

Aplicações de grafos

Exemplos em Engenharia de Produção

Cicero Aparecido Bezerra

Curitiba, 2018



SUMÁRIO

1	SOBRE O AUTOR	3
2	APRESENTAÇÃO	4
3	CONCEITOS	5
4	APLICAÇÕES	9
	4.1 Problemas de extensão mínima.....	9
	4.2 Problemas de percurso mínimo.....	18
5	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	27

1 SOBRE O AUTOR

Possui graduação em Informática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (1992), mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001), doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2007) e estágio pós-doutoral em Gestão Estratégica da Informação e do Conhecimento pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (2012). Atualmente é professor Associado nível II da Universidade Federal do Paraná. Tem experiência em profissional em desenvolvimento, implantação e gestão de Sistemas de Informação e, Processos de Produção. Enquanto docente, leciona disciplinas alinhadas ao desenvolvimento de Sistemas de Informação e Análise de Dados. Como pesquisador, tem voltado sua atenção aos Métodos e Técnicas de Análise de Dados, aplicados à Gestão do Conhecimento e Inovação.

2 APRESENTAÇÃO

O material ao qual vocês estão tendo acesso apresenta, passo a passo, resoluções para alguns problemas de rede. Por "rede" entendemos um conjunto de pontos interligados (ou que podem ser interligados) entre si. O próprio conceito já carrega uma forte noção de logística, visto que podemos imaginar um ponto de origem (por exemplo, um depósito de produtos acabados), um ponto de destino (por exemplo, uma loja revendedora deste produtos) e uma (ou mais) rotas entre estes dois pontos.

A primeira parte da apostila traz conceitos e exemplos compilados de livros bastante didáticos quanto a estes pontos. Na segunda teremos exemplos extraídos destes livros, resolvidos detalhadamente a cada etapa.

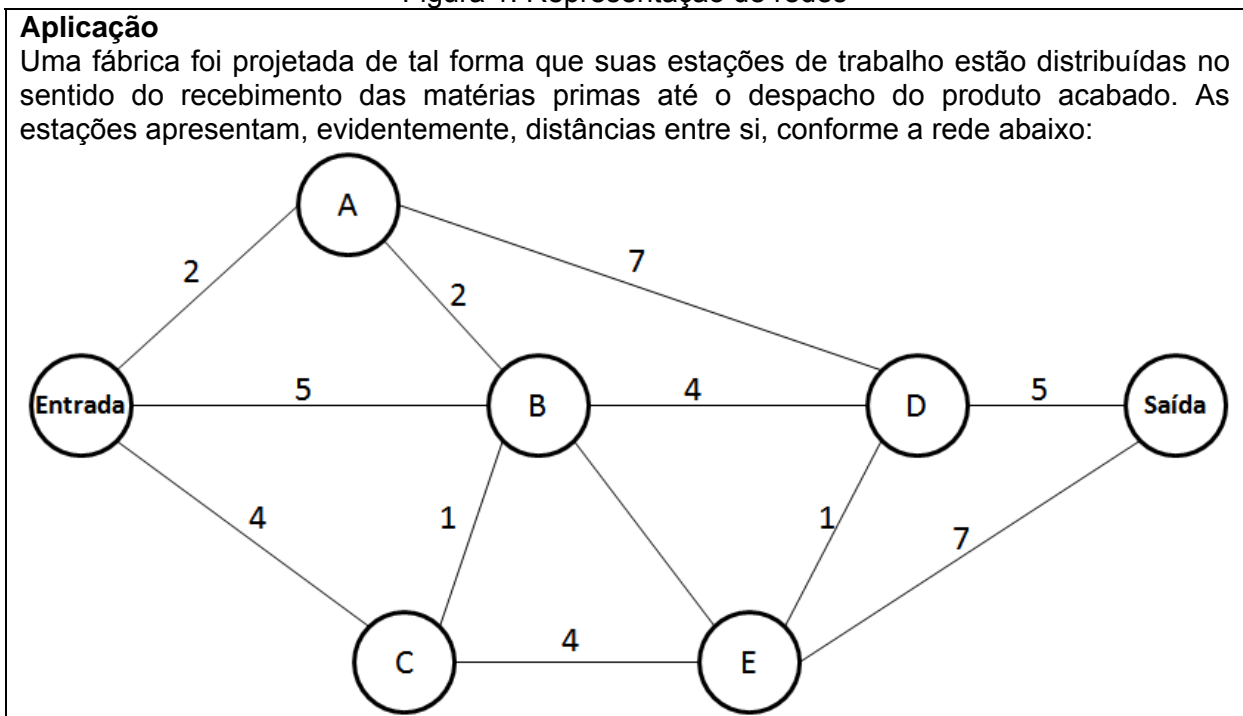
Espero que este material possa ser útil na compreensão básica da aplicação de redes em alguns tópicos da Engenharia de Produção.

Bons estudos...

3 CONCEITOS

Uma rede é formada por um conjunto de pontos interligados entre si. Redes são utilizadas para representar vários problemas específicos em Engenharia de Produção de forma visual. Um exemplo de aplicação de redes para representação de problemas pode ser observado na Figura 1:

Figura 1: Representação de redes



Fonte: adaptado de Hillier e Lieberman (2006, p. 361-362).

Uma rede, portanto, é constituída dos seguintes elementos:

- Nós (ou vértices): pontos que conectam as retas. No caso da Figura 1, temos os nós “Entrada”, “A”, “B”, “C”, “D”, “E”, “Saída”.
- Arcos (ou ligações): retas que conectam os nós. Na Figura 1, temos os arcos “EntradaC”, “AB”, “AD”, “BA”, “DSaída” e assim sucessivamente. Os arcos também podem representar fluxos de elementos que transitam entre os nós.

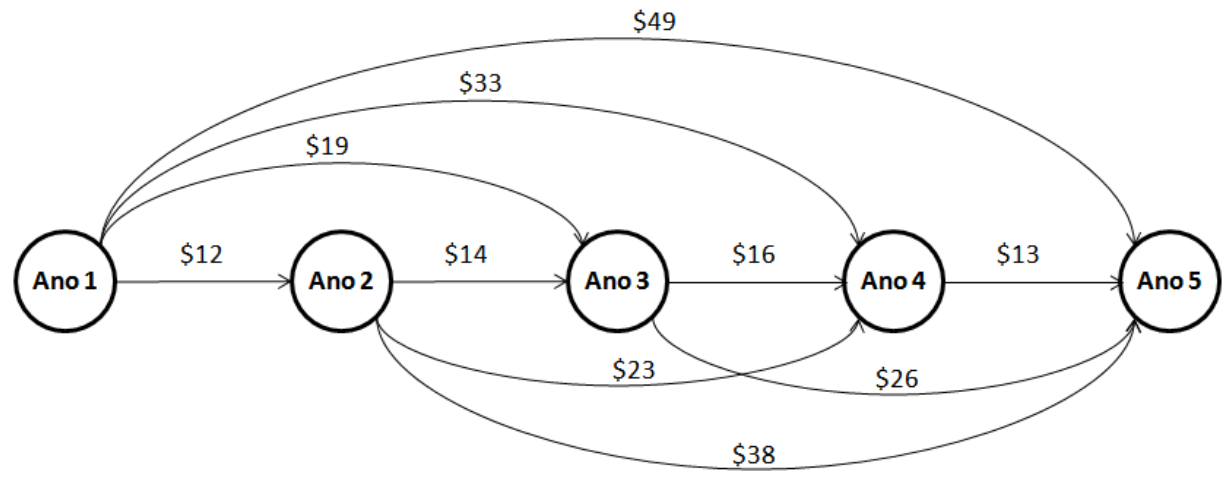
Especificamente, os arcos apresentam algumas características:

- Fluxo: elementos que transitam através dos arcos. Na Figura 1, poderíamos dizer que temos fluxo de produtos semi acabados entre os nós (através dos arcos), ou de veículos transportadores entre os nós.
- Direção: o fluxo pode ocorrer de forma direcionada (quando somente é permitido em uma única direção) ou não direcionada (quando o fluxo ocorre em ambas as direções). A Figura 2 mostra exemplo de rede direcionada:

Figura 2: Redes direcionadas

Aplicação redes direcionadas

Uma indústria analisa a aquisição de uma máquina para ser utilizada em seu processo de produção por 4 anos. Neste período a indústria pode vendê-la ao término de cada ano e comprar uma mais moderna que requer menos manutenção. Os custos de manutenção entre a aquisição e a venda, corrigidos para cada ano, estão distribuídos conforme a rede abaixo:



Fonte: adaptado de Bronson e Naadimuthu (2001, p. 260-265).

