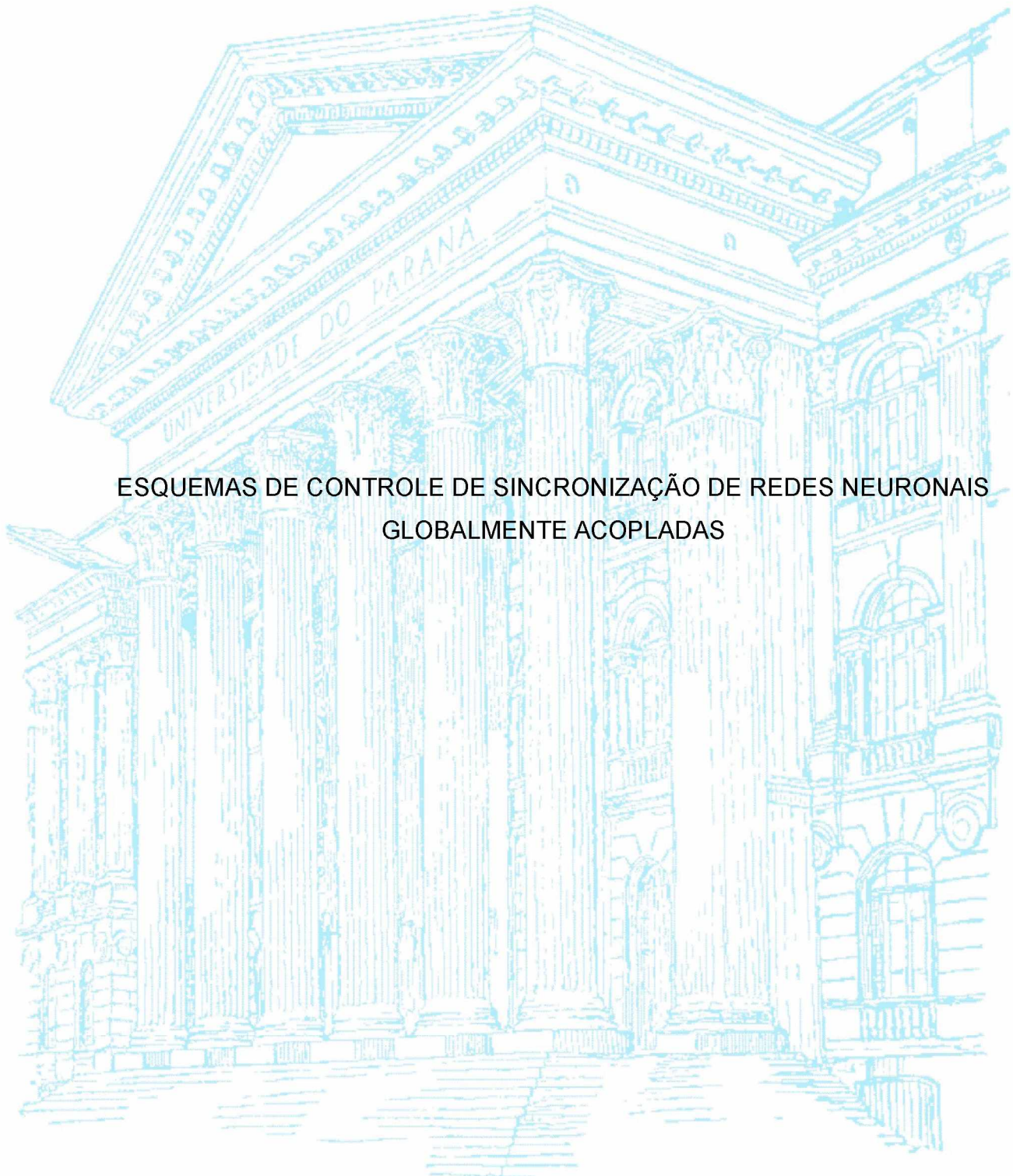


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FABIANE DE FATIMA CARVALHO



ESQUEMAS DE CONTROLE DE SINCRONIZAÇÃO DE REDES NEURONAIS
GLOBALMENTE ACOPLADAS

CURITIBA

2014

FABIANE DE FATIMA CARVALHO

ESQUEMAS DE CONTROLE DE SINCRONIZAÇÃO EM REDES NEURONAIIS
GLOBALMENTE ACOPLADAS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana.

CURITIBA

2014

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

C331e Carvalho, Fabiane de Fátima
Esquemas de controle de sincronização em redes neurais
globalmente acopladas / Fabiane de Fátima Carvalho – Curitiba, 2014.
77f. : il. color. ; 30 cm.

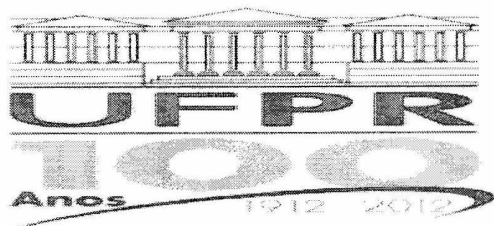
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Física, 2014.

Orientador: Ricardo Luiz Viana.
Bibliografia: p. 73-75.

1. Sincronização. 2. Redes neurais (Neurobiologia). 3. Sistema
nervoso - Degeneração. I. Universidade Federal do Paraná. II. Viana,
Ricardo Luiz. III. Título.

CDD: 611.8

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado da aluna **FABIANE DE FATIMA CARVALHO**, consideram aprovada a redação final da dissertação, cujo título é: “Esquemas de Controle de Sincronização em Redes Neurais Globalmente Acopladas”.

Curitiba, 26 de fevereiro de 2014.

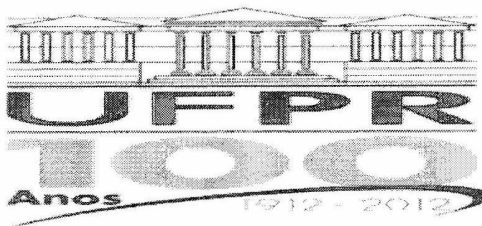
Banca Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
(UFPR)

Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes
(UFPR)

Prof. Dr. Leonardo Gregory Brunnet
(UFRGS)

Assinatura



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

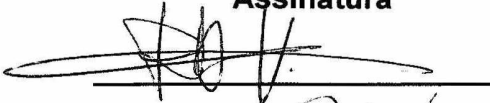

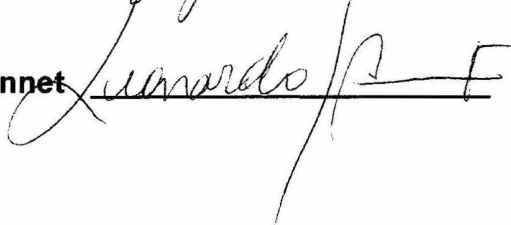
DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Esquemas de Controle de Sincronização em Redes Neurais
Globalmente Acopladas.

ALUNA

FABIANE DE FATIMA CARVALHO

Em sessão pública iniciada às 14 horas do dia 26 de fevereiro de 2014, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu APROVAR a candidata com o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)		<u>B</u>
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Leonardo Gregory Brunnet (UFRGS)		<u>A</u>

*A ciência, meu rapaz, é feita de erros, mas erros bons
de cometer, pois levam aos poucos à verdade.
- Julio Verne "Viagem ao Centro da Terra".*

Dedico à Sonia.

Agradecimentos

- A Deus pela vida e pela saúde.
- A Jesus Cristo, N. Sra. de Fátima e ao meu Anjo da Guarda pela proteção.
- Ao Prof. Ricardo Luiz Viana pela orientação.
- Ao Prof. Sandro Ely de Souza Pinto por me incentivar a mudar de área de pesquisa.
- A Fabiano Alan Serafim Ferrari, Carlos Adalberto Schnaider Batista, Paulo Paneque Galúzio e Thiago de Lima Prado, pelo apoio computacional.
- A Tromer, Bruno e Fábio pelos momentos de descontração.
- À Cris Malvadona e a Talita pela amizade.
- A Henrique Machado pelo carinho e paciência.
- À Capes pelo apoio financeiro.
- Aos membros da banca.

RESUMO

O estudo da sincronização em redes neuronais tem revelado importantes aspectos como caso especial, a sincronização de rajadas de disparos dos potenciais de ação de uma rede neuronal, chamada de *bursting synchronization*, ou sincronização de *bursts*. Esse tipo de sincronização tem sido associada a patologias, como epilepsias e mal de Parkinson. Portanto, controlar estes ritmos indesejáveis é um objetivo de grande interesse. Nos últimos anos técnicas foram desenvolvidas para suprimir esse tipo de sincronização. Neste trabalho consideraram-se redes de 100, 1000 e 10000 sítios, cada sítio representando um neuônio, para realizar o estudo do comportamento dinâmico dessas redes com o mapa de Rulkov. A sincronização dessas redes foi alcançada acoplando seus sítios. O tipo de acoplamento usado foi o acoplamento global, via campo médio, no qual considera-se que cada sítio da rede conecta-se com todos os demais. Após a sincronização das redes ser atingida estaremos interessados em métodos que possam suprimir o estado sincronizado. Analisou-se a eficiência de dois métodos empregados para suprimir a sincronização em redes neuronais.

Palavras chave: sincronização, sincronização de *bursts*, supressão.

ABSTRACT

The study of synchronization in neuronal networks has revealed important aspects, as a special case, the synchronization of firing of action potentials of a neuronal network, called Bursting Synchronization. This type of synchronization in neuronal networks, has been associated with diseases such as epilepsy and Parkinson's disease. Once the synchronization of neuronal networks is related to diseases, to control these undesirable rhythms is a goal of great interest. In recent years techniques have been developed to suppress this kind of synchronization. In this work it was considered neuronal networks of 100, 1000 and 10000 sites, each site representing a neuron . The dynamic behavior of these networks was simulated with the map of Rulkov and the synchronization of these networks was achieved by coupling the network sites. The type of coupling used was the global coupling, via mean field in which it is assumed that each site of the network connects to the other. Once synchronization is warranted, we are interested in suppressing the synchronized state. We analyzed the efficiency of the two methods to suppress neural network synchronization.

Keywords : synchronization, bursting synchronization, suppression.

SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
2	Conceitos Básicos de Neurociência.....	5
2.1	Neurônios.....	5
2.2	Potencial de Ação.....	6
2.3	Sinapses.....	8
2.4	Redes Neurais.....	8
2.5	Dinâmica Neuronal.....	9
2.5.1	Modelo de Izhikevich.....	12
2.5.2	Mapa de Rulkov.....	12
3	Conceitos Básicos de Dinâmica Não-Linear.....	15
3.1	Mapas.....	15
3.2	Pontos Fixos em Mapas.....	16
3.3	Definição do Expoente de Lyapunov.....	18
3.4	Diagrama de Bifurcações.....	20
3.4.1	Bifurcação Sela-Nó ou Bifurcação Tangente.....	20
3.5	Crise.....	21
4	Dinâmica do Mapa de Rulkov.....	23
4.1	Fase de Bursting.....	23
4.2	Pontos Fixos do Mapa de Rulkov.....	25
4.3	Estabilidade dos Pontos Fixos e Diagramas de Bifurcação.....	27
5	Acoplamento em Redes Neurais.....	31
5.1	Acoplamento de Neurônios com o Mapa de Rulkov.....	32
5.2	Dinâmica da Rede de Rulkov Globalmente Acoplada.....	35
5.2.1	Diagramas de Bifurcação para os Neurônios Acoplados.....	36
5.3	Parâmetro de Ordem de Kuramoto.....	37

6	Controle da Sincronização dos Disparos Neurais.....	42
6.1	Controle por Meio de um Sinal Externo Periódico.....	42
6.1.1	Energia Associada ao Controle Externo Periódico.....	55
6.2	Controle por Meio de um Sinal com Atraso de Realimentação – <i>Delayed Feedback Control</i>.....	56
6.2.1	Energia Associada ao Controle de Realimentação Atrasada.....	62
7	Considerações Finais e Perspectivas Futuras.....	64
	Referências.....	66
A	Línguas de Arnold.....	69
A.1	Forçamento Externo e Línguas de Arnold.....	69
A.2	Análise Dinâmica.....	70

Introdução

Entender como os neurônios se organizam no cérebro humano pode ser a chave para o tratamento de doenças neurodegenerativas como mal de Parkinson e Alzheimer, e epilepsias. Com este objetivo simulações do comportamento dinâmico de neurônios têm sido realizadas, utilizando modelos que descrevem aproximadamente a dinâmica dos disparos do potencial de ação¹. Sabe-se que os neurônios podem conectar-se uns aos outros por meio das sinapses², essas podem ser de origem elétrica (impulsos elétricos) ou de origem química (por meio de uma substância mediadora). Através das sinapses os neurônios formam redes. Tendo esses fatores em vista é conveniente estudar o comportamento global dos neurônios.

As redes neuronais podem ter morfologias diversas e muito complexas. Imagens de ressonância magnética indicam que em algumas áreas do cérebro os neurônios se organizam de maneira semelhante à uma rede livre de escala [1]. Tal rede foi proposta por Barabasi e Albert[2], nessa rede os novos sítios adicionados ligam-se preferencialmente aos sítios com maior conexão. Este comportamento determina que o número de conexões entre os sítios apresenta uma dependência estatística, na qual poucos sítios possuem muitas conexões e muitos sítios possuem poucas conexões. Os sítios com muitas conexões são as vezes referidos como *hubs*, esse tipo de rede pode estar presente em vários sistemas, como as redes de computadores e as redes de relações sexuais humanas [3]. Considerando uma pequena área do córtex cerebral, em que os neurônios estão altamente conectados, é possível simular que os neurônios formam uma rede completa, ou seja, cada neurônio conecta-se com os demais neurônios da rede. Levando este fato em consideração, simulações com esse tipo de rede já foram realizadas [4][5][6].

¹ver 2.2

²ver 2.3

Doenças neurodegenerativas, como o mal de Parkinson, são doenças que atacam os sistemas cerebrais responsáveis pelos movimentos, os sistemas gânglio-basais [7]. Em trabalhos recentes, observou-se que os circuitos dos gânglios basais de pacientes com mal de Parkinson apresentam sincronização excessiva e atípica dos neurônios [8]. Este fato tem motivado a pesquisa sobre sincronização em redes neuronais. Observou-se, por meio de simulações com alguns modelos que descrevem o comportamento de um neurônio, que em uma rede neuronal pode ocorrer a sincronização de rajadas de disparos do potencial de ação dos neurônios, se as conexões entre esses for suficientemente forte. Há modelos matemáticos que descrevem neurônios que apresentam uma sequência de disparos do potencial de ação [4][9]. Tais rajadas de disparos são denominadas de *bursts*. A sincronização das rajadas de disparos é conhecida na literatura por sincronização de *bursts* ou *bursting synchronization*[4].

Uma vez que a sincronização de redes neuronais está relacionada a doenças neurodegenerativas, pesquisas têm sido realizadas na tentativa de encontrar métodos que possam suprimir essa sincronização. Técnicas de estimulação cerebral têm sido testadas, essas técnicas são conhecidas por *Deep Brain Stimulation* - DBS [8]. A estimulação cerebral geralmente consiste na estimulação elétrica de neurônios, por meio de microeletrodos ou marcapassos cerebrais. Esses dispositivos enviam impulsos elétricos à área afetada.

Pesquisas relataram que pacientes com mal de Parkinson tiveram uma significativa diminuição dos tremores característicos através da estimulação elétrica em regiões do córtex cerebral [8]. Beuter *et. al* mediram a frequência dos tremores em pacientes com mal de Parkinson utilizando um laser de hélio-neônio. Estimularam eletricamente áreas do córtex cerebral desses pacientes, através da implantação de sondas quadripolares, e mediram novamente a frequência dos tremores. Através desse procedimento observaram uma expressiva diminuição da frequência dos tremores associadas ao mal de Parkinson [8].

Tendo em vista esses resultados, é possível simular a estimulação cerebral em redes neuronais que apresentam um comportamento patológico. Afim de reproduzir esse comportamento busca-se a sincronização de uma rede de neurônios acoplando-os, com uma intensidade suficientemente forte. A partir do momento que a rede está sincronizada o próximo passo é verificar se os neurônios dessincronizam devido a ação de correntes externas. As correntes externas fazem o papel da estimulação cerebral.

Primeiramente, simula-se o comportamento dinâmico de um neurônio por meio de um modelo matemático que apresenta rajadas de disparos de potencial de ação, em seguida, os neurônios são acoplados de acordo com alguma fórmula matemática. O modelo mais

simples de acoplamento entre neurônios, do ponto de vista computacional, é aquele que não leva em consideração a intensidade das conexões entre os neurônios e considera que cada sítio da rede conecta-se com os demais sítios. É o chamado acoplamento global. Por fim, termos referentes a estímulos elétricos são acrescentados no modelo matemático que descreve o comportamento dos neurônios, a fim de verificar se estes dessincronizam sob a ação de correntes externas. A sincronização e dessincronização da rede pode ser quantificada pelo parâmetro de ordem³ de Kuramoto [10].

Ivanchenko *et. al* [5] simularam uma rede de 1000 neurônios por meio de um mapa⁴ que reproduz o comportamento de neurônios que apresentam *bursts*, o mapa de Rulkov⁵ [4]. Esta rede foi gerada considerando o acoplamento global entre os sítios. Esse tipo de acoplamento foi empregado considerando um termo proporcional ao campo médio produzido pela rede de neurônios, com um valor suficiente para a intensidade de acoplamento para gerar a sincronização dos disparos neuronais. Em seguida adicionaram um termo em uma das equações do mapa de Rulkov, o qual representa um sinal externo periódico, do tipo: $d\sin(\omega t)$, onde d é amplitude do sinal externo e ω a frequência externa.

O sinal externo funciona como um controle da sincronização dos sítios da rede. Esse sinal foi aplicado em apenas um sítio. Nessas simulações, Ivanchenko *et. al* verificaram que os sítios da rede sincronizam agora sob a ação de uma frequência externa e não apenas devido a ação do acoplamento. Batista *et.al* [11] também estudaram o efeito de um sinal externo periódico sobre neurônios acoplados pelo mapa de Rulkov, contudo o acoplamento utilizado foi o acoplamento que descreve uma rede de neurônios livre de escala. Nesse estudo, Batista *et.al* [11] observaram que para a topologia de rede considerada os sítios da rede também sincronizam sob a ação da frequência externa e por isso a eficiência desse tipo de controle da sincronização é muito sensível a mudanças nos parâmetros do sinal externo, como amplitude e frequência. Portanto, a supressão da sincronização seria atingida para uma pequena faixa de valores dos parâmetros.

Rosenblum e Pikovsky [6][12][13] propuseram um método para a supressão da sincronização em uma rede de neurônios de Hidmarsh-Rose [14] e Rulkov [4] globalmente acoplados, baseado no esquema de controle de Pyragas [15]. Esse método foi cunhado de *delayed feedback control* - controle de realimentação atrasada. Rosenblum e Pikovsky [6] consideraram que o termo da corrente com atraso de realimentação é uma comparação entre o campo médio atual da rede e o campo médio da rede medido τ iterações antes. Sendo $X(t)$ o campo médio atual da rede, o sinal com atraso de realimentação é:

³ver 5.2

⁴ver 3.1

⁵ver 2.5.2

$\varepsilon_f[X(t) - X(t - \tau)]$, onde ε_f é a amplitude da corrente e $[X(t) - X(t - \tau)]$ é a diferença entre o campo médio atual e o campo médio τ iterações antes. Rosenblum e Pikovsky [6] verificaram que esse tipo de controle é eficaz para dessincronizar uma rede de neurônios globalmente acoplados. Verificaram que o termo que representa o sinal de realimentação tende a desaparecer com o tempo, ou seja, é um controle que “desliga” automaticamente com o tempo, sendo, por isso, não-invasivo. Essa característica viabiliza uma possível aplicação nos tratamentos das doenças neurodegenerativas. Este tipo de controle já foi empregado para uma rede de neurônios de Rulkov livre de escala [16], os resultados obtidos indicaram que esse tipo de controle é eficaz para uma ampla faixa de valores dos parâmetros do sinal de feedback.

Com base nesses estudos este trabalho tem como objetivo implementar os dois métodos citados: um sinal externo periódico e um sinal com atraso de realimentação - *time delayed feedback signal*, a fim de comparar a eficácia de ambos os métodos em suprimir ou controlar a sincronização em redes neuronais. A fim de simular o comportamento de uma rede neuronal em que os sítios apresentam o fenômeno da sincronização de *bursts* os dois métodos foram empregados em uma rede de mapas de Rulkov globalmente acoplados.

No capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos sobre neurociência e alguns modelos matemáticos que descrevem neurônios que apresentam *bursts*. O capítulo 3 apresenta alguns conceitos básicos de dinâmica não-linear. No capítulo 4 discute-se as propriedades dinâmicas do mapa de Rulkov. No capítulo 5 descreve-se a metodologia do acoplamento dos neurônios com o mapa de Rulkov e como é feito o diagnóstico de sincronização de uma rede. O capítulo 6 é destinado à descrição dos dois tipos de esquemas de controle de sincronização empregados e à discussão dos resultados obtidos e, por fim, no capítulo 7 a conclusão da implementação dos dois métodos obtidos.

Conceitos Básicos de Neurociência

2.1 Neurônios

Os neurônios são unidades básicas do sistema nervoso (células). Eles são responsáveis pela condução de informação a outras células por meio de conexões elétricas ou químicas. A figura 2.1 mostra o desenho, feito pelo histologista espanhol Ramon y Cajal em 1899, de neurônios do cérebro de um pombo. Cajal utilizou o método de coloração de Golgi, o qual tinha a propriedade de corar dentre os milhões de células em um bloco de tecido somente poucas. Essas células acumulavam um precipitado de prata que delineava completamente suas formas [17].

Um neurônio é constituído de um corpo celular, axônios e dendritos, como mostra a figura 2.2. Os dendritos formam uma árvore ramificada a partir do corpo celular. Eles recebem pulsos elétricos provenientes de outros neurônios e os transmitem ao corpo celular, que processa e integra esses sinais, gerando um pulso elétrico que é transmitido ao longo do axônio, em direção a outros neurônios [19].

A maioria dos neurônios dos cérebros de vertebrados é multipolar (com muitos dendritos e um único axônio) mas há também neurônios bipolares (um dendrito e um axônio) encontrados em órgãos sensoriais, como a retina e o bulbo olfativo e há os neurônios unipolares (com um único ramo que se subdivide em dois) [19]. De acordo com sua função os neurônios são classificados como: sensoriais, motores, receptores e interneurônios. Os neurônios sensoriais são responsáveis pelo transporte de informação das extremidades do nosso corpo para o sistema nervoso central; os motores conduzem a informação do sistema nervoso central para as periferias do corpo (músculos, pele); os receptores codificam a informação fornecida pelo ambiente (luz, som, toque) em mensagens eletroquímicas,

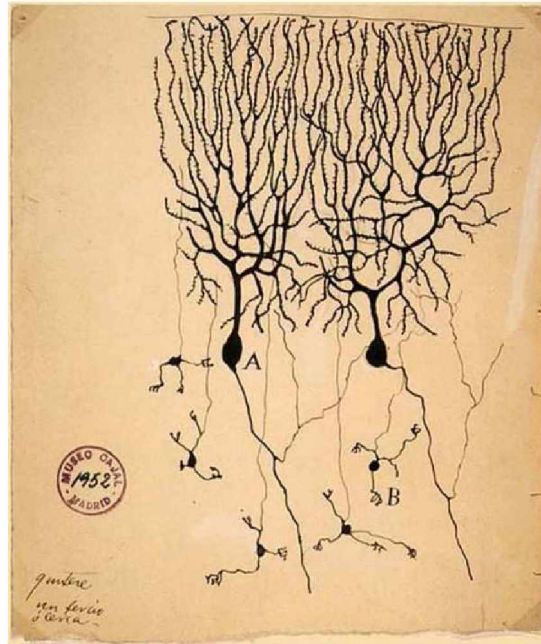


Figura 2.1: Neurônios do cérebro do pombo, feita por Ramon y Cajal. Figura reproduzida de [18].

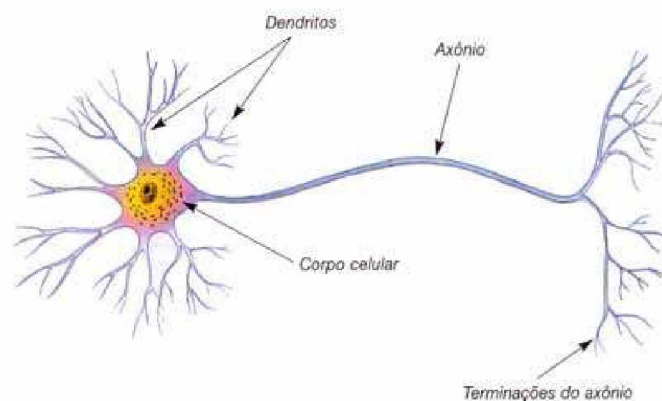


Figura 2.2: Esquema de um neurônio. Figura reproduzida de [20].

que são transmitidas pelos neurônios sensoriais; os interneurônios são responsáveis pela conexão de vários neurônios dentro do cérebro e da medula espinhal.

2.2 Potencial de Ação

Simplificadamente, o potencial de ação é um impulso nervoso, uma descarga elétrica que ocorre no interior do axônio de um neurônio, ou seja na membrana plasmática do neurônio. A membrana de um neurônio é constituída de finas camadas, da ordem de poucos nanômetros, de lipídios e proteínas. As proteínas estão incrustadas nas camadas

de lipídios, formando os canais iônicos. Nesses canais os íons podem passar de dentro para fora do neurônio ou vice-versa. Os canais iônicos têm a capacidade de deixar passar íons de modo seletivo (como os íons de sódio e potássio) continuamente ou em resposta a estímulos elétricos, químicos ou mecânicos. Os canais que deixam passar os íons continuamente são chamados canais abertos e os que só abrem em resposta a estímulos específicos são chamados fechados [17]. A figura 2.3 apresenta esquematicamente a membrana plasmática de um neurônio.

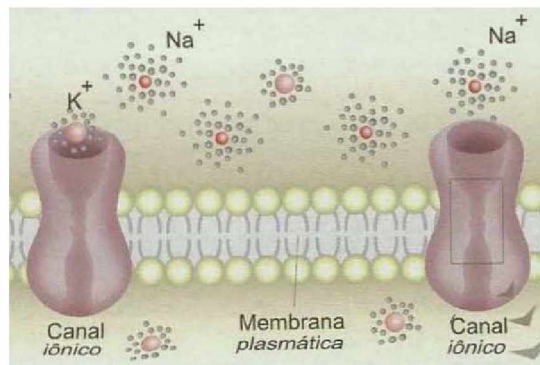


Figura 2.3: Membrana plasmática de um neurônio. Figura reproduzida de [17].

Considera-se que fora da membrana, no meio intercelular, o potencial elétrico é nulo. Dentro da membrana há uma diferença de potencial da ordem de $-50mV$ a $-90mV$ em relação ao meio intercelular, em situações de repouso, é o chamado potencial de membrana, o qual pode ser considerado o valor do potencial dentro do neurônio.

De acordo com a figura 2.3 percebe-se que a concentração dos íons de sódio (Na) é maior no meio intercelular do que dentro do neurônio e, a concentração dos íons de potássio (K) é maior dentro do neurônio do que fora. Portanto, existe uma tendência em manter K^+ dentro do neurônio e Na^+ fora, devido ao processo chamado bomba de Sódio-Potássio, no qual os canais transportam Na^+ para fora do neurônio e K^+ para dentro da membrana neuronal, por meio da hidrólise de ATP¹.

