

OLIVER MATIAS VAN KAICK

**MÉTRICAS PARA SIMPLIFICAÇÃO
DE MALHAS TRIANGULARES**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Programa de Pós-Graduação em Informática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Hélio Pedrini

CURITIBA

2005



Ministerio da Educação
Universidade Federal do Paraná
Mestrado em Informatica

PARECER

Nos, abaixo assinados, membros da Banca Examinadora da defesa de Dissertação de Mestrado em Informatica, do aluno *Oliver Matias Van Kaick*, avaliamos o trabalho intitulado, "*METRICAS PARA SIMPLIFICAÇÃO DE MALHAS TRIANGULARES*", cuja defesa foi realizada no dia 22 de março de 2005, às treze e trinta horas, no Anfiteatro A do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Após a avaliação, decidimos pela aprovação do candidato.

Curitiba, 22 de março de 2005

Prof Dr Hélio Pedrini
DINF/UFPR – Orientador

Prof Dr Luis Gustavo Nonato
USP – Membro Externo

Prof Dr André Luiz Pires Guedes
DINF/UFPR – Membro Interno



SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
GLOSSÁRIO	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Descrição do problema	1
1.2 Objetivos e contribuições	10
1.3 Organização do trabalho	11
2 TRABALHOS RELACIONADOS	12
2.1 Conceitos	12
2.2 Discussão da literatura	26
3 METODOLOGIA UTILIZADA	43
3.1 Taxas de simplificação	44
3.2 Modelos utilizados	45
3.3 Esquema geral do método de simplificação	47
3.4 Operações	47
3.5 Atualização da porção modificada	48
3.6 Preservação de bordas	49
3.7 Métricas	51
3.8 Cálculo do erro da aproximação	58
3.9 Detalhes de implementação	59
4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS	64
4.1 Resumo dos resultados	65
4.2 Comparação da qualidade	67
4.3 Comparação visual	80
4.4 Efeito da variação de opções de simplificação	91
4.5 Discussão dos resultados	100
5 CONCLUSÕES	106

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108
A POSIÇÃO ÓTIMA PARA A MÉTRICA QUÁDRICA	114

LISTA DE FIGURAS

1.1	Malhas triangulares: (a) Modelo de terreno; (b) Modelo de objeto 3D.	3
1.2	Simplificação de diversos conjuntos de dados.	5
1.3	Conceito de LOD: (a) Modelo original; (b) Modelo menos detalhado, com 5% de faces do original; (c) Modelo com ainda menos detalhes, apresentando 1% de faces do original; (d) Utilização desses modelos em uma cena.	7
2.1	Elementos de uma malha triangular: (a) Vértice em questão v e sua vizinhança; (b) V_v ou $\lfloor v \rfloor$; (c) E_v ou $\lceil v \rceil$; (d) T_v ou $\llbracket v \rrbracket$	13
2.2	Elementos de uma malha triangular: (a) Triângulo em questão t ; (b) V_t ou $\lfloor t \rfloor$	13
2.3	Situações que não podem ocorrer em uma 2-variedade: (a) Junção em T ; (b) Vértice com triângulos não adjacentes; (c) Aresta compartilhada por mais que dois triângulos.	14
2.4	Malha triangular de <i>genus</i> 2: (a) Vista do objeto; (b) Malha triangular.	14
2.5	Simplificação generalizada: (a) Um conjunto de cubos espaçados; (b) Simplificação do conjunto de cubos modificando a topologia.	15
2.6	Exemplo em que a distância Hausdorff não é simétrica.	18
2.7	Operação de <i>contração de aresta</i> , de (a) para (b). Operação de <i>partição de vértice</i> , de (b) para (a).	19
2.8	Operação de <i>contração de aresta direcionada</i>	20
2.9	Operação de <i>contração de face</i>	20
2.10	Operação de <i>remoção de vértice</i>	20
2.11	Operação de <i>troca de aresta</i>	20
2.12	Inversão de face que pode ocorrer na triangulação ao aplicar uma operação de contração de aresta para a aresta e_{ij}	21
2.13	Teste para determinar se ocorrerá uma inversão de face ao efetuar a contração da aresta e_{ij}	22
2.14	Vetores envolvidos no cálculo do teste de inversão de face.	22
2.15	Triangulação que não é uma variedade que pode surgir ao aplicar uma operação de contração de aresta para a aresta e_{ij}	23
2.16	Se a aresta e_{ij} for contraída e, depois, a aresta e_{kl} , surgirá uma triangulação que não é uma variedade.	23
2.17	Exemplo do cálculo da normal do vértice v	27
2.18	Operação de agrupamento de vértices.	36
2.19	Triangulação hierárquica <i>quadtree</i> : (a) Nível 0; (b) Nível 1; (c) Nível 2.	37
2.20	Triangulação hierárquica <i>bintree</i> : (a) a (d) Níveis 0 a 3.	38

2.21	Triangulação <i>quadtrees</i> com falha: (a) Visão 2D; (b) Visão 3D.	38
2.22	Triangulação <i>quadtrees</i> restrita.	39
2.23	Malhas triangulares de diferentes resoluções em uma pirâmide.	40
3.1	Diagrama da metodologia utilizada.	44
3.2	Modelos de teste: (a) <i>Buddha</i> ; (b) <i>Bunny</i> ; (c) <i>Cow</i> ; (d) <i>Crater Lake</i> ; (e) <i>Dragon</i> ; (f) <i>Foot</i> ; (g) <i>Globe</i> ; (h) <i>Horse</i> ; (i) <i>Turbine Blade</i>	46
3.3	Esquemas de atualização da porção modificada de uma malha triangular.	48
3.4	Rótulos dos vértices de uma malha triangular com bordas.	50
3.5	Triangulação com grande número de componentes nas bordas.	50
3.6	Métrica de curvatura discreta. Curvatura média: (a) Ângulo para a aresta <i>e</i> . Curvatura Gaussiana: (b) Vértice interno; (c) Vértice de borda.	54
3.7	Exemplo de simplificação para o modelo <i>Bunny</i>	60
3.8	Exemplo de vizinhança de uma malha triangular.	60
3.9	Estrutura de dados SDS para o exemplo da figura 3.8.	61
3.10	Estrutura de dados utilizada.	62
3.11	Estrutura de dados utilizada sem os ponteiros envolvendo arestas da malha.	63
4.1	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Buddha</i> ; (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) Modelo <i>Cow</i> ; (d) Modelo <i>Crater Lake</i> ; (e) Modelo <i>Dragon</i> ; (f) Modelo <i>Foot</i>	68
4.2	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Globe</i> ; (b) Modelo <i>Horse</i> ; (c) Modelo <i>Turbine Blade</i>	69
4.3	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Buddha</i> ; (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) Modelo <i>Cow</i> ; (d) Modelo <i>Crater Lake</i> ; (e) Modelo <i>Dragon</i> ; (f) Modelo <i>Foot</i>	70
4.4	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Globe</i> ; (b) Modelo <i>Horse</i> ; (c) Modelo <i>Turbine Blade</i>	71
4.5	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Buddha</i> ; (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) Modelo <i>Cow</i> ; (d) Modelo <i>Crater Lake</i> ; (e) Modelo <i>Dragon</i> ; (f) Modelo <i>Foot</i>	72
4.6	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Globe</i> ; (b) Modelo <i>Horse</i> ; (c) Modelo <i>Turbine Blade</i>	73
4.7	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Buddha</i> ; (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) Modelo <i>Cow</i> ; (d) Modelo <i>Crater Lake</i> ; (e) Modelo <i>Dragon</i> ; (f) Modelo <i>Foot</i>	74
4.8	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Globe</i> ; (b) Modelo <i>Horse</i> ; (c) Modelo <i>Turbine Blade</i>	75

4.9	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Buddha</i> ; (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) Modelo <i>Cow</i> ; (d) Modelo <i>Crater Lake</i> ; (e) Modelo <i>Dragon</i> ; (f) Modelo <i>Foot</i>	76
4.10	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Globe</i> ; (b) Modelo <i>Horse</i> ; (c) Modelo <i>Turbine Blade</i>	77
4.11	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Buddha</i> ; (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) Modelo <i>Cow</i> ; (d) Modelo <i>Crater Lake</i> ; (e) Modelo <i>Dragon</i>	78
4.12	Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo <i>Foot</i> ; (b) Modelo <i>Globe</i> ; (c) Modelo <i>Horse</i> ; (d) Modelo <i>Turbine Blade</i>	79
4.13	Simplificações do modelo <i>Bunny</i> com 10% das faces do modelo original. . .	81
4.14	Simplificações do modelo <i>Bunny</i> com 10% das faces do modelo original. . .	82
4.15	Simplificações do modelo <i>Cow</i> com 20% das faces do modelo original. . . .	83
4.16	Simplificações do modelo <i>Cow</i> com 20% das faces do modelo original. . . .	84
4.17	Simplificações do modelo <i>Crater Lake</i> com 1% das faces do modelo original. . .	85
4.18	Simplificações do modelo <i>Crater Lake</i> com 1% das faces do modelo original. . .	86
4.19	Simplificações do modelo <i>Foot</i> com 40% das faces do modelo original. . . .	87
4.20	Simplificações do modelo <i>Foot</i> com 40% das faces do modelo original. . . .	88
4.21	Simplificações do modelo <i>Horse</i> com 5% das faces do modelo original. . . .	89
4.22	Simplificações do modelo <i>Horse</i> com 5% das faces do modelo original. . . .	90
4.23	Simplificações utilizando contração de aresta direcionada ou com posicionamento central: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) e (d) Modelo <i>Crater Lake</i> ; (e) e (f) Modelo <i>Horse</i>	92
4.24	Simplificações utilizando contração de aresta com diferentes opções de posicionamento: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) e (d) Modelo <i>Cow</i> ; (e) e (f) Modelo <i>Crater Lake</i>	93
4.25	Simplificações do modelo <i>Bunny</i> com 5% de faces do modelo original, utilizando contração de aresta com diferentes opções de posicionamento: (a), (b) e (c) MQ; (d), (e) e (f) QVM.	94
4.26	Simplificações utilizando contração de aresta ou de face: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo <i>Bunny</i> ; (e) e (f) Modelo <i>Crater Lake</i>	95
4.27	Simplificações utilizando contração de aresta ou de face: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> com 1% de faces do modelo original; (c) e (d) Modelo <i>Cow</i> com 10% de faces do modelo original.	96
4.28	Simplificações preservando ou não a topologia: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo <i>Bunny</i> ; (e) e (f) Modelo <i>Crater Lake</i>	97

4.29	Simplificações preservando ou não as bordas: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo <i>Bunny</i> ; (e) e (f) Modelo <i>Crater Lake</i>	99
4.30	Simplificações preservando ou não as bordas: (a) e (b) Modelo <i>Crater Lake</i> com 1% de faces do modelo original.	100
4.31	Simplificação gulosa ou preguiçosa: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> ; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo <i>Bunny</i> ; (e) e (f) Modelo <i>Crater Lake</i>	101
4.32	Simplificação gulosa ou preguiçosa: (a) e (b) Tempo de execução para o Modelo <i>Crater Lake</i> ; (c) e (d) Modelo <i>Cow</i> ; (e) e (f) Tempo de execução para o Modelo <i>Cow</i>	102
4.33	Simplificação gulosa ou preguiçosa: (a) e (b) Modelo <i>Bunny</i> com 10% de faces do modelo original; (c) e (d) Modelo <i>Cow</i> com 10% de faces do modelo original.	103

LISTA DE TABELAS

3.1	Características dos modelos de teste.	46
4.1	Resumo das opções de simplificação investigadas.	65
4.2	Classificação das métricas de simplificação segundo o erro médio (d_{RMSE}).	66
4.3	Classificação das métricas de simplificação segundo o erro máximo (distância de Hausdorff simétrica).	66
4.4	Classificação das métricas de simplificação segundo o tempo de execução.	67

GLOSSÁRIO

Sigla	Significado	Tradução
CAD	<i>Computer Aided Design</i>	Desenho Auxiliado por Computador
DEM	<i>Digital Elevation Model</i>	Modelo Digital de Elevação
GIS	<i>Geographical Information System</i>	Sistema de Informação Geográfica
LOD	<i>Level of Detail</i>	Nível de Detalhe
NURBS	<i>Non-Uniform Rational B-Spline</i>	B-Spline Racional Não-Uniforme
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>	Raiz do Erro Quadrático Médio
TIN	<i>Triangulated Irregular Network</i>	Rede Irregular Triangulada

Métrica	Nome
DV	Distância do vértice ao plano médio
AN	Ângulo da normal
CD	Curvatura discreta
EG	Erro geométrico
EGI	Erro geométrico combinado com importância visual dos vértices
VE	Volume de erro
GV	Erro geométrico combinado com o volume de erro
CV	Compacidade do volume de erro
DP	Desvio padrão de um conjunto de vértices
MQ	Métrica quádrica
QV	Quádrica de volume
QVM	Quádrica de volume sem memória

RESUMO

Malhas triangulares são uma das representações de dados espaciais mais utilizadas, pois possibilitam a manipulação e visualização de superfícies de alta complexidade, além de apresentarem diversas vantagens, como suporte direto em *software* e *hardware*. O problema de como transformar conjuntos de dados espaciais distintos, entre eles modelos de terrenos, conjuntos de pontos tridimensionais e dados volumétricos, em malhas triangulares é amplamente estudado. Além disso, com o aumento da capacidade de coleta desse tipo de dados, torna-se cada vez mais comum a necessidade de manipulação de modelos com altíssima resolução. Uma abordagem para a solução desses dois problemas é a simplificação de malhas triangulares. Esta consiste em primeiramente transformar um determinado conjunto de dados em uma malha triangular e, então, simplificá-la reduzindo-se o número de vértices, arestas e triângulos, de forma que a malha simplificada aproxime a malha original com o menor erro possível. Assim, torna-se possível manipular os dados em questão e, aplicando-se o método de simplificação repetidamente com diferentes requisitos de qualidade, obtêm-se representações da malha triangular em diversas resoluções. Dentro do âmbito da simplificação de malhas triangulares, este trabalho se propõe a verificar experimentalmente quais métricas de caráter local existentes na literatura possibilitam uma simplificação rápida e gerando aproximações de alta qualidade. Além disso, este trabalho também propõe duas novas métricas que geram aproximações de grande qualidade e são uma alternativa mais adequada para certas aplicações. Outros aspectos dos métodos de simplificação de malhas triangulares também são investigados, bem como o seu efeito na qualidade das aproximações geradas. Para que as diferentes opções do método de simplificação pudessem ser investigadas sem a interferência de implementações distintas, um programa para a simplificação de malhas triangulares foi implementado, de forma que o resultado da mudança de apenas opções específicas do método de simplificação é adequadamente verificado. Também são discutidos os diversos trabalhos da literatura que utilizam as operações de simplificação para a construção de uma representação em múltiplas resoluções, da qual é possível então extrair uma malha triangular com determinado nível de detalhe, sem a necessidade da aplicação de um método de simplificação.

ABSTRACT

Triangle meshes are one of the mostly employed spatial data representations, since they allow the manipulation and visualization of highly complex surfaces, apart from presenting many advantages, including direct software and hardware support. The problem of converting distinct spatial datasets, among them terrain models, tridimensional point sets, and volumetric data, into triangle meshes is widely studied. Furthermore, with the increase in the collection capacity of such type of data, the manipulation of models with high resolution has become a common task. One approach for the solution of these two problems is triangle mesh simplification, which consists in firstly converting a specific dataset into a triangle mesh and then simplifying it to reduce the number of vertices, edges, and faces, in a way that the simplified mesh approximates the original mesh with the lowest error. Therefore, it is possible to manipulate the data and, by applying repeatedly the simplification method with different quality requirements, a representation in multiple resolutions is obtained. In the scope of triangle mesh simplification, this work presents an experimental study to establish which local metrics that exist in the literature allow fast simplification generating high quality approximations. This work also proposes two new metrics that are an adequate alternative for certain applications, and also generate great quality approximations. Other aspects of triangle mesh simplification are also studied, including their impact in the quality of the approximations. For the investigation of the different options of the simplification method, without the interference of distinct implementations, a program for triangle mesh simplification was implemented, allowing that the change in specific simplification options can be properly verified. Different works from the literature are also discussed, that employ the simplification operations for the creation of a multi-resolution representation, from which it is possible to extract a triangle mesh with a required level of detail, without the necessity of applying a simplification method.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A primeira seção deste capítulo descreve o problema abordado neste trabalho, apresentando as diversas áreas do conhecimento às quais o problema está relacionado e ressaltando a sua importância. Os objetivos e contribuições deste estudo são apresentados na seção 1.2. A organização do trabalho é apresentada na seção 1.3.

1.1 Descrição do problema

O atual avanço das tecnologias de coleta de dados espaciais vem tornando possível a geração de conjuntos de dados em resoluções cada vez maiores, estes podendo representar desde modelos de objetos geometricamente simples até superfícies ou volumes altamente complexos. Diversas tecnologias de coleta de dados espaciais vêm disponibilizando esses grandes conjuntos de dados, tal que os atuais recursos computacionais dificilmente permitem a manipulação eficiente desses dados em sua resolução máxima.

Satélites de sensoriamento remoto obtêm dados de elevação da superfície terrestre que podem ser armazenados sob a forma de Modelos Digitais de Elevação (denotados DEMs, de *Digital Elevation Models*), os quais são matrizes que armazenam os pontos de elevação de uma determinada região geográfica. As elevações de pontos dispostos a distâncias uniformes em um terreno são amostradas e armazenadas nas respectivas células da matriz.

Esses dados de elevação de terrenos também podem ser armazenados sob a forma de conjuntos de pontos esparsos, amostrados do terreno de forma mais desordenada. No entanto, independentemente da forma como os dados de elevação são armazenados, para representar os terrenos com grande quantidade de detalhes e, ao mesmo tempo amostrar uma grande área de um território, é necessário obter uma quantidade significativa de pontos, levando a um grande volume de dados a ser armazenado.

Scanners de profundidade, como *range scanners* baseados em *laser* ou luz estruturada, ou *scanners* baseados em princípios mecânicos, obtêm um conjunto de pontos representando uma determinada vista de um objeto a ser amostrado [30]. Desde pequenos objetos do cotidiano até edifícios inteiros podem ser digitalizados, e grande quantidade de dados é gerada quando é realizada a amostragem do objeto em alta resolução.

Equipamentos de tomografia computadorizada adquirem imagens representando os diversos cortes de um volume, que são agrupadas de forma a representar o volume completo, constituindo um conjunto de elementos de volume ou *voxels*. Para que um órgão interno do corpo humano possa ser representado de forma satisfatória, diversos

cortes devem ser adquiridos, gerando também uma grande quantidade de dados.

Por outro lado, a maneira mais comum de representar superfícies de objetos em sistemas de Desenho Auxiliado por Computador (denotado CAD, de *Computer Aided Design*) é utilizando B-Splines Racionais Não-Uniformes (denotado NURBS, de *Non-Uniform Rational B-Splines*), que é um padrão utilizado pelas principais ferramentas da indústria gráfica, pois possibilita a modelagem de diversos tipos de formas. Com o propósito de visualizar esses objetos, as superfícies são transformadas em malhas triangulares, gerando modelos de grande complexidade, com grande número de vértices e triângulos [47].

Alguns desses conjuntos de dados, como modelos digitais de terrenos ou vistas digitalizadas de objetos, possuem a particularidade de que existe apenas um valor numérico associado a cada ponto do plano que forma o domínio do modelo. Isto é, em virtude de representarem apenas uma determinada superfície, esses modelos podem ser vistos como uma função que retorna um valor para um ponto bidimensional. Esse tipo de conjunto de dados é comumente denominado de $2\frac{1}{2}D$, ao invés de $3D$ (tridimensional).

Em contrapartida, outros conjuntos de dados são realmente $3D$, como conjuntos de voxels representando um volume ou várias malhas triangulares agrupadas de forma a constituírem um objeto de CAD. Nesses modelos, pontos podem estar dispostos em qualquer posição do espaço tridimensional.

O estudo de como manipular esses grandes conjuntos de dados descritos anteriormente é de grande interesse em áreas como Sistemas de Informação Geográfica (denotado GIS, de *Geographical Information Systems*), visualização científica, realidade virtual e CAD. Uma forma muito utilizada para a representação desses dados espaciais, que possibilita trabalhar com a grande complexidade desses modelos, é a utilização de malhas poligonais.

Uma malha poligonal é uma superfície ou objeto tridimensional representado por meio de um conjunto de polígonos. Cada polígono é constituído de vértices (pontos com localização tridimensional), arestas (que determinam quais vértices estão conectados), e faces (delimitadas pelas arestas). O agrupamento dos diversos polígonos totaliza a representação do objeto ou superfície em questão.

O tipo mais utilizado de malha poligonal é formada por triângulos. Malhas triangulares, também chamadas de triangulações ou Redes Irregulares Trianguladas (denotadas TINs, de *Triangulated Irregular Networks*), apresentam diversas vantagens, entre elas, a de que são suportadas por diversos *softwares* de modelagem e visualização e possuem até mesmo suporte direto em *hardware*. Exemplos de malhas triangulares podem ser vistos na figura 1.1.

Malhas triangulares são uma forma generalizada de representação de dados, pois permitem armazenar conjuntos de dados $2\frac{1}{2}D$, na forma de malhas triangulares com bordas (figura 1.1 (a)), e também podem representar dados $3D$ (figura 1.1 (b)). Malhas

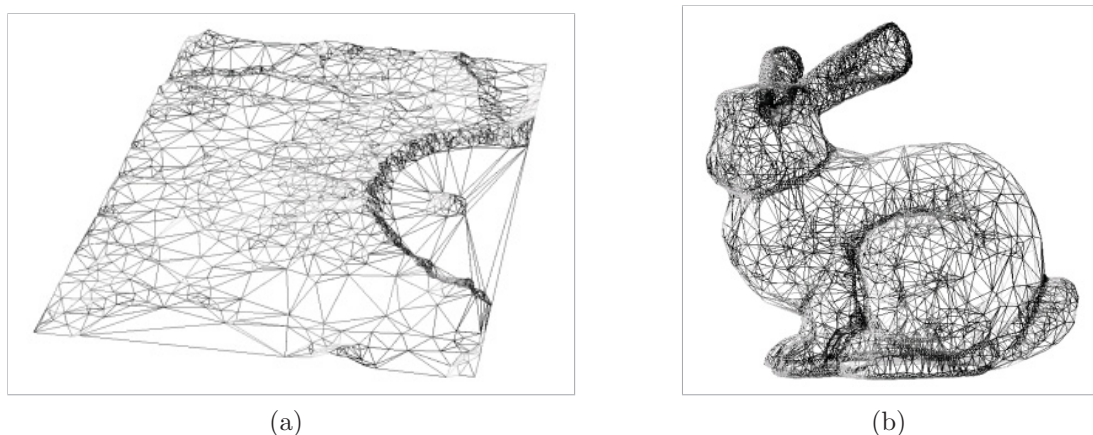


Figura 1.1: Malhas triangulares: (a) Modelo de terreno; (b) Modelo de objeto 3D.

triangulares também são uma representação compacta, pois os triângulos comprimem eficientemente dados redundantes, tipicamente pontos pertencentes ao mesmo plano. Além disso, um conjunto de voxels pode ser representado por malhas triangulares referentes às diversas iso-superfícies que delimitam as regiões homogêneas do volume.

Um problema amplamente estudado é o de como transformar os grandes conjuntos de dados espaciais anteriormente descritos, como nuvens de pontos e DEMs, em triangulações, de forma a criar uma malha que aproxime apropriadamente os dados originais, eliminando detalhes desnecessários. Utilizando-se essa malha triangular é possível armazenar, transmitir e visualizar esses dados a um custo razoável, em termos de tempo de processamento ou transmissão, ou o custo de armazenamento.

Para a geração de malhas triangulares a partir desses conjuntos de dados, diversas abordagens têm sido propostas na literatura, muitas delas específicas ao modelo de dados sendo utilizado.

Por exemplo, com o intuito de gerar aproximações de DEMs na forma de malhas triangulares, os métodos propostos podem ser classificados como pertencentes a duas abordagens principais, os métodos por *refinamento* (também chamados de métodos *descendentes* ou *top-down*) e os métodos por *decimação* ou *simplificação* (também chamados de métodos *ascendentes* ou *bottom-up*).

A abordagem por refinamento inicia-se construindo uma triangulação que aproxima grosseiramente o modelo do terreno. Depois, a cada iteração do método, um novo ponto, tipicamente o ponto de maior erro na triangulação atual, é inserido na malha e a triangulação é refeita no local da inserção. O método encerra a execução quando a triangulação satisfaz uma certa taxa de erro ou quando um número requerido de pontos foi inserido [20, 37–39].

No caso dos métodos por simplificação, uma triangulação contendo todos os pontos do modelo é criada e, a cada iteração do método, o ponto com o menor erro é retirado e

a triangulação é refeita no local alterado [28,55]. Como na abordagem anterior, o método pára quando um número requerido de pontos for retirado ou quando uma certa taxa de erro for alcançada.

Esse processo de simplificação pode também ser utilizado para reduzir a complexidade de malhas 3D, levando assim a uma abordagem de simplificação generalizada, aplicável a todos os conjuntos de dados mencionados anteriormente. Essa abordagem, que pode ser vista na figura 1.2, consiste em primeiramente gerar uma malha triangular contendo todos os dados do modelo e depois simplificá-la. Deve ser permitida a utilização de malhas com diferentes topologias e com bordas, para que seja possível trabalhar com quaisquer conjuntos de dados.

Essa abordagem é semelhante à utilizada por Schröder e Roßbach [68] para terrenos, em que o método de simplificação permite a entrada do modelo em diversas representações, como conjuntos de pontos, DEMs e curvas de níveis. Então, o método inicialmente cria uma malha triangular para esse conjunto de dados específico e, depois, simplifica a malha através de um método único. No entanto, a abordagem proposta neste trabalho inclui todo tipo de dados espaciais que podem ser transformados em uma malha triangular 3D.

Para a primeira etapa dessa abordagem, que visa criar uma malha triangular contendo todos os dados do modelo, são utilizadas formas específicas de construir as triangulações, dependendo do conjunto de dados em questão. No entanto, para a construção dessa malha triangular inicial, algoritmos simples podem ser utilizados, pois não é realizado nenhum tipo de aproximação ou redução dos dados.

Para criar uma malha triangular a partir de um DEM, é construída uma triangulação completamente regular, unindo cada quatro pontos adjacentes da matriz de elevações por meio de dois triângulos.

Para um conjunto de pontos esparsos representando uma superfície, pode ser gerada uma malha utilizando um algoritmo de triangulação. Normalmente, utilizam-se algoritmos que constroem uma triangulação de Delaunay eficientemente, pois esta apresenta a propriedade de minimizar a ocorrência de triângulos finos, gerando uma malha que representa a superfície sem a presença de falhas durante a visualização.

Para transformar um conjunto de voxels em uma malha triangular são utilizados algoritmos semelhantes ao *Marching Cubes* [61], que geram malhas triangulares que aproximam bem o volume, mas que podem apresentar grande quantidade de pequenos triângulos, correspondentes ao tamanho de um voxel [43].

Depois de construída a malha triangular inicial, contendo todos os dados do modelo, pode ser aplicado o método de simplificação. Para esse fim, é estabelecido o número de vértices a ser retirado da malha triangular ou a taxa de erro que a malha simplificada deve possuir em relação a essa malha inicial, considerada como apresentando erro zero.

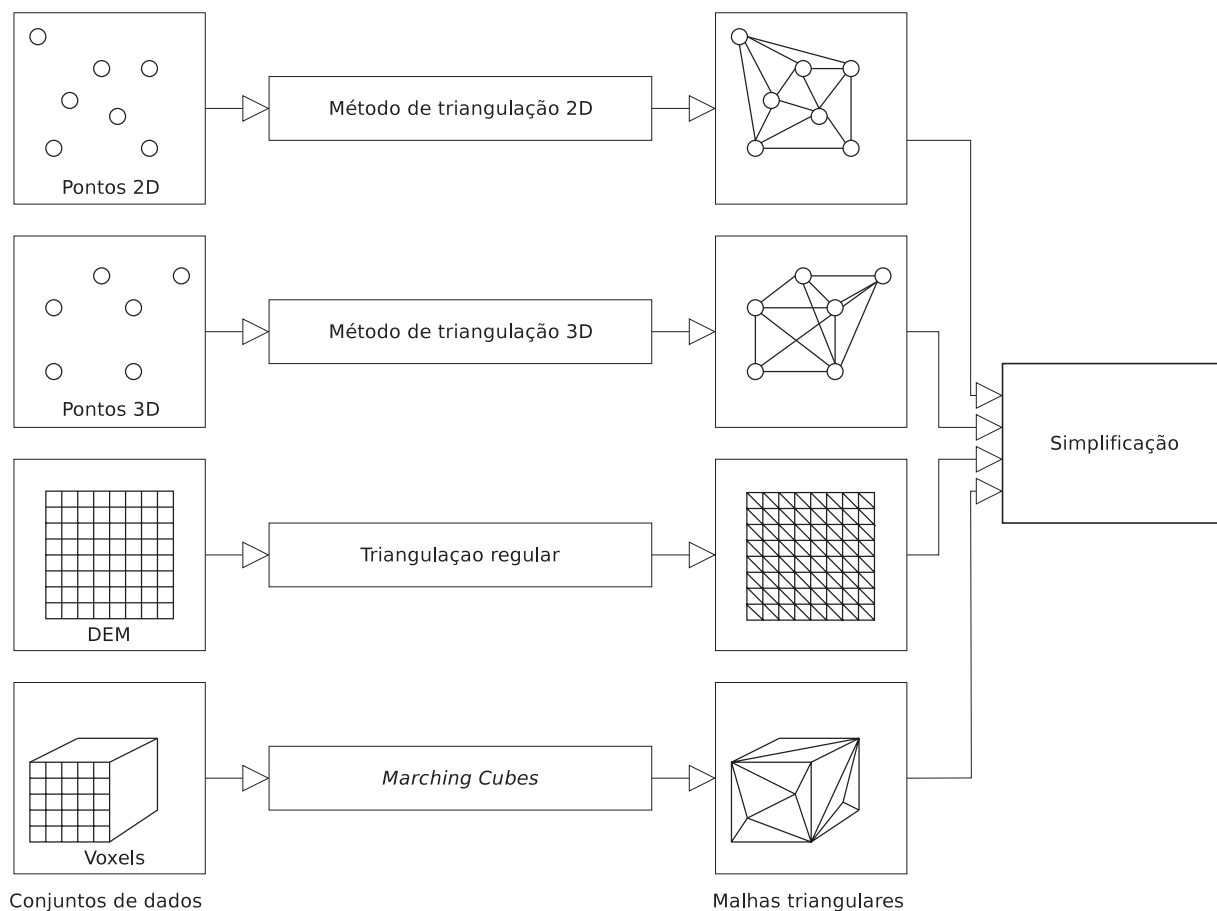


Figura 1.2: Simplificação de diversos conjuntos de dados.

O objetivo do método de simplificação é então reduzir o número de vértices, arestas e triângulos da malha, para diminuir a quantidade de informação necessária para representar a triangulação, de forma que a malha triangular simplificada aproxime a malha original com grande qualidade.

Os métodos de simplificação podem ser classificados pela forma como modificam a malha triangular em métodos locais ou métodos globais. Os métodos de simplificação de caráter local reduzem iterativamente a complexidade da malha por meio de pequenas modificações na triangulação, até que um dos dois critérios de parada seja alcançado.

Aplicando-se operações de modificação seqüencialmente é possível simplificar gradualmente a malha triangular inicial, controlando-se com precisão o número de vértices retirado. As operações de simplificação eliminam uma componente da malha, podendo ser baseadas em remoção de vértices, arestas ou faces. Essas operações serão descritas no capítulo 2.

Os métodos de simplificação de caráter global reconstróem toda a triangulação, não preservando os triângulos ou vértices da malha inicial. Uma malha triangular inteiramente nova é construída para aproximar a malha fornecida como entrada. Com esses

métodos é possível controlar melhor o erro das aproximações e otimizar as malhas triangulares, no entanto, em comparação com os métodos de caráter local, o tempo de execução é muito maior, e as estruturas e operações envolvidas são mais complexas.

Os métodos de simplificação, além de utilizados puramente para reduzir a complexidade de malhas triangulares e construir malhas aproximadas, também estão intimamente relacionados com o conceito de Múltiplos Níveis de Detalhe (denotado LOD, de *Level of Detail*) e são a base de muitos sistemas de modelagem em multi-resolução. Os trabalhos mais recentes da literatura relacionados à simplificação de malhas triangulares apresentam uma grande associação com esses conceitos.

O conceito de LOD é extremamente simples, como notado em Luebke *et al.* [56]. Consiste em utilizar uma malha triangular menos detalhada para visualizar um objeto que está distante do observador na cena visualizada, ou quando o tamanho do objeto ocupa uma região pouco significativa da janela de visualização. À medida que o objeto é posicionado mais proximamente do observador, ou a região ocupada por este se torna significativa, são utilizadas malhas cada vez mais detalhadas. O conceito de LOD pode ser visto na figura 1.3.

Para que esta tarefa complexa possa ser realizada em um tempo de execução baixo, o que é um requisito comum de um sistema de visualização, é necessário armazenar, de alguma forma, uma malha triangular em diversas resoluções. A maneira como isso é implementado resulta nos diferentes conceitos de LOD expostos a seguir:

- Utilizando-se LOD *discreto*, é guardada uma malha triangular completa para cada resolução possível do objeto representado. É necessário determinar quais resoluções podem ocorrer durante o processo de visualização e então armazenar uma triangulação simplificada para cada uma destas, o que torna necessário um grande espaço de armazenamento. Desse modo, a visualização de uma das malhas de menor resolução torna-se rápida, mas não é possível fazer nenhum tipo de adaptação do modelo conforme a posição do objeto em relação ao observador.
- No LOD *contínuo*, a malha triangular é armazenada em uma estrutura mais elaborada que permite selecionar uma malha com nível de detalhe adequado à resolução do objeto na cena. Não é mais necessário determinar de antemão quais resoluções serão utilizadas durante o processo de visualização. No entanto, é necessário um certo esforço de processamento durante a etapa de visualização para extrair da estrutura a malha com o detalhe requerido. Utilizando-se versões eficientes dessas estruturas, o tempo necessário para extração de determinada malha torna-se baixo, tornando viável esse tipo de abordagem. Esse tipo de estrutura demanda mais espaço de armazenamento do que uma simples malha triangular, no entanto, o espaço é pequeno se comparado à maneira como a multi-resolução é implementada no LOD discreto.

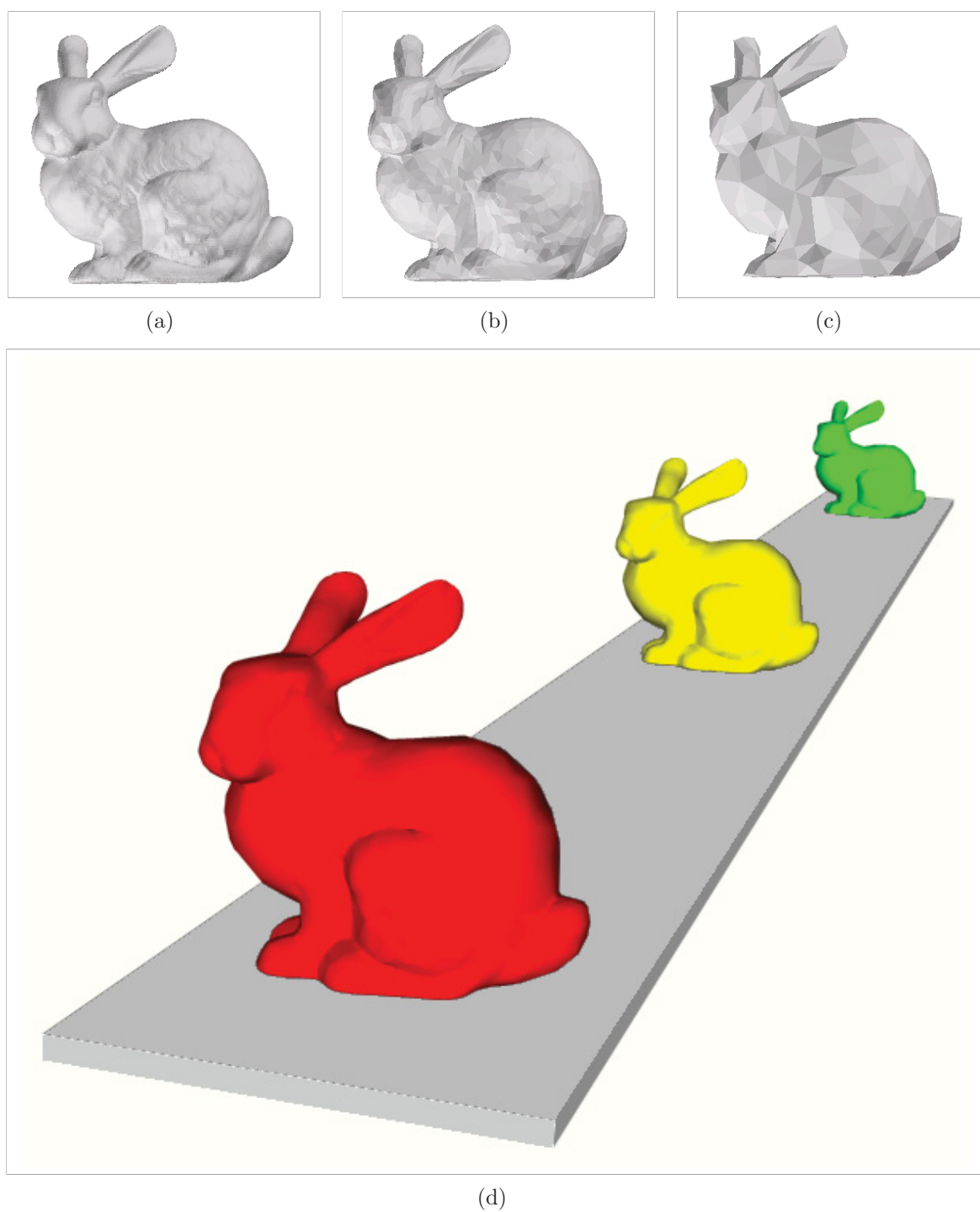


Figura 1.3: Conceito de LOD: (a) Modelo original; (b) Modelo menos detalhado, com 5% de faces do original; (c) Modelo com ainda menos detalhes, apresentando 1% de faces do original; (d) Utilização desses modelos em uma cena.

- O LOD *dependente da vista* é uma extensão do LOD contínuo em que, além de gerar uma malha triangular conforme a resolução do objeto na cena atual, a malha que representa um único objeto é gerada com mais detalhe nas porções do modelo que estão mais próximas do observador, e com menos detalhe nas porções do objeto distantes, que ocupam uma região pouco significativa da janela de visualização.

Os conceitos de LOD contínuo e dependente da vista são atualmente os mais requisitados em aplicações de visualização, uma vez que apresentam diversas vantagens. Estes são implementados utilizando-se um sistema de modelagem em multi-resolução, que é basicamente formado pela estrutura descrita para a implementação do LOD contínuo. Algumas propriedades comumente requisitadas de um sistema de multi-resolução são apresentadas a seguir:

- O sistema deve possuir uma estrutura que possibilite a implementação do LOD contínuo ou LOD dependente da vista, isto é, uma maneira de extrair malhas triangulares segundo a resolução e posição atual do objeto apresentado na cena.
- Para fins de visualização interativa com o usuário, é normalmente requisitado que o sistema torne possível a *visualização progressiva* do objeto, isto é, ao selecionar uma determinada resolução e um ângulo de visualização do modelo, o sistema deve construir a malha gradualmente, iniciando com um modelo de resolução baixa e detalhando-o ao passar do tempo, de forma que o usuário não necessite esperar pela completa apresentação do objeto para que este possa interagir novamente com o sistema.
- Quando o sistema possibilita a visualização progressiva do objeto, também pode ser requisitado que o sistema inclua o conceito de *geomorphs*, que implica no refinamento coerente da malha, isto é, quando a malha é construída gradualmente durante o processo de visualização, detalhando o modelo com a passagem do tempo, isso é realizado sem provocar mudanças drásticas na triangulação durante a passagem de um quadro a outro.
- Além dos requisitos anteriormente descritos, o sistema deve ser *eficiente*, isto é, deve utilizar pouca memória para o armazenamento dos modelos e deve permitir a rápida extração e apresentação das malhas triangulares.

Muitos dos sistemas de modelagem em multi-resolução são implementados com base nos métodos de simplificação de caráter local [16, 29]. Uma malha simplificada é utilizada como triangulação inicial, e as operações inversas das que foram aplicadas para simplificação do modelo são executadas para aumentar gradativamente o detalhe da triangulação. Dessa forma, é possível construir uma malha triangular com tanto detalhe quanto requerido.

Como nem sempre é possível determinar com precisão onde essas operações devem ser aplicadas, muitos sistemas utilizam abordagens baseadas em malhas triangulares hierárquicas, pois estas apresentam uma estrutura implícita que permite a extração de malhas de diferentes resoluções, uma vez que são baseadas em um princípio de subdivisão que permite aumentar o detalhe do modelo onde requerido. As malhas triangulares hierárquicas serão melhor descritas no capítulo 2. No entanto, é necessário que a malha triangular já tenha sido construída segundo essa estrutura hierárquica.

As malhas triangulares mais freqüentemente utilizadas dificilmente apresentam esse tipo de triangulação hierárquica, o que torna necessária a aplicação de um método para transformar as malhas originais em malhas hierárquicas, muitas vezes construindo uma triangulação inteiramente nova que é equivalente à original.

Essa transformação pode ser realizada segundo o conceito de *remeshing*, que tem por objetivo criar uma nova malha triangular, equivalente à original, porém otimizada, utilizando um número muito menor de vértices ou triângulos. Ou seja, a abordagem de *remeshing* cria a nova malha eliminando redundâncias, e esta é construída de forma a facilitar a manipulação dos triângulos.

A abordagem de *remeshing* pode ser estendida para que funcione como um método de simplificação de caráter global, ao ser fornecida uma tolerância de erro para a aproximação gerada. A justificativa para isto é que os métodos de simplificação utilizando operações de modificação locais não controlam o erro da aproximação corretamente, e não simplificam a estrutura da malha satisfatoriamente, enquanto que um método global pode gerar uma malha triangular otimizada, e controlando melhor o erro da aproximação gerada.

Apesar de apresentarem essa desvantagem de não controlarem o erro da aproximação com grande precisão, os métodos de simplificação baseados em operações e métricas de caráter local apresentam diversas outras vantagens em relação aos métodos globais, entre elas a de que são mais simples de implementar, pois não necessitam de estruturas muito complexas. Esses métodos também são mais rápidos, pois as avaliações de qualidade e modificações na malha são simples de calcular e executar.

Além de muitos métodos de simplificação utilizarem operações de caráter local, muitos sistemas de multi-resolução também utilizam essas operações e as suas inversas, para implementar o conceito de LOD contínuo. Essas operações são utilizadas para simplificar a malha durante a visualização ou para construir uma estrutura de multi-resolução em uma fase de pré-processamento. Então, a qualidade das aproximações de resolução intermediária geradas pelo sistema de multi-resolução depende diretamente da métrica de simplificação utilizada.

Existe também a observação de que a qualidade das aproximações geradas pode variar apenas devido à mudança da operação aplicada ou da métrica utilizada. Algumas métricas apresentam um tempo maior de avaliação, mas geram melhores resultados. En-

tretanto, não está exatamente definida qual a relação entre esses dois fatores. Algumas métricas mais custosas poderiam gerar resultados inferiores a outras medidas mais rápidas de serem calculadas.

Também deve ser ressaltado que, ao serem realizadas apenas pequenas modificações nas métricas de erro, os métodos de simplificação podem apresentar melhores resultados. Dessa forma, malhas triangulares simplificadas com essas métricas modificadas podem apresentar maior qualidade do que as aproximações geradas pelas métricas sem as modificações.

1.2 Objetivos e contribuições

Apesar do grande número de trabalhos relacionados com os processos de simplificação e sistemas de multi-resolução, um pequeno número destes realiza uma comparação com outros métodos segundo a qualidade das aproximações geradas. Poucos também verificam a mudança na qualidade das aproximações causada apenas pela mudança da métrica de erro sendo utilizada.

Recentemente, houve um aumento nessa preocupação com o surgimento de alguns estudos comparativos entre os métodos de simplificação [7] e algumas ferramentas [2, 9] para a avaliação da qualidade das aproximações geradas, em comparação com a malha triangular inicial. Também houve uma maior preocupação na escolha das métricas que determinam o erro presente na aproximação gerada, e tornou-se comum a construção de sistemas com a possibilidade de seleção de métricas distintas para medição da qualidade durante o processo de simplificação [14].

No entanto, os estudos comparativos são realizados verificando-se apenas a qualidade final das simplificações geradas, estas podendo ser construídas utilizando métodos completamente diferentes. Nenhuma comparação é realizada em que o mesmo esquema de simplificação é utilizado, modificando apenas a operação local de simplificação e a métrica de erro utilizada.

Assim, não é possível determinar com certeza se a qualidade das aproximações geradas se deve apenas às métricas de erro e às operações utilizadas, ou a outro fator relacionado com as estruturas de dados utilizadas ou ao esquema geral do método de simplificação.

Visando determinar quais métricas e operações geram as aproximações mais satisfatórias, este trabalho faz um estudo da qualidade das malhas simplificadas por meio de operações locais, sem a necessidade de reconstruir totalmente a malha triangular. Diversos experimentos são realizados e a qualidade das aproximações geradas é avaliada tanto por meio de métricas globais que calculam os erros geométricos máximo e médio das aproximações, quanto por meio da comparação visual entre as malhas simplificadas.

Um programa para a simplificação de malhas triangulares foi implementado, de

forma que o resultado da mudança de apenas opções específicas do método de simplificação é adequadamente verificado, sem que diferentes implementações interfiram na avaliação dos resultados. Assim, o impacto na qualidade das aproximações causado apenas pela mudança da operação ou da métrica de simplificação é corretamente determinado, e também é possível relacionar a qualidade das aproximações geradas com o tempo de execução necessário para o cálculo das métricas.

Adicionalmente, duas novas métricas são propostas, com o objetivo de introduzir duas medidas alternativas que podem ser utilizadas para a simplificação de malhas triangulares. Essas novas métricas também geram aproximações de alta qualidade e apresentam características distintas de umas das melhores métricas existentes na literatura, dando preferência à utilização de maior tempo de processamento ao invés de utilizar recursos adicionais de memória. Essa propriedade torna essas métricas mais adequadas para a simplificação de grandes modelos poligonais ou quando os recursos de memória são limitados.

