UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LARISSA KOVALSKI

O PENSAMENTO ANALÓGICO NA MATEMÁTICA E SUAS IMPLICAÇÕES NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO

CURITIBA

2016

LARISSA KOVALSKI

O PENSAMENTO ANALÓGICO NA MATEMÁTICA E SUAS IMPLICAÇÕES NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes.

CURITIBA

2016

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

K88p

Kovalski, Larissa
O pensamento analógico na matemática e suas implicações na modelagem matemática para o ensino / Larissa Kovalski. – Curitiba, 2016.
75 p. : il. color.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, 2016.

Orientador: José Carlos Cifuentes .
Bibliografia: p. 74-75.

1. Modelos matemáticos. 2. Diferenças finitas. 3. Cálculo Diferencial. 4. Matemática – Estudo e ensino. I. Universidade Federal do Paraná. II. Cifuentes, José Carlos. III. Título.

CDD: 511.34

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

PARECER

Defesa de Dissertação de **LARISSA KOVALSKI**, intitulada **"O PENSAMENTO ANALÓGICO NA MATEMÁTICA E SUAS IMPLICAÇÕES NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO"**, para obtenção do Título de Mestra em Educação em Ciências e em Matemática.

De acordo com o Protocolo aprovado pelo Colegiado do Programa, a Banca Examinadora composta pelos professores abaixo-assinados arguiu, nesta data, a candidata acima citada. Procedida a arguição, a Banca Examinadora é de Parecer que a candidata está **apta ao Título** de **MESTRA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA**, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
Prof. Dr. José Carlos Cifuentes (orientador)		APROVADA
Profª. Drª. Clicia Valladares Bastos Peixoto	Clicia Valladares Bastos Peixoto	aprovada
Profª. Drª. Leônia Gabardo Negrelli	Leônia G. Negrelli	Aprovada
Profª. Drª. Paula Rogéria Lima Couto	Paula Rogeria Lima Couto	Aprovada

Curitiba, 13 de Maio de 2016.

Prof. Dr. Emerson Rolkouski
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Educação em Ciências e em Matemática.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
Coordenação de Pós-Graduação

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus, por toda proteção e iluminação que me concebeu nesta jornada.

Aos meus pais, Rosangela e Walter, que com muito incentivo e apoio não mediram esforços para que eu chegasse até aqui.

À minha família, que sempre me apoia e torce por minhas conquistas.

Ao meu namorado Leonardo, pela sua atenção, paciência e apoio em todos os momentos desta minha caminhada.

Agradeço, também, aos meus colegas do PPGECM que de uma forma ou de outra, me incentivaram e contribuíram com este trabalho.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade de participar e contribuir para com esta dissertação.

Aos professores que tive durante todo o meu percurso escolar e acadêmico, pelos saberes compartilhados e atenção concebida. De modo especial, ao meu orientador, Prof.º José Carlos Cifuentes, pela grande atenção dispensada, por sua paciência, por sua confiança em minha capacidade e por seus ensinamentos que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho insere-se na área de Modelagem Matemática na Educação Matemática e é voltado para a formação conceitual dos professores de matemática. Trata-se de uma pesquisa teórica de caráter qualitativo. Entendemos ser necessário para a formação de um professor de matemática, não apenas desenvolver a parte lógica do pensamento matemático, ligada principalmente a demonstrações e utilização de técnicas dedutivas, mas também o estudo das formas de pensar e conceber a matemática ligada a outras formas de raciocínio argumentativo, como a indução, a abdução e a analogia. Assim, esta pesquisa visa evidenciar principalmente o pensamento analógico na matemática, destacando suas potencialidades e suas limitações, assim como seu uso na modelagem matemática como uma das partes do seu processo de desenvolvimento: a matemática como atividade. Para tanto, será realizado, como exemplo representativo, um estudo do Cálculo de Diferenças por analogia com o Cálculo Diferencial, entendendo que o Cálculo de Diferenças é uma peça fundamental para a modelagem matemática pela sua potencialidade nas aplicações e também por ser um assunto que pode ser inserido no âmbito elementar pelo seu caráter combinatório e discreto, tornando viável a adaptação para a sala de aula os processos de modelagem matemática no Ensino Básico.

Palavras-chave: Matemática como Atividade. Pensamento analógico. Cálculo de Diferenças e Cálculo Diferencial. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

This study it is inserted in the mathematical modeling area in mathematics education and is focused for the math teachers conceptual formation. It is a qualitative theoretical research. In our concepts, we believe it is necessary for the math teacher formation, not only to develop the logical part of mathematical thinking, principally related to demonstrations and use of deductive techniques, but also the study of ways of thinking and develop the math linked to another forms of reasoning argumentative, such as induction, abduction and analogy. Thus, this research aims to highlight mainly the analogical thinking in math, highlighting your potential and its limitations as well as it is use in mathematical modeling as one part of it is development process: mathematics as activity. Therefore, there will be, as a representative example, a study of differences calculus by analogy to differential calculus, understanding that the differences calculus is a fundamental piece to the mathematical modeling for its potential in applications and, also, because it is a subject that can It is inserted into the basic framework for its combinatorial and discreet character, becoming it feasible to adapt to the classroom the mathematical modeling processes in basic education .

Key-Words: Math as Activity, Analogical Thinking, Differences and Differential Calculus, Mathematical Modeling.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A formação docente, muitas vezes não vai ao encontro das necessidades que sua prática profissional exige. Entendemos que a formação matemática e conceitual de um professor de matemática, tanto na Educação Superior como no Ensino Básico, é algo essencial, pois o faz compreender melhor os assuntos relevantes da matemática que ensina, redundando na sua prática na sala de aula.

A expressão “formação matemática e conceitual”é normalmente associada à matemática científica “tradicional”, com sua apresentação formal, enfatizando, por exemplo, técnicas para a demonstração de teoremas. Porém, a formação, cuja necessidade queremos enfatizar, não se restringe apenas a isso. Está atrelada também à forma de pensar e conceber a matemática.

Neste contexto, destacaremos o pensamento analógico que notoriamente, permite criar argumentações com grande recurso da intuição mais do que da lógica para entender o objeto a ser estudado. A analogia nos dá meios para que estudemos um conteúdo comparando-o com outro já conhecido, facilitando seu entendimento. Assim, é um processo de argumentação criativo que leva à descoberta de coisas novas, aprimorando com isso a formação conceitual do professor.

Na matemática, muitos assuntos podem ser explorados através da analogia. Neste trabalho, abordaremos, como exemplo de destaque, o *cálculo de diferenças*, que é uma área da matemática de caráter mais combinatório do que analítico, que lida com funções de variável discreta e, principalmente, é semelhante ao cálculo diferencial tanto em seus conceitos como em seus métodos, mas que ao contrário do cálculo de diferenças, aquele lida com funções de variável contínua.

O cálculo de diferenças é também uma grande ferramenta para a modelagem matemática. E por se tratar de um assunto da matemática com grande potencial para as aplicações e ao mesmo tempo elementar, acreditamos que se introduzida na formação do professor de matemática, possa trazer conhecimentos relevantes para sua prática escolar, contribuindo assim com sua formação matemática e conceitual.

Nessa compreensão, este trabalho é direcionado a professores de matemática em formação inicial e continuada e a alunos de pós-graduação em geral e será norteado pelas seguintes metas:

1- Mostrar como o raciocínio por analogia pode contribuir para a construção do conhecimento matemático.
2- Diferenciar convenientemente o que vem a ser uma “Modelagem Contínua” e uma “Modelagem Discreta”, discutindo esta última, com exemplos representativos.
3- Contribuir para a divulgação da matemática discreta no ensino, em geral, e na formação de professores, em particular.

Visando as metas propostas, este trabalho está desenvolvido da seguinte forma:

O primeiro capítulo é a introdução ao trabalho. No segundo capítulo, trataremos da matemática vista como atividade, distanciando-a de uma concepção de matemática que pode ser explorada apenas através de teoremas, postulados e demonstrações, mas sim, como uma matemática dinâmica e criativa, na qual pode-se também fazer o uso de diversas formas de argumentação para o acesso ao conhecimento matemático. Para tanto, nesse capítulo, apresentaremos as principais formas de argumentação utilizadas numa ciência dinâmica: indução, dedução, abdução e analogia. Faremos principalmente um estudo sobre o uso de metáforas e analogias no desenvolvimento do pensamento matemático e no ensino, e também discutiremos a importância do cálculo de diferenças como parte da matemática discreta inserida na formação dos professores de matemática, e sobre a possibilidade da sua utilização como ferramenta para a modelagem matemática no ensino.

No terceiro e quarto capítulos apresentamos uma proposta de estudo do cálculo de diferenças por analogia com o cálculo diferencial, proposta que poderia ser implementada no currículo da Licenciatura em Matemática salientando suas potencialidades, semelhanças e diferenças.

No quinto capítulo, trazemos exemplos ilustrativos de aplicação do cálculo de diferenças na modelagem matemática. Analisaremos também, algumas aplicações à modelagem contínua e discreta, explorando um mesmo fenômeno que possa ser abordado de duas maneiras distintas, ou seja, de forma contínua e de forma discreta. Também faremos uma discussão epistemológica sobre o assunto.

Ressaltamos que este trabalho traz uma abordagem original, pois não pensamos em reproduzir apenas o conteúdo específico do cálculo de diferenças e do cálculo diferencial, mas sim, fazer um apanhado de poucos conceitos destas áreas e estuda-las por analogia. Por isso, escolhemos uma única referência sobre o cálculo de diferenças (ELAYDI, 2005) para tomar como pretexto o seu conteúdo e fazermos esse estudo por analogia.

2 A MATEMÁTICA COMO ATIVIDADE E AS FORMAS DE ACESSO AO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Diariamente professores de matemática são questionados pelos seus alunos: “por que aprender matemática?”, “para que serve a matemática?”. A matemática possui diversas potencialidades, seja ela por si só, para aplicações ou para o desenvolvimento de raciocínios que serão úteis em outros campos do saber. Mas afinal, o que é matemática?

Assim como a lógica, a matemática é considerada uma ciência formal, pois constrói seu próprio objeto de estudo, o que a diferencia de outras ciências. Segundo Bunge,

> A lógica e a matemática por se ocupar de criar formas e estabelecer relações entre elas, são muitas vezes chamadas de Ciências formais, justamente porque seus objetos não são coisas nem processos, mas para usar a linguagem pictórica, formas em que podem variar ilimitadamente os conteúdos tanto factuais quanto empíricos. Ou seja, de um lado podem estabelecer relações entre as formas (ou objetos formais), de outro relacionar coisas e processos pertencentes a qualquer nível da realidade. (BUNGE, 1974, p.7, tradução nossa)

Poderíamos assim, dar muitas respostas ao questionamento sobre o que é matemática, entre elas:

- ✓ Etimologicamente, Matemática, do grego *Mathema* quer dizer “ensinamento”, “conhecimento”, ou também, “o que pode ser ensinado”.
- ✓ Geralmente, Matemática é considerada uma ciência formal. Baseia-se em lemas, corolários, postulados e teoremas para chegar a conclusões teóricas e práticas.

Os enfoques teóricos e práticos nos interessam bastante quando situados no ensino de matemática. Pensar na matemática como algo prático é pensar em suas aplicações. A aplicação matemática se revela eficiente quando utilizada em sala de aula como uma forma de motivação e problematização desta área do conhecimento. Dá um “sentido” para a matemática, do ponto de vista dos próprios alunos, tanto daqueles na Educação Básica como os de Cursos Superiores

Belos exemplos de aplicações, encontramos na modelagem matemática nos campos da matemática aplicada e do ensino. Pode-se estimar taxas de crescimento populacional (BASSANEZI, 2013, p.110), crescimentos e extinções de plantas (ELAYDI, S., 2005, p.104), problemas relacionados à economia (BASSANEZI, 2013, p.103), saúde (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.135), entre outros assuntos.

Quando nos referimos à formação do professor de matemática, o contato com as aplicações matemáticas também é necessário para visualizar de maneira prática o conteúdo que o próprio professor explora na sala de aula e assim, ter subsídios para elaborar uma aula mais dinâmica.

Vê-se uma preocupação na educação matemática quanto aos saberes necessários na formação do professor de matemática de modo que estes contribuam em sua prática. Quanto ao ensino de matemática, este teve um avanço no que diz respeito a concepções pedagógicas, teorias, metodologias, entre outros assuntos. Para um professor de matemática em formação, o contato com essas teorias e metodologias pedagógicas se faz necessário, mas além disso, acreditamos que o contato com a própria matemática em suas múltiplas manifestações e dinamicidade, que muitas dessas metodologias promovem, pode fazer diferença na atuação deste professor em sala de aula.

A “matemática” à qual nos referimos nesta dissertação vai muito além de uma área de conhecimento estanque, na qual propriedades estão impostas, e assumimos isto para transmitir o conhecimento necessário. Entendemos que a matemática é uma atividade, é uma forma de pensar, e entendida dessa maneira se faz necessário salientar essa característica no aprimoramento da formação de um professor de matemática.

A matemática como atividade é uma forma de pensamento, não apenas de saber. Saber pensar matematicamente é mais do que aceitar o que está imposto e transcrever, é relacionar situações de contextos diferentes, descobrir novos caminhos para se fazer matemática, encontrar novas soluções e interpretá-las, é estudar a matemática atentamente nos pequenos detalhes, enfim, fazer uso de diversas formas de argumentação como ferramenta para esses propósitos.

Pesquisas apontam para um fracasso no ensino de matemática que prioriza apenas a reprodução da matemática que se encontra nos livros didáticos. Quando falamos de ensino em um curso de Licenciatura em Matemática a questão pode se agravar mais ainda, pois os alunos que estão ali sendo “receptores” de uma aula, serão futuramente os professores que atuarão em sala de aula. Na pior e mais provável das hipóteses, estarão fazendo isto também em suas aulas. Neste sentido, consideramos que a matemática escolar e superior pode ser explorada em forma inovadora com o objetivo de despertar nos alunos um olhar crítico e criativo para com essa área do conhecimento.

Muitas vezes as capacidades de invenção, criação, intuição na matemática acabam sendo minimizadas pelo fato de considerarmos a matemática exclusivamente como uma ciência dedutiva. À matemática, mesmo sendo uma ciência formal, com uma linguagem própria, não podemos lhe negar seu lado dedutivo, mas devemos também salientar aqui outros aspectos e formas de argumentação que também são essenciais para seu desenvolvimento, como por exemplo, a indução, a abdução e a analogia. Essas formas de pensamento são importantes para o acesso ao conhecimento matemático, pensar em produzir matemática não é apenas deduzir equações e novas teorias, é descobrir a matemática em seu desenvolvimento dinâmico através de diversas formas de raciocínio e argumentação. Vejamos alguns deles.

2.1 O PENSAMENTO MATEMÁTICO E ALGUMAS FORMAS DE ARGUMENTAÇÃO: INDUÇÃO, DEDUÇÃO, ABDUÇÃO E ANALOGIA

As formas de pensamento são importantes para o acesso ao conhecimento matemático, pensar em produzir matemática não é apenas deduzir equações e novas teorias, é descobrir a matemática em seu desenvolvimento dinâmico através de diversas formas de raciocínio e argumentação. Vejamos alguns deles.

2.1.1 INDUÇÃO

Começaremos pela indução. A indução é o método por excelência das ciências experimentais. O raciocínio indutivo é baseado na observação e experimentação. Através de observações e experiências particulares podemos induzir alguns resultados gerais.

