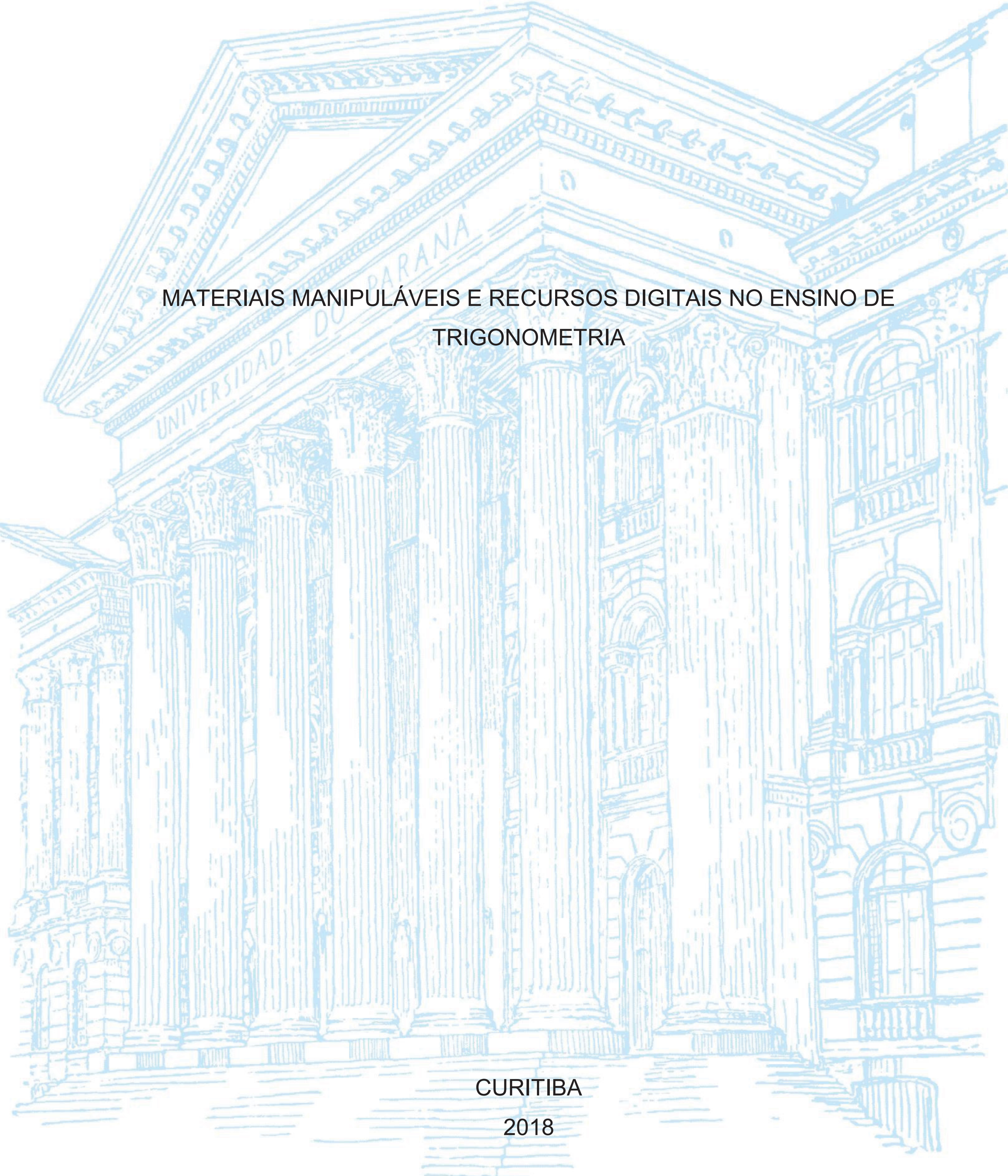
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PAULO CESAR TAVARES DE SOUZA



MATERIAIS MANIPULÁVEIS E RECURSOS DIGITAIS NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

CURITIBA

2018

PAULO CESAR TAVARES DE SOUZA

MATERIAIS MANIPULÁVEIS E RECURSOS DIGITAIS NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Matemática - PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Adriana Luiza do Prado

CURITIBA

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

SO729m Souza, Paulo Cesar Tavares de
Materiais manipuláveis e recursos digitais no ensino de trigonometria / Paulo Cesar Tavares de Souza. – Curitiba, 2018.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientadora: Adriana Luiza do Prado.

1. Trigonometria. 2. Materiais manipuláveis. 3. Recursos digitais. I. Universidade Federal do Paraná. II. Prado, Adriana Luiza do. III. Título.

CDD: 516.24

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **PAULO CESAR TAVARES DE SOUZA** intitulada: **Materiais Manipuláveis e Recursos Digitais no Ensino de Trigonometria**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Junho de 2018.

ADRIANA LUIZA DO PRADO
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

RUBENS ROBLES ORTEGA JUNIOR
Avaliador Externo (UTFPR)

ALEXANDRE LUIS TRovon DE CARVALHO
Avaliador Interno (UFPR)

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO
Avaliador Interno (UFPR)

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos aqueles que sonham com um novo modelo de mundo, mais justo, mais fraterno e igualitário.

Dedico ainda este trabalho a um grande amigo que se transformou em uma estrela no Céu neste ano. Meu fraterno amigo Jorge Bernard, Engenheiro e Matemático, com doutorado em Astronomia na França e Livre Docência em Geometria pela Universidade Federal do Paraná, mas acima de tudo um professor que por onde passou semeou o conhecimento, sendo admirado e respeitado por seus alunos e colegas de trabalho. Com o Bernard cresci muito em nossas discussões a respeito de matemática, do ensino e principalmente sobre a vida.

AGRADECIMENTOS

Uma vida não se constrói sozinho. Agradeço a minha companheira de todas as horas, minha esposa, namorada e amante, parceira na construção de nossos sonhos. Minha querida Mariza, juntos nós construímos a estrada de nossas vidas, superando os obstáculos que são colocados em nossos caminhos.

Agradeço a minha família, que sempre esteve ao meu lado, me dando o suporte a superar os obstáculos que a vida nos coloca.

Agradeço aos nossos amigos alunos do PROFMAT, com os quais passamos dois anos de crescimento pessoal e profissional. Nossas discussões, nossas piadas, nossas alegrias e tristezas. Alguns podem até não ter concluído o curso, mas certamente fazem parte da conquista de cada um daqueles que concluíram.

Agradeço aos meus colegas de trabalho que sempre me incentivaram na execução deste trabalho.

Agradeço aos nossos professores do PROFMAT: Luiz Antônio Ribeiro de Santana, Carlos Henrique dos Santos, Aldemir José da Silva Pinto, Adriana Luiza do Prado, Paula Rogéria Lima Couto e Alexandre Luis Trovon de Carvalho, pelos ensinamentos e pela dedicação que demonstraram ao longo do curso.

A minha orientadora, Professora Adriana, pela colaboração na construção deste trabalho.

"Não basta ter belos sonhos para realizá-los.
Mas ninguém realiza grandes obras se não for capaz de sonhar grande.
Podemos mudar o nosso destino, se nos dedicarmos à luta pela realização de nossos ideais.
É preciso sonhar, mas com a condição de crer em nosso sonho; de examinar com atenção a vida real; de confrontar nossa observação com o nosso sonho; de realizar, escrupulosamente, nossa fantasia.
Sonhos, acredite neles."

Vladimir Ilitch Lenin

RESUMO

Em um mundo centrado na tecnologia, as relações humanas acabam ficando em um segundo plano. O desenvolvimento tecnológico acarretou em uma dependência cada vez maior dos recursos eletrônicos no cotidiano das pessoas. Os recursos tecnológicos modernos possibilitam uma maior rapidez nas respostas aos problemas que são colocados, mas tem como efeito colateral o distanciamento nas relações humanas, uma menor necessidade da criatividade na obtenção das soluções e compreensão de problemas. Neste contexto, este trabalho faz uma articulação entre o uso de materiais didáticos artesanais e o uso de recursos digitais de ensino, levantando reflexões necessárias para que o uso de metodologias alternativas de ensino não sejam apenas modismos. O uso de materiais didáticos manipuláveis artesanais não contrapõe o uso dos recursos tecnológicos computacionais, pois eles podem ser complementares. Esses modelos mostram como os estudantes podem construir conceitos e representações relativos aos conteúdos da matemática escolar, em particular da trigonometria, para elaborar e desenvolver o processo de ensino e aprendizagem diferente do que existe nas escolas. Os modelos propostos possibilitarão diversas formas para o trabalho escolar, levando os estudantes a se envolverem mais intensamente com o processo de aprendizagem e a construírem, eles próprios, seu conhecimento matemático.

Palavras-Chaves: Trigonometria, Materiais Manipuláveis, Recursos Digitais.

ABSTRACT

In a technology-centered world, human relationships have ended up in the background. Technological development has led to an increasing reliance on electronic resources in people's daily lives. On the one hand, modern technological resources allow faster response to the problems that are posted. On the other hand, there has been detachment in human relations, causing less need for creativity in obtaining solutions and understanding problems. In this context, this thesis reflects on the use of alternative teaching strategies, which articulates the use of manipulative materials with digital resources. Therefore, the use of manipulative materials in teaching does not counteract the use of digital resources, as they may be complementary. These models show how students can construct representations and concepts of school mathematics, particularly trigonometry, to elaborate and develop a teaching and learning process that differ from what already exists in schools. The proposed models will enable diverse forms of school work, leading students to become more deeply involved in the learning process and to construct their own mathematical knowledge themselves.

Keywords: Trigonometry; Manipulative Materials; Digital Resources.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino da matemática passa por grandes transformações. Na busca por um ensino de qualidade, adequado aos tempos atuais, provocou o surgimento de encaminhamentos metodológicos tais como a resolução de problemas, o uso de materiais manipuláveis e jogos, a modelagem matemática, a etnomatemática, o uso da história da matemática, a contextualização, além do uso de novas tecnologias em sala de aula, incluindo calculadoras e computadores. No entanto, a maioria das escolas possui problemas estruturais em sala de aula, nem sempre adaptadas às necessidades do conteúdo matemático a ser desenvolvido.

Um tema recorrente nas discussões de educação é o comportamento do aluno em sala de aula, das dificuldades que são encontradas quando se pretende motivar os alunos com os recursos que se tem em sala de aula diante de um mundo cheio de recursos tecnológicos. Por outro lado, os alunos têm suas vidas mecanizadas frente à série de recursos que facilitam seu dia a dia. Neste trabalho pretende-se articular, no ensino de matemática uma metodologia que permita a associação dos recursos tecnológicos a materiais didáticos manipulados, prontos ou construídos pelos próprios alunos.

As sucessivas reformas educacionais propõem a inclusão de materiais didáticos inovadores, como exigências de novas filosofias e metodologias de ensino, que agregam aos conceitos didáticos e pedagógicos a reformulação da prática docente. Geralmente preveem a adoção de novas técnicas, às quais se relacionam novos materiais e equipamentos. Em algumas situações, a produção de materiais e equipamentos didáticos deriva mais dos interesses dos fabricantes e dos fornecedores do que da necessidade dos educadores (FREITAS, 2009).

O ensino de matemática, quando desenvolvido dentro de um contexto, possibilita a construção do pensamento lógico despertando, a partir da curiosidade, o interesse do educando. Ensinar não é transferir conhecimento, mas sim criar condições para que o conhecimento seja produzido ou construído (FREIRE, 2011).

A educação escolar deve ser um instrumento de construção de cidadania, com a escola cumprindo seu papel de criar mecanismos para mesclar o ensino do conhecimento cientificamente elaborado com a busca de uma consciência política. Segundo Paulo Freire (FREIRE, 2001), cidadão significa o indivíduo no gozo dos direitos civis e políticos de um Estado enquanto que cidadania está relacionada com a condição de cidadão, ou seja, com o uso dos direitos e o direito de ter deveres de cidadão. A educação para a cidadania pretende fazer de cada indivíduo um agente de transformação.

Segundo Perrenoud, a principal causa do fracasso escolar está na organização do trabalho pedagógico (PERRENOUD, 2000). A repetência, a evasão escolar e a aprovação, até certo ponto compulsória que ocorre em virtude das imposições pelos órgãos diretivos, tem tornado o ambiente escolar dada vez menos interessante tanto ao professor como ao aluno. O insucesso escolar não está exclusivamente em um único dos fatores possíveis, nem só do professor, nem nos métodos e recursos ou no sistema educacional (DORNELES, 1999).

Neste trabalho, busca-se apresentar encaminhamentos metodológicos para o ensino de trigonometria tendo como alicerce materiais manipulados, que podem ser construídos de modo artesanal e aliados a recursos tecnológicos.

A estrutura deste trabalho se divide do seguinte modo: Inicialmente, faz-se uma revisão da literatura que fundamenta o uso de recursos no ensino da matemática. A seguir são apresentados alguns recursos digitais e alguns recursos manipuláveis que podem ser utilizados no ensino da trigonometria. Estes recursos são utilizados na construção de uma sequência didática para o ensino da trigonometria.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O ensino da matemática tem passado por grandes mudanças nos últimos anos. Novas metodologias centradas na resolução de problemas contextualizados e o uso de recursos digitais são ignorados por professores de matemática, que ainda ministram suas aulas como se fazia no passado. Por outro lado, a busca de novas alternativas de abordagem dos conteúdos que se julgam importantes para a formação dos jovens é o anseio de grande parte dos educadores. A principal preocupação é com a perspectiva utilizada: enquanto, tradicionalmente, a tarefa de ensinar é centrada no professor, em contraposição a isso, as novas tendências buscam retomar o caminho por onde a aprendizagem realmente acontece: é o aprendiz quem aprende e é a partir dele que se deve construir os saberes (BRETTAS, 2005).

No ensino da Trigonometria, um objeto de conhecimento importante dentro da Matemática, presente tanto no cotidiano quanto no contexto escolar, grandes são as dificuldades encontradas. As leis da trigonometria provocam grandes dificuldades a aprendizagem na sala de aula. Dificuldades estas causadas pelo enfoque desenvolvido pelo professor em sala de aula, distante da realidade do aluno, priorizando a técnica em detrimento ao significado e a aplicabilidade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (BRASIL, 1999) o estudo da trigonometria é destacado como um tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática como desenvolvimento de habilidades e competências, sendo que este estudo deve estar relacionado às aplicações, evitando-se o uso excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações.

Muitos ainda têm a concepção de que a aprendizagem ocorre através da repetição. Existe uma grande preocupação no ambiente escolar acerca do controle e contenção da conduta dos alunos, onde a avaliação da aprendizagem é predominantemente realizada utilizando-se provas escritas. Existe ainda uma relação muito distante entre a família e a escola, o que é colocado por muitos como o principal responsável pelo insucesso escolar.

Uma nova escola deve ser construída. Para tanto, se faz necessário uma reflexão que possibilite a compreensão das raízes históricas que colocam em situação de miséria e exclusão grande parte da população. A escola deve ser um ambiente de formação humana, tendo no universo escolar um espaço privilegiado para propor os caminhos que levem a mudanças no caráter de exclusão encontradas historicamente. Não haverá democracia substancial se inexistir essa responsabilidade propiciada pelo ambiente escolar (MONACO, 2011). Neste contexto, enquanto os materiais manipuláveis permitem a socialização entre os estudantes no trabalho coletivo, o uso de recursos digitais traz o bom uso da tecnologia a favor do ambiente escolar

As contradições encontradas no ambiente escolar são motivos de grandes discussões nas salas de professores das escolas. O aluno vive em um mundo cheio de recursos tecnológicos enquanto que a escola em nada ou muito pouco avançou nos recursos disponíveis para o ensino de sala de aula. Porém, outro aspecto levantado é que o uso dos recursos tecnológicos tem levado os alunos a uma perda no sentido de desenvolver sua criatividade, pois as respostas às suas indagações são rapidamente respondidas pela internet.