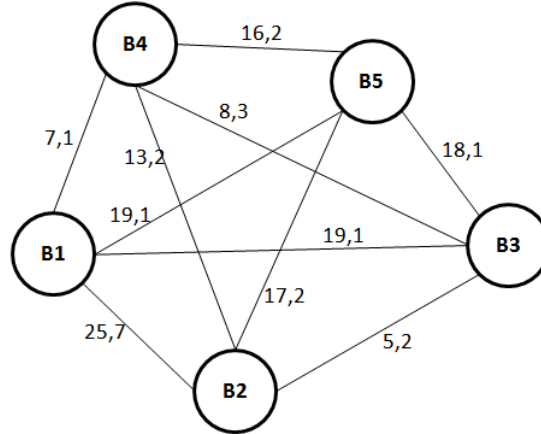
A Figura 2 mostra que, se a máquina for adquirida no “Ano 1” e vendida no “Ano 2” a indústria terá um custo de manutenção de \$12. Por sua vez, se ela desejar se desfazer da máquina no “Ano 3”, o custo será de \$19 – mais caro, por exemplo, do que vender a máquina no “Ano 2”, comprar nova máquina neste mesmo ano e vendê-la no “Ano 3”. Trata-se de uma rede direcionada pelo fato de só permitir o fluxo em uma direção ao longo dos anos. A representação é feita da seguinte maneira “Ano1→Ano2” (com custo de \$12), “Ano2→Ano5” (com custo de \$38) e assim sucessivamente.

Já uma rede não direcionada por ser visualizada na Figura 3:

Figura 3: Redes não direcionadas

Aplicação redes não direcionadas

Uma indústria mineradora detectou 5 jazidas de minério de ferro dispersas em uma região e distantes umas das outras conforme o esquema a seguir:



Fonte: adaptado de Bronson e Naadimuthu (2001, p. 260-265)

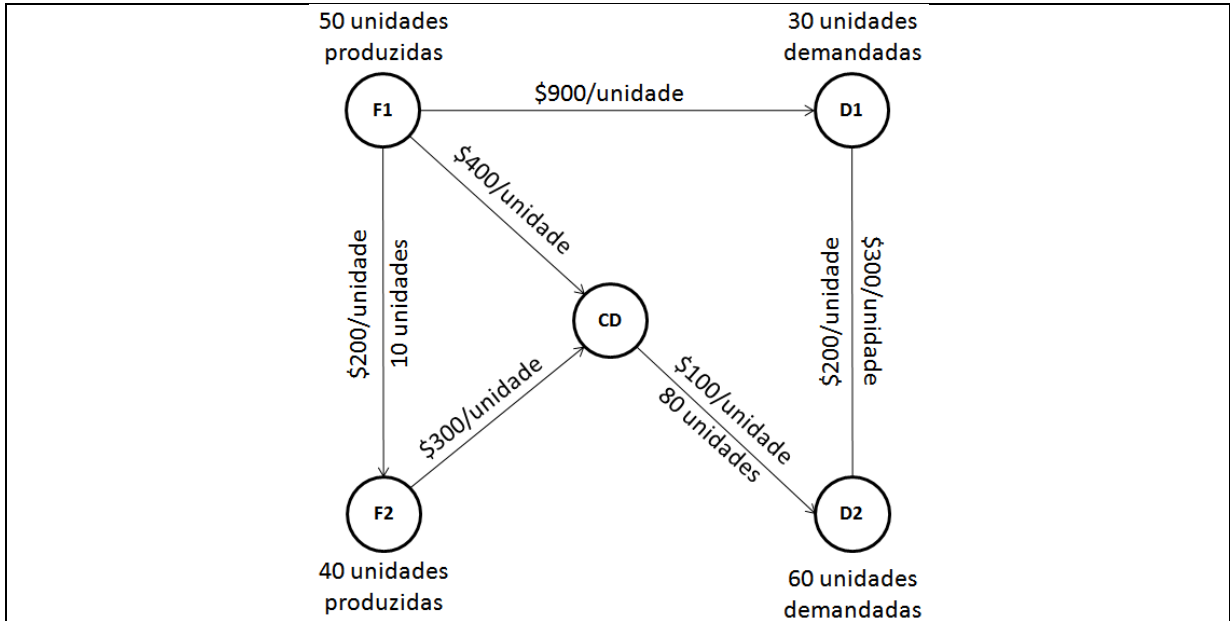
Percebam que o fluxo de entrega pode ser efetuado em ambas as direções, por exemplo, da jazida 1 (B1) para a jazida 2 (B2), como da jazida 2 (B2) para a jazida 1 (B1) e assim sucessivamente.

É importante notar que uma rede pode possuir, ao mesmo tempo, arcos direcionados e não direcionados, conforme ilustrado na Figura 4:

Figura 4: Redes com arcos direcionados e não direcionados

Aplicação redes com arcos direcionados e não direcionados

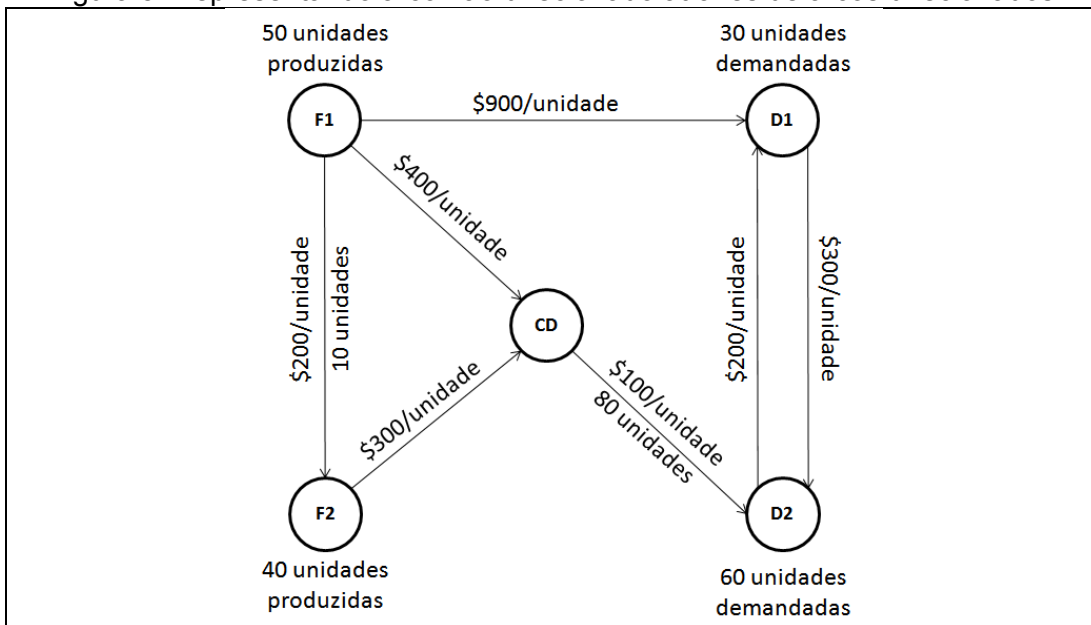
Uma indústria produz determinado item em duas unidades de fabricação. Os itens produzidos podem ser despachados para 2 armazéns e/ou para um centro de distribuição. De acordo com a demanda, os armazéns podem suprir a necessidade mutua deste item. Já o centro de distribuição somente pode fornecer a um único armazém. Finalmente uma das fábricas também pode produzir itens para a outra. Os custos de transporte entre um e outro ponto, bem como as quantidades demandas e produzidas são mostradas a seguir:



Fonte: adaptado de Hillier e Lieberman (2006, p. 361-362).