> Indução é um processo mental por intermédio do qual, partindo de dados particulares, suficientemente constatados, infere-se uma verdade geral ou universal, não contida nas partes examinadas. Portanto, o objetivo dos argumentos indutivos é levar a conclusões cujo conteúdo é muito mais amplo

> do que as premissas nas quais se basearam. (MARCONI e LAKATOS, 2010, p.68)

A indução pode nos levar a conjecturar uma verdade matemática e esse processo, é um dos mais importantes na descoberta matemática. Um exemplo de raciocínio por indução em matemática é o caso do teorema que estabelece fórmulas para as derivadasDx^n, para $n \geq 1$, vejamos:

Utilizando a definição formal de derivadas, a saber: $Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, obtemos que

$$Dx = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Para Dx^2,

$$Dx^2 = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Para Dx^3,

$$Dx^3 = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Para Dx^4,

$$Dx^4 = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3.$$

Indutivamente podemos conjecturar que $Dx^n = nx^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Esta forma geral pode ser “justificada pela nossa intuição” quando exploramos um número considerável de casos.

A indução nos ajuda a fortalecer algumas hipóteses, mas para sabermos se elas são válidas de fato, para se constituírem em teoremas, precisamos de uma prova rigorosa, de uma dedução, para a conjectura que acabamos de descobrir.

> [...] quando se está interessado em obter as consequências de uma teoria ou implicações em determinada hipótese, deve-se recorrer à dedução. No entanto, quando se faz realmente avançar a ciência, quando se formulam leis ou teorias, recorre-se a inferências não dedutivas. (DA COSTA, 1993, p. 23)

Desta forma, vamos fazer uma prova direta para o caso citado anteriormente usando a fórmula do *Binômio de Newton*:

$$Dx^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k =$$

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Portanto, $Dx^n = nx^{n-1}$. Com isso, a nossa conjectura ganha o estatuto de teorema.

Esse resultado pode também ser demonstrado pelo método da indução finita, que é um método dedutivo e não indutivo.

Por trás do raciocínio indutivo está um passo essencial, que é a “atitude indutiva” na qual é submetido o pesquisador. Ter uma atitude indutiva requer saber observar detalhes em sua experiência e formular algumas hipóteses que podem ou não, ser verdadeiras.

Para Polya (1966, p.30), a atitude indutiva requer adaptar nossas crenças e experiências de maneira tão eficaz como seja possível. Requer também que saibamos subir de observações a generalizações e descer das mais elaboradas generalizações às mais concretas observações.

Um exemplo de inferência indutiva é a inferência estatística. Esse tipo de inferência está relacionada a um teste de hipóteses e possui uma linguagem probabilística. Ela realiza observações e tira-se conclusões com base na maior porcentagem de fatos ocorridos. Por exemplo: se 90% de A são B e x é A, logo x é B.

O raciocínio indutivo pode nos levar a alguns erros. Poderíamos tomar os números ímpares 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 e concluir que todos os números ímpares que não são primos, são múltiplos de 3. Não podemos garantir a veracidade “universal” dessa afirmação baseados em casos particulares, mesmo que eles sejam muitos. A observação feita pode ser favorável, mas devemos ter cuidado ao generalizarmos a todos os casos. Neste exemplo, o número 25 já contradiz a conjectura.

Podemos concluir que a indução parte de casos particulares e pode nos levar a conclusões verdadeiras ou não. Se fossemos analisar as inferências de acordo com os parâmetros da lógica, a inferência indutiva não seria considerada válida, justamente pelos fatos citados anteriormente. Não ser considerada válida, não quer dizer que seja irrelevante, pois, o grande papel da inferência indutiva é levar a novas possíveis descobertas para posteriormente serem testadas. Tratando-se de uma ferramenta de descoberta, podemos considerar que “não haveria ciência empírica se os cientistas procurassem empregar unicamente formas válidas de inferência” (DA COSTA, p.23).

Desse ponto de vista, no âmbito do raciocínio indutivo, a matemática como atividade tem também características de ciência empírica.

2.1.2 DEDUÇÃO

O raciocínio dedutivo permite concluir a validade universal de uma conjectura obtida por indução e também concluir um caso particular de casos mais abrangentes. Diferencia-se do raciocínio indutivo, pois usa como ferramenta argumentativa a lógica e não a experiência e a observação como faz o raciocínio indutivo.

Quando dizemos que “todo homem é mortal” e “Sócrates é homem”, concluímos que “Sócrates é mortal”. Notemos que, partindo de um caso geral (todo homem é mortal) deduzimos um caso específico (Sócrates é mortal), este é um simples e famoso exemplo de raciocínio dedutivo.

A demonstração do exemplo das derivadas citado anteriormente para discutir a indução é considerado uma dedução assim como todas as demonstrações matemáticas, pois de acordo com Marconi e Lakatos (2010, p.74), “Todo argumento dedutivo reformula ou enuncia de modo explícito a informação já contida nas premissas. Dessa forma, se a conclusão, a rigor, não diz mais que as premissas, ela tem de ser verdadeira se as premissas o forem”.

Por exemplo, consideremos o seguinte raciocínio dedutivo: Se n é par, então n é múltiplo de dois. Como o número 18 é par, logo, 18 é múltiplo de dois. Note que como as duas premissas são verdadeiras, então, a conclusão “18 é múltiplo de dois” será também necessariamente verdadeira.

Dentre os princípios lógicos mais usuais em que se baseiam as deduções estão os argumentos condicionais, que se dão da seguinte forma:

- Se p então q, ora p, então q.

E também sua forma negativa:

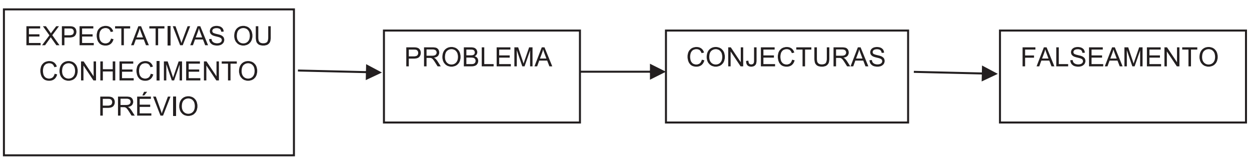
- Se p então q, ora, não q, então não p.

A demonstração (dedução) é a que permite a sistematização do conhecimento, mas não pode ser considerada uma ferramenta de descoberta, pois não há conhecimento novo, as “descobertas” já estão contidas nas premissas, só precisamos de um meio(prova) de chegar até elas.

2.1.3 MÉTODO HIPOTÉTICO-DEDUTIVO

O método hipotético-dedutivo é uma espécie de combinação da indução com a dedução. Consiste abreviadamente, em obter dedutivamente conclusões a partir de certas hipóteses, as quais, pela sua vez, são obtidas pela indução e tem o caráter de conjecturas a serem testadas.

Karl Popper pesquisou a respeito do método hipotético-dedutivo na ciência. Para Popper, no método científico parte-se de um problema formulado através de hipóteses, encontra-se uma solução para este problema, então, critica-se a solução proposta para que haja uma eliminação de erros e reformulação de hipóteses e assim, este processo fará com que surjam novos problemas a serem solucionados. Segundo Marconi e Lakatos (2010), as etapas do método hipotético-dedutivo de Popper podem ser descritos da seguinte forma:



FONTE: O autor (2016).

- O problema surge através do conflito de expectativas e teorias para dar inicio a uma pesquisa.

- A solução encontrada dedutivamente, baseia-se numa conjectura, e por se tratar de uma conjectura, deverá ser testada com outros casos para comprovar sua veracidade.
- O falseamento é um processo de eliminação de erros, onde ocorrem testes da conjectura para sua reformulação.

Segundo Marconi e Lakatos (2010, p. 80), "Quanto mais falseável for uma conjectura, mais científica será, e será mais falseável quanto mais informativa e maior conteúdo empírico tiver". Um exemplo que estes autores colocam é a seguinte afirmação: "Amanhã choverá". Ficará difícil encontrarmos erros para ela, pois em algum lugar há de chover. Como a conjectura traz pouca informação, a probabilidade de falseamento é muito baixa. Mas se afirmarmos que choverá muito em um lugar específico, nossa conjectura se torna mais falseável pois contém mais informações e a probabilidade de encontrarmos erros é muito maior.

Imre Lakatos, em seu livro Provas e Refutações (LAKATOS, 1978) adaptou o método hipotético-dedutivo à matemática.

2.1.4 ABDUÇÃO

A inferência abdutiva foi nomeada e estudada por Charles S. Peirce. Na inferência abdutiva, a procura de explicações a respeito da observação gera algumas hipóteses sobre o assunto em questão, as quais devem ser verificadas sobre suas veracidades, o que é um processo muito rico na construção do conhecimento.

Vejamos um exemplo citado por Chibeni, (1996):

> Ao adentrarmos uma sala, vemos sobre uma mesa um saco com feijões brancos e, ao seu lado, um punhado de feijões brancos. Diante disso, estimando que a hipótese de que os feijões do punhado vieram do saco representa a melhor explicação para o fato (e, além, disso, é uma boa explicação para ele), inferimos abdutivamente que essa hipótese é, muito provavelmente, verdadeira. (CHIBENI, 1996, p.1)

Ele acrescenta

> [...] o esquema geral dos argumentos abdutivos, tais quais aparecem nas discussões contemporâneas, consiste no enunciado de uma evidência (um fato ou conjunto de fatos), de hipóteses alternativas para explicar tal evidência, e de uma apreciação do valor dessas explicações. A conclusão é

> a de que a melhor explicação provavelmente é verdadeira se, além de comparativamente superior às demais, for boa em algum sentido absoluto.(CHIBENI, 1996, p.02)

A conclusão sobre o exemplo citado acima, de que os feijões vieram do saco ao lado é muito provável ser verdadeira, por mais que tivéssemos outras hipóteses, não seriam tão favoráveis quanto essa, desta forma podemos considerá-la como certa. Vejamos outros exemplos:

Todas as orquídeas do jardim são brancas.

Essa orquídea é branca.

Logo, possivelmente, essa orquídea é daquele jardim.

Na matemática, como nas ciências em geral, a abdução é um processo de procura por princípios, explicações ou hipóteses. Ao contrário da dedução que parte das hipóteses para verificar que as conclusões são verdadeiras, a abdução parte de uma suposta verdade para encontrar algumas hipóteses das quais ela possa ser deduzida. A criação de hipóteses favoráveis nos leva a investigar a situação e assim podemos descobrir coisas novas.

Na matemática, a elaboração de uma demonstração pode ser realizada através de um processo de abdução. Por exemplo, se queremos estabelecer a validade de uma proposição da forma $H \Longrightarrow T$ ($H =$ hipótese e $T =$ tese), podemos partir assumindo que T é verdadeira e procurando uma "explicação" E_1 para T, isto é, uma proposição E_1 tal que $E_1 \Longrightarrow T$ seja válida. A seguir, procura-se uma explicação E_2 para E_1, isto é, uma proposição E_2 tal que $E_2 \Longrightarrow E_1$ seja válida. Se depois de um número finito de passos, achamos E_n de modo que E_n seja igual ou equivalente a H, então, teremos uma sequência $T \equiv E_n \Longrightarrow E_{n-1} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow E_2 \Longrightarrow E_1 \Longrightarrow T$ que nos dá uma demonstração de T a partir de H.

Vejamos o seguinte exemplo:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com, $a < b$, então, devemos provar que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Observa-se que H é $a < b$ e T é $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Vamos supor que a conclusão seja verdade, desta forma teríamos

$$a < \frac{a+b}{2},$$
$$2a < a + b(= E_1),$$

donde

$$2a - a < b(= E_2)$$

logo,

$$a < b\ (E_3 = H).$$

Analogamente se consideramos verdade $\frac{a+b}{2} < b$, então $a + b < 2b$,$a < 2b - b$,e novamente$a < b$.

Com essa análise abdutiva, podemos construir efetivamente uma demonstração. Com efeito:

$$a < b$$
$$2a - a < b \quad \text{e} \quad a < 2b - b$$
$$2a < a + b \quad \text{e} \quad a + b < 2b$$

logo,

$$2a < a + b < 2b$$

portanto,

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Vale ressaltar que o raciocínio abdutivo parte de algum conhecimento prévio. Tirar conclusões através deste raciocínio depende exclusivamente do conhecimento que o aluno ou pesquisador tem sobre o fenômeno que está sendo estudado. Problemas iguais podem ser colocados a pessoas diferentes e as mesmas podem chegar a conclusões diferentes ou conclusões iguais utilizando estratégias diferentes.

2.1.5 ANALOGIA

De acordo com Polya (1966, p.56, tradução nossa), “analogias são semelhanças das relações. Essas semelhanças têm um significado claro se as relações são dirigidas pelas mesmas leis”.

A analogia nos dá subsídios para que estudemos um conteúdo comparando-o com outro já conhecido, facilitando seu entendimento. Assim, é um processo de argumentação que leva a descobertas de objetos e propriedades novas através de um processo adaptativo de um contexto conhecido num outro desconhecido. Esse processo de pensamento, poderá contribuir no aprimoramento da formação conceitual do professor.

Desta forma, se as relações dos assuntos que queremos estudar se dão através de semelhanças reconhecíveis, podemos explorá-los através da analogia.

Da Costa (1993) considera a analogia como uma inferência indutiva devido às suas propriedades similares. Realizado um número finito de observações com determinadas características que se enquadram em uma certa propriedade, e posteriormente sejam feitas outras observações e detectadas as mesmas características, podemos pensar por analogia e considerar que elas teriam também a mesma propriedade que as observações anteriores. Este é um raciocínio indutivo, porém, com características de um raciocínio analógico.

> Suponhamos que os elementos $x_1, x_2, \dots, x_k$, todos possuindo a propriedade P, possuam também a propriedade Q; então, se x_{k+1} possuir P, concluímos que ele possui Q. Tal é o raciocínio por analogia, que apresenta parentesco íntimo com a indução simples. (DA COSTA, 1993, p.25)

Apesar de terem propriedades parecidas, nós trataremos a indução e a analogia como duas formas de raciocínio diferentes.

Assim como alguns raciocínios já explorados até o momento, o raciocínio analógico, não pode ser considerado um método de prova. Para Godoy (2002), "o uso de analogias é uma estratégia que pode ser utilizada junto com outras estratégias para a prova automática de teoremas." As analogias podem ajudar na formulação de um "plano" para a prova de complexos teoremas.

Um exemplo de analogia é encontrado em Polya (1966, p.56), ele relata o caso da adição de números naturais ser análoga à multiplicação, pois a adição e multiplicação estão sujeitas as mesmas regras, vejamos:

Ambas são comutativas e associativas:

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc)$$

Têm suas respectivas operações inversas:

$$a + x = b \Longrightarrow x = b - a$$

$$ax = b \Longrightarrow x = \frac{b}{a}\text{, para} a \neq 0.$$

Possuem um elemento neutro:

$$a + 0 = a, \qquad a.1 = a$$

Nota-se que a analogia, independente da área em que está sendo colocada, preserva a similitude de estruturas. Essas estruturas, geralmente, têm a seguinte forma: *A* estará para *B*, assim como *C* está para *D*. Para uma destas analogias, ficaria a seguinte forma: 0 é o elemento neutro da adição assim como 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Vale ressaltar que, no exemplo colocado por Polya, o domínio das respectivas operações não foi explicitado, mas vê-se que para a adição estamos trabalhando com números pertencentes ao conjunto $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \ldots\}$ de todos os números naturais. Já para o caso da multiplicação, se queremos evitar a restrição "$a \neq 0$" na apresentação das operações inversas, e conseguir uma analogia completa, devemos impor, como conjunto,$\mathbb{N}^* = \{1,2,3 \ldots\}$ no qual o número zero não está incluso. Essas diferenças podem ser essenciais para a exploração e compreensão da analogia.

