UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUIZ FELIPE SIGWALT DE MIRANDA

HÁ UM ESTILO PARA A MATEMÁTICA?

UM ESTUDO A PARTIR DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

CURITIBA
2018

LUIZ FELIPE SIGWALT DE MIRANDA

HÁ UM ESTILO PARA A MATEMÁTICA?

UM ESTUDO A PARTIR DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor do Curso de Doutorado em Filosofia do Setor de Ciências Humanas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra

Coorientador: Prof. Niccolò Guicciardini Corsi Salviati, DSc

CURITIBA
2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de
Bibliotecas/UFPR-Biblioteca de Ciências Humanas
Maria Teresa Alves Gonzati, CRB 9/1584.
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Miranda, Luiz Felipe Sigwalt de.
Há um estilo para a matemática? : um estudo a partir do problema da Braquistócrona / Luiz Felipe Sigwalt de Miranda. – Curitiba, 2018.
233 f.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná . Setor de Ciências Humanas, Programa de Pós-Graduação em Filosofia.
Orientador : Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra.
Coorientador: Prof. Niccolò Guicciardini Corsi Salviati, DSc.

1. Estilo (Filosofia). 2. Matemática – Problemas, exercícios, etc. I. Título. II. Universidade Federal do Paraná.

CDD 149.94

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - PGFILOS

ATA Nº 202/2000/2018 DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE TESE PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM FILOSOFIA No dia trinta de abril de dois mil e dezoito às 13:00 horas, no Auditório do CIPEAD-UFPR, situado no Prédio Histórico da UFPR, Pça. Santos Andrade, Curitiba, PR, foram instalados os trabalhos de arguição do Doutorando **LUIZ FELIPE SIGWALT MIRANDA** para a Defesa Pública de sua Tese de Doutorado intitulada: **HÁ UM ESTILO PARA A MATEMÁTICA? UM ESTUDO A PARTIR DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: Prof. Dr. EDUARDO SALLES DE OLIVEIRA BARRA(UFPR), Prof. Dr. AWDRY FEISSER MIQUELIN(UTFPR), Prof. Dr. JOSÉ CARLOS CIFUENTES(UFPR), Prof. Dr. RONEI CLÉCIO MOCELLIN(UFPR), Prof. Dr. OTÁVIO BUENO (University of Miami) e Prof. Dr. NICCOLÒ GUICCIARDINI(Universitá degli Studi di Bergamo), participação por videoconferência. Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O discente respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais. A Banca Examinadora, então, e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação do discente. O discente foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. A aprovação no rito de defesa deverá ser homologada pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais do programa. A outorga do título de Doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, EDUARDO SALLES DE OLIVEIRA BARRA, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Observações:

Curitiba, 30 de Abril de 2018.

Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra
Orientador e Presidente da banca

Prof. Dr. Awdry Miquelin (UTFPR-Ponta Grossa/PR)
Examinador Externo

Otávio Bueno
Prof. Dr. Otávio Bueno (University of Miami)
Examinador Externo

Prof. Dr. José Carlos Cifuentes (UFPR)
Examinador Interno

Prof. Dr. Ronei Clécio Mocelin (UFPR)
Examinador Interno

Prof. Dr. Niccolò Guicciardini (Universitá degli Studi di Bergamo)
Coorientador- Participação por videoconferência

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **LUIZ FELIPE SIGWALT MIRANDA**, intitulada: **HÁ UM ESTILO PARA A MATEMÁTICA? UM ESTUDO A PARTIR DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa. A outorga do título de Doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de PósGraduação. Curitiba, 30 de Abril de 2018.

Integrantes da Banca Examinadora	Notas
Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra (UFPR) (Orientador e Presidente da Banca Examinadora)	10
Prof. Dr. Awdry Miquelin (UTFPR-Ponta Grossa/PR) Examinador Externo	10
Prof. Dr. Otávio Bueno (University of Miami) Examinador Externo	10
Prof. Dr. José Carlos Cifuentes – Examinador Interno (UFPR)	10
Prof. Dr. Ronei Clécio Mocelin - Examinador Interno(UFPR)	10
Média Final	10
Conceito	A

Os examinadores atribuem nota em escala de zero a 10 (dez), sendo considerado aprovado o mestrando que obtiver como nota final a média aritmética superior a 7 (sete). No parecer emitido por ocasião da defesa, constará a nota e o critério: **CONCEITO.**
Os examinadores devem registrar no corpo da dissertação/tese as correções sugeridas.

Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra
Orientador e Presidente da Banca
Examinadora-UFPR

Examinador Externo

Prof. Dr. José Carlos Cifuentes (UFPR)
Examinador Interno

Prof. Dr. Awdry Miquelin (UTFPR-Ponta Grossa/PR)
Examinador Externo

Prof. Dr. Ronei Clécio Mocelin (UFPR)
Examinador Interno

Otávio Bueno

Prof. Dr. Otávio Bueno (University of Miami)

Prof. Dr. Niccolò Guicciardini (Università degli Studi di Bergamo)
Coorientador- Participação por videoconferência

§ 1º - Será considerado aprovado o aluno que lograr os conceitos A, B ou C.
A = Excelente = 9,0 a 10,0
B = Bom = 8,0 a 8,9
C = Regular = 7,0 a 7,9
D = Insuficiente = zero a 6,9

Às minhas filhas, Luísa e Luna.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra pela orientação e dedicação à minha pesquisa. Agradeço ao Prof. Dr. Niccolò Guicciardini por ter me recebido e coorientado, com valorosas sugestões e indicações de leitura.Agradeço ao Prof. Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez e ao Prof. Dr. Breno Hax Jr. pela prestimosa leitura de meu texto e pelos valiosos conselhos dados na minha qualificação. Agradeço aos professores Dr. Otávio Bueno, Dr. Awdry Feisser Miquelin, Dr. José Carlos Vasquez Cifuentes e Dr. Ronei Clécio Mocellin por comporem minha banca de defesa e gentilmente contribuírem para minha pesquisa. Agradeço ao grupo de Filosofia da Ciência da Universidade Federal do Paraná. Agradeço aos meus amigos e colegas da pós-gradução pelas belas discussões que tivemos. Agradeço ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Paraná. Agradeço à Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudos. Agradeço à minha família por acreditarem em mim, à Mariza, minha mãe, pelas constantes palavras de incentivo; ao Ricardo, meu irmão, pelo apoio e consideração; à Lilian, minha esposa, pela paciência e amor; à Luna e à Luísa, por darem mais sentido à minha vida.

Quando [as panelas de refinar] não estão em uso, são conservadas em limpeza notável. Às vezes são areadas com esteatita e areia até que fiquem brilhando como taças de prata. Alguns marinheiros velhos e cínicos costumam, durante as guardas noturnas, introduzir-se nelas, e encolhem-se lá dentro para dormir um pouco. Enquanto se dedicam à tarefa de areá-las – um homem em cada panela, ombro a ombro –, transmitem-se muitas comunicações, confidencialmente, por cima dos lábios de ferro. O lugar também é propício para a profunda meditação matemática. Na panela esquerda do ***Pequod****, enquanto fazia circular diligentemente a esteatita diante de mim, surpreendeu-me indiretamente o fato notável de que em Geometria todos os corpos que deslizam em cicloide, minha esteatita, por exemplo, descem de qualquer ponto exatamente no mesmo tempo.*

Herman Melville;
Moby Dick, cap. 96;
Tradução de Berenice Xavier.

Resumo

Estilo é um termo usado de muitas maneiras, mas às vezes sem um conceito apropriado. Alguns filósofos trataram este termo, considerando diferentes aspectos, como a duração do tempo, a ênfase geral ou local. Deve ser importante entender em que sentido um conceito de estilo poderia ser introduzido nas ciências e na matemática. Granger, Crombie e Hacking, cada um contribuiu para isso e também tentou levantar alguns aspectos filosóficos, estabelecendo conceitos para o estilo em domínios científicos e matemáticos. Outros dois autores, Chevalley e Bueno, também foram considerados, porque fizeram contribuições importantes para o conceito de estilo. Esta pesquisa tenta avaliar esses conceitos de estilo e seus limites na matemática. Após uma análise desses conceitos, um deles foi escolhido para ser aplicado em um caso histórico-matemático, o problema da braquistócrona. Porque muitos matemáticos como Leibniz, Johann e Jakob Bernoulli, Newton e outros, dedicaram suas teorias e estratégias para resolvê-lo. E isso oferece uma oportunidade para testar um conceito promissor de estilo para a matemática, como já foi feito para as ciências. Esse conceito de estilo estrito de raciocínio busca padrões de relações inferenciais na ciência (e também na matemática), em suas práticas, usados para selecionar, interpretar e apoiar evidências para certos resultados.

Palavras-chaves: Estilo. Matemática. Problema da braquistócrona.

Abstract

Style is a term used in many ways but sometimes without a proper concept. Some philosophers treated this term considering different aspect like time duration, and general or local emphasis. It should be important to understand in which sense a concept of style could be introduced to sciences and mathematics. Granger, Crombie and Hacking, each one, contributed to it, and also, they tried to raise some philosophical aspects, establishing concepts to style in scientific and mathematical domains. Another two authors, Chevalley and Bueno, were also consider, because they made important contributions to the concept of style. This research tries to evaluate these concepts of style and its limits in mathematics. After a scrutinity of these concepts, one of them was chosen to be applied in a mathematical historical case, the brachistochrone problem. Because many mathematicians like Leibniz, Johann and Jakob Bernoulli, Newton and others doveted their theories and stratagies to solve it. And it devellops an occasion to test a promissing concept of style to mathematics, like it was already did to sciences. This concept of narrow style of reasoning seeks for patterns of inferential relations in science (and also mathematics), in its practices, that are used to select, interpret, and support evidence for certain results.

Key-words: Style. Mathematics. Brachistochrone problem.

Sumário

APRESENTAÇÃO

O termo *estilo* é utilizado nos mais diversos domínios do conhecimento. *Estilo* é muitas vezes usado de forma desmedida, sem propriamente ter um conceito que o esclareça e o limite. É certo que se exige do *estilo* mais do que pode nos oferecer. E mesmo a matemática não está livre desse abuso do termo *estilo*. Com o objetivo de entender de que modo podemos usar o termo *estilo* na matemática, é que dediquei esta pesquisa. De modo geral, a *estilo* se atribui à extensão de tempo e de espaço. Há mais conceitos que se dedicam a um *estilo* de longa duração e de associação em grupos. Por exemplo, quando se diz, no âmbito da arte, acerca da expressionismo, de imediato se considera o final do séc. XIX e início do séc. XX, a deformação de imagem visual, o uso de cores vibrantes em traços livres, a expressão dramática da vida do Homem e também da sociedade; Anita Malfatti e Cândido Portinari foram grandes expoentes desta escola no Brasil. Agora, entre Malfatti e Portinari é possível estabelecer diferenças, ainda que façam parte da mesma escola, ou seja, que comutem de características semelhantes em suas obras: Portinari tinha grande sensibilidade aos temas sociais, Malfatti pintou muitas paisagens e retratos de pessoas marginalizadas. O que a noção de *estilo* tem que permite tamanha flexibilidade? Como seria um conceito de estilo aplicado às ciências ou à matemática? Haveria um estilo ou um conjunto de estilos a serem considerados?

Esta pesquisa voltou-se para questões fundamentais que um conceito de *estilo* pode levantar. Algumas destas questões podem ser aproveitadas pela filosofia, como: o que caracteriza um *estilo*? como *estilo* se estabiliza? como ocorrem mudanças entre *estilos*? *estilo* possui relevância epistemológica? O primeiro capítulo dedica-se a apresentar alguns conceitos de *estilo* voltados tanto à matemática, quanto às ciências. Porque, de certa forma, ambas possuem características que se repetem, como: a pretensão de ser universal e o potencial em ser abstrato (claro que a matemática com maior intensidade). O segundo capítulo volta-se para um caso da história da matemática, o problema da braquistócrona. Este capítulo trata exaustivamente a história da gênese deste problema e de como a ele muitos matemáticos despenderam seus tempos e energias para solucioná-lo. As diversas soluções que este problema recebeu suscitou a possibilidade de avaliá-las sob um conceito de *estilo*. No terceiro capítulo, avaliamos as soluções apresentadas no capítulo precedente, com o objetivo de verificar se cabe à matemática um conceito de estilo, e se creditar à matemática um *estilo*, qual seriam as consequências filosóficas (ou epistemológicas) disso?

A questão principal a qual esta pesquisa se dedica a responder é se há um estilo para a matemática. A consequência deste questionamento viria no entendimento da matemática em virtude de um conceito que tem potencial de explicar certos aspectos da racionalidade matemática, considerando-se sua prática e história.

1 ESTILO E PRÁTICA NA MATEMÁTICA

style is the answer to everything –
a fresh way to approach a dull or dangerous thing.
to do a dull thing with style
is preferable to doing a dangerous thing
without it.

Charles Bukowski,
Mockingbird Wish Me Luck

INTRODUÇÃO

Uma das dificuldades certamente relevantes ao se iniciar qualquer estudo acerca do conceito de estilo é sua diversidade (ou multiplicidade) de sentidos e, por consequência, sua extensão. A polissemia do *estilo* em seu uso ordinário, de fato, traz um desafio para a filosofia, o de dar clareza a esse termo. Veremos ao longo deste capítulo alguns conceitos para *estilo* e certas dificuldades que esses mesmos conceitos trazem. Mas antes preciso salientar dois aspectos, a princípio contrastantes, que uma noção de estilo reserva, de ser ora individualizante ora unificadora.

O estilo despertou interesse de estudiosos de muitas áreas, como nas artes, na linguística, nas ciências, nas matemáticas. Uma das primeiras noções para *estilo* que qualquer dicionário apresenta é: um modo particular de ser ou fazer algo. Certamente, estilo pode ser entendido enquanto um conceito individualizante, por exemplo, em uma obra de arte. Nesse contexto das artes, podemos perguntar: que características as obras de Johannes Vermeer reservam as quais as conformam e sobretudo indicam sua autoria? Há elementos presentes em suas obras que nos remetem à autoria (individualidade), mas inusitadamente revelam a pertinência a um movimento artístico, o barroco holandês. Este movimento se caracteriza por representar cenas do cotidiano, retratos de burgueses, paisagens, interiores de casas, natureza-morta. (Diferente de outros países do séc. XVII também influenciados pelo movimento barroco como Espanha, Itália e Portugal, católicos, a Holanda era protestante; mesmo assim, isso não impediu que cenas religiosas também fossem representadas por pintores holandeses, por exemplo: *A Sagrada Família* (1635) de Rembrandt van Rijn – em sua primeira fase.) Ademais, pintores neerlandeses barrocos exprimiam riqueza de detalhes, cores vivas, luz e sombra, apuro técnico e precisão. Para isso, era recorrente o uso de instrumentos ópticos, por exemplo: lentes e câmara escura, muito comuns nas obras de Vermeer.

Ao mesmo tempo que estilo carrega uma noção individualizante, reserva também uma noção unificadora. Do exemplo acima, apesar das obras de Rembrandt e Vermeer possuirem características próprias, ambos pintores fizeram parte da escola barroca holandesa, uma das expressões do movimento barroco do séc. XVII. Por um lado, o estilo sob a noção individual indica caracteres marcantes que apontam para um autor de uma obra de certo domínio; por outro lado, o estilo sob uma noção geral constitui uma unidade de certos trabalhos inseridos em um domínio específico. Apesar dos poucos detalhes históricos e técnicos das artes explorados em nosso exemplo, foi possível perceber um aspecto relevante do estilo: sua capacidade unificadora. Esta é uma característica do conceito de estilo a que filósofos se dedicaram.

1.1 NOÇÕES INICIAIS DE ESTILO E PRÁTICA

Vamos acompanhar um dos trabalhos de Buchdahl[1] acerca justamente do poder unificador do estilo. O seu objetivo é tratar o conceito de estilo nas ciências. Para nós, é também pertinente considerar conceitos de estilo nas ciências devido elas aspirarem universalidade, tal como as matemáticas[2]. A princípio, estilo aplicado às matemáticas sugere uma tensão, por ser muitas vezes entendido como individual, como vimos, em contraste com o fato das matemáticas produzirem conhecimentos universais. Vejamos como o autor concebe seu conceito de estilo para as ciências, depois consideraremos certas dificuldades que seu conceito apresenta.

Buchdahl parte de uma abordagem histórica para desenvolver um conceito de estilo, explora o papel da história das ciências para conceber um quadro, cujas metodologias – usadas por certos cientistas em um determinado tempo – introduzem um estilo amplamente praticado.

> O título de meu artigo, "Estilos de Pensamento Científico", pretende enfatizar a importância e a utilidade do conceito de estilo em alguma reflexão acerca da relevância da dimensão histórica da ciência, ambos com respeito ao conteúdo e ao quadro metodológico. Para destacar o estilo deseja-se chamar atenção, por um lado, a certas analogias em conexão com o conceito de estilo na história da arte e, por outro lado, enfatizar algumas ideias centrais que se tornaram proeminentes nos últimos anos na área da historiografia da ciência (Buchdahl, 1993, p. 149, minha tradução, grifos do original).

O autor enfatiza o conceito de estilo por meio de uma analogia entre a história da arte e a historiografia das ciências: a história da arte mostra aspectos acerca da criação e da representação do mundo por meio do ponto de vista do autor que a expressa em sua obra, tal expressão particular sensibiliza quem a admira. Apesar de objeções do uso da história da arte para se caracterizar as ciências, delas espera-se uma descrição do mundo – à semelhança da obra artística – um modo de se referir ao mundo *como ele é*. Os estudos em historiografia das ciências trouxeram uma perspectiva que aproxima aspectos da história da arte às ciências, como: a representação do mundo por um ponto de vista e a criatividade.

[1] Cf. Buchdahl, 1993, 149-167.

[2] Trato aqui as ciências e as matemáticas no plural porque, assim como Bueno, creio não ser possível estabelecer uma única ciência (ou matemática), uma vez que a prática denuncia uma desunidade em ambos os casos 2012, p. 663-664.

Ainda com respeito à história da arte e às ciências, abordagens históricas (como os paradigmas kuhnianos e os estilos de pensamento de Fleck)[3] podem render doravante resultados técnicos significativos, pois trata-se de uma questão de *ver coisas* de diferentes modos. *Coisas* assim vistas estendem-se a resultados de processos relacionais que operam em termos de alguma teoria. Teorias controladas por alguma metodologia que possui sua própria história. Essas metodologias registram diferentes visões sobre elementos considerados essenciais para construção de teorias científicas.

> Então, diferentes períodos científicos, com suas estruturas teóricas diferentes, incorporam "unidades estilísticas" que "direcionam e restringem a percepção". O paralelo entre artes, inclusive a literatura, com as áreas do conhecimento e [sic] ação será óbvio... A história da ciência, por essa leitura, não será mais um catálogo de erros e equívocos mas, ao invés disso, um indicativo de tantas visões paradigmáticas diferentes ou estilos de pensamento; uma visão da história que não precisa negar que algumas dessas "visões" podem produzir resultados técnicos mais potentes que outros.(Buchdahl, 1993, p. 151, minha tradução, grifos do original).

O autor enfatiza que uma abordagem paradigmática (ou estilística) de certo modo teoriza visões científicas. Nosso entendimento acerca de fatos é condicionado por teorias. Teorias, além de oferecerem explicações sistematizadas sobre fenômenos, pré-determinam nossa *visão de mundo*. Se assim posso dizer, teorias são instrumentos que não só regulam mas também constituem fatos (realiza-os), primeiramente. O autor, além disso, é bastante claro quanto aos resultados que certas visões podem produzir em relação a outras. Os estudos historiográficos trouxeram uma nova possibilidade de *visão* das ciências, tanto na contingência do entendimento de fatos do mundo como no *ser* desses próprios fatos. Em uma existência pseudorretroativa quanto à teoria e constitutiva quanto aos fatos (mais que visões no e) do mundo.

Buchdahl sugere mais que uma expectativa de uma teoria sistematizadora e explicativa de fatos do mundo, preconiza uma teoria cujo entendimento é contingente e cuja função também abarca a constituição e realização de fatos em uma intenção teórica pré-determinada. O autor mitiga a ontologia de objetos científicos e desloca a crença do *ser* das coisas tal qual se apercebe (i.e. uma abordagem realista) para uma espécie de apercepção do mundo condicionada a uma própria teoria. Poderia perguntar-lhe: de que modo ocorre essa transição?

Em certas épocas da história das ciências, segundo o autor, há estruturas teóricas as quais incorporam unidades de estilo que direcionam e restringem a percepção, de modo a impregnar os sentidos daqueles que estão sob a influência de uma ou outra teoria. (Teoria e estilo estão intrinsicamente interligados.) Assim, a teoria constitui fatos no mundo porque

[3] Cf. Kuhn, T. S. A estrutura das revoluções científicas. Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. 2011. e Vieira, L. A.; Condé, M. L. L. (org.) Ludwik Fleck: estilos de pensamento na ciência. Belo Horizonte: Fino Traço, 2012. 160 p. 2014.

direciona e restringe as percepções de quem a ela está submetido. Agora, como Buchdahl estabelece a relação entre essas estruturas teóricas (principalmente seus métodos) e um conceito de estilo?

> Metodologia tem uma história. Essa história é principalmente um registro de diferentes visões sobre aqueles elementos considerados como sendo essenciais para qualquer construção de teorias científicas. Aqui, um estudo da história, em questão, revela três tendências amplas, ou tipos de ênfases, para não dizer estilos, em termos de quais visões metodológicas foram formuladas. (Buchdahl, 1993, p. 152, minha tradução).

Ocorre a falta de uma definição precisa para um conceito de estilo que o autor acredita ser suprida por uma visão metodológica. Há a indicação de três tendências amplas ou ênfases. O próximo passo será portanto refinar com precisão implicações filosóficas a partir de metodologias. É por esse modo que o autor revela as estruturas teóricas que se expressam em unidades de estilo. Essas unidades dispõem de metodologias que impõem visões de mundo sobre elementos essenciais para a construção de teorias científicas. A história da metodologia é constituída por três visões metodológicas (ou como ele próprio diz, estilos). A historiografia das ciências não se lança a tal estudo, Buchdahl é quem propõe.

A história das ciências oferece-nos três abordagens metodológicas diferentes (ou estilos como prefere o autor), são elas: o empirismo, o racionalismo e o sistematismo, cujos representantes mais célebres da história das ciências são nesta ordem Francis Bacon, René Descartes e G. W. Leibniz. Para o autor, seria um equívoco considerar separadamente a ocorrência dessas metodologias (ou também chamadas de camadas), em qualquer dos estágios de desenvolvimento das ciências. Em outras palavras, sob essa abordagem histórica, revelam-se três visões metodológicas: empirismo, racionalismo e sistematismo, todas relacionáveis entre si, para criar um único quadro que suporte essas três camadas (ou estilos) em um esquema global de interação mútua e estruturada, defende Buchdahl. Para descrever de forma resumida, as condições que qualquer hipótese estruturada de estilo deve satisfazer são estas: (i) ter um suporte probatório evidente (componente probatório – determina por evidência, probabilidade); (ii) ser racionalmente coerente (componente explicativo – determina inteligibilidade, possiblidade) e (iii) fazer sentido (componente sistemático – determina unidade).

Vejamos um exemplo tratado pelo autor: Newton associou à gravitação universal tanto evidência empírica quanto demonstração matemática sistematizada, quando apresentou essa sua teoria. Apesar disso, ainda cultivava dúvidas acerca da ação à distância, que pudesse ela expressar implicitamente em sua teoria a realidade. No continente europeu, essa questão da ação à distância gerou de início uma rejeição de sua teoria. Evidência empírica e demonstração matemática sistematizada forçaram tentativas de se fornecer explicações conceituais alternativas para a noção de matéria. Explicações que provassem a possibilidade real da ação à distância, em harmonia com as componentes indutivas e sistemáticas da teoria de Newton. Uma tentativa bastante conhecida são os *Princípios Metafísicos da Ciência da Natureza* (1786) de Immanuel Kant. Buchdahl (1993, p. 154-156) defende que essa tríade de condições para um sistema metodológico precisa ser satisfeita enquanto uma estrutura mínima que oferece suporte a um estilo, como interação mútua estruturada de componentes metodológicos distribuídos em camadas. Kant argumenta que uma metodologia científica precisa sistematicamente ter coerência e fazer sentido, como possibilidade real, além de oferecer evidências indutivas suficientes. E essas três componentes são reconhecidas no exemplo da gravitação universal de Newton. Por fim, os conceitos básicos das ciências, vistos como material para uma ontologia do mundo (realismo interno[4]), seja por uma componente sistemática ou por uma componente explicativa, geram simultaneamente: (a) uma fenomenologia das coisas (relativizada em um processo histórico de teorização científica) e (b) um estilo particular (de uma certa época) que se expressa detalhadamente em suas formulações metodológicas.

Podemos levantar restrições acerca dessa proposta de trabalho apresentada por Buchdahl. A mais relevante é a falta de diferenciação entre uma visão de mundo direcionada e restringida por uma teoria-metodologia e um conceito de estilo. Parece-me que ambos se confundem a certa altura da argumentação. Se não se apresentam diferenciações evidentes, uma zona cinzenta se instaura entre visão teórica-metodológica e conceito de estilo. A partir disso, pouco pode-se extrair a favor de um ou de outro. O autor insiste na equivalência entre conceito de estilo e uma visão de mundo condicionada por uma *lente* teórica-metodológica a qual impõe ao sujeito uma concepção de fatos do mundo, impregnada de uma ontologia constituída por essa visão. Outro ponto pouco explorado pelo autor diz respeito ao aspecto advindo da analogia entre história da ciência e história da arte que é justamente a criatividade. Elemento pouco explorado que nos termos do Popper[5] não faz parte da justificação da empresa científica e sim da psicologia da ciência.

Buchdahl aborda dois elementos bastante importantes naquilo que desejo compreender de um conceito de estilo voltado a matemática, ou seja, a história da matemática e a produção matemática. Tenho a perspectiva de tratar a possibilidade de haver um conceito apropriado para estilo na matemática a partir de um problema específico da história da matemática: o problema da braquistócrona. Fica evidente a quem consultar o problema a ocorrência de diferentes teorias para solucioná-lo, como: o cálculo das diferenças de Leibniz, o método das fluxões de Newton e o cálculo variacional. Seria relevante perguntar-se pela ocorrência de uma unidade constituída que não dependesse de uma teoria em específico (como fez Buchdahl) e sim de um estilo. Em um primeiro contato com este caso histórico, apercebe-se uma diferença bastante grande entre as soluções que Leibniz e Newton apresentaram e outra diferença ainda

[4] "O realismo interno argumenta que a noção de fato, ou mais geralmente, de "um mundo, *simpliciter*" – em abstração de (o que Putnam chama) qualquer "teoria", ou seja, um mundo que seria "neutro em teoria" – é logicamente ociosa; pelo contrário, o conceito de "mundo" sempre deve ser tomado como "relativo à teoria" (Buchdahl, 1993, p.157, minha tradução, grifos do original).

[5] Cf. Popper, K. R. A lógica da pesquisa científica. Editora Cultrix, 2004.

maior entre as soluções destes matemáticos do séc. XVII com a solução a que se chega pelo cálculo variacional. Desse modo, a história da matemática guarda casos a serem estudados à luz de um conceito de estilo que não devem ser negligenciados.

Faltou ainda considerar a inferência enquanto outro elemento de um conceito de estilo na matemática. Minha primeira impressão é que a produção matemática (em termos de uma teoria, um método, certos objetos matemáticos e suas relações) permite uma compreensão ampla de uma prática matemática. É por isso que me direciono a partir de agora para o estudo da prática matemática, para melhor compreender este conceito, como ele pode ou não se relacionar com um conceito de estilo na matemática.

1.2 HISTÓRIA E PRÁTICA MATEMÁTICA

A história da matemática, de acordo com Mancosu, Jørgensen e Pedersen[6], logo no início do século XX, apresenta uma virada nas intenções de pesquisas em filosofia da matemática que orientam grande parte dos interesses acadêmicos a partir da segunda metade do século passado. Este fato explica parcialmente por que pesquisas de outro gênero que não apenas do vigente naquela época despertaram interesse da comunidade científica. Começou-se a dar importância para a investigação de elementos irredutíveis à estrutura lógica da matemática, antes muito valorizada, como: os elementos de visualização (diagramas, esquemas geométricos *etc.*) – como parte heurística de argumentos matemáticos. No início do séc. XX, os interesses em pesquisas sobre aspectos filosóficos da matemática estavam voltados a programas fundacionistas, que em suma reduziam-se a questões acerca da estrutura lógica, da justificação e da consistência da matemática. O programa de David Hilbert, que foi um dos mais proeminentes, herdou de Frege e Russell o projeto da formalização da matemática (ordinária), da adição de requisitos de uma prova, por meios epistemologicamente privilegiados de avaliar a consistência. Na segunda metade desse mesmo século, versões modificadas de projetos fundacionistas (como de Hilbert) ainda eram de grande interesse, mas filósofos e historiadores da matemática começavam a duvidar que esses programas exauriam os problemas filosóficos mais relevantes acerca da natureza da matemática. Houve tanto um enfrentamento aberto desses programas baseados na análise lógica da matemática, quanto uma chamada para a extensão do alcance de questões e problemas incipientes voltados para o conhecimento da matemática.

> A atenção voltou-se então à consideração do que matemáticos de fato fazem quando produzem matemática. Questões acerca de formação conceitual, conhecimento, heurística, mudanças no estilo de raciocinar, do papel de analogias e diagramas *etc.* tornaram-se questões de intenso interesse. Certos historiadores e filósofos concordaram que há mais no conhecimento da matemática que apenas um estudo de sua estrutura lógica, assim, deram muita ênfase à atividade matemática como uma atividade humana. Como objetos e conceitos matemáticos são gerados?

[6] Cf. Mancosu, Jørgensen, and Pedersen, 2005, p. 1-9.

> Como processo se vincula à justificação? Qual papel que imagens e diagramas desempenham na atividade matemática? Além dessas questões cognitivas, pode-se também investigar como a matemática interage com a ciência natural e como o pensamento matemático pode depender da cultura em que está inserido (Mancosu et al., 2005, p. 1, minha tradução).

O marco para essa virada nos interesses de pesquisa na filosofia da matemática foram os teoremas da incompletude de Kurt Gödel. O primeiro deles impôs uma dificuldade impossível de ser superada pelo programa fundacionista de Hilbert. Isso gerou, então, a crise fundacionista do séc. XX. O primeiro teorema da incompletude de Gödel[7], em linhas gerais, defende que um sistema axiomático consistente e suficientemente complexo para incluir a aritmética, sempre será incompleto, ou seja, sempre existirão verdades matemáticas sem a possibilidade de serem provadas, não importando o número de axiomas independentes previamente considerados[8].

Novas perspectivas foram avistadas para as pesquisas em história e filosofia da matemática, uma vez que programas fundacionistas clássicos, como o de David Hilbert, deveriam de ser abandonados frente a impossibilidade imposta pelo teorema de Gödel. A atenção voltou-se também para a prática matemática, ou seja, para aquilo que os matemáticos fazem quando produzem matemática. Esse novo ramo de pesquisa pretendeu lançar luz a elementos do fazer matemático antes não considerados, devido à vertente de pesquisa vigente na época e de grande influência na comunidade acadêmica. Logo questões como formação conceitual, entendimento, heurística, mudanças no estilo de raciocinar entre outras deram à comunidade científica de pesquisadores em filosofia da matemática alternativas. O mesmo movimento ocorreu na filosofia da ciência, com estudos que harmonizavam com a sociologia quando designavam um papel antes nunca feito à comunidade científica para a consolidação do conhecimento científico. (Estes estudos da sociologia da ciência foram de certa forma incitados por Thomas S. Kuhn na década de sessenta do século passado.)

O que se tem até o momento sobre a prática matemática, como foi dito logo acima, é aquilo que os matemáticos fazem quando produzem matemática. Isso é de fato bastante abrangente, mas indica no mínimo uma ação ou um fazer, isto é, a matemática é uma atividade e em seu próprio exercício conforma-se. Agora, uma questão a ser levantada é a seguinte: de que modo pode-se explorar tal fazer matemático? Há diversas formas, mas aqui sugiro avaliarmos uma posição controversa levantada por Azzouni que aproxima prática matemática a padrões sociais, explora condutas de conformidade social frente a provas matemáticas e a averigua socialmente a fixação e a alteração de práticas matemáticas.

---

[7] Cf. Goldstein, R.; Korytowski, I. Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Editora Companhia das Letras, 2008.

[8] "O primeiro Teorema da Incompletude de Gödel afirma que para qualquer sistema lógico consistente L que seja suficientemente complexo para poder exprimir a aritmética, existirão frases que são verdadeiras em qualquer interpretação de L, mas que não são demonstráveis em L. No caso em que L seja ω-consistente então existirão frases que nem elas nem suas negações serão demonstráveis em L, serão portanto frases indecidíveis." (D'Alkaine, 2006, p. 527)

A abordagem proposta por Azzouni[9] é muito diferente daquela de Mancosu et al. que acabamos de ver. Ela traz reflexões sobre a matemática por um ponto vista de uma prática social. Azzouni defende que existem dois aspectos que caracterizam os estudos empíricos sobre a indução social do consenso: primeiro, a evidência empírica da possibilidade de comportamentos alternativos e, segundo, o estudo de mecanismos sociais de fatores suficientemente potentes para excluir, em uma dada população, alternativas possíveis. Na prática matemática, não se constata uma variedade de comportamentos – faltam alternativas para o comportamento matemático. Azzouni defende que erros (fundamentais) na matemática podem levar a novas práticas. Essas novas práticas incitam fatores sociais que se impõem e se internalizam psicologicamente e, desse modo, estabelecem uniformidade de comportamento. Mas qual seria o comprometimento desses erros para a matemática? Segundo o autor, os padrões na matemática são robustos, não se abalam frente a erros, mesmo que persistam ou que se mantenham ocultos e deles se tenham consequências. Todavia, o erro provocará inexoravelmente uma mudança na prática. A inércia social não resiste a falsas consequências retiradas de erros fundamentais, elas serão inevitavelmente repudiadas.

Para justificar a persistência de erros na prática matemática, Azzouni levanta o que ele mesmo chamou de "fixação benigna da prática matemática". A fixação benigna da prática matemática apoia-se sobre dois aspectos: que na matemática há conformidade substancial e que não há ferramentas sociais para induzir tal conformidade. E é isso que causa estranheza na argumentação do autor. Ora, embora essa duplicidade, levantada pelo autor nas características que descrevem essa fixação inspire um descompasso justamente entre elas (conformidade social e a ausência de ferramentas sociais para induzir conformidade por fatores sociais), o fato é que a prática matemática se mantém no tempo. Mas as propriedades ao longo desse tempo têm suas razões alteradas, mesmo que lidem com objetos imutáveis. Não há necessariamente uma rigidez que impeça isso. Em suma, a matemática exibe um traço próprio, ao mesmo tempo que lida com propriedade de longo prazo, com objetos imutáveis e com a robustez da correção de erros, não há rigidez nas razões que a fundamentam.

Por fim, Azzouni resume suas considerações no seguinte: mesmo que se rejeite o apriorismo das verdades matemáticas, ainda haverá concordância nas provas matemáticas. Isso não pode ser resultado somente da apreensão de algoritmos. Neste contexto é que a fixação benigna da prática matemática se apresenta como alternativa para a centralidade de algoritmos. No entanto, suas razões mudam ao longo do tempo, bem como a própria matemática; frente a erros emergentes que favorecem uma mudança de prática (sob a consideração de que a matemática possui também padrões sociais).

Azzouni indica que a prática corresponderia a comportamentos e que esses comportamentos se expressariam em uma pluralidade de formas em seus campos sociais. O autor faz analogia com, por exemplo, os comportamentos sociais em torno das regras sociais de etiqueta.

---
9 Cf. Azzouni, 2006, p. 201–219.

Ele entende que a matemática também pode ser vista pelo prisma da prática social, mas, diferentemente das regras de etiqueta, não suporta comportamentos "matemáticos" desviantes. Ou seja, existe na matemática uma conformidade social nos comportamentos de matemáticos e essa conformidade não é induzida por ferramentas sociais. Azzouni lança, então, o conceito de fixação benigna da prática matemática no tempo. Esse conceito aponta para o papel de erros (fundamentais) na matemática, que erros induzem a mudanças nas práticas matemáticas na tentativa de corrigir de forma robusta esses erros. Portanto, ocorre na matemática uma plasticidade em suas práticas impulsionadas por erros persistentes em algoritmos matemáticos. Azzouni não nega à matemática o papel básico de provas (ou demonstrações) em um argumento matemático consistente. Provas são fundamentais para a matemática! Mas a matemática também expressa um fator social na fixação benigna de comportamentos ou padrões sociais, considerados por ele como práticas sociais padronizadas na produção do conhecimento matemático.

Seria importante levantar duas dificuldades que precisam ser superadas pelo argumento de Azzouni. Primeiro, o autor não deixa claro a relação que faz entre prática social enquanto comportamento e algoritmos na matemática. Qual a prevalência de um sobre o outro? Por um momento, parece que surge uma prevalência de comportamentos sociais sobre algoritmos matemáticos. Mas esse cenário muito comprometedor para a matemática é superado pela fixação benigna da prática matemática, em que algoritmos matemáticos prevalecem e induzem uma uniformidade de comportamentos e práticas. Ora o que são comportamentos sociais na matemática? Aqui reside a segunda dificuldade, pois parece estar este comportamento fundamentado em aspectos psicológicos dos praticantes da matemática, frente aos algoritmos matemáticos. Esse convencimento dos praticantes da matemática advém das provas matemáticas? Isto não fica claro e, ademais, levanta uma suspeita de um certo subjetivismo na matemática que precisa ser evitado.

Com isso, Azzouni arrisca-se a introduzir um elemento de subjetivismo na matemática, em que a prevalência na objetividade, rigor, certeza e universalidade são a regra e não a excessão – as provas (ou demonstrações) matemáticas são o que conduzem tais característica tão típicas da matemática. Qual a relevância epistemológica de explicações fundamentadas em teorias da prática social para a matemática? Essa é uma questão que o autor deixa em aberto. O autor levanta a importância que deve ser dada a práticas na matemática, mas se compromete quando deposita sobre a prática matemática comportamentos sociais com base em um convencimento psicológico expresso em uma conformidade de comportamentos na matemática. Além disso, falta considerar a relevância epistemológica disso[10].

Por isso, recomendo a noção de Mancosu et al. acerca da prática matemática, mesmo que seja ampla, resumida naquilo que os matemáticos fazem, ou seja, no fazer matemático.

[10] Cf. Bohman, J. Do Practices Explain Anything? Turner's Critique of the Theory of Social Practices. *History and Theory*, v. 36, n. 1, pp. , 95–107, 1997.

Essa noção conduz propriamente à produção matemática e não ao subjetivismo; chama atenção a recursos matemáticos diversos, como diagramas, entendimento matemático, heurística e sobretudo mudança nos estilos de raciocínio na matemática – fundamental para esta tese. Apresentei duas propostas de conceituação, uma para o estilo e outra para a prática matemática. O início de pesquisas como essas, tal como indicado acima, foi a crise do fundacionismo. É evidente tanto nas reflexões de Buchdahl, Mancosu et al. e Azzouni a perspectiva não-fundacionista para a filosofia da matemática. No primeiro, vimos um estudo da história das metodologias como uma via para a concepção de um conceito de estilo estruturante para as ciências. Nos outros dois, apreciamos um estudo acerca da relevância de práticas na matemática. Mas tanto estilo quanto prática na matemática não se encerram nessas duas abordagens. Por isso, faz-se importante um estudo mais detalhado para ambos. No caso do conceito de estilo, serão consultados, em um primeiro momento, os trabalhos de Granger, Crombie e Hacking. Quanto a prática, por estar mais interessado nos aspectos, diria, mais internos à matemática (como método, diagramas, conceitos e justificação, por exemplo) e não externos (como foi explorado por Azzouni), é que me voltarei aos estudos de Mancosu e Tappenden.

1.3 CONCEITOS DE ESTILO

Tratar um conceito sobre estilo não é uma tarefa tão simples assim. Considera-se, do uso rotineiro, que estilo seja um modo particular de ser. É preciso advertir que esse significado bastante amplo não possui poder explicativo que a filosofia demanda. Principalmente, no que se refere a uma unidade mínima, voltada para nosso interesse, à matemática. Na seção anterior, acompanhamos o trabalho de Buchdahl em que nele verificou-se a construção de um conceito de estilo, o qual o aproxima de uma estrutura teórica-metodológica. De certo modo, é compreensível a estratégia do autor, porque método dirige uma maneira de agir, de fazer de acordo com determinada ordem e de construir por princípios uma certa teoria. Mas se estilo é tal como uma teoria e um método, então o propósito inicial se dilui e a construção de uma noção de estilo propriamente dita não se realiza.

Buchdahl serviu-nos como uma introdução ao tema estilo. Ele nos mostrou um cuidado que se deve ter ao se tratar um conceito de estilo, que é evitar fazê-lo por meio de uma sinonímia. Se estilo for método ou teoria, então, não há razão para se buscar um conceito de estilo; porque método e teoria se bastam em seus próprios conceitos, não há necessidade de incluir uma sinonímia com respeito a estilo que não possui ela própria um aspecto epistemológico a ser relevado e um poder explicativo esperado. Assim, é preciso buscar por outros conceitos de estilo mais amplos que métodos ou teorias e que produzam sobre estes unidades (explicativas e epistemologicamente relevantes).

Mancosu[11], por sua vez, adverte-nos acerca de como tratar um conceito de estilo (na matemática). Tem-se duas vias a serem seguidas por quem deseja caracterizá-lo epistemologicamente: ou enquanto elementos estilísticos no discurso matemático, vazios de valor cognitivo (meros adornos) ou como um conceito diretamente ligado a um conteúdo cognitivo. Se, de acordo com o primeiro caso, elementos estilísticos no discurso (matemático) forem apenas adorno, então o valor cognitivo deles é reduzido a uma mera expressão subjetiva sem significado epistemológico. O segundo caso sustenta uma posição mais audaciosa pois dá aos elementos estilísticos do discurso (matemático) valor cognitivo, significado epistemológico. É por essa via que desejo seguir e, para isso, escolhi construir minha análise com base nas propostas estabelecidas por Granger, Crombie e Hacking.

1.3.1 Conceito de estilo para Gilles-Gaston Granger

Granger[12] propôs-se a buscar um conceito de estilo com bases na epistemologia. O autor parte de uma relação entre forma e conteúdo. Sobre essa relação, Granger fundamenta seu conceito de estilo enquanto um processo ou, como ele próprio considera, enquanto uma busca da gênese e dos aspectos históricos de uma determinada obra científica ou matemática. O autor se lança a uma análise estática e estrutural de obras históricas. Granger usa conceitos de Kant em sua busca de um conceito de estilo, para debruçar-se em uma filosofia da prática. A análise estática grangeriana considera essas obras como pontos de referência históricos.

Granger estipula que prática é a atividade considerada sob um contexto complexo, em circunstâncias históricas e principalmente sociais que lhe dão significado e valor, em um mundo vivido e experienciado. O trabalho é uma das estruturas da prática; é em particular a estrutura constitutiva. Os produtos desse trabalho, quando não são propriamente bens fungíveis, são bens de produção. O autor procura determinar de modo geral uma proposta que designe social e historicamente a atividade prática em uma reflexão epistemológica acerca dos princípios que governam dialeticamente a relação entre conteúdos e formas. Há dois casos associados às relações entre forma e conteúdo, distintos por um acento que pode recair ora sobre o primeiro, ora sobre o segundo. Ou se acentua a forma, em maior grau nos trabalhos do matemático, em menor grau, nos trabalhos de um pensador. Ou se acentua o conteúdo prático, em maior grau nos trabalhos de operários, em menor grau, nos trabalhos de técnicos. Ambos, forma e conteúdo geralmente coexistem pois o trabalho se concebe ao mesmo tempo como estruturação e aplicação – pode ocorrer de um caso se sobrepor a outro. De fato, forma e conteúdo são complementares em dois movimentos para a determinação prática[13] do individual.

Na ciência, o conhecimento, processo de conceituação, sofre uma redução da experiência individual ou momento vivido concretamente em certa situação; trata-se de um desafio para a filosofia recuperá-lo. Nas artes, a experiência individual vivida, ao contrário das ciências, é de fácil recuperação. O mistério da criação estética, constata Granger, ao fim e ao cabo, é a

[11] Cf. Mancosu, 2010.

[12] Cf. Granger, 1974 e Granger, 1995.

[13] O autor considera determinação prática um pleonasmo pois "o individual somente pode ser apreendido numa atividade prática e a crença na possibilidade de seu conhecimento teórico poderia ser designada como a figura moderna da ilusão transcendental." (Granger, 1974, p. 16)

tendência de sua obra revelar não apenas uma *universalidade sem conceitos*, mas também uma *individualidade conceitualizada*. No ato estético, ao se contemplar uma obra, ela se manifesta como uma via autêntica para se ultrapassar simultaneamente a prática imediata e a redução científica na apreensão do individual.

> Não é, contudo, a obra de arte que tomaremos como tema, a não ser episodicamente, mas a obra científica. No entanto, o ponto de vista que assumimos é exatamente aquele que se crê convir de ordinário ao estudo das obras de arte. Nós nos propomos, com efeito, tentar uma espécie de filosofia do *estilo*, definida como *modalidade de integração do individual num processo concreto que é trabalho* e que se apresenta necessariamente em todas as formas da prática (Granger, 1974, p. 17, grifos do original).

No que tange a ciência, segundo o autor, o individual só é definido em oposição à estrutura. Aquilo que é vivido, em sua prática e em seus elementos, é incorporado ao conteúdo formal de uma mensagem. É inevitável que o processo de incorporação do vivido, experienciado, acompanhe redundâncias ou sobredeterminações. Alguns aspectos dessa mensagem não são submetidos à estruturação, fogem da rede linguística. Por exemplo, em uma mensagem falada (ou parte dela), seu locutor a pronuncia com uma diversidade de traços que a individuam, sobrecarregam-na de elementos adicionais não pertinentes à linguagem.

Ocorre estilo na ciência quando essas redundâncias ou sobredeterminações não se apresentam casual ou aleatoriamente. A constância prolongada delas na prática toma um sentido operatório dentro do processo de conhecimento de uma ciência em sua precedência individual. Se as redundâncias variam de acordo com o nível de estruturação, então a individuação não se constitui absolutamente e isso, de acordo com Granger, é o que possibilita uma análise filosófica do estilo, porque o conteúdo da experiência vivida, interpretado pela ciência, não é pleno, irredutível e informe. Estilo não pode ser um simples modo de expressão, um simples simbolismo. É pois uma categoria do pensamento formal puro, e diversos trabalhos em estética, reforça o autor, levam a crer nisso. Estilo, nesse sentido, é como

> uso do simbolismo; o que diz respeito não somente à própria textura deste último, mas também à sua relação com uma experiência que o envolve. Em outros termos, parece-nos que um simbolismo, tomado estritamente em si mesmo, não tem, propriamente falando, estilo e que se poderia enunciar uma espécie de princípio de relatividade dos sistemas simbólicos; os componentes de estilo de um sistema variam com o referencial, o ponto de aplicação de seu simbolismo (Granger, 1974, p. 19).

Por exemplo, a escrita considerada enquanto transcrição de uma língua. Só há de fato estilo se se considerarem as relações entre representante e representado, entre a escrita e a língua, respectivamente, fonológica ou fonética. Mas se espera uma manifestação, como a transcrição na preferência de uma estrutura em relação à outra. Isso já é uma tomada de posição estilística. A individuação com relação à língua ocorre nas redundâncias que a escrita admite.

O autor pretende, em um só movimento, transpor a ideia de um estilo enquanto individualização de certa obra, por exemplo, artística, para um outro conceito, de estilística geral. Para isso, primeiro, propõe que "toda prática, com efeito, comporta um estilo e o estilo é inseparável de uma prática." [14] Uma expressão que indica a concretude que o autor deseja impor à prática, embora não se reduza à apenas isso, são os *fatos de estilo*. Uma significação, supõe o autor, é o resultado da colocação de um fato, em perspectiva, no interior de uma totalidade vivida por uma consciência. Fatos de estilo nascem do contato de estruturas (enquanto projetos) e de uma situação vivida (como dado de um ato possível). Eles são inseparáveis, por natureza, de uma significação (pode-se dizer de fatos significativos como um fazer propriamente humano).

As ciências constróem estruturas de objetos e a reflexão filosófica interpreta significações. O estudo de estilo, defende Granger, apresenta-se como uma disciplina filosófica, como parte de uma meditação sobre as obras humanas. Agora, noção de estilística geral, poderia constituir um problema? Mesmo que se aceite uma estilística da obra de arte, da obra científica etc., o autor, pela sua própria tendência, acredita em uma analogia entre a estética transcendental e a estilística geral, mas adverte e esclarece que seu uso não é o mesmo de Kant.

> A palavra [transcendental] será empregada nesta obra, não exatamente em sua acepção kantiana... denominamos transcendental toda a condição formal de conhecimento que determina *a priori* um tipo de objetividade. Dizemos: "formal", para afastar toda determinação causante, tal como, por exemplo, a que faz depender diretamente uma categoria objetiva da natureza de um instrumento de observação ou, ainda, de um acontecimento da história humana. Dizemos: *a priori* para sublinhar o caráter constitutivo da determinação transcendental, que não desempenha, nos processos de conhecimento, um papel de um produto da experiência, mas, ao contrário, de um plano de organização, ou ainda... de um projeto de objetivação. Mas o "transcendental" não se identifica com uma estruturação *ne varietur* da experiência, conforme às normas íntimas de uma subjetividade. Pode-se bem, se se quiser, pretender considerá-lo, num momento dado do desenvolvimento da história humana, como o sistema das formas segundo as quais o sujeito constitui seu objeto: mas se com efeito só pode funcionar pondo-se – implicitamente pelo menos – como legislador da objetivação, não deixa de ser precário e é o resultado de uma gênese cujos *rastros* a história das Ciências e da Cultura em geral nos revela e que a epistemologia se esforça por restaurar (Granger, 1974, p. 20, nota 2, grifos do original).

Tem-se aqui então a justificativa de Granger para seu uso, um tanto quanto particular,

[14] Cf. Granger, 1974, p. 20.

dos termos consagrados por Kant. Para o autor, em resumo, *transcendental*, ou sistema de formas, é a condição, não-causal, do conhecimento em um projeto de objetivação constitutivo em que o sujeito é o seu agente. Apesar da inspiração kantiana, há de se ter cuidado em não confundir o uso que o autor faz daquele de Kant. Não se trata do sensível ou mero resultado passivo da percepção; trata-se da análise das condições *a priori* do trabalho, na dialética das formas e conteúdos. Muito diferente, portanto, da passividade imposta pelas formas da sensibilidade de Kant aos dados brutos do mundo apercebidos pelo aparato sensível. Esse é o exemplo que Granger fez questão de apresentar para ressaltar uma das características mais marcantes de seu modelo de inspiração kantiana.

Passemos, agora, a considerar a tarefa da estilística geral: procurar condições gerais da inserção de estruturas em uma prática individuada. Ou seja, recuperar o conteúdo do que se vive por uma consciência que age sobre o seu contexto. Para executar tal tarefa, é preciso partir de obras (sejam artísticas, científicas, políticas etc.), aproximadamente *perfeitas de uma atividade laboriosa*, para dar a elas forma, sentido e unidade (para além da passividade kantiana), originadas das mãos de um sujeito histórico cujo enfoque estaria nas condições mais gerais de sua prática. Granger impõe-se, então, o objetivo de empregar uma estilística da prática matemática. Para isso, antes, o autor passa pela comparação entre uma estilística matemática e uma científica.

Pois bem, uma grande dificuldade ao se antecipar uma *visão* estilística de matérias como a ciência ou a matemática é que ambas em suas práticas parecem pôr à parte o individual, bem como, o estilo no sentido individualizante.

> Nada mais impessoal, menos individuado do que a Ciência. Não nos cansamos de repetir que ela só visa ao geral. Aparentemente, o sucesso universal da empresa científica seria até mesmo a morte do estilo... a Ciência é de fato, como tentamos mostrar, "construção de modelos abstratos, coerentes e eficazes, dos fenômenos", e o objeto que ela constitui e descreve é essencialmente estrutural (Granger, 1974, p. 22, grifos do original).

Granger parte do pressuposto que não existe ciência puramente especulativa e que todo o processo de estruturação está associado a uma atividade prática; já de início o individual aparece necessariamente como o lado *negativo* das estruturas. No entanto, o individual permanece no horizonte da ciência. A escolha de uma estrutura em detrimento de outra resulta na construção de um modelo de certo fenômeno, impregnado de negatividade ou indeterminação ou ainda sobredeterminação (finalmente, redundância). Ao historiador consciencioso que se recusa a ignorar *projetos abortados*, *desvaneios*, *heresias do pensamento científico*, aparece evidente uma multiplicidade de estruturas possíveis. E isso deve ser levado a sério para se refletir acerca de estilo. Quanto à noção de unidade estrutural de um sistema, tanto uma construção da matemática pura quanto da física tendem a apresentarem-se como um conjunto unificado, cujos elementos são assimilados no sistema, mesmo que tomados de empréstimo. Esse é o primeiro tipo de investigação para uma análise estilística da prática científica. Os outros dois tipos, para o autor, podem ser assim resumidos: aquele que diz respeito a uma *caracteorologia científica*, a qual objetiva um estudo dos componentes psicológicos relevantes para a prática científica (e matemática, acrescento) e aquele outro tipo de investigação o qual concerne a *contingência* da criação científica (e matemática, talvez), localizada no espaço e no tempo [15].

Os esforços do autor centram-se apenas no primeiro tipo de investigação para uma análise estilística da prática científica. Efetivamente, Granger dedica-se apenas ao primeiro tipo de investigação, ou seja, a procura de um estilo, desenvolvido em um prática (vivida por um sujeito histórico) estabelecido em uma estilística geral a partir de fatos de estilos que se apresentam em um conjunto unificado tanto na ciência física quanto na matemática pura. Os demais tipos de investigação são deixados de lado pelo autor.

O primeiro movimento foi justo na direção da matemática, pelo seu domínio mais abstrato da criação intelectual. Para encontrar uma noção de estilo na matemática, o autor retoma o contexto de sua primeira definição para estilo, qual seja, enquanto "modalidade de integração do individual num processo concreto que é trabalho." [16] No caso exemplar do trabalho de um geômetra, ao autor parece evidenciar um paradoxo da individuação. Na matemática, em particular, a estrutura construída apesar de vigorar na abstração, não deixa de ser extraída de uma *experiência* em níveis diversos de abstração, ou seja, uma experiência matemática. A consequência disso é que não poderia haver uma caracterização universal de um plano de abstração particular para a estruturação matemática.

> Cada episódio, coletivo ou individual, do trabalho matemático se estabelece num nível mais ou menos adiantado de abstração. Mas esta abstração é, antes de tudo, vivida como experiência, em parte herdada, em parte conquistada pelo gênio individual. É desta experiência que virão os elementos "intuitivos", isto é, aqueles que o trabalho assume e recorta como dados, opondo-os – mais ou menos expressamente – às estruturas que suscita (Granger, 1974, p. 29-30, grifos do original).

O trabalho mobiliza *forma* e *conteúdo* ao mesmo tempo no interior de uma certa experiência, sendo que ela mesma já deve estar estruturada, contudo em nível inferior de abstração. Os fatos de estilo são para matemática, nesse sentido, em essência, como modalidades a serem colocadas em oposição a essa abstração. Uma estrutura surge, então, ao ser colocada adequadamente por várias possibilidades que se apresentam no interior da experiência matemática do criador. Os elementos que escapam à grade constituída são redundantes, não são

[15] Cf. Granger, 1974, p. 23-25 e Mancosu, 2010.
[16] Cf. Granger, 1974, p. 29.

vistos enquanto portadores de um sentido e ainda não são representados de outro modo. Eles constituem um certo *resíduo não-explorado*, cuja percepção não depende unicamente da própria estrutura, ou porque um autor pôde apresentar na experiência matemática diversas maneiras sucessivas de constituir-se uma e mesma estrutura, ou porque vários autores apresentam cada qual uma variante da composição de uma estrutura idêntica em experiências respectivas. "O estilo aparece-nos aqui, de um lado, como uma certa maneira de introduzir os conceitos de uma teoria, de encadeá-la, de unificá-los; de outro lado, como uma certa maneira de delimitar a carga intuitiva na determinação desses conceitos." [17]

O autor busca um exemplo que por fim tem o papel de esclarecer diferentes maneiras de se introduzir um conceito e, mais importante, de como circunscrevê-lo a um fato de estilo de dentro de uma estrutura relacional posta. Granger[18] apresenta três modos de introduzir números complexos. Cada qual conta com propriedades as quais caracterizam a estrutura algébrica. Um deles o faz por representação trigonométrica e usa direções e ângulos. Um outro introduz os números complexos como operadores aplicados a vetores em dois casos: primeiro, defini-se um número complexo como um par de números reais, assim, as propriedades da adição são imediatas; segundo, ao contrário, as propriedades multiplicativas é que são capturadas. Os outros dois modos introduzem os complexos por meio de matrizes quadradas regulares e por meio de um sistema de polinômios da forma x *módulo* $x^2 + 1$.

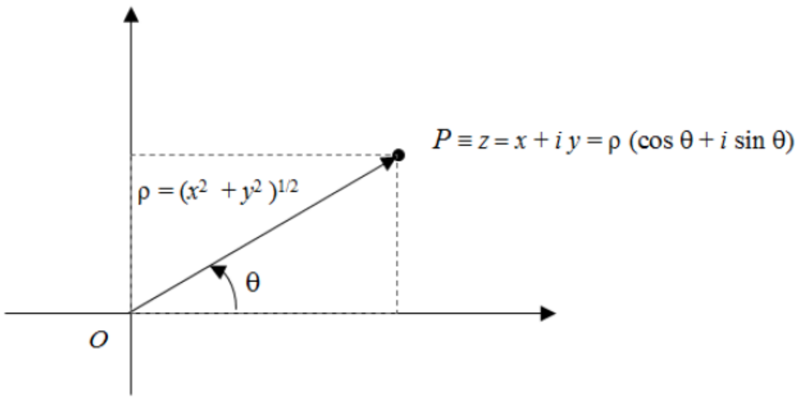

Figura 1 – Plano complexo para a forma polar; fonte: *http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki /images/1/16/Img-c23-SN.png* acessado em 20-mar-2017.

De modo mais detalhado, diz o autor que a noção de números complexos pode ser introduzida de diferentes maneiras. Contudo, as propriedades que a caracterizam em sua estrutura algébrica são conservadas[19]. Tem-se ao todo três representações para o número complexo: (i) a forma trigonométrica composta respectivamente por um módulo e seu argumento, $Z = \rho\angle\theta$, cuja imagem (vide figura 1) sugere um operador composto por *dilatação* e *rotação* aplicado a vetores, isso dispõe uma carga intuitiva da imagem geométrica direcionada ou à lei das multiplicações dos complexos ou à forma das coordenadas polares $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e sua

[17] Cf. Granger, 1974, p. 30.
[18] Cf. Mancosu, 2010.

transformação para as coordenadas cartesianas $Z = x + iy$, que imediatamente remetem a propriedades aditivas dos números complexos; (ii) a forma de uma matriz quadrada regular,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

em que x e y são reais quaisquer, tem sua álgebra isomorfa aos complexos $Z = x + iy$. Essa abordagem matemática revela propriedades imediatas de complexos. Uma nova intuição operatória se apresenta por meio do sistema matricial. Por exemplo $i^2 = -1$, em um primeiro momento, essa identidade bastante própria dos complexos parece desconcertante, mas com o cálculo matricial a estranheza se desfaz por meio dessa identidade trivial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

(iii) a última forma (mais abstrata que as anteriores) apresentada pelo autor é a introdução dos números complexos por intermédio da representação de todos os casos possíveis de raízes de uma equação algébrica, uma vez que os números complexos podem ser considerados um corpo de extensão dos reais que possui raiz para $x^2 + 1 = 0$. É demonstrável que esse corpo é isomorfo em relação ao sistema de polinômios em x *módulo* $x^2 + 1$, pois o zero do corpo dos complexos corresponde aos polinômios divisíveis por $x^2 + 1$ e os complexos $Z = ai + b$ correspondem aos polinômios da forma $P(x).(x^2 + 1) + (ax + b)$.

> Estas diferentes maneiras de se aprender um conceito, de integrá-lo num sistema operatório e de associar-lhe implicações intuitivas – cujo alcance é necessário então limitar exatamente – constituem o que denominamos de fatos de estilo. É evidente que o conteúdo estrutural da noção não é afetado aqui, que o conceito enquanto objeto matemático subsiste identicamente através desses efeitos de estilo. No entanto, nem sempre é assim e encontraremos posições estilísticas que ordenam verdadeiras variações conceituais. Em todo caso, o que sempre se modifica é a orientação do conceito para tal ou tal uso, tal ou tal extensão. O estilo desempenha, pois, um papel talvez essencial, ao mesmo tempo, numa dialética do desenvolvimento interno da Matemática e na de suas relações com mundos de objetos mais concretos (Granger, 1974, p. 31-32).

Granger esclarece então o que são *fatos de estilo* e a relação deles com estilos, conceitos, objetos. Sobretudo, o autor, por um lado, defende a subsistência desses mesmos objetos por meio de efeitos de estilos, por outro lado, reconhece que posições estilísticas coordenam variações conceituais sob a influência de certa prática. Quanto à matemática, o autor considera que sua filosofia é de início a história de conceitos, seja no plano de uma evolução tecnológica do instrumental matemático, seja no plano de uma evolução das categorias constitutivas do

[19] Cf. Granger, 1974, p. 30–31.

objeto (estreitamente ligada à história). A filosofia da matemática é também um comentário da sistematicidade das teorias, de modo que a epistemologia acaba por ser associada à lógica. Agora, e o estilo na matemática? Evidencia-se a criação e o uso de estruturas, na relação entre forma e conteúdo (seja oculta, seja explícita) a que se condicionam, limita-se a instituir uma estrutura e seu uso; tal análise aplica-se a todos os momentos da história do pensamento matemático, indispensável a inúmeros casos em que uma mesma estrutura aparece de vários modos, segundo diferentes estilos, introduzida e utilizada. Por exemplo, no cálculo das fluxões newtoniano e na análise infinitesimal leibniziana. Trata-se de um ponto de vista estilístico que, em todos os casos, pode oferecer à filosofia da matemática o que Granger determinou como: a dimensão racional concreta, a dimensão de um trabalho essencial – que a análise dos sistemas negligencia e que a análise histórica apenas pode dar uma visão nublada e muitas vezes enganadora.

CRÍTICAS AO CONCEITO DE GILLES-GASTON GRANGER

A principal relação apresentada por Granger é entre forma e conteúdo. Essa relação é o ponto de partida para o seu conceito de estilo enquanto um processo de trabalho. Assim, o autor situa um sujeito histórico produtor de um certo trabalho (intelectual), trabalho esse que se apresenta em uma certa prática (social e histórica). Sua proposta é de uma reflexão epistemológica sobre os princípios que governam as relações dialéticas entre forma e conteúdo. Granger centra-se na análise estilística da matemática, da linguística e da ciência. Mas o que me interessa aqui é principalmente em primeiro lugar o estilo matemático e em segundo, em função das semelhanças com o primeiro, o estilo da ciência. E logo de início verifica-se que em ambos o individual está em oposição à estrutura. Mais que isso, apercebe-se que é a forma que se evidencia, e a individualidade não se aniquila e sim se enfraquece, e o conteúdo empírico-prático subsiste mesmo que a forma esteja em grande evidência. Na matemática isso ocorre com mais força que na ciência. Apesar dessa oposição entre o formal e o individual, o universal e o particular, na matemática e na ciência, a vivência prática e seus elementos são incorporados à forma sob a condição de redundância (ou sobredeterminação).

As redundâncias para Granger quando não-casuais ou não-aleatórias alertam para a ocorrência de um estilo, principalmente na constância prolongada dessas redundâncias na prática científica ou matemática, desse modo tomam um sentido operatório no interior do processo de conhecimento em sua prevalência individual. No entanto, se tais redundâncias variam de acordo com o nível de estruturação, então elas não se constituirão absolutamente. Isso é, pois, o que possibilita uma análise filosófica do estilo, o conteúdo da experiência vivida interpretado pela ciência ou pela matemática não é pleno, irredutível e informe. O estilo não se priva do uso de símbolos, relaciona-os à experiência que os envolve.

O autor procura por uma estilística geral ao invés de categorizar estilos para ciência ou para matemática. Logo, ele estabelece que toda prática comporta um estilo inseparável e a concretude da relação biunívoca entre prática e estilo é apresentada por um fato de estilo, cuja origem advém do contato entre estrutura e situação vivida, inseparáveis de uma significação. Granger tem como inspiração à estilística geral a estética transcendental kantiana. Mas adverte que seu uso de *transcendental* refere-se a toda condição formal do conhecimento que determina *a priori* um tipo de objetividade. Formal porque se afasta de uma determinação de causa e *a priori* enquanto carácter constitutivo da determinação transcendental como um plano de organização ou um projeto de objetivação. A estilística geral tem como tarefa procurar por condições gerais de inserção de estruturas em uma prática individuada. Para executá-la é preciso partir de obras – originadas de sujeitos históricos – para dar-lhas forma, cujo enfoque estaria nas condições mais gerais de prática. O individual na ciência e na matemática aparece mitigado, negativa e intrinsicamente ligado à forma.

A obra científica provoca forma e conteúdo no interior de uma experiência vivida, em que ela própria já possui uma forma em um nível ainda não-abstrato. Para a matemática, os fatos de estilo são em essência como uma modalidade a ser colocada em oposição a essa abstração. No interior da prática matemática de um criador, surge uma forma a ser colocada adequadamente por diversas possibilidades. As redundâncias na matemática são elementos que escapam a uma grade constituída, não são vistos como portadores de sentido, são como um resíduo não-explorado. Um autor pode representar na experiência matemática diversas maneiras sucessivas de constituir uma mesma forma ou diversos autores apresentam variantes da composição de uma forma idêntica em experiências matemáticas respectivas. Para Granger, o estilo parece, de um lado, uma maneira de introduzir conceitos de uma teoria, encadeá-los e unificá-los e, de outro lado, uma forma de delimitar a carga intuitiva na determinação desses mesmos conceitos.

O autor espera, na apresentação de exemplos de estilo na matemática, esclarecer o que parece ser uma das grandes dificuldades em sua teoria sobre estilo: definir o que são para ele "forma" e "conteúdo". Isso permite uma gama diversa de interpretações para ambos os termos, porque o autor no final das contas acaba por apoiar-se nas noções de seus leitores, as quais podem ser diferentes das dele. O autor parece oferecer noções de "forma" e "conteúdo" integradas em seus exemplos, como: os estilos euclidiano, cartesiano, arguesiano e vetorial. Para agravar esse problema, Granger usa termos como "estrutura" e "grade" os quais em alguns casos podem se confundir com "forma", atrapalhando ainda mais a compreensão de seus termos básicos.

Ao mesmo tempo que o autor dedica-se à diferenciação e mesmo definição de "transcendental", para deixar claro que seu uso é distinto do de Kant, ele peca ao não definir ou esclarecer minimamente o que são "forma", "estrutura" e "grade". Mas o principal é que em se tratando de geometria, geometria analítica, geometria projetiva e vetores, um elemento matemático é ao mesmo tempo forma e objeto (por exemplo, x é o segmento de reta desconhecido AB de um diagrama geométrico qualquer; logo o objeto geométrico é ele próprio uma forma linear limitada pelos extremos A e B). Assim sendo, de que maneira a "forma" e o "objeto" a que Granger se refere não se confundem e mesmo se mesclam em casos como esses (que são justamente os exemplos da matemática usados pelo autor)? Meu ponto é que a falta de clareza de significados precisos dos termos que o autor usa dificulta a compreensão da filosofia do estilo grangeriana. Trarei doravante de aspectos que envolvem seu conceito de estilo e a linguagem.

Primeiro, Granger não considera na matemática estilo e teoria uma e mesma coisa. Ambos caminham juntos, apesar do estilo perpassá-la, ou melhor, uma teoria matemática se expressa por uma linguagem matemática (formal ou natural) e um estilo revela-se por essa linguagem, pelo seu estabelecimento. Assim, estabelece-se um estilo quando uma linguagem também se estabelece, ocorre uma mudança de estilo quando também ocorre uma mudança de linguagem. O estilo se expressa por uma linguagem mas não a é própria e tão somente.

Segundo, na matemática em específico, a criação de uma linguagem está associada ao desenvolvimento de um conhecimento e às condições que constituem uma (infra)estrutura. Uma invenção linguística, no domínio da matemática, está justo no encontro entre o universo formal (uma matemática realizada) e o sistema de atos concretos (relações do homem com o próprio homem e com o mundo). Para o autor, uma linguagem é dividida por duas maneiras de expressão: a natural e a formal. Esta última mostra diretamente uma estrutura figurada por um simbolismo próprio, aquela primeira se presta quando muito a descrever objetos e propriedades de objetos estruturais. Por um lado, basta que propriedades estruturais se complexifiquem para a descrição e manipulação da linguagem natural beire o impossível e o incompreensível. Por outro lado, indicações descritivas facilitam a inteligibilidade de fórmulas, por sua carga concreta. Contudo, a carga de informação devido ao volume do léxico e às combinações linguísticas aumentam enormemente que chega a ser impossível para uma transcrição humana, totalmente viável para os rápidos ciclos de máquina.

Nem bem a linguagem natural, nem bem a formal preenchem-se integral e simultaneamente, quando está em jogo os registros fonológico, prosódico e mímico. A saída de Granger é examinar principalmente renovações da linguagem, que se apresentam na adoção de uma nova grade, para dar acesso de modo geral a uma estrutura de objetos. Isso equivale à determinação de novas categorias. Da construção de objetos emergem-se novos resíduos de redução formal. "Em termos tradicionais, um novo embasamento intuitivo é, explícita ou implicitamente, pouco a pouco construído."[20]

Terceiro, o método de investigação do autor consiste em: discernir os diferentes modos de expressão e construção de conceitos, e compreender como relacionam-se com diversas maneiras de praticar (ou mesmo viver) o simbolismo. Para isso, é preciso pôr-se diante da obra matemática, das condições históricas concretas do trabalho matemático. O autor atém-se a um exame da organização simbólica da obra e de uma intuição originária. Isto é, então, a procura

[20] Cf. Granger, 1974, p. 34.

por um fato de estilo.

Encontramos no conceito de estilo de Granger um método de investigação: a procura de fatos de estilo. Ao circunscrevê-los, possibilita-se determinar conceitos e delimitar possibilidades de intuições fundamentalmente entrelaçadas à concepção de objetos matemáticos em um sistema já posto. Estruturas são constituídas por objetos matemáticos. A expressão da experiência matemática advém da manipulação simbólica feita por um certo indivíduo histórico que em parte construiu a ciência matemática. O conceito é um elemento constitutivo do objeto matemático transcendental *à la* Granger, enquanto condição formal para o conhecimento matemático. Essa é a relação conteúdo-forma (ou conceito-objeto) adotada pelo autor em sua estilística geral.

O estilo mesmo resume-se a meras sobreterminações individuais inevitavelmente inseridas de forma negativa nas estruturas. Parece, então, que estilo tem um papel menor que a estilística geral. Sobredeterminações (ou redundâncias) são elementos que escapam à grade constituída, seriam uma espécie de resíduo não-explorado e não representado de outro modo. A percepção de redundâncias não depende da própria estrutura. Uma estrutura pode ser a mesma, ainda que haja redundâncias variantes advindas de experiências matemáticas distintas. Ademais, podem ocorrer diferentes maneiras de apreender-se um conceito matemático, mesmo assim, o conteúdo estrutural permanece e o objeto matemático subsiste. Há casos ainda de posições estilísticas que ordenam variações conceituais. De todo modo, o que se modifica sempre é a orientação do conceito para um determinado uso e extensão. O papel fundamentalmente epistemológico do estilo para Granger é o desenvolvimento interno na matemática e suas relações com toda uma gama de objetos.

A estilística geral grangeriana é de todo uma tarefa a ser executada por um estudioso da história da matemática (e da ciência) preocupado em ir além dos registros históricos. Para a partir deles e dentro deles reconstruir propositivamente elementos que permanecem transteoricamente. Mas isso não o redime de posições a-históricas retroconstituídas, uma vez que o próprio Granger manifesta que o objeto matemático subsiste independente do uso e extensão de conceitos (de teorias). Essa espécie de realismo transcendental do objeto matemático à maneira muito específica do autor permite afirmar (e isso ele próprio o faz) que, por exemplo, as diferenças leibnizianas apontam para o mesmo objeto matemático que as fluxões de Newton, as divergências entre ambas são uma questão de estilo[21]. Faltou do autor justamente assumir o ônus da prova.

> Estas diferentes maneiras de se aprender um conceito, de integrá-lo num sistema operatório e de associar-lhe implicações intuitivas – cujo alcance é necessário então limitar exatamente – constituem o que denominamos de fatos de estilo. É evidente que o conteúdo estrutural da noção não é afetado aqui, que o conceito enquanto

[21] Cf. Granger, 1974, p. 340.

> objeto matemático subsiste identicamente através desses efeitos de estilo. No entanto, nem sempre é assim e encontraremos posições estilísticas que ordenam verdadeiras variações conceituais. Em todo caso, o que sempre se modifica é a orientação do conceito para tal ou tal uso, tal ou tal extensão. [sic] o estilo desempenha, pois, um papel talvez essencial, ao mesmo tempo, numa dialética do desenvolvimento interno da Matemática e na de suas relações com mundos de objetos mais concretos (Granger, 1974, p. 31-32).

Essa citação, já apresentada anteriormente, é bastante importante pois reúne diversos conceitos de Granger. Um deles é a passagem da vivência experienciada, na prática, de uma estrutura matemática, vivida por um sujeito inserido em um certo tempo e espaço (físico e cultural). Esse sujeito, ao apreciar a obra matemática das apresentações, por exemplo, dos números complexos, nesse fato de estilo, apreende uma e mesma forma matemática (ou objeto matemático). Forma essa, o número complexo, que persiste à maneira transcendental grangeriana (a qual refere-se a toda condição formal de conhecimento que determina *a priori* uma certa objetividade). Os conteúdos distribuídos em cada um desses três modos de apresentação dos complexos guarda possibilidades de intuições matemáticas distintas a esse mesmo sujeito, que nessa experiência matemática propiciada pelo fato de estilo, alarga seu conhecimento acerca dos complexos. Isso é pois evidentemente o ganho epistemológico de conteúdos (ou conceitos) a partir de uma estrutura já posta.

Ao considerar que intuições são conhecimentos sem mediação, dado o fato de estilo acima, creio ser muito improvável intuir a partir do primeiro modo de apresentação dos complexos, $Z = \rho\angle\theta$, operadores *dilatação* e *rotação* sem ter previamente os conceitos de vetor e de operações com vetores e de geometria plana das circunferências e do plano de Argand-Gauss; e mesmo ter a segunda intuição da transformação das coordenadas polares para as cartesianas sem no mínimo conhecer anteriormente o plano cartesiano e as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Ao meu ver, não se trata de uma intuição, e sim, trata-se de uma inferência matemática, dependente de uma habilidade que mediante conhecimentos prévios adapta-os, articula-os, coordena-os à novas condições. Poderia me estender também às demais introduções aos números complexos, mas vou me restringir apenas à primeira. Basta mostrar que as intuições matemáticas defendidas por Granger não se aplicam muito bem a um caso, para incorrer aos outros também dúvidas acerca disso.

Parece-me que Granger acrescenta a essa sua teoria um pouco da própria experiência de se dedicar à história da matemática (e isso ele fez com bastante seriedade e o mesmo vale a sua proposta de um conceito de estilo). Pois a um historiador da matemática são frequentes as vezes em que se reconhece retro-historicamente em obras passadas o gérmen da teoria atual vigente. Isso explica em parte a afirmação do autor de que Newton e Leibniz tinham se referindo a um e mesmo objeto matemático ao tratarem respectivamente as fluxões e as diferenças, no que hoje se refere ao cálculo diferencial e integral (isso seria uma questão de estilo). Se ocorre familiarização, tal como parece descrever Granger, também ocorre estranhamento. Acrescento aqui minha própria experiência, aconteceu comigo um grande estranhamento quando tive contato pela primeira vez, ao acaso, com a primeira tradução do livro um dos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* de Newton da editora da Universidade de São Paulo (edUSP), na biblioteca do setor de ciências e tecnologia da Universidade Federal do Paraná. Quando não encontrei as leis newtonianas do movimento transcritas na mesma forma bastante conhecida dos manuais didáticos de cinemática e mecânica, a primeira vista não as reconheci. Ainda mais desconcertante foi quando me apercebi que Newton tinha em seu texto pura geometria ao invés de física matematizada tal como esperava, ou seja, com funções, gráficos etc. É claro que minha experiência descreve uma expectativa ingênua de um estudante recém ingresso na faculdade de física. Um especialista, como é o caso de um historiador da matemática, está ciente que encontrará diferentes *práticas* e *fazeres* matemáticos, diferentes teorias, conceitos e objetos matemáticos, diferentes linguagens matemáticas, próprios de um determinado tempo. Mas isso não basta para evitar descrições e explicações anacrônicas ou mesmo diacrônicas (evolutiva e acumulativa) da matemática.

Um outro aspecto que precisa maior esclarecimento do conceito de estilo de Granger são as redundâncias ou sobredeterminações. Em um primeiro momento, o autor chega a afirmar que as redundâncias são a expressão do individual e que elas se conectam às estruturas mesmo que negativamente para o caso das ciências e da matemática porque ambas buscam uma unidade estrutural. Há uma suspeita de estilo quando tais redundâncias são do tipo não-casuais ou não-aleatórias e que persistam no tempo. O que o autor não aprofunda é como determinar quando uma redundância é casual e quando não o é. E ainda, como identificar na estrutura a inserção *negativa* de uma redundância (ao menos essa inserção responde em parte sua persistência no tempo). Contudo, apesar de redundâncias terem um papel fundamental para o estilo, quando se faz uma análise estilística, o autor chega a desconsiderá-las da grade constituída. Nas palavras do autor, essas redundâncias são uma espécie de resíduo não-explorado e não portam sentido. Além disso, a percepção delas não depende da própria estrutura. (Mais uma vez, aparece a dificuldade da falta de uma nomenclatura clara pois qual a diferença entre "estrutura" e "grade", afinal?)