Notem que entre os nós D1 e D2 não existe direção no arco, ou seja, o fluxo pode acontecer entre um e outro nó – podemos levar itens do depósito D1 para o D2 (a um custo de \$300 por unidade transportadas) ou do depósito D2 para o D1 (a um custo de \$200 por unidade transportadas). Um arco não direcionado, como o do exemplo mostrado na Figura 4, pode ser substituído por dois arcos direcionados, conforme visualizado na Figura 5:

Figura 5: Representando arco não direcionado através de arcos direcionados



Fonte: adaptado de Hillier e Lieberman (2006, p. 361-362).

4 APLICAÇÕES

Os modelos de rede são utilizados em inúmeras aplicações. Vamos abordar algumas aplicações clássicas.

4.1 Problemas de extensão mínima

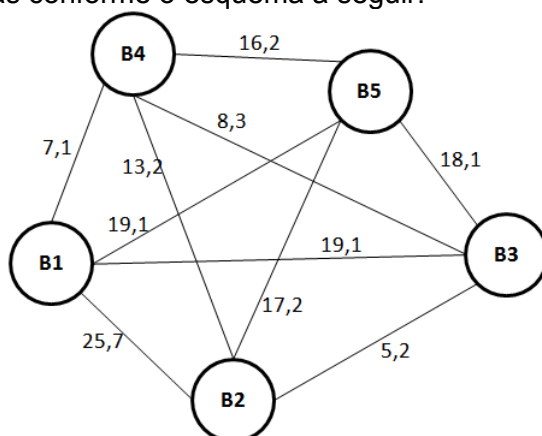
A resolução de problemas desta natureza requer que certos pressupostos sejam atendidos:

- 1º. Nenhum ramo é direcionado;
- 2º. Cada ramo apresenta um custo não negativo associado;
- 3º. Existem ramos em quantidade suficiente para que a solução seja encontrada.

O objetivo destes problemas é obter uma rede que conecte todos os nós ao menor custo total possível. Vamos tomar como exemplo a situação apresentada na Figura 3:

Problema

Uma indústria mineradora detectou 5 jazidas de minério de ferro dispersas em uma região e distantes umas das outras conforme o esquema a seguir:



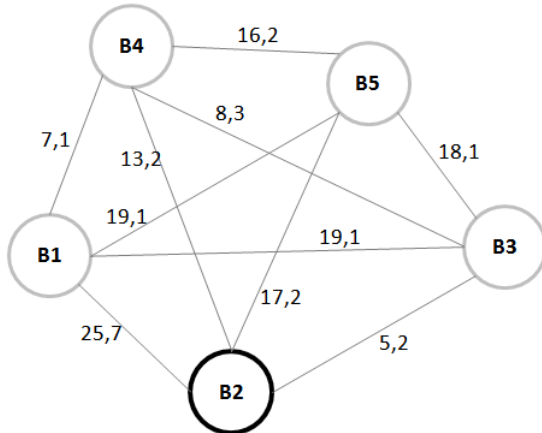
Esta indústria mineradora necessita construir estradas entre as jazidas de modo a minimizar o impacto ambiental, com a menor distância entre elas. Como definir as estradas a serem construídas de modo a minimizar a distância entre as jazidas?

Fonte: adaptado de Bronson e Naadimuthu (2001, p. 260)

O conjunto de regras (heurística) a seguir resolve este problema:

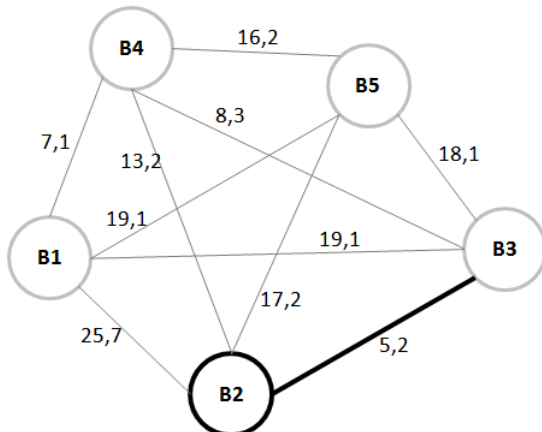
1º passo: escolha um nó qualquer

Escolheremos o nó B2



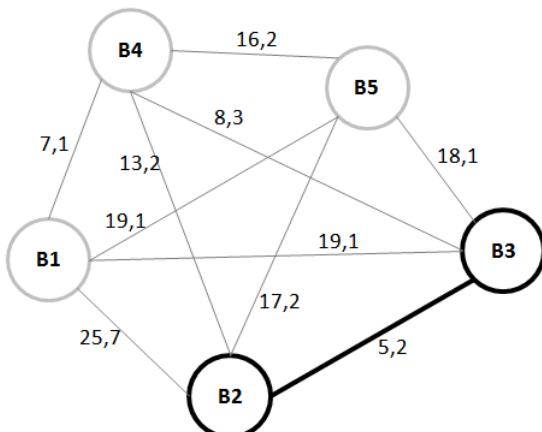
2º passo: escolha o arco de menor custo que parte do nó escolhido

Escolheremos o arco B2B3



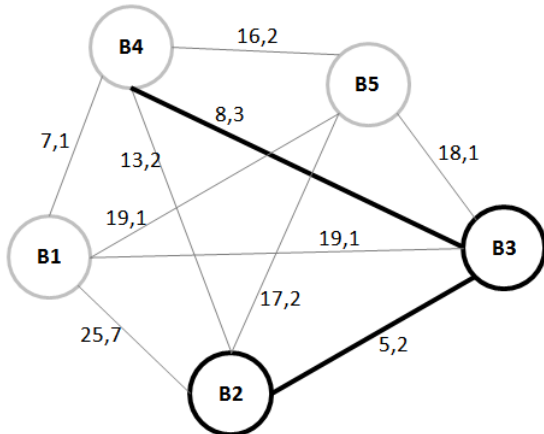
3º passo: escolha o nó ligado pelo arco anteriormente escolhido

Escolheremos o nó B3

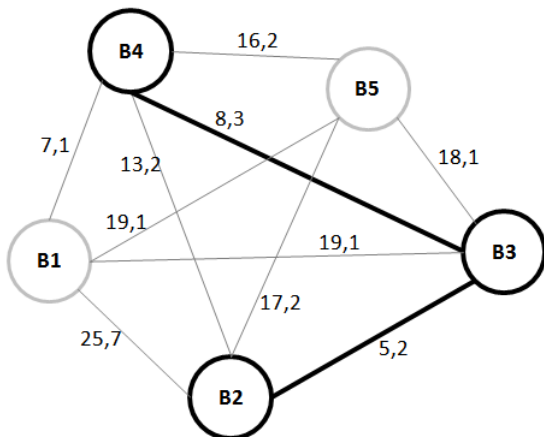


Todos os nós foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos e interromper o processo. Se não, seguir para o próximo passo.

4º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos
 Escolheremos o arco B3B4

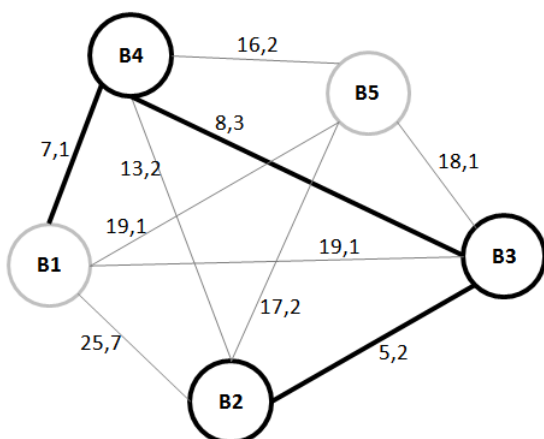


5º passo: escolha o nó ligado pelo arco anteriormente escolhido
 Escolheremos o nó B4

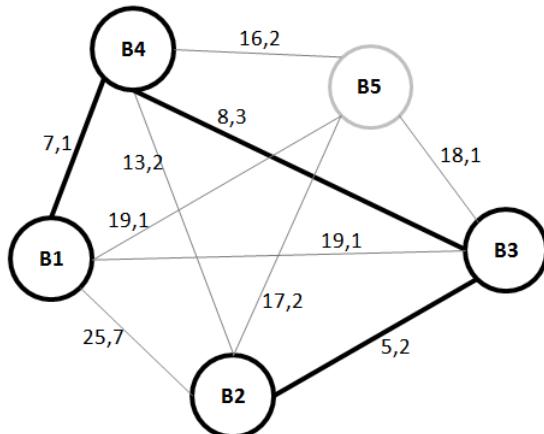


Todos os nós foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos e interromper o processo. Se não, seguir para o próximo passo.

6º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos
 Escolheremos o arco B4B1

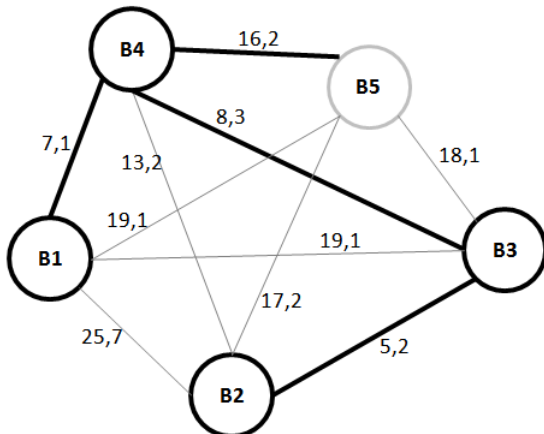


7º passo: escolha o nó ligado pelo arco anteriormente escolhido
 Escolheremos o nó B1

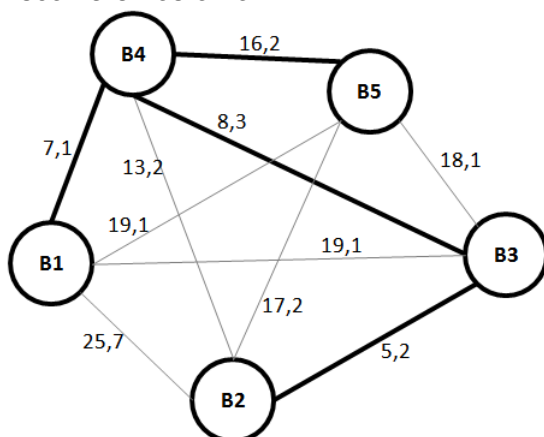


Todos os nós foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos e interromper o processo. Se não, seguir para o próximo passo.

8º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos
 Escolheremos o arco B4B5



7º passo: escolha o nó ligado pelo arco anteriormente escolhido
 Escolheremos o nó B1



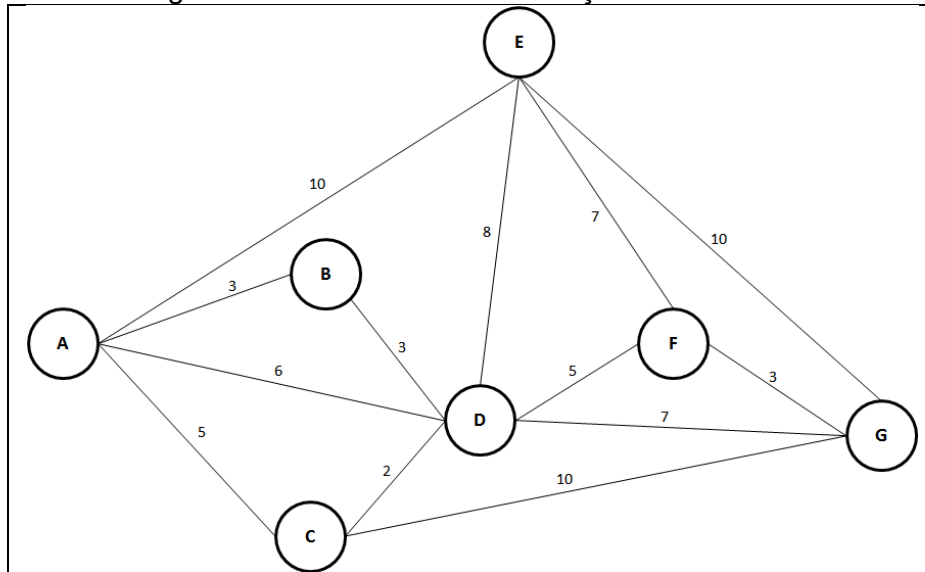
Todos os nós foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos e interromper o processo. Se não, seguir para o próximo passo.

No exemplo, todos os nós foram escolhidos. As estradas que devem ser construídas são B2B3 (5,2 km), B3B4 (8,3 km), B4B1 (7,1 km) e B4B5 (16,2 km), totalizando 36,8 km.

Exercício

Uma indústria esta elaborando o planejamento de layout de seus processos de produção e, dentre estas atividades, ela deseja estabelecer rotas de tráfego de matérias primas e produtos semi acabados entre as estações de trabalho minimizando as distâncias entre elas. A Figura 6 apresenta um esquema destacando as estações de trabalho, bem como as distâncias:

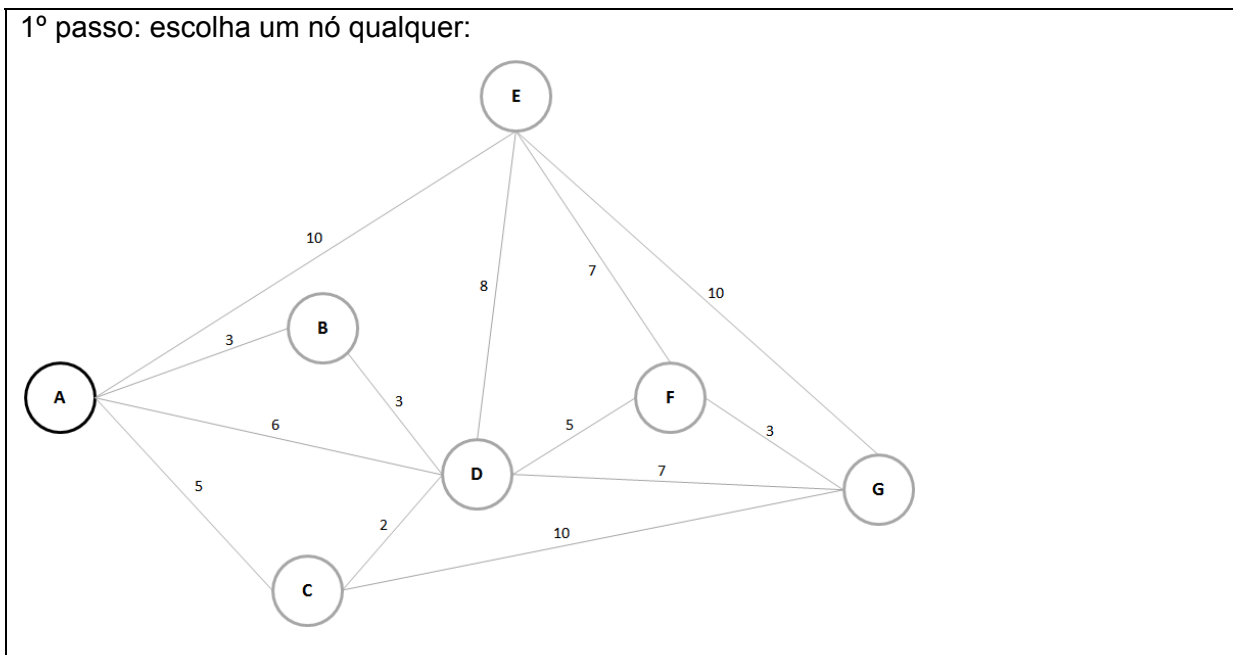
Figura 6: Distâncias entre as estações de trabalho



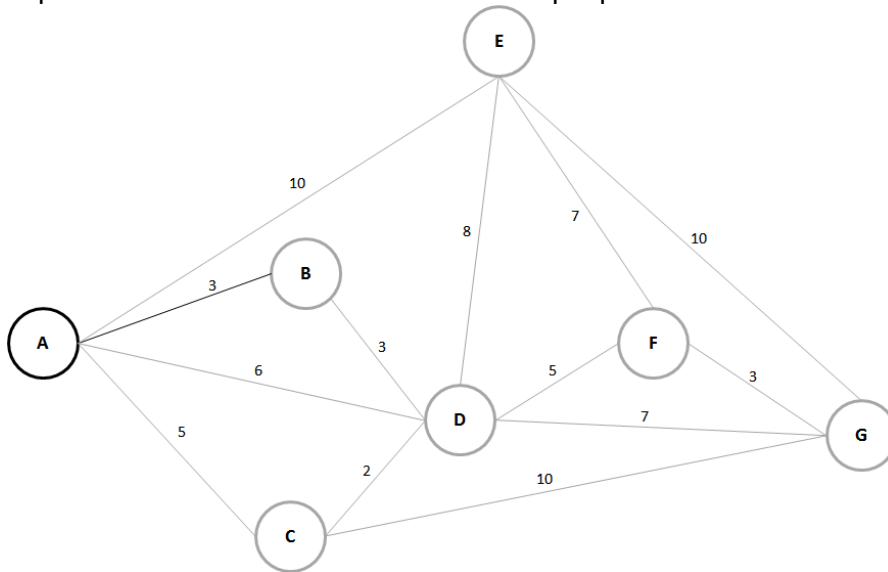
Fonte: adaptado de Bronson e Naadimuthu (2001, p. 260)

Vamos à solução:

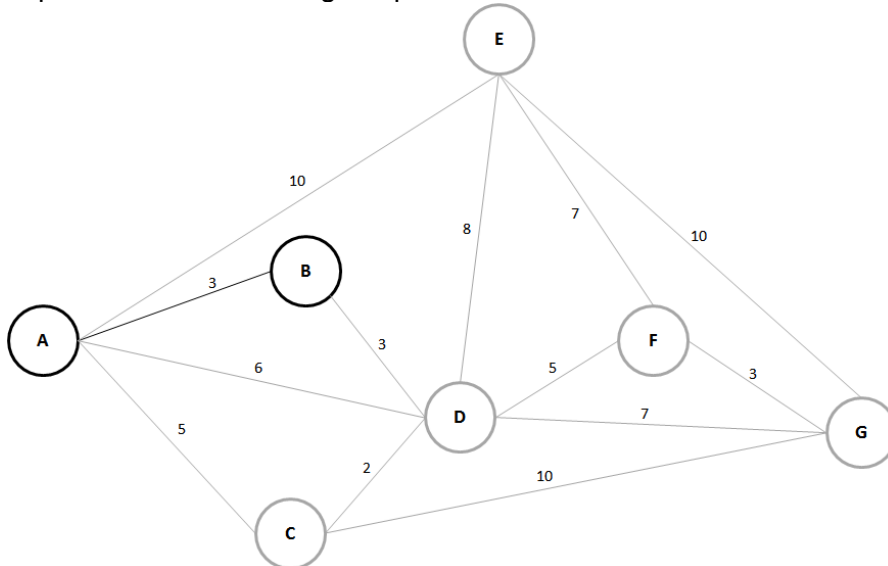
1º passo: escolha um nó qualquer:



2º passo: escolha o arco de menor custo que parte do nó escolhido:

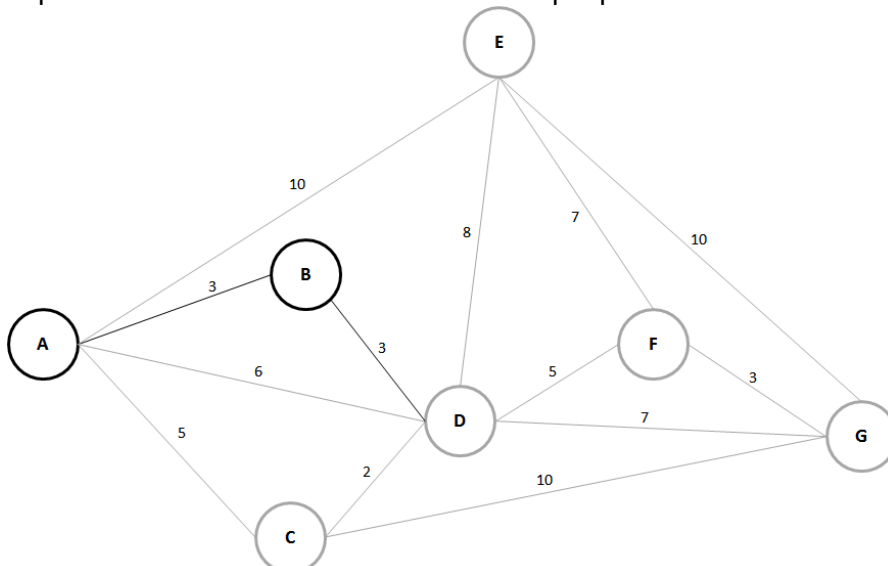


3º passo: escolha o nó ligado pelo arco escolhido:

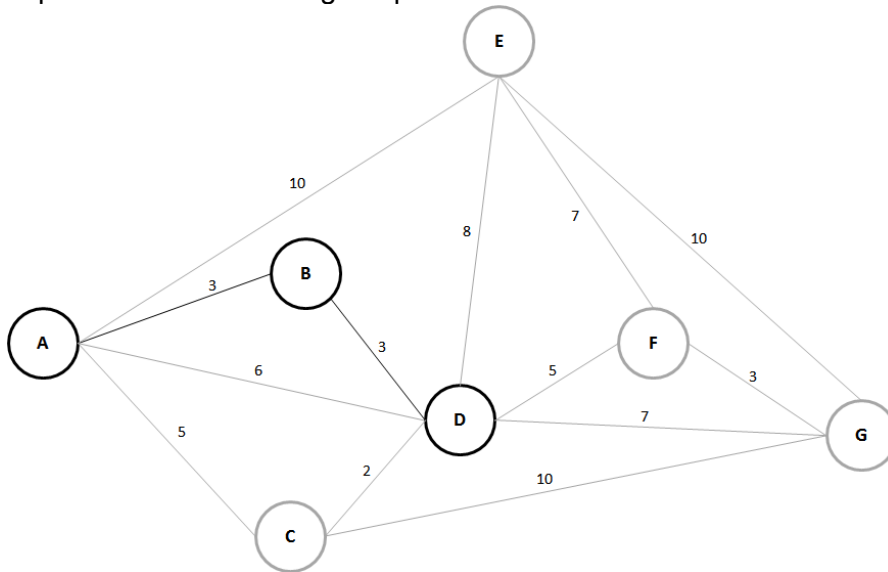


Todos os nós já foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos. Se não, repetir passo 2.

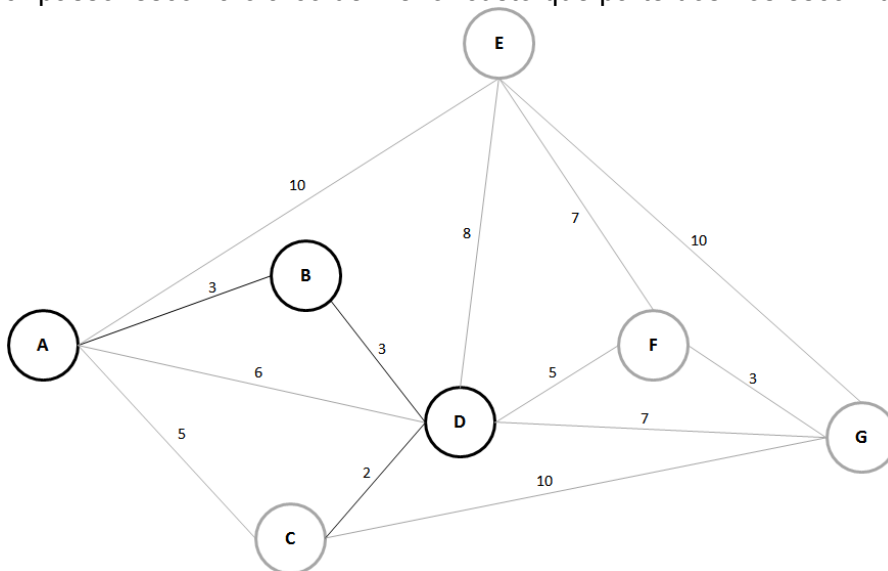
4º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos:



