UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDSON MINORU SASSAKI

O TEOREMA DE COHEN-FISCHMAN-MONTGOMERY PARA ÁLGEBRAS COM UNIDADES LOCAIS

CURITIBA
2018

EDSON MINORU SASSAKI

O TEOREMA DE COHEN-FISCHMAN-MONTGOMERY PARA ÁLGEBRAS COM UNIDADES LOCAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves

CURITIBA
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

SA252t Sassaki, Edson Minoru
O teorema de Cohen-Fischman-Montgomery para álgebras com unidades locais / Edson Minoru Sassaki. – Curitiba, 2018.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientador: Marcelo Muniz Silva Alves.

1. Álgebra. 2. Módulos si-unitários. 3. Base dual. 4. Contexto de Morita. I. Universidade Federal do Paraná. II. Alves, Marcelo Muniz Silva. III. Título.

CDD: 512

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **EDSON MINORU SASSAKI** intitulada: **O Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery para Álgebras com Unidades Locais**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 27 de Fevereiro de 2018.

MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Presidente da Banca Examinadora

Mari Sano
MARI SANO
Avaliador Externo

Tanise C. Pierin
TANISE CARNIERI PIERIN
Avaliador Externo

FERNANDO ARAÚJO BORGES
Avaliador Externo

Dirceu Bagio
DIRCEU BAGIO
Avaliador Externo

RESUMO

Em seu artigo intitulado “Hopf Galois Extensions, Smash Products, and Morita Equivalence”, Cohen-Fischman-Montgomery consideram uma álgebra de Hopf H de dimensão finita, uma H-módulo álgebra à esquerda A com unidade e a H-extensão de A sobre sua subálgebra de invariantes. Neste artigo é apresentado o Teorema que reúne resultados de vários autores, estabelecendo quatro condições envolvendo o produto smash de A por H, a subálgebra de invariantes de A e um contexto de Morita entre estas duas álgebras que são equivalentes à H-extensão mencionada ser Hopf-Galois. Em nosso trabalho, estendemos o Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery para H-módulo álgebras à esquerda com unidades locais, considerando H novamente uma álgebra de Hopf de dimensão finita, mostrando onde a unidade é necessária nas demonstrações originais e quais adaptações precisam ser feitas para compensar a ausência da unidade. Procuramos manter o mínimo de hipóteses para cada resultado parcial, partindo de álgebras sem unidades, precisando utilizar álgebras com unidades locais apenas na reunião dos resultados no teorema final.

Palavras-chave: extensões Hopf-Galois, produto smash, anéis com unidades locais, módulos si-unitários, base dual, módulos localmente projetivos, contexto de Morita, anéis sem unidade, módulos unitários.

ABSTRACT

In their article entitled “Hopf Galois Extensions, Smash Products and Morita Equivalence”, Cohen-Fischman-Montgomery consider a finite-dimensional Hopf algebra H, a left H-module algebra A with unit and the H-extension of A over its subalgebra of invariants. This article presents the Theorem that brings together results from several authors, establishing four conditions involving the smash product of A by H, the subalgebra of invariants of A and a Morita context between these two algebras which are all equivalent to the condition that the mentioned H-extension is a Hopf-Galois extension. In our work, we extend the Cohen-Fischman-Montgomery Theorem to left H-module algebras with local units, considering again a finite-dimensional Hopf algebra H, showing where the unit is needed in the original proofs and which adaptations must be made in order to compensate for the lack of the unit. We seek to keep the minimum amount of hypothesis needed on each partial result, starting from non-unital algebras, using algebras with local units only when we brought together the results on the final theorem.

Key-words: Hopf-Galois extensions, smash product, rings with local units, si-unital modules, dual basis, locally projective modules, Morita context, non-unital rings, unital modules.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo estender para álgebras com unidades locais o Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery [7, Theorem 1.2], que reúne resultados de Doi-Takeuchi [8], Kreimer-Takeuchi [13], Faith [11] e Ulbrich [22] sobre extensões Hopf-Galois.

Dadas uma álgebra de Hopf de dimensão finita H e uma H-módulo álgebra à esquerda A, temos a subálgebra de invariantes A^H, o produto smash $A\#H$ e estruturas naturais de A^H-$A\#H$-bimódulo e de $A\#H$-A^H-bimódulo sobre A que fornecem um contexto de Morita entre as álgebras A^H e $A\#H$. O Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery afirma que a extensão $A^H \subseteq A$ é Hopf-Galois se, e somente se, $A\#H$ é isomorfo à $\mathrm{End}\,(A_{A^H})$ e A_{A^H} é projetivo finitamente gerado, ou A gera a categoria de $A\#H$-módulos à esquerda, ou o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\,,\,] \colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ do contexto de Morita entre A^H e $A\#H$ é sobrejetor, ou todo módulo à esquerda sobre $A\#H$ pode ser decomposto em um produto tensorial sobre A^H de A com os invariantes do módulo sobre H.

Extensões completas ou parciais deste teorema têm sido investigadas em várias situações, como em extensões onde H é co-Frobenius [3], em ações parciais [1,5], e em ações em $\mathbb{K}$-categorias [20]. Em nosso trabalho, consideraremos H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, A, uma H-módulo álgebra à esquerda sem unidade e usaremos a definição de extensão Hopf-Galois apresentada por Kreimer-Takeuchi em [13], ou seja, a aplicação canônica é sobrejetora. Nestas condições, as hipóteses que precisam de mais adaptações são as que envolvem módulos projetivos finitamente gerados e as que envolvem estrutura induzida de H-módulo à esquerda em um $A\#H$-módulo à esquerda. Buscamos manter apenas o mínimo de hipóteses em cada resultado parcial, utilizando álgebras com unidades locais apenas na reunião dos resultados no teorema final.

Na decomposição de um módulo à esquerda sobre $A\#H$ em um produto tensorial sobre A^H de A com os invariantes do módulo sobre H, a estrutura de H-módulo à esquerda que é utilizada é induzida pelo isomorfismo $H \cong 1_A\#H$, pois $1_A\#H$ é subálgebra de $A\#H$. Para estendermos este resultado para álgebras sem unidades, precisaremos construir uma nova forma de obter a estrutura de H-módulo à esquerda que seja compatível com a estrutura de $A\#H$-módulo à esquerda.

Concluiremos obtendo que, se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A é uma H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais tal que A_{A^H} é $\mathscr{si}$-unitário e para cada $e^2 = e \in A$, eA_{A^H} é finitamente gerado, então a extensão $A^H \subseteq A$ é Hopf-Galois se, e somente se, $A\#H$ é isomorfo à $\mathrm{End}\,(A_{A^H}) \cdot A$ e A_{A^H} é localmente projetivo, ou A gera a categoria de $A\#H$-módulos à esquerda unitários, ou o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\,,\,] \colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ do contexto de Morita entre A^H e $A\#H$ é sobrejetor, ou todo módulo à esquerda unitário sobre $A\#H$ pode ser decomposto em um produto tensorial sobre A^H de A com os invariantes do módulo sobre H.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos que não aparecem naturalmente quando trabalhamos com unidades, como anuladores, módulos de torção, unitários ou livres de torção, que serão fundamentais em grande parte das demonstrações apresentadas, bem como a definição de módulos localmente projetivos (Anh-Márki [2]) e módulos $s i$-unitários.

No Capítulo 2, relembramos a definição de contexto de Morita, estudamos o contexto de Morita entre as álgebras A^H e $A\#H$ e, baseado no trabalho de Garcia-Simón [12], vemos alguns resultados gerais de contexto de Morita para anéis sem unidade.

No Capítulo 3, apresentamos todos os detalhes do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery para álgebras com unidades locais.

No Apêndice A, estendemos o [13, Theorem 1.7 (3)] de Kreimer-Takeuchi, mostrando como a extensão Hopf-Galois $A^H \subseteq A$ implica em um isomorfismo de álgebras entre $A\#H$ e $\mathrm{End}\left(A_{A^H}\right) \cdot A$.

PRELIMINARES

No decorrer deste trabalho, $\mathbb{K}$ será um corpo. Utilizaremos como referência as definições de Montgomery [15]: Uma álgebra será um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de uma multiplicação associativa que não necessariamente possui unidade. Uma álgebra de Hopf H será uma biálgebra (uma terna (H, Δ, ε) onde H é uma álgebra com unidade e as funções $\Delta\colon H \to H \otimes H$ e $\varepsilon\colon H \to \mathbb{K}$ são morfismos de álgebra que satisfazem as propriedades de coálgebra, chamadas de comultiplicação e counidade, respectivamente) tal que a função identidade possui inversa pelo produto de convolução. Esta inversa é chamada de antípoda e é denotada por $S\colon H \to H$, ou seja, para cada $h \in H$, adotando a notação de Sweedler ($\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$, $\forall h \in$H), temos que $\varepsilon(h)1_H = \sum h_1 S(h_2) = \sum S(h_1)h_2$, $\forall h \in H$. A antípoda é um anti-morfismo de álgebras, ou seja, $S(hk) = S(k)S(h)$, $\forall h, k \in H$. Dado um anel R, um R-módulo à esquerda M será um grupo abeliano munido de uma ação $R \times M \to M$ que, para cada $r \in R$, a função $r \times M \to M$ é morfismo de grupos, e que satisfaz $r \cdot (s \cdot m) = (rs) \cdot m$, $\forall r, s \in R$, $\forall m \in M$. Quando R tem unidade, também pedimos que $1_R \cdot m = m$, $\forall m \in M$. Dado um H-módulo à esquerda M, chamamos de submódulo dos invariantes o H-módulo à esquerda $M^H = \{m \in M \; ; \; h \cdot m = \varepsilon(h)m, \forall h \in H\}$. Chamamos de integrais os elementos de $\int_H^l = H^H$, ou seja, os elementos do submódulo dos invariantes de H como H-módulo à esquerda.

Quando a álgebra de Hopf H tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, sua antípoda é bijetora e $\int_H^l$ é unidimensional como $\mathbb{K}$-espaço vetorial (ver [14]). Denotaremos por $S^{-1}\colon H \to H$ a função inversa de S. Temos que S^{-1} também é um anti-morfismo de álgebras e satisfaz $\varepsilon(h)1_H = \sum h_2 S^{-1}(h_1) = \sum S^{-1}(h_2)h_1$, $\forall h \in H$. Fixaremos um elemento gerador $0 \neq t \in \int_H^l$, ou seja, $ht = \varepsilon(h)t$, $\forall h \in H$, e associado a este t, temos um elemento group-like distinguido $\alpha \in G(H^*)$ tal que $th = \alpha(h)t$, $\forall h \in H$ (ver [7]).

Uma H-módulo álgebra à esquerda A será uma álgebra que é um H-módulo à esquerda satisfazendo $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$, $\forall h \in H$, $\forall a, b \in A$. O submódulo dos invariantes A^H é uma álgebra, que chamaremos de subálgebra dos invariantes. Definimos a álgebra produto smash de A por H, denotada por $A\#H$, como $A \otimes H$ com o produto definido por $(a\#h)(b\#k) = \sum a(h_1 \cdot b)\#h_2 k$. Temos que A é um $A\#H$-A^H-bimódulo e, se a álgebra de Hopf H tem dimensão finita, então A é um A^H-$A\#H$-bimódulo.

Dado uma coálgebra $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$, um C-comódulo à direita N é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de uma coação $\rho\colon N \to N \otimes C$ tal que $(\rho \otimes C) \circ \rho = (N \otimes \Delta_C) \circ \rho$ e uma H-comódulo álgebra à direita B é uma álgebra que é um H-comódulo à direita onde a coação $\rho\colon B \to B \otimes H$ é um morfismo de álgebras. Chamamos de subálgebra dos coinvariantes o H-comódulo à direita $B^{\operatorname{co} H} = \{b \in B \; ; \; \rho(b) = b \otimes 1_H\}$. Dizemos que a extensão $B^{\operatorname{co} H} \subseteq B$ é H-Galois se a função $\operatorname{can}\colon B \underset{B^{\operatorname{co} H}}{\otimes} B \to B \otimes H$ dada por $\operatorname{can}(a \otimes b) = a\rho(b)$, $\forall a, b \in B$, é sobrejetora.

Um exemplo bem conhecido de comódulo álgebras é o das álgebras G-graduadas. Dados um grupo G e uma álgebra A que é G-graduada, ou seja, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ com $A_g \subseteq A$ subespaço de A para cada $g \in G$ e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, esta G-graduação pode ser interpretada como uma $\mathbb{K}G$-coação, definindo-se, para cada $g \in G$, $\rho(a) = a \otimes g$, para cada $a \in A_g$, e estendendo linearmente esta definição para toda a álgebra A. O Teorema de Ulbrich nos diz que a extensão $A^{\operatorname{co} \mathbb{K}G} \subseteq A$ é

$\mathbb{K}G$-Galois se, e somente se $A_gA_h = A_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

Quando a álgebra de Hopf H tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, uma H-módulo álgebra à esquerda é uma H^*-comódulo álgebra à direita com $A^H = A^{\operatorname{co} H^*}$. Neste caso, diremos que a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois se a função $\operatorname{can}\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A \otimes H$ é sobrejetora.

Uma aplicação das extensões H^*-Galois é o estudo das extensões finitas de corpos $F \subseteq E$. Dado o grupo G dos automorfismos de E que fixam elementos de F, a álgebra de grupos $\mathbb{K}G$ age em E por $g \cdot x = g(x)$ e claramente $F = E^{\mathbb{K}G}$. Neste caso, temos que a extensão $F \subseteq E$ é Galois se, e somente se, a extensão $E^{\mathbb{K}G} \subseteq E$ é $\mathbb{K}G^*$-Galois.

O Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery

Nesta seção apresentaremos as ideias da demonstração clássica do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery [7, Theorem 1.2]:

Teorema (Cohen-Fischman-Montgomery). *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda (com unidade). São equivalentes:*

1. *$A^H \subseteq A$ é extensão H^*-Galois;*
2. *(a) a função $\pi\colon A\#H \to \operatorname{End}(A_{A^H})$ é isomorfismo de álgebras, e*
   (b) A é um A^H-módulo à direita projetivo finitamente gerado;
3. *A é gerador na categoria de $A\#H$-módulos à esquerda;*
4. *se $0 \neq t \in \int_H^l$, então a função $[\ ,\ ]\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ dada por $[a, b] = (a\#t)(b\#1_H)$ é sobrejetora;*
5. *para qualquer $A\#H$-módulo à esquerda M, considere $A \underset{A^H}{\otimes} M^H$ como $A\#H$-módulo à esquerda com ação de $A\#H$ sobre A induzida por π. Então a função:*
$$\begin{aligned} \phi\colon A \underset{A^H}{\otimes} M^H &\longrightarrow M \\ a \otimes m &\longmapsto a \cdot m \end{aligned}$$
   é isomorfismo de $A\#H$-módulos à esquerda.

A demonstração segue a seguinte estrutura:

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (4) \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (5) \\
& (2) \arrow[ur, Rightarrow] & & (3) \arrow[ll, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

A equivalência (1) $\iff$ (4) é feita por Kreimer-Takeuchi [13] e não depende da existência da unidade, pois é consequência da função $\theta\colon H^* \to H$ definida por $\theta(f) = \sum f(t_1)t_2$ ser uma bijeção (veja [14], [15]) e $[\ ,\ ] = (A \otimes \theta) \circ \operatorname{can}$.

A implicação (4) $\Rightarrow$ (3) segue do fato de $1_A\#1_H$ estar na imagem de $[\ ,\ ]$, pois isto implica que existe um epimorfismo de $A\#H$-módulos à esquerda $\bigoplus_\Omega A \to A\#H$. Em nosso trabalho, utilizaremos uma abordagem diferente, utilizando um resultado de Garcia-Simón [12] que garante que, dado um contexto de Morita $(R, F, {}_RP_F, {}_FQ_R, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$, se $[\ ,\ ]$ é sobrejetor, ${}_FQ$ gera ${}_FF$.

Como $A\#H$ é um $A\#H$-módulo à esquerda, um A-módulo à esquerda e um H-módulo à esquerda, a implicação (5) $\Rightarrow$ (4) segue do fato de $(A\#H)^H = t \cdot (A\#1_H)$ e

$(a\#1_H)(t\cdot(b\#1_H)) = (a\#t)(b\#1_H)$. Em nosso trabalho, apenas precisamos tomar o cuidado de verificar que $A\#H$ é também A-módulo à esquerda e H-módulo à esquerda, pois a estrutura de H-módulo à esquerda em um $A\#H$-módulo à esquerda não pode mais ser induzida pelo isomorfismo $H \cong 1_A\#H$.

A implicação (4) $\Rightarrow$ (5) segue do fato de $1_A\#1_H$ estar na imagem de $[\,,\,]$, pois se $\sum_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1_A\#1_H$, a função $\Psi\colon M \to A \underset{A^H}{\otimes} M^H$ definida por $\Psi(m) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes (t\cdot((b_i\#1_H)\cdot m))$ é a inversa de ϕ. Em nosso trabalho, mostraremos que $[\,,\,]$ sobrejetor implica que ϕ é sobrejetora para módulos unitários e livres de torção, sendo o seu núcleo a torção de $A \underset{A^H}{\otimes} M^H$.

A implicação (2) $\Rightarrow$ (4) é obtida partindo de uma base dual $\{(a_i, f^i)\}_{i=1}^n$ de A_{A^H}, pois como π é isomorfismo de álgebras, para cada i existe $y_i \in A$ tal que $\pi(t\cdot(y_i\#1_H)) = f^i$ e $\sum_{i=1}^n [a_i, y_i] = 1_A\#1_H$. Em nosso trabalho, veremos que se a álgebra A não possui unidade, é suficiente supor que A tenha “unidades locais à esquerda”, noção que será formalizado na definição de módulos $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitários, o que implica que para cada elemento $a\#h$, podemos supor $a \in eA$ para algum $e^2 = e \in A$ e tomando uma base dual $\{(a_i, f^i)\}_{i=1}^n$ de eA_{A^H}, encontramos $\{y_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ tal que $\sum_{i=1}^n [a_i, y_i\cdot(a\#h)] = a\#h$.

A implicação (3) $\Rightarrow$ (2) é feita por Faith [11, Proposition 4.1.3] e é consequência do isomorfismo $A^H \cong \mathrm{End}\,({}_{A\#H}A)$, que implica na existência de um morfismo $\psi\colon {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H) \to \mathrm{Hom}_{A^H}\left(A, A^H\right)$ satisfazendo $f(a)\cdot b = a\psi(f)(b)$ para cada $a, b \in A$ e $f \in {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H)$. Prova-se que, se ${}_{A\#H}A$ gera ${}_{A\#H}A\#H$, então existem $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ e $\{f^i\}_{i=1}^n \subseteq {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H)$ tais que $1_A\#1_H = \sum_{i=1}^n f^i(a_i)$, e verifica-se que $\{(a_i, \psi(f^i))\}_{i=1}^n$ é uma base dual para A_{A^H} e π é um isomorfismo de álgebras. Em nosso trabalho, acrescentando algumas hipóteses extras sobre A e A^H, como pedir que A seja um A^H-módulo à direita $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitário, partimos das mesmas funções para encontrar uma base dual para os submódulos eA_{A^H}, com $e^2 = e \in A$, concluindo que A_{A^H} é localmente projetivo no sentido de Ánh-Marki [2].

Além disso, temos algumas implicações extras na literatura, como por exemplo: [13, Theorem 1.7 (3)] de Kreimer-Takeuchi nos dá (1) $\Rightarrow$ (2.a), [8, Theorem 2.11 (a)] de Doi-Takeuchi nos dá (1) $\Rightarrow$ (5) e [22, Theorem 1.1] de Ulbrich nos dá (2) $\Rightarrow$ (1).

1. MÓDULOS SOBRE ANÉIS SEM UNIDADE

Neste capítulo apresentaremos resultados de módulos sobre anéis sem unidade que serão necessários neste trabalho. Todas as definições feitas para módulos à esquerda possuem análogas à direita, assim como os resultados obtidos.

Ao retirarmos o axioma $1 \cdot x = x$, surgem questões do tipo: O que fazemos com os elementos no módulo que não podem ser representados utilizando a ação? O que fazemos com os elementos no módulo em que a ação é trivial (nula)? Existem elementos no módulo que possuem uma espécie de unidade no anel? Saber trabalhar com tais elementos é a primeira etapa para se resolver problemas mais complexos envolvendo módulos sobre anéis sem unidade.

1.1 Módulos Unitários, de Torção e Livres de Torção

Definição 1.1. Seja R um anel.

1. Dizemos que um anel R é idempotente se $R = R^2$, isto é, $\forall r \in R$, $\exists \{b_i, c_i\}_{i=1}^{n} \subseteq R$ tais que $r = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$.

2. Dado um R-módulo à esquerda M, chamamos de parte unitária de M o R-submódulo RM. Quando $M = RM$, isto é, $\forall m \in M$, $\exists \{r_i\}_{i=1}^{n} \subseteq R$ e $\{m_i\}_{i=1}^{n} \subseteq M$ tais que $m = \sum r_i \cdot m_i$, dizemos que M é um R-módulo unitário.

3. Se M é um R-módulo à esquerda e $N \subseteq M$ é um R-submódulo, dizemos que N é submódulo de torção se $RN = 0$, isto é, $\forall r \in R$, $\forall n \in N$, $r \cdot n = 0$. A torção de M é a soma de todos os seus submódulos de torção e pode ser descrita como:

$$\mathscr{t}_R(M) = \{m \in M \ ; \ r \cdot m = 0, \forall r \in R\}.$$

   (a) Quando $\mathscr{t}_R(M) = M$, ou seja, $\forall m \in M$, temos $r \cdot m = 0$, $\forall r \in R$, dizemos que M é um R-módulo de torção.

   (b) Quando $\mathscr{t}_R(M) = 0$, ou seja, $\forall m \in M$, $r \cdot m = 0$, $\forall r \in R$ implica $m = 0$, dizemos que M é um R-módulo livre de torção.

   (c) Quando $M = R$, as torções à esquerda e à direita são chamadas de anuladores à direita e à esquerda respectivamente e denotadas por:

$$\mathscr{r}(R) = \mathscr{t}_R({}_R R) = \{r \in R \ ; \ Rr = 0\},$$

$$\ell(R) = \mathscr{t}_R(R_R) = \{r \in R \ ; \ rR = 0\}.$$

Observação 1.2. Se um anel R é idempotente, então para cada R-módulo à esquerda M, o R-submódulo RM é um R-módulo unitário.

Exemplo 1.3. Dado um anel R qualquer e um grupo abeliano aditivo M, podemos definir a ação de R em M por $r \cdot x = 0$, $\forall r \in R$, $x \in M$. Então M é um R-módulo de torção.

Exemplo 1.4. Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff. Considere $C(X)$ o espaço das funções contínuas de X para $\mathbb{K}$ com suporte compacto, ou seja, as funções contínuas de X para $\mathbb{K}$ que são nulas fora de algum subconjunto compacto. Então $C(X)$ é um anel comutativo idempotente sem anuladores, pois dado um elemento $f \in C(X)$ com U o seu suporte compacto, podemos cobrir U com um número finito de abertos que possuem fecho compacto, o que implica que sua união é um aberto V que contêm U, e o fecho $\overline{V}$ é compacto. Pelo [17, Lemma 2.12] (Lema de Urysohn), existe uma função g que tem valor 1 em U, 0 no complementar de V e é contínua em V/U, ou seja, g pertence à $C(X)$ e satisfaz $fg = gf = f$.

Exemplo 1.5. Considere $\mathbb{K}$ um corpo e $0 < k < n$ inteiros. Tome R o subespaço de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gerado pelas matrizes $E_{i,j} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s}1)_{r,s}$ com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq k$, ou seja:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; \ a_{i,j} \in \mathbb{K} \right\} \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Então R é um anel idempotente sem anuladores à esquerda com anuladores à direita não triviais. De fato:

$$\sum_{j=1}^{k} aE_{j,j} = a, \quad \forall a \in R,$$

$$aE_{i,j} = 0, \quad \forall a \in R, k < i \leq n, 1 \leq j \leq k.$$

Note que os subespaços de $M_n(\mathbb{K})$ gerados por matrizes do tipo $E_{i,j} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s}1)_{r,s}$ com $k < i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ são R-módulos à esquerda de torção e os subespaços de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gerados por matrizes do tipo $E_{i,j} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s}1)_{r,s}$ com $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq n$ são R-módulos à esquerda unitários e livres de torção.

Exemplo 1.6. Como proposto por Wofsey [24], dado um anel R, considere o anel F definido por: $F = R$ como conjuntos, a soma em F é a soma em R, mas a multiplicação em F é dada por $x * y = 0$, $\forall x, y \in F$. Considere $M = R \times R$ e defina:

$$\begin{aligned} F \times M &\longrightarrow M \\ (s, (a, b)) &\longmapsto (0, sa) \end{aligned}$$

Então M é um F-módulo à esquerda, sua parte unitária é $FM = 0 \times R^2$ e sua torção é $t_F(M) = r(R) \times R$.

Observação 1.7. Na categoria de R-módulos R-MOD, podemos considerar as seguintes classes:

$$T(R\text{-MOD}) = \{X \in R\text{-MOD} \ ; \ X \text{ é } R\text{-módulo de torção}\},$$

$$L(R\text{-MOD}) = \{X \in R\text{-MOD} \ ; \ X \text{ é } R\text{-módulo livre de torção}\},$$

$$R\text{-Mod} = \{X \in R\text{-MOD} \ ; \ X \text{ é } R\text{-módulo unitário}\},$$

$$R\text{-mod} = \{X \in R\text{-MOD} \ ; \ X \text{ é } R\text{-módulo unitário e livre de torção}\}.$$

No Apêndice B, mostramos que se R é idempotente, $(T(R\text{-MOD}), L(R\text{-MOD}))$ é uma teoria de torção hereditária (Smalø, [18]) e $(R\text{-Mod}, T(R\text{-MOD}))$ é uma teoria de torção (Smalø, [18]).