Por meio de um microeletrodo intracelular, conectado ao axônio de um neurônio, pode-se fazer passar uma corrente elétrica através da membrana do neurônio, a fim de visualizar o comportamento do potencial de ação. Se o potencial torna-se menos negativo, dizemos que a corrente aplicada é despolarizante. Ao aplicar uma corrente despolarizante pode ocorrer também um rápido aumento do potencial se a corrente despolarizante exceder um certo valor crítico e, logo após, uma queda súbita. O pulso de voltagem, ou seja, o limiar de potencial denomina-se potencial de ação. Nesta situação diz-se que ocorreu um

¹Trifosfato de Adenosina - nucleotídeo responsável pelo armazenamento de energia

disparo do potencial de ação ou *spike*, o qual se propaga através do axônio do neurônio na forma de uma descarga elétrica. Esse valor crítico está na faixa de 10 a 20mV. A amplitude do potencial de ação é aproximadamente +40mV. A figura 2.4 apresenta o comportamento do potencial de ação conforme descrito e dos canais da membrana.

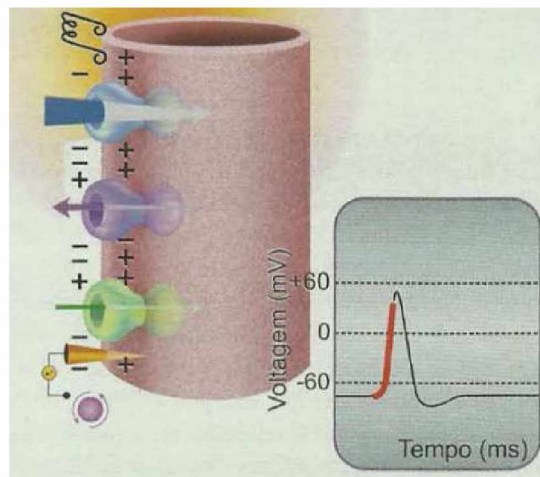


Figura 2.4: Potencial de Ação. Figura reproduzida de [17].

2.3 Sinapses

O contato entre neurônios é chamado de sinapse. O corpo celular de um neurônio pode gerar um sinal elétrico, que se propaga através do axônio. Através das terminações do axônio (contato pré-sináptico), outros neurônios podem receber esse sinal por meio de seus dendritos (contato pós-sináptico). O processamento de informação através de um sinal elétrico é denominado sinapse elétrica. Há também o contato entre neurônios pelo intermédio de algumas substâncias, denominadas neurotransmissores, nesse caso o contato é uma sinapse química. Em uma sinapse química, o neurônio pré-sináptico libera neurotransmissores que se propagam pelo seu axônio e se conectam com moléculas presentes nos dendritos do neurônio pós-sináptico, essas moléculas são chamadas de receptores. O tipo mais comum de sinapse é a sinapse química.

2.4 Redes Neurais

O conjunto de neurônios e sinapses formam uma rede neuronal. Em uma sinapse elétrica o contato ocorre entre vizinhos. Contudo, em uma sinapse química um grande número de neurônios podem conectar-se, formando uma rede complexa (figura 2.5). Os

potenciais de ação produzidos pelo conjunto dos neurônios pré-sinápticos produzem uma corrente sináptica de características semelhantes à corrente injetada externamente, tal que ambas causam a formação de um potencial de ação no neurônio pós-sináptico. Este potencial de ação propaga-se pelo axônio sem distorção ou amortecimento e vai continuar a se propagar ao longo da rede [19].

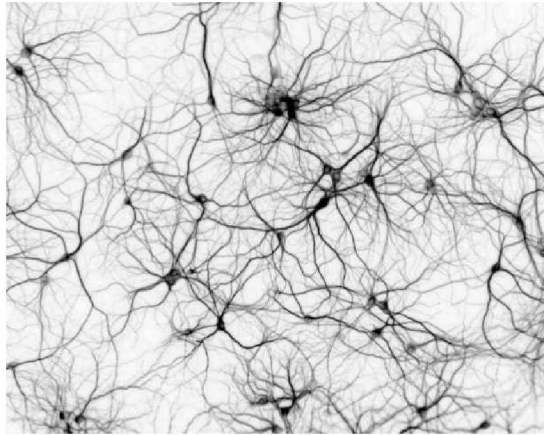


Figura 2.5: Rede neuronal. Figura reproduzida de [21].

2.5 Dinâmica Neuronal

A atividade neuronal pode ser descrita com o auxílio de alguns modelos matemáticos e biofísicos. Dentre os modelos conhecidos, para explicar a dinâmica neuronal, destaca-se o modelo proposto pelos médicos fisiologistas Alan Hodgkin e Andrew F. Huxley, em 1952 (prêmio nobel de medicina ou fisiologia de 1963). Nesse modelo descrevem os mecanismos básicos da biofísica da atividade neuronal por meio de um conjunto de equações diferenciais para o impulso nervoso e suas generalizações para outros tecidos [22]. A dinâmica neuronal pode apresentar um comportamento complexo, contudo há dois tipos de comportamentos típicos, descritos por modelos do tipo integra e dispara e os modelos do tipo rajadas de disparo.

- Modelos do tipo integra e dispara

Os modelos que descrevem o comportamento “integra e dispara” consideram que a membrana neuronal funciona como um capacitor e os canais iônicos funcionam como um resistor. Deste modo, o capacitor pode ser carregado por correntes sinápticas ou correntes externas e descarregado pelo resistor. Há uma variável que representa o limiar do potencial de ação, se este limiar for atingido ou ultrapassado pelo potencial de membrana

inicia-se a descarga do capacitor até o valor de repouso do potencial V_{reset} . Nessa situação diz-se que o neurônio disparou um potencial de ação. Este tipo de modelo é bastante simplificado, porém é útil quando se deseja saber apenas informações relacionadas a taxas de disparos ou intervalos de tempo entre disparos. A equação abaixo representa este tipo de modelo,

$$\tau \frac{dV}{dt} = -(V - E_L) + RI, \quad (2.1)$$

onde τ é a constante de tempo do circuito RC , V é o potencial de membrana, E_L é o potencial devido à uma corrente de fuga e I representa uma corrente externa. A figura 2.6 apresenta o potencial de membrana em função do tempo para uma corrente externa $I = 2$.

Para a ocorrência de um disparo, temos as seguintes condições:

$$V(t^+) = V_{reset}, \text{ se } V(t^-) = \theta. \quad (2.2)$$

Deste modo, se num dado instante de tempo o potencial atingir o limiar θ , o neurônio dispara. Em decorrência do disparo o potencial sobe rapidamente para $V = 0$ e cai imediatamente para o valor de base V_{reset} .

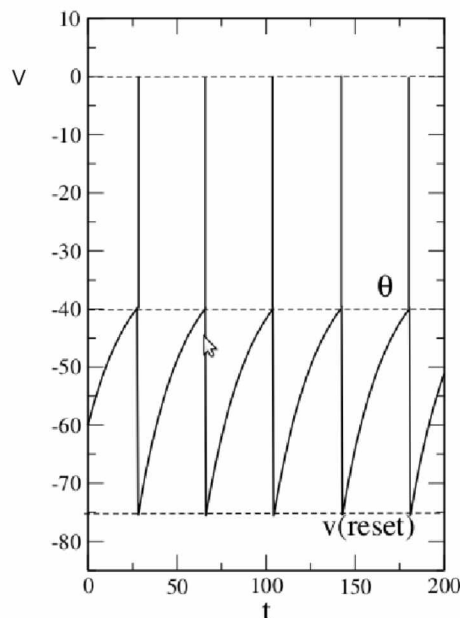


Figura 2.6: Potencial de membrana em função do tempo para o modelo integra e dispara, com $I = 2$ e um limiar de potencial θ . Figura reproduzida de [19].

Neste modelo há apenas um único ponto de equilíbrio, correspondente ao potencial:

$$V^* = E_L + RI, \quad (2.3)$$

que, para $I = 0$, leva ao potencial de reversão $V^* = E_L$. Escrevendo o potencial como: $\dot{V} = f(V)$ e denotando a derivada de f em relação a V como: $f'(V)$, a estabilidade do equilíbrio é determinada por:

$$f'(V) = -\frac{1}{\tau} < 0. \quad (2.4)$$

Sendo, portanto V^* sempre um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Quando o ponto de equilíbrio está abaixo do limiar ($V^* < \theta$) não há disparo e o potencial tende assintoticamente ao valor de equilíbrio. Se $V^* > \theta$, ou $RI > \theta - E_L$, o neurônio irá disparar repetidamente devido ao mecanismo 2.2 [19].

- Modelos de Rajadas de Disparos “*Bursting*”

Alguns neurônios podem produzir uma série de disparos com períodos quiescentes antes da próxima sequência de disparos, dependendo da corrente externa aplicada, como mostra a figura 2.7. Conforme mencionado anteriormente, uma sequência de disparos de um neurônio é conhecida como *burst*. Os neurônios respiratórios no complexo Pre-Bötzinger² apresentam *bursts* como mostra a figura 2.8.

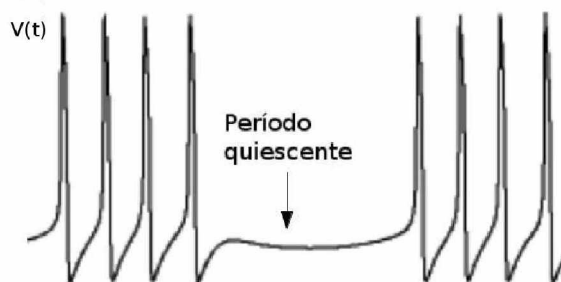


Figura 2.7: Rajadas de disparos com períodos quiescentes. Figura adaptada de [19].

A seguir serão descritos dois modelos que apresentam comportamento de *bursting*: o modelo de tempo contínuo proposto por Izhikevich [9] e o modelo de tempo discreto proposto por Rulkov [4].

²Conjunto de neurônios essencial para a geração do ritmo respiratório em mamíferos.

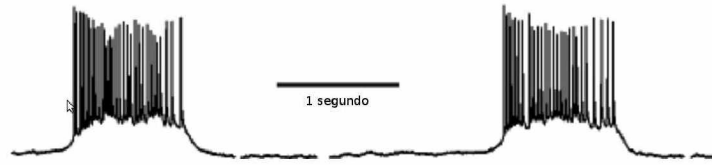


Figura 2.8: Burtings no complexo Pré-Bötzing. Figura adaptada de [9].

2.5.1 Modelo de Izhikevich

Este modelo descreve o comportamento de tipos conhecidos de neurônios corticais que apresentam uma sequência de *bursts*. De acordo com [9], o modelo de Izhikevich combina plausibilidade biológica, como o modelo de Hodgkin-Huxley [22] e a eficiência computacional dos modelos do tipo integra e dispara. A dinâmica neuronal nesse modelo é descrita por um sistema de duas equações diferenciais:

$$\frac{dv}{dt} = 0,0016 + 5v + 140 - u + I, \quad (2.5)$$

$$\frac{du}{dt} = a(bv - u), \quad (2.6)$$

onde v é o potencial de membrana do neurônio e u é uma variável de recuperação, I é uma corrente externa aplicada ou uma corrente sináptica, a e b são parâmetros com valores típicos de 0,02 e 0,2 respectivamente. Todas as variáveis são adimensionais, contudo, convenientemente, interpreta-se o tempo t em ms e a variável v em mV , uma vez que os valores para o potencial de membrana de um neurônio são da ordem de mV . Quando o potencial de membrana excede o valor limiar (valor do potencial de ação) as variáveis v e u assumem um valor característico $v = c = -50mV$ e $u = d = 2$, logo após um disparo. De acordo com o modelo de Izhikevich, o potencial de membrana é estimado entre -70 e $-60mV$ dependendo do valor do parâmetro b . A figura 2.9 apresenta a evolução temporal do potencial de membrana do córtex motor de um rato e a evolução temporal do potencial de membrana v segundo o modelo de Izhikevich.

2.5.2 Mapa de Rulkov

A descrição numérica da dinâmica de *burstings* também pode ser estudada a tempo discreto, isto é, utilizando modelos de mapas. Utilizando mapas é possível obter informações importantes do sistema em estudo e uma maior eficiência computacional. Uma

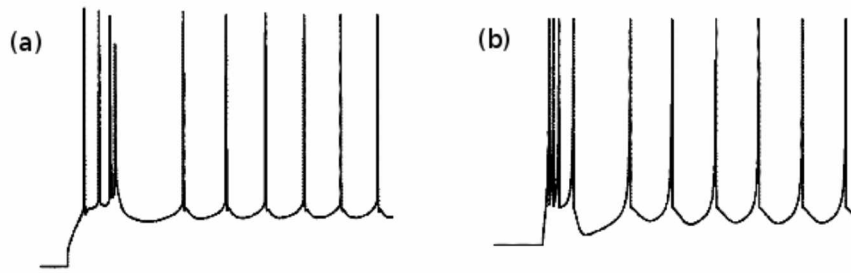


Figura 2.9: Evolução temporal do potencial de membrana do córtex motor de um rato (a) e (b) de acordo com o modelo de Izhikevich. Figura adaptada de [9].

família de mapas que produzem rajadas de disparos obedece a forma genérica:

$$v_{n+1} = F(v_n, u_n), \quad (2.7)$$

$$u_{n+1} = u_n + \epsilon(u_n - \sigma v_n - \beta), \quad (2.8)$$

onde v_n e u_n representam as escalas de tempo rápida e lenta do mapa, respectivamente. A função $F(v_n, u_n)$ descreve o comportamento sub-limiar do potencial de membrana. A variável ϵ é a razão entre as escalas lenta e rápida e portanto, ϵ é suficientemente pequeno e conseqüentemente as variações da escala lenta também. Os parâmetros σ e β descrevem o comportamento da variável lenta e estão relacionados com correntes intrínsecas. Para o estudo fenomenológico de sistemas neurobiológicos de *bursting* podemos utilizar o mapa de Rulkov, ou mapa de Rulkov caótico. Uma vez que os impulsos nervosos são transmitidos através de um potencial de ação, no mapa de Rulkov associamos os tempos de escala rápido e lento às duas variáveis de estado x_n e y_n respectivamente:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + y_n, \quad (2.9)$$

$$y_{n+1} = y_n - \sigma x_n - \beta. \quad (2.10)$$

Portanto, a variável rápida representa a atividade de um conjunto de picos de disparos *spikes*, enquanto a variável lenta representa o decaimento até o um valor mínimo do potencial de ação, período quiescente. O parâmetro α produz oscilações caóticas na variável rápida x_n para valores no intervalo $[4,1:4,4]$. Os parâmetros σ e β representam estímulos externos. As séries temporais das variáveis rápida e lenta, x_n e y_n respectivamente, estão representadas na figura 2.10, para $\alpha = 4,1$ e $\sigma = \beta = 0,001$. As propriedades dinâmicas do mapa de Rulkov serão discutidas com maiores detalhes no capítulo 4.

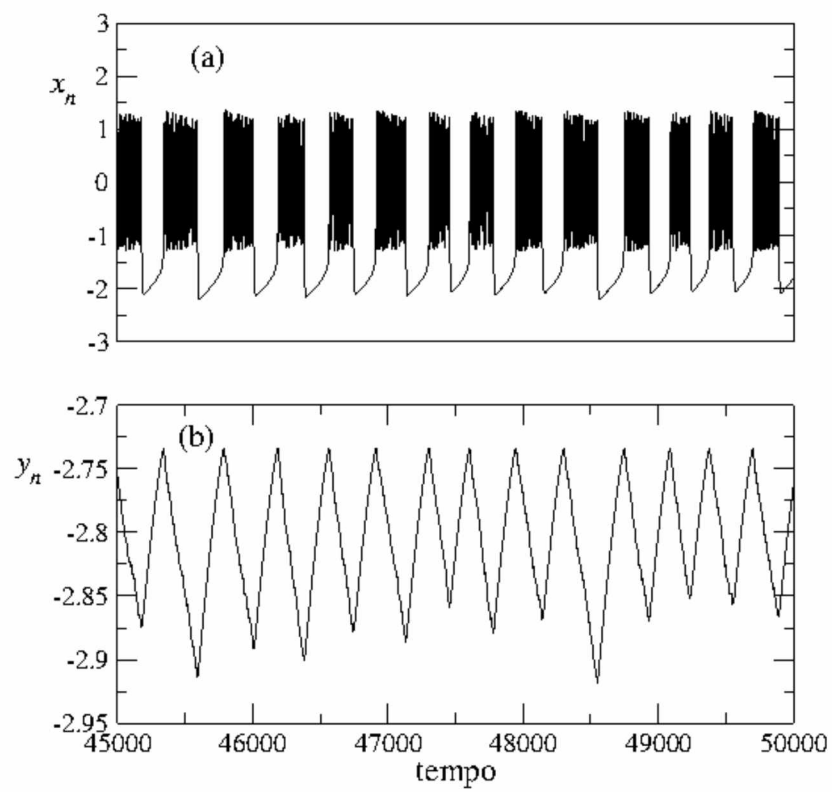


Figura 2.10: Evolução temporal da variável rápida do mapa de Rulkov x_n (a) e da variável lenta y_n (b), com $\sigma = \beta = 0,001$

Conceitos Básicos de Dinâmica Não-Linear

3.1 Mapas

Mapas são representações a tempo discreto de sistemas dinâmicos. Os mapas são obtidos por iterações sucessivas de uma função a partir de uma condição inicial. Deste modo, uma mapa é uma relação de recorrência para a qual, dado o valor da variável num dado instante, obtemos o valor da variável no instante seguinte, por exemplo o mapa linear:

$$x_{t+1} = \alpha x_t + \eta. \quad (3.1)$$

Para a primeira iterada do mapa temos:

$$x_1 = f(x_0) = \alpha x_0 + \eta, \quad (3.2)$$

supondo conhecida a condição inicial, na próxima iteração teremos:

$$x_2 = f(x_1) = \alpha x_1 + \eta. \quad (3.3)$$

A órbita de um mapa é gerada através da sequência de iteradas sucessivas de uma função $f(x)$ a partir da condição inicial. Essa órbita pode ter um comportamento periódico ou caótico. Dizemos que uma órbita é periódica se após m iterações o mapa retorna a um dado valor de x . Na figura 3.1 temos duas órbitas periódicas para o mapa logístico, $x_{t+1} = rx_t(1-x_t)$, para $r = 3,0$, com duas condições iniciais ligeiramente diferentes. Uma órbita caótica é caracterizada por dois comportamentos:

(i) Aperiodicidade: ocorre quando um valor obtido para uma iteração não se repete mais,

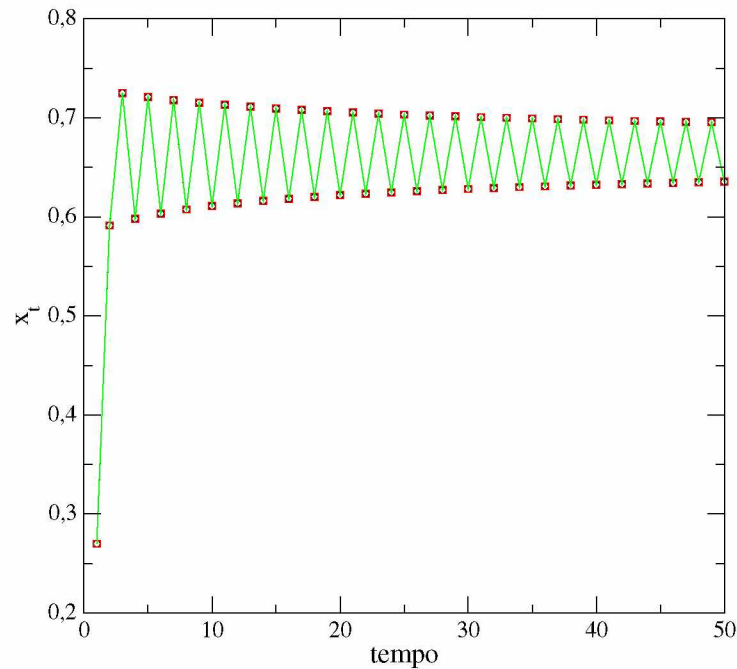


Figura 3.1: Órbitas regulares para o mapa logístico com condições iniciais ligeiramente diferentes: $x_0 = 0,1$ para a curva verde e $x'_0 = 0,10001$ para a curva com quadrados vermelhos, com $r = 3,0$.

a sequência gerada não apresenta um padrão identificável de comportamento.

(ii) Sensibilidade às condições iniciais: ocorre quando os gráficos dos mapas utilizando condições iniciais ligeiramente diferentes apresentam à longo prazo comportamentos significativamente diferentes. Como mostra a figura 3.2 as órbitas do mapa logístico para 50 iterações com condições iniciais $x_0 = 0,01$ e $x'_0 = 0,01001$, com um valor de $r = 3,9$, o qual produz comportamento caótico no mapa logístico.

O afastamento de duas órbitas caóticas ocorre a uma taxa exponencial, quantificada pelo que chamamos de expoente de Lyapunov da órbita. Quando o expoente de Lyapunov é positivo temos a confirmação da ocorrência de caos. A seguir será descrita a caracterização da dinâmica de mapas: pontos fixos, expoente de Lyapunov, digrama de bifurcações.

3.2 Pontos Fixos em Mapas

Um ponto fixo representa uma situação de equilíbrio. Ele ocorre quando:

$$x^* = f(x^*), \quad (3.4)$$

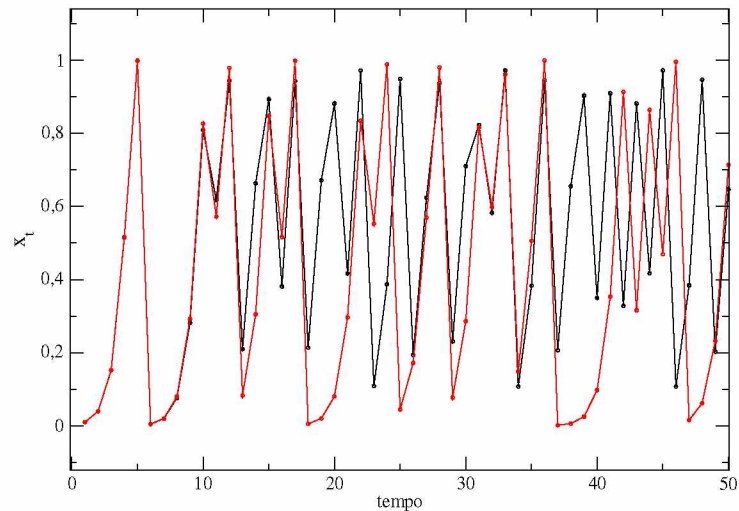


Figura 3.2: Órbitas caóticas para o mapa logístico com condições iniciais ligeiramente diferentes: $x_0 = 0,01$ para a curva vermelha e $x'_0 = 0,01001$ para curva em preto, com $r = 3,9$.

ou seja, podemos visualizar pontos fixos através da intersecção da reta $y = x$ com a função do mapa $f(x_t)$. Considerando o mapa linear $f(x_t) = x_{t+1} = 2x_t$, figura 3.3, vemos que o único ponto fixo ocorre para $x^* = 0$. O conhecimento da estabilidade de um ponto fixo nos

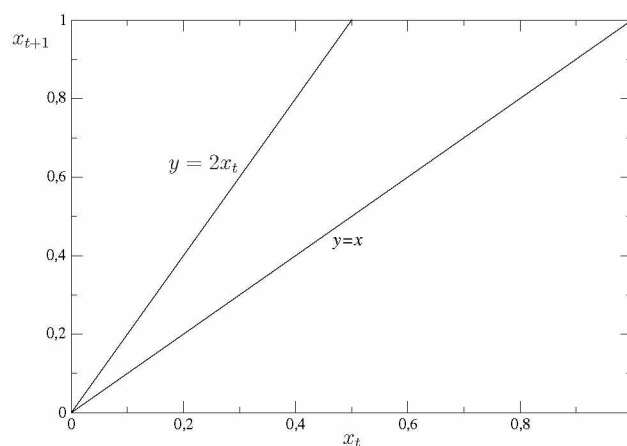


Figura 3.3: Intersecção do mapa linear $x_{t+1} = 2x_t$ com a reta $y = x$.

permite saber se a órbita de um mapa se afasta ou se aproxima desse ponto fixo. Quando uma órbita diverge a partir de um ponto fixo, esse será instável, se a órbita converge para um ponto fixo, esse será estável. Quantitativamente determinamos a estabilidade linear de um ponto fixo da seguinte maneira:

(i) Consideramos uma iteração x_t próxima a um ponto fixo x^* , tal que a distância entre

as duas iterações seja:

$$\delta_t = |x_t - x^*|, \quad (3.5)$$

considerando agora a x_{t+1} iterada próxima a um ponto fixo x^* , temos:

$$\begin{aligned} \delta_{t+1} &= |x_{t+1} - x^*|, \\ \delta_{t+1} &= |f(x_t) - x^*|, \\ \delta_{t+1} &= |f(x^* + \delta_t) - x^*|. \end{aligned}$$

(ii) Expandimos em série de Taylor $f(x^* + \delta_t)$ e obtemos:

$$\delta_{t+1} = \left| f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx^*} \delta_t - x^* \right|, \quad (3.6)$$

$$\delta_{t+1} = \left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| \delta_t. \quad (3.7)$$

Quando $\delta_{t+1} < \delta_t$ as iterações estão convergindo para o ponto fixo x^* , se $\delta_{t+1} > \delta_t$ as iterações estão divergindo de x^* . Portanto, podemos resumir os critérios de estabilidade através da eqs. 3.8 e 3.9. Um ponto fixo é dito estável se:

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| < 1. \quad (3.8)$$

Um ponto fixo é dito instável se

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| > 1. \quad (3.9)$$

Quando a derivada em relação ao ponto fixo, $|f'(x^*)|$, é zero o ponto fixo é dito superestável e quando $|f'(x^*)| = 1$ o ponto fixo é neutro.

3.3 Definição do Expoente de Lyapunov

Podemos escolher duas condições iniciais muito próximas x_0 e x'_0 , em um mapa arbitrário $x_{t+1} = f(x_t)$, a fim de que a distância inicial entre estas duas condições iniciais

$d_0 = |x'_0 - x_0|$ seja muito pequena. Após a primeira iteração do mapa esta distância será:

$$d_1 = |x'_1 - x_1| = |f(x'_0) - f(x_0)|,$$

na segunda iteração temos:

$$d_2 = |f(x'_1) - f(x_1)| = |f^{[2]}(x'_0) - f^{[2]}(x_0)|,$$

por indução finita após t iterações do mapa $x_{t+1} = f(x_t)$, as órbitas geradas a partir das condições iniciais x_0 e x'_0 estarão distantes de [23]:

$$d_t = |x'_t - x_t| = |f^{[t]}(x'_0) - f^{[t]}(x_0)|. \quad (3.10)$$

Assumindo que a distância entre duas órbitas dependa exponencialmente com o tempo (número de iterações do mapa) temos que:

$$d_t \sim d_0 e^{t\lambda}, \quad (3.11)$$

onde λ é o expoente de Lyapunov. Tomando o limite da equação 3.11, com a distância inicial tendendo a zero e número de iterações tendendo a infinito, temos:

$$\lambda = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d_t}{d_0} \right|. \quad (3.12)$$

Substituindo d_t em 3.12 temos:

$$\lambda = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{f^{[t]}(x'_0) - f^{[t]}(x_0)}{d_0} \right|. \quad (3.13)$$

Mas $x'_0 = x_0 + d_0$, permutando os limites, temos o limite de uma razão incremental, ou seja, uma derivada:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{f^{[t]}(x_0 + d_0) - f^{[t]}(x_0)}{d_0} \right|, \quad (3.14)$$

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df^{[t]}(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (3.15)$$

Podemos usar repetidas vezes a regra da cadeia para escrever a derivada da função t vezes composta como o produto das derivadas de $f(x)$ em cada ponto da órbita x_i [23],

$$\frac{df^{[t]}(x_0)}{dx_0} = \prod_{i=0}^{t-1} \frac{df(x_i)}{dx_i}. \quad (3.16)$$

Finalmente temos:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i) \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |f'(x_i)|, \quad (3.17)$$

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_t = f^{[t]}(x_0). \quad (3.18)$$

3.4 Diagrama de Bifurcações

Uma bifurcação significa uma mudança qualitativa na dinâmica de um sistema. Através de um diagrama de bifurcações, podemos visualizar o comportamento dos pontos fixos conforme um parâmetro do mapa é variado. Dizemos que ocorre uma bifurcação quando:

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| = 1, \quad (3.19)$$

ou seja, quando a função não-linear $f(x_t)$ tangencia a reta $y = x$. Neste ponto um ponto fixo pode ser criado ou destruído e a órbita periódica do mapa pode aumentar seu período. A figura 3.4(a) mostra o diagrama de bifurcações do mapa logístico $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$. Conforme variamos o parâmetro de controle r ocorre uma sequência de bifurcações que duplicam o período da órbita do mapa. Com o aumento de r , o período da órbita aumenta e torna-se cada vez mais “complicado”. A partir de um determinado valor do parâmetro, $r \sim 3,57$, a órbita do mapa torna-se aperiódica e um comportamento caótico se inicia. O expoente de Lyapunov para o mapa logístico é mostrado na figura 3.4(b). Vemos que, para $r < 3,57$, fora do regime caótico, seu valor é essencialmente negativo e nulo nos pontos de bifurcação.

