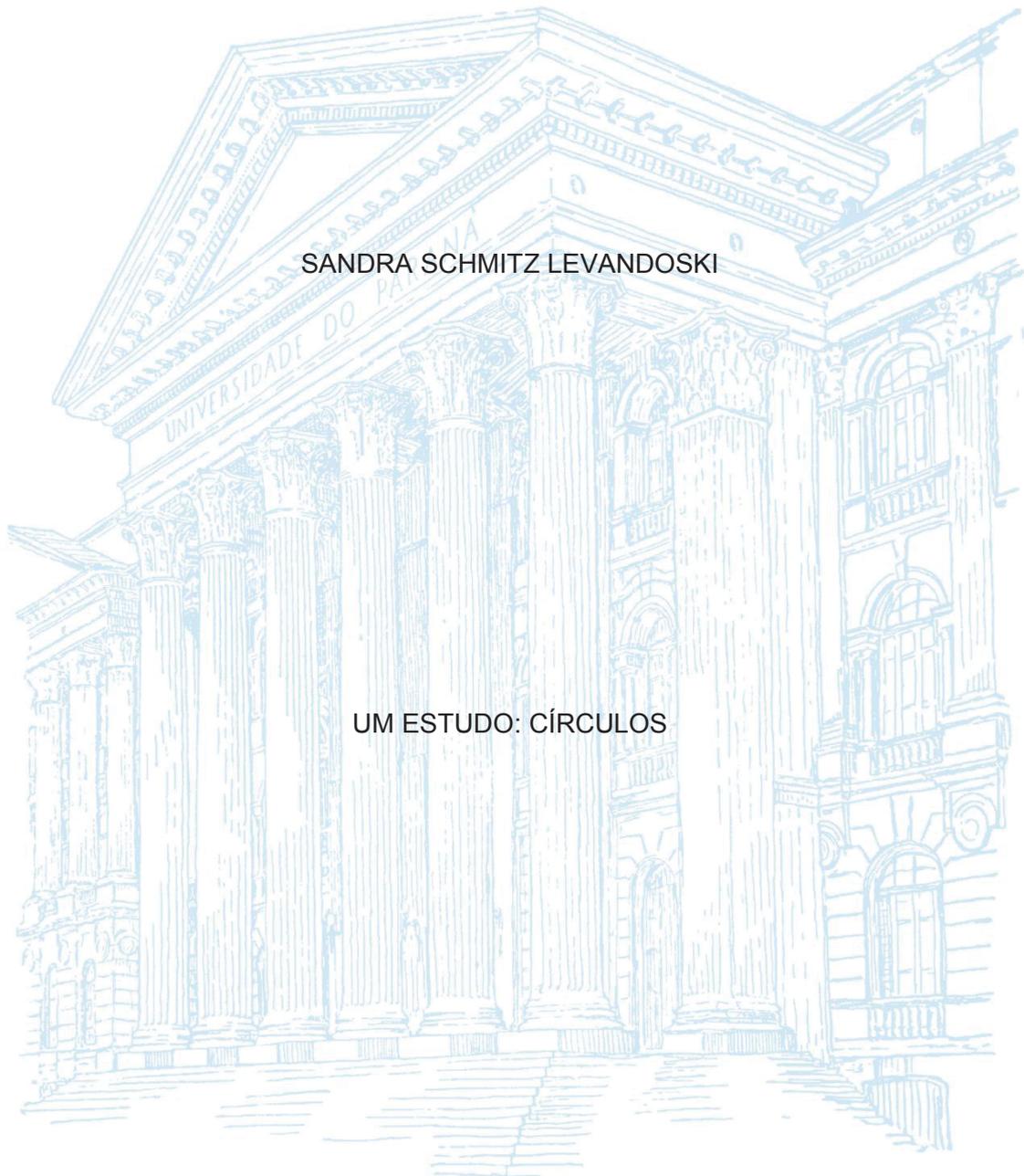


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ



SANDRA SCHMITZ LEVANDOSKI

UM ESTUDO: CÍRCULOS

CURITIBA

2016

SANDRA SCHMITZ LEVANDOSKI

UM ESTUDO: CÍRCULOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná- UFPR, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

CURITIBA  
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR  
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

---

L655e

Levandoski, Sandra Schmitz

Um estudo: círculos / Sandra Schmitz Levandoski. – Curitiba, 2016.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Aldemir José da Silva Pinto.

1. Círculo. 2. Teorema de Euler. 3. Geometria Euclidiana. 4. Geogebra. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pinto, Aldemir José da Silva. III. Título.

CDD: 516.2

---

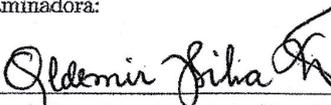
Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214

TERMO DE APROVAÇÃO

SANDRA SCHMITZ LEVANDOSKI

UM ESTUDO: CÍRCULOS

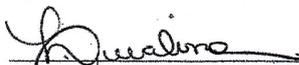
Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática, apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná- UFPR, pela seguinte banca examinadora:



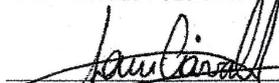
Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto  
Universidade Federal do Paraná - UFPR



Profa. Dra. Adriana Luíza do Prado  
Universidade Federal do Paraná - UFPR



Profa. Dra. Lucelina Batista dos Santos  
Universidade Federal do Paraná - UFPR



Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva  
Departamento Acadêmico de Matemática UTFPR-PG

Curitiba, 19 de Dezembro de 2016

## AGRADECIMENTO

Junto com a finalização de um trabalho, vem a sensação de dever cumprido, que só foi possível pelo esforço conjunto daqueles que acreditaram em mim e em meus ideais. A estes amigos, professores e familiares deixo um muito obrigada e que Deus lhes cubra de bençãos.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Dr. Aldemir, que desde os primeiros passos desta longa jornada me estendeu a mão, confiou em mim, me incentivou, se posicionou no lugar de amigo, professor mestre e doutor. Me guiou com maestria neste caminho do conhecimento e me mostrou o quanto é valioso a responsabilidade, o comprometimento e o caráter.

A professora Adriana, que com paciência e dedicação me incentivou a estudar e me possibilitou meios para que eu atingisse meus objetivos, que foi além, soube olhar para sua aluna e reconhecer o que lhe faltava, que esteve sempre disposta a ajudar e ensinar.

Participar do PROFMAT foi uma experiência inigualável. Mostrou-me que é possível preencher lacunas que existiam em nossa formação, fez-me refletir como docente e discente, foi possível superar obstáculos que pareciam insuperáveis, graças ao trabalho em grupo, aos familiares e amigos.

Um agradecimento especial às amigas, de todas as horas, Eliane, com a qual eu dividi noites e noites de estudo e que mostrou quão valiosa é uma amizade e a amiga Valmira que companheira de trabalho sempre foi mentora, companheira e que sempre compartilhou comigo o seu conhecimento e dividiu comigo seus sucessos.

Aos Professores sérios e dedicados que nos apresentaram as “armas” para enfrentarmos a “batalha” com sabedoria, dignidade, respeito e coragem.

Ao meu marido Marcos Eduardo e minha filha Stephanie, que souberam compreender as minhas ausências e que com amor, companheirismo, compreensão, me deu forças, para perseverar, mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais Hélio e Maria de Lourdes, pelos conselhos que foram lembrados a todo momento ao longo desta jornada: "Um dia de cada vez e em cada um deles sempre fazer o seu melhor."

Aprender para ensinar melhor e transformar o mundo em um lugar melhor para toda a humanidade, essa é a nossa missão.

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo de Círculos. No primeiro capítulo, apresentamos os conceitos básicos da Geometria Euclidiana e seus principais teoremas, em particular, o Teorema de Euler. Nos outros capítulos estudamos os Círculos de acordo com a abordagem de C. Breard. Apresentamos as Famílias de Círculos Tangentes, Famílias de Círculos de Poncelet, Famílias de Círculos de Apolônio, Famílias de Círculos Ortogonais e suas propriedades. Para concluir o estudo apresentamos algumas construções em Geogebra.

Palavras chaves: Círculo, Família de Círculos, Teorema de Euler, Geogebra.

## ABSTRACT

In this work we present a study of circles. In the first chapter we listed the basic concepts of Euclidean Geometry and its main theorems, in particular, Euler's theorem. In the other chapters we study the circles according to the C. Breard approach. We present the Families of Tangent Circles, Families of Circles of Poncelet, Families of Circles of Apollonius, Families of Orthogonal Circles and their properties. To finish the study we present some constructions in Geogebra.

Keywords: Circle, Families of Circles, Euler's Theorem, Geogebra

## SUMÁRIO

1	Introdução . . . . .	10
2	Conceitos Básicos da Geometria Euclidiana . . . . .	14
2.1	Postulados da Geometria Euclidiana Axiomática de Birkhoff . . . . .	14
2.1.1	Postulado da Distância . . . . .	14
2.1.2	Postulado da Régua . . . . .	14
2.1.3	Postulado da Colocação da Régua . . . . .	14
2.1.4	Postulado da Reta . . . . .	15
2.1.5	Postulado do Plano . . . . .	17
2.1.6	Postulado da Separação do Plano . . . . .	17
2.1.7	O Postulado de Separação do Espaço. . . . .	18
2.1.8	Postulado da Medida do Ângulo. . . . .	18
2.1.9	Postulado da Construção de um Ângulo. . . . .	18
2.1.10	Postulado da Adição de Ângulos . . . . .	19
2.1.11	Postulado do Suplemento . . . . .	20
2.2	Congruência entre Triângulos . . . . .	21
2.2.1	Postulado LAL: Lado-Ângulo-Lado . . . . .	22
2.2.2	Teorema ALA: Ângulo-Lado-Ângulo . . . . .	22
2.2.3	Teorema LLL: Lado-Lado-Lado . . . . .	23
2.2.4	Teorema do Ângulo Externo . . . . .	24
2.2.5	Teorema $LAA_o$ (Lado-Ângulo-Ângulo Oposto) . . . . .	25
2.3	Desigualdade Triangular . . . . .	27
2.4	Teoria das Paralelas . . . . .	29
2.4.1	Postulado das Paralelas . . . . .	29
2.5	Teorema-Relação entre áreas e bases . . . . .	32
2.6	Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade . . . . .	34
2.6.1	Recíproco do Teorema Fundamental da Proporcionalidade . . . . .	35
2.7	Teoremas Fundamentais sobre Semelhança de Triângulos . . . . .	36
2.7.1	Teorema AAA . . . . .	36
2.7.2	Corolário da Semelhança de Triângulos-Aplicação da Proporcionalidade . . . . .	37
2.7.3	Teorema LAL . . . . .	38
2.7.4	Teorema LLL . . . . .	39
3	O Círculo . . . . .	40
3.1	Arco do Círculo . . . . .	40
3.2	Corda do Círculo . . . . .	41
3.3	Raio perpendicular à corda. . . . .	41
3.4	Círculos tangentes . . . . .	43
3.5	Ângulos Central . . . . .	43
3.6	Ângulos Inscritos . . . . .	43
3.7	Triângulo Inscrito no Círculo . . . . .	45
3.8	Potência de um Ponto em Relação a um Círculo . . . . .	46
3.9	Círculo em um Plano Cartesiano. . . . .	48
3.10	Círculo-Lugar Geométrico de Potência Nula . . . . .	51

3.11	Teorema de Euler . . . . .	53
3.12	Eixo Radical de dois Círculos . . . . .	54
3.12.1	Eixo Radical de dois círculos Tangentes: . . . . .	57
3.12.2	Eixo Radical de dois círculos Secante: . . . . .	58
3.12.3	Centro Radical . . . . .	58
3.13	Teorema da Borboleta . . . . .	61
4	Famílias de Círculos . . . . .	<b>64</b>
4.1	Famílias Linear de curvas Planas . . . . .	69
4.2	Famílias de Círculos de Poncelet . . . . .	71
4.3	Famílias de Círculos de Apollonius. . . . .	74
4.4	Famílias de Círculos Tangentes . . . . .	77
4.5	Condição de Ortogonalidade de Famílias de Círculo . . . . .	78
4.6	Famílias Ortogonais. . . . .	79
4.7	Propriedades das Famílias de Círculos . . . . .	81
5	CONCLUSÃO . . . . .	84
	REFERÊNCIAS . . . . .	85
	ANEXO 1- CONHECENDO OS AMBIENTES DO GEOGEBRA. . . . .	86
	ANEXO 2- EIXO RADICAL DE CÍRCULOS EXTERNOS. . . . .	88
	ANEXO 3- EIXO RADICAL DE CÍRCULOS SECANTES. . . . .	93

# 1 Introdução

Afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética seja da geometria são bastante arriscadas, pois os primórdios são mais antigos que a arte de escrever.

Para informações sobre a pré história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidências que a antropologia moderna nos oferece. Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas a geometria que tinham em mente tinham raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual do vale do rio. Aristóteles acreditava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. O fato dos geômetras egípcios serem as vezes chamados de "estiradores de corda", pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porem seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminha para a geometria. Seus potes, cestas e tecidos mostram exemplos de congruência e simetria que em essência são partes da geometria elementar. No período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução matemática. A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas.

O ensino da Matemática na forma científica surgiu no período das antigas civilizações orientais, mas eram destinados a membros privilegiados: os escribas, dos altos funcionários e dos dirigentes, sendo considerada uma ciência nobre, desligadas das atividades manuais.

O surgimento da Matemática racional, buscava os princípios que regiam os resultados matemáticos, priorizando os estudos teóricos e a desvalorização das aplicações práticas.

Foi entre os séculos *VI* e *IV a.c* na Grécia, que mudanças profundas aconteceram, não apenas nos estudos matemáticos mas também no ensino. Foi nesse período que a Matemática passou a ser elemento fundamental para a formação do indivíduo. Esta valorização ocorreu inicialmente pelos Pitagóricos apenas para o círculo fechado dos filósofos e depois ampliada pelos sofistas.

O aprimoramento da Geometria se deu pelo aparecimento do primeiro sistema axiomático, escrito por Euclides, no seu livro "Os Elementos", escrito entre 330 a.C. a 320 a.C., um trabalho que permaneceu sem contestação até fim do século *XIX*.

Euclides baseou o desenvolvimento da Geometria nas chamadas noções comuns, princípios aceitos por todos os ramos do conhecimento e um grupo de postulados.

Os postulados são:

**I** Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.

**II** Pode-se continuar uma reta infinitamente.

**III** Pode-se descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

**IV** Todos os ângulos retos são iguais.

**V** Se uma reta corta duas outras retas e a soma dos ângulos colaterais internos é menor que dois ângulos retos, as duas retas continuadas infinitamente encontram-se no lado no

qual a soma é menor que dois retos.

O valor formativo da matemática se iniciou pelos Pitagóricos, que defendiam o poder de desenvolver o pensamento humano e racional e era destinado apenas para seus seguidores mas foi difundido pelos sofistas, que associavam este valor às necessidades retóricas, onde quem quisesse ser bom orador, deveria conhecer ao menos alguns elementos básicos da Matemática, porém só não se chegou a um acordo quanto à profundidade no qual esses estudos deveriam ser desenvolvidos.

No período helenístico, os romanos valorizavam os estudos literários o que acarretou uma redução dos espaços destinados aos estudos matemáticos.

Na Idade Média, o ensino essencialmente religioso fez com que os estudos matemáticos, praticamente desaparecessem do Ocidente.

A Matemática resurgiu na Grécia, como "Moderna Matemática", associada às aplicações práticas, às artes produtivas, às artes mecânicas, ou seja mais uma vez em resposta às necessidades práticas da sociedade.

A tensão entre "artes cultas" e "artes manuais" se intensificou na Grécia e o ensino da Matemática especialmente por meio das propostas filosóficas dos pitagóricos e dos platônicos e o ensino da Matemática passou a ser fundamental às duas.

Por um lado, o ensino ligado a "arte culta", voltada ao raciocínio, baseado na proposta platônica, interessado na formação das classes privilegiadas.

Por outro lado, o ensino voltado as "artes práticas", destinados aos membros de uma classe emergente, privilegiava o ensino das ciências práticas, chamadas de "Nova Matemática"<sup>1</sup>, que foi desenvolvida nas escolas técnicas de nível médio e nos cursos superiores técnicos enquanto a matemática antiga foi desenvolvida nas escolas do tipo secundário e nas universidades.

Até o final do século *XIX*, estes dois tipos de ensino foram desenvolvidos em diferentes escolas, até que se tornou impossível essa convivência, o que enraizou o Primeiro Movimento para a Modernização do Ensino da Matemática. As discussões educacionais deste século, não se limitaram as questões ligadas à universalização e à relação educação trabalho. Outros temas como a laicização e a estatização da educação também estavam no centro das discussões e foram contemplados de forma variada e em diferentes ritmos pelos sistemas nacionais da educação que organizados criaram escolas para todas as camadas da população.

A importância cada vez mais acentuada das ciências para o desenvolvimento social, político e econômico, acabou gerando pressão para modernizar o currículo das escolas secundárias e universidades.

A nova proposta de ensino que se seguiu propunha a junção da Matemática Teórica e Aplicada não apenas para satisfazer as necessidades do desenvolvimento industrial, mas também para renovar as formas antiquadas de pensamento. Surgem os campos especializados, a preocupação com o rigor e a revolução na Geometria.

O século *XIX* ficou conhecido como a Idade Áurea da Matemática, porém o rápido desenvolvimento ocorrido criou uma estrutura enorme e complexa, que deram origem às publicações de periódicos e organizações especializadas nacionais e também os Congressos Nacionais, onde se discutia a Educação Matemática.

O Brasil participou do 5º Congresso Internacional de Matemática, que ocorreu em Cambridge-Inglaterra entre os dias 21 a 28 de outubro de 1912, que tinha em pauta algumas questões

---

<sup>1</sup>A nova Matemática se iniciou com Newton em (1642-1727) e Leibniz (1646-1716)

para melhorar o ensino da matemática, entre eles:

Quais os resultados dos esforços para remover as barreiras entre tópicos como Álgebra e Geometria ou ainda para ensinar os dois ao mesmo tempo?.

Quais seriam os conteúdos mínimos para o ensino da Geometria Euclidiana?

Qual é o lugar do rigor no ensino da Matemática?

Iniciaram-se assim esforços de matemáticos e educadores e de comissões não apenas para as reformas mas também em recolher informações para serem utilizadas nesta reforma, originando o 1º Movimento Internacional para a modernização do estudo da Matemática.

A percepção da existência de uma Educação Matemática das escolas secundárias desvinculada da educação universitária, levou o comitê a sugerir algumas modificações.

O Brasil participou das atividades desta comissão, como convidado, mas aderiu ao movimento alegando a necessidade de aperfeiçoamento da organização dos estudos, mas as modificações sugeridas seriam apresentadas apenas no Congresso Internacional de Matemática, que não ocorreu pois eclodiu a Primeira Guerra Mundial.

As idéias modernizadoras ressurgem e começam a penetrar no ensino brasileiro só em 1928, até então, o ensino da Aritmética, Álgebra e Geometria eram feitos separadamente.

Foi com a primeira reforma educacional do ministro da educação e saúde, Francisco Campos, em 1931, que ficou estabelecido o currículo seriado, a frequência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar, no qual o ensino tinha por fim desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-os ao mesmo tempo à concisão e ao rigor do raciocínio.

Apesar de não ser eliminado o estudo da geometria dedutiva, que, entretanto, ficara restrito à geometria plana, sugeria-se que ele fosse introduzido de forma gradual e tivesse por base as observações intuitivas e a necessidade de uma demonstração.

A organização da Matemática Moderna baseava-se na teoria dos conjuntos, nas estruturas matemáticas e na lógica, sendo estes três elementos responsáveis pela unificação dos campos matemáticos, um dos maiores objetivos do movimento e para isso enfatizou o uso de uma linguagem precisa e de justificações matemáticas rigorosas, porém não se conseguiu resolver o problema do ensino da Matemática e no final da década de setenta a Matemática moderna sofreu grandes críticas, entretanto nesse momento as mudanças propostas seriam implantadas lentamente, devido à forte penetração do movimento da Matemática Moderna.

Apesar de diferentes, as posições assumidas pelos dois movimentos de modernização ocorrida no nosso século influenciaram profundamente o ensino da disciplina daquele momento em diante.

Ainda hoje sentimos a presença das duas vertentes nas discussões teóricas e na prática da educação matemática.

Em busca de reforçar a importância do ensino da Geometria, de sua linguagem precisa, de sua aplicação e precisidade de detalhes é que desenvolvemos o presente trabalho.

Para iniciarmos nossos estudos elencamos os Postulados da Geometria Euclidiana (Axiomática de Birkhoff), que fundamentou as demonstrações aqui apresentadas, definimos congruência de triângulos, apresentamos o postulado LAL(Lado-Ângulo-Lado), que nos ajudou na demonstração dos teoremas: ALA(Ângulo-Lado-Ângulo), LLL-(Lado-Lado-Lado),  $LAA_0$  (Lado-Ângulo-Ângulo Oposto) de congruência, demonstramos ainda os Teorema do Ângulo Externo, Desigualdade Triangular, Teoria das Paralelas: com conceitos, postulados e teoremas que utilizam o V Postulado de Euclides, postulado este que causou grande polêmica e que

deu origem às Geometrias não-Euclidianas. Estudamos também a demonstração do Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade e seu recíproco, que são teoremas que aparecem com muita frequência nas demonstrações dos outros teoremas. Ainda se fez necessário a apresentação do teorema que relaciona a área do triângulo com sua base, Teoremas Fundamentais sobre Semelhanças de Triângulos.

Tão importante quanto o estudo até aqui desenvolvido, temos um capítulo especial para os Círculos, com seus elementos, posições entre círculos, Triângulo Inscritível, Potência de um ponto em relação ao círculo, Círculo no Plano Cartesiano, com destaque especial ao teorema de Euler com riqueza de aplicações de conceitos e teoremas para demonstrar a relação da distância entre o Circuncentro e o Incentro de um triângulo inscrito e circunscrito no círculo. Neste mesmo capítulo, resgatamos o conceito de Eixo Radical entre círculos, nas diversas posições que eles se apresentam, sendo para cada caso, exemplificado e para finalizar este capítulo temos ainda como encontrar o Centro Radical de Três Círculos, quando os centros deste formam um triângulo e terminamos o capítulo com o Teorema da Borboleta, onde aplicamos semelhanças de triângulos.

No último capítulo, resgatamos da década de 70, as Famílias de Círculos, as Famílias Lineares de bases ( $D$  e  $D'$ ), podendo ser  $D$  e  $D'$ , retas, círculos ou reta e círculo e as Famílias de Círculos de Poncelet, Apollonius, Tangentes e as Ortogonais, com suas propriedades.

No campo de anexos deixamos duas construções no Geogebra, que foram exemplos desenvolvidos ao longo do trabalho.

## 2 Conceitos Básicos da Geometria Euclidiana

### 2.1 Postulados da Geometria Euclidiana Axiomática de Birkhoff

George David Birkhoff (1884-1944) foi um dos matemáticos mais produtivos e versáteis de sua geração, escreveu cento e noventa trabalhos em vários ramos da matemática pura e aplicada e vários livros sobre relatividade.

Os postulados que utilizamos, são modificações de um conjunto de postulados devidos a Birkhoff, que apesar de não estarem entre suas grandes contribuições para o conhecimento, eles contribuem para a clareza dos mesmos.

O estudo da Geometria se baseia nas noções primitivas de ponto, reta e plano e nos postulados que são afirmações aceitas sem demonstração, que serviram para o desenvolvimento da Geometria Euclidiana Moderna.

A seguir, apresentamos os Postulados de Birkhoff.

#### 2.1.1 Postulado da Distância

**Postulado 1.** *A todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.*

**Definição 1.** *A distância entre dois pontos é o número dado pelo postulado da distância. Se os pontos são denotados por  $P$  e  $Q$ , a distância será representada por  $PQ$*

Para a possibilidade de  $P$  e  $Q$  serem o mesmo ponto, dizemos que  $PQ = 0$ . A distância é definida para um par de pontos e não depende da ordem em que estes pontos são mencionados. Portanto temos que  $PQ = QP$ .