A linguagem porta estilo e uma forma de detectá-lo está nas renovações da linguagem, na adoção de uma nova grade que dá acesso à estrutura de objetos. Da construção de objetos matemáticos, surgem novos resíduos de redução formal dependentes de uma vivência de certo simbolismo, e isso promove e constrói uma nova base intuitiva. No exemplo acima, acerca dos números complexos, percebemos diferentes intuições ligadas a diferentes linguagens, que se apresentaram para introduzi-las. As três linguagens (trigonométrica, matricial e de equações algébricas) apontaram para o mesmo objeto matemático, o número complexo. O autor alerta que apesar da introdução do número complexo poder ser feita de diversas maneiras, as propriedades operatórias se conservam, as que caracterizam a estrutura como algébrica. Então, tem-se um mesmo objeto, uma mesma estrutura, diferentes linguagens e intuições acerca do mesmo objeto, pelas novas relações que se estabeleceram.

O autor considerou diferentes obras em diferentes tempos para aplicar sua análise estilística, com base no método de investigar por fatos de estilo. Granger considerou a obra de autores como Euclides, Descartes e Desargues para constituir um estilo próprio de cada um. Ele fez o mesmo com respeito ao nascimento do que ele caracterizou por estilo vetorial. Parece-me relevante apresentar sua proposta para o estilo euclidiano, para em seguida verificar se ele próprio usa de seus instrumentos da análise estilística para configurar esse exemplo de estilo. Seguem, então, suas considerações acerca do estilo euclidiano:

> ...Euclides procura reprimir as intuições unicamente nos axiomas e noções comuns... De fato, uma camada intuitiva subsiste, por assim dizer, em cada um dos níveis sucessivos da teoria. Quanto à grandeza euclidiana, esta base intuitiva que permanece no último degrau da doutrina das proposições, é a noção de inteiro tomado como operador.
> Por outro lado, embora procure sempre demonstrações gerais, Euclides parece obedecer constantemente a um princípio de especificidade. Evita identificar objetos matemáticos de mesma estrutura, mas de origem e construção diferentes... os desenvolvimentos modernos da Matemática, ao contrário, são dominados por um princípio de identificação estrutural. No próprio círculo de noções euclidianas, o estilo axiomático moderno assimila os inteiros aos racionais de denominadores de unidade, os racionais aos reais que tenham um desenvolvimento periódico etc. Toda vez que se constrói uma estrutura envolvente, os elementos da estrutura envolvida são aplicados a uma parte da estrutura envolvente e canonicamente identificados a suas imagens nesta nova estrutura... As "relações de grandezas" comportam-se como inteiros, generalizando as propriedades destes; no entanto, Euclides não dirá que são "números", alguns dos quais corresponderiam aos inteiros... O último traço de estilo de Euclides... [é] a ausência de algoritmo de aproximação dos irracionais. Com efeito, o projeto de um cálculo aproximado das grandezas geométricas supõe um postulado da homogeneidade entre racionais e irracionais, postulado esse que é estranho a Euclides em virtude do traço de seu estilo anteriormente indicado. Daí resulta que toda sua teoria dos irracionais tem como função não substituir as das grandezas racionais figurativas, garantindo sua adequação, mas, ao contrário, determinar os critérios do irracional, de maneira a discernir sem ambigüidade o que justamente é exprimível do modo numérico, do que compete a uma construção geométrica. Assim, acha-se preservado esse purismo euclidiano que permanece, não apenas no alexandrino, mas ainda em geômetras de um gênio tão diferente do seu como Arquimedes, uma das personalidades mais atraentes dos matemáticos da Antiguidade (Granger, 1974, p. 54-55).

Granger apresenta, no seu ponto de vista, três traços do estilo euclidiano para além de sua característica axiomática, a saber: (i) noção de inteiro como operador, (ii) princípio de especificidade e (iii) ausência de algoritmo de aproximações dos irracionais. De fato, esses traços descritos acima aproximam-se muito mais ou de consequências de pressupostos primeiros, como é o caso do traço (iii), porque Euclides trata operações geométricas em seus pares, por isso, não admite uma aproximação de quantidades heterogêneas como racionais e irracionais;

ou dos próprios pressupostos como os traços (i) e (ii). Assim, esses traços de estilo levantados pelo autor parecem a mim muito mais próximos de características da obra de Euclides do que propriamente constituintes de um estilo atribuível a Euclides.

Granger, em um outro momento, considera o estilo euclidiano como posto a seguir: "a álgebra geométrica é justamente um estilo, caracterizado pelo papel atribuído às propriedades intuitivas das figuras e pelo modo de introdução das operações, tais como a multiplicação dos comprimentos e sua elevação ao quadrado." (Granger, 1974, p. 47). Neste estilo euclidiano da álgebra geométrica, o autor não levanta traços de um estilo, como vimos na longa citação anterior. Nesta, Granger acentua justamente as características de um estilo segundo seu método de investigação atribuído à análise estilística. Por este caminho, o autor assevera que os elementos constituintes de um estilo são: objeto, conceito, relações, estrutura, intuições etc. O que temos nesta última citação é pois o levantamento da carga intuitiva acerca das figuras relacionada ao modo de introdução a operações de multiplicação de comprimentos e os seus quadrados. Portanto, Granger deixa de listar traços, como fez anteriormente, para levantar elementos constituintes do estilo euclidiano.

Para finalizar, Granger apresenta estas considerações acerca da matemática, que parecem ser promissoras, mas não as desenvolve. A matemática pertence também à ciência[22], cujo elo de ligação entre elas repousa sobre a construção de uma linguagem (sem ser ou uma expressão reduzida do nominalismo ou do intuicionismo matemático). A matemática é constituída nos trabalhos de certos sujeitos históricos, inseridos em um determinado contexto específico. O estilo deve ser distinto de estrutura, grade, ou mesmo teoria. Os objetos matemáticos são susceptíveis de relações, que não são meras construções teóricas, mas elementos básicos. O estilo de certa forma propicia invenções na matemática[23] (prefiro o termo inferência), aliadas a uma prática e a uma certa perspicácia matemática (traduzida em criatividade) em conjunção com habilidade.

1.3.2 Conceito de estilo para Alistair Cameron Crombie

Crombie[24] é considerado um dos primeiros pesquisadores a dar fundamento sólido para o conceito de estilo. De forma ampla e para além da noção individualizante de estilo[25], o autor, tal como salienta Gayon[26], sustenta que estilos não devem ser locais, enquanto uma cultura ou algo específico de certas sociedades e períodos. É preciso evitar esse tipo de conceito de estilo. Por isso, Crombie voltou-se para um conceito de estilo que fosse o oposto, ou seja, que

[22] Cf. Granger, 1974, p. 32.
[23] Cf. Granger, 1974, p. 340.

caracterizasse uma noção de generalidade, ele os nomeou de *estilos de pensamento científico*.

O autor, em 1994, desenvolveu uma extensa obra intitulada *Styles of scientific thinking in the European tradition: the history of argument and explanation especially in the mathematical and biomedical sciences and arts*. Crombie retoma cerca de dois mil e quinhentos anos de história sobre a ciência europeia, esta é pois sua obra de fôlego histórico. Mas ele não deixou de apresentar textos mais sucintos que contivessem a essência de seu mais extenso trabalho que pode ser assim exposta: Crombie oferece uma *interpretação analítica* da história, daquilo que ele julga ser o estilo europeu. Ele parte de um *estilo de racionalidade*. Ele considera que a racionalidade europeia é de fato um estilo de pensamento que pode estar ligado a um compromisso, a um certo modo de controle e decisão próprios da Grécia antiga, que não devem ser confundidos com costume, autoridade ou outras práticas. Há de ser lembrado que fora muito próprio aos gregos tornar o estilo de racionalidade explícito. Sócrates, por exemplo, à sua maneira, estabeleceu um pensamento científico – isso se estabeleceu também por outros filósofos gregos de modo geral, matemáticos e homens da medicina –, além de procurar pelos princípios da natureza (inclusive a natureza humana), do argumento etc. Os gregos introduziram uma forma exclusiva de racionalidade com base em duas ideias fundamentais: causalidade natural (universal e autoconsistente) e prova formal. Delas originou-se o estilo essencial da filosofia, da matemática e da ciência natural no ocidente. "A concepção de um sistema racional, gerada pela identificação de problemas enquanto distintos de doutrinas, é a visão seletiva de solucionar e o critério do que conta como solução em sistemas de explicação teórica, tanto particular quanto geral."[27] O estilo de raciocínio inventado pelos gregos era efetivamente competente tanto na solução de problemas, quanto na proliferação de uma diversidade de outros problemas. Isso tem como consequência a expansão do conhecimento de um determinado domínio. Nesse sentido, portanto, os gregos inventaram, para o autor, a noção de um problema científico enquanto distinto de uma doutrina, bem como, a concepção de natureza em geral vinculada aos compromissos iniciais de causalidade universal, organizada como ciência.

> Entre os mundos possíveis previstos em culturas diferentes, a decisão por um único mundo existente – exclusivamente autoconsistente e de causalidade natural possível de ser determinada – compromete o pensamento científico europeu a essa direção efetiva, fechando-o a outras. A racionalidade exclusiva assim definida supre as pressuposições, e vem a suprir métodos de raciocínio e explicação, semelhante ao

[24] Cf. Crombie, 1995 e Gayon, 1996.

[25] Refiro-me justamente à noção bem caracterizada por Granger e apresentada na seção anterior, a saber, do estilo enquanto característica que torna único e individual um determinado trabalho. A arte ao mesmo tempo que carrega obras artísticas das individualidades de seus autores, também comuta de certas características as quais identificam escolas. Esse exemplo da arte é bastante rico e importante para composição do argumento do autor porque nos apresenta o individual e o geral, não como uma dicotomia conflitante do trabalho artístico, mas enquanto grade de leitura e interpretação das obras de arte em um ambiente consensual de existência.

[26] Cf. Gayon, 1996, p. 13.

[27] Cf. Crombie, 1995, p. 225, minha tradução.

> discurso informal e à exploração experimental da natureza. Assim, isso oferece controle racional de questões de qualquer tipo: da matemática à matéria, das ideias às coisas (Crombie, 1995, p. 226, minha tradução).

Crombie salienta que a essência do pensamento grego abrangia o *princípio do controle racionalizado* da razão controlada. Platão e Aristóteles incorporaram-no por meio de teorias gerais em todas as questões particulares e atividades metafísicas, científicas, técnicas, estéticas, morais, legais e políticas; em uma concepção geral de todo conhecimento racional, ciência e arte. Platão estabeleceu este fato histórico: o domínio racional ganhou pela análise e síntese lógicas um poder único de manipular tanto a matéria quanto a mente, para a verdade e para o efeito. Aristóteles sustentou que uma prática consistente sempre demandava um raciocínio anterior, e um raciocínio consistente era endossado pelo sucesso prático, seja sobre a natureza ou sobre o comportamento humano.

No tocante ao movimento científico europeu, a preocupação estava na relação entre o homem e a natureza. (Relação estabelecida pelas seguintes ações do homem: perceber, conhecer e agir.) Este estilo de raciocínio, específico e explícito, define, segundo o autor, a tradição intelectual central europeia, em que a ciência da natureza e a matemática foram, desde o início, não apenas parte integral mas um modelo. Elas também foram parte integral da tradição medieval e da educação humanista, até a desestruturação motivada pelo movimento romântico contra a razão, do início do séc. XVIII, de seus sucessores *não-racionais*. Crombie deseja restaurar a tradição intelectual central europeia pela história filosófica da ciência, a fim de apresentar uma identidade verdadeira das ciências da natureza no interior da história complexa da cultura europeia e de suas relações com outras culturas.

O autor propõe tomar uma visão histórica extensiva e comparativa, e salienta que toda sociedade possui, por exemplo, uma percepção da ecologia em que a visão de natureza e de humanidade estão condicionadas tanto pelo ambiente físico quanto pelo ambiente biológico, bem como, pela visão mental de existência e de conhecimento e seus significados. A esta visão estão incorporados: compromissos intelectual e moral, disposições, memória e expectativas acerca de concepções da natureza, da ciência e de seus modos de investigação sobre a natureza e das consequências tanto físicas quanto morais de nossas ações; do que se pode ou deve-se fazer na convivência com a natureza e humanidade.

> Estilos de pensamento e de tomar decisões, estabelecidos no interior de qualquer sociedade ou cultura, perduram habitualmente enquanto esses compromissos e disposições permanecerem. Então, há diferenças estruturais entre civilizações e sociedades diferentes e há persistência em cada uma de certa identidade específica, apesar da mudança gerada interna ou externamente (Crombie, 1995, p. 227, minha tradução).

Para Crombie, a experiência histórica de pensamento, como um todo, e de ação sobre a natureza (como nos demais pensamentos e ações humanas) podem ser tratadas como um tipo comparativo de antropologia histórica moral e intelectual. O movimento científico desenvolvido no ocidente e difundido no mundo constitui uma etapa desse processo. Um mesmo diagnóstico pode ser feito da cultura intelectual europeia desde os gregos, como entre: estilo racional e suas metafísica e teologia; a causalidade moral e a geometria estética e seu drama, sua música e suas artes visuais; tecnologia e indústria e sua ética, suas leis, sua economia e sua administração pública. "O próprio movimento científico foi na mesma medida um empreendimento moral e intelectual, e seus compromissos morais foram integrais e essenciais à competência intelectual".[28]

O autor reforça que a visão científica seletiva do que é solúvel preocupa-se de uma só vez com detalhes particulares e princípios universais relacionados entre si na exata medida da correspondência. Trata-se de um produto da cultura intelectual européia. Igualmente, à mesma medida, um produto da cultura é a procura de significados no tempo e na história que levam a especulações cosmogônicas e cosmológicas e à sabedoria histórica, que acompanha o pensamento científico grego. Com respeito à herança grega adotada durante o período da idade média e no início da idade moderna, Crombie sustenta que a essência do movimento científico europeu seguiu continuamente, de fato, as origens da Grécia antiga, com certas flutuações. A retomada do pensamento grego, depois do colapso do império romano – em diferentes sociedades, economias e teologias – teve três estágios de resposta aos exemplos intelectuais antigos. Primeiro, veio uma realização intelectual primária: a compreensão renovada e a elaboração crítica nos séculos XII e XIII da concepção de um sistema racional demonstrativo, aos modos de Euclides e Aristóteles, pela comunidade filosófica das escolas e universidades medievais e pela precisão lógica no controle de argumentos e evidências, para a decisão de uma diversidade de questões, variando da teologia e direito à ciência quantitativa e experimental (principalmente na óptica, no magnetismo e na medicina).

Segundo, a nova organização intelectual da Europa ocidental gerou ao mesmo tempo uma capacidade organizada para controlar uma variedade de materiais e práticas (com capacidade organizada de agir e com a intenção racional no controle de argumentos e de cálculos). Práticos, fora essencialmente da comunidade filosófica acadêmica mas com um nível crescente de educação e de arte (variando da pintura, arquitetura, cartografia a música, mecânica e aritmético comercial), conquistaram com sucesso espaço na história das ciências pelo *design* quantitativo e racional (quando possível), antecipando o material de construção ou ação. Eles foram artistas racionais, do mesmo estilo dos filósofos racionais, mas em domínios diferentes e com finalidades diferentes, e procederam na construção prática ao invés da explicação teórica.

Terceiro, o estabelecimento do experimentador e observador racional nos séculos XVI e XVII como artista racional da investigação científica, que leva à execução manual aquilo projetado por primeiro na mente. Isso marcou o ápice da orientação europeia em resposta às fontes científicas antigas. Esta nova filosofia científica experimental foi uma combinação

[28] Cf. Crombie, 1995, p. 227, minha tradução.

deliberada de uma pesquisa teórica para formas comuns de explicação com uma demanda prática, com vistas a uma reprodução precisa de resultados. Cientistas desse período tinham a pretensão de desenvolver uma teoria geral da descoberta e explicação de soluções particulares. Além disso, esses mesmos cientistas pretendiam estabelecer uma identidade específica para a natureza entre a sua diversidade de possibilidades e a ciência natural – enquanto um modo de investigação e escolha – na distinção específica de outros modos diversos de pensamento e no interior de uma cultura contemporânea.

Resumindo, foram três os estágios da retomada do pensamento grego, desde a queda do império romano: primeiro, a concepção de um sistema racional demonstrativo renovado, conforme Euclides e Aristóteles, e a aplicação precisa da lógica no controle de argumentos, ambas, foram usadas pela comunidade das escolas e universidades medievais nos séculos XII e XIII; segundo, põe-se em evidência a capacidade organizada de controlar materiais e práticas – em especial, os práticos intelectualizados fora da academia encontraram seu espaço, como consequência disso, houve um processo de construção prática sem muito uma base teórica –; terceiro e último, encontra-se nos séculos XVI e XVII, o estabelecimento do experimentador e observador racional da investigação científica. Essa nova forma da ciência experimental foi a combinação da pesquisa teórica com a prática precisa, com fins a uma explicação.

O movimento científico no todo, considerado no contexto de uma sociedade com seus modos de comunicação e persuasão, influencia os conceitos e noções da comunidade em que está inserido. Ideias científicas, descobertas e modos de argumentação tiveram de ser feitos de forma convincente e revelante para o pensamento e para o público (ou sociedade) de modo geral, não apenas para a comunidade científica. A essência do pensamento científico tem sido o avanço do conhecimento, pela identificação de problemas solúveis, assentados em soluções oferecidas. Solução essas bastante dependentes de compromissos anteriores com respeito tanto à natureza das coisas quanto ao estilo de argumentos.

> Todo esse conteúdo oferece um convite para olhar abaixo da superfície de resultados científicos imediatos, na direção de estruturas contínuas mais profundas. Em nossa antropologia histórica comparativa do pensamento, precisamos olhar, não apenas com mas também, no interior do olho do observador. Usei em minha análise do movimento científico europeu dois conceitos básicos: aquele dos compromissos ou disposições e aquele dos estilos de pensamento. Podemos distinguir três tipos de compromissos ou disposições intelectuais ou morais relacionados. Primeiro, existem compromissos de concepções da natureza, tal como é percebida no interior de esquemas gerais de existência e de sua capacidade de conhecer do homem. Natureza como um sistema geral, como foi inventado pelos gregos, permaneceu o elemento constante através de suas várias formas concorrentes: natureza como produto da arte divina, emanando de seu criador, do acaso atômico, das probabilidades, da emergência das inovações evolucionárias etc. Segundo, tiveram compromissos com concepções de ciência e com a organização da investigação científica, argumentos e explicação de acordo com estilos diferentes. Esses dois compromissos foram

> estabelecidos juntos, em antecedência a qualquer pesquisa científica, tipos de argumentos, evidências e explicações que oferecerão contentamento porque o supostamente passível de ser descoberto foi descoberto em conformidade com os critérios aceitáveis. O argumento foi conduzido por todo o movimento científico em dois níveis: aquele das concepções gerais tanto da natureza quanto da ciência e aquele da solução de problemas particulares. Ambos são profundamente afetados e vêm afetar a linguagem. Igualmente essencial ao estilo científico, um elemento disso fez-se explícito no início do período moderno na Europa, foi o reconhecimento do erro, de enganos e de suas razões, uma arte da solução se baseia tanto em como a racionalidade se difere quanto em como concorda. O movimento científico foi integrado de forma ampla durante os séculos XVII e XVIII por meio do estabelecimento das formas de argumento, evidência e linguagem geralmente aceitas (Crombie, 1995, p. 232, minha tradução).

O autor salienta que a língua é um guia historicamente indispensável tanto para as ideias científicas teóricas quanto para as ações reais. Qualquer língua incorpora uma teoria do significado, uma lógica, uma classificação da experiência, uma concepção de um senciente, um conhecedor e um agente e seus objetos, uma apreensão de existência no espaço e no tempo. Uma questão a ser feita é como a linguagem foi condicionada pelo pensamento científico e como, por seu turno, foi por ele condicionada. Crombie diferencia três níveis: da estrutura da própria linguagem, das concepções gerais da natureza e de coisas expressas nela e de teorias particulares. O autor assevera que a linguagem da causalidade está relacionada de perto com as concepções de causalidade. De certa forma, não há como decidir o que vem primeiro nesse exemplo (como em outros). O fato é que há uma estrutura evidente que se conforma entre a gramática de um sujeito e os predicados encontrados em todas as línguas europeias e a ontologia da substância e do atributo desenvolvida de forma mais sistemática por Aristóteles.

Por exemplo, lógica aristotélica impôs-se sobre a ciência ocidental por muito tempo, como uma forma de demonstração silogística que relacionava causa e efeito em um argumento formal, com premissas que visavam fundamentar uma conclusão. Desse modo, uma gramática e uma ontologia eram expressas em favor de um sujeito e seu predicado, de uma substância e seu atributo. Sua concepção de causalidade era estrutural e atemporal, centralizada em uma definição. Essa concepção viabilizou um estilo taxonômico da natureza que explica tanto o comportamento quanto a existência de algo pela sua definição de atributos. Em paralelo, matemáticos gregos, sustenta Crombie, exploraram o poder especulativo da geometria, impondo-se de uma só vez ao fenômeno com sua lógica dedutiva e com um modelo geométrico apropriado à sua forma espacial. A concepção geométrica da causalidade era também estrutural e atemporal, centralizada em seu espaço mas não em uma sequência de eventos no tempo. Tais concepções, especialmente a lógica silogística de Aristóteles que envolve sujeito e predicado, tornaram-se obstáculos aos filósofos medievais e aos filósofos da natureza do início do período moderno. Segundo Crombie, o mesmo ocorreu aos matemáticos que, em contextos intelectuais diferentes, trouxeram um novo conceito de causalidade, com base em taxas de mudança ao invés de estruturas estáticas. Eles chegaram a exprimir a causalidade não mais em termos de sujeito e predicado e sim em termos de funções algébricas. Além disso, inventaram uma nova terminologia latina para expressar quantidades fundamentais como: velocidade, aceleração, velocidade instantânea entre outras. Essas quantidades foram definidas no séc. XIV em Paris e em Oxford, suas terminologias foram usadas por Galileu e Newton. Essa nova função da causalidade para a física clássica relacionou eventos como: sequências no tempo de interações ocorridas ou por contato ou por um meio ou ainda por um campo; a escolha era baseada em crenças mais amplas. Por exemplo, Roger Bacon inseriu uma causalidade científica em certa teologia das leis da natureza estabelecidas pelo Criador, nos termos de Dante[29]; e Newton combinou essa teologia com a geometria de Euclides e chamou seus princípios fundamentais da dinâmica de *axiomas* ou *leis do movimento*. Essa linguagem nasceu do interior da ciência da natureza, de seu contexto intelectual. A partir do séc. XIV, novas línguas técnicas foram gradualmente construídas, e isso ocorreu antes na matemática e na música. Ambas eram línguas universais e quantitativas, que transcendiam todas as fronteiras nacionais. Ademais, são línguas expressamente claras, com limites bem definidos.

> A ciência deve em diferentes culturas linguísticas adquirir sempre diferenças de forma lógica, e uma língua no interior disso deve sempre impor suas pressuposições ontológicas no desenvolvimento da ciência? A linguagem técnica da ciência foi desenvolvida frequentemente em parte para escapar de tais imposições e para descolar um significado científico específico das analogias enganosas advindas de sua fonte no vocabulário comum (Crombie, 1995, p. 233, minha tradução).

Há um quarto outro tipo de compromisso, que oferece às pessoas seus pontos de vista. Por essa via, estilos são também em parte as concepções do que se deseja e do que é possível fazer, com respeito a avaliações sobre a natureza, o propósito e as circunstâncias da vida humana. Esses compromissos fornecem ou motivações para a pesquisa e ação ou hostilidade e indiferença. Eles são próprios da ação humana, do que pode ser ou não ser feito moral, científica e tecnicamente, na capacidade de atingir seus fins. A esses compromissos estão relacionadas disposições (individuais e coletivas) que geram respostas habituais em eventos. Disposições que dominam ou são dominadas por eventos, que mudam ou resistem a mudanças nas ideias e nas práticas, que aceitam ou rejeitam a possibilidade da verdade no interior de um suposto erro, então integram-se dentro de um argumento, fundamentando acordos e desacordos.

Para o autor, a educação e a experiência podem estabelecer consequências futuras expressas em diferentes escolhas. Em algumas sociedades e circunstâncias, certas escolhas e suas integrações podem estar abertas, já em outras fechadas. Por exemplo, sociedades cristãs latinas estavam abertas no período medieval e no início do período moderno, mas as do islã mantiveram-se fechadas. Parece que no islã não há uma teologia que relacione ciência, como

[29] O autor cita um trecho do *Paraíso* de Dante (cap. XXX, linhas 122-123): "onde Deus governa sem intermédio, a lei natural não tem relevância.", cf. Crombie, 1995, p. 233.

aquela desenvolvida no cristianismo, por um argumento com evidência filosófica e exegética. A falta de instituições que suportassem a pesquisa filosófica pôde ter sido uma falha à ciência árabe depois do séc. XIII.

Todos esses quatro compromissos ou disposições afetam claramente a possibilidade de inovação e mudança científica. Há também um quinto compromisso, diferente, com respeito ao ambiente biológico e físico em que o homem se encontra. Podemos resumi-lo desse modo: apesar das tentativas de controlar ou mudar o ambiente biológico e físico, este é dado por primeiro pela Natureza indiferente ao Homem.

Os cinco compromissos levantados pelo autor são: (i) a concepção de um sistema racional demonstrativo, (ii) o controle de uma variedade de materiais e práticas, (iii) o estabelecimento do experimentador e observador racional, (iv) o poder agir moral, científico e técnico em certos eventos para um determinado fim e (v) o ambiente em suas características biológicas e físicas. Frente a isso, Crombie determina e caracteriza seis estilos de pensamento, como resultado de sua interpretação analítica da história do pensamento europeu.

> Do interior desses compromissos do pensamento científico advém um número diversificado de estilos de pesquisa, demonstração e explicação do qual identifiquei uma classificação de seis. A novidade estava no estilo. É esclarecedor dar atenção às ocasiões críticas da orientação intelectual, ao lidar com a maturidade de cada estilo. Existe uma sequência lógica e cronológica em que cada qual levantou-se em um contexto cultural no qual reuniram-se diferentes mas aparentadas questões científicas, artísticas, econômicas e assim por diante, que foram unidas sob uma forma de argumento comum. Estilos tornaram-se diversificados pela diferença de assuntos endereçados por concepções gerais da natureza e da ciência e as expectativas que eles implicam. E também pela experiência científica das interações de programas com suas realizações. O estilo científico, com seus compromissos, identificou certas regularidades na natureza que se tornaram objeto de pesquisa e definiram suas questões, seus métodos e seus tipos de evidências apropriadas às respostas aceitáveis internas àquele estilo (Crombie, 1995, p. 234, minha tradução).

Crombie desenvolveu três estilos pautados em questões de regularidades individuais e outros três estilos pautados, diferentemente, em regularidades de populações ordenadas no espaço e no tempo. Vejamos a seguir como o autor os caracterizou[30].

1. **Estilo dedutivo**: é o mais antigo dos estilos, toma como modelo a argumentação matemática, que consiste em provar dedutivamente a partir de princípios explícitos. Foi inventado pelos gregos e explora o poder demonstrativo de duas formas diferentes:

[30] Crombie utilizou uma terminologia diferente para seus estilos. Por clareza, optei usar os termos de Hacking e de Bueno. A classificação original crombiana considera para os estilos de pensamento possui a seguinte terminologia: (i) postulação, (ii) argumento experimental, (iii) modelo hipotético, (iv) taxonomia, (v) análise probabilística e (v) derivação histórica.

(i) pela geometria e aritmética nas regularidades simples da natureza, unindo todas as ciências e as artes matemáticas (da astronomia, óptica e cartografia à mecânica e música) sob a forma comum da prova; e (ii) pela lógica de Aristóteles tanto em todas as ciências da natureza quanto em outras questões da filosofia. Os matemáticos gregos destacaram-se pela perspicácia em solucionar problemas por simples relações, como quando reduziram fenômenos da astronomia a propriedades da esfera; a perspectiva visual a propriedades da reta e do ângulo; a mecânica a relações de pesos determinadas pelas propriedades da reta e do círculo; e a música a propriedades das proporções dos números. Assim, puderam desenvolver suas pesquisas imediatas teoricamente de dentro desses termos matemáticos. Na antiguidade, por exemplo, Euclides, Arquimedes e Ptolomeu empreenderam a realização deste estilo, guiados por Platão e Aristóteles. E na história moderna, temos exemplos de que: Galileu tomou como ideal científico os trabalhos de Arquimedes; de forma semelhante, no séc. XVII, Descartes explorou o poder demonstrativo da álgebra e Newton, o do cálculo infinitesimal.

2. **Estilo experimental**: consiste em controlar e pesquisar por novos postulados, com a ajuda da observação e da medida. Este estilo, raro entre os gregos, foi totalmente elaborado no fim da idade média e no inicio do período moderno na Europa como um modo de raciocínio. O estilo experimental controla tanto a postulação quanto a exploração da natureza por intermédio da observação e da medição. Ele foi desenvolvido como uma estratégia para a pesquisa de princípios em questões mais complexas, procedendo por uma análise teórica anterior. Por exemplo, a acústica de Pitágoras, a óptica de Ptolomeu e a fisiologia de Galeno. O estilo experimental foi desenvolvido como uma forma de raciocinar por análise e síntese. Os experimentos trouxeram ao argumento pontos importantes de decisão com a quantificação e instrumentalização necessária. Este estilo moveu-se na direção da quantificação de modo geral nas ciências, com isso veio também o desenvolvimento tanto da matemática quanto dos hábitos e técnicas de medida. O registro e os cálculos cresceram, por necessidade, em algumas ciências em especial e nas artes (comerciais e práticas). O método experimental científico derivou-se da união desses hábitos e práticas com a lógica de controle, ou seja, quantificações por meio de técnicas de instrumentação e cálculo matemático. Por exemplo, nos séculos XVI e XVII, essa instrumentação matematizada tornou-se o fundamento do movimento científico clássico como meio de controle. Este estilo foi aplicado em qualquer assunto possível por Gilbert, Galileu, Harvey, Kepler, Descartes, Newton e outros (e notavelmente por Mersenne à ciência da música).

3. **Estilo hipotético**: consiste em utilizar um modelo hipotético adequadamente projetado, com vistas a explicar propriedades desconhecidas de fenômenos. É um estilo que se desenvolveu para elucidar propriedades desconhecidas de fenômenos da natureza, com recurso a um artifício teórico, ou seja, um modelo hipotético, para articular e expressar

relações entre objetos, caracterizados pelas propriedades segundo hipóteses, e grandezas. Por exemplo, o modelo hipotético geométrico do universo de Eudoxus – que persistiu por toda geometria astronômica até Newton – trata-se do modelo formal dos ceús composto por esferas e relógios astronômicos; o modelo renascentista de Leon Battista Alberti da pintura em perspectiva. Este estilo hipotético foi sistematicamente transposto da arte para dentro da ciência e da filosofia durante o séc. XVII. O *design* teórico das artes construtivas precedeu a realização material de um modelo hipotético nas ciências. Apesar de buscarem por diferentes fins, artistas e cientistas compartilhavam de um estilo comum. A imitação da natureza pela arte tornou-se uma arte da investigação, o *design* racional para construção, tornou-se um modelo racional para investigação. Por exemplo, os modelos hipotéticos: do olho humano como uma câmara escura de Kepler, da fisiologia de Descartes, da linguagem de Mersenne e da sociedade política de Hobbes.

4. **Estilo taxonômico**: este estilo prevaleceu na zoologia, na botânica, na nosologia e no diagnóstico médico. Embora tenha uma história no pensamento antigo, desenvolveu-se plenamente a partir do final da Renascença. Emergiu como uma lógica explícita da classificação, primeiramente desenvolvida por Platão e Aristóteles. É o fundamento de toda ciência natural, em diversos modos, porque estabelece similaridades e diferenças fundamentais. Este estilo procede pela análise de um fenômeno em seus elementos, pela localização em um assunto com seu fenômeno aparentado e pela síntese daqueles elementos; desse modo, estabelece uma explicação de sua ocorrência. Da análise à síntese de um fenômeno, isso resultou em uma taxonomia de assuntos e de estilos apropriados a cada campo do saber. Este estilo foi usado, por exemplo, entre os séculos XVII e XIX, por Carl von Linné, botânico e zoólogo sueco, e Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, naturalista francês, quando elaboraram uma busca por afinidades em sistemas naturais (essa busca levantou a questão acerca da origem das espécies, quer na mente de Deus quer pela descendência evolucionária, como proposta por Charles Darwin, que gerou uma polarização realismo *versus* nominalismo).

5. **Estilo estatístico**: estabeleceu-se por ocasião dos jogos de azar, das práticas de gestão e de controle de populações humanas, no séc. XVII, seguiu expandindo pouco a pouco a diversas situações humanas e naturais e a lógica medieval, qualificada na linguagem da contingência e da incerteza. Mas sua origem remonta a medicina grega e em seguida o direito romano, pela necessidade de uma lógica precisa de decisão em situações práticas de antecipação contingente, de incerteza de escolha. Adiante, foram feitas descobertas explícitas de regularidades estatísticas no séc. XVII, como uma nova forma de regularidade encontrada adequadamente em eventos de populações numerosas. Dos trabalhos notavelmente incipientes de italianos em seguros, este estilo trouxe uma maturidade quantitativa no séc. XVII quando a incerteza foi dominada pela razão e estabilizada em um cálculo de probalidades. Um conceito essencial foi aquele do valor

instantâneo de um item qualquer em um dado momento em uma empresa humana contínua ou processo natural, que toma a mesma forma quer aplicada a um valor em um jogo de azar quer em uma empresa comercial de uma opinião legal ou filosófica. De fora dessa análise, por exemplo, têm-se a concepção estatística explorada na teoria da seleção natural no séc. XVIII, formalizada por Maupertius e empiricamente aplicada por Darwin; e o fundamento da física na probalidade e de uma concepção probabilística da ciência.

6. **Estilo histórico-genético**: como indica seu nome, concerne a todas as ciências históricas, da cosmologia à geologia, da teoria da evolução à história humana. A análise e a síntese do desenvolvimento genético foi introduzida pelos gregos na investigação das origens da civilização humana e da linguagem. Diodoro Sículo (90-30 AEC) e Lucrécio (99-55 AEC) previram um processo histórico causal da natureza e da humanidade, em que o passado poderia ser inferido da observação das regularidades presentes e o presente poderia ser explicado como um desenvolvimento do passado, trazido por leis naturais. Este estilo foi elaborado sistematicamente no início do período moderno na Europa, por G. W. Leibniz, como um método taxonômico e de análise e síntese causal; primeiro, aplicado de maneira estrita às línguas e depois de forma mais ampla às culturas humanas, à história geológica e à evolução de organismos vivos, conclusivamente por Darwin. O presente estilo foi definido pela diagnose das características comuns da existência diversa das coisas, de uma fonte comum inicial no tempo, seguida pela postulação de causas à consideração por diversificação daquela fonte; o argumento segue em ambas as direções.

Para Crombie, as ciências naturais não se desenvolveram como um sistema monolítico. Todo seu desenvolvimento do interior de compromissos originais gregos foi de procurar de uma só vez por princípios na natureza e no raciocínio. Os seis estilos de pensamento e seus objetos são todos diferentes, assumem fundamentalmente mundos físicos diferentes, mas encontram-se frequentemente combinados em uma pesquisa particular. É pela identificação de regularidades que se conforma um objeto de investigação, por definição suas questões e evidências, e suas respostas são aceitas. Um estilo cria tanto seus próprios assuntos quanto é criado por eles. Uma mudança de estilo introduz não apenas um novo assunto, mas também novas questões acerca do mesmo assunto, como na mudança de tratamento do movimento da taxonomia qualitativa de Aristóteles à postulação cinemática de Galileu. Estilos diferentes introduzem novas questões também acerca da existência de seus objetos teóricos: eles são reais ou produtos de métodos de medida ou de amostragem ou ainda de linguagem? O processo científico não é linear, ramifica-se em diferentes níveis em uma variedade de direções. Além disso, proposições científicas são de diferentes tipos. Toda ciência não é testada da mesma maneira, por exemplo: proposições que asserem acerca de regularidades factuais podem ser testadas pela observação direta e são frequentemente estáveis; aquelas proposições que asserem acerca de explicações abstratas envolvem entidades teóricas que precisam ser testadas indiretamente por suas consequências e tendem a serem substituídas pelo desenvolvimento de teorias mais adequadas em precisão e em generalidade.

Para o autor, em uma relação estranha a qualquer sistema científico, há proposições não explicitamente oferecidas a teste que são, contudo, fundamentais. Essas proposições são modificadas por uma retomada do pensamento. Elas incluem axiomas assumidos na lógica e na matemática, princípios gerais da natureza como da *economia* e da *razão suficiente* e, mais particularmente, programas redutíveis, tais como aqueles do mecanicismo, teleologia e teoria de campos. Todos esses pressupõem um tipo de mundo a ser descoberto pela ciência e então regulam expectativas tanto para questões quanto para as respostas. Quando mudam, ocorre uma revolução científica. Já o progresso da ciência pode ocorrer em diferentes níveis e formas. O conhecimento dos fatos acumula-se progressivamente; mudanças teóricas podem aumentar o poder e a generalidade das explicações. Quando isso ocorre, há uma possibilidade de novos horizontes de investigação e novas questões a serem colocadas à natureza. Isso pode envolver uma mudança de compromissos e estilos, tal como quando *design* cedeu espaço à estatística em argumentos para seleção natural. Em um outro nível, podem ocorrer mudanças nos compromissos implicadas por crenças gerais e expectativas com respeito a existência humana, para o valor, o propósito do conhecimento e as aplicações da ciência. Isso pode contar como progressivo e regressivo, mas a natureza permanece e permanece também o pensamento consistente em seus princípios. Para Crombie, ciência libertou-nos de uma dependência crua da natureza, podemos identificar a singularidade do pensamento científico europeu entre as características intelectuais da humanidade: a sua beleza e economia, sua combinação de imaginação criativa com raciocínio preciso, de sua combinação enigmática da natureza com a matemática e da matemática com a natureza.

CRÍTICAS AO CONCEITO DE ALISTAIR CAMERON CROMBIE

Crombie foi um historiador que se dedicou a conceitualizar o que chamou de *estilos de pensamento* europeu, por meio da interpretação analítica da história em longos períodos de tempo. Com isso, esse autor considera diversos conceitos que configuram um sentido a estilos de pensamento de um certo período, como: filosofia do conhecimento e de seu objeto, natureza e sua ciência, além de argumentos e evidências. De início, Crombie considera que se julgar a racionalidade europeia um estilo de pensamento, pode ser o caso deste estilo estar relacionado a um certo compromisso. Contudo, compromisso não deve ser confundido com costume ou autoridade. O autor tenta esclarecer o que é *estilo de pensamento* com alguns exemplos, abdicando de oferecer uma definição e procurando construir extensivamente uma noção para estilo.

Os gregos introduziram uma forma de racionalidade europeia com base em dois compromissos: causalidade natural e prova formal. Esse estilo para Crombie era tanto efetivo na solução quanto na concepção de problemas. Disposições ou compromissos, como aqueles apontados pelo autor e atribuídos aos gregos, precisam persistir no tempo. Estilos de pensamento resistem no interior de uma sociedade ou cultura – não exclusivamente grega. Crombie descreve em etapas o desenvolvimento histórico desses compromissos gregos que se estenderam pela idade média, até chegar ao início do período moderno. O autor defende que a essência do movimento científico europeu foi grega, apesar de certas flutuações.

Crombie considera que ideias científicas, descobertas e modos de argumentação precisam ser convincentes para afetarem a sociedade em geral, isto é, precisam ir para além do âmbito científico. Um ponto importante é a essência do pensamento científico para o autor, o qual se resume no avanço do conhecimento pela identificação de problemas solúveis, assentados em soluções oferecidas dependentes de compromissos que dizem respeito tanto à natureza quanto ao estilo de pensamento.

Foi a partir da análise histórica de uma antropologia comparativa do pensamento do europeu que Crombie considerou que há estruturas que permanecem, enraizadas em um conceito determinante, a saber: compromissos (ou disposições). Existem dois tipos de compromissos intelectuais e morais, um acerca da natureza e de como ela é percebida; outro diz respeito a concepção de natureza à ciência e à investigação científica com explicações e argumentos de acordo com estilos. Ambas relacionam-se (em antecedência a qualquer pesquisa científica) tanto nas concepções gerais da natureza e ciência quanto na solução de problemas particulares, além de serem afetadas e afetarem a linguagem. Outro aspecto igualmente importante para um estilo científico é o reconhecimento do erro e de suas razões na arte da solução de problemas (no tocante à racionalidade, tanto no que se difere quanto no que concorda). O movimento científico foi integrado de forma ampla durante os séculos XVII e XVIII pelo estabelecimento de formas de argumento, evidência e linguagem geralmente aceitas.

Crombie dá especial atenção à linguagem enquanto guia indispensável para as ideias e teorias e para as ações reais. Qualquer língua incorpora uma teoria do significado, uma lógica, uma classificação da experiência, uma concepção de um senciente, um conhecedor e um agente e seus objetos, uma apreensão da existência no espaço e no tempo. Existem para o autor três níveis de linguagem condicionadas ao pensamento científico, a saber: da estrutura da linguagem; das concepções gerais da natureza e das coisas expressas nela; e das teorias particulares.

Há mais um compromisso que oferece às pessoas seus pontos de vista e estilos, isto é, as concepções do que se deseja e do que é possível com respeito a suas avaliações da natureza, o propósito e as circunstâncias da vida humana. Eles são acerca da ação humana, do que pode ser ou não ser feito moral, científica e tecnicamente, na capacidade de atingir seus fins. A esses compromissos estão relacionadas disposições (individuais e coletivas) que geram respostas habituais aos eventos. Disposições que dominam ou são dominadas por eventos, que mudam ou resistem a mudanças nas ideias e nas práticas, que aceitam ou rejeitam a possibilidade da verdade no interior de um suposto erro, então, integram dentro de um argumento fundamentado acordos e desacordos. Segundo o autor, a educação e a experiência podem fornecer opções para uma escolha de um futuro diferente. Integração e escolha podem estar abertas em algumas sociedades e circunstâncias, ou fechadas em outras. Todos esses compromissos ou disposições afetam claramente a possibilidade de inovação e mudança científica. Há mais um compromisso, diferente, com respeito ao ambiente biológico e físico em que o homem se encontra. Pode-se tentar controlá-lo ou mudá-lo mas é dado primeiramente pela natureza indiferente ao Homem.

Crombie desenvolveu ao todo seis estilos, três deles são pautados em questões de regularidades individuais e os outros três, em regularidades de populações ordenadas no espaço e no tempo.

1. **Estilo dedutivo**: tem como modelo a argumentação matemática, que consiste em provar dedutivamente a partir de princípios explícitos.
2. **Estilo experimental**: consiste em controlar e pesquisar por postulados, com a ajuda da observação e da medida.
3. **Estilo hipotético**: consiste em utilizar um modelo hipotético adequadamente projetado, com vistas a explicar propriedades desconhecidas de fenômenos.
4. **Estilo taxonômico**: ocupa-se em organizar, ordenar e comparar fenômenos em grupos ou populações.
5. **Estilo estatístico**: busca por regularidades estatísticas encontradas em grupos ou populações.
6. **Estilo histórico-genético**: considera o exame da origem por um processo histórico passado a partir de regularidades presentes e da justificação do presente pelo passado.

Esses seis estilos e seus objetos são todos diferentes, assumem fundamentalmente mundos físicos diferentes, mas, frequentemente combinados em uma pesquisa particular. É pela identificação de regularidades que se conforma um objeto de investigação e, por definição, suas questões e evidências e suas respostas são aceitas. Um estilo cria tanto seus próprios assuntos quanto é criado por eles. Uma mudança de estilo introduz não apenas um novo assunto, mas também novas questões acerca do mesmo assunto. Estilos diferentes introduzem novas questões também acerca da existência de seus objetos teóricos. O processo científico não é linear, ramifica-se em diferentes níveis em uma variedade de direções. Além disso, proposições científicas são de diferentes tipos. A ciência não é ela toda testada da mesma maneira.

Para o autor, proposições não são explicitamente oferecidas para teste, em uma relação diferente, com qualquer sistema científico mas mesmo assim fundamental, elas modificam-se por uma retomada do pensamento. Incluem axiomas assumidos na lógica e na matemática, princípios gerais da natureza como *economia* e *razão suficiente* e mais particularmente programas redutíveis tais como aqueles do mecanicismo, teleologia e teoria de campos. Todos esses pressupõem um tipo de mundo a ser descoberto pela ciência e então regulam expectativas tanto para questões quanto para as respostas. Quando mudam, ocorre uma revolução científica, o progresso científico pode ocorrer em diferentes níveis e formas. O conhecimento dos fatos acumula-se progressivamente, mudanças teóricas podem aumentar o poder e a generalidade das explicações e abrir novos horizontes de investigação e novas questões a serem colocadas à natureza. Além de envolver uma mudança de compromissos e estilos e ser considerado como progressivo e reverso. Mas a natureza permanece e permanece também o pensamento consistente em seus princípios.

Crombie, devido sua formação, vai aos registros históricos conceituar estilo e chega à noção de estilos de pensamento. O estilo então está de certo modo arraigado em nosso pensamento e seu produto intelectual estará inexoravelmente impregnado na obra do cientista, do matemático. Mas "pensamento", como bem dizem Hacking[31] e Bueno[32], pode sugerir um psicologismo que provavelmente o autor não desejou incutir em sua construção teórica acerca de estilo. A saída desses mesmos filósofos foi ajustar para estilos de raciocínio, pois o que deve ser colocado em evidência são as estruturas de raciocínio (por exemplo, padrões de inferência dedutivos ou indutivos ou padrões lógicos).

Crombie coleta conceitos que conformam estilos de pensamento na filosofia do conhecimento, em seus objetos, natureza, ciência, argumentos e evidências. E o autor considera que estilos de pensamento podem estar fortemente ligados a determinados compromissos. Mais que isso, pela análise histórica da antropologia comparativa do pensamento europeu, o autor constitui um conceito de estilo enraizado em compromissos tanto intelectuais quanto morais. Ele especifica quatro tipos de compromissos: (i) a natureza e de como ela é percebida; (ii) a ciência e a investigação científica com suas explicações e argumentos; (iii) as concepções pessoais, do que se deseja e do que se pode fazer dentro das circunstâncias morais, científicas e técnicas para se atingir determinado fim e (iv) o ambiente biológico e físico em que o homem se encontra, o qual pode-se tentar controlar ou alterar, contudo, é a natureza que impõe-se ao Homem. Esses compromissos relacionam-se entre si tanto nas concepções gerais da natureza quanto na solução de problemas particulares, além de afetarem e serem afetados pela linguagem. Outro aspecto também relevante neste contexto é o reconhecimento do importante papel do erro na arte da solução de problemas. Para o autor, o pensamento científico, e esse é um importante conceito, se resume no avanço do conhecimento pela identificação de problemas solúveis, assentados em soluções oferecidas dependentes também de compromissos acerca da visão de natureza e dos argumentos científicos. Esses compromissos não afetam apenas quem está envolvido diretamente com a ciência, e sim afetam amplamente a sociedade com as ideias científicas, descobertas e modos de argumentação. Ou seja, os produtos das ciências e seus compromissos vão além dos interesses internos a elas. Curiosamente, Crombie salienta que as

[31] Cf. Hacking, 1992, p. 1.
[32] Cf. Bueno, 2012, p. 657.

ciências precisam ser convincentes para que a sociedade seja afetada por seus conceitos.

O autor defende que do interior desses compromissos, surgem estruturas reconhecidas por estilos de pensamento diversificados, um total de seis estilos: dedutivo, experimental, hipotético, taxonômico, estatístico e histórico-genético. Esses estilos seguem uma sequência lógica e cronológica, envoltos por um contexto cultural no qual reúnem-se diferentes porém aparentadas questões científicas, artísticas, econômicas etc. sob a forma de um argumento comum. As diferenças entre estilos advêm de concepções gerais de natureza e de ciência e das expectativas que esses próprios estilos implicam. O estilo na ciência, com seus compromissos, identifica regularidades na natureza, objetos de pesquisa, questões e métodos, evidências aceitas. Estilos por vezes não se conversam mas também podem ser combinados. Mudança de estilo introduz um novo assunto, novas questões, novos objetos. O processo científico não é linear, ramifica-se em diferentes níveis e direções. As proposições científicas são diferentes entre estilos, além de não haver um único teste para todas as ciências.

As proposições das ciências modificam-se por uma retomada de pensamento (ou seja, um estilo de pensamento). Estilos incluem lógica, matemática, princípios como da *economia* e da *razão suficiente* e um reducionismo. Todos pressupõe um certo mundo a ser descoberto e regulam expectativas das questões e respostas nas ciências, quando, na mudança, ocorre uma revolução científica. O progresso científico pode ocorrer na acumulação progressiva de conhecimento dos fatos. As mudanças teóricas podem aumentar o poder e a generalidade das explicações. Novas investigações e questões podem ser colocadas à natureza, isso pode envolver novos estilos, novos compromissos. Embora a natureza permaneça e também o pensamento consistente acerca de seus princípios.

Tem-se que o autor baseia-se em compromissos gerais adotados amplamente por uma certa comunidade que se reúnem com uma filosofia do conhecimento, objetos, natureza, ciência, argumentos e evidências. Mas Crombie não leva em consideração que em uma mesma comunidade acadêmica diferentes trabalhos podem surgir rompendo assim sua generalidade posta na sua forma lógica e cronológica. Cito um exemplo de Granger[33] da matemática do séc. XVII em que ele orienta seu conceito de estilo para teorias particulares de Descartes e Desargues (respectivamente, uma geometria algebrizada de capacidade analítica e sintética e uma geometria projetiva). Ambos tratam objetos matemáticos geométricos de diferentes maneiras, porém nenhum deles faz ao estilo dedutivo (tal como Euclides); e nem (cronologicamente) podem ser enquadrados como do estilo hipotético – apesar de usarem hipóteses. Meu ponto é que não há como enquadrá-los segundo a taxonomia crombiana, pois seria bastante improvável que houvesse uma uniformidade nos estudos de matemáticos sob um e mesmo manto estilístico, como deseja e vê Crombie em sua historicidade panorâmica. Digo que, nas ciências e nas matemáticas, quando submetidas ao ajuste fino do historiador que se debruça sobre os trabalhos individuais, o que seria uma matiz uniforme vista de longe, passa a ser uma miríade de tons tão diversos que borrados ao longe, resolvem-se de perto.

Para não ficar em um único exemplo, retomemos Newton e Leibniz e seus métodos da fluxão e das diferenças, respectivamente. De modo algum pode-se afirmar que ambos comutam dos mesmos compromissos, o primeiro coloca-se como um geômetra ao estilo dos antigos (como Apolônio e Euclides), o segundo, não se nutria da mesma expectativa, usava de uma matemática instrumentalizada, bastante útil, mesmo imbuída de sérias dificuldades fundamentais. Os problemas que Newton e Leibniz tratavam eram basicamente os mesmos. A linguagem matemática não era certamente a mesma, no entanto, ambos se entendiam apesar de diferirem nos fundamentos de seus cálculos. (Diferiam também na autoria do mesmo.) O próprio Newton usa de diferentes recursos em diferentes obras. Então pela taxonomia de estilos de Crombie, ele poderia ser enquadrado em mais de um ou mesmo em nenhum estilo. Insisto em afirmar que esse autor apesar de ganhar em generalidade em sua descrição histórica das ciências e seriamente propor estilos, ele perde no estudo particular das obras. O meu interesse é tratar a matemática. Ele tratou de modo geral as ciências mas não ignorou a matemática, incluiu-a nas ciências e ainda criou um lugar por excelência dela nos estilos de pensamento. Mas mesmo assim não é suficiente para se capturar um estilo matemático.

Por fim, é suficiente a quantidade de estilos assim proposta por Crombie, isto é, seis? Por que não cinco ou sete ou mesmo dez? Por exemplo, inspirados em Crombie, Hacking[34], propõe mais um estilo, o estilo laboratorial e Bueno[35], o estilo instrumental – ambos para a ciência. Apesar de Crombie ter desejado compartimentalizar em seis a quantidade de estilos e supor a possibilidade de mesclarem-se, não me parece promissor sustentar essa estrutura, uma vez que a proliferação de estilos no limite dificulta continuar com essa hipótese. Porque recai em uma particularidade tamanha que o ganho epistemológico nesse conceito estrutural de estilo para se entender as ciências e as matemáticas dilui-se na infinidade possível de estilos novos e mesclados.

1.3.3 Conceito de estilo para Ian Hacking

Ian Hacking[36] também contribuiu com um tratamento filosófico para o conceito de estilo. Hacking foi um leitor de Crombie e sobretudo um crítico, mas um crítico propositivo pois ofereceu ao levantamento histórico-analítico de Crombie uma abordagem filosófica. Ele preocupou-se em apresentar condições para se ter: estilo; características de uma mudança de estilo; fatores para validação (ou autenticação) e cristalização de um certo estilo. Essas são questões que não competem a um historiador como Crombie respondê-las, mas a um filósofo como Hacking, que está voltado a questões de fundamento (como, via de regra, estão os filósofos ou sua grande maioria). Hacking parte do trabalho de Crombie para desenvolver o seu próprio, digamos que ele oferece ao trabalho de seu antecessor fundamentos filosóficos.

[33] Cf. Granger, 1995, p. 57–86.
[34] Cf. Hacking, 1992, p. 6–8.
[35] Cf. Bueno, 2012, p. 664.

Hacking tem como objetivo descrever o que chamou de *nova ferramenta analítica*, o estilo. Sua referência foi o trabalho histórico de Crombie, em específico, o dos anos setenta do século passado. A tarefa principal do autor foi incorporar conceitos filosóficos ao conceito de estilo de Crombie com fins a adaptá-lo à metafísica e à epistemologia.

De início, para adquirir maior precisão filosófica do termo estilo, Hacking propõe mudá-lo para estilos de raciocínio, para com isso desviar-se de interpretações psicologizantes. O autor considera que Crombie preocupou-se quase que totalmente com aspectos históricos e deixou de lado problemas que seu adjunto adnominal (por uma locução adjetiva) "de pensamento" poderia suscitar para o substantivo "estilo". O verbo "pensar" denota ao mesmo tempo um ato da mente que pode estar associado ao corpo, ou fazer. Hacking não quis fundamentar seu conceito de estilo em algo subjetivo e relativo. Para ele, é importante que estilo seja um conceito objetivo e que produza proposições candidatas a serem valoradas como verdadeiras ou falsas dependendo de um raciocínio sobre elas. Outro aspecto importante da teoria de estilos de pensamento de Crombie relevante a Hacking é que a filosofia usa da história enquanto uma ferramenta, quando a filosofia opera sobre a história, ela possui elementos para tratar conceitos filosóficos de dentro da história, vistos hoje, para a busca de esclarecimento de anseios presentes.

Hacking sustenta que o termo "estilo" ocorre naturalmente em nossa linguagem, ou seja, destituído de significado especial tal como um termo técnico. Contudo, foi também inevitável que isso ocorresse na linguagem técnica. Hacking relembra de certas acepções técnicas de "estilo", uma delas asseverada por Stephen Weinberg e Noam Chomsky que atribuíram a ideia de estilo galileano a Husserl, outra defendida por Irwin Bernard Cohen que constrói detalhadamente um conceito de estilo newtoniano, ao combinar dois *níveis de ontologia*, um matemático e outro empírico. O que se tem em comum entre eles (Weinberg, Chomsky, Husserl e Cohen) é a atribuição de um modo de se fazer ciência a uma extensão apropriada para raciocinar tanto sobre os primeiros três minutos do universo quanto sobre a gramática universal da ciência cognitiva. O autor coloca que estilos como o galileano e o newtoniano podem não ser particulares a um homem ou a uma época. É portanto importante saber diferenciar quando um estilo se refere ao pessoal (ou local) e quando se refere a algo mais geral.

Hacking lembra que é comum tanto nos esportes quanto na literatura distinguir estilo pessoal do geral. Ele trabalha outros exemplos, mas aqui irei usar um da história do atletismo na modalidade do salto em altura. Dick Fosbury, nas olimpíadas modernas da Cidade do México em 1968, saltou de forma única, de costas, quando todos os outros ou saltavam de lado em um movimento chamado tesoura ou de frente em uma espécie de rolamento frontal. Fosbury não somente quebrou o recorde olímpico a saltar 2,24 m, como também inaugurou um novo (se é que posso abusar do termo) estilo de saltar. Nas demais competições, os outros atletas dessa mesma modalidade acabaram por se apropriar do salto de Fosbury. Seu estilo (ou modo de

[36] Cf. Hacking, 1982, Hacking, 1992, Hacking, 2012 e Gayon, 1996.

saltar) perpetuou-se e pôde ser imitado e ainda modificado para se obter maiores e melhores resultados, mas Dick Fosbury continua tendo seu salto ainda único.

Um outro exemplo, este da literatura brasileira, que gostaria de levantar é sobre Guimarães Rosa. Ele foi único quando assimilou a linguagem coloquial da oralidade em seu texto, dando ao modo de falar muito próprio do interior de Minas Gerais uma literacidade excepcional. Outros escritores também usaram desse recurso ao estilo (ou modo de escrita) de Guimarães Rosa. O mesmo ocorreu com Mario Puzo, autor da série *Poderoso Chefão* ou, do original, *The Godfather*, escritor ítalo-americano. Mesmo após sua morte, há livros lançados em seu nome, por escritores que assimilaram seu estilo (ou modo de escrita) e continuaram a sua obra. (Esses tipos de escritores são chamados de *ghost-writers*.) Nestes três exemplos temos um estilo particular que gerou um estilo geral compartilhado, mas que não o aniquilou depois disso.

Por analogia, defende o autor, é bastante natural referir-se na história da ciência a um estilo individual de um certo cientista (*e.g.* estilo galileano, estilo newtoniano) ou de um grupo de pesquisa ou ainda de um programa ou tradição. Hacking crê que seu uso do termo "estilo" se harmoniza com o de Crombie, no entanto, há diversas maneiras de se desvincular estilo de uma referência pessoal na história e filosofia da ciência alternativas à de Crombie. Como, exemplifica o autor, Freeman Dyson contrasta dois estilos na história da ciência, um voltado para a diversidade, outro para a unidade. Outros dois trabalhos relevantes que se descolam de uma noção de estilo pessoal são de Ludwik Fleck e Michel Foucault, relembra Hacking. O primeiro em seu livro *Gênese e desenvolvimento de um fato científico* (1935) trata uma teoria do estilo de pensamento e de coletivo de pensamento. Fleck considera que um estilo de pensamento (impessoal) possui uma unidade social duradoura, qual seja, coletivo de pensamento; que é uma preparação ou prontidão intelectual para uma maneira particular e não outra de ver ou agir. De certo modo, estilo de pensamento determina condições de possibilidade daquilo que é pensado, ou, em outras palavras, torna possível algumas ideias enquanto outras torna impensáveis. O segundo, Foucault, defende o conceito de *epistéme*[37] enquanto ordem específica do saber, uma disposição (ou configuração) assumida pelo saber em uma determinada época, isso é que confere ao saber uma positividade. *Epistéme* é exclusiva em cada época, homogênea e básica, sobre a qual erguem-se empirias próprias. Conjugada a essa noção, Foucault considera um *a priori* histórico (em um sentido arqueológico) que delimita na experiência em uma certa época um campo do saber possível, define o modo de ser de objetos no interior desses campos da maneira como aparecem, coordena teoricamente o olhar cotidiano e confere condições de enunciação acerca das coisas em um discurso. Ambos, Fleck e Foucault, tratam condições de possibilidade – daquilo que é possível pensar e dizer – de um conjunto de saberes que pode ser entendido também como um estilo de pensar ou raciocinar de uma dada época, sem necessariamente estar conjugado estritamente a uma certa teoria como fez Thomas Kuhn com seus paradigmas.

Hacking se identifica com Crombie, em parte, segundo ele, devido ao largo escopo de análise histórica (da Grécia antiga até os dias de hoje) e a conformação de estilos por meio de uma taxonomia de poucos itens, os quais também delimitam aquilo que é possível pensar e enunciar. Ele prefere utilizar estilo de raciocínio ao invés de estilo de pensamento de Crombie, porque pensamento é um ato que remete a mente apenas. Raciocínio, por outro lado, é mais abrangente, trata-se de algo a ser feito tanto em público quanto no individual. Além disso, raciocínio também remete ao ato de falar, arguir e mostrar. É por fim uma questão de ênfase. Vale ressaltar que Crombie considera que a história da ciência é também uma história do argumento, não apenas do pensamento. Ambos, portanto, consideram que para se construir um argumento é preciso tanto inferir algo quanto arguir acerca desse mesmo algo. Apesar desse ponto de contato, Hacking ainda considera que Crombie enfatizou o pensamento mais do que precisava. "Raciocínio" parece mais adequado ao propósito porque abrange ações do pensamento, concepções de argumentos, a confecção e a concretização de fatos e feitos.

O termo "raciocínio" remonta também às fontes filosóficas iniciais de Hacking, como "racional" de Aristóteles e "raciocínio" de Kant. Ele considera que seu estudo é uma continuação do projeto de Kant de explicar como a objetividade é possível. Em outras palavras, a partir de certas condições iniciais, Kant quis oferecer fundamento para que das sensações a experiência se tornasse objetiva. Além disso, ele também tratou a ciência segundo certo construto cognitivo complexo. Depois de seu tempo é que foi compreendida quão comunal a atividade científica é para o alargamento do conhecimento.

> Kant não pensou a razão científica como um produto histórico e coletivo. Nós, sim. Meus estilos de raciocínio, eminentemente público, são parte do que precisamos para entender o que chamamos de objetividade. Isso não é porque estilos são objetivos (*i.e.* encontramos os melhores caminhos imparciais para chegar a verdade), mas porque estabeleceram o que é para ser objetivo (verdades de certos tipos são apenas o que obtemos por conduzir certos tipos de investigações, respostas a certos padrões). (Hacking, 1992, p. 4, minha tradução)

Crombie não define, de fato, o que é estilo de pensamento de tradição europeia, mas explica ostensivamente quando pontua seus seis estilos (ou segundo ele próprio estilos de investigação científica) e descreve-os extensivamente. Dos seis, três estilos foram desenvolvidos na investigação de regularidades individuais, os outros três, de regularidades de populações ordenadas no espaço e no tempo, são eles: (i) estilo dedutivo exemplificado pela ciência matemática grega, (ii) estilo experimental que tanto controla a postulação quanto explora por meio da observação e mensuração, (iii) estilo hipotético que constrói de modelos para

[37] Cf. Gomes, J. C. L. Nota sobre o conceito de epistéme Foucault. *Síntese Nova Fase*, Belo Horizonte, v. 18, n. 53, p.225–231, 1991.

explicar fenômenos, (iv) estilo taxonômico que ordena variedades, compara e classifica, (v) estilo estatístico que procura por regularidades em populações e calcula probabilidades, e (vi) estilo histórico-genético que considera uma derivação histórica do desenvolvimento genético.

A matemática foi por ele incluída entre as ciências – como deveria ser – e isso é celebrado por Hacking. Agora, alguns estilos não determinam conteúdos de uma ciência em específico. Apesar da matemática ter sido restringida em sua expressão histórica euclidiana, nela pode-se fazer uso dos demais estilos listados. Em uma investigação, independente da área de conhecimento, por vezes, não se restringe a um ou outro estilo, usa-se, de fato, muitos deles, mesmo em matemática pura. Hacking poderia não procurar por questões fundamentais para além da história, como fez Crombie. Mas enquanto filósofo, ocupou-se em descobrir condições necessárias para se ter estilo. Ademais, ele considera a lista de descrição de estilos de Crombie, do modo como foi arranjada, problemática. Vejamos algumas objeções de Hacking a seu antecessor nos itens a seguir:

1. Crombie caracteriza o *movimento científico clássico* por um longo período de tempo, desde quando foi formado até ser estabelecido. Ele tende a deixar um determinado estilo quando está estabelecido com segurança. Suas discussões acerca da matemática finalizam-se com a retomada de Kepler da matemática grega. Os três primeiros estilos esgotam-se ao final do séc. XVII. Apenas o estilo histórico-genético foi desenvolvido no séc. XIX, cuja figura maior foi Darwin. Hacking ocupa-se com a história do presente, *à la* Michel Foucault, pretende reconhecer e distinguir objetos históricos com fins a esclarecer conceitos. Assim, considera modificar a lista de Crombie no sentido de não revisar a história, mas vê-la do presente.

2. Os seis estilos de Crombie são uma progressão histórica, cada qual inicia-se logo quando seu antecessor termina, até o presente. Para Hacking, a dificuldade está no fato a-histórico de que todos os seis estilos permanecem até agora sem quaisquer degenerações. O que é importante agora pode não ter sido importante tempos atrás. Afinal, questiona Hacking, o que estilos de raciocínio podem fazer por nós?

3. Ao invés de escrever uma lista extensa de estilos mutualmente excludentes, Crombie transcreveu o que julgou ser central e duradouro no período de formação da visão filosoófica-científica de ocidente. Poderiam ter havido outros estilos considerados científicos, evoluídos externamente ao ocidente, ou inclusive não identificados pela mera antecipação do estilo dedutivo. Certamente, novos estilos poderiam ter evoluído depois dos eventos clássicos recuperados por Crombie, bem como novos estilos de raciocínio poderiam ter emergido futuramente. Poderia ocorrer um estilo que fosse uma composição totalmente nova a partir de estilos clássicos devido ao uso comum de mais de um estilo em pesquisas (atuais ou não).

À luz de dois exemplos, Hacking enfatiza em quais outros aspectos ele difere de Crombie. Um deles diz respeito à prova matemática que é considerada por Crombie como postulado. Hacking enfatiza que o estilo dedutivo para ele deve ser usado para se entender como a matemática estabelece verdades independente da experiência. Crombie ao contrário considera o estilo dedutivo para a procura dos primeiros princípios. O outro exemplo diz respeito à distinção histórica entre os estilos experimental e hipotético. Desses estilos, o primeiro considera que não se deve ir além dos observáveis para efetuar-se inferências; no entanto, o segundo aceita a conjectura de determinados objetos não-observáveis a serem considerados em modelos hipotéticos. Para Hacking, há justamente um composto entre os estilos experimental e hipotético, batizado de estilo laboratorial.

> Eu o chamarei de estilo laboratorial, caracterizado pela construção de um aparato para produzir um fenômeno ao qual o modelo hipotético pode ser verdadeiro ou falso, mas por outra camada de modelagem, a saber, modelos de como os próprios aparatos e instrumentos funcionam. A relação entre o estilo laboratorial, chame [experimental-hipotético], e os estilos [experimental] e [hipotético] é complexa (Hacking, 1992, p. 6, minha tradução).

Outro estilo que Hacking levanta o qual não foi considerado por Crombie foi aquele por ele batizado de algorítmico. Esse estilo nasceu de outra origem a comparar com o estilo laboratorial, sua gênese foi obviamente externa ao circuito ocidental. Esse estilo indo-arábico aplicado à matemática pouco contribui para o estilo dedutivo mas é bastante eficiente para encontrar algoritmos.

Para resumir, Hacking não se distancia significativamente de Crombie, apesar de todas essas diferenças acima pontuadas, na individuação de estilos ou em como descrevê-los. A diferença entre eles não repousa na identidade de estilos ou nas suas descrições, mas quanto ao uso de como se coloca a ideia acerca de estilos. Crombie considera que a experiência histórica do pensamento científico faz um convite à história da ciência (no ocidente bem como em suas influências em outras culturas) tanto para examinar sua identidade quanto diferenciá-la de outras atividades intelectuais e práticas (como arte, filosofia, direito, economia etc.), para relacioná-las a uma taxonomia – uma análise dos diversos elementos envolvidos –, para se conceber um estilo (intelectual) e um tratamento da natureza: em suas concepções, investigações, demonstrações, motivações e objetivos, compromissos morais e intelectuais, e expectativas que geram atitudes para inovações e mudanças.

Por um lado, Crombie oferece um trabalho histórico denso em detalhes, apesar de por vezes lidar com registros fragmentados da história da ciência. Ele consolidou uma pesquisa extensa, oportunamente bem recebida tanto por historiadores quanto para filósofos, principalmente aqueles ligados a correntes historiográficas e aos estudos sociais da ciência. Por outro lado, pode-se dizer que Crombie, coloca Hacking, direciona seu trabalho para um final ideal à sua investigação, em um afastamento bastante excessivo com relação a seu ponto de partida. Seu plano foi conduzir uma investigação histórica de dentro da experiência do homem na natureza mediada pelas artes e pela ciência enquanto observador, conhecedor e agente que põe questões de diversos níveis.

Hacking lembra que Crombie sabia da necessidade de estabelecer-se uma continuidade histórica de estilos através de períodos de latência e da necessidade de entender o que são compromissos social e intelectual, disposições e hábitos, e as condições materiais que poderiam fazer da atividade científica e de suas aplicações intelectuais, sociais e materiais, fáceis para uma sociedade porém difíceis ou mesmo impossíveis a outras.

> Como um filósofo pode fazer uso de uma ideia tão extensa de estilos de pensamento ou raciocínio científico na tradição europeia? Primeiro notei o meio em que estilos tornam-se autônomos. Cada estilo surge de pequenas interações e negociações microssociais. Isso é uma questão contingente, a ser descrita por historiadores. . . Cada estilo ainda tornou-se independente de sua própria história. Podemos esquecer da história ou consagrá-la em um mito. Cada estilo tornou-se o que pensamos como apenas um cânone atemporal de objetividade, um padrão ou um modelo do que é razoável acerca desse ou daquele tipo de questão subjetiva. Não verificamos para ver se prova matemática ou investigação laboratorial ou "estudos" estatísticos são o modo correto de raciocinar: eles tornaram-se. . . o que é raciocinar corretamente, para ser razoável neste ou naquele domínio (Hacking, 1992, p. 10, minha tradução, grifos do original).

Mas o que conta como objetividade ou o que realiza tal artifício? Hacking preocupa-se com o modo como a objetividade surge e de como endereçar a questão do que mantém certos padrões de objetividade em seus lugares ao invés de perguntar-se simplesmente como ser objetivo ou como chegar à verdade a longo prazo. Isso porque não há sentenças candidatas à verdade nem objetos identificados independentemente como sendo anterior (ou *a priori*) a qualquer desenvolvimento de um estilo de raciocínio. Cada estilo introduz novidades tais como: objetos, evidências, sentenças, novos modos de ser candidatos à verdade ou à falsidade, leis ou modalidades (a qualquer custo) e possibilidades. Uma característica de quando um estilo surge é que apenas reconhece-se como novo depois que se consolida. Agora, uma questão filosófica importante no estudo de estilos de raciocínio é acerca da sua manutenção (quando torna-se autônomo de suas origens, de seus criadores).

Para Hacking, cada estilo de raciocínio introduz novas entidades (matemáticas, científicas, gramáticas etc.), ou seja, está associado a um debate ontológico acerca de novos tipos de objetos. Cada estilo introduz seu próprio debate porque insere um novo tipo de objeto e individua-o, no entanto, não são notados previamente entre as coisas que existem. Os objetos não são as novidades exclusivas da ocorrência de um novo estilo, uma vez que foram logo acima listadas tantas outras. Nelas têm-se características essenciais e definitivas para um estilo de raciocínio. Assim sendo, Hacking propõe uma hipótese para a condição necessária, para surgir um estilo de raciocínio: "cada estilo deveria introduzir a maioria ou todos os tipos listados acima, ou seja, objetos, evidências, sentenças, novos modos candidatos a verdade ou falsidade, leis ou modalidades e possibilidades; e deveria assim fazer de modo aberto, progressivo e criativo"[38].

Além de objetos como condição necessária para surgir um estilo, Hacking considera também a introdução de novos tipos de sentenças. Elas emergem a cada novo estilo de raciocínio, literalmente, trazem sentenças nunca ditas antes e apresentam-se como novas candidatas a serem verdade ou falsidade. Novos tipos de sentenças, que adquirem positividade ou falsidade por meio de um estilo de raciocínio, não são bem introduzidas por uma teoria da verdade por correspondência. Sentenças têm suas positividades apenas no contexto de um estilo de raciocínio. É que não há uma maneira de individuar o fato ao qual correspondem, exceto nos termos da forma como se pode investigar suas verdades, a saber, pelo uso do estilo apropriado. Para Hacking, entre as teorias da verdade e do significado, que encaixa melhor sentenças desse tipo introduzidas por um estilo de raciocínio é a teoria da verdade por verificação. A verdade de uma sentença, do tipo introduzida por um estilo de raciocínio, é encontrada pela operação do raciocínio sobre aquele mesmo estilo. Estilo acaba por tornar-se padrão de objetividade porque permite alcançar a verdade. Sentenças desse tipo são candidatas à verdade ou à falsidade somente no contexto de um estilo. Portanto, para Hacking, estilo em um certo sentido se autovalida. Sentenças relevantes são candidatas à verdade ou à falsidade apenas quando um estilo de raciocínio as faz assim. Essa afirmação produz um sentimento perturbador de circularidade, ao menos parece.

> A aparente circularidade na autovalidação de estilos é para ser bem-vinda. Isso ajuda a explicar porque, embora estilos possam evoluir ou serem abandonados, eles são curiosamente imunes a qualquer coisa parecida com refutação. Não há altos padrões aos quais respondam diretamente. A coisa excepcional acerca de estilos é que são estáveis, duradouros e acumulativos a longo prazo. Além disso, em um período mais curto, o conhecimento que adquirimos usando-os é moderadamente estável. Isto é, nossos conhecimentos são sujeitos à revolução, à mutação e a diversos tipos de esquecimentos; este é o conteúdo do que descobrimos, não como descobrimos, que é refutado. Aqui repousa a fonte para um certo tipo de estabilidade (Hacking, 1992, p. 13, minha tradução).

Hacking acredita que entender a característica de autovalidação dos estilos de raciocinar auxilia a apreender a quase-estabilidade da ciência. Já Crombie parece não seguir esse mesmo caminho, mas se fosse o caso, a diferença entre eles não seria de um julgamento histórico e de um filosófico e, sim, uma diferença apenas filosófica. A autovalidação é apenas um passo para se compreender a quase-estabilidade do conhecimento. Ocorre que há um processo de

[38] Cf. Hacking, 1992, p. 12, minha tradução.

desenvolvimento na ciência, não a partir da reflexão geral acerca de um estilo, muito menos acerca da ciência. Cada estilo de raciocínio possui suas próprias técnicas de autoestabilização características. Cada técnica requer uma análise detalhada específica com respeito ao estilo a qual é auxiliada por uma ilustração histórica vivida. Técnicas de estabilização possibilitam a autovalidação e o estilo persistirem, durarem. Além disso, cada estilo possui suas próprias técnicas de autoestabilização, contudo, umas são mais efetivas que outras. O autor considera que técnicas de autoestabilização retomam a questão acerca de como estilos são individuados. O processo seria o seguinte: primeiro considera-se a lista de estilos de Crombie; em seguida apresenta-se um critério (uma condição necessária) para um estilo surgir (é preciso que se introduzam novos tipos de objetos, leis etc); depois, cada estilo persiste, de seu modo peculiar e individual, porque tem atrelado a si suas próprias técnicas de autoestabilização. E isso constitui algo como um estilo de raciocínio.

CRÍTICAS AO CONCEITO DE IAN HACKING

Hacking valeu-se do trabalho de Crombie, cujo objetivo foi traçar da história da ciência a origem do estilo de pensamento europeu por uma análise antropológica comparativa, para desenvolver sua própria versão de estilo. Pode-se dizer que Hacking dedicou-se a oferecer uma base filosófica ao trabalho de seu antecessor. Apresentou questões fundamentais para um conceito de estilo, como: condições para se ter um estilo; características para a mudança de estilo; fatores para a validação e a cristalização de um estilo.

Seu objetivo foi oferecer uma base metafísica e epistemológica ao conceito de estilo crombiano. O primeiro passo foi mudar de estilos de pensamento para estilos de raciocínio, assim evita-se relacionar estilo a um mero efeito psicológico, subjetivo, relativo. Hacking quis justo que estilo tivesse um conceito objetivo e que produzisse proposições a serem valoradas dependendo de um certo raciocínio. E ainda que mantivesse a importante influência da história, de modo que a filosofia a usasse como uma ferramenta e dela buscasse esclarecimento e coerência de argumentos.

Hacking relembra que o termo "estilo" é polissêmico e por vezes é atribuído ao pessoal ou local (como, por exemplo, atribuir um estilo a Descartes ou a Desargues, ou mesmo, considerar a ocorrência de um estilo newtoniano, galileano ou hamiltoniano). O importante é saber quando estilo se refere ao pessoal e quando se refere a algo mais geral. Nas artes e nos esportes também um estilo particular pode ser compartilhado, algumas vezes até aperfeiçoado mas não aniquilado, isso para o autor possibilita a apreensão e distinção entre estilo pessoal e geral.

Hacking apresenta como outros autores, além de Crombie, consideraram diferentes modos de se separar o que seria um estilo pessoal de um geral. Primeiro, Ludwick Fleck[39] que trata uma teoria do estilo de pensamento e coletivo de pensamento. Fleck considera que um estilo de pensamento (impessoal) possui uma unidade social duradoura, qual seja, coletivo de pensamento; que é uma preparação ou prontidão intelectual para um modo particular e não outro de ver ou agir. De certo modo, estilo de pensamento determina condições de possibilidade daquilo que é pensado, ou, em outras palavras, torna possível algumas ideias enquanto outras torna impensáveis. Segundo, Michel Foucault[40] concebe o conceito de *epistéme* que é: exclusiva em sua época, homogênea, básica e sobre a qual erguem-se empiricidades próprias. Conjugada a essa noção, Foucault considera um *a priori* histórico (em um sentido arqueológico), que delimita na experiência em uma certa época um campo do saber possível e define o modo de ser de objetos no interior desses campos da maneira como aparecem; coordena teoricamente o olhar cotidiano e confere condições de enunciação acerca das coisas em um discurso.