Ainda, para essas operações inversas, a subtração e a divisão, é necessário explicitar os seus devidos âmbitos de validade: no caso da adição devemos observar que faz sentido quando $a \leq b$, e no caso da multiplicação se $a \mid b$ (*a* é divisor de *b*) e, portanto, analisar em que medida essas duas relações são análogas (CIFUENTES, 2012).

Perelman (2002) propõe que o conjunto dos termos *A* e *B* sejam chamados de *tema*, e o conjunto dos termos *C* e *D* sejam chamados de *foro.* Podemos considerá-la da seguinte forma: O tema está relacionado às conclusões que obteremos através daquela analogia e o foro como a parte da analogia já conhecida que está servindo como suporte para a comparação. Resumidamente, o tema é um contexto por conhecer e o foro, um contexto conhecido.

Perelman (2002, p. 429), vê como essencial na analogia a confrontação do tema e foro, mesmo que não haja uma relação forte entre seus termos. Ele acrescenta que "[...] quando existe a relação entre *A* e *C*, entre *B* e *D*, a analogia se presta a desenvolvimentos em todos os sentidos e que são os aspectos de uma analogia rica".

Perelman também relata a importância de que foro e tema sejam de "áreas diferentes", e que a tentativa de aproximação deles, pode causar problemas na analogia. Nota-se que esta tentativa de aproximar tema e foro, pode fazer com que se percam alguns detalhes conceituais que seriam essenciais para a analogia. Para visualizarmos este fato, retomemos o exemplo colocado anteriormente, porém, vamos tomar agora como domínio o conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{0,1,2,3 \ldots\}$.

Consideremos a seguinte propriedade da adição com$a, b, c \in \mathbb{N}$:

se $a + c = b + c$ então $a = b$.

Consideremos agora a multiplicação com $a, b, c \in \mathbb{N}$. Para mantermos a semelhança das estruturas, teremos:

se $a. c = b. c$ então não podemos afirmar que em $\mathbb{N}$,$a = b$.

Existe aqui um impasse, que foi considerar o domínio do tema e foro iguais, para que a analogia fosse "perfeita". Porém, se considerarmos $a, b \in \mathbb{N}\, e\, c \neq 0$, a analogia se mantém, ou seja:

se $a. c = b. c$ então $a = b$.

Um grande erro que se comete é considerar que analogias são feitas apenas de semelhanças entre estruturas e descartar a possibilidade de diferenças entre elas. Vemos as diferenças entre tema e foro como algo que faz parte da analogia, e seu estudo pode ressaltar a potencialidade da analogia colocada. Outro exemplo, é a analogia entre equações da reta em $\mathbb{R}^2$e $\mathbb{R}^3$, vejamos:

- Equação vetorial da reta:

  Para o caso em $\mathbb{R}^2$, a equação vetorial da reta é dada por $P = P_0 + t\, u^{\rightarrow}$, onde $P, P_0 \in \mathbb{R}^2$ e $u^{\rightarrow} = (a, b)$.

  Para o caso em $\mathbb{R}^3$, a equação vetorial da reta é análoga ao caso em $\mathbb{R}^2$, ou seja,$P = P_0 + tu^{\rightarrow}$, onde $P, P_0 \in \mathbb{R}^3$ e $u^{\rightarrow} = (a, b, c)$

  Prolongando esta analogia poderíamos pensar que as semelhanças se mantêm para o caso da equação cartesiana, vejamos:

- Equação cartesiana:

  Para o caso em $\mathbb{R}^2$, a equação cartesiana da reta é dada por $ax + by = c$, analogamente poderíamos concluir que para o caso em $\mathbb{R}^3$, a equação cartesiana seria dada por $ax + by + cz = d$, mas devemos ter muito cuidado em dar como certa esta conclusão, pois não se trata de uma equação de reta, mas sim, a equação de um plano!

Esta conclusão, mais do que ser um resultado negativo sobre a analogia, nos faz pensar se haveria alguma semelhança geométrica entre a reta em $\mathbb{R}^2$e o plano em $\mathbb{R}^3$, devido à semelhança entre suas equações. Vejamos.

Tanto uma reta no plano $\mathbb{R}^2$, quanto um plano no espaço $\mathbb{R}^3$, têm apropriedade comum de ter uma dimensão a menos do que o espaço todo. A essa propriedade, damos o nome de codimensão 1. Neste caso, dizemos que a reta em $\mathbb{R}^2$ e o plano em $\mathbb{R}^3$ possuem codimensão 1 nos seus respectivos espaços da definição.

No âmbito escolar, o raciocínio analógico pode ajudar na compreensão de novos assuntos se comparados com outros já conhecidos, porém, é preciso tomar cuidado com as semelhanças forçadas que as vezes se impõem na tentativa de encontrar assuntos análogos. Um exemplo é a proporção entre diversas grandezas.

Vejamos um problema:

Um cone com altura igual a 10cm e 6 cm de raio é seccionado à 8cm de seu vértice por um plano paralelo à base. Qual é o raio desta secção?

Podemos utilizar aqui o conceito de proporção, válido entre altura e raio num cone.

Do cilindro de 10 cm de altura temos 6 cm de raio, então para o novo cilindro de 8cm de altura, teremos x cm de raio.

10 cm ------- 6 cm

8 cm --------- x cm

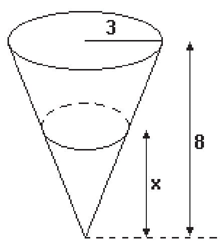
Como as grandezas são proporcionais, $10x = 6.8$,

ou seja, $10x = 48$,

portanto, $x = 4{,}8$ cm.

Utilizando a mesma linha de raciocínio, os alunos poderiam pensar por analogia para resolver o próximo exercício, vejamos:

Um copo tem a forma de um cone com altura 8cm e raio da base 3cm. Queremos enchê-lo com suco ocupando a metade de sua capacidade. Para que isso seja possível, qual é a altura x atingida pelo líquido?



Por analogia à proporção utilizada no exercício anterior, é comum que os alunos o interpretem e resolvam da seguinte forma:

O volume correspondente ao cilindro todo é igual a 24 cm^3, já que o cilindro com altura x corresponde à metade do volume, este terá volume igual à $12\ cm^3$, desta forma:

24 cm^3------- 8 cm

12cm^3-------- x cm

então, 24 x = 96,

portanto, x = 4 cm.

Bem sabemos que este é um raciocínio equivocado, pois as grandezas de altura e volume não são diretamente proporcionais, a maneira correta seria:

12 cm^3------- $x^3 cm^3$

24 cm^3------- $8^3 cm^3$

Desta forma,

$$24\,x^3 = 12.8^3$$

$$24\,x^3 = 6144$$

Portanto, $x^3 = 256$, então, $x = 4\sqrt[3]{4}\ cm$.

Um raciocínio equivocado por analogia na resolução de um exercício pode comprometer a construção do conhecimento. Portanto, devemos estar atentos a este tipo de raciocínio e fazer uma verificação que comprove a veracidade das conclusões obtidas.

As analogias são consideradas importantes também para a invenção.

> As analogias desempenham importante papel na invenção e na argumentação, por causa, essencialmente, dos desenvolvimentos e prolongamentos que favorecem; a partir do foro, elas permitem estruturar o tema, que situam num âmbito conceitual. (PERELMAN, 2002, p.438)

Podemos prolongar a analogia sem sabermos o que iremos concluir, como se fosse um teste. Neste caso estaremos trabalhando com probabilidade de algo dar certo, o que faz com que a analogia possa ser considerada uma invenção, e se caso der certo, a análise destas teorias através da analogia permitirá uma nova descoberta.

Diante do exposto, podemos considerar a analogia também como um método de análise.

> A analogia como método de análise, visa então, “aplicar” os conceitos e recursos de um campo em outro que lhe é semelhante, estando também na base da interdisciplinaridade, na medida em que permite unificar campos aparentemente diversos. (CIFUENTES, 2012, p.149)

Para Godoy (2002), “a analogia é uma habilidade que reconhece que uma coisa é como outra”. Ele explica que a palavra “habilidade” se encaixa nesta definição, pois sempre haverá um ato criativo e original envolvido na construção da analogia.

Um fato da ciência que merece destaque é a descoberta da penicilina em 1929 pelo médico Alexander Fleming. Ele percebeu que as bactérias cultivadas no laboratório morriam em contato com o bolor que se formou ao acaso. Raciocinando analogicamente, supôs que bactérias que causavam doenças ao corpo humano, também pudessem ser destruídas pelo bolor. Nota-se através deste fato um prolongamento da analogia, que obteve sucesso. Através da analogia, houve uma descoberta que mais tarde teve sua eficácia comprovada.

2.2 FORMAS DE RACIOCÍNIO E TRANSMISSÃO DA VERDADE

A importância em afirmarmos que os métodos de raciocínio citados nas seções anteriores são fonte de descobertas e não métodos de prova, nos faz refletir também sobre sua abordagem na educação básica a respeito da validade e da possibilidade da transmissão da verdade.

Como citado nos raciocínios anteriores, nem sempre podemos utilizar apenas da intuição para tirarmos a verdade de determinadas conclusões. Seja um raciocínio por analogia, abdutivo ou indutivo, para se confirmar a veracidade das descobertas obtidas através destes raciocínios é preciso recorrer às provas dedutivas. As provas dedutivas são as únicas que, por determinação lógica, nos garantem a verdade das conclusões obtidas. No caso do ensino básico, precisa-se também entender que nem sempre a verdade de uma conclusão pode ser obtida de hipóteses verdadeiras, apesar do raciocínio ser válido.

> Se mediante uma dedução, os alunos inferem uma conclusão verdadeira, a interpretam como uma prova de que as premissas são verdadeiras (porque não compreendem que a partir de premissas falsas e “raciocinando bem” se pode chegar a uma conclusão verdadeira). (PANIZZA, 2005, p.27)

Isto é, a verdade da conclusão não se transmite necessariamente para as premissas.

Vejamos um exemplo de um caso onde a conclusão é verdadeira, e o raciocínio utilizado é válido, porém com alguma hipótese falsa.

Se um número é múltiplo de 9, então é múltiplo de 3.

12 é múltiplo de 9. (hipótese falsa)

Portanto, 12 é múltiplo de 3.

Uma das hipóteses ou premissas é verdadeira e a outra é falsa, obtendo uma conclusão verdadeira com um raciocínio válido. Inferir uma conclusão verdadeira faz pensar que as premissas são verdadeiras quando nem sempre é assim.

Além das premissas serem verdadeiras para se inferir uma conclusão correta, deve-se salientar que as verdadeiras provas e demonstrações, devem seguir um padrão (dedução), não deixando dúvidas de sua veracidade. E que os raciocínios utilizados, sejam eles, de indução, abdução ou analogia, têm um papel importante na construção do conhecimento, podendo assim, nos levar a conclusões verdadeiras, mas também nos levar erroneamente a conclusões falsas.

2.3 O USO DE METÁFORAS NAS CIÊNCIAS E NO ENSINO

Com o surgimento de novas discussões sobre formas de aprendizagem e raciocínio, o uso de metáforas no ensino é notável, visto que a ciência também utiliza metáforas constantemente. Metáforas são figuras de linguagem, cuja função é a analogia ou semelhança (PALMA, 2008, p.19). Por exemplo, podemos nos referir a uma pessoa e dizer que ela “está forte como um touro”, logicamente esta pessoa não se parece com um touro, mas empregamos uma analogia comparando a força desta pessoa com a de um touro.

Tanto analogias, no campo da linguística, quanto metáforas são figuras de linguagem utilizadas no sentido comparativo. A metáfora é uma comparação implícita, já a analogia é uma comparação mais elaborada. As duas utilizam de comparações entre dois conceitos, desde que um desses conceitos já seja conhecido.

Para Palma (2008), metáforas podem produzir e transmitir informações e conhecimentos, mas por outro lado, há uma linguagem constituída por analogias em que a função é meramente estética e retórica, ou seja, é utilizada para facilitar a comunicação e transmitir as ideias com convicção.

Metáforas em um sentido amplo têm uma grande contribuição no processo de adquirir conhecimentos, mas não podemos pensar nas metáforas como justificativas para teorias. Nas ciências, o processo de justificação de conhecimento científico tem métodos rigorosos, por meio dos quais cada nova teoria deverá ser minuciosamente analisada e a metáfora não se enquadra nestes métodos. Porém, vê-se na metáfora e em analogias mais elaboradas, uma possibilidade para despertar a intuição e criatividade do pesquisador.

O emprego da metáfora por um pesquisador científico o levará a obter hipóteses sobre a teoria em questão, ao observar semelhança entre conceitos e comparar uma teoria já conhecida com outra que está sendo analisada, poderá levá-lo ao descobrimento de novas teorias e propriedades, o que faz da metáfora um método de descoberta.

Assim como a ciência, o ensino também utiliza metáforas. Fazer uso de metáforas no ensino não quer dizer que o professor esteja se apropriando de uma linguagem mais fácil para explicar o conteúdo. Os alunos ao fazerem uso de metáforas em sala de aula, não estão se apropriando de uma linguagem "inferior" à que a ciência usa, mas de algum tipo de raciocínio sobre semelhanças relevantes entre dois conteúdos e desta forma pode-se fazer uma comparação para facilitar na compreensão do conteúdo novo.

Palma comenta a respeito da metáfora no ensino

> As metáforas podem cumprir funções didáticas e heurísticas, e também estéticas, elas cumprem primordialmente um papel cognitivo e epistêmico fundamental. Isto ocorre tanto na produção do conhecimento por parte dos cientistas assim como o processo de apropriação do conhecimento que realizam os estudantes (PALMA, 2008, p.17, tradução nossa)

Podemos refletir sobre as metáforas como sendo um caminho de investigação, no qual o estudante reconhece a semelhança do assunto que está estudando com outro que já conhece. Neste processo podem surgir questionamentos sobre o assunto que está sendo explorado, e também sobre o outro já conhecido. Ao tentar encontrar respostas para os questionamentos, a utilização da metáfora acaba se tornando assim como na ciência, um caminho de descoberta de novos conhecimentos.

Podemos entender as metáforas também como uma representação da realidade. Segundo Zavadivker, as metáforas

> [...]Constituem um instrumento mental imprescindível para a construção das representações da realidade, não são aquelas que possuem um valor meramente estético e permanecem circunscritas no âmbito literário, mas

> também as existentes dentro do vocabulário científico e que estão, portanto, comprometidas com os valores estritamente cognitivos, tais como a busca pela verdade ou até mesmo, uma descrição da realidade “ajustada” ao que a realidade é. (ZAVADIVKER, 2005, p.01, tradução nossa)

Da mesma forma que as metáforas nos auxiliam na compreensão de uma teoria, elas podem também nos ajudar a descrever a realidade, porém, com um certo cuidado, pois as comparações de teorias científicas nem sempre podem ser feitas por absoluto, o que faz com que os estudantes, para o caso do ensino, acabem tomando as teorias como semelhança absoluta. Ou até mesmo para uma comparação da teoria com a realidade, pode haver uma interpretação de que as teorias sejam descrições absolutas da realidade, o que nem sempre é verdade.

