ROSANGELA PERUSSI DE CAMARGO

TAREFAS INVESTIGATIVAS DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DE TRÊS ALUNAS DE 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

CURITIBA
2006

ROSANGELA PERUSSI DE CAMARGO

TAREFAS INVESTIGATIVAS DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DE TRÊS ALUNAS DE 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática, da Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Drª Ana Maria Petraitis Liblik

CURITIBA
2006

ROSANGELA PERUSSI DE CAMARGO

TAREFAS INVESTIGATIVAS DE MATEMÁTICA:
UMA ANÁLISE DE TRÊS ALUNAS DE 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Drª Ana Maria P.Liblik

Prof. Drª Ettiène Guérios

Prof. Dr. Ademir Caldeira

CURITIBA
2006

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho buscou conhecer como três alunas de 8ª série do Ensino Fundamental envolvem-se em atividades investigativas de Matemática, sendo que estas alunas não estavam habituadas a trabalhar neste tipo de atividade, na disciplina de Matemática. Este estudo baseou-se nos dados coletados a partir das notas da pesquisadora, da gravação em vídeo, dos protocolos, dos questionários, dos registros durante as atividades e do relatório individual que cada aluna elaborou. As duas sessões com atividades investigativas (sendo uma atividade em cada sessão) ocorreram na escola, em contraturno. A análise de dados foi de ordem qualitativa, tendo como objetos de análise: o modo como as alunas se envolveram nas atividades investigativas, como interagiram verbalmente entre si e com a professora, e como ocorreu a manifestação do raciocínio e dos conhecimentos matemáticos.

Palavras-chave: Educação Matemática – Atividades Investigativas – Ensino-aprendizagem

ABSTRACT

This paper discusses how three 8th grade students got involved in investigative activities in the subject of Mathematics, knowing that these students were not used to working on this type of task. This study was based on data collected from the researcher's notes, from video recordings, protocols, surveys, activity logs and from each student's individual report. The two investigative activity sessions (with one activity per session) took place in the school, out of school time. The data analysis was qualitative, having as analysis objects: the way the students got involved in investigative activities, how they verbally interacted with each other and with the teacher, and how the reasoning demonstration and mathematical skills occurred.

Keywords: Mathematical education – Investigative Activities – teaching-learning

Capítulo 1
Introdução

1 INTRODUÇÃO

A curiosidade e o espírito investigativo são inerentes às crianças. Por muito tempo as vemos explorando o mundo, fazendo experiências, testando hipóteses... Depois crescem, vão à escola, e com o tempo tem-se a impressão que não duvidam de mais nada.

Este comportamento pode ser provocado por diversos fatores. Um deles está relacionado ao modo como tem sido encaminhado o ensino. Aulas centradas no professor, que expõe o conteúdo no quadro, e exige dos alunos a fiel reprodução. Quase não há espaço para reflexões, debates ou justificativas. Particularmente nas aulas de Matemática, aceitam as regras que o professor dita, sem ao menos perguntar por que estas regras, às vezes, funcionam.

Certamente, o treino também é importante no processo de aprendizagem. Os exercícios têm o papel de auxiliar na formação de um alicerce, sobre o qual será possível agir com criatividade. Como escreveram Echeverría & Pozo (1998), “se o aluno desconhecer a técnica instrumental básica, não será capaz de utilizá-la para resolver um problema novo” (p.17). Sendo assim, exercícios e problemas devem constituir um “*continuum* educacional“ (*ibidem*, p. 17).

É fato que não existe um modo único de ensinar e de aprender Matemática. “No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 1997, p.42). Uma dessas possibilidades é a investigação matemática – aqui chamada também de atividade investigativa.

Considerando o *continuum* educacional referido, as atividades investigativas podem despertar nos alunos outras habilidades. Por exemplo, é comum a prática de entregar aos alunos exercícios com enunciados bem formulados, preferencialmente numa seqüência do mais fácil ao mais difícil, ou agrupados de acordo com as técnicas semelhantes de resolução. Já numa situação de investigação, o aluno poderá formular suas próprias questões. A partir do que ele mesmo observou, surgirão fatos a serem investigados.

Percebe-se, cada vez mais claramente, a importância de proporcionar aos alunos tarefas de Matemática que os façam incorporar seu espírito investigativo. Conforme Braumann citado por Ponte (2003):

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (p.6).

A partir das contribuições que esta prática pode oferecer para a aprendizagem de Matemática, interessa conhecer como os alunos envolvem-se numa atividade desta natureza.

Este é, precisamente, o contexto que inspira este estudo.

Pretende-se, portanto, investigar como três alunas de 8ª série do Ensino Fundamental envolvem-se em atividades investigativas de Matemática, considerando que estas alunas não estão habituadas a trabalhar neste tipo de atividade, na disciplina de Matemática.

Optou-se por observar uma única tríade de alunas durante seu trabalho investigativo, a fim de captar os detalhes da situação investigativa.

Mais especificamente, são questões que este estudo pretende verificar:

a) Como as alunas interagem verbalmente entre si?

b) Como são as interações verbais com a professora?

c) Como as alunas manifestam seu raciocínio e seus conhecimentos matemáticos?

Para responder a estas questões, este trabalho está dividido em seis capítulos.

O primeiro capítulo é uma introdução ao tema com a problemática, os objetivos e a justificativa.

O segundo capítulo recorre ao referencial teórico para nortear os pressupostos tomados no contexto deste trabalho. Primeiramente, abordando as investigações matemáticas e as atividades investigativas, a fim de estabelecer o que são e como acontecem. Em seguida, apontando razões para a inclusão destas atividades nas aulas de Matemática.

No terceiro capítulo, a pesquisa é construída a partir da sua metodologia, apresentando-se a escola, os sujeitos, a coleta, o registro e a análise de dados.

O quarto capítulo conta e analisa, de modo geral, como aconteceu cada uma das duas sessões, seus momentos significativos, enfim, o que foi observado quanto ao desenvolvimento de cada tarefa.

No quinto capítulo, cada aluna é apresentada, juntamente com os indícios que refletem seu envolvimento na tarefa, suas interações verbais junto às colegas e à professora, e suas manifestações do raciocínio e do conhecimento matemático.

E finalmente, no sexto capítulo, são delineadas as considerações finais, expressando as reflexões estabelecidas a partir da pesquisa desenvolvida.

1.1 Justificativa

Os motivos que mobilizam este estudo partem dos âmbitos pessoal e profissional. Tendo em conta que a pesquisadora é professora de Matemática, é de seu interesse conhecer melhor as possibilidades de trabalho com as investigações matemáticas. Este interesse é impulsionado pelo desejo de verificar de que forma alunos que não estão habituados a trabalhar em tarefas de cunho investigativo, se envolvem neste tipo de atividade.

Vou explicar melhor. Sou professora de Matemática do Ensino Fundamental há 8 anos. Desde o início de minha carreira até hoje, sempre trabalhei com 5ª e 6ª séries.

Porém, há 2 anos, recebi um convite da diretora da escola para lecionar também para as turmas de 7ª e 8ª séries. Apesar do grande apreço pela 5ª e pela 6ª série, não recusei o convite. Afinal, esta oportunidade mostrava-se um desafio, pois seria uma oportunidade para trabalhar com outras séries, com alunos de outras faixas etárias. Neste ano, então, trabalhei com 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries.

Enquanto vivia este novo contexto profissional, conheci, no Mestrado, as aulas investigativas de Matemática, a partir do estudo de Castro (2004).

As palavras de Goldenberg (1999) também sensibilizaram-me em relação às investigações matemáticas em sala de aula. Segundo o autor:

> Se um dos objetivos da educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas descobrem fatos e métodos, deveriam também, durante uma parte significativa do tempo de aprendizagem, dedicar-se a essa mesma atividade: *descobrir* os fatos (p. 37).

Desde então, fui tomada por algumas inquietações. Começava a mover-se em mim um desejo de conhecer mais sobre esse tipo de trabalho. E não demorou para que eu me interessasse em conhecer a forma como os alunos envolvem-se neste tipo de tarefa.

A decisão em realizar este estudo com alunos de 8ª série emergiu depois que obtive indícios da atitude muito favorável destes alunos em relação à resolução de exercícios de Matemática. Será que trabalhariam com o mesmo afinco numa situação de investigação? Ou seja, como será que eles se envolveriam numa atividade diferente, numa atividade investigativa?

Neste sentido, Segurado (1997) sugere que novos estudos atentem para a influência dos fatores contextuais em situações de cunho investigativo. O contexto, neste caso, é que os alunos não têm o hábito de resolverem tarefas investigativas nas aulas de Matemática.

Deste modo, torna-se clara a necessidade de proceder um estudo a fim de captar o modo como alunos não habituados com atividades investigativas na aula de Matemática, se envolvem neste tipo de tarefa. Há que se observar o modo como eles interagem verbalmente entre si e com a professora, e como manifestam seu raciocínio e seus conhecimentos matemáticos.

Capítulo 2
Referencial Teórico

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Investigações matemáticas e atividades investigativas

Entende-se neste trabalho que uma abordagem pedagógica com investigação matemática pode ser chamada de tarefa investigativa.

Christiansen & Walther citados por Brocardo (2001) distinguem tarefa e atividade:

> - atividade refere-se essencialmente ao aluno, àquilo que ele faz em determinado contexto;
> - tarefa representa o objetivo de cada uma das ações desenvolvidas pelo aluno (p. 119).

Portanto, para o presente estudo, o referido contexto é a investigação matemática, que Porfírio & Oliveira (1999), assim definem:

> O conceito de investigação relaciona-se com a atividade que os matemáticos profissionais desenvolvem ao produzirem conhecimento. Deste modo, investigar tem como objetivo descobrir algo recorrendo a um processo, de alguma forma, sistemático (p. 112).

Segundo Castro (2004), “as aulas investigativas supõem o envolvimento dos alunos com tarefas investigativas que permitam a eles realizar atividade matemática” (p. 34). Desta forma, nas aulas investigativas de Matemática são valorizados processos matemáticos tais como: procurar regularidades, formular, testar, generalizar, etc.

De acordo com Ponte, Brocardo & Oliveira (2003), “para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (p.13).

Conforme estes autores, uma investigação matemática envolve quatro momentos principais:

a) exploração e formulação de questões;
b) formulação de conjecturas;
c) testes e, eventualmente, reformulação das conjecturas;
d) argumentação, justificação e avaliação do trabalho realizado.

Uma conjectura matemática é "uma afirmação que responde a uma determinada pergunta e que se considera verdadeira, podendo-se referir a um único objeto ou a toda uma classe de objetos" (PONTE *et al.*, 1999, p. 137).

Cada um dos quatro momentos referidos anteriormente envolve atividades específicas, como pode-se observar na tabela a seguir:

Tabela 1 – Momentos na realização de uma investigação

Momento	**Atividades envolvidas**
Exploração e formulação de questões	• reconhecer uma situação problemática • explorar a situação problemática • formular questões
Conjecturas	• organizar dados • formular conjecturas
Testes e reformulação	• realizar testes • refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• justificar uma conjectura • avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

(PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003, p.21)

Porém, de acordo com os autores acima, é importante ressaltar que estes momentos não obedecem rijamente esta ordem, podendo, por exemplo, surgir simultaneamente.

É possível perceber que um fato se torna objeto de investigação matemática a partir de uma atenta observação, de um exame cuidadoso deste fato. Quem está analisando poderá detectar nele um padrão. Mas o fará de acordo com os conhecimentos que possui. Do mesmo modo, são os conhecimentos prévios e as habilidades do investigador que darão rumo à investigação.

Numa investigação matemática pode-se reconhecer uma ferramenta valiosa para o ensino de Matemática. Ao aproximar o fazer do aluno do fazer do matemático, as atividades investigativas propiciam que diversas habilidades sejam colocadas em prática e, conseqüentemente, sejam aprimoradas.

Ponte, Brocado & Oliveira (2003) relacionam algumas destas habilidades, quando colocam que na investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, "o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (p. 23).

Desta forma, acredita-se que o aluno perceberá que aprender Matemática não se resume a fazer exercícios, e que pode ir muito além disto. Mais do que chegar a uma resposta correta, é importante saber traçar um caminho para se chegar até ela, percorrê-lo, fazê-lo novamente ou até mesmo abandoná-lo e procurar outro. E ter condições de explicar suas decisões e suas ações.

Tudella *et al.* (1999) estabelecem alguns critérios a serem observados pelo professor ao propor uma aula com investigação matemática:

a) *Introdução da tarefa*: pode ser realizada de forma oral e/ou escrita. A apresentação apenas por escrito aos alunos poderá acarretar uma maior assistência do professor aos grupos, no sentido de ajudá-los a entender o que se pretende. A apresentação oral tem o objetivo de clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações, criando um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Porém, se neste momento o professor fornecer considerações em demasia, podem-se perder aspectos importantes da investigação. Por outro lado, se fizer poucas considerações, poderá estar criando obstáculos ao trabalho dos alunos.

b) *Desenvolvimento da tarefa*: nessa fase as interações entre professor-alunos e alunos-alunos assumem uma grande importância. O professor deverá evitar emitir opiniões muito concretas, para que os alunos percebam o que se espera deles, e adquiram uma visão diferente do papel do professor. A intervenção do professor será diferente em cada grupo, de acordo com as questões levantadas e com as dificuldades que apresentarem. A interação entre os alunos estimula-os a descobrir novas relações entre conceitos, proporcionando-lhes mais segurança nas suas idéias matemáticas, além de estimular o raciocínio, a criatividade e o poder de argumentação.

c) *Discussão final*: Nesta fase os alunos serão confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes daquelas que tinham pensado. Ao professor cabe estimular a comunicação entre os alunos.

Nota-se, portanto, que a relação entre professor e alunos é modificada de um modo especial nesta situação. Afinal, o professor, crendo que seus alunos são capazes de descobrir algo sozinhos, irá procurar apoiá-los de modo que conduzam suas próprias atividades.

Neste sentido, Ponte *et al.* (1998) relacionam um conjunto de 6 papéis fundamentais desempenhados pelo professor no decurso da realização de trabalho investigativo na aula de Matemática: raciocinar matematicamente, promover a reflexão, fornecer e recordar informações, como também desafiar, apoiar e avaliar os alunos.

Enfim, seja numa aula investigativa ou não, criar um ambiente favorável à aprendizagem deve ser uma das preocupações do professor. Especialmente numa aula com investigações, "o aluno deve sentir que as suas idéias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor" (PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003, p. 28).

Entre os estudos sobre o trabalho do professor em aulas investigativas, Castro (2004) realizou um estudo da própria prática neste contexto, procurando analisar o papel que as experiências pedagógicas com investigações matemáticas desempenharam em seu processo de constituição profissional como professora de Matemática.

A autora deste texto dissertativo experenciou esta nova perspectiva de aula de Matemática para, em seguida, refletir sistematicamente sobre ela, tendo como base a produção de narrativas reflexivas escritas.

Esta experiência possibilitou que a autora conseguisse ampliar e aprofundar sua compreensão sobre as tarefas investigativas e seu papel no ensino e na aprendizagem de professores e alunos. Ressaltou:

> Percebi-me propondo aos alunos situações mais abertas, desafiando-os a formularem conjecturas, colocá-las em discussão, argumentar em defesa delas, comprová-las ou refutá-las. Além disso, notei em mim o movimento de procurar apoiar as idéias dos alunos, arbitrar conflitos, valorizando e dinamizando as interações professor-aluno e aluno-aluno (p. 182).

Em suas conclusões, a autora destacou que considera a gestão de uma aula investigativa um desafio, pois entra em conflito com a tradição pedagógica. Por exemplo, ao propor uma tarefa investigativa, o professor não sabe de antemão quais serão todas as explorações possíveis. Segundo a autora, este fato contraria a idéia de que o professor deve saber as respostas dos problemas propostos aos alunos, e qual a maneira correta de atingí-las.

Em Portugal, outros estudos também versam sobre o trabalho do professor numa aula investigativa (por exemplo, Cunha, 1998[1]; Oliveira, 1998; Brunheira, 2000; Pires, 2001).

O alcance das contribuições das investigações matemáticas para os alunos, especificamente sob o aspecto das concepções dos alunos sobre Matemática, foi investigada por Segurado (1997), em Portugal. A autora, em sua investigação com 4 alunos do 6º ano de escolaridade (cerca de 12 anos de idade), buscou:

a) identificar as concepções que estes alunos tinham sobre a Matemática, o papel do professor, o papel do aluno, a natureza das tarefas investigativas e o trabalho em grupo;
b) procurar perceber como as atividades de exploração e investigação contribuíram para uma mudança ou enriquecimento destas concepções;
c) procurar perceber como os alunos abordaram e se envolveram em atividades de exploração e investigação, no contexto de sala de aula;
d) identificar o que as atividades de exploração e investigação revelaram dos conhecimentos e capacidades dos alunos.

O estudo mostrou que os alunos aderiram, no geral, com entusiasmo à realização de tarefas de exploração e investigação, manifestando algumas alterações nas suas concepções e no seu desempenho.

Outros estudos, ainda em Portugal, também debruçaram-se sobre aspectos das investigações matemáticas dos alunos.

---

[1] Citado por PONTE (2003, p. 43)

Souza (2002), numa investigação em sala de aula, procurou compreender o modo como alunos de 6º ano do ensino básico (cerca de 12 anos de idade) realizaram tarefas de natureza investigativa em Estatística. Mais especificamente, como os alunos formularam questões e conjecturas, tomaram decisões sobre a coleta e a análise dos seus dados, como construíram os seus conhecimentos e como comunicaram os seus resultados.

O estudo referiu-se a um grupo de 4 alunos (2 meninos e 2 meninas), em seu trabalho investigativo sobre o aluno típico da turma.

A autora utilizou as seguintes categorias de análise:

> (a) como surgem as idéias a investigar – por iniciativa de um ou vários alunos ou por solicitação da professora;
> (b) como se desenvolvem essas idéias – são completadas, reformuladas ou rejeitadas pelos outros alunos;
> (c) como são validadas – por consenso entre os alunos, pela autoridade interna (bom aluno) ou pela autoridade externa (professora);
> (d) como são construídos e mobilizados os conceitos estatísticos;
> (e) como funciona o grupo – liderança, cooperação, subgrupos;
> (f) as emoções dos alunos e contributo de cada um para a dinâmica do grupo – boa disposição, desinteresse, camaradagem, conflitualidade... (p.61)

Em suas conclusões, a autora destacou que houve um padrão semelhante, ao longo de todas as etapas do processo investigativo, para o modo como as idéias surgiam, se desenvolviam e eram validadas. Segundo a autora:

> [...] um aluno apresenta uma idéia que os outros desenvolvem, dando contributos no sentido de a completar, refutar, apresentar alternativas ou apenas manifestar a sua concordância. Quando a idéia final é obtida por consenso, a necessidade de a validar não chega sequer a ser explicitada e o grupo aceita-a como correta. Quando há divergência de opiniões ou o grupo não se sente muito seguro das suas idéias, os alunos preferem chamar a professora para as validar (p. 138).

Neste estudo também constatou-se que, durante as fases da investigação, o grupo apresentou níveis diferentes de autonomia, sendo que o menor nível foi manifestado na comunicação dos resultados, e o maior na leitura e na interpretação das tabelas. A autora percebeu ainda que os alunos revelaram possuir um conhecimento intuitivo de alguns conceitos estatísticos.

Rocha (2003), num estudo com 2 alunos do 7º ano de escolaridade (cerca de 13 anos de idade), analisou se os mesmos, ao realizarem tarefas de investigação matemática em sala de aula, adquiriam outras concepções e atitudes em relação à Matemática, à sua aprendizagem e aos papéis que os alunos e o professor desempenham nas aulas de Matemática.

A autora selecionou 2 alunos, um menino e uma menina, que apresentavam o pior e o melhor aproveitamento dos alunos escolhidos.

Foram realizadas 5 tarefas de investigação matemática, sendo uma por mês.

Em suas conclusões, a autora destacou a ocorrência de mudanças nas concepções e atitudes dos 2 alunos. No fim do estudo, eles acrescentaram outras características para a Matemática, além daquelas que revelaram no início. Também ampliaram suas concepções quanto à extensão das aplicações da Matemática, bem como sobre a atividade do matemático. A autora detectou ainda que os alunos passaram a valorizar o processo construtivo do conhecimento, reconhecendo que é necessário que o professor lhes dê tempo para esta construção. Consideraram também que as aulas investigativas contribuíram para uma maior participação de todos os alunos durante as aulas. Neste sentido, a autora salientou a motivação dos alunos, mesmo aqueles considerados mais fracos.

Sendo assim, tomando os estudos já realizados como parâmetro, esta pesquisa pretende responder às suas questões focando uma tríade de alunas em atividades investigativas de Matemática.

2.2 Por que atividades investigativas de Matemática

Sabendo que as atividades investigativas podem proporcionar aos alunos extrapolar o *aprender Matemática*, e passar para o *fazer Matemática* (MATOS citado por SEGURADO, 1997, p.17), é possível estabelecer uma analogia com o título do livro "*A solução de problemas – aprender a resolver, resolver para aprender*", de Pozo (1998), com as atividades investigativas. Cabe então dizer das atividades com investigações: aprender a fazer matemática, e fazer matemática para aprender.

Neste caso, acredita-se que as habilidades exercidas numa atividade investigativa vão além da aula de Matemática. Afinal, como sugere-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> [...] a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e a justificação de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios (BRASIL, 1997, p. 27).

Neste sentido, também Ponte (2003), ao colocar a aprendizagem de Matemática sob seu ponto de vista, leva a refletir sobre a importância dos exercícios e de outras experiências matemáticas. Assim considera o autor:

> Para mim, o que está em causa na aprendizagem escolar da Matemática, é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de fatos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando idéias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

Para que este ideal se concretize é necessário que muitos fatores sejam atendidos. Entre eles encontra-se a iniciativa do professor em utilizar múltiplas formas e linguagens para ensinar.

Porém, sabe-se que continua existindo nas escolas – especialmente no espaço das aulas de Matemática – uma valorização do repetir, do fazer exatamente como o professor “passou”.

Esta prática contribui para que os alunos cerceiem seus questionamentos, seu espírito investigativo. Como apontam Carraher, Carraher & Schliemann (1995):

> O ensino, como ele é hoje, voltado para a transmissão de regras cujo sentido muitas vezes nem as professoras podem encontrar [...] não tem condições de diferenciar o aluno que não aceita seguir regras sem questionar por que essas regras funcionam e o que simplesmente não entende as regras. [...] Quanto mais definirmos a tarefa do aluno como a aprendizagem de uma certa quantidade de regras, mais estaremos criando um ambiente favorável à aprendizagem sem compreensão (p.176).

Ou seja, a aprendizagem matemática não está vinculada unicamente ao treino de técnicas, nem é garantida pela simples crença nas “verdades” ditas pelo professor, mas é favorecida quando há o envolvimento do aluno no trabalho desenvolvido.

Nesta perspectiva, Ponte, Brocardo & Oliveira (2003) argumentam que:

> O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação de questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem (p.23).

Echeverría & Pozo (1998) refletiram sobre o valor que há em propor problemas a si mesmo, e sentir-se encorajado a resolvê-los. O aluno que aprende a agir assim desenvolve uma atitude de procurar respostas para suas próprias perguntas, habituando-se a questionar-se ao invés de receber somente respostas já elaboradas por outros.

Para estes autores, uma situação é concebida como um problema “na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a seqüência de passos a serem seguidos” (p. 16).

Quando conceituam investigação matemática, Ponte, Brocardo & Oliveira (2003) escrevem que “uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver” (p.16).

