UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CENTRO POLITÉCNICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JEFERSON ZAPPELINI PERTY

FIBRADOS VETORIAIS E MÓDULOS PROJETIVOS

CURITIBA - PR
2016-08-31

JEFERSON ZAPPELINI PERTY

FIBRADOS VETORIAIS E MÓDULOS PROJETIVOS

Dissertação apresentado ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Hoefel

CURITIBA - PR

2016

P469f Perty, Jeferson Zappelini
Fibrados vetoriais e módulos projetivos / Jeferson Zappelini Perty. – Curitiba, 2016.
76 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Eduardo Hoefel.

1. Matemática. 2. Fibrados Vetoriais. 3. Módulos Projetivos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Hoefel, Eduardo. III. Título.

CDD: 510

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JEFERSON ZAPPELINI PETRY**, intitulada: "**Módulos Projetivos e Fibrados Vetoriais**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 31 de Agosto de 2016.

Prof EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Prof OLIVIER BRAHIC
Avaliador Interno (UFPR)

Mari Sano
Prof MARI SANO
Avaliador Externo (UTFPR)

ATA Nº 073

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia trinta e um de Agosto de dois mil e dezesseis às 14:00 horas, na sala Anfiteatro B, Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **JEFERSON ZAPPELINI PETRY** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada: **"Módulos Projetivos e Fibrados Vetoriais"**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL (UFPR), MARI SANO (UTFPR), OLIVIER BRAHIC (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 31 de Agosto de 2016.

Prof EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Prof OLIVIER BRAHIC
Avaliador Interno (UFPR)

Mari Sano
Prof MARI SANO
Avaliador Externo (UTFPR)

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo apoio durante todos os anos de estudos, sem eles eu nada seria.

Agradeço a todos os meus professores, por tudo que me ensinaram, em especial ao meu orientador pelo auxílio e tempo despendido para que este trabalho se torna-se real.

Agradeço a todos que, direta ou inderetamente, me ajudaram ou contribuíram, de certa forma, para que eu chegasse até o presente momento. Aos amigos de longa data Maicon Neddel, Caio Figueiredo, Thiago Rosa, José Sausen, Giorgio Diniz, Anderson Nascimento, Alexandre Orthey. E também aos novos amigos, que fizeram um breve, porém grande papel em minha vida, Alan Diego, Felipe Tokarski, Leonel Fernandes, Marcelo Ferreira, Paula Neuburger, Barbara Iha.

Por fim, meu mais sinceros agradecimentos a Fernanda Medeiros, por todo suporte, atenção, paciência, afeto e amor dedicados a mim nesta jornada.

All we have to decide is what to do with the time thats is given us.

J.R.R. Tolkien

RESUMO

Entre 1935 e 1940 tornou-se parte do ambiente matemático a idéia de fibrados, graças ao trabalho do matemático Hassler Whitney. Em 1962 Richard G. Swan mostrou ao mundo que existe uma correspondência muito bem definida entre o módulo de seções de fibrados vetoriais e módulos projetivos. No presente trabalho faremos um estudo partindo de definições topológicas e algébricas básicas, passando pelas definições gerais e estruturais de fibrados vetoriais, tanto quanto as características de fibrados vetoriais em alguns espaços topológicos bem conhecidos. Por fim veremos que a correspondência entre fibrados vetoriais e módulos projetivos nos dá uma forma nova de verificar a projetividade de alguns espaços.

Palavras-chave: Fibrados; Fibrados Vetoriais; Módulos; Módulos Projetivos; Módulo de Seções.

ABSTRACT

Between 1935 and 1940 it became part of the mathematical environment the idea of bundles, thanks to the work of the mathematician Hassler Whitney. In 1962 Richard G. Swan showed the world that there is a correspondence well defined between the module of sections of vector bundles and projective modules. In this work we will do a study starting from topological and algebraic basics definitions, going through the general and structural definitions of vector bundles, as well as the characteristics of vector bundles on some topological spaces well known. Finally we see that the correspondence between vector bundles and projective modules gives us a new way to check projectivity of some spaces.

Key-words: Bundles; Vector Bundles; Modules; Projective Modules; Modules of Sections.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por volta dos anos 1935 e 1940 o matemático Hassler Whitney entregou ao mundo matemático as primeiras definições de fibrados. Ao refinar-se a definição de fibrados, torna-se possível classifica-los conforme algumas características muito interessantes. Um destes refinamentos é quando acrescentamos a hipótese de que o fibrado é localmente trivial, assim definindo um fibrado vetorial.

Fibrados vetoriais possuem características muito interessantes, tais como a preservação de linearidade entre as fibras numa determinada vizinhança, a possibilidade de se escrever os elementos do fibrado através de finitas seções locais, porém os melhores aspectos surgem ao refinarmos a base do fibrado, escolhendo espaços bases particulares tais como espaços paracompactos, normais, Hausdorff compactos bem como variedades suaves. Em cada um destes espaços revelam-se características interessantíssimas, e estas características implicam em propriedades notáveis no módulo de seções de cada fibrado vetorial.

Em 1962 Richard G. Swan mostrou em seu artigo *Vector Bundles and Projective Modules* que existe uma correspondência muito evidente entre o módulo de seções de fibrados vetoriais sobre espaços Hausdorff compactos e módulos projetivos finitamente gerados. Esta relação se torna muito evidente ao fazermos a análise dos fibrados vetoriais sobre cada espaço topológico. Quando analisamos os fibrados sobre os espaços paracompactos, adquirimos a possibilidade de criar um produto interno no fibrado que varie continuamente sobre o espaço base, e este produto nos permite tomar o complemento "ortogonal"de cada subfibrado vetorial. Ao analisarmos fibrados vetoriais sobre espaços normais, temos a viabilidade de extender as seções locais para seções globais de forma que sejam equivalentes numa determinada vizinhança, porém a melhor característica que obtemos com espaços normais, é a garantia da existência de um único morfismo de fibrados vetoriais para cada morfismo de módulo de seções, que sejam equivalentes. Por fim, ao analisarmos os fibrados sobre espaços Hausdorff compactos, obtemos uma quantidade finita de seções que gerem todo o fibrado, e essa característica combinada com as ditas anteriormente é que irá nos permitir mostrar a equivalência enunciada por Swan.

Ao analisarmos alguns espaços topológicos, facilmente percebemos que as variedades possuem a estrutura de espaços normais e paracompactos, consequentemente os fibrados sobre variedades possuem as caracteristicas descritas acima, mas o que possibilita a correspondência entre fibrados vetoriais e modulos projetivos são as finitas seções geradoras do módulo de seções. A fim de garantir este resultado, Jet Nestruev em seu livro *Smooth Manifolds and Observables* faz um refinamento na definição de fibrados vetoriais, para que o fibrado sobre uma variedade suave torne-se também variedade suave, e através da imersão de Whitney e do espaço Grasmmaniano, mostra que todo fibrado vetorial sobre variedade suave conexa, admite um conjunto finito de seções geradoras do modulo de seções, e consequentemente possibilitando mostrar que o resultado de Swan se aplica também a fibrados vetoriais sobre variedades suaves.

Por fim, esta correspondência entre módulos projetivos e fibrados vetoriais, nos permite uma nova forma de analisar módulos projetivos. Veremos três exemplos em que o teorema de Swan pode ser aplicado de uma forma muito interessante. Em um veremos uma espécies de não cancelamento da soma direta, onde temos módulos F, M e N tal que $F \oplus M \approx F \oplus N$, porém M e N não são isomorfos. Noutro exemplo veremos um módulo projetivo não finitamente gerado. Por fim, veremos que a ideia de projetividade, apesar de ser muito geometrica, esbarra em varias anormalidades, assim neste último exemplo veremos como as hipóteses deste teorema são extremamente importantes para que o resultado seja válido.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Topológicos

Nesta seção iremos definir alguns espaços topológicos que serão de extrema importância durante o decorrer desta dissertação, uma vez que cada espaço nos dá características e propriedades importantíssimas que implicarão em ótimas propriedades nos fibrados vetoriais, por exemplo um fibrado vetorial sobre um espaço paracompacto nos permite construir um produto interno em seu espaço total e este produto está diretamente relacionado as partições da unidade. Um fibrado vetorial sobre um espaço normal, nos permite globalizar qualquer seção local de forma que a seção global é identica a seção local em um determinado conjunto aberto, esta construção está diretamente ligada ao Lema de Uryshon. Agora, um dos mais importante espaços para o nosso trabalho são os Hausdorff Compactos, uma vez que primeiramente espaços Hausdorff Compactos são normais e paracompactos, portanto carregam as propriedades ditas anteriormente, mas além disto a compacidade do espaço nos permite construir finitas seções globais de forma que elas gerem todo o fibrado, e esta característica é fundamental para a identificação de módulos projetivos finitamente gerados com módulos de seções de fibrados vetoriais. Segundo Munkres (2000) temos as seguintes definições para tais espaços topológicos.

Definição 1.1.1 *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X, onde $\mathscr{T}$ possui as seguintes propriedades:*

1. *$\emptyset$ e X estão em $\mathscr{T}$.*

2. *A união de elementos de uma subcoleção arbitrária de $\mathscr{T}$ está em $\mathscr{T}$.*

3. *A intersecção de elementos de uma subcoleção finita de $\mathscr{T}$ está em $\mathscr{T}$.*

O conjunto X em que a topologia $\mathscr{T}$ foi especificada é chamado de ***Espaço Topológico****.*

Definição 1.1.2 *Um espaço topológico X é dito* ***Hausdorff*** *se para cada par de pontos distintos x_1, x_2 de X, existirem vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 de x_1 e x_2, respectivamente.*

Definição 1.1.3 *Uma coleção $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X* ***cobre*** *X, ou é uma* ***cobertura*** *de X, se a união de todos os elementos de $\mathscr{A}$ é igual a X. Tal coleção é chamada de* ***cobertura aberta*** *de X se todos os seus elementos forem subconjuntos abertos de X.*

Definição 1.1.4 *Um espaço topológico X é dito* ***Compacto*** *se toda cobertura de X por subconjuntos abertos de X admite uma subcoleção finita que cobre X.*

Exemplo 1.1.5 *A esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é Hausdorff, pois dados $x, y \in S^n$ distintos, podemos escolher uma projeção estereográfica $f : S^n - p \to \mathbb{R}^n$, onde $p \neq x, y$. A projeção estereográfica é um homeomorfismo, assim temos $f(x) \neq f(y)$, logo em $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual e a norma euclidiana, podemos tomar $\epsilon = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{3}$ o que nos dará bolas abertas $B_{f(x)}(\epsilon)$ e $B_{f(y)}(\epsilon)$ disjuntas, e portanto os conjuntos $f^{-1}(B_{f(x)}(\epsilon))$ e $f^{-1}(B_{f(y)}(\epsilon))$ serão abertos e disjuntos.*

A esfera também é compacta, pois é limitada e fechada.

Exemplo 1.1.6 *Qualquer conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ não é compacto, mas é Hausdorff. Para ver tal resultado basta lembrar que a imagem de um compacto por uma função real contínua é também compacto, portanto limitada, assim dado U aberto e y na fronteira de U, temos que a aplicação*

$$f(x) = \frac{1}{|x - y|}$$

é contínua sobre U porém não é uma função limitada, logo U não é compacto.

Definição 1.1.7 *Um espaço topológico X é dito* ***Normal****, se para cada par de conjuntos fechados disjuntos A e B de X, existirem conjuntos abertos disjuntos U e V contendo A e B, respectivamente.*

Exemplo 1.1.8 *O conjunto $A = \{a, b, c\}$ com a topologia $\mathscr{T} = \{A, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ é normal, pois os possíveis conjuntos fechados são $\{A, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ assim dados dois conjuntos fechados disjuntos U e V, temos que U e V também serão abertos, assim temos o espaço A com a topologia $\mathscr{T}$ normal, porém este espaço não é Hausdorff, uma vez que b, c não podem ser separados por abertos disjuntos.*

Se adicionarmos a hipótese de que num espaço normal temos que todo conjunto unitário é fechado, teremos que todo espaço normal é Hausdorff, o que será muito mais interessante para o trabalho com tais espaços

Vejamos um exemplo simples de um espaço Hausdorff não Normal:

Exemplo 1.1.9 *Seja $K = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ e defina a topologia $\mathscr{T}_K$ com base formada pelos conjuntos (a, b) e $(a, b) - K$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Considerando a reta real $\mathbb{R}$ com a topologia $\mathscr{T}_K$ temos que este é Hausdorff, mas não normal. É Hausdorff pois dados $x, y \in \mathbb{R}$ temos que os conjuntos*

$$U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \qquad V = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$$

com $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$, *são abertos disjuntos contendo* x *e* y *respectivamente. Porém não é normal uma vez que os conjuntos* K *e* $\{0\}$ *são fechados e disjuntos, porém todo aberto que contém* 0 *contém também um elemento da forma* $\frac{1}{n}$ *uma vez que a sequência* $\frac{1}{n}$ *tende a* 0.

Teorema 1.1.10 *Todo espaço Hausdorff compacto é normal.*

Teorema 1.1.11 (Lema de Uryshon) *Seja* X *um espaço normal e sejam* A *e* B *subconjuntos fechados disjuntos de* X. *Seja* $[a, b]$ *um intervalo fechado da reta real* $\mathbb{R}$. *Então, existe uma função contínua*

$$f : X \to [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ *para todo* $x \in A$ *e* $f(x) = b$ *para todo* $x \in B$.

Definição 1.1.12 *Um espaço topológico* X *é dito* ***Segundo-Contável*** *se existe uma base enumerável para sua topologia.*

Definição 1.1.13 *Dada uma coleção* $\mathscr{A}$ *de subconjuntos de* X, *diremos que* $\mathscr{B}$ *é um refinamento de* $\mathscr{A}$ *se para cada elemento* $B \in \mathscr{B}$ *existe um elemento* $A \in \mathscr{A}$ *que contém* B.

Definição 1.1.14 *Um espaço topológico* X *é dito* ***Paracompacto*** *se toda cobertura de* X *por subconjuntos abertos de* X *admite refinamento localmente finito* X.

Proposição 1.1.15 *Todo espaço compacto é paracompacto.*

Definição 1.1.16 *Dado um espaço topológico* X *e uma cobertura indexada* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *de* X. *Diremos que a familia de funções continuas* $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *onde*

$$\phi_\alpha : X \longrightarrow [0, 1]$$

é uma partição da unidade em X, *subordinada a* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, *se:*

1. *supp*$(\phi_\alpha) \subset U_\alpha$ *para cada* α;

2. *A família* $\{supp(\phi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ *é localmente finita;*

3. $\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$ *para cada* $x \in X$.

Teorema 1.1.17 *Todo espaço paracompacto admite partição da unidade.*

1.2 Variedades Suaves

Nesta seção iremos definir Variedades Suaves, uma vez que ao refinarmos a definição de fibrados vetoriais sobre variedades, teremos que os próprios fibrados serão também variedades suaves, e assim teremos uma correspondência muito boa entre o fibrado e o espaço Grasmanniano, o qual será definido mais a frente. Vejamos como Lee (2003) define variedades suaves:

Definição 1.2.1 *Se M é um espaço Hausdorff Segundo-Contável, então uma estrutura de Variedade Suave sobre M é uma família de pares $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ onde $U_\alpha \subset M$ é aberto e $\psi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha$ é um homeomorfismo para algum aberto $W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, de forma que satisfaçam as condições:*

1. *Para todos pares α e β onde $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tem-se que a composição $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ é um difeomorfismo entre $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.*
2. *A família $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ é maximal.*

Assim M é dito ***Variedade Suave*** *com dimensão n.*

Exemplo 1.2.2 *Um espaço vetorial n-dimensional V é uma variedade suave. Podemos construir uma topologia sobre V utilizando uma norma qualquer, e esta topologia é independente da norma escolhida. Assim, dado uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ de V, podemos determinar um isomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to V$ por*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Esta aplicação será trivialmente um homeomorfismo, assim o atlas composto pela carta (V, f^{-1}) dará a estrutura de variedade suave para V. Além da topologia ser independente da norma, temos ainda que a estrutura suave é independente da escolha da base, uma vez que existirá uma aplicação definida pela mudança de base que será uma aplicação suave, assim nos dando a compatibilidade entre abertos.

Definição 1.2.3 *Uma cobertura aberta $\{W_i : i \in I\}$ de uma variedade M, é dita* ***cobertura regular*** *se:*

1. *$\{W_i\}$ é enumerável e localmente finita;*
2. *Para cada i existe difeomorfismo $\psi_i : W_i \to B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$;*
3. *A coleção $\{U_i\}$, onde $U_i = \psi^{-1}(B_1(0))$, cobre M.*

Obs.: $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$

Proposição 1.2.4 *Seja M uma variedade suave, então toda cobertura aberta de M possui refinamento regular.*

Definição 1.2.5 *Dado uma variedade suave M e uma cobertura indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de M. Diremos que a familia de funções diferenciáveis $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ onde*

$$\phi_\alpha : M \longrightarrow [0,1]$$

é uma partição da unidade em M, subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, se:

1. *$supp(\phi_\alpha) \subset U_\alpha$ para cada α;*

2. *A família $\{supp(\phi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ é localmente finita;*

3. *$\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$ para cada $x \in M$.*

Veja que neste ponto, como estamos trabalhando com variedades suaves, faz sentido trabalharmos com uma partição da unidade também suaves, uma vez que a própria estrutura suaves da variedade nos dá tal resultado. O teorema a seguir enuncia tal resultado.

Teorema 1.2.6 *Se M é uma variedade suave e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma cobertura aberta de M, então existe partição da unidade subordinada à $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.*

Corolário 1.2.7 *Seja M uma variedade suave. Para qualquer conjunto fechado $A \subset M$ e qualquer conjunto aberto $U \supset A$, existe uma função suave $\varphi : M \to [0,1]$ tal que $\varphi \equiv 1$ em A e $supp\varphi \subset U$. φ é dita função lombada.*

Proposição 1.2.8 *O conjunto $M(n,m;k)$, das matrizes $m \times n$ de posto k, é uma variedade suave de dimensão $k(m+n-k)$.*

Demonstração: Seja $X \in M(n,m;k)$, então a menos de um difeomorfismo que permuta as linhas e colunas da matriz, temos que X pode ser escrito na forma de blocos como

$$X = \begin{pmatrix} A_{k\times k} & B_{k\times(m-k)} \\ C_{(n-k)\times k} & D_{(n-k)\times(m-k)} \end{pmatrix}$$

onde $\det A \neq 0$. Fácilmente vemos que a matriz

$$Y = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{(m-k)} \end{pmatrix}$$

tem posto máximo, assim ao multiplicarmos Y e X obtemos

$$Y \cdot X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

o que nos diz que X possui posto k se e somente se $D = CA^{-1}B$.

Assim, dado a matriz $X_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & C_0A_0^{-1}B_0 \end{pmatrix}$ com $\det A_0 \neq 0$ existirá $\epsilon > 0$ tal que $\det A \neq 0$ se $|A - A_0| < \epsilon$,logo podemos definir os conjuntos

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} : |A - A_0| < \epsilon \right\} \qquad e \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} : |A - A_0| < \epsilon \right\}$$

que nos dá a correspondência

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

que é um difeomorfismo.

Além disto, temos que W é difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^N$ onde

$$N = mn - \dim D = mn - (m-k)(n-k) = k(m+n-k)$$

. Portanto, $M(n,m;k)$ será variedade de dimensão $k(m+n-k)$. ■

Proposição 1.2.9 *Se N é subvariedadede M com $\dim N < \dim M$, então N tem medida zero em M.*

Proposição 1.2.10 *Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave com $m \geq 2n$, temos que o conjunto $W = \{A \in \mathfrak{M}_n \mid A = B - D_x f,\ rank(B)<n\}$ tem medida nula.*

Demonstração: Afim de verificar este resultado, considere para $k \leq n-1$ a função

$$F_k : M(n,m;k) \times U \to M(n,m;\mathbb{R})$$

onde $F_x(Q,x) = Q - D_x f$, temos que

$$\dim M(n,m;k) \times U = k(n+m-k) + n$$

$$\dim M(n,m;k) \times U \leq (2n-m) + mn - 1$$

$$\dim M(n,m;k) \times U < mn$$

portanto temos que $\mathrm{Im}(F_K)$ tem medida nula para todo $k \leq 2n$ e como temos

$$W = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(F_k)$$

então W também terá medida nula. ■

Vejamos agora que toda variedade suave pode ser imersa em $\mathbb{R}^N$ para um N grande o suficiente:

Teorema 1.2.11 *Seja $F : M \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave, onde M é uma variedade suave de dimensão n e $m \geq 2n$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma imersão suave $G : M \to \mathbb{R}^m$ tal que* $\sup\{\, |G(x) - F(x)|\, , x \in M\} < \varepsilon$.

Demonstração: Seja $\{W_i\}$ uma cobertura regular, ou seja, cada W_i é o domínio de uma carta $\psi_i : W_i \to B_3(0)$ e os conjuntos $U_i = \psi_i{-}1(B_1(0))$ cobrem M. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ defina

$$M_j = \bigcup_{i=1}^{j} U_i$$

considere $M_0 = \emptyset$.

Considere agora, para cada i, a função lombada φ_i, onde $supp\varphi_i \subset W_i$ e $\varphi \equiv 1$ em $\overline{U_i}$.

