UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
GUILHERME FELIPE TYSZKA

ESTABILIDADE E ESTABILIDADE EXPONENCIAL EM VISCOELASTICIDADE LINEAR

CURITIBA
2017

GUILHERME FELIPE TYSZKA

ESTABILIDADE E ESTABILIDADE EXPONENCIAL EM VISCOELASTICIDADE LINEAR

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo.

CURITIBA
2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

T994e Tyszka, Guilherme Felipe

Estabilidade e estabilidade exponencial em viscoelasticidade linear / Guilherme Felipe Tyszka. – Curitiba, 2017.

72 p. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Higidio Portillo Oquendo.

1. Viscoelasticidade Linear. 2. Equações com memória. 3. Estabilidade Exponencial. I. Universidade Federal do Paraná. II. Oquendo, Higidio Portillo. III. Título.

CDD: 515

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **GUILHERME FELIPE TYSZKA** intitulada: **ESTABILIDADE E ESTABILIDADE EXPONENCIAL EM VISCOELASTICIDADE LINEAR**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 23 de Fevereiro de 2018.

HIGIDIO PORTILLO OQUENDO
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

MARIA ROSARIO ASTUDILLO ROJAS
Avaliador Externo (UFPR)

JUAN AMADEO SORIANO PALOMINO
Avaliador Externo (UEM)

Aos meus pais
e ao meu amor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Alice e João, pelo apoio e incentivo durante esse caminho. Sem vocês seria impossível a realização desse projeto.

A minha amada Gabriela, por me mostrar como ser uma pessoa melhor e estar ao meu lado em todos os dias e momentos, me dando forças para seguir em frente.

Ao Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo pela incrível orientação e por todo o tempo dedicado.

Aos meus irmãos e amigos por todos os momentos felizes propiciados.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR pela oportunidade e formação de qualidade.

A todos os meus professores da UFPR e da Universidade de Coimbra, por todos os conhecimentos transmitidos.

Ao importantíssimo apoio financeiro disponibilizado pela Capes.

A todos que de alguma forma transformaram isto possível.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a estabilidade assintótica e exponencial do semigrupo gerado por uma versão abstrata da equação integro-diferencial com memória

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds = 0,$$

a qual descreve comportamento transversal de um sólido linearmente viscoelástico. Para o núcleo da memória μ, assumimos que existe uma sequência estritamente crescente, (s_n), possivelmente finita, até mesmo reduzida a apenas $s_0 = 0$, ou convergindo para um valor $s_\infty \in (0, \infty]$, onde μ tem descontinuidades em cada s_n, e é absolutamente contínua em cada intervalo (s_{n-1}, s_n) e no intervalo (s_∞, ∞), se definido.

Palavras-chave: Viscoelasticidade Linear, Equações com Memória, Estabilidade, Estabilidade Exponencial.

Abstract

In this work, we study the asymptotic and exponential stability of the semigroup generated by an abstract version of the integro-differential equation with memory

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds = 0,$$

which describes transverse behavior of a linearly viscoelastic solid. For the memory kernel μ, we assume that there exists a strictly increasing sequence, (s_n), possibly finite, even reduced to just $s_0 = 0$, or converging to a value $s_\infty \in (0, \infty]$, where μ has discontinuities in every s_n, and it is absolutely continuous in each interval (s_{n-1}, s_n) and in the interval (s_∞, ∞), if defined.

Keywords: Linear Viscoelasticity, Equations with Memory, Stability, Exponential Stability.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado com fronteira suave e a equação integro-diferencial com memória

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = v_0(x), \\ u(x,-s)|_{s>0} = \phi_0(x,s), \\ u(x,t)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \ t > 0 \end{cases}$$

onde u_0, v_0, ϕ_0 são dados prescritos. A função $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é naturalmente chamada núcleo da memória.

A equação acima modela o deslocamento transversal de um sólido linearmente viscoelástico ocupando um volume em repouso Ω, onde a massa total do núcleo não supera o coeficiente de elasticidade, isto é

$$\int_0^\infty \mu(s)ds =: \kappa < 1.$$

Para exemplificar melhor, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ representando uma membrana com propriedades linearmente viscoelásticas. A equação (1.1) modela as vibrações transversais dessa membrana ao longo do tempo, o termo integral, o qual usualmente é chamado termo de memória, é responsável pelo envelhecimento das vibrações, isto é, sobre certas considerações adicionais no núcleo da memória, as vibrações tenderão a se estabilizar ao longo do tempo. Uma das perguntas feitas por muitos pesquisadores que estudam esta equação é, quais são estas considerações, isto é, quais hipóteses devo tomar sobre o núcleo para que a solução da equação (1.1) se estabilize, isto é quando

$$\lim_{t\to\infty} \|u(x,t)\| = 0,$$

para um conjunto de dados iniciais admissíveis? E com qual taxa ocorre a estabilização?

Nesta dissertação, seguindo *Pata* [18], estudaremos a estabilidade assintótica e a estabilidade exponencial da equação (1.1) assumindo que existe uma sequência estritamente crescente, (s_n), possivelmente finita, até mesmo reduzida a apenas $s_0 = 0$, ou convergindo para um valor $s_\infty \in (0,\infty]$, onde μ tem descontinuidades em cada s_n, e é absolutamente contínua em cada intervalo (s_{n-1}, s_n) e no intervalo (s_∞, ∞), se definido. Os resultados descritos ao longo da dissertação podem ser encontrados em [15, 18, 19, 20, 23, 24, 25].

Ao longo da dissertação, trabalharemos com a forma abstrata da equação (1.1). Consideremos A um operador definido num domínio denso de um espaço de Hilbert separável H, tal que A é auto-adjunto, estritamente positivo e tem inversa compacta. Com estas considerações, existe uma sequência $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \ldots$, de autovalores e uma sequência de autovetores unitários, (v_n), tal que, o conjunto $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo de H, ver [1]. Note que $A = -\Delta$, com $\mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, tem essas propriedades, então tendo as mesmas considerações sobre o núcleo, temos a equação abstrata

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^\infty \mu(s)Au(t-s)ds = 0, \quad u(x,t) = u(t), \tag{1.2}$$

com condições iniciais análogas (exceto a condição de fronteira). Usando a teoria básica de semigrupos (ver por exemplo [10]), no Capítulo 2, provamos a existência e unicidade de solução do problema (1.2). Para isso, devido ao termo de memória, temos um problema para colocar a equação na forma abstrata com a variável s, portanto usamos a técnica introduzida por Dafermos em seu trabalho pioneiro em viscoelasticidade linear [11], a qual estende a equação (1.2) em um sistema de equações, o qual pode ser escrito da forma

$$\begin{cases} \xi'(t) = \mathbb{A}\xi(t), \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $\xi(t) = (u(t), v(t), \eta(t,s)) \in D(A^{1/2}) \times H \times L^2_\mu(\mathbb{R}^+, D(A^{1/2}))$, $\xi_0 = (u(0), v(0), \eta(0,s))$, $\eta(t,s) = u(t) - u(t-s)$ e $\mathbb{A}$ é o operador definido em $\mathcal{H} = D(A^{1/2}) \times H \times L^2_\mu(\mathbb{R}^+, D(A^{1/2}))$ por

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \left\{ (u,v,\eta) \in \mathcal{H}; v \in \mathcal{D}(A^{1/2}), (1-\kappa)u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds \in \mathcal{D}(A), \eta \in \mathcal{D}(T) \right\}$$

e

$$\mathbb{A}(u,v,\eta) = \left(v, A\left((1-\kappa)u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds \right), T\eta + v \right),$$

com T o gerador infinitesimal do semigrupo de translações a direita definido em $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, D(A^{1/2}))$. A existência e unicidade de soluções é provada pelo bem conhecido Teorema de Lumer-Phillips, que afirma que o operador $\mathbb{A}$ é gerador de um semigrupo de contrações, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, de classe C_0.

A estabilidade assintótica é estudada no Capítulo 3, e um fato bastante curioso acontece, o semigrupo gerado (portanto a solução de (1.3)) não é assintoticamente estável apenas se o núcleo for da forma

$$\mu(s) = \sum_{n\geqslant 1} \gamma_n \chi_{[\ell k_{n-1}, \ell k_n]}(s),$$

onde (k_n) é uma sequência estritamente crescente de números naturais, (γ_n) uma sequência estritamente decrescente de números reais, e ℓ é tal que, para algum $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ell}{2\pi}\sqrt{\lambda_m} \in \mathbb{N},$$

onde λ_m é o m-ésimo autovalor de A.

A estabilidade exponencial do semigrupo é estudada no capítulo 4. Relacionando os semigrupos de translações a direita e $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, obtém-se uma condição necessária imposta ao núcleo, isto é, se o semigrupo é exponencialmente estável então existem constantes $C \geqslant 1$ e $\delta > 0$ tais que

$$\mu(t+s) \leqslant Ce^{-\delta t}\mu(s), \tag{1.4}$$

para todo $t \geqslant 0$ e quase todo $s > 0$. Se $C = 1$ então a condição (1.4) é equivalente a

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leqslant 0, \tag{1.5}$$

e esta condição é imposta em quase todos os resultados obtidos sobre a estabilidade exponencial até agora. Se $C > 1$ então a lacuna entre a condição necessária (1.4) e a condição suficiente (1.5) é enorme. Por exemplo, qualquer núcleo com suporte compacto satisfaz (1.4), mas não necessariamente satisfaz (1.5).

Um dos principais resultados do Capítulo 4 é que, usando estimativas de energia provamos que o semigrupo é exponencialmente estável se a condição (1.4) é satisfeita e se

$$\mathcal{R}_\mu = \frac{1}{\kappa}\int_{\mathcal{F}_\mu} \mu(s)ds < \frac{1}{2},$$

onde

$$\mathcal{F}_\mu = \{s \in \mathbb{R}^+ : \mu(s) > 0,\ \mu'(s) = 0\}.$$

Isto é, se μ satisfaz a condição (1.4), que é também necessária, e (a grosso modo) se o conjunto onde μ é plano é pequeno então o semigrupo é exponencialmente estável. É importante notar que, se $\mu' < 0$ em quase todo ponto, então $\mathcal{R}_\mu = 0$. Quando $\mathcal{R}_\mu = 1$ é dado um contraexemplo, em um caso particular do operador A, de que o núcleo não decaí exponencialmente, o caso $\mathcal{R}_\mu \in [1/2, 1)$ (ver [23]) é provado ser exponencialmente estável usando um resultado abstrato de semigrupos, uma prova usando estimativas de energia para este caso ainda é um problema em aberto.

O Apêndice A (ver [25]) contêm uma introdução do semigrupo de translações à direita e a identificação do seu gerador infinitesimal.

No apêndice B (ver [24]), verificamos que para núcleos escada da forma

$$\mu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \chi_{[s_{n-1},s_n)}(s),$$

sobre certas considerações nos autovalores do operador A não se tem a estabilidade exponencial do semigrupo. Alguns exemplos são o caso unidimensional, quando

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \Omega = (0,\pi),$$

e o caso multi-dimensional quando $A = -\Delta$ e Ω é uma bola aberta ou um retângulo. Note que nestes casos, $\mathcal{R}_\mu = 1$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Funções Periódicas

O objetivo desta seção é obter alguns resultados com respeito a funções periódicas. Tais resultados terão grande importância no Capítulo 3. Aqui X denotará um espaço vetorial e $u : \mathbb{R} \to X$ uma função.

Definição 2.1.1. *Dizemos que u é periódica (de período P) se existe $P \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que*

$$u(s+P) = u(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

O menor período positivo de u, caso exista, é chamado de período fundamental.

Observação 2.1.2. *Se P é um período de uma função u então nP, com $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, é um período de u. De fato, para $n \in \mathbb{Z}$*

$$u(s+nP) = u(s+(n-1)P+P) = u(s+(n-1)P), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

então por um processo indutivo prova-se o pretendido.

Teorema 2.1.3. *Se u é periódica, contínua e não constante então*

i) $P_0 := \inf\{P > 0 : P$ *é período de* $u\} > 0$;

ii) P_0 *é o período fundamental de* u;

iii) Todos os períodos de u são da forma nP_0, com $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Provemos *i)* pelo absurdo, isto é, suponhamos que $P_0 = 0$. Portanto existe uma sequência de períodos positivos decrescentes de u, (P_n), tal que $P_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como u não é constante, existe s_0 tal que $u(s_0) \neq u(0)$. Note que $u(s_0)$ pertence a imagem por u do intervalo $(0, P_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhamos $s_n \in (0, P_n)$, tal que $u(s_0) = u(s_n)$. Logo $s_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e pela continuidade de u temos que

$$u(s_0) = \lim_{n\to\infty} u(s_n) = u(0),$$

o que é um absurdo.

ii) Consideremos (P_n) uma sequência de períodos positivos de u convergindo para P_0. Da continuidade de u segue que

$$u(s) = \lim_{n\to\infty} u(s+P_n) = u(s+P_0) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

ou seja, P_0 é um período de u e como é o ínfimo dos períodos positivos tem-se que P_0 é o período fundamental.

iii) Suponhamos que existe um período $P \neq 0$ que não é da forma $P = nP_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Sendo assim, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $mP_0 < P < (m+1)P_0$, ou seja, $0 < P - mP_0 < P_0$. Como P_0 é um período de u segue da observação anterior que

$$u(s + P - mP_0) = u(s + P) = u(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Portanto $P - mP_0$ é um período positivo de u menor que P_0, o que é um absurdo, pois P_0 é o período fundamental de u. ■

Definição 2.1.4. *Dizemos que dois períodos, P e Q, de u são racionalmente independentes se P/Q é irracional.*

Corolário 2.1.5. *Se u é periódica, contínua e tem dois períodos racionalmente independentes então u é constante.*

Demonstração. Basta notar que, se u não é constante, com períodos P e Q, então do teorema anterior segue que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $P = mP_0$ e $Q = nP_0$, onde P_0 é o período fundamental de u. Logo devemos ter que

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},$$

o que contradiz a hipótese dos períodos serem racionalmente independentes. ■

Corolário 2.1.6. *Se $u : \mathbb{R} \to X$ é periódica, contínua tal que*

$$\inf\{P > 0 : P \textit{ é período de } u\} = 0$$

então u é constante.

Demonstração. Procedamos por contradição. Se u não é constante então do teorema 2.1.3 o ínfimo deve ser positivo, o que contraria a nossa hipótese. ■

Teorema 2.1.7. *Seja $u : \mathbb{R} \to X$ uma função periódica e contínua. Se (ℓk_n), $k_n \in \mathbb{N}$, $\ell > 0$, é uma sequência de períodos com $mdc\{k_n\} = 1$ então ℓ é um período de u.*

Demonstração. Definamos $v(s) = u(\ell s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, logo k_n é um período de v para todo $n \in \mathbb{N}$. Provemos primeiramente que 1 é um período de v. É claro que se v é constante então 1 é um período de v. Suponhamos então que v não é constante e consideremos P_0 seu período fundamental. Do Teorema 2.1.3 temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in \mathbb{Z}$ tal que $k_n = r_n P_0$, logo $P_0 \in \mathbb{Q}$. Sejam então a, b inteiros primos entre si, tal que $b/a = P_0$. Daí

$$k_n a = r_n b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como b não divide a então b divide k_n para todo $n \in \mathbb{N}$, como $mdc\{k_n\} = 1$, segue que $b = 1$. Assim $P_0 = 1/a$ e portanto $1 = aP_0$, e novamente do Teorema 2.1.3 segue que 1 é um período de v. Finalmente temos que

$$u(s + \ell) = v\left(\frac{s + \ell}{\ell}\right) = v\left(\frac{s}{\ell} + 1\right) = v\left(\frac{s}{\ell}\right) = u(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

ou seja, ℓ é um período de u. ■

2.2 Funções Absolutamente Contínuas

Denotemos com X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.2.1. *Dizemos que uma função $f:[a,b]\to X$ é absolutamente contínua se, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para qualquer coleção (finita ou não) de subintervalos disjuntos $[a_i,b_i]$, temos*

$$\sum_i (b_i-a_i)<\delta \quad \Rightarrow \quad \sum_i \|f(b_i)-f(a_i)\|_X<\varepsilon.$$

Denotemos com $AC([a,b],X)$ o conjunto das funções absolutamente contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ com valores em X.

Note que se f é Lebesgue integrável então definindo $F:[a,b]\to X$ por

$$F(x)=\int_a^x f(s)ds,$$

temos que $F\in AC([a,b],X)$.

Teorema 2.2.2. *Seja $f:[a,b]\to X$ uma função absolutamente contínua tal que $f'=0$ em quase todo ponto, então f é constante.*

Demonstração. Ver [13]. ■

Um importante resultado sobre as função absolutamente contínuas é que elas são quase sempre diferenciáveis.

Teorema 2.2.3. *Uma função $f:[a,b]\to X$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ se, e somente se, f é quase sempre diferenciável em $[a,b]$, $f'\in L^1[a,b]$ e vale*

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(s)ds,$$

para $a\leqslant x\leqslant b$.

Demonstração. Ver [13]. ■

2.3 Alguns Resultados de Análise Funcional

Nesta seção, H denotará um espaço de Hilbert, com norma $\|\cdot\|_H$, induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. O símbolo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotará o produto de dualidade entre espaços implícitos no contexto. Notemos com X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$. Muitos teoremas e definições serão omitidas, e será apresentado apenas conceitos que serão mencionados ao longo da dissertação.

2.3.1 O Teorema da Limitação Uniforme

Teorema 2.3.1. *Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares limitados $T_n:X\to Y$, com X um espaço de Banach e Y um espaço normado, tal que $(\|T_nx\|_Y)$ é limitado para cada $x\in X$, digamos,*

$$\|T_nx\|_Y\leqslant C_x, \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

onde C_x é um número real. Então existe $C>0$ tal que

$$\|T_n\|=\sup_{\|x\|_X=1}\|T_nx\|_Y\leqslant C, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Demonstração. Ver [3], página 249. ■

2.3.2 O Teorema de Lax-Milgram

Definição 2.3.2. *Dizemos que uma aplicação $b : X \times X \to \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear se para cada $v \in X$ a aplicação $u \longmapsto b(u,v)$ é linear, e se para cada $u \in X$ a aplicação $v \longmapsto b(u,v)$ é linear conjugado. Dizemos que esta forma é contínua, ou limitada, se existe $C > 0$ tal que $|b(u,v)| \leqslant C\|u\|_X\|v\|_X$ para todos $u, v \in X$. Se existe $\delta > 0$ tal que*

$$b(u,u) \geqslant \delta\|u\|_X^2, \quad \forall u \in X,$$

então dizemos que b é coerciva.

Teorema 2.3.3 (Lax-Milgram)**.** *Assuma que $b(u,v)$ é uma forma sesquilinear contínua e coerciva em X. Então, dado qualquer $\varphi \in X^*$, existe um único elemento $u \in X$ tal que*

$$b(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in X.$$

Demonstração. Ver [5] página 140. ■

2.3.3 Resultados Importantes Sobre Espaços de Hilbert

Teorema 2.3.4 (Representação de Riesz)**.** *Todo funcional linear limitado f, em um espaço de Hilbert H pode ser representado por meio de um produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle x, z \rangle_H$$

onde z depende apenas de f e é o único com tal propriedade. Além disso,

$$\|f\| = \|z\|_H.$$

Demonstração. Ver [3], página 188. ■

Teorema 2.3.5. *Sejam H um espaço de Hilbert e $x \in H$. Então*

$$\|x\|_H = \sup_{\|y\|=1} \langle y, x \rangle_H.$$

Demonstração. Basta usar o Corolário 4.3-4 de [3] e o Teorema de representação de Riesz. ■

Teorema 2.3.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja H um espaço com produto interno, então*

$$|\langle x, y \rangle_H| \leqslant \|x\|_H\|y\|_H, \quad \forall x, y \in H.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = \lambda y$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Para $y = 0$ a desigualdade é evidente. Para $y \neq 0$, consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$0 \leqslant \|x - \lambda y\|_H^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle_H = \|x\|_H^2 - \lambda\langle y, x \rangle - \bar{\lambda}\langle x, y \rangle_H + \lambda^2\|y\|_H^2.$$

Escolhendo $\lambda = \langle x, y \rangle_H / \|y\|_H^2$, temos que

$$0 \leqslant \|x\|_H^2 - \frac{\langle x, y \rangle_H^2}{\|y\|_H^2},$$

o que prova a desigualdade pretendida. Das estimativas acima, temos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\|x - \lambda y\|_H = 0$, isto é, $x = \lambda y$. ■

Definição 2.3.7. *Dizemos que uma sequência* (v_n) *num espaço de Hilbert* H *é uma sequência ortonormal completa se*

$$\langle v_n, v_m \rangle_H = \begin{cases} 1 & se\ m = n, \\ 0 & se\ m \neq n, \end{cases}$$

e o conjunto span$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, o conjunto de todas combinações lineares de* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, é denso em* H*.*

Teorema 2.3.8 (Identidade de Parseval)**.** *Sejam* H *um espaço de Hilbert separável, e* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *um conjunto ortonormal completo de* H*, então para todo* $u \in H$ *é válida a identidade*

$$\|u\|_H^2 = \sum_{n\geqslant 1} |\langle u, v_n \rangle_H|^2.$$

Demonstração. Ver [5], página 143. ■

Definição 2.3.9. *Seja* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ *um operador linear densamente definido. Dizemos que* A *é um operador simétrico se*

$$\langle Au, v \rangle_H = \langle u, Av \rangle_H, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Definição 2.3.10. *Seja* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ *um operador linear densamente definido. O adjunto (ou adjunto de Hilbert) de* A *é o operador* $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H \to H$ *definido por*

$$D(A^*) = \{v \in H : \exists v^* \in H \text{ tal que para todo } u \in \mathcal{D}(A),\ \ \langle Au, v \rangle_H = \langle u, v^* \rangle_H\},$$

e $A^*v = v^*$*. Dizemos que* A *é auto adjunto se* $A^* = A$*.*

Observação 2.3.11. *É claro que se* A *é autoadjunto então* A *é simétrico. A recíproca não é sempre verdadeira.*

Definição 2.3.12. *Dizemos que um operador* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ *é estritamente positivo se*

$$\langle Au, u \rangle_H > 0, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}.$$

2.3.4 Medida e Integração em Espaços Abstratos

Aqui, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será um conjunto qualquer e μ será uma medida em Ω, sempre consideraremos a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.13. *Seja* $1 \leqslant p < \infty$*. Definimos o espaço* $L^p_\mu(\Omega, X)$ *como o conjunto das (classes de equivalências de) funções* $u : \Omega \to X$*, mensuráveis p-integráveis, isto é,*

$$L^p_\mu(\Omega, X) = \left\{ u : \Omega \to X : u \text{ é mensurável e} \int_\Omega \|u(x)\|^p \mu(x) dx < \infty \right\},$$

com a seguinte norma

$$\|u\|_p = \left\{ \int_\Omega \|u(x)\|^p \mu(x) dx \right\}^{1/p}.$$

Se X *é um espaço de Hilbert e* $p = 2$ *então* $L^2_\mu(\Omega, X)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{L^2_\mu(\Omega,X)} = \int_\Omega \langle u(x), v(x) \rangle_X \mu(x) dx.$$

Quado μ é a medida de Lebesgue em Ω, escreveremos apenas $L^p(\Omega, X)$. E se $X = \mathbb{R}$ escrevemos apenas $L^p_\mu(\Omega)$.

Para $p = \infty$, definamos

$$L^\infty(\Omega, X) = \{u : \Omega \to X : u \text{ é mensurável e } \exists K > 0 \text{ tal que } \|u(x)\| \leqslant K \text{ em q.t.p de } \Omega\},$$

com a norma

$$\|u\|_\infty = \inf\{K > 0 : \|u(x)\| \leqslant K \text{ em q.t.p de } \Omega\}.$$

Observação 2.3.14. *A integral anteriormente considerada é denominada Integral de Bochner, e a definição de mensurabilidade e mais detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [2, 8].*

Teorema 2.3.15. *$C_0^\infty(\Omega, X)$, o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω, é denso em $L^p_\mu(\Omega, X)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, se Y é um espaço denso em X, então $C_0^\infty(\Omega, Y)$ é denso em $L^p_\mu(\Omega, X)$.*

Demonstração. Ver [9] página 121. ■

Teorema 2.3.16 (Desigualdade de Young com ε)**.** *Sejam a, b números reais não negativos e $1 < p, q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$, então se $\varepsilon > 0$ temos*

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-p/q} q^{-1}$

Demonstração. Provemos primeiramente a desigualdade de Young (onde $\varepsilon = 1/p$). Consideremos a função $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) = \frac{s^p}{p} + \frac{1}{q} - s.$$

Note que h tem um mínimo absoluto em $s = 1$, logo $h(1) \leqslant h(s)$ para todo $s > 0$, e portanto

$$s \leqslant \frac{s^p}{p} + \frac{1}{q}.$$

Escolhendo $s = A/B^{q/p}$ segue a desigualdade de Young. Considerando agora $A = (\varepsilon p)^{1/p} a$, e $B = b/(\varepsilon p)^{1/p}$ na desigualdade que acabamos de obter segue o pretendido. ■

Observação 2.3.17. *A desigualdade de Young com ε será muitas vezes usada com $p = q = 2$, e neste caso temos*

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Teorema 2.3.18 (Desigualdade de Hölder)**.** *Consideremos $X = \mathbb{R}$. Sejam $1 \leqslant p, q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$, então se $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$, $v \in L^q(\Omega, \mathbb{R})$ temos*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leqslant \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração. Da homogeneidade da desigualdade, é suficiente mostrar apenas quando $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$. Da Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/p$ temos

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v(x)|^q dx = 1 = \|u\|_p\|v\|_q.$$

■

Teorema 2.3.19 (Desigualdade de Hölder em espaços abstratos)**.** *Sejam $u, v \in L^2(\Omega, H)$. Então*

$$\int_\Omega \langle u(x), v(x)\rangle_H dx \leqslant \|u\|_2\|v\|_2.$$

Demonstração. Basta aplicar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e Hölder, isto é,

$$\int_\Omega \langle u(x), v(x)\rangle_H dx \leqslant \int_\Omega \|u(x)\|_H\|v(x)\|_H dx \leqslant \|u\|_2\|v\|_2.$$

■

Teorema 2.3.20 (Teorema da convergência dominada)**.** *Sejam (Ω, μ) um espaço de medida, (f_n), $f_n : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se existe uma função integrável $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n| \leqslant g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [9], página 32. ■

Teorema 2.3.21. *Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Se $(\mathcal{P}_n)$ é uma sequência decrescente, no sentido da inclusão, de borelianos de $\mathbb{R}$ tal que $\mu(\mathcal{P}_0) < \infty$, então*

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(\mathcal{P}_n).$$

Demonstração. Ver [7] Lema 3.4, página 21. ■

Definição 2.3.22. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to X$ funções mensuráveis. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Definimos para $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$f \circledast g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 2.3.23 (Desigualdade de Young para a convolução)**.** *Sejam $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ tais que*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Ver [9], página 235. ■

Observação 2.3.24. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, e assumamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Daí se denotarmos com $\tilde{f}, \tilde{g}$ as extensões de f, g a todo $\mathbb{R}$, respectivamente, colocando o valor zero na semi-reta não positiva, então temos que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$, e do teorema anterior temos que*

$$\|\tilde{f} * \tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Por outro lado

$$\tilde{f} * \tilde{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s-y)\tilde{g}(y)dy = \int_0^s f(s-y)g(y)dy = f \circledast g(s).$$

Portanto

$$\|f \circledast g\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \tag{2.1}$$

Teorema 2.3.25 (Lema de Riemman-Lebesgue)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ então*

$$\lim_{|\nu| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\nu x} dx = 0.$$

Demonstração. Ver [22], página 56. ■

2.3.5 Compacidade

Definição 2.3.26. *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X está injetado continuamente em Y, e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, se $X \subset Y$ e existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Definição 2.3.27 (Compacidade)**.**

1. *Dizemos que um conjunto K de um espaço de Banach X é compacto se toda sequência limitada em K admite uma subsequência convergente para um elemento em K.*

2. *Dizemos que um subconjunto $K \subset X$ é pré-compacto se seu fecho em X é um conjunto compacto.*

3. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é um operador compacto se $T(M)$ é pré-compacto em Y para todo $M \subset X$ limitado.*

4. *Dizemos que um subconjunto X de Y está injetado compactamente em Y, e escrevemos $X \Subset Y$, se $X \subset Y$ e o operador identidade, $I : X \to Y$, dado por $I(x) = x$, é um operador compacto.*

Teorema 2.3.28. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Então T é compacto se, e somente se, T aplica toda sequência limitada (x_n) em X em uma sequência (Tx_n) em Y que possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Ver [3], página 407. ■

Teorema 2.3.29. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então se T é limitado e $T(X)$ é um espaço vetorial de dimensão finita então T é um operador compacto.*

Demonstração. Ver [3], página 407. ∎

Teorema 2.3.30. *Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares compactos de um espaço normado X em um espaço de Banach Y. Se existe um operador linear T tal que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$, então T é compacto.*

Demonstração. Ver [3], página 408. ∎

Teorema 2.3.31. *Sejam p, q tais que $1/p + 1/q = 1$, consideremos*

$$W = \{v : v \in L^p(0,T;B_0), Dv \in L^q(0,T;B_1)\},$$

onde $T > 0$ é finito e $B_0 \subset B \subset B_1$, com B_0, B_1 reflexivos e $B_0 \Subset B$. Então

$$W \Subset L^p(0,T;B).$$

Demonstração. Ver [6] página 58. ∎

2.3.6 Convergência Fraca

Consideremos aqui X um espaço vetorial normado. Denotemos com X^* o espaço dual de X, isto é

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ é linear e contínua}\}.,$$

com norma

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} \langle f, x\rangle.$$

Denotemos com X^{**} o espaço dual de X^*.

Definamos agora a *injeção canônica* $J : X \to X^{**}$: Dado $x \in X$, a função $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ é um funcional linear em X^*, o qual é um elemento de X^{**}, que denotamos por Jx. Temos assim

$$\langle Jx, f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X}, \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X^*.$$

Portanto J é linear e é uma isometria, isto é

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|=1} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\|f\|=1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|,$$

o que segue de uma generalização do Teorema 2.3.5. Temos assim que J é injetiva, porém pode acontecer que J não é sobrejetiva.

Definição 2.3.32. *Dizemos que X é um espaço reflexivo se a aplicação $J : X \to X^{**}$ é sobrejetiva.*

Várias propriedades dos espaços duais podem ser encontradas em [3, 5]. Em particular, o seguinte teorema será útil em nossa futura análise.

Teorema 2.3.33. *Seja X um espaço de Banach reflexivo, e (x_n) uma sequência limitada em X. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fracamente para um elemento $x \in X$, isto é*

$$\langle f, x_{n_k}\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in X^*.$$

Demonstração. Ver Teorema 3.18, página 69 de [5]. ∎

2.4 Potência Fracionária de Operadores

Consideremos H um espaço de Hilbert real e separável de dimensão infinita, e A um operador linear autoadjunto, estritamente positivo, com inversa compacta, definido num conjunto denso $\mathcal{D}(A) \subset H$. O objetivo desta seção é definir a raiz quadrada do operador A, e obter propriedades tais como

$$\langle Au, v\rangle = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle, \quad \text{para } u, v \in \mathcal{D}(A),$$

que é uma generalização, quando $A = -\Delta$, da igualdade

$$\int_\Omega v\Delta u = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v,$$

onde $u, v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, com Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, com fronteira de classe C^2.

Antes de definir a raiz quadrada de A, enunciemos o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1. *Seja B um operador linear compacto, simétrico e não nulo em H. Então podemos construir uma sequência (μ_n) de autovalores não nulos de A e uma sequência (v_n) de autovetores correspondentes tais que:*

i) $|\mu_n| \geqslant |\mu_{n+1}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\mu_n \longrightarrow 0$, *quando* $n \longrightarrow \infty$;

ii) $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é um conjunto ortonormal completo de H e é válida a representação*

$$Bu = \sum_{n\geqslant 1}\langle Bu, v_n\rangle v_n = \sum_{n\geqslant 1}\mu_n\langle u, v_n\rangle v_n, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A). \tag{2.2}$$

Aplicando o teorema acima ao operador $B = A^{-1}$, segue que existe uma sequência (μ_n) de autovalores positivos de B, e uma coleção (v_n) de autovetores que satisfazem as propriedades do teorema. Logo, definindo $\lambda_j = 1/\mu_j$, $j = 1, 2, \ldots$, temos que λ_j é autovalor de A associado ao autovetor v_j. Da primeira propriedade do teorema segue que

$$\lambda_{n+1} \geqslant \lambda_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda_j \longrightarrow \infty, \text{ quando } j \longrightarrow \infty.$$

E como $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo, temos também que

$$Au = \sum_{n\geqslant 1}\langle Au, v_n\rangle v_n = \sum_{n\geqslant 1}\lambda_n\langle u, v_n\rangle v_n, \ \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Sendo assim, definamos o operador $A^{1/2}$, como segue

$$\mathcal{D}(A^{1/2}) = \left\{u \in H : \sum_{n\geqslant 1}\lambda_n|\langle u, v_n\rangle|^2 < \infty\right\}, \ A^{1/2}u = \sum_{n\geqslant 1}\lambda_n^{1/2}\langle u, v_n\rangle v_n.$$

Note que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$. De fato, seja $u \in \mathcal{D}(A)$ então $Au \in H$, e da Identidade de Parseval

$$\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n^2|\langle u, v_n\rangle|^2 = \|Au\|^2 < \infty.$$

Por outro lado, como $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então

$$\lambda_1\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n|\langle u, v_n\rangle|^2 \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\lambda_n^2|\langle u, v_n\rangle|^2 < \infty,$$

isto é,

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n |\langle u, v_n\rangle|^2 < \infty$$

e portanto $u \in \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Além disso, para $u \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned}
A^{1/2}(A^{1/2}u) &= A^{1/2}\left(\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n^{1/2}\langle u, v_n\rangle v_n\right) \\
&= \sum_{m\geqslant 1} \lambda_m^{1/2}\left\langle \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n^{1/2}\langle u, v_n\rangle v_n, v_m \right\rangle v_m \\
&= \sum_{m\geqslant 1} \lambda_m^{1/2} \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n^{1/2}\langle u, v_n\rangle \langle v_n, v_m\rangle v_m \\
&= \sum_{m\geqslant 1} \lambda_m^{1/2}\lambda_m^{1/2}\langle u, v_m\rangle v_m \\
&= Au.
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação escrevamos $V = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Em V definamos a norma

$$\langle u, v\rangle_V = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle, \ \forall u, v \in V.$$

Temos assim que V é denso em H, e como

$$\|u\|_V^2 = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n |\langle u, v_n\rangle|^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{n\geqslant 1} |\langle u, v_n\rangle|^2 = \lambda_1 \|u\|^2,$$

temos que a injeção $V \hookrightarrow H$ é contínua. A desigualdade acima é uma versão abstrata da desigualdade de Poincaré, que pode ser reescrita como

$$\|v\|_H^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \tag{2.3}$$

Se considerarmos $W = \mathcal{D}(A)$ com a norma $\|u\|_W = \|Au\|_H$, então

$$\|u\|_V^2 = \|A^{1/2}u\|_H^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|A^{1/2}u\|_V^2 = \frac{1}{\lambda_1}\|u\|_W^2,$$

portanto $W \hookrightarrow V$.

Sejam $u, v \in \mathcal{D}(A)$ então

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{n\geqslant 1} \langle \lambda_n \langle u, v_n\rangle v_n, v\rangle = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \langle u, v_n\rangle \langle v, v_n\rangle.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle &= \left\langle \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n^{1/2}\langle u, v_n\rangle v_n, \sum_{m\geqslant 1} \lambda_m^{1/2}\langle v, v_m\rangle v_m \right\rangle \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \langle u, v_n\rangle \langle v, v_n\rangle,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\langle Au, v\rangle = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle = \langle u, v\rangle_V, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A),$$

e esta igualdade será frequentemente usada.

Teorema 2.4.2. *W e V são espaços de Hilbert.*

Demonstração. Seja (u_m) uma sequência de Cauchy em W, logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geqslant N$ então

$$\|u_m - u_n\|_W < \varepsilon,$$

ou ainda $\|Au_m - Au_n\|_H < \varepsilon$, e como H é completo existe $w \in H$ tal que $Au_n \longrightarrow w$, e como A é sobrejetivo existe $v \in W$ tal que $w = Av$, e assim

$$\|u_n - v\|_W = \|Au_n - w\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty,$$

e portanto W é completo.

Para V, basta aplicar o mesmo racíocinio. Neste caso, precisamos apenas verificar que $A^{1/2}$ é sobrejetivo. De fato, para $w \in H$ definamos $u \in V$ como

$$u = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\lambda_n^{1/2}} \langle w, v_n \rangle v_n,$$

e como $\langle u, v_k \rangle = \lambda_k^{-1/2} \langle w, v_k \rangle$ segue que $u \in V$ e é fácil verificar que

$$A^{1/2} u = w,$$

donde segue a sobrejetividade de $A^{1/2}$ e portanto V é um espaço de Hilbert.

■

Teorema 2.4.3. *Temos que $W \Subset V$ e $V \Subset H$.*

Demonstração. Provemos que $V \Subset H$. Seja $u \in V \subset H$ tal que $\|u\|_H = 1$, então

$$u = \sum_{n \geqslant 1} \langle u, v_n \rangle_H v_n,$$

consideremos o operador $I_k : V \longrightarrow H$ dado por

$$I_k u = \sum_{j=1}^{k} \langle u, v_j \rangle_H v_j.$$

Como a dimensão de $I_k(V)$ é finita e I_k é claramente linear e limitada então do Teorema 2.3.29 segue que, para todo $k \in \mathbb{N}$, I_k é um operador compacto. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geqslant K$ então

$$\|I_k u - u\|_H < \varepsilon,$$

ou seja

$$\|I_k - I\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } k \longrightarrow \infty.$$

Assim, do Teorema 2.3.30 segue que o operador identidade $I : V \longrightarrow H$ é compacto, isto é $V \Subset H$.

Com um raciocínio totalmente análogo, prova-se que $W \Subset V$. ■

Teorema 2.4.4. *Temos que $V^* = \mathcal{D}(A^{1/2})^* \approx \mathcal{D}(A^{-1/2})$, onde*

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \left\{ u \in H : \sum_{n \geqslant 1} \lambda_n^{-1} |\langle u, v_n \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{D}(A^{1/2})^*$ e consideremos

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(v_k)}{\lambda_k^2} v_k, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$|f(x_n)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(v_k)^2}{\lambda_k^2} \leqslant \|f\| \|x_n\|_V \leqslant C\|f\| \|Ax_n\|_H = C\|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f(v_k)^2}{\lambda_k^2} \right)^{1/2},$$

onde C é uma constante devido a $W \hookrightarrow V$. Ou seja

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(v_k)^2}{\lambda_k^2} \leqslant C^2 \|f\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo n tender a infinito e usando o Teorema de representação de Riesz, segue que existe um único $v \in V$ tal que $f(v_k) = \langle v, v_k \rangle_V = \lambda_k^{1/2} \langle A^{1/2} v, v_k \rangle$, logo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |\langle A^{1/2} v, v_k \rangle|^2 < \infty,$$

e portanto $w = A^{1/2} v \in \mathcal{D}(A^{-1/2})$. Consideremos agora a aplicação injetiva $T : V^* \to \mathcal{D}(A^{-1/2})$, dada por $Tf = w$, para $f \in V^*$. Para finalizar a prova, basta mostrar que T é sobrejetiva. Seja $w \in \mathcal{D}(A^{-1/2})$, definamos $g \in V^*$ como

$$g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w, v_k \rangle \langle u, v_k \rangle, \quad u \in V.$$

Daí $g(v_k) = \langle w, v_k \rangle_H$, para todo $k \in \mathbb{N}$, logo $Tg = w$.

■

2.5 Semigrupos de Operadores Limitados

Nesta seção, primeiramente serão apresentados conceitos fundamentais da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, alguns teoremas de estabilidade, e em seguida apresentamos o problema de Cauchy e um teorema de boa colocação do mesmo.

No que se segue X denotará um espaço de Banach real ou complexo, e $L(X)$ denotará o espaço dos operadores lineares contínuos definidos em X e $\|\cdot\|_X$ denotará a norma em X. Em $L(X)$ consideremos a norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_X, \quad T \in L(X).$$

2.5.1 Conceitos Básicos

Definição 2.5.1. *Um semigrupo de operadores lineares limitados em X é uma função $S : [0, \infty) \to L(X)$, denotada por $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$, tal que*

i. $S(0) = I$ *(operador identidade);*

ii. $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para todos* $t, s \geqslant 0$.

Se além disso

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0, \qquad \text{para cada } x \in X,$$

então dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo, ou de classe C_0.

Definição 2.5.2. *Dizemos que o semigrupo* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ *é uniformemente limitado se existe* $M \geqslant 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leqslant M$, *para todo* $t \geqslant 0$. *Se* $M = 1$ *dizemos que* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ *é um semigrupo de contrações.*

Definição 2.5.3. *Seja* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ *um semigrupo* C_0, *para* $h > 0$ *consideremos o operador*

$$A_h = \frac{S(h) - I}{h}.$$

O gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$, *é o operador* $A : D(A) \subset X \to X$, *definido por*

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X : \exists \lim_{h \to 0^+} A_h x\} \quad e \quad Ax = \lim_{h \to 0^+} A_h x.$$

Teorema 2.5.4. *Se* A *é gerador infinitesimal de dois semigrupos fortemente contínuos* $\{S_1(t)\}_{t \geqslant 0}$, $\{S_2(t)\}_{t \geqslant 0}$, *então* $S_1(t) = S_2(t)$, $\forall t \geqslant 0$.