Lema 1.8. *Seja R um anel. A função:*

$$\begin{aligned} t_R(\_) : R\text{-MOD} &\longrightarrow R\text{-MOD} \\ X &\longmapsto t_R(X) \end{aligned}$$

é um funtor covariante e $t_R(R\text{-MOD}) \subseteq T(R\text{-MOD})$, ou seja, a torção de um módulo é um módulo de torção. Consequentemente, se X, Y são dois R-módulos à esquerda com Y livre de torção e $f\colon X \to Y$ é um morfismo de R-módulos à esquerda, então $t_R(X) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ e $\pi\colon X \to X/t_R(X)$ induz a bijeção:

$${}_R\operatorname{Hom}(X,Y) \cong {}_R\operatorname{Hom}(X/t_R(X), Y).$$

Demonstração. Para verificar que $t_R(\_)$ é funtor, vamos provar que preserva composição de morfismos. Por definição temos que $t_R(X) \in T(R\text{-MOD})$, $\forall X \in R\text{-MOD}$. Sejam $X, Y, Z \in R\text{-MOD}$, $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ morfismos de R-módulos. Temos que:

$$Rf(t_R(X)) = f(Rt_R(X)) = 0,$$

o que implica que $f(t_R(X)) \subseteq t_R(Y)$ e podemos tomar $t_R(f) = f|_{t_R(X)}$. Analogamente, $t_R(g) = g|_{t_R(Y)}$. Claramente:

$$(g \circ f)|_{t_R(X)} = g|_{t_R(Y)} \circ f|_{t_R(X)}.$$

Portanto $t_R(\_)$ é um funtor covariante.

Se Y é livre de torção, como $f(t_R(X)) \subseteq t_R(Y)$, temos que $t_R(X) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Considerando a projeção $\pi\colon X \to X/t_R(X)$, podemos definir a função:

$$\begin{aligned} \pi^* : {}_R\operatorname{Hom}(X/t_R(X), Y) &\longrightarrow {}_R\operatorname{Hom}(X,Y) \\ \Psi &\longmapsto \Psi \circ \pi \end{aligned}$$

Claramente π^* é injetora. Pela propriedade universal do quociente, para cada $f\colon X \to Y$ existe único $\Psi\colon X/t_R(X) \to Y$ tal que $f = \Psi \circ \pi$, o que implica que π^* é uma bijeção. ■

Lema 1.9. *Seja R um anel. A função:*

$$\begin{aligned} \Psi\colon R\text{-MOD} &\longrightarrow R\text{-MOD} \\ X &\longmapsto X/t_R(X) \end{aligned}$$

é um funtor covariante e, se R é um anel idempotente, então $\Psi(R\text{-MOD}) \subseteq F(R\text{-MOD})$, ou seja, o quociente de um módulo por sua torção é um módulo livre de torção.

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in R\text{-MOD}$, $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ morfismos de R-módulos. Considere $\pi_X\colon X \to X/t_R(X)$, $\pi_Y\colon Y \to Y/t_R(Y)$, $\pi_Z\colon Z \to Z/t_R(Z)$ as projeções canônicas. Temos que $\pi_Y \circ f\colon X \to Y/t_R(Y)$ é um morfismo de R-módulos e, como $f(t_R(X)) \subseteq t_R(Y)$ pelo Lema 1.8, $t_R(X) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi_Y \circ f)$. Pela propriedade universal do quociente, existe único:

$$\overline{f}\colon X/t_R(X) \to Y/t_R(Y) \quad \text{tal que} \quad \overline{f} \circ \pi_X = \pi_Y \circ f.$$

Analogamente, existem:

$$\overline{g}\colon Y/t_R(Y) \to Z/t_R(Z) \quad \text{tal que} \quad \overline{g} \circ \pi_Y = \pi_Z \circ g,$$

$$\overline{h}\colon X/t_R(X) \to Z/t_R(Z) \quad \text{tal que} \quad \overline{h} \circ \pi_X = \pi_Z \circ g \circ f.$$

Pela unicidade, temos que $\overline{h} = \overline{g} \circ \overline{f}$, ou seja, tomando $\Psi(f) = \overline{f}$, $\Psi(g) = \overline{g}$ e $\Psi(g \circ f) = \overline{h}$:

$$\Psi(g \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f).$$

Portanto Ψ é um funtor covariante.

Suponha que R é um anel idempotente e tome X um R-módulo. Se $\overline{x} \in X/t_R(X)$ é tal que $a\overline{x} = \overline{0}$, $\forall a \in R$, então $ax \in t_R(X)$, $\forall a \in R$. Para cada $a \in R$, existem $\{b_i, c_i\}_{i=1}^n \in R$ tais que $a = \sum_{i=1}^n b_i c_i$. Como $c_i x \in t_R(X)$, $\forall i$, temos que:

$$ax = \sum_{i=1}^n b_i c_i x = 0.$$

Ou seja, $x \in t_R(X)$ e $\overline{x} = \overline{0}$, o que implica que $X/t_R(X)$ é livre de torção. ■

Definição 1.10. Sejam R um anel, X e Y dois R-módulos à esquerda e $f\colon X \to Y$ um morfismo de R-módulos à esquerda. Dizemos que f tem núcleo de torção quando $\operatorname{Ker}(f) = t_R(X)$.

Definição 1.11. Sejam R um anel e X e Y dois R-módulos à esquerda. Dizemos que X gera Y se existe um epimorfismo $\pi\colon \bigoplus_{\Omega} X \to Y$ para alguma família Ω.

Lema 1.12. *Dado um anel R, se um R-módulo à esquerda X gera R, então X gera a categoria de R-módulos à esquerda unitários.*

Demonstração. Para cada R-módulo unitário Y, temos o epimorfismo $\pi_1\colon \bigoplus_{Y} R \to Y$ dado por $\pi_1((r_y)_{y\in Y}) = \sum_{y\in Y} r_y \cdot y$. Como X gera R, existe epimorfismo $\pi_2\colon \bigoplus_{\Omega} X \to R$ para alguma família Ω. Tomando $\pi\colon \bigoplus_{\Omega\times Y} X \to Y$ como

$$\pi\big((x_{i,y})_{(i,y)\in\Omega\times Y}\big) = \sum_{i\in\Omega} \pi_1\big((\pi_2(x_{i,y}))_{y\in Y}\big),$$

podemos afirmar que π é epimorfismo. ■

Definição 1.13. Seja R um anel. Um R-módulo M é dito fiel se $r \cdot m = 0$, $\forall m \in M$ implica $r = 0$.

Lema 1.14. *Seja R um anel sem anuladores à esquerda. Se um R-módulo à esquerda M gera R, então M é um R-módulo fiel.*

Demonstração. Seja $r \in R$ tal que $r \cdot m = 0$, $\forall m \in M$. Como M gera R, existe um epimorfismo $\pi\colon \bigoplus_{\Omega} M \to R$ para alguma família Ω. Logo, para cada $b \in R$, existe um elemento $\{m_\omega\} \in \bigoplus_{\Omega} M$ tal que $\pi(\{m_\omega\}) = b$. Isto implica que $rb = r\pi(\{m_\omega\}) = \pi(\{r \cdot m_\omega\}) = 0$ e $r \in \ell(R)$. Como R não tem anuladores à esquerda, temos que $r = 0$ e M é um R-módulo fiel. ■

1.2 Base Dual, Módulos Projetivos, Finitamente Gerados e si-Unitários

Esta seção é dedicada a introduzir as ferramentas necessárias para as implicações envolvendo (2.*b*) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery, que na versão clássica pede que o A^H-módulo à direita A seja projetivo finitamente gerado. O objetivo desta condição no Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery é permitir que se trabalhe com uma base dual, pois um módulo é projetivo finitamente gerado se, e somente se, possui base dual. As definições de módulos projetivos, módulos finitamente gerados e base dual que usaremos para o caso de módulos sobre anéis sem unidade são as mesmas que usa-se no caso de módulos sobre anéis com unidade.

Definição 1.15. Seja R um anel. Dado um R-módulo à esquerda P, dizemos que P é projetivo se para todo epimorfismo de R-módulos à esquerda $f\colon M \to N$ e todo morfismo de R-módulos à esquerda $g\colon P \to N$, existe um morfismo de R-módulos à esquerda $h\colon P \to M$ tal que $g = f \circ h$.

Quando o anel R tem unidade, sabemos que R é projetivo como R-módulo à esquerda e à direita. No exemplo a seguir, vemos que isto não precisa ocorrer quando o anel não tem unidade.

Exemplo 1.16. Considere R, F e M como no Exemplo 1.6. Defina:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow F \\ (a,b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

Este epimorfismo de F-módulos à esquerda não cinde, pois caso contrário, como o seu núcleo é $0 \times R \cong F$, teríamos $M \cong F \bigoplus F$ e a ação de F em M seria trivial, o que não ocorre.

Todo epimorfismo $f\colon X \to P$ cinde se P é projetivo, pois basta considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted] \arrow[d, equal] & \\ X \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Portanto, como o epimorfismo $M \to F$ acima não cinde, temos que F não é projetivo como F-módulo à esquerda.

Definição 1.17. Seja R um anel. Dado um R-módulo à esquerda M, dizemos que M é finitamente gerado se existe $\{m_i\}_{i=1}^n \subseteq M$ tal que $M = \sum_{i=1}^n R \cdot m_i$, ou seja, para cada $m \in M$, existe $\{r_i\}_{i=1}^n \subseteq R$ tal que $m = \sum_{i=1}^n r_i \cdot m_i$.

Definição 1.18. Seja R um anel. Dado um R-módulo à esquerda M, uma base dual de M, quando existir, é um subconjunto finito $\{m_i, f^i\}_{i=1}^n \subseteq M \times {}_R\mathrm{Hom}(M,R)$ tal que $m = \sum_{i=1}^n f^i(m) \cdot m_i$, $\forall m \in M$. Claramente todo módulo com base dual é finitamente gerado.

Exemplo 1.19. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $R = \mathrm{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ a álgebra que é o $\mathbb{K}$-espaço vetorial de matrizes retangulares $k \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, onde $1 \leq k < n$, munido da multiplicação induzida pela inclusão $R \subseteq \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} ;\ a_{i,j} \in \mathbb{K} \right\} \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Denotando por $E_{i,j}$ a matriz com valor 1 na coordenada (i,j) e 0 nas demais, temos:

$$R = \Big\{ \sum a_{i,j} E_{i,j} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \ ;\ a_{i,j} = 0 \text{ se } i > k \Big\}.$$

Considerando $X = \ell\,(R)$ a subálgebra de anuladores à esquerda de R, temos que:

$$X = \Big\{ \sum a_{i,j} E_{i,j} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \ ;\ a_{i,j} = 0 \text{ se } i > k \text{ ou } j \leq k \Big\},$$

e X é um R-módulo à esquerda com base dual. De fato, para cada $1 \leq s \leq n-k$, defina:

$$x_s = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{n-k} \delta_{j,k+s} E_{i,j} \in X,$$

$$\begin{aligned} f^s\colon X &\longrightarrow R \\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} a_{i,j}E_{i,j} &\longmapsto \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{i,k+s}E_{i,j} \end{aligned}$$

É fácil verificar que $f^s \in {}_R\mathrm{Hom}\,(X,R)$. Para cada $x = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} a_{i,j}E_{i,j} \in X$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n-k} f^s(x)x_s &= \sum_{s=1}^{n-k}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{i,k+s}E_{i,j}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{n-k}\delta_{j,k+s}E_{i,j}\Big) \\ &= \sum_{s=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{n-k}a_{i,k+s}\delta_{j,k+s}E_{i,j} \\ &= \sum\Big(\sum_{s=1}^{n-k}\frac{1}{n-k}a_{i,j}\Big)E_{i,j} \\ &= \sum a_{i,j}E_{i,j} \\ &= x, \end{aligned}$$

o que implica que $\{(x_s, f^s)\}_{s=1}^{n} \subseteq X \times {}_R\mathrm{Hom}\,(X,R)$ é uma base dual de X como R-módulo à esquerda.

Proposição 1.20. *Seja R um anel. Um R-módulo à esquerda P é projetivo finitamente gerado se, e somente se, possui uma base dual.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Como P é finitamente gerado, existe $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq P$ tal que $P = \sum_{i=1}^{n} R\cdot x_i$. Logo:

$$\begin{aligned} f\colon \bigoplus_{i=1}^{n} R &\longrightarrow P \\ (r_1,...,r_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} r_i\cdot x_i \end{aligned}$$

é um epimorfismo de R-módulos à esquerda. Como P é projetivo, existe $g\colon P \to \bigoplus_{i=1}^{n} R$ tal que $x = f\circ g(x)\ \forall x \in P$. Como a soma direta é finita, temos $\bigoplus_{i=1}^{n} R = \prod_{i=1}^{n} R$. Sendo $\pi_i\colon \prod_{i=1}^{n} R \to R$ a projeção na i-ésima coordenada, definimos $f^i\colon P \to R$ por $f^i = \pi_i \circ g$. Para cada $x \in P$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f^i(x)\cdot x_i &= f(f^1(x),...,f^n(x)) \\ &= f(\pi_1\circ g(x),...,\pi_n\circ g(x)) \\ &= f\circ g(x) \\ &= x, \end{aligned}$$

o que implica que $\{(x_i, f^i)\}_{i=1}^{n} \subseteq P \times {}_R\mathrm{Hom}\,(P,R)$ é uma base dual de P.

$(\Leftarrow)$: Seja $\{(x_i, f^i)\}_{i=1}^{n} \subseteq M \times {}_R\mathrm{Hom}\,(P,R)$ uma base dual de P como R-módulo à esquerda. Para cada epimorfismo de R-módulos à esquerda $\varphi\colon M \to N$ e cada morfismo de R-módulos à esquerda $\psi\colon P \to N$, existe $\{m_i\}_{i=1}^{n} \subseteq M$ tal que $\varphi(m_i) = \psi(x_i)$, $\forall i = 1,...,n$.

Defina:

$$\begin{aligned} \theta\colon P &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} f^i(x)\cdot m_i \end{aligned}$$

Como cada f^i é morfismo de R-módulos à esquerda, temos que θ é um morfismo de R-módulos à esquerda. Além disso, para cada $x \in P$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi\circ\theta(x) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(f^i(x)\cdot m_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f^i(x)\cdot\varphi(m_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f^i(x)\cdot\psi(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \psi(f^i(x)\cdot x_i) \\ &= \psi(x). \end{aligned}$$

Portanto P é um R-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado. ■

Com a finalidade de incluir um anel sem unidades R na classe dos R-módulos que fazem o papel dos progeradores no caso de módulos sobre anéis com unidades, a definição de módulos localmente projetivos foi introduzida por Ánh-Márki (ver [2]). Nós usamos uma versão levemente diferente desta definição, usando famílias dirigidas (Rotman, [16]), como na definição de sistema direto cindido apresentado por Caenepeel-Groot-Vercruysse [4].

Definição 1.21. Uma família parcialmente ordenada I é chamada de família dirigida se, para toda família finita $F \subseteq I$, existe um elemento $k \in I$ tal que $i \leq k$, $\forall i \in F$.

Definição 1.22. Um R-módulo à esquerda P é um módulo localmente projetivo se existe uma família dirigida I e um sistema direto $(P_i)_{i\in I}$ de somandos diretos de P projetivos finitamente gerados com projeções $\phi_i\colon P \to P_i$ tais que ϕ_i se fatora por ϕ_j sempre que $i \leq j$, e tal que $\varinjlim P_i = P$.

Definição 1.23. Um anel R possui unidades locais se, para cada $r \in R$, existe $e^2 = e \in R$ tal que $er = re = r$.

Veremos no Lema 3.23 que uma H-módulo álgebra A com unidades locais satisfaz todas as condições de módulos localmente projetivos, exceto pelo fato dos somandos diretos serem projetivos e, por este motivo, trocaremos a afirmação "A é um A^H-módulo à direita projetivo finitamente gerado" pela afirmação "A é um A^H-módulo à direita localmente projetivo" no Teorema 3.24. Mas não precisamos que existam unidades locais nas generalizações de cada implicação: Na Proposição 3.21, que generaliza a implicação (3) $\Rightarrow$ (2) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery, precisamos de elementos na subálgebra de invariantes que agem como unidades locais apenas à direita da álgebra, e na Proposição 3.22, que generaliza a implicação (2) $\Rightarrow$ (4) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery, precisamos de "unidades locais à esquerda" em A.

Definimos uma nova classe de módulos, os módulos si-unitários, para formalizar esta noção de unidades locais à esquerda ou à direita. A definição de módulos si-unitários é inspirada na definição de módulos s-unitários de Tominaga (para cada $m \in {}_R M$, existe $r \in R$ tal que $m = r \cdot m$, veja [21]), e a motivação desta definição vem da seguinte situação: se R tem unidades locais e M é um R-módulo unitário à esquerda, para cada $m \in M$ existe uma unidade local $u \in R$ tal que $m = u \cdot m$.

Definição 1.24. Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda. Se para cada família finita $\Gamma \subseteq M$ existe $e^2 = e \in R$ tal que $m = e \cdot m$, $\forall m \in \Gamma$, dizemos que M é um R-módulo si-unitário.

Exemplo 1.25. O anel $C(X)$ do Exemplo 1.4 é s-unitário como $C(X)$-módulo à esquerda e à direita, mas não é si-unitário, pois o único elemento idempotente é a função zero.

Exemplo 1.26. O anel R do Exemplo 1.5 é si-unitário como R-módulo à direita, mas não como R-módulo à esquerda.

Exemplo 1.27. Dada uma $\mathbb{K}$-categoria $\mathscr{C}$, definimos a álgebra $\mathrm{a}(\mathscr{C})$ por:

$$\mathrm{a}(\mathscr{C}) = \bigoplus_{x,y \in \mathscr{C}_0} {}_y\mathscr{C}_x,$$

com produto dado pelo produto usual de matrizes e composição em $\mathscr{C}$:

$$({}_y a_x)({}_y b_x) = \left(\sum_z {}_y a_z \circ {}_z b_x \right).$$

A álgebra $\mathrm{a}(\mathscr{C})$ possui uma família de elementos idempotentes ortogonais indexados pelos objetos de $\mathscr{C}$: para cada $x \in \mathscr{C}_0$, considere $E_x \in \mathrm{a}(\mathscr{C})$ o elemento com identidade de x em (x, x) e o morfismo nulo nos demais índices. Para cada $({}_y a_x) \in \mathrm{a}(\mathscr{C})$, existe um conjunto finito $\Gamma \subseteq \mathscr{C}_0$ tal que ${}_y a_x \neq 0$ apenas se $\{x, y\} \subseteq \Gamma$. Considerando $e = \sum_{x \in \Gamma} E_x$, temos $e^2 = e$ e $ae = ea = a$. Portanto ${}_{\mathrm{a}(\mathscr{C})}\mathrm{a}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{a}(\mathscr{C})_{\mathrm{a}(\mathscr{C})}$ são si-unitários.

Observação 1.28. Todo módulo si-unitário é s-unitário e todo módulo s-unitário é unitário e livre de torção.

Lema 1.29. *Dado um anel R, se o R-módulo à esquerda R é si-unitário, então todo R-módulo à esquerda unitário é si-unitário.*

Demonstração. Seja M um R-módulo à esquerda unitário e considere uma família finita $\{m_1, ..., m_n\} \subseteq M$. Para cada $i = 1, ..., n$, existem $\{r_{i,j}\}_{j=1}^{n_i} \subseteq R$ e $\{m_{i,j}\}_{j=1}^{n_i} \subseteq M$ tais que $m_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j} \cdot m_{i,j}$. Como ${}_R R$ é si-unitário, existe $e^2 = e \in R$ tal que $r_{i,j} = e r_{i,j}$, $\forall i, j$. Logo, para cada $i = 1, ..., n$, temos:

$$e \cdot m_i = \sum_{j=1}^{n_i} e \cdot (r_{i,j} \cdot m_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n_i} (e r_{i,j}) \cdot m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j} \cdot m_{i,j} = m_i,$$

o que implica que M é um R-módulo si-unitário. ■

Exemplo 1.30. Considere a álgebra $A = \mathrm{a}(\mathscr{C})$ como no Exemplo 1.27. Como apresentado por Cibils-Marcos em [6, Definition 4.1], um $\mathscr{C}$-módulo à esquerda M é um funtor covariante da categoria $\mathscr{C}$ para $\mathbb{K}$-MOD. A partir de um $\mathscr{C}$-módulo M, definimos um A-módulo à esquerda M' dado por $M' = \prod_{x \in \mathscr{C}_0} {}_x M$ como $\mathbb{K}$-espaço vetorial e ação ${}_y a_x \cdot ({}_z m) = ({}_z n)$ onde ${}_z n = {}_z 0$ se $z \neq x$ e ${}_z n = {}_y a_x \cdot {}_x m$ se $z = x$. Como $A = \bigoplus_{x,y \in \mathscr{C}_0} {}_y\mathscr{C}_x$ é um anel que é si-unitário como A-módulo, temos que a parte unitária $AM' = \bigoplus_{x \in \mathscr{C}_0} {}_x M$ é um A-módulo si-unitário.

O lema a seguir é consequência direta do [23, Lemma 2.11] de Vercruysse e do [9, Lemma 2.4] de Dokuchaev-Del Río-Simón, e relaciona módulos $\mathscr{si}$-unitários com anéis com unidades locais.

Lema 1.31. *Dado um anel R, os módulos ${}_RR$ e R_R são $\mathscr{si}$-unitários se, e somente se, o anel R tem unidades locais.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$: [23, Lemma 2.11] Dado $r \in R$, como ${}_RR$ é $\mathscr{si}$-unitário, existe $x^2 = x \in R$ tal que $r = xr$. Como R_R é $\mathscr{si}$-unitário, existe $y^2 = y \in R$ tal que $r = ry$ e $x = xy$. Tomando $e = x + y - yx$, temos:

$$\begin{aligned} e^2 &= (x + y - yx)^2 \\ &= x^2 + xy - xyx + yx + y^2 - y^2x - yx^2 - yxy + yxyx \\ &= x + x - x + yx + y - yx - yx - yx + yx \\ &= x + y - yx \\ &= e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} er &= (x + y - yx)r \\ &= xr + yr - yxr \\ &= r + yr - yr \\ &= r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} re &= r(x + y - yx) \\ &= rx + ry - ryx \\ &= rx + r - rx \\ &= r. \end{aligned}$$

Portanto $er = re = r$, com $e^2 = e$.

$(\Leftarrow)$: [9, Lemma 2.4] Provaremos apenas que ${}_RR$ é $\mathscr{si}$-unitário, pois o resultado à direita segue de forma análoga. A prova será feita para dois elementos, mas pode ser facilmente estendida para conjuntos finitos usando indução. Dados $\{x, y\} \subseteq R$, existem $r_1^2 = r_1, r_2^2 = r_2 \in R$ tais que $x = r_1x$ e $y - r_1y = r_2(y - r_1y)$. Tomando $r = r_1 + r_2 - r_2r_1$, existe $e^2 = e \in R$ tal que $r = er$. Note que:

$$\begin{aligned} rx &= (r_1 + r_2 - r_2r_1)x \\ &= r_1x + r_2x - r_2r_1x \\ &= x + r_2x - r_2x \\ &= x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ry &= (r_1 + r_2 - r_2r_1)y \\ &= r_1y + r_2(y - r_1y) \\ &= r_1y + y - r_1y \\ &= y. \end{aligned}$$

Logo $ex = e(rx) = rx = x$ e $ey = e(ry) = ry = y$. ■

Lema 1.32. *Dado um anel R com unidades locais, para cada subconjunto finito $\Gamma \subseteq R$, existe $e^2 = e \in R$ tal que $ex = xe = x$, $\forall x \in \Gamma$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.31, os módulos ${}_RR$ e R_R são $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitários. Existem $r_1^2 = r_1 \in R$ tal que $x = r_1x$, $\forall x \in \Gamma$ e $r_2^2 = r_2 \in R$ tal que $r_1 = r_1r_2$ e $x = xr_2$, $\forall x \in \Gamma$. Tomando $e = r_1 + r_2 - r_2r_1$, repetimos as contas do Lema 1.31 para verificar que $ex = xe = x$, $\forall x \in \Gamma$, com $e^2 = e$. ■

1.3 Bimódulos e Espaços de Morfismos

Nesta seção apresentaremos as ferramentas utilizadas por Garcia-Simón [12] a respeito de bimódulos e espaços de morfismos para demonstrar sob quais condições um contexto de Morita se torna uma equivalência de Morita. Tal demonstração será apresentada no Capítulo 2.

A maior parte dos morfismos apresentados nos resultados a seguir é isomorfismo quando trabalhamos com módulos sobre anéis com unidade. No caso de anéis sem unidade, tais morfismos induzirão isomorfismos ao considerarmos a restrição à parte unitária quando o módulo não for unitário e quocientarmos pela torção quando o módulo não for livre de torção.

Lema 1.33. *Sejam R e F anéis. Então:*

- *para cada R-módulo à esquerda X e cada R-F-bimódulo P, temos que ${}_R\mathrm{Hom}(P, X)$ é um F-módulo à esquerda, com ação dada por:*

$$\begin{aligned} F \times {}_R\mathrm{Hom}(P, X) &\longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}(P, X) \\ (b, f) &\longmapsto (p \mapsto f(pb)) \end{aligned}$$

  e, se P_F é unitário, ${}_R\mathrm{Hom}(P, X)$ é um F-módulo à esquerda livre de torção,

- *para cada R-módulo à direita Y e cada F-R-bimódulo Q, temos que $\mathrm{Hom}_R(Q, Y)$ é um F-módulo à direita, com ação dada por:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(Q, Y) \times F &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q, Y) \\ (f, b) &\longmapsto (q \mapsto f(bq)) \end{aligned}$$

  e, se ${}_FQ$ é unitário, $\mathrm{Hom}_R(Q, Y)$ é um F-módulo à direita livre de torção.

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o primeiro item. O segundo segue de forma análoga. Sejam X um R-módulo à esquerda e P um R-F-bimódulo. Primeiramente vejamos que $(b \cdot f) \in {}_R\mathrm{Hom}(P, X)$, $\forall b \in F$ e $\forall f \in {}_R\mathrm{Hom}(P, X)$. Como P é um R-F-bimódulo, para cada $p \in P$ e $a \in R$, temos:

$$\begin{aligned} (b \cdot f)(ap) &= f((ap)b) \\ &= f(a(pb)) \\ &= af(pb) \\ &= a(b \cdot f)(p). \end{aligned}$$

Dados $f \in {}_R\mathrm{Hom}(P, X)$ e $a, b \in F$, para cada $p \in P$, temos:

$$\begin{aligned} ((ab) \cdot f)(p) &= f(p(ab)) \\ &= (b \cdot f)(pa) \\ &= (a \cdot (b \cdot f))(p), \end{aligned}$$

ou seja, $(ab) \cdot f = a \cdot (b \cdot f)$ e ${}_R\mathrm{Hom}\,(P, X)$ é um F-módulo à esquerda.

Assuma que P_F é unitário. Para cada $p \in P$, existem $\{p_1, ..., p_n\} \subseteq P$ e $\{b_1, ..., b_n\} \subseteq F$ tais que $p = \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$. Se $f \in {}_R\mathrm{Hom}\,(P, X)$ é tal que $F \cdot f = 0$, temos:

$$\begin{aligned} f(p) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(p_i b_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(p_i b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot f)(p_i) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $f \equiv 0$, o que implica que ${}_R\mathrm{Hom}\,(P, X)$ é um F-módulo à esquerda livre de torção. ■

Lema 1.34. *Sejam R um anel e X um R-módulo à esquerda. A função:*

$$\begin{aligned} \Psi \colon X &\longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}\,(R, X) \\ x &\longmapsto (a \mapsto ax) \end{aligned}$$

é um morfismo de R-módulos à esquerda. Se X é unitário, então Ψ induz o isomorfismo:

$$X / t_R\,(X) \cong R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(R, X)$$

Demonstração. Sejam $a, b \in R$ e $x \in X$. Então:

$$\begin{aligned} \Psi(ax)(b) &= bax \\ &= \Psi(x)(ba) \\ &= (a \cdot \Psi(x))(b), \end{aligned}$$

ou seja, Ψ é morfismo de R-módulos à esquerda.

Se X é um R-módulo à esquerda unitário, para cada $x \in X$, existem $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subseteq R$ e $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq X$ tais que $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Assim, para cada $a \in R$ temos:

$$\begin{aligned} \Psi(x)(a) &= ax \\ &= \sum_{i=1}^{n} a a_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i)(a a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot \Psi(x_i))(a). \end{aligned}$$

Isto quer dizer que $\mathrm{Im}\,(\Psi) \subseteq R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(R, X)$ e:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \Psi(x_i), \quad \text{onde} \quad x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Seja $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f_i \in R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(R, X)$. Para cada $a \in R$, temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot f_i)(a) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(aa_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} af_i(a_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \Psi\left(f_i(a_i)\right)(a),\end{aligned}$$

o que implica que $R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(R, X) \subseteq \mathrm{Im}\,(\Psi)$.

Claramente temos que $t_R\,(X) = \mathrm{Ker}\,(\Psi)$, pois para cada $x \in X$:

$$\Psi(x) = 0 \iff ax = 0, \quad \forall a \in R.$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$X/t_R\,(X) \cong R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(R, X)$$

como R-módulos à esquerda. ∎

Observação 1.35. Dados R e F anéis, X um R-módulo à esquerda e M um R-F-bimódulo, podemos nos perguntar como ${}_R\mathrm{Hom}\,(M, X)$ se relaciona com ${}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_R\,(M)\,, X)$ ou ${}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)$.

No Lema 1.8, vemos que se X é um R-módulo livre de torção, $\pi\colon M \to M/t_R\,(M)$ induz a bijeção:

$${}_R\mathrm{Hom}\,(M, X) \cong {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_R\,(M)\,, X)\,.$$

No Lema 1.36, veremos que, se F é anel idempotente e M é livre de torção como F-módulo, $\pi\colon M \to M/t_F\,(M)$ induz o isomorfismo:

$$F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M, X) \cong F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)\,.$$

Lema 1.36. *Sejam R um anel, X um R-módulo à esquerda, F um anel idempotente e M um R-F-bimódulo que é unitário como F-módulo. Temos um isomorfismo de F-módulos à esquerda:*

$$F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M, X) \cong F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)\,.$$

Demonstração. Considere $\pi\colon M \to M/t_F\,(M)$ a projeção canônica e defina:

$$\begin{aligned}\theta\colon {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X) &\longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}\,(M, X)\\ f &\longmapsto f \circ \pi\end{aligned}$$

Como M é unitário como F-módulo à direita, pelo Lema 1.33, temos que ${}_R\mathrm{Hom}\,(M, X)$ é livre de torção. Para cada $b \in F$, $m \in M$ e $f \in {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)$, temos:

$$\begin{aligned}\theta(b \cdot f)(m) &= (b \cdot f)(m + t_F\,(M))\\ &= f(mb + t_F\,(M))\\ &= \theta(f)(mb)\\ &= (b \cdot \theta(f))(m).\end{aligned}$$

Logo, θ é morfismo de F-módulos à esquerda.

Seja $b \cdot f \in F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M, X)$. Então, para cada $m \in t_F\,(M)$, temos:

$$\begin{aligned}(b \cdot f)(m) &= f(mb)\\ &= f(0)\\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, $t_S\,(M) \subseteq \mathrm{Ker}\,(b \cdot f)$. Pela propriedade universal do quociente, existe um único $g_{b \cdot f} \in {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_S\,(M)\,, X)$ tal que $(b \cdot f) = g_{b \cdot f} \circ \pi$. Como F é idempotente, para cada $b \in F$ existem $\{b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_n\} \subseteq F$ tais que $b = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$. Assim, para cada $m \in M$, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot g_{c_i \cdot f}) \circ \pi(m) &= \sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot g_{c_i \cdot f})(m + t_F\,(M))\\ &= \sum_{i=1}^{n}(g_{c_i \cdot f})(mb_i + t_F\,(M))\\ &= \sum_{i=1}^{n}(g_{c_i \cdot f} \circ \pi)(mb_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(c_i \cdot f)(mb_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(mb_i c_i)\\ &= f(mb)\\ &= (b \cdot f)(m)\\ &= (g_{b \cdot f} \circ \pi)(m).\end{aligned}$$

Pela unicidade da propriedade universal do quociente, $g_{b \cdot f} = \sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot g_{c_i \cdot f})$, ou seja:

$$g_{b \cdot f} \in F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)\,.$$

Defina:

$$\begin{aligned}\varphi \colon F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M, X) &\longrightarrow F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)\\ b \cdot f &\longmapsto g_{b \cdot f}\end{aligned}$$

Chamando de Ψ a restrição de θ à $F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)$, claramente φ e Ψ são inversas. Portanto:

$$F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M, X) \cong F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(M/t_F\,(M)\,, X)$$

como F-módulos à esquerda. ■

Lema 1.37. *Sejam R e F anéis, X um R-módulo à esquerda, M e N dois F-R-bimódulos e $f \colon M \to N$ um epimorfismo de F-R-bimódulos. A função:*

$$\overline{f} = f \underset{R}{\otimes} X \colon M \underset{R}{\otimes} X \to N \underset{R}{\otimes} X$$

é um epimorfismo de F-módulos à esquerda.

Demonstração. Sejam $n \in N$ e $x \in X$. Como f é epimorfismo, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$. Assim $\overline{f}(m \otimes x) = f(m) \otimes x = n \otimes x$ e $\overline{f}$ é epimorfismo de F-módulos à esquerda. ■

Observação 1.38. Note que, dado um anel R, os anuladores $\ell(R)$ e $r(R)$ são ideais (bilaterais) de R, pois para cada $a \in R$, temos:

$$\ell(R)\,a = 0 \subseteq \ell(R) \text{ e } (a\ell(R))R = a(\ell(R)\,R) = 0 \Rightarrow (a\ell(R)) \subseteq \ell(R)\,,$$

$$ar(R) = 0 \subseteq r(R) \text{ e } R(r(R)\,a) = (Rr(R))a = 0 \Rightarrow (r(R)\,a) \subseteq r(R)\,.$$

Logo, $R/\ell(R)$ e $R/r(R)$ são anéis. Nos resultados a seguir, apresentaremos algumas relações entre R-módulos à esquerda livres de torção e $R/r(R)$-módulos à esquerda livres de torção. Tais resultados serão úteis na demonstração do Teorema 2.18, pois quando $(R, F, P, Q, \langle\,,\,\rangle, [\,,\,])$ é um contexto de Morita entre anéis sem unidade com R idempotente e $\langle\,,\,\rangle$ sobrejetor, a Proposição 2.11 diz que a relação entre R e o anel de endomorfismos de ${}_F\mathrm{End}\,({}_FQ)$ é:

$$R/r(R) \cong R \cdot {}_F\mathrm{End}\,({}_FQ)\,.$$

No caso clássico (R com unidade), as afirmações a seguir são triviais e:

$$R \cong {}_F\mathrm{End}\,({}_SQ)\,.$$

Todos os resultados possuem análogos para R-módulos à direita, utilizando $R/\ell(R)$.

Lema 1.39. *Se R é um anel e X é um R-módulo à esquerda livre de torção, então X é um $R/r(R)$-módulo à esquerda livre de torção.*

Demonstração. Defina:

$$\begin{aligned} \alpha\colon R/r(R) \underset{R}{\otimes} X &\longrightarrow X \\ (a + r(R)) \otimes x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

Se $a + r(R) = b + r(R)$, existe $r \in r(R)$ tal que $a = b + r$. Note que $r(R)\,X \subseteq t_R(X) = 0$, pois $R(r(R)\,X) = (Rr(R))X = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \alpha((a + r(R)) \otimes x) &= ax \\ &= (b + r)x \\ &= bx + rx \\ &= bx \\ &= \alpha((b + r(R)) \otimes x). \end{aligned}$$

Se $a + r(R) \in R/r(R)$, $b \in R$ e $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned} \alpha((a + r(R))b \otimes x) &= \alpha((ab + r(R)) \otimes x) \\ &= abx \\ &= \alpha((a + r(R)) \otimes bx), \end{aligned}$$

o que implica que α está bem definido.

Dados $a + r(R)\,, b + r(R) \in R/r(R)$ e $x \in X$, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha \circ (R/r(R) \underset{R}{\otimes} \alpha)((a + r(R)) \otimes (b + r(R)) \otimes x) &= \alpha((a + r(R)) \otimes (bx)) \\ &= abx \\ &= \alpha((ab + r(R)) \otimes x) \\ &= \alpha((a + r(R))(b + r(R)) \otimes x). \end{aligned}$$

Logo X é um $R/\mathscr{r}(R)$-módulo à esquerda com ação α.

Note que, se $x \in X$ é tal que $R/\mathscr{r}(R)\,x = 0$, então $Rx = 0$. Como X é R-módulo livre de torção, temos $x = 0$. Mas isto implica que X é um $R/\mathscr{r}(R)$-módulo livre de torção. ■

Lema 1.40. *Sejam R um anel idempotente e X um R-módulo à esquerda livre de torção. Temos o isomorfismo de R-módulos à esquerda:*

$$\left(R \underset{R}{\otimes} X\right)\Big/\mathscr{t}_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \cong \left(R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X\right)\Big/\mathscr{t}_R\left(R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X\right).$$

Demonstração. Considere as projeções:

$$\pi_R\colon R \to R/\mathscr{r}(R) \quad \text{e} \quad \pi\colon R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X \to \left(R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X\right)\Big/\mathscr{t}_R\left(R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X\right).$$

Pelo Lema 1.37, temos que $\pi_R \underset{R}{\otimes} X\colon R \underset{R}{\otimes} X \to R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X$ é epimorfismo de R-módulos, o que implica que a função $f = \pi \circ (\pi_R \underset{R}{\otimes} X)\colon R \underset{R}{\otimes} X \to \left(R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X\right)\Big/\mathscr{t}_R\left(R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X\right)$ é um epimorfismo de R-módulos.

Para cada $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \operatorname{Ker}(f)$, para cada $b \in R$, temos que $\sum_{i=1}^{n} b\,(a_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} b \otimes a_i x_i$ e:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \pi\left(\pi_R(b) \otimes a_i x_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} f(b \otimes a_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(b\,(a_i \otimes x_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} bf\left(a_i \otimes x_i\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_R(b) \otimes a_i x_i \in \mathscr{t}_R\left(R/\mathscr{r}(R) \underset{R}{\otimes} X\right), \quad \forall b \in R.$$

Como R é idempotente, temos que $R/\mathscr{r}(R)$ é um R-módulo unitário e para cada $b \in R$, existem $\{c_j, d_j\}_{i=1}^{m} \subseteq R$ tais que $\pi_R(b) = \sum_{j=1}^{m} c_j \pi_R(d_j)$. Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \pi_R(b) \otimes a_i x_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_j \pi_R(d_j) \otimes a_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_j\left(\pi_R(d_j) \otimes a_i x_i\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como X é um R-módulo livre de torção, pelo Lema 1.39, X é $R/\mathscr{r}(R)$-módulo livre de torção e:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_R(b) \underset{R}{\otimes} a_i x_i = 0, \quad \forall b \in R \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

Portanto $\sum_{i=1}^{n} b\,(a_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} b \otimes a_i x_i = 0$, o que implica $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \mathscr{t}_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right)$.

Por outro lado, pelo Lema 1.9, $\left(R/r(R) \underset{R}{\otimes} X\right) \Big/ t_R\left(R/r(R) \underset{R}{\otimes} X\right)$ é livre de torção e pelo Lema 1.8, $t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$\left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \Big/ t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \cong \left(R/r(R) \underset{R}{\otimes} X\right) \Big/ t_R\left(R/r(R) \underset{R}{\otimes} X\right)$$

como R-módulos à esquerda. ∎

Lema 1.41. *Sejam R um anel e X um R-módulo à esquerda. A função:*

$$\begin{aligned} \varphi\colon R \underset{R}{\otimes} X &\longrightarrow X \\ a \otimes x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

é um morfismo de R-módulos à esquerda. Além disso, se X é unitário e:

1. *X é livre de torção, a função φ induz o isomorfismo:*
$$X \cong \left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \Big/ t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right),$$

2. *R é idempotente, a função φ induz o isomorfismo:*
$$X/t_R(X) \cong \left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \Big/ t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right).$$

Demonstração. Dados $a, b \in R$ e $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(a(b \otimes x)) &= \varphi(ab \otimes x) \\ &= abx \\ &= a\varphi(b \otimes x), \end{aligned}$$

o que implica que φ é morfismo de R-módulos à esquerda.

Suponha que X seja um R-módulo à esquerda unitário. Para cada $x \in X$ existem $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq R$ e $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ tais que $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Considerando o elemento $\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \in R \underset{R}{\otimes} X$, temos:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n a_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(a_i \otimes x_i), \end{aligned}$$

o que implica que $\operatorname{Im}(\varphi) = X$. Para cada $\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, temos que $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ e, para cada $a \in R$:

$$\sum_{i=1}^n a(a_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^n a \otimes a_i x_i = 0,$$

o que implica que $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right)$.

1. Se X é um R-módulo à esquerda livre de torção, pelo Lema 1.8 temos que $t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:
$$X \cong \left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \Big/ t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right).$$
como R-módulos à esquerda.

2. Sendo $\pi\colon X \to X/t_R(X)$ a projeção canônica, temos que $\operatorname{Ker}(\pi \circ \varphi) \subseteq t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right)$. Se R é idempotente, pelo Lema 1.9, $X/t_R(X)$ é um R-módulo à esquerda livre de torção. Pelo Lema 1.8, temos que $t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi \circ \varphi)$ e, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:
$$X/t_R(X) \cong \left(R \underset{R}{\otimes} X\right)\Big/ t_R\left(R \underset{R}{\otimes} X\right)$$
como R-módulos à esquerda.

■

Lema 1.42. *Sejam R um anel, X e Y dois R-módulos à esquerda e $f\colon X \to Y$ um morfismo de R-módulos à esquerda tal que a restrição $\overline{f}\colon RX \to RY$ é injetora. Então para todo par de elementos $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, temos que $x_1 - x_2 \in t_R(X)$. Em particular, se X é um R-módulo à esquerda livre de torção, então $\overline{f}$ injetora implica f injetora.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Para cada $a \in R$, temos $f(ax_1) = af(x_1) = af(x_2) = f(ax_2)$. Isto implica que $\overline{f}(ax_1) = \overline{f}(ax_2)$. Pela injetividade, temos que $ax_1 = ax_2$, $\forall a \in R$, o que implica $x_1 - x_2 \in t_R(X)$. ■

2. CONTEXTO DE MORITA

Neste capítulo, estudaremos contextos de Morita para anéis sem unidade. A primeira seção será dedicada a apresentar ao leitor o exemplo do contexto de Morita entre a subálgebra de invariantes de uma H-módulo álgebra à esquerda sem unidade e seu produto smash com H. Nas demais seções, apresentaremos resultados gerais sobre contexto de Morita envolvendo anéis sem unidade que foram introduzidos por Garcia-Simón [12], mas tomamos a liberdade de retirar das hipóteses condições que não são utilizadas, a fim de generalizar a aplicação destes resultados, pois em seu trabalho, supõe-se que ambos os morfismos do contexto de Morita são sobrejetores e os módulos são todos unitários. No caso que nos interessa, que é o contexto $(A^H, A\#H, {}_{A^H}A_{A\#H}, {}_{A\#H}A_{A^H}, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$, não podemos supor que o morfismo de A^H-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle\colon A \underset{A\#H}{\otimes} A \to A^H$ é sobrejetor mesmo quando a álgebra A possui unidade, além de, quando a álgebra A não possui unidade, os módulos ${}_{A\#H}A$, $A_{A\#H}$, ${}_{A^H}A$ e A_{A^H} podem não ser unitários.

Definição 2.1. Sejam R, F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\ ,\ \rangle\colon P\underset{F}{\otimes}Q \to R$ morfismo de R-bimódulos e $[\ ,\ ]: Q\underset{R}{\otimes}P \to F$ morfismo de F-bimódulos. Dizemos que a sêxtupla $(R, F, P, Q, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ é um contexto de Morita se valem:

- $\forall p_1, p_2 \in P$ e $\forall q \in Q$, $\langle p_1, q\rangle p_2 = p_1[q, p_2]$,
- $\forall p \in P$ e $\forall q_1, q_2 \in Q$, $[q_1, p]q_2 = q_1\langle p, q_2\rangle$.

2.1 Contexto de Morita entre Invariantes e Produto Smash

Nesta seção veremos que, dadas uma álgebra de Hopf de dimensão finita H e uma H-módulo álgebra à esquerda A, os resultados apresentados por Cohen-Fischman-Montgomery em [7] para existência de um contexto de Morita entre as álgebras A^H e $A\#H$ valem mesmo quando a álgebra A não possui unidade.

Começaremos considerando H uma álgebra de Hopf qualquer e, quando for necessário, acrescentaremos a condição que H tem dimensão finita como $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Definição 2.2. Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra (sem unidade). Dizemos que A é uma H-módulo álgebra à esquerda se:

1. A é um H-módulo à esquerda via $h \otimes a \mapsto h \cdot a$,
2. $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$.

Denotaremos por A^H a subálgebra dos invariantes:

$$A^H = \{a \in A\ ;\ h \cdot a = \varepsilon(h)a\}.$$

Definição 2.3. Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. A álgebra produto smash $A\#H$ é definida satisfazendo:

1. como $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $A\#H = A \otimes H$,

2. a multiplicação em $A\#H$ é dada estendendo-se linearmente a definição:
$$(a \otimes h)(b \otimes k) := \sum a(h_1 \cdot b) \otimes h_2 k, \quad \forall a \otimes h, b \otimes k \in A\#H.$$
Deste ponto em diante, denotaremos um elemento $a \otimes h \in A\#H$ por $a\#h$, para enfatizar a multiplicação em $A\#H$ e para que não haja confusão com a multiplicação do produto tensorial $A \otimes H$ induzida pelas multiplicações de A e de H.

Proposição 2.4. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então A é um $A\#H$-A^H-bimódulo, onde:*
$$A \otimes A^H \longrightarrow A$$
$$a \otimes b \longmapsto ab$$

$$A\#H \otimes A \longrightarrow A$$
$$(b\#h) \otimes a \longmapsto b(h \cdot a)$$
são as ações à direita e à esquerda, respectivamente.

Demonstração. Para cada $a \in A$, $b, c \in A^H$, temos:
$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= (ab) \cdot c \\ &= (ab)c \\ &= a(bc) \\ &= a \cdot (bc),\end{aligned}$$
o que implica que A é A^H-módulo à direita.

Para cada $a \in A$, $(b\#h), (c\#k) \in A\#H$, temos:
$$\begin{aligned}(c\#k) \cdot ((b\#h) \cdot a) &= (c\#k) \cdot (b(h \cdot a)) \\ &= c(k \cdot (b(h \cdot a))) \\ &= \sum c((k_1 \cdot b)(k_2 \cdot (h \cdot a))) \\ &= \sum c(k_1 \cdot b)((k_2 h) \cdot a) \\ &= \sum (c(k_1 \cdot b)\#k_2 h) \cdot a \\ &= ((c\#k)(b\#h)) \cdot a,\end{aligned}$$
o que implica que A é um $A\#H$-módulo à esquerda.

Para cada $a \in A$, $(b\#h) \in A\#H$ e $c \in A^H$, temos:
$$\begin{aligned}((b\#h) \cdot a) \cdot c &= (b(h \cdot a)) \cdot c \\ &= b(h \cdot a)c \\ &= \sum b(h_1 \varepsilon(h_2) \cdot a)c \\ &= \sum b((h_1 \cdot a)(\varepsilon(h_2)c)) \\ &= \sum b((h_1 \cdot a)(h_2 \cdot c)) \\ &= b(h \cdot (ac)) \\ &= (b\#h) \cdot (a \cdot c),\end{aligned}$$

o que implica que A é um $A\#H$-A^H-bimódulo. ■

Se a álgebra de Hopf H tem dimensão finita como $\mathbb{K}$-espaço vetorial, sabemos que sua antípoda S é bijetora, com inversa S^{-1}. Além disso, o espaço das integrais à esquerda $\int_H^l = H^H$ é unidimensional como $\mathbb{K}$-espaço [14]. Fixado um elemento integral à esquerda $0 \neq t \in \int_H^l$ ($ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$), existe um elemento group-like distinguido $\alpha \in G(H^*)$ que satisfaz $th = \alpha(h)t$, para todo $h \in H$, como mencionado por Cohen-Fischman-Montgomery em [7].

Proposição 2.5. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Sendo $\alpha \in H^*$ tal que $th = \alpha(h)t$, para todo $h \in H$, temos que A é um A^H-$A\#H$-bimódulo, onde:*

$$\begin{aligned} A^H \otimes A &\longrightarrow A \\ b \otimes a &\longmapsto ba \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \otimes A\#H &\longrightarrow A \\ a \otimes (b\#h) &\longmapsto \sum \alpha(h_2)S^{-1}(h_1) \cdot (ab) \end{aligned}$$

são as ações à esquerda e à direita, respectivamente.

Demonstração. Para cada $a \in A$, $b, c \in A^H$, temos:

$$\begin{aligned} c \cdot (b \cdot a) &= c \cdot (ba) \\ &= c(ba) \\ &= (cb)a \\ &= (cb) \cdot a, \end{aligned}$$

o que implica que A é A^H-módulo à esquerda.

Para cada $a \in A$, $(b\#h), (c\#k) \in A\#H$, lembrando que $\sum S^{-1}(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$, temos:

$$\begin{aligned} a \cdot ((b\#h)(c\#k)) &= \sum a \cdot (b(h_1 \cdot c)\#h_2k) \\ &= \sum \alpha(h_3k_2)S^{-1}(h_2k_1) \cdot (ab(h_1 \cdot c)) \\ &= \sum \alpha(h_3)\alpha(k_2)S^{-1}(k_1)S^{-1}(h_2) \cdot (ab(h_1 \cdot c)) \\ &= \sum \alpha(h_4)\alpha(k_2)S^{-1}(k_1) \cdot ((S^{-1}(h_3) \cdot (ab))(S^{-1}(h_2)h_1 \cdot c)) \\ &= \sum \alpha(h_3)\alpha(k_2)S^{-1}(k_1) \cdot ((S^{-1}(h_2) \cdot (ab))(\varepsilon(h_1)1_H \cdot c)) \\ &= \sum \alpha(h_2)\alpha(k_2)S^{-1}(k_1) \cdot ((S^{-1}(h_1) \cdot (ab))c) \\ &= \sum \alpha(h_2)(S^{-1}(h_1) \cdot (ab)) \cdot (c\#k) \\ &= (a \cdot (b\#h)) \cdot (c\#k), \end{aligned}$$

o que implica que A é um $A\#H$-módulo à direita.

Para cada $a \in A$, $b \in A^H$ e $(c\#h) \in A\#H$, temos:

$$\begin{aligned}
(b \cdot a) \cdot (c\#h) &= ba \cdot (c\#h) \\
&= \sum \alpha(h_2)S^{-1}(h_1) \cdot (bac) \\
&= \sum \alpha(h_3)(S^{-1}(h_2) \cdot (b))(S^{-1}(h_1) \cdot (ac)) \\
&= \sum \alpha(h_3)(\varepsilon(S^{-1}(h_2))b)(S^{-1}(h_1) \cdot (ac)) \\
&= \sum b(\alpha(h_3)\varepsilon(S^{-1}(h_2))S^{-1}(h_1) \cdot (ac)) \\
&= \sum b(\alpha(h_2)S^{-1}(h_1) \cdot (ac)) \\
&= b(a \cdot (c\#h)),
\end{aligned}$$

o que implica que A é um A^H-$A\#H$-bimódulo. ■

Proposição 2.6. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra. A função:*

$$\begin{aligned}
\langle\, , \rangle \colon A \underset{A\#H}{\otimes} A &\longrightarrow A^H \\
a \otimes b &\longmapsto t \cdot (ab)
\end{aligned}$$

é morfismo de A^H-bimódulos.

Demonstração. Primeiramente, como A é um H-módulo à esquerda, se $t \in \int_H^l$, então para cada $h \in H$ e $a \in A$, temos que $h \cdot (t \cdot a) = \varepsilon(h)t \cdot a$. Logo, para cada $a, b \in A$, $\langle a, b\rangle \in A^H$.

Seja $\alpha \in H^*$ tal que $th = \alpha(h)t$, para todo $h \in H$. Para cada $a, b \in A$ e $c\#h \in A\#H$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle a \cdot (c\#h), b\rangle &= t \cdot ((a \cdot (c\#h))b) \\
&= \sum t \cdot ((\alpha(h_2)S^{-1}(h_1) \cdot (ac))b) \\
&= \sum (\alpha(h_2)t) \cdot ((S^{-1}(h_1) \cdot (ac))b) \\
&= \sum (th_2) \cdot ((S^{-1}(h_1) \cdot (ac))b) \\
&= \sum (t_1h_2S^{-1}(h_1) \cdot (ac))(t_2h_3 \cdot b) \\
&= \sum \varepsilon(h_1)(t_1 \cdot (ac))(t_2h_2 \cdot b) \\
&= \sum (t_1 \cdot (ac))(t_2h \cdot b) \\
&= t \cdot (ac(h \cdot b)) \\
&= \langle a, c(h \cdot b)\rangle \\
&= \langle a, (c\#h) \cdot b\rangle,
\end{aligned}$$

o que implica que $\langle\, , \rangle$ está bem definido.

Para cada $a, b \in A$ e $c \in A^H$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle ca, b\rangle &= t \cdot (cab) \\
&= \sum (t_1 \cdot c)(t_2 \cdot (ab)) \\
&= \sum \varepsilon(t_1)c(t_2 \cdot (ab)) \\
&= c(t \cdot (ab)) \\
&= c\langle a, b\rangle,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle a, bc\rangle &= t \cdot (abc)\\
&= \sum (t_1 \cdot (ab))(t_2 \cdot c)\\
&= \sum (t_1 \cdot (ab))(\varepsilon(t_2)c)\\
&= (t \cdot (ab))c\\
&= \langle a, b\rangle c,
\end{aligned}
$$

o que implica que $\langle\ ,\ \rangle$ é morfismo de A^H-bimódulos. ■

Proposição 2.7. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra. A função:*

$$
\begin{aligned}
[\ ,\ ] \colon A \underset{A^H}{\otimes} A &\longrightarrow A\#H\\
a \otimes b &\longmapsto (a\#t)(b\#1_H)
\end{aligned}
$$

é morfismo de $A\#H$-bimódulos.

Demonstração. Para facilitar as contas, utilizaremos diretamente a forma equivalente:

$$[a, b] = \sum a(t_1 \cdot b)\#t_2.$$

Para cada $a, b \in A$ e $c \in A^H$, temos:

$$
\begin{aligned}
[a, cb] &= \sum a(t_1 \cdot (cb))\#t_2\\
&= \sum a(t_1 \cdot c)(t_2 \cdot b)\#t_3\\
&= \sum a(\varepsilon(t_1)c)(t_2 \cdot b)\#t_3\\
&= \sum ac(t_1 \cdot b)\#t_2\\
&= [ac, b],
\end{aligned}
$$

o que implica que $[\ ,\ ]$ está bem definido.

Seja $\alpha \in H^*$ tal que $th = \alpha(h)t$, para todo $h \in H$. Note que, para cada $h \in H$:

$$
\begin{aligned}
\sum h_1 \otimes h_2t_1 \otimes h_3t_2 &= \sum (H \otimes \Delta)\,(h_1 \otimes h_2t)\\
&= \sum (H \otimes \Delta)\,(h_1 \otimes \varepsilon(h_2)t)\\
&= \sum (H \otimes \Delta)\,(\varepsilon(h_2)h_1 \otimes t)\\
&= (H \otimes \Delta)(h \otimes t)\\
&= \sum h \otimes t_1 \otimes t_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum t_1h_1 \otimes t_2h_2 &= \Delta(th)\\
&= \Delta(\alpha(h)t)\\
&= \sum \alpha(h)t_1 \otimes t_2.
\end{aligned}
$$

Logo, para cada $a, b \in A$ e $c\#h \in A\#H$, temos:

$$\begin{aligned}
\big[(c\#h)\cdot a, b\big] &= \big[c(h\cdot a), b\big] \\
&= \sum c(h\cdot a)(t_1\cdot b)\#t_2 \\
&= \sum c(h_1\cdot a)(h_2t_1\cdot b)\#h_3t_2 \\
&= \sum c(h_1\cdot (a(t_1\cdot b)))\#h_2t_2 \\
&= \sum (c\#h)(a(t_1\cdot b))\#t_2 \\
&= (c\#h)\big[a, b\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\big[a, b\cdot (c\#h)\big] &= \sum a(t_1\cdot (b\cdot (c\#h)))\#t_2 \\
&= \sum a(t_1\cdot (\alpha(h_2)S^{-1}(h_1)\cdot (bc)))\#t_2 \\
&= \sum a(\alpha(h_2)t_1S^{-1}(h_1)\cdot (bc))\#t_2 \\
&= \sum a(t_1h_2S^{-1}(h_1)\cdot (bc))\#t_2h_3 \\
&= \sum a(\varepsilon(h_1)t_1\cdot (bc))\#t_2h_2 \\
&= \sum a(t_1\cdot (bc))\#t_2h \\
&= \sum a(t_1\cdot b)(t_2\cdot c)\#t_3h \\
&= \sum (a(t_1\cdot b)\#t_2)(c\#h) \\
&= \big[a, b\big](c\#h),
\end{aligned}$$

o que implica que $\big[\ ,\ \big]$ é morfismo de $A\#H$-bimódulos. ∎

Observação 2.8. Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e $\alpha \in H^*$ tal que $th = \alpha(h)t$, para todo $h \in H$. No Teorema 2.9, usaremos a seguinte equação:

$$\sum (\alpha(t_2)S^{-1}(t_1)\cdot (ab))c = (t\cdot (ab))\cdot c,$$

que é consequência direta do Corolário 5.5.5 de Dascalescu-Nastasescu-Raianu [10], que diz:

$$S(t) = \sum \alpha(t_2)t_1.$$

Teorema 2.9. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra. A sêxtupla $(A^H, A\#H, A, A, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ é um contexto de Morita.*

Demonstração. Seja $\alpha \in H^*$ tal que $th = \alpha(h)t$, para todo $h \in H$. Para cada $a, b, c \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
a\cdot \big\langle b, c\big\rangle &= a\cdot (t\cdot (bc)) \\
&= \sum a(t_1\cdot b)(t_2\cdot c) \\
&= \sum (a(t_1\cdot b)\#t_2)\cdot c \\
&= \big[a, b\big]\cdot c,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a \cdot [b,c] &= \sum a \cdot (b(t_1 \cdot c)\#t_2) \\
&= \sum \alpha(t_3)S^{-1}(t_2) \cdot (ab(t_1 \cdot c)) \\
&= \sum \alpha(t_4)(S^{-1}(t_3) \cdot (ab))(S^{-1}(t_2)t_1 \cdot c) \\
&= \sum \alpha(t_3)\varepsilon(t_1)(S^{-1}(t_2) \cdot (ab))c \\
&= \sum (\alpha(t_2)S^{-1}(t_1) \cdot (ab))c \\
&= (t \cdot (ab)) \cdot c \\
&= \langle a,b \rangle \cdot c,
\end{aligned}
$$

o que implica que $(A^H, A\#H, A, A, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ é um contexto de Morita. ■

2.2 Consequências da Sobrejetividade no Contexto de Morita

Nesta seção, apresentamos os resultados de Garcia-Simón [12] que serão utilizados no restante do trabalho envolvendo a sobrejetividade dos morfismos de bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ e $[\ ,\ ]$, pois supor que o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\ ,\ ]$ é sobrejetor é a condição (4) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery.

O resultado a seguir apresenta uma lista de consequências que seguem da sobrejetividade dos morfismos de bimódulos do contexto de Morita. Mais precisamente, a afirmação (1) da Proposição 2.10 para o morfismo de F-bimódulos $[\ ,\ ]$ sobrejetor está ligada à demonstração de que, quando uma extensão de álgebras com unidades é Hopf-Galois, sua canônica é injetora, e a afirmação (2) da Proposição 2.10 para o morfismo de F-bimódulos $[\ ,\ ]$ sobrejetor está diretamente ligada à generalização da implicação (4) $\Rightarrow$ (3) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery.

Proposição 2.10. *Sejam R e F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\ ,\ \rangle \colon P \underset{F}{\otimes} Q \to R$ um morfismo de R-bimódulos e $[\ ,\ ] \colon Q \underset{R}{\otimes} P \to F$ um morfismo de F-bimódulos tais que $(R, F, P, Q, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ é um contexto de Morita.*

- *Se o morfismo de R-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ é sobrejetor:*

  1. $\operatorname{Ker}(\langle\ ,\ \rangle)$ *é um R-submódulo de torção à direita e à esquerda,*
  2. *${}_RP$ gera ${}_RR$ e Q_R gera R_R,*
  3. *se ${}_RP$ e Q_R são unitários, então:*

$$P/t_R(P) \cong R \cdot {}_F\mathrm{Hom}(Q,F),$$

$$Q/t_R(Q) \cong \mathrm{Hom}_F(P,F) \cdot R.$$

- *Se o morfismo de F-bimódulos $[\ ,\ ]$ é sobrejetor:*

  1. $\operatorname{Ker}([\ ,\ ])$ *é um F-submódulo de torção à direita e à esquerda,*
  2. *P_F gera F_F e ${}_FQ$ gera ${}_FF$,*
  3. *se P_F e ${}_FQ$ são unitários, então:*

$$P/t_F(P) \cong \mathrm{Hom}_R(Q,R) \cdot F,$$

$$Q/t_F(Q) \cong F \cdot {}_R\mathrm{Hom}(P,R).$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas considerando o morfismo de R-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ sobrejetor, pois a prova para o morfismo de F-bimódulos $[\ ,\ ]$ é análoga.

1. Mostraremos que $\operatorname{Ker}(\langle\ ,\ \rangle)$ é um R-módulo à esquerda de torção. Segue de forma análoga que é um R-módulo à direita de torção. Para cada $\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i \in \operatorname{Ker}(\langle\ ,\ \rangle)$, $x \in P$ e $y \in Q$, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle x, y\rangle p_i \otimes q_i &= \sum_{i=1}^{n} x[y, p_i] \otimes q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x \otimes [y, p_i] q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x \otimes y \langle p_i, q_i\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como o morfismo de R-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ é sobrejetor, temos que $R \operatorname{Ker}(\langle\ ,\ \rangle) = 0$.

2. Mostraremos apenas que ${}_R P$ gera ${}_R R$. Segue de forma análoga que Q_R gera R_R. Considere o morfismo de R-módulos à esquerda:

$$\begin{aligned}\psi \colon \bigoplus_{Q} P &\longrightarrow R \\ (p_q)_{q \in Q} &\longmapsto \sum_{q \in Q} \langle p_q, q\rangle.\end{aligned}$$

Como o morfismo de R-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ é sobrejetor, claramente ψ é sobrejetor e ${}_R P$ gera ${}_R R$.

3. Mostraremos que $P/t_R(P) \cong R \cdot {}_F\operatorname{Hom}(Q, F)$. Segue de forma análoga que $Q/t_R(Q) \cong \operatorname{Hom}_F(P, F) \cdot R$. Defina:

$$\begin{aligned}f \colon P &\longrightarrow {}_F\operatorname{Hom}(Q, F) \\ x &\longmapsto (y \mapsto [y, x])\end{aligned}$$

Para cada $a \in R$, $x \in P$ e $y \in Q$, temos:

$$\begin{aligned}f(ax)(y) &= [y, ax] \\ &= [ya, x] \\ &= f(x)(ya) \\ &= (a \cdot f(x))(y),\end{aligned}$$

o que implica que f é morfismo de R-módulos à esquerda. Como Q_R é unitário, pelo Lema 1.33, temos que ${}_F\operatorname{Hom}(Q, F)$ é um R-módulo à esquerda livre de torção e $t_R(P) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ pelo Lema 1.8. Por outro lado, dado $x \in \operatorname{Ker}(f)$, ou seja $\forall y \in Q$, $[y, x] = 0$, temos que, para cada $p \in P$ e $q \in Q$, $\langle p, q\rangle x = p[q, x] = 0$. Como o morfismo de R-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ é sobrejetor, temos que $Rx = 0$ e $\operatorname{Ker}(f) \subseteq t_R(P)$.

Como ${}_RP$ é unitário, temos que $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq R \cdot {}_F\mathrm{Hom}\,(Q, F)$. Agora, dados $\gamma \in {}_F\mathrm{Hom}\,(Q, F)$, $p \in P$ e $q \in Q$, para cada $y \in Q$, temos que:

$$\begin{aligned}(\langle p, q\rangle \cdot \gamma)(y) &= \gamma(y\langle p, q\rangle)\\ &= \gamma([y, p]q)\\ &= [y, p]\gamma(q)\\ &= [y, p\gamma(q)]\\ &= f(p\gamma(q))(y),\end{aligned}$$

o que implica que $\langle p, q\rangle \cdot \gamma \in \mathrm{Im}\,(f)$. Como o morfismo de R-bimódulos $\langle\, ,\, \rangle$ é sobrejetor, temos que $R \cdot {}_F\mathrm{Hom}\,(Q, F) \subseteq \mathrm{Im}\,(f)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$P/\mathscr{t}_R\,(P) \cong R \cdot {}_F\mathrm{Hom}\,(Q, F)$$

como R-módulos à esquerda. ■

O próximo resultado apresenta as relações entre os anéis e os espaços de endomorfismos dos módulos do contexto de Morita, generalizando os isomorfismos canônicos que surgem quando os anéis têm unidade e o contexto é uma equivalência de Morita.

Proposição 2.11. *Sejam R e F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\, ,\, \rangle : P \underset{F}{\otimes} Q \to R$ um morfismo de R-bimódulos e $[\, ,\,] : Q \underset{R}{\otimes} P \to F$ um morfismo de F-bimódulos tais que $(R, F, P, Q, \langle\, ,\, \rangle, [\, ,\,])$ é um contexto de Morita.*

- *Se o anel R é idempotente e o morfismo de R-bimódulos $\langle\, ,\, \rangle$ é sobrejetor, então:*
  1. *${}_RP$ unitário $\Rightarrow$ temos isomorfismo de anéis $R/\mathscr{l}\,(R) \cong \mathrm{End}_F\,(P_F) \cdot R$,*
  2. *Q_R unitário $\Rightarrow$ temos isomorfismo de anéis $R/\mathscr{r}\,(R) \cong (R \cdot {}_FEnd({}_FQ))^{\mathrm{op}}$.*
- *Se o anel F é idempotente e o morfismo de F-bimódulos $[\, ,\,]$ é sobrejetor, então:*
  1. *P_F unitário $\Rightarrow$ temos isomorfismo de anéis $F/\mathscr{r}\,(F) \cong (F \cdot {}_REnd({}_RP))^{\mathrm{op}}$,*
  2. *${}_FQ$ unitário $\Rightarrow$ temos isomorfismo de anéis $F/\mathscr{l}\,(F) \cong \mathrm{End}_R\,(Q_R) \cdot F$.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o caso em que o anel R é idempotente e o morfismo de R-bimódulos $\langle\, ,\, \rangle$ é sobrejetor, pois a demonstração usando o anel F idempotente e o morfismo de F-bimódulos $[\, ,\,]$ sobrejetor é análoga. Defina a função:

$$\begin{aligned}\varphi\colon R &\longrightarrow \mathrm{End}_F\,(P_F)\\ a &\longmapsto (p \mapsto ap)\end{aligned}$$

Para cada $a, b \in R$ e $p \in P$, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(ab)(p) &= (ab)p\\ &= \varphi(a)(bp)\\ &= (\varphi(a) \circ \varphi(b))(p),\end{aligned}$$

o que implica que φ é morfismo de anéis.

Como ${}_RP$ é unitário, para cada $p \in P$ existem $\{b_i\}_{i=1}^n \subseteq R$ e $\{p_i\}_{i=1}^n \subseteq P$ tais que $p = \sum_{i=1}^n b_i p_i$. Logo, para cada $a \in \ell(R)$, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(a)(p) &= ap \\ &= \sum_{i=1}^n a(b_i p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (ab_i)p_i \\ &= 0,\end{aligned}$$

o que implica que $\ell(R) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Considerando agora $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, para cada $p \in P$ e $q \in Q$, temos:

$$\begin{aligned}a\langle p, q\rangle &= \langle ap, q\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois $aP = 0$. Como o morfismo de R-bimódulos $\langle\, ,\, \rangle$ é sobrejetor, temos que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \ell(R)$.

Como o anel R é idempotente, para cada $a \in R$, existem $\{b_i, c_i\}_{i=1}^n \subseteq R$ tais que $a = \sum_{i=1}^n b_i c_i$. Note que, para cada $p \in P$, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(a)(p) &= ap \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i c_i)p \\ &= \sum_{i=1}^n b_i(c_i p) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(b_i)(c_i p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\varphi(b_i) \cdot c_i)(p),\end{aligned}$$

o que implica que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{End}_F(P_F) \cdot R$.

Por outro lado, dados $p \in P$, $q \in Q$ e $f \in \mathrm{End}_F(P_F)$, para cada $x \in P$, temos:

$$\begin{aligned}(f \cdot \langle p, q\rangle)(x) &= f(\langle p, q\rangle x) \\ &= f(p[q, x]) \\ &= f(p)[q, x] \\ &= \langle f(p), q\rangle x \\ &= \varphi(\langle f(p), q\rangle)(x)\end{aligned}$$

e, como o morfismo de R-bimódulos $\langle\, ,\, \rangle$ é sobrejetor, temos que $\mathrm{End}_F(P_F) \cdot R \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$R/\ell(R) \cong \mathrm{End}_F(P_F) \cdot R$$

como anéis. ■

2.3 Obtendo a Equivalência de Morita

Esta seção será dedicada a construir a equivalência de Morita a partir de um contexto de Morita com anéis idempotentes, módulos unitários e morfismos sobrejetores. Vale ressaltar que ela não é necessária para o restante do trabalho e não apresentaremos nenhum fato novo, apenas separamos as hipóteses necessárias para cada afirmação, pois no artigo original de Garcia-Simón [12], dado um contexto de Morita $(R, F, P, Q, \langle\, , \,\rangle, [\, , \,])$, assume-se que os módulos ${}_RP$, P_F, ${}_FQ$, Q_R são unitários e os morfismos $\langle\, , \,\rangle$, $[\, , \,]$ são sobrejetores, o que não é necessário em todos os resultados apresentados.

Recorde que, quando os anéis R e F possuem unidade e os morfismos $\langle\, , \,\rangle$, $[\, , \,]$ são sobrejetores, a equivalência de Morita entre a categoria dos R-módulos à esquerda e a categoria dos F-módulos à esquerda é obtida através dos funtores ${}_R\mathrm{Hom}\,(P, \_)$ e $P \underset{F}{\otimes} \_$. Quando os anéis R e F não possuírem unidade, conseguiremos obter uma equivalência de Morita apenas entre as categorias dos módulos unitários e livres de torção. Entretanto, a equivalência não será obtida pelos funtores mencionados, pois dado um F-módulo à esquerda unitário e livre de torção M, o R-módulo à esquerda $P \underset{F}{\otimes} M$ pode não ser livre de torção e, dado um R-módulo à esquerda livre de torção N, o F-módulo à esquerda ${}_R\mathrm{Hom}\,(P, N)$ pode não ser unitário. No Teorema 2.18, corrigiremos estes problemas, obtendo a equivalência de Morita utilizando os seguintes funtores:

$$\mathscr{F} = \Big(P \underset{F}{\otimes} \_\Big)\Big/ t_R\Big(P \underset{F}{\otimes} \_\Big) \colon F\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$$

$$\mathscr{G} = F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, \_) \,:\, R\text{-mod} \longrightarrow F\text{-mod}$$

onde R-mod e F-mod são as categorias dos módulos à esquerda unitários e livres de torção sobre os anéis R e F, respectivamente.

Lema 2.12. *Sejam R e F anéis e P um R-F-bimódulo. Então:*

$$P \underset{F}{\otimes} \_ \colon F\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$$

é um funtor covariante.

Demonstração. Para cada F-módulo à esquerda X, $P \underset{F}{\otimes} X$ é um R-módulo à esquerda com ação induzida pela estrutura de R-módulo de P. Dados X e Y dois F-módulos à esquerda e $f \colon X \to Y$ um morfismo de F-módulos à esquerda, definimos o morfismo de R-módulos à esquerda $P \underset{F}{\otimes} f \colon P \underset{F}{\otimes} X \to P \underset{F}{\otimes} Y$ por $(P \underset{F}{\otimes} f)(\sum_{i=1}^n p_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes f(x_i)$.

Dados X, Y e Z três F-módulos à esquerda e $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ morfismos de F-módulos à esquerda, para cada $\sum_{i=1}^n p_i \otimes x_i \in P \underset{F}{\otimes} X$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (P \underset{F}{\otimes} g) \circ (P \underset{F}{\otimes} f)(p_i \otimes x_i) &= \sum_{i=1}^n (P \underset{F}{\otimes} g)(p_i \otimes f(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n p_i \otimes g(f(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n (P \underset{F}{\otimes} (g \circ f))(p_i \otimes x_i),
\end{aligned}$$

ou seja, $P \underset{F}{\otimes} \_$ é um funtor covariante. ∎

Lema 2.13. *Sejam R e F anéis e P um R-F-bimódulo. Então:*

$$_R\mathrm{Hom}\,(P, \_) : R\text{-mod} \longrightarrow F\text{-mod}$$

é um funtor covariante.

Demonstração. Pelo Lema 1.33, para cada R-módulo à esquerda X, $_R\mathrm{Hom}\,(P, X)$ é um F-módulo à esquerda. Dados X e Y dois R-módulos à esquerda e $f\colon X \to Y$ um morfismo de R-módulos à esquerda, para cada $\phi\colon P \to X$ morfismo de R-módulos à esquerda, $b \in F$ e $p \in P$, temos:

$$\begin{aligned}(b \cdot (f \circ \phi))(p) &= (f \circ \phi)(pb)\\ &= f(\phi(pb))\\ &= f \circ (b \cdot \phi)(p).\end{aligned}$$

Assim, $b \cdot (f \circ \phi) = f \circ (b \cdot \phi)$ e definimos o morfismo de F-módulos à esquerda $_R\mathrm{Hom}\,(P, f) : {_R\mathrm{Hom}}\,(P, X) \to {_R\mathrm{Hom}}\,(P, Y)$ por $_R\mathrm{Hom}\,(P, f)\,(\phi) = f \circ \phi$.

Dados X, Y e Z três R-módulos à esquerda e $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ morfismos de R-módulos à esquerda, para cada $\phi \in {_R\mathrm{Hom}}\,(P, X)$, temos:

$$\begin{aligned}{_R\mathrm{Hom}}\,(P, g) \circ {_R\mathrm{Hom}}\,(P, f)\,(\phi) &= {_R\mathrm{Hom}}\,(P, g)\,(f \circ \phi)\\ &= g \circ f \circ \phi\\ &= {_R\mathrm{Hom}}\,(P, g \circ f)\,(\phi),\end{aligned}$$

ou seja, $_R\mathrm{Hom}\,(P, \_)$ é um funtor covariante. ■

Lema 2.14. *Sejam R e F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\ ,\ \rangle\colon P \underset{F}{\otimes} Q \to R$ um morfismo de R-bimódulos e $[\ ,\ ]\colon Q \underset{R}{\otimes} P \to F$ um morfismo de F-bimódulos tais que $(R, F, P, Q, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ é um contexto de Morita.*

- *Dado um R-módulo à esquerda X, se $_FQ$ é unitário, então para cada $x \in X$ e $q \in Q$, o morfismo de R-módulos à esquerda:*

$$\begin{aligned}\langle \_, q\rangle x\colon P &\longrightarrow X\\ p &\longmapsto \langle p, q\rangle x\end{aligned}$$

está na parte unitária de $_R\mathrm{Hom}\,(P, X)$, isto é, $\langle \_, q\rangle x \in F \cdot {_R\mathrm{Hom}}\,(P, X)$.

- *Dado um R-módulo à direita X, se P_F é unitário, então para cada $x \in X$ e $p \in P$, o morfismo de R-módulos à direita:*

$$\begin{aligned}x\langle p, \_\rangle\colon Q &\longrightarrow X\\ q &\longmapsto x\langle p, q\rangle\end{aligned}$$

está na parte unitária de $\mathrm{Hom}_R\,(Q, X)$, isto é, $x\langle p, \_\rangle \in \mathrm{Hom}_R\,(Q, X) \cdot F$.

- *Dado um F-módulo à esquerda X, se $_RP$ é unitário, então para cada $x \in X$ e $p \in P$, o morfismo de F-módulos à esquerda:*

$$\begin{aligned}[\_, p]x\colon Q &\longrightarrow X\\ q &\longmapsto [q, p]x\end{aligned}$$

está na parte unitária de $_F\mathrm{Hom}\,(Q, X)$, isto é, $[\_, p]x \in R \cdot {_F\mathrm{Hom}}\,(Q, X)$.

- *Dado um F-módulo à direita X, se Q_R é unitário, então para cada $x \in X$ e $q \in Q$, o morfismo de F-módulos à direita:*

$$\begin{aligned} x[q, \_]\colon P &\longrightarrow X \\ p &\longmapsto x[q,p] \end{aligned}$$

está na parte unitária de $\operatorname{Hom}_F(P, X)$, isto é, $x[q, \_] \in \operatorname{Hom}_F(P, X) \cdot R$.

Demonstração. Provaremos apenas o caso em que X é um R-módulo à esquerda e ${}_FQ$ é unitário. Os demais casos seguem de forma análoga. Para cada $q \in Q$, como ${}_FQ$ é unitário, existem $\{b_i\}_{i=1}^n \subseteq F$ e $\{q_i\}_{i=1}^n \subseteq Q$ tais que $q = \sum_{i=1}^n b_i q_i$. Para cada $p \in P$ e $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\langle \_, q\rangle x\right)(p) &= \langle p, q\rangle x \\ &= \sum_{i=1}^n \langle p, b_i q_i\rangle x \\ &= \sum_{i=1}^n \langle p b_i, q_i\rangle x \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\langle \_, q_i\rangle x\right)(p b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(b_i \cdot \left(\langle \_, q_i\rangle x\right)\right)(p). \end{aligned}$$

Logo, o morfismo de R-módulos à esquerda:

$$\begin{aligned} \langle \_, q\rangle x\colon P &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \langle t, q\rangle x \end{aligned}$$

é igual à $\sum_{i=1}^n b_i \cdot \left(\langle \_, q_i\rangle x\right)$, ou seja, $\langle \_, q\rangle x \in F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X)$. ∎

Lema 2.15. *Sejam R e F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\, ,\, \rangle\colon P \underset{F}{\otimes} Q \to R$ um morfismo de R-bimódulos e $[\, ,\,]\colon Q \underset{R}{\otimes} P \to F$ um morfismo de F-bimódulos tais que $(R, F, P, Q, \langle\, ,\, \rangle, [\, ,\,])$ é um contexto de Morita. Se o morfismo de F-bimódulos $[\, ,\,]$ é sobrejetor e os módulos P_F e ${}_FQ$ são unitários, então para cada R-módulo à esquerda X, temos um isomorfismo de F-módulos à esquerda:*

$$F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X) \cong F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X/t_R(X)).$$

Demonstração. Considere a projeção canônica $\pi\colon X \to X/t_R(X)$ e o morfismo de F-módulos ${}_R\operatorname{Hom}(P, \pi) : {}_R\operatorname{Hom}(P, X) \to {}_R\operatorname{Hom}(P, X/t_R(X))$. Considerando Ψ a restrição de ${}_R\operatorname{Hom}(P, \pi)$ à $F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X)$, temos que Ψ é um morfismo de F-módulos à esquerda e $\operatorname{Im}(\Psi) \subseteq F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X/t_R(X))$.

Como ${}_FQ$ é unitário, pelo Lema 2.14, para cada $q \in Q$ e $x \in X$, temos que $\langle \_, q\rangle x \in F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X)$.

Para cada $p, t \in P$, $q \in Q$ e $f \in {}_R\operatorname{Hom}(P, X/t_R(X))$, tomando $x \in X$ tal que $\pi(x) = f(p)$, temos:

$$
\begin{aligned}
([q,p]\cdot f)(t) &= f(t[q,p]) \\
&= f(\langle t,q\rangle p) \\
&= \langle t,q\rangle f(p) \\
&= \langle t,q\rangle \pi(x) \\
&= \pi(\langle t,q\rangle x) \\
&= \pi\circ(\langle \_,q\rangle x)(t) \\
&= \Psi(\langle \_,q\rangle x)(t),
\end{aligned}
$$

ou seja, $[q,p]\cdot f \in \mathrm{Im}\,(\Psi)$. Como $[\,,\,]$ é sobrejetor, temos que $F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, X/t_R\,(X)) = \mathrm{Im}\,(\Psi)$.

Para cada $f\in \mathrm{Ker}\,(\Psi)$ e $p\in P$, temos que $0 = \Psi(f)(p) = \pi\circ f(p)$, ou seja, $f(p)\in t_R\,(X)$. Para cada $p,t\in P$ e $q\in Q$ temos:

$$
\begin{aligned}
([q,p]\cdot f)(t) &= f(t[q,p]) \\
&= f(\langle t,q\rangle p) \\
&= \langle t,q\rangle f(p) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Como $[\,,\,]$ é sobrejetor, temos que $F\cdot \mathrm{Ker}\,(\Psi) = 0$, ou seja, $\mathrm{Ker}\,(\Psi)\subseteq t_F\,(F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P,X))$. Por outro lado, pelo Lema 1.33, como P_F é unitário, ${}_R\mathrm{Hom}\,(P,X)$ é um F-módulo à esquerda livre de torção, o que implica $t_F\,(F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P,X)) = 0$. Portanto, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, Ψ induz:

$$F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P,X)\cong F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, X/t_R\,(X))$$

como F-módulos à esquerda. ■

Proposição 2.16. *Sejam R e F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\,,\,\rangle\colon P\underset{F}{\otimes} Q\to R$ um morfismo de R-bimódulos e $[\,,\,]\colon Q\underset{R}{\otimes} P\to F$ um morfismo de F-bimódulos tais que $(R,F,P,Q,\langle\,,\,\rangle,[\,,\,])$ é um contexto de Morita. Se o anel R é idempotente, o morfismo de R-bimódulos $\langle\,,\,\rangle$ é sobrejetor e ${}_RP$, Q_R e ${}_FQ$ são unitários, então para cada R-F-bimódulo X e cada R-módulo à esquerda Y, temos um isomorfismo de R-módulos à esquerda:*

$$\Big(P\underset{F}{\otimes} F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y)\Big)\Big/ t_R\Big(P\underset{F}{\otimes} F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y)\Big)\cong R\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}_F\,(P,X)\cdot R, Y)\,.$$

Demonstração. Considere a função:

$$
\begin{aligned}
\varphi\colon P\underset{F}{\otimes} F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y) &\longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}_F\,(P,X)\cdot R, Y) \\
p\otimes f &\longmapsto (g\mapsto f(g(p)))
\end{aligned}
$$

Para cada $a\in R$, $p\in P$, $f\in F\cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y)$ e $g\in \mathrm{Hom}_F\,(P,X)\cdot R$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\varphi(a(p\otimes f))(g) &= \varphi(ap\otimes f)(g) \\
&= f(g(ap)) \\
&= f((g\cdot a)(p)) \\
&= \varphi(p\otimes f)(g\cdot a) \\
&= (a\cdot\varphi(p\otimes f))(g),
\end{aligned}
$$

o que implica que φ é um morfismo de R-módulos à esquerda. Como ${}_RP$ é unitário, temos que $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq R \cdot {}_R\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}_F(P,X) \cdot R, Y)$.

Como Q_R é unitário, pelo Lema 2.14, para cada $q \in Q$ e $x \in X$, temos que $x[q, \_] \in \operatorname{Hom}_F(P,X) \cdot R$.

Fixe $p \in P$, $q \in Q$ e $\Psi \in {}_R\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}_F(P,X) \cdot R, Y)$. Como ${}_FQ$ é unitário, existem $\{b_i\}_{i=1}^n \subseteq F$ e $\{q_i\}_{i=1}^n \subseteq Q$ tais que $q = \sum_{i=1}^n b_i q_i$. Considerando $q_0 = q$, como Ψ é morfismo de R-módulos à esquerda, para cada $i = 0, ..., n$, definimos os morfismos de R-módulos à esquerda:

$$\begin{aligned} f_{q_i} \colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \Psi(x[q_i, \_]) \end{aligned}$$

e, para cada $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned} f_{q_0}(x) &= \Psi(x[q, \_]) \\ &= \sum_{i=1}^n \Psi(x[b_i q_i, \_]) \\ &= \sum_{i=1}^n \Psi(x b_i [q_i, \_]) \\ &= \sum_{i=1}^n f_{q_i}(x b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i \cdot f_{q_i})(x), \end{aligned}$$

ou seja, $f = f_{q_0} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot f_{q_i} \in F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(X,Y)$. Para cada $g \in \operatorname{Hom}_F(P,X) \cdot R$, temos:

$$\begin{aligned} (\langle p, q \rangle \cdot \Psi)(g) &= \Psi((g \cdot \langle p, q \rangle)) \\ &= \Psi(g(\langle p, q \rangle \_)) \\ &= \Psi(g(p[q, \_])) \\ &= \Psi(g(p)[q, \_]) \\ &= \Psi(g(p)[q, \_]) \\ &= f(g(p)) \\ &= \varphi(p \otimes f)(g). \end{aligned}$$

Isto implica que $\langle p, q \rangle \cdot \Psi \in \operatorname{Im}(\varphi)$. Como o morfismo de R-bimódulos $\langle \, , \, \rangle$ é sobrejetor, temos que $\operatorname{Im}(\varphi) = R \cdot {}_R\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}_F(P,X) \cdot R, Y)$.

Para cada $p \in P$, $q \in Q$ e $\sum_{i=1}^n p_i \otimes f_i \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle p, q \rangle p_i \otimes f_i &= \sum_{i=1}^n p[q, p_i] \otimes f_i \\ &= \sum_{i=1}^n p \otimes [q, p_i] \cdot f_i. \end{aligned}$$

Para cada $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}([q,p_i]\cdot f_i)(x) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x[q,p_i])\\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i((x[q,\_])(p_i))\\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i\otimes f_i)(x[q,\_])\\ &= 0,\end{aligned}$$

o que implica que $\langle p,q\rangle \sum_{i=1}^{n} p_i \otimes f_i = 0$. Como o morfismo de R-bimódulos $\langle\, , \,\rangle$ é sobrejetor, temos que $R\,\mathrm{Ker}\,(\varphi) = 0$, ou seja, $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \subseteq t_R\left(P \underset{F}{\otimes} F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y)\right)$.

Por outro lado, como R é idempotente, $\mathrm{Hom}_F\,(P,X)\cdot R$ é um R-módulo à direita unitário, o que implica, pelo Lema 1.33, que ${}_R\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}_F\,(P,X)\cdot R, Y)$ é livre de torção. Pelo Lema 1.8, temos que $t_R\left(P \underset{F}{\otimes} F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y)\right) = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ e, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$\left(P \underset{F}{\otimes} F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y)\right)\Big/ t_R\left(P \underset{F}{\otimes} F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(X,Y)\right) \cong R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}_F\,(P,X)\cdot R, Y)$$

como R-módulos à esquerda. ■

Proposição 2.17. *Sejam R e F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\, , \,\rangle\colon P \underset{F}{\otimes} Q \to R$ um morfismo de R-bimódulos e $[\, , \,]\colon Q \underset{R}{\otimes} P \to F$ um morfismo de F-bimódulos tais que $(R,F,P,Q,\langle\, , \,\rangle,[\, , \,])$ é um contexto de Morita. Se o anel F é idempotente, o morfismo de F-bimódulos $[\, , \,]$ é sobrejetor e P_F e ${}_FQ$ são unitários, então para cada R-F-bimódulo X e cada F-módulo à esquerda Y, existe um isomorfismo de F-módulos à esquerda:*

$$\left(F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P,X) \underset{F}{\otimes} Y\right)\Big/ t_R\left(F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P,X) \underset{F}{\otimes} Y\right) \cong F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\left(P, X \underset{F}{\otimes} Y\right)$$

Demonstração. Considere a função:

$$\begin{aligned}\varphi\colon F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P,X) \underset{F}{\otimes} Y &\longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}\left(P, X \underset{F}{\otimes} Y\right)\\ f\otimes y &\longmapsto (p \mapsto f(p)\otimes y)\end{aligned}$$

Para cada $b \in F$, $f \in F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P,X)$, $y \in Y$ e $p \in P$, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(b\cdot(f\otimes y))(p) &= \varphi((b\cdot f)\otimes y)(p)\\ &= (b\cdot f)(p)\otimes y\\ &= f(pb)\otimes y\\ &= \varphi(f\otimes y)(pb)\\ &= (b\cdot\varphi(f\otimes y))(p),\end{aligned}$$

o que implica que φ é morfismo de F-módulos à esquerda. Como o anel F é idempotente, temos que $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq F \cdot {}_R\operatorname{Hom}\left(P, X \underset{F}{\otimes} Y\right)$.

Como ${}_FQ$ é unitário, pelo Lema 2.14, para cada $q \in Q$ e $x \in X$, temos que $\langle \_, q \rangle x \in F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X)$.

Fixe $p \in P$ e $\Psi \in {}_R\operatorname{Hom}\left(P, X \underset{F}{\otimes} Y\right)$. Existem $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq X$ e $\{y_i\}_{i=1}^n \subseteq Y$ tais que $\Psi(p) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Para cada $q \in Q$ e $t \in P$, temos:

$$\begin{aligned}
([q,p] \cdot \Psi)(t) &= \Psi(t[q,p]) \\
&= \Psi(\langle t, q \rangle p) \\
&= \langle t, q \rangle \Psi(p) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle t, q \rangle x_i \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi(\langle _, q \rangle x_i \otimes y_i)(t),
\end{aligned}$$

o que implica que $[q,p] \cdot \Psi \in \operatorname{Im}(\varphi)$. Como o morfismo de F-bimódulos $[\ ,\ ]$ é sobrejetor, temos que $F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X) = \operatorname{Im}(\varphi)$.

Para cada $p \in P$, $q \in Q$ e $\sum_{i=1}^n f_i \otimes y_i \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n [q,p] \cdot (f_i \otimes y_i) &= \sum_{i=1}^n ([q,p] \cdot f_i) \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^n f_i(_[q,p]) \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^n f_i(\langle _, q \rangle p) \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^n \langle _, q \rangle f_i(p) \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^n \langle _, q \rangle \varphi(f_i \otimes y_i)(p) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como o morfismo de F-bimódulos $[\ ,\ ]$ é sobrejetor, a equação acima implica que $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq t_F\left(F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X) \otimes Y\right)$. Por outro lado, como P_F é unitário, pelo Lema 1.33, o F-módulo à esquerda ${}_R\operatorname{Hom}\left(P, X \otimes Y\right)$ é livre de torção. Isto implica que, pelo Lema 1.8, $t_F\left(F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X) \otimes Y\right) = \operatorname{Ker}(\varphi)$ e, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$\left(F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X) \underset{F}{\otimes} Y\right) \Big/ t_R\left(F \cdot {}_R\operatorname{Hom}(P, X) \underset{F}{\otimes} Y\right) \cong F \cdot {}_R\operatorname{Hom}\left(P, X \underset{F}{\otimes} Y\right)$$

como F-módulos à esquerda. ■

Teorema 2.18. *Sejam R e F anéis, P um R-F-bimódulo, Q um F-R-bimódulo, $\langle\, , \rangle \colon P \underset{F}{\otimes} Q \to R$ um morfismo de R-bimódulos e $[\, ,] \colon Q \underset{R}{\otimes} P \to F$ um morfismo de F-bimódulos tais que $(R, F, P, Q, \langle\, , \rangle, [\, ,])$ é um contexto de Morita. Considerando os funtores:*

$$\mathscr{F} = \Big(P \underset{F}{\otimes} \_\Big) \Big/ t_R\Big(P \underset{F}{\otimes} \_\Big) \colon F\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$$

$$\mathscr{G} = F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, \_) : R\text{-mod} \longrightarrow F\text{-mod}$$

temos que:

1. *se o anel R é idempotente, o morfismo de R-bimódulos $\langle\, , \rangle$ é sobrejetor e os módulos ${}_RP$, Q_R e ${}_FQ$ são unitários, então $\mathscr{F} \circ \mathscr{G} \cong \mathrm{Id} \colon R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$,*

2. *se o anel F é idempotente, o morfismo de F-bimódulos $[\, ,]$ é sobrejetor e os módulos P_F e ${}_FQ$ são unitários, então $\mathscr{G} \circ \mathscr{F} \cong \mathrm{Id} \colon F\text{-mod} \longrightarrow F\text{-mod}$.*

Demonstração. 1. Seja X um R-módulo à esquerda unitário e livre de torção. Então:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} \circ \mathscr{G}(X) &= \Big(P \underset{F}{\otimes} F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, X)\Big) \Big/ t_R\Big(P \underset{F}{\otimes} F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, X)\Big) \\
&\overset{\text{Proposição 2.16}}{\cong} R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}_F\,(P, P) \cdot R, X) \\
&= R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(\mathrm{End}_F\,(P_F) \cdot R, X) \\
&\overset{\text{Proposição 2.11}}{\cong} R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(R/\ell\,(R)\,, X) \\
&\overset{\text{Lema 1.36}}{\cong} R \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(R, X) \\
&\overset{\text{Lema 1.34}}{\cong} X.
\end{aligned}$$

2. Seja Y um F-módulo à esquerda unitário e livre de torção. Então:

$$\begin{aligned}
\mathscr{G} \circ \mathscr{F}(Y) &= F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\left(P, \Big(P \underset{F}{\otimes} Y\Big) \Big/ t_R\Big(P \underset{F}{\otimes} Y\Big)\right) \\
&\overset{\text{Lema 2.15}}{\cong} F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\left(P, P \underset{F}{\otimes} Y\right) \\
&\overset{\text{Proposição 2.17}}{\cong} \Big(F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, P) \underset{F}{\otimes} Y\Big) \Big/ t_F\Big(F \cdot {}_R\mathrm{Hom}\,(P, P) \underset{F}{\otimes} Y\Big) \\
&= \Big(F \cdot {}_R\mathrm{End}\,({}_RP) \underset{F}{\otimes} Y\Big) \Big/ t_F\Big(F \cdot {}_R\mathrm{End}\,({}_RP) \underset{F}{\otimes} Y\Big) \\
&\overset{\text{Proposição 2.11}}{\cong} \Big(F/r\,(F) \underset{F}{\otimes} Y\Big) \Big/ t_F\Big(F/r\,(F) \underset{F}{\otimes} Y\Big) \\
&\overset{\text{Lema 1.40}}{\cong} \Big(F \underset{F}{\otimes} Y\Big) \Big/ t_F\Big(F \underset{F}{\otimes} Y\Big) \\
&\overset{\text{Lema 1.41}}{\cong} Y.
\end{aligned}$$

Consequentemente, se os morfismos $\langle\, , \rangle$ e $[\, ,]$ são sobrejetores e os módulos ${}_RP$, P_F, ${}_FQ$ e Q_R são unitários, as categorias R-mod e F-mod são equivalentes. ∎

3. O TEOREMA DE COHEN-FISCHMAN-MONTGOMERY PARA ÁLGEBRAS COM UNIDADES LOCAIS

Neste capítulo, apresentaremos uma extensão do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery [7, Theorem 1.2] para uma H-módulo álgebra à esquerda A com unidades locais. Começaremos estudando o caso em que A não tem unidade ou unidades locais, pois algumas implicações são válidas para o caso mais geral. À medida que novas hipóteses forem necessárias, elas serão acrescentadas. De modo geral, buscamos provar cada implicação assumindo o mínimo de hipóteses possível. As unidades locais somente serão necessárias quando reunirmos as hipóteses de todas as implicações no Teorema 3.24.

A noção dual de H-módulo álgebras à esquerda, apresentada por Cohen-Fischman-Montgomery em [7], será utilizada para definir extensões Hopf-Galois.

Definição 3.1. Uma álgebra $\mathscr{A}$ (sem unidade) é uma $\mathscr{H}$-comódulo álgebra à direita se:

1. $\mathscr{A}$ é um $\mathscr{H}$-comódulo à direita via $\rho\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{H}$ (para cada $a \in \mathscr{A}$, usaremos a notação $\rho(a) = \sum a_0 \otimes a_1$),
2. para cada $a, b \in \mathscr{A}$, vale que $\rho(ab) = \sum a_0 b_0 \otimes a_1 b_1$.

Denotaremos por $\mathscr{A}^{\mathrm{co}\,\mathscr{H}}$ a subálgebra dos coinvariantes:

$$\mathscr{A}^{\mathrm{co}\,\mathscr{H}} = \{a \in \mathscr{A} \ ; \ \rho(a) = a \otimes 1_{\mathscr{H}}\}.$$

Definição 3.2. Dada uma álgebra de Hopf $\mathscr{H}$ e uma $\mathscr{H}$-comódulo álgebra à direita $\mathscr{A}$, Dizemos que $\mathscr{A}^{\mathrm{co}\,\mathscr{H}} \subseteq \mathscr{A}$ é uma extensão $\mathscr{H}$-Galois se a função:

$$\begin{aligned} \mathrm{can}\colon \mathscr{A} \underset{\mathscr{A}^{\mathrm{co}\,\mathscr{H}}}{\otimes} \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{A} \otimes \mathscr{H} \\ a \otimes b &\longmapsto a\rho(b) \end{aligned}$$

é sobrejetora.

Exemplo 3.3. Considere B uma álgebra e $A = \mathrm{FMat}(B)$ a álgebra de matrizes com entradas em B, índices em $\mathbb{N}$ e número finito de entradas não nulas. Denotaremos por $bE_{i,j}$ a matriz que tem valor $b \in B$ na posição (i,j) e 0 em todas as outras. Dado $G = \langle x \rangle_n$ um grupo cíclico de ordem n, temos que A é uma $\mathbb{K}G$-comódulo álgebra à direita, onde:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A \otimes \mathbb{K}G \\ \sum_{i,j} b_{i,j} E_{i,j} &\longmapsto \sum_{i,j} b_{i,j} E_{i,j} \otimes x^{i-j} \end{aligned}$$

é a coação.

Para cada $b, c \in B$, temos:

$$\begin{aligned} bcE_{i,j} \otimes x^k &= \big(bE_{i,k+j}\big)\big(cE_{k+j,j}\big) \otimes x^{k+j-j} \\ &= \mathrm{can}\big(bE_{i,k+j}, cE_{k+j,j}\big), \end{aligned}$$

o que implica que a extensão $A^{\mathrm{co}\,\mathbb{K}G} \subseteq A$ é $\mathbb{K}G$-Galois quando a álgebra B é idempotente.

Exemplo 3.4 (Ulbrich)**.** Sejam G um grupo e A uma álgebra G-graduada (para cada $g \in G$, existe um subespaço $A_g \subseteq A$, satisfazendo $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ e $A_gA_h \subseteq A_{gh}$), ou seja, para cada $g, h \in G$, $a \in A_g$ e $b \in A_h$ temos que $ab \in A_{gh}$ e para cada $a \in A$, existem únicos $a_g \in A_g$ tais que $a = \sum_{g\in G} a_g$. Temos que a álgebra A é um $\mathbb{K}G$-comódulo álgebra à direita, onde:

$$\begin{aligned} \rho\colon A &\longrightarrow A \otimes \mathbb{K}G \\ \sum_{g\in G} a_g &\longmapsto \sum_{g\in G} a_g \otimes g \quad (a_g \in A_g, \forall g \in G) \end{aligned}$$

é a coação. Temos que $A_gA_h = A_{gh}$, $\forall g, h \in G$ se, e somente se, a extensão $A^{\operatorname{co}\mathbb{K}G} \subseteq A$ é $\mathbb{K}G$-Galois, e a demonstração deste fato é a mesma do caso de álgebras com unidades, que foi obtida por Ulbrich [22].

Exemplo 3.5. Considere H uma álgebra de Hopf, B uma H-comódulo álgebra à direita com coação ρ e $A = \operatorname{FMat}(B)$ o espaço de matrizes de B com índices em $\mathbb{N}$ e número finito de coordenadas não nulas. Então A é uma H-comódulo álgebra à direita com coação $\overline{\rho}$ definida nos geradores por $\overline{\rho}(aE_{i,j}) = \sum a_0E_{i,j} \otimes a_1$, onde $\rho(a) = \sum a_0 \otimes a_1$.

Desta forma, se $B^{\operatorname{co}H} \subseteq B$ é Hopf-Galois, então $A^{\operatorname{co}H} \subseteq A$ é Hopf-Galois, pois para cada $a \in B$, $i, j \in \mathbb{N}$ e $h \in H$, como existe $\{x_k, y_k\}_{k=1}^m \subseteq B$ tal que $a \otimes h = \sum_{k=1}^m \operatorname{can}(x_k \otimes y_k)$, então $aE_{i,j} \otimes h = \sum_{k=1}^m \operatorname{can}(x_kE_{i,i} \otimes y_kE_{i,j})$.

Observação 3.6. Se a álgebra de Hopf H tem dimensão finita, cada H-módulo à esquerda M é um H^*-comódulo à direita com coação $\rho\colon M \to M \otimes H^*$ satisfazendo $h \cdot m = \sum m_1(h)m_0$, $\forall h \in H$, $\forall m \in M$, onde $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$. É imediato que $M^H = M^{\operatorname{co}H^*}$. Do mesmo modo, se A é uma H-módulo álgebra à esquerda, então A tem uma estrutura canônica de H^*-comódulo álgebra à direita e $A^H = A^{\operatorname{co}H^*}$.

Definição 3.7. Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Dada uma H-módulo álgebra à esquerda A, diremos que a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois se a função $\operatorname{can}\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A \otimes H^*$ for sobrejetora.

Observação 3.8. Dadas uma álgebra de Hopf H com dimensão finita e uma H-módulo álgebra à esquerda A com unidade, se a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois, então a função can é injetora. No caso de H-módulo álgebras à esquerda sem unidade, se a extensão for H^*-Galois, teremos que $\operatorname{Ker}(\operatorname{can})$ será um $A\#H$-submódulo de torção por ambos os lados, como demonstrado no Corolário 3.10.

Proposição 3.9 ((1) $\iff$ (4))**.** *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. A extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois se, e somente se, o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\ ,\ ]\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ dado por $[a, b] = (a\#t)(b\#1_H)$ é sobrejetor. Além disso,* $\operatorname{Ker}(\operatorname{can}) = \operatorname{Ker}([\ ,\ ])$.

Demonstração. É conhecido que $\theta\colon H^* \to H$ definida por $\theta(f) = \sum f(t_1)t_2$ é uma bijeção (veja [14], [15]). Para cada $a, b \in A$, temos:

$$\begin{aligned} (A \otimes \theta) \circ \operatorname{can}(a \otimes b) &= (A \otimes \theta)(a\rho(b)) \\ &= \sum (A \otimes \theta)\,(ab_0 \otimes b_1) \\ &= \sum ab_0 \otimes (b_1(t_1))t_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum a(b_1(t_1))b_0 \otimes t_2 \\
&= \sum a(t_1 \cdot b) \otimes t_2 \\
&= (a\#t)(b\#1) \\
&= \big[a, b\big],
\end{aligned}
$$

o que implica que $\big[\,,\,\big] = (A \otimes \theta) \circ \mathrm{can}$. Como $(A \otimes \theta)$ é bijetora, temos que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{can}) = \mathrm{Ker}\,\big(\big[\,,\,\big]\big)$ e a função can é sobrejetora se, e somente se, o morfismo de $A\#H$-bimódulos $\big[\,,\,\big]$ é sobrejetor. ■

Corolário 3.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois, então* $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{can})$ *é um $A\#H$-submódulo de torção por ambos os lados. Logo, quando a H-módulo álgebra A tem unidade e a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois, a função* can *é injetora.*

Demonstração. Pela Proposição 3.9, temos que o morfismo de $A\#H$-bimódulos $\big[\,,\,\big]$ é sobrejetor e $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{can}) = \mathrm{Ker}\,\big(\big[\,,\,\big]\big)$. Pela Proposição 2.10, se $\big[\,,\,\big]$ é sobrejetor, então $\mathrm{Ker}\,\big(\big[\,,\,\big]\big)$ é $A\#H$-submódulo de torção por ambos os lados. ■

Proposição 3.11 ((4) $\Rightarrow$ (3))**.** *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se o morfismo de $A\#H$-bimódulos $\big[\,,\,\big] : A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ dado por $\big[a, b\big] = (a\#t)(b\#1_H)$ é sobrejetor, então ${}_{A\#H}A$ gera a categoria dos $A\#H$-módulos à esquerda unitários.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.9, $(A^H, A\#H, {}_{A^H}A_{A\#H}, {}_{A\#H}A_{A^H}, \langle\,,\,\rangle, \big[\,,\,\big])$ é um contexto de Morita. Como o morfismo de $A\#H$-bimódulos $\big[\,,\,\big]$ é sobrejetor, pela Proposição 2.10, ${}_{A\#H}A$ gera ${}_{A\#H}A\#H$, o que implica que ${}_{A\#H}A$ gera a categoria dos $A\#H$-módulos à esquerda unitários, pelo Lema 1.12. ■

3.1 O Teorema de Estrutura Fraco

Para demonstrar as generalizações envolvendo o item (5) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery, que é uma forma de caracterizar a extensão $A^H \subseteq A$ através de módulos sobre $A\#H$, precisamos induzir uma estrutura de A-módulo à esquerda e de H-módulo à esquerda em um $A\#H$-módulo à esquerda. Como H tem unidade, provaremos no Lema 3.12 que A é isomorfo à $A\#1_H$, que é uma subálgebra de $A\#H$. Logo, a estrutura de A-módulo à esquerda surge trivialmente. O mesmo não pode ser feito para H.

Lema 3.12. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. A função:*

$$
\begin{aligned}
\iota\colon A &\longrightarrow A\#H \\
a &\longmapsto a\#1_H
\end{aligned}
$$

é um monomorfismo de álgebras. Consequentemente, cada $A\#H$-módulo à esquerda é também um A-módulo à esquerda e um A^H-módulo à esquerda, com ação induzida por ι, e todo morfismo de $A\#H$-módulos à esquerda é também morfismo de A-módulos à esquerda e morfismo de A^H-módulo à esquerda.

Demonstração. Claramente ι é monomorfismo, pois $(A \otimes \varepsilon) \circ \iota(a) = a$, $\forall a \in A$. Basta verificar que $(a\#1_H)(b\#1_H) = ab\#1_H$, $\forall a, b \in A$. De fato, como $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $1_H \cdot b = b$, temos que $(a\#1_H)(b\#1_H) = a(1_H \cdot b)\#1_H 1_H = ab\#1_H$. ■

Lema 3.13. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. A álgebra $A\#H$ é um H-bimódulo com ações à esquerda e à direita dadas respectivamente por:*

$$\begin{aligned} H \otimes A\#H &\longrightarrow A\#H \\ h \otimes (a\#k) &\longmapsto \sum (h_1 \cdot a)\#h_2 k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\#H \otimes H &\longrightarrow A\#H \\ (a\#k) \otimes h &\longmapsto a\#kh \end{aligned}$$

e $(A\#H)^H = t \cdot (A\#1)$.

Demonstração. Para cada $a\#h \in A\#H$ e $x, y \in H$, temos:

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot (a\#h)) &= \sum x \cdot ((y_1 \cdot a)\#y_2 h) \\ &= \sum (x_1 \cdot (y_1 \cdot a))\#x_2 y_2 h \\ &= \sum ((xy)_1 \cdot a)\#(xy)_2 h \\ &= (xy) \cdot (a\#h), \end{aligned}$$

o que implica que $A\#H$ é um H-módulo à esquerda.

Para cada $a\#h \in A\#H$ e $x, y \in H$, temos:

$$\begin{aligned} ((a\#h) \cdot x) \cdot y &= (a\#hx) \cdot y \\ &= a\#hxy \\ &= (a\#h) \cdot (xy), \end{aligned}$$

o que implica que $A\#H$ é um H-módulo à direita.

Para cada $a\#h \in A\#H$ e $x, y \in H$, temos:

$$\begin{aligned} x \cdot ((a\#h) \cdot y) &= x \cdot (a\#hy) \\ &= \sum (x_1 \cdot a)\#x_2 hy \\ &= \sum ((x_1 \cdot a)\#x_2 h) \cdot y \\ &= (x \cdot (a\#h)) \cdot y, \end{aligned}$$

o que implica que $A\#H$ é um H-bimódulo.

Considere $H \otimes A$ como H-módulo à esquerda com ação induzida pela multiplicação de H e a função:

$$\begin{aligned} \varphi \colon H \otimes A &\longrightarrow A\#H \\ h \otimes a &\longmapsto h \cdot (a\#1_H) \end{aligned}$$

Para cada $h, k \in H$ e $a \in A$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(hk \otimes a) &= (hk) \cdot (a\#1_H) \\ &= h \cdot (k \cdot (a\#1_H)) \\ &= h \cdot (\varphi(k \otimes a)), \end{aligned}$$

o que implica que φ é morfismo de H-módulos à esquerda.

Considere a função:

$$\begin{aligned}\theta\colon A\#H &\longrightarrow H\otimes A\\ a\#h &\longmapsto \sum h_2\otimes(S^{-1}(h_1)\cdot a)\end{aligned}$$

Para cada $a\#h\in A\#H$ e $k\in H$, temos:

$$\begin{aligned}\theta(k\cdot a\#h) &= \sum \theta((k_1\cdot a)\#k_2h)\\ &= \sum k_3h_2\otimes(S^{-1}(k_2h_1)\cdot(k_1\cdot a))\\ &= \sum k_3h_2\otimes(S^{-1}(h_1)\cdot(S^{-1}(k_2)k_1\cdot a))\\ &= \sum k_2h_2\otimes(S^{-1}(h_1)\cdot(\varepsilon(k_1)a))\\ &= \sum kh_2\otimes(S^{-1}(h_1)\cdot a)\\ &= k\theta(a\#h)\end{aligned}$$

Para cada $a\in A$ e $h\in H$, temos:

$$\begin{aligned}\theta\circ\varphi(h\otimes a) &= \theta(h\cdot(a\#1_H))\\ &= \sum \theta\left((h_1\cdot a)\#h_2\right)\\ &= \sum h_3\otimes(S^{-1}(h_2)h_1\cdot a)\\ &= \sum h_2\otimes\varepsilon(h_1)a\\ &= h\otimes a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\circ\theta(a\#h) &= \sum \varphi\left(h_2\otimes(S^{-1}(h_1)\cdot a)\right)\\ &= \sum h_2\cdot((S^{-1}(h_1)\cdot a)\#1_H)\\ &= \sum (h_2S^{-1}(h_1)\cdot a)\#h_3\\ &= \sum \varepsilon(h_1)a\#h_2\\ &= a\#h.\end{aligned}$$

Portanto φ é um isomorfismo de H-módulos à esquerda, o que implica que $(A\#H)^H=\varphi((H\otimes A)^H)=\varphi(\int_l\otimes A)=\varphi(t\otimes A)=t\cdot(A\#1_H)$. ■

Proposição 3.14 ((5) $\Rightarrow$ (4))**.** *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0\neq t\in\int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a função:*

$$\begin{aligned}\phi\colon A\underset{A^H}{\otimes}(A\#H)^H &\longrightarrow A\#H\\ a\otimes(b\#h) &\longmapsto (a\#1_H)(b\#h)\end{aligned}$$

é sobrejetora, o morfismo de $A\#H$-bimódulos $\big[\,,\big]\colon A\underset{A^H}{\otimes}A\to A\#H$ dado por $\big[a,b\big]=(a\#t)(b\#1_H)$ é sobrejetor.

Demonstração. Primeiramente note que, para cada $a \in A$, $h \in H$ e $b\#k \in A\#H$, temos:

$$\begin{aligned}(a\#1_H)(h\cdot(b\#k)) &= \sum(a\#1_H)((h_1\cdot b)\#h_2k)\\ &= \sum a(h_1\cdot b)\#h_2k\\ &= (a\#h)(b\#k).\end{aligned}$$

Para cada $a, b \in A$, temos:

$$\begin{aligned}[a,b] &= (a\#t)(b\#1_H)\\ &= (a\#1_H)(t\cdot(b\#1_H))\\ &= \phi(a\otimes(t\cdot(b\#1_H))).\end{aligned}$$

Como $t\cdot(A\#1_H) = (A\#H)^H$ pelo Lema 3.13, se ϕ é sobrejetora, então o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\,,\,]$ é sobrejetor. ■

Para demonstrar o resultado que equivale à (4) $\Rightarrow$ (5), dado um $A\#H$-módulo à esquerda, precisamos atribuí-lo uma estrutura de H-módulo à esquerda que seja compatível com a estrutura de $A\#H$-módulo à esquerda. Quando a álgebra A possui unidade, tal estrutura segue diretamente do fato de:

$$\begin{aligned}\iota_H\colon H &\longrightarrow A\#H\\ h &\longmapsto 1_A\#h\end{aligned}$$

ser um monomorfismo de álgebras. Utilizaremos o fato de $A\#H$ ser um H-módulo à esquerda e à direita para, dado um $A\#H$-módulo à esquerda unitário M, definir uma estrutura de H-módulo em M satisfazendo:

$$h\cdot((a\#k)x) := (h\cdot(a\#k))x \quad \forall h\in H, \forall a\#k\in A\#H, \forall x\in M.$$

Como veremos no Lema 3.16, para a estrutura acima induzir uma estrutura de H-módulo à esquerda compatível com a estrutura de $A\#H$-módulo à esquerda, M deve ser um $A\#H$-módulo à esquerda unitário e livre de torção.

Definição 3.15. Sejam R um anel, F um anel que é R-módulo à esquerda e à direita e M um F-módulo à esquerda que é também um R-módulo à esquerda. Dizemos que as estruturas de R-módulo à esquerda e de F-módulo à esquerda de M são compatíveis se, para cada $a \in R$, $b \in F$ e $m \in M$, valem:

$$a\cdot(bm) = (a\cdot b)m,$$

$$b(a\cdot m) = (b\cdot a)m.$$

Lema 3.16. *Sejam R um anel e F um anel que é um R-módulo à esquerda e à direita. Se, para cada $s, z \in F$ e $r \in R$, tivermos:*

$$s(r\cdot z) = (s\cdot r)z,$$

então para cada F-módulo à esquerda unitário e livre de torção M, existe uma estrutura de R-módulo à esquerda para M que é compatível com a estrutura de F-módulo à esquerda.

Demonstração. Seja M um F-módulo à esquerda unitário e livre de torção. Podemos definir:

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} (r \cdot s_i) m_i, \quad \text{onde} \quad m = \sum_{i=1}^{n} s_i m_i \end{aligned}$$

Vejamos que a ação está bem definida. Se $\sum_{i=1}^{n} s_i m_i = \sum_{j=1}^{k} z_j n_j$, para cada $x \in F$ e $r \in R$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x\left((r \cdot s_i) m_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} (x(r \cdot s_i)) m_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} ((x \cdot r) s_i) m_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x \cdot r)\left(s_i m_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (x \cdot r)\left(z_j n_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} ((x \cdot r) z_j) n_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} (x(r \cdot z_j)) n_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} x\left((r \cdot z_j) n_j\right), \end{aligned}$$

o que implica que $x\left(\sum_{i=1}^{n}(r \cdot s_i) m_i - \sum_{j=1}^{k}(r \cdot z_j) n_j\right) = 0$, $\forall x \in F$. Como M é F-módulo à esquerda livre de torção, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} (r \cdot s_i) m_i = \sum_{j=1}^{k} (r \cdot z_j) n_j$$

e a função está bem definida. Agora, para cada $m = \sum_{i=1}^{n} s_i m_i \in M$ e $r, w \in R$, temos:

$$\begin{aligned} r \cdot (w \cdot m) &= \sum_{i=1}^{n} r \cdot ((w \cdot s_i) m_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (r \cdot (w \cdot s_i)) m_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (rw \cdot s_i) m_i \\ &= (rw) \cdot m, \end{aligned}$$

o que implica que M é um R-módulo à esquerda.

Pela definição da ação, para cada $r \in R$, $x \in F$ e $m \in M$, temos:

$$r \cdot (xm) = (r \cdot x) m.$$

Para cada $r \in R$, $x \in F$ e $m = \sum_{i=1}^{n} s_i m_i \in M$, temos:

$$\begin{aligned} x(r \cdot m) &= \sum_{i=1}^{n} x\left((r \cdot s_i)m_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x \cdot r)\left(s_i m_i\right) \\ &= (x \cdot r)m \end{aligned}$$

e as estruturas de R-módulo à esquerda e de F-módulo à esquerda são compatíveis. ∎

Proposição 3.17 ((4) $\Rightarrow$ (5)). *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se o morfismo de $A\#H$-bimódulos $\big[\, ,\, \big]\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ dado por $\big[a,b\big] = (a\#t)(b\#1_H)$ é sobrejetor, então para cada $A\#H$-módulo à esquerda unitário e livre de torção M, a função:*

$$\begin{aligned} \phi\colon A \underset{A^H}{\otimes} M^H &\longrightarrow M \\ a \otimes m &\longmapsto (a\#1_H)m \end{aligned}$$

induz o isomorfismo de $A\#H$-módulos à esquerda:

$$A \underset{A^H}{\otimes} M^H \Big/ t_{A\#H}\left(A \underset{A^H}{\otimes} M^H\right) \cong M.$$

Demonstração. Para cada $a\#h, b\#k \in A\#H$ e $x \in H$, temos:

$$\begin{aligned} (a\#h)(x \cdot (b\#k)) &= \sum (a\#h)((x_1 \cdot b)\#x_2 k) \\ &= \sum a(h_1 \cdot (x_1 \cdot b))\#h_2 x_2 k \\ &= \sum a((hx)_1 \cdot b)\#(hx)_2 k \\ &= (a\#hx)(b\#k) \\ &= ((a\#h) \cdot x)(b\#k), \end{aligned}$$

o que implica que, pelo Lema 3.16, existe uma estrutura de H-módulo à esquerda para M compatível com a estrutura de $A\#H$-módulo à esquerda.

Para cada $b\#h \in A\#H$, $a \in A$ e $m \in M^H$:

$$\begin{aligned} (b\#h)\phi(a \otimes m) &= (b\#h)((a\#1_H)m) \\ &= \sum (b(h_1 \cdot a)\#h_2)m \\ &= \sum (b(h_1 \cdot a)\#1_H)(h_2 \cdot m) \\ &= \sum \varepsilon(h_2)(b(h_1 \cdot a)\#1_H)m \\ &= (b(h \cdot a)\#1_H)m \\ &= \phi((b(h \cdot a)) \otimes m) \\ &= \phi((b\#h)(a \otimes m)), \end{aligned}$$

o que implica que ϕ é morfismo de $A\#H$-módulos à esquerda.

Como M é $A\#H$-módulo unitário, para cada $m \in M$, existem $\{a_i\#h_i\}_{i=1}^n \subseteq A\#H$ e $\{m_i\}_{i=1}^n \subseteq M$ tais que $m = \sum_{i=1}^n (a_i\#h_i)m_i$. Como o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\,,\,]$ é sobrejetor, para cada i existem $\{b_{i,j}, c_{i,j}\}_{j=1}^{k_i} \subseteq A$ tais que $a_i\#h_i = \sum_{j=1}^{k_i}[b_{i,j}, c_{i,j}]$. Assim:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^n (a_i\#h_i)m_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} [b_{i,j}, c_{i,j}]m_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (b_{i,j}\#t)(c_{i,j}\#1_H)m_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (b_{i,j}\#1_H)(t \cdot (c_{i,j}\#1_H)m_i). \end{aligned}$$

Como $t \in \int_H^l$, para cada i e j, temos que $t \cdot (c_{i,j}\#1_H)m_i \in M^H$. Logo:

$$m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \phi\left(b_{i,j} \otimes (t \cdot (c_{i,j}\#1_H)m_i)\right)$$

e $\mathrm{Im}\,(\phi) = M$.

Para cada $\sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i \in \mathrm{Ker}\,(\phi)$ e $x, y \in A$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [x, y] \cdot (a_i \otimes m_i) &= \sum_{i=1}^n (x\#t)(y\#1_H) \cdot (a_i \otimes m_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x\#t) \cdot (ya_i \otimes m_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x(t \cdot (ya_i)) \otimes m_i \\ &= \sum_{i=1}^n x \otimes (t \cdot (ya_i)) \cdot m_i \\ &= \sum_{i=1}^n x \otimes ((t \cdot (ya_i))\#1_H)m_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum x \otimes ((t_1 \cdot (ya_i))\#1_H)(t_2 \cdot m_i) \quad (m_i \in M^H) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum x \otimes ((t_1 \cdot (ya_i))\#t_2)m_i \\ &= \sum_{i=1}^n x \otimes (t \cdot (ya_i\#1_H)m_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x \otimes (t \cdot (y\#1_H)(a_i\#1_H)m_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x \otimes (t \cdot (y\#1_H)\phi(a_i \otimes m_i)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\ ,\ ]$ é sobrejetor, temos que $\operatorname{Ker}(\phi) \subseteq t_{A\#H}\left(A \underset{A^H}{\otimes} M^H\right)$. Por outro lado, como M é um $A\#H$-módulo à esquerda livre de torção, pelo Lema 1.8, temos que $t_{A\#H}\left(A \underset{A^H}{\otimes} M^H\right) \subseteq \operatorname{Ker}(\phi)$ e, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$A \underset{A^H}{\otimes} M^H \Big/ t_{A\#H}\left(A \underset{A^H}{\otimes} M^H\right) \cong M$$

como $A\#H$-módulos à esquerda. ■

3.2 Álgebra de Endomorfismos e Submódulos Gerados por Idempotentes

Para as implicações envolvendo o item (2) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery, precisamos estudar a função canônica $\pi\colon A\#H \to \operatorname{End}(A_{A^H})$ e os A^H-módulos à direita eA, com $e^2 = e \in A$, que farão o papel de submódulos projetivos finitamente gerados quando o A^H-módulo à direita A for localmente projetivo.

Para a generalização da implicação (3) $\Rightarrow$ (2) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery, seguiremos as construções propostas por Faith em [11, Proposition 4.1.3], utilizando uma relação entre A^H e $\operatorname{End}({}_{A\#H}A)$ para obter um morfismo entre ${}_{A\#H}\operatorname{Hom}(A, A\#H)$ e $\operatorname{Hom}_{A^H}\left(A, A^H\right)$ que nos ajudará a obter uma base dual para os A^H-módulos à direita eA, com $e^2 = e \in A$.

Na Proposição 2.11, vimos que, dado um contexto de Morita $(R, F, {}_RP_F, {}_FQ_R, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$, se o anel R é idempotente e o morfismo de R-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ é sobrejetor, as funções canônicas $R \to \operatorname{End}(P_F)$ e $R \to \operatorname{End}({}_FQ)$ induzem os isomorfismos de anéis $R/\ell(R) \cong \operatorname{End}(P_F) \cdot R$ quando ${}_RP$ é unitário e $R/r(R) \cong (R \cdot \operatorname{End}({}_FQ))^{\mathrm{op}}$ quando Q_R é unitário, respectivamente. Analogamente para o morfismo de F-bimódulos $[\ ,\ ]$ e o anel F.

No caso particular do contexto de Morita $(A^H, A\#H, A, A, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$, o lema a seguir mostra um isomorfismo induzido pela função canônica $A^H \to \operatorname{End}({}_{A\#H}A)$ obtido sem as hipóteses de que o morfismo de A^H-bimódulos $\langle\ ,\ \rangle$ é sobrejetor e que o A^H-módulo à direita A é unitário, pois estas são usadas para provar que o núcleo da função canônica é $r\left(A^H\right)$ e, neste caso, é fácil ver que o núcleo é $r(A) \bigcap A^H$.

Lema 3.18. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A^H é idempotente, então temos um isomorfismo de álgebras:*

$$A^H \Big/ \left(r(A) \bigcap A^H\right) \cong (A^H \cdot \operatorname{End}({}_{A\#H}A))^{\mathrm{op}}.$$

Demonstração. Considere a função:

$$\begin{aligned} \theta\colon A^H &\longrightarrow (\operatorname{End}({}_{A\#H}A))^{\mathrm{op}} \\ a &\longmapsto (x \mapsto xa) \end{aligned}$$

Para cada $a, b \in A^H$ e $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned} \theta(ab)(x) &= xab \\ &= \theta(b)(xa) \\ &= \theta(b) \circ \theta(a)(x), \end{aligned}$$

o que implica que θ é um morfismo de álgebras entre A^H e $(\operatorname{End}({}_{A\#H}A))^{\mathrm{op}}$. É imediato que:

$$\operatorname{Ker}(\theta) = \{a \in A^H \ ;\ xa = 0, \forall x \in A\} = r(A) \bigcap A^H.$$

Como a álgebra A^H é idempotente, para cada $a = \sum_{i=1}^n b_i c_i \in A^H$, temos:

$$\begin{aligned}
\theta(a)(x) &= xa \\
&= \sum_{i=1}^{n} x b_i c_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \theta(c_i)(x b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot \theta(c_i))(x),
\end{aligned}$$

o que implica que $\operatorname{Im}(\theta) \subseteq A^H \cdot \operatorname{End}({}_{A\#H}A)$.

Por outro lado, para cada $f \in \operatorname{End}({}_{A\#H}A)$ e $a \in A^H$, como a álgebra A^H é idempotente, existem $\{b_i, c_i\}_{i=1}^n \subseteq A^H$ tais que $a = \sum b_i c_i$. Note que, para cada $h \in H$, temos:

$$\begin{aligned}
h \cdot f(a) &= \sum_{i=1}^{n} h \cdot f(b_i c_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h \cdot (b_i f(c_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum (h_1 \cdot b_i)(h_2 \cdot f(c_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum ((h_1 \cdot b_i) \# h_2) \cdot f(c_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum f(((h_1 \cdot b_i) \# h_2) \cdot c_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum f((h_1 \cdot b_i)(h_2 \cdot c_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(h \cdot (b_i c_i)) \\
&= f(h \cdot a) \\
&= \varepsilon(h) f(a),
\end{aligned}$$

ou seja, $f(a) \in A^H$. Logo, para cada $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
(a \cdot f)(x) &= f(xa) \\
&= x f(a) \\
&= \theta(f(a))(x),
\end{aligned}$$

o que implica que $A^H \cdot \operatorname{End}({}_{A\#H}A) \subseteq \operatorname{Im}(\theta)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$A^H \Big/ \left(\mathscr{r}(A) \bigcap A^H \right) \cong (A^H \cdot \operatorname{End}({}_{A\#H}A))^{\mathrm{op}}$$

como álgebras. ■

Lema 3.19. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A^H é idempotente e a álgebra A não tem anuladores à direita, existe uma função $\mathbb{K}$-linear:*

$$\psi\colon A^H \cdot {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^H}\left(A, A^H\right)$$

tal que, para cada $f \in A^H \cdot {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H)$ e $a, b \in A$, temos:

$$f(a) \cdot b = a\psi(f)(b).$$

Demonstração. Começaremos definindo:

$$\begin{aligned} \psi_1\colon {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H) &\longrightarrow {}_{\mathrm{End}\left({}_{A\#H}A\right)}\mathrm{Hom}\,(A, \mathrm{End}\,({}_{A\#H}A)) \\ f &\longmapsto (a \mapsto (x \mapsto f(x) \cdot a)) \end{aligned}$$

Para cada $f \in {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H)$, $a, x \in A$ e $g \in \mathrm{End}\,({}_{A\#H}A)$, temos:

$$\begin{aligned} \psi_1(f)(g(a))(x) &= f(x) \cdot g(a) \\ &= g(f(x) \cdot a) \\ &= g(\psi_1(f)(a)(x)) \\ &= g \circ (\psi_1(f)(a))(x), \end{aligned}$$

o que implica que $\psi_1(f) \in {}_{\mathrm{End}\left({}_{A\#H}A\right)}\mathrm{Hom}\,(A, \mathrm{End}\,({}_{A\#H}A))$. Pelo Lema 3.18, como $\not r\,(A) = 0$, a função:

$$\begin{aligned} \theta\colon A^H &\longrightarrow (A^H \cdot \mathrm{End}\,({}_{A\#H}A))^{\mathrm{op}} \\ c &\longmapsto (y \mapsto yc) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras. Para cada $b \in A^H$, temos:

$$\begin{aligned} ((b \cdot f)(x)) \cdot a &= f(xb) \cdot a \\ &= \psi_1(f)(a)(xb) \\ &= \big(b \cdot (\psi_1(f)(a))\big)(x) \\ &= \big(\theta \circ \theta^{-1}(b \cdot (\psi_1(f)(a)))\big)(x) \\ &= x\theta^{-1}(b \cdot (\psi_1(f)(a))). \end{aligned}$$

Defina a função:

$$\begin{aligned} \psi\colon A^H \cdot {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^H}\left(A, A^H\right) \\ \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot f^i &\longmapsto \left(a \mapsto \sum_{i=1}^{n} \theta^{-1}(b_i \cdot (\psi_1(f^i)(a)))\right) \end{aligned}$$

Vejamos que ψ está bem definida. Se $\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot f^i = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot g^j$, para cada $a, x \in A$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x\left(\theta^{-1}(b_i \cdot (\psi_1(f^i)(a)))\right) &= \sum_{i=1}^{n} ((b_i \cdot f^i)(x)) \cdot a \\ &= \sum_{j=1}^{m} ((c_j \cdot g^j)(x)) \cdot a \\ &= \sum_{j=1}^{m} x\left(\theta^{-1}(c_j \cdot (\psi_1(g^j)(a)))\right). \end{aligned}$$

Como $\mathscr{r}\,(A) = 0$, temos que $\sum_{i=1}^{n} \theta^{-1}(b_i \cdot (\psi_1(f^i)(a))) = \sum_{j=1}^{m} \theta^{-1}(c_j \cdot (\psi_1(g^j)(a)))$, o que implica que ψ está bem definida. Pela definição de ψ, temos:

$$f(a) \cdot b = a\psi(f)(b)$$

para cada $f \in A^H \cdot {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H)$ e $a, b \in A$. ■

Lema 3.20. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. A função:*

$$\begin{aligned} \pi \colon A\#H &\longrightarrow \mathrm{End}\,(A_{A^H}) \\ a\#h &\longmapsto (x \mapsto a(h \cdot x)) \end{aligned}$$

é um morfismo de álgebras e, se a álgebra $A\#H$ é idempotente, $\mathrm{Im}\,(\pi) \subseteq \mathrm{End}\,(A_{A^H}) \cdot A\#H$*.*

Demonstração. Para cada $a\#h, b\#k \in A\#H$ e $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned} \pi((a\#h)(b\#k))(x) &= \sum \pi\left(a(h_1 \cdot b)\#h_2k\right)(x) \\ &= \sum a(h_1 \cdot b)(h_2k \cdot x) \\ &= \sum a(h_1 \cdot b)(h_2 \cdot (k \cdot x)) \\ &= a(h \cdot (b(k \cdot x))) \\ &= \pi(a\#h)(b(k \cdot x)) \\ &= \pi(a\#h) \circ \pi(b\#k)(x), \end{aligned}$$

o que implica que π é um morfismo de álgebras. Note que π também é um morfismo de $A\#H$-módulos à direita, pois para cada $a\#h, b\#k \in A\#H$ e $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned} \pi((a\#h)(b\#k))(x) &= \pi(a\#h)(b(k \cdot x)) \\ &= \pi(a\#h)((b\#k) \cdot x) \\ &= (\pi(a\#h) \cdot (b\#k))(x) \end{aligned}$$

Isto implica que, se $A\#H$ é idempotente, $\mathrm{Im}\,(\pi) \subseteq \mathrm{End}\,(A_{A^H}) \cdot A\#H$. ■

Proposição 3.21 ((3) $\Rightarrow$ (2))**.** *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A não tem anuladores à direita, o A^H-módulo à direita A é $\mathscr{si}$-unitário e A gera $A\#H$ como o $A\#H$-módulos à esquerda, então o morfismo de álgebras $\pi \colon A\#H \to \mathrm{End}\,(A_{A^H}) \cdot (A\#H)$ é um isomorfismo e, para cada $e^2 = e \in A$, o A^H-módulo à direita eA possui base dual.*

Demonstração. Primeiramente note que, como A é um A^H-módulo à direita $\mathscr{si}$-unitário e $A^H \subseteq A$, então as álgebras A, A^H e $A\#H$ são idempotentes. Pelo Lema 3.20, temos que $\mathrm{Im}\,(\pi) \subseteq \mathrm{End}\,(A_{A^H}) \cdot (A\#H)$.

Além disso, fixados $\{a_i\#h_i\}_{i=1}^{n} \subseteq A\#H$, existe $e^2 = e \in A^H$ tal que $a_ie = a_i$ para todo i. Isto implica que $(a_i\#h_i)(e\#1_H) = a_i\#h_i$ para todo i, com $(e\#1_H)^2 = e\#1_H \in A\#H$, ou seja, $A\#H$ é um $A\#H$-módulo à direita $\mathscr{si}$-unitário. Logo, $A\#H$ não tem anuladores à esquerda. Pelo Lema 1.14, se A gera $A\#H$ como $A\#H$-módulos à esquerda, temos:

$$\mathrm{Ker}\,(\pi) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\#h_i \in A\#H \ ; \ \sum_{i=1}^{n} a_i\#h_i \cdot b = 0, \forall b \in A \right\} = 0.$$

Como a álgebra A^H é idempotente e A não tem anuladores à direita, pelo Lema 3.19, existe $\psi\colon A^H \cdot {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H) \to \mathrm{Hom}_{A^H}\left(A, A^H\right)$ tal que, para cada $f \in A^H \cdot {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H)$ e $a, b \in A$, temos:

$$f(a) \cdot b = a\psi(f)(b).$$

Para cada $e^2 = e \in A$, vamos encontrar uma base dual para o A^H-módulo à direita eA. Como A gera $A\#H$ como $A\#H$-módulos à esquerda, existem $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ e $\{f^i\}_{i=1}^n \subseteq {}_{A\#H}\mathrm{Hom}\,(A, A\#H)$ tais que $e\#1_H = \sum_{i=1}^n f^i(a_i)$. Como A é um A^H-módulo à direita si-unitário, existe $w^2 = w \in A^H$ tal que $a_i = a_i w$ para todo i. Note que $\sum_{i=1}^n f^i(a_i) = \sum_{i=1}^n (w \cdot f^i)(a_i)$. Logo, para cada $x \in eA$, temos:

$$\begin{aligned}
x &= ex = e^2x \\
&= e((e\#1_H) \cdot x) \\
&= \sum_{i=1}^n e((w \cdot f^i)(a_i) \cdot x) \\
&= \sum_{i=1}^n ea_i\psi(w \cdot f^i)(x) \\
&= \sum_{i=1}^n ea_i\psi(w \cdot f^i)(ex) \\
&= \sum_{i=1}^n ea_i(\psi(w \cdot f^i) \cdot e)(x),
\end{aligned}$$

o que implica que $\{(ea_i, \psi(w \cdot f^i) \cdot e)\}_{i=1}^n \subseteq eA \times \mathrm{Hom}_{A^H}\left(eA, A^H\right)$ é uma base dual de eA como A^H-módulo à direita.

Vejamos que $\mathrm{End}\,(A_{A^H}) \cdot (A\#H) \subseteq \mathrm{Im}\,(\pi)$. Para cada $f \in \mathrm{End}\,(A_{A^H}) \cdot (A\#H)$, existem $\{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathrm{End}\,(A_{A^H})$ e $\{b_j\#k_j\}_{j=1}^m \subseteq A\#H$ tais que $f = \sum_{j=1}^m g_j \cdot (b_j\#k_j)$. Já vimos que existe $e^2 = e \in A^H$ tal que $(e\#1_H)^2 = e\#1_H$ e $(b_j\#k_j)(e\#1_H) = b_j\#k_j$ para todo j. Usando a base dual $\{(ea_i, \psi(w \cdot f^i) \cdot e)\}_{i=1}^n \subseteq eA \times \mathrm{Hom}_{A^H}\left(eA, A^H\right)$ de eA como A^H-módulo à direita encontrada acima, para cada $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=1}^m (g_j \cdot (b_j\#k_j))(x) \\
&= \sum_{j=1}^m (g_j \cdot ((b_j\#k_j)(e\#1_H)))(x) \\
&= \sum_{j=1}^m (g_j \cdot (b_j\#k_j))((e\#1_H) \cdot x) \\
&= \sum_{j=1}^m (g_j \cdot (b_j\#k_j))(ex) \\
&= f(ex) \\
&= \sum_{i=1}^n f(ea_i(\psi(w \cdot f^i) \cdot e)(ex)) \\
&= \sum_{i=1}^n f(ea_i)(\psi(w \cdot f^i) \cdot e)(ex)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\psi(w \cdot f^i)(e^2x) \quad (f(ea_i) = f(a_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (w \cdot f^i)(f(a_i)) \cdot ex \\
&= \sum_{i=1}^{n} f^i(f(a_i)w) \cdot ((e\#1_H) \cdot x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f^i(f(a_iw))(e\#1_H)) \cdot x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi(f^i(f(a_i))(e\#1_H))(x) \quad (a_iw = a_i),
\end{aligned}
$$

o que implica que $f = \sum_{i=1}^{n} \pi((f^i(f(a_i)))(e\#1_H))$. Portanto π é um isomorfismo de álgebras. ∎

Proposição 3.22 ((2) $\Rightarrow$ (4)). *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se A é um A-módulo à esquerda $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitário, a função $\pi\colon A\#H \to \operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot (A\#H)$ é um isomorfismo de álgebras e, para cada $e^2 = e \in A$, o A^H-módulo à direita eA possui base dual, então o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\,,\,]\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ é sobrejetor.*

Demonstração. Para cada $a\#h \in A\#H$, como A é um A-módulo à esquerda $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitário, existe $e^2 = e \in A$ tal que $a = ea$. Fixe uma base dual $\{(x_i, f^i)\}_{i=1}^{n} \subseteq eA \times \operatorname{Hom}_{A^H}(eA, A^H)$ de eA como A^H-módulo à direita. Para cada i, defina:

$$
\begin{aligned}
g^i\colon A &\longrightarrow A \\
b &\longmapsto f^i(eb)
\end{aligned}
$$

Claramente $g^i \in \operatorname{Hom}_{A^H}(A, A^H) \subseteq \operatorname{End}(A_{A^H})$, pois $f^i \in \operatorname{Hom}_{A^H}(eA, A^H)$. Além disso, para cada $b \in A$, temos:

$$
(g^i \cdot (e\#1_H))(b) = g^i((e\#1_H) \cdot b) = g^i(eb) = f^i(e^2b) = f^i(eb) = g^i(b).
$$

Logo $g^i = g^i \cdot (e\#1_H) \in \operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot (A\#H)$. Como π é um isomorfismo de álgebras, existem

$\{a_{i,j}\#h_{i,j}\}_{j=1}^{m_i} \subseteq A\#H$ tais que $g^i = \sum_{j=1}^{m_i} \pi(a_{i,j}\#h_{i,j})$. Para cada $b \in A$ e $k \in H$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m_i} \pi(k \cdot (a_{i,j}\#h_{i,j}))(b) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \sum \pi((k_1 \cdot a_{i,j})\#k_2 h_{i,j})(b) \\
&= \sum_{j=1}^{m_i} (k_1 \cdot a_{i,j})(k_2 h_{i,j} \cdot b) \\
&= \sum_{j=1}^{m_i} k \cdot (a_{i,j}(h_{i,j} \cdot b)) \\
&= \sum_{j=1}^{m_i} k \cdot \pi(a_{i,j}\#h_{i,j})(b) \\
&= k \cdot g^i(b) \\
&= \varepsilon(k) g^i(b) \quad (g^i(b) \in A^H) \\
&= \sum_{j=1}^{m_i} \pi(\varepsilon(k) a_{i,j}\#h_{i,j})(b).
\end{aligned}$$

Como π é injetor, temos que $\sum_{j=1}^{m_i} a_{i,j}\#h_{i,j} \in (A\#H)^H$ e, pelo Lema 3.13, existe $y_i \in A$ tal que $\sum_{j=1}^{m_i} a_{i,j}\#h_{i,j} = t \cdot (y_i\#1_H)$.

Vejamos agora que $a\#h \in \mathrm{Im}\left([\, , \,]\right)$. Para cada $b \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
\pi(a\#h)(b) &= a(h \cdot b) \\
&= ea(h \cdot b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i f^i(ea(h \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i g^i(a(h \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} x_i \pi(a_{i,j}\#h_{i,j})(a(h \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i (\pi(t \cdot (y_i\#1_H)))(a(h \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i\#1_H) \circ \pi(t \cdot (y_i\#1_H)) \circ \pi(a\#h)(b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi((x_i\#1_H)(t \cdot (y_i\#1_H))(a\#h))(b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi((x_i\#t)(y_i\#1_H)(a\#h))(b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi(\big[x_i, y_i\big](a\#h))(b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi(\big[x_i, y_i \cdot (a\#h)\big])(b).
\end{aligned}$$

Como π é injetor, temos que $a\#h = \sum_{i=1}^{n} \big[x_i, y_i \cdot (a\#h)\big]$, o que implica que o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\, , \,]$ é sobrejetor. ■

3.3 O Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery para Álgebras com Unidades Locais

Nesta seção, reuniremos todas as generalizações das implicações do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery apresentadas durante este capítulo em um único teorema. Quando todas as hipóteses dos resultados já apresentados forem satisfeitas ao mesmo tempo, a nossa álgebra A terá unidades locais. Nesse caso, veremos que a definição de módulos localmente projetivos será útil para relacionar a álgebra A e seus A^H-submódulos à direita eA, onde $e^2 = e \in A$.

Lema 3.23. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A tem unidades locais, a família parcialmente ordenada $I = \{e \in A\ ;\ e^2 = e\}$ com $e \leq f \iff ef = fe = e$ é uma família dirigida e $(eA_{A^H})_{e \in I}$ é um sistema direto de somandos diretos de A_{A^H} tal que $\varinjlim eA = A$. Além disso, as projeções $\phi_e \colon A \to eA$ dadas por $\phi_e(a) = ea$ se fatora por ϕ_f sempre que $e \leq f$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.32, a família I é dirigida. Para cada $e^2 = e \in A$, tome $B = \{a \in A\ ;\ ea = 0\}$. Claramente B é um A^H-submódulo à direita de A tal que $B \bigcap eA = 0$. Note que, para cada $a \in A$, $a = ea + a - ea$ com $ea \in eA$ e $a - ea \in B$. Logo $A = eA \bigoplus B$ e eA é somando direto de A. Considere as inclusões $\iota_e \colon eA \to A$ e $\iota_e^f \colon eA \longrightarrow fA$ sempre que $e \leq f$. Isto implica que $\iota_e = \iota_f \circ \iota_e^f$, $\forall e \leq f$ e $(eA_{A^H})_{e^2 = e \in A}$ é um sistema direto de somandos de A_{A^H}.

Para provar que $\varinjlim eA = A$, tome um A^H-módulo à direita M com morfismos $\varphi_e \colon eA \to M$ para cada $e^2 = e \in A$ tais que $\varphi_e = \varphi_f \circ \iota_e^f$, sempre que $e \leq f$. Como a álgebra A tem unidades locais, para cada $a \in A$ existe $e^2 = e \in A$ tal que $ae = ea = a$, o que implica que $a \in eA$. Se $a \in xA$ com $x^2 = x$ e $a \in yA$ com $y^2 = y \in A$, existe $e^2 = e \in A$ tal que $ex = xe = x$ e $ey = ye = y$. Isto implica que $a \in eA$ com $x \leq e$, $y \leq e$ e:

$$\varphi_x(a) = \varphi_e \circ \iota_x^e(a) = \varphi_e(a),$$

$$\varphi_y(a) = \varphi_e \circ \iota_y^e(a) = \varphi_e(a).$$

Assim, a função a seguir está bem definida:

$$\begin{aligned} \varphi \colon A &\longrightarrow M \\ a &\longmapsto \varphi_e(a), \quad \text{onde } a \in eA. \end{aligned}$$

Claramente $\varphi \circ \iota_e = \varphi_e$, $\forall e^2 = e \in A$ e é o único morfismo de A^H-módulos à direita de A para M com esta propriedade.

Finalmente, quando $e \leq f$, temos $ef = fe = e$ e $ea = efa$, o que implica $\phi_e = \psi_e^f \circ \phi_f$, onde $\psi_e^f \colon fA \to eA$ é dado por $\psi_e^f(x) = ex$. ∎

Na Proposição 3.21, vemos que, quando ${}_{A\#H}A$ gera ${}_{A\#H}A\#H$ e A_{A^H} é $\mathscr{s}\imath$-unitário, os A^H-módulos à direita eA são finitamente gerados, para cada $e^2 = e \in A$, pois possuem base dual. No teorema a seguir, vamos supor que são finitamente gerados desde o princípio para podermos trabalhar com qualquer sistema direto $(P_i)_{i \in I}$ quando A for um A^H-módulo à direita localmente projetivo.

Teorema 3.24. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $0 \neq t \in \int_H^l$ e A uma H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais. Se A é um A^H-módulo à direita $\mathscr{s}\imath$-unitário e, para cada $e^2 = e \in A$, o A^H-módulo à direita eA é finitamente gerado, são equivalentes:*

1. *$A^H \subseteq A$ é extensão H^*-Galois;*

2. *(a)* $\pi\colon A\#H \to \operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot A$ *é isomorfismo de álgebras, e*

   (b) A *é um* A^H*-módulo à direita localmente projetivo;*

3. A *é gerador na categoria dos* $A\#H$*-módulos à esquerda unitários;*

4. *o morfismo de* $A\#H$*-bimódulos* $[\,,\,]\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ *dado por* $[a,b] = (a\#t)(b\#1_H)$ *é sobrejetor;*

5. *para qualquer* $A\#H$*-módulo à esquerda unitário* M*, a função:*

$$\begin{aligned} \phi\colon A \underset{A^H}{\otimes} M^H &\longrightarrow M \\ a \otimes m &\longmapsto (a\#1_H) \cdot m \end{aligned}$$

   é isomorfismo de $A\#H$*-módulos à esquerda.*

Demonstração. A demonstração seguirá a seguinte estrutura:

$$\begin{tikzcd} (1) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (4) \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (5) \\ & (2) \arrow[ur, Rightarrow] & & (3) \arrow[ll, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Temos (1) $\iff$ (4) pela Proposição 3.9 e (4) $\Rightarrow$ (3) pela Proposição 3.11.

Como A tem unidades locais, para cada $\{a_i\#h_i\}_{i=1}^n \subseteq A\#H$, existe $e^2 = e \in A$ tal que $a_i = ea_i$ para todo i. Logo $(e\#1_H)^2 = e\#1_H$ e $a_i\#h_i = (e\#1_H)(a_i\#h_i)$ para todo i, ou seja, $A\#H$ é um $A\#H$-módulo à esquerda $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitário. Temos (5) $\Rightarrow$ (4) pela Proposição 3.14 e, como todo $A\#H$-módulo à esquerda unitário é $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitário pelo Lema 1.29, então todo $A\#H$-módulo à esquerda unitário é livre de torção e temos (4) $\Rightarrow$ (5) pela Proposição 3.17.

Lembrando que $A \cong A\#1_H$ como álgebras, temos que $\operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot A \subseteq \operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot (A\#H)$. Por outro lado, como a álgebra A tem unidades locais, para cada $a\#h \in A\#H$, existe $e^2 = e \in A$ tal que $a = ea$. Note que $a\#h = \sum (e\#h_2)((S^{-1}(h_1) \cdot a)\#1_H)$. Isto implica que $\operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot (A\#H) \subseteq \operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot A$.

Pelo Proposição 1.20, o A^H-módulo à direita eA é projetivo finitamente gerado se, e somente se, possui base dual. Logo, temos (3) $\Rightarrow$ (2) pela Proposição 3.21.

Por fim, se o A^H-módulo à direita A é localmente projetivo, fixe uma família dirigida I e um sistema direto $(P_i)_{i\in I}$ satisfazendo a definição de módulos localmente projetivos. Para cada $e^2 = e \in A$, existe um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de geradores do A^H-módulo à direita eA e, para cada $k = 1, \dots, n$, existe $i_k \in I$ tal que $x_k \in P_{i_k}$. Como a família I é dirigida, existe $i \in I$ tal que $i_k \leq i$, $\forall k$. Isto implica que $eA \subseteq P_i$ e temos $eA = e^2A \subseteq eP_i$. Mas $eP_i \subseteq eA$. Logo $eA = eP_i$. Além disso, $P_i = eP_i \bigoplus Q$, onde $Q = \{p \in P_i \; ; \; ep = 0\}$, o que implica que o A^H-módulo à direita eP_i é projetivo. Pela Proposição 1.20, o A^H-módulo à direita eA possui base dual. Portanto, (2) $\Rightarrow$ (4) pela Proposição 3.22. ∎

Exemplo 3.25. Considere A, B e G como no Exemplo 3.3. Para cada $a = \sum_{i,j} b_{i,j}E_{i,j} \in A$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_{i,j} = 0$ se $i > k$ ou $j > k$. Se a álgebra B possui unidade, considere $I_k = \sum_{i=1}^k 1_B E_{i,i}$ a matriz identidade $k \times k$. Temos que $I_k^2 = I_k \in A^{\mathrm{co}\,\mathbb{K}G} \subseteq A$ e $a = aI_k = I_k a$, ou seja, a álgebra A possui unidades locais e A é um $A^{\mathrm{co}\,\mathbb{K}G}$-módulo à direita $\mathscr{s}\mathscr{i}$-unitário.

Fixado $e^2 = e \in A$, tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $e = eI_k$ e considere $\{x_{i,j} = e(1_B E_{i,j})\}_{1\leq i,j\leq k} \subseteq eA$. Para cada $x = \sum_{i,j} b_{i,j}E_{i,j} \in eA$, temos que $b_{i,j} = 0$ se $i > k$ ou $j > k$, ou seja,

$x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_{i,j} E_{i,j}$ e temos:

$$\begin{aligned} x &= ex \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} e\big(b_{i,j} E_{i,j}\big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} e\big(1_B E_{i,j}\big)\big(b_{i,j} E_{j,j}\big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{i,j}\big(b_{i,j} E_{j,j}\big), \end{aligned}$$

com $b_{i,j} E_{j,j} \in A^{\mathrm{co}\,\mathbb{K}G}$, ou seja, o $A^{\mathrm{co}\,\mathbb{K}G}$-módulo à direita eA é finitamente gerado. Neste exemplo, temos que a extensão $A^{\mathrm{co}\,\mathbb{K}G} \subseteq A$ é $\mathbb{K}G$-Galois, pois a álgebra B é idempotente, o que implica que todas as afirmações do Teorema 3.24 são verdadeiras.

APÊNDICE

A. EXTENSÃO HOPF-GALOIS, PRODUTO SMASH E ÁLGEBRA DE ENDOMORFISMOS

Para demonstrar o Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery, vimos que o morfismo de $A\#H$-bimódulos $[\, , \,]\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A\#H$ é o pilar das implicações. Quando a álgebra A possui unidade, Kreimer-Takeuchi provam a implicação (1) $\Rightarrow$ (2.a) do Teorema de Cohen-Fischman-Montgomery em [13, Theorem 1.7(3)]. Nesta seção, generalizaremos este resultado para álgebras sem unidade. Para isto, mostraremos que o morfismo de álgebras $\pi\colon A\#H \to \operatorname{End}(A_{A^H})$ se fatora por uma função que está diretamente ligada à função $\operatorname{can}\colon A \underset{A^H}{\otimes} A \to A \otimes H^*$. Lembre que, quando a álgebra de Hopf H tem dimensão finita, uma H-módulo álgebra à esquerda A é uma H^*-comódulo álgebra à direita e usamos a notação $\rho(a) = \sum a_0 \otimes a_1$ para a coação de H^* em A.

Lema A.1. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. A função:*

$$\begin{aligned} \gamma\colon A \underset{A^H}{\otimes} A &\longrightarrow A \otimes H^* \\ a \otimes b &\longmapsto \sum a_0 b \otimes a_1 \end{aligned}$$

é sobrejetora se, e somente se, a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois. Além disso, $\operatorname{Ker}(\operatorname{can}) = \operatorname{Ker}(\gamma)$.

Demonstração. Seja S a antípoda de H^*. Como H tem dimensão finita, H^* também tem dimensão finita e S é bijetora. Considere as funções:

$$\begin{aligned} \Phi\colon A \otimes H^* &\longrightarrow A \otimes H^* \\ a \otimes f &\longmapsto \sum a_0 \otimes a_1 S(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi\colon A \otimes H^* &\longrightarrow A \otimes H^* \\ a \otimes f &\longmapsto \sum a_0 \otimes S^{-1}(f) a_1 \end{aligned}$$

Para cada $a \in A$ e $f \in H^*$, temos:

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(a \otimes f) &= \sum \Psi\left(a_0 \otimes a_1 S(f)\right) \\ &= \sum a_0 \otimes S^{-1}(a_2 S(f)) a_1 \\ &= \sum a_0 \otimes S^{-1}(S(f)) S^{-1}(a_2) a_1 \\ &= \sum a_0 \otimes \varepsilon(a_1) f \\ &= a \otimes f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi(a \otimes f) &= \sum \Phi\left(a_0 \otimes S^{-1}(f)a_1\right) \\
&= \sum a_0 \otimes a_1 S(S^{-1}(f)a_2) \\
&= \sum a_0 \otimes a_1 S(a_2) S(S^{-1}(f)) \\
&= \sum a_0 \otimes \varepsilon(a_1) f \\
&= a \otimes f,
\end{aligned}$$

o que implica que Φ e Ψ são bijetoras, com $\Phi^{-1} = \Psi$.

Note agora que, para cada $a, b \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \mathrm{can}(a \otimes b) &= \sum \Phi\left(ab_0 \otimes b_1\right) \\
&= \sum (ab_0)_0 \otimes (ab_0)_1 S(b_1) \\
&= \sum a_0 b_0 \otimes a_1 b_1 S(b_2) \\
&= \sum a_0 b_0 \otimes \varepsilon(b_1) a_1 \\
&= \sum a_0 b \otimes a_1 \\
&= \gamma(a \otimes b),
\end{aligned}$$

o que implica que $\gamma = \Phi \circ \mathrm{can}$. Portanto $\mathrm{Ker}\,(\gamma) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{can})$ e γ é sobrejetora se, e somente se, can é sobrejetora. ■

Lema A.2. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. O espaço $A \otimes H^*$ é um A-bimódulo com ações:*

$$\begin{aligned}
A \otimes A \otimes H^* &\longrightarrow A \otimes H^* \\
a \otimes b \otimes f &\longmapsto \sum a_0 b \otimes a_1 f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \otimes H^* \otimes A &\longrightarrow A \otimes H^* \\
a \otimes f \otimes b &\longmapsto ab \otimes f
\end{aligned}$$

e γ é um morfismo de A-bimódulos.

Demonstração. Para cada $a, b, c \in A$ e $f \in H^*$, temos:

$$\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot (c \otimes f)) &= \sum a \cdot (b_0 c \otimes b_1 f) \\
&= \sum a_0 b_0 c \otimes a_1 b_1 f \\
&= (ab) \cdot (c \otimes f),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((c \otimes f) \cdot b) \cdot a &= (cb \otimes f) \cdot a \\
&= cba \otimes f \\
&= (c \otimes f) \cdot (ba),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a \cdot (c \otimes f)) \cdot b &= \sum (a_0 c \otimes a_1 f) \cdot b \\
&= \sum a_0 cb \otimes a_1 f \\
&= a \cdot (cb \otimes f) \\
&= a \cdot ((c \otimes f) \cdot b),
\end{aligned}$$

Logo, $A \otimes H^*$ é A-bimódulo.

Para cada $a, b, c \in A$, temos:

$$\begin{aligned} c \cdot \gamma(a \otimes b) &= \sum c \cdot (a_0 b \otimes a_1) \\ &= \sum c_0 a_0 b \otimes c_1 a_1 \\ &= \gamma(ca \otimes b) \\ &= \gamma(c \cdot (a \otimes b)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(a \otimes b) \cdot c &= \sum (a_0 b \otimes a_1) \cdot c \\ &= \sum a_0 bc \otimes a_1 \\ &= \gamma(a \otimes bc) \\ &= \gamma((a \otimes b) \cdot c), \end{aligned}$$

o que implica que γ é morfismo de A-bimódulos. ■

Lema A.3. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A não tem anuladores à esquerda e é um A^H-módulo à direita unitário, então a função:*

$$\begin{aligned} \beta_1 \colon {}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(H^*, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \\ \varphi &\longmapsto (a \otimes f \mapsto \varphi(f)a) \end{aligned}$$

induz o isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais:

$${}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(H^*, A) \cong \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \cdot A.$$

Demonstração. Consideramos $A \otimes H^*$ um A-bimódulo como no Lema A.2. Para cada $\varphi \in {}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(H^*, A)$, $a, b \in A$ e $f \in H^*$, temos:

$$\begin{aligned} \beta_1(\varphi)((b \otimes f) \cdot a) &= \beta_1(\varphi)(ba \otimes f) \\ &= \varphi(f)ba \\ &= (\varphi(f)b)a \\ &= (\beta_1(\varphi)(b \otimes f))a, \end{aligned}$$

o que implica que $\beta_1(\varphi)$ é morfismo de A-módulos à direita.

Seja $\varphi \in \mathrm{Ker}\,(\beta_1)$. Para cada $a \in A$ e $f \in H^*$, temos $\varphi(f)a = \beta_1(\varphi)(a \otimes f) = 0$, ou seja, $\varphi(f) \in \ell\,(A)$. Como A não tem anuladores à esquerda, temos que $\varphi(f) = 0$ para todo $f \in H^*$, ou seja $\mathrm{Ker}\,(\beta_1) = 0$.

Para cada $\Psi \in \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A)$ e $a \in A$, defina:

$$\begin{aligned} \varphi \colon H^* &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto \sum \Psi(a_0 \otimes a_1 f) \end{aligned}$$

Para cada $b \otimes f \in A \otimes H^*$, temos:

$$
\begin{aligned}
(\Psi \cdot a)(b \otimes f) &= \Psi(a \cdot (b \otimes f)) \\
&= \sum \Psi(a_0 b \otimes a_1 f) \\
&= \sum \Psi((a_0 \otimes a_1 f) \cdot b) \\
&= \sum \Psi(a_0 \otimes a_1 f) b \\
&= \varphi(f) b \\
&= \beta_1(\varphi)(b \otimes f),
\end{aligned}
$$

o que implica que $\mathrm{Hom}_A(A \otimes H^*, A) \cdot A \subseteq \mathrm{Im}(\beta_1)$.

Fixe $\varphi \in {}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}(H^*, A)$. Considere $\{h_i\}_{i=1}^n$ uma base de H e $\{f^i\}_{i=1}^n$ a respectiva base dual de H^*, ou seja, $f^j(h_i) = \delta_{i,j}$. Como A é um A^H-módulo à direita unitário, para cada $i = 1, ..., n$ existem $\{b_{i,j}\}_{j=1}^{n_i} \subseteq A$ e $\{c_{i,j}\}_{j=1}^{n_i} \subseteq A^H$ tais que:

$$
\varphi(f^i) = \sum_{j=1}^{n_i} b_{i,j} c_{i,j}.
$$

Para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., n_i$, defina:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{i,j} \colon H^* &\longrightarrow A \\
f &\longmapsto f(h_i) b_{i,j}
\end{aligned}
$$

Então, para cada $a \otimes f \in A \otimes H^*$, como $f = \sum_{i=1}^n f(h_i) f^i$, temos:

$$
\begin{aligned}
\beta_1(\varphi)(a \otimes f) &= \varphi(f) a \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi\left(f(h_i) f^i\right) a \\
&= \sum_{i=1}^n f(h_i) \varphi(f^i) a \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} f(h_i) b_{i,j} c_{i,j} a \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_{i,j}(f) c_{i,j} a \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \beta_1(\varphi_{i,j})(c_{i,j} a \otimes f) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \beta_1(\varphi_{i,j})((c_{i,j})_0 a \otimes (c_{i,j})_1 f) \quad (c_{i,j} \in A^H) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \beta_1(\varphi_{i,j})(c_{i,j} \cdot (a \otimes f)) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (\beta_1(\varphi_{i,j}) \cdot c_{i,j})(a \otimes f),
\end{aligned}
$$

o que implica que $\mathrm{Im}\,(\beta_1) \subseteq \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \cdot A$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(H^*, A) \cong \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \cdot A$$

como $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. ■

Lema A.4. *Se X é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e Y é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, então a função:*

$$\begin{aligned} \beta_2\colon X \otimes Y &\longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(Y^*, X) \\ x \otimes y &\longmapsto (f \mapsto f(y)x) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais.

Demonstração. Podemos assumir que os elementos de $X \otimes Y$ são da forma $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, onde $\{y_i\}_{i=1}^n$ é uma base de Y. Considere $\{f^j\}_{j=1}^n$ a respectiva base dual em Y^*, ou seja, $f^j(y_i) = \delta_{i,j}$.

Seja $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in \mathrm{Ker}\,(\beta_2)$. Para cada $j = 1, ..., n$, temos:

$$x_j = \sum_{i=1}^n f^j(y_i)x_i = \sum_{i=1}^n \beta_2(x_i \otimes y_i)(f^j) = 0$$

e a função β_2 é injetora.

Para cada $\varphi \in {}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(Y^*, X)$ e $f \in Y^*$, como $f = \sum_{i=1}^n f(y_i)f^i$ e $\sum_{i=1}^n \varphi(f^i) \otimes y_i \in X \otimes Y$, temos que:

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \sum_{i=1}^n \varphi(f(y_i)f^i) \\ &= \sum_{i=1}^n f(y_i)\varphi(f^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_2(\varphi(f^i) \otimes y_i)(f). \end{aligned}$$

e a função β_2 é sobrejetora. ■

Corolário A.5. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A não tem anuladores à esquerda e é unitário como A^H-módulo à direita, a função:*

$$\begin{aligned} \beta\colon A \otimes H &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \\ a \otimes h &\longmapsto (b \otimes f \mapsto f(h)ab) \end{aligned}$$

induz o isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais:

$$A \otimes H \cong \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \cdot A.$$

Demonstração. Considere as funções:

$$\begin{aligned} \beta_1\colon {}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(H^*, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \\ \varphi &\longmapsto (a \otimes f \mapsto \varphi(f)a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2\colon A \otimes H &\longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}\,(H^*, A)\\ a \otimes h &\longmapsto (f \mapsto f(h)a)\end{aligned}$$

Para cada $a, b \in A$, $h \in H$ e $f \in H^*$, temos:

$$\begin{aligned}\beta_1 \circ \beta_2(a \otimes h)(b \otimes f) &= \beta_2(a \otimes h)(f)b\\ &= f(h)ab\\ &= \beta(a \otimes h)(b \otimes f),\end{aligned}$$

o que implica que $\beta = \beta_1 \circ \beta_2$ e, pelos Lema A.3 e Lema A.4, temos:

$$A \otimes H \cong \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes H^*, A) \cdot A$$

como $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. ∎

Observação A.6. Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Por adjunção, temos o seguinte isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais:

$$\begin{aligned}\eta_1\colon \mathrm{Hom}_{A^H}\,(A, \mathrm{Hom}_A\,(A, A)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right)\\ \varphi &\longmapsto (a \otimes b \mapsto \varphi(a)(b))\end{aligned}$$

Além disso, η_1 é morfismo de A-módulos à direita, pois para cada $a, b, c \in A$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^H}\,(A, \mathrm{Hom}_A\,(A, A))$, temos:

$$\begin{aligned}\eta_1(\varphi \cdot c)(a \otimes b) &= (\varphi \cdot c)(a)(b)\\ &= \varphi(ca)(b)\\ &= \eta_1(\varphi)(ca \otimes b)\\ &= (\eta_1(\varphi) \cdot c)(a \otimes b)\end{aligned}$$

Lema A.7. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A não tem anuladores à esquerda e é unitário como A^H-módulo à direita, a função:*

$$\begin{aligned}\eta_2\colon \mathrm{Hom}_{A^H}\,(A, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^H}\,(A, \mathrm{Hom}_A\,(A, A) \cdot A)\\ \varphi &\longmapsto (a \mapsto (b \mapsto \varphi(a)b))\end{aligned}$$

é um isomorfismo de A-módulos à direita.

Demonstração. Para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^H}\,(A, A)$, $a, b \in A$ e $c \in A^H$, temos:

$$\begin{aligned}\eta_2(\varphi)(ac)(b) &= \varphi(ac)b\\ &= \varphi(a)cb\\ &= \eta_2(\varphi)(a)(cb)\\ &= (\eta_2(\varphi)(a) \cdot c)(b),\end{aligned}$$

o que implica que $\eta_2(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{A^H}\,(A, \mathrm{Hom}_A\,(A, A))$. Além disso, como A é unitário como A^H-módulo à direita, a álgebra A é idempotente e existe $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ tais que $a = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Logo:

$$\begin{aligned}\eta_2(\varphi)(a) &= \sum_{i=1}^n \eta_2(\varphi)(x_i y_i)\\ &= \sum_{i=1}^n (\eta_2(\varphi) \cdot x_i)(y_i),\end{aligned}$$

o que implica que $\eta_2(\varphi)(a) \in \operatorname{Hom}_A(A, A) \cdot A$.

Para cada $\varphi \in \operatorname{Hom}_{A^H}(A, A)$ e $a, b, c \in A$, temos:

$$\begin{aligned}\eta_2(\varphi \cdot c)(a)(b) &= (\varphi \cdot c)(a)b \\ &= \varphi(ca)b \\ &= \eta_2(\varphi)(ca)(b) \\ &= (\eta_2(\varphi) \cdot c)(a)(b),\end{aligned}$$

o que implica que η_2 é morfismo de A-módulos à direita.

Se $\varphi \in \operatorname{Ker}(\eta_2)$, para cada $a, b \in A$, temos $\varphi(a)b = \eta_2(\varphi)(a)(b) = 0$. Logo, $\varphi(a) \in \ell(A)$. Como A não tem anuladores à esquerda, η_2 é injetora.

Fixe $\Psi \in \operatorname{Hom}_{A^H}(A, \operatorname{Hom}_A(A, A) \cdot A)$ e defina:

$$\begin{aligned}\varphi\colon A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i)(y_i), \quad \text{onde} \quad a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ e } y_i \in A^H, \forall i\end{aligned}$$

Para cada $a, b \in A$, existem $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ e $\{y_i\}_{i=1}^n \subseteq A^H$ tais que $a = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ e temos:

$$\begin{aligned}\Psi(a)(b) &= \sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i y_i)(b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\Psi(x_i) \cdot y_i)(b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i)(y_i b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i)(y_i) b \\ &= \varphi(a)b \\ &= \eta_2(\varphi)(a)(b),\end{aligned}$$

o que implica que η_2 é sobrejetora. ■

Corolário A.8. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A não tem anuladores à esquerda e é unitário como A^H-módulo à direita, então a função:*

$$\begin{aligned}\eta\colon \operatorname{Hom}_{A^H}(A, A) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \\ \varphi &\longmapsto (a \otimes b \mapsto \varphi(a)b)\end{aligned}$$

é um isomorfismo de A-módulos à direita.

Demonstração. Considere as funções:

$$\begin{aligned}\eta_1\colon \operatorname{Hom}_{A^H}(A, \operatorname{Hom}_A(A, A)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \\ \varphi &\longmapsto (a \otimes b \mapsto \varphi(a)(b))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_2\colon \operatorname{Hom}_{A^H}(A,A) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{A^H}(A, \operatorname{Hom}_A(A,A)\cdot A)\\ \varphi &\longmapsto (a \mapsto (b \mapsto \varphi(a)b))\end{aligned}$$

Para cada $\varphi \in \operatorname{Hom}_{A^H}(A,A)$ e $a \otimes b \in A \underset{A^H}{\otimes} A$, temos:

$$\begin{aligned}\eta_1 \circ \eta_2(\varphi)(a \otimes b) &= \eta_2(\varphi)(a)(b)\\ &= \varphi(a)b\\ &= \eta(\varphi)(a \otimes b),\end{aligned}$$

o que implica que $\eta = \eta_1 \circ \eta_2$ e, pela Observação A.6 e pelo Lema A.7, η é isomorfismo. ■

Lema A.9. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A é idempotente e a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois, então a função:*

$$\begin{aligned}\gamma^*\colon \operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right)\\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ \gamma\end{aligned}$$

induz o isomorfismo de A-módulos à direita:

$$\operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A)\cdot A \cong \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right)\cdot A$$

Demonstração. Consideramos $A \otimes H^*$ um A-bimódulo como no Lema A.2, o que implica que a função γ é um morfismo de A-bimódulos. Como $A^H \subseteq A$ é extensão H^*-Galois, pelo Lema A.1, γ é sobrejetor e $\operatorname{Ker}(\gamma) = \operatorname{Ker}(\mathrm{can})$. O morfismo γ^* é obtido aplicando o funtor contravariante $\operatorname{Hom}_A(\_, A)$ no morfismo γ. Logo, γ^* é um morfismo de A-módulos à direita injetor.

Para cada $\sum_{i=1}^n \varphi_i \cdot a_i \in \operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A)\cdot A$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \gamma^*(\varphi_i \cdot a_i)(x \otimes y) &= \sum_{i=1}^n (\varphi_i \cdot a_i)\circ\gamma(x \otimes y)\\ &= \sum_{i=1}^n \sum (\varphi_i \cdot a_i)(x_0 y \otimes x_1)\\ &= \sum_{i=1}^n \sum \varphi_i(a_i \cdot (x_0 y \otimes x_1))\\ &= \sum_{i=1}^n \sum \varphi_i((a_i)_0 x_0 y \otimes (a_i)_1 x_1)\\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \circ \gamma(a_i x \otimes y)\\ &= \sum_{i=1}^n \gamma^*(\varphi_i)(a_i x \otimes y)\\ &= \sum_{i=1}^n (\gamma^*(\varphi_i)\cdot a_i)(x \otimes y),\end{aligned}$$

o que implica que $\gamma^*(\operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A)\cdot A) \subseteq \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right)\cdot A$.

Para cada $\Psi \in \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right)$ e $a \in A$, se $x \in \operatorname{Ker}(\gamma)$, como $\operatorname{Ker}(\gamma)$ é submódulo de torção por ambos os lados pelo Corolário 3.10, então $(\Psi \cdot a)(x) = \Psi(ax) = 0$. Lembre-se que, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, γ sobrejetor implica:

$$\left(A \underset{A^H}{\otimes} A\right) \Big/ \operatorname{Ker}(\gamma) \cong A \otimes H^*.$$

Pela propriedade universal do quociente, existe $\varphi_a \colon A \otimes H^* \to A$ tal que $\gamma^*(\varphi_a) = \varphi_a \circ \gamma = \Psi \cdot a$, ou seja, $\operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \cdot A \subseteq \operatorname{Im}(\gamma^*)$. Como A é idempotente, existe $\{b_i, c_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ tal que $a = \sum_{i=1}^n b_i c_i$. Para cada $i = 1, ..., n$, pela conta acima, existe $\varphi_{b_i} \colon A \otimes H^* \to A$ satisfazendo $\varphi_{b_i} \circ \gamma = \Psi \cdot b_i$. Para cada $x \otimes y \in A \underset{A^H}{\otimes} A$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \gamma^*\left(\varphi_{b_i} \cdot c_i\right)(x \otimes y) &= \sum_{i=1}^n (\varphi_{b_i} \cdot c_i) \circ \gamma(x \otimes y) \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi_{b_i}(c_i \cdot \gamma(x \otimes y)) \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi_{b_i} \circ \gamma(c_i x \otimes y) \\
&= \sum_{i=1}^n (\Psi \cdot b_i)(c_i x \otimes y) \\
&= \sum_{i=1}^n ((\Psi \cdot b_i) \cdot c_i)(x \otimes y) \\
&= (\Psi \cdot a)(x \otimes y) \\
&= \gamma^*(\varphi_a)(x \otimes y).
\end{aligned}$$

Como γ^* é injetora, temos:

$$\varphi_a = \sum_{i=1}^n \varphi_{b_i} \cdot c_i,$$

o que implica que $\operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \cdot A \subseteq \gamma^*(\operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A) \cdot A)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos:

$$\operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A) \cdot A \cong \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \cdot A$$

como A-módulos à direita. ■

Lema A.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A não tem anuladores à esquerda e é unitário como A^H-módulo à direita, então existem isomorfismos β e η que fazem o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
A \# H \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"'] & \operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot A \arrow[d, "\eta"] \\
\operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A) \cdot A \arrow[r, "\gamma^*"] & \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \cdot A
\end{tikzcd}$$

onde $\gamma^* = \operatorname{Hom}_A(\gamma, A) \cdot A$.

Demonstração. Pelo Corolário A.5, temos o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \beta\colon A \otimes H &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A) \cdot A \\ a \otimes h &\longmapsto (b \otimes f \mapsto f(h)ab) \end{aligned}$$

e pelo Corolário A.8, temos o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \eta\colon \operatorname{Hom}_{A^H}(A, A) \cdot A &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \cdot A \\ \varphi &\longmapsto (a \otimes b \mapsto \varphi(a)b) \end{aligned}$$

Para cada $a \otimes h \in A \otimes H$ e $x \otimes y \in A \underset{A^H}{\otimes} A$, temos:

$$\begin{aligned} \gamma^* \circ \beta(a \otimes h)(x \otimes y) &= \beta(a \otimes h) \circ \gamma(x \otimes y) \\ &= \sum \beta(a \otimes h)(x_0 y \otimes x_1) \\ &= \sum x_1(h) a x_0 y \\ &= a(h \cdot x)y \\ &= \pi(a \# h)(x)y \\ &= \eta \circ \pi(a \# h)(x \otimes y), \end{aligned}$$

o que implica que o diagrama comuta. ■

Corolário A.11 ((1) $\Rightarrow$ (2.a))**.** *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Se a álgebra A não tem anuladores à esquerda, é unitário como A^H-módulo à direita e a extensão $A^H \subseteq A$ é H^*-Galois, então a função $\pi\colon A \# H \to \operatorname{End}(A_{A^H}) \cdot A$ é isomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Pelo Lema 3.20, π é morfismo de álgebras. Pelo Lema A.9, temos que o morfismo $\gamma^*\colon \operatorname{Hom}_A(A \otimes H^*, A) \cdot A \to \operatorname{Hom}_A\left(A \underset{A^H}{\otimes} A, A\right) \cdot A$ é bijetor, o que implica que π é isomorfismo de álgebras, pelo Lema A.10. ■

B. TEORIA DE TORÇÃO

Relembramos a definição de Teoria de Torção dada por Bo Stenström em [19] e apresentamos dois exemplos na categoria de R-módulos.

Definição B.1 (Smalø, [18])**.** Dada uma categoria $\mathscr{C}$, uma teoria de torção (T, F) em $\mathscr{C}$ é um par de classes de objetos, onde:

1. $\operatorname{Hom}(X, Y) = 0$ para todo $X \in T$, $Y \in F$,

2. Se $\operatorname{Hom}(C, Y) = 0$ para todo $Y \in F$, então $C \in T$,

3. Se $\operatorname{Hom}(X, C) = 0$ para todo $X \in T$, então $C \in F$.

Quando a classe T é fechada por subobjetos (se X é um subobjeto de Y e $Y \in T$, então $X \in T$), dizemos que a teoria de torção (T, F) é hereditária.

Teorema B.2. *Seja R um anel idempotente e considere a categoria R-MOD. Defina as classes:*

$$T(R\text{-MOD}) = \{X \in R\text{-MOD} \ ; \ X \textit{ é } R\textit{-módulo à esquerda de torção}\},$$

$$L(R\text{-MOD}) = \{X \in R\text{-MOD} \ ; \ X \textit{ é } R\textit{-módulo à esquerda livre de torção}\},$$

$$R\text{-Mod} = \{X \in R\text{-MOD} \ ; \ X \textit{ é } R\textit{-módulo à esquerda unitário}\}.$$

Então $(T(R\text{-MOD}), L(R\text{-MOD}))$ é uma teoria de torção hereditária e $(R\text{-Mod}, T(R\text{-MOD}))$ é uma teoria de torção.

Demonstração. Para provar que $(T(R\text{-MOD}), L(R\text{-MOD}))$ é uma teoria de torção hereditária, primeiramente vejamos que ${}_R\operatorname{Hom}(X, Y) = 0$ para todo $X \in T(R\text{-MOD})$ e $Y \in L(R\text{-MOD})$. Como Y é livre de torção, pelo Lema 1.8, temos que $t_R(X) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$, para todo $f \in {}_R\operatorname{Hom}(X, Y)$. Mas X de torção implica que $X = t_R(X)$. Portanto ${}_R\operatorname{Hom}(X, Y) = 0$, para todo $X \in T(R\text{-MOD})$ e $Y \in L(R\text{-MOD})$.

Seja M um R-módulo à esquerda tal que ${}_R\operatorname{Hom}(X, M) = 0$ para todo $X \in T(R\text{-MOD})$. Assim, temos que a inclusão $\iota\colon t_R(M) \to M$ é o morfismo nulo, pois $t_R(M) \in T(R\text{-MOD})$. Isso implica que M é livre de torção.

Seja M um R-módulo à esquerda tal que ${}_R\operatorname{Hom}(M, Y) = 0$ para todo $Y \in L(R\text{-MOD})$. Assim, temos que a projeção $\pi\colon M \to M/t_R(M)$ é o morfismo nulo, pois $M/t_R(M) \in L(R\text{-MOD})$ pelo Lema 1.9. Isso implica que $M/t_R(M) = 0$ e $M = t_R(M)$.

Seja X subobjeto de Y com $Y \in T(R\text{-MOD})$. Então $RX \subseteq RY = 0$. Portanto $X \in T(R\text{-MOD})$.

Para provar que $(R\text{-Mod}, T(R\text{-MOD}))$ é uma teoria de torção, primeiramente vejamos que ${}_R\operatorname{Hom}(X, Y) = 0$ para todo $X \in R\text{-Mod}$ e $Y \in T(R\text{-MOD})$. Para todo $f \in {}_R\operatorname{Hom}(X, Y)$, como X é unitário, temos $\operatorname{Im}(f) \subseteq RY = 0$. Portanto ${}_R\operatorname{Hom}(X, Y) = 0$, para todo $X \in R\text{-Mod}$ e $Y \in T(R\text{-MOD})$.

Seja M um R-módulo à esquerda tal que ${}_R\mathrm{Hom}\,(X, M) = 0$ para todo $X \in R$-Mod. Como R é idempotente, temos que $RM \subseteq M$ é um submódulo unitário. Logo a inclusão $\iota\colon RM \to M$ é o morfismo nulo e $RM = 0$, o que implica $M \in T(R\text{-MOD})$.

Seja M um R-módulo à esquerda tal que ${}_R\mathrm{Hom}\,(M, Y) = 0$ para todo $Y \in T(R\text{-MOD})$. Considere o módulo quociente M/RM. Claramente $M/RM \in T(R\text{-MOD})$, pois $R(M/RM) = RM/RM = 0$. Logo a projeção $\pi\colon M \to M/RM$ é o morfismo nulo. Portanto $M = RM$ e $M \in R$-Mod. ■

REFERÊNCIAS

[1] M. M. S. Alves and E. Batista, *Partial Hopf actions, partial invariants and a Morita context*, Algebra and Discrete Mathematics, 3 (2009), pp. 1 –19.

[2] P. N. Ánh and L. Márki, *Morita Equivalence For Rings Without Identity*, Tsukuba J. Math., 11 (1987), pp. 1–16.

[3] M. Beattie, S. Dăscălescu, and Ş. Raianu, *Galois Extensions for Co-Frobenius Hopf Algebras*, Journal of Algebra, 198 (1997), pp. 164 – 183.

[4] S. Caenepeel, E. Groot, and J. Vercruysse, *Constructing Infinite Comatrix Corings from Colimits*, Applied Categorical Structures, 14 (2006), pp. 539 –565.

[5] S. Caenepeel and K. Janssen, *Partial (Co)Actions of Hopf Algebras and Partial Hopf-Galois Theory*, Communications in Algebra, 36 (2008), pp. 2923–2946.

[6] C. Cibils and E. N. Marcos, *Skew Category, Galois Covering and Smash Product of a k-Category*, Proceedings of the American Mathematical Society, 134 (2005), pp. 39–50.

[7] M. Cohen, D. Fischman, and S. Montgomery, *Hopf Galois Extensions, Smash Products, and Morita Equivalence*, Journal of Algebra, 133 (1990), pp. 351–372.

[8] Y. Doi and M. Takeuchi, *Hopf-Galois Extensions of Algebras, the Miyashita-Ulbrich Action, and Azumaya Algebras*, Journal of Algebra, 121 (1989), pp. 488–516.

[9] M. Dokuchaev, Ángel Del Río, and J. J. Simón, *Globalizations of partial actions on nonunital rings*, Proceedings of the American Mathematical Society, 135 (2007), pp. 343–352.

[10] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, and Şerban Raianu, *Hopf Algebras: An Introduction*, CRC Press, September 2000.

[11] C. Faith, *Algebra: Rings, Modules and Categories I*, vol. 190, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973.

[12] J. L. García and J. J. Simón, *Morita equivalence for idempotent rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, 76 (1991), pp. 39–56.

[13] H. F. Kreimer and M. Takeuchi, *Hopf Algebras and Galois Extensions of an Algebra*, Indiana University Mathematics Journal, 30 (1981), pp. 675–692.

[14] R. G. Larson and M. E. Sweedler, *An Associative Orthogonal Bilinear Form for Hopf Algebras*, American Journal of Mathematics, 91 (1969), pp. 75–93.

[15] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, Cbms Regional Conference Series in Mathematics, October 1993.

[16] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2002.

[17] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[18] S. O. Smalø, *Torsion Theories and Tilting Modules*, Bulletin of the London Mathematical Society, 16 (1984), pp. 518 – 522.

[19] B. Stenström, *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory*, vol. 217, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975.

[20] A. Stănescu, *On Hopf-Galois extensions of linear categories*, Analele Universitatii "Ovidius" Constanta - Seria Matematica, 20 (2013), pp. 111–130.

[21] H. Tominaga, *On s-Unital Rings*, Math. J. Okayama Univ., 18 (1976), pp. 117–134.

[22] K. H. Ulbrich, *Galois erweiterungen von nicht-kommutativen Ringen*, Comm. Algebra, 10 (1982), pp. 655–672.

[23] J. Vercruysse, *Local units versus local projectivity. Dualisations: Corings with local structure maps*, Communications in Algebra, 34 (2006), pp. 2079–2103.

[24] E. Wofsey, *Projective modules over rings without unit.* `https://math.stackexchange.com/questions/120458/projective-modules-over-rings-without-unit`. (acessado em 26 de Fevereiro de 2018).