Seja $F_0 = F$, e suponha que, por indução, nós tenhamos definido funções suaves $F_j : M \to \mathbb{R}^m$, com $j = 1, ..., k-1$ satisfazendo:

1. $\sup_M |F_j - F| < \varepsilon$;
2. se $x \notin W_j$ então $F_j(x) = F_{j-1}(x)$;
3. dF_j é injetiva em cada ponto de $\overline{M_j}$

Para qualquer matriz A de ordem $m \times n$, defina a função $F_A : M \to \mathbb{R}^m$ de forma que

$$F_A(x) = F_{k-1}(x) + \varphi_k(x)Ax$$

Portanto se $x \in M \setminus supp\varphi_k$ temos que

$$F_A(x) = F_{k-1}(x)$$

Assim F_A satisfaz a condição (2) da hipótese de indução, pois $supp\varphi_k \subset W_k$.

Agora iremos restringir a escolha de A.

Primeiramente, pela hipótese de indução (1), temos que existe um $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tal que $|F_{k-1}(x) - F(x)| < \varepsilon_0$ para todo $x \in supp\varphi_k$, pois $supp\varphi_k$ é compacto. Portanto por continuidade existe $\delta > 0$ tal que $|A| < \delta$ implica em:

$$\sup_M |F_A - F_{k-1}| = \sup_{x \in supp\varphi_k} |\varphi(x)Ax| < \varepsilon - \varepsilon_0$$

e portanto

$$\sup_M |F_A - F| \leq \sup_M |F_A - F_{k-1}| + \sup_M |F_{k-1} - F| < (\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 = \varepsilon$$

Assim temos que F_A satisfaz a condição (1).

Por fim, vejamos que a aplicação

$$\Phi : W_k \times M(m \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$$

$$\Phi(x, A) = dF_A(x)$$

possui posto n se A é a matriz nula e se $x \in supp\varphi_k \cap \overline{M}_{k-1}$. Assim, $\Phi(x, A)$ terá posto n em uma vizinhança da matriz nula, ou seja, podemos reduzir a escolha de δ para que $|A| < \delta$ satisfaça essa condição. Assim, temos que em $\overline{M}_{k-1}$ dF_A é injetiva. Para finalizar, mostremos que em $\overline{U}_k$, dF_A também é injetiva e portanto o será em $\overline{M}_k = \overline{M}_{k-1} \cup \overline{U}_k$. Para tal vejamos que em $\overline{U}_k$ temos que $\varphi \equiv 1$, portanto temos que

$$dF_A = dF_{k-1} + A$$

assim, dF_A terá posto n se, e somente se, $A \neq B - dF_{k-1}$ onde B possui posto menor que n. Mas o conjunto de tais matrizes B possui medida nula em $M(m \times n, \mathbb{R})$. Assim, garantimos a existência de tal matriz A, e portanto escolhendo A que satisfaça a construção acima, podemos tomar

$$F_k = F_A$$

Agora, tomando

$$G(x) = \lim_{k \to +\infty} F_k(x)$$

temos que dado $x \in M$, então x pertencerá a finitos conjuntos W_j, sendo N o maior dentre os j's, assim numa vizinhança de x temos que $G \equiv F_N$, portanto G será da forma como enunciado. ∎

1.3 Módulos

Nesta seção iremos enunciar algumas definições e resultados a respeitos de módulos, iremos nos concentrar em dois tipos específicos de módulos os livres e os projetivos, visto que estão diretamente ligados ao resultado principal desta dissertação. Vejamos como Rotman (2009) nos traz tais resultados:

Definição 1.3.1 *Um módulo F sobre um anel comutativo A é dito* ***livre*** *se existir uma base para F.*

Em outras palavras, existe um conjunto de geradores de F, que gera cada elemento de F de forma única, ou seja, existem $\{e_i \in F\}_{i \in I}$ onde para cada $a \in F$

$$a = \sum_{i \in I} a_i e_i$$

com finitos a_i não nulos e únicos.

Exemplo 1.3.2 *Considere o conjunto:*

$$M = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

Temos que por um lado $M = C([0,1])$, anel de funções contínuas sobre $[0,1]$, por outro M é um $C([0,1])$-módulo com as operações:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \qquad & f, g \in M \\ (a \cdot f)(x) &= a(x) \cdot f(x) \qquad & f \in M, a \in C(X) \end{aligned}$$

Assim, temos M um módulo livre visto que a função constante $g(x) = 1$ gera todo o módulo. Para ver tal resultado, tome $f \in M$ devemos determinar $a \in C(X)$ tal que

$$f = a \cdot g$$

Aplicando em $x \in [0,1]$ temos

$$f(x) = a(x) \cdot g(x) = a(x), \qquad \forall x \in [0,1]$$

Portanto $a = f$. E M é gerado de forma única, visto que se existissem $a, b \in C([0,1]$ tais que

$$f = a \cdot g \qquad e \qquad f = b \cdot g$$

Logo teríamos

$$0 = (a - b) \cdot g$$

$$0 = (a(x) - b(x)) \cdot g(x), \qquad x \in [0,1]$$

$$0 = a(x) - b(x), \qquad x \in [0,1]$$

$$a(x) = b(x), \qquad x \in [0,1]$$

O que nos dá $a = b$.

Em geral de tomarmos o módulo $M = C(X)$, o próprio anel de funções, este será livre pelo mesmo motivo descrito no exemplo. Um módulo livre que nos será muito útil, é o módulo de seções de um fibrado trivial, veremos este resultado mais adiante. Agora vejamos a definição de um módulo projetivo:

Definição 1.3.3 *Um módulo P sobre um anel comutativo A é dito* ***projetivo*** *se para qualquer epimorfismo de A-módulos $\phi : Q \to R$ e qualquer homomorphismo $\psi : P \to R$ existir um homomorfismo $\chi : P \to Q$ tal que $\psi \circ \chi = \psi$.*

Ou seja, P é projetivo se sempre for possível determinar χ que faça o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists\chi"'] \arrow[d, "\forall\psi"] \\ Q \arrow[r, "\forall\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

comutar.

Exemplo 1.3.4 *Todo módulo livre F é projetivo. Para verificar esta afirmação, devemos mostrar quem é o homomorfismo χ que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dotted, "\chi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ Q \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

Comutar, ou seja, $\phi \circ \chi = \psi$. Para tal, considere $\phi : Q \to R$ um epimorfismo de A-módulos e $\psi : F \to R$ um homomorfismo. Como F é livre, existe uma base para F, seja ela $\{e_i\}_{i\in I}$. Logo dado $e \in F$ temos

$$e = \sum_{i\in I} a_i \cdot e_i, \qquad a_i \in A$$

com $a_i \neq 0$ para finitos i's. Portanto temos que

$$\psi(e) = \sum_{i\in I} a_i \cdot \psi(e_i), \qquad a_i \in A$$

Por outro lado, tem-se $\psi(e_i) \in R$, logo como ϕ é epimorfismo, temos que para cada $i \in I$, existe um elemento $q_i \in Q$ tal que

$$\phi(q_i) = \psi(e_i), \qquad \forall i \in I$$

Assim, definindo $\chi : F \to Q$ por

$$\chi(e_i) = q_i$$

temos que χ está bem definida pois dado $e \in F$ temos que

$$\psi(e) = \psi\left(\sum_{i\in I} a_i \cdot e_i\right)$$

$$\psi(e) = \sum_{i\in I} a_i \cdot \psi(e_i)$$

$$\psi(e) = \sum_{i \in I} a_i \cdot \phi(q_i)$$

Por ϕ ser morfismo, temos

$$\psi(e) = \phi\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot q_i\right)$$

Assim, basta tomar $q = \sum_{i \in I} a_i \cdot q_i$, para que $\chi(e) = q$. Afim de verificar que χ é um homomorfismo, perceba que dados $e_1, e_2 \in F$ e $\lambda \in A$ e considerando $\chi(e_1) = q_1$ e $\chi(e_2) = q_2$ tem-se

$$\chi(\lambda e_1 + e_2) = q \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi(\lambda e_1 + e_2) = \phi(q)$$

Mas como ψ é homomorfismo e

$$\psi(\lambda e_1 + e_2) = \lambda\psi(e_1) + \psi(e_2)$$

$$\psi(\lambda e_1 + e_2) = \lambda\phi(q_1) + \phi(q_2)$$

$$\psi(\lambda e_1 + e_2) = \phi(\lambda q_1 + q_2)$$

Portanto $\chi(\lambda e_1 + e_2) = \lambda q_1 + q_2$, ou seja, $\chi(\lambda e_1 + e_2) = \lambda\chi(e_1) + \chi(e_2)$. Para verificar que χ é o homomorfismo desejado, basta ver que dado $e \in F$

$$\chi(e) = \sum_{i \in I} a_i \cdot \chi(e_i)$$

$$\chi(e) = \sum_{i \in I} a_i \cdot q_i$$

Assim tem-se

$$\phi(\chi(e)) = \sum_{i \in I} a_i \cdot \phi(q_i)$$

Que por escolha é:

$$\phi(\chi(e)) = \sum_{i \in I} a_i \cdot \psi(e_i)$$

$$\phi(\chi(e)) = \psi\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot e_i\right)$$

O que nos dá $\phi \circ \chi = \psi$.

Vejamos agora algumas equivalências de definição de módulos projetivos.

Proposição 1.3.5 *As seguintes propriedades de um A-módulo P são equivalentes.*

1. *P é projetivo;*

2. *Qualquer epimorfismo $\phi : Q \to P$ de um A-módulo arbitrário em P admite cisão, ou seja, existe homomorfismo $\chi : P \to Q$ tal que $\phi \circ \chi = id_P$;*

3. *Existe A-módulo livre F tal que P é isomorfo a um somando direto de F.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Suponha P projetivo, por definição temos que qualquer epimorfismo de A-módulos $\phi : Q \to R$ e qualquer homomorphismo $\psi : P \to R$ admitem um homomorfismo $\chi : P \to Q$ tal que $\phi \circ \chi = \psi$. Assim basta tomar $R = P$ e $\psi = id_P$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha que dado qualquer epimorfismo $\phi : Q \to P$ de um A-módulo arbitrário em P exista homomorfismo $\chi : P \to Q$ tal que $\phi \circ \chi = id_P$. Tome Q como sendo um módulo livre com base $\{e_p : p \in P\}$, e considere $\phi(e_p) = p$. Por hipótese existe aplicação χ tal que $\phi \circ \chi = id_P$, assim dado $q \in Q$ podemos escrever

$$q = \chi(\phi(q)) + (q - \chi(\phi(q)))$$

o que nos dá $\chi(\phi(q)) \in \operatorname{Im}(\chi)$ e $(q - \chi(\phi(q))) \in \ker(\phi)$. Se $q \in \operatorname{Im}(\chi) \cap \ker(\phi)$ então teríamos $q = \chi(p)$ para algum $p \in P$, e

$$0 = \phi(q)$$

$$0 = \phi(\chi(p))$$

$$0 = p$$

Portanto $q = \chi(p) = 0$. Assim $Q = \operatorname{Im}(\chi) \oplus \ker(\phi)$ onde $P \approx \operatorname{Im}(\chi)$, pois para que $\phi \circ \chi = id_P$ devemos ter χ com posto máximo.

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponha $P \approx P'$ onde $F = P' \oplus S$. Considere um epimorfismo de A-módulos $\phi : Q \to R$ e um homomorfismo $\psi : P \to R$. Então, a menos de um isomorfismo entre P e P', podemos definir $\psi' : F \to R$ por

$$\psi'(p + s) = \psi(p),$$

como mostrado no Exemplo 1.3.4 temos que existe $\chi' : F \to Q$ tal que $\phi \circ \chi' = \psi'$. Assim, definindo $\chi : P \to R$ por

$$\chi(p) = \chi'(p + 0)$$

Temos que dado $p \in P$

$$\phi(\chi(p)) = \phi(\chi'(p + 0))$$

$$\phi(\chi(p)) = \psi'(p + 0)$$

$$\phi(\chi(p)) = \psi(p)$$

o que nos dá $\phi \circ \chi = \psi$, portanto P é projetivo. ∎

Na demonstração da implicação (2) $\Rightarrow$ (3), temos que se P for finitamente gerado por $\{p_i : i \leq n\}$ elementos, então podemos tomar F como o módulo livre gerado por $\{e_i : i \leq n\}$ elementos, e portanto definiríamos $\phi(e_i) = p_i$, e teríamos o mesmo resultado, porém neste caso F também seria finitamente gerado.

Vale ressaltar ainda que há outra equivalência a respeito de módulos projetivos que trabalha com sequências exatas, porém esta não será tão útil para nós quanto as enunciadas anteriormente.

Vejamos agora outra forma de vermos um módulo projetivo.

Lema 1.3.6 *Um A-módulo P é projetivo se, e somente se, existe uma família de elementos $\{a_i : i \in I\} \subseteq P$ e funcionais lineares $\{f_i : i \in I\} \subseteq P^*$ tal que para qualquer $a \in P$ tem-se $f_i(a) = 0$ para quase todos i's, e $a = \sum_i a_i f_i(a)$*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha P projetivo, então pela afirmação (2) da Proposição 1.3.5 temos que dado um módulo livre F e um epimorfismo $\phi : F \to P$, então a projetividade de P nos dará uma cisão $\chi : P \to F$ tal que $\phi \circ \chi = id_P$. Nestas condições, como F é módulo livre, este possui uma base $\{e_i : i \in I\}$, então definindo

$$a_i = \phi(e_i)$$

temos que dado $a \in P$ então

$$\chi(a) = \sum_{i \in I} r_i e_i$$

onde $r_i \in A$ e quase todos $r_i = 0$. Portanto, definindo $f_i : P \to A$ por

$$f_i(a) = r_i$$

temos que $f_i(a) = 0$ para quase todo i, e por fim

$$a = (\phi \circ \chi)(a)$$

$$a = \phi\left(\sum_{i \in I} r_i e_i\right)$$

$$a = \sum_{i \in I} r_i \phi\left(e_i\right)$$

$$a = \sum_{i \in I} f_i(a) a_i$$

como ϕ é sobrejetiva então P será gerado por $\{a_i = \phi(e_i) : i \in I\}$.

($\Leftarrow$) Suponha que existam elementos $\{a_i : i \in I\} \subseteq P$ e $\{f_i : i \in I\} \subseteq P^*$ assim como enunciado. Defina F como um módulo livre com base $\{e_i : i \in I\}$, e defina também a aplicação $\phi : F \to P$ dada por

$$\phi(e_i) = a_i$$

basta agora determinar $\chi : P \to F$ tal que $\phi \circ \chi = id_P$, pois assim pela Proposição 1.3.5 teremos P projetivo. Assim sendo, considere

$$\chi(a) = \sum_{i \in I} f_i(a) e_i$$

por hipótese, este somatório é finito, para cada a, e tem-se

$$\phi(\chi(a)) = \phi\left(\sum_{i \in I} f_i(a) e_i\right)$$

$$\phi(\chi(a)) = \sum_{i \in I} f_i(a) \phi(e_i)$$

$$\phi(\chi(a)) = \sum_{i \in I} f_i(a) a_i$$

$$\phi(\chi(a)) = a$$

o que nos dá o resultado. ■

No Capítulo 5 veremos alguns exemplos de módulos projetivos que não são livres.

1.4 Homotopias

Nesta seção veremos algumas definições e propriedades referêntes a homotopias, o principal resultado que buscamos daqui são a respeito de espaços contráteis, pois nestes obteremos propriedades excelentes nos fibrados vetoriais. Vejamos como

Definição 1.4.1 *Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Diz-se que f é **homotópica** à g se existir uma função contínua $F : X \times I \to Y$ tal que*

$$F(x, 0) = f(x) \qquad e \qquad F(x, 1) = g(x)$$

para cada $x \in X$, onde $I = [0, 1]$. A aplicação F é dita uma homotopia entre f e g. Se f é homotópica à g denotamos $f \simeq g$.

Exemplo 1.4.2 *Considerando as funções $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ onde $f(x) = x$ função identidade, e $g(x) = c$ função constante com $c \in [0, 1]$ temos que $f \simeq g$, para tal vejamos que a aplicação $F(x, t) = (1 - t)x + c \cdot t$ é uma homotopia entre f e g*

$$F(x, 0) = (1 - 0)x + c \cdot 0 \qquad F(x, 1) = (1 - 1)x + c \cdot 1$$

$$F(x,0) = x \qquad F(x,1) = c$$

$$F(x,0) = f(x) \qquad F(x,1) = g(x)$$

Facilmente vê-se que F é contínua, pois é uma combinação de contínuas. Portanto temos f homotópica a g

Definição 1.4.3 *Um espaço topológico X é dito contrátil se as aplicações identidade e constante são homotópicas.*

No caso do Exemplo 1.4.2 temos que o espaço $[0,1]$ é contrátil. Podemos ainda extender este resultado para qualquer intervalo $[a,b]$.

Proposição 1.4.4 *Se X ou Y é contrátil então toda aplicação contínua $f : X \to Y$ é homotópica a aplicação constante.*

Demonstração: Suponha X contrátil e seja F uma homotopia entre $id, c : X \to X$, onde $id(x) = x$ e c é uma função constante. Assim, podemos definir

$$K : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

$$K(x,t) = f(F(x,t))$$

assim teremos

$$K(x,0) = f(F(x,0))$$

$$K(x,0) = f(id(x))$$

$$K(x,0) = f(x)$$

Por outro lado temos

$$K(x,1) = f(F(x,1))$$

$$K(x,1) = f(c)$$

$$K(x,1) = p$$

Onde p é uma constante. Portanto temos que K é uma homotopia entre f e a aplicação constante p.

Por outro lado suponha Y contrátil. Seja F uma homotopia entre $id, c : Y \to Y$, onde $id(y) = y$ e c é uma função constante. Assim, definimos

$$K : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

$$K(x,t) = F(f(x),t)$$

Assim, temos que

$$K(x,0) = F(f(x),0) \qquad K(x,1) = F(f(x),1)$$

$$K(x,0) = f(x) \qquad K(x,1) = c$$

portanto f é homotópica à c. ■

Estes resultados serão de extrema importância quando definirmos os fibrados vetoriais sobre um espaço contrátil, que nos dará como principal consequencia que o fibrado será trivial, consequentemente o módulo de seções será livre.

Capítulo 2

Fibrados Vetoriais

Vejamos agora a definição de fibrados vetoriais e suas principais características. Comecemos pela definição dada por Milnor e Stasheff (1974).

2.1 Definição

Definição 2.1.1 *Um **Fibrado Vetorial** ξ sobre um espaço topológico X, dito **Espaço Base**, é uma tripla $\xi = (E(\xi), p, X)$, onde:*

1. *$E(\xi)$ é um espaço topológico dito **Espaço Total***

2. *$p : E(\xi) \to X$ é uma aplicação continua sobrejetiva dita **projeção**.*

3. *Para cada $x \in X$, $p^{-1}(x) = F_x(\xi)$ possui a estrutura de um espaço vetorial, este dito **fibra** de ξ em x.*

4. ***(Condição de Trivialização Local)** Para cada $x \in X$ existem vizinhança U de x, um natural n e um homeomorfismo $\phi : p^{-1}(U) \to U \times K^n$ de forma que ϕ restrito à $p^{-1}(y)$ é um K-isomorfismo para todo $y \in U$.*

Em outras palavras cada fibra de ξ tem o formato de um espaço K-vetorial de dimensão finita. Porém esta dimensão não necessariamente será constante, ela pode variar conforme tomamos diferentes fibras, mas certamente ela será localmente constante, uma vez que, pela definição, todas as fibras correspondentes aos elementos que pertencerem a vizinhança U serão isomorfos ao espaço K^n, para algum n.

Sempre que for possível tomar $U = X$ diz-se que ξ é um fibrado vetorial trivial,

Exemplo 2.1.2 *Considere E como o seguinte subconjunto do $\mathbb{R}^3$:*

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) = z \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right), -1 \leq x \leq 1 \right\}$$

Este conjunto pode ser visto também como

$$E = \left\{ \left(x, u \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right), u \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) \right) \mid u \in \mathbb{R}, x \in [-1,1] \right\}$$

Definindo $p : E \to [-1,1]$ como a projeção na primeira coordenada, temos o fibrado $\xi = (E, p, [-1,1])$ Para cada $x \in [-1,1]$ temos que a fibra $F_x(\xi)$ é a reta, no plano $y0z$, que passa pela origem formando um angulo de $\dfrac{x\pi}{2}$ radianos com o eixo z.

Afim de verificar que ξ é um fibrado vetorial, vejamos a condição de trivialização local. Para tal, seja $x \in \mathbb{R}$ e considere a seguinte aplicação:

$$\phi : U \times \mathbb{R} \longrightarrow p^{-1}(U)$$

$$\phi(x,u) = \left(x, u \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right), u \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) \right)$$

Onde U é uma vizinhança de x. Temos então que ϕ é uma aplicação contínua, uma vez que cada função coordenada é contínua. Para que ϕ seja a trivialização local desejada, precisamos que está tenha inversa contínua. Mas temos que ϕ^{-1} é:

$$\phi^{-1}(x,y,z) = \left(x, y \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) + z \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) \right)$$

Que é contínua. Portanto ϕ é uma trivialização local para x numa vizinhança U. Portanto ξ é um fibrado vetorial sobre $[-1,1]$. Veja que U pode ser tomado como $U = [-1,1]$, portanto ξ é trivial.

