ensino Fundamental 1° ao 9° ano:** Matemática**.** Prefeitura Municipal de Curitiba. Secretaria Municipal de Educação. v. 3. Curitiba:Secretaria Municipal de Educação 2016.

DAMIANI, M. F. **Sobre pesquisas do tipo intervenção.** In: XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino – UNICAMP, 2012, Campinas. P. 1-9 .

DELVAL, R. **Introdução à prática do método clínico:** descobrindo o pensamento das crianças. Tradução de: MURAD, Fátima. Porto Alegre: Artmed, 2002.

ESCALA de proficiência. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/escala_proficiencia/2013/escalas_ensino_fundamental_2013.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2018.

ESCALA Saeb. Disponível em: <http://academia.qedu.org.br/prova-brasil/454-2/>. Acesso em: 01 jun. 2018.

EVOLUÇÃO do aprendizado: Paraná. Disponível em: <http://www.qedu.org.br/estado/116-parana/evolucao>. Acesso em: 01 jun. 2018.

FERREIRA, S. P. A .; LAUTERD, S.L. A Tomada de Consciência Analisada a partir do Conceito de Divisão: Um Estudo de Caso. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Pernambuco, v. 16, n.3, 547-554, 2003.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GITIRANA, V. et al. **Repensando a Multiplicação e a Divisão**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GOLDENBERG, M. A arte de pesquisar. Rio de Janeiro: Record, 1997.

GRINGS, E.D.O. et. al. **Uma proposta didática para abordar o conceito de temperatura a partir de situações, à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud.** Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 1, p. 1-21, 2008.

IDEB – apresentação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/secretaria-de-educacao-basica/programas-e-acoes?id=180>. Acesso em: 10 mar. 2018.

INAF Brasil 2011**.** Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/0B5WoZxXFQTCRWE5UY2FiMzFhZEk/view >. Acesso em: 24 abr. 2018.

INEP. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 10 mar. 2018.

LAUTERT, S. L.SPINILLO A. G. As Relações Entre o Desempenho em Problemas de Divisão e as Concepções de Crianças Sobre a Divisão. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Recife, v. 18, n. 3, p. 237-246, set/dez, 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/%0D/ptp/v18n3/a02v18n3.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2018.

LAUTERT, S. L. **As dificuldades das crianças com a divisão:** um estudo de intervenção. 325f. Tese (Doutorado em Psicologia) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.

LAUTERD, S. L. SPINILLO, A. G. Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia**, Recife, v. 7, p. 26-36, 1999.

LAUTERT, S. L. e SPINILLO A. G. Estudo de intervenção sobre a divisão: ilustrando as relações entre metacognição e aprendizagem. **Educar em Revista**, Curitiba, p. 93-107, 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/07.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2018.
Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 93-107, 2011. Editora UFPR

LAUTERT, S. L. e SPINILLO A. G. Os princípios invariantes da divisão como foco de um estudo de intervenção com crianças**.** In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Petrópolis, p.1-13. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT 09/CC4006 5731034_A.pdf>. Acesso em 13 mar. 2018.

LAUTERT. S. L. SPINILLO A. G. Representar operações de divisão e representar problemas de divisão: Há diferenças? **Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática – JIEEM**, v. 4, p. 115-134, 2011. Disponível em: <http://pgss kroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/129>. Acesso em: 13 mar. 2018.

LUDKE, M. ANDRÉ. M. E. D. A. **pesquisas em educação:** abordagens qualitativas. 6. reimpressão. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 2013.

MAGINA. S. **A Teoria dos Campos Conceituais:** contribuições da Psicologia para a prática docente**.** Anais do XVII Encontro Regional de Professores de Matemática Uicamp SP,p. 1-5, 2005.Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf Acesso em: 14 mar 2018.

MAGINA, S. A. et. al. **Repensando Adição e Subtração:** Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. 2. ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA. S. MERLINI. V.L. SANTANA, E. Situações-problema das estrutura multiplicativa sob a ótica do professor que ensina matemática. In: VII CIBEM, Montevideo, 2013, v.20, n.2., p. 5980-5987. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v20n2/1516- 7313-ciedu-20-02-0517.pdf>. Acesso em: 30 de jan. 2018.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. Matemática. In: 3º SIPEMAT, Fortaleza, 2012, p. 1-12.