#### 2.1.2 Postulado da Régua

**Postulado 2.** *Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência com os números reais, de tal modo que :*

- (1) *a cada ponto da reta corresponde exatamente um número real.*
- (2) *a cada número real corresponde exatamente um ponto da reta; e*
- (3) *a distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.*

**Definição 2.** *Uma correspondência do tipo descrito pelo postulado de régua é chamado de sistema de coordenada. O número correspondente a determinado ponto é chamado de coordenada do ponto.*

#### 2.1.3 Postulado da Colocação da Régua

**Postulado 3.** *Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  numa reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal modo que a coordenada de  $P$  seja zero e a coordenada de  $Q$  seja positiva*

**Definição 3.** *B está entre A e C se: (1) A, B e C são pontos distintos de uma reta e (2)  $AB + BC = AC$*

Dizer que B está entre dois pontos A e C é dizer que três pontos estão na mesma reta, podendo estar dispostos de duas maneiras a seguir:



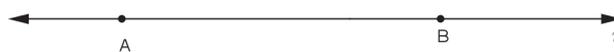
Figura 1: B entre A e C



Figura 2: B entre C e A

#### 2.1.4 Postulado da Reta

**Postulado 4.** *Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.*



A reta  $r$  que contém A e B é representada por  $\overleftrightarrow{AB}$  ( $r = \overleftrightarrow{AB}$ ).

**Definição 4.** *Dados dois pontos quaisquer A e B, o segmento  $\overline{AB}$  é o conjunto cujos pontos são A e B, juntamente com todos os pontos que estão entre A e B, isto é  $\overline{AB} = \{C/A - C - B\} \cup \{A, B\}$ . Os pontos A e B são chamados de extremidades de  $\overline{AB}$*

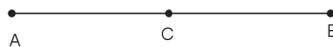


Figura 3: Segmento de Reta

**Definição 5.** O número  $AB$  é chamado de comprimento do segmento  $\overline{AB}$ .

**Definição 6.** Sejam  $A$  e  $B$  pontos de uma reta  $s$ . A semirreta  $\overrightarrow{AB}$  é o conjunto reunião do segmento  $\overline{AB}$  e o conjunto de todos os pontos  $C$  para os quais  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , isto é  $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C/A - B - C\}$ . O ponto  $A$  é chamado origem de  $\overrightarrow{AB}$ .

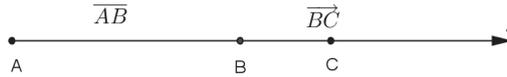


Figura 4: Semirreta

Se  $A$  está entre  $B$  e  $C$  em  $s$ , então as duas semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  apontam em direções opostas.

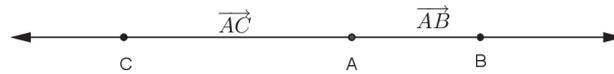


Figura 5: Semirretas opostas

**Postulado 5.**

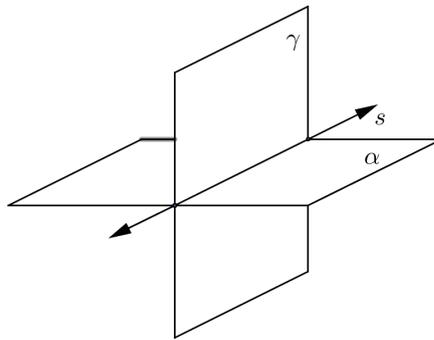
- (a) *Todo plano contém pelo menos três pontos não colineares.*  
 (b) *O espaço contém pelo menos quatro pontos não coplanares.*

**Postulado 6.** *Se dois pontos de uma reta estão em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.*

**2.1.5 Postulado do Plano**

**Postulado 7.** *Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano e três pontos não colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.*

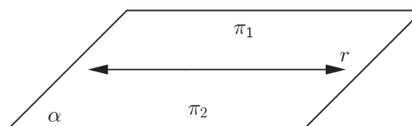
**Postulado 8.** *Se dois planos distintos se interceptam, a interseção é uma reta.*

**2.1.6 Postulado da Separação do Plano**

**Definição 7.** *Um conjunto  $A$  é chamado convexo se, para todo par de pontos  $P$  e  $Q$  do conjunto, o segmento  $\overline{PQ}$  está inteiramente contido no conjunto.*

**Postulado 9.** *Dados uma reta e um plano que a contém, os pontos do plano que não pertencem à reta formam dois conjuntos tais que:*

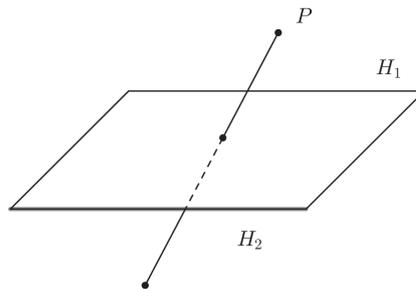
- (1) *cada um dos conjuntos é convexo, e*  
 (2) *se  $P$  pertence a um dos conjuntos e  $Q$  ao outro, então o segmento  $\overline{PQ}$  intercepta a reta.*



### 2.1.7 O Postulado de Separação do Espaço.

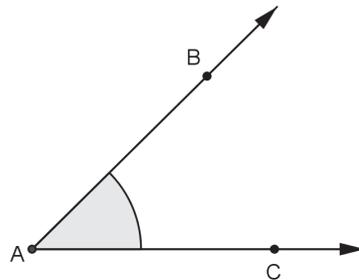
**Postulado 10.** *Os pontos do espaço que não pertencem a um plano dado formam dois conjuntos, tais que:*

- (1) *cada um dos conjuntos é convexo, e*
- (2) *se  $P$  pertence a um dos conjuntos e  $Q$  ao outro, então o segmento  $\overline{PQ}$  intercepta o plano.*



### 2.1.8 Postulado da Medida do Ângulo.

**Definição 8.** *Se duas semirretas tiverem a mesma origem mas não estiverem contidas na mesma reta, então a sua reunião é um ângulo. As duas semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum das semirretas é chamada vértice do ângulo. Se as semirretas forem  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , o ângulo será representado por  $\widehat{BAC}$  ou  $\widehat{CAB}$ .*

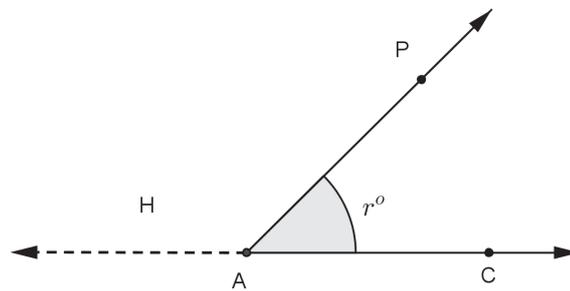
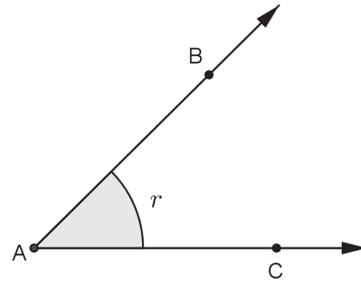


**Postulado 11.** *A todo ângulo  $\widehat{BAC}$  corresponde um número real  $r$  entre 0 e 180.*

**Definição 9.** *O número dado pelo Postulado da Medida do ângulo é chamado de medida do ângulo  $\widehat{BAC}$  e é escrito  $m(\widehat{BAC})$ .*

### 2.1.9 Postulado da Construção de um Ângulo.

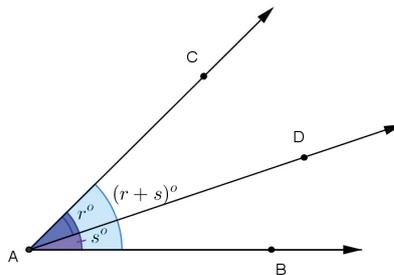
**Postulado 12.** *Seja  $\overrightarrow{AC}$  uma semirreta contida na origem de um semiplano  $H$ . Para todo número  $r$  entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta  $\overrightarrow{AP}$ , com  $P$  em  $H$ , tal que  $m(\widehat{PAC}) = r^\circ$*



### 2.1.10 Postulado da Adição de Ângulos

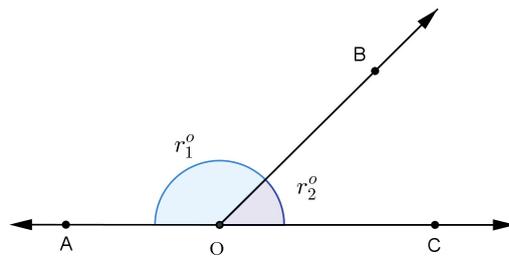
**Postulado 13.** *Se D esta no interior do  $\widehat{BAC}$ , então:*

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC})$$



### 2.1.11 Postulado do Suplemento

**Postulado 14.** *Se dois ângulos formam um par linear, então eles são suplementares.*  
( $r_1^o + r_2^o = 180^o$ )

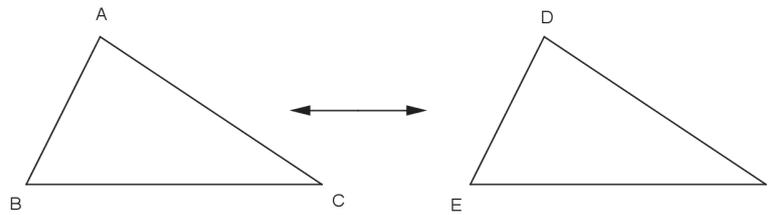


A seguir, apresentaremos os conceitos de congruência de triângulos que nos permite chegarmos às propriedades geométricas que utilizaremos nas demonstrações dos teoremas que se seguem.

## 2.2 Congruência entre Triângulos

Intuitivamente, a noção de "igualdade" entre triângulos que recebe o nome de congruência, aparece quando dizemos que dois triângulos são congruentes, ou seja, quando conseguimos mover um deles, sem deformá-lo até fazê-lo coincidir com o outro.

**Definição 10.** *Dois ângulos são congruentes se tem a mesma medida. Dois segmentos são congruentes se tem o mesmo comprimento.*



**Definição 11.** *Seja dada uma correspondência  $ABC \longleftrightarrow DEF$  entre os vértices de dois triângulos. Se os pares de lados correspondentes são congruentes e os pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência  $ABC \longleftrightarrow DEF$  é chamada uma congruência entre dois triângulos.*

Quando escrevemos  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , queremos dizer que a correspondência  $ABC \longleftrightarrow DEF$  é uma congruência. Isto é o mesmo que dizer:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \Leftrightarrow AB = DE$$

$$\overline{AC} \cong \overline{DF} \Leftrightarrow AC = DF$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF} \Leftrightarrow BC = EF$$

$$\widehat{A} \cong \widehat{D} \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$$

$$\widehat{B} \cong \widehat{E} \Leftrightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$$

$$\widehat{C} \cong \widehat{F} \Leftrightarrow m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$$

A congruência é uma relação de equivalência:

- De fato
- i.  $\triangle ABC \cong \triangle ABC$  (Antissimétrica)
  - ii.  $\triangle ABC \cong \triangle DEF \Rightarrow \triangle DEF \cong \triangle ABC$  (Reflexiva)
  - iii.  $\triangle ABC \cong \triangle DEF \Rightarrow \triangle DEF \cong \triangle GHI$  (Transitividade)

O ponto de partida para o estudo da congruência de triângulos é o postulado LAL.

### 2.2.1 Postulado LAL: Lado-Ângulo-Lado

**Postulado 15.** *Toda correspondência LAL é uma congruência*

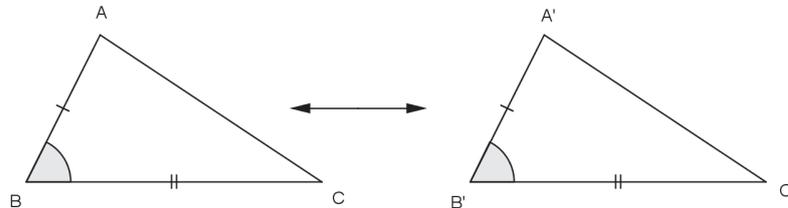


Figura 6: Caso Lado-Ângulo-Lado

Observamos que  $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$  é chamada uma correspondência LAL quando dois lados e o ângulo determinado por eles, do primeiro triângulo, são congruentes aos elementos correspondentes do segundo, neste caso, segue-se que  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ .

### 2.2.2 Teorema ALA: Ângulo-Lado-Ângulo

**Teorema 2.1.** *Se dois triângulos tem dois lados respectivamente congruentes e os ângulos com vértices nas extremidades desses lados respectivamente congruentes, então os dois triângulos são congruentes.*

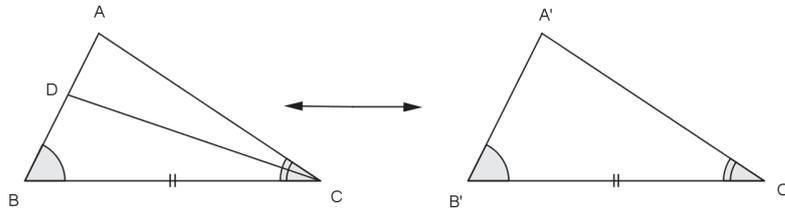


Figura 7: Caso Ângulo-Lado-Ângulo

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  tais que :  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ,  $\widehat{C} = \widehat{C'}$ . Queremos provar que  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ .

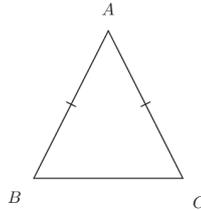
Seja D um ponto sobre  $\overline{AB}$  de forma que B-D-A, tal que  $BD = B'A'$ . Temos que  $\Delta DBC \longleftrightarrow \Delta A'B'C'$  é uma correspondência LAL, segue então:  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B'}$  e  $\overline{BD} = \overline{B'A'}$ , logo  $\Delta DBC \cong \Delta A'B'C'$ , e o ângulo  $\widehat{BCD} \cong \widehat{B'C'A'}$ , por serem ângulos correspondentes.

Observamos que  $\widehat{BCD} = \widehat{C'} = \widehat{C}$  e pelo postulado da construção do ângulo temos que  $\overline{CD} = \overline{CA}$ .

Observamos ainda que duas retas distintas se interceptam no máximo em um ponto, portanto  $D=A$ .

Como  $\triangle DBC \cong \triangle A'B'C'$  temos  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  □

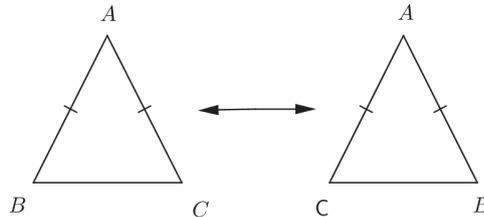
**Definição 12.** Um triângulo é isósceles se possui dois lados congruentes.



Se  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ , dizemos que  $\triangle ABC$  é isósceles de base  $\overline{BC}$

**Proposição 2.2.** (Pons Asinorum)<sup>2</sup> Em todo triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

*Demonstração.* Seja o  $\triangle ABC$  isósceles, com  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ . Consideremos a correspondência:



Temos  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ;  $\hat{A} \cong \hat{A}$ ;  $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ . Logo por LAL,  $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ . Portanto  $\hat{B} \cong \hat{C}$ . □

### 2.2.3 Teorema LLL: Lado-Lado-Lado

**Teorema 2.3.** Se dois triângulos tem os três lados respectivamente congruentes, eles são congruentes.

*Demonstração.* Sejam os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que:  
 $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$  e  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$

Pelo postulado de construção de ângulo, existe uma única semirreta  $\overrightarrow{BD}$ , com  $D \in H_2$ , tal que  $\widehat{CBD} \cong \widehat{C'B'A'}$  e um único ponto  $E \in \overrightarrow{BD}$ , tal que  $\overline{BE} \cong \overline{B'A'}$ .

Temos então pelo caso LAL

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle EBC \quad (2.1)$$

---

<sup>2</sup>Ponte de Asnos

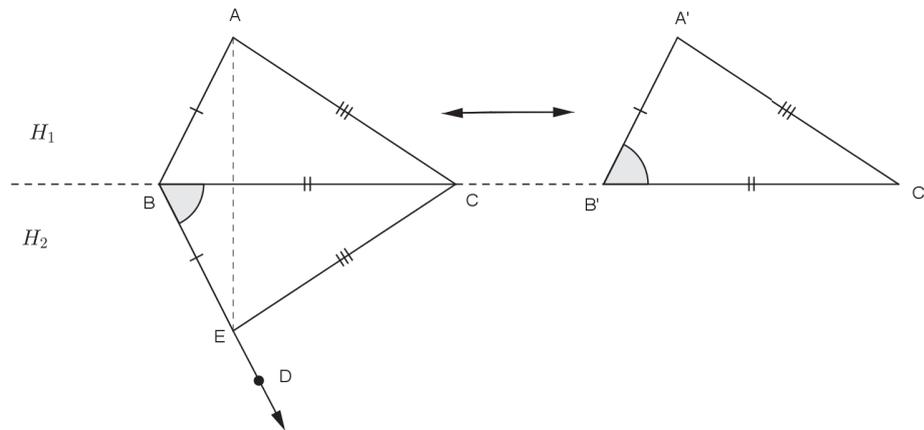


Figura 8: Caso Lado-Lado-Lado

Observamos agora que  $\triangle ABE$  e  $\triangle ACE$  são isósceles de base  $\overline{AE}$ .

Temos então da Proposição (2.2) que  
 $\widehat{BAE} \cong \widehat{BEA}$ . Que chamaremos de  $\theta$   
 $\widehat{CAE} \cong \widehat{CEA}$ . Que chamaremos de  $\beta$

Logo pelo caso LAL

$$\triangle ABC \cong \triangle EBC \quad (2.2)$$

Segue de 2.1 e de 2.2 que :  $\triangle ABC \cong \triangle EBC \cong \triangle A'B'C'$

Como congruência é uma relação de equivalência temos por transitividade  
 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  □

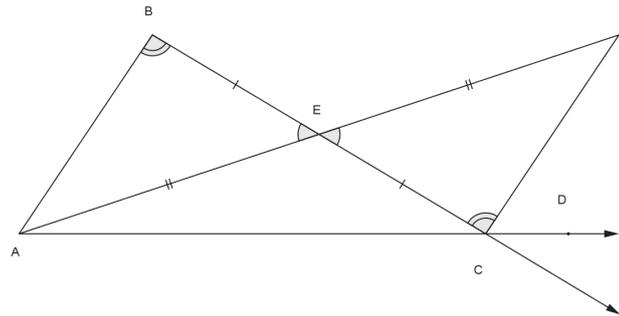
### 2.2.4 Teorema do Ângulo Externo

**Definição 13.** Se  $ABC$  é um triângulo, os seus ângulos  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$  e  $\widehat{CAB}$ , são chamados de ângulos internos ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementares destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.

**Teorema 2.4.** Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.

*Demonstração.* Seja  $E$  o ponto médio de  $\overline{BC}$  e  $F$  um ponto da semirreta oposta a  $\overrightarrow{EA}$ , tal que  $EF = EA$ .

Temos que  $\widehat{AEB} \cong \widehat{FEC}$ , por serem ângulos opostos pelo vértice e  $\widehat{B} \cong \widehat{ECF}$ , pois o  $\triangle ABE \cong \triangle FCE$ , pelo caso de congruência LAL.



Temos ainda pelo Postulado da Adição de Ângulos que:

$$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{ECF}) + m(\widehat{FCD})$$

e como  $m(\widehat{ECF}) = m(\widehat{B})$ , temos que

$$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{FCD}),$$

logo  $m(\widehat{BCD}) > m(\widehat{B})$ , portanto:

$$\widehat{BCD} > \widehat{B}$$

□

### 2.2.5 Teorema $LAA_0$ (Lado-Ângulo-Ângulo Oposto)

**Teorema 2.5.** *Toda correspondência  $LAA_0$  é uma congruência.*

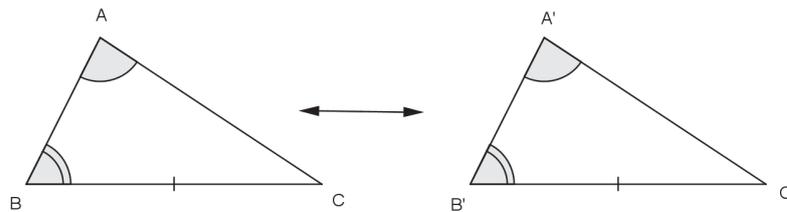


Figura 9: Caso Lado-Ângulo-Ângulo Oposto

*Demonstração.* Sejam os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que:  $\hat{A} \cong \hat{A}'$ ,  $\hat{B} \cong \hat{B}'$  e  $\overline{BC} \cong \overline{B'C}'$

Se os lados congruentes são determinados pelo ângulo congruente, então sabemos, por ALA, que a correspondência é uma congruência.

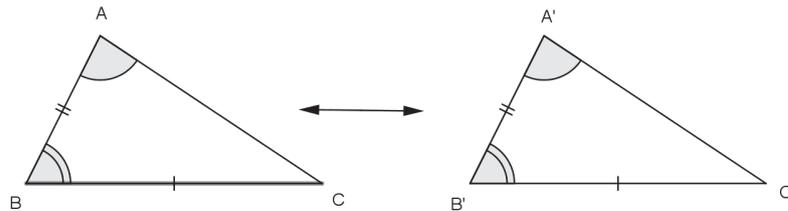
Há três possibilidades para  $AB$  e  $A'B'$

(1)  $AB = A'B'$

(2)  $AB < A'B'$

(3)  $AB > A'B'$

Se (1) se verifica, então o teorema vale porque, neste caso  $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$  é uma correspondência LAL. Iremos mostrar que (2) e (3) são impossíveis.



Suponhamos que (2) se verificasse:  $AB < A'B'$ .

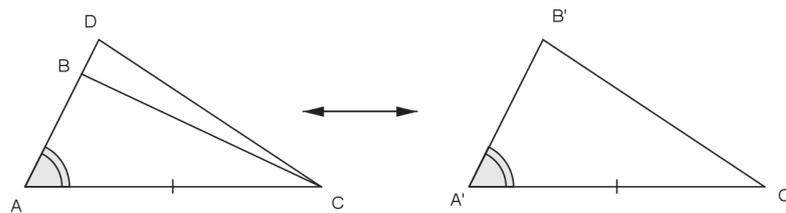


Figura 10:  $AB < A'B'$

Seja D o ponto de  $\overrightarrow{AB}$ , tal que  $AD = A'B'$ . Então  $\triangle ADC \cong \triangle A'B'C'$ , por LAL. Portanto  $\widehat{ADC} \cong \widehat{A'B'C'}$ . Por hipótese temos que  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ , logo  $\widehat{ADC} \cong \widehat{B}$ . Mas pelo teorema do ângulo externo,  $\widehat{ABC} > \widehat{ADC}$ , portanto (2) não se verifica.

Suponha que (3) se verifique:  $AB > A'B'$ .

Seja D o ponto sobre o segmento  $\overline{AB}$ , tal que A-D-B e  $AD = A'B'$ , logo  $\triangle ADC \cong \triangle A'B'C'$ , pelo caso LAL, logo  $\widehat{ADC} = \widehat{A'B'C'}$ . Por hipótese  $\widehat{B} = \widehat{B'}$  e  $\widehat{B'} = \widehat{ADC}$ , temos que  $\widehat{ADC} = \widehat{B}$ , mas pelo teorema do ângulo externo  $\widehat{ADC} > \widehat{B}$ , portanto (3) não se verifica.

Se (2) e (3) não se verificam, (1) deve se verificar e  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

□

A seguir iremos demonstrar o Teorema do ângulo externo, um importante teorema que será mencionado nas diversas demonstrações.

Intuitivamente sabemos que a distância de um ponto A até um ponto B é menor do que a soma das distâncias se fossemos de um ponto A até um ponto C e de C até um ponto B, com

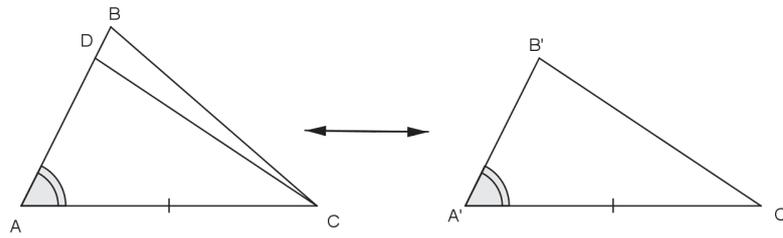
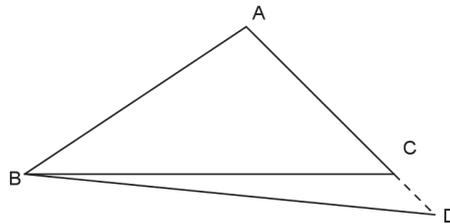


Figura 11:  $AB > A'B'$

os três pontos não colineares, mas a demonstração deste conceito tão primitivo é realizado abaixo através da Desigualdade Triangular.

### 2.3 Desigualdade Triangular

**Teorema 2.6.** *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a ele não são congruentes e o maior ângulo se opõe ao maior lado.*



*Demonstração.* Consideremos o  $\triangle ABC$  e que  $AB > AC$ .