Demonstração. Ver [10], teorema 2.6, página 6. ∎

Proposição 2.5.5. *Seja* A *o gerador de um semigrupo* C_0, $S(t)$, *num espaço de Hilbert* X, *então*

$$\frac{d}{dt}\|S(t)x\|^2 = 2\langle AS(t)x, S(t)x\rangle_X.$$

Demonstração. Ver [4]. ∎

Definição 2.5.6. *Um operador linear* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ *é dito dissipativo se para cada* $x \in \mathcal{D}(A)$ *existe* $x^* \in J(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$, *tal que*

$$\langle x^*, Ax\rangle \leqslant 0,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota a dualidade entre* X^* *e* X. *Se adicionalmente, o operador* $(\lambda - A) : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ *for sobrejetivo para algum* $\lambda > 0$, *dizemos que* A *é m-dissipativo.*

Observação 2.5.7. *Pelo teorema de Hahn-Banach,* $J(x) \neq \emptyset$ *e se* X *é um espaço de Hilbert, usando o teorema da representação de Riesz, podemos identificar* X^* *com* X. *Neste caso* $J(x) = \{x\}$, *e consequentemente,* A *é dissipativo se, e somente se,*

$$\langle Ax, x\rangle_X \leqslant 0, \ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Teorema 2.5.8 (Lumer-Phillips). *O operador linear* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ *é o gerador de um semigrupo de contrações se, e somente se,* A *é m-dissipativo e densamente definido.*

Demonstração. Ver [2], página 83. ∎

2.5.2 O Problema de Cauchy

Introduzimos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x, & x \in X \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $u : \mathbb{R}^+ \to X$, e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ é um operador linear.

Definição 2.5.9. *Uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$ é dita uma solução forte do problema de Cauchy* (2.4) *se $u \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(A)) \cap C^1((0, +\infty), X)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t \geqslant 0$ e u satisfaz* (2.4)*.*

O seguinte teorema exprime, de certo modo, a importância da teoria de semigrupos aplicado a equações diferenciais de evolução.

Teorema 2.5.10. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um gerador de um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Então, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, a função*

$$u : t \longmapsto u(t) := S(t)x$$

é a única solução forte de (2.4)*.*

Demonstração. Ver [2], página 145. ∎

2.5.3 Teoremas de Estabilidade

Vamos apresentar dois importantíssimos teoremas para o estudo da estabilidade de semigrupos.

Definição 2.5.11. *Dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é assintoticamente estável se*

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

Da mesma forma, dizemos que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável, se existem $M \geqslant 1$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{-\varepsilon t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Teorema 2.5.12. *Seja $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ um semigrupo C_0. Então $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se*

$$\|S(t_*)\| < 1,$$

para algum $t_* > 0$.

Demonstração. Se $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável então existe $\varepsilon > 0$ e $M \geqslant 1$ tal que $\|S(t)\| \leqslant Me^{-\varepsilon t}$, então basta tomar t_* tal que $e^{-\varepsilon t_*} < 1/M$.

Assumamos agora que existe t_* tal que $\|S(t_*)\| < 1$. Sabe-se da teoria básica de semigrupos que $\|S(t)\|$ é limitado em intervalos limitados, logo existe $C > 0$ tal que $\|S(t)\| < C$, para todo $t \in [0, t_*]$. Consideremos $t \geqslant 0$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, t_*]$ tal que $t = nt_* + r$, daí

$$n = \frac{t}{t^*} + \frac{r}{t^*},$$

assim, sendo $N = \|S(t^*)\| < 1$,

$\|S(t)\| = \|S(nt_* + r)\| = \|S(nt_*)S(r)\| = \|S(t_*)^n S(r)\| \leqslant \|S(t_*)\|^n \|S(r)\| \leqslant N^{t/t_*} C^{1+r/t^*}$.

E como $r \in [0, t^*]$ segue que existe $M > 0$ tal que

$$C^{1+r/t^*} \leqslant M, \quad \forall r \in [0, t^*].$$

Note que $N^{t/t_*} = e^{\omega t}$, onde $\omega = \ln(N)/t_* < 0$. Denotando $\varepsilon = -\omega$, temos que

$$\|S(t)\| \leqslant M e^{-\varepsilon t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

■

Teorema 2.5.13. *Seja A o gerador de um semigrupo de contrações de classe C_0, $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ em um espaço de Banach X. Então $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda - A)x\|_X \geqslant \delta \|x\|_X.$$

Demonstração. Ver [16]. ■

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Solução

Neste capítulo vamos introduzir a equação, fazer a formulação abstrata para aplicar a teoria de semigrupos, verificar a existência e unicidade de solução e fazer algumas observações que serão úteis para o estudo da estabilidade.

3.1 Apresentação da Equação

Seja H um espaço de Hilbert real e separável, e seja A um operador linear auto adjunto estritamente positivo em H com inversa compacta, definido num domínio $D(A) \subset H$ denso. Da análise feita na Seção 1.4 sabemos que existe uma sequência crescente, (λ_n), de autovalores de A, com $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, e uma sequência ortonormal completa (v_n) em H de autovetores correspondentes. Para $t > 0$, consideremos a equação integro-diferencial abstrata

$$\partial_{tt}u(t) + Au(t) - \int_0^\infty \mu(s)Au(t-s)ds = 0, \tag{3.1}$$

onde o núcleo de memória, $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, \infty)$ é uma função quase sempre diferenciável, decrescente e integrável de massa total

$$\kappa = \int_0^\infty \mu(s)ds \in (0, 1).$$

A equação (3.1) é completada com as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ \partial_t u(0) = v_0, \\ u(-s)|_{s>0} = \phi_0(s), \end{cases} \tag{3.2}$$

onde u_0, $v_0 \in H$ e $\phi_0 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow H$ são dadas. Note ϕ_0 descreve o comportamento da solução no passado. Em equações viscoelásticas, o comportamento da solução em um tempo $t > 0$ leva em consideração todo o passado, o que é descrito pelo termo integral na equação (3.1).

Observação 3.1.1. *Se considerarmos em particular $H = L^2(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é aberto e limitado, com fronteira de classe C^2, e $A = -\Delta$, com $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, a equação* (3.1) *fica*

$$\partial_{tt}u(t) - \Delta u(t) + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds = 0$$

com a condição de compatibilidade $u(t)|_{\partial\Omega} = 0$. *A equação acima modela a evolução de um sólido linearmente viscoelástico ocupando uma região* Ω *cujo deslocamento transversal é* u.

Denotemos com V o espaço $D(A^{1/2})$, com o produto interno $\langle u, v\rangle_V = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle_H$, para todos $u, v \in V$, o mesmo introduzido nas preliminares. Denotemos também $\mathcal{M} = L^2_\mu(\mathbb{R}^+, V)$. A seguir, damos uma definição de solução fraca para a equação (3.1)-(3.2).

Definição 3.1.2 (Solução fraca). *Seja* $(u_0, v_0, \phi_0) \in V \times H \times \mathcal{M}$. *Uma função* $u : \mathbb{R} \to V$ *é dita uma solução fraca do problema de Cauchy* (3.1) *se*

$$u \in C([0, t_0], V) \cap C^1([0, t_0], H), \qquad \forall t_0 > 0,$$

u *satisfaz as condições* (3.2) *em* $t = 0$, *e a igualdade*

$$\langle \partial_{tt} u(t), w\rangle + \langle u(t), w\rangle_V - \int_0^\infty \mu(s)\langle u(t-s), w\rangle_V ds = 0$$

é válida para todo $w \in V$ *e para quase todo* $t > 0$, *onde* $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *denota o produto de dualidade entre* $V^* = \mathcal{D}(A^{-1/2})$ *e* V.

3.2 Formulação Abstrata

Ainda seguindo as notações já introduzidas, vamos transformar a equação (3.1)-(3.2), em uma equação equivalente do tipo (2.4). Para isso, como Dafermos fez em [11, 12], vamos introduzir uma nova função auxiliar

$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \quad t \geqslant 0, \ s > 0.$$

A fim de acoplar esta função auxiliar a equação (3.1) observe que

$$\partial_t \eta^t(s) = \partial_t u(t) - \partial_t u(t-s),$$

$$\partial_s \eta^t(s) = \partial_t u(t-s),$$

e $\eta^t(0) = 0$, $\eta^0(s) = u(0) - u(-s) = u_0 - \phi_0(s)$. Portanto $\eta^t(s)$, para $t \geqslant 0$ e $s > 0$, deve satisfazer o problema

$$\begin{cases} \partial_t \eta^t(s) = -\partial_s \eta^t(s) + \partial_t u(t), \\ \eta^t(0) = 0, \\ \eta^0(s) = u_0 - \phi_0(s). \end{cases}$$

Assim, temos que $u(t-s) = u(t) - \eta^t(s)$, e portanto

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(t) + Au(t) - \int_0^\infty \mu(s) Au(t-s) ds \\ &= \partial_{tt} u(t) + Au(t) - \int_0^\infty \mu(s) A(u(t) - \eta^t(s)) ds \\ &= \partial_{tt} u(t) + A\left((1-\kappa)u(t) + \int_0^\infty \mu(s)\eta^t(s) ds\right). \end{aligned}$$

Para formalizar o problema no contexto de semigrupos, vamos introduzir na equação o semigrupo de translações a direita em $\mathcal{M}$, dado por

$$(R(t)\eta)(s) = \begin{cases} \eta(s-t) & s \geqslant t, \\ 0 & 0 < s < t. \end{cases} \tag{3.3}$$

No Apêndice A provamos que o gerador deste semigrupo é o operador linear T dado por

$$T\eta(s) = -D\eta(s), \quad \mathcal{D}(T) = \{\eta \in \mathcal{M} : D\eta \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0\},$$

onde D é o operador derivada fraca, e $\eta(0) = \lim_{s \to 0^+} \eta(s)$ em V.

Considerando

$$\omega = \frac{1-\kappa}{\kappa},$$

temos o sistema

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t) + A\left(\kappa\omega u(t) + \int_0^\infty \mu(s)\eta^t(s)ds\right) = 0, \\ \partial_t \eta^t = T\eta^t + \partial_t u(t), \end{cases} \tag{3.4}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ \partial_t u(0) = v_0, \\ \eta^0 = \eta_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $\eta_0 = u_0 - \phi_0(s)$.

Mais adiante mostraremos que o problema (3.1)-(3.2) é equivalente ao problema (3.4)-(3.5), isto é, as soluções de ambos os problemas são exatamente as mesmas. Vamos agora formalizar o problema de Cauchy abstrato. Consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = V \times H \times \mathcal{M},$$

com a norma induzida pelo produto interno

$$\langle (u, v, \eta), (u', v', \eta') \rangle_{\mathcal{H}} = \kappa\omega \langle u, u' \rangle_V + \langle v, v' \rangle_H + \langle \eta, \eta' \rangle_{\mathcal{M}},$$

para todo $(u, v, \eta), (u', v', \eta') \in \mathcal{H}$. Neste espaço consideremos o operador linear dado por

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \left\{(u, v, \eta) \in \mathcal{H} : v \in V, \kappa\omega u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds \in \mathcal{D}(A), \eta \in \mathcal{D}(T)\right\},$$

e

$$\mathbb{A}(u, v, \eta) = \left(v, -A\left(\kappa\omega u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds\right), T\eta + v\right).$$

Logo, sendo

$$\xi(t) = (u(t), v(t), \eta^t) \quad \text{e} \quad \xi_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H},$$

o sistema (3.4)-(3.5) tem a forma abstrata

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \mathbb{A}\xi(t), \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $\dot{\xi}(t) = (\partial_t u(t), \partial_t v(t), \partial_t \eta^t)$.

3.3 O Semigrupo de Soluções do Sistema (3.6)

Provaremos aqui que o operador $\mathbb{A}$ é gerador de um semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$, junto com uma identidade de energia do semigrupo. No final, identificaremos explicitamente a terceira componente do vetor solução e provaremos a equivalência dos problemas (3.1)-(3.2) e (3.4)-(3.5).

Já mencionamos que o núcleo de memória é uma função decrescente de massa total κ, com $0 < \kappa < 1$. Além disso, supomos que existe uma sequência estritamente crescente (s_n), com $s_0 = 0$, possivelmente finita, ou convergindo para $s_\infty \in (0, \infty]$, tal que μ é descontínua em cada s_n, $n > 0$, e é absolutamente contínua em cada intervalo (s_{n-1}, s_n), e no intervalo (s_∞, ∞) se definido.

Observação 3.3.1. *Note que do Teorema 2.2.3, temos que μ é quase sempre diferenciável, e também concluí-se que $\mu'(s) \leqslant 0$ para quase todo $s \in \mathbb{R}^+$. Note também que μ pode ser ilimitada numa vizinhança da origem.*

Denotemos

$$S_\infty = \sup\{s \in \mathbb{R}^+ : \mu(s) > 0\} \in (0, \infty],$$

e para $\eta \in \mathcal{D}(T)$, definimos

$$\mathbb{J}[\eta] = \sum_{n \geqslant 1} [\mu(s_n^+) - \mu(s_n^-)] \|\eta(s_n)\|_V^2.$$

Antes de enunciar e provar o principal teorema deste capítulo, provemos o seguinte lema.

Lema 3.3.2. *Seja $\eta \in \mathcal{D}(T)$. Então*

$$2\langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \mu'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds + \mathbb{J}[\eta].$$

Demonstração. Se μ tem um número finito de descontinuidades então a prova é simples. Assumamos que μ tem um número infinito de descontinuidades, então

$$2\langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} = -2\int_0^{s_\infty} \mu(s)\langle D\eta(s), \eta(s)\rangle_V ds - 2\int_{s_\infty}^{S_\infty} \mu(s)\langle D\eta(s), \eta(s)\rangle_V ds \tag{3.7}$$

onde a segunda integral ocorre apenas se $s_\infty < S_\infty$. Note que

$$\mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 = \mu(s)\left\|\int_0^s D\eta(y)dy\right\|_V^2 \leqslant \left\{\int_0^s \sqrt{\mu(y)}\|D\eta(y)\|_V dy\right\}^2 \leqslant s\|D\eta\|_{\mathcal{M}}^2,$$

logo

$$\lim_{s\to 0^+} \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 = 0.$$

Portanto, integrando por partes nos intervalos (s_{n-1}, s_n), obtemos

$$\begin{aligned}
-2&\int_0^{s_\infty} \mu(s)\langle D\eta(s), \eta(s)\rangle_V ds \\
&= -\int_0^{s_\infty} \mu(s)\frac{d}{ds}\|\eta(s)\|_V^2 ds \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\int_0^{s_n} \mu'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds + \sum_{n=1}^{N-1}\left[\mu(s_n^+) - \mu(s_n^-)\right]\|\eta(s_n)\|_V^2 - \mu(s_N^-)\|\eta(s_N)\|_V^2\right).
\end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é finito, e os termos do lado direito são todos negativos, concluímos que

$$-2\int_0^{s_\infty} \mu(s)\langle D\eta(s),\eta(s)\rangle_V ds$$
$$= \int_0^{s_\infty} \mu'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu(s_n^+)-\mu(s_n^-)\right]\|\eta(s_n)\|_V^2 - \lim_{N\to\infty}\mu(s_N^-)\|\eta(s_N)\|_V^2.$$

Calculemos o último limite. Se $s_\infty < \infty$ então como $\mu(s)\|\eta(s)\|_V^2$ é contínua numa vizinhança a esquerda de s_N temos que o limite é zero. Se $s_\infty = S_\infty = \infty$, então como μ é decrescente, não-negativa e integrável temos que

$$\mu(s) \leqslant \int_{s-1}^{s}\mu(y)dy \leqslant \int_{s-1}^{\infty}\mu(y)dy \Rightarrow \lim_{s\to\infty}\mu(s) = 0. \tag{3.8}$$

Além disso, para $a > 0$ fixado tem-se

$$\begin{aligned}\mu(s_N^-)\|\eta(s_N)\|_V^2 - \mu(s_N^-)\|\eta(a)\|_V^2 &= \mu(s_N^-)\int_a^{s_N}\frac{d}{ds}\|\eta(s)\|_V^2 ds\\ &\leqslant \int_a^{s_N}\mu(s)2\langle D\eta(s),s\rangle_V ds\\ &= 2\int_a^{s_N}\langle\sqrt{\mu(s)}D\eta(s),\sqrt{\mu(s)}\eta(s)\rangle_V ds\\ &\leqslant 2\int_a^{\infty}\sqrt{\mu(s)}\|D\eta(s)\|_V\sqrt{\mu(s)}\|\eta(s)\|_V ds\\ &\leqslant 2\left\{\int_a^{\infty}\mu(s)\|D\eta(s)\|_V^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^{\infty}\mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Agora para $\varepsilon > 0$, como $\eta \in \mathcal{D}(T)$, temos que existe $a > 0$ tal que

$$\int_a^{\infty}\mu(s)\|D\eta(s)\|_V^2 ds < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \int_a^{\infty}\mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

e de (3.8) existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(s_N^-) < \frac{\varepsilon}{2\|\eta(a)\|_V^2}, \quad \forall N > N_0.$$

Portanto da estimativa acima segue que

$$\mu(s_N^-)\|\eta(s_N)\|_V^2 < \varepsilon, \quad \forall N > N_0.$$

Assim, $\lim\limits_{N\to\infty}\mu(s_N^-)\|\eta(s_N)\|_V^2 = 0$. Resumindo

$$\lim_{N\to\infty}\mu(s_N^-)\|\eta(s_N)\|_V^2 = \begin{cases}\mu(s_\infty^-)\|\eta(s_\infty)\|_V^2 & se \;\; s_\infty < \infty,\\ 0 & se \;\; s_\infty = S_\infty = \infty.\end{cases}$$

Note também que, se $s_\infty = S_\infty < \infty$, então $\mu(s_\infty^+)\|\eta(s_\infty)\|_V^2 = 0$.
Se $s_\infty < S_\infty$, então integrando por partes a segunda integral de (3.7) obtemos

$$-2\int_{s_\infty}^{S_\infty}\mu(s)\langle D\eta(s),\eta(s)\rangle_V ds$$
$$= \int_{s_\infty}^{S_\infty}\mu'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds + \mu(s_\infty^+)\|\eta(s_\infty)\|_V^2 - \lim_{s\to S_\infty}\mu(s)\|\eta(s)\|_V^2.$$

Para finalizar a prova só nos resta mostrar que o último limite é zero. De fato, como

$$\eta(s) - \eta(s_\infty) = \int_{s_\infty}^{s} D\eta(y)dy,$$

temos que

$$\lim_{s \to S_\infty} \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 \leqslant \limsup_{s \to s_\infty} \left(\sqrt{\mu(s)}\|\eta(s_\infty)\|_V + \int_{s_\infty}^{S_\infty} \sqrt{\mu(s)}\chi_{(s_\infty, s)}(y)\|D\eta(y)\|_V dy \right)^2.$$

De (3.8) temos que $\mu(s) \to 0$ quando $s \to S_\infty$, logo o primeiro termo do lado direito converge a zero, e o segundo, através do teorema da convergência dominada, escolhendo $\sqrt{\mu(y)}\|D\eta(y)\|_V$ como função dominante, também converge para zero.

■

Teorema 3.3.3. *O problema de Cauchy* (3.6) *gera um semigrupo C_0, denotado por $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$, de contrações em $\mathcal{H}$, o qual satisfaz*

$$\frac{d}{dt}\|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds + \mathbb{J}[\eta^t], \tag{3.9}$$

para todo $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$.

Demonstração. Para provar que $\mathbb{A}$ é gerador de um semigrupo C_0 de contrações usaremos o teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.5.8). Para isso, devemos mostrar que

i) $\mathbb{A}$ é densamente definido;

ii) $\mathbb{A}$ é dissipativo;

iii) $Im(I - \mathbb{A}) = \mathcal{H}$.