Há, sem dúvida, convergências entre a resolução de problemas e as investigações. Porém, cada uma tem características específicas. Por exemplo: numa investigação, a primeira ação é a formulação das questões a estudar. Na resolução de problemas, as questões já estão formuladas.

Sendo assim, numa situação de resolução de problemas pretende-se que o aluno atinja o resultado utilizando um entre diversos caminhos possíveis. Numa situação de investigação matemática, o objetivo é a própria exploração.

Da perspectiva de Ponte *et al.* (1999):

> As investigações matemáticas fornecem um bom contexto para que os alunos compreendam a necessidade de justificar as suas afirmações, ao expressar o seu raciocínio junto do professor e dos colegas. Ao confrontar as diferentes conjecturas e justificações propostas por diversos alunos, a turma estabelece-se como uma pequena comunidade matemática, interagindo constantemente, onde o conhecimento matemático se desenvolve como um empreendimento comum (p. 134).

Brocardo (2001, p.127), por sua vez, relaciona cinco tipos de argumentos que, segundo a autora, são indicados por vários autores para justificar a introdução das investigações na aula de Matemática. Estes argumentos são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 2 – Por que introduzir investigações na aula de Matemática

Argumento	Pois...
O que é a Matemática	... a Matemática não é só um conjunto de conteúdos.
O que fica para a vida	... é preciso saber usar processos importantes para a vida.
Motivação	... as investigações motivam os alunos
Aprendizagem	... as investigações desenvolvem capacidades, contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem.
Ambiente de aprendizagem	... as investigações ajudam a estabelecer um ambiente vivo em que os alunos participam ativamente.

Também Goldenberg (1999), quando reflete sobre as funções da investigação na aula de Matemática, considera que:

> Não podemos apresentar fatos e pôr os alunos simplesmente a aplicá-los ou a prová-los; assim como não podemos explicar técnicas e fazer com que os alunos se limitem a executá-las. O objetivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação (p. 37).

Enfim, o professor deve procurar proporcionar amplas oportunidades de aprendizagem a seus alunos, seja individualmente ou em grupo, incluindo em sua prática as mais diversas tarefas: exercícios, problemas, investigações... Por outro lado, os alunos devem estar cientes de seu papel neste processo. Devem entender que, para aprender Matemática (bem como qualquer disciplina), o empenho pessoal é fundamental. Sendo assim, quanto mais variadas forem as abordagens utilizadas pelo professor, maiores serão as oportunidades de aprendizagem, favorecidas pela cooperação entre o professor e os alunos.

Capítulo 3
A Pesquisa

3 A PESQUISA

Este estudo investigou como três alunas de 8ª série do Ensino Fundamental envolveram-se em situações de investigação matemática. Foram duas sessões, sendo uma tarefa investigativa em cada sessão. Mais especificamente, esta pesquisa buscou descrever e analisar:

a) Como as alunas interagiram verbalmente entre si;
b) Como foram as interações verbais com a professora;
c) Como as alunas manifestaram seu raciocínio e seus conhecimentos matemáticos.

A pesquisa foi desenvolvida com um enfoque qualitativo. Bogdan & Biklen (1994) apresentam cinco características da investigação qualitativa:

a) A fonte direta de dados é o ambiente natural, e o investigador freqüenta o local de estudo porque se preocupa com o contexto.
b) É descritiva.
c) O pesquisador interessa-se mais pelo processo do que pelos produtos ou resultados.
d) O pesquisador tende a analisar os seus dados de forma indutiva, ou seja, "as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando" (*ibidem,* p.50).
e) O investigador preocupa-se com o ponto de vista do sujeito, ou seja, dá importância ao significado.

Segundo estes autores, uma pesquisa pode ser considerada qualitativa mesmo que não apresente uma (ou mais) destas características. No caso deste estudo, as atividades investigativas foram realizadas no ambiente escolar, em contraturno, e propostas pela pesquisadora (no papel de professora).

Bogdan & Biklen (1994) afirmam que, numa pesquisa qualitativa, "ao recolher dados descritivos, os investigadores qualitativos abordam o mundo de forma minuciosa" (p.49). Devido a este caráter pormenorizado, no qual nada é trivial, optou-se, neste estudo, considerar como sujeitos uma única tríade de alunas, em duas sessões com atividades investigativas, a fim de facilitar a percepção do envolvimento destas alunas nas atividades, evidenciar as interações verbais, bem como a manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático, atendendo o propósito deste estudo.

3.1 A escola

A pesquisa foi realizada com alunas de uma escola estadual do município de Campo Magro, região metropolitana de Curitiba-PR.

A escola está localizada numa área urbana (ao lado da sede da prefeitura do município) com características rurais (espaços ocupados pela agricultura e pecuária, em sua maior parte).

O prédio da escola é de propriedade da Congregação das Irmãs Franciscanas da Sagrada Família, e abriga simultaneamente duas escolas de Ensino Fundamental: municipal, que oferece da Pré-Escola à 4ª série, e estadual, que oferece de 5ª à 8ª série.

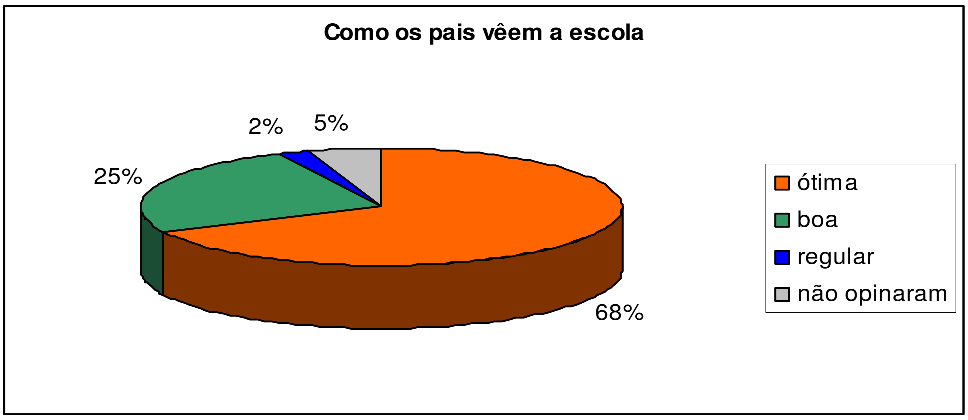
São, ao todo, 16 salas de aula. No turno matutino, a escola estadual funciona com 10 turmas, e a municipal com 6. No turno vespertino, são 6 turmas de 5ª a 8ª série, e 10 turmas de Pré à 4ª série.

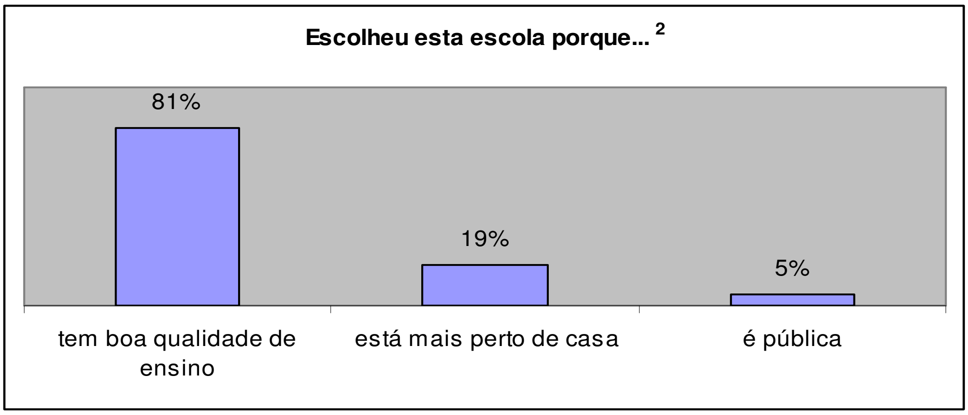
Ambas as escolas atendem alunos que moram em localidades bastante distantes e de difícil acesso. Também recebem estudantes de bairros da capital que ficam próximos ao município.

No caso da escola estadual, são 632 alunos ao todo (manhã e tarde). 18 professores compõem o quadro docente, sendo 3 professores da disciplina de Matemática. A escola também oportuniza atividades como Fanfarra, Coral, Grupo de Teatro e de Dança, no contraturno.

A escola é bastante conceituada na comunidade pela tradição de suas normas disciplinares. De acordo com o senso interno realizado no ano desta pesquisa, a maioria dos pais considera esta uma ótima escola, tendo a escolhido por apresentar uma boa qualidade de ensino.

Figura 1 – Gráficos do senso interno





[2] Neste item, muitos pais assinalaram mais de uma alternativa

Figura 2 – Fachada da Escola

Figura 3 – Vista Aérea da Escola

3.2 Sujeitos

Este trabalho incidiu sobre uma tríade de alunas.

Inicialmente, mediante convite da pesquisadora, 12 de seus alunos candidataram-se como voluntários para fazer parte desta pesquisa. Ao serem estabelecidos o dia da semana e o horário para a realização das tarefas investigativas, apenas 3 alunas apresentaram disponibilidade para comparecer fora do horário escolar, por morarem próximo da escola.

Sendo assim, a tríade foi composta por **DA**, **KA** e **JE**, todas com 14 anos. **DA** e **JE** são mais reservadas, ao passo que **KA** é a mais comunicativa das três, e participa de diversos projetos desenvolvidos pela escola.

A turma que estas alunas integram é constituída, na sua totalidade, por 33 alunos (19 meninas e 14 meninos) com idades compreendidas entre 13 e 17 anos. Todos eles freqüentam pela primeira vez a 8ª série.

3.3 Coleta e registro de dados

A coleta de dados se deu a partir da observação e dos materiais produzidos pelas alunas. Foram utilizados os seguintes instrumentos: notas da pesquisadora, gravação em vídeo, protocolos, questionários, registros escritos e relatórios individuais.

Primeiramente, solicitou-se às alunas que respondessem a um questionário individual (anexo 1), com a finalidade de caracterizá-las como sujeitos da pesquisa.

Este questionário auxiliou, por exemplo, na identificação das opiniões que cada aluna expressou a respeito das tarefas e da aula de Matemática.

Antes do início da primeira sessão, foi entregue às alunas um segundo questionário individual (anexo 2), com o objetivo de fazê-las refletir sobre o significado das palavras exercício, problema e investigação. Pretendeu-se, assim, que tomassem consciência das diferenças entre as tarefas, e desta forma, da natureza da atividade que iriam realizar.

As duas sessões com atividades investigativas (sendo uma atividade em cada sessão) ocorreram na escola, em contraturno. Foram gravadas integralmente em vídeo, ficando a filmagem a cargo do irmão da pesquisadora. Durante cada sessão, a pesquisadora tomou nota de episódios significativos em relação às questões deste estudo. Imediatamente após cada sessão houve a transcrição de toda a gravação em protocolos (anexos 6 e 7). Estes, por sua vez, constituíram o registro seqüenciado de todas as ocorrências observadas, tanto as verbais quanto as ações (movimentos, gestos, etc).

Solicitou-se, em cada sessão, que as alunas registrassem as conclusões de modo sistematizado (anexos 9 e 10). Foram recolhidas também as anotações que elas fizeram nos rascunhos, durante as atividades investigativas. Estes instrumentos (rascunhos e conclusões) foram designados registros escritos.

Ao término de cada sessão cada aluna elaborou, individualmente, um relatório escrito, conforme modelo fornecido pela pesquisadora (anexo 5).

A utilização dos dados foi autorizada, por escrito, pelo responsável de cada aluna (anexo 8).

3.4 Análise dos dados

A análise de dados teve em vista o envolvimento das alunas nas atividades investigativas de Matemática, especificamente:

a) Como as alunas interagiram verbalmente entre si?
b) Como foram as interações verbais com a professora?
c) Como ocorreu a manifestação do raciocínio e dos conhecimentos matemáticos?

Num primeiro momento, realizou-se a caracterização dos sujeitos da pesquisa a partir dos dados do primeiro questionário.

Após cada sessão, procedeu-se a transcrição completa da gravação em vídeo (protocolos), e foi feita a leitura dos registros escritos e dos relatórios das alunas. Em seguida, assistiu-se novamente à gravação em companhia do respectivo protocolo, das anotações da pesquisadora, dos registros escritos e dos relatórios, com a finalidade de perceber o modo com que as alunas se envolveram na realização de cada tarefa, as interações verbais e as manifestações do raciocínio e dos conhecimentos matemáticos que elas revelaram.

Foram utilizados os seguintes critérios de análise:

a) Envolvimento: A aluna manifesta interesse pela tarefa? Está atenta? Faz algum registro? Como são feitos os seus registros? Demonstra persistência?
b) Interação verbal com as colegas: A comunicação ocorre com uma colega ou com o grupo? De que natureza é a comunicação?
c) Interação verbal com a professora: Solicita intervenção da professora? Comunica-se com a professora durante a intervenção? Solicita validação da conjectura pela professora?

d) Manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático: Formula questões? De que natureza são suas questões? Formula conjectura? Testa conjectura? Demonstra ter compreendido a tarefa? Que manifestações de conteúdo matemático ocorrem?

Como intervenções foram considerados os momentos em que a professora comunicou-se com o grupo para estimular a manifestação das alunas, fornecer, recordar e validar informações, validar questões, desafiar e orientar.

3.5 Tarefas escolhidas

> Não se pode nem se pretende planear os caminhos que os alunos vão seguir, mas pode planear-se o tipo de trabalho a desenvolver: que os alunos discutam com os colegas, se envolvam em atividade de descoberta e encontrem os seus próprios caminhos experimentando, conjecturando... (TUDELLA *et al.*, 1999, p. 87).

Neste sentido, levando-se em conta que os sujeitos desta pesquisa não estavam habituados com atividades de cunho investigativo nas aulas de Matemática, optou-se por propor, na primeira sessão, uma tarefa mais estruturada, contendo um conjunto de passos a seguir. Esta decisão teve como finalidade permitir que as alunas realizassem um trabalho mais autônomo, com poucas intervenções da professora (que no caso, tratava-se da própria pesquisadora).

Até porque, segundo Porfírio & Oliveira (1999), “a definição do nível desejável de estruturação de uma tarefa de investigação estará sempre muito dependente das experiências anteriores dos alunos e do professor” (p. 115).

Sendo assim, para a primeira sessão foi escolhida a tarefa “Investigações no Triângulo de Pascal” (anexo 3).

Para a segunda sessão, teve-se em mente envolver a Geometria, que geralmente tem pouca ênfase nas aulas de Matemática. Decidiu-se então pela tarefa "Cubos e cubinhos" (anexo 4).

Ambas as tarefas foram adaptadas pela pesquisadora a partir de tarefas publicadas[3].

[3] - 1ª tarefa (Investigações noTriângulo de Pascal): adaptada de http://www.educ.fc.ul.pt/estagios/2000/ramada/trpas.htm

- 2ª tarefa (Cubos e Cubinhos): adaptada de ABRANTES, P. **Investigações em Geometria na sala de aula**. In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (org.) Investigações Matemáticas na aula e no currículo. 1999, p. 153-167.

Capítulo 4
A Realização das Tarefas

4 A REALIZAÇÃO DAS TAREFAS

4.1 Antes da primeira tarefa

As alunas, enquanto aguardavam a pesquisadora organizar o material e a sala para a realização da primeira atividade investigativa, responderam a um breve questionário individual (anexo 2) sobre o significado das palavras exercício, problema e investigação.

Vale lembrar a definição que Ponte, Brocado & Oliveira (2003) atribuem à investigação: "para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades" (p.13).

É importante também estabelecer a diferença entre problema e exercício.

Um exercício matemático, para Echeverría (1998), pode ser uma "tarefa na qual o aluno não precisa tomar nenhuma decisão sobre os procedimentos que deve usar para chegar à solução" (p. 48). Sendo assim, os exercícios podem ser utilizados, por exemplo, para a consolidação e automatização de uma técnica, pela repetição desta técnica. Ou seja, realizar uma lista de operações matemáticas, ou aplicar o Teorema de Pitágoras, são situações de exercícios matemáticos.

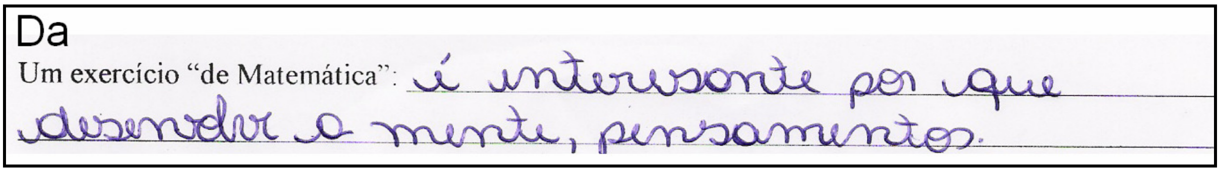
Por outro lado, esta autora diz que para existir um problema "a pessoa que está resolvendo essa tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta" (ECHEVERRÍA, 1998, p. 48).

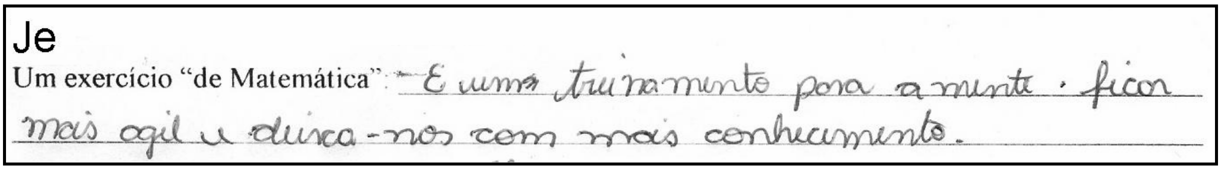
Percebe-se que estes conceitos de exercício e problema aproximam-se do que Polya (1985) chamou de problemas rotineiros e não-rotineiros. Os problemas rotineiros são resolvidos com a aplicação direta de uma regra bem conhecida, não há desafio. Já nos problemas não-rotineiros, é exigido do aluno um certo grau de criação e de originalidade.

Diante destas perspectivas, seguem as respostas das alunas ao questionário.

Primeiramente, elas deveriam explicar o que é (ou como é) um exercício de Matemática.

Para **KA**, o exercício é uma atividade na qual usamos fórmulas matemáticas para resolvê-la. **JE** e **DA** relacionam o exercício com o processo de desenvolvimento da mente, como se vê abaixo:


Da
Um exercício "de Matemática": é interessante por que desenvolve a mente, pensamentos.


Je
Um exercício "de Matemática": É uma treinamento para a mente. ficar mais agil e deixa-nos com mais conhecimento.

Em seguida, deveriam explicar o que é (ou como é) um problema. **DA** e **JE** apresentam respostas que relacionam os problemas a exercícios que demandam uma interpretação de texto, sendo necessário entendê-lo para resolver. **KA** entende que um problema é uma questão para ser resolvida através do raciocínio e de fórmulas científicas.

Estas respostas constaram no questionário de **DA**, **JE** e **KA** da seguinte maneira:

Da

Um problema: é um exercício onde você tem que ~~ela~~ entende-lo e resolver as contas.

Je

Um problema: E um exercício de interpretação de texto que para ser resolvido só basta entende-lo.

Ka

Um problema: Questão para ser resolvida através do raciocínio e de formulas científicas.

Na terceira questão foi solicitado que as alunas escrevessem o que entendiam por investigação. **DA** reporta-se a uma investigação criminal, associando à perseguição e incriminação. **JE** e **KA** associaram à idéia de descoberta.

Je

O que você entende por investigação?

Procurar um caminho para descobrir algo.

Ka

O que você entende por investigação?

É ato com propósito de descobrir algo.

Por fim, cada aluna deveria associar o enunciado de uma situação matemática com uma das palavras: exercício, problema ou investigação. Pode-se observar, no quadro a seguir, que apenas na última situação houve respostas diferentes (Tabela 4).

Tabela 4 – Quadro comparativo das respostas na 3ª questão

situação	enunciado	DA	JE	KA
1	Um triângulo retângulo tem catetos que mede 5cm e 6cm. Quanto mede a hipotenusa?	exercício	exercício	exercício
2	Desenhe um quadrilátero qualquer e marque o ponto médio de cada um dos lados. Unindo estes pontos, você obtém um novo quadrilátero. Verifique que tipos de quadriláteros resultam desta construção, quando feita nos diferentes tipos de quadriláteros.	investigação	investigação	investigação
3	Fui jantar num restaurante com três amigos. Resolvemos dividir igualmente as despesas, que ficaram em R$ 62,00. Após pagar minha parte, percebi que tinha ainda R$ 20,00 na carteira. Qual era a quantia inicial que eu tinha?	problema	problema	problema
5	Simplifique:	exercício	investigação	exercício

No entanto, vale lembrar que Ponte (2003) chamou a atenção para a relatividade destes termos (exercício, problema, investigação).

> Qualquer um dos conceitos, exercício, problema, investigação, é sempre relativo ao sujeito a quem é proposto. Uma mesma tarefa pode ser um problema difícil para uma pessoa, que nem sequer compreende o que é pedido, e um exercício trivial para outra, que já a resolveu diversas vezes (p.9).

Note-se, portanto, que uma situação pode ser encarada como um mero exercício por alguém que já conhece aquela situação, e pode ser vista como um problema por outra que precisará, primeiramente, compreendê-la, e em seguida, procurar meios para solucioná-la.

4.2 Primeira sessão

4.2.1 A tarefa "Investigações no Triângulo de Pascal"

INVESTIGAÇÕES NO TRIÂNGULO DE PASCAL

Blaise Pascal foi um matemático francês no século XVII.
E este triângulo numérico é chamado de Triângulo de Pascal:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

1) Descubra como se obtêm os números de cada linha deste triângulo, a partir dos números da linha anterior.

2) Escreva mais quatro linhas deste mesmo triângulo.

3) Explique como alguém deve fazer para obter novas linhas deste triângulo, a partir dos números da linha anterior.

4) Some os números de cada uma das linhas do Triângulo de Pascal. O que você pode observar?

5) É possível prever a soma dos números da 20ª linha se você souber a soma dos números da linha 19? Como?

6) Descubra agora um modo de saber a soma de qualquer linha que se queira, sem depender da soma da linha anterior.

7) Tente escrever uma fórmula para calcular a soma dos valores de qualquer linha que quiser.

Esperava-se que com esta tarefa as alunas descobrissem fatos matemáticos por meio de suas próprias observações.

4.2.2 A realização da atividade

A primeira sessão ocupou 121 minutos, sendo 5 minutos para a introdução da tarefa, 91 minutos para sua realização e 25 minutos para o relatório individual. Houve um intervalo de 22 minutos para o lanche, que não foi incluído na contagem total do tempo.

Como esta atividade não foi realizada no contexto de sala de aula, não houve um planejamento para a duração da sessão. O tempo ocupado, portanto, dependeu unicamente do trabalho das alunas na realização da atividade investigativa. Sendo assim, acredita-se que seja necessário fazer adaptações na tarefa para realizá-la na aula de Matemática.

As alunas utilizaram, durante a sessão, papel sulfite para rascunhos, papel almaço para registrar as conclusões, canetas, lápis e borracha, além da calculadora.

A pesquisadora solicitou que escolhessem uma relatora, que ficaria responsável por organizar as conclusões do grupo. **KA** então ofereceu-se para ser a relatora, e o grupo concordou.

A introdução foi feita oralmente pela pesquisadora, na intenção de conduzir as alunas a refletirem sobre o significado de investigar. Também falou-se brevemente sobre as fases de uma investigação matemática, lembrando às alunas que poderiam solicitar a ajuda da pesquisadora quando sentissem necessidade, porém deveriam tentar trabalhar sozinhas o maior tempo possível.

Em seguida, entregou-se a tarefa por escrito para cada uma das alunas. Fizeram a leitura silenciosa da tarefa, e começaram o trabalho individualmente.