Seja D um ponto sobre a semirreta  $\overrightarrow{AC}$ , exterior ao triângulo de modo que  $AD = AB$ , logo o  $\triangle ABD$  é isósceles e os ângulos  $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$ , pois são ângulos da base do  $\triangle ABD$ .

Observamos  $AB = AD > AC$ , pois  $A-C-D$ . Logo pelo Postulado da adição de ângulos:

$$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CBD})$$

$$\Rightarrow m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{ABD})$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} < \widehat{ABD} \cong \widehat{D}$$

pelo Teorema do Ângulo Externo, segue que  $\widehat{D} < \widehat{ACB}$

Como  $\widehat{ABC} < \widehat{D}$  e  $\widehat{D} < \widehat{ACB}$ , temos que  $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$ , ou seja:

$$\widehat{B} < \widehat{C}$$

□

**Teorema 2.7.** *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes não são congruentes e o maior lado se opõe ao maior ângulo.*

*Demonstração.* Consideremos o  $\triangle ABC$  e por hipótese, os ângulos  $\hat{B} > \hat{C}$ . Há três possibilidades para os números  $AB$  e  $AC$ .

1ª)  $AB=AC$

2ª)  $AB < AC$

3ª)  $AB > AC$

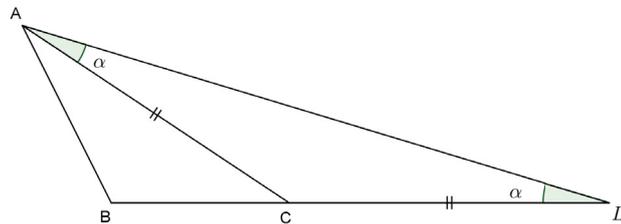
Para  $AB=AC$  temos  $\hat{B} = \hat{C}$ , por serem os ângulos da base do triângulo isósceles, que contradiz a hipótese.

Para  $AB > AC$ , implica que  $\hat{C} > \hat{B}$ , o que contradiz a hipótese.

Portanto a única possibilidade restante é que  $AB < AC \Rightarrow \hat{C} < \hat{B}$  □

**Teorema 2.8.** *(Desigualdade Triangular)*

*A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*



*Demonstração.* Seja  $D$  um ponto sobre a semirreta  $\overrightarrow{BC}$ , tal que  $B - C - D$  e  $AC = CD$ , como na figura.

Observamos que o triângulo  $\triangle ACD$  é isósceles, logo  $\widehat{CAD} = \widehat{D}$ .

Do triângulo  $\triangle ABD$  temos:

$$m(\widehat{BAD}) > m(\widehat{D})$$

$$BD > AB$$

$$BC + CD > AB$$

□

## 2.4 Teoria das Paralelas

Conhecido como 5º Postulado de Euclides, este Postulado é um dos pilares da Geometria Euclidiana.

O postulado das paralelas não era tão simples quanto os outros postulados que nunca geraram questões filosóficas, pois não era tão evidente.

Para muitos matemáticos, o quinto postulado de Euclides, tratava-se, muito provavelmente, não de um postulado, mas sim de um teorema e como tal deveria ser demonstrado dentro da própria Geometria, utilizando apenas os quatro primeiros postulados de Euclides, mais os cinco axiomas e o conjunto de definições fixados.

A busca de provar este postulado envolveu muitos matemáticos durante mais de dois mil anos.

Durante muitos anos os matemáticos tentaram provar que ele era um Teorema, o que resultou no surgimento de outras Geometrias ditas não Euclidianas que se baseiam num sistema axiomático distinto da Euclidiana.

Existiram tentativas que vão das mais simples, que foram facilmente descartadas até as mais elaboradas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitaram de um olhar mais apurado para serem desqualificadas, pois escondiam a própria essência do quinto postulado.

A suposta verdade sobre a existência de uma única paralela estava tão inserida no pensamento científico que era fácil usá-la sem se dar conta. Foram tantos resultados obtidos como consequência direta da unicidade das paralelas, que até então não era questionada, como por exemplo a simples existência de um retângulo e a soma dos ângulos internos do triângulo.

Os fatos eram utilizados sem que se percebessem a relação destes com o quinto postulado.

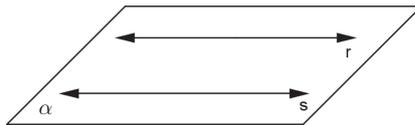
A comunidade dos matemáticos adotou então dois caminhos a serem seguidos:

No primeiro, deveriam substituir este postulado por outro mais auto-evidente, ou no segundo, demonstrá-lo através de seus anteriores, mostrando com isso que ele não era autosuficiente, devendo ser provado através dos outros postulados ou tomado por absurdo e atacá-lo até encontrar uma contradição.

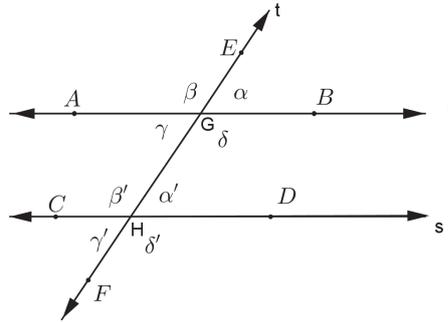
No primeiro caminho temos várias opções como a de Jhon Playfair, que ficou amplamente conhecida: *Por um ponto fora da reta dada não há mais do que uma reta paralela a esta reta.*

### 2.4.1 Postulado das Paralelas

**Definição 14.** *Duas retas são paralelas se: (1)são coplanares e (2)não se interceptam.*

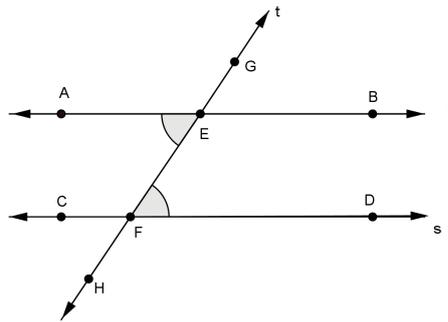


**Definição 15.** *Quando duas retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  são cortadas por uma reta  $\overleftrightarrow{EF}$  (geralmente denominada "transversal"), são formados 8 ângulos nos pontos de intersecção G e H.*



Nestas condições, os ângulos  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são chamados ângulos internos enquanto  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma'$  e  $\delta'$  são chamados ângulos externos. Os pares de ângulos  $(\alpha', \gamma)$  e  $(\beta', \delta)$  são chamados de alternos-internos, enquanto os pares  $(\beta, \delta')$  e  $(\alpha, \gamma')$  são chamados alternos-externos. Os pares  $(\alpha, \alpha')$ ,  $(\beta, \beta')$ ,  $(\gamma, \gamma')$  e  $(\delta, \delta')$  são chamados ângulos correspondentes.

**Teorema 2.9.** Se uma reta cortando duas outras retas formam sobre elas ângulos alternos-internos congruentes então as duas retas são paralelas.

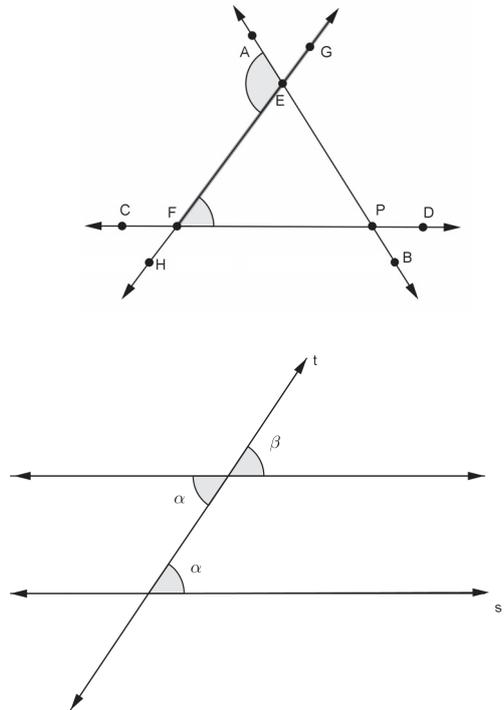


*Demonstração.* Sejam as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  cortadas pela transversal  $\overleftrightarrow{GH}$  nos pontos E e F. Os ângulos  $\widehat{BEF} = \widehat{CFE}$ , pois são suplementares dos ângulos  $\widehat{AEF} = \widehat{EFD}$  por hipótese.

Devemos mostrar que  $AB \parallel CD$ . Vamos supor que não fossem paralelos. Então elas deveriam cruzar-se em um ponto P e ficaria assim formado o  $\triangle EFP$ . Com  $\widehat{AEF} = \widehat{GEB} = \widehat{EFD}$ . Observamos então que o ângulo externo  $\widehat{GEB}$ , seria igual ao ângulo interno  $\widehat{EFD}$ , que é um absurdo pelo Teorema do ângulo externo. Portanto  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$   $\square$

**Proposição 2.10.** Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então cada par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes.

*Demonstração.* Consideremos as retas  $r \parallel s$  cortadas por uma transversal  $t$ . Sendo  $r \parallel s$ , temos que os ângulos alternos-internos  $\alpha$  são congruentes. Como ângulos opostos pelo vértice são congruentes  $\alpha = \beta$ . Como  $\alpha$  e  $\beta$ , são correspondentes e  $\beta = \alpha$  e portanto os ângulos são congruentes.  $\square$



**Teorema 2.11.** *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal então os ângulos alternos-internos são congruentes*

*Demonstração.* Considere as retas  $r \parallel s$  e  $t$  uma transversal interceptando as paralelas nos pontos  $A$  e  $B$ . Suponha que os ângulos alternos-internos não sejam congruentes, ou seja,  $\hat{a} \neq \hat{b}$ . Seja a reta  $u$  que passa por  $A$  para a qual os ângulos alternos sejam congruentes  $\hat{c} \cong \hat{b}$ . Pelo Postulado da Construção de um Ângulo,  $u$  é única e isso significa que  $u = r$ , mas pelo teorema anterior  $\hat{c} \cong \hat{b}$ , logo  $u \parallel s$ , segue então que por  $A$  passam duas retas paralelas a  $s$ , porém isso contradiz o postulado das paralelas, portanto  $\hat{a} = \hat{b}$   $\square$

**Postulado 16.** *Por um ponto fora de uma reta, existe somente uma reta paralela a reta dada.*

Consideremos uma reta  $r$  e um ponto  $P$  tal que  $P$  não pertença a  $r$ . Podemos construir por um ponto  $P$  uma reta  $s \parallel r$ .

Escolhemos um ponto  $Q \in r$  e seja  $\theta = m(\widehat{PQR})$ .

Construimos  $\widehat{Q'PQ}$ , tal que  $m(\widehat{Q'PQ}) = \theta$ , como demonstrado anteriormente quando temos duas retas interceptadas por uma transversal, formando ângulos alternos internos congruentes, podemos dizer que  $\overleftrightarrow{Q'P} = s$  e  $s \parallel r$ .

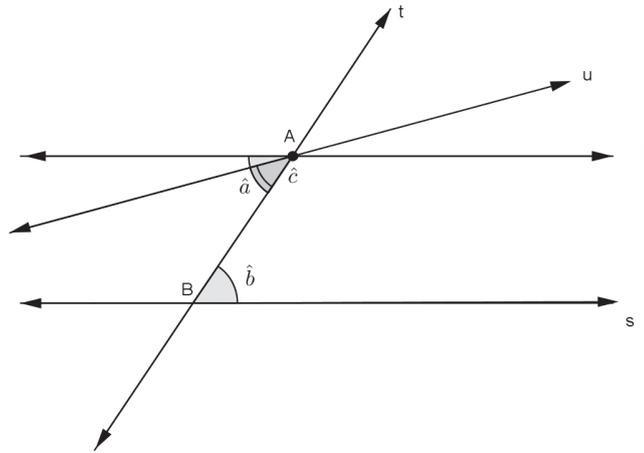


Figura 12: Ângulos Alternos Internos

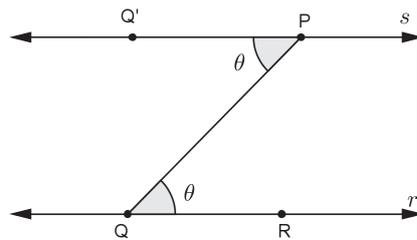
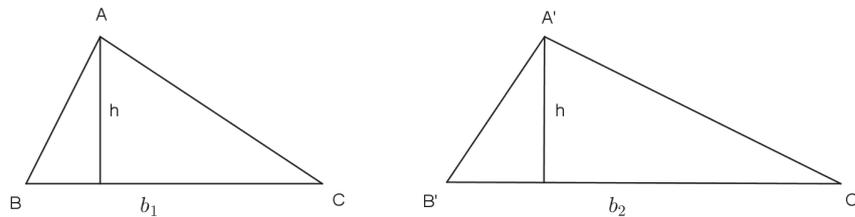


Figura 13: Retas Paralelas.

## 2.5 Teorema-Relação entre áreas e bases

O teorema que relaciona bases e áreas de triângulos que possuem a mesma altura, fundamenta a demonstração do Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade.

**Teorema 2.12.** *Se dois triângulos tem a mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual a razão de suas bases.*



*Demonstração.* Sejam os  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , de mesma altura e de bases  $b_1$  e  $b_2$  respectivamente.

Então:

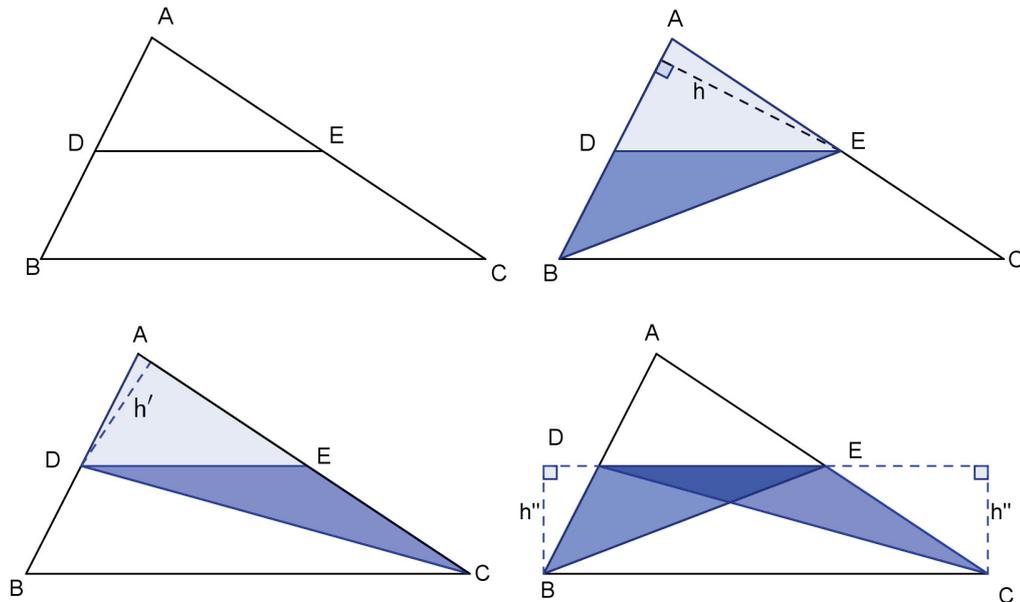
$$\frac{\text{Área}\Delta ABC}{\text{Área}\Delta A'B'C'} = \frac{\frac{b_1 \cdot h}{2}}{\frac{b_2 \cdot h}{2}} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{\text{Área}\Delta ABC}{\text{Área}\Delta A'B'C'} = \frac{b_1}{b_2}$$

□

## 2.6 Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade

**Teorema 2.13.** *Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados.*



*Demonstração.* Consideramos no  $\triangle ABC$ , que  $DE \parallel BC$ . Observamos que os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle BDE$  de bases  $\overline{AD}$  e  $\overline{BD}$  respectivamente apresentam a mesma altura e pelo teorema 2.12, temos que a razão das áreas (A) dos triângulos é igual a razão entre suas bases.

$$\frac{\text{Área}\triangle BDE}{\text{Área}\triangle ADE} = \frac{BD}{AD} \quad (2.3)$$

Analogamente:

Temos que os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle DEC$  de base  $\overline{AE}$  e  $\overline{EC}$ , respectivamente também apresentam a mesma altura. Sendo assim:

$$\frac{\text{Área}\triangle DEC}{\text{Área}\triangle ADE} = \frac{CE}{AE} \quad (2.4)$$

Mas os triângulos  $\triangle BDE$  e  $\triangle CDE$  tem a mesma base  $\overline{DE}$  e a mesma altura, porque  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$  são paralelos.

Logo:

$$\text{Área}\triangle BDE = \text{Área}\triangle CDE \quad (2.5)$$

Substituindo 2.3 e 2.4 em 2.5, obtemos:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

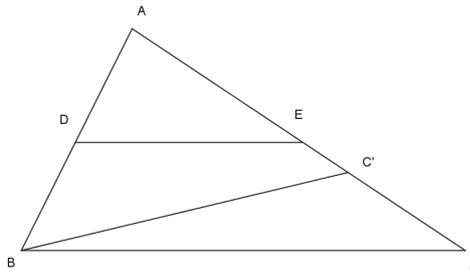
Adicionando 1 a ambos os membros da equação

$$\begin{aligned} \frac{BD}{AD} + 1 &= \frac{CE}{AE} + 1 \\ \Rightarrow \frac{BD + AD}{AD} &= \frac{CE + AE}{AE} \\ \Rightarrow \frac{AB}{AD} &= \frac{AC}{AE} \end{aligned}$$

□

### 2.6.1 Recíproco do Teorema Fundamental da Proporcionalidade

**Teorema 2.14.** *Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a estes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.*



*Demonstração.* Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , seja D e E pontos sobre  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente.

Tracemos uma reta paralela a  $\overline{DE}$ , passando por B que intercepta  $\overline{AC}$  em  $C'$  (Reta  $\overleftrightarrow{BC'}$ ).

Pelo Teorema fundamental da Proporcionalidade  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$ , mas por hipótese:  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ , segue que  $\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}$ , logo  $AC' = AC$ .

Usando o sistema de coordenadas, sejam:

- $x_a$  a coordenada de A;
- $x_{c'}$  a coordenada de  $C'$ ;
- $x_c$  a coordenada de C.

Podemos supor sem perda de generalidade que  $x_a = 0$  e  $x_c > 0$ ;  $x_{c'} > 0$ .

$$\begin{aligned} AC' &= AC \\ \Leftrightarrow |x_{c'} - 0| &= |x_c - 0| \\ \Leftrightarrow |x_{c'}| &= |x_c| \\ \Leftrightarrow x_{c'} &= x_c \Leftrightarrow C' = C \end{aligned}$$

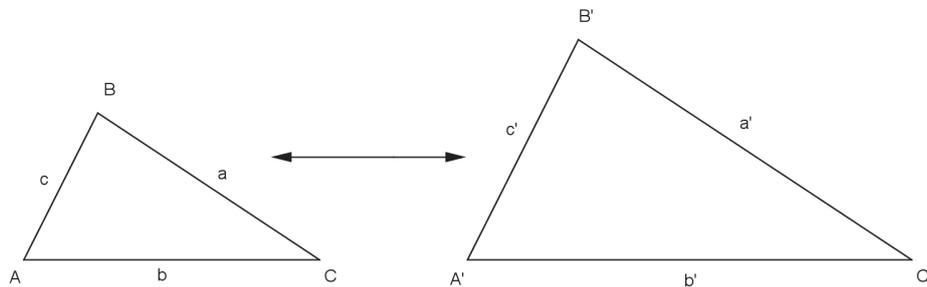
□

A seguir veremos a proporcionalidade principalmente na forma de semelhança entre triângulo que foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos tempos.

## 2.7 Teoremas Fundamentais sobre Semelhança de Triângulos

**Definição 16.** (*Semelhança de Triângulo*)

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes forem proporcionais, então a correspondência é chamada uma semelhança e os triângulos se dizem semelhantes.



Quando escrevemos  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ , queremos dizer que os triângulos são semelhantes, isto é  $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$  é uma semelhança.

Considerando  $a, b$  e  $c$  os lados opostos aos ângulos  $\widehat{A}, \widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  e  $a', b'$  e  $c'$  os lados opostos aos ângulos  $\widehat{A'}, \widehat{B'}$  e  $\widehat{C'}$  respectivamente e ainda os ângulos correspondentes congruentes, podemos escrever:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Em resumo a semelhança requer as condições:

- (1) ângulos correspondentes congruentes.
- (2) lados correspondentes proporcionais.

No caso específico dos triângulos uma das condições acima é necessária e suficiente para definir a semelhança.

A seguir apresentaremos os principais Teoremas sobre semelhança.

### 2.7.1 Teorema AAA

**Teorema 2.15.** *É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes a correspondência é uma semelhança.*

*Demonstração.* Consideremos a correspondência  $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$  entre dois triângulos. Temos por hipótese que  $\widehat{A} \cong \widehat{A'}, \widehat{B} \cong \widehat{B'}$  e  $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$  e devemos mostrar que os lados correspondentes são proporcionais, ou seja:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}. \text{ Vamos mostrar que } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

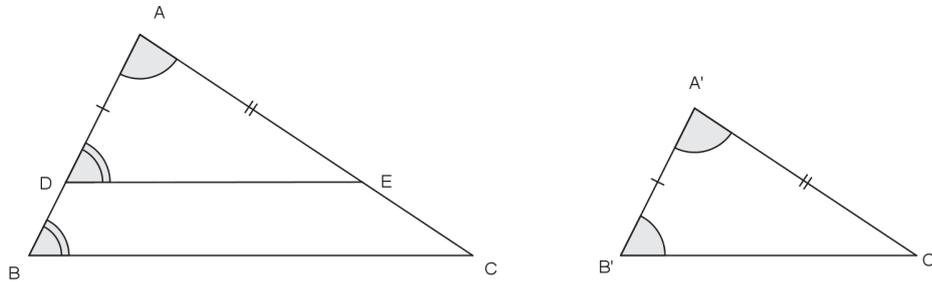


Figura 14: Caso Ângulo-Ângulo-Ângulo

Adotamos os pontos D e E sobre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente tal que  $AD = A'B'$  e  $AE = A'C'$ .

Temos pelo caso de congruência LAL que  $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ , portanto  $\widehat{ADE} \cong \widehat{B'}$ .

Como  $B' \cong \widehat{B}$  segue que  $\widehat{ADE} \cong \widehat{ABC}$ .

Consideremos:

- (1.) Se  $D = B$  então  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , temos  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$  com a constante de proporcionalidade igual a 1.
- (2.) Se D for diferente de B então  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$ , são paralelas.

Pelo teorema fundamental da proporcionalidade temos:  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$  e por construção temos que  $AD = A'B'$  segue que:

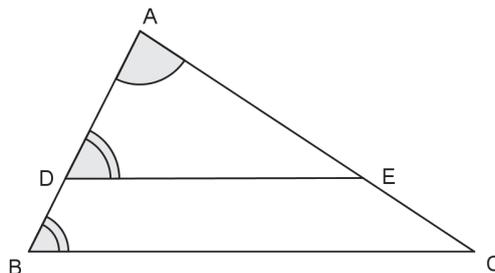
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}'$$

A demonstração da segunda igualdade segue o mesmo raciocínio anterior.

□

### 2.7.2 Corolário da Semelhança de Triângulos-Aplicação da Proporcionalidade

**Corolário 2.16.** *Se uma reta paralela a um lado do triângulo interceptar os outros dois lados distintos, então ela determina um triângulo semelhante ao triângulo dado.*



*Demonstração.* Consideremos as retas paralelas (por hipótese)  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  cortadas pela transversal  $\overleftrightarrow{AB}$ . Esta determina sobre as paralelas ângulos correspondentes congruentes. Logo  $\widehat{ADE} \cong \widehat{B}$ . Temos que  $\widehat{A}$  é ângulo comum aos dois triângulos. A soma dos ângulos internos dos triângulos nos garante que  $\widehat{AED} \cong \widehat{C}$ . Portanto  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ , pelo caso de semelhança AA.  $\square$

### 2.7.3 Teorema LAL

**Teorema 2.17.** *É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam, congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  e a correspondência  $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$ .