3.4.1 Bifurcação Sela-Nó ou Bifurcação Tangente

Uma bifurcação sela-nó é o mecanismo básico pelo qual dois pontos fixos, um instável e outro estável, são criados ou destruídos. Conforme um parâmetro de um sistema, contínuo ou discreto, é variado, dois pontos fixos se aproximam, colidem e são mutuamente

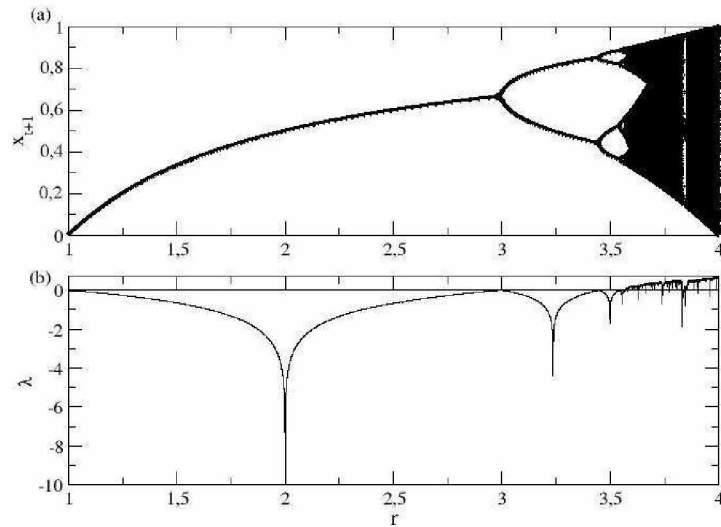


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação para o mapa logístico (a), expoente de Lyapunov (b) em função do parâmetro r .

aniquilados [24]. Um exemplo de bifurcação sela-nó ocorre no mapa exponencial [23]:

$$x_{t+1} = pe^{x_t}, \quad (3.20)$$

onde p é o parâmetro variável. Os pontos fixos do mapa são dados pela eq. 3.4. Através da intersecção da reta $y = x$ (figura 3.5) observa-se que o mapa possui dois pontos fixos para $p = 0, 2$ em 3.5(a), um ponto fixo estável e um instável. No ponto de bifurcação, dado pela eq. 3.19, temos:

$$pe^1 = 1, \quad (3.21)$$

$$p = p_b = \frac{1}{e}, \quad (3.22)$$

p_b indica ponto de bifurcação. Portanto, para este valor do parâmetro p , $p = p_b$, ocorre a aniquilação dos pontos fixos estável e instável, figura 3.5(b). Quando $p > p_b$ o mapa não tem pontos fixos, figura 3.5(c).

3.5 Crise

O mecanismo de crise ocorre devido a colisão de uma órbita caótica com uma órbita periódica instável. Após a crise, ocorre uma mudança súbita da órbita caótica. A órbita pode se tornar periódica ou aumentar seu período, ou ainda divergir para menos

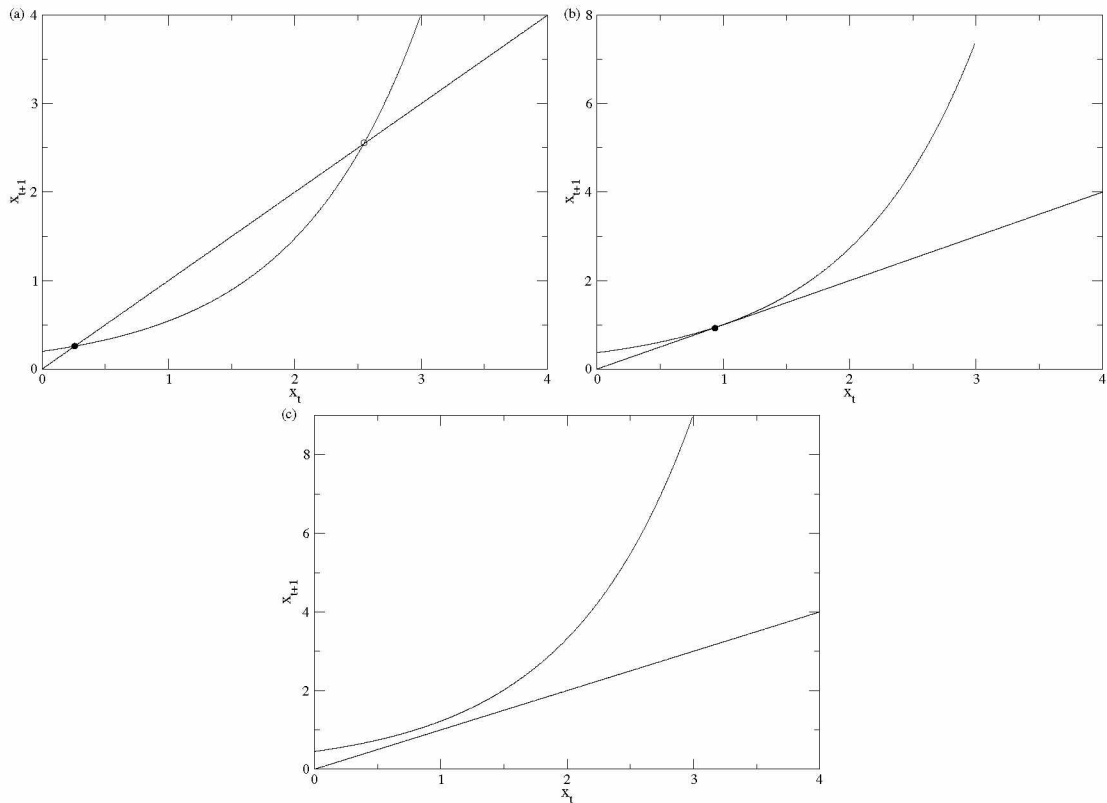


Figura 3.5: Bifurcação sela-nó no mapa exponencial para $p = 0, 2 < p_b$ (a), para $p = p_b = 1/e$ (b) e $p = 0,45 > p_b$ (c).

infinito[23]. O mapa logístico apresenta o comportamento de crise para um valor do parâmetro r ligeiramente superior ao limite do regime caótico, o qual é $r = r_c = 4$. A série temporal do mapa logístico para um valor de r ligeiramente superior ao valor crítico, $r = r_c$, diverge para menos infinito. Isto ocorre pois, para $r > 4$ a aplicação $f(x_t)$ mapeia pontos fora do intervalo $[0, 1]$ [23].

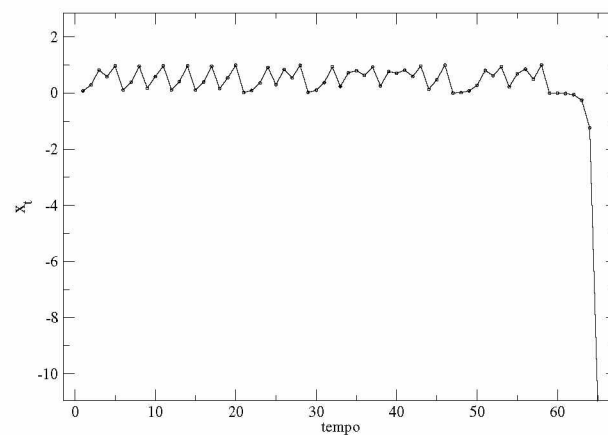


Figura 3.6: Série temporal do mapa logístico para $r = 4,001$.

Dinâmica do Mapa de Rulkov

Este capítulo é destinado a discutir algumas propriedades da dinâmica do mapa de Rulkov. Na seção 4.1 será explicitado como é possível associar uma fase à variável lenta y_n . Na seção 4.2 discute-se o mecanismo dos *bursts* devido à ocorrência de bifurcações e a estabilidade dos pontos fixos do mapa.

4.1 Fase de *Bursting*

Conforme visto no capítulo 2, o mapa de Rulkov é um modelo que descreve o comportamento de neurônios que apresentam uma sequência de disparos do potencial de ação, os *bursts*, as equações que governam o mapa são:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + y_n, \quad (4.1)$$

$$y_{n+1} = y_n - \sigma x_n - \beta. \quad (4.2)$$

Na figura 4.1(a) observa-se que a série temporal de x_n apresenta um comportamento regular antes dos disparos, caracterizado pelo período quiescente e um comportamento irregular durante os disparos, os spikes. A série temporal de y_n , figura 4.1(b), cresce linearmente durante o período regular de x_n e decresce linearmente durante o comportamento irregular (disparos) de x_n , apresentando um comportamento regular antes e depois dos disparos.

É possível estimar uma fase $\phi(n)$ para a série temporal y_n uma vez que, os máximos da variável lenta y_n coincidem com o início de uma sequência de disparos da variável rápida x_n , figura 4.1. Dizemos que $\phi(n)$ é a fase de *bursting*. Portanto, os máximos da série

temporal y_n precisam ser computados. Na figura 4.1(b) observa-se que a escala lenta não cresce de maneira perfeitamente linear até o ponto máximo, apresentando alguns “vales” e “morros”. Esses “morros” podem ser computados pelo programa como falsos máximos. Devido a isto, na implementação do programa esse fato deve ser levado em consideração, a fim de se obter uma contagem confiável dos máximos da série temporal y_n . Os máximos da variável lenta y_n estão representados na figura 4.1(b).

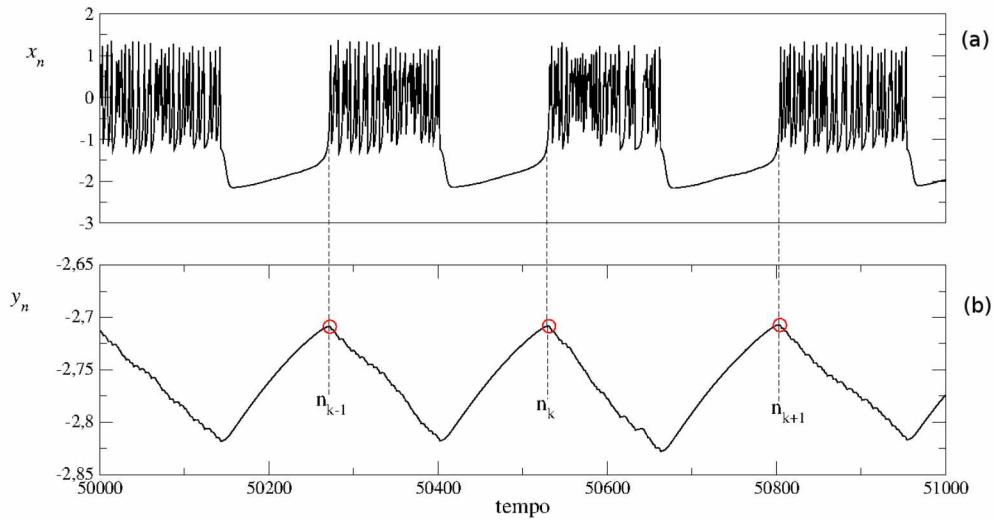


Figura 4.1: Mínimos de x_n (a) e máximos de y_n (b), com $\alpha = 4, 1$ e $\sigma = \beta = 0,001$.

Para uma série temporal periódica considera-se uma fase da seguinte maneira: $\phi(n) = 2\pi k$, onde k é o número do pico da série. Contudo, observa-se que a série y_n não é uma função perfeitamente periódica, ou seja, os intervalos entre um máximo e o seguinte não são do mesmo tamanho. Portanto, precisamos levar em conta uma frequência Ω da série, a qual será a frequência de *bursting*. Deste modo, podemos expressar a fase por meio da equação:

$$\phi(n) = 2\pi k + \Omega(n - n_k), \quad (4.3)$$

onde n é o tempo discreto e n_k indica um máximo na série y_n , portanto $(n - n_k)$ é o tempo total de contagem dos máximos. Podemos expressar a frequência Ω como:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(n_{k+1} - n_k)}, \quad (4.4)$$

onde $(n_{k+1} - n_k)$ é o intervalo entre um máximo e outro da série temporal y_n , ou seja o

período T . Portanto a fase $\phi(n)$ torna-se:

$$\phi_n = 2\pi k + 2\pi \frac{n - n_k}{n_{k+1} - n_k}. \quad (4.5)$$

Podemos estabelecer a frequência Ω dos *bursts* através da fase ϕ_n ,

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n) - \phi(0)}{n}. \quad (4.6)$$

A fase $\phi(n)$ varia de maneira quase linear, cresce monotonicamente com o tempo, como mostra a figura 4.2.

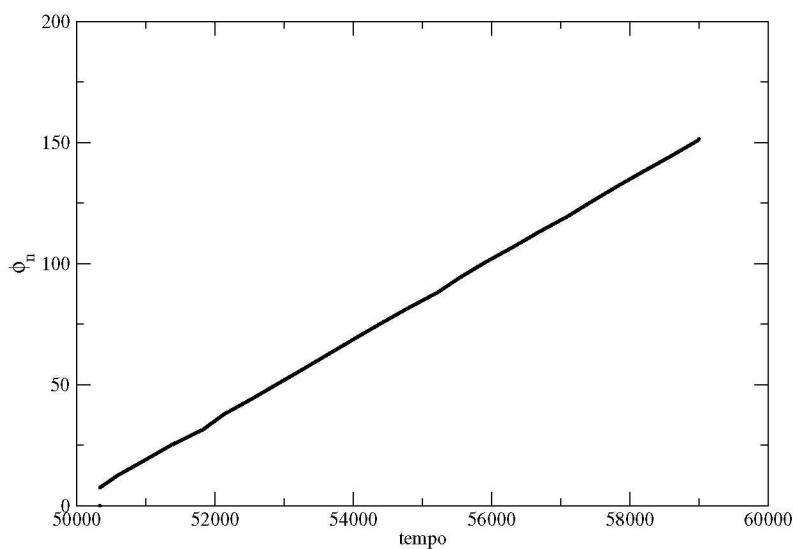


Figura 4.2: Fase ϕ_n da variável lenta y_n .

Com o aumento do parâmetro α o período dos *bursts* diminui, ou seja, a frequência Ω aumenta, como é possível observar na figura 4.3. A partir de $\alpha = 4.5$ a série não apresenta períodos de *bursts* bem definidos. Para $\alpha = 4.9$ observa-se apenas uma sequência caótica de disparos.

4.2 Pontos Fixos do Mapa de Rulkov

De acordo com [4], a evolução da variável lenta y_n para cada passo m é governada por

$$y_{n+1} = y_n - m(\beta + \sigma \overline{x_{n,m}}), \quad (4.7)$$

sendo $\overline{x_{n,m}}$ o valor médio de x_n calculado para m iterações. O valor de y_n aumenta se $\overline{x_{n,m}} < -\beta$ e diminui se $\overline{x_{n,m}} > -\beta$. Podemos considerar a variável y_n como constante,

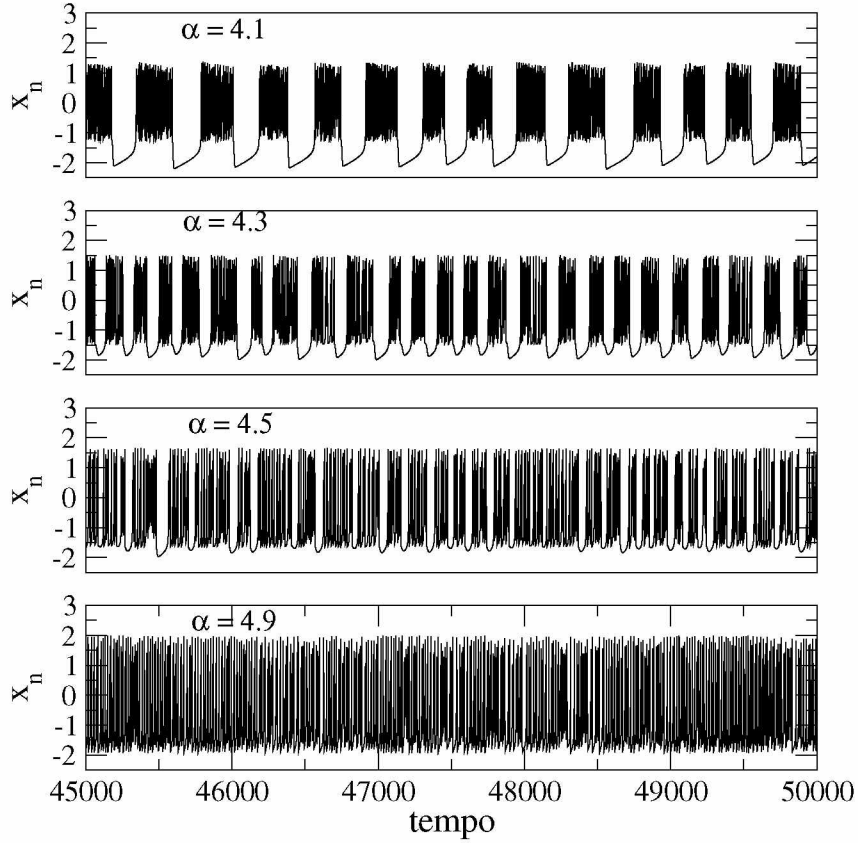


Figura 4.3: Série temporal para a variável rápida x_n para diferentes valores de α , com $\sigma=\beta = 0,001$.

$y_n = \gamma$, uma vez que sua evolução é lenta. Deste modo, o mapa de Rulkov assume a forma unidimensional:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + \gamma, \quad (4.8)$$

encontramos os pontos fixos utilizando a equação abaixo, conforme a definição 3.4:

$$x^* = \frac{\alpha}{1 + x^{*2}} + \gamma. \quad (4.9)$$

Portanto, os pontos fixos serão as soluções da equação de terceiro grau:

$$(x^*)^3 - \gamma(x^*)^2 + (x^*) - \gamma - \alpha = 0. \quad (4.10)$$

Os pontos fixos são:

$$x_1^* = -\frac{\chi^{1/3}}{12} + \frac{3}{\chi^{1/3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) + \frac{\gamma}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\chi^{1/3}}{6} + \left(\frac{\chi^{1/3}}{9} \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) \right], \quad (4.11)$$

$$x_2^* = -\frac{\chi^{1/3}}{12} + \frac{3}{\chi^{1/3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) + \frac{\gamma}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\chi^{1/3}}{6} + \left(\frac{\chi^{1/3}}{9} \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) \right], \quad (4.12)$$

$$x_3^* = \frac{\chi^{1/3}}{6} - \frac{6}{\chi^{1/3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right). \quad (4.13)$$

A constante χ é dada em função de α e γ :

$$\chi = 72\gamma + 108\alpha + 8\gamma^3 + 12\sqrt{12 + 24\gamma^2 + 12\gamma^4 + 108\gamma\alpha + 81\alpha^2 + 12\alpha\gamma^3}. \quad (4.14)$$

4.3 Estabilidade dos Pontos Fixos e Diagramas de Bifurcação

As raízes da equação 4.10 podem ser reais ou complexas. Quando x_1^* é um número complexo, x_2^* é o complexo conjugado de x_1^* e o mapa terá apenas o ponto fixo real x_3^* . Quando as raízes são reais o mapa terá três pontos fixos. Conforme visto, a estabilidade dos pontos fixos é dada pelas eqs. 3.8 e 3.9, para $\alpha = 4,1$ e $\gamma = -2,85$ temos: $|f'(x_1^*)| = 0,6$; $|f'(x_2^*)| = 1,561$ e $|f'(x_3^*)| = 2,6013$. Portanto, para este valor de γ , o ponto fixo x_1^* é estável, x_2^* é instável e x_3^* pode mudar de estabilidade de acordo com o valor de γ . Atribuindo valores para γ é possível verificar o mecanismo de surgimento ou desaparecimento dos pontos fixos na figura 4.4, para a primeira iterada do mapa de Rulkov simplificado, e compreender a dinâmica dos *bursts*.

Na figura 4.4(a) quando há apenas o ponto fixo instável x_3^* , temos $y_n = \gamma = -2,65$. A órbita está em um atrator caótico e nessa situação inicia-se os disparos de x_n . Diminuindo o valor de γ ocorre uma bifurcação sela-nó, figura 4.4(b), quando $y_n = \gamma_{sn} = -2,75$. Nesse momento, surgem dois pontos fixos, x_1^* (estável) e x_2^* (instável). Quando $\gamma = -2,85$, figura 4.4(c) os três pontos fixos do mapa estão presentes e a variável x_n ainda está no regime de *bursts*. Diminuindo o valor de y_n , quando $y_n = \gamma_c$, o ponto fixo instável x_2^* aproxima-se de x_3^* e ocorre a colisão do ponto fixo instável x_2^* com o atrator caótico x_3^* . Essa colisão representa o mecanismo de crise do atrator caótico e o fim de um *burst*. Nessa situação a órbita se encontra sobre o ponto fixo estável x_1^* , quando inicia-se o período quiescente de x_n . Deste modo, a dinâmica dos disparos é controlada pelo parâmetro γ e pelo ponto fixo instável x_2^* .

O valor mínimo que o ponto fixo x_2^* deve ter para que ocorra a crise no atrator caótico, devido à colisão do ponto fixo x_2^* com o ponto fixo x_3^* , é dado pela iteração do valor máximo x_n que o mapa 4.8 pode assumir. O valor máximo de uma iteração no mapa de Rulkov é dado por:

$$f(0) = x_n = \alpha + \gamma, \quad (4.15)$$

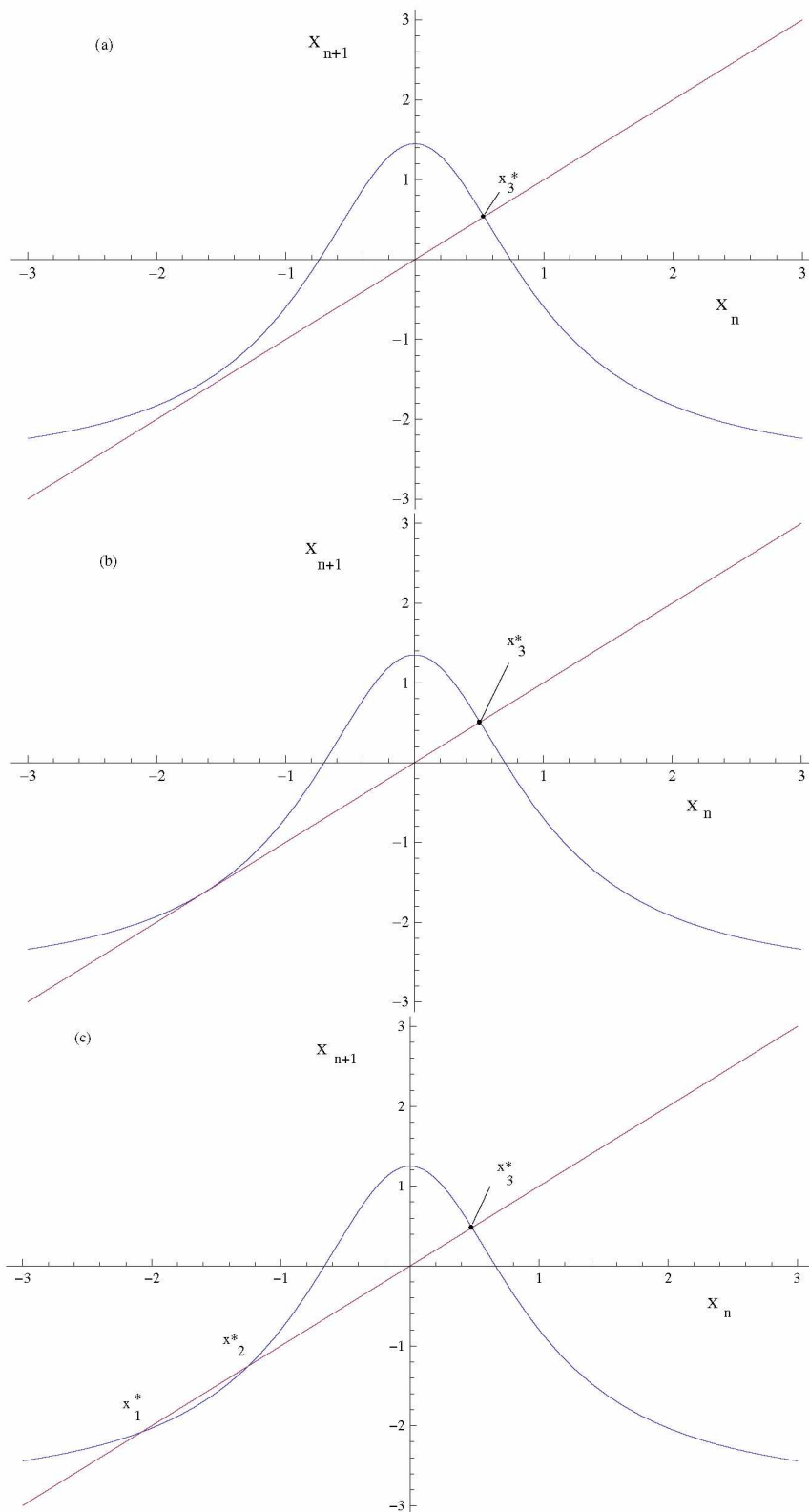


Figura 4.4: Mapa de Rulkov com $\alpha=4,1$, para três valores de γ (a) $\gamma = -2,65$, (b) $\gamma = -2,75$ e (c) $\gamma = -2,85$.

consequentemente, o valor mínimo de x_2^* para a ocorrência de crise é dado pela iteração

do valor máximo de x_n ,

$$x_{min} = f(f(0)) = \frac{\alpha}{1 + (\alpha + \gamma)^2} + \gamma. \quad (4.16)$$

Igualando a equação 4.12 com 4.16 obtemos a curva de bifurcação L_h de α em função de γ .

$$\alpha = \frac{-3\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 8}}{2}. \quad (4.17)$$

Essa curva representa a dependência de α com γ para a ocorrência de crise no atrator caótico. As curvas de bifurcação sela-nó de α em função de γ podem ser obtidas igualando a equação 4.11 e 4.12, pois uma bifurcação sela-nó ocorre quando os pontos fixos x_1^* e x_2^* são iguais, uma vez que x_1^* é estável e x_2^* é instável. Essas curvas são dadas por [4]:

$$\alpha = -2[(\gamma^2 + 9) - (\gamma^2 - 3)^{3/2}]/27, \quad (4.18)$$

$$\alpha = -2[(\gamma^2 + 9) + (\gamma^2 - 3)^{3/2}]/27, \quad (4.19)$$

A figura 4.5 mostra a curva de bifurcação para a ocorrência de crise, L_h , e a curva de bifurcação sela-nó L_{12} (eq. 4.19). É possível notar que o aumento de α , até o valor aproximado de $\alpha = 5$, aproxima as duas curvas L_h (crise) e L_{12} (bifurcação sela-nó), isto é, aumentando α os valores de γ para os quais ocorrem crise no atrator caótico e bifurcação sela-nó se aproximam. Portanto, quanto maior o valor de α , maior é a frequência dos *bursts*. Os diagramas de bifurcação $x_n \times \gamma$ e do expoente de Lyapunov $\lambda \times \gamma$ estão representados

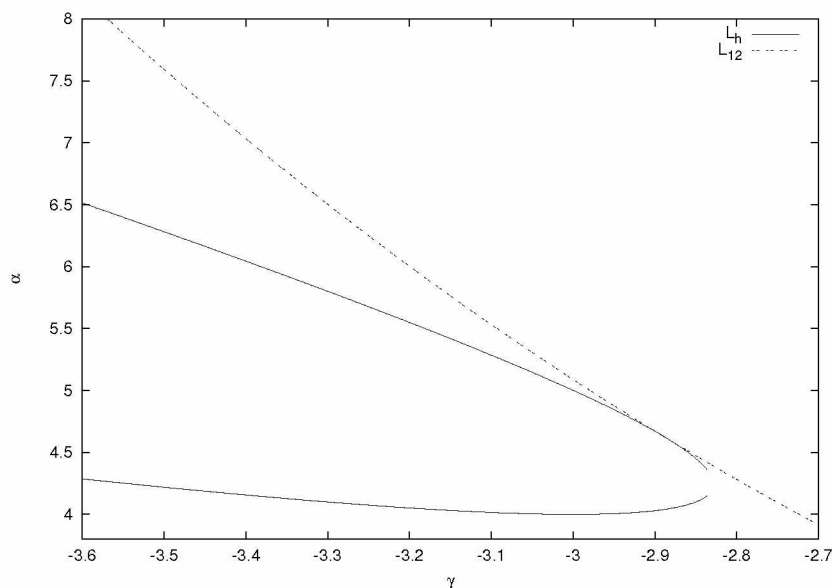


Figura 4.5: Curvas de bifurcação.

na figura 4.6. Em 4.6(a), conforme aumentamos o parâmetro γ verifica-se que o mapa

segue para uma região estável, o que é confirmado através de 4.6(b), pois o expoente de Lyapunov é negativo nesta região. Quando γ está entre 0 e 1 o mapa se encontra numa região estável e o expoente de Lyapunov é negativo. Na região caótica o expoente de Lyapunov é positivo, exceto nas janelas periódicas de 4.6(a) em que este é negativo. Nos pontos de bifurcação o expoente de Lyapunov é nulo.