Hacking apresentou Fleck e Foucault como dois autores que trataram condições de possibilidade do que pode vir a ser estilo de raciocínio, sem necessariamente relacionar-se com uma teoria (tal como fez Thomas Kuhn com seus paradigmas[41]). Essa preocupação é de fato importante pois estilo e teoria não podem se confundir, quando se trata das condições de possibilidade do estilo. Se estilo e teoria forem no limite uma e mesma coisa, então não há razões para se sustentar o conceito de estilo e muito menos esperar do estilo qualquer outro esclarecimento epistemológico para além da teoria.

O autor se identifica com Crombie no que tange a historicidade científica e a conformação taxonômica simples do que é possível de se raciocinar e enunciar. É preciso salientar que Hacking considera seu projeto uma extensão do de Kant, no tocante às condições de possibilidade da razão tornar a experiência objetiva. Mas difere de seu antecessor no que se refere às condições de possibilidade dos estilos de raciocínio científico-histórico-público para uma objetividade enquanto produto de certas investigações, certos problemas e certos modos de resposta a esses problemas.

O autor reclama que Crombie deixa de definir o que é estilo de pensamento, no entanto aponta ostensivamente por meio de exemplos históricos seis diferentes estilos (três de regularidades individuais e outros três de regularidades populacionais). E a matemática faz parte dos estilos na ciência, mesmo que tenha seu lugar de excelência, o estilo dedutivo. Aliás, não há restrições quanto a mescla de estilos pois a investigação científica independente da área do conhecimento não se limita a um ou outro estilo. As principais objeções de Hacking a Crombie são: (i) há uma diferença muito grande na consolidação e manutenção de estilos de pensamento no tempo – Hacking deseja do presente, como Foucault, reconhecer e distinguir objetos históricos para esclarecer conceitos e, se preciso, modificar a lista de estilos de seu antecessor; (ii) ocorre um anacronismo nos seis estilos de Crombie, a importância de questões se altera no tempo – a questão que precisa ser feita é o que o conceito de estilo efetiva; e que

[39] Cf. Fleck, L. Gênese e desenvolvimento de um fato científico. Belo Horizonte: Fabrefactum, 2010.

[40] Cf. Gomes, J. C. L. Nota sobre o conceito de epistéme Foucault. *Síntese Nova Fase*, Belo Horizonte, v. 18, n. 53, p.225–231, 1991.

[41] Cf. Hacking, 1982, p. 51 e Kuhn, T. S. A estrutura das revoluções científicas. Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. 5. ed. São Paulo: Perspectiva, 1998.

(iii) os estilos de pensamento crombianos estão centrados na Europa ocidental, em eventos históricos bem determinados – outros estilos podem ter surgido fora do circuito europeu, ou em eventos históricos diferentes dos considerados por Crombie, ou ainda a partir de uma composição atual nova pelo uso de mais de um estilo "clássico".

Hacking enfatiza que o estilo dedutivo para ele deve ser usado para se entender como a matemática estabelece verdades independente da experiência. Crombie considera o estilo dedutivo para a procura dos primeiros princípios. Com respeito a distinção histórica entre estilos experimental e hipotético, o primeiro considera que não se deve ir além dos observáveis para se fazer inferências. No entanto, o segundo aceita a conjectura de determinados objetos não-observáveis a serem considerados em modelos hipotéticos. Hacking, no entanto, aceita um composto entre os estilos experimental e hipotético, o estilo laboratorial, além de introduzir o estilo algorítmico que nasceu de uma condição externa ao circuito ocidental e é bastante eficiente para encontrar algoritmos.

É importante retomar aqui um dos aspectos que Hacking quis adicionar ao conceito de estilo, a objetividade. Principalmente, no que diz respeito ao modo como surge e como endereça a manutenção de padrões. Vimos que segundo Hacking cada estilo introduz: objetos, evidências, sentenças, modos de valoração, leis (ou modalidades) e possibilidades. Uma característica do surgimento de um estilo é que se considera como novo depois de consolidá-lo e mantê-lo. Cada estilo de raciocínio introduz novas entidades (matemáticas, científicas, gramaticais etc.), mas apenas essas entidades não podem ser a condição necessária para o surgimento de um novo estilo. Hacking propõe que cada estilo deverá introduzir a maioria senão todos os seguintes componentes: objetos, evidências, sentenças, modos de valoração, leis ou modalidades e possibilidades; sem a obrigação de serem introduzidos de modo aberto, progressivo e criativo. Mas quantos destes componentes de um estilo (objetos, evidências, sentenças, modos de valoração, leis e possibilidade) são necessários para se configurar um novo estilo? A maioria de quantos? Quantos bastam? Há componentes mais convincentes quando presentes que outros? Este aspectos, de fato, não estão de todo claros.

Além dessa lista e da introdução da maioria ou senão de todos os itens nela contidos para se fazer surgir um novo estilo, novos tipos de sentenças também deveria contar como um desses itens. Novas sentenças emergem a cada novo estilo de raciocínio e a valoração delas se dá internamente a cada estilo, não há uma maneira de individuar ao que novas sentenças correspondem, a não ser do interior do estilo a que foram originadas, conforme teoria da verdade por verificação. Portanto, para Hacking, estilos em um certo sentido se autovalidam. Sentenças relevantes são candidatas à verdade ou à falsidade apenas quando um estilo de raciocínio as faz assim; e essa afirmação produz uma circularidade aparente. Cada estilo de raciocínio possui suas próprias técnicas de autoestabilização características. E cada técnica requer uma análise detalhada específica com respeito ao estilo e é auxiliada por uma ilustração histórica vivida. Técnicas de estabilização possibilitam a autovalidação e o estilo persistir, durar.

Kusch[42] apresenta algumas expectativas e dificuldades a serem superadas acerca dos *estilos de raciocínio* de Hacking. Em primeiro lugar, conceitos epistemológicos e do próprio raciocínio possuem uma história e a epistemologia precisa, como uma importante tarefa, refletir as consequências dessa historicidade. O desafio seria justamente dar forma a uma "epistemologia histórica", que precisa ser diferente de um projeto historiográfico, porque se limita a documentar e analisar a história das mudanças de conceitos. Para superar o desafio da epistemologia ter a sua própria historicidade, a epistemologia deve seguir contiguamente a história da ciência, mas não apenas essa como também outras formas de história (por exemplo as histórias da arte ou da religião) podem também ser igualmente importantes.

Kusch considera que Crombie está inserido dentro dos contextos internalista e continuísta da historiografia convencional da revolução científica[43]. O primeiro contexto consiste em tentar explicar revoluções científicas somente a partir de questões internas à ciência, o segundo contexto considera outras questões (como políticas, sociais etc.) também cruciais. Para o continuísmo, a "revolução científica" não é uma expressão apropriada porque se tomarmos como exemplo os trabalhos da filosofia natural e da ciência dos séc. XVI e XVII, segundo essa concepção, a veríamos como resultado de uma evolução lenta do pensamento, uma evolução que começou ao menos mil anos antes. O internalismo de Crombie está ligado a seu continuismo[44], no sentido que o pensamento científico tem sua própria lógica de desenvolvimento de longa duração, em que não há espaço para causas sociais.

Hacking, por seu turno, escapa do continuísmo de Crombie. Embora seja anticontinuísta, não é possível afirmar que ele seja de fato um descontinuísta, pois não defende revoluções científicas enquanto uma mudança abrupta na ciência, no raciocínio científico. Mesmo assim, defende a ideia básica de Crombie de acordo com a qual seis (ou mais) estilos acumulados de raciocínio definem o pensamento científico europeu ocidental ao longo de sua história. Nem mesmo a análise do estilo laboratorial de Hacking cabe a tal noção de mudança. Os instrumentos de análise da história da ciência de Crombie não dão conta de mudanças radicais, nem mesmo os de Hacking.

Kusch[45] ressalta que uma opção para abordar a tarefa de chegar a um número limitado de estilos seria inverter a ordem de explicação e de inferência. Pode-se deixar que as considerações explicativas guiem inferências, ou seja, pode-se fazer da existência de estilos específicos de raciocínio a conclusão de uma inferência para a melhor explicação. Assumir entre uns e não outros estilos de raciocínio é parte da melhor explicação de certos fenômenos. E aqui a explicação "melhor" é, como sempre, *melhor* glosada como a explicação que mais aumenta o entendimento. Se bem sucedido, tal argumento poderia justificar por que se diz de um estilo laboratorial de *longa duração* em vez de muitos estilos distintos de curta duração de diferentes campos e períodos da ciência, e isto, no entanto, não é um caminho perseguido no trabalho de

[42] Cf. Kusch, 2010, p. 171.
[43] Cf. Kusch, 2010, p. 164.
[44] Cf. Kusch, 2010, p. 166.

Hacking.

Hacking então tentou identificar condições necessárias (e talvez suficientes) para estilos de raciocínio. Se dividir em etapas a identificação dessas condições, tem-se: na *etapa 1*, a introdução de objetos, evidências, sentenças (candidatas à verdade ou à falsidade), (leis ou de qualquer maneira) modalidades e possibilidades[46]; na *etapa 2*, a constituição de um estilo de raciocínio pela ocorrência de técnicas próprias de auto-estabilização[47]; e, na *etapa 3*, o critério decisivo que um estilo deve ter como base: capacidades cognitivas humanas[48].

Essas etapas não são realmente convincentes para Kusch[45]. Na *etapa 1*, Hacking presumivelmente não leva em consideração o raciocínio cristão-católico entre os estilos científicos. Kusch nos mostra que esse estilo de raciocínio por ele proposto cumpre os critérios da *etapa 1*. Kusch volta-se à epistemologia da experiência religiosa desenvolvida por William Alston[49] da percepção mística de Deus. Nela encontram-se novos tipos de objetos (isto é, deuses e anjos com quem podemos ter experiência diretamente), evidências (de que Deus aparece a mim é evidência *prima facie* de sua existência), sentenças (como: Deus disse-me que devo fazer a sua vontade dia após dia, em humildade e pobreza), modalidades e possibilidades (ou seja, é possível que Deus seja percebido por mim). A *Etapa 2* também não exclui o estilo de raciocínio de Alston, teóricos da percepção mística desenvolveram técnicas de autoestabilização (que Deus parece falar conosco não é bom o suficiente) – para que a experiência seja repassada, deve causar "paz interior" ao invés de perturbação, confiança em Deus antes que desespero, ou calma em vez de impaciência. O princípio de autoridade e o princípio da infalibilidade do Papa em questões teológicas fundamentais são outras técnicas de estabilização. Finalmente, os critérios da *etapa 3* são, ainda mais problemáticos, pois sem dúvida todo estilo deve ter como base capacidades cognitivas humanas[48] – mas então também devem ser formas de raciocínio independentes do estilo.

Kusch[45] considera uma evidência indireta a alegação de que Hacking não progrediu com seus critérios. Ele procura excluir a psicanálise com considerações *ad hoc* e superficiais. O autor relembra da maneira rápida como Hacking descarta a ideia de que a psicanálise pode ser uma ciência com seu próprio estilo, ou seja, que a psicanálise se baseia no estilo histórico que está chegando à extinção e o papel central dos textos de Freud é levado a minar suas credenciais científicas de qualquer maneira[50]. Não se trata de um único caso, ele também falha ao abordar o importante trabalho histórico sobre psicanálise e psiquiatria de Arnold Davidson e John Forrester[51], dois autores que apresentaram evidências relevantes para a afirmação de que

[45] Cf. Kusch, 2010, p. 170.
[46] Cf. Hacking, 1992, p. 189.
[47] Cf. Hacking, 1992, p. 194.
[48] Cf. Hacking, 2006a, p. 3.
[49] Cf. Alston, W. P. Perceiving God: The epistemology of religious experience. Ithaca, NY: Cornell University Press, 1991.

esses campos podem ser creditados com seus próprios estilos distintos.

Kusch[45] sustenta que não é apenas o problema de demarcação que a epistemologia histórica de Hacking não consegue resolver. Com relação ao projeto explicativo, também ainda há muito trabalho a ser feito. O ponto de vista do autor consiste na distinção inspirada em Fernand Braudel[52], de um estilo de raciocínio que atravessa milênios e muitas formas diferentes de investigação: um estilo *longue-durée* e de um outro estilo de raciocínio específico, para um período e um campo estreitamente definidos: um estilo *courte-durée* (por exemplo, o estilo experimental da psicologia introspectiva alemã entre 1890 e 1920). Entre estilos de *longue-durée* e estilos de *courte-durée* poderiamos colocar um estilo *moyenne-durée*, mas o principal interesse do autor aqui reside no contraste entre aqueles dois extremos.

Consideremos um estilo *longue-durée*, quanto menos propriedades o estilo resultante tiver, mais adequado o conceito de estilo será. Por exemplo, se se quiser estender sob o mesmo conceito de estilo os experimentos à vapor de Hero de 120 EC em Alexandria, os de pensamento psicológico introspectivo de Karl Bühler de 1907 e as de partículas no CERN de 2005, então o conceito de estilo experimental não pode conter muitas características. A diversidade de situações que o estilo tem de cobrir é muito grande. Kusch[53] conclui que a perda de conteúdo vai de mãos dadas com a perda de poder explicativo. O estilo experimental de Hero ao CERN não será de grande ajuda se se quiser explicar por que Bühler conduziu seus estudos de uma forma e não de outra. As perspectivas de explicação de fato são mais claras se se preferir estilos de *courte-durée*. Pode-se falar, por exemplo, do estilo experimental para conduzir investigações introspectivas que foram praticadas pela escola de Würzburg de psicólogos do pensamento entre 1900 e 1912, uma vez que o conceito deste estilo para períodos curtos tem muito mais recursos que estilos *longue-durée*. E também é melhor para explicar as ações de Bühler e as controvérsias em torno delas. Apesar disso, Kusch não descarta *a priori* outros fenômenos de registro histórico que possam ser explicados ao invocar estilos de *longue-durée*.

Talvez não seja apenas uma escolha simples entre estilos de *longue-durée* e de *courte-durée*, ambos imutáveis. Hacking[54] coloca que os estilos persistem em *longue-durée*, não porque permanecem os mesmos ao longo dos séculos, mas porque evoluem. Em outras palavras, há uma mudança de estilos de *longue-durée*. Permite-se que o único estilo experimental de Hero ao CERN tenha mudado de forma aos poucos da antiguidade para o presente, e que Hero, Bühler e CERN marcam estágios e variações dentro deste estilo global. A questão é então: o que explica as ações de Bühler, ou o estilo experimental de Hero ao CERN como tal ou a forma altamente específica que esse estilo tomou nos institutos psicológicos em Würzburg em

---

[50] Cf. Hacking, 2006c, p. 4.

[51] Cf. Davidson, A. The emergency of sexuality: Historical epistemology and the formation of concepts. Cambridge: Harvard university Press, 2001 e Forrester, J. If p, then what? Thinking in cases. *History of the Human Sciences*, n. 9, 1996, p. 1–25.

[52] Cf. Braudel, F. The Mediterranean and the Mediterranean world in the age of Phillip II. Traduzido por S. Reynolds. New York: Harper and Row, 1972–1974. 2 v.

[53] Cf. Kusch, 2010, p. 171.

Munique entre 1900 e 1912? Se a resposta é "o último", então tem-se optado novamente por *courte-durée explanantia*.

Apesar de Kusch ter apresentado críticas duras ao estilo de raciocínio de Hacking, seu maior crítico foi ele próprio. Trinta anos depois de seu texto *Language, Truth and Reason* (1982)[55], Hacking delimita francamente o alcance de seu conceito para estilo em *'Language, Truth and Reason' 30 years later* (2012)[56].

O autor inicia suas críticas pelo próprio termo "estilo" e a dificuldade de se apresentar um conceito a ele. Ao longo desse período, a história em torno desse termo denuncia muitos casos de usos pouco precisos. Sua proposta de "estilos de raciocínio científico" também não foi bem sucedida em precisão e seus usos (até abusivos) distanciaram-se de sua proposta inicial de 1982, bem como da de Crombie. Este distanciamento não indica o quanto o uso de "estilos de raciocínio" por pesquisadores, de modo geral, está equivocado, mas como Hacking estava ele próprio enganado acerca da aplicabilidade de sua expressão. O termo que Hacking acaba por conceber para estilos de pensamento científico de Crombie, com o intuito de ser claro ao referir-se a esses, é: estilos de pensamento científico e de fazer científico na tradição europeia. Para ele, o contexto será geralmente suficiente e raramente será necessário recorrer a uma determinada convenção.

Hacking procurou minuciosamente pelas condições necessárias e suficientes para que um estilo pertencesse à lista de Crombie. Em sua posição mais recente, Hacking considera que não há tais condições. Contudo, isso não é o mesmo que afirmar que a lista de estilos de pensamento e do fazer científico crombiano é arbitrária ou que a noção por trás dela é vaga ou ainda que se trata de um agrupamento por familiaridade. Crombie usa de seus estilos de modo puramente descritivo, como quem constata que existem diversos usos de gêneros distintos de investigação na ciência. Ademais, sua lista parece aplicar-se adequadamente à ciência.

Para Hacking, a persistência de estilos não se baseia em ter "boas" razões para usá-los, de fato, nós os utilizamos e por isso se tornam nossos padrões por um anarco-racionalismo[57]. Hacking retoma outros termos tratados por ele, uns positivamente, outros, negativamente. A cristalização é um caso positivo, ela traz uma metáfora útil para criar uma imagem de mudança nas práticas de um dado domínio. Por exemplo, antes da descoberta da prova por demonstração no leste mediterrâneo, não havia tal conceito mas algo aconteceu nas práticas antigas que cristalizou uma nova forma, a prova. Esta mesma metáfora encaixa-se também, segundo o autor, à mudança radical ocorrida quando modelos hipotéticos foram matematizados por Galileu. Ou seja, pontua a mudança de uma experimentação exploratória para uma criação sistemática de um fenômeno no laboratório.

---

54 Cf. Hacking, 2006b, p. 6.
55 Cf. Hacking, 1982.
56 Cf. Hacking, 2012.
57 Cf. Hacking, 1982, p. 51–53.

Hacking considera que os estilos de pensamento e do fazer científicos estão comprometidos com a descoberta da verdade. No sentido em que tornaram-se nossos padrões para descobrirmos a verdade, ou seja, determinaram um critério de veracidade. Isso remete a outro ponto, que os estilos de pensamento e do fazer crombianos são auto-autenticáveis ou que são autônomos, ou seja, eles não respondem a outros padrões mais altos de verdade além dos seus. Não há um fundamento para a verdade independente de seus próprios cânones. Mesmo assim, os estilos de Crombie se mantêm por uma questão pragmática. Eles funcionam porque possuem resultados a que se destinam ou que de certa forma agradam. O sucesso atual ajudará a determinar o sucesso futuro, como na máxima: "nada é mais bem sucedido que o sucesso"[58]. Do mesmo modo, mudamos o mundo com base naquilo que gostamos hoje, em parte porque o que gostamos está profundamente afetado pelas coisas com que fomos condicionados a gostar e que são produtos da ciência. Os estilos florescem em uma rede complexa de interações cuja evolução ajudam a determinar. Enquanto em seu *Language, Truth and Reason*, Hacking considera que a emergência de um novo estilo de pensamento e do fazer científico traz novas sentenças a serem candidatas a verdade ou a falsidade, em sua análise mais recente, seria agora mais prudente considerar novas sentenças como novas possibilidades (ou veracidades, de acordo com Bernard Williams em seu *Truth and Truthfulness*, 2002), no sentido em que verdade não possui história enquanto veracidade possui e pode surgir em diversos domínios.

1.4 ALTERNATIVAS PARA UM CONCEITO DE ESTILO NA MATEMÁTICA

Vimos até aqui uma detalhada discussão das noções de estilo sustentadas por Granger, Crombie e Hacking. A isso foram combinadas certas críticas que apontaram para uma insuficiência nos conceitos ou nas definições de estilo, que favorecesse uma compreensão livre de vagueza.

Tenho que reconhecer aspectos que, ao meu ver, constituem pontos bastante positivos das noções de estilo dos três autores, cada qual à sua maneira. Em primeiro lugar, todos os três dedicaram-se a considerar a possibilidade de haver estilo na matemática; Granger com maior ênfase que Crombie e Hacking. Poderiam ter partido de concepções de estilo para a ciência e depois averiguado se também seria o caso para aplicá-las à matemática. Ou ainda, seria possível – tal como Crombie parece colocar e Hacking, endossar – uma caracterização de estilo que não seja aplicada somente a um campo do saber como a matemática, mas que fosse também por ela usada. É importante também mirar para a possibilidade de um estilo que estivesse em um registro acima. Com isso quero dizer que seria o estilo um possível agrupador de campos de conhecimento distintos (como a biologia e a literatura) que os reúna, apesar das diferenças basilares, por comutarem de um "modo de ser" semelhante. Desse modo, seria possível qualquer campo do conhecimento ser, em determinadas práticas de cada saber, enquadrado em um certo estilo específico. Mesmo que determinados estilos tenham por excelência um lugar reservado

[58] Cf. Hacking, 2012, p. 605.

para certo campo do saber, como é o caso da matemática e do estilo dedutivo crombiano. Crombie e Hacking desejaram evidenciar este aspecto do estilo.

Por uma via diferente, Granger não deixou de salientar esse mesmo aspecto. À sua maneira, ele relaciona teoria e estilo na matemática. Ele contrasta diferentes teorias e a partir delas deseja considerar que teorias diferentes carregam em si estilos diferentes. E isso está muito claro em seu exemplo acerca do número complexo expresso ou por um vetor ou por uma matriz ou ainda por raízes de uma equação polinomial. Cada caso possui um estilo que possibilita diferentes intuições (do ordem epistemológica) para um e mesmo objeto matemático. Vimos que o autor não consegue escapar de dificuldades tais como apresentei logo acima (de como, por exemplo, garantir que diferentes autores com diferentes teorias matemáticas estejam falando ambos de um e mesmo objeto matemático – problema típico a ser enfrentado pelos realistas matemáticos –, mas não desejo aqui entrar no mérito da ontologia dos objetos matemáticos).

Granger tentou estabelecer uma forte relação entre um estilo individual e um estilo comum a um certo grupo (como ocorre nas artes, por exemplo, nas escolas literárias como o romantismo ou nas escolas de pintura como o expressionismo francês). As redundâncias ou sobredeterminações grangerianas são a tentativa de relacionar estilo individual com o estilo compartilhado, mesmo em um campo do conhecimento que valoriza a universalidade como é o caso da matemática. Valho-me de uma analogia quanto a essa característica acerca do estilo que, dos três autores, Granger parece dar mais atenção: a estilos individuais e a estilos compartilhados. Seria como o ajuste focal da composição de lentes de uma câmera fotográfica, capaz de dar zoom a um detalhe como uma pequena formiga sobre a pétala de uma flor com sua lente teleobjetiva e capaz também de recuar a imagem para abranger por inteiro uma grande montanha a partir de seu sopé, usando para isso uma grande angular potente. Em ambos os casos, a ocorrência de distorções (ou aberrações ópticas) nas imagens são inevitáveis. Contudo, o ganho na riqueza de detalhes da teleobjetiva e de panorama da grande angular compensa as dificuldades técnicas e físicas, mesmo que minimizadas. A grande angular de Granger não foi além da teoria. Um conceito de estilo, parece-me, exige um grau a mais de generalidade. Se não for o caso do conceito de estilo ser mais geral que uma determinada teoria, então, não há razões que justifiquem a insistência em sustentar um estilo.

Granger e Crombie efetivam uma constituição histórica do estilo. Eles reconhecem que se ocorre estilo, ele deve estar presente nos trabalhos de matemáticos inseridos em um contexto histórico. Para o segundo, as ideias científicas e seus argumentos devem ser tais que ultrapassem o círculo científico e assim estabeleçam um modo difundido de pensar, um estilo de pensamento (europeu). Já o primeiro localiza o matemático historicamente, valoriza o empreendimento científico da matemática a partir da obra de certo matemático, como a integração entre trabalho e prática científica; por outro lado, não leva em consideração círculos exteriores à ciência.

Com respeito à prática matemática e um conceito de estilo, Granger considera uma forte ligação. Para ele, estilo e prática são inseparáveis; o primeiro se consolida na ocorrência do segundo. Isso parece-me bastante razoável uma vez que, dentro do registro grangeriano, para se dar forma a um conteúdo, é preciso que se execute um trabalho realizado por um indivíduo localizado no espaço e no tempo. Desse modo, é pela prática do trabalho científico, no caso matemático, que se realiza uma obra, expressão desse indivíduo. Como as particularidades se agregam na estrutura por ele desenvolvida, então, o estilo lá impregnado só poderia ter sido expresso pela execução de um certo trabalho, ou seja, pela prática ali concretizada.

Hacking oferece à noção de estilo de pensamento de seu antecessor, Crombie, uma fundamentação filosófica. Para aquele primeiro, era preciso averiguar as condições para se (auto)estabelecer um estilo (já reformulado para raciocínio e não mais pensamento), (auto)validá-lo e cristalizá-lo. E caracterizar a condição necessária para se identificar um estilo, mesmo que essa verificação seja feita retrospectivamente à sua consolidação. E, aponta o autor, que tal condição é a concepção de objetos matemáticos, no caso. Contudo, ele vai além e apresenta uma lista de outros elementos que caracterizam um novo estilo, além de objetos, a saber: evidências, sentenças, novos modos de ser candidatos à verdade ou à falsidade, leis ou modalidades (a qualquer custo) e possibilidades.

Por fim, creio que cada uma das noções acerca de estilo vistas até aqui esboçam aspectos importantes para uma noção de estilo. Há outras duas noções que precisamos ainda considerar: Claude Chevalley[59], em *Variation du Style Mathématique* (1935), trata dos modos de escrita e Otávio Bueno[60], em *Styles of reasoning: A pluralist view* (2012), voltou-se ao conceito de estilo desenvolvido por Crombie-Hacking, sob uma perspectiva restrita e próxima da prática científica (e matemática). Ambos colocam estilo em possível conformidade com um macro e micro estado, tal como minha analogia ao ajuste focal de lentes de uma câmera fotográfica visa esboçar.

1.4.1 Conceito de estilo para Claude Chevalley

Para introduzir o conceito de estilo de Claude Chevalley[61], valho-me das considerações de David Rabouin[62], e de início apresento as principais motivações para se estudar um conceito de estilo na matemática: a história das ciências e das matemáticas, que em particular oferecem uma diversidade de objetos, de teorias e de conceitos que se estabilizam no tempo. A ocorrência de certa variação de significados e interpretações no tempo é denunciada por historiadores que com frequência apresentam entidades epistemológicas as quais circulam em diferentes contextos e tempos – enquanto entidades culturais (nacionais ou epistemológicas), escolares,

[59] Chevalley (1909-1984) foi um dos matemáticos estruturalistas que compôs o grupo Nicolas Bourbaki como membro fundador. Ele tratou alguns importantes fundamentos da matemática como: teoria dos números, geometria algébrica, teoria dos corpos de classes, teoria dos grupos finitos e teoria dos grupos algébricos.

[60] Bueno é professor e chefe do departamento de filosofia da Universidade de Miami, suas áreas de estudo são filosofia da ciência, da lógica e da matemática.

tradicionais, de pensamento coletivo (*denkkollektiv*) etc.

A maioria dos modelos matemáticos (ou científicos) existentes consideram precisamente o significado como a melhor maneira de se identificar entidades epistemológicas. Rabouin considera isso uma dificuldade sob o ponto de vista epistemológico a ser superado. Para isso, ele aventa uma solução sob o conceito de estilo, em específico, o que chama de *modo de escrita* (*ways of writing*). Além disso, o autor acrescenta a este o conceito o de âncoras materiais (*material anchors*), que pode circular em diversos contextos de interpretação, do mesmo modo que artefatos materiais (*material artifacts*) para as ciências experimentais. Mais especificamente, acerca do conceito de estilo para Chevalley, tem-se que se pode detectar na matemática, assim como na literatura, tendências gerais nos modos de escrita. Essas tendências são uma expressão do estilo (na matemática) e circulam amplamente em diversos lugares e em certos períodos históricos, de modo que podem servir para caracterizar esses dados períodos.

> O estilo matemático, assim como o estilo literário, não vai sofrer de uma época à outra flutuações significativas. Sem dúvida, a cada autor há um estilo próprio; mas podemos perceber a cada época uma tendência geral suficientemente bem reconhecível. Esse estilo, de tempos em tempos, sofre influência de personalidades matemáticas fortes [*puissantes*], revoluções que mudam a escrita, e portanto o pensamento, pelos períodos seguintes (Chevalley, 1935, p. 375, minha tradução).

Para Rabouin, o conceito de estilo de Chevalley possui um papel importante, a saber: de um guia aos modos de escrita nos aspectos mais próximos do concreto. Com ênfase particular nos fatores externos em oposição a outros modos internos de se caracterizar estilos em termos de conceitos, teorias, raciocínios ou objetos ou mesmo em termos de contextos culturais específicos. Além de não se conformar a formulações pouco claras das designações clássicas da atividade científica, como: escolas, tradições, programas de pesquisa, metodologias, práticas ou mesmo técnicas.

Rabouin argumenta que estilo, como modo de escrita, recai entre dois outros usos dominantes: (i) estilo local (ou cultural) e (ii) estilo geral (como os estilos de raciocínio de Crombie-Hacking). Ao menos, tal como Mancosu delineou, em um nível programático. O autor tem como principal motivação endereçar o desafio epistemológico formulado por Mancosu, que ainda carece de uma resposta satisfatória, a saber: os elementos estilísticos presentes no discurso matemático ou estão desprovidos de valor cognitivo e são apenas parte do *colorido* de seu próprio discurso ou ainda podem ser encarados como mais intimamente relacionados aos seus conteúdos cognitivos? Por seu turno, a abordagem de Chevalley:

1. testemunha a importância do estilo nas matemáticas pelo ponto de vista do matemático;

[61] Cf. Chevalley, 1935.
[62] Cf. Rabouin, 2013.

2. aponta para o papel dos modos de escrita do conhecimento matemático ou para um conteúdo cognitivo matemático de epistemologias compartilhadas (isto é, um conhecimento comum básico acerca da delineação aproximada das teorias em jogo e da caracterização de seus objetos) e

3. indica casos em que o que está estável é o modo de escrita e o que é potencialmente variável é seu entendimento.

Trata-se de uma abordagem que vai para o lado oposto de outras que são em termos de teorias ou conceitos. Rabouin relembra que em Granger – mesmo na tradução de Mancosu – estilo aparece de um lado como um modo de introduzir conceitos de uma teoria, de conectá-los e de unificá-los, de outro lado, como um modo de delimitar o que a intuição contribui para a determinação desses conceitos. Para Hacking, continua o autor, estilos coincidem com a introdução de novos domínios de objetos, ou melhor, em uma referência direta a Kant: novas condições *a priori* de possibilidade da experiência objetiva.

Chevalley está livre de considerações como essas de estilo relacionado a teorias e a conceitos. Para ele, estilo pode ser comum a teorias bastante diferentes (por exemplo o estilo axiomático moderno assemelha-se à topologia geral, à álgebra abstrata e à teoria de medidas), ajuda a circunscrevê-las e a descobrir novas arquiteturas conceituais, como o que pode ser capturado totalmente pelo próprio modo de se escrever, como indicado em seu *estilo-ε* weierstrassiano. Rabouin não se contenta com apenas essas duas considerações. De fato, ele deseja expandi-las, com o objetivo de elaborar uma noção mais rica para estilo que aquelas já existentes para a descrição da atividade matemática. Ele ocupa-se também com a independência relativa de estilos de escrita em relação a seus domínios de interpretação (em particular, a delineação de teorias, objetos e conceitos envolvidos); e com o valor cognitivo dos modos de escrita em si e de si mesmos (ou seja, considerações externas que carregam um tipo específico de inferências tal como na ancoragem material).

O termo "estilo" carece de definição, mesmo que autores (como os que já foram aqui citados) dedicaram-se seriamente a esclarecê-lo, é recorrente apresentar apenas uma lista de exemplos na expectativa de que a partir deles conforme-se uma noção. Chevalley não é uma exceção, como bem pontua Rabouin, ele declara a possibilidade de indicar *tendências gerais* nos *modos de escrita* da matemática, e seus exemplos são dois: (i) o *estilo-ε* desenvolvido por Karl Weierstrass e (ii) o *estilo axiomático* iniciado por David Hilbert para o plano geométrico. Há reconhecidamente revoluções que influenciam a escrita e portanto o pensamento, assevera Chevalley, e isso a princípio vai de encontro ao platonismo inserido em concepções de ideologia estruturalista. Rabouin enfatiza que o *estilo axiomático* (ou a noção de estrutura) é um estilo como outro qualquer e que estruturas não apresentam uma ontologia ajustada de modo geral à matemática, ao invés disso, elas apresentam uma prática temporária carregada de valor heurístico.

Chevalley publicou seu artigo em 1935, apenas um ano antes do artigo *Stilarten mathematischen Schaffens* de Ludwig Bieberbach (defensor dos ideais do nazismo). Nesse seu artigo, Bieberbach não apenas continuou a perseverar com a noção de estrutura mas também defendeu a noção de personalidade sob a influência da *psicologia racial* de Eric Rudolf Jaensch e a doutrina *Blut und Boden*[63]. Com base nisso, Bieberbach defendeu a existência de dois *estilos de criação matemática* muito diferentes: (i) o *estilo-j* de uma mente intuitiva alemã e (ii) o *estilo-s* de uma mente abstrata e analítica judia. Nesta circunstância polêmica, Chevalley indagou que seria muito difícil encaixar grandes matemáticos alemães como Weierstrass, Hilbert e Dedekind na taxonomia de Bieberbach. Além disso, esses matemáticos alemães podem ser associados a certos matemáticos judeus como Ernst Steinitz e Emmy Noether. Chevalley acrescentou ainda dois outros *estilos de escrita* (o *estilo-ε* e o estilo axiomático) que circulavam entre a Alemanha e a França em sua época. Henri Lebesgue e Maurice Fréchet foram matemáticos franceses importantes considerados pelo autor.

Sob esse contexto, Rabouin lembra que categorias analíticas possuem uma história e que por causa dessa história seus usos estão longe de serem neutros. E para evitar interpretações religiosas ou de resgate nacionalista ou ainda de essencialismo cultural por trás do conceito de estilo na história da ciência, é importante, então, não apenas enfatizar que estilos podem circular através de diferentes determinações culturais, como também podem oferecer um conteúdo positivo a essa categoria ao ancorá-la nos *modos de escrita* – que por um lado opõe-se à comunidade de atores que compartilha interpretações ou significados e por outro lado supõe-se uma universalidade pelas ideias platônicas em um fundo conceitual. Pelo exemplo, do *estilo-ε*, no contexto do debate entre Henri Poincaré e Weierstrass, Chevalley mostrou que mesmo quando existe um confronto fundamental entre matemáticos, um acaba por utilizar o *estilo do oponente* em certos casos que não estão inseridos no debate em questão. Ocorre também a incidência de *estilos individuais* que possivelmente envolvem especificidades culturais e biográficas. O autor considera que esses *estilos individuais* coexistem com algumas tendências gerais, marcadas pela circulação entre indivíduos e culturas e particularmente entre tradições nacionais e escolas.

Apesar de Chevalley considerar que personalidades fortes esculpam estilos na matemática, ele não oferece razões que sustentem essa afirmativa. Considere alguns contraexemplos levantados por Rabouin, como: (i) o cálculo matricial desenvolvido por diferentes autores em diferentes contextos, antes de emergir como uma teoria unificada; (ii) o *estilo algébrico* e Descartes, ou seja, *estilo algébrico* como uma mistura entre o desenvolvimento de René Descartes e de Pierre de Fermat de acordo com a importância dada por Frans van Schooten em sua edição comentada da *Géométrie*. Diante disto, pode-se dizer que se tratava de uma nova maneira de escrever, que refletia o pensamento matemático e que coincidiu com o desenvolvimento de uma nova maneira não só de fazer matemática mas de conceber alguns de

[63] Isto é *sangue e solo* que impõe a ideia de que a estabilidade política e o poder dependem da unificação da raça e do território.

seus objetos fundamentais.

O núcleo do argumento de Chevalley considera que existem tendências nos *modos de escrita* da matemática e esses estilos não fixam determinações culturais, variam através da história e circulam entre diferentes culturas. Rabouin salienta que Chevalley não deixa claro se se considera ou não algo como uma epistemologia compartilhada atrelada a um dado estilo. Se for o caso de se ter um compartilhamento, o exemplo de Poincaré e Weierstrass citado anteriormente pode ser usado na verdade como um contraexemplo, Chevalley não esclarece o significado de "revoluções atingem escritas e portanto pensamentos". Rabouin diz limitar-se a uma interpretação muito específica ao conteúdo epistemológico de um *estilo de escrita*, evita envolver-se com elementos de uma epistemologia compartilhada.

UMA COMPARAÇÃO COM OUTROS CONCEITOS DE ESTILO NA MATEMÁTICA

Rabouin coloca que há dois usos principais nos trabalhos de Gayon, Hacking e Mancosu acerca da categoria de estilo: (i) um local (ou cultural) e (ii) um outro geral (ou metodológico). Devido ao seu carácter filosófico, essas abordagens têm uma forte tendência a considerar o primeiro uso como uma categoria meramente descritiva que visa caracterizar a configuração epistemológica de uma dada comunidade, isso quando não for com respeito a apenas uma única pessoa, – esse uso é recorrente principalmente entre historiadores. E isso nada contribui para a resolução de problemas epistemológicos porque uma descrição local falha ao voltar-se obviamente para um ponto de vista mais largo. Hacking considera que estudos locais na história da ciência oferecem material, em que se aguarda um novo tipo de epistemologia. É possível considerar uma cooperação harmoniosa entre estilos para os historiadores e filósofos, por meio de um diálogo[64], classificada nas três tradições a seguir:

1. mais nova análise (de estudos de caso) de breves interações microssociais e macrossociais, entre pensadores e entre eles e comunidades mais amplas, de condições e objetos materiais em que descobertas foram feitas e sobre o que elas dizem respeito – nesse nível, eventos relevantes duram semanas ou algumas décadas no máximo;

2. concepções filosóficas atuais da verdade, do ser, da lógica, do significado e do conhecimento;

3. todos os modelos de relativa permanência, crescimento, automodulação e revisão de características da ciência – o resultado de sua permanência é um corpo em que se considera seus modos objetivos de determinar a verdade, a criação de crença, o estabelecimento de significados e do entendimento desses significados, ou seja, um corpo que é nada menos que a própria lógica.

[64] Cf. Hacking, I. Statistical language, statistical truth and statistical reason: the self-authentication of a style os scientific reasoning. In: Mcmullen, E. (Org.). Social Dimensions of Sciences. SouthBend: University of Notre Dame Press, 1991. p. 130-157.

Para Rabouin essa classificação é de certa forma problemática, porque visa descrever a atividade científica em três tradições. É possível concordar com o uso tradicional das categorias de estilo dos historiadores, consideradas principalmente pela primeira tradição, exceto Crombie – um dos poucos representantes da terceira tradição. Já Hacking pôde estrategicamente apresentar seu próprio programa de forma a combinar 1 e 3, desviando-se de 2. Desenvolver um conceito unificador de estilo consistente com análises e estudos de caso que escape de interações microssociais é problemático. O mesmo vale para interações que envolvam questões sobre a necessidade de uma estrutura filosófica derivada, de uma opinião construcionalista. Hacking oferece um sentido à manutenção dessas estruturas, isto é, propõe uma auto-estabilização do estilo (em *longue-durée* braudeliana) face a incidentes microssociais.

Rabouin considera que o conceito de *longue-durée* oferece uma perspectiva decepcionante para a matemática porque tende para a dedução matemática. O mesmo ocorre com o primeiro *estilo de pensamento* de Crombie, o estilo dedutivo: estilo com base na postulação cujo exemplo mais eminente é o da ciência matemática grega. Hacking em oposição reivindica que estilos não determinam conteúdo nem uma ciência específica, mas quando trata a matemática, ele recai, por exceção, no mesmo conceito de seu antecessor. Em suma, a matemática é o caso em que estilos de raciocínio estão correlacionados a uma ciência e que *longue-durée* é um campo do conhecimento por completo. No entanto, quando Hacking analisou exemplos de Crombie, indicou um outro estilo na matemática, a saber, o estilo algorítmico – com base no que seria um estilo indoarábico da matemática aplicada. De fato, o que caracteriza estilo é a forte ligação com a introdução de novos objetos. Mas na matemática lida-se com entidades não-empíricas, com a suposição de serem introduzidas por um estilo demonstrativo. Assim, no caso da algebrização da geometria, não se trata de um novo estilo mas de uma combinação de dois outros estilos. Se se considerar a algebrização da geometria como uma combinação dependente dos estilos dedutivo e algorítmico, então abre-se precedente para qualquer outra combinação de estilos e assim a proliferação deles.

Mancosu expõe claramente a urgência de se determinar ou uma escala média, *moyenne durée*, ou um registro sob o qual o conceito de estilo deve estar para ser epistemologicamente eficaz. Rabouin reforça a distinção entre estilos local e geral (ou em termos de duração, *courte-durée* e *longue-durée*), sob a o suporte de quadro metafísico. A crença na determinação de um campo filosófico em que historiadores e suas concepções históricas de estilos locais se conectariam entre si é bastante ilusória. De fato, estilos locais estão mais propriamente relacionados a documentos históricos em que o conhecimento ocorre (por assim dizer) e que fatos de conhecimento são reconstruídos a partir de certos documentos históricos e vice-versa. Como consequência, supõe-se que seja alguma categoria analítica, por não se explicar o que se considera como características próprias desses fatos – historiadores apenas tomam risco de projetar nos documentos seus próprios pré-conceitos. A necessidade de uma dimensão epistemológica nada tem a ver com uma posição normativa da filosofia – esse movimento epistemológico é uma boa maneira de contribuir para uma melhor descrição do que é conhecimento.

Estilos locais de modo geral identificam o conhecimento em correlação com certo *locus* (seja uma nação, uma escola, um laboratório ou mesmo um indivíduo) expresso em termos de um sistema de crenças, entendimentos e mais frequentemente em termos de significado das entidades em jogo. Mas mesmo se sistemas possuirem conceitos incompatíveis – como os modelos atômicos de Bohr e Rutherford –, eles podem ainda coexistir. Deve-se desistir da ideia de que a atividade científica tem base em conceitos transparentes ou sistemas coerentes de crenças acerca da descrição de objetos e teorias. Precisa-se, com objetivo de dar conta da evolução histórica de conceitos e teorias, delinear o que é invariante mediante essa evolução. Por razões óbvias, os próprios conceitos e teorias, ao menos no entendimento clássico, parecem candidatos inadequados. De qualquer modo, pontua Rabouin, há um lugar onde questões epistemológicas parecem inescapáveis.

Rabouin enfatiza que a teoria histórica da referência de Putnam e a ênfase colocada nas inferências mais que nos objetos e conceitos é o único quadro metafísico apropriado para qualquer epistemologia compatível com a história da ciência. Visões tradicionais de epistemologia compartilhada como sistema de crenças acerca de objetos fundamentais, conceitos e teorias ainda desempenham um papel importante para a discussão, como também a proposta de Chevalley, por caracterizar estilo de uma maneira completamente diferente, por meio de modos de escrita e de suas circulações. É possível descrever fenômenos de circulação que não são baseados em epistemologias compartilhadas ou em um entendimento comum. Isso direciona também a atenção a algo que permanece imperceptível nas concepções de conhecimento mais tradicionais, especialmente quando vem do conhecimento matemático: o papel da ancoragem material.

PLASTICIDADE CONCEITUAL

Para Rabouin, se se seguir a descrição centrada em uma análise interna de conceitos, seria impactante concluir que os primeiros herdeiros da obra matemática de Descartes não fossem cartesianos. Em segundo lugar, é também impactante encontrar-se, dependendo do contexto, muitos modos diferentes de interpretação de uma e mesma obra. Leitores famosos de Descartes, como Newton e Leibniz, não aceitaram a delimitação por ele imposta, no que a geometria deveria ser encerrada. O que é menos conhecido, continua Rabouin, é que essa rejeição não era de fato uma exceção mas a regra. O primeiro editor e comentador de Descartes, Franz van Schooten, já apresentava certas contestações em suas notas à *Geometria* de Descartes na publicação de 1649, quando ainda esse matemático francês estava vivo. van Schooten não hesitou em incluir em seus comentários (que acompanham a primeira edição da versão latina da obra [1659-1661]) um desenvolvimento acerca de tangentes em ciclóides (curva não admissível, de acordo com Descartes, na geometria). Além disso, na segundo edição de suas notas (dessa vez também em companhia à primeira edição latina da *Geometria*), van Schooten apresenta o método da normal de Fermat no lugar do de Descartes, quando a querela vívida acerca do valor dos respectivos métodos de Fermat e de Descartes em 1638 ainda era muito recente; a equiparação do comentador torna-se surpreendente.

O que para uns parecem ser diferentes métodos[65], para outros, como Granger, trata-se de diferentes estilos ainda muito relacionados a seus criadores. De fato isso não importa muito, a questão é que, sejam métodos sejam estilos, eles são rapidamente combinados de tal modo que se pode usar um no nome de outro. Por exemplo, John Wallis e James Gregory referiram-se a Descartes quando usaram o método das tangentes de Fermat. Essa é uma boa razão, enfatiza Rabouin, para não confundir estilo com método. Um mesmo estilo, no sentido de modo de escrita, pode envolver diferentes métodos (mesmo que opostos). Uma outra questão diz respeito ao modo de escrita não poder ser reduzido a uma simples notação. Por exemplo, Fermat não usou as notações exponenciais cartesianas mas as de Francois Viète, e seu método tornou-se público por Pierre Hérigone, que usou uma simbologia própria. Rabouin apresenta um outro exemplo em que estilo contribui para uma unidade mesmo quando certos métodos aplicados por determinados autores são extremamente opostos. O exemplo é acerca do tratado de Wallis, *Arithmetica infinitorum*, mais especificamente a atribuição a Descartes do método de se encontrar tangentes de Fermat.

Grandes matemáticos (como Isaac Newton, Leibniz, Huygens, Tschirnhaus, James e David Gregory), que foram profundamente influenciados pela *Geometria* de Descartes e contribuíram para a mudança da própria geometria na segunda metade do séc. XVII, discordam acerca de aspectos fundamentais dos conceitos iniciais de Descartes. Essa plasticidade conceitual, como Rabouin se refere, do estilo cartesiano é a razão crucial da geometria algebrizada ter evoluído de modo tão suave e rápido para o cálculo diferencial. Isso porque não é surpreendente de se perceber que a estabilização da geometria analítica (mesmo se fosse assim chamada) pode ser encontrada logo nos manuais do início do séc. XVIII, de autores como l'Hôpital, Antoine André Louis Reynaud, Nicolas Guisnée e (depois) Leonhard Euler. O estilo de Descartes deu condições para o nascimento histórico de duas teorias: a geometria analítica (que inclui o cálculo diferencial e o tratamento de curvas transcendentais) e a geometria algébrica (que inclui o tratamento de curvas algébricas). Esses mesmos autores discordam em um único fato, com respeito a questões epistemológicas que tornaram impossível caracterizar esse novo estilo da geometria em termos de uma epistemologia compartilhada, de uma configuração conceitual, de novos domínios de objetividade etc. que é a parte variável dessa história, reforça Rabouin.

[65] Posso interpretar aqui o termo "método" usado por Rabouin como uma procedimento bem organizado, logicamente encadeado, expresso por um modo de escrita, dependente de uma teoria, aplicado em casos muito específicos para se encontrar um determinado termo, dadas as condições iniciais exigidas. Por exemplo, o método das tangentes de Roberval tem como objetivo encontrar a tangente de uma curva, dado um certo ponto. Sabendo-se que a velocidade desse ponto sobre a curva é tangente a ela, ao se encontrar a relação que compõe esta velocidade, torna-se consequência disso traçar-se a tangente. Roberval, Gilles Personne de. *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les tangentes aux lignes courbes*, proposição V, 1693.

SISTEMAS DE ACOPLAMENTO DE INFERÊNCIAS

Rabouin já se posicionou com respeito a duas questões: seria o caso de caracterizar um estilo em termos de uma epistemologia compartilhada? Como caracterizar um estilo, por exemplo, cartesiano se não em termos de conceitos, do domínio de objetividade, de novas teorias ou de novas notações? Visões tradicionais estipulam uma epistemologia compartilhada como um sistema de crenças a respeito de objetos fundamentais, conceitos e teorias, e o autor se opõe a isso e coloca um conceito de estilo sob outra dimensão, modos de escrita e circulações. O autor se pergunta ainda se a circulação do modo de escrita seria mais que uma série de leituras divergentes, baseadas em mal-entendidos? Hacking e Georg Smith consideram, no ponto de vista de Rabouin, que a resposta para essa pergunta está fortemente influenciada pela escala de tempo em consideração. O autor considera uma escala de tempo média (*moyenne durée*).

A história da matemática apresentada logo acima parece suscitar uma simples sucessão de mal-entendidos locais do estilo cartesiano no início do séc. XVIII, que tomaram forma em uma série de manuais padronizados de matemática. Essa caracterização, que não é a de uma teoria em específico, envolve características raramente presentes nos autores da geração anterior e são, aos olhos modernos, típicas da geometria cartesiana. Rabouin pontua em primeiro lugar, as configurações iniciais dos eixos coordenados e da identificação direta de curvas com equações. A equação de uma curva depende *a priori* de uma escala de coordenadas de um sistema. Esse tipo de caracterização implica em se ter uma maneira de identificar formas diferentes para se determinar uma forma geral que corresponda à variedade de expressões algébricas, as quais representam uma e mesma curva. Ao enfrentar isso, matemáticos do início do séc. XVIII levantaram uma questão interessante: o núcleo real da geometria algebrizada *per se*, não foi o uso das técnicas algébricas na geometria e sim foi mais apropriadamente a iniciativa de procurar por uma técnica particular que permitisse encontrar formas algébricas gerais, isto é, o método dos coeficientes indeterminados.

Rabouin enfatiza que o método das normais de Descartes consiste em comparar duas equações do mesmo grau que expressem relações geométricas equivalentes e solucionem o problema em questão por meio da identificação de seus coeficientes. Charles René Reynaud[66], lembra o autor, descreveu-a como uma característica chave para resolução do problema de Pappus e para a construção de equações na *Geometria* de Descartes (reconstruído por van Schooten em seus comentários). Ele chega a responsabilizar comentadores de Descartes por não terem enfatizado esse aspecto (com exceção de John Craig na Inglaterra e de l'Hôpital na França). Rabouin enfatiza que nenhum dos comentadores ou filósofos, que se depararam com isso, tentaram oferecer uma caracterização de algo como um estilo cartesiano da geometria, sequer mencionaram-na como um elemento chave. Quando revisita-se a história da circulação da geometria cartesiana com tal indicativo em mente, vê-se imediatamente que esse método desempenhou um papel central e pode de fato ser considerado como um tipo de guia (*leitfaden*) que sobrevive a leituras divergentes.

Estilos enquanto modos de escrita poderiam designar simplesmente o que pode ser melhor caracterizado como a circulação de certos métodos, mas não é o que ocorre. Muitos matemáticos cartesianos não seguem os métodos das normais de Descartes e preferem os de Fermat. No método de Fermat, o núcleo do procedimento não é a identificação dos coeficientes de duas equações, mas a introdução de uma quantidade, que age como um incremento de uma variável que pode ser, depois de identificar alguns pontos da curva, considerado como que se tornando zero. Neste estágio, portanto, esse incremento pode ser eliminado das equações e assim chega-se ao resultado esperado. Uma questão que Rabouin coloca é: o que os autores consideram como novo e igualmente poderoso em ambos os métodos? Se é que consideram isso.

Ambos os métodos de Descartes e de Fermat repousam em um tipo de inferência hermética conjugada com um certo raciocínio geométrico. Isso permite dar uma caracterização mais precisa do estilo cartesiano, ao menos, coloca Rabouin, mais importante: o núcleo do novo estilo algébrico não está no uso da álgebra nela e dela própria (a qual existe muito tempo antes de Descartes e Fermat), mas e sim no acoplamento de tipos específicos de inferências computacionais com inferências geométricas. Neste sentido, reforça o autor, pode-se afirmar que o estilo cartesiano, mesmo que não desapareça repentinamente, toma uma virada dramática por volta de 1750 com a primeira formulação a qual esteve livre de certas inferências por diagramação. (Euler em 1748 pode ser considerado como um ponto de partida.) Deu-se início a um novo estilo que Chevalley batiza (com muitos outros matemáticos e comentadores) de análise algébrica.

As razões para se chamar a geometria cartesiana de estilo são: primeiro, que parece ser natural designar um modo de escrita para o estilo; segundo, que é claramente transversal a diferentes culturas, práticas ou métodos (atravessa diferentes culturas e agrega diferentes práticas e métodos) – de modo que esses termos clássicos não se adaptariam bem na descrição de um tipo de fenômeno que Rabouin está interessado; por fim, tendo como guia as motivações de Chevalley, há razões estratégicas para investir-se no uso de categorias de estilo e não apenas em puras determinações individuais ou em determinações culturais.

Seja um estilo leibniziano do cálculo diferencial. Rabouin considera bastante intrigante que o modo leibniziano de escrita do cálculo diferencial tenha se desenvolvido tão rapidamente no início do séc. XVIII na europa mesmo com profundas discordâncias acerca da natureza dos fundamentos conceituais e dos objetos. Quando os principais apoiadores do cálculo leibniziano na *Académie des Sciences* clamaram ao seu herói por uma postura pública com respeito à natureza das entidades fundamentais envolvidas em seu cálculo, perceberam que Leibniz discordava deles e assim pediram para que ele mantivesse uma polidez silenciosa para que não

[66] Cf. Reyneau, C. R. Analyse demontrée ou La méthode de résoudre les problêmes des mathématiques, expliquée et d'apprendre facilement ces sciences, Paris: J. Quillau, 1708.

arruinasse toda a estratégia deles. Esse fenômeno, aponta o autor, não é limitado à primeira geração de apoiadores do cálculo diferencial. Essa é a ocasião, propõe Rabouin, para recordar uma outra analogia impactante com respeito ao desenvolvimento da geometria cartesiana. O cálculo leibniziano foi desenvolvido tão rapidamente como uma mistura das características advindas das técnicas de Leibniz e de Newton, ao passo que ambos foram levados no final de suas vidas a uma importante controvérsia sobre suas respectivas originalidades e lançaram duas tradições aparentemente incompatíveis (culturalmente falando).

ANCORAGEM MATERIAL E *BLEND* CONCEITUAL

Edwin Hutchins a partir dos estudos do fenômeno de estabilização do raciocínio humano, conforme Rabouin, confronta duas estratégias diferentes: a primeira está ligada ao modo em que se estabiliza o raciocínio pela interpretação de seus componentes (por exemplo, quando se interpreta um raciocínio em um contexto familiar mais fácil) e pode-se por isso ser cunhado semanticamente; a segunda estratégia não apela a interpretações ou significados, mas ao fato de que se pode usar de uma configuração material (a qual pode ser percebida ou imaginada) para digamos raciocinar por nós. Como por exemplo quando se calcula com um régua de calcular ou com os dedos. Parte dessas inferências não está atada, neste caso, à interpretação de operações envolvidas, mas ao funcionamento de uma configuração material. Para esse tipo de estratégia cognitiva, Hutchins cunhou a expressão *ancoragem material* do raciocínio.

Hutchins notou que essa segunda estratégia ainda não foi bem estudada e abre um programa interessante para a história e filosofia da matemática. Para Rabouin, parece de fato haver uma forma de continuidade entre o uso difundido de ancoragem material no raciocínio cotidiano e o uso de artefatos simbólicos na matemática. Essa imagem está de acordo com o que Rabouin tentou desenvolver: estilo enquanto modos de escrita pode ser considerado como um tipo de *blend* em que alguma ancoragem material (o modo de escrita em seu aspecto material) está acoplada a um conceito espacial por um certo tipo de mapeamento – a ancoragem material pode entrar em tipos complexos de processos e pode envolver diferentes camadas de mapeamento conceitual. O que é mais importante e não deixa de ser enfatizado por Hutchins é que o *blend* então adquire uma forma de autonomia tal que pode ser usada para seu próprio fim e pode ser inserida em outros quadros conceituais do que aquele em que foi inicialmente conformado, providenciando a preservação das inferências em jogo nessa nova interpretação. E isso é suficiente, espera o autor, para indicar que estilos considerados como modos de escrita providenciem não apenas um importante fenômeno para estudo, mas também uma abertura interessante para se questionar o conhecimento matemático.

Por fim, Rabouin não defende que os *modos de escrita* ofereçam a única via para se entender a circulação e estabilização na história da matemática e nem mesmo que seja o único uso legítimo de estilo. O que de fato o autor destaca em sua obra é que *modos de* *escrita* ajuda-nos a entender certos fenômenos de estabilização na história da matemática, mais especificamente em casos que a variabilidade conceitual é crucial. Ademais, o conceito de *modos de escrita* trata uma visão da natureza do conhecimento matemático em que objetos, conceitos e teorias são deixados de lado, enquanto as exposições materiais (*material displays*) e os tipos de inferências que eles carregam são trazidos à tona. Isso pode estar de acordo com os requisitos de Hacking, com ênfase na ocorrência da mudança no que chamou de metafísica após Putnam. Mas o destaque, segundo Rabouin, nas exposições materiais abre um horizonte mais amplo, no qual Hutchins chamou a atenção com sua noção de ancoragem material (*material anchor*).

A ancoragem material ainda é preciosa quando se deseja entender como teorias, conceitos e objetos matemáticos podem se estabelecer, sem projetarem-se em seus desenvolvimentos, uma visão teleológica, na qual deveriam ser dados de antemão, como já constituídos. Assim, se nega a ideia de processo histórico de estabilização, isso porque a ancoragem material subjaz aspectos representacionais em um certo estilo. Um estudo acerca de estilos matemáticos poderia portanto ajudar a esboçar uma resposta na integração da história e filosofia da ciência: como dar conta de constituir teorias e domínios de objetividade, aceitando que esta constituição seja um processo histórico. Isto é, que a teoria e seu domínio de objetividade pretendido talvez se estabilizem apenas como resultado e não como condição de uma evolução histórica.

1.4.2 Conceito de estilo para Otávio Bueno

Bueno[67], como Hacking e diferente de Crombie, prefere usar *estilos de raciocínio* ao invés de estilos de pensamento, para evitar uma concepção psicológica de estilo. Além de que "raciocínio" parece ser mais apropriado que "pensamento", porque o que se quer é capturar estruturas de raciocínio (por exemplo, padrões de inferência dedutivos ou indutivos, padrões lógicos). Bueno relembra que Crombie faz um apanhado histórico e detalhado do pensamento científico europeu. E segundo sua análise, surgiu uma classificação de seis estilos (dedutivo, experimental, hipotético, taxonômico, estatístico e histórico-genético), que não se determinam no interior de teorias. De todo modo, a matemática faz parte desses estilos e o estilo dedutivo é seu lugar por excelência. As matemáticas, por exemplo, fazem parte de todos os seis estilos, não há um estilo separado para as matemáticas. Dentro dos estilos científicos (se considerar que são eles voltados de modo mais geral à ciência como um todo) a matemática se faz presente. Esse é o lugar ao qual ela, a matemática, pertence. Assim, se salienta, principalmente, uma continuidade entre as matemáticas e as ciências empíricas.

Uma forma de se pensar a relação das matemáticas com as ciências é que esses seis estilos crombianos incorporam as matemáticas (e vice-versa). Bueno coloca que se trata de uma forma de refletir sobre a matemática. Todavia, há diferenças importantes a serem consideradas entre as matemáticas e as ciências. Se se pensar o que é matemática para um construtivista e

[67] Cf. Bueno, 2014.

para um matemático clássico, seria suficiente falar apenas de uma diferenciação por estilo? De forma análoga, a matemática feita no século XVII e XVIII, em que as motivações empíricas introduziam conceitos, se contrastada com a matemática do século XX. Com David Hilbert, o conteúdo matemático se separar de qualquer interpretação empírica: por meio de princípios e relações é possível considerar que essas diferenças são elas propriamente caracterizadas por registros estilísticos distintos? Nestes exemplos, a princípio, notam-se abordagens diferentes de se fazer matemática, talvez, haja uma noção de estilo na matemática que dê conta de organizar essas formas de matemática.

Bueno pretende formular uma noção de estilo na matemática e analisar as relações entre ciências e matemáticas. Crombie, apesar de apresentar uma continuidade entre as ciências e as matemáticas, não chega nem a definir estilo de pensamento (ou raciocínio) de forma clara e ostensiva nem apresenta uma condição de identidade para estilos. Desse modo, podemos perguntar: o que faz com que um estilo permaneça o mesmo e que condições fazem com que um estilo seja diferente de outro? Acima de tudo, a principal questão a ser respondida é esta: quais são os requisitos para se formular uma noção de estilo?

Em primeiro lugar, o estilo é uma forma de investigação, de abordar questões em um certo domínio, que se divide em cinco componentes básicos. Para se ter um estilo, é preciso:

1. identificar certos tipos de questões que serão levantadas; por exemplo, no estilo dedutivo, há tipos de questões sobre a caracterização de objetos geométricos (como são constituídos? que propriedades possuem?);

2. dispor de técnicas e procedimentos para poder responder essas questões; no caso da geometria euclidiana, as técnicas se resumem a de régua e compasso, de tal modo que tudo aquilo que não pode ser construído mediante tais técnicas está fora do escopo dessa investigação;

3. possuir padrões de inferência aceitos como válidos para investigação de objetos em um determinado domínio; no caso do estilo dedutivo, são os padrões dedutivos de inferência; outros estilos evocarão outros padrões (por exemplo, indutivos, estatísticos, analógicos etc.);

4. empregar recursos heurísticos, ou seja, um procedimento de resolução de problemas de investigação; no caso do estilo dedutivo euclidiano é o emprego de diagramas o principal recurso heurístico;

5. constituir objetos; um estilo de pensamento deve identificar em que condições se constituem certos tipos de objetos de pesquisa: por exemplo, no caso do estilo dedutivo euclidiano, seus objetos são construídos a partir de régua e compasso, dados certos princípios (isto é, os cinco postulados de Euclides os quais conduzem a investigação).

Inicialmente, o que essa proposta de Bueno permite fazer no contexto das matemáticas? Há muitos aspectos das matemáticas que essa proposta permite identificar um estilo. Mas é importante salientar que estilo não pode ser teoria, ambos não podem ser confundidos, nos vários propósitos que o conceito de estilo irá desempenhar. Dos cinco componentes fundamentais apresentados acima, nenhum deles depende de uma teoria específica sobre um domínio em questão. O conceito de estilo precisa estar em uma categoria mais ampla que a de teoria, de modo a permitir identificar no âmbito de várias teorias de um mesmo domínio das ciências e das matemáticas alguns elementos comuns que alimentem uma análise mais fina dessas relações.

Bueno identifica alguns aspectos os quais acredita que a noção de estilo de raciocínio voltado às matemáticas precisa capturar. Em primeiro lugar, as provas. É possível que provas sejam das características matemáticas a mais distintiva em relação a outros saberes. Há várias formas de se pensar o que sejam provas. Hacking[68] identifica duas:

1. uma noção computacional de prova, que começa com Leibniz e acaba desencadeando nos séculos XX e XXI com o desenvolvimento da lógica matemática, é uma sequência de enunciados cada um dos quais ou é um axioma ou é dedutível por uma regra de inferência de um dos enunciados anteriores. O objetivo é mecanizar a derivação – Leibniz retomou a noção de *mathesis universalis*, uma noção relativamente formal de prova – e o papel da prova é estabelecer um resultado sem hiato. Essa concepção de prova, entretanto, não se adapta a grande parte da prática matemática. Os matemáticos dedicam-se mais a provas informais rigorosas que a provas caracterizadas desse modo. A princípio, é possível reconstruir essas provas informais linha a linha de modo formal. Mas, enfatiza Bueno, existem provas informais de cem páginas repletas de derivações iniciadas com sentenças do tipo: "é fácil ver que..." etc. Lançar-se a tarefa de formalizar linha a linha provas matemáticas informais parece ser um afazer sem fim. O melhor exemplo de como essa noção de prova se encontra na prática é na computação;

2. uma outra noção de prova que pode ser chamada de intuitiva é a noção cartesiana de prova. Nas *Regras para a Direção do Espírito* (1701, primeira versão em latim), Descartes estabelece um contraste entre dedução e indução. Um de seus ideais é obter uma prova em que se possa apreendê-la toda de uma vez só na sua mente: vê-se o resultado, apreende-se as várias relações envolvidas sem mediação. Trata-se, todavia, de uma noção muito difícil de ser executada. Novamente, sejam as provas de cem páginas anteriormente referidas, seria muito difícil ter uma intuição desse tipo de prova. Mesmo assim, para o autor, nas matemáticas contemporâneas, é muito visível o emprego desse tipo de prova, ainda que isso não ocorra à maneira de Descartes.

[68] Cf. Hacking, I. Why is there philosophy of mathematics at all? Cambridge: Cambridge University Press, 2014. p. 23–26.

Essas duas noções de provas são como dois extremos; há outras noções menos extremadas, que exprimem a riqueza e a variedade dos trabalhos dos matemáticos enquanto fazem matemática. Qualquer estilo de matemática precisa dar conta dessas noções de prova, como de outras também. A matemática é tradicionalmente pensada como uma disciplina em que provas têm uma função crucial, e isso talvez ignora um outro dado bastante importante para o autor, no que se refere ao trabalho do matemático: os recursos heurísticos para se conseguir resolver problemas. No fundo é isso que o matemático quer ao mostrar uma prova. Via de regra, uma prova matemática é obtida no fim dos trabalhos matemáticos, ou seja, quando o problema já foi de fato resolvido. A prova é o último passo, todo o resto são os resultados heurísticos para o matemático estar em condições de formular essa prova. Se a essência da matemática for lidar com padrões heurísticos, então não seriam mais as provas os aspectos mais importantes e sim as técnicas de solução de problemas. George Pólya discute aquele que provavelmente é o melhor exemplo de um matemático que tentava sobretudo dar um papel a conjecturas como uma parte integrante da prática matemática: Euler. Euler tinha uma intuição impressionante e usava dela em seus procedimentos, sua prática parecia pouco clara a quem não possuísse a mesma intuição matemática. Por exemplo, ele tomava uma sequência de números como $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, sem ter uma prova para isso, contudo oferece um argumento plausível que vale para determinados números.

No detalhe, há um problema de impregnação teórica no conceito de estilo. Não está claro, para Bueno, como caracterizar um objeto matemático, dada tentativa de encontrar um estilo, sem o uso de teorias matemáticas específicas dos domínios da matemática em questão. Mais especificamente, no momento em que se tem de detalhar o que seriam esses objetos, não há como fazê-lo sem considerar uma teoria matemática (como da geometria, álgebra, topologia, teoria de conjuntos ou algum domínio em particular), essa tentativa pode inclusive tornar-se uma teoria da matemática. Assim, ao invés de se ter um estilo mais geral, acaba-se recaindo inevitavelmente em um ramo da matemática. Segundo o autor, foi isso o que ocorreu com os intuicionistas, eles reclamavam dos matemáticos clássicos quanto ao uso do axioma da escolha, preferiram procedimentos construtivos para a introdução de objetos e, com isso, acabaram produzindo mais matemática. O grupo Bourbaki tentou sistematizar as várias estruturas matemáticas e as relações que elas têm entre si, ao fim e ao cabo, o que ocorreu foi mais matemática. Então, não há como escapar do domínio teórico da matemática, é justamente isso que encontramos aqui: ao se tentar formular um conceito de estilo das matemáticas, recaímos em mais matemática.

Sob essa perspectiva, Bueno volta-se para Granger e seu livro a *Filosofia do Estilo*, em particular seu exemplo acerca da introdução dos números complexos; há três formas diferentes de introduzi-los, para cada forma, é possível pensar em um estilo. Pode-se apresentar os números complexos a partir de representação trigonométrica, de vetores ou matrizes. Cada forma de caracterização dos números complexos pode ser entendida como um estilo diferente.

Mas na verdade cada um deles recai em uma certa teoria matemática específica de como conceber números complexos. É constitutivo para formulação desses números que se acabe evocando características específicas dos objetos em questão e é isso que Bueno chama de problema da impregnação teórica. Pode-se referir à ciência nos estilos dedutivo, hipotético, experimental, estatístico, probabilístico ou histórico-genético de Crombie sem especificar uma determinada teoria particular a qual esses estilos se apliquem. Contudo, na matemática, parece que esse mesmo processo não se aplica, porque para uma noção de estilo é preciso procurar por algo mais amplo do que teorias específicas em um certo domínio. Esse problema, assevera o autor, aparece na teoria que Granger desenvolveu na *Filosofia do Estilo*.

Granger apresenta três estilos matemáticos principais em seu texto. Um deles chama-se estilo euclidiano, o outro, estilo cartesiano (o qual contrasta com o estilo desarguiano) e, por fim, o estilo vetorial. Seu conceito central é o de magnitude geométrica, formulado de maneiras diferentes dentro dos contextos euclidiano, cartesiano e vetorial. Bueno enfatiza que cada um deles depende fundamentalmente de princípios específicos da geometria que foram evocados para se formular cada uma dessas caracterizações. Pode-se falar de estilo, mas no fundo está se falando de formas de caracterizações diferentes dessas magnitudes geométricas. Em vez de um estilo mais geral, o que se têm são teorias particulares. Uma teoria euclidiana da geometria, uma cartesiana e uma teoria vetorial, por fim, é isso que se evoca. Então, a noção de estilo não se torna geral, acaba por ser um ramo específico da geometria.

Bueno acredita também que o mesmo problema aparece, em um trabalho de Paolo Mancosu sobre a noção de estilo em matemática. Esse autor cogita que talvez em matemática não haja um estilo metodológico mais amplo como o do Crombie, mas estilos mais precisos os quais ele chama de locais, por exemplo:

1. técnicas diretas (de Bonaventura Cavalieri e Evangelista Torricelli) *versus* técnicas indiretas (Arquimedes) em geometria, formas diferentes de se classificar e se caracterizar objetos geométricos;

2. ou, se se pensar nos séculos XVII e XVIII, com as abordagens algébricas e geométricas em análise (Leonhard Euler *versus* Colin MacLaurin) – que são formas diferentes de se caracterizar o objeto da análise matemática –, então, novamente, tem-se caracterizações que na verdade tratam-se de teorias diferentes da análise. É isso que de fato ocorre: uma delas é uma teoria algébrica e a outra, uma geometria da análise;

3. outras abordagens, agora do século XIX, são as geométricas *versus* as analíticas, se se comparar os trabalhos de Nernhard Riemann com os de Karl Weierstrass;

4. as abordagens conceituais de Richard Dedekind *versus* abordagens computacionais de Leopold Kronecker em teorias dos números algébricos e por fim;

5. estilos estruturais *versus* estilos intuitivos em geometria algébrica (escola alemã *versus* escola italiana).

Cada um desses exemplos depende de caracterizações teóricas específicas para os objetos teóricos em apreço. No fundo, estamos diante de matemáticas distintas. Para Bueno, uma noção de estilo precisa ter um papel um pouco mais relevante, mais amplo, que teorias ou concepções diferentes de análise a serem contrastadas. E esse é o problema que o autor está chamando de impregnação teórica: ao invés de se ter estilos (enquanto uma categoria mais ampla), tem-se teorias distintas sobre objetos em apreço.

Talvez um modo de se ter um conceito de estilo e não recair em uma teoria matemática é pensar nas abordagens tradicionais de fundamentos da matemática (logicismo, formalismo e intuicionismo), conjectura Bueno. Pode ser o caso que esses fundamentos da matemática sejam estilos diferentes. Todavia, mesmo aí, adianta o autor, parece não ocorrer estilo. Considere por exemplo o logicismo, se retomarmos os cinco componentes fundamentais para uma noção de estilo, descritos acima, podemos aplicá-los na posição logicista para a matemática. O logicismo de Frege aplicado à aritmética oferece uma formulação precisa para os números; possui técnicas de solução de problemas, a saber, a análise lógica (isto é, reduzir conceitos a outros conceitos puramente lógicos com o suporte de definições); recursos heurísticos, cujo principal deles é evitar recursos heurísticos (ou seja, Frege disse que não usaria intuições pois ele desejava se distanciar do que achava ser a fonte de confusões intermináveis dos fundamentos da aritmética); com recurso à dedução, Frege desenvolve a lógica formal para implementá-la ao programa e aplicá-la na caracterização de objetos. (Frege define o que é um número, por exemplo: zero é o número do conceito que não é idêntico a si mesmo; um é o número do conceito idêntico a zero; dois é o número do conceito ou idêntico a zero ou a um e assim por diante).

Bueno ressalta que justo Frege quem tanto alertava para não usar intuições, por acreditar que elas podiam levar a equívocos, utilizou de um princípio, a lei básica cinco (a lei de filiação de um conjunto ou extensão de um sistema), que depende tacitamente da intuição. A lei básica cinco pode ser resumida nos seguintes termos: toda a propriedade determina um conceito, todo o conceito determina um conjunto de objetos que satisfazem aquela propriedade. Por exemplo, o conceito azul possui objetos que são azuis, o conceito carro possui objetos que são carros etc. Russell levanta objeções a esse conceito de conjunto contido na lei básica cinco quando afirma que um conjunto não é membro de si mesmo. Desse modo, a lei básica cinco deixa de ser universal porque revelou ser inconsistente. Frege, ao utilizar dessa lei básica cinco, é conduzido a um resultado inconsistente. Se tivesse usado o princípio de Hume (ou seja, que duas grandezas têm o mesmo número se e somente se elas são equinuméricas – um mapeamento um-a-um entre elas), seu resultado seria bem-sucedido. De fato, podemos esquecer a lei básica cinco de Frege (e isso é um resultado de Christian Wright), e assumir o princípio de Hume como seu axioma e dele deriva-se toda a aritmética do jeito que Frege queria, e ainda de modo consistente. O fundamento logicista para a matemática, representado aqui por Frege, satisfaz aparentemente os cinco componentes fundamentais para um conceito de estilo. O problema reside na maneira como o conceito de número está formulado na base do que é esse candidato a estilo. Tem-se neste exercício de busca por um estilo na matemática a ocorrência do problema da impregnação teórica, na concepção do que são números (objetos da aritmética). O mesmo acontece na abordagem formalista e intuicionista.

Com respeito a abordagem formalista da matemática, Bueno retoma da história da matemática os trabalhos de David Hilbert (*Fundamentos da Geometria* (1902)), quem tratou uma certa concepção de geometria com o objetivo de livrá-la da álgebra, ou seja, obter uma geometria sem números. Novamente, existe uma certa concepção de geometria por trás desse estilo. Os cinco componentes fundamentais para uma concepção de estilo, neste caso acerca da abordagem formalista da geometria, também revelam uma impregnação teórica. O mesmo vale para a abordagem intuicionista, a qual depende da noção predicativa de supremo em análise. Esta noção pressupõe, para caracterizar um número, que todos os outros números já devem estar formulados, pois,o supremo é definido por determinada relação com todos os demais números. A questão é: como formular uma análise sem essa noção? Esta é, pois, uma das motivações para se desenvolver uma das versões intuicionistas. Desse modo, nota-se a ocorrência de certa concepção teórica da análise por trás, norteando esse candidato a estilo: mais uma vez, reforça o autor, encontramos o impasse gerado pelo problema da impregnação teórica.

Não conseguimos nestes exemplos de abordagens fundamentais da matemática determinar um estilo. Talvez uma abordagem estruturalista aplicada à matemática possa ser avaliada como mais uma candidata a estilo na matemática. Nicolas Bourbaki, há pouco mencionado, na verdade um grupo de matemáticos, desempenhou um papel extremamente importante para repensar a natureza da matemática. No livro de teoria de conjunto (o qual inicia a obra), procura-se reconstruir toda a matemática a partir de estruturas. Primeiro, identificam-se as estruturas básicas (ou mães) da matemática e, a partir das interrelações dessas estruturas básicas, deriva-se todas as demais estruturas matemáticas, como: estruturas algébricas, estruturas topológicas, de ordem etc. Ao se aplicar os cinco componentes fundamentais para uma noção de estilo, nesta abordagem estuturalista da matemática, encontramos novamente a dificuldade imposta pelo problema da impregnação teórica. Na verdade as próprias estruturas básicas dependem de estruturas específicas das matemáticas (estruturas topológicas, de ordem, algébricas etc.). Mais uma vez, não há como depurar da noção de estilo qualquer pressuposto decorrente de determinadas teorias matemáticas. Isso, enfim, nos obriga concluir não ser possível alcançar uma noção de estilo com o grau de generalização que se esperava.

Então, uma conclusão levantada por Bueno é que talvez não haja um estilo na matemática, porque em todas as tentativas acima vimos que o candidato a estilo na matemática dependia fundamentalmente de teorias particulares. Talvez não seja possível formular um conceito de estilo nas matemáticas com o mesmo grau de generalidade encontrado nas ciências.

Mas há várias características que são matemáticas que constituem os estilos em ciência (dedutivas, experimentais, hipotéticas, taxonômicas, estatísticas, histórica-genéticas) e que envolvem noções matemáticas de um ramo ou de ramos específicos de teorias matemáticas.

Essa é, para Bueno, a beleza e a complexidade da matemática, pois ela sempre se volta a si mesma e gera mais matemática. Isto é, uma noção de estilo acaba tornando-se ou misturando-se com teorias matemáticas. Isso não significa que não haja uma noção de estilo adequada às matemáticas. A ideia de que haja estilos locais seja talvez mais útil. Porém, tem que se reconhecer que se trata de um projeto diferente do projeto inicial de se pensar estilo de raciocínio científico que visa encontrar características um pouco mais gerais no contexto puramente teórico, no qual tenta-se agrupar várias teorias dentro de um mesmo estilo. É esse ponto que ao menos no momento, nas palavras do autor: "não vejo como sair"[69]!