O trabalho criativo, tipicamente relacionado com artistas e cientistas, no entanto, a criatividade não está relacionada ao tipo de ocupação profissional, mas sim nas tarefas e atividades que buscam o desenvolvimento de novas ideias. A criatividade reside nas pessoas, em suas mentes e no seu ser (DE GEUS, 2010).

É necessário que se encontre um meio termo entre o uso dos recursos tecnológicos, que foram desenvolvidos para melhorar o cotidiano do cidadão, o desenvolvimento do caráter investigativo em sala de aula.

> [...] unir em um mesmo contexto cidadania e redes digitais mostra a importância que tem o entorno das TIC (tecnologias de informação e comunicação) para redefinir, a partir de uma perspectiva multidisciplinar, alguns dos conceitos básicos da filosofia política. Essas redes não se limitam a ser um instrumento de controle social, nem tampouco uma ferramenta que aumenta a eficácia das formas de comunicação que têm caracterizado a Sociedade Industrial. De fato, as redes digitais são o campo de batalha onde se travam algumas das lutas mais significativas pelos direitos humanos. Não podemos falar de liberdade de expressão nem de direito à informação se não considerarmos as possibilidades que as ditas redes oferecem aos cidadãos menos favorecidos. (BUSTAMANTE, 2010)

Por outro lado, ao uso de recursos manipuláveis que permitam a compreensão dos conceitos científicos de modo lúdico, desenvolvendo o senso crítico e a criatividade por meio do uso de recursos artesanais.

A efetiva informatização das escolas faz parte de um projeto de construção não só da educação, mas de uma sociedade emancipadora, onde alunos, professores e funcionários estarão construindo esse caminho de transformação.

Porém, em paralelo se faz necessária a criação de ambientes para a produção de materiais de forma artesanal, permitindo aos alunos o desenvolvimento de sua capacidade cognitiva.

A disseminação da informática na sociedade deve estar presente na escola. No entanto, a presença deste novo recurso vai exigir novas concepções da escola e do Professor, conhecendo novos mecanismos de comunicação interagindo com esta nova linguagem, tão próxima de nossos alunos e um verdadeiro desafio para o Professor. Uma nova postura é exigida do professor, com a incorporação de novos conceitos em sua prática cotidiana.

Com a presença mais forte da tecnologia na vida cotidiana, seja ela por meio do computador ou dos celulares, tablets e smartphones, pode-se acreditar que o uso de materiais didáticos artesanais seria obsoleto e desnecessário. Porém é preciso lembrar que além do fato de que a informática ainda não chegou à grande maioria das Escolas Públicas, as que já possuem ainda não sabem como utilizar. Neste contexto, associando o uso dos recursos tecnológicos com os materiais didáticos artesanais irá possibilitar o desenvolvimento no aluno de uma nova visão de mundo, associando o mundo tecnológico atual com os recursos manipuláveis que permitem uma melhor compreensão do mundo que os cerca.

Já em 1962, o Professor Manoel Jairo Bezerra, autor de vários livros didáticos de Matemática, em sua obra: “O material didático no ensino da matemática”, destacava que as principais funções do material didático são: tornar o ensino da matemática mais atraente e acessível; acabar com o medo da matemática que gera preconceitos e aumenta cada vez mais a dificuldade do ensino, bem como tornar a matemática interessante para o maior número de alunos (REGO, 2006).

A transformação da sala de aula em um laboratório de ensino e aprendizagem irá gerar um novo ambiente escolar. A inserção do aluno como sujeito ativo no processo escolar possibilitará uma nova realidade na escola. Assim, é necessário desenvolver uma Metodologia para o Ensino de Matemática que agregue o desenvolvimento tecnológico ao desenvolvimento motor, associando a investigação em sala de aula aos recursos eletrônicos e materiais didáticos artesanais construídos pelos alunos, no intuito de uma melhor compreensão dos conteúdos curriculares.

O uso da informática, presente no dia a dia do aluno, abre as possibilidades de novos paradigmas no ambiente escolar. O enfoque experimental e investigativo na sala de aula ganha agilidade com os recursos computacionais. A geração de gráficos onde os pequenos detalhes são vistos de forma dinâmica e ágil estimula os alunos cada vez mais ansiosos por respostas rápidas (BORBA, 2007).

Neste contexto, as componentes curriculares da Matemática escolar podem ser desenvolvidas em sala de aula com aplicativos computacionais, bem como com o uso de *softwares* livres tais como *Winplot*, *Winmat* e *GeoGebra*. Em paralelo podem ser construídos materiais didáticos manipuláveis de forma artesanal, com o intuito de tornar o conhecimento matemático acessível a todos os alunos. Estes aplicativos e materiais podem ser experimentados de forma simultânea, aperfeiçoando e validando os materiais e métodos desenvolvidos.

Considerando, por exemplo, o ensino de Trigonometria, os dois enfoques podem ser considerados com a construção de um material manipulável e na sequência a representação computacional deste modelo prático por meio de um software de geometria dinâmica tal como o *GeoGebra*.

SALDAN (2014) apresenta uma alternativa ao estudo da trigonometria no ensino médio, usando como instrumento adicional para aprendizagem o *software* de matemática *GeoGebra*. Com o objetivo de determinar experimentalmente os valores das razões trigonométricas para os ângulos agudos, MENDES (2009) propõe a construção do “Trigonômetro”. Este material artesanal permite a medição das razões trigonométricas. A partir da construção e utilização do trigonômetro, os alunos têm maior facilidade na compreensão do significado das razões trigonométricas, além de viajar pela história vivida pelos matemáticos na antiguidade.

A construção de instrumentos artesanais permite aos estudantes, além da aquisição dos conceitos científicos relacionados ao conteúdo escolar, o desenvolvimento de habilidades manuais e interação social, que são características comuns no trabalho em grupo desenvolvido na produção dos materiais manipuláveis.

O uso de atividades como gerador do ensino e da aprendizagem em matemática geralmente é usada nas séries iniciais do ensino fundamental e em geral vista apenas como forma lúdica para construir conceitos básicos (MENDES, 2009). O uso de recursos artesanais manipuláveis bem como os recursos computacionais possibilita em qualquer nível de ensino, quando relacionada ao conteúdo e não apenas uma forma de recreação, o desenvolvimento pleno do conteúdo matemático.

As concepções históricas podem ser usadas na geração de uma matemática escolar baseadas na investigação e na experimentação, desenvolvendo no estudante a pesquisa como princípio científico e educativo, através do levantamento de hipóteses e testagem destas hipóteses por meio de atividades manipuláveis extraídas da história da matemática. Esta forma de ação em sala de aula possibilita aos alunos uma reflexão acerca da formalização dos conceitos matemáticos, das propriedades e artifícios hoje usados e construídos em outras épocas (MENDES, 2009).

Enquanto que os recursos tecnológicos, tais como: a calculadora, o *tablet* ou o computador, podem tornar possível a resolução de problemas do cotidiano, onde os números nem sempre são tão comportados e de fácil manipulação como nos livros didáticos, o uso de materiais manipuláveis permite o desenvolvimento da relação interpessoal dos alunos pela necessidade de interação na construção destes recursos (SOUZA, 2015).

A natureza da prática do professor depende muito da forma com que ele relaciona os elementos metodológicos. A saída de uma zona de conforto que não mais satisfaz o aluno dos dias atuais permite novas experiências no contexto de ensino-aprendizagem (BORBA, 2007).

Nesse contexto, a formação continuada dos professores se faz necessária como forma de possibilitar o desenvolvimento e o uso das tecnologias, seja digital ou artesanal, no âmbito do trabalho docente, de forma reflexiva e exploratória, incorporando novas experiências no desenvolvimento das ações de sala de aula. Os trabalhos apresentados acerca do ensino de matemática apresentam metodologias com abordagens diversas.

Neste trabalho, serão apresentados dois modelos complementares para o ensino da matemática, e no caso, em particular para o ensino da trigonometria: Primeiro, o uso de aplicativos digitais, como aplicativos ou *softwares* para o ensino de matemática; em seguida, o uso de materiais manipuláveis, que podem ser construídos pelos próprios alunos, onde situações problemas podem ser construídas por meio de materiais artesanais. Estes modelos possibilitarão intervir no processo de ensino e aprendizagem da matemática, proporcionando aos alunos um maior interesse e uma melhor compreensão do objeto de conhecimento apresentado.

3. RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

O uso de materiais didáticos manipuláveis artesanais não contrapõe o uso dos recursos tecnológicos computacionais, eles são complementares no sentido de aumentar as possibilidades de o aluno desenvolver suas competências e habilidades na compreensão dos objetos do conhecimento estudado.

Por outro lado, o material didático manipulável pode ser um eficiente recurso para muitos alunos que, não compreendendo a mensagem visual da tela do computador, podem usar do recurso do material manipulável para a compreensão dos conteúdos curriculares apresentados em sala de aula.

Os modelos propostos possibilitarão diversas formas para o trabalho escolar, levando os alunos a se envolverem mais intensamente com o processo de aprendizagem e a construírem, eles próprios, seu conhecimento matemático. Esses modelos mostram, claramente, como se pode levar os estudantes a construírem conceitos e representações relativos às componentes curriculares da matemática escolar.

Na didática da matemática o conceito de recurso educativo possui diferentes aplicações e interpretações (RICOY, 2012). Nesta unidade serão apresentados alguns recursos, tanto digitais quanto manipuláveis que podem ser aplicados no ensino de trigonometria quando da construção de uma sequência didática.

3.1 RECURSOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

BITTAR (2008) apresenta alguns questionamentos que um professor, da educação básica deve ter quando resolve fazer uso da tecnologia com seus alunos, tais como:

- ✓ Onde ele procurará ajuda, caso necessite?
- ✓ Que tipo de material ele tem disponível sobre o uso das novas tecnologias em sala de aula?
- ✓ Como ele poderá escolher o produto tecnológico a ser usado?
- ✓ Quando e como utilizar a informática com seus alunos?

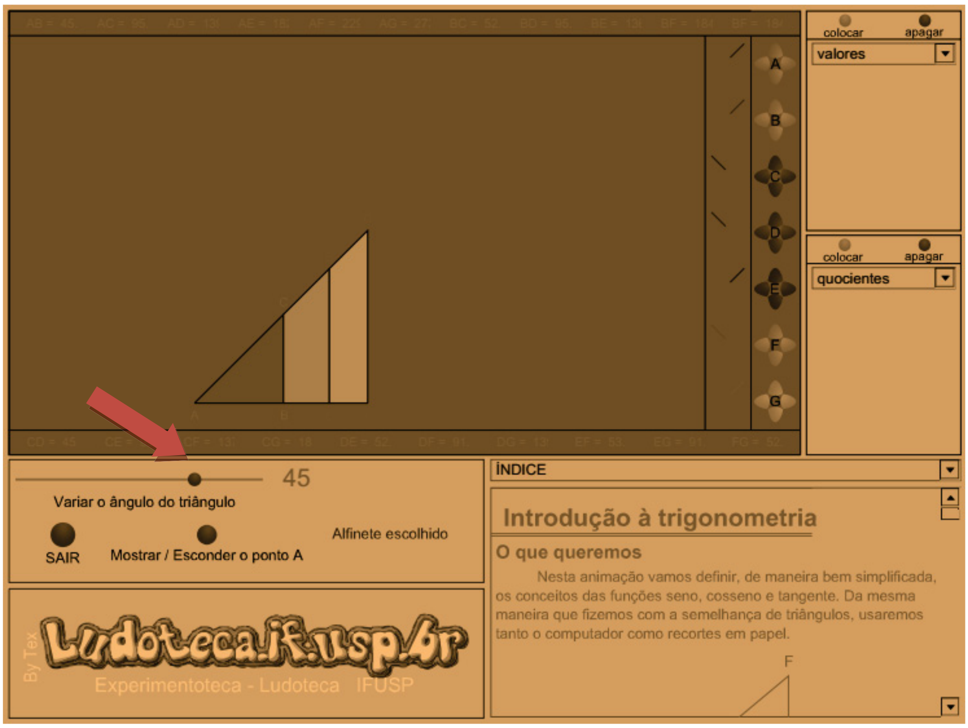
Assim, o uso de recursos digitais deve ser dosado e muito bem avaliado sobre o momento de aprendizagem e qual o tipo de atividade deve ser proposto aos alunos de modo a contribuir com essa aprendizagem. Não se pode fazer do uso dos recursos de informática apenas como um “modismo”, mas estar relacionado com o objeto de conhecimento a ser desenvolvido, bem como nas competências e habilidades buscadas.

Serão apresentados alguns recursos digitais que podem ser utilizados no ensino da trigonometria.

3.1.1 Simulações ludoteca – Introdução a trigonometria e funções trigonométricas

Desenvolvido por um grupo de pesquisa e extensão da USP – Universidade de São Paulo e da UNIFESP – Universidade Federal de São Paulo, com o objetivo de fomentar o caráter investigativo da educação em ciências, enfocando o caráter lúdico na formação escolar. Dentro deste projeto, três são os aplicativos para o ensino da trigonometria.

Figura 1: Noções básicas de trigonometria



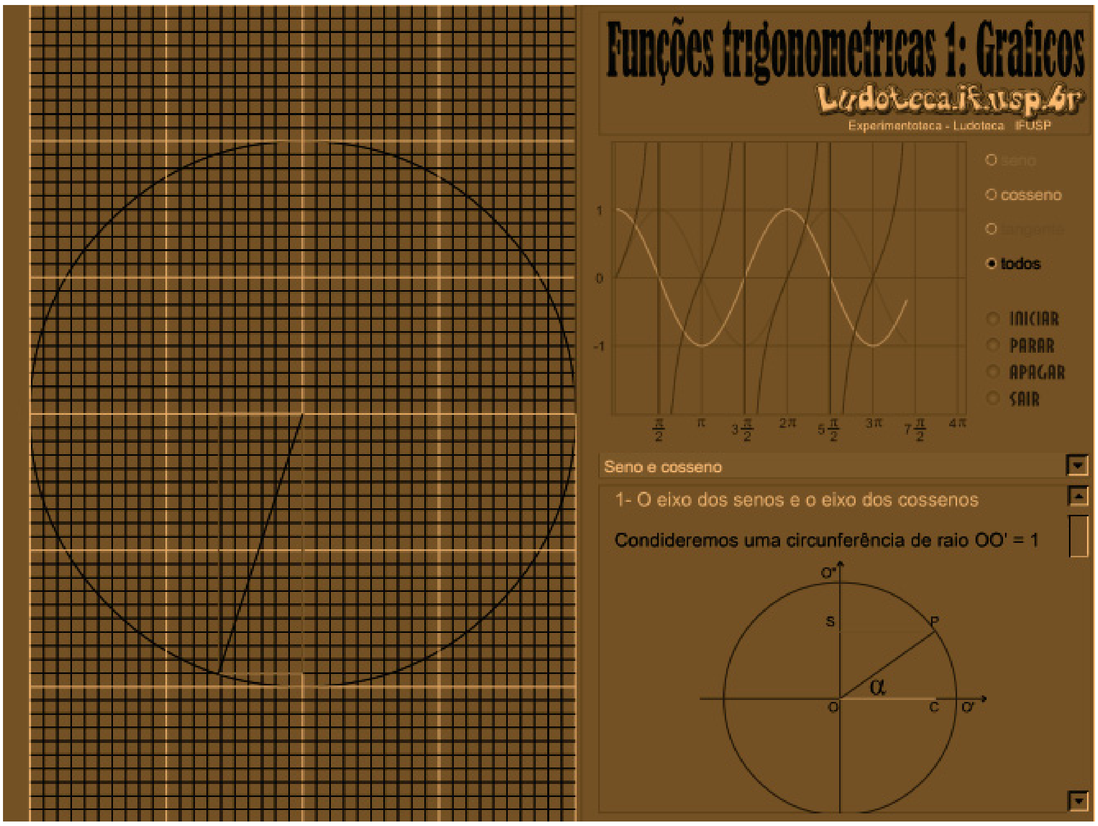
Fonte: http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_atrigonometria

O primeiro aplicativo, “Noções básicas de trigonometria”, disponível em http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_atrigonometria, como apresentado na figura 1, permite a obtenção dos valores das razões trigonométricas.