2.4 O PENSAMENTO ANALÓGICO EM MATEMÁTICA E EM FÍSICA E SUAS IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO

A analogia como colocada anteriormente é um grande suporte para o ensino das ciências e da matemática. Para o caso do ensino de física, já há um grande número de trabalhos que tratam deste assunto. Dentre os trabalhos analisados, vemos que há uma preocupação com os conhecimentos adquiridos pelos alunos. Preocupa-se em ensinar de uma maneira mais “agradável” em que as teorias possam ser comparadas a fenômenos mais concretos para facilitar a assimilação.

> O estudo torna-se mais eficaz se a analogia é feita com um fenômeno encontrado na natureza ou de simples realização na sala de aula. Assim, o estudo da queda de uma gota d’água no ar ou da queda de um pára-quedas fica bem mais compreensível ao aluno se explicado após o estudo do movimento de pequenas esferas de aço em uma proveta contendo glicerina. Para o aluno fica mais evidente associar as forças que atuam nas esferas e os seus tipos de movimentos com as forças e os movimentos da gota d’água e do pára-quedas. A comparação entre fenômenos semelhantes contribui para a sedimentação dos conceitos semelhantes e facilita a introdução de conceitos novos. (JORGE, 1990, p.196)

Também há a possibilidade de que novas teorias apresentadas aos alunos possam ser comparadas com outras já conhecidas desde que haja um grau de semelhança entre elas. Jorge (1990) cita o exemplo da analogia entre as teorias da transmissão de calor e transmissão de eletricidade, vejamos uma parte destas analogias:

> Na eletricidade haverá uma corrente elétrica se houver uma diferença de potencial entre dois pontos. Na área térmica haverá uma corrente térmica ou fluxo calorífico (φ) se houver uma diferença de temperatura entre dois pontos de um sistema. Quando o fluxo de calor é constante, ou seja, não depende do tempo e a temperatura de cada ponto permanece constante, o regime de transmissão de calor é chamado de permanente ou estacionário.
> Na transmissão de calor por condução, característica dos sólidos, a energia é transmitida por meio de impactos entre os átomos constituintes do sistema e pelo deslocamento dos elétrons livres das regiões de alta temperatura para as de baixa temperatura. Assim, a transferência de carga elétrica causada por uma diferença de potencial elétrico e a transferência de calor causada por uma diferença de potencial térmico – temperatura – tem uma analogia proveniente, em parte, do fato dos dois fenômenos terem a mesma origem, ou seja, o deslocamento de elétrons livres.
> Na eletricidade, a intensidade de corrente elétrica (i) é dada pela razão entre a quantidade de carga (q) e o tempo. Analogamente a intensidade de corrente térmica ou fluxo (φ) é dada pela razão entre a quantidade de calor (Q) e o tempo. Na área térmica, a equação da resistência térmica é análoga à equação da lei de Ohm na eletricidade, ou seja, $\mathrm{R_t} = \frac{\Delta \mathrm{T}}{\phi}$ e $\mathrm{R_e} = \frac{\Delta \mathrm{V}}{\mathrm{i}}$. (JORGE, 1990, p.197)

Comparar duas teorias pode ajudar no melhor entendimento entre dois assuntos, mas é preciso que haja uma comparação não apenas de partes semelhantes, mas também, das diferenças entre estas teorias, pois se não ficarem claras poderão levar a conhecimentos equivocados.

No ensino de matemática, a utilização de analogias não é tão comum quanto deveria. Uma justificativa para este fato é que a maioria dos professores ainda considera a matemática como ciência dedutiva por excelência, onde as argumentações seguem este caráter lógico-dedutivo. Pouco se fala em outros tipos de raciocínio e argumentação que podem contribuir para o desenvolvimento desta ciência.

De acordo com Cifuentes (2012, p.152) “A originalidade numa pesquisa pode manifestar-se na construção de conhecimentos novos ou na reconstrução de conhecimentos velhos a partir de novos enfoques”. Neste sentido a analogia visa também a reconstrução de velhos conceitos na medida que resgata conceitos já conhecidos comparando-os com outros semelhantes.

Vejamos um exemplo de estudo por analogia proposto por Cifuentes (2012, p. 170). O autor estuda as analogias entre as funções circulares e as funções hiperbólicas, dentre as quais, destacam-se as apresentadas na tabela abaixo:

	FUNÇÕES CIRCULARES	FUNÇÕES HIPERBÓLICAS
IDENTIDADE	$\cos^2 x - [-1]\,\mathrm{sen}^2\, x = 1$	$\cosh^2 x - [1]\,\mathrm{senh}^2\, x = 1$

PARIDADE	$\cos(-x) = \cos x$ $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$	$\cosh(-x) = \cosh x$ $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
FÓRMULAS DA ADIÇÃO	$\cos(x+y) = \cos x \cos y$ $+[-1] \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} x$ $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y +$ $\cos x \operatorname{sen} y$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y\, h$ $+[1] \operatorname{senh} x \ \operatorname{senh} y$ $\operatorname{sen} h(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y +$ $\cosh x \operatorname{senh} y$
DERIVADAS	$D \cos x = [-1] \operatorname{sen} x$ $D \operatorname{sen} x = \cos x$	$D \cosh x = [1] \operatorname{senh} x$ $D \operatorname{senh} x = \cosh x$
TANGENTE	$\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$	$\tanh x = \operatorname{senh} x / \cosh x$

FONTE: o autor (2016).

Diante do exemplo, nota-se que algumas analogias são perfeitas, como no caso das fórmulas de adição e da paridade, porém, nos outros casos citados, existem algumas semelhanças, mas também há diferenças entre os conceitos. Essas diferenças (dadas pelos colchetes) merecem um destaque especial, pois através delas conseguimos interpretar mais profundamente os conceitos analisados.

No exemplo citado, a diferença entre o valor 1 ou -1 dentro dos colchetes, vai conduzir à descoberta do sistema dos *números perplexos*, que são análogos para as funções hiperbólicas, como os números complexos o são para as trigonométricas (CIFUENTES, 2012).

Outro exemplo de resultado obtido por analogia em matemática, também proposto em (CIFUENTES, 2012) é o caso dos números que ele chama de “primos aditivos”. Tomemos $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4 \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, com isso, vamos estabelecer relações entre a adição e a multiplicação, produzindo os fragmentos aditivo $(\mathbb{N}, +)$ e multiplicativo $(\mathbb{N}, \ \cdot)$.

Algumas semelhanças:

- Ambas as operações são associativas e comutativas;
- Ambas possuem um elemento neutro. Para a adição o número 0 e para a multiplicação, o número 1.
- Ambas satisfazem a lei do cancelamento. Para o caso aditivo:

$$x + z = y + z \Longrightarrow x = y$$

Para o caso multiplicativo:

$$xz = xy \Longrightarrow x = y$$

- Ambas satisfazem a propriedade denominada em (CIFUENTES, 2012) de “lei da trivialidade”.

Para o caso aditivo

$$x + y = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Para o caso multiplicativo

$$xy = 1 \Longrightarrow x = 1 \text{ e } y = 1.$$

Vejamos agora, o conceito de “número primo multiplicativo” e o correspondente “número primo aditivo”.

> *Um número a em $\mathbb{N}^*, a \neq 1$ ("a” diferente do neutro multiplicativo), é primo multiplicativo se não existe b em $\mathbb{N}^*$ tal que $b|a$, sendo $b \neq 1$ e $b \neq a$.*

Por analogia,

> *Um número a em $\mathbb{N}, a \neq 0$ (“a" diferente do neutro aditivo) é primo aditivo, se não existe b em $\mathbb{N}$tal que $b \leq a$, sendo $b \neq 0$ e $b \neq a$.*

Note que para este caso, a deve ser 1, pois é o único número que satisfaz a condição que define “primo aditivo”.

Repare que as relações " $\leq$ ” e “ | ” são análogas nos domínios $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$ respectivamente, como vimos antes.

Relembremos o enunciado do teorema fundamental da Aritmética que refere-se à decomposição em produto de primos multiplicativos:

> *Todo número n em $\mathbb{N}^*$ com $n \neq 1$, pode ser expresso de forma única como produto de primos multiplicativos (primos usuais).*

Por analogia com o teorema fundamental da aritmética, podemos formular com êxito o “teorema fundamental aditivo da Aritmética”, o que torna nossa analogia mais profunda, vejamos:

> *Todo número n em $\mathbb{N}$ com $n \neq 0$ pode ser expresso de forma única como “soma de primos aditivos”, isto é, $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ (n vezes).*

2.5 O CÁLCULO DE DIFERENÇAS NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Temos o Ensino Superior como um dos momentos de aprendizagem e preparação do cidadão para o mercado profissional. Muitas vezes pensamos ao entrar em um curso, que sairemos da universidade com todos ou uma grande parte dos conhecimentos necessários para uma boa atuação profissional. No caso das licenciaturas, esperamos sair com um feixe de metodologias, teorias e técnicas para melhor ensinar. Porém, ao concluir o curso, vemos que os anos dispostos para essa construção e preparação profissional não foram suficientes. A maioria dos estudantes recém-formados não se sente preparado para atuar em sala de aula agindo de acordo com o que lhe foi ensinado.

De fato, uma das razões disso é que há uma grande distinção entre as duas formas seguintes de se conceber e, por conseguinte, de se “fazer” matemática. A matemática que poderíamos chamar de “científica” que consiste de definições formais, provas e demonstrações com um caráter lógico, e a matemática escolar, melhor diríamos escolarizada, que dá um maior enfoque às concepções pedagógicas, onde se busca a validação e a interpretação em diversos contextos dos conceitos aprendidos/ensinados.Apesar das diferenças entre elas, pode-se levar conceitos e teorias da matemática científica à matemática escolar através da chamada “transposição didática”.

Uma das áreas da matemática científica que está se destacando como emergente na era tecnológica é a matemática discreta. Nota-se que a escola também se preocupa em atender esta demanda tecnológica formando futuros cidadãos para compreender e atuar neste meio. Apesar destes avanços estarem inseridos neste contexto, será que os nossos professores, tanto da escola básica quanto do ensino superior, estão preparados para a inserção curricular da matemática necessária ao atendimento desta demanda atual?

Observando a grade curricular da escola básica, vemos um ciclo matemático que inicia com os números naturais, passando aos números inteiros, números racionais, números reais, até chegar ao conceito de números complexos. Jurkiewicz (2004), coloca que este caminho seguido, aponta para uma matemática do contínuo, o que não deixa de ser positivo, pois há grandes descobertas e excelentes resultados sendo obtidos através da matemática contínua. Porém, a pouca inserção da matemática discreta nos cursos de graduação, nos fazem pensar se as universidades estariam desatualizadas no seu dever de qualificar profissionais para atender as demandas atuais do mercado de trabalho.

Com o avanço tecnológico, a matemática discreta vem mostrando cada vez mais, sua relevância como uma parte da ciência. Se destacando nesta área da matemática, estão os estudos sobre grafos, algoritmos e o cálculo de diferenças.

Neste trabalho, escolhemos particularmente realizar um estudo sobre o cálculo de diferenças. Com ele é possível modelar diversos fenômenos presentes no nosso meio, e como estamos falando de uma matemática onde seus cálculos se dão em caráter combinatório, podemos levá-lo sutilmente às salas de aula do ensino básico. A introdução de equações de diferenças na formação de professores de matemática pode facilitar a exploração de alguns fenômenos que apenas este "método" pode proporcionar.

Este tipo de cálculo, sendo apresentado aos professores em sua formação inicial priorizando a analogia com o cálculo diferencial, pode ser um grande aliado na aprendizagem e compreensão dos novos princípios, pois se concebem de forma semelhante e o cálculo diferencial já é conhecido e estudado por eles na graduação, servindo como suporte para a introdução dos novos conceitos e métodos.

Outro fator que consideramos importante para o estudo deste Cálculo, é despertar a curiosidade científica, colocando em destaque como seria o já conhecido cálculo diferencial, quando trabalhado com os mesmos conceitos, porém num ambiente discreto com o domínio$\mathbb{N}$ dos números naturais. Detalhe este, que muitas vezes passa despercebido aos olhos dos estudantes.

O estudo do cálculo de diferenças por analogia com o cálculo diferencial é a principal aplicação destas ideias nessa dissertação.

2.6 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Uma das tendências na Educação Matemática no Brasil e no mundo, desde a década de 1970, é a Modelagem Matemática, que vem se destacando não apenas na matemática aplicada, onde teve seu surgimento, mas como uma metodologia de ensino e aprendizagem de matemática.

A matemática discreta está sendo amplamente utilizada na modelagem matemática, principalmente pelo atual avanço tecnológico, onde se destacam ferramentas teóricas como a teoria de grafos, a teoria de algoritmos, o cálculo de diferenças, dentre outros.

A modelagem matemática permite transladar conceitos não matemáticos ao âmbito da matemática. Modelar diversas situações nos permite encontrar a matemática por trás da natureza e de fenômenos sociais e econômicos. De acordo com Bassanezi (2003), “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando sua solução”.

Determinar a situação-problema ou a escolha do tema é essencial para o desenvolvimento da modelagem, assim como a coleta de dados, que é a busca de informações relacionadas ao tema, esses dados, posteriormente serão úteis para a formulação do modelo. A formulação de modelos é talvez a etapa mais difícil, tanto para o aluno quanto para o professor. Nesta fase do processo de modelagem, utiliza-se do que foi encontrado na etapa anterior para se chegar a um modelo que represente o problema a ser estudado. Neste processo, a situação que antes era algo não matemático se torna um problema matemático.

Muitas vezes, não se podem modelar fenômenos com precisão de dados, é necessária uma simplificação de hipóteses para facilitar o problema.

> A modelagem se faz eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos trabalhando com representações de um sistema ou parte dele. (BASSANEZI, 2003, p. 24)

Portanto, a simplificação se faz necessária em alguns casos, para colocarmos o problema no nível dos alunos. Não simplificamos o problema real, e sim, introduzimos hipóteses que simplificam sua abordagem (MEYER *et al.*, 2011, p. 28). Desse ponto de vista, a técnica do cálculo de diferenças é aplicável quando temos alguns problemas de caráter discreto ou quando podemos transformar um problema contínuo em um discreto. Aliás, a percepção da diferença entre o contínuo e o discreto deve ser aprimorada no estudo da matemática nos diversos níveis.

Outro aspecto essencial da modelagem matemática é a interdisciplinaridade, como bem coloca Negrelli (2008, p. 6), ela envolve um modo diferenciado de abordar uma área do conhecimento utilizando elementos típicos de outra, seja com outras ciências ou até mesmo com questões sociais no meio em que o aluno está inserido.

Nos Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio (PCNEM) salienta-se a importância da interdisciplinaridade, pois esta é a forma de articulação entre as áreas do conhecimento, promovendo competências.“[...] assim como a interdisciplinaridade surge do contexto e depende da disciplina, a competência não rivaliza com o conhecimento; ao contrário, se funda sobre ele e se desenvolve com ele” (BRASIL, 2000, p.14).

Como a modelagem é uma forma de acesso ao conhecimento da realidade, entende-se a modelagem como uma epistemologia, pois esta visa entender e explicar fenômenos encontrados na realidade. Negrelli (2008) relata que pode ser entendida como um recurso epistemológico se assumirmos a máxima de que só é possível conhecer através de uma representação.