De fato, como

$$\mathcal{D}(A) \times V \times C_0^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(A)) \subset \mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H},$$

segue que $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ é denso em $\mathcal{H}$, logo verifica-se *(i)*. Mostremos *(ii)*. Note que para todo $z = (u, v, \eta) \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{A}z, z\rangle_{\mathcal{H}} &= \kappa\omega\langle v, u\rangle_V + \left\langle -A\left(\kappa\omega u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds\right), v\right\rangle_H + \langle T\eta + v, \eta\rangle_{\mathcal{M}} \\
&= \kappa\omega\langle v, u\rangle_V - \kappa\omega\langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle_H - \int_0^\infty \mu(s)\langle A^{1/2}\eta(s), A^{1/2}v\rangle_H ds \\
&\quad + \langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} + \langle v, \eta\rangle_{\mathcal{M}} \\
&= \langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Logo do lema anterior temos que

$$\langle \mathbb{A}z, z\rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} \leqslant 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathbb{A}), \tag{3.10}$$

e assim temos (ii). Provemos agora *(iii)*. Seja $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\eta}) \in \mathcal{H}$ e encontremos $z = (u, v, \eta) \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ tal que $(I - \mathbb{A})z = \bar{z}$, ou seja,

$$\begin{cases} u - v = \bar{u}, \\ v + A\left(\kappa\omega u + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds\right) = \bar{v}, \\ \eta + D\eta - v = \bar{\eta}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Quanto a terceira equação, com $\eta(0)=0$, temos

$$\eta(s)+D\eta(s)=\bar{\eta}(s)+v \quad \Rightarrow \quad e^s\eta(s)=(e^s-1)v+\int_0^s e^y\bar{\eta}(y)dy.$$

Assim

$$\eta(s)=(1-e^{-s})v+(E\circledast\bar{\eta})(s), \tag{3.12}$$

onde $E(s)=e^{-s}$ e a convolução $(\circledast)$ é definida na Definição 2.3.22. Substituindo esta expressão na segunda equação de (3.11), com a primeira, temos

$$v+\gamma Av=w, \tag{3.13}$$

onde

$$\gamma=\kappa\omega+\int_0^\infty \mu(s)(1-e^{-s})ds>0,$$

e

$$w=\bar{v}-A\left(\kappa\omega\bar{u}+\int_0^\infty \mu(s)(E\circledast\bar{\eta})(s)ds\right).$$

Verifiquemos que a equação (3.13) tem uma única solução v. Para isso consideremos o problema variacional associado a (3.13),

$$b(v,\varphi)=\langle w,\varphi\rangle, \quad \forall\varphi\in V,$$

onde $b:V\times V\to\mathbb{R}$ é dado por

$$b(v,\varphi)=\langle v,\varphi\rangle_H+\gamma\langle A^{1/2}v,A^{1/2}\varphi\rangle_H, \quad \forall(v,\varphi)\in V\times V.$$

Note que $w\in V^*$, pois

$$\begin{aligned}\|w\|_{V^*}&\leqslant\|\bar{v}\|_{V^*}+\kappa\omega\|A^{-1/2}A\bar{u}\|_H+\int_0^\infty \mu(s)(E\circledast\|A^{-1/2}A\bar{\eta}\|_H)(s)ds\\ &=\|\bar{v}\|_{V^*}+\kappa\omega\|\bar{u}\|_V+\int_0^\infty \mu(s)(E\circledast\|\bar{\eta}\|_V)(s)ds,\end{aligned}$$

e como μ é decrescente e da desigualdade (2.1) temos as estimativas

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu(s)(E\circledast\|\bar{\eta}\|_V)(s)ds &\leqslant \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)}(E\circledast\sqrt{\mu}\|\bar{\eta}\|_V)(s)ds\\ &\leqslant \sqrt{\kappa}\|E\circledast\sqrt{\mu}\|\bar{\eta}\|_V\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\\ &\leqslant \sqrt{\kappa}\|\sqrt{\mu}\|\bar{\eta}\|_V\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\\ &= \|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

Assim a aplicação $\langle w,\cdot\rangle$ define um funcional sesquilinear contínuo. Seja $(v,\varphi)\in V\times V$, temos da desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré que

$$\begin{aligned}|b(v,\varphi)|&\leqslant|\langle v,\varphi\rangle_H|+\gamma|\langle A^{1/2}v,A^{1/2}\varphi\rangle_H|\\ &=(\lambda_1+\gamma)\|v\|_V\|\varphi\|_V,\end{aligned}$$

ou seja, b é limitada e da desigualdade de Poincaré (2.3)

$$b(v,v)=\|v\|_H^2+\gamma\|A^{1/2}v\|_H^2\geqslant(1+\lambda_1\gamma)\|v\|_H^2,$$

temos que b é coerciva. Do teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.3.3) segue que existe um único $v \in V$ tal que $b(v, \varphi) = \langle w, \varphi \rangle$. Portanto v é solução de (3.13).

Da primeira equação de (3.11) temos que $u = \bar{u} + v \in V$, e também de (3.11) temos que

$$\kappa\omega u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds = A^{-1}(\bar{v} - v) \in \mathcal{D}(A).$$

Para completar a prova de *(iii)* falta apenas mostrar que o η dado em (3.12) pertence a $\mathcal{D}(T)$. Primeiramente note que $\eta(0) = 0$, e da terceira equação de (3.11), temos que $\eta \in \mathcal{M}$ se, e somente se, $D\eta \in \mathcal{M}$, logo basta mostrar que $\eta \in \mathcal{M}$. De fato, usando a desigualdade (2.1), temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 &= \int_0^\infty \|\eta(s)\|_V^2 \mu(s)ds \\
&= \int_0^\infty \|(1 - e^{-s})v + (E *_s \bar{\eta})(s)\|_V^2 \mu(s)ds \\
&\leqslant \int_0^\infty \left(2(1 - e^{-s})\|v\|_V^2 + 2\|E *_s \bar{\eta}(s)\|_V^2\right) \mu(s)ds \\
&\leqslant 2\kappa\|v\|_V^2 + 2\|E *_s \|\bar{\eta}\|_V \sqrt{\mu}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\
&\leqslant 2\kappa\|v\|_V^2 + 2\|E\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^2 \|\|\bar{\eta}\|_V \sqrt{\mu}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\
&= 2\kappa\|v\|_V^2 + 2\|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos da proposição 2.5.5 e da igualdade em (3.10) que

$$\frac{d}{dt}\|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\langle \mathbb{A}S(t)z, S(t)z \rangle_{\mathcal{H}} = 2\langle T\eta^t, \eta^t \rangle_{\mathcal{M}},$$

e a igualdade de (3.9) segue do Lema 3.3.2. ∎

Observação 3.3.4. *Da terceira componente da solução temos*

$$\partial_t \eta^t(s) = T\eta^t(s) + \partial_t u(t).$$

Assim, usando o semigrupo (3.3), *temos que para* $y \leqslant t$

$$\begin{aligned}
\partial_y \left(R(t - y)\eta^y(s)\right) &= -R(t - y)T\eta^y(s) + R(t - y)\partial_y \eta^y(s) \\
&= -R(t - y)T\eta^y(s) + R(t - y)(T\eta^y(s) + \partial_y u(y)) \\
&= R(t - y)\partial_y u(y).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 *a* t *segue que*

$$\eta^t(s) = R(t)\eta^0(s) + \int_0^t R(t - y)\partial_y u(y)dy,$$

e daí obtemos a caracterização de η:

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t - s) & 0 < s \leqslant t, \\ \eta_0(s - t) + u(t) - u_0 & s > t. \end{cases} \tag{3.14}$$

E finalmente estamos prontos para provar a equivalência de soluções.

Proposição 3.3.5. *Uma função u é uma solução para o problema* (3.1)-(3.2) *se e somente se*

$$(u(t), \partial_t u(t), \eta^t) = S(t)(u_0, v_0, \eta_0),$$

com η^t como em (3.14) *e $\eta_0 = u_0 - \phi_0$.*

Demonstração. Devido a construção do problema a condição necessária é imediata. Vejamos agora a condição suficiente. Note que

$$(u(0), \partial_t u(0), \eta^0) = S(0)(u_0, v_0, \eta_0) = (u_0, v_0, \eta_0),$$

logo as condições em $t = 0$ são satisfeitas e do Teorema 2.5.10 tem-se que

$$u \in C([0, t_0], \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, t_0], H), \quad \forall t_0 > 0.$$

Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em V, então podemos estender continuamente u em V, isto é

$$u \in C([0, t_0], V) \cap C^1([0, t_0], H), \quad \forall t_0 > 0.$$

Além disso, de (3.14) e lembrando que $\eta_0(s) = u_0 - u(-s)$, temos que, para todo $w \in V$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle_V ds &= \int_0^t \mu(s)\langle u(t) - u(t-s), w\rangle_V ds \\ &\quad + \int_t^\infty \mu(s)\langle \eta_0(s-t) + u(t) - u_0, w\rangle_V ds \\ &= \kappa\langle u(t), w\rangle_V - \int_0^\infty \mu(s)\langle u(t-s), w\rangle_V ds.\end{aligned}$$

Portanto

$$-\int_0^\infty \mu(s)\langle u(t-s), w\rangle_V ds = -\kappa\langle u(t), w\rangle_V + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle_V ds,$$

e assim

$$\begin{aligned}&\langle \partial_{tt} u(t), w\rangle + \langle u(t), w\rangle_V - \int_0^\infty \mu(s)\langle u(t-s), w\rangle_V ds \\ &\qquad = \langle \partial_{tt} u(t), w\rangle + \langle u(t), w\rangle_V - \kappa\langle u(t), w\rangle_V + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle_V ds \\ &\qquad = \langle \partial_{tt} u(t), w\rangle + \langle \kappa\omega u(t) + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle_V ds, w\rangle_V \\ &\qquad = \langle \partial_{tt} u(t), w\rangle + \langle -A^{-1}\partial_{tt} u(t), w\rangle_V = 0.\end{aligned}$$

Logo, da Definição 3.1.2, u é solução de (3.1)-(3.2). ∎

Capítulo 4

Estabilidade Assintótica

Neste capítulo, vamos estudar a estabilidade assintótica do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Antes de começar o estudo da estabilidade, vamos dar nomes a alguns tipos especiais de núcleos.

Núcleos do tipo degrau: Núcleos da forma

$$\mu(s) = \sum_{n\geqslant 1} \gamma_n \chi_{[s_{n-1},s_n)}(s),$$

onde (γ_n) é uma sequência estritamente decrescente (possivelmente finita) de números positivos. Desta forma temos que

$$\sum_{n\geqslant 1} \gamma_n (s_n - s_{n-1}) = \kappa.$$

Núcleos ℓ-espaçado: São núcleos do tipo degrau, para o qual existe $\theta > 0$ e uma sequência (k_n) de números naturais, com $k_0 = 0$, tal que

$$s_n = \theta k_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que podemos redefinir a sequência (k_n), e assim teríamos um valor θ diferente. Por exemplo, se $p \in \mathbb{N}$ a sequência (pk_n), nos daria o mesmo núcleo acima com θ/p. A fim de unificar este tipo de núcleo, escolhemos o maior valor de θ para o qual existe a sequência de números naturais, a este valor denotemos com ℓ. Isto é

$$\ell = \sup\{\theta : \text{ existe } (k_n) \text{ tal que } s_n = \theta k_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Note que existe $(k'_n) \subset \mathbb{N}$ tal que $s_n = \ell k'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, das propriedades do supremo, existe uma sequência $(\theta_m) \subset \mathbb{R}$ tal que $\theta_m \to \ell$ e $s_n = \theta_m k_n^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Assim

$$k_n^m = \frac{s_n}{\theta_m} \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

donde segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$k_n^m \to k'_n = \frac{s_n}{\ell}, \text{ quando } m \to \infty.$$

Logo $s_n = \ell k'_n$.

Além disso, para a sequência (ℓk_n), temos que $mdc\{k_n\}_{k\in\mathbb{N}} = 1$. pois se $mdc\{k_n\}_{k\in\mathbb{N}} = p > 1$ então $k_n = pk'_n$, e daí $p\ell$ é um valor que supera ℓ e existe uma sequência de números naturais tal que $s_n = p\ell k'_n$, o que é um absurdo.

Núcleos Ressonantes: São núcleos ℓ-espaçado para o qual

$$\frac{\ell}{2\pi}\sqrt{\lambda_m} \in \mathbb{N},$$

para algum $m \in \mathbb{N}$. Lembrando que λ_m é o m-ésimo autovalor de A.

A importância dos núcleos ressonantes pode ser verificada na seguinte proposição.

Proposição 4.0.1. *Se μ é ressonante então $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ tem órbitas periódicas. Assim, em particular, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é estável.*

Demonstração. Como μ é ressonante, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\ell\sqrt{\lambda_m}}{2\pi} \in \mathbb{N}.$$

Consideremos

$$z = \Big(0, \sqrt{\lambda_m}v_m, \sin(\sqrt{\lambda_m}s)v_m\Big) \in \mathcal{D}(\mathbb{A}),$$

onde v_m é o autovetor associado a λ_m, então a solução do problema de Cauchy (3.6) com dado inicial z é dada por

$$u(t) = \sin(\sqrt{\lambda_m}t)v_m, \quad v(t) = \sqrt{\lambda_m}\cos(\sqrt{\lambda_m}t)v_m, \quad \eta^t(s) = u(t) - u(t-s),$$

a qual não é estável. De fato, temos diretamente que, $\partial_t u(t) = v(t)$, $\partial_t\eta^t(s) = -D\eta^t(s) + v(t)$ e

$$\partial_t v(t) = \kappa\omega Au(t) + \int_0^\infty \mu(s)A\eta^t(s)ds = -\lambda_m\left(\int_0^\infty \mu(s)\sin(\sqrt{\lambda_m}(t-s))ds\right)v_m = 0,$$

pois $\sin(\sqrt{\lambda_m}(t-s))$ é ℓ periódica de média zero, e μ é constante em cada intervalo da forma $[\ell k_{n-1}, \ell k_n)$. Portanto $S(t)z = S(t+\ell)z$ para todo $t > 0$, logo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ possuí órbitas periódicas.

■

O objetivo deste capítulo é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.0.2. *O semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é estável se, e somente se, o núcleo μ não é ressonante.*

Uma das implicações do teorema segue diretamente da proposição anterior. A outra implicação será provada de maneira construtiva, e seguirá diretamente dos próximos lemas. Antes de começar a demonstração, vamos fazer uma rápida análise do caso unidimensional.

Exemplo 4.0.3. *Vamos considerar a equação viscoelástica linear em uma dimensão, onde $H = L^2(0,\pi)$ e*

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi).$$

Não é difícil verificar que os autovalores de A são da forma $\lambda_m = m^2$, $\lambda \in \mathbb{N}$, assim tem-se que μ é ressonante se, e somente se, $\ell/\pi \in \mathbb{Q}$.

Consideremos $W = \mathcal{D}(A)$, com a norma $\|w\|_W = \|Aw\|_H$, e $\mathcal{L} = L^2_\mu(\mathbb{R}^+; W)$. Dado $\eta \in \mathcal{M}$, definamos as caudas de η como

$$\mathbb{T}[\eta; x] = \int_{(0,1/x)\cup(x,\infty)} \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds, \quad x \geqslant 1.$$

Lema 4.0.4. *Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D}(T)$ satisfazendo as seguintes hipóteses:*

$$\sup_{\eta\in\mathcal{C}} \|\eta\|_{\mathcal{L}} \leqslant Q, \quad \sup_{\eta\in\mathcal{C}} \|T\eta\|_{\mathcal{M}} \leqslant Q, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sup_{\eta\in\mathcal{C}} \mathbb{T}[\eta; x]\right) = 0,$$

para algum $Q \geqslant 0$. Então, $\mathcal{C}$ é pré-compacto em $\mathcal{M}$.

Demonstração. Consideremos $f : [0, S_\infty) \to [0, \kappa)$ da forma

$$f(s) = \int_0^s \mu(y)dy.$$

Note que, como μ é decrescente, f é bijetiva. Denotemos com g a inversa de f e consideremos

$$\mathcal{C}_g = \{\eta \circ g : \eta \in \mathcal{C}\}.$$

Seja $\eta \circ g \in \mathcal{C}_g$, então para $0 < S_0 < S_1 < S_\infty$,

$$\begin{aligned} \|\eta \circ g\|^2_{L^2(f(S_0),f(S_1);W)} &= \int_{f(S_0)}^{f(S_1)} \|\eta(g(s))\|_W^2 ds \\ &= \int_{S_0}^{S_1} \mu(s)\|\eta(s)\|_W^2 ds \leqslant Q \end{aligned}$$

e, como $W \hookrightarrow V$ então existe $K > 0$ tal que

$$\|\eta \circ g\|^2_{L^2(f(S_0),f(S_1);V)} \leqslant K\|\eta \circ g\|^2_{L^2(f(S_0),f(S_1);W)} \leqslant KQ.$$

Sendo $G = \max\limits_{s\in[S_0,S_1]} (\mu(s))^{-2}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|D(\eta \circ g)\|^2_{L^2(f(S_0),f(S_1);V)} &= \int_{f(S_0)}^{f(S_1)} |g'(s)|^2 \|D\eta(g(s))\|_V^2 ds \\ &\leqslant G\int_{S_0}^{S_1} \mu(s)\|T\eta(s)\|_V^2 ds \leqslant GQ. \end{aligned}$$

Das três estimativas acima podemos concluir que $\mathcal{C}_g$ é limitado em

$$L^2(f(S_0), f(S_1); W) \cap H^1(f(S_0), f(S_1); V) \Subset L^2(f(S_0), f(S_1); V),$$

onde a injeção é compacta devido ao Teorema 2.3.31. Assim, existe ξ e uma sequência $\eta_k \circ g \in \mathcal{C}_g$ tal que

$$\eta_k \circ g \to \xi \quad \text{em} \quad L^2(f(S_0), f(S_1); V).$$

Por outro lado, $\eta = \xi \circ f \in L^2_\mu(S_0, S_1; V)$, e a convergência acima implica que

$$\eta_k \to \eta \quad \text{em} \quad L^2_\mu(S_0, S_1; V).$$

Seja agora (η_k) uma sequência em $\mathcal{C}$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $(\eta_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\eta_k^n \to \eta_k$ em $L^2_\mu(S_0, S_1; V)$, quando $n \to \infty$. Aplicando o método da diagonalização, encontramos uma subsequência de (η_k) de elementos de $\mathcal{C}$, ainda denotada por (η_k), convergindo para algum $\eta \in L^2_\mu(S_0, S_1; V)$, para todo $0 < S_0 < S_1 < S_\infty$. Além disso, $\eta \in \mathcal{M}$ pois $\mathcal{C}$ é limitado em $\mathcal{M}$. Note finalmente que

$$\|\eta_k - \eta\|^2_{\mathcal{M}} = \|\eta_k - \eta\|^2_{L^2_\mu(1/x,x;V)} + \mathbb{T}[\eta_k - \eta; x],$$

portanto, da hipótese sobre as caudas temos que $\eta_k \to \eta$ em $\mathcal{M}$, donde segue a pré-compacidade. ■

Lema 4.0.5. *Existe um espaço de Banach reflexivo $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\mathbb{A})$, contínua e densamente injetado em $\mathcal{H}$, tal que, para todo $z \in \mathcal{V}$, o conjunto*

$$\mathcal{K}_z = \bigcup_{t\geqslant 1} S(t)z$$

é limitado em $\mathcal{V}$ e pré-compacto em $\mathcal{H}$.

Demonstração. Definamos o subespaço de $\mathcal{H}$

$$\mathcal{V} = W \times V \times [\mathcal{L} \cap \mathcal{D}(T)] \subset \mathcal{D}(\mathbb{A}),$$

com a norma

$$\|(u, v, \eta)\|^2_{\mathcal{V}} = \|u\|^2_W + \|v\|^2_V + \|\eta\|^2_{\mathcal{L}} + \|T\eta\|^2_{\mathcal{M}}.$$

Assim, $\mathcal{V}$ é um espaço de Hilbert (logo reflexivo). Note que $W \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, logo $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$, e a injeção é densa. Apesar de $W \Subset V$ e $V \Subset H$, $\mathcal{V}$ não é injetado compactamente em $\mathcal{H}$ devido a presença da terceira componente.

Repetindo palavra por palavra os argumentos do Teorema 3.3.3 (mudando apenas os espaços), $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é ainda um semigrupo de contrações em $W \times V \times \mathcal{L}$. Em particular, para cada $z = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{V}$

$$\|S(t)z\|_{W\times V\times\mathcal{L}} \leqslant \|z\|_{W\times V\times\mathcal{L}}.$$

Note que de (3.14) temos que

$$T\eta^t(s) = \begin{cases} v(t-s) & 0 < s \leqslant t, \\ T\eta_0(s-t) & s > t. \end{cases}$$

Além disso,

$$\|v(t)\|^2_V \leqslant \|S(t)z\|^2_{W\times V\times\mathcal{L}} \leqslant \underbrace{\|z\|^2_{W\times V\times\mathcal{L}}}_{:=M}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|T\eta^t\|^2_{\mathcal{M}} &= \int_0^t \|v(t-s)\|^2_V \mu(s)ds + \int_t^\infty \|T\eta_0(s-t)\|^2_V \mu(s)ds \\ &\leqslant \kappa M + \int_0^\infty \|T\eta_0(s)\|^2_V \mu(s+t)ds \leqslant \kappa M + \|T\eta_0\|^2_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t\geqslant 0} \|T\eta^t\|_{\mathcal{M}} < \infty, \tag{4.1}$$

e também
$$\sup_{t\geqslant 0}\|S(t)z\|_{\mathcal{V}}<\infty,$$
donde se concluí que $\mathcal{K}_z$ é limitado em $\mathcal{V}$. Mostremos agora que
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sup_{t\geqslant 1}\mathbb{T}[\eta^t;x]\right)=0. \tag{4.2}$$
De fato, do Teorema 3.3.3 temos
$$\|u(t)\|_V^2\leqslant\|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant\underbrace{\|z\|_{\mathcal{H}}^2}_{:=N}.$$
Logo de (3.14)
$$\|\eta^t(s)\|_V^2\leqslant\begin{cases}4N & 0<s\leqslant t,\\ 6N+3\|\eta_0(s-t)\|_V^2 & s>t.\end{cases}$$
Então $\|\eta^t(s)\|_V^2\leqslant 6N+3\|\eta_0(s-t)\|_V^2$ e para $t\geqslant 1$ e $x\geqslant 1$ fixados
$$\mathbb{T}[\eta^t;x]\leqslant 6N\int_{(0,1/x)\cup(x,\infty)}\mu(s)ds+\mathcal{J}(x,t), \tag{4.3}$$
onde
$$\begin{aligned}\mathcal{J}(x,t)&=\int_{(0,1/x)\cup(x,\infty)}3\|\eta_0(s-t)\|_V^2\mu(s)ds\\&=3\int_{\max\{0,x-t\}}^{\infty}\|\eta_0(s)\|_V^2\mu(t+s)ds.\end{aligned}$$
O primeiro termo de (4.3) converge para zero quando $x\to\infty$, pois μ é integrável. Quanto ao segundo, temos as estimativas
$$\mathcal{J}(x,t)\leqslant 3\cdot\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\int_0^\infty\mu(x/2+s)\|\eta_0(s)\|_V^2ds, & x\leqslant 2t,\\ \displaystyle\int_{x/2}^\infty\mu(s)\|\eta_0(s)\|_V^2ds, & x\geqslant 2t.\end{array}\right.$$

Quando $x\to\infty$, ambas as integrais convergem a zero, o primeiro através do teorema da convergência dominada ($\mu(s)\|\eta_0(s)\|_V^2$ como dominante), e o segundo porque $\eta_0\in\mathcal{M}$. Isto prova (4.2). Além disso,
$$\|\eta^t\|_{\mathcal{L}}^2\leqslant\|S(t)z\|_{W\times V\times\mathcal{L}}^2\leqslant\|z\|_{W\times V\times\mathcal{L}}^2\Rightarrow\sup_{t\geqslant 0}\|\eta^t\|_{\mathcal{L}}<\infty. \tag{4.4}$$
Finalmente, sendo $\mathcal{C}$ o conjunto das terceiras componentes de $S(t)z$ para $t\geqslant 1$, então de (4.1),(4.2), (4.4) temos que $\mathcal{C}$ está nas condições do lema anterior. Logo, como já foi observado que $W\Subset V$ e $V\Subset H$, temos que
$$\mathcal{K}_z\subset W\times V\times\mathcal{C}\Subset V\times H\times\mathcal{M}=\mathcal{H}.$$
Donde se concluí a pré compacidade de $\mathcal{K}_z$ em $\mathcal{H}$.