A pesquisadora então realizou uma intervenção, a fim de estimulá-las a se manifestarem.

***Pesq**: Vocês já descobriram algo interessante neste triângulo? Olhando este triângulo, tem algo interessante que vocês já perceberam?*

A existência do número 1 em todas as linhas chamou a atenção de **DA**. **JE** observou que o número 1 aparecia nas linhas (horizontais) e nas colunas (linhas verticais).

Ainda no início da atividade, **DA** dirigiu-se à pesquisadora para solicitar uma informação. Ao remeter à aluna para que perguntasse primeiro às colegas, a pesquisadora pretendeu valorizar o trabalho em grupo.

De fato, **JE** entendeu o que a expressão “linha anterior” significava naquela tarefa, mas apenas sinalizou na figura, o que sugeriu a falta de habilidade em comunicar-se matematicamente.

JE percebeu como se constróem as linhas do Triângulo de Pascal. Ela escreveu as quatro linhas seguintes às apresentadas, e auxiliou **KA** na construção da justificativa.

Quando **KA** redigiu as linhas escritas por **JE** (no rascunho), ela notou que havia números que se repetiam. Por outro lado, não percebeu que faltavam números nas linhas que acabara de copiar. Talvez este último fato a tenha influenciado a não perceber a simetria dos valores dispostos nas linhas.

Figura 4 – **KA** registrou as linhas construídas por JE

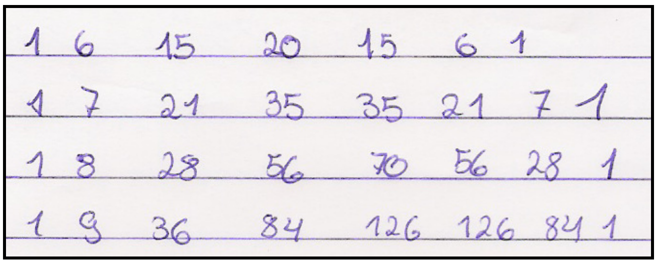
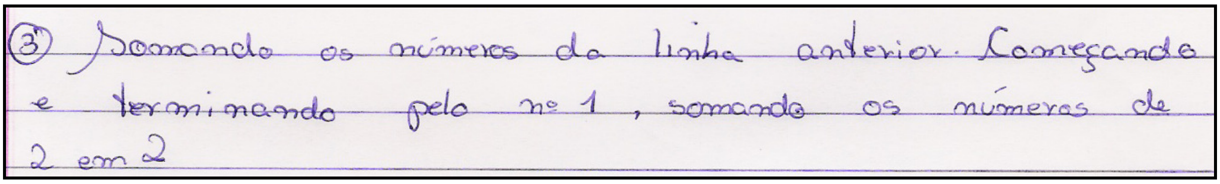

1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 1
1 9 36 84 126 126 84 1

Figura 5 – Justificativa do processo de construção das linhas


③ Somando os números da linha anterior. Começando e terminando pelo nº 1, somando os números de 2 em 2

KA lembrou que cada nova linha deveria começar e terminar pelo número 1, mas a explicação do modo como se deve somar os números da linha anterior poderia ter ficado mais clara, sugerindo, novamente, a falta de habilidade em comunicar-se matematicamente. Vale lembrar que, antes desta justificativa, a pesquisadora havia realizado uma intervenção orientando que comunicassem com maior clareza.

KA registrou a soma das linhas horizontais (colunas), verticais (linhas) e diagonais (inclinadas).

> ***KA**: Na horizontal não dá sempre o mesmo valor que nem na vertical e na diagonal.*

Então a pesquisadora orientou o grupo para que observasse o que acontecia com a soma das linhas horizontais. As alunas somaram juntas os números de cada linha, e **KA** então registrou.

Ao observar os números obtidos, **JE** falou que eles aumentavam de 2 em 2. Logo, **KA** interviu.

> ***KA**: Na horizontal vai aumentando...*
> ***JE**: De dois em dois.*
> ***KA**: Não...*
> ***JE**: Tipo: 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4...*
> *(Riem)*
> ***KA**: Somando o número com ele mesmo.*

Na seqüência, o grupo passou longo tempo observando as somas obtidas, mas não conseguiu generalizar a soma de qualquer linha. Perceberam que a soma dos números de uma linha correspondia ao dobro da soma da linha anterior. Mas não relacionaram este conhecimento com potências de base 2.

KA demonstrou ter compreendido o que seria a generalização esperada.

> ***KA****: Não... é assim, ó: a gente não vai saber esse resultado. A professora, por exemplo, ela vai dar a linha 8, para a gente saber a soma. A gente vai ter que saber uma maneira que, por exemplo, a linha 8 somada, ou diminuída, multiplicando, dividindo, ou raiz quadrada, dê com a linha 8, dê o resultado.*

E explicou para **JE**:

> ***JE****:* *Pelo número da linha você não tem que descobrir os números?*
> ***KA****:* *Não, pelo número da linha você tem que descobrir a soma.*

Finalmente, depois de um longo período pensativas, renderam-se ao cansaço e resolveram encerrar esta atividade. Entregaram para a pesquisadora os rascunhos e um resumo com as conclusões “passadas a limpo” (anexo 9). Em seguida, escreveram e entregaram um breve relatório individual, de acordo com o modelo fornecido pela pesquisadora (anexo 5).

4.2.3 Conclusões

As interações verbais entre as alunas ocorreram, de forma geral, depois de um raciocínio individual e silencioso.

Houve indícios de que as alunas não estavam habituadas à comunicação matemática, sentindo dificuldades na interpretação da tarefa, bem como no modo de se expressarem.

Ao final, uma das alunas demonstrou ter compreendido o que seria a generalização.

Acredita-se que as alunas não conseguiram concluir a tarefa porque não relacionaram as somas das linhas com potências de base 2, e além disso, evidenciaram cansaço devido ao tempo que passaram envolvidas na atividade. Este cansaço também pôde estar relacionado ao tipo de atividade, que exigiu delas muito raciocínio.

As intervenções da pesquisadora ocorreram para estimular as alunas a comunicarem o que estavam pensando, para esclarecer conceitos, para fazer com que se expressassem melhor, e para auxiliar no processo investigativo.

Nesta tarefa, as alunas não perceberam que as somas das linhas do Triângulo de Pascal eram potências de base 2 – o que acreditava-se que fariam.

Por outro lado, foi uma surpresa para a pesquisadora as alunas terem somado os números das linhas horizontais, verticais e inclinadas. Ao usar a palavra “linha” na tarefa, presumia-se que seriam investigadas apenas as somas das linhas horizontais. Portanto, as alunas viram na tarefa algo que a pesquisadora não tinha se dado conta.

Enfim, mesmo não tendo concluído a tarefa, as alunas demonstraram satisfação pelas descobertas que fizeram.

4.3 Segunda sessão

4.3.1 A tarefa "Cubos e Cubinhos"

CUBOS E CUBINHOS

1. Construção

Construa um cubo de aresta "3 cubinhos". Quantos "cubinhos" foram necessários?

Quantos "cubinhos" seriam necessários para construir um cubo de aresta "4 cubinhos"? E de "5 cubinhos"?

2. Cubos pintados

Imagine agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, decidiu-se pintá-lo exteriormente de vermelho.

Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada? E com duas? E com três? ... E com nenhuma?

Investigue o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta 4. E se pintássemos um de aresta 5 ?

Se for preciso, faça um desenho que te ajude a investigar. Organize numa tabela as suas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2, 3,... faces pintadas num cubo de 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5.

Observe a tabela e escreva algumas conclusões.

Pretendeu-se, com esta tarefa, que as alunas utilizassem a imaginação para determinar quantos cubinhos teriam as faces pintadas, e que elas formulassem conjecturas a partir dos dados coletados.

4.3.2 A realização da atividade

A segunda tarefa ocupou 107 minutos, sendo 2 minutos para a introdução da tarefa e 105 minutos para sua realização. Houve um intervalo de 22 minutos para o lanche, que não foi incluído na contagem total do tempo.

Como na atividade anterior, esta atividade também não foi realizada no contexto de sala de aula, e não houve, portanto, um planejamento para a duração da sessão. O tempo ocupado dependeu unicamente do trabalho das alunas durante a realização da atividade investigativa.

O relatório individual foi realizado depois do encerramento da sessão, e entregue no dia seguinte para a pesquisadora.

As alunas utilizaram, durante a sessão, papel sulfite para rascunhos, papel almaço para registrar as conclusões, canetas, lápis e borracha, a calculadora e um jogo da Escala Cuisinaire para efetuar as construções.

Figura 6 – O material da Escala Cuisinaire

Este material revelou-se difícil de manusear, pois os cubinhos eram muito pequenos. Mesmo assim, **KA** justificou que a montagem foi importante para facilitar a visualização e a contagem dos cubinhos com faces coloridas.

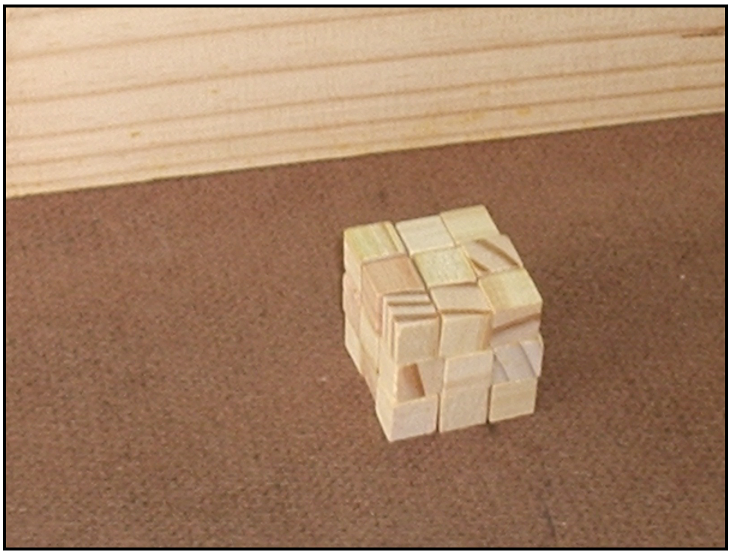
Antes da introdução da tarefa, a pesquisadora solicitou uma relatora. **JE** ofereceu-se, e o grupo concordou.

A introdução foi breve, feita oralmente pela pesquisadora, na intenção de relembrar nomenclaturas e propriedades do cubo. Apresentaram-se as três etapas da tarefa: construir os cubos com cubinhos, imaginar quais cubinhos teriam faces pintadas, e investigar a partir dos dados obtidos.

Em seguida, entregou-se a tarefa por escrito para cada uma das alunas. Elas, por sua vez, fizeram uma leitura silenciosa.

Assim que terminou a leitura, **KA** começou a construção do primeiro cubo.

Figura 7 – Cubo de aresta “3 cubinhos” montado com o material da Escala Cuisinaire

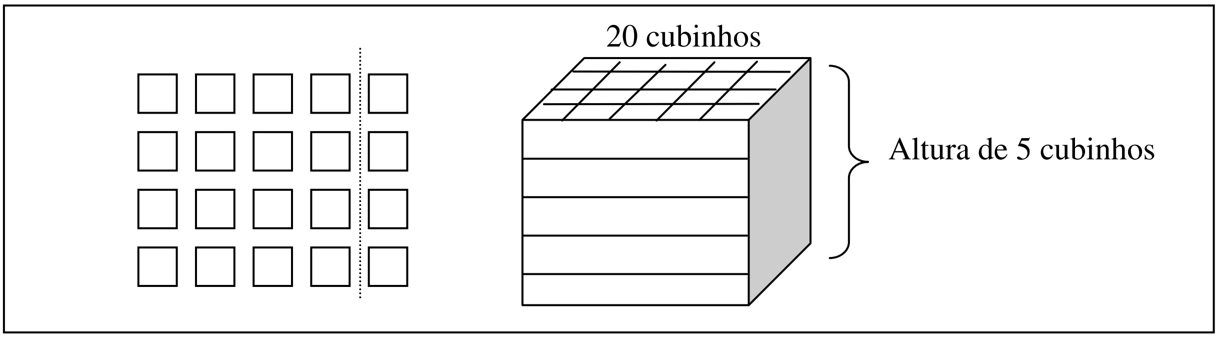


Nesta primeira etapa, **KA** protagonizou a construção dos três cubos indicados, auxiliada por **JE** e **DA**. **KA** desempenhou um papel de liderança nesta fase da tarefa, conduzindo a construção e a contagem dos cubinhos utilizados.

> *(**KA** começa a contar a quantidade de cubinhos utilizados na construção do cubo 3 x 3 x 3, contando-os, um a um, pelas colunas formadas)*
>
> ***KA**: (aponta a primeira coluna) 1, 2, 3, ... (aponta a 2ª coluna) 4, 5, 6... (aponta a 3ª coluna) 7, 8, 9... (e continua assim até contar 27 cubinhos)*
>
> ***KA**: Anote aí, **DA**.*
>
> *(**DA** registra. Para construir o próximo cubo, **KA** vai acrescentando os cubinhos a partir do cubo já existente, e continua a contagem. **DA** e **JE** observam)*

Ainda nesta etapa da tarefa, **JE** manifestou o interesse em descobrir o total de cubinhos sem efetuar a construção. Ela representou num desenho a base do cubo atual (4 x 4) e acrescentou uma coluna (4 x 5). Contou quantos cubinhos havia na base (20) e multiplicou por 5, chegando ao número 100.

Figura 8 – Esquema do raciocínio manifestado por **JE**



Em seguida, **KA** construiu a base com os cubinhos, contou-os (25) e multiplicou por 5, chegando a 125.

Quando **KA** anunciou "*tem 25 aqui*", **JE** manifestou surpresa, dando indícios de que percebeu seu erro: para fazer a base do cubo 5 x 5 x 5 ela acrescentou uma coluna à base do cubo 4 x 4 x 4, mas esqueceu de acrescentar uma linha.

Em seguida, as alunas deveriam observar, em cada cubo, quantos cubinhos ficariam com 1, com 2, com 3 e com nenhuma face pintada. A contagem no cubo de aresta 3 cubinhos foi realizada sem dificuldade. Já a contagem no cubo de aresta 4 cubinhos só foi eficaz na quinta tentativa. Foram necessárias duas tentativas para determinar a contagem dos cubinhos pintados no cubo de aresta 5 cubinhos.

Nesta fase, partiu de **KA** a idéia de ir desmanchando a construção conforme efetuava-se a contagem dos cubinhos. Esta atitude confundiu as alunas, fazendo com que demorassem mais tempo para concluir a etapa.

Figura 9 – Cenas em que **KA** desmancha o cubo para contar

Ainda nesta etapa, **KA** utilizou a calculadora para somar os números declarados de cubinhos pintados. Esta iniciativa foi encarada como conferência dos resultados, e auxiliou na detecção de erros nas contagens.

Os dados coletados foram organizados numa tabela por **KA**, e registrados por **JE** no resumo que foi entregue à pesquisadora.

Figura 10 – Tabela de resultados

nº de cubos	com 3	com 4	com 5
cubos. U.	27	64	125
2 faces pint.	12	24	36
3 faces pint.	8	8	8
1 face pint.	6	24	54
Nenhuma	1	8	27

Quando chegaram à fase de busca de relações nos resultados encontrados, já manifestavam cansaço e impaciência. Mesmo assim, foram realizadas observações significativas.

KA conjecturou e justificou que:

a) Não haveria cubinhos com 4, 5 ou todas as faces pintadas.

> ***Pesq***: *E com 4, 5 e 6 [faces pintadas] ? Tem algum cubinho?*
>
> ***JE***: *Acho que não, né...*
>
> ***KA***: *Não, porque só aparecem 3 faces do cubo, no máximo.*

b) Sempre seriam 8 os cubinhos com 3 faces pintadas.

> ***KA***: *Com 3 faces pintadas vai ser sempre 8 cubinhos, pois o cubo tem 8 vértices. É vértices, né? (dirigindo-se para a pesquisadora)*
>
> ***Pesq***: *Sim.*

Outras conjecturas começaram a ser formuladas, assentadas na tabela construída. Infelizmente, as alunas não tiveram disposição para analisá-la com mais atenção.

A pesquisadora ainda propôs que construíssem e realizassem as contagens num cubo 6 x 6 x 6. As alunas o construíram, mas estavam desatentas no momento das contagens. Quando perceberam que estavam errando, abandonaram a tarefa e resolveram encerrar a atividade.

4.3.3 Conclusões

A construção dos cubos com o material concreto mobilizou todo o grupo. Na contagem de quantos cubinhos haviam sido usados, uma aluna contava e as demais acompanhavam com atenção.

Na segunda etapa, a dificuldade em manipular o material tornou-se um empecilho à atividade do grupo.

Todavia, foram manifestadas observações, conjecturas e justificativas. Acredita-se que o grupo não avançou na formulação de mais conjecturas devido ao cansaço, que impediu uma observação mais atenta dos dados coletados. Além disso, não houve disposição para verificar o que aconteceria se o cubo tivesse outras arestas (2 x 2 x 2, 6 x 6 x 6, 7 x 7 x 7, etc).

As intervenções da pesquisadora ocorreram para recordar e esclarecer conceitos, para desafiar, para sugerir e para estimular as alunas a registrarem o que descobriram.

Ao propor esta tarefa, imaginou-se que a primeira e a segunda etapas seriam concluídas com rapidez, o que não aconteceu. Foi justamente a segunda etapa que entravou o andamento do trabalho, trazendo o cansaço e a desmotivação. Esperava-se que a contagem dos cubinhos seria realizada rapidamente, e que elas observariam cubos de outros tamanhos, a fim de testar suas conjecturas. Na terceira etapa, algumas conjecturas foram bem justificadas, o que surpreendeu a pesquisadora. Por isso, esta etapa poderia ter continuado numa terceira sessão. Porém, esta idéia surgiu muito depois, quando as alunas já estavam distanciadas da escola.

Capítulo 5
As alunas

5 AS ALUNAS

A seguir serão apresentados o envolvimento, as interações verbais e a manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático de cada aluna nas duas tarefas, conforme a ordem alfabética dos nomes.

Sendo assim, algumas narrativas se repetiram no decorrer do capítulo, bem como ilustrações e transcrições dos protocolos. Afinal, um mesmo episódio foi analisado por vários ângulos. Por exemplo, ora focando-se as interações verbais entre as alunas, ora a manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático. Além disso, há que se considerar também que cada aluna, à sua vez, foi protagonista na análise dos aspectos referentes às questões deste estudo.

A caracterização de cada uma foi estabelecida mediante as respostas apresentadas no primeiro questionário (anexo 1), proposto antes da realização das atividades referidas no presente estudo, e incluindo breves comentários da pesquisadora.

Como este capítulo coloca em perspectiva cada aluna em seu trabalho investigativo, a pesquisadora foi chamada de professora.

5.1 DA

Considera-se uma boa aluna em Matemática, mas julga que demora um pouco para aprender. Nas aulas de Matemática, o que mais gosta é de fazer exercícios, e o que menos gosta é de resolver problemas.

Quando está trabalhando numa tarefa, sua maior preocupação é desenvolver a resolução corretamente.

Prefere trabalhar sozinha a trabalhar em grupo, pois, sua opinião é que, às vezes, quem tem “preguiça” prefere trabalhar em grupo.

Para ela, um bom professor de Matemática é aquele que tem paciência para explicar mais de uma vez quando o aluno não entende.

Segundo a pesquisadora, é uma aluna que revelou, ao longo dos anos, uma certa timidez e insegurança. Outra característica de **DA** que chama a atenção, é que ela sempre quer sentar nas primeiras carteiras, demonstrando seu senso de dedicação e responsabilidade.

5.1.1 Primeira sessão

Envolvimento na tarefa

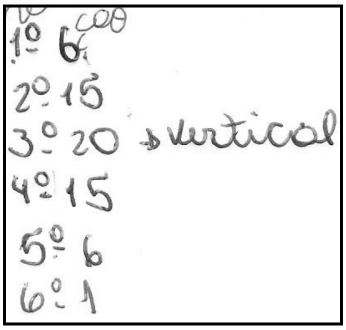
Durante toda a sessão, **DA** esteve atenta às colegas e à professora, mostrando-se interessada na tarefa.

Manifestou poucas interações verbais, e manteve-se observando o que as colegas faziam.

O primeiro registro que **DA** fez revelou a sua própria observação do Triângulo de Pascal, no início da atividade. **DA** registrou “ordem crescente”.

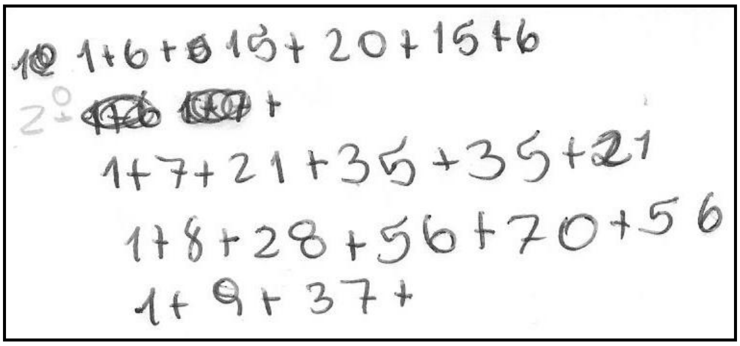
Os demais registros escritos foram realizados após a manifestação das colegas, de acordo com o que elas disseram. Por exemplo, depois de ouvir **KA** relatar que a soma das linhas verticais era igual ao das linhas diagonais, **DA** calculou e registrou a soma das colunas do Triângulo de Pascal.

Figura 11 – **DA** registra a soma das colunas



Também começou a escrever as novas linhas para o Triângulo de Pascal a partir das conjecturas de **JE**.

Figura 12 – **DA** registra o começo das novas linhas do Triângulo de Pascal



Outro fato observado por **DA** refere-se à soma das linhas do Triângulo de Pascal. Após a intervenção da professora, **DA** começou a utilizar o dobro da soma da linha. Porém, confundiu-se em seguida, não conseguindo completar seu raciocínio.

> ***Prof***: *Vocês já disseram que 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4, 4 mais 4 é 8, 8 mais 8 dá 16, 16 mais 16 dá 32. Tem uma outra forma, além dessa, de escrever...*
>
> ***KA***: *Ai, ai, ai... Eu sinto que tem alguma coisa a ver com a tabuada.*
>
> ***DA***: *2 vezes 2 dá 4, 4 vezes 2 dá 8, 4 vezes 4 dá 16, 16 vezes 16...*
>
> *(Alguns minutos de reflexão)*
>
> ***DA***: *2 vezes 2 é 4, 4 vezes 2 é 8, 4 vezes 4 é 16... sei lá!*

Mesmo assim, mostrou-se entusiasmada ao falar da sua idéia para as colegas, mantendo-se atenta até o final da atividade.

Em seu relatório, **DA** escreveu que "o trabalho em grupo foi muito interessante porque todo mundo deu sua opinião". Esta declaração forneceu indícios do envolvimento de **DA** na atividade, participando e valorizando o trabalho do grupo.

Interações verbais com as colegas

Como foi citado, **DA** manteve-se em silêncio durante grande parte da sessão, observando o que as outras alunas faziam. A primeira manifestação verbal dela, dirigindo-se às colegas, aconteceu por solicitação da professora.

***DA**: Professora, o que quer dizer "da linha anterior" ?*
***Prof**: Pergunte primeiro para suas colegas. Veja se elas entenderam.*
*(**DA** olha para **JE** e repete a pergunta)*

Freqüentemente, comunicou suas idéias a uma colega, e não ao grupo.