Observe que existe no aplicativo um botão deslizante para variar o ângulo bem como o desenvolvimento teórico no canto inferior direito.

No segundo aplicativo, “Funções trigonométricas gráficos I”, disponível em http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_funcaotrigonometricasgraficosi, como apresentado na figura 2, possibilita o desenvolvimento das funções trigonométricas seno ($senx$), cosseno ($cosx$) e tangente ($tanx$) no ciclo unitário, bem como a representação gráfica no intervalo $[0,4\pi]$. Observe que no lado esquerdo tem-se o círculo trigonométrico, enquanto que no canto superior direito seleciona-se uma das funções trigonométricas ou então se seleciona todas. Na sequência deve ser selecionado o iniciar para descrever o movimento do arco no ciclo trigonométrico bem como a representação gráfica da função trigonométrica estudada. No canto inferior direito tem-se o desenvolvimento teórico.

Figura 2: Funções trigonométricas 1 - gráficos

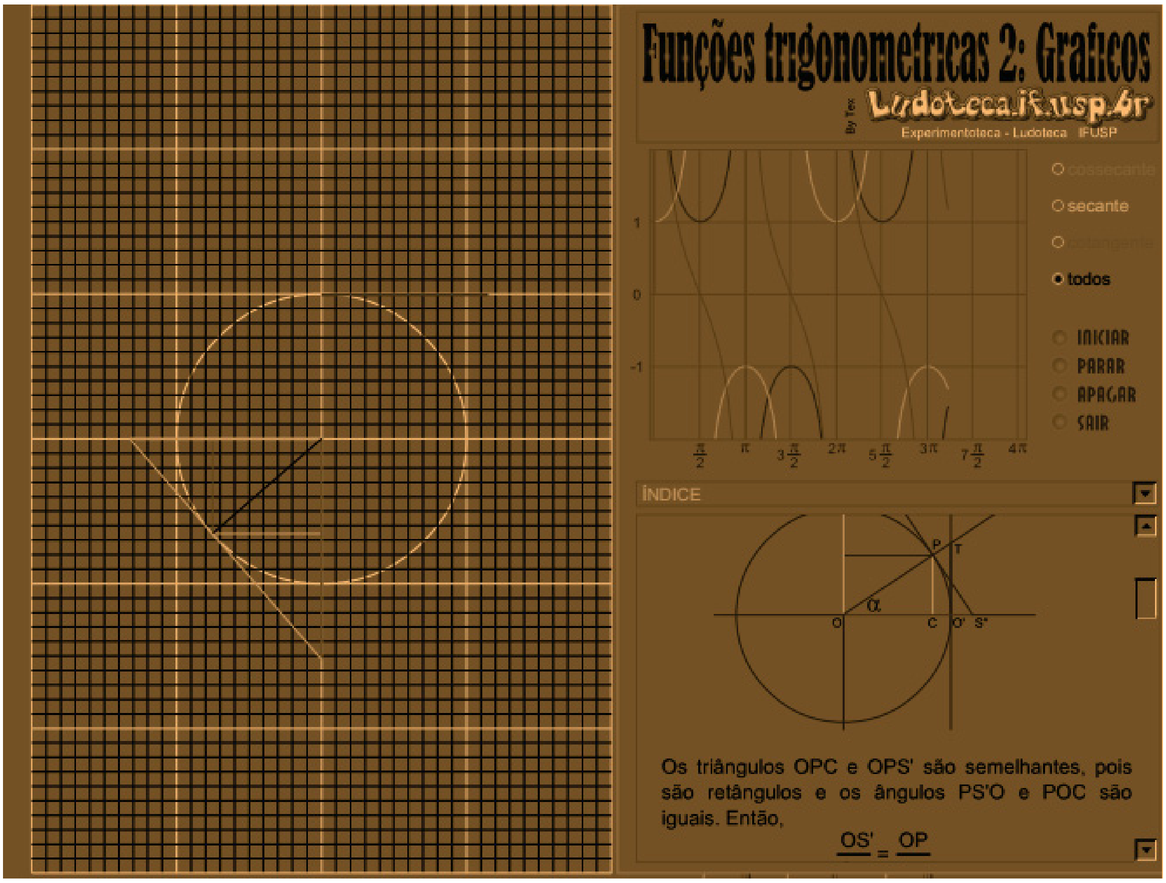


Fonte: http://www.cienciamao.usp.br

O terceiro aplicativo de trigonometria deste grupo, semelhante e complementar ao anterior, “Funções trigonométricas - gráficos II”, disponível em http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_funcaotrigonometrica

sgraficosii, como apresentado na figura 3, possibilita o desenvolvimento das funções trigonométricas: secante ($secx$), cossecante ($cscx$) e cotangente ($ctgx$) no ciclo unitário, bem como a representação gráfica no intervalo $[0,4\pi]$. As considerações do aplicativo são as mesmas do anterior. Observe que no lado esquerdo tem-se o círculo trigonométrico, enquanto que no canto superior direito seleciona-se uma das funções trigonométricas ou então se seleciona todas. Na sequência deve ser selecionado o iniciar para descrever o movimento do arco no ciclo trigonométrico bem como a representação gráfica da função trigonométrica estudada. No canto inferior direito tem-se o desenvolvimento teórico.

Figura 3: Funções trigonométricas 2 - gráficos



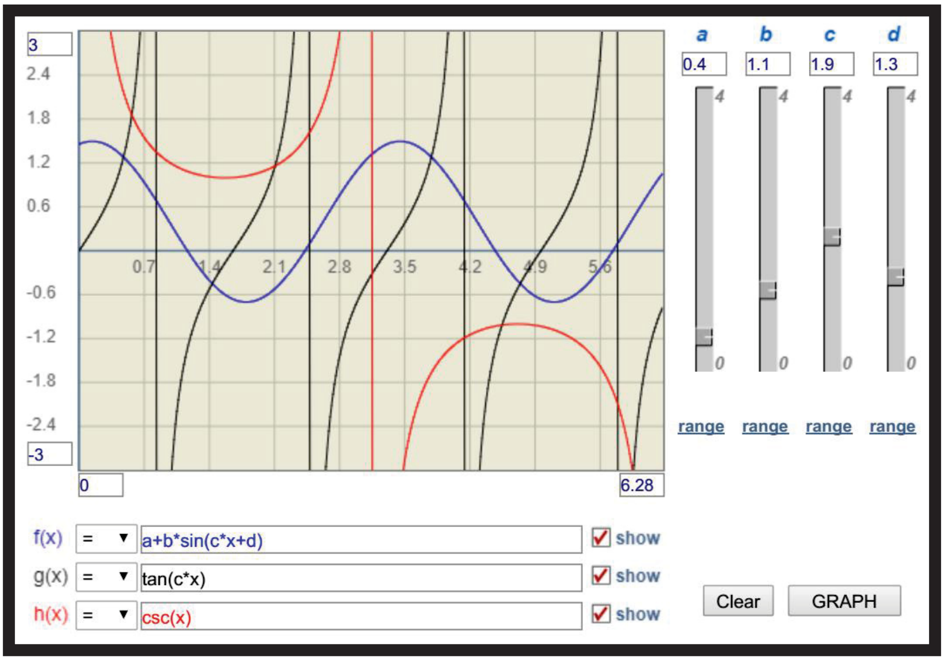
Fonte: http://www.cienciamao.usp.br

3.1.2 Explorador gráfico de funções (GFE)

Disponível em http://www.mathopenref.com/graphfunctions.html, o GFE – *Graphical Function Explorer* - é uma ferramenta gráfica, on-line, gratuita que permite traçar até três funções. No caso das funções trigonométricas, seno (sin), cosseno (cos), tangente (tan), cotangente (ctg), secante (sec) ou cossecante (csc), de forma isolada ou em conjunto, no mesmo conjunto de eixos. Nestas funções, é possível variar até quatro parâmetros, ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, independentes e controlados por controles deslizantes. Neste sentido é possível que o estudante observe com facilidade os efeitos dados pela variação dos parâmetros nas funções trigonométricas.

Este aplicativo possui as mesmas regras de sintaxe usadas para expressões em calculadoras científicas. Deve ser digitada uma fórmula em uma das três caixas de entrada ($f(x)$, $g(x)$ ou $h(x)$), então pressione o botão GRAPH do aplicativo ou a tecla *Enter* do teclado. A figura 4 ilustra um exemplo.

Figura 4: Explorador gráfico de funções



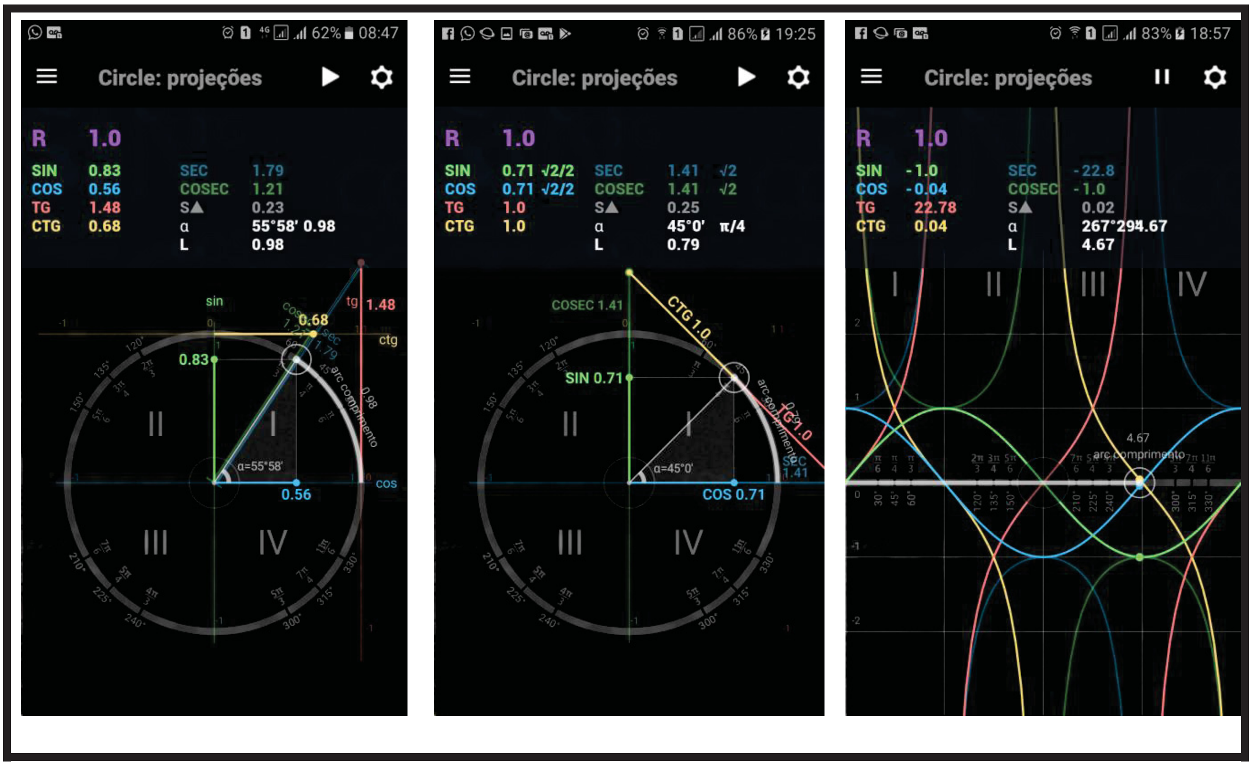
Fonte: http://www.mathopenref.com/graphfunctions.html

Na figura 4, os números 3 e -3 nos retângulos à esquerda do gráfico indicam a variação do eixo das ordenadas, enquanto que os números 0 e 6,28 indicam a variação do eixo das abscissas. Os botões deslizantes ***a***, ***b***, ***c*** e ***d*** fazem as variações destes parâmetros, que podem ser colocados nas funções trigonométricas como objetos do estudo. Para reiniciar o trabalho, pressione o botão *Clear* (limpar), e na sequência podem-se descrever as novas funções de acordo com objeto de estudo pretendido.

3.1.3 Círculo Unitário Trigonométrico

Este aplicativo, “Círculo Unitário Trigonométrico”, disponível no *PlayStore*, loja de aplicativos para celular *Androide*, é recomendado para os alunos na compreensão visual e no cálculo das funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante; na descrição das funções; na identificação dos valores das tabelas trigonométricas; na visualização das fórmulas e identidades trigonométricas, com destaque na simetria e na periodicidade. Possibilita ainda a compreensão das identidades básicas, da soma e da diferença dos ângulos, do arco duplo, do arco metade, dentre outras aplicações. Possibilita mover ponto para definir o ângulo e os valores das funções associados a este ângulo.

Figura 5: Ciclo trigonométrico unitário – círculos e gráficos



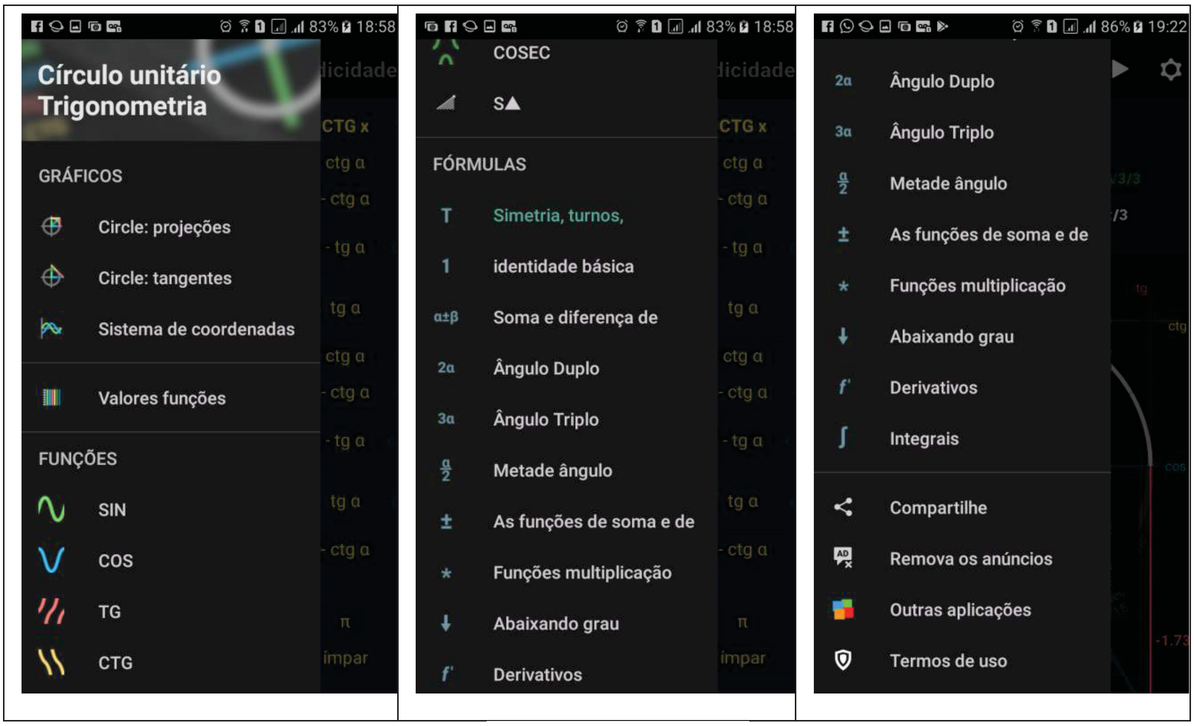
Fonte: O próprio autor

Nas figuras 5 e 6 são apresentadas as telas do *Smartphone* onde foi instalado o aplicativo. Na figura 5 tem-se, à esquerda e no centro, o ciclo trigonométrico. À esquerda tem-se o deslocamento de um ponto sobre o círculo com as projeções sobre os eixos, enquanto que no centro a projeção é sobre a reta tangente ao círculo, na extremidade de arco. Têm-se ainda à direita os gráficos das funções. É possível, no menu de configurações, selecionar apenas algumas das funções.