Trabalhar com a modelagem matemática não nos possibilita “escolher” quais ferramentas iremos utilizar, assim que o problema é selecionado, não se sabe ao certo qual será a matemática ideal para resolvê-lo. Em alguns casos, quando tratamos de problemas populacionais e financeiros, por exemplo, teremos que recorrer à matemática discreta para resolvê-los. Matemática esta, presente em nosso meio, mas pouco estudada nas licenciaturas, o que causa um despreparo do profissional ao se deparar com problemas deste tipo durante a modelagem matemática aplicada ao ensino.

Consideramos que o cálculo de diferenças como parte da matemática discreta, pode ser introduzido nos cursos de Licenciatura em Matemática pelos fatores citados anteriormente em outras sessões. Além disso, possui sua semelhança com o Cálculo Diferencial o que possibilita o estudo da analogia entre os dois tipos de cálculo, e também pelo fato do cálculo de diferenças ser uma ferramenta para a modelagem matemática. Desta forma, os futuros professores podem ter contato diretamente com esta metodologia de ensino utilizando do cálculo de diferenças para seus modelos. Assim, poderão perceber as possíveis dificuldades que serão enfrentadas enquanto professores de matemática ao trabalhar com esta metodologia, o que provavelmente lhes dará mais segurança e confiança pra levar a modelagem matemática às salas de aula.

Na sequência, apresentamos uma proposta de conteúdo referente ao cálculo de diferenças, com um tratamento metodológico inovador, pois incorpora formas de raciocínio diferentes do dedutivo priorizando a análise por analogia; proposta que poderá ser inserida no currículo do curso de Licenciatura em Matemática, possibilitando o contato dos licenciandos com este cálculo e consequentemente também, com a modelagem matemática.

3 O CÁLCULO DE DIFERENÇAS: ANALOGIA DE CONCEITOS COM O CÁLCULO DIFERENCIAL

3.1 NOÇÕES BÁSICAS

O cálculo de diferenças elementar é essencialmente o cálculo de *funções reais de variável discreta*, assim como o cálculo diferencial elementar é o cálculo de *funções reais de variável contínua*.

O conceito de "sequência de números reais", é o protótipo de função real de variável discreta e segue uma lei de formação dada pelo termo geral. Por exemplo:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Para este caso, $\frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é o termo geral da sequência. Vista como função é $y: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por, $y(n) = \frac{1}{2^n}$, para todo n.

É importante notar que: a) os termos da sequência são números reais; b) cada termo da sequência varia de acordo com n que é um número natural.
Assim, a forma geral de uma sequência de números reais é dada por:
$\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots\}$ e seu termo geral é dado por $y_n,\ n \geq 0$, onde para cada n temos que $y_n \in \mathbb{R}$.

Em geral, a sequência $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots\}$ pode ser interpretada como uma função $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = y_n$.

Os exemplos mais simples estão dados pelas *progressões aritméticas* (*PA*), como por exemplo,

$1,2,3,4,5$ ... (os naturais positivos)

$1,3,5,7,9, \dots$ (os naturais ímpares).

A propriedade que caracteriza uma *PA* é que a diferença de um termo ao seguinte dele é constante a partir de um valor inicial. Assim, em geral, uma *PA* tem a forma seguinte:

$$y_0, y_0 + d, y_0 + 2d, y_0 + 3d, \dots$$

seu termo geral é dado por $\qquad y_n = y_0 + nd$

Nesse caso,

$$y_{n+1} = y_0 + (n+1)d$$

Donde obtemos a seguinte relação, chamada de “fórmula de recorrência” para sequência:

$$y_{n+1} - y_n = d.$$

Outros exemplos igualmente simples são as *progressões geométricas* (*PG*). São exemplos,

$$1,2,4,8,16, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

A propriedade que caracteriza uma *PG*, dada em termos de uma relação de recorrência, é que o quociente $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ é constante, ou seja, $\frac{y_{n+1}}{y_n} = r$(razão) ou$y_{n+1} = ry_n$.

Uma relação de recorrência permite formular uma equação envolvendo diversos termos da sequência, por exemplo,y_n e y_{n+1}, e não dá o termo geral formado. Esse tipo de relação chama-se também *equação de diferenças*.

Resolver uma equação de diferenças consiste em encontrar o termo geral da sequência envolvida. No caso de uma *PG* de razão r, $y_{n+1} = ry_n$, obtemos que $y_n = r^n y_0$.

Outro exemplo de destaque é a chamada *sequência de Fibonacci*. Cada termo da sequência de Fibonacci consiste na soma dos dois termos anteriores. Por exemplo, se os primeiros dois termos são $y_0 = 1$ e $y_1 = 1$, temos:

$$1,1,2,3,5,8,13, \dots$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2},$$

ou então, $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$.

Para que esta sequência esteja bem determinada precisamos, então, conhecer seus dois primeiros termos, y_0 e y_1.

3.2 CONCEITO DE “DERIVADA” DE UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL DISCRETA

Toda equação de diferenças pode ser expressa usando uma notação de “derivada discreta” (primeira derivada, segunda derivada, etc.) de modo que a sua solução possa ser obtida em forma análoga à solução de uma equação diferencial, a qual trabalha com funções de variável contínua (os números reais) e suas “derivadas tradicionais". Para isso vejamos primeiramente no que consiste o conceito de "derivada tradicional".

A derivada, no sentido usual, é definida para funções reais de variável contínua (não confundir com funções contínuas), isto é, para funções $f: I \to \mathbb{R}$ onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo.

$$I = [a,b]\,,]a,b[\,,]a,\infty[\,,\ldots,\mathbb{R}$$

O conceito de derivada de uma função real de variável contínua teve sua origem, principalmente, no conceito geométrico de (inclinação da) tangente a uma curva num ponto dado, e no conceito físico de velocidade instantânea de um móvel que se move numa reta sendo sua posição uma função do tempo t (variável independente que supõe-se variar sobre um intervalo de números reais).

No caso geométrico, por exemplo, o problema de calcular a equação da reta tangente à curva$y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ se reduz a calcular o coeficiente *m* de declividade da equação da reta:

$$y - f(a) = m(x - a).$$

Como calcular m?Note que se m_t é a declividade da reta tangente, então, podemos expressar $m_t = \lim_{x \to a} m_s$, onde m_s é a declividade da reta secante entre os pontos $(a, f(a))$ e $\big(x, f(x)\big)$, ou seja,

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Este limite, que é um número real, é chamado de "derivada de f no ponto a" e denota-se por $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Deve-se notar que o limite deve ser tomado considerando valores de x diferentes de a, pois esse quociente não está definido em $x = a$. Então,

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Se substituirmos x por $a + h$, obtemos a expressão seguinte:

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Temos, então, que dada $y = f(x)$, $f'(a)$ é a declividade da tangente em $x = a$, em geral, para os diferentes valores x do domínio de $f, f'(x)$ é a declividade da tangente nesse ponto x. Portanto, variando x, obtemos a chamada *função derivada*f'de $f$que para cada x toma o valor $f'(x)$.

Em forma análoga, como f é uma função e a está em seu domínio, podemos calcular

$$(f')'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}.$$

É a segunda derivada de f no ponto a e denota-se por $f''(a)$ ou $D^2 f(a)$.

A seguir vamos "traduzir" por analogia esse conceito de derivada para o caso discreto.

Consideremos uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de variável discreta. O conceito de derivada correspondente será chamado de *variação* (ou primeira variação) e denotado por $\Delta f(n)$ ou Δf. Vamos definir formalmente de uma forma muito semelhante ao caso contínuo:

$$\Delta f(n) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(n+h) - f(n)}{h}.$$

Note que tanto n quanto h variam em $\mathbb{N}$, assim, quando$h \to 0$ e $h \neq 0$ temos que $h = 1$. Portanto:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Usando a notação $y_n = f(n)$ temos que $y_{n+1} = f(n+1)$,donde,

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n.$$

3.3 AS FUNÇÕES ELEMENTARES DISCRETAS

Começaremos nosso estudo do cálculo discreto discutindo algumas funções elementares, notoriamente, a função exponencial discreta e as funções potência, devidamente adaptadas do cálculo diferencial.

Vejamos agora, qual o análogo à função exponencial no caso discreto: qual a função que coincide com sua primeira variação, ou seja, qual y_n satisfaz $\Delta y_n = y_n$ para cada n?

Para o caso contínuo vemos que $f(x) = e^x$ ou em geral ce^xatisfaz $Df(x) = f(x)$, já para o caso discreto, temos,

$$y_{n+1} - y_n = y_n \text{ ou}$$
$$y_{n+1} = 2y_n,$$

que corresponde a uma *PG* de razão 2.

Assim, as sequências que satisfazem as condições encontradas têm a seguinte forma:

$$y_0, 2y_0, 4y_0, 8y_0, \dots, 2^n y_0$$

Tomando $y_0 = 1$ obtemos a solução básica$y_n = 2^n$ que chamaremos de*exponencial discreta*.

Prolongando a analogia, fazemos a pergunta instigadora de se há também alguma semelhança nas regras de derivação e variação de monômios. Vejamos:

No caso contínuo: $Dx^k = kx^{k-1},\ k \geq 0$

No caso discreto, se tomarmos

$$y_n = n^k, \text{ onde } k \geq 0 \text{ é fixo, obtemos}$$

$$\Delta y_n = (n+1)^k - n^k = kn^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} n^{k-i}$$

Assim, vemos que não há alguma correspondência, pois $\Delta n^k \neq kn^{k-1}$

Vamos introduzir agora um conceito onde a correspondência procurada é finalmente encontrada (ELAYDI, 2005).

Diferentemente do monômio algébrico $x^k = \underbrace{x.x.x.x.x\dots}_{k \text{ vezes}}$, define-se o *monômio fatorial* da seguinte maneira:

$$x^{(k)} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}_{k \text{ termos}}.$$

Para o caso de $x = n$, inteiro positivo, temos

$$n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Resulta que $\Delta n^{(k)} = kn^{(k-1)},\ k \geq 0$, que é a fórmula do caso discreto que corresponde, por analogia, ao caso diferencial.

Vejamos:

$$\Delta n^{(k)} = (n+1)^{(k)} - n^{(k)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} - \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$= \frac{n!\,k}{(n-k+1)!} = kn^{(k-1)}.$$

Repare-se como a procura da analogia nos faz “descobrir” um novo conceito no caso discreto, o de monômio fatorial que logo poderá ser usado para diversos propósitos que estenderão mais ainda a analogia, como a definição das funções polinomiais discretas e a obtenção, por exemplo, do equivalente aos desenvolvimentos em série para as funções discretas (ELAYDI,2005).

3.4 SEGUNDA VARIAÇÃO E VARIAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR

Define-se, em analogia com o caso contínuo:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta(\Delta y_n)\\ &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n\\ &= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)\\ &= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n\end{aligned}$$

Isto é:

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Por exemplo, se $y_n = a^n$

$$\begin{aligned}\Delta y_n &= a^{n+1} - a^n = a^n(a-1)\\ \Delta^2 y_n &= a^{n+2} - 2a^{n+1} + a^n\\ &= a^n(a^2 - 2a + 1) = a^n(a-1)^2.\end{aligned}$$

Indutivamente podemos obter o seguinte padrão:

$$\Delta^k y_n = \Delta\left(\Delta^{k-1} y_n\right) = a^n(a-1)^k, \qquad k \geq 0$$

Agora,

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_n &= \Delta(\Delta^2 y_n)\\ &= \Delta(y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n)\\ &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n.\end{aligned}$$

Sintetizando:

$$\Delta^0 y_n = y_{n,}$$

$$\Delta^1 y_n = \Delta y_n = y_{n+1} - y_n,$$

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n,$$

$$\Delta^3 y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n.$$

Nota-se que há um padrão envolvido nas variações sucessivas, mas antes de verificarmos qual é, vamos fazer um comentário importante e logo introduzir certos operadores convenientes no cálculo discreto.

Devemos reparar que no exemplo anterior, como em vários outros que discutimos e discutiremos, temos usado explicita ou implicitamente a expressão “indutivamente podemos obter o seguinte padrão”. A palavra “indutivamente” aponta ao uso de uma argumentação de tipo indutivo (que consiste na passagem de vários casos particulares para uma situação geral), e a palavra “padrão” manifesta uma das características mais importantes dessa passagem: a síntese dos casos particulares revelando sua generalidade escondida,

Podemos introduzir, então, os seguintes *operadores*:

Operador “Variação” Δ: $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

Operador “Identidade” I: $I y_n = y_n$

Operador “Shift”E: $E y_n = y_{n+1}$

Observa-se que:

$$\Delta y_n = E y_n - I y_n$$
$$\Delta y_n = (E - I) y_n$$
$$\Delta = E - I.$$

Pela fórmula do Binômio de Newton,

$$(a-b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i}(-b)^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i a^{k-i} b^i$$

obtemos que,

$$\Delta^k = (E-I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i E^{k-i} I^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i E^{k-i}.$$

Assim, resulta que :

$$\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i E^{k-i} y_n.$$

Note que $E y_n = y_{n+1}$, $E^2 y_n = E(y_{n+1}) = y_{n+2}$

Indutivamente, $E^{k-i} y_n = y_{n+k-i}$.

Daí,

$$\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i y_{n+k-i}.$$

Por exemplo, para *k* = 4 obtemos:

$$\Delta^4 y_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{4}{i} (-1)^i y_{n+4-i} = y_{n+4} - 4y_{n+3} + 6y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n.$$

3.5 PROPRIEDADES DO OPERADOR Δ

Primeiro, observemos que Δ é um operador linear:

i) $\Delta(y_n \pm z_n) = \Delta y_n \pm \Delta z_n$.

ii) $\Delta(c y_n) = c\Delta y_n\,,\ c \in \mathbb{R}$.

Repare-se que estas propriedades estão em plena analogia com as propriedades do operador derivada no caso contínuo:

i) $D\big(f(x) \pm g(x)\big) = Df(x) \pm Dg(x)$.

ii) $D\big(cf(x)\big) = cDf(x),\ c \in \mathbb{R}$.

Ainda, no caso diferencial, encontramos uma aplicação do Binômio de Newton para obter a chamada de *Fórmula de Leibniz*:

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg)$$

$$D^2(fg) = D(Dfg) = D[(Df)g + f(Dg)] = D\big((Df)g\big) + D\big(f(Dg)\big)$$

$$= (D^2 f)g + DfDg + DfDg + f(D^2 g) = (D^2 f)g + 2DfDg + f(D^2 g).$$

Indutivamente:

$$D^k(fg) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \big(D^{k-i} f\big)\big(D^i g\big).$$

Vamos nos encaminhar a adaptar a Fórmula de Leibniz para o caso discreto, vendo primeiro como se comporta a variação de um produto de funções.

$$\Delta(y_n z_n) = y_{n+1}z_{n+1} - y_n z_n = y_{n+1}z_{n+1} - y_n z_{n+1} + y_n z_{n+1} - y_n z_n$$

$$= (y_{n+1} - y_n)z_{n+1} + y_n(z_{n+1} - z_n) = (\Delta y_n)z_{n+1} + y_n(\Delta z_n)$$

$$\Delta(y_n z_n) = (\Delta y_n)(E z_n) + y_n(\Delta z_n).$$

Mas, ainda há outra maneira de escrevermos:

$$\Delta(y_n z_n) = y_{n+1}z_{n+1} - y_n z_n = y_{n+1}z_{n+1} - y_{n+1}z_n + y_{n+1}z_n - y_n z_n$$

$$= y_{n+1}(z_{n+1} - z_n) + (y_{n+1} - y_n)z_n = y_{n+1}(\Delta z_n) + (\Delta y_n)z_n,$$

isto é,

$$\Delta(y_n z_n) = (Ey_n)(\Delta z_n) + (\Delta y_n)z_n.$$

É possível generalizar esta fórmula para obter $\Delta^k(y_n z_n), k \geq 0$, convidamos o leitor a fazê-lo, deduzindo na sequência as fórmulas para segunda variação, terceira variação, etc.

No caso da variação de um quociente lembremos primeiro qual a fórmula do caso contínuo:

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\big(Df(x)\big)g(x) - f(x)(Dg(x))}{g(x)^2}.$$

No caso discreto:

$$\Delta\left(\frac{y_n}{z_n}\right) = \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{y_n}{z_n}$$
$$= \frac{(y_{n+1} - y_n)z_n - y_n(z_{n+1} - z_n)}{z_{n+1}z_n}.$$

Isto é,

$$\Delta\left(\frac{y_n}{z_n}\right) = \frac{(\Delta y_n)z_n - y_n(\Delta z_n)}{z_n(Ez_n)}.$$

Assim, vemos que há uma “profunda semelhança” entre as regras de derivação e de variação com pequenas diferenças em seus resultados. A observação das semelhanças e diferenças faz parte do estudo da analogia, sendo que as diferenças podem nos conduzir a resultados novos no caso discreto que não tem contraparte no caso contínuo.

3.6 DA INTEGRAL CONTÍNUA À INTEGRAL DISCRETA

No caso das funções de variável contínua, dada a funçãof define-se sua *primitiva* como uma função F tal que em cada $x, DF(x) = f(x)$.

Denota-se por:

$$F(x) = \int f(x)dx = D^{-1}f(x),$$

e observa-se que

$$DF(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = D^{-1}f(x).$$

Dada uma função de variável discreta y_n, define-se, então, por analogia, a *primitiva* de y_n como uma outra função Y_n tal que:

$$\Delta Y_n = y_n$$

Neste caso, denotamos Y_n por$\Delta^{-1}y_n$

A função $Y_n = \Delta^{-1}y_n$ deve satisfazer:

$\Delta Y_n = y_n$, isto é, $Y_{n+1} - Y_n = y_n$ ou

$$Y_{n+1} = Y_n + y_n\,.$$

Desenvolvendo obtemos:

$$Y_0 = c,$$

$$Y_1 = Y_0 + y_0 = c + y_{0,}$$

$$Y_2 = Y_1 + y_1 = c + y_0 + y_1,$$

$$Y_3 = Y_2 + y_2 = c + y_0 + y_1 + y_2.$$

Indutivamente podemos concluir que

$$Y_n = c + (y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

Em forma compacta, se $\Delta Y_n = y_n$, então,

$$Y_n = \Delta^{-1}y_n = c + \sum_{k=0}^{n-1} y_k$$

ou seja,

$$Y_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k\right) + c,$$

em completa analogia com o caso contínuo, pois tratando-se de integral indefinida:

$$DF(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx + c.$$

O termo $\sum_{k=0}^{n-1} y_k$ pode ser interpretado como a integral discreta da função y_n.

Vejamos a relação que existe entre derivada e primitiva para o caso contínuo e a relação entre variação e primitiva discreta para o caso discreto. Essas relações são estabelecidas através dos chamados *Teoremas Fundamentais* para os respectivos cálculos.

Para o caso do Cálculo Diferencial, temos o seguinte:

i)

$$\int Df(x) = f(x) + c.$$

ii)

$$D\int f(x) = f(x).$$

No caso (i), se a integral for definida, então, satisfaz:

i')

$$\int_a^b Df(x) = f(b) - f(a).$$

O *Teorema Fundamental do Cálculo de Diferenças* expressa-se da seguinte maneira:

i)

$$\Delta^{-1}\Delta y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = y_n - y_0$$

ii)

$$\Delta\Delta^{-1}y_n = \Delta\left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k\right) = y_n.$$

Com efeito:

i)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)$$

$$= (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_n - y_{n-1}),$$

portanto, $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = y_n - y_0$.

ii) Chamemos $\left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k\right) = z_n$, então

$$\Delta\left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k\right) = \Delta z_n = z_{n+1} - z_n = \sum_{k=0}^{n} y_k - \sum_{k=0}^{n-1} y_k = y_n,$$

portanto,

$$\Delta\left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k\right) = y_n.$$

O operador Δ^{-1} tem também a propriedade de linearidade:

Lembremos que, no caso contínuo temos:

i) $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

ii) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, c constante real

No caso discreto:

i) $\Delta^{-1}(y_n \pm z_n) = \Delta^{-1}y_n \pm \Delta^{-1}z_n$.

ii) $\Delta^{-1}(cy_n) = c\Delta^{-1}y_n$.

3.7 FÓRMULA DISCRETA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

Como um exemplo interessante que estende a analogia do caso contínuo ao caso discreto, vejamos a fórmula de integração por partes.

No caso contínuo, partimos da seguinte fórmula já conhecida:
$d(uv) = udv + vdu$, isto é, $udv = d(uv) - vdu$.

Integrando ambos os lados da equação, obtemos:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu\,.$$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

No caso discreto, partimos de:

$$\Delta(y_n z_n) = (\Delta y_n)Ez_n + y_n(\Delta z_n)$$

daí, $y_n(\Delta z_n) = \Delta(y_n z_n) - (\Delta y_n)Ez_n$.

Tomando as primitivas, obtemos,

$$\Delta^{-1}(y_n \Delta z_n) = \Delta^{-1}\big(\Delta(y_n z_n)\big) - \Delta^{-1}\big((\Delta y_n)Ez_n\big)$$

$$= y_n z_n - y_0 z_0 - \Delta^{-1}\big((\Delta y_n)Ez_n\big).$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i(\Delta z_i) = y_n z_n - \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta y_i)\, z_{i+1} + c,$$

em analogia com o caso contínuo (tomando c como $y_0 z_0$).

4 PROBLEMAS DISCRETOS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS: A ANALOGIA DOS MÉTODOS

Muitos problemas que envolvem uma variável discreta n são formulados em termos de uma equação de diferenças.

Equações de diferenças usualmente descrevem a evolução no tempo de certos fenômenos, onde é considerado que o tempo varia em forma discreta, digamos em dias, meses ou anos, etc.

Há duas formas de apresentar estas equações:

i) Uma equação de diferenças de ordem $k \geq 0$, num primeiro sentido, é uma equação que relaciona a função incógnita $y_n$com $y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \dots, y_{n+k}$.

Por exemplo, a equação de Fibonacci$y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$ é uma equação de ordem 2.

Note que se nesta equação forem conhecidos y_0e y_1, então conheceríamosy_n para todo n. Assim, se $y_0 = 1$ e $y_1 = 1$, teríamos:

$$y_2 = y_0 + y_1 = 2$$

$$y_3 = 3$$

$$y_4 = 5, \dots,$$

donde $$\{y_n\} = \{1,1,2,3,5,8, \dots\}.$$

Em geral, se temos uma equação de diferenças de ordem k, precisamos conhecer os primeiros k termos da sequência, isto é $y_0, y_1, y_3, \dots, y_{k-1}$, para conhecer a sequência toda.

Resolver uma equação de diferenças é achar o termo geral y_n em função de n.

Uma equação de diferenças de ordem k é dita *normal* se :

$$y_{n+k} = f(y_n, \dots, y_{n+k-1}).$$

Esse tipo de equação é também chamado de *equação de recorrência* de ordem k.

ii) Uma equação de diferenças de ordem k, num segundo sentido, é uma equação que relaciona a função incógnita y_n comsuas variações $\Delta y_n, \Delta^2 y_n, \dots, \Delta^k y_n (k \geq 0)$.

Por exemplo:$\Delta^2 y_n = y_n + \Delta y_n$

Esse tipo de apresentação é o mais próximo do que se chama *equação diferencial* para o caso contínuo. Por exemplo:

$$y'' = y + y', \text{onde } y = f(x)$$

Ambas as formas de apresentação são equivalentes, isto é, são intercambiáveis.

Assim, no caso da equação de Fibonacci

$$y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$$

como ela é uma equação de ordem 2, deve poder ser expressa em termos de $y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n$.

Para tanto, recorremos às fórmulas seguintes, facilmente dedutíveis:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \text{ e } y_{n+2} = \Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + y_n$$

Daí, a equação de Fibonacci adota a forma

$$\Delta^2 y_n + \Delta y_n - y_n = 0,$$

que é uma equação de diferenças homogênea de ordem 2 com coeficientes constantes análoga à equação diferencial

$$y'' + y' - y = 0.$$

Reciprocamente, consideremos, por exemplo, a equação $\Delta^2 y_n = y_n + \Delta y_n$, de ordem 2, então, ela deverá ser expressa relacionando y_n com y_{n+1} e y_{n+2}. Substituindo as equações já conhecidas, obtemos

$$y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n.$$

4.1 MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS DE PRIMEIRA ORDEM EM ANALOGIA COM AS CORRESPONDENTES EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações de diferenças de primeira ordem, só envolvem y_n e y_{n+1}, ou equivalentemente, y_n e sua primeira variação Δy_n. Uma das mais simples é da forma $y_{n+1} = y_n + a_n$ onde os a_n constituem uma sequência conhecida.

Observemos que usando a definição de variação $(\Delta y_n = y_{n+1} - y_n)$, essa equação equivale a $\Delta y_n = a_n$. Visto desta forma, sabemos que sua solução é dada por $y_n = \Delta^{-1} a_n$, resultando:

$$y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Assim, fica indeterminado y_0 que podemos chamar de constante c, obtendo

$$y_n = c + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \,.$$

Outra equação simples de primeira ordem é:

$$y_{n+1} = a_n y_n,$$

equivalentemente: $\Delta y_n + y_n = a_n y_n$ ou $\Delta y_n = (a_n - 1)y_n$. Seu análogocontínuo é $Dy = h(x)y$, cuja solução é $y = ce^{\int h(x)dx}$.

No caso discreto temos:

$$y_{n+1} = a_n y_n.$$

$$y_1 = a_0 y_0.$$

$$y_2 = a_1 y_1 = a_1 a_0 y_0.$$

$$y_3 = a_2 y_2 = a_2 a_1 a_0 y_0.$$

Indutivamente,

$$y_n = (a_0 a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1})y_0 = y_0 \prod_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Chamando $y_0 = c$, obtemos:

$$y_n = c \prod_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Neste ponto é interessante fazer uma digressão para pôr em evidência qual a relação dessa fórmula encontrada com a exponencial do caso contínuo.

Vejamos: Supondo que $a_n \geq 0$ para todo n, podemos expressar $a_n = 2^{b_n}$ para uma sequência b_n adequada (observe que a base 2 é irrelevante, mas conveniente para nossa indagação). Então resulta,

$$y_n = c \prod_{k=0}^{n-1} a_k = c \prod_{k=0}^{n-1} 2^{b_n} = c2^{\sum_{k=0}^{n-1} b_n} = c2^{\Delta^{-1} b_n},$$

em completa analogia como esperado.

Outras equações de primeira ordem são as equações lineares:

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n.$$

Em forma equivalente,

$$\Delta y_n = (a_n - 1)y_n + b_n.$$

Seu equivalente contínuo é $Dy = a(x)y + b(x)$.

Pode ser feito um estudo completo da forma de solucionar esse tipo de equações por analogia com os métodos de solução das equações diferenciais lineares de primeira ordem (ELAYDI, 2005).

4.2 EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

No caso diferencial, uma equação de segunda ordem com coeficientes constantes é da forma $ay'' + by' + cy = h(x)$. Se $h(x) = 0$, temos uma equação homogênea.

No caso discreto temos $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = h_n$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se $h_n = 0$ temos uma equação homogênea.

A equação de diferenças de segunda ordem pode ser também expressa em termos de y_n, Δy_n e $\Delta^2 y_n$. Como $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ e $\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$ temos também que:

$$y_{n+1} = \Delta y_n + y_n.$$

$$y_{n+2} = \Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + y_n.$$

Substituindo na equação obtemos:

$$a\Delta^2 y_n + (2a + b)\Delta y_n + (a + b + c)y_n = h_n \quad (*)$$

Essa equação é equivalente, então, $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = h_n$.

Chamaremos de *discriminante* da equação tanto diferencial $ay'' + by' + cy = h(x)$ quanto de diferenças $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = h_n$ ao seguinte:

$$D = b^2 - 4ac.$$

É interessante observar que o discriminante da equação (*) coincide com D.

4.3 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS DE SEGUNDA ORDEM HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos a equação $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$ onde, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Para solucionar essa equação supõe-se, em analogia com o caso diferencial, uma solução da forma exponencial (discreta) $y_n = \lambda^n$ com λ uma constante por determinar. Nesse caso

$$y_{n+1} = \lambda^{n+1}, y_{n+2} = \lambda^{n+2}.$$

Substituindo:

$$a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n = 0$$

$$\lambda^n(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

Daí, $\lambda = 0$ ou $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Para $\lambda = 0$, temos como solução $y_n = 0$ para qualquer n.

Se $\lambda \neq 0$, então deve satisfazer $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Aqui encontramos 3 casos, vejamos:

Caso 1: $\lambda = \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ambos $\neq 0$.

Obtemos como solução da equação de diferenças: $y_n^1 = \lambda_1^n$ e $y_n^2 = \lambda_2^n$, que nos daria, pela linearidade da equação, a seguinte solução geral:$y_n = c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2$.

Vamos verificar previamente que y_n^1e y_n^2 são linearmente independentes como no caso contínuo.

No caso diferencial, utiliza-se o determinante Wronskiano:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aqui, para o caso discreto, utilizamos o chamado *determinante de Casorati*:

$$\begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 \\ \Delta y_n^1 & \Delta y_n^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vejamos para $y_n^1 = \lambda_1^n$ e $y_n^2 = \lambda_2^n$.

$$\Delta y_n^1 = y_{n+1}^1 - y_n^1 = \lambda_1^n(\lambda_1 - 1).$$

$$\Delta y_n^2 = y_{n+1}^2 - y_n^2 = \lambda_2^n(\lambda_2 - 1).$$

$$\begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 \\ \Delta y_n^1 & \Delta y_n^2 \end{vmatrix} = \lambda_1^n\lambda_2^n(\lambda_2^n - 1) - \lambda_2^n\lambda_1^n(\lambda_1^n - 1)$$

$$= \lambda_1^n\lambda_2^n(\lambda_2^n - \lambda_1^n) \neq 0.$$

Assim, a solução geral é dada por $y_n = c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2$.

É interessante observar que o determinante de Casorati satisfaz $\begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 \\ \Delta y_n^1 & \Delta y_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 \end{vmatrix}$.

Como exemplo de aplicação, resolveremos a equação de Fibonacci. Sabe-se que uma determinada solução deve ser uma sequência da forma $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ e para obter uma solução específica basta conhecer os dois primeiros termos y_0ey_1.

Por exemplo, tomando $y_0 = 1$ e $y_1 = 1$, teremos $y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 5, y_5 = 8, \dots$, donde a sequência solução é $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, y_n, \dots$

Mesmo conhecendo a sequência, gostaríamos de saber a forma do termo geral y_n.Neste caso supõe-se $y_n = \lambda^n$, então,$\lambda^{n+2} = \lambda^n + \lambda^{n+1}$ donde $\lambda^{n+2} = \lambda^n(1 + \lambda)$.

