

Marcos Van Vessen Junior

Dois Mapas do Padeiro Acoplados e suas Possíveis Quantizações.

Tese de Doutorado apresentada ao Curso
de Pós- Graduação em Física do Setor de
Ciências Exatas da Universidade Federal do
Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcos G. E. da Luz

Curitiba

2006

Louvarei ao Senhor em todo o tempo, o
seu louvor estará continuamente na minha
boca.

Busquei ao Senhor, e ele me respondeu
livrou-me de todos os meus temores.

Salmos 34.1,4

RESUMO

Nesta monografia, desenvolvemos a construção e quantização de uma classe de Mapas do Padeiro Acoplados. O método proposto tem como partida a obtenção do propagador, via uma adaptação da teoria semiclássica. Para isto primeiramente identificamos as formas de acoplamento que mantêm a filosofia do Mapa do Padeiro, ou seja, entre outras coisas mantemos a dinâmica das coordenadas de momento dependente da dinâmica das variáveis de posição, sem permitir a reciprocidade. Na sequência obtivemos o propagador quântico exato de várias versões de mapas com acoplamentos simétricos e assimétricos. Concluindo apresentamos as condições gerais para que o método possa ser aplicado na quantização de Mapas do Padeiro Acoplados e exemplificamos o uso de um dos procedimentos sugeridos, na quantização de um novo tipo de Mapa do Padeiro, ao qual denominamos de Mapa do Padeiro Fracionário.

ABSTRACT

In this monography we developed the construction and quantization of a class of Coupled Baker's Maps. The method proposed, has a starting point in the construction of the quantum propagator, through an adaptation of semiclassical theory. To accomplish it, first of all, we identify the kinds of coupling that keep the Baker's Map philosophy, thus, between others aspects, we keep the dependence of momentum's dynamics to position's dynamics, without allowing the opposite. In the sequence we obtained the exact quantum propagator for many different versions, with symmetric and asymmetric coupling. Concluding we present the general conditions for the method's applicability in the quantization of Coupled Baker's Maps, and exemplified the use of one of the suggested tools, in the quantization of a new kind of Baker Map, the Fractionary Baker Map.

AGRADECIMENTOS

Quero deixar registrada para sempre a minha gratidão às pessoas e instituições que tanto contribuíram para que eu pudesse completar o doutorado.

Agradeço:

À minha amada esposa, Nana, que tanto tem demonstrado o seu amor por mim.

Às minhas filhas, que me alegram e inspiram.

À meus pais pelo incentivo que me deram.

Ao meu orientador, Marcos G E da Luz, por não ter medo de fazer coisas difíceis.

Aos demais professores do departamento que contribuíram na minha formação.

Aos companheiros da pós que sempre estiveram prontos a dar a sua ajuda.

A CAPES pela ajuda financeira parcial.

Ao Deus vivo e poderoso que me tem dado vida e força para viver, ao seu Filho Jesus Cristo que me dá a salvação, e ao Espírito Santo que me orientou, inspirou e fortaleceu durante todo o doutorado.

Conteúdo

1	Introdução	9
2	Conceitos	14
2.1	Mapas Clássicos	14
2.1.1	Mapa do Padeiro	15
2.2	Acoplamento	18
2.3	Rede de Mapas Acoplados	18
2.3.1	Tipos de Acoplamento	19
2.4	Mapas Quânticos	19
2.4.1	O Mapa Quântico do Padeiro - Balazs e Voros	20
2.4.2	O Mapa Quântico do Padeiro - Ozorio e Saraceno	22
2.5	Medidas	27
2.5.1	Evolução de Pacotes de Onda Gaussianos - POG	27
2.5.2	Potências da matriz B	29
2.5.3	Análise dos autoângulos	32

3	Os Caminhos para a Quantização	35
3.1	O Mapa Clássico	35
3.1.1	Acoplamento simétrico	37
3.1.2	Acoplamento assimétrico	38
3.1.3	As funções módulo	39
3.2	O propagador semiclássico	53
3.2.1	Construção da matriz	54
4	A Primeira Quantização de Mapas Acoplados	57
4.1	O Mapa Assimétrico	57
4.2	A Quantização	68
4.2.1	Resultados da versão 1	75
4.2.2	Resultados da versão 2	85
5	Mapas com acoplamento simétrico	93
5.1	Quantização	107
5.1.1	Resultados da versão 1	107
5.1.2	Resultados da versão 2	117
6	A quantização via múltiplas funções geratrizes	123
7	Discussão dos Métodos	136
7.1	Condições Gerais	136

7.2	O Padeiro Fracionário	142
8	Conclusão	147
A	Estatísticas $P(s)$ e $\bar{\Delta}_3$	150
A.1	Estatística $P(s)$	151
A.2	Estatística $\bar{\Delta}_3$	154
B	Acoplamento Simétrico e Assimétrico	155
B.1	Condições para o acoplamento simétrico	155
B.2	Condições para o acoplamento assimétrico	157
B.2.1	Hipótese $A > 0$	158
B.2.2	Hipótese $\alpha\beta = 1$	159
	Bibliografia	161

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas caóticos teve seu início, como é comumente aceito [1], no fim do século XIX, com os trabalhos pioneiros de H. Poincaré [2] [3], enquanto este estudava a dinâmica de três corpos celestes. Todavia o despertar para a grande variedade de aplicações envolvidas no estudo de sistemas caóticos, que vão desde a Física e a Matemática até aplicações em Economia e Biologia, passando pela Engenharia, surgiu apenas nas últimas décadas [1].

Já o estudo de fenômenos relativos ao caos em sistemas quânticos, ou caos quântico, teve seu início em meados da década de 60. Usualmente considera-se caos quântico como sendo o estudo dos diferentes fenômenos quânticos que surgem em sistemas cujos análogos clássicos sejam caóticos, embora existam sistemas classicamente não caóticos cujo correspondente quântico exibe o chamado “wave chaos” ou caos ondulatório [4] [5]. Apesar de ainda haverem muitas questões fundamentais em aberto nesta área, que é relativamente nova [6], ela já tem contribuído no entendimento de alguns problemas mais realísticos. Dentre vários exemplos podemos citar em física atômica os efeitos do campo magnético em átomos de hidrogênio [7] e de hélio [8], e as propriedades dinâmicas de átomos pesados [9]. Outros tipos de sistemas onde muitos resultados, tanto teóricos quanto experimentais, têm mostrado

manifestações de caos quântico são os semicondutores e os “quantum dots” [10].

Um dos procedimentos para chegarmos as versões quânticas de sistemas classicamente caóticos, onde fica mais nítida a relação entre caos clássico e caos quântico, é via teoria semiclássica. Visto que o comportamento quântico de um sistema é estudado a partir de suas estruturas clássicas. Neste sentido foram de fundamental importância os trabalhos de Gutzwiller [11], relacionados ao propagador semiclássico de Van-Vleck [12], a partir de onde, com a fórmula do traço, se desenvolveu o formalismo necessário para a compreensão de sistemas quânticos a partir de seus análogos clássicos caóticos. Ainda nesta linha, uma contribuição muito importante foi a soma sobre órbitas periódicas instáveis de sistemas caóticos, para se analisar a densidade de estados [13] [14].

Uma das principais ferramentas na investigação de fenômenos relativos ao caos, tanto clássico quanto quântico, é o estudo da dinâmica de mapas [1] [15] [16]. Um mapa nada mais é do que um sistema cuja evolução temporal é discretizada. A análise da dinâmica dos mapas é importante, dentre outras razões, porque a maior parte das complicações acidentais, não ligadas diretamente ao caos, parecem ser removidas quando os usamos [17]. E também por estes serem modelos simplificados [18] de diversos sistemas da natureza. Na investigação quântica, há um interesse especial por mapas no toro, que são sistemas discretos no tempo e cuja evolução dinâmica é restrita à uma região finita do espaço de fase. Dentre os mapas no toro, sem dúvida, o Mapa do Gato e o Mapa do Padeiro estão entre os mais estudados.

O Mapa do Padeiro é um modelo conceitual que desperta grande interesse por ser um protótipo de “hard chaos” [6], ou sistema puramente hiperbólico, sendo ao mesmo tempo uma das mais simples realizações da dinâmica simbólica, o “Bernoulli Shift” [19] [20]. Desta forma, o Mapa do Padeiro permite a compreensão de boa parte dos fenômenos relativos ao caos a partir de uma dinâmica muito simples. Por isso seu estudo no contexto quântico torna-se importante.

Em 1980, Hannay e Berry relacionaram as características necessárias para a quantização de mapas no toro [21], categoria esta na qual o Mapa do Padeiro se encontra. Todavia somente em 1987 Balazs e Voros [22] apresentaram a primeira versão quântica do Mapa do Padeiro, obtida por inferência das propriedades do mapa clássico. Em 1989 Balazs e Voros [18] detalharam mais o procedimento e, em 1990, Saraceno [23] apresentou uma importante contribuição à quantização restaurando todas as simetrias clássicas no sistema quântico. Também Saraceno [23] identificou estruturas clássicas no Mapa do Padeiro Quântico (MPQ) como as cicatrizes de órbitas periódicas [24] [25].

Em 1991, Ozório e Saraceno [26] apresentaram a quantização do Mapa do Padeiro via propagador semiclássico, que é exata neste caso. A partir destes resultados, obteve-se também a solução via integrais de caminho [27] [28]. Por fim se chegou a uma quantização canônica do Mapa do Padeiro [29]. Outro trabalho relevante foi a demonstração de que é possível recuperar a dinâmica simbólica do Mapa do Padeiro no limite clássico do MPQ [30].

O MPQ também serviu para o estudo da eficiência da quantização semiclássica para várias iteradas [31][32]. Bem como na verificação do tempo de Ehrenfest, que nada mais é do que o tempo durante o qual as dinâmicas quântica e clássica apresentam correlação, que em mapas quânticos caóticos é chamado “log time” [21], o qual teve sua comprovação analítica (para o MPQ) [33].

A medida do poder de emaranhamento [34] para toda uma classe de mapas quânticos do padeiro também despertou muito interesse da comunidade científica em um artigo recente [35]. E ainda mais recentemente Lakshminarayan [36] publicou um trabalho modelando o embaralhamento de cartas com a versão quântica do Mapa do Padeiro.

Também foi encontrada uma analogia ótica do MPQ [37] e uma simulação de ótica linear [38], e ainda houve uma implementação experimental do MPQ [39]. Além

de ter tido sua implementação experimental em um computador quântico NMR [40]. Na realidade foram obtidas também toda uma nova classe de Mapas do Padeiro quânticos, como o Mapa do Padeiro Preguiçoso [41], o Mapa do Padeiro na Esfera [42] e na quantização da transformação D [43], que de acordo com o autor é uma generalização do Mapa do Padeiro.

Assim fica claro que este modelo conceitual relativamente simples, o Mapa do Padeiro, fornece uma grande contribuição no entendimento de caos clássico e quântico, sob perspectivas bastante distintas.

Atualmente, em caos clássico, grande parte dos estudos está voltada para compreensão de sistemas que apresentam o chamado caos espaço-temporal [44] [45] [46] [47], sendo o estudo de mapas acoplados e redes de mapas acoplados uma das vertentes deste estudo. É portanto justificável e interessante tentar obter o equivalente quântico destes sistemas, viabilizando desta forma a comparação entre as características clássicas e quânticas relativas ao caos espaço-temporal.

Nesta linha há a discretização da equação de Schrodinger não linear [48]. E também a construção de uma dinâmica já acoplada, como é o caso da quantização do Mapa Multi-Padeiro (“Multi-Baker Map”) [49].

Todavia não há na literatura, até onde sabemos, nenhum trabalho que apresente uma versão quântica de mapas diretamente acoplados, ou seja, onde primeiramente definimos a dinâmica de cada mapa separadamente e então estabelecemos um “potencial” de interação que atrele as variáveis de um mapa as do outro.

Nossa proposta com o presente trabalho é justamente desenvolver a quantização de Mapas do Padeiro diretamente acoplados, sendo esta uma abordagem inédita na área. Importa salientar que o mais próximo da idéia que aqui será desenvolvida, foi a quantização do chamado sistema dos três padeiros acoplados, proposto numa versão clássica por Elskens e Kapral [50], e quantizado por Lakshminarayan e Balazs [51]. Mas que, ao contrário do que o nome sugere, não acopla três Mapas do Padeiro,

apenas divide o espaço de fase em três regiões, com uma dinâmica do padeiro para cada uma delas.

Nosso trabalho é organizado da seguinte forma. No próximo capítulo, apresentamos uma breve revisão de mapas clássicos, com atenção especial para o Mapa do Padeiro. Também falamos sobre acoplamento e rede de mapas clássicos, bem como revisamos os trabalhos desenvolvidos na quantização do Mapa do Padeiro. E ainda expomos as medidas de caracterização de caos quântico, e da relação quântico-clássica utilizadas. No Capítulo 3 identificamos dois dos possíveis caminhos a seguir rumo à quantização de Mapas do Padeiro acoplados, através da teoria semiclássica, mudança de variáveis e reconstrução direta do espaço de fase. Ao mesmo tempo que expomos cada alternativa, apresentamos as dificuldades inerentes a cada opção, e apontamos a alternativa escolhida. No Capítulo 4 desenvolvemos a teoria necessária para a quantização de dois Mapas do Padeiro acoplados assimetricamente, via reconstrução direta do espaço de fase, onde elementos geométricos se mostram fundamentais. Neste mesmo capítulo expomos análises típicas para a caracterização de mapas quânticos, como a evolução de pacotes de onda gaussianos, análise de autoângulos e autocorrelação. Nos Capítulos 5 e 6 apresentamos outros Mapas do Padeiro acoplados, agora com acoplamento simétrico. Nestes capítulos destacamos diferentes aspectos relativos ao processo de quantização, como o conceito de sub-blocos (cap. 5) e o método das múltiplas funções geratrizes (cap. 6). O Capítulo 7 apresenta a análise dos métodos expostos, apontando as diversas situações onde o método poderá ser utilizado, além de apresentar o Mapa do Padeiro Fracionário. Por fim, no Capítulo 8 apresentamos nossas conclusões e propostas para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Conceitos

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão de mapas clássicos, acoplamento e rede de mapas clássicos. Na sequência revisamos trabalhos desenvolvidos na área de quantização de mapas. Por fim expomos as medidas que usamos para comparar a dinâmica de mapas quânticos, com a dinâmica dos mapas clássicos correspondentes, além de medidas de caracterização de caos quântico.

2.1 Mapas Clássicos

Um mapa ou sistema de equações à diferença finita, é um sistema que evolui discretamente no tempo e sua forma geral é:

$$x \rightarrow f(x) \quad \text{ou} \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Onde x é um vetor n -dimensional e f é uma função que pode ser linear ou não, gerando-se assim mapas lineares ou não-lineares.

Os mapas hamiltonianos, nos quais a função $f(x)$ é uma transformação canônica e portanto preserva a área do espaço de fase (consequência do teorema de Liouville), como o Mapa do Padeiro, ocupam uma posição especial dentre estes modelos, visto

que por um lado eles em geral descendem diretamente de sistemas dinâmicos discretizados via seção de Poincaré, e por outro lado lidam diretamente com o comportamento geral de caos. Além disso estes mapas reduzem o número de graus de liberdade, permitindo desenvolver toda a teoria sem integrar explicitamente as equações do movimento [18].

Neste trabalho nos concentramos em mapas no toro, ou seja, àqueles nos quais o espaço de fase é periódico, dentre os principais sem dúvida estão o Mapa do Padeiro e o Mapa do Gato.

Assim faremos uma breve exposição do Mapa do Gato, seguida de uma exposição mais detalhada do Mapa do Padeiro.

Mapa do Gato (Arnold's cat map)

O Mapa do Gato, assim chamado porque Arnold apresentou sua dinâmica com o desenho de um gato no espaço de fase, de fato é uma família de sistemas completamente caóticos, da qual se possui uma boa compreensão tanto de sua dinâmica clássica quanto de sua dinâmica quântica [52]. Sua forma mais conhecida é dada por:

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + p_n \pmod{1} \\ p_{n+1} &= q_n + 2p_n \pmod{1}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Assim como o Mapa do Padeiro, este mapa também apresenta uma direção de expansão e outra de contração. Passamos agora ao Mapa do Padeiro.

2.1.1 Mapa do Padeiro

Embora o Mapa do Padeiro não se derive da discretização de nenhum sistema hamiltoniano contínuo, este modelo representa um protótipo para a maioria das propriedades dos sistemas classicamente caóticos [18]. Além disso, ele é uma das

mais simples realizações de uma dinâmica simbólica - o “Bernoulli shift”. [19]

O Mapa do Padeiro [15] [19], tem a forma:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 2q_n - [2q_n] \\ p_{n+1} &= \frac{p_n}{2} + \frac{[2q_n]}{2}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $[x]$ significa a parte inteira de x .

De fato o Mapa do Padeiro tem uma representação geométrica muito simples, como mostra a figura 2.1, sendo que esta representação geométrica pode ser descrita pelo “shift de Bernoulli”. Um estudo completo sobre o que é o “shift de Bernoulli” pode ser encontrado na ref.[53].

Aqui podemos entender o “shift de Bernoulli”, se escrevermos as variáveis q e p como número binários, como exemplificado abaixo,

$$q = 0.011011\dots$$

$$p = 0.111010\dots$$

Se identificarmos o estado do sistema num determinado tempo n como

$$(p|q)_n = \dots 010111.011011\dots$$

Onde o que está à esquerda do ponto é p e o que está à direita é q , teremos a evolução deste sistema simplesmente avançando o ponto em uma casa para a direita,

$$(p|q)_{n+1} = \dots 0101110.11011\dots$$

Tanto a dinâmica clássica, quanto a quântica, do Mapa do Padeiro têm sido exaustivamente estudadas [17] [18] [22] [23] [26] [28], e algumas aplicações práticas têm sido propostas [38] [39] [40]. Além disso foi um dos primeiros mapas quantizados [22], o que será discutido mais a frente.

O expoente de Liapunov (λ) [54], que nos dá a medida do quanto divergem duas trajetórias que partem de dois pontos vizinhos no espaço de fase, é $\lambda = \log 2$, o

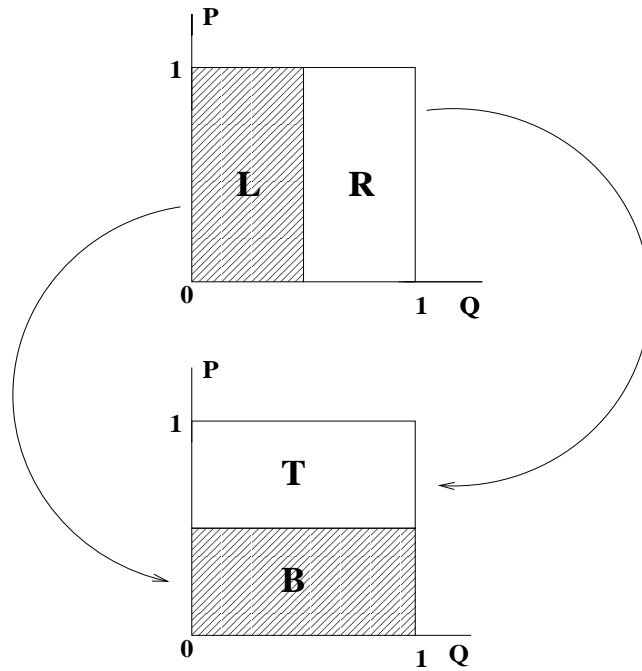


Figura 2.1: Representação gráfica do Mapa do Padeiro bidimensional: vemos que todos os pontos da parte L (onde $0 \leq q < 1/2$ e $0 \leq p < 1/2$) são transferidos para a parte B, ou seja, “esticamos em q ” ($q_{n+1} = 2q_n$) e “comprimimos” em p ($p_{n+1} = p_n/2$), enquanto que todos os pontos na parte R (onde $1/2 \leq q < 1$ e $1/2 \leq p < 1$) são transferidos para a parte T, ou seja, novamente “esticamos em q ” e “comprimimos” em p , mas como aqui $[2q_n]$ vale 1, os valores de p sempre são maiores que $1/2$.

que indica que este sistema apresenta alta caoticidade. Para o Mapa do Padeiro os expoentes de Liapunov são obtidos ao se tomar o logaritmo do módulo dos autovalores da matriz jacobiana.

2.2 Acoplamento

A idéia de acoplamento é “ligar” dois ou mais mapas, de forma que a dinâmica de um afete a do outro. Por exemplo, as equações de dois mapas unidimensionais acoplados têm a forma geral:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + h_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(y_n) + h_2(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{2.3}$$

O acoplamento pode ser unidirecional, neste caso só teríamos h_1 ou h_2 na equação 2.3, ou bidirecional, quando tanto h_1 quanto h_2 aparecem.

O estudo de mapas clássicos acoplados, por permitir o estudo de diferentes aspectos do caos, tem despertado interesse há algum tempo [55] [56] e continua a sendo objeto de muitos trabalhos [57] [58].

Nesta linha também têm sido muito estudadas as redes de mapas acoplados [59] [60] [61] [62], que podem ser pensadas como uma generalização da equação 2.3, visto serem uma das principais ferramentas para o estudo de caos espaço-temporal [44].

2.3 Rede de Mapas Acoplados

Uma Rede de Mapas Acoplados - RMA, é uma extensão direta do conceito de mapas acoplados, onde temos, em geral, um grande número de mapas.

2.3.1 Tipos de Acoplamento

Existem essencialmente duas formas gerais de acoplamento entre os mapas de uma RMA, o acoplamento local (entre primeiros vizinhos), e o acoplamento não-local.

Kaneko [44] propôs, através de uma discretização da equação da difusão, uma forma geral para as RMA com acoplamento local,

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (2.4)$$

onde n se refere ao tempo e i ao sítio.

Kaneko [44] também propôs uma generalização através de um termo de acoplamento não local, o que gerou uma RMA com acoplamento global,

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_{n+1}^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N - 1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}). \quad (2.5)$$

2.4 Mapas Quânticos

O que é um mapa quântico? Um mapa quântico é uma transformação unitária que descreve a evolução dos estados quânticos durante um intervalo de tempo discreto [18]. Assim um mapa quântico pode ser representado por

$$\psi_{n+1} = O\psi_n. \quad (2.6)$$

Onde ψ_n representa o estado quântico no tempo n , O é um operador unitário de evolução temporal, que atua sobre ψ_n , e ψ_{n+1} representa o estado quântico no tempo $n + 1$.

Em outras palavras, um mapa quântico descreve a evolução temporal, em tempo discreto, de um sistema quântico que preferencialmente possua um análogo clássico.

Ainda não existe uma técnica geral de quantização, sendo que este processo é “artesanal” [18], no sentido de que cada mapa é, a princípio, quantizado de forma

particular. No entanto para mapas no toro, o método que usaremos nesta tese tem sido usado em mapas distintos e com sucesso [23][52].

A seguir apresentamos o Mapa Quântico do Padeiro, obtido via dois métodos diferentes, primeiro por inferência das propriedades do mapa clássico original, como proposto por Balazs e Voros [18][22], e depois através do uso do propagador semiclássico, proposto por Ozorio e Saraceno [26].

2.4.1 O Mapa Quântico do Padeiro - Balazs e Voros

Haja vista a dinâmica simbólica que rege a evolução temporal do Mapa do Padeiro, é possível quantizarmos o mesmo através de uma construção formal do operador unitário B que descreve a evolução, como proposto por Balazs e Voros [18].

O espaço de fase clássico para o Mapa do Padeiro é compacto, ou seja, os valores possíveis para q e p estão restritos a um intervalo finito. Assim se considerarmos o maior valor possível de p (momento) como P , e o maior valor possível de q (posição) como Q , o número de células deste espaço de fase $N = PQ/2\pi\hbar$ será finito (dividimos PQ por $2\pi\hbar$ devido ao princípio da incerteza $\Delta p \cdot \Delta q \sim 2\pi\hbar$) o que nos dá a dimensão do espaço de Hilbert necessário para a descrição de todos os possíveis estados quânticos do sistema. Note que na mecânica quântica não podemos representar um estado simultaneamente em p e q , logo os N estados representados em p têm o seu equivalente em q .

Definimos então os operadores canônicos conjugados p e q (quânticos) como operadores de translação que atuam cada qual nos autoestados do outro. Desta forma os autovetores de posição são, $|n\rangle$ com autovalores $q_n = 2\pi\hbar n/P$ e $|n+N\rangle = |n\rangle$ (condição de contorno periódica), e os autovetores de momento são, $|m\rangle$ com autovalores $p_m = 2\pi\hbar m/Q$ e $|m+N\rangle = |m\rangle$. Consequentemente a mudança de base é obtida com $\langle n|m \rangle = N^{-1/2} e^{2\pi i n m / N}$.

Para quantizarmos o mapa clássico do padeiro, seguimos os seguintes passos:

Decompomos o espaço vetorial em dois subespaços (vide fig. 2.1), \mathcal{L} e \mathcal{R} , com vetores $\Psi^{\mathcal{L}}$ e $\Psi^{\mathcal{R}}$. Exigimos então que na representação de posição, tenhamos $\Psi_n^{\mathcal{L}} = 0$ se $n \geq N/2$ e $\Psi_n^{\mathcal{R}} = 0$ se $n < N/2$, e para mantermos a completa simetria entre \mathcal{L} e \mathcal{R} , exigimos que N seja par.

Uma iteração deve evoluir os vetores $\Psi^{\mathcal{L}}$ e $\Psi^{\mathcal{R}}$, levando-os a outros dois diferentes subespaços \mathcal{B} e \mathcal{T} , com vetores $\Phi^{\mathcal{B}}$ e $\Phi^{\mathcal{T}}$, sendo que na representação dos momentos estes devem ter seus componentes $\tilde{\Phi}_m^{\mathcal{B}} = 0$ se $m \geq N/2$ e $\tilde{\Phi}_m^{\mathcal{T}} = 0$ se $m < N/2$ (o índice m e o sobrescrito $\tilde{}$ indicam que estamos na representação do momento). A transformação que conecta estes subespaços é descrita pelas matrizes $A^{\mathcal{B}\mathcal{L}}$ e $A^{\mathcal{T}\mathcal{R}}$, de forma que $\Phi^{\mathcal{B}} = A^{\mathcal{B}\mathcal{L}}\Psi^{\mathcal{L}}$ e $\Phi^{\mathcal{T}} = A^{\mathcal{T}\mathcal{R}}\Psi^{\mathcal{R}}$. Sendo que $A^{\mathcal{B}\mathcal{L}}$ e $A^{\mathcal{T}\mathcal{R}}$ devem incorporar os efeitos de “esticar” em q e “comprimir” em p na versão quântica.