***DA**: (para **JE**) 1 mais 6 dá 7, 6 mais 15 dá 21...*

***DA**: (para **KA**) Vezes. 8 vezes 2 dá 16.*

Interações verbais com a professora

As interações verbais de **DA** com a professora aconteceram, principalmente, por iniciativa desta, em situações que a professora perguntou e **DA** respondeu. Por exemplo, **DA** comunicou sua observação: "os números aparecem em ordem crescente", quando a professora pediu que manifestassem o que já observaram.

As interações também ocorreram nos momentos em que **DA** solicitou a intervenção da professora. Por exemplo, a aluna solicitou uma resposta da professora, que a conduziu para que pergunte às colegas.

> ***DA**: Professora, o que quer dizer "da linha anterior" ?*
>
> ***Prof**: Pergunte primeiro para suas colegas. Veja se elas entenderam.*

Em outro momento, **DA** faz a pergunta à professora, e ela responde.

> ***DA**: Como se chama mesmo a linha assim? (sinaliza com o dedo linhas verticais no ar)*
>
> ***Prof**: Você pode chamar de coluna a linha vertical e a linha horizontal de linha mesmo. E a linha diagonal, só de diagonal.*

Manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático

DA foi a primeira a revelar para a professora o que observou no Triângulo de Pascal. Ela notou números que aparecem em ordem crescente, fazendo o registro desta observação em seus rascunhos.

Figura 13 – Triângulo de Pascal

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Porém, esta observação não foi relatada de maneira completa, pois como pode-se ver na Figura 13, o que está em ordem crescente é a seqüência dos números nas colunas, a partir da 2ª coluna.

DA não manifestou seu conhecimento sobre a nomenclatura dos lados do triângulo retângulo.

Novas manifestações do raciocínio e conhecimento matemático apareceram numa intervenção da professora, quando **DA** começou a perceber que somar o valor da soma de cada linha com ele mesmo correspondia ao dobro da soma da linha anterior. Porém, logo confundiu-se, e não conseguiu completar seu raciocínio.

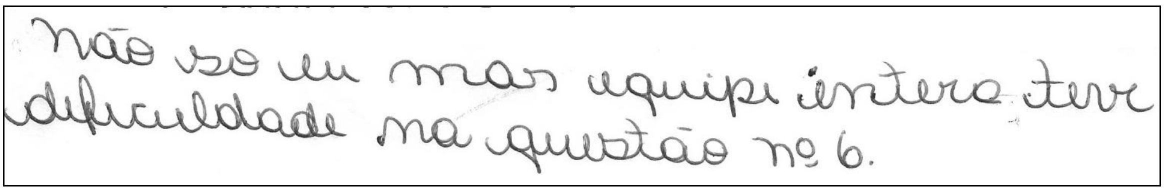
> ***Prof***: *Vocês já disseram que 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4, 4 mais 4 é 8, 8 mais 8 dá 16, 16 mais 16 dá 32. Tem uma outra forma, além dessa, de escrever...*
>
> ***KA***: *Ai, ai, ai... Eu sinto que tem alguma coisa a ver com a tabuada.*
>
> ***DA***: *2 vezes2 dá 4, 4 vezes 2 dá 8, 4 vezes 4 dá 16, 16 vezes 16...*
>
> *(Alguns minutos de reflexão)*
>
> ***DA***: *2 vezes 2 é 4, 4 vezes 2 é 8, 4 vezes 4 é 16... sei lá!*

DA também demonstrou ter sentido dificuldade em compreender como fazer a generalização, ou seja, escrever a soma de uma linha sem depender da soma da linha anterior.

> ***DA***: *(para **KA**) Vezes. 8 vezes 2 dá 16.*
>
> ***KA***: *Não... é assim, ó: a gente não vai saber esse resultado. [...]*

Este fato também ficou evidenciado no relatório individual, onde **DA** manifestou que ela e as colegas tiveram dificuldade na questão 6 (generalização).

Figura 14 – Trecho do relatório de **DA** (dificuldade na questão 6)


não so eu mas equipi intera teve dificuldade na questão nº 6.

Ainda em seu relatório, **DA** não expressou detalhes do raciocínio utilizado, apenas referiu que o grupo “teve que pensar muito”.

5.1.2 Segunda sessão

Envolvimento na tarefa

DA mostrou-se atenta durante a maior parte da sessão, mas notou-se que ficou menos interessada ao final.

Durante a execução da primeira etapa da tarefa, atuou na construção dos cubos e manifestou interesse em contar os cubinhos, juntamente com **KA**.

> *(**KA** acrescenta a nova linha de cubinhos, contando um a um junto com **DA**, para fazer a altura de 4 cubinhos)*
>
> ***KA e DA**: 50, 51, 52, 53, [...] 64.*
>
> ***KA:** 64!*
>
> ***DA:** 64?*
>
> ***KA:** (murmura um som positivo) Hum, Hum*
>
> *(**DA** registra)*

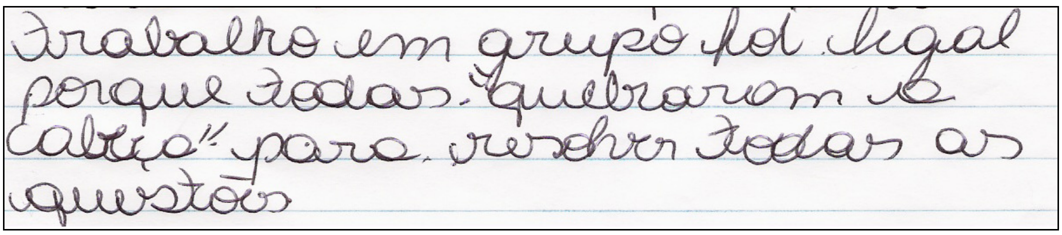
Nesta tarefa, **DA** não formulou nem testou conjecturas.

Mesmo sendo **JE** a relatora do grupo, **DA** registrou os dados que iam sendo obtidos, conforme observou-se na transcrição da seguinte parte do protocolo:

> ***KA**: (aponta a primeira coluna) 1, 2, 3, ... (aponta a 2ª coluna) 4, 5, 6... (aponta a 3ª coluna) 7, 8, 9... (e continua assim até contar 27 cubinhos)*
>
> ***KA**: Anote aí, **DA**.*

Em seu relatório, **DA** enfatizou sua impressão sobre o trabalho do grupo.

Figura 15 – Trecho do relatório de **DA** (trabalho em grupo)


Trabalho em grupo foi legal
porque todas "quebraram a
cabeça" para resolver todas as
questões

Interações verbais com as colegas

Nesta tarefa, como foi citado, **DA** participou ativamente na primeira etapa (construção dos cubos). Porém, manifestou-se verbalmente poucas vezes. A maioria das manifestações verbais de **DA** aconteceram no sentido de confirmar o que deveria ser registrado.

> ***KA**: Com 4, com 5 e com 6 não tem nenhuma.*
> ***DA**: Nenhuma?*

E também, no início da atividade, para contar os cubinhos que eram utilizados na construção:

> *(**KA** vai acrescentando cubinhos na lateral do cubo já existente e **DA** vai somando-os ao anterior)*
> ***DA**: 65, 66, 67, [...], 85...*

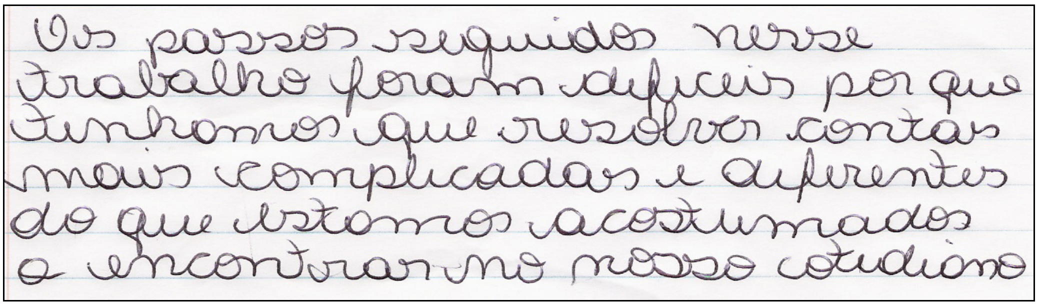
Interações verbais com a professora

Nesta atividade, **DA** não dirigiu-se à professora.

Manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático

Suas manifestações verbais e seus registros escritos não foram suficientes para detectar seu raciocínio ou conhecimento matemático. **DA** manteve-se em silêncio durante quase toda a atividade, e consta em seus registros apenas o que suas colegas diziam.

Figura 16 – Trecho do relatório de **DA** (falta de habilidade neste tipo de atividade)


Os passos seguidos nesse
trabalho foram dificeis porque
tinhamos que resolver contas
mais complicadas e diferentes
do que estamos acostumados
a encontrar no nosso cotidiano

Como vê-se na Figura 16, em seu relatório, **DA** manifesta ter sentido dificuldades na atividade devido às *"*contas mais complicadas e diferentes". Acredita-se que estas palavras de **DA** retrataram a falta de habilidade neste tipo de atividade.

5.2 KA

Considera-se uma boa aluna em Matemática, pois apresenta boas notas. Nas aulas de Matemática, o que mais gosta é quando a professora explica, e o que menos gosta é de resolver problemas.

Quando está trabalhando numa tarefa, sua maior preocupação é desenvolver a resolução corretamente.

Prefere trabalhar sozinha a trabalhar em grupo, pois julga ser melhor para a concentração.

Para ela, um bom professor de Matemática é aquele que tenta explicar a matéria de maneira clara e objetiva.

Para a pesquisadora, ela revela ser uma aluna que procura, constantemente, melhorar o seu desempenho.

5.2.1 Primeira sessão

Envolvimento na tarefa

KA manifestou total envolvimento na tarefa. Ofereceu-se para ser a relatora, e desta forma, exerceu uma certa liderança no trabalho do grupo.

Esteve sempre atenta às intervenções da professora, tomando a iniciativa e respondendo a maioria das questões colocadas (pela professora) ao grupo.

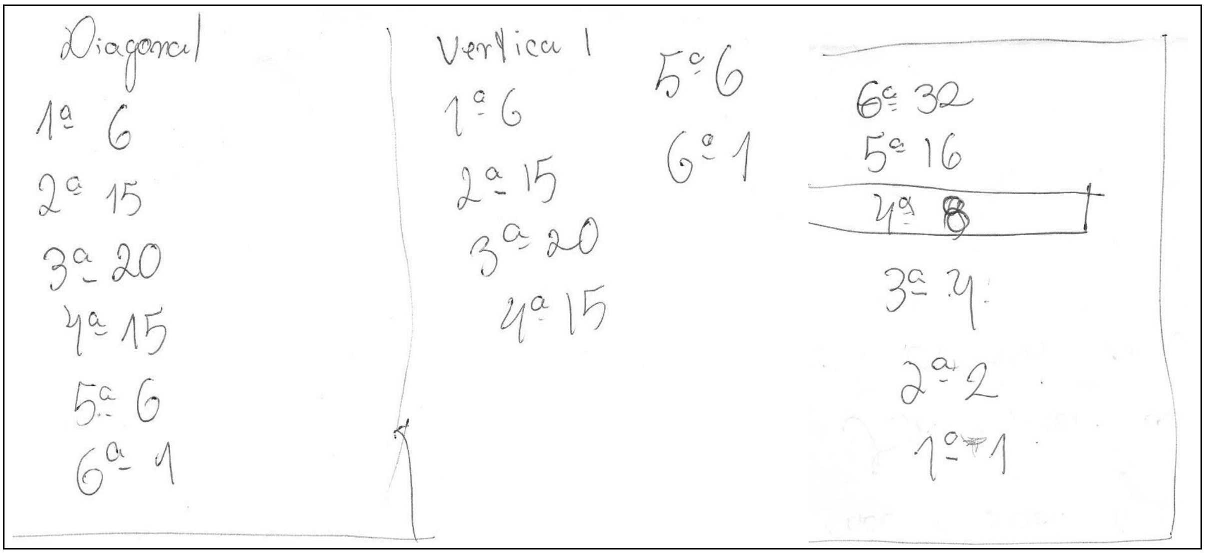
> ***Prof**: Que números vocês somam para descobrir? Como vocês começam a escrever uma nova linha?*
>
> ***KA**: Pelo número 1.*
>
> ***Prof**: Muito bem. E depois?*

Como relatora, **KA** preocupou-se muito com a formalização das respostas.

> ***KA**: Então, o que a gente coloca na primeira? Somando os números da linha anterior...*

KA também registrou, em seu rascunho, as somas feitas por ela, a partir dos números nas linhas horizontais, verticais e diagonais do Triângulo de Pascal.

Figura 17 – Parte dos registros escritos de **KA** (somas das linhas)



Em grande parte da formulação e dos testes de suas conjecturas, trabalhou individualmente, comunicando posteriormente a uma colega do grupo.

KA percebeu que no Triângulo de Pascal aparecem valores repetidos, e demonstrou ter compreendido como deveria ser a generalização.

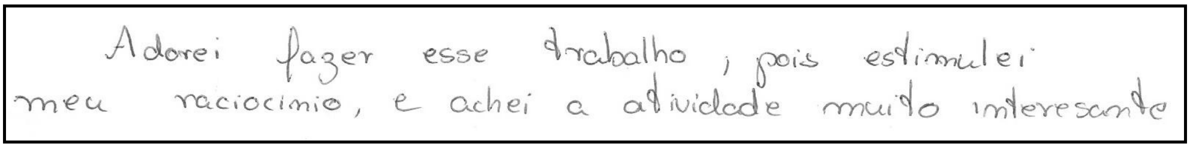
Finalmente, é **KA** quem toma a iniciativa de encerrar a atividade.

***KA**: Ah! Eu quero desistir...*

> ***KA**: Eu já tentei tudo o que imaginei...*
>
> ***Prof**: O que importa é fazer as tentativas. Você já tentou tudo o que imaginava?*
>
> ***KA**: Hum-hum... O que vocês acham...*

Em seu relatório individual, **KA** escreveu que este trabalho estimulou seu raciocínio, e que achou a atividade interessante.

Figura 18 – Trecho do relatório individual de **KA** (opinião sobre a tarefa)



Adorei fazer esse trabalho, pois estimulei
meu raciocinio, e achei a atividade muito interesante

Interações verbais com as colegas

A primeira interação verbal de **KA** com suas colegas acontece por solicitação da professora.

> ***KA**: Hum-hum (rindo) Eu também percebi que tanto na diagonal quanto na vertical a soma das linhas dá o mesmo valor. (Fala olhando para a professora)*
>
> ***Prof:** Então mostre o que você fez para suas colegas.*
>
> *(**KA** levanta a folha e apontando com a caneta, repete sua conclusão)*

Outro episódio de interação com o grupo aconteceu quando **KA** percebeu que há números repetidos nas linhas do Triângulo de Pascal.

> ***KA**: Toda linha repete uma vez um número!*
>
> *(**KA** mostra para as colegas, circulando os números que repetem)*

KA exerceu uma certa liderança no grupo, participando de grande parte dos diálogos, e controlando a seqüência do trabalho (talvez, como foi referido, por ser a relatora). Na maioria destas interações verbais, **KA** dirigiu-se a **JE**. Foram situações em que **KA**:

a) completou o raciocínio de **JE**:

> **JE:** *(escreve uma nova linha às já existentes) Então, fazendo aqui vai dar 1, 1 mais 5 dá 6, dá 15, 20, 15, 6.*
>
> **KA**: *E o 1!*
>
> ***KA**: Na horizontal vai aumentando...*
>
> ***JE**: De dois em dois.*
>
> ***KA**: Não...*
>
> ***JE**: Tipo: 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4...*
>
> *(Riem)*
>
> ***KA**: Somando o número com ele mesmo.*

b) formulou uma frase olhando para **JE**, esperando que ela auxilie ou valide sua construção:

> ***KA**: (dirigindo-se a **JE**) Somando os valores da linha anterior vai resultar em um determinado valor que vai ser equivalente à soma das linhas na diagonal e na vertical.*
>
> *(**KA** começa a registrar, mas fica em dúvida quanto à redação)*
>
> ***JE**: Somando seus números... somando um número com ele mesmo vai dar o próximo número.*
>
> *(**KA** faz o registro)*

c) testou conjectura formulada por **JE**:

> ***KA**: (dirigindo-se a **JE**) Somando os valores da linha anterior vai resultar em um determinado valor que vai ser equivalente à soma das linhas na diagonal e na vertical.*
>
> *(**JE** sorri, pega a folha de KA para ler)*
>
> ***KA**: Isso que eu queria ver... tipo... primeiro coloca esse 1 aqui na frente. Daí vai dar o 7, daí o 15, 15 com 6, 21.*
>
> *(**DA** e **JE** começam a fazer alguns cálculos na calculadora. JE circula as novas linhas que acabou de escrever)*

Em seu relatório, **KA** deixou claro que, para ela, o trabalho foi individual num primeiro momento, e que as interações aconteceram na exposição das idéias.

Figura 19 – Trecho do relatório individual de **KA** (trabalho do grupo)

> Em 1ª lugar cada uma observa individualmente os exercícios, depois cada uma foi espondo os pontos, que foi descobrindo e nós fomos resolvendo os exercícios juntas.

Interações verbais com a professora

No início da tarefa, **KA** solicitou que a professora validasse o que ela descobriu.

> ***KA**: Hum-hum (rindo) Eu também percebi que tanto na diagonal quanto na vertical a soma das linhas dá o mesmo valor. (Fala olhando para a professora)*
>
> ***Prof** : Então mostre o que você fez para suas colegas.*

A aluna também solicitou a intervenção da professora para esclarecer a tarefa escrita, como vê-se na transcrição de parte do protocolo, a seguir.

***KA**: Professora, a [questão] número 1 não é a mesma coisa que a [questão] número 3?*

Durante toda a atividade, as interações verbais de **KA** com a professora foram, em sua maioria, para responder às perguntas feitas pela professora nas intervenções, conforme as transcrições abaixo.

***Prof**: E os matemáticos, será que os matemáticos também fazem investigações?*

***JE**: Fazem!*

***KA**: Para descobrir as fórmulas.*

***Prof**: Que números vocês somam para descobrir? Como vocês começam a escrever uma nova linha?*

***KA**: Pelo número 1.*

***Prof**: Coloquem os resultados que vocês encontraram: na primeira linha, quanto dá o resultado, a soma da primeira linha?*

***KA**: Na primeira linha, na diagonal e na vertical dá 6 e na horizontal dá 1.*

Manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático

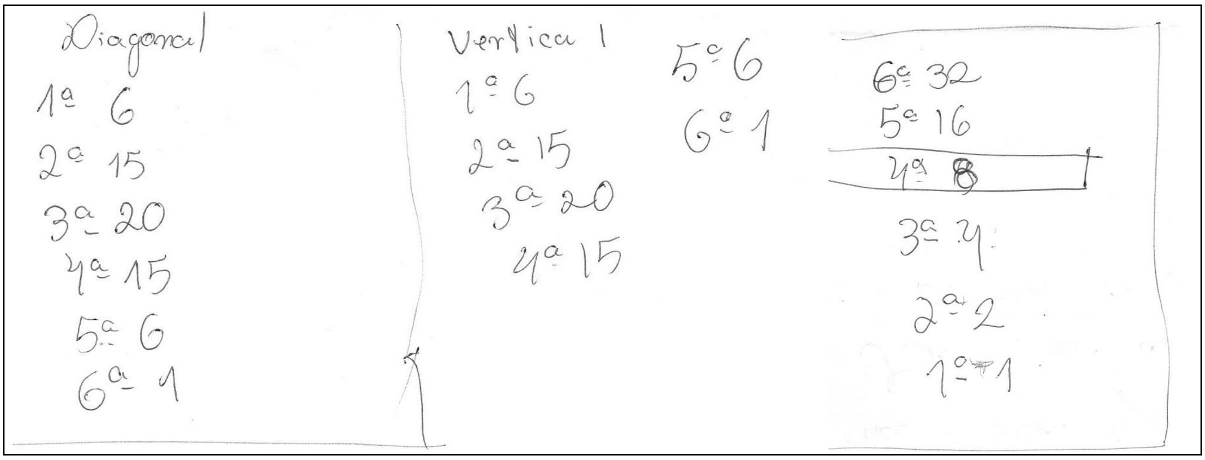
Nesta tarefa, **KA** interpretou a palavra "linha" como uma reta, e utilizou este conhecimento para calcular a soma dos números das linhas horizontais, verticais e inclinadas (chamadas pela aluna de diagonais) do Triângulo de Pascal.

***KA**: Hum-hum (rindo) Eu também percebi que tanto na diagonal quanto na vertical a soma das linhas dá o mesmo valor. (Fala olhando para a pesquisadora)*

***KA**: Na horizontal não dá sempre o mesmo valor que nem na vertical e na diagonal.*

Estas somas apareceram nos registros escritos de **KA**, como vê-se na Figura 20, a seguir.

Figura 20 – Parte dos registros escritos de **KA** (somas das linhas)



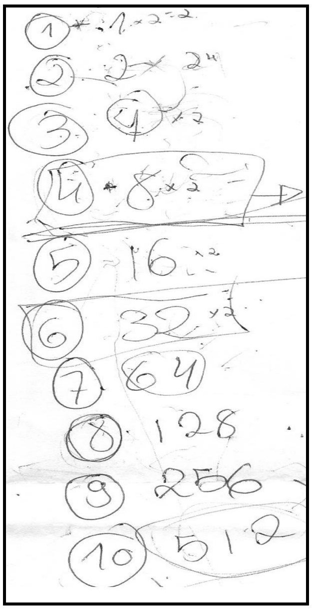
Num próximo momento, depois de registrar as quatro novas linhas calculadas por **JE**, **KA** percebeu que havia números que repetiam em cada uma destas linhas.

__KA__: Toda linha repete uma vez um número!

(__KA__ mostra para as colegas, circulando os números que repetem)

Outro registro feito por **KA** refere-se à seqüência das somas das linhas do Triângulo de Pascal, após uma intervenção da professora (para que atentassem para a soma das linhas horizontais).

Figura 21 – Parte dos registros escritos de **KA** (soma das linhas horizontais)



Observando esta seqüência, **JE** anunciou que os números aumentavam de dois em dois. **KA** corrigiu-a.

***KA**: Na horizontal vai aumentando...*
***JE**: De dois em dois.*
***KA**: Não...*
***JE**: Tipo: 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4...*
(Riem)
***KA**: Somando o número com ele mesmo.*

Neste caso, percebeu-se que **KA** notou o engano de **JE**. Por outro lado, não pensou no dobro do número, utilizando a soma de um número com ele mesmo. Esta idéia a acompanhou durante grande parte da atividade, conforme vê-se em sua fala transcrita a seguir.

> ***KA**: "É possível prever a soma dos números da 20ª linha se você souber a soma dos números da linha 19? Como?" Sim. É o que acontece aqui: se você tiver a soma da linha 19, você soma o resultado com ele mesmo e vai dar a soma da linha 20.*

Ainda neste sentido, após a intervenção da professora, ela utilizou a multiplicação, mas não conseguiu perceber como utilizar este conhecimento para generalizar.

> ***KA**: 4 vezes 2 é 8, 8 vezes 2 é 16, 16 vezes 2 é 32, 32 vezes 2 é 64... Mas a questão não é essa. A questão é a gente saber a soma de qualquer linha só pelo número da linha. Por que a gente não vai saber o resultado, por exemplo, da linha 9, qual é a soma dos números, entendeu?*

Apesar disto, **KA** demonstrou ter entendido como deveria ser a generalização. Observa-se esta situação na transcrição dos seguintes trechos do protocolo:

> ***KA**: Não... é assim, ó: a gente não vai saber esse resultado. A professora, por exemplo, ela vai dar a linha 8, para a gente saber a soma. A gente vai ter que saber uma maneira que, por exemplo, a linha 8 somada, ou diminuída, multiplicando, dividindo, ou raiz quadrada, dê com a linha 8, dê o resultado.*

***JE**: Pelo número da linha você não tem que descobrir os números?*
***KA**: Não, pelo número da linha você tem que descobrir a soma.*
***JE**: Mas para saber a soma não é só fazer...*
***KA**: Mas sem esses números!*

Em seu relatório individual, **KA** não manifestou o conhecimento matemático, nem o raciocínio utilizado durante a atividade.