Supondo $\lambda \neq 0$, obtemos:

$\lambda^2 = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, resultando $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

λ_1e λ_2 são números reais distintos, assim obtemos:

$$y_n^1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ e } y_n^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\text{ou } y_n^1 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^n \text{ e } y_n^2 = (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^n,$$

e a solução geral será

$$y_n = c_1 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^n + c_2(-1)^n \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^n.$$

Quais os valores de c_1e c_2 adequados para obter a sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, y_n, \dots$ (dada por números inteiros)?

Para o cálculo de c_1e c_2, assumimos como dados iniciais $y_0 = 1$ e$y_1 = 1$, substituindo na solução geralobtemos:

$$y_0 = c_1 + c_2 = 1.$$

$$y_1 = c_1 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) - c_2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = 1.$$

Resolvendo este sistema, obtemos finalmente:

$$c_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{e } c_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Caso 2: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, obtemos uma solução $y_n^1 = \lambda_1^n$. Devemos obter outra y_n^2 que junto com y_n^1 sejam L.I.

No caso diferencial obtém-se, pelo método de variação de parâmetros, $y_2 = xy_1$sendo $y_1 = e^{\lambda_1 x}$.

Em analogia com o caso diferencial, resulta $y_n^2 = ny_n^1$. Facilmente se verifica que y_n^2 é solução.

Além disso, y_n^1 e y_n^2 são L.I., pois,

$$\begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_n^1 & ny_n^1 \\ y_{n+1}^1 & (n+1)y_{n+1}^1 \end{vmatrix}$$
$$= (n+1)y_n^1 y_{n+1}^1 - ny_n^1 y_{n+1}^1 = y_n^1 y_{n+1}^1$$
$$= \lambda_1^n \lambda_1^{n+1} = \lambda_1^{2n+1} \neq 0 \text{ (se } \lambda_1 \neq 0).$$

Com isso, obtemos como solução geral:

$$y_n = c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2 = c_1 y_n^1 + c_2 n y_n^1$$
$$= (c_1 + c_2 n)y_n^1 = (c_1 + c_2 n)\lambda_1^n.$$

Caso 3: $\lambda = \alpha \pm \beta i$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$. Em princípio, as soluções y_n^1 e y_n^2, seriam $y_n^1 = (\alpha + \beta i)^n$ e $y_n^2 = (\alpha - \beta i)^n$ que são soluções complexas.

Precisamos de duas soluções reais que sejam L.I.

Vamos escrever y_n^1 e y_n^2 em sua forma polar. Seja $\alpha = r\cos\theta, \beta = r\operatorname{sen}\theta$.

$$\alpha + \beta i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$
$$\alpha - \beta i = r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta).$$

A partir da fórmula de *De Moivre* $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$, obtemos:

$$y_n^1 = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta),$$
$$y_n^2 = r^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta).$$

Vamos verificar agora que é possível encontrarmos como soluções reais L.I. as seguintes:

$$z_n^1 = r^n\cos n\theta \text{ e } z_n^2 = r^n\operatorname{sen} n\theta.$$

Sabemos que y_n^1 e y_n^2 são soluções da equação de diferenças de segunda ordem, então, a solução geral é dada da forma $y = c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2$.

Tomemos c_1e $c_2 = \frac{1}{2}$. Desta forma,

$$y = \frac{1}{2}r^n(\cos n\theta + i\ \operatorname{sen} n\,\theta) + \frac{1}{2}r^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta)$$
$$y = r^n\cos n\theta = z_n^1.$$

Tomemos c_1e $c_2 = \frac{1}{2i}$. Desta forma,

$$y = \frac{1}{2i}r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) + \frac{1}{2i}r^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta)$$
$$y = r^n\operatorname{sen} n\theta = z_n^2.$$

Portanto, a solução geral real da equação pode ser expressa como

$$y = r^n(c_1 \cos n\theta + c_2 \operatorname{sen} n\theta).$$

5 MODELAGEM DISCRETA

Neste capítulo, trazemos alguns modelos matemáticos que utilizam do cálculo de diferenças para explorar seu problema e também exemplos de modelos que podem ser formulados e solucionados através do cálculo de diferenças por analogia ao cálculo diferencial. Com isso, pretende-se mostrar a importância do Cálculo de Diferenças como ferramenta para matemática aplicada e exemplificar ao leitor como ocorre a passagem do contínuo ao discreto.

5.1 O MODELO DO FINANCIAMENTO

Um dos campos de maior aplicação do cálculo de diferenças é a matemática financeira. Pensando no ciclo de educação, é um assunto que pode ser levado às salas de aula quando se trata de abordar a educação financeira. Tema este, que vem sendo colocado em relevância não só apenas nas aulas de matemática, mas em outros componentes, pois envolve aspectos históricos e também sociais.

Pensando no componente de matemática, trouxemos como exemplo ilustrativo, um problema de financiamento (BASSANEZI, 2013) e a seguir faremos a modelagem e solução deste problema.

Na compra de uma casa é feito um financiamento do valor c_0 que deve ser pago em parcelas mensais fixas e iguais a k. Queremos determinar o juro mensal α cobrado neste empreendimento.

Seja c_0 a dívida inicial; então a divida c_n no mês n é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja,

$$c_{n+1} = c_n + \alpha c_n - k = (1+\alpha)c_n - k.$$

Note que para esta equação, podemos encontrar a solução indutivamente. Vejamos:

$$c_1 = (1+\alpha)c_0 - k.$$

$$c_2 = (1+\alpha)c_1 - k = (1+\alpha)^2 c_0 - (1+\alpha)k - k.$$

$$c_3 = (1+\alpha)c_2 - k = (1+\alpha)^3 c_0 - (1+\alpha)^2 k - (1+\alpha)k - k.$$

$$\vdots$$

$$c_n = (1+\alpha)^n c_0 - k[1 + (1+\alpha) + \cdots + (1+\alpha)^{n-1}].$$

Note que os termos que estão entre colchetes, formam uma *PG*, assim:

$$c_n = (1+\alpha)^n c_0 - k\left(\frac{1-(1+\alpha)^n}{-\alpha}\right).$$

Para encontramos o valor de α precisamos dos valores de c_0, k e n.Se considerarmos que a dívida deve ser quitada em n meses, devemos ter que $c_n = 0$. Assim, teremos que

$$(1+\alpha)^n c_0 = k\left(\frac{1-(1+\alpha)^n}{-\alpha}\right),$$

ou então,

$$\frac{\alpha c_0}{k} = \frac{(1+\alpha)^n - 1}{(1+\alpha)^n} = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^n}.$$

Considere que a dívida inicial seja $c_0 = 30000,\ k = 500,\ t = 180$ (15 anos). Então:

$$60\,\alpha = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^{180}}.$$

Para determinar numericamente o valor de α podemos utilizar o método da bisseção. Sejam,

$$y = 60\,\alpha \text{ e } z = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^{180}}.$$

Pelo método da bisseção, devemos encontrar α de modo que $y = z$. Assim,

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow y = 0.6 \text{ e } z = 0.833 \Rightarrow z > y$$

$$\alpha = 0.02 \Rightarrow y = 1.2 \text{ e } z = 0.97 \Rightarrow z < y$$

tomando

$$\alpha = \frac{0.01 + 0.02}{2} = 0.015 \Rightarrow y = 0.9 \text{ e } z = 0.93 \Rightarrow z > y$$

Então, α deve estar entre 0.015 e 0.02. Continuando o processo, obtemos $\alpha \cong 0.0156$.

5.2 CRESCIMENTO POPULACIONAL DE COELHOS E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Um problema já conhecido na matemática é o caso do crescimento da população de coelhos. Se acontecer de um casal de coelhos serem abandonados em uma praça, eles irão se reproduzir rapidamente e assim, a população crescerá cada vez mais. Vamos verificar então, como se comporta este crescimento populacional de coelhos.

Sabendo que a gestação das coelhas dura 30 dias, e supondo que inicialmente foi deixado um casal de coelhos no parque, sendo que cada casal adulto dá origem a um novo casal a cada mês e que um casal já é considerado adulto após um mês de seu nascimento, podemos investigar algumas situações, tais como:

- Para um primeiro mês, temos apenas UM casal de coelhos.
- No segundo mês, o mesmo casal da à luz a outro casal, assim, num segundo mês, teremos UM novo casal, que é fruto do casal inicial.
- No terceiro mês o casal inicial gerará outro casal de filhotes, e o primeiro casal gerado no parque também estará fértil, gerando assim outro casal, ou seja, um total de DOIS casais.
- Supor que não existem mortes.

Indutivamente, percebe-se que há uma relação na sequência que se refere à quantidade de coelhos a cada geração. Vejamos:

Para se referir à quantidade de coelhos no primeiro mês, definiremos como $y_0 = 1$, para o segundo mês $y_1 = 1$, para o terceiro mês $y_2 = 2$, para o quarto mês $y_3 = 3$, e assim chegamos a uma sequência:

$$1,1,2,3,5,8,13, \ldots$$

Essa sequência é conhecida como sequência de Fibonacci, como já citado em outro capítulo.

Com todas informações coletadas, vamos estimar a quantidade de coelhos para um mês n.

É importante neste momento a percepção da relação entre os termos da sequência que dá origem a própria sequência.

Cada termo da sequência é o resultado da soma dos dois termos anteriores. Neste caso, precisamos saber quem são os dois primeiros termos e assim poderemos descobrir outros.

Seja $y_0 = 1$ e $y_1 = 1$, assim:

$$y_2 = y_0 + y_1 = 1 + 1 = 2$$

$$y_3 = y_2 + y_1 = 2 + 1 = 3$$

$$y_4 = y_3 + y_2 = 3 + 2 = 5$$
$$y_5 = y_4 + y_3 = 5 + 3 = 8$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Ou então, $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, isto é,

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0.$$

A solução para a equação é obtida através das raízes do polinômio característico:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Assim, resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos como raízes:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, temos como solução geral:

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

Como conhecemos $y_0 \mathrm{e} y_1$, vamos montar um sistema para descobrirmos os valores das constantes C_1 e C_2.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos os seguintes valores:

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \text{ e } C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Verificando a solução encontrada, vemos que o modelo satisfaz o problema inicial.

5.3 O CRESCIMENTO POPULACIONAL DE ESCARGOTS

Vejamos um modelo de crescimento populacional de escargots, baseado em Bassanezi (2015).

Consideremos o crescimento do escargot em 3 etapas: ovos, jovens e adultos. Para meio de simplificação, consideremos também que não há mortalidade em nenhuma destas fases.

1. Todo escargot adulto desova e o faz a cada 4 meses; tomemos c como a quantidade de ovos de uma desova e C_na quantidade de ovos em um estágio n. Então,

$$C_n = A_n c,$$

Onde A_n é a quantidade de adultos no estágio n.

2. Um escargot jovem se torna adulto em 8 meses. Considere cada estágio n como um período de 4 meses e B_n a quantidade de jovens a cada estágio n. Então:

$$C_n = (ovos\ provinientes\ da\ desova\ dos\ adultos) \\ + (ovos\ provinientes\ da\ desova\ dos\ jovens\ que\ chegaram\ a\ fase\ adulta)$$

Isto é, $C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1}$.

$$A_n = (adultos\ no\ estágio\ n-1) + (jovens\ que\ chegaram\ à\ fase\ adulta)$$

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1}.$$

Como B_n representa a quantidade de jovens no estágio n, podemos dizer que $B_n = (ovos\ do\ estágio\ n-1)$ isto é, $B_n = C_{n-1}$.

Utilizando as três equações encontradas, formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \\ B_n = C_{n-1} \\ C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} \end{cases}$$

Com as condições iniciais $A_0 = a; B_0 = C_0 = 0$.

$$B_n = C_{n-1} \Rightarrow B_{n-1} = C_{n-2}.$$

Da primeira equação, temos também que

$$B_{n-1} = A_n - A_{n-1}.$$

Da terceira equação do sistema,

$$C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} = cA_{n-1} + c(A_n - A_{n-1}).$$

Isto é,

$$C_n = cA_n$$

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} = A_{n-1} + C_{n-2} = A_{n-1} + cA_{n-2}.$$

Com estas equações, chegamos a uma equação de diferenças de segunda ordem.

$$A_n = A_{n-1} + cA_{n-2} \text{ ou } A_{n+1} = A_n + cA_{n-1}$$

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + cA_{n-1} \\ A_0 = A_1 = a \end{cases}$$

Vamos dividir nossa solução em dois casos, para $c = 0$ e para $c > 0$.

Para $c = 0$, não haveria ovos, então $A_{n+1} = A_n$, donde $A_{n+1} - A_n = 0$, o que implica em $A_n = A_0$, para todo $n \geq 1$.

Para $c > 0$, temos uma equação de diferenças de segunda ordem, então vamos supor uma solução exponencial da forma $A_n = \lambda^n$. Assim,

$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - c\lambda^n = 0.$$

Isto é,

$$\lambda^n(\lambda^2 - \lambda^1 - 1) = 0.$$

Portanto, $\lambda^2 - \lambda \quad - c = 0$. Resolvendo esta equação encontramos como raízes:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

daí, $|\lambda_1| > 1$.

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2} = |\lambda_2| = \frac{\sqrt{1 + 4c} - 1}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < c < \frac{3}{4}.$$

Assim, a solução geral é dada pela combinação das soluções:

$$A_n = K_1\lambda_1^n + K_2\lambda_2^n.$$

Com $K_1 > 0 \; e \; \lambda_1 > 1, A_n$ é crescente e sem limitações, o que indica que a população de escargots sempre estará crescendo.

5.4 MODELOS DISCRETOS POR ANALOGIA COM MODELOS CONTÍNUOS: O LANÇAMENTO DE UM PROJÉTIL

Nesta seção e na próxima, trazemos exemplos da passagem de modelos contínuos para modelos discretos. Salientamos a vantagem pedagógica dos modelos discretos, pois estes não necessitam de ferramentas como o cálculo diferencial e integral, que consideramos mais avançadas, utilizam apenas as noções básicas de caráter combinatório. Desta maneira, estes modelos ficam mais próximos da realidade escolar.

Um exemplo de modelo discreto formado a partir de um modelo continuo, é o caso do “Lançamento de um projétil” elaborado por Cifuentes e Negrelli (2011) que apresentamos abaixo.

Antes de trabalharmos com as equações do modelo, é preciso pontuar algumas simplificações de nossas hipóteses. Para este modelo vamos considerar que:

- A superfície terrestre é plana;
- A trajetória do projétil não sofre alteração devido ao atrito da atmosfera;
- O próprio projétil é um ponto material;
- A ação da força da gravidade tem a mesma intensidade a qualquer altura.

Os autores sugerem também algumas simplificações matemáticas, assim, consideramos que:

- O movimento do projétil realiza-se num plano perpendicular a o plano da Terra;
- O movimento do projétil no plano pode ser decomposto em dois movimentos, um horizontal e outro vertical. Desta forma, o movimento “real” é a combinação vetorial de ambos;
- Se as variáveis são contínuas, estão no domínio dos números reais, se são discretas, estão no domínio dos números naturais;

- A escolha sobre o tipo de variáveis, neste caso, sobre o tempo$t$ é o que vai determinar os procedimentos matemáticos a serem utilizados. Se t for variável contínua, será adotado o cálculo diferencial, se t for discreto, o cálculo de diferenças.

Para t variável contínua

Tomemos v_0 como velocidade inicial, ϕ como ângulo de lançamento. Chamaremos de x o deslocamento horizontal e y o vertical. Tanto o deslocamento horizontal quanto o vertical, dependem da variável t.