Podemos produzir o efeito de “esticar” nos componentes pares de $\Phi_{2n}^{\mathcal{B}}$ na representação de posição, exigindo que:

$$\Phi_{2n}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_n^{\mathcal{L}}, \quad n \leq N/2 - 1. \quad (2.7)$$

Os demais componentes de $\Phi^{\mathcal{B}}$ são especificados através da representação de momento, onde a “compressão” torna-se uma dilatação caso apliquemos a transformação no sentido inverso, assim:

$$\tilde{\Psi}_{2m}^{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\Phi}_m^{\mathcal{B}}, \quad m \leq N/2 - 1 \quad (2.8)$$

As matrizes obtidas (cf [18]) são:

$$A_{n'n}^{\mathcal{B}\mathcal{L}} = \begin{cases} 2^{-1/2}\delta_{n'/2,n} & , \quad 0 \leq n < N/2, n' \text{ par} \\ 2^{1/2}N^{-1} [1 + i\cot g(2\pi N^{-1}(\frac{n'}{2} - n))] & , \quad 0 \leq n < N/2, n' \text{ ímpar} \\ 0 & , \quad N/2 \leq n < N. \end{cases}$$

Embora a transformação inicialmente é uma aplicação de \mathcal{L} em \mathcal{B} , e consequentemente está na representação dos q 's, podendo ser descrita por uma matriz

$N \times (N/2)$, nós podemos extendê-la formalmente para uma matriz $N \times N$, preenchendo as células vazias com zeros.

A matriz $A^{\mathcal{B}\mathcal{L}}$ tem todas as propriedades requeridas [18]; (a) é uma transformação unitária de \mathcal{L} em \mathcal{B} ; (b) muda os valores das autofunções em cada representação, para valores dilatados ou comprimidos; (c) fornece corretamente o mapa de $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{B}$ quando $N \rightarrow \infty$; (d) tem a simetria de troca de $q \leftrightarrow p$, assim como o mapa clássico.

De forma análoga, a matriz $A^{T\mathcal{R}}$ fica,

$$A_{n'n}^{T\mathcal{R}} = \begin{cases} 2^{-1/2} \delta_{n'/2, n-N/2} & , \quad N/2 \leq n < N, n' \text{ par} \\ 0 & , \quad 0 \leq n < N/2 \\ -2^{1/2} N^{-1} [1 + i \cot(2\pi N^{-1} (\frac{n'}{2} - n))] & , \quad N/2 \leq n < N, n' \text{ ímpar} \end{cases}$$

Como qualquer Ψ pode ser escrita como $\Psi = \Psi^{\mathcal{L}} + \Psi^{\mathcal{R}}$, o mapa quântico do padeiro é descrito pela transformação:

$$\Phi = B\Psi = A^{\mathcal{B}\mathcal{L}}\Psi^{\mathcal{L}} + A^{T\mathcal{R}}\Psi^{\mathcal{R}}, \text{ com } B_{n'n} = A_{n'n}^{\mathcal{B}\mathcal{L}} \oplus A_{n'n}^{T\mathcal{R}}.$$

2.4.2 O Mapa Quântico do Padeiro - Ozorio e Saraceno

Outra forma de quantização do Mapa do Padeiro, é através da obtenção do propagador semiclássico. Aqui obtemos o propagador semiclássico usando a fórmula de Van Vleck, cuja forma na representação de Kirkwood é [63]:

$$\langle p_{n+1} | U | q_n \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} \left| \frac{\partial^2 F(p_{n+1}, q_n)}{\partial p_{n+1} \partial q_n} \right|^{-1/2} \exp[-i\hbar^{-1} F(p_{n+1}, q_n) + i\alpha]. \quad (2.9)$$

Onde $F(p_{n+1}, q_n)$ é a função geratriz [64], U é o operador de evolução temporal, e α é uma fase arbitrária, sendo que para mapas lineares podemos tomar $\alpha = 0$ [26].

Existem quatro tipos de funções geratrizes, $F_1(q_{n+1}, q_n)$, $F_2(p_{n+1}, q_n)$, $F_3(q_{n+1}, p_n)$ e $F_4(p_{n+1}, p_n)$. Funções geratrizes são transformações canônicas de variáveis que co-

nectam as variáveis no tempo inicial com as variáveis no tempo final. São ditas geratrizes por gerarem as equações de movimento através de sua derivação. Por exemplo, para F_2 temos $p_n = \frac{\partial F(p_{n+1}, q_n)}{\partial q_n}$ e $q_{n+1} = \frac{\partial F(p_{n+1}, q_n)}{\partial p_{n+1}}$. Sendo que $F_2 = -S$ (ação clássica) [64]. Salvo qualquer referência em contrário, daqui por diante sempre que nos referirmos a função geratriz estamos nos referindo a F_2 .

Como F_1 e F_4 não contêm informação simultânea sobre q e p , elas não servem para a quantização do Mapa do Padeiro. Além disso, como será exposto mais adiante, a matriz do propagador deve conter uma estrutura de blocos, que só pode ser estabelecida quando escrevemos a matriz em termos de p_{n+1} e q_n , daí a necessidade do uso da representação de Kirkwood.

Para efetivarmos a quantização precisamos ainda estabelecer uma base de autovetores, e obter a função geratriz $F(p_{n+1}, q_n)$.

Levando-se em conta que $\frac{\partial F(p_{n+1}, q_n)}{\partial q_n} = p_n$ e $\frac{\partial F(p_{n+1}, q_n)}{\partial p_{n+1}} = q_{n+1}$, podemos ver que:

$$F(p_{n+1}, q_n) = 2p_{n+1}q_n - \epsilon_0 p_{n+1} - \epsilon_0 q_n + cte, \quad (2.10)$$

onde $\epsilon_0 \equiv [2q_n]$. Já para obtermos a base de autovetores, precisamos da pré-quantização [23] ou seja, especificar o espaço de Hilbert.

Se o espaço de fase é compacto, a pré-quantização deve levar em conta as condições de contorno. Se temos um quadrado, condições de contorno periódicas são a escolha mais simples, levando ao toro. A pré-quantização para um toro quadrático unitário é canônica, e impõe-se que os estados quânticos apresentem as mesmas periodicidades dos estados clássicos, o que implica em termos funções de onda que apresentem as seguintes características:

$$\psi(q+1) = e^{2\pi i \chi_q} \psi(q),$$

$$\tilde{\psi}(p+1) = e^{-2\pi i \chi_p} \tilde{\psi}(p).$$

Onde,

$$\tilde{\psi}(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int e^{-ipq/\hbar} \psi(q) dq,$$

e $2\pi\chi_q$ e $2\pi\chi_p$ são ângulos de Floquet fixos e arbitrários. Assim a pré-quantização depende de dois parâmetros, χ_q e χ_p .

Só há solução para as condições acima quando $2\pi N\hbar = 1$, se N for inteiro, sendo que estas geram um espaço de Hilbert $H_N^{\chi_q, \chi_p}$ com dimensão finita N . Os autovetores de posição e momento são,

$$|q_n\rangle = \left| \frac{n + \chi_q}{N} \right\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$|p_m\rangle = \left| \frac{m + \chi_p}{N} \right\rangle, \quad m = 0, 1, \dots, N - 1,$$

enquanto que a transformada de Fourier discretizada entre posição e momento é,

$$G_N = \langle p_m | q_n \rangle = N^{-1/2} e^{-2\pi i(m + \chi_p)(n + \chi_q)/N}, \quad (2.11)$$

a qual é uma matriz unitária.

Agora podemos partir para a quantização.

O mapa quântico é então um operador unitário U que atua sobre o espaço de Hilbert do sistema, ou seja, é uma matriz unitária $N \times N$ atuando sobre $H_N^{\chi_q, \chi_p}$.

Obtemos U através do propagador semiclássico na representação de Kirkwood. Nesta representação o propagador é escrito como $\langle p_{n+1} | U | q_n \rangle$, onde U é o operador de evolução temporal. Este propagador semiclássico é exato se aplicarmos ele por partes nas regiões classicamente permitidas, ou seja, dando amplitude zero para as transições classicamente proibidas. Tendo-se isto em mente chegamos a,

$$\langle p_{n+1} | U | q_n \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} \sqrt{2} e^{-iF(p_{n+1}, q_n)/\hbar} \delta_{[2q_n], [2p_{n+1}]}.$$

Que pode ser representada esquematicamente como,

$$B_{pq} = \langle p_{n+1} | U | q_n \rangle = \begin{pmatrix} G_{N/2} & 0 \\ 0 & G_{N/2} \end{pmatrix},$$

onde G_N é a transformada de Fourier definida em 2.11.

De maneira equivalente o propagador $\langle q_{n+1}|U|q_n\rangle$ pode ser representado esquematicamente como,

$$B_{qq} = \langle q_{n+1}|U|q_n\rangle = G_{N/2}^{-1} \begin{pmatrix} G_{N/2} & 0 \\ 0 & G_{N/2} \end{pmatrix}.$$

Na verdade um dos objetivos da estrutura de blocos na matriz do propagador é impedir que hajam transições para as regiões classicamente proibidas.

Na quantização proposta por Balazs e Voros [22] para o Mapa do Padeiro, assim como nesta proposta por Ozorio e Saraceno [26], os blocos na matriz que representa o operador de evolução temporal têm este papel fundamental.

Na ausência desta estrutura de blocos surgiriam dois problemas, primeiro o propagador não seria unitário, e segundo, surgiriam as “sombras” ou repetições nas regiões classicamente proibidas ao evoluirmos um pacote de onda gaussiano (POG). Na figura 2.2 expomos um comparativo de como POG evoluirá, na versão quântica do Mapa do Padeiro usual (seguindo [26]), e como seria a evolução se não houvesse a estrutura de blocos na matriz do propagador.

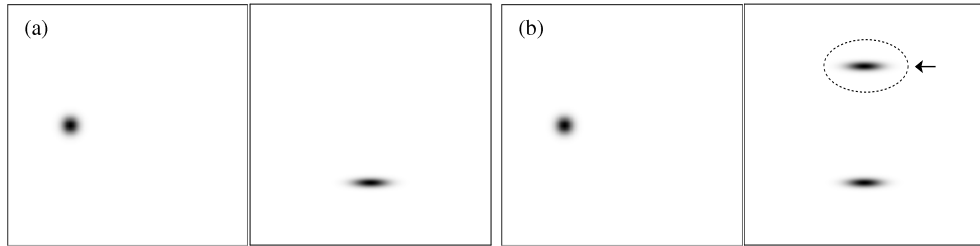


Figura 2.2: Comparativo entre a evolução quântica de um POG originalmente centrado em $q = 1/4$ e $p = 1/2$. O gráfico apresenta $|\Psi(t)_{pq}|$, com $t = 1$ e 2 . Em (a) apresentamos a evolução usando o propagador com a estrutura de blocos. Em (b) está exposta a evolução do mesmo POG, mas usando o propagador sem a estrutura de blocos. Notar que a ausência da estrutura de blocos levou ao surgimento da sombra indicada pela seta. Aqui usamos $N = 256$ na quantização.

A quantização se completa levando-se em conta que o espaço de fase é compacto

como descrito no estabelecimento dos autovetores de posição e momento, e definindo que $\chi_q = \chi_p = 1/2$, o que assegura a preservação da simetria por reflexão, simetria R [23], que surge pelo fato do mapa permanecer inalterado na troca de $q \rightarrow 1 - q$ e $p \rightarrow 1 - p$.

Podemos definir um operador R (reflexão) tal que,

$$R|n\rangle = |N - n - 1\rangle,$$

logo

$$\langle n'|R|n\rangle = \delta_{n,N-n'-1},$$

de tal modo que R é simplesmente uma matriz onde todos os elementos são nulos exceto na diagonal secundária, onde valem 1.

A transformada de Fourier se relaciona com R através da seguinte igualdade,

$$(G_N)^2 = -R_N.$$

Esta é a propriedade que permite o surgimento da simetria R [23] no mapa quantizado. O que por sua vez, não se verifica na quantização de Balazs e Voros [18] [22]. R e \tilde{B} comutam (aqui definimos $\tilde{B} \equiv B_{qq}$), assim, seguindo [23], podemos separar as autofunções de \tilde{B} conforme exposto a seguir. As soluções de

$$\tilde{B}|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle = e^{i\theta_i}|\psi_i\rangle, \quad (2.12)$$

devem ter a forma,

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |u\rangle \\ \pm R_{N/2}|u\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

a qual tem a paridade correta $R|\psi_{\pm}\rangle = \pm|\psi\rangle$, para um $|u\rangle$ arbitrário. Na equação (2.13), $|u\rangle$ é um vetor de dimensão $N/2$ e é escolhido de forma a ter a mesma normalização de $|\psi\rangle$.

A equação para $|u\rangle$ é obtida inserindo-se (2.13) em (2.12) e separando \tilde{B} em blocos de $N/2 \times N/2$, ver [23]. Assim $|u\rangle$ satisfaz a equação de autovalores,

$$[\tilde{B}_{11} \pm \tilde{B}_{12}R_{N/2}]|u\rangle = \lambda_{\pm}|u\rangle. \quad (2.14)$$

A equação envolvendo \tilde{B}_{21} e \tilde{B}_{22} é redundante, basta seguir o mesmo procedimento que adotamos para \tilde{B}_{11} e \tilde{B}_{12} .

O fato de $\tilde{B}_{11} \pm \tilde{B}_{12}R_{N/2}$ ser unitário decorre do fato de \tilde{B} ser unitária. Assim as soluções de (2.14) geram dois conjuntos (R+ e R-) de $N/2$ autovalores dentro do círculo unitário com seus respectivos conjuntos de autofunções ortonormais.

2.5 Medidas

Existem diversas formas de se caracterizar a dinâmica de mapas quânticos. Aqui discutimos os estudos que faremos logo após quantizarmos os Mapas do Padeiro acoplados. Vale destacar que, como nesta tese apresentamos o acoplamento de dois Mapas do Padeiro, os nossos sistemas são quadri-dimensionais, e não bi-dimensionais como o Mapa do Padeiro até então apresentado.

2.5.1 Evolução de Pacotes de Onda Gaussianos - POG

Primeiramente, a exemplo de Balazs e Voros [22], podemos comparar a evolução do mapa quântico com a evolução do mapa clássico correspondente. Uma maneira de proceder esta comparação é através da evolução de pacotes de onda gaussianos. Assumindo que as variáveis (q, p) , referem-se a um dos mapas, e as variáveis, (Q, P) ao outro mapa, construiremos um pacote de onda gaussiano $\Psi_{qQ}(q_o, Q_o, p_o, P_o, \sigma)$ (seguindo O'Connor [31]), ou simplesmente $\Psi_{qQ}^{(o)} = \langle qQ | q_o, Q_o, p_o, P_o, \sigma \rangle$ como,

$$\Psi_{qQ}^{(o)} = \left(\frac{4\pi\hbar^2}{\sigma^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{[(q - q_o)^2 + (Q - Q_o)^2]}{2\sigma^2} + \frac{i}{\hbar} [p_o(q - q_o) + P_o(Q - Q_o)] \right\}, \quad (2.15)$$

onde σ é o desvio padrão da gaussiana.

Como sabemos, $\hbar = 1/2\pi N$, e usando $\sigma = \sqrt{\hbar}$, que nos dá a mínima incerteza

nos p's e q's [32], encontramos,

$$\begin{aligned} \langle qQ|q_o, Q_o, p_o, P_o, \sigma \rangle = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \exp \left\{ - [(q - q_o)^2 + (Q - Q_o)^2] \pi N + \right. \\ \left. + 2\pi Ni [p_o(q - q_o) + P_o(Q - Q_o)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agora, para evoluirmos o POG precisaremos apenas operar algumas multiplicações de matrizes, assim por exemplo, para evoluirmos o mapa em um passo fazemos,

$$\langle qQ|U|q_o, Q_o, p_o, P_o, \sigma \rangle = \langle qQ|pP \rangle \langle pP|U|qQ \rangle \langle qQ|q_o, Q_o, p_o, P_o, \sigma \rangle .$$

A primeira matriz do lado direito é G_N^{-1} , a inversa da transformada de Fourier, enquanto que a segunda é a matriz do propagador B_{pq} . Então para evoluirmos dois passos, fazemos,

$$\langle qQ|U^2|q_o, Q_o, p_o, P_o, \sigma \rangle = G_N^{-1} \cdot B_{pq} \cdot G_N^{-1} \cdot B_{pq} \cdot \Psi_{qQ}(o) .$$

Para três passos, simplesmente tomamos o resultado precedente e multiplicamos novamente por $G_N^{-1} \cdot B_{pq}$, e assim sucessivamente.

Espera-se que a evolução quântica acompanhe a clássica até o chamado “log time” [21] [23]. O “log time”, equivalente no Mapa do Padeiro do tempo de Ehrenfest [65] [66], é dado por $\tau \sim \frac{\log N}{\lambda}$, onde N é o número de autoestados que representam o sistema, e λ é o expoente de Liapunov do sistema. De fato para o Mapa do Padeiro Quântico esta relação foi comprovada analiticamente [33].

Como cada um de nossos mapas é bi-dimensional, o sistema como um todo é quadri-dimensional. Por isso apresentaremos as evoluções em dois cortes, nos planos $q \times Q$ e $p \times P$, isto em virtude de que iremos operar a quantização via propagador semiclassico na representação de Kirkwood $\langle p_{n+1}P_{n+1}|U|q_nQ_n \rangle$, ou seja, “naturalmente” temos a cada iterada o sistema no plano $p \times P$, ou no plano $q \times Q$.

Para a melhor visualização da evolução clássica, optamos por evoluir um conjunto de pontos clássicos, distribuídos em torno do ponto central da gaussiana

quântica.

2.5.2 Potências da matriz B

Em [23], Saraceno apresenta a medida de autocorrelação $\langle q_0, p_0 | U^t | q_0, p_0 \rangle$, que nada mais é do que a medida da probabilidade de um pacote de onda centrado em q_0, p_0 retornar a si mesmo após t iteradas. Esta medida está associada com os pontos fixos e órbitas periódicas do mapa clássico, como a figura 2.3 deixa claro.

Em um artigo posterior [17], Saraceno e Voros apresentaram uma medida das potências de $B_{pq} = \langle p | U | q \rangle$, ou seja B^1_{pq} , B^2_{pq} , B^3_{pq} , etc. Ambas apresentam resultados muito semelhantes. Enquanto que a primeira mostra a probabilidade de um POG, centrado em q_0, p_0 , retornar a ele mesmo após t iteradas, a segunda nos expõe as regiões onde a densidade de probabilidade de um ponto evoluir para dentro da mesma região após t iteradas é maior. Na figura 2.4 apresentamos ambas as medidas para o Mapa do Padeiro quantizado seguindo Ozorio e Saraceno [26], sendo que, em todas as figuras, graficamos apenas os 30% de pontos com maior intensidade.

A medida da autocorrelação, $\langle q_0, p_0 | U^t | q_0, p_0 \rangle$, exige um esforço numérico extremamente superior àquele exigido para o cálculo das potências. Como os mapas acoplados que serão quantizados usam matrizes de $N^2 \times N^2$, a dificuldade para o cálculo da autocorrelação é muito grande. Por isso apresentaremos ao longo da tese o cálculo das potências do mapa quântico para comparar com as órbitas periódicas dos mapas acoplados clássicos. Além disso, como nossa matriz tem dois índices em cada direção, iremos mostrar tão somente os termos da diagonal principal, onde $q' = q$ e $Q' = Q$.

Os pontos fixos e as órbitas periódicas, expostas ao longo da tese foram obtidas numericamente. Isto visa a melhor comparação entre os resultados clássicos e quânticos. Procedemos de tal forma que consideramos (q_0, p_0) uma órbita periódica de período t , se ao evoluirmos um par (q_0, p_0) , temos após t iteradas $|q_0 - q_t| < \delta$ e

$|p_0 - p_t| < \delta$, onde $\delta = 1/N$ é a incerteza quântica que temos tanto em q , quanto em p .

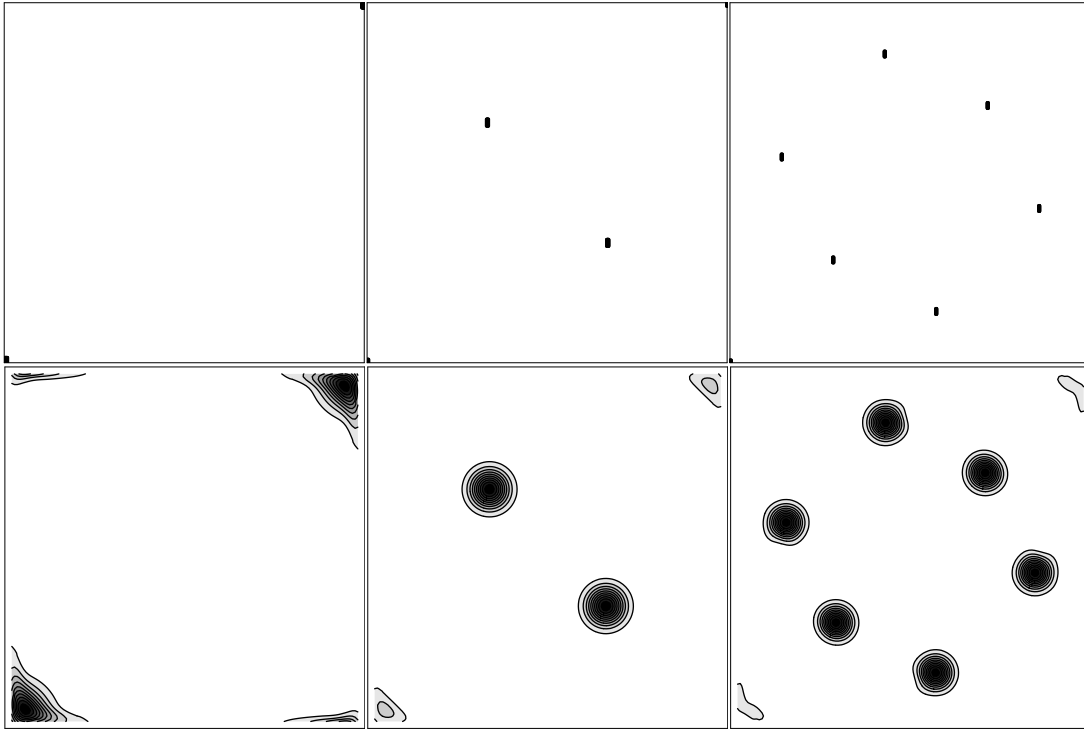


Figura 2.3: Acima os pontos fixos e as órbitas periódicas de período 2 e 3, do Mapa do Padeiro clássico, obtidas numericamente com $\delta \sim 1/128$ (ver texto), abaixo o gráfico da intensidade do módulo da autocorrelação, $|\langle q_0, p_0 | U^t | q_0, p_0 \rangle|$, do Mapa do Padeiro Quântico para $N = 128$ e $t = 1, 2, 3$. A variável q está representada nas abscissas, e a variável p nas ordenadas. Aqui graficamos os pontos dos três últimos decis, ou seja, os 30% mais intensos.

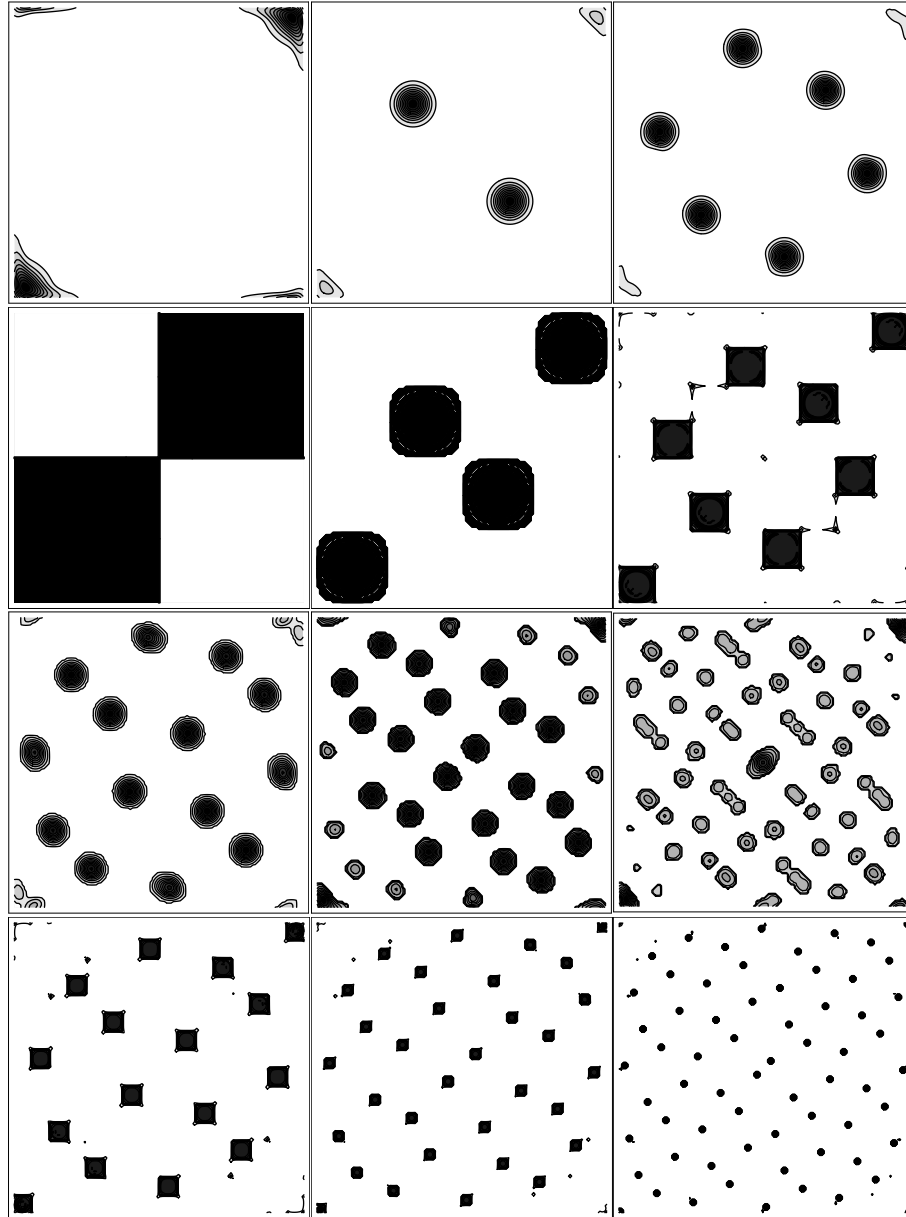


Figura 2.4: Gráficos da intensidade (levando em conta os 30% de pontos mais intensos) do módulo da autocorrelação, $|\langle q_0, p_0 | U^t | q_0, p_0 \rangle|$ e módulo das potências de $\langle p | U^t | q \rangle$, ou seja, $|\langle p | U^t | q \rangle|$ para o Mapa do Padeiro quântico, usando-se $N = 128$. A variável q está nas abscissas e a variável p nas ordenadas. Primeira linha: autocorrelação para $t = 1, 2, 3$, segunda linha: potências para $t = 1, 2, 3$. Terceira linha: autocorrelação para $t = 4, 5, 6$, quarta linha: potências para $t = 4, 5, 6$.