■

O próximo lema é a peça chave para demonstrar a estabilidade exponencial para o caso μ não é ressonante.

Lema 4.0.6. *Assuma que dado qualquer $z = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ a igualdade*

$$\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds + \mathbb{J}[\eta^t] = 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4.5}$$

implica que

$$u(t) = u_0, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Então, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é estável.

Demonstração. De (3.9) e da igualdade (4.5) temos que

$$\frac{d}{dt}\|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2 = 0, \quad \forall t \geqslant 0,$$

e como $S(0) = I$ segue que

$$\|S(t)z\|_{\mathcal{H}} = \|z\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Primeiramente observe que, se (4.6) ocorre para algum $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ e $u(t) = u_0$, então $z = 0$. De fato, $v(t) = \partial_t u(t) = 0$. Além disso, usando (3.14) tem-se

$$\|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2 = \kappa\omega\|u_0\|_V^2 + \|R(t)\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2 = \kappa\omega\|u_0\|_V^2 + \|\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2,$$

e uma aplicação direta do teorema da convergência dominada nos dá

$$\lim_{t\to\infty} \|R(t)\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2 = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \mu(t+s)\|\eta_0(s)\|_V^2 ds = 0.$$

Logo, $\eta_0 = 0$, e novamente de (3.14), $\eta^t = 0$. Assim de (3.6) tem-se que $Au_0 = 0$, e pela injetividade de A, $u_0 = 0$. Em conclusão, a hipótese do lema é equivalente a

$$(4.6) \;\Rightarrow\; z = 0, \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathbb{A}). \tag{4.7}$$

Assumamos então (4.7) e, com a notação do Lema 4.0.5, escolhamos qualquer $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$. Definamos o conjunto ω-limite de z por

$$\omega(z) = \{\xi \in \mathcal{H} : \exists\, t_n \to \infty \ \text{ com } \ S(t_n)z \to \xi\},$$

o qual é não vazio devido a pré-compacidade de $\mathcal{K}_z$. Consideremos agora $\xi \in \omega(z)$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $S(t_n)z \to \xi \in \mathcal{H}$. Como $S(t_n)z$ é limitado se $t_n \geqslant 1$ em $\mathcal{V}$, então do Teorema 2.3.33, $S(t_n)z$ possui uma subsequência $S(t_{n_k})z$ que converge fracamente em $\mathcal{V}$. Isto implica que $\xi \in \mathcal{V}$. Portanto, de (3.9) tem-se que a aplicação $t \longmapsto \|S(t)z\|_{\mathcal{H}}$ é decrescente e limitada inferiormente por zero, daí

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \|S(t_n)z\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \|S(t+t_n)z\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \|S(t)S(t_n)z\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)\xi\|_{\mathcal{H}},$$

para todo $t \geqslant 0$. De (4.7), $\xi = 0$ e, consequentemente $\omega(z) = \{0\}$. Novamente da pré-compacidade de $\mathcal{K}_z$, temos que $S(t)z \to 0$ quando $t \to \infty$. A densidade de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{H}$ implica que $S(t)z \to 0$, quando $t \to \infty$, $\forall z \in \mathcal{H}$. ∎

Antes de seguir, vamos fazer uma análise da relação das descontinuidades de μ e a periodicidade da solução u, esta relação é essencial para demonstrar o próximo lema.

Para um dado $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$, introduzamos o conjunto

$$\mathcal{B} = \{s \in \mathbb{R}^+ : \eta^t(s) = 0, \ \forall t \geqslant 0\}.$$

Note que u é τ-periódica para todo $\tau \in \mathcal{B}$. De fato, de (3.14), se $\tau \in \mathcal{B}$, então

$$u(t) = u(t-\tau), \quad \forall t \geqslant \tau,$$

isto é, $u(t) = u(t+\tau)$ para todo $t \geqslant 0$. Além disso, se (4.5) ocorre, então $\mathbb{J}[\eta^t] = 0$ pois ambos os termos do lado direito da igualdade (4.5) têm o mesmo sinal, e como μ é descontínua em cada s_n então

$$\eta^t(s_n) = 0 \quad \forall n \geqslant 1.$$

Em conclusão temos que u é s_n periódica, para todo $n \geqslant 1$.

Lema 4.0.7. *Se o núcleo μ não é ℓ-espaçado, então $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é estável.*

Demonstração. Usaremos o Lema 4.0.6. Seja $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ tal que (4.5) aconteça, logo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é estável se mostrarmos que u é constante. Como u é τ-periódica para todo $\tau \in \mathcal{B}$ então do Corolário 2.1.3 temos que u é constante se $\mathcal{B}$ contém dois números racionalmente independentes. Vamos distinguir duas situações:

I. Assumamos primeiramente que μ não é um núcleo escada, então existe um intervalo (s_{n-1}, s_n) tal que μ não é constante neste intervalo, e como μ é absolutamente contínua então de (4.5) temos que

$$\mu'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 = 0 \quad \text{para quase todo } s \in (s_{n-1}, s_n).$$

Daí, existe um subintervalo de (s_{n-1}, s_n) com medida de Lebesgue positiva tal que $\eta^t(s) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Portanto $\mathcal{B}$ tem medida positiva e assim contêm dois números racionalmente independentes.

II. Assumamos agora que μ é um núcleo escada. Então u tem período s_n e então é constante a menos que

$$s_n = \begin{cases} \beta & n = 1, \\ \beta(p_n + r_n) & n > 1, \end{cases}$$

para algum $\beta > 0$, $p_n \in \mathbb{N}$ e $r_n \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$, ou seja, $s_m, \ s_n$ são racionalmente independentes para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Desta forma temos que βr_n é um período de u para todo $n \in \mathbb{N}$. Novamente separemos em dois casos:

II.a Existe um número infinito de r_n distintos, então como a sequência (r_n) está contida no compacto $[0,1]$, existe uma subsequência (r_{n_k}) de Cauchy. Mas como $|r_{n_{k+1}} - r_{n_k}|$ é novamente um período de u, tem-se que

$$\inf\{P > 0 : \text{P é período de } u\} = 0.$$

Assim do Corolário 2.1.6 temos que u é constante.

II.b Existe um conjunto finito $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\} \subset [0,1) \cap \mathbb{Q}$ que contém todos os r_n. Pondo $q_k = a_k/b_k$, com $a_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_k \in \mathbb{N}$ e denotando $d = 1/(b_1 \cdots b_n)$, temos que existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n + r_n = k_n d$ para todo $n > 1$. Finalmente definindo $k_1 = 1/d$ e $\vartheta = \beta d$, temos que $s_n = \vartheta k_n$, ou seja, μ é do tipo ℓ-espaçado. ■

E finalmente o lema que completa a prova do Teorema 4.0.2.

Lema 4.0.8. *Se o núcleo μ não é ressonante, então $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é estável.*

Demonstração. Do lema anterior vemos que nos resta apenas verificar o caso em que μ é ℓ-espaçado. Neste caso, temos que μ é da forma

$$\mu(s) = \sum_{n\geqslant 1} \gamma_n \chi_{[\ell k_{n-1}, \ell k_n)}(s).$$

Seja $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ tal que (4.5) acontece, então temos que $\eta^t(\ell k_n) = 0$, para todo $t \geqslant 0$ e n natural. De (3.14) temos que

$$u(t) = u(t - \ell k_n), \quad \forall t \geqslant \ell k_n$$

e

$$\eta_0(s) = u_0 - u(\ell k_n - s), \quad \forall s \in (0, \ell k_n].$$

A primeira igualdade nos diz que u é ℓk_n-periódica, e assim, do Teorema 2.1.7 segue que u é ℓ-periódica. Estendendo u periodicamente em toda a reta, da segunda igualdade temos que $\eta_0(s) = u_0 - u(-s)$, e portanto devemos ter $\eta^t(s) = u(t) - u(t-s)$ para todo s tal que $\mu(s) > 0$. Multiplicando por $\mu(s)$ e integrando a última igualdade temos que

$$\int_0^\infty \mu(s)\eta^t(s)ds = \kappa u(t) - \int_0^\infty \mu(s)u(t-s)ds.$$

Mas como u é ℓ-periódica e μ é constante em cada intervalo $[\ell k_{n-1}, \ell k_n)$ então para todo $t \geqslant 0$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s)u(t-s)ds &= \sum_{n\geqslant 1} \int_{\ell k_{n-1}}^{\ell k_n} \gamma_n u(t-s)ds \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \gamma_n (k_n - k_{n-1}) \int_0^\ell u(t-s)ds \\
&= \frac{\kappa}{\ell} \int_0^\ell u(s)ds = u_* \in V.
\end{aligned}$$

Concluímos que a função $w(t) = u(t) - u_*$ satisfaz a equação abstrata

$$\partial_{tt} w(t) + Aw(t) = 0.$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$, a função ℓ-periódica $a_m(t) = \langle w(t), v_m \rangle$ é solução da equação diferencial ordinária

$$a_m''(t) + \lambda_m a_m(t) = 0.$$

E como $w(0) = u_0 - u_*$, $w'(0) = v_0$ são dados conhecidos, temos que

$$a_m(t) = a_m(0)\cos(\sqrt{\lambda_m}t) + \frac{a_m'(0)}{\sqrt{\lambda_m}}\sin(\sqrt{\lambda_m}t).$$

Assim, a_m tem período fundamental τ_m, com $\tau_m = 2\pi/\sqrt{\lambda_m}$. Daí do Teorema 2.1.3 temos que $\ell = p\tau_m$, para algum $p \in \mathbb{N}$, o que contradiz com a hipótese que μ não é ressonante. Logo, para não entrarmos em contradição, a_m deve ser identicamente nula para todo m, isto é, $u(t) = u_* = u_0$ para todo $t \geqslant 0$. Portanto, do Lema 4.0.6 segue a estabilidade assintótica do semigrupo. ■

Capítulo 5

Estabilidade Exponencial

Neste capítulo vamos estudar a estabilidade exponencial para a classe de núcleos definida nos capítulos anteriores. Na primeira seção, faremos uma análise na relação entre a estabilidade exponencial do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ e o semigrupo de translações a direita $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$. Na seção seguinte, provamos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ decaí exponencialmente sobre uma condição "restritiva". Na terceira seção daremos uma prova, usando um teorema abstrato da teoria de semigrupos, que o semigrupo decaí exponencialmente com uma condição geral.

5.1 Uma Condição Necessária para a Estabilidade Exponencial

Apresentaremos aqui uma condição necessária para termos a estabilidade exponencial do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, tal condição é obtida verificando que se $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável então o semigrupo de translações a direita $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ deve também ser exponencialmente estável.

Proposição 5.1.1. *Se $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável, existe $C \geqslant 1$ e $\delta > 0$ tal que*

$$\mu(t+s) \leqslant Ce^{-\delta t}\mu(s), \tag{5.1}$$

para todo $t \geqslant 0$ e quase todo $s > 0$.

Demonstração. Mostremos primeiramente que se existem $M \geqslant 1$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\|S(t)\|_{L(\mathcal{H})} \leqslant Me^{-\varepsilon t},$$

então

$$\|R(t)\|^2_{L(\mathcal{M})} \leqslant Ce^{-\delta t},$$

para algum $C \geqslant 1$ e $\delta \geqslant 2\varepsilon$, com $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ sendo o semigrupo de translações à direita (Ver Apêndice A). De fato, escolhamos $z = (0, 0, \eta_0) \in \mathcal{H}$. De (3.14) tem-se

$$\begin{aligned} M^2e^{-2\varepsilon t}\|\eta_0\|^2_{\mathcal{M}} &\geqslant \|S(t)\|^2_{L(\mathcal{H})}\|\eta_0\|^2_{\mathcal{M}} \\ &\geqslant \|S(t)z\|^2_{\mathcal{H}} \\ &\geqslant \int_t^\infty \mu(s)\|\eta_0(s-t) - u(t)\|^2_V ds \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_t^\infty \mu(s)\|\eta_0(s-t)\|^2_V ds - \kappa\|u(t)\|^2_V \end{aligned}$$

E como $\|u(t)\|_V^2 \leqslant \|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|S(t)\|_{L(\mathcal{H})}^2 \|z\|^2 \leqslant M^2 e^{-2\varepsilon t}\|\eta_0\|_{\mathcal{M}}$ segue que

$$M^2 e^{-2\varepsilon t}\|\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2 \geqslant \frac{1}{2}\|R(t)\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2 - M^2\kappa e^{-2\varepsilon t}\|\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2,$$

ou seja,

$$\|R(t)\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant 2(M^2\kappa + M^2)e^{-2\varepsilon t}\|\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2,$$

o que prova a afirmação. Assim para todo $\eta_0 \in \mathcal{M}$

$$\|R(t)\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2 - Ce^{-\delta t}\|\eta_0\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^\infty [\mu(t+s) - Ce^{-\delta t}\mu(s)]\|\eta_0(s)\|_V^2 ds \leqslant 0. \tag{5.2}$$

Para qualquer $t \geqslant 0$ fixado, consideremos

$$\mathcal{A}_t = \{s \in \mathbb{R}^+ : \mu(t+s) - Ce^{-\delta t}\mu(s) > 0\}.$$

Em particular, considerando $\eta_0(s) = \chi_{\mathcal{A}_t}(s)\tilde{u}$, com $\|\tilde{u}\|_V = 1$, tem-se de (5.2) que

$$\int_{\mathcal{A}_t} [\mu(t+s) - Ce^{-\delta t}\mu(s)]ds = 0,$$

logo para quase todo $s > 0$ temos que

$$\mu(t+s) \leqslant Ce^{-\delta t}\mu(s),$$

o que prova o pretendido. ∎

Existem núcleos que decaem exponencialmente e que não satisfazem (5.1) como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo 5.1.2. *Seja μ uma função integrável decrescente satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) $0 < \mu(s) \leqslant e^{-s}$;

ii) *μ é constante em cada intervalo da forma $[n^2, n^2+n+1]$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Então se assumirmos (5.1) para quase todo $s \in [n^2, n^2+1]$, temos que

$$\mu(s) = \mu(s + n^2 + n + 1 - s) \leqslant Ce^{-\delta(n^2+n+1-s)}\mu(s) \leqslant Ce^{-\delta n}\mu(s),$$

e então

$$1 \leqslant Ce^{-\delta n},$$

o que é falso para n suficientemente grande.

5.2 Uma Condição Suficiente Para a Estabilidade Exponencial por Meio de Estimativas de Energia

Uma questão interessante é saber se a condição (5.1) é suficiente para a estabilidade exponencial. Note que se $C = 1$ em (5.1) então

$$\mu'(s) = \lim_{t\to 0}\frac{\mu(t+s) - \mu(s)}{t} \leqslant \lim_{t\to 0}\frac{e^{-\delta t}\mu(s) - \mu(s)}{t} = -\delta\mu(s),$$

e portanto temos que o núcleo satisfaz

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leqslant 0, \tag{5.3}$$

para quase todo $s > 0$. Então se assumirmos que $C = 1$ e que μ é quase sempre diferenciável, temos a estabilidade exponencial de $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, (ver [17]). Note também, que utilizando uma desigualdade do tipo Grönwall, pode-se verificar que a condição (5.3) implica a condição (5.1). A condição (5.3) incluí muitos casos fisicamente interessantes, mas é bastante restritiva. Quando $C > 1$ então existe uma lacuna entre a condição (5.1) e a condição (5.3), o que pode ser vista no seguinte exemplo.

Proposição 5.2.1. *Vamos considerar, para $\ell \in (0,1)$, o núcleo simples*

$$\mu(s) = \chi_{[0,\ell)}(s),$$

o qual claramente satisfaz (5.1)*. Então, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ do Exemplo 4.0.3 não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Assumamos que $\ell/\pi \notin \mathbb{Q}$, caso contrário, do Teorema 4.0.2, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é nem estável. Nós vamos mostrar que a condição necessária para a estabilidade exponencial,

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|(i\lambda I - \mathbb{A})z\|_{\mathcal{H}} \geqslant \varepsilon\|z\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.4}$$

(ver Teorema 2.5.13), para algum $\varepsilon > 0$ e todo $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$, falha. Para $\zeta_m = (0, 0, m^{-1}e_m) \in \mathcal{H}$, com e_m o m-ésimo autovetor de A, consideremos a equação

$$(imI - \mathbb{A})z_m = \zeta_m,$$

para a variável $z_m = (u_m, v_m, \eta_m)$. Note que $\|\zeta_m\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\ell}$. A ideia é encontrar soluções da equação acima da forma

$$u_m = \frac{\rho_m}{im}e_m, \quad v_m = \rho_m e_m, \quad \eta_m(s) = \phi_m(s)e_m,$$

com $\rho_m \in \mathbb{C}$ e $\phi_m \in L^2_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ tal que $\phi_m(0) = 0$. Com essas considerações, a equação torna-se

$$\begin{cases} \ell\rho_m - im\displaystyle\int_0^\ell \phi_m(s)ds = 0, \\ im\phi_m(s) + D\phi_m(s) - \rho_m = \dfrac{1}{m}. \end{cases}$$

Observe que

$$(e^{ims}\phi_m(s))' = im\phi_m(s)e^{ims} + e^{ims}D\phi_m(s) = e^{ims}\left(\frac{1}{m} + \rho_m\right).$$

Integrando de 0 a s obtemos

$$\phi_m(s) = \frac{1 + m\rho_m}{im^2}(1 - e^{-ims}).$$

Substituindo ϕ_m na primeira equação e denotando $\alpha_m = e^{-im\ell} - 1$ temos

$$\rho_m = \frac{-im\ell - \alpha_m}{m\alpha_m}.$$

Como $\ell/\pi \notin \mathbb{Q}$, nós temos $\alpha_m \neq 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, pois se $\alpha_m = 0$ então $\cos m\ell + i \sin m\ell = 1$, ou seja, $\cos m\ell = 1$, isto é, $m\ell = 2\pi k$ com k inteiro, e daí, $\ell/\pi = 2km \in \mathbb{Q}$. Escolhamos uma sequência (m_j) que converge para zero, logo $(\alpha_m m_j)$ também converge para zero, consequentemente $|\rho_m m_j| \to \infty$ quando $j \to \infty$, e a correspondente solução, z_{m_j}, satisfaz

$$\|z_{m_j}\|_{\mathcal{H}} \geqslant \|v_{m_j}\|_H = |\rho_m m_j| \to \infty, \quad j \to \infty,$$

violando (5.4). ■

De fato, a Proposição 5.2.1 continua valendo para núcleos escada. Mais geral, sendo A o operador abstrato com certas considerações no espectro, é possível mostrar que se μ é uma função escada então o semigrupo não é exponencialmente estável, a demonstração deste fato pode ser verificada no Apêndice B.

Vamos agora estabelecer uma condição mais fraca que (5.3) para a estabilidade exponencial.

Consideremos a medida de probabilidade de Borel $\hat{\mu}$ dada por

$$\hat{\mu}(\mathcal{A}) = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{A}} \mu(s) ds, \tag{5.5}$$

para todo boreliano $\mathcal{A}$ contido em $\mathbb{R}^+$.

Definição 5.2.2. *O conjunto plano de μ é definido como*

$$\mathcal{F}_\mu = \left\{ s \in \mathbb{R}^+ : \mu(s) > 0,\ \mu'(s) = 0 \right\},$$

e o raio plano de μ é dado por

$$\mathcal{R}_\mu = \hat{\mu}(\mathcal{F}_\mu).$$

O objetivo desta seção é provar o seguinte teorema.