Por hipótese os lados correspondentes são proporcionais, isto é:  
 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$  e  $\widehat{A} = \widehat{A}'$

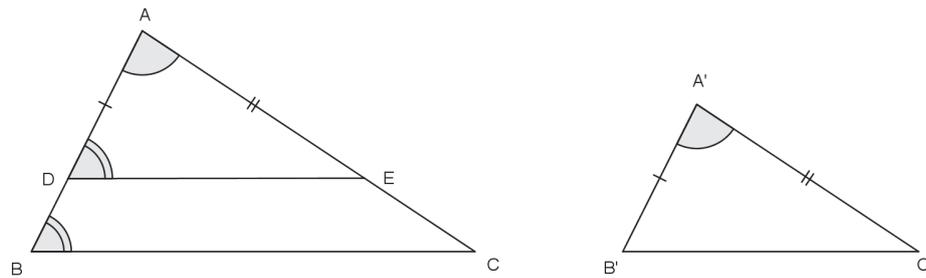


Figura 15: Caso Lado-Ângulo-Lado

Sejam D e E os pontos de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  tais que  $AD = A'B'$  e  $AE = A'C'$ . Por LAL temos  $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ . Por hipótese:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \text{ portanto } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Pelo Recíproco do Teorema Fundamental sobre proporcionalidade temos que:  $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , tendo  $\overleftrightarrow{AB}$  como transversal determinando ângulos correspondentes  $\widehat{B} \cong \widehat{ADE}$ .

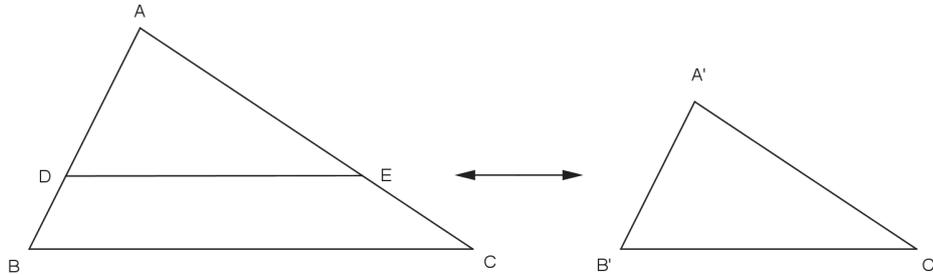
A soma dos ângulos internos do triângulo nos garante que  $\widehat{C} = \widehat{AED}$ , pois  $\widehat{A}$  é ângulo comum aos triângulos e  $\widehat{B} \cong \widehat{ADE}$ .

Portanto, se  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  e  $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ , então:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

A transitividade resulta da definição de congruência e semelhança.  $\square$

### 2.7.4 Teorema LLL

**Teorema 2.18.** *É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os lados correspondentes são proporcionais então a correspondência é uma semelhança.*



*Demonstração.* São dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  e a correspondência  $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$ .

Por hipótese temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (2.6)$$

Sejam D e E pontos de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , tais que:

$$AD = A'B' \quad e \quad AE = A'C' \quad (2.7)$$

Substituindo 2.7 em 2.6 temos:  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

Como  $\hat{A} = \hat{A}$ , temos pelo teorema LAL de semelhança que  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ , que pela definição temos:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DE = BC \cdot \frac{AD}{AB}$$

e como  $AD = A'B'$  segue

$$\Rightarrow DE = BC \cdot \frac{A'B'}{AB}$$

Como de 2.6 temos

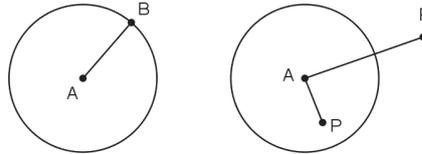
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow B'C' = BC \cdot \frac{A'B'}{AB}$$

Obtemos que  $DE = B'C'$  e de 2.7 que  $AD = A'B'$ ;  $AE = A'C'$ , logo pelo caso LLL de congruência temos  $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ .

Portanto  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  e  $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$  e pelas definições de semelhança e congruência temos;  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$   $\square$

### 3 O Círculo

**Definição 17.** *Seja  $A$  um ponto do plano e  $r$  um número real positivo. O círculo de centro  $A$  e raio  $r$  é o conjunto constituído por todos os pontos  $B$  do plano, tais que  $AB = r$*

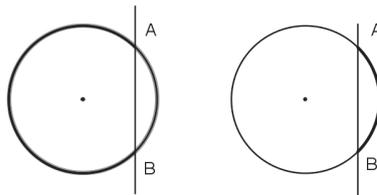


**Definição 18.** *Dizemos que todo ponto  $P$  está no interior do círculo se satisfaz a desigualdade  $AP < r$  e os que satisfazem a desigualdade  $AP > r$ , estão no exterior do círculo.*

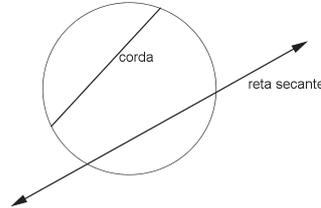
#### 3.1 Arco do Círculo

**Definição 19.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos sobre o círculo. Tracemos a reta que passa por estes dois pontos.*

*Ela separa o plano em dois semiplanos. Cada um destes semiplanos contém uma parte do círculo. Estas partes são denominadas de arcos determinados por  $A$  e  $B$  do seguinte modo: o arco que fica no mesmo semiplano que o centro do círculo é chamado de arco maior; o outro é chamado de arco menor.*



### 3.2 Corda do Círculo



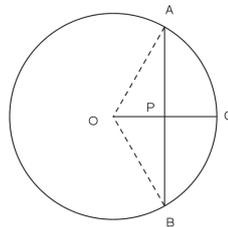
**Definição 20.** Denomina-se corda de um círculo a qualquer segmento de reta que tenha suas extremidades sobre o círculo.

**Definição 21.** Uma reta que intercepta o círculo em dois pontos é chamada de reta secante.

A corda que passa pelo centro do círculo é chamado de diâmetro (ou corda de comprimento máximo).

### 3.3 Raio perpendicular à corda.

**Proposição 3.1.** Um raio é perpendicular a uma corda (que não é o diâmetro) se e somente se a divide em dois segmentos congruentes.



*Demonstração.* Consideremos o círculo de centro  $O$  e raio  $r = \overline{OC}$  perpendicular a corda  $\overline{AB}$ . Seja  $P$  o ponto de interseção da corda com o raio.

Observamos que  $\triangle ABO$ , é isósceles com base  $\overline{AB}$ , logo  $\widehat{A} = \widehat{B}$ .

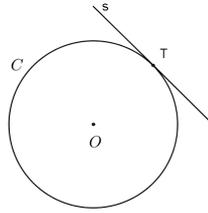
Temos ainda que  $\widehat{OPA} = \widehat{OPB}$ , por hipótese, portanto temos pelo caso de congruência  $LAA_o$  que  $\triangle AOP \cong \triangle BOP$  e que  $AP = PB$ .

Inversamente, se temos que  $AP = PB$ , pelo caso de congruência LLL, temos que  $\triangle AOP \cong \triangle BOP$ , logo  $\widehat{OPA} = \widehat{OPB}$  e como os dois ângulos são suplementares cada um deles mede  $90^\circ$ .

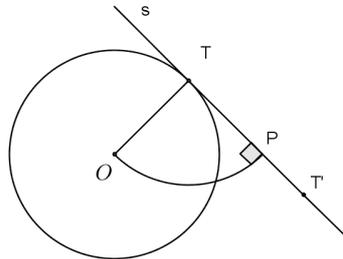
Portanto a corda é perpendicular ao raio que passa por  $P$ . □

**Definição 22.** Uma tangente a um círculo é a reta (no mesmo plano) que intercepta o círculo em um e apenas um ponto.

Esse ponto é chamada de ponto de tangência ou ponto de contato.



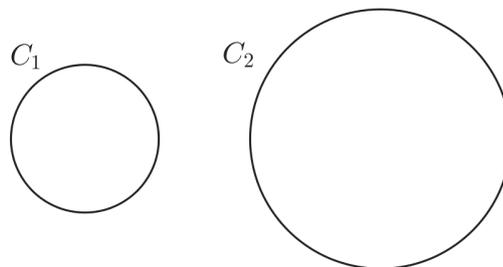
**Proposição 3.2.** *Se uma reta é tangente a um círculo, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.*



*Demonstração.* Consideramos um círculo de centro  $O$  e uma reta  $s$ , tangente ao círculo no ponto  $T$ . Seja  $P$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $O$  a reta  $s$ .

Devemos provar que  $P$  e  $T$  coincidem. Vamos supor que  $P$  e  $T$  sejam distintos. Observamos o  $\triangle OTP$ , retângulo em  $P$ , cuja hipotenusa é  $\overline{OT}$ . Segue que  $\overline{OP} < \overline{OT}$ . Como  $\overline{OT}$  é o raio, temos que  $P$  é um ponto no interior do círculo. Tomamos então, um outro ponto  $T'$  sobre a reta  $s$  tal que  $PT = PT'$ , com  $T$  e  $T'$  distintos. Pelo caso de congruência LAL temos que  $\triangle OPT \cong \triangle OPT'$ . Portanto  $OT = OT'$  e  $T'$  será outro ponto da reta  $s$  que também pertence ao círculo. Logo  $s$  não é tangente. Contradição! Assim  $P$  e  $T$  coincidem e  $\overline{OT}$  é perpendicular a  $s$ .  $\square$

**Definição 23.** *Dois círculos são chamados exteriores(ou externos) um ao outro quando todos os pontos de cada um deles estão no exterior do outro.*



### 3.4 Círculos tangentes

**Definição 24.** *Dois círculos que tem apenas um ponto em comum são ditos tangentes um ao outro e o ponto em comum é chamado ponto de tangência.*

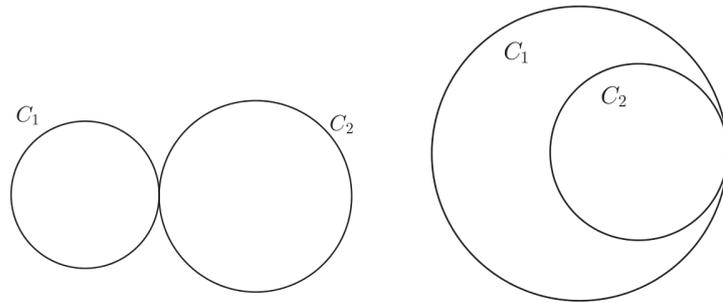
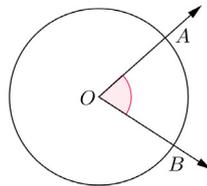


Figura 16: Círculos tangentes.

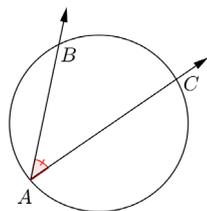
### 3.5 Ângulos Central

**Definição 25.** *Um ângulo central de um círculo é um ângulo cujo vértice é o centro do círculo.*



### 3.6 Ângulos Inscritos

Barbosa (2012,p.112), apresenta que um ângulo é chamado de inscrito quando seu vértice A é um ponto do círculo e seus lados cortam o círculo em pontos B e C distintos de A. Os pontos B e C determinam dois arcos. O arco que não tiver o ponto é chamado de arco correspondente ao ângulo inscrito. Dizemos também que o ângulo subtende o arco.



**Corolário 3.3.** *Todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco tem a mesma medida.*

*Demonstração.* Sejam o círculo  $C$  e as cordas  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$ .

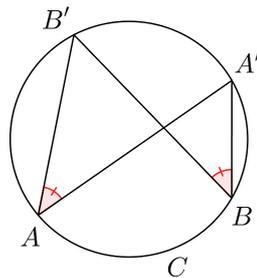
Tracemos as cordas  $\overline{AB'}$  e  $\overline{A'B}$  Temos:

$$med(\widehat{A}) = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B'A'}$$

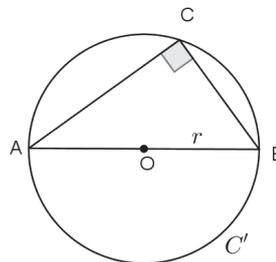
$$med(\widehat{B}) = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B'A'}$$

$$\implies med(\widehat{A}) = med(\widehat{B})$$

□



**Corolário 3.4.** *Todo ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto.*



*Demonstração.* Seja o círculo  $C'$  de raio  $r$  e centro  $O$  e as cordas  $\overline{CA}$  e  $\overline{CB}$ , de tal maneira que  $AB$  seja diâmetro do círculo.

Temos que o ângulo inscrito:

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOB}$$

Como  $\widehat{AOB} = 180^\circ$ , temos:

$$\widehat{ACB} = 90^\circ$$

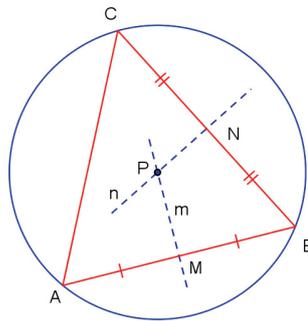
□

### 3.7 Triângulo Inscrito no Círculo

**Proposição 3.5.** *Todo triângulo está inscrito em um círculo.*

*Demonstração.* Para mostrarmos que qualquer triângulo ABC esta inscrito em um círculo, devemos mostrar que sempre existe um ponto P equidistante dos vértices A, B e C que será o centro do círculo de raio  $PA = PB = PC = r$ .

Consideremos o triângulo ABC. Traçamos as mediatrizes m, referente ao lado AB e a mediatriz n referente ao lado BC. Chamamos de P o ponto de intersecção entre as mediatrizes. Sabemos que  $P \in m$ , logo p é equidistante de A e de B, e como  $P \in n$ , P também é equidistante de B e C, logo P é equidistante de A, B e C. Portanto P é o centro do círculo de raio PA. □

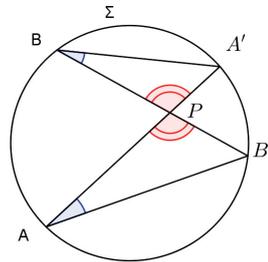


### 3.8 Potência de um Ponto em Relação a um Círculo

**Definição 26.** Seja  $C$  um círculo de centro  $O$  e raio  $R$ . Se um ponto  $P$  está a uma distância  $d$  de  $O$ , definimos a potência do ponto  $P$  em relação ao círculo  $C$  por  $Pot(P) = d^2 - R^2$

Pela definição, temos que a potência de  $P$  será um número positivo se  $P$  for exterior a  $C$ , um número negativo se  $P$  for interior a  $C$  e a potência será zero quando  $P$  pertencer a  $C$ .

**Proposição 3.6.** Seja o círculo  $\Sigma$  de centro  $O$  e duas cordas  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  se interceptam em um ponto  $P$  no interior de círculo, então  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$



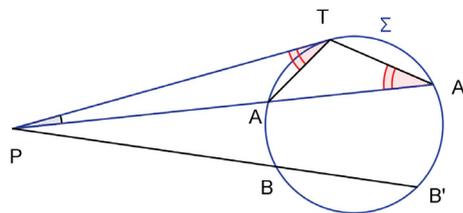
*Demonstração.* Observamos que o  $\triangle APB'$  e o  $\triangle BPA'$ , são semelhantes pelo caso AA, pois  $\widehat{APB'} = \widehat{BPA'}$  (opv) e  $\widehat{B'AA'} = \widehat{B'BA}$  (pois subentendem o mesmo arco), logo temos a proporção:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'} \Rightarrow PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$

□

**Proposição 3.7.** Seja um círculo  $\Sigma$  de centro  $O$  e se duas cordas  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  se interceptam em um ponto  $P$  no exterior ao círculo, então:

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PT^2$$

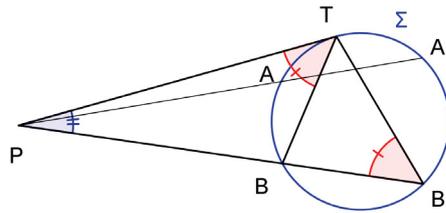


*Demonstração.* Traçando a tangente  $\overline{PT}$  a  $\Sigma$ , observamos que o  $\triangle PAT$  e o  $\triangle PTA'$ , são semelhantes pelo caso AA, pois  $\widehat{PTA} = \widehat{PA'T}$  (subentendem o mesmo arco) e  $\widehat{TPA} = \widehat{A'PT}$  (ângulo comum aos triângulos), logo temos a proporção:

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PA'} \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PA'$$

Por outro lado, na figura abaixo temos que o  $\Delta PBT$  e o  $\Delta PTB'$ , são semelhantes pelo caso AA, pois  $\widehat{PTB} = \widehat{PB'T}$  (subentendem o mesmo arco) e  $\widehat{TPB'} = \widehat{TPB}$  (ângulo comum aos triângulos), logo temos a proporção:

$$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PB'} \Rightarrow PT^2 = PB \cdot PB'$$



Portanto:

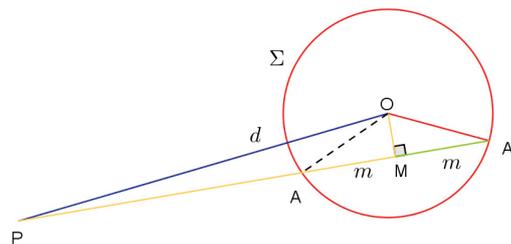
$$PA \cdot PA' = PT^2 \text{ e } PT^2 = PB \cdot PB' \Rightarrow PA \cdot PA' = PB \cdot PB' \quad \square$$

**Teorema 3.8.** São dados um círculo  $\Sigma$  e um ponto  $P$ . Se uma reta passa por  $P$  e corta  $\Sigma$  nos pontos  $A$  e  $A'$ , então o produto  $PA \cdot PA'$  é constante.

*Demonstração.* Seja  $O$  o centro do círculo  $\Sigma$ ,  $R$  o seu raio e  $P$  um ponto que não pertence a  $\Sigma$  com  $PO = d$ . Consideremos uma secante  $PA'$  e o ponto médio  $M$  de  $\overline{AA'}$  tal que  $MA = MA' = m$ .

Consideramos ainda que  $OM$  é perpendicular a  $AA'$ . Consideremos então os seguintes casos:

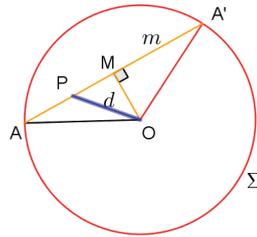
a) Se  $P$  é exterior a  $\Sigma$



$$\begin{aligned} PA \cdot PA' &= \\ \Leftrightarrow (PM - m)(PM + m) &= \\ \Leftrightarrow PM^2 - m^2 &= \\ \Leftrightarrow PM^2 + OM^2 - (m^2 + OM^2) &= \\ \Leftrightarrow PO^2 - OA'^2 &= \\ \Leftrightarrow d^2 - R^2 &= Pot_P \end{aligned}$$

b) Se P é interior.

$$\begin{aligned}
 & -PA \cdot PA' = \\
 \Leftrightarrow & -(m - PM) \cdot (m + PM) = \\
 \Leftrightarrow & -(m^2 - PM^2) = \\
 \Leftrightarrow & PM^2 - m^2 = \\
 \Leftrightarrow & PM^2 + OM^2 - (m^2 + OM^2) = \\
 \Leftrightarrow & PO^2 - OA'^2 = \Leftrightarrow d^2 - R^2 = Pot_P
 \end{aligned}$$



□

**Proposição 3.9.** O número  $Pot_{\Sigma}(P) = \overline{OP}^2 - R^2$ , tem a seguinte s propriedades:

- i.  $Pot_{\Sigma}(P) = 0 \Leftrightarrow P \in \Sigma$
- ii.  $Pot_{\Sigma}(P) > 0 \Leftrightarrow P$  esta no exterior do círculo  $\Sigma$
- iii.  $Pot_{\Sigma}(P) < 0 \Leftrightarrow P$  esta no interior do círculo  $\Sigma$

*Demonstração.* De fato :

- i  $Pot_{\Sigma}(P) = 0 \Leftrightarrow OP^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow OP^2 = R^2 \Leftrightarrow OP = R$ , portanto  $P \in \Sigma$
- ii  $Pot_{\Sigma}(P) > 0 \Leftrightarrow OP^2 - R^2 > 0 \Leftrightarrow OP^2 > R^2 \Leftrightarrow OP > R$ , portanto P esta no exterior do círculo
- iii  $Pot_{\Sigma}(P) < 0 \Leftrightarrow OP^2 - R^2 < 0 \Leftrightarrow OP^2 < R^2 \Leftrightarrow OP < R$ , portanto P esta no interior do círculo.

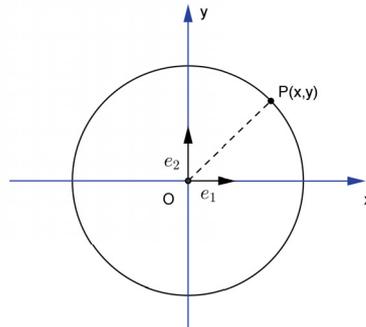
□

### 3.9 Círculo em um Plano Cartesiano.

Seja  $\pi$  o plano euclidiano e adotemos um sistema de coordenadas ortogonais  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  onde  $O$  é a origem do plano e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  é a base ortonormal.

Seja  $P \in \pi$ ;  $P = (x, y)$

**Definição 27.** O círculo de centro  $O=(0,0)$  e raio  $r = OP$  é o conjunto dado por  $C = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(O, P) = r\}$ .



Seja  $P = (x, y) \in C$ . Isto é:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

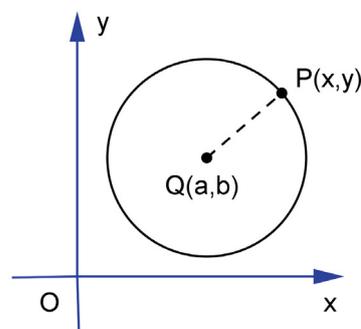
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Equação do círculo de centro na origem  $O(0,0)$  e raio  $r$ .

Analogamente, o círculo de centro  $Q = (a, b)$  e raio  $r > 0$  é o conjunto:  
 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / QP = r\}$   
 ou seja:

$$QP = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



**Teorema 3.10.** *O gráfico da equação  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  é: (1)um círculo, (2)um ponto ou (3)o conjunto vazio.*

*Demonstração.* Consideremos a equação  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , que completando quadrados obtemos:

$$x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0$$

$$x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

Sendo assim existem três possibilidades:

**i** Se  $\frac{A^2+B^2-4C}{4} > 0$ , então existe  $r > 0$  tal que  $r^2 = \frac{A^2+B^2-4C}{4}$ , ou seja:

$$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$$

Portanto a equação representa um círculo de centro  $(a, b) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  e raio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

**ii** Se  $\frac{A^2+B^2-4C}{4} = 0$ , isto é, se  $\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = -\left(y + \frac{B}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right) = -\left(y + \frac{B}{2}\right) = 0$$

$$x = -\frac{A}{2} \quad e \quad y = -\frac{B}{2}$$

Isto é, a equação representa um ponto  $(x, y) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

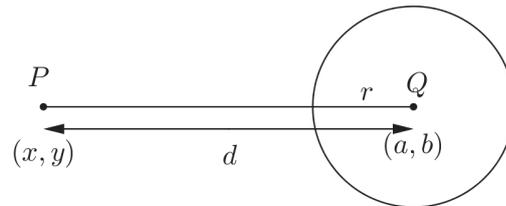
**iii** Se  $\frac{A^2+B^2-4C}{4} < 0$  então,  $\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 < 0$ , o que é um absurdo. Logo a equação representa o conjunto vazio.

□

### 3.10 Círculo-Lugar Geométrico de Potência Nula

Seja  $d$  a distância entre dois pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (a, b)$ :

$$d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$



Assim, a potência de  $P = (x, y)$  em relação ao círculo de centro  $Q = (a, b)$  e raio  $r$  é por definição:

$$d^2 - r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$$

Em particular se  $d^2 - r^2 = 0$  (potência zero) temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Sendo assim o círculo é o lugar geométrico dos pontos  $(x, y)$  de potência zero.

Consideremos o círculo  $C$  expresso na forma:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

onde  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

A potência de um ponto arbitrário  $P = (x, y)$ , pode ser expresso por:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

Consideremos ainda um outro círculo  $C'$  de centro  $(a', b')$  de equação:

$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$$

Seja  $a' \neq a$  ou  $b' \neq b$  ou ambos.

Assim, o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$ , que possuem a mesma potência em relação aos círculos  $C$  e  $C'$ , deve satisfazer a equação:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c'$$

$$\Leftrightarrow -2ax - 2by + c = -2a'x - 2b'y + c'$$

$$\Leftrightarrow -2ax + 2a'x - 2by + 2b'y = c' - c$$

$$\Leftrightarrow 2(a' - a)x + 2(b' - b)y = c' - c$$

$$\Leftrightarrow (a' - a)x + (b' - b)y = \frac{1}{2}(c' - c)$$

Podemos supor sem perda de generalidade que  $b = b' = 0$  (isto é, os centros dos círculos  $C$  e  $C'$ , estão sobre o eixo dos  $x$ ).

Logo  $(a' - a)x = \frac{1}{2}(c' - c)$ , para  $a' \neq a$  temos:

$$x = \frac{1}{2} \frac{(c' - c)}{a' - a}$$

A equação acima representa uma reta paralela ao eixo  $y$  e portanto, perpendicular ao eixo dos  $x$ .