2.5.3 Análise dos autoângulos

A análise da distribuição dos autovalores de energia de um sistema (estatística de níveis), tem sido utilizada para identificar a presença de caos em sistemas quânticos [6] [67]. Os mapas com os quais estamos trabalhando não apresentam hamiltoniano, assim não podemos obter autovalores de energia, mas podemos obter os autovalores do propagador $\langle qQ|U|qQ\rangle$. Assim como os autovalores deste são complexos e têm módulo igual a 1, ou seja, $\lambda_j = e^{i\theta_j}$, podemos identificar as fases (θ_j) que são chamadas de autoângulos (ou ângulos próprios). Isto é útil porque a distribuição dos autoângulos de um sistema também nos permite a identificação de caos em sistemas quânticos [22] [23].

Uma vez de posse dos autoângulos, procedemos as estatísticas: (i) $P(s)$ que mede a correlação entre cada autovalor e seus primeiros vizinhos, e (ii) a estatística $\bar{\Delta}_3(l)$ que apresenta uma média das medidas de correlação entre cada autovalor com os demais autovalores espaçados de uma “distância” l . O detalhamento do uso destas estatísticas consta no Apêndice A.

Saraceno [23] conjecturou que com a separação da simetria R no MPQ, as estatísticas com os autoângulos deveriam apresentar um resultado compatível com o GOE (vide Apêndice A), e nisto ele estava certo como Sano [68] demonstra em seu artigo e também podemos verificar isto nas figuras 2.5 e 2.6. Na figura 2.5 apresentamos o resultado das estatísticas $P(s)$ e $\bar{\Delta}_3(l)$ sem separação de simetrias, e desta forma o resultado se mostra compatível com o previsto para sistemas que apresentam duplo GOE [69], ou seja, sistemas caóticos cujos autovalores foram obtidos sem a separação de duas simetrias internas. Já a figura 2.6 mostra o resultado das estatísticas $P(s)$ e $\bar{\Delta}_3(l)$ com a separação de simetrias. Na figura usamos os autoângulos de R+.

Saraceno ainda observou que [23] “... nenhuma dependência especial em relação a teoria de números foi observada entre N e os autoângulos.” Mas Sano [68] observou que para qualquer N que possa ser escrito como $N = 2^i$, onde i é um inteiro,

a estatística com os autoângulos não apresenta o resultado esperado para um sistema caótico, ao contrário, segue aproximadamente o que se espera para sistemas integráveis, concordando com a estatística Poisson (observe a fig. 2.7).

O Mapa do Padeiro unidimensional, definido como $q_{n+1} = 2q_n \bmod 1$, tem um conjunto de pontos, que são chamados pontos finalmente fixos. Pontos finalmente fixos são pontos que após um número finito de iteradas chegam a um ponto fixo. No caso do Mapa do Padeiro unidimensional, todos estes pontos evoluem para o ponto fixo $q = 0$. Estes pontos são chamados de racionais diádicos, e podem ser escritos como $\frac{j}{2^i}$, onde j e i são inteiros.

Quando quantizamos o Mapa do Padeiro (eq. 2.3), e usamos $N = 2^i$ e a fase é 0 ou $1/2$, todos os autovetores de posição são definidos sobre pontos finalmente fixos, do Mapa do Padeiro unidimensional. Acreditamos que isto está relacionado com o não aparecimento de caos nas estatísticas dos autoângulos (exposta na fig. 2.7), haja visto que a dinâmica clássica destes pontos é extremamente regular.

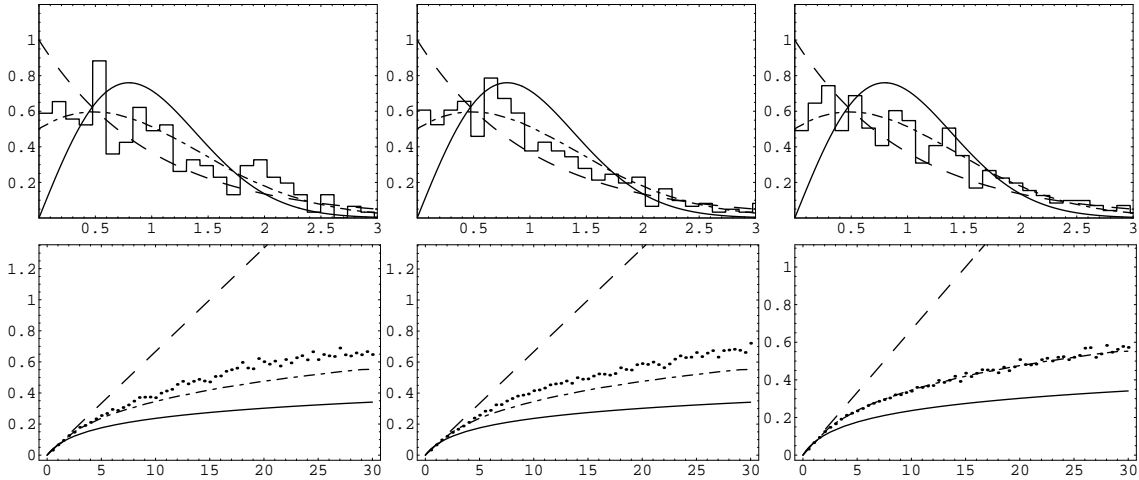


Figura 2.5: Acima estatística $P(s) \times s$ sem separação de simetria e usando todos os autoângulos, para $N = 258, 514$ e 600 respectivamente. Abaixo estatística $\bar{\Delta}_3(l) \times l$, na mesma sequência. Nas figuras a linha tracejada indica Poisson, linha contínua indica GOE e linha com traço e ponto indica duplo GOE.

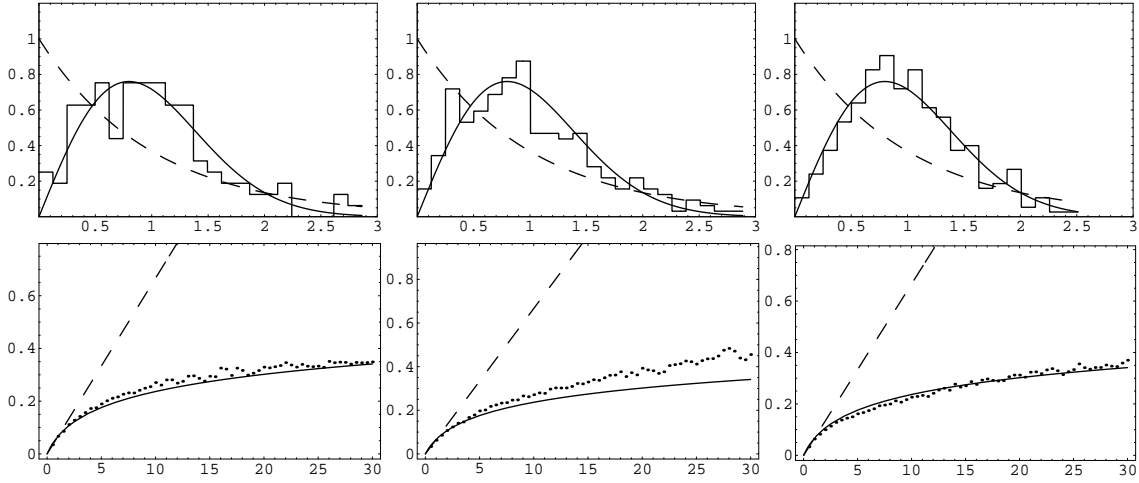


Figura 2.6: Acima estatística $P(s) \times s$ com separação de simetria (usamos $R+$) e usando todos os autoângulos, para $N = 258, 514$ e 600 respectivamente. Abaixo estatística $\bar{\Delta}_3(l) \times l$, na mesma sequência. Nas figuras a linha tracejada indica Poisson e linha contínua indica GOE.

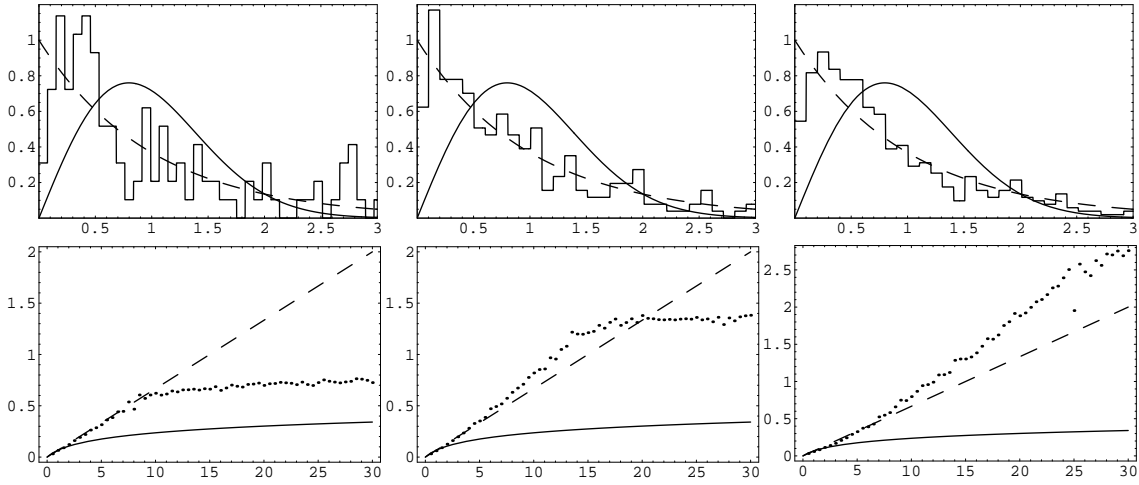


Figura 2.7: Acima estatística $P(s) \times s$ com separação de simetria (usamos $R+$) e usando todos os autoângulos, para $N = 256, 512$ e 1024 respectivamente. Abaixo estatística $\bar{\Delta}_3(l) \times l$, na mesma sequência. Nas figuras a linha tracejada indica Poisson e linha contínua indica GOE.

Capítulo 3

Os Caminhos para a Quantização

Neste capítulo apresentamos a forma geral dos mapas acoplados e possíveis rotas para a obtenção do propagador semiclássico.

3.1 O Mapa Clássico

Como já discutido na seção 2.1, o Mapa do Padeiro, tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= 2q_n - [2q_n] \\ p_{n+1} &= \frac{p_n}{2} + \frac{[2q_n]}{2},\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde os termos $-[2q_n]$ e $+ [2q_n]/2$ servem para “rebater” as variáveis q e p de volta ao espaço inicial $[0, 1) \times [0, 1)$. Assim podemos esquematicamente escrever,

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= 2q_n + \text{função módulo } 1 \\ p_{n+1} &= \frac{p_n}{2} + \text{função módulo } 2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Onde **função módulo** apenas indica que algo deve ser incluído na equação para que o mapa retorne a região original, ou seja, $[0, 1) \times [0, 1)$. Esta notação será usada de

agora em diante. Usualmente o termo $-[2q_n]$ na equação é representado simplesmente por mod 1, mas tanto no Mapa do Padeiro, quanto nos Mapas do Padeiro acoplados, a notação usual não é a melhor escolha. Isto porque ela não indica a associação que existe entre os reordenamentos q e p .

Podemos agora definir um acoplamento linear bidirecional entre dois mapas, e teremos,

$$\begin{aligned}
 q_{n+1} &= 2q_n + A(q_n + \alpha Q_n) + \text{função módulo 1} \\
 Q_{n+1} &= 2Q_n + B(Q_n + \beta q_n) + \text{função módulo 2} \\
 p_{n+1} &= \frac{p_n}{2} + C(p_n + \sigma P_n) + \text{função módulo 3} \\
 P_{n+1} &= \frac{P_n}{2} + D(P_n + \lambda p_n) + \text{função módulo 4.}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aqui reforçamos que as “funções módulo” desempenham o mesmo papel dos termos $[2q_n]$ e $[2q_n]/2$ da equação 3.1, o qual é devolver simultaneamente cada uma das variáveis ao intervalo $[0, 1)$, após cada iterada. A escolha de tais funções é ingrediente fundamental na definição do mapa, como será visto em detalhes adiante.

O mapa clássico (eq. 3.3) só preserva área, ou seja, é conservativo, se a transformação for canônica. Isto equivale a dizer que o jacobiano (determinante da matriz jacobiana) do mapa tem que ser igual a 1. A jacobiana do mapa acoplado é,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 + A & A\alpha & 0 & 0 \\ B\beta & 2 + B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 + C & C\sigma \\ 0 & 0 & D\lambda & 1/2 + D \end{pmatrix}.$$

A matriz \mathbf{J} apresenta dois blocos, assim fica fácil ver que para $\det \mathbf{J} = 1$, temos,

$$\det \mathbf{J} = [(2 + A)(2 + B) - AB\alpha\beta][(1/2 + C)(1/2 + D) - CD\sigma\lambda] = 1.$$

Qualquer escolha de parâmetros que atenda ao requisito acima, produzirá um mapa acoplado que preserva a sua área, mas diferentes escolhas darão forma a diferen-

tes tipos de acoplamentos, os quais podem ser divididos em duas grandes classes: acoplamento simétrico e acoplamento assimétrico.

3.1.1 Acoplamento simétrico

Quando dizemos que o acoplamento é simétrico, queremos dizer que os sistemas (q, p) e (Q, P) tem as mesmas formas funcionais nas equações de evolução. Isto decorre de fazermos $A = B$, $\alpha = \beta$, e conseqüentemente, $C = D$ e $\sigma = \lambda$. Isto resulta nas seguintes restrições para os valores de A , B , α , β (os demais parâmetros acabam sendo dependentes destes, ver Apêndice B),

$$A = B \notin (-2, 0],$$

$$\alpha = \beta = -1.$$

Assim, desde que tenhamos $\alpha = \beta = -1$, quaisquer valores de A que não pertençam ao intervalo $[-2, 0]$ irão gerar mapas acoplados simétricos que preservam a área e mantêm as variáveis p e P restritas ao intervalo $[0, 1/2)$, antes da aplicação das respectivas funções módulo. Importa frisar que esta restrição às coordenadas p é semelhante ao que ocorre no Mapa do Padeiro. Para qualquer valor de A escolhido, o mapa apresenta a simetria por reflexão R, o que significa que se trocarmos $q \rightarrow 1 - q$, $Q \rightarrow 1 - Q$, $p \rightarrow 1 - p$ e $P \rightarrow 1 - P$, o mapa permanece inalterado. Além disso há uma simetria natural, a troca de $q \leftrightarrow Q$ e $p \leftrightarrow P$.

Os mapas simétricos apresentam a forma geral,

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= (2 + A)q_n - AQ_n + \text{função módulo 1} \\ Q_{n+1} &= (2 + A)Q_n - Aq_n + \text{função módulo 2} \\ p_{n+1} &= \frac{2 + A}{K}P_n + \frac{A}{K}p_n + \text{função módulo 3} \\ P_{n+1} &= \frac{2 + A}{K}p_n + \frac{A}{K}P_n + \text{função módulo 4.} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Onde $K = 4 + 4A$.

A princípio a função geratriz para um mapa simétrico tem a forma geral (vide Apêndice B),

$$F(q_n, Q_n, p_{n+1}, P_{n+1}) = [(2 + A)q_n - AQ_n]p_{n+1} + [(2 + A)Q_n - Aq_n]P_{n+1} \\ + \text{termos que gerem as funções módulo.}$$

3.1.2 Acoplamento assimétrico

Nesta classe a condição básica é que $A \neq B$, logo as equações de evolução de (q, p) e $(Q,)P$ não serão iguais e conseqüentemente, $\alpha \neq \beta$. A derivação das condições para um acoplamento assimétrico encontram-se no Apêndice B. Em resumo temos que,

$$\text{Se } A \notin [-2, 0], \text{ então } B \notin (-2, 0] \quad (3.5)$$

$$\text{Se } A \notin (-2, 0], \text{ então } B \notin [-2, 0].$$

Sendo

$$\begin{aligned} \alpha &\neq \beta \\ \alpha, \beta &< 0 \\ \alpha \cdot \beta &= 1 \\ B &= -\alpha A. \end{aligned}$$

Assim precisamos que α e β sempre sejam negativos e o produto entre eles seja igual a unidade, e de forma semelhante ao que ocorre no acoplamento simétrico, A e B não podem pertencer ao intervalo $(-2, 0]$, sendo que se um dos parâmetros (A ou B) for exatamente igual a -2 o outro estará necessariamente fora do intervalo $[-2, 0]$. Mapas assimétricos, ao contrário do que ocorre com os simétricos, não apresentam a simetria R.

Os mapas assimétricos apresentam a forma geral,

$$\begin{aligned}
 q_{n+1} &= (2 + A)q_n - BQ_n + \text{função módulo 1} \\
 Q_{n+1} &= (2 + B)Q_n - Aq_n + \text{função módulo 2} \\
 p_{n+1} &= \frac{2 + B}{K}p_n + \frac{A}{K}P_n + \text{função módulo 3} \\
 P_{n+1} &= \frac{2 + A}{K}P_n + \frac{B}{K}p_n + \text{função módulo 4.}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Onde agora $K = 4 + 2A + 2B$.

A função geratriz para um mapa assimétrico tem, a princípio, a forma geral (vide Apêndice B),

$$\begin{aligned}
 F(q_n, Q_n, p_{n+1}, P_{n+1}) &= [(2 + A)q_n - BQ_n]p_{n+1} + [(2 + B)Q_n - Aq_n]P_{n+1} \\
 &+ \text{termos que gerem as funções módulo.}
 \end{aligned}$$

3.1.3 As funções módulo

Após estabelecermos os tipos de acoplamento e suas formas gerais, ainda nos resta uma questão de suma importância, a definição das funções módulo.

O Mapa do Padeiro é um modelo conceitual de mapa puramente hiperbólico, ou seja, de “hard chaos” [6]. E isto é devido ao reordenamento de blocos que ocorre a cada iterada do mapa. A figura 3.1 mostra, esquematicamente, a ação dos termos $-[2q_n]$ e $+ [2q_n]/2$ (presentes na eq. 3.1), que desempenham o papel de funções módulo. Sem estes termos a região contida no intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ (fig. 3.1 (a)) evoluiria para a região $[0, 2) \times [0, 1/2)$, como mostra a figura 3.1 (b). Mas graças as funções módulo o resultado é o exposto na figura 3.1 (c).

No caso de Mapas do Padeiro acoplados, o problema do “rebatimento” do espaço de fase evoluído para a região original $[0, 1) \times [0, 1) \times [0, 1) \times [0, 1)$, é certamente bem mais complicado que o exposto acima para o Mapa do Padeiro. Além disso, a maneira específica de fazê-lo é fundamental para a possibilidade ou não da posterior

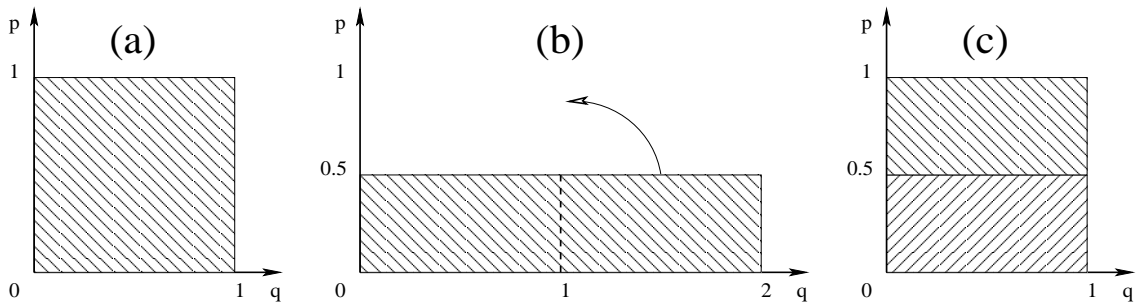


Figura 3.1: Demonstração da ação das funções módulo no Mapa do Padeiro usual. Em (a) temos o espaço de fase $q \times p$ preenchendo o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$. Em (b) expomos a região para onde a região anterior evolui, antes das ações das funções módulo. Em (c) temos o espaço de fase devolvido ao intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$, devido a ação das funções módulo.

quantização. A seguir discutiremos os diferentes aspectos das reconstruções do espaço de fase original, e como estas originam dificuldades para a quantização. Deixamos para o Capítulo 4 a análise de como superar tais dificuldades.

Mudança de variáveis

Podemos fazer alguma mudança de variáveis que separe o mapa acoplado em dois desacoplados? Não, se isto fosse possível os mapas não seriam acoplados. Mas podemos fazer uma mudança de variáveis que, como veremos no exemplo a seguir, passa o acoplamento para as condições de contorno e nos permite trabalhar com formas conhecidas do Mapa do Padeiro, porém gerando outros problemas de ordem técnica para quantizar o mapa.

Para exemplificar vejamos o que aconteceria se tivéssemos um mapa com acoplamento simétrico e parâmetro $A = 2$. Neste caso a equação (3.4) é reescrita como

(omitiremos as funções módulo):

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= 4q_n - 2Q_n \\
Q_{n+1} &= 4Q_n - 2q_n \\
p_{n+1} &= \frac{p_n}{3} + \frac{P_n}{6} \\
P_{n+1} &= \frac{p_n}{6} + \frac{P_n}{3}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Se definirmos $X^{(+)} = (q + Q)/\sqrt{2}$, $X^{(-)} = (q - Q)/\sqrt{2}$, $Y^{(+)} = (p + P)/\sqrt{2}$ e $Y^{(-)} = (p - P)/\sqrt{2}$, o cálculo direto nos mostra que chegaremos à,

$$\begin{aligned}
X_{n+1}^{(+)} &= 2X_n^{(+)} + \text{função módulo 1} \\
Y_{n+1}^{(+)} &= \frac{Y_n^{(+)}}{2} + \text{função módulo 2} \\
X_{n+1}^{(-)} &= 6X_n^{(-)} + \text{função módulo 3} \\
Y_{n+1}^{(-)} &= \frac{Y_n^{(-)}}{6} + \text{função módulo 4}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Lembrando que as variáveis $n + 1$ em (3.8) não estão desacopladas porque tanto $X^{(+)}$ e $X^{(-)}$, quanto $Y^{(+)}$ e $Y^{(-)}$, estão amarradas pelas condições de contorno. A figura 3.2 mostra a situação.

De certa forma a alternativa parece interessante, pois temos mapas (eq. 3.8) cuja quantização é conhecida (isto é discutido no Capítulo 7), e assim sendo as funções módulos já são conhecidas, muito embora precisemos levar em conta as condições de contorno.

Na verdade as condições de contorno geram uma dificuldade fundamental. Vamos esquecer por enquanto $X^{(+)}$ e $Y^{(+)}$, se olharmos para a evolução de uma região no plano $X^{(-)} \times Y^{(-)}$ (fig. 3.3), veremos que tanto $X_{n+1}^{(-)}$ quanto $Y_{n+1}^{(-)}$ apresentam valores negativos, e isto é um problema extra, visto que a reordenação de $Y_{n+1}^{(-)}$ dependeria de termos informações a respeito de $Y_n^{(-)}$. Classicamente isto não é problema, um reordenamento desta forma é algo permitido na definição do mapa clássico. Porém se torna um problema para quem quer obter o propagador semiclássico que é escrito

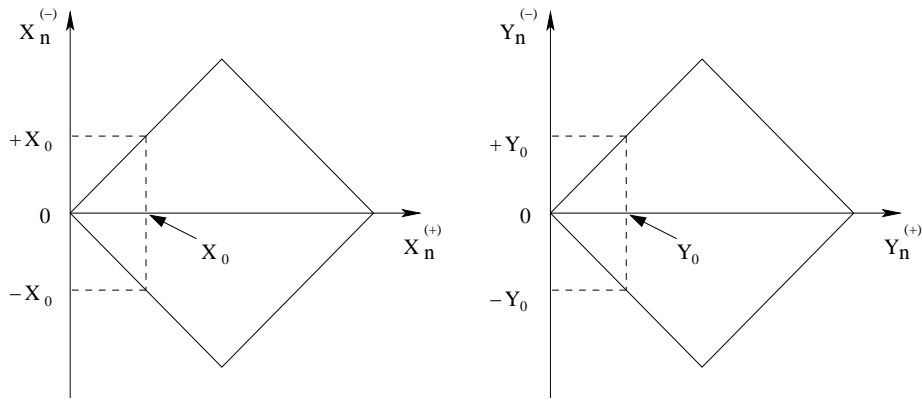


Figura 3.2: Condições de contorno para o mapa acoplado após a mudança de variáveis. Note que no plano $X^{(+)} \times X^{(-)}$, dado um ponto X_0 , $X^{(-)}$ fica limitado ao intervalo $[-X_0, +X_0]$. O mesmo ocorre no plano $Y^{(+)} \times Y^{(-)}$, onde $Y^{(-)}$ fica limitado ao intervalo $[-Y_0, +Y_0]$.

em termos da função geratriz F , visto que esta é $F(Y_{n+1}^{(-)}, X_n^{(-)})$, ou seja, nela não pode haver dependência em $Y_n^{(-)}$!

Para contornarmos este problema, poderíamos quantizar uma variante deste mapa, onde tal problema seria suprimido. A idéia é transladar o “losango” das condições de contorno de maneira que $X_n^{(-)}$ e $Y_n^{(-)}$ passem a estar definidos no intervalo $[0, \sqrt{2})$, como mostra a figura 3.4.

Assim no plano $X_{n+1}^{(-)} \times Y_{n+1}^{(-)}$, a evolução se daria conforme mostra a figura 3.5, ou seja, a reordenação não dependeria de informações sobre $Y_n^{(-)}$.

Na verdade esta variante torna o procedimento um tanto artificial. Acreditamos ser possível chegar à quantização de sistemas tais como o exposto. Mas a versão quantizada não terá uma relação direta com o acoplamento de Mapas do Padeiro. Ou seja, acreditamos que este caminho seja viável e até pode dar origem a um grande leque de opções de mapas acoplados quantizáveis, mas, nesta monografia, preterimos esta opção à próxima, onde não precisamos quantizar uma “variante” dos mapas acoplados, mas os próprios mapas acoplados.