Além disso, neste estudo comparativo também são investigados outros aspectos da simplificação de malhas triangulares, como o esquema geral do método utilizado ou a preservação de certos atributos dos modelos, com o objetivo de determinar quais desses aspectos contribuem positivamente na qualidade das aproximações geradas.

Assim, com o conhecimento obtido deste trabalho, torna-se possível implementar um método de simplificação eficiente, ou seja, um método rápido, que gera aproximações de alta qualidade, e que não apresenta grandes dificuldades de implementação. Também é possível, por meio deste estudo, verificar indiretamente a qualidade das aproximações geradas por métodos de simplificação de caráter local em relação à qualidade das aproximações geradas por métodos de simplificação global.

1.3 Organização do trabalho

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. No capítulo 2 é formalizado o problema apresentado e são discutidos os principais trabalhos encontrados na literatura relativos ao tópico sob investigação. O capítulo 3 apresenta a metodologia utilizada para a realização do trabalho proposto, delineando a maneira como o estudo comparativo foi conduzido. Os resultados dos experimentos são analisados no capítulo 4 e, finalmente, as conclusões são apresentadas no capítulo 5.

CAPÍTULO 2

TRABALHOS RELACIONADOS

Este capítulo primeiramente apresenta na seção 2.1 alguns conceitos necessários para a discussão do problema apresentado e formaliza a simplificação de malhas triangulares. Em seguida, os diversos trabalhos da literatura são comentados na seção 2.2, apresentando os pontos de maior relevância ao problema da simplificação de malhas triangulares, mas também relacionando-os com os conceitos de LOD e multi-resolução.

2.1 Conceitos

Para melhor formalizar os conceitos discutidos neste trabalho, matrizes são denotadas com letras maiúsculas em negrito (\mathbf{M}), vetores com letras minúsculas em negrito (\mathbf{n}) e escalares com minúsculas em formatação normal (a). Os vetores são sempre vetores coluna e a norma Euclidiana de um vetor é denotada como $\|\dots\|$.

De maneira simples, uma malha triangular pode ser definida como um conjunto de triângulos que representam uma determinada superfície. Cada triângulo é constituído por arestas e vértices. Os vértices possuem coordenadas espaciais, sendo responsáveis pela configuração da malha no espaço, a geometria da malha. As arestas e triângulos fornecem a conectividade entre os vértices. Ao combinar a geometria e a conectividade da malha, obtém-se a superfície em questão.

Alguns autores definem uma malha triangular mais formalmente como uma tupla $M = (V, K)$, onde V é a geometria da malha e K a conectividade. A geometria V é um conjunto de pontos $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, onde $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$. A conectividade K é um *complexo simplicial abstrato* construído a partir dos elementos do conjunto $\{1, \dots, n\}$. O complexo K contém os conjuntos de um elemento $\{i\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, caracterizados como os vértices da malha; contém subconjuntos de dois elementos $\{i, j\}$, as arestas; e contém subconjuntos de três elementos $\{i, j, k\}$, as faces triangulares da malha.

Um *complexo simplicial abstrato* K é uma coleção de conjuntos finitos não vazios com a propriedade de que, para qualquer elemento $\sigma \in K$, se $\tau \subset \sigma$ não é vazio, então $\tau \in K$ [58,59]. Isso implica em que se uma aresta $\{i, j\} \in K$ então os vértices $\{i\}, \{j\} \in K$, e se uma face $\{i, j, k\} \in K$ então as arestas $\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\} \in K$. Um elemento de K de cardinalidade $n + 1$ é chamado de *n-simplexo*, logo, um vértice é chamado de *0-simplexo*, uma aresta de *1-simplexo*, e uma face de *2-simplexo*.

O operador de superfície $\lceil s \rceil$ retorna os $(n + 1)$ -*simplexos* dos quais o *n-simplexo* s é subconjunto, que são chamados de elementos incidentes a s . Por exemplo, $\lceil v \rceil$ retorna os conjuntos de arestas que são incidentes ao vértice v . O operador de subface $\lfloor s \rfloor$ retorna

os $(n - 1)$ -*simplexos* do n -*simplexo* s , que são chamados de elementos adjacentes a s . Por exemplo, $[e]$ retorna o conjunto de vértices adjacentes à aresta e . Esses operadores podem ser generalizados para conjuntos. Então, $[S] = \bigcup_{s \in S} [s]$ e $\llbracket S \rrbracket = \bigcup_{s \in S} \llbracket s \rrbracket$, onde S é um conjunto.

Essa notação permite descrever relações entre elementos da malha triangular de forma precisa, no entanto, uma outra maneira de descrever os conjuntos de elementos é utilizada aqui, com o objetivo de simplificar a notação. O conjunto de vértices adjacentes a um determinado vértice (mais o próprio vértice), $\llbracket [v] \rrbracket$, é denotado V_v . O conjunto de arestas incidentes a um vértice, $[v]$, é denotado E_v . O conjunto de triângulos incidentes a um determinado vértice, $\llbracket [v] \rrbracket$, é denotado T_v . Finalmente, o conjunto de vértices adjacentes a um determinado triângulo, $\llbracket [t] \rrbracket$, é denotado V_t .

Exemplos para esses conjuntos podem ser vistos nas figuras 2.1 e 2.2, onde os elementos selecionados aparecem na cor preta.

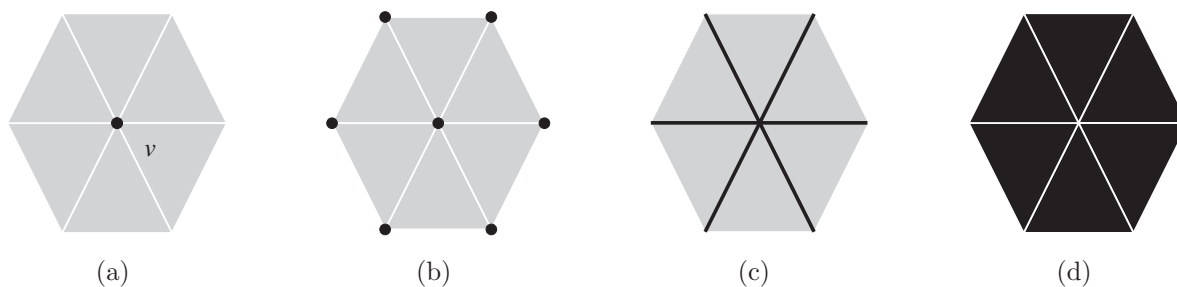


Figura 2.1: Elementos de uma malha triangular: (a) Vértice em questão v e sua vizinhança; (b) V_v ou $\llbracket [v] \rrbracket$; (c) E_v ou $[v]$; (d) T_v ou $\llbracket [v] \rrbracket$.



Figura 2.2: Elementos de uma malha triangular: (a) Triângulo em questão t ; (b) V_t ou $\llbracket [t] \rrbracket$.

Os elementos desses conjuntos podem ser denotados como v , e e t , representando vértices, arestas e faces triangulares, respectivamente. Para deixar explícitos os componentes de cada elemento, a notação e_{ij} pode ser usada para a aresta $e = \{i, j\}$ e t_{ijk} para o triângulo $t = \{i, j, k\}$.

A conectividade da malha irá determinar a *topologia* do objeto sendo representado, baseada na *topologia local* dos componentes da malha, isto é, a maneira como os

vértices, as arestas e as faces estão conectadas entre si, em uma vizinhança local da malha triangular. Se cada aresta for compartilhada por exatamente dois triângulos, e cada triângulo compartilhar uma aresta com exatamente cada triângulo vizinho, diz-se que a malha triangular apresenta a topologia de uma *2-variedade* (*2-manifold*), onde a vizinhança infinitesimal de cada ponto da superfície é equivalente a um disco.

Se for permitida a existência de arestas de borda, que pertencem a apenas um triângulo, diz-se que a malha triangular é uma 2-variedade com borda. Nesse caso, cada aresta pertence a um triângulo se fizer parte da borda, ou a dois triângulos se pertencer ao interior da malha. As 2-variedades não podem apresentar as situações vistas na figura 2.3.

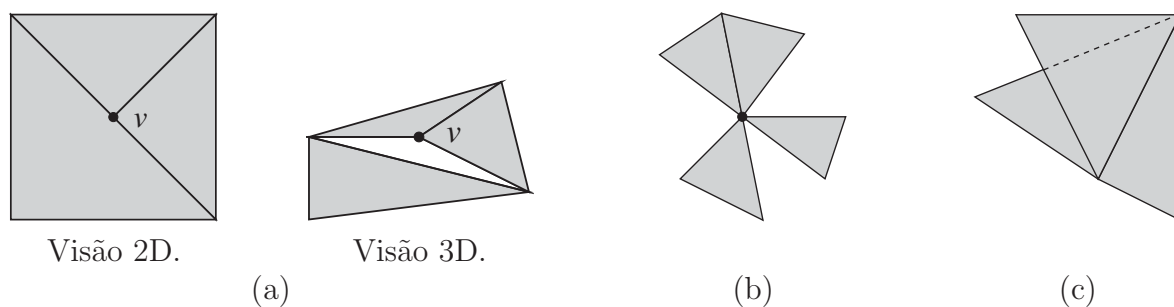


Figura 2.3: Situações que não podem ocorrer em uma 2-variedade: (a) Junção em T; (b) Vértice com triângulos não adjacentes; (c) Aresta compartilhada por mais que dois triângulos.

No entanto, as 2-variedades podem possuir *buracos* que fazem parte da estrutura do modelo, como no exemplo visto na figura 2.4, dando origem à noção de *genus*, que é o número desse tipo de buracos existentes na malha triangular.

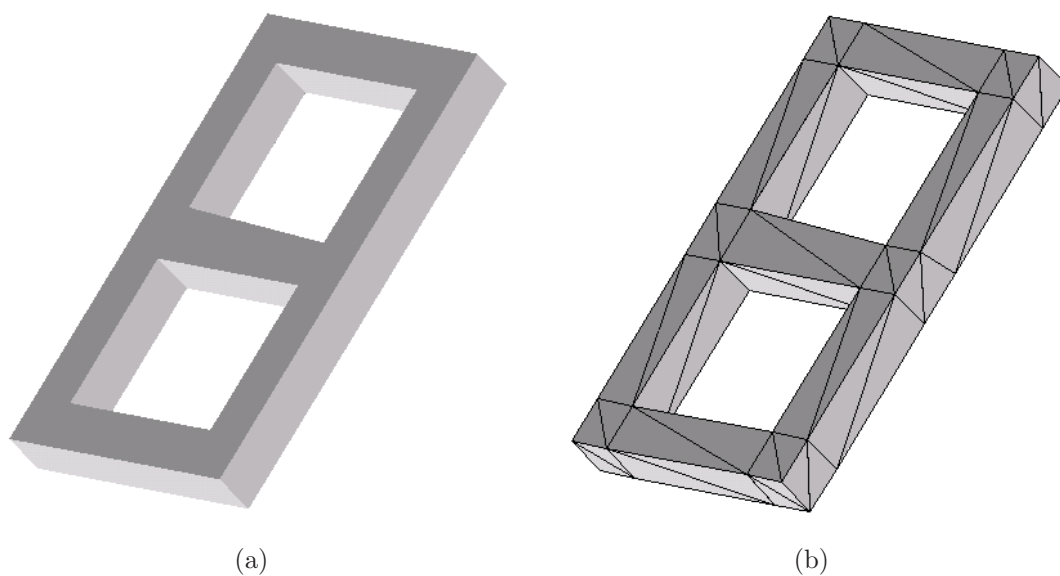


Figura 2.4: Malha triangular de *genus* 2: (a) Vista do objeto; (b) Malha triangular.

Dependendo da aplicação, pode ser requisitado que o método de simplificação utilizado preserve a topologia do objeto, isto é, se a malha triangular de entrada possui a topologia de uma variedade, a malha simplificada deve continuar apresentando essa topologia e deve possuir o mesmo *genus*. Outras aplicações podem apenas manter a topologia de 2-variedade de uma malha triangular, mas fechando buracos quando necessário e conectando estruturas independentes, pois dessa forma é possível gerar simplificações mais generalizadas, como por exemplo na figura 2.5, em que um conjunto de cubos é fundido, e assim é obtida uma melhor aproximação para o conjunto todo.

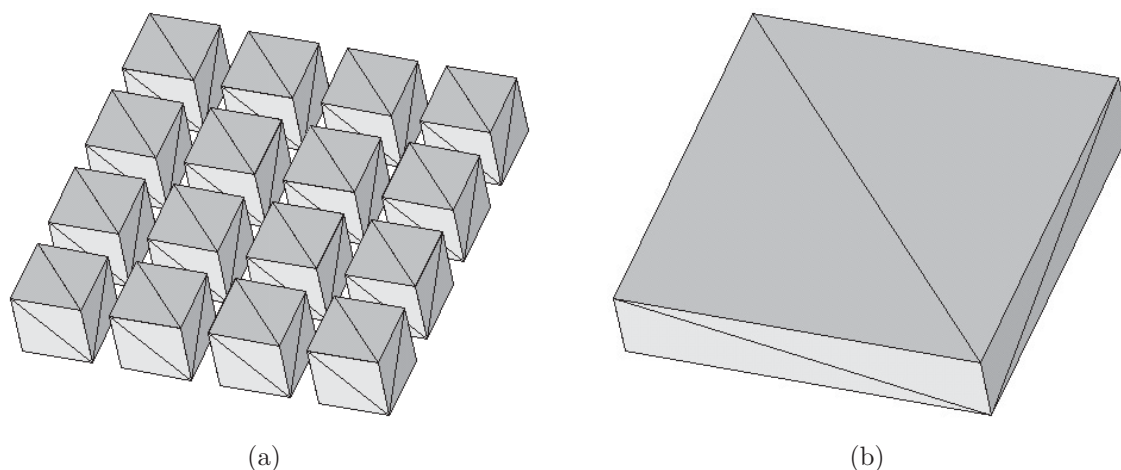


Figura 2.5: Simplificação generalizada: (a) Um conjunto de cubos espaçados; (b) Simplificação do conjunto de cubos modificando a topologia.

Pode também ser requisitado que os métodos trabalhem com malhas que não são variedades, que apresentam arestas compartilhadas por mais de dois triângulos, por exemplo, ou pode ser permitido que métodos de simplificação gerem aproximações sem tomar o cuidado de preservar a topologia, o que pode ser mais simples para algumas implementações.

No entanto, uma restrição que deve ser satisfeita inclusive pelos modelos que não apresentam a topologia de uma variedade é que vértices coincidentes no espaço não podem ocorrer. Se for permitido que dois vértices diferentes existam na mesma posição espacial, a simplificação pode criar falhas e aberturas na triangulação quando uma aresta envolvendo esses vértices coincidentes for contraída.

Outro aspecto que também pode ser levado em conta pelos métodos de simplificação é a forma dos triângulos gerados. Triângulos muito finos e longos podem apresentar problemas durante o processo de visualização, causando o aparecimento de artefatos visuais, como linhas muito destacadas, comprometendo o aspecto real do modelo. Triângulos muito finos também podem causar problemas quando uma malha triangular é interpolada para gerar, por exemplo, uma imagem digital [40, 42].

Devido a esses problemas, diversos métodos procuram gerar os triângulos com

os maiores ângulos internos possíveis, para que estes sejam próximos de equiláteros. A *triangulação de Delaunay* apresenta essa propriedade [62], sendo que algoritmos eficientes são conhecidos para construir esse tipo de triangulação ou para transformar uma malha triangular já construída em uma triangulação de Delaunay. Por isso, diversos métodos ajustam os triângulos conforme os critérios da triangulação de Delaunay durante o processo de simplificação.

O problema de simplificação de uma malha triangular $M = (V, K)$ consiste então em reduzir o conjunto K , excluindo-se vértices, arestas ou faces da malha triangular, de forma que o erro entre a malha triangular aproximada e a original seja o mínimo possível. Ao excluir um vértice do conjunto K é excluído um ponto também do conjunto V .

Deve ser observado que o problema de simplificação de uma malha triangular é diferente do problema de codificar as malhas triangulares de forma eficiente. Nesse segundo caso, ao codificar a conectividade de uma malha triangular, nenhuma informação é perdida, esta é apenas armazenada de forma comprimida.

Para a codificação eficiente da conectividade da malha, algumas das abordagens mais conhecidas incluem a compressão das malhas utilizando-se *triangle strips* [41,69,77], ou a codificação da conectividade pela valência dos vértices [1]. Para a codificação eficiente da geometria da malha, é realizada a quantização das coordenadas dos vértices [1], de forma que as mesmas posições espaciais são representadas com menos precisão, mas sem perder a qualidade da malha, ou são aplicadas transformadas às coordenadas dos vértices para reduzir a quantidade de informação necessária para representá-las [44].

Em contrapartida, durante a simplificação de malhas triangulares, uma certa quantidade de informação é perdida, no entanto, o processo de simplificação deve excluir informações que sejam consideradas menos importantes para a representação do modelo, de forma que a malha simplificada aproxime a original com o menor erro possível.

Em resumo, os principais requisitos de um método de simplificação são apresentados a seguir.

- O método de simplificação deve preservar a topologia da malha triangular, quando necessário, ou não preservar a topologia quando for requisitado que a simplificação seja a mais generalizada possível.
- O aspecto das malhas triangulares geradas não deve apresentar problemas para a visualização do modelo.
- O método deve reduzir o número de vértices, arestas e triângulos.
- A malha triangular simplificada deve aproximar a malha triangular original com o menor erro possível.

Para que seja possível verificar a qualidade de uma malha triangular simplificada em relação à original, deve ser possível calcular o erro entre duas triangulações. Isto é

formalizado com o conceito de *realização geométrica* de uma malha triangular, descrito a seguir.

Ao associar cada vértice $i \in K$ a um ponto $\mathbf{v}_i \in V$, é obtida a realização geométrica da malha triangular, denotada $|M|$. Primeiro é definido o espaço vetorial

$$\mathbb{R}^V = \{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n \mid a_i \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_i \in V\} \quad (2.1)$$

Então $|M|$ é o subconjunto de \mathbb{R}^V consistindo da união dos fechos convexos $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V$ de todo elemento $\sigma \in K$.

Se M e N são duas malhas triangulares, é possível calcular o erro de uma aproximação N em relação ao modelo original M , por meio de uma métrica de erro que utiliza a realização geométrica das malhas M e N . Das diversas métricas existentes para calcular o erro entre duas superfícies, uma das mais adequadas é a *distância de Hausdorff* [2, 46].

A distância entre um ponto \mathbf{p} e uma superfície S' é definida como

$$d(\mathbf{p}, S') = \min_{\mathbf{p}' \in S'} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\| \quad (2.2)$$

Então, a distância de Hausdorff entre duas superfícies S e S' é definida como

$$d(S, S') = \max_{\mathbf{p} \in S} d(\mathbf{p}, S') \quad (2.3)$$

A distância de Hausdorff pode não ser simétrica para duas superfícies específicas S e S' , isto é, pode ocorrer $d(S, S') \neq d(S', S)$, por isso é recomendável utilizar a distância de Hausdorff simétrica, definida como

$$d_s(S, S') = \max[d(S, S'), d(S', S)] \quad (2.4)$$

Logo, a diferença entre duas malhas triangulares M e N pode ser calculada como $d_s(|M|, |N|)$. A distância de Hausdorff representa a diferença máxima entre duas superfícies. Um exemplo do cálculo dessa distância pode ser visto na figura 2.6. As distâncias de Hausdorff entre as superfícies A e B são $d(A, B) = \|v\|$ e $d(B, A) = \|w\|$. A distância simétrica é então $d_s(A, B) = \max(\|v\|, \|w\|) = \|v\|$.

Utilizando-se a distância de um ponto a uma superfície, podem ser calculadas outras métricas, entre elas o Erro Médio, denotado d_M , e a Raiz do Erro Quadrático Médio, denotado d_{RMSE} (RMSE, do inglês *Root Mean Square Error*), definidos como

$$d_M(S, S') = \frac{1}{A(S)} \int \int_{\mathbf{p} \in S} d(\mathbf{p}, S') dS \quad (2.5)$$

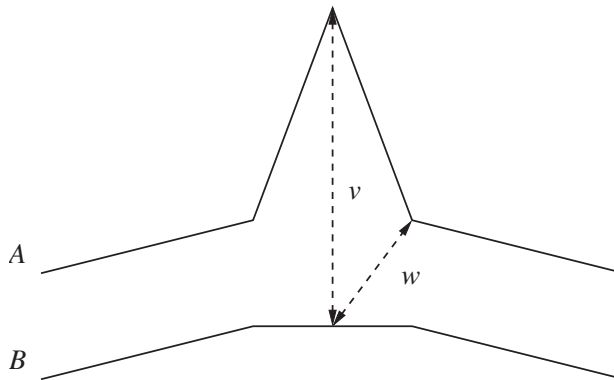


Figura 2.6: Exemplo em que a distância Hausdorff não é simétrica.

$$d_{\text{RMSE}}(S, S') = \sqrt{\frac{1}{A(S)} \int \int_{\mathbf{p} \in S} d(\mathbf{p}, S')^2 dS} \quad (2.6)$$

onde $A(S)$ denota a área da superfície S .

Essas métricas podem ser mais adequadas para algumas aplicações, pois não fornecem apenas o erro máximo entre duas superfícies, mas sim a diferença média entre as duas.

A utilização dessas medidas estabelece uma maneira única de comparar a qualidade global entre duas malhas triangulares. No entanto, o cálculo dessas métricas é bastante custoso, envolvendo grande quantidade de computações de distâncias entre pontos, impedindo que sejam utilizadas eficientemente em um processo de simplificação iterativo, sendo restritas apenas à utilização na comparação final da qualidade entre duas malhas triangulares.

As métricas que são utilizadas durante o processo de simplificação são apenas um dos aspectos desses métodos. Algoritmos para a simplificação de malhas triangulares podem ser classificados segundo a operação de simplificação envolvida, a métrica de erro utilizada e o esquema geral do algoritmo de simplificação [56]. As operações de simplificação comumente utilizadas são expostas a seguir.

Algumas das operações descritas a seguir possuem uma operação inversa associada, de forma que é possível utilizar a operação e a sua inversa para implementar um sistema de modelagem em multi-resolução, aplicando a operação para simplificar a malha, e então aplicando a operação inversa para novamente detalhar a malha, quando for necessário.

Se alguns poucos casos especiais apresentados mais adiante forem evitados, todas as operações descritas a seguir mantêm a topologia da malha triangular, simplificando apenas a sua geometria. Isto é, uma triangulação que é uma 2-variedade continuará apresentando a mesma estrutura se simplificada com essas operações, e o *genus* não será alterado. No entanto, duas operações de simplificação que modificam a topologia da malha

triangular são apresentadas mais adiante, na próxima seção.

A operação de *contração de aresta* (*edge collapse*), que pode ser vista na figura 2.7, retira uma aresta da malha e substitui os dois vértices das extremidades da aresta, i e j , por um novo vértice, r (vértice resultante da operação). A posição do novo vértice é determinada de forma que o erro no local da operação seja o menor possível. Duas faces triangulares também são eliminadas nesse processo. Essa operação também é chamada de *contração de aresta geral* para diferenciá-la da operação de *contração de aresta direcionada*, que será apresentada a seguir.

A inversa da operação de contração de aresta é a operação de *partição de vértice*, que transforma um vértice em dois novos vértices, criando uma aresta e duas faces triangulares no processo.



Figura 2.7: Operação de *contração de aresta*, de (a) para (b). Operação de *partição de vértice*, de (b) para (a).

A operação de *contração de aresta direcionada* (*half-edge collapse*), que pode ser vista na figura 2.8, é uma operação de contração de aresta que diminui o problema de determinar a posição do novo vértice. Nessa operação, um dos dois vértices originais, i ou j , é utilizado como o novo vértice na malha simplificada.

A operação é chamada de contração de aresta direcionada porque pode-se considerar uma aresta $e_{ij} = \{i, j\}$ como duas arestas direcionadas $\vec{e}_{ij} = (i, j)$ e $\vec{e}_{ji} = (j, i)$. Então, o custo para cada uma delas pode ser calculado independentemente, assumindo que a contração da aresta direcionada \vec{e}_{ij} irá remover o vértice i da malha, e a contração de \vec{e}_{ji} irá remover o vértice j .

A inversa dessa operação é uma operação de *partição de vértice* que mantém um dos dois novos vértices na posição do vértice original.

A operação de *contração de face* (*face collapse*), que pode ser vista na figura 2.9, retira um triângulo da malha. Nesse processo, os três vértices do triângulo, i , j e k , são fundidos em um único vértice, r . Os três triângulos vizinhos ao triângulo que foi eliminado também são retirados da malha resultante.

Uma operação de *remoção de vértice* (*vertex removal* ou *vertex decimation*), que pode ser vista na figura 2.10, retira um vértice da malha e todas as faces incidentes a este vértice. A região afetada pela retirada do vértice é retriangulada. Depois de aplicada a



Figura 2.8: Operação de *contração de aresta direcionada*.



Figura 2.9: Operação de *contração de face*.



Figura 2.10: Operação de *remoção de vértice*.

operação, a malha resultante apresenta apenas dois triângulos a menos.

A operação de *troca de aresta* (*edge swap*), que pode ser vista na figura 2.11, não é utilizada para reduzir a complexidade da malha. No entanto, ela pode ser aplicada para ajustar a malha triangular que está sendo simplificada, para que esta melhor aproxime a malha inicial, sem afetar o número de vértices ou triângulos utilizados.



Figura 2.11: Operação de *troca de aresta*.

É importante salientar que existem alguns casos em que essas operações não podem ser aplicadas, pois gerariam malhas triangulares degeneradas ou com inconsistências. A figura 2.12 apresenta um caso em que é realizada uma operação de contração de aresta, fundindo os vértices i e j no vértice r . Pode ser visto que ao ser aplicada a operação, o triângulo destacado modifica a orientação de seus vértices e dobra-se por cima de outro triângulo.

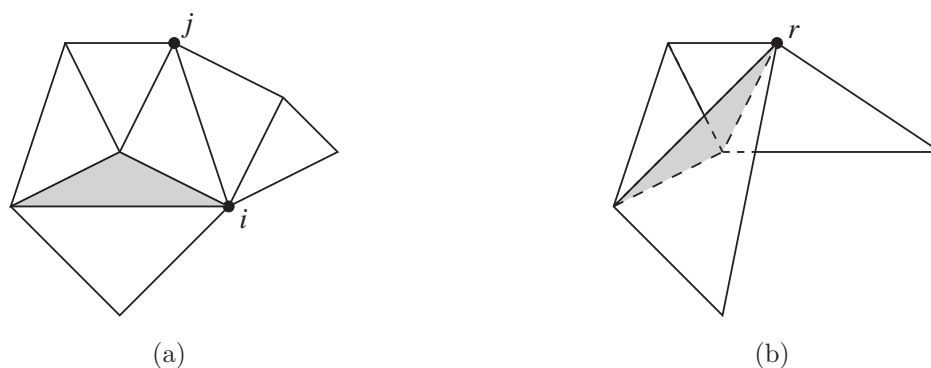


Figura 2.12: Inversão de face que pode ocorrer na triangulação ao aplicar uma operação de contração de aresta para a aresta e_{ij} .

Para resolver esse tipo de problema, pode-se verificar se é possível aplicar a operação efetivamente na malha, através de testes específicos. No entanto, dependendo da operação, vários requisitos devem ser verificados, o que pode tornar esse procedimento bastante complexo.

Outra solução consiste em primeiramente aplicar a operação e, se houver algum problema na malha triangular modificada, a operação é desfeita (o que é equivalente a simular a aplicação da operação). Para verificar se houve um problema, pode-se comparar as normais dos triângulos afetados na modificação e verificar se elas sofreram uma mudança significativa, indicada por um aumento maior que certo limiar do ângulo entre a normal anterior e a nova normal de uma determinada face triangular.

Outro teste que pode ser realizado, mais preciso que a verificação da mudança de normais, também baseia-se em verificar se malha triangular não apresenta nenhum problema depois de modificada. O teste consiste em verificar se o vértice resultante de uma contração está dentro de um domínio válido da malha triangular [6].

Para cada vértice envolvido na operação de simplificação, existe em cada face triangular incidente a esse vértice um plano perpendicular à aresta oposta a esse vértice. Então, o vértice resultante da operação necessariamente deve estar do mesmo lado desse plano que o vértice em questão. Isso é verificado para todos triângulos incidentes ao vértice, com exceção das faces compartilhadas com os outros vértices envolvidos na contração.

Um exemplo para esse teste pode ser visto na figura 2.13, para a contração da aresta e_{ij} . Para o vértice i , os triângulos envolvidos no teste estão destacados em (a),

e para o vértice j em (b). Para cada face destacada, existe um plano perpendicular à aresta oposta ao vértice. Então, o vértice resultante da operação deve estar do mesmo lado desse plano, como mostrado pela seta para apenas uma das faces. Ao se tratar de uma contração de face, o teste deve ser realizado para os três vértices do triângulo.

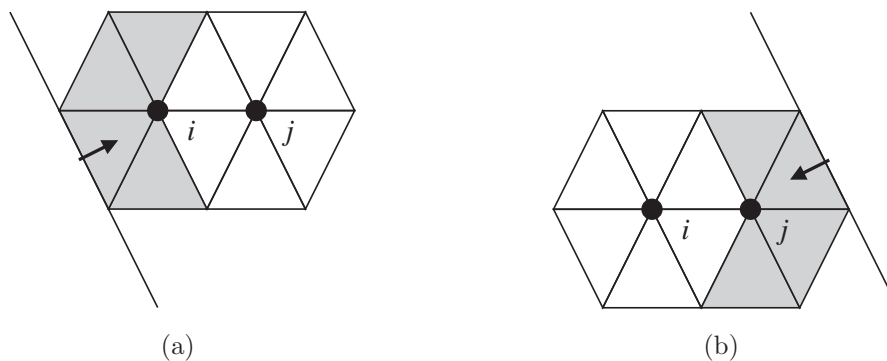


Figura 2.13: Teste para determinar se ocorrerá uma inversão de face ao efetuar a contração da aresta e_{ij} .

Para encontrar a normal \mathbf{n} do plano π perpendicular à aresta e_{jk} , oposta ao vértice i , realiza-se o cálculo $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_p}{\|\mathbf{n}_p\|}$, sendo que $\mathbf{n}_p = ((\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)) \times (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j)$, onde \times denota o produto vetorial entre dois vetores. Essa situação pode ser vista na figura 2.14. Depois, verifica-se se o produto interno da normal com o vetor relativo ao novo vértice é menor que zero, indicando que o vértice resultante está no lado do plano oposto ao vértice i , isto é, se $(\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{n} < 0$, então a posição do vértice r é inválida.

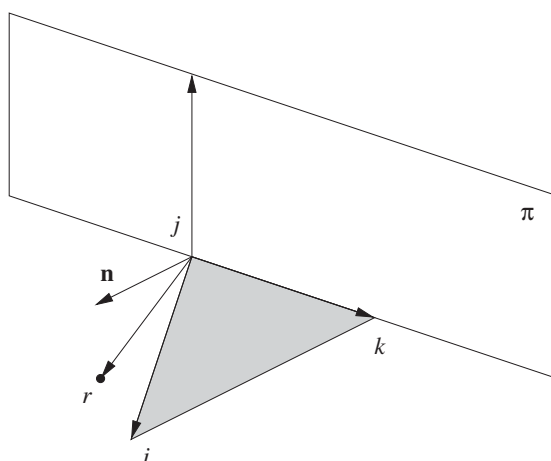


Figura 2.14: Vetores envolvidos no cálculo do teste de inversão de face.

Outro caso que deve ser evitado é quando os dois vértices de uma aresta a ser contraída possuem mais de dois vértices adjacentes em comum, como visto na figura 2.15 (a). Se a operação for aplicada, uma aresta na malha resultante será adjacente a quatro

faces triangulares, caracterizando a triangulação como não possuindo mais a topologia de uma variedade, como apresentado em (b).



Figura 2.15: Triangulação que não é uma variedade que pode surgir ao aplicar uma operação de contração de aresta para a aresta e_{ij} .

Para evitar esse tipo de problema é suficiente verificar se os dois vértices possuem mais de dois vértices adjacentes em comum. Se isto ocorrer, a aresta deve ser caracterizada como inválida e não deve ser considerada como operação candidata de simplificação. Para a contração de uma face, o teste deve ser realizado para as três arestas que compõem o triângulo e, assim, esse problema será evitado.

Para que esse teste de validade seja efetivo, uma maneira adequada de atualização das operações pertencentes à região modificada da malha deve ser utilizada. Considere o exemplo mostrado na figura 2.16 (a). Suponha que as arestas e_{ij} e e_{kl} são operações candidatas válidas. Se a aresta e_{ij} for contraída, teremos a configuração em (b). Então, se a validade da operação candidata e_{kl} não for novamente verificada após a modificação da malha, a sua aplicação poderá levar ao surgimento de uma triangulação que não apresenta mais a topologia de uma variedade.

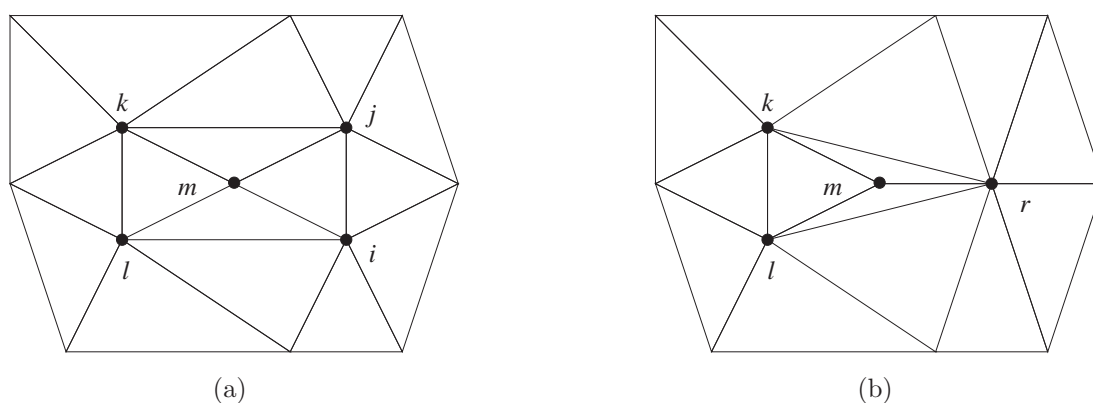


Figura 2.16: Se a aresta e_{ij} for contraída e, depois, a aresta e_{kl} , surgirá uma triangulação que não é uma variedade.

Para evitar esse problema, após a modificação introduzida na malha pela contração da aresta e_{ij} , a validade de todas as arestas adjacentes aos triângulos incidentes

ao vértice resultante da operação deve ser reavaliada ($\llbracket \llbracket r \rrbracket \rrbracket$). Se apenas as arestas incidentes ao vértice resultante forem reavaliadas ($\llbracket r \rrbracket$), então malhas que não apresentam mais a topologia de uma variedade podem surgir.

Gieng *et al.* [22] propõem um teste para estabelecer a validade de operações candidatas que, a princípio, tornaria desnecessária a reavaliação da validade durante a simplificação da malha triangular. Uma operação candidata é caracterizada como válida apenas se os dois vértices da contração não possuem vértices de grau quatro em comum, como o vértice m na figura 2.16 (a).

No entanto, esse teste só é efetivo se todas as operações que serão aplicadas na malha são inicialmente determinadas, como no método de simplificação proposto por esses autores. Se as operações forem dinamicamente selecionadas a medida que a simplificação vai progredindo, vértices de grau 5 poderiam se transformar em vértices de grau 4 e, então, grau 3, levando à situação apresentada na figura 2.15 (a).

Quanto ao esquema geral de um método de simplificação, os primeiros métodos desenvolvidos não apresentavam uma metodologia muito clara de como aplicar as operações de simplificação, no entanto, com os progressos na área, os diversos métodos foram tendendo a utilizar o mesmo esquema geral, apresentado no algoritmo 1 [56].

Algoritmo 1 Simplificação gulosa.

```

1: para cada operação  $op$  faça
2:   ComputarCusto( $op$ )
3:    $Q \rightarrow$  Inserir( $op$ )
4: fim para
5: enquanto  $Q$  não vazia faça
6:    $op \leftarrow Q \rightarrow$  ExtrairMenor()
7:   AplicarOperação( $op$ )
8:   para cada operação vizinha  $i$  faça
9:     ComputarCusto( $i$ )
10:     $Q \rightarrow$  Atualizar( $i$ )
11:   fim para
12: fim enquanto

```

O algoritmo consiste basicamente em sempre manter associada a cada operação que pode ser efetivamente aplicada um valor informando o quanto a operação simplifica o modelo, o chamado *custo* da operação. No início do método, esse valor é calculado para todas as operações possíveis e, à medida que a malha é simplificada, o valor associado às operações afetadas por alterações na triangulação é recalculado, de forma a manter todos os custos sempre atualizados.

O procedimento *ComputarCusto* calcula o erro que será introduzido na malha se a operação candidata for aplicada. Para que o processo de simplificação gere aproximações de melhor qualidade, pode ser requerido que, ao recalculando o custo de uma operação, isto envolva somar a esse custo o erro associado à operação que causou a modificação da

malha, de forma a propagar o erro anterior.

A utilização de uma fila de prioridades, denotada Q no algoritmo, tende a acelerar o processo de simplificação, uma vez que a operação com o menor custo sempre está disponível nessa estrutura de dados, não sendo necessário fazer uma busca pelos elementos da malha triangular para determiná-la.

O algoritmo é denominado de simplificação *gulosa* porque sempre a operação de menor custo é retirada da fila de prioridades e aplicada na malha triangular. Nenhuma operação é desfeita durante a execução do método.

Outros esquemas propostos para os algoritmos de simplificação incluem a abordagem de *atualização preguiçosa* das operações, apresentada no algoritmo 2 [10,56]. Quando a malha triangular é alterada, o custo das operações não é recalculado. Este é apenas calculado novamente para uma operação se esta for candidata a ser aplicada. A justificativa para a utilização desse tipo de abordagem é que as operações sempre tendem a diminuir o custo, e nunca aumentá-lo. Logo, a eficiência do método não é afetada pela utilização de valores desatualizados para manter a fila de prioridades.

Algoritmo 2 Simplificação com atualização preguiçosa.

```

1: para cada operação  $op$  faça
2:   ComputarCusto( $op$ )
3:    $op \rightarrow desatualizada \leftarrow falso$ 
4:    $Q \rightarrow Inserir(op)$ 
5: fim para
6: enquanto  $Q$  não vazia faça
7:    $op \leftarrow Q \rightarrow ExtrairMenor()$ 
8:   se ( $op \rightarrow desatualizada = falso$ ) então
9:     AplicarOperação( $op$ )
10:    para cada operação vizinha  $i$  faça
11:       $i \rightarrow desatualizada \leftarrow verdadeiro$ 
12:    fim para
13:    senão
14:      ComputarCusto( $op$ )
15:       $op \rightarrow desatualizada \leftarrow falso$ 
16:       $Q \rightarrow Inserir(op)$ 
17:    fim se
18: fim enquanto

```

Os conceitos anteriormente apresentados, incluindo as operações de simplificação, as métricas de erro e o esquema geral dos métodos de simplificação, são utilizados na próxima seção para a discussão dos trabalhos da literatura.

2.2 Discussão da literatura

Nesta seção, os diversos trabalhos da literatura são discutidos, com ênfase principalmente na maneira como a simplificação das malhas triangulares é realizada, incluindo quais operações são utilizadas e como uma métrica de erro é associada a cada operação.

Também são discutidas as idéias associadas com os conceitos de LOD e modelagem em multi-resolução, uma vez que estas são o foco principal dos atuais métodos de simplificação e, em diversos trabalhos relevantes para o campo da simplificação de malhas triangulares, há uma grande intersecção com esses conceitos.

Estudos sobre os métodos existentes para simplificação de malhas triangulares são apresentados por Heckbert e Garland [28] e Luebke [54]. Luebke [57] também apresenta um estudo desses métodos direcionado às diferentes aplicações e suas necessidades. Cignoni *et al.* [7] realizam uma comparação entre os métodos de simplificação disponíveis, também discutindo as particularidades de cada método. Diversos desses trabalhos são apresentados e discutidos a seguir.

Schroeder *et al.* [67] introduzem um método de decimação de malhas triangulares muito conhecido, baseado na operação de remoção de vértice. Se o vértice satisfaz determinado critério de decimação, este é removido e o buraco deixado na malha é re-triangulado. Esse processo é repetido até que um determinado número de vértices seja removido, ou até que um limiar máximo do critério de decimação seja alcançado.

Um vértice é removido se a distância deste até o plano médio formado pelos triângulos incidentes ao vértice em questão é maior que um determinado limiar. A distância do vértice v ao plano médio é calculada utilizando as normais dos triângulos incidentes ao vértice, \mathbf{n}_t , os centros desses triângulos, \mathbf{x}_t , e as áreas dos triângulos, a_t . A distância é dada por

$$d(v) = |\mathbf{n}(\mathbf{v}_v - \mathbf{x})| \quad (2.7)$$

onde

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_s}{\|\mathbf{n}_s\|}, \quad \mathbf{n}_s = \frac{\sum_{t \in T_v} \mathbf{n}_t a_t}{\sum_{t \in T_v} a_t}, \quad \mathbf{x} = \frac{\sum_{t \in T_v} \mathbf{x}_t a_t}{\sum_{t \in T_v} a_t} \quad (2.8)$$

A normal do vértice v é calculada como a média das normais dos triângulos incidentes ao vértice, ponderada pela área dos triângulos. Um exemplo apresentando os vetores envolvidos no cálculo da normal de um vértice pode ser visto na figura 2.17.

Uma métrica diferente é utilizada se o vértice é incidente a uma aresta de *característica* ou a uma borda. Uma aresta de característica poderia representar, por exemplo, um atributo topográfico importante de um modelo de terreno, como uma crista, um vale ou um rio. Nesse caso, uma simples métrica de distância do vértice à aresta ou à borda é utilizada.

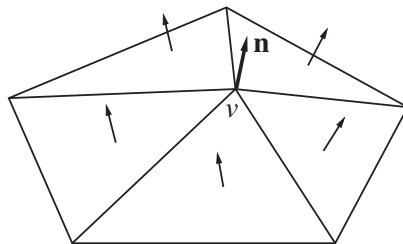


Figura 2.17: Exemplo do cálculo da normal do vértice v .

O método pode ser aplicado a diversos tipos de malhas triangulares, e preserva a topologia das malhas simplificadas. Por isso, se o vértice é *complexo*, isto é, um vértice que é incidente a triângulos não conexos, este não é removido, para manter a topologia de malhas que não são uma variedade.

Para retriangular o buraco deixado pela remoção de um vértice, é utilizado um método conhecido como *recursive loop splitting*. É escolhida uma aresta que divide o buraco em duas partes, e cada parte é novamente dividida em duas, seguindo esse processo recursivamente, até que uma triangulação seja obtida. A aresta escolhida para iniciar o processo é a que possui dois vértices não adjacentes na triangulação.

Não é mencionado no trabalho em qual ordem as operações são aplicadas, só sendo enfatizado que é estabelecido um limiar de erro e todas as operações que satisfazem esse limiar podem ser realizadas. Também deve ser observado que o critério de decimação de uma operação de remoção de vértice é dependente apenas da vizinhança do vértice, não havendo grande controle da qualidade da aproximação gerada.

Schroeder [66] modifica o algoritmo de decimação para que a topologia não seja mais preservada, uma vez que dessa maneira é possível simplificar os modelos de forma mais geral, assim como realizado por Garland e Heckbert [21]. A cada vértice é associado um critério de decimação, calculado assim como no trabalho de Schroeder *et al.* [67], pela distância do vértice ao plano médio formado pelos triângulos incidentes a este. Os vértices são ordenados por esse critério em uma fila de prioridades, e são escolhidos para simplificação primeiramente aqueles com a menor distância ao plano.

No entanto, nesse trabalho não é mais utilizada a operação de remoção de vértice, e sim a operação de contração de aresta (contração de aresta direcionada, segundo a denominação neste trabalho), considerada mais adequada pelo autor, pois através dela é possível obter uma representação *progressiva* da malha, semelhante à representação de Hoppe [31], que possibilita a implementação de modelos com multi-resolução.

Além disso, para controlar melhor o erro da aproximação gerada durante o processo de simplificação, e sem interferir na eficiência do método, o custo para um vértice removido é acumulado no modelo simplificado. Quando uma operação de contração de aresta é realizada, o custo do vértice removido é somado ao custo associado ao vértice

que permanece no modelo.

Soucy e Laurendeau [70] propõem um método de simplificação muito parecido ao de Schroeder, baseado também na decimação de vértices. Primeiramente, cada vértice do modelo é retirado, a região afetada pela retirada do vértice é retriangulada, e a menor distância do vértice removido à nova triangulação é calculada. Ou seja, a distância do vértice à malha simplificada é efetivamente calculada, e não aproximada. Então, uma lista com todos os vértices é criada, ordenada por essa distância, que é o custo associado a cada vértice.

Durante o processo de simplificação, o vértice com o menor erro é retirado, o buraco deixado na malha é retriangulado, o erro para os vértices adjacentes ao removido é recalculado, e a lista é atualizada. O algoritmo continua até que um certo limiar de erro seja alcançado. A malha sempre é retriangulada de forma a maximizar os ângulos dos triângulos, o que foi demonstrado pelo autor que minimiza o erro da aproximação.

Klein e Straßer [47] propõem um método de simplificação para a aproximação de superfícies de modelos de CAD, também baseado na remoção de vértices. Os vértices são armazenados em uma lista, ordenados pelo erro associado a cada um, e os vértices com os menores erros são retirados iterativamente do modelo, até que uma certa taxa de erro seja alcançada.

A métrica de erro associada a cada vértice é o valor da distância de Hausdorff que seria gerada entre a malha original e a malha aproximada se o vértice fosse removido. Com a utilização dessa métrica de erro, a qualidade das aproximações torna-se muito boa, mas não é mencionado o tempo de execução do método, que deve ser alto, por ser bastante custoso calcular a distância de Hausdorff.

Outra particularidade desse método é que a malha triangular é sempre mantida como uma triangulação de Delaunay, assim, quando um vértice é removido, o buraco deixado por este no modelo é retriangulado conforme os critérios desse tipo de triangulação.

Utilizando a triangulação simplificada e os vértices retirados da malha, associados à medida de erro, é criada uma representação em multi-resolução para a superfície de CAD. A conectividade não é armazenada, uma vez que, como existe uma única triangulação de Delaunay para um conjunto de pontos no plano¹, o método apenas insere os pontos necessários no modelo para satisfazer uma certa taxa de erro e, então, é criada uma triangulação de Delaunay para conectar os pontos.

Uma abordagem semelhante é utilizada por Rila [64] para representar imagens digitais na forma de malhas triangulares. Uma triangulação de Delaunay é construída para aproximar a imagem e, como esta é única, apenas os pontos da malha triangular são armazenados. Para visualizar a imagem, uma triangulação de Delaunay é rapidamente construída conforme os pontos fornecidos, e os triângulos são interpolados, o que resulta

¹A triangulação de Delaunay é única se não existirem quatro pontos co-circulares, o que ocorre com uma probabilidade baixa em um conjunto de pontos aleatoriamente distribuídos sobre um domínio [4].

em uma aproximação para a imagem original. Dessa forma, obtém-se uma representação bastante comprimida de uma imagem digital.

Em [46], Klein *et al.*, além de generalizarem o método proposto anteriormente para diversos tipos de malhas triangulares, descrevem uma maneira eficiente de estimar a distância de Hausdorff entre duas malhas triangulares, que consiste em utilizar valores calculados na iteração anterior do método de simplificação. É mantida uma correspondência entre a malha original e a malha simplificada, de forma que é possível saber que ponto da malha original está mais próximo de um determinado ponto da malha simplificada. Dessa maneira, a distância de Hausdorff é conhecida para cada ponto, sendo apenas necessário recalculá-la onde a triangulação foi modificada.

Ciampalini *et al.* [5] também propõem um método de simplificação baseado na remoção de vértices, muito semelhante ao de Klein e Straßer [47], com um controle global do erro da aproximação. A distância de Hausdorff que seria gerada se o vértice fosse removido é calculada de forma aproximada, utilizando um valor de erro que é acumulado nas faces triangulares a cada iteração do processo de simplificação. Dessa forma, um controle maior da qualidade das aproximações é obtido.

Os vértices são ordenados por esse valor e os de menor erro são removidos da malha triangular. O buraco deixado pela retirada de um vértice da malha é triangulado de forma a maximizar os ângulos dos triângulos. Quando não é possível utilizar esse algoritmo de triangulação, outro mais simples é utilizado.

Como a cada face da malha triangular está associado o erro global da aproximação do modelo, isto possibilita a criação de uma estrutura de multi-resolução. Todas as faces triangulares presentes durante o processo de simplificação são armazenadas, junto com dois valores, um destes representando o valor global de erro da face quando esta foi criada durante o processo de simplificação, e outro valor representando o valor de erro quando a face foi eliminada.

Assim, para obter uma malha com determinado erro, são inseridas na triangulação todas as faces cujo intervalo de valores de erro contém a resolução requerida. Testes realizados pelos autores mostram que, apesar de todas as faces triangulares presentes em todo o processo de simplificação serem armazenadas, o valor total da estrutura de multi-resolução não é muito maior que o modelo na maior resolução (aproximadamente menos de três vezes a malha original).

Em [8], Cignoni *et al.* aperfeiçoam essa estrutura com o propósito de representar modelos de terrenos em multi-resolução. Nesse trabalho, as malhas triangulares são construídas por refinamento, no entanto, o princípio para a implementação de multi-resolução é o mesmo, associando a cada triângulo um valor de erro na sua criação e um na sua remoção, permitindo, dessa forma, extrair uma malha completa satisfazendo determinado erro. Com isso, os autores mostram que essa forma de multi-resolução é independente do método de construção da aproximação.

O método proposto por Schröder e Roßbach [68] também é baseado na remoção de vértices. Primeiramente são calculadas as normais do plano médio de cada vértice, da mesma forma que no trabalho de Schroeder *et al.* [67], utilizando a média das normais dos triângulos incidentes ao vértice em questão (equação 2.8).

Em seguida, a cada vértice é associado um valor a_{max} , que é o maior ângulo entre a normal do vértice, \mathbf{n} , e as normais dos triângulos incidentes ao vértice, \mathbf{n}_t , como definido a seguir

$$a_{max}(v) = \max_{t \in T_v} \left(\arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}_t\|} \right) \quad (2.9)$$

Se o objetivo do método é simplificar a malha retirando um certo número m de vértices, estes são ordenados pelo valor a_{max} e os m vértices com os menores valores são retirados. Se o objetivo é simplificar a malha mantendo uma certa qualidade, um valor máximo de ângulo é determinado, e todos os vértices com um valor de a_{max} menores que o valor estipulado são removidos.

Para retriangular a malha após a remoção de um vértice, os autores propõem três técnicas. As duas primeiras técnicas, ao removerem um vértice, deixam o buraco presente na malha triangular até o fim do processo de simplificação, quando então a malha toda pode ser retriangularada como uma triangulação de Delaunay, ou apenas os buracos podem ser retriangularados. A terceira técnica consiste em sempre retriangular um buraco ao remover um vértice, para que buracos muito grandes não apareçam na malha.

Os autores concluem que essa última técnica gera as melhores aproximações e possibilita atualizar os valores dos ângulos máximos dos vértices durante o processo de simplificação, como realizado pela maioria dos métodos. Utilizando as outras duas técnicas de retriangularação, não é levado em conta se o valor de a_{max} de um vértice é modificado quando um de seus vértices vizinhos é removido.

Hamann [27] propõe um método de simplificação baseado na contração de faces triangulares. O método consiste em associar a cada vértice da triangulação um valor de curvatura. Utilizando os valores de curvatura dos três vértices de um mesmo triângulo, é estabelecido um peso para esse triângulo.

Um processo iterativo de simplificação seleciona o triângulo com o menor peso, isto é, aquele em que os vértices apresentam a menor curvatura, remove esse triângulo, insere um novo ponto na malha e retriangulara a região afetada. Os pesos para os triângulos da região afetada são recalculados. O processo iterativo termina quando um número determinado de vértices for removido da malha triangular.

O autor apresenta uma série de condições para estabelecer se a contração de uma determinada face pode ser realizada. Um teste é realizado para verificar se a contração da face não irá desconectar a malha triangular e se é possível retriangular a região modificada.

Para atribuir um peso a um triângulo t da malha triangular, são utilizados os valores das curvaturas principais de cada vértice do triângulo para determinar a curvatura

do triângulo, e são utilizados os valores dos ângulos do triângulo para evitar a criação de triângulos muito finos.

A *curvatura absoluta* c de um vértice v é definida como

$$c(v) = |\kappa_1^v| + |\kappa_2^v| \quad (2.10)$$

onde κ_1^v e κ_2^v são as curvaturas principais do vértice v , calculadas como em [26].

O *peso de curvatura* ρ de um triângulo t é então definido como

$$\rho(t) = \sum_{v \in V_t} c(v) \quad (2.11)$$

O *peso dos ângulos* σ de um triângulo t é definido como

$$\sigma(t) = 2 \left(\left(\sum_{v \in V_t} \cos \alpha_v \right) - 1 \right) \quad (2.12)$$

onde α_v é o ângulo do vértice v no triângulo t . O autor provou que esse valor pertence ao intervalo $[0, 1]$, estando próximo de 1 quando o triângulo está próximo de ser equilátero, e estando próximo de 0 quando o triângulo é muito fino.

O peso ω para um triângulo t é então definido como

$$\omega(t) = \sigma(t)\rho(t) \quad (2.13)$$

Logo, os triângulos com o menor peso ω são removidos da malha triangular. Para determinar a localização do novo vértice necessário para o processo de retriangulação, é criada uma aproximação polinomial dos dados utilizando o método dos mínimos quadrados, uma vez que o processo de simplificação trabalha apenas com a malha triangular, sem nenhuma outra fonte de dados.

Utilizando os vértices da região afetada pela remoção do triângulo, o método dos mínimos quadrados é utilizado para aproximar uma função $f(u, v)$ que representa a superfície em que esses vértices estão presentes. Um sistema de coordenadas apropriado é escolhido para essa função, de forma que o ponto $f(0, 0)$ que será inserido na malha triangular seja o que melhor reduza o erro da aproximação da superfície.

Depois que a região afetada pela remoção de uma face é retriangulada, é executado um algoritmo iterativo que tem por objetivo maximizar os ângulos dos novos triângulos. Esse algoritmo realiza diversas operações de troca de aresta, até que os ângulos dos triângulos não possam mais ser maximizados.

Hoppe *et al.* [35] simplificam uma malha triangular, $M = (V, K)$, minimizando a

função de energia $E(M)$, que é dada por

$$E(M) = E_{dist}(K, V) + E_{rep}(K) + E_{spring}(K, V) \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} E_{dist}(K, V) &= \sum_{i=1}^n d^2(\mathbf{v}_i, |K|) \\ E_{rep}(K) &= c_{rep} n \\ E_{spring}(K, V) &= \sum_{\{j,k\} \in K} k \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k\|^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

O objetivo do termo E_{dist} na função de energia é minimizar o erro da malha simplificada, dado pelo quadrado da distância dos vértices da malha original à superfície aproximada. O termo E_{dist} é o menor possível quando todos os vértices da malha original estão presentes. Por essa razão, o termo E_{rep} é introduzido, para que vértices sejam efetivamente retirados da malha original, uma vez que este termo diminui à medida que vértices são removidos da malha. A constante c_{rep} , informada pelo usuário, indica o quanto a malha deve ser simplificada em detrimento da qualidade da aproximação.

O termo E_{spring} é introduzido na função de energia porque os termos E_{dist} e E_{rep} não são suficientes para garantir a qualidade da aproximação gerada. O termo E_{spring} tem como objetivo regularizar a malha durante o processo de simplificação, conforme a constante k , que é modificada automaticamente durante o processo de simplificação.

Para que a função de energia seja minimizada, duas transformações são realizadas a cada iteração do método. Primeiramente, as posições dos vértices são otimizadas para melhor aproximar a malha original. Então, as operações de contração de aresta, partição de vértice e troca de aresta são aplicadas à malha. Uma operação é aplicada se a função de energia diminuir depois da operação ser realizada. Não é dada muita importância à ordem como as operações são aplicadas.

Em [31], Hoppe estende o trabalho anterior para construir a representação de *Progressive Meshes* de uma malha triangular, para que a malha possa ser representada em múltiplas resoluções. Além de introduzir o conceito de *Progressive Mesh*, baseado em uma malha triangular inicial e uma série de operações de partição de vértice que aumentam o detalhe da malha progressivamente, esse trabalho modificou a função de energia, retirando o termo E_{rep} e introduzindo termos para a simplificação de outros atributos da malha, como cores e normais.

O trabalho introduz a noção de que apenas a operação de contração de aresta é necessária para simplificar uma malha adequadamente. As possíveis operações a serem aplicadas são ordenadas em uma fila de prioridades segundo um valor que indica o quanto a operação modifica a função de energia. Dessa maneira, é possível controlar o número

de faces que são retiradas e, assim, o termo E_{rep} não é mais necessário.

Uma malha bastante simplificada, em conjunto com as diversas operações de contração de aresta aplicadas para a simplificação desta, são então armazenadas, dando origem à representação de *Progressive Mesh*. Depois, aplicam-se as operações inversas (partições de vértices) na malha simplificada tantas vezes quanto necessário e assim é obtida a aproximação com o detalhe requerido.

O trabalho é novamente estendido em [32] para que a representação de *Progressive Meshes* também possa implementar o LOD dependente da vista. As operações de partição de vértice são utilizadas para refinar a malha apenas nas porções requeridas. Assim como em [76], uma hierarquia de vértices é criada para que a malha possa ser suficientemente detalhada nas regiões onde seja necessário. Regras são definidas para determinar quais operações devem ser aplicadas no processo de detalhamento.

Em [33], Hoppe apresenta os algoritmos e as estruturas de dados necessários para uma implementação eficiente dos *Progressive Meshes*, e em [34] estes são novamente estendidos para incluir *geomorphs*, implementando LOD dependente da vista de forma que o detalhamento da malha seja coerente conforme a passagem do tempo, isto é, sem que ocorram mudanças drásticas na malha durante a visualização progressiva do modelo.

A representação de *Progressive Meshes* já havia sido estendida por Xia e Varshney [76], antes de Hoppe, para incorporar o conceito de LOD dependente da vista, em que uma árvore com uma hierarquia de vértices é utilizada para guiar o processo de detalhamento do modelo. A mesma idéia também foi proposta por Floriani e Magillo [16] e Luebke e Erikson [55].

Garland e Heckbert [21] utilizam a operação de contração de um par de vértices, uma generalização da operação de contração de aresta, para simplificar malhas triangulares. Para essa operação, denotada $(v_1, v_2) \rightarrow v$, dois vértices quaisquer podem ser agregados se existir uma aresta entre eles ou se a distância entre os dois vértices for menor que um certo limiar. Quando o limiar é zero, apenas operações de contração de aresta são realizadas.

Aplicando essa operação, a topologia dos modelos é modificada durante o processo de simplificação, construindo aproximações que podem ser mais adequadas em diversas situações, por serem mais generalizadas. No entanto, modelos que não são variedades podem ser criados, quando dois vértices de duas partes desconexas do modelo são agregados. Quando é necessário manter a topologia do objeto, torna-se bastante trabalhoso preservá-la durante o processo de simplificação.

Para controlar o erro da aproximação durante o processo de simplificação, é associada a cada vértice uma matriz simétrica $\mathbf{Q}_{4 \times 4}$, e o erro para as coordenadas $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z \ 1]^T$ de um vértice v é definido como $\Delta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathbf{v}$. A superfície $\Delta(\mathbf{v}) = \epsilon$, que é o conjunto de pontos com erro ϵ em relação a \mathbf{Q} , é uma superfície quádrica.

Assim como no trabalho de Soucy e Laurendeau [70], também existe um acúmulo

do erro de cada vértice para melhor guiar o processo de simplificação. Após uma operação que agrega dois vértices, $(v_1, v_2) \rightarrow v$, ao novo vértice v é associada uma matriz de erro \mathbf{Q} que é a soma das matrizes de erro \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 dos vértices v_1 e v_2 .

A matriz inicial é criada conforme as equações dos planos dos triângulos incidentes ao vértice. Dessa maneira, para o vértice v , a matriz é definida por

$$\mathbf{Q} = \sum_{\mathbf{p} \in P(v)} \mathbf{p}\mathbf{p}^T \quad (2.16)$$

onde $P(v)$ é o conjunto dos planos dos triângulos incidentes a v , e $\mathbf{p} = [a \ b \ c \ d]^T$ representa o plano com equação $ax + by + cz + d = 1$.

Depois que uma operação de contração de vértices é aplicada, a posição do novo vértice é determinada calculando o mínimo da função Δ . Assim, o novo vértice é posicionado onde o erro associado é menor. Encontrar esse mínimo implica em inverter uma matriz 4×4 . Se não for possível realizar a inversão, o novo vértice é posicionado no mesmo local de um dos vértices removidos no processo.

Mais recentemente, Kim *et al.* [45] utilizam a curvatura discreta de uma malha triangular como uma métrica de simplificação. Embora as simplificações geradas são visualmente apropriadas, os autores não medem a qualidade das aproximações por meio do erro máximo ou médio. A verificação do erro final das aproximações geradas é efetuada apenas pelas próprias métricas de curvatura propostas.

Por outro lado, Hussain *et al.* [36] propõem uma métrica baseada na mudança geométrica introduzida por uma operação de simplificação. Um valor é calculado conforme a mudança de normais dos triângulos envolvidos na operação e esse valor é acumulado para as próximas iterações do algoritmo de simplificação, que segue o esquema apresentado no algoritmo 1.

Apesar de apenas um valor real ser acumulado, os resultados dessa métrica mostram-se à altura das simplificações obtidas utilizando matrizes quádricas, onde mais valores são acumulados. O algoritmo, que utiliza a operação de contração de aresta direcionada, apresenta resultados ainda melhores para simplificações de baixa resolução.

Ao invés de utilizar métodos de simplificação baseados em operações locais, em conjunto com métricas de erro mais elaboradas, Turk [73] propõe um método de caráter global, que cria uma triangulação inteiramente nova para aproximar uma determinada malha triangular. O método consiste em três etapas. Primeiramente, os vértices que irão fazer parte da nova triangulação são escolhidos, distribuídos de maneira mais ou menos uniforme pela superfície da malha triangular. Para este fim, é implementado um algoritmo que insere os vértices e depois calcula uma medida de repulsão entre eles, que causa um reposicionamento dos vértices, para otimizar a forma da nova malha triangular.

Os novos vértices são então inseridos na triangulação inicial, estando presentes

na malha triangular em conjunto com os vértices originais. Finalmente, os vértices originais são retirados da malha triangular. Esse processo permite manter a topologia da malha triangular, pois cada vértice da triangulação original é retirado iterativamente, e a triangulação no local da remoção é refeita.

Este algoritmo, denominado de *mutual tessellation*, foi a melhor maneira encontrada pelo autor para criar uma conectividade adequada entre os novos vértices, de forma a aproximar a topologia do objeto original da melhor maneira possível, pois a topologia da nova malha é construída utilizando diretamente a malha triangular original.

Uma maneira de posicionar os vértices conforme a curvatura da malha triangular é ainda descrita pelo autor, o que pode ser mais adequado do que posicionar os vértices uniformemente, dependendo do aspecto da triangulação a ser simplificada. A curvatura é calculada utilizando-se apenas a malha triangular, sem utilizar qualquer outra informação externa.

Já em [52], Lindstrom e Turk optam por um método de simplificação baseado na operação de contração de aresta. O algoritmo associa um custo a cada aresta da malha triangular. As arestas são então mantidas ordenadas por esse valor em uma fila de prioridades. O método iterativamente seleciona a aresta de menor custo, realiza a sua contração, e recalcula os custos associados às arestas presentes na área modificada da malha triangular. O processo termina quando determinado número de vértices ou triângulos é retirado do modelo.

O vértice resultante da operação de contração de aresta é posicionado de forma a satisfazer uma série de restrições, que têm por objetivo preservar o volume e as bordas da malha triangular, e otimizar a forma dos triângulos. Essas restrições são combinadas em matrizes quádricas, e o custo de uma operação de contração de aresta é calculado conforme a minimização de certas funções envolvendo as matrizes quádricas, para que o posicionamento do vértice resultante da operação satisfaça todas as restrições envolvidas.

Cohen *et al.* [11] descrevem um esquema geral para a simplificação de malhas triangulares satisfazendo uma certa distância de erro, chamado de Envelopes de Simplificação (*Simplification Envelopes*). É observado que, em diversos métodos propostos, a operação de simplificação que reduz a complexidade da malha pode ser vista como consistindo de duas etapas: a criação de um *buraco*, caracterizada pela retirada de vértices, arestas e faces de uma determinada porção da malha triangular, e o preenchimento desse buraco, criando novas faces, arestas e vértices.

Um método baseado em envelopes de simplificação cria duas malhas triangulares, o envelope externo e o envelope interno, que envolvem a malha original, estando distanciadas desta segundo um certo intervalo, que é a taxa de erro que será satisfeita pela malha triangular simplificada.

Para um método de simplificação qualquer, baseado nas duas etapas referidas, é verificado se as faces que serão criadas para preencherem o buraco sofrem intersecção com

os envelopes. Se isto ocorrer, a operação que criou do buraco deve ser desfeita, porque a aproximação excede a taxa de erro permitida. Se não houver intersecção, a operação de simplificação é válida. Dessa forma, ao final do processo, a aproximação construída necessariamente satisfaz a taxa de erro estipulada.

Para demonstrar essa abordagem, os autores implementam dois métodos, um baseado em uma operação de remoção de vértice e retriangulação do buraco, e o outro baseado em um método de caráter global, mais custoso, que remove diversos triângulos durante uma iteração. É demonstrado que, utilizando os envelopes de simplificação, a qualidade da simplificação local não é inferior à da simplificação global.

Rossignac e Borrel apresentam em [65] um método de simplificação baseado no agrupamento de vértices (*clustering*). Um cubo que representa o domínio do volume da malha triangular é dividido em uma série de pequenos cubos, as células do processo de agrupamento, e cada vértice da malha triangular é associado à célula em que este está inserido. O tamanho das células depende do quanto a malha triangular deve ser simplificada.

Então, todos os vértices de uma determinada célula são substituídos por apenas um desses vértices. O vértice escolhido para representar uma determinada célula pode ser aquele que está localizado no centro de massa de todos os outros vértices, ou aquele que apresenta a maior importância perceptual para o modelo. Esse processo de agrupamento pode ser considerado uma operação de simplificação local da malha triangular. Um exemplo desse método, para o caso bidimensional, pode ser visto na figura 2.18.

Após todos os vértices de uma célula serem substituídos pelo seu representante, fazem parte do modelo diversas faces triangulares degeneradas em arestas e vértices, que são eliminadas do modelo se estiverem duplicadas. Dessa forma, uma triangulação simplificada é obtida com esse processo de agrupamento, mas a topologia do modelo pode ser modificada, levando, inclusive, a modelos que não são uma variedade.



Figura 2.18: Operação de agrupamento de vértices.

Luebke e Erikson [55] utilizam essa operação para simplificação de malhas poligonais, com o propósito de implementar um sistema com LOD dependente da vista. Para que isso seja possível, os vértices são armazenados de forma hierárquica. Quando é

necessário diminuir o detalhe da malha poligonal, a operação de agrupamento de vértices é aplicada a todos os vértices de um certo nível, que são substituídos por um único vértice de um nível mais alto, considerado o vértice representativo desse grupo.

Estruturas eficientes são apresentadas para a implementação desse sistema. No entanto, a operação de agrupamento de vértices apresenta as mesmas características que no trabalho de Rossignac e Borrel [65], não preservando a topologia das malhas. Já para a construção da hierarquia de vértices, qualquer algoritmo que contrai vértices pode ser utilizado, este dependendo principalmente da aplicação envolvida.

Pajarola [63] faz uma investigação das diferentes métricas utilizadas para a implementação do LOD dependente da vista. Para criar uma hierarquia de vértices são utilizadas contrações de arestas orientadas, controladas pela métrica quádrica. Então, a resolução do modelo é determinada conforme uma das métricas dependentes da vista.

Floriani *et al.* [18] fazem um levantamento dos modelos de malhas triangulares utilizados para a representação de terrenos digitais em multi-resolução, classificando-os em modelos hierárquicos de terrenos e modelos piramidais de terrenos. Esse tipo de classificação também pode ser aplicado a malhas triangulares 3D. Os modelos hierárquicos são discutidos agora, e os modelos piramidais serão comentados mais adiante.

Uma triangulação hierárquica é baseada na subdivisão de uma superfície inicial em um número determinado de superfícies menores cuja soma resulta na inicial. Essa superfície a ser subdividida é um conjunto de um ou mais triângulos. Aplicando esse princípio de subdivisão recursivamente nas superfícies onde se deseja mais detalhe, a resolução da malha é aumentada onde requerido.

O modelo de subdivisão adotado implicará em como a malha triangular irá apresentar mais detalhe em determinadas regiões. O modelo mais conhecido é a *quadtree*. Duchaineau *et al.* [14] utilizam o modelo *bintree*, que também se tornou muito conhecido. Estes modelos são os mais utilizados pois são simples, adaptativos, e não geram triângulos muito finos e longos.

O modelo de subdivisão *quadtree*, visto na figura 2.19, particiona uma superfície quadrada ou retangular em quatro novas superfícies, e constrói os triângulos necessários. O modelo *bintree*, visto na figura 2.20, subdivide um triângulo retângulo cortando-o pela aresta formada entre o ponto médio da hipotenusa e o vértice do ângulo reto, formando assim dois novos triângulos retângulos.

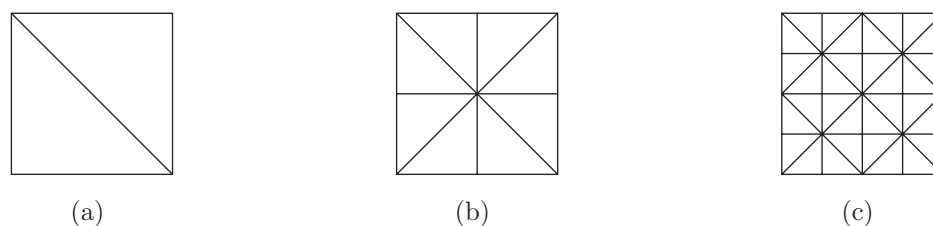


Figura 2.19: Triangulação hierárquica *quadtree*: (a) Nível 0; (b) Nível 1; (c) Nível 2.

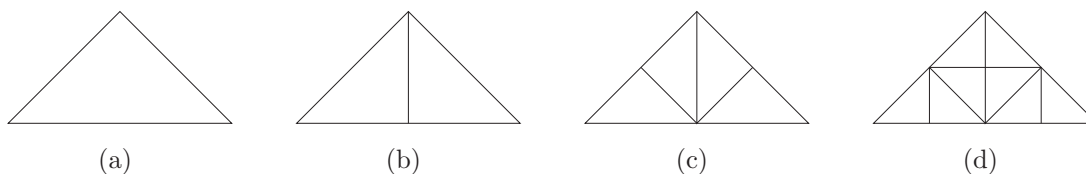


Figura 2.20: Triangulação hierárquica *bintree*: (a) a (d) Níveis 0 a 3.

Uma característica desses modelos é que estes podem gerar triangulações com falhas, como a vista na figura 2.21, quando as superfícies são subdivididas de forma não uniforme e não existe um controle relacionando a subdivisão de duas superfícies vizinhas. Para evitar esse problema, deve ser estabelecido um critério para corretamente triangular as malhas, conhecido como *regra de casamento* (*matching rule*).



Figura 2.21: Triangulação *quadtree* com falha: (a) Visão 2D; (b) Visão 3D.

Para a triangulação *quadtree*, um critério que pode ser adotado é que duas superfícies adjacentes não devem diferir em mais do que um nível. Dessa forma, uma subdivisão conhecida como *restricted quadtree* é criada. Então, ao triangular essa superfície, não existirão problemas de descontinuidade. Uma aplicação dessa restrição pode ser vista na figura 2.22. Primeiramente, a restrição é aplicada para a *quadtree* vista em (a), gerando a *quadtree* em (b), onde uma subdivisão não difere da sua vizinha em mais de um nível.

Então, a *quadtree* é triangulada da seguinte maneira: para cada lado da superfície, se o vizinho possuir um nível maior, são criados dois triângulos. Se o vizinho possuir o mesmo nível ou um nível menor, é criado apenas um triângulo. Dessa maneira, cada superfície será triangulada de quatro a até oito triângulos, como visto em (c).

Para a triangulação *bintree*, o critério é semelhante. Dois triângulos vizinhos não podem diferir em mais de um nível de subdivisão, isto é, o vizinho de um triângulo pode apenas apresentar uma subdivisão a menos, o mesmo número de subdivisões, ou uma subdivisão a mais que o triângulo em questão.

Os modelos com subdivisão hierárquica apresentam a vantagem de representarem implicitamente uma malha triangular em diferentes resoluções. Uma triangulação seguindo essa estrutura pode ser vista como uma árvore, em que a superfície inicial é a raiz da árvore, e os nodos filhos representam as subdivisões dessa superfície. Seguindo o

resolução também utilizando *wavelets*, mas baseada na triangulação *quadtree*. Uma triangulação *quadtree* é construída para representar uma superfície inicial, e os coeficientes da representação com *wavelets* indicam onde deve ser adicionado mais detalhe para a obtenção de uma malha com determinada resolução, isto é, os coeficientes indicam quais vértices devem ser inseridos no modelo.

Em oposição às malhas hierárquicas, um modelo piramidal armazena explicitamente diferentes triangulações, cada uma com um nível de detalhe maior que a anterior. Pirâmides não podem ser armazenadas como árvores, assim como os modelos baseados em subdivisão hierárquica, mas podem ser vistas como um grafo, relacionando triângulos cujos interiores sofrem intersecções. Um exemplo pode ser visto na figura 2.23.

Com o intuito de armazenar eficientemente estruturas piramidais, Berg e Dobrindt [3] propõem uma forma de criar uma hierarquia em uma triangulação de Delaunay, removendo vértices que não são adjacentes entre si, e retriangulando os buracos deixados, também conforme o critério de Delaunay. Continuam existindo intersecções entre diversos triângulos, no entanto, apenas entre os novos e os antigos triângulos relacionados a um determinado polígono, não havendo relação entre triângulos de diferentes polígonos.

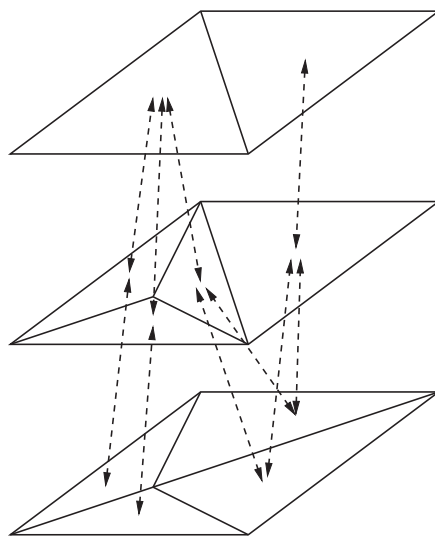


Figura 2.23: Malhas triangulares de diferentes resoluções em uma pirâmide.

Dessa forma, uma estrutura hierárquica é obtida, que permite selecionar diferentes resoluções de uma malha triangular, dependendo da vista atual do terreno. As aproximações diferem no número de vértices e triângulos, mas não é possível determinar qual será o erro entre duas triangulações, não havendo garantia de que uma malha mais detalhada possua um erro menor que uma malha menos detalhada.

Cohen-Or e Levanoni [12] utilizam a mesma idéia de remover um conjunto independente de vértices e retriangular os buracos deixados. No entanto, a triangulação não é representada como um grafo, e sim como uma árvore, onde cada nodo representa um

polígono, formado de diversos triângulos, que não possui intersecção com outro polígono. Dessa maneira, torna-se mais simples obter o terreno em diversos níveis de resolução, e também dependendo da vista, pois cada polígono é representado com mais detalhe apenas se estiver próximo do observador.

Ao longo do desenvolvimento dos diversos trabalhos discutidos anteriormente, houve um aumento no interesse em comparar a qualidade das aproximações geradas pelos diferentes métodos de simplificação. Dos diversos métodos propostos, alguns são extremamente rápidos, mas geram aproximações de baixa qualidade. Outros geram aproximações com uma qualidade muito boa, mas requerem um esforço computacional considerável. Também foram propostos métodos que proporcionam melhor equilíbrio entre velocidade e qualidade.

Com a finalidade de medir a qualidade das aproximações geradas, Cignoni *et al.* [9] desenvolveram uma ferramenta chamada *METRO*, que calcula a distância de Hausdorff entre duas malhas triangulares de forma eficiente. Essa ferramenta foi utilizada para realizar um estudo comparativo em [7], para verificar a qualidade das aproximações geradas pelos diferentes métodos de simplificação disponíveis. Aspert *et al.* [2] implementaram uma nova ferramenta, chamada *MESH*, semelhante à ferramenta *METRO*, que calcula a distância de Hausdorff ainda mais rapidamente.

O estudo comparativo realizado por Cignoni *et al.* demonstrou o que era esperado, ou seja, que as aproximações geradas por métodos como o de Schroeder *et al.* [67] apresentam baixa qualidade, enquanto que métodos que realizam um controle maior do erro, como o de Hoppe *et al.* [35] ou de Hoppe [31], geram aproximações de qualidade maior.

No entanto, foi realizada uma comparação apenas entre os métodos disponibilizados, não sendo possível realizar uma avaliação de todas as operações de simplificação possíveis e métricas de erro propostas na literatura. O estudo comparativo dependeu muito das particularidades e da implementação de cada método.

Além do crescimento do interesse em comparar a qualidade das aproximações geradas, os diversos métodos de simplificação sofreram uma evolução para o mesmo esquema de simplificação. Os métodos primeiramente utilizavam uma operação de simplificação que era aplicada de forma um tanto aleatória pela malha triangular e com pouco controle do erro da aproximação gerada.

Os métodos atuais realizam um controle muito maior do erro, calculando-o de forma global, ou ordenando as operações candidatas por um valor de custo, para que as operações que introduzem a menor quantidade de erro na malha triangular sejam efetuadas. As operações de simplificação são aplicadas de forma mais ordenada, segundo uma fila de prioridades ordenada pelo custo da operação, assim como no esquema geral proposto no algoritmo 1.

Outro aspecto a ser ressaltado é que as primeiras métricas propostas na literatura

utilizavam apenas informações da vizinhança de um componente da malha triangular e, por isso, geravam resultados de menor qualidade. Com o surgimento da preocupação em relação ao erro da aproximação, diversos autores passaram a utilizar métricas de simplificação de caráter global, guiando o método de simplificação pela distância de Hausdorff, por exemplo.

No entanto, os mesmos autores passaram novamente a utilizar métricas e operações de caráter local, possivelmente devido à sua maior rapidez, ou à sua adequação para a utilização com modelagem em multi-resolução. Com a introdução de maneiras inovadoras de efetuar o controle de erro apenas por meio dessas informações locais, como por exemplo com a utilização de matrizes quádricas, métodos de simplificação rápidos e que geram aproximações de alta qualidade puderam ser propostos.

Por essas razões, este trabalho se propõe a realizar um estudo comparativo das diferentes métricas e operações de simplificação de caráter local, para determinar quais geram aproximações de maior qualidade, independentemente do esquema de simplificação utilizado ou de outras características do método de simplificação.

Com a utilização de operações de simplificação de caráter local, malhas originadas de diferentes domínios podem ser aproximadas, sem a necessidade de reconstruí-las para que apresentem uma determinada estrutura hierárquica. Por meio dessas operações, uma representação em multi-resolução pode ser criada para diferentes tipos de malhas triangulares.

São investigadas métricas que simplificam as malhas triangulares preservando a qualidade global do modelo, e não métricas que realizam uma simplificação conforme a vista do modelo em um sistema de visualização. Dessa forma, uma avaliação mais direta do erro introduzido nos modelos simplificados pode ser efetuada.

Um maior enfoque é dado às métricas de simplificação uma vez que, como ressaltado por Kobbelt *et al.* [48], a utilização de uma métrica adequada tende a influir mais na qualidade da simplificação de um modelo do que a operação utilizada, implicando, inclusive, que a utilização de uma operação extremamente simples como a contração de aresta orientada é suficiente para a obtenção de ótimos resultados.

No próximo capítulo é discutido quais das idéias apresentadas são utilizadas para conduzir o estudo comparativo, determinando como a qualidade das aproximações é comparada, e quais operações e métricas estabelecidas pelos diversos trabalhos da literatura são utilizadas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA UTILIZADA

Neste capítulo é apresentada a metodologia utilizada para a condução do estudo comparativo, discutindo quais operações e métricas de caráter local são utilizadas, qual é o esquema geral do método de simplificação, e como a qualidade das aproximações é avaliada.

O estudo comparativo consiste em uma série de experimentos que têm por objetivo simplificar malhas triangulares e verificar a qualidade das aproximações. Para cada experimento são estabelecidos uma malha triangular de entrada, um número de faces a reduzir, uma operação de simplificação e uma métrica de erro. Algumas restrições adicionais para guiar o método de simplificação também são especificadas. O método de simplificação reduz a malha de entrada conforme esses critérios. A diferença entre a malha aproximada e a malha original é então calculada.

Para cada malha triangular de entrada e cada número de faces a reduzir, a diferença entre o modelo original e a simplificação é calculada para verificar quais operações e métricas de erro, ao gerarem malhas triangulares que utilizam o mesmo número de triângulos, fornecem as triangulações de maior qualidade. Um diagrama que ilustra a metodologia do estudo comparativo é apresentado na figura 3.1.

Para que a influência das métricas de simplificação e das diferentes opções de simplificação na qualidade dos resultados pudesse ser corretamente determinada, foi implementado um programa que simplifica malhas triangulares seguindo sempre o mesmo algoritmo, diferindo apenas na medida utilizada e nas diferentes opções especificadas. Dessa forma, a influência da mudança de um único parâmetro é corretamente determinada, o que não seria possível se diferentes implementações fossem utilizadas.

O estudo comparativo tem como objetivo principal determinar métricas simples que gerem aproximações de alta qualidade. Por esse motivo, as métricas escolhidas são baseadas nas medidas mais rápidas de serem calculadas e também naquelas que apresentam um maior equilíbrio entre qualidade e velocidade. Duas novas métricas também são propostas, o *erro geométrico combinado com o volume de erro* e a *compacidade do volume de erro*, com o objetivo de gerar aproximações de alta qualidade sem utilizar nenhuma memória adicional além daquela requerida pelo método de simplificação.

Com o conhecimento de quais opções influem positivamente na qualidade das aproximações, e quais operações e métricas geram malhas de maior qualidade, torna-se possível a implementação de um método eficiente para a simplificação de malhas triangulares, com aplicação em um sistema de multi-resolução.

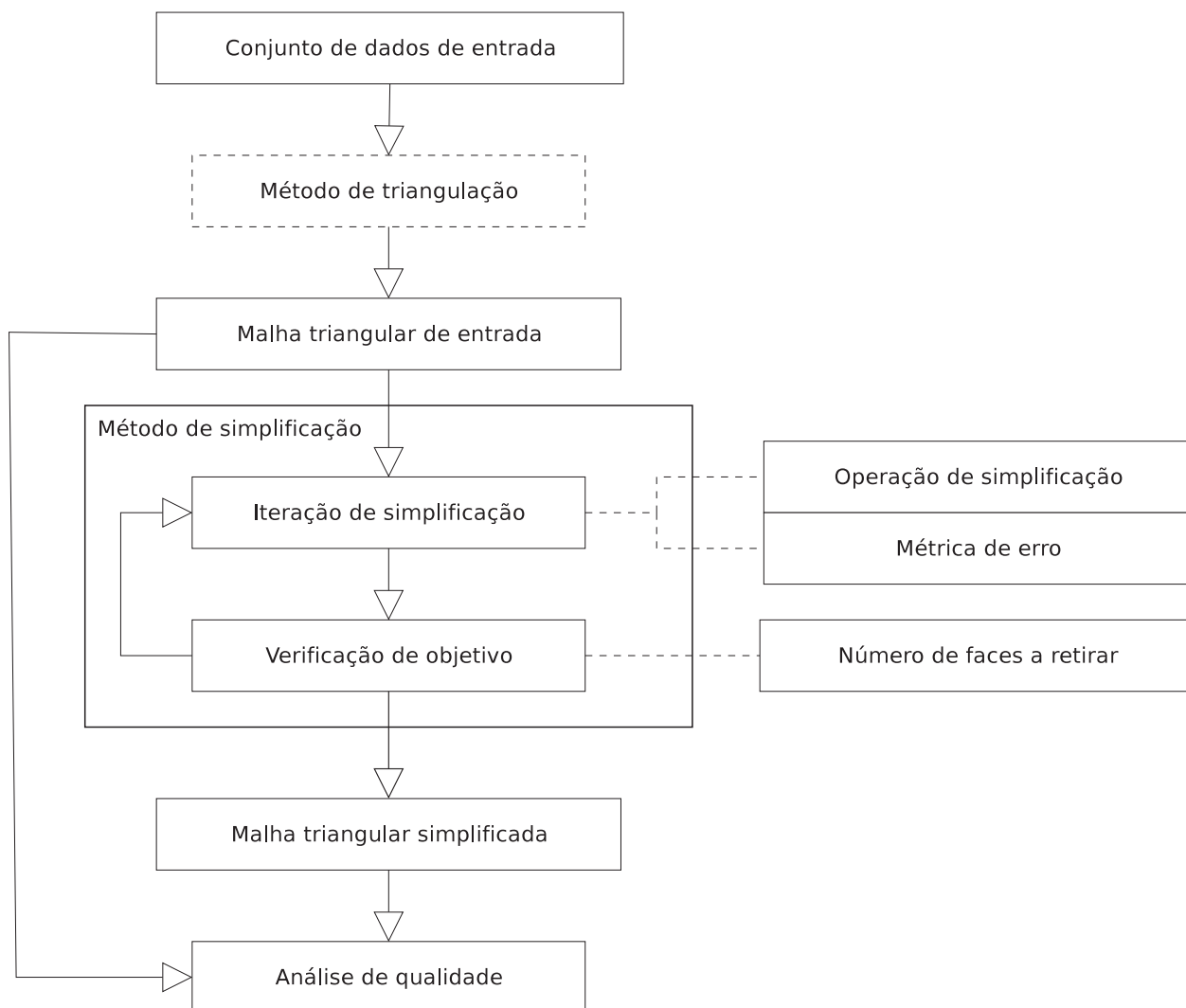


Figura 3.1: Diagrama da metodologia utilizada.

Os diversos parâmetros que são investigados para cada opção do método de simplificação são descritos separadamente nas próximas seções, incluindo algumas opções adicionais como a preservação de bordas e a atualização de componentes pertencentes às regiões modificadas por uma operação. Depois, alguns detalhes de implementação e do ambiente de execução dos experimentos são apresentados.

3.1 Taxas de simplificação

A primeira opção que pode ser especificada para o método de simplificação de malhas triangulares é a taxa de simplificação, isto é, a quantidade de componentes a remover da malha triangular. A cada iteração do método de simplificação é verificado se o número de faces removidas da malha triangular satisfaz o parâmetro especificado. Se isto ocorrer, o método termina a sua execução.

Foram escolhidos nove parâmetros possíveis para essa opção. Os modelos de entrada são reduzidos até apresentarem 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80% e 90% das faces presentes no modelo original. Dessa forma, é verificado o comportamento de uma métrica ao efetuar simplificações que eliminam um grande número de componentes da malha (eliminando 90% das faces triangulares do modelo original) e simplificações que eliminam poucos componentes da malha (apenas 10%).

Pela relação numérica entre esses parâmetros também é possível verificar o comportamento de uma determinada métrica conforme uma taxa de simplificação que é linear em relação ao número de faces do modelo original.

O número de faces triangulares removidas do modelo original é utilizado como uma condição de parada para o método de simplificação, pois é rapidamente conhecido e é independente da operação e métrica utilizados, o que não ocorre se uma opção de parada como o erro global é requerido.

Ao escolher um certo valor de erro global como critério de parada, torna-se necessário calcular a qualidade da aproximação a cada iteração do método de simplificação, o que é bastante custoso. Também não é adequado escolher um certo valor de erro conforme a métrica local utilizada, pois as medidas apresentam unidades e amplitudes de valores muito diferentes umas das outras, não sendo possível associar diretamente o valor de uma métrica com o de outra.

Além disso, o critério do número de componentes eliminados é praticamente equivalente ao critério do erro global. Se for conhecida a qualidade de duas aproximações possuindo o mesmo número de componentes, geradas por duas métricas diferentes, pode ser inferido que a métrica que gerou a aproximação de maior qualidade também utiliza o menor número de componentes para um modelo possuindo certa taxa de erro global.

A razão para escolher como opção de parada do método de simplificação o número de faces triangulares eliminadas, e não o número de vértices ou arestas removidos, deve-se ao fato de os triângulos serem o componente responsável pela complexidade envolvida na visualização de uma malha poligonal, onde o tempo necessário para a renderização de um modelo é proporcional ao número de faces que este possui.

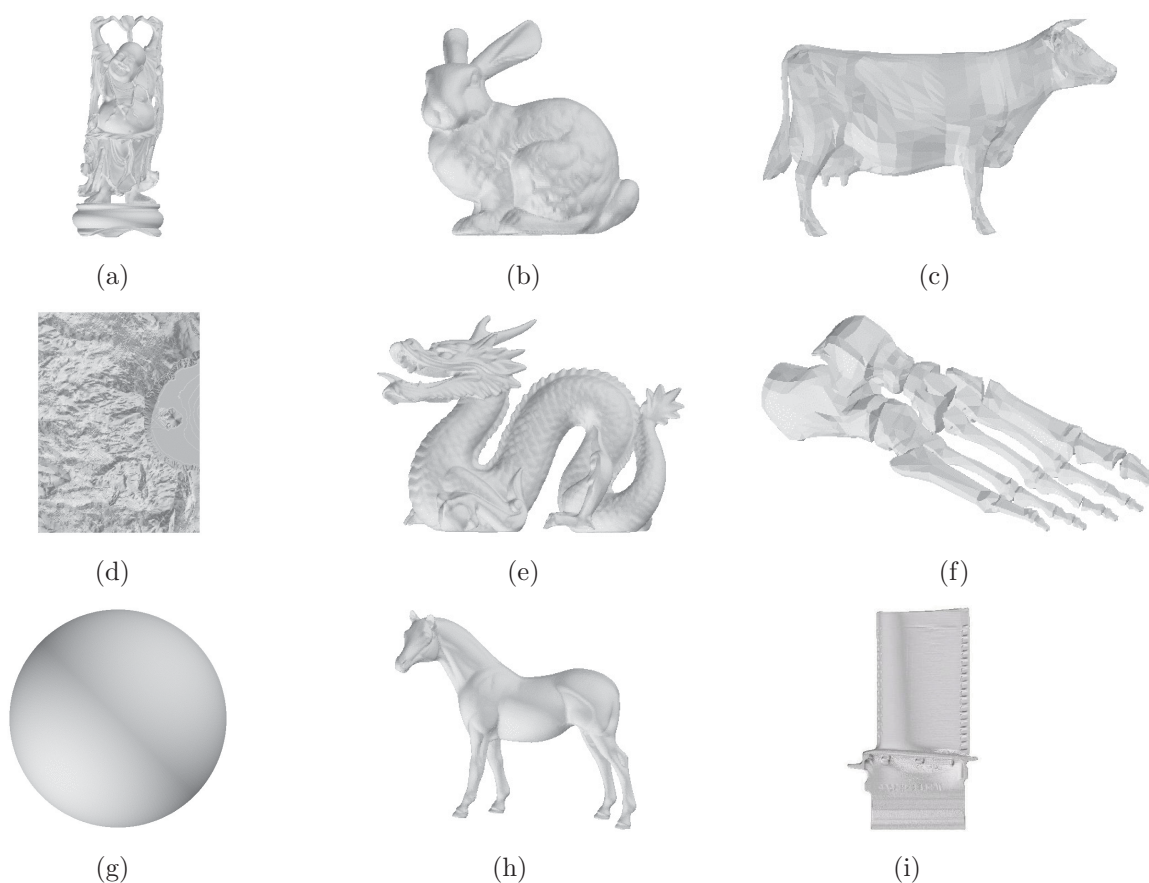
3.2 Modelos utilizados

Nove malhas triangulares foram estabelecidas como o conjunto de modelos a serem aproximados. Esse conjunto consiste em modelos de objetos inteiramente 3D e de uma malha regular criada a partir de um modelo digital de terreno. Algumas características destes modelos podem ser vistas na tabela 3.1 e imagens dos modelos podem ser vistas na figura 3.2.

A tabela 3.1 mostra o número de vértices, arestas e faces triangulares presentes em cada malha triangular. Também informa o grau médio de cada vértice (número médio

Modelo	Vértices	Arestas	Faces	Bordas	Variedade	Grau médio
<i>Buddha</i>	543.652	1.631.574	1.087.716	não	sim	6
<i>Bunny</i>	34.834	104.288	69.451	sim	sim	5.99
<i>Cow</i>	2.904	8.706	5.804	não	sim	6
<i>Crater Lake</i>	154.224	461.083	306.860	sim	sim	5.98
<i>Dragon</i>	437.645	1.309.256	871.414	sim	sim	5.98
<i>Foot</i>	2.154	6.306	4.204	não	sim	5.86
<i>Globe</i>	36.866	110.592	73.728	não	sim	6
<i>Horse</i>	48.485	145.449	96.966	não	sim	6
<i>Turbine Blade</i>	882.954	2.648.082	1.765.388	não	sim	6

Tabela 3.1: Características dos modelos de teste.

Figura 3.2: Modelos de teste: (a) *Buddha*; (b) *Bunny*; (c) *Cow*; (d) *Crater Lake*; (e) *Dragon*; (f) *Foot*; (g) *Globe*; (h) *Horse*; (i) *Turbine Blade*.

de arestas incidentes a cada vértice), se o modelo possui bordas e se apresenta a topologia de uma variedade.

Fazem parte desse conjunto, modelos com grande irregularidade, apresentando um número significativo de saliências, e modelos suaves, como o da esfera. As malhas também variam em complexidade, para que o estudo comparativo possibilite verificar a qualidade na simplificação de modelos com um número grande e pequeno de triângulos, isto é, malhas com um número de triângulos na ordem de 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000

de faces triangulares.

As malhas triangulares foram obtidas do *Stanford 3D Scanning Repository* [71], do *Large Geometric Models Archive* [49], e o modelo digital de terreno foi obtido do *United States Geological Survey* [74].

3.3 Esquema geral do método de simplificação

O método de simplificação é baseado nos dois esquemas apresentados nos algoritmos 1 e 2, da seção 2.1. Isto é, as operações possíveis são ordenadas em uma fila de prioridades por um custo associado e a operação candidata de menor custo é retirada da fila e aplicada na malha triangular. Durante esse processo iterativo, a atualização dos custos das operações pertencentes à região modificada por uma operação é feita imediatamente ou conforme a atualização preguiçosa.

3.4 Operações

As operações que são utilizadas no método de simplificação são algumas das apresentadas na seção 2.1, consistindo em:

- Contração de aresta;
- Contração de aresta direcionada;
- Contração de face.

Uma operação é caracterizada como uma candidata válida se esta passar no teste descrito na seção 2.1, que verifica se a aplicação da contração não irá causar a inversão de alguma face do modelo (como na figura 2.12). Se a topologia das malhas triangulares deve ser preservada, um teste adicional é realizado que verifica se a operação não irá gerar uma malha que não apresenta mais a topologia de uma variedade (como na figura 2.15).

Para as operações de contração de aresta e contração de face é necessário determinar a posição do vértice resultante da operação. Algumas métricas, como as baseadas em quádras, possuem uma maneira de determinar a posição ótima do vértice resultante, de forma que o erro no local seja minimizado. Para as demais métricas, o ponto médio da aresta ou triângulo é selecionado como o vértice resultante da operação.

Então, para as operações de contração de aresta e face é investigado o posicionamento do vértice resultante no ponto médio da aresta ou face contraído, respectivamente. Além disso, se a métrica possuir uma maneira de determinar o posicionamento ótimo do vértice, este também é avaliado.

A maneira de calcular o custo de uma operação candidata é apresentada na seção 3.7, em conjunto com as métricas de simplificação, uma vez que o custo está diretamente relacionado com a medida de simplificação envolvida.

3.5 Atualização da porção modificada

Após uma contração de aresta ou face ter sido realizada, os custos das operações candidatas pertencentes à região modificada pela contração devem ser atualizados. Duas maneiras de atualizar esses custos são utilizadas nos experimentos.

Para a primeira maneira, denominada de *atualização simples*, após uma contração com o vértice resultante v , são atualizadas todas as arestas incidentes a esse vértice, no caso de estarem sendo utilizadas contrações de arestas, ou todas as faces incidentes a esse vértice, no caso de estarem sendo utilizadas contrações de faces. Esse esquema pode ser visto na figura 3.3 (a), onde as arestas a serem atualizadas aparecem na cor preta ($\lceil v \rceil$) e as faces a serem atualizadas na cor cinza ($\lceil\lceil v \rceil\rceil$).

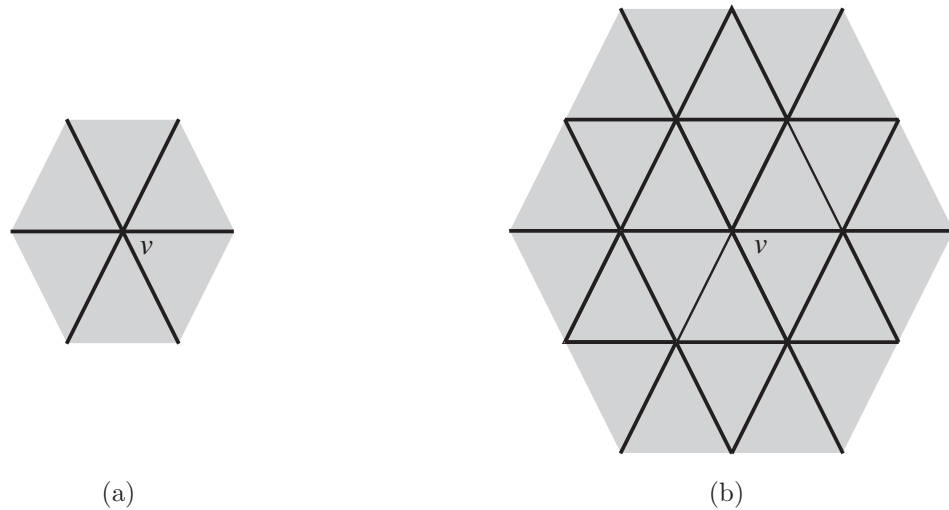


Figura 3.3: Esquemas de atualização da porção modificada de uma malha triangular.

Para a segunda maneira, denominada de *atualização precisa*, após uma contração com o vértice resultante v , são atualizadas todas as arestas incidentes a vértices adjacentes a esse vértice, no caso de estarem sendo utilizadas contrações de arestas, ou todas as faces incidentes a vértices adjacentes a esse vértice, no caso de estarem sendo utilizadas contrações de faces. Esse esquema pode ser visto na figura 3.3 (b), onde as arestas a serem atualizadas aparecem na cor preta ($\lceil\lceil\lceil v \rceil\rceil\rceil$) e as faces a serem atualizadas aparecem na cor cinza ($\lceil\lceil\lceil\lceil v \rceil\rceil\rceil\rceil$).

Garland e Heckbert [21] e Garland [19], ao efetuarem a simplificação de malhas triangulares com matrizes quádricas, utilizam a primeira maneira de atualização, uma vez que apenas a quádrica do vértice resultante é modificada após uma contração, implicando que apenas as arestas ou faces incidentes a esse vértice terão seus valores de custo modificados.

Por outro lado, Lindstrom e Turk [52] e Lindstrom [50], ao efetuarem a simplificação com quádricas de volume, utilizam a segunda forma de atualização, pois a região

do modelo que apresenta o seu volume modificado após a contração compreende as faces triangulares incidentes ao vértice resultante da operação, o que torna necessário atualizar o custo de todas as faces triangulares ou de todas as arestas adjacentes a essas faces.

Nos experimentos é realizada a atualização das operações candidatas conforme essas duas maneiras, para que seja possível verificar a influência na qualidade dos resultados advinda do tamanho da vizinhança utilizada para a atualização do custo dessas operações. A avaliação da opção de atualização precisa é realizada em conjunto com a preservação da topologia das malhas triangulares, uma vez que o correto funcionamento do teste que verifica a preservação desse atributo da malha depende da utilização da atualização precisa.

3.6 Preservação de bordas

É investigada a simplificação de malhas triangulares preservando ou não as bordas dos modelos simplificados. Para a opção de preservação das bordas, um conjunto de restrições com o objetivo de manter todas as bordas do modelo foi utilizado.

Alguns métodos de simplificação propõem penalizar as operações candidatas que modificam as bordas do modelo, multiplicando o seu custo por alguma constante pré-determinada, para aumentá-lo. Dessa maneira, esse tipo de operação dificilmente é aplicada, no entanto, o progresso do algoritmo como um todo não é afetado se, eventualmente, apenas as operações que modificam as bordas forem as melhores candidatas.

No entanto, para o método de simplificação utilizado aqui, foi selecionado um conjunto de restrições que preservam todas as bordas do modelo, uma vez que isto apresenta uma série de vantagens. Primeiramente, para malhas triangulares construídas a partir de imagens digitais é interessante conservar as bordas, uma vez que dessa maneira a malha pode ser interpolada para gerar novamente uma imagem digital, que possui todos os pontos do seu domínio dentro da triangulação.

Também é vantajoso esse tipo de abordagem pois não é necessário determinar a constante de penalização para as operações candidatas que modificam a borda, a qual pode ser dependente das dimensões do modelo e, ainda, existem algumas métricas que tendem a degenerar as bordas, pois retornam um valor de custo baixo para elementos próximos às bordas, por dependerem do número de componentes envolvidos na vizinhança de uma operação candidata. Preservar todas as bordas evita esses problemas.

Com esse intuito, o seguinte conjunto de restrições foi desenvolvido. Primeiramente, todos os vértices da malha triangular são rotulados como vértices do interior da malha (vértices 0) ou vértices de borda (vértices 1). Adicionalmente, se além das bordas os cantos do modelo devem ser apropriadamente conservados, estes recebem um rótulo adicional (vértices 2). Esse esquema pode ser visto na figura 3.4.

Então, todas as operações envolvendo vértices dos cantos (vértices 2) são clas-

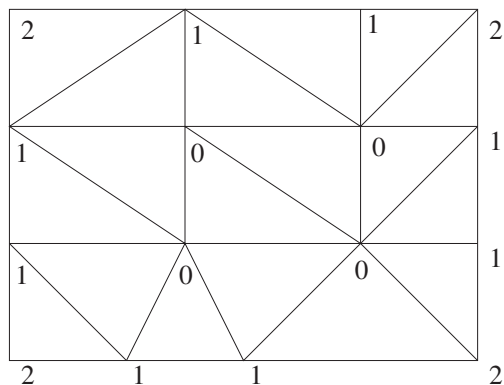


Figura 3.4: Rótulos dos vértices de uma malha triangular com bordas.

sificadas como inválidas. As operações envolvendo apenas vértices do interior da malha (vértices 0) são todas classificadas como válidas. Finalmente, operações envolvendo vértices das bordas poderiam, a princípio, ser todas classificadas como inválidas, o que preservaria as bordas. No entanto, isto levaria a modelos com excesso de componentes nas regiões limítrofes do modelo, e baixo número de componentes no interior da malha, como a situação vista na figura 3.5, comprometendo a qualidade global do modelo.

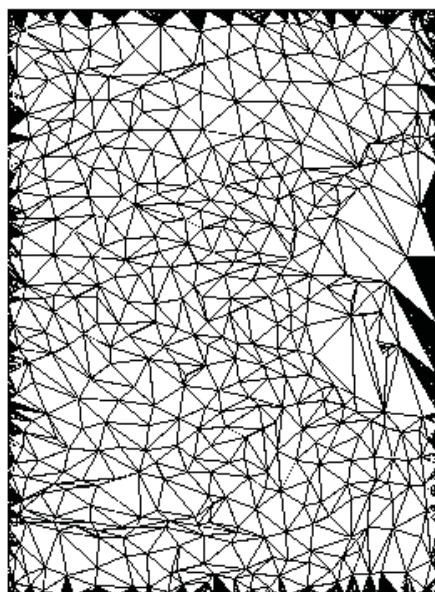


Figura 3.5: Triangulação com grande número de componentes nas bordas.

Por esse motivo, as contrações de arestas candidatas envolvendo vértices das bordas são classificadas como operações restritas de dois tipos possíveis. As operações envolvendo dois vértices de borda podem ser contraídas desde que um dos vértices seja escolhido como o vértice resultante da operação. No entanto, a aresta a ser contraída deve ser também uma borda do modelo, pois arestas com dois vértices de borda mas que

não são uma borda, como a vista no canto inferior esquerdo da figura 3.4, não devem ser contraídas.

As operações envolvendo um vértice de borda podem ser contraídas desde que o vértice que está na borda seja escolhido como o resultante da operação. Utilizando essas operações restritas, as regiões limítrofes do modelo são conservadas e, por outro lado, o modelo simplificado não apresenta uma densidade muito grande de componentes nas regiões de borda.

Para a contração de faces triangulares também são estabelecidas algumas operações restritas, muito parecidas com as contrações de aresta restritas. Operações envolvendo vértices de borda só podem ser contraídas se um dos vértices de borda for utilizado como o vértice resultante da operação.

3.7 Métricas

As métricas utilizadas nos experimentos são formalizadas nesta seção, consistindo nas métricas existentes na literatura discutidas na seção 2.2, e nas duas métricas propostas neste trabalho. A notação exposta na seção 2.1 é brevemente rerepresentada aqui, em conjunto com mais algumas definições necessárias para a formalização das métricas.

Matrizes são denotadas com letras maiúsculas em negrito (**M**), vetores coluna com letras minúsculas em negrito (**n**) e escalares com minúsculas em formatação normal (*a*). A norma Euclidiana de um vetor é escrita como $\|\dots\|$. Um vértice v é um valor inteiro, com $v \in \{1, 2, \dots, n\}$, onde n é o número de vértices pertencentes à malha triangular. O vetor que armazena as coordenadas espaciais do vértice v é denotado \mathbf{v}_v , com $\mathbf{v}_v \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Uma aresta é definida como $e_{ij} = \{i, j\}$, onde i e j são os seus vértices adjacentes, e uma aresta direcionada é definida como $\vec{e}_{ij} = (i, j)$. Uma face triangular é denotada $f_{ijk} = \{i, j, k\}$, onde i, j e k são os vértices que a definem. O vértice resultante de uma contração de aresta ou face é denominado r .

O conjunto de vértices adjacentes a um determinado vértice (mais o próprio vértice), $[[v]]$, é denotado V_v . O conjunto de arestas incidentes a um vértice, $[v]$, é denotado E_v . O conjunto de triângulos incidentes a um determinado vértice, $[[v]]$, é denotado T_v . O conjunto de triângulos incidentes a uma determinada aresta, $[e]$, é denotado T_e . O conjunto de triângulos incidentes a uma determinada face triangular, $[[f]]$, é denotado T_f . Finalmente, o conjunto de vértices adjacentes a um determinado triângulo, $[[t]]$, é denotado V_t .

O custo associado a uma contração de aresta direcionada é denotado $Custo(\vec{e}_{ij})$ e o custo associado a uma contração de aresta geral é denotado $Custo(e_{ij})$. O custo associado a uma contração de face triangular é denotado $Custo(f_{ijk})$.

Uma sigla é associada a cada métrica investigada nos experimentos. Essa sigla é utilizada para identificar a métrica nos gráficos dos resultados.

Métricas de mudança geométrica

As métricas de mudança geométrica retornam uma medida que representa o quanto a operação de simplificação modifica a malha triangular. As duas métricas propostas neste trabalho também pertencem a esta categoria.

- Distância do vértice ao plano médio (DV): a distância do vértice v ao plano médio formado pelos seus triângulos incidentes é calculada como

$$\text{dist}(v) = |\mathbf{n}(\mathbf{v}_v - \mathbf{x})| \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_s}{\|\mathbf{n}_s\|}, \quad \mathbf{n}_s = \frac{\sum_{t \in T_v} \mathbf{n}_t a_t}{\sum_{t \in T_v} a_t}, \quad \mathbf{x} = \frac{\sum_{t \in T_v} \mathbf{x}_t a_t}{\sum_{t \in T_v} a_t} \quad (3.2)$$

sendo que \mathbf{n}_t , a_t e \mathbf{x}_t são a normal, a área e o centróide do triângulo t , respectivamente [67].

O custo associado a uma contração de aresta direcionada é o valor da métrica para o vértice removido, e o custo para uma contração de aresta ou de face é o valor máximo da métrica para os vértices envolvidos na operação.

$$\begin{aligned} \text{Custo}_{\text{DV}}(e_{ij}^{\vec{}}) &= \text{dist}(i) \\ \text{Custo}_{\text{DV}}(e_{ij}) &= \max[\text{dist}(i), \text{dist}(j)] \\ \text{Custo}_{\text{DV}}(f_{ijk}) &= \max[\text{dist}(i), \text{dist}(j), \text{dist}(k)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Ângulo da normal (AN): o maior ângulo formado entre a normal do vértice v e as normais dos triângulos incidentes ao vértice v é [68]

$$\text{ang}(v) = \max_{t \in T_v} \left(\arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}_t\|} \right) \quad (3.4)$$

onde \mathbf{n} é calculado como na equação 3.2.

O custo associado a uma contração de aresta direcionada é também o valor da métrica para o vértice removido, e o custo para uma contração de aresta ou de face é o também valor máximo da métrica para os vértices envolvidos na operação.

$$\begin{aligned} \text{Custo}_{\text{AN}}(e_{ij}^{\vec{}}) &= \text{ang}(i) \\ \text{Custo}_{\text{AN}}(e_{ij}) &= \max[\text{ang}(i), \text{ang}(j)] \\ \text{Custo}_{\text{AN}}(f_{ijk}) &= \max[\text{ang}(i), \text{ang}(j), \text{ang}(k)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

- Curvatura discreta (CD): a curvatura discreta de um vértice v é calculada como

$$\text{curv}(v) = \sqrt{2H(v)^2 - K(v)} \quad (3.6)$$

onde $H(v)$ representa a curvatura média do vértice v e $K(v)$ a curvatura Gaussiana [45].

A curvatura média é obtida pela equação

$$H(v) = \frac{\sum_{e \in E_v} m(e)}{\frac{1}{3} \sum_{t \in T_v} a_t} \quad (3.7)$$

onde $m(e)$ é uma função de curvatura da aresta e , que retorna o ângulo γ formado pelas duas normais das faces incidentes à aresta e . Os valores possíveis da função $m(e)$ compreendem

$$m(e) = \begin{cases} \gamma & \text{se } e \text{ é convexa} \\ 0 & \text{se } e \text{ é plana} \\ -\gamma & \text{se } e \text{ é côncava} \end{cases} \quad (3.8)$$

Um exemplo do ângulo γ para uma aresta e pode ser visto na figura 3.6 (a).

A curvatura Gaussiana é obtida pela fórmula

$$K(v) = \frac{s - \sum_{t \in T_v} \phi_t}{\frac{1}{3} \sum_{t \in T_v} a_t} \quad (3.9)$$

onde ϕ_t é o ângulo do triângulo t no vértice v . A variável s é igual a 2π quando v é um vértice no interior da malha triangular, ou s é igual a π quando v é um vértice de borda. Exemplos dos ângulos envolvidos no cálculo da curvatura Gaussiana nesses dois casos podem ser vistos na figura 3.6 (b) e (c).

O custo associado às operações de simplificação também é calculado como nas duas métricas anteriores. Então,

$$\begin{aligned} \text{Custo}_{\text{CD}}(e_{ij}^{\vec{v}}) &= \text{curv}(i) \\ \text{Custo}_{\text{CD}}(e_{ij}) &= \max[\text{curv}(i), \text{curv}(j)] \\ \text{Custo}_{\text{CD}}(f_{ijk}) &= \max[\text{curv}(i), \text{curv}(j), \text{curv}(k)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Erro geométrico (EG e EGI): esta métrica é a soma da mudança geométrica de cada triângulo alterado durante uma operação de simplificação [36]. A métrica é

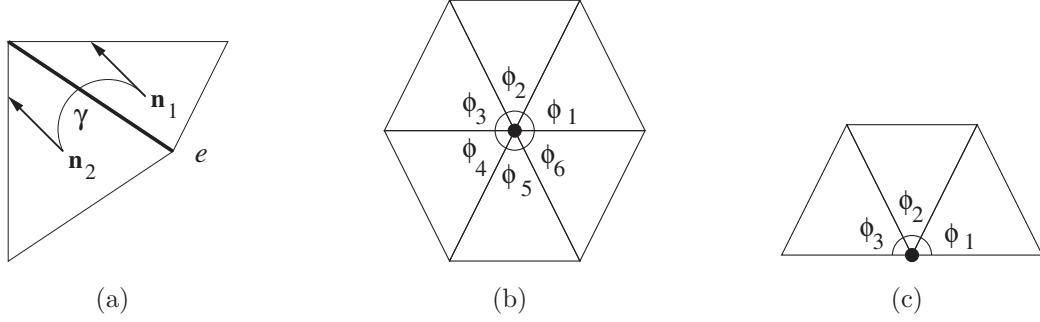


Figura 3.6: Métrica de curvatura discreta. Curvatura média: (a) Ângulo para a aresta e . Curvatura Gaussiana: (b) Vértice interno; (c) Vértice de borda.

ponderada pela importância visual do vértice eliminado, no caso de uma contração de aresta direcionada, ou pela média da importância visual dos vértices envolvidos na operação, no caso de uma contração de aresta ou de face. Neste trabalho também é investigada a utilização desta métrica de erro sem a ponderação pela importância visual dos vértices envolvidos na operação. Para esta métrica, o custo de uma operação é calculado como

$$\begin{aligned}
 \text{Custo}_{\text{EG}}(\vec{e}_{ij}) &= \sum_{t \in (T_i - T_{e_{ij}})} l_t \theta_t \\
 \text{Custo}_{\text{EG}}(e_{ij}) &= \sum_{t \in ((T_i \cup T_j) - T_{e_{ij}})} l_t \theta_t \\
 \text{Custo}_{\text{EG}}(f_{ijk}) &= \sum_{t \in ((T_i \cup T_j \cup T_k) - T_{f_{ijk}})} l_t \theta_t
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $l_t = \frac{1}{2}(a_t + a_{t'})$, em que t' representa o triângulo t modificado após a operação de simplificação. θ_t é uma aproximação para a mudança de normal do triângulo t , definida como $\theta_t = 1 - \mathbf{n}_t \mathbf{n}_{t'}$.

Se a métrica for ponderada pela importância visual dos vértices envolvidos na operação, o custo é calculado como

$$\begin{aligned}
 \text{Custo}_{\text{EGI}}(\vec{e}_{ij}) &= w_i \cdot \sum_{t \in (T_i - T_{e_{ij}})} l_t \theta_t \\
 \text{Custo}_{\text{EGI}}(e_{ij}) &= \frac{w_i w_j}{2} \cdot \sum_{t \in ((T_i \cup T_j) - T_{e_{ij}})} l_t \theta_t \\
 \text{Custo}_{\text{EGI}}(f_{ijk}) &= \frac{w_i w_j w_k}{3} \cdot \sum_{t \in ((T_i \cup T_j \cup T_k) - T_{f_{ijk}})} l_t \theta_t
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde a importância visual do vértice i é

$$w_i = 1 - \left\| \frac{\sum_{t \in (T_i - T_{e_{ij}})} a_t \mathbf{n}_t}{\sum_{t \in (T_i - T_{e_{ij}})} a_t} \right\| \quad \text{ou} \quad w_i = 1 - \left\| \frac{\sum_{t \in (T_i - T_{f_{ijk}})} a_t \mathbf{n}_t}{\sum_{t \in (T_i - T_{f_{ijk}})} a_t} \right\| \quad (3.13)$$

dependendo da operação de contração envolvida.

- Volume de erro (VE): ao invés de combinar o volume de erro com restrições adicionais para formar matrizes quádricas [52], a utilização apenas da medida de volume como uma métrica de simplificação é investigado. Tomando os três vértices v_1 , v_2 e v_3 , que formam o triângulo t , e a posição do vértice resultante da operação, um tetraedro pode ser definido, cujo volume representa a quantidade de mudança volumétrica introduzida no modelo. O volume de erro é calculado como

$$\begin{aligned} \text{Custo}_{\text{VE}}(\vec{e}_{ij}) &= \sum_{t \in (T_i - T_{e_{ij}})} \text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_j] \\ \text{Custo}_{\text{VE}}(e_{ij}) &= \sum_{t \in ((T_i \cup T_j) - T_{e_{ij}})} \text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r] \\ \text{Custo}_{\text{VE}}(f_{ijk}) &= \sum_{t \in ((T_i \cup T_j \cup T_k) - T_{f_{ijk}})} \text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r] \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $\text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_j]$ e $\text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r]$ representam o volume positivo dos tetraedros $(\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_j)$ e $(\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r)$, respectivamente.

- Erro geométrico combinado com o volume de erro (GV): resultados experimentais mostram que o volume de erro ou o erro geométrico não geram as melhores aproximações se o valor de custo não for acumulado. Portanto, é proposto neste trabalho combinar as duas métricas, o que proporciona uma medida que gera simplificações de alta qualidade.

$$\begin{aligned} \text{Custo}_{\text{GV}}(\vec{e}_{ij}) &= \text{Custo}_{\text{VE}}(\vec{e}_{ij}) \times \text{Custo}_{\text{EG}}(\vec{e}_{ij}) \\ \text{Custo}_{\text{GV}}(e_{ij}) &= \text{Custo}_{\text{VE}}(e_{ij}) \times \text{Custo}_{\text{EG}}(e_{ij}) \\ \text{Custo}_{\text{GV}}(f_{ijk}) &= \text{Custo}_{\text{VE}}(f_{ijk}) \times \text{Custo}_{\text{EG}}(f_{ijk}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

- Compacidade do volume de erro (CV): esta métrica, que representa a distribuição do volume de erro no espaço, também é proposta neste trabalho. A medida aumenta proporcionalmente em relação à compacidade do volume de erro, e os resultados

mostram que esta métrica guia adequadamente o método de simplificação.

$$\begin{aligned}
\text{Custo}_{\text{CV}}(\vec{e}_{ij}) &= \sum_{t \in (T_i - T_{e_{ij}})} \frac{\text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_j]}{A[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_j]} \\
\text{Custo}_{\text{CV}}(e_{ij}) &= \sum_{t \in ((T_i \cup T_j) - T_{e_{ij}})} \frac{\text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r]}{A[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r]} \\
\text{Custo}_{\text{CV}}(f_{ijk}) &= \sum_{t \in ((T_i \cup T_j \cup T_k) - T_{f_{ijk}})} \frac{\text{Vol}[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r]}{A[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r]}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde $A[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_j]$ e $A[\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r]$ denotam a área dos tetraedros $(\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_j)$ e $(\mathbf{v}_{v_1}, \mathbf{v}_{v_2}, \mathbf{v}_{v_3}, \mathbf{v}_r)$, respectivamente.

- Desvio padrão de um conjunto de vértices (DP): esta métrica tem o efeito de suavizar uma malha triangular ao simplificá-la, uma vez que as coordenadas espaciais dos vértices pertencentes a regiões com maior número de detalhes tendem a apresentar um desvio padrão muito maior que vértices de regiões planas.

A métrica é definida por

$$\text{desv}(v) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\frac{1}{|V_v|} \sum_{w \in V_v} (\mathbf{v}_{w,i} - \bar{\mathbf{v}}_i)^2} \tag{3.17}$$

com $|V_v|$ denotando o número de elementos nesse conjunto e $\bar{\mathbf{v}}_i$ a média da coordenada i dos vértices do conjunto V_v . $\mathbf{v}_{w,1}$, $\mathbf{v}_{w,2}$ e $\mathbf{v}_{w,3}$ representam as coordenadas x , y e z do vértice w , respectivamente.

O custo associado às operações de simplificação é calculado como

$$\begin{aligned}
\text{Custo}_{\text{DP}}(\vec{e}_{ij}) &= \text{desv}(i) \\
\text{Custo}_{\text{DP}}(e_{ij}) &= \max[\text{desv}(i), \text{desv}(j)] \\
\text{Custo}_{\text{DP}}(f_{ijk}) &= \max[\text{desv}(i), \text{desv}(j), \text{desv}(k)]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Métricas baseadas em quádricas

Métricas baseadas em quádricas associam um erro a um vértice conforme a sua distância até uma superfície quadrática definida por $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz + 2adx + 2bdy + 2cdz + d^2 = 0$.

Garland e Heckbert [19] e Garland [21] definem uma quádrica como $Q = (\mathbf{E}, \mathbf{f}, g)$,

onde a matriz simétrica \mathbf{E} , o vetor \mathbf{f} e o escalar g são

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} ad \\ bd \\ cd \end{bmatrix}, \quad g = d^2. \quad (3.19)$$

O erro para as coordenadas \mathbf{v} de um vértice é então calculado como

$$Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top \mathbf{E} \mathbf{v} + 2\mathbf{f}^\top \mathbf{v} + g \quad (3.20)$$

Apesar de uma quádrlica poder ser definida mais claramente com uma matriz simétrica 4×4 , Garland propõe a utilização dessa formalização em [19], pois então faz-se necessário apenas inverter a matriz $\mathbf{E}_{3 \times 3}$ para determinar a posição ótima do vértice resultante de uma contração de aresta.

Para determinar essa posição ótima do vértice resultante de uma contração de aresta, o procedimento a ser adotado é minimizar a função quadrática Q . O mínimo ocorre onde $\nabla(Q) = 0$. Como $\nabla(Q) = 2\mathbf{E}\mathbf{v} + 2\mathbf{f}$, então tem-se que a posição ótima $\bar{\mathbf{v}}$ é obtida com $\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{f}$. O desenvolvimento mais detalhado dessas observações é apresentado no apêndice A.

Se não for possível determinar uma posição única para o vértice resultante, devido à impossibilidade de inverter a matriz \mathbf{E} , é procurada uma posição que pertença à aresta sendo contraída. A maneira como essa posição é calculada é apresentada no apêndice A. Se também não for possível determinar essa posição sobre a aresta, um dos dois vértices desta é escolhido como vértice resultante da operação, especificamente aquele que introduz o menor erro.

No caso de uma contração de face, se não for possível determinar a posição ótima do vértice ao inverter a matriz \mathbf{E} , um dos três vértices da face triangular é diretamente escolhido como o vértice resultante da operação, sendo também aquele que introduz o menor erro na malha.

A matriz quádrlica para um vértice v é inicializada conforme proposto pelas métricas a seguir.

- Métrica quádrlica (MQ): a quádrlica inicial para cada vértice é calculada utilizando-se os planos dos triângulos incidentes a esse vértice [19]. Se a equação do plano de um triângulo é $\mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d = 0$, então a sua *quádrlica fundamental* é $Q = (\mathbf{nn}^\top, d\mathbf{n}, d^2)$. Logo, a quádrlica Q_v para o vértice v é a soma das quádrlicas fundamentais dos planos dos seus triângulos incidentes, ponderada pela área do triângulo.

$$Q_v = \sum_{t \in T_v} a_t (\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^\top, d_t \mathbf{n}_t, d_t^2) \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{n}_t^T \mathbf{v} + d_t = 0$ é o plano do triângulo t e a_t a sua área. A soma de quádricas é naturalmente definida como a soma dos seus componentes: $Q_i + Q_j = (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_j, \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j, g_i + g_j)$.

O custo das operações é definido como

$$\begin{aligned} \text{Custo}_{\text{MQ}}(\vec{e}_{ij}) &= Q_v(\mathbf{v}_j) \\ \text{Custo}_{\text{MQ}}(e_{ij}) &= Q_v(\mathbf{v}_r) \\ \text{Custo}_{\text{MQ}}(f_{ijk}) &= Q_v(\mathbf{v}_r) \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde $Q_v = Q_i + Q_j$ ou $Q_v = Q_i + Q_j + Q_k$, no caso das contrações de aresta ou da contração de face, respectivamente.

Se a contração for realizada, Q_v é armazenada como a quádrica associada ao vértice j , no caso de uma contração de aresta direcionada, ou ao vértice r , no caso de uma contração de aresta geral ou de face.

- **Quádrica de volume (QV):** a quádrica para um vértice v é inicializada como na métrica quádrica (MQ), mas ao invés de serem utilizados \mathbf{n}_t e d_t da equação do plano do triângulo t , para esta métrica tem-se os valores $\mathbf{n}_t = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$ e $d_t = -[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, onde $[\dots]$ representa o produto triplo e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ são os vértices do triângulo t [51]. Esta métrica é chamada de quádrica de volume neste trabalho porque o produto triplo implica no cálculo de volume.

O custo das contrações é computado como na métrica quádrica (MQ).

- **Quádrica de volume sem memória (QVM):** como proposto originalmente em [51], para esta métrica a quádrica de volume não é acumulada durante a simplificação do modelo. Depois que o custo para uma operação foi calculado, as quádricas associadas com cada vértice são simplesmente descartadas, ao invés de serem armazenadas para utilização na próxima iteração do método de simplificação.

3.8 Cálculo do erro da aproximação

Após uma simplificação ter sido gerada, esta é comparada com o modelo original para determinar a quantidade de erro que possui. A distância de Hausdorff e o RMSE (d_s e d_{RMSE} da seção 2.1) entre a malha original e a aproximação são calculados. Quanto maior a distância de Hausdorff, maior é a diferença máxima entre os dois modelos, e quanto maior o RMSE, maior é o erro médio entre os dois modelos. Por esse motivo, nas próximas seções a distância de Hausdorff também é chamada de erro máximo e o RMSE de erro médio.

A distância de Hausdorff e o RMSE são apresentados como uma percentagem da diagonal do paralelepípedo máximo que contém o modelo. Dessa forma, a medida de erro é independente do modelo utilizado, pois ela é representada como uma percentagem da maior distância possível que existe entre dois vértices do modelo original.

Para esta avaliação de erro global entre dois modelos é usado o programa MESH [2], que utiliza diferentes heurísticas para acelerar os cálculos necessários para determinar as distâncias geométricas entre os dois modelos comparados. Esta é uma ferramenta similar ao conhecido programa METRO [9], usado em diversos trabalhos para validar a qualidade de resultados de simplificação. O programa MESH é mais rápido que o METRO e possui uma implementação multi-plataforma.

A figura 3.7 apresenta os valores obtidos para as medidas d_s e d_{RMSE} para quatro simplificações do modelo *Bunny*, de forma a exemplificar a relação entre a qualidade visual dos modelos e os valores das distâncias geométricas avaliadas.

3.9 Detalhes de implementação

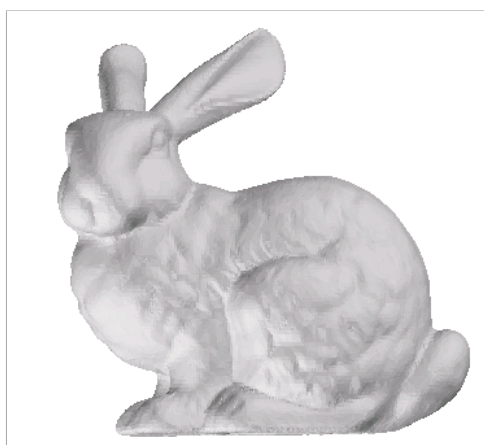
O programa de simplificação de malhas triangulares foi implementado na linguagem de programação C, no sistema operacional Linux.

A estrutura de dados utilizada pelo programa para a representação de malhas triangulares armazena uma lista de todos os vértices, arestas e faces que fazem parte da malha triangular. O esquema utilizado para determinar as relações de adjacência e incidência entre os elementos da malha triangular é similar à Symmetric Data Structure (SDS) [75].

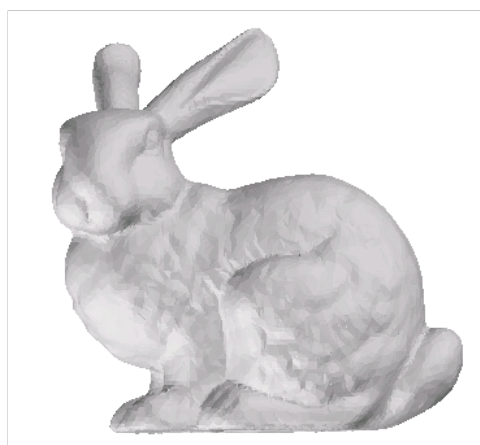
A estrutura de dados SDS representa a malha triangular como uma hierarquia da forma $\text{vértices} \longleftrightarrow \text{arestas} \longleftrightarrow \text{triângulos}$, que é estabelecida com ponteiros dos vértices às suas arestas incidentes e ponteiros destas arestas aos seus vértices, e também ponteiros das arestas às suas faces incidentes e destas faces às suas arestas. Um exemplo dessa estrutura para a vizinhança de uma malha triangular vista na figura 3.8 é apresentado na figura 3.9.

A estrutura de dados SDS permite a consulta de relações básicas de adjacência e incidência entre elementos da malha com o número mínimo possível de acessos à estrutura de dados [60]. Outra vantagem dessa estrutura é que diversas triangulações que não possuem a topologia de uma variedade podem ser armazenadas, uma vez que como existem ponteiros dos vértices e das arestas a todos os seus elementos incidentes, consultas envolvendo arestas e triângulos que não formam uma vizinhança completamente conectada podem mesmo assim ser obtidas.

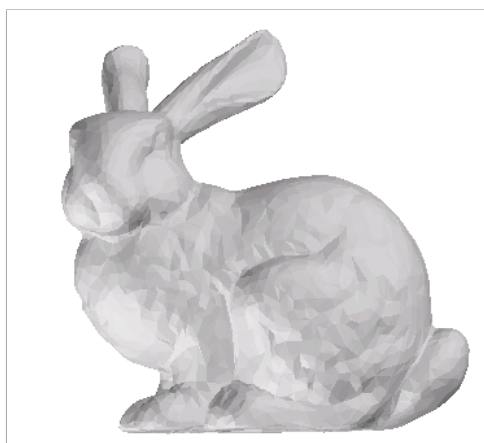
A estrutura de dados utilizada no programa de simplificação de malhas triangulares, por ser semelhante à SDS, também permite guardar diversas malhas que não apresentam a topologia de uma variedade. Essa estrutura também é utilizada na imple-



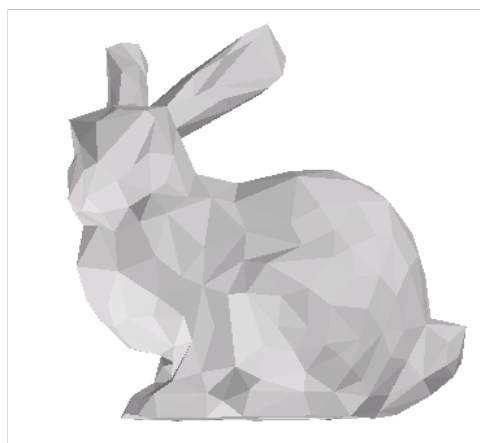
50% de faces do modelo original
 d_s : 0,1410
 d_{RMSE} : 0,0066



25% de faces do modelo original
 d_s : 0,3379
 d_{RMSE} : 0,0146



10% de faces do modelo original
 d_s : 0,4736
 d_{RMSE} : 0,0367



1% de faces do modelo original
 d_s : 2,7507
 d_{RMSE} : 0,3164

Figura 3.7: Exemplo de simplificação para o modelo *Bunny*.

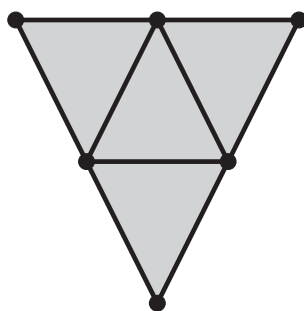


Figura 3.8: Exemplo de vizinhança de uma malha triangular.

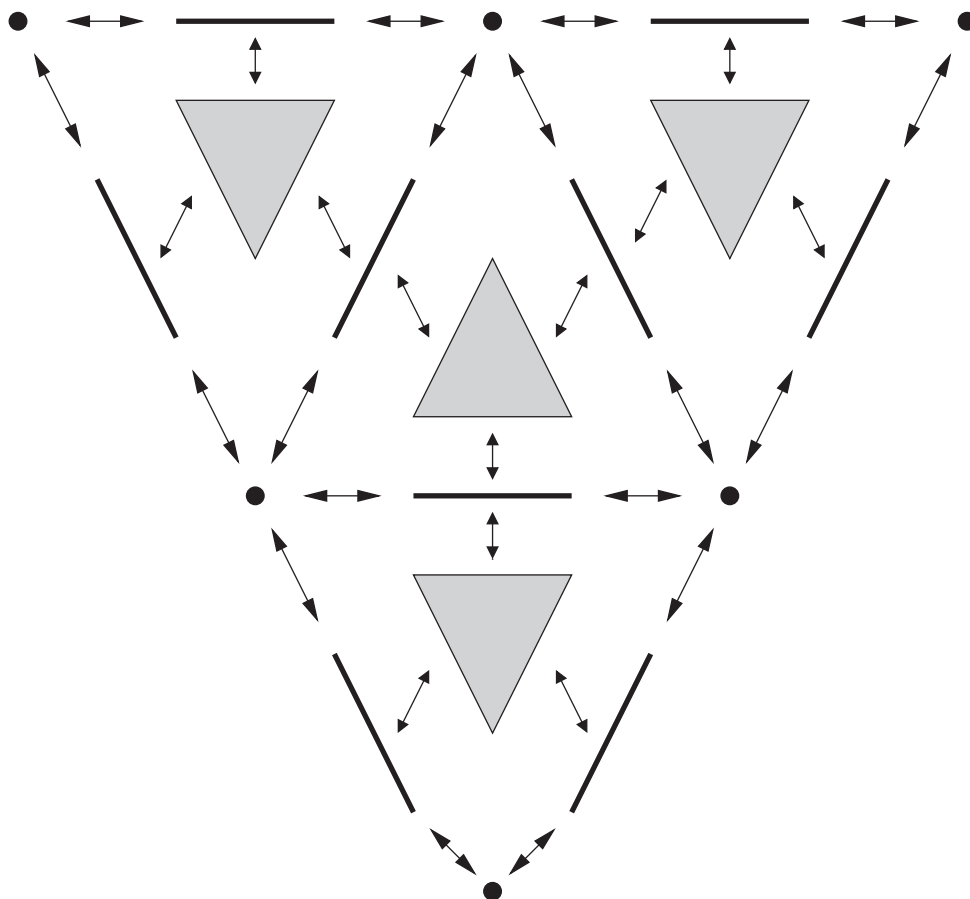


Figura 3.9: Estrutura de dados SDS para o exemplo da figura 3.8.

mentação de Garland [19] por esse motivo. Um exemplo dessa estrutura para a vizinhança de uma malha triangular vista na figura 3.8 é apresentado na figura 3.10.

O espaço em memória requerido por essa estrutura de dados para armazenar uma malha triangular que é uma variedade é o mesmo que o da estrutura SDS, se for observado o fato de que na estrutura SDS existem dois ponteiros aos triângulos incidentes a cada aresta incidente a um vértice e, na estrutura de dados utilizada, esses dois ponteiros, e os ponteiros de retorno, são eliminados da aresta em questão e colocados diretamente no vértice incidente à face triangular. Então a estrutura é caracterizada como uma hierarquia *arestas* \longleftrightarrow *vértices* \longleftrightarrow *triângulos*.

Embora essa mudança na estrutura de dados comprometa o comportamento ótimo para todas as consultas possíveis [60], ela é extremamente adequada para as consultas necessárias em um programa de simplificação de malhas poligonais, uma vez que os vértices adjacentes a arestas e triângulos podem ser diretamente obtidos e as diferentes métricas podem ser rapidamente computadas, pois o seu cálculo necessariamente envolve a geometria da malha (as coordenadas dos vértices).

Outra vantagem apresentada por essa estrutura é que os conjuntos de arestas e

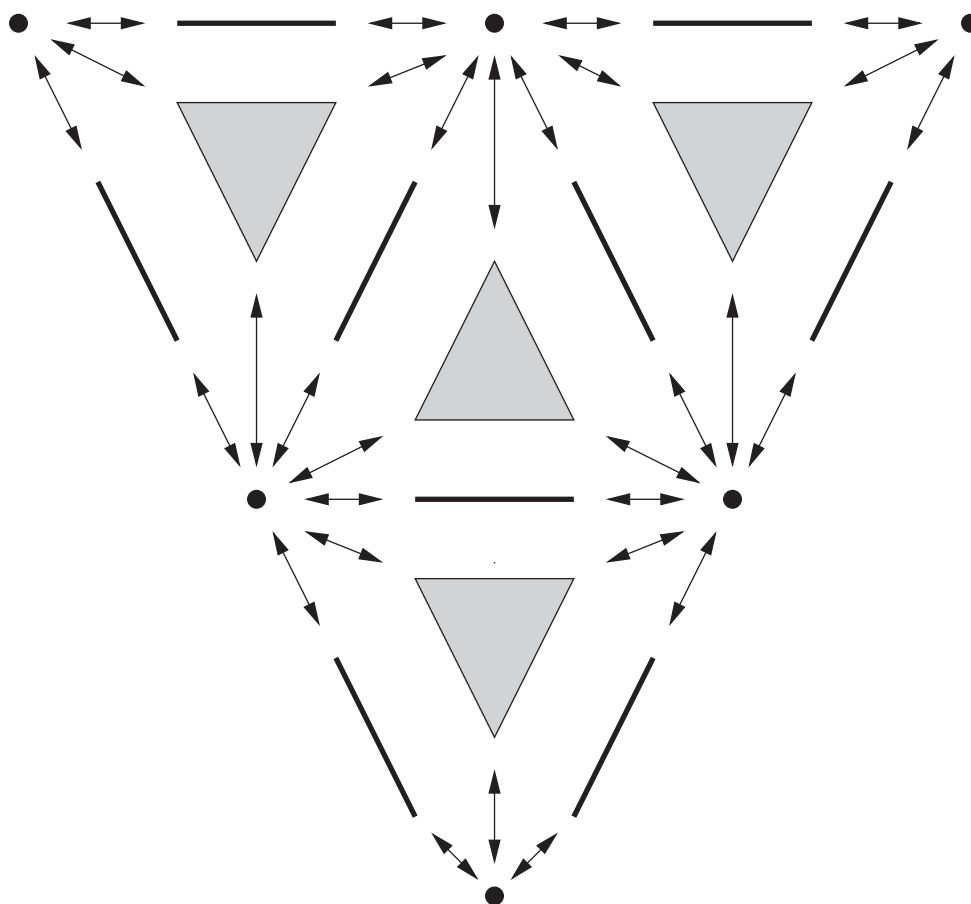


Figura 3.10: Estrutura de dados utilizada.

faces do modelo podem ser considerados como elementos independentes. Dessa forma, se a contração de faces triangulares estiver sendo utilizada como operação de simplificação, a informação relativa às arestas da malha triangular não precisa ser armazenada, como pode ser observado pela figura 3.11.

Os experimentos foram executados em uma máquina com um processador AMD Athlon 64 2000 MHz e 1 GByte de memória RAM. O tempo de execução dos experimentos, medido em segundos, consiste apenas dos ciclos de processamento realmente utilizados pelo programa, sem que seja contado tempo de entrada/saída ou de outros processos que, eventualmente, foram executados simultaneamente na mesma máquina.

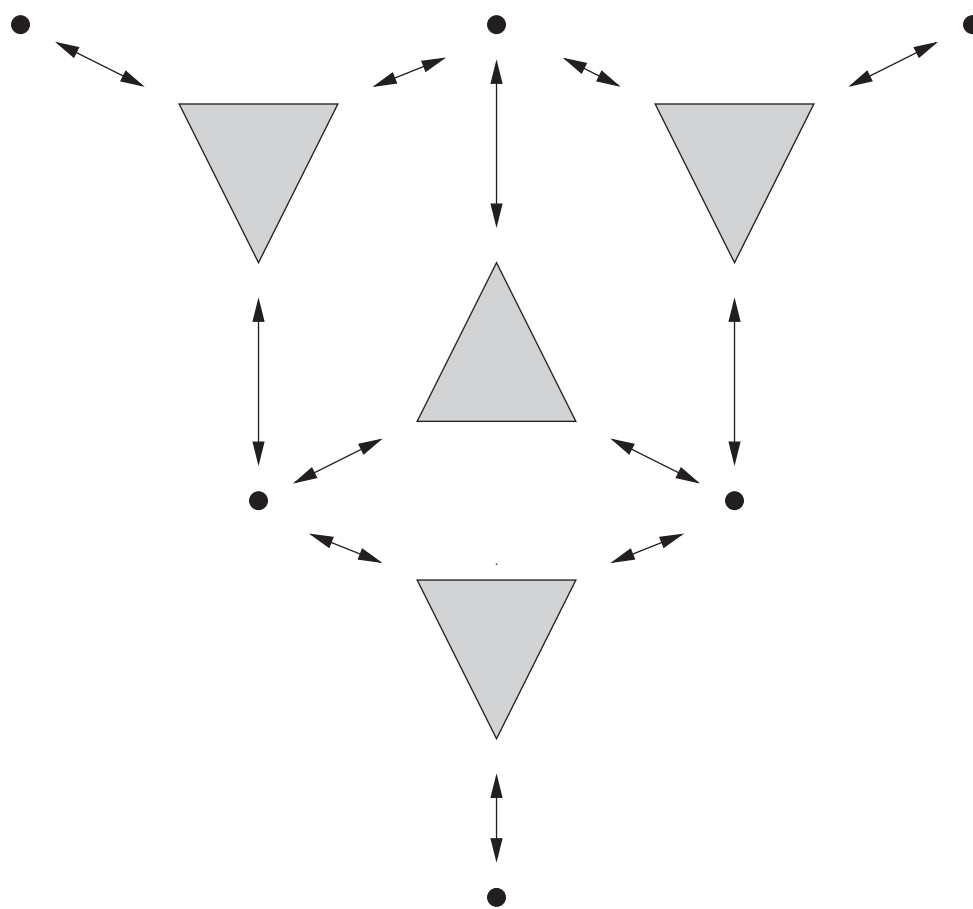


Figura 3.11: Estrutura de dados utilizada sem os ponteiros envolvendo arestas da malha.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a realização dos experimentos e discute a diferença na qualidade dos modelos aproximados advinda da mudança das diferentes opções do método de simplificação. Na tabela 4.1 é apresentado um resumo das opções do método de simplificação descritas no capítulo 3.

Primeiramente, são apresentados todos os experimentos realizados variando-se o modelo de entrada, a taxa de simplificação e a métrica de simplificação, mas mantendo-se as demais opções do método fixas, utilizando aquelas consideradas mais apropriadas. Para esses experimentos, as malhas triangulares são simplificadas preservando-se as bordas pois, como discutido anteriormente, a conservação de bordas influi positivamente na qualidade dos resultados e, como será visto mais adiante, introduz um acréscimo pouco significativo no tempo de execução necessário para a simplificação dos modelos.

Por outro lado, as malhas são simplificadas sem preservar a topologia dos modelos, uma vez que assim o tempo necessário para a execução do método de simplificação é baixo, pois diversos testes não precisam ser realizados e a atualização das porções modificadas da malha pode ser realizada por meio da atualização simples. Dessa forma, um número menor de operações candidatas é invalidado e as contrações que introduzem as modificações de menos impacto na malha podem ser aplicadas.

A operação de simplificação utilizada é a contração de aresta direcionada, por ser a operação mais simples disponível e a que causa menor impacto na malha triangular. O esquema geral do método de simplificação utilizado é a atualização imediata dos custos das operações, conforme a simplificação gulosa.

Uma visão geral dos resultados obtidos da simplificação dos modelos conforme esse conjunto de opções é apresentado na próxima seção. Então, uma análise mais detalhada da qualidade das aproximações obtidas é apresentada na seção 4.2. Para contrastar com a análise numérica da qualidade dos resultados, uma análise visual de alguns dos modelos aproximados é realizada na seção 4.3.

As opções do método de simplificação que estão fixas nos primeiros experimentos são também variadas na seção 4.4, e é verificada a influência dessas mudanças na qualidade e no aspecto visual das aproximações obtidas. Finalmente, após a apresentação de todas as opções de simplificação investigadas, uma discussão geral dos resultados obtidos é realizada na seção 4.5.

Opções do método de simplificação	Parâmetros possíveis
Taxa de simplificação	10%; 20%; 30%; 40%; 50%; 60%; 70%; 80% e 90%
Modelo de entrada	<i>Buddha; Bunny; Cow; Crater Lake; Dragon; Foot; Globe; Horse e Turbine Blade</i>
Métrica de simplificação	DV; AN; CD; EG; EGI; VE; GV; CV; DP; MQ; QV e QVM
Esquema geral do método de simplificação	Simplificação gulosa ou preguiçosa
Operação de simplificação	Contração de aresta direcionada; contração de aresta geral ou contração de face
Preservação de bordas	Sim ou não
Preservação de topologia	Preservação de topologia em conjunto com a atualização precisa ou sem preservação de topologia com a atualização simples

Tabela 4.1: Resumo das opções de simplificação investigadas.

4.1 Resumo dos resultados

Esta seção apresenta um resumo dos resultados baseado na ordenação das métricas de simplificação segundo a qualidade das aproximações geradas. Para cada modelo de entrada e cada taxa de simplificação, as métricas são ordenadas conforme a medida de erro calculada. Então, é verificado qual métrica obtém o 1º lugar, isto é, apresenta o menor erro, e quais obtêm o 2º e o 3º lugares. Também é verificado quais métricas obtêm os três últimos lugares, gerando as aproximações de menor qualidade. É contado quantas vezes cada métrica obtém cada classificação possível.

A tabela 4.2 apresenta esse resumo dos resultados conforme o erro médio (d_{RMSE}). Cada célula da tabela indica quantas vezes a métrica obtém aquela classificação. Pode ser visto que a soma de cada coluna resulta em 81, pois esse é o número de experimentos realizados, consistindo na variação de 9 modelos de entrada e 9 taxas de simplificação.

A partir dessa tabela pode ser visto que a métrica quádrica (MQ) gera as melhores aproximações para o maior número de experimentos. As métricas baseadas no erro geométrico e no volume de erro (GV, VE, EG, CV, EGI), entre as quais figuram as duas métricas propostas GV e CV, também obtêm boas classificações. As quádricas de volume seguem depois (QVM e QV), antes das demais métricas (DV, DP, AN, CD).

A tabela 4.3 apresenta um resumo dos experimentos conforme o erro máximo (distância de Hausdorff simétrica). É observado que os resultados são similares à análise realizada conforme o erro médio, sendo a principal diferença que a métrica quádrica (MQ) não obtém mais a primeira classificação, no entanto, ainda figura entre as melhores métricas.

Um resumo dos resultados conforme o tempo de execução é apresentado na ta-

Métrica	1º lugar	2º lugar	3º lugar	10º lugar	11º lugar	12º lugar
MQ	37	27	7			
GV	22	28	19			
VE	14	14	18			
EG	3	6	23			
CV	2	3	11			
EGI	2	1	2			
QVM		2	1	1		
QV						
DV				34	4	
DP	1			23	18	7
AN				21	43	11
CD				2	16	63

Tabela 4.2: Classificação das métricas de simplificação segundo o erro médio (d_{RMSE}).

Métrica	1º lugar	2º lugar	3º lugar	10º lugar	11º lugar	12º lugar
EG	25	25	16			
GV	22	21	12			
MQ	15	16	13	1		
EGI	10	11	19			
CV	8	2	10	3		
VE	1	3	5	6	1	
QV				8	1	
QVM		3		9	6	1
DV			2	17	8	
AN			3	23	16	11
DP			1	11	27	20
CD				3	22	49

Tabela 4.3: Classificação das métricas de simplificação segundo o erro máximo (distância de Hausdorff simétrica).

bela 4.4. Verifica-se que as métricas baseadas em quádricas que são armazenadas (MQ e QV) apresentam os menores tempos de execução. Como praticamente toda a informação de erro na vizinhança de um vértice está armazenada na quádrica, esta informação não precisa ser computada a partir da malha triangular a cada iteração do método e, por isso, pouco tempo de processamento é requerido por essas duas métricas.

Por outro lado, a quádrica de volume que não é armazenada (QVM) requer um tempo maior de execução, assim como as métricas de erro geométrico (GV, EG, CV, EGI), pois a informação de erro para a vizinhança de um vértice deve ser recalculada a partir da malha triangular a cada avaliação de custo de uma operação. As métricas DV e AN, que não obtêm uma boa classificação segundo o erro das aproximações geradas, em

Métrica	1º lugar	2º lugar	3º lugar	10º lugar	11º lugar	12º lugar
MQ	17	53	2			
QV	52	16	3			
DV	7	5	37			
VE		4	26			
AN	5	3	12			
DP			1			
CV						
QVM				2	2	
EG				6	3	
GV				58	14	
CD				15	41	21
EGI					21	60

Tabela 4.4: Classificação das métricas de simplificação segundo o tempo de execução.

contrapartida apresentam tempos de execução baixos.

Embora essas tabelas apresentem um quadro geral de quais métricas geram as aproximações de maior qualidade e quais geram as de menor qualidade, não é possível verificar, por exemplo, se a diferença na qualidade das aproximações geradas pelas métricas que aparecem nas primeiras posições é significativa. Também não é possível verificar o quanto as métricas das posições intermediárias diferem das melhores.

Por esse motivo, uma comparação conforme os resultados numéricos das medidas de erro é realizada na próxima seção.

4.2 Comparação da qualidade

A análise da qualidade das aproximações obtidas por meio da simplificação dos modelos é realizada nesta seção. Primeiramente, gráficos são apresentados demonstrando para cada modelo de entrada o erro médio das aproximações geradas por cada métrica. Em seguida, a mesma análise é realizada conforme o erro máximo e o tempo de execução.

Erro médio

Os gráficos das figuras 4.1 e 4.2 apresentam o erro médio para as aproximações geradas a partir de cada métrica. O eixo x de cada gráfico consiste na percentagem de faces triangulares do modelo original que está presente no modelo simplificado. O eixo y consiste no erro médio das aproximações (d_{RMSE}). Os resultados obtidos para cada métrica são apresentados em um estilo de linha diferente.

Para oito dos nove modelos, as aproximações com maior erro são geradas pela métrica de curvatura discreta (CD). Apenas para o modelo *Horse* as aproximações de

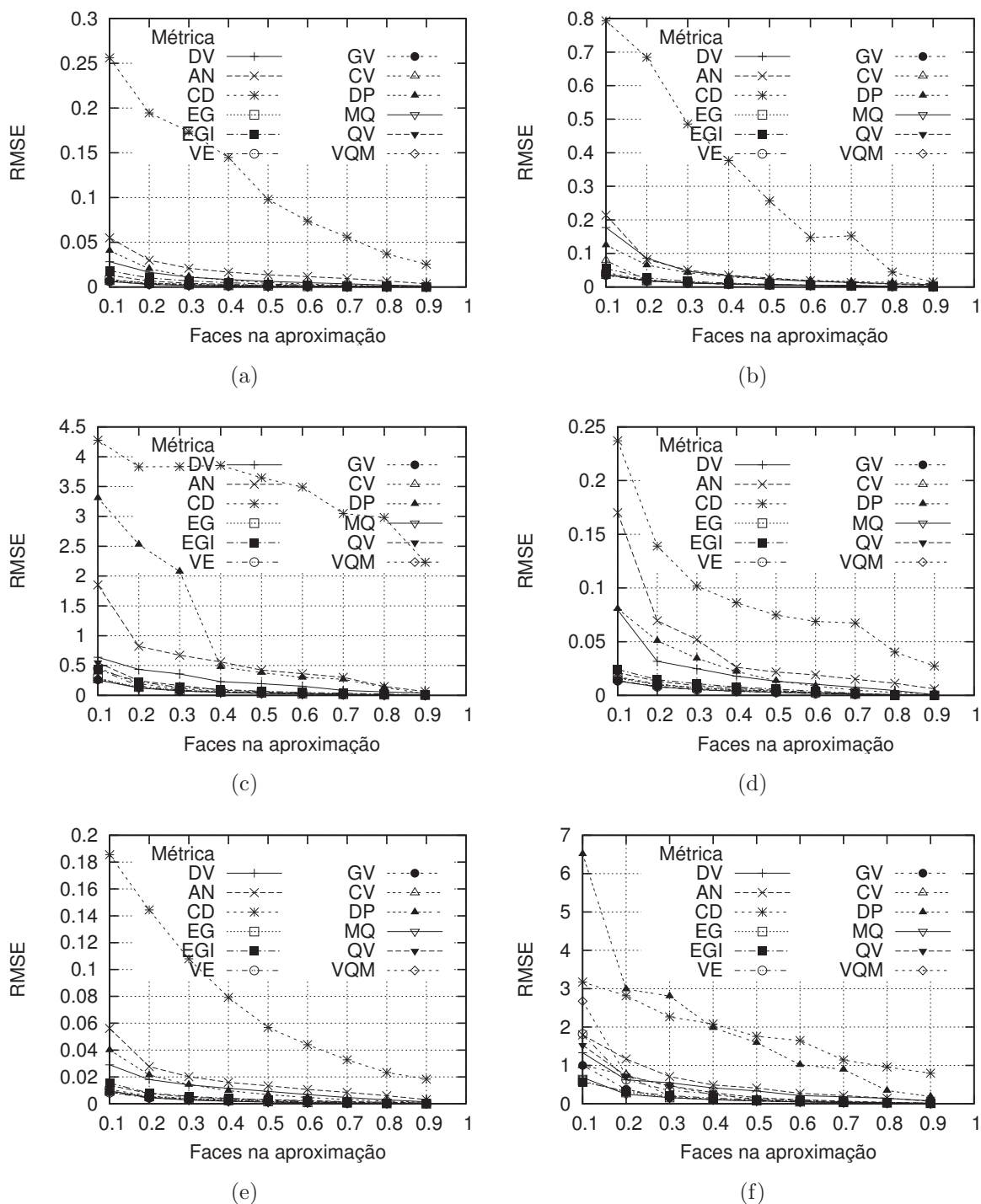


Figura 4.1: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Buddha*; (b) Modelo *Bunny*; (c) Modelo *Cow*; (d) Modelo *Crater Lake*; (e) Modelo *Dragon*; (f) Modelo *Foot*.

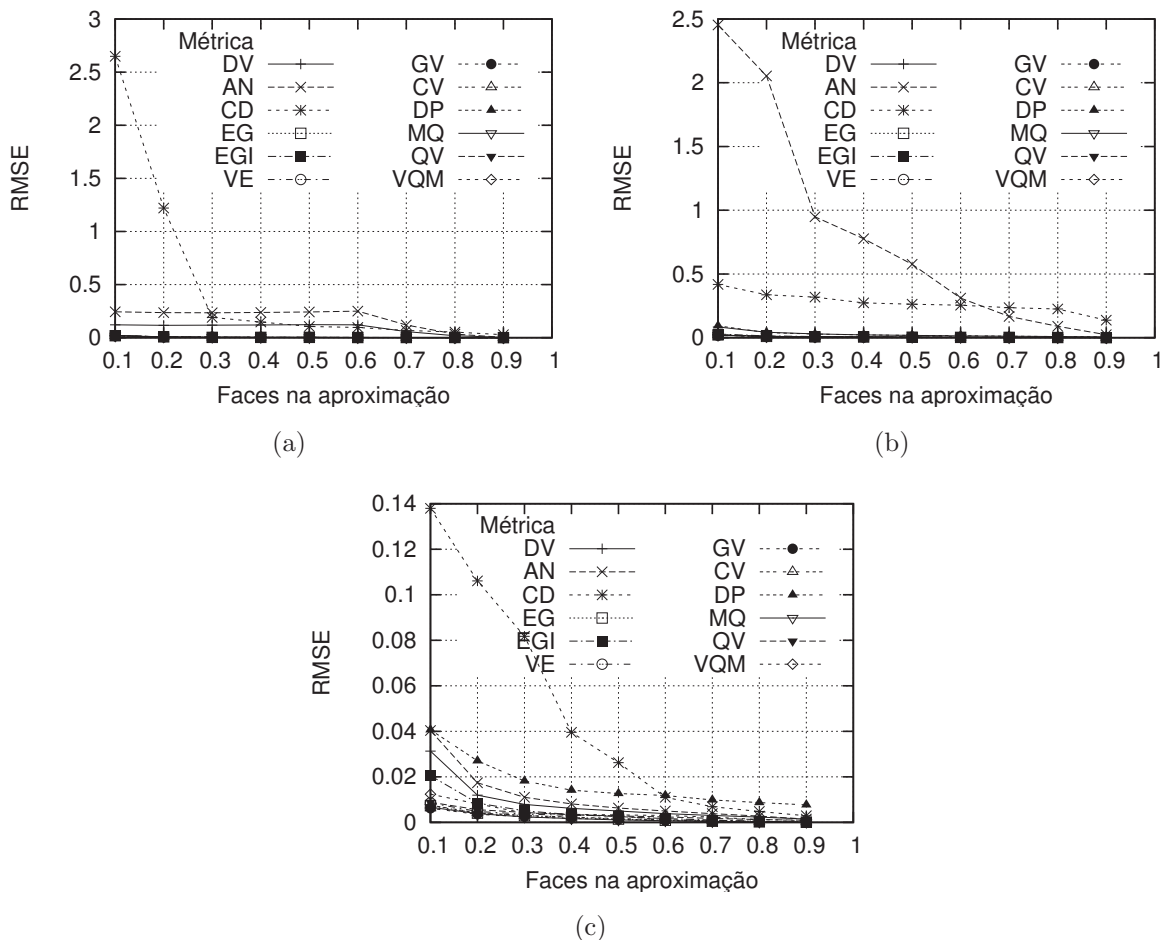


Figura 4.2: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Globe*; (b) Modelo *Horse*; (c) Modelo *Turbine Blade*.

menor qualidade são geradas pela métrica do ângulo da normal (AN).

Como as medidas de erro das aproximações geradas pela métrica de curvatura discreta são discrepantes, apresentando valores muito mais elevados do que as medidas calculadas para as aproximações geradas pelas demais métricas, os gráficos das figuras 4.1 e 4.2 são rerepresentados nas figuras 4.3 e 4.4, sem incluir a métrica de curvatura discreta (CD).

Por meio desses novos gráficos pode ser percebido que as métricas DV, AN e DP geram as aproximações de menor qualidade, quando comparadas com as métricas incluídas nesses gráficos. Em geral, a métrica DV apresenta melhores resultados que as métricas AN e DP. A métrica do desvio padrão (DP) gera as aproximações de menor qualidade para os modelos *Foot* e *Turbine Blade*, mas obtém resultados melhores para os demais modelos.

Essas três métricas apresentam valores de erro maiores que as demais e, por isso, são também eliminadas dos gráficos. Novos gráficos são apresentados nas figuras 4.5 e 4.6,

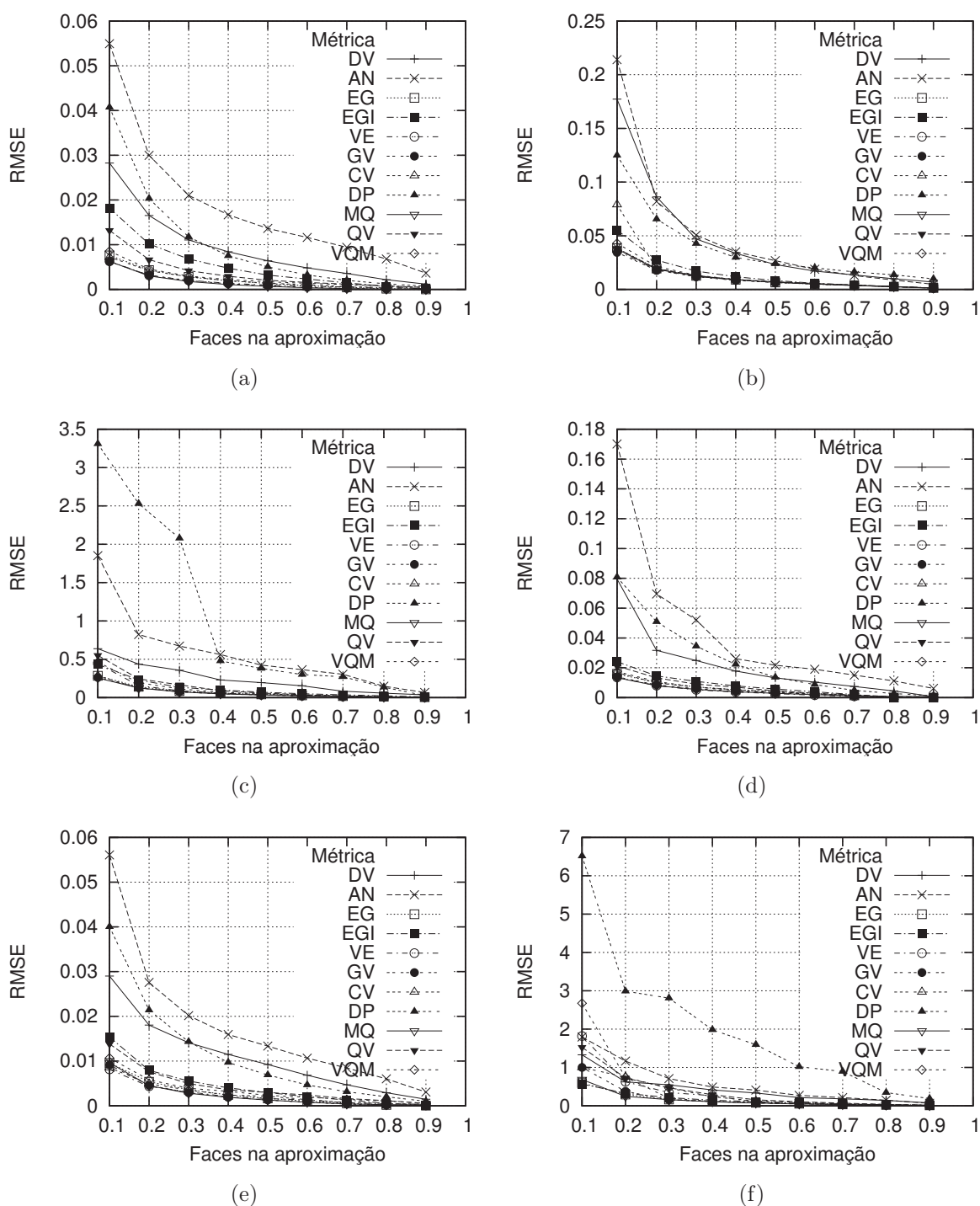


Figura 4.3: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Buddha*; (b) Modelo *Bunny*; (c) Modelo *Cow*; (d) Modelo *Crater Lake*; (e) Modelo *Dragon*; (f) Modelo *Foot*.

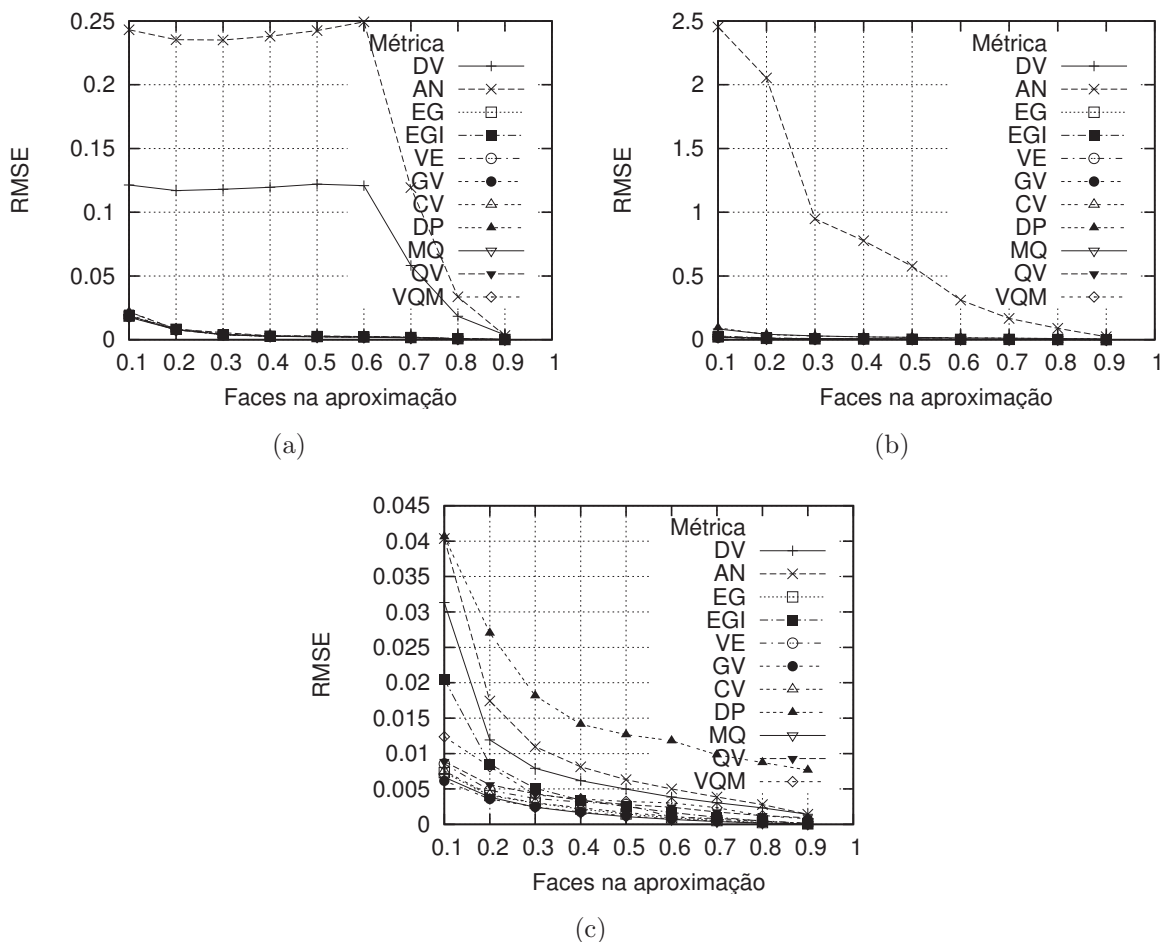


Figura 4.4: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Globe*; (b) Modelo *Horse*; (c) Modelo *Turbine Blade*.

em que as métricas DV, AN, DP e CD foram retiradas.

Nesses novos gráficos é percebida melhor a diferença na qualidade das aproximações geradas pelas métricas apresentadas. A métrica EGI apresenta os resultados menos satisfatórios na maior parte dos modelos. Apesar dela incluir cálculos adicionais relacionados à importância visual dos vértices, isso não melhora a qualidade dos resultados. Esse fato pode ser confirmado pelo bom desempenho da métrica EG, cuja diferença é não incluir o cálculo da importância visual dos vértices envolvidos nas operações de simplificação.

As aproximações de maior qualidade são geradas pelas métricas MQ, GV, VE e EG. As métricas MQ e GV geram as melhores aproximações em todos os casos, sendo observado que o erro geométrico combinado com o volume de erro gera melhores resultados do que combinado com o cálculo da importância visual dos vértices.

As métricas EG e VE também apresentam bons resultados, com medidas de erro apenas um pouco maiores que as melhores métricas. A métrica da compacidade do

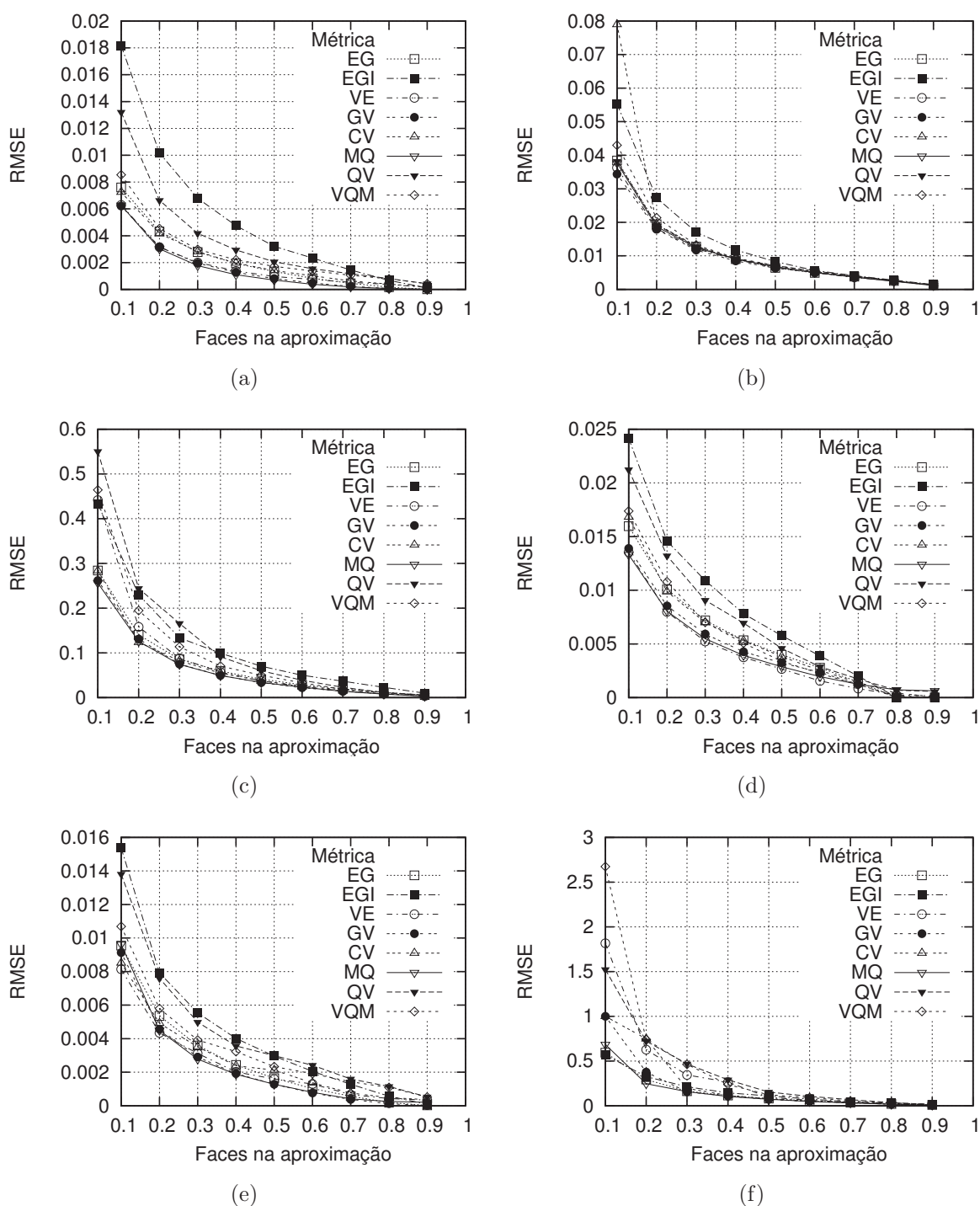


Figura 4.5: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Buddha*; (b) Modelo *Bunny*; (c) Modelo *Cow*; (d) Modelo *Crater Lake*; (e) Modelo *Dragon*; (f) Modelo *Foot*.

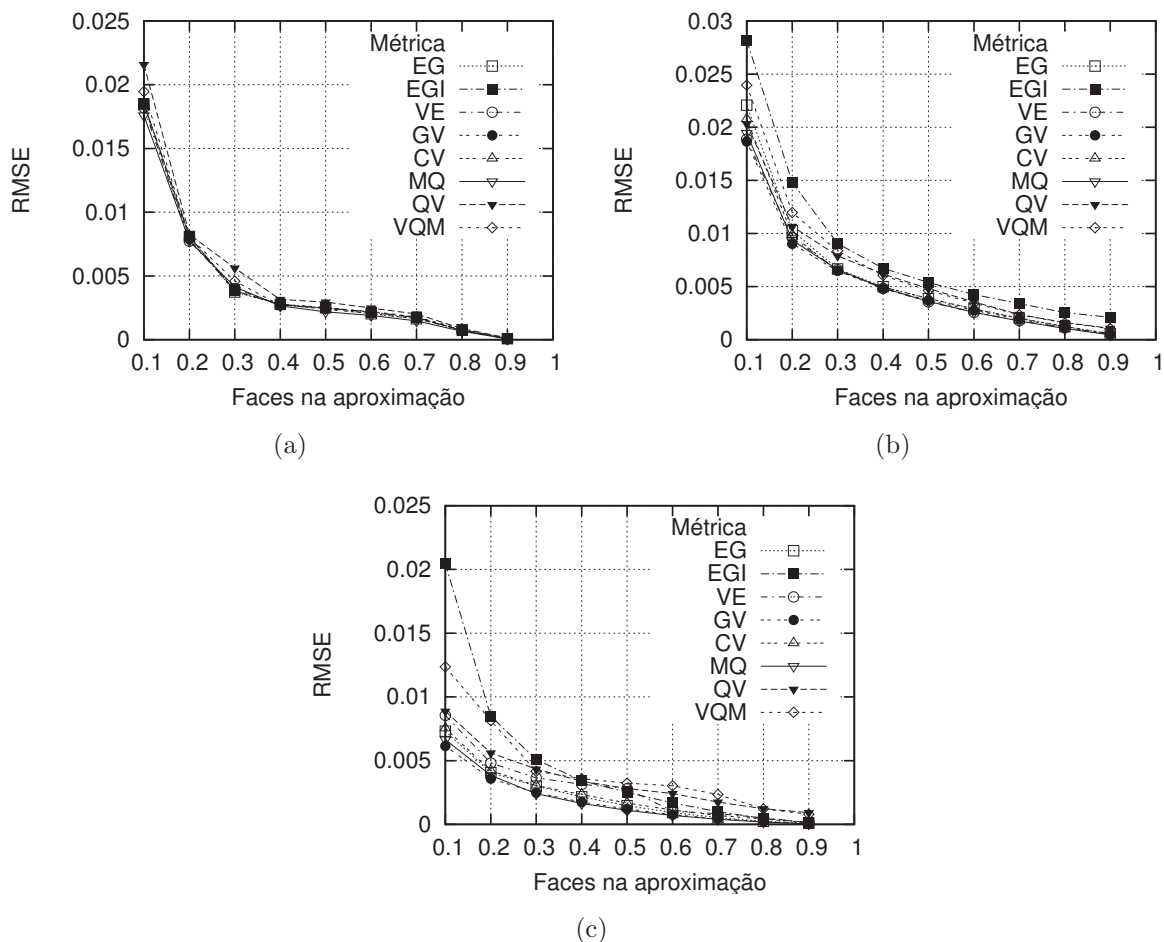


Figura 4.6: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Globe*; (b) Modelo *Horse*; (c) Modelo *Turbine Blade*.

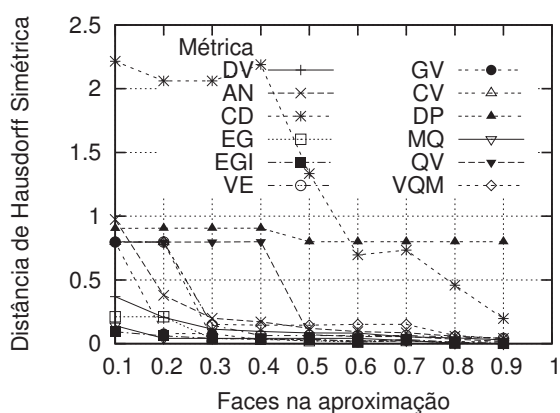
volume de erro (CV) também gera aproximações de boa qualidade para a maior parte dos experimentos, mas não apresenta um bom desempenho em simplificações de resoluções muito baixas, que possuem menos que 20% de faces do modelo original.

As métricas baseadas em quádricas de volume apresentam resultados intermediários, melhores que a métrica EGI. A métrica que não armazena as quádricas (QVM) gera aproximações mais satisfatórias que aquela que acumula as matrizes (QV).

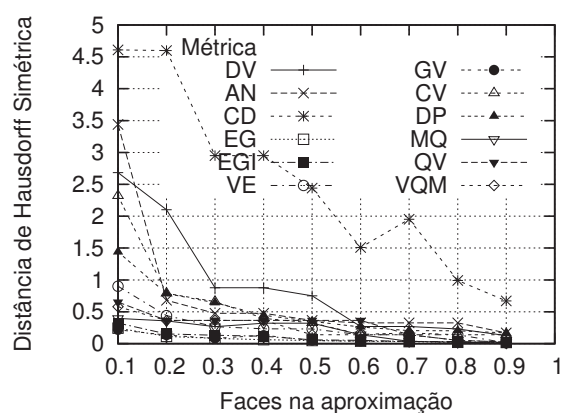
Erro máximo

Os gráficos das figuras 4.7 e 4.8 apresentam os gráficos que demonstram o erro máximo para as aproximações geradas para cada métrica. O eixo y de cada gráfico determina a distância de Hausdorff simétrica de cada aproximação gerada.

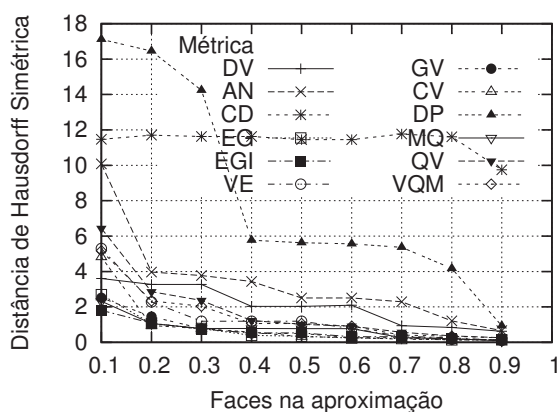
Pode ser observado que as métricas DV, AN, CD e DP também geram as aproximações de menor qualidade quando avaliadas pelo erro máximo. Assim como realizado na análise do erro médio, essas quatro métricas são retiradas dos gráficos, que são reapre-



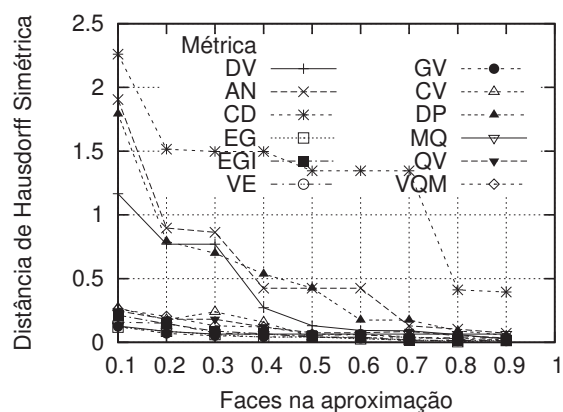
(a)



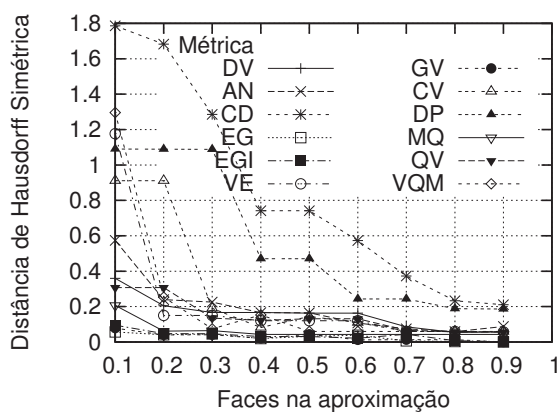
(b)



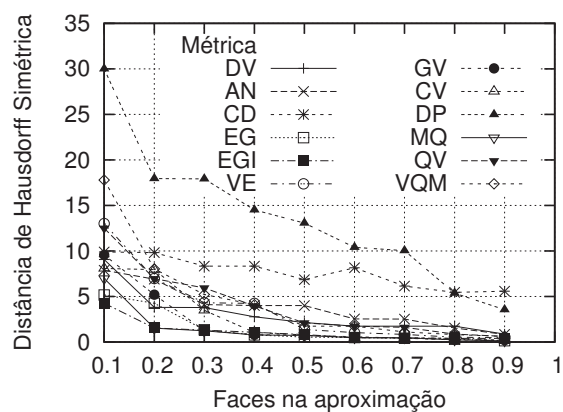
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.7: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Buddha*; (b) Modelo *Bunny*; (c) Modelo *Cow*; (d) Modelo *Crater Lake*; (e) Modelo *Dragon*; (f) Modelo *Foot*.

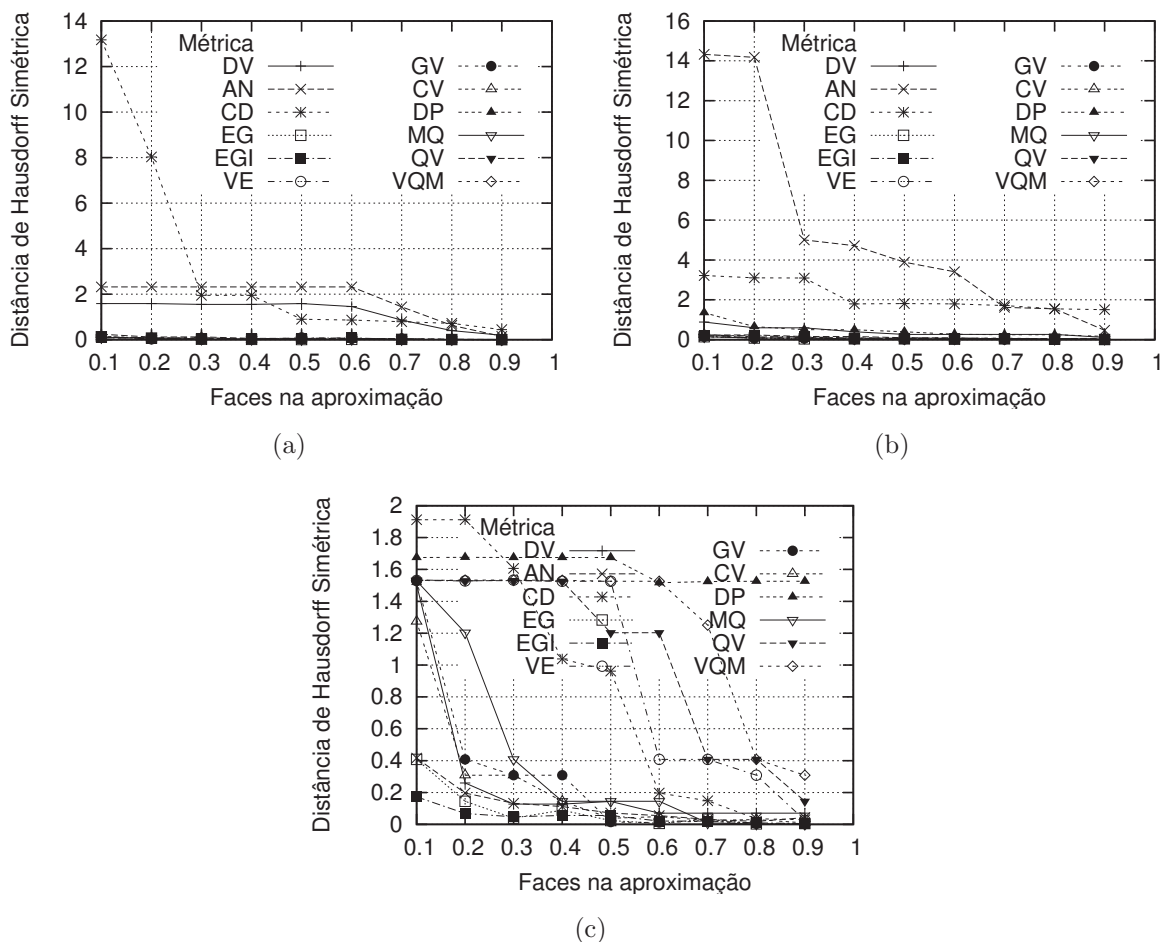
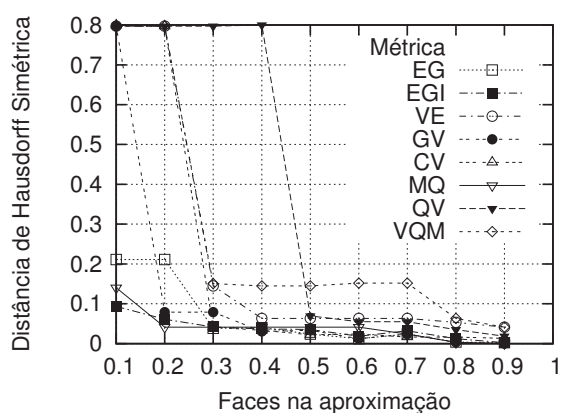


Figura 4.8: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Globe*; (b) Modelo *Horse*; (c) Modelo *Turbine Blade*.

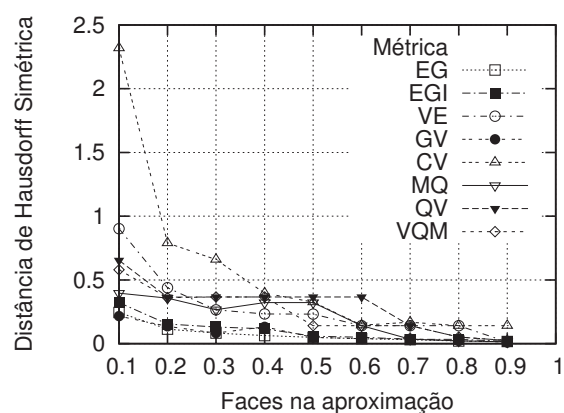
sentados nas figuras 4.9 e 4.10, para que as demais métricas possam ser melhor analisadas.

Mesmo não incluindo as métricas menos satisfatórias nesses gráficos, a análise da qualidade das aproximações é complexa, pois existe uma grande variação nos resultados. As métricas que apresentam os maiores ou menores valores de erro não estão claramente delimitadas. Um dos motivos desse fato é a presença de vários máximos locais, como pode ser visto claramente no gráfico para o modelo *Globe*.

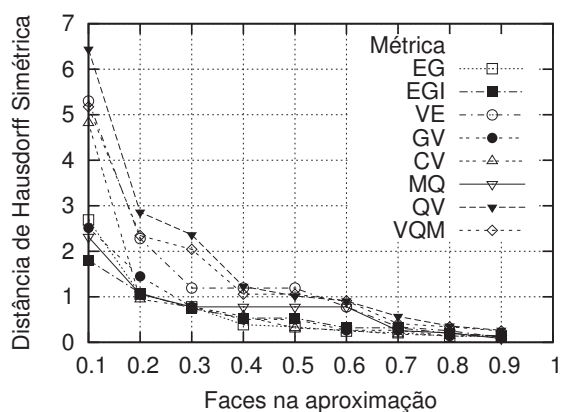
Realizando uma análise mais cuidadosa dos resultados é percebido que, no caso do erro máximo, as métricas associadas ao erro geométrico (EG, EGI e GV) apresentam as aproximações de maior qualidade, em conjunto com a métrica quádrica (MQ). As métricas associadas ao volume de erro (VE e CV) apresentam resultados intermediários, mas melhores que as quádricas de volume (QV e QVM).



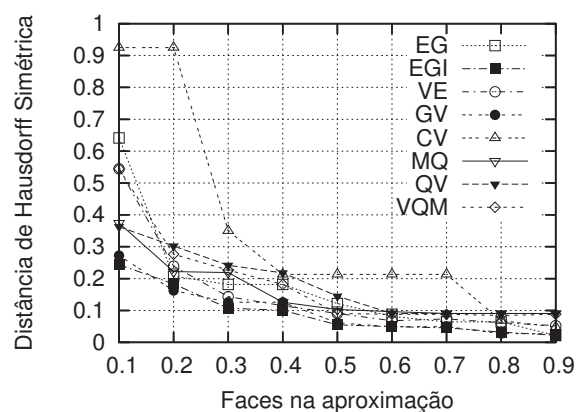
(a)



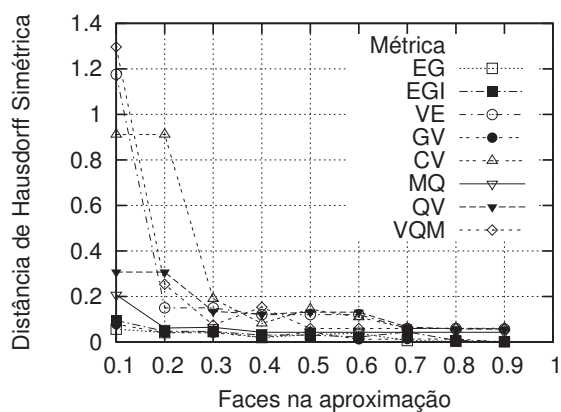
(b)



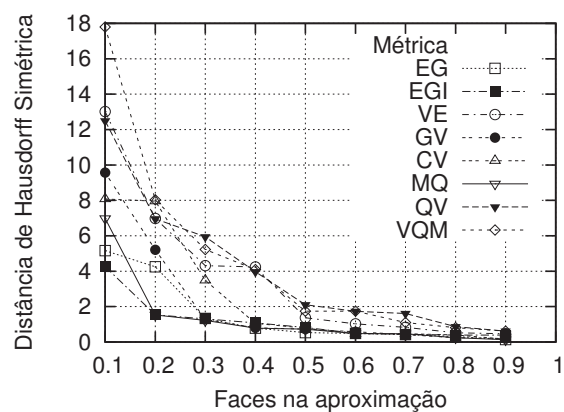
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.9: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Buddha*; (b) Modelo *Bunny*; (c) Modelo *Cow*; (d) Modelo *Crater Lake*; (e) Modelo *Dragon*; (f) Modelo *Foot*.

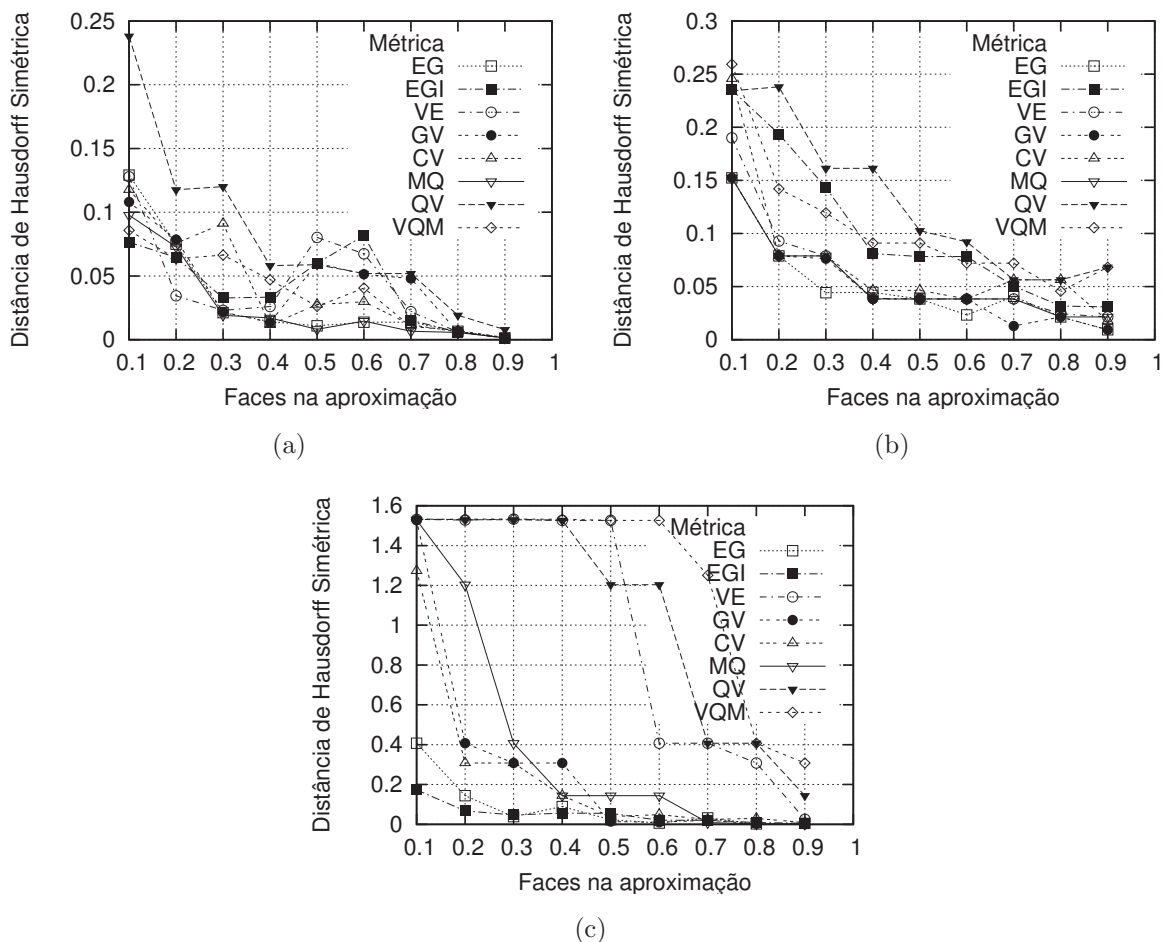


Figura 4.10: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Globe*; (b) Modelo *Horse*; (c) Modelo *Turbine Blade*.

Tempo de execução

Os gráficos apresentados nas figuras 4.11 e 4.12 demonstram o tempo de execução para a simplificação dos modelos. O eixo y dos gráficos determina o tempo em segundos requerido para a execução de toda a simplificação do modelo de entrada.

Embora todas as métricas sejam apresentadas nos gráficos, é possível determinar claramente quais são aquelas que permitem uma simplificação mais rápida. Uma ordenação das métricas conforme o tempo de execução requerido pode ser determinada. Como já foi comentado anteriormente, as métricas que armazenam as quádricas são as mais rápidas (MQ e QV), e as métricas baseadas no erro geométrico (EGI, GV, EG) e na curvatura discreta (CD), são as mais custosas em termos de tempo de execução.

No entanto, deve ser observado o fato de que o tempo de execução requerido pela métrica mais lenta é, no máximo, o triplo do tempo requerido pela métrica mais rápida, implicando que todas as métricas apresentam a mesma complexidade de tempo.

Conforme apresentado na tabela 3.1, o grau médio de cada vértice tende ao valor

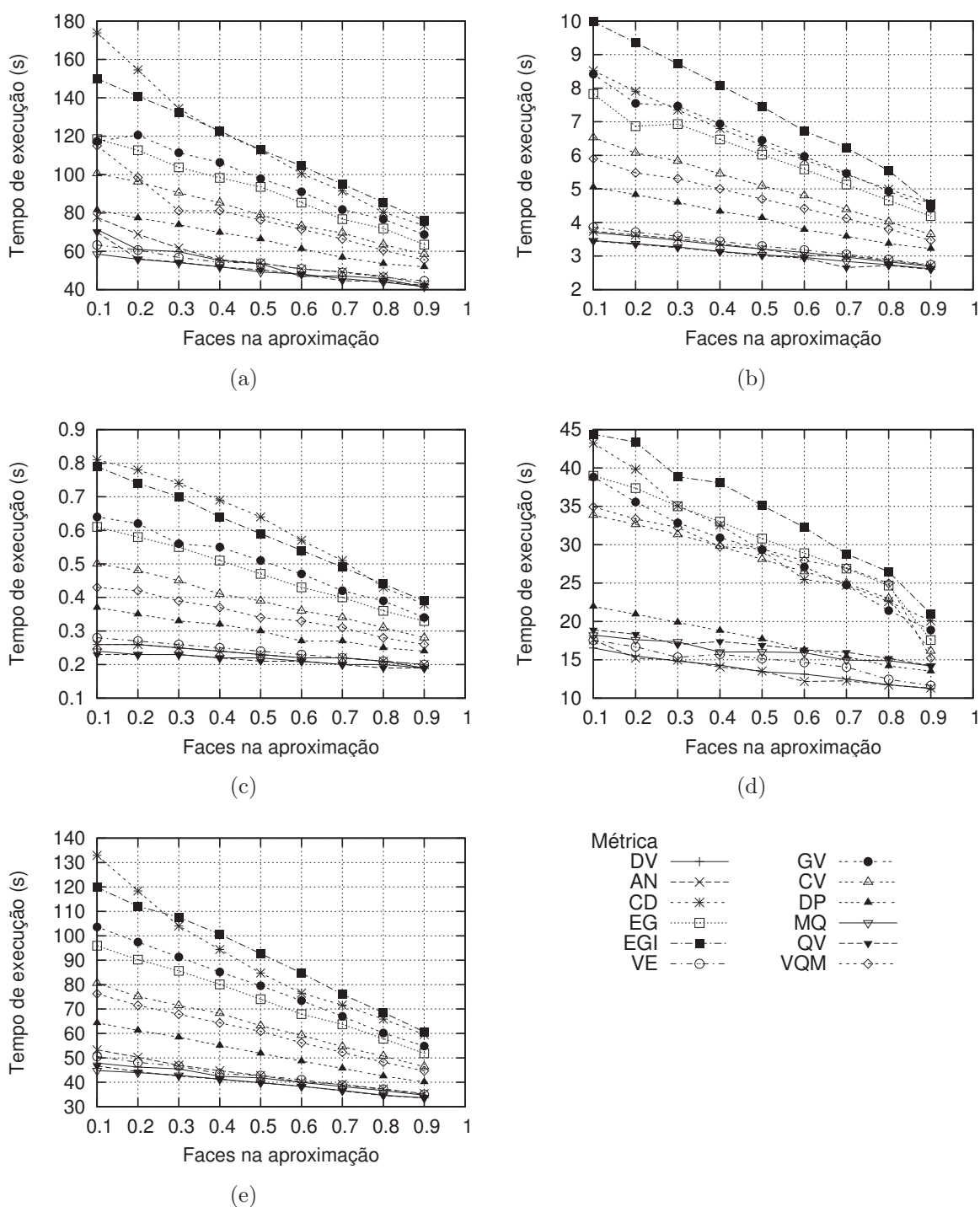


Figura 4.11: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Buddha*; (b) Modelo *Bunny*; (c) Modelo *Cow*; (d) Modelo *Crater Lake*; (e) Modelo *Dragon*.

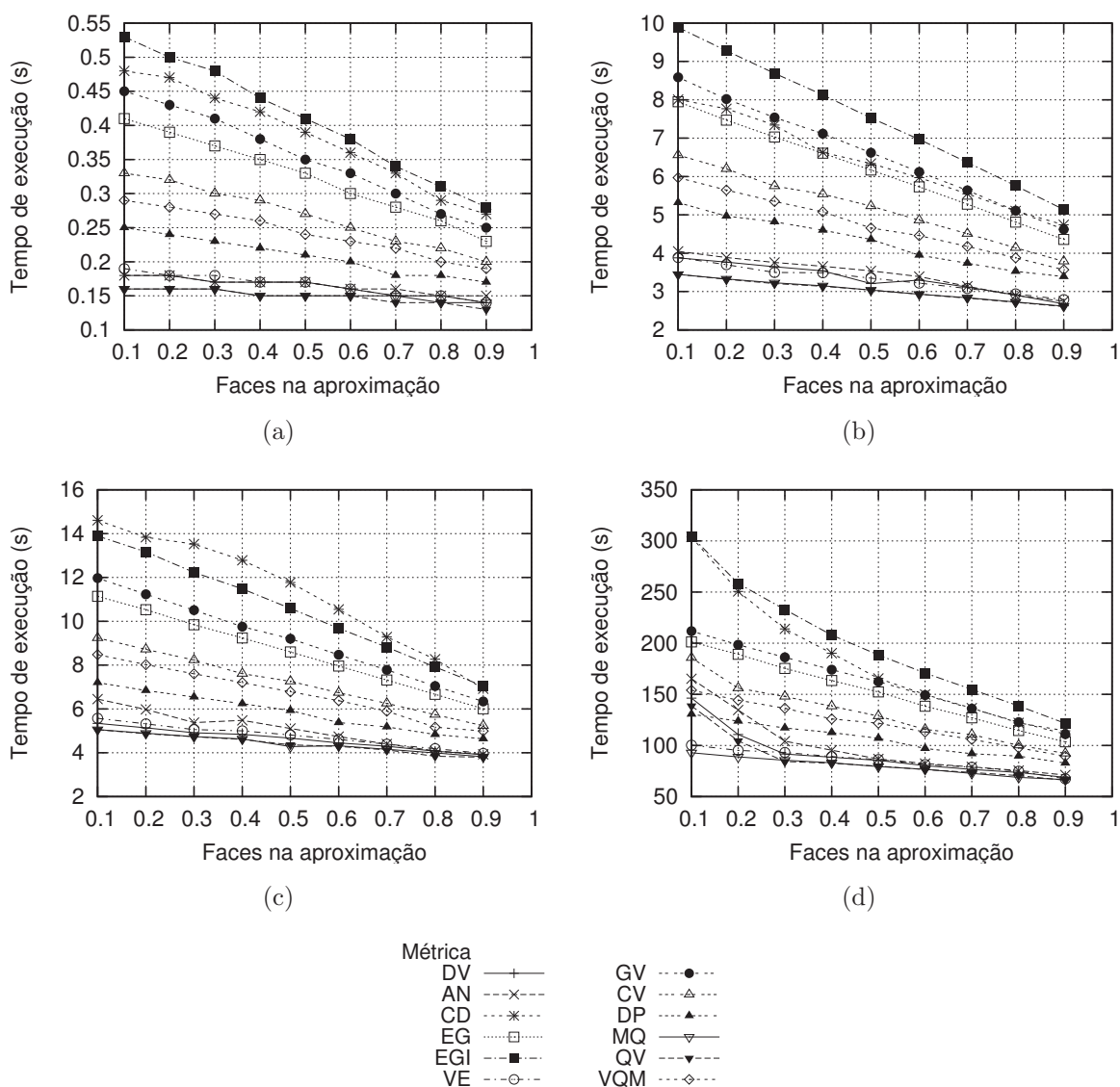


Figura 4.12: Resultados para as métricas de simplificação: (a) Modelo *Foot*; (b) Modelo *Globe*; (c) Modelo *Horse*; (d) Modelo *Turbine Blade*.

seis. Como as métricas de simplificação são todas calculadas a partir da vizinhança de dois ou três vértices, o custo para cada contração candidata é computado em um tempo constante máximo. Portanto, a curva referente ao tempo de execução de cada métrica para um determinado modelo apresenta o mesmo comportamento, relacionado ao método de simplificação. Porém, cada curva está deslocada em comparação às demais devido à constante do tempo de avaliação da métrica em questão.

4.3 Comparação visual

A análise dos resultados da simplificação dos modelos segundo as medidas de erro apresentadas na seção anterior permite verificar quais as aproximações geradas que estão geometricamente mais próximas dos modelos originais. No entanto, não é possível verificar se as métricas geram aproximações consideradas visualmente apropriadas, consistindo em modelos com superfícies suaves, e também não é possível observar se pequenos detalhes dos modelos são conservados.

Por esse motivo, uma comparação visual de algumas das aproximações geradas é apresentada nesta seção. Para cada métrica de simplificação, um determinado modelo é aproximado conforme uma taxa fixa de simplificação, e a imagem da aproximação gerada é apresentada. As aproximações são geradas preservando as bordas e a topologia dos modelos, utilizando a contração de aresta direcionada e a atualização imediata do custo das operações, conforme a simplificação gulosa.

As figuras 4.13 e 4.14 apresentam as aproximações geradas para o modelo *Bunny*. Observa-se que a métrica da curvatura discreta (CD) deforma completamente o modelo. As métricas DV, AN e DP geram aproximações pouco suaves. As demais métricas simplificam a malha preservando bem pequenos detalhes e gerando aproximações visualmente apropriadas.

As aproximações geradas para o modelo *Cow* podem ser vistas nas figuras 4.15 e 4.16. A métrica CD também deforma completamente esse modelo. As métricas DV, AN e DP também geram aproximações pouco suaves. As aproximações geradas pelas demais métricas são visualmente apropriadas, mas é ressaltado que apenas as métricas EG, EGI, GV, CV e MQ preservam pequenos detalhes do modelo.

Para os modelos *Crater Lake*, *Foot* e *Horse*, apresentados nas figuras 4.17 e 4.18, 4.19 e 4.20, e 4.21 e 4.22, respectivamente, também pode ser inferido que as métricas CD, DV, AN e DP geram as aproximações menos satisfatórias, enquanto que as demais métricas geram aproximações que visualmente aproximam bem os modelos originais. Como a métrica de curvatura discreta (CD) deforma intensamente as malhas simplificadas, as regiões limítrofes da aproximação do modelo *Crater Lake* também parecem danificadas quando a malha é visualizada, apesar da opção de conservação de bordas estar sendo utilizada no método de simplificação.

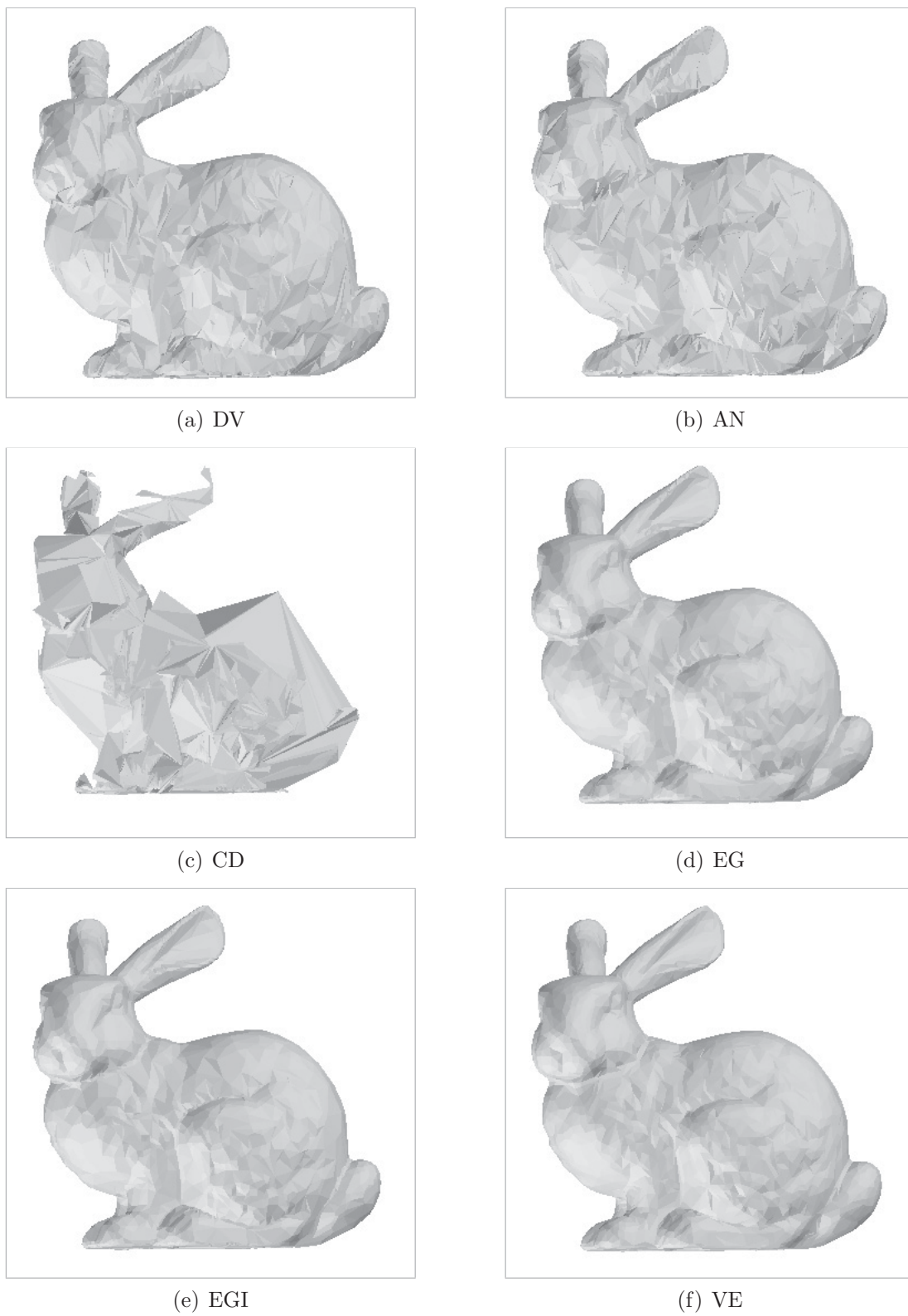


Figura 4.13: Simplificações do modelo *Bunny* com 10% das faces do modelo original.

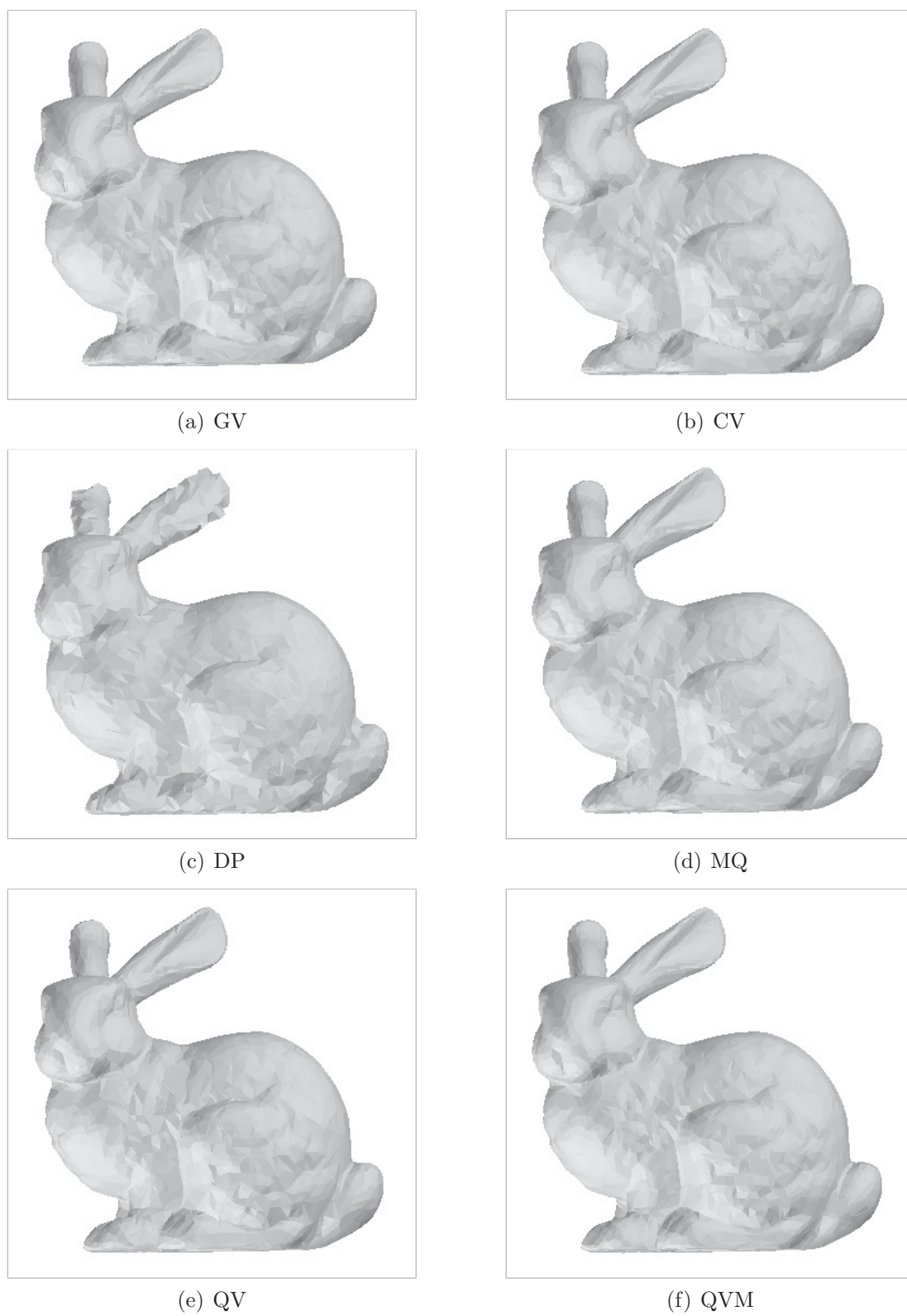


Figura 4.14: Simplificações do modelo *Bunny* com 10% das faces do modelo original.

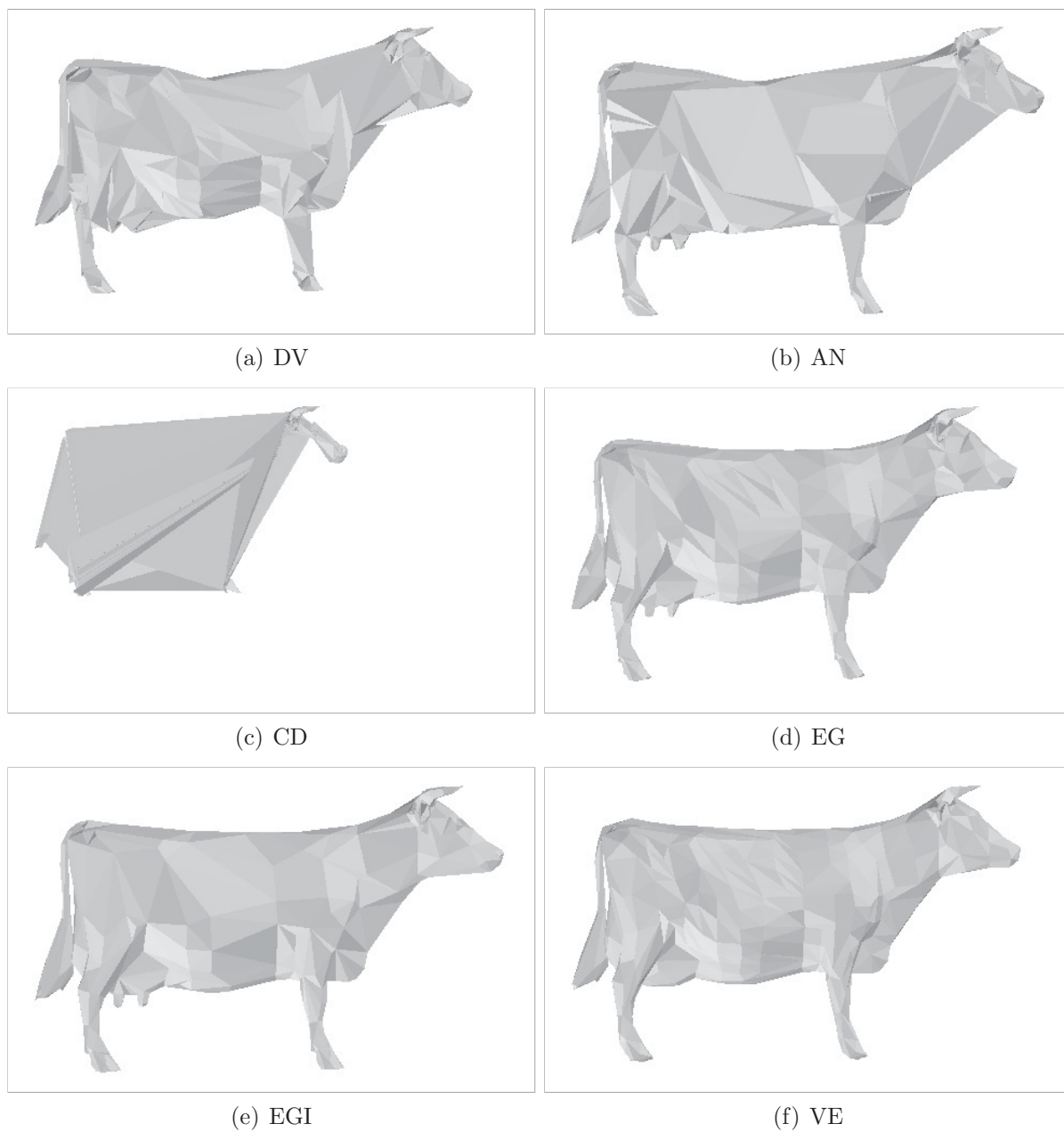


Figura 4.15: Simplificações do modelo *Cow* com 20% das faces do modelo original.

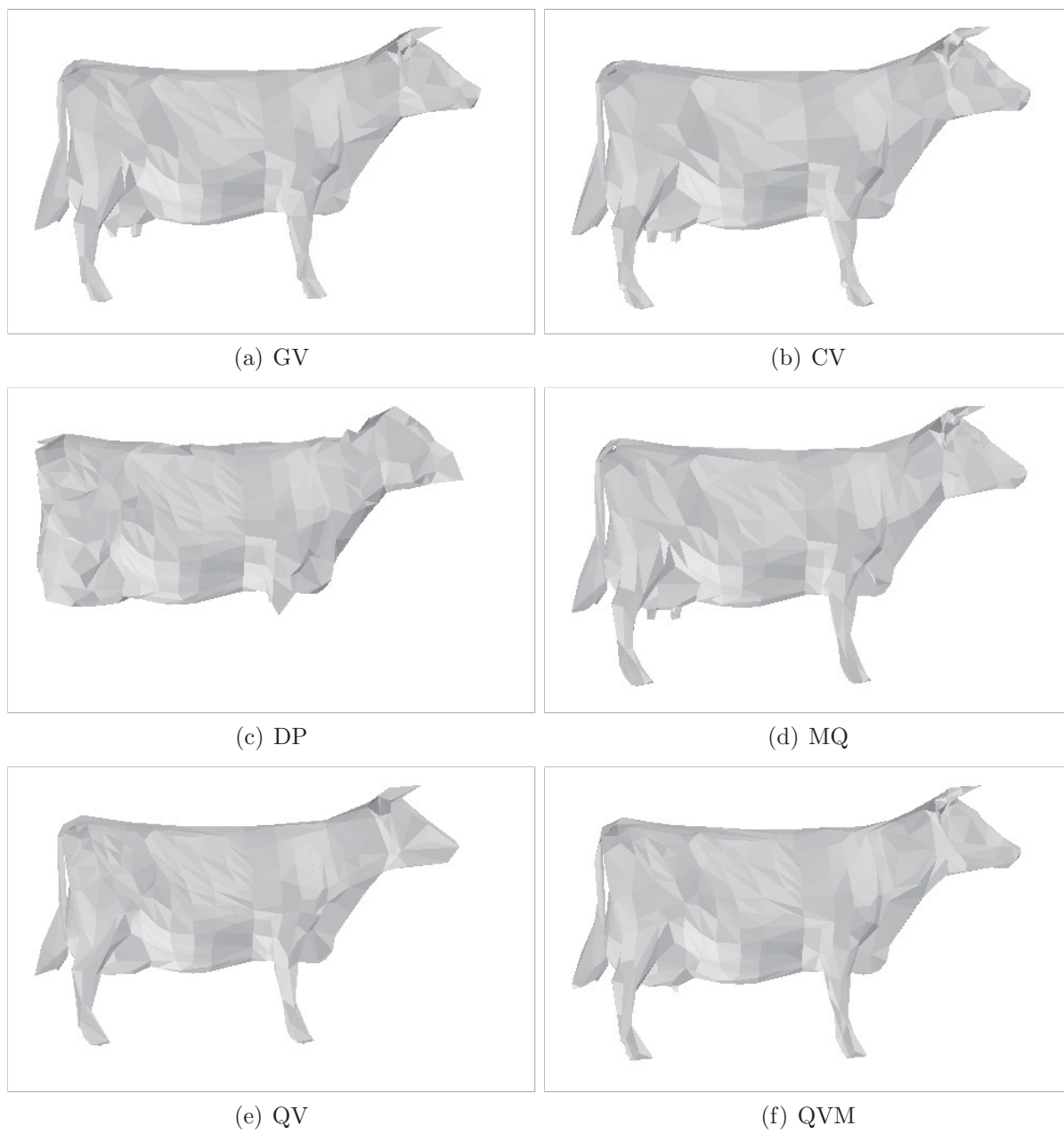


Figura 4.16: Simplificações do modelo *Cow* com 20% das faces do modelo original.

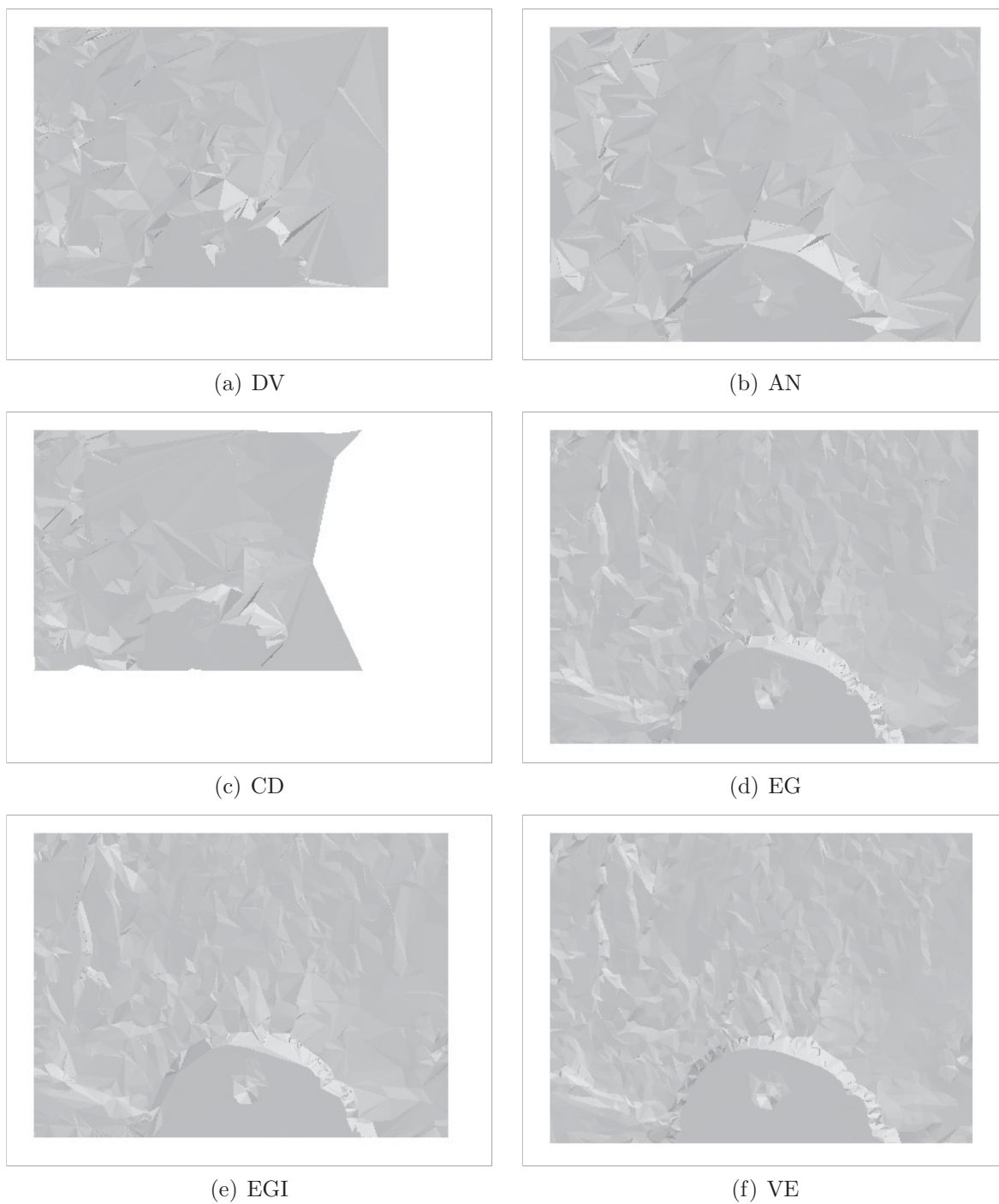


Figura 4.17: Simplificações do modelo *Crater Lake* com 1% das faces do modelo original.

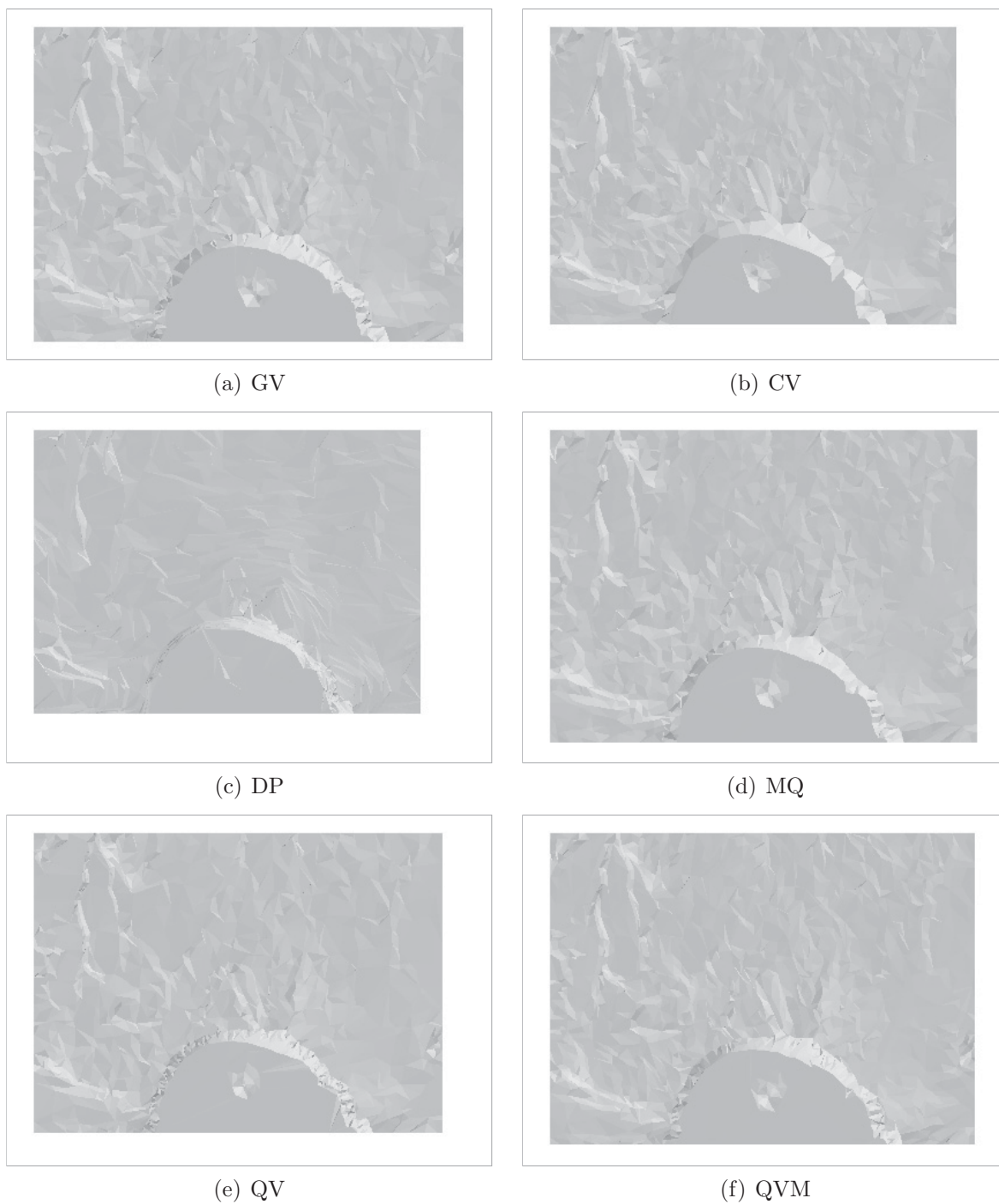


Figura 4.18: Simplificações do modelo *Crater Lake* com 1% das faces do modelo original.

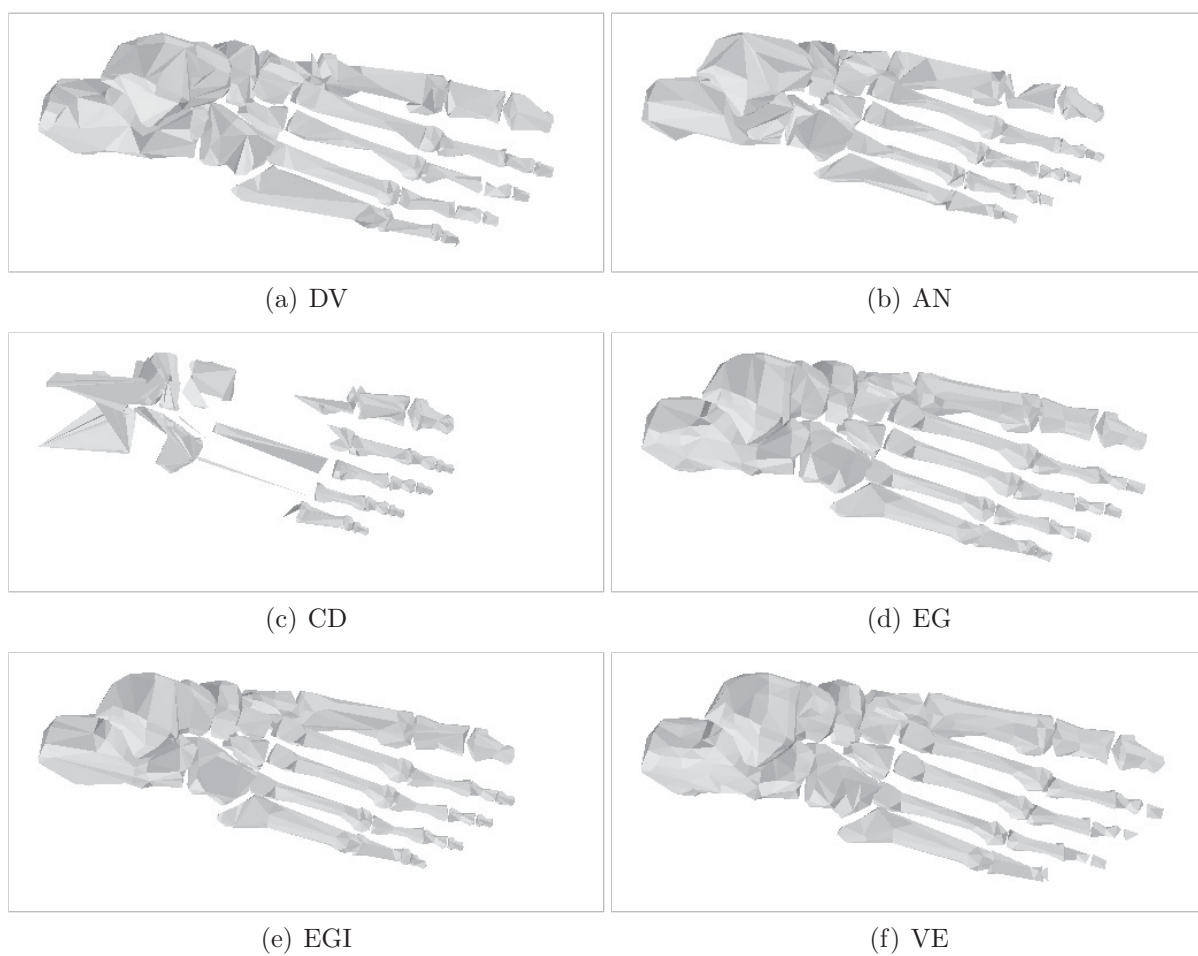


Figura 4.19: Simplificações do modelo *Foot* com 40% das faces do modelo original.

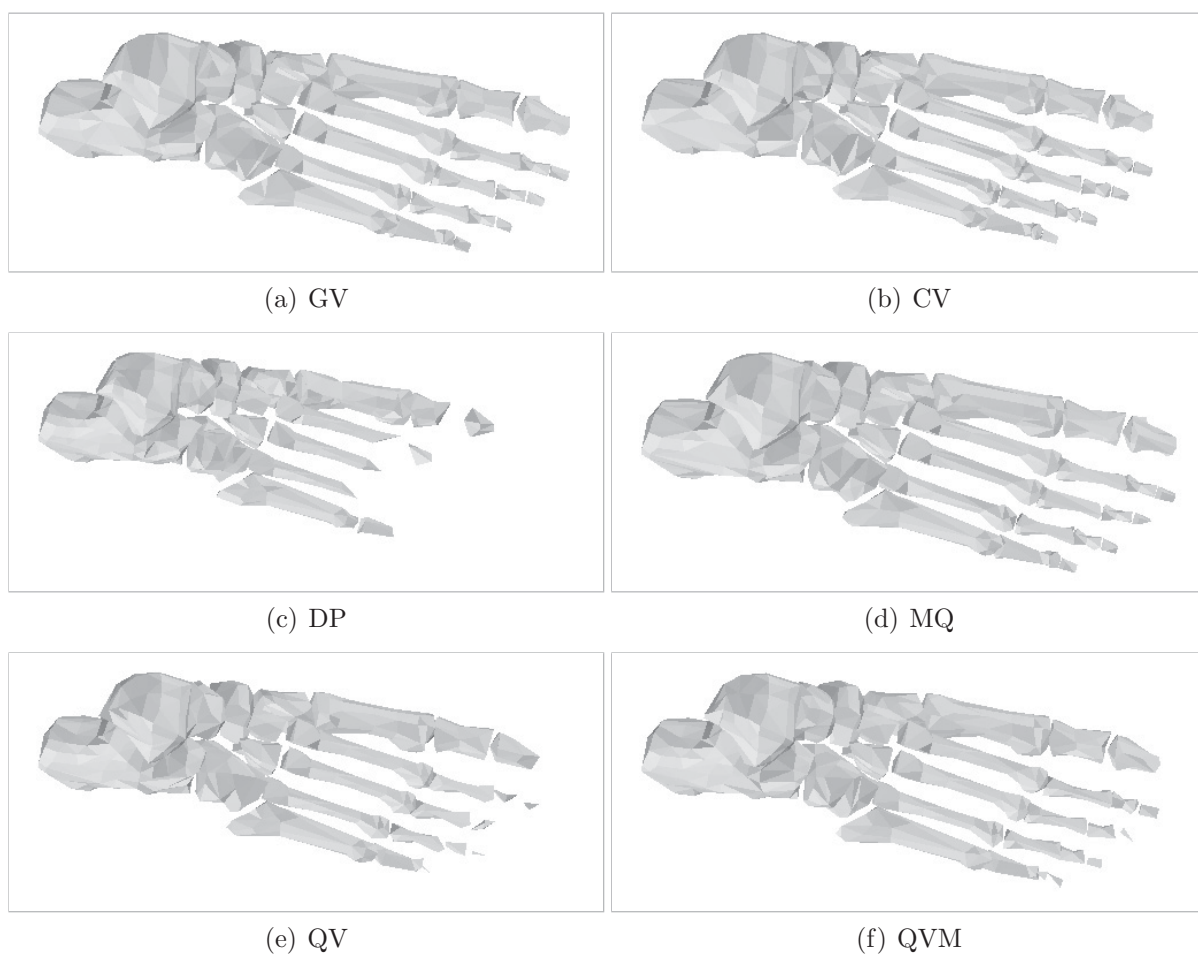


Figura 4.20: Simplificações do modelo *Foot* com 40% das faces do modelo original.

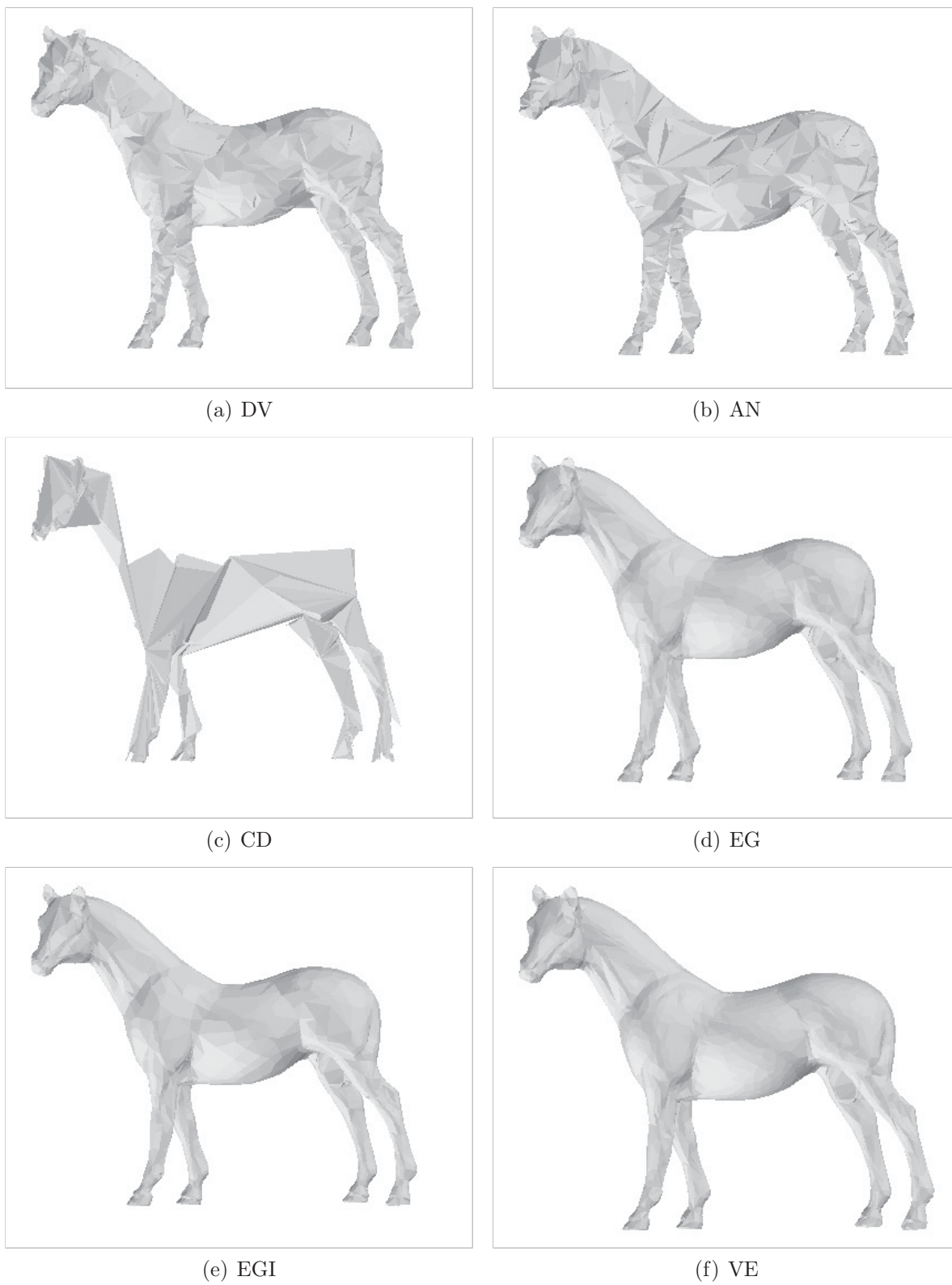


Figura 4.21: Simplificações do modelo *Horse* com 5% das faces do modelo original.

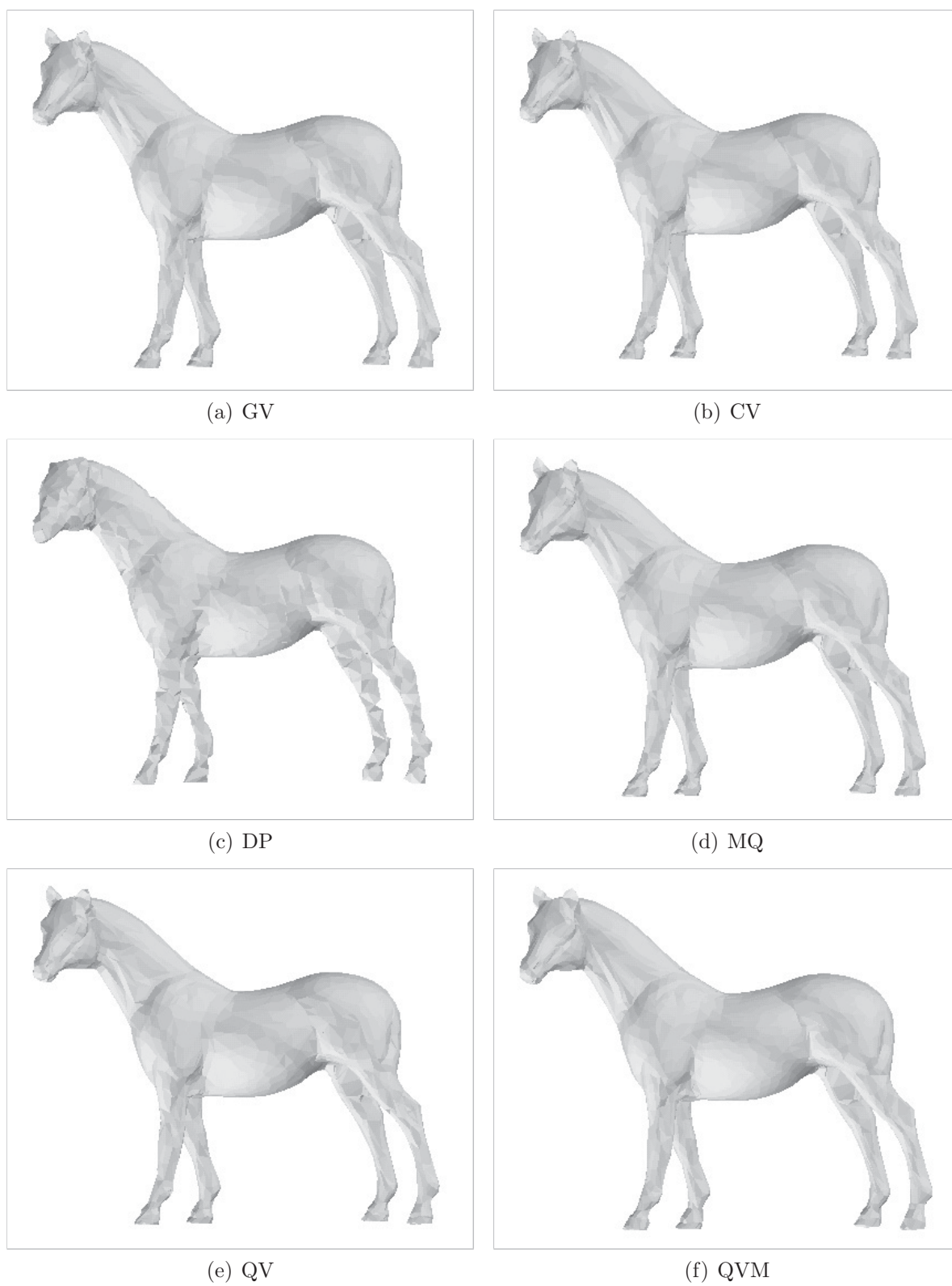


Figura 4.22: Simplificações do modelo *Horse* com 5% das faces do modelo original.

4.4 Efeito da variação de opções de simplificação

Após a verificação da simplificação dos modelos de teste por meio das métricas investigadas, nesta seção é verificado o efeito de outras opções particulares do método de simplificação. É investigada a utilização de diferentes operações de contração, outras maneiras de posicionar os vértices resultantes das operações, a preservação de bordas e da topologia dos modelos, e a utilização da atualização imediata ou preguiçosa do custo das operações candidatas.

Contração de aresta

A figura 4.23 apresenta gráficos com a diferença na qualidade das aproximações geradas resultante da utilização da operação de contração de aresta direcionada ou da contração de aresta geral, posicionando o vértice resultante da operação no ponto médio da aresta. A qualidade das aproximações é avaliada conforme o erro médio pois, como visto nos gráficos anteriores, essa medida apresenta a diferença da qualidade mais claramente.

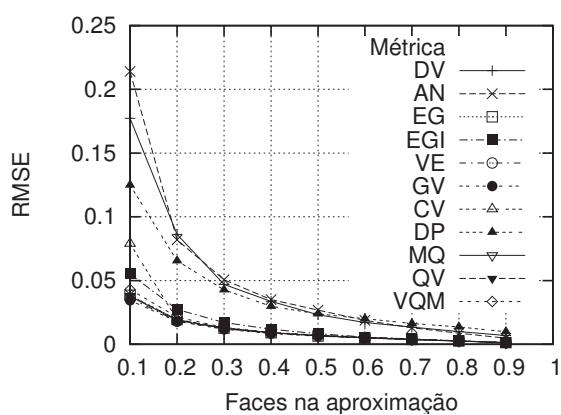
A utilização da contração de aresta direcionada gera aproximações de melhor qualidade, uma vez que essa operação permite escolher um dos dois vértices da aresta como o vértice resultante da operação de contração. Ao se tratar da contração de aresta geral, apenas o ponto médio da aresta pode ser utilizado como a posição do vértice resultante da operação, na implementação utilizada.

Posicionamento ótimo

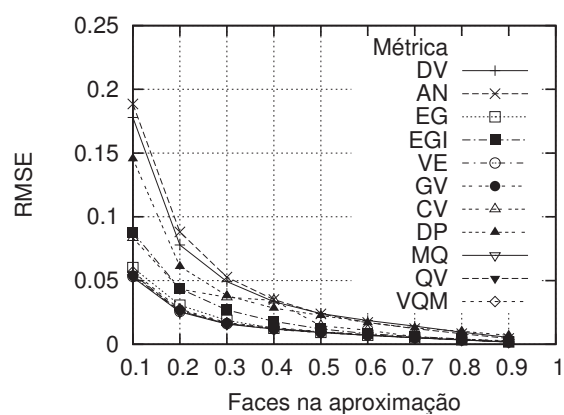
Já que o posicionamento do vértice resultante da operação no ponto médio da aresta contraída não apresenta resultados melhores que a contração de aresta direcionada, nesta seção é investigado o posicionamento ótimo. Como apenas as métricas baseadas em quádras permitem utilizar essa opção, o posicionamento ótimo é avaliado para as métricas quádras, MQ e QVM, que obtêm os melhores resultados.

A figura 4.24 apresenta gráficos comparando o posicionamento ótimo com os posicionamentos no ponto médio da aresta e nos pontos extremos (equivalente à contração de aresta direcionada). É verificado que o posicionamento ótimo melhora um pouco a qualidade dos resultados, principalmente em aproximações de resoluções baixas.

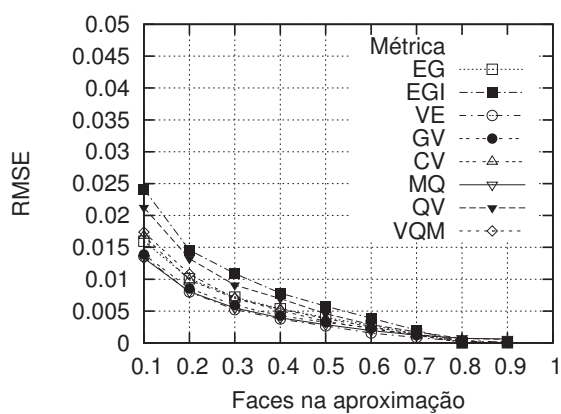
Imagens da simplificação de um modelo conforme esses três parâmetros podem ser vistas na figura 4.25. A partir desses resultados pode ser verificado que a qualidade visual das aproximações não difere muito pela variação dessa opção do método de simplificação, sendo que a métrica utilizada influi mais na qualidade dos resultados do que a maneira de posicionamento utilizada.



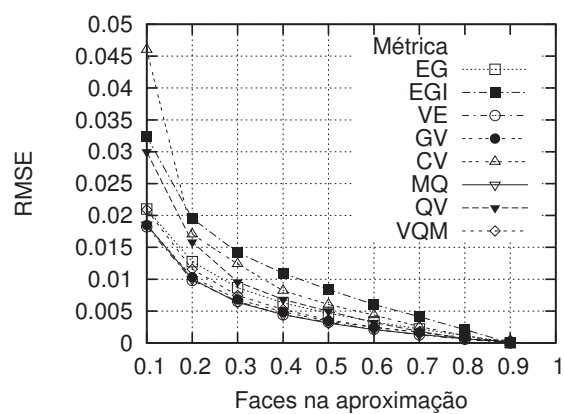
(a) Contração de aresta direcionada



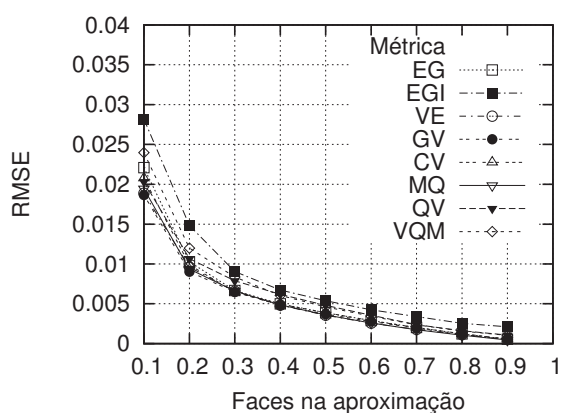
(b) Contração de aresta



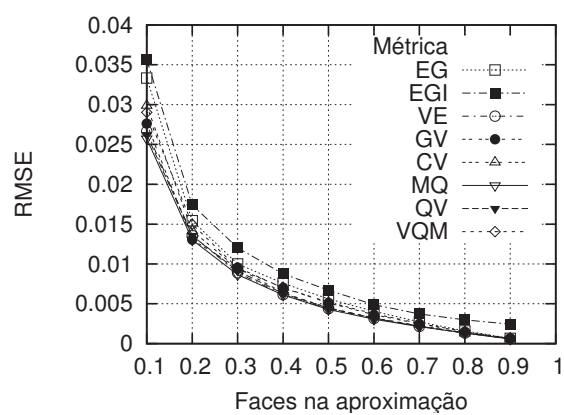
(c) Contração de aresta direcionada



(d) Contração de aresta



(e) Contração de aresta direcionada



(f) Contração de aresta

Figura 4.23: Simplificações utilizando contração de aresta direcionada ou com posicionamento central: (a) e (b) Modelo *Bunny*; (c) e (d) Modelo *Crater Lake*; (e) e (f) Modelo *Horse*.

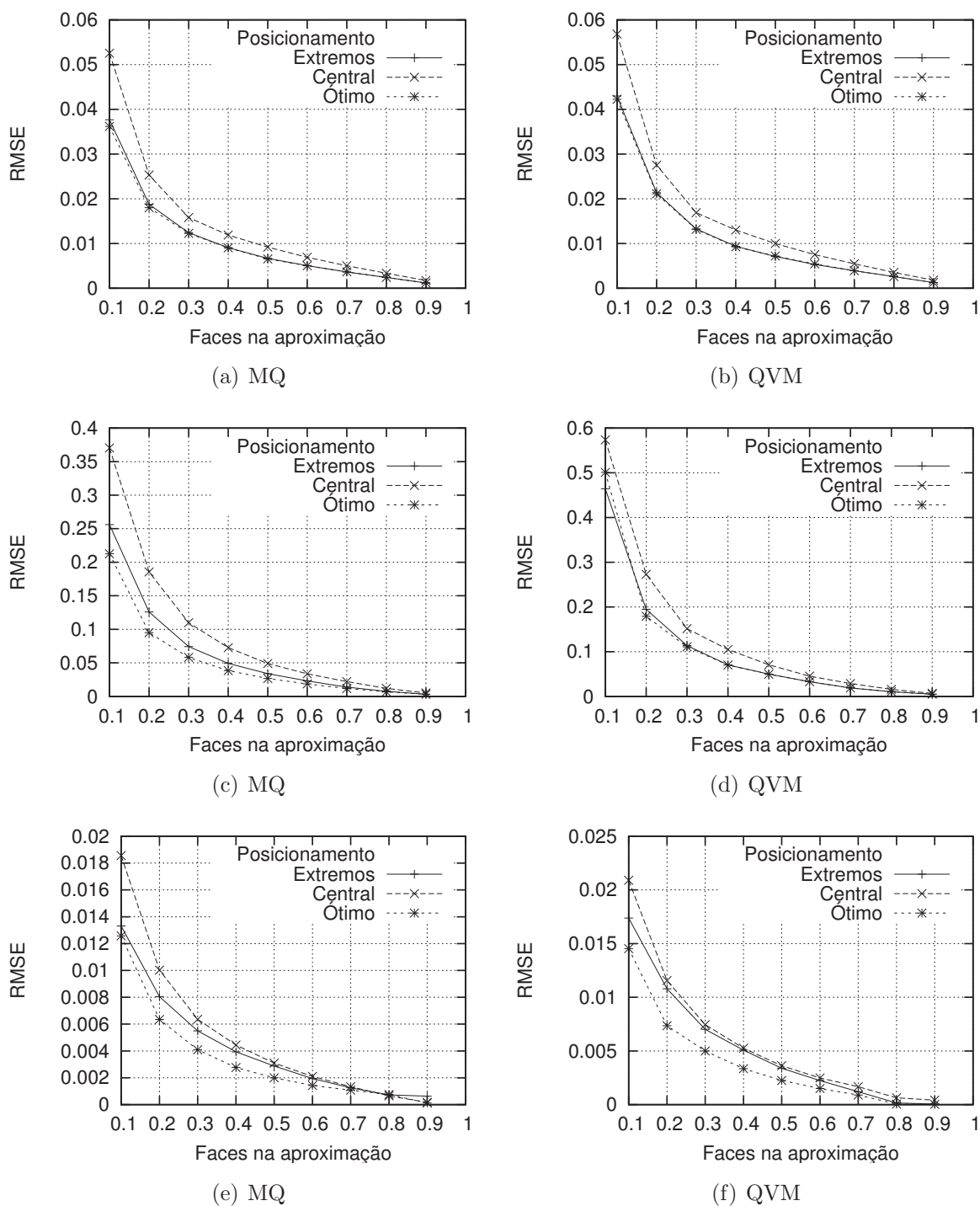


Figura 4.24: Simplificações utilizando contração de aresta com diferentes opções de posicionamento: (a) e (b) Modelo *Bunny*; (c) e (d) Modelo *Cow*; (e) e (f) Modelo *Crater Lake*.

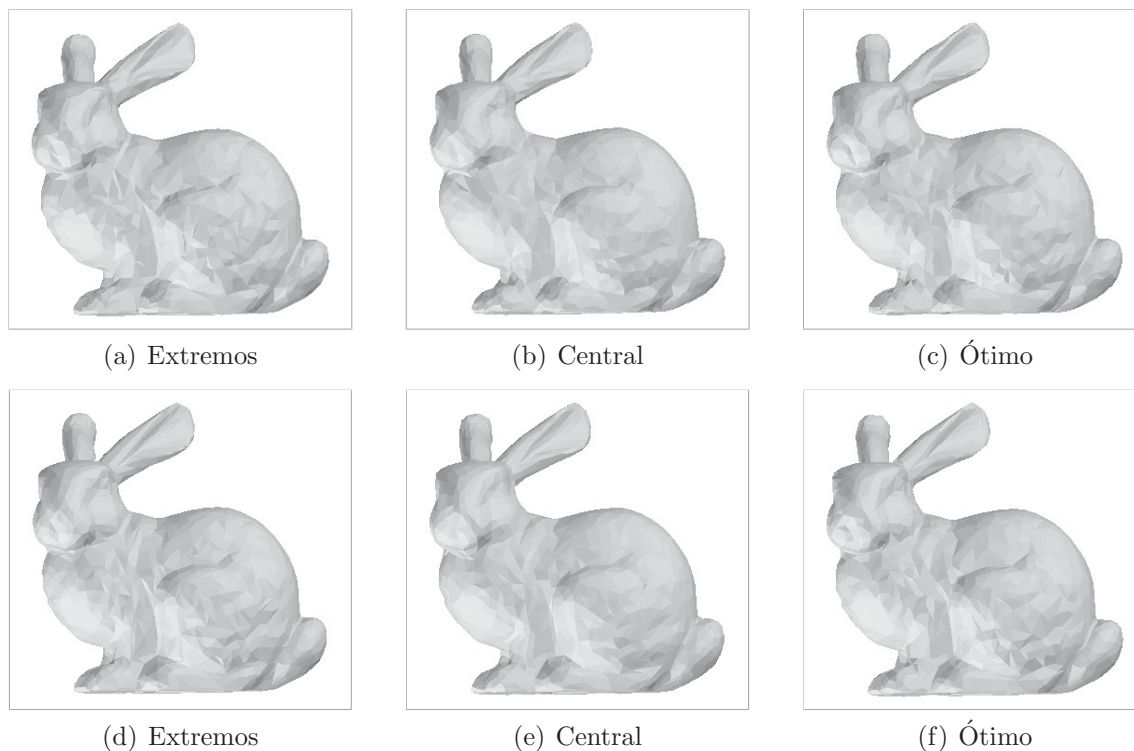


Figura 4.25: Simplificações do modelo *Bunny* com 5% de faces do modelo original, utilizando contração de aresta com diferentes opções de posicionamento: (a), (b) e (c) MQ; (d), (e) e (f) QVM.

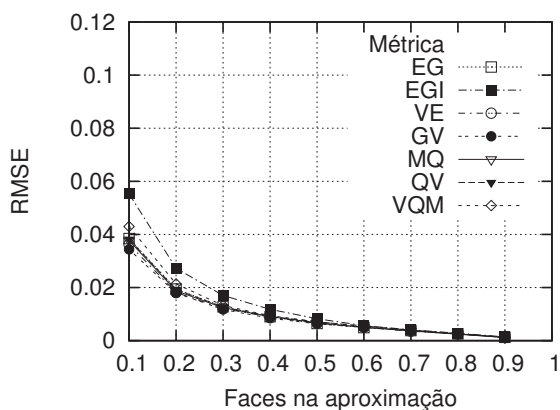
Contração de face

A figura 4.26 apresenta gráficos avaliando a qualidade das simplificações geradas utilizando as operações de contração de aresta direcionada e contração de face. Pode ser visto que a qualidade dos modelos aproximados por meio da operação de contração de aresta direcionada é maior que a dos modelos aproximados por meio da contração de face.

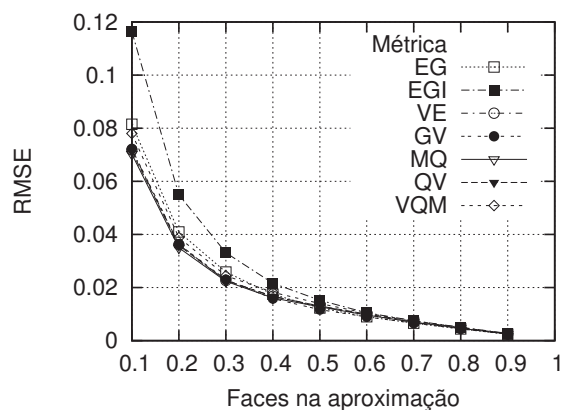
Uma operação de contração de aresta direcionada introduz uma modificação na malha triangular que causa um menor impacto na qualidade das aproximações, por eliminar apenas um vértice, uma aresta e dois triângulos, no caso de malhas que possuem a topologia de uma variedade.

Uma operação de contração de face, em oposição, elimina dois vértices, seis arestas e quatro triângulos, introduzindo, então, uma modificação mais significativa na malha triangular. Por esse motivo, a utilização da operação de contração de aresta permite simplificar a malha mais gradativamente, gerando aproximações de maior qualidade.

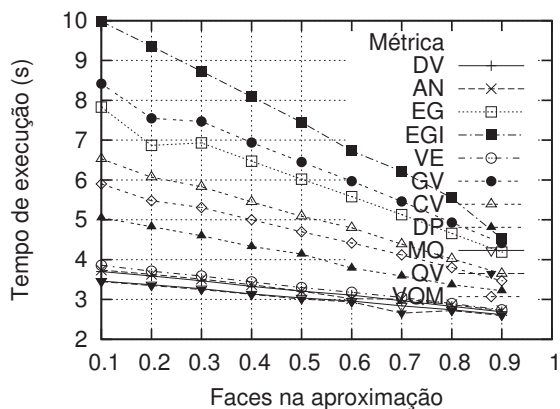
O tempo de execução da simplificação utilizando a contração de face é um pouco menor pois, em decorrência da estrutura de dados utilizada, operações de simplificação envolvendo apenas vértices e triângulos da malha são mais rápidas de serem efetuadas. No entanto, o acréscimo ao tempo de execução causado pela utilização da contração de



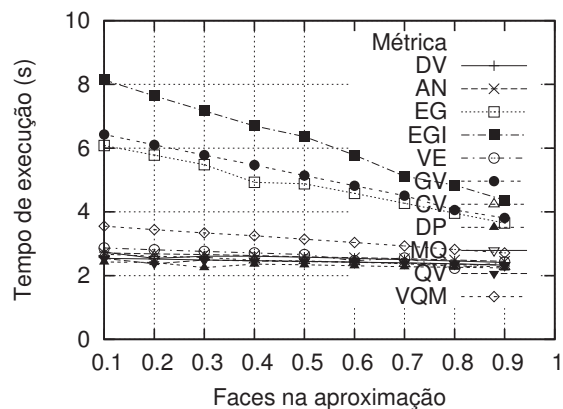
(a) Contração de aresta direcionada



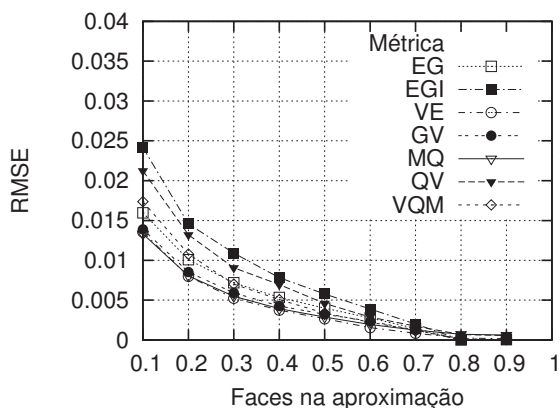
(b) Contração de face



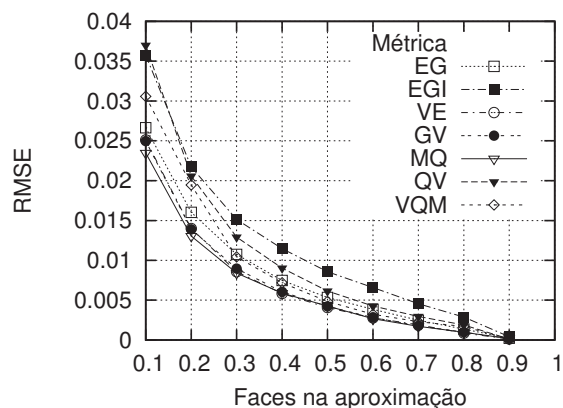
(c) Contração de aresta direcionada



(d) Contração de face



(e) Contração de aresta direcionada



(f) Contração de face

Figura 4.26: Simplificações utilizando contração de aresta ou de face: (a) e (b) Modelo *Bunny*; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo *Bunny*; (e) e (f) Modelo *Crater Lake*.

aresta direcionada não é muito significativo.

A figura 4.27 apresenta uma comparação entre modelos simplificados com essas duas operações. As aproximações geradas com a contração de face tendem a ser menos suaves, apresentando algumas saliências e porções degeneradas nos modelos.

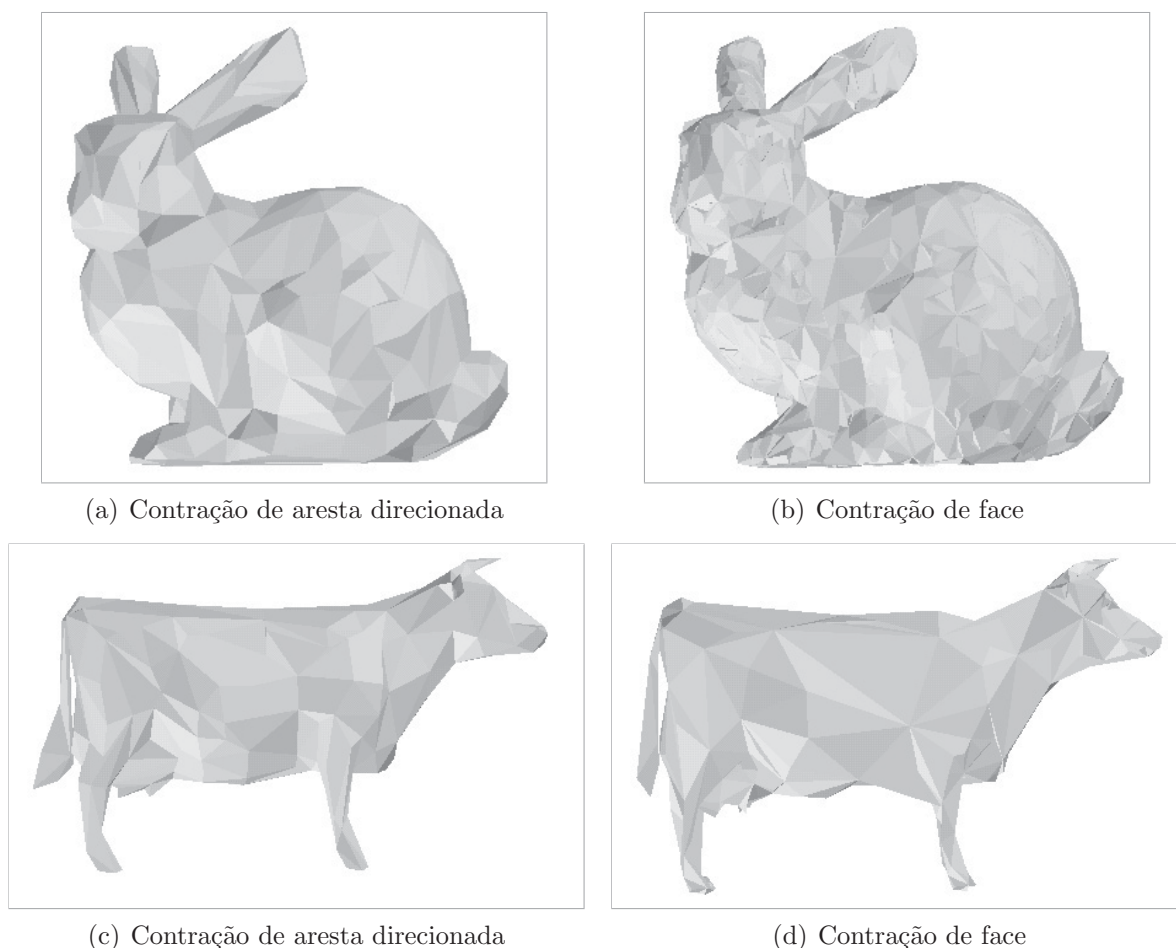
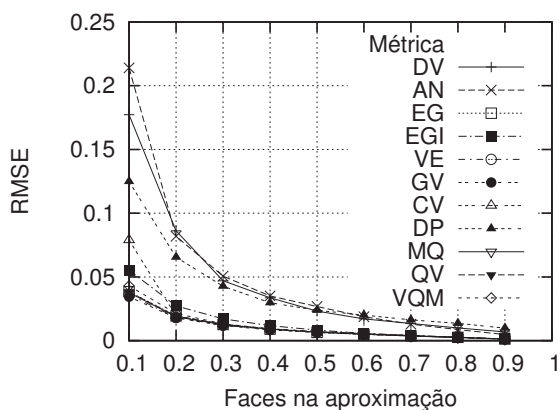


Figura 4.27: Simplificações utilizando contração de aresta ou de face: (a) e (b) Modelo *Bunny* com 1% de faces do modelo original; (c) e (d) Modelo *Cow* com 10% de faces do modelo original.

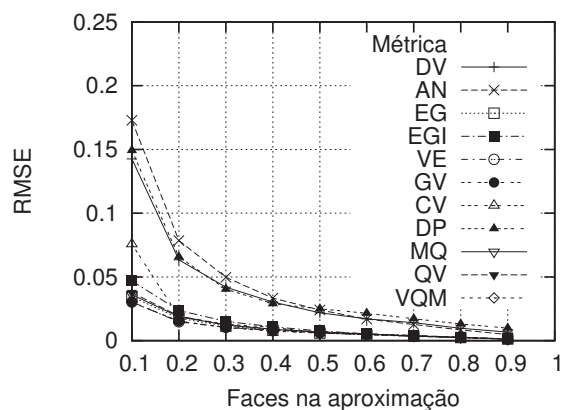
Preservação de topologia

A figura 4.28 apresenta gráficos demonstrando a qualidade das aproximações geradas e o tempo de execução necessário para a simplificação de modelos utilizando a preservação de topologia. Essa opção é avaliada em conjunto com a atualização precisa, que recalcula o custo de um número maior de operações candidatas.

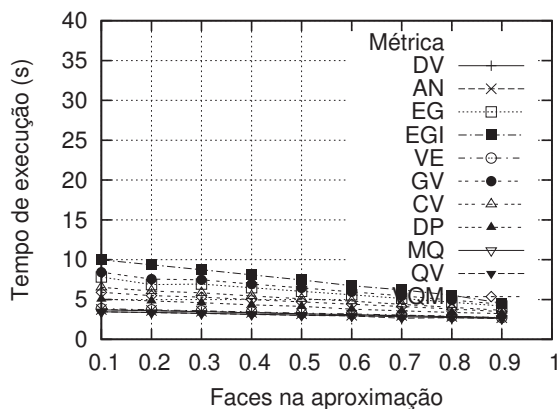
Observa-se que a qualidade das malhas geradas com a opção de preservação de topologia é maior, uma vez que a atualização mais precisa das operações candidatas implica na melhor seleção das contrações que introduzem as menores modificações na



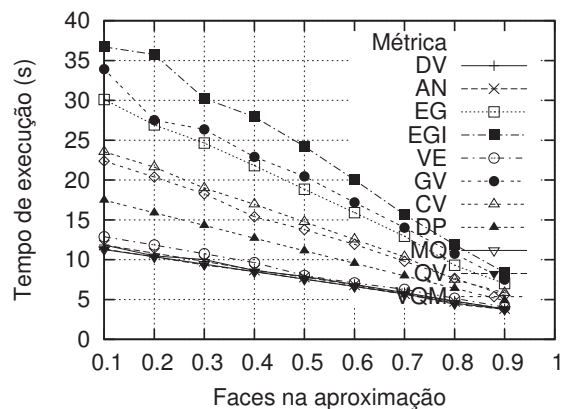
(a) Sem preservar a topologia



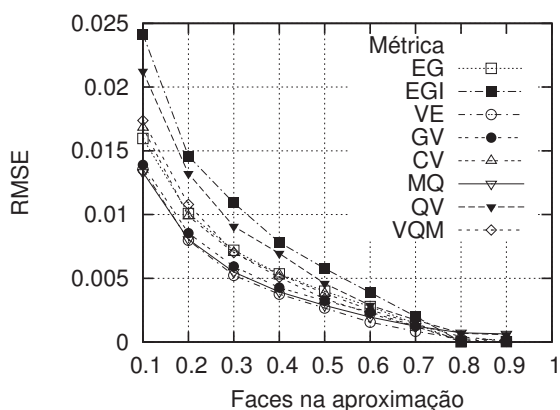
(b) Preservando a topologia



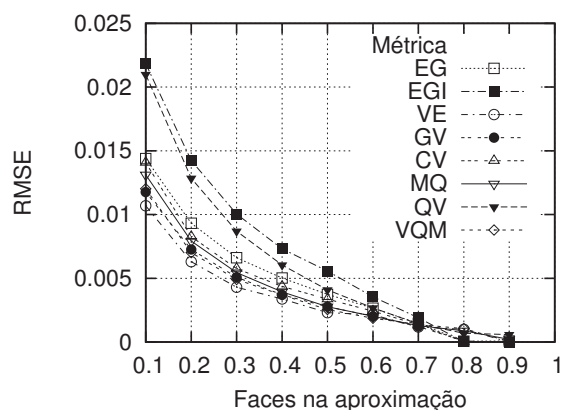
(c) Sem preservar a topologia



(d) Preservando a topologia



(e) Sem preservar a topologia



(f) Preservando a topologia

Figura 4.28: Simplificações preservando ou não a topologia: (a) e (b) Modelo *Bunny*; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo *Bunny*; (e) e (f) Modelo *Crater Lake*.

malha triangular. No entanto, o tempo de execução necessário para a simplificação de um modelo é aumentado em aproximadamente quatro vezes.

Preservação de bordas

Os gráficos da figura 4.29 mostram que a simplificação de modelos utilizando a opção de preservação de bordas gera aproximações de muito maior qualidade, quando modelos com bordas são simplificados¹. Outro fator em favor da utilização dessa opção é o tempo de execução necessário para a simplificação dos modelos, que não sofre um acréscimo significativo.

As imagens na figura 4.30 demonstram que o esquema utilizado para a preservação de bordas funciona corretamente, mantendo as regiões limítrofes do terreno intactas. No entanto, é ressaltado que se uma métrica muito inadequada for utilizada, como por exemplo a de curvatura discreta (CD), as regiões de borda não são mantidas, pois essa métrica deforma o modelo intensamente, como pode ser visto na figura 4.17 (c).

Simplificação preguiçosa

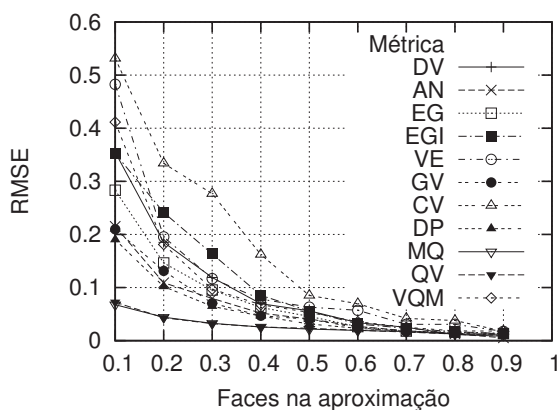
Gráficos com o tempo de execução necessário para a simplificação dos modelos e a qualidade das aproximações geradas conforme o esquema de simplificação preguiçosa são apresentados nas figuras 4.31 e 4.32. Estes gráficos são contrastados com a simplificação realizada por meio da atualização imediata dos custos das operações, denominada de simplificação gulosa.

O tempo de execução necessário para a simplificação dos modelos incluindo essa opção é reduzido aproximadamente pela metade. No entanto, os resultados em termos de qualidade diferem significativamente. Para o modelo *Crater Lake*, a qualidade das aproximações geradas pela atualização preguiçosa é menor, o que é esperado, pois os custos das operações não estão sempre corretamente atualizados ao longo da execução do método de simplificação.

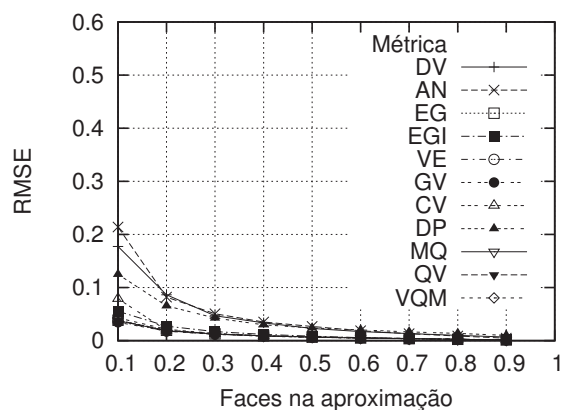
Por outro lado, a simplificação do modelo *Bunny* produz resultados um pouco melhores ao ser utilizada a simplificação preguiçosa. Além disso, para o modelo *Cow*, os dois esquemas de atualização dos custos das operações apresentam-se como equivalentes. Cohen *et al.* [10] e Luebke *et al.* [56] mostram que a atualização preguiçosa é equivalente à simplificação gulosa, em termos de erro geométrico.

As imagens apresentadas na figura 4.33 demonstram que a qualidade visual das aproximações não difere muito quando o esquema geral utilizado no método de simplificação é modificado.

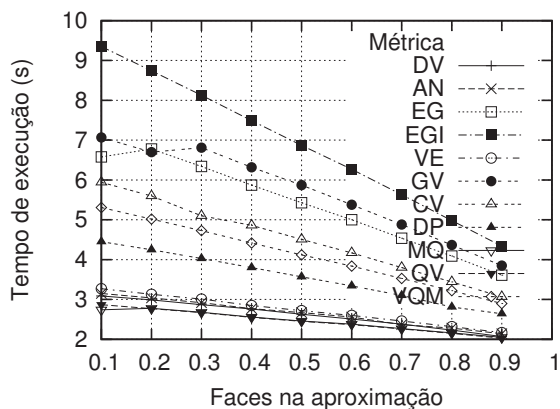
¹O modelo *Bunny* possui bordas em sua porção inferior que está oculta nas imagens apresentadas.



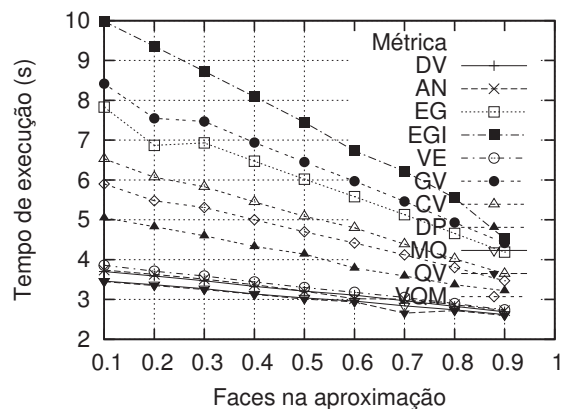
(a) Sem preservar as bordas



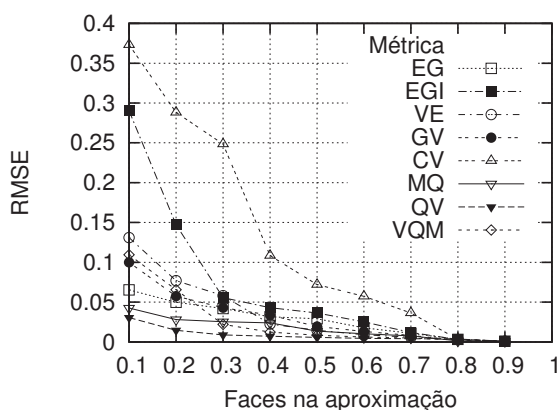
(b) Preservando as bordas



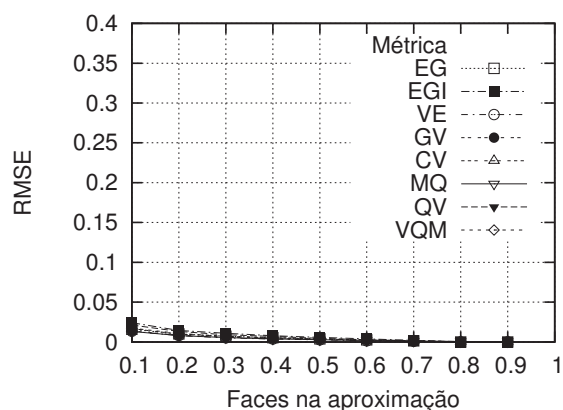
(c) Sem preservar as bordas



(d) Preservando as bordas

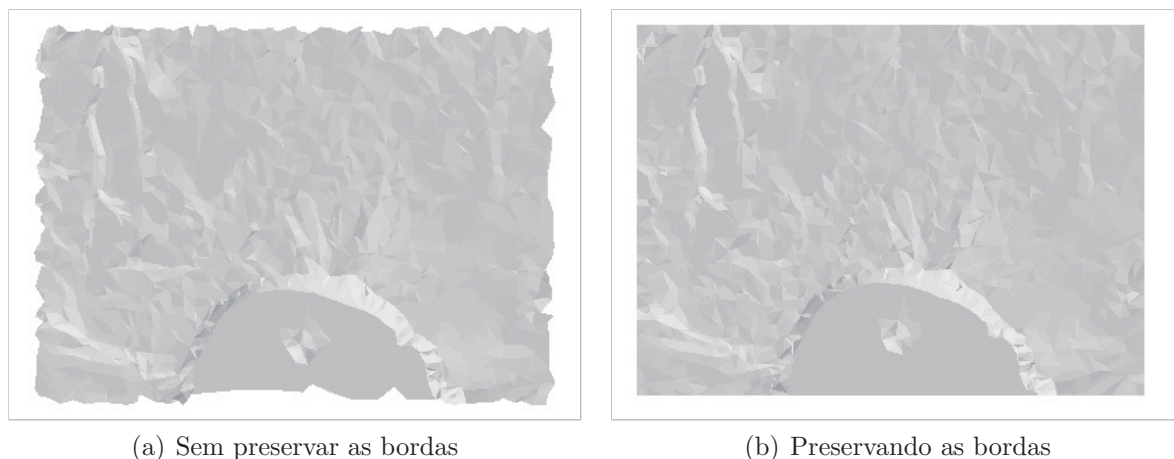


(e) Sem preservar as bordas



(f) Preservando as bordas

Figura 4.29: Simplificações preservando ou não as bordas: (a) e (b) Modelo *Bunny*; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo *Bunny*; (e) e (f) Modelo *Crater Lake*.



(a) Sem preservar as bordas

(b) Preservando as bordas

Figura 4.30: Simplificações preservando ou não as bordas: (a) e (b) Modelo *Crater Lake* com 1% de faces do modelo original.

4.5 Discussão dos resultados

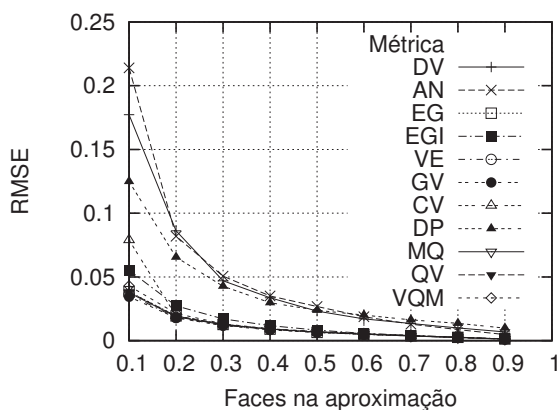
Após a apresentação dos resultados, pode-se concluir quais as métricas que geram as aproximações de maior qualidade e quais as métricas que efetuam as simplificações menos satisfatórias. Também é possível concluir quais as opções de simplificação que contribuem positivamente na qualidade dos modelos.

As aproximações de maior qualidade são geradas pela métrica quádrica (MQ) e por aquelas baseadas no erro geométrico, mais especificamente as métricas EG e GV. A métrica do erro geométrico combinado com o volume de erro (GV), proposta neste trabalho, apresenta resultados de qualidade equivalentes à métrica quádrica. Dessa maneira, é conhecida uma alternativa que pode ser utilizada para a simplificação de modelos poligonais.

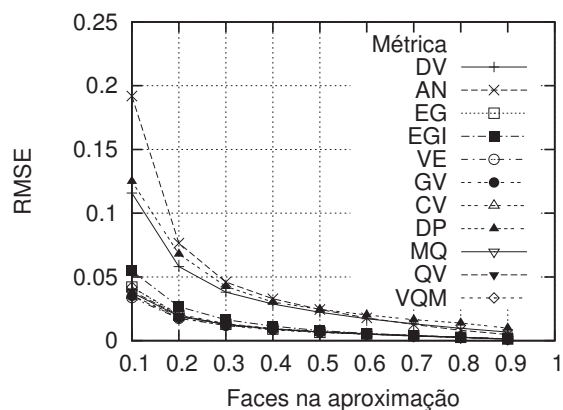
A métrica do erro geométrico combinado com a importância visual dos vértices (EGI), por outro lado, não apresenta resultados melhores que a utilização apenas do erro geométrico (EG), o qual também gera aproximações de alta qualidade, demandando um tempo de execução menor que as métricas GV e EGI.

Dependendo da aplicação na qual a simplificação de malhas triangulares será utilizada, uma das duas métricas, MQ ou GV, pode ser utilizada. Se uma grande quantidade de memória está disponível, a métrica quádrica (MQ) é adequada, uma vez que demanda pouco processamento e gera resultados de alta qualidade. Por outro lado, se os recursos de memória forem escassos, ou se grandes modelos poligonais devem ser simplificados, a métrica quádrica (MQ) torna-se inadequada, pois dez valores de ponto-flutuante devem ser adicionalmente armazenados para cada vértice do modelo, aumentando significativamente a quantidade de memória necessária.

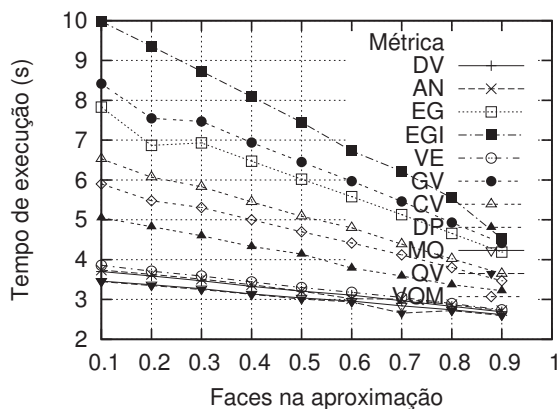
As métricas baseadas no erro geométrico surgem como uma alternativa à métrica



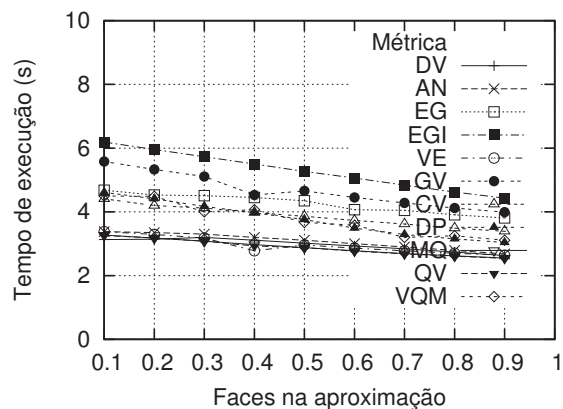
(a) Simplificação gulosa



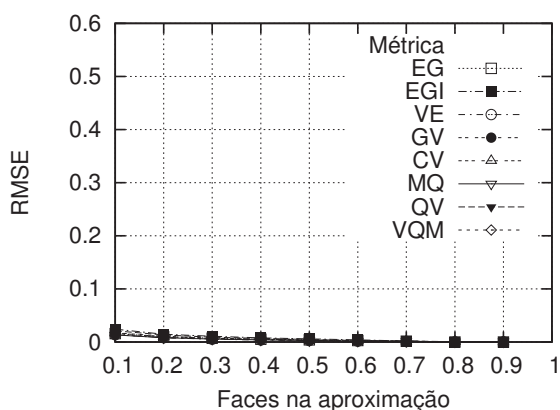
(b) Simplificação preguiçosa



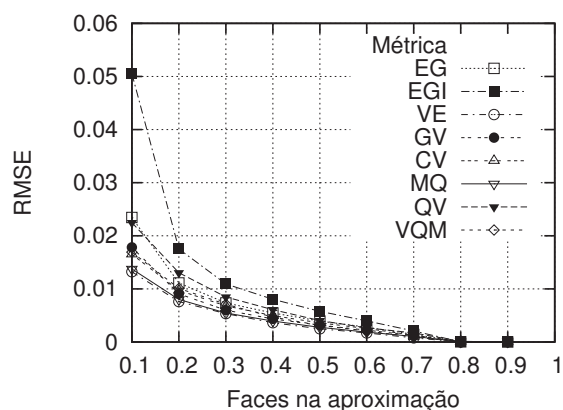
(c) Simplificação gulosa



(d) Simplificação preguiçosa

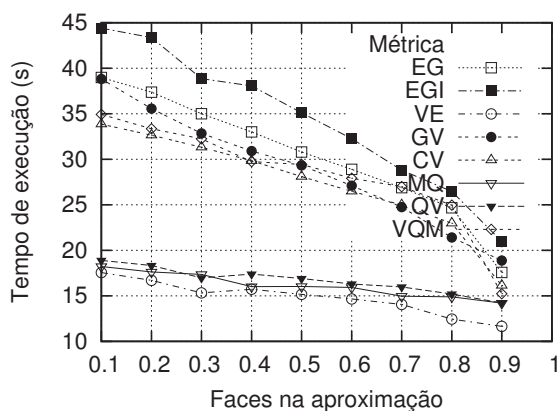


(e) Simplificação gulosa

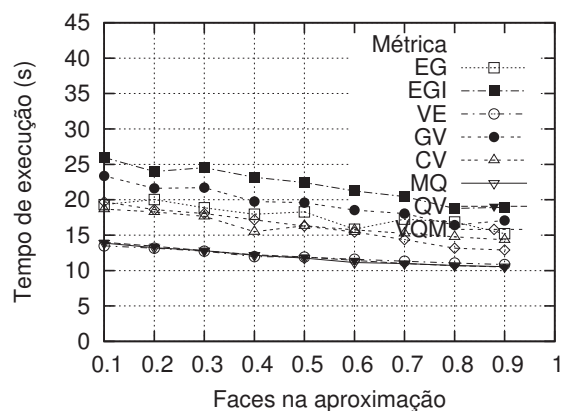


(f) Simplificação preguiçosa

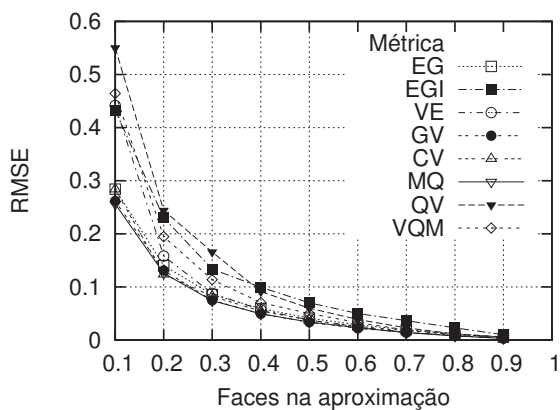
Figura 4.31: Simplificação gulosa ou preguiçosa: (a) e (b) Modelo *Bunny*; (c) e (d) Tempo de execução para o Modelo *Bunny*; (e) e (f) Modelo *Crater Lake*.



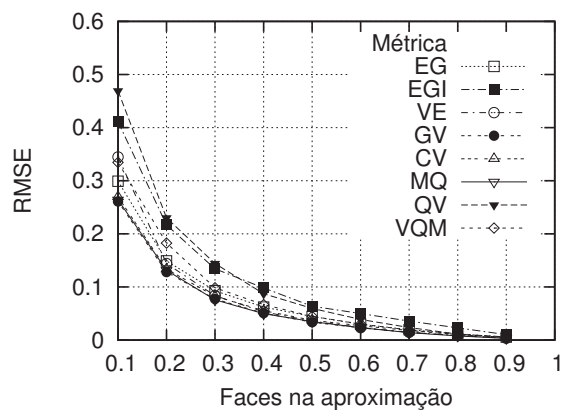
(a) Simplificação gulosa



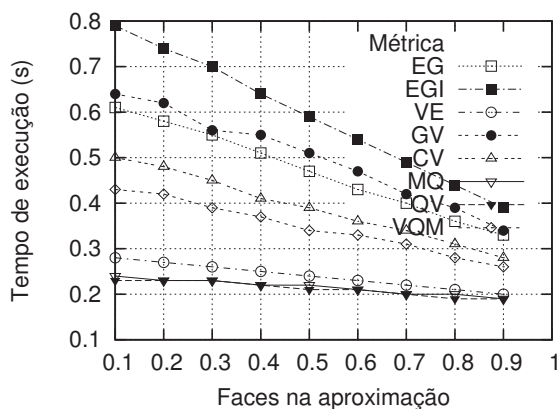
(b) Simplificação preguiçosa



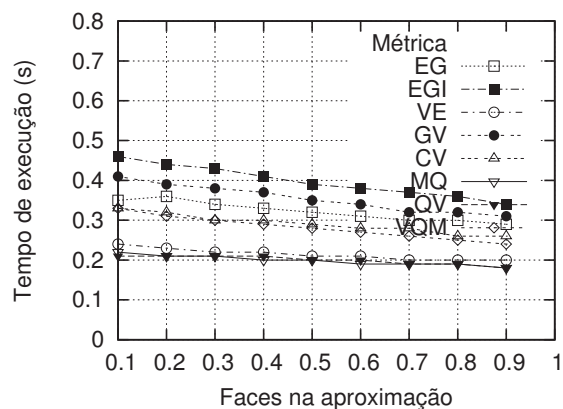
(c) Simplificação gulosa



(d) Simplificação preguiçosa



(e) Simplificação gulosa



(f) Simplificação preguiçosa

Figura 4.32: Simplificação gulosa ou preguiçosa: (a) e (b) Tempo de execução para o Modelo *Crater Lake*; (c) e (d) Modelo *Cow*; (e) e (f) Tempo de execução para o Modelo *Cow*.

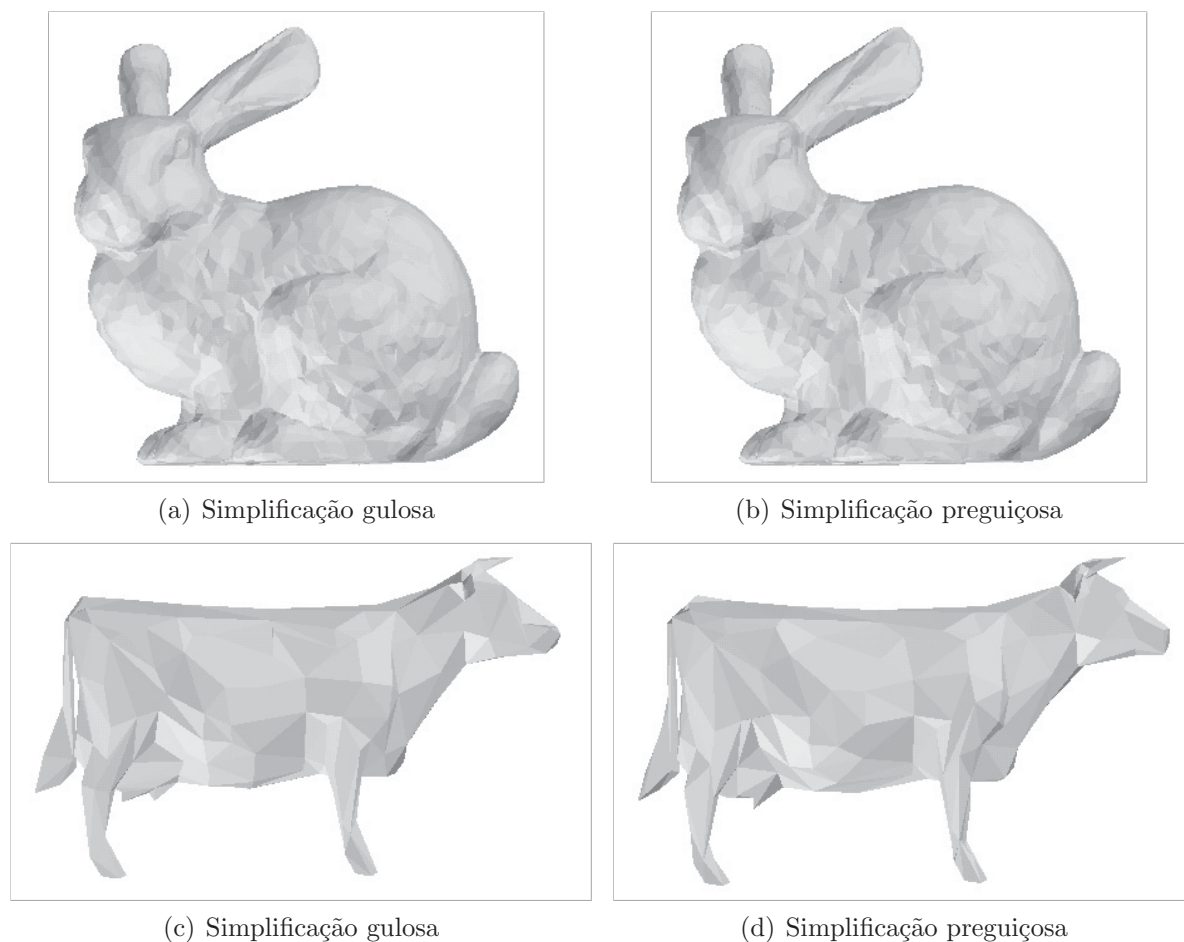


Figura 4.33: Simplificação gulosa ou preguiçosa: (a) e (b) Modelo *Bunny* com 10% de faces do modelo original; (c) e (d) Modelo *Cow* com 10% de faces do modelo original.

quádrica, uma vez que não utilizam nenhuma memória adicional além daquela requerida pelo método de simplificação. Então, pode ser afirmado que essas métricas dão preferência à utilização de recursos de processamento em detrimento de recursos de memória, uma vez que necessitam de um tempo de execução maior que a métrica quádrlica.

A métrica do volume de erro (EV) também pode ser uma boa alternativa para determinadas aplicações, pois gera aproximações de qualidade satisfatória e não demanda um elevado tempo de execução. Um fato interessante é que essa métrica gera aproximações melhores que as métricas quádrlicas baseadas em volume (QV e QVM), as quais utilizam as superfícies quádrlicas para estimar melhor o erro, ao invés de apenas realizarem uma soma das mudanças de volume introduzidas por uma contração.

A outra métrica proposta neste trabalho, baseada na compacidade do volume de erro (CV), que é basicamente uma melhoria da métrica do volume de erro (VE), também gera aproximações de qualidade satisfatória. No entanto, embora pequenos detalhes dos modelos sejam preservados, como pode ser visto contrastando as figuras 4.15 (f) e 4.16 (b), as medidas de erro médio e máximo determinam que os resultados são melhores para

a métrica VE que para a CV, quando a distância geométrica entre modelos é considerada.

Por outro lado, as métricas DV, AN, CD e DP apresentam os resultados menos satisfatórios, tanto em termos de erro geométrico, quanto na análise visual dos resultados. Os modelos simplificados pelas métricas CD e DP são deformados. A métrica de curvatura discreta (CD), em especial, gera aproximações extremamente distorcidas, por não utilizar nenhuma informação efetiva de erro para a simplificação dos modelos, apenas medidas de curvatura. Essa deformação dos modelos também provoca uma grande utilização de recursos de processamento.

Contudo, as métricas DV e AN tendem a construir aproximações razoáveis em termos globais, mas que apresentam um grande número de irregularidades localizadas. Essas métricas, que requerem tempos de execução modestos, são mais adequadas para utilização em uma fase inicial de algum método de simplificação generalizado, com o objetivo de reduzir rapidamente modelos muito grandes, para que estes possam ser então simplificados por métricas mais adequadas.

A qualidade das aproximações geradas pelas métricas que obtêm os melhores resultados é confirmada pela análise visual das simplificações, bem como pela análise dos erros médio e máximo. Por exemplo, aproximações para o modelo *Bunny* com 10% de faces triangulares do modelo original podem ser geradas em até 10 segundos, apresentando um erro médio e máximo de 0,05% da diagonal do paralelepípedo máximo que envolve a malha. Para o modelo *Turbine Blade*, que possui mais de um milhão e meio de faces triangulares, aproximações com 10% de faces do modelo original são geradas em 5 minutos, apresentando um erro médio de 0,01% e máximo de 1,5%.

Então, o objetivo de simplificar malhas triangulares gerando aproximações de alta qualidade e em um tempo de execução razoável é possível, desde que uma das métricas que obtêm bons resultados for utilizada. Também é demonstrado por esses experimentos que há diversas métricas que não armazenam nenhuma informação adicional associada aos componentes da malha e, mesmo assim, geram aproximações de alta qualidade, com um custo adicional de processamento.

Quanto às outras opções possíveis do método de simplificação, pode ser concluído que a contração de aresta direcionada, por ser uma operação que introduz uma modificação de menos impacto na malha, realmente permite uma simplificação mais gradativa dos modelos. A operação de contração de aresta geral é apenas mais eficiente se a métrica permitir o posicionamento ótimo do vértice resultante da contração. A operação de contração de face possui apenas a vantagem de ser mais rápida que as outras operações.

A opção de preservação de bordas realmente contribui para a melhoria da qualidade das aproximações geradas e, além disso, praticamente não aumenta o tempo de execução necessário para a simplificação dos modelos, se o esquema proposto para a preservação de bordas for utilizado. Por outro lado, a preservação de topologia com a atualização precisa das porções modificadas da malha triangular aumenta significativamente

o tempo de execução do método, mas também auxilia na geração de malhas triangulares de muito maior qualidade.

A simplificação preguiçosa mostrou-se como equivalente à simplificação com a atualização imediata dos custos das operações. Embora para alguns modelos os resultados tenham sido melhores para esse esquema geral do método de simplificação, para outras malhas a simplificação gulosa gerou aproximações de maior qualidade, como esperado.

Finalmente, efetuando uma análise dos resultados para cada modelo de entrada, é verificado que o comportamento das métricas não varia de acordo com a malha triangular simplificada. Aquelas métricas estudadas que apresentam os melhores resultados para uma malha triangular específica, também geram as aproximações de maior qualidade para os outros modelos simplificados e para a maior parte das resoluções requeridas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Atualmente, é cada vez mais comum a utilização de modelos poligonais de grande complexidade, gerados a partir de diferentes conjuntos de dados espaciais. A simplificação de malhas triangulares torna possível a manipulação desses grandes conjuntos de dados, e possibilita também a construção de uma representação em multi-resolução, da qual é possível extrair uma malha triangular com um nível de detalhe requerido, com um esforço de processamento reduzido.

A simplificação de malhas triangulares utilizando-se operações e métricas de caráter local é vantajosa, pois estas são rápidas de serem executadas e calculadas, e possibilitam um controle preciso do número de vértices retirados do modelo. No entanto, o erro da aproximação não é globalmente controlado, a não ser que isto seja explicitamente realizado, o que torna necessária a utilização de uma métrica de simplificação adequada, para que aproximações de alta qualidade possam ser geradas.

Esta dissertação apresentou um estudo comparativo da simplificação de malhas triangulares por meio de operações e métricas de caráter local. Diversas métricas foram testadas e a qualidade das aproximações geradas foi avaliada, de forma que pôde ser concluído quais são as métricas mais adequadas para a simplificação de modelos poligonais.

Além disso, duas novas métricas foram propostas neste trabalho, o *erro geométrico combinado com o volume de erro* e a *compacidade do volume de erro*, as quais surgem como uma alternativa a ser utilizada para a simplificação de malhas triangulares pois, ao contrário da melhor métrica existente na literatura, não necessitam de nenhuma memória adicional durante a sua execução e geram aproximações de alta qualidade.

Outros aspectos relacionados ao método de simplificação, entre eles, a operação de simplificação utilizada, o esquema geral do método de simplificação e a preservação de atributos das malhas triangulares também foram investigados, e aquelas opções que contribuem positivamente na qualidade dos modelos aproximados foram determinadas.

Com a realização de diversos experimentos, este estudo verificou que é possível gerar aproximações de malhas poligonais de alta qualidade, com um aspecto visual satisfatório, preservando pequenos detalhes dos modelos e em um tempo de execução razoável, por meio da utilização de métricas e operações de caráter local, que permitem a simplificação rápida das malhas, sem a necessidade de qualquer pré-processamento.

Para a realização desses experimentos, um programa para a simplificação de malhas triangulares foi implementado, o que permitiu a avaliação adequada de todas as opções de simplificação investigadas, uma vez que o impacto da mudança de apenas

opções específicas do método pôde ser corretamente verificado. Assim, foi possível realizar um estudo comparativo em que as diferentes métricas e outros aspectos do método de simplificação puderam ser avaliados corretamente, sem que implementações distintas influíssem nos resultados.

Sabendo-se quais operações e métricas de caráter local geram as aproximações de maior qualidade, torna-se possível implementar um método de simplificação que gera aproximações de alta qualidade em um tempo de execução baixo. Além disso, um sistema de modelagem em multi-resolução pode ser implementado, possibilitando a extração de uma malha triangular com um número requerido de componentes.

Em relação aos trabalhos futuros, uma extensão possível deste estudo é uma comparação entre as métricas investigadas neste trabalho e as métricas que realizam um controle maior do erro utilizando, por exemplo, a distância de Hausdorff para a simplificação de modelos poligonais. Uma comparação direta entre esses dois tipos de métricas possibilitaria verificar o aumento na qualidade dos modelos gerados decorrente da utilização de medidas mais custosas.

Além disso, com a recente aplicação em malhas triangulares de conceitos e técnicas bastante desenvolvidos na área de processamento de sinais [25, 72], outro tópico a ser investigado é a utilização dessas novas idéias para a elaboração de métricas de simplificação de modelos poligonais.

Alguns desses novos conceitos, como a aplicação de transformadas às coordenadas dos vértices da malha [44], poderiam ser utilizados para indicar quais porções da malha que possuem mais detalhes e devem ser simplificadas com mais cuidado. Esse tópico ainda necessita de investigação, como sugerido por Karni e Gotsman [44]. Essas idéias poderiam levar à elaboração de métricas mais custosas, mas possibilitando a melhor preservação de detalhes relevantes dos modelos.

Essa técnica, que também permite a visualização progressiva dos modelos, poderia ser combinada com a simplificação de malhas triangulares para a construção de uma estrutura de multi-resolução inovadora, permitindo a representação adequada dos modelos e efetuando, além disso, uma certa compressão dos dados.

Finalmente, todas as operações de simplificação investigadas neste estudo preservam a topologia dos modelos, quando os testes necessários para evitar porções degeneradas nas malhas são realizados. No entanto, não foi investigada a simplificação de malhas por meio de operações que ignoram completamente a topologia dos modelos, entre elas, o agrupamento de vértices de regiões não conectadas da malha.

A utilização de estruturas de multi-resolução baseadas nessas operações de simplificação, as quais apresentam diferentes vantagens em relação às outras estruturas existentes, seria validada, se um estudo detalhado da qualidade das aproximações geradas apresentasse resultados satisfatórios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALLIEZ, P. E GOTSMAN, C. Recent advances in compression of 3D meshes. Em *Proceedings of the Symposium on Multiresolution in Geometric Modeling* (Cambridge, Reino Unido, Set. 2003).
- [2] ASPERT, N., SANTA-CRUZ, D. E EBRAHIMI, T. MESH: Measuring errors between surfaces using the Hausdorff distance. Em *Proceedings of the IEEE International Conference on Multimedia and Expo* (2002), vol. 1, pp. 705–708. <http://mesh.epfl.ch>.
- [3] BERG, M. D. E DOBRINDT, K. T. G. On levels of detail in terrains. *Graphical models and image processing: GMIP 60*, 1 (1998), 001–012.
- [4] BERG, M. D., KREVELD, M. V., OVERMARS, M. E SCHWARZKOPF, O. *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, 2^a ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [5] CIAMPALINI, A., CIGNONI, P., MONTANI, C. E SCOPIGNO, R. Multiresolution decimation based on global error. *The Visual Computer* 13, 5 (1997), 228–246.
- [6] CIARLET, P. E LAMOUR, F. Does contraction preserve triangular meshes? *Numerical Algorithms* 13 (1996), 201–223.
- [7] CIGNONI, P., MONTANI, C. E SCOPIGNO, R. A comparison of mesh simplification algorithms. *Computers and Graphics* 22, 1 (1998), 37–54.
- [8] CIGNONI, P., PUPPO, E. E SCOPIGNO, R. Representation and visualization of terrain surfaces at variable resolution. *The Visual Computer* 13, 5 (1997), 199–217.
- [9] CIGNONI, P., ROCCHINI, C. E SCOPIGNO, R. METRO: Measuring error on simplified surfaces. *Computer Graphics Forum* 17, 2 (1998), 167–174.
- [10] COHEN, J., MANOCHA, D. E OLANO, M. Simplifying polygonal models using successive mappings. Em *IEEE Visualization* (1997), pp. 395–402.
- [11] COHEN, J., VARSHNEY, A., MANOCHA, D., TURK, G., WEBER, H., AGARWAL, P., BROOKS, F. E WRIGHT, W. Simplification envelopes. *Computer Graphics* 30, Annual Conference Series (1996), 119–128.
- [12] COHEN-OR, D. E LEVANONI, Y. Temporal continuity of levels of detail in Delaunay triangulated terrain. Em *IEEE Visualization* (1996), R. Yagel and G. M. Nielson, Eds., pp. 37–42.

- [13] DEROSE, T. D., LOUNSBERY, M. E WARREN, J. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. Relatório Técnico TR-93-10-05, Department of Computer Science, University of Washington, Estados Unidos, 1993.
- [14] DUCHAINEAU, M. A., WOLINSKY, M., SIGETI, D. E., MILLER, M. C., ALDRICH, C. E MINEEV-WEINSTEIN, M. B. ROAMing terrain: Real-time Optimally Adapting Meshes. Em *IEEE Visualization* (1997), pp. 81–88.
- [15] ECK, M., DEROSE, T., DUCHAMP, T., HOPPE, H., LOUNSBERY, M. E STUETZLE, W. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Computer Graphics 29*, Annual Conference Series (1995), 173–182.
- [16] FLORIANI, L. D. E MAGILLO, P. Multiresolution mesh representation: Models and data structures. Em *Multiresolution in Geometric Modelling* (2002), Springer-Verlag, pp. 363–418.
- [17] FLORIANI, L. D. E MAGILLO, P. Triangle-based multi-resolution models for height fields. Em *Curve and Surface Fitting* (Brentwood, TN, Estados Unidos, 2003), Nashboro Press, pp. 97–106.
- [18] FLORIANI, L. D., MARZANO, P. E PUPPO, E. Multiresolution models for topographic surface description. *The Visual Computer 12*, 7 (Jan. 1996), 317–345.
- [19] GARLAND, M. *Quadric-Based Polygonal Surface Simplification*. Tese de doutorado, Computer Science Department, Carnegie Mellon University, Estados Unidos, Maio 1999.
- [20] GARLAND, M. E HECKBERT, P. S. Fast polygonal approximation of terrains and height fields. Relatório Técnico CMU-CS-95-181, Computer Science Department, Carnegie Mellon University, Estados Unidos, Set. 1995.
- [21] GARLAND, M. E HECKBERT, P. S. Surface simplification using quadric error metrics. *Computer Graphics 31*, Annual Conference Series (1997), 209–216.
- [22] GIENG, T. S., HAMANN, B., JOY, K. I., SCHUSSMAN, G. L. E TROTTS, I. J. Constructing hierarchies for triangle meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 4*, 2 (Abr. 1998), 145–161.
- [23] GROSS, M. H., GATTI, R. E STAADT, O. Fast multiresolution surface meshing. Em *Proceedings of the IEEE Visualization* (1995), IEEE Computer Society Press, pp. 135–142.
- [24] GROSS, M. H., STAADT, O. G. E GATTI, R. Efficient triangular surface approximations using wavelets and quadtree data structures. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 2*, 2 (1996), 130–143.

- [25] GUSKOV, I., SWELDENS, W. E SCHROEDER, P. Multiresolution signal processing for meshes. Em *Proceedings of SIGGRAPH '98* (1999), ACM Press, pp. 325–334.
- [26] HAMANN, B. Curvature approximation for triangulated surfaces. *Geometric Modeling* (1993), 139–153.
- [27] HAMANN, B. A data reduction scheme for triangulated surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 11, 2 (1994), 197–214.
- [28] HECKBERT, P. E GARLAND, M. Survey of polygonal surface simplification algorithms. Em *SIGGRAPH'97 Course Notes* (1997), 25, ACM Press.
- [29] HECKBERT, P. S. E GARLAND, M. Multiresolution modeling for fast rendering. Em *Proc. Graphics Interface '94* (Banff, Canadá, Maio 1994), Canadian Inf. Proc. Soc., pp. 43–50.
- [30] HOOVER, A. *The Space Envelope Representation for 3D Scenes*. Tese de doutorado, Department of Computer Science & Engineering, University of South Florida, Estados Unidos, 1996.
- [31] HOPPE, H. Progressive meshes. *Computer Graphics* 30, Annual Conference Series (1996), 99–108.
- [32] HOPPE, H. View-dependent refinement of progressive meshes. *Computer Graphics* 31, Annual Conference Series (1997), 189–198.
- [33] HOPPE, H. Efficient implementation of progressive meshes. *Computers and Graphics* 22, 1 (1998), 27–36.
- [34] HOPPE, H. Smooth view-dependent level-of-detail control and its application to terrain rendering. Em *IEEE Visualization* (1998), pp. 35–42.
- [35] HOPPE, H., DEROSE, T., DUCHAMP, T., McDONALD, J. E STUETZLE, W. Mesh optimization. *Computer Graphics* 27, Annual Conference Series (1993), 19–26.
- [36] HUSSAIN, M., OKADA, Y. E NIJIMA, K. Efficient and feature-preserving triangular mesh decimation. *Journal of WSCG* 12, 1–3 (2004), 167–174.
- [37] KAICK, O. M. V. E PEDRINI, H. Análise comparativa de métodos de triangulação para aproximação de imagens digitais. Em *I Workshop de Trabalhos de Iniciação Científica em Computação Gráfica e Processamento de Imagens (WICCGPI'2003)* (São Carlos-SP, Brasil, 2003), pp. 18–25.

- [38] KAICK, O. M. V. E PEDRINI, H. Estudo comparativo de métodos de compressão de modelos de terrenos digitais através de superfícies triangulares. Em *Proceedings of III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas* (Curitiba-PR, Brasil, 2003), pp. 1–15.
- [39] KAICK, O. M. V. E PEDRINI, H. Assessment of image surface approximation accuracy given by triangular meshes. Em *International Conference on Computer Vision and Graphics (ICCVG'2004)* (Varsóvia, Polônia, Set. 2004). Artigo a ser publicado na série de livros Kluwer - Computational Imaging and Vision.
- [40] KAICK, O. M. V., SCHWARTZ, W. R., SILVA, M. V. G. D. E PEDRINI, H. Representação de superfícies de terrenos através de aproximações quadráticas e cúbicas. Em *Anais do Simpósio Brasileiro de Geomática* (Presidente Prudente-SP, Brasil, 2002), pp. 510–518.
- [41] KAICK, O. M. V., SILVA, M. V. G. D. E PEDRINI, H. Efficient generation of triangle strips from triangulated meshes. *Journal of WSCG* 12, 3 (Fev. 2004), 475–481.
- [42] KAICK, O. M. V., SILVA, M. V. G. D., SCHWARTZ, W. R. E PEDRINI, H. Fitting smooth surfaces to scattered 3D data using piecewise quadratic approximation. Em *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'2002)* (Rochester, Estados Unidos, 2002), pp. 493–496.
- [43] KALVIN, A. D. E TAYLOR, R. H. Surfaces: Polygonal mesh simplification with bounded error. *IEEE Computer Graphics and Applications* 16, 3 (Maio 1996), 64–77.
- [44] KARNI, Z. E GOTSMAN, C. Spectral compression of mesh geometry. Em *SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings* (2000), K. Akeley, Ed., ACM Press / ACM SIGGRAPH / Addison Wesley Longman, pp. 279–286.
- [45] KIM, S. J., JEONG, W. K. E KIM, C. H. LOD generation with discrete curvature error metric. Em *Proceedings of 2nd Korea Israel Bi-National Conference on Geometrical Modeling and Computer Graphics in the WWW Era* (1999), pp. 97–104.
- [46] KLEIN, R., LIEBICH, G. E STRASSER, W. Mesh reduction with error control. Em *IEEE Visualization* (1996), R. Yagel and G. M. Nielson., Eds., pp. 311–318.
- [47] KLEIN, R. E STRASSER, W. Generation of multiresolution models from CAD-data for real time rendering. Em *Theory and Practice of Geometric Modeling*, W. Straßer, R. Klein, and R. Rau, Eds. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [48] KOBBELT, L., CAMPAGNA, S. E SEIDEL, H. A general framework for mesh decimation. Em *Proc. Graphics Interface* (1998), pp. 43–50.

- [49] Large Geometric Models Archive, Georgia Institute of Technology. http://www.cc.gatech.edu/projects/large_models/.
- [50] LINDSTROM, P. *Model Simplification using Image and Geometry-Based Metrics*. Tese de doutorado, College of Computing, Georgia Institute of Technology, Estados Unidos, Nov. 2000.
- [51] LINDSTROM, P. Out-of-core simplification of large polygonal models. Em *SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings* (2000), pp. 259–262.
- [52] LINDSTROM, P. E TURK, G. Fast and memory efficient polygonal simplification. Em *IEEE Visualization* (1998), pp. 279–286.
- [53] LOUNSBERY, M., DEROSE, T. D. E WARREN, J. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *ACM Transactions on Graphics* 16, 1 (1997), 34–73.
- [54] LUEBKE, D. A survey of polygonal simplification algorithms. Relatório Técnico TR97-045, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, Estados Unidos, Dez. 1997.
- [55] LUEBKE, D. E ERIKSON, C. View-dependent simplification of arbitrary polygonal environments. *Computer Graphics* 31, Annual Conference Series (1997), 199–208.
- [56] LUEBKE, D., REDDY, M., COHEN, J. D., VARSHNEY, A., WATSON, B. E HUEBNER, R. *Level of Detail for 3D Graphics*. Morgan Kaufmann, San Francisco, Estados Unidos, 2003.
- [57] LUEBKE, D. P. A developer’s survey of polygonal simplification algorithms. *IEEE Computer Graphics and Applications* 21, 3 (2001), 24–35.
- [58] MOISE, E. E. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, vol. 47 da série *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Estados Unidos, 1977.
- [59] MUNKRES, J. R. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, Estados Unidos, 1984.
- [60] NI, X. E BLOOR, M. S. Performance evaluation of boundary data structures. *IEEE Computer Graphics and Applications* 14, 6 (Nov. 1994), 66–77.
- [61] NIELSON, G. M. On marching cubes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 9, 3 (2003), 283–297.
- [62] O’ROURKE, J. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1993.

- [63] PAJAROLA, R. FastMesh: Efficient view-dependent meshing. Em *Proceedings Pacific Graphics 2001* (2001), pp. 22–30.
- [64] RILA, L. Image coding using irregular subsampling and Delaunay triangulation. Em *Proceedings SIBGRAPI '98* (1998), pp. 167–171.
- [65] ROSSIGNAC, J. E BORREL, P. Multi-resolution 3D approximations for rendering complex scenes. *Geometric Modeling in Computer Graphics* (Jun. 1993), 455–465.
- [66] SCHROEDER, W. J. A topology modifying progressive decimation algorithm. Em *IEEE Visualization* (1997), pp. 205–212.
- [67] SCHROEDER, W. J., ZARGE, J. A. E LORENSEN, W. E. Decimation of triangle meshes. *Computer Graphics* 26, 2 (1992), 65–70.
- [68] SCHRÖDER, F. E ROSSBACH, P. Managing the complexity of digital terrain models. *Computer Graphics* 18, 6 (1994), 775–783.
- [69] SILVA, M. V. G. D., KAICK, O. M. V. E PEDRINI, H. Fast Mesh Rendering Through Efficient Triangle Strip Generation. *Journal of WSCG* 10, 1 (2002), 127–134.
- [70] SOUCY, M. E LAURENDEAU, D. Multiresolution surface modeling based on hierarchical triangulation. *Computer Vision and Image Understanding* 63 (1996), 1–14.
- [71] Stanford 3D Scanning Repository. <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>.
- [72] TAUBIN, G. A signal processing approach to fair surface design. Em *Proceedings of SIGGRAPH '95* (1995), ACM press, pp. 351–358.
- [73] TURK, G. Re-tiling polygonal surfaces. *Computer Graphics* 26, 2 (1992), 55–64.
- [74] USGS: United States Geological Survey. <http://www.usgs.gov>.
- [75] WOO, T. C. A combinatorial analysis of boundary data structure schemata. *IEEE Computer Graphics & Applications* 5, 3 (Mar. 1985), 19–27.
- [76] XIA, J. C. E VARSHNEY, A. Dynamic view-dependent simplification for polygonal models. Em *IEEE Visualization* (1996), R. Yagel and G. M. Nielson, Eds., pp. 335–344.
- [77] XIANG, X., HELD, M. E MITCHELL, J. S. B. Fast and effective stripification of polygonal surface models. Em *Proceedings of ACM Symposium on Interactive 3D Graphics* (1999), pp. 71–78. <http://www.ams.sunysb.edu/~xxiang/strip.html>.

APÊNDICE A

POSIÇÃO ÓTIMA PARA A MÉTRICA QUÁDRICA

Para determinar a posição ótima de um vértice resultante de uma contração de aresta ou face, a função quádrica Q , resultante da soma das quádricas dos vértices envolvidos na operação, deve ser minimizada. Como uma superfície quádrica é uma função quadrática, o mínimo dessa função ocorre onde o gradiente é zero.

Seja a quádrica $Q = (\mathbf{E}, \mathbf{f}, g)$, onde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} ad \\ bd \\ cd \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g = d^2, \quad (\text{A.1})$$

Deve-se minimizar a função

$$Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{E} \mathbf{v} + 2\mathbf{f}^T \mathbf{v} + g. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo-se a matriz \mathbf{E} , o vetor \mathbf{f} , o escalar g e o vetor $\mathbf{v} = [x \ y \ z]^T$,

$$Q(\mathbf{v}) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz + 2adx + 2bdy + 2cdz + d^2 \quad (\text{A.3})$$

Então, deve-se determinar

$$\nabla Q(\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Partindo de

$$\nabla Q(\mathbf{v}) = \frac{\partial Q}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial Q}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.5})$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são os vetores unitários $[1 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 1 \ 0]^T$ e $[0 \ 0 \ 1]^T$, respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla Q(\mathbf{v}) = & (2a^2x + 2aby + 2acz + 2ad)\mathbf{i} + \\ & (2abx + 2b^2y + 2bcz + 2bd)\mathbf{j} + \\ & (2acx + 2bcy + 2c^2z + 2cd)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O gradiente será zero se cada derivada parcial individual for zero, o que leva ao sistema

$$\begin{cases} 2a^2x + 2aby + 2acz + 2ad = 0 \\ 2abx + 2b^2y + 2bcz + 2bd = 0 \\ 2acx + 2bcy + 2c^2z + 2cd = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Esse sistema é melhor representado como

$$2 \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} ad \\ bd \\ cd \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.8})$$

que é exatamente

$$2\mathbf{E}\mathbf{v} + 2\mathbf{b} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Para encontrar a posição ótima $\bar{\mathbf{v}}$, deve-se efetuar

$$\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{A.10})$$

Quando a matriz \mathbf{E} não possui inversa, existem infinitas soluções para a posição ótima $\bar{\mathbf{v}}$. Nesse caso, se a contração de arestas estiver sendo utilizada como operação de simplificação, é procurada uma posição ótima sobre a aresta a ser contraída, para diminuir o número de soluções possíveis.

A equação paramétrica da aresta é definida como

$$\mathbf{v} = p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.11})$$

onde \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são os vértices da aresta em questão, $\mathbf{d} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ e $p \in \mathbb{R}$.

Então, deve ser determinado o valor p para o qual a equação paramétrica retorna a posição ótima para o vértice resultante da operação. Assim como realizado anteriormente, a função Q é minimizada, mas utilizando agora a equação da reta como variável da função e derivando em p . Então, é necessário minimizar apenas a função de uma variável

$$Q(p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2) = (p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2)^\top \mathbf{E}(p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2) + 2\mathbf{f}^\top(p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2) + g \quad (\text{A.12})$$

O que resulta em

$$\frac{dQ(p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2)}{dp} = 2p\mathbf{d}^\top \mathbf{E}\mathbf{d} + 2\mathbf{f}^\top \mathbf{d} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^\top \mathbf{E}\mathbf{d} \quad (\text{A.13})$$

Então, fazendo

$$\nabla Q(p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2) = 0 \quad (\text{A.14})$$

o valor de p é obtido

$$p = \frac{-2\mathbf{f}^\top \mathbf{d} - \mathbf{d}^\top \mathbf{E}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^\top \mathbf{E}\mathbf{d}}{2\mathbf{d}^\top \mathbf{E}\mathbf{d}} \quad (\text{A.15})$$

Se $\mathbf{d}^\top \mathbf{E}\mathbf{d}$ for igual a zero, um dos vértices da aresta é escolhido como o vértice resultante da operação de contração. Senão, a posição $\bar{\mathbf{v}}$ é determinada com a equação paramétrica da aresta $\bar{\mathbf{v}} = p\mathbf{d} + \mathbf{v}_2$.