Teorema 5.2.3. *Assumamos que a condição* (5.1) *seja satisfeita. Se*

$$\mathcal{R}_\mu < \frac{1}{2},$$

então $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é exponencialmente estável.

Note que se μ é tal que $\mu'(s) < 0$ para quase todo $s \in \mathbb{R}^+$, então $\mathcal{R}_\mu = 0$, e portanto temos o seguinte corolário do teorema acima:

Corolário 5.2.4. *Se a condição* (5.1) *é satisfeita e $\mu' < 0$ quase sempre, então $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é exponencialmente estável.*

Da Proposição 5.2.1, não podemos esperar a estabilidade exponencial quando $\mathcal{R}_\mu = 1$, pois neste caso temos que $\mu'(s) = 0$ para quase todo $s > 0$, e como μ é absolutamente contínua em cada (s_{n-1}, s_n), segue do Teorema 2.2.2 que μ deve ser constante em quase todo ponto. Logo μ é uma função escada e, em geral, não temos a estabilidade exponencial do semigrupo. O caso em que $\mathcal{R}_\mu \in [1/2, 1)$, utilizando apenas estimativas de energia, ainda é um problema em aberto e segundo Pata [18], um problema desafiador. Na próxima seção, daremos uma prova, utilizando o Teorema abstrato 2.5.13, do caso completo $\mathcal{R}_\mu < 1$, isto é, se $\mathcal{R}_\mu < 1$ e a condição (5.1) é satisfeita então o semigrupo é exponencialmente estável.

Antes de provar o Teorema 5.2.3, vamos introduzir algumas notações e comentários para simplificar sua prova. Para a prova usaremos o Teorema 2.5.12, portanto ao longo desta seção fixemos $z \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ com $\|z\|_{\mathcal{H}} \leqslant 1$. Definamos

$$E(t) = \|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2,$$

e

$$\mathbb{E}[\eta^t] = \int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds + \mathbb{J}[\eta^t].$$

Então a igualdade de energia (3.9) é reescrita como

$$\frac{d}{dt}E = \mathbb{E}[\eta]. \tag{5.6}$$

Lema 5.2.5. *Se $\mathcal{R}_\mu < 1/2$, então existe $k > 0$ e $\alpha < 1/2$ tais que, o conjunto*

$$\mathcal{P} = \left\{s \in \mathbb{R}^+ : k\mu'(s) + \mu(s) > 0\right\}$$

satisfaz $\hat{\mu}(\mathcal{P}) = \alpha$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}_0$ definamos

$$\mathcal{P}_n = \left\{s \in \mathbb{R}^+ : n\mu'(s) + \mu(s) > 0\right\}.$$

Tem-se então que

$$\mathcal{F}_\mu = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n. \tag{5.7}$$

De fato, se $s \in \mathcal{F}_\mu$ então $n\mu'(s) + \mu(s) = \mu(s) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, logo $s \in \mathcal{P}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por outro lado, se $s \in \mathcal{P}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, então, em particular $s \in \mathcal{P}_0$, e daí $\mu(s) > 0$. Além disso, temos que

$$\mu'(s) > \frac{-\mu(s)}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

logo, fazendo $n \to \infty$, obtemos que $\mu'(s) \geqslant 0$, e como $\mu'(s) \leqslant 0$, tem-se que $\mu'(s) = 0$, e assim $s \in \mathcal{F}_\mu$. Portanto a igualdade (5.7) está verificada, e como $\mathcal{P}_{n+1} \subset \mathcal{P}_n$, então de (5.7) e do Teorema 2.3.21 segue que

$$\frac{1}{2} > \mathcal{R}_\mu = \hat{\mu}(\mathcal{F}_\mu) = \hat{\mu}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(\mathcal{P}_n).$$

Donde segue que existe $k \in \mathbb{N}_0$ suficientemente grande tal que

$$\hat{\mu}(\mathcal{P}_k) < \frac{1}{2}.$$

Logo, basta considerar $\mathcal{P} = \mathcal{P}_k$ e $\alpha = \hat{\mu}(\mathcal{P}_k)$. ∎

Para o conjunto $\mathcal{P}$ do lema acima, denotemos

$$\Gamma[\eta] = \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds, \qquad \Lambda[\eta] = \int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds.$$

Dado qualquer $\nu \in (0,1)$, escolhamos $s_\nu \in (0, s_1)$ tal que

$$\int_0^{s_\nu} \mu(s)ds \leqslant \frac{\kappa\nu}{2}, \tag{5.8}$$

e consideremos a função

$$\psi_\nu(s) = \mu(s_\nu)\chi_{(0,s_\nu]}(s) + \mu(s)\chi_{(s_\nu,\infty)}(s),$$

a qual é bem comportada numa vizinhança da origem. Para o dado $\nu \in (0,1)$ definamos as funções auxiliares

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle v(t), \eta^t(s)\rangle_H ds,\\
\Phi_2(t) &= \langle v(t), u(t)\rangle_H,\\
\Phi_3(t) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_s^\infty \mu(\sigma)\chi_{\mathcal{P}}(\sigma)d\sigma\right)\|\eta^t(s) - u(t)\|_V^2 ds.
\end{aligned}$$

No que segue, $\varepsilon_\nu \geqslant 0$ e $c_\nu \geqslant 0$ serão constantes genéricas, (dependendo apenas de ν e das quantidades estruturais do problema, mas não da escolha de z na bola unitária em $\mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H}$), tal que $\varepsilon_\nu \to 0$ quando $\nu \to 0$.

Lema 5.2.6. *Temos a seguinte desigualdade*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_1 \leqslant{}& \varepsilon_\nu\|u\|_V^2 - (1-\varepsilon_\nu)\|v\|_H^2 + (\alpha + \varepsilon_\nu)\Gamma[\eta] + c_\nu\Lambda[\eta]\\
&+ \omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta\rangle_V ds - c_\nu\mathbb{E}[\eta].
\end{aligned}$$

Demonstração. Derivando diretamente $\Phi_1(t)$

$$\frac{d}{dt}\Phi_1 = -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle v, \partial_t\eta(s)\rangle_H ds - \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle \partial_t v, \eta(s)\rangle_H ds. \tag{5.9}$$

Da terceira componente de (3.6), temos que $\partial_t\eta = T\eta + v$, donde segue que o primeiro termo do lado direito de (5.9) é igual a

$$-\frac{1}{\kappa}\|v\|_H^2\int_0^\infty \psi_\nu(s)ds - \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle v, T\eta(s)\rangle_H ds.$$

Como $\psi_\nu(s) \leqslant \mu(s)$ e vale a igualdade para $s \geqslant s_\nu$ então

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \psi_\nu(s)ds &= \int_0^{s_\nu} \mu(s_\nu)ds + \int_{s_\nu}^\infty \mu(s)ds \geqslant \int_{s_\nu}^\infty \mu(s)ds\\
&\geqslant \kappa - \frac{\kappa\nu}{2},
\end{aligned}$$

e portanto

$$-\frac{1}{\kappa}\|v\|_H^2\int_0^\infty \psi_\nu(s)ds \leqslant -\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\|v\|_H^2.$$

Sendo $\mu_n = \mu(s_n^+) - \mu(s_n^-)$, uma integração por partes nos dá

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle v, T\eta(s)\rangle_H ds &= -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\frac{d}{ds}\langle v, \eta(s)\rangle_H ds\\
&= -\frac{1}{\kappa}\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)\langle v, \eta(s)\rangle_H ds - \frac{1}{\kappa}\sum_{n\geqslant 1}\mu_n\langle v, \eta(s_n)\rangle_H.
\end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young temos

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle v, T\eta(s)\rangle_H ds \leqslant & -\frac{1}{\kappa}\|v\|_H\left(\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)\|\eta(s)\|_H ds + \sum_{n\geqslant 1}\mu_n\|\eta(s_n)\|_H\right)\\
\leqslant & \ \frac{\nu}{2}\|v\|_H^2\\
& + \frac{1}{2\kappa^2\nu}\left(\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)\|\eta(s)\|_H ds + \sum_{n\geqslant 1}\mu_n\|\eta(s_n)\|_H\right)^2.
\end{aligned}
$$

Como $s_\nu < s_1$, então

$$\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)ds = -\mu(s_\nu) - \sum_{n\geqslant 1}\mu_n,$$

daí, usando esta igualdade e a desigualdade de Poincaré (2.3) temos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)\|\eta(s)\|_H ds + \sum_{n\geqslant 1}\mu_n\|\eta(s_n)\|_H\right)^2 \leqslant & \ 2\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)ds\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)\|\eta(s)\|_H^2 ds\\
& + 2\sum_{n\geqslant 1}\mu_n\sum_{n\geqslant 1}\mu_n\|\eta(s_n)\|_H^2\\
\leqslant & \ \frac{2}{\lambda_1}\left(\int_{s_\nu}^\infty \mu'(s)ds + \sum_{n\geqslant 1}\mu_n\right)\mathbb{E}[\eta]\\
= & \ -\frac{2}{\lambda_1}\mu(s_\nu)\mathbb{E}[\eta].
\end{aligned}
$$

Das desigualdades acima temos que

$$-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle v, \partial_t\eta(s)\rangle_H ds \leqslant -(1-\nu)\|v\|_H^2 - \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda_1\nu}\mathbb{E}[\eta]. \tag{5.10}$$

Para o segundo termo de (5.9), tem-se de (3.6),

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\kappa}&\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle \partial_t v, \eta(s)\rangle_H ds\\
&= -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\left\langle -A\left(\kappa\omega u + \int_0^\infty \mu(\sigma)\eta(\sigma)d\sigma\right), \eta(s)\right\rangle_H ds\\
&= \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\left\langle \kappa\omega u + \int_0^\infty \mu(\sigma)\eta(\sigma)d\sigma, \eta(s)\right\rangle_V ds\\
&= \underbrace{\omega\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds}_{\mathbf{I}}\\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\left(\int_0^\infty \mu(\sigma)\langle \eta(s), \eta(\sigma)\rangle_V d\sigma\right)ds}_{\mathbf{II}}.
\end{aligned}
$$

Vamos estimar os dois últimos integrais separadamente, para **I** temos que

$$\omega\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds = \omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds + \mathcal{Q},$$

onde

$$\mathcal{Q} = \omega \int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds - \omega \int_0^{s_\nu} [\mu(s) - \mu(s_\nu)]\langle u, \eta(s)\rangle_V ds.$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} &\leqslant \omega \|u\|_V \left(\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds + \int_0^{s_\nu} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds \right) \\
&\leqslant \omega\sqrt{\nu}\|u\|_V^2 + \frac{\omega}{\sqrt{\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds + \int_0^{s_\nu} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds \right)^2 \\
&\leqslant \omega\sqrt{\nu}\|u\|_V^2 + \frac{\omega}{2\sqrt{\nu}} \left(\int_0^{s_\nu} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds \right)^2 + \frac{\omega}{2\sqrt{\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds \right)^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder nas duas integrais, usando (5.8) e lembrando que $\nu \in (0, 1)$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} &\leqslant \omega\sqrt{\nu}\|u\|_V^2 + \frac{\omega}{2\sqrt{\nu}}\frac{\kappa\nu}{2}(\Gamma[\eta] + \Lambda[\eta]) + \frac{\kappa\omega}{2\sqrt{\nu}}\Lambda[\eta] \\
&\leqslant \omega\sqrt{\nu}\|u\|_V^2 + \kappa\omega\sqrt{\nu}\Gamma[\eta] + \frac{\kappa\omega}{\sqrt{\nu}}\Lambda[\eta],
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbf{I} \leqslant \omega \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds + \omega\sqrt{\nu}\|u\|_V^2 + \kappa\omega\sqrt{\nu}\Gamma[\eta] + \frac{\kappa\omega}{\sqrt{\nu}}\Lambda[\eta].$$

Para **II**, como $\psi_\nu(s) \leqslant \mu(s)$, então da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{II} &= \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \psi_\nu(s) \left(\int_0^\infty \mu(\sigma)\langle \eta(s), \eta(\sigma)\rangle_V d\sigma \right) ds \\
&\leqslant \frac{1}{\kappa} \left(\int_0^\infty \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds \right)^2 \\
&= \frac{1}{\kappa} \left(\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds + \int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V ds \right)^2.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e do Lema 5.2.5 tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{II} &\leqslant \left(\left\{ \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{P}} \mu(s) ds \Gamma[\eta] \right\}^{1/2} + \left\{ \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s) ds \Lambda[\eta] \right\}^{1/2} \right)^2 \\
&\leqslant (\sqrt{\alpha\Gamma[\eta]} + \sqrt{(1-\alpha)\Lambda[\eta]})^2 \\
&= \alpha\Gamma[\eta] + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)\Gamma[\eta]\Lambda[\eta]} + (1-\alpha)\Lambda[\eta] \\
&\leqslant \alpha\Gamma[\eta] + 2\sqrt{\Gamma[\eta]\Lambda[\eta]}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tendo em vista que

$$2\sqrt{\Gamma[\eta]\Lambda[\eta]} = 2\sqrt{\nu\Gamma[\eta]}\sqrt{\frac{\Lambda[\eta]}{\nu}} \leqslant \nu\Gamma[\eta] + \frac{1}{\nu}\Lambda[\eta],$$

temos que

$$\mathbf{II} \leqslant (\alpha + \nu)\Gamma[\eta] + \frac{1}{\nu}\Lambda[\eta].$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi_\nu(s)\langle \partial_t v, \eta(s)\rangle_H ds \leqslant{}& \omega\sqrt{\nu}\|u\|_V^2 + (\alpha + \nu + \kappa\omega\sqrt{\nu})\Gamma[\eta] \\
&+ \left(\frac{1}{\nu} + \frac{\kappa\omega}{\sqrt{\nu}}\right)\Lambda[\eta] + \omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds.
\end{aligned}$$

Unindo esta última desigualdade com a estimativa (5.10) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_1 \leqslant{}& \omega\sqrt{\nu}\|u\|_V^2 - (1-\nu)\|v\|_H^2 + (\alpha + \nu + \kappa\omega\sqrt{\nu})\Gamma[\eta] \\
&+ \left(\frac{1}{\nu} + \frac{\kappa\omega}{\sqrt{\nu}}\right)\Lambda[\eta] + \omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds - \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda_n\nu}\mathbb{E}[\eta],
\end{aligned}$$

o que demonstra o pretendido. ∎

Lema 5.2.7. *Tem-se a desigualdade*

$$\frac{d}{dt}\Phi_2 \leqslant -(\kappa\omega - \varepsilon_v)\|u\|_V^2 + \|v\|_H^2 + c_\nu\Lambda[\eta] - \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds.$$

Demonstração. Derivando Φ_2 e usando (3.6), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_2 ={}& \langle \partial_t v, u\rangle_H + \langle v, \partial_t u\rangle_H \\
={}& \left\langle -A\left(\kappa\omega u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds\right), u\right\rangle_H + \|v\|_H^2 \\
={}& -\kappa\omega\|u\|_V^2 + \|v\|_H^2 - \int_0^\infty \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds \\
={}& -\kappa\omega\|u\|_V^2 + \|v\|_H^2 - \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds - \int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds.
\end{aligned}$$

Note que, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds \leqslant{}& \int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|u\|_V\|\eta(s)\|_V ds \\
\leqslant{}& \nu\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|u\|_V^2 ds + \frac{1}{4\nu}\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds \\
\leqslant{}& \kappa\nu\|u\|_V^2 + \frac{1}{2\nu}\Lambda[\eta],
\end{aligned}$$

assim,

$$\frac{d}{dt}\Phi_2 \leqslant -(\kappa\omega - \kappa\nu)\|u\|_V^2 + \|v\|_H^2 + \frac{1}{2\nu}\Lambda[\eta] - \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds,$$

o que prova o pretendido. ∎

Lema 5.2.8. *Tem-se a desigualdade*

$$\frac{d}{dt}\Phi_3 = -\frac{1}{2}\Gamma[\eta] + \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds.$$

Demonstração. Derivando diretamente e usando (3.6) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_3 &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_s^\infty \mu(\sigma)\chi_{\mathcal{P}}(\sigma)d\sigma\right) 2\langle \partial_t\eta(s) - \partial_t u, \eta(s) - u\rangle_V ds \\
&= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \mu(\sigma)\chi_{\mathcal{P}}(\sigma)d\sigma\right) \langle T\eta(s), \eta(s) - u\rangle_V ds \\
&= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \mu(\sigma)\chi_{\mathcal{P}}(\sigma)d\sigma\right) \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{2}\|\eta(s)\|_V^2 + \langle \eta(s), u\rangle_V\right) ds,
\end{aligned}$$

integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_3 &= \int_0^\infty \mu(s)\chi_{\mathcal{P}}(s)\left(-\frac{1}{2}\|\eta(s)\|_V^2 + \langle \eta(s), u\rangle_V\right) ds \\
&= -\frac{1}{2}\Gamma[\eta] + \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u, \eta(s)\rangle_V ds.
\end{aligned}$$

■

Consideremos agora

$$\beta = \alpha + \frac{1}{2} < 1,$$

e a função Φ, que depende de $\nu \in (0,1)$, dada por

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \beta\Phi_2(t) + (\omega + \beta)\Phi_3(t).$$

Lema 5.2.9. *Existe $\varpi > 0$ tal que, fixando ν suficientemente pequeno, Φ satisfaz a desigualdade diferencial*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) + \varpi E[\eta] \leqslant c\Lambda[\eta] - c\mathbb{E}[\eta],$$

para algum $c > 0$.

Demonstração. Das desigualdades obtidas nos Lemas 5.2.6, 5.2.7, 5.2.8, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) \leqslant &-(\beta\kappa\omega - \varepsilon_\nu)\|u\|_V^2 - (1 - \beta - \varepsilon_\nu\nu)\|v\|_H^2 - \frac{1}{2}(\omega + 1 - \beta - \varepsilon_\nu)\Gamma[\eta] \\
&+ c_\nu\Lambda[\eta] - c_\nu\mathbb{E}[\eta] + 2\omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_V ds.
\end{aligned}$$

Note que, como $\hat{\mu}(\mathcal{P}) = \alpha = \beta - 1/2$ então das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young

$$\begin{aligned}
2\omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_V ds \leqslant &2\omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\|u\|_V\|\eta(s)\|_V ds \\
\leqslant &2\omega\int_{\mathcal{P}} \mu(s)\left(\|u\|_V^2 + \frac{\|\eta^t(s)\|_V^2}{4}\right) ds \\
= &2\kappa\omega\alpha\|u\|_V^2 + \frac{\omega}{2}\Gamma[\eta] \\
\leqslant &\kappa\omega(2\beta - 1)\|u\|_V^2 + \frac{\omega}{2}\Gamma[\eta].
\end{aligned}$$

Fazendo uso da desigualdade acima e redefinindo ε_ν e c_ν, tem-se que

$$\frac{d}{dt}\Phi + (1-\beta-\varepsilon_\nu)\left(\kappa\omega\|u\|_V^2 + \|v\|_H^2 + \frac{1}{2}\Gamma[\eta]\right) \leqslant c_\nu\Lambda[\eta] - c_\nu\mathbb{E}[\eta].$$

Como

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 = \Gamma[\eta] + \Lambda[\eta],$$

então somando $(1-\beta-\varepsilon_\nu)\Lambda[\eta]$, e novamente redefinindo ε_ν e c_ν temos

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) + (1-\beta-\varepsilon_\nu)E(t) \leqslant c_\nu\Lambda[\eta] - c_\nu\mathbb{E}[\eta].$$

Notando agora que $1-\beta-\varepsilon_\nu > -\varepsilon_\nu$, então

$$\lim_{\nu\to 0}(1-\beta-\varepsilon_\nu) \geqslant 0,$$

e portanto tomando ν suficientemente pequeno, de modo que $\varpi = 1-\beta-\varepsilon_\nu > 0$, e considerando $c = c_\nu$ obtemos a desigualdade pretendida.

■

Demonstração do Teorema 5.2.3. Definamos a função

$$\Psi(t) = c(1+k)E(t) + \Phi(t),$$

com k como no Lema 5.2.5 e c como no lema anterior. Verifiquemos que

$$\Psi(0) \leqslant K,$$

para algum $K \geqslant 0$ que independe da escolha de z na bola unitária de $\mathcal{H}$. Note que $E(0) = \|S(0)z\|_{\mathcal{H}}^2 = \|z\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant 1$. E é fácil de ver que $\Phi_1(0)$ e $\Phi_2(0)$ são limitados, logo basta mostrar que $\Phi_3(0)$ é limitado. De (5.1) temos que

$$\int_s^\infty \mu(\sigma)d\sigma \leqslant \int_0^\infty \mu(\sigma+s)d\sigma \leqslant \int_0^\infty Ce^{-\delta\sigma}\mu(s)d\sigma \leqslant \frac{C}{\delta}\mu(s),$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
\Phi_3(0) &\leqslant \frac{C}{2\delta}\int_0^\infty \mu(s)\|\eta_0(s)-u_0\|_V^2 ds \\
&\leqslant \frac{C}{\delta}\left(\int_0^\infty \mu(s)\|\eta_0(s)\|_V^2 ds + \int_0^\infty \mu(s)\|u_0\|_V^2 ds\right) \\
&\leqslant \frac{C(1+\kappa)}{\delta},
\end{aligned}$$

o que verifica a limitação de $\Psi(0)$. De (5.6) e do Lema 5.2.9 temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi(t) + \varpi E(t) &= c(1+k)\frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}\Phi(t) + \varpi E(t) \\
&\leqslant c(1+k)\frac{d}{dt}E(t) + c\Lambda[\eta] - c\mathbb{E}[\eta] \\
&\leqslant c\Lambda[\eta] + ck\mathbb{E}[\eta].
\end{aligned}$$

Como $k\mu'(s) + \mu(s) \leqslant 0$, para quase todo $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{P}$, então

$$\begin{aligned} c\Lambda[\eta] &= c\int_{\mathbb{R}^+\setminus\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds \\ &\leqslant -ck\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds \\ &\leqslant -ck\mathbb{E}[\eta]. \end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$\frac{d}{dt}\Psi + \varpi E \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad E \leqslant -\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}\Psi,$$

logo

$$\int_0^t E(\tau)d\tau \leqslant \frac{1}{\varpi}\left(\Psi(0) - \Psi(t)\right) \leqslant \frac{\Psi(0)}{\varpi} \leqslant \frac{K}{\varpi}.$$

Como E é decrescente temos que

$$E(t) \leqslant \frac{K}{\varpi t},$$

ou seja,

$$\|S(t)z\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \frac{K}{\varpi t}.$$

Assim, dado qualquer $\rho \in (0,1)$, existe t^* suficientemente grande, que independe de z, tal que

$$\|S(t^*)z\|_{\mathcal{H}} \leqslant \rho,$$

logo $\|S(t_*)\| < 1$ e do Teorema 2.5.12, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável. ∎

5.3 Teorema Geral para a Estabilidade Exponencial

O objetivo desta seção é finalizar a discussão da estabilidade exponencial demonstrando o seguinte teorema:

Teorema 5.3.1. *Assumamos que a condição (5.1) seja satisfeita. Se $\mathcal{R}_\mu < 1$ então o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável.*

Observação 5.3.2. *Definamos o conjunto*

$$\mathfrak{R} = \{s \in \mathbb{R}^+ : \mu'(s) < 0\}.$$

Note que

$$\hat{\mu}(\mathfrak{R}) = 1 - \hat{\mu}(\{s \in \mathbb{R}^+ : \mu'(s) = 0\}),$$

e como $\hat{\mu}(\{s \in \mathbb{R}^+ : \mu(s) = 0\}) = 0$ então temos que

$$\hat{\mu}(\mathfrak{R}) = 1 - \hat{\mu}(\{s \in \mathbb{R}^+ : \mu'(s) = 0,\ \mu(s) > 0\}) = 1 - \mathcal{R}_\mu.$$

E como $\hat{\mu} \ll l$, isto é, se um conjunto tem medida de Lebesgue nula então o mesmo acontece na medida $\hat{\mu}$, temos que se $\mathcal{R}_\mu < 1$ então a medida de Lebesgue de $\mathfrak{R}$ é positiva, e isso será bastante importante na prova do Teorema 5.3.1.

Demonstração do Teorema 5.3.1. Procedamos por contradição, isto é, supomos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é exponencialmente estável, logo do Teorema 2.5.13 deve existir sequências $(\rho_n) \subset \mathbb{R}$ e (z_n), com $z_n = (u_n, v_n, \eta_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$, tais que

$$\|z_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u_n\|_V^2 + \|v_n\|_H^2 + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}}^2 = 1 \tag{5.11}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \|(i\rho_n - \mathbb{A})z_n\|_{\mathcal{H}} = 0, \tag{5.12}$$

o qual escrito em componentes

$$i\rho_n u_n - v_n \to 0 \text{ em } V, \tag{5.13}$$

$$i\rho_n v_n + A\left[\kappa\omega u_n + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)ds\right] \to 0 \text{ em } H, \tag{5.14}$$

$$i\rho_n \eta_n - T\eta_n - v_n \to 0 \text{ em } \mathcal{M}. \tag{5.15}$$

Vamos dividir o restante da prova em dois casos:

Caso I ($\rho_n \nrightarrow 0$): Neste caso, podemos afirmar que para uma subsequência (ainda denotada por (ρ_n)) tem-se

$$\inf_n |\rho_n| > 0. \tag{5.16}$$

Como $\mathfrak{R}$ tem medida positiva então o conjunto

$$\mathfrak{J} = \{s \in \mathbb{R}^+ : k\mu'(s) + \mu(s) < 0\}$$

tem medida positiva, para k suficientemente grande. De fato, note que

$$\mathfrak{R} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \{s \in \mathbb{R}^+ : n\mu'(s) + \mu(s) < 0\},$$

logo usando argumentos similares ao usado no Lema 5.2.5, obtemos o pretendido.

Para o que segue, denotemos com $\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{J}} = L^2_\mu(\mathfrak{J}, V), \quad \langle \eta, \psi\rangle_{\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}} = \int_{\mathfrak{J}} \mu(s)\langle \eta(s), \psi(s)\rangle_V ds.$$

A prova deste caso será consequência dos seguintes lemas.

Lema 5.3.3. *Tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}} = 0.$$

Demonstração. De (5.11)-(5.12), deduzimos a convergência

$$Re\langle (i\rho_n - \mathbb{A})z_n, z_n\rangle_{\mathcal{H}} = -Re\langle \mathbb{A}z_n, z_n\rangle_{\mathcal{H}} = -Re\langle T\eta_n, \eta_n\rangle_{\mathcal{M}} \to 0.$$

Portanto, do Lema 3.3.2 temos que

$$0 \leqslant -\int_{\mathfrak{J}} \mu'(s)\|\eta_n(s)\|_V^2 ds \leqslant -\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta_n(s)\|_V^2 ds - \mathbb{J}[\eta_n] = -2Re\langle T\eta_n, \eta_n\rangle_{\mathcal{M}} \to 0.$$

Como

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}}^2 = \int_{\mathfrak{J}} \mu(s)\|\eta_n(s)\|_V^2 ds \leqslant -k\int_{\mathfrak{J}} \mu'(s)\|\eta_n(s)\|_V^2 ds,$$

obtemos o pretendido. ■

O seguinte lema é um resultado de Teoria da Medida:

Lema 5.3.4. *Dado $\delta > 0$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$, definamos a função $E_\delta[g]$ como*

$$E_\delta[g](s) = \int_0^s e^{-\frac{\delta}{2}(s-y)} g(y)dy.$$

Então, $E_\delta[g] \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e

$$\|E_\delta[g]\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leqslant \frac{2}{\delta}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Demonstração. Como

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\delta}{2}y} dy = \frac{2}{\delta}$$

a desigualdade segue imediatamente de (2.1). ■

Lema 5.3.5. *Existe $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \|v_{n_j}\|_H = 0.$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\rho_n| \|v_n\|_{V^*} < \infty. \tag{5.17}$$

De fato, escrevendo

$$i\rho_n v_n = i\rho_n v_n + A\left[\kappa\omega u_n + \int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)ds\right] - A\left[\kappa\omega u_n + \int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)ds\right],$$

temos

$$\begin{aligned}
|\rho_n|\|v_n\|_{V^*} &\leqslant \left\|i\rho_n v_n + A\left[\kappa\omega u_n + \int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)ds\right]\right\|_{V^*} + \left\|A\left[\kappa\omega u_n + \int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)ds\right]\right\|_{V^*} \\
&\leqslant \left\|i\rho_n v_n + A\left[\kappa\omega u_n + \int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)ds\right]\right\|_{V^*} + \kappa\omega\|u_n\|_V + \int_0^\infty \mu(s)\|\eta_n(s)\|_V ds.
\end{aligned}$$

Devido a (5.14) e $H \hookrightarrow V^*$, o primeiro termo do lado direito converge a zero, enquanto (5.11) e a Desidualdade de Holder nos dá

$$\begin{aligned}
\kappa\omega\|u_n\|_V + \int_0^\infty \mu(s)\|\eta_n(s)\|_V ds &= \kappa\omega\|u_n\|_V + \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(s)}\|\eta_n(s)\|_V ds \\
&\leqslant \kappa\omega + \sqrt{\kappa}\|\eta_n\|_{\mathcal{M}} \leqslant \kappa\omega + \sqrt{\kappa},
\end{aligned}$$

e isto prova (5.17).

Agora, reescrevendo (5.15) como

$$i\rho_n\eta_n - T\eta_n - v_n = \varepsilon_n,$$

com $\varepsilon_n \to 0$ em $\mathcal{M}$. Como $\eta_n \in \mathcal{D}(T)$, integrando a igualdade acima obtemos a expressão explicita

$$\eta_n(s) = \frac{1}{i\rho_n}(1 - e^{-\rho_n s})v_n + \int_0^s e^{-\rho_n(s-y)}\varepsilon_n(y)dy. \tag{5.18}$$

Além disso, do Lema 5.3.3 e de (5.17),

$$\begin{aligned}|i\rho_n\langle\eta_n, A^{-1}v_n\rangle_{\mathcal{M}_\mathfrak{J}}| &= |\rho_n|\int_\mathfrak{J}\mu(s)\|\eta_n(s)\|_V\|A^{-1}v_n\|_V ds\\ &= |\rho_n|\|v_n\|_{V^*}\int_\mathfrak{J}\sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(s)}\|\eta_n(s)\|_V ds\end{aligned}$$

assim, aplicando a desigualdade de Hölder, o Lema 5.3.3 e (5.17) temos que

$$|i\rho_n\langle\eta_n, A^{-1}v_n\rangle_{\mathcal{M}_\mathfrak{J}}| \leqslant \sqrt{\kappa}|\rho_n|\|v_n\|_{V^*}\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_\mathfrak{J}} \to 0.$$

Portanto, de (5.18)

$$i\rho_n\langle\eta_n, A^{-1}v_n\rangle_{\mathcal{M}_\mathfrak{J}} = a_n\|v_n\|_H^2 + b_n \to 0, \tag{5.19}$$

onde

$$\begin{aligned}a_n &= \int_\mathfrak{J}\mu(s)(1-e^{-i\rho_n s})ds,\\ b_n &= i\rho_n\int_\mathfrak{J}\mu(s)\left(\int_0^s e^{-i\rho_n(s-y)}\langle\varepsilon_n(y), A^{-1}v_n\rangle_V dy\right)ds.\end{aligned}$$

Mostremos primeiramente que $b_n \to 0$. Devido a (5.1), (5.17) e ao Lema 5.3.4, tem-se

$$\begin{aligned}|b_n| \leqslant&|\rho_n|\|v_n\|_{V^*}\int_\mathfrak{J}\mu(s)\left(\int_0^s\|\varepsilon_n\|_V dy\right)ds\\ \leqslant&\sqrt{C}|\rho_n|\|v_n\|_{V^*}\int_0^\infty\sqrt{\mu(s)}E_\delta[\sqrt{\mu}\|\varepsilon_n\|_V](s)ds\\ \leqslant&\frac{2\sqrt{\kappa C}}{\delta}|\rho_n|\|v_n\|_{V^*}\|\varepsilon_n\|_\mathcal{M} \to 0.\end{aligned}$$

Para estimar a_n, consideremos ρ_* o ponto limite de (ρ_n). De (5.16) sabemos que

$$\rho_* \in [-\infty, \infty]\setminus\{0\}.$$

Se $\rho_* \in \{-\infty, \infty\}$, para uma subsequência, o Lema de Riemann-Lebesgue 2.3.25 nos garante que

$$a_n \to \int_\mathfrak{J}\mu(s)ds > -k\int_\mathfrak{J}\mu'(s)ds > 0,$$

se $\rho_* \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$a_n \to \int_\mathfrak{J}\mu(s)(1-e^{-i\rho_* s})ds,$$

com

$$Re\int_\mathfrak{J}\mu(s)(1-e^{-i\rho_* s})ds = \int_\mathfrak{J}\mu(s)(1-\cos(\rho_* s))ds > 0.$$

Em ambos os casos, para (5.19) ser válido, deve existir uma subsequência de (v_{n_j}) tal que $v_{n_j} \to 0$, quando $j \to \infty$. ■

Lema 5.3.6. *Existe* $(n_j) \subset \mathbb{N}$ *tal que*

$$\lim_{j\to\infty}\|u_{n_j}\|_V = 0.$$

Demonstração. Definamos

$$\varsigma_n(s) = \frac{1}{i\rho_n}(1 - e^{-i\rho_n s})(v_n - i\rho_n u_n).$$

De (5.13) e (5.16), segue que

$$\|\varsigma_n\|_V \leqslant \frac{2}{|\rho_n|}\|v_n - i\rho_n u_n\|_V \to 0,$$

logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada tem-se $\varsigma_n \to 0$ em $\mathcal{M}$. Então, reescrevendo (5.18) como

$$\eta_n(s) = (1 - e^{-i\rho_n s})u_n + \int_0^s e^{-i\rho_n(s-y)}\varepsilon_n(y)dy + \varsigma_n(s), \tag{5.20}$$

o qual, devido a (5.11), nos diz que

$$\langle \eta_n, u_n\rangle_{\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}} = a_n\|u_n\|_V^2 + c_n + \langle \varsigma_n, u_n\rangle_{\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}} \to 0, \tag{5.21}$$

com a_n como no lema anterior e

$$c_n = \int_{\mathfrak{J}} \mu(s)\left(\int_0^s e^{-i\rho_n(s-y)}\langle \varepsilon_n(y), u_n\rangle_V dy\right) ds.$$

Claramente,

$$\langle \varsigma_n, u_n\rangle_{\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}} \to 0.$$

Além disso, usando a mesma argumentação da prova do lema anterior temos que

$$|c_n| \leqslant \frac{2\sqrt{\kappa C}}{\delta}\|u_n\|_V\|\varepsilon_n\|_{\mathcal{M}} \to 0.$$

Sabendo que existe uma subsequência de (a_n) que converge para um valor não nulo, então, para que (5.21) ainda seja válido, devemos ter que existe $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{n_j}\|_V = 0.$$

■

Lema 5.3.7. *Existe* $(n_j) \subset \mathbb{N}$ *tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \|\eta_{n_j}\|_{\mathcal{M}} = 0.$$

Demonstração. Multiplicando (5.20) por $\eta_n \in \mathcal{M}$, e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (5.11) temos

$$\begin{aligned}
\|\eta_n\|_{\mathcal{M}}^2 &\leqslant 2\int_0^\infty \mu(s)\|u_n\|_V\|\eta_n(s)\|_V ds + \int_0^\infty \mu(s)\int_0^s \|\varepsilon_n(y)\|_V dy\|\eta_n(s)\|_V ds \\
&\quad + \int_0^\infty \mu(s)\|\eta_n(s)\|_V\|\varsigma_n(s)\|_V ds \\
&\leqslant 2\sqrt{\kappa}\|u_n\|_V + \int_0^\infty\int_0^s \mu(s)\|\varepsilon_n(y)\|_V dy\|\eta_n(s)\|_V ds + \|\varsigma_n\|_{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Usando (5.1), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
\|\eta_n\|_{\mathcal{M}}^2 &\leqslant 2\sqrt{\kappa}\|u_n\|_V + \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)} \int_0^s \sqrt{\mu(s+(y-y))}\|\varepsilon_n(y)\|_V dy \|\eta_n(s)\|_V ds + \|\varsigma_n\|_{\mathcal{M}} \\
&\leqslant 2\sqrt{\kappa}\|u_n\|_V + \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)} \int_0^s \sqrt{C} e^{-\frac{\delta}{2}(s-y)} \sqrt{\mu(y)}\|\varepsilon_n(y)\|_V dy \|\eta_n(s)\|_V ds + \|\varsigma_n\|_{\mathcal{M}} \\
&\leqslant 2\sqrt{\kappa}\|u_n\|_V + \sqrt{C}\int_0^\infty \sqrt{\mu(s)}\|\eta_n(s)\|_V E_\delta[\sqrt{\mu}\|\varepsilon_n\|_V](s) ds + \|\varsigma_n\|_{\mathcal{M}},
\end{aligned}$$

o qual, do Lema 5.3.4, segue que

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant 2\sqrt{\kappa}\|u_n\|_V + \frac{2\sqrt{C}}{\delta}\|\varepsilon_n\|_{\mathcal{M}} + \|\varsigma_n\|_{\mathcal{M}}.$$

Do Lema 5.3.6, segue que existe $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que a subsequência (u_{n_j}) converge para zero em V, o que implica, da estimativa acima, que (η_{n_j}) converge para zero em $\mathcal{M}$. ∎

Coletando o Lema 5.3.5, Lema 5.3.6 e Lema 5.3.7, encontramos uma subsequência $(n_j) \subset N$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|z_{n_j}\|_{\mathcal{H}}^2 = \lim_{j\to\infty} \left(\|u_{n_j}\|_V^2 + \|v_{n_j}\|_H^2 + \|\eta_{n_j}\|_{\mathcal{M}}^2\right) = 0,$$

contradizendo (5.11). O que prova o Caso I.

Caso II: ($\rho_n \to 0$). Devido a (5.11), como

$$\|(i\rho_n - \mathbb{A})z_n\|_{\mathcal{H}} \geqslant \|\mathbb{A}z_n\|_{\mathcal{H}} - |\rho_n|,$$

temos que $\|\mathbb{A}z_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$, e as relações (5.13)-(5.15) ficam

$$\begin{aligned}
&v_n \to 0 \text{ em } V, \\
&A\left[\kappa\omega u_n + \int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)ds\right] \to 0 \text{ em } H, \\
&T\eta_n + v_n \to 0 \text{ em } \mathcal{M}.
\end{aligned}$$

o que nos dá as seguintes convergências

$$\|v_n\|_H \to 0, \quad \|u_n\|_V^2 + \langle \eta_n, u_n\rangle_{\mathcal{M}} \to 0, \quad \|T\eta_n\|_{\mathcal{M}} \to 0.$$

Assim, para contradizer 5.11, precisamos apenas mostrar que

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}} \to 0.$$

Para isso, usemos o fato de que a condição (5.1) implica a estabilidade exponencial do semigrupo de translações a direita $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|R(t)\eta\|_{\mathcal{M}}^2 &= \int_t^\infty \mu(s)\|\eta(s-t)\|_V^2 ds = \int_0^\infty \mu(t+s)\|\eta(s)\|_V^2 ds \\
&\leqslant Ce^{-\delta t}\int_0^\infty \mu(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds = Ce^{-\delta t}\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2.
\end{aligned}$$

Assim, de acordo com o Lema 2.5.13, existe $\sigma > 0$ tal que

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{1}{\sigma}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|(i\lambda - T)\eta_n\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{1}{\sigma}\|T\eta_n\|_{\mathcal{M}} \to 0,$$

o que finaliza a prova do Caso II. ∎

Referências

[1] M. M. Miranda, Análise espectral em espaços de Hilbert, Instituto de Matemática UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.

[2] K. J. Engel, R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer Science & Business Media. New York, 1999.

[3] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications. Wiley New York, 1989.

[4] R. A. Melo, A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais. Dissertação de Mestrado, UFCG, 2006.

[5] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science & Business Media, 2010.

[6] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires. Dunod Paris, 1969.

[7] R. G. Bartle, The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley & Sonss, 2014.

[8] K. Yoshida, Functional Analysis, sixth edition. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1980.

[9] A. D. Salamon, Measure and Integration. European Mathematical Society, 2015.

[10] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1983.

[11] C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 37 (1970), 297-308.

[12] C. M. Dafermos, Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics, in "Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics"(P. Germain and B. Nayroles, Eds.), pp.295-306, Lecture Notes in Mathematics no.503, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[13] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, 1970.

[14] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Second Edition. Graduate Studies in Mathematics, Volume 19. American Mathematical Sociecity, 2010.

[15] V. Pata, Exponential stability in linear viscoelasticity. Quart. Appl. Math. 64 (2006), no. 3, 499-513.

[16] R. F. Curtain, H. J. Zwart, An Introduction to Infinite-Dimensional Linear System Theory, Springer, New York, 1995.

[17] M. Fabrizio, B. Lazzari, On the existence and asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids, Arch. Rational Mech. Anal. 116 (1991), 139-152.

[18] V. Pata, Stability and exponential stability in linear viscoelasticity. Milan J. Math. 77 (2009), 333-360.

[19] V. V. Chepyzhov, V. Pata, Some remarks on stability of semigroups arising from linear viscoelasticity. Asymptot. Anal. 46 (2006), no. 3-4, 251–273.

[20] M. Conti, S. Gatti, V. Pata, Uniform decay properties of linear Volterra integro-differential equations, Math. Models Methods Appl. Sci. 18 (2008), 1–21.

[21] C. Giorgi, J. E. Muñoz Rivera, V. Pata, Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity. J. Math. Anal. Appl. 260 (2001), no. 1, 83–99.

[22] D. G. Figueiredo, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[23] V. Pata, Exponential stability in linear viscoelasticity with almost flat memory kernels. Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), no. 3, 721–730.

[24] M. Conti, V. Pata, Weakly dissipative semilinear equations of viscoelasticity. Commun. Pure Appl. Anal. 4 (2005), no. 4, 705–720.

[25] M. Grasselli, V. Pata, Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis, Springer Basel AG, 2000, pg. 159-178.

Apêndice A

O Semigrupo de Translações a Direita

Neste apêndice definiremos o semigrupo de translações à direita e identificamos seu gerador.

Consideremos $\mu : \mathbb{R}^+ \to [0, \infty)$ uma função decrescente, integrável e quase sempre diferenciável. Sendo V um espaço de Hilbert real, notemos $\mathcal{M} = L^2_\mu(\mathbb{R}^+, V)$.

Teorema A.0.1. *O operador $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ definido por*

$$\mathcal{D}(T) = \{\eta \in \mathcal{M}; D\eta \in \mathcal{M} \ e \ \eta(0) = 0\}, \quad T\eta = -D\eta,$$

onde $\eta(0) = \lim_{s\to 0^+} \eta(s)$ em V e D é a derivada fraca em $\mathcal{M}$, é gerador do semigrupo (de classe C_0) de translações à direita $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$, onde

$$(R(t)\eta)(s) = \begin{cases} \eta(s-t) & s \geqslant t, \\ 0 & 0 < s < t. \end{cases} \tag{A.1}$$

Demonstração. Nosso primeiro objetivo é mostrar que o operador T é gerador de um semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.

De fato, sabemos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V)$ é denso em $\mathcal{M}$ e como $C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V) \subset \mathcal{D}(T)$ segue que T é densamente definido. Além disso, usando integração por partes

$$\begin{aligned} \langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu(s)\frac{d}{ds}\|\eta(s)\|_V^2 ds = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\int_y^{1/y} \mu(s)\frac{d}{ds}\|\eta(s)\|_V^2 ds \\ &= \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{2}\left(-\mu\left(\frac{1}{y}\right)\left\|\eta\left(\frac{1}{y}\right)\right\|_V^2 + \mu(y)\|\eta(y)\|_V^2 + \int_y^{\frac{1}{y}} \mu'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Note que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \liminf_{y\to 0^+} \mu(y)\|\eta(y)\|_V^2 &\leqslant \limsup_{y\to 0^+} \mu(y)\left(\int_0^y \|D\eta(z)\|_V dz\right)^2 \\ &\leqslant \limsup_{y\to 0^+}\left(\int_0^y \sqrt{\mu(z)}\|D\eta(z)\|_V dz\right)^2 \\ &\leqslant \limsup_{y\to 0^+} y\int_0^y \mu(z)\|D\eta(z)\|_V^2 dz \\ &\leqslant \limsup_{y\to 0^+} y\|D\eta\|_{\mathcal{M}} = 0. \end{aligned}$$

Logo
$$\lim_{y\to 0^+} \mu(y)\|\eta(y)\|_V^2 = 0.$$
Como o lado esquerdo de (A.2) é finito, e os restantes dois termos do lado direito são negativos, segue que existe o limite e
$$\langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \mu'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds \leqslant 0. \tag{A.3}$$
Portanto T é dissipativo. Mostremos agora que $Im(I-T) = \mathcal{M}$. Seja $\bar{\eta} \in \mathcal{M}$, consideremos a equação
$$\eta(s) + D\eta(s) = \bar{\eta}(s). \tag{A.4}$$
Multiplicando por e^s e integrando obtemos
$$\eta(s) = \int_0^s e^{-(s-y)}\bar{\eta}(y)dy. \tag{A.5}$$
Note que $\eta \in \mathcal{M}$. De fato, para $\xi \in \mathcal{M}$ tal que $\|\xi\|_{\mathcal{M}} = 1$ temos
$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty \mu(s)\int_0^s e^{-(s-y)}\langle\hat{\eta}(y), \xi(s)\rangle_V dyds\right| &\leqslant \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)}\|\xi(s)\|_V \int_0^s e^{-(s-y)}\sqrt{\mu(y)}\|\hat{\eta}(y)\|_V dyds \\ &= \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)}\|\xi(s)\|_V (E \circledast \sqrt{\mu}\|\bar{\eta}\|_V)(s)ds \\ &\leqslant \|\xi\|_{\mathcal{M}}\|E \circledast \sqrt{\mu}\|\bar{\eta}\|_V\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &\leqslant \|E\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\sqrt{\mu}\|\bar{\eta}\|_V\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}}.\end{aligned}$$
Onde $E(s) = e^{-s}$ e a última desigualdade segue de (2.1). Daí, do Teorema 2.3.5, temos
$$\|\eta\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{M}}=1} |\langle\eta, \xi\rangle_{\mathcal{M}}| \leqslant \|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}} < \infty.$$

Verifiquemos que η dado em (A.5) satisfaz (A.4). Assumamos primeiramente que $\bar{\eta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V)$, então denotando $g(y) = e^y\bar{\eta}(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V)$. Se G é tal que $DG(y) = g(y)$, temos
$$e^s\eta(s) = \int_0^s g(y)dy = G(s) - G(0) = G(s).$$
Portanto,
$$\eta(s) = e^{-s}G(s) \quad \Rightarrow \quad D\eta(s) = e^{-s}DG(s) - e^{-s}G(s) = \bar{\eta}(s) - \eta(s).$$
Consideremos agora $\bar{\eta} \in \mathcal{M}$ qualquer, então da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V)$ em $\mathcal{M}$, segue que existe uma sequência $(\bar{\eta}_n)$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V)$ que converge para $\bar{\eta}$ em $\mathcal{M}$. Daí
$$\int_0^\infty \langle\eta_n(s), D\phi(s)\rangle_V\mu(s)ds = -\int_0^\infty \langle\bar{\eta}_n(s) - \eta_n(s), \phi(s)\rangle_V\mu(s)ds, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V).$$
Fazendo $n \longrightarrow \infty$ na expressão acima, e usando o teorema da convergência dominada, segue que η satisfaz (A.4).

Claramente $\eta(0) = 0$, e da equação (A.4), $\eta \in \mathcal{M}$ se, e somente se, $D\eta \in \mathcal{M}$. logo $\eta \in \mathcal{D}(T)$, e assim T é m-dissipativo.

Portanto do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.5.8), temos que T é gerador de um semigrupo C_0 de contrações, o qual denotamos por $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Vamos agora verificar que $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ definido em (A.1) é um semigrupo de classe C_0 e que coincide com $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ em $\mathcal{D}(T)$.

Claramente, $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um semigrupo. Note que, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V)$ é denso em $\mathcal{M}$, então dado $\varepsilon > 0$ e $\eta \in \mathcal{M}$, existe $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+, V)$ tal que $\|\eta - f\|_{\mathcal{M}} < \varepsilon/3$, e da continuidade uniforme de f, existe $\delta > 0$ tal que se $|t| < \delta$ então

$$\|f(s-t) - f(s)\|_V^2 < \frac{\varepsilon}{3\kappa}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Portanto, para $t < \delta$,

$$\|R(t)\eta - \eta\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|R(t)\eta - R(t)f\|_{\mathcal{M}} + \|R(t)f - f\|_{\mathcal{M}} + \|f - \eta\|_{\mathcal{M}} < \varepsilon,$$

o que verifica que $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um semigrupo de classe C_0.

Denotemos com A seu gerador infinitesimal, se $\eta \in \mathcal{D}(T)$ então, para $h > 0$ temos

$$\frac{(R(h)\eta)(s) - \eta(s)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\eta(s-h) - \eta(s)}{h} & s \geqslant h \\ -\dfrac{\eta(s)}{h} & s < h \end{cases}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| \frac{(R(h)\eta)(s) - \eta(s)}{h} \right\|_V^2 \mu(s)ds = & \frac{1}{h^2} \int_0^h \|\eta(s)\|_V^2 \, \mu(s)ds \\ & + \int_h^\infty \left\| \frac{\eta(s-h) - \eta(s)}{h} \right\|_V^2 \mu(s)ds. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Para o primeiro termo do lado direito temos

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h^2} \int_0^h \|\eta(s)\|_V^2 \, \mu(s)ds &\leqslant \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h^2} \int_0^h \left(\int_0^s \|D\eta(y)\|_V dy \right)^2 \mu(s)ds \\ &\leqslant \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^s \|D\eta(y)\|_V^2 dy s\mu(s)ds \\ &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h^2} \int_0^h \|D\eta(y)\|_V^2 \int_y^h s\mu(s)dsdy \\ &\leqslant \frac{1}{2} \limsup_{h\to 0^+} \int_0^h \|D\eta(y)\|_V^2 \mu(y)dy = 0, \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^2} \int_0^h \|\eta(s)\|_V^2 \, \mu(s)ds = 0$$

E para o segundo, note primeiramente que

$$\begin{aligned} \|\eta(s-h) - \eta(s)\|_V^2 \mu(s) &= \left\| \int_s^{s-h} D\eta(y)dy \right\|_V^2 \mu(s) \leqslant \left\{ \int_s^{s-h} \|D\eta(y)\|_V \right\}^2 \mu(s) \\ &\leqslant h \int_s^{s-h} \|D\eta(y)\|_V^2 dy \mu(s) \leqslant h \int_s^{s-h} \|D\eta(y)\|_V^2 \mu(y)dy \\ &\leqslant h\|D\eta\|_{\mathcal{M}}^2. \end{aligned}$$

Daí, usando o teorema da convergência dominada, com a função $\mu(s)\|D\eta\|_{\mathcal{M}}^2$ como dominante, temos que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_h^\infty \left\|\frac{\eta(s-h)-\eta(s)}{h}\right\|_V^2 \mu(s)ds = \int_0^\infty \|-D\eta(s)\|_V^2\mu(s)ds.$$

Portanto de (A.6), temos que $A|_{\mathcal{D}(T)} = T$, logo do Teorema 2.5.4, $R(t) = S(t)$, $\forall t \geqslant 0$. ■

Apêndice B

Falta de Estabilidade Exponencial para Núcleos Escada

Neste apêndice, mostraremos que para algumas realizações do operador A, para núcleos da forma

$$\mu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \chi_{[s_{n-1}, s_n)}(s), \tag{B.1}$$

onde (γ_n) é uma sequência estritamente decrescente, possivelmente $\gamma_n = 0$, para todo $n \geqslant N$, para algum $N \in \mathbb{N}$, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ não decaí exponencialmente.

Ao longo deste apêndice denotaremos

$$\gamma_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n.$$

B.1 Caso Unidimensional

Vamos considerar aqui a equação viscoelástica unidimensional. Fixemos $H = L^2(0, \pi)$, e neste caso

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi).$$

Como já mencionado, temos $\lambda_m = m^2$, e $v_m(x) = \sin mx$, com $m \in \mathbb{N}$. Note também que já verificamos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ não decaí exponencialmente quando $\mu(s) = \chi_{[0,\ell)}$.

Note que se o núcleo for ressonante então o semigrupo não é nem assintoticamente estável, portanto devemos considerar que $\ell/\pi \notin \mathbb{Q}$. Mostraremos que mesmo neste caso, a estabilidade exponencial nunca ocorre. Antes disso, vamos ver dois lemas, o primeiro é um resultado provado por Dirichlet em aproximação Diofantina simultânea, cuja prova que daremos, é baseada no princípio da gaiola dos pombos:

"Se n pombos são colocadas em m gaiolas, com n>m, então ao menos uma gaiola deve conter mais de um pombo."

Lema B.1.1. *Sejam $a_1, \dots, a_N$ números reais. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ e $p_n \in \mathbb{Z}$ com $m \geqslant 1/\varepsilon$, tais que*

$$|a_n m - p_n| \leqslant \varepsilon,$$

para todo $n = 1, \dots, N$.

Demonstração. Escolhamos $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \geqslant 2/\varepsilon$. Dividamos o cubo unitário $[0,1]^N \subset \mathbb{R}^N$ em M^N cubos de lados $1/M$. Denotemos $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_N)$, e consideremos $M^N + 1$ vetores "pombos"

$$dec(j\bar{a}) = (dec(ja_1), \ldots, dec(ja_N)), \quad j = M, 2M, \ldots, (M^N+1)M,$$

onde $dec(x) = x - [x]$, com $[x]$ denotando a parte inteira de x. Note que temos $M^N + 1$ "pombos"em M^N "gaiolas", portanto, existem $j_1 < j_2$ tais que $dec(j_1\bar{a})$ e $dec(j_2\bar{a})$ estão na mesma "gaiola". Sendo $m = j_1 - j_2$ e $p_n = [j_1 a_n] - [j_2 a_n]$, então para $n = 1, \ldots, N$ temos

$$|a_n m - p_n| \leqslant |a_n j_1 - [j_1 a_n]| + |j_2 - [j_2 a_n]| \leqslant \frac{2}{M} \leqslant \varepsilon.$$

■

Denotemos a meia transformada de Fourier de μ por

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-i\lambda s}\mu(s)ds.$$

Lema B.1.2. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos*

$$c_m = m\hat{\mu}(m).$$

Então $c_m \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e existe uma sequência $(m_j) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} c_{m_j} = 0.$$

Demonstração. Usando a representação de μ e calculando a transformada diretamente, temos

$$\begin{aligned} c_m &= m\int_0^\infty e^{-ims}\mu(s)ds = m\int_0^\infty e^{-ims}\sum_{n=1}^\infty \gamma_n \chi_{[s_{n-1},s_n)}(s)ds \\ &= m\sum_{n=1}^\infty \gamma_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} e^{-ims}ds = \frac{1}{i}\sum_{n=1}^\infty \gamma_n(e^{-ims_{n-1}} - e^{-ims_n}). \end{aligned}$$

Como (γ_n) é uma sequência decrescente limitada inferiormente por zero, então $\gamma_n \to \gamma_\infty$, quando $n \longrightarrow \infty$, assim podemos escrever

$$c_m = \frac{1}{i}\left(\gamma_1 - \sum_{n=1}^\infty (\gamma_n - \gamma_{n+1})e^{-is_n m} - \gamma_\infty e^{-is_\infty m}\right),$$

onde o último termo do lado direito desaparece quando $\gamma_\infty = 0$.

Assumamos, por contradição, que $c_m = 0$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\gamma_1 = \sum_{n=1}^\infty (\gamma_n - \gamma_{n+1})e^{is_n m} + \gamma_\infty^{-is_\infty m}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\gamma_1 = \sum_{n=1}^\infty (\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \gamma_\infty. \tag{B.2}$$

Como $\gamma_n - \gamma_{n+1} \geqslant 0$ e $\gamma_\infty \geqslant 0$, a igualdade acima ocorre apenas se os números $s_n m$ e $s_\infty m$ são múltiplos de 2π, mas como assumimos que o núcleo não é ressonante, isto é impossível. Logo $c_m \neq 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Vamos provar a segunda parte do lema. Da representação (B.2), podemos reescrever c_m como

$$c_m = \frac{1}{i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n - \gamma_{n+1})(1 - e^{-is_n m}) + \gamma_\infty(1 - e^{-is_\infty m})\right).$$

Fixamos $\varepsilon > 0$, e escolhamos $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_N - \gamma_\infty = \sum_{n=N}^{\infty}(\gamma_n - \gamma_{n+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Então, como $|1 - e^{-is}| \leqslant 2$, para todo $s \in \mathbb{R}$ temos

$$|c_m| \leqslant \gamma_\infty|1 - e^{-is_\infty m}| + \sum_{n=1}^{N-1}(\gamma_n - \gamma_{n+1})|e^{is_n m} - 1| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, do Lema B.1.1, podemos encontrar $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $p_n = p_n(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ e $p_\infty = p_\infty(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ tais que

$$|s_n m - 2p_n\pi| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\gamma_1},$$

para todo $n = \infty, 1, \ldots, N-1$. Usando a desigualdade elementar $|e^{i\theta} - 1| \leqslant |\theta|$, que é válida para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$|e^{-is_n m} - 1| = |e^{-i(s_n m - 2p_n\pi)} - 1| \leqslant |s_n m - 2p_n\pi| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\gamma_1}.$$

Portanto

$$|c_m| \leqslant \frac{\varepsilon\gamma_\infty}{4\gamma_1} + \frac{\varepsilon}{4\gamma_1}\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon\gamma_\infty}{4\gamma_1} + \frac{\varepsilon}{4\gamma_1}(\gamma_1 - \gamma_\infty) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

portanto, podemos construir uma sequência (m_j) de números naturais tais que c_{m_j} converge para zero, quando j tende a infinito. ■

Teorema B.1.3. *Se μ é do tipo escada da forma* (B.1), *então o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Vamos assumir que μ não é ressonante, caso contrário o semigrupo não é nem assintoticamente estável. Mostraremos que a condição necessária para se ter a estabilidade exponencial (ver Teorema 2.5.13)

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|(i\lambda I - \mathbb{A})z\|_{\mathcal{H}} \geqslant \varepsilon\|z\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathbb{A}), \varepsilon > 0,$$

falha. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z_m = (0, 0, m^{-1}v_m) \in \mathcal{H}$, consideremos a equação complexa, na variável $z = (u, v, \eta)$

$$(i\lambda I - \mathbb{A})z = z_m.$$

Note que $\|z_m\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\kappa}$. Vamos procurar uma solução da forma

$$u = \frac{\rho}{i\lambda}v_m, \quad v = \rho v_m, \quad \eta(s) = \varphi(s)v_m,$$

com $\rho \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in L^2_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ tal que $\varphi(0) = 0$, a equação acima pode ser escrita da forma

$$\begin{cases} \lambda^2\rho - \kappa\omega m^2\rho - i\lambda m^2 \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\varphi(s)ds = 0, \\ i\lambda\varphi(s) - T\varphi(s) - \rho = m^{-1}. \end{cases}$$

Integrando a segunda equação temos

$$\varphi(s) = \frac{1}{i\lambda}\left(\frac{1}{m} + \rho\right)(1 - e^{-i\lambda s}).$$

Substituindo φ na primeira equação obtemos

$$\rho(\lambda^2 - m^2) - m(\kappa - \hat{\mu}(\lambda) - m\rho\hat{\mu}(\lambda)) = 0.$$

Aplicando o Lema B.1.2 com $\lambda = m_j$, temos

$$|\rho| = \frac{|m_j\kappa - c_{m_j}|}{m_j|c_{m_j}|} \geqslant \frac{\kappa}{|c_{m_j}|} \longrightarrow \infty, \text{ quando } j \longrightarrow \infty,$$

e a correspondente solução z satisfaz

$$\|z\|_{\mathcal{H}} \geqslant \|v\|_V = |\rho| \longrightarrow \infty, \text{ quando } j \longrightarrow \infty.$$

o que finaliza a prova, pois se $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável, então para um dado $\varepsilon > 0$ deveríamos ter

$$\sqrt{\kappa} \geqslant \frac{\|z\|_{\mathcal{H}}}{\varepsilon}.$$

■

B.2 O Caso Geral

De forma mais geral, temos o seguinte teorema:

Teorema B.2.1. *Assumamos que existe uma sequência (β_j) formado por autovalores de A para o qual o seguinte é válido: para todo $N \in \mathbb{N}$ existe sequências de inteiros $(p_{n,j})$, para $n = 1, \ldots, N-1$, e (apenas se $\gamma_\infty > 0$, o que implica que $s_\infty < \infty$) $(p_{n,\infty})$ tais que*

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{s_n\sqrt{\beta_j}}{2\pi} - p_{n,j}\right| = 0, \quad \forall n = \infty, 1\ldots, N-1. \tag{B.3}$$

Então, se μ é da forma (B.1)*, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Vamos prosseguir exatamente como na prova do Teorema B.1.3, recolocando m_j por $\sqrt{\beta_j} = \lambda$ e redefinindo c_{m_j} como

$$\bar{c}_j = \sqrt{\beta_j}\hat{\mu}(\sqrt{\beta_j}).$$

A condição (B.3) permite reformular a prova do Lema B.1.2, e portanto podemos obter a convergência $\bar{c}_j \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow \infty$. ■

Note que, dado um operador A, a não estabilidade exponencial do semigrupo se resume a verificar a condição (B.3). Para isso, é necessário o conhecimento assintótico de, ao menos, alguns dos autovalores de A, e ter em mãos algum teorema de aproximação Diofantina.

Por exemplo, se o espectro de A contêm valores da forma

$$\beta_m = \gamma^2 m^2 + o(m),$$

para algum $\gamma > 0$ e todo m suficientemente grande, então (B.3) é válido para alguma subsequência m_j. De fato,

$$\frac{s_n \sqrt{\beta_m}}{2\pi} = \frac{s_n \gamma}{2\pi} m + o(1),$$

e o pretendido segue do Lema B.1.1.

Consideremos $A = -\Delta$, com condições de fronteira de Dirichlet (as mesmas da Observação 3.1.1), com domínio $\Omega = \Pi_{i=1}^n [0, L_i] \subset \mathbb{R}^n$, com $L_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Neste caso, para todo $m \in \mathbb{N}$, é possível verificar que os números $\pi^2 m^2 / L_1^2$ são autovalores de A, logo, da discussão do parágrafo anterior, a hipótese (B.3) é satisfeita. O mesmo raciocínio pode ser aplicado quando $\Omega = B(0, R)$, a bola aberta de $\mathbb{R}^3$, de centro na origem e raio $R > 0$. Neste caso os autovalores de A são da forma $\pi^2 m^2 / R^2$, para $m \in \mathbb{N}$.