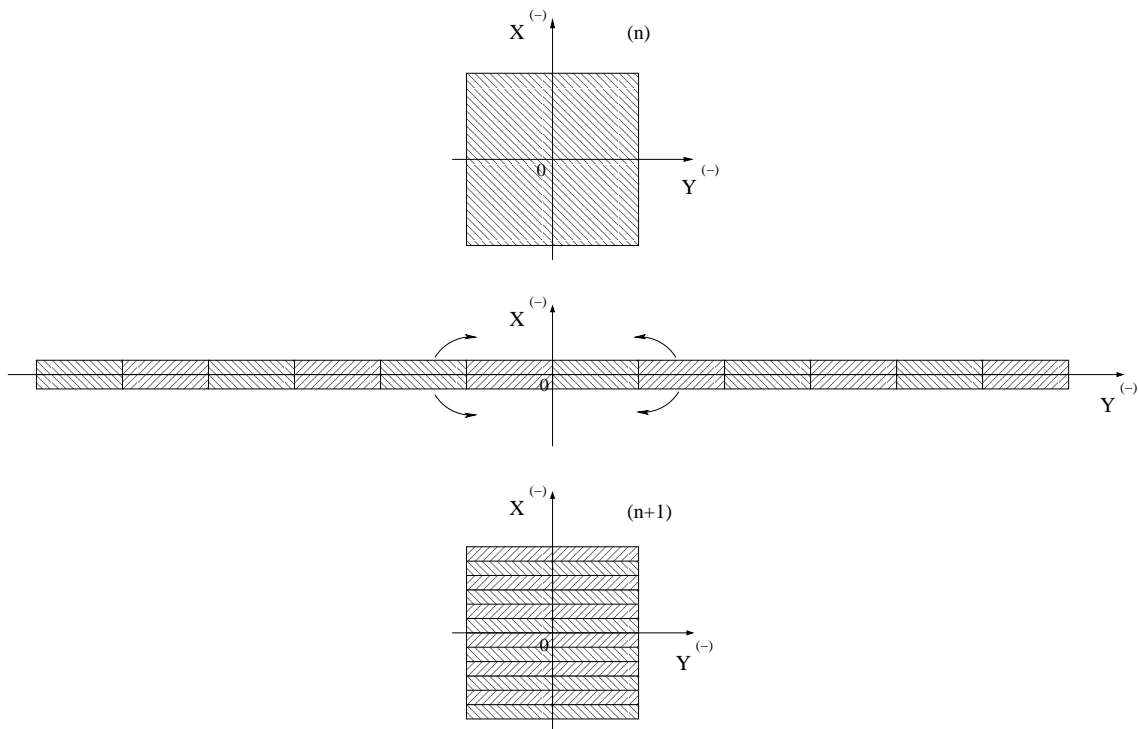


Figura 3.3: Acima temos a região ocupada no plano $X^{(-)} \times Y^{(-)}$ antes da ação do mapa. No meio, a região ocupada após a ação do mapa, mas antes da ação das funções módulo. Note que a regra de reordenação agora dependerá de informações a respeito de $X_n^{(-)}$ e $Y_n^{(-)}$. Finalmente abaixo o plano $X^{(-)} \times Y^{(-)}$ está reordenado graças a ação das funções módulo.

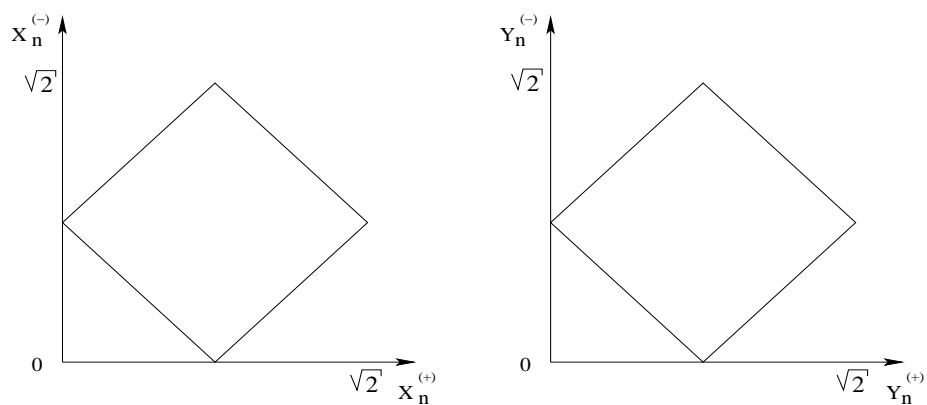


Figura 3.4: Condições de contorno transladadas.

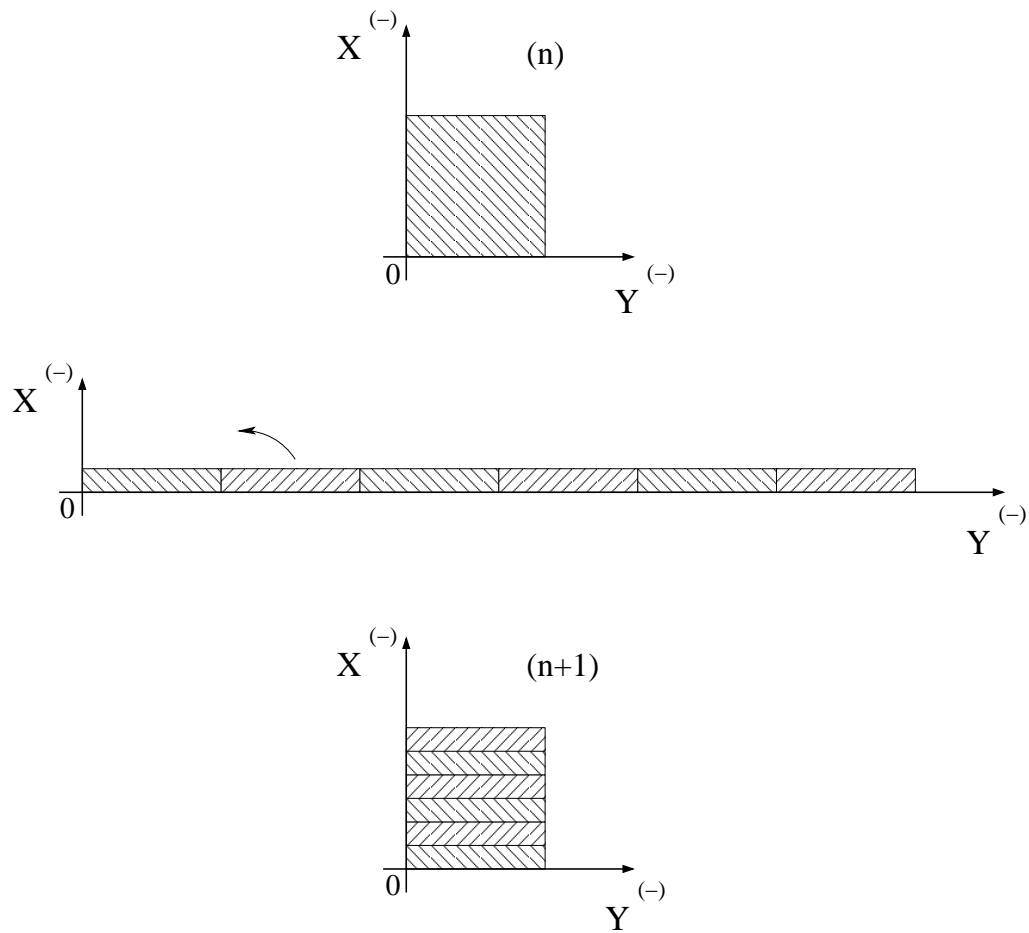


Figura 3.5: Acima temos a região ocupada no plano $X^{(-)} \times Y^{(-)}$ antes da ação do mapa. No meio temos a região ocupada logo após a ação do mapa, mas antes da ação das funções módulo. Note que agora basta a informação a respeito de $X_n^{(-)}$ para proceder o reordenamento de blocos. Finalmente, abaixo o plano $X^{(-)} \times Y^{(-)}$ está reordenado graças a ação das funções módulo.

A reconstrução direta do espaço de fase

Já vimos que os mapas sempre serão acoplados, não há mudança de variáveis que os desacoplem, embora hajam mudanças de variáveis que transfiram o acoplamento para as condições de contorno. Assim, vamos discutir a possibilidade da reconstrução direta do espaço de fase.

Para entendermos melhor este processo de reconstrução ou reordenamento quando acoplamos dois Mapas do Padeiro, primeiramente iremos analisar o caso trivial, mas bastante ilustrativo, de dois Mapas do Padeiro não acoplados. Para tal vamos olhar o que acontece nos planos $q \times Q$ e $p \times P$.

Note que quando há o acoplamento na forma exposta nas seções 3.1.1 e 3.1.2, cria-se um vínculo somente entre q e Q e entre p e P . Logo o seu efeito não é perceptível nos planos $q \times p$ e $Q \times P$, muito embora o efeito seja muito claro nos planos $q \times Q$ e $p \times P$. Assim nossas análises aqui e nos próximos capítulos sempre seguirão a representação $q \times Q$ e $p \times P$.

Prosseguindo então com a análise de dois Mapas do Padeiro não acoplados, sabemos que no tempo “ n ” os planos $q \times Q$ e $p \times P$ ocupam o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$, como mostra a parte superior da figura 3.6. Ao evoluirmos os mapas para o tempo “ $n + 1$ ” (que é o tempo $n + 1$, mas antes de aplicarmos as funções módulo), temos a parte inferior da figura 3.6.

Nesta etapa a área em $q \times Q$ é 4, e a área em $p \times P$ é $1/4$, logo o volume é preservado ($4 \times 1/4 = 1$). A ação esperada ao aplicarmos as funções módulo ao mapa é levar tanto o plano $q \times Q$ quanto o plano $p \times P$ ao intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$. O efeito geométrico da aplicação das funções módulo pode ser visto na figura 3.7, onde vemos que cada deslocamento de blocos no plano $q \times Q$ é acompanhado de uma expansão (duplicação com translação) no plano $p \times P$, reconstruindo-se assim o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ em cada plano no tempo “ $n + 1$ ”.

Devemos lembrar que cada ponto do plano $q \times Q$ tem um correspondente no

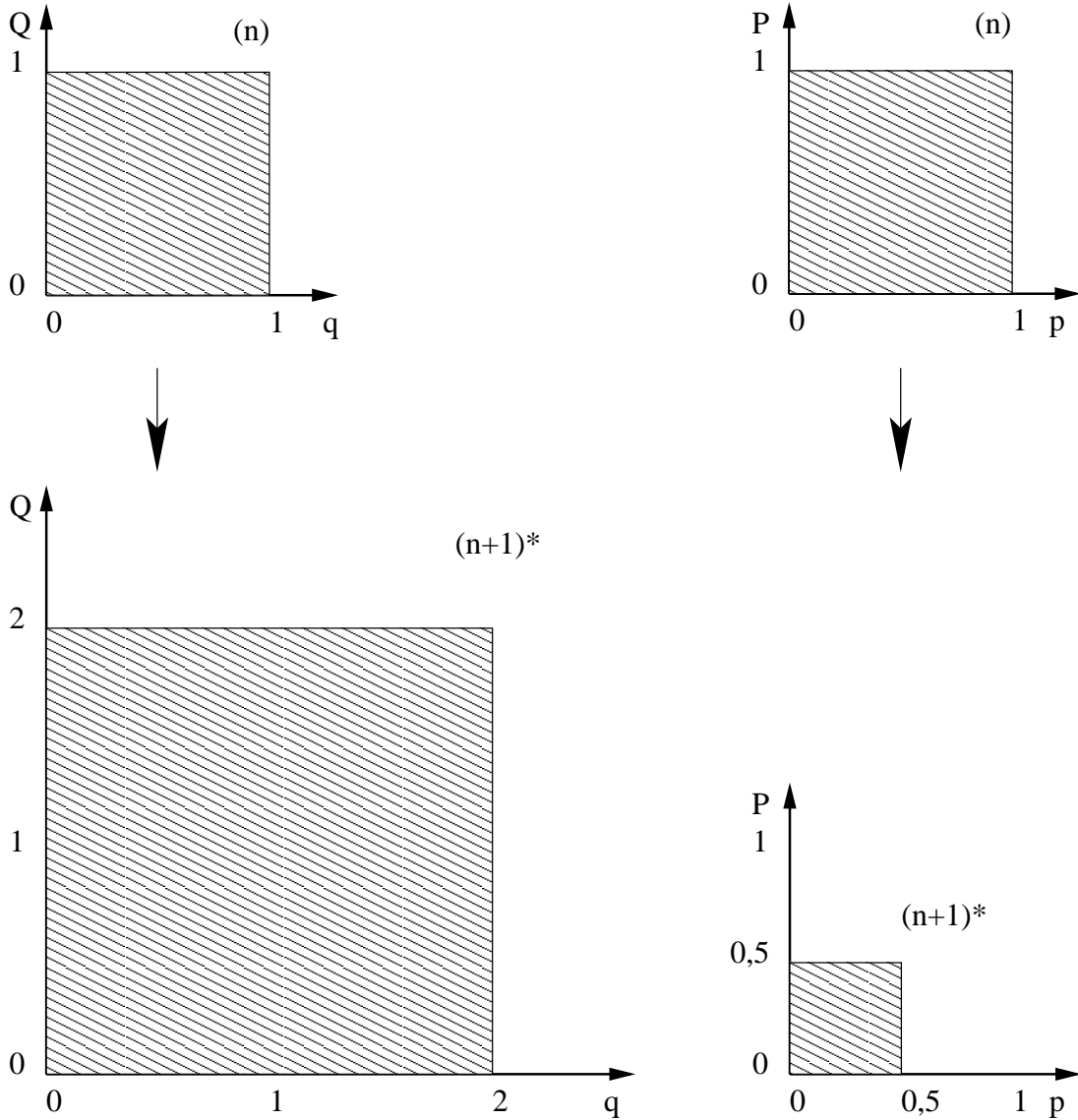


Figura 3.6: Acima, conjunto de pontos nos planos $q \times Q$ (à esq.) e $p \times P$ (à dir.) no tempo “ n ”, antes da aplicação do mapa, ou seja o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ é densamente ocupado. Abaixo, a figura à esquerda mostra o resultado da evolução dos pontos do plano $q \times Q$, que inicialmente (no tempo “ n ”) estavam no intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ e que são mapeados no intervalo $[0, 2) \times [0, 2)$ antes da ação da função módulo. A figura à direita faz o mesmo para os pontos do plano $p \times P$, que após o mapeamento, mas antes da aplicação da função módulo, passam a ocupar o intervalo $[0, 1/2) \times [0, 1/2)$.

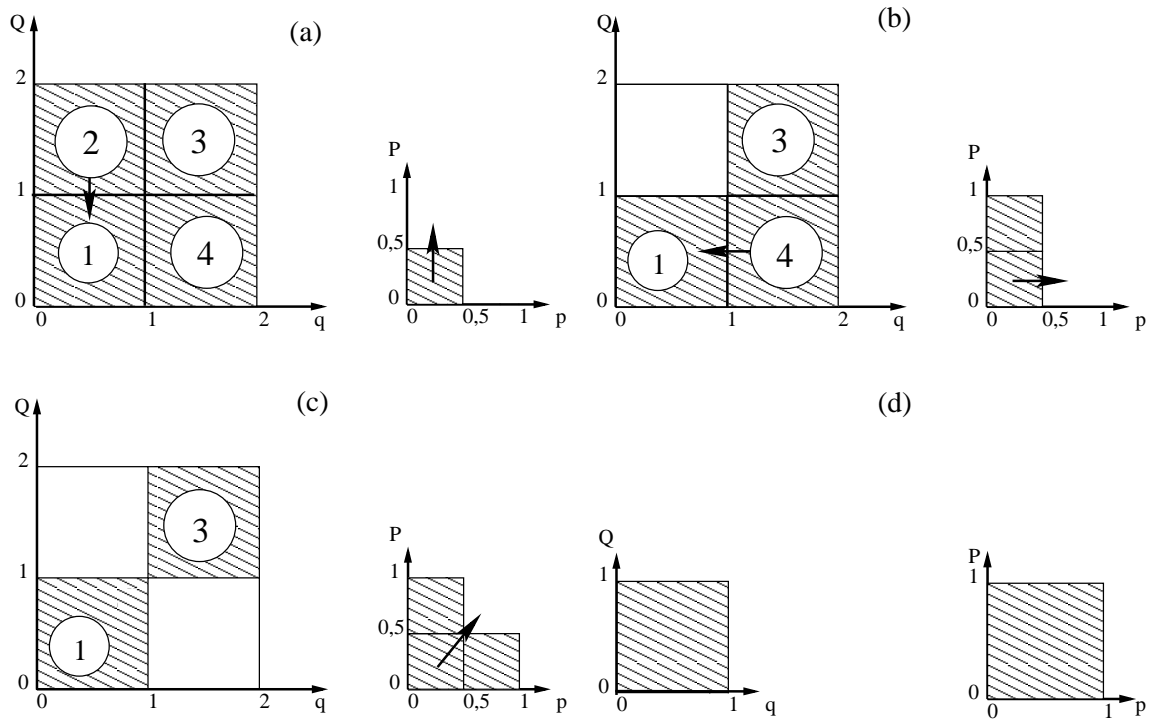


Figura 3.7: Representação geométrica esquemática da ação das funções módulo em dois Mapas do Padeiro não acoplados. (a) O bloco 2, que representa os pontos no intervalo $[0, 1) \times [1, 2)$ do plano $q \times Q$, será sobreposto ao bloco 1, enquanto que o bloco do plano $p \times P$ será duplicado e deslocado na direção indicada. (b) Os pontos do intervalo $[1, 2) \times [0, 1)$ (bloco 4) serão sobrepostos aos do intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ (plano $q \times Q$) e novamente haverá uma duplicação no plano $p \times P$ deslocando-os para o intervalo $[1/2, 1) \times [0, 1/2)$. (c) Finalmente deslocaremos o bloco 3 sobre a região do bloco 1 no plano $q \times Q$, enquanto no plano $p \times P$ ocorre a última duplicação com o deslocamento para o intervalo $[1/2, 1) \times [1/2, 1)$. (d) Tanto o plano $q \times Q$ quanto o $p \times P$ voltam a ocupar cada um o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$. Notar que o deslocamento dos blocos nesta ordem mantém os mapas desacoplados, mas outras sequências seriam possíveis e estas gerariam uma classe de mapas acoplados.

plano $p \times P$, assim quando deslocamos um bloco do plano $q \times Q$ precisamos deslocar outro no plano $p \times P$ de forma a mantermos a relação biunívoca entre os pontos no tempo n e no tempo $n + 1$. Se isto não ocorrer, não há preservação de área, já que isto implicaria em termos diferentes conjuntos de pontos (p_n, P_n, q_n, Q_n) evoluindo para um mesmo ponto $(p_{n+1}, P_{n+1}, q_{n+1}, Q_{n+1})$.

Agora ao aplicarmos um acoplamento direto entre dois Mapas do Padeiro, obtemos no caso geral (antes da introdução das funções módulo),

$$\begin{aligned}
 q_{n+1} &= (2 + A)q_n - A\alpha Q_n \\
 Q_{n+1} &= (2 + B)Q_n - B\beta q_n \\
 p_{n+1} &= \frac{p_n + 2Cp_n + 2C\sigma P_n}{2} \\
 P_{n+1} &= \frac{P_n + 2DP_n + 2D\lambda p_n}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A primeira consequência geométrica disto é que nem no plano $q \times Q$, nem no plano $p \times P$, no tempo “ $n + 1$ ” (antes do reordenamento de blocos) teremos retângulos, mas sim situações como a figura 3.8 apresenta. Ainda temos uma expansão no plano $q \times Q$ e uma contração (na mesma proporção) em $p \times P$ e agora precisamos associar o reordenamento do plano $q \times Q$ ao intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ com o reordenamento em $p \times P$, neste mesmo intervalo. Porém agora a situação está bem mais difícil e, ao mesmo tempo, bem mais rica, haja visto que podemos “criar” diferentes acoplamentos entre os mapas, simplesmente adotando diferentes formas de reordenamento dos blocos em $q \times Q$ e $p \times P$.

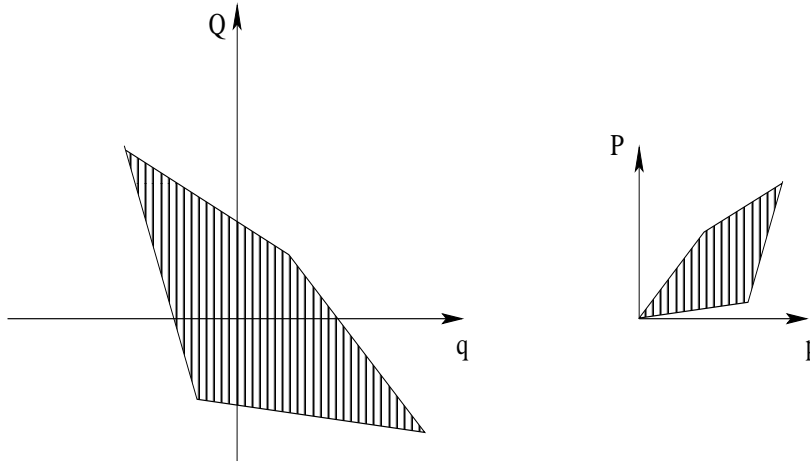


Figura 3.8: À esquerda, região para onde evoluiriam os pontos no plano $q \times Q$ no caso de um acoplamento geral. À direita, o mesmo para os pontos no plano $p \times P$.

A questão é como levar os pontos nos planos $q \times Q$ e $p \times P$ a ocuparem novamente o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$, lembrando que as reconstruções dos planos $q \times Q$ e $p \times P$ estão interligadas.

No plano $q \times Q$ não há maiores problemas, como exporemos no próximo capítulo. A principal dificuldade está em não haver maneira de preenchermos o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ em $p \times P$, fazendo apenas duplicações e translações do bloco transformado (ver fig. 3.9).

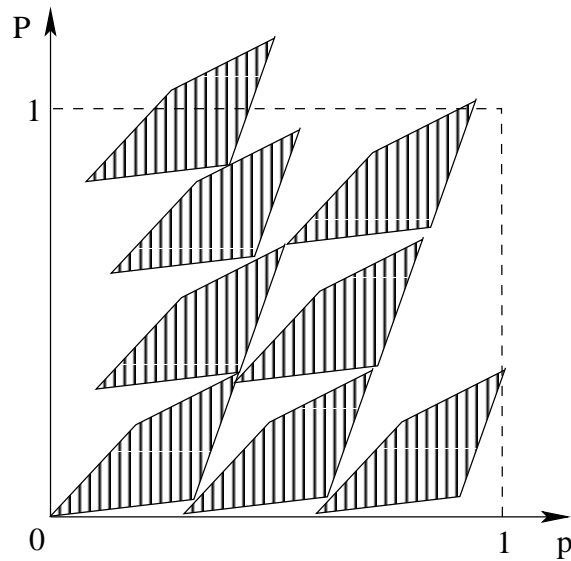


Figura 3.9: Aqui expomos o resultado de possíveis duplicações e translados do polígono formado no plano $p \times P$ imediatamente após a ação do mapa, mas antes da ação das funções módulo. Observe que não é possível preencher o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ apenas com as duplicações e translações do bloco original.

Só poderemos preencher o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ em $p \times P$ se fizermos uma reconstrução, transformando o polígono da figura 3.8 em um retângulo ou quadrado.

No caso da figura 3.8, um reordenamento de blocos nos planos $q \times Q$ e $p \times P$ é bastante complicado, mas não é impossível. De fato sempre é possível reordenar um polígono transformando-o por exemplo em um retângulo ou quadrado [70]. Isto foi comprovado por Willian Wallace (1807) ou por P. Gerwein (1833), não se sabe ao certo [71]. Porém este reordenamento implica em “cortes” e rotações que em um caso geral são bastante complexos, como mostra o exemplo da figura 3.10.

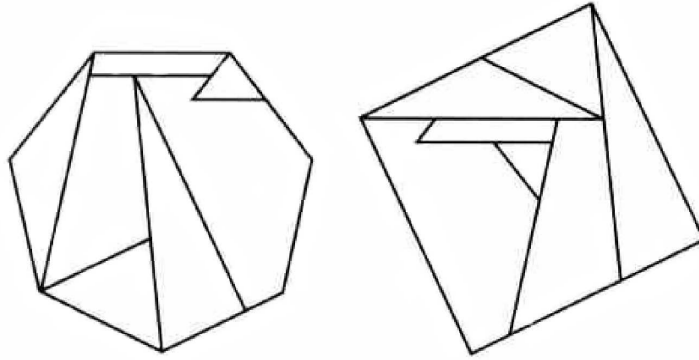


Figura 3.10: Transformação de um heptágono em um quadrado, proposta por Gavin Theobald [71].

No entanto podemos ter situações menos complexas, tal qual a figura 3.11 sugere. Note porém que mesmo nesta situação não conseguimos preencher o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ (vide fig. 3.12), a menos que seja feito um reordenamento prévio. A figura 3.13 sugere algumas formas de reordenarmos blocos em $p \times P$ para uma situação tal qual exposta na figura 3.11. Observe que aqui é possível transformamos o polígono em um retângulo com certa facilidade. Mas ainda neste caso vemos que há pelo menos três formas distintas de reordenarmos os blocos (fig. 3.13).

Desta maneira surgem algumas questões: será possível quantizar mapas que apresentam tais “reconstruções” no espaço de fase? Se sim, quando e sob quais circunstâncias?

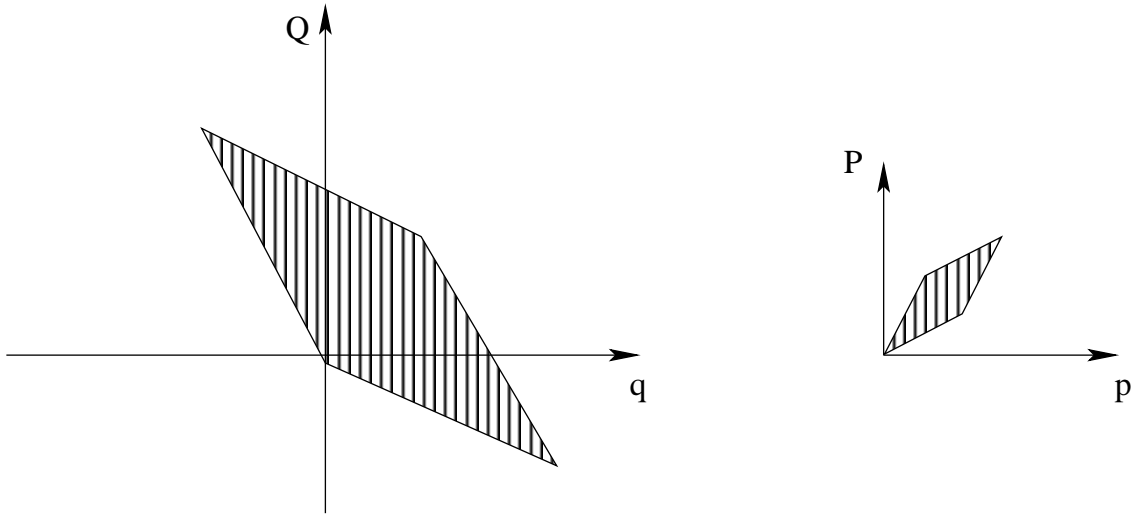


Figura 3.11: À esquerda, região para onde evoluiriam os pontos no plano $q \times Q$ em um caso menos complexo. À direita, o mesmo para os pontos no plano $p \times P$.

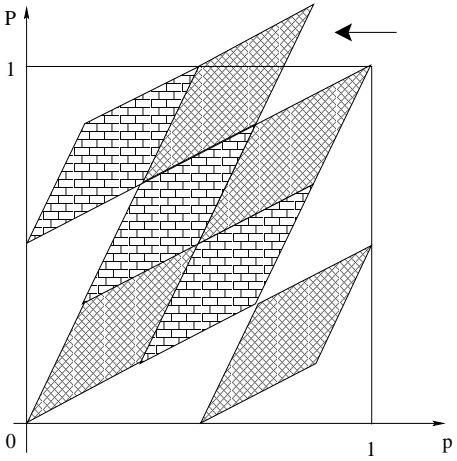


Figura 3.12: Aqui expomos o resultado de possíveis duplicações e translados do losango formado no plano $p \times P$ imediatamente após a ação do mapa, mas antes da ação das funções módulo. Observe que não é possível preencher o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ apenas com as duplicações e translações do bloco original, pois isto implica em termos regiões, como a indicada pela seta, onde o losango ultrapassa o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$.

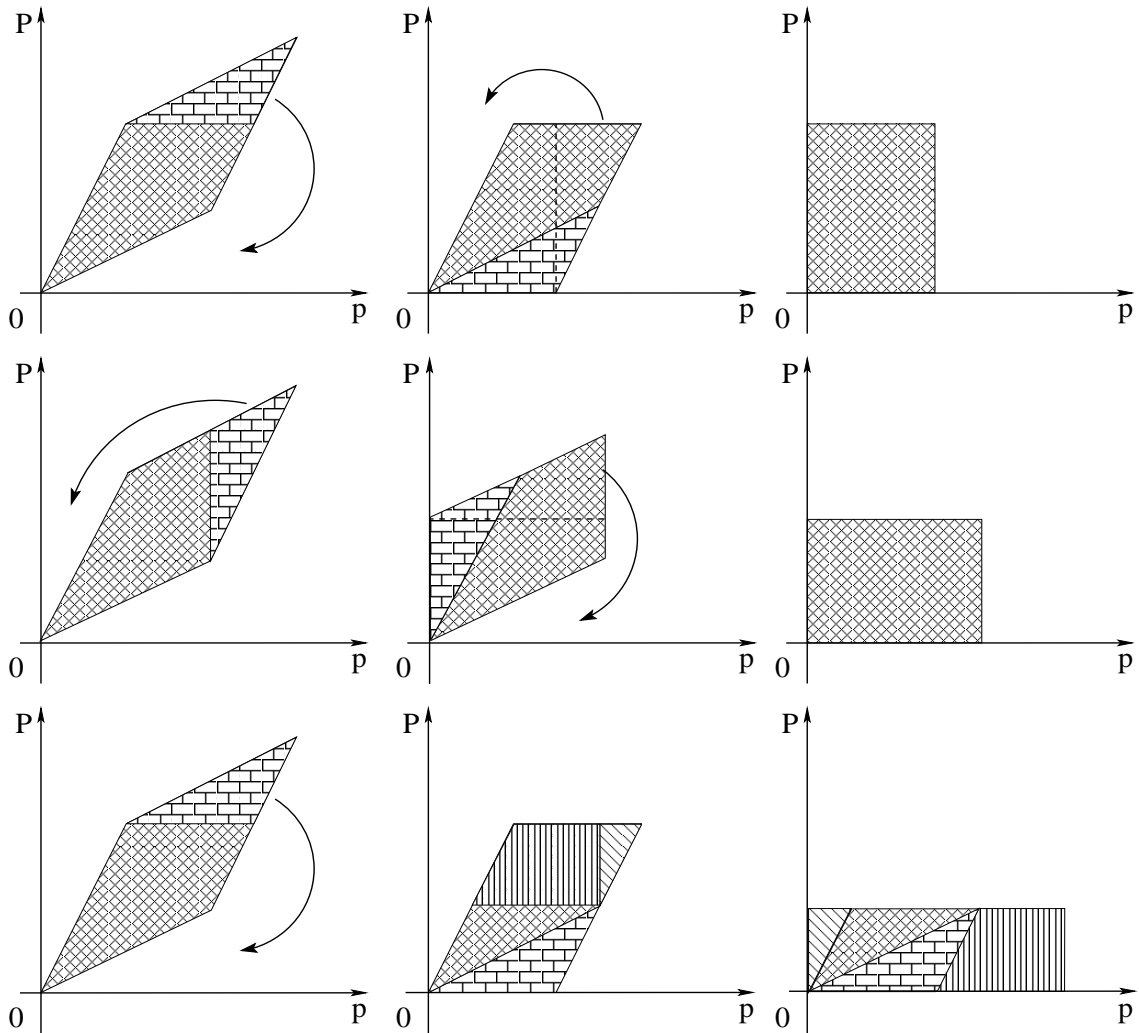


Figura 3.13: Aqui mostramos três maneiras distintas pelas quais seria possível transformar o losango formado plano $p \times P$ após a ação do mapa, mas antes da ação das funções módulo, em um retângulo.

Do ponto de vista clássico, não há problema em proceder tais reconstruções, e assim podemos criar diferentes famílias de mapas clássicos com tais reconstruções.

Porém isto gera problemas se quisermos quantizar tais mapas. Nas reconstruções mostradas na figura 3.13, a dinâmica dependeria explicitamente na construção de funções módulo dependentes de p_n e P_n , logo não podemos escrever a função geratriz deste sistema, uma vez que F é $F(p_{n+1}, P_{n+1}, q_n, Q_n)$.

Este é um ponto chave na construção do operador de evolução temporal para o mapa quântico e será abordado no próximo capítulo, por hora continuaremos a discutir outros elementos necessários para a quantização.

3.2 O propagador semiclássico

Tendo os mapas acoplados definidos, construiremos a versão quântica destes através do propagador semiclássico na representação de Kirkwood [26],

$$\langle p_{n+1} P_{n+1} | U | q_n Q_n \rangle = \mathcal{C} \exp[i\hbar^{-1} F(p_{n+1}, P_{n+1}, q_n, Q_n) + i\alpha]. \quad (3.10)$$

Onde \mathcal{C} é a constante de normalização, sendo $\mathcal{C} = |1/D|$, e

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial p_{n+1} \partial q_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial p_{n+1} \partial Q_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial P_{n+1} \partial q_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{n+1} \partial Q_n} \end{vmatrix}.$$

Este propagador interpola exatamente o propagador discreto quando $\alpha = 0$ [26] e as variáveis p e q são discretizadas.

Para quantizá-los através do uso do propagador semiclássico, precisamos, como visto no capítulo anterior, da função geratriz, já apresentada, e da base de autovetores.

Seguindo o proposto por Balazs e Voros [22], os autovetores serão, $|p\rangle$, $|P\rangle$, $|q\rangle$ e $|Q\rangle$, com autovalores, $p = (m + \chi_p)/N$, $P = (n + \chi_P)/N$, $q = (k + \chi_q)/N$ e

$Q = (l + \chi_Q)/N$, onde N está relacionado com a constante de planck \hbar pela relação $N = 1/2\pi\hbar$ conforme discutido no capítulo anterior e χ é uma fase.

Apenas os mapas simétricos apresentam simetria por reflexão, ou simetria R [23]. Isto significa que se trocarmos $q \rightarrow 1 - q$, $Q \rightarrow 1 - Q$, $p \rightarrow 1 - p$ e $P \rightarrow 1 - P$, o mapa permanece inalterado. Esta simetria do mapa clássico só aparece no mapa quantizado se estabelecermos os autovetores $|p \rangle$, $|P \rangle$, $|q \rangle$ e $|Q \rangle$ tendo autovalores, $p = (m + \frac{1}{2})/N$, $P = (n + \frac{1}{2})/N$, $q = (k + \frac{1}{2})/N$ e $Q = (l + \frac{1}{2})/N$, semelhantemente ao que ocorre com o Mapa do Padeiro Quântico [23].

3.2.1 Construção da matriz

A matriz do propagador (B) pode ser implementada por inúmeros caminhos, porém todos devem resolver o problema inicial de relacionar os quatro números quânticos aos dois índices “i” e “j” da linha e coluna da matriz respectivamente. Como temos vários índices e queremos construir uma matriz que possui somente dois índices, devemos fazer $b_{nm} = b_{(n_1 n_2, m_1 m_2)} = b_{ij}$, ou seja, $i = (n_1 n_2)$ e $j = (m_1 m_2)$. Por exemplo, supondo que $n_j = 1, 2$ e $m_j = 1, 2$, podemos gerar uma matriz com dimensão quatro, onde os elementos de matriz se dispõem da forma exposta na figura 3.14.

Para este exemplo, em particular, fizemos os números quânticos variarem em ordem crescente (analogamente a um hodômetro), mas vale lembrar que a matriz poderia ter sido montada de outras formas, desde que um único critério lógico de desdobramento e disposição dos números quânticos fosse adotado.

Também devemos notar que o mapa clássico acoplado não permite algumas transições, assim como o Mapa do Padeiro não acoplado também não permite. Para entendermos melhor o que ocorre quando temos dois Mapas do Padeiro acoplados, vamos observar o que aconteceria se tivéssemos dois Mapas do Padeiro não acoplados.

		$q \ Q$			
		11	12	21	22
$p \ P$	11	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
	12	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}
	21	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}
	22	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}

Figura 3.14: A cada célula da matriz estão associados 4 números quânticos, 2 relativos aos autovetores de posição e 2 relativos aos autovetores de momento. Desta forma a célula b_{14} , por exemplo, tem associados a si os autovetores de posição no tempo n , $q = 2$, $Q = 2$ e os autovetores de momento no tempo $n + 1$, $p = 1$, $P = 1$.

Neste caso as equações dinâmicas serão,

$$\begin{aligned}
 q_{n+1} &= 2q_n - [2q_n] \\
 Q_{n+1} &= 2Q_n - [2Q_n] \\
 p_{n+1} &= \frac{p_n}{2} + \frac{[2q_n]}{2} \\
 P_{n+1} &= \frac{P_n}{2} + \frac{[2Q_n]}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Desta forma na equação 3.12 se $q_n < 1/2$, p_{n+1} fica restrito ao intervalo $[0, 1/2)$, ou seja, a matriz do propagador não pode permitir que hajam transições entre elementos de matriz que representem $q_n < 1/2$ e $p_{n+1} > 1/2$. O mesmo vale se $Q_n < 1/2$, neste caso P_{n+1} também fica restrito ao intervalo $[0, 1/2)$, e os elementos da matriz que representam uma transição entre $Q_n < 1/2$ e $p_{n+1} > 1/2$ devem ser nulos.

Assim se ordenarmos (q, Q) (colunas da matriz) de tal forma que primeiro estejam ordenados os valores de $q, Q < 1/2$, e da mesma forma ordenarmos (p, P) (linhas

da matriz) de tal forma que primeiro estejam ordenados os valores de $p, P < 1/2$, obteremos o primeiro bloco da matriz do propagador exposta abaixo.

$$\langle p_{n+1}P_{n+1}|U|q_nQ_n\rangle = \begin{pmatrix} B_{N^2/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B'_{N^2/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B''_{N^2/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B'''_{N^2/4} \end{pmatrix}.$$

Assim seguindo o raciocínio exposto, vemos que para dois Mapas do Padeiro não acoplados a matriz apresenta 4 blocos.

Com a introdução do acoplamento, a estrutura de blocos na matriz do propagador assumirá formas diversas que serão explicadas quando da quantização dos mesmos.

No próximo capítulo apresentamos a primeira quantização de mapas acoplados.

Capítulo 4

A Primeira Quantização de Mapas Acoplados

Neste capítulo apresentaremos a quantização de dois Mapas do Padeiro acoplados assimetricamente. Embora o acoplamento assimétrico, a primeira vista, possa parecer mais complexo, o exemplo que discutiremos é, sem dúvida, o mais simples e será analisado em detalhes para expor os procedimentos necessários para a quantização de nossos mapas acoplados.

4.1 O Mapa Assimétrico

Inicialmente vamos relembrar a construção de um mapa clássico com acoplamento assimétrico. Conforme exposto no capítulo anterior, estes mapas têm a forma

geral,

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= (2 + A)q_n - BQ_n + \text{função módulo 1} \\
Q_{n+1} &= (2 + B)Q_n - Aq_n + \text{função módulo 2} \\
p_{n+1} &= \frac{2 + B}{K}p_n + \frac{A}{K}P_n + \text{função módulo 3} \\
P_{n+1} &= \frac{2 + A}{K}P_n + \frac{B}{K}p_n + \text{função módulo 4.}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde $K = 4 + 2A + 2B$.

Aqui usaremos, $A = -4$, $\alpha = -1/2$, e conseqüentemente $B = -2$, $\beta = -2$, que resulta no mapa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= 2Q_n - 2q_n + \text{função módulo 1} \\
Q_{n+1} &= 4q_n + \text{função módulo 2} \\
p_{n+1} &= \frac{P_n}{2} + \text{função módulo 3} \\
P_{n+1} &= \frac{p_n + P_n}{4} + \text{função módulo 4.}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Onde cada “função módulo” contribui no reordenamento dos blocos a cada iterada do mapa. Daqui por diante iremos nos referir a este mapa simplesmente como Mapa Assimétrico.

Após uma iterada, mas ainda antes da aplicação das respectivas funções módulo, os pontos originalmente contidos no intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$, tanto em $q \times Q$ quanto em $p \times P$, evoluem para as regiões mostradas na figura 4.1. Temos assim no plano $q \times Q$ uma área ocupada igual a 8, e no plano $p \times P$ uma área ocupada igual a $1/8$. Desta forma, para reordenarmos os blocos, a área ocupada no plano $p \times P$ terá que ser expandida oito vezes enquanto que a área ocupada em $q \times Q$ é reduzida por um fator 8.

Através de um primeiro reordenamento, exposto na figura 4.2, podemos identificar com mais facilidade os oito blocos de área 1 que podemos formar no plano $q \times Q$. Também no plano $p \times P$ podemos fazer um reordenamento equivalente (ver fig. 4.3), obtendo assim o que chamaremos de versão 1 do Mapa Assimétrico.

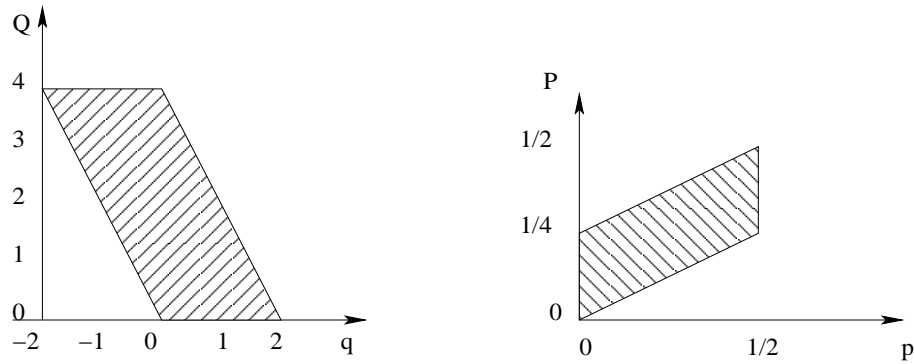


Figura 4.1: Regiões para onde o Mapa Assimétrico leva os pontos nos planos $q \times Q$ e $p \times P$ antes da aplicação das funções módulo.

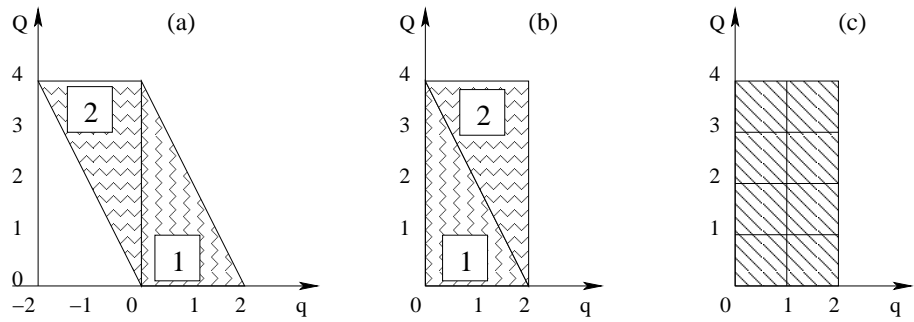


Figura 4.2: (a) Região para onde o Mapa Assimétrico leva os pontos no planos $q \times Q$ antes da aplicação das funções módulo é dividida em duas parte, a região 1 para $q \geq 0$ e a região 2 para $q < 0$. (b) Reposicionamos a região 2, obtendo assim uma forma retangular que em (c) vemos ser composta por oito blocos de área 1.

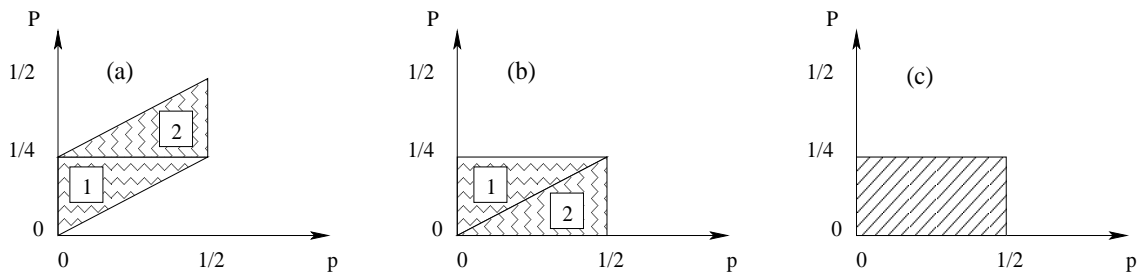


Figura 4.3: (a) Região no plano $p \times P$ ocupada pelos pontos evoluídos pela aplicação do mapa antes da ação das funções módulo, pode ser dividida em dois blocos, 1 e 2. (b) Se realocarmos o bloco 2 para a nova posição indicada, obtemos uma região retangular de área $1/8$ destacada em (c), este efeito é obtido pela função h_1 que surge na versão 1 do Mapa Assimétrico (ver texto).

Uma segunda versão deste mapa, que chamaremos de versão 2, pode ser obtida quando fazemos a reestruturação do plano $p \times P$ sem este reordenamento prévio. A forma final como o plano $p \times P$ será ocupado para cada versão está exposta na figura 4.4.

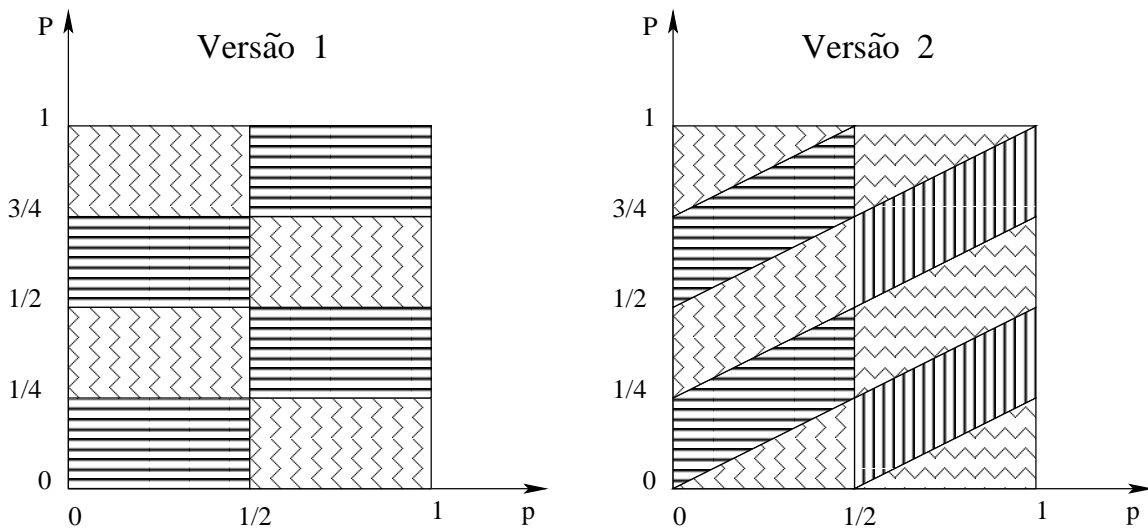


Figura 4.4: À esquerda a figura demonstra como o plano $p \times P$ terá intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ preenchido após o reordenamento de blocos na versão 1 do Mapa Assimétrico. À direita o mesmo para a versão 2 do Mapa Assimétrico.

Como existem duas versões do nosso mapa, sendo que o que as distingue é a forma como o plano $p \times P$ terá o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ preenchido pelos blocos, passaremos agora a detalhar cada uma em separado.

Versão 1

Na primeira versão, como dito anteriormente, os pontos no plano $q \times Q$ são reordenados conforme mostra a figura 4.2, e os pontos $p \times P$ de acordo com o exposto na figura 4.3. A partir de então, os blocos em $q \times Q$ e $p \times P$ são reordenados conforme expõe a figura 4.5. Ou seja, agora temos retângulos em $q \times Q$ e $p \times P$, e passamos então a rebater os blocos em $q \times Q$ ao mesmo tempo que duplicamos os blocos em $p \times P$, seguindo exatamente o mesmo procedimento exposto no capítulo anterior para o caso de dois mapas desacoplados. É importante frisar que desta forma teremos duas duplicações na direção de p , e quatro na direção de P . As duas na direção p correspondendo a contração de q , e as quatro na direção P correspondendo a contração de Q .

Vamos agora mostrar as funções módulo, que adicionadas à equação 4.2, que define este mapa, tem o efeito de gerar exatamente as translações explanadas anteriormente.

Seja então a equação 4.2 reescrita como,

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 2Q_n - 2q_n - f_1 \\ Q_{n+1} &= 4q_n - f_2 \\ p_{n+1} &= \frac{P_n}{2} + \frac{g_1}{2} \\ P_{n+1} &= \frac{p_n + P_n}{4} + \frac{f_2}{4} - \frac{h_1}{4}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde,

$$f_1 = \begin{cases} 1 & , \quad 2Q_n - 2q_n \geq 1; \\ 0 & , \quad 0 \leq 2Q_n - 2q_n < 1; \\ -1 & , \quad -1 \leq 2Q_n - 2q_n < 0; \\ -2 & , \quad 2Q_n - 2q_n < -1. \end{cases}$$

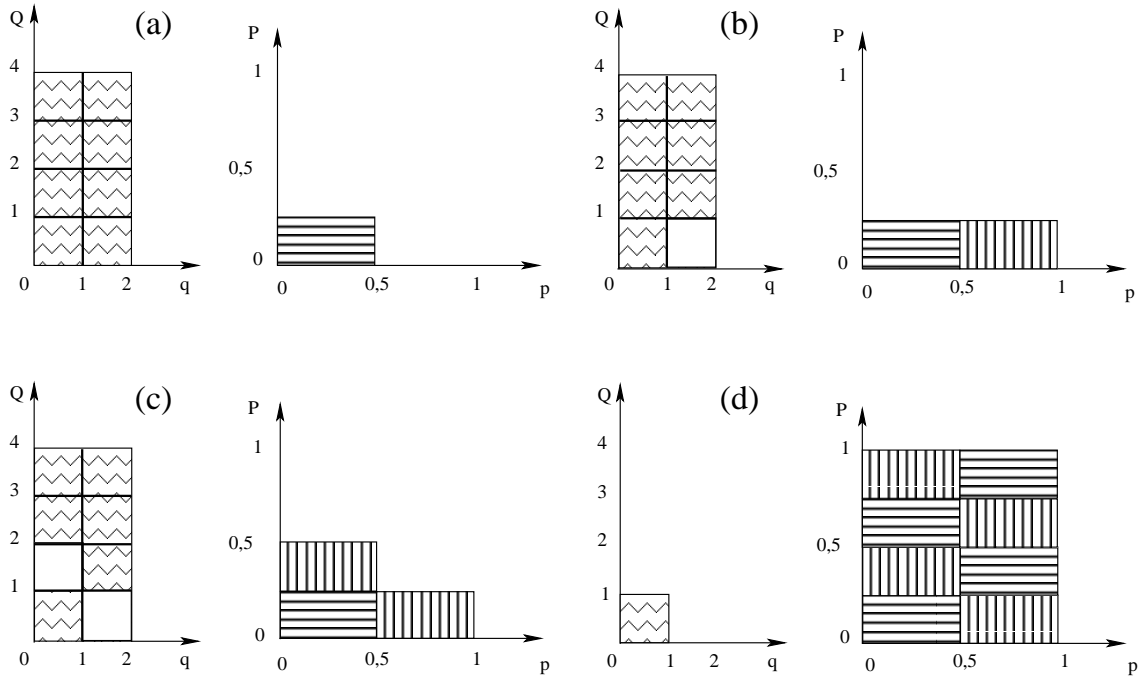


Figura 4.5: (a) Região ocupada nos planos $q \times Q$ e $p \times P$ após a reordenação exposta nas figuras 4.2 e 4.3. (b) Ao deslocarmos o bloco que ocupava o intervalo $[1, 2) \times [0, 1)$ no plano $q \times Q$, para o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$, duplicamos e transladamos um bloco no plano $p \times P$ para a posição indicada. (c) Agora transladamos o bloco que ocupava o intervalo $[0, 1) \times [1, 2)$ no plano $q \times Q$ para o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ e duplicamos e transladamos mais um bloco no plano $p \times P$ para a posição indicada. (d) Seguindo o mesmo procedimento exposto anteriormente por fim ambos os planos ocuparão densamente e exclusivamente o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$.

$$f_2 = \begin{cases} 3 & , \quad 4q_n \geq 3; \\ 2 & , \quad 2 \leq 4q_n < 3; \\ 1 & , \quad 1 \leq 4q_n < 2; \\ 0 & , \quad 4q_n < 1. \end{cases}$$

$$g_1 = \begin{cases} 0 & , \quad f_1 = -2; \\ 1 & , \quad f_1 = -1; \\ 0 & , \quad f_1 = 0; \\ 1 & , \quad f_1 = 1. \end{cases}$$

$$h_1 = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{p_n+P_n}{4} \geq 1/4; \\ 0 & , \quad \frac{p_n+P_n}{4} < 1/4. \end{cases}$$

As funções f_1 , f_2 , g_1 e h_1 agem nos mapas acoplados produzindo o efeito geométrico exposto nas figuras 4.2, 4.3 e 4.5. Especificamente, f_1 produz os deslocamentos de blocos na direção q do plano $q \times Q$, f_2 produz os deslocamentos de blocos na direção Q do mesmo plano e as duplicações e deslocamentos na direção P do plano $p \times P$, enquanto que g_1 está relacionada com f_1 , produzindo as duplicações e translados na direção p do plano $p \times P$. Por fim h_1 produz o reordenamento no plano $p \times P$ exposto na figura 4.3. É importante ressaltar que as funções f_1 e f_2 , nada mais são do que funções do tipo mod 1.

Versão 2

Na versão 2, mantemos a forma “natural” apresentada no plano $p \times P$ após a iterada (ver fig. 4.1), e apenas repetimos o bloco quatro vezes na direção P e duas vezes na direção p , sempre em associação direta com os rebatimentos nas direções Q e q , respectivamente conforme mostra a figura 4.6. E ainda transladamos o “excedente” (o que ultrapassa a linha $P = 1$) para o início (logo acima da linha $P = 0$), preenchendo desta maneira todo o plano $p \times P$, bem como o plano $q \times Q$.

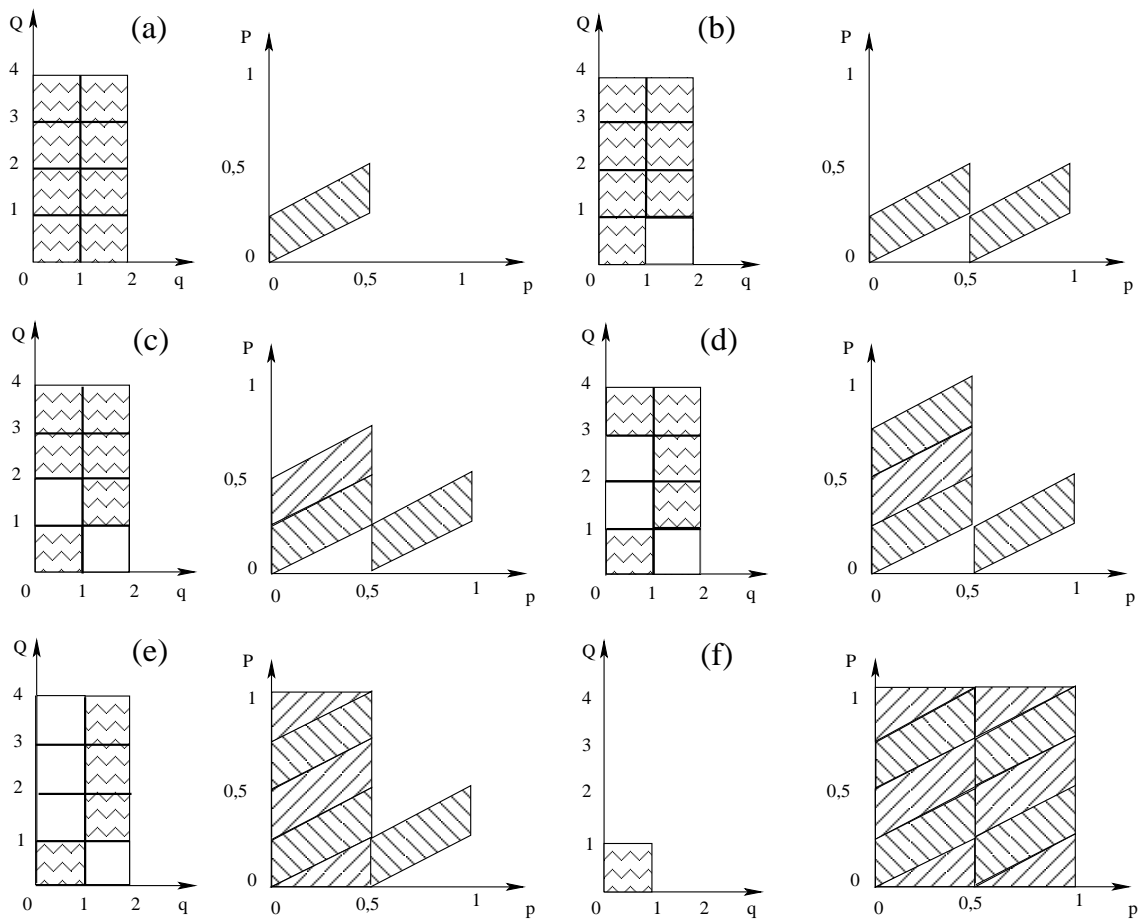


Figura 4.6: (a) Região ocupada no plano $q \times Q$, obtida após a reordenação exposta na figura 4.2, enquanto que no plano $p \times P$ mantemos agora a mesma região para onde os pontos evoluem conforme mostra a figura 4.1. (b) Deslocamos o bloco que ocupava o intervalo $[1, 2) \times [0, 1)$ no plano $q \times Q$, para o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$, e duplicamos e transladamos um bloco no plano $p \times P$ para a posição indicada. (c) Agora transladamos o bloco que ocupava o intervalo $[0, 1) \times [1, 2)$ no plano $q \times Q$ para o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$ e duplicamos e transladamos mais um bloco no plano $p \times P$ para a posição indicada. (d) Mantemos o mesmo procedimento para mais um par de blocos, um em $q \times Q$ e outro em $p \times P$. (e) Agora o bloco transladado no plano $p \times P$ ultrapassaria a linha $P = 1$, assim sendo a parte excedente passa para a região triangular localizada logo acima de $P = 0$. (f) Mantendo o procedimento exposto, finalmente ambos os planos ocuparão densamente o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$.

Assim esta versão o Mapa Assimétrico clássico (eq. 4.2) passa a ser descrita pela equação,

$$\begin{aligned}
 q_{n+1} &= 2Q_n - 2q_n - f_1 \\
 Q_{n+1} &= 4q_n - f_2 \\
 p_{n+1} &= \frac{P_n}{2} + \frac{g_1}{2} \\
 P_{n+1} &= \frac{p_n + P_n}{4} + \frac{f_2}{4} - h_2.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Onde as funções f_1 , f_2 , e g_1 são iguais ao da versão anterior e,

$$h_2 = \begin{cases} 0 & , \quad \frac{p_n + P_n}{4} + \frac{f_2}{4} < 1; \\ 1 & , \quad \frac{p_n + P_n}{4} + \frac{f_2}{4} \geq 1. \end{cases}$$

A função h_2 garante o efeito exposto na figura 4.6(e), ou seja, assegura o traslado do excedente que ultrapassa a linha $P = 1$ para a posição logo acima da linha $P = 0$.

Evidentemente a evolução de ambas as versões é idêntica no plano $q \times Q$, mas no plano $p \times P$ não. Mas para algumas regiões do plano $p \times P$ a evolução também coincidirá. As figuras 4.7 e 4.8 mostram a evolução de conjuntos de pontos no espaço de fase clássico $q \times Q$ e $p \times P$, onde são apresentadas as duas situações descritas, ou seja, quando a evolução difere no plano $p \times P$ (fig. 4.7) e quando coincide em ambos os planos (fig. 4.8).

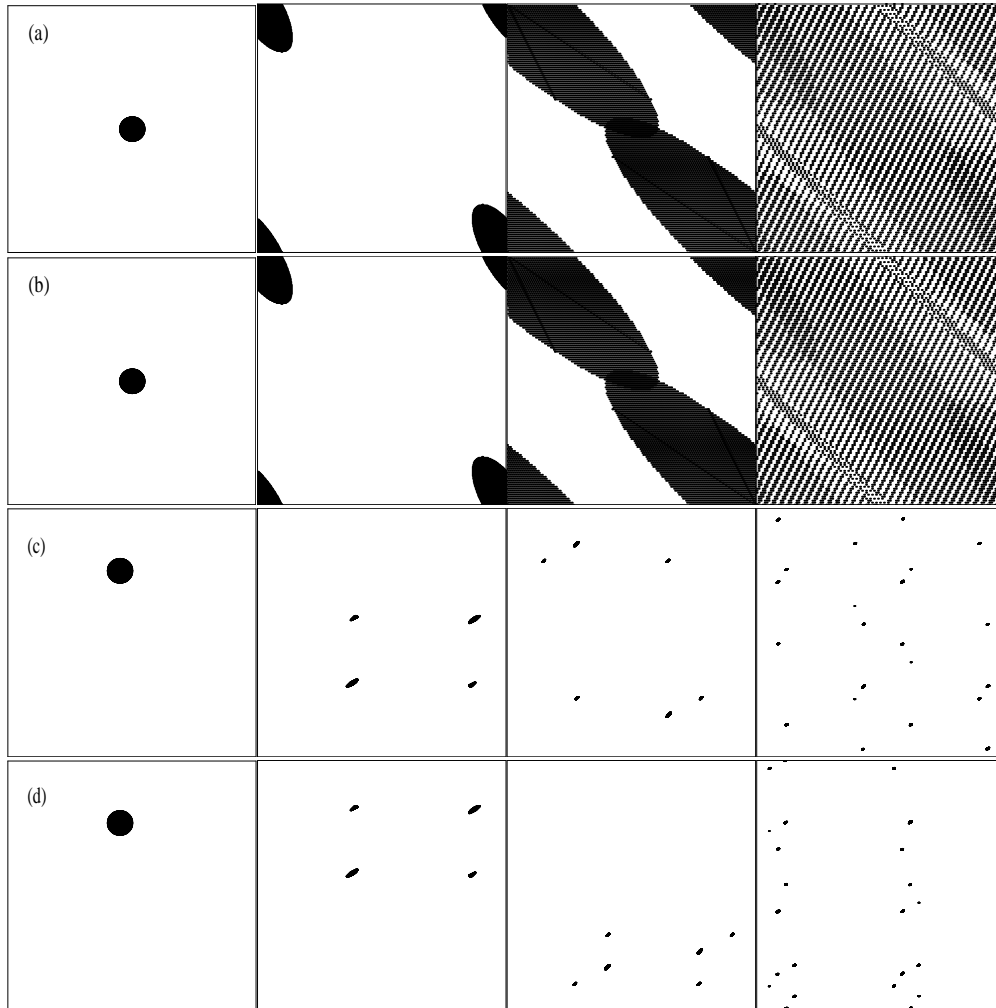


Figura 4.7: Aqui apresentamos a comparação entre as evoluções clássicas das duas versões do Mapa Assimétrico. Sempre apresentamos a região originalmente ocupada e em seguida as três primeiras iteradas. Em (a) temos a evolução clássica vista no plano $q \times Q$ a partir de um conjunto de pontos centrados em $q = 0,5$ e $Q = 0,5$, para a versão 1 do mapa, enquanto que em (b) temos a evolução do mesmo conjunto de pontos para a versão 2. Obviamente as evoluções são idênticas, haja visto que a diferença entre as versões está na evolução dos p 's. Em (c) e (d) temos a evolução clássica vista no plano $p \times P$ para as versões 1 e 2 respectivamente, de um conjunto de pontos centrados em $p = 0,45$, $P = 0,75$ e aqui as evoluções diferem como esperado.

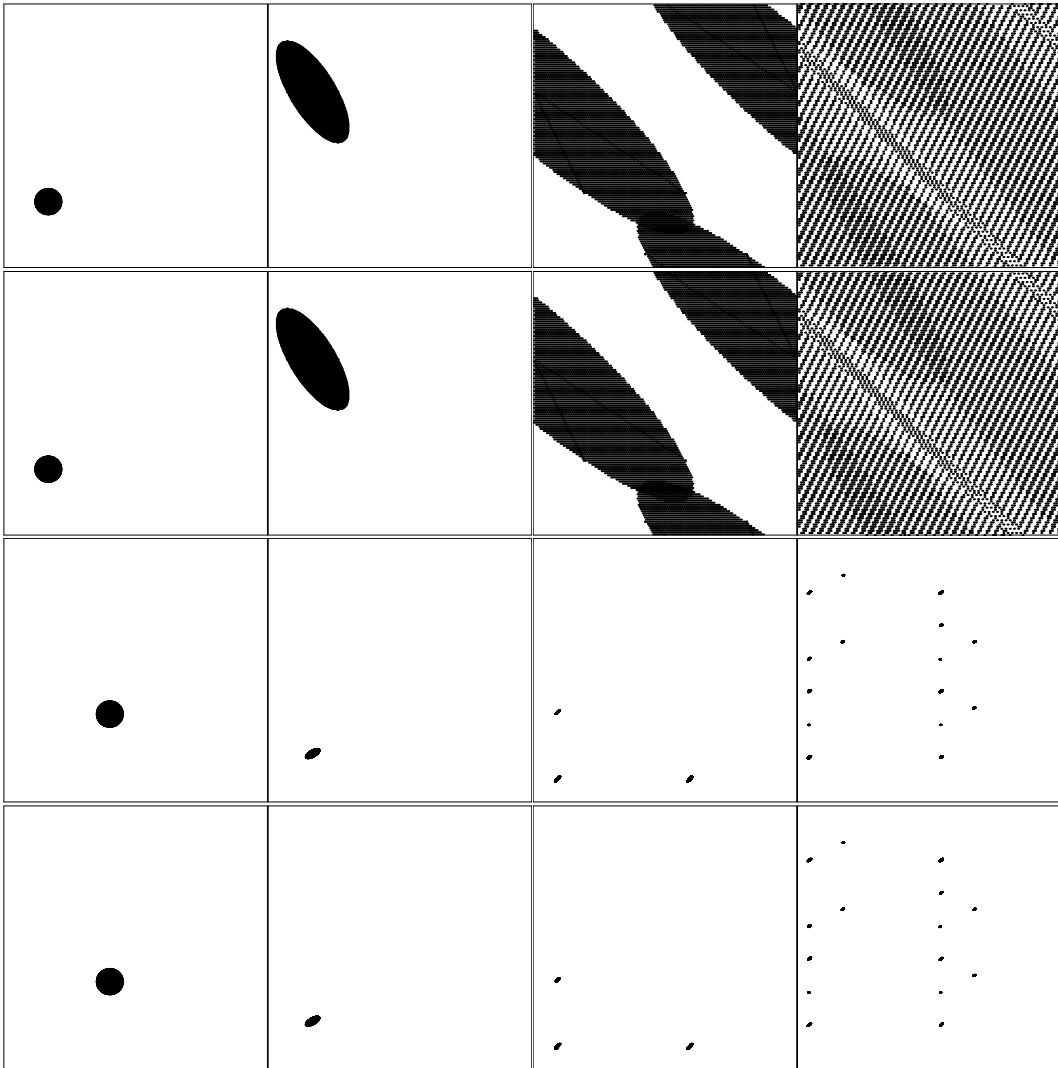


Figura 4.8: O mesmo que na figura anterior mas com $q = 1/6$ e $Q = 1/4$, no plano $q \times Q$, e $p = 2/5$, $P = 1/3$ no plano $p \times P$. Aqui as evoluções das duas versões coincidem nos dois planos.

4.2 A Quantização

O objetivo desta seção é apresentar a quantização dos Mapas do Padeiro acoplados, Mapa Assimétrico, nas versões apresentadas até aqui. Para tal iremos discutir primeiramente os ingredientes necessários para a obtenção do propagador.

A função geratriz

Tendo o mapa clássico bem definido, o próximo passo para a quantização via método semiclássico é a obtenção da função geratriz. Porém não é possível se obter funções geratrizes que representem quaisquer das versões, isto em função das funções módulo h_1 (versão 1) e h_2 (versão 2) serem escritas em termos de p_n e P_n , lembrando que a função geratriz F é $F(p_{n+1}, P_{n+1}, q_n, Q_n)$.

Entretanto, existe uma forma de contornar este problema, permitindo que os mapas acoplados sejam quantizados, mesmo com a dificuldade técnica de se obter a função geratriz F dos mapas. Os elementos que nos permitem resolver a dificuldade com F são: a periodicidade intrínseca da função F e a definição adequada da estrutura de blocos na matriz do propagador. Estes pontos serão discutidos a seguir. Para tal, apesar de não ser a função geratriz dos mapas em 4.3 e 4.4, vamos considerar a seguinte função geratriz efetiva,

$$\begin{aligned} F(q_n, Q_n, p_{n+1}, P_{n+1}) = & (2Q_n - 2q_n) \cdot p_{n+1} + 4q_n \cdot P_{n+1} - f_1 \cdot p_{n+1} + \\ & - f_2 \cdot P_{n+1} + (g_1 - f_2) \cdot q_n - g_1 \cdot Q_n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Onde f_1 , f_2 e g_1 são os mesmos já expostos anteriormente.

A estrutura de blocos da matriz do propagador

Vimos no capítulo anterior que para dois Mapas do Padeiro não acoplados, a

matriz do propagador apresenta a seguinte estrutura (vide seção 3.2.1),

$$\langle p_{n+1}P_{n+1}|U|q_nQ_n \rangle = \begin{pmatrix} B_{N^2/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B'_{N^2/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B''_{N^2/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B'''_{N^2/4} \end{pmatrix}.$$

O objetivo da estrutura de blocos na matriz do propagador é impedir que hajam transições para as regiões classicamente proibidas, ou seja, evoluções não permitidas dos pontos clássicos.

Na quantização do Mapa do Padeiro, proposta por Balazs e Voros [22], assim como na proposta posterior de Ozorio e Saraceno [26], os blocos na matriz que representa o operador de evolução temporal têm este papel fundamental (vide seção 2.4.1).

Por conseguinte, temos que identificar quais as transições classicamente proibidas, de forma a construirmos a estrutura de blocos adequada. Isto tem que ser feito em paralelo com uma análise da periodicidade da função F definida pela equação 4.5.

Um aspecto fundamental para nossos propósitos é que a estrutura de blocos está associada à periodicidade da função geratriz. Basicamente a função geratriz fornece uma fase de uma exponencial complexa, portanto se $2\pi F(p_{n+1}, P_{n+1}, q_n, Q_n) = \theta$ e $2\pi F(p'_{n+1}, P'_{n+1}, q'_n, Q'_n) = \theta + \text{múltiplo de } 2\pi$, então $F(p_{n+1}, P_{n+1}, q_n, Q_n)$ é equivalente a $F(p'_{n+1}, P'_{n+1}, q'_n, Q'_n)$.

Desta forma como $F = (2Q_n - 2q_n)p_{n+1} + 4q_nP_{n+1} + \dots$ (os demais termos podem ser omitidos pois não afetarão a periodicidade de F), e os elementos de matriz do propagador são escritos na forma $e^{i.N.2.\pi.F}$, para descobrirmos a periodicidade de F em p e em P basta fazermos,

$$F(p_{n+1} + x, P_{n+1} + y, \dots) = F(p_{n+1}, P_{n+1}, \dots) + \text{inteiro}/N .$$

Onde x representa o “comprimento de onda” de F ao longo da direção p e y representa o mesmo ao longo da direção P .

Assim teremos (omitiremos, por simplicidade de notação, os subscritos n e $n + 1$),

$$(2Q - 2q)p + (2Q - 2q)x + 4qP + 4qy = (2Q - 2q)p + 4qP + \frac{l}{N}.$$

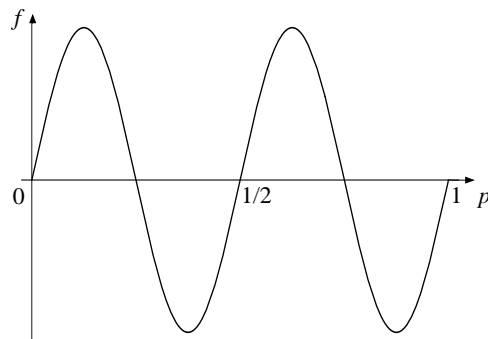
Resultando em

$$2q(2y - x) + 2Qx = l/N.$$

Se fizermos $2y - x = 0$, teremos $y = x/2$, e como Q pode ser escrito na forma k/N e l é um inteiro qualquer, a menor periodicidade é obtida com $k = l = 1$, chegando então a $2x/N = 1/N$, logo

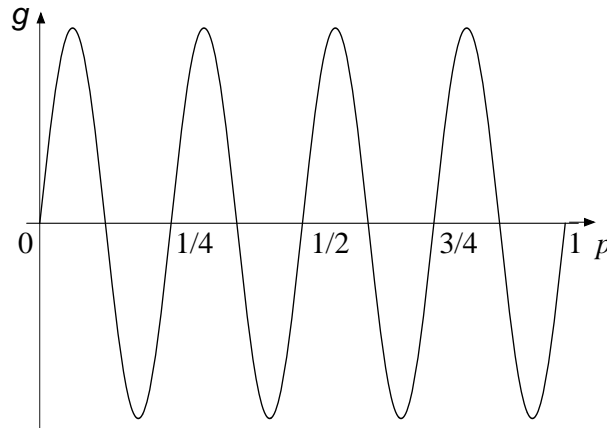
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}, \\ y &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Observe que se desenharmos esquematicamente o gráfico de $f = \text{sen}[2\pi F(p, P_{cte}, q_{cte}, Q_{cte})]$ com p variando de 0 a 1, teremos,



Conseqüentemente, ao longo da direção p do plano $p \times P$ a função geratriz F repete-se duas vezes no intervalo $[0, 1)$. Isto significa que caso não se estabeleça uma estrutura de blocos adequada na matriz do propagador, este não será unitário, pois cada ponto do mapa no tempo n evoluiria para dois pontos distintos no tempo $n + 1$. Assim precisamos definir dois blocos ao longo de p , um para $p \in [0, 1/2)$ e outro para $p \in [1/2, 1)$, ou seja, se há elementos de matriz diferentes de zero dentro de um destes intervalos, no outro intervalo todos os elementos de matriz deverão ser zero. Caso contrário surgiriam as “sombras”, ou seja, haveria evolução para regiões classicamente proibidas, e haveriam linhas iguais na matriz do propagador, o que inviabilizaria a sua unitariedade.

De forma semelhante, se desenharmos esquematicamente o gráfico de $g = \text{sen}[2\pi F(p_{cte}, P, q_{cte}, Q_{cte})]$ com P variando de 0 a 1, teremos,



Usando o mesmo raciocínio anterior, vemos que ao longo de P , como F se repete quatro vezes no intervalo $[0, 1)$, serão necessários quatro blocos. Por exemplo, um para $P \in [0, 1/4)$, outro para $P \in [1/4, 1/2)$ e assim por diante, uma vez que $F(\dots, P_{n+1}, \dots)$ é equivalente a $F(\dots, P_{n+1} + 1/4, \dots)$. Note que esta estrutura de blocos corresponde a escolha da versão 1. Na verdade a periodicidade da função geratriz coincide com os blocos que formam o plano $p \times P$ na figura 4.4 (versão 1).

Desta forma, com um ordenamento adequado das linhas e colunas da matriz do

propagador, $B_{pq} = \langle p_{n+1}P_{n+1}|U|q_nQ_n\rangle$, uma estrutura de blocos correta pode ser criada, conforme exposto a seguir.

$$B_{pq} = \begin{pmatrix} B_{N^2/8}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{N^2/8}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{N^2/8}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{N^2/8}^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{N^2/8}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{N^2/8}^{(6)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{N^2/8}^{(7)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{N^2/8}^{(8)} \end{pmatrix}.$$

Este ordenamento de linhas e colunas deve levar em consideração a seguinte questão: a cada par q, Q está associado um par g_1, f_2 (veja na eq. 4.3 que o valor de g_1 é consequência do valor de f_1), assim só poderão ter valores diferentes de zero os elementos de matriz em cada coluna para os quais a transição clássica é permitida. Observando-se a equação 4.3 e a figura 4.5, vemos que, por exemplo, só há transição para $p \in [1/2, 1)$ quando $g_1 = 1$. Logo se $g_1 = 1$ e $p \in [0, 1/2)$, o elemento de matriz deve ter amplitude nula.

Existem dois valores possíveis para g_1 e quatro para f_2 , logo há oito blocos, e o ordenamento das colunas da matriz se dá de tal forma que primeiramente estão ordenados os valores de q, Q que geram $g_1 = 0$ e $f_1 = 0$, enquanto que nas linhas da matriz estão dispostos os valores de p, P tais que, $p \in [0, 1/2)$ e $P \in [0, 1/4)$. Na sequência dispomos o par q, Q que geram $g_1 = 0$ e $f_1 = 1$, enquanto nas linhas dispomos os pares p, P tais que $p \in [0, 1/2)$ e $P \in [1/4, 1/2)$, e assim por diante.

Todavia o cálculo direto mostra que $F(\dots, P_{n+1} = p_{n+1}/2, \dots)$ é equivalente a $F(\dots, P_{n+1} = p_{n+1}/2 + 1/4, \dots)$, o que significa que F tem periodicidade igual a dos blocos da figura 4.4 (versão 2). Ou seja, também podemos ter $P \in [p/2, p/2 + 1/4)$ e depois $P \in [p/2 + 1/4, p/2 + 1/2)$, e assim sucessivamente, o que representa a escolha feita na versão 2. A aparência da estrutura de blocos na matriz do propagador neste

caso seria igual a da versão 1, mas obtida a partir de outro ordenamento de linhas e colunas.

A conclusão de tudo isto é que com uma mesma função geratriz efetiva, mas com diferentes estruturas de blocos na matriz do propagador, representamos as diferentes estruturas clássicas desejadas.

Mas ainda temos uma questão em aberto: por quê as funções h_1 e h_2 das versões 1 e 2 respectivamente não aparecem na função geratriz efetiva? Primeiramente não há como contemplá-las na função geratriz haja visto que ambas dependem de p_n e P_n , enquanto que a função geratriz F é $F(p_{n+1}P_{n+1}q_nQ_n)$, e em segundo lugar na versão 2 o seu papel é o de devolver P_{n+1} ao intervalo $[0, 1)$. Mas como o propagador é escrito em termos de $e^{2\pi iNF}$, este efeito é automaticamente realizado pelo fato da função exponencial complexa ser cíclica. Na realidade, como já vimos, o “comprimento de onda” desta função na direção P é igual a largura do bloco nesta direção, assim ao impormos a estrutura de blocos à matriz do propagador obtemos o efeito também da função h_1 da versão 1.

A base de autovetores

Como dito no capítulo anterior, para procedermos a quantização precisamos também de uma base de autovetores. Os autovetores, $|q\rangle$, $|Q\rangle$, $|p\rangle$ e $|P\rangle$, têm autovalores, $q_j = \frac{j+\chi_q}{N}$, $Q_k = \frac{k+\chi_Q}{N}$, $p_l = \frac{l+\chi_p}{N}$ e $P_m = \frac{m+\chi_P}{N}$, onde χ é uma fase contida no intervalo $[0, 1)$.

No Mapa do Padeiro quantizado por Balazs e Voros [22] foi usado $\chi_q = \chi_p = 0$, enquanto que Saraceno [23] propôs $\chi_q = \chi_p = 1/2$, de forma a preservar a simetria R (de reflexão), que surge em função do mapa permanecer inalterado quando da troca $q \rightarrow 1 - q$ e $p \rightarrow 1 - p$. Esta simetria não está presente em nenhuma das versões até aqui apresentadas. Posteriormente apresentaremos mapas acoplados que apresentarão esta simetria e a tem preservada na versão quântica quando usamos a fase $1/2$.

A escolha de N

N - o número de autoestados de cada mapa não pode ser qualquer um. Como os oito blocos do plano $p \times P$ apresentam a mesma área, é necessário que cada um seja representado por um número igual de pontos, e isto só ocorre quando N é um múltiplo de 4.

Também podemos argumentar que como em ambas as versões, ao longo da direção p a periodicidade é 2, e ao longo da direção P a periodicidade é 4, N deve ser necessariamente um múltiplo de 4 para garantir a perfeita simetria na quantização.

Mesmo o Mapa do Padeiro quantizado por Balazs e Voros [22] e por Ozorio e Saraceno [26] requer que N seja um múltiplo de 2, e isto se dá em função da periodicidade da função geratriz daquele mapa. A não observância das restrições no valor de N simplesmente produzirá uma matriz não unitária, tanto nos mapas que ora apresentamos, quanto nos previamente quantizados [22] [26].

Agora iremos apresentar as medidas feitas com cada uma das versões quantizadas.

4.2.1 Resultados da versão 1

Aqui vamos estudar alguns aspectos do sistema quântico. Uma primeira análise interessante é a própria evolução de um pacote de onda gaussiano (POG). No Mapa do Padeiro, é bem conhecido que para um certo tempo (número de iteradas) a evolução quântica e clássica são parecidas. De fato espera-se que a evolução clássica e quântica sejam iguais até o chamado “log time” [23], e isto foi verificado em todas as versões quantizadas. Além disso, outra medida importante, que também já expomos no capítulo anterior, é a comparação das potências t de $\langle qQ|U^t|qQ\rangle$ que têm forte correlação com as órbitas periódicas clássicas também até o “log time”. No nosso caso o “log time” é $t \sim \log_4 N$, o que significa que é esperado que as evoluções coincidam até $t = 3$, haja visto que usamos $N = 64$ para as evoluções de POG. Notar que as matrizes são complexas, com dupla precisão, e sua dimensão é $N^2 \times N^2$. Logo para $N = 64$ temos matrizes de 4.096×4.096 . Para compararmos até $t = 4$ seria necessário usarmos $N = 256$ e conseqüentemente matrizes de 65.536×65.536 !

Ainda consideramos interessante avaliar a caoticidade do sistema quântico, visto que o mapa acoplado clássico é caótico, e seu expoente de Liapunov é $\log 4$. Assim sendo obtivemos os autoângulos para diferentes valores de N , efetuando-se em seguida as estatísticas $P(s)$ e $\bar{\Delta}_3(l)$ para tais autoângulos.

Apresentamos nas figuras 4.9 à 4.12 a comparação entre a evolução de diversos POG com a evolução de um conjunto de pontos clássicos centrado no mesmo ponto original da gaussiana. O aspecto importante que cada uma destas figuras mostra é que a concordância entre a evolução clássica e quântica está dentro do previsto, ou seja, as evoluções clássica e quântica seguem lado a lado pelo menos até a terceira iterada, embora no plano $q \times Q$ fique difícil fazer uma avaliação devido a grande dispersão.

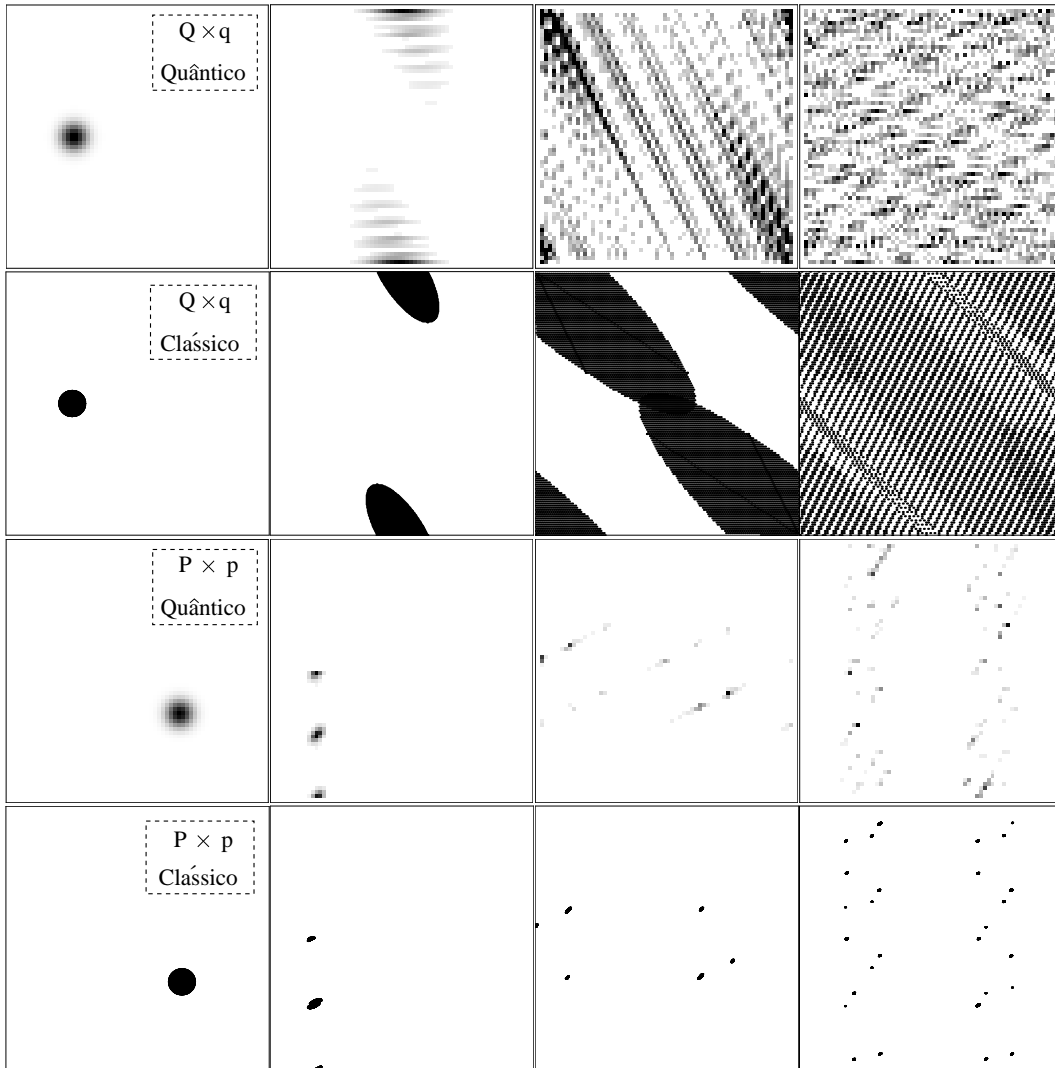


Figura 4.9: Comparativo entre a evolução de um pacote de onda gaussiano POG, e um conjunto de pontos clássicos, ambos partindo do ponto de coordenadas $q = 1/4$, $Q = 1/2$, $p = 2/3$, $P = 1/3$. No topo evolução vista no plano $q \times Q$ primeiro quântica e logo abaixo a clássica. Nas duas linhas de baixo, primeiro evolução quântica vista no plano $p \times P$ e abaixo a clássica. Foi usado $N = 64$ e fase = $1/2$.

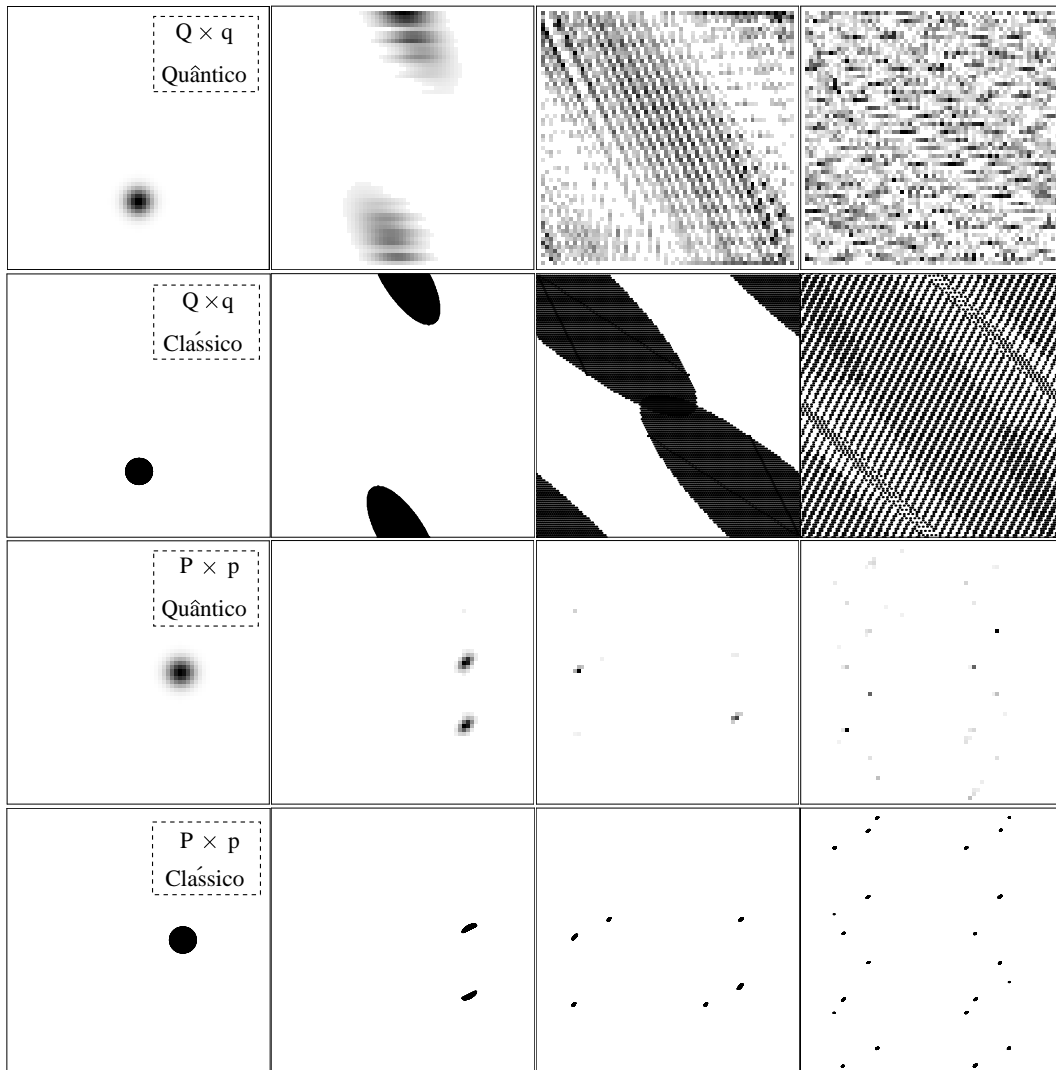


Figura 4.10: Mesmo que figura anterior mas agora partindo do ponto de coordenadas $q = 1/2$, $Q = 1/4$, $p = 2/3$, $P = 1/2$, $N = 64$, fase = $1/2$.

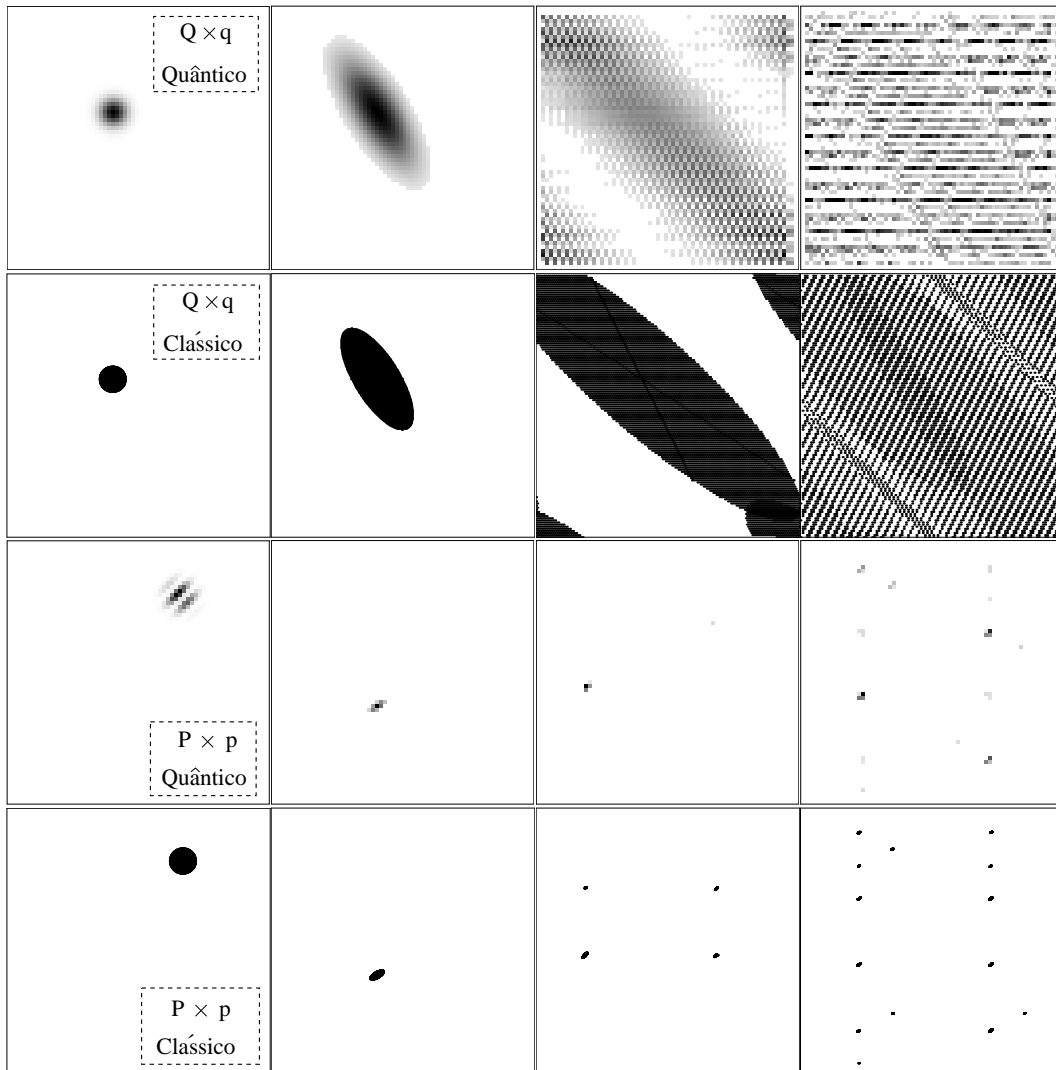


Figura 4.11: Mesmo que figura anterior mas agora partindo do ponto de coordenadas $q = 0,4$, $Q = 0,6$, $p = 2/3$, $P = 0,8$, $N = 64$, fase = $1/2$.

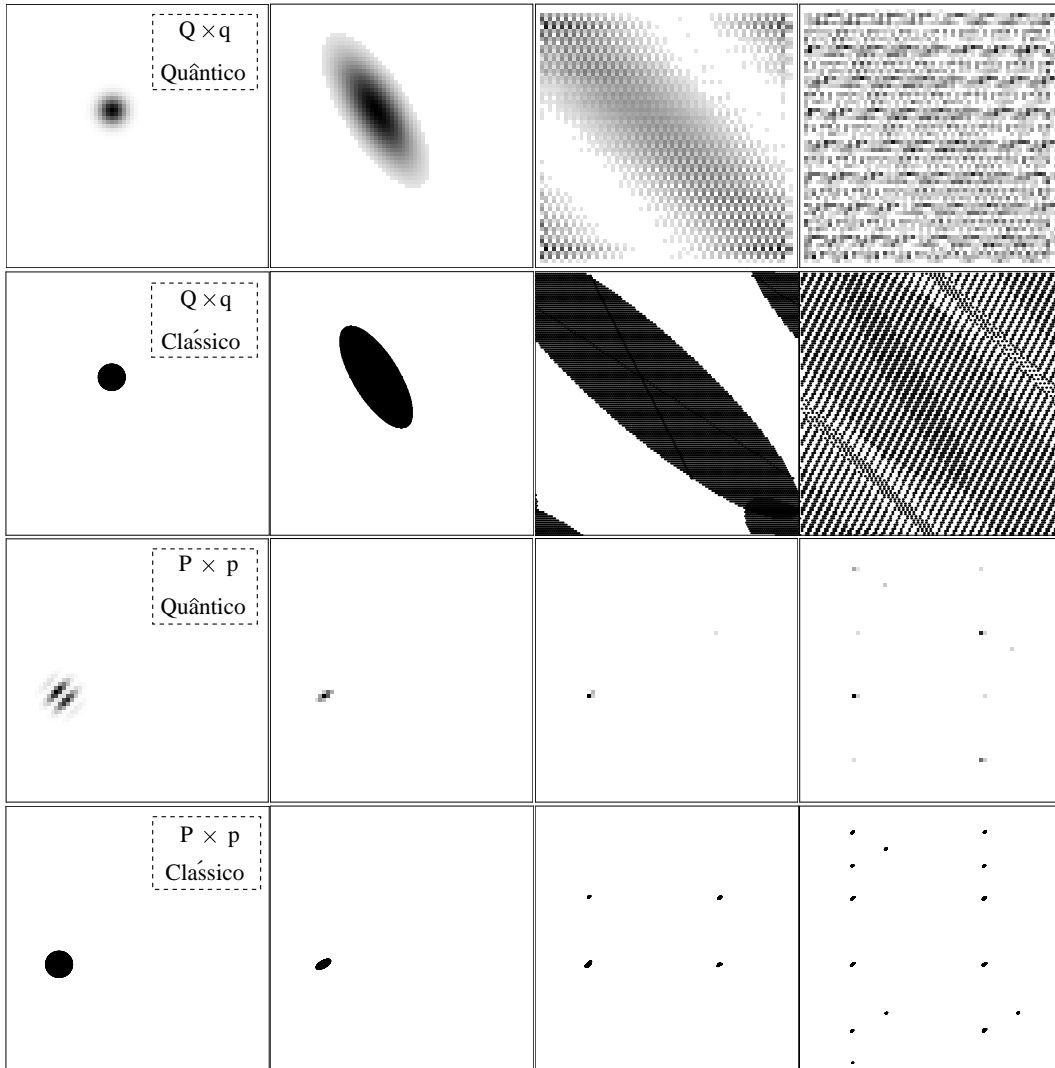


Figura 4.12: Agora partimos do ponto fixo de coordenadas $q = 0,4$, $Q = 0,6$, $p = 0,2$, $P = 0,4$, $N = 64$, fase = $1/2$.

Ainda analisando a correspondência clássico \times quântica em relação ao “log time”, apresentamos nas figuras 4.13 e 4.14 a comparação entre o módulo das seis primeiras potências de $\langle qQ|U^t|qQ\rangle$, com as órbitas periódicas de período 1 a 6. Na figura 4.13 usamos $N = 32$, o que corresponde a $\tau \sim 2,5$ (neste mapa o expoente de Liapunov é $\lambda = \log 4$, logo $\tau \sim \log_4 N$) e podemos ver que até $t = 2$ a concordância é excelente e a partir de $t = 3$ a correlação desaparece. Na figura 4.14 usamos $N = 76$, o que corresponde a $\tau \sim 3,12$, e é nítido o aumento da similaridade entre clássico e quântico até $t = 3$, mas a partir da quarta iterada aparentemente toda correlação desaparece, embora a análise puramente visual seja muito difícil neste caso.

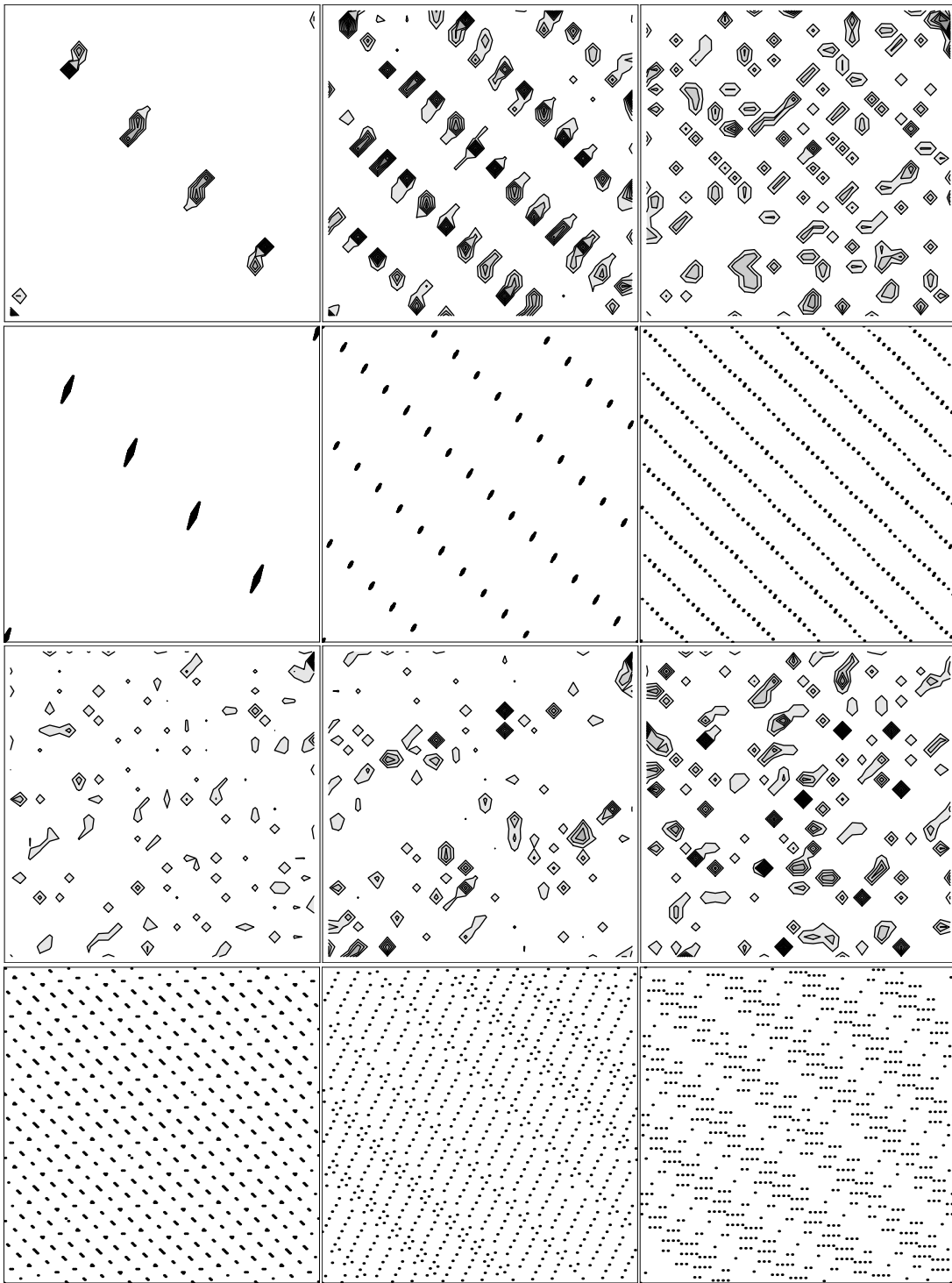


Figura 4.13: Comparativo entre o gráfico da intensidade das potências de $|\langle qQ|U^t|qQ\rangle|$ (linhas 1 e 3), levando em conta os 30% de pontos mais intensos, com $t = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 , com as órbitas periódicas do Mapa Assimétrico clássico (linhas 2 e 4) no plano $q \times Q$, obtidas numericamente com $\delta \sim 1/N$. Foi usado $N = 32$ e fase = 0.

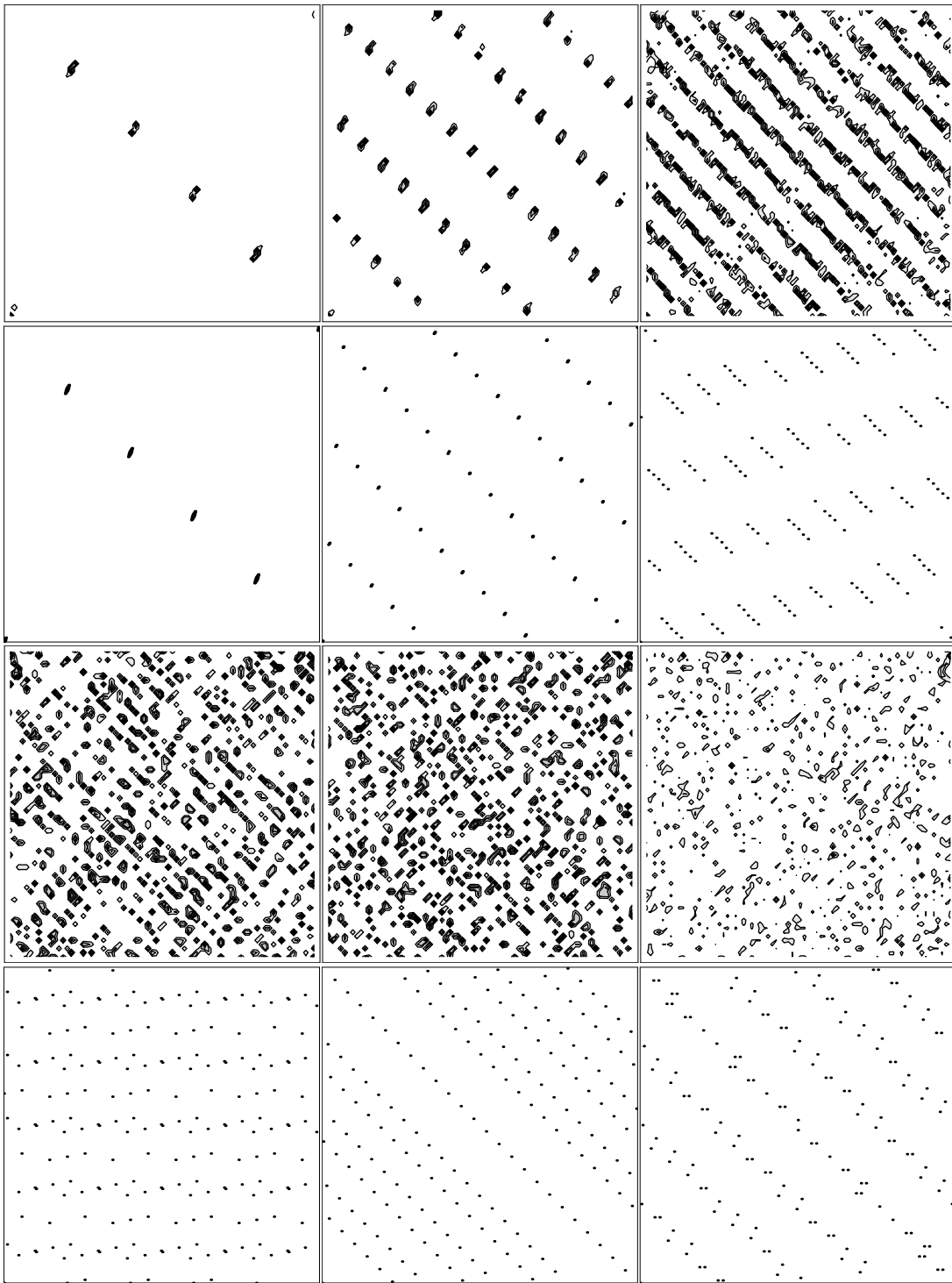


Figura 4.14: Comparativo entre as potências de $|\langle qQ|U^t|qQ\rangle|$ (linhas 1 e 3), levando em conta os 30% de pontos mais intensos, com $t = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6, com as órbitas periódicas do Mapa Assimétrico clássico (linhas 2 e 4) no plano $q \times Q$, obtidas numericamente com $\delta \sim 1/N$. Foi usado $N = 76$ e fase = 0.

Por fim a figura 4.15 expõe os resultados para as estatísticas $P(s)$ e $\bar{\Delta}_3(l)$, onde variamos os valores de N bem como a fase.

É esperado que para sistemas caóticos, sem spin e invariantes em relação a reversão temporal, as estatísticas apresentem um espectro semelhante a GOE [72] [73]. Já para sistemas sem spin, que não são invariantes em relação a reversão temporal, é esperado que apresentem um espectro semelhante a GUE. Porém existem sistemas sem spin que são invariantes em relação a reversão temporal, e que ainda assim apresentam um espectro coincidente com o GUE (Conjunto Gaussiano Unitário - Gaussian Unitary Ensemble) [74] [75] [76] [77].

O Mapa Assimétrico clássico, não é invariante em relação a reversão temporal. Mas nos resultados que obtivemos para este mapa, pode-se observar que para qualquer valor de N , se usarmos fase = 0, as estatísticas apresentam concordância com GOE, o que não é comum. Talvez de alguma forma, quando tomamos a fase = 0, o mapa quântico se torne invariante em relação a reversão temporal. Já quando usamos fase = 1/2, as estatísticas apresentam concordância com GUE, que é o esperado.

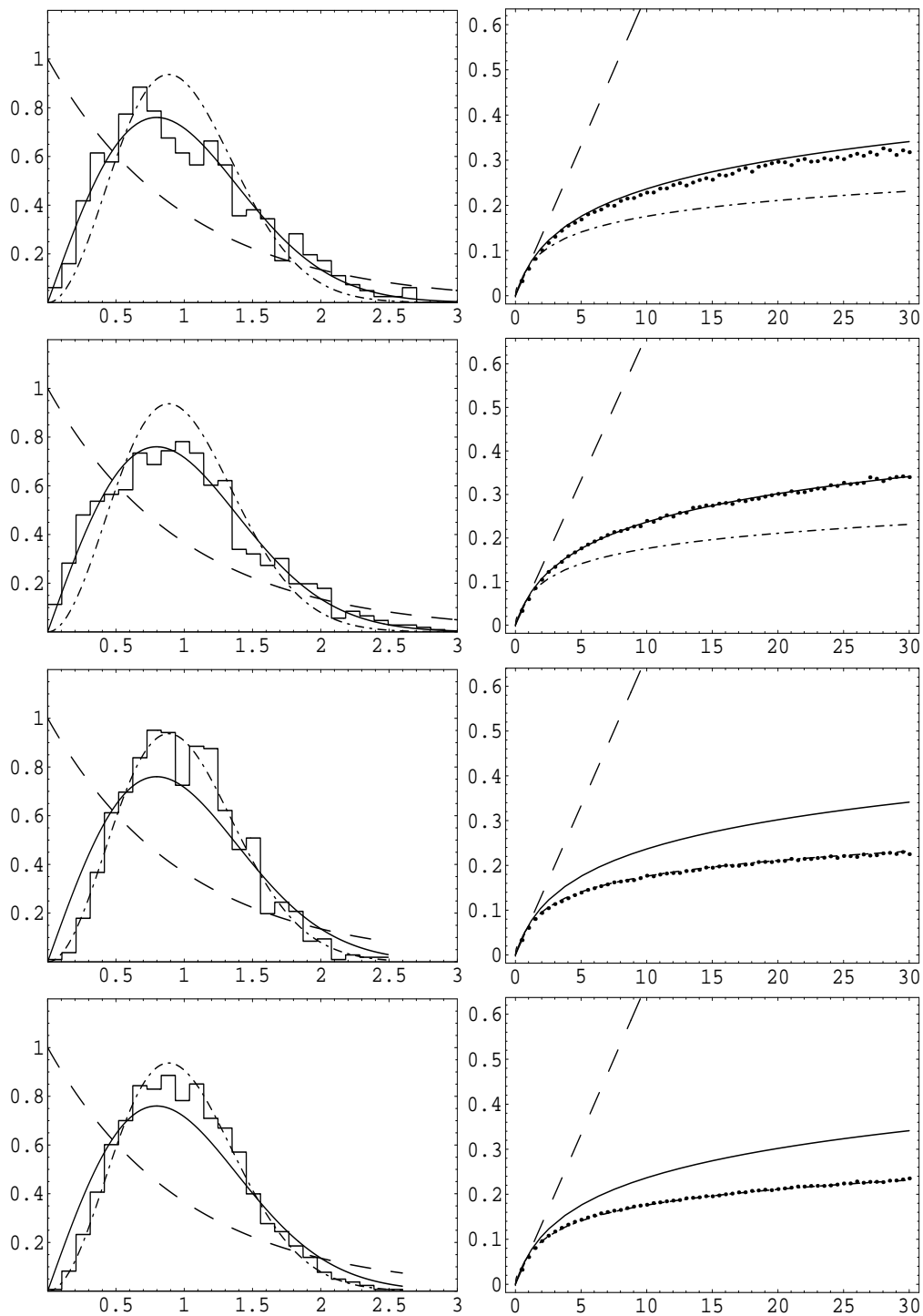


Figura 4.15: Estatísticas $P(s) \times s$ (à esquerda) e $\bar{\Delta}_3(l) \times l$ (à direita) obtidas para diversos valores de N e calculadas sobre todos os autoângulos. De cima para baixo na ordem, $N = 28$ e fase = 0, $N = 32$ e fase = 0, $N = 32$ e fase = 1/2 e $N = 64$ e fase = 1/2. Linha continua - GOE, tracejada - Poisson, traço e ponto - GUE.

4.2.2 Resultados da versão 2

Seguindo a mesma idéia apresentada junto aos resultados da versão 1, comparamos a evolução de diversos POG com a evolução de conjuntos de pontos clássicos centrados no mesmo ponto original da gaussiana (figs. 4.16 até 4.19). Novamente observamos a concordância até a terceira iterada, inclusive a figura 4.19 apresenta a evolução de um POG centrado em um ponto de uma órbita de período 2, e pode-se observar muito bem o retorno do POG após a segunda iterada.

Em seguida, nas figuras 4.20 e 4.21 apresentamos novamente a comparação entre o módulo das seis primeiras potências de $\langle qQ|U^t|qQ\rangle$, com as órbitas periódicas de período 1 a 6 obtidas numericamente, primeiro para $N = 32$ e depois para $N = 76$, note que os resultados para a potência 3 melhoram muito quando usamos $N = 76$ da mesma forma que observamos na versão anterior.

Finalmente na figura 4.22 estão expostos os resultados para as estatísticas $P(s)$ e $\bar{\Delta}_3(l)$ obtidas com os autoângulos desta versão do Mapa Assimétrico, e observamos que nesta versão, independentemente da fase escolhida, as estatísticas estão em concordância com GUE ao invés de GOE. Este resultado é o esperado para mapas, como este, que não apresentam invariância em relação a reversão temporal.

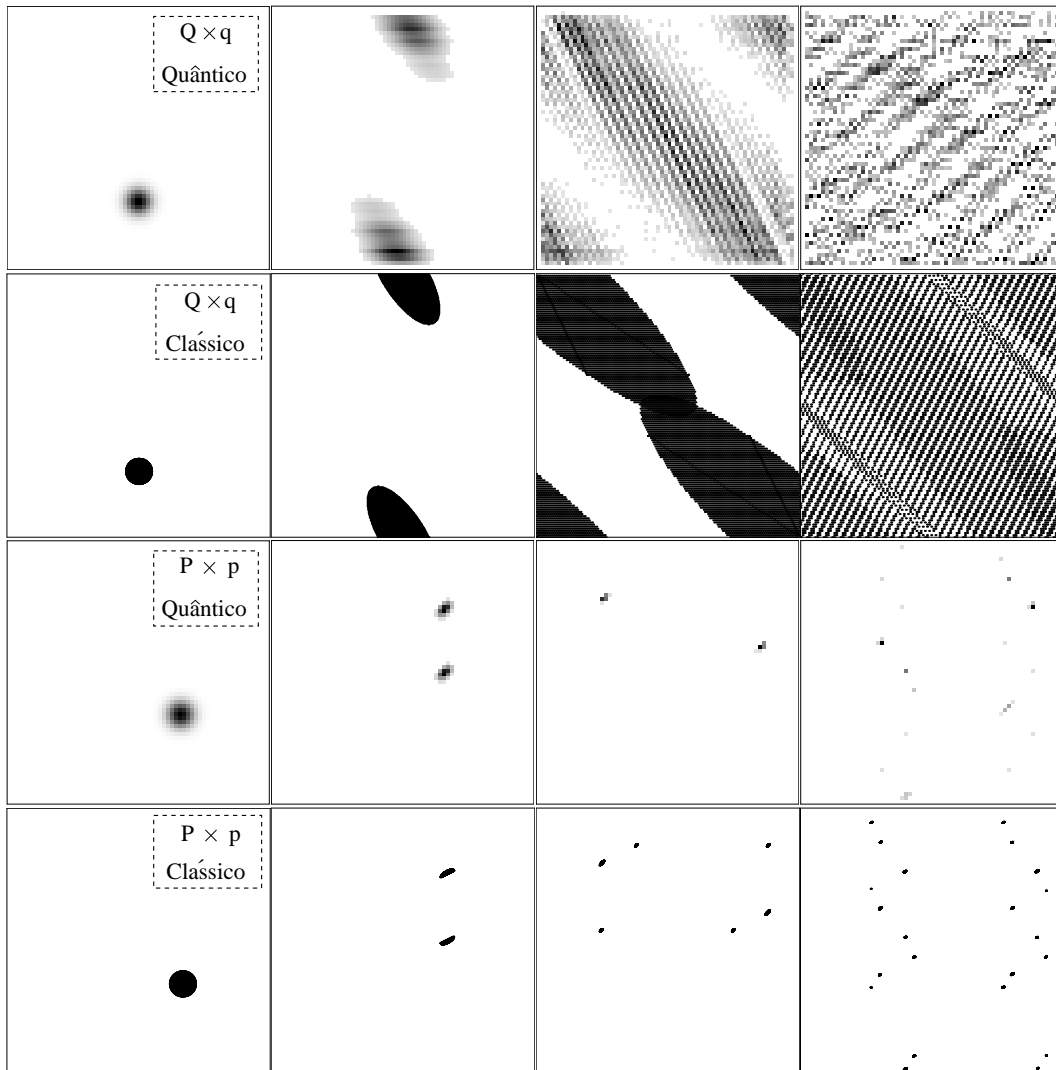


Figura 4.16: Comparativo entre a evolução quântica e a clássica, a partir do ponto de coordenadas $q = 1/2$, $Q = 1/4$, $p = 2/3$, $P = 1/3$, $N = 64$, fase = $1/2$.

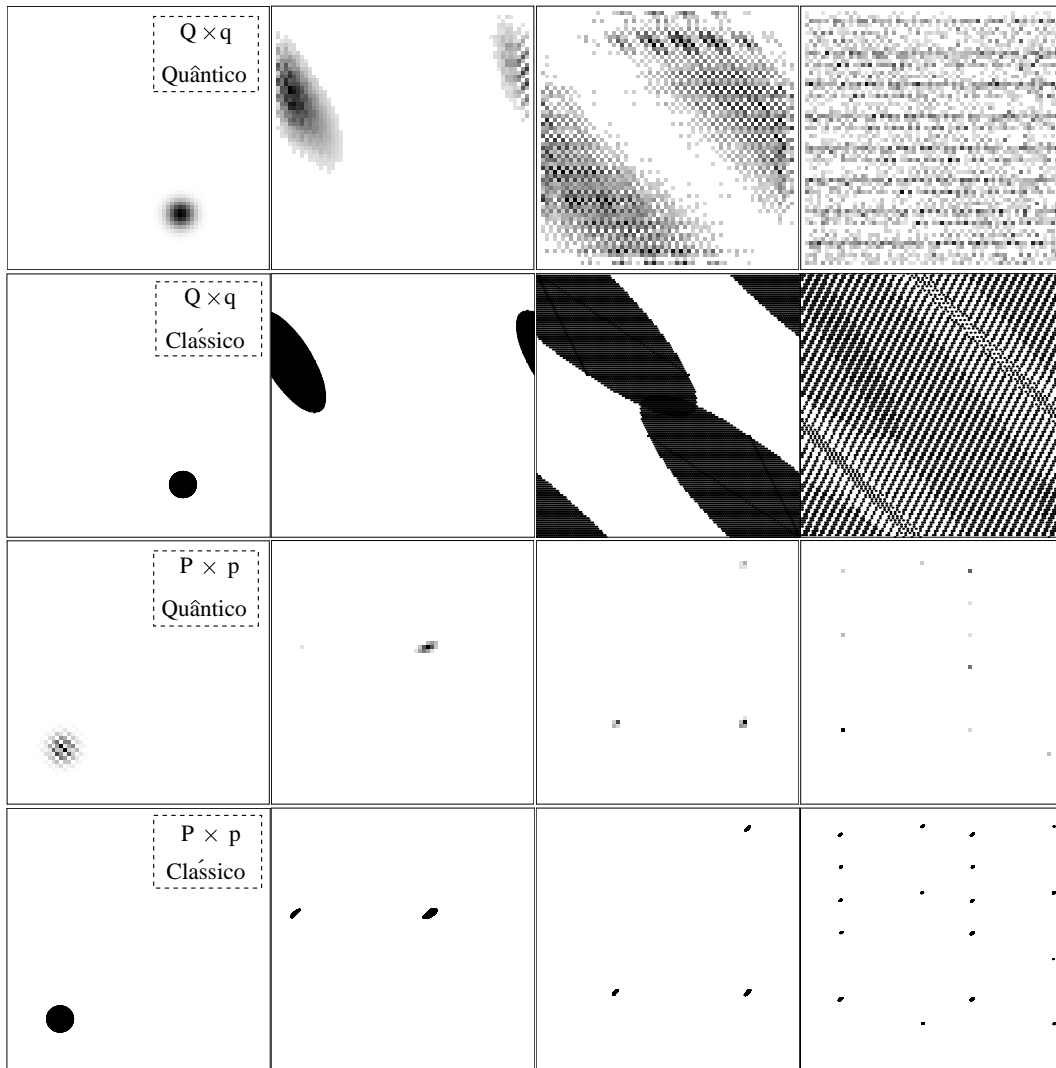


Figura 4.17: Comparativo entre a evolução quântica e a clássica, a partir do ponto de coordenadas $q = 2/3$, $Q = 0, 2$, $p = 0, 2$, $P = 0, 2$, $N = 64$, fase = $1/2$.

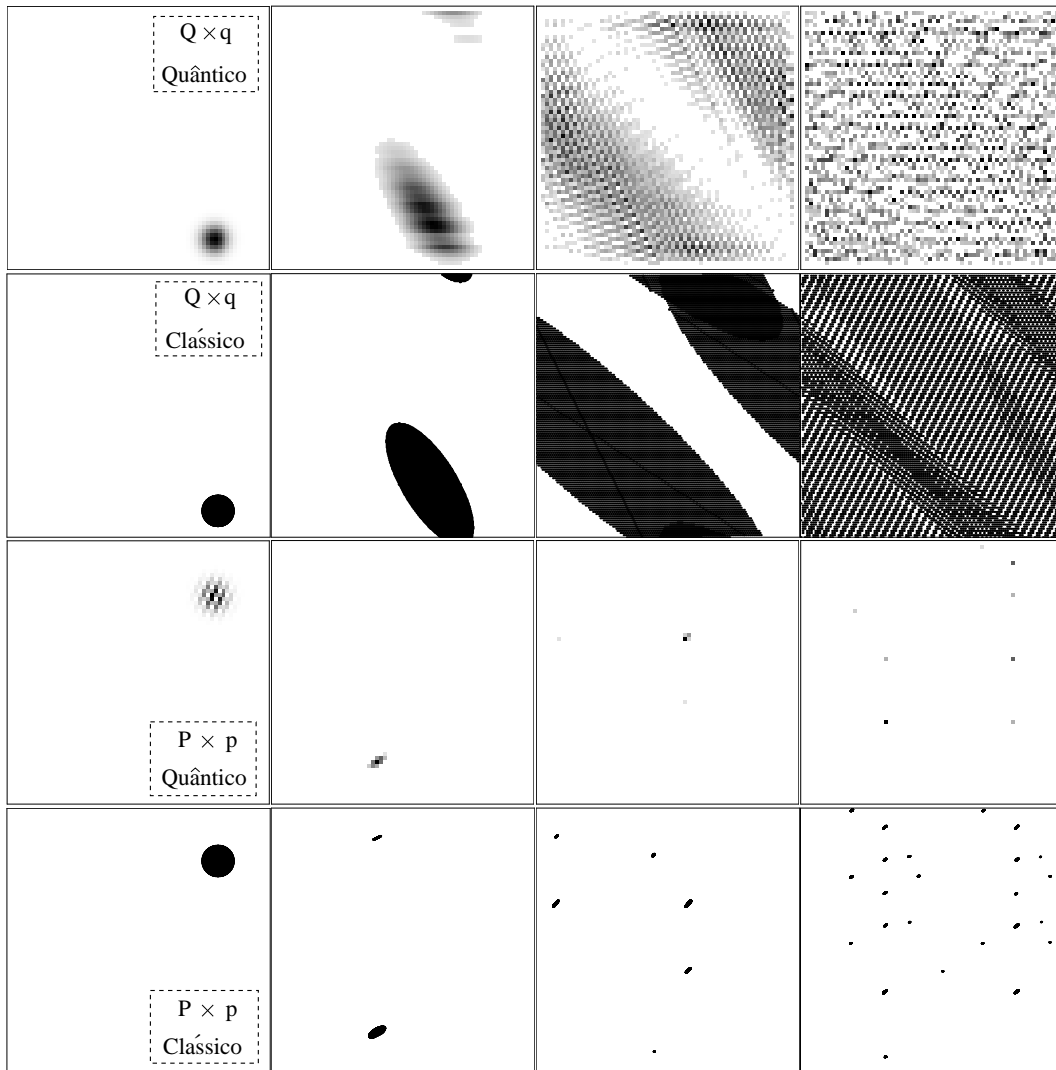


Figura 4.18: Comparativo entre a evolução quântica e a clássica, a partir do ponto de coordenadas $q = 0,8$, $Q = 0,1$, $p = 0,8$, $P = 0,8$, $N = 64$, fase = $1/2$.

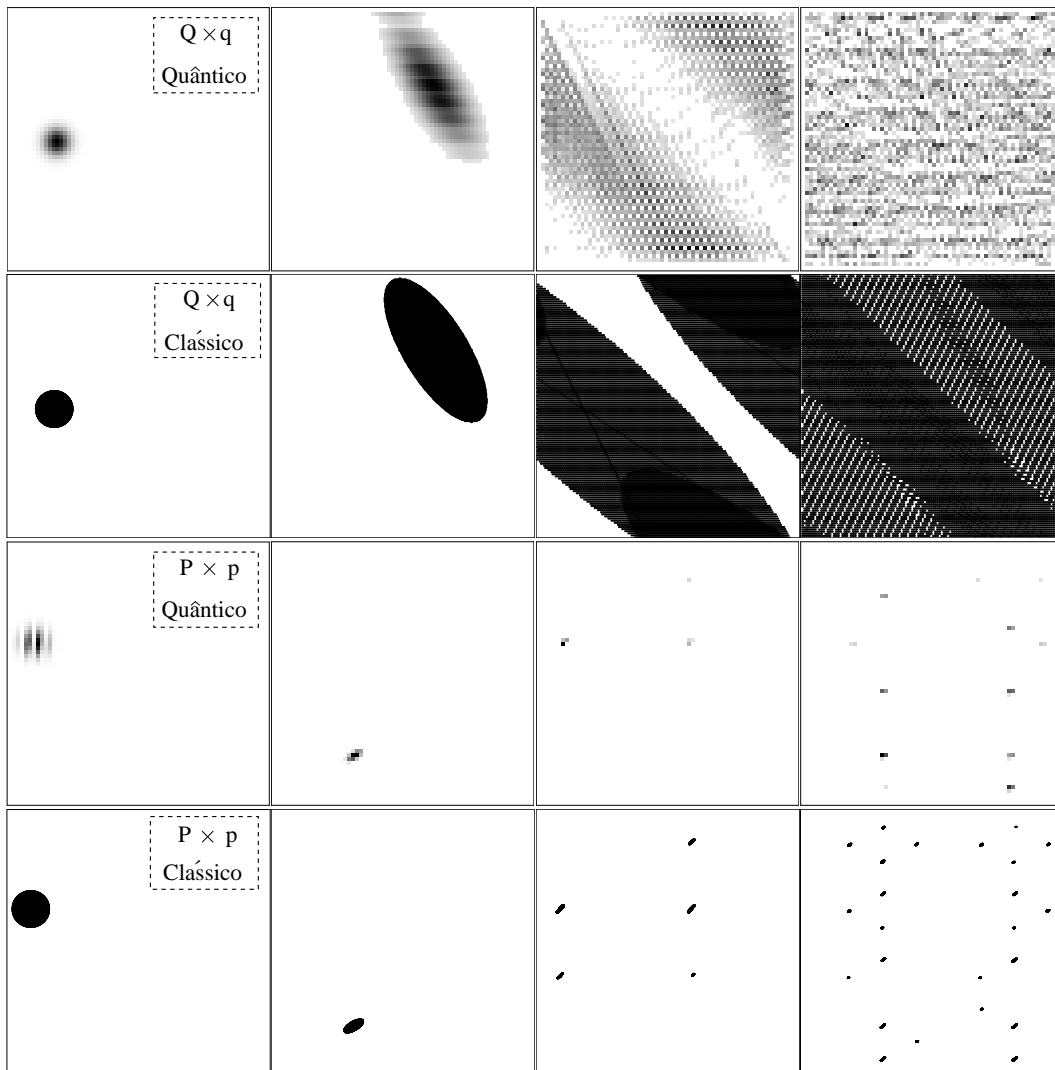


Figura 4.19: Comparativo entre a evolução quântica e a clássica, a partir da órbita período 2 de coordenadas $q = 8/45$, $Q = 22/45$, $p = 4/45$ e $P = 28/45$, $N = 64$, fase = $1/2$.

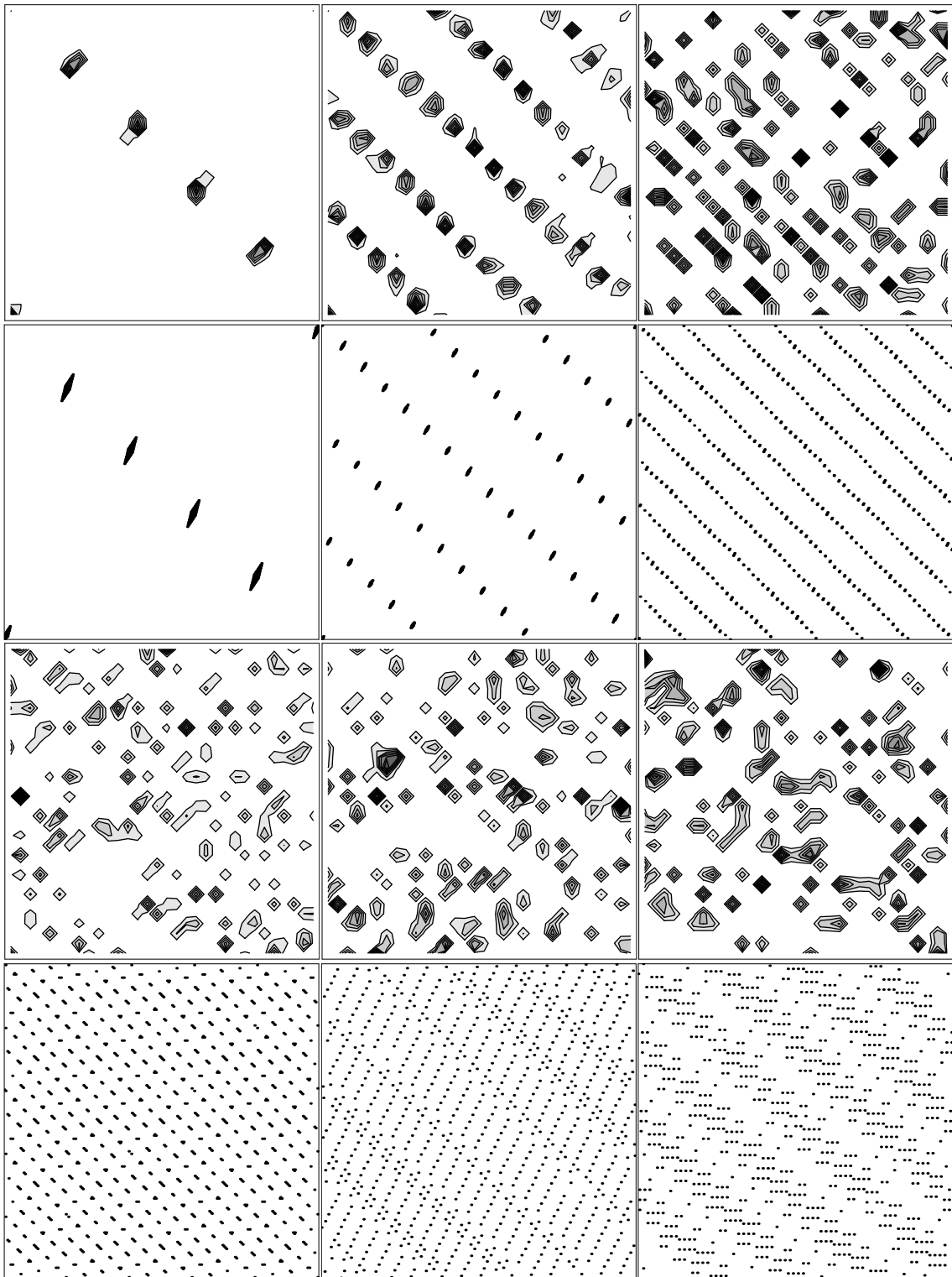


Figura 4.20: Gráfico da intensidade das potências de $|\langle qQ|U^t|qQ\rangle|$ (linhas 1 e 3), levando em conta os 30% de pontos mais intensos, $N = 32$ e fase = 0, comparadas com órbitas periódicas clássicas (linhas 2 e 4) obtidas com $\delta \sim 1/N$.