NUNES, T. e BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas,1997.

SANTOS. A. et. al. A noção de divisão para quem não aprendeu a divisão**.** **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.7, n. 2, 2014, p. 38-64.

SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA, Brasília, 2015. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf >. Acesso em: 13 mar. 2018.

SOUZA, S. A. Avaliações em larga escala e os desafios à qualidade educacional. **Roteiro**, Joaçaba, v. 36, n. 2, 2011, p. 309-314. Disponível em: <http://editora.unoesc.edu.br/index.php/roteiro/article/view/1184>. Acesso em 29/12/2017

SPINILLO, A.G, LAUTERT, S. L. Pesquisa-intervenção em psicologia do desenvolvimento cognitivo: princípios metodológicos, contribuição teórica e aplicada. In: CASTRO, L.R.; BESSET, V.L. (Orgs.). **Pesquisa-intervenção na infância e juventude**. Rio de Janeiro: Editora, 2008, p.294-321.

VASCONCELOS, C. F. B. de. **A (re)construção do conceito de dividir na formação dos professores**: o uso do jogo como recurso metodológico. 158f. Dissertação (Dissertação do Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2009. Disponível em:<file:///C:/Users/aline/Downloads/CHEILA%20FRANCETT%20BEZERRA%20SILVA%20DE%20VASCONCELOS.pdf.>. Acesso em: 10 mar. 2018.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade :** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. A matemática além dos números. **Pátio Revista Pedagógica**, 13 ed. Junho/2012. Disponível em: <http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alem-dos-numeros.aspx.>. Acesso em: 28 dez. 2017.

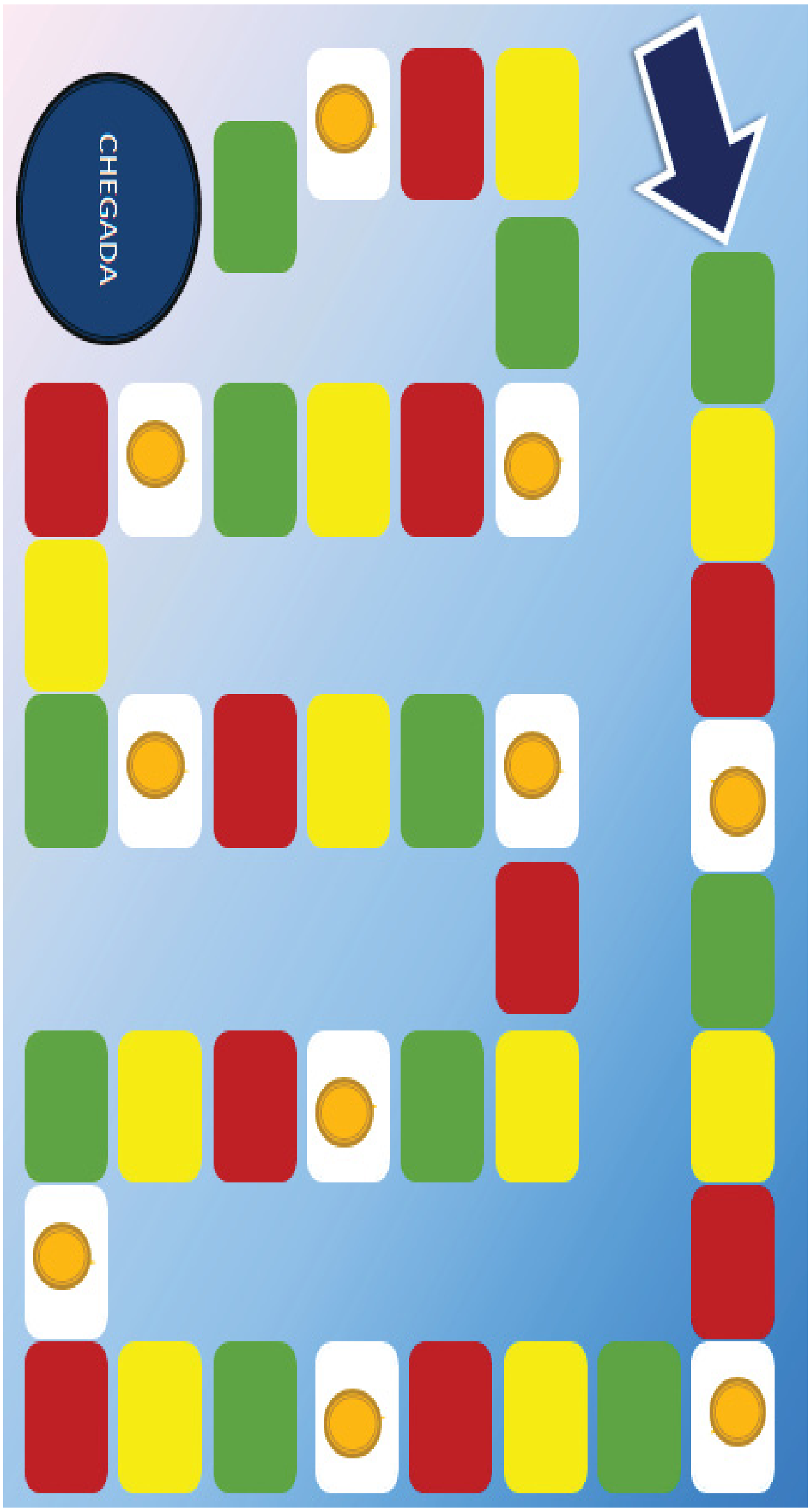
VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (Ed.) **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD, G. Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática. **Revista Nova Escola**, ed. 215, set. 2008. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica>. Acesso em: 16 dez. 2017.

VIANNA, M.V. Avaliações nacionais em larga escala: análises e propostas. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 27, jan./jun., 2003. Disponível em: <http://publi cacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/eae/article/view/2177>. Acesso em 29 dez. 2017.

APÊNDICES

APENDICE 1- JOGO QUEM DIVIDE GANHA –TABULEIRO E REGRAS



FONTE: A autora (2018)

REGRAS DO JOGO

- SERÃO NECESSÁRIOS DE TRÊS A SEIS JOGADORES. UM DELES SERÁ O BANCO.
- PARA DECIDIR QUEM SERÁ O BANCO. OS JOGADORES QUE QUISEREM, JOGARÃO O DADO. AQUELE QUE TIRAR O NÚMERO MAIOR SERÁ O BANCO.
- AO INÍCIO DO JOGO O BANCO DEVE DAR UMA CÉDULA DE CADA PARA CADA UM DOS JOGADORES (100, 50, 20, 10, 5, 2, 1 – TOTALIZANDO 188 REAIS).
- O BANCO ORGANIZA QUATRO PILHAS DE CARTAS, DE ACORDO COM AS CORES. ELAS DEVEM FICAR COM A COR VOLTADA PARA CIMA. A CARTA SORTEADA DEVE SEMPRE SER A QUE ESTÁ POR CIMA E APÓS LIDA, DEVE SER DEVOLVIDA EMBAIXO DA PILHA.
- OS DEMAIS JOGADORES ESCOLHERÃO OS PINOS E O JOGO OCORRERÁ EM SENTIDO HORÁRIO, INICIANDO PELO JOGADOR POSICIONADO À ESQUERDA DO BANCO.
- NA SUA VEZ JOGA-SE O DADO E AVANÇA NO TABULEIRO O NÚMERO SORTEADO. DE ACORDO COM A COR DA CASA ONDE PARAR, O BANCO LERÁ A CARTA CORRESPONDENTE.
- SE ACERTAR A RESPOSTA RECEBE O VALOR INDICADO NA CARTA. SE ERRAR PAGA AO BANCO 7 REAIS.
- QUANDO CAIR NA CASA COM O CÍRCULO DOURADO O BANCO LERÁ A CARTA CORRESPONDENTE E TODOS DEVEM FICAR ATENTOS E CUMPRIR A AÇÃO. ESTA CARTA É PERIGOSA PODE AJUDAR OU ATRAPALHAR QUEM RECEBÊ-LA.
- NO CASO DO DINHEIRO ACABAR. O JOGADOR É ELIMINADO DO JOGO.
- O JOGO ACABA QUANDO UM DOS JOGADORES CHEGAR AO FINAL DA TRILHA.

O GANHADOR SERÁ AQUELE QUE POSSUIR MAIS DINHEIRO AO FINAL DO JOGO.

APENDICE 2- JOGO QUEM DIVIDE GANHA – EXEMPLOS DE CARTAS AMARELAS

UMA MENINA TROCOU UMA CÉDULA DE 20 REAIS SOMENTE POR CÉDULAS DE 5. COM QUANTAS CÉDULAS ELA FICOU? RESPOSTA: • 4 CÉDULAS. GANHA 20 REAIS.	A CAIXA DE UM MERCADO PRECISA TROCAR CINQUENTA REAIS POR CÉDULAS DE 10. QUANTAS CÉDULAS DE 10 ELA PRECISA? RESPOSTA: • 5 CÉDULAS. GANHA 10 REAIS.	UM GAROTO VAI TROCAR 10 REAIS POR CÉDULAS DE 2 REAIS. COM QUANTAS CÉDULAS DE 2 REAIS ELE VAI FICAR? RESPOSTA: • 5 CÉDULAS GANHA 10 REAIS

APENDICE 3- JOGO QUEM DIVIDE GANHA – EXEMPLOS DE CARTAS VERMELHAS

PATRICIA TEM 24 REAIS E VAI DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE TODOS OS SEUS PRIMOS. CADA UM VAI GANHAR 4 REAIS E NÃO SOBRARÁ DINHEIRO. QUANTOS PRIMOS ELA TEM? RESPOSTA: • 6 PRIMOS. CADA UM DOS COMPETIDORES TE DARÁ 5 REAIS.	DIEGO VAI COMPRAR CADERNO. ELE VAI GASTAR 12 REAIS EM CADERNOS QUE CUSTAM 4 REAIS CADA. QUANTOS CADERNOS ELE IRÁ COMPRAR? RESPOSTA: • 3 CADERNOS CADA UM DOS COMPETIDORES TE DARÁ 5 REAIS.	CAROLINA LEVOU 16 REAIS PARA COMPRAR CANETAS. ELA PAGOU 5 REAIS EM CADA CANETA E SOBROU 1 REAL. QUANTAS CANETAS ELA COMPROU? RESPOSTA: • 3 CANETAS. GANHA 4 NOTAS DE 10 REAIS.

APENDICE 4- JOGO QUEM DIVIDE GANHA – EXEMPLOS DE CARTAS VERDES

MARCIA FOI À FEIRA COM 25 REAIS. COMPROU 5 FRUTAS DE MESMO VALOR E NÃO SOBROU DINHEIRO. QUANTO CUSTOU CADA FRUTA? RESPOSTA: • 5 REAIS GANHA 6 NOTAS DE 2 REAIS.	ALICE TEM 30 REAIS E VAI DIVIDIR IGUALMENTE ENTRE SUAS TRÊS FILHAS . QUANTO DINHEIRO CADA MENINA IRÁ GANHAR? RESPOSTA: • 10 REAIS GANHA UMA NOTA DE 20 REAIS.	CARLOS VAI COMPRAR CARRINHOS. ELE TEM 16 REAIS. ESSE VALOR É SUFICIENTE PARA 4 CARRINHOS E NÃO SOBRA NADA DE DINHEIRO. QUANTO CUSTA CADA CARRINHO? RESPOSTA: • 4 REAIS GANHA 3 NOTAS DE 10 REAIS.

APENDICE 5- JOGO QUEM DIVIDE GANHA – EXEMPLOS DE CARTAS COM CÍRCULO DOURADO

TODOS OS JOGA-DORES DEVEM TE DAR UMA NOTA DE 5 REAIS	TODOS OS JOGA-DORES (INCLUSIVE VOCÊ) DEVEM DE-VOLVER 9 REAIS AO BANCO.	O JOGADOR QUE TIRAR O MAIOR NÚMERO NO DADO GANHA 50 REAIS DO BANCO

ANEXOS

ANEXO 1 -TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TECLE)

Nós, Neila Tonin Agranionih e Aline Cristina Azzolin de Sousa, professora e aluna de pós-graduação da Universidade Federal do Paraná, estamos convidando seu filho, aluno do terceiro ano, do turno vespertino da XXXXXXXXXXX, a participar de um estudo intitulado Resolução de problemas de divisão:Esquemas utilizados por estudantes de um terceiro ano do ensino fundamental de Curitiba.

O objetivo desta pesquisa é analisar as contribuições de uma intervenção pedagógica para a modificação dos esquemas de resolução de problemas de divisão envolvendo o Sistema Monetário Nacional de crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba-PR

Tal pesquisa é importante para que o professor conheça como os alunos resolvem situações de divisão - como pensam, que conhecimentos já têm, que caminhos encontram para a resolução - para que possa pensar em estratégias de ensino que venham ao encontro do modo como a criança aprende. E também porque é importante para pensar formas de trabalhar com situações que possibilitem ao aluno a aprendizagem da divisão e seu uso em situações que envolvam o sistema monetário.

Caso você autorize que seu filho participe da pesquisa, será necessário que ele participe das aulas onde serão realizadas atividades envolvendo resolução de problemas de divisão e de entrevistas realizadas antes e depois da realização das referidas atividades. Nestas entrevistas seu filho será convidado a resolver alguns problemas matemáticos.

A pesquisa será realizada na própria sala de aula de seu filho, no horário regular das aulas, no período em que ele está matriculado. Não havendo necessidade dele deslocar-se para outro local.

É possível que seu filho experimente algum desconforto, principalmente relacionado a constrangimento ou insegurança, se ocorrer poderá pedir para interromper ou desistir da participação a qualquer tempo.

Os benefícios esperados com essa pesquisa serão o de ter a disponibilidade do aprendizado de um conteúdo matemático tanto durante as entrevistas quanto durante a intervenção. E para a comunidade, essa pesquisa poderá trazer uma maneira diferenciada de proporcionar aos alunos o aprendizado de um conteúdo matemático obrigatório sob uma nova ótica, otimizando o mesmo.

Os pesquisadores, responsáveis por este estudo, poderão ser localizados de seguinte forma para esclarecer eventuais dúvidas que você possa ter e fornecer-lhe as informações que queira, antes, durante ou depois de encerrado o estudo.

- Neila Tonin Agranioni no seguinte Endereço Institucional - Universidade Federal do Paraná, Setor de Educação/DTPEN. Rua General Carneiro, 460, Edifício D. Pedro I, 5° andar Centro sala 520- Curitiba, PR – Brasil , pelos telefones: (41) 21050932, (41) 995091300 ou através do e-mail: ntagranionih@gmail.com.
- Aline Cristina Azzolin de Sousa por meio do e-mail aline.azzolin@gmail.com ou pelo telefone (41) 999228583.

As informações relacionadas ao estudo poderão ser conhecidas apenas pelas pesquisadoras. No entanto, se qualquer informação for divulgada em relatório ou publicação, isto será feito sob forma codificada, para que a identidade dos participantes seja preservada e mantida sua confidencialidade. O material obtido – imagens, vídeos e transcrição das entrevistas – serão utilizado unicamente para essa pesquisa e serão destruído/descartado (informar o destino que será dado ao material) ao término do estudo, dentro de 3 anos. Quando os resultados forem publicados, não aparecerá seu nome, e sim um código.

As despesas necessárias para a realização da pesquisa não são de sua responsabilidade. O participante não receberá qualquer valor em dinheiro pela sua participação.

Se tiver dúvidas sobre seus direitos como participante de pesquisa, pode contatar também o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP/SD) do Setor de Ciências da Saúde da Universidade Federal do Paraná, pelo telefone 3360-7259.

Eu,___________________________________(responsável pelo menor) ____ li esse Termo de Consentimento e compreendi a natureza e objetivo do estudo do qual concordei com sua participação. A explicação que recebi menciona os riscos e benefícios.

Eu entendi que sou livre para interromper a participação de meu filho a qualquer momento sem justificar minha decisão e sem qualquer prejuízo para mim.

Eu concordo voluntariamente com a participação do meu filho neste estudo.

Curitiba________ de ___________de ______

____

[Assinatura do Participante de Pesquisa ou Responsável Legal]

____

[Assinatura do Pesquisador Responsável ou quem aplicou o TCLE]

Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Setor de Ciências da Saúde da UFPR | CEP/SD Rua Padre Camargo, 285 | térreo | Alto da Glória | Curitiba/PR | CEP 80060-240 | cometica.saude@ufpr.br - telefone (041) 3360-7259