O usuário pode dar movimento às figuras apenas com o toque na tecla do aplicativo. Destaca-se que é possível selecionar individualmente uma única ou um grupo de funções trigonométricas, o que permite o estudo individualizado de cada uma destas.

Na Figura 6 são apresentadas algumas telas adicionais. Nestas telas são apresentados os itens encontrados no menu do aplicativo.

Figura 6: Ciclo trigonométrico unitário – menu do aplicativo



Fonte: O próprio autor

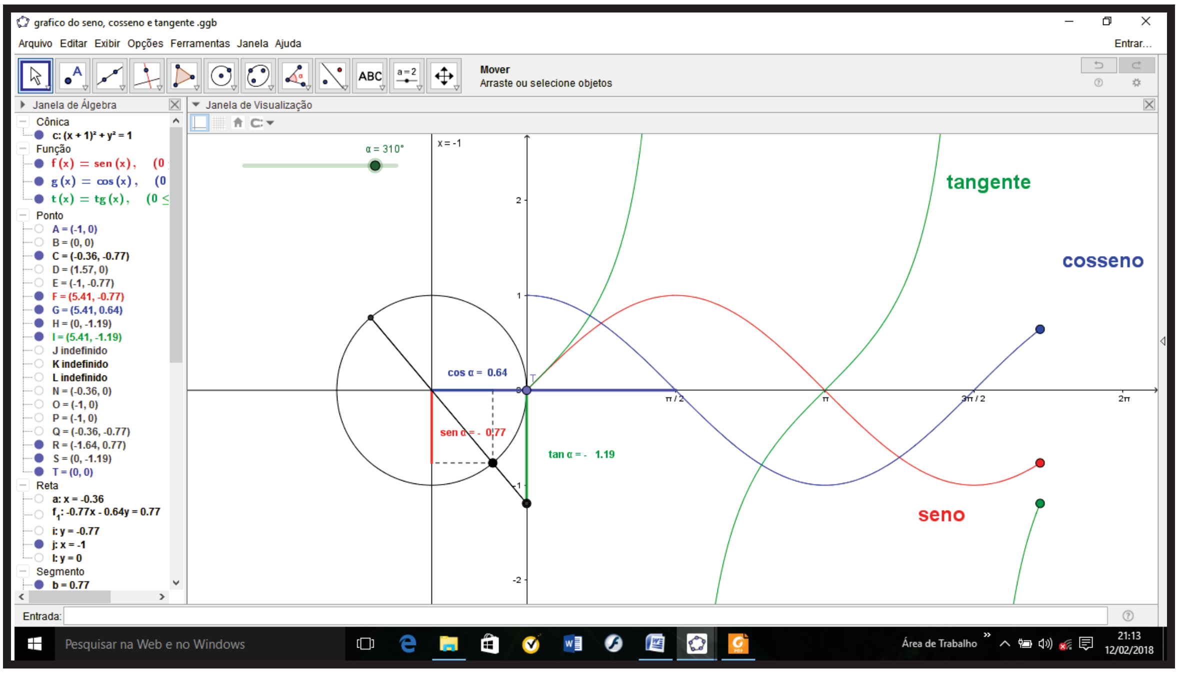
Assim, é possível no aplicativo, o fácil acesso às relações e fórmulas trigonométricas por parte do usuário.

3.1.4 Uso do *software* GeoGebra no ensino de trigonometria

O desenvolvimento de atividades com os recursos de um software de geometria dinâmica como o GeoGebra, que possibilita a movimentação de objetos, e a partir destes movimentos observarem as propriedades matemáticas envolvidas na resolução de problemas matemáticos, desenvolvendo no aluno o caráter investigativo e a obtenção rápida de respostas a perguntas do tipo “e se eu alterar um valor?”. O levantamento de hipóteses com a rápida resposta consegue sanar uma parte da ansiedade dos jovens estudantes. O *GeoGebra* trabalha com um conjunto de definições matemáticas e possibilita duas formas de interação: uma janela geométrica e uma janela algébrica, que possibilitam ao estudante uma interação entre as duas informações.

Lopes (2013), destaca que uma construção realizada com o *software GeoGebra* que permite mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos, gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos, equações) e nas células de uma folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em quaisquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente construídos.

Figura 7: Tela do GeoGebra com o gráfico de funções trigonométricas



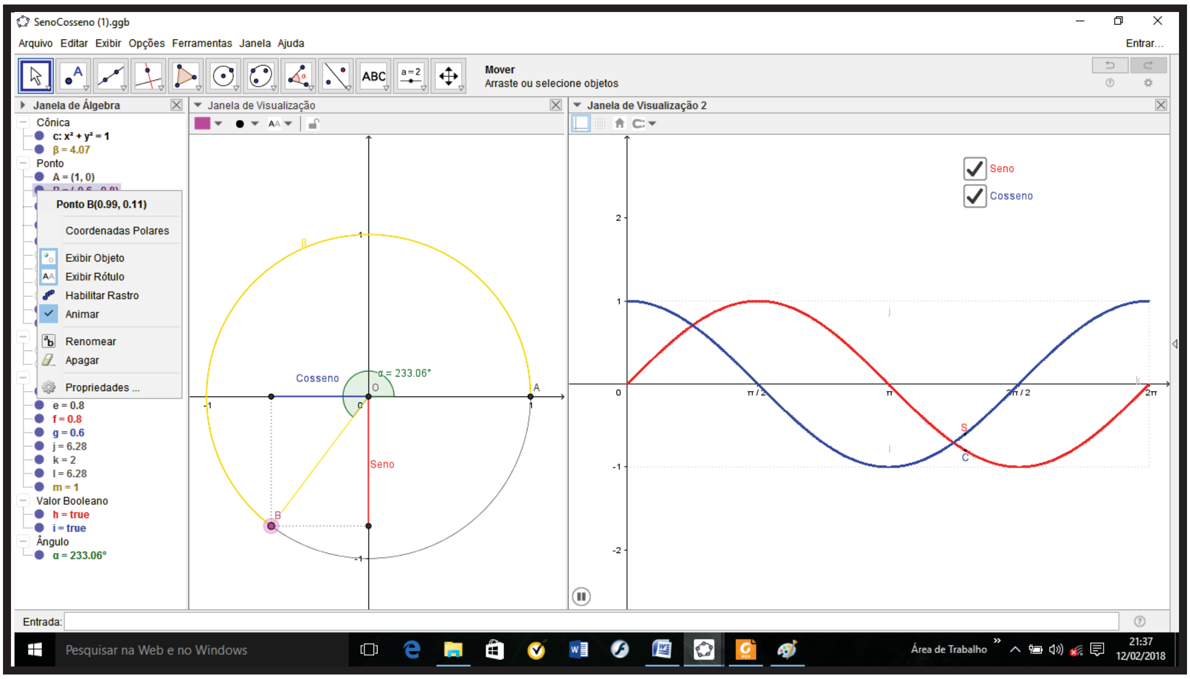
Fonte: O próprio autor

O uso do *GeoGebra* possibilita investir na análise e compreensão dos conceitos, pois o aluno não se prenderá em fazer cálculos, mas sim em perceber de onde se originam os valores, focalizando as construções e analisando os valores algébricos apresentados pelo software (MARGOTTI, 2007).Neste sentido, uma atividade com o recurso digital, no caso específico o *GeoGebra*, a possibilidade de movimentar os objetos permite ao aluno a investigação do que ocorre em sua construção, levantando hipóteses tais como o que ocorre com a variação na figura de acordo com as variações que podem ser observadas nas figuras, percebendo assim as suas regularidades (LOPES, 2013).

As figuras 7 e 8 apresentam telas com algumas de possibilidades de trabalho com o *GeoGebra* em um laboratório de informática ou em um projetor em sala de aula.

Na figura 7, está aberta uma janela de álgebra, onde estão destacados às operações geométricas utilizadas na construção do gráfico das funções seno, cosseno e tangente, apresentados na janela de visualização aberta.

Figura 8: Tela do GeoGebra com ciclo e o gráfico de funções seno e cosseno



Fonte: O próprio autor

Por outro lado, a figura 8 apresenta uma janela de álgebra e duas janelas de visualização, onde está aplicada a opção de movimento. Na janela de visualização 1 tem-se no ciclo trigonométrico, o deslocamento do ponto sobre a circunferência trigonométrica com a projeção nos eixos dos valores do seno e do cosseno deste arco. Na janela de visualização 2 tem-se a representação no plano cartesiano do gráfico das funções seno e cosseno. Cabe salientar que as figuras possuem movimento, que pode ser dado no GeoGebra pelo comando “Animar”, conforme pode ser visto na janela de álgebra sobre o ponto B.

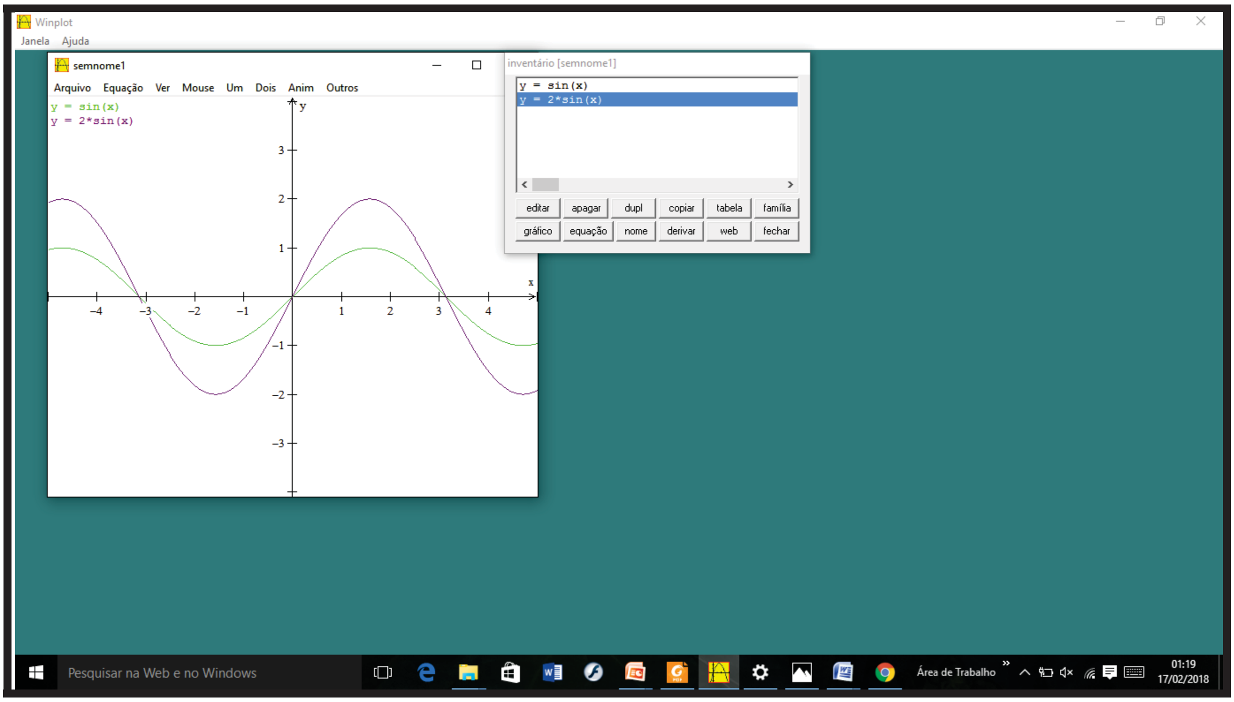
Cabe destacar que na figura 8 é possível selecionar individualmente seno ou cosseno, apenas fazendo a seleção na caixa colocada na figura. Outras possibilidades podem ser descritas.

3.1.5 Uso do *software* Winplot no ensino de trigonometria

Desenvolvido em 1985, *Winplot* é um *software* livre**,** construtor de gráficos de fácil utilização que permite ao usuário a comparação das possibilidades de variação dos parâmetros de uma função. Esta facilidade permite ao estudante usuário com espírito investigativo compreender o funcionamento de seu objeto de estudo. Por ser um software livre, é possível fazer uso tanto em sala de aula quanto na realização de atividades domiciliares. Pode ser usado tanto por professores como complemento de aprendizado, como por alunos que estudam em casa sozinhos ou em grupo.

A figura 9 apresenta uma tela do *Winplot* onde estão construídos os gráficos das funções $y = senx$ e $y = 2.senx$. Observe que existe a janela do gráfico e a janela algébrica com as funções.

Figura 9: Tela do *Winplot*



Fonte: O próprio autor

Existe também no *Winplot* a possibilidade de construir gráficos em 2D, como na figura 9, ou em 3D.

3.2 MATERIAIS MANIPULÁVEIS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Antes do surgimento das escolas, os primeiros brinquedos inventados tinham função educativa. Geralmente representavam atividades humanas cotidianas, tais como a criação de animais, ou os cuidados com a criação da família, objetivando a preparação das crianças para suas tarefas na fase adulta. As primeiras bonecas também eram feitas de pele de animais, dentre outros materiais – com o intuito de desenvolver, nas meninas, as habilidades necessárias aos cuidados com os filhos, o que torna claro a preocupação com o lúdico no processo de ensino, deixando claro que aprender com prazer significa aprender mais e melhor. (FREITAS, 2009).

O uso de materiais didáticos manipuláveis pode ser um importante recurso didático de apoio ao processo de ensino-aprendizagem. Estes materiais podem transformar as aulas de matemática, tornando-as mais dinâmicas e de fácil compreensão tendo em vista que permite uma constatação prática, através da manipulação de objetos, da teoria matemática desenvolvida (RODRIGUES, 2012).

Cabe salientar que nenhum material didático pode garantir a qualidade e a efetividade no processo de ensino e aprendizagem. Estes possuem uma importante função: a mediação do processo, e não podem ser utilizados como se fossem começo, meio e fim de um processo didático. O material didático deve-se integrar num ciclo mais completo de ensino-aprendizagem (FREITAS, 2009).

O uso eficiente do material didático, manipulável ou digital, no processo ensino-aprendizagem está relacionado com a forma com que o professor irá utilizá-lo na mediação do processo de ensino. Os materiais didáticos manipuláveis podem intervir fortemente na aprendizagem dos alunos. Assim, o uso do material manipulável em sala de aula pressupõe, antes de tudo, por parte do professor, um exercício de prática reflexiva para que este possa utilizá-lo de forma correta, tornando assim a aprendizagem dos alunos mais significativa e prazerosa (RODRIGUES, 2012).

3.2.1 Teodolito trigonométrico

O teodolito é um instrumento óptico de medida utilizado para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais. Atualmente existem teodolitos eletrônicos e digitais, mas os conceitos e metodologia são basicamente os mesmos.

No ensino de trigonometria é possível construir um teodolito rústico, que costuma ser chamado por teodolito trigonométrico. Um exemplo é destacado na figura 9, com o uso de dois transferidores, uma haste de madeira, uma base de madeira e um canudo como viseira. A partir dos conceitos de triangulação, é possível desenvolver atividades contextualizadas em sala de aula para calcular distâncias e alturas.

Figura 10: Teodolito trigonométrico

Fonte: O próprio autor

Outros modelos de teodolito trigonométrico são encontrados na literatura. Conforme a necessidade ou recursos é possível pesquisar e construir equipamentos mais simples ou mais sofisticados.

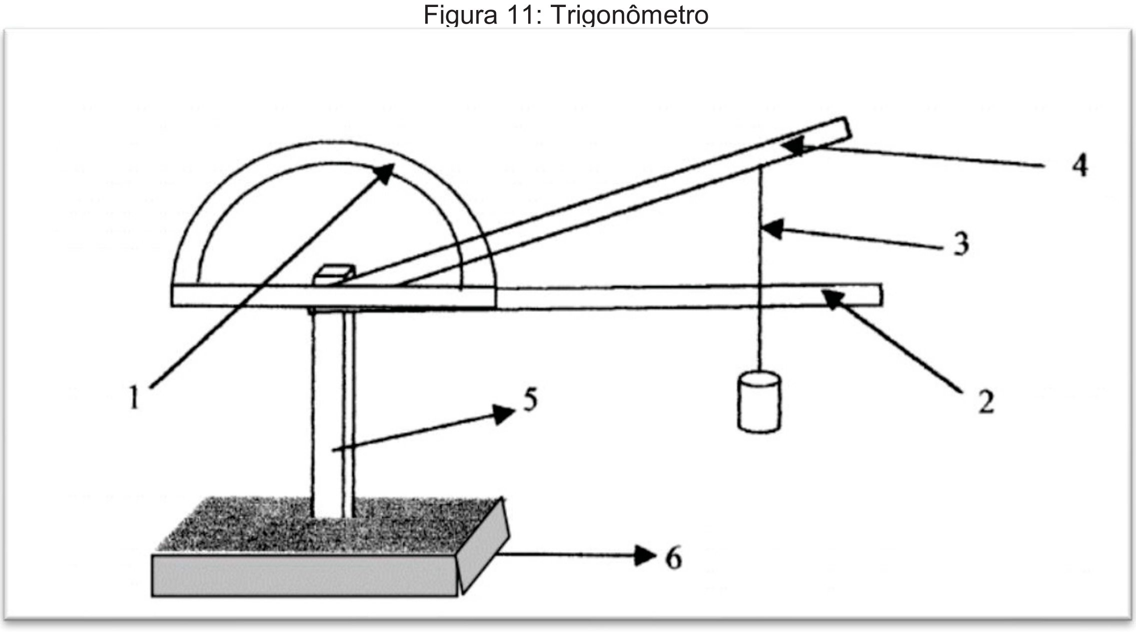
3.2.2 Trigonômetro

O trigonômetro, descrito por Iran A. Mendes (MENDES, 2009), é um instrumento manipulável utilizado para determinar experimentalmente os valores das razões trigonométricas dos ângulos agudos no triângulo retângulo geometricamente e numericamente, além de estabelecer a relação de complementaridade entre os ângulos agudos do triângulo retângulo.

A figura 10 destaca a disposição dos elementos utilizados na confecção do trigonômetro.

1. Transferidor.
2. Régua milimetrada plástica, com borda superior nivelada com o centro do transferidor, ou seja, com 0º e 180º.
3. Fio com um peso preso à ponta (tipo de prumo).
4. Régua móvel de madeira, com furos equidistantes das bordas, um em cada número, para fixá-la (furo do 0) no centro da haste e prender o fio nos demais números.
5. Haste de madeira para sustentação.
6. Base de madeira para apoio

Figura 11: Trigonômetro



Fonte: MENDES, 2009, p.159

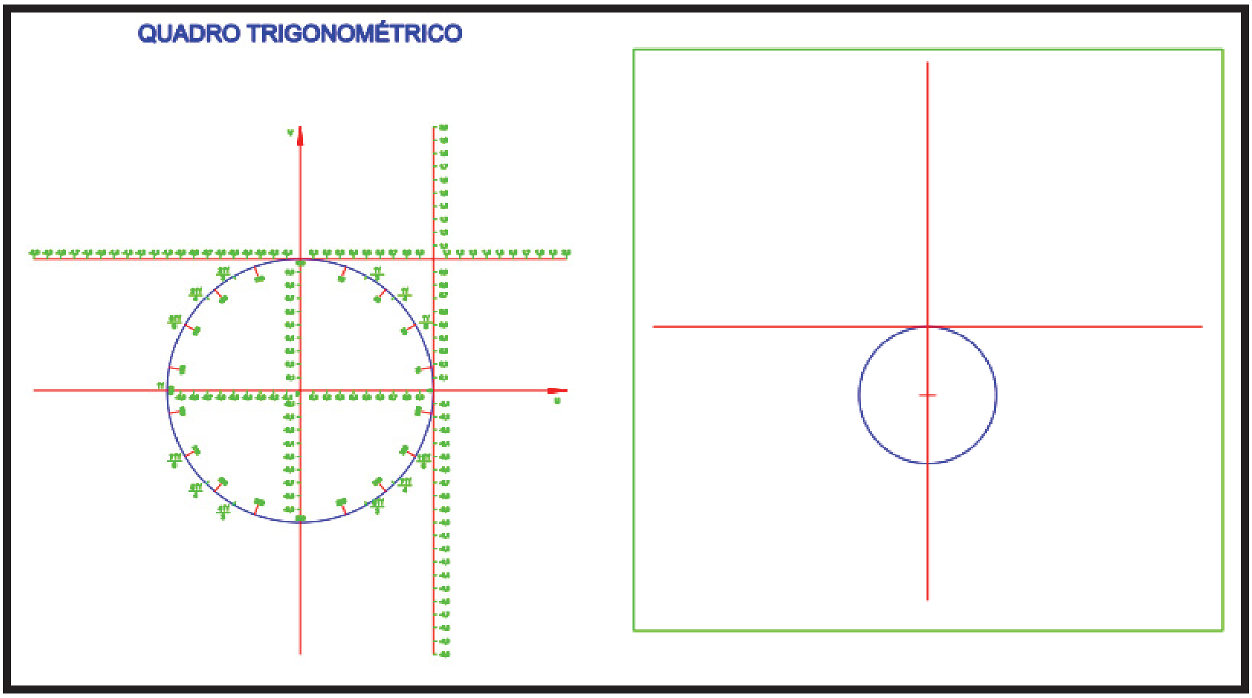
A partir da página 158, Mendes coloca uma atividade, intitulada como Atividade 9 – Construindo e explorando o trigonômetro, onde apresenta além da construção, a utilização do trigonômetro no desenvolvimento e compreensão das razões trigonométricas.

3.2.3 Quadro trigonométrico

Composto por duas partes, uma fixa e uma móvel, o quadro trigonométrico, fazendo uso de propriedades geométricas, determina os valores do seno, do cosseno, da tangente e da cotangente de um arco. A figura 11 destaca estas partes.

A parte fixa é colada em uma placa de Eucatex enquanto que a parte móvel, impressa em uma transparência de retroprojetor e acoplada à parte fixa por meio de um alfinete ou um pequeno prego no cruzamento dos eixos.

Figura 12: Quadro trigonométrico



Fonte: O próprio autor

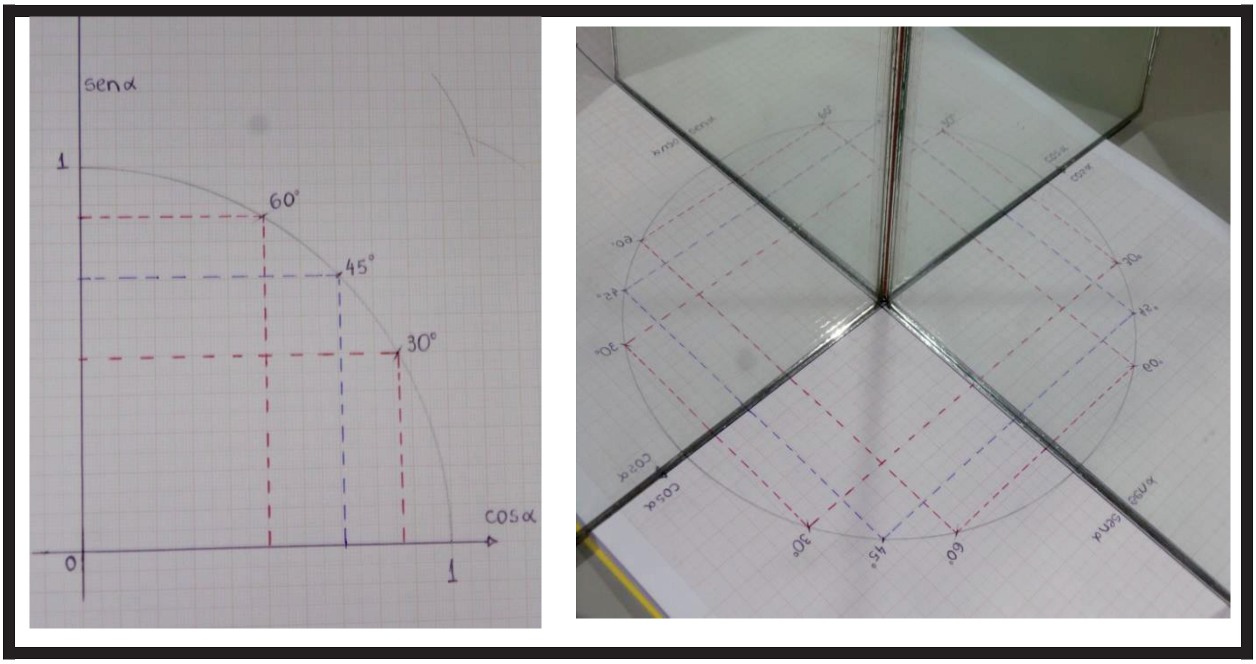
Ao girar a parte móvel haverá o cruzamento do semieixo que contém a circunferência com o ciclo trigonométrico. Este semieixo determinará os valores da tangente e da cotangente nas retas paralelas ao eixo das ordenadas e das abscissas, respectivamente. O valor do seno é dado pelo cruzamento da circunferência móvel com o eixo das ordenadas, enquanto que o valor do cosseno é dado pelo cruzamento desta circunferência com o eixo das abscissas.

Este instrumento pode ser um recurso auxiliar na construção do conhecimento trigonométrico, podendo desenvolver e validar hipóteses no estudo do ciclo trigonométrico, permitindo aos estudantes criarem imagens para conceitos abstratos.

3.2.4 Papel milimetrado e espelho plano

No papel milimetrado, uma unidade pode ser definida por 1 decímetro. Assim, cada centímetro corresponde a 0,1 da unidade e cada milímetro corresponde a 0,01 da unidade. Isto permite obter geometricamente medidas com uma aproximação de até duas casas decimais. Na atividade proposta na figura 12, do lado esquerdo tem-se o quarto de círculo, onde é possível construir triângulos de hipotenusa unitária e os catetos correspondem às medidas das projeções sobre os eixos das abscissas e ordenadas da extremidade do arco correspondente ao ângulo agudo construído na origem dos eixos.

Figura 13: Representação no papel milimetrado



Fonte: O próprio autor

Como exemplo de atividade que pode ser construída, par de espelhos planos permite a representação do círculo trigonométrico. Colocando os dois espelhos planos sobre os dois semieixos, permite ao estudante observar a projeção do primeiro quadrante completando o ciclo trigonométrico e projetando os arcos nos demais quadrantes e estabelecendo a redução ao primeiro quadrante dos arcos.

4. CONSTRUINDO SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A ação de ensinar não é uma tarefa simples, pois depende de um conjunto de variáveis que nem sempre são controladas pelos professores. Uma sequência didática depende da complexidade dos objetivos aos quais são almejados no processo de ensino-aprendizagem e nas relações humanas nela envolvidas (GUIMARÃES, 2012).

Sequências didáticas são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa. Organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, elas envolvem atividades de aprendizagem e de avaliação (PERRENOUD, 2000). Neste sentido, a sequência didática aqui apresentada procura abordar o ensino de Trigonometria relacionando a teoria, desde o conceito histórico, com materiais manipuláveis e recursos digitais, explorando as possibilidades de uso de cada um dos recursos didáticos disponíveis.

A sequência didática a ser construída tem como objetivo motivar o estudante, desenvolvendo atividades de modo a incentivar o caráter investigativo do ensino. Neste sentido, os padrões e propriedades trigonométricos não serão apenas conceitos abstratos, sendo visto por meio de tecnologias simples tais como o lápis e papel até recursos digitais computacionais, passando por materiais construídos de forma artesanal que proporcionam aos estudantes as mais variadas experiências que permitem dar um significado ao objeto de conhecimento da trigonometria escolar (GUIMARÃES, 2012).

4.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Os primórdios do desenvolvimento da trigonometria se perdem na história, onde são identificadas sequências numéricas relacionando comprimentos de sombra com horas do dia. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes eram conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios, onde o conceito de ângulo não era conhecido. É com os gregos que aparece pela primeira vez um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem (SOUZA, 1998).

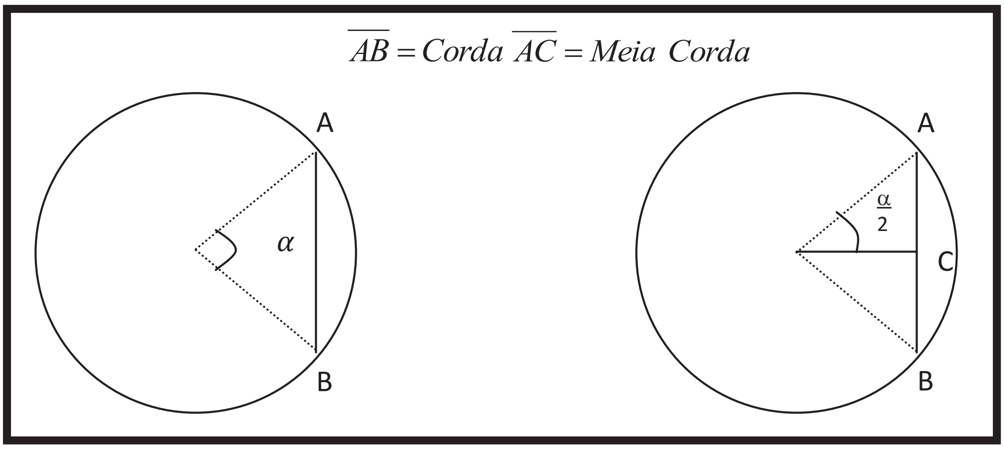
Euclides não usa o termo trigonometria, porém em alguns teoremas de *Os Elementos* existem uma equivalência com as relações da trigonometria, onde é usada uma linguagem geométrica no lugar da trigonométrica.

A mais importante obra de trigonometria da antiguidade é uma coleção de 13 livros denominada *Síntese Matemática*, escrita no primeiro século da era cristã por Ptolomeu de Alexandria. Sua obra é conhecida até hoje como *Almajesto*, que significa “o maior” (BOYER, 1974).

Começa a surgir no século IV na Índia um conjunto de textos matemáticos denominados *Siddhanta*, cujo significado era “sistemas de astronomia”, escrito em versos de uma língua antiga e difícil, usadas em cerimônias religiosas, o sânscrito.

No lugar de usar a relação entre as cordas de um círculo e os respectivos ângulos centrais, os matemáticos hindus apresentam uma trigonometria que relaciona a metade da corda, a qual chamava “*jiva*”, com a metade do ângulo central, como destacado na figura 14.

Figura 14: Relação entre corda e arco



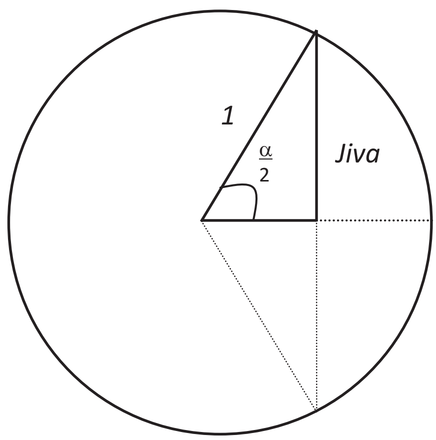
Fonte: O próprio autor

A vantagem de se trabalhar com a meia corda (ou *jiva* para os hindus) é que se obtém no interior do círculo um triângulo retângulo. Por outro lado, devido à Influência babilônia, os gregos tomavam o raio com comprimento 60 e dividiam o círculo em 360 partes iguais (CARMO, 2005).

Desde então, os matemáticos árabes oscilaram entre o Almajesto, de Ptolomeu e a trigonometria de *jiva* dos hindus. Isto ocorreu até o final do século IX e início do século X, quando o matemático árabe *al-Battani* adotou a trigonometria hindu, porém introduzindo o círculo de raio unitário. Assim, o valor da meia corda corresponde a $\frac{\alpha}{2}$, e poderia ser dado pela razão indicada na figura 15.

Ocorre que a palavra *jiva* traduzida para o árabe se transformou em *jiba*. Porém quando o inglês Robert de Chester, na segunda metade do século XII, veio a traduzir para latim a palavra técnica *jiba* aparentemente a confundiu com a palavra *jaib*, que significa baia enseada (talvez devido a omissão das vogais, comum entre os árabes), usando então a palavra *sinus*, cujo significado é baía ou enseada (SOUZA, 1998).

Figura 15: Jiva ou seno



$$\frac{Cateto\,Oposto}{Hipotenusa} = \frac{Jiva}{1} \qquad Jiva\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Cateto\,Oposto}{Hipotenusa}$$

Fonte: O próprio autor

A partir daí a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa passou ser chamada de *sinus* (em português, seno). Por outro lado, a palavra cosseno surgiu apenas no século XVII, representando o seno do complemento de um ângulo. Observa-se que os conceitos de seno e cosseno têm origem na resolução de problemas de Astronomia. O conceito de tangente, no entanto, surge da necessidade de se calcular distâncias e alturas.

4.2 AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÂNGULO AGUDO.

Considerando um ângulo $A\hat{O}B = \theta$, com $0 < \theta < 90°$ e traçando, a partir dos pontos A_1, A_2, A_3, ..., perpendiculares a semirreta OA que interceptam a semirreta OB em B_1, B_2, B_3, ...Os triângulos assim formados OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ..., são semelhantes por possuírem os mesmos ângulos.

Assim, de acordo com a figura 16, podem-se definir as seguintes razões:

i. Seno

$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \cdots = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$$

Esta razão é chamada de seno, e indica-se: $sen\theta = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$

ii. Cosseno

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \cdots = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$$

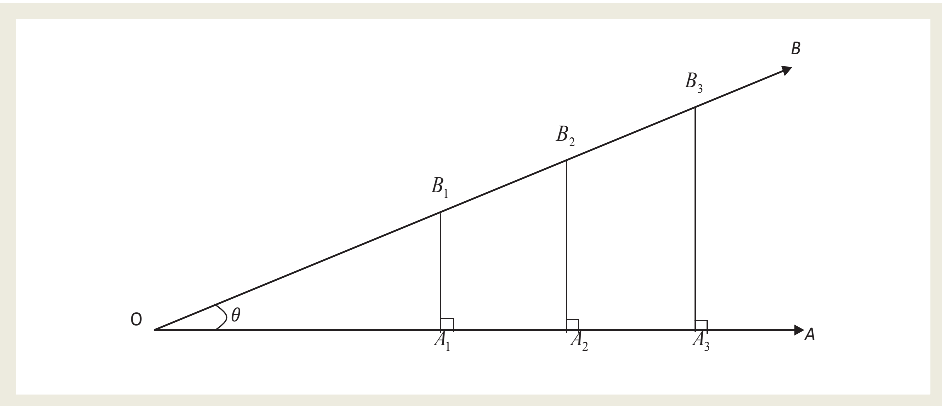
Esta razão é chamada de cosseno e indica-se: $cos\theta = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$

iii. Tangente

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OV_3} = \cdots = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente}$$

Esta razão é chamada de tangente e indica-se: $tg\theta = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente}$

Figura 16: Razões trigonométricas



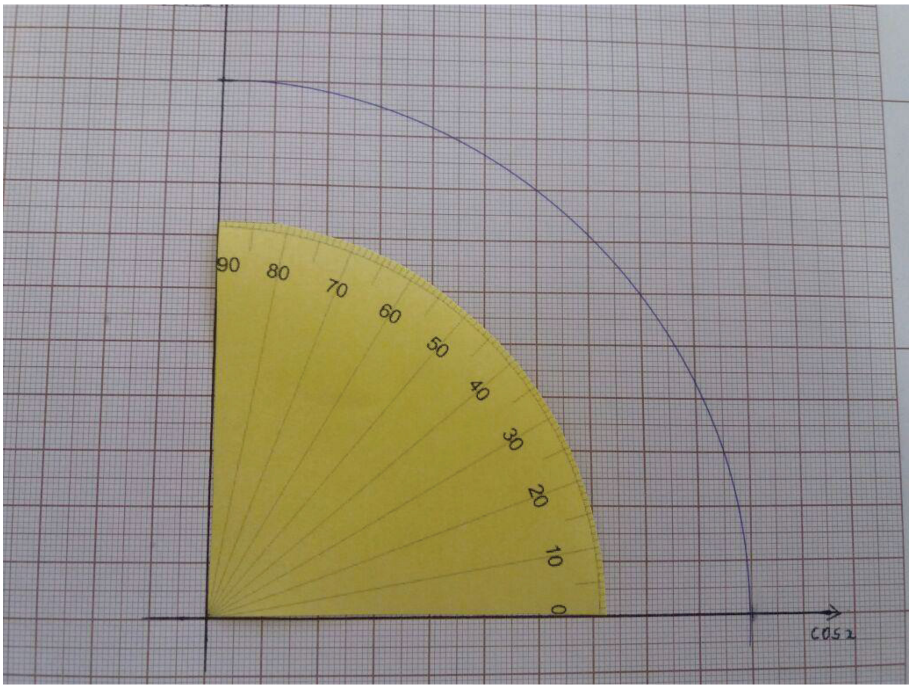
Fonte: O próprio autor

Definidas estas razões, é possível desenvolver atividades de modo a tornar a aprendizagem de forma lúdica por meio de instrumentos manipuláveis e digitais.

Com objetivo de determinar os valores das razões trigonométricas usadas inicialmente no nono ano do ensino fundamental, é possível desenhar em uma folha de papel milimetrado dois eixos perpendiculares e a partir da origem dos eixos desenha-se um quarto de circunferência com raio igual a um decímetro, que será a unidade considerada. Na figura 16, está desenhado este painel trigonométrico com um modelo de transferidor no centro. Assim é possível estabelecer os valores do seno e cosseno de um ângulo agudo.

Ao construir alguns ângulos a partir do eixo horizontal, observa-se que a projeção ortogonal da extremidade do ângulo na circunferência, sobre o eixo horizontal corresponde ao valor do cosseno do ângulo, enquanto que a projeção ortogonal sobre o eixo vertical corresponde ao seno do ângulo. Alguns ângulos são construídos e os valores correspondentes das razões trigonométricas são obtidos.

Figura 17: Painel trigonométrico



Fonte: O próprio autor

Na sequência, reconstrói os eixos e o quarto do círculo. Marcam-se na circunferência os ângulos notáveis de 30°, 45° e 60°, destacando que a projeção de cada um destes ângulos sobre os eixos determina os valores do seno e cosseno.

Após esta atividade, que pode ser feita em grupos, os resultados podem ser tabelados, comparados entre os colegas e finalmente comparados com as tabelas de valores trigonométricos descritas nos livros didáticos.

A fixação deste conceito pode ser feita por meio do aplicativo “Noções básicas de trigonometria”, apresentado na figura 1.

Com o uso do teodolito trigonométrico é possível resolver, por meio de triangulações, problemas de distâncias e altura na escola ou na região da comunidade escolar.

4.3 O CICLO TRIGONOMÉTRICO E AS FUNÇÕES CIRCULARES

Para fazer a transição das razões trigonométricas do ângulo agudo, estendendo estas relações para as funções trigonométricas de domínio real, com aplicações mais amplas, se faz necessário definir na circunferência trigonométrica as funções bem como a relação entre graus e radianos. A origem da palavra radiano veio da fusão das palavras “*radial angle*”, que em inglês deu “*radian*” e em português “radianos”.

A medida de um ângulo em radianos é razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo, cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo. Deste modo, como a medida de um arco correspondente ao semicírculo é$\frac{\pi.r}{r}$, tem-se que um ângulo de 180° corresponde a um arco deπ radianos. Assim, $1\, radiano = \frac{180^o}{\pi} \approx 57^O$.

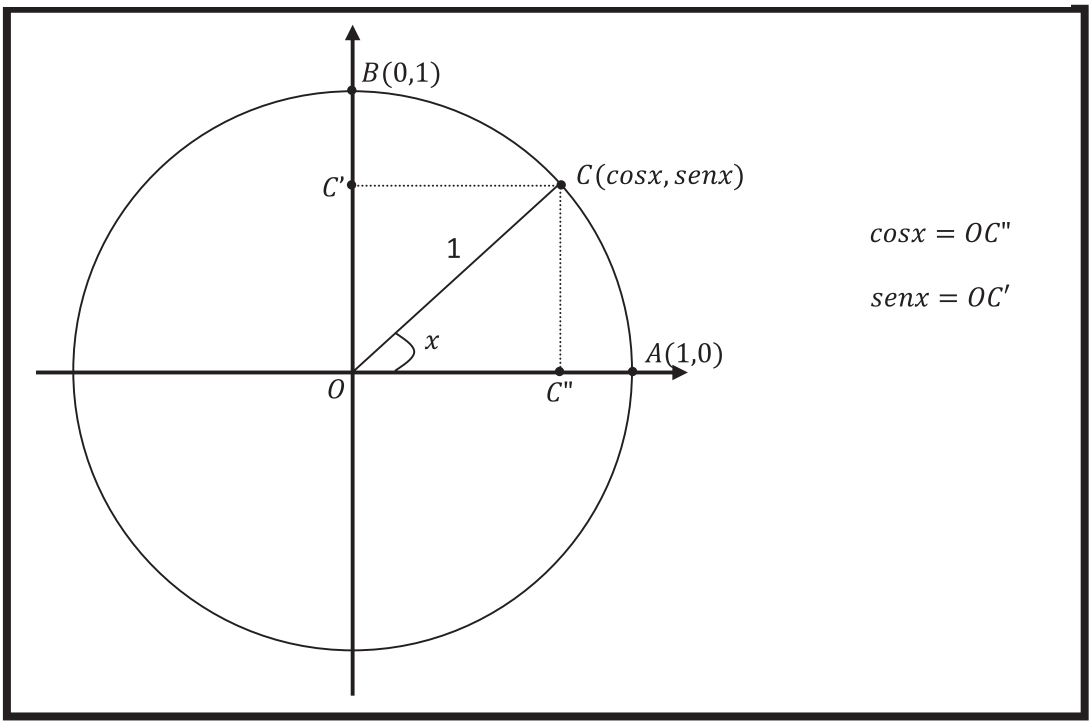
Como a medida do ângulo central corresponde a medida do arco e na circunferência trigonométrica o raio é unitário, temos que: se ao comprimento de uma volta corresponde a 2π,então a um arco de medida α ,corresponde um comprimento $\alpha r = \alpha$. Considerando o círculo trigonométrico orientado, com raio unitário pode-se redefinir as razões trigonométricas, agora como funções trigonométricas.

4.3.1 Definição de seno e cosseno de um arco

Considerando o ciclo trigonométrico de raio unitário, centrado em um sistema de coordenadas, um arco de comprimento real x e extremidade C, correspondente a um ângulo x. Para definir as funções reais de variáveis reais denominadas seno e cosseno, de um número real x, considera-se um arco de comprimento x sobre o círculo trigonométrico. Define-se o cosseno de x e o seno de x como sendo, respectivamente, a abscissa e a ordenada da extremidade desse arco, partido da origem dos arcos, conforme ilustra a figura 18.

Cabe salientar que os arcos no círculo trigonométrico são medidos no sentido anti-horário, a partir da origem dos arcos (ponto $(1,0)$). Os arcos no sentido horário têm medidas negativas.

Figura 18: Definição de cosseno e seno



Fonte: O próprio autor

É possível observar que a razão seno e a razão cosseno, definidas para o triângulo retângulo passam a ser um caso particular nessa definição. No triângulo $OC'C$:

$$senx = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \frac{CC"}{OC} = \frac{0C'}{1} = OC'$$

$$cosx = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \frac{OC"}{OC} = \frac{0C"}{1} = OC"$$

4.3.2 Definição da tangente de um arco

Considerando o ciclo trigonométrico de raio unitário, centrado em um sistema de coordenadas, um arco de comprimento real x e extremidade C, correspondente a um ângulo x, uma reta vertical t, tangente à circunferência em A, origem dos arcos, e orientada tal qual o eixo das ordenadas, denominada eixo das tangentes.

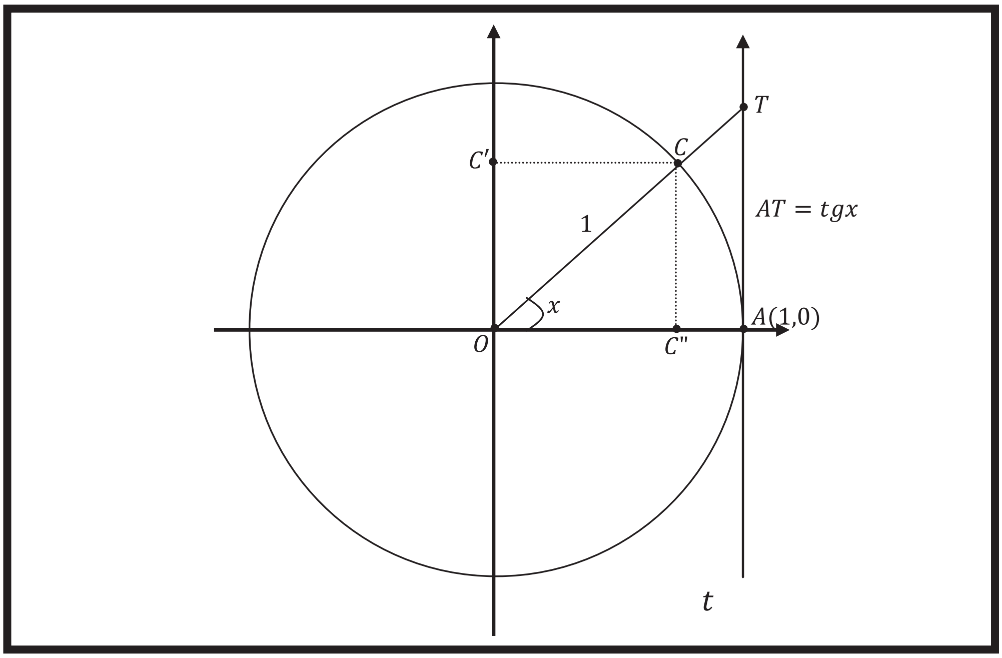
Define-se a tangente desse arco como a medida algébrica do segmento de extremidades nos pontos A e T, sendo T o ponto de intersecção da reta suporte do raio$\overline{OC}$ com o eixo das tangentes, conforme mostra a figura 19.

Assim:

$$tgx = AT$$

Observe que quando o arco x tem medida igual à $\frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um número inteiro, a reta suporte do raio $\overline{OC}$ é paralela ao eixo das tangentes. Nestes casos a tangente não existe.

Figura 19: Definição de tangente de um arco



Fonte: O próprio autor

Cabe ainda salientar que nesta definição, a razão tangente vista para o triângulo retângulo, é um caso particular.

No triângulo OAT tem-se:

$$tgx = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Observa-se ainda que também é válida a relação:

$$tgx = \frac{senx}{cosx}$$

Os triângulos $OC"C$ e OAT são semelhantes (caso AA). Assim:

$$\frac{AT}{CC"} = \frac{OA}{OC'}$$

Como $AT = tgx$, $CC" = OC' = senx$, $OA = raio = 1$ e $OC' = cosx$, a relação pode ser reescrita como:

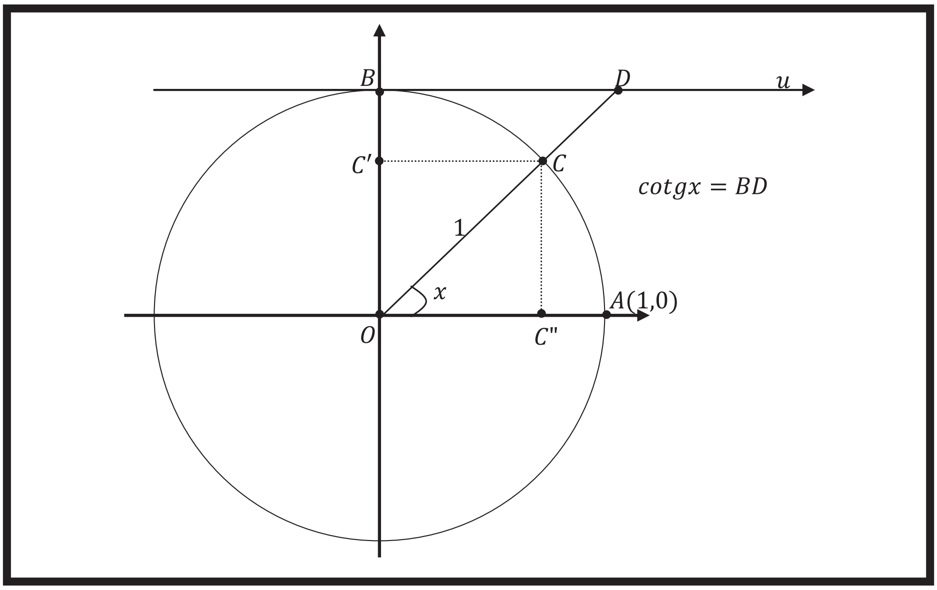
$$\frac{tgx}{senx} = \frac{1}{cosx} \Leftrightarrow tgx = \frac{senx}{cosx}; cosx \neq 0$$

4.3.3 Definição da cotangente de um arco

Considerando o ciclo trigonométrico de raio unitário, centrado em um sistema de coordenadas, um arco de comprimento real x e extremidade C, correspondente a um ângulo x, uma reta horizontal$u$, tangente à circunferência em $B(0,1)$ e orientada tal qual o eixo das abscissas, denominada eixo das cotangentes.

Define-se a cotangente desse arco como a medida algébrica do segmento de extremidades nos pontos A e D, sendo D o ponto de intersecção da reta suporte do raio$\overline{OC}$ com o eixo das cotangentes.

Figura 20: Definição de cotangente



Fonte: O próprio autor

Na figura 20 tem-se que: $cotgx = BD$. Observe que quando o arco x tem medida igual à $k\pi$, onde k é um número inteiro, a reta suporte do raio $\overline{OC}$é paralela ao eixo das cotangentes. Nestes casos a cotangente não existe. Observando na figura 20 os triângulos OBD e $OC'C$ são semelhantes (caso AA). Assim:

$$\frac{BD}{CC'} = \frac{OB}{OC'}$$

Por outro lado, $BD = cotgx$, $CC' = OC" = cosx$, $OB = raio = 1$ e $OC' = senx$. Deste modo, a relação pode ser reescrita como:

$$\frac{cotgx}{cosx} = \frac{1}{senx} \Leftrightarrow cotgx = \frac{cosx}{senx}; senx \neq 0$$

Observe que:

$$tgx = \frac{senx}{cosx}, cotgx = \frac{cosx}{senx} \Rightarrow cotgx = \frac{1}{tgx}$$

O quadro trigonométrico, construído como proposto na figura 12, permite ao estudante a visualização e obtenção dos valores nos eixos das tangentes e no eixo das cotangentes.

4.3.4 Definição da secante e da cossecante de um arco

Considerando o ciclo trigonométrico e uma reta$r$, tangente à circunferência na extremidade de um arco de comprimento real x e extremidade C. Esta reta vai interceptar os eixos das abscissas e das ordenadas nos pontos P e Q, respectivamente.

Define-se a secante do arco como sendo a medida algébrica do segmento OP e a cossecante do arco como sendo a medida algébrica do segmento OQ.Observando a figura 21 é possível verificar a semelhança entre os triângulos $OC"C$,OCP e QCO.

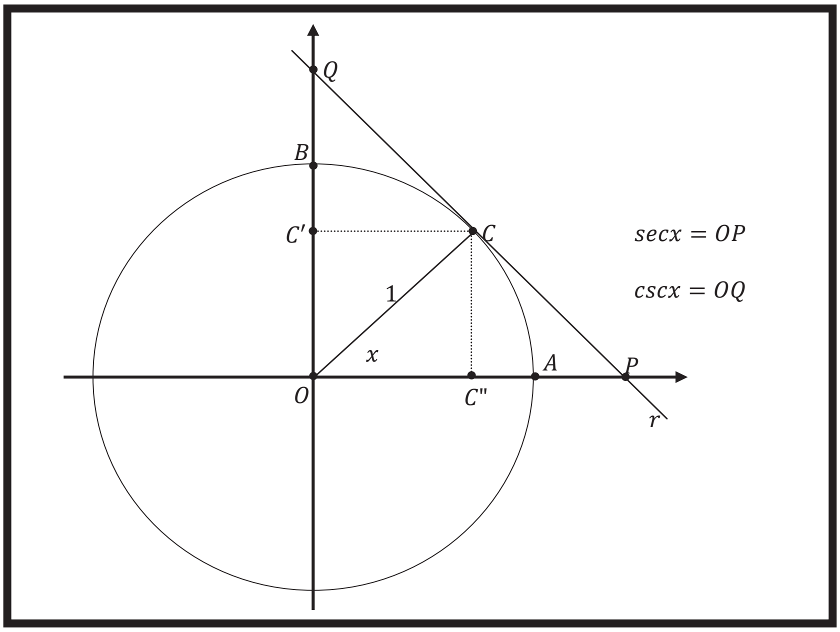
Da semelhança entre os triângulos $OC"C$ e OCP, tem-se:

$$\frac{OC}{OP} = \frac{OC"}{OC} = \frac{C"C}{CP}$$

No entanto, $OP = secx$, $OC = raio = 1$ e $OC" = cosx$. Deste modo, a relação $\frac{OC}{OP} = \frac{OC"}{OC}$ pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{secx} = \frac{cosx}{1} \Leftrightarrow secx = \frac{1}{cosx}; cosx \neq 0$$

Figura 21: Definição de secante e cossecante



Fonte: O próprio autor

Por outro lado, como $C"C = OC' = senx$ a relação $\frac{OC"}{OC} = \frac{C"C}{CP}$ pode ser reescrita como:

$$\frac{cosx}{1} = \frac{senx}{CP} \Leftrightarrow CP = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

Logo, o segmento $\overline{PC}$ representa a medida geométrica da tangente do arco.

Da semelhança entre os triângulos $OC"C$ e QCO, tem-se:

$$\frac{OC}{QO} = \frac{C"C}{CO} = \frac{OC"}{QC}$$

No entanto, $QO = OQ = cscx$, $OC = CO = raio = 1$ e $C"C = OC' = senx$. Logo a relação $\frac{OC}{QO} = \frac{C"C}{CO}$ pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{cscx} = \frac{senx}{1} \Leftrightarrow cscx = \frac{1}{senx}; senx \neq 0$$

Por outro lado, como $OC" = cosx$, a relação $\frac{C"C}{CO} = \frac{OC"}{QC}$ pode ser reescrita como:

$$\frac{senx}{1} = \frac{cosx}{QC} \Leftrightarrow QC = \frac{cosx}{senx} = cotgx$$

Logo, o segmento $\overline{QC}$ representa a medida geométrica da cotangente do arco.

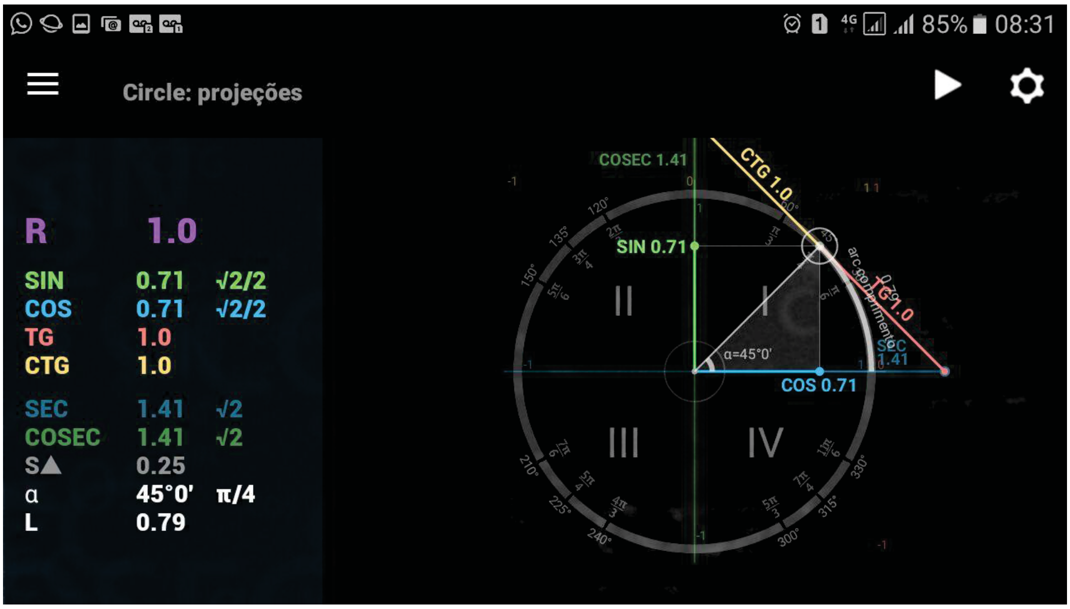
Usando o aplicativo “Círculo Unitário Trigonométrico” destacado na figura 5, é possível fazer a representação das projeções. A figura 22 ilustra este fato. Observe que são descritos os valores das seis funções trigonométricas estudadas.

Ao fazer uso do aplicativo é possível selecionar individualmente cada uma ou um grupo das funções trigonométricas definidas.

O aplicativo “Funções trigonométricas 2 – gráficos, destacado na figura 3, permite a visualização do deslocamento da tangente ao círculo bem como a representação instantânea do gráfico das funções trigonométricas.

Construído o conceito do ciclo trigonométrico e a representação geométrica dos valores trigonométricos na circunferência, é possível construir as funções trigonométricas. O Uso do Explorador gráfico de funções, do *GeoGebra* e do *Winplot* possibilita uma representação dos gráficos bem como o estudo das variações dos parâmetros.

Figura 22: Representação da reta tangente ao círculo

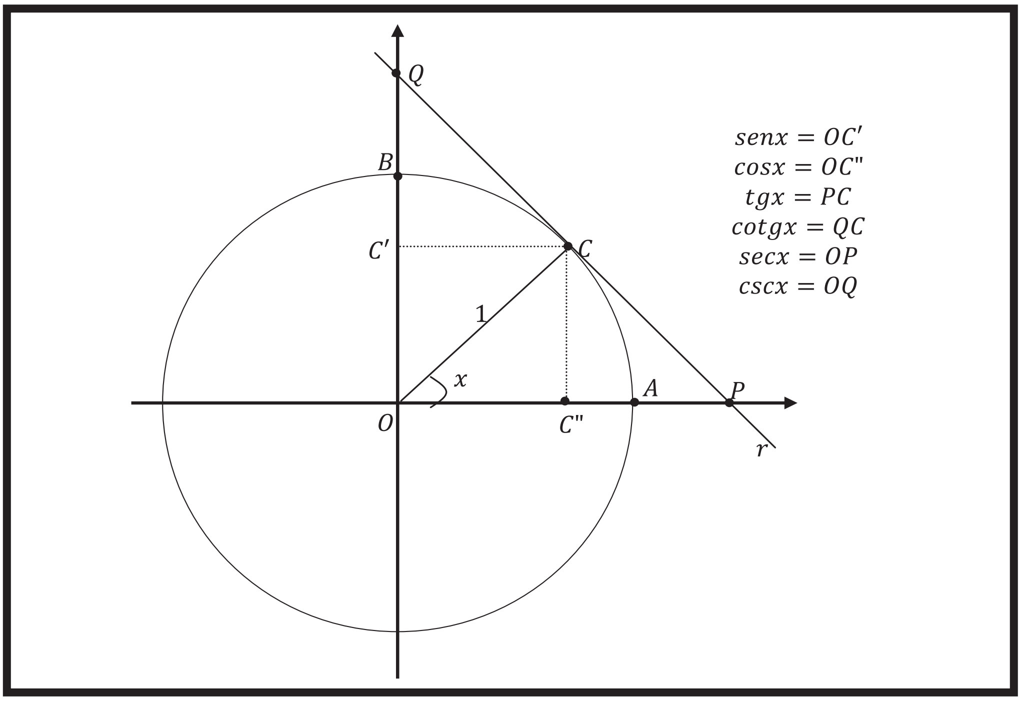


Fonte: O próprio autor

A figura 23 indica segmentos cujo comprimento representa cada um dos valores trigonométricos no ciclo.

Com o uso do *Winplot* é possível fazer o estudo da função seno, com a variação nos parâmetros permitindo ao estudante uma visualização dos efeitos dados ao gráfico com a variação dos parâmetros.

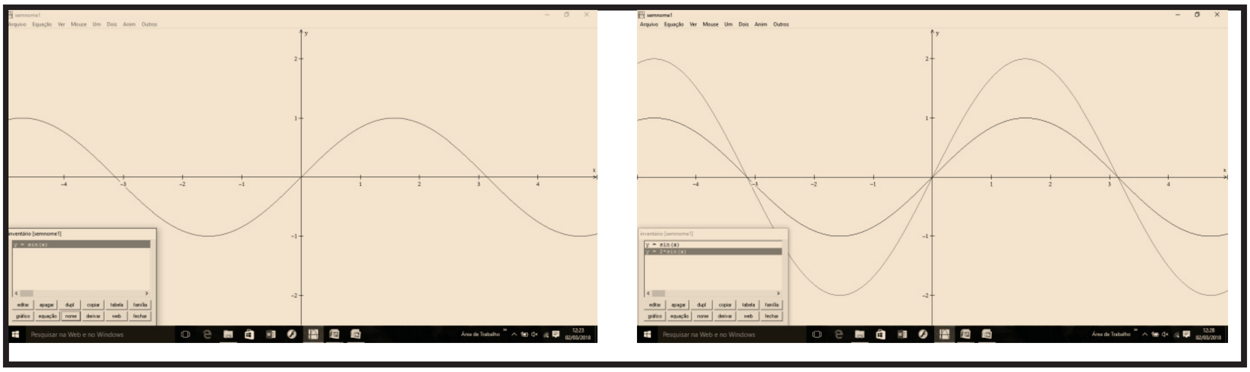
Figura 23: Representação geométrica dos valores trigonométricos



Fonte: O próprio autor

Na figura 24 são apresentadas duas telas do *Winplot*, com a comparação das funções $y = senx$ e $y = 2.senx$.