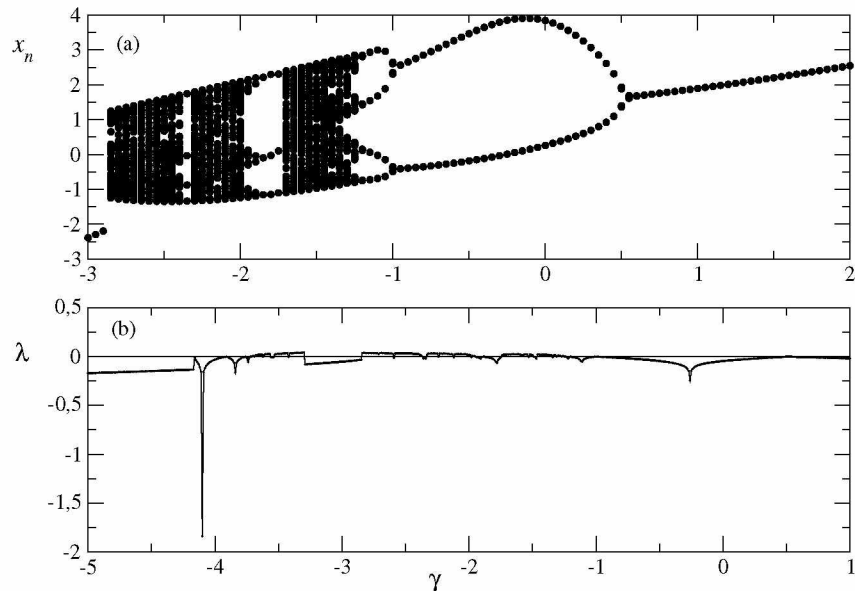


Figura 4.6: Diagrama de bifurcação $x_n \times \gamma$ (a) e diagrama de bifurcação para o expoente de Lyapunov $\lambda \times \gamma$ (b), com $\alpha = 4, 1$.

Acoplamento em Redes Neurais

Conforme exposto anteriormente, os neurônios formam redes por meio das sinapses, portanto, é conveniente estudar o comportamento coletivo dos neurônios, ou seja, as redes neuronais. Segundo [4], em experimentos neurobiológicos e simulações numéricas, neurônios individuais apresentam *bursts* descorrelacionados, ou seja, o início e fim das rajadas de disparo são diferentes para cada neurônio. Contudo, quando um conjunto de neurônios é acoplado, esses neurônios podem sincronizar o início e fim de um *burst* a despeito de suas características individuais. Portanto, o acoplamento suficientemente forte gera a sincronização dos *bursts*.

Sabendo que, o número de conexões de cada neurônio é da ordem de 10^4 [19], considerou-se o acoplamento global dos sítios. Esse tipo de comportamento pode ser empregado se considerarmos uma pequena área do cortex cerebral e não levarmos em conta a intensidade das conexões. Embora esse tipo de acoplamento não seja muito realístico, pode-se obter interessantes informações a respeito da dinâmica neuronal.

Na seção 5.1 será discutido o acoplamento de uma rede de neurônios que produzem rajadas de disparos através do mapa de Rulkov. A seção 5.2 destina-se ao estudo da dinâmica do sistema acoplado, por meio dos diagramas de bifurcação e na seção 5.3 serão expostos alguns conceitos referentes a sincronização e, como esta pode ser medida através do parâmetro de ordem de Kuramoto.

5.1 Acoplamento de Neurônios com o Mapa de Rulkov

Podemos simular o acoplamento de neurônios utilizando o mapa de Rulkov, equações 2.6 e 2.7, através da adição de um termo à variável rápida x_n . Esse termo é proporcional ao campo médio da rede. O campo médio é definido como a média sobre todas as variáveis $x_n^{(i)}$ da rede:

$$X(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^{(i)}; (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5.1)$$

onde N é o número de sítios. Multiplicando o campo médio por uma intensidade de acoplamento ε , o modelo com acoplamento torna-se:

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon X(t). \quad (5.2)$$

A intensidade de acoplamento ε não deve ser muito elevada, a fim de que a série temporal da variável x_n exiba o comportamento de *burst*, pois um valor muito elevado de ε destrói esse comportamento. Em simulações ε não ultrapassa 0,2. A figura 5.1 mostra a evolução temporal do campo médio produzido pelos sítios da rede, para $\varepsilon = 0,025$.

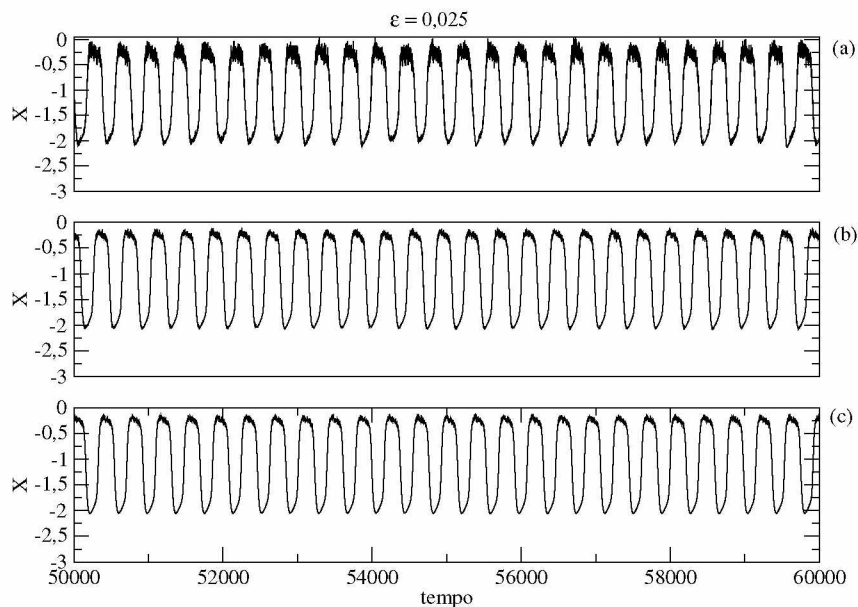


Figura 5.1: Evolução temporal do campo médio para uma rede de 100 (a), 1000 (b) e 10000(c) mapas de Rulkov acoplados, para $\varepsilon = 0,025$.

Atribuindo valores para a intensidade de acoplamento ε , no modelo 5.1, observa-se o fenômeno da sincronização de *bursts*. Consideraram-se dois sítios distintos da rede.

Inicialmente considerou-se $\varepsilon = 0,01$, figura 5.2(a), onde o efeito de sincronização ainda não está evidenciado. Aumentando a intensidade de acoplamento verifica-se que os sítios tendem a sincronizar o início de seus disparos. A sincronização torna-se mais evidente quando $\varepsilon = 0,2$, como mostra a figura 5.2(d).

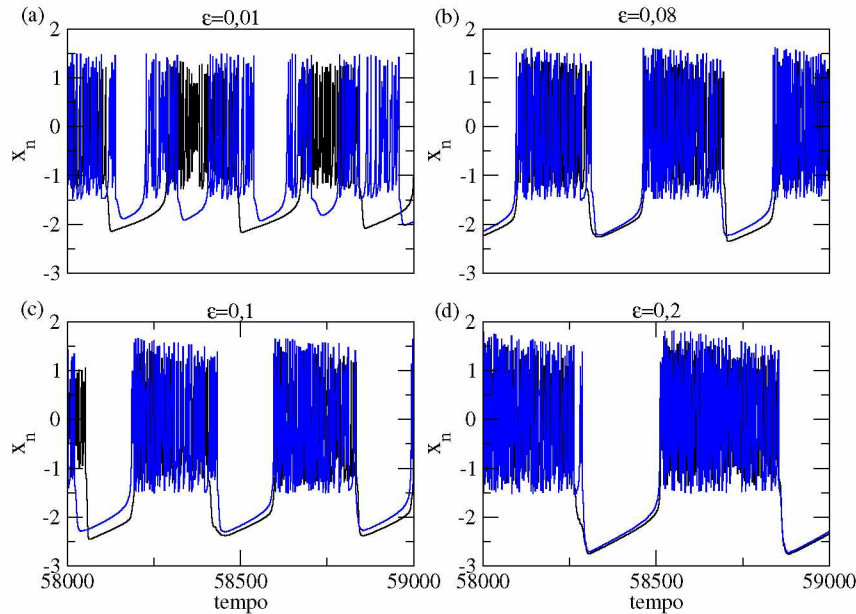


Figura 5.2: Série temporal para a variável rápida x_n , para diferentes valores de ε , com $\alpha=4,1$ para a série em preto e $\alpha=4,3$ para a série em azul.

A série temporal para a variável rápida x_n torna-se menos sensível ao valor do parâmetro α , conforme aumentamos o valor de ε , como mostra a figura 5.3. Esse comportamento indica que, embora cada neurônio possua sua “identidade”, caracterizada pelos diferentes valores de α atribuídos, os sítios, quando acoplados, passam a ignorar essas diferenças e apresentam um comportamento coletivo [4]. A dinâmica dos disparos ainda apresenta um comportamento caótico, contudo, o período dos disparos de cada neurônio está sincronizado com os demais. Outra observação que deve ser levada em consideração é a sensibilidade do período dos *bursts* com a variação de ε . Conforme aumentamos a intensidade do acoplamento verifica-se que a duração dos disparos aumenta, provocando um alargamento dos picos na série temporal de x_n .

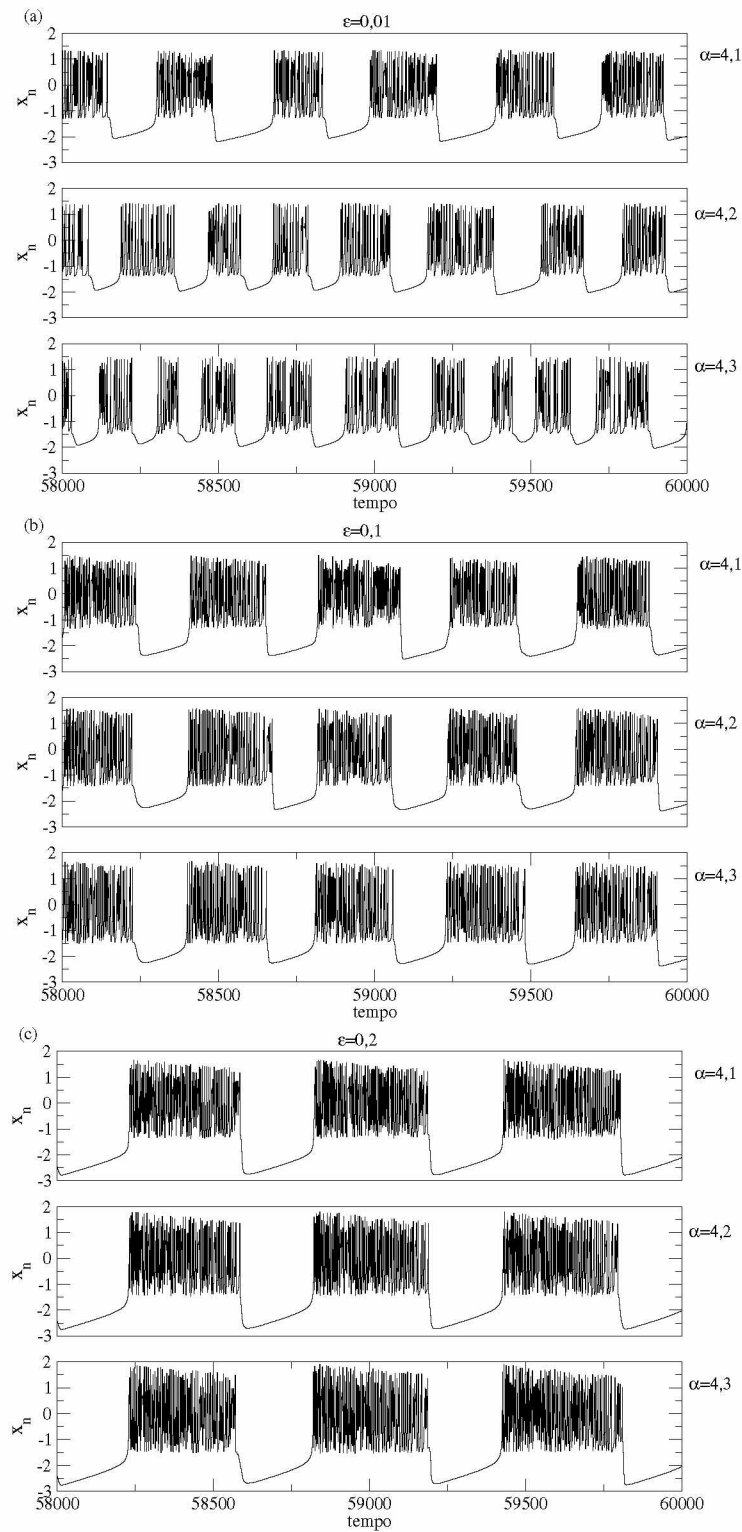


Figura 5.3: Séries temporais para a variável rápida x_n , para uma rede de 100 sítios, com $\alpha=4,1$; 4,2 e 4,3, para $\varepsilon = 0,01$ (a), $\varepsilon=0,1$ (b) e $\varepsilon=0,2$ (c), com $\sigma=\beta = 0,001$.

5.2 Dinâmica da Rede de Rulkov Globalmente Acoplada

A fim de facilitar o estudo da dinâmica de *bursts* quando os sítios estão acoplados, podemos considerar o termo de acoplamento no modelo simplificado do mapa de Rulkov 4.6 [4], em que y_n pode ser aproximado pelo parâmetro de controle γ . Com o termo de acoplamento a equação 4.6 torna-se:

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + \gamma + \varepsilon X(t). \quad (5.3)$$

Quando consideramos apenas a dinâmica individual dos neurônios, constatamos que a duração de um disparo está relacionada com a variação do parâmetro α , pois, conforme aumentamos o parâmetro α , as curvas L_h e L_{12} se aproximam, o que representa uma rápida variação de y_n e conseqüentemente uma diminuição do período de *burst*. Quando os neurônios estão acoplados observa-se, através da figura 5.4, que a duração de um disparo não está mais relacionada com o parâmetro α . Agora a “rapidez” da atividade neuronal está relacionada com a intensidade de acoplamento ε , pois conforme a intensidade de acoplamento aumenta, os períodos dos *bursts* aumentam. A figura 5.4 apresenta a variação da frequência média de *burst* (frequência média da rede) em função da intensidade de acoplamento, para uma rede de 10000 sítios. De acordo com a figura 5.4, verifica-se que

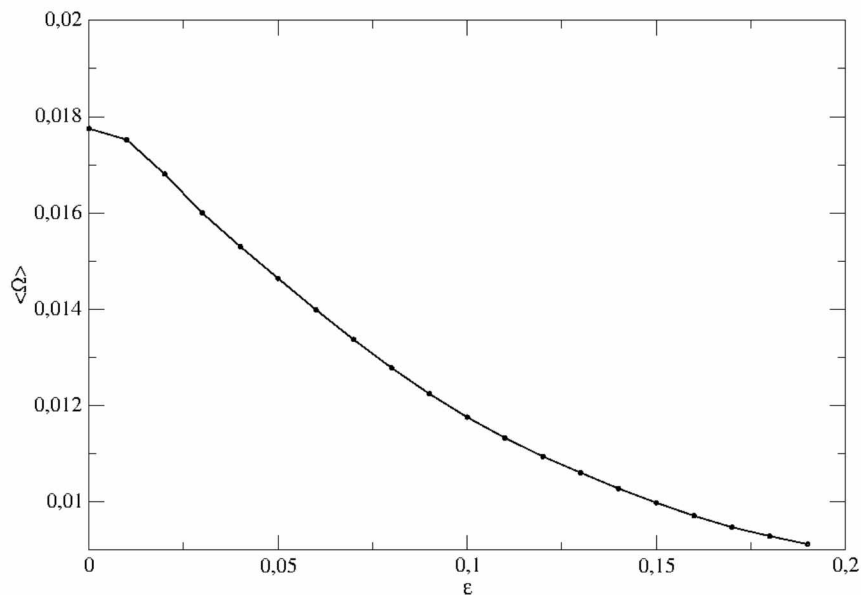


Figura 5.4: Variação da frequência média de uma rede de 10000 sítios, $\langle \Omega \rangle$ com a intensidade de acoplamento ε

a frequência de *burst* diminui com o aumento da intensidade de acoplamento, ou seja, a

frequência dos *bursts* não depende mais das características intrínsecas de cada neurônio. De fato, este comportamento é esperado em sistemas acoplados, uma vez que, quando os osciladores passam a “andar juntos” a inércia do sistema aumenta, a fim de que os osciladores aproximem suas frequências [25].

5.2.1 Diagramas de Bifurcação para os Neurônios Acoplados

A fim de compreender o mecanismo de dependência da duração de um *burst* com a intensidade de acoplamento, podemos obter uma nova curva de bifurcação sela-nó L'_{12} , agora em função da intensidade de acoplamento ε , considerando que, apenas dois sítios de uma rede estejam sincronizados, de acordo com [4]. Antes de um disparo, cada sítio está em seu período quiescente, a variável x_n de cada sítio está localizada sobre o ponto fixo estável x_1^* e os valores de $y_n(i, n)$ e das coordenadas $x_1^*(i, n)$ crescem lentamente. Nesse caso a evolução de x_n em cada sítio pode ser descrita pelo mapa simplificado (eq. 4.8) e o termo de acoplamento pode ser aproximado por $\varepsilon x(i, n)$ [4]:

$$x(i, n + 1) = \frac{\alpha}{[1 + x(i, n)^2]} + \gamma + \varepsilon x(i, n). \quad (5.4)$$

A curva de bifurcação que determina o limiar de $y(i, n)$ para que ocorra o início de um *burst* é agora dada pela equação:

$$27\alpha(1 + \varepsilon)^2/2 = -[\gamma^2 + 9(1 - \varepsilon)^2]\gamma - [\gamma^2 - 3(1 - \varepsilon)^2]^{3/2}. \quad (5.5)$$

Comparando as curvas de bifurcação na ausência e na presença do acoplamento, figura

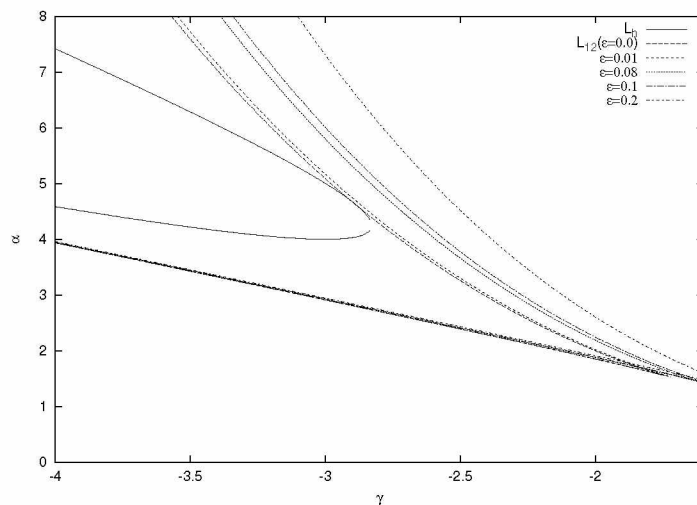


Figura 5.5: Curvas de bifurcação para diferentes valores de ε

5.5, é possível compreender porque o aumento do fator ε é responsável pelo aumento da duração de um *burst*. Com o aumento da intensidade de acoplamento ε nota-se um distanciamento das curvas de bifurcação sela-nó L_{12} em relação à curva de crise L_h . Os valores de γ para os quais ocorre a crise do atrator caótico se afastam dos valores de γ para os quais ocorre uma bifurcação sela-nó, ocasionando uma variação mais lenta de $y_n = \gamma$ e conseqüentemente um aumento na duração dos disparos.

5.3 Parâmetro de Ordem de Kuramoto

Sistemas de osciladores interagentes, em certas condições, podem ser descritos pelo modelo de Kuramoto [10], o qual prevê que, se o acoplamento entre osciladores for suficientemente forte, esses começam a oscilar na mesma frequência. De acordo com [10] qualquer sistema de osciladores aproximadamente idênticos globalmente acoplados pode ser descrito por:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N, \quad (5.6)$$

onde ω_i são as frequências naturais de cada oscilador e Γ_{ij} é uma função de interação que descreve a forma do acoplamento entre o oscilador j e o oscilador i . Kuramoto [10] assumiu um sistema em que cada oscilador afeta os demais osciladores. Nesse tipo de interação, também chamada de acoplamento global, ele assumiu que as interações entre os osciladores são de mesma intensidade e que essas dependem sinusoidalmente com a diferença de fase entre os osciladores. A função de interação é, portanto, descrita por:

$$\Gamma(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \text{sen}(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N, \quad (5.7)$$

onde K é a intensidade do acoplamento e N é o número de osciladores. Deste modo, podemos reescrever a equação 5.7 como:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N. \quad (5.8)$$

As frequências naturais ω_i são geralmente distribuídas de acordo com uma densidade de probabilidade $g(\omega)$, a qual é simétrica em alguma frequência ω_0 , $g(\omega_0 + \omega) = g(\omega_0 - \omega)$.

O diagnóstico de sincronização de um sistema é obtido através do parâmetro de ordem

z de Kuramoto[10] dado por:

$$z = R(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (5.9)$$

onde $\psi(t)$ é a fase global do sistema em estudo, $R(t)$ é o módulo do parâmetro de ordem, e θ_j é a fase de cada oscilador no sistema. Uma vez que z é uma quantidade complexa pode-se considerar seu módulo:

$$|z| = R(t) = \frac{1}{N} \sqrt{\left[\sum_{j=1}^N \cos(\theta_j) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^N \sin(\theta_j) \right]^2}. \quad (5.10)$$

Definindo $R(t)$ dessa maneira, quando as fases estão descorrelacionadas, a soma é pequena e $R(t)$ tende a zero e diz-se que o sistema está dessincronizado. Quando as fases estão correlacionadas $R(t)$ tende a 1 e diz-se que o sistema está sincronizado. O modelo de Kuramoto assegura que há uma transição de fase do estado dessincronizado para o estado sincronizado, dada por [10]:

$$R = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}, \quad (5.11)$$

onde K_c é o acoplamento crítico para ocorrer a transição de fase.

Podemos considerar a equação 5.8 em função do parâmetro de ordem, multiplicando os membros de 5.9 por $e^{i\theta_i}$, decompondo na fórmula de Euler e igualando as partes imaginárias, temos:

$$R \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N, \quad (5.12)$$

substituindo esse resultado em 5.8, temos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + K R \sin(\psi - \theta_i), i = 1, \dots, N. \quad (5.13)$$

Utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, integraram-se as equações de Kuramoto para uma rede de 1000 osciladores, para os casos de $K = 0, 7; 1, 0$ e $1, 3$, utilizou-se uma distribuição de densidades lorentziana [26] para as frequências naturais:

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (5.14)$$

onde γ é uma constante que define a largura da distribuição. Utilizou-se $\gamma = 1$. Para uma distribuição lorentziana é possível obter o valor crítico de acoplamento K_c para o qual ocorre a transição de fase [10]. Esse valor é $K_c = 2\gamma$. Substituindo esse valor na equação

5.11 temos:

$$r = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{K}}. \quad (5.15)$$

A figura 5.5 mostra o comportamento das fases dos osciladores conforme a intensidade de acoplamento K cresce.

Em 5.6(a), $K < K_c$, observa-se uma distribuição aleatória das fases. Com o aumento da intensidade de acoplamento observa-se a transição de fase quando para $K = K_c = 1$ em 5.6(b) e as fases dos osciladores começam a se agrupar. Em 5.6(c) as fases continuam o processo de agrupamento e agora para $K > K_c$ estão mais correlacionadas.