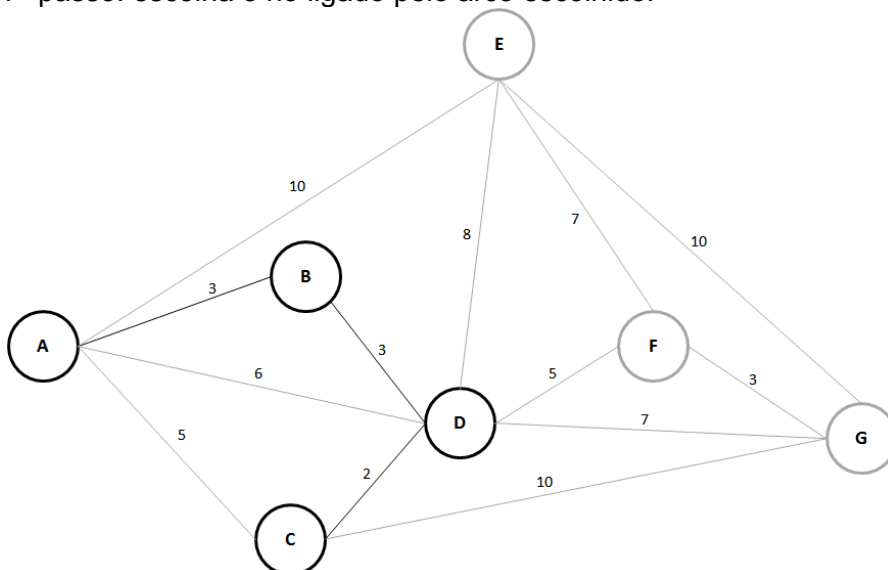
5º passo: escolha o nó ligado pelo arco escolhido:



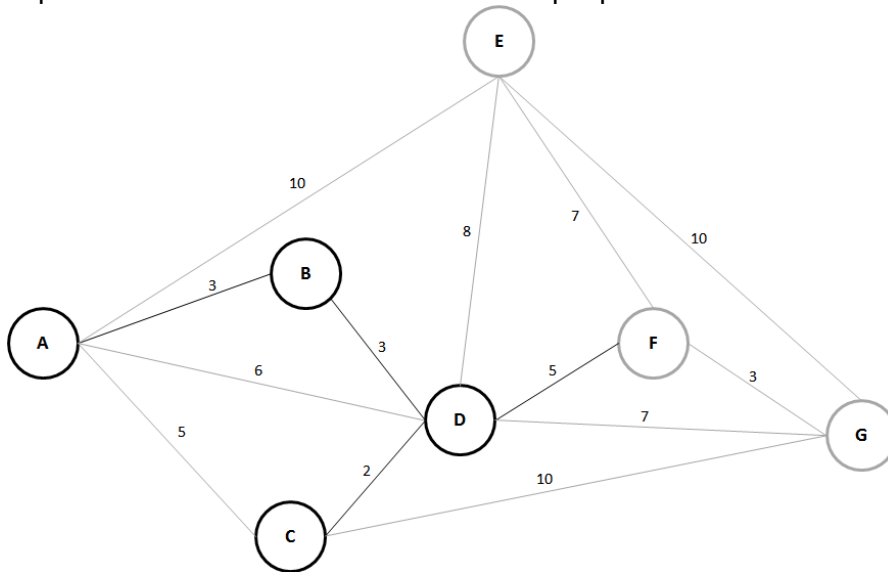
Todos os nós já foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos. Se não, repetir passo 2.
6º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos:



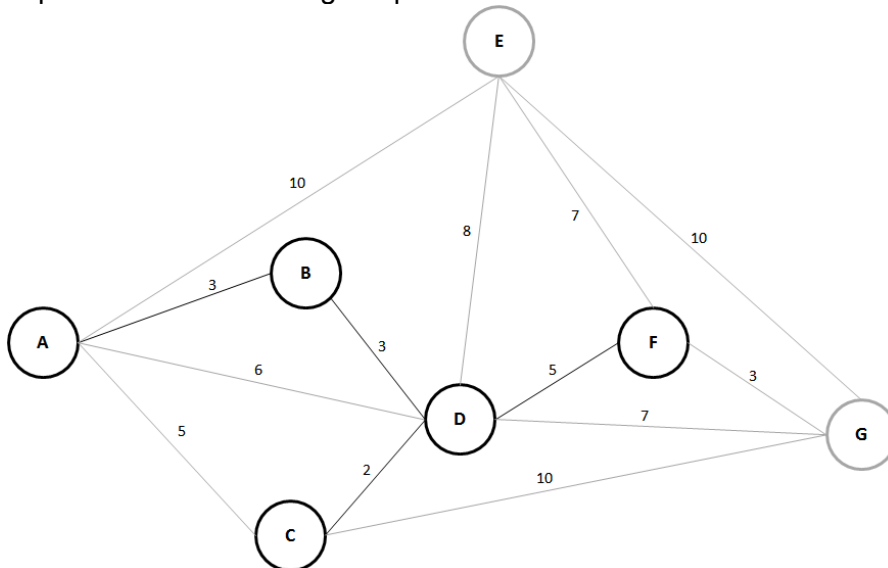
7º passo: escolha o nó ligado pelo arco escolhido:



Todos os nós já foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos. Se não, repetir passo 2.
 8º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos:

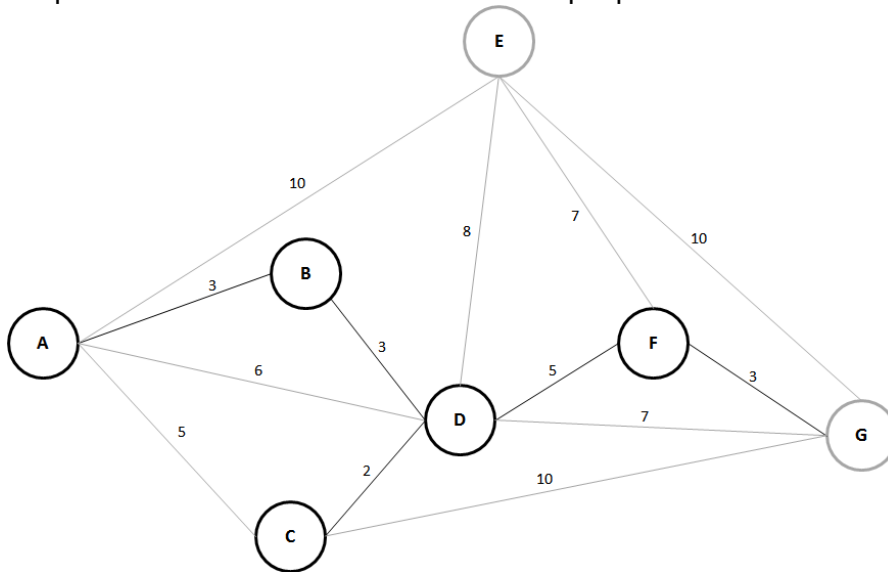


Percebam que o arco CA não foi escolhido porque o mesmo liga dois nós já visitados!!!
 9º passo: escolha o nó ligado pelo arco escolhido:

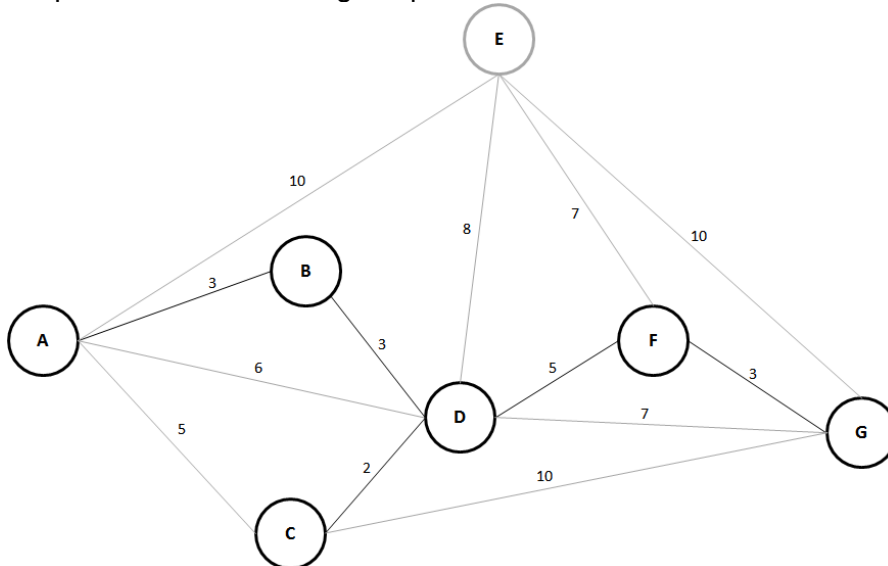


Todos os nós já foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos. Se não, repetir passo 2.