5.2.2 Segunda sessão

Envolvimento na tarefa

KA demonstrou entusiasmo desde o início da atividade, com disposição para construir os cubos e contar os cubinhos com faces pintadas.

A aluna exerceu um papel de liderança no grupo, que pôde ser constatada em passagens como:

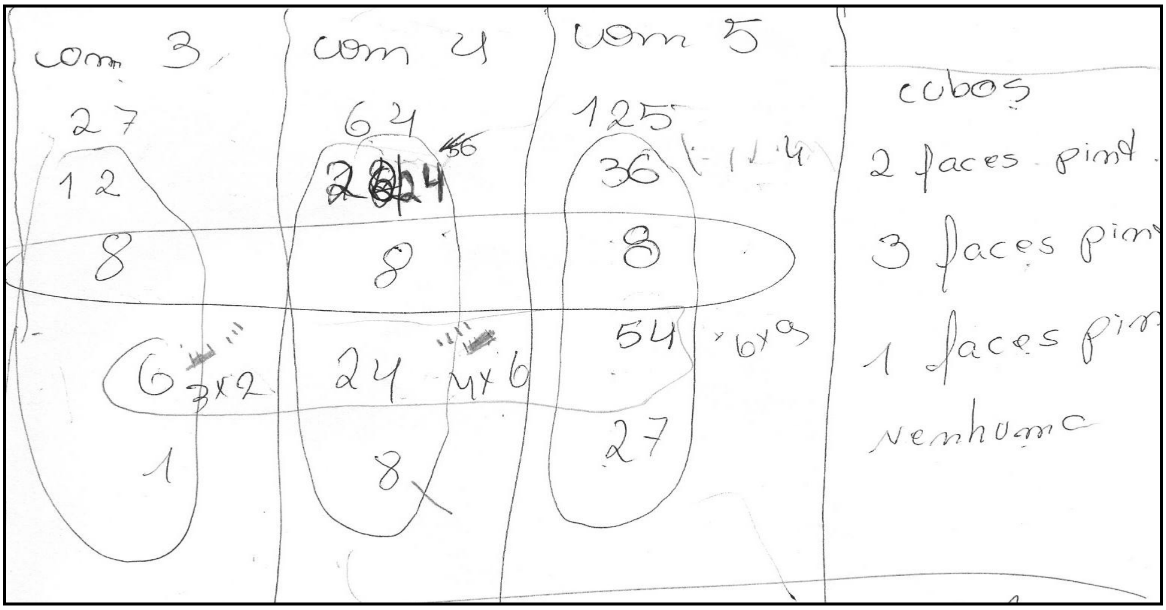
***KA**: (aponta a primeira coluna) 1, 2, 3, ... (aponta a 2ª coluna) 4, 5, 6... (aponta a 3ª coluna) 7, 8, 9... (e continua assim até contar 27 cubinhos)*
***KA**: Anote aí, **DA**.*

KA também iniciou a organização de uma tabela, na qual registrou os dados obtidos nas contagens, conforme vê-se na Figura 22.

Manifestou verbalmente seu raciocínio durante as construções e formulou conjecturas no final da atividade, quando buscou relações na tabela construída.

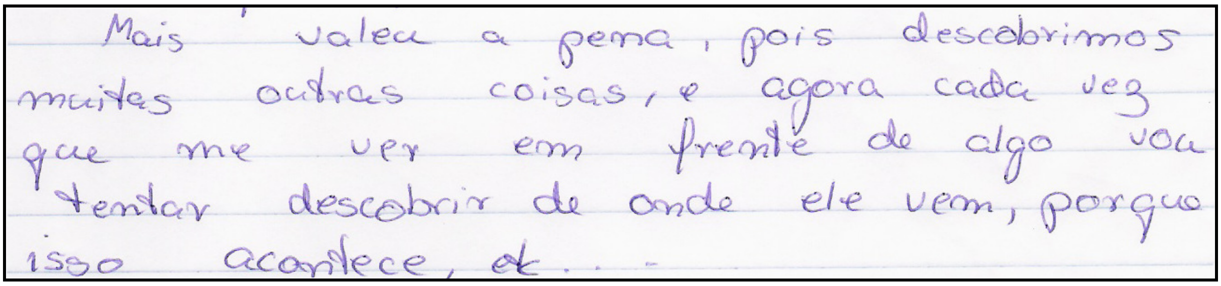
Sua persistência ficou evidenciada com frases como: “Vamos fazer tudo de novo!” em diversos momentos da atividade.

Figura 22 – Tabela registrada por **KA**



Em seu relatório, **KA** deixou indícios de que a tarefa estimulou seu espírito investigativo.

Figura 23 – Trecho do relatório de **KA** (tarefa estimulante)


Mais valeu a pena, pois descobrimos muitas outras coisas, e agora cada vez que me ver em frente de algo vou tentar descobrir de onde ele vem, porque isso acontece, etc...

Interações verbais com as colegas

Durante a atividade, **KA** falou para si mesma, de forma a organizar seu pensamento. Suas interações verbais com as colegas serviram, muitas vezes, para confirmar suas contagens. Este fato pode ser observado nas transcrições a seguir, retiradas do protocolo.

*(**KA**, antes de começar a nova linha de cubinhos, confirma)*

***KA**: Quantos mesmo? 49?*

***JE**: (murmura um som positivo) Hum, Hum.*

***JE**: Ué! Você esqueceu de contar com 1 face, ou você contou os de baixo?*

***KA**: Não sei... então [es]pera aí...*

Suas interações verbais com as colegas serviram também para comandar a atividade.

***KA**: (aponta a primeira coluna) 1, 2, 3, ... (aponta a 2ª coluna) 4, 5, 6... (aponta a 3ª coluna) 7, 8, 9... (e continua assim até contar 27 cubinhos)*

***KA**: Anote aí, **DA**.*

Após **KA** ter derrubado o cubo de aresta 5, **JE** procurou descobrir a quantidade de cubinhos através de um desenho, chegando a um total de 100 cubinhos. **KA**, para conferir, construiu a base com o material concreto e calculou a quantidade de cubinhos que seriam necessários para construir este cubo: 125 cubinhos.

***KA**: Vou fazer a base aqui (com material concreto) e aí a gente já vê.*

*(**JE** faz um cálculo na calculadora, mas não comunica. **KA** termina a base do cubo 5 x 5 x 5 e conta os cubinhos um a um, silenciosamente)*

***KA**: Tem 25 aqui.*

***JE**: 25?*

***KA**: É.*

***KA**: 25 vezes... vezes 5, né? (faz na calculadora) 125.*

Na segunda etapa da tarefa, **KA** conta sozinha a quantidade de cubinhos com faces pintadas (1 face, 2 faces, 3 faces e nenhuma face) e segue comunicando suas descobertas às colegas.

> ***KA**: Tem que ver quantos cubinhos vao ficar com 1 única face pintada (mostra com a caneta os cubinhos que contou). Marque, **DA**, 6 com 1 face. Agora com duas.*
>
> *(**DA** registra e **JE** olha. **KA** conta os cubinhos, um a um)*
>
> ***KA**: 1, 2, 3, 4, 5, [...] 12. 12!*
>
> *(**DA** registra)*

Na última etapa da tarefa, as alunas deveriam procurar relações na tabela construída a partir das contagens. **KA** começou a formular conjecturas, observada por **JE** e **DA**.

> ***KA**: 12, 24 e 36 tem na tabuada do 4, né? Então, o próximo número, no de 6 arestas, poderia ser... 12 é 3, 6, 9, 4 vezes 12... Então o próximo, com 6 arestas, teria 48 cubinhos com duas faces. Anote aí, **JE**.*
>
> ***JE**: Vai, fala.*
>
> ***KA**: Deixa eu pensar. O número de cubos de 2 faces pintadas vai ser sempre na tabuada do 4, contando de 3 em 3. Por exemplo, 3, 9, 12...*
>
> *(**JE** registra)*
>
> ***KA**: Com 3 faces pintadas vai ser sempre 8 cubinhos, pois o cubo tem 8 vértices. É vértices, né? (dirigindo-se para a pesquisadora)*
>
> ***Prof**: Sim.*
>
> ***KA**: Agora vamos ver: 6, 24 e 54. Com 1 face pintada sempre tem na tabuada do 6. 6 vezes 1 é 6, 6 vezes 4 é 24, 6 vezes...*
>
> ***JE**: 9.*
>
> ***KA**: Muito bem! 6, 4, 9*
>
> ***JE**: Hã? 1, 4 e 9.*
>
> ***KA**: É, 1, 4 e 9.*

Interações verbais com a professora

Foram poucas as interações verbais entre **KA** e a professora nesta tarefa. Observou-se que **KA** interagiu verbalmente com a professora em dois tipos de situações: solicitando auxílio e respondendo a questões colocadas pela professora.

a) **KA** solicitou auxílio da professora na utilização correta dos termos:

> ***KA**: (apontando para uma aresta do cubo) Aqui são os vértices... (olha para a professora) É vértices?*
>
> ***Prof**: Arestas.*

b) **KA** respondeu o que a professora perguntou nas intervenções:

> ***Prof**: Quero fazer uma perguntinha... Quantas faces tem um cubo?*
>
> ***KA**: 4!*
>
> ***JE**: 6!*
>
> ***KA**: É, tem 6.*

Ainda nesta situação, também enquadra-se o momento em que a professora solicitou, na segunda etapa da tarefa, que contassem quantos cubinhos teriam 4, 5 e 6 faces pintadas. **KA** afirmou que não havia nenhum cubinho com esse número de faces pintadas.

Manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático

Um momento em que **KA** manifestou seu raciocínio nesta tarefa foi quando ela determinou, sem efetuar a construção completa, que seriam necessários 125 cubinhos para construir o cubo de aresta 5. Ela fez isso construindo a base e multiplicando este valor por 5.

> ***KA**: Vou fazer a base aqui (com material concreto) e aí a gente já vê.*
>
> *[...]*
>
> ***KA**: Tem 25 aqui.*
>
> ***JE**: 25?*
>
> ***KA**: É.*
>
> ***KA**: 25 vezes... vezes 5, né? (faz na calculadora) 125.*

Demonstrou também ter compreendido como os cubinhos com faces pintadas deveriam ser contados.

> ***KA***: *Tem que ver quantos cubinhos vao ficar com 1 única face pintada (mostra com a caneta os cubinhos que contou). Marque,* ***DA****, 6 com 1 face.*

Na segunda etapa da tarefa, a professora realizou uma intervenção solicitando que o grupo contasse também quantos cubinhos ficariam com 4, com 5 e com 6 faces pintadas. **KA** justificou por que nenhum cubinho encontraria-se nesta situação.

> ***Prof***: *E com 4, 5 e 6 [faces pintadas] ? Tem algum cubinho?*
> ***JE***: *Acho que não, né...*
> ***KA***: *Não, porque só aparecem 3 faces do cubo, no máximo.*

KA também observou que os cubinhos "dos cantos" sempre têm 3 faces pintadas. Outra demonstração de seu raciocínio apareceu quando a aluna procurou conferir se a soma das quantidades de cubinhos correspondia ao total de cubinhos da construção. Devido a esta iniciativa, **KA** conseguiu detectar que algumas contagens precisavam ser refeitas.

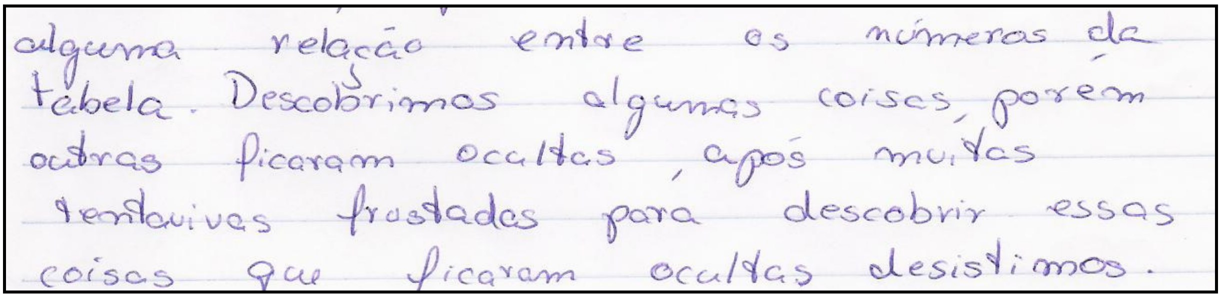
Outra iniciativa de **KA** foi a de registrar, em seu rascunho, os valores encontrados nas contagens na forma de uma tabela, já apresentada na Figura 22.

Na última etapa da tarefa, **KA** encontrou algumas relações na tabela construída, formulou conjecturas e justificou-as. **KA** disse que:

- A quantia de cubinhos com 3 faces pintadas são sempre 8, pois o cubo possui 8 vértices, independentemente de seu tamanho.
- O número de cubos de 2 faces pintadas vai ser sempre na tabuada do 4, contando de 3 em 3. Por exemplo, 3, 9, 12...
- Com 1 face pintada sempre tem na tabuada do 6.

Em seu relatório, **KA** revelou que havia outras relações que não foram exploradas.

Figura 24 – Trecho do relatório de **KA** (outras relações)



alguma relação entre os números da tabela. Descobrimos algumas coisas, porém outras ficaram ocultas, após muitas tentativas frustadas para descobrir essas coisas que ficaram ocultas desistimos.

5.3 JE

Na disciplina de Matemática, considera-se uma aluna média, pois não se considera muito boa em resolver problemas. Nas aulas de Matemática, o que mais gosta é de fazer exercícios, e o que menos gosta é de resolver problemas.

Quando está trabalhando numa tarefa, sua maior preocupação é desenvolver a resolução corretamente.

Prefere trabalhar sozinha a trabalhar em grupo, pois deste modo concentra-se mais.

Para ela, um bom professor de Matemática é aquele que tem bastante paciência e sabe explicar.

Segundo a pesquisadora, mostra-se uma aluna que raramente expressa suas idéias durante as aulas.

5.3.1 Primeira sessão

Envolvimento na tarefa

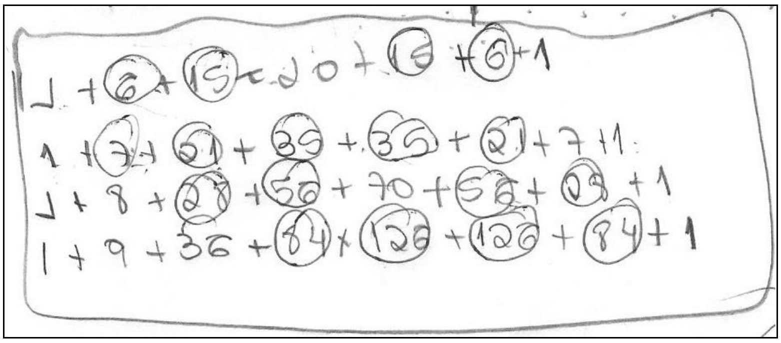
JE participou ativamente da tarefa, manifestando interesse em investigar. Um indício deste interesse apareceu após uma intervenção da professora (para que testassem uma conjectura nas outras linhas). Mesmo **KA** já tendo feito o teste em mais duas linhas, **JE** testou na próxima.

Pela sua observação, **JE** percebeu como se formam as linhas do Triângulo de Pascal a partir dos números da linha anterior, e explicou como fez.

> ***JE:*** *Então, olha o que eu fiz. [...].*
>
> *(**KA** procura algo em seus registros)*
>
> ***JE:*** *(explicando para **DA**) Você vai fazendo assim: esse 1 mais 7 vai dar 8, 21 mais 35 (faz na calculadora)...*

Ela também registrou, em seu rascunho, mais quatro linhas deste Triângulo.

Figura 25 – Registro de **JE** (novas linhas do Triângulo de Pascal)



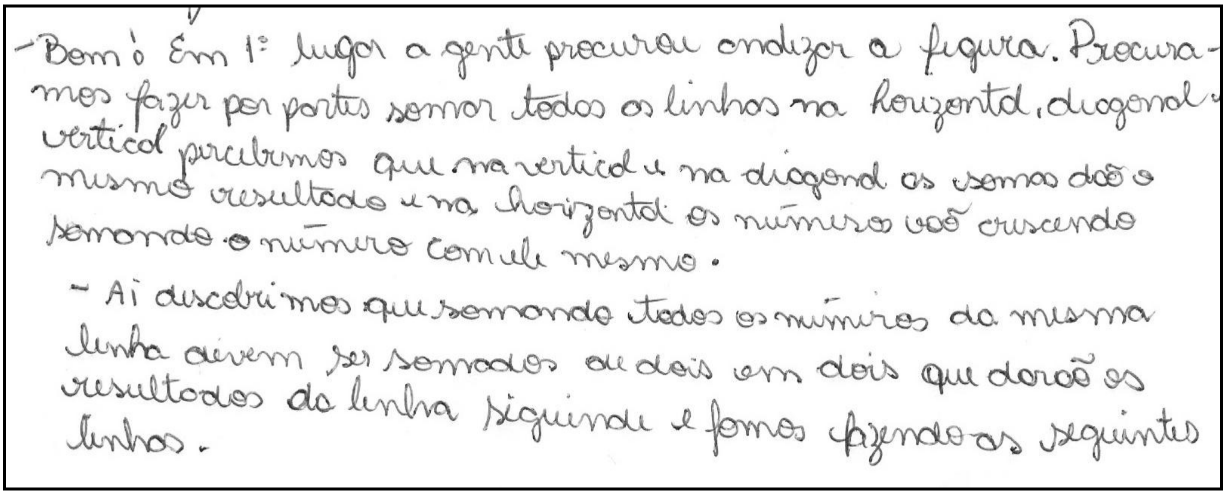
Uma observação: na figura acima, os números foram circulados por **KA**.

Após a intervenção da professora, para que prestassem atenção à soma das linhas, **JE** percebeu que cada nova linha correspondia à anterior somada com ela mesma.

Demonstrou não ter compreendido a tarefa de generalizar a soma de cada linha, sem depender dos valores da linha anterior. Ao final da tarefa, demonstrou cansaço.

Seu relatório individual apresentou dados sobre o raciocínio do grupo na atividade, o que forneceu mais indícios de seu envolvimento nesta tarefa.

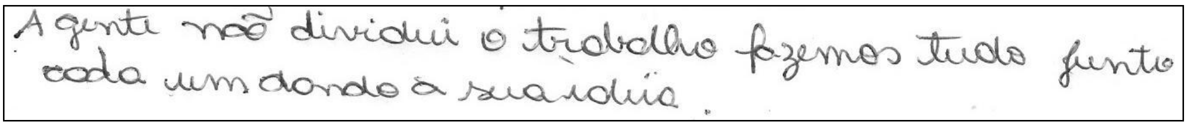
Figura 26 – Trecho do relatório individual de **JE** (envolvimento)



- Bom ò Em 1º lugar a gente procurou analizar a figura. Procuramos fazer por partes somar todos os linhas na horizontal, diagonal e vertical percebemos que na vertical e na diagonal os somas dão o mesmo resultado e na horizontal os números vão crescendo somando o número com ele mesmo.
- Aí descobrimos que somando todos os números da mesma linha devem ser somados de dois em dois que darão os resultados da linha seguinte e fomos fazendo as seguintes linhas.

Ainda em seu relatório, **JE** expressou sua opinião a respeito do trabalho deste grupo, dizendo que não dividiram o trabalho, fizeram "tudo junto, cada um dando a sua idéia".

Figura 27 – Trecho do relatório individual de **JE** (trabalho do grupo)



A gente não dividiu o trabalho fizemos tudo junto cada um dando a sua idéia.

Interações verbais com as colegas

As interações verbais de **JE** apresentaram-se, em grande parte, dirigidas a uma colega. Por exemplo, por solicitação da professora, **DA** perguntou a **JE** o que significa a expressão "linha anterior".

> ***JE**: Acho que eu entendi. A linha anterior é... tipo: a linha anterior desta é esta, desta é esta (fala apontando para as linhas no Triângulo de Pascal). Acho que é isto.*

Raciocinou com **KA** sobre a soma dos números das linhas, e também construiu com ela a justificativa, conforme observa-se na transcrição da seguinte parte do protocolo:

> ***JE**: De dois em dois.*
>
> ***KA**: Não...*
>
> ***JE**: Tipo: 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4...*
>
> *(Riem)*
>
> ***KA**: Somando o número com ele mesmo.*
>
> ***JE**: É. Vai dar o número... (sinaliza com as mãos um gesto de seqüência, querendo dizer o próximo)*
>
> *(**KA** começa a registrar, mas fica em dúvida quanto à redação)*
>
> ***JE**: Somando seus números... somando um número com ele mesmo vai dar o próximo número.*

JE demonstrou não ter compreendido a tarefa de generalizar a soma das linhas. Percebeu-se que, para ela, era necessário escrever a linha, para depois somar seus valores.

> ***JE**: [...] como você vai saber que somando esta linha vai dar o valor desta? Então você soma aqui, vai dar um valor. Então você terá que adivinhar quais são os valores da próxima linha.*
>
> ***KA**: Não, esse valor aqui (aponta para uma das somas) somado com ele mesmo vai dar esse daqui (aponta para a soma seguinte)*
>
> ***JE**: Da próxima linha... Então vai dar para adivinhar os valores dessa... (aponta para os números da linha)*

Alguns minutos depois, **JE** insiste com **KA** no que havia entendido:

> ***JE**: Pelo número da linha você não tem que descobrir os números?*
>
> ***KA**: Não, pelo número da linha você tem que descobrir a soma.*
>
> ***JE**: Mas para saber a soma não é só fazer...*
>
> ***KA**: Mas sem esses números!*

Um momento em que **JE** dirigiu-se ao grupo foi quando ela comunicou que existem, em cada linha, valores correspondentes à soma de dois números da linha anterior.

> ***JE**: (fala para as colegas, que prestam atenção) Não sei se tem alguma coisa a ver, mas olha aqui. [...] Nestas linhas aqui, se você colocar mais (+) vai dar o resultado de baixo. Tipo: (pega um lápis para assinalar) aqui eu coloco mais (+) dá 2, [...] 3 mais 3 vai dar 6, 3 mais 1 vai dar 4. Daí 1 mais 4 vai dar 5, esse 4 mais 6 vai dar 10, esse 6 mais 4 vai dar 10, esse 4 mais 1 vai dar 5.*

Em seguida, explica à **DA** como procedeu.

> ***JE**: (explicando para **DA**) Você vai fazendo assim: esse 1 mais 7 vai dar 8, 21 mais 35 (faz na calculadora)...*

Interações verbais com a professora

As interações de **JE** com a professora aconteceram sempre por iniciativa desta. Ou seja, **JE** dirigiu-se à professora nos momentos em que aconteceram intervenções.

> ***Prof**: Daquela pergunta da **DA**, linha anterior... o que vocês entendem por linha?*
>
> ***JE**: Uma reta, eu acho.*

Outro episódio que ilustra este fato aconteceu quando a professora solicitou que formulassem melhor a explicação de como se escrevem as linhas do Triângulo de Pascal, a partir dos números da linha anterior, como vê-se na transcrição a seguir.