Neste caso, os círculos não-concêntricos  $C$  e  $C'$  tem a forma:

$$C : x^2 + y^2 - 2ax + c = 0$$

$$C' : x^2 + y^2 - 2a'x + c' = 0$$

e o "locus" é  $x = 0$ .

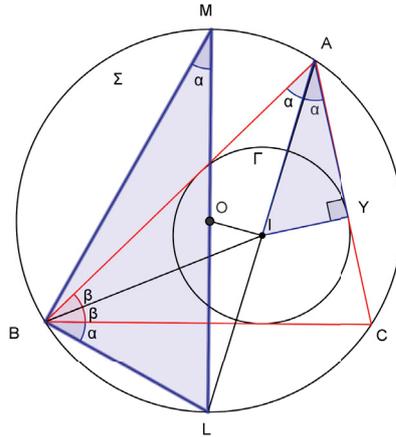
Reciprocamente, todo ponto  $(0, y)$  na reta  $x = 0$  tem a mesma potência  $y^2 + c$  em relação a  $C$  e  $C'$ .

Portanto o "locus" de todos os pontos cuja potência em relação a dois círculos não-concêntricos é uma reta perpendicular à reta que une os centros dos dois círculos.

A seguir veremos um importante Teorema, que nos permite calcular a distância entre dois pontos notáveis do triângulo.

### 3.11 Teorema de Euler

**Teorema 3.11.** *Sejam  $O$  e  $I$  o Circuncentro e o Incentro respectivamente, de um triângulo  $\Delta ABC$  inscrito e circunscrito em um círculo de raio  $R$  e  $r$ , respectivamente. Seja  $d$  a distância  $\overline{OI}$ . Então tem-se:  $d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R$*



*Demonstração.* Seja  $\Sigma$  o círculo circunscrito e  $\Gamma$  o círculo inscrito ao  $\Delta ABC$ .

Traçamos a bissetriz interna do ângulo  $\hat{A}$  de maneira que intercepte a circunferência  $\Sigma$  em L, sendo o mesmo o ponto médio do arco BC, que não contem A.

Seja, LM o diâmetro do círculo  $\Sigma$ , perpendicular a  $\overline{BC}$ ;  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \hat{A}$  e  $\beta = \frac{1}{2} \cdot \hat{B}$

Observemos que  $med(\widehat{BML}) = med(\widehat{BAL}) = \alpha$ ,  $med(\widehat{LBC}) = med(\widehat{LAC}) = \alpha$

O ângulo externo  $\widehat{BIL}$  do  $\Delta ABI$  em I mede  $\alpha + \beta$  que é igual a  $med(\widehat{LBI})$ , logo  $\Delta LBI$  é isósceles de base  $\overline{BI}$ , portanto  $\overline{LI} = \overline{LB}$ .

Calculando a potência do ponto I em relação ao círculo  $\Sigma$  temos:

$$R^2 - d^2 = \overline{LI} \cdot \overline{IA} = \overline{LB} \cdot \overline{IA} \Rightarrow R^2 - d^2 = \overline{LB} \cdot \overline{IA} \quad (3.1)$$

Onde R é o raio da circunferência circunscrita e  $d = \overline{OI}$

Seja O o Circuncentro, I o Incentro do  $\Delta ABC$  e Y o pé da perpendicular de I sobre  $\overline{AC}$ . Se  $\Delta LBM$  é semelhante ao  $\Delta IYA$  pelo caso AA então:

$$\frac{\overline{LB}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{IY}}{\overline{IA}} \Leftrightarrow \overline{LB} = \frac{\overline{IY} \cdot \overline{LM}}{\overline{IA}} \quad (3.2)$$

Substituindo 3.2 em 3.1 temos:

$$R^2 - d^2 = \overline{LB} \cdot \overline{IA} \Leftrightarrow R^2 - d^2 = \frac{\overline{IY} \cdot \overline{LM}}{\overline{IA}} \cdot \overline{IA}$$

$$\Leftrightarrow R^2 - d^2 = IY \cdot LM$$

, sendo  $IY = r$  (raio da circunferência inscrita no  $\Delta ABC$ ) e  $LM = 2 \cdot R$

$$\Rightarrow R^2 - d^2 = 2 \cdot r \cdot R$$

$$\Rightarrow d^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot r$$

□

### 3.12 Eixo Radical de dois Círculos

**Definição 28.** *Sejam os círculos  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . O lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $POT_{\Sigma_1}(P) = POT_{\Sigma_2}(P)$  é chamado de Eixo Radical.*

**Teorema 3.12.** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  dois círculos não-concêntricos, então o lugar geométrico (Locus) dos pontos do plano tais que  $POT_{\Sigma_1}(P) = POT_{\Sigma_2}(P)$  é uma reta perpendicular à reta que une os centros de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$*

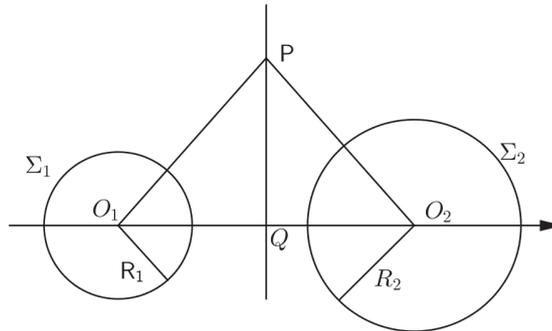


Figura 17: Eixo Radical

*Demonstração.* Suponhamos que  $P$  pertence ao eixo radical dos círculos, com  $R_1$  e  $R_2$  raios dos círculos  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  respectivamente, isto é:

$$POT_{\Sigma_1}(P) = POT_{\Sigma_2}(P)$$

$$PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$$

Seja  $Q$  o pé da perpendicular de  $P$  em  $\overline{O_1O_2}$ . Subtraindo  $PQ^2$  de ambos os membros da igualdade temos

$$PO_1^2 - R_1^2 - PQ^2 = PO_2^2 - R_2^2 - PQ^2 \quad (3.3)$$

Como:

$$PO_1^2 = PQ^2 + O_1Q^2 \quad e \quad PO_2^2 = PQ^2 + O_2Q^2 \quad (3.4)$$

Substituindo 3.4 em 3.3 temos:

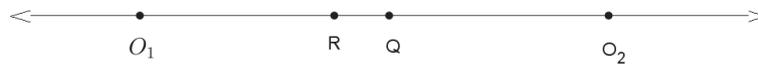
$$O_1Q^2 - R_1^2 = O_2Q^2 - R_2^2$$

$$O_1Q^2 - O_2Q^2 = R_1^2 - R_2^2$$

$$(O_1Q + O_2Q) \cdot (O_1Q - O_2Q) = R_1^2 - R_2^2$$

$$O_1Q - O_2Q = \frac{R_1^2 - R_2^2}{O_1Q + O_2Q} \quad (3.5)$$

Observamos que existe um único ponto Q em  $\overline{O_1O_2}$  que satisfaz 3.5



De fato:

Suponhamos por absurdo que exista um ponto R que também satisfaça 3.5.

$$O_1Q - O_2Q = O_1R - O_2R$$

$$\Leftrightarrow (O_1R + RQ) - O_2Q = O_1R - (RQ + QO_2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot RQ = 0$$

$$\Leftrightarrow RQ = 0$$

$$\Leftrightarrow Q = R$$

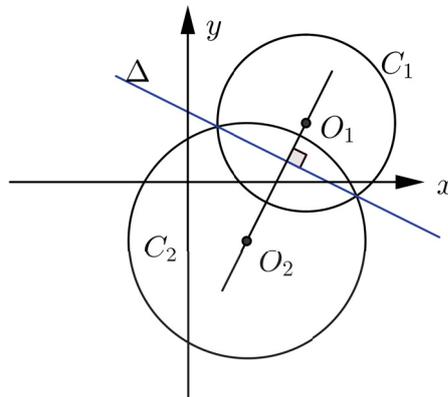
Portanto P está no eixo radical de dois círculos que é perpendicular a reta que une os centros de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  □

**Exemplo 1.** Dadas as equações dos círculos:

$$C_1 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \quad (3.6)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0 \quad (3.7)$$

Vamos calcular a equação do eixo radical de  $C_1$  e  $C_2$  e mostrar que o eixo radical é perpendicular a reta que une os centros dos círculos.



Para que se encontre a equação do eixo radical basta multiplicarmos a equação 3.6 por  $(-1)$  e adicionarmos a equação 3.7, de onde obtemos a equação da reta  $4x + 8y - 19 = 0$ , com coeficiente angular igual a  $\frac{-1}{2}$ .

A equação do círculo  $C_1$ , nos fornece o centro  $(4, 2)$ , enquanto  $C_2$ , nos fornece o centro  $(2, -2)$ , de onde obtemos o coeficiente da reta que passa pelos dois centros calculando  $\frac{-2-2}{2-4} = 2$ , que é o inverso negativo do coeficiente do eixo radical. Logo são perpendiculares.

Portanto o eixo radical é perpendicular a reta que une os centros dos círculos.

**Exemplo 2.** Calculemos a equação do círculo de raio  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ , que passe pela interseção dos círculos  $C_1$  e  $C_2$ , de equações:

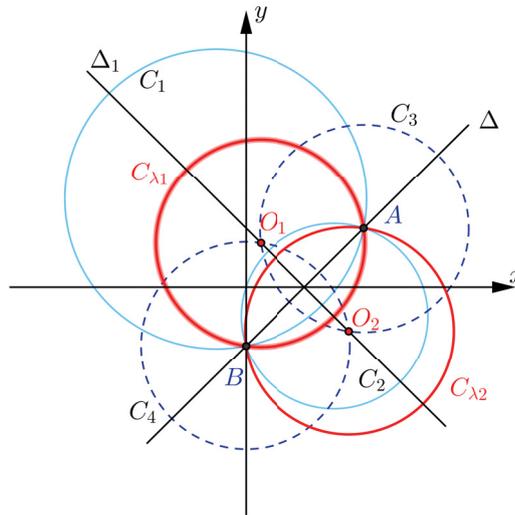
$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0 \quad (3.8)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \quad (3.9)$$

Os pontos  $A$  e  $B$  de interseção entre  $C_1$  e  $C_2$ , pertencem ao eixo radical  $\Delta : x - y - 2 = 0$ , que obtemos da multiplicação da equação 3.9 por  $(-1)$  adicionado a equação 3.8.  $A$  e  $B$  são a interseção do eixo radical com qualquer um dos círculos. Substituindo a equação do eixo radical  $\Delta$  em  $C_1$ , encontramos  $A=(4,2)$  e  $B=(0,-2)$ .

Como buscamos o(s) ponto(s) que distam  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  de  $A$  e  $B$ , traçamos por estes dois pontos, os círculos de raio  $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

$$C_3 : 2x^2 + 2y^2 - 16x - 8y + 15 = 0$$



$$C_4 : 2x^2 + 2y^2 + 8y - 17 = 0$$

Sabemos que  $C_3 \cap C_4$ , nos fornece o eixo radical:

$\Delta_1 : x + y - 2 = 0$  e a intersecção de  $\Delta_1$  com  $C_4$  nos fornece:

$O_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  e  $O_2 = (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$  dos círculos procurados de onde obtemos as equação:

$$C_{\lambda_1} : x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$$

$$C_{\lambda_2} : x^2 + y^2 - 7x + 3y + 2 = 0$$

### 3.12.1 Eixo Radical de dois círculos Tangentes:

Sejam os círculos tangentes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , de raios respectivamente  $r$  e  $r'$ ,  $d = \overline{PO_1}$  e  $d' = \overline{PO_2}$

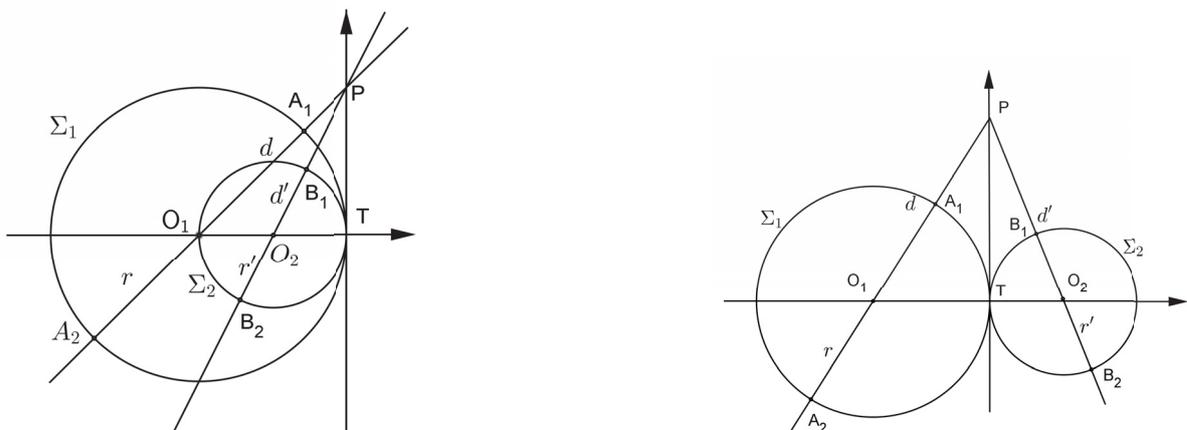


Figura 18: Círculos Tangentes internos e externos

Temos:

$$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PT}^2 \quad e \quad \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2} = \overline{PT}^2$$

Logo:

$$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2} = \overline{PT}^2$$

$$(d - r) \cdot (d + r) = (d' - r') \cdot (d' + r') = \overline{PT}^2$$

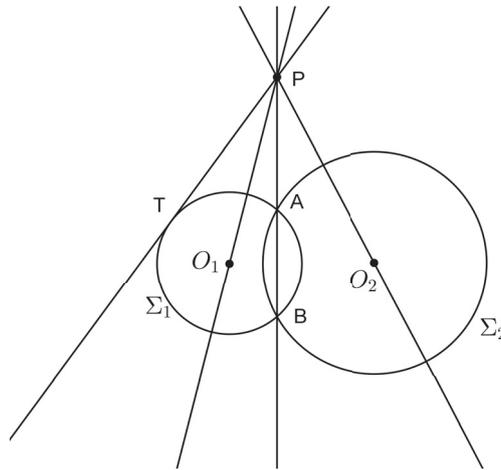
$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2 = \overline{PT}^2$$

$$POT_{\Sigma_1}(P) = POT_{\Sigma_2}(P) = \overline{PT}^2$$

PT é o eixo radical de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$

### 3.12.2 Eixo Radical de dois círculos Secante:

Sejam os círculos secantes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , de raios respectivamente  $r_1$  e  $r_2$ .



$$\Sigma_1 \Rightarrow POT_{\Sigma_1}(P) = \overline{PO_1}^2 - r_1^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

$$\Sigma_2 \Rightarrow POT_{\Sigma_2}(P) = \overline{PO_2}^2 - r_2^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

$$POT_{\Sigma_1}(P) = POT_{\Sigma_2}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

PB é o eixo radical de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$

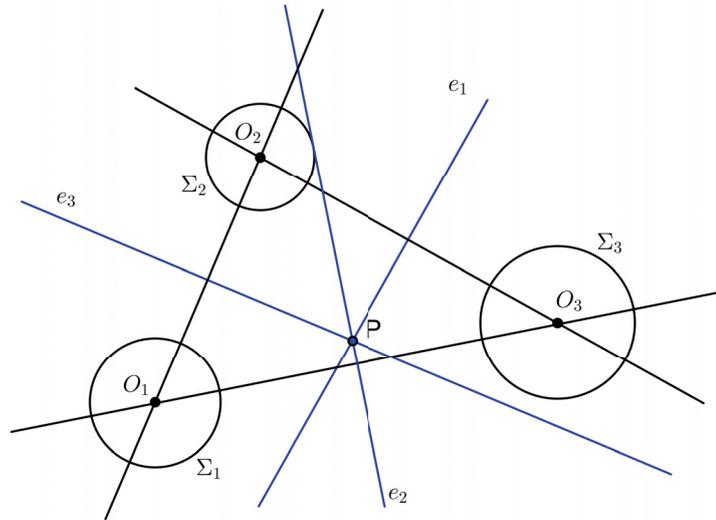
### 3.12.3 Centro Radical

**Teorema 3.13.** *Se os centros dos três círculos formam um triângulo, então existe apenas um ponto cuja potência em relação aos três círculos são iguais.*

*Demonstração.* Sejam dados três círculos  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_3$  não concêntricos de centros  $O_1, O_2$  e  $O_3$  respectivamente;  $e_1, e_2$  e  $e_3$ , os eixos radicais de  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_3$ ;  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_3$  e  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  respectivamente.

$$\text{Temos que } \overline{O_2O_3} \perp e_1, \overline{O_1O_3} \perp e_2 \text{ e } \overline{O_1O_2} \perp e_3$$

Logo se duas destas retas são paralelas (suponhamos sem perda de generalidade  $e_1 \parallel e_2$ ), então  $\overline{O_2O_3} \parallel \overline{O_1O_3} \Rightarrow O_1, O_2$  e  $O_3$  são colineares, logo  $e_3$  também é paralela a  $e_2$  e a  $e_1$ .



Se  $e_1, e_2$  e  $e_3$  são duas a duas concorrentes.

Seja  $P = e_1 \cap e_2$  então  $Pot_{\Sigma_2}(P) = Pot_{\Sigma_3}(P)$  e  $Pot_{\Sigma_1}(P) = Pot_{\Sigma_3}(P)$ , segue por transitividade que  $Pot_{\Sigma_1}(P) = Pot_{\Sigma_2}(P) = Pot_{\Sigma_3}(P)$ , logo  $P \in e_3$ , portanto  $e_1, e_2$  e  $e_3$  são concorrentes. Como três retas não-paralelas se intersectam em no máximo um ponto,  $P$  é único.

$P$  é chamado *Centro Radical*. □

**Exemplo 3.** Seja dados os círculos  $C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ ,  
 $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  e  $C_3 : x^2 + y^2 + 2x + 12y + 36 = 0$ , devemos encontrar o centro radical dos três círculos, caso exista.

Se multiplicarmos a equação  $C_2$  por  $(-1)$ , e adicionarmos a  $C_1$ , encontramos a equação do eixo radical  $e_1 : 6x - 2y - 6 = 0$ .

Ao multiplicarmos a equação  $C_3$  por  $(-1)$  e adicionarmos a  $C_1$ , encontramos a equação do eixo radical  $e_2 : -16y - 42 = 0$ , e  $y = \frac{-21}{8}$  que substituindo na equação de  $e_1$  obtemos  $x = \frac{1}{8}$ .

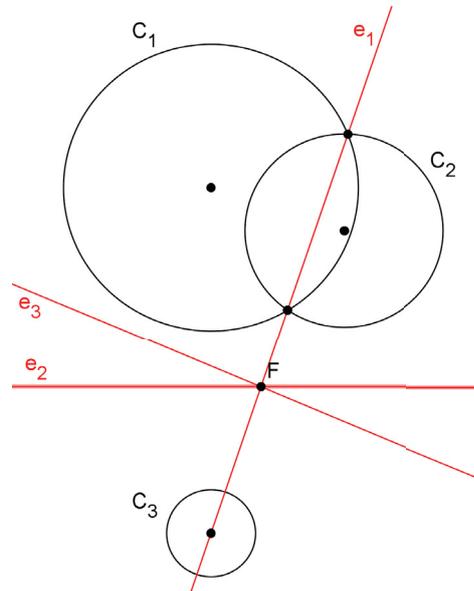
Temos que  $e_1 \cap e_2$  será  $C = (\frac{1}{8}, \frac{-21}{8})$ , cujas coordenadas satisfazem:

$e_3 : -6x - 14y - 36 = 0$ , que obtemos ao multiplicar  $C_3$  por  $(-1)$  e somarmos a  $C_2$ .

Logo o centro radical de  $C_1, C_2$  e  $C_3$  é o ponto  $C = (\frac{1}{8}, \frac{-21}{8})$

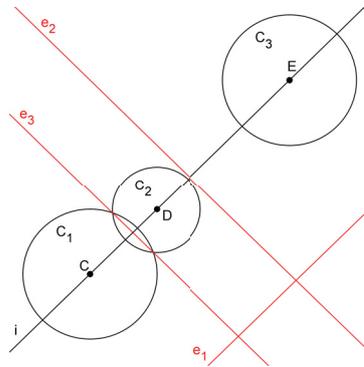
**Exemplo 4.** Seja dados os círculos:  $C_1 : x^2 + y^2 + 10x + 2y + 17 = 0$ ,  
 $C_2 : x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$  e  $C_3 : x^2 + y^2 - 8x - 16y + 71 = 0$ , encontremos o centro radical dos três círculos, caso exista.

Se multiplicarmos a equação  $C_3$  por  $(-1)$ , e adicionarmos a  $C_2$ , encontramos a equação do eixo radical  $e_1 : 12x + 12y - 67 = 0$ , que é uma reta com coeficiente angular  $m_1 = -1$



Ao multiplicarmos a equação  $C_3$  por  $(-1)$  e adicionarmos a  $C_1$ , encontramos a equação do eixo radical  $e_2$ :  $18x + 18y - 54 = 0$ , que é uma reta com coeficiente angular  $m_2 = -1$

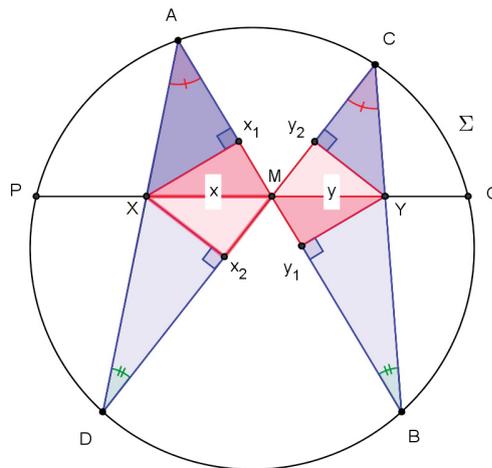
Temos que  $e_1 \parallel e_2$ , logo os centros dos círculos são colineares, portanto:  
 $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = \{ \}$  e não existe centro radical.



### 3.13 Teorema da Borboleta

Coxeter (1967,p.45), apresenta o teorema abaixo como Teorema da Borboleta, em função da sua representação geométrica:

**Teorema 3.14.** *Seja  $M$  o ponto médio de uma corda  $\overline{PQ}$  do círculo  $\Sigma$  e as cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  dadas; as cordas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  interceptam em  $\overline{PQ}$  nos pontos  $X$  e  $Y$ . Então  $M$  é o ponto médio de  $\overline{XY}$ .*



*Demonstração.* Sejam  $M$  o ponto médio da corda  $\overline{PQ}$ , as cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  dadas. Traçemos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  cordas que interceptam  $\overline{PQ}$  nos pontos  $X$  e  $Y$ .

Temos  $\widehat{DAB} \cong \widehat{DCB}$  (ângulos inscritos que subentendem o mesmo arco  $DB$ ) e  $\widehat{ADC} \cong \widehat{ABC}$  (ângulos inscritos que subentendem o mesmo arco  $AC$ ).

Traçemos as perpendiculares  $x_1$  e  $x_2$ , traçadas de  $X$  sobre  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  respectivamente  $y_1$  e  $y_2$  traçadas de  $Y$  sobre  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

Chamemos de  $X_1$  e  $X_2$ , os pés das perpendiculares  $x_1$  e  $x_2$  e  $Y_1$  e  $Y_2$ , os pés das perpendiculares  $y_1$  e  $y_2$ .

Convencionamos  $\overline{PM} = \overline{MQ} = a$   $x = \overline{XM}$  e  $y = \overline{MY}$

Observamos os pares de triângulos semelhantes, pelo caso de semelhança AA

i.  $\triangle AX_1X \sim \triangle CY_2Y$ , pois tem  $\widehat{XAX_1} \cong \widehat{YCY_2}$  e  $\widehat{AX_1X} \cong \widehat{CY_2Y}$ .

Desta semelhança obtemos a razão:

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY} \quad (3.10)$$

ii.  $\triangle DX X_2 \sim \triangle B Y Y_1$ , pois tem  $\widehat{X D X_2} \cong \widehat{Y B Y_1}$  e  $\widehat{X X_2 D} \cong \widehat{Y Y_1 B}$ .

Desta semelhança obtemos a razão:

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{DX}{BY} \quad (3.11)$$

iii.  $\triangle X X_1 M \sim \triangle Y Y_1 M$ , pois tem  $\widehat{X_1 M X} \cong \widehat{Y_1 M Y}$  e  $\widehat{X X_1 M} \cong \widehat{Y Y_1 M}$ .

Desta semelhança obtemos a razão:

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \quad (3.12)$$

iv.  $\triangle M X_1 X \sim \triangle M Y_2 Y$ , pois tem  $\widehat{X M X_2} \cong \widehat{Y M Y_2}$  e  $\widehat{X X_2 M} \cong \widehat{Y Y_2 M}$ .

Desta semelhança obtemos a razão:

$$\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2} \quad (3.13)$$

Se multiplicarmos 3.10 por 3.11, temos:

$$\frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{x_2}{y_1} = \frac{AX}{CY} \cdot \frac{XD}{YB}$$

Da substituição de 3.12 e 3.13, segue:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{AX}{CY} \cdot \frac{XD}{YB} \\ \Leftrightarrow \frac{AX \cdot XD}{CY \cdot YB} &= \frac{PX \cdot XQ}{QY \cdot YP} \\ \Leftrightarrow \frac{PX \cdot XQ}{QY \cdot YP} &= \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{(a+y) \cdot (a-y)} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} &= \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{(a+y) \cdot (a-y)} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} &= \frac{(a^2 - x^2)}{(a^2 - y^2)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 - x^2y^2 = a^2y^2 - x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

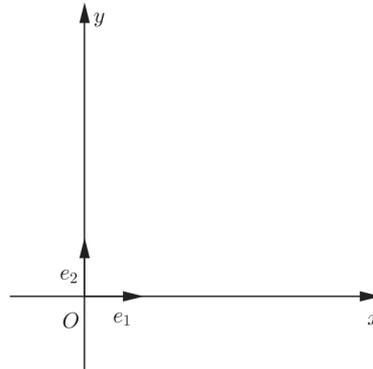
$$\Leftrightarrow x = y$$

□

## 4 Famílias de Círculos

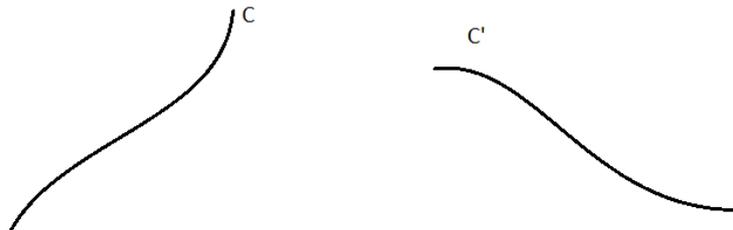
**Definição 29.** *Chama-se família de círculos todo conjunto de círculos que admitem o mesmo eixo radical.*

Adotamos um sistema de coordenadas ortogonais  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  para o plano, onde  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  e  $O = (0, 0)$  é a origem do sistema.



Sejam duas curvas  $C$  e  $C'$  dadas pelas equações:

$$\begin{cases} C : f(x,y)=0 \\ C' : g(x,y)=0 \end{cases}$$



Observamos que:

- i.  $\alpha \cdot f(x, y) = 0$ ;  $\forall \alpha \neq 0$  representa a curva  $C$ .
- ii.  $\beta \cdot g(x, y) = 0$ ;  $\forall \beta \neq 0$  representa a curva  $C'$ .

Agora consideramos a família de curvas planas  $\emptyset$ , de base  $(C, C')$ , dada por:

$$\emptyset : \alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y) = 0$$

Observamos que:

1. Se  $\alpha = 0$ , então  $\beta \cdot g(x, y) = 0$ , e para  $\beta \neq 0$  temos  $\beta \cdot g(x, y)$ , que representa a curva  $C'$
2. Se  $\beta = 0$ , então  $\alpha \cdot f(x, y) = 0$ , que para  $\alpha \neq 0$  temos  $\alpha \cdot f(x, y)$ , que representa a curva  $C$ .

Portanto as curvas  $C$  e  $C'$  pertencem a família de curvas planas  $\phi$ .

3. Se  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ , então
 
$$\begin{aligned} \alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y) &= 0 \\ \Rightarrow f(x, y) + \frac{\beta}{\alpha} \cdot g(x, y) &= 0 \\ \Rightarrow f(x, y) + \lambda g(x, y) &= 0; \text{ onde } \lambda = \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Que é a **Equação da Família Linear de Curvas Planas** de base  $(C, C')$ , sendo  $\lambda$  um parâmetro real.

Observamos que para  $\lambda = 0$ , obtemos a curva  $C$ .

Seja  $A = (x_A, y_A)$  tal que  $A \in C \cap C'$ . Logo  $f(x_A, y_A) = g(x_A, y_A) = 0$  e por conseguinte temos:

$\alpha \cdot f(x_A, y_A) + \beta \cdot g(x_A, y_A) = 0$  que significa que as curvas de uma família linear passam pelos pontos de intersecção das duas curvas de base.

**Exemplo 5.** *Sejam dadas as equações das retas:*

$$\begin{cases} D: & ux + vy + r = 0 \\ D': & u'x + v'y + r' = 0 \end{cases}$$

A equação da família linear de base  $(D, D')$  é:

$$(ux + vy + r) + \lambda(u'x + v'y + r') = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + \lambda u')x + (v + \lambda v')y + (r + \lambda r') = 0$$

**Exemplo 6.** *Sejam dadas as equações das retas:*

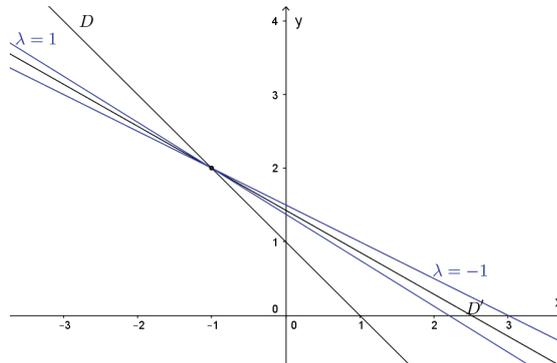
$$\begin{cases} D: & x + y - 1 = 0 \\ D': & 4x + 7y - 10 = 0 \end{cases}$$

A equação da família linear de base  $(D, D')$  é:

$$(x + y - 1) + \lambda(4x + 7y - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + 4\lambda)x + (1 + 7\lambda)y + (-1 - 10\lambda) = 0$$

que são todas as retas que passam pelo ponto  $(-1, 2)$ , que é o ponto de intersecção entre  $D$  e  $D'$ .



**Exemplo 7.** *Sejam*

$$C : x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$C' : (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

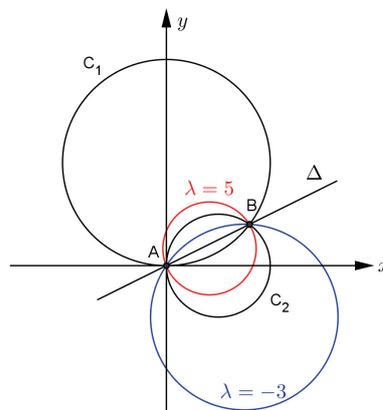
A equação da família linear de base  $(C; C')$  é:

$$(x^2 + y^2 - 4y) + \lambda(x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \lambda)(x^2 + y^2) - 2\lambda x - 4y = 0$$

As curvas da família de base  $(C, C')$  são círculos com intersecção nos pontos:  $A = (0, 0)$  e  $B = (\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$ .

Fazendo  $\lambda = -1$  temos  $2x - 4y = 0$  que é a equação do eixo radical, que pertence a família de círculos de base  $(C, C')$ .



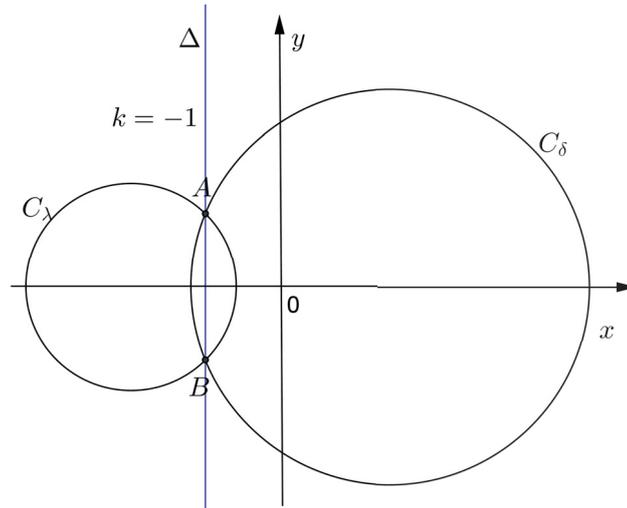
**Exemplo 8.** *Consideremos as equações dos círculos:*

$$C_\lambda : x^2 + y^2 + 8x + 8 = 0$$

$$C_\delta : x^2 + y^2 - 6x - 20 = 0$$

Temos que os dois círculos se interceptam nos pontos  $A=(-2,2)$  e  $B=(-2,-2)$  e a equação da família de círculos que tem como base os dois círculos acima será:

$(1+k)(x^2+y^2) + (8-6k)x + (8-20k) = 0$ , de onde obtemos, para  $k=-1$ , o eixo radical  $x=-2$ .



**Exemplo 9.** *Sejam:*

$$C_1 : x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - x - 6y + 3 = 0$$

Consideramos  $C_1$  e  $C_2$ , base desta família de círculo. Vamos calcular a equação do círculo que pertence a esta família e que possui centro sobre a reta  $r : x - y - 2 = 0$ .

Sabe-se que a equação que se busca pertence a família:

$$\mathcal{F} : (x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31) + \lambda(x^2 + y^2 - x - 6y + 3) = 0 \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \lambda)(x^2 + y^2) + (7 - \lambda)x - (10 + 6\lambda)y + (31 + 3\lambda) = 0$$

O centro de qualquer círculo que pertence a esta família tem coordenadas :

$$P = \left( \frac{\lambda - 7}{2(1 + \lambda)}, \frac{3\lambda + 5}{1 + \lambda} \right)$$

Como esta coordenada deve satisfazer a equação da reta  $r$ , temos:

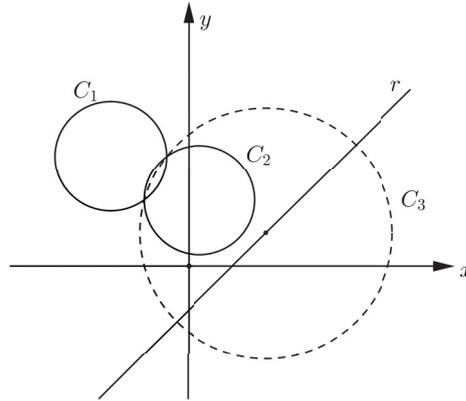
$$\frac{\lambda - 7}{2(1 + \lambda)} - \frac{3\lambda + 5}{1 + \lambda} - 2 = 0$$

de onde obtemos

$$\lambda = -\frac{7}{3}$$

e substituindo na equação 4.1 , obtemos a equação do círculo  $C_3$  procurado.

$$C_3 : x^2 + y^2 - 7x - 3y - 18 = 0$$



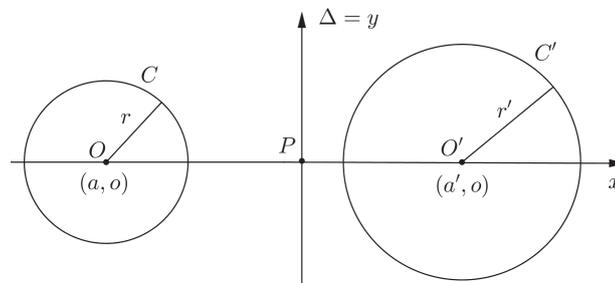
## 4.1 Famílias Linear de curvas Planas

Consideramos os círculos  $C : f(x, y) = 0$  e  $C' : g(x, y)$  de centros  $O$  e  $O'$  e eixo radical  $\Delta$ .

Sabemos que a equação da Família Linear de Curvas Planas se escreve na forma:  
 $f(x, y) + \lambda g(x, y)$

Consideramos ainda que:

- 1) O eixo x é eixo suporte de  $OO'$
- 2) Y é eixo suporte de  $\Delta$
- 3) O ponto  $P \in \Delta$ , logo P tem a mesma potência<sup>3</sup> em relação aos dois círculos.  
 $Pot_C(P) = Pot_{C'}(P) = c$



Seja as equações dos círculos :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 \\ \implies f(x, y) &= (x - a)^2 + (y - 0)^2 - r^2 \\ \implies f(x, y) &= x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 \\ \implies x^2 + y^2 - 2ax + c &= 0 \\ g(x, y) &= (x - a')^2 + (y - b')^2 - r'^2 \\ g(x, y) &= (x - a')^2 + (y - 0)^2 - r'^2 \\ \implies g(x, y) &= x^2 + y^2 - 2a'x + a'^2 - r'^2 \\ \implies x^2 + y^2 - 2a'x + c &= 0 \end{aligned}$$

A equação da família de círculos de base  $(C, C')$  e parâmetro  $K$  será:

$$\begin{aligned} f + Kg &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax + c + K(x^2 + y^2 - 2a'x + c) &= 0 \\ (1 + K)(x^2 + y^2) - (2a + 2a'K)x + (1 + K)c &= 0 \end{aligned}$$

Dividindo a equação por  $(1 + K)$ , para todo  $K \neq -1$

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{(a + a'K)x}{1 + K} + c = 0$$

<sup>3</sup>O ponto P pertence a mediatriz de  $OO'$

Portanto a equação da família de círculos se escreve da forma:  
 $x^2 + y^2 - 2\left(\frac{a+a'K}{1+K}\right)x + c = 0$ , que é a equação de um círculo de centro:

$$\lambda = \left(\frac{a + a'K}{1 + K}, 0\right)$$

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$$

Temos ainda de  $(1 + K)(x^2 + y^2) - (2a + 2a'K)x + (1 + K)c = 0$   
 que para  $K=-1$ , obtem-se  $x=0$  que é o eixo radical  $\Delta$

**Exemplo 10.** *Seja as equações dos círculos :*

$$C : f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$$

$$\implies f(x, y) = (x + 3)^2 + (y - 0)^2 - (\sqrt{34})^2$$

$$\implies x^2 + y^2 + 6x - 25 = 0$$

$$C' : g(x, y) = (x - 6)^2 + (y)^2 - (\sqrt{61})^2$$

$$\implies g(x, y) = x^2 + y^2 - 12x - 25$$

$$\implies x^2 + y^2 - 12x - 25 = 0$$

A equação da família de círculos de base  $(C, C')$  e parâmetro  $K$  será:

$$f + Kg = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 25 + K(x^2 + y^2 - 12x - 25) = 0$$

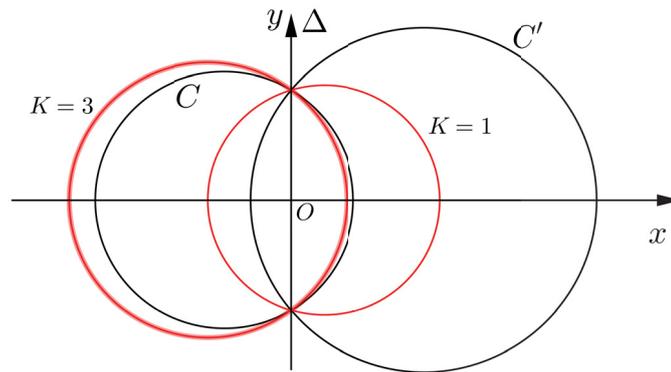
$$(1 + K)(x^2 + y^2) - (12K - 6)x - (25 + 25K) = 0$$

Temos para  $K = -1$ ,  $x=0$  que é o eixo radical  $\Delta$

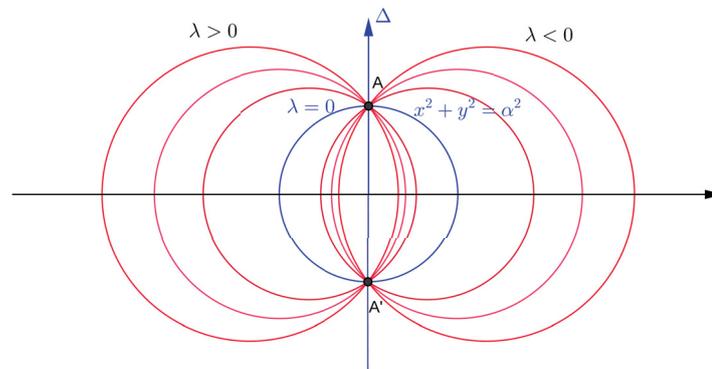
Para todo  $K \neq -1$ , a equação da família de círculos se escreve da forma:

$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{6K-3}{1+K}\right)x - \frac{25+25K}{1+K} = 0$ , que é a equação de um círculo de centro:

$$\lambda = \left(\frac{6K - 3}{1 + K}, 0\right)$$



## 4.2 Famílias de Círculos de Poncelet



Consideremos a família de círculos  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$ . Obtemos para  $c = -\alpha^2$  a família de círculos de Poncelet:

$$\mathcal{P} : x^2 + y^2 - 2\lambda x - \alpha^2 = 0$$

Temos:

$$\Rightarrow (x^2 - 2\lambda x) + y^2 - \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \lambda)^2 - \lambda^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \lambda)^2 + y^2 = \alpha^2 + \lambda^2, \text{ com } \alpha^2 + \lambda^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x - \lambda)^2 + y^2 = r^2$$

ou seja, os círculos que pertencem a esta família tem centro  $C = (\lambda, 0)$  e raio  $r = \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}$ ,  $\forall \lambda$

Em particular temos que para  $\lambda = 0$ , os círculos terão centro  $(0,0)$  e  $r = \sqrt{\alpha^2}$ , ou seja, os círculos são da forma

$$x^2 + y^2 = \alpha^2$$

Fixado  $\alpha > 0$ , os círculos de equação  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - \alpha^2 = 0$  passarão por  $A = (0, \alpha)$  e  $A' = (0, -\alpha)$

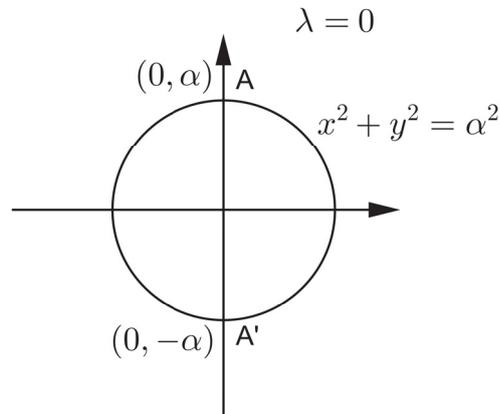


Figura 19: Círculo da Família de Poncelet para  $\lambda = 0$

De fato:

$$A : (0, \alpha) \text{ pertence ao círculo} \Rightarrow 0^2 + \alpha^2 - 2\lambda \cdot 0 - \alpha^2 = 0$$

$$A' : (0, -\alpha) \text{ pertence ao círculo} \Rightarrow 0^2 + (-\alpha)^2 - 2\lambda \cdot 0 - (-\alpha)^2 = 0$$

Portando a família de Círculos de Poncelet pode adotar como base  $x^2 + y^2 = \alpha^2$  e eixo radical  $x=0$  (eixo  $y$ ) e terá  $A$  e  $A'$  como pontos da base.

**Exemplo 11.** Consideremos as equações de círculo  $C_1 : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$  de centro  $(-3, 0)$  e  $r=5\text{cm}$  e o círculo  $C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 10 = 0$  de centro  $(1, 0)$  e  $r=3\text{cm}$ . Façamos algumas considerações a respeito desta família.

Observamos então que:

1. A equação da família de círculos de base  $C_1$  e  $C_2$ , é:

$$C_1 + \lambda C_2 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + 6x - 16) + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 10) = 0$$

$$(1 + \lambda)(x^2 + y^2) + (6 - 2\lambda)x - (16 + 10\lambda) = 0$$

2. Para que um círculo  $C_3$  pertença a esta família ele deve ter o mesmo eixo radical de  $C_1$  e  $C_2$  e passar pelos pontos  $A$  e  $B$  que são os pontos de interseção dos círculos da base.
3. O eixo radical de  $C_1$  e  $C_2$ , obtemos da equação da família para  $\lambda = -1$ , ou seja o eixo radical ( $\Delta$ ) é  $x = \frac{3}{4}$ .

Logo os pontos  $A$  e  $B$  de interseção dos círculos tem como abscissa  $x = \frac{3}{4}$  que quando substituído em qualquer uma das equações do círculo nos fornece a ordenada  $y = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4}$ , portanto  $A = (\frac{3}{4}, \frac{5\sqrt{7}}{4})$  e  $B = (\frac{3}{4}, -\frac{5\sqrt{7}}{4})$ .

4. Podemos observar que para diferentes  $\lambda$  temos diferentes círculos que pertencem a esta família, que por terem seus centros sobre o eixo da abscissa e o mesmo eixo radical, pertencem a família de círculos de Poncelet.

Se adotamos  $\lambda = 2$ , obtemos a equação de um dos círculos desta família:  $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - 12 = 0$

5. Para sabermos se um círculo  $C_3 : x^2 + y^2 - 10x - 4 = 0$  pertence a família de base  $C_1$  e  $C_2$ , devemos verificar se tem centro  $(\lambda, 0)$  e se os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao círculo  $C_3$ .

Temos:.

$$(x^2 - 10x) + y^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 10x + 25) + y^2 - 4 - 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 - 29 = 0, \text{ logo } C_3 \text{ tem centro } (5,0) \text{ e } r = \sqrt{29}$$

Se  $A \in C_3 \Rightarrow (\frac{3}{4}, \frac{5\sqrt{7}}{4}) \in C_3$ , a equação a seguir deve ser verificada.

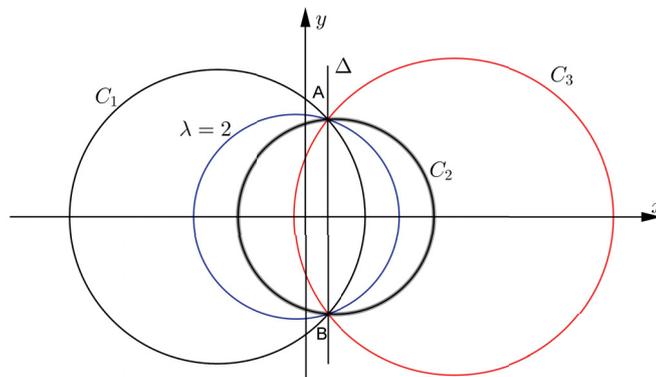
De fato:

$$x^2 + y^2 - 10x - 4 = (\frac{3}{4})^2 + (\frac{5\sqrt{7}}{4})^2 - 10(\frac{3}{4}) - 4 = 0$$

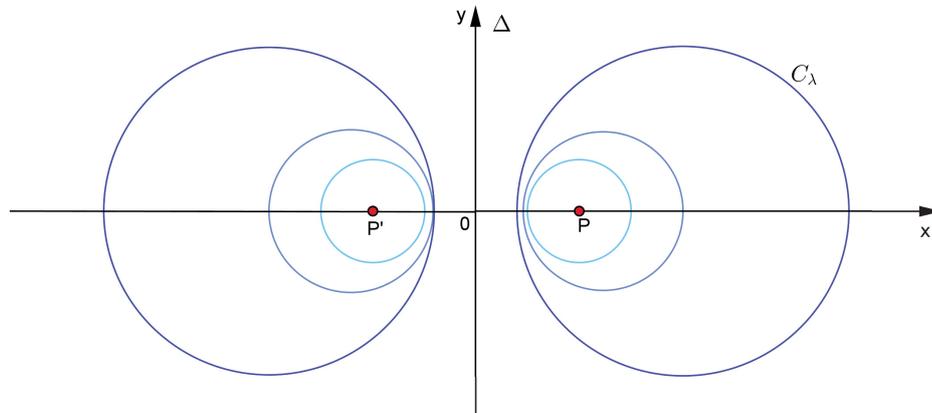
Se  $B \in C_3 \Rightarrow (\frac{3}{4}, \frac{-5\sqrt{7}}{4}) \in C_3$ , a equação a seguir deve ser verificada.

$$\text{De fato: } x^2 + y^2 - 10x - 4 = (\frac{3}{4})^2 + (\frac{-5\sqrt{7}}{4})^2 - 10(\frac{3}{4}) - 4 = 0$$

Portanto  $C_3$ , pertence a família de Poncelet de base  $C_1$  e  $C_2$ .



### 4.3 Famílias de Círculos de Apollonius.



Consideremos a família de círculos  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$ . Obtemos para  $c = \alpha^2$  a Família de Círculos de Apollonius, cuja equação é:

$$\mathcal{A} : x^2 + y^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0$$

Observamos que a equação acima representa círculo se e somente se,  $(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - \alpha^2$  e  $\lambda^2 - \alpha^2 > 0$ .