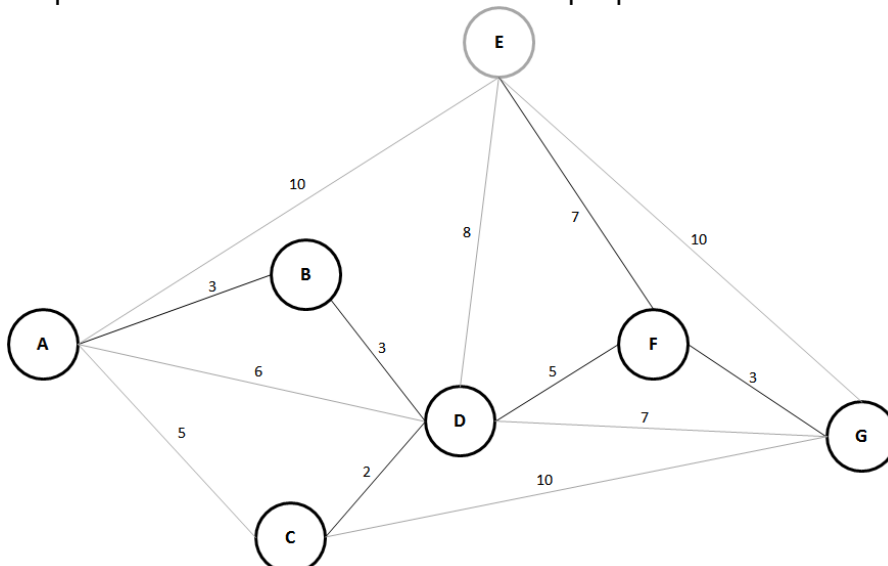
10º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos:



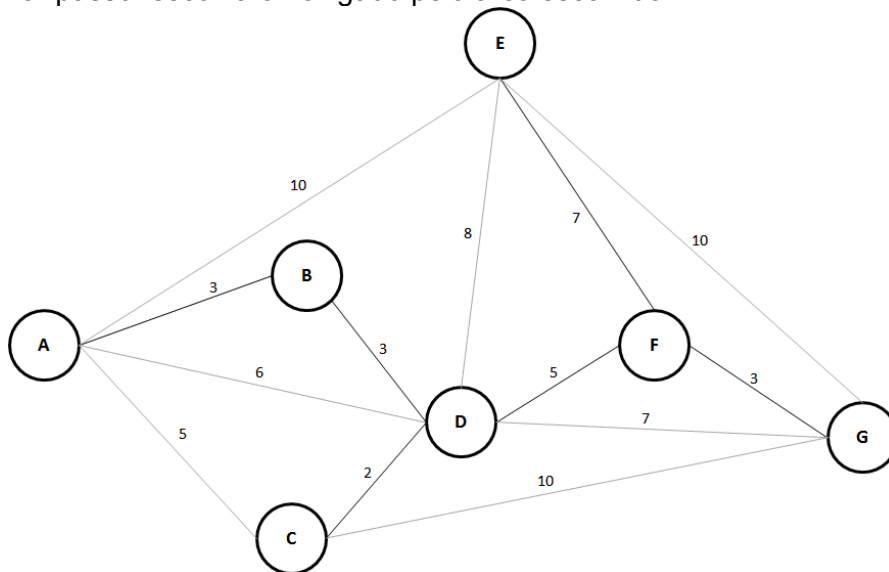
11º passo: escolha o nó ligado pelo arco escolhido:



Todos os nós já foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos. Se não, repetir passo 2.
12º passo: escolha o arco de menor custo que parte dos nós escolhidos:



13º passo: escolha o nó ligado pelo arco escolhido:



Todos os nós já foram escolhidos? Se sim, contabilizar os custos. Se não, repetir passo 2. As ligações entre as estações de trabalho que minimizam as distâncias são AB (3), BD (3), DC (2), DF (5), FG (3) e FE (7), portanto, 23.

4.2 Problemas de percurso mínimo

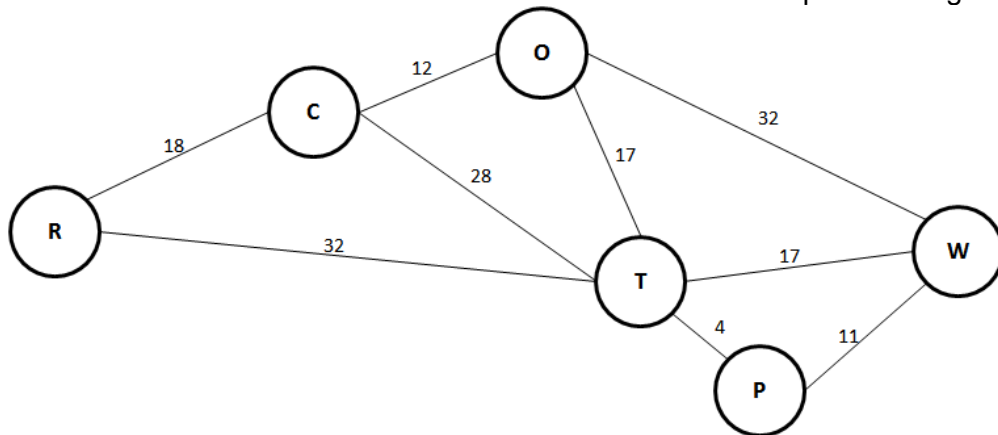
Problemas desta natureza pressupõem que:

- 1º. Apesar dos ramos não serem direcionados, existe uma direção no fluxo, partindo de um nó chamado de *origem* e chegando a um nó identificado como *destino*.
- 2º. Cada ramo apresenta um custo não negativo associado;
- 3º. Existem ramos em quantidade suficiente para que a solução seja encontrada.

O objetivo destes problemas é obter uma rede que encontre o caminho mais curto entre a origem e o destino. Vamos tomar como exemplo, a seguinte situação:

Problema

Uma empresa de logística necessita determinar o roteiro de entrega entre uma origem (R) e um destino (W). Entre estes pontos, existem algumas cidades. As distâncias entre as cidades são fornecidas no esquema a seguir:



Fonte: adaptado de Bronson e Naadimuthu (2001, p. 262).

O conjunto de regras (heurística) a seguir resolve este problema:

Inicialização

Para cada nó, listar todos os ramos e respectivos custos:

R	C	O	T	P	W
RC 18	CR 18	OC 12	TR 32	PT 4	WO 32
RT 32	CT 28	OT 17	TC 28	PW 11	WT 17
	CO 12	OW 32	TO 17		WP 11
			TW 17		
			TP 4		

Eliminar os ramos que não irão compor a solução:

- Se parte de R, então eliminar CR e TR;
- Se a chegada é W, então eliminar WO, WT e WP

R	C	O	T	P	W
RC 18	CR 18	OC 12	TR 32	PT 4	WO 32
RT 32	CT 28	OT 17	TC 28	PW 11	WT 17
	CO 12	OW 32	TO 17		WP 11
			TW 17		
			TP 4		

O quadro inicial assume os seguintes dados:

R	C	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OC 12	TC 28	PT 4	
RT 32	CO 12	OT 17	TO 17	PW 11	
		OW 32	TW 17		
			TP 4		

1º passo

Assinalar a coluna origem, atribuindo valor 0 a ela:

* R (0)	C	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OC 12	TC 28	PT 4	
RT 32	CO 12	OT 17	TO 17	PW 11	
		OW 32	TW 17		
			TP 4		

2º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* R (0)	C	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OC 12	TC 28	PT 4	
RT 32	CO 12	OT 17	TO 17	PW 11	
		OW 32	TW 17		
			TP 4		
0+18=18			TP 4		