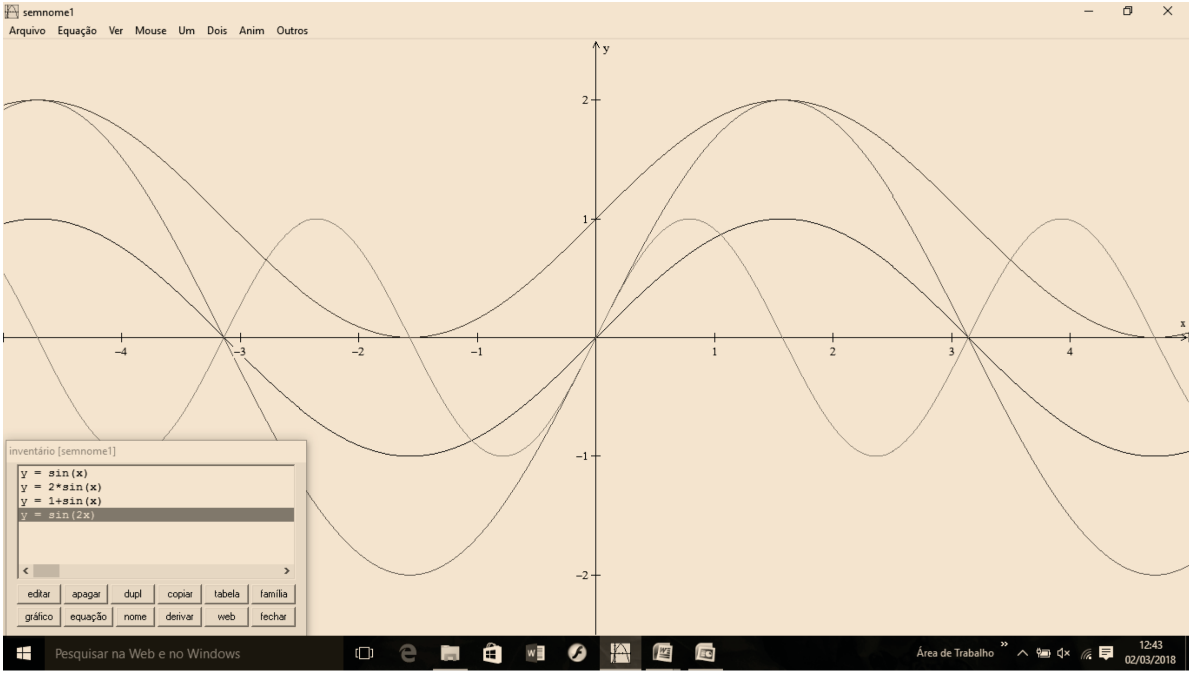
Figura 24: Variação da função seno



Fonte: O próprio autor

Partindo da função genérica $y = a + b.sen(cx + d)$, pode ser atribuído valores arbitrários aos parâmetros de modo a investigar a variação que ocorre na função genérica, em relação à função $y = senx$, de acordo com cada um dos parâmetros selecionados

Figura 25: variação dos parâmetros na função seno



Fonte: O próprio autor

Na figura 25, uma tela do *Winplot*, pode ser observado o comportamento da função de acordo com a variação dos parâmetros.

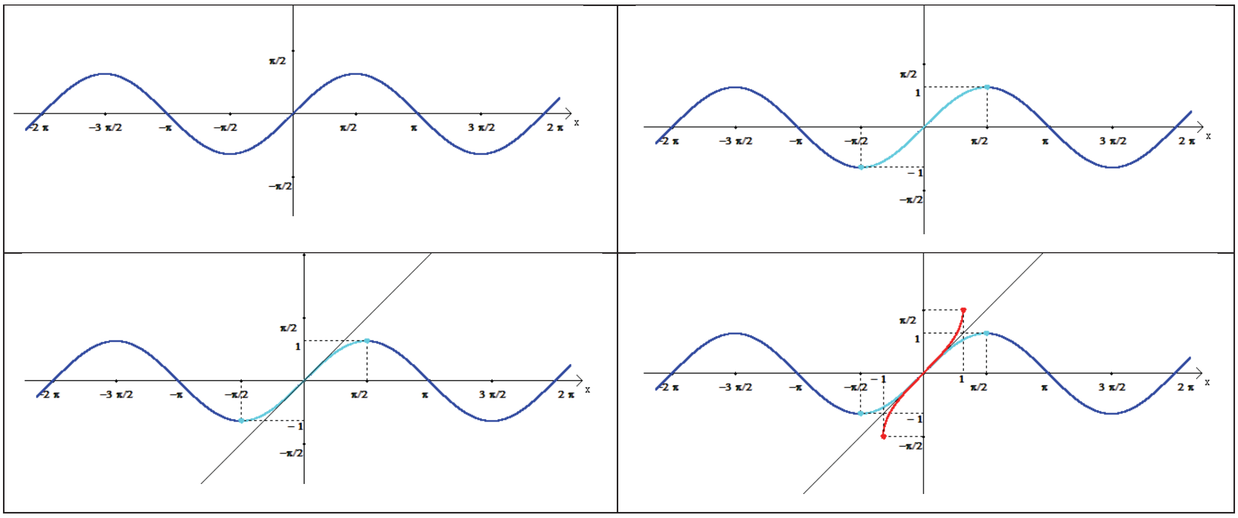
Nesta tela são apresentadas as funções $y = senx$, $y = 2.senx$, $y = 1 + senx$ e $y = sen(2x)$. Outras possibilidades de atividades podem ser exploradas de modo a aguçar a capacidade investigativa do estudante.

4.4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

As funções trigonométricas não são bijetoras e, portanto, não possui inversas no sentido formal matemática. No entanto é possível estabelecer restrições apropriadas no domínio das funções trigonométricas de modo a obter a inversa nesta restrição. De modo geral, são chamadas de função de arco, pois retorna o arco correspondente a certa função trigonométrica.

Neste sentido, ao estudar as funções trigonométricas inversas, uma necessidade que permitirá uma visualização fácil e concreta é encontrar os intervalos onde elas são bijetoras. Para cada uma destas é possível restringir o domínio de forma conveniente e definir a função inversa. Assim, será necessário escolher como domínio, intervalos tais que a função percorra todo seu conjunto imagem.

Figura 26: Obtenção da inversa da função seno



Fonte: O próprio autor

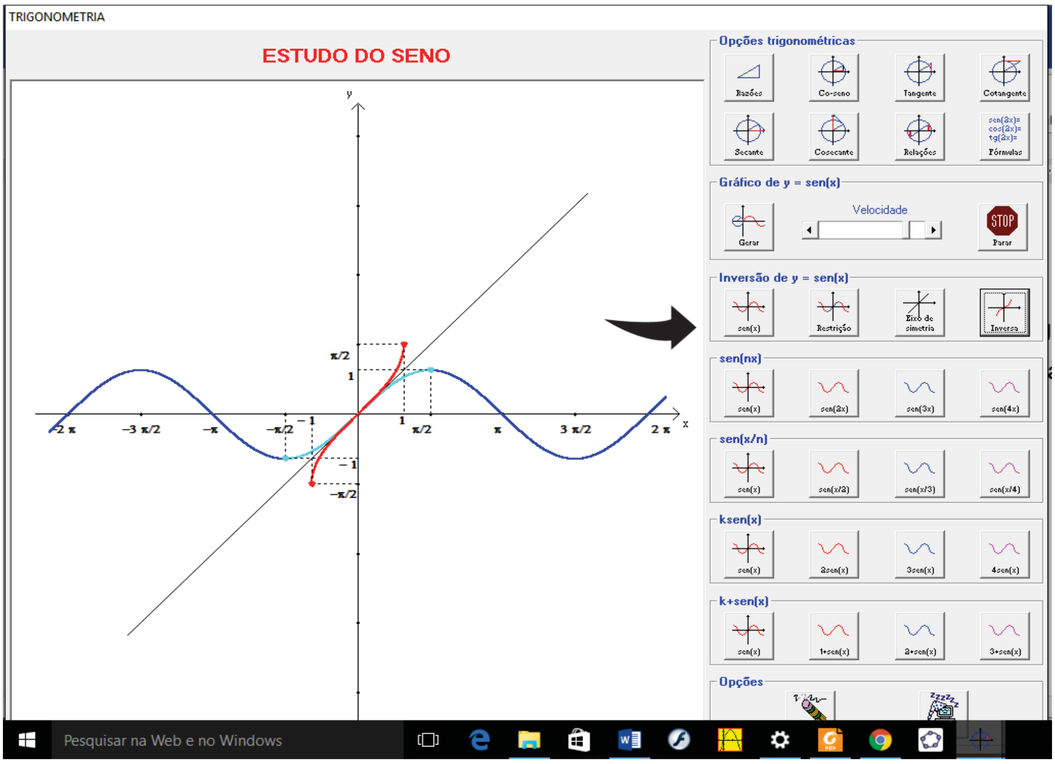
Neste contexto, a construção gráfica da função, estabelecendo o eixo de simetria na bissetriz dos quadrantes ímpares como apresentado na figura 26 permite a construção da restrição no domínio da função de modo a obter, neste domínio uma bijeção e por consequência a inversa da função.

Piva (2009) apresenta o uso do *software* trigonometria como estratégia didática para o desenvolvimento do conceito de função trigonométrica inversa. Para tanto, na opção *funções* possibilita observar, passo a passo, a construção da função inversa. Neste desenvolvimento, inicialmente apresenta a função direta, onde pode ser observado pela sua característica periódica, a não bijeção da função. Em seguida é possível, pela observação do gráfico, as restrições necessárias ao domínio de modo a obter a bijeção, neste intervalo do domínio, criando as condições necessárias para a obtenção da função inversa.

Na figura 26, observa-se que no intervalo restrito do domínio, entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, tem-se uma função injetora. Por outro lado, para a imagem compreendida entre -1e 1, tem-se uma função sobrejetora. Assim, considerando as duas restrições destacadas, a função é bijetora neste intervalo e por consequência invertível.

Cabe destacar ainda a existência de uma simetria entre o gráfico de uma função e o gráfico de sua inversa. Essa simetria existe em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, a simetria em relação à reta $y = x$.

Figura 27: Construção da função $arcsen(x)$



Fonte: O próprio autor

As demais funções trigonométricas inversas podem ser construídas de forma similar, fazendo o uso do software Trigonometria como ferramenta de apoio didático na construção do conhecimento matemático.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os recursos didáticos diferenciados constituem em importantes instrumentos no processo de ensino-aprendizagem, colocando o professor como o mediador na construção do conhecimento do estudante. Enquanto os recursos artesanais possibilitam uma maior interação entre os alunos, o recurso computacional permite uma maior agilidade na obtenção de resultados. As atividades lúdicas em grupo possibilitam, além da construção do conhecimento, uma relação de sociabilidade, construindo relações humanas. Os recursos digitais, por sua rapidez nos resultados, permitem a simulação e comparação na realização de experimentos.

Neste trabalho são apresentados recursos e atividades que possibilitam tornar o ensino de trigonometria de melhor compreensão, tornando-o atrativo. A abordagem proposta permite ao estudante desenvolver seu caráter investigativo com grande potencial pedagógico. As competências e habilidades abordadas neste trabalho são exploradas de modo a tornar o ensino de trigonometria não só atraente, mas principalmente eficiente no processo de construção do conhecimento do estudante.

O uso de recursos manipulados e de recursos digitais são instrumentos de grande importância na intervenção do professor em sala de aula, na busca de um melhor desempenho dos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, pois permite o desenvolvimento do conhecimento cientificamente elaborado de forma lúdica e atrativa. As aulas práticas tornaram o objeto de conhecimento mais atrativo, desmitificando sua complexidade.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho, PENTEADO, Miriam Godoy, *Informática e educação matemática*. 3ª Edição, Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999

BRETTAS, Luiz Alberto. *Produção de novos materiais para o ensino de matemática*. Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, UFSC, 2005

BITTAR, Marilena, GUIMARÃES, Sheila Denize, VASCONSELOS, Mônica. *A integração da tecnologia na prática do professor que ensina matemática na educação básica: uma proposta de pesquisa-ação*. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.8, p.84-94, UFSC: 2008.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*, Edgard Blucher / Edusp, São Paulo: 1974

BUSTAMANTE, Javier. *Poder Comunicativo, Ecossistemas Digitais e Cidadania Digital*. In Silveira, Sérgio (Org.). Cidadania e Redes digitais. 1ª ed. São Paulo: Comitê Gestor da Internet: Maracá, 2010. Disponível em: http://www.cidadaniaeredesdigitais.com.br/_files/livro.pdf Acesso em: 02 jul 2012.

CARMO, Manfredo Perdigão do; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar de. *Trigonometria e números complexos*. 3a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

DE GEUS, Klaus. *Mentes criativas, projetos inovadores: a arte de empreender P&D e inovação*, São Paulo, Musa Editora, 2010.

DORNELES, Beatriz Vargas. As várias faces do caleidoscópio: anotações sobre o fracasso escolar. Pátio Revista Pedagógica, Porto Alegre, Ano 3, nº 11 (novembro 1999/janeiro 2000), p. 25-28.

FREIRE, Paulo. *Política e Educação: ensaios*, 5ª Edição, Cortez, 2001.

FREITAS, Olga. *Equipamentos e materiais didáticos*. Brasília: Universidade de Brasília, 2009

GUIMARÃES, Yara Araújo Ferreira, GIORDAN, Marcelo. *Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores*. VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 2012.

LOPES, Maria Maroni. *Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra*. Bolema [online]. 2013, vol.27, n.46, pp.631-644. Disponível em http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300019. Acesso em:28 jan 2018.

MARGOTTI, Patrícia de Souza Rosa, O uso do software GeoGebra no ensino de trigonometria. o de Software Educacional GeoGebra no Ensino de Trigonometria; 2007; Trabalho de Conclusão de Curso; (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119190/Patricia_de_Souza_Rosa_Margotti.pdf?sequence=1. Acesso em: 02 jul 2017.

MENDES, Iran Abreu. Atividades históricas para o ensino da trigonometria. IN: MIGUEL, Antônio; BRITO, Arlete de Jesus; CARVALHO, Dione Luchesi de; MENDES, Iran Abreu. História da Matemática em Atividades Didáticas. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Coleção Contextos da Ciência).

MONACO, Cristina. *Educação e cidadania na era digital*, 2011. Disponível em: http://saladosprofessores.ning.com/page/educacao-e-cidadania-na-era-digitalAcesso em: 02 jul 2012

PERRENOUD, Philippe. *Pedagogia diferenciada: das intenções à ação*. (trad.) Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIVA, Claudia; DORNELES, Decir Dalabrida; SPILIMBERGO, Patrícia. *Funções trigonométricas inversas em ambiente informatizado*. In; XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 33. 2009, Cuiabá. Disponível em: http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/186.pdf Acesso em:27mar 2018.

REGO, Roberto Marinho, REGO, Rogéria Gaudêncio. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática*. In LORENZATO, Sergio (Org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas, SP. Autores Associados, 2006.

RICOY, Maria Carmen; COUTO, Maria João V. S. Os recursos educativos e a utilização das TIC no Ensino Secundário na Matemática. **Revista Portuguesa. de Educação**, Braga, v. 25, n. 2, p. 241-262, 2012. Disponível em http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0871-91872012000200011&lng=pt&nrm=iso. Acesso em:19abr 2017.

RODRIGUES, Fredy Coelho, GARIZE, Eliane Scheid. *Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão.* REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V7.8, p.187-196, UFSC: 2008.

SALDAN, Claudio. *Equações e inequações trigonométricas: uma abordagem com o aplicativo de matemática dinâmica GeoGebra.* Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, SBM, 2014.

SOUZA, Paulo Cesar Tavares. *O uso de materiais manipuláveis para o ensino de trigonometria.* 2º Simpósio Brasileiro de Formação de Professores de Matemática, Brasília, 2015.

SOUZA, Paulo Cesar Tavares. *Trigonometria: aspectos históricos e considerações geométricas*. Trabalho de conclusão de curso apresentado na Especialização em ensino de matemática, Universidade Federal do Paraná, 1998.