Observamos também que para  $x=0$  temos:

$$\lambda^2 + y^2 = \lambda^2 - \alpha^2$$

$$y^2 = -\alpha^2$$

$$y = \pm i\alpha$$

Portanto só pode existir círculos com centro no eixo dos x.

Devemos impor então  $\lambda^2 - \alpha^2 \geq 0$

**i.** Para  $\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\alpha$

Logo

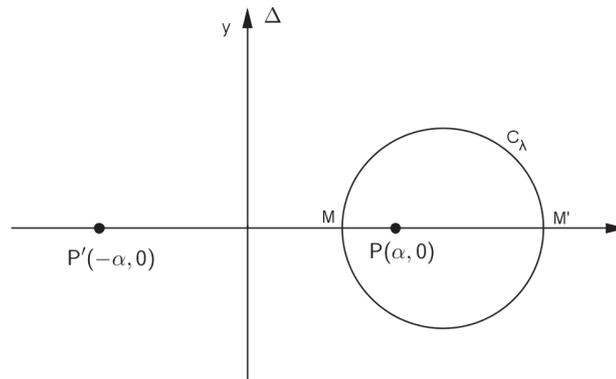
$$(x - \lambda)^2 + y^2 = 0$$

que ocorrerá quando:

- $(x - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \pm\alpha \Leftrightarrow$

- $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Portanto  $P=(\alpha,0)$  e  $P'=(-\alpha,0)$  são círculos degenerados ou pontos limites e M e M' são pontos onde o círculo  $C_\lambda$  intercepta o eixo x.



- ii. Para  $\lambda^2 - \alpha^2 > 0$  a equação  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - \alpha^2$ , será um círculo de centro  $(\lambda, 0)$  e raio  $r = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$

Este círculo  $C_\lambda$ , só existirá e será não degenerado para:

$$\lambda^2 - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > \alpha^2$$

que apresentará solução para  $\lambda > \alpha$  ou  $\lambda < -\alpha$

Observamos ainda que para  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0$ , podemos ter  $y=0$  de onde obtemos:  
 $C_\lambda : x^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0$ , que para  $\lambda^2 - \alpha^2 > 0$  encontramos :

$$x' = \lambda + r$$

$$x'' = \lambda - r \text{ e}$$

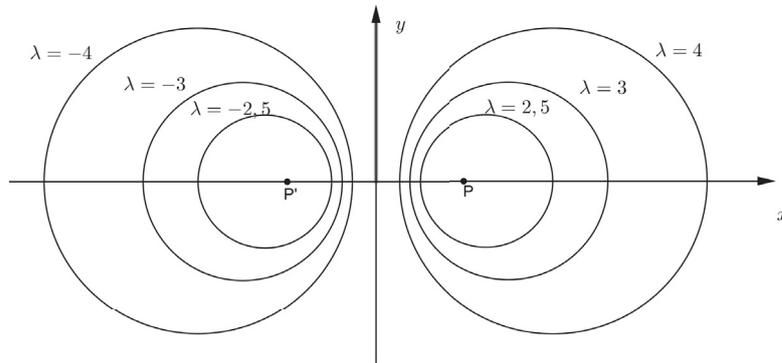
$$(\lambda + r) \cdot (\lambda - r) = \lambda^2 - r^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \lambda^2 - \alpha^2 = r^2$$

**Exemplo 12.** Sob que condição a equação  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4 = 0$ , pode representar uma família de círculos de Apollonius?

1. Sabemos que as equações que representam esta família são escritas da forma  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0$  e só irão representar círculos para  $\lambda^2 - \alpha^2 \geq 0$ .

Sendo assim temos que  $\lambda^2 - 4 \geq 0$  e só terá solução para  $\lambda < -2$  ou  $\lambda > 2$ .

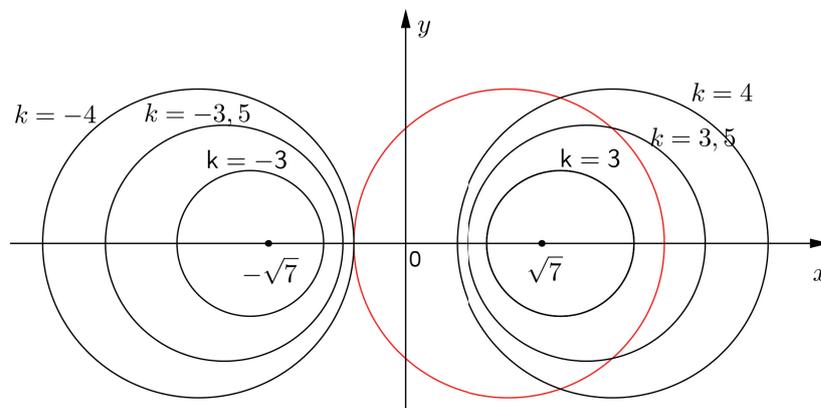
2. Para  $\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$  temos  $x^2 + y^2 = 0$  que representa círculos degenerados, que chamamos de pontos limites  $P = (2, 0)$  e  $P' = (-2, 0)$
3. Temos que  $\lambda^2 - 4 > 0$  só irá representar círculo para  $\lambda < -2$  ou  $\lambda > 2$
4. Temos ainda que para  $-2 < \lambda < 2$  a equação  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4 = 0$ , só terá solução no conjunto dos números complexos.



**Exemplo 13.** Verifiquemos se o círculo  $C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ , pertence a família de Apollonius  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 7 = 0$ .

Sabemos que todas as famílias de círculos de Apollonius é escrito na forma:  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0$  e que só representam círculos não degenerados para  $\lambda^2 + \alpha^2 > 0$ . Neste caso a família de Apollonius é formado pelos círculos que tem seus centros  $(\lambda, 0)$ , para  $\lambda < -\sqrt{7}$  ou  $\lambda > \sqrt{7}$ .

Completando quadrados na equação de  $C_1$ , temos  $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ , logo o círculo tem centro  $(\lambda, 0) = (2, 0)$ , com  $\lambda = 2$ . Portanto  $C_1$  não pertence a esta família de Apollonius.



#### 4.4 Famílias de Círculos Tangentes

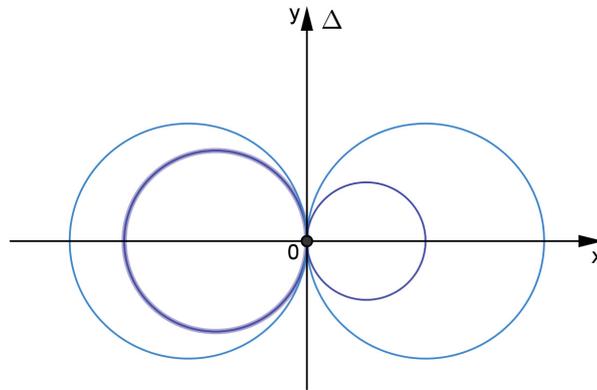
Consideremos a família de círculos  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$ . Obtemos para  $c = 0$  a equação da família de círculos tangentes:

$$\mathcal{T}: x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$$

Temos:

$$(x^2 - 2\lambda x) + y^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - \lambda)^2 - \lambda^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2, \text{ ou seja a família de círculos tangentes tem centro } O = (\pm\lambda, 0) \text{ e } r = \lambda$$

Observamos que para  $\lambda = 0$  segue  $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow y = x = 0$  o que irá representar um ponto  $A=(0,0)$

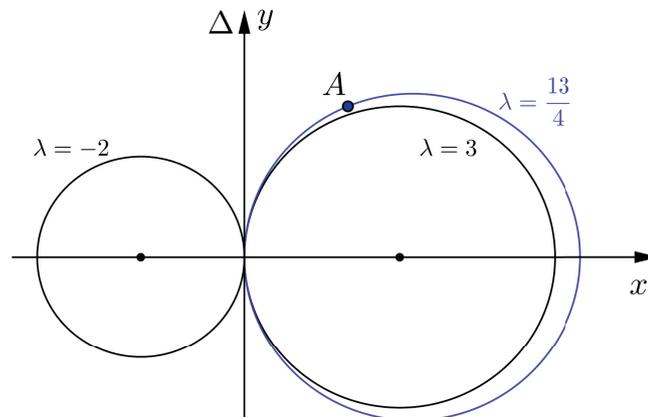


**Exemplo 14.** *Encontremos a equação do círculo  $C_1$ , que pertence a família de círculos tangentes  $\mathcal{T}$ , que passe pelo ponto  $A=(2,3)$ .*

*A família de círculos tangentes é escrita sempre da forma  $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$ .*

*Como  $A \in C_1$  e  $C_1 \in \mathcal{T}$ , substituímos as coordenadas na equação da família e encontramos  $\lambda = \frac{13}{4}$ .*

*Logo a equação do círculo é a equação da família de círculo para  $\lambda = \frac{13}{4}$ , portanto a equação de  $C_1$  é  $x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x = 0$*



## 4.5 Condição de Ortogonalidade de Famílias de Círculo

Consideremos que o ângulo entre duas curvas é definido como o ângulo entre suas tangentes no ponto de intersecção. Temos que duas curvas são mutuamente ortogonais quando as curvas de uma família interseccionam as curvas da outra, formando ângulos retos, obtendo assim uma rede ortogonal.

Quando são dadas as curvas de uma família e queremos descobrir uma outra família ortogonal, as curvas da família a ser obtida são chamadas de trajetória ortogonais das curvas dadas.

Seja uma família de curvas que pode ser representada por uma equação diferencial  $y' = f(x, y)$ . Uma curva da família que passa por um ponto  $(x_0, y_0)$  tem nesse ponto o coeficiente angular  $f(x_0, y_0)$ .

O coeficiente angular da trajetória ortogonal que passa por  $(x_0, y_0)$  deve ser o recíproco negativo de  $f(x_0, y_0)$ , isto é  $-\frac{1}{f(x_0, y_0)}$ , porque esta é a condição para que as tangentes das duas curvas em  $(x_0, y_0)$  sejam perpendiculares.

Consideremos  $r$  e  $s$  as retas tangentes as curvas no ponto de intersecção, devemos mostrar que a condição de ortogonalidade deve satisfazer:  $2(aa' + bb') = c + c'$

*Demonstração.* Seja a equação da reta  $r : y = m_r x + h_r$  e  $s : y = m_s x + h_s$ , sendo:

$$m_r = \tan \beta \text{ e } m_s = \tan(90 - \beta)$$

$$\tan(90 - \beta) = \frac{\text{sen}(90 - \beta)}{\text{cos}(90 - \beta)}$$

$$\tan(90 - \beta) = \frac{\text{sen}90 \cdot \text{cos}\beta + \text{sen}\beta \cdot \text{cos}90}{\text{cos}90 \cdot \text{cos}\beta - \text{sen}90 \cdot \text{sen}\beta} = \frac{\text{cos}\beta}{-\text{sen}\beta} = \frac{-1}{\tan \beta}$$

$$\text{Logo } m_s = \frac{-1}{m_r}$$

Escrevamos as equações das retas:

$$r : ax + by + c \Rightarrow \frac{-ax - c}{b} \Rightarrow m_r = \frac{-a}{b}$$

$$s : a'x + b'y + c' \Rightarrow \frac{-a'x - c'}{b'} \Rightarrow m_s = \frac{-a'}{b'}$$

$$\text{Como } m_r = \frac{-1}{m_s} \text{ temos } \frac{-a}{b} = \frac{1}{\frac{a'}{b'}}$$

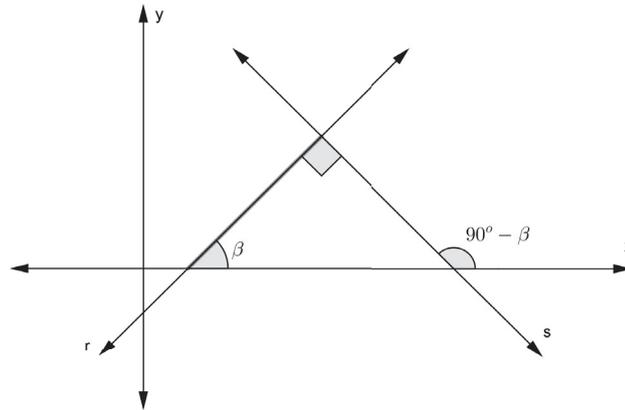


Figura 20: Retas Ortogonais

$$\frac{-a}{b} = \frac{b'}{a'}$$

$$-a \cdot a' = b \cdot b'$$

$$aa' + bb' = 0 \Rightarrow 2(aa' + bb') = 0$$

$$2(aa' + bb') = \alpha^2 - \alpha^2$$

$$2(aa' + bb') = c + c'$$

□

Da Geometria Analítica temos que duas retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares se o produto dos coeficientes angulares for igual a  $-1$ .

#### 4.6 Famílias Ortogonais.

Seja  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - \alpha^2 = 0$  a equação da Família  $\phi$  de círculos de Poncelet e  $\phi'$  a Família de Círculos de Apollonius de equação  $x^2 + y^2 - 2\mu y + \alpha^2 = 0$ .

Estas duas famílias são chamadas de famílias conjugadas.

As famílias  $\phi$  e  $\phi'$  são ortogonais seja qual for  $\lambda$  e  $\mu$ , com efeito a condição de serem ortogonais será:

$$2(aa' + bb') = c + c'$$

É sempre verificada aqui  $a = \lambda$   $b = 0$  e  $c = -\alpha^2$ ;  $a' = 0$   $b' = \mu$   $c' = \alpha^2$ .

Podemos dizer que dois feixes são ortogonais quando os pontos A e B são pontos base de  $\phi$  e pontos limites de  $\phi'$ .

Temos ainda que  $\phi$  e  $\phi'$  serão famílias de círculos tangentes.

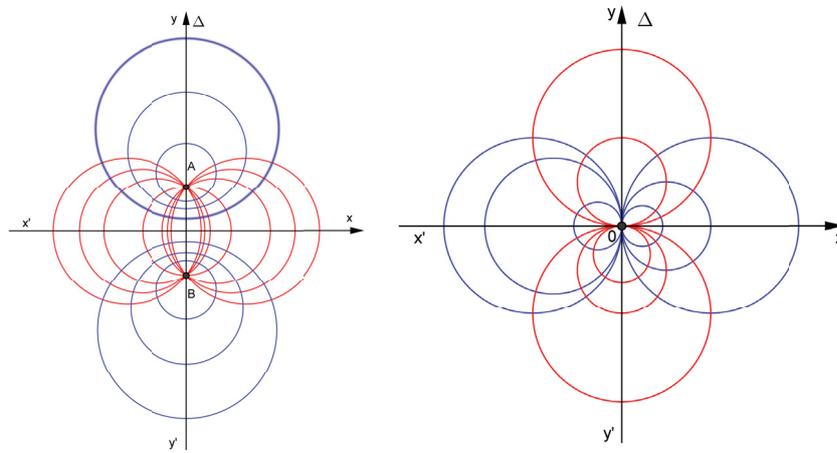
**Exemplo 15.** *Encontremos as coordenadas dos pontos limites da família de círculos de Apollonius, dados:*

$$C_1 : x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$$

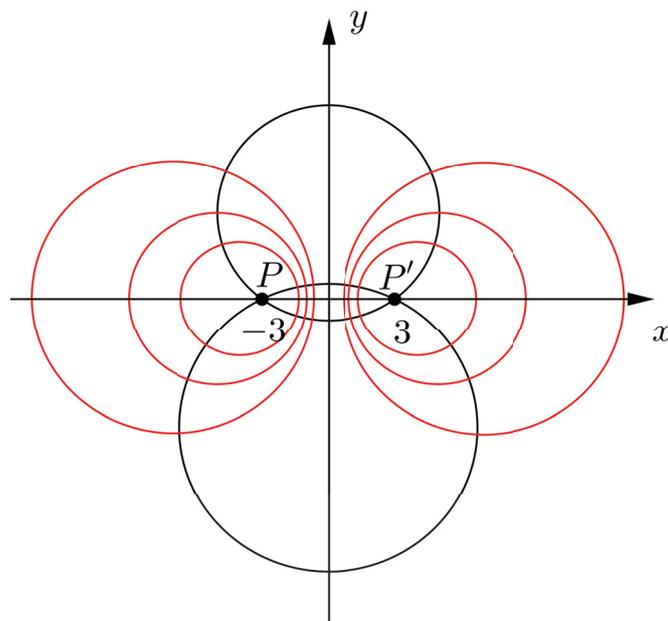
$$C_2 : x^2 + y^2 + 12y - 9 = 0$$

*sabendo que ambos os círculos são da família de Poncelet.*

*Como as famílias de círculos de Poncelet e de Apollonius são famílias conjugadas, sabemos que o pontos de base da família de círculos de Poncelet serão os pontos limites da família de*



*círculos de Apollonius. Sendo assim multiplicamos a equação de  $C_1$  por  $(-1)$  e adicionamos a equação de  $C_2$  encontramos os pontos  $P = (-3, 0)$  e  $P' = (3, 0)$ , que são os pontos limites da família de Apollonius.*



## 4.7 Propriedades das Famílias de Círculos

Tomamos uma família  $C_\rho$  de círculos:  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$

I. A potência de um ponto P em relação a um círculo de  $C_\rho$ , será chamada de  $\overline{P} = c$

Se um ponto P tem a mesma potência para todos os círculos  $C_\rho$  da família  $\rho$ , então P estará sobre o eixo radical  $\Delta$  de dois círculos quaisquer.

II Uma família de círculos pode ser definida por um círculo  $C_\gamma$  e uma reta  $\Gamma : x = 0$

$$C_\gamma : x^2 + y^2 + c = 0$$

Observemos a equação  $x^2 + y^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -c$

$$\text{Como } x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow -c > 0 \Rightarrow c < 0.$$

temos

$$c = -\alpha^2 \text{ onde } \alpha > 0.$$

Ou seja  $x^2 + y^2 + c = 0$ , só irá representar círculo quando  $c = -\alpha^2$

III Seja a família  $C_\rho$  de círculos  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$  ( $c = \alpha^2$ ).

Se um ponto  $A = (x_o, y_o)$  pertence a esta família, então:

$$x_o^2 + y_o^2 - 2\lambda x_o + \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda x_o = x_o^2 + y_o^2 + c \text{ se } x_o \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x_o^2 + y_o^2 + c}{2x_o}$$

Para  $x_o \neq 0$

Temos ainda que a equação  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$ , representará um círculo

$$(x^2 - 2\lambda x) + y^2 + c = 0$$

$$(x - \lambda)^2 - \lambda^2 + y^2 + c = 0$$

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - c$$

$$\text{com } \lambda^2 - c = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\lambda^2 - c} \text{ (} \lambda > c \text{ ou } \lambda < -c \text{)}$$

Logo, um ponto que pertence ao eixo radical, possui abscissa  $x_o = 0$  e não satisfaz a equação.

$$\lambda = \frac{x_o^2 + y_o^2 + c}{2x_o}$$

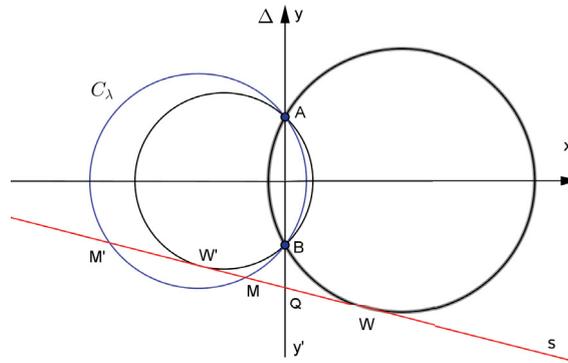
Portanto, por um ponto  $A = (x_o, y_o)$  que não pertença ao eixo radical irá passar apenas um círculo desta família, com centro  $(\lambda, 0)$ .

**IV** Seja uma reta  $s$  qualquer que intercepta o eixo radical  $\Delta$  em  $Q = (0, y)$  e o círculo  $C_\lambda$  em  $M$  e  $M'$ .

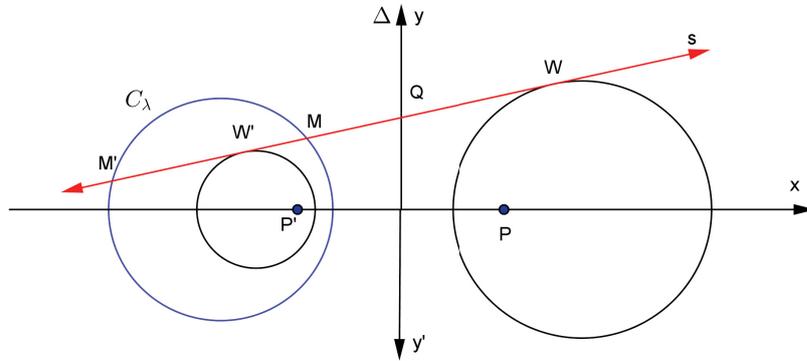
Seja  $\overline{Q}_{C_\lambda}$ , a potência de  $Q$  em relação ao círculo  $C_\lambda$ . Sabemos que a potência de  $Q$  é a mesma para todos os círculos da mesma família, logo temos:

$$QM \cdot QM' = \overline{Q}_{C_\lambda} = K$$

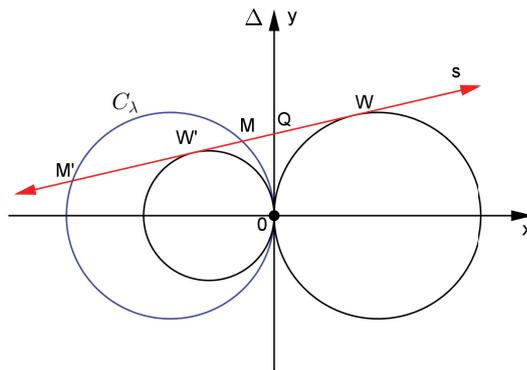
Se  $C_\rho$  é uma família de círculos de Poncelet então  $QM \cdot QM' = QB \cdot QA = K$



Se  $C_\rho$  é uma família de círculos de Apollonius e P e P' círculos degenerados, então:  
 $QM \cdot QM' = QP^2 = QP'^2 = K$



Se  $C_\rho$  é uma família de círculos Tangentes então:  $QM \cdot QM' = QO^2 = K$



## 5 CONCLUSÃO

Quando buscamos uma especialização, buscamos um aperfeiçoamento profissional, para que possamos melhorar nosso desempenho como professores. Tentamos esclarecer dúvidas quanto ao método a utilizar para atingirmos os objetivos, a sequência mais coerente, a linguagem apropriada, os exemplos mais significativos, a aplicabilidade de forma a valorizar o estudo da Matemática.

O PROFMAT nos fez refletir, quanto a clareza de nossa linguagem, métodos, postura e forma de ensinar. Nos tornou mais preparado para garantir que a aprendizagem de nosso aluno se torne mais significativa e que se reflita em uma leitura de mundo melhor.

O trabalho foi desenvolvido pensando sempre em resgatar a linguagem matemática, o rigor da escrita nas demonstrações, aplicação de postulados nas demonstrações dos principais teoremas e resgatar os conceitos e propriedades das Famílias de Círculos.

A ideia principal é mostrar o quanto a Geometria tem a oferecer e contribuir à Álgebra e à Aritmética, reforçando sua aplicabilidade.

Ao apresentarmos os capítulos foi se criando uma estrutura conceituada, interligada e autossuficiente.

Quando se pensa em Círculo não nos damos conta da quantidade de elementos, propriedades, Teoremas ao qual ele se relaciona.

Ao mostrarmos o triângulo inscrito no Círculo, possibilitamos demonstrar os Teoremas de Euler e o Teorema da Borboleta, com aplicações de importantes conceitos como: Congruência, Semelhança, Potência de um Ponto, Princípio Fundamental da Proporcionalidade.

As famílias de Círculos, nos apresentou aplicabilidades de conceitos como eixo radical e potência de um ponto.

Pensando nas tendências tecnológicas escrevemos nos anexos sugestões para se trabalhar nas salas de informática, construções do Geogebra, mostrando os ambientes do programa, com a finalidade de mostrar recursos geométricos que facilitam resoluções de problemas e construções.

O trabalho foi desenvolvido para ser utilizado por alunos e professores, como referência de estudo, com uma linguagem simples mas respeitando o rigor da linguagem, seguindo um raciocínio claro e conciso.