3º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* R (0)	C	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OC 12	TC 28	PT 4	
RT 32	CO 12	OT 17	TO 17	PW 11	
		OW 32	TW 17		
			TP 4		

4º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* R (0)	* C (18)	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OC 12	TC 28	PT 4	
RT 32	CO 12	OT 17	TO 17	PW 11	
		OW 32	TW 17		
			TP 4		

5º passo

Eliminar todos os ramos cujo destino é o mesmo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OC 12	TC 28	PT 4	
RT 32	CO 12	OT 17	TO 17	PW 11	
		OW 32	TW 17		
			TP 4		

6º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* R (0)	* C (18)	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TO 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
			TP 4		
0+32=32	18+12=30				

7º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	O	T	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TO 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
			TP 4		
0+32=32	18+12=30				

8º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	T	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TO 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
			TP 4		

9º passo

Eliminar todos os ramos cujo destino é o mesmo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	T	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TO 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
			TP 4		

10º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	T	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TW 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TP 4	PW 11	
		0+32=32	18+28=46	30+17=47	

11º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	T	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TW 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TP 4	PW 11	

12º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TW 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TP 4	PW 11	

13º passo

Eliminar todos os ramos cujo destino é o mesmo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	P	W
RC 18	CT 28	OT 17	TW 17	PT 4	
RT 32	CO 12	OW 32	TP 4	PW 11	

14º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	P	W
RC 18	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
RT 32			TP 4		
		30+32=62	32+4=36		

15º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	P	W
RC 18	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
RT 32			TP 4		

16º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	* P (36)	W
RC 18	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
RT 32			TP 4		

17º passo

Eliminar todos os ramos cujo destino é o mesmo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	* P (36)	W
RC 18	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
RT 32			TP 4		

Não existem ramos a serem eliminados!!!

18º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	* P (36)	W
RC 18	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
RT 32			TP 4		
		30+32=62	32+17=49	36+11=47	

19º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	* P (36)	W
RC 18	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
RT 32			TP 4		

20º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* R (0)	* C (18)	* O (30)	* T (32)	* P (36)	* W (47)
RC 18	CO 12	OW 32	TW 17	PW 11	
RT 32			TP 4		

Existem colunas a serem assinaladas? Se sim, continuar com o processo. Se não, o resultado final é um trajeto de 47 km, chegando a W por PW, TP e RT.

Exercício

Vamos retomar o exemplo mostrado na Figura 2: uma indústria analisa a aquisição de uma máquina para ser utilizada em seu processo de produção por 4 anos. Neste período a indústria pode vendê-la ao término de cada ano e comprar uma mais moderna que requer menos manutenção. Os custos de manutenção entre a aquisição e a venda, corrigidos para cada ano, estão distribuídos conforme o Quadro 1, a seguir:

Quadro 1: Custos de manutenção

Inicial/Final	1	2	3	4	5
1	–	12	19	33	49
2	–	–	14	23	38
3	–	–	–	16	26
4	–	–	–	–	13

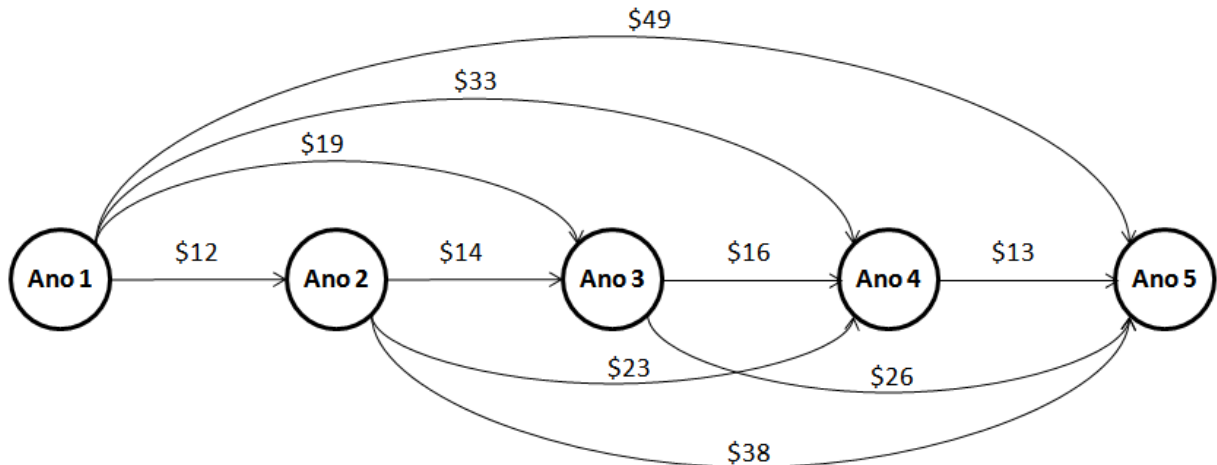
Fonte: adaptado de Bronson e Naadimuthu (2001, p. 260).

Encontre uma política de substituição que minimiza o custo total de manutenção durante o período desejado.

A solução, utilizando o método do percurso mínimo, é apresentada a seguir:

Inicialização

Desenhar a rede que representa o problema:



Para cada nó, listar todos os ramos e respectivos custos:

A1	A2	A3	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				

1º passo

Assinalar a coluna origem, atribuindo valor 0 a ela:

* A1 (0)	A2	A3	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				

2º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* A1 (0)	A2	A3	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				
0+12=12				

3º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* A1 (0)	A2	A3	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				
0+12=12				

4º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* A1 (0)	* A2 (12)	A3	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				

5º passo

Eliminar todos os ramos cujo destino é o mesmo da coluna assinalada:
Como não existem ramos a serem excluídos, vamos ao próximo passo.

6º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* A1 (0)	* A2 (12)	A3	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				
0+19=19	12+14=26			

7º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* A1 (0)	* A2 (12)	A3	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				

8º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				

9º passo

Eliminar todos os ramos cujo destino é o mesmo da coluna assinalada:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	A4	A5
A1A2 12	A2A3 14	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A4 23	A3A5 26		
A1A4 33	A2A5 38			
A1A5 49				

10º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	A4	A5
A1A2 12	A2A4 23	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A5 38	A3A5 26		
A1A4 33				
A1A5 49				
0+33=33	12+23=35	19+16=35		

11º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	A4	A5
A1A2 12	A2A4 23	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A5 38	A3A5 26		
A1A4 33				
A1A5 49				

12º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	* A4 (33)	A5
A1A2 12	A2A4 23	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A5 38	A3A5 26		
A1A4 33				
A1A5 49				

13º passo

Eliminar todos os ramos cujo destino é o mesmo da coluna assinalada:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	* A4 (33)	A5
A1A2 12	A2A4 23	A3A4 16	A4A5 13	
A1A3 19	A2A5 38	A3A5 26		
A1A4 33				
A1A5 49				

14º passo

Somar o custo das colunas assinaladas ao ramo, não assinalado, de menor custo:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	* A4 (33)	A5
A1A2 12	A2A5 38	A3A5 26	A4A5 13	
A1A3 19				
A1A4 33				
A1A5 49				
0+49=49	12+38=50	19+26=45	33+13=46	

15º passo

Assinalar o ramo de menor custo da coluna assinalada:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	* A4 (33)	A5
A1A2 12	A2A5 38	A3A5 26	A4A5 13	
A1A3 19				
A1A4 33				
A1A5 49				

16º passo

Assinalar a coluna correspondente ao ramo anteriormente assinalado, atribuindo o valor da soma anteriormente efetuada:

* A1 (0)	* A2 (12)	* A3 (19)	* A4 (33)	* A5 (45)
A1A2 12	A2A5 38	A3A5 26	A4A5 13	
A1A3 19				
A1A4 33				
A1A5 49				

Existem colunas a serem assinaladas? Se sim, continuar com o processo. Se não, o resultado final é adquirir a máquina no ano 1, vendê-la no ano 3 (A1A3), adquirir nova máquina no ano 3 e vendê-la no ano 5 (A3A5), totalizando um custo de R\$ 45 em manutenção.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRONSON, R.; NAADIMUTHU, G. **Investigação operacional**. Alfragide: McGraw-Hill, 2001.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 8. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.