ESTILO ESTRITO DE RACIOCÍNIO DE O. BUENO

Apesar do problema da impregnação teórica apresentado por Bueno, quando na tentativa de oferecer uma definição para "estilo" que fosse mais geral que teorias, ele dá indícios em sua reflexão que se se empenhar no estudo de uma certa noção de estilo local (fundamentada nos trabalhos de Mancosu), talvez se tenha melhores resultados ou se recaia em uma conclusão menos frustrante. Bueno volta-se para a determinação de um estilo local o qual chamou de estilo estrito de raciocínio (*narrow style of reasoning*), cuja definição é a seguinte:

> Um estilo [estrito] de raciocínio, do modo como uso, é um padrão de relações de inferência usado para selecionar, interpretar e dar suporte a evidências para certos resultados. Se considerarmos domínios diferentes da investigação científica, diferentes estilos de raciocínio estão frequentemente envolvidos (Bueno, 2012, p. 657, minha tradução).

O conceito de estilo estrito de raciocínio de Bueno resume-se em um padrão de relações inferenciais usado para selecionar, interpretar e dar suporte a evidências de certos domínios da ciência em correspondência frequente com diferentes raciocínios de estilo. Uma questão importante para o autor é a de dar forma à prática científica a partir de estilos de raciocínio. Disso, invoca-se uma pluralidade de estilos de raciocínio oriundos de diferentes domínios da ciência, pluralidade essa que caracteriza uma falta de unidade na prática científica. Quanto à matemática, seu domínio demanda, pela sua própria prática, um estilo de raciocínio próprio, se comparado com outros domínios e com outras práticas. Ora, essa falta de unidade científica encontrada em diferentes domínios, seria também encontrada no interior de um e mesmo domínio como a matemática? Para Bueno, é preciso considerar que diferenças nos estilos de raciocínio levam a obtenção e a interpretação de resultados diferentes.

[69] Cf. Bueno, 2014.

É válido lembrar que, uma vez que o autor usa como ponto de partida os estudos de Hacking acerca de estilos de raciocínio, não interessa a Bueno relacionar teoria científica a uma determinada prática em um movimento de distanciamento entre o domínio do discurso da teoria científica e a filosofia da ciência. E, além disso, o autor deseja afastar-se da noção que teorias científicas não são elementos chave para a prática científica. Ele defende, pelo contrário, que teorias científicas acabam por limitar a atividade científica. Por isso, estilos de raciocínio não estão (e não podem estar) atados a teorias científicas particulares, mas sim ligados à prática científica. Hacking sistematiza características evidentes da atividade científica e sublinha padrões abrangentes, bem como diferenças importantes, de tais práticas com respeito aos estilos.

Bueno considera a possibilidade de se esboçar um estilo estrito de raciocínio que preserve características da prática orientada evidenciadas por Hacking. Para isso, é preciso considerar uma diversidade de práticas com o intuito de se evocar uma concepção de estilo de raciocínio que seja mais detalhada e mais restrita.

A classificação de estilos de Crombie e Hacking carrega características ainda muito amplas. Um estilo estrito de raciocínio tende a preservar características de uma prática orientada, mais restrita em domínios que um estilo amplo de raciocínio como o de Hacking. "O estilo laboratorial de raciocínio abrange uma multiplicidade de práticas experimentais que só podem ser agrupadas ao custo de desconsiderar diferenças significativas entre elas"[70]. Assim, estilo estrito de raciocínio acaba por ser uma alternativa para dar conta da diversidade de práticas em uma concepção mais refinada.

Bueno considera como crucial duas características para a concepção de estilo estrito de raciocínio: (i) ser fundamentalmente inferencial por natureza (ou seja, estar disponível para inferir informações relevantes do domínio sob investigação) e (ii) oferecer informações mais específicas acerca de domínios particulares de investigação, enquanto ainda estiver provendo alguma generalidade. A primeira característica compartilha com a noção de estilo amplo de raciocínio de Hacking a natureza inferencial. Com efeito, Hacking enfatiza o papel das condições de verdade para certos domínios, ao invés de concentrar-se naquilo que neles é capaz de preservar a verdade ao longo dos nexos inferenciais. Isso é secundário para a determinação do valor de verdade de proposições em questão. Para se encontrar o valor de verdade de uma certa proposição, deve-se pressupor que tal proposição se enquadra em determinadas condições de verdade. Mas não se pode ignorar que um objetivo mais amplo seja encontrar, se possível, um valor de verdade relevante. Contudo, em muitos exemplos o valor de verdade está limitado à evidência observável (ou seja, adequação empírica). Na segunda característica, a noção de estilo amplo de raciocínio de Hacking opera em um alto nível de abstração. As práticas inferenciais diferentes se enquadram por fundamento na descrição do raciocínio dedutivo em matemática.

[70] Cf. Bueno, 2012, p. 659, minha tradução.

> Se estamos interessados em dar sentido ao raciocínio dedutivo em matemática, é crucial examinar o estilo de raciocínio relevante em um nível de abstração substancialmente menor, de modo que diferenças significativas no raciocínio dedutivo possam ser examinadas e avaliadas. Pelo contrário, estilos de raciocínio entendidos estritamente – doravante, "estilos estritos de raciocínio" – operam em um nível de abstração que permite a identificação e o estudo dessas diferenças, preservando ainda alguma generalidade (Bueno, 2012, p. 659, minha tradução, grifos do original).

A introdução de estilos estritos de raciocínio não debilita sua própria noção, nem sua utilidade. Trata-se de uma tentativa de preservar a generalidade, com certas informações específicas acerca do domínio em questão. Bueno questiona o estilo laboratorial de Hacking, quando considera-o ainda amplo para a prática científica (mesmo para as ciências de laboratório). Se experimentos não utilizam de estilos de raciocínio e se tais estilos não são afetados pelo trabalho experimental, então estilos de raciocínio possuem relevância muito limitada para dar sentido à atividade dos cientistas empenhados em seus trabalhos experimentais. Uma noção de estilo estrito de raciocínio – que leva em consideração detalhes específicos de pesquisas científicas em domínios também específicos – parece estar melhor direcionada para esse fim. Desse modo, a noção de estilo estrito de raciocínio torna-se mais significativa.

> Os estilos estritos de raciocínio podem ser caracterizados em termos dos mecanismos que eles fornecem para representar o que são percebidos como possibilidades em um determinado domínio de pesquisa e para extrair inferências dessas possibilidades (juntamente com pressupostos adicionais) sobre o domínio em questão (Bueno, 2012, p. 660, minha tradução).

Representar possibilidades está aqui em direta relação com a ênfase que Hacking dá à especificação do alcance que proposições (sejam verdadeiras ou falsas) têm nos estilos amplos (em oposição a estritos) de raciocínio, ou seja, a verdade ou falsidade de proposições ocorre no interior de um certo estilo. Bueno deseja marcar uma diferença entre especificar quais proposições são verdadeiras ou falsas no interior de um estilo amplo de raciocínio e a formulação de condições de possibilidade de dadas afirmações no interior de estilos estritos de raciocínio. Estilos estritos de raciocínio formulam apenas o que são tomados como possíveis ou impossíveis no interior de certos domínios. E isso pode ser feito independentemente de qualquer compromisso particular com a verdade ou falsidade do discurso em questão. "Explorar possíveis atributos aceitos no domínio da investigação é um aspecto central de um estilo estrito de raciocínio."[71] Em parte, isso é feito pelo exame de várias relações entre objetos relevantes estudados no domínio de investigação. Outras possibilidades também são levadas em consideração, como, implementação de experimentos adequados por conta da construção de máquinas e da imaginação de certas hipóteses à luz de evidências disponíveis.

[71] Cf. Bueno, 2012, p. 660, minha tradução.

Bueno defende que representações e inferências estão relacionadas. Em casos de estilos estritos de raciocínio, as conexões entre elas emergem dos componentes-chave que as caracterizam: uma delas trata diretamente da representação, a outra, das relações inferenciais resultantes. Para representar um certo estado como possível, é preciso que estilos estritos de raciocínio (i) especifiquem um certo domínio de investigação e (ii) determinem certos *bits* de informação acerca do domínio aceito. Para a produção de inferências de um certo domínio, estilos estritos de raciocínio proveem um procedimento adequado para a geração de inferências que envolvem (a) uma dedução lógica (explícita ou não) e (b), de modo geral, procedimentos adequados de transferência de informações, que são altamente sensíveis ao contexto e dependem de suposições adicionais sobre o domínio em questão.

Para Bueno, a especificação de um domínio é alcançada pela identidade de certos objetos e de uma família de relações entre eles, que descreve configurações possíveis entre os objetos em questão. Uma informação aceita não precisa estar completa (e normalmente não está), existem várias lacunas de informação entre os objetos envolvidos em uma pesquisa científica. Pesquisadores geralmente não sabem se certas relações mantêm-se ou não entre os objetos relevantes. Devido a essas lacunas, pesquisas adicionais são requeridas e realizadas. Além disso, as informações aceitas sob um domínio não precisam ser verdadeiras, o único requisito é que sejam aceitas. É possível aceitar certos *bits* de informação sem considerá-los verdadeiros. De modo similar, o procedimento de geração de inferências oferecido por um estilo estrito de raciocínio não assume a verdade de uma informação sobre a qual versa. Nenhum dos dois componentes que caracterizam um procedimento de inferência (uma lógica e outros procedimentos de transferência de informações) dependem da verdade das informações relevantes.

> Existem estilos estritos de raciocínio distintos na matemática guiados, é claro, por certos princípios (tipicamente, princípios de compreensão) que caracterizam uma certa classe de objetos e relações entre eles. As conexões inferenciais são então estabelecidas entre os objetos relevantes com o objetivo de determinar suas propriedades e relações adicionais que possuem com outros objetos no domínio. Entre os mecanismos inferenciais, a lógica desempenha um papel limitado. O papel é limitado, uma vez que normalmente a lógica subjacente quase nunca é explícita, e inferências informais, mas rigorosas, em matemática, tipicamente, são apenas formalizadas quando existe a suspeita de um problema à espreita (Bueno, 2012, p. 660-661, minha tradução).

Parece-me que Bueno tenta aproximar matemática e ciência por um mesmo estilo estrito de raciocínio, sob um e mesmo quadro empírico. Mas no lugar dos dados adquiridos pelos instrumentos científicos, considera certos princípios como constituidores (não de dados, como é o caso da ciência sob uma abordagem empírica) de objetos matemáticos. E para constituir tais objetos matemáticos (não definitivamente), o autor inclui certos mecanismos inferenciais, responsáveis por produzir conexões inferenciais – ou seja, propriedades dos objetos matemáticos e relações adicionais entre esses objetos tidos como relevantes com outros objetos matemáticos do mesmo domínio.

A lógica a qual Bueno se refere – na citação logo acima – é nesses contextos a clássica. Isso acaba por ser uma restrição para os estilos de inferência envolvidos e para as conclusões a serem obtidas em contextos importantes. A norma da prática matemática está em procedimentos inferenciais não-construtivos, intolerantes e inconsistentes. Contudo, isso não impede que lógicas não-clássicas sejam invocadas. A lógica não é o único procedimento para geração de inferências na matemática. Diagramas, desenhos, figuras, imagens mentais, interpretações geométricas são apenas um exemplo de outros instrumentos que produzem inferências da atividade matemática. O autor considera que inferências não precisam preservar a verdade e nem oferecer justificações conclusivas acerca de resultados envolvidos. Há diversos exemplos em que recursos visuais desempenham um papel heurístico ao sugerirem razões para se manter um determinado resultado. Apenas os dispositivos com frequência não bastam para se estabelecer o resultado desejado, mas sugerem um caminho para prova. (Podem motivar que resultados em questão se sustentem ou podem ajudar no entendimento de certos aspectos da prova.)

Considere agora estilos estritos de raciocínio aplicado à matemática. Primeiro o autor considera o papel da intuição no entendimento geométrico, algo que pode trazer diferentes modos de conceitualizar a geometria, de acordo com a importância que se dá à intuição. Bueno fornece dois exemplos: uma tradição considera que a construção geométrica está ligada fundamentalmente ao espaço e depende de intuições de propriedades espaciais; a outra tradição, a geometria não está ligada particularmente ao espaço mais do que está a aritmética ou a álgebra; em outras palavras, a intuição não tem qualquer lugar privilegiado. Desse modo, esses dois estilos estritos de raciocínio promovem diferentes padrões e estratégias de prova. (Bueno segue adiante com mais um exemplo acerca de diferentes estilos estritos de raciocínio na matemática comparando provas de um matemático logicista e um matemático típico, que aceita provas informais contudo rigorosas; a conclusão do autor é a mesma já expressa acima.)

Bueno levanta outro aspecto importante de estilos estritos de raciocínio: as classes particulares de informações aceitas para individuação. Usar um determinado estilo estrito de raciocínio demanda aceitar uma certa classe particular de informações. Outrossim, mudanças substanciais de classes de informações aceitas indicam a mudança de estilo estrito de raciocínio, ou seja, um outro estilo surge sob o mesmo domínio de investigação. Se a quantidade de informações acerca de objetos relevantes sob um e mesmo domínio muda severamente, as conclusões obtidas sobre eles também mudarão e, da mesma maneira, as formas de raciocínio sobre eles não serão mantidas. Do mesmo modo, ocorre em muitos casos que a mudança do domínio de investigação geralmente equivale a mudar também o estilo estrito de raciocínio correspondente. Ocorre que por vezes uma expansão ou contração do domínio sob investigação pode não corresponder a uma mudança de estilo, mas um melhoramento, uma adequação no escopo. Enquanto os recursos centrais das informações aceitas sobre o domínio (revisado de acordo com o escopo alterado) se mantiverem os mesmos, bem como os componentes inferenciais do estilo de raciocínio, o próprio estilo se manterá.

Estilos estritos de raciocínio objetivam oferecer uma estrutura centrada e restrita para dar sentido a aspectos significativos da prática científica. Com respeito a isso, esses estilos foram introduzidos para desempenhar uma tarefa similar àquela já desempenhada pelos estilos amplos de raciocínio. A atenção à objetividade de Hacking não foi depreciada pelo compromisso com estilos estritos de raciocínio. Dadas as características mais contrastantes dos estilos estritos, esses estão mais preparados para acomodar traços específicos da prática científica do que os estilos amplos de raciocínio.

> Mas por que estilos estritos de raciocínio devem ser considerados estilos de raciocínio, em vez de apenas *bits* particulares de raciocínio? Porque apesar de serem estritos, ainda compartilham padrões comuns, dado que estão sob o mesmo domínio de investigação, invocam a mesma lógica e os mesmos recursos de transferência de informações. Esses componentes comuns reúnem os vários fragmentos de raciocínio em uma configuração comum e explicam por que certos dispositivos teóricos e padrões inferenciais são aceitos como legítimos e por que os outros são questionados ou rejeitados completamente. Por esse motivo, eles formam um estilo de raciocínio ao invés de apenas uma mistura de mecanismos inferenciais (Bueno, 2012, p. 661, minha tradução).

Para resumir: diferenças (nos campos da ciência incluindo a matemática) entre estilos de raciocínio levam a diferenças no modo como resultados relevantes são obtidos e interpretados. Disso tem-se uma visão plural acerca dos estilos de raciocínio sensível a variações de relações de inferência na prática científica.

O quadro desenhado por Bueno para estilos estritos de raciocínio também na matemática, em específico, leva em consideração cinco componentes fundamentais. Em resumo, para se ter estilo estrito de raciocínio na matemática é preciso: (i) definir um domínio de objetos matemáticos, sobre os quais aplicam-se (ii) certos princípios (de compreensão) que o orientam diferentemente. Da aplicação desses princípios, (iii) caracterizam-se certas classes de objetos e relações entre eles. Entre esses objetos, apenas os relevantes, é que (iv) estabilizam conexões de inferência para determinar suas propriedades e relações adicionais com outras objetos do mesmo domínio. Essas mesmas conexões de inferência (v) se realizam por meio de mecanismos inferenciais como: dedução (limitada), diagramas, desenhos, figuras, imagens mentais e interpretações geométricas.

Procedimentos inferenciais não-construtivos, inconsistentes e intolerantes, são a norma da prática matemática. Isso não significa, no entanto, que lógicas não-clássicas não podem ser invocadas. Mecanismo inferenciais sugerem geralmente caminhos para uma prova, motivam um resultado e ajudam a entender certos aspectos da própria prova. A partir disso, diferentes estilos estritos de raciocínio são requisitados e trazem com eles modos diversos de conceituar, bem como, diferentes padrões e estratégias de prova. Em poucas palavras, princípios constituem classes de objetos matemáticos relevantes, conexões inferenciais realizam-se por meio de certos mecanismos inferenciais (sejam ou não visuais) com o objetivo de determinar propriedades e relações adicionais daqueles objetos relevantes com outros em seus próprios domínios.

Bueno constata uma multiplicidade de estilos de raciocínio, tanto para diferentes tipos de estilos nas esferas ampla e estrita quanto em exemplos particulares em ambos os casos. Para esse último, ou seja, nos estilos estritos de raciocínio, ocorrem diferentes usos de imagens como fonte para evidência visual em certos domínios da ciência (seja para determinar a existência de um objeto ou de suas propriedades relevantes ou ainda para detectar a presença de um certo fenômeno). Para aquele primeiro, nos estilos amplos de raciocínio, há também exemplos de recursos visuais, como nos estilos dedutivo e laboratorial.

A cultura visual pressupõe um estilo de raciocínio, enquanto cultura de criação, manipulação e disseminação de imagens na prática científica. Há certas vantagens ao se interpretar tal estilo de raciocínio de modo estrito. Na ciência, em particular, culturas visuais especificam um certo domínio de investigação e determinadas suposições em um certo domínio. Esse domínio especifica objetos em estudo e as suposições neste domínio limitam-no. Ademais, culturas visuais também invocam uma classe particular de transferência ou procedimentos de inferência para extrair informações relevantes de imagens. O exame de objetos e de relações em um domínio será limitado pelas condições expressas por pressuposições, que moldam a compreensão de um domínio e sugerem indiretamente maneiras de explorá-lo e investigá-lo, desde que a cultura visual pressuponha um domínio de investigação e certas suposições.

> Mas como exatamente esses objetos são investigados? Este é o ponto em que a especificidade de uma cultura visual é invocada. A investigação é implementada em termos de construção, manipulação e interpretação de imagens científicas, que são produzidas por vários tipos de instrumentos, como microscópios de elétrons e sondas. As imagens científicas são usadas, em particular, em procedimentos de inferência, ou seja, são dispositivos que permitem aos pesquisadores extrair informações sobre o domínio representado pelas imagens relevantes e inferir, com base nessas informações, que uma configuração particular é obtida na amostra em estudo (Bueno, 2012, p. 662, minha tradução).

Bueno reforça então que culturas visuais exemplificam componentes chave de um estilo estrito de raciocínio, pois definem um domínio de objetos que repousam sobre uma classe de suposições aceitas com respeito a esse domínio; especificam uma classe de procedimentos de inferência usados na investigação de objetos relevantes. Culturas visuais formam estilos estritos de raciocínio e suas classes. De modo geral, certos instrumentos investigam diferentes domínios que, por seu turno, produzem imagens distintas no domínio pretendido. Essas imagens geram bases diferentes e multifacetadas para estabelecer relações inferenciais entre objetos sob investigação. Isso ilustra a importância de culturas visuais na prática científica.

A cultura visual não é a única fonte de pluralismo nos estilos de raciocínio. Ocorre também uma falta de unidade em outros campos, como: metodológico, ontológico, teórico, experimental e axiológico. Vejamos essas desunidades com mais detalhes.

a. Desunidade metodológica: não ocorre na ciência um método que unifique todos os campos científicos. De acordo com o domínio da ciência, diferentes métodos e estratégias de pesquisa são levantados. Se o método for específico, então não haverá possibilidade de unificar a diversidade de áreas na ciência. Agora, se o método for geral, então também não será capaz de fornecer uma unificação da ciência, uma vez que esse método geral pode ser aplicado para além dos limites da ciência.

b. Desunidade ontológica: de todas as formas de desunidade esta é a mais radical, pois como consequência considera que o próprio mundo em si não forma uma unidade. Não ocorre unidade entre os aspectos diversos da realidade.

c. Desunidade teórica: a falta de unidade na ciência advém das diversas teorias emergidas da prática científica, de modo que há muito pouco em comum entre campos científicos diferentes. A consequência disso é que teorias muito diferentes avançam cada qual em seu próprio campo. As diferenças residem nos conceitos, nos pressupostos básicos, nos componentes teóricos etc. A diferença básica entre teorias impossibilita o compartilhamento conceitual e de fundamento.

d. Desunidade experimental: as práticas experimentais nas ciências também são variadas. Têm-se em mesmo grau de importância experimentos tidos simples e aqueles tidos complexos.

e. Desunidade axiológica: a prática científica dispõe de diferentes objetivos. Por exemplo, em certos casos o objetivo é registrar e formular regularidades estatísticas, em outros, o objetivo é determinar resultados medidos. O primeiro pretende fornecer padrões estatísticos entre os fenômenos em consideração, o último produz um quadro certo que exibe os fenômenos relevantes.

> A diversidade de considerações metodológicas, teóricas, experimentais, axiológicas e ontológicas suporta uma forma de desunidade das ciências que acompanha estilos estritos de raciocínio. Claramente, as diferentes considerações metodológicas, teóricas e experimentais pressupõem, cada uma delas, suposições inferenciais particulares, que caracterizam, em parte, um estilo de raciocínio estrito. Essas premissas emergem de diversos contextos... Os pressupostos por inferência são utilizados na implementação de estratégias metodológicas específicas.(Bueno, 2012, p. 664, minha tradução).

Pressupostos de inferência, para o autor, são também empregados na construção de explicações teóricas de fenômenos empíricos. Além disso, são eles, de modo similar, centrais para a concepção, execução e resolução de experimentos, isto é, desempenham um papel-chave na caracterização de experimentos relevantes. Com diferentes pressupostos, tipos diferentes de experimento seriam implementados. Com respeito às diversas considerações axiológicas, diferentes objetivos perseguidos por diferentes comunidades científicas – mesmo que do mesmo campo – sugerem uma desunidade generalizada. E a implementação de objetivos particulares é alcançada pelo uso de instrumentos de inferência específicos para cada caso. O autor sustenta, portanto, que mais uma vez estilos estritos de raciocínio são relevantes. Mesma a desunidade ontológica (a mais radical) parece repousar sobre instrumentos de inferência particulares para articular uma dependência entre considerações teóricas e suas importâncias ontológicas. Neste sentido, estilos estritos de raciocínio surgem como motivação e suporte para este cenário.

1.5 UMA BREVE INTRODUÇÃO À PRÁTICA MATEMÁTICA

Com Bueno e Granger, vimos que um conceito de estilo pode ser associado à prática. Cada autor considera a junção de estilo com prática de um modo diferente e com propósitos diferentes. O primeiro propôs um conceito estrito de estilo com base nas caracterizações desenvolvidas por Crombie e Hacking e introduziu o conceito de prática ao estilo porque ela é determinante na realização de possibilidades e na composição de inferências de um certo domínio do saber. O segundo considerou a prática incorporada ao estilo como individualidade, uma redundância que não acrescenta qualquer informação à mensagem. As redundâncias, expressão do individual, persistem inevitavelmente no trabalho do cientista e do matemático, e Granger procura por uma expressão geral para estilo e não individual (ou local), por isso sua avaliação tem como base uma análise estilística, que avalia a obra de cientistas ou matemáticos na busca por maneiras de se apontar para um mesmo objeto científico ou matemático e julga-as serem expressões de estilos diferentes. Independente de qualquer crítica, ambos nos indicam o mesmo caminho, de voltarmo-nos também para a prática quando tratamos do conceito de estilo. Com objetivo de dar atenção à prática matemática, inicio esta seção com a contribuição de Paolo Mancosu acerca da filosofia da prática matemática, em uma breve descrição histórica de quando as pesquisas em filosofia da matemática começaram a considerar a prática matemática filosoficamente relevante.

Mancosu[72] lembra que por filosofia da matemática entende-se o seu conjunto específico de conceitos, categorias e teorias empregados, implícita ou explicitamente, pelos filósofos e matemáticos em seus discursos acerca da matemática. Em contrapartida, por prática matemática deve-se entender a matemática como é feita e não como deveria ser feita de acordo com um ponto de vista filosófico pré-concebido. Para isso, é preciso conhecer a matemática nos detalhes e buscar pela interrelação entre as histórias da filosofia e da matemática ao se tratar questões de fundamento

> Abordar a questão da prática matemática requer um conhecimento detalhado da literatura matemática do período. No entanto, do ponto de vista da filosofia da matemática, nem toda teoria ou teorema produzido por matemáticos tem a mesma importância. Alguns conceitos, teorias ou teoremas específicos funcionam como catalisadores para a ampla gama de problemas que eles encarnam de forma particularmente notável... Procuro situar minha investigação no cruzamento entre a história da filosofia e a história da matemática e definir uma noção geral do que poderiam ser chamados de fundamentos da matemática (Mancosu, 1999, p. 4, minha tradução).

Logo no início do séc. XX, ocorreu uma virada nas pesquisas em filosofia da matemática, a qual inaugurou e coordenou uma outra vertente para essa área do conhecimento. Esse mais novo campo da filosofia da matemática se dirige à prática matemática, como até então não havia acontecido. A epistemologia da matemática, quando trata apenas o problema do acesso ao conhecimento, acaba por se tornar um corpo uno do saber. Ela precisava ser alargada para além desse limite, para abordar outras questões que envolvam a produção, a evidência, a visualização, o raciocínio (diagramático), o entendimento e a explicação, além do problema do acesso a objetos matemáticos (abstratos). A ontologia pode se beneficiar disso quanto ao surgimento de certas questões em relação à epistemologia (por exemplo: *espécies naturais* na matemática) e à prática matemática (por exemplo: individuação de objetos e estruturação de categorias). O autor acredita que a atenção à prática matemática é uma condição necessária para a renovação da filosofia matemática. Não se trata de propor novos tópicos de pesquisa, mas de afirmar que certos tópicos não podem ser efetivamente abordados sem ampliar o alcance da própria prática matemática. Certos problemas filosóficos evidenciam-se somente quando uma determinada área da matemática é levada em consideração.

A filosofia da matemática teve duas fortes tradições, assegura Mancosu[73], os ditos programas fundacionistas clássicos – principalmente o fundacionismo de David Hilbert – e o intuicionismo. Na década de sessenta do século passado, Imre Lakatos e o grupo de filósofos *Mavericks* (formado por Phillip Kitcher, Thomas Tymoczko e outros) mostraram-se opostos à ambição da lógica matemática enquanto cânone da filosofia da matemática, tal como propunham os programas fundacionistas. Esses filósofos clamavam por uma análise da matemática que fosse mais fiel ao seu desenvolvimento histórico. As questões que os interessavam foram, entre outras: como a matemática se desenvolve? Como são os argumentos informais relacionados a argumentos formais? Como funciona a heurística na e da matemática? Existe um limite nítido entre descoberta e justificação na matemática?

[72] Cf. Mancosu, 1999.

[73] Cf. Mancosu, 2008, p. 6–7.

O estado atual da filosofia da matemática revela duas grandes vertentes gerais, relembra o autor: uma voltada aos fundamentos da matemática, a outra, à articulação da metodologia da matemática. Por exemplo, Phillip Kitcher[74] objetiva explicar a racionalidade do desenvolvimento da matemática em termos de transições entre práticas matemáticas, cujos padrões de mudança seguem uma generalização, uma sistematização e um rigor. O modelo de Kitcher, segundo Mancosu, propõe uma teoria da mudança na matemática com base em um modelo idealizado. Tomando como ponto de partida o modelo de Kitcher, as principais características da tradição dos *Mavericks* podem ser resumidas nestas três:

a. antifundacionismo, isto é, não há fundamentos indubitáveis para a matemática ou a matemática é uma atividade falível;

b. antilogicismo, isto é, é insuficiente para a compreensão adequada da matemática ou de seu desenvolvimento;

c. atenção à prática matemática, ou seja, apenas sua análise detalhada e a reconstrução de segmentos amplos e significativos da matemática podem oferecer uma filosofia da matemática que valha.

Esses novos programas de pesquisa em filosofia da matemática pautaram-se em certa medida na famosa crítica desenvolvida por Quine do limite entre analítico e sintético. Assim, estabeleceu-se uma relação entre a matemática e as ciências naturais, uma análise teórica da matemática alinhada à ciência natural. Filósofos começaram a aplicar ferramentas de análise à matemática que se tornaram canônicas na história e na filosofia das ciências naturais (propagonizados por Thomas Kuhn, por exemplo). Isso suscitou novas questões com respeito à matemática em analogia com às ciências naturais, tais como: a matemática é passível de ser revisada? Qual é a natureza do desenvolvimento matemático? Existe progresso na matemática? Existem revoluções em matemática?

No entanto, essa mais nova linha de pesquisa não conseguiu redirecionar substancialmente o curso da filosofia da matemática. O predomínio das abordagens ontológicas e epistemológicas tradicionais da filosofia da matemática nos últimos vinte anos mostra que essa nova abordagem não conseguiu produzir uma grande reorientação. Trazer à luz problemas novos que se revelaram importantes, tornou-se uma contribuição digna em si, no entanto, a atitude iconoclasta dos *Mavericks* com respeito aos fundamentos da matemática teve como consequência uma redução de sua esfera de influência. A importante virada que Quine deu à crítica empirista da lógica e da matemática no início dos anos quarenta do século passado, em resumo, testou o alcance da concepção nominalista da matemática. Ele estava ciente dos limites do nominalismo que o levava relutantemente a aceitar uma forma de platonismo baseada na indispensabilidade de quantificar sobre algumas das entidades abstratas nas ciências naturais.

[74] Cf. Kitcher, P. The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford: Oxford University Press, 1984.

A atenção que Quine dedicou à matemática sempre foi direcionada a sua estrutura lógica e ele não demonstrou qualquer interesse particular para outros aspectos da prática matemática. Havia, no entanto, outras possibilidades além daquelas abertas por Quine: a analogia entre matemática e física foi também explorada por aqueles que se posicionaram contra ao empirismo lógico ou mesmo ao empirismo quineano, mais notavelmente Kurt Gödel; Penelope Maddy combinou ambas as influências de Quine e Gödel em seu trabalho, que diferentemente dos *Mavericks*, originou-se de um engajamento com a tradição fundacionista na teoria de conjuntos.

O espírito geral, pontua Mancosu, da tradição iniciada por Lakatos e do naturalismo de Maddy exige bastante atenção à prática matemática. Isso não é o mesmo que afirmar que programas clássicos fundacionistas foram postos de lado em virtude de tais preocupações. Pelo contrário, programas tais como o do desenvolvimento de uma linguagem formal, a exemplo do que fez Gottlob Frege, cujo objetivo era capturar formalmente todas as formas válidas de raciocinar que ocorrem na matemática, exigiu um entendimento mais aguçado dos padrões de raciocínio que efetivamente pudessem ser encontrados na prática matemática. O núcleo do programa de Hilbert foi, entre outras coisas, a distinção entre elementos reais e ideais que também originam-se na prática matemática. A prática matemática é uma preocupação que também se pode encontrar em diversos outros programas, tais como: a teoria de prova contemporânea; os programas como a matemática reversa; o intuicionismo de Brouwer (que toma sua origem na distinção entre procedimentos construtivos e não-construtivos); os debates acerca da teoria algébrica do número no final do séc. XIX entre Leopold Kronecker e Richard Dedekind; os desenvolvimentos analíticos em filosofia da matemática. Em cada caso, o apelo à prática matemática é diferente daquele tomado pela tradição fundacionista, bem como pelos filósofos analíticos da matemática mais tradicional, na medida em que os últimos se limitaram a um aspecto central e, em última instância, estreito da variedade de atividades em que os matemáticos se envolvem.

Tappenden[75] faz também considerações importantes que envolvem a filosofia da prática matemática. Diferentemente de Mancosu, que trouxe uma história recente da matemática para valorizar as pesquisas da filosofia da matemática voltadas a elementos da prática matemática, Tappenden levanta, além de estilo, outros aspectos da pesquisa filosófica voltada à prática matemática: explicação, teorias e problemas. Em primeiro lugar, a explicação e o entendimento aplicam-se naturalmente a raciocínios matemáticos; em segundo, a preferência por teorias motivadas pelo entendimento de problemas envolve representação e visualização e; em terceiro, essa preferência pode informar racionalmente decisões mais apropriadas com respeito a axiomas ou quadros teóricos.

Tappenden objetiva conceituar o que chamou de fenômeno dos estilos de entendimento. Para isso, ele considera especialmente o papel da visualização como contribuição para a fecundidade na matemática, por ser mais elementar e possível de ser tratada. A fecundidade

[75] Cf. Tappenden, 2005.

seria verificada tanto na produção de soluções quanto na prospecção de novos e importantes problemas. O entendimento teria a função de guia na investigação matemática e a fecundidade seria um critério que demarcaria generalizações naturais.

Para Tappenden, uma prova nem sempre motiva um entendimento. Às vezes, é mais vantajoso procurar por um argumento ao invés de outro, devido, em parte, a definições ou a axiomas sob os quais está enquadrado. Uma razão para se aceitar um argumento em detrimento de outro é a fecundidade. A evidência disso repousa sobre a naturalidade das formulações matemáticas (por meio de princípios ou axiomas) e o entendimento de problemas matemáticos. Além disso, é geralmente uma condição necessária para um princípio ou definição propostos como naturais suportarem provas novas que lhe sejam interessantes.

Para o autor, poder escolher um argumento não basta, é preciso escolher o argumento certo, ou seja, tem que ser aquele argumento que se sustenta pela sua própria fecundidade, e não um mero caso de facilitação pontual do entendimento. Se alguma estrutura ou contexto teórico é considerado o certo porque se adequa ao entendimento de uma maneira que facilita a solução de problemas importantes, o julgamento será possível de revisão. Uma investigação subsequente pode revelar que a estrutura forneceu apenas a ilusão de entendimento, se suas vantagens se revelarem de curta duração ou unidimensional. Uma outra estrutura pode ser mais flexível, frutífera e de longo prazo. Inovação e prova de resultados importantes devem ser facilitados na prática em um longo período.

O que é ser *natural* ou ter uma formulação *natural*? Tappenden responde que uma formulação *natural* é aquela que reduz um problema ou um conceito a termos mais familiares, ou seja, o entendimento é alcançado pela reformulação de problemas inicialmente desconhecidos em termos que nos sejam familiares. Os critérios de naturalidade e de fecundidade de Tappenden talvez não sejam propriamente da filosofia e sim da psicologia. Essa objeção, segundo o autor, não se sustenta pois, apesar dos critérios de mais natural (ou mais simples) e mais fecundo poderem variarem acaso nossas conexões cerebrais fossem outras, a base para seus critérios são nossas práticas matemáticas ou científicas.

A habilidade para visualizar pode estar entre os fatores que dão forma ao subdomínio da prática matemática. Existem casos em que pessoas tentam visualizar e que essa visualização geralmente é útil e própria. Este segmento da atividade matemática é ignorado por parte dos filósofos porque ele pode ser atribuído a um fenômeno acidental – ou pragmático ou subjetivo ou ainda psicológico. É certo que em muitos casos exemplares, apesar da representação visual (por exemplo, diagramas) ajudar no raciocínio para solucionar um problema, trata-se de um mero auxílio para a memória (a exemplo da tabela de octônios[76]). Mas um recurso acidental, bastante perspícuo para a memória, por ser essencialmente visual, ajuda porque a percepção visual é um modo especialmente vívido da cognição.

[76] Octônios x são octetos (ou 8-uplas) de números reais x_i formados pela combinação linear de unitários (1, i, j, k, l, il, jl, e kl) escritos na forma $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 l + x_5 il + x_6 jl + x_7 kl$; em que cada

Há casos em que o recurso à visualização não é mera contingência. A função da visualização, para Tappenden, é muito mais intrincada e sistemática em casos como a abordagem de Bernhard Riemann para a análise complexa. Embora as superfícies de Riemann admitam uma representação visual particularmente direta, a fecundidade desse contexto teórico para a análise complexa persiste mesmo se os diagramas fossem todos evitados. Há um modo de se organizar aquilo que ocorre naturalmente com recurso direto à visualização, mas o modo de organização é teoricamente valioso mesmo sem as características essencialmente perceptuais.

O autor considera problemático o uso da distinção entre o contexto da descoberta e o contexto da justificação com respeito a formulações teóricas, uma vez que formulações teóricas são (ao menos parcialmente) fecundas porque facilitam a descoberta de provas. Este é um caso em que o contexto da descoberta e o da justificação não têm uma distinção bem definida. A formulação fecunda preferida geralmente não está dispensada no contexto da justificação porque não há provas disponíveis que não utilizem uma formulação que seja ela mesma fecunda. Tappenden também considera que a explicação e o entendimento guiam as investigações das teorias matemáticas e propõe um tratamento uniforme entre a matemática e a física, com respeito à explicação e ao entendimento, por considerar que ambas são governados pelos mesmos princípios. Para isso, Tappenden volta-se aos trabalhos de Michel Friedman[77] e Philip Kitcher[78], da década de 70, acerca da proposta de tratamento uniforme da explicação enquanto unificação entre casos de matemática pura e casos não-matemáticos.

Friedman propõe, relembra o autor, que fornecer uma explicação de um evento, em alguns casos importantes, é dar-lhe recursos para entendê-lo objetivamente e motivá-lo. Friedman sustenta o conceito de unificação nestes dois pontos: (i) as unificações consideradas de valor na prática envolvem algum tipo de avanço qualitativo e produzem teorias comparativamente homogêneas que subsumem duas ou mais teorias aparentemente heterogêneas; e (ii) a concepção de objetividade tem de ser flexível para ser verdadeira nos tipos de exemplo que tornam plausíveis questões de unificação.

Na prática, afirma Tappenden, distinguem-se algumas categorias e princípios como sendo mais naturais, inteligíveis ou autoexplicativos, no sentido de que são metodologicamente básicos, que outros. Desse modo, ou os princípios são mais razoáveis para apelar quando abordam-se problemas de um dado tipo, ou as categorias são mais naturais para serem empregadas em relação a um determinado assunto. Esses conceitos e princípios que possuem tal status não carecem de explicação. Parte da prática da matemática e da ciência (que as confere valor) incorporam razões das quais os princípios básicos escolhidos sejam os melhores.

combinação de unitários pode ser disposta em uma tabela.

[77] Cf. Friedman, M. Explanation and Scientific Understanding, *The Journal of Philosophy*, v.71, n. 1, p. 5–19, 1974.

[78] Cf. Kitcher, P. Explanation, Conjunction and Unification, *Journal of Philosophy*, v. 73, n. 8, p. 207–212, 1976; ______. Explanatory unification, *Philosophy of Science*, v. 48, n. 4, p. 507-531, 1982; ______. Explanatory Unification and the Causal Structure of the World. In: P. Kitcher e W. Salmon (Eds.), *Scientific Explanation*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1989.

Podem ocorrer mudanças gerais de ideias, visto que ou mais fatos são aprendidos ou a situação teórica é melhor apreciada ou ainda novos problemas são confrontados – na medida em que ou levam a uma reavaliação de técnicas aceitas ou pessoas que trabalham em um determinado campo apresentam novas ideias. Se "natural" for entendido como é aqui, então não há consequentemente perda de objetividade no que se encontra particularmente como natural ou autoexplicativo.

Tappenden reforça que isso favorece uma versão mitigada da tese fundamental que o entendimento é um dos objetivos de uma investigação nas matemáticas e nas ciências naturais. Em alguns casos, algo que proporciona uma unificação torna-se um constituinte importante para a expansão do entendimento e da compreensão. Unificar não é o mesmo que reduzir o número de axiomas; trata-se de algo mais complexo. O ponto de partida é que não se pode esperar uma questão do tipo que Friedman deseja sem informações concretas sobre os motivos oferecidos e aceitos na prática científica e matemática para escolher o que é natural ou razoável ou ainda apropriado para conceitos primitivos e formulações axiomáticas. Se algumas das características de teorias, que as tornam bons exemplos de unificação, são mais qualitativas e (por assim dizer) mais flexíveis, então isso não as tornam menos reais, importantes ou objetivas. Falta compreender melhor o que são estas características qualitativas – preferidas em relação às quantitativas, como redução do número de axiomas em favor do entendimento –, natural e homogênea, para uma unificação bem-sucedida.

Em seguida, o autor volta-se à pesquisa de Philip Kitcher e já de início aponta uma concordância entre ambos, no que diz respeito à afinidade entre explicações matemáticas e explicações nas ciências naturais. Kitcher abandona a ideia de que a unificação trata a redução do número de premissas independentemente aceitáveis. Seja K um conjunto de premissas aceitas por uma comunidade científica. Com um certo conjunto de argumentos alguns elementos de K são derivados a partir de outros elementos de K, tem-se assim uma sistematização de K. Os padrões de argumentos são uma classe restrita (instruções de preenchimento) de uma sequência esquemática de premissas em que se aceitam substituições em determinados espaços esquemáticos. Uma explicação $E(K)$ seria um argumento da melhor sistematização. Trata-se de uma questão global considerar que um argumento depende da estrutura geral de um quadro teórico para ser considerado uma explicação. As explicações são argumentos pertencentes a alguma classe com virtudes teóricas. Mas isso nos apresenta uma variedade de possibilidades, dependendo do critério de melhoria para as sistematizações propostas. Para Kitcher, a melhor sistematização de K é aquela que melhor satisfaz: (i) a minimização do número de padrões de derivação empregados e (ii) a maximização do número de conclusões geradas.

Tappenden e Kitcher estão em consenso quanto a maximização do número de conclusões geradas estar próxima da identificação de formulações fecundas. Para fazer sentido, na comparação de conjuntos de infinitas conclusões, e para chegar próximo da prática atual, é importante introduzir alguns refinamentos, com ênfase em conclusões importantes, interessantes e profundas. Para Kitcher, a melhor sistematização de K é aquela que melhor satisfaz as duas limitações de minimização do número de padrões de derivação empregados e de maximização do número de conclusões geradas. O objetivo da unificação torna-se fornecer esquemas únicos de argumento que se aplicam a uma variedade de casos especiais, com uma ênfase particular na redução do número de esquemas. Como nos axiomas, a ênfase sugerida não coincide com a prática real. Pelo contrário, é razoável e comum buscar muitos argumentos diferentes para um único resultado, cada argumento exemplificando diferentes princípios e explorando diferentes técnicas com diagnósticos teóricos diferentes. A busca de novas provas de resultados já estabelecidos é uma prática padrão.

Para Tappenden, a minimização do número de derivações (critério de Kitcher) enfrenta um problema análogo ao de Friedman (o de minimizar o número de premissas). Essa restrição quantitativa precisa, mais uma vez, de um reforço qualitativo. As derivações devem ser do tipo certo, a estrutura unificadora deve ser homogênea e suas categorias básicas, naturais. Desse modo, a defesa da unificação de Kitcher está incompleta. É preciso suplementá-la com outra consideração, qual seja, que o alcance de substituições aceitáveis seja delineado na prática, ou melhor, na prática verificam-se métodos de organização e isso se tomaria preferido e natural. Se os padrões uniformes não tornarem as coisas mais simples e se não derem suporte a mais descobertas e ainda se não oferecerem diagnósticos satisfatórios – resumindo, se não forem fecundos –, então deveriam ser deixados de lado.

Ao optar pela análise do exemplo de diferentes diagramas para o estudo das tensões envolvidas em uma ponte, Tappenden conclui que se trata de um exemplo satisfatório da perspectiva de Kitcher não apenas por causa do papel global da dualidade na formação do quadro, mas também pela formulação teórica preferida não se distinguir das situações físicas e matemáticas. De acordo com o exemplo, a estabilidade de uma configuração mecânica será a mesma, estejamos voltados a soma vetorial abstrata ou a configuração de uma ponte real. Trata-se de uma questão empírica: quais quadros teóricos serão representações adequadas de determinadas situações físicas? Apenas critérios matemáticos e geométricos entraram em jogo na escolha, dentre as muitas estruturas equivalentes, uma será aquela preferida para a representação da decomposição em forças componentes. Para o autor, isso produz um exemplo convincente de que as virtudes teóricas levam à escolha de uma estrutura matemática e consequentemente informam as ideias de compreensão e explicação que a estrutura induz e também influenciam na explicação de eventos físicos. O que conta como uma explicação aqui é moldado por aspectos globais da teoria, em vez de apenas por uma imagem de eventos individuais com dependências causais simples. Entre as vantagens que se observa, duas delas são de especial interesse:

(a) a formulação teórica tomou emprestado a fecundidade da geometria projetiva geral que informou os tratamentos de Karl Culmann (1821–1881) e Luigi Cremona (1830–1903)[79] e

(b) as representações visuais nos diagramas transmitiram de modo sistemático a informação de maneira particularmente vívida e efetiva, de tal modo que, os argumentos visuais tornam os erros mais fáceis de capturar, é mais fácil de aprender e ensinar sem um treinamento matemático extensivo e, o mais importante, possui esta vantagem teórica misteriosa mas crucial: simplesmente facilitam as coisas.

CONCLUSÃO

Este primeiro capítulo tinha como objetivo discutir e analisar os conceitos tanto de estilo nas ciências e nas matemáticas quanto de prática na matemática, além de relacionar entre si estilo e prática. Resta ainda indicar qual será a orientação adotada para tratarmos uma questão prática da história da matemática, o problema da braquistócrona, tema do próximo capítulo.

Mas antes disso, retomemos os aspectos principais de cada conceito discutido até aqui, para em seguida indicarmos que razões nos fizeram escolher um ao invés de outro. Comecemos então com o conceito de estilo de Granger e seus problemas.

Granger se vale de um conceito de estilo voltado tanto para as ciências quanto para a matemática. Ele parte do pressuposto que a matemática faz parte das ciências e o que as une é a linguagem (sem reduzir a matemática ao nominalismo ou ao intuicionismo). A mensagem linguística além de portar conteúdo, indica uma certa forma. Granger é adepto de uma acepção realista e, com isso, se compromete com problemas que esta acepção precisa lidar, como: o problema ontológico (como diferentes estilos matemáticos se referem ao mesmo objeto matemático), o problema epistemológico (como conhecer objetos matemáticos por diferentes estilos matemáticos) e o problema do acesso (como obtemos acesso ao objeto matemático).

Granger, de fato, preocupa-se com o aspecto mais geral do estilo e propõe realizar uma análise estilística a partir de fatos de estilos. Estes últimos dependem de uma experiência vivida, de um contato com uma determinada estrutura, e possibilitam a apreensão de um conceito matemático integrado a um sistema operatório, associado a implicações intuitivas. O fato de estilo insere-se como um elo entre o objeto matemático (a forma), a intuição deste objeto, um conceito matemático (conteúdo) inserido em um sistema operatório de uma certa estrutura e, por fim, a prática matemática de um determinado sujeito histórico. Granger relaciona diretamente estilo e prática, embora o faça às custas de uma complexidade comprometida com os problemas de seu realismo.

Em suma, o conceito de estilo para matemática de Granger não é definitivamente de todo descartável, há características em seu conceito muito promissoras (algumas tratadas

[79] Foram ambos matemáticos que trataram modelos gráficos de cálculo, o primeiro de origem alemã considerou mais especificamente esforços mecânicos em estruturas, já o segundo, italiano, levou em conta mais os aspectos do cálculo geométrico em quadros estáticos e projetivos.

também por outros autores do estilo como Crombie e Hacking). As dificuldades que o autor nos reserva com respeito ao seu conceito de estilo para matemática são os problemas que a acepção realista assumida por ele precisa enfrentar. São por esses motivos que não seguirei adiante com o conceito de estilo de Granger em nossa proposta de avaliar um conceito de estilo a partir de um caso histórico da matemática.

Rabouin trata do conceito de estilo na matemática a partir das ideias originais de Chevalley, de uma maneira completamente diferente, por meio de *modos de escrita* e de suas *circulações*. É possível descrever fenômenos de circulação que não são baseados em epistemologias compartilhadas ou em um entendimento comum compartilhado. Isso direciona a atenção a algo que permanece imperceptível nas concepções de conhecimento mais tradicionais, especialmente quando vem do conhecimento matemático: o papel da ancoragem material.

Para Rabouin, os *modos de escrita* ajuda-nos a entender a estabilização na história da matemática, em casos que a variabilidade conceitual seja fundamental. O conceito de *modos de escrita* deixa de lado objetos, conceitos, teorias e enfatiza a exposição material e os tipos de inferência que carregam, isso abre um horizonte mais amplo para aquilo que Hutchins conceituou como ancoragem material. A ancoragem material é preciosa quando se deseja entender como teorias, conceitos e objetos se estabilizam na história sem projetar em seus desenvolvimentos uma visão teleológica, na qual estes elementos deveriam ser dados de antemão como já constituídos. Desse modo se nega a ideia de um processo histórico de estabilização, porque à ancoragem material subjazem aspectos representacionais próprios de um certo estilo. Estudar estilos na matemática importa para compreender como teorias e domínios de objetividade se constituem em um processo histórico como um resultado e não como uma condição de evolução histórica.

Apesar de Rabouin ter apresentado uma nova perspectiva, com apoio nos trabalhos de Chevalley, para tratar um conceito de estilo na matemática – distante de quaisquer comprometimentos com respeito a uma teoria histórica da referência com ênfase em objetos ou mesmo de teorias, conceitos e objetos de uma epistemologia compartilhada – com base em uma constante expressa pelos *modos de escrita* e por artefatos simbólicos matemáticos aqui julgados como *ancoragem material*, o autor indica um caminho a ser trilhado que não é de fato o único (sem qualquer pretensão de sê-lo). Como aqui pretendemos avaliar um fato histórico enquanto uma possível instanciação estilística é que precisamos de um certo critério o qual Rabouin não nos oferece. Se fosse o caso de tratarmos historicamente teorias e domínios de objetividade, talvez os *modos de escrita* fossem uma alternativa atrativa. Seguiremos, portanto à procura de outra via que melhor se enquadre às nossas perspectivas subsequentes.

Crombie propõe um conceito de estilo derivado de uma antropologia comparativa com base em uma visão do pensamento europeu. Em outras palavras, Crombie pretende desenvolver uma visão histórica extensiva e comparativa do pensamento do europeu. Essa visão que Crombie estabelece incorpora compromissos intelectual e moral, disposições, memória e expectativas sobre concepções de natureza, ciência e seus modos de investigação da natureza e das consequências físicas e morais de nossas ações, isto é, o que se pode ou se deve fazer na convivência da humanidade com a natureza.

Dos compromissos surgem estruturas diversificadas reconhecidas como estilos de pensamento. Crombie levantou um total de seis estilos de pensamento: dedutivo, experimental, hipotético, taxonômico, estatístico e histórico-genético. Por um lado, esses estilos seguem uma sequência lógica e cronológica, imersos em contextos culturais em que se reúnem, por exemplo, questões científicas, artísticas, econômicas semelhantes sob a forma de um argumento comum. Por outro lado, estilos se diferem pelas suas concepções gerais de natureza e ciência e pelas expectativas que eles próprios implicam. O estilo na ciência e em outros domínios reúne características que o moldam e criam sua identidade. Essas características conferem ao estilo uma estrutura de autossustentação. Um estilo deve identificar regularidades na natureza, conceber objetos de pesquisa, desenvolver questões e métodos para obter evidências aceitas como tais e enunciar proposições. Estilos podem tanto não se comunicarem entre si quanto combinarem-se para formar um outro estilo. Crombie prevê mudanças de estilo e considera que isso ocorre quando mudam as características que o identificam. Em outras palavras, quando se introduz a identificação de novas regularidades na natureza, novos objetos de pesquisa emergem, surgem diferentes questões e métodos para se aceitar novas evidências e se enunciam novas proposições. Esse processo de renovação não ocorre linearmente; pelo contrário, acontece em diferentes níveis e direções, de modo disperso.

Hacking está em linha de sucessão com Crombie e deseja esclarecer um conceito de estilo (de raciocínio) que seja objetivo, isto é, que estabeleça certo tipo de verdade capaz de conduzir certas investigações e obter respostas a certos padrões. Hacking se difere um pouco de seu antecessor em virtude da importância conferida à ontologia dos objetos científicos. Para ele, cada (novo) estilo introduz principalmente – entre outras características como evidências, sentenças, novos modos candidatos a verdade ou a falsidade, leis ou modalidades e possibilidades – novos objetos. O autor defende um modo de objetividade no interior de um estilo de raciocínio, ou seja, não há sentenças candidatas à verdade nem objetos identificados previamente a qualquer estilo de raciocínio. Além disso, mudanças não ocorrem abruptamente; pelo contrário, reconhece-se um novo estilo quando se consolida e se estabiliza.

Para Hacking, cada estilo de raciocínio introduz novas entidades (matemáticas, científicas, gramáticas etc.), isto é, o estilo de raciocínio está associado à introdução de novos tipos de objetos e, com isso, a um debate ontológico. Cada estilo introduz seu próprio debate ontológico porque insere um novo tipo de objeto e individua-o. Todavia, os objetos não são as novidades exclusivas da ocorrência de um novo estilo. Logo acima listamos tantas outras novidades. Elas incorporam características essenciais e definitivas para um estilo de raciocínio. Hacking propõe a hipótese da condição necessária para surgir um estilo de raciocínio: cada estilo introduziria – de modo aberto, progressivo e criativo – a maior parte ou, senão, a totalidade de seus objetos, suas sentenças, seus novos candidatos a verdade ou falsidade, suas leis, modalidades e possibilidades.

O que conta como objetividade? Hacking preocupa-se com o modo como a objetividade surge e o modo como endereçar a questão do que mantém certos padrões locais de objetividade, ao invés de perguntar-se simplesmente como ser objetivo ou como chegar à verdade a longo prazo. Para ele, não há sentenças candidatas à verdade nem objetos identificados como sendo corretos, independente e anteriormente ao desenvolvimento de qualquer estilo de raciocínio. Um estilo de raciocínio se torna um padrão de objetividade porque estabelece em seu interior certas verdades – de certo modo, estilos de raciocínio de autovalidam. Parece haver uma circularidade bem-vinda: os próprios estilos de raciocínio validam as sentenças em seu interior. Não há uma refutação dos estilos de raciocínio ou altos padrões a que eles respondam. Estilos de raciocínio são estáveis, duradouros e cumulativos a longo prazo, de tal modo que, em períodos mais curtos, o conhecimento neles adquiridos podem ser considerados como moderadamente estáveis. Esse conteúdo ou o conhecimento descoberto está, no entanto, sujeito a revoluções, a mudanças ou mesmo ao esquecimento – o mesmo não ocorre com a forma que tornou possível sua descoberta.

Hacking defende que a autovalidação é apenas um passo para se compreender a quase-estabilidade do conhecimento. Técnicas de estabilização possibilitam a autovalidação e a persistência do estilo de raciocínio. Cada estilo possui suas próprias técnicas de estabilização, umas mais efetivas que outras.

Bueno determina, a partir dos conceitos estabelecidos historicamente por Crombie e fundamentados filosoficamente por Hacking, cinco componentes básicos que esclarecem aquilo que é preciso reunir para de fato se ter um estilo e que configuram um critério o qual poderá ser empregado para se determinar um estilo; a fim de se realizar uma noção de estilo aproximada a de uma forma de investigação ou de abordar questões em um certo domínio. Os cinco componentes básicos de Bueno são estes:

1. identificar certos tipos de questões;
2. dispor de técnicas e procedimentos;
3. possuir padrões de inferência aceitos como válidos para investigação de objetos em um determinado domínio;
4. dispor de recursos heurísticos para resolver questões;
5. constituir objetos e identificar em que condições se constituem certos tipos de objetos de pesquisa.

Esses cinco componentes básicos reunidos por Bueno já tinham sido indicados por Crombie e trabalhados por Hacking. Porém, quando Bueno reúne-os em cinco componentes, ele nos proporciona aquilo de mais básico que um estilo precisa possuir para ser considerado estilo e com isso nos oferece um critério que em si dá forma a uma estrutura mínima para a ocorrência de um estilo.

Estilo não pode ser confundido com teoria, e os componentes básicos acima não dependem de uma teoria específica. Desse modo, estilo põe-se a uma categoria mais ampla que teoria com fins a identificar dentre várias teorias de um mesmo domínio alguns elementos que lhe sejam comuns. Bueno nos mostra que para a ciência, os cinco componentes básicos servem a seu propósito, contudo, na matemática, o autor aponta que para se constituir objetos matemáticos é necessária uma teoria matemática precedente. Por isso, talvez, não haja estilo na matemática, ao menos, com o mesmo grau de generalidade das ciências.

Os estilo combrianos destinados à ciência não se adequam à matemática, pois envolvem noções matemáticas de um ramo ou de ramos específicos de teorias matemáticas. Bueno propõe estilos locais à matemática, o estilo estrito de raciocínio, cuja noção se fundamenta em um padrão de relações de inferência destinado a selecionar, interpretar e dar suporte a evidências em vista de determinados resultados. Estilos de raciocínio abordados de forma estrita ocorrem frequentemente em domínios diferentes da investigação científica.

Bueno considera a prática a partir da pluralidade de estilos estritos de raciocínio, da falta de unidade na atividade científica. Sendo assim, estilos não podem estar ligados a teorias específicas e sim a práticas, porque, diferentemente de Hacking, Bueno sustenta que teorias limitam a atividade científica.

A primeira característica do estilo estrito de raciocínio de Bueno compartilha a natureza inferencial com o estilo de raciocínio amplo de Hacking. Hacking enfatiza as condições de verdade exclusivamente associadas a determinados domínios. A noção, nesse registro, opera em um alto nível de abstração e suas práticas inferenciais enquadram-se fundamentalmente na dedução matemática. Bueno, por outro lado, considera que estilos estritos de raciocínio formulam apenas aquilo que é tomado como possível, algo que antecede e independe de considerações sobre a verdade ou falsidade de um discurso em questão. A investigação de atributos possíveis aceitos em um determinado domínio é central em um estilo estrito de raciocínio, no qual se relacionam representações e inferências. Para representar a possibilidade de um certo estado, os estilos estritos de raciocínio precisam especificar um certo domínio de investigação e determinar *bits* de informação do domínio aceito. Estilos estritos de raciocínio proporcionam um procedimento para criar inferências que envolve dedução lógica (explícita ou não) e procedimentos de transferência de informação. Especifica-se um domínio pela identidade de alguns objetos e de uma família de relações entre eles, que descreve configurações possíveis entre esses objetos. As informações aceitas podem estar incompletas. Em qualquer pesquisa científica é frequente ocorrer lacunas entre objetos envolvidos. Pesquisadores podem desconhecer certas relações, por isso pesquisas adicionais são requeridas. As informações de um domínio não precisam ser verdadeiras; bastam serem aceitas, e não é preciso que informações sejam verdadeiras para serem aceitas. O procedimento de geração de inferências de um estilo estrito de raciocínio não assume a verdade de uma informação, nem uma lógica, nem outros procedimentos de transferência de informações assumem a verdade das informações relevantes.

Bueno destaca que nos campos das ciências e das matemáticas, diferenças entre estilos de raciocínio conduzem a diferentes modos de obter e interpretar resultados relevantes. A partir disso, parece ser razoável adotar uma visão plural de estilos de raciocínio que sejam sensíveis a variações nas relações de inferência na prática matemática. Talvez Bueno tenha enfraquecido o problema da impregnação teórica uma vez que tenha restringido o poder de atuação de um estilo. Todavia, ao se localizar estritamente um estilo de raciocínio, os objetos matemáticos revelam-se importantes para a determinação de relações inferenciais. Desse modo, Bueno enfatiza as inferências (diversas) e o papel delas na constituição de relações entre objetos matemáticos. Essas relações levantam possibilidades dentro do domínio da matemática as quais (e isso é que desejo verificar) proporcionam raciocínios epistemologicamente relevantes. Desse modo, o problema de Mancosu não é deixado de lado. Ao contrário, Bueno nos habilita a voltarmo-nos também ao problema do conhecimento matemático, na medida em que vislumbrarmos uma saída satisfatória para um conceito de estilo.

Minha estratégia de trabalho será, portanto, apresentar no capítulo seguinte o fato histórico que pretendo analisar à luz do conceito de estilo estrito de raciocínio de Bueno, para ao final avaliar a razoabilidade de aceitar a abordagem estrita de estilo, com base em inferências, a partir do que essa abordagem permite esclarecer acerca do nosso entendimento matemático no caso específico do problema da braquistócrona.

2 O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA E SUAS PRIMEIRAS SOLUÇÕES

Chegam d'alta Cartago onde o castelo
Verás medrando agora e ingentes muros:
Mercam solo (do feito a alcunham Birsa)
Quanto um coiro taurino abranjam em tiras.

Virgílio, Eneida, livro I, linhas 385–388;
tradução de Odorico Mendes

INTRODUÇÃO

Virgílio canta, em sua *Eneida*[80] (séc. I AEC), os feitos do herói troiano que por fim culminaram na fundação de Roma. Eneias, protagonista virgiliano, fugiu de Tróia, por conta da invasão grega, cuja estratégia, desenhada por Ulisses, consistiu em conduzir soldados para dentro da cidade de muralhas intransponíveis, escondidos no interior de um grande cavalo de madeira. Tróia não resistiu ao embuste grego e ruiu sobre suas próprias bases. Eneias fugiu com Aquines, seu pai, nos ombros e de mãos dadas com seu filho, Ascânio. No sétimo ano após o infortúnio, Eneias enfrentou uma grande tempestade, quando navegava pelos mares do Mediterrâneo e acabou levado para a costa africana, próxima a Cartago, onde foi acolhido por Dido, rainha dos cartagineses, segundo o costume grego – no qual todo estrangeiro deve ser bem recepcionado e a ele oferecidos banho, unguento, roupas limpas e um grande banquete. A rainha Dido se apaixonou por ele, mas esse romance foi efêmero, tão logo pôde, Eneias partiu para Itália. Dido desejava-o ao seu lado para reinarem juntos, no entanto, contrariada e bastante frustrada, ela percorreu sua cidade e sobre uma pira sacrificial matou-se, logo depois de prever as desgraças que Roma sofreria de Cartago: as três guerras púnicas. Virgílio usou a lenda da rainha Dido e inseriu-a em seu épico, mesmo havendo um hiato de trezentos anos entre a fundação de Cartago e a destruição de Tróia.

A lenda histórica de Dido[81] começou quando o rei de Tiro, Muto, seu pai, morreu, e o reino tírio tornou-se, então, legado dela e de Pigmalião, seu irmão. Contudo, foi a Pigmalião, embora ainda criança, quem o povo de Tiro clamou para o cargo régio. Dido tentou usurpar dele o reinado, casando-se com Sicarbas, seu tio e sacerdote de Héracles, segunda figura do Estado depois do rei. Pigmalião antecipou-se ao golpe de sua irmã e mandou matar Sicarbas, Dido, então, resolveu fugir. Ela escapou em segredo com os tesouros de seu tio e na companhia de certos nobres tírios insatisfeitos. Durante a viagem, Dido tentou enganar seu irmão quando atirou ostensivamente ao mar sacos de areia, dizia serem de ouro e que os oferecia à alma de seu marido. E assim, seguiu para onde hoje é Tunes, costa norte da Tunísia, na época território

[80] Cf. Virgílio (2010). *Eneida*. Tradução e notas de Odorico Mendes. 2 Ed. São Paulo: Ateliê Editorial.

do povo gétulo. Lá, Dido negociou com Jarbas, rei dos nativos nômades, a propriedade de uma porção de terra. O rei, então, ofertou-lhe a terra que o couro de touro pudesse cobrir. O que a princípio pareceu uma grande ironia de Jarbas, nas mãos de Dido tornou-se um engodo para reclamar para si a propriedade de uma grande extensão de terra. Dido, logo, mandou talhar o couro do animal em estreitas tiras, as mais finas possíveis, e, em seguida, uniu-as em um grande cordel e cercou uma vasta área circular onde fundou a cidade de Birsa[82] (vide figura 2). Ao entorno de Birsa foi construída Cartago. O rei Jarbas, assim, exigiu casar-se com a então rainha da mais recente cidade africana e acaso Dido ousasse desposar-se, ele ameaçaria sua cidade com uma guerra. Frente a isso e à impossibilidade de rejeitá-lo, ela pediu ao menos três meses de prazo para que pudesse acalmar a alma de seu primeiro marido, Sicarbas, com sacrifícios e, ao expirar o tempo limite, Dido matou-se em uma pira de sacrifícios.

Figura 2 – A Rainha Dido compra terra para a fundação de Cartago. Gravura por Matthäus Merian, o velho; fonte: Historische Chronica Frankfurt a.M., 1630.

A inspiração para o que ficou conhecido na matemática como problema de Dido veio da literatura e da história. No final das contas, trata-se de um problema isoperimétrico, ou seja, um problema que propõe encontrar a maior área possível dado um e mesmo perímetro, Dido decidiu formar um círculo, genuína resposta do problema. Apesar de intuitivamente ser bastante convincente que de todas as figuras seja o círculo aquela cujo perímetro cobre a máxima área, a demonstração[83] disso só foi apresentada, muitos anos mais tarde, por Karl Weierstrass em seminários na Universidade de Berlim, em 1880. Essa propriedade do círculo

[81] Cf. Madeira, 2005, p. i–iii.

[82] Termo oriundo de *borsa*, do fenício, que significa fortaleza, mas se a etimologia for a partir de $\beta\acute{\upsilon}\varrho\sigma\alpha$ do grego, uma da acepções da palavra é pele de animal vivo, remeterá diretamente à lenda. Cf. *Perseus Word Study Tool*, acessado em 27 setembro 2016, http://www.perseus.tufts.edu.

já era conhecida, mas ainda não em forma de prova, desde de Zenedoro (200–140 AEC) e comentada por Theon (335–405 AEC) no Almagesto de Ptolomeu (85–165) e por Pappus (290–350), ambos de Alexandria.

Criou-se na matemática, principalmente depois dos trabalhos incipientes de Leonhard Euler, posteriormente amadurecidos por Joseph-Louis Lagrange e William Rowan Hamilton, o que hoje dá-se o nome de cálculo variacional – instrumento matemático capaz de determinar máximos e mínimos de funcionais (espaços de funções). E além dos problemas isoperimétricos fazerem parte desta área da matemática – pois tratam a questão de encontrar a máxima área –, um outro problema muito famoso na história da matemática que diz respeito a um extremo, o mínimo, foi proposto e tratado por Galileu Galilei em seu famoso livro *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze* (1638), qual seja, o problema da descida mais rápida ou, conforme nomeado publicamente por Johann Bernoulli, nos *Acta Eruditorum*[84] de Leipzig de 1696: o problema da braquistócrona.

2.1 O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA E O CÁLCULO VARIACIONAL

O termo "braquistócrona" é formado pela junção de duas palavras $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ e $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ do grego, que significam respectivamente *menor* e *tempo*. Apenas pelo significado dos termos em grego, já se pode notar que "braquistócrona" diz respeito ao *menor tempo*. Refiro-me ao famoso problema da braquistócrona. Esse problema inaugurou o campo da matemática conhecido hoje por cálculo variacional. O problema da braquistócrona foi proposto publicamente como um desafio aos matemáticos mais habilidosos, por Johann Bernoulli, em junho de 1696 nos *Acta Eruditorum* de Leipzig[85]. E tornou-se um problema tratado por inúmeros matemáticos de diversas maneiras diferentes. A começar, antes mesmo de Johann Bernoulli, quem primeiro propôs foi Galileu, em 1638, nos *Discorsi*, escólio do teorema 22, proposição 36[86] (vide seção 2.4). Jakob Bernoulli, G. W. Leibniz e l'Hôpital responderam a Johann Bernoulli, Isaac Newton apresentou sua solução anonimamente nas *Philosophical Transactions* de janeiro de 1697. Embora a resposta de Newton tenha sido anônima, Johann Bernoulli reconheceu sua autoria e em uma carta a Henri Basnage de Beauval, autor da *l'Histoire des ouvrages des Sçavans*, em junho de 1697, relatou que as poucas linhas redigidas imprimiram a identidade autoral por *ex ungue leonem*[87].

O problema da braquistócrona pode ser resumidamente posto assim: encontre a curva da descida mais rápida de um corpo sob a ação da gravidade, dados dois pontos, não colineares, separados por uma altura qualquer. Além dos matemáticos citados acima, muitos outros

[83] Cf. Madeira, 2005, p. iv–v.
[84] Revista científica fundada por Otto Mencke em Leipzig, na atual Alemanha, 1682, cujo primeiro editor foi Gottfried Wilhelm Leibniz.
[85] Cf. Bernoulli, 1696, p. 269, Bernoulli, 1742a, p. 161 e Bernoulli, 1959, p. 645.
[86] Cf. Galilei, 1968, p. 263–264 e Galilei, 1914, p. 239.
[87] Cf. Bernoulli, 1742a, p. 196, tradução livre: da garra se conhece o leão.

também se dedicaram a este problema como, por exemplo, Christopher Wren e Nicolas Fatio de Duiller. Esse problema também motivou os irmãos Bernoulli a desenvolverem soluções de outros problemas matemáticos de máximos e mínimos postos um ao outro, em uma espécie de disputa intra-familiar. O estudo de extremos na matemática não foi uma novidade inaugurada pelos irmãos Bernoulli. Na verdade, esses estudos vêm de uma tradição estabelecida por problemas clássicos isoperimétricos (cuja referência à rainha Dido criou um rótulo) os quais possuem uma ascendência comum e cujo objetivo é encontrar a figura geométrica da maior área para um mesmo perímetro[88]. Um outro trabalho ligado diretamente a essa tradição foi o tratamento matemático dado por Pierre de Fermat à refração da luz (vide anexo A), que se tornou o princípio do menor tempo para a travessia da luz. O princípio deriva da condição por ele imposta nessa prova para a lei de Snell-Descartes[89], de que a natureza age por um modo que a ela seja mais fácil e rápido[90].

Newton interessou-se em calcular um outro problema prático que também envolveu a determinação de um extremo, que consistia em encontrar a forma de um móvel que se desloca em um meio rarefeito – constituído de partículas iguais dispostas livremente a distâncias iguais entre si – com a menor resistência. A solução é bastante curiosa porque remonta à forma de um *frustrum* (ou tronco de cone), cuja superfície possui uma descontinuidade. Algo inesperado, posto que uma superfície suave seria, de pronto, a forma mais aguardada. Contudo, não é ao que o teorema 28, proposição 34, seção 7, livro 2 da *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* conduz[91]. O estudo dos extremos se perpetuou nos trabalhos de Leonhard Euler e Joseph-Louis Lagrange[92], inclusive, de tal modo que, ainda, nos dias de hoje, os manuais de cálculo variacional remetem-se diretamente a eles quando tratam a condição necessária para se encontrar extremos de um funcional.

Na seção seguinte, apresento como é o tratamento atual dado pelo cálculo variacional para se determinar a famosa equação de Euler-Lagrange e como se resolve o problema da braquistócrona segundo este instrumental matemático. Apenas para reconhecimento da sua importância, o problema da braquistócrona é, via de regra, o primeiro exercício de aplicação da equação de Euler-Lagrange proposto nos manuais da cálculo variacional, ou seja, este problema mantém ainda seu posto de importância, como um exercício ou um modelo de aplicação a ser

---

88 Cf. Goldstine, 1980, p. xiii–xviii

89 Willebrord Snel von Royen (1580–1626) e René Descartes (1596–1650) desenvolveram independentemente o que hoje é conhecido por lei de Snell-Descartes, essa lei determina a trajetória da luz quando ela atravessa dois meios de densidades (ou índices de refringência) diferentes. Seja θ_i o ângulo de incidência da luz e θ_r o ângulo de refração, v_i a velocidade da luz no meio de incidência e v_r a velocidade no meio de refração, então, a trajetória da luz deve ser tal que $\dfrac{\sin\theta}{v}$ seja constante e superior a uma unidade, ou, o que dá no mesmo, $\dfrac{\sin\theta_i}{v_i} = \dfrac{\sin\theta_r}{v_r}$.

90 *[N]atura operari per modos et vias faciliores et expeditiores... natura per lineas brevissimas semper operari*, cf. Fermat, 1891, p. 173.

91 Cf. Newton, 1846, p. 327–329, Newton, 2008a, p. 456–480 e Goldstine, 1980, p. 7–29.

92 Cf. Fraser, 1992 e Fraser, 1994.

aprendido pelos estudantes de ciências exatas e tecnologia[93].

CÁLCULO VARIACIONAL: EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

O cálculo variacional ocupa-se de determinar extremos (máximos e mínimos) de funcionais. Um funcional (*J[y]*) é a aplicação de um espaço de funções sobre o conjunto dos números reais (*Funcional: espaço de funções* $\to \mathbb{R}$), ou seja, um funcional associa a uma função de uma certa classe, um número real[94].

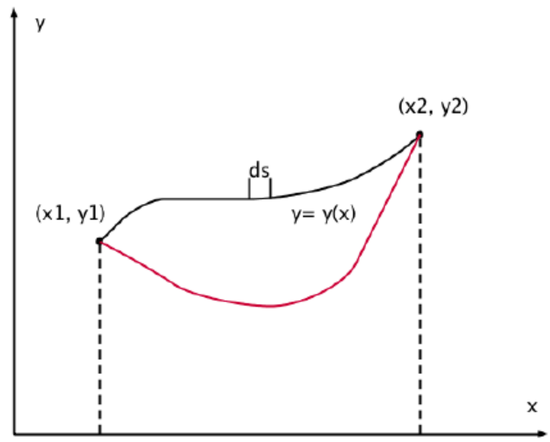

Figura 3 – Para encontrar o funcional de uma curva $y(x)$ compreendida entre dois pontos $P_1(x_1, y_2)$ e $P_2(x_2, y_2)$, é preciso primeiro determinar seu diferencial ds.

Por exemplo, suponha uma curva qualquer determinada por $y = y(x)$ (vide figura 3) e a partir de sua função, deseja-se encontrar o funcional que ofereça o comprimento entre dois pontos quaisquer dessa curva, em um mesmo plano. O comprimento da curva $S[y]$ entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é definido a partir da distância infinitesimal ds entre dois pontos infinitamente próximos da curva. Com auxílio do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo infinitesimal de hipotenusa ds e catetos dx e dy, encontra-se a seguinte expressão:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

O comprimento da curva $S[y]$ entre os dois pontos é um funcional de $y(x)$ determinado por:

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

lembre-se que $\frac{dy}{dx}$ e y' são dois modos de se escrever a mesma coisa, uma vez que são dados dois pontos, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, e uma curva representada na forma $y = y(x)$, continuamente

[93] Cf. Andrade and Filho, 2015, Babb and Currie, 2008; O'Connor and Robertson, 1974 e Stein and Wiechmann, 2003

[94] Cf. Junqueira and Horiguti, 2006 e Thornton and Marion, 2008, p. 207–213.

diferenciável e sua derivada sendo contínua, então, para cada função y escolhida, o comprimento dessa curva será diferente. A cada curva que conecte esses dois pontos, a ela fica associado um número $\mathbb{R}$, que é justo o comprimento da curva entre aqueles mesmos dois pontos. A representação de um funcional $J[y]$ genérico pode ser expressa por:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx.$$

Um problema fundamental para o cálculo das variações é o de determinar para que funções de y, $J[y]$ assume um valor extremo, ou seja, um máximo ou um mínimo. Logo, deve-se encontrar a condição necessária para que y chegue ao extremo de $J[y]$. Como posso caracterizar um extremo? Posso fazê-lo da seguinte forma: ao considerar um pequeno deslocamento na coordenada que minimiza ou maximiza, em primeira ordem, $J[y]$, o valor da função $y(x)$ não deve mudar, ou seja, a derivada, nesse caso, é horizontal nos pontos, tanto de máximo, quanto de mínimo. Considere $y = y(x)$ a curva que leva o funcional $J[y]$ ao extremo e uma outra curva vizinha Y, definida por: $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, na condição de que $\eta(x) = 0$ nos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, para garantir que Y também passe por esses pontos. Assim,

$$\begin{cases} \varepsilon \text{ é um número } \mathbb{R} \text{ e} \\ \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \end{cases}$$

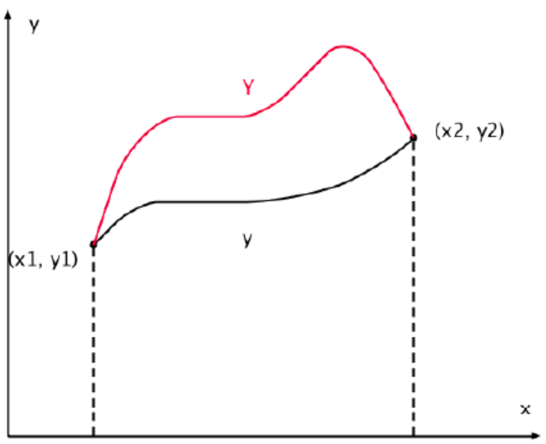

Figura 4 – Considere duas curvas vizinhas $y(x)$ e $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ para caracterizar um extremo entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Ao determinar J para Y, tem-se:

$$J[Y] = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(x), Y'(x), x)dx = \Phi(\varepsilon);$$

por hipótese, $y(x)$ é a função que maximiza ou minimiza $J[Y]$, disso, $\Phi(\varepsilon)$ tem que ser máximo ou mínimo em $\varepsilon = 0$. Logo, $\Phi(\varepsilon)$ passa a ser uma função de um variável $y(x)$ e a condição necessária para que ela seja máxima ou mínima é que sua derivada seja nula.

De modo esquemático: quando $\varepsilon = 0, J[Y]$ terá um máximo ou um mínimo $\leftrightarrow \left.\dfrac{d\Phi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0.$

Agora, toma-se a derivada de $\Phi(\varepsilon)$ em relação a ε pela regra da cadeia e seu resultado deve ser considerado igual a zero:

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right) dx.$$

Se $y(x)$ leva $J[Y]$ ao extremo, então,

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y}\eta'(x)\right) dx = 0$$

qualquer que seja a função $\eta(x)$.

Para se obter a condição que determina a função procurada $y(x)$, a qual leva o funcional $J[Y]$ ao extremo, é conveniente proceder com uma integração por partes,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)dx = \int udv = uv - \int vdu = \left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$$

uma vez que:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial f}{\partial y'} \rightarrow du = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right); \\ dv = \eta'(x)dx \rightarrow v = \displaystyle\int dv = \int \eta'(x)dx = \eta(x); \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2} \rightarrow \text{zero porque } \eta \text{ é nulo nos extremos.} \end{cases}$$

, então, $\left.\dfrac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$ fica:

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx = 0.$$

É possível colocar em evidência $\eta(x)dx$ no argumento da integral definida, assim:

$$\left.\frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \eta(x)dx = 0.$$

Essa igualdade só é verdadeira para uma função $\eta(x)$, derivável e contínua, se

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] = 0; \tag{2.1}$$

esse é, pois, o *lema fundamental do cálculo variacional* ou, também conhecido por: *equação de Euler-Lagrange*.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA VIA ANÁLISE

O problema da braquistócrona resume-se em encontrar a curva da queda mais rápida (vide Figura 5). Se se deixar um corpo cair ao longo de uma curva, sob a ação da gravidade, em qual curva o corpo cai no menor tempo possível? Para se obter o funcional do tempo de descida, suponha que o corpo passe por um ponto $P(x, y)$ com uma velocidade v, o módulo dessa velocidade se obtém pelo teorema da conservação de energia – que diz que a soma das quantidades de energia potencial gravitacional $U = mgy$ (em que m é a massa do corpo, g a aceleração da gravidade e y a altura da queda) e de energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ (em que m é a massa do corpo e v é a velocidade do corpo) permanecem as mesmas antes e depois da queda. Dado que o móvel parte do repouso, tem-se que

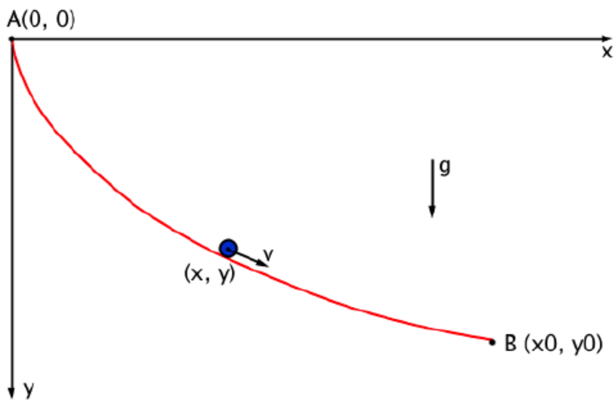

Figura 5 – Encontrar a curva da descida mais rápida.

$$(U + K)_{\text{antes}} = (U + K)_{\text{depois}},$$

$$(mgy + 0) = (0 + \frac{1}{2}mv^2), \text{ assim, } v = \sqrt{2gy}.$$

Por sua vez, o módulo da velocidade instantânea é calculado pela razão das diferenciais da curva ds e de tempo dt, ou seja, $v = \frac{ds}{dt}$, como se deseja encontrar a diferencial do tempo, então:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Suponha que a curva seja escrita na forma $y = (x)$, assim,

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx, \text{ para } dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = y'dx.$$

Logo, o tempo da origem até $B(x_0, y_0)$ será o funcional

$$T[y] = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

O problema da braquistócrona é encontrar a curva $y(x)$ que minimiza o funcional $T[y]$, que é justamente o tempo gasto para se percorrer a curva de $A(0,0)$ a $B(x_0, y_0)$, sob a ação da gravidade. Agora, para aplicar a *equação de Euler-Lagrange* 2.1 a $f(y, y', x)$ $\left[= \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\right]$ – a fim de determinar o extremo que minimiza o tempo de descida –, torna-se mais simples reduzi-la a um diferencial de primeira ordem dependente de y apenas. Para isso, deve-se escrever $T[x]$ da seguinte forma $f(y, y', x)$ para uma curva $x = x(y)$, logo,

$$\begin{cases} T[x] = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^{y_0} \dfrac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}} dy; \\ f(x, x', y) = \dfrac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}; \end{cases}$$

assim, para o novo funcional $T[x]$, a *equação de Euler-Lagrange* 2.1 aplicada a $f(x, x', y)$ fica

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{zero}} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x'} &= \text{ constante} = C_1 \\ \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}\right] &= C_1 \\ \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}.\sqrt{y}} &= C_1. \end{aligned}$$

Para apresentar a equação diferencial acima, solução da equação de Euler-Lagrange, de maneira mais apropriada ao problema, escolhe-se, então, parametrizá-la. Seja o parâmetro τ: $x' = \tan\tau$, disso, tem-se que:

$$y = \frac{1}{C_1^2}\sin^2\tau \equiv C_2 \sin^2\tau,$$

de

$$\begin{aligned} x' = \frac{dx}{dy} = \tan\tau \quad \Rightarrow \quad dx &= dy \tan\tau = 2C_2 \sin\tau\cos\tau\tan\tau d\tau \\ dx &= 2C_2 \sin^2\tau d\tau \\ dx &= C_2(1 - \cos 2\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Efetuando-se a integração, chega-se a

$$\begin{cases} x(\tau) = C_3 + \dfrac{C_2}{2}(2\tau - \sin 2\tau) \text{ e a} \\ y(\tau) = \dfrac{C_2}{2}(1 - \cos 2\tau). \end{cases}$$

Pelas condições iniciais, a curva tem que passar pela origem $(0,0)$, assim, $C_3 = 0$. Por conveniência, escolho mudar $\dfrac{C_2}{2}$ para C e 2τ para θ. A partir disso, encontram-se finalmente as equações paramétricas de uma cicloide, resposta do problema da braquistócrona.

$$\begin{cases} x(\theta) = C(\theta - \sin\theta) \text{ e} \\ y(\theta) = C(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Segue uma solução alternativa para resolver a mesma equação diferencial encontrada acima, do funcional $T[x] = \dfrac{1}{2g}\displaystyle\int_0^{y_0} \dfrac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}dy$, ou seja, $f(x, x', y) = \dfrac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}$. Sabe-se que a condição necessária para determinar extremos é a já expressa pela equação de Euler-Lagrange:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{zero}} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0.$$

Assim, para a equação acima ser verdadeira, é preciso que $\dfrac{\partial f}{\partial x'}$ seja constante e, por conveniência, que seja igual a $\dfrac{1}{\sqrt{2C}}$;

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2C}}$$

assim, se elevar ao quadrado, chega-se a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}\right]\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2C}}\right)^2, \\ \frac{x'^2}{y[x'^2+1]} = \frac{1}{2C} &\Rightarrow 2Cx'^2 = yx'^2 + y, \\ x'^2(2C - y) = y &\Rightarrow x'^2 = \frac{y}{2C - y}, \end{aligned}$$

$$x' = \sqrt{\frac{y}{2C-y}}, \text{ mas como } x' = \frac{dx}{dy}, \text{ então,}$$

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2C-y}}dy.$$

Ao integrar a diferencial acima, tem-se:

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{y}{2C-y}}dy.$$

Agora, considere $y = C - C\cos\theta$ e $dy = a\sin\theta d\theta$, logo:

$$x = \int \sqrt{\frac{C - C\cos\theta}{2C - (C - C\cos\theta)}} C\sin\theta d\theta = \int \sqrt{\frac{C(1-\cos\theta)}{C + C\cos\theta}} C\sin\theta d\theta,$$

$$x = C\int \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \sin\theta d\theta, \text{ mas } \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = (1+\cos\theta)(1-\cos\theta),$$

$$x = C\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}} d\theta = C\int (1-\cos\theta)d\theta,$$

$$x = C\int d\theta - C\int \cos\theta d\theta = C\theta - C\sin\theta.$$

Tem-se, enfim, mais uma vez, tal com esperado, as equações paramétricas de uma cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = C(\theta - \sin\theta) \text{ e} \\ y(\theta) = C(1-\cos\theta). \end{cases}$$

Desenvolvemos por duas vias a solução para o problema da braquistócrona, com recurso ao cálculo variacional. Embora seja importante compreender esse problema com instrumentos matemáticos mais recentes, para realizar-se um trabalho que investiga uma matemática de certo período, é preciso voltar-se para o problema com um cuidado histórico, ou seja, com a expectativa de abordá-lo tal como foi em sua época. Assim, na próxima seção, pretendo enfatizar detalhes das soluções que chamarei por ora de históricas. Porém, antes, descreverei como o problema foi proposto e de como as soluções históricas se agruparam em uma apresentação única contida nos *Acta Eruditorum* de maio de 1697.

2.2 *LEIBNITII ET JOHANN BERNOULLII (ET ALII) COMMERCIUM MATHEMATICUM EPISTOLICUMQUE*

Johann Bernoulli desafiou os matemáticos europeus (ao menos aqueles associados à revista de ciências alemã) a resolverem um *problema novum*. E assim publicou-o nos *Acta Eruditorum* de junho de 1696:

> **Problema novo** a cuja solução matemáticos são convidados. Dados dois pontos A e B em um plano vertical, conferir ao móvel M um caminho AMB, pelo qual desce devido sua gravidade, começa a mover-se a partir do ponto A, no tempo mais breve, alcança o outro ponto B. (Bernoulli, 1696, p. 269, minha tradução)[95]

[95] Cf. Bernoulli, 1742a, p. 161 e Bernoulli, 1959, p. 645.

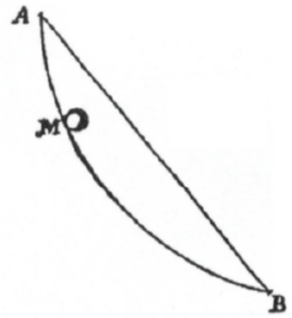

Figura 6 – Figura 5, tabela 5, Acta Eruditorum, junho, 1696; fonte: Knobloch (2012), p, 16.

O autor do desafio desejou despertar em quem prestigiava a matemática o envolvimento com um problema que, segundo ele, não era mera especulação e, sim, algo útil a outros campos da ciência, como a mecânica, por exemplo. Johann Bernoulli fixou o prazo de entrega das soluções do problema para até dezembro do mesmo ano. Acaso nenhum matemático não lho respondesse, ele divulgaria o nome da curva, já bastante conhecida na época. Johann Bernoulli ainda advertiu que o menor caminho entre A e B, o segmento de reta, não corresponde à curva da descida mais rápida.

Johann Bernoulli comunicou a Leibniz[96] seu mais novo problema em correspondência de 9(19) de junho de 1696[97]. E pediu-lhe, primeiro, que se ocupasse da sua solução, segundo, que a encaminhasse aos *Acta Eruditorum* para ser publicada. Seu remetente respondeu, seis dias depois, 16(26) de junho de 1696[98], com o anuncio da solução desejada. Leibniz ainda sugeriu chamar de *tachystoptota* a curva resposta – a origem desse termo vem da conjunção de $\tau\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ com $\pi\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\iota\nu$, cujo significado é respectivamente "mais rápida" e "descida". Todavia, Leibniz acabou por não publicar essa solução – que doravante será chamada de solução "não-publicada", nos *Acta Eruditorum*, por razões que apresentarei adiante (vide seção 2.6). Ele, ao invés disso, fez uma longa introdução à solução de Johann Bernoulli e assinalou, em conjunto, uma breve consideração acerca da cicloide. Com respeito ao problema de Johann Bernoulli, Leibniz julgou-o belo e disse ter sido atraído a ele tal como Eva fora frente a maça. Leibniz, entretanto, repassou o problema da braquistócrona a Rudolf Christian von Bodenhausen, em 18(28) de junho 1696[99], exaltando a beleza que o problema guarda e convidando o matemático residente em Florença a resolvê-lo e a encorajar na Itália outros matemáticos a se dedicarem nisso. Jakob Bernoulli, na Suíça, Pierre Varignon e Marquês de l'Hôpital, na França, receberam também o mesmo convite.

Johann Bernoulli respondeu a Leibniz, em 21(31) de julho de 1696[100], e com respeito ao nome da curva do tempo mais curto, a cicloide, apesar de tê-la batizado de braquistócrona, não se opôs à sugestão de chamá-la de *tachystoptota*. De qualquer modo, o nome braquistócrona

[96] Cf. Knobloch, 2012
[97] Cf. Leibniz, 2004, p. 790 e Leibniz, Bernoulli, Bernoulli, Bernoulli, and Gerhardt, 1855, p. 283.
[98] Cf. Leibniz, 2004, p. 795–803 e Leibniz et al., 1855, p. 284–290.
[99] Cf. Leibniz, 2004, p. 804–807.

pareceu-lhe mais adequado porque expressa a propriedade isócrona da cicloide descrita por Christiaan Huygens. Ademais, Johann Bernoulli não deixou de ressaltar a referência de Leibniz acerca da Eva e a maça e sua irresistibilidade. Com certa ironia, Johann Bernoulli disse que não desejava fazer o papel da serpente pois não trazia consigo nenhum desejo maligno oculto. Em 31 de julho (10 de agosto) de 1696[101], Leibniz relata já ter recebido respostas de Jakob Bernoulli, de Tschirnhaus e de l'Hôpital. E encaminhou-as para Johann Bernoulli averiguar antes de publicá-las nos *Acta Eruditorum*, junto com a solução anônima de Isaac Newton, publicada nas *Philosophical Transactions* em janeiro de 1697[102].

Antes de apreciarmos as soluções encaminhadas a Leibniz do problema da braquistócrona, junto do escólio de Galileu, é preciso salientar as propriedades da cicloide, de acordo com o trabalho de Christiaan Huygens, *Horologium Oscillatorium* (1673), pois essas soluções, vez por outra, fazem referência a essas propriedades, principalmente, para confirmar que a curva em questão é mesmo a referida cicloide.

2.3 UMA BREVE APRESENTAÇÃO (HISTÓRICA) DA CICLOIDE E DE SUAS PROPRIEDADES

A cicloide é um curva formada pela composição de dois movimentos: de rotação e de translação. A descrição cinemática que traça uma cicloide é a seguinte: considere um círculo sobre uma abcissa x e um ponto B' sobre a circunferência que delimita esse círculo, agora, ele deve rolar sobre x, sem deslizar. Nesse mesmo momento, o rastro do ponto B', no movimento contínuo, traça a ciclóide. Nomeia-se, portanto, tal círculo de círculo gerador da cicloide. No caso abaixo (vide figura 7), considere o círculo gerador rolando para a direita, por sobre o eixo x. Observa-se que B' deixa um rastro (que escolhi ser pontilhado apenas para enfatizar a posição que B' ocupou durante o rolamento, mas o traço deve ser compreendido como contínuo) que é parte de uma cicloide.

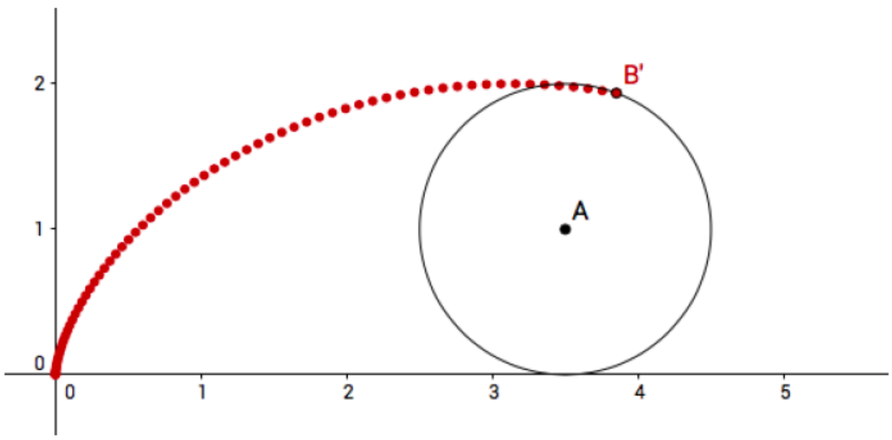

Figura 7 – Descrição cinemática da cicloide

[100] Cf. Leibniz, 2011, p. 46–57 e Leibniz et al., 1855, p. 295–302.
[101] Cf. Leibniz, 2011, p. 70–77 e Leibniz et al., 1855, p. 309–313.
[102] Cf. Newton, 1697a, p. 384–389.

De forma mais detalhada, em um plano cartesiano em que, como já sugerido acima, um círculo rola por sobre o eixo x, um ponto, tal como B', inicialmente está na origem dos eixos $(0,0)$. Seja C o raio desse círculo, quando o círculo rotaciona a um ângulo θ, seu centro translada para um ponto $(C\theta, C)$ e, então, a cicloide poderá ser descrita pelas equações paramétricas[103]:

$$\begin{cases} x(\theta) = C(\theta - \sin\theta) \text{ e} \\ y(\theta) = C(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

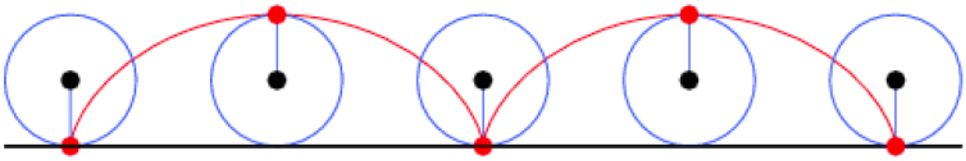

Figura 8 – Cicloide ordinária; fonte: *http://mathworld.wolfram.com/Trochoid.html* acessado em 6-set-2016.

Com respeito ao problema da braquistócrona, torna-se conveniente refletir a cicloide em 180^0 em relação ao eixo x (vide figura 5) – ou seja, com a concavidade voltada para cima –, nesse caso, sejam os pontos dados $A = (0,0)$ e $B = (b_1, b_2)$, com $b_1 > 0$ e $b_2 \leqslant 0$ no plano xy, o raio do círculo gerador C e o ângulo $\theta_B \in [0, 2\pi]$, tal que $A = (x(0), y(0))$ e $B = (x(\theta_B), y(\theta_B))$. Assume-se também, implicitamente, que $\theta_B \leqslant \pi$, de modo que entre A e B não haja alguma inclinação ascendente; isso é o mesmo que considerar $b_2 \leqslant \dfrac{2b_1}{\pi}$.

A cicloide[104] tem uma descrição cinemática simples e bastante relacionada às experiências cotidianas – basta pensar em uma roda qualquer que rola sobre o chão –, apesar disso os geômetras gregos não a estudaram. Parece que os primeiros a se interessar nela foram os matemáticos do séc. XVI. Uma razão para isso é que a geometria clássica classificava de acordo com a construção, segundo a famosa descrição dada por Pappus de Alexandria em sua obra *Synagoge* ($\Sigma\upsilon\nu\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}$) (320 EC) ou *Colectio* (1588) vertida para o latim por Federico Commandino. Os problemas planos são aqueles que requerem apenas régua e compasso, ou seja, bastavam apenas retas e círculos, os dois objetos geométricos mais simples, para resolvê-los; esses problemas ditaram o paradigma da geometria clássica. Já os problemas sólidos pedem as seções cônicas que são formadas pela interseção de um plano com um cone; por isso são problemas menos acessíveis que os planos. Havia também os problemas lineares que exigiam curvas ainda mais complexas, por exemplo, a espiral de Arquimedes, a conchoide de Nicomedes ou mesmo os epiciclo de Ptolomeu.

As propriedades geométricas e mecânicas da cicloide foram apresentadas por Christiaan Huygens em sua obra famosa, *Horologium Oscillatorium* (1673), quando dedicou-se a estudar pêndulos para a construção de relógios precisos. Esses pêndulos deveriam possuir

[103] Cf. Geiges, 2005, p. 118.
[104] Cf. Jesseph, 2007.

uma característica muito particular: para qualquer amplitude de oscilação, o período teria de ser sempre o mesmo. Em outras palavras, Huygens pretendeu descrever a construção de um pêndulo isócrono, de fato. Galileu já tinha verificado positivamente que um pêndulo simples possuía certa independência entre amplitude e período, porém, presente apenas em pequenas oscilações[105]. Huygens verificou que esse pêndulo simples, sob tais condições, acabava por não ser viável enquanto um pêndulo isócrono, pois a amplitude de oscilação passava a ser diretamente proporcional ao seu período para ângulos superiores[106]. Uma das motivações para se desenvolver relógios mais precisos foi devido às grandes navegações (séc. XVII e XVIII). Os relógios eram importantes instrumentos usados na localização geodésica, mais especificamente, para se medir longitudes. De fato, pêndulos isócronos poderiam ser muito úteis enquanto cronômetros marítimos, embora tivesse que lidar com o balanço do mar e a interferência inevitável nas amplitudes de oscilação dos pêndulos.

A cicloide foi uma curva que despertou interesse de mentes brilhantes no início do período moderno e por isso foi chamada de a *Helena da Geometria*. Galileu, primeiro a nomear essa curva de *cicloide* – da composição de $\kappa\upsilon\kappa\lambda o\varsigma$ (isto é, círculo ou roda) com o sufixo $-\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ (isto é, na forma de ou na aparência de) –, estudou-a em 1599 e determinou que a área abaixo da cicloide, em uma revolução apenas, ou seja, dentro do intervalo $0 < \theta < 2\pi$, é três vezes a de um círculo ($3\pi r^2$). Independentemente de Galileu, Marin Mersenne também se interessou por essa curva, em 1615, e propôs a Gilles de Roberval, em 1628, que também a estudasse. Esse último conseguiu em 1634 encontrar a mesma área determinada por Galileu e ainda desenvolveu, em 1638, um método para se determinar a tangente em um ponto dado; mas não publicou seus resultados. Já Evangelista Torricelli, discípulo de Galileu, em 1644, em um apêndice de sua *Opera Geometrica*, publicou seus métodos para encontrar áreas e tangentes em uma cicloide. Roberval e Torricelli tiveram um embate acerca da prioridade dessas

[105] Para se calcular o período de um pêndulo simples T, sob a ação da gravidade g, de comprimento L, ângulo de oscilação em relação a normal θ , em função apenas da amplitude de oscilação A, basta usar da relação: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. Só se obtém essa relação a partir da consideração de que $A \ll L$. Essa condição permite considerar $\sin\theta = \dfrac{x}{L}$, com θ em radianos (para x igual a projeção no eixo das abcissas da metade da amplitude, sendo a origem das coordenas cartesianas coincidente com a extremidade fixa do pêndulo). Essa relação imprime um erro (ε), possível de ser calculado por: $\varepsilon = \dfrac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta}$. Até 10^0 (ou $\approx 0,175$ radianos), ε está em torno de $0,57\%$; portanto, desprezível. Agora a função ε explode muito rapidamente para ângulos um pouco superiores a 10^0, desse modo, o erro passa a ser bastante significativo; por exemplo, se $\theta = 15^0$, $\varepsilon = 1,2\%$ e se $\theta = 20^0$, $\varepsilon = 2,0\%$ (cf. Grupo de Ensino de Físico da Universidade Federal de Santa Maria na url «www.ufsm.br/gef/MHS/mhs05.pdf», acessado em 6-set-2016).

[106] Cf. Burrowes and Farina, 2005, p. 175. O período T de um pêndulo simples quando submetido a grandes oscilações depende da amplitude A e pode ser calculado por: $T = T_0\left[1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\dfrac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right]$, em que T_0 é o período do pêndulo simples em pequenas oscilações e $k = \sin\dfrac{A}{2}$, cf. Filho, A. A. C. O período do pêndulo: porque Galileu estava ao mesmo tempo certo e errado. 2005. 18 f. Monografia (Especialização) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2005.

descobertas.

Blaise Pascal dedicou-se também ao estudo dessa curva e para reivindicar por seus resultados, propôs – sob o pseudônimo de Amos Dettonville – em 1658, um prêmio de 60 *pistoles* (uma pequena fortuna para época em moedas de ouro espanholas) ao primeiro que resolvesse esses dois problemas: (i) encontrar a superfície e o centro de gravidade de uma cicloide de revolução e (ii) encontrar a superfície e o centro de gravidade do *double-angle* (sólido formado pela composição de duas cicloides de revolução). Até mesmo Descartes se envolveu no estudo da cicloide, na tentativa de, de acordo com seu critério epistemológico de classificação, bani-la da geometria, por não se tratar de uma curva geométrica (ou algébrica) e, sim, de uma curva mecânica (ou transcendental). A impossibilidade de esquadrinhá-la em expressões algébricas derivava-se, segundo Descartes, da impossibilidade de estabelecer relações precisas entre suas partes, por proporcionalidade. Restaria, então, tentar fazê-lo por meio da velocidade das partes – algo que não era nem preciso nem exato na opinião de Descartes. Logo, restaria a esta curva, como a outras curvas mecânicas tais como, por exemplo, a quadratrix, o completo abandono.

Huygens também se dedicou ao estudo da cicloide. Ele voltou-se às propriedades geométricas e mecânicas, para a concepção de um relógio de pêndulo mais preciso, cuja propriedade relevante para esse caso é o isocronismo. Vejamos a seguir algumas propriedades da cicloide com base na obra de Huygens, *Horologium Oscillatorium*. A cicloide é traçada pelo ponto E na circunferência do círculo gerador (vide figura 9) que rola sem deslizar por sobre E_0E_3, linha base da curva.

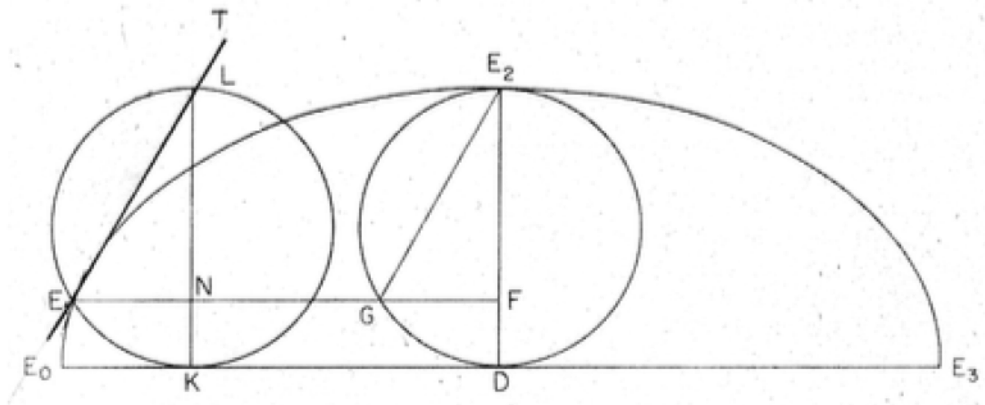

Figura 9 – Propriedades geométricas da cicloide; fonte: Freguglia and Giaquinta (2016), p. 31.

Em uma posição qualquer K, tangente entre o círculo gerador e a linha de base, seja E_1 um ponto na circunferência do círculo, D o centro da linha base, aquele E_1 em K passa a ocupar a posição E_2 em D, de modo que DE_2 coincide com o diâmetro do círculo gerador (que nesse caso está no eixo de simetria da cicloide). O arco de $E_0E_1E_2E_3$ é uma cicloide ordinária cuja concavidade está voltada para baixo. O comprimento do arco de círculo E_1K é igual ao segmento E_0K, devido a condição de rolamento sem deslizamento. A linha E_1NGF é paralela à base E_0E_3 e intercepta o círculo gerador DGE_2 em G. O vértice do cicloide E_2 e G formam a secante GE_2. A partir disso, tem-se que as principais propriedades da cicloide são[107]:

1. o comprimento de arco GE_2 é igual ao segmento E_1G;
2. a tangente E_1T em um ponto qualquer E_1 da cicloide é paralela à secante GE_2 e
3. (por causa da dinâmica de construção da cicloide) quando o círculo gerador está em K, seu centro de rotação em relação à linha de base, as secantes E_1K e GD, raios instantâneos da cicloide em K e D, são paralelas entre si e normais à tangente E_1T e à secante GE_2, respectivamente.

Veremos mais três proposições do *Horologium Oscillatorium* de Huygens (vide figura 10), pois serão importantes para as soluções a serem apresentadas adiante, principalmente, a solução de Newton (vide seção 2.7.4)[108].

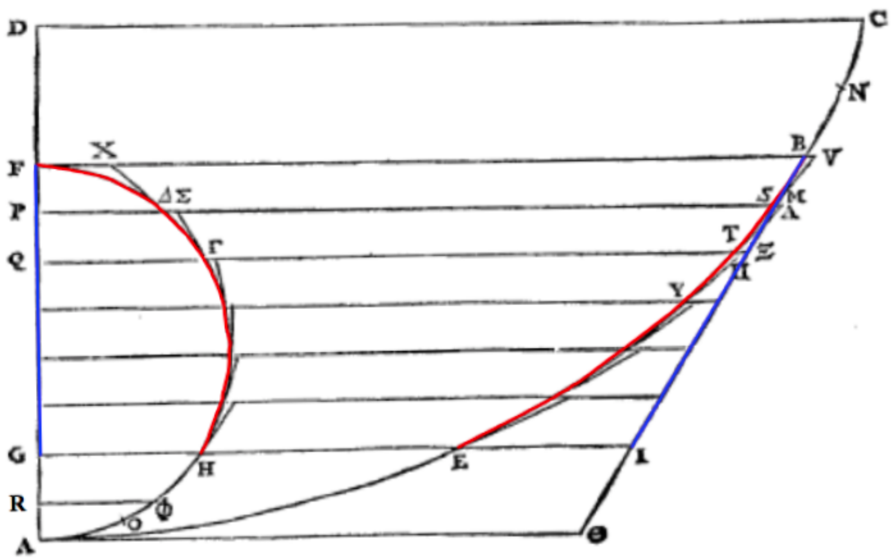

Figura 10 – Proposição 24, *Horologium Oscillatorium*; fonte: Huygens 2007, p. 39.

A proposição 24 afirma que: "o tempo de descida ao longo do arco da cicloide BE está para o tempo de descida ao longo da tangente BI com a velocidade igual a metade da velocidade final em $B\Theta$, assim como o arco FH está para a linha FG."[109] Logo, o tempo da descida do arco $\widehat{BE}$, a partir de B até E, (t_{BE}), está para o tempo da queda pela tangente BI, (t_{BI}), com a velocidade que chega em I de B representando a metade da velocidade com que chegará a $B\Theta$, assim como o arco $\widehat{FH}$ está para o segmento FG,

$$\left(\frac{t_{BE}}{t_{BI}}=\right)\frac{\widehat{BE}}{BI}=\frac{\widehat{FH}}{FG}. \tag{2.2}$$

107 Cf. Herrera, 1994, p. 461–462.
108 Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p.32–33.
109 Cf. Huygens, 2007, p. 39.

A proposição 25 é sobre a propriedade isócrona da cicloide (ou tautócrona):

> Em um cicloide com um de seus eixos vertical e seu vértice posto na posição mais baixa, os tempos de descida do repouso de um corpo a partir de qualquer ponto da cicloide até chegar ao vértice são iguais entre si; e esse tempo tem a mesma razão do tempo de queda ao longo de todo o eixo da cicloide assim como a semicircunferência de um círculo está para o diâmetro. (Huygens, 2007, p. 44, minha tradução)

O tempo para descer BA é independente do ponto de partida B; da proposição 24 tem-se que

$$\left(\frac{t_{BA}}{t_{B\Theta}}=\right)\frac{\widehat{BA}}{B\Theta}=\frac{\widehat{FA}}{FA}=\frac{\pi R}{2R}=\frac{\pi}{2};$$

é a hipótese de Galileu[110] que garante que o tempo $t_{B\Theta}(B\Theta)$ seja igual ao tempo $t_{DA}(DA)$. Por fim, a proposição 26 coloca que a razão entre o tempo t_{BE} ($\widehat{BE}$) e o tempo t_{EA} ($\widehat{EA}$), feito ao longo do arco $\widehat{EA}$, é igual a razão entre o comprimento do arco $\widehat{FH}$ e o arco $\widehat{HA}$:

$$\left(\frac{t_{BE}}{t_{EA}}=\right)\frac{\widehat{BE}}{\widehat{EA}}=\frac{\widehat{FH}}{\widehat{HA}}.$$

Depois dessa preparação a respeito da história e das propriedades da cicloide, já podemos apreciar melhor as soluções históricas do problema da cicloide. Escolhi começar, pela primeira, pelo escólio do teorema 22, proposição 36 dos *Discorsi* de Galileu. Na verdade, não se trata de uma solução dada por Galileu a Johann Bernoulli porque, primeiro, eles não foram contemporâneos e, segundo, Galileu vislumbrou a possibilidade de haver uma curva da queda mais rápida (a posteriormente chamada braquistócrona) como uma consequência (escólio) de seu teorema 22.

2.4 SOLUÇÃO DE GALILEU (1638)

Galileu, diferentemente de Johann Bernoulli, não propôs um problema publicamente para que matemáticos o resolvessem. Ele apresentou a curva braquistócrona, que ainda nem possuía tal nome, ou a curva da descida mais rápida como consequência do teorema abaixo. Vê-se que o tratamento do matemático pisano é puramente geométrico, com um recurso a uma extrapolação mental aplicada em seu escólio. Essa solução de Galileu é semelhante à solução de Newton – publicada anonimamente nas *Philosophical Transactions* e nos *Acta Eruditorum* –, quanto ao uso da geometria pura, contudo, diferente dos desenvolvimentos dos outros matemáticos que, por exemplo, fizeram uso de equações diferenciais. Galileu acreditou ter encontrado, de fato, a curva da descida mais rápida, mas acabou por encontrar uma curva

[110] Terceiro dia, teorema 2, proposição 2: a velocidade de queda de um corpo varia com a raiz quadrada da altura, cf. Galilei, 1914, p. 174.

mais rápida que o plano inclinado e não a mais rápida de todas as curvas: a cicloide. Logo, seguem o teorema 22, proposição 36 junto de sua demonstração e de seus escólio e prova.

> **[Teorema 22, proposição 36]** Se do ponto mais baixo de um círculo vertical, traça-se uma corda que subtende um arco menor que um quadrante, e se dos dois extremos, duas outras cordas forem traçadas para um ponto qualquer do arco, o tempo de descida ao longo dessas duas últimas cordas será menor que ao longo da primeira, e também menor, pela mesma quantidade, que ao longo da menor dessas duas últimas cordas (Galilei, 1914, p. 237, minha tradução).

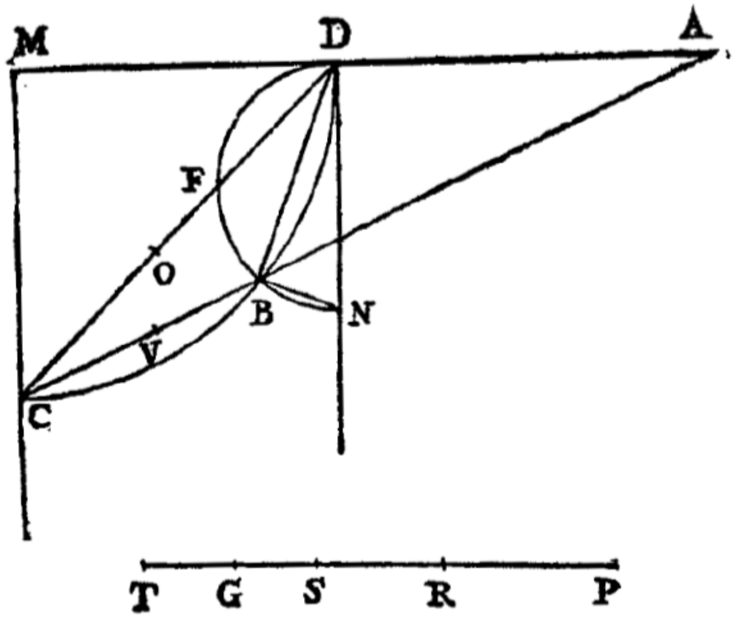

Figura 11 – Esquema geométrico do teorema 22, proposição 36; fonte: Galilei (1968), p. 262.

Seja o arco CBD (vide figura 11), menor que um quadrante, retirado de um círculo vertical cujo ponto mais baixo está em C. Neste arco há três cordas subtendidas, uma entre C e D; as outras duas partem de C e de D e se encontram em um ponto qualquer B. No teorema 22, contido na proposição 36, Galileu assevera que um corpo que parte de D, sob a ação da gravidade apenas, percorre DB e BC em um tempo menor que percorreria DC ou apenas BC, partindo de B, do repouso[111].

Para provar seu teorema, Galileu começa traçando a horizontal MDA que intercepta CD em D e CB prolongado em A. Traça MC e DN perpendiculares a ND e BN também perpendicular a BD. Assim, Galileu forma o triângulo retângulo DBN, circunscrito no semicírculo $DFBN$ o qual corta DC em F. O ponto O deve ser tal que DO seja a média proporcional de CD e DF, ou seja, $\dfrac{CD}{DO} = \dfrac{DO}{DF}$. Já o ponto V deve ser tal que AV seja a média proporcional de CA e AB, ou seja, $\dfrac{CA}{AV} = \dfrac{AV}{AB}$. O comprimento PS representa o

111 Cf. Galilei, 1968, p. 262–263 e Galilei, 1914, p. 237–238.

tempo de descida de DC ou BC, ambos demandam a mesma quantidade de tempo. Agora, é preciso estabelecer PR de modo que:

$$\frac{CD}{DO} = \frac{tempoPS}{tempoPR}.$$

Um corpo parte do repouso e sob a ação de seu próprio peso desliza sobre DF a partir de D: PR representa o tempo desse movimento e RS, o movimento por sobre FC. O segmento PS é também o tempo de descida do repouso de BC a partir de B, e se T for tal que $\frac{BC}{CD} = \frac{PS}{PT}$, então PT será o tempo da descida de A para C. Já que DC é a média proporcional de AC e CB $\left(\frac{AC}{DC} = \frac{DC}{CB}\right)$, de acordo com o lema[112] que precede essa proposição. E, por fim, o ponto G deve ser tal que $\frac{CA}{AV} = \frac{PT}{PG}$, assim, PG é o tempo de descida de A para B; enquanto GT, o tempo de descida de B para C. Uma vez que o diâmetro DN do círculo DFN é vertical, as cordas DF e DB são percorridas em tempos iguais.

> Portanto, se se quiser provar que um corpo atravessa BC, depois de descer DB, em um tempo menor que ele atravessaria FC, depois de descer DF, então, dever-se-á provar o teorema. Mas se um corpo descer DB de D, atravessará BC no mesmo tempo como se tivesse atravessado AB de A; vê-se que o corpo adquire o mesmo momento tanto ao descer DB, quanto AB. Assim, resta apenas mostrar que descer BC depois de AB é mais rápido que descer FC depois de DF. (Galilei, 1914, p. 238, minha tradução)

Do que foi mostrado anteriormente, GT mede o tempo para se atravessar BC depois de AB e RS, o tempo para se atravessar FC depois de DF. De acordo com isso, o que se deve mostrar é que RS é maior que GT. Dado que,

$$\frac{SP}{PR} = \frac{CD}{DO}$$

e se inverter e converter, tem-se

$$\frac{RS}{SP} = \frac{OC}{CD} \text{ e também } \frac{SP}{PT} = \frac{DC}{CA}.$$

E já que

$$\frac{TP}{PG} = \frac{CA}{AV},$$

[112] O lema que Galileu se refere é este: "Seja AC uma linha mais longa que DF e seja a razão entre AB e BC maior que a de DE e FE, então digo que AB é maior que DE. Pois, se AB tem com respeito a BC razão maior que aquele entre DE e EF, então DE terá para algum comprimento menor que EF, a mesma razão que AB tem para com BC, chame esse comprimento de EG. Então, uma vez que $AB : BC = DE : EG$, segue que, *componendo et convertendo*, $CA : AB = GD : DE$. Mas já que CA é maior que GD, segue que BA é maior que DE." (Galilei, 1914, p. 235–236, minha tradução)

segue-se, ao inverter, que

$$\frac{PT}{TG} = \frac{AC}{CV} \text{ e, portanto, da igualdade chega-se a } \frac{RS}{GT} = \frac{OC}{CV}.$$

Já foi mostrado que OC é maior que CV, assim, o tempo RS é maior que o tempo GT. Agora, do lema, CF é maior que CB e FD é menor que BA, segue que

$$\frac{CD}{DF} > \frac{CA}{AB}.$$

Mas

$$\frac{CD}{DF} = \frac{CO}{OF}, \text{ visto que } \frac{CD}{DO} = \frac{DO}{DF} \text{ e } \frac{CA}{AB} = \frac{CV^2}{VB^2}.$$

Portanto,

$$\frac{CO}{OF} > \frac{CV}{VB} \text{ e de acordo com o lema } CO > CV.$$

Além disso, está claro que o tempo de descida ao longo de DC está para o tempo ao longo de DBC, assim como DOC está para a soma de DO e CV. E assim foi provado o teorema 22, proposiçõa 36. Segue, agora, o escólio desse teorema.

> **[Escólio]** É possível inferir, do precedente, que o caminho de descida mais rápido, a partir de um ponto a outro, não é o menor, a saber, uma linha reta, mas o arco de um círculo (Galilei, 1914, p. 239, minha tradução).

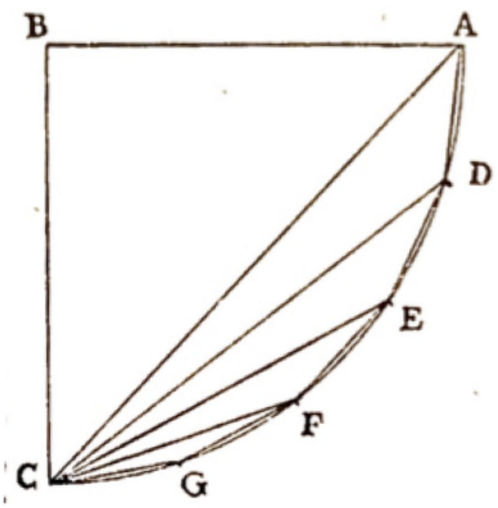

Figura 12 – Caminho de descida mais rápido para Galileu; fonte: Galilei (1968), p. 263.

No quadrante $BAEC$ (vide figura 12), com BC vertical, os arcos $\widehat{AD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{FG}$ e $\widehat{GC}$ possuem mesmo comprimento. Do ponto C trace linhas que o interliguem aos pontos A, D, E, F e G. E também trace linhas retas AD, DE, EF, FG e GC. A descida ao longo de ADC é mais rápida que ao longo apenas de AC ou de DC a partir do repouso em D. A descida DC a partir do repouso de A é mais rápida que a descida ADC. Por seu turno, do repouso a partir de A, faz-se a descida DEC em um tempo menor que apenas por DC. Por isso, a descida ao longo das três cordas $ADEC$ tomará um tempo menor que ao longo das duas cordas ADC. De modo similar, na sequência da descida ADE, o tempo para atravessar EFC é menor que o requerido para EC apenas. Portanto, a descida ao longo das quatro cordas $ADEFC$ é mais rápida que ao longo das três $ADEC$. Finalmente, depois da descida $ADEF$, atravessará as duas cordas FGC mais rápido que por FC apenas. Portanto, ao longo das cinco cordas $ADEFGC$, a descida será mais rápida que pelas quatro cordas $ADEFC$. Consequentemente, quanto mais próximo o polígono inscrito se aproximar a um círculo, menor o tempo da descida de A para C[113].

TRANSCRIÇÃO ANALÍTICA DA PROVA DO ESCÓLIO DE GALILEU

Esta prova de Galileu, composta pela *lei das cordas* e pelo argumento geométrico exposto logo acima, será melhor compreendida se transcrita analiticamente[114]. Considere, primeiro, o *teorema de Merton* ou também chamado de teorema da velocidade média. Ele afirma que um corpo acelerado uniformemente se desloca na mesma quantidade que um corpo com velocidade uniforme, desde que essa velocidade uniforme seja a média das velocidades inicial e final daquele movimento acelerado uniformemente. A partir da figura 13, chame de t_{AC} o tempo de queda de um corpo a partir do repouso ao longo de AC e de t_{AB} o tempo de descida, também do repouso, desse mesmo corpo ao longo de AB; v_C e v_B são as velocidades alcançadas respectivamente em C e B.

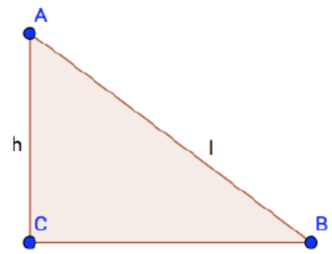

Figura 13 – Plano inclinado de altura h e comprimento l; fonte: Freguglia and Giaquinta (2016), p. 11, adaptada.

Com o uso do *teorema de Merton*, tem-se:

$$v_{média_{AC}} = \frac{AC}{t_{AC}} = \left(\frac{0 + v_C}{2}\right), \text{ ou seja, } t_{AC} = \frac{2AC}{v_C} \text{ e, da mesma forma,}$$

[113] Cf. Galilei, 1914, p. 239–240.
[114] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 11-14.

$$v_{\text{média}_{AB}} = \frac{AB}{t_{AB}} = \left(\frac{0+v_B}{2}\right), \text{ logo, } t_{AB} = \frac{2AB}{v_B}; \text{portanto, } \frac{t_{AB}}{t_{AC}} = \frac{AB}{AC}\frac{v_C}{v_B}.$$

Galileu assume que em diferentes planos inclinados de mesma altura, um mesmo corpo desenvolve graus de velocidades iguais[115]. Isso implica em $v_B = v_C$, logo

$$t_{AB} = \frac{AB}{AC}t_{AC}. \tag{2.3}$$

Se considerar $AC = \frac{1}{2}gt_{AC}^2$, tem-se $2AC = gt_{AC}^2$ e se aplicar a equação do movimento de Torricelli $\left(v^2 = v_0^2 + 2gy\right)$ – considerando a origem do sistema em A, a aceleração sendo a da gravidade e o espaço percorrido ocorrendo no eixo das ordenadas –, a esse caso, vê-se que:

$$2gAC = (gt_{AC})^2 = v_C^2.$$

E ainda, pode-se valer do princípio da conservação de energia:

$$(U+K)_{antes} = (U+K)_{depois}$$
$$(mgh+0) = (0+\frac{1}{2}mv^2)$$

para esse caso, em específico, tem-se $\frac{1}{2}v^2 - gh = 0$. Dado que $\frac{AB}{t_{AB}} = \frac{v_B}{2}$, é simples chegar ao valor do tempo de queda (T) ao longo de um plano inclinado de comprimento l e altura h, para um movimento que parte do repouso. Considere $AB = l$, $t_{AB} = T$, $v_B = v$ em $\frac{AB}{t_{AB}} = \frac{v_B}{2}$, e substitua o resultado disso na equação que expressa a conservação de energia apresentada logo acima que se chega a:
primeiro,

$$\frac{AB}{t_{AB}} = \frac{v_B}{2} \rightarrow \frac{l}{T} = \frac{v}{2} \text{ ou } v = 2\frac{l}{T};$$

em seguida,

$$\frac{1}{2}\left(2\frac{l}{T}\right)^2 - gh = 0$$
$$\frac{1}{2}4\frac{l^2}{T^2} - gh = 0$$
$$2\frac{l^2}{T^2} = gh$$
$$T^2 = \frac{2}{g}\frac{l^2}{h};$$

[115] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 11.

e, portanto,

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{l}{\sqrt{h}}. \tag{2.4}$$

Disso, Galileu infere sua famosa *lei das cordas* (teorema 6, proposição 6, terceiro dia): "[d]o ponto mais alto ou mais baixo de um círculo vertical, trace quaisquer planos inclinados que interceptem a circunferência, os tempos de descida ao longo das cordas serão iguais entre si." (Galilei, 1914, p. 188–189, minha tradução) Se se considera o diâmetro d, a corda l e a altura h da figura 14, a semelhança dos triângulos OPH e BOP resulta em $\frac{l}{h} = \frac{d}{l}$, ou seja, $\frac{l^2}{h} = d$. Uma igualdade análoga se retira se considerar a relação deles com o triângulo também semelhante PHB. Da equação 2.4 tem-se, a partir disso:

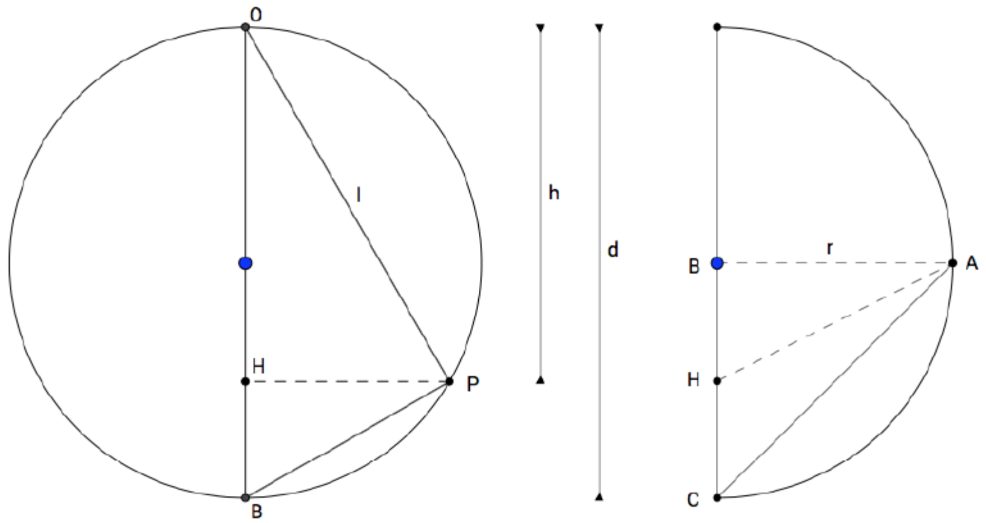

Figura 14 – Lei das cordas de Galileu e linha reta da última descida; fonte: Freguglia and Giaquinta (2016), p. 12, adaptada.

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{l}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{d}.$$

Vê-se claramente que a afirmação acima também se sustenta a partir da equação 2.4. De fato, se os tempos de descida ao longo de OP e OB são iguais, da semelhança dos triângulos OPH e BOP, como já visto, segue:

$$\frac{l}{h} = \frac{d}{l} \rightarrow \frac{OP}{OH} = \frac{OB}{OP}, \text{ ou seja, } OP^2 = OB.OH;$$

isso implica que OPB tem um ângulo reto (pelas relações métricas do triângulo retângulo), daí que P e B estão na periferia do círculo OPB.

O segmento AC tem sua extremidade A separada do ponto B pelo raio r e sua inclinação em relação a horizontal é de 45^0 (vide Figura 14). O tempo de descida, segundo a equação 2.4, de A até um ponto qualquer H da linha BC, é:

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{AH}{BH} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{r^2 + BH^2}{BH}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{r^2}{BH} + BH};$$

esse tempo, t_{AC}, é mínimo quando o ponto H varia[116] para a distância $BH = r$, dado por $2\sqrt{\frac{r}{g}}$.

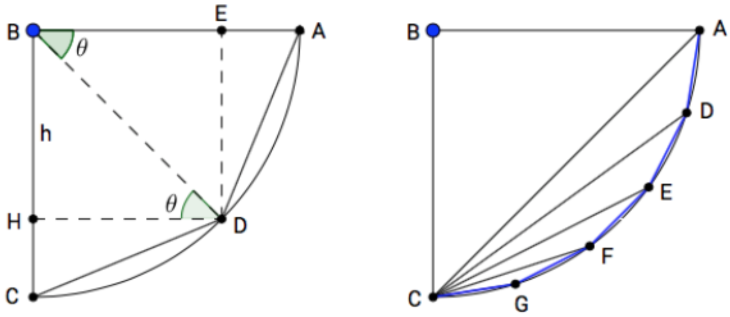

Figura 15 – Tempo de descida ao longo de caminhos segmentados; fonte: Freguglia and Giaquinta (2016), p. 13, adaptada.

Considere $r = 1$, Galileu prova para a Figura 15 que o tempo de descida da linha segmentada ADC é menor que o tempo de descida ao longo de AC, partindo do repouso em A. Ele usa em sua prova a *lei das cordas* e mais um argumento geométrico – tal como já foi visto logo acima. Aqui, nosso caminho é analítico, desse modo, considere

$$ED = \sin\theta, BE = \cos\theta, AE = 1 - \cos\theta,$$

então

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos\theta + 1} = \sqrt{2(1-\cos\theta)} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} \end{aligned}$$

e

$$t_{AD} = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{AD}{\sqrt{ED}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Para calcular o tempo de descida em DC, pode-se prosseguir por semelhança, isto é, seja $d = 2r$, $l = DC$, $h = r - ED$ e considere $\frac{d}{l} = \frac{l}{h}$, assim:

[116] Em outras palavras, o tempo T será mínimo quando BH tender a r, assim:

$$\lim_{BH \to r}\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{r^2}{BH} + BH} \to \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{r^2}{r} + r} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{2r} = \sqrt{\frac{2^2 r}{g}} \therefore \lim_{BH \to r} T \to 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

$$\frac{2r}{DC}=\frac{DC}{r-ED}, \text{ mas } r=1 \text{ e } ED=\sin\theta, \text{ logo, } \frac{DC}{2}=\frac{1-\sin\theta}{DC},$$

o que dá no mesmo,

$$DC=\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\theta}.$$

Para calcular a velocidade de descida nos pontos D e C, basta retomar o resultado obtido pelo princípio de conservação de energia ($\frac{1}{2}v^2-gh=0$), que por ora será modificado para atender o que se pede, a saber a velocidade. Assim, seja $v=\sqrt{2gh}$, seguem as velocidades solicitadas:

$$v_D=\sqrt{2g\sin\theta} \text{ e } v_C=\sqrt{2g};$$

para, respectivamente, um $BH=h=\sin\theta$ com respeito ao ponto D e $r=h=1$ com respeito ao ponto C. Então, com auxílio do *teorema de Merton*, o tempo de descida ao longo de DC será:

$$t_{DC}=\frac{DC}{\frac{1}{2}(v_D+v_C)}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\theta}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2g\sin\theta}+\sqrt{2g}\right)}=2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{\sin\theta}+1},$$

portanto,

$$t_{DC}=\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{\sin\theta}+1}.$$

Finalmente, para se calcular o tempo correspondente à descida pela linha segmentada ADC, ou seja, T_{ADC}, basta adicionar t_{AD} a t_{DC}:

$$T_{ADC}=\frac{2}{\sqrt{g}}\underbrace{\left[\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}+\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{\sin\theta}+1}\right]}_{n}.$$

Agora, se comparar T_{ADC} e t_{AC}, para um círculo unitário, é necessário que

$$\left[\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}+\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{\sin\theta}+1}=\right]n<1,$$

para que a descida por ADC seja mais rápida que a descida por AC. Mas de quanto deve ser esse n? Para se verificar isso, proponho a leitura do gráfico a seguir, traçado para se averiguar o comportamento de n, tal como se fosse uma função dependente de θ. A curva verde representa $n(\theta)$, a curva vermelha, a derivada de primeira ordem de $n(\theta)$, ou seja, $n'(\theta)$; o ponto em destaque explicita o menor tempo de descida em função de θ, ou seja, em função do ângulo das seções que produzem os arcos de círculo e, também, os segmentos no quadrante; e, por fim, a linha marrom tracejada mostra o valor da abcissa, (θ), para $n'(\theta) = 0$ – em outras palavras, remete ao valor mínimo da função $n(\theta)$.

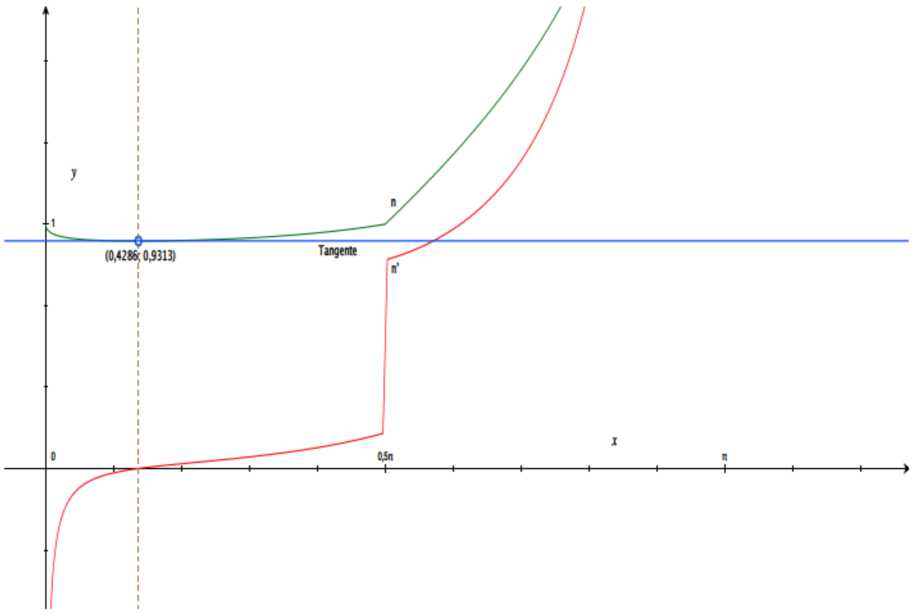

Figura 16 – Gráfico do valor mínimo de n.

Na Figura 16, pode-se verificar que a curva verde, que representa n, no intervalo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$,[117] possui um declínio até seu valor mínimo, a saber, $0,9313$, no qual a tangente se traça paralela às abcissas. É em $\theta = 0,4286$ radianos ou $24,5^0$ que n retorna seu menor valor, isto é, no quadrante de um círculo, n se encontra entre três e quatro segmentações. Por esse caminho analítico, é evidente que existe um limite claro no número de iterações que se pode fazer. Com isso, quero dizer que se torna problemático propor iterações, tal como Galileu procede, a revelia de uma verificação prévia dessa possibilidade. Ainda mais grave se torna esse argumento proposto pelo matemático pisano quando ele inadvertidamente propõe uma extrapolação mental do número de segmentos tender ao infinito que o faz concluir: a curva mais rápida que une os dois pontos dados A e B, na descida de um corpo sob seu próprio peso, é, seguramente, o arco de um círculo.

Pretendi com essa verificação analítica avaliar o argumento de Galileu, com o objetivo de investigar onde reside seu erro, ou seja, onde em seu argumento geométrico, o qual parece ser bastante convincente, está o passo equivocado. Parece-me, a esta altura, que Johann Bernoulli já sabia da falibilidade de seu predecessor na tentativa de solucionar o problema da braquistócrona. Gostaria de ressaltar que tal equívoco, a meu ver, está, de certa forma, oculto no argumento geométrico de Galileu e que a própria geometria pôde apenas sugerir que haveria algo inadequado. Um caminho analítico, como por exemplo o que propus logo acima, pareceu-me bastante eficiente para localizar precisamente o erro.

[117] Este intervalo mostra também que n, se interpretado como uma função dependente de θ – ou seja, $n(\theta)$ –, esta sendo avaliando dentro dos limites 0 e 2π.

Uma mente geométrica intuitiva como a de Galileu, parece-me, não teria dúvidas que a solução para o problema da braquistócrona é o arco de um círculo. Não considero que Galileu, cuja conduta seria descrita na história da ciência como resoluta e inflexível, tivesse forjado seu argumento sem que estivesse convicto de sua argumentação. Pode-se esperar essa conduta de alguém com espírito evasivo. Mas não de Galileu, que foi às últimas consequências quando afirmou e reafirmou suas convicções acerca da cosmologia copernicana.

UMA INTERPRETAÇÃO PARA O ERRO DE GALILEU

Galileu afirma, logo no início do "*scholium* de sua proposição 36 teorema 22, que "o caminho mais rápido de descida... de um ponto a outro não é o menor caminho, a saber, uma linha reta, mas um arco de um círculo."(Galilei, 1914, p. 239, minha tradução) É preciso entender por que essa solução de Galileu não é adequada. Vimos que a curva a qual responde corretamente o problema da braquistócrona é, de fato, a cicloide ordinária. O matemático pisano, em seu argumento, conforme se observou na seção precedente, divide o arco de um círculo em seis partes iguais (vide figura 15). Em seguida, desenvolve sua prova que em essência conclui: $t_{AC} > t_{AD} + t_{DC}$[118]. Posto isso, ele afirma que um corpo desce por DEC, a partir do repouso em A, mais rapidamente (ou em um tempo menor) que ao longo de CD; isto é, $t_{DC} > t_{DE} + t_{EC}$[119].

Galileu prossegue por iteração e chega a conclusão que a descida por $ADEFGC$ é mais rápida que por $ADEFC$. Portanto, por meio de uma extrapolação mental, parece bastante convincente que quanto maior for o número de lados do polígono regular inscrito no círculo, menor será o tempo da descida ou mais rápida ela se efetuará. É no limite desse polígono, quando se encontra a ponto de confundir-se com o círculo que a descida será a mais rápida de todas ou o tempo será o menor. Contudo, o argumento que prova $t_{AC} > t_{AD} + t_{DC}$, não prova $t_{DC} > t_{DE} + t_{EC}$, uma vez que no primeiro caso, a velocidade inicial do corpo em A (ou v_A) é zero, pois parte do repouso e no segundo caso a velocidade em D (ou v_D) não é mais zero, no movimento pelo caminho DEC, partindo de A[120]. Ora, o argumento que vale para o primeiro caso, não vale para o segundo. E Galileu replica explicitamente o mesmo argumento sob a pena de apresentar uma prova cuja conclusão, por iteração e extrapolação mental, é evidentemente falsa (como foi visto por análise na seção anterior).

2.5 JOHANN BERNOULLI E O PROBLEMA DESTINADO AOS *MATEMÁTICOS MAIS ARGUTOS DE TODO O MUNDO* (1696 E 1697)

O problema novum, como consta na seção 2.2, é o problema proposto por Johann Bernoulli, com o qual desafiou os matemáticos a resolverem-no. Vejamos mais uma vez o modo

[118] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 14.
[119] Cf. Galilei, 1914, p. 239.
[120] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 14.

como ele construiu seu problema e o publicou pela primeira vez nos *Acta Eruditorum* em junho de 1696.

> **Problema novo** a cuja solução matemáticos são convidados. Dados dois pontos A e B em um plano vertical, conferir ao móvel M um caminho AMB, pelo qual desce devido sua gravidade, começa a mover-se a partir do ponto A, no tempo mais breve, alcança o outro ponto B. (Bernoulli, 1696, p. 269, minha tradução)[121]

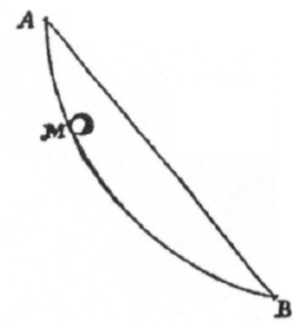

Figura 17 – Figura 5, tabela 5, Acta Eruditorum, junho, 1696; fonte: Knobloch (2012), p, 16.

Apesar de parecer uma questão de matemática pura, o próprio Johann Bernoulli justificou sua intenção de propor esse problema ao dizer que também era útil para outros campos da ciência, como a mecânica. E, ainda, emendou que a resposta adequada não é a trivial linha reta que une os dois pontos (ou seja, o menor caminho) e, sim, uma outra linha, no caso, uma curva bastante conhecida pelos matemáticos da época. Seu prazo foi estipulado, até dezembro de 1696.

> Para despertar nos amantes de tal coisa o desejo de empenhar-se na solução desse problema, vale observar que a questão proposta, tal como aparenta, consiste de mera especulação, não tendo, portanto, uso. Pelo contrário, algo que ninguém facilmente acreditaria, isso tem grande utilidade em outros ramos da ciência, como a mecânica. Enquanto isso, (para previnir julgamentos precipitados) [seria importante observar que] embora a linha reta AB seja, de fato, a menor [distância] entre os pontos A e B, ela não é apesar disso o caminho percorrido no menor tempo. Contudo, a curva AMB, cujo nome anunciarei se ninguém mais a tiver descoberto antes do final deste ano, é muito conhecida pelos geômetras (Bernoulli, 1959, p. 645–646, minha tradução).

E ainda advertiu que se ninguém apresentasse o nome dessa curva, seguido, lógico, pelo respectivo argumento matemático que a justifique, ele próprio faria-o. Mas isso, de fato, não ocorreu, mas exigiu que o prazo fosse estendido.

[121] Cf. Bernoulli, 1742a, p. 161 e Bernoulli, 1959, p. 645.

EXTENSÃO DO PRAZO

A decisão de prorrogar o prazo da entrega das soluções do problema da braquistócrona foi sugerida por Leibniz e, em seguida, acatada por Johann Bernoulli. Isso não ocorreu rapidamente pois ambos em suas correspondências tratavam de muitos outros assuntos e, como o primeiro prazo ainda estava vigente, não tinha razão para estendê-lo prematuramente. Parece-me que a questão crucial a qual determinou o ocorrido foi justamente proporcionar também a matemáticos de outras localidades (principalmente, França e Itália) a oportunidade de se dedicarem ao problema. Assim, Leibniz e Johann Bernoulli, durante os meses de junho a dezembro de 1696, esforçaram-se nesta tarefa. De fato, praticamente todas as soluções que foram publicadas nos *Acta Eruditorum* de maio de 1697 demoraram a estar disponíveis a Johann Bernoulli. A exceção foi a solução não-publicada de Leibniz a qual foi discutida entre eles em junho deste mesmo ano. Já a solução de Isaac Newton só foi conhecida por Johann Bernoulli em janeiro de 1697, quando aquele primeiro publicou-a anonimamente nas *Philosophical Transactions* de Londres. Segue, portanto, o caminho das correspondências entre Johann Bernoulli e Leibniz que apresentam essas questões acerca da ampliação do prazo para responder o desafio proposto.

Na correspondência de Leibniz para Johann Bernoulli, de 31 de julho (10 de agosto) de 1696[122], o emitente sugere que se insira nas revistas científicas da França e da Itália o problema da braquistócrona; embora já esperasse soluções de Jakob Bernoulli, Tschirnhaus e l'Hôpital. Como resposta, em 15(25) de agosto de 1696[123], Johann Bernoulli disse não se opor à publicação estrangeira. Leibniz, então, disse que não deveria publicar o problema da braqusitócrona antes de novembro na França para melhor atender ao público de lá e também que ou aguardasse até o fim do ano para publicá-lo nos *Acta Eruditorum* ou que o fizesse na primeira publicação do ano seguinte. Tudo isso para garantir que houvesse tempo de receber outras soluções. Isso foi na correspondência de 23 de agosto (2 de setembro) de 1696[124]. Finalmente, em 6 de novembro de 1696[125], Johann Bernoulli avisou Leibniz que havia solicitado a Otto Mencke a prorrogação do prazo em uma nova publicação do problema. Assim, em dezembro de 1696 foi publicado nos *Acta Eruditorum* o seguinte:

> Ao benévolo leitor, cultor nos primórdios da mais profunda matemática, saúdo! Foi proposto, nestes *Acta Eruditorum*, no mês de junho deste ano, página 269, Homem ilustríssimo, Sr. Johann Bernoulli, na época professor público das matemáticas na Academia Groningense, um Problema novo; e instigou matemáticos à solução daquele [problema]; prometeu a si próprio que haverá de publicá-la, se ao término deste ano, nenhum outro torná-la pública. Até agora, na verdade, ninguém transmitiu a nós qualquer coisa que se esperava à solução daquele problema; contudo,

[122] Cf. Leibniz, 2011, p. 71–72 e Leibniz et al., 1855, p. 309–310.
[123] Cf. Leibniz, 2011, p. 99–100 e Leibniz et al., 1855, p. 314.
[124] Cf. Leibniz, 2011, p. 115 e Leibniz et al., 1855, p. 322–323.
[125] Cf. Leibniz, 2011, p. 166 e Leibniz et al., 1855, p. 332.

> um problema digno de ser visto que se exercite os engenhos de outros; àqueles que por acaso em junho ainda não tenha chegado de nossos *Actorum*, por outro lado, consideraremos a sua solução de modo contínuo, além disso, que a outros a notícia de fato ter sido chegado, o célebre Bernoulli julgou estar convencido prorrogando o prazo [que] haverá de suprimir até festa de Páscoa do próximo ano, e também enquanto isso o mesmo problema ter sido proposto nos jornais dos franceses e dos italianos. E assim, o espaço é suficiente para os matemáticos de experimentar suas forças, e do problema, onde terão (per)seguido [aquel]a solução, quer nesses nossos *Actis*, quer de que haverá de ser comunicado com público nos jornais de outros países. (Bernoulli, 1742a, p. 165, minha tradução)[126]

Além desse aviso acima apresentado, nos *Programma Groningæ*, edição de 1697[127], há uma descrição, feita por Johann Bernoulli, bem completa do período que cerca justamente a primeira e a segunda publicação do problema da braquistócrona, destinado aos *acutissimis qui toto Orbe florent Mathematicis*[128]. Lá nos *Programma* groningenses têm-se uma justificativa para propor problemas matemáticos, pois são eles inspiração para o aumento do conhecimento, uma vez que impõem dificuldade aos espíritos engenhosos, que precisam, para superá-la, por a prova seus instrumentos e métodos. E como recompensa aos bem-sucedidos, constrói-se fama e eterna reverência e lembrança, a exemplo de Mersenne, Pascal, Fermat e outros. O problema da braquistócrona presta-se a este fim.

Em junho do ano de 1696, lembra o autor, seis meses antes desta publicação, nos *Acta Eruditorum*, foi proposto o problema da descida mais rápida. Johann Bernoulli esperava que a beleza desse desafio atraísse tantos matemáticos que pudessem assim admirá-lo. Mas não foi o que ocorreu, segundo ele[129], pelos seis meses seguintes à data da publicação. E sua promessa era, mediante a isso, apresentar sua própria solução e gozar, assim, solitário, do reconhecimento da potência de seu método e grandeza de seu engenho. A única exceção, de acordo com seu juízo, foi Leibniz que comunicou-o sua bem-fortunada solução. Além disso Leibniz, cortesmente, sugeriu-o ampliar o prazo para até a Páscoa do ano seguinte, para tornar o problema público também na França e na Itália e, assim, minimizaria a possibilidade de alguém protestar devido ao curto prazo oferecido. Não apenas, disse Johann Bernoulli, ter concordado com o sugerido, decidiu ele próprio anunciar o adiamento da data limite, na esperança de ver alguém atacar tão excelente e difícil questão.

Para beneficiar àqueles cujos *Acta Eruditorum* não estão disponíveis é que Johann Bernoulli publica nos *Programma Groningæ* o problema mecânico-geométrico da curva da

[126] Cf. *Acta Eruditorum* de dezembro de 1696, p. 560.

[127] Cf. Bernoulli, 1742a, p. 166–169 e Bernoulli, 1959, p. 646–648.

[128] "Matemáticos mais argutos que em todo globo florescem" (tradução livre). Cito aqui esta passagem porque tornou-se bastante recorrente na história do problema da braquistócrona dizer-se que foi um problema destinado aos matemáticos mais habilidosos (ou argutos) do mundo.

[129] Na realidade, tal como já expus nesta mesma subseção, Leibniz havia encaminhado as soluções de Jakob Bernoulli, Tschirnhaus e Marquês de l'Hôpital em 31 de julho (10 de agosto), ou seja, bem antes do fim do ano de 1696. Sem contar que um mês antes, isto é, em 16(26) de junho, Leibniz já tinha apresentado sua solução bem-sucedida.

descida mais rápida. Mas diferentemente do que consta na revista germânica, aqui, Johann Bernoulli acrescenta uma explicação do significado do problema a saber: para unir dois pontos há uma infinidade de curvas que podem ser traçadas, mas deve-se escolher aquela que se a substituísse por um fino tubo do qual faz-se descer uma esfera, ela deverá percorrê-lo no menor tempo. E adverte, com objetivo de eliminar qualquer ambiguidade, que é preciso entender expressamente que a lei da queda dos corpos de Galileu é aceita, para superfícies sem atrito, e é indubitável na mente dos geômetras. Apenas para relembrá-la aqui, digo que essa lei pode ser assim resumida: as velocidades de queda de corpos pesados é proporcional às raízes quadradas das alturas caídas. Embora, segundo ele, seu método seja na medida tão geral que poderia a ele ser aplicada qualquer hipótese.

Johann Bernoulli esperava de fato que muitos geômetras se interessassem a atacar esse problema, sobretudo, com a força de seus métodos. O prêmio aguardado, não seria nem ouro, nem prata, seria a virtude, a recompensa mais desejada, e a fama, o incentivo mais adequado, a honra, o louvor, a aprovação. Se até a Páscoa não houvesse qualquer solução bem-sucedida, Johann Bernoulli não aguardaria mais, e apresentaria sua versão e a de Leibniz, se o mesmo permitisse, a quem o matemático groningense confiou sua solução desde junho de 1696. E se os geômetras estudassem essas soluções, escreveu Johann Bernoulli, apreciariam os limites da geometria ordinária e descobririam muito mais. Os poucos que solucionassem esse problema insólito, mesmo aqueles que ostentam métodos extraordinários, penetrariam nos segredos mais profundos da geometria e estenderiam seus limites de modo estupendo. Embora, seus preciosos teoremas, considerados por esses incognoscíveis, tenham sido publicados já há muito tempo[130].

Como indicado na seção 2.2, Leibniz apresentou sua solução em 16(26) de junho de 1696[131], apenas seis dias depois do problema de Johann Bernoulli ter sido mostrado em certa correspondência particular[132] a ele. E sem mais outras introduções, segue na seção abaixo essa solução de Leibniz cuja publicação acabou por não ocorrer na época. Ele preferiu abdicar dela em favor da solução de Johann Bernoulli, como será visto com mais detalhes na seção 2.7.2. Por ora, preciso advertir que usei como base a interpretação de Goldstine (1980) para a solução não-publicada de Leibniz, a qual inclui, diferentemente do que se aprecia na edição da *Akademie-Ausgabe*, o famoso (e controverso) *addendum* (*beilage*) de Gerhardt (Leibniz et al., 1855, p. 290–295), cuja origem é difícil rastrear.

[130] É bastante clara a alusão a Newton, Johann Bernoulli aproveitou para, não apenas para atender a outros públicos, mas também exaltar a prioridade dos métodos de Leibniz em detrimento aos de seu concorrente inglês.

[131] Cf. Leibniz, 2004, p. 795–803 e Leibniz et al., 1855, p. 284–290.

[132] Cf. Leibniz, 2004, p. 790 e Leibniz et al., 1855, p. 283.

2.6 SOLUÇÃO "NÃO-PUBLICADA" DE LEIBNIZ (1696)

Leibniz apresentou, como indicado na seção 2.2, o seguinte esboço de solução[133]. Primeiramente, Leibniz estabelece que a equação diferencial de um cicloide ordinária deve ter a forma:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}.$$

Da figura 18, ele assere que:

> Por isso, segue que um elemento de curva, dessa maneira, está na razão composta, de tal modo, diretamente [proporcional] ao elemento correspondente à latitude e inversamente [proporcional] à raiz quadrada da própria altitude (Leibniz et al. 1855, p. 288 apud Goldstine (1980), p. 34–35, minha tradução)[134].

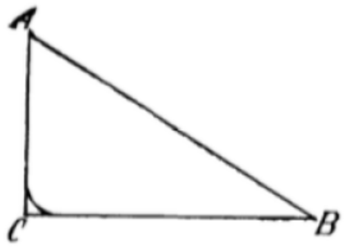

Figura 18 – Triângulo infinitesimal; fonte: Goldstine (1980), p. 35.

Em outras palavras, seja AC o eixo x de modo que todas as quantidades sobre esse eixo sejam altitudes, e seja BC o eixo y de modo que todas as quantidades sobre esse outro eixo sejam latitudes, se s for um comprimento do arco de curva, então:

$$ds = \frac{k}{\sqrt{x}}dy. \tag{2.5}$$

Pela simples aplicação do teorema de Pitágoras à Figura 18, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, por substituição na equação 2.5, tem-se:

$$\left(\frac{k}{\sqrt{x}}dy\right)^2 = (dx)^2 + (dy)^2;$$

com algumas manipulações algébricas:

$$\frac{k^2}{x}(dy)^2 - (dy)^2 = (dx)^2;$$

[133] Cf. Goldstine, 1980, p. 35–38.
[134] Cf. Leibniz, 2004, p. 800.

$$(dy)^2\left(\frac{k^2}{x}-1\right)=(dx)^2;$$

$$\frac{(dy)^2}{(dx)^2}=\frac{x}{k^2-x};$$

finalmente, para $k^2=2b$, chega-se a:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{2b-x}}. \tag{2.6}$$

Se v for uma variável tal que $\frac{v}{b}=\frac{dy}{dx}$, então, $y=\int\frac{v}{b}dx$. Mas 2.6 é a equação diferencial de uma cicloide ordinária, agora, como Leibniz encontra-a no problema da Braquistócrona? Para verificar mais detalhes dessa primeira solução de Leibniz, considero importante averiguar o, embora controverso, *addendum* (ou *beilage*) de Gerhardt[135]. Da hipótese de Galileu aplicada ao triângulo ABC (vide Figura 18), para um corpo que desliza de A para B em um tempo t_{AB}, chega-se a:

$$AB=\frac{1}{2}gt_{AB}^2\sin A\hat{B}C=\frac{1}{2}gt_{AB}^2\frac{AC}{AB};$$

se considerar a queda livre de um corpo em AC, encontra-se:

$$AC=\frac{1}{2}gt_{AC}^2.$$

Agora, a razão entre AB e AC fica:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\frac{1}{2}gt_{AB}^2\frac{AC}{AB}}{\frac{1}{2}gt_{AC}^2}=\frac{t_{AB}^2}{t_{AC}^2}.\frac{AC}{AB},$$

se isolar t_{AB}, encontra-se:

$$t_{AB}=\frac{AB}{AC}t_{AC}. \tag{2.7}$$

Na Figura 19, Leibniz considera os pontos A, B, C e E fixos, o ponto D se move ao longo da paralela ED, de modo que o tempo seja mínimo tanto para AD, quanto para DB. Pelo mesmo procedimento aplicado a AB e a AC na Figura 19, chega-se a $r\equiv t_{AE}=\sqrt{\frac{AE}{AC}}t_{AC}$ e a $n\equiv t_{EC}=\left(1-\sqrt{\frac{AE}{AC}}\right)t_{AC}$. Similar ao modo de se calcular a equação 2.7, encontra-se $t_{AD}=\frac{AD}{AE}r(=t_{AE})$ e $t_{DB}=\frac{DB}{EC}n(=t_{EC})$. Pela Figura 19, está claro que $t_{ADB}=t_{AD}+t_{DB}$.

[135] Esse é o recurso levantado por Gerhardt em seu Leibniz et al., 1855, p. 290–295. Goldstine, 1980, p. 31, nota 39, considera que Leibniz certamente teria produzido tal argumento antes da correspondência de 9(19)

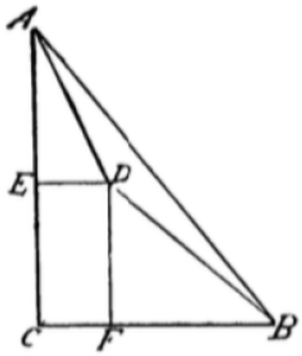

Figura 19 – Condição de mínimo; fonte: Goldstine (1980), p. 37.

Para a aplicar a condição de mínimo (princípio de Fermat, vide anexo A) para o tempo, deve-se considerar a condição inicial: AE e AC são constantes. Assim, a equação diferencial que exprime o tempo para a descida ADB fica:

$$dt_{ADB} = dAD\frac{r}{AE} + dDB\frac{n}{EC} = 0. \tag{2.8}$$

Do teorema de Pitágoras (vide Figura 19), tem-se $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2}$ e $DB = \sqrt{EC^2 + FB^2} = \sqrt{EC^2 + (CB - ED)^2}$, que se reduzidas às suas diferenciais ficam:

$$dAD = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{AE^2 + ED^2}}.2ED.dED = \frac{ED}{AD}dED$$

e

$$\begin{aligned} dDB &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{EC^2 + FB^2}}.2FB.dFB \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{DB}.2FB.(-dED) = -\frac{FB}{DB}dED. \end{aligned}$$

Se substituí-las na equação 2.8, tem-se:

$$\frac{ED}{AD}dED.\frac{r}{AE} + \left(-\frac{FB}{DB}dED\right).\frac{n}{EC} = 0$$

ou

$$\frac{ED}{AD.AE}r = \frac{FB}{DB.EC}n.$$

É possível simplificar a equação acima, reduzindo-a a:

$$\underbrace{\frac{AD}{AD}}_{1}.\frac{ED}{AD.AE}r = \underbrace{\frac{DB}{DB}}_{1}\frac{FB}{DB.EC}n \rightarrow \underbrace{\frac{AD}{AE}r}_{t_{AD}}.\frac{ED}{AD^2} = \underbrace{\frac{DB}{EC}n}_{t_{DB}}.\frac{FB}{DB^2};$$

de junho, Leibniz, 2004, p. 790 e Leibniz et al., 1855, p. 283; a própria edição da *Akademie*, Leibniz, 2004, p. 800, nota 8, faz referência ao *addendum* de Gerhardt, contudo não o repete.

E, portanto,

$$t_{AD}\frac{ED}{AD^2} = t_{DB}\frac{FB}{DB^2}. \tag{2.9}$$

É interessante notar que a equação 2.9 é equivalente ao resultado que se obteria aplicando a lei de Snell-Descartes à Figura 19. Se considerar que os segmentos que formam ADB fossem os caminhos percorridos por um raio de luz (monocromático) que incide em uma interface dióptrica em D, fronteira que separa dois meios cujos índices de refringência (n) sejam diferentes, a saber, $n_{AD} > n_{DB}$. E isso é simples de mostrar, basta que

$$\frac{t_{AD}}{AD}\frac{ED}{AD} = \frac{t_{DB}}{DB}\frac{FB}{DB};$$

se se lembrar das relações trigonométricas do triângulo retângulo e da equação do movimento uniforme, então, chega-se explicitamente à lei da refração da luz, portanto, a:

$$\frac{1}{v_{AD}}\sin E\hat{A}D = \frac{1}{v_{DB}}\sin F\hat{D}B.$$

Leibniz procede a demonstração da equação 2.9, sem usar a lei da óptica que mencionei logo acima. Na solução pública de Leibniz, seção 2.7.1, ele assevera que a curva formada pela solução, cujo modelo utilizado é óptico (exatamente o mesmo modelo de solução de Johann Bernoulli), é a cicloide ordinária. Talvez, uma das intenções de Leibniz seja a de reivindicar a extensão ou versatilidade de seu método. Para dar prosseguimento à solução, Leibniz traça a figura 20 que possui a parábola AE de vértice A e eixo AB. De modo que o móvel desce de A para B, pelo seu próprio peso, no tempo BE. A curva AC é a *Tachystoptota* de Leibniz e B_1, B_2 e B_3 estão próximos entre si e igualmente espaçados.

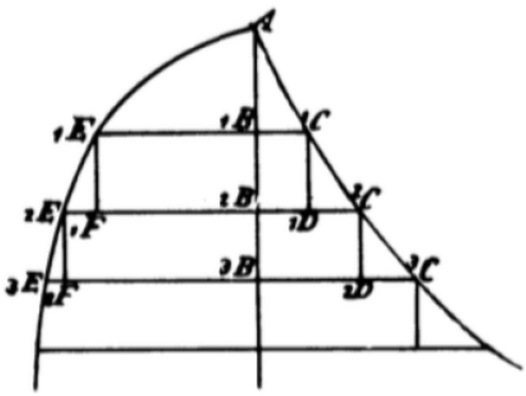

Figura 20 – Composição parábola-cicloide; fonte: Goldstine (1980), p. 37.

Pela equação 2.9 aplicada à Figura 20, tem-se:

$$t_{C_1C_2}\frac{D_1C_2}{(C_1C_2)^2} = t_{C_2C_3}\frac{D_2C_3}{(C_2C_3)^2}.$$

Da equação 2.7 aplicada à Figura 20, encontra-se:

$$t_{C_1C_2} = \frac{C_1C_2}{C_1D_1}t_{C_1D_1} \text{ e } t_{C_2C_3} = \frac{C_2C_3}{C_2D_2}t_{C_2D_2}.$$

Agora, combine essas duas relações e note que

$$C_1D_1 = C_2D_2, \text{ assim, } t_{C_1D_1}\frac{D_1C_2}{C_1C_2} = t_{C_2D_2}\frac{D_2C_3}{C_2C_3}, \text{ ou:}$$

$$F_1E_2\frac{D_1C_2}{C_1C_2} = F_2E_3\frac{D_2C_3}{C_2C_3}. \tag{2.10}$$

Já que $F_1E_2 = B_2E_2 - B_1E_1$ é o tempo de queda de B_1 a B_2, ou seja, de C_1 a D_1. Lembre-se que $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots$ é infinitamente pequeno e que $ds = gtdt$, disso, tem-se, por exemplo, $B_1B_2 = gt_{AB_1}t_{B_1B_2}$; e também, da proporção que define uma parábola.

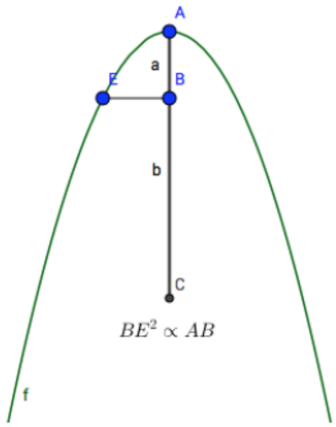

Figura 21 – Proporção da parábola.

Logo, segue que:

$$1 = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{B_1E_1}{B_2E_2}.\underbrace{\frac{F_1E_2}{F_2E_3}}_{\frac{t_{B_1B_2}}{t_{B_2B_3}}} = \overbrace{\frac{\sqrt{AB_1}}{\sqrt{AB_2}}}^{\text{P.parábola}}.\frac{F_1E_2}{F_2E_3} \rightarrow \frac{F_2E_3}{F_1E_2} = \frac{\sqrt{AB_1}}{\sqrt{AB_2}};$$

porque $F_1E_2 = t_{B_1B_2}$, $F_2E_3 = t_{B_2B_3}$ e $BE^2 \propto AB$; a partir daí e com a equação (2.10) Leibniz tem a solução:

$$F_1E_2\frac{D_1C_2}{C_1C_2} = F_2E_3\frac{D_2C_3}{C_2C_3};$$

$$\frac{D_1C_2}{D_2C_3} = \frac{C_1C_2}{C_2C_3}.\frac{F_2E_3}{F_1E_2};$$

e com o auxílio do detalhe a seguir, da Figura 22, Leibniz encontra $dy = k'\sqrt{x}dc$ na forma diferencial, em que $(dc)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2$; que é, portanto, exatamente a equação 2.5, ou seja:

$$\underbrace{dc}_{ds} = \overbrace{\frac{1}{k'}}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}dy \therefore ds = \frac{k}{\sqrt{x}}dy.$$

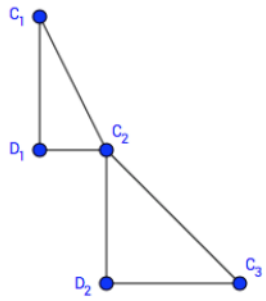

Figura 22 – Triângulos curvos.

Assim, Leibniz prova sua solução para o problema da braquistócrona. Lembro que esse caminho foi construído a partir do *addedum* sugerido por Gerhardt. Outro fato importante de se salientar é que Leibniz considerou a equação diferencial 2.6, que corresponde a cicloide ordinária, a resposta para o problema; sendo que ele próprio parte da sua *Tachystoptota*, que nada mais é que a cicloide ela mesma, e de sua relação 2.5, entre o comprimento da diferença do arco de curva ds e a queda dy. Logo, de uma relação fundamental das diferenças da cicloide ordinária, Leibniz chega a equação diferencial dela e depois prova-a, por um argumento anterior ao problema, que é essa mesma relação fundamental da qual ele parte.

2.7 PUBLICAÇÃO DAS SOLUÇÕES NAS *ACTA ERUDITORUM* (1697)

Como já vimos, foram publicadas nos *Acta Eruditorum* de maio de 1697 seis soluções para o problema da braquistócrona a de Johann Bernoulli, de Jakob Bernoulli, de l'Hôpital, de Tschirnhaus, de Leibniz e de Isaac Newton. Abordarei algumas dessas soluções nesta seção, não me limitarei a essas, haja vista a solução não-publicada de Leibniz (vide seção 2.6), apresentada logo acima, e o escólio de Galileu (vide seção 2.4). As soluções publicadas as quais veremos com mais detalhes são as de Leibniz, Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli e Isaac Newton. Além desses soluções ao problema da braquistócrona, também há outras soluções importantes a serem verificadas, como a segunda solução (ou *addendum*) de Johann Bernoulli publicada nos *Acta Eruditorum* de 1718 – por se tratar da famosa e bastante anunciada solução direta de Johann Bernoulli, fruto de um extenso diálogo com seu irmão, Jakob Bernoulli – e a solução tardia de Newton, registrada em seus manuscritos em 1700, porque aborda como Newton desenvolveu seus cálculos mediante o método das fluxões devido ao pedido de seu colega e amigo James Gregory.

A solução não-pública de Leibniz foi apresentada por primeiro porque era preciso verificá-la para compreender qual foi sua abordagem ao problema com vistas a considerar de maneira mais completa a decisão de abdicar de sua solução a favor da solução indireta de Johann Bernoulli. Leibniz optou, em sua versão pública, por exaltar a solução de seu colega, professor de Groningen, e por pontuar, usando do mesmo modelo geométrico de Johann Bernoulli, que da curva que une os pontos dados A e B, se ela é mesma a da descida mais rápida, então deve conduzir a uma das duas propriedades da cicloide (vide seção 2.3). As duas soluções de Leibniz (a pública e a não-publicada) estão interconectadas.

A solução de Jakob Bernoulli, de todas publicadas em 1697, é a única que possui tanto a condição necessária para que a curva resposta seja a cicloide (o princípio do menor tempo de Fermat, vide anexo A, condição que as soluções não-publicada de Leibniz e de Johann Bernoulli de 1697 contêm), quanto a condição suficiente para que seja a cicloide a curva da descida mais rápida. Movido por essa resposta "completa", foi que Jakob Bernoulli desafiou seu irmão mais novo a também expressar essa razão. Eles trocaram problemas publicamente, e só em 1718 que Johann Bernoulli expôs com clareza aquilo que Jakob Bernoulli havia há muito solicitado.

A solução de Newton ao problema da braquistócrona foi publicada anonimamente nas *Philosophical Transactions* de Londres em janeiro de 1697 e, depois, republicada nos *Acta Eruditorum* em maio do mesmo ano por decisão de Johann Bernoulli. Essa solução de Newton, diferentemente de todas as outras, apresenta uma condição necessária de construção da cicloide como solução do problema, sem o desenvolvimento que desse suporte a ela. Contudo, Newton tem registrada uma solução ao problema da braquistócrona que apresenta claramente o "caminho da descoberta" da cicloide como a curva da descida mais rápida. Isso ocorre, de fato, anos mais tarde, em 1700, quando David Gregory solicita a Newton esclarecimento da polêmica obra de Nicolas Fatio de Duillier, *Lineæ Brevissimi Descensus Investigatio Geometrica Duplex* (1699), particularmente da parte em que Fatio de Dullier desenvolve uma solução para o problema da Braquistócrona via método das fluxões. Em poucas doze linhas, Newton expôs a essência do argumento de Fatio de Duillier, essas linhas guardam, portanto, a solução tardia newtoniana aqui tratada.

2.7.1 Solução de Leibniz

Antes de apresentar a versão da solução de Leibniz para o problema da braquistócrona que foi a público, creio ser importante considerar alguns pontos levantados por ele a respeito do papel que problemas desempenhavam e de suas razões para abdicar de sua solução "não-publicada" a favor da de Johann Bernoulli. É curioso constatar, mais uma vez, nas palavras de Leibniz[136], o que averiguei nas de Johann Bernoulli (vide seção 2.5, EXTENSÃO DO PRAZO), ou seja, que é uma prática comum na matemática submeter-se a problemas. Isso porque incita (ou provoca) descobrir formas de dissolvê-lo, por isso que problemas, não apenas na matemática, contribuem para a arte da invenção. E sem esse deasafio, isto é, se os homens das ciências ou matemáticos não se expuserem para além dos horizontes das teorias comumente aceitas, acabarão por se acomodar. Problemas são a melhor maneira para se promover o progresso do conhecimento e para se procurar por algo novo. "Não existe melhor remédio para tirá-los da letargia, ao invés de submeter-se a problemas, que se distinguam pela elegância, bem como, pela utilidade, quando deles demanda mais sutileza que labor." (Leibniz, 2000, p. 42, minha tradução)

Leibniz não deixou de aproveitar essa oportunidade para exaltar o seu cálculo das diferenças, adotado por um grande número de matemáticos eminentes, como Jakob e Johann Bernoulli, l'Hôpital, John Craig e até mesmo Huygens. Eles usaram-no com êxito quer em questões particulares quer em seus engenhos e, principalmente os irmãos Bernoulli, progrediram enormemente em problemas físico-matemáticos. Com respeito, mais precisamente, ao problema da braquistócrona, Leibniz descreveu o seguinte:

> Finalmente, há um certo tempo, Sr. [Johann] Bernoulli, professor em Groningen, considerou o estudo de um outro problema [além da catenária], aquele da trajetória da descida mais rápida, um problema que Galileu também tentou resolver, mas sem sucesso; um problema cuja beleza e aplicações em nada invejam aquelas da catenária. Ele resolveu-o e convidou outros a fazer o mesmo, isso mostra como dois ilustres problemas, que Galileu identificou incorretamente e tentou em vão solucionar, encontraram suas soluções atuais no método de nosso Cálculo (Leibniz, 2000, p. 43, minha tradução).

Leibniz enfatiza que se Galileu tivesse, ele mesmo, usado da Análise, a qual estava, na opinião de Leibniz, incipiente naquela época, ele teria sido capaz de descobrir as soluções dos problemas por ele propostos, a saber, da catenária e da braquistócrona. Suas soluções não estariam distantes das corretas, ou seja, ele não teria tomado erroneamente a catenária pela parábola e a curva braqusitócrona pelo arco de círculo.

> Sr. [Johann] Bernoulli abordou a questão por inteiro sob melhores auspícios, não apenas foi ele o primeiro a descobrir que a curva da descida mais rápida era a cicloide, mas se apercebeu que essa curva braquistócrona carregava também um outro segredo: qual seja, a curva formada por raios de luz os quais são alterados em um meio em constante mudança. Huygens encontrou esta questão em seu tratado sobre a luz, mas sem tentar resolvê-la (Leibniz, 2000, p. 43–44, minha tradução).

[136] Cf. Leibniz, 2000, p. 42–47 e Leibniz, 1697, p. 201–205

Leibniz relatou como foi proposto o problema da braquistócrona, que o desafio foi publicado nos *Acta Eruditorum* de Leipzig em junho de 1696, com um prazo de seis meses, e que Johann Bernoulli havia pedido a ele que se dedicasse também a essa tarefa. Apesar de Leibniz, naquele momento, estar lotado de afazeres, a beleza desse problema o atraiu bastante. Na sequência, quando Leibniz apresentou sua solução a seu colega de Groningen e ambos consentiram à solução leibniziana, Johann Bernoulli depositou confiança em Leibniz para guardar sua solução até ser publicada no tempo determinado. Mas após seis meses, depois do prazo limite ter expirado, ninguém, a não ser eles mesmos – tal como descreveu Leibniz – declarou qualquer solução. Johann Bernoulli poderia ter apresentado sua solução e sozinho teria gozado de fama e glória, por sua elegante descoberta. Leibniz encorajou-o do contrário, de trabalhar para o interesse geral ao invés dos particulares. Assim, concluíram, para o progresso da ciência e para que o problema fosse fixado, alargar o período por mais seis meses. Leibniz asseverou ter nomeado quem seriam aqueles que teriam condições de descobrir a solução, e com convicção considerou que a solução teria de ser tão somente por meio de seu cálculo.

Apenas aqueles matemáticos cogitados por Leibniz que responderam ao problema. Além dos irmãos Bernoulli, apresentaram-se, na França, l'Hôpital, talvez Huygens se estivesse vivo na época, segundo o autor, Johannes Hudde se não tivesse abandonado a tarefa e Newton se tivesse concordado absolutamente em trabalhar a questão. Leibniz advertiu ter lembrado disso para não ser considerado alguém que desprezou homens ilustres os quais não tiveram a possibilidade, ou o lazer, de mostrar qualquer interesse. Ele acrescentou que a solução de Johann Bernoulli foi apresentada em agosto de 1696, a solução de Jakob Bernoulli foi publicada nos *Acta Eruditorum*, l'Hôpital encaminhou a sua em março de 1697. Para acrescentar, Johann Bernoulli, junto de sua solução, encaminhou duas abordagens, uma direta e outra indireta. Essa última foi apresentada por conter considerações acerca do dióptrico, aquela primeira, a qual ataca o núcleo do problema, poderia ser apresentada acaso alguém pedisse-a.

Leibniz considerou que Johann Bernoulli refletiu algo totalmente novo quando colocou o problema de máximos e mínimos na forma do problema da braquistócrona. Outros matemáticos já tinham se dedicado ao trabalho de encontrar máximos e mínimos de uma curva pelo método (direto) das tangentes, como: Fermat que estabeleceu um método para encontrar extremos de uma curva, Descartes, Sluse, Hudde e outros. O caso de Johann Bernoulli é um pouco diferente porque não pede pontos extremos de uma curva dada, e sim a própria curva ou lugar geométrico cuja descida se faz no menor tempo. Nesse caso específico da procura pela curva que satisfaz otimamente a condição inicial da descida no menor tempo. É preciso, então, descobrir qual é a forma da curva dados dois pontos determinados (semelhante ao problema da catenária em que se desejava determinar a curva da menor gravidade possível). A solução de Johann Bernoulli tem outra vantagem preciosa e suplementar, que se conhece agora a solução para dois problemas de grandes consequências da dióptrica, cujas dificuldades teriam dissuadido Huygens, bem como todos que depois dele enfrentaram este problema da braquistócrona: (1) determinar a curvatura contínua dos raios de luz e (2) encontrar a curva que descreve seus reflexos.

Leibniz finalmente nos mostra por que deixou de apresentar sua solução para então exaltar a solução de Johann Bernoulli. A razão que ele, no entanto, não apresenta é a similaridade de sua solução com respeito a de outros; seria uma redundância apresentá-la seguida de outras soluções semelhantes. Apesar disso, Leibniz nos mostra seus cálculos que conduzem à cicloide como a curva que satisfaz o problema da braquistócrona quando revela uma propriedade construtiva desta curva. Seja a Figura 24, a curva ABK, gerada pelo círculo GLK, encontra-se delimita pelo ponto mais baixo K de seu círculo gerador e o ponto A do horizonte; Leibniz nos apresenta o seguinte:

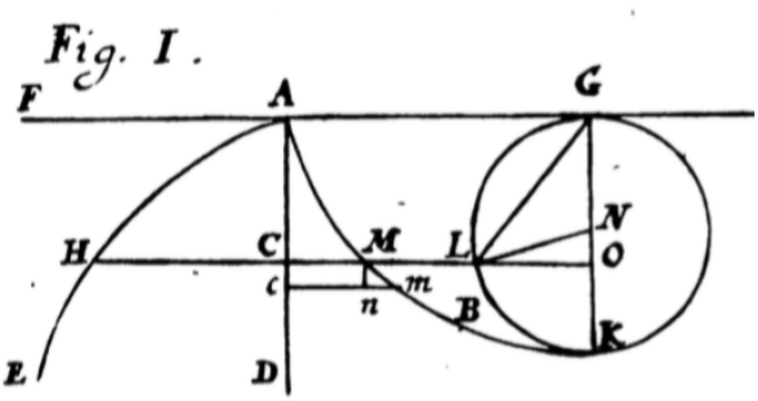

Figura 23 – Figura 1, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Bernoulli (1697a).

> Trace uma linha perpendicular ao eixo vertical AC, tal que o corte em C, a curva em M, o círculo em L e, seu diâmetro vertical GK em O. Suponha que a ordenada CM seja proporcional ao segmento circular, e que o produto do semi-raio do círculo por CM seja igual ao segmento de área entre o arco do círculo e a corda GL... Sob essas condições, a porção AB da curva, que se encontra entre os dois pontos dados A e B, será o caminho pelo qual um corpo cairá pelo seu próprio peso e percorrerá esse caminho do ponto A para B com a maior velocidade possível. Pode-se também mostrar facilmente que esse arranjo de segmentos é idêntico à cicloide ordinária: sendo OC igual a metade da circunferência GLK e LM igual ao arco KL, disso, $OL + CM$ será igual a $\widehat{GL}$. Tome o centro do círculo N e ligue os ponto N e L. Agora, vê-se que o produto do semi-raio por $OL + CM$ seja igual ao setor $GNLG$. Contudo, o produto do semi-raio por OL é igual ao triângulo GNL. Assim, o produto do semi-raio por CM é igual a $\widehat{GLG}$, o resto do setor de área, subtraído o triângulo GNL (Leibniz, 2000, p. 46, minha tradução).

O texto pode ser expresso matematicamente como se segue:

$$OC = \widehat{\mathrm{GLK}} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{LM}= \widehat{\mathrm{KL}} \\ \mathrm{OL+CM}= \widehat{\mathrm{GL}} \end{cases}$$

$$S_{GNLG} = \frac{1}{2}NL.\widehat{\mathsf{GL}} = \frac{1}{2}NL.(OL+CM)$$

$$S_{GNLG} = \underbrace{\frac{1}{2}NL.OL}_{S_{\Delta GNL}} + \underbrace{\frac{1}{2}NL.CM}_{?} \rightarrow ? = S_{GNLG} - S_{\Delta GNL} = S_{\widehat{\mathsf{G}}\mathsf{LG}}$$

Leibniz simplesmente parte da propriedade construtiva da cicloide, a saber, que $LM = \widehat{KL}$ (vide seção 2.3) e conclui que se o rastro da luz é de fato uma cicloide ordinária e o percorre no menor tempo possível, então, esta igualdade entre as áreas $S_{GNLG} = S_{\Delta GNL} + S_{\widehat{\mathsf{G}}\mathsf{LG}}$ terá de ser verdadeira.

2.7.2 Solução de Johann Bernoulli

A solução para o problema da braquistócrona, segundo Johann Bernoulli[137], é a curvatura formada pelo raio de luz em um meio não-uniforme. Isto é, a curva na qual um corpo pesado desliza do repouso entre dois pontos dados, no menor tempo possível. A mesma curva cabe para ambos os casos, tanto para a descida mais rápida quanto para a curvatura de um raio de luz em um meio não homogêneo. Até o momento da proposta do desafio ou problema, havia muitos modos para se encontrar máximos e mínimos. Contudo, não parecia ocorrer uma qualquer relação entre eles. O problema proposto não poderia ele próprio ser forçado pela imposição dessas formas, que abrangiam a determinação dos extremos de quantidades finitas ou infinitas em número.

> Na realidade, onde as mesmas quantidades verdadeiramente forem envolvidas em nosso problema, entre as quais o *maximum* ou *minimum* estão para serem encontrados, elas não são mais determináveis do que aquilo mesmo que se procura – esta é a tarefa, esta é a dificuldade! (Bernoulli, 1959, p. 648)

Johann Bernoulli considera que mesmo autoridades como Descartes, Fermat e outros, satisfeitas com seus métodos, deveriam francamente confessar que os métodos herdados deles são inteiramente inadequados para o problema da braquistócrona. É o caso de reconhecer que esses métodos são recomendáveis a apenas problemas que não o da braquistócrona. Ele não pretendia propor um método universal, ao invés disso, pretendia sim dispor de métodos particulares a serem revelados neste problema; métodos que de fato fossem também bem-sucedidos em outros problemas.

Ele submeteu sua solução a Leibniz enquanto outros procuravam por suas próprias, com objetivo de publicá-la juntamente com a dele, acaso tenha ele próprio encontrado uma, o

[137] Cf. Bernoulli, 1959, p.644–655; Bernoulli, 1697a, p. 206–211; Erlichson, 1999 e Broer, 2014.

que, de fato, ocorreu, dado o gênio desse homem bastante sagaz. Johann Bernoulli acreditava que o problema merecia que geômetras se dedicassem a ele, tal como dedicou-se Leibniz.

Johann Bernoulli admirava os trabalhos de Huygens, primeiro a descobrir que um corpo pesado cai na cicloide no mesmo tempo independente de seu ponto de partida, desde que seja do repouso. Ele chegou a afirmar que estaria petrificado pela perplexidade de que era precisamente a cicloide, a tautócrona de Huygens, a braquistócrona requerida. O autor afirmou ter caminhos diferentes para acessar a solução adequada: o direto e o indireto. Pelo primeiro caminho, descobriu o acordo entre a curva traçada pela luz em um meio continuamente variável e a curva braquistócrona. Quando propôs o problema, ele sabia que o mesmo seria útil para outros ramos da ciência, por exemplo, na dióptrica. Adiante, o próprio Leibniz[138] e Huygens[139] provaram os mesmos princípios, físicos e metafísicos, que Fermat demonstrou geometricamente.

> Fermat mostrou em uma carta a la Chambre[140]... que um raio de luz que passa de um meio rarefeito para um meio denso é tencionado em direção à normal de tal modo que o raio (que por hipótese procede sucessivamente da fonte de luz para o ponto iluminado) atravessa o caminho o qual é no tempo o mais breve. Por esse princípio, ele mostrou que o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração são diretamente proporcionais à rarefação do meio, ou às densidades recíprocas, ou seja, na mesma razão que as velocidades com os raios de luz atravessam o meio (Bernoulli, 1959, p. 650, minha tradução).

Vejamos o método indireto de Johann Bernoulli para a solução de seu problema da braquistócrona. Segue a descrição do modelo dióptrico adotado por ele, junto de sua justificativa para empregá-lo em um problema mecânico. Aliás, para adiantar, ele credita que mesmo se mudar a agência (ou causa) que impõe sobre a trajetória uma curva a qual seja o menor tempo a guia para determinar sua forma e se a lei da refração (comumente aplicável a fenômenos ópticos) responde satisfatoriamente para essa descoberta, então, não importa se se trata de luz ou corpos pesados, o que importa é se o tempo mínimo, de fato, impõe-se para ambos os casos; se sim, então, não há motivos que impeçam a substituição de um pelo outro.

> Se agora considerarmos um meio que não é uniformemente denso mas como se separado por um número infinito de folhas deitadas horizontalmente umas sobre as outras, cujos interstícios são preenchidos com um material transparente de rarefação aumentada ou diminuída para uma certa esfera que viaja, não em uma linha reta, mas, invés disso, em um certo caminho curvo... Esse caminho é tal que uma partícula atravessa-o com uma velocidade continuamente aumentada ou diminuída na proporção da rarefação e passa de um ponto a outro no menor tempo, uma vez que os senos dos ângulos de refração, em todos os pontos, estão

[138] Cf. *Acta Eruditorum* de 1682, p. 185 *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium*.
[139] Cf. *Tractatus de lumine*, 1690, p. 40.
[140] Cf. Fermat, 1891, p. 170–179.

> respectivamente para as rarefações dos meios ou para as velocidades da partícula. É evidente também que a curva terá esta propriedade, que os senos dos seus ângulos de inclinação com relação à vertical são em toda parte proporcionais às velocidade... Posto isso, vê-se sem dificuldade, a braquistócrona é a curva que seria traçada por um raio de luz em sua passagem através de um meio cuja rarefação seja proporcional à velocidade que uma partícula pesada atinge em um queda vertical. Se o aumento da velocidade depender da natureza do meio, mais ou menos resistente tal como no caso do raio de luz, então se remove o meio e se supõe que a aceleração é produzida por meio de outra agência, mas de acordo com a mesma lei, como é o caso para a gravidade, uma vez que em ambos os casos a curva, ao final, é supostamente atravessada no tempo mais curto. O que nos impede de substituir um pelo outro? Por esse modo, podemos apresentar uma solução geral para nosso problema, qualquer que seja a lei da gravidade, pois esse problema é reduzido para o de encontrar o caminho curvo do raio de luz em um meio de rarefação arbitrária (Bernoulli, 1959, p. 651–652, minha tradução).

Johann Bernoulli nos mostra que independente dos casos, seja o da curvatura da luz em um meio não-homogêneo seja o da descida de um corpo pelo seu próprio peso, independentemente de suas agências, se a condição necessária para ambos é a mesma, dado a semelhança de condições, então, não importa as diferenças, os modelos dinâmico-cinemático e óptico serão intercambiáveis. Esta solução é tida indireta porque usa de um modelo equivalente para a determinação da curva do menor tempo de travessia, respaldado pela condição necessária exigida para os dois casos. Frente a consideração acima disposta, a seguir encontra-se a solução, propriamente dita, de Johann Bernoulli para o problema da braquistócrona. Atenção para o modelo geométrico, é exatamente o mesmo apresentado por Leibniz em sua solução pública (vide seção 2.7.1).

> Seja, portanto, FGD o meio delimitado pela horizontal FG, na qual o ponto radiante A está situado. Seja a vertical AD eixo para a curva dada AHE, cuja linha associada HC determina as rarefações do meio nas alturas AC, ou as velocidades do raio de luz (ou corpúsculo), nos pontos M. Seja o próprio raio curvo a trajetória AMB procurada (Bernoulli, 1959, p. 652, minha tradução).

A Tabela 1 resume os segmentos importantes na construção da cicloide $AMBK$ os quais Johann Bernoulli utiliza em seus cálculos.

Tabela 1 – Notação dos segmentos da Figura 24

$CH = t$	velocidade ou inverso da densidade
$AC = x$	ordenada
AMB	curva do menor tempo
$CM = y$	abscissa
$Cc = Mn = dx$	diferencial de x
$Mm = dz$	diferencial do comprimento de arco

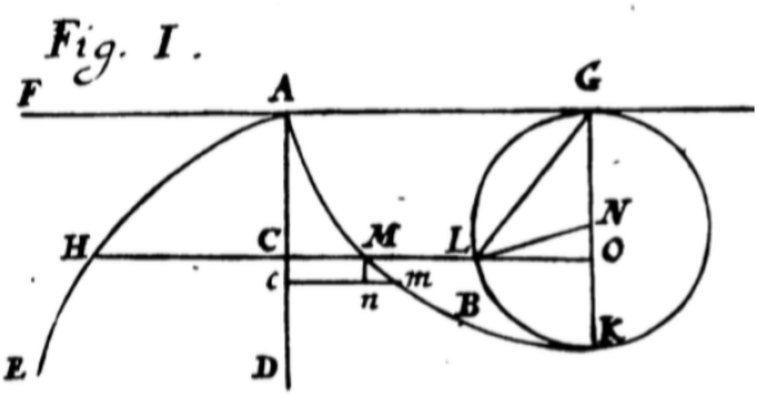

Figura 24 – Figura 1, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Bernoulli (1697a).

Johann Bernoulli começa justamente com a aplicação da lei de Snell-Descartes aplicada a um ponto qualquer da curva, vejamos: considere que "os senos [dos] ângulos de inclinação com respeito à vertical são em todas as partes proporcionais à velocidades" (Bernoulli, 1959, p. 651, minha tradução), então no ponto M o seno do ângulo de refração será[141]:

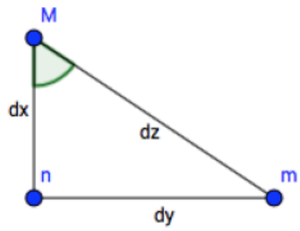

Figura 25 – Triângulo formado por diferenciais

$$\sin\alpha = \frac{mn}{Mm} = \frac{dy}{dz};$$

essa relação deve ser proporcional à velocidade da luz (c), de acordo com a lei de Snell-Descartes, cujo princípio do tempo mínimo de Fermat já está nela aplicado (vide anexo A):

$$\frac{\sin\alpha}{c} = cte > 1.$$

$CH(=t)$ é a velocidade do raio (ou do corpúsculo) em M, aplicando-se a condição acima, resultará em: $\frac{\frac{dy}{dz}}{t} = cte$, equivalente a uma constante ordinária $\frac{1}{a}$:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{t}{a}. \tag{2.11}$$

Pelo teorema de Pitágoras $(dz)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (ou $dz = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$), sabemos que as diferenciais dy e dz são respectivamente proporcionais a t e a ($dy \propto t$ e $dz \propto a$),

[141] Cf. Goldstine, 1980, p. 38–44; Bernoulli, 1959, p. 652–655 e Bernoulli, 1697a, p. 208–211.

desse modo, Johann Bernoulli reescreve dx da seguinte forma: $dx \propto \sqrt{a^2 - t^2}$ e desenvolve a equação 2.11 para relacionar dy a dx.

$$[1].\frac{dy}{dz} = \frac{t}{a};$$

$$\left[\frac{dz}{dx}.\frac{dx}{dz}\right].\frac{dy}{dz} = \frac{t}{a};$$

$$\frac{dz}{dx}.\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{t}{a}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{t}{a}.\frac{dz}{dx};$$

$dz \propto a$ e $dx \propto \sqrt{a^2 - t^2}$, o que resulta em

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{a}.\frac{a}{\sqrt{a^2 - t^2}} \therefore$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{2.12}$$

Essa é a equação geral que relaciona as ordenas x com as velocidades t.

> Agora, consideremos um caso especial, a saber, a hipótese usual, introduzida primeiramente por Galileu, de acordo com a qual a velocidade de corpos pesados em queda está uma para outra como a raiz quadrada das alturas atravessadas; esse é precisamente o caso. Sob essa hipótese, a curva AHE é a parábola $t^2 = ax$ ou $t = (ax)^{\frac{1}{2}}$ (Bernoulli 1742a, p. 191 apud Goldstine (1980), p. 40).

Substitua $t = \sqrt{ax}$ em 2.12:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a^2 - ax}}$$

$$\therefore dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}; \tag{2.13}$$

esta é precisamente a equação diferencial para uma cicloide ordinária. O círculo GLK de diâmetro a rola sob AG, se o início da rotação for justamente em A, então o ponto K descreverá a cicloide $ABMK$. A equação diferencial 2.13 escreve precisamente essa cicloide, basta considerar x como AC e y como CM. Johann Bernoulli procede para mostrar analiticamente que 2.13 leva a cicloide ordinária, assim, começa reescrevendo 2.13 como:

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}.\sqrt{\frac{x}{x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax - x^2}};$$

xdx pode ser substituído conforme a seguinte igualdade:

$$xdx = \frac{1}{2}\left(adx - adx + 2xdx\right);$$

e então

$$dy = \frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax - x^2}} - \frac{1}{2}\frac{adx - 2xdx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

> E também $\left(\dfrac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - x^2}}\right)$ é a quantidade diferencial cuja integral é $\sqrt{ax - x^2}$ ou LO; e $\left(\dfrac{adx}{2\sqrt{ax - x^2}}\right)$ é a quantidade diferencial do próprio arco GL; e, portanto, integrando a equação $dy = dx\sqrt{\dfrac{x}{a - x}}$, temos y ou $CM = \widehat{GL} - LO$, consequentemente $MO = CO - \widehat{GL} + LO$. Desde que, de fato, (assumindo $CO =$ a semiperímetro GLK) $CO - \widehat{GL} = \widehat{LK}$, disso tem-se $MO = \widehat{LK} + LO$, e, cancelando LO, $ML = \widehat{LK}$; que mostra a curva AMK como sendo a cicloide (Bernoulli, 1959, p. 653, minha tradução).

Há duas formas de se compreender a solução de Johann Bernoulli para o problema da braquistócrona como sendo a cicloide, além da apresentação de sua equação diferencial 2.13. Na citação acima, Johann Bernoulli afirma que essa equação diferencial leva a cicloide, consideremos primeiro que devido a rotação a partir de A sem deslizar do círculo GLK sob a horizontal FAG, a translação efetuada AG coincide com o semiperímetro do círculo GLK, assim da Figura 24 tem-se:

$$CO = \widehat{GL} + \widehat{LK},$$

$CO = CM + MO$, por substituição,

$$CM + MO = \widehat{GL} + \widehat{LK}.$$

Johann Bernoulli traz a relação $CM = \widehat{GL} - LO$ da própria integral da equação diferencial $dy = \dfrac{1}{2}\dfrac{adx}{\sqrt{ax - x^2}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{adx - 2xdx}{\sqrt{ax - x^2}}$. Em outras palavras, se usar o símbolo d para a diferencial e, no lugar das partes que compõem essa equação, usar as diferenciais que cada uma delas representa, tem-se: $dCM = d\widehat{GL} - dLO$; para dy igual a dCM, $\dfrac{adx}{2\sqrt{ax - x^2}}$ igual a $d\widehat{GL}$ e $\dfrac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - x^2}}$ igual a dLO. A partir disso,

$$(\widehat{GL} - LO) + MO = \widehat{GL} + \widehat{LK}$$

ou

$$MO - LO = \widehat{LK}.$$

Por observação direta da Figura 24, reconhece-se que $MO = LM + LO$, logo

$$(LM + LO) - LO = \widehat{LK};$$

e assim chegamos finalmente a propriedade fundamental da cicloide (vide seção 2.3):

$$LM = \widehat{LK}.$$

A segunda forma de compreender que a equação 2.13 leva a cicloide é a seguinte[142]: considere $b = \frac{a}{2}$, o raio do círculo GLK , $\widehat{LK} = b\varphi$, para φ igual ao ângulo $L\hat{N}K$, e $\widehat{GL} = b\pi - b\varphi = bt$, seja $\pi - \varphi = t$ o suplemento de $L\hat{N}K$, então:

$$\sin t = \sin\varphi = \frac{LO}{b} \text{ e } CO = AG = b\pi = y + LM + LO = y + \widehat{LK} + b\sin t.$$

O segmento CO (ou AG) corresponde ao semiperímetro GLK devido a rotação sem deslizamento do círculo gerador da cicloide, para um ângulo de rotação de π radianos, ou seja, πb. A abcissa y é CM, LM é $\widehat{LK}$ devido a propriedade da cicloide e, finalmente, $LO = b\sin t$, da relação trigonométrica do triângulo LNO. Disso,

$$y = b\pi - \widehat{LK} - b\sin t = b\pi - b\varphi - b\sin t = b(t - \sin t).$$

Para achar x, sabe-se que $\cos t = -\cos\varphi = -(b - OK)$ e, ainda, que

$$x = AC = GK - OK = 2b - b - b\cos t = b(1 - \cos t).$$

Portanto, chegamos às equações paramétricas da cicloide:

$$\begin{cases} y = b(t - \sin t) \text{ e} \\ x = b(1 - \cos t) \end{cases}$$

Note que a abcissa e a ordenada estão trocadas em relação às equações paramétricas da cicloide apresentadas nas seções 2.3 e 2.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA VIA ANÁLISE e SOLUÇÃO ALTERNATIVA. Isso ocorre porque Johann Bernoulli adota, logo no início de sua solução, a ordenada AC de x e a abcissa CM de y, justamente o inverso do que por norma adota-se hoje.

[142] Cf. Goldstine, 1980, p. 41, nota 49.

> Para solucionar completamente o problema, temos ainda que mostrar como a partir de um ponto dado, como o vértice, podemos traçar a braquistócrona, ou cicloide, que passa por um segundo ponto dado. Isso se realiza facilmente, como se segue: junte os dois pontos dados, A e B, com uma linha reta e trace uma cicloide arbitrária sob AL, tendo como ponto inicial A e como interseção R na linha AB; então, o diâmetro do círculo que traça a cicloide requerida ABL que passa por B está para o diâmetro do círculo que traça a cicloide ARS, tal como AB está para AR (Bernoulli, 1959, p. 655, minha tradução).

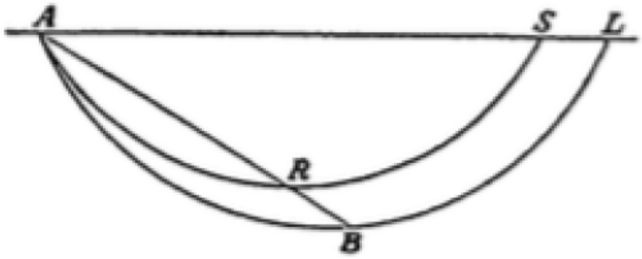

Figura 26 – Figura 2, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Bernoulli 1959, p. 653.

> Antes de concluir, não posso deixar de me referir ao espanto que experimentei acerca da inesperada identidade entre a tautócrona de Huygens e nossa braquistócrona. Além disso, penso ser notável que essa identidade seja encontrada apenas sob a hipótese de Galileu, de modo que mesmo a partir disso, podemos conjecturar que a natureza, portanto, quer que assim seja. Pois, a natureza está habituada a proceder sempre do modo mais simples; então, aqui ela efetuou dois trabalhos diferentes por meio de uma e mesma curva, enquanto que por quaisquer outras hipóteses, seriam necessárias duas curvas, uma para oscilações de períodos iguais, outra para a descida mais rápida (Bernoulli, 1959, p. 654).

Para justificar a afirmação de Johann Bernoulli, de que quando dados dois pontos A e B, nas condições do problema, a curva entre eles será necessariamente – a braquistócrona do Johann Bernoulli ou, o que dá no mesmo, a tautócrona do Huygens, a saber – a cicloide, então, é preciso verificar dois casos: (i) se a velocidade do corpo for proporcional não à raiz quadrada, mas à raiz cúbica, então, a braquistócrona será uma curva algébrica e a tautócrona, transcendental; e (ii) se a velocidade do corpo for diretamente proporcional à distância, ambas as curvas serão algébricas, uma um círculo e a outra uma reta[143].

O primeiro caso, tem-se, então: para a velocidade do corpo ser proporcional à raiz cúbica, considere $t = ax^{\frac{1}{3}}$ e substitua t na equação 2.12. Assim, chega-se a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}.$$

[143] Cf. Goldstine, 1980, p. 41–42.

Integrando-se a igualdade acima, encontra-se:

$$y - C = -(2 + x^{\frac{2}{3}}).(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}};$$

trata-se, depois de certa manipulação, de uma equação algébrica do sexto grau, o resultado para a braquistócrona. O segundo caso, por seu turno, tem-se: para a velocidade do corpo ser proporcional à distância, considere $t = ax$ e substitua t na equação 2.12. Desse modo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Integrando-se essa equação, chega-se a:

$$x^2 + (y - C)^2 = 1;$$

é claro, como pode-se constatar pela equação resultante da integral que se refere ao círculo.

Johann Bernoulli mostrou que a cicloide é a curva cuja descida é a mais rápida e provou que há somente uma cicloide entre os pontos A e B a ser construída. Para isso, observa (vide Figura 26) que se forem dadas duas cicloides ARS e ABL, uma linha horizontal AL e um segmento de linha AB, tem-se[144]:

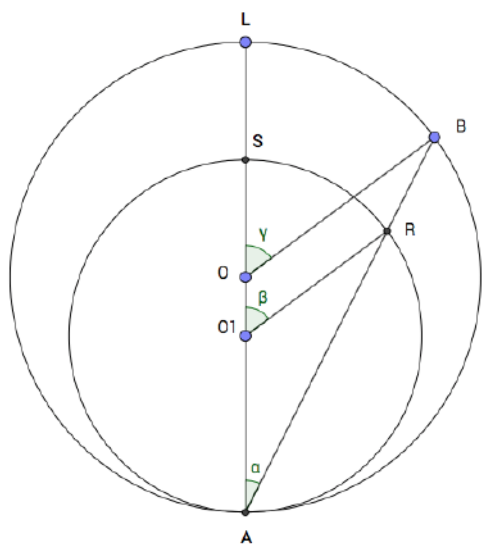

Figura 27 – Unicidade da cicloide como solução para o problema da braquistócorna; fonte: Freguglia and Giaquinta (2016), p. 40, adaptada.

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AL}.$$

Como consequência, da cicloide ARS dada, de base AS e ponto B, apenas uma outra cicloide de A, com base AL, dada pela proporção acima, é a única cicloide que parte de A, cuja base

[144] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 40.

repousa sobre AL, e passa por B. E isso pode ser rapidamente apreendido (vide Figura 27), se se considerar que as velocidades angulares (ω_{ARS} e ω_{ABL}) dos círculos geradores dessas cicloides (ARS e ABL) são iguais; e isso pode ser verificado pela seguinte igualdade entre os ângulos: $\gamma = \beta = 2\alpha$.

2.7.3 Solução de Jakob Bernoulli

Dois pontos dados A e B são interligados em um arco de tempo mínimo, em qualquer sub-arco CED, seus extremos C e D também estão interligados pelo mesmo arco. Se o sub-arco CFD junta seus extremos no menor valor de comprimento, então, o arco $ACFDB(= AC + CFD + DB)$ será o arco cujo tempo de descida é menor que o tempo em $ACEDB$. Isso resulta em uma contradição (vide Figura 28)[145].

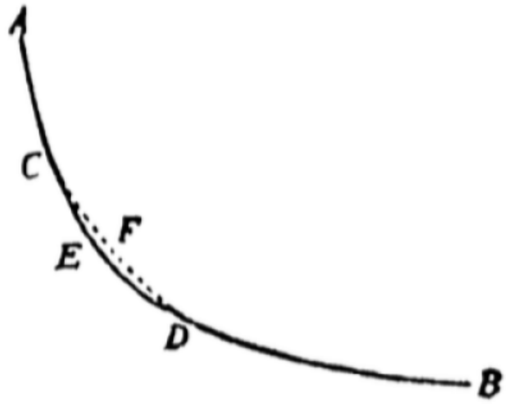

Figura 28 – Figura 4, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Goldstine (1980), p. 44

Posto isso, da Figura 29, em um ponto C qualquer da curva, que minimiza o tempo de descida de um corpo o qual se move pelo seu próprio peso de A para B, HF passa por C e é perpendicular à ordenada AH. D está *próximo* de C de modo que $CE = EF$. EJ é paralelo a AH e a FD, L que está em EJ é tal que LG é a diferença de EG e, por fim, $EFDJ$ é um retângulo.

Já que o arco CGD é o menor arco entre C e D, então o tempo de descida por CG mais o tempo de descida por GD (ou seja, $t_{CG} + t_{GD}$), a considerar que o corpo desça pela gravidade a partir de A, será mínimo. Na reta EJ, a diferencial LG é incomparavelmente menor que EG. CL e LD estão dispostos sobre CD, bem como a diferença do arco LN, assim, GN será tal que $t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}$ ou de forma equivalente:

$$t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD}. \tag{2.14}$$

[145] Cf. Goldstine, 1980, p. 44–47.

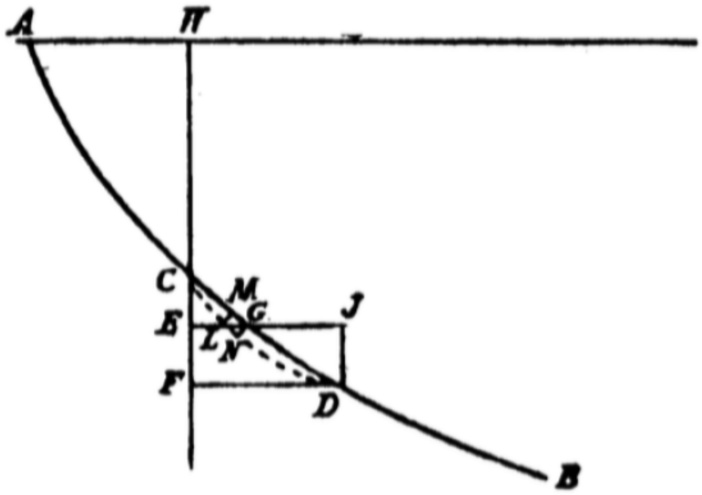

Figura 29 – Figura 5, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Goldstine (1980), p. 45

Jakob Bernoulli constrói duas proporções, uma relaciona os segmentos do triângulo CGE e seus tempos de travessia, já a outra diz respeito as segmentos do triângulo CLE e seus tempos de travessia.

$$\frac{CE}{CG} = \frac{t_{CE}}{t_{CG}} \text{ e } \frac{CE}{CL} = \frac{t_{CE}}{t_{CL}}.$$

$dt = \dfrac{dS}{v}$, para a distância de queda S e $v^2 = v_1^2 + 2gs$, para a velocidade de queda v. Então, substitui-se nas proporções anteriores:

$$t_{CE} = \frac{CE}{\sqrt{v_1^2 + 2gHC}} \text{ e } t_{CG} = \frac{CG}{\sqrt{v_1^2 + 2gHC}}$$

e de forma similar para t_{CL}. Por subtração,

$$\frac{CE}{CG} - \frac{CE}{CL} = \frac{t_{CE}}{t_{CG}} - \frac{t_{CE}}{t_{CL}} \text{ ou } \frac{CG - CL}{CE} = \frac{t_{CG} - t_{CL}}{t_{CE}},$$

logo,

$$\frac{CE}{CG - CL} = \frac{t_{CE}}{t_{CG} - t_{CL}}. \tag{2.15}$$

Como LM é normal a CG e possui CL aproximadamente igual a CM, uma vez que $CL \approx CM + \dfrac{LM^2}{2CG}$ e ainda que os triângulos MLG e CEG são similares entre si, então,

$$\frac{MG}{GL} = \frac{EG}{CG}, \text{ que é } \left[\frac{s''}{y'} = \frac{y''}{s'}\right],$$

em seguida, multiplicam-se ambos os lados por CE e usa-se a igualdade da equação 2.15, chega-se a

$$(CE) \times \frac{1}{GL} = \frac{1}{MG} \cdot \frac{EG}{CG} \times \left(\frac{t_{CE}}{t_{CG} - t_{CL}} [CG - CL] \right),$$

que, simplificando, torna-se:

$$\frac{CE}{GL} = \frac{EG.t_{CE}}{CG(t_{CG} - t_{CL})}. \tag{2.16}$$

Com respeito a EF, GN é normal a DL, então, $DG = DN$ (isto é, diferença entre as trajetórias LD e GD é nula, condição necessária de Fermat para determina a curva do menor tempo) e, como acima, obtém-se:

$$\frac{EF}{GL} = \frac{GJ.t_{EF}}{GD(t_{LD} - t_{GD})}. \tag{2.17}$$

Combinam-se as duas razões acima, ou seja, as equações 2.16 e 2.17, além de considerar que $EF = CE$ e a equação 2.14, tem-se:

$$\frac{EG.t_{CE}}{GJ.t_{EF}} = \frac{CG(t_{CG} - t_{CL})}{GD(t_{LD} - t_{GD})} = \frac{CG}{GD}.$$

Pela hipótese de Galileu da queda dos corpos associada à equação de Torricelli, $t = \dfrac{s}{\sqrt{v_1^2 + 2gs}}$, aplicada a igualdade acima:

$$\frac{EG.t_{CE}}{GJ.t_{EF}} = \frac{\frac{EG}{\sqrt{HC}}}{\frac{GJ}{\sqrt{HE}}},$$

ou seja, calcula-se t_{CE} e t_{CG} para $v_1^2 = 0$; analogamente tem-se também $t_{EF} = \dfrac{EF}{\sqrt{2gHE}}$; daí Jakob Bernoulli chega a:

$$\frac{\frac{EG}{\sqrt{HC}}}{\frac{GJ}{\sqrt{HE}}} = \frac{CG}{GD}. \tag{2.18}$$

Isso significa (vide Figura 29) que o elemento da curva (CG e GD) que minimiza o tempo de descida é diretamente proporcional ao elemento da abcissa (EG e GJ) e inversamente proporcional à raiz quadrada da ordenada (HC e HE).

A via geométrica (vide Figura 30) que prova a equação 2.18 é tal que[146]: pelas características da cicloide ACP, das duas tangentes CM e GN e do círculo gerador RQP, tem-se

$$\frac{GD}{GI} = \frac{GN}{GX} = \frac{VP}{VX} = \frac{VR}{RX} = \sqrt{RT}$$

e

[146] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 43 e Bernoulli, 1697a, p. 213.

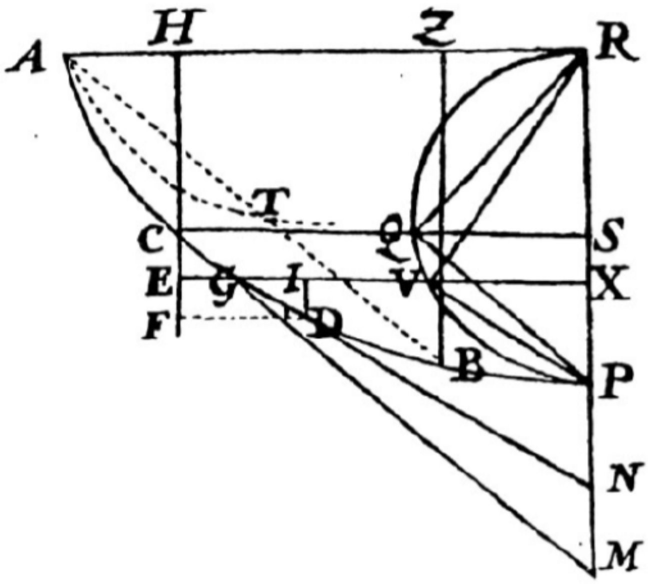

Figura 30 – Figura 6, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Freguglia and Giaquinta (2016), p. 43.

$$\frac{EG}{CG} = \frac{CS}{CM} = \frac{QS}{QP} = \frac{RS}{RQ} = \frac{\sqrt{RS}}{\sqrt{RP}}.$$

Então, finalmente, chega-se a:

$$\frac{GD}{GC} = \frac{GI\sqrt{RP}\sqrt{HC}}{EG\sqrt{HE}\sqrt{RP}} = \frac{GI\sqrt{HC}}{EG\sqrt{HE}},$$

justamente, a equação 2.18 que se queria provar.

Por uma via analítica, se $CG = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, $HC = x$, $EG = dy$ e $\dfrac{GD\sqrt{HE}}{GI} = k$; então a equação 2.18 torna-se:

$$ds = \frac{k}{\sqrt{x}}dy, \tag{2.19}$$

o mesmo resultado de Leibniz (vide seção 2.6). E, se se elevar ao quadrado os dois lados da equação, então, tem-se:

$$(ds)^2 = \frac{k^2}{x}(dy)^2 = (dx)^2 + (dy)^2;$$

$$(dx)^2 = (dy)^2 \left[\frac{k^2}{x} - 1\right] \textit{ ou, ainda,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{k^2 - x}}.$$

Essa é a equação diferencial para uma cicloide ordinária com diâmetro do círculo gerador k igual a $2a$. Jakob Bernoulli ainda não deixa de mencionar que essa cicloide encontrada como solução para o problema da braquistócrona é a mesma curva isócrona de Huygens (ou seja, a tautócrona).

CONTROVÉRSIA PÚBLICA ENTRE OS IRMÃOS BERNOULLI

Os irmãos Bernoulli, Jakob e Johann, foram, sem dúvida, dois grandes matemáticos que contribuíram, e muito, para o desenvolvimento da matemática no séc. XVII e XVIII. A fama de ambos, adquirida pela competência em desenvolver poderosos meios de cálculo, se deve, também, pela capacidade e habilidade de criarem problemas que desafiavam os limites da matemática. Um desses problemas, por ocasião, é o problema da braquistócrona. Lembre-se que foi Johann Bernoulli que o propôs à comunidade de matemáticos na Europa.

Era bastante comum que fossem oferecidas premiações em dinheiro àqueles matemáticos bem-sucedidos na solução de problemas entre eles propostos. Um caso já mencionado acima foi o de Pascal (sob o pseudônimo de Detonville) e o problema acerca de cicloides de revolução. A proposição de problemas foi uma prática bastante comum na matemática da época. São diversas as razões para se por um problema matemático publicamente, mas para esse caso em específico, Leibniz estava seguro que a razão para se propor o problema da braquistócrona, era comprovar que o cálculo das diferenças, e tão somente ele, seria capaz de solucionar problemas mecânicos dessa complexidade (vide seção 2.7.1).

Agora, nem mesmo a apresentação pública do problema da braquistócrona de Johann Bernoulli deixou de ser também uma oportunidade para se propor outros problemas matemáticos. Foi o que fez Jakob Bernoulli que desafiou as habilidades matemáticas de seu irmão, Johann, com mais três problemas. Jakob Bernoulli, logo após a sua resposta ao problema da braquistócrona publicada nos *Acta Eruditorum* de maio de 1697[147], pô-los. Pode-se especular que o desafio proposto por Jakob a Johann Bernoulli indica que a ele seu método de abordar o problema da braquistócrona era capaz de estender-se para uma outra classe de problemas[148].

OS PROBLEMAS MATEMÁTICOS ENTRE JAKOB E JOHANN BERNOULLI (DE 1697 A 1718)

Foram três os problemas propostos por Jakob Bernoulli a seu irmão. E ele os pôs logo em seguida a sua solução ao problema da braquistócrona (vista com detalhes acima). Esses são, na verdade, problemas (isoperimétricos) que ajudaram a aprofundar a matemática no que hoje chama-se de cálculo variacional (o qual se aplica para se encontrar valores máximos ou mínimos de um funcional qualquer)[149]; cujo primeiro exemplar designa ser de Arquimedes, a saber: dado

[147] Cf. Bernoulli, 1697b, p. 215.
[148] Cf. Goldstine, 1980, p. 47.

um perímetro qualquer, encontre a figura geométrica que abrange a maior área. Os problemas propostos por Jakob Bernoulli nos *Acta Eruditorum* de 1697 são estes:

1. encontrar entre as cicloides que passam por A, de base AH, e interceptam a linha ortogonal ZB, a cicloide em cujo móvel descerá no menor tempo;
2. encontrar o caminho do móvel através de meio óptico variável cuja curva de refração seja a estudada por Huygens;
3. encontrar entre todas as curvas isoperimétricas de base BN aquela BFN que a curva relacionada BZN cubra a maior área, embora a primeira mesma não a faça, de modo que a ordena PZ seja proporcional à raiz ou à potência do segmento de linha PF ou do comprimento do arco FB (vide Figura 31).

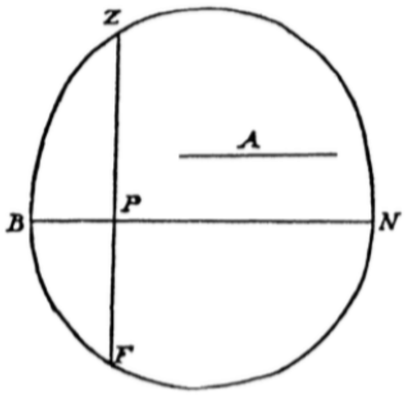

Figura 31 – Figura 8, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Goldstine (1980), p. 48.

Como um incentivo, disse Jakob Bernoulli, ainda nos *Acta Eruditorum* de maio de 1697, que um homem desconhecido havia oferecido cinquenta ducatos imperiais (moeda corrente da época) a Johann Bernoulli. Se aceitasse, teria de publicar suas soluções em termos de quadraturas, senão o fizesse até o final do ano, Jakob Bernoulli publicaria as suas. Apenas os dois primeiros problemas foram já publicados por Johann Bernoulli nesses *Acta Eruditorum* de maio de 1697[150]. Não vou entrar nos detalhes das resoluções e deslizes e controvérsias entre os irmãos Bernoulli. Vou, de fato, explorar certos detalhes que foram mais importantes para o problema da braquistócrona.

Depois de três anos de uma disputa teórica tornada pública ora no *Journal des Sçavans* ora nos *Acta Eruditorum*, Johann Bernoulli encaminhou suas soluções dos três problemas à Academia Francesa, sob a responsabilidade de Pièrre Varignon em primeiro de fevereiro de 1701, sob a condição de não abri-las até que Jakob Bernoulli enviasse as suas. Isso não ocorreu, por razões que se desconhecem, até a morte de Jakob Bernoulli em 16 de agosto de 1705.

[149] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 53–56 e Goldstine, 1980, p. 42–58.
[150] Cf. Bernoulli, 1697a, p.210–211 e Bernoulli, 1959, p. 655.

Finalmente, em 1706 as soluções de Johann Bernoulli ao desafio de seu irmão foram publicadas nas *Mémoires de l'Académie* sob os comentários do secretário da Academia, Bernard Le Bovier de Fontenelle.

Por seu turno, em agosto de 1697, Johann Bernoulli também propôs outros seis problemas a serem resolvidos, no *Journal des Sçavans*[151]. Esses problemas circunscrevem uma condição isoperimétrica especial, a variação de duas ordenadas, ou seja, problemas com o ganho de mais um grau de liberdade. Jakob Bernoulli publicou a *Analysis magni problematis isoperimetici* nos *Acta Eruditorum* de 1701. De modo geral, Jakob Bernoulli desenvolveu um instrumental matemático para resolver dois dos problemas isoperimétricos que ele pôs ao seu irmão, além do desafio de encontrar a curva do menor centro de gravidade. Ele tentou também, mas sem sucesso, estabelecer condições suficientes para se encontrar os extremos de uma curva.

O artigo de 1718 de Johann Bernoulli teve como motivação o artigo de 1701 de seu irmão. A condição isoperimétrica principal que deve ser aplicada a problemas de cálculo de variações é de que é preciso fazer variar duas ordenadas (ou seja, que haja dois graus de liberdade) e esse parece ser, portanto, o que permitiu que Jakob Bernoulli tivesse sido mais bem-sucedido que seu irmão nas soluções àqueles problemas propostos. Johann Bernoulli desenvolveu dois importantes lemas para o cálculo variacional, cada qual dedicado à solução dos primeiro e segundo problemas do artigo de 1701 de seu irmão, além de considerar também um outro problema sobre a catenária e mais outros dois. Vamos aqui explorar apenas o *addendum* desse artigo, o qual será apresentado a seguir, por conter um importante desenvolvimento para o problema da braquistócrona.

ADDENDUM DE JOHANN BERNOULLI (1718)

Johann Bernoulli publicou as respostas aos problemas por ele propostos no *Journal des Sçavans* de agosto de 1697 nos *Acta Eruditorum* de janeiro de 1718[152], em duas partes. Depois, em 1742, foi publicado nas *Mémoire de l'Académie* uma versão em francês de suas respostas[153]. Suas soluções foram basicamente divididas em dois grupos: o primeiro é sobre **problemas isoperimétricos** e o segundo, sobre **curvas isócronas e [curvas] de descida mais rápida**[154].

O problema três abre o segundo grupo de problemas, nomeado aqui por *addendum* ou, como consta nos *Acta Eruditorum* de janeiro de 1718, *continuatio*. Johann Bernoulli voltou-se mais uma vez ao problema da braquistócrona, ele retomou a busca pela curva da descida mais rápida, sob a condição de ser escolhida a partir de uma família de curvas. Esse problema, de fato, já foi solucionado por Johann Bernoulli nos *Acta Eruditorum* de maio de 1697, logo

[151] Cf. Bernoulli, 1742b.
[152] Cf. Bernoulli, 1718a e Bernoulli, 1718b.
[153] Cf. Bernoulli, 1741a e Bernoulli, 1741b.
[154] Cf. Bernoulli, 1742b, Goldstine, 1980, p. 47–51 e Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 58–66.

após a apresentação de sua solução ao problema da braquistócrona[155], cuja inspiração está no primeiro problema proposto por seu irmão, Jakob Bernoulli, na mesma edição dos *Acta Eruditorum* de 1697.

Para Johann Bernoulli, retrabalhar esse problema foi ocasião para por a prova seu método direto de resolver o problema da braquistócrona. Ele havia publicado, em maio de 1697 nos *Acta Eruditorum*, seu método indireto por sugestão de Leibniz.

> Para levar a esse *memoir* uma conclusão, prossigo com a inclusão de meu método direto para resolver o famoso problema da queda mais rápida; não tinha ainda publicado esse método, embora tenha comunicado-o a muitos amigos meus já em 1697, quando publiquei meu outro método indireto. O incomparável Sr. Leibniz, a quem comuniquei ambos, como próprio testemunhou nos *Acta* de *Lipsiæ* no mesmo ano de 1697, na p. 204, achou esse método direto de tal elegância[156] que aconselhou-me a não publicá-lo por razões na época sustentáveis e que não se perduram mais. Espero que também agrade ao leitor, embora a análise diga respeito apenas ao raio de curvatura do círculo gerador da curva desejada, o que se encontra, contudo, é a cicloide ordinária que tenha, em qualquer ponto, tal raio ou da curvatura ou do círculo gerador; esse método oferece-me, no entanto, também uma demonstração sintética, que por um fato extraordinário e aprazível mostra que essa cicloide é efetivamente a curva desejada da descida mais rápida (Bernoulli, 1742c, p. 266–267, minha tradução).

A primeira solução de Johann Bernoulli que se tornou publica em 1697 apresenta por uma via indireta a equação diferencial de primeira ordem a qual é indubitavelmente a de uma cicloide ordinária (vide seção 2.7.2). Nessa mesma solução – como também na solução não-publicada de Leibniz (vide seção 2.7.1), na solução de Jakob Bernoulli (vide seção 2.7.3) e na solução tardia de Newton (vide seção 2.7.4) –, tem-se a aplicação da condição necessária da descida mais rápida, a saber: o princípio de Fermat (vide anexo A).

A condição necessária que minimiza a descida do móvel pela curva deve ser aplicada para que se encontre a cicloide como solução para o problema. De maneira bem simplificada, para Fermat a condição necessária que minimiza (ou maximiza) é tal que: para uma equação qualquer dependente de uma diferença conhecida (E), conhece-se seu mínimo (ou máximo) quando a diferença for nula ($E = 0$). Nos termos de hoje, dada uma função qualquer contínua entre determinados pontos, encontra-se seu extremo (máximo ou mínimo) quando se deriva essa função em relação a sua variável independente e iguala-se tal derivada a zero.

Até 1718, apenas Jakob Bernoulli havia apresentado também uma condição suficiente para que seja a cicloide a curva braquistócrona. E ele desenvolveu essa prova por uma via geométrica (vide seção 2.7.3). Talvez fosse essa a exigência dele para com seu irmão. Logo, seria essa fonte da polêmica pública entre eles? Na citação acima, Johann Bernoulli menciona

[155] Cf. Bernoulli, 1697a, p. 210–211 e Bernoulli, 1959, p. 655.
[156] Cf. Leibniz, 2000, p. 43.

que ele possuía um método, o qual chamou de direto. Assim, é em seu *addendum*[157] que Johann Bernoulli apresenta sua prova cuja condição suficiente indica somente a cicloide como a curva da descida mais rápida. Segue, portanto, esse desenvolvimento de Johann Bernoulli.

Seja M um ponto qualquer na curva da descida mais rápida AMB e K o centro de curvatura cujo raio MK é normal a AMB em M. N é onde interceptam-se a linha horizontal AL e o raio de curvatura MK. Traça-se a vertical MD, as linhas Kcm e KCM formam a diferença de ângulo $d\theta$ infinitamente pequena, de modo que o arcos Ce e Mm sejam considerados linhas retas tais como planos inclinados. C é a interseção entre KM e ACB – curva próxima a AMB de mesmo centro de curvatura K (vide figura 32)[158].

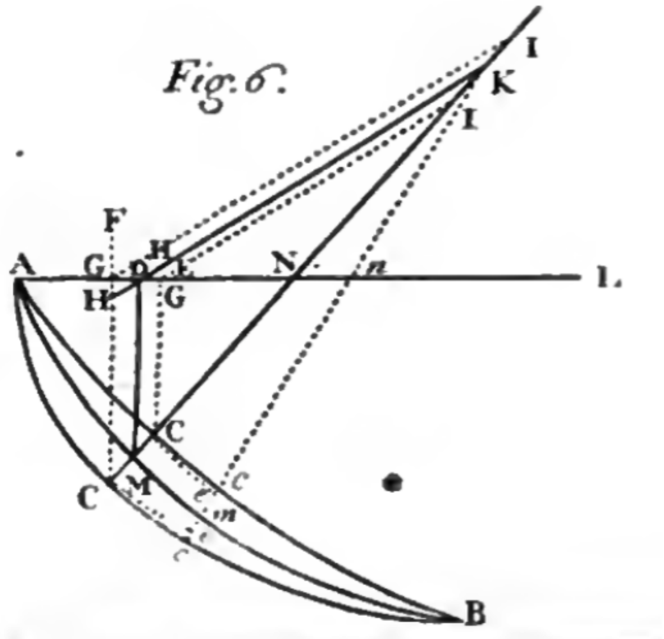

Figura 32 – Figura 6, tabela 22, Opera Omnia, tomus secundus; fonte: Bernoulli (1742c)

Johann Bernoulli procura entre a infinitude[159] de pequenos arcos concêntricos aquele em que um móvel que parta do repouso em A desça no menor tempo possível. Assim, se $NK = a$ e $MN = x$ e a considerar a vertical MD, então, estabelece-se a seguinte razão de m:

$$\frac{1}{m} = \frac{MN}{MD},$$

de modo que $MD = mx$ e, por sua vez, n será

$$\frac{1}{n} = \frac{cK}{Ce} = \frac{MK}{Mm},$$

[157] Cf. Bernoulli, 1718a.

[158] Cf. Freguglia and Giaquinta, 2016, p. 49–51 e Goldstine, 1980, p. 64–66.

[159] *Nunc hoc tantum faciam, ut quæram quis ille sit ex infinitis istis arculis concentricis, qui a mobili gravi ex horizonte AL delapso percurri possit tempusculo brevissimo.* (Bernoulli, 1718a, p. 86)

já que $Mm = nx + na$. Se AMB é a curva da descida mais rápida, o tempo de descida por Mm – de acordo com o princípio de Galileu –, será proporcional a raiz quadrada de MD, ou seja:

$$\frac{Mm}{\sqrt{MD}} = \frac{nx + na}{\sqrt{mx}},$$

precisa ser mínimo[160]. Isto é, a diferença dessa equação precisa ser nula, em uma notação atual, deve-se determinar:

$$\frac{d}{dx}\left[t(x) = \frac{nx + na}{\sqrt{mx}}\right] = 0, \tag{2.20}$$

que se desenvolvida, tem-se

$$\frac{n\sqrt{mx} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}}(nx + na)}{mx} = 0$$

ou

$$n\sqrt{mx} - \frac{\sqrt{m}nx + \sqrt{m}na}{2\sqrt{x}} = 0$$

ou ainda

$$2\sqrt{x}\sqrt{m}n\sqrt{x} - \sqrt{m}nx = \sqrt{m}na,$$

pode-se simplificar a equação acima por $\sqrt{m}n$; assim

$$2x - x = a, \textit{ logo, } x = a.$$

Isso significa que em cada ponto da curva da descida mais rápida, o raio de curvatura é bisectado pela horizontal AL. Para $MK = \dfrac{Mm}{n} = x + a$, como $x = a$, então $MK = 2a = 2NK$, ou seja, N divide MK em duas partes iguais e esta é uma característica da cicloide. Lembre-se que as equações paramétricas de uma cicloide ordinária são:

$$\begin{cases} y = r(\theta - \sin\theta) \text{ e} \\ x = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

para uma horizontal correspondente ao eixo x e uma vertical ao eixo y; e um círculo gerador de raio r. A partir disso, encontra-se:

$$\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}, \frac{ds}{dt} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

[160] Note que esta guarda a mesma relação de proporcionalidade encontrada por Jakob Bernoulli (vide equação 2.18).

e ainda, $MK = y\dfrac{ds}{dx}$ em que s é um comprimento de arco. O raio de curvatura (como é o inverso da própria curvatura) é $\dfrac{ds}{d\Theta}$, em que Θ é $\tanh\dfrac{dy}{dx}$. Se $\cot\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{dy}{dx} = \tan\Theta$, então $\Theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ e $\dfrac{ds}{d\Theta} = 2\dfrac{ds}{d\theta}$, ou seja, $MK = 2NK$. Assim chega-se a mesma característica da cicloide encontrada por Johann Bernoulli.

Tem-se até aqui o desenvolvimento da parte analítica dessa prova de Johann Bernoulli. Daqui em diante, tratarei a prova sintética dele a qual justifica geometricamente por que a cicloide provê a descida no menor tempo. Em outras palavras, ele apresentará qual a condição suficiente para que a cicloide seja a curva braquistócrona. Essa é a complementação do argumento matemático de Johann Bernoulli, pois até este momento pôde-se apreciar, pela segunda vez, a condição necessária sendo aplicada (vide equação 2.20), a saber, o princípio de Fermat.

Considere, agora, as normais à cicloide AMB em M e em m, MK e mK, respectivamente (vide Figura 32). Ambas passam pelo centro de curvatura K, de modo que $MN = NK$. Seja a curva de comparação ACB, MK e mK também interceptam esta curva nos pontos C e c. Johann Bernoulli traça um pequeno arco circular Ce de centro em K, levanta as perpendiculares CG e MD com relação à horizontal AL, traça GI paralelo a DK, estende DK até H onde encontra CG. E este segmento CG é prolongado até F de modo que $\dfrac{MD}{CH} = \dfrac{CH}{CF}$, pois o tempo de descida ao longo de Mm é proporcional a

$$t_{Mm} \propto \frac{Mm}{v_M} \propto \frac{Mm}{\sqrt{MD}};$$

de maneira similar, $t_{Ce} \propto \dfrac{Ce}{\sqrt{CG}}$. Pela escolha de F, tem-se $CH = \sqrt{CF.MD}$, enquanto que por semelhança de triângulo encontra-se

$$\frac{Mm}{Ce} = \frac{MK}{CK} = \left(\frac{MD}{CF}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como consequência, a razão dos tempos de descida ao longo de Mm e ao longo de Ce é

$$\frac{Mm}{Ce}.\left(\frac{CG}{MD}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{MD}{CF}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{CG}{MD}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{CG}{CF}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Johann Bernoulli mostra que $\dfrac{CG}{CF} < 1$, ou seja, o tempo de descida ao longo da cicloide Mm é menor que o tempo de descida ao longo de Ce, e como o tempo de descida por Cc (hipotenusa do triângulo Cec) é ainda maior, ele conclui que o tempo de descida ao longo do arco Mm da cicloide é menor que o tempo ao longo de qualquer outro arco Cc.

Para provar que $\dfrac{CG}{CF} < 1$, ele observa que $MN = NK$, desde que AMB seja uma cicloide; assim, por semelhança de triângulos

$$\frac{CN}{MN} = \frac{GN}{DN} = \frac{NI}{NK},$$

isso resulta em $CN = NI$.

Johann Bernoulli argumenta que se $CN^2 + NK^2 > 2CN.NK$, por consequência $CN^2+NK^2+2CN.NK > 4CN.NK = CI.MK$ e ainda $CK^2 > CI.MK$ ou $\frac{MK}{CK} < \frac{CK}{CI}$. Seu passo seguinte é notar que $\frac{MK}{CK} = \frac{MD}{CH} = \frac{CH}{CF}$ pela escolha de F e também pela proporção $\frac{CK}{CI} = \frac{CH}{CG}$. Disso, ele conclui que $\frac{CH}{CF} < \frac{CH}{CG}$ ou que $CG < CF$.

Como já visto acima, os tempos de descida do móvel a partir do repouso em A ao longo de Mm e ao longo de Ce são comparados. Uma vez que o tempo de descida varia diretamente com a distância e inversamente com a raiz quadrada da altura, é que se têm as razões $\frac{Mm}{\sqrt{MD}}$ e $\frac{Ce}{\sqrt{CG}}$. Também é verdade que (pela definição de F) que $\frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{CF}} = \frac{MD}{CH} = \frac{MK}{CK} = \frac{Mm}{Ce}$; e portanto a razão dos tempos de descida ao longo de Mm e Ce torna-se

$$\frac{Mm}{Ce}.\frac{\sqrt{CG}}{\sqrt{MD}} = \frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{CF}}.\frac{\sqrt{CG}}{\sqrt{MD}} = \frac{\sqrt{CG}}{\sqrt{CF}} > 1.$$

O tempo de descida ao longo de arco Mm da cicloide é menor que ao longo do arco de círculo Ce e o tempo de descida deste último é menor que ao longo de Cc – pois, $Cc > Ce$ e assim a velocidade que um móvel descerá Ce será mais rápida que Cc. O tempo de descida ao longo de Mm é menor que ao longo de Cc e consequentemente o tempo total de descida ao longo da cicloide é menor que o tempo de *aliam curvam ACB inter eadem puncta A & B constitutam. Quo Erat Demonstratum* (Bernoulli, 1718a, p. 88).

2.7.4 Solução de Isaac Newton

Newton[161], quando já era encarregado da casa da moeda em Londres, apenas nove meses após ter deixado sua posição acadêmica de professor na Universidade de Cambridge, recebeu, em 29 de janeiro de 1697, pelo *Programma Groningæ*[162], o famoso desafio dirigido aos *acutissimi qui toto Orbe florent Mathematicis*, de um jovem professor de Groningen, ainda não muito conhecido, Johann Bernoulli. Em dezembro de 1696 (vide seção 2.5, EXTENSÃO DO PRAZO), Johann Bernoulli, por meio de Otto Mencke, afirmou publicamente nos *Acta Eruditorum* de dezembro de 1696[163], p. 560, que além dele e do Leibniz ninguém mais havia dominado com sucesso o intrincado problema da braquistócrona (mesmo que tivera já recebido a solução adequada de seu irmão, Jakob Bernoulli). E ainda, reivindicou o poder técnico do *calculus differentialis* e a superioridade dos matemáticos suíço-germânicos. Até aquele momento, matemáticos franceses especialmente requisitados ou declinaram frente a dificuldade ou não souberam já de início atacar o problema corretamente. Foram eles respectivamente Pierre Varignon e l'Hôpital. Na Inglaterra, John Wallis recebera o mesmo convite em setembro de 1696, mas sem interresse algum acerca disso, acabou por encaminhá-lo a seu colega, professor saviliano, David Gregory. Este último tentou em vão provar que seria a catenária a curva braquistócrona. Bem antes do novo prazo estipulado por Johann Bernoulli, Newton, ainda em janeiro de 1697, confiou ao presidente da Royal Society, Charles Montague, a publicação, contudo anônima, de sua solução na revista científica desta sociedade, *Philosophical Transactions*[164]. Apesar do anonimato, Johann Bernoulli foi capaz de identificar a autoria de Newton – tal como comunicou a Basnage de Beauval, autor de *Histoire des Ouvrages de Sçavans* – *ex ungue leonem*[165].

É bastante curioso notar que a solução de Newton, publicada anonimamente em janeiro de 1697, é, de fato, a apresentação de uma condição para a construção de uma cicloide ordinária. Ele guardou os detalhes de seu cálculo das fluxões que o fizeram chegar a essa curva como resposta para o problema da braquistócrona. Contudo, é legítimo referir-se ao desenvolvimento newtoniano como solução porque Newton fornece a proporção que permite pontuar, dentre tantas outras cicloides, a braquistócrona. Ademais, não posso deixar de salientar que ao final da solução de Johann Bernoulli (vide seção 2.7.2) essa mesma proporção é fornecida, como se fosse a etapa final para sua solução estar completa. Não se pode afirmar com com base em evidências – até porque não dispomos delas –, mas que essa finalização sugere fortemente a solução newtoniana, isso é inegável! Considerando que as soluções aceitas pelo autor do problema foram publicadas em maio de 1697, então Johann Bernoulli teve muito tempo para repensar sua própria solução de modo a reconsiderá-la, com o objetivo de deixá-la mais completa. Segue, portanto, a solução de Newton, do modo como foi publicada nas *Phisolophical Transactions* de janeiro de 1697. Logo depois, considero o teorema das cicloides de Newton como determinante para a concepção de sua solução. Ou seja, este teorema conduz a conclusão de que é pela cicloide que a descida do repouso de um corpo pela agência de seu próprio peso é mais rápida que a descida por um plano inclinado, dados os mesmos extremos para ambos.

> **Problema I** Encontrar a curva ADB ao longo da qual uma partícula pesada cairá sob o efeito da ação da gravidade de qualquer ponto dado A para qualquer ponto dado B (Newton, 1967, p. 226, minha tradução).

> **Solução** Por meio do ponto dado A, trace a horizontal $APCZ$ e nela primeiro desenhe qualquer cicloide AQP que corte a linha AB (traçada se necessário for) no ponto Q e [trace] também uma segunda outra cicloide ABC, cuja base e altitude sejam, respectivamente, tais como AB está para AQ. Essa última cicloide passa por B e é a curva ao longo da qual uma partícula pesada descerá mais rapidamente do ponto A para o ponto B. (Newton, 1967, p.226, minha tradução)

[161] Cf. Newton, 2008b, 3–12.
[162] Cf. Bernoulli, 1742a, 166-169.
[163] Cf. Bernoulli, 1742a, p. 165.
[164] Cf. Newton, 1697a, p. 385–387.
[165] Cf. Bernoulli, 1742a, p. 196.

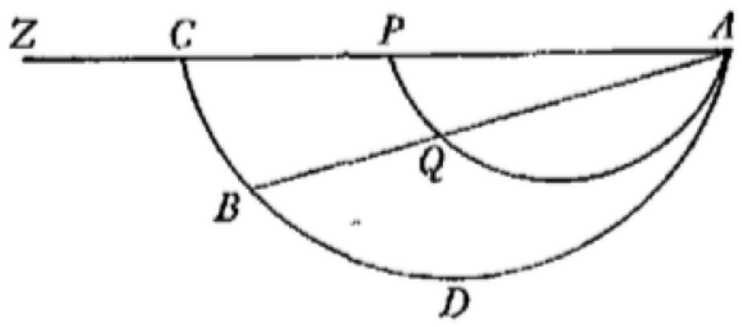

Figura 33 – Figura 12, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Newton (1967), p. 223.

Newton apresenta essa solução que incorpora uma característica fundamental da cicloide, a saber, AB está para AQ ou como Johann Bernoulli coloca, os diâmetros dos círculos geradores das cicloides AQP e $ADBC$ são proporcionais entre si. Se essa condição for satisfeita, então a curva que passa por A e B só pode ser uma cicloide. Apesar de bastante especulativo, é plausível que Johann Bernoulli tenha incluído tal emenda a sua solução porque já a conhecia antes de torná-la pública nos *Acta Eruditorum* de maio de 1697, posto que a solução de Newton foi publicada por primeiro nas *Philosophical Transactions* de janeiro de 1697[166]. Essa solução geométrica de Newton está respaldada pelo seu teorema das cicloides, pela lei das cordas de Galileu e pela propriedade da cicloide. Abaixo está, na sequência indicada, a construção matemático-argumentativa que dá base a Newton para sua resposta de 1697.

> [**Acerca dos problemas de Bernoulli: outro problema puramente geométrico:**] IV. Com respeito a razão do tempo que um grave desliza por uma reta traçada por dois pontos dados no tempo mais breve, atravessa pela força da gravidade de um ponto a outro ao longo de um arco de cicloide (Newton, 1782, p. 416, minha tradução).

> [**Teorema**] se em uma cicloide AVD, cuja base AD é paralela ao horizonte, de vértice V direcionado para baixo, qualquer linha reta AB traçada de A intercepta a cicloide em B e se de B for traçada uma linha reta BC, normal em B em relação à cicloide, e se a perpendicular AC com respeito a BC for traçada a partir de A, então, afirmo que o tempo para que um corpo pesado atravesse a linha reta AB, do repouso, é o tempo para atravessar o arco AVB tal como a linha reta AB está para a linha reta AC (Herrera, 1994, 471, minha tradução).

Assim, de acordo com o teorema[167] das cicloides de Newton, seja B um ponto qualquer da cicloide: o tempo para um corpo passar pelo arco AVB, pela ação do próprio peso, a partir de A, do repouso, é tal que AB está para AC, ou seja, $t_{AVB} \propto \dfrac{AB}{AC}$. Para a demonstração,

[166] Cf. Newton 1697a, p. 387–388; Newton 1697b, p. 223–224; Newton 1782, p. 414–415; Newton 1967, p. 220–221 e Newton 2008b, p. 72–75.

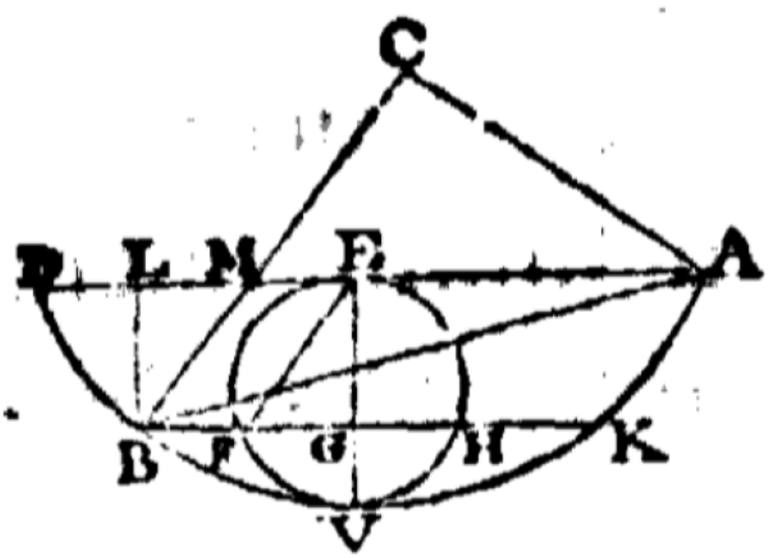

Figura 34 – Teorema de Newton da cicloide; fonte: Newton (1782), p. 417.

deve-se: traçar BL paralelo ao eixo da cicloide VE e BK paralelo à base AD, de modo que intercepte a cicloide em B e K, VE em G e o círculo gerador da cicloide em F e H. Disso segue que BM é igual a EF e EM, a BF; e pela natureza[168] da cicloide, BF é igual ao arco VF e portanto AM é igual ao arco $EHVF$. De acordo com a proposição 35 do livro 2 do *Horologium Oscillatorium* de Huygens (vide seção 2.3), $t_{\widehat{AV}} = t_{EV}$, sendo que o movimento de A para V parte do repouso e o movimento de E a V é de queda livre; depois do móvel percorrer o arco AV, têm-se:

$$\frac{t_{\widehat{VB}}}{t_{\widehat{AV}}} = \frac{\widehat{VF}}{\widehat{EHV}}$$

e por isso

$$\frac{t_{\widehat{VF}}}{t_{EV}} = \frac{\widehat{VF}}{EV}$$

de modo que

$$\frac{t_{\widehat{AVB}}}{t_{EV}} = \frac{\widehat{EHVF}}{EV}.$$

Sejam os movimentos de queda livre

$$\frac{t_{EV}}{t_{LB}} = \frac{EV}{EF}, \text{ assim, } \frac{t_{\widehat{AVB}}}{t_{LB}} = \frac{\widehat{EHVF}}{EF} = \frac{AM}{MB};$$

contundo,

167 Cf. Herrera, 1994, p. 471–472.

168 Devido ao rolamento sem deslize do círculo gerador que forma a cicloide, a base AD é igual ao seu perímetro. Disso, fica claro que, para a figura 42, AE é igual ao semiperímetro EHV e EM, a $\widehat{VF}$, mas como EM é igual a BF – porque $BFEM$ é um paralelogramo –, então, BF é igual a $\widehat{VF}$.

$$\frac{t_{LF}}{t_{AB}} = \frac{LB}{AB},$$

assim, a razão que expressa o tempo para atravessar o arco AVB é $\frac{AM}{MB}$ e $\frac{LB}{BA}$, por isso

$$t_{\widehat{\mathsf{AVB}}} = \frac{AM \times LB}{MB \times BA}.$$

Mas $AM \times LB = MB \times AC$ uma vez que $AH \times LB = MB \times AC = 2\Delta ABM$. Assim,

$$\frac{t_{\widehat{\mathsf{AVB}}}}{t_{AB}} = \frac{MB \times AC}{MB \times BA} = \frac{AC}{BA}.$$

Resumo da demonstração de Newton. Das relações entre tempos e arcos, têm-se:

$$t_{\widehat{\mathsf{AV}}} = t_{EV}, \frac{t_{\widehat{\mathsf{VB}}}}{t_{\widehat{\mathsf{AV}}}} = \frac{\widehat{\mathsf{VF}}}{\widehat{\mathsf{EHV}}}, \frac{t_{\widehat{\mathsf{VF}}}}{t_{EV}} = \frac{\widehat{\mathsf{VF}}}{EV} e \frac{\widehat{\mathsf{AVB}}}{t_{EV}} = \frac{\widehat{\mathsf{EHVF}}}{EV}.$$

Da relação a seguir, chega-se a:

$$\frac{t_{EV}}{t_{LB(=EG)}} = \frac{EV}{EF} \to \frac{\frac{t_{\widehat{\mathsf{AVB}}}}{t_{EV}} = \frac{\widehat{\mathsf{EHVF}}}{EV}}{\frac{t_{EV}}{t_{LB}} = \frac{EV}{EF}} \to \frac{t_{\widehat{\mathsf{AVB}}}}{t_{LB}} = \frac{\widehat{\mathsf{EHVF}}}{EF}.$$

Pela natureza da cicloide, $\widehat{\mathsf{EHVF}} = AM$ e $EF = MB$, assim

$$\left.\begin{matrix} \frac{t_{\widehat{\mathsf{AVB}}}}{t_{LB}} = \frac{AM}{MB} \\ \frac{t_{LB}}{t_{AB}} = \frac{LB}{AB} \end{matrix}\right\} \to t_{\widehat{\mathsf{AVB}}} = \frac{AM}{MB} t_{LB} = \frac{AM}{MB}\left(\frac{LB}{AB} t_{AB}\right).$$

Do ΔABM, chega-se a relação $\frac{LB}{MB} = \frac{CA}{AM} \to AM \times LB = MB \times CA$, logo:

$$\frac{t_{\widehat{\mathsf{AVB}}}}{t_{AB}} = \frac{AM \times LB}{MB \times AB};$$

finalmente

$$\frac{t_{\widehat{\mathsf{AVB}}}}{t_{AB}} = \frac{CA}{AB}. \tag{2.21}$$

O teorema de Newton das cicloides revela, pela equação 2.21, que o tempo para o corpo atravessar $\widehat{\mathsf{AVB}}$ é diretamente proporcional a CA ($t_{\widehat{\mathsf{AVB}}} \propto CA$), enquanto o tempo para atravessar AB é diretamente proporcional ao próprio segmento AB ($t_{AB} \propto AB$) (vide Figura 42). Apenas por isso, se considerar AB um plano inclinado em que um corpo desliza pelo seu próprio peso a partir de A, certamente, o móvel chegaria antes a B por $\widehat{\mathsf{AVB}}$ da cicloide que pela menor linha a qual atravessa os pontos A e B. Porque, primeiro, o tempo de travessia de $\widehat{\mathsf{AVB}}$ é necessariamente menor que t_{AB}, já que aquele arco é proporcional a AC, lado do triângulo ABC o qual é menor que AB, hipotenusa desse mesmo triângulo – isto é, $AC > AB$; e, segundo, AC é também proporcional a EF e, de acordo com a lei das cordas de Galileu (vide seção 2.4), a velocidade de descida do repouso de EF varia de acordo com sua inclinação (se se tratar, tal como é, da corda de um círculo cuja extremidade coincide com a do seu diâmetro vertical), de outro modo, $\sin\vartheta = kv_{EF}$, em que k é uma constante. Do triângulo EVF, se EG representa uma queda livre no diâmetro EV e FG é a horizontal, então por semelhança entre ΔEFV e ΔEFG (ou pelas relações métricas no triângulo retângulo EFV), $EF^2 = EV \times EG$; ou seja, EF varia com a $\sqrt{EG}$. Como o $\sin\vartheta$ é diretamente proporcional a EF, isso significa que o ângulo ϑ é, pois, o ângulo FVE. Portanto, quando o corpo cai a altura EG, o ângulo de inclinação ϑ é FVE, enquanto a linha EF é paralela a tangente instantânea em K (vide seção 2.3); e esse paralelismo só é encontrado na cicloide.

Ciente disso, Newton apresentou como solução para o problema da braquistócrona um critério para escolher a cicloide certa. Portanto, será a cicloide certa, a da descida mais rápida, aquela que obedecer a razão de proporção $\dfrac{AB}{AQ}$ (vide Figura 33). Diferentemente do que disse Leibniz acerca do problema da braquistócrona (vide seção 2.7.1), que, para ele, apenas o seu cálculo das diferenças era capaz de obter a solução correta, Newton colocou uma solução a qual, à primeira vista, parece apenas uma consequência da construção da cicloide, mas revelou, de fato, a solução para o problema, pois indicou que era não apenas a cicloide a curva da descida mais rápida e, sim das cicloides qual delas de fato respondeu o problema e mais por uma via puramente geométrica.

NICOLAS FATIO DE DUILLER E SUA *LINEÆ BREVISSIMI DESCENSUS INVESTIGATIO GEOMETRICA DUPLEX* (1699)

Essa famosa obra de Fatio foi o estopim para a disputa acerca da prioridade do cálculo entre Newton e Leibniz – em um momento em que ambos e seus mais fiéis discípulos já trocavam correspondências nada amistosas. Isso porque Fatio afirmou que Leibniz, embora inventor genuíno do cálculo, foi o seu segundo, depois é claro de Newton[169,170]. Não quero entrar com mais detalhes a respeito desse episódio bastante interessante e importante para a história do cálculo, e ,sim, prefiro explorar um pouco outras consequências dessa obra controversa de Fatio. Esse matemático suíço, por certo tempo protegido de Newton, também foi bem-sucedido na redução do problema da braquistócrona à condição da curvatura própria e única da cicloide. Essa questão foi trabalhada em uma parte bem precisa da obra a qual, de fato, aspira a uma questão bem mais prática: o melhoramento do cultivo de pomares. O título da obra já resume o núcleo do texto, *Fruit-Walls improved by inclining them to the horizon: or, a way to build* *walls for fruit-trees; whereby they may receive Sun shine, and heat, than ordinary*[171].

Esta é, de fato, uma obra bastante curiosa porque coloca em um mesmo livro técnicas para aprimorar o cultivo de frutas e duas investigações sobre geometria. Uma delas é acerca do problema da braquistócrona, como já mencionado acima – *Lineæ Brevissimi Descensus Investigatio Geometrica Duplex*, e a outra é sobre a menor resistência de um sólido de revolução – *Investigatio geometrica solidi rotondi in quod minima fiat resistentia*[172]. Ambas investigações já tinham sido feitas por Newton. A investigação sobre a curva braquistócrona em janeiro de 1697[173] e a da menor resistência ao final de 1685[174].

O fato é que David Gregory[175] achou a investigação de Fatio de Duillier sobre a braquistócrona bastante complexa, pouco elucidativa. O sobrinho do famoso James Gregory, por vezes se reunia com Newton para discutir matemática e desses encontros ele produzia os seus *memoranda*[176], em que registrava aquilo que foi discutido. Whiteside supõe que David Gregory tenha ou sugerido senão pedido diretamente a Newton para que ele simplificasse o argumento de seu antigo pupilo Fatio de Duillier. Newton depurou o argumento de Fatio em sua essência, em um pouco mais de doze linhas. No *corpus* de seus manuscritos, esse desenvolvimento está preservado (*ULC.Add.3968.41:*2^r), contudo sem qualquer explicação ao que se refere. Somente foi possível conferir sentido a esse extrato pois há um memorando de David Gregory datado de primeiro de abril de 1700, sob o título de *Newtoni investigatio curvæ celerrimi descensus*, que descreve o conteúdo daquele mesmo extrato, embora com as notações típicas de seu autor.

Segue então logo abaixo o desenvolvimento tardio de Newton acerca do problema da braquistócrona, porém agora sob os auspícios de David Gregory, incentivado pelo argumento polêmico, obscuro e complexo de Nicolas Fatio de Duillier.

SOLUÇÃO "TARDIA" DE ISAAC NEWTON (1700)

Seja uma linha infinitamente pequena AM, dividida ao meio em F. As horizontais EB, FNC

[169] Cf. Hall, 2002, p. 100–101 e Newton, 2008b, p. 12–13.

[170] "Reconheço, ainda, que Newton foi o primeiro e por muitos anos o mais antigo inventor do Cálculo, sou conduzido a essa conclusão pela evidência fatual a respeito. Quanto ao fato de Leibniz, seu segundo inventor, ter emprestado algo que seja daquele, prefiro deixar o juízo para quem tenha visto as cartas e outros manuscritos de Newton, não a mim." (minha tradução) – *Newtonum tamen primum, ac pluribus Annis ventustissimum, hujus Calculi Inventorem, ipsa rerum evidentia coactus, agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius, secundus ejus Inventor, malo eorum, quam meum, sit Judicium, quibus visæ fuerint Newtoni Litteræ, aliique ejusdem Manuscripti Codices.* (Duillier, 1699a, p. 18).

[171] Cf. Duillier, 1699b.

[172] Cf. Duillier, 1699a.

[173] Cf. Newton, 2008b, p. 72–74.

[174] Cf. Newton, 2008a, p. 457–480.

[175] Cf. Newton, 2008b, respectivamente p. 13 e p. 86, nota 1.

[176] Os *memoranda* de David Gregory encontram-se compilados por W. G. Hiscock na obra *David Gregory, Isaac Newton and their Circle; Extracts from David Gregory's Memoranda 1677–1708*. (Oxford, 1937): 10; o qual tive acesso apenas indiretamente pelos *Mathematical Papers of Isaac Newton*, volume 8, p. 86–87, nota 1 (conforme nota de rodapé anterior).

e GD são perpendiculares a AD, EL e NI. Pede-se, então, a reta FN quando um peso desce pelas cordas EN e NG no tempo mais breve[177].

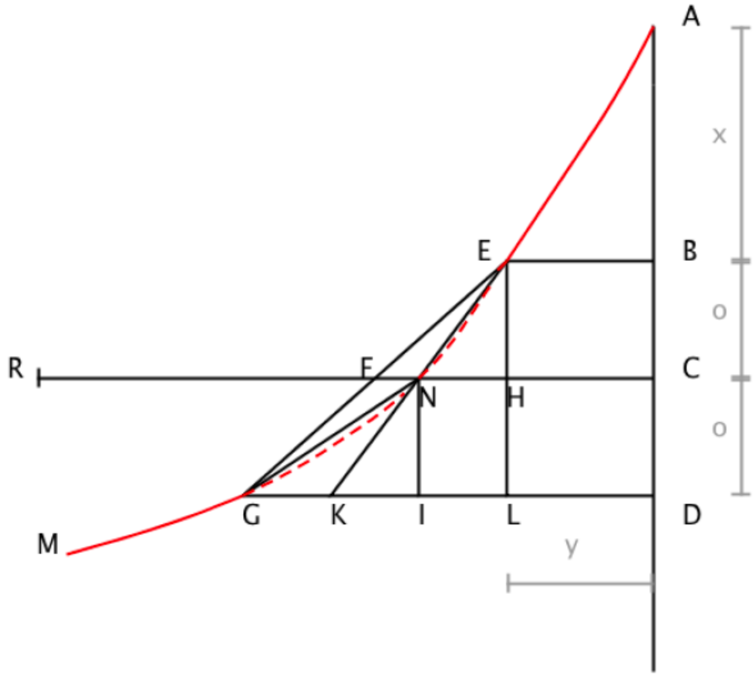

Figura 35 – Solução tardia de Newton, março, 1700; fonte: Newton 2008b, p. 87, adaptada.

Considere $AB = x$, ordenada; $BC = o = CD$, intervalo de tempo tão pequeno quanto se queira; $BE = y$, abscissa. Seguirei aqui a notação sugerida por Whiteside (vide nota 177), chame $BE = y \equiv y_x$, em que o subindice x indica a que parte da ordenada a abcissa y está associada. Uma vez que Newton considera em seu método das fluxões que um ponto de uma certa quantidade fluente x ou y se desloca com velocidade uniforme, deixa como rastro a fluxão (variação dessa quantidade fluente) $\dot{x}o$ ou $\dot{y}o$, respectivamente. O mesmo vale para quando se referir a fluxão de segunda ordem, isto é, a fluxão da fluxão; assim se representa: $\ddot{x}o^2$ e $\ddot{y}o^2$.

Em uma série expandida até o termo de segunda ordem, na qual os demais termos da série são representados sinteticamente por $O(o^3)$ – mas que irei suprimir aqui uma vez que o considero implícito –; suas ordenadas (vide Figura 35) são:

$$CN = y_{x+o} = y + \dot{y}o + \frac{1}{2}\ddot{y}o^2 \text{ e } DG = y_{x+2o} = y + 2\dot{y}o + 2\ddot{y}o^2;$$

desse modo, são $HN = IK = \dot{y}o + \frac{1}{2}\ddot{y}o^2$, $IG(= DG - CN) = \dot{y}o + \frac{3}{2}\ddot{y}o^2$, $LG(= DG - BE) = 2p = 2\dot{y}o + 2\ddot{y}o^2$ e $FN = q(= \frac{1}{2}LG - HN) = \frac{1}{2}\ddot{y}o^2$. Em seguida, Newton toma $EL = 2o$ e $LG = 2p$ como fixos, sua estratégia é mover livremente N sobre CF; desse modo, também varia o comprimento de FN.

177 Cf. Newton, 2008b, p. 87–91.

Os arcos $\widehat{\mathrm{EN}}$ e $\widehat{\mathrm{NG}}$, em $O(o^3)$, são praticamente iguais às cordas $EN(=\sqrt{o^2+(p-q)^2})$ e $NG(=\sqrt{o^2+(p+q)^2})$. Para o corpo que desce a partir do repouso de A, ao chegar em E, Newton considera o percurso pelas cordas e não pelos arcos. As cordas que formam o caminho segmentado pelo qual o corpo desce, EN e NG, são respectivamente proporcionais às velocidades em E e N ou, o que dá no mesmo, $v_E(=\sqrt{AB}=\sqrt{x})$ e $v_N(=\sqrt{AC}=\sqrt{x+o})$. Ele, então, mantém x, o e p fixos mas varia $FN(=q)$ de tal modo que o tempo total (isto é, de E a G) seja o menor, isto é:

$$\frac{EN}{\sqrt{AB}}+\frac{NG}{\sqrt{AC}}=R+S\rightarrow \textit{mínimo}$$

ou

$$\frac{\sqrt{o^2+(p-q)^2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{o^2+(p+q)^2}}{\sqrt{x+o}}=R+S\rightarrow \textit{mínimo}.$$

Perceba que aqui, Newton escreve uma equação do tempo de descida pelas cordas cuja dependência está em $FN(=q)$ que deve ser mínimo; já que ele deseja encontrar a curva do tempo mais breve. De modo mais claro, ele chega a relação do tempo pela razão entre o comprimento da corda (por exemplo, EN) e a velocidade no ponto E, assim:

$$R=t_{EN}(q)\propto\frac{EN}{v_E}\left(=\frac{\sqrt{o^2+(p-q)^2}}{\sqrt{x}}\right),$$

e o mesmo vale para

$$S=t_{NG}(q)\propto\frac{NG}{v_N}\left(=\frac{\sqrt{o^2+(p+q)^2}}{\sqrt{x+o}}\right).$$

Newton trata R e S em separado, logo,

$$R=\frac{\sqrt{o^2+p^2-2pq+q^2}}{\sqrt{x}}\text{ ou }R^2=\frac{o^2+p^2-2pq+q^2}{x},$$

o mesmo vale para

$$S=\frac{\sqrt{o^2+p^2+2pq+q^2}}{\sqrt{x+o}}\text{ ou }S^2=\frac{o^2+p^2+2pq+q^2}{x+o}.$$

Em seguida, Newton toma as fluxões dos quadrados de R e S, em que o e p são fixos (ou constantes) e q varia, isto é:

$$2R\dot{R}=\frac{-2p\dot{q}+2q\dot{q}}{x}\text{ e }2S\dot{S}=\frac{2p\dot{q}+2q\dot{q}}{x+o}.$$

Por fim, Newton isola $\dot{R}$ e $\dot{S}$, adiciona ambas e iguala a zero:

$$\dot{R}+\dot{S}=0;$$

$$\frac{-p\dot{q}+q\dot{q}}{Rx}+\frac{p\dot{q}+q\dot{q}}{Sx+So}=0. \tag{2.22}$$

É manifesto que a equação 2.22 expressa a condição para que o tempo de descida pela linha segmentada $ENG(=EN+NG)$ seja o mínimo local, ou seja, tempo brevíssimo de Newton. Ele assume que a descida pela linha ENM será a mais rápida ou terá o tempo mais breve na seguinte condição: se dividir a equação 2.22 por $\dot{q}\left(=\frac{1}{2}\dddot{y}o^2\neq 0\right)$ e substituir respectivamente R e S pelos seus valores $\frac{\sqrt{o^2+(p-q)^2}}{\sqrt{x}}$ e $\frac{\sqrt{o^2+(p+q)^2}}{\sqrt{x+o}}$; chega-se a

$$\frac{p-q}{\sqrt{o^2+(p-q)^2}.\sqrt{x}}=\frac{p+q}{\sqrt{o^2+(p+q)^2}.\sqrt{x+o}}.$$

Já que o é muito pequeno em relação a x, então, a condição de Newton de minimização[178] do tempo será tal que

$$\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\sqrt{o^2+p^2}}{\sqrt{x}}\right)=\right]\frac{p}{\sqrt{o^2+p^2}.\sqrt{x}} \text{ seja } \textit{constante}.$$

Isto é, porque $\frac{o}{p}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, então, existe $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\propto\sqrt{x}$.

Na sequência, Newton efetua a fluxão, com respeito a x, e ela define o ponto geral $N(x,y)$ da braquistócrona e, imediatamente, a condição de curvatura de Nicolas Fatio de Duillier, qual seja: $NF=q=\frac{1}{2}\ddot{y}o^2$. De volta à equação 2.22, dela segue que:

$$\frac{(Sx+So).(-p\dot{q}+q\dot{q})+Rx(p\dot{q}+q\dot{q})}{Rx(Sx+So)}=0,$$

logo,

$$-Sp\dot{q}o+Sq\dot{q}o-Sp\dot{q}x+Sq\dot{q}x+Rxp\dot{q}+Rxq\dot{q}=0.$$

Pode-se simplificar todos os termos por $\dot{q}$, assim:

$$S(-po+qo-px+qx)=(-)R(xp+xq)$$

ou ainda, porque se sabe os valores de R e S,

[178] Se fizer variar q a zero (ou seja, no limite de q a zero), e considerando o muito menor que x, então tem-se a seguinte expressão comum para ambos os membros da igualdade: $\frac{p}{\sqrt{o^2+p^2}\sqrt{x}}$. Obtém-se essa mesma expressão se fizer $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\sqrt{o^2+p^2}}{\sqrt{x}}\right)$. Mas $\int_{CN}^{CF}\frac{\sqrt{o^2+p^2}}{\sqrt{x}}$ será mínimo se necessariamente $\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\sqrt{o^2+p^2}}{\sqrt{x}}\right)\right]=\frac{p}{\sqrt{o^2+p^2}\sqrt{x}}=$ constante. Cf. Newton, 2008a, p. 459–461, nota 14 (vide também seção 2.1, CÁLCULO VARIACIONAL: EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE, EQUAÇÃO 2.1).

$$\frac{\sqrt{o^2+p^2+2pq+q^2}}{\sqrt{x+o}}.(-po+qo-px+qx)=(-)\frac{\sqrt{o^2+p^2-2pq+q^2}}{\sqrt{x}}.(xp+xq).$$

Seguem, doravante, algumas simplificações algébricas: primeiro,

$$\frac{\sqrt{x+o}}{\sqrt{x+o}}.\left[\frac{\sqrt{o^2+p^2+2pq+q^2}}{\sqrt{x+o}}.(-po+qo-px+qx)\right]= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.\left[(-)\frac{\sqrt{o^2+p^2-2pq+q^2}}{\sqrt{x}}.(xp+xq)\right]$$

; segundo,

$$\frac{\sqrt{o^2+p^2+2pq+q^2}}{x+o}.(-p+q).(x+o).\sqrt{x+o}= (-)\frac{\sqrt{o^2+p^2-2pq+q^2}}{x}.(p+q).x.\sqrt{x}$$

e, por fim,

$$\sqrt{o^2+p^2+2pq+q^2}.(-p+q).\sqrt{x+o}=(-)\sqrt{o^2+p^2-2pq+q^2}.(p+q).\sqrt{x}.$$

Como $q=\frac{1}{2}\ddot{y}o^2$ é uma fluxão de segunda ordem, seu quadrado é bastante pequeno em relação às demais grandezas, portanto, desprezível; assim:

$$\sqrt{o^2+p^2+2pq}.(q-p).\left(\frac{x+o}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=(-)\sqrt{o^2+p^2-2pq}.(q+p).$$

Agora, elevam-se ao quadrado os dois membros dessa igualdade:

$$\left[\sqrt{o^2+p^2+2pq}.(q-p).\left(\frac{x+o}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\left[(-)\sqrt{o^2+p^2-2pq}.(q+p)\right]^2;$$

$$(o^2+p^2+2pq).(q-p)^2.\left(1+\frac{o}{x}\right)=(o^2+p^2-2pq).(q+p)^2;$$

$$(o^2+p^2+2pq).(q^2-2qp+p^2).\left(1+\frac{o}{x}\right)=(o^2+p^2-2pq).(q^2+2qp+p^2);$$

$$(q^2o^2-2qpo^2+p^2o^2+p^2q^2-2qp^3+p^4+2pq^3-4q^2p^2+2p^3q).\left(1+\frac{o}{x}\right)= q^2o^2+2qpo^2+p^2o^2+p^2q^2+2qp^3+p^4-2pq^3-4q^2p^2-2p^3q$$

; mais uma vez, desprezam-se q^2 e superiores:

$$(-2qpo^2 + p^2o^2 - 2qp^3 + p^4 + 2p^3q).\left(1 + \frac{o}{x}\right) = 2qpo^2 + p^2o^2 + 2qp^3 + p^4 - 2p^3q;$$

$$(-2qpo^2 + p^2o^2 + p^4).\left(1 + \frac{o}{x}\right) = 2qpo^2 + p^2o^2 + p^4;$$

$$-2qpo^2 + p^2o^2 + p^4 - \frac{2qpo^3}{x} + \frac{p^2o^3}{x} + \frac{p^4o}{x} = 2qpo^2 + p^2o^2 + p^4;$$

$$-\frac{2qpo^3}{x} + \frac{p^2o^3}{x} + \frac{p^4o}{x} = 4qpo^2$$

e, por fim, simplifica-se o, por haver em todos os termos, e, também, despreza-se o termo $-\dfrac{2pqo^3}{x}$ por ter o produto $pq\left(= [\dot{y}o + \ddot{y}o^2].\left[\dfrac{1}{2}\ddot{y}o^2\right]\right)$ e isso torna-o o menor de todos da equação, logo:

$$p^2o^2 + p^4 = 4pqxo. \tag{2.23}$$

Da equação 2.23, Newton afirma que o círculo está na mesma medida da linha curva ANM a partir de N e corta CN em R (vide Figura 36); disso terá:

$$po^2 + p^3 = 4qxo;$$

$$p(o^2 + p^2) = 4qxo$$

e por fim chega-se a

$$NR = \frac{EF^2}{FN} = \frac{o^2 + p^2}{q} = 4x\frac{o}{p}\left[= 4AB\frac{BC}{\frac{LG}{2}}\right]. \tag{2.24}$$

$EF^2 = o^2 + p^2$ (vide Figura 35), para $O(o^3)$, e a corda NR do círculo gerador de mesma curvatura que a braquistócrona ANM em N é $\dfrac{NE^2}{NF}$, no limite onde a corda EG a bissecta, torna-se desprezivelmente pequena.

Disso segue que o centro de curvatura em N, seja O, estabelece uma distância $OS = \dfrac{1}{2}NR.\left(\dfrac{p}{o}\right) = 2x = 2AC$, e daí, então, o raio ON é seccionado ao meio pela horizontal AP através do ponto A, a partir do qual o corpo começa a descer (vide Figura 36).

Para se compreender o resultado encontrado por Newton e de como ele é o mesmo de Nicolas Fatio de Duillier, é preciso olhar mais próximo suas investigações. A primeira parte,

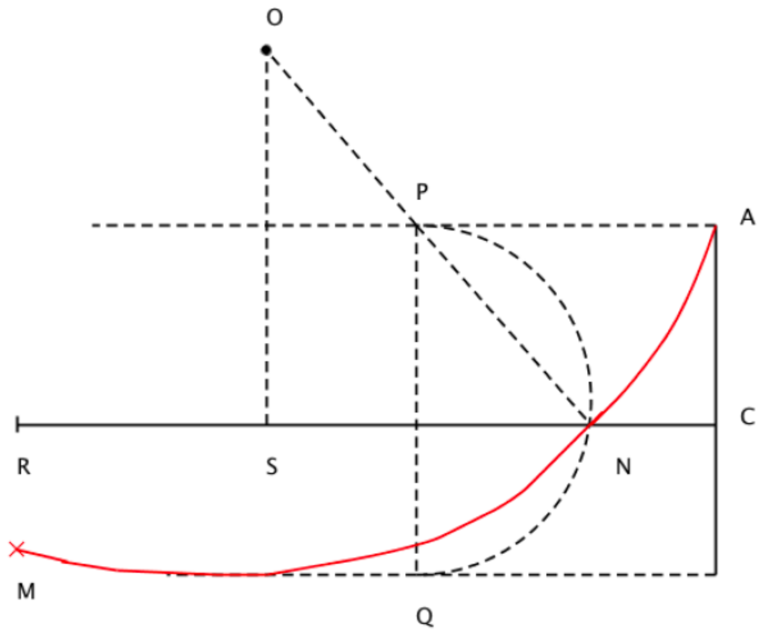

Figura 36 – Solução tardia de Newton, março, 1700; fonte: Newton 2008b, p. 90, adaptada.

isto é, a *Lineæ Brevissimi Descensus Investigatio* é dividida em dois: a *prior* e a *posterior*[179]. A primeira é uma investigação bastante conhecida pelo leitor, ou seja, da queda mais rápida sob a ação simples e constante da gravidade; já a segunda é uma variante da primeira que emprega planos trapezoidais no lugar de superfícies cilíndricas curvas para se chegar ao sólido de menor resistência.

Fatio, na primeira investigação, representa a velocidade instantânea de queda do corpo v ($\propto \sqrt{x}$, em que x é a distância vertical de queda a partir do repouso) por um comprimento de linha inversamente proporcional a ela e perpendicular ao caminho de queda em relação ao ponto. Assim, foi possível representar a condição com que o tempo de descida $\left(\int \dfrac{ds}{v}\right)$ sobre um arco infinitamente pequeno com extremidades fixas se faça mínimo (lembro aqui que Fatio tratou isso geometricamente e como resultado obteve um argumento bastante complexo e abstruso ao olhos de Leibniz e David Gregory).

Se seguirmos um caminho diverso e optarmos pela análise: a equação que representa o tempo de queda quando empregada a condição necessária de extremização local para se encontrar seu mínimo, chegamos a seguinte relação: $\left(\dfrac{1}{v}\right)\dfrac{dy}{ds}$ precisa ser igual a uma constante. E por uma computação suprimida aqui obtém-se a definição da braquistócrona, isto é, $u\dfrac{dy}{ds} = 2x$, para $u \left[= \dfrac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}\right]$, raio de curvatura no ponto $P(x, y)$. Portanto, tanto s está para p, quanto ER está para EA ou $2x$ está para u, essas proporções são iguais a $2GH$ (vide Figura 37)[180].

[179] Cf. Newton, 2008b, p. 86, nota 1.
[180] Cf. Duillier, 1699a, p. 9.

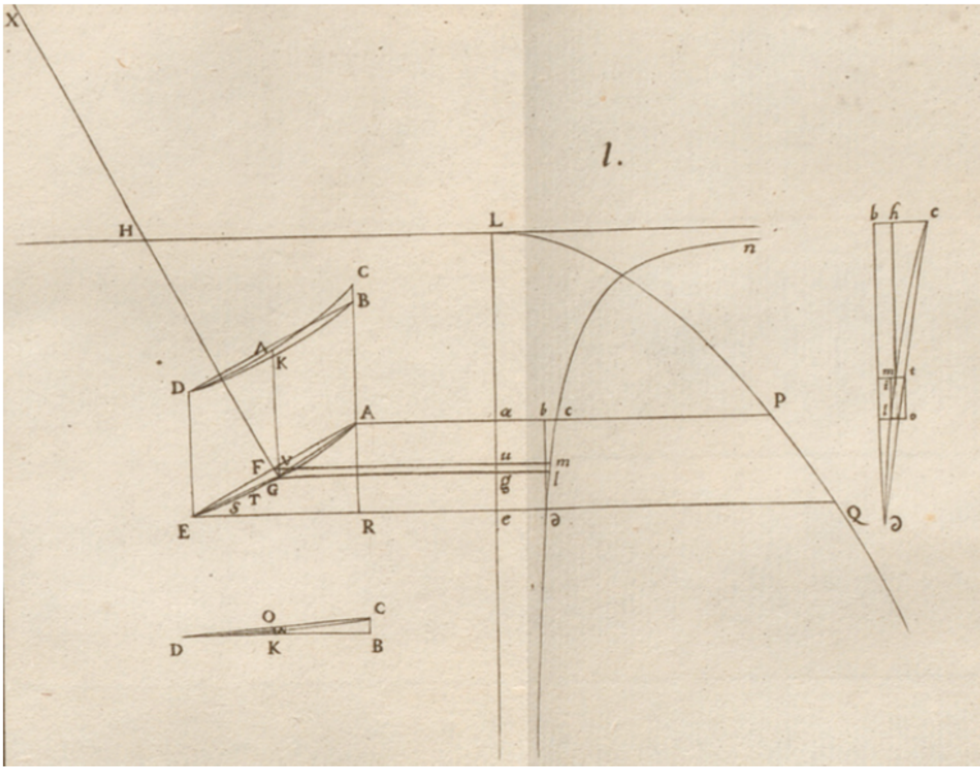

Figura 37 – Diagrama geométrico de Nicolas Fatio de Duiller para a curva braquistócrona; fonte: Duillier 1699a, figura 1.

E, assim, conclui Fatio: *lineæ brevissimi descensus cadens, a linea horizontali... a qua cadendi initium fecit, remotum est; tantum præcise centrum curvitatis lineæ brevissimi descensus attollitur supra eandem horizontalem... quæ notissima est cycloidis proprietas* (Duillier, 1699a, p. 9).

A passagem da propriedade da curvatura de segunda-ordem de Fatio, que define a braquistócrona a partir da tangente à cicloide aplicada à equação de primeira ordem de Leibniz (vide seção 2.6), é inteiramente direta, uma vez que (vide Figura 36) $OS = \dfrac{\dot{y}(1+\dot{y}^2)}{\ddot{y}} = 2x$ e, portanto, $x^{-1} = 2\left(\dot{y}^{-1} - \dfrac{\dot{y}}{(1+\dot{y}^2)}\right)\ddot{y}$. Disso segue por integração direta que $\dfrac{x}{a} = \dfrac{\dot{y}^2}{(1+\dot{y}^2)}$ e assim $\dot{y} = \sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$. Por uma segunda integração, a curva da queda mais rápida é (dado que $x = y = 0$ na origem A) a cicloide definida pela equação cartesiana

$$CN = y = \frac{1}{2}a\cos^{-1}\left(1 - 2\frac{x}{a}\right) - \sqrt{x(a-x)},$$

em que $AC = x$ é a distância vertical de queda e $PQ = a$ é a distância do círculo que gera a cicloide ao rolar por sobre e ao longo de uma *linea horizontalis* AP[181].

[181] Cf. Newton, 2008b, p. 90–91, nota 10.

CONCLUSÃO

Antes mesmo do problema da braquistócrona ser apresentado aqui em seus detalhes históricos, mostrei – na seção 2.1, CÁLCULO VARIACIONAL: EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE – como se tratam problemas isoperimétricos atualmente. Mediante isso, irei pontuar algumas diferenças importantes que caracterizam e caracterizaram uma época.

Lembro que o cálculo variacional trata extremos, máximos e mínimos, por intermédio de um funcional ($J[y]$) aplicado a um espaço de funções sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. De modo que quando resolvida a seguinte integral aplicada a $J[y]$, isto é, $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx$ – dependente de uma função $y(x)$, sua derivada em relação a x $\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)$ e a variável independente x – retomará um número $n \in \mathbb{R}$.

Agora, o cálculo variacional é uma pequena parte da análise matemática que, de fato, ainda, não tinha sido estabelecida na época de Leibniz, Newton e dos irmãos Bernoulli. A análise matemática incorpora conceitos do cálculo diferencial e integral, limites, séries infinitas, medidas e funções analíticas. A análise matemática surgiu da necessidade de proporcionar definições sólidas (diria também, rigorosas, claras e certas, ainda que de modo bastante amplo) aos conceitos incipientes (nesses termos, ainda que *latos*, de rigor, clareza, certeza) do cálculo das diferenças e do método das fluxões.

Esses "modos de calcular" demarcaram o período moderno na matemática (séculos XVII e XVIII) e se prestaram bastante bem às questões práticas da matemática da época, como solução de problemas – por exemplo, nosso problema da braquistócrona – que tinham um papel importantíssimo no teste de métodos e alargamento das fronteiras do conhecimento matemático. Todavia, estavam imersos em problemas de fundamento; haja vista as discussões entre Leibniz e Bernard Nieuwentijt[182] acerca do cálculo das diferenças ou as críticas de George Berkeley[183] ao método das fluxões de Newton.

A análise matemática para ter sido concebida dependeu de diversos estudos como da teoria dos conjuntos de George Cantor, das funções introduzida por Leonhard Euler, da continuidade de Bernard Bolzano, da análise infinitesimal de Augustin-Louis Cauchy. Outros matemáticos também contribuíram para a matemática ser o que é hoje, como Poisson, Liouville, Fourier para o estudo de equações diferenciais e análise harmônica e Weierstrass por estabelecer a noção atual de rigor.

Como pôde-se perceber, nos desenvolvimentos dos argumentos matemáticos selecionados aqui para o problema da braquistócrona, não há funções, conjuntos numéricos como constam na seção 2.1. A atenção nos estudo da matemática de Leibniz, Newton, dos irmãos

[182] Cf. Mancosu, 1999, cap. 6, Leibniz's differential calculus and its opponents, seção 6.2 Early debates with Clüver and Nieuwentijt.

[183] Cf. Berkeley, G. THE ANALYST; OR, A DISCOURSE Addressed to an Infidel Mathematician. London: Printed for J. Tonson in the Strand. 1734.

Bernoulli, estava voltada a curvas, equações diferenciais, diagramas geométricos. Inclusive o nosso problema da descida mais rápida pede o lugar geométrico que cumpre com essa característica, a qual foi ora expressa por uma equação diferencial, ora pelo traço estabelecido inexoravelmente por uma proporção necessária. E para sustentar que essa equação diferencial ou esse traço fossem eles mesmos indubitável e incondicionalmente de uma cicloide, percebeu-se o recorrente desvelamento de uma propriedade advinda da própria construção da cicloide.

No caso do problema da braquistócrona, deseja-se encontrar a curva da descida mais rápida. Apesar de haver uma semelhança entre encontrar uma curva cujo tempo seja mínimo e encontrar um ponto de uma função que seja mínimo, é preciso lembrar que se deve extremizar um funcional para se encontrar uma curva (ou uma família de curvas que respondem ao problema). Ou seja, a derivada do funcional deve ser necessariamente igual a zero (vide seção 2.1, CÁLCULO VARIACIONAL: EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE). Leibniz, Johan Bernoulli, Jakob Bernoulli e Newton procederam nos termos de Fermat. Para Leibniz, a diferença da equação que exprime o tempo de descida deve ser zero (vide equação 2.9), posto que ele usou de um modelo mecânico com base em planos inclinados, sua trajetória é segmentada por um ponto móvel cuja posição deve ser tal que a descida seja a mais rápida.

Já Johann Bernoulli, em seu método indireto, muito engenhosamente, usa de um modelo óptico, por uma analogia a um modelo mecânico similar, com base no fenômeno da refração da luz, de tal modo que a trajetória percorrida tenha a forma de uma cicloide. Pois Johann Bernoulli considera uma pilha de camadas dióptricas de índice de refringência crescente e de espessura tão pequena quanto se queira, sendo atravessada por um feixe de luz monocromático. Por isso, ele já utiliza do princípio de Fermat aplicado à lei da refração (ou Lei de Snell-Descartes), isto é, de que a razão entre o seno do ângulo de incidência do raio de luz e da velocidade da luz no meio refringente seja constante (para todos os casos) e superior a um $\left(\frac{\sin\alpha}{c} = cte > 1\right)$ (vide equação 2.11).

Jakob Bernoulli, assim como Leibniz, emprega um modelo mecânico. Ele considera uma curva de tempo mínimo e um móvel que a percorre, impulsionado apenas pelo seu próprio peso. Se a curva é a do menor tempo, qualquer sub-arco dela também será. Mas se for tomada uma secante que corta a curva menor em dois pontos quaisquer, tem-se um segmento de linha da menor trajetória delimitado por dois pontos. Agora, seria uma contradição se o móvel que descesse também pela secante, fizesse um trajeto no menor tempo possível. Espera-se justamente uma diferença de tempo entre essas duas trajetórias. A condição necessária, ou seja, o princípio de Fermat é assim aplicado por Jakob Bernoulli: a diferença de tempo entre as duas trajetórias deve ser nula para que o corpo desça no menor tempo (vide equação 2.14). Em seguida, para tornar sua resposta ao problema mais completa, Jakob Bernoulli realiza a parte sintética, ou seja, esclarece por que a cicloide é suficiente para a queda de um corpo pela ação apenas de seu peso ser a mais rápida. Ele procede a partir de propriedades da cicloide e chega à mesma relação (equação 2.14) determinada via análise. Por isso, parece-me, foi que Jakob

Bernoulli instigou seu irmão, Johann, a também apresentar sua própria síntese (ou método direto), o que foi ocorrer somente em 1703.

Newton tem duas soluções para o problema da braquistócrona: uma publicada anonimamente nas *Philosophical Transactions* em janeiro de 1697 e outra desenvolvida tardiamente, em 1700, a pedido de David Gregory. Na sua primeira solução, Newton mostra qual deve ser a proporção que a cicloide correta deve obedecer para atender à característica de ser a curva da queda mais rápida dados dois pontos. Ele procede por meios puramente geométricos em uma construção da curva resposta. Já em sua solução tardia, Newton desenvolveu um modelo que é praticamente um amalgama entre o de Leibniz e o de Jakob Bernoulli. Newton considera a curva do menor tempo, segmenta-a em três pontos quaisquer, junta as extremidades ao ponto central por dois segmentos de linha. Assim, tem uma curva do menor tempo em cujo meio há uma trajetória segmentada. As extremidades desta última são fixas e o ponto central varia. O móvel que percorre, pelo seu próprio peso, essa trajetória descerá no menor tempo, quando a fluxão da equação dos tempos de descida pelas cordas for nula, essa é a condição necessária de inspiração fermatiana (vide equação 2.22).

Frente as evidentes diferenças que estabelecem um profundo hiato entre o que se vê na seção 2.1 deste texto e os argumentos "de época" das seções subsequentes é que se coloca a seguinte questão: seriam essas diferenças muito evidentes entre épocas possíveis de serem encerradas no conceito de estilo na matemática? Assumindo tacitamente que estilo seja algo que permanece por um período (longo ou curto) e que pode reter características compartilhadas entre matemáticos. Se um episódio como esse não puderem exibir aquilo que efetivamente notabiliza o estilo na matemática, então caberia colocar uma questão ainda mais radical: Se é que há estilo na matemática? Em uma análise filológica bastante incipiente e rasa, posso atribuir uma semelhança entre 'estilo' e *stylus* do latim (que remete ao termo 'estilete' do português) ou 'stylo' do francês. Nos dois idiomas, no latim e no francês, os termos significam respectivamente haste de madeira ou metal para traçar e caneta. Se 'estilo' pode, por essa sugestão etimológica, se referir ao fazer, então, seriam estilo e prática (fazer) na matemática conceitos correlacionados? Se sim, o que seria, nesse contexto, a tão reivindicada prática matemática?

Esses questionamentos em parte já foram enfrentados no capítulo primeiro, contudo ainda de modo geral. Proponho-me a partir daqui debruçar-me sobre este episódio da história da matemática dos séc. XVII e XVIII que esgotamos neste capítulo à luz de um conceito bastante específico de estilo (Bueno (2012)) e dele avaliar se há ainda possibilidade de assumir um estilo na matemática, mesmo que estrito. E se isso de algum modo pode ser associado a uma inquietação epistemológica para a matemática. Em suma, trabalharei os problemas da impregnação teórica de Bueno e da epistemologia de Mancosu com base no contexto que o problema da braquistócrona gerou para a matemática no período moderno.

3 ESTILO ESTRITO DE RACIOCÍNIO: UMA PROPOSTA PARA A MATEMÁTICA

J'ai dit que la géométrie n'était pas à la portée des enfants; mais c'est notre faute. Nous ne sentons pas que leur méthode n'est point la nôtre, et que ce qui devient pour nous l'art de raisonner ne doit être pour eux que l'art de voir... Je n'oublierai jamais d'avoir vu à Turin un jeune homme à qui, dans son enfance, on avait appris les rapports des contours et des surfaces en lui donnant chaque jour à choisir dans toutes les figures géométriques des gaufres isopérimètres. Le petit gourmand avait épuisé l'art d'Archimède pour trouver dans laquelle il y avait le plus à manger.

Jean-Jacques Rousseau; Emile ou De l'éducation; Livre Second

INTRODUÇÃO

No fim do primeiro capítulo, optamos pelo conceito de estilo construído por Bueno, com base nos conceitos de Crombie e Hacking, porque nos apresenta um critério factível para a ocorrência de estilo. Acrescento que a escolha pelo conceito de estilo de Bueno levou em consideração também a possibilidade de se avaliar num fato histórico pontual a sua realizabilidade e operacionalidade. E isso nos pareceu plausível em se tratando do problema da braquistócrona. Ou seja, Bueno nos permite reconstruir um fato na história da matemática a partir de um conceito de estilo, sem incidir em generalidades tão amplas que consideram a matemática apenas em carácter demonstrativo nem em localidades tão estreitas que se mostram insuficientes para uma análise que abrange certa extensão.

Bueno reúne estes cinco componentes: tipos de questões; técnicas e procedimentos; padrões de referência aceitos como válidos para investigação de objetos; recursos heurísticos para resolver questões e constituir objetos; e tipos de objetos de pesquisa – para seu conceito de estilo ser uma forma aproximada de investigar ou de abordar questões em um domínio, em nosso caso, a matemática. É importante destacar que o autor chegou a esses componentes básicos colocando de lado as teorias, por considerar que estilos devem ocupar categorias ainda mais amplas e próprias.

O problema da impregnação teórica no conceito de estilo, levantado por Bueno, no entanto, repõe a questão sobre o modo como os estilos tornam-se, enfim, dependentes das teorias. Uma saída possível a ser verificada para este problema seria o estilo estrito de raciocínio, que se fundamenta em um padrão de relações de inferência usado para selecionar, interpretar e dar suporte a evidências com vistas a determinados resultados.

Em se tratando da matemática, Bueno considera que estilos não podem ser dissociados das práticas. É preciso levar em conta que na matemática existe uma pluralidade de práticas e por consequência uma pluralidade de estilos estritos de raciocínio. Nesse contexto, o que cabe atribuir ao estilo é o modo de construir inferências a partir de questões concebidas, oferecer informações específicas e providenciar generalidade nas matemáticas. O autor também considera que estilos estritos de raciocínio investigam atributos possíveis em um certo domínio, como na matemática, a partir do exame de diversas relações entre objetos relevantes estudados, independentemente de qualquer compromisso com a verdade ou falsidade de um discurso em questão.

Estilos estritos de raciocínio relacionam representações e inferências, ou seja, representam possibilidades para certos estados (especificam um domínio de investigação e determinam *bits* de informação deste domínio), criam padrões de inferências (não apenas pela lógica clássica, mas também por diagramas, desenhos, figuras, imagens mentais etc.) e procedimentos de transferência de informação. A identificação de certos objetos e de uma família de relações entre eles especifica um domínio. É comum que as informações entre objetos envolvidos estejam incompletas, por isso que pesquisas adicionais são requeridas. Com frequência, a prática matemática respalda-se em procedimentos inferenciais não-constitutivos, intolerantes e inconsistentes. Embora recursos visuais desempenhem um papel heurístico na sugestão de razões para se sustentar certo resultado, eles não bastam para estabelecê-lo.

Com o respaldo do conceito de estilo estrito de raciocínio, iremos revisitar algumas das soluções desenvolvidas no capítulo precedente para o problema da braquistócrona, com o objetivo de avaliar a eficácia interpretativa desse conceito quando aplicado à matemática. Esse exercício deve nos aproximar das dificuldades apontadas pelos dois problemas condutores deste estudo, o da impregnação teórica de Bueno e da relevância epistemológica de Mancosu. Desse exercício talvez não emerjam soluções para ambos, contudo, contrapor o fato histórico trazido pelo problema da braquistócrona à noção de estilo estrito de raciocínio nos propiciará naturalmente novas perspectivas sobre seu alcance e significado.

3.1 EXEMPLOS DA CIÊNCIA PARA O ESTILO ESTRITO DE RACIOCÍNIO

Vejamos como Bueno nos apresenta fatos da história da ciência, nos quais se verificam a noção de estilo estrito de raciocínio. Além disso, a noção de estilo estrito de raciocínio nos revela relações entre representações e inferências, nas possibilidades levantadas na prática científica. Um dos exemplos é a bem conhecida história da "descoberta" de uma nova organela celular, o outro, é sobre o arranjo de moléculas em cristais orgânicos.

PALADE E CERTAS COMPONENTES PARTICULARES DO CITOPLASMA CELULAR

Em 1955, George Palade[184] publicou um artigo entitulado *A Small Particulate Component of the Citoplasm*[185], em que descreve uma nova estrutura identificada no citoplasma por meio do uso do microscópio eletrônico de transmissão (MET). Esse instrumento já estava bem inserido nas pesquisas em diversos campos da Biologia na década de 1950. Palade procurou investigar o que seriam exatamente essas pequeninas componentes particulares detectadas em suas observações no MET. Em primeiro lugar, certificou-se de que não se tratava de artefatos oriundos de seu método de preparação de amostras, pois as componentes ainda permaneciam presentes mesmo depois dele mudar de métodos. Depois, em segundo lugar, Palade estimou o tamanho dessas componentes por meio do tempo de sedimentação, quando passou sua amostra em uma ultra-centrífuga e verificou que o tamanho dessas componentes era consistente com aquele detectado na superfície dos micrográficos do MET. Essas considerações de Palade fizeram-no concluir que as componentes particulares eram de fato genuínas. Palade suspeitou, depois de algumas análises químicas preliminares, que essas componentes particulares eram compostas em sua maioria de ácido ribonucleico, conjectura que se confirmou anos mais tarde depois das análises se consumarem. Palade nomeou-as de ribossomos.

Para Bueno, trata-se de um exemplo que nos mostra um estilo estrito de raciocínio em operação, em uma prática científica que estuda as estruturas celulares e suas organelas com recurso a imagens de MET. Os micrográficos produzidos durante a pesquisa fornecem evidências visuais para a existência de estruturas relevantes, no exemplo, os ribossomos. Certas marcas presentes na superfície dos micrográficos foram interpretadas como evidência para a presença de objetos correspondentes na amostra. Desse modo, as imagens foram usadas como meio de inferência que permite concluir a ocorrência de um dado fenômeno, a existência de ribossomos, a partir de certas manchas em micrográficos de MET.

Vejamos, então, como nesse exemplo proposto por Bueno, a relação entre representações e inferências própria do estilo estrito de raciocínio ocorre. De pronto, certas manchas representadas nos micrográficos informaram a possibilidade da ocorrência de componentes particulares no citoplasma celular. Disso, inferiu-se a partir das imagens a existência de novas organelas celulares, depois de procedimentos de transferência de informação serem aplicados, isto é, o método de determinação do tamanho dessas componentes particulares pelo tempo de decantação e a conferência desse tamanho estimado com os tamanhos das manchas na superfície dos micrográficos. Logo, estabeleceu-se por análises químicas específicas a identidade dessas componentes particulares, ou seja, detectou-se a presença majoritária de ácido ribonucleico na composição dessas componentes, nomeando-as de ribossomos. Outras pesquisas precisaram ser feitas para se determinar outras informações a respeito desses ribossomos, como

[184] Cf. Bueno, 2012, p. 662.

[185] Palade, G. (1955). A small particulate component of the cytoplasm. Journal of Biophysical and Biochemical Cytology, 1, 59-79.

por exemplo, suas funções na célula.

A noção de estilo estrito de raciocínio de Bueno se fundamenta em um padrão de relações de inferência usado para selecionar, interpretar e dar suporte a evidências para determinados resultados. Ademais, estilo estrito de raciocínio para o autor está ligado a práticas (científicas, instrumentais, matemáticas etc). Para melhor entendermos de que relações e de que práticas Bueno se refere é que precisamos considerar outro exemplo do autor.

GRUPO DE QUÍMICOS E A ESTRUTURA DE ARRANJOS MOLECULARES EM CRISTAIS DE PROTEÍNA

Um grupo de químicos[186,187] da Universidade de Toledo da área de química orgânica, em 1999, estava usando em suas pesquisas um microscópio de força atômica (do inglês AFM) que permite sondar a superfície de vários compostos químicos. Eles estavam estudando a configuração geométrica de átomos na superfície de cristais de proteína. Inicialmente, obtinham dados de amostras por uma série de medidas de suas superfícies pelo AFM. Esses múltiplos dados eram combinados estatisticamente para produzir uma imagem idealizada (uma *imagem experimental*) com base nas médias das medidas realizadas.

Foram encontrados alguns problemas acerca da configuração geométrica dos átomos nas amostras, independentemente da resolução do AFM, principalmente nos arranjos de pacotes moleculares. Para solucionar isso, os pesquisadores criaram manualmente uma *imagem teórica* na qual introduziam hipóteses de como deveria ser a configuração atômica da superfície das amostras. As duas imagens, a *teórica* e a experimental, eram comparadas. Isso produzia uma terceira imagem (uma *imagem híbrida*) que continha informações visuais tanto da *imagem experimental* quanto das considerações hipotéticas da *imagem teórica*. E quando a *imagem híbrida* é obtida, fica clara a diferença entre as *imagens teórica* e *experimental*. A correlação não é forte o suficiente; é de apenas 62%.

Os pesquisadores retomam a *imagem teórica* e efetuam nova hipótese com base no fenômeno já conhecido da reconstrução de superfície para cristais inorgânicos, ou seja, a diferença entre os arranjos interno e superficial do cristal. Uma vez que as moléculas da superfície têm ligações incompletas, elas tendem a interagir com o ambiente em contato, rearranjando-se. Mas não se sabia que este fenômeno também era aplicável a cristais orgânicos. Uma nova *imagem teórica* é gerada e comparada à *imagem experimental* original e, mais uma vez, obtém-se uma segunda *imagem híbrida*, cuja correlação alcançou 93%.

O domínio de investigação revela, está claro, propriedades nanoescalares de cristais orgânicos. Mais uma vez, como no exemplo anterior, ferramentas de imagem desempenharam

[186] Cf. Bueno, 2012, p. 662-663.
[187] Li, H., Perozzo, M. A., Konnert, J. H., Nadarajah, A., Pusey, M. L. (1999). Determining the molecular-packing arrangements on protein crystal faces by atomic force microscopy. Acta Crystallographica, D55, 1023-1035.

um papel crucial. As imagens do AFM foram o meio para construção de inferências, ou melhor, as inferências surgiram da interação entre diferentes versões da *imagem teórica* quando contrastadas à *imagem experimental*. O fenômeno foi descrito com base na correlação dele próprio com essas imagens. Em outras palavras, a representação da *imagem experimental*, quando comparada à primeira *imagem teórica*, levantou a possibilidade de haver um modelo teórico equivocado. Disso, ocorreu a hipótese do arranjo das moléculas em cristais orgânicos, poder estar sujeito às condições do ambiente, do mesmo modo que os já conhecidos arranjos de cristais inorgânicos estão. A correlação estatística forte (próxima de 100%) entre a segunda *imagem teórica* e a única *imagem experimental* foi o procedimento adotado para se inferir que ambos os cristais (orgânicos e inorgânicos) têm seus arranjos superficiais em interação com o ambiente, porque as moléculas superficiais têm ligações em aberto. Finalmente, a *imagem híbrida* reconstruída (a partir das outras duas imagens) melhor expressa as informações da estrutura nanoescalar das amostras de cristais orgânicos em teste.

Podemos notar que ambos os experimentos ilustram e identificam diferenças em suas práticas experimentais que só podem ser consideradas em uma noção de estilo estrito de raciocínio. Esses exemplos nos mostram também um padrão de relação de inferências sustentado pelo papel que evidências visuais desempenham na prática científica, como meios para construir inferências. Esse padrão de relações de inferência usado para selecionar, interpretar e dar suporte a evidências para determinados resultados, dito assim de modo geral, fundamenta, como bem sabemos, a noção de estilo estrito de raciocínio de Bueno.

3.2 ESTILO ESTRITO DE RACIOCÍNIO E A MATEMÁTICA

O estilo estrito de raciocínio é uma alternativa a se considerar quando se deseja avaliar diferenças na prática científica, as quais conceitos de estilo mais amplos são incapazes de apreender. Bueno chegou, com essa noção de estilo estrito de raciocínio, a identificar um novo estilo, o instrumental, em que se operacionaliza um padrão de relação de inferência destinado a selecionar, interpretar e dar suporte a evidências para certos resultados com base em *outputs* de instrumentos (como foram os micrográficos e as imagens experimentais dos microscópios MET e AFM, respectivamente, dos exemplos acima).

Bueno ressalta que precisa manter uma distância conceitual de qualquer noção de teoria. E a maior dificuldade para se ter um estilo para a matemática é justamente a dependência teórica de objetos matemáticos para que sejam constituídos. Os cinco componentes básicos para se ter estilo identificados pelo autor, sob a inspiração das condições previamente estabelecidas em parte por Crombie, não se aplicam a objetos matemáticos, pois estes dependem de teorias matemáticas e, logo, um estilo com base nesses cinco componentes não seria ele próprio independente de teoria, e isso infligiria o princípio de que estilo precisa ser mais amplo que teoria.

O autor propõe um outro projeto para estilo e lança a noção de estilo estrito de raciocínio que, a partir da prática científica (ou matemática), determina um estilo com base em padrões de relação de inferência. Este outro conceito parece ser preciso quanto a detecção de diferenças na prática científica (ou matemática), contudo, incapaz de estender-se a um domínio do conhecimento por inteiro. Proponho, então, testar esta noção de estilo estrito de raciocínio na matemática.

A noção de estilo estrito de raciocínio não condiciona a ocorrência de estilo à determinação de objetos (científicos ou matemáticos), como os cinco componentes básicos para se ter um estilo impõem. O estilo estrito de raciocínio, de fato, depende de relações entre representações e inferências, que delimitam possibilidades e determinam *bits* de informação deste domínio. Criam inferências não apenas a partir da lógica clássica, mas também a partir de diagramas, desenhos, figuras, imagens mentais etc. e criam procedimentos de transferência de informação. A identidade de certos objetos e de uma família de relações vigentes entre eles especifica um domínio do conhecimento.

Bueno propõe que estilos estritos de raciocínio para a matemática precisam: (i) definir um domínio de objetos matemáticos, sobre os quais se aplicam (ii) certos princípios (de compreensão) que o orientam diferentemente. Da aplicação desses princípios, (iii) caracterizam-se certas classes de objetos e relações entre eles. Entre esses objetos, apenas os relevantes é que (iv) estabelecem conexões de inferência para determinar suas propriedades e relações adicionais com outros objetos do mesmo domínio. Essas mesmas conexões de inferência (v) se realizam por meio de mecanismos inferenciais como: lógica clássica, diagramas, desenhos, figuras, imagens mentais e interpretações geométricas.

Parece-me que o estilo estrito de raciocínio é uma alternativa que se desvia do problema da impregnação teórica, para o caso específico da matemática. Ou seja, esse problema parece não se aplicar ao conceito de estilo estrito de raciocínio. Porque com esse conceito de estilo, de fato, procuram-se padrões de relações de inferência ao invés de objetos. O outro projeto de Bueno para um estilo de raciocínio propõe uma estrutura mínima para se ter estilo e a partir disso estabelecem-se os cinco componentes básicos que um estilo precisa ter. Um destes componentes pede para: constituir objetos (isto é, um estilo deve identificar em que condições se constituem certos tipos de objetos de pesquisa). Trata-se de dois conceitos de estilo distintos, um volta-se a uma abordagem mais ampla, enquanto outro, a uma mais estrita. Por isso, penso ser relevante demarcar a diferença entre estes dois conceitos, que me parece estar em parte caracterizada no objeto. Um, o amplo, pede pela constituição de objetos, o outro, o estrito, pelo domínio de objetos sobre os quais certos princípios de compreensão se aplicam.

Ademais, esse conceito de estilo, por revelar *bits* de informação de possibilidades em representações, parece ser promissor no que se refere ao problema da relevância epistemológica levantado por Mancosu. Com efeito, o estilo estrito de raciocínio oferece condições a quem revisita a história da matemática e avalia, na prática matemática, o conhecimento construído, mediante as informações obtidas pelas possibilidades emergentes das representações, além de impulsionar inferências e transferir informações por meio de procedimentos.

O estilo estrito de raciocínio cabe bem ao propósito desta pesquisa, que é avaliar a possibilidade da matemática ter para si um estilo, a partir do estudo de um fato da história da matemática (do mesmo modo que Bueno fez com os dois casos da história da ciência). Nosso fato histórico é o problema da braquistócrona, trabalhado extensamente no segundo capítulo. Portanto, a partir dessa proposta, temos agora um objetivo a ser perseguido: testar se o conceito de estilo estrito de raciocínio se aplica, ao menos, a um caso da matemática. Além disso, vislumbraremos como atender certas expectativas que ambos os problemas (o da impregnação teórica e o da relevância epistemológica) nos trazem.

3.3 ESTILO ESTRITO DE RACIOCÍNIO E O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Ora, a noção de estilo estrito de raciocínio se fundamenta em padrões de relação de inferência usados para selecionar, interpretar e dar suporte a evidências para determinados resultados. Essa modalidade de estilo opera na busca de padrões que relacionem representações e inferências, ou seja, representam possibilidades para certos estados (especificam um domínio de investigação e determinam *bits* de informação deste domínio), criam inferências (não apenas pela lógica clássica, mas também por diagramas, desenhos, figuras, imagens mentais etc.) e procedimentos de transferência de informação. A identidade de certos objetos e de uma família de relações entre eles especifica, por sua vez, um domínio.

O problema da braquistócrona, como vimos no capítulo precedente, pede a curva que une dois pontos dados, não colineares, contidos em um plano perpendicular ao horizonte, na qual um corpo efetua a descida mais rápida sob ação de seu próprio peso apenas. Ou como o Johann Bernoulli publicou nos *Acta Eruditorum* de junho de 1696:

> **Problema novo** a cuja solução matemáticos são convidados. Dados dois pontos A e B em um plano vertical, conferir ao móvel M um caminho AMB, pelo qual desce devido sua gravidade, começa a mover-se a partir do ponto A, no tempo mais breve, alcança o outro ponto B. (Bernoulli, 1696, p. 269, minha tradução)[188]

O conceito de estilo estrito de raciocínio relaciona representações com inferências. No caso do problema da braquistócrona, a representação está posta no próprio problema. Dois pontos não colineares contidos em um plano perpendicular ao horizonte unidos por uma curva em que um móvel parte do repouso do ponto superior e se desloca pela ação apenas de seu peso. A Figura 38 apenas ilustra em uma única imagem a representação descrita.

Nos exemplos apresentados por Bueno, temos os *outputs* de dois microscópios (os micrográficos do MET e as varreduras do AFM) que representaram visualmente dados aferidos da distribuição espacial, ou de componentes particulares distribuídos em um citoplasma celular ou

[188] Cf. Bernoulli, 1742a, p. 161 e Bernoulli, 1959, p. 645.

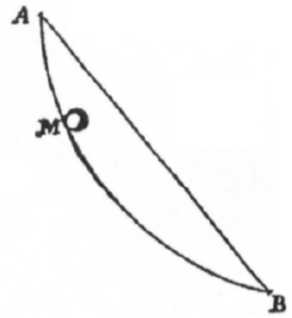

Figura 38 – Figura 5, tabela 5, Acta Eruditorum, junho, 1696; fonte: Knobloch (2012), p, 16.

de pacotes de arranjos moleculares distribuídos na superfície de um cristal orgânico. Em ambos os casos, temos uma certa situação ilustrada por dois instrumentos de aferição nanoescalar em *outputs* que representam dados de uma amostra física submetida à medição.

Temos no enunciado do problema da braquistócrona uma situação ilustrada por uma figura que o acompanha, a qual nada mais faz que transcrever visualmente o que já estava descrito em palavras. Mas a disposição visual dos pontos dados ligados por uma curva desconhecida provoca a imaginação a operar sobre a disposição espacial quando precisamos levar em consideração que um corpo desce por sobre a curva somente pela ação da gravidade.

O papel que o enunciado e sua figura ilustrativa desempenham é o mesmo papel dos *outputs* dos microscópios, ou seja, de representar uma situação de disposição espacial. Além disso, o enunciado suscita a possibilidade de ocorrer a descida de um móvel no menor tempo. Da mesma forma, o *output* do MET suscita a ocorrência de um certo algo que tenha produzido as manchas distribuídas no citoplasma celular de acordo com a representação contida nos micrográficos. Já a *imagem experimental* gerada pelo AFM quando contrastada à *imagem teórica* suscita uma possibilidade acerca da distribuição de pacotes dos arranjos moleculares sob a alegação de que a *imagem híbrida* gerada pela combinação das *imagens experimental* e *teórica* tinha uma correlação estatística insuficiente.

O domínio o qual o problema da braquistócrona pertence é o dos problemas isoperimétricos. No exemplo das componentes particulares, o domínio é da citologia ou biologia celular, já no outro exemplo, dos pacotes de arranjos moleculares em cristais orgânicos é o domínio da cristalografia. O *bit* de informação que a possibilidade levantada pelo problema da braquistócrona dispôs é o da existência de uma curva que promove a descida de um móvel, pela agência de seu próprio peso apenas, no menor tempo. Disso, decorre a hipótese de que há uma curva que cumpre essa característica. Os procedimentos de transferência dessa informação, os quais darão suporte para o desenvolvimento de inferências que sustentem a hipótese, no caso do problema da braquistócrona, estão nas soluções a ela apresentadas. Vimos algumas dessas soluções no capítulo anterior, adiante reavaliaremos algumas delas à luz do estilo estrito de raciocínio, em busca de procedimentos de transferência da informação para a curva braquistócrona.

Pelo modo como opera o estilo estrito de raciocínio, nessa comparação dos exemplos de Bueno e do problema da braquistócrona, será possível identificar equivalências. Mas o argumento só estará completo quando cumprir com a segunda parte, a qual liga a hipótese criada a partir da possibilidade constituída da representação com os procedimentos de transferência de informação (*bit* de informação), gerando a inferência; da mesma forma que fizemos para os dois exemplos da ciência.

3.4 ESTILO ESTRITO DE RACIOCÍNIO E AS SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Se as soluções que avaliaremos aqui sob a noção de estilo estrito de raciocínio tiverem entre si um padrão de relação de inferências, então será um indicativo de que é possível usar deste conceito de estilo para a matemática. Logo, colocaremos à prova as soluções abaixo relacionadas para verificarmos se cabe essa hipótese. Se tivermos como positiva a realização do conceito de estilo de Bueno, o problema da impregnação teórica, como já especulado, não seria aplicável à matemática para este conceito específico de estilo estrito de raciocínio, e o problema da relevância epistemológica seria respondido afirmativamente, assim como as informações geradas pelas possibilidades dadas nas representações estariam respaldadas pelos procedimentos de transferência de informação, no momento em que se desenvolveriam as inferências.

O procedimento de transferência de informação precisa ser bem-sucedido na realização da hipótese gerada pela possibilidade da representação do problema da braquistócrona, a saber, existe uma curva que será a da descida no menor tempo de um móvel sob a ação da gravidade. Os procedimentos matemáticos transferirão esta informação colocada em forma de hipótese, gerando assim uma inferência a qual dará sustentação para esta informação, que passará de uma hipótese para uma tese (conclusão da inferência matemática).

Vejamos então como se comportam as soluções de Leibniz, Johann e Jakob Bernoulli e Newton quando submetidas ao conceito de estilo estrito de raciocínio.

3.4.1 Solução não-publicada de Leibniz

Vamos avaliar esta solução a qual foi apresentada e desenvolvida na seção 2.6 do capítulo dois, sob o conceito de estilo estrito de raciocínio. Temos que

i. existe sim uma curva da descida mais rápida;

ii. esta curva é uma cicloide cuja equação diferencial que a define é $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta - x}}$;

iii. se os parâmetros forem ajustados para uma cicloide ordinária ($\alpha = 0$ e $\beta = 2b$), a equação diferencial da cicloide, curva que responde o problema, será: $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x}{2b-x}}$;

iv. a equação diferencial usada é a de uma cicloide.

O procedimento de transferência de informação encontra-se justamente no uso da equação diferencial da cicloide que representa unicamente a curva que responde o problema da braquistócrona. A inferência criada por Leibniz está na prova matemática desta equação diferencial a qual precisa ser aqui detalhada:

a. Considere um triângulo diferencial[189] com um plano inclinado e determine os tempos de queda de corpos que partem do repouso e caem livremente, um pelo cateto perpendicular ao horizonte e outro pela hipotenusa (como em uma rampa inclinada), em termos dos segmentos deste mesmo triângulo.

b. Com base no modo de determinar esses tempos de queda, seja um outro triângulo cuja hipotenusa é segmentada em um ponto livre qualquer, encontre o tempo de queda, em termos dos segmentos deste outro triângulo, pela rampa segmentada.

c. Para o tempo de descida ser o menor, neste local geométrico que é a rampa segmentada, a diferença da equação do tempo de descida precisa ser nula, de acordo com o princípio de Fermat, condição necessária para o menor tempo ou a queda mais rápida, o ponto livre deve ser tal que minimiza o tempo de descida.

d. Depois de algumas manipulações, chega-se à relação dos tempos de descida da rampa segmentada pela razão entre as projeções nas abscissas e os quadrados dos respectivos segmentos da hipotenusa.

e. Com recurso a uma cicloide, para as quedas na rampa, e a uma parábola, para as quedas livres e para marcar os tempos de queda, dispostas em um diagrama geométrico, aplique a relação dos tempos à dois arcos sucessivos da cicloide.

f. Depois de algumas manipulações, com auxílio da proporção que define uma parábola, chega-se finalmente à equação diferencial que se desejava provar, ou seja, a equação diferencial da cicloide.

Temos na solução não-publicada de Leibniz exatamente aquilo que se esperava para completar a relação entre representação e inferência que o conceito de estilo estrito de raciocínio exige. Contudo, devo lembrar que parte da prova não compõe originalmente esta solução de Leibniz, porque foi inserida posteriormente por Gerhardt (vide seção 2.6). Desse modo, apesar de termos encontrado os elementos que estávamos procurando, esta solução não-publicada de Leibniz não nos será útil para avaliarmos o padrão de relação de inferência pedido na noção de

[189] O termo diferencial foi aqui incluído anacronicamente apenas para facilitar o entendimento da prova, Leibniz mesmo não utilizava este termo, ao invés disso, usava diferenças; assim, seria mais adequada ao vocabulário de Leibniz se estivesse escrito a equação das diferenças.

estilo estrito de raciocínio. Por isso, iremos abandoná-la para quando avaliarmos a ocorrência de um padrão de relação de inferência, como é exigido pela noção de estilo adotada, tivermos notadamente exemplares históricos legítimos.

3.4.2 Solução publicada de Leibniz

Agora, vamos verificar a solução de Leibniz que foi a público na edição de maio de 1697 dos *Acta Eruditorum*. O procedimento de transferência de informação da cicloide como a curva mais rápida entre dois pontos pode ser posto assim:

i. Há uma curva da descida mais rápida.

ii. Seja a curva que passa pelos pontos dados A e B construída como se segue.

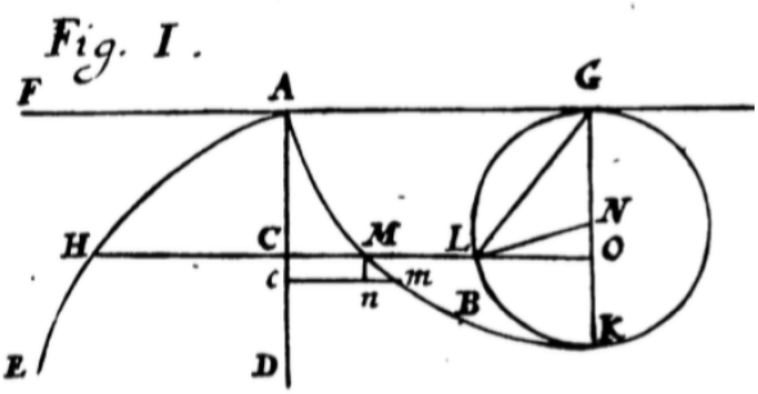

Figura 39 – Figura 1, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Bernoulli (1697a).

iii. AMB é o caminho pelo qual um corpo cai pela ação da gravidade na maior velocidade ou no menor tempo possível, essa curva corresponde ao arranjo de segmentos idêntico ao da cicloide, por isso, $\widehat{\text{GLK}} = CO$ (porque o círculo gerador GLK rola sem deslizar) e, consequentemente, $\widehat{\text{LK}} = LM$ (devido a propriedade construtiva da cicloide, vide seção 2.3).

iv. O círculo gerador $\widehat{\text{GLK}}$ da cicloide AMB tem a área do segmento circular de base GL igual a diferença entre a área do setor circular GLN e a área do triângulo GNL ($S_{\widehat{\text{GLG}}} = S_{GNLG} - S_{\Delta GNL}$, vide Figura 39).

Fica claro que Leibniz, nessa solução, efetuou apenas o procedimento de transferência de informação, com recurso à propriedade construtiva da cicloide ($\widehat{\text{LK}} = LM$) para afirmar que é de fato a cicloide a curva da descida mais rápida, omitindo a inferência para sustentar esse procedimento. Penso que esta omissão tenha sido proposital, pois Leibniz deixou que a solução, via método indireto, de seu colega Johann Bernoulli obtivesse mais enfoque. E isso é bastante razoável defender quando verificamos pelas próprias palavras de Leibniz o seguinte:

> Não vou levar a cabo a explicação de minha solução, aqui, porque é similar ao de outros, satisfeito por ter determinado a curva procurada, não tive tempo para acrescentar quaisquer detalhes. O único ponto relevante a mencionar, contudo, é talvez o seguinte: como meu Cálculo mostrou, a curva procurada é uma figura que representa segmentos circulares (Leibniz, 2000, p. 45, minha tradução).

Como o diagrama geométrico utilizado por Leibniz é o mesmo de Johann Bernoulli, concluímos que a similaridade a qual ele se refere é a de sua solução com a de seu colega professor de Groningen.

3.4.3 Solução pelo método indireto de Johann Bernoulli

Antes de Johann Bernoulli nos apresentar sua solução, com base em seu método indireto, ele propõe que o modelo da curvatura da luz em um meio não-homogêneo pode equivaler à curva braquistócrona para corpos sob a ação da gravidade, embora a natureza (agência ou causa) dos dois fenômenos sejam diferentes. Como a condição necessária (princípio de Fermat) para se determinar o local geométrico do tempo mínimo foi aplicada em ambos os casos, estabelece-se uma equivalência a qual permite tomar um fenômeno pelo outro, independentemente do que o causa.

Posto isso, o procedimento de transferência de informação para a solução via método indireto de Johann Bernoulli é tal como se segue:

i. Existe uma curva da descida mais rápida, dados dois pontos A e B.

ii. Com recurso ao modelo óptico (vide Figura 39) e à lei de Snell-Descartes – em que o princípio de Fermat, vide anexo A, já se encontra inserido – aplicada a um triângulo diferencial, cuja hipotenusa é um arco diferencial dessa curva braquistócrona, chega-se à equação diferencial da cicloide: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, em que $a = \frac{t^2}{x}$ (para t: velocidade do raio de luz e x: ordenada).

Acabamos de perceber que Johann Bernoulli usou de uma estratégia semelhante a de Leibniz para transferir a informação da curva braquistócrona, isto é: fazer uso da equação diferencial da cicloide para indicar que é a cicloide a curva da descida mais rápida. Johann prova que a equação diferencial encontrada acima é de uma cicloide, curva da descida mais rápida, deste modo:

a. Decompõe-se a equação diferencial da cicloide $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ em $dy = \frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2}\frac{adx - 2xdx}{\sqrt{ax-x^2}}$ e integra ambos os membros.

b. A equação resultante da integração em termos dos segmentos do diagrama geométrico da Figura 39 é: $CM = \widehat{\mathsf{GL}} - LO$, como $CM = CO - MO$, então, $MO = CO - \widehat{\mathsf{GL}} + LO$.

c. Pelo mesmo diagrama geométrico, e sabendo que o círculo gerador GLK rotaciona sob FAC sem deslizar, temos que: $\widehat{\mathsf{GLK}} = CO$ ou $CO - \widehat{\mathsf{GL}} = \widehat{\mathsf{LK}}$.

d. Substitui-se a última igualdade acima em $MO = CO - \widehat{\mathsf{GL}} + LO$, chega-se a $MO = \widehat{\mathsf{LK}} + LO$ ou $MO - LO = \widehat{\mathsf{LK}}$.

e. Pelo diagrama, chega-se a $LM = \widehat{\mathsf{LK}}$, isto é, chega-se à propriedade construtiva da cicloide (vide seção 2.3). Isso nos indica que a equação diferencial encontrada é de fato de uma cicloide.

f. Para finalizar, mostra-se como chegar à cicloide – resposta do problema –, destacando a única entre elas que satisfaz a condição de ser a curva braquistócrona para os dois pontos dados. Seja a figura abaixo:

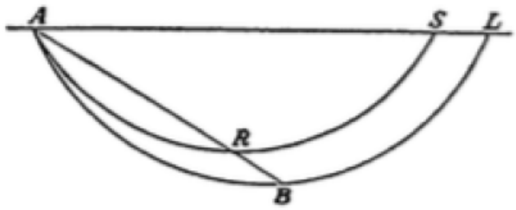

Figura 40 – Figura 2, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Bernoulli 1959, p. 653.

A cicloide solução do problema é aquela que obedece a razão: $\dfrac{AR}{AB} = \dfrac{AS}{AL}$.

Johann Bernoulli produz uma inferência que em seu procedimento de transferência de informação nos mostra a curva braquistócrona, pelo princípio de Fermat (condição necessária para se determinar a curva do menor tempo) inserido na lei de Snell-Descartes. A curva que responde ao problema é a cicloide, e Johann argumenta que é de fato a cicloide a curva braquistócrona quando obtém a equação diferencial dessa curva. Além disso, ele prova que esta equação diferencial é a de uma cicloide, com recurso ao diagrama geométrico construído. Para finalizar, Johann Bernoulli nos apresenta a razão que determina qual das cicloides é a única que passa pelos dois pontos dados.

3.4.4 Solução de Isaac Newton (1697)

Newton, sem qualquer introdução para além da citação da carta proposta do problema da braquistócrona publicada nos *Programma Groningæ* em 29 de janeiro de 1697, segue com sua solução na qual procede com a transferência da informação da curva braquistócrona.

i. Constrói-se duas cicloides ordinárias de origem A, AQP e ABC, de bases AP e AC, respectivamente.

ii. A cicloide ABC será a curva braquistócrona, na qual um corpo atravessará no menor tempo de A para B, se AB estiver para AQ.

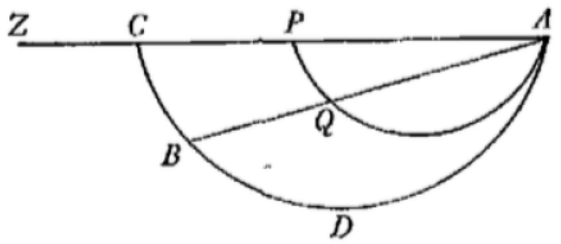

Figura 41 – Figura 12, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Newton (1967), p. 223.

A solução de Newton apenas indica que a cicloide é a curva que responde ao problema e adiciona que de todas as cicloides a única que passa pelos pontos dados e que faz um corpo descer no menor tempo possível é aquela que respeita a proporção $\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AQ}$. Newton, no entanto, não oferece a prova de que a cicloide é a curva da descida mais rápida. Herrera[190] indica o teorema das cicloides de Newton[191] para a prova de que a descida mais rápida de um móvel sob a ação da gravidade a partir de dois pontos dados, não colineares, em um plano vertical em relação ao horizonte, acontece em uma cicloide.

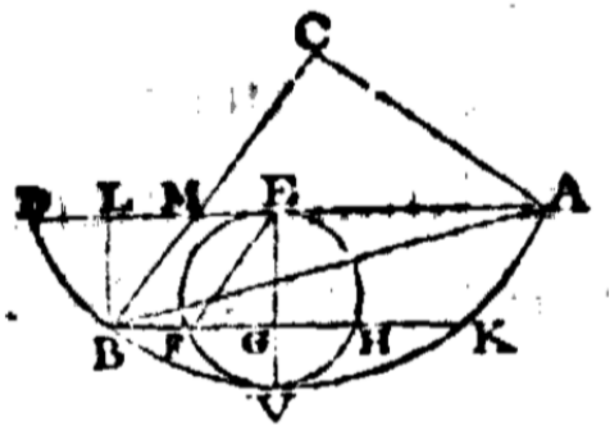

Figura 42 – Teorema de Newton da cicloide; fonte: Newton (1782), p. 417.

a. Pelo teorema das cicloides de Newton, o tempo para o corpo atravessar $\widehat{\mathsf{AVB}}$ é diretamente proporcional a CA ($t_{\widehat{\mathsf{AVB}}} \propto CA$), enquanto o tempo para atravessar AB é diretamente proporcional ao próprio segmento AB ($t_{AB} \propto AB$) (vide Figura 42).

b. Se considerar AB um plano inclinado em que um corpo desliza pelo seu próprio peso a partir de A, certamente, o móvel chegaria antes a B por $\widehat{\mathsf{AVB}}$ da cicloide que pela menor linha a qual atravessa os pontos A e B.

c. Primeiro, porque o tempo de travessia de $\widehat{\mathsf{AVB}}$ é necessariamente menor que t_{AB}, já que aquele arco é proporcional a AC, lado do triângulo ABC o qual é menor que AB, hipotenusa desse mesmo triângulo – isto é, $AC > AB$.

[190] Cf. Herrera, 1994, p. 471–472.
[191] Cf. Newton, 1782, p. 416–417.

d. Segundo, porque AC é também proporcional a EF e, de acordo com a lei das cordas de Galileu (vide seção 2.4), a velocidade de descida do repouso de EF varia de acordo com sua inclinação (se se tratar, tal como é, da corda de um círculo cuja extremidade coincide com a do seu diâmetro vertical), de outro modo, $\sin\vartheta = kv_{EF}$, em que k é uma constante.

e. Do triângulo EVF, se EG representa uma queda livre no diâmetro EV e FG é a horizontal, então por semelhança entre ΔEFV e ΔEFG (ou pelas relações métricas no triângulo retângulo EFV), $EF^2 = EV \times EG$; ou seja, EF varia com a $\sqrt{EG}$.

f. Como o $\sin\vartheta$ é diretamente proporcional a EF, isso significa que o ângulo ϑ é, pois, o ângulo FVE.

g. Portanto, quando o corpo cai a altura EG, o ângulo de inclinação ϑ é FVE, enquanto a linha EF é paralela à tangente instantânea em K (vide seção 2.3); e esse paralelismo só é encontrado na cicloide.

Para provar que o tempo de descida pela cicloide é menor que pelo plano inclinado, Newton fez uso da lei das cordas de Galileu e das relações de proporcionalidade entre triângulos semelhantes, para chegar a uma propriedade do paralelismo que somente uma cicloide possui. Esta prova do teorema das cicloides justifica e complementa o procedimento de transferência de informação de Newton. Contudo, esta prova foi sugerida por Herrera, não faz parte da solução de Newton. Desse modo, assim como fizemos com a solução não-publicada de Leibniz, teremos de desconsiderar esta inferência composta com o teorema das cicloides porque a solução de janeiro de 1697 de Newton não foi assim constituída. E para fins de avaliar o padrão entre relações de inferência que a noção de estilo estrito de raciocínio exige, teremos de considerar apenas a primeira parte da inferência que efetua a transferência da informação da ocorrência da curva braquistócrona.

3.4.5 Solução de Jakob Bernoulli

Antes de tudo, Jakob Bernoulli considera a curva do tempo mínimo entre os pontos dados, A e B, e um móvel que a percorre, impulsionado apenas pelo seu próprio peso.

Se a curva é de fato a do menor tempo, qualquer sub-arco dela também será. E se for tomada uma secante CFD que corta a curva menor em dois pontos quaisquer, tem-se um segmento de linha da menor trajetória delimitado por dois pontos. Contudo, seria uma contradição se o móvel descesse pela curva do menor tempo no trajeto CED e também o fizesse por uma secante CFD, menor trajetória, também no menor tempo. Por isso, para que haja apenas uma curva do menor tempo é que se espera uma diferença de tempo entre essas duas trajetórias. Feita esta constatação, Jakob Bernoulli parte para a transferência da informação da curva braquistócrona.

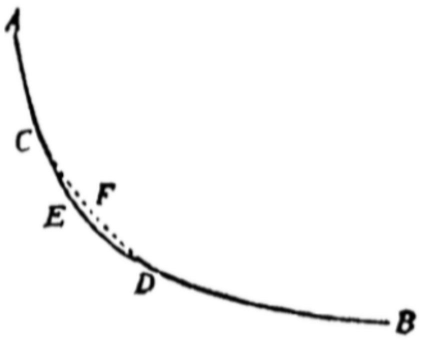

Figura 43 – Figura 4, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Goldstine (1980), p. 44

i. Constrói-se seu diagrama geométrico (Figura 44) para determinar relações entre os tempos de travessia por CGD e por $CLND$, em função de seus próprios segmentos.

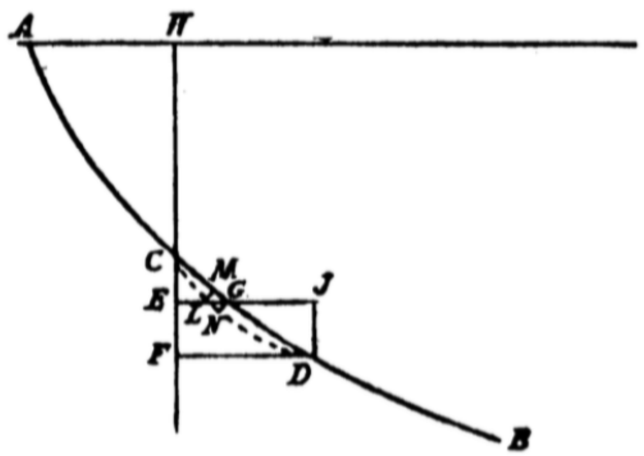

Figura 44 – Figura 5, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Goldstine (1980), p. 45

ii. Deduz-se que: $\dfrac{EG.t_{CE}}{GJ.t_{EF}} = \dfrac{CG(t_{CG} - t_{CL})}{GD(t_{LD} - t_{GD})}$.

iii. À equação acima, aplica-se a condição necessária (princípio de Fermat, vide anexo A) para encontrar a curva do menor tempo de descida, ou seja, se a diferença entre os tempos de descida por CG e CL e por GD e LD for nula ($t_{CG} - t_{CL} = t_{GD} - t_{LD} = 0$), então: $\dfrac{EG.t_{CE}}{GJ.t_{EF}} = \dfrac{CG}{GD}$.

iv. Aplica-se a hipótese da queda dos corpos de Galileu, associada à equação do movimento de Torricelli, para eliminar a dependência dos tempos, e finalmente encontra-se: $\dfrac{\frac{EG}{\sqrt{HC}}}{\frac{GJ}{\sqrt{HE}}} = \dfrac{CG}{GD}$; e isso significa que os elementos da curva (CG e GD) que minimizam o tempo de descida são diretamente proporcionais aos elementos da abcissa (EG e GJ) e inversamente proporcional às raizes quadradas da ordenada (HC e HE).

Jakob Bernoulli acabou de nos mostrar que se há uma curva braquistócrona entre dois pontos dados segundo as condições que o problema coloca, essa curva precisa estar sujeita à relação $\dfrac{GD}{CG} = \dfrac{EG\sqrt{HE}}{GJ\sqrt{HC}}$. Falta, agora, Jakob justificar a que curva conhecida essa relação corresponde. Curiosamente, ele até agora não nos disse a qual curva conhecida corresponde a curva braquistócrona. Daqui por diante, Jakob irá se dedicar a provar qual curva é a da descida mais rápida.

a. Tome-se uma cicloide ACP (Figura 45), de duas tangentes CM e GN, e de círculo gerador RQP.

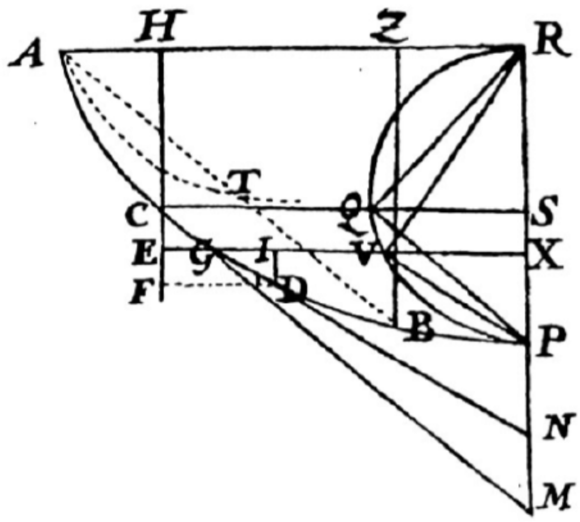

Figura 45 – Figura 6, tabela 4, Acta Eruditorum, maio, 1697; fonte: Freguglia and Giaquinta (2016), p. 43.

b. Depois de algumas manipulações, com respeito aos triângulos GDI e GCE, obtém-se a relação: $\dfrac{GD}{GC} = \dfrac{GI\sqrt{HC}}{EG\sqrt{HE}}$.

c. Determina-se, a partir da curva considerada, ou seja, a cicloide – a qual a princípio demonstra ser a curva braquistócrona requerida –, a equação diferencial que a define. A partir de $\dfrac{GD}{GC} = \dfrac{GI\sqrt{HC}}{EG\sqrt{HE}}$, sejam $CG = ds$, $HC = x$, $EG = dy$ e $\dfrac{GD\sqrt{HE}}{GI} = k$, encontra-se: $ds = \dfrac{k}{\sqrt{x}}dy$.

d. Se $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, depois de algumas manipulações, então: $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x}{k^2 - x}}$. Essa é a equação diferencial para uma cicloide ordinária com diâmetro do círculo gerador k igual a $2a$.

Jakob Bernoulli finaliza sua inferência matemática mostrando que a cicloide é a curva braquistócrona para dois pontos dados e, além disso, justifica que de fato a curva se trata de uma cicloide, pois dela foi possível mostrar a equação diferencial que a define.

3.4.6 Solução pelo método direto de Johann Bernoulli

O método direto de Johann Bernoulli só veio a público em 1718, na edição de janeiro dos *Acta Eruditorum*, sob o título de *continuatio*[192]. Johann retoma seu problema da braquistócrona. Como vimos, Johann e Jakob Bernoulli se motivavam a desenvolverem outros problemas isoperimétricos, em uma espécie de disputa intrafamiliar. E um dos resultados disso foi a publicação desse método direto, o qual veremos os detalhes – que nos importam como procedimentos de transferência de informação inseridos nesta inferência – a seguir:

i. Constrói-se a curva AMB entre várias outras curvas que partem de A (vide Figura 46). Propõe-se a encontrar aquela curva que propicia o menor tempo de descida.

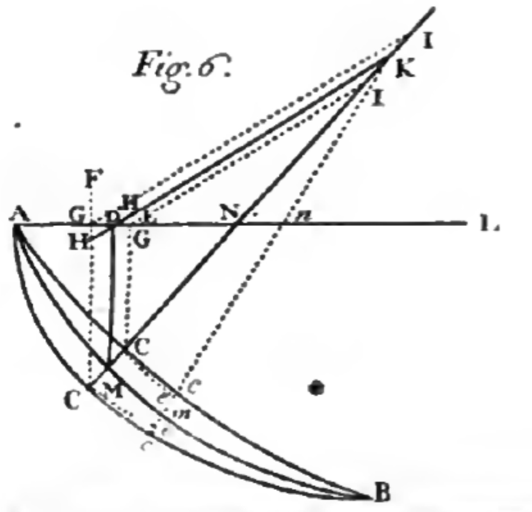

Figura 46 – Figura 6, tabela 22, Opera Omnia, tomus secundus; fonte: Bernoulli (1742c)

ii. Compondo razões a partir dos triângulos MDN e MKm: $\dfrac{1}{m} = \dfrac{MN}{MD}$ e $\dfrac{1}{n} = \dfrac{MK}{Mm}$, (para $MD = mx$ e $Mm = nx + na$).

iii. Seja AMB a curva braqustócrona, o tempo de descida do móvel pelo princípio de Gelileu será proporcional a $\sqrt{MD}$: $\dfrac{Mm}{\sqrt{MD}} = \dfrac{nx+na}{\sqrt{mx}} = t(x)$.

iv. Para o tempo ser mínimo, pelo princípio de Fermat, tem-se: $\dfrac{d}{dx}\left[t(x) = \dfrac{nx+na}{\sqrt{mx}}\right] = 0$.

v. Logo, $x = a$. Isso significa que em cada ponto de uma curva braquistócrona, o raio de curvatura será bissectado por AC, ou seja, que $MK = 2NK$. Essa é uma característica que apenas uma cicloide possui.

Johann Bernoulli cumpriu com parte de sua inferência a qual nos prova que a curva braquistócrona é uma cicloide. Agora, ele continua sua justificativa com o intuito de mostrar por que é a cicloide que provê a descida mais rápida.

[192] Cf. Bernoulli, 1718a, p. 74–88.

a. Considere mais uma vez o diagrama geométrico (Figura 46), dele Johann exprime o tempo de descida por Mm, Ce e CH como média proporcional entre MD e CF, respectivamente: $t_{Mm} \propto \dfrac{Mm}{\sqrt{MD}}$, $t_{Ce} \propto \dfrac{Ce}{\sqrt{CG}}$ e $\dfrac{MD}{CH} = \dfrac{CH}{CF}$.

b. Devido à semelhança dos triângulos CeK e MmK e à média proporcional acima, encontra-se: $\dfrac{Mm}{Ce} = \dfrac{MK}{CK} = \left(\dfrac{MD}{CF}\right)^{\frac{1}{2}}$.

c. Como consequência, a razão dos tempos de descida ao longo de Mm e ao longo de Ce é: $\dfrac{Mm}{Ce}.\left(\dfrac{CG}{MD}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{MD}{CF}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\dfrac{CG}{MD}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{CG}{CF}\right)^{\frac{1}{2}}$.

d. Logo, $\dfrac{CG}{CF} < 1$, ou seja, o tempo de descida ao longo da cicloide Mm é menor que o tempo de descida ao longo de Ce, e como o tempo de descida por Cc (hipotenusa do triângulo Cec) é ainda maior, ele conclui que o tempo de descida ao longo do arco Mm da cicloide é menor que o tempo ao longo de qualquer outro arco Cc.

e. Comparam-se os tempos de descida do móvel a partir do repouso em A ao longo de Mm e ao longo de Ce. O tempo de descida varia diretamente com a distância e inversamente com a raiz quadrada da altura, assim, têm-se as razões $\dfrac{Mm}{\sqrt{MD}}$ e $\dfrac{Ce}{\sqrt{CG}}$. Também, têm-se que (pela definição de F) que $\dfrac{\sqrt{MD}}{\sqrt{CF}} = \dfrac{MD}{CH} = \dfrac{MK}{CK} = \dfrac{Mm}{Ce}$.

f. Portanto, a razão dos tempos de descida ao longo de Mm e Ce torna-se: $\dfrac{Mm}{Ce}.\dfrac{\sqrt{CG}}{\sqrt{MD}} = \dfrac{\sqrt{MD}}{\sqrt{CF}}.\dfrac{\sqrt{CG}}{\sqrt{MD}} = \dfrac{\sqrt{CG}}{\sqrt{CF}} > 1$.

Disso, concluímos que o tempo de descida ao longo de arco Mm da cicloide é menor que ao longo do arco de círculo Ce, e o tempo de descida deste último é menor que ao longo de Cc pois $Cc > Ce$. Assim a velocidade que um móvel descerá Ce será mais rápida que Cc. O tempo de descida ao longo de Mm é menor que ao longo de Cc e consequentemente o tempo total de descida ao longo da cicloide é menor que o tempo de qualquer outra curva ACB entre os pontos A e B.

É desse modo que Johann Bernoulli finaliza sua inferência, demonstrando que das curvas compreendidas entre os pontos dados. É preciso ser a cicloide para se ter a descida no menor tempo possível, ou seja, a cicloide é a curva braquistócrona.

3.4.7 Solução tardia de Isaac Newton

A motivação[193] para Newton retomar o problema da braquistócrona veio de David Gregory, que considerou a resolução de Fatio de Duillier, de seu *Lineæ Brevissimi Descensus Investigatio Geometrica Duplex* (1699), abstrusa. Vejamos como Newton desenvolveu novamente uma outra solução, a qual chamei de tardia por ter sido feita três anos depois de sua primeira solução colocada a público em 1697, na qual aplica o método das fluxões. Contudo, este é o momento para fazê-lo à luz do conceito de estilo estrito de raciocínio, no qual buscamos a inferência que dá suporte, por procedimentos, à transferência de informação da curva braquistócrona.

i. Considere a Figura 47, AM é uma linha infinitamente pequena, dividida ao meio em F, encontre FN quando um peso desce pelas cordas EN e NG no tempo mais breve.

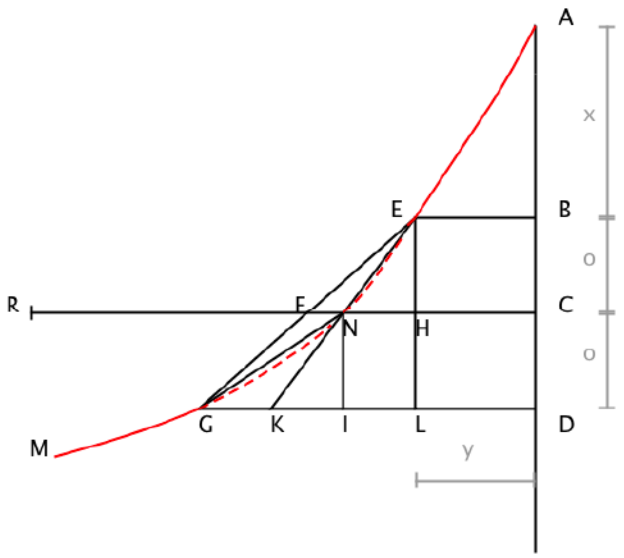

Figura 47 – Solução tardia de Newton, março, 1700; fonte: Newton 2008b, p. 87, adaptada.

ii. Para $AB = x$, ordenada, $BC = o = CD$, intervalo de tempo tão pequeno quanto se queira, $BE = y$, abscissa, sejam: $CN = y_{x+o} = y + \dot{y}o + \frac{1}{2}\ddot{y}o^2$ e $DG = y_{x+2o} = y + 2\dot{y}o + 2\ddot{y}o^2$ (séries expandidas até a terceira ordem).

iii. Assim, também são: $HN = IK = \dot{y}o + \frac{1}{2}\ddot{y}o^2$, $IG(= DG - CN) = \dot{y}o + \frac{3}{2}\ddot{y}o^2$, $LG(= DG - BE) = 2p = 2\dot{y}o + 2\ddot{y}o^2$ e $FN = q(= \frac{1}{2}LG - HN) = \frac{1}{2}\ddot{y}o^2$.

iv. Newton toma $EL = 2o$ e $LG = 2p$ como fixos, sua estratégia é mover livremente N sobre CF; desse modo, também varia o comprimento de FN.

v. Os arcos $\widehat{\mathrm{EN}}$ e $\widehat{\mathrm{NG}}$, até $O(o^3)$, são praticamente iguais às cordas $EN(= \sqrt{o^2 + (p-q)^2})$ e $NG(= \sqrt{o^2 + (p+q)^2})$.

vi. Para o corpo que desce a partir do repouso de A, ao chegar em E, considera-se o percurso pelas cordas e não pelos arcos. As cordas que formam o caminho segmentado pelo qual o corpo desce, EN e NG, são respectivamente proporcionais às velocidades em E e N ou, o que dá no mesmo, $v_E(= \sqrt{AB} = \sqrt{x})$ e $v_N(= \sqrt{AC} = \sqrt{x+o})$.

[193] Cf. Newton, 2008b, respectivamente p. 13 e p. 86, nota 1.

Ele, então, mantém x, o e p fixos mas varia $FN(=q)$ de tal modo que o tempo total (isto é, de E a G) seja o menor, isto é: $\frac{EN}{\sqrt{AB}} + \frac{NG}{\sqrt{AC}} = R + S \to$ *mínimo* ou $\frac{\sqrt{o^2+(p-q)^2}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{o^2+(p+q)^2}}{\sqrt{x+o}} = R + S \to$ *mínimo*.

vii. Obtém-se uma equação do tempo de descida pelas cordas cuja dependência está em $FN(=q)$ que deve ser mínimo; já que ele deseja encontrar a curva do tempo mais breve. Isto é, ele chega a relação do tempo pela razão entre o comprimento da corda (por exemplo, EN) e a velocidade no ponto E, assim: $R = t_{EN}(q) \propto \frac{EN}{v_E}\left(= \frac{\sqrt{o^2+(p-q)^2}}{\sqrt{x}}\right)$ e $S = t_{NG}(q) \propto \frac{NG}{v_N}\left(= \frac{\sqrt{o^2+(p+q)^2}}{\sqrt{x+o}}\right)$.

viii. Tome-se as fluxões dos quadrados de R e S, em que o e p são fixos (ou constantes) e q varia, isto é: $2R\dot{R} = \frac{-2p\dot{q}+2q\dot{q}}{x}$ e $2S\dot{S} = \frac{2p\dot{q}+2q\dot{q}}{x+o}$.

ix. Por fim, Newton isola $\dot{R}$ e $\dot{S}$, adiciona ambas e iguala a zero: $\dot{R}+\dot{S} = \frac{-p\dot{q}+q\dot{q}}{Rx} + \frac{p\dot{q}+q\dot{q}}{Sx+So} = 0$. A partir desta equação, Newton aplica o princípio de Fermat para que o tempo de descida pela linha segmentada $ENG(=EN+NG)$ seja o mínimo local, ou seja, tempo brevíssimo.

x. Assim, Newton retoma $\frac{(Sx+So).(-p\dot{q}+q\dot{q})+Rx(p\dot{q}+q\dot{q})}{Rx(Sx+So)} = 0$.

xi. Depois de alguma manipulação e de várias simplificações, obtém-se: $p(o^2+p^2) = 4qxo$. E se considerá-la desta forma: $\frac{o^2+p^2}{q} = 4x\frac{o}{p}$, para $EF^2 = o^2+p^2 = NR$ (vide Figuras 47 e 48), $FN = q$, $x = AB$, $o = BC$ e $p = \frac{LG}{2}$, tem-se: $NR = \frac{EF^2}{FN} = 4AB\frac{BC}{\frac{LG}{2}}$. Ou seja, $EF^2 = o^2+p^2$ (vide Figura 47), para $O(o^3)$, e a corda NR do círculo gerador de mesma curvatura que a braquistócrona ANM em N é $\frac{NE^2}{NF}$, no limite onde a corda EG a bissecta, torna-se desprezivelmente pequena.

xii. Disso segue que o centro de curvatura em N, seja O, estabelece uma distância $OS = \frac{1}{2}NR.\left(\frac{p}{o}\right) = 2x = 2AC$, e daí, então, o raio ON é seccionado ao meio pela horizontal AP através do ponto A, a partir do qual o corpo começa a descer (vide Figura 48). Apenas a cicloide possui esta característica (a mesma encontrada por Johann Bernoulli em seu desenvolvimento de 1718).

Esse foi o modo Newton comprovou que é de fato a cicloide a curva braquistócrona, quando encontrou uma propriedade que apenas essa curva possui. Poderia dizer que este desenvolvimento complementa seu teorema das cicloides e a solução de 1697. Mas esta solução

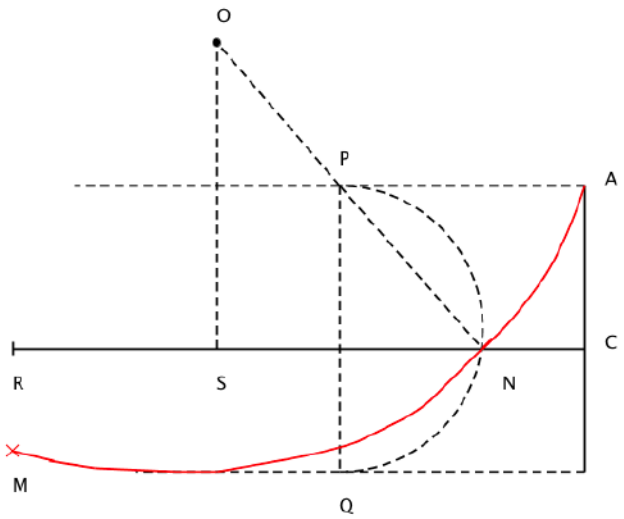

Figura 48 – Solução tardia de Newton, março, 1700; fonte: Newton 2008b, p. 90, adaptada.

tardia de Newton nos mostra apenas que a curva braquistócrona é uma cicloide, faltava ele complementar sua inferência nos justificando porque só poderia ser a cicloide a curva braquistócrona.

CONCLUSÃO

Acabamos de retomar algumas das soluções do problema da braquistócrona à luz do conceito de estilo estrito de raciocínio. O cenário que tínhamos era o seguinte: o problema da braquistócrona tem consigo uma representação (descritiva e geométrica) da situação enfrentada pelo problema. Essa representação gera a possibilidade da ocorrência de uma curva especial, ou seja, aquela da descida mais rápida. O *bit* de informação vem justamente nesta possibilidade, isto é, que dentre os dois pontos dados, pode haver uma curva, tal que o tempo de descida é o menor, curva essa que não corresponde ao menor caminho entre estes pontos. Disso, se segue a hipótese dessa curva braquistócrona e se caracteriza o domínio de investigação, que é dos problemas isoperimétricos. Esta parte é, de certa forma, cumprida apenas pelo enunciado do problema. Surge, então, o que chamei de segunda parte, a qual, na verdade, corresponde aos procedimentos de transferência de informação, inseridos em inferências matemáticas. Essas inferências têm que ser capazes de partir da hipótese da existência de uma curva da descida mais rápida, para a sua constatação. Ou seja, a hipótese gerada pelas possibilidades levantadas a partir de uma representação, encontram na inferência, a justificativa que dá base para hipótese tornar-se uma tese, transferindo a informação por procedimentos contidos nestas inferências.

Os procedimentos de transferência de informação devem ser capazes de transferir a informação concebida como possibilidade, em forma de uma hipótese, para uma informação justificada em um inferência matemática. Como pudemos perceber nas soluções que revisitamos, foram dois os procedimentos utilizados pelos matemáticos, de modo geral. Um deles foi o princípio de Fermat, enquanto uma condição necessária para se determinar qual curva é a braquistócrona. O outro procedimento está em evidenciar uma propriedade fundamental da cicloide, normalmente usada para mostrar que a cicloide é a única curva a cumprir com a característica de ser a curva braquistócrona. Devo incluir um terceiro procedimento, usado por Leibniz e por Jakob Bernoulli, que foi mostrar que a cicloide possui uma equação diferencial que a define unicamente. Todas as inferências que revimos usaram mais de um desses procedimentos para assegurar que a possibilidade da curva braquistócrona foi justificada matematicamente. Com isso, transforma a hipótese de haver uma curva braquistócrona, na tese de que há uma curva braquistócrona e que apenas a cicloide cumpre com a característica de ter a descida mais breve de todas as curvas.

Nem todas as inferências que vimos compartilham dos mesmos procedimentos de transferência de informação. As diferenças entre elas suscitam informações adicionais, para além daquela que teria de ser transferida, ou seja, de que haveria uma curva baquistócrona. Façamos mais uma retomada das soluções para evidenciarmos suas diferenças (sem apelo à parte matemática) e para adiante efetuarmos uma avaliação delas segundo o conceito de estilo estrito de raciocínio, principalmente no que se refere ao padrão de relação de inferências.

I. Na solução não-publicada de Leibniz, ele fiou-se na equação diferencial da cicloide para afirmar que ela é de fato a curva braquistócrona. Contudo, foi o adendo de Gerhardt que demonstrou que a equação diferencial usada era mesmo a da cicloide.

II. A solução publicada de Leibniz fez justamente o movimento contrário de sua solução anterior, ou seja, afirma que há uma curva braquistócrona e conclui pela propriedade construtiva que a curva só poderia ser a cicloide. E se a curva é uma cicloide, seu círculo gerador deve obedecer uma certa igualdade de áreas.

III. Johann Bernoulli, em sua solução pelo método indireto, baseia-se na analogia entre o fenômeno cinemático da queda do corpo e o fenômeno óptico de um raio de luz atravessando um meio heterogêneo. Sua analogia se fundamentou na semelhança entre os comportamentos do corpo em queda e do raio de luz. Ou seja, se ambos realizam-se no menor tempo, então, não importa a agência, uma vez que os efeitos são os mesmos, a natureza age sob o mesmo princípio, segundo Fermat. Posto isso, Johann Beronulli parte da analogia com o fenômeno óptico, usa da lei de Snell-Descartes (que imbui o princípio de Fermat), e chega à equação diferencial da cicloide. Em seguida, Johann Bernoulli mostra que essa equação diferencial é, de fato, da cicloide quando exprime dela uma propriedade construtiva da cicloide. Por fim, Johann Bernoulli nos indica qual cicloide, dentre todas, é a resposta do problema, quando evidencia qual proporção esta cicloide em específico deve ter.

IV. Na solução de 1697 de Isaac Newton, o autor responde que a curva braquistócrona é a cicloide que obedece uma proporção específica. A justificativa para a braquistócrona ser uma cicloide, como indica Herrera, está no teorema das cicloides de Newton. A demonstração deste teorema está fundamentada em uma propriedade construtiva que apenas a cicloide possui.

V. Jakob Bernoulli, em sua solução, parte de uma contradição na curva braquistócrona que precisa ser superada. Isto é, uma secante à curva braquistócrona não pode prover a descida mais rápida que a curva mais rápida, ou seja, a própria braquistócrona. De fato, há uma diferença de tempo entre a descida pela secante e pela curva braquistócrona. Esta diferença é anulada (princípio de Fermat) quando a secante e a curva braquistócrona foram ambas uma e a mesma curva. Disso, Jakob Bernoulli retira uma proporção que apenas a curva braquistócrona tem. Em seguida, Jakob Bernoulli demonstra que esta proporção leva a equação diferencial da cicloide, a qual a define.

VI. A solução via método direto de Johann Bernoulli constrói algumas curvas entre os pontos dados. Ele encontra uma proporção dos tempos de descida e aplica o princípio de Fermat. Isso resulta em uma propriedade da cicloide. Ou seja, a curva braquistócrona é uma cicloide. Em seguida, Johann Bernoulli prova que o tempo de descida pela cicloide é o menor em comparação com as outras curvas por ele consideradas.

VII. Finalmente, a solução tardia de Newton começa com um diagrama que exprime uma curva braquistócrona, com certa parte segmentada por dois planos, cujo ponto de contato está livre. Newton determina os tempos de descida por este trecho segmentado em duas partes, em termos de segmentos do diagrama. Em seguida, Newton considera que estes tempos devem ser minimizados e para isso aplica o princípio de Fermat. Como consequência, Newton chega a uma propriedade da cicloide e prova que a curva braquistócrona é a cicloide.

Um padrão, senão o único, o qual pudemos estabelecer nas relações dessas inferências matemáticas acima resumidas foi que apenas as soluções de Johann Bernoulli (pelos métodos indireto e direto) e de Jakob Bernoulli, de todas, justificaram originalmente (isto, sem a interferência de um historiador da matemática ou sem um hiato entre diferentes soluções de um mesmo autor) tanto a curva braquistócrona ser a cicloide, quanto a cicloide ser a curva braquistócrona. E ambos usaram para isso os mesmos procedimentos de transferência de informação: aplicar princípio de Fermat para se encontrar qual curva é a descida mais rápida, exprimir propriedades da cicloide e a equação diferencial da cicloide para afirmar ou reafirmar que a curva braquistócrona é a cicloide ou que a cicloide é a curva braquistócrona.

Quais seriam as evidências indubitáveis de que a curva braquistócrona é a cicloide? A análise dessas soluções mostra que ou as propriedades da cicloide ou a equação diferencial da cicloide são suficientes, como evidências dentro das inferências, para justificar a conclusão de que a curva braquistócrona é a cicloide e vice-versa. Frente a esta constatação do padrão entre as relações de inferência de Johann e Jakob Bernoulli usado para selecionar, interpretar e dar suporte a evidências para que a curva braquistócrona seja a cicloide (e vice-versa), podemos afirmar que encontramos um estilo para a matemática?

Preferiria, antes de responder a esta pergunta, retroceder a uma questão que foi deixada de lado, a questão quanto aos objetos matemáticos. Os objetos matemáticos são parte fundamental para um conceito de estilo. Tanto são fundamentais que Bueno reservou um dos cinco componentes fundamentais para se ter estilo à constituição de objetos. E o estilo estrito de raciocínio não negligencia objetos em favor de padrões de relações de inferência. Como já vimos, estilos estritos de raciocínio para a matemática precisam:

i. definir um domínio de objetos matemáticos, sobre os quais se aplicam

ii. certos princípios (de compreensão) que o orientam diferentemente. Da aplicação desses princípios,

iii. caracterizam-se certas classes de objetos e relações entre eles. Entre esses objetos, apenas os relevantes é que

iv. estabelecem conexões de inferência para determinar suas propriedades e relações adicionais com outros objetos do mesmo domínio. Essas mesmas conexões de inferência

v. se realizam por meio de mecanismos inferenciais como: lógica clássica, diagramas, desenhos, figuras, imagens mentais e interpretações geométricas.

Desse modo, objetos para o conceito de estilo estrito de raciocínio são relevantes. E apesar de Bueno lidar com projetos diferentes, quando trata com os componentes básicos para se ter um estilo e quando trata estilo estrito de raciocínio, ele não afirma que esses componentes não valem para sua noção de estilo estrito de raciocínio, nem deixa de lado a importância de objetos em estilos estritos de raciocínio. O que muda, ao meu ver, é o enfoque que Bueno dá para padrões nas relações de inferência constatados na pluralidade de práticas que encontramos nos domínios de conhecimento, como é o caso da matemática.

Ainda não pudemos responder, seja positiva ou negativamente, a pergunta desta pesquisa: há um estilo para a matemática? A retrospectiva que faço é que o conceito de estilo estrito de raciocínio nos ofereceu condições para olhar com mais detalhe a prática matemática, ao menos, no que diz respeito ao problema da braquistócrona e, disso, concluir que diferentes práticas exigidas nas diversas soluções as quais acompanhamos trouxeram à tona informações relevantes. Refiro-me a duas informações: (i) que a braquistócrona de Johann Bernoulli é a tautócrona de Huygens e (ii) que a trajetória do raio de luz em um meio heterogêneo traça a curva da descida mais rápida. De resto, o que vimos foram diferentes teorias matemáticas sendo testadas por um único e mesmo problema. Além disso, pudemos acompanhar diferentes abordagens para se tratar um problema matemático. Desse modo, o problema da impregnação teórica, levantado por Bueno, e o problema da relevância epistemológica do estilo, concebido por Mancosu, vigoram também para a matemática.

Por que, então, não responder positivamente à pergunta sobre a possibilidade de haver um estilo para a matemática o qual respondesse a um critério e que estabelecesse uma estrutura mínima para um conceito de estilo.

REFERÊNCIAS

Andrade, M. A. d. and L. G. F. Filho (2015). Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. *Revista Brasileira de Ensino de Física 37*(2), 2309–1–2309–6. Citado na página 111.

Azzouni, J. (2005). *Tracking reason: Proof, consequence, and truth*. New York: Oxford University Press. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

Azzouni, J. (2006). How and why mathematics is unique as a social practice. In *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, pp. 201–219. Springer. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

Babb, J. and J. Currie (2008). The brachistochrone problem: Mathematics for a broad audience via a large context problem. *The Montana Mathematics Enthusiast 5*(2&3), 169–184. Montana Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing. Citado na página 111.

Bernoulli, J. (1696). Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur. *Acta Eruditorum*, 269. Citado 4 vezes nas páginas 109, 117, 135 e 192.

Bernoulli, J. (1697a). Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, solutioque problematis a se in actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda linea brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et de curva synchrona seu radiorum unda construenda. *Acta Eruditorum*, 206–211. Citado 7 vezes nas páginas 148, 149, 152, 160, 163, 165 e 196.

Bernoulli, J. (1697b). Solutio problematum fraternorum, peculiari programmate cal, jan, 1697 groninga, nec non actorum lips. mense jun. & dec. 1696, & febr, 1697, propositorum: una cum propositione reciproca aliorum. *Acta Eruditorum*, 211–217. Citado na página 162.

Bernoulli, J. (1718a). Continuatio observationis nernoullianæde solutionibus quæexstant problematum isoperimetricorum &c. *Acta Eruditorum*, 74–88. Conf. mens. Januar. hujus anni p. 15. Citado 4 vezes nas páginas 164, 166, 169 e 203.

Bernoulli, J. (1718b). Joh. bernoulli de solutionibus quæexstant problematarum isoperimetricorum, ejusque nova eorundem problematum, aliorumque cognatorum circa calculum solvendorum methodus brevis plana & facilis. *Acta Eruditorum*, 15–31. Confer. Act. Lips. annor. 1700 p. 261; 1701 p. 213; Commentar. Acad. Reg. Scient. anni 1706 p. 235; Taylori Method. Increm. direct. & invers. p. 67. Citado na página 164.

Bernoulli, J. (1741a). *Histoire de L'Academie Royale des Sciences, avec les Memoires de Mathematiques & de Physique, pour la même année.*, Chapter Geometrie: Sur les isoperimetres, pp. 48–55. Paris: L'Imprimerie Royale. Citado na página 164.

Bernoulli, J. (1741b). *Histoire de L'Academie Royale des Sciences, avec les Memoires de Mathematiques & de Physique, pour la même année.*, Chapter Geometrie: Sur les isochrones & sur celles de la plus vîte descente, pp. 55–57. Paris: L'Imprimerie Royale. Citado na página 164.

Bernoulli, J. (1742a). *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*, Volume tomus primus, quo continentur ea. Lausannæ; Genevæ: Sumptibus Marci-Michaellis Bousquet et Sociorum. quae ab anno 1690 ad annum 1713 prodierunt. Citado 7 vezes nas páginas 109, 117, 135, 137, 153, 170 e 192.

Bernoulli, J. (1742b). *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*, Volume tomus primus, quo continentur ea, Chapter XXXIX Problèmes a resoudre, pp. 204–205. Lausannæ; Genevæ: Sumptibus Marci-Michaellis Bousquet et Sociorum. Journal de Sçavans, le 26 août 1697, p. 394. Citado na página 164.

Bernoulli, J. (1742c). *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*, Volume tomus secundus, quo continentur ea. Lausannæ; Genevæ: Sumptibus Marci-Michaellis Bousquet et Sociorum. quae ab anno 1714 ad annum 1726 prodierunt. Citado 3 vezes nas páginas 165, 166 e 203.

Bernoulli, J. (1959). *A Source Book in Mathematics*, Volume 2, Chapter Bernoulli on Brachistochrone problem, pp. 644–655. New York: Dover Publications, Inc. Introduction and translation from the Latin by Dr. Lincoln La Paz, National Research Fellow in Mathematics, The University of Chicago, Chicago, Ill. Citado 14 vezes nas páginas 109, 117, 135, 137, 149, 150, 151, 152, 154, 156, 163, 165, 192 e 198.

Broer, H. W. (2014). Bernoulli's light ray solution of the brachistochrone problem through hamilton's eyes. *International Journal of Bifurcation and Chaos 24*(08), 1440009. Citado na página 149.

Buchdahl, G. (1993). Styles of scientific thinking. *Science & Education 2*(2), 149–167. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 13, 14 e 19.

Bueno, O. (2012). Styles of reasoning: A pluralist view. *Studies in History and Philosophy of Science 43*(4), 657–665. Part Special Issue: Styles of thinking. Citado 28 vezes nas páginas 11, 41, 48, 50, 67, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 104, 105, 106, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 194, 210 e 211.

Bueno, O. (2014, 11 jul.). Estilos de pensamento: científico e matemático. Comunicação apresentada no Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo (IEA) no dia

26 de maio de 2014, organizado pelo Grupo de Pesquisa Filosofia, História e Sociologia da Ciência e da Tecnologia e pelo Projeto Temático Fapesp 2011/51614-3 (Gênese e significado da tecnociência: das relações entre ciência, tecnologia e sociedade). Registro em vídeo com duração de 2h07. Local: sala de evento do IEA. Citado 8 vezes nas páginas 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84 e 85.

Burrowes, M. and C. Farina (2005). Sobre o pêndulo isócrono de christiaan huygens. *Revista Brasileira de Ensino de Física 27*(2), 175–179. Citado na página 121.

Chevalley, C. (1935). Variations du style mathématique. *Reveu de Metaphysique et de Morale* (3), 375–384. Citado 8 vezes nas páginas 67, 68, 69, 70, 71, 73, 76 e 102.

Crombie, A. C. (1955). *Augustine to Galileo. The History of Science 400-1650*. Cambridge: Harvard University Press. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 48.

Crombie, A. C. (1995). Commitments and styles of european scientific thinking. *History of Science 33*(2), 225–238. Citado 39 vezes nas páginas 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 66, 67, 68, 72, 78, 79, 82, 86, 93, 102, 103, 104, 186 e 190.

D'Alkaine, C. V. (2006). Os trabalhos de gödel e as denominadas ciências exatas. em homenagem ao centenário do nascimento de kurt gödel. *Revista Brasileira de Ensino de Física 8*(4), 525–530. Citado na página 16.

Duillier, N. F. (1699a). *Fruit walls improved, by inclining them to the horizon: or, a way to build walls for fruit-trees; whereby they may receive more sun shine, and heat, than ordinary*, Chapter LineæBrevissimi descensus investigatio geometrica duplex cui addita est Investigatio geometrica solidi rotondi, in quod minima fiat resistentia, pp. 3–24. Londini: Typis R. Everingham: prostant apus Johannem Taylor, ad insigne Navis, in Cœmiterio Divi Pauli. Citado 3 vezes nas páginas 175, 181 e 182.

Duillier, N. F. (1699b). *Fruit walls improved, by inclining them to the horizon: or, a way to build walls for fruit-trees; whereby they may receive more sun shine, and heat, than ordinary*. London: Printed by R. Everingham; and are to be sold by John Taylor, at the sign of the ship, in St. Paul's Church-Tard. Citado na página 175.

Erlichson, H. (1999). Johann bernoulli's brachistochrone solution using fermat's principle of least time. *European Journal of Physics 20*(5), 299–304. Citado na página 149.

Fermat, P. d. (1891). *Oeuvres de Fermat*, Volume 1. Paris: Gauthiers-Villars et fils, imprimeurs-libraires. Citado 2 vezes nas páginas 110 e 150.

Fraser, C. G. (1992). Isoperimetric problems in the variational calculus of euler and lagrange. *Historia mathematica 19*(1), 4–23. Citado na página 110.

Fraser, C. G. (1994). The origins of euler's variational calculus. *Archive for history of exact sciences 47*(2), 103–141. Citado na página 110.

Freguglia, P. and M. Giaquinta (2016). The early period of the calculus of variations. Cham, Switzerland, pp. 1–52. Birkhäuser, Basel. No prelo. Citado 14 vezes nas páginas 122, 123, 128, 129, 130, 131, 134, 157, 160, 161, 163, 164, 166 e 202.

Galilei, G. (1914). *Dialogues cooncerning two new sciences*. New York: The MacMillan Company. Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso da Salvio of Northwestern University. Citado 8 vezes nas páginas 109, 124, 125, 126, 127, 128, 130 e 134.

Galilei, G. (1968). *Le Opere di Galileo Galilei*, Volume 8. Firenze: G. Barbèra Editore. Nuova ristampa della edizione nazionale, soto l'altro patronato del presidente della repubblica italiana Giuseppe Saragat. Citado 3 vezes nas páginas 109, 125 e 127.

Gayon, J. (1996). De la catégorie de style en histoire des sciences. *Alliage 26*, 13–25. Citado 4 vezes nas páginas 34, 35, 51 e 71.

Geiges, H. (2005, juni). Christiaan huygens and contact geometry. *NAW 5&6*(2), 117–123. Citado na página 120.

Goldstine, H. H. (1980). *A History of the Calculus of Variations from 17th through the 19th Century*, Volume 5. New York: Springer-Verlag. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Citado 20 vezes nas páginas 110, 138, 139, 140, 141, 142, 152, 153, 155, 156, 158, 159, 162, 163, 164, 166, 201, 220, 221 e 223.

Granger, G. G. (1974). *Filosofia do estilo*. São Paulo: Perspectiva, ed. da Universidade de São Paulo. Tradução de Scarlett Zerbetto Marton. Citado 18 vezes nas páginas 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 49 e 69.

Granger, G. G. (1995, jan.-dez.). Estilo e objetividade nas ciências físicas. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência 5*(Especial), 17–34. Citado 15 vezes nas páginas 19, 20, 24, 33, 34, 50, 65, 66, 67, 74, 81, 82, 93, 101 e 102.

Hacking, I. (1982). *Rationality and Relativism*, Chapter Language, Truth and Reason, pp. 48–66. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. Printed and bound in Great Britain. Citado 5 vezes nas páginas 51, 59, 64, 65 e 86.

Hacking, I. (1992). 'style' for historians and philosophers. *Studies in History and Philosophy of Science Part A 23*(1), 1–20. Citado 37 vezes nas páginas 19, 20, 41, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 72, 75, 78, 80, 86, 87, 90, 93, 102, 103, 104, 105 e 186.

Hacking, I. (2006a, 4 mai.). Cognition. Hand-out do curso Véracité et Raison ministrado no Collége de France de 31 jan. a 28 mar. 2006, módulo oito do dia 21 mar. 2006. Citado na página 62.

Hacking, I. (2006b, 7 fev.). Cognition. Hand-out do curso Véracité et Raison ministrado no Collége de France de 31 jan. a 28 mar. 2006, módulo dois do dia 7 fev. 2006. Citado na página 64.

Hacking, I. (2006c, 9 mai.). La stabilité des styles de pensée scientifique. Hand-out do curso Véracité et Raison ministrado no Collége de France de 31 jan. a 28 mar. 2006, módulo nove do dia 28 mar. 2006. Citado na página 63.

Hacking, I. (2012). 'language, truth and reason' 30 years later. *Studies in History and Philosophy of Science Part A 43*(4), 599–609. Citado 3 vezes nas páginas 51, 64 e 65.

Hall, A. R. (2002). *Philosophers at War: The quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge: Cambridge University Press. Citado na página 175.

Herrera, M. d. l. (1994). Galileo, bernoulli, leibniz and newton around the brachistochrone problem. *Revista Mexicana de Física 40*(3), 459–475. Historia y Hilosofia de la Física. Citado 6 vezes nas páginas 123, 171, 172, 199, 200 e 208.

Huygens, C. (2007, July). *Horologium Oscillatorium*. 5 Parts. Citado 2 vezes nas páginas 123 e 124.

Jesseph, D. M. (2007). Descartes, pascal, and the epistemology of mathematics: The case of the cycloid. *Perspectives on Science 15*(4), 410–433. The Massachusetts Institute of Technology. Citado na página 120.

Junqueira, A. and A. M. Horiguti (2006, jul./dez.). O cálculo variacional como solução do problema da braquistócrona. *Sinergia 7*(2), 108–115. Citado na página 111.

Knobloch, E. (2012). Leibniz and the brachistochrone. *Documenta Mathematica: Journal der Deutschen Mathematiker-Vereinigung extra volume*, 15–18. 21st International Symposium on Mathematical Programming, Berlim, August, 19-24, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 118, 135 e 193.

Kusch, M. (2010). Hacking's historical epistemology: A critique of styles of reasoning. *Studies in History and Philosophy of Science Part A 41*(2), 158–173. Citado 5 vezes nas páginas 60, 61, 62, 63 e 64.

Leibniz, G. W. (1697). G.g.l. communicatio sure pariter, duarumque alienarum ad edendum sibi primum a dn. jo. bernoullio, deinde a dn. marchione hospitalio communicatarum solutionum problematis curvre celerrimi descensus a dn. jo. bernoullio geometris publice propositi, una cum solutione sua problematis alterius ab eodem postea propositi. *Acta Eruditorum*, 201–205. Citado na página 146.

Leibniz, G. W. (2000, September). *COMMUNICATION ON THE SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE CURVE OF MOST RAPID DESCENT PROPOSED TO GEOMETERS BY MR. JOHN BERNOULLI, AND OF THE SOLUTIONS THAT BOTH, HE AND MR. LE MARQUIS DE L'HOPITAL, HAVE ASKED ME TO PUBLISH, INCLUDING THE SOLUTION OF ANOTHER PROBLEM THAT MR. BERNOULLI HAS LATER PROPOSED, Mars, 1697.* Leesburg. 8 Extracts. Citado 4 vezes nas páginas 146, 148, 165 e 197.

Leibniz, G. W. (2004). *Sämtliche Schriften und Briefe: Mathematischer, Naturwissenschaftlicher und Technischer Briefwechsel*, Volume Reihe III of *Band 6*. Akademie-Verlag Berlin. Citado 4 vezes nas páginas 118, 138, 139 e 141.

Leibniz, G. W. (2011). *Sämtliche Schriften und Briefe: Mathematischer, Naturwissenschaftlicher und Technischer Briefwechsel*, Volume Reihe III of *Band 7*. Akademie-Verlag Berlin. Citado 2 vezes nas páginas 119 e 136.

Leibniz, G. W., J. Bernoulli, J. Bernoulli, N. Bernoulli, and C. I. Gerhardt (1855). *Leibnizens gesammelte Werke: Leibnizens mathematische Schriften*, Volume 3, Chapter XXIX. Leibniz an Joh. Bernoulli und Beilage, pp. 284–295. Halle: Druck und Verlag von H. W. Schmidt. Erste Abtheilung. Citado 7 vezes nas páginas 118, 119, 136, 138, 139, 140 e 141.

Madeira, T. M. (2005). *O Problema Isométrico Clássico*. Ph. D. thesis, Universidade de Coimbra, Departamento de Matemática, Coimbra. Citado 2 vezes nas páginas 108 e 109.

Mancosu, P. (1999). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford University Press. Citado 5 vezes nas páginas 19, 93, 94, 106 e 183.

Mancosu, P. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press. Citado 5 vezes nas páginas 82, 94, 95, 96 e 191.

Mancosu, P. (2010, Spring). Mathematical style. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Citado 12 vezes nas páginas 19, 20, 24, 25, 68, 69, 71, 72, 85, 185, 187 e 211.

Mancosu, P., K. F. Jørgensen, and S. A. Pedersen (2005). *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, Volume 327. Springer Science & Business Media. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 17, 18 e 19.

Newton, I. (1695–1697a). Epistola missa ad praenobilem virum d.carolum mountague armigerum, scaccarii regii apud anglos cancellarium, et societatis regiae praesidem, in qua solvuntur duo problemata mathematica a johanne barnoullo mathematico celeberrimo proposita. *Philosophical Transactions 19*, 384–389. Publicado anonimamente. Citado 3 vezes nas páginas 119, 170 e 171.

Newton, I. (1697b). Excerpta ex transactionibus philos. anglic. m. jan. 1696/7. epistola missa ad prænobilem virum d. carolum. mountague armigerum, scaccarii regii apud anglos cancellarium, & societatis regia præsidem: in qua solvuntur duo problemata mathematica a johanne bernoullo mathematico celerrimo proposita. *Acta Eruditorum*, 223–224. Publicado anonimamente. Citado na página 171.

Newton, I. (1782). *Opera quae extant omnia*, Volume 4. London: Nichols, John. Citado 3 vezes nas páginas 171, 172 e 199.

Newton, I. (1846). *Newton's Principia: the mathematical principles of Natural Philosophy to wich is added Newton's System of the World*. New York: Daniel Adee. Citado na página 110.

Newton, I. (1967). *The Correspondence of Isaac Newton*, Volume 4, Chapter 561. Newton to Montague, 30 January 1696/7, from an autograph draft in the Library of the Royal Society, pp. 220–229. Cambridge: Cambridge University Press. Citado 3 vezes nas páginas 170, 171 e 199.

Newton, I. (2008a). *The Mathematical Papers of Isaac Newton, 1684-1691*, Volume 6. Cambridge: Cambridge University Press. With the assistance in publication of M. A. Hoskin and A. Prag. Citado 3 vezes nas páginas 110, 175 e 178.

Newton, I. (2008b). *The Mathematical Papers of Isaac Newton, 1697-1722*, Volume 8. Cambridge: Cambridge University Press. With the assistance in publication of A. Prag. Citado 8 vezes nas páginas 170, 171, 175, 176, 181, 182, 205 e 207.

O'Connor, J. J. and E. F. Robertson (1974). The brachistochrone problem. *From The MacTutor History of Mathematics Archives*. Citado na página 111.

Rabouin, D. (2013). *Culture without culturalism*, Chapter On mathematical style (accepté). Version de travail. Citado 13 vezes nas páginas 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 e 102.

Stein, E. and K. Wiechmann (2003). New insight into optimization and variational problems in the 17th century. *Engineering Computations 20*(5&6), 699–724. Citado na página 111.

Tappenden, J. (2005). *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, Volume 327, Chapter Proof Style and Understanding in Mathematics I: visualization, unification and axiom choice, pp. 147–214. Dordrecht: Springer Science & Business Media. Citado 6 vezes nas páginas 19, 96, 97, 98, 99 e 100.

Thornton, S. T. and J. B. Marion (2008). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (5 ed.). Boston: Thomson Brooks/Cole. Cengage Learning. Citado na página 111.

ANEXOS

ANEXO A – PRINCÍPIO DO TEMPO MÍNIMO DE FERMAT E A LEI DA REFRAÇÃO

Pierre de Fermat (1601–1665) foi um importante matemático, dentre suas conquistas, aponto seus estudos acerca de máximos e mínimos como fundamental para entendermos o problema da braquistócrona tratado neste trabalho. Um dos enunciados que remete a esse importante matemático é de que a natureza age por aquilo que lhe seja mais fácil e rápido. Foram nas duas cartas endereçadas a seu colega Marin Cureau de la Chambre em 1662 (Fermat, P. *Opera Omnia*, v. 1, p. 170–179), cujos títulos são "análise de refrações" e "síntese de refrações", em que Fermat desenvolveu seu princípio, tendo como base o modelo de refração da luz (cf. Goldstine, 1980, p. 1–6).

Fermat considera o problema de Galileu – um corpo que sobre a ação de seu peso desce pelo caminho de menor tempo, que não é, com efeito, o mais curto – para conceber seu princípio e, ainda, com isso, pode apresentar uma prova para a lei da refração. Embora Fermat e Descartes tenham ambos estudado o fenômeno da refração da luz e chegado a mesma conclusão, as considerações deles estavam em direta oposição. Pois, enquanto Fermat assumiu que a luz movia-se com velocidade menor em meios densos, em relação a outros menos densos, Descartes afirmava que a luz movia-se mais rápido nessas mesmas condições.

Esse trabalho de Fermat foi claramente inspiração para Johann Bernoulli construir sua solução ao problema da braquistócrona (vide seção 2.7.2). Posto que sua solução depende diretamente do princípio de Fermat e seu modelo substitui o móvel sob a ação da gravidade por um raio de luz (monocromático) que atravessa diversos meios refringentes de índices que variam em uma ordem crescente. Apesar de se tratar de fenômenos e agências diferentes, há uma similitude nos efeitos – a natureza age de forma simétrica para ambos os casos –, então, para Johann Bernoulli, não existe impedimento para substituir móveis e pesos por raios de luz e índices de refração.

Fermat se baseia no fenômeno da refração da luz, quando um raio de luz (monocromático) passa de um meio refringente para outro com índice de refração diferente. Ele supõe que um raio de luz parte de C e atinge I, através da interface ADB que separa dois meios de índices de refração (n) diferentes, no meio ACB o índice de refração n_1 é M, no meio AIB o índice de refração n_2 é DF; a relação entre n_1 e n_2 é tal que $n_1 < n_2$ – isto é, $M < DF$. Esses segmentos, M e DF, representam a resistência do meio para a passagem da luz (, ou seja, à sua velocidade); ambas são proporcionais entre si por um fator comum.

O problema posto por Fermat é este: posicionar o ponto O (vide figura 49) de modo que o tempo de passagem do raio de luz, de C para I, por O, seja mínimo. Da figura 49, adota-se enquanto notação: $CD = N$, $DF = B$, $DH = A$ e $DO = E$. A solução desse

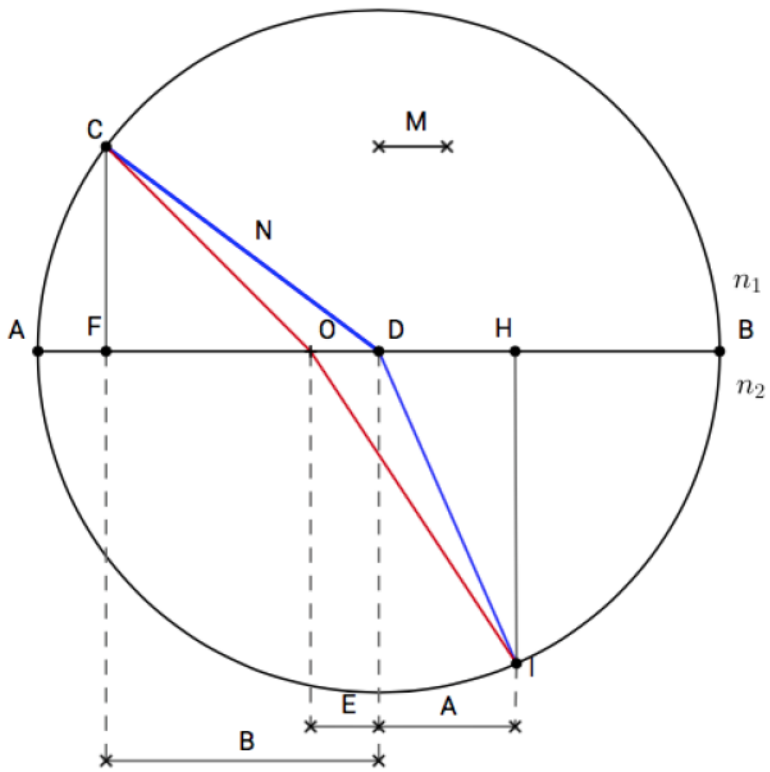

Figura 49 – Princípio do tempo mínimo e a lei da refração; fonte: Goldstine (1980), p. 2, adaptada.

problema, segundo Fermat, é $N.M + N.B$ para o tempo de passagem do raio de luz por CDI ser mínimo. Sob a consideração que o tempo varia diretamente em relação à distância e inversamente em relação à velocidade.

Para demonstrar a solução acima, aplica-se a lei dos cossenos[1] aos triângulos COD e IOD, daí:

$$\begin{cases} CO^2 = N^2 + E^2 - 2B.E; \\ OI^2 = M^2 + E^2 + 2A.E. \end{cases}$$

A quantidade a ser minimizada, pelo método[2] de máximo e mínimo de Fermat (1629), pode ser escrita assim:

$$CO.M + IO.B = M.\sqrt{N^2 + E^2 - 2B.E} + B.\sqrt{M^2 + E^2 + 2A.E}.$$

Ou seja, o ponto O deve ser colocado na linha AB (diâmetro do círculo ACB, vide figura 49), de modo que o tempo seja mínimo.

1 Seja um triângulo qualquer ABC de lados a, b, c e ângulo em A igual a α, a relação entre seus lados segue a seguinte lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.

2 O método de Fermat, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Fermat, P. *Opera Ominia*, v. 1, p. 171–172: *Analysis ad Refractiones*), é apresentado neste exemplo: seja o segmento AC, insira o ponto E

De $CO.M + IO.B$, Fermat considera-o igual a $N.M + N.B$, isto é, $CO = IO = N(= CD)$. Assim, é preciso fazer $E(= OD) \approx 0$, disso:

$$\begin{array}{lcl}
CO = N & e & IO = N \\
\sqrt{N^2 + E^2 - 2B.E} = N & & \sqrt{N^2 + E^2 + 2A.E} = N \\
N^2 + E^2 - 2B.E = N^2 & & N^2 + E^2 + 2A.E = N^2 \\
E^2 - 2B.E \approx 0 & & E^2 + 2A.E \approx 0 \\
E^2 \approx 2B.E & & E^2 \approx -2A.E \\
E \approx 2B & & E \approx -2A
\end{array}$$

, assim, tem-se que $2B \approx -2A$ ou, o que dá no mesmo, $B \approx -A$; disso, $B = kA$, de modo que $k = \dfrac{B}{A}$. Lembre-se que $(DF =)B$ e M são proporcionais entre si $(B \propto M)$ por um fator comum k; assim, $B = kM$ ou $B = \dfrac{B}{A}M$. Desse modo, chega-se a igualdade de Fermat: $(DH =)A = M$.

Fermat assume $\dfrac{B}{A} = k$ ou, em termos dos segmentos, $\dfrac{DF}{DH} =$ *constante*. O índice de refração de ACB é menor que o de AIB $(n_1 < n_2)$; isso significa que a densidade em AIB é maior do que em ACB e que a velocidade da luz em AIB é menor do que em ACB. Tudo isso pode ser resumido em $\dfrac{DF}{DH} =$ *constante* > 1, dito de outra forma,

$$\frac{DF}{DH} = \frac{\sin FCD}{\sin HID} = \text{ constante} > 1. \quad \text{(A.1)}$$

E, assim, Fermat prova a lei da refração (ou de Snell-Descartes; vide figura 49). Por esse caminho, pode-se apreciar como ele emprega a condição necessária $(E = 0)$ que minimiza o tempo de travessia do raio de luz por um dióptro (interface entre dois meios com índices de refração diferentes). Essa condição necessária está na *Analysis ad refractiones* de Fermat.

Depois desse passo analítico, Fermat volta-se para a síntese, para a *Synthesis ad refractiones*. Ele mostra, então, que a partir da equação A.1, chega-se ao menor tempo da trajetória da luz. Enquanto na *Analysis* Fermat mostra a condição necessária para solucionar o problema do menor tempo para a trajetória do raio de luz através de um dióptrico, na *Synthesis* ele mostra a condição suficiente.

Para isso, ele parte da seguinte relação (vide figura 50):

$$\frac{DN}{NS} = \text{ constante } (c) > 1,$$

entre as extremidades A e C, de modo que o retângulo formado por $AC = B$ e $AE = A$ – resultado da divisão – seja máximo (S_{AEC}). A solução para esse problema é $B.A - A^2$. Segue a prova: substitua A por $A + E$, logo, $B.(A + E) - (A + E)^2$ ou $B.A - A^2 + B.E - 2A.E - E^2$. Ora, trata-se de uma função área dependente de E $[S_{AEC}(E)]$ e ela precisa ser maximizada. Para isso, deixe E ser minimizado; assim, $B.A - A^2 + B.E - 2A.E - E^2 = B.A - A^2$ se $B.E - 2A.E - E^2 \approx 0$. Isto é, $B.E \approx 2A.E + E^2$ ou $B \approx 2A + E$. Portanto, a condição necessária para maximizar $S_{AEC}(E)$ é $B = 2A$, quando $E = 0$. Disso, tira-se que quando Fermat deseja maximizar ou minimizar uma função $f(E)$, ele calcula $f'(E = 0) = 0$.

é evidente que se trata da aplicação da equação A.1. Da figura 50, tem-se que o raio de luz (monocromático) parte de M e chega a H através de N (centro do círculo $AMBH$) no menor tempo. R é um ponto arbitrário em no diâmetro ANB, e os pontos I e P são tais que:

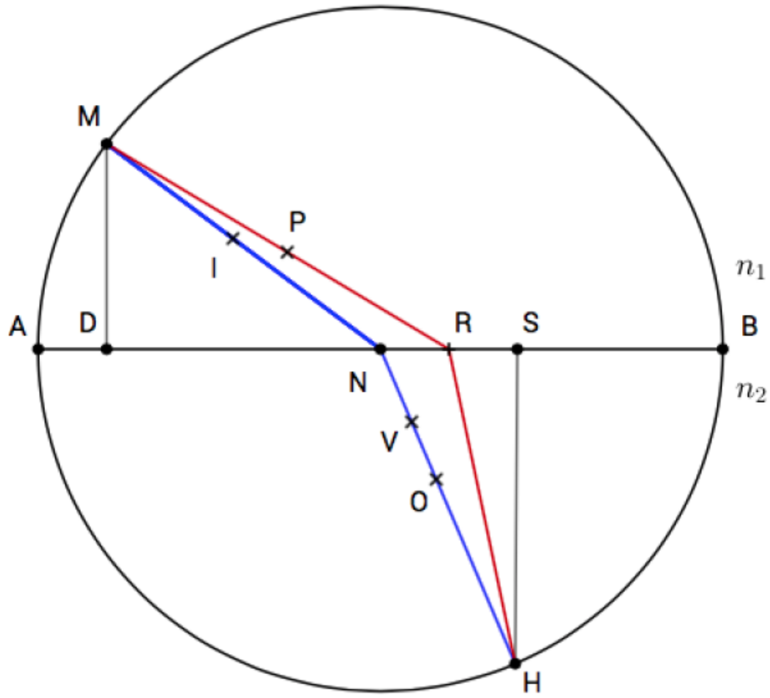

Figura 50 – Princípio do tempo mínimo e a lei da refração; fonte: Goldstine (1980), p. 4, adaptada.

$$c = \frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP} = \frac{MN}{NI}; \tag{A.2}$$

e dos pontos V e O, Fermat estabelece:

$$\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO} \text{ e } \frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}.$$

Fermat deseja mostrar que o tempo para a luz passar por MNH é menor que em MRH. Aprova para isso parte do seguinte: seja t_{xy} o tempo para um raio de luz passar pelos pontos X e Y em um meio homogêneo. Uma vez que:

$$\textit{velocidade} : \textit{distância} = \frac{1}{\textit{tempo}};$$

então, já que a velocidade nesse meio homogêneo varia diretamente com a distância e inversamente com o tempo e desde que a razão da velocidade no meio AMB com respeito a do meio AHB seja c, pela equação A.2. Disso:

$$\frac{t_{MN}}{t_{NH}} = \frac{MN}{NH}.\frac{1}{c} = \frac{NI}{NH} \text{ e } \frac{t_{MR}}{t_{RH}} = \frac{MR}{RH}.\frac{1}{c} = \frac{RP}{RH};$$

Fermat conclui a partir das relações acima que:

$$\frac{t_{MNH}}{t_{MRH}} = \frac{t_{MN} + t_{NH}}{t_{MR} + t_{RH}} = \frac{NI + NH}{RP + RH}.$$

Uma vez que a velocidade em NH e RH são iguais, Fermat pretende mostrar que $RP + RH > NI + NH$. Para isso, sabe-se que $DN < MN$ e $NS < DN$, então $NO < RN$ e $NV < NO$. Pela lei dos cossenos, Fermat chega a $MR > MN + NO$. E das relações que ele já apresentou, ou seja:

$$\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV} = \frac{MN + NO}{NI + NV} = \frac{MR}{RP};$$

disso, Fermat tem $RP > NI + NV$.

Pela lei dos cossenos agora aplicada no ΔNHR e pela inequação acima $RP > NI + NV$, ele conclui que $RH > HV$; ora, $RP + RH > NI + \underbrace{NV + HV}_{NH}$ (vide figura 50). Portanto, o tempo para o raio de luz percorrer MRH é maior que o de MNH, ou seja, que $t_{MRH} > t_{MNH}$ para R à direita de N.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - DOUTORADO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: METAFÍSICA E EPISTEMOLOGIA

Por decisão do Colegiado do Programa o aluno deverá atender as solicitações da banca, quando houver, e anexar este ao final da tese como versão definitiva aprovada pelo orientador, que neste momento estará representando a Banca Examinadora.

Curitiba, 18 de maio de 2018

Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra