UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ADNIELSON LIMA DA SILVA

O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL PARA ALÉM DAS APARÊNCIAS

CURITIBA

2018

ADNIELSON LIMA DA SILVA

O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL PARA ALÉM DAS APARÊNCIAS

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Lucia Panossian

CURITIBA

2018

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S586e Silva. Adnielson Lima da
O ensino de função exponencial para além das aparências / Adnielson Lima da Silva. – Curitiba, 2018.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, 2018.

Orientador: Maria Lucia Panossian .

1. Funções (Matemática). 2. Funções exponenciais. 3. Logaritmos. 4. Matemática – Estudo e ensino. I. Universidade Federal do Paraná. II. Panossian, Maria Lucia. III. Título.

CDD: 515.7

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ADNIELSON LIMA DA SILVA** intitulada: **O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL PARA ALÉM DAS APARÊNCIAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 04 de Julho de 2018.

Maria Lucia Panossian
MARIA LUCIA PANOSSIAN
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Luciana S. Oliveira
LUCIANA SCHREINER DE OLIVEIRA
Avaliador Externo (UTFPR)

FLÁVIA DIAS DE SOUZA
Avaliador Interno (UFPR)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
Coordenação de Pós-Graduação

*A **Jesus** por seu imenso amor.*

*Aos meus pais **Izidoro** (in memorian) e **Júlia**, meus maiores incentivadores dos estudos.*

*Ao meu inesquecível irmão **Adnilson** (in memorian) que aprendi que o estudo vale a pena.*

*À minha querida esposa **Daniele** e aos meus amados filhos, **Beatriz** e **Artur** por estarem sempre ao meu lado em todas as circunstâncias de forma tão amorosa e incondicional.*

AGRADECIMENTOS

A Jesus que carregou-me muitas vezes no colo, devido minhas limitações e desespero, mas sempre guiou-me na direção correta.

Aos meus pais, Izidoro (*in memorian*) e Júlia que nunca mediram esforços, tanto financeiro como de incentivo aos estudos, destacando a minha querida, forte, carinhosa e maravilhosa mãe, que em momentos de desespero em minha vida, sempre esteve ao meu lado, com palavras de incentivo e força, a minha dívida com a senhora sempre será eterna, obrigado por tudo, amo minha mãe. Ao meu brilhante irmão Adnilson (*in memorian*) que foi espelho para os estudos, sempre brilhando e rompendo com os preconceitos de pele e de ser pobre, um exemplo a ser seguido, com certeza está brilhando com a sua inteligência no céu. As minhas sobrinhas Andressa e Alessandra por estarem do meu lado, incentivando e tendo orgulho de seu padrinho.

À minha querida esposa Daniele que pela sua compreensão, força, companheirismo e principalmente, amor, sempre esteve ao meu lado, em todos os momentos, tanto alegre como de profunda tristeza. Para ti o meu mais sincero e profundo amor. E aos meus amados filhos, Beatriz e Artur agradeço por compreenderem a minha ausência, que serão recompensados com muitas e muitas risadas e com um amor exponencial, bem como terão orgulho de seu velho pai.

A minha orientadora Doutora Maria Lucia Panossian por confiar em meu trabalho, pelo olhar técnico e pela orientação profissional. Obrigado pela compreensão dos diversos momentos de crise: financeira, psicológica e profissional. Serei eternamente grato por me ensinar a pesquisar, e pelo aprendizado ao longo desta caminhada.

As professoras da banca de qualificação Luciana e Flávia pelas valorosas e cuidadosas contribuições.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Paraná (PPGECM-UFPR) e do Grupo de

Estudo sobre a Teoria Histórico Cultural da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (GETHC-UTFPR) pelo apoio nos estudos, pelas amizades e parcerias.

Aos colegas professores dos Colégios Estaduais Professora Maria Gai Grendel e Desembargador Guilherme Albuquerque Maranhão pela parceria e pelo apoio. Em destaque a Diretora Sônia Aparecida Hinça dos Santos do Colégio Professora Maria Gai Grendel que sempre me apoiou e acolheu-me em seu colégio, dando suporte técnico e emocional nessa caminhada, que com 40 horas, lecionando junto com esta pesquisa, parecia ser impossível de se realizar, o meu muito obrigado.

Agradeço ao gentil professor Dr. João Pedro da **Ponte**, que cedeu prontamente uma de suas obras, sobre potência, que foi de grande valia para o estudo do movimento histórico e lógico da função exponencial.

Aos professores da OPM (Oficina Pedagógica de Matemática – UTFPR) do ano de 2016 que ajudaram com o seu profissionalismo a desenvolver as atividades orientadoras de ensino no conceito de funções exponenciais. Na certeza que foi um aprendizado tanto para eles, quanto um desenvolvimento para a educação matemática no ensino de funções exponenciais.

A minha amiga e colega professora Adriane que fez as correções devidas nessa dissertação, para que as minhas palavras sejam corretamente escritas e interpretadas pela comunidade cientifica e sociedade.

Compreender dialeticamente um fenômeno significa atingir a sua essência, transcender a análise da aparência do objeto, que é apenas uma das dimensões da realidade.

(KOPNIN, 1978)

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo analisar situações de ensino de função exponencial, considerando o movimento histórico e lógico da mesma. Constata-se na literatura especializada e através de observações em sala de aula, a dificuldade dos estudantes em apropriar-se do conceito de função exponencial para além dos aspectos externos e técnicos. Para responder a pergunta da pesquisa "De que modo a situação desencadeadora da aprendizagem possibilita ou cria condições para superar as aparências no ensino, de função exponencial, para que os alunos se apropriem do conceito de forma teórica?" a metodologia apresentada nesta pesquisa, orienta-se, pelos pressupostos da teoria da atividade, histórico-cultural e Atividade Orientadora de Ensino (AOE), e concretiza-se nas seguintes ações: revisão de literatura sobre o ensino de função exponencial; estudos de documentos curriculares oficiais; movimento histórico e lógico da função exponencial para reconhecer às necessidades humanas que desencadearam seu desenvolvimento e seus nexos internos (sua essência); elaboração de indicadores para análise de situações de ensino de funções exponenciais em livros didáticos aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015; e análise de dados coletados da interação com professores da rede pública na "Oficina Pedagógica de Matemática" (OPM) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), através de gravações de áudio/vídeo, para analisar os sentidos pessoais atribuídos pelos professores a respeito da função exponencial. Na OPM, desenvolveram-se situações desencadeadoras de aprendizagem, como uma possibilidade de ensinar o conteúdo de funções exponenciais, usando a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como base metodológica. Dos resultados obtidos aqui na dissertação, destacam-se os nexos internos reconhecidos por meio do movimento histórico e lógico da função exponencial e que revelam a essência dessa função; a elaboração de indicadores de análise de situações de livros didáticos; a transformação dos sentidos atribuídos pelos professores à situações no ensino de função exponencial durante o planejamento e concretização das situações desencadeadoras elaboradas coletivamente, considerando os elementos presentes em Atividade Orientadora de Ensino e do movimento histórico e lógico da função exponencial.

Palavras-chave: Funções exponenciais 1. Movimento histórico-lógico 2. Situações de ensino 3.

ABSTRACT

This dissertation aims to analyze teaching situations of the exponential function considering its historical and logical movement. It is observed in the specialized literature and through observations in the classroom, the difficulty of the students in appropriating the concept of exponential function beyond the external and technical aspects. To answer the research question "How does the learning-triggering situation enable or create conditions to overcome appearances in exponential function teaching, so that students will appropriate the concept theoretically?", the methodology presented in this research, the theory of activity, historical-cultural theory, and the Teaching Activity of Teaching (AOE), is narrowed down in the following actions: literature review on the teaching of exponential function; studies of official curricular documents; study of the historical and logical movement of the exponential function to recognise the human needs that triggered its development and its internal nexus (its essence); elaboration of indicators for analysis of teaching situations of exponential functions in textbooks approved in the National Textbook Plan (PNLD) of 2015; and analysis of data collected from the interaction with teachers of the public network in the "Pedagogical Workshops of Mathematics" (OPM) of the Federal Technological University of Paraná (UTFPR), through audio / video recordings, to analyse the personal senses attributed by teachers regarding the exponential function. In OPM, learning triggering situations were developed as a possibility to teaching the content of exponential functions, using Teaching Guidance Activity (AOE) as a methodological basis. From the results obtained in this dissertation we highlight the internal links recognised through the historical and logical movement of the exponential function and that reveal the essence of this function; the preparation of indicators for analysis of textbook situations; the transformation of the meanings attributed by the teachers to the exponential function teaching situations during the planning and concretization of collectively developed trigger situations, considering the elements of the Teaching Teaching Activity and the historical and logical movement of the exponential function.

Keywords: Exponential functions 1. Logical-historical movement 2. Teaching situations 3.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AOE	- Atividade Orientadora de Ensino
CAPES	- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DAMAT	- Departamento Acadêmico de Matemática
DCE-PR	- Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná
EBRAPEM	- Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática
ENEM	- Encontro Nacional de Educação de Matemática
GETHC	- Grupo de Estudo da Teoria Histórico Cultural
OPM	- Oficina Pedagógica de Matemática
PA	- Progressão Aritmética
PCNEM	- Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PDE	- Programa de Desenvolvimento Educacional
PG	- Progressão Geométrica
PIBIC-JR	- Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – Junior
PNLD	- Plano Nacional do Livro Didático
PPGECM	- Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.
Q	- Questionário
RPM	- Revista do Professor de Matemática
UFPR	- Universidade Federal do Paraná
UTFPR	- Universidade Tecnológica Federal do Paraná
V/A	- Gravação de Vídeo ou Áudio

SUMÁRIO

1 OS CAMINHOS DA PESQUISA

O conceito de função é considerado um dos mais importantes para a Matemática e também para a ciência em geral. Apesar disso, o processo de ensino e aprendizagem de funções vêm se tornando sistematicamente motivo de grande preocupação para professores e pesquisadores, devido às dificuldades dos estudantes em entender tal conceito, como está relatado no artigo de Trindade (1999) e nas dissertações de Silva (2014) e Pereira (2010). No caso específico do conceito de função exponencial, observa-se a dificuldade dos estudantes em reconhecer situações de crescimento exponencial considerando muitas vezes, que o que se destaca no ensino é a substituição de valores numéricos nas variáveis, o estabelecimento da lei da função a partir de valores previamente organizados ou ainda a construção de gráficos mecanicamente.

O pesquisador trabalha como professor de matemática na rede pública do Estado do Paraná, há mais de 10 anos, e constatou o que é evidenciado pela literatura. Observou-se, a dificuldade dos estudantes em aprender os conceitos de função exponencial. A busca de condições para superar essa dificuldade desencadeou a necessidade desta pesquisa de mestrado.

O primeiro contato com a linha teórica aconteceu no ano de 2015, por meio de participação, no projeto de extensão “Oficina Pedagógica de Matemática (OPM)” oferecido pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), baseada nos pressupostos da teoria histórico-cultural, da teoria da atividade e da atividade orientadora de ensino. No decorrer daquele ano, o grupo que participava do projeto, desenvolveu uma situação desencadeadora de aprendizagem, organizada a partir da rampa de skate de dedo para o estudo de relações trigonométricas no triângulo retângulo, desenvolvido em um colégio público da periferia de Curitiba. No ano de 2016, os resultados deste trabalho foram apresentados no Encontro Nacional de Educação de Matemática (ENEM), como relato de experiência (SILVA et al., 2016).

O pesquisador, entusiasmado, com o êxito em sala, junto aos alunos, do colégio que lecionava, resolveu inscrever-se no mestrado da UFPR, e apresentou o projeto de pesquisa “Equilíbrio entre a Técnica e o Conceito de Função Logarítmica”, sendo selecionado para desenvolver a pesquisa. Inicialmente, o objetivo era o de investigar a forma com que os estudantes do 1° ano do Ensino Médio se apropriam do conceito de função, verificando se existia o equilíbrio entre o conceito de função e a aplicação da técnica (algoritmo).

Ao entrar no mestrado e com reuniões, junto à orientadora, o projeto teve alguns ajustes como trocar o conteúdo matemático para a função exponencial ao invés de logarítmica, pois na época estava em discussão, na Base Nacional Comum a retirada desse conteúdo do Ensino Médio, considerada a dificuldade de obter dados que possibilitassem verificar o equilíbrio entre a apropriação do conceito de função logarítmica e aplicação da técnica.

Assim, o foco da pesquisa, voltou-se para o processo de formação de professores e o trabalho com os pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) conforme proposto por Moura (2010), tendo como referência os conceitos da função exponencial.

Em 2016, o projeto de extensão 'Oficina Pedagógica de Matemática' teve por foco o estudo da função exponencial, e através deste projeto foram coletados alguns dados para a pesquisa, como será descrito no capítulo 7. O objetivo então foi alterado para "Investigar os sentidos pessoais atribuídos pelos professores ao significado social da função exponencial e logarítmica a partir dos pressupostos metodológicos da atividade orientadora de ensino (AOE)".

Os primeiros estudos e dados da pesquisa foram apresentados no Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XX EBRAPEM) que ocorreu em Curitiba, e também para o professor Doutor Manoel Oriosvaldo de Moura, sendo considerado que o foco principal deveria recair sobre o objeto de ensino (função exponencial) e não sobre os sentidos dos professores. Assim, a última mudança na definição da pesquisa ocorreu e resolveu-se considerar os sentidos atribuídos dos professores, como dados da pesquisa, mas obter mais dados no movimento histórico e lógico da função exponencial, a partir dos seus nexos internos (essência) contribuindo com elementos para a elaboração de situações desencadeadoras de aprendizagem pelos professores.

Então, definiu-se como pergunta da pesquisa: "De que modo a situação desencadeadora de aprendizagem possibilita ou cria condições para superar as aparências de outras situações no ensino de função exponencial, para que o aluno se aproprie do conceito de forma teórica?". A pergunta inclui as dúvidas que o pesquisador possuía a partir de suas aulas sobre função exponencial, se o aluno realmente aprendia o conteúdo ou manipulava somente a fórmula da função exponencial.

Para responder essa pergunta, o pesquisador considerou a necessidade de analisar, os documentos oficiais e quais pesquisas apresentavam a respeito de função exponencial; estudar o movimento histórico e lógico dessa função para reconhecer as necessidades humanas que desencadearam seu desenvolvimento, quais os seus nexos internos (sua essência). A partir desses nexos e das pesquisas a respeito dessa função foram organizados indicadores, usados para analisar várias situações de ensino de livros didáticos aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015, com o objetivo de servir como elementos auxiliares ao professor de matemática no processo de seleção e análise de situações de ensino.

Além disso, a partir dos dados obtidos na OPM, buscou-se analisar os sentidos pessoais, que os professores tinham a respeito da função exponencial, enquanto desenvolviam situações desencadeadoras de aprendizagem, como uma possibilidade metodológica de ensinar esse conteúdo, usando a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como base metodológica, organizando assim o seu ensino, tornando-o mais significativo para o estudante.

Portanto, o ensino de função exponencial, passou a ser o objeto de pesquisa. A partir deste, definiu-se, o objetivo da pesquisa: analisar situações de ensino da função exponencial considerando o seu movimento histórico e lógico.

Para a apresentação dos resultados desta pesquisa, optou-se pelo seguinte roteiro de escrita:

O capítulo 2 apresenta os resultados do levantamento da literatura com a finalidade de compreender o que está sendo pesquisado sobre o ensino de função exponencial. Nesse mesmo capítulo, será analisada a compreensão do ensino de funções exponenciais, a partir, dos documentos oficiais, como Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR).

O capítulo 3 foi destinado à fundamentação teórica, que nesta pesquisa, apoia-se nas contribuições da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade de Leontiev, e na Atividade Orientadora de Ensino (AOE) de Moura. Portanto, nesse capítulo serão abordados os elementos utilizados dessa linha, com intuito de esclarecê-los, empregando-os nos capítulos subsequentes.

No capítulo 4 são apresentados os estudos realizados sobre o Movimento Histórico e Lógico da Função Exponencial.

O quinto capítulo é destinado às ações metodológicas da pesquisa, onde se explicitarão os modos utilizados para atingir o objetivo, que incluem: o estudo do movimento histórico e lógico da função exponencial; a coleta de dados dos sentidos atribuídos à função exponencial pelos professores da OPM, criação dos indicadores de análise das situações de ensino dos livros didáticos aprovados pelo PNLD, e da análise das situações desencadeadoras de aprendizagem criadas pelos professores da OPM.

E no capítulo 6 são apresentadas as análises de algumas situações de ensino da função exponencial obtidas em Livros Didáticos, aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD-2015)[1], a partir dos indicadores de análise elaborados.

Os dados referentes à Oficina Pedagógica de Matemática são explicitados e analisados no capítulo 7, e encerra-se o registro apresentando os principais resultados no capítulo 8 das considerações finais.

---

[1] Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>. Acesso em: 12 dez. 2016.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Esse capítulo é destinado à caracterização do ensino de funções exponenciais. No item 2.1 apresentam-se o resultado de pesquisas sobre o ensino de função exponencial, e o item 2.2 é destinado aos registros dos documentos curriculares oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000) e Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná de Matemática (DCE-PR) (PARANÁ, 2008), que contribuem para a compreensão ao ensino de função exponencial.

2.1 O QUE DIZEM AS PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Entende-se como necessário buscar dissertações e teses no Banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e artigos no site de revistas eletrônicas (Bolema, Zetetiké, Acta Scientiae, Revista do Professor de Matemática (RPM)), site de busca o Google Acadêmico, anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), e repositórios das universidades do Brasil que tratem de forma específica do tema ensino de função exponencial.

Foi encontrado um número pequeno de obras (aproximadamente sete) a respeito somente de funções exponenciais e seu ensino, e um número maior de trabalhos a respeito de funções logarítmicas, num total de treze. Além disso, encontrou-se, treze textos tratando de função exponencial e logarítmica. Desse conjunto de dissertações e artigos (no total 33) criou-se a Tabela 1, no qual consta as palavras chaves da pesquisa, o nome da obra, tipo da obra e o(s) autor(res).

TABELA 1 - PESQUISA DE OBRAS SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

(continua)

N°	Tipo da Obra	Título da Obra	Autor(es)	PALAVRAS CHAVES
1	Dissertação	A Função exponencial natural e aplicações	Pereira (2015)	Exponencial
2	Dissertação	Contexto e aplicações das funções exponenciais no Ensino Médio	Silva (2015)	Exponencial
3	Artigo	Representações sobre função exponencial	Freitas e Almouloud (2014)	Exponencial
4	Artigo	Erros na Resolução de Inequações: consequências de dificuldades relativas a conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio	Ramos e Curi (2014)	Função Exponencial
5	Artigo	Atividades contextualizadas para o ensino da função exponencial	Braz e Figueiredo (2007)	Ensino da Função Exponencial
6	Artigo	Ensino da função exponencial explorando uma abordagem lúdica	Eisermann et al. (2017)	Ensino da Função Exponencial
7	Dissertação	Uma proposta de utilização de material manipulativo no aprendizado da função exponencial	Braz (2007)	Ensino da Função Exponencial
8	Artigo	O Logaritmo dos livros didáticos: Uma análise segundo Yves Chevallard	Machado et al. (2016)	Logaritmo
9	Artigo	Logaritmo ao longo da história	Santos e Lima (2014)	Logaritmo
10	Artigo_	Contraovérsias na história da Matemática: a definição do logaritmo	Dias (2005)	Logaritmo
11	Dissertação	(RE)significado o conceito de Logaritmo	Vidigal (2014)	Logaritmo
12	TCC	Logaritmo e suas aplicações	Vasconcelos (2011)	Logaritmo
13	Dissertação	Logaritmos - Proposta de Ensino utilizando calculadora	Karrer (1999)	Logaritmo
14	Relatório Final - Projeto de Pesquisa de Iniciação Científica	A proposta de ensino de logaritmos em livros didáticos atuais	Quintanilha (2005)	Logaritmo
15	Monografia	Logaritmos Murifici Logarithmorum ad aeternum Maravilhosos Logaritmos pra sempre	Frederico (2008)	Logaritmo
16	Artigo	O ensino de logaritmos em uma turma de ensino médio	Merichelli e Allevato (2010)	Logaritmo
17	Artigo	As transformações: do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo	Almouloud (2011)	Logaritmo
18	Artigo	Uma sequência de ensino para a introdução de logaritmo: Estudo exploratório usando a calculadora	Karrer (2000)	Logaritmo
19	Artigo	Ensino de Aritmética no Rio Grande do Sul: A Contribuição de Luiz Schuler, 1904	Quadros e Bisognin (2015)	Logaritmo
20	Artigo	Objetos de aprendizagem e o conceito de logaritmos	Lutchemeyer e Schefer (2011)	Logaritmo
21	Artigo	Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos livros didáticos do ensino médio	Oliveira e Filho (2014)	Exponencial e Logarítmica
22	Artigo	Contextualizações Históricas e aplicações de Logaritmos e exponenciais	Pinheiro e Santana (2011)	Exponencial e Logarítmica

FONTE: o autor (2018)

TABELA 1 - PESQUISA DE OBRAS SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

(conclusão)

N°	Tipo da Obra	Título da Obra	Autor(es)	PALAVRAS CHAVES
23	Dissertação	Funções exponenciais e logarítmicas	Matos (2014)	Exponencial e Logarítmica
24	Dissertação	Abordagem das Funções exponencial e logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no Ensino Médio	Pereira (2010)	Exponencial e Logarítmica
25	Dissertação	O Ensino das Funções Exponenciais e Logarítmica por atividades	Silva (2014)	Exponencial e Logarítmica
26	Artigo	Sistema de Logaritmos	Lima (1992)	Exponencial e Logaritmo
27	Artigo	Perigos da Profissão	Bongiovanni (1995)	Exponencial e Logaritmo
28	Artigo	Como se constrói uma tábua de logaritmos	Avila(1995)	Exponencial e Logaritmo
29	Artigo	Sobre a evolução de algumas idéias matemáticas - Logaritmos	Lima (1988)	Exponencial e Logaritmo
30	Artigo	Crescimento exponencial? O que é isso?	Mandel (2007)	Exponencial e Logaritmo
31	Artigo	Logaritmos um curso alternativo	Fraenkel (1987)	Exponencial e Logaritmo
32	Artigo	A matemática e o Índice de Desenvolvimento Humano – IDH	Monteiro (2008)	Exponencial e Logaritmo
33	Artigo	Números muito grandes	Avila(1994)	Exponencial e Logaritmo

FONTE: o autor (2018)

Desta forma, foram escolhidas as dissertações de Silva (2014), Pereira (2015), Pereira (2010), Silva (2015) e Matos (2014) para leitura, por abordarem de forma específica o processo de ensino e aprendizagem da função exponencial, ainda que relacionada à função logarítmica.

Silva (2014) avalia a potencialidade do ensino das funções exponenciais e logarítmicas ao usar do processo metodológico da engenharia didática. Considerando que o significado atribuído ao termo "atividade" não corresponde ao adotado nessa pesquisa, ainda assim se torna pertinente analisar nesse texto o uso de uma metodologia para o ensino/aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. A pesquisa é elaborada com base em informações adquiridas de análises preliminares. Foi instituída uma sequência didática com quinze atividades, jogos e testes diagnósticos, analisados *a priori* e aplicados, em dez sessões, a vinte e um estudantes do 1º ano de uma escola pública estadual da cidade de Belém do Pará. As análises *a posteriori* revelam que os estudantes são capazes de descobrir modelos matemáticos referentes às funções exponencial e logarítmica sem que o professor precise os apresentar, bem como, a performance dos estudantes com o ensino de maneira clássica foi mais baixa em relação a performance com a realização de leituras e construções gráficas. A sequência didática proposta acarreta uma melhor performance dos estudantes que participaram da pesquisa, proporcionando o aprendizado e auxiliando que as capacidades úteis à evolução dos estudantes fossem despertadas e/ou aperfeiçoadas.

Já o trabalho de Pereira (2015) destaca a função exponencial de base e[2], ressaltando o alcance das infinitas aplicações dessa função, que transpassa muitas áreas de conhecimento como: Arqueologia, Arquitetura, Biologia, Economia, Demografia, entre outras. Há uma divisão de três capítulos neste trabalho: Conceitos iniciais, A função exponencial natural e Aplicações. O pesquisador em questão se inspira em Lima (1999) e acredita que para estimular o equilíbrio no processo de ensino aprendizagem é de grande importância a presença desses três conceitos: a conceituação, a manipulação e aplicações. A conceituação refere-se à formulação correta das definições matemáticas e o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos; a manipulação tem caráter algébrico, conduzindo à habilidade na manipulação de cálculos; e por fim, as aplicações, como empregos dos modelos ou

[2] Usado negrito para diferenciar da letra "e", pois significa função exponencial natural.

teorias da Matemática, servem para alcance e previsão de resultados em situações diversas, as quais podem apresentar questões de rotina, ou de outras áreas, sejam científicas ou sociais.

Em sua dissertação, Pereira (2010) analisa uma abordagem metodológica das funções exponencial e logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no Ensino Médio e elabora uma sequência de atividades usando o software Winplot, e referenciadas em Polya[3] (1995) para resolução de Problemas, Friendlander (1995)[4] quanto à interpretação geométrica gráfica e Miranda e Laudares (2009)[5] em relação focalização na compreensão conceitual. A pesquisa aqui desenvolvida se aproxima dessa dissertação, pois se preocupa com o conceito da Função Exponencial, e traz também análise de situações de ensino dos livros didáticos.

Por sua vez, a pesquisa de Silva (2015) tem como foco o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio no Brasil, onde foram empregados, de maneira principal, os estudos acerca da Função Exponencial e suas variações. Da mesma maneira, também foram utilizadas as orientações apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais ao Ensino Médio de maneira global, e não somente ao ensino da matemática em si. A Função Exponencial, por meio de suas gradações de multidisciplinaridade indicadas a partir da evolução de seu conceito até a aplicação atual, em variadas disciplinas e profissões, foi apurada de forma a se transformar facilitadora da interdisciplinaridade e da desmistificação da matemática como disciplina assustadora.

Na dissertação de Matos (2014) efetuou-se, um estudo das funções exponenciais e logarítmicas, com a finalidade de servir como material de apoio para enriquecer e dinamizar as aulas, com conceitos e definições em diferentes contextos. Este material continha aplicações como nos juros, na datação por carbono radioativo, para o registro de cálculo de índice de terremotos por um sismógrafo.

As pesquisas estudadas revelam possibilidades para o ensino da função exponencial, sem reforçar a manipulação de seus aspectos técnicos, entretanto, tais resultados ainda não se manifestam no ensino em sala de aula.

---

[3]POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

[4]FRIENDLANDER, A.; HADAS, N. Ensinado valor absoluto numa abordagem em espiral. In: DOMINGUES, H. H. **As ideias da Álgebra.** São Paulo, Atual, 1995. Cap. 29, p. 244-254.

[5]MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B. Informatização no Ensino da Matemática: Investindo no Ambiente de Aprendizagem. **Zetetiké**, Campinas – SP, v. 15, n. 27, jan., jun., p. 71-88, 2007.

2.2 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS CURRICULARES SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS?

Além de procurar compreender o que dizem os pesquisadores sobre o ensino de função exponencial, considera-se necessário identificar a compreensão também sobre o que está registrado a respeito nos documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de matemática (BRASIL, 2000) e Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR) (PARANÁ, 2008) de matemática.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio de Matemática está descrito sobre o ensino dos conteúdos de matemática que:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 2000, p. 43).

O PCNEM exemplifica que o ensino de funções na Matemática não pode ser isolado, pois ele tem um caráter ~~i~~interdisciplinar. Também, ressalta que as sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são do que funções particulares. Conforme estudado no movimento histórico e lógico do conceito a ser apresentado no item 4.2 reconheceu-se as progressões aritméticas e geométricas como nexo interno da função exponencial.

Esse documento também destaca as conexões internas à própria Matemática**,** assim, como o conceito de função desempenha papel importante para descrever e estudar o comportamento de fenômenos do cotidiano, e de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia, por meio da leitura, interpretação e construção de gráficos.

Deve-se destacar que em nenhuma parte do PCNEM, se refere à Função Exponencial de forma específica, mas este documento indica que cabe:

> [...] portanto, ao ensino da Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um

modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 2000, p. 44).

Nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Estado do Paraná (DCE-PR) (PARANÁ, 2008) referente à disciplina de Matemática, aparece o conteúdo estruturante Função Exponencial da seguinte forma (Tabela2):

TABELA 2 - DESCRIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NA DCE-PR DE MATEMÁTICA

Conteúdo Estruturante	**Funções**
Conteúdos Básicos	Função Exponencial
Expectativa de Aprendizagem	- Identifique uma Função exponencial em situações descritas em um texto, representando-a algebricamente e/ou graficamente. - Calcule a raiz de uma Função Exponencial - Reconheça o crescimento ou os decrescimentos de uma Função Exponencial por meio de seu sinal e/ou representação gráfica. - Resolva situações-problemas que envolvam a Função Exponencial.

FONTE: PARANÁ (2008, p. 81)

Deve-se ressaltar que a DCE-PR, orienta que o professor pode trabalhar no ensino de funções com a matemática financeira, mais precisamente nos conceitos de juros simples. Os conteúdos função exponencial e progressão geométrica podem ser trabalhados e articulados aos juros compostos (PARANÁ, 2008, p. 62), neste caso vem a confirmar o estudo dessa pesquisa sobre nexo conceitual interno (juros compostos) da função exponencial, encontrados no Movimento Histórico e Lógico dessa função.

Ainda assim, percebe-se que as Diretrizes ressaltam a identificação e o reconhecimento da função exponencial pelo que se pode caracterizar como ‘aparência’, ou seja, formas de representar e descrever graficamente a função, o que se entende nessa dissertação como uma característica do pensamento empírico.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DAS TEORIAS DA ATIVIDADE, HISTÓRICO CULTURAL E DA ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO PARA A PESQUISA

Para o desenvolvimento desta pesquisa, considera-se que a escola contemporânea deve priorizar o pensamento teórico dos estudantes, diferente do que a escola tradicional formava no passado, conforme Davydov (1987) relatou:

> Realmente, no curso de centenas de anos a finalidade social principal da educação massiva consistiu em inculcar na maior parte das crianças dos trabalhadores só aqueles conhecimentos e habilidades, sem os quais é impossível obter uma profissão mais ou menos significativa na produção industrial e na vida social [...]. A escola primária realizava estes objetivos e atuava como etapa primeira e única na educação da maior parte da população; etapa que preparava diretamente as crianças para a atividade de trabalho na qualidade de força de trabalho mais ou menos qualificada ou para a aprendizagem profissional em especialidades relativamente simples. A solução desta tarefa social correspondia por inteiro ao conteúdo utilitário-empírico que dava a escola primária tradicional e aqueles métodos de ensino que se formaram nela ao longo de muitos anos" (DAVYDOV, 1987, p. 143-144).

Os conceitos empíricos que são baseados no conhecimento cotidiano e dos sentidos humanos, devem ser superados pelos conceitos científicos que são ensinados na escola, estes carregados de sentido aos estudantes (DAVYDOV, 1987).

Davydov (1987) caracteriza e compreende a atividade de aprendizagem com base na teoria de Leontiev (1983). Afirma que a aprendizagem é a atividade principal das crianças em idade escolar, firmando o entendimento de que o conteúdo da atividade de aprendizagem é o conhecimento teórico-científico e, portanto, a base do ensino desenvolvimental é seu conteúdo, de onde se derivam os métodos de ensino (LIBÂNEO; FREITAS, 2006). Entretanto, não se trata da mera transmissão de conteúdos, como já foi rejeitado por Vygotsky (1984).

Davydov propôs como tarefa da escola, em todos os níveis, a formação do pensamento teórico-científico, conforme a lógica dialética. Podem-se destacar três contribuições de sua teorização:

> 1. Integração entre os conteúdos científicos e o desenvolvimento dos processos de pensamento. Davydov afirma que o conteúdo da atividade escolar é o conhecimento teórico-científico e as capacidades e habilidades que lhes correspondem. Logo, a base do ensino desenvolvimental é o seu conteúdo, dos quais derivam os métodos e a organização do ensino.

> 2. Necessária correspondência entre a análise de conteúdo e os motivos dos alunos no processo de ensino e de aprendizagem. A análise do conteúdo tem como finalidade verificar a essência dos conceitos, de tal modo que o professor possa tirar uma estrutura de tarefas de aprendizagem compatíveis com os motivos do aluno.
> 3. Fundamentação teórica dos professores no conteúdo da disciplina e também na sua didática. Esta proposição refere-se à formação de professores, o imprescindível domínio teórico específico da matéria de ensino aliado ao domínio das instrumentalidades, capacidades e habilidades específicas, meios e técnica da atividade de ensinar (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 6).

Os conceitos de função exponencial que são o objeto desta pesquisa, são científicos, e podem ser registrados por sistemas simbólicos que medeiam à ação do homem, com as coisas e fenômenos. Os conceitos são representações da realidade rotuladas por signos específicos – as palavras; procedem de um dado objetivo e constituem uma forma culturalmente determinadas de ordenação e designação das categorias da experiência (OLIVEIRA, 1997, p. 48).

Sousa e Moura (2016) também pautadas em Davídov (1982) destacam que a didática tradicional, não considera o movimento lógico-histórico de desenvolvimento dos conceitos que são tratados nas escolas, uma vez que dá ênfase ao estudo dos elementos perceptíveis dos conceitos: os nexos externos.

Os nexos externos estão relacionados à linguagem formal do conceito, porque estão despidos do trabalho humano que os gerou, das contradições, ao contrário dos nexos internos que estão impregnados de história, por isso, são históricos. Os nexos externos são explicitados na sala de aula, a partir dos aspectos simbólicos contidos nos conceitos. É como se os símbolos tivessem vida própria; falassem por si só (SOUSA; MOURA, 2016). Esses conceitos são apresentados, em seu último estágio de rigor, a partir de alguns experimentos ou ainda de memorizações. Não há preocupações em analisar mudanças históricas, ou ainda, as sínteses históricas que se apresentam nos conceitos matemáticos.

No caso, da função exponencial, pode-se considerar como elementos dos nexos externos a representação gráfica e algébrica da função, elementos que normalmente são identificados pelos estudantes, mas que não revelam seus aspectos essenciais.

Segundo Sousa e Moura (2016). O modelo seguido pela escola é um modelo industrial, uma vez que, até o final do século XX, e porque não dizer, neste início de século XXI, pode-se constatar a predominância de certa Pedagogia do

Treinamento em todas as áreas do conhecimento, dentre elas, a da Matemática. Sousa e Moura (2016, p. 3). Consideraram quatro momentos dessa pedagogia, “1) definição do conceito; 2) apresentação do funcionamento do conceito; 3) treinamento do conceito e 4) avaliação”. Neste tipo de organização do ensino, privilegiam-se as repetições, as memorizações de informações sobre o conceito: os elementos perceptíveis dos conceitos, nexos externos. Logo, tanto aqueles que aprendem, quanto aqueles que ensinam são apenas usuários dos conceitos. O uso do conceito de forma mecânica, memorizada, não implica, necessariamente, no entendimento deste como criação humana, lógico-histórica, muito menos no entendimento de seus nexos internos.

Este cenário gera consequências aos professores que ensinam matemática, e que não conseguem se desligar, totalmente, do treinamento e da fragmentação. Ainda que muitos deles tentem encontrar novos caminhos para fazer o ensino, em suas salas de aula, continuam priorizando o aspecto mecânico dos conceitos, e incentivam os estudantes a fazer longas listas exercícios, bem como, decorar inúmeras fórmulas matemáticas. Na escola há fragmentação dos conteúdos, ao mesmo tempo, em que se tenta adaptar as práticas escolares às novas exigências sociais.

Maor (2008, p. 14) também tece críticas ao ensino da matemática nas escolas:

> Como uma pessoa que aprendeu matemática em todos os níveis universitários, estou ciente da atitude negativa de muitos estudantes em relação a esta disciplina. Existem vários motivos para isso, sendo um deles o modo esotérico e seco com que o tema é ensinado. Temos a propensão de sobrecarregar nossos estudantes com fórmulas, definições, teoremas e demonstrações, mas raramente mencionamos a evolução histórica desses fatos, deixando a impressão de que eles foram entregues à humanidade como os Dez Mandamentos, por alguma autoridade divina. A história da matemática é uma boa maneira de corrigir essa impressão (MAOR, 2008, p.14).

Tanto os conceitos científicos, como os conhecimentos cotidianos, estão impregnados de cultura, história e práticas sociais. Kopnin (1978) e Davídov (1982) afirmam que a lógica de determinado conhecimento se constitui histórica. Logo, fica muito difícil fazer referência, ao conhecimento humano, sem considerar o movimento lógico-histórico que se apresenta nos conceitos lógico-formais.

Uma possibilidade de organizar o ensino buscando superar as aparências reveladas pelos nexos externos da função exponencial e considerando o movimento histórico e lógico dos conceitos se apresenta com a Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 2010). Esta se baseia nos pressupostos da teoria da atividade e da teoria histórico cultural, cujos principais elementos serão descritos a seguir.

A teoria histórico-cultural nasce dentro da filosofia marxista, e um dos seus grandes nomes foi Vygotsky (1984) que explicou o desenvolvimento psicológico humano no processo de apropriação da cultura, mediante a comunicação com outras pessoas. Nestes processos de comunicação, o desenvolvimento das funções psicológicas superiores se efetiva primeiramente na atividade interpessoal (externa) e, em seguida, na atividade intrapessoal (interna), regulada pela consciência, mediados pela linguagem, em que os signos adquirem significado e sentido (VYGOTSKY, 1984, p. 59-65).

O termo “sentido” se refere a compreensão pessoal, a qual envolve as relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e às vivências afetivas, distinguindo assim do “significado” propriamente dito, que já tem seu núcleo relativamente estável de compreensão da palavra. Conforme Oliveira (1997) esclarece:

> Vygotsky distingue dois componentes do significado da palavra; o significado propriamente dito e o “sentido”. O significado propriamente dito refere-se ao sistema de relações objetivas que se formou no processo de desenvolvimento da palavra, consistindo num núcleo relativamente estável de compreensão da palavra, compartilhado por todas as pessoas que a utilizam. O sentido, por sua vez, refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, composto por relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e às vivências afetivas do indivíduo. O sentido da palavra liga seu significado objetivo ao contexto de uso da língua e aos motivos afetivos e pessoais de seus usuários. Relaciona-se com o fato de que a experiência individual é sempre mais complexa do que a generalização contida nos signos (OLIVEIRA, 1997, p. 50).

Com isso, a educação e o ensino se constituem como formas universais e necessárias do desenvolvimento mental, em que os processos se ligam aos fatores socioculturais e as condições internas dos indivíduos (LIBÂNEO, 2004, p.116).

A atividade é um conceito importante na teoria histórico-cultural, explica o processo de mediação entre o homem e a realidade objetiva. Centrada nesse conceito de atividade, a teoria histórico-cultural da atividade (ou teoria da atividade), surgiu como um desdobramento da teoria histórico-cultural e foi desenvolvida por Leontiev e depois por seus discípulos.

Para Leontiev (1994) nem todos os processos podem ser chamados de atividade, somente aqueles que satisfazem a uma necessidade especial, que fazem relações do homem com o mundo.

Leontiev (1994) assim define a atividade:

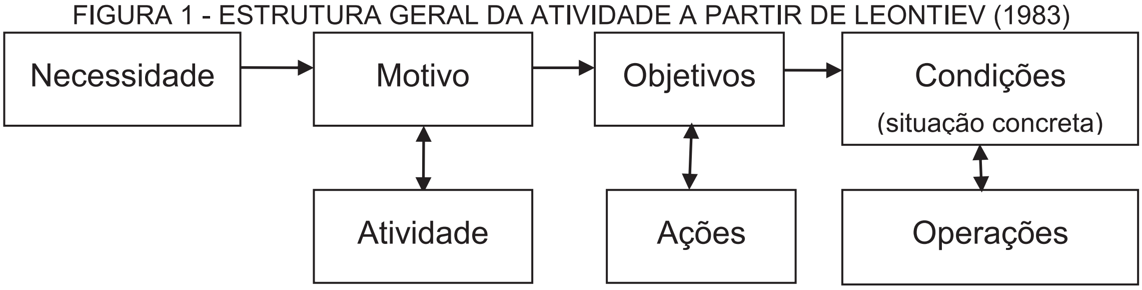
> Por atividade, designamos os processos psicologicamente caraterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo (LEONTIEV, 1994, p. 68).

A teoria da Atividade de Leontiev (1983) tem na sua estrutura, os elementos: necessidades, motivos, ações (ligadas aos objetivos), operações e condições.

Conhecer os objetivos e os motivos da atividade implica a organização de ações e operações que, embora estejam em constante movimento na atividade, diferenciam-se. Enquanto, a ação está relacionada com os objetivos, as operações se correlacionam com as condições, ou seja, as operações são “forma de realização de uma ação”. No entanto, o motivo da ação não coincide com o seu objetivo, e sim com o motivo da atividade da qual ela faz parte (LEONTIEV, 1983, p. 87).

Na Figura 1 apresentam-se os elementos da Teoria da Atividade de Leontiev.

FIGURA 1 - ESTRUTURA GERAL DA ATIVIDADE A PARTIR DE LEONTIEV (1983)



FONTE: PANOSSIAN (2008, p. 27)

- Necessidade, objetivo e motivo.
- Motivo (eficazes ou apenas compreensíveis).
- Ações (direcionadas a objetivos, concretizadas por meio das operações).
- Operações (modo de realizar diferentes ações).
- Condições.

A partir dos elementos e da caracterização da atividade humana proposta por Leontiev (1983) é que Moura (2001) observa a organização do ensino e sistematiza a Atividade Orientadora de Ensino conceituada como "[...] aquela que estrutura o ensino de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema" (MOURA, 2001, p.155).

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) de Moura tem como elementos definidos para a organização do conhecimento, a intencionalidade do professor; a explicitação da situação desencadeadora da aprendizagem; momento de interação entre os estudantes; o professor e o objeto do conhecimento, em busca de possíveis formas de resolução do problema; momentos coletivos de análise e síntese das resoluções encontradas (MOURA; SFORNI; ARAÚJO, 2011).

Para Moura, Sforni e Araújo (2011, p. 39-50), também a AOE tem como expressão a unidade entre teoria e prática, e é composta por conteúdos, objetivos e métodos dimensionados pelas interações, histórico-culturais dos três elementos fundamentais do ensino: o objeto do conhecimento, que nesta pesquisa é o conceito de função exponencial, o professor e o estudante.

A AOE é fundamentada no materialismo histórico-dialético, e considera que a relação entre a atividade de ensino e aprendizagem possibilita a apropriação dos conceitos. Para tanto é necessário reconhecer os nexos conceituais e a essência do conceito revelada por meio de seu movimento lógico e histórico. O lógico reflete o histórico de forma teórica.

Segundo Duarte (1998):

> [...] o trabalho educativo alcança sua finalidade quando cada indivíduo singular apropria-se da humanidade produzida histórica e coletivamente, quando o indivíduo apropria-se dos elementos necessários à sua humanização. Portanto, a referência fundamental é justamente o quanto o gênero humano conseguiu se desenvolver ao longo do processo histórico de sua objetivação (DUARTE, 1998, p. 86).

Algumas pesquisas como as de Panossian (2014) e de Sousa (2004) estudam o movimento histórico e lógico de conceitos matemáticos. Nessa dissertação também se tem como intuito investigar o ensino de função exponencial, de acordo com o movimento histórico e lógico, e se reconhece o conceito de exponencial como um conceito científico.

Visando a apropriação do conceito de função exponencial pelo estudante, a AOE, considera que a necessidade do estudante pode ser revelada pela situação desencadeadora de aprendizagem que tem como essência a necessidade humana de construção do conhecimento, Moura et al. (2010) define o objetivo da situação desencadeadora de aprendizagem:

> O objetivo principal desta é proporcionar a necessidade de apropriação do conceito pelo estudante, de modo que suas ações sejam realizadas na busca da solução de um problema que o mobilize para atividade de aprendizagem – a apropriação dos conhecimentos (MOURA et al., 2010, p. 221).

A partir dos princípios da Atividade Orientadora de Ensino, o professor organiza intencionalmente, o ensino de modo que, proporcione ao estudante a necessidade de aprendizagem. Sendo que a mesma, apresenta-se por meio das situações desencadeadoras de aprendizagem, que possuem em sua constituição a gênese do conceito e podem ser materializadas por um jogo, uma história virtual ou uma situação emergente (MOURA et al., 2010).

O recurso “jogo” é algo muito mencionado na discussão dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. O jogo deve colocar o estudante diante de uma situação-problema semelhante à vivenciada pelo ser humano ao lidar com conceitos da matemática (MOURA et al., 2010).

Já a “situação emergente” é aquela que surge a partir do cotidiano, possibilitando prática educativa ao colocar o estudante diante da necessidade de vivenciar soluções de problemas significativos a elas.

Ao passo que a “história virtual” é definida como:

> [...] uma narrativa que proporciona ao estudante envolver-se na solução de um problema como se fosse parte de um coletivo que busca solucioná-lo tendo como fim a satisfação de uma determinada necessidade, à semelhança do que pode ter acontecido em certo momento histórico da humanidade (MOURA et al., 2010, p. 105).

Ressalta-se, que a Atividade Orientadora de Ensino é um processo que envolve o professor e o estudante e não um objeto (MOURA et al., 2010). Sendo assim, ela se constitui como unidade entre o ensino (atividade do professor), e a aprendizagem (atividade do estudante) (MOURA et al., 2010). A seguir é apresentada uma síntese desse processo (Figura 2).

FIGURA 2 - ESQUEMA – AOE: RELAÇÃO ENTRE ATIVIDADE DE ENSINO E ATIVIDADE DE APRENDIZADO

FONTE: MORAES (2008, p. 116)

Considerando o estudo da teoria histórico-cultural e da AOE, e a necessidade de organização do ensino visando o conhecimento teórico, identificou-se a necessidade de aprofundar o estudo do movimento histórico e lógico da Função Exponencial, objetivando reconhecer seus aspectos essenciais, os nexos internos e externos, que será tratado no capítulo 5.

No próximo capítulo será indicada a Metodologia aplicada na dissertação para atingir o objetivo de “Analisar as situações de ensino da função exponencial considerando o seu movimento histórico e lógico”.

4 MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Busca-se nesse capítulo revelar a essência do conceito da função exponencial e os seus nexos conceituais. Destacando a importância de compreender o movimento histórico e lógico da função exponencial, em busca de elementos para organizar o seu ensino e analisar as situações de ensino procurando superar seus aspectos externos, mecânicos revelados em sua forma aparente.

O termo "essência" para essa linha teórica pode ser entendido a partir da seguinte afirmação:

> O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para uma compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos com o conhecimento da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam (KOPNIN, 1978, p. 186).

Como implicações educacionais, se o professor organizar a sua atividade de ensinar, baseando-se somente no aspecto lógico em forma de definições e sínteses, perderá todo o rico processo histórico de construção do conceito. Da mesma maneira, se o professor basear sua atividade somente nos aspectos históricos, perderá o aspecto lógico de evolução do conceito, podendo caracterizar o aspecto histórico como curiosidade, como ocorre em diversos livros didáticos (FRAGA, 2016).

Um exemplo do estudo do movimento histórico e lógico está na pesquisa de Fraga (2016) que realizou um estudo do movimento histórico e lógico do conceito de ângulo e de localização na perspectiva teórica a Teoria Histórico-Cultural, da Teoria da Atividade e os princípios da Atividade Orientadora de Ensino, que mostra que é a partir da variação do ângulo, por meio do movimento aparente do sol na eclíptica terrestre, que o homem se dá conta dessa grandeza. Então, o pesquisador planejou as situações atividades desencadeadoras de ensino: "Pênalti às cegas" e a história virtual "Em alto-mar", que enfatizam a rotação na introdução do conceito.

Logo abaixo, é realizada uma breve descrição dessas duas atividades desencadeadoras de ensino:

> A atividade de ensino “Pênalti às cegas” utiliza os conceitos de lateralidade associados aos movimentos corporais dos estudantes (rotações), com o objetivo de gerar a necessidade de utilização do conceito de ângulo e, dessa forma, de suas unidades de medida como as subdivisões de uma volta (meia, um quarto e um oitavo de volta) e, se possível, o grau. A história virtual (MOURA et al., 2010) “Em alto-mar” propõe um problema desencadeador de aprendizagem que unifica os conceitos de localização e de ângulo (corroborando o movimento lógico-histórico), pois, para que o navio siga a direção proposta, é preciso girá-lo corretamente. A intenção é gerar, mais uma vez, a necessidade da utilização do conceito de ângulo e também da quantificação utilizando o grau como unidade de medida. Como o movimento lógico-histórico apresenta, os instrumentos foram essenciais na aplicação do conceito de ângulo na história humana, assim, para utilizar o grau como unidade de medida, construímos um instrumento baseado no transferidor que pudesse auxiliar os estudantes no processo de quantificação (FRAGA, 2016, p. 96).

A escolha da expressão “movimento histórico e lógico”, e não lógico-histórico está baseado nos trabalhos de Panossian (2014) e Kopnin (1978), que argumentam sobre a opção dessa ordem.

Kopnin (1978) define os conceitos de histórico e lógico e suas relações:

> Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento nos sistemas de abstrações. O histórico é primário em relação ao lógico, a lógica reflete os principais períodos históricos (KOPNIN, 1978, p. 183-184).

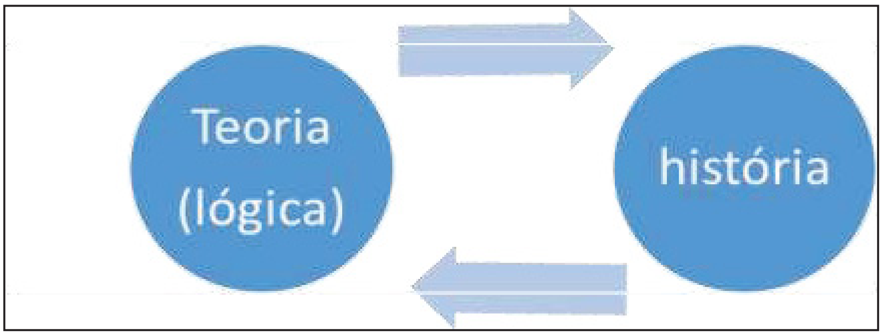
Desta forma, o pensamento[6] não reproduz necessariamente o processo histórico real das situações do objeto em toda parte, por isso, que o lógico é o histórico libertado das casualidades que o perturbam. O lógico, então é reflexo do histórico por meio das abstrações, por isso o fato de dar atenção principal à manutenção do processo histórico real (KOPNIN, 1978).

Pode-se representar o desenvolvimento do pensamento pela Figura 3.

---

[6]Pode-se definir a forma de pensamento como “modo de representação da realidade por meio de abstrações”. Toda forma de pensamento constitui certo elo do movimento no sentindo da realidade objetiva, nela se traduzem os resultados do conhecimento. No processo da eterna e infinita aproximação do pensamento ao objeto estabelecem-se certos laços nos quais se refletem os resultados do conhecimento do objeto. As formas do pensamento são justamente esses laços originais, onde os resultados do pensamento abstrativo do homem estão de certo modo organizados, relacionados, expressam o nível alcançado de conhecimento e as vias do seu sucessivo avanço (KOPNIN, 1978, p. 187).

FIGURA 3 – DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO



FONTE: O autor (2018)

Conforme mostra a Figura 3, é como o pensamento desenvolvesse da teoria (ou lógica) à história e desta novamente à teoria (lógica).

A unidade do histórico e do lógico é necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. Para Kopnin (1978):

> A base do conhecimento da dialética do histórico e do lógico resolve-se o problema correlação entre o pensamento individual e o social, em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a sua história do pensamento humano (KOPNIN, 1978, p. 185).

Após todas as considerações de Kopnin (1978) sobre a expressão “histórico e lógico”, se concorda com as justificativas de Panossian (2014), sobre essa escolha, que considera:

> [...] os acontecimentos históricos são determinantes do que se têm condições de analisar como desenvolvimentos do processo de pensamento. Só é possível captar e reconhecer o desenvolvimento do pensamento por meio das marcas históricas que vão sendo deixadas. Entende-se que os processos lógicos de pensamento só se consolidam, e completam seu processo de constituição, no movimento do abstrato ao concreto, quando encontram a possibilidade de se concretizar, sendo cristalizados em ações ou registros que se tornam históricos. Assim, ainda que se considere que a relação lógico/histórico é uma relação dialética, só conseguimos determinar na experiência humana o movimento lógico dado o movimento histórico. Por isso, usamos durante toda a tese o registro histórico e lógico e não o contrário (PANOSSIAN, 2014, p. 23).

Considerar o movimento histórico e lógico como um dos elementos para organização do ensino requer ação intencional, a fim de que as situações propostas orientem os estudantes a estar em atividade, corroborando com os princípios da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 1996, 2010), e dessa forma se apropriem dos conceitos. Para tanto, nas próximas seções desse capítulo, serão apresentados os estudos realizados no movimento histórico e lógico da função exponencial.

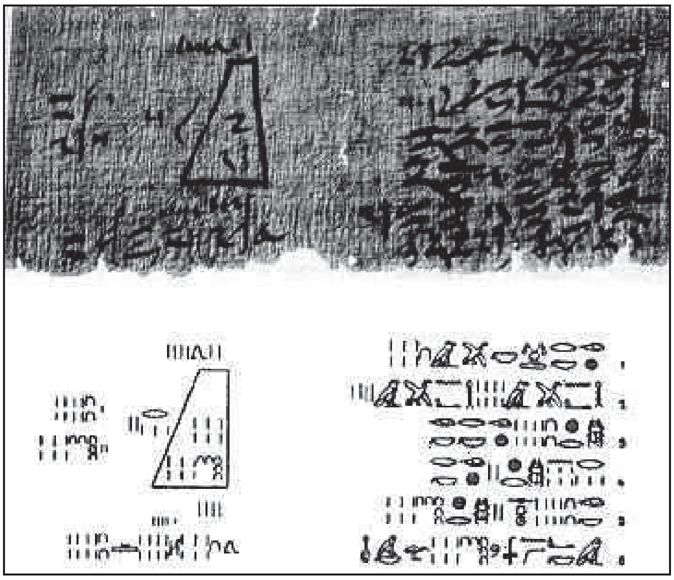
4.1 A FORMA DA POTÊNCIA: MUDANÇAS HISTÓRICAS NA NOTAÇÃO

A potenciação é um elemento base, ou seja, o coração[7] da função exponencial. Uma definição simplória para a potenciação é um produto de fatores iguais, sendo a potência uma forma simplificada de representar uma multiplicação com os mesmos fatores. A potenciação está presente em diversas expressões matemáticas, como em: cálculos de Juros Compostos, Progressão Geométrica, Área, Volume, Teorema de Pitágoras, Fórmula Resolutiva do 2° Grau, entre outros, ela também é essencial em diversas outras ciências, como: Astronomia, Física, Química, Biologia, Geografia, etc. Historicamente, o pesquisador Ball[8] (1960 apud OLIVEIRA; PONTE, 1999) afirma que as primeiras referências à operação de potenciação encontram-se num papiro egípcio que data do final do Império Médio (cerca de 2100 a 1580 a. C.). A Figura 4, apresenta essa operação de potência no problema 14 do papiro Moscou, ao qual se refere ao cálculo do volume de uma pirâmide quadrangular, é usado um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número.

---

[7]No sentido figurado é a parte vital da função exponencial.
[8]BALL, W. R. **A Short Account of the History of Mathematics.** New York: Dover Publications, 1960.

FIGURA 4 - PROBLEMA 14 DO PAPIRO MOSCOU



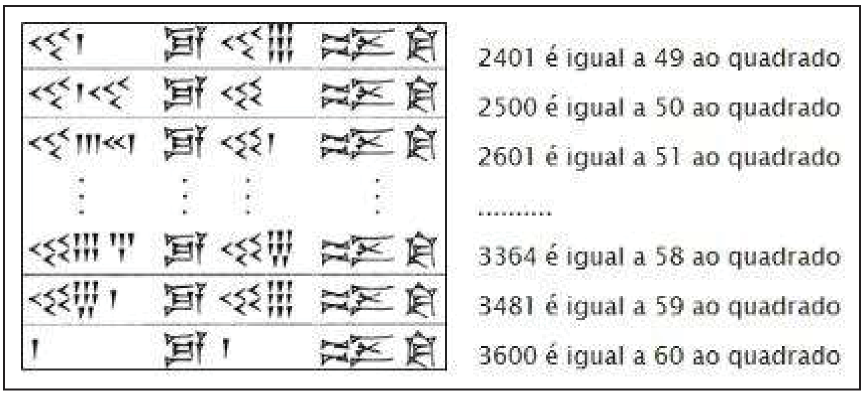
FONTE: EVES (1995, p. 86)

No problema 14 do papiro Moscou, se encontra o seguinte exemplo numérico:

> Se lhe for dito: Um tronco de pirâmide de altura vertical 6 por 4 na base e por 2 no topo. Você deve quadrar esse 4, resultando 16. Você deve dobrar 4, resultando 8. Você deve quadrar 2, resultando 4. Você deve somar o 16, o 8 e o 4, resultando 28. Você deve tomar um terço de 6, resultando 2. Você deve tomar o dobro de 28, resultando 56. Veja, é 56. Você o encontrará corretamente” (EVES, 1995, p. 84-85).

Os Babilônios, cujo sistema de numeração era sexagesimal, também conheciam a noção de potência, o que pode ser observado na tabuinha de Larsa representada na Figura 5 (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p. 29).

FIGURA 5 - TABUINHA DE LARSA



FONTE: MADRID (2017)

A tabuinha de Larsa possui quatro colunas, das quais a segunda e a quarta não sofrem qualquer alteração ao longo das respectivas linhas, aparecendo um grupo de caracteres que se pode pensar em não se tratar de representações numéricas, mas literais. A terceira coluna altera-se de uma forma tão regular, que se torna fácil inferir que se trata de uma coluna de números sucessivos. A análise da numeração e simbologia utilizada nessa tábua através de Ifrah (1997), revela que o primeiro número representado é o 49, seguindo-se o 50 ao 59 terminando com o 1, que como não se pode esquecer no sistema sexagesimal representa o número 60. A primeira coluna não se altera de uma forma tão regular, contudo em uma análise minuciosa se observa que:  representa o número 2500 que por sua vez é o quadrado de 50, o número representado na terceira coluna da mesma linha . Ao repetir este processo para as restantes sequências se observa que na primeira coluna se encontra sempre o quadrado do número representado na terceira coluna (IFRAH, 1997, p. 236-242).

Em outras tábuas antigas encontraram-se tabelas contendo as potências sucessivas de um dado número. Estas eram utilizadas para resolver certos problemas de astronomia e de operações comerciais.

Em 1858 d. C. o pesquisador escocês Henri Rhind[9] comprou no Egito um papiro que estima-se ter sido escrito por volta de 1650 a. C., sendo a partir de então, conhecido como papiro de Rhind (Figura 6).

FIGURA 6 - UMA PEQUENA PARTE DO PAPIRO DE RHIND

FONTE: PALAZZECI (2017)

Num de seus problemas o de número 79, figuram os seguintes dados:

Bens

[9] Alexander Henry Rhind (1833-1863) foi um escocês antiquário e arqueólogo adquiriu o papiro Rhind.

Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hecates de grãos	16807
	19607

Uma de suas interpretações é o reconhecimento dos números como as cinco primeiras potências de 7, juntamente com sua soma (EVES, 1995, p. 75).

Para Oliveira e Ponte (1999) a palavra "potência" foi utilizada pela primeira vez pelo matemático e Geômetra grego Hipócrates de Quio[10] (470 − 410 a. C.), em seu livro "Elementos da Geometria", que provavelmente, inspirou um século depois Euclides em seu livro "Os Elementos". Segundo Boyer (1996, p. 45) o livro de Hipócrates se perdeu, na verdade, nenhum tratado matemático do quinto século se conservou.

> Hipócrates designou o quadrado de um segmento pela palavra "dynamis", que significa precisamente, potência. Existem motivos para se crer que a generalização do uso da palavra potência, resulte do fato dos Pitagóricos, terem enunciado o resultado da proposição I.47 do livro Elementos, de Euclides sob a forma: "a potência total dos lados de um triângulo retângulo é a mesma que a da Hipotenusa" (OLIVEIRA E PONTE, 1999, p.29).

Somente depois de algumas décadas é que foram concebidas potências de expoentes maiores que 2.

Por volta de 300 a. C., Neugebauer[11] encontrou dois problemas interessantes sobre sequências em numa tábula do Louvre. Um deles afirma que $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$. Logo percebe-se que já trabalhavam com potências de expoente 9 (EVES, 1995, p. 62).

As potenciações tiveram mais cálculos significativos, com Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a. C.). Em 250 a. C, na sua obra "Psamamites" (Contador de areia) Arquimedes pretendia determinar o número de grãos de areia necessários para encher o universo solar, que para ele consistia numa esfera tendo a Terra

---

[10] Hipócrates de Quiós pode ser escrito, Chiós, Khiós ou Quio.

[11] Otto Eduard Neugebauer (1899 -1990) foi um matemático e historiador da ciência austro-estadunidense. Estudioso das tábulas matemáticas de argila dos povos antigos babilônios.

como centro e a sua distância ao Sol como raio. Obteve a solução 10^{51}, e como esse número era muito grande, e a forma dos antigos gregos de escrever números baseava-se nas letras do alfabeto, essa escrita tornava-se desajeitada, e a numeração usada na época permitia escrever números até 10.000 (uma miríade). Arquimedes, então criou um novo sistema, que considerava os números de 1 a 10^8, ou seja, até a miríade de miríade, que se podiam escrever na numeração grega como sendo de primeira ordem; depois, os números de 10^8 a 10^{16} como sendo de segunda ordem, em que a unidade é 10^8, e assim por diante. Desta forma, Arquimedes utilizou uma regra equivalente à propriedade da multiplicação de potências com a mesma base: $10^{51} = 10^3 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8$ (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p. 30; ROONEY, 2012, p.35).

Foi com o matemático grego Diofanto (cerca do ano 250 d. C.) em seu livro Arithmetica, que se começou a fazer uso de abreviações para potências de números e para relações e operações. Essa obra foi um grande avanço na resolução de equações em relação aos egípcios e aos babilônios, uma vez que introduz abreviatura para representar termos (OLIVEIRA; PONTE, 1999).

Diofanto também abreviava incógnitas e usou as seguintes representações para as potências da incógnita de expoente 2 a 6: Δ^y incógnita ao quadrado (as duas primeiras letras maiúsculas da palavra grega dunamis); K^y incógnita ao cubo (as duas primeiras letras maiúsculas da palavra grega kubos); $\Delta^y\Delta$ quadrado-quadrado (4ª potência); ΔK^y quadrado-cubo (5ª potência); K^yK cubo-cubo (6ª potência) (EVES, 1995, p. 209).

Diofanto só não continuou a escrever potências de maior grau, pois os problemas que trabalhou não o exigiam. Em todas as potências, bases e expoentes eram números naturais. Diofanto, contudo, usava nomes especiais para o que seriam as nossas primeiras seis potências de expoente negativo (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p. 30).

Potências de ordem superior foram encontradas em 1150 d. C. no livro Lilavati do matemático hindu Bháskara. Os hindus provavelmente utilizavam um processo diferente para construir as potências.

> No caso de Diofanto Δ^y seguido de K^y representava ΔK^y (tal como para nós n^2 seguido de n^3 significava n^5). Mas para os hindus varga-g'hana (quadrado-cubo) indicava a multiplicação dos índices (e portanto n^2 seguido de n^3 significava n^6) (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p. 30).

E não conseguiam representar potências com expoentes primos. Portanto, por exemplo, n^5 era escrito como varga-g-hana-gháta, em que gháta significava produto, ou seja, nesse caso $n^2.n^3 = n^5$ (CAJORI[12], 1993 apud OLIVEIRA; PONTE, 1999).

Entre os séculos XIII e XVII observou-se a adoção entre árabes e europeus dos esquemas hindu (multiplicativo) e do Diofanto (aditivo). Pode-se observar por esse fato que o processo de construção da matemática não é linear. Logo, podem coexistir diferentes notações para o mesmo conceito ou notações quase iguais, para conceitos bem diferentes (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p. 30).

Observa-se que até este período só se usava a representação de potências por seus respectivos numerais, não sendo necessário criar uma notação para as potências de uma constante. Assim, continuaram se desenvolvendo as notações de potências de variáveis.

> O conceito de potência e a escrita algébrica estiveram fortemente ligados desde o princípio. Alguns matemáticos dos séculos XV e XVI, tais como Luca Pacioli (1445-1517), Niccolo Tartaglia de Brescia (1499-1557), Gerolamo Cardano (1501-1576) e Pedro Nunes (1502-1578) usavam a mesma notação para representar potência das variáveis. A incógnita era representada por co., a abreviatura da palavra italiana cosa. por sua vez tradução de res em latim, ce., abreviatura de censo, representava o seu quadrado e cu. (cubo) o seu cubo (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p.30).

Tanto Diofanto quanto Pedro Nunes continuam a registrar potências de grau superior a partir das potências menores. Entretanto, existia um modelo alternativo que omitia o símbolo da variável e colocava somente o índice correspondente. Essa notação é suficiente se houver apenas uma incógnita na equação.

A notação de potência com expoente fracionário foi apresentada pelo bispo francês Nicole Oresme, por volta de 1360, em seu livro De proportionibus proportionum apresentando também regras para combinar proporções semelhantes as nossas propriedades das potências.

> Oresme sugeriu também o uso de notações especiais para potenciais fracionárias, pois em seu livro Algorismus proportionum há expressões como

P	1
1	2

[12] CAJORI, F. A History of Mathematical Notations (3ª.ed.). New York: Dover Publications.

> para denotar a "proporção um e um meio" – isto é, o cubo da raiz quadrada principal – e formas como $\frac{1.p.1}{4.2.2}$ para $\sqrt[4]{2\,1/2}$. Usamos agora notações simbólicas para potências e raízes sem mais pensar na lentidão com que se desenvolveram ao longo da história da matemática (BOYER, 1996, p. 180).

Os expoentes inteiros e fracionários continuaram a ser estudados nos três séculos seguintes.

Em 1484, ainda na França, o médico Nicolas Chuquet escreveu o livro "Triparty em las ciense des nombres". Indicava a potência da quantidade desconhecida por um expoente associado ao coeficiente do termo; em nossa notação moderna: $5x$, $6x^2$, $10x^3$ na notação de Chuquet apareceriam como $5.^1$, $6.^2$, $10.^3$. Chuquet mostra também conhecer potências de expoentes zero e negativos, representando: $9x^0$ como $9.^0$ e $9x^{-2}$ como $9.^{2m}$ (OLIVEIRA; PONTE, 1999).

Rafael Bombelli (1526-1573) também elaborou uma notação simbólica para os expoentes. Em seu livro "L'Álgebra" utilizou um numeral arábico com um pequeno arco por baixo para representar o expoente da incógnita:

1 significava a incógnita elevada a 1;

2 significava a incógnita elevada a 2;

3 significava a incógnita elevada a 3;

e assim sucessivamente.

O matemático Simon Stevin, em 1585, propôs uma notação semelhante. Assim, x^4+3x^2-7x seria escrito na forma:

$$\overset{4}{1} + \overset{2}{3} - \overset{1}{7}$$

Essa notação foi abandonada por não ser prático escrever e imprimir os numerais dentro de um círculo (CAJORI[13], 1993, apud OLIVEIRA; PONTE, 1999). Com o início das equações de coeficientes literais e de duas ou mais incógnitas, a omissão da letra correspondente a variável começou a mostrar-se inadequada. Desta forma, surgem novos desenvolvimentos na notação de potência.

Com o surgimento da álgebra, as potências foram cada vez mais utilizadas também como notações simbólicas nas variáveis das equações algébricas, introduzidas principalmente pelo matemático francês François Viète (1540− 603). Em

[13]CAJORI, F. A History of Mathematical Notations (3ª.ed.). New York: Dover Publications.

1591, Viète desenvolveu uma álgebra com uma nova notação que permitia a inclusão sem ambiguidades, de variáveis diferentes na mesma equação. Viète usava a mesma letra, assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3 ele expressava por A, A quadratum, A cubum; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para A, A q, A c (EVES, 1995, p. 309).

Boyer (1996) relata que a notação mais atual para potência deve-se ao matemático e filósofo René Descartes (1596−1650), com o livro "La Géométrie" em 1637 escreveu, "aa ou a^2, para multiplicar a por si mesmo e a^3 para multiplicar ainda mais uma vez por a e deste modo por diante, o que representa grande avanço em relação à Viète, e a percepção de que uma letra poderia representar qualquer quantidade positiva ou negativa. Mas, Descartes limitou-se a trabalhar com expoentes inteiros positivos.

Em 1634 d. C. Hérigone escreveu uma notação semelhante a atual: $5a^4$ era representado por 5a4. Já em 1636 d. C. Hume também escreveu uma notação parecida com a atual: $5a^4$ era representado por $5a^{IV}$ notação pouco cômoda por utilizar-se da numeração romana (OLIVEIRA; PONTE, 1999).

Durante o século XVII, todas estas notações coexistiram e, foram criadas outras.

> Gradualmente, a notação de Descartes foi ganhando mais adeptos, mesmo entre aqueles que como Leibniz começaram por usar outras. John Wallis (1616-1703) foi um dos primeiros a seguir o matemático francês e a exprimir, consistentemente, as potências de expoente negativo e fracionário. No seu livro "Arithmetica infinitorum", em 1656, indica que: $\frac{1}{\sqrt{1}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Têm índice -1/2. No entanto, não chega a escrever que a^{-1} é $\frac{1}{a}$ ou que $a^{\frac{3}{2}}$ é $\sqrt[3]{3^2}$ (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p. 33).

O conceito foi ampliado em 1676 por Isaac Newton, de modo que tanto a base como o expoente pudessem ser números racionais quaisquer, indicando aaa para a^3; $a^{\frac{3}{2}}$ para $\sqrt{a^3}$, e a^{-1} para $\frac{1}{a}$ e assim por diante (OLIVEIRA; PONTE, 1999, p. 33).

Nesses registros de mudança na 'forma' de representação das potências, o conteúdo do conceito está sempre presente, independente de formas mais ou menos simplificadas de representação. O fato é que os avanços na notação possibilitam a representação de expoentes que não sejam somente inteiros.

Outro avanço muito importante foi a partir de Leibniz que começa a usar a variável no expoente. Assim, a potência que antes era somente uma operação aritmética passa a ser compreendida como função.

A construção do conceito de potência desenvolveu-se de forma mais rigorosa dentro do conjunto dos números reais ao final do século XIX.

Após esse estudo do desenvolvimento do conceito e da linguagem simbólica da potência observou-se que esse processo foi lento e complexo durante a história.

Esse movimento histórico e lógico do conceito de potência é importante para o desenvolvimento da função exponencial por revelar mudanças em sua forma (representação) e também em seu conteúdo (compreensão do que é a potência relacionada a outros conteúdos matemáticos, por exemplo, o desenvolvimento da álgebra).