Exemplo 2.1.3 *Um exemplo bem simples de um fibrado que não é vetorial é o conjunto:*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \Rightarrow y = 0\}$$

Com a projeção sendo a própria projeção na primeira coordenada. Neste caso, cada fibra de E é a própria reta real exceto em $x = 0$ onde a fibra é nula. Este fibrado não é vetorial exatamente pelo fato da fibra ser nula em $x = 0$, uma vez que em qualquer vizinhança de zero, a dimensão das fibras não é constante, e a trivialização local trata exatamente deste fato.

2.2 Seções

O primeiro, e um dos mais importantes, objetos construidos nos fibrados vetoriais são as seções. Durante toda a analise feita nesta dissertação, vemos que praticamente todos os problemas envolvendo fibrados vetoriais são reduzidos a problemas envolvendo seções, tanto que o principal resultado desta dissertação é dado em termos das seções globais de um fibrado vetorial. Vejamos agora como Milnor e Stasheff (1974).

Definição 2.2.1 *Uma **Seção** de um fibrado ξ sobre um subconjunto $B \subset X$ é uma aplicação contínua $s : B \to E(\xi)$ tal que para todo $x \in B$ tem-se $(p \circ s)(x) = x$*

Em outras palavras, uma seção é uma função onde para cada $x \in B$ esta o associa a um elemento de $F_x(\xi)$ de forma contínua, como se literalmente fatiássemos o fibrado.

Exemplo 2.2.2 *Em um fibrado vetorial ξ, sobre X, qualquer, podemos definir a seção nula onde $s_O : B \to E(\xi)$ é dado por $s_O(x) = O_x$ com O_x sendo a origem da fibra $F_x(\xi)$. A continuidade de s_O está diretamente relacionada com as trivializações locais de ξ, visto para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U de x que nos dá uma trivialização local*

$$\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times K^n$$

Considerando a origem O de K^n temos que $s_O(x) = \phi^{-1}(x, O)$, e este é exatamente a origem de $F_x(\xi)$ pois $\phi^{-1}\mid_{\{x\}\times K^n}$ é um isomorfismo.

Exemplo 2.2.3 *Se considerarmos $\xi = [0,1] \times \mathbb{R}$ temos que uma seção sobre ξ será qualquer função real contínua no intervalo $[0,1]$. Este fibrado é trivial, e veremos na sequencia dos resultados, que todas as seções deste fibrado são geradas pela função identidade em $[0,1]$.*

Definição 2.2.4 (Base Local) *Seja ξ um fibrado vetorial sobre X. Dado $x \in X$, uma vizinhança U de x e seções $s_1, ..., s_k : U \to E_\xi$ contínuas, diz-se que $\{s_1, ..., s_k\}$ formam **uma base local na vizinhança** U **de** x, se $s_1(y), ..., s_k(y)$ é uma base para $F_y(\xi)$, $\forall y \in U$.*

Por comodidade, diremos apenas que $s_1, ..., s_k$ formam uma **base local em** x.

Exemplo 2.2.5 *Na esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ se definirmos $E = \{(x, v) \mid x \in S^2, v \in T_xS^2\}$ Sendo T_xS^2 o conjunto dos vetores tangentes a esfera no ponto x. Temos que E define um fibrado vetorial, visto que dada a aplicação*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - \{(0,0,1)\}$$

$$f(a_1, a_2) = \left(\frac{2a_1}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{2a_2}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{a_1^2 + a_2^2 + 1}\right)$$

Comumente conhecida como Projeção Estereográfica que é um difeomorfismo onde sua inversa é dada por

$$f^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right)$$

Assim, temos que T_xS^2 é gerado pelos vetores $\frac{\partial f}{\partial a_1}(f^{-1}(x))$ e $\frac{\partial f}{\partial a_2}(f^{-1}(x))$, exceto para $x = (0,0,1)$, e como f é difeomorfismo, tem-se que $\frac{\partial f}{\partial a_1}(f^{-1}(x))$ e $\frac{\partial f}{\partial a_2}(f^{-1}(x))$ variam *continuamente em relação a x assim como f^{-1}. Assim, considerando $D_{f^{-1}(x)}f$ como sendo o operador diferencial de f em $f^{-1}(x)$, temos que o homeomorfismo ϕ é dado como*

$$\phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^2$$

Onde $U = S^2 - \{(0,0,1)\}$ e $\phi(e) = (p(e), [D_{f^{-1}(x)}f](e))$. Analagomente se definirmos

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - \{(0,0,-1)\}$$

$$g(a_1,a_2) = \left(\frac{2a_1}{a_1^2+a_2^2+1}, \frac{2a_2}{a_1^2+a_2^2+1}, -\frac{a_1^2+a_2^2-1}{a_1^2+a_2^2+1}\right)$$

Então teremos que $V = S^2 - \{(0,0,-1)\}$ também nos dará uma trivialização local. Portanto E define um fibrado vetorial.

Assim podemos definir as seções $s_1, s_2 : S^2 \to E$ de forma que

$$s_i(x) = \left(x, \frac{\partial f}{\partial a_i}(f^{-1}(x))\right)$$

As seções s_i são contínuas, uma vez que dependem das derivadas parciais de f e da aplicação f^{-1} que são contínuas. E formam uma base para T_xS^2 para todo $x \in U = S^2 - \{(0,0,1)\}$. Assim podemos dizer que s_1, s_2 formam uma base local para x em U.

A proposição a seguir nos dá a garantia de que sempre existirão tais bases locais em um fibrado vetorial.

Proposição 2.2.6 *Seja ξ um fibrado vetorial sobre X. Então existe base local em $\forall x \in X$.*

Demonstração: Dado $x \in X$, como ξ é fibrado vetorial, então deve existir uma trivialização local em x, ou seja, existem vizinhança U de x, um natural n e um homeomorfismo $\phi : p^{-1}(U) \to U \times K^n$ de forma que ϕ restrito à $p^{-1}(y)$ é um K-isomorfismo para todo $y \in U$. Agora considere $e_1, ..., e_n$ base para K^n, logo para cada $y \in U$ temos que $(y, e_1), ..., (y, e_n)$ formam uma base para $\{y\} \times K^n$. Como ϕ é um homeomorfismo K-linear, temos que $\phi^{-1}(y, e_1), ..., \phi^{-1}(y, e_n)$ formam uma base para $F_y(\xi)$. Portanto definindo $s_i : U \to E(\xi)$ com $s_i(x) = \phi^{-1}(x, e_i)$ temos que s_i é contínua, pois ϕ^{-1} também o é, e $s_1(y), ..., s_n(y)$ formará base para $F_y(\xi)$ uma vez que ϕ é homeomorfismo K-linear. ∎

Em alguns espaços bases, cada seção local poderá ser extendida para uma seção global, ou seja, teremos $s : X \to E(\xi)$ o que nos possibilitará analisar a estrutura de módulo do conjunto de tais seções.

Neste ponto, é possível observar a grande importância das seções. Nos próximos resultados veremos o quanto os fibrados e as seções estão bem relacionados, a principal relação entre estes se dá quando analisamos o módulo de seções. Primeiramente, vejamos alguns importantíssimos resultados a respeito das seções:

Proposição 2.2.7 *Seja ξ um fibrado vetorial sobre X. Dado uma seção $s : U \to E(\xi)$ e uma base local $s_1, ..., s_k : U \to E(\xi)$. Então s será contínua se, e somente se, existirem funções contínuas $a_1, ..., a_k : U \to K$ tal que $s(y) = a_1(y)s_1(y) + ... + a_k(y)s_k(y)$.*

Demonstração: Seja $s_1, ..., s_k : U \to E(\xi)$ uma base local sobre U.
($\Leftarrow$) Suponha que existam funções contínuas $a_1, ..., a_k : U \to K$ tal que $s(y) = a_1(y)s_1(y) + ... + a_k(y)s_k(y)$, $\forall y \in U$, logo trivialmente s será contínua.
($\Rightarrow$) Suponha s contínua, considere a trivialização local $\phi : p^{-1}(U) \to U \times K^n$, dado $y \in U$ considere $(y, e_i) = \phi(s_i(y))$ temos que e_i formam base para K^n, portanto temos $\phi(s(y)) = \left(y, \sum_{i=1}^{i=k} b_i e_1\right)$. Seja $p_i : \{y\} \times K^n \to K$ a projeção na i-ésima coordenada, logo $p_i(\phi(s(y))) = b_i$, assim temos:

$$\phi(s(y)) = \left(y, \sum_{i=1}^{i=k} b_i e_1\right)$$

Por linearidade e utilizando as igualdades acima,

$$\phi(s(y)) = \sum_{i=1}^{i=k} b_i \cdot (y, e_i)$$

$$\phi(s(y)) = \sum_{i=1}^{i=k} p_i(\phi(s(y))) \cdot (y, e_i)$$

$$\phi(s(y)) = \sum_{i=1}^{i=k} (p_i \circ \phi \circ s)(y) \cdot \phi(s_i(y))$$

Novamente por linearidade,

$$\phi(s(y)) = \phi\left(\sum_{i=1}^{i=k} (p_i \circ \phi \circ s)(y) \cdot s_i(y)\right)$$

Que implica em,

$$s(y) = \sum_{i=1}^{i=k} (p_i \circ \phi \circ s)(y) \cdot s_i(y)$$

Pois ϕ é homeomorfismo. Por fim temos que

$$a_i(y) = (p_i \circ \phi \circ s)(y)$$

Que é contínua, pois é composição de contínuas. ■

O Lema 2.2.8, a seguir, nos dá um resultado muito importante, no qual uma base de $F_x(\xi)$ pode ser extendida para uma base local numa vizinhança de x, de maneira mais geral um conjunto linearmente independende em $F_x(\xi)$ também o será em uma vizinhança de x.

Lema 2.2.8 *Sejam $t_1, ..., t_k$ seções de ξ sobre uma vizinhança U de x de forma que $t_1(x), ..., t_k(x)$ são linearmente independentes. Então existe uma vizinhança V de x tal que $t_1(y), ..., t_k(y)$ são linearmente independentes para todos $y \in V$.*

Demonstração: Suponha $F_x(\xi)$ com dimensão n, e $t_1, ..., t_k$ seções de ξ sobre uma vizinhança U de x tal que $t_1(x), ..., t_k(x)$ são linearmente independentes. Pela Proposição 2.2.6, existem seções $s_1, ..., s_n$ que formam uma base local numa vizinhança $W \subset U$ de x. Pela Proposição 2.2.7 temos que para cada i:

$$t_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y)s_j(y), \qquad \forall y \in W$$

Definindo a matriz $A(y) = (a_{ij}(y))$, temos que A tem ordem $k \times n$, e como $t_1(x), ..., t_k(x)$ é linearmente independente, então deve existir uma submatriz de $A(x)$ de ordem $k \times k$ que seja inversível. Portando esta submatriz também será inversível em uma vizinhança $V \subset W$ de x, uma vez que o determinante é uma função contínua e podemos tomar a função $G : W \to M(k, k)$ que leva y na submatriz inversível de $A(y)$ que também será contínua, assim tendo uma composição contínua, por fim existirá uma vizinhança V de x em que G associará $y \in V$ a uma submatriz inversível de $A(y)$, logo $t_1(y), ..., t_k(y)$ serão linearmente independentes. ■

2.3 Morfismos

Nesta seção, trabalharemos com as aplicações contínuas entre fibrados vetoriais. Vejamos a definição mais geral dada por Husemöller (1994):

Definição 2.3.1 *Dados dois fibrados vetoriais ξ e η sobre X e Y com as respectivas projeções $p_\xi : \xi \to X$ e $p_\eta : \eta \to Y$. Diz-se que $(f, u) : \xi \to \eta$ é um morfismo de fibrados vetoriais se $f : E(\xi) \to E(\eta)$ e $u : X \to Y$ forem contínuas tal que $p_\eta \circ f = u \circ p_\xi$ e $f |_{F_x(\xi)}: F_x(\xi) \to F_{u(x)}(\eta)$ é um aplicação K-linear.*

Durante o decorrer desta dissertação trabalharemos muito com fibrados sobre o mesmo espaço base de forma que a aplicação entre os espaços totais se sucessa entre as fibras do mesmo ponto. Vejamos

Definição 2.3.2 *Dado dois fibrados ξ e η sobre X, com projeções $p_\xi : \xi \to X$ e $p_\eta : \eta \to X$, respectivamente. Diz-se que $f : \xi \to \eta$ é um morfismo de fibrados sempre que $f : E(\xi) \to E(\eta)$ for contínua com $p_\eta \circ f = p_\xi$ e $f |_{F_x(\xi)}: F_x(\xi) \to F_x(\eta)$ é um aplicação K-linear.*

Obs.: Esta definição é uma restrição da anterior, onde a aplicação $u \equiv id_X$. Em geral nos referiremos a um morfismo como dado na segunda definição. Os casos onde este não se aplica, as aplicações (f, u) estarão explícitas.

O lema a seguir, dado por Milnor e Stasheff (1974), nos dá a primeira forma de equivalência entre fibrados a respeito de isomorfismos:

Lema 2.3.3 *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre X, se $f : E(\xi) \to E(\eta)$ é morfismo de fibrados tal que $f\,|_{F_x(\xi)}$ é isomorfismo $\forall x \in X$, então f é um homeomorfismo, consequentemente ξ é isomorfo à η.*

Demonstração: Dado $x \in X$, tome duas trivializações locais $\phi_\xi : p^{-1}(U) \to U \times K^n$ para ξ e $\phi_\eta : p^{-1}(V) \to V \times K^n$ para η, com U e V vizinhanças de x. Afim de provar o lema, basta mostrar que a aplicação

$$\phi_\eta^{-1} \circ f \circ \phi_\xi : (U \cap V) \times K^n \to (U \cap V) \times K^n$$

é um homeomorfismo. Temos que se $y \in U \cap V$ então $(\phi_\eta^{-1} \circ f \circ \phi_\xi^{-1})(y, a) = (y, b)$ com $a, b \in K^n$, logo existe uma matriz M tal que $b = M \cdot a$, onde $M = [\phi_\eta]^{-1} \cdot [f\,|_{F_y(\xi)}] \cdot [\phi_\xi]$ sendo $f\,|_{F_y(\xi)}$ o isomorfismo das fibras sobre y. Assim, M é inversível, portanto M^{-1} define a aplicação

$$\phi_\xi^{-1} \circ f^{-1} \circ \phi_\eta : (U \cap V) \times K^n \to (U \cap V) \times K^n$$

que é dada por $(\phi_\xi^{-1} \circ f^{-1} \circ \phi_\eta)(y, b) = (y, a)$, com $a = M^{-1} \cdot b$. Como a matriz M depende continuamente de f que por sua vez depende contínuamente de y, temos que M^{-1} dependerá contínuamente de y, assim $\phi_\eta^{-1} \circ f \circ \phi_\xi$ será homeomorfismo, e como ϕ_η e ϕ_ξ são homeomorfismos f também o será, provando o lema. ■

Com o lema anterior, podemos identificar fibrados triviais de uma forma muito útil observando-se apenas as seções, vejamos:

Proposição 2.3.4 *Um fibrado vetorial ξ sobre X é trivial se, e somente se, existirem n seções $s_1, ..., s_n : X \to E(\xi)$ tais que $s_1(x), ..., s_n(x)$ é base de $F_x(\xi)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha ξ trivial, logo existe uma trivialização local $\phi : p^{-1}(U) \to U \times K^n$ onde $U = X$, portanto dado uma base $e_1, ..., e_n$ de K^n defina

$$s_i(x) = \phi^{-1}(x, e_i)$$

Logo s_i será contínua para todo $1 \leq i \leq n$. Como $\phi\,|_{F_x(\xi)}$ é isomorfismo então $s_1, ..., s_n$ será base de $F_x(\xi)$ para todo $x \in X$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que existam n seções $s_1, ..., s_n : X \to E(\xi)$ tais que $s_1(x), ..., s_n(x)$ é base de $F_x(\xi)$ para todo $x \in X$. Definindo $f : X \times K^n \to E(\xi)$ por

$$f(x,a) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i(x),$$

com $a = (a_1, ..., a_n)$. Temos que f é morfismo de fibrados, visto que é combinação de funções contínuas, portanto contínuo. Como $s_1(x), ..., s_n(x)$ é base de $F_x(\xi)$ para todo $x \in X$ e $a \in K^n$, logo $f \mid_{F_x(\xi)}$ é isomorfismo entre as fibras sobre x. Assim pelo Lema 2.3.3 ξ é trivial. ■

Exemplo 2.3.5 *No caso do fibrado $\xi = X \times K^n$ onde K é um corpo e X é qualquer espaço topológico, temos que existem $e_1, ..., e_n$ que formam base para K^n, portanto podemos definir, para todo $i = 1, ..., m$, as seções*

$$\begin{array}{rccc} s_i : & X & \longrightarrow & X \times K^n \\ & x & \longmapsto & (x, e_i) \end{array}$$

Onde $s_1, ..., s_n$ trivialmente geram todas fibras e são contínuas.

Definição 2.3.6 *Dado dois fibrados vetoriais ξ e η com o mesmo espaço base X, de forma que $E(\eta) \subset E(\xi)$. Diremos que η é um **Subfibrado Vetorial** de ξ se para cada $x \in X$ a fibra $F_x(\eta)$ for um subespaço vetorial da fibra $F_x(\xi)$.*

Tendo em vista que a imagem de cada fibra, de um fibrado vetorial, por um morfismo é, com certeza, um subespaço vetorial. Faz-se sentido nos questionarmos se a imagem deste morfismo é necessariamente um subfibrado vetorial, e a resposta é não. Vejamos um exemplo bem simples:

Exemplo 2.3.7 *Seja $\xi = [0,1] \times \mathbb{R}$ podemos definir $f : \xi \to \xi$ por*

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,1] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \times \mathbb{R} \\ & (x, e) & \longmapsto & (x, x \cdot e) \end{array}$$

Temos que $\mathrm{Im}(f)$ é exatamente o fibrado definido no Exemplo 2.1.3 que não é vetorial, pois as fibras numa vizinhança de $x = 0$ não é constante. E temos também que o núcleo

$$\ker(f) = \{(x, e) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mid x \neq 0 \Rightarrow e = 0\}$$

não é um fibrado vetorial pelo mesmo motivo, as fibras em qualquer vizinhança em torno de $x = 0$ não tem dimensão constante.

Vejamos agora as condições para que a imagem e o núcleo de um morfismo sejam fibrados vetoriais.

Proposição 2.3.8 *Seja $f : \xi \to \eta$ um morfismo de fibrados sobre X. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathrm{Im}(f)$ *é subfibrado de η;*

2. $\ker(f)$ *é subfibrado de ξ;*

3. *as dimensões das fibras de* $\mathrm{Im}(f)$ *são localmente constantes.*

4. *as dimensões das fibras de* $\ker(f)$ *são localmente constantes.*

Demonstração: As implicações (1) $\Rightarrow$ (3) e (2) $\Rightarrow$ (4), são consequencias diretas da definição de subfibrados vetoriais.
Para verificar a equivalência (3) $\Leftrightarrow$ (4), basta ver que dado $x \in X$ e uma vizinhança U de x temos que $\dim F_y(\xi) = \dim F_y(\ker(f)) + \dim F_y(\mathrm{Im}(f))$, $\forall y \in U$, portanto se as dimensões das fibras de $\mathrm{Im}(f)$ são localmente constantes consequentemente as dimensões das fibras de $\ker(f)$ também o serão, e vice-versa.
A fim de provar a proposição, mostrar-se-á que (3) $\Rightarrow$ (1) e (3) $\Rightarrow$ (2). Primeiramente (3) $\Rightarrow$ (1), dado $x \in X$, temos, pela Proposição 2.2.6, que existem $s_1, ..., s_n$, seções de ξ, que formam base local em x. Da mesma forma existem $t_1, ..., t_m$, seções de η, formando base local em x. Assim, $f \circ s_1(x), ..., f \circ s_n(x)$ serão geradores de $F_x(\mathrm{Im}(f))$, supondo que $\dim F_x(\mathrm{Im}(f)) = k$ e como as dimensões das fibras de ξ e η são localmente constantes e finitas, existirão k seções s_i de forma que $f \circ s_{i_1}(x), ..., f \circ s_{i_k}(x)$ serão linearmente independentes e geradores de $F_x(\mathrm{Im}(f))$. Por outro lado será possível completar o conjunto $f \circ s_{i_1}(x), ..., f \circ s_{i_k}(x)$ com $m-k$ elementos t_i de forma que tenhamos $f \circ s_{i_1}(x), ..., f \circ s_{i_k}(x), t_{i_{k+1}}(x), ..., t_{i_m}(x)$ linearmente independentes. Pelo Lema 2.2.8 temos que $f \circ s_{i_1}(x), ..., f \circ s_{i_k}(x), t_{i_{k+1}}(x), ..., t_{i_m}(x)$ será linearmente independente em uma vizinhança U de x. Como a dimensão das fibras de η é localmente constante igual a m, então $f \circ s_{i_1}, ..., f \circ s_{i_k}, t_{i_{k+1}}, ..., t_{i_m}$ formará uma base local de η em x. Por fim, o Lema 2.2.8 juntamente com a hipótese de que a dimensão das fibras de $\mathrm{Im}(f)$ são constantes, temos que $f \circ s_{i_1}, ..., f \circ s_{i_k}$ formará uma base local de $\mathrm{Im}(f)$ em x. Portanto $\mathrm{Im}(f)$ é subfibrado de η.
Para verificar (3) $\Rightarrow$ (2), dado $x \in X$, suponha $s_1, ..., s_n$ base local de ξ em x, pela mesma construção anterior, temos que como $f \circ s_1, ..., f \circ s_k$ é uma base local de $\mathrm{Im}(f)$ em x, logo para $i > k$ temos $f \circ s_i(y) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) f \circ s_j(y)$. Defina

$$s'_i(y) = s_i(y) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) s_j(y)$$

Logo $f \circ s'_i = 0$ para $i > k$. Portanto $s'_{n-k}, ..., s'_n$ são seções locais de $\ker(f)$, pois por linearidade temos

$$f \circ s'_i(y) = f\left(s_i(y) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) s_j(y)\right)$$

$$f \circ s_i'(y) = f \circ s_i(y) - f\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y)s_j(y)\right)$$

$$f \circ s_i'(y) = f \circ s_i(y) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) f \circ s_j(y)$$

. Por outro lado temos que $s'_{n-k}, ..., s'_n$ são L.I., uma vez que

$$\sum_{l=n-k}^{m} (b_l(y)s_l'(y)) = 0 \Longrightarrow \sum_{l=n-k}^{n} b_l(y)\left(s_l(y) - \sum_{j=1}^{k} a_{lj}(y)s_j(y)\right) = 0$$

Reagrupando os termos temos:

$$\sum_{l=n-k}^{m} b_l(y)s_l(y) + \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{l=n-k}^{n} b_l a_{lj}(y)\right) s_j(y) = 0$$

E como $s_1, ..., s_n$ são L.I. portanto $b_{n-k}(y), ..., b_n(y) = 0$ para todo y numa vizinhança de x. Por fim, como a dimensão de $F_y(\mathrm{Im}(f))$ é k consequentemente a dimensão de $F_y(\ker(f))$ é $n - k$, e como temos exatamente esta quantidade de seções de $\ker(f)$, então $s'_{n-k}, ..., s'_n$ é base local de $\ker(f)$, portanto subfibrado de ξ. ■

Uma consequência muito boa deste teorema é que mesmo não sabendo que a imagem é um subfibrado vetorial ou, equivalentemente, se as dimensões das fibras são localmente constante, podemos garantir com certeza que essa dimensão não descresce. É fácil ver isso pois, dado um morfismo $f : \xi \to \eta$ temos que $f\mid_{F_x(\xi)}$ é uma aplicação K linear, por tanto existirá uma base, $\{e_1, ..., e_k\}$ para a imagem de $f\mid_{F_x(\xi)}$, portanto este conjunto será linearmente independente em uma vizinhança V de x, que portanto nos dirá que existem ao menos k vetores linearmente independente nas fibras em V, assim $\dim F_y(\mathrm{Im}(f)) \geq k$ para todo $y \in V$.

Definição 2.3.9 (Pull-back) *Seja ξ um fibrado vetorial sobre o espaço X com projeção $p : \xi \to X$, e seja B espaço topológico qualquer. Dado uma aplicação contínua $g : B \to X$ definimos $g^*\xi$ como o fibrado induzido por g sobre B, onde o espaço total de $g^*\xi$ é o subconjunto*

$$E^*(\xi) = \{(x, e) \in B \times E(\xi) \mid g(x) = p(e)\}$$

e a projeção é $p^*(x, e) = x$.

Na definição acima, a aplicação g definirá um morfismo de fibrados g^* de forma que o diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd}
E^* \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "p^*"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

Ou seja $g \circ p^* = p \circ g^*$, a aplicação será naturalmente $g^*(x, e) = e$, uma vez que $e \in F_{g(x)}(\xi)$.

Sendo ξ um fibrado vetorial, teremos que $g^*\xi$ também será um fibrado vetorial, uma vez que dada uma trivialização local de ξ sobre o aberto U

$$\phi : p^{-1}(U) \to U \times K^n$$

Poderemos construir uma trivialização sobre $g^{-1}(U)$, que é aberto em B, da seguinte forma:

$$\psi : (p^*)^{-1}(g^{-1}(U)) \to g^{-1}(U) \times K^n$$

Onde

$$\psi(x, e) = (x, (\pi_2 \circ \phi)(g(x), e))$$

Onde $\pi_2 : U \times K^n \to K^n$ é projeção. A aplicação ψ será uma trivialização para $g^*\xi$, portanto este é fibrado vetorial.

Definição 2.3.10 *Dados dois fibrados vetoriais ξ e η sobre espaços topológicos X e Y respectivamente. Diremos que η é induzido por ξ se existir aplicação suave $g : Y \to X$ de forma que η e $g^*\xi$ sejam isomorfos.*

2.4 Módulo de Seções

Agora iremos definir o conjunto das seções globais contínuas sobre um fibrado vetorial, veremos que este conjunto tem uma estrutura de módulo:

Definição 2.4.1 *Dado um fibrado vetorial ξ sobre X, defina*

$$\Gamma(\xi) = \{s : X \to E(\xi) \mid s \text{ é contínua}\}$$

*Este conjunto é um $C(X)$-Módulo, dito **Módulo de Seções de** ξ.*

Para verificar que $\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$-módulo basta definir as operações:

(i) $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$ com $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$

(ii) $(a \cdot s)(x) = a(x) \cdot s(x)$ com $s \in \Gamma(\xi)$ e $a \in C(X)$

Por relação de continuidade de seções, (s_1+s_2) e $(a\cdot s)$ serão trivialmente contínuas, consequentemente $(s_1+s_2) \in \Gamma(\xi)$ e $(a \cdot s) \in \Gamma(\xi)$.

A definição de Γ nos sugere um funtor entre as categorias de morfismos entre fibrados e a categoria de morfismos entre o módulo de seções destes fibrados, pois dado um morfismo de fibrados $f : \xi \to \eta$ e uma seção $s \in \Gamma(\xi)$ como s e f são contínuas teremos que $f \circ s \in \Gamma(\eta)$, logo definimos o funtor da seguinte forma:

Definição 2.4.2 *Dados dois fibrados vetoriais ξ e η com base X, definimos Γ como um funtor da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma: & Mor(\xi,\eta) & \longrightarrow & Mor(\Gamma(\xi),\Gamma(\eta)) \\ & f & \longmapsto & \Gamma(f) \end{array}$$

De forma que $\forall s \in \Gamma(\xi)$ temos que $\Gamma(f)(s) = f \circ s$.

O primeiro resultado importantíssimo a respeito do módulo de seções é a respeito dos fibrados triviais, vejamos:

Proposição 2.4.3 *Dado um fibrado vetorial ξ sobre X, temos que ξ é trivial se, e somente se, $\Gamma(\xi)$ é um módulo livre.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha ξ trivial, portanto pela Proposição 2.3.4 temos que existem $s_1, ..., s_n : X \to E(\xi)$ que formam base para todas as fibras de ξ e consequentemente temos também que $E(\xi) \approx X \times K^n$, com n sendo a dimensão das fibras. Assim uma seção $s : X \to E(\xi)$ pode ser escrita através do isomorfismo $E(\xi) \approx X \times K^n$ como $s(x) = (x, e)$ e $s_i(x) = (x, e_1)$, logo

$$s(x) = (x,e) = \left(x, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x,e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i(x)$$

Sendo π_i a projeção de (x, e) na i-ésima coordenada temos $\pi_i(x, e) = a_i$ portanto temos que

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i \cdot s_i)(x),$$

como isto é válido para todo x temos

$$s = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \cdot s_i.$$

Além disto essa decomposição é única, uma vez que se existissem $b_1, ..., b_n \in C(X)$ tal que

$$s = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot s_i.$$

Logo teríamos que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i - b_i) \cdot s_i$$

Analisando em x tem-se

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i(x) - b_i(x)) \cdot s_i(x)$$

E como $s_1(x), ..., s_n(x)$ é base conclui-se que

$$\pi_i(x) - b_i(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_i(x) = b_i(x)$$

Como x é arbitrário tem-se $\pi_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto $s_1, .., s_n$ formam uma base para $\Gamma(\xi)$, portanto este é $C(X)$-módulo livre.

($\Leftarrow$) Suponha $\Gamma(\xi)$ um $C(X)$-módulo livre. Logo existem $s_1, ..., s_n$ que geram $\Gamma(\xi)$ de forma única, portanto dado x e e tal que $p(e) = x$ temos que existe $s : X \to E(\xi)$ tal que $s(x) = e$, por outro lado $s = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$ logo

$$e = s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) s_i(x)$$

Assim $s_1(x), ..., s_n(x)$ geram $F_x(\xi)$, e esta forma é única uma vez que outra seção $s' : X \to E(\xi)$ com $s'(x) = e$ teríamos

$$e = s'(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) s_i(x)$$

o que resultaria em

$$0 = s(x) - s'(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i(x) - b_i(x)) s_i(x)$$

que por outro lado resulta em

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) s_i$$

que implica em $a_i = b_i$. Assim temos que $s_1(x), ..., s_n(x)$ é base para $F_x(\xi)$ para todo $x \in X$ portanto ξ é trivial. ■

Este resultado será indispensável para o resultado principal desta dissertação. Para que possamos continuar com a análise dos módulos de seções, primeiramente iremos analisar os fibrados vetoriais sobre alguns espaços topológicos específicos.

Capítulo 3

Fibrados com Espaço Base Especial

Como dito no primeiro capítulo, fibrados vetoriais sobre alguns espaços topológicos específicos geram características extremamente úteis no fibrado, proporcionando a extenção de alguns conhecimentos prévios.

3.1 Espaço Base Paracompacto

Nesta seção iremos trabalhar alguns aspectos particulares de fibrados vetoriais sobre espaços bases paracompactos. Primeiramente definiremos o que é um produto interno em um fibrado.

Definição 3.1.1 *Um produto interno em um K-espaço vetorial V é uma função:*

$$\langle \quad , \quad \rangle : V \times V \to K$$

Tal que:

i) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$

ii) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle^*$, *com* $\langle x, y\rangle^*$ *sendo o conjugado.*

iii) $\langle x, x\rangle > 0$ *se* $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ *se* $x = 0$

Definição 3.1.2 *Um produto interno em um fibrado K-vetorial ξ é uma função:*

$$\langle \quad , \quad \rangle : Y \to K$$

Onde $Y = \{(e_1, e_2) \in E(\xi) \times E(\xi) \mid p(e_1) = p(e_2)\}$. *Dado por*

$$\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle_x.$$

Com $\langle , \rangle_x$ *o produto interno definido em cada fibra* $F_x(\xi)$.

Como o produto interno é definido apenas para espaços vetoriais, e em cada fibra de ξ temos esta estrutura, faz-se sentido que tenhamos um produto que dependa da fibra em questão, porém como temos as trivializações locais, podemos criar este produto de forma que este varie continuamente em relação ao espaço base.

Lema 3.1.3 *Se X é paracompacto, então qualquer fibrado sobre X admite um produto interno.*

Demonstração: Suponha X paracompacto. Para cada $x \in X$, a definição de fibrado vetorial nos dá uma trivialização local numa vizinhança V de x. Considere a família $\{V_\alpha\}$ de tais conjuntos, ou seja, $p^{-1}(V_\alpha) = V_\alpha \times K^{n_\alpha}$. Como X é paracompacto, existirá um refinamento localmente finito $\{U_\alpha\}$ de $\{V_\alpha\}$. Assim para cada α e para cada $x \in U_\alpha$, é possível construir um produto interno na fibra $F_x(\xi) \subset p^{-1}(U_\alpha)$, para tal, basta escolher um produto interno em K^{n_α}, seja $\langle , \rangle_{x,\alpha}$ tal produto interno. Agora, como X é paracompacto, existe uma partição da unidade ψ_α subordinada a $\{U_\alpha\}$. Portanto, dado $e_1, e_2 \in E(\xi)$ com $p(e_1) = p(e_2) = x$ definimos o produto interno de $F_x(\xi)$, independente de α, por:

$$\langle e_1, e_2 \rangle_x = \sum_\alpha \psi_\alpha(x) \langle e_1, e_2 \rangle_{x,\alpha}$$

É fácil ver que esta função é produto interno, verifiquemos as condições $(i), (ii), (iii)$ da Definição 3.1.1:

(i) Dados $e_1, e_2, e_3 \in E(\xi)$ com $p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = x$, logo

$$\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle_x = \sum_\alpha \psi_\alpha(x) \langle e_1, e_2 + e_3 \rangle_{x,\alpha}$$

Como U_α é localmente finito temos que este somatório é finito, e temos também que $\langle , \rangle_{x,\alpha}$ é um produto interno para cada α e para cada $x \in U_\alpha$, portanto:

$$\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle_x = \sum_{\alpha=1}^{k} \psi_\alpha(x) [\langle e_1, e_2 \rangle_{x,\alpha} + \langle e_1, e_3 \rangle_{x,\alpha}]$$

Como o somatório é finito temos:

$$\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle_x = \sum_{\alpha=1}^{k} \psi_\alpha(x) \langle e_1, e_2 \rangle_{x,\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{k} \psi_\alpha(x) \langle e_1, e_3 \rangle_{x,\alpha}$$

$$\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle_x = \langle e_1, e_2 \rangle_x + \langle e_1, e_3 \rangle_x$$

(ii) Dados $e_1, e_2 \in E(\xi)$ com $p(e_1) = p(e_2) = x$, temos

$$\langle e_1, e_2 \rangle_x = \sum_\alpha \psi_\alpha(x) \langle e_1, e_2 \rangle_{x,\alpha}$$

Assim, o conjugado é:

$$\langle e_2, e_1\rangle_x^* = \left(\sum_\alpha \psi_\alpha(x)\langle e_2, e_1\rangle_{x,\alpha}\right)^*$$

Temos que o somatório é finito, por X ser paracompacto, e utilizando propriedades de conjugado temos:

$$\langle e_2, e_1\rangle_x^* = \sum_{\alpha=1}^{k} (\psi_\alpha(x)\langle e_2, e_1\rangle_{x,\alpha})^*$$

$$\langle e_2, e_1\rangle_x^* = \sum_{\alpha=1}^{k} \psi_\alpha^*(x)\langle e_2, e_1\rangle_{x,\alpha}^*$$

Tem-se $\psi_\alpha^*(x) = \psi_\alpha^*(x)$ pois é número real e $\langle e_2, e_1\rangle_{x,\alpha}^* = \langle e_1, e_2\rangle_{x,\alpha}$ pois é produto interno. Logo

$$\langle e_2, e_1\rangle_x^* = \sum_{\alpha=1}^{k} \psi_\alpha(x)\langle e_1, e_2\rangle_{x,\alpha}$$

$$\langle e_2, e_1\rangle_x^* = \langle e_1, e_2\rangle_x$$

(iii) Dado $e \in E(\xi)$ com $p(e) = x$ temos

$$\langle e, e\rangle_x = \sum_\alpha \psi_\alpha(x)\langle e, e\rangle_{x,\alpha}$$

Da definição de partição de unidade tem-se $\psi_\alpha(x) \geq 0$, da definição de produto interno temos que $\langle e, e\rangle_{x,\alpha} \geq 0$, logo

$$\langle e, e\rangle_x \geq 0$$

Agora suponha

$$\langle e, e\rangle_x = 0$$

$$0 = \sum_\alpha \psi_\alpha(x)\langle e, e\rangle_{x,\alpha}$$

Como $\{\psi_\alpha\}$ é partição da unidade logo $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$, e lembrando que $\psi_\alpha(x) \geq 0$, tem-se que ao menos uma $\psi_{\alpha_i}(x) \neq 0$, portanto para que o somatório se anule, temos que $\langle e, e\rangle_{x,\alpha_i} = 0$ o que nos dá $e = 0$.

Por fim, é facil ver que este produto interno é contínuo em x, pois dada uma base local $s_1, ..., s_k$ em uma vizinhança U de x, e dados $e_1, e_2 \in E(x)$ com $p(e_1) = p(e_2) = x$, tem-se

$$e_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i(x)s_i(x); \qquad e_2 = \sum_{j=1}^{k} b_j(x)s_j(x)$$

Assim, tem-se:

$$\langle e_1, e_2\rangle_x = \sum_{\alpha} \psi_\alpha(x) \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i(x)s_i(x), \sum_{j=1}^{k} b_j(x)s_j(x) \right\rangle_{x,\alpha}$$

Pela linearidade do produto interno temos:

$$\langle e_1, e_2\rangle_x = \sum_{\alpha} \psi_\alpha(x) \sum_{i=1}^{k} a_i(x) \sum_{j=1}^{k} b_j(x) \langle s_i(x), s_j(x)\rangle_{x,\alpha}$$

Como o somatório em α é finito, e numa vizinhança de x tem-se $\langle s_i(x), s_j(x)\rangle_{x,\alpha}$ constantes para cada $1 \leq i, j \leq k$, temos que $\langle e_1, e_2\rangle_x$ é uma combinação de funções contínuas em x, portanto contínua. ■

Quando definimos produto interno em espaços vetoriais n-dimensionais, um resultado muito importante é com relação ao complemento ortogonal de um subespaço vetorial. Assim, afim de utilizar este resultado, primeiramente vejamos como Hausmöller define soma direta entre fibrados.

Definição 3.1.4 *Se ξ, η são dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço X, definimos pela* ***soma direta*** *$\xi \oplus \eta$ como sendo o fibrado vetorial com:*

1. *Espaço Total: $E(\xi \oplus \eta) = \{(e_1, e_2) \in E(\xi) \times E(\eta) \mid p_\xi(e_1) = p_\eta(e_2)\}$*

2. *Projeção: $p : E(\xi \oplus \eta) \to X$ com $p(e_1, e_2) = p_\xi(e_1) = p_\eta(e_2)$*

3. *Fibras: $F_x(\xi \oplus \eta) = F_x(\xi) \times F_x(\eta)$*

Para verificar que $\xi \oplus \eta$ é de fato um fibrado vetorial, construiremos as trivializações locais deste. Dado $x \in X$ como ξ e η são fibrados vetoriais, existem trivializações

$$\phi_\xi : U \times K^n \to p_\xi^{-1}(U); \qquad \phi_\eta : U \times K^m \to p_\eta^{-1}(U)$$

numa vizinhança U de x. Agora defina

$$\phi : U \times K^{n+m} \to p^{-1}(U)$$

Por $\phi(x, e_n, e_m) = [\phi(x, e_n), \phi(x, e_m)]$. Facilmente vemos que ϕ é contínua, e temos que se

$$\phi^{-1}(e_1, e_2) = \big(x, \pi(\phi_\xi^{-1}(e_1, e_2)), \pi(\phi_\xi^{-1}(e_1, e_2))\big)$$

Onde $\pi : U \times K^l \to K^l$ é a projeção. O que nos dá ϕ^{-1} contínua, portanto homeomorfismo. Esta definição é comumente chamada de soma de Whitney.

Vejamos agora a principal propriedade de fibrados vetoriais sobre espaços paracompactos:

Proposição 3.1.5 *Se X é paracompacto, então qualquer subfibrado vetorial η de um fibrado vetorial ξ é um somando direto.*

Demonstração: Sejam X paracompacto, ξ fibrado vetorial sobre X e η subfibrado vetorial de ξ. Pelo Lema 3.1.3, é possível construir um produto interno $\langle , \rangle_x$ em ξ, que varia continuamente em função de x. Agora, dado $x \in X$, como $F_x(\eta)$ é subespaço vetorial de $F_x(\xi)$, utilizando o produto interno $\langle , \rangle_x$ é possível determinar o complemento ortogonal de $F_x(\eta)$, seja ele W, e portanto como as dimensões são finitas teremos $F_x(\xi) = F_x(\eta) \oplus W$, considere a seguinte função:

$$f_x : F_x(\xi) \to F_x(\eta)$$

como sendo a projeção ortogonal em $F_x(\eta)$. Dado uma base de seções $s_1, .., s_k$ de η em uma vizinhança U de x, é possível ortonormalizá-la, seja $e_1, .., e_k$ tal base, assim teremos

$$f_x(e) = \sum_{i=1}^{k} \langle e, e_i(x) \rangle_x e_i(x)$$

, portanto $f_x(e) = e$ se $e \in F_x(\eta)$ e $f_x(e) = 0$ se $e \in W$. Assim obtemos

$$\mathrm{Im}(f_x) = F_x(\eta); \qquad \ker(f_x) = W$$

Como f_x depende continuamente de x, teremos um morfismo de fibrados $f : \xi \to \eta$. Assim sendo, temos $\mathrm{Im}(f) = \eta$ e definindo $\zeta = \ker(f)$, que será subfibrado de ξ pela Proposição 2.3.8, obetemos que $\xi = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$ uma vez que

$$F_x(\xi) = F_x(\mathrm{Im}(f)) \oplus F_x(\ker(f))$$

Como $\mathrm{Im}(f) = \eta$, a proposição está provada. ∎

Um exemplo bem simples desta proposição é quando analisamos o espaço tangente a esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Exemplo 3.1.6 *Seja $TS^2 = \{(x, v) \mid x \in S^2, v \in T_xS^2\}$, identico ao Exemplo 2.2.5. Este é dito o espaço tangente da esfera, que como vimos é um fibrado vetorial, além disto TS^2 é um subfibrado vetorial de*

$$E(\xi) = S^2 \times \mathbb{R}^3$$

e pela proposição anterior TS^2 deve ser um somando direto de ξ. Se definirmos o fibrado ν onde

$$E(\nu) = \{(x, e) \mid x \in S^2, e = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Temos que a fibra de ν sobre x será ortogonal ao espaço tangente T_xS^2, pois pela própria definição, tem-se T_xS^2 conjunto dos vetores ortogonais a x, e consequentemente serão ortogonais a um múltiplo de x. Portanto temos $\nu \oplus TS^2$ que por sua vez é trivial uma vez *que* $F_x(\nu) \oplus F_x(TS^2) \approx \mathbb{R}^3$ *para todo* $x \in S^2$*, portanto as seções*

$$s_i(x) = (x, e_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

com $\{e_1, e_2, e_3\}$ *base de* $\mathbb{R}^3$*, geram* $\Gamma(\nu \oplus TS^2)$ *de forma única. Facilmente vemos que* TS^2 *é projetivo uma vez que é somando direto de um livre, porém não será livre, veremos uma generalização deste exemplo para o* TS^n *que seguirá basicamente a mesma ideia.*

3.2 Espaço Base Normal

Nesta seção iremos explorar as particulariedades de espaços normais, um importantíssimo resultado desta seção é a garantia de podermos tomar uma seção contínua em um aberto $U \subset X$ e extendermos esta seção para todo X sem perdermos a sua continuidade. Vejamos:

Lema 3.2.1 *Sejam* X *espaço normal,* ξ *um fibrado* K*-vetorial sobre* X*,* U *vizinhança de* x *e* $s : U \to E(\xi)$ *uma seção de* ξ *sobre* U*. Então existe uma seção* $s' \in \Gamma(\xi)$ *tal que* $s'(y) = s(y)$ *para todo* y *numa vizinhança de* x*.*

Demonstração: Sejam X, ξ, U vizinhança de x e s como descritos acima. Como X é normal temos que existem V e W, vizinhanças de x, tal que

$$\overline{W} \subset V \qquad \overline{V} \subset U$$

O Lema de Uryshon garante que existe uma função $f : X \to [0, 1]$ com $f(w) = 1$, para todo $w \in \overline{W}$ e $f(y) = 0$, para todo $y \in X - V$. Portanto se s é uma seção de ξ numa vizinhança U de x, definindo $s' : X \to \xi$ por $s'(x) = f(x) \cdot s(x)$ temos que $s'(x) = 0$, $\forall x \in X - V$ e $s'(x) = s(x)$, para todo $x \in \overline{W}$, como $W \subset \overline{W}$ segue o Lema. ∎

Corolário 3.2.2 *Seja* X *espaço normal e* ξ *um fibrado* K*-vetorial sobre* X*. Então para qualquer* $x \in X$ *existem seções* $s_1, ..., s_n \in \Gamma(\xi)$ *que formam uma base local numa vizinhança* U *de* x*.*

Demonstração: Dados $s_1, ..., s_n$ base local de ξ em uma vizinhança U de x, temos pelo Lema 3.2.1 que existem $s'_1, ..., s'_n : X \to E(\xi)$ tais que $s'_i(y) = s_i(y)$ para todo $y \in U_i$ vizinhança de x. Definindo $W = \cap_{i=1}^n U_i$ temos que para todo $y \in W$ $s'_i(y) = s(y)$ como $W \subset U$ logo $s'_1, ..., s'_n$ é base local de ξ na vizinhança W de x. ∎

Corolário 3.2.3 *Sejam* X *espaço normal,* ξ *e* η *fibrados* K*-vetorial sobre* X*. Se* $f, g : \xi \to \eta$ *são morfismos de fibrados e* $\Gamma(f) = \Gamma(g) : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ *então* $f = g$*.*

Demonstração: Sejam $f, g : \xi \to \eta$ tais que $\Gamma(f) = \Gamma(g)$, logo dado $e \in E(\xi)$ tomando $x = p(e)$, portanto $e = s(x)$ para alguma seção $s : U \to E(\xi)$ com U vizinhança de x, pelo Lema 3.2.1 temos $s' : X \to E(\xi)$ com $s'(x) = e$, assim temos

$$f(e) = (f \circ s')(x) = (\Gamma(f)(s))(x) = (\Gamma(g)(s))(x) = (g \circ s')(x) = g(e)$$

$\blacksquare$

Lema 3.2.4 *Sejam X um espaço normal, ξ um fibrado K-vetorial sobre X e $s \in \Gamma(\xi)$. Se $s(x) = 0$ para algum $x \in X$ então existem seções $s_1, ..., s_k \in \Gamma(\xi)$ e elementos $a_1, ..., a_k \in C(X)$ com $a_i(x) = 0$ para $i = 1, ..., k$ tal que $s = \sum a_i s_i$.*

Demonstração: Sejam X, ξ e $s \in \Gamma(\xi)$ como descritos acima. Suponha $s(x) = 0$ para algum $x \in X$, pelo Corolário 3.2.2 existem $s_1, .., s_n \in \Gamma(\xi)$ que formam base local de ξ em uma vizinhança U de x. Logo

$$s(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i(y)s_i(y), \qquad \forall y \in U$$

Com $b_i : U \to K$. Como X é normal o Lema de Uryshon garante a existencia de função $a_i \in C(X)$ tal que $a_i(y) = b_i(y)$ numa vizinhança $W_i \subset U$ de x. Sendo W a interseção de tais conjuntos, podemos definir

$$s'(y) = s(y) - \sum_{i=1}^{n} a_i(y)s_i(y), \qquad \forall y \in X$$

Assim $s'(y) = 0$, para todo $y \in W$. Seja $a \in C(X)$ tal que $a(x) = 0$ e $a(y) = 1$, para todo $y \in X - W$, logo temos que

$$s = a \cdot s' + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot s_i$$

Pois se $y \in W$ temos $s'(y) = 0$ e se $y \in X - W$ temos que $a(y) = 0$. Por fim, para verificar o Lema basta aplicarmos s da forma que está acima em x, logo:

$$s(x) = a(x) \cdot s'(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \cdot s_i(x)$$

o que implica em

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \cdot s_i(x) = 0$$

Como $s_1(x), ..., s_n(x)$ é base para a fibra $F_x(\xi)$ temos que $a_1(x), ..., a_n(x) = 0$. $\blacksquare$

Corolário 3.2.5 *Seja I_x o ideal, bilateral, de $C(X)$ formado por todos $a \in C(X)$ com $a(x) = 0$, então $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \approx F_x(\xi)$.*

Demonstração: Sejam X espaço normal e ξ fibrado sobre X , primeiramente note que dado $x \in X$ temos pela definição $I_x\Gamma(\xi) = \{a_1s_1 + ... + a_ks_k \mid a_i \in I_x \text{ e } s_i \in \Gamma(\xi), \forall i\}$ e considerando $B = \{s \in \Gamma(\xi) \mid s(x) = 0\}$ temos que $B = I_x\Gamma(\xi)$, é fácil notar que $I_x\Gamma(\xi) \subset B$ uma vez que $a_i \in I_x$ implica em $a_i(x) = 0$ portanto $(a_1s_1 + ... + a_ks_k)(x) = 0$. A igualdade ocorre notando que dado $s \in B$, pelo Lema 3.2.1 temos que existem $s_1, ..., s_k \in \Gamma(\xi)$ e $a_1, ..., a_k \in C(X)$ com $a_i(x) = 0$ para todo i, tal que $s = \Sigma a_is_i$, portanto $s \in I_x\Gamma(\xi)$. Agora para construir o isomorfismo, sejam $x \in X$ e $e \in F_x(\xi)$, logo existe seção $s_e : U \to E(\xi)$ com U vizinhança de x e $s_e(x) = e$. Pelo Lema 3.2.1 existe uma seção $s'_e \in \Gamma(\xi)$ tal que $s'_e(y) = s_e(y)$, para todo $y \in V$ com V vizinhança de x e $\overline{V} \subset U$. Agora, o Corolário 3.2.2 garante que existe elementos $s_1, ..., s_k \in \Gamma(\xi)$ que formam uma base local numa vizinhança W de x. Tomando $V \cap W$ temos que $s'_e(y) = \Sigma a_i(y)s_i(y)$, para todo $y \in V \cap W$. Por fim defina $h : F_x(\xi) \longrightarrow \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ com $h(e) = [a_1s_1 + ... + a_is_i] = [s'_e]$. Note que dada outra seção $t_e : U' \to E(\xi)$, pela mesma construção anterior, existem $t_1, ..., t_k \in \Gamma(\xi)$ base local em x, de forma que $t'_e = \Sigma b_it_i$ com $b_i \in C(X)$. Assim $h(e) = [b_1t_1 + ... + b_kt_k] = [t'_e]$, mas $[s'_e] = [t'_e]$ uma vez que $(s'_e - t'_e)(x) = e - e = 0$ consequentemente $s'_e - t'_e \in I_x\Gamma(\xi)$ gerando a igualdade. Agora, tendo em vista que a definição de h independe da seção tomada sobre uma vizinhança do ponto base, basta mostrar que h é um isomorfismo. Para tal, sejam $e_1, e_2 \in F_x(\xi)$, suponha que $[s_{e_1}] = [s_{e_2}]$ assim

$$(s_{e_1} - s_{e_2}) \in I_x\Gamma(\xi) \Rightarrow (s_{e_1} - s_{e_2})(x) = 0 \Rightarrow e_1 - e_2 = 0 \Rightarrow e_1 = e_2$$

logo h é injetora. Por fim, dado $[s] \in \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ temos que $s \in [s_e]$ onde $e = s(x)$, portanto $[s] = [s_e] = h(e)$ e h é sobrejetora, logo isomorfismo. ■

Vejamos agora o principal resultado desta seção, a garantia da existência de um morfismo de fibrados correspondente a um morfismo entre os módulos de seções destes fibrados:

Teorema 3.2.6 *Seja X espaço normal. Dado qualquer aplicação $C(X)$-linear $F : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$, existe uma única aplicação K-fibrado-linear $f : \xi \to \eta$ tal que $F = \Gamma(f)$.*

Demonstração: Sejam X normal, ξ e η fibrados sobre X e $F : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ aplicação $C(X)$-linear. Para cada $x \in X$, temos que se $s \in \Gamma(\xi)$ então $s \in [s] \in \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$, e aplicando F temos que $F(s) \in \Gamma(\eta)$ consequentemente $F(s) \in [F(s)] \in \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta)$. Assim podemos definir $f'_x : \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta)$ com $f'_x([s]) = [F(s)]$. Verifiquemos que f'_x está bem definida, dados $s_1, s_2 \in [s] \in \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ temos que $s_1 - s_2 = \sum_{i=1}^{k} a_it_i$ com $t_i \in \Gamma(\xi)$ e $a_i \in I_x$, ou seja, $a_i(x) = 0$ com $i = 1, ..., k$. Assim temos que

$$F(s_1 - s_2) = F\left(\sum_{i=1}^{k} a_it_i\right)$$

Como F é aplicação $C(X)$-linear e $a_i \in C(X)$ temos

$$F(s_1) - F(s_2) = \sum_{i=1}^{k} a_i F(t_i),$$

mas $a_i \in I_x$ e $F(t_i) \in \Gamma(\eta)$, portanto $(F(s_1) - F(s_2)) \in I_x\Gamma(\eta)$ e $F(s_1), F(s_2) \in [F(s)] \in \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta)$. O Corolário 3.2.5 garante que $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \approx F_x(\xi)$ e $\Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta) \approx F_x(\eta)$, sejam h_ξ e h_η tais isomorfismos, logo temos que $f_x : F_x(\xi) \to F_x(\eta)$ com $f_x = (h_\eta^{-1} \circ f'_x \circ h_\xi)$. Verifiquemos que f_x é K-linear, dados $e_1, e_2 \in F_x(\xi)$ e $\alpha \in K$ temos que

$$f_x(e_1 + \alpha e_2) = (h_\eta^{-1} \circ f'_x \circ h_\xi)(e_1 + \alpha e_2) = h_\eta^{-1}(f'_x(h_\xi(e_1 + \alpha e_2)))$$

como h_ξ é isomorfismo e considerando $h_\xi(e_i) = [s_i]$ temos

$$f_x(e_1 + \alpha e_2) = h_\eta^{-1}(f'_x(h_\xi(e_1) + \alpha h_\xi(e_2))) = h_\eta^{-1}(f'_x([s_1] + \alpha[s_2])) = h_\eta^{-1}(f'_x([s_1 + \alpha s_2]))$$

pela definição de f'_x e usando o fato de F ser uma aplicação $C(X)$-linear temos

$$f_x(e_1 + \alpha e_2) = h_\eta^{-1}([F(s_1 + \alpha s_2)]) = h_\eta^{-1}([F(s_1) + \alpha F(s_2)]) = h_\eta^{-1}([F(s_1)] + \alpha[F(s_2)])$$

usando agora a linearidade do isomorfismo h_η e a definição de f'_x temos

$$f_x(e_1 + \alpha e_2) = h_\eta^{-1}([F(s_1)]) + \alpha h_\eta^{-1}([F(s_2)])) = h_\eta^{-1}(f'_x([s_1])) + \alpha h_\eta^{-1}(f'_x([s_2])))$$

por fim lembrando que $h_\xi(e_i) = [s_i]$ e da definição de f_x obtemos a linearidade

$$f_x(e_1 + \alpha e_2) = h_\eta^{-1}(f'_x(h_\xi(e_1))) + \alpha h_\eta^{-1}(f'_x(h_\xi(e_1))) = f_x(e_1) + \alpha f_x(e_2).$$

Como f_x é K-linear na fibra $F_x(\xi)$ podemos definir $f : \xi \to \eta$ com $f|_{F_x(\xi)} = f_x$. Verifiquemos agora que f é a aplicação desejada. Dado a seção $s \in \Gamma(\xi)$ temos

$$(f \circ s)(x) = f_x(s(x)) = h_\eta^{-1}(f'_x(h_\xi(s(x)))) = h_\eta^{-1}(f'_x([s])) = h_\eta^{-1}([F(s)]) = (F(s))(x),$$

para todo $x \in X$. Por outro lado $(f \circ s)(x) = (\Gamma(f)(s))(x)$, para todo $x \in X$, logo temos que

$$(\Gamma(f)(s))(x) = (F(s))(x),$$

para todo $x \in X$ e para todo $s \in \Gamma(\xi)$. Portanto $\Gamma(f) = F$. Vejamos agora que f é única, supondo que exista $g : \xi \to \eta$ com $\Gamma(g) = F$ logo dado $s \in \Gamma(\xi)$ temos que

$$g(s(x)) = (g \circ s)(x) = (\Gamma(g)(s))(x) = F(s)(x) = ((\Gamma(f)(s))(x) = f(s(x)), \qquad \forall x \in X$$

assim $f = g$. Por fim, mostremos a continuidade de f. Dado $x \in X$ existem seções $s_1, ..., s_k \in \Gamma(\xi)$ que formam uma base local numa vizinhança U de x, se $e \in E(\xi)$ e $p(e) = y \in U$ então existem $a_1, ..., a_k \in C(X)$ tal que:

$$e = \sum_{i=1}^{k} a_i(y)s_i(y)$$

aplicando f e usando a linearidade de f_y temos

$$f(e) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i(y)s_i(y)\right) = f_y\left(\sum_{i=1}^{k} a_i(y)s_i(y)\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i(y)(f \circ s_i)(y))$$

como $\Gamma(f) = F$ temos

$$f(e) = \sum_{i=1}^{k} a_i(y)(F(s_i))(y))$$

assim, lembrando que $y = p(e)$, temos que $F(s_i)$ e a_i são contínuas com $i = 1, ..., k$, pois $F(s_i) \in \Gamma(\eta)$ e $a_i \in C(x)$, portanto f também será contínua. ■

Corolário 3.2.7 *Se X é espaço normal e ξ e η são fibrados vetoriais sobre X, então $\xi \approx \eta$ se, e somente se, $\Gamma(\xi) \approx \Gamma(\eta)$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha X normal, ξ e η fibrados vetoriais sobre X, com $\xi \approx \eta$. Seja $f : \xi \to \eta$ o isomorfismo entre os fibrados. Mostremos que $\Gamma(f) : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ é um isomorfismo. Primeiramente lembremos que dado $s \in \Gamma(\xi)$ temos que $(\Gamma(f))(s) = f \circ s$ e $f \circ s \in \Gamma(\eta)$. Agora como f é isomorfismo, então f admite inversa, seja g a inversa de f. Logo temos que $\Gamma(g) : \Gamma(\eta) \to \Gamma(\xi)$ é tal que dado $t \in \Gamma(\eta)$ tem-se $(\Gamma(g))(t) = g \circ t$. Assim temos dado $t \in \Gamma(\eta)$

$$\Gamma(f)(\Gamma(g)(t)) = (\Gamma(f) \circ \Gamma(g))(t) = \Gamma(f \circ g)(t) = \Gamma(id)(t) = t,$$

Por outro lado, dado $s \in \Gamma(\xi)$ temos:

$$\Gamma(g)(\Gamma(f)(s)) = (\Gamma(g) \circ \Gamma(f))(s) = \Gamma(g \circ f)(s) = \Gamma(id)(s) = s,$$

Como t e s são quaisquer temos que

$$\Gamma(f) \circ \Gamma(g) = Id = \Gamma(f) \circ \Gamma(g),$$

portanto $\Gamma(f)$ admite inversa, consequentemente é isomorfismo. ($\Leftarrow$) Suponha agora $\Gamma(\xi) \approx \Gamma(\eta)$. Seja $F : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ tal isomorfismo. Pelo Teorema 3.2.6 existe morfismo de fibrados $f : \xi \to \eta$ com $F = \Gamma(f)$. Seja $G : \Gamma(\eta) \to \Gamma(\xi)$ a inversa de F, novamente pelo Teorema 3.2.6 existe morfismo de fibrados $g : \eta \to \xi$ com $G = \Gamma(g)$. Assim temos que dado $x \in X$ e $e \in F_x(\xi)$ temos que existe seção $s \in \Gamma(\xi)$ com $s(x) = e$ logo

$$(g \circ f)(e) = (g \circ (f \circ s))(x) = (\Gamma(g)(f \circ s))(x) = [(G \circ \Gamma(f))(s)](x)$$

$$(g \circ f)(e) = [(G \circ F)(s)](x) = Id(s)(x) = s(x) = e,$$

por outro lado se $e \in F_x(\eta)$ tem-se que existe seção $t \in \Gamma(\eta)$ com $t(x) = e$, portanto

$$(f \circ g)(e) = (f \circ (g \circ t))(x) = (\Gamma(f)(g \circ t))(x) = [(F \circ \Gamma(g))(t)](x)$$

$$(f \circ g)(e) = [(F \circ G)(t)](x) = Id(t)(x) = t(x) = e,$$

mostrando que g é inversa de f, logo f é isomorfismo. ■

3.3 Espaço Base Hausdorff Compacto

Nesta seção iremos analisar as particulariedades dos espaços Hausdorff Compactos. O nosso objetivo é verificar a equivalência entre módulos projetivos e módulos de seções de fibrados, porém outros resultados preliminares ainda são necessários e extremamente importantes para a demonstração. A primeira propriedade excelente a respeito de fibrados vetoriais sobre espaços Hausdorff Compactos é a existência de um conjunto finito de seções que geram o fibrado. Vejamos em que isto é importante:

Lema 3.3.1 *Sejam X Hausdorff Compacto e ξ fibrado K-vetorial sobre X. Então existem um fibrado K-vetorial trivial ζ e um epimorfismo $f : \zeta \to \xi$.*

Demonstração: Suponha X Hausdorff Compacto e ξ fibrado K-vetorial sobre X. Utilizando o Corolário 3.2.2 para cada $x \in X$ existe uma base local $s_{x,1}, ..., s_{x,k_x} \in \Gamma(\xi)$ sobre vizinhança U_x de x. Assim a família $\mathscr{B} = \{U_x\}_{x \in X}$ é uma cobertura de X, que é compacto, portanto existe subcobertura finita $U_1, ..., U_k$. Logo, tomando todas as seções $s_{x,j}$ associadas a algum U_i da cobertura, teremos um número finito destas, sejam $s_1, ..., s_n$ tais seções. É fácil ver que $s_1, ..., s_n$ gera $F_x(\xi)$ para todo $x \in X$, uma vez que dado $x \in X$, como $U_1, ..., U_k$ cobre X então $x \in U_i$ para algum $i = 1, ..., k$, como $U_i \in \mathscr{B}$ então $U_i = U_y$ para algum $y \in X$, portanto $s_{y,1}, ..., s_{y,k_y}$ é base de $F_x(\xi)$, mas $s_{y,1}, ..., s_{y,k_y}$ pertencem ao conjunto $s_1, ..., s_n$. Agora defina o seguinte fibrado trivial $\zeta = X \times K^n$, temos que $\Gamma(\zeta)$ é um $C(X)$-módulo livre com n geradores, sejam eles $t_1, ..., t_n$. Seja $F : \Gamma(\zeta) \to \Gamma(\xi)$ com $F(t_i) = s_i$, pelo Teorema 3.2.6 existe morfismo $f : \zeta \to \xi$ com $\Gamma(f) = F$. Por fim, basta mostrar que f é epimorfismo, para tal, seja $e \in E(\xi)$, logo $e \in F_x(\xi)$ para algum $x \in X$, e existe $s \in \Gamma(\xi)$ tal que $e = s(x)$, como $s_1, ..., s_n$ geram $F_x(\xi)$ temos

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) s_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)(f \circ t_i)(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x) t_i(x)\right)$$

e o termo $\sum a_i(x)t_i(x) \in E(\zeta)$, ou seja, f é sobrejetiva, portanto epimorfismo. ■

Corolário 3.3.2 *Se X é Hausdorff Compacto, então qualquer fibrado K-vetorial ξ sobre X é um somando direto de um fibrado K-vetorial trivial ζ.*

Demonstração: Suponha X Hausdorff Compacto e seja ξ fibradro K-vetorial sobre X. Pelo Lema 3.3.1 existem um fibrado K-vetorial trivial ζ e um epimorfismo $f : \zeta \to \xi$. Defina $\eta = ker(f)$, a Proposição 2.3.8 garante que η é subfibrado de ζ uma vez que $im(f) = \xi$. Agora, a Proposição 3.1.5 garante que $\zeta = \eta \oplus \xi'$. Note agora que dado $x \in X$ temos que $F_x(\zeta) = F_x(\eta) \times F_x(\xi')$, portanto $\dim F_x(\zeta) = \dim F_x(\eta) + \dim F_x(\xi')$, por outro lado f é morfismo de fibrados, logo

$$\dim F_x(\zeta) = \dim ker(f\mid_{F_x(\zeta)}) + \dim im(f\mid_{F_x(\zeta)}) = \dim F_x(\eta) + \dim F_x(\xi)$$

Assim $\dim F_x(\xi) = \dim F_x(\xi')$, ou seja, $F_x(\xi) \approx F_x(\xi')$ para qualquer $x \in X$, implicando $\xi' \approx \xi$. Finalmente temos que $\eta \oplus \xi \approx \zeta$, isto é fácil de perceber uma vez que $\zeta = \eta \oplus \xi'$ e $\xi \approx \xi'$, como ζ é fibrado vetorial trivial, este é isomorfo à $X \times K^n$, compondo os isomorfismo temos que $\eta \oplus \xi$ é isomorfo à $X \times K^n$, portanto é trivial. ■

Corolário 3.3.3 *Se X é Hausdorff compacto e ξ é qualquer fibrado K-vetorial sobre X, então $\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$-modulo projetivo finitamente gerado.*

Demonstração: Suponha X Hausdorff compacto e seja ξ fibradro K-vetorial sobre X. Pelo Lema 3.3.1 existem um fibrado K-vetorial trivial ζ e um epimorfismo $f : \zeta \to \xi$. Pelo Corolário 3.3.2 temos que $\zeta = \eta \oplus \xi$, com $\eta = ker(f)$. Assim dado $s \in \Gamma(\zeta)$ temos que $s(x) = e$ para algum $e \in F_x(\zeta)$, mas como $\zeta = \eta \oplus \xi$, temos que $e = e_1 + e_2$ com $e_1 \in F_x(\eta)$ e $e_2 \in F_x(\xi)$, assim é possivel definir $s_1(x) = e_1$ e $s_2(x) = e_2$ para todo $x \in X$ e teremos $s_1 \in \Gamma(\eta)$ e $s_2 \in \Gamma(\xi)$ com $s = s_1 + s_2$, ou seja, $\Gamma(\zeta) = \Gamma(\eta) + \Gamma(\xi)$. Suponha que existam outros $s_1' \in \Gamma(\eta)$ e $s_2' \in \Gamma(\xi)$ com $s(x) = s_1'(x) + s_2'(x)$, assim

$$s(x) - s(x) = s_1'(x) + s_2'(x) - s_1(x) - s_2(x)$$

$$0 = s_1'(x) - s_1(x) + s_2'(x) - s_2(x) = (s_1' - s_1)(x) + (s_2' - s_2)(x) \qquad (**)$$

Portanto $(s_1' - s_1) \in \Gamma(\eta)$ e $(s_2' - s_2) \in \Gamma(\xi)$, ou seja, $f((s_1 - s_2)(x)) = 0$, pois $(s_1' - s_1')(x) \in ker(f)$ e consequentemente por $(**)$ $f((s_2' - s_2)(x)) = 0$, mas como $s_2'(x), s_2(x) \notin \ker(f)$ então $s_2' - s_2 = 0$ portanto $s_2 = s_2'$. Novamente por $(**)$ temos que $(s_1' - s_1)(x) = 0$ logo $s_1 = s_1'$. Assim temos que $\Gamma(\zeta) = \Gamma(\eta) \oplus \Gamma(\xi)$ é direta, além disto $\Gamma(\zeta)$ é $C(X)$-módulo livre finitamente gerado, consequentemente $\Gamma(\xi)$ será finitamente gerado e por definição um $C(X)$-módulo projetivo finitamente gerado. ■

Vejamos então a equivalência entre módulos projetivos finitamente gerados com fibrados vetoriais, enunciado por Swan (1962):

Teorema 3.3.4 *Seja X Hausdorff compacto. Então um $C(X)$-módulo P é isomorfo a um módulo na forma $\Gamma(\xi)$ se, e somente se, P é finitamente gerado e projetivo.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que $P \approx \Gamma(\xi)$ com ξ fibrado K-vetorial sobre X, logo o Corolário 3.3.3 garante que $\Gamma(\xi)$ é módulo projetivo finitamente gerado, consequentemente P também o será.
$(\Leftarrow)$ Suponha P projetivo finitamente gerado. Logo, por definição, P é somando direto de um $C(X)$-módulo livre finitamente gerado F, ou seja, $F = Q \oplus P$. Defina $g : F \to F$ por $g(q+p) = p$, assim g será um endomorfismo idempotente com $P \approx im(g)$. Como F é $C(X)$-módulo livre finitamente gerado, temos que $F = \Gamma(\zeta)$, com $\zeta = X \times K^n$ fibrado trivial. Assim pelo Teorema 3.2.6, existe $f : \zeta \to \zeta$ com $\Gamma(f) = g$. Como $g^2 = g$ logo temos

$$\Gamma(f) = \Gamma(f) \circ \Gamma(f)$$

Que pela definição de Γ é

$$\Gamma(f) = \Gamma(f \circ f)$$

E pelo Corolário 3.2.3 temos $f = f^2$. Assim, pelo fato de $f = f^2$ temos que $f\,|_{F_x(\zeta)}$ será uma projeção em $F_x(\zeta)$ para todo $x \in X$, ou seja,

$$F_x(\zeta) = \mathrm{Im}(f\,|_{F_x(\zeta)}) \oplus \ker(f\,|_{F_x(\zeta)})$$

Chamando $\xi = \mathrm{Im}(f)$ e $\eta = \ker(f)$ a equação acima fica

$$F_x(\zeta) = F_x(\xi) \oplus F_x(\eta)$$

Por fim, utilizaremos a Proposição 2.3.8, para mostrar que ξ e η são subfibrados vetoriais de ζ. Para tal, vejamos que se $\dim F_x(\mathrm{Im}(f)) = k$ então existirá uma vizinhança U de x onde $\dim F_y(\mathrm{Im}(f)) \geq k$ para todo $y \in U$, e de forma análoga, tendo em vista que $\ker(f) = \mathrm{Im}(id - f)$, tem-se que se $\dim F_x(\ker(f)) = h$ então existirá uma vizinhança V de x onde $\dim F_y(\ker(f)) \geq h$ para todo $y \in V$. Assim para todo $y \in W = U \cap V$ tem-se

$$\dim F_y(\mathrm{Im}(f)) + \dim F_y(\ker(f)) \geq k + h$$

Mas $F_x(\zeta) = F_x(\xi) \oplus F_x(\eta)$ para todo x, portanto

$$\dim F_y(\zeta) \geq k + h$$

Reduzindo a vizinhança W temos que pelo fato de ζ ser fibrado, em uma vizinhança W' de x as fibras tem dimensão constantes, temos $dimF_y(\zeta) = \dim F_x(\zeta) = k + h$, portanto

$$\dim F_y(\mathrm{Im}(f)) + \dim F_y(\ker(f)) = k + h$$

Assim, como h e k são constantes em W' temos que a dimensão das fibras de ξ e η são localmente constantes, que nos garante que ξ e η são fibrados vetoriais. A fim de verificar o resultado do Teorema, vejamos que

$$\zeta = \xi \oplus \eta \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma(\zeta) = \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$$

Como $\Gamma(\zeta)$ é livre temos que $\Gamma(\xi)$ é projetivo. Por outro lado tinhamos que $P \approx \mathrm{Im}(g)$ onde $g = \Gamma(f)$, portanto $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(\Gamma(f)) = \Gamma(\xi)$ logo $P \approx \Gamma(\xi)$. ■

Capítulo 4

Fibrados Vetoriais sobre Variedades Suaves

Vejamos agora que ao mudarmos a hipótese do Teorema 3.3.4 de X compacto Hausdorff para M variedade suave conexa, continuamos com a sua validade, para isso serão feitas algumas adaptações na teoria descrita nos dois capítulos anteriores e adicionaremos algumas definições.

Primeiramente, vamos refinar um pouco mais nossa ideia de fibrado vetorial, de forma que não tenhamos trivializações apenas homeomorficas e sim difeomorficas, desta forma o próprio fibrado vetorial sobre uma variedade suave torna-se uma variedade suave. Vejamos como Nestruev (2003) refina a definição de fibrado vetorial sobre uma variedade suave:

Definição 4.0.1 *Um **Fibrado Vetorial Suave** ξ sobre uma variedade suave M, dito **Espaço Base**, é uma trio $(E(\xi), p, M)$, onde:*

1. *$E(\xi)$ é uma variedade suave dita **Espaço Total***
2. *$p : E(\xi) \to X$ é uma aplicação continua sobrejetiva dita **projeção**.*
3. *Para cada $x \in X$, $p^{-1}(x) = F_x(\xi)$ possui a estrutura de um espaço vetorial, este dito **fibra** de ξ em x.*
4. ***(Condição de Trivialização Local)** Para cada $x \in X$ existem vizinhança U de x, um natural n e um difeomorfismo $\phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ de forma que ϕ restrito à $p^{-1}(y)$ é um isomorfismo para todo $y \in U$.*

Definição 4.0.2 *Uma **Seção Suave** de um fibrado vetorial ξ sobre um subconjunto aberto $B \subset M$ é uma aplicação suave $s : B \to E(\xi)$ tal que $\forall x \in B$ tem-se $(p \circ s)(x) = x$.*

Definição 4.0.3 (Base Local Suave) *Seja ξ um fibrado vetorial sobre a variedade suave M. Dado $x \in M$, uma vizinhança U de x e seções $s_1, ..., s_k : U \to E_\xi$ suaves, diz-se* *que* $\{s_1, ..., s_k\}$ *formam* ***uma base local suave na vizinhança*** U ***de*** x*, se* $s_1(y), ..., s_k(y)$ *é uma base para* $F_y(\xi)$*,* $\forall y \in U$*.*

As demonstrações dos resultados a seguir serão omitidas uma vez que estas são praticamente idênticas as demonstrações já feitas, alterando-se as hipóteses de continuidade para suavidade e homeomorfismo para difeomorfismo.

Proposição 4.0.4 *Seja* ξ *um fibrado vetorial sobre a variedade suave* M*. Então dado* $x \in M$ *existe base local suave em* x*.*

Com esta proposição estamos aptos a mostrar que um fibrado vetorial suave é uma variedade suave. Para tal, basta tomar um ponto $e \in E(\xi)$ logo $p(e) = x \in M$, como M é variedade e $F_x(\xi)$ é espaço vetorial, podemos tomar dois sistemas de coordenadas $(x_1, ..., x_m)$ para uma vizinhança U de x e $(e_1, ..., e_n)$ para $F_x(\xi)$ assim, podemos representar qualquer elemento de $p^{-1}(U)$ pelo sistema $(x_1, ..., x_m, e_1, ..., e_n)$. Portanto dados dois sistemas compatíveis de U e U', $(x_1, ..., x_m)$ e $(x'_1, ..., x'_m)$, respectivamente. Podemos extendê-los para os sistemas $(x_1, ..., x_m, e_1, ..., e_n)$ e $(x'_1, ..., x'_m, e'_1, ..., e'_n)$, assim a compatibilidade em U e U' juntamente com a matriz mudança de base de $(e_1, ..., e_n)$ para $(e'_1, ..., e'_n)$ nos dará a respectiva compatibilidade entre os sistemas do fibrado vetorial, assim sendo variedade suave.

Desta forma, um fibrado vetorial sobre uma variedade suave, torna-se variedade suave, se a dimensão das fibras for constante k e considerando a dimensão do espaço base m, o fibrado vetorial sobre tal variedade terá dimensão $m + k$.

Proposição 4.0.5 *Seja* ξ *um fibrado vetorial sobre* M *variedade suave. Dado uma seção* $s : U \to E(\xi)$ *e uma base local suave* $s_1, ..., s_k : U \to E(\xi)$*. Então* s *será suave se, e somente se, existirem funções suaves* $a_1, ..., a_k : U \to K$ *tal que* $s(y) = a_1(y)s_1(y) + ... + a_k(y)s_k(y)$*.*

Lema 4.0.6 *Sejam* ξ *um fibrado vetorial sobre* M *variedade suave, e* $t_1, ..., t_k$ *seções suaves de* ξ *sobre uma vizinhança* U *de* x *de forma que* $t_1(x), ..., t_k(x)$ *são linearmente independentes. Então existe uma vizinhança* V *de* x *tal que* $t_1(y), ..., t_k(y)$ *são linearmente independentes para todos* $y \in V$*.*

Lema 4.0.7 *Sejam* ξ *e* η *fibrados vetoriais sobre* M *variedade suave, se* $f : E(\xi) \to E(\eta)$ *é morfismo de fibrados tal que* $f|_{F_x(\xi)}$ *é isomorfismo* $\forall x \in X$*, então* f *é um difeomorfismo, consequentemente* ξ *é difeomorfo a* η*.*

Proposição 4.0.8 *Um fibrado vetorial* ξ *sobre* X *é trivial se, e somente se, existirem* n *seções suaves* $s_1, ..., s_n : X \to E(\xi)$ *tais que* $s_1(x), ..., s_n(x)$ *é base de* $F_x(\xi)$ *para todo* $x \in X$*.*

Definição 4.0.9 *Seja ξ um fibrado vetorial sobre uma variedade suave M com projeção $p : \xi \to M$, e seja N uma variedade suave. Dada uma aplicação suave $g : N \to M$ definimos $g^*\xi$ como o fibrado induzido por g sobre N, onde o espaço total de $g^*\xi$ é o subconjunto*

$$E^*(\xi) = \{(x, e) \in N \times E(\xi) \mid g(x) = p(e)\}$$

e a projeção é $p^*(x, e) = x$.

Definição 4.0.10 *Dados dois fibrados vetoriais ξ e η sobre variedades suaves M e N respectivamente. Diremos que η é induzido por ξ se existir aplicação suave $g : N \to M$ de forma que $\eta \approx g^*\xi$.*

Definição 4.0.11 *Dado dois fibrados vetoriais ξ e η com o mesmo espaço base M, de forma que $E(\eta) \subset E(\xi)$. Diremos que η é um* ***Subfibrado Vetorial*** *de ξ se para cada $x \in M$ a fibra $F_x(\eta)$ for um subespaço vetorial da fibra $F_x(\xi)$.*

Proposição 4.0.12 *Seja $f : \xi \to \eta$ um morfismo de fibrados vetoriais suaves sobre a variedade suave M. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathrm{Im}(f)$ *é subfibrado de η;*
2. $\ker(f)$ *é subfibrado de ξ;*
3. *as dimensões das fibras de* $\mathrm{Im}(f)$ *são localmente constantes.*
4. *as dimensões das fibras de* $\ker(f)$ *são localmente constantes.*

Definição 4.0.13 *Se ξ, η são dois fibrados vetoriais sobre a mesma variedade suave M, definimos pela soma direta $\xi \oplus \eta$ como sendo o fibrado vetorial com:*

1. *Espaço Total: $E(\xi \oplus \eta) = \{(e_1, e_2) \in E(\xi) \times E(\eta) \mid p_\xi(e_1) = p_\eta(e_2)\}$*
2. *Projeção: $p : E(\xi \oplus \eta) \to X$ com $p(e_1, e_2) = p_\xi(e_1) = p_\eta(e_2)$*
3. *Fibras: $F_x(\xi \oplus \eta) = F_x(\xi) \times F_x(\eta)$*

Proposição 4.0.14 *Qualquer subfibrado vetorial suave η de um fibrado vetorial ξ, sobre uma variedade suave M, é um somando direto.*

A demonstração desta proposição, em si, é idêntica a enunciada anteriormente, vale ressaltar aqui que como M é variedade suave teremos uma partição da unidade suave. Que, quando adicionada a demonstração anterior, nos dá o resultado em questão.

Definição 4.0.15 *Dado um fibrado vetorial ξ sobre M, defina*

$$\Gamma(\xi) = \{s : X \to E(\xi) \mid s \text{ é suave}\}$$

Este conjunto é um $C^\infty(M)$-Módulo, dito ***Módulo de Seções de*** *ξ.*

Para verificar que $\Gamma(\xi)$ é um $C^\infty(M)$-módulo basta definir as operações:

(i) $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$ com $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$

(ii) $(a \cdot s)(x) = a(x) \cdot s(x)$ com $s \in \Gamma(\xi)$ e $a \in C(X)$

Por relação de suavidade de seções, $(s_1 + s_2)$ e $(a \cdot s)$ serão trivialmente suaves, consequentemente $(s_1 + s_2) \in \Gamma(\xi)$ e $(a \cdot s) \in \Gamma(\xi)$.

Lema 4.0.16 *Sejam ξ um fibrado vetorial sobre variedade suave M, U vizinhança de x e $s : U \to E(\xi)$ uma seção de ξ sobre U. Então existe uma seção $s' \in \Gamma(\xi)$ tal que $s'(y) = s(y)$ para todo y numa vizinhança de x.*

Demonstração: Novamente a demonstração segue idêntica a enunciada anteriormente. Aqui, pontua-se a escolha da função $f : M \to [0,1]$, pois esta deve ser suave, e não apenas contínua. Dado U vizinhança de x e s como descritos acima, temos que M é normal portanto existem V e W, vizinhanças de x, tal que

$$\overline{W} \subset V \qquad \overline{V} \subset U$$

Assim, definimos

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{\mu(x) + \nu(x)}$$

onde $\mu(x) = \inf\{| x - y |, y \in \overline{W}\}$ e $\nu(x) = \inf\{| x - y |, y \in X - V\}$. Como $\overline{W}$ e $X - V$ são fechados, logo μ e ν estão bem definidas, pois sempre existirão tais infimos. Facilmente vê-se que μ e ν são suaves, consequentemente f será suave, e possuirá a condição $f(x) = 0$, $\forall x \in X - V$ e $f(x) = 1$, $\forall x \in \overline{W}$, portanto temos que $s' : X \to \xi$ definida por

$$s'(x) = \begin{cases} f(x) \cdot s(x) & , \quad x \in U \\ 0 & , \quad x \notin U \end{cases}$$

satisfaz o Lema, onde $s' \equiv s$ em na vizinhança W. ∎

Corolário 4.0.17 *Seja ξ um fibrado vetorial sobre a variedade suave M. Então para qualquer $x \in M$ existem seções $s_1, ..., s_n \in \Gamma(\xi)$ que formam uma base local numa vizinhança U de x.*

Proposição 4.0.18 *Dado um fibrado vetorial ξ sobre variedade suave M, temos que ξ é trivial se, e somente se, $\Gamma(\xi)$ é um módulo livre.*

Corolário 4.0.19 *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre a variedade suave M. Se $f, g : \xi \to \eta$ são morfismos de fibrados e $\Gamma(f) = \Gamma(g) : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ então $f = g$.*

Lema 4.0.20 *Sejam ξ um fibrado vetorial sobre a variedade suave M e $s \in \Gamma(\xi)$. Se $s(x) = 0$ para algum $x \in M$, então existem seções $s_1, ..., s_k \in \Gamma(\xi)$ e elementos $a_1, ..., a_k \in C^\infty(M)$ com $a_i(x) = 0$ para $i = 1, ..., k$ tal que $s = \sum a_i s_i$.*

Corolário 4.0.21 *Seja I_x o ideal, bilateral, de $C^\infty(M)$ formado por todos $a \in C^\infty(M)$ com $a(x) = 0$, então $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \approx F_x(\xi)$.*

Teorema 4.0.22 *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre a variedade suave M. Dado qualquer aplicação $C^\infty(M)$-linear $F : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$, então existe uma única aplicação K-fibrado-linear $f : \xi \to \eta$ tal que $F = \Gamma(f)$.*

Corolário 4.0.23 *Se ξ e η são fibrados vetoriais sobre a variedade suave M, então $\xi \approx \eta$ se, e somente se, $\Gamma(\xi) \approx \Gamma(\eta)$.*

4.1 Grassmanniano

Nesta seção veremos o primeiro passo para que o resultado de Swan (1962) valha também para variedades suaves. Vejamos como Nestruev (2003) define o espaço Grassmanniano e o fibrado Tautológico:

Definição 4.1.1 *Define-se o* ***Espaço Grassmanniano*** *$G_{n,k}$, com $k < n$, como o conjunto de todos os planos k dimensionais de $\mathbb{R}^n$ passando pela origem O.*

O espaço $G_{n,k}$ é uma variedade suave com $\dim G_{n,k} = k(n-k)$. Para verificar este resultado considere o sistema cartesiano em $\mathbb{R}^n$ como sendo $(x_1, ..., x_n)$, considere U como sendo o conjunto de todos os k-planos dados, neste sistema, pelas equações

$$x_{k+i} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, ..., n-k$$

Agora considere $\rho : U \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ tal que para cada k plano $L \in U$, tem-se que

$$\rho(L) = (a_{1,1}, ..., a_{1,k}, ..., a_{n-k,1}, ..., a_{n-k,k})$$

Trocando-se a ordem do sistema cartesiano, cobrimos todo $G_{n,k}$ com tais U. A compatibilidade das cartas em $U_1 \cap U_2$ provem da relação de mudança de base, que é um isomorfismo. Portanto $G_{n,k}$ é variedade suave.

Definição 4.1.2 *Define-se por* ***Fibrado Tautologico*** *$\Theta_{n,k}$, como sendo o fibrado sobre o Grassmanniano $G_{n,k}$, onde o Espaço Total é $E_{n,k}$ formado por todos os pares (L, x) tal que $x \in L \in G_{n,k}$. E sendo a projeção $p : E_{n,k} \to G_{n,k}$ onde $p(L, x) = L$.*

Tendo em vista que cada fibra de $\Theta_{n,k}$ é $F_L(\Theta_{n,k}) = L$, e este é um plano k dimensional, portanto cada fibra de Θ é isomorfa a $\mathbb{R}^k$. Seja $I = \{i_1, ..., i_k\}$ onde $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, considere agora U_I como construido anteriormente, em outras palavras, U_I é o conjunto de todos os planos que não se degeneram ao projetarmos sobre $\mathbb{R}^k_I \approx \mathbb{R}^k$. Como a projeção é um difeomorfismo, temos que em uma vizinhança de L, a projeção de todos os planos não se degenera, mais precisamente, a projeção não se degenera em todos os elementos de U_I. Portanto temos uma trivialização difeomorfa que nos dá $p^{-1}(U_I) \approx U_I \times \mathbb{R}^k$.

Vejamos agora que o módulo de seções do fibrado tautológico é finitamente gerado.

Proposição 4.1.3 *O Fibrado Tautologico $\Theta_{n,k}$ é gerado por $k\binom{n}{k}$ seções.*

Demonstração: Considere $\mathfrak{M}_{k,n}$ sendo o espaço de todas as matrizes de ordem $(k \times n)$ com posto k. Dados uma matriz $M \in \mathfrak{M}_{k,n}$ e uma J-upla $J = (j_1, ..., j_k)$ onde $1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n$, defina M_J como a matriz de ordem $k \times k$ formada pelas colunas de M com indices $j_1, ..., j_k$. Assim, como M tem posto k ao menos uma matriz M_J terá determinante não nulo, portanto $\sum_J \det^2(M_J) > 0$.

Agora, fixado uma I-upla $I = (i_1, ..., i_k)$ defina a seguinta função sobre $\mathfrak{M}_{k,n}$:

$$\nu_I(M) = \frac{\det(M_I)}{\sum_J \det^2(M_J)}$$

Como det é uma aplicação suave, e visto que ν esstá bem definida para todo M, temos que ν também será diferenciável, além disto dado qualquer $N \in GL(k, \mathbb{R})$ temos que:

$$\nu_I(NM) = \frac{\det(NM_I)}{\sum_J \det^2(NM_J)} = \frac{\det N \det(M_I)}{\sum_J \det^2 N \det^2(M_J)} = \frac{\nu_I(M)}{\det N}$$

Considere $Mat_{k,n}$ o conjunto das matrizes de ordem $k \times n$, e defina $m_I : \mathfrak{M}_{k,n} \to Mat_{k,n}$ por:

$$m_I(M) = \nu_I(M) \cdot \ \mathrm{adj}(M_I) \cdot M$$

Esta aplicação satisfaz a relação $m_I(NM) = m_I(M)$ para qualquer $N \in GL(n, \mathbb{R})$, facilmente vemos isso:

$$m_I(NM) = \nu_I(NM)\ \mathrm{adj}(NM_I)NM$$

$$m_I(NM) = \frac{\nu_I(M)}{\det N}\ \mathrm{adj}(M_I)\ \mathrm{adj}(N)NM$$

$$m_I(NM) = \frac{\nu_I(M)}{\det N}\ \mathrm{adj}(M_I) \det(N)M$$

$$m_I(NM) = \nu_I(M)\ \mathrm{adj}(M_I)M = m_I(M)$$

Temos m_I diferenciável, pois é produto de diferenciáveis. Além disto, temos ainda que se $\det(M_I) \neq 0$ então $m_I(M) \in \mathfrak{M}$ caso contrário $m_I(M)$ é a própria matriz nula.

Agora considere a aplicação $\psi : \mathfrak{M}_{k,n} \to G_{k,n}$ de forma que $\psi(M)$ é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de M. Se M e M' forem tais que $\psi(M) = \psi(M')$ então existirá $N \in GL(k,\mathbb{R})$ tal que $M' = NM$, para tal basta ver que as linhas de M e M' formam, cada um, uma base para o subespaço gerado, assim N é a própria matriz mudança de base. Assim sendo, temos

$$\psi(m_I(M)) = \psi(M) \Rightarrow \det(M_I) \neq 0$$

Pois caso este determinante fosse nulo, então o espaço gerado seria nulo, em outras palavras se $\det(M_I) = 0$ então $\psi(M)$ se degeneraria sobre a projeção nas coordenadas I. Assim sendo, se $\psi(m_I(M)) = \psi(M)$ temos que $\psi(M)$ não se degenera sobre a projeção nas coordenadas I, portanto pertence ao aberto U_I.

Por fim definimos as seções do fibrado tautológico como:

$$s_{I,i} : G_{k,n} \to E_{n,k}$$

Definidas por:

$$s_{I,i}(L) = (i - \text{ésima linha de } m_I(M), L)$$

Onde M é qualquer matriz de $\mathfrak{M}_{k,n}$ tal que $\psi(M) = L$. Como temos:

$$\psi(M) = \psi(M') \qquad \Rightarrow \qquad M' = NM \qquad \Rightarrow \qquad m_I(M) = m_I(M')$$

Então $s_{I,i}$ está bem definida. A definição de m_I, por ser diferenciável, nos garante que $s_{I,i}$ também o será, uma vez que a $i-$ésima coordenada de $m_I(M)$ pode ser vista como uma projeção. Assim $s_{I,i}$ é seção suave do fibrado tautológico $\Theta_{k,n}$. Como existem $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ I-tuplas e k linhas em cada matriz $m_I(M)$ logo temos $k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ seções da forma sI, i.

A fim de verificar que as seções $s_{I,i}$ geram $\Gamma(\Theta_{k,n})$ basta ver que dados $s : G_{k,n} \to E_{n,k}$ e $L \in G_{k,n}$, temos que L pertencerá apenas aos abertos U_I onde L não se degenera na projeção sobre as coordenadas I. Assim temos

$$s(L) = \sum_I \sum_i a_{I,i}(L) s_{I,i}(L)$$

onde $s_{I,i}(L)$ é nulo para todo I tal que $L \notin U_I$ e $a_{I,i}(L)$ são os coeficientes da combinação obtida quando olhamos x sabendo que $x \in L$. ■

Nota-se ainda que a combinação, descrita na demonstração acima, não é única, uma vez que L pode, e pertencerá, a mais de um aberto U_I.

4.2 Variedades Suaves Conexas

Agora enunciaremos uma das proposições mais importates deste capítulo:

Proposição 4.2.1 *Dado um fibrado vetorial suave ξ sobre uma variedade suave M conexa, então E_ξ é induzido por um fibrado tautológico.*

Demonstração: Primeiramente considere $\dim M = n$ e $\dim F_x(\xi) = k\ \forall x \in M$, logo $\dim E_\xi = n + k$, isto é possível pois M é conexo. O Teorema da Imersão de Whitney nos garante que existe uma imersão

$$\psi : E_\xi \longrightarrow \mathbb{R}^{2(n+k)}$$

Onde

$$d_z\psi : T_zE_\xi \longrightarrow T_{\psi(z)}\mathbb{R}^{2(n+k)}$$

é injetora para todo $z \in E_\xi$.

Considere a sequinte aplicação:

$$\rho_a : \mathbb{R}^{2(n+k)} \longrightarrow \mathbb{R}^{2(n+k)}$$

$$\rho_a(v) = v - a$$

Como sendo a translação linear, facilmente vê-se que $d_v\rho_a = id$.

Agora considere a aplicação

$$d_z(\rho_{\psi(z)} \circ \psi) : T_z(E_\xi) \longrightarrow T_O\mathbb{R}^{2(n+k)}$$

Esta aplicação pode ser vista de uma forma bem simples, quando fixado z temos que a aplicação $\rho_{\psi(z)}\circ\psi$ faz a imersão de E_ξ em $\mathbb{R}^{2(n+k)}$ tal que z é levado na origem, ao tomarmos o espaço tangente em z e considerando $T_z(F_z(\xi))$ como sendo o espaço tangente da fibra de z em $(z, 0)$ a origem de $F_z(\xi)$, temos que $T_z(F_z(\xi))$ é levado injetivamente em um subespaço vetorial k-dimensional, uma vez que

$$\dim F_z(\xi) = \dim T_z(F_z(\xi)) = \dim d_z(\rho_{\psi(z)} \circ \psi)(T_z(F_z(\xi))) = k$$

Tendo em vista as aplicações definidas acima, definiremos a aplicação g, comumente chamada de Aplicação de Gauss, como sendo:

$$g : M \longrightarrow G_{2(n+k),k}$$

Tal que para cada $z \in M$, tem-se:

$$g(z) = d_z(\rho_{\psi(z)} \circ \psi)(T_z(F_z(\xi)))$$

Ou seja, g associa à cada $z \in M$ a imagem do subespaço $T_z(F_z(\xi))$ através da aplicação $d_z(\rho_{\psi(z)} \circ \psi)$. Como dito anteriormente, tem-se $d_v\rho_a = id$ e $d_z\psi$ injetiva, portanto a composição $d_z(\rho_{\psi(z)} \circ \psi)$ será injetiva, assim a imagem do subespaço $T_z(F_z(\xi))$ será um ponto de $G_{2(n+k),k}$.

Por fim temos que a aplicação

$$g^* : \xi \longrightarrow \Theta_{2(n+k),k}$$

$$g^*(e) = \big(g(z), d_z(\rho_{\psi(z)} \circ \psi)(e)\big)$$

com $z = p(e)$, nos dá o resultado do Teorema, uma vez que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_\xi & \xrightarrow{g^*} & E_{2(n+k),k} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{g} & G_{2(n+k),k} \end{array}$$

Comuta, ou seja, $(\pi \circ g^*)(e) = (g \circ p)(e)$. ■

Este resultado nos garante que existirá um conjunto de seções geradores do fibrado vetorial sobre a variedade suave conexa, vejamos:

Corolário 4.2.2 *Dado um fibrado vetorial suave ξ sobre uma variedade suave M conexa, então $\Gamma(\xi)$ é finitamente gerado.*

Demonstração: Temos pela Proposição 4.2.1 que ξ é induzido por um fibrado tautológico $\Theta_{2(n+k),k}$, onde $\dim M = n$ e $\dim F_x(\xi) = k$, e pela Proposição 4.1.3 temos que $\Gamma(\Theta_{2(n+k),k})$ é gerado por $m = k \cdot \begin{pmatrix} 2(n+k) \\ k \end{pmatrix}$ seções. Sejam $t_1, ..., t_m$ tais seções.

A Definição 4.0.10 de fibrados induzidos, nos diz que $\xi \approx g^*\Theta$ de forma que

$$E_\xi \approx E = \{(x, e) \mid x \in M, e \in F_{g(x)}(\Theta)\}$$

Pelo Corolário 4.0.23 temos que

$$\Gamma(\xi) \approx \Gamma(E)$$

Além disto, as seções definidas por $s_i(x) = (x, t_i(x))$ são suaves, para $i = 1, ..., m$, e geram $\Gamma(E)$. Consequentemente, como $\Gamma(\xi) \approx \Gamma(E)$, temos que existem, a menos de um difeomorfismo, m seções $S_1, ..., S_m \in \Gamma(\xi)$ que geram este módulo, isto é possível uma vez que se não existissem tais seções S_i a afirmação $\Gamma(\xi) \approx \Gamma(E)$ seria um absurdo. Assim, temos $\Gamma(\xi)$ finitamente gerado. ■

Este resultado faz um papel importantíssimo na continuação deste estudo, uma vez que o fato de este módulo ser finitamente gerado está diretamente ligado com o enunciado do teorema em que temos P um módulo projetivo finitamente gerado isomorfo a um módulo de seções de um fibrado vetorial sobre uma variedade suave.

Vejamos agora que o teorema de Swan continua válido ao trocarmos a hipótese de espaço Hausdorff compacto para variedade suave.

Teorema 4.2.3 *Seja M variedade suave conexa. Então um $C^{\infty}(M)$-módulo P é isomorfo a um módulo na forma $\Gamma(\xi)$ se, e somente se, P é finitamente gerado e projetivo.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que $P \approx \Gamma(\xi)$ com ξ fibrado vetorial suave sobre M. Pelo Corolário 4.2.2 temos que $\Gamma(\xi)$ é finitamente gerado, sejam $s_1, ..., s_m$ seus geradores. Agora considere $\zeta = M \times K^m$, portanto $\Gamma(\zeta)$ é um $C^{\infty}(M)$-módulo livre de posto m, sejam $e_1, ..., e_m$ geradores de $\Gamma(\zeta)$. Defina o homomorfismo

$$F : \Gamma(\zeta) \longrightarrow \Gamma(\xi) \qquad \text{onde} \qquad F(e_i) = s_i, \text{ para } i = 1, ..., m$$

Como $s_1, ..., s_m$ geram $\Gamma(\xi)$, temos que F é epimorfismo. Assim pelo Teorema 4.0.22, existe uma única aplicação $f : \zeta \to \xi$ tal que $F = \Gamma(f)$. Como F é epimorfismo, então f também o será. Portanto pela Proposição 4.0.12 temos que $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ são subfibrados de ζ e ξ respectivamente. Assim, temos que

$$\zeta = \ker(f) \oplus \eta$$

Onde $\eta \approx \mathrm{Im}(f)$. Consequentemente temos,

$$\Gamma(\zeta) = \Gamma(\ker(f)) \oplus \Gamma(\eta)$$

Com $\Gamma(\eta) \approx \Gamma(\mathrm{Im}(f))$. Por fim, como $\Gamma(\eta)$ é somando direto de um módulo livre, portanto este é projetivo, e como $\Gamma(\eta) \approx \Gamma(\mathrm{Im}(f)) \approx P$ temos P projetivo e finitamente gerado, pois $\Gamma(\mathrm{Im}(f)) = \Gamma(\xi)$ que é finitamente gerado.

($\Leftarrow$) Suponha P projetivo finitamente gerado, suponha m geradores. Logo, pela Proposição 1.3.5, P é isomorfo à um somando direto de um $C^{\infty}(M)$-módulo livre finitamente gerado, ou seja, $\Gamma(\zeta) = Q \oplus P'$ com $P \approx P'$ e $\zeta = M \times K^m$ fibrado trivial. Defina $g : \Gamma(\zeta) \to \Gamma(\zeta)$ por $g(q + p') = p'$, assim g será um endomorfismo idempotente com $P \approx im(g)$. Assim, pelo Teorema 4.0.22, existe $f : \zeta \to \zeta$ com $\Gamma(f) = g$. Como $g^2 = g$ logo temos

$$\Gamma(f) = \Gamma(f) \circ \Gamma(f)$$

Que pela definição de Γ é

$$\Gamma(f) = \Gamma(f \circ f)$$

E pelo Corolário 4.0.19 temos $f = f^2$. Assim, como $f = f^2$ temos que $f\,|_{F_x(\zeta)}$ será uma projeção de $F_x(\zeta)$ para todo $x \in M$, ou seja,

$$F_x(\zeta) = \mathrm{Im}(f \mid_{F_x(\zeta)}) \oplus \ker(f \mid_{F_x(\zeta)})$$

Chamando $\xi = \mathrm{Im}(f)$ e $\eta = \ker(f)$ a equação acima fica

$$F_x(\zeta) = F_x(\xi) \oplus F_x(\eta)$$

Por fim, utilizaremos a Proposição 4.0.12, para mostrar que ξ e η são subfibrados vetoriais de ζ. Para tal, vejamos que se $\dim F_x(\mathrm{Im}(f)) = k$ então existirá uma vizinhança U de x onde $\dim F_y(\mathrm{Im}(f)) \geq k$ para todo $y \in U$, e de forma análoga, tendo em vista que $\ker(f) = \mathrm{Im}(id - f)$, tem-se que se $\dim F_x(\ker(f)) = h$ então existirá uma vizinhança V de x onde $\dim F_y(\ker(f)) \geq h$ para todo $y \in V$. Assim para todo $y \in W = U \cap V$ tem-se

$$\dim F_y(\mathrm{Im}(f)) + \dim F_y(\ker(f)) \geq k + h$$

Mas $F_x(\zeta) = F_x(\xi) \oplus F_x(\eta)$ para todo x, portanto

$$\dim F_y(\zeta) \geq k + h$$

Reduzindo a vizinhança W temos que pelo fato de ζ ser fibrado, em uma vizinhança W' de x as fibras tem dimensão constantes, temos $dimF_y(\zeta) = \dim F_x(\zeta) = k + h$, portanto

$$\dim F_y(\mathrm{Im}(f)) + \dim F_y(\ker(f)) = k + h$$

Assim, como h e k são constantes em W' temos que a dimensão das fibras de ξ e η são localmente constantes, que nos garante que ξ e η são fibrados vetoriais. A fim de verificar o resultado do Teorema, vejamos que

$$\zeta = \xi \oplus \eta \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma(\zeta) = \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$$

Como $\Gamma(\zeta)$ é livre temos que $\Gamma(\xi)$ é projetivo. Por outro lado tinhamos que $P \approx \mathrm{Im}(g)$ onde $g = \Gamma(f)$, portanto $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(\Gamma(f)) = \Gamma(\xi)$ logo $P \approx \Gamma(\xi)$ ∎

Capítulo 5

Exemplos

Neste capítulo trabalharemos alguns exemplos sobre módulos de seções, utilizaremos as construções anteriores para verificarmos que estes módulos são ou não projetivos.

5.1 Módulo de Seções de TS^n

No exemplo 2.2.5 mostramos que TS^2 é fibrado vetorial sobre S^2, que é basicamente formado pelos planos tangentes a esfera em cada ponto $x \in S^2$. Mostramos que cada plano é gerado pelos vetores

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad f(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right)$$

Assim as seções

$$s_1(x) = \left(x, \frac{\partial f}{\partial u} \right), \qquad s_2(x) = \left(x, \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

Geram todas os planos tangentes exceto em $x = (0,0,1)$ que não faz parte da imagem de f, ou seja, s_1 e s_2 estão definidas apenas em $S^2 - \{(0,0,1)\}$, mas podemos extender s_1 e s_2 para S^2 fazendo:

$$s_1(x) : \begin{cases} \left(x, \frac{\partial f}{\partial u} \right), & \text{se } x \neq (0,0,1) \\ (x, 0), & \text{se } x = (0,0,1) \end{cases}; \qquad s_2(x) : \begin{cases} \left(x, \frac{\partial f}{\partial v} \right), & \text{se } x \neq (0,0,1) \\ (x, 0), & \text{se } x = (0,0,1) \end{cases}$$

Estas seções serão continuas, pois

$$\lim_{x \to (0,0,1)} s_1(x) = \lim_{x \to (0,0,1)} s_2(x) = ((0,0,1),0)$$

Uma vez que

$$\lim_{x \to (0,0,1)} s_1(x) = \left(\lim_{x \to (0,0,1)} x, \lim_{x \to (0,0,1)} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = ((0,0,1),0)$$

Assim teremos s_1 e s_2 definidas em toda a esfera S^2, se repetirmos o processo para a função

$$g(u,v) = \left(-\frac{2u}{u^2+v^2+1}, -\frac{2v}{u^2+v^2+1}, -\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

E da mesma forma como definimos s_1 e s_2 poderemos definir s_3 e s_4, porém estas estarão apenas definidas em $S^2 - \{(0,0,-1)\}$ e analogamente extenderemos s_3 e s_4 para todo S^2. Assim teremos como consequência desta construção que $\{s_1(x), s_2(x), s_3(x), s_4(x)\}$ serão geradores de $F_x(TS^2)$ para todo $x \in S^2$, o que implica em dado $s \in \Gamma(TS^2)$ tem-se

$$s = \sum_{i=1}^{4} a_i s_i$$

com $a_i \in C(TS^2)$ para $i = 1,2,3,4$. Ou seja, $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ geram $\Gamma(TS^2)$, porém não de forma única, pois caso o fosse teríamos que pela Proposição 2.4.3 o espaço TS^2 seria um fibrado trivial o que nos daria que $\{s_1(x), s_2(x), s_3(x), s_4(x)\}$ seria base para cada fibra, o que não é verdade. Temos que $\Gamma(TS^2)$ não é livre pois TS^2 não é paralelizável, este resultádo é muito forte, na verdade TS^n só será paralelizável se $n = 0,1,3,7$ e nestes casos $\Gamma(TS^n)$ é livre.

Agora iremos verificar, utilizando como exemplo o espaço tangente e o espaço normal a esfera S^n, que em geral se tivermos

$$F_1 \oplus M_1 = F_2 \oplus M_2$$

Onde $F_1 \approx F_2$ são módulos livres, não necessariamente teremos $M_1 \approx M_2$.

Exemplo 5.1.1 *Considere o espaço tangente a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$*

$$E(\tau) = TS^n = \{(x,v) \mid x \in S^n, v \in T_xS^n\}$$

Onde T_xS^n é o conjunto dos vetores tangentes à esfera. De forma análoga ao caso de TS^2 é possível mostrar que em cada $x \in S^n$ existe uma trivialização local, basta utilizar as projeções estereográficas $f : \mathbb{R}^n \to S^n - \{(0,...,0,1)\}$ e $g : \mathbb{R}^n \to S^n - \{(0,...,0,-1)\}$

$$\begin{aligned} f(u) &= \left(\frac{2u_1}{|u|^2+1}, ..., \frac{2u_n}{|u|^2+1}, \frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}\right) \\ g(u) &= \left(-\frac{2u_1}{|u|^2+1}, ..., -\frac{2u_n}{|u|^2+1}, -\frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}\right) \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

onde $u = (u_1, ..., u_n)$.

Agora considere o espaço normal a mesma esfera

$$E(\nu) = \{(x,v) \mid x \in S^n, v = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Tem-se ν trivial, uma vez que na aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi: & U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & p^{-1}(U) \\ & (x, \lambda) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

é contínua com inversa contínua e $U \subset S^n$ pode ser tomado como S^n. Ou de forma equivalente temos que a seção $s'(x) = (x, x)$ gera o módulo de seções de $\Gamma(\nu)$, pois dado $s \in \Gamma(\nu)$ tem-se que $s(x) = (x, g(x) \cdot x)$ com g função contínua, logo

$$s(x) = (x, g(x)) = g(x) \cdot (x, x) = g(x) \cdot s'(x)$$

Portanto $s = g \cdot s'$, que nos dá $\Gamma(\nu)$ módulo livre, consequentemente ν fibrado trivial.

Agora considere o fibrado $\zeta = \tau \oplus \nu$, temos que cada fibra de ζ é da forma:

$$F_x(\zeta) = F_x(\tau) \oplus F_x(\nu)$$

e por construção $F_x(\tau)$ é o espaço T_xS^n enquanto que $F_x(\nu)$ é o espaço normal a S^n em x, portanto

$$F_x(\zeta) = \mathbb{R}^{n+1}$$

assim, dado a base $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ temos que as seções da forma

$$\begin{array}{rccc} s_i: & S^n & \longrightarrow & E(\zeta) \\ & x & \longmapsto & (x, e_i) \end{array} \tag{5.1.2}$$

são contínuas e geram todas as fibras de ζ de forma única, portanto ζ será fibrado trivial onde

$$E(\zeta) \approx S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$$

Como construido acima, $E(\nu)$ é formado pelos pares $(x, u) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ onde u é multiplo de x, sendo assim podemos fazer a projeção de ζ sobre ν através da aplicação:

$$f(x, u) = (x, \langle x, u \rangle \cdot x)$$

Sendo $\langle x, u \rangle = \sum_i x_i u_i$ o produto interno.

Como dito as seções de 5.1.2, geram todas as fibras de forma única, logo tais seções geram também $\Gamma(\zeta)$. Assim vejamos que

$$(f \circ s_i)(x) = (x, \langle x, s_i(x) \rangle \cdot x)$$

$$(f \circ s_i)(x) = (x, \langle x, e_i \rangle \cdot x)$$

$$(f \circ s_i)(x) = (x, x_i \cdot x)$$

$$(f \circ s_i)(x) = x_i \left(x, \sum_j x_j e_j \right)$$

$$(f \circ s_i)(x) = x_i \sum_j x_j \left(x, e_j\right)$$

$$(f \circ s_i)(x) = x_i \sum_j x_j s_j(x)$$

Portanto temos $f \circ s_i = x_i \sum_j x_j s_j$, *e como as seções* s_i *geram* $\Gamma(\zeta)$ *então toda aplicação sobre* $T(\zeta)$ *poderá ser definida através de polinômios.*

Considere então o anel

$$\Lambda = \mathbb{R}(x_0, ..., x_n)/(x_0^2 + ... + x_n^2 - 1)$$

como sendo o conjunto das classes de todos os polinômios de $\mathbb{R}^{n+1}$ *idênticos sobre a esfera* S^n. *Certamente temos* $\Lambda \subset C(S^n)$.

Agora considere F *como um* Λ*-módulo livre com geradores* $s_1, ..., s_{n+1}$. *Defina* $g : F \to F$ *como*

$$g(s_i) = x_i \sum_{j=1}^{n+1} x_j s_j$$

tem-se g *idempotente, pois*

$$g^2(s_i) = g\left(x_i \sum_{j=1}^{n+1} x_j s_j \right)$$

Aplicando em $x \in S^n$

$$g^2(s_i(x)) = g\left(x_i \sum_{j=1}^{n+1} x_j s_j \right)(x)$$

$$g^2(s_i(x)) = x_i \sum_{j=1}^{n+1} x_j g\left(s_j(x)\right)$$

Pela definição de g

$$g^2(s_i(x)) = x_i \sum_{j=1}^{n+1} x_j \left(x_j \sum_{k=1}^{n+1} x_k s_k(x) \right)$$

$$g^2(s_i(x)) = x_i \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 \sum_{k=1}^{n+1} x_k s_k(x)$$

Como $x \in S^n$ *tem-se*

$$g^2(s_i(x)) = x_i \sum_{k=1}^{n+1} x_k s_k(x) = g(s_i)(x)$$

Assim, pela mesma construção do Teorema 3.3.4, temos que $F = P \oplus \operatorname{Im}(g)$ *com* $P = \ker(g)$, *portanto* P *é projetivo. Além disto, temos também que* $\operatorname{Im}(g)$ *é livre, uma* *vez que sendo id a função identidade temos que*

$$g(id(x)) = g\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i s_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i g(s_i(x)), \qquad \forall x \in S^n$$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i s_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \sum_{j=1}^{n+1} x_j s_j(x), \qquad \forall x \in S^n$$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i s_i(x)\right) = \sum_{j=1}^{n+1} x_j s_j(x), \qquad \forall x \in S^n$$

que nos dá $g(id) = id$, ou seja, $g(s_i) = x_i \cdot id$ o que implica em $\mathrm{Im}(g)$ finitamente gerado, portanto livre.

Por outro lado, temos que $C(S^n) \otimes_\Lambda P$ é projetivo, pois $C(S^n)$ é gerado pela função identidade enquanto que P é gerado por $2n$ polinômios obtidos através das funções f e g definidas em 5.1.1. Portanto $C(S^n) \otimes_\Lambda P$ é gerado por $2n$ elementos, logo temos $C(S^n) \otimes_\Lambda P \approx \Gamma(\tau)$ que é projetivo. Ou seja, por um lado temos que

$$\Gamma(\zeta) = \Gamma(\tau) \oplus \Gamma(\nu)$$

Onde $\Gamma(\nu)$ é módulo livre e $\Gamma(\tau) \approx C(S^n) \otimes_\Lambda P$ que é projetivo. Por outro lado temos que

$$\Gamma(\zeta) = \Gamma(\gamma) \oplus \Gamma(\nu)$$

onde γ é o fibrado trivial definido por $E(\gamma) = S^n \times \mathbb{R}^n$. Portanto, temos que

$$\Gamma(\gamma) \oplus \Gamma(\nu) \approx \Gamma(\tau) \oplus \Gamma(\nu)$$

Mas, isto não necessariamente implica em

$$\Gamma(\gamma) \approx \Gamma(\tau)$$

uma vez que na esfera, se $n \neq 0, 1, 3, 7$, a esfera não é paralelizável, implicando no fibrado τ não podendo ser livre.

O fato utilizado neste exemplo de tomar $C(S^n) \otimes_\Lambda P \approx \Gamma(\tau)$ com $\Lambda \subset C(S^n)$ é muito útil em outros casos, pois em geral é muito difícil construir módulos projetivos tomando todo o anel de funções contínuas.

5.2 Módulo Projetivo não Finitamente Gerado

Nesta seção, contruiremos um módulo projetivo não finitamente gerado. Este exemplo foi criado por *Kaplansky* e trata de um submódulo do anel de funções contínuas no intervalo $[0,1]$. Primeiramente precisaremos dos seguintes resultados dados por Bott e Tu (1982):

Teorema 5.2.1 *Suponha X espaço Hausdorff Compacto, Y espaço topológico qualquer e ξ fibrado vetorial sobre Y. Se $f, g : X \to Y$ são aplicações contínuas e homotópicas então $f^*\xi \approx g^*\xi$.*

Demonstração: Seja $F : X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia entre f, g, como enunciadas no teorema, onde

$$F(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = g(x), \qquad \forall x \in X$$

Considere, a cargo de simplicidade, F da seguinte forma

$$f_t(x) = F(x,t), \qquad \forall (x,t) \in X \times [0,1]$$

assim $f_0 \equiv f$ e $f_1 \equiv g$.

Seja $F^*\xi$ o fibrado induzido pela homotopia F sobre $X \times [0,1]$.

Considere também as aplicações $\pi_1 : X \times [0,1] \to X$ e $\pi_2 : X \times [0,1] \to [0,1]$ como sendo as projeções nas respectivas componentes.

Agora, suponha que para algum t_0 temos que $f_{t_0}^*\xi \approx \eta$, onde η é algum fibrado vetorial sobre X, considere $\pi_1^*\eta$ o fibrado induzido por π_1 sobre $X \times [0,1]$. Como X é compacto, temos que tanto $X \times \{t_0\}$ quanto $X \times [0,1]$ serão compactos, logo existem finitos abertos

$$W_1, ..., W_m \subset X \times [0,1]$$

que cobrem $X \times \{t_0\}$, consequentemente os conjuntos $\{\pi_1(W_i)\}_{i=1}^m$ serão abertos e cobrem X. Por outro lado, é possível construir uma cobertura finita $\{U_i\}_{i=1}^n$ de X composta por trivializações locais $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times K^n$. Assim definindo

$$V_{i,j} = \pi_1^{-1}(U_i) \cap W_j$$

temos que existirão $n \cdot m$ abertos V_i de forma que $\{V_i\}$ cobrem $X \times t_0$ e $\pi(V)$ são trivializações locais de η. Agora, os conjuntos $\pi_2(V_i)$ serão abertos em $[0,1]$ contendo t_0, portanto existirá $\delta > 0$ pequeno o suficiente tal que

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \pi_2(V_i), \qquad \forall i = 1, ..., n \cdot m$$

assim temos que

$$X \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \bigcup_{i=1}^{n\cdot m} V_i$$

Ou seja, temos que $f_{t_0}^*\xi$ é isomorfo a η que por sua vez é isomorfo a $\pi_1^*\eta$ quando fixamos neste ultimo $t = t_0$. Assim, utilizando o Lema 2.2.8 podemos reduzir δ de forma que as trivializações $\{V_i\}$, que a princípio são apenas trivializações de $f_{t_0}^*\xi$, sejam também trivializações de $f_t^*\xi$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Assim para cada $t_0 \in [0, 1]$, podemos construir uma faixa $X \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, onde $f_t^*\xi \approx f_{t_0}^*\xi$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Passando a uma subcobertura finita, pois $[0, 1]$ é compacto, e levando em consideração que $[0, 1]$ é conexo temos que $\eta \approx f_t^*\xi$ para todo $t \in [0, 1]$. Particularmente temos que $f^*\xi \approx g^*\xi$. ■

Corolário 5.2.2 *Se X é contrátil, então todo fibrado vetorial sobre X é trivial.*

Demonstração: Seja ξ fibrado vetorial sobre X, logo se considerarmos as aplicações $f : X \to X$ com $f(x) = x$, a identidade, e $g(x) = c$ para algum $c \in X$, temos que por X ser contrátil f e g são homotópicas, e pelo teorema anterior $f^*\xi \approx g^*\xi$ onde $g^*\xi \approx [0, 1] \times F_c(\xi)$ é trivial. ■

Agora vejamos o exemplo de Kaplansky, de um módulo projetivo não finitamente gerado, dado por Lam (1999):

Exemplo 5.2.3 *Considere X como sendo o intervalo $[0, 1]$, e seja M o seguinte $C(X)$-módulo:*

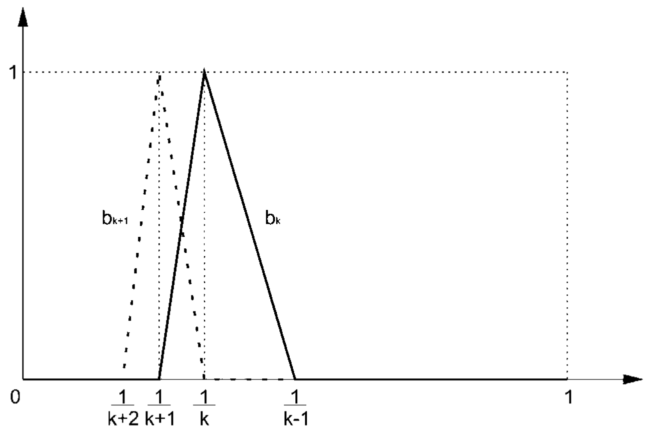
$$M = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0, \forall x \in [0, \epsilon), \epsilon \in \mathbb{R}\}$$

em outras palavras, M é formado pelas funções que se anulam em uma vizinhança de x. Agora considere o seguinte conjunto de funções $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$b_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{5.2.3}$$

$$b_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{k+1} \\ (k^2 + k)x - k, & \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \\ (k^2 - k)x + k, & \frac{1}{k} \leq x < \frac{1}{k-1} \\ 0, & \frac{1}{k-1} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Graficamente temos:



Nestas condições, para cada $x \in [0,1]$ temos que existirão apenas duas funções da forma b_k onde $b_k(x) \neq 0$. E como consequência da definição, sendo b_n e b_{n+1} as funções acima descritas, para um n fixado, temos que $(b_n(x) + b_{n+1})(x) = 1$, como $b_k(x) = 0$ para todo $k \neq n, n+1$, logo concluimos que

$$\sum_{i \geq 1} b_k(x) = 1, \qquad \forall x \in [0,1]$$

Além, disto temos também que $b_k \in M$ $\forall k \in \mathbb{N}$, pois $b_k(x) = 0$ se $x \in [0, \frac{1}{k+1})$

Assim, podemos definir as aplicações

$$a_k : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$$

com $a_k(f) = c_k \cdot f$, onde $c_k = \sqrt{b_k}$. Desta forma dado $f \in M$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_k a_k(f)\right)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_k(x)(a_k(f))(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_k a_k(f)\right)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{b_k(x)} c_k(x) f(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_k a_k(f)\right)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{b_k(x)}\sqrt{b_k(x)} f(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_k a_k(f)\right)(x) = f(x) \sum_{i=1}^{\infty} b_k(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_k a_k(f)\right)(x) = f(x)$$

Portanto $f = \sum c_k a_k(f)$. Note que $c_k \in M$, para $k \in \mathbb{N}$ e a_k pertence ao dual de M. Assim, pelo Lema da Base Dual, temos que M é um módulo projetivo. Pela *construção acima, vemos que M não pode ser livre, pois a combinação $f = \sum c_k a_k(f)$ não é única para a aplicação nula, pois dado qualquer $f \in M$ temos que existirá um k suficientemente grande onde $\frac{1}{k} < \epsilon$ donde $f \cdot b_k = 0$.*

Agora, por outro lado, vemos que M não pode ser finitamente gerado, pois se o fosse então teríamos $M \approx \Gamma(\xi)$ onde ξ é um fibrado vetorial sobre $[0,1]$. Mas todo fibrado sobre $[0,1]$ é trivial, pois $[0,1]$ é contrátil, o que nos diz que $\Gamma(\xi)$ é livre, portanto teríamos M livre, o que é um absurdo. Assim, temos M módulo projetivo não finitamente gerado.

5.3 Módulo de Seções da Projeção de um Fibrado Vetorial

Considere o fibrado ξ com o mesmo espaço total do Exemplo 2.1.2:

$$E(\xi) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) = z \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right), -1 \leq x \leq 1\right\}$$

Como visto, ξ é vetorial, e além disto é trivial, pois temos $E(\xi) \approx [-1,1] \times \mathbb{R}$.

Considere também o fibrado trivial η onde $E(\eta) = [-1,1] \times \mathbb{R}$. Podemos identificar $E(\eta)$ por

$$E(\eta) \approx \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$$

Assim, podemos definir um morfismo $f : E(\xi) \to E(\eta)$ da seguinte forma:

$$f(x, y, z) = (x, y, 0)$$

A projeção no plano xz. Facilmente vemos que se $x = 0$ então $f(0, y, z) = (0, 0, 0)$, pois em $E(\xi)$ temos que $x = 0$ implica em

$$y \cos(0) = z \sin(0) \qquad \Rightarrow \qquad y = 0$$

Ou seja, $\mathrm{Im}(f)$ é o fibrado sobre $[-1,1]$ com $F_x(\mathrm{Im}(f)) \approx \mathbb{R}$ se $x \neq 0$ e $F_x(\mathrm{Im}(f)) \approx \{(0,0,0)\}$ se $x = 0$. Que não é vetorial, pois as fibras numa vizinhança de $x = 0$ não são constantes.

Veja agora que para podermos aplicar o Teorema 3.3.4 é extremamente necessário que $\mathrm{Im}(f)$ seja fibrado vetorial, pois primeiramente veja que se tomarmos uma seção $s \in \Gamma(\xi)$ com certeza teremos $f \circ s \in \Gamma(\mathrm{Im}(f))$, porém neste caso o funtor Γ não possui um bom comportamento. Veja que $\Gamma(\xi)$ é finitamente gerado por uma única seção, seja ela $s : [-1,1] \to E(\xi)$. Logo $(\Gamma(f))(s) = f \circ s \in \Gamma(\mathrm{Im}(f))$.

Considere agora $t : [-1, 1] \to E(\text{Im}(f))$ *como sendo a aplicação:*

$$t(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot f(s(x)) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Como a função seno é limitade e $s(x) \to 0$ *quando* $x \to 0$ *temos que* $t(x) \to 0$ *se* $x \to 0$ *portanto* t *é contínua em* $x = 0$*, e consequentemente* $t \in \Gamma(\text{Im}(f))$.

Como $\Gamma(\xi)$ *é finitamente gerado, logo* $\text{Im}(\Gamma(f))$ *também o é, pois deve ser gerado por* $f \circ s$*, e temos também que* $\text{Im}(\Gamma(f)) \subset \Gamma(\text{Im}(f))$*. Mas veja que a aplicação* $t \in \Gamma(\text{Im}(f))$ *não pertence a* $\text{Im}(\Gamma(f))$*, pois se pertencesse* $t(x) = a(x) \cdot (f \circ s)(x)$ *para algum* $a \in C([0, 1])$*, isto só seria possível se* $a(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *que não é contínua em* $x = 0$.

Perceba que o módulo $\Gamma(\text{Im}(f))$ *pode ser representado como*

$$\Gamma(\text{Im}(f)) \approx \{g \in C([-1, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Este módulo não será projetivo finitamente gerado, pois caso o fosse seria isomorfo a um módulo de seções $\Gamma(\zeta)$ *para algum fibrado vetorial* ζ *sobre* $[-1, 1]$*, mas isto significaria que* ζ *é trivial, pelo mesmo resultado do exemplo anterior. Portanto* $\Gamma(\text{Im}(f))$ *deveria ser módulo livre, então suponha que existam* $f_1, ..., f_k \in \Gamma(\text{Im}(f))$ *que geram unicamente cada elemento deste módulo. Mas isto é um absurdo, pois na combinação*

$$a_1 \cdot f_1 + ... + a_k \cdot f_k$$

onde $a_i \in C([-1, 1])$*, se tomarmos* $a_1 = f_1 + f_2$*,* $a_2 = f_2 - f_1$ *e* $a_i = 0$ *para* $i > 2$ *temos o elemento*

$$g = (f_1 + f_2) \cdot f_1 + (f_2 - f_1) \cdot f_2$$

que com certeza pertence a $\Gamma(\text{Im}(f))$*, porém se tomarmos* $a_1 = f_1$*,* $a_2 = f_2$ *e* $a_i = 0$ *para* $i > 2$ *temos o elemento*

$$h = f_1 \cdot f_1 + f_2 \cdot f_2$$

que é o mesmo elemento g *anteriormente construido, portanto* $f_1, ..., f_k$ *não admite uma base finita de geradores, consequentemente* $\Gamma(\text{Im}(f))$ *não é projetivo finitamete gerado, apesar de* $\text{Im}(f)$ *ser a projeção geométrica do fibrado* ξ *em* η.

REFERÊNCIAS

BREDON, Glen E.. **Topology and Geometry**. New York: Springer-Verlag New York, 1993. 557 p.

BOTT, Raoul; TU, Loring W.. **Differential Forms In Algebraic Topology**. New York: Springer-Verlag New York, 1982. 331 p.

HUSEMÖLLER, Dale. **Fibre Bundles**. New York: Springer-Verlag New York, 1994. 353 p.

LAM, Tsit-Yuen. **Lecture on Modules and Rings**. New York: Springer-Verlag New York, 1999. 557 p.

LEE, John M.. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2 ed. New York: Springer, 2003. 474 p.

MILNOR, John W.; STASHEFF, James D.. **Characteristic Classes**. New Jersey: Princeton University Press, 1974. 330 p.

MUNKRES, James. **Topology**. 2 ed. Massachusets: Prentice Hall, 2000. 537 p.

NESTRUEV, Jet. **Smooth Manifolds and Observables**. New York: Springer, 2003. 222 p.

ROTMAN, Joseph J.. **An Introduction to Homological Algebra**. 3 ed. New York: Springer Science+Business Media, 2009. 709 p.

SWAN, Richard G.. Vector Bundles and Projective Modules **Transactions of the American Mathematical Society**. American Mathematical Society, 1962. p 264-277.