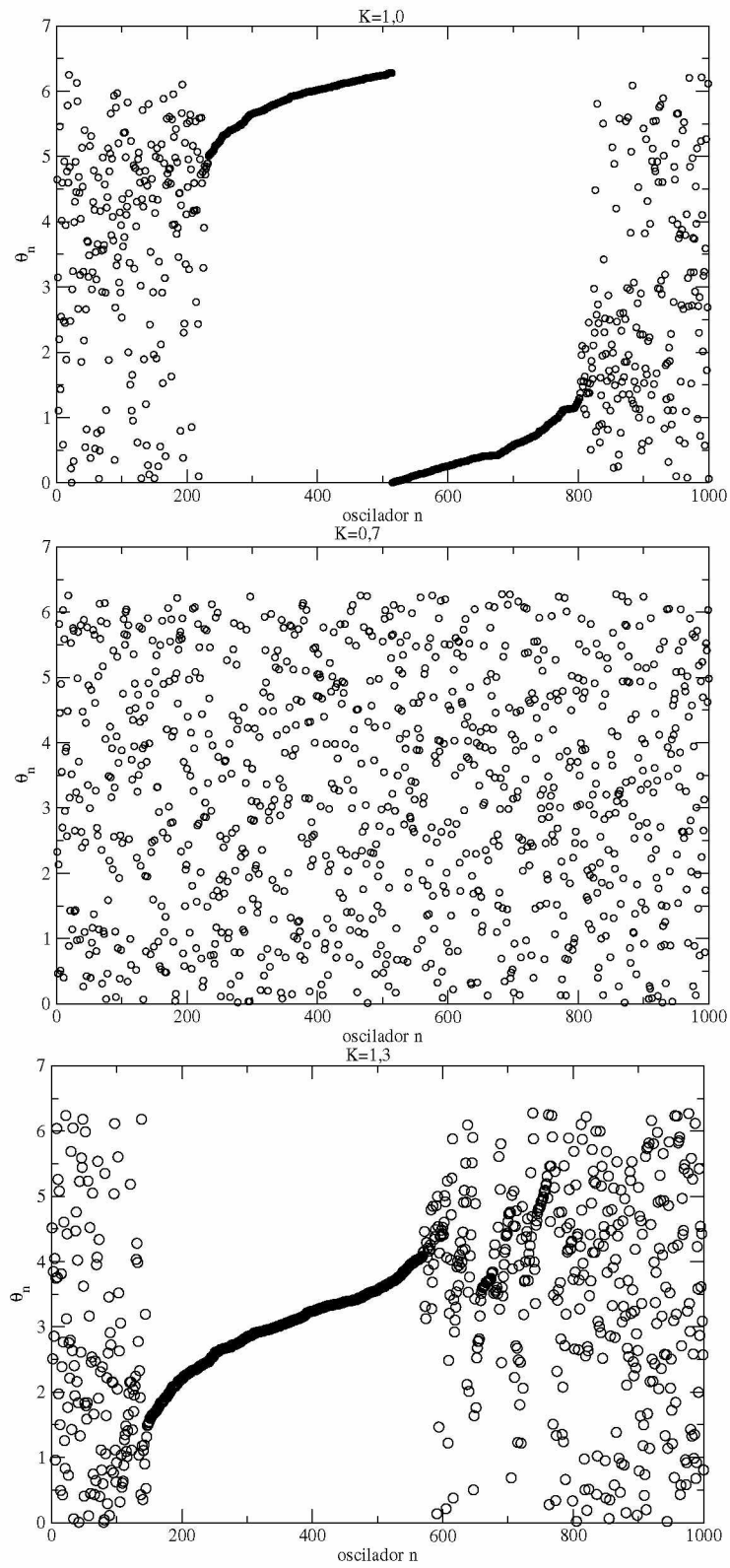
Embora o parâmetro de ordem de Kuramoto seja considerado um diagnóstico de sincronização para um sistema de osciladores a tempo contínuo, podemos utilizá-lo também como diagnóstico de sincronização para uma rede de mapas acoplados de Rulkov, uma vez que, é possível observar a sincronização de frequências em mapas [27]. Para o sistema em estudo, o cálculo do parâmetro de ordem é realizado substituindo θ_j na equação 5.10 pelas fases de *bursting* $\phi_n(i)$.

$$R_n = \frac{1}{N} \sqrt{\left[\sum_{i=1}^N \cos(\phi_n(i)) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^N \text{sen}(\phi_n(i)) \right]^2}, \quad (5.16)$$

onde o índice n indica uma medida a tempo discreto uma vez que, o sistema em estudo são os mapas de Rulkov globalmente acoplados. A fim de fornecer uma medida mais precisa, podemos computar a média temporal do parametro de ordem $\langle R_n \rangle$:

$$\langle R_n \rangle = \frac{1}{T} \sum_{n=t_0}^T R_n. \quad (5.17)$$

Como pode ser visto na figura 5.7, o conjunto de osciladores globalmente acoplados pelo mapa de Rulkov apresenta uma transição de fase e seu comportamento se aproxima da equação 5.11 conforme o tamanho da rede aumenta. Em 5.7, observa-se que para $\varepsilon = 0,025$ mais de 80% dos sítios estão sincronizados, para os três tamanhos de redes considerados.

Figura 5.6: Fase dos osciladores no modelo de Kuramoto para $K = 0,7; 1,0e1,3$

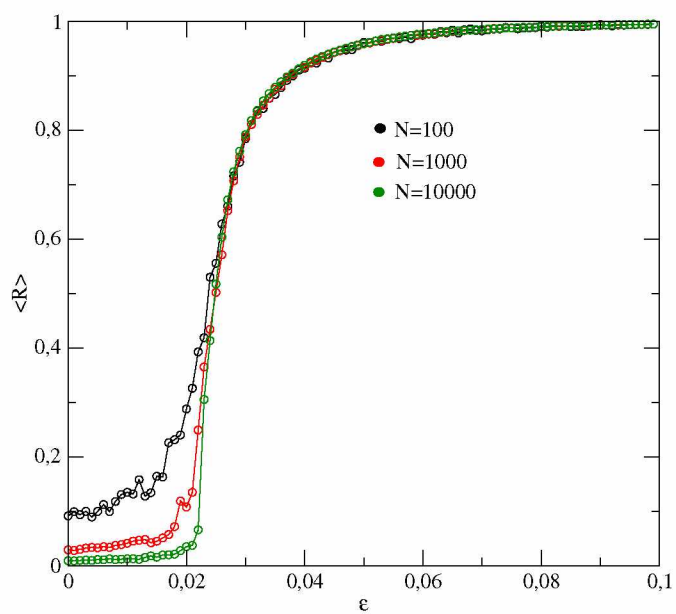


Figura 5.7: Transição de fase para mapas de Rulkov acoplados, para redes de: 100, 1000 e 10000.

Controle da Sincronização dos Disparos Neuronais

Conforme exposto anteriormente, diversos estudos têm relatado que o estímulo cerebral, por meio de um sinal elétrico, funciona como um tratamento para doenças neurodegenerativas. Deste modo, este capítulo é destinado a discutir a implementação de dois métodos para supressão da sincronização em redes neuronais, baseados na estimulação elétrica cerebral, e analisar a eficiência destes métodos em tirar o sistema do estado sincronizado. O primeiro método de controle empregado simula uma corrente externa periódica. O segundo método simula uma corrente com atraso de realimentação - *delayed feedback control*.

6.1 Controle por Meio de um Sinal Externo Periódico

Conforme visto no capítulo 5, quando os mapas de Rulkov são acoplados, a equação da variável rápida para cada sítio torna-se a equação 5.2:

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon X(t). \quad (6.1)$$

Adicionando uma corrente externa periódica $I_{ext} = d\text{sen}(\omega t)$ a equação 5.2 torna-se:

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon X(t) + I_{ext}, \quad (6.2)$$

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon X(t) + d\text{sen}(\omega t), \quad (6.3)$$

onde d é a amplitude da corrente externa, ω a frequência externa e o tempo t indica tempo discreto.

Com a aplicação do sinal externo, a dinâmica do sistema mudará, portanto podemos recalcular o campo médio produzido pela rede na presença do controle, chamando-o agora de X_f para diferenciar. De acordo com a figura 5.1, quando os neurônios estão acoplados o campo médio apresenta oscilações regulares com o tempo e, portanto, a sua variância é diferente de zero. Na presença do controle a variância do campo médio tende a diminuir (se o controle for efetivo), ou seja, as oscilações tendem a se extinguir com o tempo. Deste modo, podemos obter um diagnóstico de supressão da sincronização através da comparação da variância do campo médio na ausência do controle com a variância do campo médio na presença do controle. A variância de $X(t)$ e $X_f(t)$ são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} VarX(t) &= \sqrt{[\langle X(t) \rangle - X(t)]^2}, \\ VarX_f(t) &= \sqrt{[\langle X_f(t) \rangle - X_f(t)]^2}, \end{aligned}$$

onde $\langle X(t) \rangle$ e $\langle X_f(t) \rangle$ são médias temporais do campo médio na ausência e na presença do controle respectivamente, N é o número de sítios. Portanto, o diagnóstico de supressão da sincronização é o coeficiente de supressão S [6][28], dado por:

$$S = \sqrt{\frac{VarX(t)}{VarX_f(t)}}. \quad (6.4)$$

Quanto menor for a variância do campo médio na presença do controle X_f , maior o valor de S e conseqüentemente mais efetivo é o controle empregado. Quando o controle não ocasiona uma diminuição da variância do campo médio o coeficiente de supressão tende a 1.

Considerando simulações com redes de até 10000 sítios e, sabendo de acordo com a figura 5.7, que para $\varepsilon = 0,025$ mais de 80% dos sítios das redes de 100, 1000 e 10000 estão sincronizados, fixou-se este valor para a intensidade de acoplamento. Analisou-se para quais valores da frequência externa ω as redes entram em ressonância, considerando diferentes valores para amplitude d como mostram as figuras 6.1, 6.2 e 6.3. Para os três tamanhos de redes considerados, $N=100$; 1000 e 10000, o comportamento dos gráficos é semelhante.

Para um valor pequeno da amplitude d , observa-se, de acordo com a figura 6.1, que a diferença $\langle \Omega \rangle - \omega$ decresce linearmente até $\omega \sim 0,03$, onde nota-se um pequeno desvio da curva, que vai até $\omega \sim 0,0375$. Contudo, o valor de d ainda é muito pequeno para que

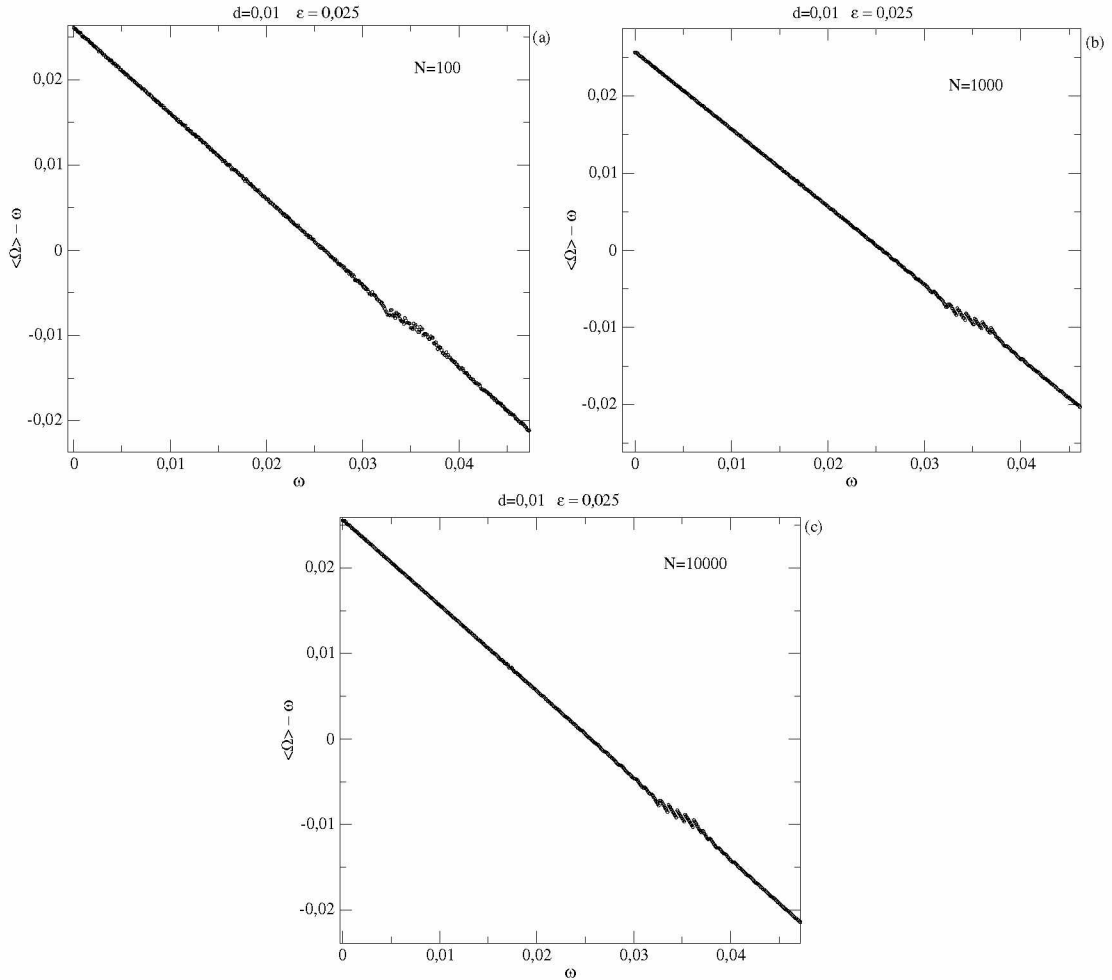


Figura 6.1: $(\langle \Omega \rangle - \omega) \times \omega$, para redes de tamanho 100(a), 1000(b) e 10000(c).

esta região de desvio forme um platô de sincronização. Podemos dizer que pontualmente o sistema pode ter entrado em ressonância, como um oscilador linear.

Com o aumento da amplitude do sinal, como em 6.2, para $d = 0,05$ já é possível observar a existência de alguns platôs de sincronização. Na figura 6.3, para $d = 0,1$, este comportamento torna-se mais evidente e é possível notar um aumento no tamanho dos platôs. Esse comportamento indica que, conforme aumentamos o valor da amplitude d , o sistema sincroniza mais fácil com a frequência externa ω e para uma faixa cada vez maior de valores de ω .

De acordo com [29] cada platô de sincronização está relacionado com uma língua de Arnold¹. De forma geral nota-se que a ocorrência dos platôs não está centrada em zero, ou seja, quando $\Omega = \omega$. O fato de que esses platôs não estejam centrados em zero ocorre porque o sinal externo é aplicado em todos os sítios da rede e, outros modos normais estão

¹Ver apêndice A

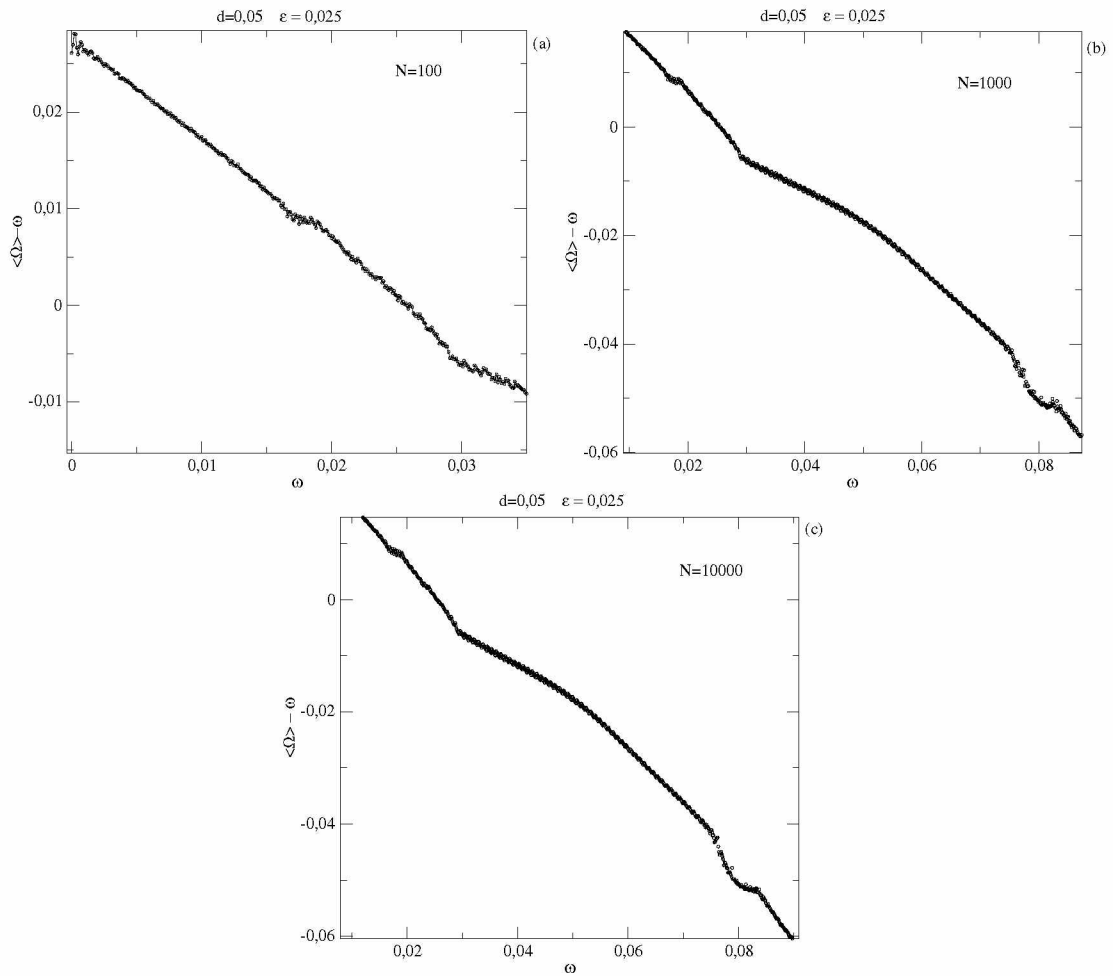


Figura 6.2: $(\langle \Omega \rangle - \omega) \times \omega$, para redes de tamanho 100(a), 1000(b) e 10000(c).

sendo excitados ². De fato, quando apenas um sítio da rede é perturbado, o intervalo de sincronização está centrado em zero, como pode ser visto em [5].

Os valores de ω para os quais o sistema entra em ressonância, estão organizados na tabela 6.1, de acordo com cada valor da amplitude d considerado. Sabendo que o comportamento dos gráficos não muda expressivamente com o aumento da rede, esses valores de ω foram considerados para uma rede de 10000 sítios.

Tabela 6.1: valores de ω para ressonância

d	ω
0,1	primeiro platô: 0,012 a 0,0135
0,1	segundo platô: 0,017 a 0,02
0,05	primeiro platô: 0,016 a 0,019
0,05	segundo platô: 0,022 a 0,024
0,05	terceiro platô: 0,08 a 0,083
0,01	sincronização pontual: 0,03

²ver apêndice A

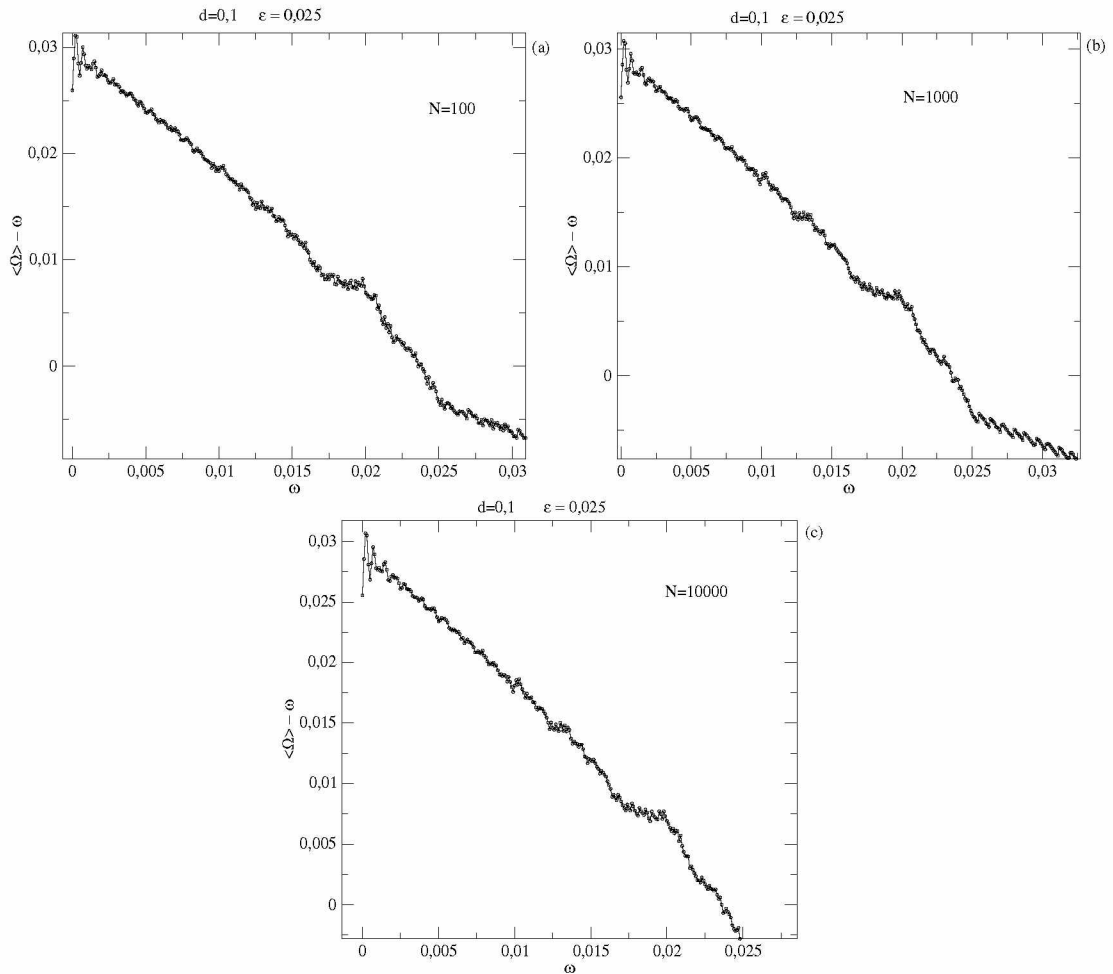


Figura 6.3: $(\langle \Omega \rangle - \omega) \times \omega$ para redes de tamanho 100(a), 1000(b) e 10000(c).

A fim de encontrarmos uma faixa de valores de ε para os quais a corrente externa periódica é eficaz em suprimir a sincronização, verificou-se o comportamento do coeficiente de supressão S em função da intensidade de acoplamento ε , conforme mostra a figura 6.4, para diferentes valores de ω e da amplitude d . O valor máximo considerado para amplitude foi $d = 0, 1$, pois, para um valor muito elevado da amplitude d , a série temporal da variável rápida x_n , perde sua característica original, os *bursts*. consideraram-se valores de ω para os quais uma rede de 10000 sítios acoplados entra em ressonância, de acordo com a tabela 6.1.

Simulações com valores de ω fora da ressonância também foram realizadas, a fim de verificar se a faixa de valores de ε , para os quais o coeficiente de supressão S é considerado bom, alarga-se ou diminui quando o sistema está ou não em ressonância. Os resultados estão apresentados nas figuras 6.4, 6.5, e 6.6.

Como comportamento geral, observa-se nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6, que para pequenos valores de ε o coeficiente de supressão é menor que 1, uma vez que, para valores de ε

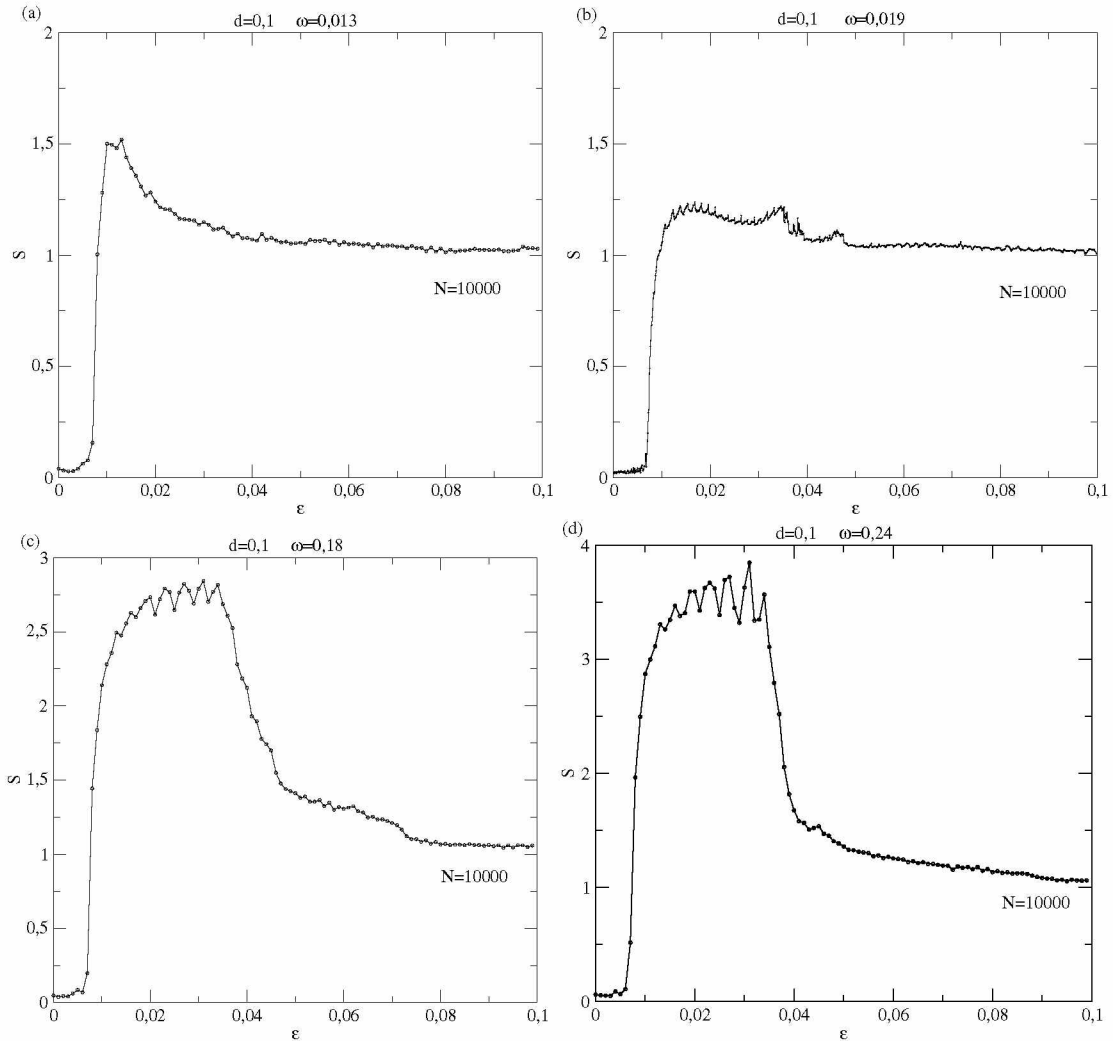


Figura 6.4: Coeficiente de supressão S em função da intensidade de acoplamento ε para $d = 0, 1$ e $\omega = 0, 013$ (a), $\omega = 0, 019$ (b), $\omega = 0, 18$ (c) e $\omega = 0, 24$ (d).

próximos a zero o sistema ainda não está sincronizado e, portanto, a variância do campo médio $X(t)$ ainda é muito pequena, próxima a zero. Na figura 6.4 observa-se que o coeficiente de supressão em função de ε não apresenta um pico expressivo para os valores de ω em que o sistema está em ressonância, 6.4(a) e 6.4(b), sendo que, S não chega a 1,5. Para os valores de ω fora da ressonância, figuras 6.4(c) e 6.4(d), o coeficiente de supressão apresenta um pico para uma faixa de valores de ε , onde S está entre 3 e 4, para $\omega = 0, 24$, em 6.4(d).