4.2 UMA NECESSIDADE PARA O DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA: A REPRESENTAÇÃO DO EXPOENTE COMO LOGARITMO

No século XVI e início do XVII ocorreu um grande desenvolvimento em vários campos da ciência, tais como: Geografia, Física, Astronomia e também com a exploração marítima. Esses desenvolvimentos envolviam uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo cálculos enormes. Os cientistas da época clamavam por uma invenção que os livrassem desses incansáveis cálculos, e John Napier aceitou tal desafio (MAOR, 2008, p. 18).

A invenção dos logaritmos foi uma ideia matemática abstrata, mas almejada e comemorada pela comunidade científica na história da ciência. O seu inventor foi John Napier (1550-1617) que levou 20 anos para desenvolvê-lo.

Dessa maneira, baseando-se na Teoria da Atividade proposta por Leontiev (1983) e no processo histórico e lógico de elaboração do conceito logaritmo, pode-se concluir que as atividades de geografia, física, navegação marítima geraram a necessidade de criar uma ideia matemática abstrata para facilitar os enormes cálculos desenvolvidos pelas ciências. Esta, por sua vez, causa uma ação de criação de uma ferramenta abstrata matemática para facilitar os cálculos tediosos, chamado de Logaritmo.

Até o século XVI muitos cálculos eram realizados usando fórmulas trigonométricas ou construindo tabelas trigonométricas. Usavam-se as fórmulas $senA \cdot senB = 1/2[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$ e $cosA \cdot cosB\ e\ senA \cdot cosB$, e outras semelhantes que eram conhecidas como regras prostafaréticas, da palavra grega que significa "adição e subtração" (MAOR, 2008, p. 18).

> Sua importância consiste no fato de que o produto de duas expressões trigonométricas, tais como $senA \cdot senB$ pode ser computado determinando-se a soma ou a diferença de outras expressões trigonométricas, neste caso $\cos(A-B)\, e \cos(A+B)$. E como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas fórmulas fornecem um sistema primitivo de redução de uma operação aritmética para a outra, mais simples. E possivelmente essa ideia que colocou Napier no caminho certo (MAOR, 2008, p. 18).

Struik (1992) destaca que vários matemáticos do século XVI "tinham se confrontado com a possibilidade de coordenar progressões aritméticas e geométricas, principalmente no que diz respeito a facilitar o trabalho com as complicadas tabelas trigonométricas" (STRUIK, 1992, p. 152-153). Nesse sentido se considera que o uso das progressões aritméticas e geométricas são nexos internos no desenvolvimento do conceito de função logarítmica.

A ideia de Napier envolvia os termos de uma progressão geométrica. Muito antes da época de Napier já fora notado que existe uma relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes ou índices, da razão comum.

> O matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), em seu livro Arithmetica integra (1544), formulou esta relação como se segue: Se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão 1, q, q^2, [...] o resultado será o mesmo que se somarmos os expoentes correspondentes. Por exemplo, $q^2 . q^3 = (q . q) . (q .q . q) = q .q .q .q .q = q^5$, um resultado que poderíamos ter obtido somando os expoentes 2 e 3. De modo semelhante, se dividirmos um termo de uma expressão geométrica por outro equivalente a subtrair seus expoentes: $q^5 / q^3 = (q .q .q .q .q) / (q .q . q) = q .q = q^2 = q^{5-3}$. Com isso obtemos a regra simples $q^m . q^n = q^{m+n}$ e $q^m / q^n = q^{m-n}$ (MAOR, 2008, p. 18).

Um problema surge quando da aplicação da regra deriva uma potência com expoente negativo. "Para evitar essa dificuldade nós simplesmente definimos q^{-n} como sendo igual a $1/q^n$, de modo que $q^{3-5} = q^{-2} = 1/q^2$" (MAOR, 2008, p. 19). Da mesma forma se define que quando m = n, surge q^0, definido como 1, então: $q^0 = 1$.

Com isso, em uma progressão geométrica infinita, pode-se observar que os expoentes formam uma progressão aritmética. "Esta relação é a ideia-chave, por trás dos logaritmos, mas onde Stifel tinha em mente apenas expoentes inteiros, a ideia de Napier era estendê-los para uma faixa contínua de valores" (MAOR, 2008, p. 19).

Para resolver o problema, Napier pensou que deveria transformar os números em potências com uma base fixa. Assim, ao invés de multiplicar ou dividir os números, poderia somar ou dividir os expoentes. "Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida a que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas" (MAOR, 2008, p.19).

Com essa revelação do uso das progressões aritméticas e geométricas como desenvolvimento do conceito de função logarítmica e por consequência da função exponencial, então encontrou-se, um nexo interno dentro do movimento histórico desta função, conforme Sousa e Moura (2016), define que os nexos internos estão impregnados de história, por isso, são históricos e que nos revelam a essência desse conceito.

O método de Napier não era usado somente para números inteiros, mas também para frações, seguindo seus estudos para reconhecer bases que pudesse usar na transformação dos números e potências, Napier definiu que deveria ser um número próximo de 1, buscando trabalhar o mais próximo possível com frações decimais.

Sua tarefa mais tediosa passou a ser então a de encontrar termos de uma progressão em base que fosse adequada. Demorou vinte anos de sua vida (1594-1614) para completar esse trabalho.

> Sua tabela inicial continha apenas 101 elementos, começando com 10^7= 10.000.000, seguida de $10^7(1\text{-}10^7)$ = 9.999.999, então $10^7(1\text{-}10^7)^2$ = 9.999.998 e daí em diante até $10^7(1\text{-}10^7)^{100}$ = 9.999.900 (ignorando a parte fracionária 0,0004950), cada termo sendo obtido subtraindo-se do termo anterior sua 10^7 parte. Ele então repetiu o processo todo de novo, começando uma vez mais com 10^7, mas dessa vez tomando como sua proporção a relação entre o número e o primeiro em sua tabela original, isto é, 9.999.900 : 10.0000.000 = 0,99999, ou $1 - 10^{-5}$. Esta segunda tabela continha cinquenta e um elementos, o último sendo $10^7(1 - 10^{-5})^{50}$ ou, muito aproximadamente 9.995.001. Seguiu-se uma terceira tabela com vinte e um elementos, usando-se a proporção 9.995.001: 10.000.000; o último elemento nesta tabela sendo 10^7 x $0{,}9995^{20}$, ou aproximadamente 9.900.473 x $0{,}99^{68}$, ou mais ou menos 4.998.609 – mais ou menos a metade do número original (MAOR, 2008, p. 21).

Napier na época fez todos estes cálculos com papel e pena, o que demora pouco tempo nos dias atuais em um computador. Em suas próprias palavras:

> Ao formar esta progressão (os elementos da segunda tabela), como a proporção entre 10000000,00000, o primeiro número da segunda tabela, e 9995001,222927, o último número, é problemática; assim, compute os 21 números como proporções fáceis de 10000 para 9995, que é um valor suficientemente próximo; o último deles, se você não cometeu nenhum erro, será 9900473,57808.” (SMITH[14], 1959, p. 150 apud MAOR, 2008, p. 21).

A princípio Napier chamou o expoente de cada potência de um “número artificial”, mas depois se decidiu pelo termo logaritmo, a palavra significava “Número proporcional”. O trabalho de Napier foi publicado 1614 num tratado em latim intitulado Murifici logarithmorum canonis descriptio[15].

Henry Briggs (1561-1631)[16] ficou impressionado com a nova invenção que foi até a Escócia e se encontrou com o Napier propondo duas modificações que tornariam as tabelas de Napier mais convenientes: fazer o logaritmo de 1 igual a zero, no lugar 10^7, e ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriadas de 10. Depois de considerarem várias possibilidades eles finalmente decidiram que log 10 = 1 = 10^0. Na linguagem moderna isto significa dizer que se um número positivo de N, escrito como $\log_{10}$ N, ou, simplesmente log N. Assim nasceu o conceito de base.

Napier aceitou todas as sugestões, mas pediu para a Briggs calcular as novas tabelas, pois estava com idade avançada, o mesmo realizou e publicou em seu trabalho, em 1624, sob o título Arithmetica logarithmica.

Suas tabelas davam os logaritmos de base 10 para todos os inteiros de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 com uma precisão de quatorze decimais. O espaço entre 20.000 e 90.000 foi mais tarde preenchido pelo holandês Adriaan Vlacq (1600-1667), esses acréscimos foram incluídos na segunda edição da Arithmetica logarithmica (1628) (MAOR, 2008, p. 27). “A nova invenção foi imediatamente bem recebida pelos matemáticos e astrônomos, e particularmente por Kepler, que tivera uma longa e dolorosa experiência com cálculos elaborados” (STRUIK, 1992, p. 154).

Esse trabalho ficou quase inalterado, salvo algumas revisões, como base para todas as tabelas de logaritmos por aproximadamente trezentos anos. Somente em 1924 que começou um novo conjunto de tabelas, com precisão de 20 casas decimais, feito na Inglaterra para as celebrações do tricentenário da invenção dos logaritmos. Esse trabalho terminou em 1949.

---

[14]Citado no livro de David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics* (1929; reeditado em Nova York: Dover, 1959), p. 150.
[15]Tradução – Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos.
[16]Foi professor de geometria do Colégio Gresham em Londres.

Na comemoração dos trezentos anos dos logaritmos em Edimburgo, em 1914, o Lord Moulton falou em sua homenagem:

> A invenção dos logaritmos chegou ao mundo como um relâmpago num dia claro. Nenhum trabalho anterior conduziu a ela, ou previu, ou sugeriu o seu aparecimento. Ela permaneceu isolada, surgindo abruptamente no pensamento humano, sem derivar do trabalho de outros intelectos ou seguir linhas conhecidas de pensamento matemático (MAOR, 2008, p. 28).

Posteriormente além das tabelas foram criados outros instrumentos para facilitar o cálculo com logaritmos, por exemplo, a régua de cálculo. Para criar este instrumento é necessário encontrar um modo geral de realizar o cálculo, e isso considerando a variação das grandezas que estão na potência (o valor que está na base) e o valor que está no expoente.

A régua de cálculo, em suas muitas variedades, foi à companheira inseparável dos cientistas e engenheiro durante 350 anos que se seguiram, até o início da década de 1970, com o aparecimento das primeiras calculadoras eletrônicas manuais e no espaço de dez anos a régua de cálculo tornou-se obsoleta.

> Contudo, se os logaritmos perderam seu papel central na matemática computacional, a função logarítmica permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada. Ela aparece aplicada nas áreas de química, física, biologia, psicologia, arte, música, etc (MAOR, 2008, p. 31).

O conceito de logaritmo nunca vai deixar de existir, pois o mesmo está inserido em outros instrumentos como já mencionado, a calculadora e os computadores. Na próxima seção será abordado outro nexo interno, encontrado no estudo da função exponencial.

4.3 JUROS COMPOSTOS – PRIMEIRO INDÍCIO NA HISTÓRIA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

As questões financeiras sempre dominaram as preocupações humanas. O homem sempre buscou em sua vida acumular riqueza e conseguir independência financeira.

> Assim não deve surpreender a ninguém que algum matemático anônimo, ou um mercador ou um prestamista, no início do século XVII, tenha notado uma ligação curiosa entre o modo de que se acumula dinheiro ao

> comportamento de uma certa expressão matemática no infinito (MAOR, 2008, p. 41).

Nesse sentido é possível relacionar a necessidade do homem em construir uma expressão matemática que relacione com o acúmulo de dinheiro, desta forma nasce à fórmula de juros compostos, e com isso a primeira função exponencial. Então, pode-se considerar os juros compostos, como um nexo interno para o desenvolvimento das questões financeiras.

Na história os primeiros indícios de juros encontram-se datado de 1700 a. C. em uma tábua do Louvre, conforme descreve Eves (1995, p.77), em um problema “Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?”.

Boyer (1996) responde a esse problema:

> [...] a resposta dada é 3;47,13,20. Parece inteiramente claro que o escriba usou interpolação linear entre os valores para $(1;12)^3$ e $(1;12)^4$, usando a fórmula para juros compostos $a = P(1 + r)^n$, onde r é 20 por cento ou 12/60, e tirando valores de uma tabela exponencial com potências de 1;12 (BOYER, 1996, p. 20).

Com as nossas notações modernas, o valor de x que está no expoente, resolveríamos pelo logaritmo, resolvendo a equação $1,2^x = 2$, como não havia essa técnica na época, os babilônios utilizaram a interpolação linear, conforme descreve MAOR (2008):

> [...] eles conseguiram achar a solução aproximada observando que $1,2^3 = 1,728$, enquanto $1,2^4 = 2,0736$; assim, x devia ter um valor entre 3 e 4. Para reduzir esse intervalo eles usavam interpolação linear – encontrando um número que divide de 3 para 4 na mesma proporção em que 2 divide o intervalo de 1,728 para 2,0736. Isso leva a uma equação linear (primeiro grau) em que x pode ser resolvida facilmente usando a álgebra elementar. Mas os babilônios não tinham as nossas técnicas modernas de álgebra e encontrar o valor procurado não foi para eles uma tarefa fácil. Ainda assim, sua resposta, x = 3,7870, encontra-se novamente próxima do valor correto, que é de 3,8018 (isto é, cerca de três anos, nove meses e dezoito dias). Devemos notar que os babilônios não usavam o nosso sistema decimal que foi adotado somente no início da Idade Média. Eles usavam o sistema sexagesimal, um sistema de numeração baseado no número 60. A resposta no tablete de Louvre é dada como 3;47.13.20, que no sistema sexagesimal significa $3 + 47/60 + 13/60^2 + 20/60^3$ ou, muito aproximadamente, 3,7870 (MAOR, 2008, p. 42).

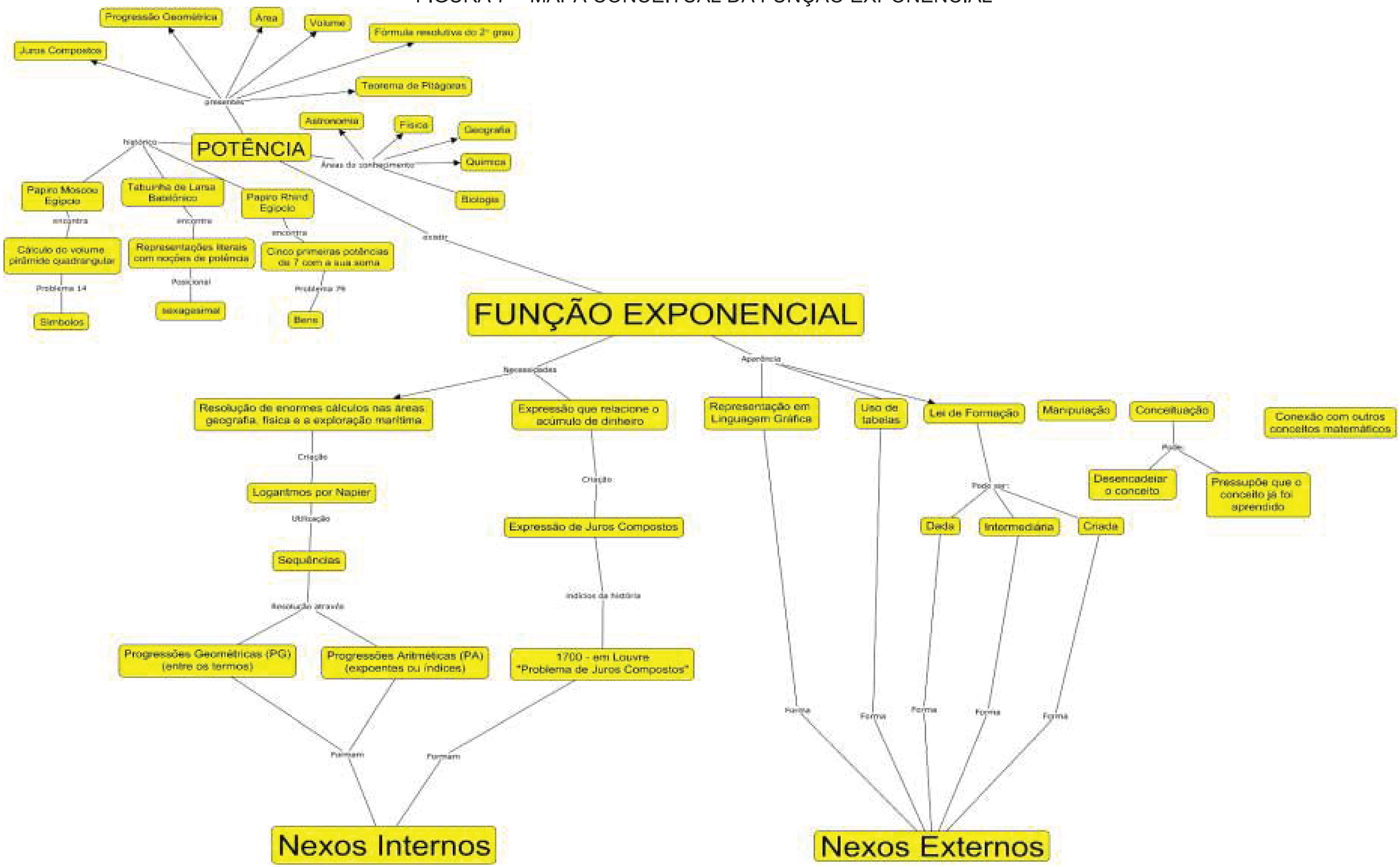
Para Maor (2008), os babilônios criavam tábuas de logaritmos, para lidar com problemas específicos como o de cálculo envolvendo juros compostos e não para o uso geral. Corroborando com esse argumento, Boyer (1996, p. 20) afirma que "... suas "tabelas de logaritmos" não eram usadas para fins gerais de cálculo, mas para resolver certas questões bem específicas".

A primeira impressão que se tem é que o tema juros compostos está mais ligado à aplicação da função exponencial do que com seus aspectos essenciais, ou seja, mais relacionados com seus aspectos simbólicos perceptíveis, contidos nesse conceito, considerado um nexo externo da função exponencial. Com o aprofundamento dos estudos, pode-se perceber que os juros compostos se caracterizam como uma necessidade humana que foi fundamental para a o conceito de função exponencial e assim definido como um nexo interno.

Com os estudos do movimento histórico e lógico do conceito da função exponencial, conforme o objetivo proposto dessa pesquisa, espera-se que o professor desenvolva esse processo de ensino, em busca dos nexos internos ou essência desse conceito ou de outro a ser ensinado, buscando superar as aparências. A partir desses estudos do movimento histórico e lógico e das pesquisas e do currículo da função exponencial, o pesquisador elaborou o mapa conceitual dessa função (Figura 7), a qual indica os seus nexos conceituais.

Destaca-se ainda que a função exponencial também serve como modelo matemático em outras aplicações das ciências, engenharias, entre outras, mas estes vínculos não foram aprofundados nesta pesquisa.

FIGURA 7 – MAPA CONCEITUAL DA FUNÇÃO EXPONENCIAL



FONTE: O autor (2017)

5 METODOLOGIA

No primeiro capítulo “Os caminhos da pesquisa”, foram expostos os motivos pelos quais a pesquisa foi desenvolvida e no capítulo 2, foi realizado um levantamento dos estudos sobre o ensino de Função Exponencial, e também uma revisão nos documentos curriculares oficiais. No capítulo 3, foi realizada uma breve revisão sobre os fundamentos da teoria em que essa pesquisa é embasada, os pressupostos da Teoria da Atividade, da Teoria Histórico-Cultural e da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como base teórico-metodológica para o ensino. Na sequência o capítulo 4 tratou de estudar o movimento histórico e lógico do conceito de função exponencial.

Neste capítulo, pretende-se detalhar as ações metodológicas para atingir o objetivo desta pesquisa em “analisar situações de Ensino da função Exponencial considerando o seu movimento histórico e lógico”.

A primeira ação metodológica foi revisar pesquisas que tratam a respeito especificamente, do ensino de Função Exponencial, já expostas no capítulo 2.

Prosseguindo com a condução da pesquisa, entendeu-se como necessário estudar o movimento histórico e lógico do conceito de função exponencial. Para realizar esta ação, buscou-se em livros de história da Matemática, os indícios que revelassem formas de pensamento característicos da função exponencial no desenvolvimento humano. As obras consultadas foram de Boyer (1996), Eves (1995), Hogben (1946), Oliveira e Ponte (1999), Maor (2008), Fraga (2016), Rooney (2012) e Struik (1992). Pretendeu-se com a leitura destas obras reconhecer nexos conceituais que posteriormente fossem identificados no processo de ensino da função exponencial. Também estes estudos corroboram para a criação de indicadores da função exponencial, como os nexos internos: PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica), e dos Juros Compostos que fazem parte tanto na análise das situações de ensino do livro didático quanto na análise das situações desencadeadoras criadas pelos professores na OPM.

Com base na literatura e no movimento histórico e lógico do conceito de função exponencial, serão apresentados dois movimentos de análise: um deles relacionado à análise de situações de ensino apresentadas nos livros didáticos aprovados no PNLD e que serão mais detalhadas no capítulo 6, e outro relacionado ao processo de elaboração de situação de ensino realizado na OPM, e que será apresentado no capítulo 7.

Para realizar tais análises foram estabelecidos indicadores a partir do movimento histórico e lógico da função exponencial detalhado no capítulo 5; da leitura do capítulo da tese de doutorado de Panossian (2014) intitulado “Um modelo para análise do processo de generalização algébrica”, e dos textos de Moura e Moretti (2003); Vinner e Dreyfus (1989); Lima (1999) e Oliveira (2008). Pretende-se que estes indicadores conduzam a um modo geral de análise de tais situações que futuramente sirvam como parâmetro para a prática dos professores da educação básica.

As coleções de livros didáticos de matemática, do Ensino Médio, escolhidas para análise das situações de ensino, foram as duas mais solicitadas pelas escolas do Brasil, que são: Dante (2014) e Iezzi et al. (2013), ambas aprovadas no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD-2015) do Ensino Médio. Optou-se, em escolher situações diferenciadas envolvendo aplicações de propriedades das Funções Exponenciais; aplicações em situações do cotidiano e em outras ciências; que levem ao conceito de funções exponenciais, entre outras.

Além da análise de situações de ensino de função exponencial apresentada nos livros didáticos, entendeu-se como necessário captar a compreensão dos professores sobre o sentido atribuído ao ensino de função exponencial. Os dados empíricos na prática dos professores sobre a função exponencial foram captados a partir do projeto de extensão ‘Oficina Pedagógica de Matemática’ (OPM) e serão tratados no capítulo 7.

Os dados obtidos na OPM tanto a partir dos questionários respondidos pelos professores, quanto no desenvolvimento da situação desencadeadora de aprendizagem e na aplicação com os estudantes foram gravados em áudio e vídeo e farão parte das análises. Os participantes da OPM, assinaram um termo de autorização de pesquisa (Anexo A) cedendo o uso do áudio e vídeo captado.

De posse desses estudos, entende-se que já se tem elementos para analisar situações de ensino de função exponencial em busca de elementos que ajudem a responder a pergunta: De que modo, a situação desencadeadora de aprendizagem possibilita ou cria condições para superar as aparências de outras situações no ensino de função exponencial, para que o aluno se aproprie do conceito de forma teórica? Adota-se como hipótese que a organização do ensino da função exponencial pelo professor, através da elaboração de situações desencadeadores de aprendizagem, usando como base teórico-metodológica a Atividade Orientadora de Ensino de Moura (2010), possibilita que o aluno aprenda o conceito dessa função.

No próximo capítulo será detalhado o estudo sobre o movimento histórico e lógico da função exponencial em livros de história, como Boyer (1996), Eves (1995), Silva (2015), Maor (2008), Ifrah (1997), Lauand (1986), entre outros, buscando os nexos essenciais dessa função no movimento do desenvolvimento humano.

6 SITUAÇÃO DE ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL EM LIVROS

Com base no movimento histórico e lógico do conceito de função exponencial, foram iniciadas as análises de situações de ensino selecionadas em livros didáticos aprovados no PNLD[17] (2015). Foram analisadas 13 situações de ensino da coleção de Dante (2014) e 19 situações de ensino na coleção de Iezzi et al. (2013), os livros que foram mais solicitados pelas escolas no Brasil. Essas situações demonstram a forma com que a função exponencial aparece nos livros didáticos.

Optou-se em escolher situações diferenciadas, que envolvessem aplicações de propriedades das funções exponenciais; aplicações em situações do cotidiano e em outras ciências; conduzindo ao conceito de funções exponenciais, etc., em busca de indicadores para o estabelecimento de um modo geral de análise de tais situações que futuramente servissem como parâmetro para a prática dos professores da educação básica.

Como referência para criar os indicadores de análise, utilizou-se o capítulo da tese de doutorado de Panossian (2014) intitulado “Um modelo para análise do processo de generalização algébrica”, e os textos de Moura e Moretti (2003); Vinner e Dreyfus (1989); Lima (1999) e Oliveira (2008).

Seguem alguns elementos com base nessas leituras que possibilitaram a criação dos indicadores de análise.

Lima (1999) propõe que o ensino de matemática deve respeitar o balanceamento dos três componentes fundamentais, que são: Conceituação, Manipulação e Aplicações. Para este pesquisador a dosagem adequada desses três componentes depende do equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos estudantes e a capacidade que terão para empregar, futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza das idéias, o hábito de pensar e agir ordenadamente. Segue um breve comentário sobre os três critérios, segundo Lima (1999): ‘Conceituação’ compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, o estabelecimento de conexões entre os conceitos, bem como interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. ‘Manipulação’, de caráter

---

[17] Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>. Acesso em: 12 dez. 2016.

principalmente, algébrico, e o uso essencialmente na resolução de exercícios da teoria. ‘Aplicações’ são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia a dia a, questões mais sutis que surgem em outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. Estes três componentes farão parte dos indicadores adotados.

Já Oliveira (2008) em sua análise feita em coleções de livros didáticos de Ensino Médio, além de considerar os três componentes de Lima (1999), também insere outras duas categorias, ‘qualidades didáticas’ e ‘adequação do livro à realidade atual’. Para Oliveira (2008) as qualidades didáticas dos livros-textos são analisadas a partir dos recursos utilizados, como situações problemas, que facilitam a compreensão dos conteúdos matemáticos; também a transmissão das experiências do autor alertando para os possíveis erros e o estímulo ao estudante para que faça previamente uma estimativa do resultado, de tal forma que possa verificar a validade de suas respostas. A categoria adequação do livro à realidade atual, o autor refere-se a necessidade de eliminar dos programas de ensino conteúdos (ou parte deles) já saturados, dedicando maior atenção aos conceitos, atualmente mais relevantes, deve-se deixar de lado os cálculos excessivos e as fórmulas para dar mais destaques aos algoritmos e métodos aproximativos. Essas duas categorias serão inseridas nos indicadores em nossa pesquisa.

Vinner e Dreyfus (1989, p. 356-366) investigaram a “imagem do conceito”(ou imagem conceitual) em estudantes universitários (1° Ano) e professores da escola secundária (atual Ensino Médio) que têm para o conceito de função, ou seja, foram coletadas as imagens mentais que eles tinham ao ouvirem o conceito de função. Observa-se que os sujeitos dessa pesquisa, já haviam estudado este conceito no Ensino Médio. Nesse trabalho Vinner e Dreyfus (1989, p. 356) elaboraram seis categorias, que são: Correspondência, Relação de Dependência, Fórmula, Lei, Operação e Representação. Para os objetivos do trabalho, no entanto, essas categorias propostas apresentavam um excessivo detalhamento. Para analisar situações de ensino envolvendo funções exponenciais, não era necessário tal grau de refinamento entre as soluções, assim, os indicadores escolhidos desse autor foram a Lei de Formação e de Correspondência que serão detalhadas nos exemplos.

Os pesquisadores Moura e Moretti (2003, p. 67-72) realizaram uma investigação, com estudantes de 8ª série (atual 9° ano), de uma escola pública, sobre o papel dos conhecimentos prévios e das interações sociais na aprendizagem do conceito de função. Diferentemente de Vinner e Dreyfus (1989) os sujeitos dessa pesquisa não haviam estudado formalmente o conceito de função. As categorias criadas por Moura e Moretti (2003) levaram em conta a história do conceito, baseados nos estágios históricos de Youschkevitch[18] (1976) e por situações de ensino em que os estudantes, já tiveram passado no ensino formal, baseados nos estudos de Vinner e Dreyfus (1989). As categorias construídas por estes pesquisadores foram: Aritmetização, Particularização; Uso de tabelas; Compreensão com ausência de linguagem analítica e Uso de expressões algébricas. Por aritmetização consideram que o estudante não percebe a possibilidade de variação e resume a resolução do problema a algumas operações aritméticas; por particularização compreendem que embora o estudante perceba a possibilidade de variação no problema, resolve apenas para um caso particular que ele supõe. Quanto ao uso de tabelas, o estudante demonstra compreensão da possibilidade de variação no problema através da construção de tabelas. Para esta pesquisa considerou-se a categoria 'uso de tabelas' e também as categorias 'compreensão com ausência de linguagem analítica' e 'uso de expressões algébricas' que irão compor o indicador 'lei de formação', que será explicitado em item adiante.

A partir dos estudos do movimento histórico e lógico considera-se dois indicadores, o primeiro chamaremos de "Nexo interno – PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica)" que segundo Maor (2008) em uma função exponencial o expoente estão em progressão aritmética e as suas potências estão em progressão geométrica. Outra constatação de Boyer (1996) e Maor (2008) que o cálculo de Juros Compostos, recua a 1700 a. C., que os mercadores usavam para calcular os rendimentos, logo esse é o segundo indicador "Nexo interno – Juros Compostos", esse usava a forma da função exponencial.

Na sequência, serão analisadas algumas situações de ensino escolhidas, levando em conta os oito indicadores adotados (Tabela 3), que são: Contextualização; Representação em linguagem gráfica; Uso de Tabelas; Lei de

---

[18]YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. In: **Archive for History of exact sciences,** v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976.

formação (subdividido em: Dada, Intermediária e Criada); Conceituação (subdividido em: desencadeia o conceito, pressupõe que o conceito já foi aprendido), Conexão com outros conceitos matemáticos; Movimento histórico e lógico da função exponencial (Subdividido em: Nexo interno: PA e PG, Nexo interno: Juros Compostos).

TABELA 3 - OS OITO INDICADORES ADOTADOS PARA ANALISAR AS SITUAÇÕES DE ENSINO

I – Contextualização	II - Representação em linguagem gráfica	III - Uso de tabelas	IV - Lei de Formação			V –Conceituação		VI – Manipulação	VII - Conexão com outros conceitos matemáticos	VIII - Movimento histórico e lógico da função exponencial	
			Dada	Intermediária	Criada	Desencadeia o conceito	Pressupõe que o conceito já foi aprendido		Quais?	Nexo interno: PA e PG	Nexo interno: Juros Compostos

FONTE: O autor (2016)

I. Contextualização: Esse indicador foi criado com base na categoria de Oliveira (2008) das “qualidades didáticas dos livros-textos”, que facilitam a compreensão dos conteúdos matemáticos, através de situações-problemas, especialmente se contextualizadas, fazendo relações com outras disciplinas ou outras ciências. Silva (2015), também em sua dissertação de mestrado, realça a necessidade das contextualizações nas situações de ensino, pois o estudante ganha em qualidade de aprendizagem, dando sentido ao conceito de função exponencial trabalhado. Neste indicador é descrito a disciplina ou a área do conhecimento com a qual a situação de ensino está sendo contextualizada.

Exemplo:

A situação de ensino apresentada na Figura 8 é contextualizada com a área de Química, fazendo assim relação com outra disciplina curricular, aproximando o estudante com situações reais do dia a dia. Nesse caso relaciona a quantidade de antibiótico acetilcefuroxima presente no organismo em um determinado tempo, que se caracteriza como uma função exponencial.

FIGURA 8 - EXEMPLO DE UMA SITUAÇÃO ANALISADA PELO INDICADOR DE "CONTEXTUALIZAÇÃO"

58. *Química*

Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:

a) após 12 horas de sua ingestão?

b) após t horas de sua ingestão?

FONTE: DANTE (2014, p. 172)

II. Representação em linguagem gráfica: Este indicador foi escolhido, pois a função exponencial pode ser representada e reconhecida por sua forma gráfica. Os gráficos são particularmente importantes, pois além do apelo visual, favorecem a observação de determinados comportamentos que, em outras representações (numéricas, algébricas e por tabelas), são difíceis de serem percebidos.

Campiteli, H. e Campiteli, V. (2006) destacam que a interpretação de gráficos de funções tem um lugar bem estabelecido no currículo de matemática, com idéias relacionadas com variação (crescimento, decrescimento, constância) e com variação na variação (variação rápida e lenta, taxa de variação, regularidades e continuidade) são melhores aprendidas a partir de representações gráficas.

Exemplo 1

Nessa situação de ensino (Figura 9) o item **c** pede para o estudante fazer o esboço do gráfico da lei da formação do equipamento industrial, eluciando assim, a situação, e confirmando que se trata de uma função exponencial.

FIGURA 9 - EXEMPLO 1 DO INDICADOR "REPRESENTAÇÃO EM LINGUAGEM GRÁFICA"

45. A lei seguinte permite estimar a depreciação de um equipamento industrial:

$$v(t) = 5000 \cdot 4^{-0,02t}$$

em que v(t) é o valor (em reais) do equipamento *t* anos após sua aquisição.

a) Por qual valor esse equipamento foi adquirido?

b) Para que valores de *t* o equipamento vale menos que R$ 2500,00?

c) Faça um esboço do gráfico da função que relaciona *v* e *t*.

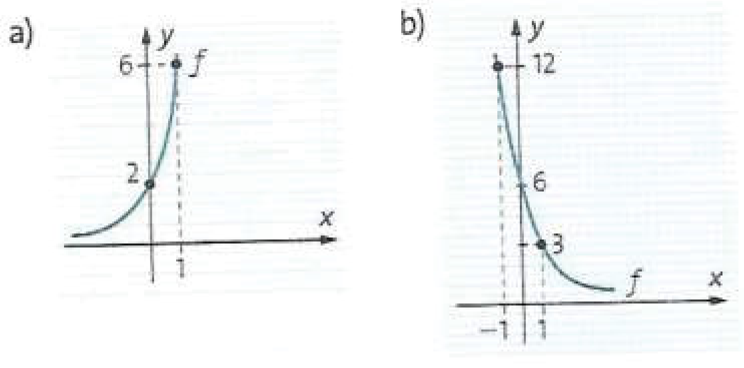
FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 159)

Exemplo 2

Nesse caso (Figura 10) é dado o gráfico e a situação de ensino pede a lei de formação, nessa situação não foi realizada uma contextualização, sendo um típico exemplo de interpretação de coleta de informações de uma gráfico de função exponencial, mas que exige elementos de algebrização.

FIGURA 10 - EXEMPLO 2 DO INDICADOR "REPRESENTAÇÃO EM LINGUAGEM GRÁFICA"

31. Cada gráfico abaixo representa uma função exponencial do tipo $f(x) = b \cdot a^x$. Identifique a lei de formação de cada uma delas.



FONTE: DANTE (2014, p.161)

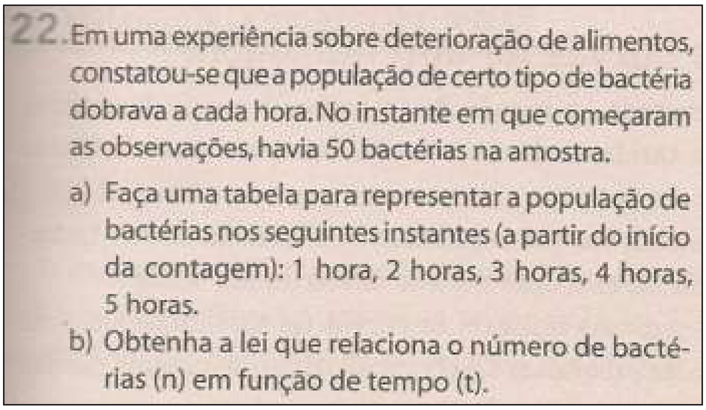
A proposta destes dois exemplos em relação ao indicador de representação gráfica é diferente. No primeiro exemplo, solicita-se ao estudante que desenhe o gráfico, e na segunda, espera-se que o aluno a partir dos elementos obtidos no gráfico registre a função exponencial.

III. Uso de tabelas: Nesse indicador a situação de ensino leva o estudante a compreensão de variação da função exponencial através da construção de tabelas, utilizando a definição de função de Dirichlet-Bourbaki (Uma função é qualquer correspondência entre dois conjuntos que atribui a cada elemento no primeiro conjunto exatamente um elemento no segundo conjunto). Esse indicador foi retirado dos estudos de Vinner e Dreyfus (1989); Moura e Moretti (2003). Deve-se destacar que nesse tipo de situação de ensino a construção de tabela, faz com que o estudante verifique e análise o crescimento/decrescimento não linear da função exponencial/logarítmica.

Exemplo

Na situação de ensino apresentada na Figura 11 pede no item "**a**", a construção de uma tabela que representa a variação do tempo com a variação do crescimento de bactérias. Esse tipo de questão faz com que o estudante verifique o crescimento exponencial das bactérias na deteorição de alimentos.

FIGURA 11 - EXEMPLO DO INDICADOR "USO DE TABELAS"


22. Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.

a) Faça uma tabela para representar a população de bactérias nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 1 hora, 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas.

b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (n) em função de tempo (t).

FONTE: IEZZI et al. (2013, p.149)

IV. Lei de Formação: Neste indicador a situação de ensino emprega no seu desenvolvimento e solução a lei de formação da função exponencial/logarítmica. Este indicador está divido em três partes: a primeira está designada como "Dada", é o caso do exemplo 1 quando vem indicada a lei de formação da função exponencial/logarítmica no enunciado da situação; a segunda parte está designada como "Intermediária", é quando alguns dados já vem no enunciado para a formação da lei da função exponencial/logarítmica como no exemplo 2; a terceira parte está designada como “Criada”, é o caso quando a situação pede a criação da lei de formação da função exponencial/logarítmica, exemplo 3. Neste indicador somente foi aproveitado a definição da “Lei de Formação” dos pesquisadores Vinner e Dreyfus (1989); Moura e Moretti (2003), já os nomes das três partes foram criados para realizar uma melhor análise da situação de ensino que emprega a lei de formação da função exponencial/logarítmica.

Exemplo 1

Nesse caso a situação de ensino fornece a lei de formação, e com a expressão analítica o estudante resolve a situação. O caso foi contextualizado com a área de Biologia, relacionando a quantidade estimada de bactérias salmonelas (n) em t (anos), encontradas em uma mostra de maionese, que tem um crescimento de acordo com a lei de formação da função exponencial (Figura 12). Entende-se que quando a lei de formação está expressa basta ao estudante substituir valores, o que não garante a compreensão do crescimento exponencial.

FIGURA 12 - EXEMPLO 1 DO INDICADOR "LEI DE FORMAÇÃO – DADA"

32. Uma maionese mal conservada causou mal-estar nos frequentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei:

$$n(t) = 200 \cdot 2^{at},$$

em que n(t) é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese *t* horas após o início do almoço e *a* é uma constante real.

a) Determine o número de bactérias no instante em que foi servido o almoço.

b) Sabendo que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era de 800, determine o valor da constante *a*.

c) Determine o número de bactérias após 12 horas da realização do almoço.

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 153)

Exemplo 2

Nesse caso (Figura 13) são dados alguns elementos da lei de formação da função exponencial, sendo solicitado ao estudante que monte uma tabela para representar o valor do sofá com os anos da aquisição. Com as informações iniciais do preço com que foi comprado o sofá e com a porcentagem de depreciação deste imóvel no passar do ano, o mesmo pode escrever a lei de formação dessa situação, ainda que esta não seja explicita no enunciado.

FIGURA 13 - EXEMPLO 2 DO INDICADOR "LEI DE FORMAÇÃO – INTERMEDIÁRIA"

25. Um conjunto de sofás foi comprado por R$ 2000,00. Com o tempo, por descuido do comprador, o sol foi queimando o tecido do sofá, que perdeu a cor original. Um comerciante do ramo informou ao comprador que em uma situação desse tipo, a cada ano o sofá perde 10% do valor que tinha no ano anterior.

DirectPhoto/Grupo Keystone

a) Faça uma tabela para representar o valor do sofá depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.

b) Sabendo que o comprador se informou com o comerciante 7 anos depois da compra, que valor o sofá teria nesta data, segundo o comerciante?

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor (y), em reais, do conjunto de sofás e o tempo *t*, expresso em anos após a sua aquisição?

FONTE: IEZZI et al. (2013, p.149)

Exemplo 3:

Já nessa situação de ensino (Figura 14) pede-se que o estudante registre a lei de formação (item c).

FIGURA 14 - EXEMPLO 3 DO INDICADOR "LEI DE FORMAÇÃO – CRIADA"

23. Em uma região litorânea, a população de uma espécie de algas tem crescido de modo que a área da superfície coberta por elas aumenta 75% a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior. Atualmente, a área da superfície coberta pelas algas é de, aproximadamente, 4 000 m². Suponha que esse crescimento seja mantido.

Edson Grandisoli/Pulsar Imagens

a) Faça uma tabela para representar a área coberta pelas algas daqui a um, dois, três, quatro e cinco anos, contados a partir desta data.

b) Qual é a lei da função que representa a área (y), em m², que a população de algas ocupará daqui a *x* anos?

c) Esboce o gráfico da função obtida no item b).

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 149)

V. Conceituação: Este indicador é diferente do significado que tem para Lima (1999), pois o mesmo compreende que a formulação correta e objetiva das definições da Matemática, indica se a situação tem o conceito ou não. Enquanto para a nossa análise, nos interessa se a situação de ensino pode levar à formação do conceito de função exponencial, ou se o estudante já precisa ter apropriado o conceito, para tanto, esse indicador foi dividido em duas partes, a primeira “Desencadeia o conceito” e a segunda “Pressupõe que o conceito já foi aprendido”.

Exemplo 1

No exemplo da Figura15 a situação leva ao conceito da função exponencial, através da criação da tabela no item **a**, que leva a variação desta função e depois no item **b** a elaboração da lei da função exponencial da situação de ensino.

FIGURA 15 - EXEMPLO 1 DO INDICADOR "CONCEITUAÇÃO – DESENCADEIA O CONCEITO"

22. Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.

a) Faça uma tabela para representar a população de bactérias nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 1 hora, 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas.

b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (n) em função de tempo (t).

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 149)

Exemplo 2

Na situação da Figura 16, é dada a lei da função e pressupõe que o estudante já saiba o conceito de função exponencial, para que o mesmo possa resolver as questões da situação de ensino.

FIGURA 16 - EXEMPLO 2 DO INDICADOR "CONCEITUAÇÃO – PRESSUPÕE QUE O CONCEITO JÁ FOI APRENDIDO"

38. Na lei $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+k}$, em que k é uma constante real, n(t) representa a população que um pequeno município terá daqui a t anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de 10 000 habitantes, determine:

a) o valor de k;

b) a população do município daqui a 3 anos.

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 153)

VI. Manipulação: Nesse indicador a situação leva o estudante a resolver a operação algébrica “mecanicamente” sem que haja necessidade de buscar o conceito de função exponencial. Foi usado o conceito de Lima (1999) sobre esta categoria, que tem caráter algébrico, embora que para este pesquisador, a habilidade da resolução das situações de ensino, permite o estudante perder pouco tempo e energia com detalhes secundários, permitindo que o mesmo se atente nos pontos cruciais, neste ponto divergirmos, pois não se tem certeza se o aluno sabe ou não o conceito de função exponencial. Então, ficou definido uma restrição para esse indicador em indicar se a situação leva a simples substituição (mecanicamente) de valores na lei de formação da função exponencial.

Exemplo:

A Figura 17 mostra uma situação de ensino que se resolve mecanicamente, substituindo os valores propostos nos itens da situação.

FIGURA 17 - EXEMPLO DO INDICADOR "MANIPULAÇÃO"

29. Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$, determine:

a) $f(0)$;

b) $f(3)$;

c) $f(-1)$;

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

e) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

f) m tal que $f(m) = 1$.

FONTE: DANTE (2014, p. 159)

VII. Conexão com outros conceitos matemáticos: A situação de ensino envolve outros conceitos matemáticos, por exemplo:

A Figura 18 mostra uma situação que envolve outros conceitos de matemática, por exemplo, o conceito de PA e PG que em nosso estudo é um nexo interno da função exponencial.

FIGURA 18 - EXEMPLO DO INDICADOR "CONEXÃO COM OUTROS CONCEITOS MATEMÁTICOS"

37. Dadas a PA $-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ e a função exponencial $f(x) = 2 \cdot 3^x$:

a) determine a razão dessa PA;

b) verifique que a sequência $f(-2), f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), \ldots$ é uma PG;

c) determine a razão dessa PG.

FONTE: DANTE (2014, p. 65)

VIII. Movimento Histórico e Lógico: nesse indicador busca-se nas situações de ensino o “nexo interno – progressão aritmética (PA) e progressão geométrica

(PG)" ou o "nexo interno – juros compostos", que tem como objetivo revelar a essência do conceito da função exponencial.

Exemplo 1:

Na Figura 19 a situação de ensino traz todo o aspecto símbolico da função exponencial no corpo do seu enunciado, com a fórmula dos juros compostos, caracterizando como um nexo interno da função exponencial. Para resolver o estudante deve saber a operação inversa da exponencial, a função logarítmica.

FIGURA 19 - EXEMPLO DO INDICADOR "NEXO EXTERNO – JUROS COMPOSTOS"

> ATIVIDADE EM DUPLA A expressão $M = C(1 + i)^n$ nos permite calcular o montante M, resultante da aplicação do capital C a juros compostos, à taxa anual i, ao completar um período de n anos. Nessas condições, se o capital de R$ 800 000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R$ 700 000,00?

FONTE: DANTE (2014, p.185)

Exemplo 2:

Na Figura 20 a situação de ensino que possui o "Nexo interno – PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica)". É uma situação que leva uma PA a uma PG e nos revela a uma função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$, para descobrir o valor de a e b na função exponencial.

FIGURA 20 – EXEMPLO DE INDICADOR "NEXO INTERNO – PA E PG"

> 40. Seja f uma função que leva a uma PA 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., n, $n + 1$, ... a uma PG 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, ..., escreva a função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$, determinando os valores de a e b.

FONTE: DANTE (2014, p. 65)

6.1 ANÁLISE DE SITUAÇÕES DE ENSINO A PARTIR DOS INDICADORES ESTABELECIDOS

Analisando as duas coleções de livros, foram selecionada 32 situações de ensino. Estas situações foram escolhidas buscando exemplificar as diferentes possibilidades em que se propõe a situação de ensino envolvendo função exponencial.

Considerando-se as situações e os indicadores estabelecidos para a análise, foi elaborada a seguinte Tabela 4.

TABELA 4 - SITUAÇÕES DE ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL APRESENTADAS EM MATERIAIS DIDÁTICOS

(continua)

		Nexos Externos											
LIVRO	Nº	Contextualização	Representação em linguagem gráfica	Uso de tabelas	Lei de Formação			Conceituação		Manipulação	Conexão com outros conceitos matemáticos	Nexos Internos	
					Dada	Intermediária	Criada	Desencadeia o conceito	Pressupõe que o conceito já foi aprendido		Quais?	PA e PG	Juros Compostos
Matemática - Ciência e Aplicações - Iezzi; Dolce; Degenszajn; Périgo; Almeida (2013)	1	Biologia		X			X	X					
	2				X				X	X			
	3	Biologia	X	X			X	X			Porcentagem		
	4	Financeira		X		X		X			Porcentagem		
	5	Indústria			X			X	X	X			
	6	Biologia			X				X	X	Estimativa, eq. exponenciais		
	7	Indústria	X		X				X	X	Desigualdade, eq. exponenciais		
	8	Geografia			X				X	X	Eq. exponenciais		
	9	Biologia			X				X	X	Porcentagem		
	10									X	Eq. exponenciais		
	11									X	Eq. exponenciais		
	12	Financeira			X				X	X	Eq. exponenciais		
	13									X	Eq. exponenciais		
	14	Geografia			X				X	X	Desigualdade, eq. exponenciais		
	15	Indústria			X				X	X	Eq. logarítmicas, estimativa		
	16		X			X					Cálculo de área, eq. Logarítmicas		
	17	Trânsito			X				X	X	Eq. Logarítmicas		
	18	Arte			X				X	X	Eq. Logarítmicas		
	19	Financeira			X					X	Eq. Logarítmicas e exponencial		

FONTE: O autor (2017)

TABELA 4 - SITUAÇÕES DE ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL APRESENTADAS EM MATERIAIS DIDÁTICOS

(conclusão)

		Nexos Externos										Nexos Internos	
					Lei de Formação – Representação algébrica			Conceituação			Conexão com outros conceitos matemáticos		
LIVRO	N°	Contextualização	Representação em linguagem gráfica	Uso de tabelas	Dada	Intermediária	Criada	Desencadeia o conceito	Pressupõe que o conceito já foi aprendido	Manipulação	Quais?	PA e PG	Juros Compostos
Matemática - Contexto e Aplicações - Dante (2014)	20	Geografia			X				X	X	Eq. exponenciais		
	21	Biologia			X				X	X	Eq. exponenciais		
	22	Financeira			X				X	X	Porcentagem, eq. logarítmica		X
	23	Química			X			X		X	Eq. exponenciais		
	24				X					X	Eq. exponenciais		
	25	Química			X				X	X	Eq. exponenciais		
	26	Biologia			X				X	X	Eq. exponenciais		
	27	Química				X		X		X	Eq. exponenciais		
	28	Biologia			X				X	X	Eq. exponenciais		
	29				X			X			Progressões Aritméticas e Geométricas	X	
	30				X			X			Progressões Aritméticas e Geométricas	X	
	31			X	X			X			Progressões Aritméticas e Geométricas	X	
	32						X	X			Progressões Aritméticas e Geométricas	X	

FONTE: O autor (2017)

Para explicar como foram registrados os indicadores de análise na Tabela 4, será apresentada a análise de algumas dessas situações de ensino encontradas.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 35

FIGURA 21 - SITUAÇÃO DE ENSINO N° 35

58. *Química*

Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:

a) após 12 horas de sua ingestão?

b) após *t* horas de sua ingestão?

FONTE: DANTE (2014, p. 172)

Na Figura 21 encontra-se uma situação “contextualizada” (indicador) com a área de Química. No seu enunciado define o que é meia-vida, e como se apresenta no antibiótico acetilcefuroxima.

Para a resolução do item “a” o aluno pode criar uma “tabela” (indicador), com valores de tempo e de massa do antibiótico, lembrando que o elemento radioativo leva para desintegrar a metade de sua massa a cada 3 horas, mas isso não está sendo solicitado pela situação, dependeria da ação do professor, por isso não foi assinalado o indicador ‘uso de tabela’

Já o item “b” leva o aluno a analisar em qual função a situação se modela. Não pode ser a função afim, pois ela não se comporta linearmente. Verifica-se que a taxa de variação em intervalos de tempo de mesma duração é sempre a mesma, sendo possível afirmar que essa situação se encaixa numa função exponencial, então essa situação “desencadeia ao conceito” (indicador).

A Lei da Função não foi dada nesta situação, mas alguns elementos estão presentes, como a quantidade do antibiótico e o tempo da meia vida, se encaixando no indicador “intermediária”.

No item “b” a situação faz “conexão com outro conceito matemático” (indicador), que é a equação exponencial para a sua resolução.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 29

FIGURA 22 - SITUAÇÃO DE ENSINO N° 29

2º) (FMJ-SP) O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38400 bactérias?

FONTE: DANTE (2014, p. 170)

Na Figura 22 é "dada" (indicador) a Lei de Formação da situação de ensino, $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$.

A situação leva o estudante a fazer a substituição "manipulação" (indicador) do valor de bactérias 38400, para a obtenção do tempo (t) obtido.

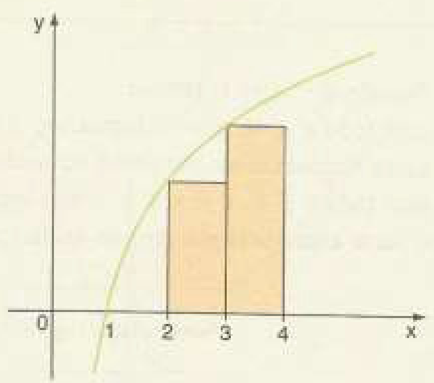
Para o estudante resolver essa função exponencial, "pressupõeque o conceito já foi aprendido" (indicador).

Está situação de ensino faz "conexão com outro conceito matemático" (indicador) que é a equação exponencial.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 21

FIGURA 23 - SITUAÇÃO DE ENSINO N° 21

43. O gráfico abaixo representa a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, dada por: $y = \log_2 x$.



Qual é o valor da área colorida?

Considere as aproximações $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 180)

A situação de ensino da Figura 23 tem a "representação em linguagem gráfica" (indicador) da função logarítmica, o aluno retira os elementos dessa função do gráfico.

É fornecido o modelo da Lei da função logarítmica, o aluno deve retirar os dados do gráfico para a construção da lei de formação da situação, logo fica no indicador “intermediária”.

Para responder o item “a” “Pressupõe-se que o conceito já foi aprendido” (indicador), tanto de função logarítmica como função em geral.

Já o item “b” tem “conexão com outros conceitos de matemática” (indicador), são eles, cálculo de área e de equações logarítmicas.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 39

FIGURA 24 - SITUAÇÃO DE ENSINO N° 39

39. Um pesquisador encontrou em suas investigações a seguinte relação entre os valores de x e y:

x	1	3	5	7
y	4	8	16	32

Que tipo de função expressa y em função de x? Justifique.

FONTE: DANTE (2014, p. 165)

A situação de ensino da Figura 24 tem o “nexo interno – PA e PG” (indicador), pois os valores de X estão em PA de razão 2 e os valores de y estão em PG de razão 2, e são nexos internos da função exponencial.

As demais situações de ensino contidas na Tabela 4, cuja análise não está detalhada neste texto, estão no Anexo D, ao final dessa dissertação.

Destaca-se a grande quantidade (16 de 32 no total) de situações de ensino dos livros didáticos que se caracterizam pela manipulação; por apresentar a lei de formação da função exponencial já dada para substituição dos valores e considerando que o conceito já foi apropriado, tais como as situações de número: 2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 25, 26, 28, todas estas características de formas de pensamento empírico, confirmando o ensino de aparências apresentados nos livros do PNLD

7 A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NA OFICINA PEDAGÓGICA DE MATEMÁTICA

Além da análise de situações de ensino de função exponencial apresentada nos livros didáticos buscou-se a compreensão dos professores sobre o sentido atribuído ao ensino de função exponencial. Estes dados empíricos foram captados através do curso de extensão, intitulado "Oficina Pedagógica de Matemática (OPM)", considerando o fato de que em atividade de ensino, o professor atribui sentido às situações desencadeadoras de aprendizagem, promovendo um ensino com significado ao estudante.

7.1 O QUE É OPM?

A Oficina Pedagógica de Matemática é organizada como projeto de extensão aos professores (rede pública) oferecido pelo Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR - Curitiba).

O objetivo geral da OPM é "Promover entre professores da universidade, professores da rede básica de ensino a articulação teoria/prática (práxis) que fundamentem suas ações dentro da atividade de ensino de matemática".

A OPM foi ofertada pela primeira vez no ano de 2015, sendo este pesquisador um dos participantes. No decorrer daquele ano, foi desenvolvido uma situação desencadeadora de aprendizagem a partir da rampa de skate de dedo, para o estudo de relações trigonométricas no triângulo retângulo, este trabalho foi aplicado em um colégio público da periferia de Curitiba. No ano de 2016 foi apresentado no Encontro Nacional de Educação de Matemática (ENEM), como relato de experiências (SILVA et al., 2016).

No ano de 2016 os dados dessa dissertação foram obtidos a partir do desenvolvimento da OPM que então teve como tema definido "Função Exponencial". A OPM 2016 iniciou com a participação de 23 cursistas e terminou com 8 cursistas. As reuniões eram semanais, nas quartas-feiras e com duração de duas horas. Logo abaixo, é apresentado no Quadro 1 o cronograma anual da OPM 2016.

QUADRO 1 - CRONOGRAMA DA OPM 2016 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

(continua)

Semestre	N° e data do encontro	Descrição do Encontro	Movimento da pesquisa
1° semestre	1° 16/03/16	Apresentação dos formadores e participantes; Apresentação do projeto e autorização para a pesquisa (Anexo A); Cronograma; Entrega do 1° Questionário – Função Exponencial (Apêndice A); Leitura do Relatório do ENEM 2016; Discussão e apresentação da OPM 2015; Compartilhado experiências.	Caracterização dos participantes e aplicação do questionário com o objetivo de analisarmos os primeiros sentidos pessoais dos professores atribuídos à função exponencial.
	2° 30/03/16	Discussão do texto “Atividade Orientadora de Ensino – AOE” de Moura et al (2010).	Colocar os participantes no movimento de compreensão da AOE como base teórico-metodológica para a organização do ensino.
	3° 06/04/16	Discutido o 1° Questionário entregue no 1° encontro sobre a Função exponencial. Logo após foi apresentado o estudo realizado do movimento Histórico e Lógico da Função exponencial pelo pesquisador.	Coleta de dados com o objetivo de analisarmos os sentidos pessoais de cada participante com relação a função exponencial.
	4° 13/04/16	Discussão do texto “Os conceitos científicos na formação do pensamento teórico” de Sforni (2004).	Mostrar aos participantes que a Teoria da Atividade pode oferecer elementos significativos para a compreensão da aprendizagem e consequentemente para a organização do ensino de conceitos científicos.
	5° 27/04/16	Organização dos dois subgrupos (verde e amarelo), entregue uma pasta e o 2° questionário a ser respondido no decorrer do 2° semestre (Apêndice B).	O segundo questionário tem como objetivo de orientar cada subgrupo quanto ao desenvolvimento e organização do ensino através da situação desencadeadora de aprendizagem.
	6° 04/05/16	Discussão do artigo: “A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade” de Libâneo (2004). Apresentação dos subgrupos.	Colocar os participantes dentro do movimento da linha teórica fazendo com que os mesmos possam fazer relações com a função exponencial.
	7° 11/05/16	Discussão de texto “Professores de Matemática em Atividade de Ensino: Contribuições da perspectiva histórico-cultural para a formação docente” de Moretti (2011), ministrado pelo pesquisador.	Discussão a respeito da Teoria da Atividade, sobre os seus elementos e organização do ensino na formação dos professores de matemática.

FONTE: O autor (2016)

QUADRO 1 - CRONOGRAMA DA OPM 2016 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

(continua)

Semestre	N° e data do encontro	Descrição do Encontro	Movimento da pesquisa
1° semestre	8° 18/05/16	Discussão da “Carta Caitité” do texto: “A formação do pensamento teórico em uma Atividade de ensino de matemática” da Rosa et al. (2010) ministrada pela professora PDE[19] P13.	Essa carta foi utilizada para compreender como os pressupostos da AOE podem constituir base para a organização das ações do ensino.
	9° 01/06/16	Discussão do texto “O Problema lógico-histórico: aprendizagem conceitual e formação de professores de matemática” de Moretti (2014) ministrada pela professora PDE P12. Reunião dos subgrupos. Subgrupo verde – Planejando a situação desencadeadora de ensino a ser desenvolvida e iniciaram o mapa conceitual da função exponencial. Subgrupo amarelo – Planejando a situação desencadeadora de ensino a ser desenvolvida. Iniciaram o mapa conceitual da Função exponencial para o ensino.	O texto aborda a discussão do conceito de problema a partir da perspectiva histórico-cultural, analisando suas aplicações para a educação matemática e para a formação de professores. Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	10° 08/06/16	Reunião dos Subgrupos. Subgrupo Amarelo – Montagem do Mapa Conceitual fazendo as relações da Função exponencial. Situação desencadeadora de aprendizagem sobre o Terremoto. Subgrupo Verde – Situação desencadeadora Resfriamento do Chá e a Função Exponencial, iniciando as atividades da situação em planos de aula.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	11° 15/06/16	Reunião dos subgrupos fora da UTFPR. Os Subgrupos se reuniram fora da UTFPR – criaram os slides da apresentação do Mapa Conceitual e a escolha da situação desencadeadora.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.

FONTE: O autor (2016)

[19]O PDE (Programa de Desenvolvimento Educacional) é uma política pública de Estado do Paraná regulamentado pela Lei Complementar nº 130, de 14 de julho de 2010 que estabelece o diálogo entre os professores do ensino superior e os da educação básica, através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense.

QUADRO 1 - CRONOGRAMA DA OPM 2016 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

(continua)

Semestre	N° e data do encontro	Descrição do Encontro	Movimento da pesquisa
1° semestre	12° 22/06/16	Apresentação dos subgrupos das ideias das situações desencadeadoras escolhidas. Subgrupo Verde – Apresentou: a história da função exponencial; articulação com propostas curriculares; Mapa Conceitual e a situação desencadeadora “Uma função e uma xícara de chá”. Subgrupo Amarelo – Apresentou: A situação desencadeadora “Terremoto e uma função”; o cronograma das aulas e dos conteúdo e Mapa Conceitual.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	13° 29/06/16	Elaboração da situação desencadeadora pelos dois subgrupos. E encerramento do 1° semestre da OPM 2016.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
2° semestre	14° 10/08/16	Reunião geral – Montado o cronograma do 2° semestre. Também foi realizada a reunião com os subgrupos. Foram retomadas as situações desencadeadoras para os novos integrantes e definição de datas dos grupos nas escolas.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	15° 17/08/16	Reunião dos subgrupos na UTFPR Subgrupo amarelo – dividiram as tarefas, estudaram as construções da atividade. Subgrupo verde – Selecionados exercícios para o plano de aula dos alunos.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	16° 24/08/16	Reunião dos subgrupos na UTFPR Subgrupo amarelo – Realizou a transformação da fórmula da magnitude do sismo de logaritmos para exponencial estudaram sobre o efeito geográfico do terremoto. Subgrupo verde – Selecionaram os exercícios da situação desencadeadora.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.

FONTE: O autor (2016)

QUADRO 1 - CRONOGRAMA DA OPM 2016 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

(continua)

Semestre	N° e data do encontro	Descrição do Encontro	Movimento da pesquisa
2° semestre	17° 31/08/16	Apresentação dos planejamentos dos subgrupos. Subgrupo verde – apresentada a sua situação desencadeadora e o cronograma de aplicação no colégio. Subgrupo Amarelo – apresentada a sua situação desencadeadora e o cronograma de aplicação no colégio.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	18° 14/09/16	Reunião dos subgrupos na UTFPR. Subgrupo amarelo realizou ajustes nos planos de aulas para aplicação no Colégio Estadual do Paraná. Subgrupo verde – realizou o término das atividades dos planos de aulas.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	19° 21/09/16	Reunião dos subgrupos fora UTFPR. O subgrupo amarelo realizando as atividades no colégio. O subgrupo verde – realizando ajustes nos planos de aulas para aplicar no colégio.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	20° 28/09/16	Reunião dos subgrupos fora UTFPR. O subgrupo amarelo realizando as atividades no colégio. O subgrupo verde – realizando ajustes nos planos de aulas para aplicar no colégio.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	21° 05/10/16	Reunião Geral com Manoel Oriosvaldo de Moura. Apresentação da OPM 2015 (situação desencadeadora do Skate e a relação trigonométrica no triângulo retângulo) e desse ano sobre “Uma função e uma xícara de chá” e da outra situação desencadeadora sobre o “Terremoto e uma função”.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	22° 19/10/16	Reunião dos subgrupos na UTFPR. Os dois grupos se reuniram para corrigir as atividades do subgrupo amarelo. O subgrupo verde com dificuldades de aplicar a situação devido ocupação do colégio por alunos contra a renovação do Ensino Médio.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.

FONTE: O autor (2016)

QUADRO 1 - CRONOGRAMA DA OPM 2016 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

(conclusão)

Semestre	N° e data do encontro	Descrição do Encontro	Movimento da pesquisa
2° semestre	23° 26/10/16	Reunião dos subgrupos na UTFPR. Os dois grupos se reuniram para corrigir as atividades do subgrupo amarelo. O subgrupo amarelo apresentou a 1° versão da escrita da atividade desencadeadora como um relato de experiência. O subgrupo verde não conseguiu aplicar a situação desencadeadora na escola devido estar ocupada por alunos secundaristas. No dia 27/10 – O Subgrupo amarelo junto com os alunos do Colégio Estadual do Paraná foram no Parque da Ciência.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	24° 09/11/16	Reunião dos subgrupos na UTFPR. Subgrupo amarelo – continuou na escrita do relato de experiência. Subgrupo verde – adaptou a atividade desencadeadora para ser aplicada em outro Colégio.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	25° 16/11/16	Reunião dos subgrupos na UTFPR. Subgrupo amarelo – continuou na escrita do relato de experiência. Subgrupo verde – analisando os resultados da experiência do resfriamento do chá e o estudo da Lei da desta função.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	26° 03/11/16	Reunião dos subgrupos fora da UTFPR. O subgrupo verde – terminou a aplicação das atividades no colégio. Subgrupo amarelo – continuou na escrita do relato de experiência.	Identificar as ações e operações desenvolvidas pelo subgrupo.
	27° 30/11/16	Encontro geral – Apresentação e perspectivas de publicação. Os participantes comentaram sobre o seu desenvolvimento na OPM e retomaram as preguntas dos 2 questionários (Apêndices A e B).	Retomar o objetivo de analisar os primeiros sentidos pessoais dos professores atribuídos à função exponencial.

FONTE: O autor (2016)

7.2 APRESENTAÇÃO DOS PARTICIPANTES E DAS SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM

A partir desse momento serão caracterizados os participantes do curso de extensão e a sua identificação na sequência da pesquisa:

- P1:Bacharel e Licenciado em Matemática, especializações em Ensino de Matemática e em Direito Educacional. Leciona em um colégio tradicional da rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Médio de Matemática e Física.
- P2: Licenciatura em Matemática, graduação em Tecnólogo em Comércio Exterior, especialização em Metodologia do Ensino da Matemática. Leciona em um colégio da periferia da rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Médio em Matemática.
- P3: Mestranda pela UFPR, Licenciatura em Matemática e Física, especializações em docência do Ensino Superior, Educação Especial e Inclusiva, Psicopedagogia, Educação Especial com ênfase em Altas Habilidades e Superdotação. Presta serviço no Departamento de Educação Básica (Equipe de Matemática) da Secretaria de Estadual e Educação do Paraná.
- P4: Licenciatura em Matemática, especializações em Psicopedagogia e Educação Especial Inclusiva. Leciona em um colégio da periferia na rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Fundamental em Matemática.
- P5: Licenciatura em Matemática, especializações em Psicopedagogia, Epistemologia e práticas pedagógicas em matemática, Alfabetização matemática e Educação Especial Inclusiva. Leciona em um colégio da periferia na rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Fundamental e Médio em Matemática.
- P6: Graduada em Pedagogia. Trabalha como professora pedagoga em um colégio tradicional da rede estadual de Curitiba.
- P7: Licenciatura em Matemática, especialização em Educação Especial e Inclusiva. Leciona em um colégio da periferia na rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Médio em Matemática.

- P8: Licenciatura em Matemática e Pedagogia, especialização em Ensino de Matemática. Professora de Matemática da Prefeitura Municipal de Curitiba, leciona para turmas do Ensino Fundamental.
- P9: Mestranda da UFPR. Licenciatura em Matemática. Professora de Matemática na Rede Municipal de Curitiba, leciona para turmas do Ensino Fundamental.
- P10: Licenciatura em Matemática, especializações em Educação do Campo, Educação a Distância com Ênfase na Formação de Tutores, Gestão Escolar com ênfase em Orientação Escolar e Alfabetização Matemática. Leciona em um colégio da periferia na rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Médio em Matemática.
- P11: Licenciatura em Matemática. Leciona Matemática em um colégio tradicional da rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Fundamental e Médio, também é professora particular de Matemática.
- P12: Licenciatura em Matemática, professora PDE. Leciona Matemática em colégio tradicional da rede estadual de Campo Largo, para turmas do Ensino Fundamental e Médio.
- P13: Licenciatura em Matemática, professora PDE. Leciona Matemática em colégio tradicional da rede estadual de São José dos Pinhais, para turmas do Ensino Fundamental e Médio.
- PO1: Professora organizadora 1 – Doutorado e Mestrado em Educação, Bacharelado e licenciatura em Matemática, Graduação em Pedagogia, Professora do Departamento Acadêmico de Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), organizadora do projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática.
- PO2: Professora organizadora 2 – Doutorado e Mestrado em Educação Matemática. Licenciatura em Matemática. Professora Adjunto junto ao DAMAT na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), organizadora do projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática.
- PO3: Professora organizadora 3 – Doutorado e Mestrado em Matemática, Licenciatura em Matemática. Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), organizadora do projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática.

- P: Pesquisador – Mestrando da UFPR, Licenciatura em Matemática, especialização em Ensino da Matemática. Leciona em um colégio da periferia na rede estadual de Curitiba, para turmas do Ensino Médio em Matemática.
- AL1: Aluna da Licenciatura em Matemática da UTFPR, cursando o 4° período.
- AL2: Aluna da Licenciatura em Matemática da UTFPR, cursando o 4° período.
- AL3: Aluna da Licenciatura em Matemática da UTFPR, cursando o 4° período.
- AL4: Aluno da Licenciatura em Física da UTFPR, cursando o 2° período, trabalha em um banco.
- AP1: Aluno PIBIC-JR 1 – Aluno do 1° ano do Ensino Médio de um colégio tradicional de Curitiba. Participa do PIBIC da UTFPR.
- AP2: Aluno PIBIC-JR 2 – Aluno do 2° ano do Ensino Médio de um colégio da periferia de Curitiba. Participa do PIBIC da UTFPR.

No início do segundo semestre os participantes: P5, P6, P10, P12, P13, AL1, AL2 e AL4, não continuaram a participar dos encontros da OPM, por motivos diversos, seja por questões profissionais ou particulares. Os participantes que permaneceram foram separados em dois subgrupos, e cada um deles desenvolveu uma situação desencadeadora de aprendizagem. O primeiro subgrupo composto pelos participantes PO2, P2, P3, P4, P11, AP2, AL3 e P decidiu trabalhar com o tema “Uma função e uma xícara de chá”, já o segundo subgrupo composto pelos participantes P1, P7, P8, P9 PO1, PO3 e AP1 resolveu pesquisar sobre o “Terremoto e uma função”. O curso terminou com oito participantes, sendo eles: PO1, PO2, PO3, AP1, AP2, P1, P8 e P.

7.3 ANÁLISES

Nos próximos itens deste capítulo serão apresentadas as análises dos registros (orais e escritos) dos professores durante a OPM. No item 7.3.1 serão reconhecidos os sentidos atribuídos pelos sujeitos à função exponencial e nos itens 7.3.2 e 7.3.3 a organização dos subgrupos que participaram da OPM, identificando a situação desencadeadora produzida por cada um destes subgrupos. Já no item 7.3.4 serão analisadas as duas situações desencadeadoras elaboradas durante a OPM considerando os indicadores estudados nessa pesquisa.

7.3.1 Os sentidos atribuídos pelos professores à função exponencial

Esse item será dedicado às análises dos registros dos professores durante a Oficina Pedagógica de Matemática. Serão destacados os registros do terceiro e último encontro por se tratarem do momento das discussões dos questionários (Apêndices A e B) entregue para os cursistas. Apenas o primeiro questionário foi recolhido para análise, sendo as respostas ao segundo questionário registradas em áudio e vídeo durante o encontro. Além disso, serão consideradas para análise as falas de outros encontros que auxiliem na compreensão do movimento do planejamento e do sentido que estes sujeitos atribuem à função exponencial.

Para fins de organização do material coletado e registro dos dados, as gravações foram identificadas pela letra E (que indica encontro) e por ordem numérica (para indicar a ordem do encontro), logo após a letra V/A (que indica se foi uma gravação de vídeo ou áudio) e por ordem numérica (para indicar a ordem do vídeo/áudio gravado no encontro), e por fim a designação do tempo (que indica o início dos minutos e dos segundos da fala dentro do encontro). Por exemplo, a gravação (E1, V3, 2:30) indica o primeiro encontro, o terceiro vídeo desse encontro e o início da fala aconteceu aos dois minutos e trinta segundos dentro desse vídeo. Já os participantes foram caracterizados e identificados no item 7.2. O registro do questionário será indicado por Q (entregue pelos participantes no E3).

No primeiro encontro foram apresentados os formadores e participantes da OPM que receberam um questionário (Q) com algumas perguntas a respeito do ensino/aprendizagem/didática do conteúdo sobre função exponencial, que estão no Apêndice A como já citado anteriormente, esse questionário tem a intenção de analisar os sentidos atribuídos pelos professores à função exponencial.

A expressão "sentido" atribuído pelos professores se refere a compreensão pessoal, a qual envolve as relações que dizem respeito ao conceito de função exponencial em sua formação pessoal. O que difere de "significado" da função exponencial que já tem em seu núcleo relativamente estável de compreensão desse conceito social e histórico. Conforme Oliveira (1997) diferencia sentido de significado:

> O significado propriamente dito refere-se ao sistema de relações objetivas que se formou no processo de desenvolvimento da palavra, consistindo num núcleo relativamente estável de compreensão da palavra, compartilhado por todas as pessoas que a utilizam. O sentido, por sua vez, refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, composto por relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e às vivências afetivas do indivíduo (OLIVEIRA, 1997, p. 50).

Segundo Leontiev (1983) o sentido está atrelado à questão do motivo.

> E assim, aquilo que eu realmente conscientizo, a forma que eu conscientizo e o sentido que tenha para mim o conscientizado é determinado pelo motivo da atividade dentro da qual está incorporada minha ação em questão. "Por isso, a questão acerca do sentido é sempre uma questão acerca do motivo" (LEONTIEV, 1983, p. 230, tradução nossa).

Desta forma, pode-se analisar através das falas dos professores o sentido pessoal da função exponencial em seu ensino e quais são os seus motivos e necessidades de ensinar esta função associados à sua atividade de ensino.

A primeira pergunta do questionário era "Qual a relevância de ensinar o conteúdo Função Exponencial no currículo do Ensino Médio? Esse conteúdo pode ser aplicado no cotidiano do aluno?".

A maioria dos professores respondeu que é importante o ensino de função exponencial, e que necessária mostrar a aplicação no cotidiano do aluno, como pode-se observar nas falas de P8 e P9:

> P8: o que passa pela minha cabeça é assim, a função exponencial tem muita importância no cotidiano até mesmo na questão da matemática financeira juros de banco, hoje todo mundo está endividado, né, essa coisa de trazer pro cotidiano, tem a parte da biologia, tem a parte de informática e o aluno do ensino médio, eles estão, na verdade ali no pulo pra decidir o que querem fazer e o que vão fazer, então assim eu acho que é de importância [...]. O curso que eu vou usar então eu não gostei e vou pra outro curso [...]. Eu acho que é de extrema importância eles verem, né, o que é e como é usado pra se decidirem na vida durante o vestibular, é isso (E3, V1, 5:50).
> P9: [...] eu acho importante trabalhar a função exponencial, tem relação com o logaritmo tem toda aquela coisa e também tem a relação da função exponencial com aplicação em outras áreas, tipo biologia na química tem aplicação em outras áreas, então por mais que o aluno não goste, não veja utilidade nenhuma, então é importante que ele conheça (E3, V1, 8:00).

Essa mesma P9 respondeu por escrito que não enxerga aplicabilidade direta na vida do aluno, embora relate a importância de se aprender esse conceito para a sua formação.

> P9: No cotidiano do aluno? Talvez não, porém há de se pensar em formas de mostrar a utilidade dessas funções e em quais áreas elas podem ser utilizadas, pensando que o aluno continuará seus estudos é interessante que veja que muitos conceitos/conteúdos estudados têm sim utilidade e são usados em outras áreas (Q).

Já a P6 comentou a respeito da importância da contextualização a favor do conhecimento, em detrimento das fórmulas sem sentido.

> P6: É importante a proposta do curso de chegar para eles e explicar o porquê. Porque você tem que aprender isso? Porquê? Onde você vai usar isso? E daí às vezes a matemática por muitos parece um bicho de sete cabeças para muitas pessoas né e às vezes é bem na base mesmo, na base lá eles já começam com muita dificuldade e daí chega com essas fórmulas, com essas situações e pouca vivência e daí não ouve essa explicação anterior porque, aonde, quando [...]. Explicar o porquê eu tenho que, porque eu tenho que passar por isso (E3, V1, 12:43).

Outro participante do projeto faz uma indicação de falhas no ensino da função exponencial nas aulas de matemática dando ênfase a outras funções, conforme é relatado abaixo:

> AL3: Eu não tenho ensino médio, mas por experiência, vejo que um curso que praticamente não dá nada assim, vai deixando, estão dando mais função afim, quadrática e quando sobra um tempinho talvez eles, você vê exponencial e logaritmo, mas eles veem isso em outras áreas como em física e química, podia ser um conteúdo muito mais explorado uma integração com as outras disciplinas pra poder ver para onde vai servir (E3, V1, 9:14).

No decorrer das discussões a P5 não reconhece a importância em ensinar a função exponencial, colocando a culpa nesse trecho na estrutura escolar e nos professores.

> P5: [...] mas eu, particularmente não vejo muita relevância da função exponencial, por quê? Porque nós temos pouco tempo, o conteúdo do 1º ano é muita coisa pra você dar, os nossos alunos hoje, eu estou falando dos alunos do estado, eles não tem base em matemática, ele não tem matemática básica, talvez seja pela essa troca de professor, uns tem mais compromisso, outros bem menos né, e assim vai. Então nós não temos tempo pra dar, e quando a gente chega lá no 1º ano, ele vem com aquela ideia de ensino fundamental, daquele oba oba, ai sabe, o aluno fala, eu fiquei sem aula e uma professora ajudou a passar pelo conselho, então eles já vem com essa coisa (E3, V1, 14:39).

Em certo momento esta mesma professora e também P3 afirmam que o ensino de função exponencial é importante para treinar a potenciação e radiciação.

> P5: [...] temos conteúdo em excesso e tem muita coisa ali que o aluno não vai usar e a gente é obrigado a dar porque tem aquele plano todo né, e nós sabemos que tem, e quando você entra na função exponencial, eu acho, a única coisa, eu, por isso queria fazer isso daí pra entender um pouco melhor, a única relevância que eu acho que tem, a gente trabalha bastante a parte da radiciação e potenciação com nosso aluno, e eles não tem essa base (E3, V1, 15:25).
> P3: Na função exponencial encontramos a operação de potência diretamente relacionada e com este o estudante têm contato desde o fundamental – anos finais. É um dos fatores de relevância do ensino da F. Exp. No Médio é de darmos/proporcionarmos momento de aplicabilidade e aprofundamento da operação de potência(Q).
> P3: Dificuldades conceituais da operação envolvida como: relação de igualdade; decomposição em fatores primos; sistema de numeração decimal (com relação a decomposição do número em potência decimal); o número escrito na forma decimal (Q).

Também a P5 reconhece a sua própria dificuldade em ensinar a função exponencial. “Porque eu também tenho dúvida a respeito disso, eu sei que eu vou lá, faço potência, faço isso, faço aquilo” (E3, V1, 16:45).

Vários professores comentaram que fazem uma revisão de potenciação. “Revisando potência, para que eles tenham uma base melhor para entender com facilidade a função exponencial” (P4, Q). Para P5 respondeu que faria uma revisão de potenciação, radiciação. Também comentou que não se aprofundaria nesse assunto, por não achar relevância.

> P5: Revisando de potência, radiciação, livro-didático. Mas sinceramente não aprofundo muito o assunto não. E até então não ver muita relevância

> no assunto. Por esse motivo vou fazer este curso para aprofundar melhor o assunto e aprender” (Q).

Além disso, essa professora possivelmente não acredita que o aluno vai aprender a função exponencial, conforme relato abaixo:

> P5: Não podemos esquecer que os nossos alunos estão chegando do ensino médio, primeiro que não sabe tabuada, segundo ele não sabe conta de multiplicação e nem de divisão, ele não sabe fazer conta de divisão com número decimal, agora você imagina o que ele vai achar quando você chega lá no exponencial (E3, V2, 07:27).

Infelizmente não foi possível acompanhar o processo desta professora, pois ela não compareceu mais aos encontros.

A AL1comentou que só aprendeu a função exponencial para passar em provas.

> AL1: É difícil, a gente teve que rever função exponencial quando eu fui bolsista aqui ainda, porque no ensino médio [...]. Se eu aprendi, naquela época, se eu aprendi, foi pra passar nas provas e acabou [...]. Um pouco do que a professora comentou eu tenho que conhecer o negócio se eu nem sei o porquê disso, porque aprender [...]. Então ter uma aplicação daquilo [...] o aluno vai aprender para fazer uma prova e não vai [...]. Ou se lembrar de uma coisa muito assim aleatória, eu lembro de alguma coisa [...]. Mas nada que tenha uma aplicação (E3, V1, 22:16).

Nesse relato a AL1 reconhece que qualquer situação de aprendizagem contida em livros ou apostilas no Ensino Médio, não garante que o estudante se apropriou do conhecimento de função exponencial, tem que saber os porquês daquela necessidade. Observa-se que o motivo dessa professora e da P5 eram “motivos compreensíveis”, a primeira só para passar na prova e a segunda para ganhar o salário no final do mês e passar o conteúdo por causa do currículo, e não “motivos eficazes” que estão ligados ao objetivo. Leontiev (1994, p. 70) diferencia esses dois motivos, os “motivos eficazes” coincidem com o objeto da atividade, o mesmo não acontece com os “motivos compreensíveis”.

A P4 tem o conceito de função exponencial com erros, ela entende que a função exponencial é uma continuação de uma função simples.

> P4: [...] eu não tenho experiência ainda no ensino médio, nunca trabalhei com esse conteúdo, mas assim por ser uma continuidade de função simples, ela é uma continuação né. (E3, V1, 28:08).

Essa professora está buscando conhecimento da função exponencial para melhorar seu ensino e superar sua limitação.

Na sequência, a P1 entrou na discussão e descreveu o seu ensino e a sua paixão por lecionar a função exponencial, optou-se por deixar a fala da professora na integra, pelo motivo da mesma fazer articulação de sua experiência no ensino dessa função, com diversas situações de ensino.

> P1: [...] eu já tive experiência no médio, e eu vejo assim, que a função exponencial é uma das coisas mais importantes que a gente tem, uma das mais bonitas no meu ponto de vista de ensinar [...]. Eu acho que tudo aquilo que existe uma grande variação, uma variação que não vem momentâneo, não é, aquela coisa assim, igual a PA, ah, que eu já sei o que vai ser o próximo valor, porque aquilo é uma constante, né, então a função exponencial ele vem exatamente para explicar tudo aquilo que tem uma variação e eu não consigo automaticamente projetar, por exemplo, se eu tenho uma colônia de bactérias, no primeiro momento, ou vírus, tem 1 depois vai se dividindo em várias células, e aí vai se dividindo, dividindo, dividindo, chega em um determinado momento que a gente não consegue mais, tem que ter uma análise para poder verificar, o mesmo acontece com a população, então assim, se eu quero saber, qual vai ser a população de uma determinada cidade, daqui 10 anos, para que serve isso, saber da população daqui 10 anos. A prefeitura, o governo, enfim, a nível de Estado ele tem que saber pra poder projetar as políticas públicas. Quer dizer, quantas creches serão necessárias, mudanças de rua se vai precisar, se vai precisar aumentar uma pista, se não vai, né. Então, enfim, a gente tem a função exponencial, desde a natureza, quando eu tenho lá a questão das radiações as questões de ondas, então tenho um terremoto, que a base do cálculo da escala Ritcher é a base do logaritmo, e seu não sei a exponencial eu não vou entender o logaritmo, né, então e depois na vida da pessoa, não só a questão da prefeitura, da bactéria, mas digamos, o aluno não viver naquele banco de escola, então um dia, ela tá terminando, ele vai querer a sua casa, ele quer financiar um carro, ele quer comprar moveis da casa dele, e aí, o que será mais vantagem, como ele vai saber, se é mesmo o preço daquela geladeira, parece tão baratinho, lá, uns 20 por mês, quanto vai sair lá no final. Certo, então é a partir disso, ou a partir de um financiamento, então a aplicação da função exponencial ela é muito vasta. E depois, para base de outros conteúdos da própria matemática, daí vem PG e depois vem os logaritmos, depois dos logaritmos acho, eu creio quando a minha função exponencial, ela não intercepta o eixo do X, ela tende a 0, e se tende a 0 eu creio que vai lá para a parte de limite, né, quer dizer, o que é uma estrutura de cálculo, sem saber o limite, sem saber que é uma derivada, e aonde a gente começa com o aluno, seria lá na revisão de potência, lá nas propriedades de potência, e daí a gente, as vezes você tem que passar a definição que está lá no livro, você entendeu o que está escrito aqui? Ele fala não professora (E3, V2, 00:42).

A descrição mostra a compreensão e o sentido que a professora tem a respeito do conceito da função exponencial, relacionou os seus nexos internos, pesquisados no movimento histórico e lógico dessa função, nessa dissertação, como juros compostos e progressão geométrica. Pode-se observar que o motivo do ensino de P1 é eficaz, pois o motivo coincide com o objeto. Nesse instante observou que somente faltava a ela a organização desses conhecimentos.

Essa professora descreveu a sua metodologia no ensino de funções exponenciais:

> P1: Eu levava uns folhetinhos lá, de lojas, das promoções de carros, dessas coisaradas. Naquele ano, que eu fiz a prática com um professor, mas daí eu não consegui achar a prática, acho que ficou com ele. Então, mas assim, lembro vagamente de algumas situações, foi bem bacana, foi com biologia, e daí também envolvia uma parte que não sei explicar, que era questão da meia-vida, isso eu lembro, daí falava, ele ficava, daí tinha uma questão que ele explicava do perito, do Carbono 12 (E3, V3, 17:27).

Pode-se observar pelos relatos dos participantes da OPM que é importante para eles ensinar a função exponencial, que apenas uma participante discorda por não ter o conhecimento suficiente a respeito dessa função. Então, podemos identificar que é uma necessidade ensinar o conceito de função exponencial e que os professores foram colocados no processo de atividade, pois os mesmos possivelmente estão voltados a satisfazer essa necessidade de ensinar, ou seja, um motivo, com objetivos de ensinar essa função. Leontiev (1994) assim define a atividade:

> Por atividade, designamos os processos psicologicamente caraterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo (LEONTIEV, 1994, p. 68).

A segunda pergunta do questionário “Quais são as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem da Função Exponencial?” traz falas dos professores a respeito dos vocabulários matemático empobrecidos “Eu acho, os termos, termos matemáticos, para alguns alunos em geral, eles são muitos empobrecidos de vocabulário matemático” P8 (E3, V2, 25:20).

A AL1 relatou que muitas vezes os estudantes não entendem o conteúdo por não serem explicados os termos matemáticos. O que revela que os alunos não entenderam a essência do conceito, não fazendo sentindo para eles, ficando na aparência.

> AL1: […] você falou com outras palavras, eu consegui entender [...]. Mas porque ele fala, eu fico olhando [...]. Olhando pra eles quando fala o termo matemático e você não explica exatamente o que é aquele termo, ele olha como se fosse, não faz sentido (E3, V3, 00:17).

Para Vigotski esses termos matemáticos estão carregados de conceitos, ele chama de signos, conforme Oliveira (1997) define e cita exemplos:

> Signos podem ser definidos como elementos que representam ou expressam outros objetos, eventos, situações. A palavra mesa, por exemplo, é um signo que representa o objeto mesa; o símbolo 3 é um signo para a quantidade três; o desenho de uma cartola na porta de um sanitário é um signo que indica “aqui é um sanitário masculino” (OLIVEIRA, 1997, p. 30).

Da mesma forma os conceitos, por exemplo, de potência estão carregados de informações sobre base, expoente, valor da potência que foram se agregando com passar do tempo, e estão agora com seus signos atuais.

Apenas uma professora citou que os alunos têm dificuldade em analisar gráficos e no uso de “artifício” para mudança de base. Na função exponencial também encontramos dificuldade em análise de gráficos e no uso de “artifício” para mudança de base (Q, P1). Para outra professora (P2) ela utilizaria recursos didáticos geralmente gráficos de problemas propostos em livros didáticos.

No último encontro, os participantes discutiram a respeito do uso do gráfico no ensino de funções exponenciais, a PO3 considera que se pode utilizar um software, mas que o mesmo faça o estudante compreender o conceito, conforme fala:

> PO3: Eu não vejo problema em fazer uso do Excel, ou outro software pra fazer o gráfico, mas explorar, fazer o estudante compreender, o que é aquela linha, o que está representando o par ordenado, x e o valor que a função assumi nesse x, o aluno compreender isso (E27, V2, 01:26).

E para o AP1 a importância de fazer o gráfico manualmente, pois o aluno aprende o conceito fazendo.

> AP1: É porque, você só tem o gráfico, tem o geogebra, a gente coloca no computador faz o gráfico, é muito diferente quando a gente faz o gráfico, você entende muito melhor, não é aquela coisa, a tá eu estou vendo ali, mas quando você constrói você tem o conceito (E27, V2, 02:19).

Outra professora usa como metodologia, desconstruir o conceito de função exponencial e as diferentes representações que este conceito possa ter. Ela parte do princípio que o aluno ainda não se apropriou do conceito de potência, então a mesma cria situações de cálculo de área de quadrado e volume de cubos para construir o conceito de potência, entre outros, fazendo relações entre lados. Com isso, a P3 consegue construir o conceito de função exponencial de forma coletiva com os seus alunos (P3, Q).

> P3: Acredito na construção do conceito e nas diferentes representações que este conceito pode ter. Parto do princípio que o estudante não tem o conceito de potência apropriado, então crio situações de cálculo de área de quadrados e volume de cubos para construir o conceito de potência, depois para o cálculo da área de quadrados, construo gráficos mostrando a relação existente entre os lados. Partindo das relações discutimos o conceito de função tentando estabelecer, coletivamente, um registro do que seria uma função exponencial (Q).

A P8 no 7° encontro percebeu a importância do planejamento coletivo, conforme descreve "A importância do planejamento coletivo, troca de experiência, é bem aquilo que a gente está fazendo aqui, né" (E7, V1, 12:29). Isso é um dos elementos da teoria da atividade, porque o ser humano se forma do coletivo para o individual. Conforme Moura et al.(2010) explica:

> [...] o desenvolvimento psíquico do homem se realiza por meio do que Vigotski chamou de processo de internalização. Segundo esse autor, as relações intrapsíquicas (atividade individual) constituem-se a partir das relações interpsíquicas (atividade coletiva). É neste movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações, ou seja, dá-se a apropriação da experiência da humanidade (MOURA et al., 2010, p. 208).

Também a P1 nesse mesmo encontro narrou a mudança dela no ensino de função exponencial ao passar dos anos, e que percebeu que o ensino tem uma intencionalidade, e que no movimento histórico lógico dessa função, pode melhorar o seu ensino.

> P1: Buscar uma intencionalidade para a função exponencial, o porquê, como? Eu tenho dificuldade, realmente da própria história da função exponencial, de como ele chegou. Antes, uns anos atrás, pra uma potência, a equação e função exponencial é quase tudo a mesma coisa, o que modificava aí, que agora ao invés de ter agora um número real eu estava usando uma variável no expoente e acabou [...]. Por aí, né. Mas a diferença da equação é o sinal que muda [...] (E7, V2, 15:21).

Moura et al. (2010) entende que "a escola como lugar social privilegiado para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente passa necessariamente por assumir que a ação do professor deve estar organizada intencionalmente para esse fim" (MOURA et al., 2010, p. 212). Então, ao organizar o seu ensino, o professor promove apropriação do conhecimento ao estudante.

No intervalo do oitavo para o nono encontro ocorreu uma revelação da P1, que a mesma fez questão de compartilhar através de uma mensagem para o grupo, por meio de uma rede social, conforme foi reproduzido abaixo:

> Olá pessoal! Gostaria de compartilhar com vocês algumas idéias - nada surpreendente, mas que ficaram (que estão) mexendo com meus frágeis neurônios! Aproveitei o feriado e andei lendo algumas coisas bem interessantes, no meu ponto de vista. Descobri que os logaritmos (Naiper) surgiram antes da função exponencial e de forma independente, e que ajudaram muito as navegações e a todo o processo histórico da virada aristocrata para a burguesia no poder, resultando o interesse para a matemática comercial (séc. XVII). (Nesse período os logaritmos tinham a função de facilitar os cálculos de adição-multiplicação, subtração - divisão aos quais eram calculados através da trigonometria). Por volta de 1680, Jacob Bernoulli, analisando um situação de juros compostos, percebe a possibilidade de trabalhar a mesma situação através da potência, fato que o levou ao estudo das cordas suspensas por dois extremos (forma a partir daí a ideia da exponencial, mas não a publica). Seu irmão Johann Bernoulli, mas tarde após a morte de Jacob, publica em 1697, em Principia calculi exponentialum, vários cálculos de função exponencial. Somente muito tempo depois é que se percebe que a função inversa do logaritmo é a função exponencial (surgem das mesmas necessidades, variações ocorridas na natureza, necessidades para facilitar as navegações e as transações comerciais do período). Bom, talvez para o grupo isso não tenha relevância, ou não seja novidade, mas fiquei muito feliz pela descoberta pessoal e quis compartilhar, pois sempre imaginei que a partir de determinada situação comercial ou marítima [...], ocorreu alguma situação do tipo (1,05) elevado a x = 2 e não tinham a resposta e foram buscando soluções através do conhecimento inicial de Naiper, fazendo o logaritmo surgir como função inversa após a função exponencial. Pessoal, desculpe a tamanha ignorância na área, mas eu nunca tinha parado para buscar a história da função exponencial, e a mesma fragilidade encontrei só agora nos livros didáticos onde nada citam a respeito, trazem somente a história do logaritmo[20].

Observa-se nesta professora P1 seu movimento em atividade de ensino estudando a fundo o movimento histórico e lógico da função exponencial, e conscientizando-se das necessidades de se estudar esse conceito no decorrer dos tempos.

Para confirmar esse desenvolvimento pessoal da P1, se apresenta o seu diálogo com a PO1 a respeito o que ela pensa sobre a função exponencial e a ajuda da OPM em organizar o seu ensino e sobre os nexos internos da função: PA e PG, que ao estudarem encontraram:

---

[20] P1. [Mensagem pessoal]. Mensagem recebida por: <adnielsonls@ig.com.br>. mar. 2016.

> P1: Eu acho que sim, é muito relevante, porque, acho que eu já tinha comentado, ali que tudo aquilo que tem avaliação, então, por ser a PA e a PG que a gente viu nos exercícios, né, que tinha é o próprio logaritmo, acho, que dá uma base melhor para ele entender que saí da exponencial e vai pro Log [...]. E como o logaritmo tem uma série de aplicações, então e a função exponencial está diretamente relacionada, então ela é de extrema importância, não tem como dissociar além de poder aplicar em matemática, em física, em biologia, no caso da meia vida, em que a gente levantou no livro, em estatística na parte de geografia, que é a parte populacional, na parte financeira, entra dentro das matérias técnicas de matemática financeira e da própria estatística, então quer dizer, ela engloba muita coisa, que eu acho que faz dela uma coisa primordial pro assunto, que não pode ser retirado (E27, V1, 05:20).
> PO1: [...] a gente termina a função do 1° grau, começa a Função do 2° grau, começa a função exponencial, termina função exponencial, mas não estabelece, essa relação, isso para mim, não estabelece, essa relação, isso pra mim, não que o projeto quisesse fazer isso, mas é isso foi uma coisa, acho que a ideia do Terremoto, acho que teve puxar, as relações entre as grandezas, e a relação da PA com a PG, que a gente também trabalha, que a gente não trabalha junto, trabalha separadinho, caixinha da PA e PG e a caixinha da função exponencial e a gente não articula (E27, V1, 14:41).
> P1: Só articula quando, por exemplo tem um livro novo que a gente viu, professora, acho que era do Dante, que a gente viu a interação de PG, é um dos raros que tem. É uma falha eu não lembro de ter visto, na graduação essa análise (E27, V1, 16:22).
> PO1: Eu também não vi, mesmo ensinando, assim eu nunca pensei em fazer a relação, aliás, nunca fiz a relação, a gente não ensina função exponencial, até porque sim, ela é no fim na parte de funções, você já quer mais que fazer mais rápido, assim, né, até então você já dá equação, o gráfico, é assim e pronto. É isso que já tem no livro, a gente deu conta, mas na verdade não deu, né, na verdade a gente não dá conta. E realmente a gente precisa de todos os conteúdos anteriores de potência, de propriedade de potência, né (E27, V1, 16:51).

Observa-se nesse relato que a P1 tem uma outra visão mais organizada do ensino de funções exponenciais.

Os professores comentaram sobre as situações desencadeadoras de ensino planejada e executada no segundo semestre de 2016, no último encontro:

> PO3: Acho que a situação desencadeadora é aquela que a gente consegue agregar um maior número possível de conceitos, dentro da disciplina, dentro daquele conteúdo, e ver a relação com ela aplicação no dia a dia. Pelo menos, foi isso que eu entendi, então foi o que ficou marcado, né, então vou ver, a não vou pegar aquela situação, mas acho que até é mais tranquila de trabalhar do aluno aprender, agora vou ter que ver de um olhar diferente, vendo essas condições, né, quais os conteúdos que vai ser abordados, quais os conceitos que eu tenho que retomar, pra ver para eu preparar a minha aula, é nesse sentido que eu percebi, assim qual é a objetividade, né, qual objetivo que eu tenho que atingir com ela. Eu não sei gravei coisa errado (E27, V2, 04:11).
> P8: A P1 estava falando que lembrando assim, não sei se de repente iguala, ou não, aquela relação de estudo que tem, naquela Universidade Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, tem essa questão assim, de você estudar a colocar um assunto um tema que está atrelado de

organização do ensino, mas é uma coisa que de certa maneira, a gente, não é que falha, ainda que não chegou o momento de estudar, mas aqui talvez seja o momento, é de pensar essa situação de aprendizagem, fazendo esse trabalho interdisciplinar, não só desencadeado o conceito matemático, Ok. O nosso foco foi, eu acho que a gente precisa ter um foco, porque se não você vai querer estudar tudo ao mesmo tempo, e aquela história, o isolado precisa ser recortado, porque a gente não consegue estudar tudo ao mesmo tempo, por isso a gente precisa fazer o recorte. A gente fez o recorte da função exponencial, dentro da matemática, como a gente poderia ter feito um recorte mais aprofundado, eu sei que você fez, mas gente não estudo tanto aqui, isso ficou, mas a seu cargo, no conceito da física, né (E27, V2, 05:43).
P8: Por mais que assim eles não vão esquecer o momento. E assim, e o aluno que não sabia PA naquele momento que ele aprendeu PA, ele numa mais vai esquecer a PA. O aluno, tudo bem, que o objetivo não era ensinar a PA, mas o aluno que não sabia a função exponencial, e naquele momento entendeu a função exponencial, ele nunca mais vai esquecer aquele conteúdo. Sabe, eu acho assim que cada detalhe que eles aprenderam naquele momento, até a questão de geografia quando o próprio o aluno explicou das placas tectônicas tenho certeza que ele nunca mais vai esquecer daquele assunto, porque englobou muita coisa, eu acho assim (E27, V2, 10:19).

Os participantes relataram as suas experiências no decorrer do ano dentro da OPM e que levaram para si.

P8: Até mesmo crescimento pessoal, né, não só [...] (E27, V2, 27:59).
P1: Outra coisa, assim, que deu pra perceber, é que na parte da matemática básica, mesmo, e da própria função exponencial, não é uma coisa pra loucos, né, a função exponencial, logaritmo, a isso não tem nada a ver, mas vou, não serve pra nada, não se usa pra nada, é na verdade a gente conseguiu mostrar pra eles, que não, que tem uma gama de coisas que pode ser utilizada. E outra coisa pode ser colocada, tá que o aluno na escola, não pra usar somente aquilo que ele vai precisar usar, não tá naquela formação técnica ali, ele não via ser aquele apertador de botão, só vai precisar gerar aquele botão, ele está ali pra ter um horizonte maior, que é igual os textos que a senhora (PO1) passou, né, que era parte que o estudo era para se mostrar é tudo aquilo que foi aprendido ao longo do tempo, e ter uma visão crítica, e levar esse conhecimento, não só aquele epistemológica do conceito, só, quer aprender porque eu vou usar (E27, V1, 09:38). [...] eu senti um amadurecimento na turma “S”, né, por n fatores, que aconteceram na turma “T”, ela é uma turma que vai demorar para amadurecer, mas mesmo assim, eles conseguiram, pouca coisa, mas conseguiram, já é um passo, mas depois teve todos os outros fatores externos, que contribuíram para o não amadurecimento, né, nesse período, mas foi de importância gigantesca pra eles verem, o que é aplicado, vê de uma forma diferente, eu acho, que a gente, pelo menos uma sacudida naquele “T”. E o “S” acho que ele foi maravilhoso, assim, mudança que ele teve, o primeiro momento, até agora, era uma turma desinteressada, era uma turma que não ia, não produzia nada, e de repente, tá perguntando, acho que muito válido (E27, V1, 11:13). [...] mas, é também pelo conhecimento, professor, assim, é tinha uma ideia da função da história exponencial, e aí quando vim para estudar olhei, nossa era totalmente o oposto daquilo que eu acreditava, que eu, então, eu achei que aprendi muito para mim, assim, não dá pra dar aula, para explicar, que isso é uma tragédia, né. Eu que aprendi, pra mim como pessoa, eu assim me satisfez, eu vim, não, nem por causa título, eu vim mais por

> isso pra aprender, eu acabei gostando, era aquilo que eu buscava, era uma coisa maçante, que vem que vem chega, é igual um curso, uma vez, que fui em 2 cursos da UFPR de matemática mesmo, era interessante, mas pra quem estava buscando aquela linha de desenvolver exercícios do ENEM, mas eu não via (E27, V2, 28:28). [...] era uma coisa mais técnica, pra mim surgiu um click para buscar, foi diferente daqui, aqui parece valoriza o lado mais humano, assim, então eu gosto dessas (E27, V2, 29:35). [...] não sei se impressão minha, mas eu acho que sim, considera muito a pessoa, o conhecimento, o que levou a estudar (E27, V2, 29:52).

Os participantes da OPM concluíram que quando os conceitos são relacionados com assuntos do cotidiano do aluno, os mesmos se apropriam com maior facilidade do conceito de funções exponenciais para a vida deles, sendo assim, uma situação de aprendizagem da AOE organizada possibilita uma outra possibilidade de metodologia de ensino dessa função. Veja o diálogo dos participantes:

> PO3: É porque, as vezes se consegue resolver um problema usando alguma coisa simples, que ele já viu no ensino fundamental, mas usando esse outro conhecimento, função exponencial ou logaritmo, resolve numa forma mais simples, né, compreender que, essa construção desse conceito, veio para ajudar a facilitar a resolver algum problema que demandava cálculos imensos, né, veio a facilitar, é importante nesse sentido. Por aplicação no dia a dia do aluno, o que se entende a aplicação do dia a dia, a vivência que o aluno está tendo, não acho que mostrar para ele, onde se utiliza dessa função no dia a dia, o que o aluno do ensino médio faz no dia a dia, de imediato você não consegue identificar, aqui tem função exponencial, aqui não, ou ele faz uso, mas ele compreender que é isso que vai facilitar ele, se ele se seguir uma carreira, na área social, em muitos problemas para ele resolver ele precisa ter desse conhecimento matemático, ou se ele ir para ir área de exata, ou tudo mais, ou para área médica, também precisa, mas nesse sentido. Não aplicar no dia a dia, nas coisinhas do que ele está fazendo, nas é mostrar que dependendo no caminho que ela tá seguindo da profissão, vai ser muito mais útil (E27, V1, 07:17).
> P1: Outra coisa, assim, que deu pra perceber, é que na parte da matemática básica, mesmo, e da própria função exponencial, não é uma coisa pra loucos, né, a função exponencial, logaritmo, a isso não tem nada a ver, mas vou, não serve pra nada, não se usa pra nada, é na verdade a gente conseguiu mostrar pra eles, que não, que tem uma gama de coisas que pode ser utilizada. E outra coisa pode ser colocada, tá que o aluno na escola, não pra usar somente aquilo que ele vai precisar usar, não tá num naquela formação técnica ali, ele não vai ser aquele apertador de botão, só vai precisar gerar aquele botão, ele está ali pra ter um horizonte maior, que é igual os textos que a senhora (PO1) passou, né, que era parte que o estudo era para se mostrar é tudo aquilo que foi aprendido ao longo do tempo, e ter uma visão crítica, e levar esse conhecimento, não só aquele epistemológica do conceito, só, quer aprender porque eu vou usar (E27, V1, 09:38).
> AL1: Eu acho que essa parte embaçada com a vivência da pessoa, por exemplo, se desde o início ensino fundamental, você está acostumado por exemplo ver um professor só identificar ele dá uma fórmula, é só assim que faz, e acabou, mecânico, mas é muito diferente você entender o porquê foi feito aquilo. A partir do momento que a pessoa pergunta o

> porquê, ela aprende muito mais, porque sai daquela coisa, há eu vou só fazer desse jeito, ela acaba decorando (E27, V3, 10:00).
> AO2: É porque no processo mecânico, ela decora como faz, e não tem sentido, por isso que ela esquece fácil, também, né (E27, V3, 10:38).

Observou-se, neste diálogo, que a forma antiga, de decorar mecanicamente, não tem mais sentido, o mais importante é que o estudante se aproprie do conhecimento, para tanto, as aulas devem ser organizadas e planejadas mais próximas do cotidiano do aluno, fazendo contextualizações, e podendo ter como possibilidade a AOE para organizar o ensino de função exponencial.

7.3.2 Organização das ações do subgrupo amarelo.

Neste item, analisa-se, as ações do subgrupo amarelo no movimento de elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem. No quinto encontro da OPM, a PO1 entrega a pasta utilizada como portfólio, com o segundo questionário (Apêndice B) e orientações para a otimização das atividades do subgrupo. Vários artigos embasaram a sequência de ações do grupo (Oliveira (2014), Pinheiro e Santana (2011), Rezende e Silva (1999), Rezende e Botelho (2007), Souza (2010)) além deles foram considerados os documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de matemática (BRASIL, 2000) e Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR) (PARANÁ, 2008) de matemática à respeito da função exponencial.

Os assuntos das perguntas do segundo questionário (Apêndice B) foram separados entre os membros, a P9 dedicou-se ao estudo do movimento histórico do conceito, usando o livro de Boyer (1996), já o P7 analisou situações problemas em livros didáticos, verificando as aplicações do conceito de função exponencial; AL4 e P9 pesquisaram outras aplicações do conceito. Após várias discussões sobre algumas situações problema da função exponencial, os integrantes do grupo concluíram que a escolha de situações problemas em livros didáticos, não é uma tarefa fácil, e que muitas vezes não mostra a essência do conceito de função exponencial, como puderam perceber em uma situação que envolve crescimento populacional de aplicação direta do algoritmo da função exponencial, substituindo o valor da variável no expoente. Diante disso, iniciaram o estudo nos documentos Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR) (PARANÁ,

2008) de Matemática, em que a função exponencial é citada. O diálogo do AL4 com P9 e a PO1, mostra que se considera que para ensinar a função exponencial no Ensino Médio, o aluno precisa saber as relações aprendidas no Ensino Fundamental, como potência, considerado como um conceito fundamental que faz parte do conceito de função exponencial.

> P9: Mas, é que aqui diz juros compostos, mas eu não vou explicar a função exponencial no 9° ano [...]. Porque aqui é 9°ano, entendeu [...]. É que está dizendo juros compostos, mas eu não vou trabalhar com relação a função exponencial, pelo menos não como eu faria no ensino médio (E5, A1, 56:28).
> AL4: Apesar de ser um assunto do ensino médio, você não ensina só no ensino médio, você começa ensinar desde a 6° série (E5, A1, 56:42).
> P9: Sim, você começa com a ideia da potência (E5, A1, 56:42).
> PO1: Se você entrar no ensino médio, aí, sim você está com dificuldade, você tem que ensinar tudo no mesmo tempo (E5, A1, 56:42).

Esse subgrupo decidiu trabalhar com o tema “Terremoto e funções exponenciais”. Organizou as próprias ações de estudo e trabalho para desenvolver a situação. Neste movimento, entende-se que os participantes estavam em atividade, conforme Leontiev (1983) um processo psicológico que satisfaz uma necessidade do homem na sua relação com o mundo (motivo direcionado a objeto).

Também foi encontrado nesse processo os elementos da Atividade Orientadora de Ensino conforme proposta por Moura (2001):

> A atividade orientadora de ensino tem uma necessidade: ensinar; tem ações: define modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo; e elege instrumentos auxiliares de ensino: os recursos metodológicos adequados a cada objetivo e ação (livro, giz, computador, ábaco, etc.). E, por fim, os processos de análise e síntese, ao longo da atividade, são momentos de avaliação permanente para quem ensina e aprende (MOURA, 2001, p. 155).

A necessidade do professor se evidencia ao ensinar o conhecimento científico, nesse caso as funções exponenciais. Também se reconhece o motivo e a necessidade dos estudantes em apropriar-se do conceito de funções exponenciais, por meio da situação desencadeadora do Terremoto.

No entanto, Leontiev (1994, p. 70) diferencia em dois motivos, os “compreensíveis” e os “eficazes”. Enquanto, os “motivos eficazes” coincidem com o objeto da atividade, o mesmo não acontece com os “motivos compreensíveis”.

Para exemplificar, tais motivos, suponhamos que um professor marque uma prova e peça para o estudante ler um texto de um livro, para a prova vindoura, para o estudante esse motivo coincide com o seu objetivo de tirar uma boa nota na prova, portanto, o motivo é eficaz. Já se o professor comentar que não vai mais cobrar esse texto, esse motivo se torna somente compreensível, pois não é alvo de seu objetivo, ele pode ler se quiser.

Leontiev (1994). Afirma que são exatamente os motivos compreensíveis que se tornam eficazes. Para esse autor, essa transformação de motivos ocorre:

> [...] é uma questão do resultado da ação mais significativo, em certas condições, que o motivo que realmente a induziu. [...]. Ocorre uma nova objetivação de suas necessidades, o que significa que elas são compreendidas em um nível mais alto (LEONTIEV, 1994, p. 70-71).

Os motivos desencadeados pela organização de uma situação desencadeadora de aprendizagem usando como tema o terremoto se revelaram eficaz, conforme indica Leontiev (1994, p. 70), no processo de ensino dos professores, pois os mesmos coincidem com o objetivo da atividade.

O subgrupo reconheceu articulações do tema terremoto com outras disciplinas como de Física, Geografia e História e discutiu outras ações associadas ao uso da escala logarítmica para medir o abalo sísmico e suas relações com a função exponencial. Também pensou em outras formas para motivar os estudantes, como um passeio no Parque da Ciência Newton Freire Maia, que tem uma simulação de terremoto.

A P1 que era professora de Física das turmas de primeiro ano no Colégio Estadual do Paraná em que a situação foi desenvolvida se prontificou a estabelecer as articulações necessárias para o desenvolvimento da situação com os professores de História, Geografia e Matemática.

No nono encontro os participantes deste subgrupo discutiram sobre a necessidade de uma disciplina de história da matemática como uma disciplina obrigatória no curso de licenciatura em Matemática, e como este conhecimento é importante para a o ensino de matemática, conforme mostra o diálogo a seguir:

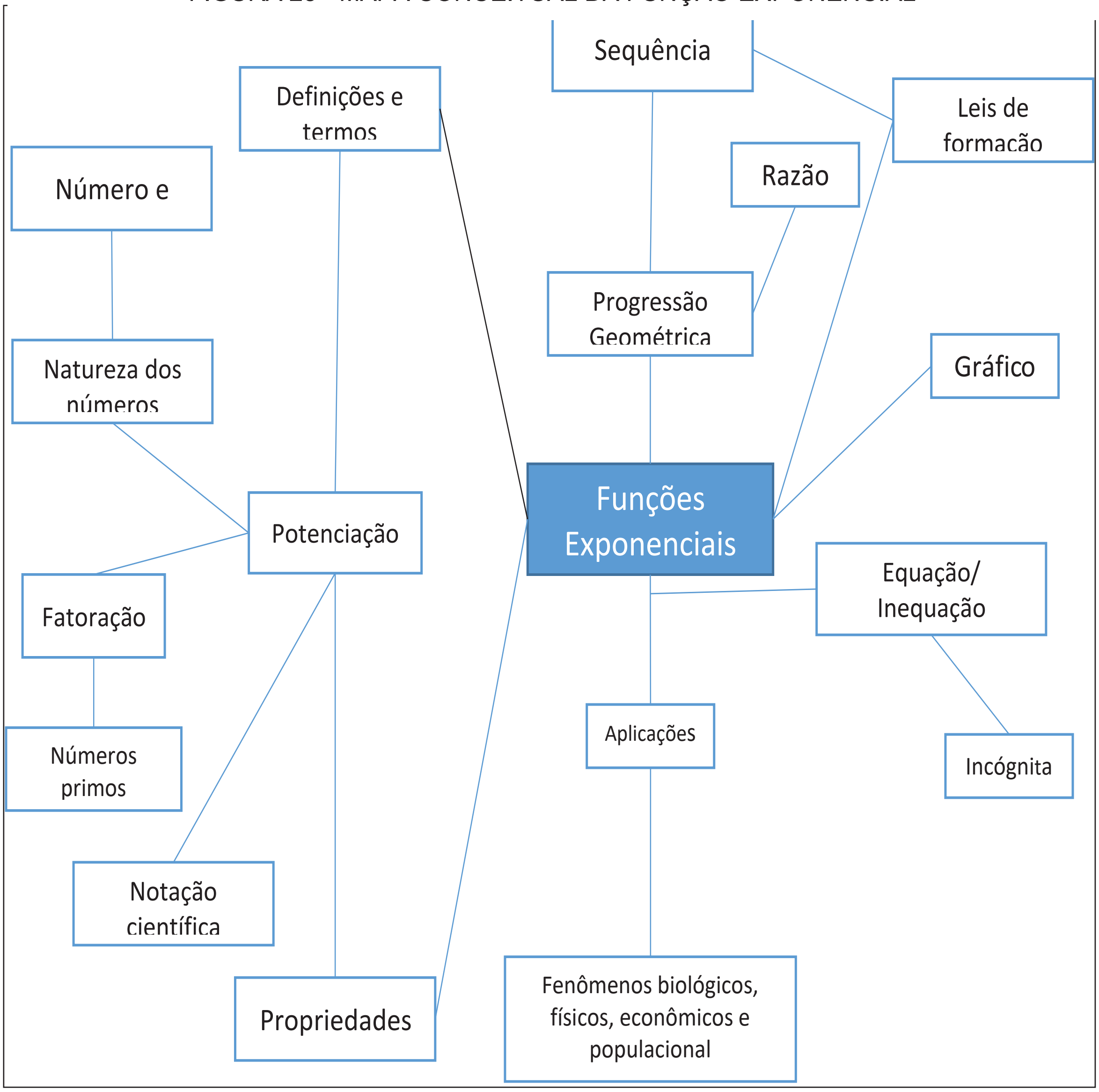
> P1: Na universidade já tinha pouca história da matemática. Na verdade ela não tinha que ser optativa (E9, A1, 34:00).
> P9: A gente peca muito, porque quer dar matéria, matéria e a gente não contextualiza o negócio, a gente não diz de onde vem para onde vai e porque serve [...] (E9, A1, 35:00).

> PO1: Porque não teve isso (E9, A1, 35:02).
> P9: Se eu contasse um pouquinho da história do negócio, talvez eles se motivassem a descobrir juntos, ali (E9, A1, 35:07).

A história da matemática é importante tanto para o aluno quanto para o professor, pois ambos devem tomar ciência da necessidade daquele conteúdo dentro da matemática e da humanidade. Neste momento o subgrupo se conscientizou da necessidade do movimento histórico e lógico da função exponencial na organização do seu ensino.

O subgrupo começou a montar o mapa conceitual/esquema da função exponencial, registrado a seguir

FIGURA 25 - MAPA CONCEITUAL DA FUNÇÃO EXPONENCIAL



FONTE: Subgrupo amarelo (2016)

Nos encontros subsequentes a situação desencadeadora de aprendizagem, até então produzida pelo grupo foi apresentada para apreciação dos demais participantes da OPM. Os slides elaborados apresentavam, o mapa conceitual da função exponencial, a criação do sismógrafo (fazendo referência ao tectonismo e conceito de energia); os conteúdos a serem trabalhados pelos professores de Geografia (deslizamentos causados por terremotos) e o professor de História (História do terremoto) e o cronograma para o desenvolvimento da situação desencadeadora no Colégio Estadual do Paraná.

Do décimo terceiro encontro em diante, houve a necessidade de reorganizar a pesquisa e os trabalhos, já em andamento, ajustando o cronograma de desenvolvimento da situação desencadeadora de aprendizagem na escola.

A professora P1 comentou que os professores de Geografia e Matemática estavam no movimento de revelar em suas matérias os conceitos relacionados ao tema terremoto e também começaram a montar um sismógrafo para esclarecer ao subgrupo o funcionamento deste instrumento. A P1 pediu para os seus alunos das turmas do 1° ano para que construíssem os sismógrafos, pesquisassem sobre este instrumento que mede o abalo sísmico, deixando os alunos envolvidos e motivados na situação desencadeadora gerando a necessidade de apropriação do conceito de função exponencial envolvido na situação.

Os integrantes deste subgrupo também discutiram a elaboração de exercícios para os alunos e as datas possíveis de desenvolvimento das ações dentro do colégio. Também planejaram as condições para aplicação dos exercícios com expoentes decimais, e a conversão da expressão matemática da magnitude de logaritmos para exponencial, através de tabelas usando as propriedades de potenciação. Para tanto consideraram o uso dos registros colhidos do sismógrafo das aulas de Física, calculando nas aulas de Matemática a magnitude do sismo, intencionalmente provocado pelos alunos. Assim, discutiu-se, coletivamente sobre o que os alunos precisariam para calcular a magnitude no sismo, a partir dos dados colhidos no sismógrafo de cada um, desde as conversões de unidades de medida até relembrar aos alunos sobre as propriedades de potência. Estudou-se a inclusão da Progressão Aritmética e Progressão Geométrica nos exercícios. Este momento foi muito importante para esta pesquisa, porque chegou-se aos nexos internos da função exponencial conforme o que foi encontrado no estudo do Movimento Histórico e lógico deste pesquisador. Estes nexos internos aparecem na primeira ação de ensino, onde o subgrupo propôs exercícios para que os estudantes aprendessem das seguintes propriedades: (i) A função Exponencial é uma relação que associa uma progressão aritmética a uma progressão geométrica. (ii) A função exponencial é uma relação que transforma somas em produtos, mais detalhes deste processo estão no Anexo B.

O subgrupo apresentou o planejamento e cronograma do desenvolvimento da situação desencadeadora de aprendizagem com os estudantes no 17° encontro. Destaca-se que as primeiras ações envolviam reuniões com os professores de história e matemática para explicar a situação do terremoto, neste sentido também aconteceria a intervenção do professor de Geografia, que já estava trabalhando o assunto por ter coincidentemente acontecido um terremoto na Itália na época do desenvolvimento da situação desencadeadora de aprendizagem, o que acabou por contribuir com o planejamento. A P1 como já dito anteriormente era a professora de física das duas turmas, e já havia desenvolvido uma revisão de potência e suas propriedades e notação cientifica com os estudantes. Também foi ela que conduziu a construção do sismógrafo que mede a intensidade da magnitude do terremoto, e para tanto os alunos levaram vários materiais para montar em sala. A fala da P1 revela a motivação e empenho dos alunos na construção, logo o motivo deles tornou-se eficaz, e entraram em atividade.

> P1: Eles estão construindo, mas também estão na dificuldade, uma coisa é você olhar uma construção [...]. Vai uma caixa de papel, e o papel você puxa, coloca as pedrinha no copo, mas é difícil de fazer, porque daí o elástico que arrebenta, daí não suporta o peso, aí tem umas meninas que estão fazendo com uma madeira MDF, aí fizeram uma base, daí a base não deu, eles tem que serrar, na semana passada eles levaram serra furadeira, tudo pra dentro da sala (E17, V2, 19:09).
> PO1: Da onde eles tiraram isso? Eles levaram de casa? (E17, V2, 20:37).
> P1: De casa, levaram de ônibus (E17, V2, 20:45).
> PO2: Eles gostam desse tipo de coisa!! (E17, V2, 21:08).
> P1: Mas, é trabalhoso, não está sendo fácil, já foram duas aulas dedicadas a isso, pedi que continuassem em casa, agora com a ajuda dos pais (E17, V2, 21:11).

A P1 explicou para o grupo a forma que será produzido o abalo sísmico (terremoto) e como o sismógrafo registra (mede) a intensidade desse abalo. A partir dessa medida que está em logaritmo, que a PO3 modelou para a função exponencial, pode-se calcular a intensidade (magnitude) do terremoto.

A organização das aulas foi distribuída em: 3 aulas de potenciação (propriedades e notação cientifica), 1 aula de História (contando a história do terremoto), 3 aulas de Física (construção do sismógrafo, com 6 equipes para cada turma), 3 aulas no laboratório de Física (3 vídeos de 2 minutos cada um sobre terremoto e sobre os conceitos físicos, logo após, foram realizadas perguntas sobre quais os conceitos físicos, como funciona? Realizada a captação dos dados do sismógrafo para o cálculo da velocidade média, energia), e três aulas de matemática (cada aula uma ação, logo com três ações de ensino).

A P8 apresentou como a aula de História, planejada, além disso, expôs as escalas de Mercalli e Richter, também comentou dos efeitos possíveis dos terremotos. No estudo do subgrupo verificou-se que o terremoto tem qualidade e quantidades, por exemplo, a relação do Movimento das ondas com os efeitos provocados em determinado lugar, admite graus de intensidade e, portanto, admite uma quantidade que não é numérica mas descreve os efeitos causados nas pessoas, podendo ser medidas através da escala Mercalli. Também pode ser considerada a relação entre as ondas e a força com que atinge a superfície, que admitem variação conforme a quantidade, chamada Magnitude e que pode ser medida pela escala Richter.

A PO3 explicita que as aulas de matemática foram separadas em 3 ações de ensino. Todas as ações deveriam ser resolvidas em grupo, de no máximo 6 integrantes, mantendo os integrantes já previamente definidos na confecção dos protótipos de sismógrafo. Numa turma haviam seis grupos e na outra sete grupos. A PO3 comenta que a primeira dúvida que surgiu no subgrupo foi:

> PO3: A fórmula que calcula o terremoto está em logaritmo, como vamos fazer para trabalhar com exponencial? A solução foi trabalhar com a formula do cálculo de magnitude e usamos as propriedades e transformamos numa exponencial (E17, V2, 19:58).

O professor de matemática do colégio já havia explicado função exponencial para as turmas, então os professores do subgrupo criam ações, usando os conhecimentos adquiridos na pesquisa em grupo, o qual verificaram na história a relação da função exponencial com a PA (progressão aritmética) e a PG (progressão geométrica), conforme fala da professora a seguir:

> PO3: Aquilo que nós já vimos naqueles textos, que o desenvolvimento da exponencial e logaritmo surgiu lá a partir da relação entre PA e PG. Então aqui o primeiro exercício é determinar o valor do f(x) para uma sequência de PA e verificar que os f(x)s formam uma PG, feita a relação entre PA e PG para uma função exponencial (E17, V2, 20:30).

Nesse momento verificou-se que o subgrupo em seus estudos, conseguiu encontrar no movimento histórico e lógico o nexo interno ou a essência da função exponencial que é a PA e a PG, que explica o conceito dessa função. O subgrupo criou uma situação usando a PA e PG, conforme Anexo B.

Na ação 2 os exercícios criados pelo subgrupo tiveram como objetivo que os estudantes compreendessem que a função exponencial não tem um comportamento linear. Desta forma, conhecendo a escala Richter se esperava que os estudantes fossem capazes de identificar que um terremoto de magnitude 4 é potencialmente 10 vezes mais intenso do que um terremoto de magnitude 3.

Na ação 3 o grupo criou exercícios para que os estudantes calculassem a magnitude através dos dados coletados nas aulas de física e o cálculo da energia liberada para alguns sismos apresentados.

Após esta aula na semana seguinte foi organizada uma visita ao Parque da Ciência Newton Freire Maia, localizado na cidade de Pinhais/PR. Os estudantes tiveram a oportunidade de visitar os pavilhões do parque e compreender, de forma lúdica, vários conhecimentos já estudados nas aulas de Física, Geografia e Biologia.

Nos encontros finais, todos os integrantes da OPM colaboraram na correção dos relatórios das ações do subgrupo amarelo com os estudantes.

Após essa análise é possível compreender que a AOE como base teórico-metodológica ajudou os professores a organizar o ensino de funções exponenciais, e que o movimento de planejamento e replanejamento de suas ações exigiram dos professores muito estudo, desde o movimento histórico e das necessidades humanas de se estudar essa função, com as operações de colocá-las em prática na sala de aula. Conforme relatado esse grupo conseguiu compreender a essência da função exponencial com os seus nexos internos PA e PG (indicadores dessa pesquisa), e em planejar executar em ações aos alunos. A situação do cotidiano escolhida o “Terremoto e uma função”, motivou tanto os alunos como os professores em apropriar desse conceito científico, tornando um motivo eficaz, indo além das aparências, de apenas substituir valores na Lei de formação desta função.

7.3.3 Organização das ações do subgrupo verde

O subgrupo verde também recebeu no 5° encontro da OPM, uma pasta que serviu de portfólio, com o segundo questionário (Apêndice B) que serviu como guia orientador para a organização dos trabalhos do subgrupo, junto com os artigos e documentos da função exponencial fornecidos pelo pesquisador.

O subgrupo iniciou o seu estudo pelo movimento histórico da função exponencial, a AL3 se debruçou nos artigos para a consulta sobre o conceito da história dessa função. O restante do grupo (P4, P2, PO2) discutiu a respeito da expressão matemática da potência, algumas definições, e o porquê todo número elevado a zero é igual a um ($a^0 = 1$). Chegaram a quatro tipos de resposta, duas através de propriedades da potência de mesma base, por sequência e por logaritmo. E por fim selecionaram algumas aplicações em artigos e dissertações pesquisadas, como resfriamento de corpos utilizando as funções exponenciais. Nesse momento os integrantes deste subgrupo estavam em atividade, considerando a necessidade do professor que é a de ensinar o conhecimento científico, nesse caso as funções exponenciais, e reconhecendo o motivo e a necessidade dos estudantes em apropriar-se do conceito de funções exponenciais.

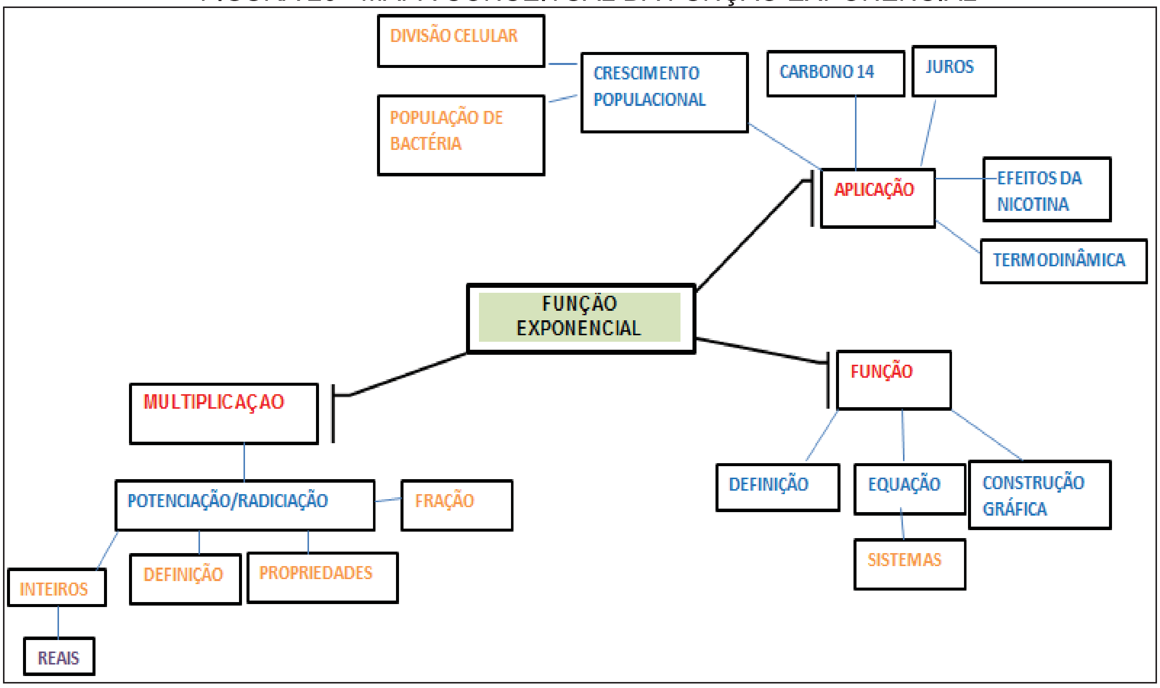
No encontro seguinte os membros pesquisaram qual seria a situação desencadeadora de aprendizagem e em consenso geral optaram por uma situação do cotidiano do aluno, que fosse um tema impactante, como por exemplo: o álcool (no organismo), o cigarro (nicotina), em que fosse usado a função exponencial. A PO2 sugeriu uma experiência já realizada por uma professora de uma universidade com a utilização de termômetros e que envolvia o conceito de logaritmos. Assim ficou definido o desenvolvimento da situação desencadeadora “Uma função e uma xícara de chá”.

Como o subgrupo amarelo os motivos são eficazes, pois o motivo coincide com o objetivo. As ações dos integrantes deste subgrupo foram: Estudo do movimento histórico e lógico das funções exponenciais; estudo dos conceitos envolvidos nas medições da temperatura da xícara de chá, planejamento de ações para os estudantes que permitam apropriação de conceito das funções exponenciais.

As operações desse subgrupo também são associadas às suas ações, tais como: pesquisa em sites da internet, livros, artigos científicos, dissertações de mestrado sobre o movimento histórico e lógico do conceito de função exponencial; identificação de material necessário para a medição da temperatura da xícara do chá, como termômetro; confecção do relatório para o desenvolvimento da experiência do chá; elaboração de lista de exercício.

O subgrupo retomou as suas atividades no 9° encontro, os mesmos definiram a turma e o colégio que seria aplicado a situação desencadeadora de ensino no segundo semestre e montou o seu mapa conceitual da função exponencial, conforme a Figura 26.

FIGURA 26 - MAPA CONCEITUAL DA FUNÇÃO EXPONENCIAL



FONTE: Subgrupo verde (2016)

O subgrupo verde apresentou para o grupo no décimo segundo encontro a situação desencadeadora escolhida, a “Uma função exponencial e uma xícara de chá”, que envolve o resfriamento do chá e que usa o conceito de função exponencial. Esta situação envolve a obtenção de medidas do resfriamento do chá ou água a cada 10 minutos com o uso do termômetro digital. Em seguida a produção de um gráfico pelos estudantes e a verificação da curva exponencial.

Também foi apresentado nos slides do grupo o movimento histórico da função exponencial, e os registros de documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de matemática (BRASIL, 2000) e Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR) (PARANÁ, 2008) de matemática, mapa conceitual (Figura 26) e cronograma de aulas (Anexo C) na escola.

Conforme já citado no item 7.3.2, no primeiro encontro após as férias aconteceu uma reorganização dos subgrupos devido as desistências de alguns participantes. Logo após~~,~~ o subgrupo se reuniu e apresentou para a P11 (nova integrante do grupo) o movimento da situação desencadeadora de aprendizagem planejada no 1° semestre registrando também o termo de autorização de imagem do aluno (Anexo A) e a escolha e análise de situações de ensino de livros didáticos a serem aplicados no final da situação desencadeadora de aprendizagem. Foi definido que a situação desencadeadora seria desenvolvida no mês de setembro nas quatro turmas do segundo do ano do ensino médio da professora P2.

Continuando as ações desse subgrupo foram selecionadas as 5 situações de aprendizagem escolhidas nos livros didáticos e pela internet, com o foco no conceito de função exponencial, a serem aplicadas como avaliação da situação desencadeadora de aprendizagem.

O subgrupo também realizou a sua apresentação da situação desencadeadora de aprendizagem ao grupo, como estava sendo organizada, então os participantes P, PO2, P2, AP2 mostraram as suas ações para implementar essa atividade em turma do 2° ano do colégio escolhido pelo grupo. Eles planejaram em cinco aulas, da seguinte forma: 1ª e 2ª aulas destinadas a experiência das medições da temperatura (pelo termômetro) da xícara a cada 10 minutos pelos alunos, que no caso da escola não será de chá, mas sim, de água, por questões práticas, cabendo aos estudantes anotar em uma tabela o tempo (hora e minuto) e a temperatura (°C). Na 3ª aula os alunos utilizarão os dados da tabela preenchida da experiência das aulas anteriores para esboçar o gráfico dessa função, e pesquisarão qual função o gráfico pertence. Já na 4° deverão realizar a leitura e discussão da lenda de beber o chá pelos chineses. A partir da 5ª e 6ª aulas os alunos resolveram cinco situações de ensino escolhidas pela o subgrupo, na discussão os professores (P9 e PO2) comentaram que foram selecionados exercícios de livro didático, alguns sobre o conceito de função e outros que usam a técnica da função exponencial, conforme fala:

> PO2: E outros são contextualizados, que trabalha também conceito, a gente olhou, aquele que era só de fazer conta, de você trabalhar tecnicamente pra função e outros que iam trabalhar com o conceito, que é a função, como que ela trabalha, isso ia precisar pro exercício (E17, V2, 26:11).
> PO2: E também aplicações em várias áreas, ali tem bastante de física e química (E17, V2, 26:54).

A PO1 sugeriu que o subgrupo criasse um exercício que tivesse relação com a situação do chá, e os professores também reconheceram a necessidade de escolher situações que tem contextualização e aplicação mais próximo do cotidiano do aluno, como pode-se verificar no diálogo abaixo:

> PO1: Vocês não fizeram exercícios, por exemplo: exercício parecido com a ideia do chá, sabe [...] (E17, V1, 27:04).
> P2: Mas, tem ali dos átomos, elemento radiativo (E17, V1, 27:12).
> PO1: Não mudando o assunto, mantendo o assunto da temperatura do chá, e tudo mais, fazer os exercícios com o mesmo assunto (E17, V1, 27:19).
> PO2: Pra que eles façam a conexão da experiência para cá? (E17, V1, 27:38).
> PO1: A partir da experiência, assim a ideia tudo bem eles vão saber. E se não fizerem? [...] aí eu acho, a gente destaca o valor da situação, por exemplo faz um exercício como o aspecto técnico, mas que ele esteja diretamente ligado a essa questão do chá, porque daí você monta a função, daí você cria um exercício assim [...]. Pensando na diminuição da temperatura do chá e com tal construa o gráfico para os valores, tais, tais, e você se saí. E depois, esse outro que vocês tem que é outro assunto, é outro tema, mais é o mesmo problema, da função e valores (E17, V1, 27:45).
> P2: Esses exercícios 1 e 2 eu tenho certeza que eles não vão conseguir fazer (E17, V1, 29:49).
> PO1: Mas, então, é por isso antes de entrar no primeiro e segundo exercícios, não faz sentido, você vai ter que explicar o primeiro e o segundo exercícios porque não serviu pra os estudantes a situação anterior, daí é que eles façam articulado com a situação anterior. Se mexer no enunciado do primeiro e do segundo exercício, mas articulando com a situação do chá, verifique se assim eles fazem [...]. E aí foi quatro exercícios, uma coisa é uma articulada com a situação do chá, porque se não é isso, você faz a situação do chá, aí você explica eles fazem ali, aí você passa outra situação e eles não fizeram a relação, porque essa é uma relação que a gente tem que ensinar a ser feita, também [...]. E perdeu o sentindo da situação, é você que vai ter que explicar de novo isso aqui. Aproveita a situação (E17, V2, 0:00).
> P2: Temos que rever os exercícios (E17, V2, 01:10).

Os participantes deste subgrupo combinaram em montar a lei de formação da situação desencadeadora do chá nos próximos encontros. O subgrupo também apresentou o relatório a ser entregue aos estudos, conforme Anexo C.

Nos três encontros seguintes o subgrupo verde realizou ajustes nos planos de aulas a serem desenvolvidos no colégio.

Nos meses de outubro e novembro o subgrupo não conseguiu aplicar a situação no colégio devido ocupação dos alunos[21] dentro dessa instituição contra a renovação do ensino médio. Por esse motivo o subgrupo se reuniu para ajudar nas correções das atividades do subgrupo amarelo.

Com a dificuldade de aplicar a atividade no colégio escolhido, devido a ocupação por secundaristas, optou-se em mudar para um outro colégio (Colégio Estadual Desembargador Guilherme Albuquerque Maranhão) e por este motivo o subgrupo precisou ajustar os planos.

Nos dois encontros seguintes o subgrupo analisou e discutiu os resultados da experiência, do gráfico, da história e dos exercícios aplicados na turma do 2° ano.

Após análise da organização desse subgrupo, observou-se que AOE também ajudou os professores na organização do ensino de funções exponenciais. A situação desencadeadora de aprendizagem escolhida, "Uma função e uma xícara de chá", talvez por estar previamente pronta, não motivou tanto os professores quanto a do outro subgrupo, mas mesmo assim, o subgrupo conseguiu realizá-la. As operações foram de experiências de medições de temperatura no passar do tempo, do resfriamento do chá, os alunos gostaram, e para eles os motivos foram eficazes, por ser algo novo e com sentido. Os professores descreveram no item dos sentidos atribuídos a transformação de sua prática profissional, sendo observado que o estudo aprofundado da história aliado a formação técnica, pode melhorar o ensino de função exponencial. A organização em situações desencadeadoras de aprendizagem permite que sejam superadas as aparências, e fazem que tanto alunos e professores se apropriem do conceito matemático, o primeiro para aprender e o segundo para ensinar.

[21]Ocupação nas escolas e universidades realizadas por alunos do ensino médio e universitários, que queriam pressionar o governo a retirar a proposta de reforma do ensino médio, feita pelo governo federal por meio de medida provisória. Eles contestavam, principalmente, a ampliação das escolas de tempo integral e a flexibilização das matérias. Além disso, alguns estudantes protestam também contra a PEC 241, aprovada na Câmara dos Deputados, que impõe limites aos gastos públicos. Ocorrido no ano de 2016. FONTE: Jornal Gazeta do Povo, site: http://www.gazetadopovo.com.br/educacao/tudo-sobre-a-greve-e-a-ocupacao-nas-escolas-do-parana-b6t39taw4sm8yw0yq4l8q379u, data: 27/04/2018.

7.3.4 Análise das situações na OPM (com indicadores)

Para atingir o objetivo desta pesquisa, serão analisadas as situações desencadeadoras de aprendizagem organizadas pelos dois subgrupos a partir dos indicadores selecionados anteriormente.

7.3.4.1 Subgrupo amarelo

O plano completo desta situação está no Anexo B, destacando que somente serão analisadas nessa dissertação as ações relacionadas à matemática, embora tenham ocorrido ações integradas nas disciplinas de geografia, física e história. A situação desencadeadora de aprendizagem do Terremoto foi organizada em 3 ações, que serão analisadas segundo os indicadores, pesquisados nessa dissertação.

A 1ª ação usou o “Nexo Interno: PA e PG” (indicador), onde foi “dada” (indicador) a lei de formação da função exponencial e uma sequência em PA, fazendo a relação entre elas. Também os estudantes fizeram o “uso de tabela” (indicador) (Figura 27), observando que estavam em PG, e usando as propriedades da potência.

FIGURA 27- SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM – QUESTÃO 1

Considere a função $f(x) = 10^x$ e a progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ de razão 0,1, onde $a_1 = 0$.

1) que $10^{0,1} = 1,26$, usando as propriedades das potências, construa uma tabela com os valores dessa função para $x \in \{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$.

FONTE: Adaptada de subgrupo amarelo (2016)

Ainda no item 2 (Figura 28) da 1ª ação foi pedido para o estudante esboçar uma “representação em linguagem gráfica” (indicador) dessa função em uma escala. Por usar escala este item se enquadra no indicador de “Conexão com outros conceitos matemáticos”.

FIGURA 28 - CONEXÃO COM OUTROS CONCEITOS

2) Esboce o gráfico dessa função. Sugerimos que utilize, para o eixo da variável x, a escala 10:1.

FONTE: Adaptada de subgrupo verde (2016)

Na 2ª ação em seu item 1, foi necessário o “uso de tabelas” (indicador) para responder as perguntas subsequentes, que usaram as propriedades de potência (indicador: Conexão com outros conteúdos matemáticos), conforme Figura 29, são exercícios que elucidam a função exponencial, e fazem “desencadear o conceito” (indicador) dessa função.

A última ação n° 3 foi usada para calcular a magnitude de alguns sismos, fora “dada” (indicador) a lei de formação da função exponencial item 1, bem como a lei de formação da função exponencial para calcular a energia liberada por alguns sismos, conforme Figura 29.

FIGURA 29 - SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Ação de Ensino 3

1) Conforme observamos nas aulas de História, Geografia e Física, os sismos são medidos por aparelhos denominados sismógrafos. A escala mais conhecida para determinar a intensidade de um terremoto é a escala Richter. Uma das fórmulas utilizadas é a seguinte:

$10^M = \frac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62}$, onde:

M é a magnitude do terremoto;

A é a amplitude (em milímetros) das ondas sísmicas secundárias;

Δt é o tempo, em segundo, desde o início das ondas primárias até à chegada das ondas secundárias.

No quadro abaixo são apresentados os dados coletados de alguns sismos. Calcule a magnitude de cada um deles, utilizando arredondamentos á primeira casa decimal.

Sismos\dados	A	Δt	Δt^3	$\frac{A \cdot \Delta t^3}{1,62}$	M
1	23mm	24s			
2	12mm	24s			

2) A energia liberada por um sismo é calculada pela fórmula E = $E_0 \cdot 10^{\frac{3}{2}M}$, onde E₀ = $7 \cdot 10^{-3}$Kwh e M é a magnitude do sismo na escala Richter.

a) Calcule a energia sísmica liberada para os seguintes terremotos que ocorreram no Brasil (apresentados na aula de História).

Local	Magnitude	$\frac{3}{2}M$	$10^{\frac{3}{2}M}$	E = $E_0 \cdot 10^{\frac{3}{2}M}$
Mato Grosso (1955)	6,6			
Rio Grande do Norte (1980)	5,1			
Itacarambi (2007)	4,9			

FONTE: Adaptada de subgrupo verde (2016)

Conforme a análise realizada usando os indicadores, completamos a Tabela 5 da seguinte forma:

TABELA 5 - SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM "TERREMOTO E UMA FUNÇÃO" COM ANÁLISE DOS INDICADORES

	Nexos Externos										
Contextualização	Representação em linguagem gráfica	Uso de tabelas	Lei de Formação			Conceituação		Manipulação	Conexão com outros conceitos matemáticos	Nexos Internos	
			Dada	Intermediária	Criada	Desencadeia o conceito	Pressupõe que o conceito já foi aprendido		Quais?	PA e PG	Juros Compostos
X	X	X	X			X		X	Potência, Escalas, Arredondamento, Unidades de medida, PA e PG.	X	

FONTE: O autor (2018)

7.3.4.2 Subgrupo verde

O plano completo desta situação está no Anexo C Essa situação desencadeadora de aprendizagem apresenta uma “contextualização” (indicador) com uma situação do cotidiano do aluno, que é o da bebida chá, e verifica-se no texto que foi entregue na 4ª aula uma breve história sobre a arte de beber chá da antiga cultura Chinesa para os alunos (Anexo C).

Observa-se que o indicador “Representação em linguagem gráfica” que a situação de aprendizagem pede na 3ª aula para construir o gráfico da experiência da 1ª e 2ª aulas, e após a construção do gráfico os alunos pesquisaram qual função seria o traço do gráfico. Desta forma é pelo gráfico que os alunos chegaram no conceito de função exponencial, então pode-se também enquadrá-lo no indicador que “desencadeia o conceito”, considerando que potencialmente os estudantes podem se apropriar do conceito de variação exponencial, em função dos valores das medidas da temperatura, fazendo conexões, e embora não tenham a lei de formação simbolizada algebricamente conseguem compreender a variação e a relação da função exponencial.

Outro indicador analisado é o “uso de tabelas” que consta no Relatório de Experiência – Investigações com temperatura da 1ª e 2ª aulas, onde os alunos mediram as temperaturas de resfriamento do chá a cada 10 minutos, podendo observar o decrescimento da temperatura da água, conforme Figura 30 abaixo.

FIGURA 30 - 1ª e 2ª AULAS – EXPERIÊNCIA – INVESTIGAÇÕES COM TEMPERATURA

1) Organize as medições numa tabela, como a sugerida abaixo. Acrescente quantas linhas forem necessárias.

Horário	Tempo	Temperatura da água	Temperatura ambiente
__ : __	0 minutos	___°C	___°C
__ : __	10 minutos	___°C	___°C
__ : __	20 minutos	___°C	___°C
__ : __	30 minutos	___°C	___°C
__ : __	40 minutos	___°C	___°C
__ : __	50 minutos	___°C	___°C
__ : __	60 minutos	___°C	___°C
__ : __	70 minutos	___°C	___°C
__ : __	80 minutos	___°C	___°C
__ : __	90 minutos	___°C	___°C
__ : __	100 minutos	___°C	___°C
__ : __	110 minutos	___°C	___°C
__ : __	120 minutos	___°C	___°C

Referência:

Math Across Cultures de Maurice Bazin e Modesto Tamez, Exploratorium Teacher Institute.

FONTE: Adaptada de ESTEPHAN (2015)

Já para a 5ª e 6ª aulas os professores selecionaram 5 exercícios de aplicação, que não tinham relação com a situação desencadeadora planejada. Para responderem esses exercícios os alunos já deveriam ter trabalhado com a lei de formação da função exponencial. As questões incluíram manipulação, uso da lei de formação dada, representação em linguagem gráfica entre outros elementos conforme análise a seguir:

A primeira questão (Figura 31) é de "manipulação" (indicador) de simples substituição e após a resolução de equação e função exponencial. Além de ser "dada" (indicador) a função exponencial em cada item da questão. Nesta questão também "pressupõem que o conceito já foi aprendido" (indicador).

FIGURA 31 - SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM – 1° QUESTÃO

1) Dadas as funções $f(x) = 2^{x^2-4}$ e $g(x) = 4^{x^2-2x}$, se *x* satisfaz $f(x) = g(x)$, então 2^x é:

a) $1/4$
b) 1
c) 8

FONTE: Adaptada de subgrupo verde (2016)

Na segunda questão (Figura 32) as funções são "dadas" (indicador), essa questão pode ser resolvida através do "uso de tabelas" (indicador) e depois pode ser construída um esboço da "representação em linguagem gráfica" de cada função dada, fazendo com que o estudante possa "desencadear o conceito" de função exponencial.

FIGURA 32 - SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM – 2° QUESTÃO

2) Faça um esboço de cada gráfico das funções exponenciais a seguir:

a) $f(x) = 5^x$

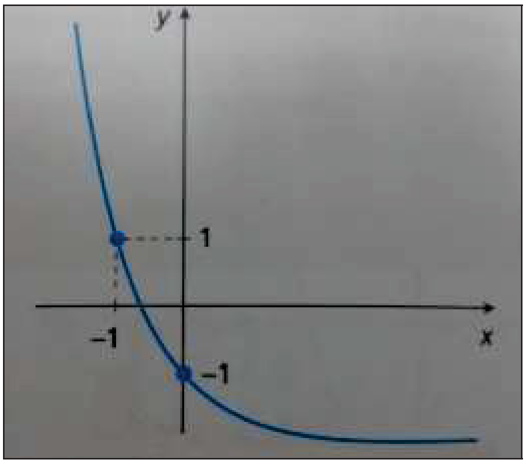
b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

FONTE: Adaptada de subgrupo verde (2016)

Analisando a terceira questão (Figura 33) é “dada” (indicador) a lei de formação, observa-se que o estudante tem que entender qual é o significado de a e b na lei de formação. Também é fornecido a “Representação em linguagem gráfica” (indicador) da função f, para que aluno possa retirar os dados necessário para resolver os valores de a e de b. Para resolver essa questão deve-se “pressupor que o conceito já foi aprendido” (indicador) pelo estudante.

FIGURA 33 - SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM – 3° QUESTÃO

3) Observar o gráfico da função *f* , dada por $f(x) = a.3^{-x} + b$, e determinar os valores de *a* e *b*.



FONTE: Adaptada de subgrupo verde (2016)

A 4ª questão (Figura 34) faz uma “contextualização” (indicador) com a química, o estudante tem que “criar” (indicador) à sua própria lei de formação da função exponencial para responder o item b, e após substituir o valor de 12 horas no termo (h) para calcular a quantidade desse antibiótico no corpo (mg), respondendo assim o item a. Está questão “desencadeia ao conceito” (indicador).

FIGURA 34 - SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM – 4° QUESTÃO

4) Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico Axetilcefuroxina apresenta meia vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo? a) Após 12 horas de sua ingestão? b) Após t horas de sua ingestão?

FONTE: Adaptada de subgrupo verde (2016)

A última questão n° 5 (Figura 35) tem o “Nexo Interno: Juros Compostos” (indicador), embora ela seja considerada “intermediária” (indicador), podendo o estudante montar a sua lei de formação de juros já é conhecida, logo “pressupõe que o conceito já foi aprendido (indicador) pelo estudante.

FIGURA 35 - SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM – 5° QUESTÃO

5) A quantia de R$ 20.000,00 foi aplicada a uma taxa de 1% ao mês. Qual será o saldo no final de 3 meses?

FONTE: Adaptada de subgrupo verde (2016)

Conforme a análise realizada usando os indicadores, completamos a Tabela 6 da seguinte forma:

TABELA 6 - SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM “UMA FUNÇÃO E UMA XÍCARA DE CHÁ” COM ANÁLISE DOS INDICADORES

Nexos Externos											
Contextualização	Representação em linguagem gráfica	Uso de tabelas	Lei de Formação			Conceituação		Manipulação	Conexão com outros conceitos matemáticos	Nexos Internos	
			Dada	Intermediária	Criada	Desencadeia o conceito	Pressupõe que o conceito já foi aprendido		Quais?	PA e PG	Juros Compostos
X	X	X	X		X		X	X			

FONTE: O autor (2018)

Portanto, após as análises das situações desencadeadoras de aprendizagem, pode-se concluir que na do “Terremoto e uma função”, quando o ensino é organizado utilizando as Progressões Aritmética (PA) e Geométrica (PG), que nessa pesquisa foi considerado como nexo interno da função exponencial, os professores conseguiram ensinar aos seus alunos com maior segurança e com qualidade, dando sentido com a situação do cotidiano, vencendo assim a barreira da aparência. Já a de “Uma função e uma xícara de chá”, não usou nenhum dos nexos, mas os professores conseguiram desenvolver e entusiasmar os seus alunos, por ser uma situação do seu cotidiano, o que não deixa de ser uma possibilidade de ensino com maior significado aos alunos e professores.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após um trabalho intenso e investigativo, chegou-se a algumas respostas a respeito do objetivo da pesquisa: “Analisar as situações de ensino da função exponencial considerando o seu movimento histórico e lógico”.

Na primeira análise das leituras sobre o ensino de funções exponenciais, pode se destacar na fala dos pesquisadores a dificuldade dos estudantes em se apropriar deste conteúdo sendo considerado que esse problema pode estar relacionado à forma com que o seu ensino/aprendizagem está organizado. Para tanto, Silva (2014) propôs um ensino por meio de atividades, usando a metodologia da engenharia didática, já Pereira (2015) e Matos (2014) organizaram o ensino de funções exponenciais em aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento. Os documentos curriculares como o PCNEM (BRASIL, 2000) e DCE-PR (PARANÁ, 2008) de matemática, ressaltam a identificação e o reconhecimento da função exponencial pela sua ‘aparência’, ou seja, formas de representar e descrever graficamente essa função, sem levar o estudante à apropriação do conceito científico, o que se entende nessa dissertação como uma característica do pensamento empírico.

No movimento da pesquisa foi estudado o movimento histórico e lógico da função exponencial, o que possibilitou o reconhecimento de nexos internos conceituais: a aplicação em juros compostos e o reconhecimento da função exponencial associada a relação entre os expoentes em Progressão Aritmética e os resultados de potências em Progressão Geométrica. Os documentos oficiais (DCE-PR e PCNEM) estimulam que os professores utilizem esses nexos em seu plano de trabalho docente.

A pesquisa prossegue com a análise das situações de ensino dos livros didáticos aprovados no PNLD-2015, de Dante (2014) e Iezzi (2013). Encontra-se um excessivo número de situações de ensino que envolve a substituição de valores numéricos nas variáveis das funções exponenciais, com o estabelecimento da lei da função a partir de valores previamente organizados. Cabe ressaltar que o livro de Dante (2015, p. 165) acrescenta em relação a edições anteriores, uma seção que faz conexão da função exponencial com as progressões aritméticas e geométricas, o que foi reconhecido nesta dissertação como nexo interno da função exponencial. No livro de Iezzi et al. (2013, p. 223-

224) somente faz a ligação da função exponencial com a progressão geométrica. Com o estudo dos nexos conceituais da função exponencial dentro do movimento histórico e lógico, observou-se que apareceram nos livros didáticos pesquisados, o nexo interno de juros compostos como situação problema introdutório do conceito da função de logaritmos, desvalorizando a parte histórica da necessidade do homem de acumular riqueza, conforme é explicado no estudo do movimento histórico item 4.3.

O nexo interno de PA e PG apareceu nos livros em seção a parte do conceito de função exponencial ou logarítmica, somente como parte do algoritmo, sem relacionar com a história, como foi abordado no item 4.2 desta dissertação, e quando citada a história, só é contada em leituras complementares, como "A invenção dos logaritmos" em Iezzi (2013, p. 164) e "Logaritmos e funções logarítmicas" em Dante (2014, p. 198), sem fazer relação com a PA e PG nesses textos.

Reconhecendo as dificuldades em aprofundar o estudo conceitual e dos nexos internos da função exponencial, procurou-se ainda durante a pesquisa reconhecer elementos para responder à pergunta "De que modo a situação desencadeadora de aprendizagem possibilita ou cria condições para superar as aparências de outras situações no ensino de função exponencial, para que o aluno se aproprie do conceito de forma teórica?"

Para tanto, considerou-se necessário analisar as situações desencadeadoras de ensino desenvolvidas nas reuniões da Oficina Pedagógica de Matemática (OPM – UTFPR) com intuito de compreender as possíveis transformações na organização do ensino pelos professores e no sentido atribuído à função exponencial.

As descrições iniciais dos áudios dos encontros das oficinas revelaram mudanças na compreensão dos professores sobre o sentindo atribuído à função exponencial e seu ensino. Para alguns professores é possível registrar transformações em relação à análise de situações de ensino de função exponencial, através dos oito indicadores propostos, procurando evidenciar o quanto há de apropriação do movimento histórico da função exponencial.

Futuras pesquisas podem analisar o real aprendizado do aluno com o movimento histórico e lógico da função exponencial, com os seus nexos internos PA e PG, usando as situações desencadeadoras de aprendizagem, principalmente a estudada nessa dissertação a situação do cotidiano do terremoto. Bem como planejar e executar uma situação desencadeadora de aprendizagem com o outro nexo interno Juros Compostos, analisando o aprendizado do aluno.

Mediante as análises, foi possível observar que quando o professor está em atividade, e as suas necessidades estão atreladas ao objetivo, o planejamento da situação de ensino deixa de responder a um motivo compreensível, de simplesmente escolher uma situação de aprendizagem de um livro didático, e passa a ser um motivo eficaz, que tem sentido.

O professor começa a se conscientizar da necessidade de pesquisar o conceito, desde a sua história (movimento histórico e lógico) buscando a sua essência (nexos) para que o mesmo compreenda e o faça sentido. Nesse movimento dos professores planejarem e pesquisarem coletivamente e em atividade de ensino potencializa a sua própria formação.

O próprio pesquisador se transformou neste movimento tornando-se mais consciente de seu próprio processo de organização do ensino, considerando que tem recorrido aos indicadores para analisar criticamente as situações de ensino antes de escolhe-las. Além disso, ao planejar suas aulas, sempre estuda o movimento histórico e lógico do conceito procurando reconhecer a essência e os nexos internos e externos do conceito que será objeto de ensino.

Assim, considera-se que essa pesquisa revela a importância de analisar as situações de aprendizagem apresentadas, observando os indicadores e demais resultados apresentados nesse trabalho. A organização do ensino pelo professor, não é uma tarefa fácil, e tem como variáveis a necessidade da turma e os conceitos a serem estudados e para superar as ‘aparências’ de um processo de pensamento empírico são necessárias a pesquisa e o planejamento adequado de situações desencadeadoras de aprendizagem, visando a formação do pensamento teórico dos estudantes. Assim, espera-se que essa dissertação possa contribuir com elementos para o movimento de formação e atividade do professor.

Ensinar para além das aparências é possível, e envolve organização do ensino, através de pesquisa sobre a essência do conceito, ou seja, os seus nexos internos em seu movimento histórico e lógico. E com a possibilidade da criação de atividades desencadeadoras de ensino, que são situações de ensino que se aproximam do cotidiano do aluno, portanto, os professores conseguem ensinar com maior propriedade e qualidade, e os estudantes se apropriam do conceito de forma consciente e com sentido.

REFERÊNCIAS

ALMOULD, S. A. **As transformações: do saber científico ao saber ensinado: o caso logaritmo**, Educar em Revista. Curitiba, n. 1, p. 191-210, 2011.

AVILA, G. Números muito grandes. **Revista do Professor de Matemática**, n. 25, Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/26/1.htm>. Acesso em: 27 mai. 2018.

AVILA, G. Sistema de Logaritmos. **Revista do Professor de Matemática**, n. 26, Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/26/1.htm>. Acesso em: 27 mai. 2018.

BONGIOVANNI, V. Perigos da Profissão. **Revista do Professor de Matemática**, n. 26, Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/26/4.htm>. Acesso em: 27 mai. 2018.

BOYER, C. B. **A História da Matemática.** Tradução de: GOMIDE, E. F. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 1996. Título original: A History of Mathematics.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. MEC. 2000, p. 43-44. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2017.

BRAZ, A. F. S; FIGUEIREDO, A. P. N. B. Atividades contextualizadas para o ensino da função exponencial: **IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Minas Gerais, 2007.

BRAZ, R. A. F. S. **Uma proposta de utilização de material manipulativo no aprendizado da função exponencial.** 2007. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ciência) - Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2007.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006. p. 17-18.

DANTE, L. R. **Matemática:** contextos & aplicações. 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2014.

DAVÍDOV, V. V. **Tipos de generalización em La enseñanza.** Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

______. Analisis de los princípios didacticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza em el futuro proximo. In: DAVÍDOV, V. V. **La psicologia evolutiva y pedagogica em la URSS**. Antología. Editorial Progresso. Moscú, 1987.

______. **La enseñanza escolar y el desarollo psíquico**. Moscou: Progreso, 1988.

DIAS, A. L. M. Controvérsias na história da matemática: A definição de Logaritmo. In: **ANPUH- XXIII Simpósio Nacional de História**, Londrina-PR, 2005.

DUARTE, N. Concepções afirmativas e negativas sobre o ato de ensinar. **Caderno CEDES.** Campinas, v. 19, n. 44, p. 85-106, 1998.

EISERMANN, J. I.; KNY, J. M; SILVA, M. S.; NUNES, C. M. C; FUCHS, M. J. Ensino da Função Exponencial explorando uma abordagem lúdica: **IV Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica**, Santo Ângelo, 2007.

ESTEPHAN, V. M. **Relatório sobre Investigações com temperatura:** Logaritmo. Curitiba: UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Departamento Acadêmico de Matemática, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de: DOMINGUES, H. H. Campinas: Editora da Unicamp, 1995. Título original: na introduction to the history of mathematics.

FRAGA, M. A. **Significação do ângulo: indícios do conceito em atividades de localização**. 2016. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

FRAENKEL, R. Logaritmos um curso alternativo. **Revista do Professor de Matemática**, n. 04, Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/4/5.htm>. Acesso em: 27 mai. 2018.

FREDERICO, P. R. **Logaritmos Murifici Logarithmorum as aeter num Maravilhosos Logaritmos pra sempre.** 2008. 64 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Setor de Pós-graduação da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, Criciúma-SC, 2008.

FREITAS, R. L.; ALMOULD, S. A. **Representações sobre função exponencial**, Rev. Prod. Disc. Educ. Mat. SP., v. 3, n. 2, p. 137-153, 2014.

HOGBEN L. **Maravilhas da Matemática:** Influências e Função da Matemática nos conhecimentos humanos. Tradução de: SILVA, P. M. Porto Alegre: Livraria do Globo, 1946.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática:** ciências e aplicações. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

IFRAH, G. **Os Números:** a história de uma grande invenção. Tradução de: SENRA, S. M. F. 7. ed. São Paulo: Globo, 1994. Título original: Leschiffres ou l'histoire d'une grande invention.

KARRER, M. **Logaritmos proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora.** 1999. 227 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

KARRER, M.; MAGINA, S. **Uma sequência de Ensino para a Introdução de Logaritmo: Estudo exploratório usando a calculadora**, Bolema, Rio Claro, v. 13, n. 14, 2000.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento.** Tradução de: BEZERRA, P. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LAUAND, L. J. **Educação, teatro e matemática medievais.** 2. ed. São Paulo: Editora Perspectiva S.A., 1986.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia, personalidad**. 2. ed. Havana: Pueblo y Educación, 1983.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L.S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução de: VILLA LOBOS, M. P. São Paulo: Ícone Editora Ltda, 1994.

LIBÂNEO, J. C. A Aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. **Educar, Curitiba**, n. 24, p. 113-147, 2004. Editora UFPR.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. **Vygotsky, Leontiev, Davydov:** três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática. Eixo temático 3. Cultura e práticas escolares. SBHE - IV Congresso Brasileiro de História da Educação, UCG, 05 a 08 nov 2006.

LIMA, E. L. Sobre a evolução de algumas idéias matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 18, Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/18/6.htm>. Acesso em: 27 mai. 2018.

LIMA, E. L. Sistema de Logaritmos. **Revista do Professor de Matemática**, n. 06, Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/6/1.htm>. Acesso em: 27 mai. 2018.

LIMA, E. L. Conceituação, Manipulação e Aplicações. **Revista do Professor de Matemática**, n. 41, p. 1-6, 1999.

LUTCHEMEYER, R. R.; SCHEFER, N. F. Objetos de aprendizagem e o conceito de logaritmos. In: **II CNEM – Congresso Nacional de Educação Matemática e IX EREM – Encontro Regional de Educação Matemática,** Ijuí-RS, 2011.

MACHADO, B. B. L.; SILVA, M. C.; COSTA, A. C.O logaritmo dos livros didáticos: Uma análise segundo Yves Chevallard. In: **IIX Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo, 2016.

MADRID, A. **Potenciação**: um pouco de história e rimas. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAA9HEAG/potenciacao-pouco-historia-rimas> Acesso em: 28 fev. 2017.

MANDEL, S. Crescimento exponencial? O que é isso? **Revista do Professor de Matemática – SBM – Sociedade Brasileira de Matemática**, São Paulo, n. 62, 1° Quadrimestre, p. 08-11, 2007.

MAOR, E. **e:** A história de um número. Tradução de: CALIFE, J. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. Título original: e: The Story of a number.

MATOS, P. M. **Funções Exponenciais e Logarítmicas.** 2014. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática – INMA/UFMS, Campo Grande, 2014.

MERICHELLI, M. A. J; ALLEVATO, N. S. G. Trabalho de Graduação (Disciplina Tema Final). In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, 2010.

MONTEIRO, M. A. A matemática e o Índice de Desenvolvimento Humano - IDH. **Revista do Professor de Matemática**, n. 67, Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/6/1.htm>. Acesso em: 27 mai. 2018.

MORAES, S. P. G. **Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática:** contribuições da teoria histórico-cultural. 2008. 261 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

MORETTI, V. D; MOURA, M. O, Professores de matemática em atividade de ensino: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 17, n. 2, 2011, p. 435-450.

MORETTI, V. D. O problema lógico-histórico: Aprendizagem conceitual e formação de professores de matemática. **Poiésis - Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação - Unisul**, Tubarão, n. especial, Jan/Jun, 2014, p. 29-44.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, São Paulo, ano II, n. 12, p. 29-43. 1996.

MOURA, M. O. A atividade pedagógica na tória histórico-cultural. In: ROSA, J. E.; MORAES, S. P. G.; CEDRO, W. L. **A Formação do Pensamento Teórico em uma Atividade de Ensino de Matemática.** Brasília: Liber livro, 2010, p. 135-153.

______. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Orgs.). **Ensinar a ensinar.** São Paulo: Pioneira, p. 143-162. 2001.

MOURA, M. O.; MORETTI, V. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, v. 9, n.1, p. 67-87. 2003.

MOURA, M. O.; ARAÚJO, E.; MORETTI, PANOSSIAN, M.; RIBEIRO, F. **Atividade Orientadora de Ensino**: unidade entre ensino e aprendizagem, Rev. Diálogo Educ. Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

MOURA, M. O.; SFORNI, M.; ARAÚJO, E. Objetivação e apropriação de conhecimentos na atividade orientadora de ensino**. Teoria e Prática da Educação**, v. 14, n. 1, p. 39-50, jan./abr. 2011.

OLIVEIRA, F. D. **Análise de Textos Didáticos:** Três Estudos**.** 2008*.* 222 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, SP, 2008.

OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P. Marcos históricos no desenvolvimento do conceito de potência. **Educação e Matemática**. Centro de Investigação em Educação Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, n. 52, p. 29-34, mar./abr. 1999.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky aprendizado e desenvolvimento:** um processo sócio-histórico. 7. ed. São Paulo: Editora Scipione, 1997.

OLIVEIRA, M. N. A; FILHO, D. C. M. Análise de Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio. In: **Colóquio de Matemática da Região Nordeste**, III**,** Manaus: Universidade Federal do Amazonas, 2014.

PALAZZESI, A. **El Papiro de Rhind, Matemática Antigua.** Disponível em: <http://www.neoteo.com/el-papiro-de-rhind-matematica-antigua/> Acesso em: 28 fev. 2017.

PANOSSIAN, M. L.; **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes:** indicadores para a organização do ensino. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PANOSSIAN, M. L. Um modelo para análise do processo de generalização algébrica, In: ______. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino de álgebra**. 2014. 317 f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2014. cap. 5, p. 180-227.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**, SEED/PR, 2008.

PEREIRA, J. G. A. **Abordagem das funções exponencial e logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no Ensino Médio.** 2010. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. PUC-MG, Belo Horizonte, 2010.

PEREIRA, H. E. A. **A função exponencial natural e aplicações.** 2015. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). UFC, Juazeiro do Norte, 2015.

PINHEIRO, M. B. O.; SANTANA, F. T. Contextualização Histórica e Aplicações de Logaritmos e Exponenciais. In: **III Encontro Regional em Educação Matemática.** Diálogo de Educação Matemática e outros Saberes, Mossoró, 2011.

RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. **Erros na Resolução de Inequações: consequências de dificuldades relativas a conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio**, Acta Scientiae, v. 6, n. 3, p. 457-471, set/dez, 2014.

REZENDE, W. M.; SILVA, M. H.M. **Análise histórica do conceito de função**. Caderno Dá Licença, Niterói, v. 2, p. 16-24, 1999.

REZENDE, W. M. BOTELHO, L. M. L. **Um Breve Histórico do Conceito de Função**. Caderno Dá Licença, v. 6, p. 63-76, 2007

QUADROS, C.; BISOGNIN, V. **Ensino de Aritmética no Rio Grande do Sul: A contribuição de Luiz Schuler, 1904**, Acta Scientiae, v. 17, n. 4, p. 24-40, Edição Especial, 2015.

QUINTANILHA, R. B. **A proposta de ensino de logaritmos em livros didáticos atuais de matemática.** 28 f. Relatório Final (Disciplina Pesquisa de Iniciação Científica) – Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Departamento de Metodologia de Ensino, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2005.

ROONEY, A. **A História da Matemática**: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. Tradução de: FECCHIO, M. São Paulo: M. Books do Brasil Editoras Ltda, 2012. Título original: The Story of Mathematics – From creating the pyramids to exploring infinity.

SANTOS, C. C.; LIMA, D. S. Logaritmo ao longo da história. In: **VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática**, Brasília-DF, 2014.

SFORNI, M. S. F. Os conceitos científicos na formação do pensamento teórico In: SFORNI, M. Aprendizagem conceitual e organização do ensino: contribuições da teoria da atividade. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática.** Araquara: JM Editora, 2004. 1ª edição, p. 73-113.

SILVA, S. T. T. **O Ensino das Funções Exponenciais e Logarítmica por atividades**. 2014. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará. Belém, 2014.

SILVA, R. J. A. **Contexto e Aplicações das Funções Exponenciais no Ensino Médio: Uma Abordagem Interdisciplinar.** 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, RJ, 2015.

SILVA, A. L.; PALLU, F.; PANOSSIAN, M. L.; SCREINER, L. Skate de dedo e as relações trigonométricas no triângulo retângulo. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo, 2016.

SOUSA, M. C.**O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatadas de professores do ensino médio fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUSA, M. C.; MOURA, M. O. O movimento lógico-histórico em atividades de ensino de matemática: unidade dialética entre ensino e aprendizagem. In: **IIX Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo, 2016.

SOUZA, C. V. A Função exponencial no caderno do professor de 2008 da Secretaria do Estado de São Paulo, análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do ensino médio. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, 2010.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Tradução GUERREIRO, J. C. S., 2. ed. Lisboa: Gradiva,1992. Título original: A Concise History of Mathematics.

TRINDADE, J. A. O. Obstáculos epistemológicos à aprendizagem do conceito de função. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEDSUL, II, 1999, Curitiba. **Anais**... Curitiba: ANPEDSUL, 1999, p.2.

VASCONCELOS, K. W. C. **Logaritmos e suas Aplicações.** 41 f. Trabalho de Graduação (Disciplina Tema Final) – Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

VIDIGAL, C. E. L. **(Re)significado o conceito de logaritmo.**2014. 133 f. Dissertação (Mestrado em ciência e matemática) - Programa de Pós-Graduação de Ciências e Matemática – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2014.

VINNER, S.; DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 4, p. 356-366, 1989.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1984.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO 1

OPM – Oficinas Pedagógicas de Matemática
2016
FUNÇÃO EXPONENCIAL

Data: 16/03/16

Questões para discussão:

1) Qual a relevância de ensinar o conteúdo Função Exponencial no currículo do Ensino Médio? Esse conteúdo pode ser aplicado no cotidiano do aluno?

2) Quais são as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Função Exponencial?

3) Que recursos didáticos e/ou metodologia(s) você utiliza para ensinar Função Exponencial aos seus alunos?

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO 2

OPM – *Oficinas Pedagógicas de Matemática 2016*

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Subgrupo (Nomes):

____

____

Data: 27/04/2016

Questões:

1. Quais foram os motivos que levaram o ser humano a estudar o conceito de exponencial/potência no decorrer da história (movimento histórico e lógico)?
____
____
____
____

2. Na pesquisa do subgrupo quais foram às aplicações encontradas, e qual seria possível aplicar em sala de aula, justifique?
____
____
____
____

3. Qual foi a concepção do subgrupo em relação ao PCN e DCE de matemática com relação à função exponencial? Está de acordo com que o conceito pesquisado?
____
____
____
____

4. Qual foi o conceito mais adequado para a função exponencial, segundo a pesquisa realizada? O conceito pode ser complementado ou suprimido em algum aspecto da sua definição?
____
____
____

5. Sabendo que há “necessidade” de ensinar funções exponenciais (objeto de estudo), quais seriam as ações que poderiam ser realizadas para que o objeto de ensino se transforme em objeto de aprendizagem, tornando assim em “atividade” (união do teórico ao prático) significativa para o aluno.
____
____
____

ANEXO A – AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA (ÁUDIO/VÍDEO) NA OPM

Autorização para pesquisa

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (via do participante)

Concordo em participar, como voluntário(a), da pesquisa que tem como responsável a Professora Maria Lucia Panossian, do Departamento de Matemática (DAMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR-Curitiba) que pode ser contatada pelo e-mail ou pelo telefone (41)88768829 e como Professor Pesquisador o Mestrando Adnielson Lima da Silva da Universidade Federal do Paraná (UFPR-Curitiba) que pode ser contatado pelo e-mail adnielson@ufpr.org ou pelo telefone (41)99317837.

O presente trabalho vincula-se ao projeto de extensão Oficinas Pedagógicas de Matemática da UTFPR- Câmpus Curitiba. Estou ciente de que minha participação consistirá em participar das discussões e propostas desenvolvidas em aula na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR- Curitiba), cujos encontros serão gravados em áudio e vídeo. Compreendo que este estudo possui finalidade de pesquisa, que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, com a preservação do anonimato dos participantes, assegurando, assim minha privacidade. Sei que posso abandonar a minha participação na pesquisa quando quiser e que não receberei nenhum pagamento por esta participação.

______________________________	______________________________
NOME COMPLETO	**ASSINATURA (aluno)**

Se menor de idade: Nome e Assinatura do Responsável: ____

Curitiba,_______, _______________ de 2016

Autorização para pesquisa

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (via do participante)

Concordo em participar, como voluntário(a), da pesquisa que tem como responsável a Professora Maria Lucia Panossian, do Departamento de Matemática (DAMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR-Curitiba) que pode ser contatada pelo e-mail mlpanossian@utfpr.edu.br ou pelo telefone (41)88768829 e como Professor Pesquisador o Mestrando Adnielson Lima da Silva da Universidade Federal do Paraná (UFPR-Curitiba) que pode ser contatado pelo e-mail adnielson@ufpr.org ou pelo telefone (41)99317837.

O presente trabalho vincula-se ao projeto de extensão Oficinas Pedagógicas de Matemática da UTFPR- Câmpus Curitiba. Estou ciente de que minha participação consistirá em participar das discussões e propostas desenvolvidas em aula na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR- Curitiba), cujos encontros serão gravados em áudio e vídeo. Compreendo que este estudo possui finalidade de pesquisa, que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, com a preservação do anonimato dos participantes, assegurando, assim minha privacidade. Sei que posso abandonar a minha participação na pesquisa quando quiser e que não receberei nenhum pagamento por esta participação.

______________________________	______________________________
NOME COMPLETO	**ASSINATURA (aluno)**

Se menor de idade: Nome e Assinatura do Responsável: ____

Curitiba, _______, _______________ de 2016

ANEXO B – RELATÓRIO DA ATIVIDADE DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM "TERREMOTO E UMA FUNÇÃO"

Ação de Ensino 1

Considere a função $f(x) = 10^x$ e a progressão aritmética (a_1, a_2, ..., a_{10}) de razão 0,1, onde a_1=0.

1) Assumindo que $10^{0,1}$ = 1,26, usando as propriedades das potências, construa uma tabela com os valores dessa função para $x \in \{ a_1, a_2, ..., a_{10} \}$. Explicite a forma que as propriedades foram utilizadas. Utilize arredondamentos à segunda casa decimal.

2) Esboce o gráfico dessa função. Sugerimos que utilize, para o eixo da variável x, a escala 10:1.

3) Completa as lacunas. Qual é a regularidade que você observa na sequência ($f(a_1)$,...,$f(a_{10})$)?

$a_1 = 0$ e $f(a_1) =$ ____________	$a_6 = a_5 +$ ______ e $f(a_6) = f(a_5) \cdot$ ________
$a_2 = a_1 +$ ______ e $f(a_2) = f(a_1) \cdot$ ________	$a_7 = a_6 +$ ______ e $f(a_7) = f(a_6) \cdot$ ________
$a_3 = a_2 +$ ______ e $f(a_3) = f(a_2) \cdot$ ________	$a_8 = a_7 +$ ______ e $f(a_8) = f(a_7) \cdot$ ________
$a_4 = a_3 +$ ______ e $f(a_4) = f(a_3) \cdot$ ________	$a_9 = a_8 +$ ______ e $f(a_9) = f(a_8) \cdot$ ________
$a_5 = a_4 +$ ______ e $f(a_5) = f(a_4) \cdot$ ________	$a_{10} = a_9 +$ ______ e $f(a_{10}) = f(a_9) \cdot$ ________

4) Complete as lacunas e associe os valores da coluna da esquerda com os valores da coluna da direita por meio da relação de igualdade. Qual é a regularidade que você observa na relação de igualdade?

***(a)** $f(a_1 + a_2) =$ __________* ***(b)** $f(a_2 + a_5) =$ __________* ***(c)** $f(a_3 + a_5) =$ __________* ***(d)** $f(a_2 + a_8) =$ __________*	*( ) $f(a_3) \cdot f(a_5) =$ _________* *( ) $f(a_2) \cdot f(a_8) =$ _________* *( ) $f(a_1) \cdot f(a_2) =$ _________* *( ) $f(a_2) \cdot f(a_5) =$ _________*

Antes de aplicar estes exercícios, relembramos as propriedades de potenciação. Também, como os estudantes ainda não tinham estudado o conceito de progressão aritmética, apresentamos a sua definição.

Na segunda ação de ensino propusemos exercícios para que os estudantes compreendessem que a função exponencial não tem um comportamento linear. Conhecendo a escala Richter também se esperava que os estudantes fossem capazes de identificar que um terremoto de magnitude 5 é potencialmente 10 vezes mais intenso do que um terremoto de magnitude 4. Abaixo transcrevemos um dos exercícios da ação.

<u>Ação de Ensino 2</u>

1) Considere a função $f(x) = 10^x$, a partir dos dados obtidos na atividade anterior, usando a propriedade da função exponencial, complete o quadro abaixo, explicitando a forma que a propriedade foi utilizada e responda os seguintes itens:

X	**0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
f(x)										
X	**1**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**
f(x)										
X	**2**	**2,1**	**2,2**	**2,3**	**2,4**	**2,5**	**2,6**	**2,7**	**2,8**	**2,9**
f(x)										

a) Ao passa de x = 0 para x = 1, de quanto é o aumento de f(x)? Apresente os cálculos que justifiquem a sua resposta.

b) Ao passar de x = 0,1 para x = 1,1, de quanto é o aumento de f(x)? Apresente os cálculos que justifiquem a sua resposta.

c) Ao passar de x= 0,1 para 2,1, de quanto é o aumento de f(x)? Apresente os cálculos que justifiquem a sua resposta.

d) A cada ponto de aumento, ou seja, ao passar de x = a para x = a + 1, de quanto é o aumento de f(x)? Apresente os cálculos que justifiquem a sua resposta.

e) A cada dois pontos de aumento, ou seja, ao passar de x = a para x = a + 2, de quanto é o aumento de f(x)? Apresente os cálculos que justifiquem a sua resposta.

e) Escolha uma determinada coluna de valores para x, exceto a coluna do x = 0. O primeiro valor de x dessa coluna é a_1 = ____. A sequência de valores de x da coluna escolhida forma uma progressão ____________ de razão _____. Ao olharmos para a sequência de valores de f dessa mesma coluna, essa sequência forma uma progressão ______________ de razão ______. Dessa forma o valor de $f(a_4)$ = ______________ e $f(a_6)$ = ______________________.

f) Complete a lacuna:

f(____) = 1590	**f(____) = 3170**	**f(____) = 63500**	**f(____)=5040000**

Assim como ocorreu na primeira ação de ensino, aqui iniciamos a ação relembrando as propriedades identificadas na atividade anterior, ou seja, as propriedades identificadas nos exercícios 3 e 4. Destaca-se que os estudantes não tiveram dificuldades em resolver o item f, considerando que já haviam preenchido a tabela do exercício 1. Neste sentido mesmo sem a calculadora os estudantes foram capazes de identificar o expoente da função exponencial.

Na terceira ação de ensino propusemos exercícios para que os estudantes calculassem a magnitude e a energia liberada para alguns sismos descritos. Abaixo transcrevemos dois dos exercícios da ação.

<u>Ação de Ensino 3</u>

1) Conforme observamos nas aulas de História, Geografia e Física, os sismos são medidos por aparelhos denominados sismógrafos. A escala mais conhecida para determinar a intensidade de um terremoto é a escala Richter. Uma das fórmulas utilizadas é a seguinte:

$10^M = \frac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62}$, onde:

M é a magnitude do terremoto;

A é a amplitude (em milímetros) das ondas sísmicas secundárias;

Δt é o tempo, em segundo, desde o início das ondas primárias até à chegada das ondas secundárias.

No quadro abaixo são apresentados os dados coletados de alguns sismos. Calcule a magnitude de cada um deles, utilizando arredondamentos a primeira casa decimal.

Sismos\dados	**A**	Δt	Δt^3	$\frac{A \cdot \Delta t^3}{1,62}$	**M**
1	**23mm**	**24s**			
2	**12mm**	**24s**			
3	**46mm**	**12s**			
4	**23mm**	**48s**			

2) A energia liberada por um sismo é calculada pela fórmula E = $E_0 \cdot 10^{\frac{3}{2}M}$, onde E_0 = $7 \cdot 10^{-3}$Kwh e M é a magnitude do sismo na escala Richter.

a) Calcule a energia sísmica liberada para os seguintes terremotos que ocorreram no Brasil (apresentados na aula de História).

Local	Magnitude	$\frac{3}{2}M$	$10^{\frac{3}{2}M}$	E = $E_0 \cdot 10^{\frac{3}{2}M}$
Mato Grosso (1955)	**6,6**			
Rio Grande do Norte (1980)	**5,1**			
Itacarambi (2007)	**4,9**			

b) Qual é a diferença mínima de energia sísmica liberada entre um terremoto classificado como ligeiro e outro classificado como forte?

	**Designação**	**Magnitude**
	Ligeiro	**4,0 – 4,9**
	Forte	**6,0 – 6,9**

Nesta ação restringimos o uso da calculadora apenas para calcular o valor das expressões $\triangle t^3$ e $\frac{A \cdot \triangle t^3}{1{,}62}$ do exercício 1, e para determinar o valor da magnitude M (exercício 1) e da energia sísmica liberada E (exercício 2a). Orientamos que os estudantes utilizassem a tabela construída na atividade da ação anterior, as propriedades da função exponencial que foram exploradas na ação de ensino 1 e as propriedades de potenciação.

ANEXO C – RELATÓRIO DA ATIVIDADE DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM “UMA FUNÇÃO E UMA XÍCARA DE CHÁ”

FIGURA 36 - 1ª e 2ª AULAS - EXPERIÊNCIA – INVESTIGAÇÕES COM TEMPERATURA

(continua)

COLÉGIO ESTADUAL DES. GUILHERME A. MARANHÃO	PRÁTICA OFICINA DE MATEMÁTICA UMA FUNÇÃO E UMA XÍCARA DE CHÁ 2ª SÉRIE ENSINO MÉDIO TURMA................... TURNO..................... PROF. Adnielson
Data:........./.........../2016 1ª e 2ª AULAS	Alunos (as): ....

EXPERIÊNCIA - Investigações com temperatura

Chá, exponencial e calculadora.

The cup on the left has a lid that can be shifted just enough for the tea-drinker to take a sip without uncovering the whole cup.

1) Despeje numa caneca de “louça” água fervente até que ela esteja cheia. Consiga um objeto, pode ser um prato, para tampar a xícara. Usando um termômetro de haste meça a temperatura da água da xícara de 10 em 10 minutos até completar a tabela a seguir (obs. O correto seria fazer as medições até que a temperatura da xícara fosse à mesma da temperatura ambiente, mas por motivo de tempo faremos até a hora do recreio). Marque a temperatura ambiente.

FONTE: Adaptada de ESTEPHAN (2015)

FIGURA 37 – 1ª e 2ª AULAS - EXPERIÊNCIA – INVESTIGAÇÕES COM TEMPERATURA
(conclusão)

1) Organize as medições numa tabela, como a sugerida abaixo. Acrescente quantas linhas forem necessárias.

Horário	Tempo	Temperatura da água	Temperatura ambiente
__ :__	0 minutos	___°C	___°C
__ :__	10 minutos	___°C	___°C
__ :__	20 minutos	___°C	___°C
__ :__	30 minutos	___°C	___°C
__ :__	40 minutos	___°C	___°C
__ :__	50 minutos	___°C	___°C
__ :__	60 minutos	___°C	___°C
__ :__	70 minutos	___°C	___°C
__ :__	80 minutos	___°C	___°C
__ :__	90 minutos	___°C	___°C
__ :__	100 minutos	___°C	___°C
__ :__	110 minutos	___°C	___°C
__ :__	120 minutos	___°C	___°C

Referência:

Math Across Cultures de Maurice Bazin e Modesto Tamez, Exploratorium Teacher Institute.

FONTE: Adaptada de ESTEPHAN (2015)

FIGURA 38 - 4ª AULA – A HISTÓRIA DO CHÁ

(continua)

COLÉGIO ESTADUAL DES. GUILHERME A. MARANHÃO	PRÁTICA OFICINA DE MATEMÁTICA UMA FUNÇÃO E UMA XÍCARA DE CHÁ 2ª SÉRIE ENSINO MÉDIO TURMA.................... TURNO....................... PROFª Adnielson
Data:........./.........../2016 4ª AULA	Alunos (as): ....

TEXTO – MOVIMENTO HISTÓRICO, TEÓRICO E RELAÇÕES COM A FÍSICA – CHÁ E UMA FUNÇÃO

Uma breve história sobre a arte de beber chá

Hoje é comum em quase toda parte, chás e porcelanas serem produtos da antiga cultura Chinesa. As origens do chá foram ditas ser encontradas 5.000 anos atrás quando uma rajada de vento levou o imperador chinês Shen Nong a experimentar a primeira xicara de chá.

Preocupado com a higiene e a saúde de seu pais, Shen Nong declarou que toda a água deve ser fervida antes de beber. Um dia, ao visitar uma parte distante do pais, ele parou para beber água. Os servos então começaram a ferver um pouco de água perto de um arbusto de chá. Um vento veio e soprou um pouco de folhas secas de chá dentro do pote de água, criando um liquido marrom e aromático.

O imperador, que a tradição diz ser um homem da ciência e experimentação, provou a água marrom pungente e declarou ser delicioso. Essa história, que é um conto tradicional oral, é mais um mito do que uma história, provavelmente paralelo (em algum grau) com a primeira xícara de chá criada.

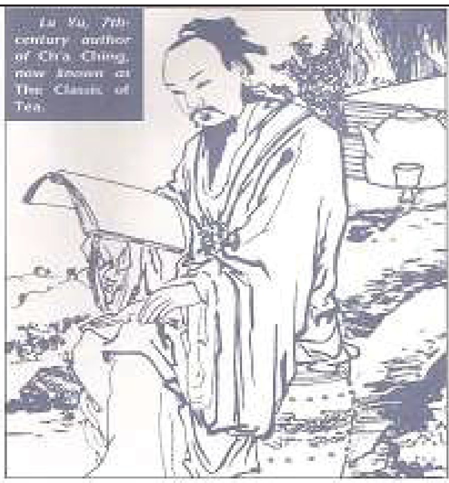
O primeiro registro do uso de chá foi em 50 a.C. no sul da China. O uso e a popularidade do chá espalharam-se rapidamente por toda a sociedade chinesa que no século VII, o auge da prosperidade da China, o chá era tão importante que foi o suficiente para justificar um livro dedicado ao seu uso. Lu Yu, um estudioso da Dinastia Tang do século VIII, escreveu um livro chamado Ch'a Ching, ou o clássico do chá (The Classic of tea), que elogiava os benefícios do chá, tanto medicinal como espiritual.

Lu Yu era órfão quando criança e foi recolhido por monges budistas em um dos melhores mosteiros da China. Em Ch'a Ching ele codificou os vários métodos de cultivação e preparação de chá conhecidos na China, usando suas habilidades de observação e memorização. O caráter definitivo de seu trabalho garantiu sua fama e renome, e nos seus últimos anos de vida foi apadrinhado pelo imperador.

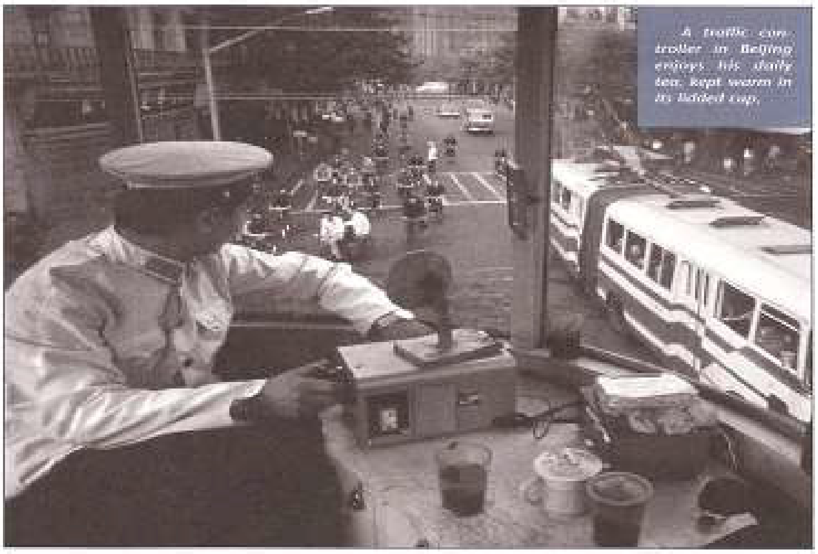
FONTE: Adaptada de ESTEPHAN (2015)

FIGURA 39 - 4ª AULA – A HISTÓRIA DO CHÁ

(continua)



Lu Yu, século 7, autor do Ch'a Ching, agora conhecido como O Clássico do Chá.



Um controlador de tráfego em Beijing apreciando seu chá diário, mantendo quente com a tampa.

A porcelana foi desenvolvida primeiramente na China no século III d.C., e havia abundância de desenhos de jazidas de petuntse (ou pedras chinesas) e kaolin (também chamado de argila de porcelana branca). A negociação das porcelanas chinesas em torno do mercado asiático cresceu extensivamente nos séculos seguintes. Quando atingiu o oeste no ano 851 d.C., as pessoas ficaram maravilhadas com a qualidade delicada e a translucidez da porcelana, pois a cerâmica europeia que existia na época era muito mais grossa, de barro opaco. Hoje as porcelanas ornamentadas são exportadas para o mundo e são usadas para tomar o seu chá diário.

Embora o uso de ambos, chá e porcelana, tenha sido espalhado para além dos territórios chineses centenas de anos atrás, as diferenças culturais na forma de servir e consumir o chá ainda permanece. Na maioria dos lugares fora da China, o chá solto é preparado em um bule de chá com tampa e depois servido em xícaras ou canecas sem tampa. Os chineses geralmente não usam bules, cada

FONTE: Adaptada de ESTEPHAN (2015)

FIGURA 40 - 4ª AULA – A HISTÓRIA DO CHÁ

(conclusão)

xícara contém um pouco de folhas de chá e a fermentação ocorre individualmente em cada xícara. Entre outros benefícios, isso permite que a pessoa escolha a força do sabor do chá que mais lhe agrada.

Na China, cada xícara de chá contém uma tampa com um botão no centro. A tampa é levantada e recolocada a cada vez que a pessoa toma um gole do chá. É uma prática cultural comum que a xícara de chá do convidado seja preenchida incessantemente para que não fique vazio pelo anfitrião. O nível de chá na xícara de uma pessoa raramente é permitido ser abaixo de uma polegada (2,54 cm) a partir do topo, mesmo durante várias horas de conversa.

Também, para que ocorra uma boa fermentação do chá, todas as folhas de chá devem estar "molhadas", isto é, elas devem afundar na água. As tampas das xícaras de chá chinesas impedem que a rápida evaporação da água escape, assim como as tampas dos bules ocidentais. O vapor da água que está contido no pequeno espaço entre a água e embaixo da tampa da xícara de chá ajuda a molhar as folhas que estão flutuando e isso garante uma boa fermentação.

Outra razão para o uso das xícaras com tampa vai ser o foco desta atividade. Os chineses, como muitas outras pessoas, gostam de tomar seu chá devagar e querem mantê-lo em uma boa temperatura pelo maior tempo possível. É raro na China as casas terem um sistema de aquecimento, por isso no inverno a temperatura de muitas casas chega à zero, e as xícaras com tampa estão na linha de frente para o combate contra chás frios.

FONTE: Adaptada de ESTEPHAN (2015)

FIGURA 41 - 5ª E 6ª AULAS – EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

(continua)

COLÉGIO ESTADUAL DES. GUILHERME A. MARANHÃO	**PRÁTICA OFICINA DE MATEMÁTICA** **UMA FUNÇÃO E UMA XÍCARA DE CHÁ** **2ª SÉRIE ENSINO MÉDIO** **TURMA....................** **TURNO.....................** **PROF. Adnielson**
Data:........./.........../2016 5ª E 6ª AULAS	Alunos (as): (DUPLAS) ….. ....

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dadas as funções $f(x) = 2^{x^2-4}$ e $g(x) = 4^{x^2-2x}$, se *x* satisfaz $f(x) = g(x)$, então 2^x é:

a) $1/4$

b) 1

c) 8

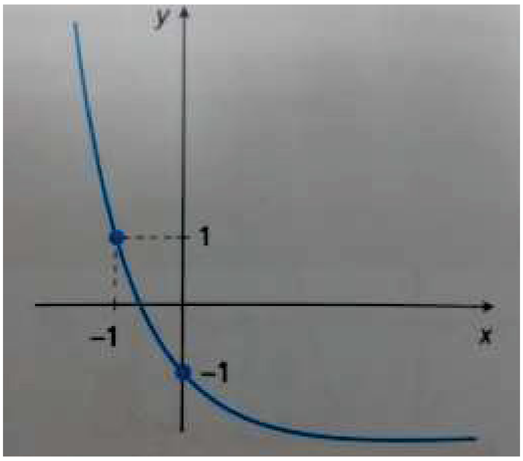
2) Faça um esboço de cada gráfico das funções exponenciais a seguir:

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

FONTE: O autor (2016)

3) Observar o gráfico da função f , dada por $f(x) = a.3^{-x} + b$, e determinar os valores de a e b.



4) Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico Axetil cefuroxina apresenta meia vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo?

a) Após 12 horas de sua ingestão?

b) Após t horas de sua ingestão?

5) A quantia de R$ 20.000,00 foi aplicada a uma taxa de 1% ao mês. Qual será o saldo no final de 3 meses?

FONTE: O autor (2016)

ANEXO D – SITUAÇÕES DE ENSINO PESQUISADAS

22. Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.

a) Faça uma tabela para representar a população de bactérias nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 1 hora, 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas.

b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (n) em função de tempo (t).

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 1

27. Seja *f* a função dada pela lei $f(x) = 10^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e considere *a* e *b* números reais quaisquer. Assinale V ou F nas afirmações seguintes corrigindo as falsas:

a) $f(2a) = 2 \cdot f(a)$

b) $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$

c) $f(a) = f(-a)$

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 2

23. Em uma região litorânea, a população de uma espécie de algas tem crescido de modo que a área da superfície coberta por elas aumenta 75% a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior. Atualmente, a área da superfície coberta pelas algas é de, aproximadamente, 4000 m². Suponha que esse crescimento seja mantido.

Edson Grandisoli/ Pulsar Imagens

a) Faça uma tabela para representar a área coberta pelas algas daqui a um, dois, três, quatro e cinco anos, contados a partir desta data.

b) Qual é a lei da função que representa a área (y), em m², que a população de algas ocupará daqui a *x* anos?

c) Esboce o gráfico da função obtida no item b).

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 3

25. Um conjunto de sofás foi comprado por R$ 2000,00. Com o tempo, por descuido do comprador, o sol foi queimando o tecido do sofá, que perdeu a cor original. Um comerciante do ramo informou ao comprador que em uma situação desse tipo, a cada ano o sofá perde 10% do valor que tinha no ano anterior.

DirectPhoto/Grupo Keystone

a) Faça uma tabela para representar o valor do sofá depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.

b) Sabendo que o comprador se informou com o comerciante 7 anos depois da compra, que valor o sofá teria nesta data, segundo o comerciante?

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor (y), em reais, do conjunto de sofás e o tempo *t*, expresso em anos após a sua aquisição?

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 4

26. Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após *t* semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar *p* unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona *p* e *t* é: $p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$ (leia o texto da seção *Aplicações*, página 150).

a) Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?

b) Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use a aproximação $e^{0,2} = 1,2$.

c) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 5

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 149)

44. A população de peixes em um lago está diminuindo devido à contaminação da água por resíduos industriais.

Thinkstock/Getty Images

A lei $n(t) = 5000 - 10 \cdot 2^{t-1}$ fornece uma estimativa do número de espécies vivas ($n(t)$) em função do número de anos (t) transcorridos após a instalação do parque industrial na região.

a) Estime a quantidade de peixes que viviam no lago no ano da instalação do parque industrial.

b) Algum tempo após as indústrias começarem a operar, constatou-se que havia no lago menos de 4 920 peixes. Para que valores de *t* vale essa condição?

c) Uma ONG divulgou que, se nenhuma providência for tomada, em uma década (a partir do início das operações) não haverá mais peixes no lago. Tal afirmação procede?

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 6

45. A lei seguinte permite estimar a depreciação de um equipamento industrial:

$$v(t) = 5000 \cdot 4^{-0,02t}$$

em que $v(t)$ é o valor (em reais) do equipamento *t* anos após sua aquisição.

a) Por qual valor esse equipamento foi adquirido?

b) Para que valores de *t* o equipamento vale menos que R$ 2500,00?

c) Faça um esboço do gráfico da função que relaciona *v* e *t*.

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 7

38. Na lei $n(t) = 15000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+k}$, em que *k* é uma constante real, $n(t)$ representa a população que um pequeno município terá daqui a *t* anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de 10 000 habitantes, determine:

a) o valor de *k*;

b) a população do município daqui a 3 anos.

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 8

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 153, 159)

32. Uma maionese mal conservada causou mal-estar nos frequentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei:

$$n(t) = 200 \cdot 2^{at},$$

em que n(t) é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese *t* horas após o início do almoço e *a* é uma constante real.

a) Determine o número de bactérias no instante em que foi servido o almoço.

b) Sabendo que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era de 800, determine o valor da constante *a*.

c) Determine o número de bactérias após 12 horas da realização do almoço.

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 9

33. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $10^x \cdot 10^{x+2} = 1000$

b) $2^{4x+1} \cdot 8^{-x+3} = \frac{1}{16}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} : 25^{2+x} = 5$

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-1} \cdot 27^{1-x} = 3^{2x+7}$

e) $(\sqrt{6})^x : \left(\sqrt[3]{36}\right)^{x-1} = 1$

f) $\left(\sqrt{10}\right)^x \cdot (0{,}01)^{4x-1} = \frac{1}{1000}$

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 10

34. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} = 20$

b) $5^{x+3} - 5^{x+2} - 11 \cdot 5^x = 89$

c) $4^{x+1} + 4^{x+2} - 4^{x-1} - 4^{x-2} = 315$

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = \frac{15}{2}$

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 11

37. As leis seguintes representam as estimativas de valores (em milhares de reais) de dois apartamentos A e B (adquiridos na mesma data), decorridos *t* anos da data da compra:

apartamento A: $v = 2^{t+1} + 120$

apartamento B: $v = 6 \cdot 2^{t-1} + 248$

a) Por quais valores foram adquiridos os apartamentos A e B, respectivamente?

b) Passados quatro anos da compra, qual deles estará valendo mais?

c) Qual é o tempo necessário (a partir da data de aquisição) para que ambos tenham iguais valores?

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 12

39. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $\frac{100^x - 1}{10^x + 1} = 9$

b) $25^x - 23 \cdot 5^x = 50$

c) $49^x - 42 = 7^x$

d) $4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$

e) $0{,}25^{1-x} + 0{,}5^{-x-2} - 5 \cdot (0{,}5)^{1-x} = 28$

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 13

38. Na lei $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+k}$, em que *k* é uma constante real, n(t) representa a população que um pequeno município terá daqui a *t* anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de 10 000 habitantes, determine:

a) o valor de *k*;

b) a população do município daqui a 3 anos.

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 14

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 153, 159)

42. A lei seguinte representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo *t*, em anos (t = 0, 1, 2, ...), de existência da empresa:

$f(t) = 400 + 50 \cdot \log_4 (t + 2)$

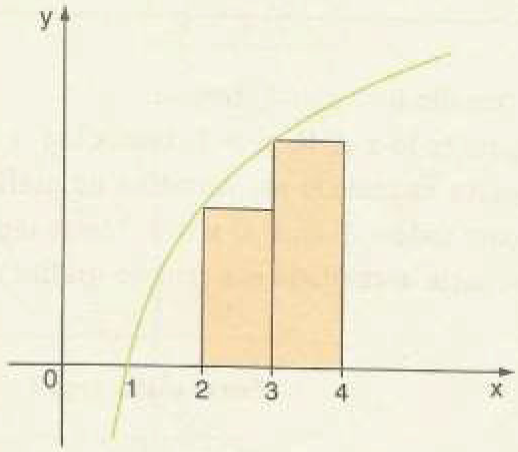
a) Quantos funcionários a empresa possuía na sua fundação?

b) Quantos funcionários foram incorporados à empresa do 2º ao 6º ano? (Admita que nenhum funcionário tenha saído.)

c) Calcule a taxa média de variação do número de funcionários da empresa do 6º ao 14º ano.

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 15

43. O gráfico abaixo representa a função *f* de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, dada por: $y = \log_2 x$.



Qual é o valor da área colorida?

Considere as aproximações log 2 = 0,3 e log 3 = 0,48.

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 16

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 180)

51. A instalação de radares para controle da velocidade dos veículos em grandes avenidas de uma cidade proporcionou uma diminuição do número de acidentes. Esse número pode ser calculado pela lei: $n(t) = n(0) \cdot 0{,}8^t$, sendo n(0) o número de acidentes anuais registrado no ano da instalação dos radares e n(t) o número de acidentes anuais *t* anos depois. Qual é o tempo necessário para que o número de acidentes se reduza à quarta parte da quantidade registrada no ano da instalação dos radares? (Use a aproximação: $\log 2 = 0{,}3$.)

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 17

48. A expressão seguinte relaciona o valor *v*, em reais, que um objeto de arte terá *t* anos após a sua aquisição:

$$v(t) = 500 \cdot 2^{kt} \quad (k \text{ é uma constante positiva})$$

a) Sabendo que o valor do objeto, após três anos de sua aquisição, é de R$ 2 000,00, determine o valor de *k*.

b) Por qual valor esse objeto de arte foi adquirido?

c) Qual é o número mínimo inteiro de anos necessário para que o valor do objeto seja de R$ 5 000,00?

(Use a aproximação: $\log 2 = 0{,}301$.)

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 18

46. No exemplo de introdução da função logarítmica (página 173), vamos admitir que Cássio tenha colocado R$ 500,00 em tal poupança especial. Como vimos, após *n* meses, o saldo (y) dessa poupança será dado por: $y = 500 \cdot (1{,}01)^n$.

a) Que valor terá Cássio após meio ano?

b) Qual é o tempo mínimo necessário que Cássio deve manter o dinheiro aplicado a fim de resgatar R$ 800,00? (Use as aproximações: $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 1{,}01 = 0{,}004$.)

SITUAÇÃO DE ENSINO Nº 19

FONTE: IEZZI et al. (2013, p. 183)

Resolvido passo a passo

11. (Uneb-BA) A expressão $P(t) = K \cdot 2^{0,05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t, em anos. Se em 1990 essa cidade tinha 300 000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano 2000?

a) 352 000 c) 423 000 e) 441 000

b) 401 000 d) 439 000

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada uma função exponencial que relaciona o número esperado de habitantes da cidade com o ano: $P(t) = K \cdot 2^{0,05t}$. Também é dada a população da cidade em 1990: 300 mil habitantes.

b) O que se pede?

O número esperado de habitantes na cidade citada no ano 2000.

2. Planejando a solução

A função dada relaciona a população esperada da cidade com o ano. Entretanto, a função não é inteiramente conhecida, pois existe uma constante K que precisaremos determinar para conhecer a função e depois obter a população no ano 2000. Para obter a constante K, usaremos um dado conhecido: em 1990 a população era de 300 mil habitantes. Então, uma primeira estratégia a ser seguida pode ser: 1º) obter K usando os dados conhecidos de 1990; 2º) substituir o valor de K na função para conhecê-la; 3º) usar a função para estimar a população da cidade em 2000.

3. Executando o que foi planejado

Se em 1990 a população era de 300 mil habitantes, temos $P(1990) = 300\,000$. Então:

$300\,000 = K \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \Rightarrow 300\,000 = K \cdot 2^{99,5} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \dfrac{300\,000}{2^{99,5}}$

Não há necessidade de desenvolver melhor o valor de K, uma vez que seu valor está sendo determinado apenas para que a função exponencial seja conhecida completamente. Vamos substituí-lo na função:

$P(t) = \dfrac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05t}$

Com a função completamente determinada, podemos agora obter $P(2\,000)$, que é a população esperada no ano 2000.

$P(2\,000) = \dfrac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05 \cdot 2\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2\,000) = \dfrac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{100}$

Neste momento, observe a ocorrência de uma das propriedades da potenciação – divisão de potências de mesma base:

$$\frac{2^{100}}{2^{99,5}} = 2^{100-99,5} = 2^{0,5}$$

Assim, temos $P(2\,000) = 300\,000 \cdot 2^{0,5}$.

Atenção: Lembre-se de que potências com expoentes racionais são raízes: $2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Agora, temos $P(2\,000) = 300\,000 \cdot \sqrt{2}$.

Estimando $\sqrt{2}$ como o decimal 1,41, temos:

$P(2\,000) = 300\,000 \cdot 1,41 = 423\,000$

Então, em 2000, espera-se que a população seja, aproximadamente, de 423 000 habitantes.

4. Verificando

Vamos resolver essa questão de outra maneira:

$P(1\,990) = K \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \Rightarrow P(1\,990) = K \cdot 2^{99,5} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \dfrac{P(1990)}{2^{99,5}}$

$P(2\,000) = K \cdot 2^{0,05 \cdot 2\,000} \Rightarrow P(2\,000) = K \cdot 2^{100}$

Substituindo K na expressão anterior, temos:

$P(2\,000) = \dfrac{P(1990)}{2^{99,5}} \cdot 2^{100} = 300\,000 \cdot \dfrac{2^{100}}{2^{99,5}} =$

$= 300\,000 \cdot 2^{0,5} = 300\,000\sqrt{2} = 300\,000 \cdot 1,41 =$

$= 423\,000$

Isso confirma o resultado obtido.

5. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **c**.

6. Ampliando o problema

a) Qual é a população esperada para essa cidade em 2010? E em 2030?

b) Interprete o que está ocorrendo com a população dessa cidade de 20 em 20 anos, ou seja, de 1990 a 2010, de 2010 a 2030. Isso parece algo razoável em termos reais?

c) *Discussão em equipe*

Converse com seus colegas sobre o crescimento populacional e como isso pode afetar a vida dos moradores de uma cidade. O que pode ocorrer se uma cidade tiver um grande aumento populacional em um curto intervalo de tempo? Pensem nos pontos positivos e nos negativos. Que medidas podem ser tomadas pelas autoridades para evitar que a qualidade de vida dos cidadãos seja afetada pelo crescimento populacional?

d) *Pesquise*

Qual é a maior cidade do planeta em termos de população (apenas área urbana, sem contar a região metropolitana)? Onde fica? Quantos habitantes tem?

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 20

DANTE (2014, p. 171)

2º) (FMJ-SP) O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1\,200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38 400 bactérias?

$N(t) = 1\,200 \cdot 2^{0,4t} \Rightarrow N(t) = 38\,400$

Igualando, temos:

$$1\,200 \cdot 2^{0,4t} = 38\,400 \Rightarrow 2^{0,4t} = \frac{38\,400}{1\,200} \Rightarrow 2^{0,4t} = 32 \Rightarrow 2^{0,4t} = 2^5 \Rightarrow 0,4t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{0,4} = 12,5 \text{ h ou } 12 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Portanto, a cultura terá 38 400 bactérias após 12 h 30 min.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 21

ATIVIDADE EM DUPLA A expressão $M = C(1 + i)^n$ nos permite calcular o montante M, resultante da aplicação do capital C a juros compostos, à taxa anual i, ao completar um período de n anos. Nessas condições, se o capital de R$ 800 000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R$ 700 000,00?

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 22

54. *Química*

A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiações. A medida de tempo na qual metade da quantidade do material radioativo se desintegra é denominada meia-vida ou período de semidesintegração (P). A cada período de tempo P a quantidade de material radioativo cai à metade da anterior, sendo possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo com a quantidade inicial por meio de uma função exponencial: $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$, em que N_0 é a quantidade inicial do material radioativo, t é o tempo decorrido e P é o valor da meia-vida do material radioativo considerado. A radioatividade faz parte de nossa vida, como quando se faz uma tomografia. Um dos isótopos mais usados nos radiofármacos injetados nos pacientes submetidos à tomografia é o carbono 11, cuja meia-vida é de 20 minutos. O tempo necessário, em minutos, para que uma amostra de carbono 11 se reduza a $\frac{1}{4}$ do que era quando foi obtida é:

a) 5.
b) 10.
c) 20.
d) 40.
e) 80.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 23

DANTE (2014, p. 172, 186)

29. Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$, determine:

a) $f(0)$;

b) $f(3)$;

c) $f(-1)$;

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

e) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

f) m tal que $f(m) = 1$.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 24

55. DESAFIO *Química*

O carbono 14 é um isótopo raro do carbono presente em todos os seres vivos. Com a morte, o nível de C14 no corpo começa a decair. Como é um isótopo radioativo de meia-vida de 5 730 anos, e como é relativamente fácil saber o nível original de C14 no corpo dos seres vivos, a medição da atividade de C14 em um fóssil é uma técnica muito utilizada para datações arqueológicas. A atividade radioativa do C14 decai com o tempo pós-morte segundo a função exponencial $A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$, em que A_0 é a atividade natural do C14 no organismo vivo e t é o tempo decorrido em anos após a morte. Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório para ter sua idade estimada. Verificou-se que emitia 7 radiações de C14 por grama/hora. Sabendo que o animal vivo emite 896 radiações por grama por hora, então a idade aproximada desse fóssil, em anos, seria:

a) 400 mil anos.
b) 200 mil anos.
c) 80 mil anos.
d) 40 mil anos.
e) 20 mil anos.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 25

56. *Biologia*

Em uma certa cultura, há 1000 bactérias em determinado instante. Após 10 min, existem 4 000. Quantas bactérias existirão em 1 h, sabendo que elas aumentam segundo a fórmula $P = P_0 \cdot e^{kt}$, em que P é o número de bactérias, t é o tempo em horas e k é uma constante?

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 26

DANTE (2014, p. 152, 172)

58. *Química*

Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:

a) após 12 horas de sua ingestão?

b) após t horas de sua ingestão?

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 27

59. *Biologia*

O modelo Jenss-Bayley é uma fórmula usada para avaliar a altura de uma criança em idade pré-escolar. Se $h(x)$ denota a altura (em centímetros) na idade x (em anos) para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$, então $h(x)$ pode ser aproximado por $h(x) = 79{,}041 + 6{,}39x - e^{3{,}261 - 0{,}993x}$. A partir dessa expressão, temos que a taxa de crescimento $v(x)$ (em cm/ano) de uma criança na mesma faixa de idade é dada por $v(x) = 6{,}39 + 0{,}993 \cdot e^{3{,}261 - 0{,}993x}$. (Considere a aproximação $e^{2{,}268} = 9{,}7$.) Com base no exposto, quais seriam a altura e a taxa de variação de crescimento de uma criança quando esta atingisse a idade de 1 ano?

x a) 75,7 cm e 16 cm/ano

b) 74,1 cm e 10,93 cm/ano

c) 84,3 cm e 11,08 cm/ano

d) 80,4 cm e 14,89 cm/ano

e) 82,3 cm e 15,01 cm/ano

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 28

DANTE (2014, p. 172)

37. Dadas a PA −2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... e a função exponencial $f(x) = 2 \cdot 3^x$:

a) determine a razão dessa PA;

b) verifique que a sequência $f(-2), f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), ...$ é uma PG;

c) determine a razão dessa PG.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 37

38. Se tivermos uma PA $x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ...$ de razão 3 que é levada a uma PG $y_1, y_2, y_3, ..., y_i, ...$ pela função exponencial $f(x) = 4 \cdot 5^x$, qual é a razão dessa PG?

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 38

39. Um pesquisador encontrou em suas investigações a seguinte relação entre os valores de x e y:

x	1	3	5	7
y	4	8	16	32

Que tipo de função expressa y em função de x? Justifique.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 31

40. Seja f uma função que leva a uma PA 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., n, $n + 1$, ... a uma PG 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, ..., escreva a função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$, determinando os valores de a e b.

SITUAÇÃO DE ENSINO N° 32

DANTE (2014, p. 65)