***Prof**: Que números vocês somam para descobrir? Como vocês começam a escrever uma nova linha?*

***KA**: Pelo número 1.*

***Prof**: Muito bem. E depois?*

***JE**: Repete o 1, soma 1 mais 5, daria 6, 5 mais 10, que daria 15, 10 mais 10 que daria 20, 10 mais 5 que daria 15, 5 mais 1 que daria 6 e repetiria o 1.*

Manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático

Logo no início da atividade, **JE** revelou que, para ela, a palavra "linha" utilizada na tarefa escrita, representava uma reta que poderia ser horizontal ou vertical. Porém, não utilizou uma nomenclatura adequada, apenas sinalizou com as mãos.

***JE**: Todos começam com 1.*

***Prof**: Todos o quê? Todas as linhas?*

***JE**: Todas as linhas.*

***Prof**: E só as linhas começam com 1?*

***JE**: As linhas assim (faz um movimento com a caneta, sinalizando linhas horizontais) e as linhas assim (faz o mesmo tipo de movimento, sinalizando linhas verticais).*

Este último recorte do protocolo revela ainda que **JE** percebeu que todas as linhas (e colunas) começam com o número 1, no Triângulo de Pascal.

Num próximo momento, a professora associou a figura do Triângulo de Pascal com um triângulo retângulo. **JE** respondeu corretamente que, neste caso, o lado maior chama-se hipotenusa. Porém, o outro lado seria cateto, e não cateto oposto, como ela afirmou.

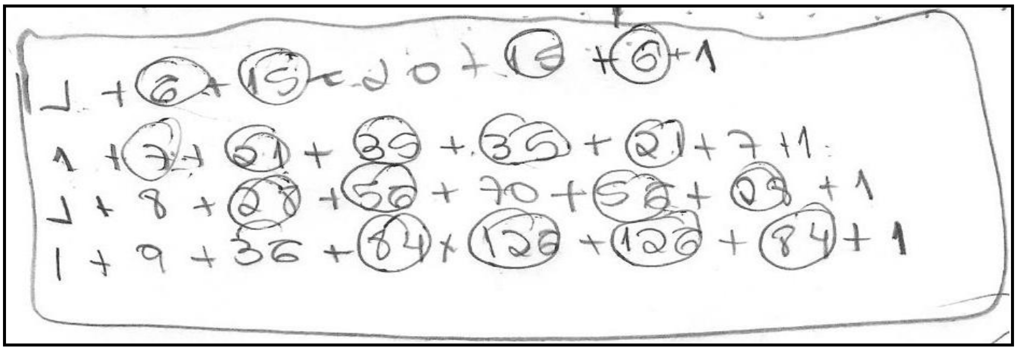
***KA** e **JE**: Hipotenusa e...*

***JE**: Cateto oposto.*

Uma conjectura formulada por **JE** relacionou o modo como se formam as linhas do Triângulo de Pascal.

> ***JE**: (fala para as colegas, que prestam atenção) Não sei se tem alguma coisa a ver, mas olha aqui. [...] Nestas linhas aqui, se você colocar mais (+) vai dar o resultado de baixo. Tipo: (pega um lápis para assinalar) aqui eu coloco mais (+) dá 2, aqui coloco mais dá 3, esse aqui eu somo esse mais 3 vai dar 4, 3 mais 3 vai dar 6, 3 mais 1 vai dar 4. Daí 1 mais 4 vai dar 5, esse 4 mais 6 vai dar 10, esse 6 mais 4 vai dar 10, esse 4 mais 1 vai dar 5.*

Figura 28 – Registro de **JE** (novas linhas do Triângulo de Pascal)



Nesta figura, os números foram circulados por **KA.**

Observa-se que na última e na penúltima linhas escritas, **JE** deixou de escrever um número em cada linha. Na terceira linha, após o número 28, há o número 8, e depois o 1. O mesmo acontece na quarta linha: após o número 84, há o 29, e depois o 1.

Logo adiante, **JE** explicou para **DA** o processo utilizado:

> ***JE**: (explicando para **DA**) Você vai fazendo assim: esse 1 mais 7 vai dar 8, 21 mais 35 (faz na calculadora)...*

A aluna manifestou seu raciocínio num diálogo com **KA** sobre a soma dos números das linhas, como vê-se na transcrição a seguir.

> ***JE**: De dois em dois.*
>
> ***KA**: Não...*
>
> ***JE**: Tipo: 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4...*
>
> *(Riem)*

> ***KA**: Somando o número com ele mesmo.*
>
> ***JE**: É. Vai dar o número... (sinaliza com as mãos um gesto de seqüência, querendo dizer o próximo)*
>
> *(**KA** começa a registrar, mas fica em dúvida quanto à redação)*
>
> ***JE**: Somando seus números... somando um número com ele mesmo vai dar o próximo número.*

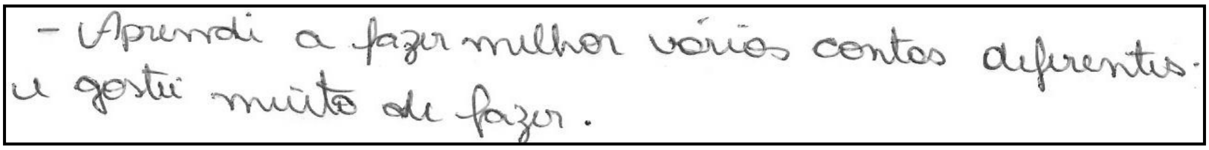
Em sua fala, **JE** expressou "De dois em dois", e depois corrigiu-se. Percebeu-se neste momento falhas na comunicação matemática.

No final da tarefa, **JE** demonstrou não ter compreendido a tarefa de generalizar a soma das linhas. Para ela, era necessário escrever a linha, para depois somar seus valores.

> ***JE**: Tipo assim: como você vai saber que somando esta linha vai dar o valor desta? [...] você soma aqui, vai dar um valor. Então você terá que adivinhar quais são os valores da próxima linha.*

Em seu relatório individual, **JE** coloca que aprendeu a fazer "várias contas diferentes". Acredita-se que ela, na verdade, queria dizer "tarefas diferentes". Afinal, as operações realizadas já eram conhecidas (adição e multiplicação). Porém, o que constituiu um fato incomum para as alunas foi utilizar estas operações numa tarefa matemática de cunho investigativo.

Figura 29 – Trecho do relatório individual de **JE** (contas diferentes)


- Aprendi a fazer melhor vários contas diferentes. e gostei muito de fazer.

5.3.2 Segunda sessão

Envolvimento na tarefa

JE aparentou desânimo no início da atividade. Seu entusiasmo começou a manifestar-se depois que **KA** derrubou o cubo de aresta 5 (que **KA** e **DA** estavam construindo), pois houve um instante de descontração.

> *(As três tentam arrumar os cubinhos. **KA** bate com o pé na carteira e desmonta a construção)*
>
> ***JE**: Ai meu Deus do céu!*
>
> *(Riem. **KA** desmancha tudo e começa tudo novamente)*
>
> ***JE**: O último era 64, né? Então tinha 4 de cima para baixo, e 4 (sinaliza com a mão uma linha horizontal). Entendeu, é só fazer...*

A partir deste momento, **JE** mostrou-se interessada em fazer descobertas. Utilizou registros escritos, e fez um desenho para tentar descobrir quantos cubinhos eram necessários para construir o cubo de aresta 5.

Sua persistência é notada, por exemplo, depois de uma das tentativas de contar as faces pintadas no cubo de aresta 5.

> *(**DA** e **KA** riem. Abandonam as contagens de cubinhos com 2 faces pintadas. **KA** tenta desmontar o brinquedo)*
>
> ***JE**: Melhor fazer tudo de novo...*

Em seu relatório, **JE** aponta que não conseguiram concluir a atividade porque “as últimas duas questões eram muito difíceis”, e porque “faltou paciência”.

Interações verbais com as colegas

JE interagiu verbalmente com as colegas, principalmente na primeira etapa da tarefa, que consistia na construção dos cubos. Também manifestou-se para confirmar o que a colega havia observado.

> ***KA**: Agora com três. 1, 2, 3, [...] 8.*
> ***JE**: 8 com três faces pintadas?*
> ***KA**: É.*

Fez comentários descontraídos. Por exemplo, quando terminaram de montar o primeiro cubo, ela exclamou “Bonitinho”. Quando **KA** derruba, pela primeira vez, o cubo de aresta 5, **JE** suspirou: “Ai meu Deus do céu”.

Outro momento em que **JE** manifestou-se verbalmente foi quando tentou encontrar o número de cubinhos no cubo de aresta 5 sem montá-lo, fazendo um desenho.

> ***JE**: O último era 64, né? Então tinha 4 de cima para baixo, e 4 (sinaliza com a mão uma linha horizontal). Entendeu, é só fazer...*
>
> *(Enquanto **DA** e **KA** montam, cada uma, um novo cubo, **JE** tenta fazer o desenho)*
>
> ***JE**: E cada desse tem 4 embaixo... (olhando para **KA**) Daí dá: 1, 2, 3, 4, 5, [...] 16. 16 vezes 4 dá 64. Então é só fazer mais uma [coluna] 17, 18, 19, 20. 20 vezes 5 dá 100. (olha novamente para **KA**) Acho que é isso.*

A surpresa que **JE** transpareceu quando **KA** afirmou que, na base, havia 25 cubinhos, deu indícios de que ela percebeu seu erro.

Houve uma freqüência elevada de interações verbais entre **JE** e **KA** nas etapas em que contaram a quantidade de cubinhos pintados nos cubos de aresta 4 e 5 cubinhos.

Também, na busca de relações existentes na tabela construída, **JE** corrigiu a fala de **KA**.

> ***KA**: Agora vamos ver: 6, 24 e 54. Com 1 face pintada sempre tem na tabuada do 6. 6 vezes 1 é 6, 6 vezes 4 é 24, 6 vezes...*
>
> ***JE**: 9.*
>
> ***KA**: Muito bem! 6, 4, 9*
>
> ***JE**: Hã? 1, 4 e 9.*
>
> ***KA**: É, 1, 4 e 9.*

JE comparou suas contagens com as contagens feitas por **KA**.

> ***KA**: Com nenhuma são os de dentro, né. Dentro vai ter 9 aqui (apontando para a segunda linha de cubinhos) mais 9, 18, mais 9, 27.*
>
> ***JE**: Ah! Então [foi] aqui que eu errei.*

Interações verbais com a professora

Nesta tarefa, a participação de **JE** durante as intervenções da professora fez com que ela respondesse ao que a professora perguntou, corrigisse ou completasse o que a colega respondeu e até corrigisse a si mesma, conforme percebe-se nas transcrições a seguir.

> ***Prof**: A **JE** falou que ele era quadrado. O que é um quadrado?*
>
> ***KA**: Tem quatro lados.*
>
> ***JE**: Tem quatro lados, e os quatro lados [são] iguais.*

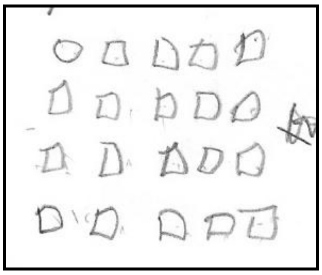
> ***Prof**: Quero fazer uma perguntinha... Quantas faces tem um cubo?*
>
> ***KA**: 4!*
>
> ***JE**: 6!*
>
> ***KA**: É, tem 6.*

> ***Prof**: O cubo tem 4 arestas?*
>
> ***JE**: (rindo) É aresta 4.*

Manifestação do raciocínio e do conhecimento matemático

JE tentou encontrar o número de cubinhos no cubo de aresta 5, fazendo um desenho. Ela partiu da base do cubo anterior (aresta 4) representando 4 linhas e 4 colunas de quadradinhos. Depois, ela acrescentou uma nova coluna à representação, mas esqueceu de acrescentar uma linha (para que a base ficasse com 5 linhas e 5 colunas). **JE** falou: 20 vezes 5 dá 100. Ou seja, 20 cubinhos na base. Na verdade, a base teria 25 cubinhos.

Figura 30 – Desenho de **JE**



Em outro episódio, **JE** corrigiu **KA** quando a professora perguntou sobre o número de faces do cubo. **KA** respondeu que o cubo possuía 4 faces, e **JE** imediatamente anunciou: 6 faces.

Na busca de relações existentes na tabela construída, **JE** completou o raciocínio de **KA** e começou a formular uma conjectura, mas abandonou-a em seguida.

> ***KA**: [...] Com 1 face pintada sempre tem na tabuada do 6. 6 vezes 1 é 6, 6 vezes 4 é 24, 6 vezes...*
>
> ***JE**: 9.*
>
> ***KA**: Muito bem! 6, 4, 9*
>
> ***JE**: Hã? 1, 4 e 9.*
>
> ***KA**: É, 1, 4 e 9.*
>
> ***JE**: Sempre de 4 em 4. Tipo: 6, 7, 8, 9. Não... (contando nos dedos, um dedo para cada numeral) 1, 2, 3, 4, 5, 6... Ih!*

Em seu relatório, **JE** referiu-se à tentativa de descobrir como se fariam as "*contas*". Acredita-se que a aluna estava referindo-se à interpretação da tarefa, pois em seguida ela relata que começaram a contar os cubinhos, conforme vê-se na Figura 31.

Figura 31 – Trecho do relatório individual de JE (interpretação da tarefa)

Bom pra começar a gente começou, tentando descobrir como se fariam as contas. Então ~~a~~ nós comessamos a contar os cubinhos de 4, 5 e 6 o restos chegamos a todos os

JE também escreveu, neste relatório, que não conseguiram concluir toda a tarefa devido à dificuldade das duas últimas questões e à falta de paciência. Percebeu-se, nesta justificativa, a manifestação da falta de habilidade neste tipo de atividade, e que a impaciência pode ter sido uma conseqüência do tempo que passaram nela.

Figura 32 – Trecho do relatório individual de JE (dificuldade)

só não consseguimos fazer as ultimas duas questois pois eram muito dificeis na minha opinioã e tambem faltou paciencia.

Capítulo 6
Considerações Finais

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois de conhecer o estudo de Castro (2004), envolvendo atividades investigativas de Matemática, começaram as inquietações que deram origem a este trabalho.

Considerando o referencial teórico adotado, pode-se caracterizar as tarefas investigativas como uma ferramenta valiosa para o ensino de Matemática. Na medida em que contribuem para o desenvolvimento de diversas habilidades, estimulam o aluno a despertar seu espírito investigativo.

Deste modo, esta pesquisa procurou descrever e analisar como três alunas da 8^{a} série envolveram-se em atividades investigativas de Matemática, suas interações verbais e como manifestaram seu raciocínio e seu conhecimento matemático.

Apresenta-se a seguir uma síntese do que foi verificado neste estudo.

6.1 Quanto ao envolvimento das alunas nas tarefas

As alunas demonstraram interesse e persistência. O trabalho do grupo obedeceu, de modo geral, a seguinte seqüência: reflexão individual, formulação individual de questão/conjectura e comunicação. Ocorreram também episódios de validação e justificação do que foi comunicado.

Algumas especificidades ficaram evidenciadas.

Na primeira tarefa, o envolvimento de **KA** foi caracterizado pela preocupação com a comunicação escrita do que estavam descobrindo, e pela busca notável da generalização, ao final da tarefa.

Por sua vez, o envolvimento de **JE** foi evidenciado quando descobriu o modo como são construídas as linhas do Triângulo de Pascal, e pelas explicações às colegas.

DA manifestou seu interesse em descobrir, procurando compreender o que era pedido na tarefa, mantendo-se atenta às colegas e ao que a pesquisadora falava.

Na segunda tarefa, **KA** deu indícios de que estava comandando a seqüência do trabalho, exercendo um papel de líder. O interesse de **KA** pela tarefa também foi evidenciado em sua iniciativa de conferir se o total de cubinhos declarados com 1, 2, 3 e nenhuma face pintada correspondia ao total de cubinhos usados para construir cada cubo. Ao chegar na terceira etapa, **KA** demonstrou disposição para descobrir relações a partir dos dados obtidos.

No início desta tarefa, **JE** demonstrava um certo desânimo, mas logo demonstrou persistência para determinar os números de cubinhos com faces pintadas.

DA, por sua vez, participou ativamente da primeira etapa, manifestando seu interesse pela tarefa. Na segunda e na terceira etapas, **DA** exprimiu um papel de observadora, prestando atenção no que as colegas realizavam.

Nos relatórios individuais, ocorreram menções positivas ao trabalho do grupo, evidenciando o envolvimento das alunas nas atividades. Vale lembrar que, no primeiro questionário, as alunas afirmaram que preferiam trabalhar sozinhas. Deste modo, acredita-se que as atividades investigativas tenham contribuído para ampliar as noções das alunas sobre o trabalho em grupo.

Ao final das duas sessões, as três alunas demonstraram cansaço. Porém, em ambas as sessões, foi **KA** quem tomou a iniciativa de encerrar.

6.2 Quanto às interações verbais entre as alunas

Na primeira tarefa notou-se que, de modo geral, as interações verbais aconteciam depois de um período de reflexão individual. Estas interações caracterizaram-se, em sua maioria, por **DA** ou **KA** dirigindo-se a **JE** na maior parte de suas manifestações verbais. Foram poucas as situações em que uma aluna dirigiu-se ao grupo todo.

Na segunda tarefa, o grau de interações verbais entre as alunas foi mais acentuado na primeira e na segunda etapa, sendo reduzido na terceira etapa.

6.3 Quanto às interações verbais com a professora

As interações verbais com a professora foram mais freqüentes na primeira tarefa, quando esta realizou um maior número de intervenções.

De modo geral, a professora manifestou-se com os seguintes propósitos: orientar sobre o processo investigativo, estimular a manifestação oral das alunas e a comunicação entre elas, fornecer e recordar informações, esclarecer dúvidas, incentivar a argumentação, estimular a realização de registros, sugerir ações para sanar impasses durante o processo investigativo, apoiar o trabalho das alunas e desafiá-las.

Cabe aqui um comentário sobre minha atuação, como professora, durante as atividades investigativas. Encontrei nos protocolos situações em que minha atitude deveria ter sido mais questionadora. Só depois de analisar calmamente os dados é que pude perceber as oportunidades perdidas.

6.4 Quanto à manifestação do conhecimento matemático e do raciocínio

Nomeadamente, observou-se na primeira tarefa que:

- **DA** manifestou ter observado a presença do número 1.
- **JE** descobriu como são escritas as linhas do Triângulo de Pascal.
- As alunas indicaram dificuldade na forma de expressar suas idéias (oralmente e/ou por escrito).
- Na tarefa que conduzia a uma generalização, **KA** evidenciou tê-la compreendido, enquanto **JE** e **DA** demonstraram dificuldade.
- Nenhuma das alunas percebeu potências de base 2 nas somas das linhas.

Na segunda tarefa:

- Foi preciso que a professora recordasse informações sobre elementos do cubo (arestas, vértices e faces) .
- **JE** e **KA** manifestaram seu raciocínio ao tentar prever a quantidade de cubinhos necessários à construção de um cubo 5 x 5 x 5 cubinhos. **JE**, por meio de um desenho. **KA**, por sua vez, montando a base e multiplicando por 5.

- **JE** e **KA** também se manifestaram contando os cubinhos com faces pintadas, num exercício de imaginação.
- **KA** organizou os dados obtidos nas construções e nas contagens numa tabela, realizando conjecturas e justificativas a partir dela.
- Nenhuma das alunas tentou prever os cubinhos com faces pintadas sem recorrer ao material concreto, como também não coletaram mais dados em cubos de outros tamanhos.

6.5 Enfim...

As alunas evidenciaram um envolvimento na tarefa, cada uma a seu modo. A aluna mais reservada mostrou uma postura de mais atenção do que ação, e a mais comunicativa exerceu uma liderança no trabalho do grupo.

As alunas tentaram resolver todas as tarefas propostas, e só desistiram depois de longos períodos de atividades. Acredita-se que tenham desistido pelo cansaço, e também porque faltou-lhes articular os conhecimentos. Esta é uma suposição que baseia-se na idéia de que, provavelmente, elas saberiam calcular 2^0, 2^1, 2^2 e assim por diante, se lhes fosse solicitado. Porém, reconhecer em 1, 2, 4, 8 o mesmo que 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 é algo que não estavam habituadas a fazer.

A questão da forma incompleta de algumas justificativas parece convergir para a mesma hipótese: estavam acostumadas a receber as justificativas e as explicações, não a formulá-las.

Acredita-se então que muitos alunos afogam seu espírito investigativo quando sentem que o bom aluno em Matemática é aquele que aprende rápido, faz as lições depressa, e acerta sempre porque as faz como o professor ensinou.

As tarefas de caráter investigativo podem, portanto, constituir oportunidades para que os alunos aprendam a observar, manifestar suas idéias, justificá-las e ampliar seus horizontes a respeito da disciplina de Matemática.

Para encerrar, fica deste trabalho o desejo de dar-lhe continuidade, como professora e como pesquisadora. De um lado, depois de conhecer melhor as possibilidades de trabalho com tarefas investigativas, percebo, como professora, a importância de planejá-las e incluí-las nas aulas de Matemática. Por outro lado, há de se pesquisar o envolvimento dos alunos em outros momentos das aulas investigativas, como por exemplo, na comunicação dos resultados para a turma. Neste sentido, também fica a proposta de estudar o alcance destas tarefas em outros contextos.

Referências Bibliográficas

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal, Porto, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEEF, 1997.

BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de atividades de investigação na aula de matemática**. 2000. 268 p. Tese de mestrado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

BROCARDO, J. **As investigações na aula de matemática: um projeto curricular no 8º ano.** 2001. 621 p. Tese de doutorado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

CARRAHER, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero.** 10 ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CASTRO, J.F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática**. 2004. 197 p. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

ECHEVERRÍA, M.P. P. **A Solução de Problemas em Matemática.** In: POZO, J.I. (org) A solução de Problemas. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 43-63.

ECHEVERRÍA, M.P.P.; POZO, J.I. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender.** In: POZO, J.I. (org) A solução de Problemas. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 13-42.

GOLDENBERG, E.P. **Quatro funções da investigação na aula de matemática**. In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (org.) Investigações Matemáticas na aula e no currículo. 1999, p. 35-49.

OLIVEIRA, H. **Atividades de investigação na aula de matemática: aspectos da prática do professor**. 1998. Tese de mestrado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/textos/index.htm>. Acesso em: 9 set. 2005.

PIRES, M. **A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: um projeto de investigaçã-ação**. 2001. 328p. Tese de mestrado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

POZO, J.I. (org). **A solução de Problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

POLYA, G**. O ensino por meio de problemas**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 7, p.11-16, 1985.

PONTE, J.P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, 2, 93-169, 2003. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em: 23 out. 2005.

PONTE, J.P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J.M. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, vol. 7, n. 2, p.41-70, 1998.

PONTE, J.P.; FERREIRA, C.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. **Investigando as aulas de investigações matemáticas** In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (org.) Investigações Matemáticas na aula e no currículo. 1999, p. 133-151.

PONTE, J.P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PORFIRIO, J.; OLIVEIRA, H. **Uma reflexão em torno das tarefas de investigação**. In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (org.) Investigações Matemáticas na aula e no currículo. 1999, p. 111-118.

ROCHA, C.A. **Uma experiência com atividades de investigação na aula de Matemática: competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade**. 2003. 219 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências, Universidade do Porto.

SEGURADO, M.I.A. **A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo**. 1997. 152 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

SOUZA, O. **Investigações estatísticas no 2º ciclo do ensino básico**. 2002. 141 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

TUDELLA, A., FERREIRA, C., BERNARDO, C., PIRES, F., FONSECA, H., SEGURADO, I., & VARANDAS, J. **Dinâmica de uma aula com investigações**. In (org.) Investigações Matemáticas na aula e no currículo. 1999, p. 87-96.