Diminuindo o valor da amplitude d , agora $d = 0, 05$, figura 6.5, também verifica-se que para os valores de ω da ressonância, figuras 6.5(a) e 6.5(b), o coeficiente de supressão não apresenta valores considerados bons quando comparados a valores de ω fora da ressonância, figuras 6.5(c) e 6.5(d), onde S está entre 4 e 5. O coeficiente de supressão para $d = 0, 05$ apresenta picos mais estreitos, porém com amplitude um pouco mais elevada

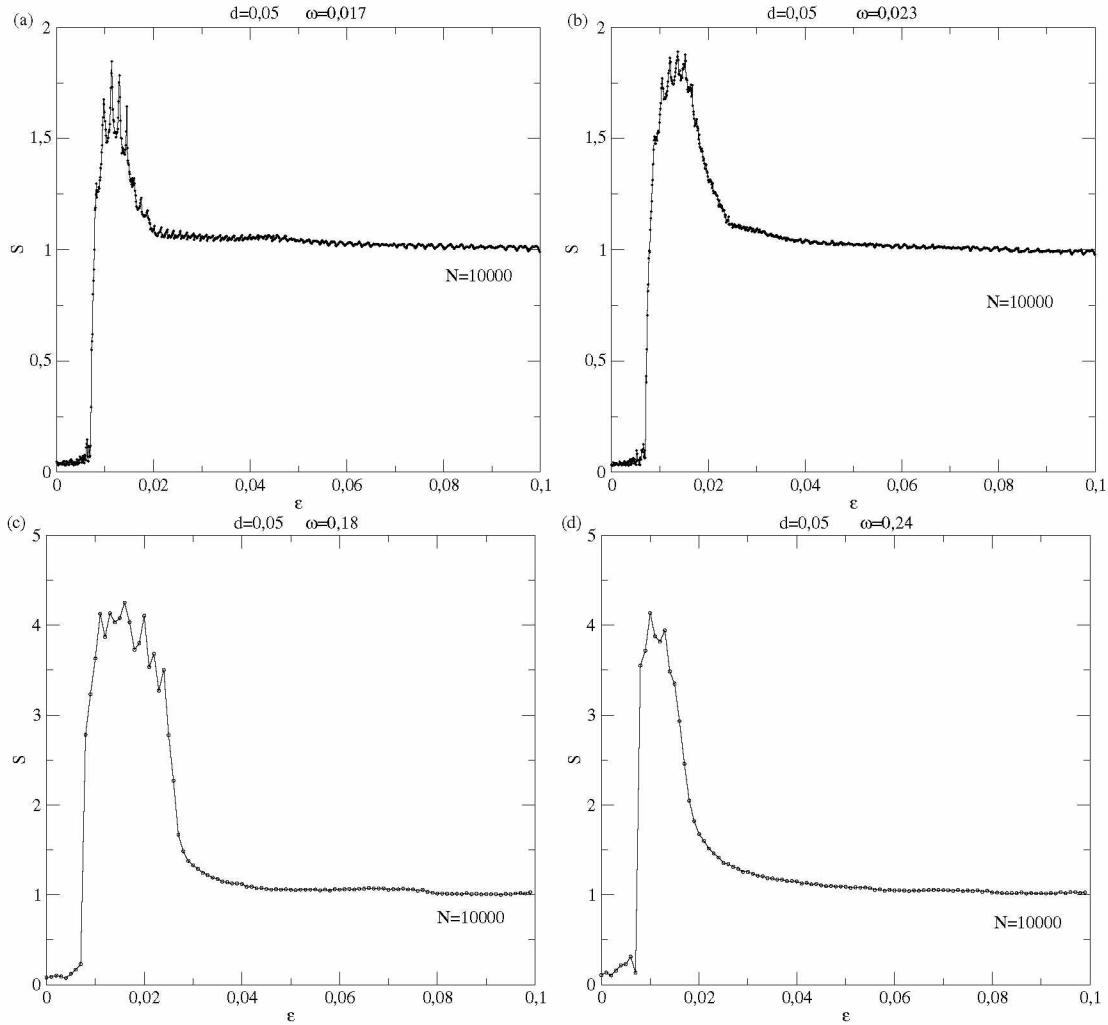


Figura 6.5: Coeficiente de supressão S em função da intensidade de acoplamento ε para $d = 0,05$ e $\omega = 0,017$ (a), $\omega = 0,023$ (b), $\omega = 0,18$ (c), e $\omega = 0,24$ (d).

do que para $d = 0,1$. Para $d = 0,1$, com ω fora da ressonância observa-se picos de S mais largos do que para $d = 0,05$. Deste modo, com o aumento da amplitude d , cresce a faixa de valores de ε para os quais a supressão é boa. Na figura 6.6, embora o coeficiente de supressão não apresente valores expressivos, pois a amplitude considerada, $d = 0,01$ é muito pequena, confirma-se mais uma vez que para valores de ω na ressonância a supressão não é boa. Como mostra a figura 6.6(a), o coeficiente de supressão S apresenta um pico de amplitude mais baixa para a frequência de ressonância $\omega = 0,034$ comparado com os demais valores de ω fora da ressonância, figuras 6.6(b), 6.6(c) e 6.6(d).

De maneira geral, observa-se nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6 que o comportamento das curvas de $S \times \varepsilon$, após um certo valor de ε , apresentam uma saturação de S . Isto pode ocorrer devido ao que se chama de sistema “mestre-escravo”. O termo $\varepsilon X(t)$, após um determinado valor de ε , passaria a determinar o comportamento do sistema.

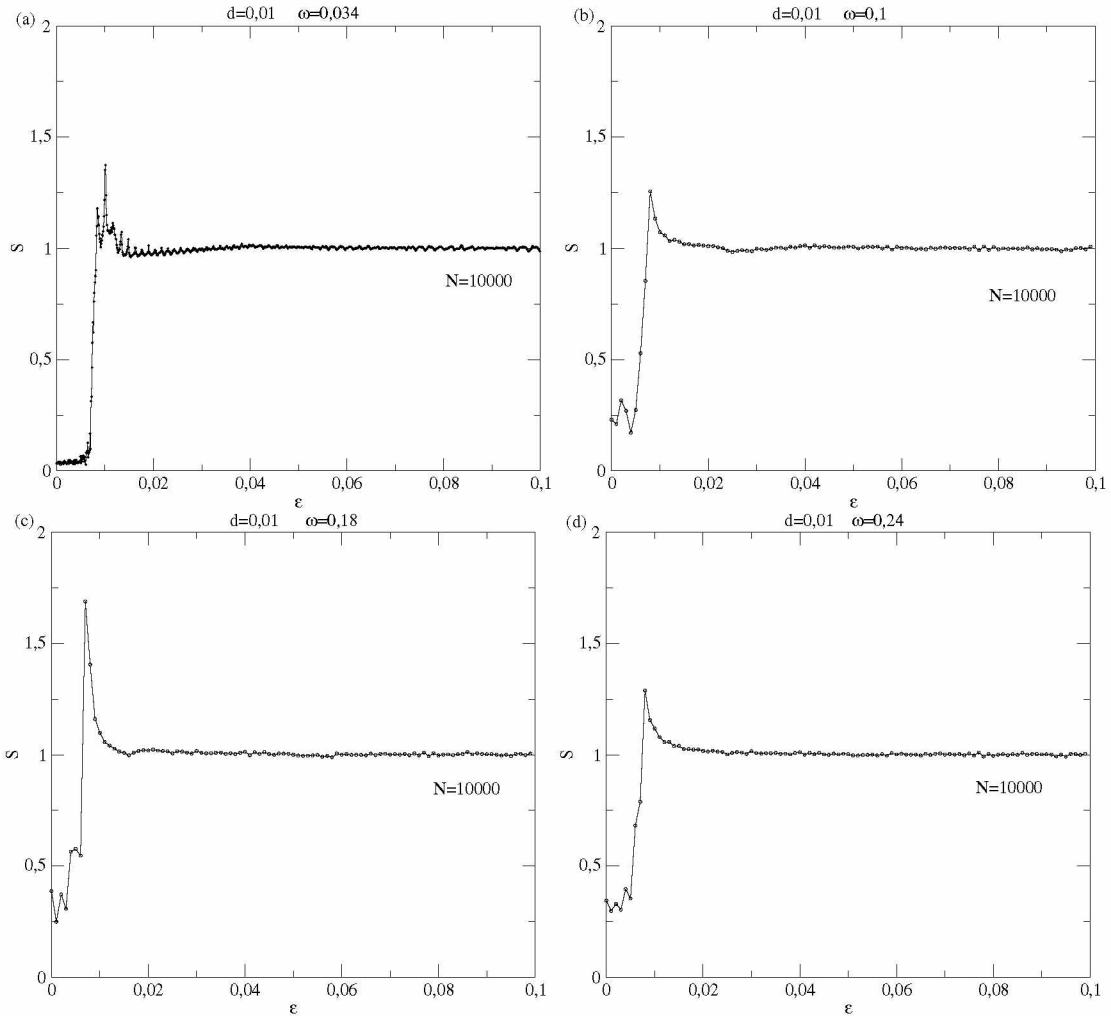


Figura 6.6: Coeficiente de supressão S em função da intensidade de acoplamento ε para $d = 0,01$ e $\omega = 0,034$ (a), $\omega = 0,1$ (b), $\omega = 0,18$ (c), e $\omega = 0,24$ (d).

Analisou-se o comportamento do parâmetro de ordem médio $\langle R \rangle$ e do coeficiente de supressão S em função da frequência externa ω para os três valores considerados para amplitude, $d = 0,1$; $0,05$ e $0,01$ com a intensidade de acoplamento fixa para $\varepsilon = 0,025$, conforme mostra a figura 6.7 e 6.8.

Na figura 6.7(a) e 6.7(b), o início da curva de $\langle R \rangle$ em função de ω apresenta um vale e logo depois um crescimento até $\langle R \rangle$ aproximadamente 1 e logo após ocorre um decréscimo mais pronunciado. Ocorre que, para pequenos valores de ω , o sistema começa a dessincronizar e, portanto, o parâmetro de ordem começa a decair. Contudo, quando ω atinge a faixa de valores da ressonância o sistema começa a sincronizar com a frequência externa ω e, portanto, o parâmetro de ordem aumenta. Com o aumento de ω o sistema volta a dessincronizar e o parâmetro de ordem diminui. Em ω em torno de $0,2$, o parâmetro de ordem tem um mínimo para $d = 0,1$ em 6.7(a). Em 6.7(b) o mínimo mais pronunciado no parâmetro de ordem aparece para $\omega = 0,017$. Comparando as figuras

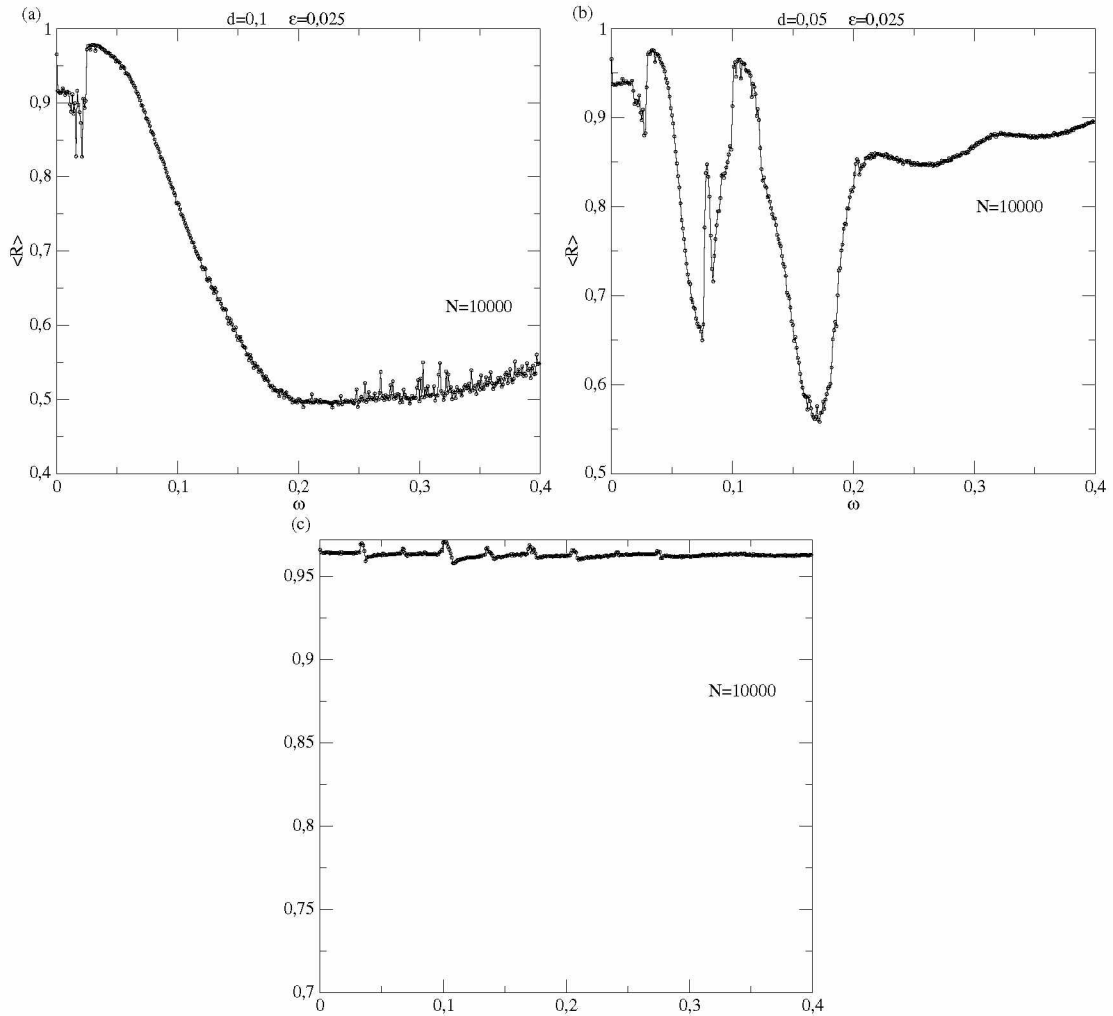


Figura 6.7: Parâmetro de ordem médio $\langle R \rangle$ em função da frequência externa ω , com $\varepsilon = 0,025$, para $d = 0,1$ (a), $d = 0,05$ (b), e $d = 0,01$ (c).

6.7(a) e 6.7(b), com respeito aos valores de d , verifica-se que para $d = 0,1$ a faixa de valores de ω para os quais o parâmetro de ordem é baixo é maior do que para $d = 0,05$. Deste modo, o controle é mais eficaz para $d = 0,1$, aplicando ω de 0,2 até 0,4. Na figura 6.7(c), o parâmetro de ordem apresenta flutuações em torno de 1, pois a amplitude considerada, $d = 0,01$, é muito pequena e, portanto não é eficaz para dessincronizar o sistema.

Nas figuras 6.8(a) e 6.8(b), verifica-se que o início da curva de S em função de ω cai para valores pouco abaixo de 1. Isto ocorre na mesma faixa de valores de ω das figuras 6.7(a) e 6.7(b) em que o parâmetro de ordem tem um crescimento antes de decair novamente. Como discutido anteriormente, este intervalo de valores de ω corresponde aos valores em que a frequência média de *burst* $\langle \Omega \rangle$ se iguala a frequência externa ω . Deste modo, para valores pequenos de ω , o coeficiente de supressão começa a aumentar a partir 1, quando a variância do campo médio na ausência e na presença do controle

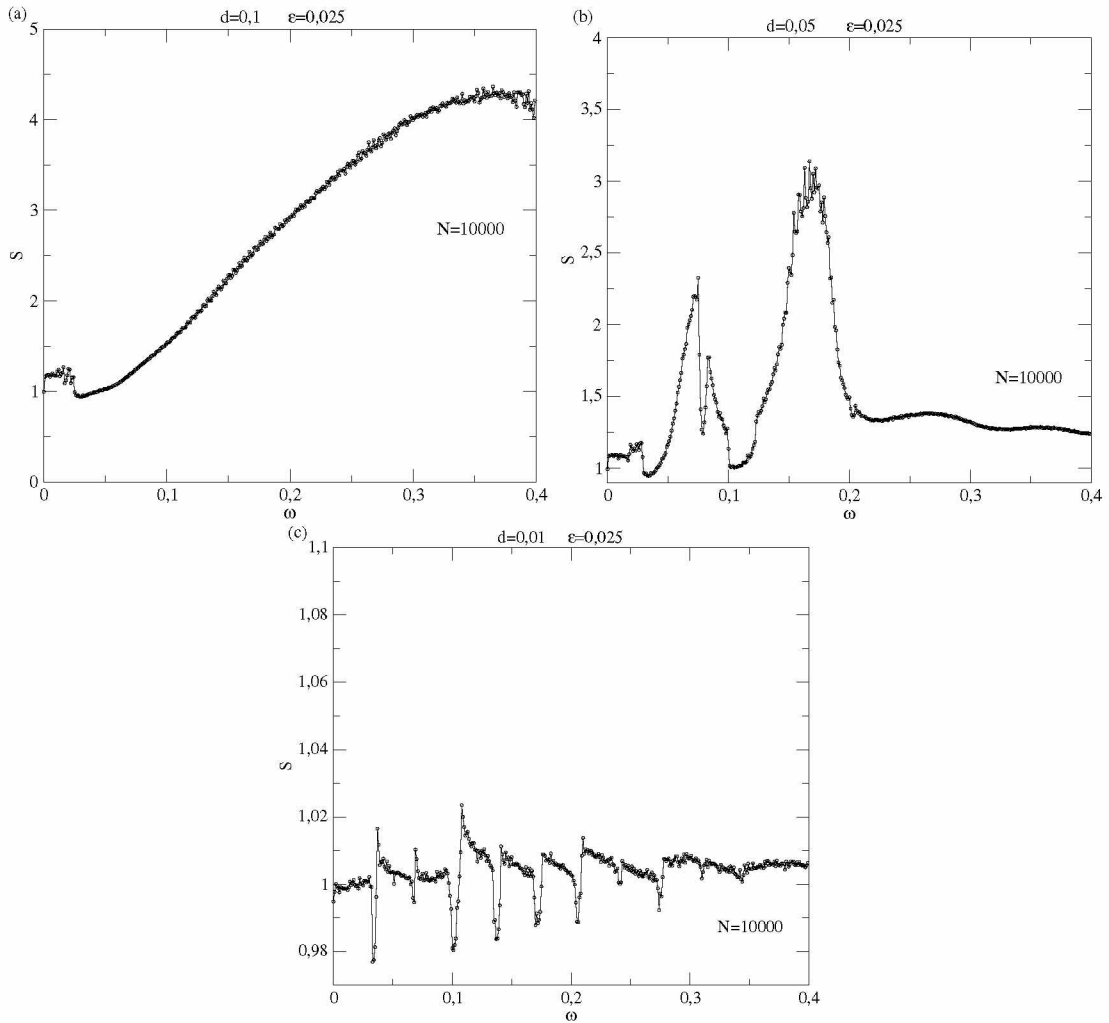


Figura 6.8: Coeficiente de Supressão S em função da frequência externa ω , com $\varepsilon = 0,025$, para $d = 0,1$ (a), $d = 0,05$ (b), e $d = 0,01$ (c).

são aproximadamente iguais. Contudo, quando a frequência externa passa pelo intervalo ressonante as frequências de *burst* de cada oscilador sincronizam com a frequência externa e, nesse intervalo a variância do campo médio na presença do controle $Var(X_f)$ é maior do que a variância do campo médio na ausência do controle $Var(X)$. Disto decorre a queda de S nesse intervalo para valores abaixo de 1.

Portanto, o intervalo de frequências ressonantes faz com que o controle externo, I_{ext} , colabore para sincronizar o sistema. Em concordância com a figura 6.7, observa-se na figura 6.8 que os máximos de S correspondem aos mínimos de $\langle R \rangle$. A figura 6.10 confirma esta asserção, onde plotou-se S contra $\omega/\langle \Omega \rangle$. Na figura 6.8(c), S apenas flutua em torno de 1, evidenciando que o controle não é efetivo para suprimir o estado sincronizado para $d = 0,01$. As figuras 6.9 e 6.10 mostram que o aumento e queda no início da curva do parâmetro de ordem e do coeficiente de supressão respectivamente, ocorrem próximo da ressonância, onde $\frac{\omega}{\langle \Omega \rangle} = 1$. Portanto, a faixa de valores para a aplicação do controle

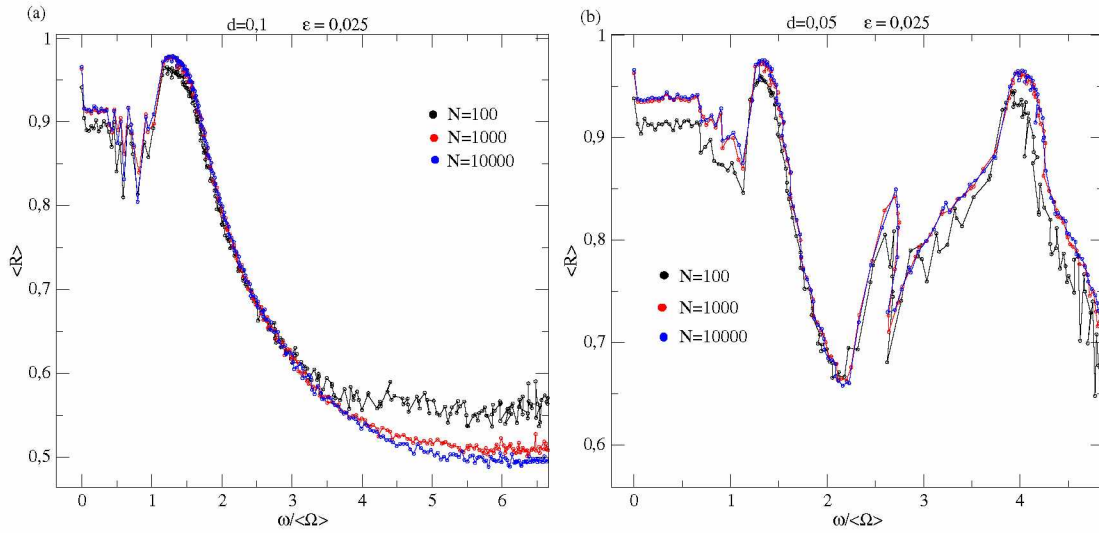


Figura 6.9: Parâmetro de ordem $\langle R \rangle$ em função da frequência normalizada $\frac{\omega}{\langle \Omega \rangle}$, com $\varepsilon = 0,025$, para $d = 0,1$ (a), $d = 0,05$ (b).

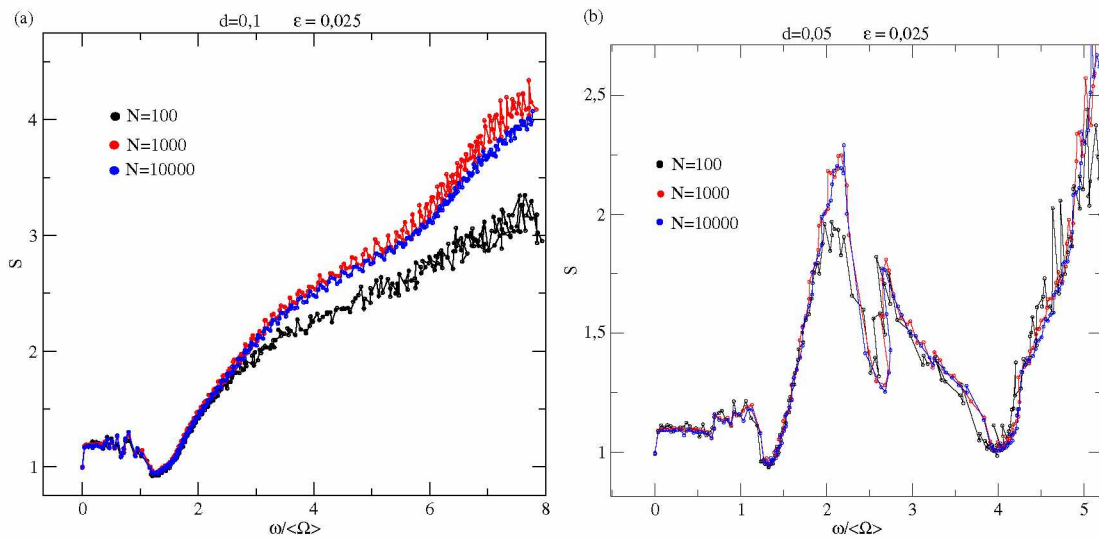


Figura 6.10: Coeficiente de Supressão S em função da frequência normalizada $\frac{\omega}{\langle \Omega \rangle}$, com $\varepsilon = 0,025$, para $d = 0,1$ (a), $d = 0,05$ (b).

externo periódico deve estar acima das frequências de ressonância.

Investigou-se o comportamento do parâmetro de ordem e do coeficiente de supressão em função da frequência externa para uma ampla faixa de valores de ω , como mostra a figura 6.11. De acordo com a figura 6.11 observa-se que tanto o coeficiente de supressão, quanto o parâmetro de ordem, são periódicos em relação a frequência externa. Os máximos de S coincidem exatamente com os mínimos de $\langle R \rangle$.

Atribuindo um valor de $\omega = 0,24$, analisou-se a evolução do coeficiente de supressão em função da amplitude d , como mostra a figura 6.13.

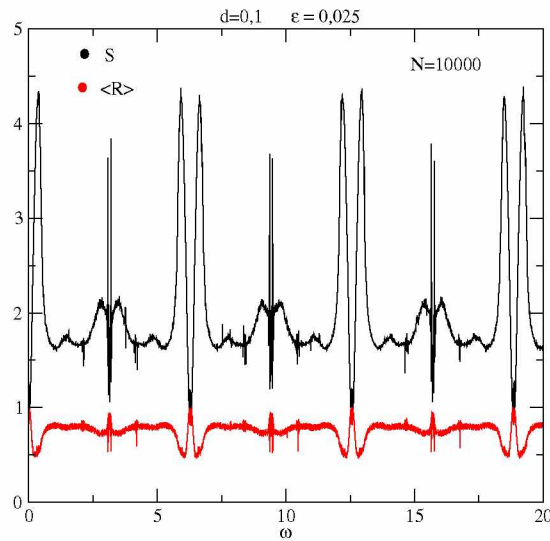


Figura 6.11: Coeficiente de Supressão S (curva preta) e parâmetro de ordem médio $\langle R \rangle$ (curva vermelha) em função da frequência externa ω , com $\varepsilon = 0,025$, e $d = 0,1$.

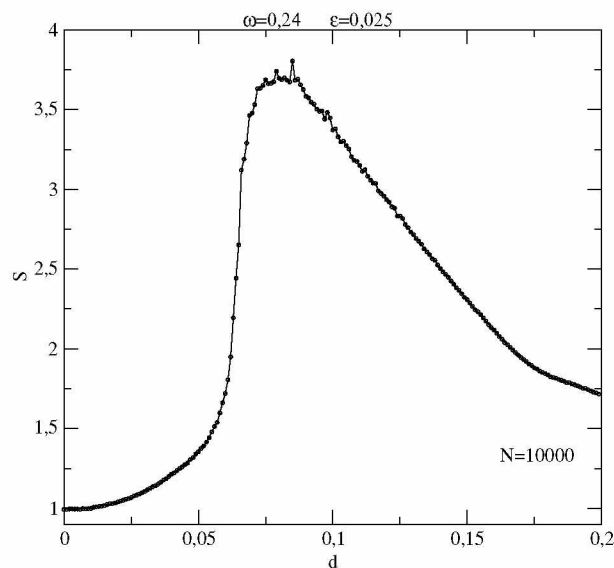


Figura 6.12: Coeficiente de Supressão S em função da amplitude d .

Com base nos gráficos apresentados atribuiu-se alguns valores para os parâmetros, ω e d , a fim de examinar a evolução temporal do campo médio, na presença do controle e do parâmetro de ordem, para uma rede de 10000 sítios, bem como, calcular a energia do sinal externo, para os valores atribuídos.

De acordo com a figura 6.13, os dois valores da amplitude considerados, $d = 0,07$ e $d = 0,1$ são eficazes em tirar o sistema do estado sincronizado, uma vez que, estes valores escolhidos para a amplitude estão dentro da faixa dos valores para d em que o coeficiente de supressão é elevado, figura 6.12. As figuras 6.13(a) e 6.13(c), para $d = 0,07$, mostram que a evolução do campo médio (quando o controle é ligado) apresenta amplitude menor

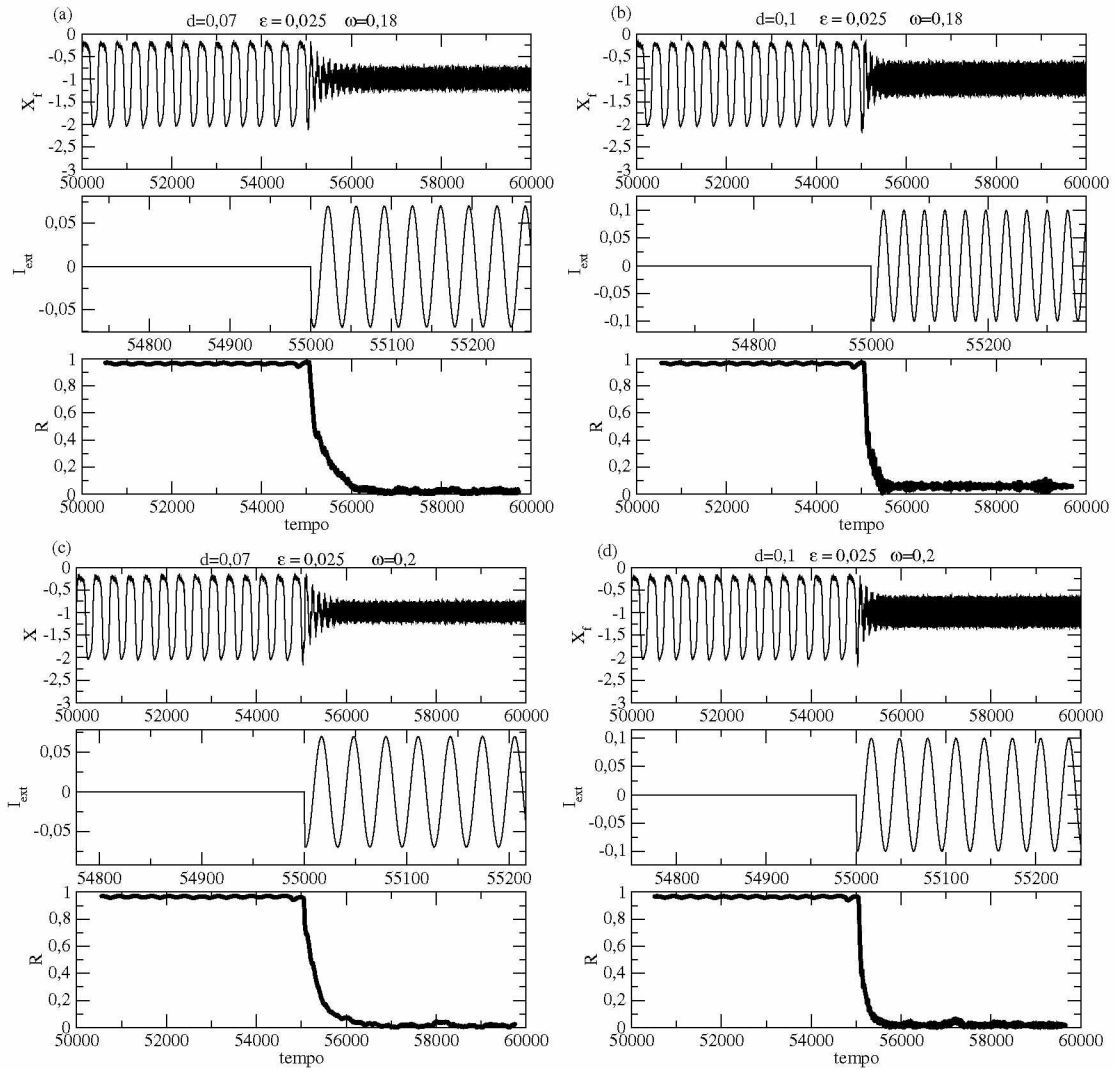


Figura 6.13: Evolução temporal para o campo médio na presença do controle, corrente externa e parâmetro de ordem, para $d = 0,07$, $\omega = 0,18$ (a), $d = 0,1$, $\omega = 0,18$ (b), $d = 0,07$, $\omega = 0,2$ (c) e, $d = 0,1$, $\omega = 0,2$ (d). O controle foi ligado para $t=55000$.

comparada às figuras 6.13(b) e 6.13(d) quando $d = 0,1$. Ou seja, para $d = 0,07$, o campo médio tende a aniquilar-se mais rapidamente do que para $d = 0,1$. Deste modo, pode-se dizer que o controle é menos invasivo para este valor de amplitude, pois a amplitude da corrente externa é menor e o campo médio tende a extinguir-se mais rapidamente.

Estabeleceram-se domínios de supressão no espaço de parâmetros. Plotou-se a amplitude d em função da frequência normalizada $\omega/\langle\Omega\rangle$, quando $S \geq 1,5$, para uma rede de 10000 sítios, como mostra a figura 6.14. De acordo com a figura 6.14, os espaços são preenchidos após a ressonância, quando a razão $\frac{\omega}{\langle\Omega\rangle}$ é maior que 1, pois, conforme analisado anteriormente, o coeficiente de supressão é menor que 1 na faixa ressonante.

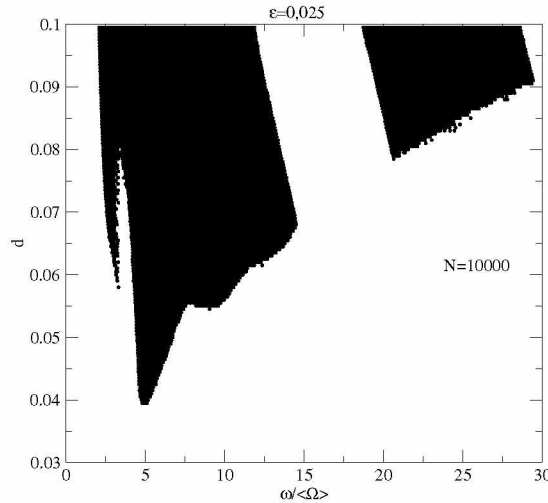


Figura 6.14: Domínios de supressão para d e ω , quando $S \geq 1,5$.

6.1.1 Energia Associada ao Controle Externo Periódico

Pode-se estimar a energia média associada ao controle externo periódico, considerando uma potência $P = g_{ext} \langle I_{ext}^2 \rangle$, onde g_{ext} é uma condutância associada ao controle externo. Assumindo $g_{ext} = 1$, a energia será:

$$E_{ext} = PT = \langle I_{ext}^2 \rangle T, \quad (6.5)$$

onde T é o tempo de aplicação da corrente externa. A média quadrática da corrente I_{ext} é dada por:

$$\langle I_{ext}^2 \rangle = \frac{d^2}{2} \frac{[1 - \text{sen}(4\pi(T/T_0))]}{4\pi(T/T_0)}, \quad (6.6)$$

onde T_0 é o período da corrente externa, $T_0 = 2\pi/\omega$, portanto a fórmula da energia em termos da frequência externa torna-se:

$$E_{ext} = \frac{d^2}{2} \frac{[1 - \text{sen}(2\omega T)]}{2\omega T} T. \quad (6.7)$$

Considerando $d = 0,07$, $\varepsilon = 0,025$ e $\omega = 0,2$, calculou-se a energia gasta durante o tempo de aplicação da corrente externa. A figura 6.15 apresenta a energia gasta em função do tempo, para uma rede de 10000 sítios.

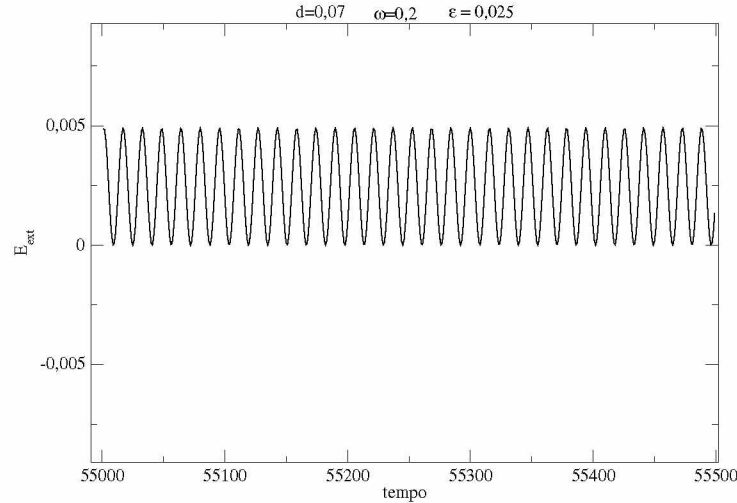


Figura 6.15: Energia associada ao controle externo em função do tempo.

6.2 Controle por Meio de um Sinal com Atraso de Realimentação - *Delayed Feedback Control*

Conforme exposto anteriormente, Rosenblum e Pikovsky [6] propuseram um método para suprimir a sincronização de uma rede de osciladores globalmente acoplados, o qual baseia-se na aplicação de um sinal com atraso de realimentação em um circuito ou sistema. O circuito ou sistema em estudo, recebe um estímulo inicial, uma corrente elétrica por exemplo, um receptor recebe esse sinal e reenvia ao sistema com um certo atraso. A realimentação com atraso pode reduzir o sinal recebido inicialmente. No caso de uma rede osciladores que simulam sítios de uma rede neuronal, esse sinal inicial é o campo elétrico médio associado à rede.

O método consiste na comparação entre o campo médio atual da rede e o campo médio medido τ iterações antes. Sendo $X(t)$ o campo médio atual da rede, a corrente com atraso de realimentação será: $I_{feed} = \varepsilon_f [X(t) - X(t - \tau)]$, onde ε_f é a amplitude da corrente e $[X(t) - X(t - \tau)]$ é a diferença entre o campo médio atual da rede e o campo médio de τ iterações antes. A figura 6.16 mostra um esquema de um circuito de feedback implantado em uma rede neuronal por meio de dois eletrodos.

Do mesmo modo, que o controle externo periódico, o termo que representa esse controle é adicionado à variável rápida do mapa de Rulkov e a equação 5.2 torna-se:

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon X(t) + I_{feed}, \quad (6.8)$$

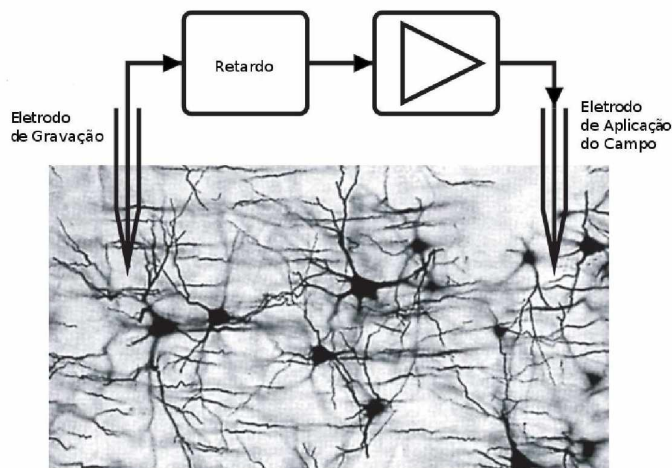


Figura 6.16: Esquema do método proposto por Rosenblum e Pikovsky [6]. O campo elétrico local da rede é medido por um eletrodo de gravação e reinjetado na rede, após um certo tempo de atraso, pelo eletrodo de aplicação.

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon X(t) + \varepsilon_f [X(t) - X(t - \tau)]. \quad (6.9)$$

Analisou-se inicialmente para quais valores da amplitude da corrente de feedback ε_f e do tempo de atraso τ o emprego desse controle é mais eficaz, conforme mostra a figura 6.17. Fixou-se a intensidade de acoplamento para $\varepsilon = 0,025$, conforme foi feito para o primeiro controle empregado. A figura 6.17 mostra os domínios de supressão de ε_f e τ em que $S \geq 1,5$. O espaço de parâmetros foi varrido para ε_f no intervalo de 0 a 0,1 e

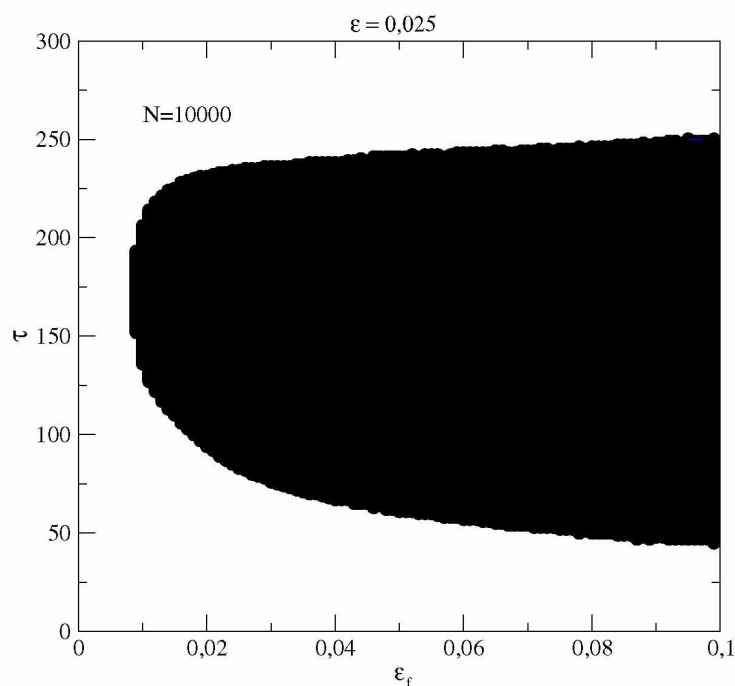


Figura 6.17: Domínios de supressão de ε_f e τ para $S \geq 1,5$.

para τ de 0 a 1000. De acordo com a figura 6.17, uma ampla faixa de valores de ε_f que vai de $\varepsilon_f \sim 0,01$ a $0,1$, é eficiente em tirar o sistema do estado sincronizado, porém, uma pequena faixa de valores de τ é eficaz na supressão da sincronização. Essa faixa de valores de τ aumenta, conforme cresce a amplitude ε_f . Quando $\varepsilon = 0,1$, esta faixa vai de $\tau \sim 50$ e chega a $\tau \sim 250$.

De acordo com Rosenblum [30], os domínios de τ estão relacionados ao período médio de oscilação do campo médio. Se o valor de τ é da ordem do período de oscilação do campo médio, a soma $\varepsilon X(t) + \varepsilon_f[X(t) - X(t - \tau)]$ na equação 6.9, ocasiona uma interferência construtiva entre os campos médios atual $X(t)$ e atrasado $X(t - \tau)$, o que representa um reforço para a sincronização, uma vez que ao invés de extinguir as oscilações do campo médio, conforme desejado, a interferência construtiva aumentará essas oscilações. Deste modo, Rosenblum [30] argumentou que os domínios de τ devem ser escolhidos de forma que τ seja aproximadamente da ordem de meio período de oscilação do campo médio, a fim de fornecer uma interferência destrutiva entre os campos, ocasionando a dessincronização da rede. Em concordância com essa asserção, a figura 6.18(a) mostra que os valores máximos de τ , no gráfico de S em função de τ , são da ordem de meio período de oscilação do campo médio, como mostra a figura 6.18(b), o qual corresponde $T \sim 368$.

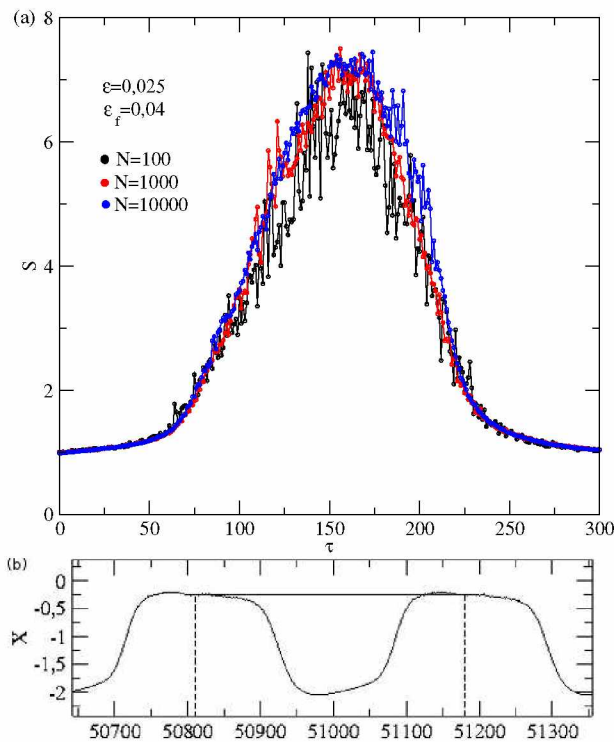


Figura 6.18: Coeficiente de supressão S em função de τ (a). Campo médio $X(t)$ mostrando o período de oscilação para uma rede de 10000 sítios (b).

Por meio da análise dos valores eficazes na supressão da amplitude ε_f e do tempo

de atraso τ , analisou-se o comportamento do coeficiente de supressão S e parâmetro de ordem médio em função da intensidade de acoplamento ε , para $\varepsilon_f = 0,1; 0,04$ e $0,01$, com $\tau = 140$ e $\tau = 160$, como mostram as figuras 6.19 e 6.20. Na figura 6.19 observa-se que

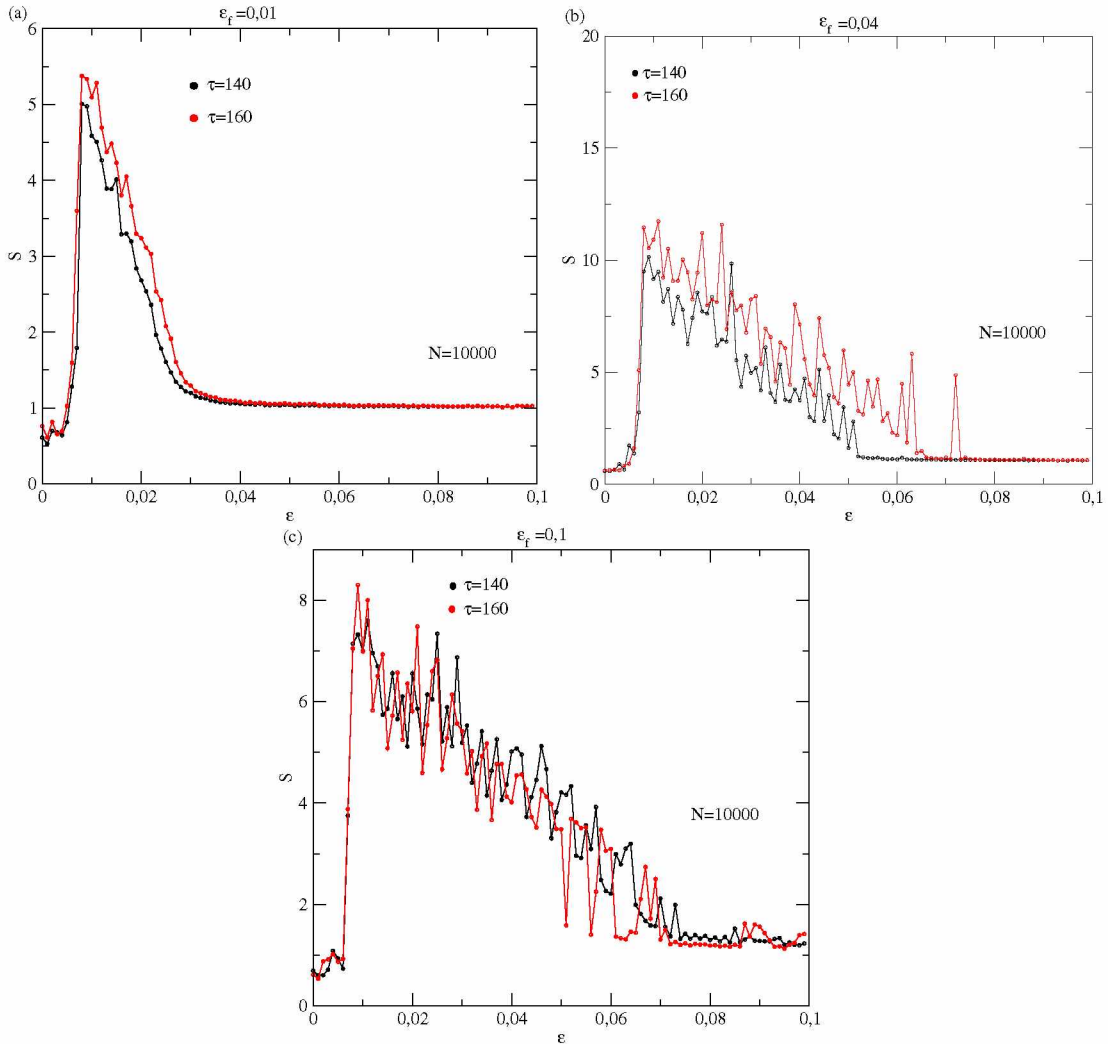


Figura 6.19: S versus ε , para $\varepsilon_f = 0,01$ (a); $0,04$ (b) e $0,01$ (c).

a faixa de valores de ε alarga-se com o aumento da amplitude da corrente de feedback ε_f . Contudo, mesmo para uma amplitude elevada $\varepsilon_f = 0,1$, figura 6.19(c), o coeficiente de supressão só começa a decair para um valor muito levado de ε , em torno de $\varepsilon = 0,08$, mas S ainda continua maior do que 1 para este valor de acoplamento. Para $\tau = 160$, a supressão é ligeiramente melhor, apresentando uma faixa um pouco maior dos valores de ε em que a supressão é boa. Para $\varepsilon_f = 0,01$, figura 6.19(a), esta faixa de valores é muito estreita.

Na figura 6.20, verifica-se que o controle de feedback prejudica a transição do estado não sincronizado para o estado sincronizado, pois o parâmetro de ordem demora mais para ficar próximo de 1. Este comportamento fica mais evidente com o aumento da amplitude

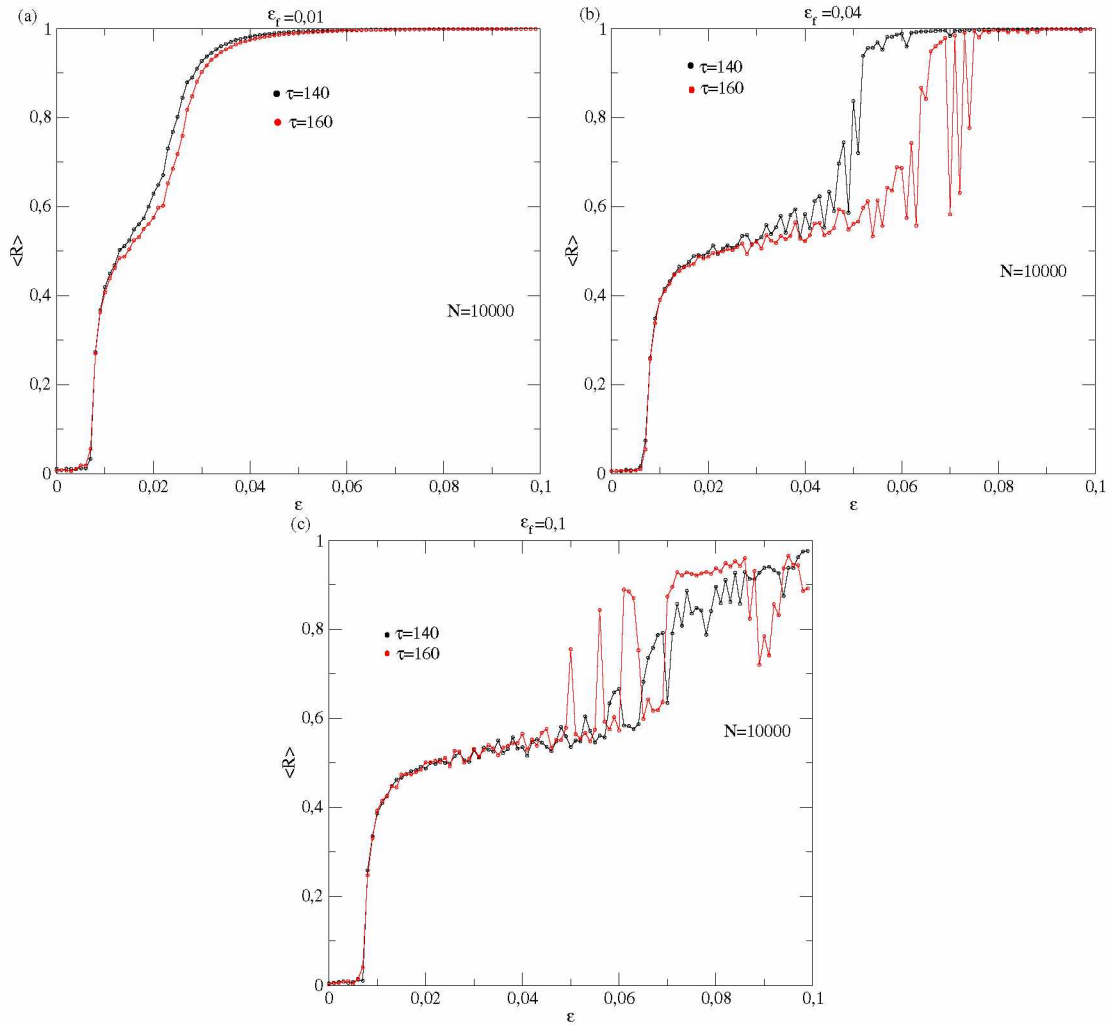


Figura 6.20: $\langle R \rangle$ versus ε , para $\varepsilon_f = 0,01$ (a); $0,04$ (b) e $0,1$ (c).

ε_f . Para $\varepsilon_f = 0,1$, figura 6.20(c) a transição para o estado sincronizado demora mais para ocorrer. Para $\tau = 160$ a transição ocorre ligeiramente mais lentamente do que para $\tau = 140$.

Analisou-se o comportamento do coeficiente de supressão e do parâmetro de ordem médio em função da amplitude ε_f , para intensidades de acoplamento $\varepsilon = 0,025$ e $\varepsilon = 0,05$ conforme mostram as figuras 6.21 e 6.22. Em 6.21(a), verifica-se que para $\varepsilon = 0,05$ a supressão é mais sensível aos valores de τ , uma vez que a curva de S para $\tau = 160$, possui um limiar mais baixo de ε_f , valor para o qual S é maior que 1. Isto é, com $\tau = 160$ o coeficiente de supressão cresce mais rapidamente do que para $\tau = 140$. Contudo, para $\varepsilon = 0,025$ as curvas de S em função de ε_f se aproximam para os dois valores de τ considerados. Em 6.22(a), o mesmo comportamento é evidenciado para $\varepsilon = 0,05$. As curvas do parâmetro de ordem médio para este valor da intensidade de acoplamento são sensíveis aos valores de τ , sendo que para $\tau = 160$, o parâmetro de ordem médio decai

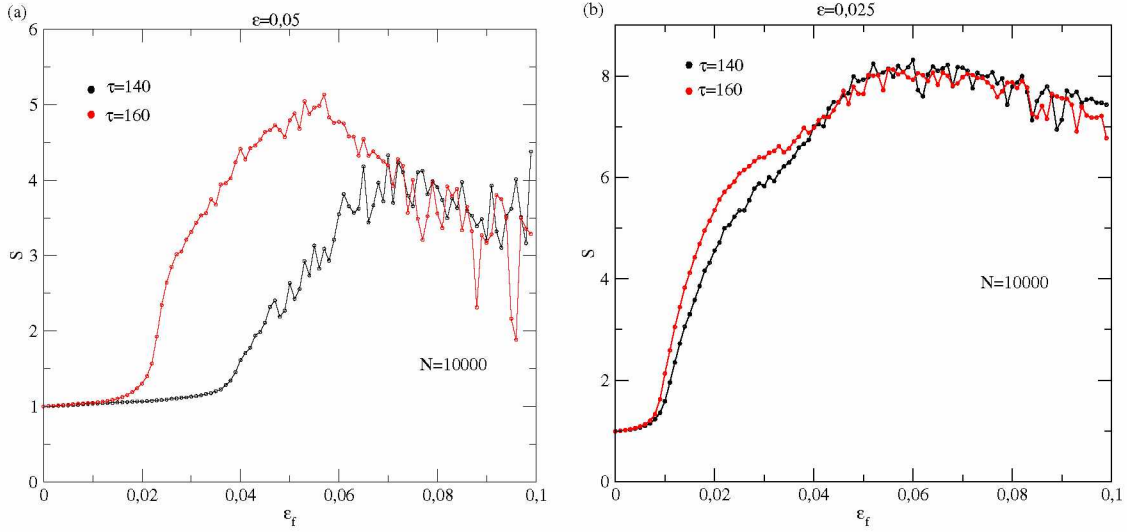


Figura 6.21: S versus ε_f para $\varepsilon = 0,05$ (a) e $\varepsilon = 0,025$ (b).

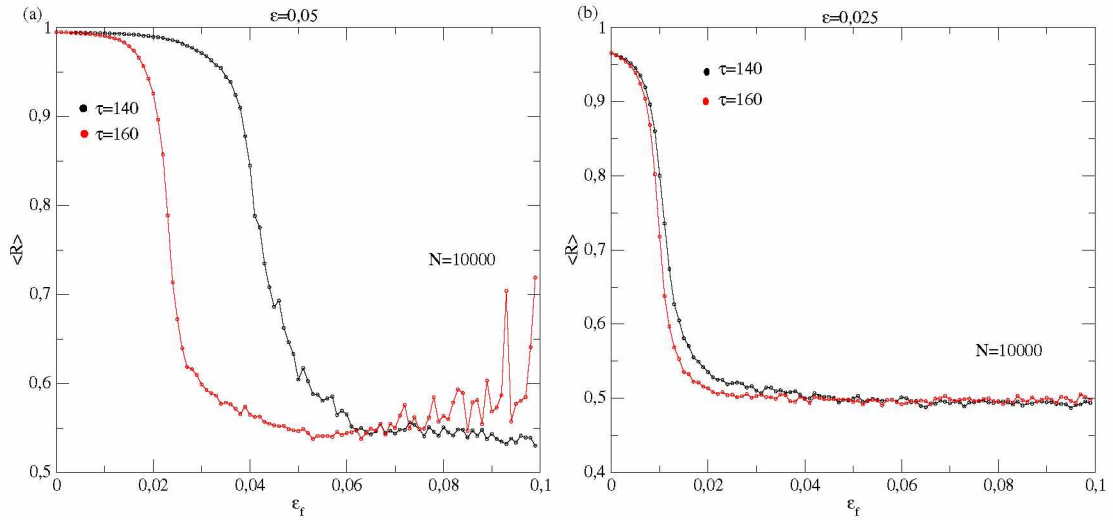


Figura 6.22: Parâmetro de ordem médio em função de ε_f para $\varepsilon = 0,05$ (a) e $\varepsilon = 0,025$ (b).

mais rapidamente do que para $\tau = 140$. Em 6.22(b), com $\varepsilon = 0,025$ as curvas de $\langle R \rangle$ se aproximam para os dois valores de τ .

Uma vez que, para $\varepsilon_f = 0,01$ começa a ocorrer a supressão para alguns valores de τ , conforme mostra a figura 6.17, atribuiu-se $\varepsilon_f = 0,01$ e $0,04$ para aplicação da corrente de feedback, como mostra a figura 6.23, com $\varepsilon = 0,025$ e $\tau = 160$. De acordo com a figura 6.23, a amplitude $\varepsilon_f = 0,04$ é mais eficiente para destruir o campo médio, uma vez que o parâmetro de ordem vai a zero. A evolução temporal da corrente de feedback mostra que sua amplitude é menor do que a corrente externa periódica, o que indica que este tipo de controle é menos invasivo.

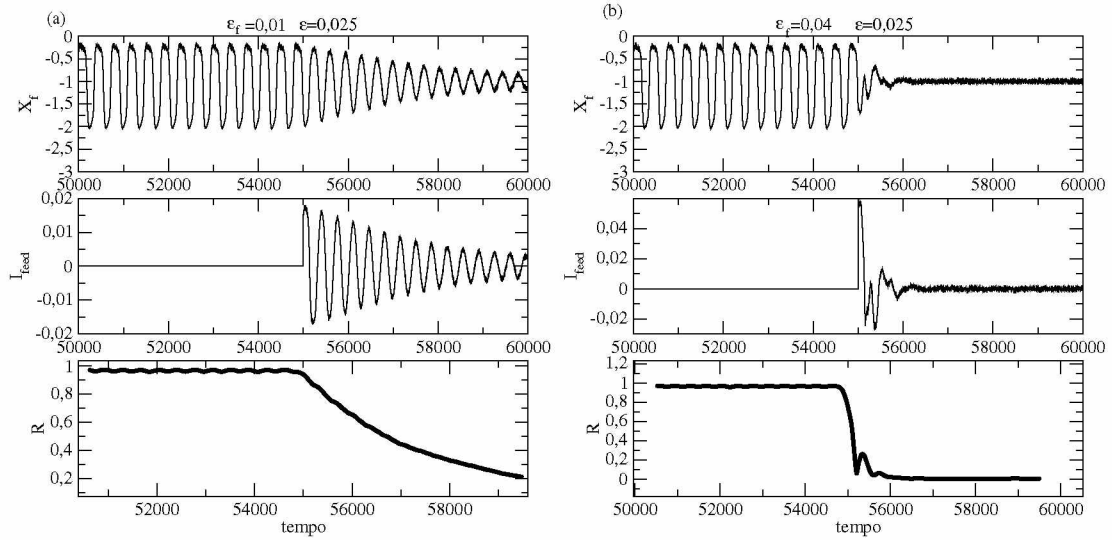


Figura 6.23: Evolução temporal para o campo médio, corrente de feedback e parâmetro de ordem, com $\varepsilon = 0,025$, $\tau = 160$, para $\varepsilon_f = 0,01$ (a) e $\varepsilon_f = 0,04$ (b). O controle foi ligado em $t=55000$.

6.2.1 Energia Associada ao Controle de Realimentação Atrasada

Podemos associar uma energia a esse tipo de controle, conforme feito para a corrente externa periódica. Atribuindo $\varepsilon_f = 0,04$, podemos calcular a energia gasta por este controle. Assumindo uma condutância $g_{feed} = 1$, temos a seguinte fórmula para a energia:

$$E_{feed} = PT = (I_{feed})^2 T \quad (6.10)$$

onde T é o período de aplicação do controle. A figura 6.24 mostra a evolução temporal da energia E_{feed} para os valores atribuídos à corrente, para uma rede de 10000 sítios. De acordo com a figura 6.24, observa-se que no início da aplicação do controle a energia possui uma amplitude muito elevada, isto ocorre no transiente da aplicação do controle, após o período transiente a energia decai até zero. Devido à corrente de feedback ser composta pela diferença entre o campo médio no instante atual e o campo médio τ iterações antes, conforme a rede dessincroniza, a amplitude do campo médio diminui e conseqüentemente a diferença $X(t) - X(t - \tau)$. Portanto, o controle desliga automaticamente, o que representa mais uma vantagem deste tipo de controle, pois a corrente de realimentação não é aplicada continuamente.

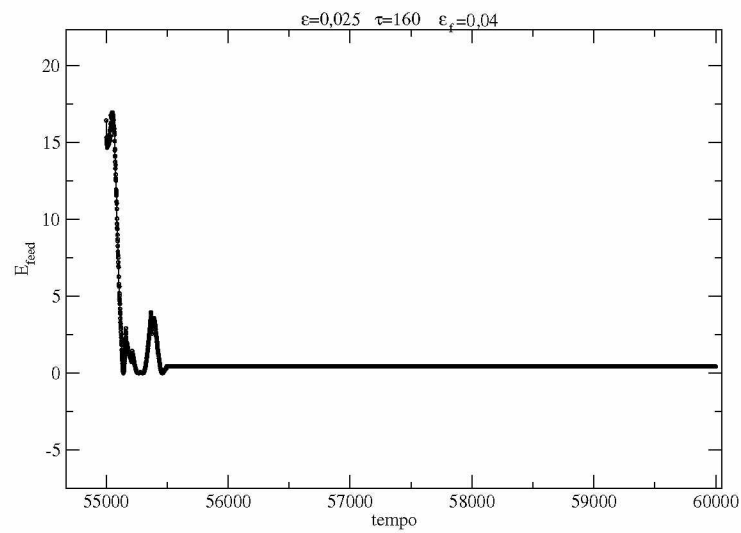


Figura 6.24: Evolução temporal da energia associada ao controle de feedback, E_{feed} , com $\varepsilon = 0,025$, $\tau = 160$, para $\varepsilon_f = 0,04$.

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Neste trabalho simulou-se computacionalmente, com o mapa de Rulkov [4], a dinâmica de redes neuronais de 100, 1000 e 10000 sítios, cada sítio representando um neurônio. Acoplando essas redes foi possível obter a sincronização das fases de *bursting* de cada sítio. Analisou-se a eficiência de dois esquemas de controle empregados para suprimir a sincronização nessas redes, uma corrente externa periódica e uma corrente com atraso de realimentação.

Em concordância com o modelo de Kuramoto [10], o qual descreve um sistema de osciladores globalmente acoplados, as redes de mapas de Rulkov apresentaram uma transição de fase do estado não sincronizado para o estado sincronizado.

O controle externo periódico possui uma faixa limitada para aplicação dos seus parâmetros: a frequência externa ω e a amplitude d . Os valores para a aplicação da frequência externa ω devem estar acima do intervalo ressonante, pois, para valores de ω abaixo desse intervalo, o controle não é efetivo em suprimir a sincronização da rede. Para valores de ω no intervalo ressonante, as frequências de *bursting* estão sincronizadas com a frequência externa ω e o coeficiente de supressão S é menor do que 1. Neste caso, o controle favorece a sincronização ao invés de suprimi-la.

A amplitude d deve estar entre $d = 0,07$ e $0,1$, uma vez que, uma amplitude muito baixa, como $d = 0,01$, não é eficaz para suprimir o estado sincronizado, ou acaba suprimindo para uma faixa muito estreita de valores de ω . Contudo, a amplitude d não deve ser muito elevada, para que a rede continue apresentando *bursts*.

A periodicidade do coeficiente de supressão S em relação a frequência externa ω é um fator limitante para a aplicação deste tipo de controle. Há estreitos intervalos de ω em que S é elevado. Contudo esses valores de ω , para os quais o coeficiente de supressão é

alto, são valores elevados e a frequência externa não deve ser muito elevado para que a energia aplicada aos sítios da rede não seja excessiva e o controle não seja muito invasivo.

A corrente com atraso de realimentação possui a vantagem de ser menos invasiva pois o sinal injetado na rede é um sinal produzido pela mesma. Conclui-se que a eficiência deste tipo de controle não apresenta dependência expressiva com a amplitude da corrente de realimentação ε_f , sendo que, para pequenos valores da amplitude ε_f o sistema apresenta uma boa supressão da sincronização.

O coeficiente de supressão apresenta valores satisfatórios apenas para uma pequena faixa de valores do tempo de atraso da corrente de realimentação τ . Os valores de τ em que S é elevado são da ordem de meio período de oscilação do campo médio. Deste modo, a eficiência desse controle decorre de uma interferência destrutiva entre o campo médio e o campo médio com atraso, de acordo com [30].

A eficiência de ambos métodos empregados dependem de uma combinação dos parâmetros de controle. Em trabalhos futuros pretende-se comparar os resultados obtidos com o controle externo periódico, aplicando esse controle em apenas um sítio da rede. Pretende-se implementar os dois tipos de controle da sincronização em uma rede do tipo pequeno mundo *small world*, onde as conexões ocorrem entre primeiros vizinhos com algumas conexões não locais, chamadas de atalhos.

Referências

- [1] D. Chialvo. Critical brain networks. *Physica A* **340**, 756–765 (2004).
- [2] R. Albert e A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47–97 (2002). doi: [10.1103/RevModPhys.74.47](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47).
- [3] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. Amaral, H. E. Stanley e Y. Aberg. The web of human sexual contacts. *Nature* **411**, 6840, 907–908 (2001). doi: [10.1038/35082140](https://doi.org/10.1038/35082140).
- [4] N. F. Rulkov. Regularization of Synchronized Chaotic Bursts. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 183–186 (2001). doi: [10.1103/PhysRevLett.86.183](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.183).
- [5] M. V. Ivanchenko, G. V. Osipov, V. D. Shalfeev e J. Kurths. Phase Synchronization in Ensembles of Bursting Oscillators. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 134101 (2004). doi: [10.1103/PhysRevLett.93.134101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.134101).
- [6] M. G. Rosenblum e A. Pikovsky. Delayed feedback control of collective synchrony: An approach to suppression of pathological brain rhythms. *Phys. Rev. E* **70**, 041904 (2004).
- [7] S. Ponzoni e N. Garcia-Cairasco. [Neurobiology of parkinsonism. I. Neural substrates an neurochemistry of the basal ganglia]. *Arq Neuropsiquiatric* **53**, 3-B, 706–710 (1995).
- [8] A. Beuter, M. Titcombe, F. Richer, C. Gross e D. Guehl. Effect of deep brain stimulation on amplitude and frequency characteristics of rest tremor in Parkinson’s disease. *Thalamus-Related Systems* **1**, 203–211 (2001). doi: [10.1017/S1472928801000206](https://doi.org/10.1017/S1472928801000206).
- [9] E. M. Izhikevich. Simple model of spiking neurons. *IEEE Trans. Neural Networks* páginas 1569–1572 (2003).

- [10] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence* (Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1984).
- [11] C. Batista, A. Batista, J. de Pontes, S. Lopes e R. Viana. Bursting synchronization in scale-free networks. *Chaos, Solitons and Fractals* **41**, 5, 2220 – 2225 (2009). doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2008.08.025>.
- [12] M. G. Rosenblum e A. Pikovsky. Controlling Synchronization in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 102–114 (2004).
- [13] M. Rosenblum, N. Tukhlina, A. Pikovsky e L. Cimponeriu. Delayed Feedback Suppression of Collective Rhythmic Activity in a Neuronal Ensemble. I. *J. Bifurcation and Chaos* **16**, 7, 1989–1999 (2006).
- [14] J. L. Hindmarsh e R. M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings Of The Royal Society Of London. Series B, Containing Papers Of a Biological Character. Royal Society (Great Britain)* **221**, 1222, 87–102 (1984).
- [15] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A* **170**, 421–428 (1992). doi: [10.1016/0375-9601\(92\)90745-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90745-8).
- [16] C. A. S. Batista, S. R. Lopes, R. L. Viana e A. M. Batista. Delayed Feedback Control of Bursting Synchronization in a Scale-free Neuronal Network. *Neural Netw.* **23**, 1, 114–124 (2010). doi: [10.1016/j.neunet.2009.08.005](https://doi.org/10.1016/j.neunet.2009.08.005).
- [17] R. Lent. *Cem bilhões de neurônios: conceitos fundamentais de neurociências* (Editora Atheneu, 2001).
- [18] PurkinjeCell.jpg. <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:PurkinjeCell.jpg>. Acessado em: 2013-11-1.
- [19] R. Viana. *Tópicos de Neurociência Computacional* (Departamento de Física. UFPR, Curitiba, 2013).
- [20] Sistema Nervoso. <http://www.sogab.com.br/anatomia/sistemanervosojonas.htm>. Acessado em: 2013-11-1.
- [21] Rede neuronal. <http://www.dezinteressante.com/wp-content/uploads/2012/07/neurons>. Acessado: 2013-11-1.

- [22] A. Hodgkin e A. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology* **117**, 500–544 (1952).
- [23] R. Viana. *Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos em Economia* (Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico. UFPR, Curitiba, 2006).
- [24] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Westview Press, 2000).
- [25] A. Pikovsky, M. Rosenblum e J. Kurths. Phase Synchronization in Regular and Chaotic Systems: a Tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**, 2291–2305 (1999).
- [26] G. Arfken e H. Weber. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física* (CAMPUS - RJ, 2007).
- [27] T. Shinbrot. Synchronization of coupled maps and stable windows. *Phys. Rev. E* **50**, 3230–3233 (1994). doi: [10.1103/PhysRevE.50.3230](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.50.3230).
- [28] R. Viana, A. Batista, C. Batista, J. de Pontes, F. dos S.Silva e S. Lopes. Bursting synchronization in networks with long-range coupling mediated by a diffusing chemical substance. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17**, 7, 2924–2942 (2012). doi: [10.1016/j.cnsns.2011.11.016](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.11.016).
- [29] A. Pikovsky, M. G. Rosenblum e J. Kurths. *Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [30] M. Rosenblum. Collective dynamics in large oscillator ensembles: The Kuramoto model and beyond. www.stat.physik.uni-potsdam.de/~mros. Acessado em: 2013-11-25.

Línguas de Arnold

A.1 Forçamento Externo e Línguas de Arnold

Conforme exposto anteriormente a fase $\phi(n)$ e a frequência Ω de *bursting* são dadas respectivamente por:

$$\phi_n = 2\pi k + 2\pi \frac{n - n_k}{n_{k+1} - n_k}, \quad (\text{A.1})$$

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n) - \phi(0)}{n}. \quad (\text{A.2})$$

Se passamos para o limite do contínuo,

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \Delta\phi \rightarrow d\phi, \quad n \rightarrow t \quad (\text{A.3})$$

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt}, \quad \text{ou } \dot{\phi} = \Omega. \quad (\text{A.4})$$

Adicionando um forçamento externo periódico $d\text{sen}(\omega t)$ podemos definir uma fase de forçamento externo ψ , tal que $\dot{\psi} = \omega$. O forçamento é acoplado aos osciladores (neurônios) supostamente sincronizados com uma mesma frequência de *burst* Ω . Então temos:

$$\dot{\phi} = \Omega + dG(\phi, \psi). \quad (\text{A.5})$$

Onde G é uma função periódica em ϕ e ψ ,

$$G(\phi + 2\pi, \psi + 2\pi) = G(\phi, \psi). \quad (\text{A.6})$$

Trabalhamos com a diferença de fase:

$$\theta = \phi - \psi,$$

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} - \dot{\psi} = \Omega + dG(\phi, \psi) - \omega. \quad (\text{A.7})$$

Definindo o descasamento de frequências,

$$\Delta\omega = \Omega - \omega, \quad (\text{A.8})$$

teremos:

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + dG(\phi, \psi). \quad (\text{A.9})$$

Como o forçamento é $d\text{sen}\omega t = d\text{sen}\psi$ vamos supor que $G(\phi, \psi) = \text{sen}(\phi - \psi) = \text{sen}\theta$, tal que:

$$\dot{\theta} = \Delta\omega + d\text{sen}\theta, \quad (\text{A.10})$$

é a equação de Adler (osciladores não-uniformes).

A.2 Análise Dinâmica

- Se $\Delta\omega = 0 \rightarrow \Omega = \omega \rightarrow$ ressonância,

$$\dot{\theta} = d\text{sen}\theta. \quad (\text{A.11})$$

Neste caso só há um ponto de equilíbrio estável, $\dot{\theta}^* = 0 = d\text{sen}\theta^*$, que é $\theta^* = 0$, para

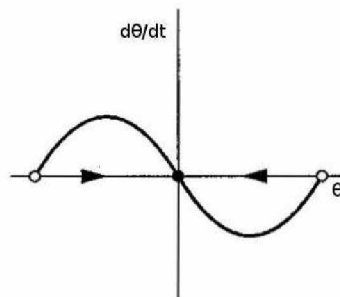


Figura A.1: Figura adaptada de [24].

o qual $\phi - \psi = 0$. Disto decorre que a fase dos osciladores crescem linearmente com o tempo:

$$\phi = \psi = \omega t. \quad (\text{A.12})$$

- Se $|\Delta\omega| < d$.

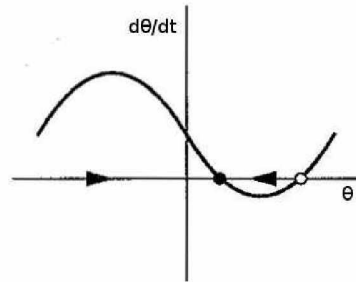


Figura A.2: Figura adaptada de [24].

Neste caso há dois pontos de equilíbrio:

- θ_1^* estável;
- θ_2^* instável.

Como $\dot{\theta}^* = 0 = \Delta\omega + d\text{sen}\theta_{1,2}^*$:

$$\text{sen}\theta_{1,2}^* = -\frac{\Delta\omega}{d}, \quad (\text{A.13})$$

$$\theta_{1,2}^* = \arcsen\left(-\frac{\Delta\omega}{d}\right) \quad (\text{A.14})$$

Para o equilíbrio estável: $\phi - \psi = \theta_1^* = \text{constante} \rightarrow$ a diferença de fase entre os osciladores e o forçamento permanece constante com o tempo (“travamento de fase” ou “*phase-locking*”). Como $\psi = \omega t$,

$$\phi = \theta_1^* + \omega t. \quad (\text{A.15})$$

Os osciladores sincronizam com o forçamento externo, ou seja, a frequência de *burst* sincroniza com a frequência do forçamento (“frequency entrainment”):

$$\Omega = \dot{\phi} = \frac{d(\theta_1^* + \omega t)}{dt} = 0 + \omega = \omega. \quad (\text{A.16})$$

Como $|\text{sen}\theta^*| \leq 1 \rightarrow \left|-\frac{\Delta\omega}{d}\right| = \frac{|\Delta\omega|}{d} \leq 1 \rightarrow |\Delta\omega| \leq d$. Ou,

$$-d < \Delta\omega < d. \quad (\text{A.17})$$

Ou seja, a sincronização ocorre para $d \neq 0$, dentro de um intervalo centrado em $\Delta\omega = 0$, ou $\Omega = \omega$ (intervalo de sincronização). No diagrama $d \times \Delta\omega$ este intervalo é chamado de “língua de Arnold”. Outra forma de visualizar esse resultado é computar a chamada

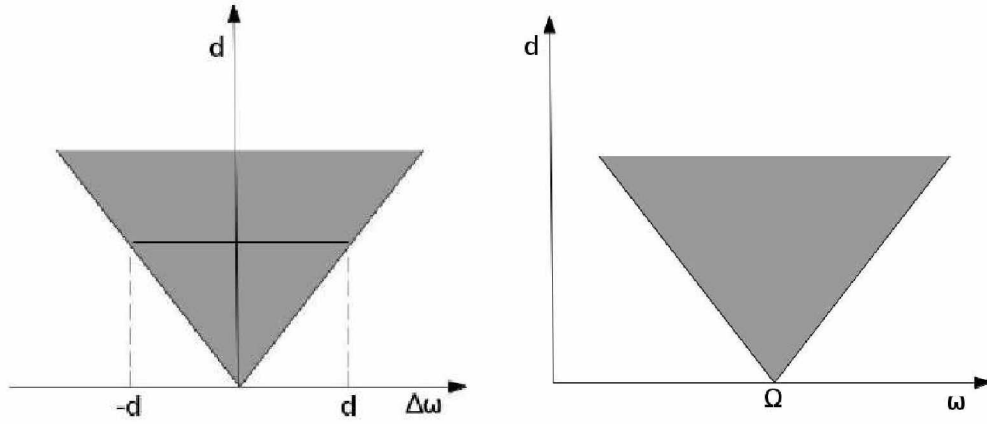


Figura A.3: Intervalo de Sincronização.

“frequência média perturbada”, definida por:

$$\langle \Omega \rangle = \dot{\phi} = \Omega + dG(\phi, \psi), \quad (\text{A.18})$$

ou,

$$\langle \Omega \rangle = \Omega + d\text{sen}(\phi - \psi) = \Omega + d\text{sen}\theta. \quad (\text{A.19})$$

Se temos travamento de fase em $\theta_1^* = \text{constante}$,

$$\langle \Omega \rangle = \Omega + d\text{sen}\theta_1^* = \Omega + d\frac{(-\Delta\omega)}{d}, \quad (\text{A.20})$$

$$\langle \Omega \rangle = \Omega - \Delta\omega = \Omega - (\Omega - \omega) = \omega, \quad (\text{A.21})$$

$$\langle \Omega \rangle = \omega. \quad (\text{A.22})$$

Então, no travamento temos:

$$\langle \Omega \rangle - \omega = 0. \quad (\text{A.23})$$

Fora do travamento, $|\Delta\omega| > d$ e não há ponto de equilíbrio θ^* . O movimento é quase-periódico e assíncrono. Não temos mais θ^* constante. Então, $\langle \Omega \rangle = \Omega + d\text{sen}\theta$, depende da fase de cada oscilador. Conseqüentemente, $\langle \Omega \rangle - \omega = \Delta\omega + d\text{sen}\theta$, será diferente de zero.

Além da sincronização “pura”(ou 1 para 1, 1:1) pode haver sincronização de ordem mais alta entre o forçamento e os osciladores. Em geral, uma sincronização $m : n$ (onde m e n são inteiros positivos) é caracterizada por:

$$\langle \Omega \rangle = \frac{m}{n}\omega, \quad (\text{A.24})$$

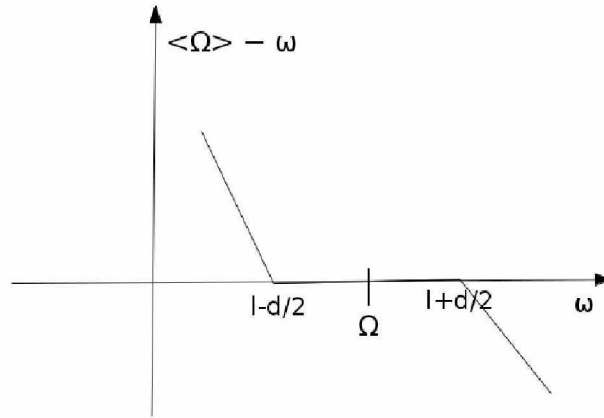


Figura A.4: Platô de sincronização.

onde m/n é um número racional. Temos:

$$\dot{\phi} = \Omega : (\text{osciladores sincronizados nos bursts}), \quad (\text{A.25})$$

$$\dot{\psi} = \omega \rightarrow \psi = \omega t \text{ (forçamento)}, \quad (\text{A.26})$$

$$\dot{\phi} = \omega + dG(\phi, \psi) : \text{oscilador não-uniforme}. \quad (\text{A.27})$$

Define-se a diferença de fase agora como:

$$\theta = m\phi - n\psi = m\phi - n\omega t, \quad (\text{A.28})$$

com o descasamento de frequências:

$$\Delta\omega = m\Omega - n\omega, \quad (\text{A.29})$$

tal que:

$$\dot{\theta} = m\dot{\phi} - n\omega = m[\Omega + dG(\phi, \psi)] - n\omega, \quad (\text{A.30})$$

$$\dot{\theta} = \Delta\omega + mdG(\phi, \psi). \quad (\text{A.31})$$

Fazendo,

$$G(\phi, \psi) = \frac{\text{sen}(m\phi - n\psi)}{m} = \frac{\text{sen}\theta}{m}, \quad (\text{A.32})$$

obtemos,

$$\dot{\theta} = \Delta\omega + d\text{sen}\theta, \quad (\text{A.33})$$

que é a equação de Adler novamente, com a mesma análise dinâmica. Portanto, há uma língua de Arnold $m : n$ para cada par de inteiros (m, n) caracterizando um estado sincronizado (figura A.5). A figura A.5 mostra as línguas de Arnold para o mapa seno-

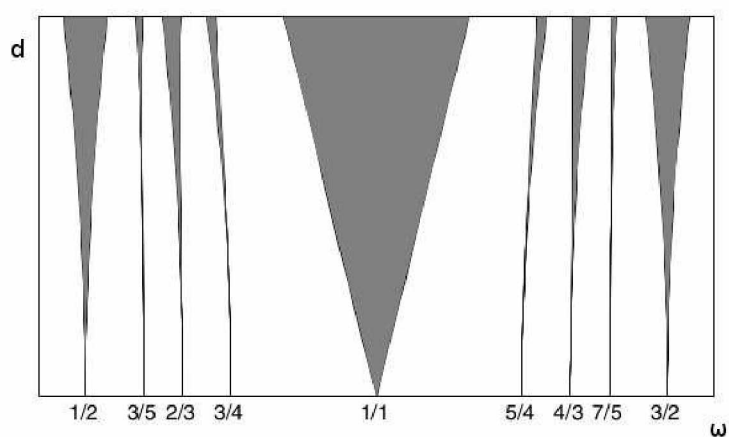


Figura A.5: Línguas de Arnold no mapa seno-círculo. Figura adaptada de [29].

círculo, o qual é uma discretização da equação de Adler A.31. Para cada valor de d , vemos diversos platôs de sincronização no diagrama d versus ω .