A velocidade v_0 será composta da velocidade horizontal v_{0x}, e a velocidade vertical v_{0y}. Assim, suas respectivas equações são:

$$v_{ox} = v_0 \cos \phi \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin \phi$$

Com as simplificações de hipóteses adotadas, os movimentos horizontais e verticais se tornam movimentos retilíneos e, portanto, satisfazem a lei de Newton traduzidas nas equações:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ e } \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Utilizando técnicas de integração, encontramos como solução:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \text{ e } y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Consideremos que o lançamento do projétil parte da origem, ou seja, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Desta forma, obtemos:

$$x(t) = v_{0x}t \quad \text{e} \quad y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vamos reorganizar nossas equações a fim de encontrarmos uma única equação para a trajetória do projétil.

$$t = \frac{x}{v_{0x}},$$

assim,

$$y = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2}.$$

Simplificando mais ainda, encontramos:

$$y = (\tan \phi)x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{v_{0x}^2}\right).$$

Para t variável discreta

Trabalhando com t sendo uma variável discreta, usaremos técnicas do cálculo de diferenças já mencionadas no capítulo anterior.

Vamos definir x para deslocamento horizontal e y para deslocamento vertical.

As equações diferenciais $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ e $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$, se tornam no caso discreto:

$$\Delta^2 x_t = x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 0 \text{ e } \Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = -g.$$

Note que a primeira equação é uma equação homogênea de segunda ordem, portanto, teremos uma solução da forma exponencial discreta $y_t = \lambda^t$. Assim:

$$\lambda^{t+2} - 2\lambda^{t+1} + \lambda^t = 0.$$

Colocando λ^t em evidência:

$$\lambda^t(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0.$$

Desta forma,$\lambda^t = 0$ e$y_t = 0$, ou $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.

Resolvendo $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, encontramos uma raiz dupla, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Como explicado na seção 4.3, esta situação remete ao caso 2, onde as duas raízes são iguais e, então, a solução y_t é dada por

$$y_t = C_1\lambda^t + C_2 t\lambda^t,$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Como $\lambda = 1$, temos que

$$y_t = C_1 + C_2 t.$$

Para solucionarmos a equação $\Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = -g$, podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados em forma completamente análoga ao diferencial. Por esse método procura-se uma solução particular da forma $y_p(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ obtendo $y_p(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. Desse modo, a solução geral da equação $\Delta^2 y_t = -g$ será $y_t = C_1 + C_2 t - \frac{1}{2}gt^2$.

5.5 O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

A finalidade deste exemplo é esboçar algumas características da passagem do modelo contínuo do oscilador harmônico simples ao correspondente discreto, comparando as informações que ambos os modelos nos dão sobre o fenômeno em estudo.

Antes de iniciarmos esse estudo, vejamos uma semelhança entre fenômenos que podem ser descritos por uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes, da forma $ax'' + bx' + cx = 0$ para $x = x(t)$, ou por uma equação de diferenças da forma discreta $a\Delta^2 x_t + b\Delta x_t + cx_t = 0$ onde $x_t = x(t)$ para t discreto, o que equivale a $a(x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t) + b(x_{t+1} - x_t) + cx_t = 0$, isto é, $ax_{t+2} + (b - 2a)x_{t+1} + (c + a - b)x_t = 0$.

Note que o discriminante da equação discreta é dado por

$$D = (b - 2a)^2 - 4a(c + a - b) = b^2 - 4ac,$$

o que mostra que o discriminante da equação diferencial se preserva na passagem do contínuo ao discreto.

Revisemos brevemente o modelo contínuo para o oscilador harmônico simples.

De acordo com a Lei de Hooke, a lei de Newton que modela o fenômeno é dada por $mx'' = -kx$, isto é, $x'' + \frac{k}{m}x = 0$ onde $m > 0$ e $k > 0$. Denotando por $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, obtemos

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Vamos supor uma solução da forma $x(t) = e^{\lambda t}$, daí,

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

$$\lambda = \pm i\omega_0.$$

Assim, sabendo que para $\lambda = \alpha \pm \beta i$ obtemos como solução$x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t)$, então no nosso caso,

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t \\ &= A\left(\frac{C_1}{A}\cos \omega_0 t + \frac{C_2}{A}\operatorname{sen} \omega_0 t\right), \end{aligned}$$

onde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Como $\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{A}\right)^2 = 1$, podemos escolher φ de modo que $\frac{C_1}{A} = \cos \varphi$ e $\frac{C_2}{A} = \operatorname{sen} \varphi$. Desta forma,

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\cos \varphi \cos \omega_0 t + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega_0 t) \\ &= A\cos(\omega_0 t - \varphi). \end{aligned}$$

Observa-se que o valor de A pode ser associado com a amplitude da oscilação, pois $|x(t)| = A|\cos(\omega_0 t - \varphi)| \leq A$. Assim também, ω_0 é a frequência da oscilação e φ é a fase inicial.

Se temos como dados iniciais

$x(0) = x_0$ (posição inicial),

$x'(0) = v_0$ (velocidade inicial),

então,resulta

$$x_0 = A\ \cos(-\varphi) = A\cos\varphi = A\frac{C_1}{A} = C_1.$$

Donde, $x_0 = C_1$.

$$x'(t) = -A\omega_0 sen\,(\omega_0 t - \varphi),$$

$$v_0 = x'(0) = -A\omega_0\ sen\,(-\varphi),$$

$$v_0 = A\omega_0\ sen\ \varphi = A\omega_0\left(\frac{C_2}{A}\right) = \omega_0 C_2.$$

Donde, $C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$. Obtemos, assim, como solução específica $x(t) = A\cos(\omega_o t - \varphi)$, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, e φ é tal que $\tan\varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0\omega_0}{v_0}$.

Na sequência reformularemos em forma discreta o modelo obtido. Para tanto, substituiremos x'' por $\Delta^2 x_t$, obtendo:

Por analogia com o caso contínuo, temos:

$$\Delta^2 x_t + \omega_0^2 x_t = 0,$$

ou

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + (1 + \omega_0^2)x_t = 0.$$

Vamos supor $x_t = \lambda^t$, assim,

$$\lambda^{t+2} - 2\lambda^{t+1} + (1 + \omega_0^2)\lambda^t = 0$$

donde,

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 + \omega_0^2) = 0.$$

Desta forma,

$$\lambda = 1 \pm \omega_0 i.$$

Como deduzimos na seção 4.3, a equação terá como solução

$$x_t = r^t(C_1\cos\theta t + C_2\,\mathrm{sen}\,\theta t) \qquad (*)$$

para $r = |\lambda| = \sqrt{1 + \omega_0^2}$ e θ tal que $\tan\theta = \omega_0$.

Fazendo $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \cos\varphi = \frac{C_1}{A}, \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{C_2}{A}$, obtemos

$$x_t = r^t A(\cos\varphi\ \cos\theta t + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta t)$$

$$= r^t A\cos(\theta t - \varphi).$$

Se na equação $(*)$ x_0e x_1 são dados iniciais, então, $x_0 = A\cos(-\varphi) = A\cos\varphi = A\frac{C_1}{A} = C_1$, isto é, $C_1 = x_0$.

Como$sen\,\theta = \frac{\omega_0}{r}$ e $\cos\theta = \frac{1}{r}$, temos que

$$x_1 = r\left(C_1\frac{1}{r} + C_2\frac{\omega_0}{r}\right) = C_1 + C_2\omega_0$$

$$x_1 = x_0 + C_2\omega_0$$

$$x_1 - x_0 = C_2\omega_0.$$

Daí,

$$C_2 = \frac{x_1 - x_0}{\omega_0} = \frac{\Delta x_0}{\omega_0}.$$

Assim,

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\Delta x_0^2}{\omega_0^2}}.$$

Comparando o valor de A nos casos contínuo e discreto, obtemos uma analogia formal, pois o parâmetro v_0 no caso contínuo se corresponde com Δx_0 no caso discreto. Porém, o problema está em identificar a relação do valor de A discreto com a amplitude do fenômeno, devido ao fator r^t na solução $x_t = r^t A\cos(\theta t - \varphi)$, pois $\lim_{t\to\infty} r^t = \infty$.

Assim, $|x_t| \leq r^t A = (1 + \omega_0)^{\frac{1}{2}} A \to \infty$.

É claro que a amplitude do fenômeno de oscilação não deve depender da abordagem discreta ou contínua dada a ele. O que exige neste caso e em outros similares, um aprofundamento maior na análise da solução das equações ou até na substituição direta das derivadas contínuas pelas discretas.

Observa-se que a passagem do contínuo para o discreto não trivializa o problema, mas o enriquece com outras técnicas de caráter combinatório.

Fica aqui então registrado, para pesquisas futuras essa passagem do contínuo ao discreto exemplificado assim.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista a ideia de que a matemática não pode ser apenas vista como uma ciência formal, mas sim, como atividade, uma matemática dinâmica, onde podemos explorá-la de diversas formas, vemos a necessidade de utilizarmos diferentes modos de raciocínio. Entendemos que a dedução, indução, abdução e analogia são importantes para a argumentação matemática e também para a construção do conhecimento matemático. São eficientes também, no ensino de matemática e de outras ciências, já que no caso da analogia, por exemplo, podemos explorar as semelhanças entre um assunto novo, com outro já conhecido, facilitando em seu entendimento, enriquecido com outras técnicas.

Raciocinar por analogia, nos permite fazer associações de conteúdos e propriedades semelhantes, podendo nos levar a descobertas matemáticas. Construir, descobrir e pensara matemática, faz parte da ideia de "matemática como atividade" que enfatizamos neste trabalho.

Pensando na formação matemática do professor, vemos que o contato com estas formas de raciocínio se fazem necessárias, visto que devemos quebrar a ideia de que a matemática é puramente formal e dedutiva e salientar que podemos investigar e descobrir a matemática, explorando-a de diferentes maneiras, e a tornando assim, mais dinâmica e construtiva.

Vemos também a importância do cálculo de diferenças na formação dos professores de matemática. O ensino do mesmo na formação dos professores, por meio de analogia com o cálculo diferencial possibilita uma compreensão desta parte da matemática discreta que pouco é estudada nos cursos de graduação, e até uma melhor compreensão do próprio cálculo diferencial.

Esta dissertação contribui para justificar porque algumas áreas matemáticas vistas no ensino superior, como o Cálculo Diferencial Integral, são importantes na formação do professor de matemática, não porque essas áreas serão ensinadas na educação básica, mas sim, para fazer uma dinâmica comparação entre conteúdos.

O estudo desse cálculo pelos futuros professores de matemática permitirá evitar os erros muitas vezes cometidos quando trabalhado com o cálculo diferencial, pois não se sabe que se restringirmos o domínio para os números naturais, teremos conceitos semelhantes, porém, diferentes dos considerados para um domínio mais abrangente. Ter conhecimento deste cálculo, e ao mesmo tempo da modelagem matemática, facilitará para que o professor de matemática possa elaborar situações de modelagem que se dão de forma discreta e levar aos seus alunos ou até mesmo, para o caso de um modelo escolhido pelos próprios alunos, a recair em situações do cálculo de diferenças.

Por mais que estejamos falando de um assunto que seja de nível superior, pode ocorrer sua inclusão em sala de aula em aspectos menos complexos. Mas o importante é salientar a sua inclusão na formação inicial dos professores dentro dos cursos de Licenciatura em Matemática, que é a base do conhecimento dos futuros profissionais de Educação Matemática, e também o seu estudo por analogia com o cálculo diferencial.

Levar o pensamento analógico para o processo de modelagem matemática, nos permitem explorar fenômenos de duas formas distintas. Da mesma forma que podemos fazer um estudo do cálculo de diferenças por analogia ao cálculo diferencial, podemos fazer a discretização de modelos contínuos. Porém, como mostrado no último capítulo, não é uma forma de deixar o problema menos “complexo”, mas sim, de analisá-lo de outra forma e nos possibilitar algumas conclusões mais profundas sobre o problema.

Outro fator importante na formação do professor de matemática é a familiarização com a modelagem matemática, pois além de trabalharmos com uma matemática aplicada em diversas situações, nos permitem o contato com outras áreas científicas nos levando assim, a interdisciplinaridade.

Mostrou-se também através dos exemplos de modelagem matemática, a diferença entre modelos contínuos e discretos, e também, que a passagem do contínuo ao discreto não empobrece o modelo, mas os dá uma nova interpretação que muitas vezes pode ser de maior compreensão aos alunos do Ensino Básico.

Uma possível continuação deste trabalho é ampliar a pesquisa para assuntos mais avançados do cálculo de diferenças, como por exemplo, o cálculo de diferenças de várias variáveis e o sistema de equações de diferenças, além de outros assuntos teóricos como o estudo comparativo da estabilidade das soluções do cálculo de diferenças por analogia com o cálculo diferencial.

Outra contribuição da dissertação que vem como proposta futura é ter salientado o processo de analogia como uma forma frutífera de trazer para a educação básica, certos assuntos da matemática superior.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2013.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** 3ª Ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática teoria e prática.** São Paulo: Contexto, 2015.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Brasília, MEC/SEF, 2000.

BUNGE, M. **La Ciencia, su Método y su Filosofía.** Buenos Aires: Sudamericana, 1995.

CHIBENI, S.S. A inferência abdutiva e o realismo científico.**Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, série 3, p.45-73, 1996.

CIFUENTES, J. C. A matemática elementar de um ponto de vista superior: uma contribuição ao "Projeto Felix Klein" para o ensino de matemática na formação inicial de professores. In: CURY, H. N., VIANNA, C. R. **Formação do professor de matemática: reflexões e propostas.** Curitiba: Instituto Padre Reus, 2009. p. 145 – 183.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L.G. O processo de modelagem matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO J. L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**. Londrina: Eduel, 2011. p. 123-140.

DA COSTA, N. C. A. **Lógica Indutiva e Probabilidade**. 2ª ed. São Paulo: Hucitec-EdUSP, 1993.

ELAYDI, S.**An Introduction to Difference Equations**. 3ª Ed. San Antonio, Texas: Springer, 2005.

GODOY, L. A. Sobre la estructura de las analogías em Ciências. **Interciencia**, v.27, n.8, p. 422-429, 2002.

JORGE, W. Analogia no ensino da física. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 7, n. 3, p.196-202, dez. 1990.

JURKIEWICZ, S. Matemática Discreta no Ensino Pré-Universitário. In: **Simpósio brasileiro de pesquisa operacional. 26.** São João Del Rei, 2004. p. 2802-2809.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático. Provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 1978.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E.M. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática.** 1ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MOREIRA, P. C., DAVID M. M. M. S. **A formação Matemática do professor: licenciatura e prática escolar.** 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NEGRELLI, L. G. **Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática.**f.104, Tese (Doutorado em Educação) - Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

PANIZZA, M. **Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidade matemática de los alunos.** 1ª. Ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2005.

PALMA, H. **Metáforas y Modelos Científicos**: el linguaje em la enseñanza de las ciencias. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2008.

PERELMAN, C. As ligações que fundamentam a estrutura do real. **Tratado da Argumentação**: a nova retórica. São Paulo: Martins Fontes, 2002, p.399-465.

POLYA, G. **Matemáticas y Razonamiento Plausible**. Madri: Ed. Tecnos, 1966.

ZAVADIVKER, M. N. La metáfora como recurso epistêmico. **A parte Rei. Revista de Filosofia**.(40), p.1- 9, 2005.