Anexos

ANEXO 1 – Primeiro questionário

QUESTIONÁRIO – VOCÊ E A AULA DE MATEMÁTICA

NOME: .... IDADE: ....

1) Por que e importante estudar Matemática? Escolha uma das respostas abaixo que mais combina com sua opinião.

( ) para aprender a fazer contas
( ) para ajudar na profissão futuramente
( ) para aprender a pensar
( ) porque a Matemática está em tudo
( ) para tirar boas notas na escola e passar de ano
( ) outra. Qual? ____

____

2) Você se considera um aluno excelente, bom, médio ou fraco em Matemática? Por quê?

( ) excelente ( ) bom ( ) médio ( ) fraco

Justificativa:____

____

____

____

3) Na aula de Matemática, o que você mais gosta? Por que?

( ) fazer exercícios
( ) resolver problemas
( ) jogos
( ) quando a professora explica
( ) outro. Qual? ____

Justificativa:

____

____

4) E o que você menos gosta? Por que?

( ) fazer exercícios
( ) resolver problemas
( ) jogos
( ) quando a professora explica
( ) outro. Qual? ____

Justificativa:

____

5) Quando você está fazendo uma tarefa de Matemática, qual é a sua maior preocupação em relação a esta tarefa?

( ) acertar a resposta
( ) desenvolver o processo de resolução corretamente
( ) terminar rápido
( ) outra. Qual?

6) Como você prefere trabalhar: em grupo ou sozinho? Por quê?

( ) em grupo ( ) sozinho

Justificativa:

7) Nas tarefas de Matemática, os alunos podem ser criativos e descobrir a resposta por si mesmos? Explique a sua opinião.

( ) sim ( ) não

Justificativa:

8) Como seria, para você, um bom professor de Matemática?

9) Escreva pelo menos um episódio de algo que foi feito numa aula de Matemática e você achou "legal", ou seja, que você não esqueceu.

ANEXO 2 – Segundo questionário

Nome: ______________________________ Data:_____________

Procure explicar o que é (ou como é) para você:

Um exercício “de Matemática”:

____

____

Um problema:

____

____

O que você entende por investigação?

____

____

Associe as situações matemáticas abaixo com: exercício, problema ou investigação.

1ª situação: Um triângulo retângulo tem catetos que mede 5cm e 6cm. Quanto mede a hipotenusa?

( ) exercício ( ) problema ( ) investigação

2ª situação: Desenhe um quadrilátero qualquer e marque o ponto médio de cada um dos lados. Unindo estes pontos, você obtém um novo quadrilátero. Verifique que tipos de quadriláteros resultam desta construção, quando feita nos diferentes tipos de quadriláteros.

( ) exercício ( ) problema ( ) investigação

3ª situação: Fui jantar num restaurante com três amigos. Resolvemos dividir igualmente as despesas, que ficaram em R$ 62,00. Após pagar minha parte, percebi que tinha ainda R$ 20,00 na carteira. Qual era a quantia inicial que eu tinha?

( ) exercício ( ) problema ( ) investigação

4ª situação: Simplifique: $\frac{6}{12} =$

( ) exercício ( ) problema ( ) investigação

ANEXO 3 – Primeira tarefa: Investigações no Triângulo de Pascal

INVESTIGAÇÕES NO TRIÂNGULO DE PASCAL

Blaise Pascal foi um matemático francês no século XVII.
E este triângulo numérico é chamado de Triângulo de Pascal:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

1) Descubra como se obtêm os números de cada linha deste triângulo, a partir dos números da linha anterior.

2) Escreva mais quatro linhas deste mesmo triângulo.

3) Explique como alguém deve fazer para obter novas linhas deste triângulo, a partir dos números da linha anterior.

4) Some os números de cada uma das linhas do Triângulo de Pascal. O que você pode observar?

5) É possível prever a soma dos números da 20ª linha se você souber a soma dos números da linha 19? Como?

6) Descubra agora um modo de saber a soma de qualquer linha que se queira, sem depender da soma da linha anterior.

7) Tente escrever uma fórmula para calcular a soma dos valores de qualquer linha que quiser.

ANEXO 4 – Segunda tarefa: Cubos e Cubinhos

CUBOS E CUBINHOS

1. Construção

Construa um cubo de aresta “3 cubinhos”. Quantos “cubinhos” foram necessários?

Quantos “cubinhos” seriam necessários para construir um cubo de aresta “4 cubinhos”? E de “5 cubinhos”?

2. Cubos pintados

Imagine agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, decidiu-se pintá-lo exteriormente de vermelho.

Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada? E com duas? E com três? ... E com nenhuma?

Investigue o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta 4. E se pintássemos um de aresta 5 ?

Se for preciso, faça um desenho que te ajude a investigar. Organize numa tabela as suas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2, 3,... faces pintadas num cubo de 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5.

Observe a tabela e escreva algumas conclusões.

ANEXO 5 – Roteiro para o relatório individual

Roteiro para o relatório individual

Este relatório deve apresentar uma descrição do trabalho realizado, da maneira mais detalhada possível. Pode ser organizado da seguinte forma:

Em primeiro lugar, tente descrever os passos que foram seguidos para explorar a tarefa proposta. Procure explicá-los de uma forma clara e organizada. Registre todos os procedimentos que usaram, e se for necessário, use tabelas, desenhos, ou esquemas.

Em segundo lugar, procure resumir o que aprendeu depois de realizar este trabalho.

Finalmente, é importante organizar um comentário geral em relação a tudo que fez. Pode, por exemplo, dizer se a tarefa despertou seu interesse, quais aspectos que teve maior dificuldade e a forma como decorreu o trabalho no grupo.

ANEXO 6 – Protocolo da primeira sessão

Material: folhas contendo a tarefa por escrito, folhas de papel sulfite em branco para rascunho, folhas de papel almaço para conclusões finais, canetas, lápis, borracha e calculadora.

(As alunas estão sentadas ao redor de uma mesa quadrada. KA e DA estão frente a frente, e JE está à direita de KA. A pesquisadora permanece durante toda a sessão sentada numa cadeira em frente à mesa, mas não juntamente com as alunas. A pesquisadora solicita que uma delas seja responsável por registrar as conclusões, e KA se oferece)

Pesq: Vocês responderam, no questionário, o que era uma investigação. O que vocês disseram lá?

(Mexem nas folhas, procurando a resposta)

KA: Memória curta...

KA: Um ato com propósito de descobrir algo.

JE: Procurar um caminho para descobrir algo.

DA: O que alguém faz quando tentam incriminar uma pessoa.

Pesq: Nossa! Você foi bem...

KA: Investigativa!

Pesq: A investigação criminal, que a DA falou, o que vocês colocaram, é para tentar descobrir alguma coisa. Quem faz investigação?

DA: Detetive.

JE: A pessoa que quer descobrir.

Pesq: Na sociedade, quem vocês acham que faz investigação? Nas profissões, por exemplo...

KA: Os policiais.

Pesq: Os detetives.

KA: Os advogados.

Pesq: Os cientistas fazem investigação?

(KA e JE acenam a cabeça positivamente)

Pesq: Que tipo de investigação que os cientistas fazem? Por exemplo, uma investigação que um cientista vai fazer...

(As meninas ficam pensando, olhando para a mesa)

Pesq: Para descobrir o que, por exemplo?

KA: Uma maneira, por exemplo, de curar o câncer.

Pesq: (completando o pensamento de KA) Procura de cura de doenças... Na Biologia, na Química, ...

JE: Quando descobriram que a Terra era redonda.

Pesq: Isso! Quando descobriram que a Terra era redonda estavam investigando até descobrirem. Também tem a investigação da Física, da Química, quando descobrem... (a pesquisadora pára um momento, pensando na frase completa) ... quando, por exemplo, inventam uma máquina, um aparelho novo. O aparelho surgiu prontinho na cabeça do inventor, ou será que ele foi investigando, pesquisando, até ficar pronto?

(A pesquisadora toma o rumo das investigações pelos matemáticos)

Pesq: E os matemáticos, será que os matemáticos também fazem investigações?

JE: Fazem!

KA: Para descobrir as fórmulas.

Pesq: É isso mesmo. Quando a gente vai aprender na escola, a professora dá a fórmula prontinha, mas ela não surgiu na cabeça do matemático de repente... ele fez uma investigação até chegar nesta fórmula.

Pesq: E é isso que vocês vão fazer: uma investigação matemática. Vocês vão ter uma tarefa (entrega a tarefa por escrito). Numa investigação, o resultado final, não é a preocupação com a resposta certa. A professora quer que vocês investiguem, que vocês tentem descobrir alguma coisa que está por trás desta tarefa.

(A pesquisadora explica como devem proceder, os passos de uma investigação)

Pesq: Vocês vao ler os enunciados e entender o que está acontecendo. Quando vocês perceberem alguma coisa, que a gente chama de padrão... – Olha, aqui acontece isso! Aí vocês vão testar para ver se acontece sempre, acontece de vez em quando, se acontece para uns números e não acontece para outros, quando acontece... e vão sempre registrar as conclusões. Todas têm uma folha em branco para escrever os cálculos e as tentativas, e quando tirarem uma conclusão vão escrever na folha de papel almaço esta conclusão. Vocês podem me perguntar, se tiverem dúvida, podem me chamar, mas o máximo que puderem vão trabalhar sozinhas!

(Durante esta introdução as meninas olham atentamente a pesquisadora, prestando atenção. Passam a ler os enunciados individualmente. KA começa a fazer cálculos na calculadora e anotar, mas não comunica. JE e DA prosseguem lendo e pensando por vários minutos).

Pesq: Vocês já descobriram algo interessante neste triângulo? Olhando este triângulo, tem algo interessante que vocês já perceberam?

DA: Está em ordem crescente.

JE: Todos começam com 1.

Pesq: Todos o quê? Todas as linhas?

JE: Todas as linhas.

Pesq: E só as linhas começam com 1?

JE: As linhas assim (faz um movimento com a caneta, sinalizando linhas horizontais) e as linhas assim (faz o mesmo tipo de movimento, sinalizando linhas verticais).

Pesq: Como a gente chama essas linhas assim? (sinaliza com a mão linhas verticais)

(As meninas entreolham-se)

Pesq: No triângulo retângulo, como a gente chama estas duas linhas que começam com 1? Dá para ver que é a forma de um triângulo retângulo...

KA e JE: Hipotenusa e...

JE: Cateto oposto.

Pesq: Hum...

(Mesmo depois da intervenção da pesquisadora, KA continua calculando e registrando, mas não comunica para as colegas)

DA: Professora, o que quer dizer “da linha anterior” ?

Pesq: Pergunte primeiro para suas colegas. Veja se elas entenderam.

(DA olha para JE e repete a pergunta)

JE: Acho que eu entendi. A linha anterior é... tipo: a linha anterior desta é esta, desta é esta (fala apontando para as linhas no Triângulo de Pascal). Acho que é isto.

Pesq: Então perguntem para a KA para ver se ela concorda.

(KA termina de escrever o que estava registrando)

KA: Hum-hum (rindo) Eu também percebi que tanto na diagonal quanto na vertical a soma das linhas dá o mesmo valor. (Fala olhando para a pesquisadora)

Pesq: Então mostre o que você fez para suas colegas.

(KA levanta a folha e apontando com a caneta, repete sua conclusão)

Pesq: Daquela pergunta da DA, linha anterior... o que vocês entendem por linha?

JE: Uma reta, eu acho.

Pesq: Em que sentido? Horizontal, vertical ...

DA: Os dois.

Pesq: Certo, pode ser os dois.

KA: Na diagonal também.

Pesq: Na diagonal também, bem lembrado KA. Nesta tarefa, a palavra linha está realmente no sentido de linha, como as linhas do caderno. (fala sinalizando com o dedo uma linha horizontal). Apesar de que, mesmo assim, a KA descobriu uma coisa interessante a respeito de linhas diagonais e verticais...

(KA prossegue calculando e registrando. DA também faz alguns registros. Porém, trabalham independentemente. DA pergunta para a pesquisadora:)

DA: Como se chama mesmo a linha assim? (sinaliza com o dedo linhas verticais no ar)

Pesq: Você pode chamar de coluna a linha vertical e a linha horizontal de linha mesmo. E a linha diagonal, só de diagonal.

JE: (fala para as colegas, que prestam atenção) Não sei se tem alguma coisa a ver, mas olha aqui. Mas acho que não tem nada a ver. Nestas linhas aqui, se você colocar mais (+) vai dar o resultado de baixo. Tipo: (pega um lápis para assinalar) aqui eu coloco mais (+) dá 2, aqui coloco mais dá 3, esse aqui eu somo esse mais 3 vai dar 4, 3 mais 3 vai dar 6, 3 mais 1 vai dar 4. Daí 1 mais 4 vai dar 5, esse 4 mais 6 vai dar 10, esse 6 mais 4 vai dar 10, esse 4 mais 1 vai dar 5.

KA: Sobrou agora esse 1 aqui e esse 1 aqui (fala apontando para o início e o fim de uma linha).

(Continuam o trabalho independente. KA calcula e registra em sua folha)

Pesq: Então, a 1ª questão, vocês concordam com a resposta da JE? Acham que é assim mesmo que se faz? Então podem registrar isso na folha, que vocês já descobriram. Ou preferem primeiro fazer tudo e registrar depois?

JE e KA: Hum-hum (acenam positivamente com a cabeça)

KA: É...

Pesq: Então está bom. Façam como acharem melhor.

JE: (escreve uma nova linha às já existentes) Então, fazendo aqui vai dar 1, 1 mais 5 dá 6, dá 15, 20, 15, 6.

KA: E o 1!

JE: E o 1, isso mesmo.

JE: Mais quatro linhas!

KA: (tenta construir uma resposta para a questão) Então, somando os números da linha anterior vai dar determinado valor, que vão resultar na mesma soma das linhas na diagonal e na vertical.

(DA observa as colegas. KA começa a escrever a frase formulada. JE usa a calculadora e registra as próximas linhas. DA faz o mesmo em sua folha)

JE: (direcionando-se para Da) Parece aquela brincadeira de somar porcentagens, lembra?

KA: (para JE) Olha, então a soma destes números resultou neste aqui, então se eu somar estes com estes vai dar o valor...

JE: Como assim?

KA: Ó: a gente soma estes números aqui, deu, por exemplo, esse valor. Se a gente somar mais este valor não vai dar o mesmo valor da próxima?

JE: Então, olha o que eu fiz. Que nem o que eu tava somando aqui que deu o resto das linhas.

(KA procura algo em seus registros)

JE: (explicando para Da) Você vai fazendo assim: esse 1 mais 7 vai dar 8, 21 mais 35 (faz na calculadora)...

KA: (termina de escrever) Deixa eu ver!

JE: Seria na...

KA: Na 7ª linha.

JE: Isso! Essa a 8ª e essa a 9ª

KA: (dirigindo-se a JE) Somando os valores da linha anterior vai resultar em um determinado valor que vai ser equivalente à soma das linhas na diagonal e na vertical.

(JE sorri, pega a folha de KA para ler)

KA: Isso que eu queria ver... tipo... primeiro coloca esse 1 aqui na frente. Daí vai dar o 7, daí o 15, 15 com 6, 21.

(DA e JE começam a fazer alguns cálculos na calculadora. JE circula as novas linhas que acabou de escrever)

KA: Só falta a 6 e a 7.

KA: Então, o que a gente coloca na primeira? Somando os números da linha anterior...

(As três olham para baixo, pensativas)

DA: (para JE) 1 mais 6 dá 7, 6 mais 15 dá 21...

JE: Mas sem depender da anterior.

KA: Como assim?

DA: Aqui ó: 1 mais 2, 2 mais 3, 3 mais 4, 4 mais 5.

KA: Mas se você não tivesse essa linha aqui, como você saberia...

JE: Que número seria?

(KA registra as quatro novas linhas calculadas por JE. Enquanto isso, JE e DA continuam pensando. JE começa a fazer alguns registros, mas abandona sem comunicar seus pensamentos).

KA: Toda linha repete uma vez um número!

(KA mostra para as colegas, circulando os números que repetem)

KA: Professora, a [questão] número 1 não é a mesma coisa que a [questão] número 3?

Pesq: É que a 1 diz para descobrir como se faz, e aí vocês já escreveram, fazendo o que pede a número 3. Por isso que você achou que é a mesma coisa. E vocês podem melhorar um pouco a resposta de vocês. Vejam: somando os números da linha anterior... Todos os números?

KA: Não...

Pesq: Que números vocês somam para descobrir? Como vocês começam a escrever uma nova linha?

KA: Pelo número 1.

Pesq: Muito bem. E depois?

JE: Repete o 1, soma 1 mais 5, daria 6, 5 mais 10, que daria 15, 10 mais 10 que daria 20, 10 mais 5 que daria 15, 5 mais 1 que daria 6 e repetiria o 1.

Pesq: Muito bem, então duas coisas que vocês já disseram que não tem na resposta: começa pelo 1 e termina pelo 1. Outra coisa: vocês não estão somando todos os números de uma vez.

KA: De dois em dois.

JE: É, de dois em dois.

(JE aponta o lápis. KA registra algo e DA observa)

JE: (para KA) Aqui também, ó: mas você vai vendo aqui, esse número sempre vai ser igual a... tipo...

(Refere-se à soma das linhas)

KA: Aqui...

JE: Deixa eu ver... (pensa melhor como comunicar sua observação)

KA: Na horizontal não dá sempre o mesmo valor que nem na vertical e na diagonal.

(KA escreve enquanto JE e DA observam, pensativas)

KA: Como é a resposta da 5?

Pesq: Acho que vocês estão passando muito batido pela 4. Vocês somaram todas as linhas? A primeira, a segunda, a terceira ... todas elas?

(KA acena positivamente com a cabeça)

Pesq: Coloquem os resultados que vocês encontraram: na primeira linha, quanto dá o resultado, a soma da primeira linha?

KA: Na primeira linha, na diagonal e na vertical dá 6 e na horizontal dá 1.

Pesq: Então vamos fazer o seguinte... continue, quero ver...

KA: Na segunda linha, na diagonal e na vertical dá 15 e na horizontal dá 2. Na terceira linha, na diagonal e na vertical dá 20 e na horizontal dá 4. Na quarta linha, na diagonal e na vertical dá 15 e na horizontal dá 8. Na quinta linha, na diagonal e na vertical dá 6 e na horizontal dá 16. Na sexta linha, na diagonal e na vertical dá 1 e na horizontal dá 32.

Pesq: Então vejam só: vocês já colocaram esta observação, que na diagonal e na vertical dá sempre o mesmo. Foi isso que vocês colocaram? Então vejam aonde aparece a diferença. Se na vertical e na diagonal sempre vai dando resultados iguais, dá diferença aonde?

KA: Na horizontal.

Pesq: Então coloquem esses valores novamente. Quando aqui fala em cada uma das linhas, é das linhas horizontais. E verifiquem o que acontece nas linhas horizontais. Uma coisa importante vocês já perceberam: que na diagonal e na vertical dão iguais. Vejam então o que acontece com as linhas horizontais, como vai aumentando? Façam a soma também das linhas novas, para terem mais idéias.

(Fazem juntas a soma dos números de cada linha nova que escreveram, e KA registra)

KA: Na horizontal vai aumentando...

JE: De dois em dois.

KA: Não...

JE: Tipo: 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4...

(Riem)

KA: Somando o número com ele mesmo.

JE: É. Vai dar o número... (sinaliza com as mãos um gesto de seqüência, querendo dizer o próximo)

(KA começa a registrar, mas fica em dúvida quanto à redação)

JE: Somando seus números... somando um número com ele mesmo vai dar o próximo número.

(KA faz o registro. Depois lê o que escreveu, em silêncio)

Pesq: Experimentem testar nas linhas que vocês escreveram para ver se funciona.

(KA pega a calculadora e soma)

KA: 64, 128. Certinho!

JE: Nesse caso, a próxima seria... (registra em sua folha: 128+128 = 256)

(Constróem, as três juntas, a frase. KA registra. Riem quando terminam. KA lê em voz alta a próxima questão e ela mesma responde)

KA: "É possível prever a soma dos números da 20ª linha se você souber a soma dos números da linha 19? Como?" Sim. É o que acontece aqui: se você tiver a soma da linha 19, você soma o resultado com ele mesmo e vai dar a soma da linha 20.

(Passam à próxima questão, lendo-a em silêncio)

JE: Tipo assim: como você vai saber que somando esta linha vai dar o valor desta? Então você soma aqui, vai dar um valor. Então você terá que adivinhar quais são os valores da próxima linha.

KA: Não, esse valor aqui (aponta para uma das somas) somado com ele mesmo vai dar esse daqui (aponta para a soma seguinte)

JE: DA próxima linha... Então vai dar para adivinhar os valores dessa... (aponta para os números da linha)

KA: Essa é da [questão] 5...

JE: Ah!

(KA formula a resposta, observada pelas colegas)

JE: Agora a 6! Você sabendo o resultado dessa linha você vai ter o resultado. Por exemplo, 35. Daí 35 mais 35 vai dar 70. Aí você vai poder imaginar quais vão ser os próximos valores.

KA: 1, repetindo dois a dois, e mais um valor que faltar. Por exemplo: 1, daí dá 70,...

JE: Empresta isto aqui (pega a folha de KA). 30, daí 60, 70...

KA: Não, não (pega a folha de volta). Não pode pôr qualquer número porque a soma na vertical... Então: 70, a metade de 70, 45, metade de 45... Professora?

Pesq: Calculadora...

KA: 45 dividido por 2...

JE: Vai dar com vírgula.

KA: 22,5.

JE: A gente tinha que somar uma linha aqui para ver.

Pesq: Vocês já disseram que 1 mais 1 é 2, 2 mais 2 é 4, 4 mais 4 é 8, 8 mais 8 dá 16, 16 mais 16 dá 32. Tem uma outra forma, além dessa, de escrever...

KA: Ai, ai, ai... Eu sinto que tem alguma coisa a ver com a tabuada.

DA: 2 vezes2 dá 4, 4 vezes 2 dá 8, 4 vezes 4 dá 16, 16 vezes 16...

(Alguns minutos de reflexão)

DA: 2 vezes 2 é 4, 4 vezes 2 é 8, 4 vezes 4 é 16... sei lá!

KA: 4 vezes 2 é 8, 8 vezes 2 é 16, 16 vezes 2 é 32, 32 vezes 2 é 64... Mas a questão não é essa. A questão é a gente saber a soma de qualquer linha só pelo número da linha. Por que a gente não vai saber o resultado, por exemplo, da linha 9, qual é a soma dos números, entendeu?

Pesq: Se vocês voltarem naquele raciocínio, vai clarificar. Vocês disseram: 1 vezes 2 dá 2, 2 vezes 2 dá 4, 4 vezes 2 dá 8, e depois? (fala apontando as somas já organizadas)

DA: 4 vezes 4 é 16.

KA: 2 vezes 2 é 4, 4 vezes 2 é 8, 8 vezes 2 é 16, 16 vezes 2 é 32...

JE: Calma aí... (faz alguns cálculos na calculadora). Não é sempre vezes 2?

(KA relê a pergunta)

KA: Acho que a gente tem que descobrir um número que ou somado ou vezes o número da linha dê o resultado

(KA faz cálculos na calculadora, mas não comunica suas tentativas. Há um período de trabalho individual)

Pesq: O número da linha mais, menos, ou vezes alguma coisa dá o resultado da soma. Quais operações, quais contas vocês sabem fazer?

DA: Mais, menos, vezes e dividir.

Pesq: Só isso?

KA: Potências...

Pesq: E o que mais?

(Um breve silêncio)

Pesq: As operações básicas são quatro: mais, menos, vezes e dividir. Mas temos mais. Uma vocês já falaram.

KA: Potências.

Pesq: E a outra?

KA: Fração?

Pesq: Nós estudamos bastante no início da 8ª série...

JE: Raiz quadrada?

Pesq: Raiz quadrada se a potência for de expoente 2. Então, além de mais, menos, vezes e dividir, tentem também as potências e as raízes. Vamos ver se isto ajuda. A idéia está certa: procurar pelo número da linha o resultado da soma. Para isto terão que fazer cálculos usando as operações.

(Após alguns minutos, DA abandona seus cálculos e observa JE. Retoma seus cálculos, mostra-os para JE, mas não comunica formalmente ao grupo. Há um período de trabalho individual)

DA: (para KA) Vezes. 8 vezes 2 dá 16.

KA: Não... é assim, ó: a gente não vai saber esse resultado. A professora, por exemplo, ela vai dar a linha 8, para a gente saber a soma. A gente vai ter que saber uma maneira que, por exemplo, a linha 8 somada, ou diminuída, multiplicando, dividindo, ou raiz quadrada, dê com a linha 8, dê o resultado.

DA: Hum...

(Há um período de trabalho individual)

JE: Pelo número da linha você não tem que descobrir os números?

KA: Não, pelo número da linha você tem que descobrir a soma.

JE: Mas para saber a soma não é só fazer...

KA: Mas sem esses números!

(Há um período de trabalho individual)

KA: Ah! Eu quero desistir...

(JE e KA entreolham-se)

Pesq: Vejam bem, se vocês acham que não estão conseguindo descobrir, podem encerrar a investigação por aqui. Pode ser que mais tarde “caia a ficha” e vocês descubram. Se o trabalho está infrutífero que não está dando para descobrir, mas tem que ser uma decisão em conjunto.

KA: Eu já tentei tudo o que imaginei...

Pesq: O que importa é fazer as tentativas. Você já tentou tudo o que imaginava?

KA: Hum-hum... O que vocês acham...

(JE solta o lápis e encosta-se na cadeira, demonstrando cansaço. A pesquisadora entrega o modelo de relatório por escrito, dizendo que esta é mais uma etapa do trabalho que desenvolveram. Cada uma escreve seu relatório e entrega imediatamente à pesquisadora. A sessão é encerrada)

ANEXO 7 – Protocolo da segunda sessão

Material: folhas contendo a tarefa por escrito, folhas de papel sulfite em branco para rascunho, folhas de papel almaço para conclusões finais, canetas, lápis, borracha, calculadora, um cubo de brinquedo e um estojo de Material Cusinaire.

(As alunas organizaram três carteiras em forma de mesa. **KA** e **DA** estão frente a frente, e **JE** está à direita de Ka. A pesquisadora permanece durante toda a sessão sentada numa cadeira em frente à mesa, mas não juntamente com as alunas. A pesquisadora questiona quem será responsável por registrar as conclusões, e **JE** se oferece)

Pesq: O que vocês podem me falar a respeito dos cubos?

JE: Ele é quadrado.

KA: (apontando para uma aresta do cubo) Aqui são os vértices... (olha para a pesquisadora) É vértices?

Pesq: Arestas.

KA: As arestas...

Pesq: Muito bem!

KA: Os vértices é aqui, né? (aponta para uma aresta e olha para a pesquisadora)

Pesq: Os vértices a gente costuma chamar os cantinhos. Esses cantinhos são os vértices.

KA: É... (olha para as colegas)

Pesq: A JE falou que ele era quadrado. O que é um quadrado?

KA: Tem quatro lados.

JE: Tem quatro lados, e os quatro lados [são] iguais.

Pesq: Então a gente pode dizer que um cubo é formado de...

KA, JE e DA: Quadrados!

Pesq: Muito bem. Então acho que vocês já têm uma pista sobre o que vocês vão investigar hoje.

Pesq: Então, esta tarefa de hoJE é composta por duas partes. Na primeira vocês vão fazer as construções e na segunda fazer a investigação a respeito daquilo que vocês construíram. (Entrega a tarefa, por escrito, para cada uma das alunas) Vocês podem tanto construir primeiro todas as figuras ou construir uma e pensar como seria para construir as outras. Leiam primeiro toda a tarefa, e depois comecem.

(As alunas lêem individualmente, em silêncio. KA começa a montar o cubo de aresta 3 com o material fornecido. JE e DA olham, e depois começam a ajudar)

JE: Bonitinho!

(KA começa a contar a quantidade de cubinhos utilizados na construção do cubo 3 x 3 x 3, contando-os, um a um, pelas colunas formadas)

KA: (aponta a primeira coluna) 1, 2, 3, ... (aponta a 2ª coluna) 4, 5, 6... (aponta a 3ª coluna) 7, 8, 9... (e continua assim até contar 27 cubinhos)

KA: Anote aí, Da.

(DA registra. Para construir o próximo cubo, KA vai acrescentando os cubinhos a partir do cubo já existente, e continua a contagem. DA e JE observam)

KA: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34...

(Continua colocando mais quatro cubinhos, mas sem contar)

KA: Ta contando, Je?

JE: Não!

(Riem)

KA: Esqueci a conta!

(JE ajuda a completar o cubo. DA reinicia a contagem mas logo pára. Terminam de completar as laterais do cubo que será 4x4x4. Contam os cubinhos usados até aqui)

KA: Ta, aqui tinha 27. 28, 29, 30, [...] 49.

(Ka, antes de começar a nova linha de cubinhos, confirma)

KA: Quantos mesmo? 49?

JE: (murmura um som positivo) Hum, Hum.

KA: Agora contem.

(KA acrescenta a nova linha de cubinhos, contando um a um junto com Da, para fazer a altura de 4 cubinhos)

KA e DA: 50, 51, 52, 53, [...] 64.

KA: 64!

DA: 64?

KA: (murmura um som positivo) Hum, Hum

(DA registra)

KA: Agora, de 5.

(KA vai acrescentando cubinhos na lateral do cubo já existente e DA vai somando-os ao anterior)

DA: 65, 66, 67, [...], 85...

(As três tentam arrumar os cubinhos. KA bate com o pé na carteira e desmonta a construção)

JE: Ai meu Deus do céu!

(Riem. KA desmancha tudo e começa tudo novamente)

JE: O último era 64, né? Então tinha 4 de cima para baixo, e 4 (sinaliza com a mão uma linha horizontal). Entendeu, é só fazer...

(Enquanto DA e KA montam, cada uma, um novo cubo, JE tenta fazer o desenho)

JE: E cada desse tem 4 embaixo... (olhando para Ka) Daí dá: 1, 2, 3, 4, 5, [...] 16. 16 vezes 4 dá 64. Então é só fazer mais uma [coluna] 17, 18, 19, 20. 20 vezes 5 dá 100. (olha novamente para Ka) Acho que é isso.

KA: Vou fazer a base aqui (com material concreto) e aí a gente já vê.

(JE faz um cálculo na calculadora, mas não comunica. KA termina a base do cubo 5x5x5 e conta os cubinhos um a um, silenciosamente)

KA: Tem 25 aqui.

JE: 25?

KA: É.

KA: 25 vezes... vezes 5, né? (faz na calculadora) 125.

KA: (para Da) 125 Da.

(DA registra)

KA: Agora nós vamos pro cubinho.

Pesq: vejam: se vocês já descobriram quantos cubinhos são necessários para montar, vocês acham necessário ainda montar, no concreto, no material?

KA: É, porque a gente tem que ver quais vao ser pintados.

Pesq: É? Vocês acham melhor fazer?

KA: Claro!

(JE e DA acenam positivamente com a cabeça. DA e KA montam o cubo de aresta 3 novamente)

KA: Vamos ver quantos são pintados aqui... (KA conta em voz alta e aponta com a caneta) 1, 2, 3, 4, [...] 12.

(JE e DA observam)

KA: Não... 9 com duas faces pintadas. 9 com 9, 18 faces pintadas. 19, 20, 21, 22. São 22 com 2 partes pintadas.

KA: (Conta os cubinhos de um em um e comunica) 6 vão ficar com 1 só pintada.

(KA lê novamente a questão e explica para as colegas)

KA: Tem que ver quantos cubinhos vao ficar com 1 única face pintada (mostra com a caneta os cubinhos que contou). Marque, Da, 6 com 1 face. Agora com duas.

(DA registra e JE olha. KA conta os cubinhos, um a um)

KA: 1, 2, 3, 4, 5, [...] 12. 12!

(DA registra)

KA: Agora com três. 1, 2, 3, [...] 8.

JE: 8 com três faces pintadas?

KA: É.

(DA registra)

Pesq: Quero fazer uma perguntinha... Quantas faces tem um cubo?

KA: 4!

JE: 6!

KA: É, tem 6.

Pesq: 6 faces. Vocês verificaram quantos ficariam com 1 face pintada, com duas, com três e com nenhuma. Verifiquem também com quatro, cinco e com seis faces pintadas. Verifiquem e registrem.

DA: (Refistra e confirma com Ka) 1 com nenhuma pintada, é isso?

KA: 1 com nenhuma pintada. Vou fazer assim, ó...

(KA separa as colunas do cubo para verificar)

KA: Com 4, com 5 e com 6 não tem nenhuma.

DA: Nenhuma?

(KA movimenta a cabeça em sinal negativo. JE deita a cabeça sobre o braço, na carteira.

KA junta novamente as colunas. JE ergue a cabeça e começa a aumentar o cubo 3x3x3, acrescentando cubinhos à lateral. Bate com o braço e desmancha. DA começa a ajudá-la a montar novamente.

Simultaneamente, KA monta um novo cubo 5x5x5. Como faltam cubinhos, utiliza o restante do material para auxiliar na construção. JE e DA terminam o cubo que montavam. KA continua a construção, observada por JE e Da.

KA decide tirar uma face construída com barrinhas e substituí-las por cubinhos. DA bate o braço no cubo 4x4x4, construído por ela e Je, derrubando-o)

DA: Ai!

JE: Vixe Maria!

DA: É que eu sou assim...

JE: (para Ka) Esse é de 4?

KA: Esse é de 5.

JE: Vamos fazer o esquema da Ka.

(Este esquema consiste em reunir uma fila de cubinhos e pegá-los todos juntos, como uma barrinha, ao invés de colocá-los um a um na construção)

(JE e DA estão construindo o cubo 4x4x4 usando cubinhos, e KA o cubo 5x5x5 usando barrinhas na parte interna e cubinhos nas faces externas. JE e DA arrumam cuidadosamente seu cubo)

DA e JE: Ah! (espreguiçam-se)

(KA termina a montagem e também ajeita, com as mãos, sua construção)

KA: Então vamos lá!

(JE sorri)

KA: Com nenhuma face pintada... (pretende começar a contagem no cubo de aresta 5. Porém, bate com o braço desmanchando uma parte. Então, conta no cubo de aresta 4, , apontando com a caneta). Esses daqui não... (mostrando as faces laterais e a superior). 8!

JE: É! 8! 8 ficarão sem pintura nenhuma, no cubo de 4 arestas.

(JE dita e DA registra)

Pesq: O cubo tem 4 arestas?

JE: (rindo) É aresta 4.

KA: Que mais?

(KA modifica o cubo que ela construiu, transformando-o num cubo 3x3x3. Começa a desmanchar este cubo, retirando as peças que vão sendo contadas)

KA: Os dos cantos é sempre 3 faces...

(KA retira os 4 cubinhos dos cantos superiores; movimenta parte do cubo para o lado, deixando a base exposta, e retira 4 cubinhos dos cantos inferiores)

KA: Daí com duas... Com uma...

(KA vai retirando os cubinhos e colocando-os em montinhos separados. Começa a desmanchar, do mesmo modo, o cubo 4x4x4)

KA: Aqui com 1... (aponta para um dos montinhos) ou com 2?

(JE aponta o montinho correspondente a 2 faces pintadas)

JE: (para Da) 16 ficaram com duas faces pintadas e 8 com 1 face pintada.

Pesq: E com 4, 5 e 6 [faces pintadas] ? Tem algum cubinho?

JE: Acho que não, né...

KA: Não, porque só aparecem 3 faces do cubo, no máximo.

Pesq: Então registrem isso!

(JE dita para DA registrar. KA começa a montar um novo cubo 4x4x4)

KA: Vocês marcaram o de 4?

JE: É.

(KA soma as quantidades de cubinhos na calculadora e verifica que faltam cubinhos)

KA: Ih! Tá faltando cubinhos...

(KA refaz os cálculos)

JE: Ué! Você esqueceu de contar com 1 face, ou você contou os de baixo?

KA: Não sei... então [es]pera aí...

JE: 1, 2, 3, 4...

(KA bate e desmancha parte do cubo)

KA: Vamos fazer de novo!

(DA pega a folha para registrar. KA e JE montam novamente o cubo 4x4x4 enquanto DA observa)

JE: Vou sonhar com esses cubos!

KA: Prontinho...

(JE conta em uma das faces, apontando com a caneta)

JE: 1, 2, 3, 4 com 1 face. 5, 6, 7, 8 [...] 16.

(JE conta as quatro faces laterais, mas esquece da superior e da inferior)

JE: (para Da) 16 com 1 face pintada.

(DA registra. KA soma as quantidades utilizando a calculadora, para conferir)

KA: Eu não acredito que ainda tá faltando...

JE: Hum... A gente esqueceu de contar aqui em cima: 17, 18, 19, [...] 24.

KA: (contando novamente) 17, 18, 19, 20!

JE: 16 mais 8, quanto que é?

JE: (para Da) 24 aqui.

(DA apaga o registro anterior e registra o novo resultado)

KA: (reconta) Hum? [Es]pera aí. (faz, com as mãos, sinal de pare)

JE: (com a calculadora) 8 mais 8, mais 16 e mais 24. Deu 56.

KA: (pega o brinquedo para tentar entender melhor) Se tivesse uma faquinha para desmontar...

(Um instante de silêncio, cada uma pensando...)

JE: Então vamos lá. Com 3.

(JE começa a contar os cubinhos dos cantos. KA tira a caneta da mão de JE para apontar no brinquedo, e mostra os cubos que possuem duas faces pintadas.

Abandonam o brinquedo e voltam ao cubo construído. KA tira os 4 cubinhos dos cantos da face superior do cubo)

KA: 4, com 4 embaixo, 8. Daí com 2.

JE: (tirando 8 cubinhos da face superior) Então foram tirados 1, 2, 3, [...] 8. Mais 8.

(KA continua tirando 8 cubinhos das laterais. JE faz um montinho em separado)

KA: Agora com 1.

(KA retira 4 cubinhos das faces laterais e entrega para Je)

KA: Esse aqui é com 1.

KA: (separa 4 cubinhos do centro do cubo) Esse aqui é com nenhuma. (retira 4 cubinhos do centro da base do cubo e coloca na pilha de 1 face pintada)

KA: Ih, e agora, onde que vão esses aqui? (referindo-se aos cubinhos que sobraram sobr a mesa)

(JE faz uma expressão de susto. Entreolham-se. DA olha pra os registros no papel)

KA: Vamos fazer tudo de novo!

(KA monta a base. Separa os 4 cubinhos dos cantos. Depois separa 8 cubinhos que teriam duas faces pintadas)

KA: Duas, duas, duas e duas. E esse aqui, 1. (junta o restante dos cubinhos ao monte de 1 face pintada)

KA: Então vamos contar: 1, 2, 3, [...] 24.

(DA e KA riem. Abandonam as contagens de cubinhos com 2 faces pintadas. KA tenta desmontar o brinquedo)

JE: Melhor fazer tudo de novo...

(JE constrói o cubo 5x5x5 com ajuda de Da. KA abandona o brinquedo e começa a construir outro cubo 5x5x5 utilizando novamente as barrinhas.

KA começa a contagem em seu cubo e registra.

Simultaneamente, JE e DA terminam o cubo. Durante a construção, JE bateu o braço desmanchando parte dele, tendo que ser reconstruído.

KA desmancha seu cubo e guarda as barrinhas. Pega a folha com os registros de DA para sistematizar a tabela.

JE passa a mão pelos olhos, demonstrando cansaço.

JE e DA aguardam KA terminar a tabela)

Pesq: Que tal agora vocês não desmancharem, não tirarem os cubinhos quando contarem. Será que não fica melhor?

JE: (falando para si mesma) Quantos tem 1... (conta de um em um até 54, e registra)

(Fazem uma pausa para um lanche. Retornam após 20 minutos)

JE: (para si mesma) Vamos ver, com 3... (conta de um em um até 8, e registra)

Com 2... (conta de um em um até 12) mais 12, 24 (registra).

Com nenhuma... (conta de um em um até 36, e registra)

Com 1... (conta 9 na face superior) mais 9 dá 18... (continua contando os cubinhos das laterais, um a um, até 38)

Ih... fiz tudo errado. [Es]pera aí.

(Começa novamente, conta 9 na face superior) mais 9 dá 18... (continua contando os cubinhos das laterais, um a um, até 54)

KA: Tá faltando ainda com 4 arestas. Isso nós ainda temos que ver. Porque o que a gente fez dá 56, e no total, tinha que dar 64. temos que fazer de novo.

JE: Tá faltando 8.

KA: É. É no com nenhuma, né?

JE: Não sei. Deixa eu ver se esse aqui tá certo. (Referindo-se ao cubo 5x5x5. Soma os resultados de suas contagens. Simultaneamente, KA começa a construir o cubo 4x4x4)

JE: Quantos tem nesse de 5?

KA: 125.

JE: Esse aqui também tá errado. Tem 122. fiz alguma coisa errada.

KA: Tá, deixa eu tentar dessa vez. Com 3, são sempre 8. Com 2, agora: 1, 2, 3, [...] 12 (na face superior) mais 12 que são de baixo, 24. 25, 26, 27, [..] 36 (contando nas faces laterais)

JE: Tá certo. Agora só falta com 1 e com nenhuma.

KA: Com 1, [es]pera aí. 1, 2, 3, [...] 9 (na face superior) mais 9, 18. 19, 20, 21, [...] 54 (contando nas faces laterais)

JE: Certo. Agora só com nenhuma tá faltando.

KA: Com nenhuma são os de dentro, né. Dentro vai ter 9 aqui (apontando para a segunda linha de cubinhos) mais 9, 18, mais 9, 27.

JE: Ah! Então [foi] aqui que eu errei.

(JE conserta seu registro. KA registra e usa a calculadora para conferir a quantidade de cubinhos)

KA: 125, certinho. Agora só o de 4. Vamos desmontar e fazer o de 4.

(Ka, JE e DA retiram cubinhos até deixar o cubo no formato 4x4x4)

KA: Vamos lá. Primeiro, a quantidade de 3. de 3 é 8, né... (registra)

Agora com 2: 1, 2, 3, [...] 22. A gente tinha colocado 16, isso que tá errado... (registra) Agora acho que o resto tá certo.

(Pega a calculadora e confere) 62. Tá faltando 2. deve ser no nenhum...

4, mais 4, 8... (apontando para a 2ª e a 3ª linhas) Então tá certo.

Com 1 face: 1, 2, 3, 4, com os de baixo, 8, 16, 24. Tá certo. Será que tem 64 mesmo?

(Conta 16 cubinhos numa face e pede para JE multiplicar, na calculadora, por 4)

JE: 64.

KA: Vamos ver de novo com 2 faces: 1, 2, 3, 4, [...] 20. 20? [Es]pera aí! De novo: 1, 2, 3, [...] 24. Tá certo.

(Ka, JE e DA lêem as instruções da tarefa)

KA: (para a pesquisadora) Agora a gente tem que ver qual relação tem aqui, né...

Pesq: É, quando fala em conclusões observando a tabela, vocês vão procurar relações, o que de interessante vocês descobriram... Tudo vocês vão registrar.

(KA faz alguns cálculos. JE e DA observam)

KA: 12, 24 e 36 tem na tabuada do 4, né? Então, o próximo número, no de 6 arestas, poderia ser... 12 é 3, 6, 9, 4 vezes 12... Então o próximo, com 6 arestas, teria 48 cubinhos com duas faces. Anote aí, Je.

JE: Vai, fala.

KA: Deixa eu pensar. O número de cubos de 2 faces pintadas vai ser sempre na tabuada do 4, contando de 3 em 3. Por exemplo, 3, 9, 12...

(JE registra)

KA: Com 3 faces pintadas vai ser sempre 8 cubinhos, pois o cubo tem 8 vértices. É vértices, né? (dirigindo-se para a pesquisadora)

Pesq: Sim.

KA: Agora vamos ver: 6, 24 e 54. Com 1 face pintada sempre tem na tabuada do 6. 6 vezes 1 é 6, 6 vezes 4 é 24, 6 vezes...

JE: 9.

KA: Muito bem! 6, 4, 9

JE: Hã? 1, 4 e 9.

KA: É, 1, 4 e 9.

JE: Sempre de 4 em 4. Tipo: 6, 7, 8, 9. Não... (contando nos dedos, um dedo para cada numeral) 1, 2, 3, 4, 5, 6... Ih!

KA: Olha aqui: deu assim... (sinaliza a coluna de resultados) 12, 8, 6 e 1. Na do 4 repetiu um número que multiplicado por 4dá 54? (faz na calculadora) Não... (reflete olhando para a tabela) 4 vezes 6 dá 24, 3 vezes 2 dá 6, 6 vezes 9 é 54. E daí?

Pesq: Por que vocês não fazem o cubo de aresta 6 para ver se dá certo?

(KA e JE fazem o cubo de aresta 6. KA começa a contar, se perde na contagem. JE conta 48 cubinhos de 2 faces)

JE: Você assistiu o filme “O cubo” ?

KA: Não, nem quero.

(As três meninas riem. Entreolham-se. Mais alguns minutos infrutíferos. JE faz algum cálculo na calculadora, mas não comunica)

KA: Acho que quero parar por aqui. Não consigo mais pensar...

Pesq: As suas colegas também querem?

KA: Vamos parar?

(JE e DA sorriem e acenam positivamente com a cabeça. KA completa a tabela no relatório a ser entregue)

Pesq: Vocês preferem fazer o relatório individual em casa e trazer amanhã?

JE e DA: Sim...

JE: É melhor!

ANEXO 8 – Modelo de Autorização

AUTORIZAÇÃO

Autorizo a professora *Rosangela Perussi de Camargo* a utilizar, em sua pesquisa de Mestrado, os dados coletados nos questionários, relatórios e durante as atividades investigativas.

Nome da aluna: ....

Assinatura dos pais/responsáveis: ....

Campo Magro, ... de .... de 2005.

ANEXO 9 – Registro escrito contendo as conclusões da primeira tarefa

(2) 1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 1

1 9 36 84 126 126 84 1

(3) Somando os números da linha anterior. Começando e terminando pelo nº 1, somando os números de 2 em 2

(4) Na soma das linhas vertical e diagonal a soma vai ser a mesma, o que não ocorre na horizontal, pois nela o que ocorre é que somando os números dela vai resultar num valor que somado com ele mesmo, resultará na soma da próxima linha.

(5) É possível pois se sabemos o valor da soma da linha 19ª é só somar esse valor com ele mesmo e saberemos a soma da 20ª linha.

ANEXO 10 – Registro escrito contendo as conclusões da segunda tarefa

A princípio pensamos que o número de cubos de 2 faces pintadas estaria sempre na tabuada do 4 contando de 3 em 3 ex: 3, 6, 9 (4x3 - 4x6 ...) após mais algumas observações notamos que isso não ia acontecer sempre.

O número de cubos com 3 faces pintadas sempre será 8, pois um cubo tem 8 vértices não importa seu tamanho.

Para observarmos melhor a relação entre o número de cubos construímos essa tabela:

nº de arestas	com 3	com 4	com 5
CUBOS. U.	27	64	125
2 FACES PINT.	12	24	36
3 FACES PINT.	8	8	8
1 FACE PINT.	6	24	54
NENHUMA	1	8	27