## REFERÊNCIAS

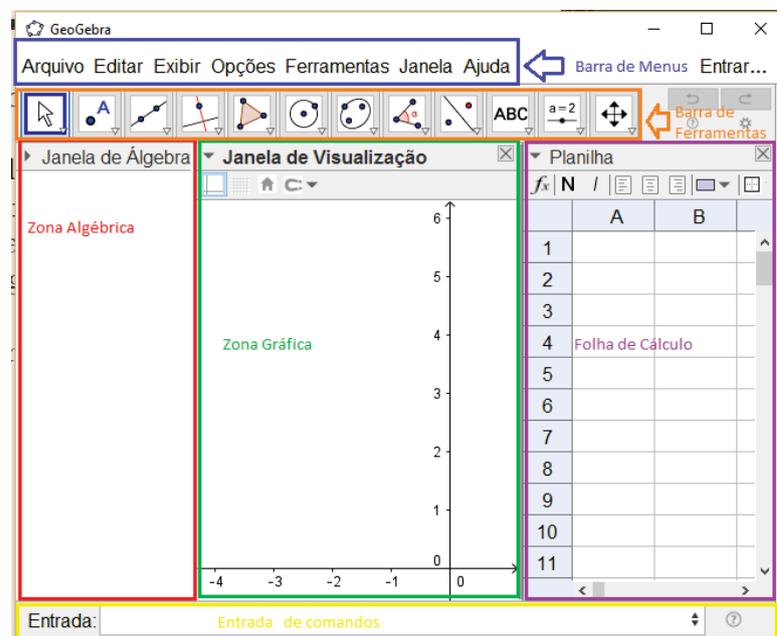
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**/ João Lucas Marques Barbosa. 11.ed.- Rio de Janeiro: SBM,2012.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**- São Paulo, SP: Editora Afiliada, 1974.
- CASTRUCCI, B.**Fundamentos de Geometria: estudo axiomático do plano euclidiano** - Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos,1978.
- COXETER, H. S. M. **Geometry Revisited** (19nd ed) .Greitzer, Samuel L. 1967, The Mathematical Association of America.
- EUCLIDES, F. C. **Elementos de Geometria**.São Paulo: Edições Cultura, 1944.
- EVES, H.**Introdução a história da Matemática**. -Campinas, SP: Editora da UNICAMP,2004.
- GARBI, G. G. **C.Q.D.:Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**/Gilberto Geraldo Garbi.-São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- GeoGebra, Programa Disponível em <https://www.geogebra.org/>.
- Góes, Anderson Roges T.- **Apostila Desenho Geométrico I**. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/docentes/anderson/pdf/Parte-01-DesGeo.pdf>- Tangências e concordâncias.
- LEHMANN, C. H. **Geometria Analítica**/ Charles H. Lehmann- México: Uteha, 1968.
- MOISES, E. E. Jr, FLOYD L. D.**Geometria Moderna**.1971, Editora Edgard Blucher LTDA.
- MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**/ Maria Ângela Miorim. 3.ed-São Paulo: Atual, 1998.

## ANEXO 1

### CONHECENDO OS AMBIENTES DO GEOGEBRA.

O Geogebra oferece três diferentes vistas ou representações dos objetos matemáticos: Algébrico, Gráfico, Numérico.

Tendo o programa geogebra instalado e aberto, visualizamos a janela principal com os campos onde desenvolvemos nossos trabalho, que são:



Barra de ferramentas e menu: São os ícones com ferramentas utilizadas na construções geométricas da Zona

Gráfica, que tem também uma representação algébrica. Cada ícone na barra de ferramenta representa uma caixa de ferramentas com ferramentas similares, que são abertas ao se clicar na pequena flecha no canto inferior direito de cada ícone. Estes ícone possuem orientações de ajuda.

Zona Algébrica: Nesta janela irá aparecer as representações algébricas dos objetos criados na zona gráfica ou na folha de Cálculo. Estes objetos matemáticos são divididos em duas classes: Objetos livres e dependentes.

Zona Gráfica: É a janela do geogebra responsável pelas representações gráficas criadas nas outras janelas ou na barra de ferramentas.

Folha de Cálculo: Nesta folha, cada célula é identificada com nome específico e nelas podemos inserir todos os tipos de objetos matemáticos e estes imediatamente aparecem nas Zona Algébricas e Gráfica.

Campo de entrada: É o campo onde inserimos diretamente expressões algébricas no geogebra e quando clicado em enter, aparece na Zona Algébrica e na Zona Gráfica.

## ANEXO 2

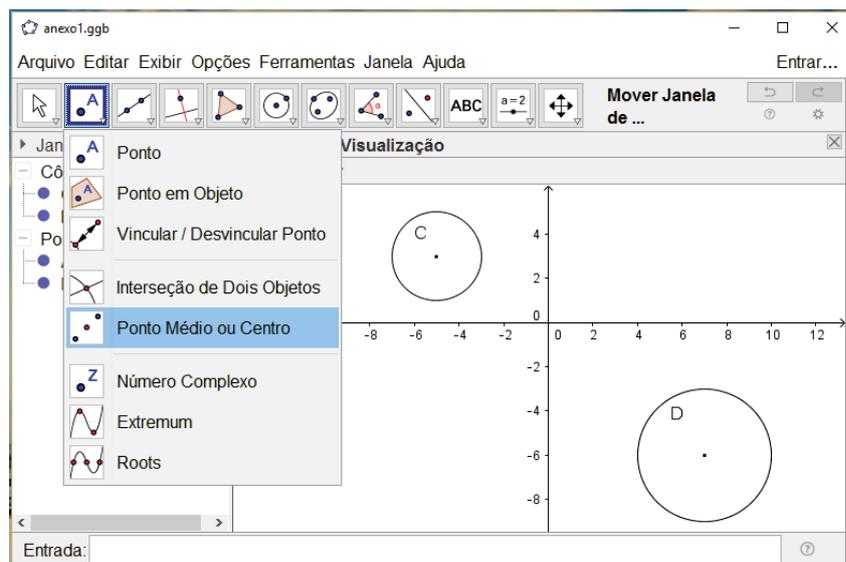
### EIXO RADICAL DE CÍRCULOS EXTERNOS.

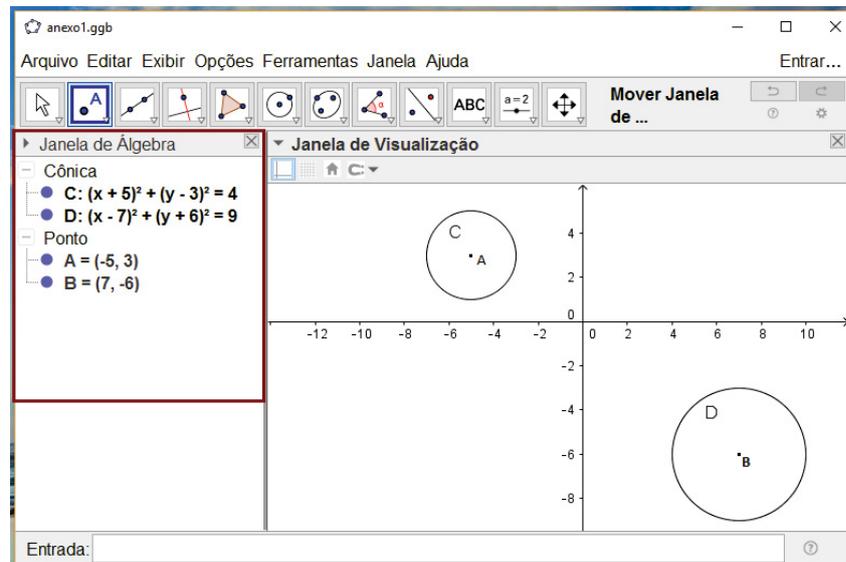
Iremos mostrar como construir o eixo radical entre dois círculos externos.

No campo de entrada, digitamos a equação do círculo  $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$  e na janela de visualização, aparece o círculo  $C$ .

Ao digitarmos a equação  $x^2 + y^2 - 14x + 12y + 76 = 0$ , aparecerá a representação gráfica do círculo  $D$ .

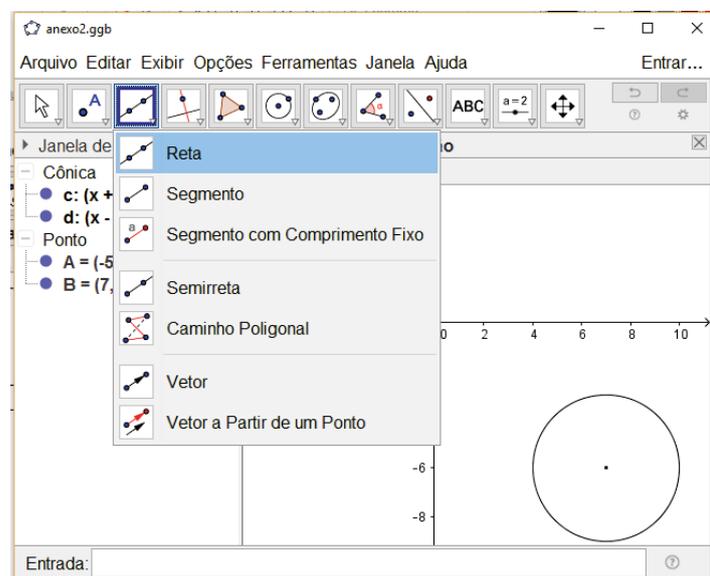
Na barra de ferramentas clicamos em ponto e na caixa que se abre escolhemos ponto médio ou centro, e na janela de visualização selecionamos o círculo  $C$ , repetimos o processo para o círculo  $D$ , assim o programa irá mostrar os pontos  $A$  e  $B$ , centro dos círculos na janela gráfica, bem como suas coordenadas na janela algébrica.

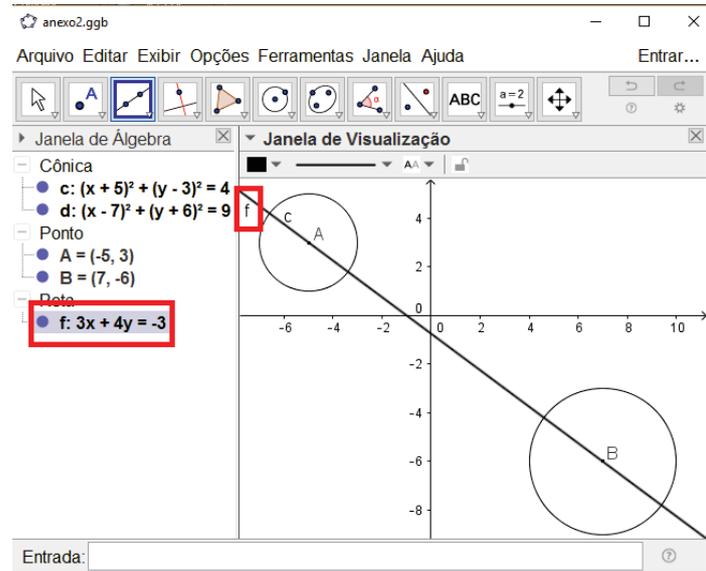




Na barra de ferramenta selecionamos reta e na janela de visualização, selecionamos os centros dos círculos construindo assim a reta  $r = \overleftrightarrow{AB}$ .

Podemos observar na janela de álgebra a equação da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ : que o geogebra nomeia como  $f : 3x + 4y = -3$ .

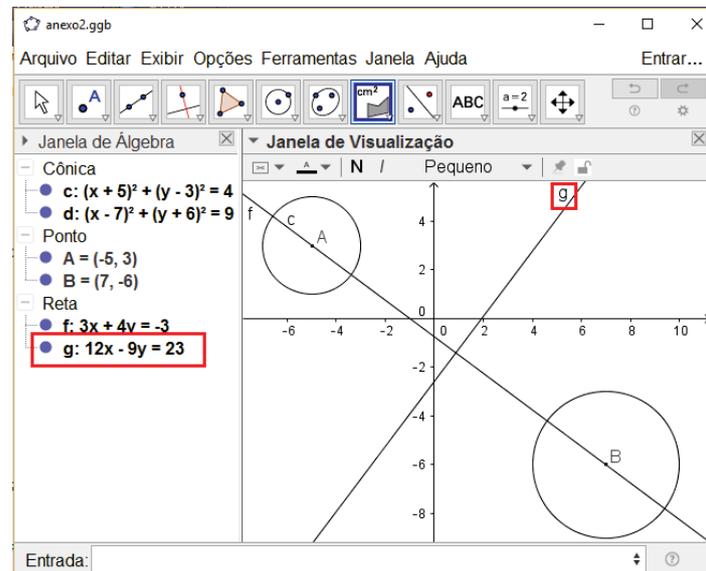




Para encontrarmos a equação do eixo radical, multiplicamos  $D$  por  $(-1)$  e somamos a  $C$  e obtemos a equação do eixo radical  $12x - 9y - 23 = 0$ , que digitada no campo de entrada nos fornece na janela de visualização a reta  $g$ .

Temos que as retas  $f$  e  $g$  possuem coeficientes  $m_1 = -\frac{3}{4}$  e  $m_2 = \frac{4}{3}$ , respectivamente.

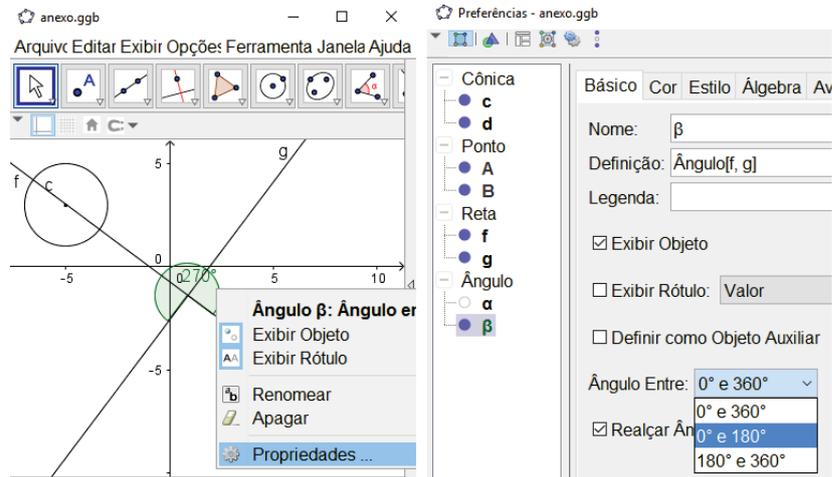
A multiplicação entre os coeficientes  $m_1 \cdot m_2$  resulta em  $-1$  que satisfaz a condição de perpendicularidade entre retas.



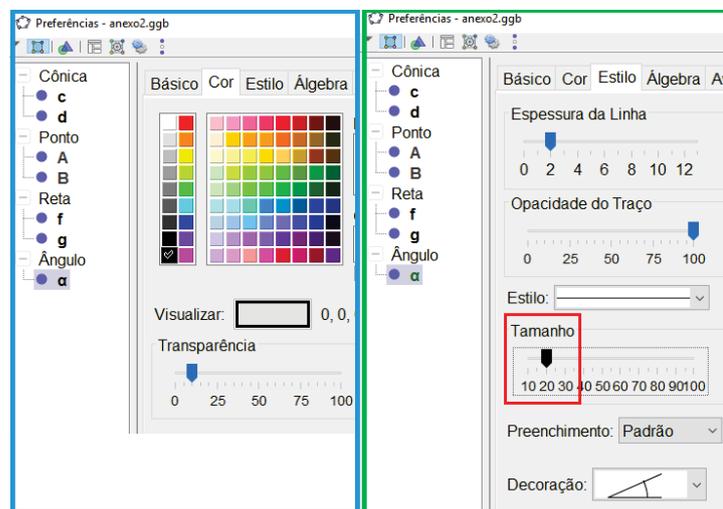
No geogebra temos ainda a opção na barra de ferramentas o ícone ângulo e na janela de visualização selecionamos  $f$  e  $g$  e aparece o ângulo  $\alpha = 270^\circ$ , mas para representarmos o ângulo reto, selecionamos o ângulo com um clique com o botão direito do mouse e na caixa de ferramenta que se abre selecionamos *Propriedades* e a *Caixa de Preferências* se abre, se-

lecionamos *Básico* e *Ângulo entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$* .

Podemos ainda clicar com o direito sobre ângulo na janela de visualização e na caixa que se abre podemos tirar a seleção *Exibir Rótulo*, assim tiramos a marcação numérica do ângulo.

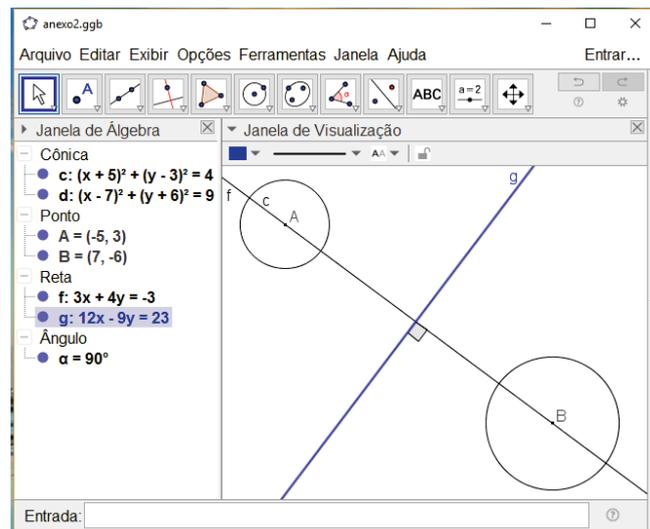


Podemos alterar o tamanho do desenho do ângulo, para isso clicamos com botão direito do mouse sobre o ângulo e na caixa que se abre selecionamos *Propriedades* que abre a *Caixa de Preferências* e escolhemos *Estilo*, tamanho 20 e na barra de ferramentas da mesma caixa podemos ainda escolher a *cor* que o ângulo irá aparecer na zona gráfica.



Podemos trocar a cor do eixo radical, selecionando ele com o mouse no botão da direita na janela gráfica e na caixa de ferramentas selecionamos *Propriedades Cor* e escolhemos a cor que se deseja, aqui escolhemos azul.

O eixo radical  $g$  fica assim representado na janela gráfica.



## ANEXO 3

### EIXO RADICAL DE CÍRCULOS SECANTES.

Dadas as equações dos círculos:

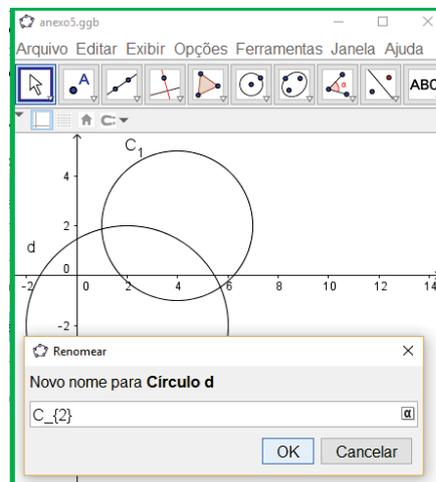
$$C_1 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$$

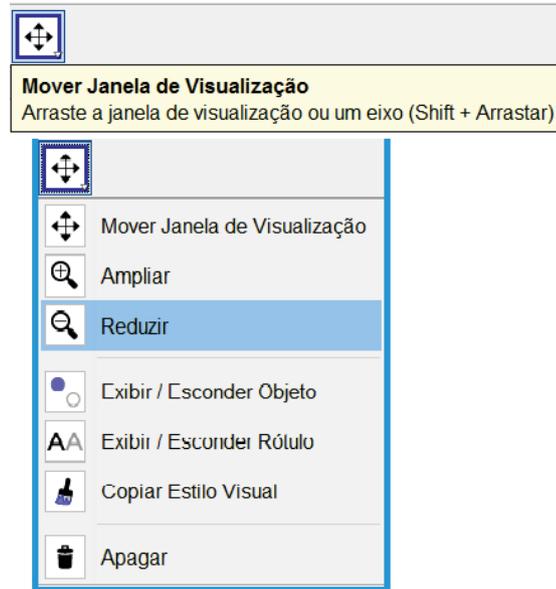
Vamos encontrar a equação do eixo radical de  $C_1$  e  $C_2$ , utilizando o Geogebra.

No campo de entrada, digitamos a equação do círculo  $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$  e no campo de visualização aparece o círculo  $c$ , fazemos o mesmo com a equação  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$  e no campo de visualização aparece  $d$  e na janela de Álgebra fica registrado as equações dos dois círculos.

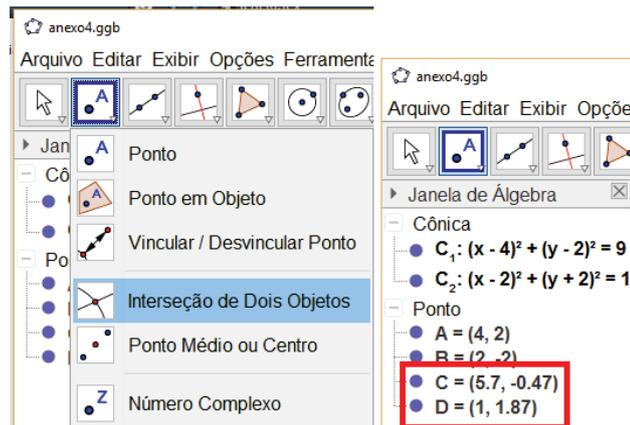
Podemos renomear os círculos, com a seleção da ferramenta *Mover* na barra de ferramenta, clicamos em cima do círculo  $c$  com o botão direito do mouse, na caixa de ferramentas que se abre, clicamos em *renomear* e digitamos  $C_1$ , repetindo o processo para  $d$ , renomeamos para  $C_2$



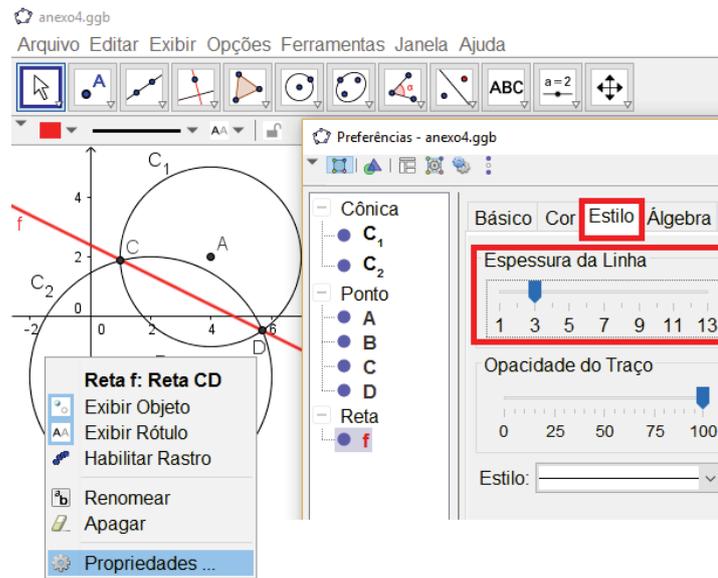
Os círculos ocupam toda a área destinado a janela de visualização. Para que visualizemos melhor todos os círculos, podemos utilizar na barra de ferramentas *Mover a Janela de visualização*, clicamos sobre a flecha que fica a direita e abre uma caixa de ferramenta onde temos a opção de *reduzir*, podendo assim clicarmos em cima dos círculos, reduzindo o tamanho dos elementos em construção. Também temos a opção de usarmos o teclado e executar a mesma tarefa utilizando a tecla *ctrl* e *-* simultaneamente.



Na barra de ferramentas clicamos em *Ponto* e na caixa que se abre optamos por *Ponto médio ou centro* e na janela de visualização com a seta selecionamos primeiro o círculo  $C_1$  e depois repetimos os comandos para  $C_2$ , assim aparecem os pontos A e B respectivamente na janela de visualização e as coordenadas aparecem na janela de álgebra. Como visto anteriormente, o eixo radical será uma reta que passa pelos pontos de interseção dos dois círculos, que no geogebra podemos encontrar clicando na flecha que fica a direita do ícone *Ponto* na barra de ferramenta e na caixa de ferramenta que se abre selecionamos *Interseção de dois objetos*, na sequência vamos na janela de visualização e selecionamos  $C_1$  e  $C_2$ . Imediatamente irão aparecer os pontos C e D, bem como suas coordenadas na janela algébrica.



Para encontrarmos o eixo radical, será necessário na barra de ferramentas selecionarmos o ícone *Reta* e na janela de visualização clicarmos sobre os pontos C e D e assim criamos a reta nomeada como  $f$ , que chamamos de eixo radical. Podemos destacar o eixo, trocando a cor, como visto no exemplo anterior e ainda podemos redimensionar a espessura do traço. Para isso na Barra clicamos em *Mover*, na janela de visualização com o botão da direita do mouse selecionamos a reta e na caixa que se abre teremos *Propriedade* e na janela de preferência que se abre temos *Estilo* e *Espessura de linha*, que aqui utilizamos a medida 3. Assim construímos o eixo radical, que aqui ficou representado em vermelho.



Os círculos e seu eixo radical ficaram assim representados:

