Sterliane Blanc Felizardo

Aplicação da Análise Não-Standard à Teoria da Medida: Uma Representação Hiperfinita da Medida de Lebesgue

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

Curitiba
2005

Sumário

Resumo

A partir da construção de novos objetos e conceitos matemáticos, este trabalho discute algumas propriedades de teoria da medida no contexto da análise não-standard (análise sobre os números hiperreais devida a Abraham Robinson). Mostra a relação entre a medida de Lebesgue na reta real e a medida de contagem de Loeb na reta hiperreal, uma das principais aplicações desta teoria.

Este trabalho inicia com a construção da extensão não-standard da reta real, sua estrutura, linguagem subjacente, além de propriedades importantes como o princípio de transferência. São introduzidos conceitos como função "parte standard", superestruturas e objetos internos, e termina com a representação hiperfinita da medida de Lebesgue.

Palavras-Chave: Números Hiperreais, Análise Não-Standard, Medida de Loeb.

Abstract

From the constrution of new mathematical objects and concepts, this work discusses some properties of measure theory in the context of nonstandard analysis (analyse over hyperreal numbers, which is due to Abraham Robinson). It shows the connection between the Lebesgue measure in the real line and the Loeb counting measure in the hyperreal line, one of the main aplications of this theory.

This work begins with the construction of nonstandard extension of the real line, its structure, subjacent language, besides important properties such as the transfer principle. It introduced concepts such as "standard part" function, superstructures and internal objects, and it finished with the hyperfinite representation of the Lebesgue measure.

Keywords: Hyperreal Numbers, Nonstandard Analysis, Loeb Measure.

Introdução

Os conceitos de "infinito" e "infinitésimo" em matemática remontam-se a mais de dois mil anos. Até o aparecimento da Análise Não-Standard, no século XX, no entanto, os raciocínios baseados nesses conceitos foram quase sempre fonte de controvérsia. Este fato levou a que os "números" infinitesimais tivessem uma existência quase sempre polêmica, embora o seu uso nunca tenha sido deixado de constituir uma ferramenta útil na prática, por exemplo, por físicos e engenheiros.

No tempo dos gregos, os infinitésimos já possuiam um conceitualização. No tratado "O Método", que era desconhecido até o início do século XX, Arquimedes afirmava que também usava infinitésimos nos seus trabalhos, *não para demonstrar resultados, mas sim para descobrí-los.* Já na Europa do século XVII, os números infinitesimais foram utilizados como ferramenta porém sem uma fundamentação. Foi com Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716) que o Cálculo conheceu sua primeira formulação geral, e foram feitas as primeiras aplicações desta nova técnica tanto à matemática como a outras ciências, particularmente à física e à astronomia. As descobertas de Newton e Leibniz foram realizadas independentemente um do outro. Embora ambos tenham chegado ao mesmo tipo de resultados, os seus métodos de trabalho baseavam-se em concepções distintas. Newton pensava mais em termos do que acabou por evoluir para a moderna teoria dos limites enquanto que Leibniz baseava seus raciocinios em termos de infinitésimos, conferindo ao cálculo, então chamado de *Cálculo Infinitesimal*, uma feição mais algébrica [1] . Leibniz de-

[1] ver capítulo 1, página 14 de [2]

fendia, para o estudo do cálculo, a adoção de um sistema numérico mais amplo que os números reais que incluísse, números *"ideais"* infinitos e infinitesimais e no qual continuassem a verificar-se as leis usuais dos números ordinários. Portanto Leibniz está na origem da análise não-standard, mas não só porque pregava o uso de números infinitos e infinitesimais para o desenvolvimento do cálculo, mas também pelo fato de que, sendo um precursor da lógica matemática, está na origem do instrumento matemático que viria a servir para justificar plenamente a legitimidade daquele tipo de quantidades, a teoria dos modelos. Esta teoria que analisa as relações existentes entre uma estrutura matemática concreta e a sua teoria, no sentido formal do termo, constitui um desenvolvimento no século XX da lógica matemática que se revelou crucial para a fundamentação da noção de infinitésimo.

A utilização de números infinitos e infinitesimais persistiu durante todo o século XVIII e parte do seguinte. Euler, os Bernoulli, Lagrange, D'Alembert, Bolzano e Cauchy, por exemplo, não só obtiveram excelentes resultados usando números infinitos e infinitesimais, como ainda se empenharam, sem contudo conseguir, em dar uma fundamentação lógica destes números. Já no século XIX, com a rigorização da análise, e uma boa definição de limite dada por Cauchy e Weierstrass, estes elementos estranhos ao conjunto $\mathbb{R}$ foram banidos de forma geral da matemática, embora a referência a infinitésimos tenha persistido até os dias de hoje em textos de outras disciplinas científicas que fazem longo apelo ao cálculo, como é o caso da física.

Em meados do século XX, o matemático alemão, Abraham Robinson (1918-1974) recupera a noção de infinitésimo que, com o auxílio dos métodos da lógica matemática, em particular da teoria dos modelos, foi estabelecida de forma rigorosa. Ele iniciou a construção da chamada *Análise Não-Standard* em 1961 com o artigo do mesmo nome, onde pela primeira vez, demonstrou que o conjunto dos números reais pode ser considerado um subconjunto de um conjunto maior de números que contém infinitésimos e também operações aritméticas apropriadamente definidas, as quais satisfazem todas as regras aritméticas obedecidas pelos números reais padrão. Posteriormente, no já celebre livro texto também de título *Análise Não-Standard*, publicado em 1966 na coleção "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics" da editora North-Holland Publishing Company, Abraham Robinson mostrou como se pode aplicar, com vantagem, os métodos da análise não-standard a muitas áreas distintas da matemática. Contudo, foi o estudo e desenvolvimento do cálculo elementar aquela que maior interesse gerou na comunidade científica, embora possa não ser a aplicação mais significativa e de consequências mais fecundas, pois, pelo fato de envolver infinitésimos, permite estudar fenômenos físicos muito finos como movimentos brownianos e outros processos estocásticos.

Para Kurt Gödel, "existem boas razões para acreditar que a análise não standard, de uma maneira ou de outra, será a análise do futuro". Por este motivo foram dois os objetivos desta dissertação: primeiro, o de adquirir o domínio de uma nova técnica já que a Análise Não-Standard tem se revelado uma técnica importante numa grande quantidade de áreas da matemática tanto pura quanto aplicada; e segundo, de propósito didático, escrever um texto auto-contido que possa servir de base para um estudo inicial da analise não-standard, obtida pelo preenchimento de lacunas dos textos já existentes.

Nesta dissertação construiremos o conjunto dos números hiperreais, apresentaremos novos objetos de interesse matemático como infinitésimos e conjuntos hiperfinitos, poderosas propriedades e princípios de raciocínio que incluem a aproximação e o princípio de transferência e mostraremos a relação entre a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e uma medida de contagem não standard chamada medida de Loeb. Esta relação é uma das principais aplicações da análise não-standard. Esta análise, segundo Robert Goldblatt, fornece uma visão ampliada do ambiente matemático, além de representar outro estágio na emersão de novos sistemas numéricos, o que é um tema significativo na história da matemática.

A dissertação está dividada em três capítulos. No primeiro capítulo - Os Números Hiperreais - construiremos a extensão não standard, apresentaremos sua estrutura e importantes definições como ultrapotência, infinitésimos, mônadas, parte standard, e teoremas como o teorema do ultrafiltro e o princípio de transferência. No capítulo dois - Objetos Internos no Universo de ${}^*\mathbb{R}$ - falaremos de conjuntos internos, funções internas, subconjuntos hiperfinitos e cardinalidade interna. Entre as definições , teremos a de superestrutura e à partir dela construiremos a extensão "$*$". Entre os teoremas o principal será o de transferência generalizada. E finalmente, no terceiro capítulo - Medida de Lebesgue via Medida de Loeb - onde faremos uma reformulação da medida de Lebesgue, relembraremos conceitos da teoria de medida standard, apresentaremos a medida de contagem de Loeb, definindo subconjuntos aproximáveis, álgebra de Loeb e outros conceitos importantes, culminando com o teorema principal: *representação hiperfinita da medida de Lebesgue.*

Capítulo 1

Os Números Hiperreais

Neste capítulo construiremos o conjunto dos números hiperreais por adição de infinitésimos e infinitamente grandes ao conjunto dos números reais padrão. Mostraremos que da mesma forma que construímos o conjunto dos números reais a partir dos racionais, utilizando seqüências de Cauchy, é possível construir o conjunto dos números hiperreais a partir dos reais, neste caso, levando em conta o comportamento assintótico das seqüências.

1.1 Construção do Conjunto dos Números Reais

Na visão ortodoxa, os números reais são criados a partir dos números racionais por uma construção limite, na qual juntamos pontos representando certas classes de equivalência de seqüências de Cauchy. Consideremos, deste modo, o conjunto dos números racionais, o qual é um corpo ordenado.

O corpo ordenado dos números racionais é uma estrutura da forma

$$\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle ,$$

satisfazendo os seguintes axiomas:

1. Axiomas de corpo:

- Adição:

  $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x + y = y + x;$

  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, (x + y) + z = x + (y + z);$

  $\exists 0 \in \mathbb{Q}$, tal que, $\forall x \in \mathbb{Q}, x + 0 = 0 + x = x;$

  $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists - x \in \mathbb{Q}$, tal que, $x + (-x) = (-x) + x = 0.$

- Multiplicação:

  $\forall x, y \in \mathbb{Q}, xy = yx;$

  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x(yz) = (xy)z;$

  $\exists 1 \in \mathbb{Q}$, tal que, $\forall x \in \mathbb{Q}, x1 = 1x = x;$

  $\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{Q}$, tal que, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1.$

- Distributividade:

  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x(y + z) = xy + xz.$

2. Axiomas de ordem total ou linear:

- Reflexividade:

  $\forall x \in \mathbb{Q}, x \leq x;$

- Transitividade:

  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z;$

- Antissimetria:

  $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y;$

- Linearidade:

  $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y \vee y \leq x.$

3. Leis de compatibilidade:

- Com adição:

  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z;$

- Com multiplicação:

  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz.$

Os números racionais são também um espaço métrico:

O conjunto $\mathbb{Q}$ está munido da métrica

$$d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

definida por $d(x, y) = |x - y|$, onde:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Podemos então definir os seguintes conceitos:

1. Seqüências de números racionais: Uma sequência em $\mathbb{Q}$ é uma família $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, onde para cada $n, x_n \in \mathbb{Q}$. As sequências podem ser vistas como funções que levam números naturais em números racionais

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & x(n) = x_n. \end{array}$$

   Denotamos por $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{f |\ f \text{ é uma função de } \mathbb{N} \text{ em } \mathbb{Q}\}$.

2. Seqüências convergentes em $\mathbb{Q}$: Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{Q}$, e denotamos por $x_n \longrightarrow x$, se $\forall \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0, |x_n - x| < \epsilon$, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x| = 0.$$

3. Seqüências de Cauchy: Uma seqüência $\{x_n\}$ é dita de Cauchy se $\forall \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n, m \geq n_0, |x_n - x_m| < \epsilon$, isto é,

$$\lim_{n,m \to \infty} |x_n - x_m| = 0.$$

Toda sequência convergente é de Cauchy, no entanto, sabemos que existem seqüências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem em $\mathbb{Q}$. O conjunto dos números racionais é incompleto. Do ponto de vista geométrico, a cada número racional podemos associar um ponto sobre a reta euclidiana, no entanto, existem pontos da reta que não têm associado nenhum número racional. O processo de completamento de $\mathbb{Q}$ consistirá em enxergar cada racional como limite das seqüências convergentes em $\mathbb{Q}$, mais ainda, identificar cada racional com as seqüências que convergem a ele, podendo ser completada a reta com as sequências de Cauchy que não convergem em $\mathbb{Q}$, isto é, a cada "buraco" sobre a reta está associada alguma seqüência de Cauchy de racionais.

Exemplo: $x_0 = 1, x_1 = 1.4, x_2 = 1.41, x_3 = 1.414, \ldots, \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Como a um mesmo ponto da reta podem estar associadas várias seqüências, precisaremos de uma técnica matemática de completamento.

1.1.1 Técnica de Completamento

Seja C o conjunto de todas as seqüências de Cauchy de racionais. Sobre elas definimos a sequinte relação de equivalência:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \equiv \{y_n\} \quad &\Leftrightarrow \quad \{x_n\} \text{ e } \{y_n\} \text{ "convergem" para um mesmo ponto da reta euclidiana} \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0. \end{aligned}$$

De fato, são satisfeitas:

1. Propridade Reflexiva: $\{x_n\} \equiv \{x_n\}$, pois, $|x_n - x_n| = 0 \to 0$;

2. Propriedade Simétrica:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \equiv \{y_n\} \quad &\Leftrightarrow \quad |x_n - y_n| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |y_n - x_n| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \{y_n\} \equiv \{x_n\}; \end{aligned}$$

3. Propriedade Transitiva:

$$\begin{aligned}\{x_n\} \equiv \{y_n\} \text{ e } \{y_n\} \equiv \{z_n\} \quad &\Rightarrow \quad |x_n - y_n| \to 0 \text{ e } |y_n - z_n| \to 0 \\ &\Rightarrow \quad |x_n - z_n| \to 0,\end{aligned}$$

pois, $|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$. Portanto $\{x_n\} \equiv \{z_n\}$.

Definição 1.1.1. *Os elementos do conjunto dos números reais, tanto os racionais quanto os irracionais, são classes de equivalência de seqüências de Cauchy módulo a relação $\equiv$, os quais denotaremos por $r = [\{x_n\}]$, que abreviaremos por $\langle x_n \rangle$. Assim,*

$$\mathbb{R} = C/_{\equiv} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}.$$

A seguir vamos fazer uma reinterpretação da relação de equivalência $\equiv$:

$$\{x_n\} \equiv \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} |x_n - y_n| = 0,$$

isto é, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0, |x_n - y_n| < \epsilon$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto

$$\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\}.$$

Nestes termos teremos,

$$\{x_n\} \equiv \{y_n\} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que, } \mathbb{N}_{n_0} \subseteq \{n \in \mathbb{N} || x_n - y_n| < \epsilon\}.$$

- Noção de filtro sobre $\mathbb{N}$

Definição 1.1.2. *Um filtro $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$ é uma família de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *Não trivialidade: $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$;*

2. *Interseção finita: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$;*

3. *Fechamento: $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.*

Observe que se $\emptyset \in \mathcal{F}$, teríamos, por 3, que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (filtro impróprio).

Definição 1.1.3. *Um conjunto $E \subseteq \mathbb{N}$ é cofinito se é da forma $E = \mathbb{N} \setminus \{m_1, \ldots, m_k\}$ ou seja, E é o complementar de um conjunto finito em $\mathbb{N}$.*

Exemplos de Filtros

1. A classe dos conjuntos cofinitos: Seja $\mathcal{F} = \{\text{cofinitos de } \mathbb{N}\} = \{A \subseteq \mathbb{N} | \, |A^c| \, K < \infty\}$, então, por exemplo, se A_1 e A_2 pertencem a $\mathcal{F}$ então, $|A_1^c| < \infty, |A_2^c| < \infty$. Deste modo, podemos concluir que $|(A_1 \cap A_2)^c| = |A_1^c \cup A_2^c| \leq |A_1^c| + |A_2^c| < \infty$, portanto, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

2. Seja $A_0 \subseteq \mathbb{N}, \quad A_0 \neq \emptyset$, então o conjunto $\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbb{N} | A_0 \subseteq B\}$ é um filtro.

No exemplo 2, quanto menor o conjunto A_0 que tomarmos maior será o filtro.

Vejamos, fixado $A_0 \subseteq \mathbb{N}, A_0 \neq \emptyset$, considere o filtro $\mathcal{F}_1 = \{B \subseteq \mathbb{N} | A_0 \subseteq B\}$ e o filtro $\mathcal{F}_2 = \{B \subseteq \mathbb{N} | B_0 \subseteq B, B_0 \subseteq A_0\}$; claramente $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Um caso extremo é se $x_0 \in A_0$. Temos então que $\mathcal{F}' = \{B \subseteq \mathbb{N} | x_0 \in B\}$ é um filtro. Neste caso, seja $E \subseteq \mathbb{N}$. Suponhamos que E não pertença a $\mathcal{F}'$, isto é $x_0 \notin E$, então $x_0 \in \mathbb{N} - E$, e portanto $\mathbb{N} - E \in \mathcal{F}'$

Um filtro que satisfaz essa última propriedade, isto é, dado $E \subseteq \mathbb{N}$, então, $E \in \mathcal{F}$ ou $E^c \in \mathcal{F}$, será chamado de *ultrafiltro* sobre $\mathbb{N}$. Prova-se que os ultrafiltros são exatamente os filtros maximais.

- Família com a *propriedade da interseção finita* (PIF)

Uma família $\{A_i\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tem PIF, se toda subfamília finita $\{A_1, \ldots, A_m\}$ tem interseção não vazia, isto é, $A_1 \cap \ldots \cap A_m \neq \emptyset$, em particular, todo $A_i \neq \emptyset$.

Toda família com PIF gera um filtro próprio.

Com efeito, seja F o filtro gerado pela família $\{A_i\}$, isto é, o menor filtro que contém a família, com a PIF. Vejamos que F é um filtro próprio.

De fato, o filtro gerado pela família $\{A_i\}$ é dado por $F = \{B \subseteq \mathbb{N} | B \supseteq A_1 \cap \ldots \cap A_m \text{ com } A_1, \ldots, A_m \in \{A_i\}\}$. Se $\emptyset \in F$, então, alguma interseção finita da família $\{A_i\}$ seria $\emptyset$ o que não pode pois a família tem a PIF. Portanto, $\emptyset \notin F$ e F resulta um filtro próprio.

Um exemplo importante de família com a PIF é $\{\mathbb{N}_m\}$. Observa-se que, nesse caso, $\cap_m \mathbb{N}_m = \emptyset$.

Chamando de G o filtro próprio sobre $\mathbb{N}$ gerado pela família $\{\mathbb{N}_m\}$ temos, então,

$$\{x_n\} \equiv \{y_n\} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}, \{n \in \mathbb{N} | |x_n - y_n| < \epsilon\} \in G$$

- Estrutura de corpo ordenado de $\mathbb{R}$

  Definimos as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ da seguinte maneira:

  - Adição: $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle = \langle x_n + y_n \rangle$;
  - Multiplicação: $\langle x_n \rangle \langle y_n \rangle = \langle x_n y_n \rangle$.

    Observe-se que, no caso da adição, podemos reescrever a definição anterior da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle = \langle z_n \rangle &\Leftrightarrow \{x_n + y_n\} \equiv \{z_n\} \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} | |x_n + y_n - z_n| < \epsilon\} \in G \end{aligned}$$

    Analogamente para a multiplicação.

  - Ordem em $\mathbb{R}$: basta definir $\langle x_n \rangle \geq 0 \quad (= \langle 0 \rangle)$, pois, neste caso:

$$\langle x_n \rangle \leq \ \langle y_n \rangle \Leftrightarrow \langle y_n \rangle - \langle x_n \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle y_n - x_n \rangle \geq 0.$$

    Define-se:

$$\begin{aligned} \langle x_n \rangle \geq 0 &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que }, \forall n \geq n_0, x_n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | x_n \geq 0\} \in G. \end{aligned}$$

    Prova-se que $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ é um corpo ordenado tal que, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ através da identificação de cada racional com a classe de equivalência da sequência constante correspondente, onde $- \langle x_n \rangle = \langle -x_n \rangle, 0 = \langle 0 \rangle = [\{0, 0, \cdot\}]$ e $1 = \langle 0 \rangle = [\{1, 1, \cdot\}]$.

1.2 Construção do Conjunto dos Números Hiperreais

Seguiremos o mesmo procedimento para construirmos os hiperreais à partir dos reais, porém é necessário levarmos em conta o padrão de convergencia e as propriedades assintóticas das seqüências. Deste modo terminaremos com um conjuntos de pontos mais rico que amplia a reta dos reais, a extensão não standard.

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as seqüências reais $f = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que vem a ser uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde estão definidas a soma e a multiplicação da seguinte maneira: sejam $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ então,

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x)\\ (f \odot g)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

$\left\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot \right\rangle$ é um anel comutativo com unidade $1 = \{1, 1, \ldots\}$, zero $0 = \{0, 0, \ldots\}$, e inverso aditivo dado por

$$-f = \{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Mas, no entanto, não é um corpo, pois

$$\{1, 0, 1, 0, \ldots\} \odot \{0, 1, 0, \ldots\} = 0.$$

Como as duas sequências pertencem a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, são não nulas, com produto nulo, a estrutura $\left\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot \right\rangle$ não pode ter um inverso multiplicativo para cada um de seus elementos não nulos.

A seguir daremos várias aproximações para uma definição adequada de equivalência entre sequências de números reais que nos conduzam aos hiperreais.

Como queremos estudar o comportamento das seqüências no limite, teremos primeiro que identificar seqüências que concordem em um conjunto cofinito.

Definição 1.2.1. *Duas seqüências $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ concordam no conjunto cofinito E se, e somente se $f(m) = g(m)$ para todo $m \in E$.*

Observamos que se $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ concordam num conjunto cofinito, então elas têm o mesmo comportamento no "limite".

Sabendo então, quais seqüências concordam num conjunto cofinito, podemos tomar o conjunto $\{n \in \mathbb{N} | f(n) = g(n)\}$ cofinito e distinguiremos o comportamento limite de f e g.

Definimos agora em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a seguinte relação de equivalência:

Seja $f = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, g = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\{x_n\} \equiv \{y_n\} \Leftrightarrow \exists E \quad \text{cofinito tal que,} \quad \forall n \in E, f(n) = g(n).$$

O conjunto quociente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \equiv \ = \{[f] | f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ onde:

$$[f+g] = [f] + [g] \quad \text{e} \quad [fg] = [f][g]$$

não é um corpo, é apenas um anel, pois tem divisores de zero. Com efeito, sejam $f = \{x_n\}, g = \{y_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ onde,

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Definidas deste modo, ambos são diferentes de zero, porém, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $[f] \cdot [g] = [\{0\}] = 0$

A existência de divisores de zero destrói a álgebra usual, consequentemente precisamos de algo mais refinado que conjuntos cofinitos.

A partir da definição de filtro $\mathcal{F}$ sobre os naturais, podemos definir alguns filtros especiais chamados de filtros livres e ultrafiltros (este último já mencionado anteriormente), necessários à construção da extensão não standard.

Definição 1.2.2. *Um filtro $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$ é chamado livre se não contém nenhum conjunto finito.*

Definição 1.2.3. *Um filtro $\mathcal{U}$ é chamado um ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ se para todo $E \subseteq \mathbb{N}$, ou $E \in \mathcal{U}$ ou $\mathbb{N} \setminus E \in \mathcal{U}$.*

Notar que da condição de não trivialidade, segue que, se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ e $E \subseteq \mathbb{N}$, então exatamente um dos dois conjuntos E ou $\mathbb{N} \setminus E$ pertencem a $\mathcal{U}$. Também devemos observar que, se uma união finita $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ pertencem a $\mathcal{U}$, então no mínimo algum E_i pertence a $\mathcal{U}$.

Definição 1.2.4. *Um filtro não trivial é dito maximal se não existe um outro filtro não trivial que o contenha propriamente.*

Proposição 1.2.1. *Seja $\mathcal{F}$ um filtro não trivial, deste modo*

$$\mathcal{F} \text{ é um ultrafiltro} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ é maximal.}$$

Prova:

($\Rightarrow$) Suponhamos $\mathcal{F}$ um ultrafiltro e seja $\mathcal{F}'$ um outro filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ e $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$. Provaremos que $\mathcal{F}'$ é trivial, isto é, $\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, e para isto basta mostrarmos que $\emptyset \in \mathcal{F}'$.

Como $\mathcal{F}$ está contido propriamente em $\mathcal{F}'$, existe $E \in \mathcal{F}'$ tal que $E \notin \mathcal{F}$. Mas como $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro e $E \notin \mathcal{F}$, temos que $\mathbb{N} \setminus E \in \mathcal{F}$, logo $\mathbb{N} \setminus E \in \mathcal{F}'$, finalmente, como $\mathcal{F}'$ é um filtro, $\emptyset = (\mathbb{N} \setminus E) \cap E$ está em $\mathcal{F}'$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\mathcal{F}$ é maximal. Seja E um subconjunto de $\mathbb{N}$, tal que $E \notin \mathcal{F}$. Provaremos que $\mathbb{N} \setminus E \in \mathcal{F}$. Seja $\mathcal{F}' = \langle \mathcal{F} \cup \{E\} \rangle$. Então, $\mathcal{F}'$ é um filtro e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Obviamente $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$ pois $E \notin \mathcal{F}$, logo, como $\mathcal{F}$ é maximal, $\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Assim $\emptyset \in \mathcal{F}' = \langle \mathcal{F} \cup \{E\} \rangle$, isto é, existem $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{F}$, tal que $E_1 \cap \ldots \cap E_n \cap E = \emptyset$, logo, $E_1 \cap \ldots \cap E_n \subseteq \mathbb{N} \setminus E$, e como $E_1 \cap \ldots \cap E_n \in \mathcal{F}$, devemos ter que $\mathbb{N} \setminus E \in \mathcal{F}$. Com isto provamos então que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro. $\square$

Teorema 1.2.1 (Teorema do Ultrafiltro)**.** *Existem ultrafiltros livre $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ que estendem o filtro dos conjuntos cofinitos.*

Prova:

1. Existência do ultrafiltro $\mathcal{U}$: o argumento principal é o lema de Zorn.

Lema de Zorn: Se um conjunto A é não vazio, parcialmente ordenado e toda cadeia tem cota superior, A tem pelo menos um elemento maximal.

Seja Cof o filtro dos conjuntos cofinitos e A o conjunto de todos os filtros que estendem Cof. Então $A \neq \emptyset$, pois $Cof \in A$, e se $\{\mathcal{F}_i\}$ é uma cadeia em A, então, prova-se facilmente que $\cup \mathcal{F}_i \in A$, isto é, toda cadeia em A tem cota superior em A. Pelo Lema de Zorn, qualquer família deste tipo tem pelo menos um elemento maximal. Seja $\mathcal{U}$ um desses elementos, logo pela proposição 1.2.1, se $\mathcal{U}$ é maximal, então $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro que estende o filtro Cof.

2. $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro livre:

Para que $\mathcal{U}$ seja livre, $\mathcal{U}$ não deve conter conjuntos finitos. Provaremos por redução ao absurdo que não existe um conjunto E finito tal que E pertença ao ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Considere então E finito, tal que $E \in \mathcal{U}$. Como E é finito, $\mathbb{N} \setminus E$ é cofinito, logo $\mathbb{N} \setminus E \in Cof$ mas $Cof \subseteq \mathcal{U}$. Deste modo, $\mathbb{N} \setminus E \in \mathcal{U}$, portanto, como $E \in \mathcal{U}$, $E \cap (\mathbb{N} \setminus E) = \emptyset \in \mathcal{U}$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{U}$ é um filtro próprio. Portanto o ultrafiltro $\mathcal{U}$ é livre. $\square$

1.3 Construção da Extensão Não Standard

Agora sabemos que existem ultrafiltros livres $\mathcal{U}$ que estendem o filtro dos conjuntos cofinitos, ou seja $Cof \subseteq \mathcal{U}$. Os elementos de $\mathcal{U}$ podem ser considerados subconjuntos "grandes"de $\mathbb{N}$.

Considere um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$. Sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definimos a seguinte relação de equivalência módulo $\mathcal{U}$:

$$f \sim_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$$

onde $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Veremos que quando tomamos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ módulo $\mathcal{U}$, a dificuldade com os divisores de zero já não existe.

Do mesmo modo que estendemos os racionais aos reais, o quociente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim_{\mathcal{U}}$ nos dará a extensão não standard ${}^*\mathbb{R}$ dos números hiperreais. Abreviaremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\sim\mathcal{U}}$ por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}}$.

Definimos ${}^*\mathbb{R}$ como o conjunto de todas as classes de equivalência módulo um ultrafiltro $\mathcal{U}$ que estende o filtro dos conjuntos cofinitos, isto é:

$${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}.$$

É muito importante observar que existem muitos ultrafiltros que estendem esse filtro, e sobre os quais não temos, de início, nenhum controle. Mais ainda, na construção de ${}^*\mathbb{R}$ não joga nenhum papel *a priori* o conjunto $\mathbb{N}$, podendo ser substituído por um conjunto de índices $I(\neq \emptyset)$ qualquer.

Assim, considerando $\mathbb{R}^I = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\}$, podemos definir, para um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, a relação $\sim_{\mathcal{U}}$ como

$$f \sim_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \{i \in I | f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U},$$

obtendo, ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^I/_{\mathcal{U}}$.

- ${}^*\mathbb{R}$ é chamado de ultrapotência de $\mathbb{R}$ e dependerá sempre do ultrafiltro $\mathcal{U}$ escolhido;
- os elementos de ${}^*\mathbb{R}$ serão indicados por $f_{\mathcal{U}}$ para alguma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$;
- se $r \in \mathbb{R}$ indicamos por ${}^*r$, a classe de equivalência da função constante com valor r em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, isto é, $f_r(n) = r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Temos então um mergulho natural

$$\begin{array}{rcl} {}^* : \mathbb{R} & \hookrightarrow & {}^*\mathbb{R} \\ r & \longmapsto & {}^*r = (f_r)_{\mathcal{U}} \end{array}$$

Muitas vezes identificaremos ${}^*r$ com r.

1.3.1 Estrutura Algébrica dos Números Hiperreais

Devemos agora estender a estrutura algébrica dos $\mathbb{R}$ para os hiperreais ${}^*\mathbb{R}$.

Como vimos, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo e sua estrutura algébrica é da forma

$$\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$$

onde $\mathbb{R}$ é o domínio da estrutura, $+$ e $\cdot$ são as operações binárias de adição e multiplicação, $\leq$ é uma relação de ordem total e 0 e 1 elementos distintos do domínio.

$\mathbb{R}$ é completo no sentido que todo subconjunto não vazio limitado superiormente tem supremo. O $*$ - mergulho, leva $0 \to {}^*0$ e $1 \to {}^*1$.

Para estender a relação de ordem de $\mathbb{R}$ para ${}^*\mathbb{R}$, levaremos em consideração a relação de equivalência que nos diz quando dois elementos $f_{\mathcal{U}}$ e $g_{\mathcal{U}}$ de ${}^*\mathbb{R}$ são iguais:

$$f_{\mathcal{U}} = g_{\mathcal{U}} \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} | f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}. \tag{1.1}$$

De maneira análoga estendemos a relação de ordem $\leq$ a ${}^*\mathbb{R}$. Fixando $f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$, definimos:

$$f_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}} \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{U} \tag{1.2}$$

Com esta definição de $\leq$ em ${}^*\mathbb{R}$, podemos observar que o domínio estendido ${}^*\mathbb{R}$ é totalmente ordenado, ou seja, $\leq$ é uma relação de ordem total.

De fato:

1. $\leq$ é reflexiva

   $f_{\mathcal{U}} \leq f_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq f(n)\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$;

2. $\leq$ é anti-simétrica

   Suponhamos $f_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}}$ e $g_{\mathcal{U}} \leq f_{\mathcal{U}}$.

   Deste modo $A_1 = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{U}$ e $A_2 = \{n \in \mathbb{N} | g(n) \leq f(n)\} \in \mathcal{U}$. Logo, pela propriedade da interseção finita num filtro, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$. Se $n \in A_1 \cap A_2$, então $f(n) \leq g(n)$ e $g(n) \leq f(n)$. Como em $\mathbb{R}$ a relação $\leq$ é antissimétrica, $f(n) = g(n)$. Assim $A_1 \cap A_2 \subseteq \{n \in \mathbb{N} | f(n) = g(n)\}$. Portanto, pela propriedade do fechamento, $\{n \in \mathbb{N} | f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$, logo, $f_{\mathcal{U}} = g_{\mathcal{U}}$;

3. $\leq$ é transitiva

   Suponhamos $f_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}}$ e $g_{\mathcal{U}} \leq h_{\mathcal{U}}$, isto é,

$$D_1 = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{U}$$

$$D_2 = \{n \in \mathbb{N} | g(n) \leq h(n)\} \in \mathcal{U}.$$

   Pela propriedade da interseção finita num filtro, $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{U}$. Se $n \in D_1 \cap D_2$, então $f(n) \leq g(n)$ e $g(n) \leq h(n)$; consequentemente, pela transitividade de $\leq$ em $\mathbb{R}$, $f(n) \leq h(n)$. Assim

$$D_1 \cap D_2 \subseteq \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq h(n)\}.$$

   Concluimos, pela propriedade do fechamento, que $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq h(n)\} \in \mathcal{U}$ e portanto $f_{\mathcal{U}} \leq h_{\mathcal{U}}$.

4. $\leq$ é total, isto é, se $f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$, então, $f_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}}$ ou $g_{\mathcal{U}} \leq f_{\mathcal{U}}$

   Suponhamos $f_{\mathcal{U}} \nleq g_{\mathcal{U}}$ e $g_{\mathcal{U}} \nleq f_{\mathcal{U}}$, então, $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq g(n)\} \notin \mathcal{U}$ e $\{n \in \mathbb{N} | g(n) \leq f(n)\} \notin \mathcal{U}$, daí, pelas propriedades do ultrafiltro teremos, $A = \{n \in \mathbb{N} | f(n) > g(n)\} \in \mathcal{U}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} | g(n) > f(n)\} \in \mathcal{U}$, portanto, $\emptyset = A \cap B \in \mathcal{U}$, o que é uma contradição.

A relação $\leq$ sobre ${}^*\mathbb{R}$ introduzida, estende a relação $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, isto é: dados quaisquer $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ vemos que $r_1 \leq r_2$ em $\mathbb{R}$ se, e somente se ${}^*r_1 \leq {}^*r_2$ em ${}^*\mathbb{R}$.

Para estendermos as relações binárias de adição e multiplicação devemos levar em conta como foram definidas as relações de igualdade e de ordem.

Fixando agora $f_{\mathcal{U}}$ e $g_{\mathcal{U}}$ pertencentes a ${}^*\mathbb{R}$, definimos

$$f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}} = h_{\mathcal{U}} \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} | f(n) + g(n) = h(n)\} \in \mathcal{U} \tag{1.3}$$

$$f_{\mathcal{U}} \cdot g_{\mathcal{U}} = h_{\mathcal{U}} \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} | f(n) \cdot g(n) = h(n)\} \in \mathcal{U}. \tag{1.4}$$

Com estas definições podemos provar que ${}^*\mathbb{R}$ é um corpo que é uma extensão do corpo ordenado dos reais.

Para isto devemos mostrar que:

1. $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ é um anel comutativo com unidade;

2. todo elemento não nulo de ${}^*\mathbb{R}$ admite inverso multiplicativo;

3. ${}^*\mathbb{R}$ é (um corpo) ordenado;

4. $* : \mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$ é um monomorfismo.

Com efeito,

1. $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ é um anel comutativo com unidade:

   (a) O conjunto ${}^*\mathbb{R}$ é um grupo abeliano em relação a adição, isto é, valem as propriedades associativa, comutativa, existencia do elemento neutro e do simétrico.

      i. $(\forall f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}}, h_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R})(f_{\mathcal{U}} + (g_{\mathcal{U}} + h_{\mathcal{U}}) = (f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}}) + h_{\mathcal{U}})$
      $f_{\mathcal{U}} + (g_{\mathcal{U}} + h_{\mathcal{U}}) = F_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) + (g(n) + h(n)) = F(n)\} \in \mathcal{U}$. Como $f(n), g(n), h(n) \in \mathbb{R}$, temos $f(n) + (g(n) + h(n)) = (f(n) + g(n)) + h(n)$. Deste modo $\{n \in \mathbb{N} | f(n) + (g(n) + h(n)) = F(n)\} = \{n \in \mathbb{N} | (f(n) + g(n)) + h(n) = F(n)\}$. Assim $\{n \in \mathbb{N} | (f(n) + g(n)) + h(n) = F(n)\} \in \mathcal{U}$. Portanto, $(f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}}) + h_{\mathcal{U}} = F_{\mathcal{U}}$, donde $f_{\mathcal{U}} + (g_{\mathcal{U}} + h_{\mathcal{U}}) = (f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}}) + h_{\mathcal{U}}$;

      ii. $(\forall f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R})(f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}} = g_{\mathcal{U}} + f_{\mathcal{U}})$
      $f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}} = h_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} | f(n) + g(n) = h(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | g(n) + f(n) = h(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow g_{\mathcal{U}} + f_{\mathcal{U}} = h_{\mathcal{U}}$. Portanto, $f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}} = g_{\mathcal{U}} + f_{\mathcal{U}}$;
      As propriedades seguintes, iii e iv, provam-se facilmente.

      iii. $(\exists {}^*0 \in {}^*\mathbb{R})(f_{\mathcal{U}} + {}^*0 = f_{\mathcal{U}})$

      iv. $(\forall f_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R})(\exists - f_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R})(f_{\mathcal{U}} + (-f_{\mathcal{U}}) = {}^*0)$

(b) A multiplicação em ${}^*\mathbb{R}$ é associativa

$(\forall f_\mathcal{U}, g_\mathcal{U}, h_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{R})((f_\mathcal{U}(g_\mathcal{U}h_\mathcal{U}) = (f_\mathcal{U}g_\mathcal{U})h_\mathcal{U})$:

$f_\mathcal{U}(g_\mathcal{U}h_\mathcal{U}) = k_\mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n)(g(n)h(n)) = k(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | (f(n)g(n))h(n) = k(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (f_\mathcal{U}g_\mathcal{U})h_\mathcal{U} = k_\mathcal{U}$. Portanto,

$f_\mathcal{U}(g_\mathcal{U}h_\mathcal{U}) = (f_\mathcal{U}g_\mathcal{U})h_\mathcal{U}$.

(c) A multiplicação em ${}^*\mathbb{R}$ é distributiva em relação à adição

$(\forall f_\mathcal{U}, g_\mathcal{U}, h_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{R})(f_\mathcal{U}(g_\mathcal{U} + h_\mathcal{U}) = f_\mathcal{U}g_\mathcal{U} + f_\mathcal{U}h_\mathcal{U})$:

$f_\mathcal{U}(g_\mathcal{U} + h_\mathcal{U}) = k_\mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n)(g(n) + h(n)) = k(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n)g(n) + f(n)h(n) = k(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow f_\mathcal{U}g_\mathcal{U} + f_\mathcal{U}h_\mathcal{U} = k_\mathcal{U}$. Portanto,

$f_\mathcal{U}(g_\mathcal{U} + h_\mathcal{U}) = f_\mathcal{U}g_\mathcal{U} + f_\mathcal{U}h_\mathcal{U}$.

As propriedades (d) e (e) a seguir provam-se facilmente.

(d) A multiplicação é comutativa

$(\forall f_\mathcal{U}, g_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{R})(f_\mathcal{U}g_\mathcal{U} = g_\mathcal{U}f_\mathcal{U})$

(e) existe um elemento em ${}^*\mathbb{R}$ que é o neutro da multiplicação

$(\forall f_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{R})(f_\mathcal{U}{}^*1 = f_\mathcal{U})$

2. Todo elemento não nulo de ${}^*\mathbb{R}$ possui inverso multiplicativo

$(\forall f_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{R})(f_\mathcal{U} \neq {}^*0 \Rightarrow \exists g_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{R} | f_\mathcal{U}g_\mathcal{U} = {}^*1)$:

Primeiro vejamos que para que em ${}^*\mathbb{R}$ todo elemento não-nulo possa ter inverso multiplicativo, não poderá haver divisores de zero, ou seja, ${}^*\mathbb{R}$ não poderá ter elementos $f_\mathcal{U}, g_\mathcal{U} \neq {}^*0$ com produto $f_\mathcal{U} \cdot g_\mathcal{U} = {}^*0$. Provaremos então, que caso $f_\mathcal{U} \cdot g_\mathcal{U} = {}^*0$, teremos obrigatoriamente ou $f_\mathcal{U} = {}^*0$ ou $g_\mathcal{U} = {}^*0$. Na prova a seguir usaremos a notação de sequências e veremos como agem as propriedades específicas do ultrafiltro.

Proposição 1.3.1. *${}^*\mathbb{R}$ é um domínio de integridade.*

Prova: Sejam $a, b \in {}^*\mathbb{R}$, tais que $ab = {}^*0$, isto é, se $a = [\{a_n\}], b = [\{b_n\}]$, então

$ab = [\{a_n b_n\}] = [\{0\}]$, isto é, $\{a_n b_n\} \sim_{\mathcal{U}} \{0\}$.

$$ab = {}^*0 \Leftrightarrow A = \{n \in \mathbb{N} | a(n)b(n) = 0\} \in \mathcal{U}.$$

Suponhamos que $a \neq {}^*0$, logo, $\{n \in \mathbb{N} | a(n) = 0\} \notin \mathcal{U}$. Sendo $\mathcal{U}$ um ultrafiltro, temos $\{n \in \mathbb{N} | a(n) = 0\}^c \in \mathcal{U}$, isto é, $B = \{n \in \mathbb{N} | a(n) \neq 0\} \in \mathcal{U}$.

Provaremos que $A \cap B \subseteq C = \{n \in \mathbb{N} | b(n) = 0\}$, ou seja, $\{n \in \mathbb{N} | a(n)b(n) = 0\} \cap \{n \in \mathbb{N} | a(n) \neq 0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} | b(n) = 0\}$:

Para um dado n, se $n \in A \cap B$ então $a(n)b(n) = 0$ e $a(n) \neq 0$. Como $a(n)$ e $b(n)$ pertencem aos reais e $a(n) \neq 0$, então $b(n) = 0$, logo $n \in \{n \in \mathbb{N} | b(n) = 0\}$. Portanto, $A \cap B \subseteq C$. Como $A \in \mathcal{U} \quad e \quad B \in \mathcal{U}$, pela propriedade da interseção finita de um filtro $A \cap B \in \mathcal{U}$ e pela propriedade do fechamento $C \in \mathcal{U}$. Deste modo $\{n \in \mathbb{N} | b(n) = 0\} \in \mathcal{U}$, isto é, $b = {}^*0 \quad \square$

Com isto mostramos que ${}^*\mathbb{R}$ não tem divisores de zero. A seguir provaremos que todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo.

Dado $f_{\mathcal{U}} \neq {}^*0$, queremos encontrar $g_{\mathcal{U}}$, com $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisfaça $f_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}} = {}^*1$. Para tanto, definimos

$$g(n) = \begin{cases} f(n)^{-1}, & \text{se} \quad f(n) \neq 0 \\ r_0, & \text{se} \quad f(n) = 0. \end{cases}$$

Basta, então, provarmos que o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} | f(n)g(n) = 1\} \in \mathcal{U}.$$

Sendo $f_{\mathcal{U}} \neq {}^*0$, temos que $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Como

$$\{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq 0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} | f(n)g(n) = 1\},$$

podemos concluir que $\{n \in \mathbb{N} | f(n)g(n) = 1\} \in \mathcal{U}$. Portanto $f_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}} = {}^*1$ e $g_{\mathcal{U}} = (f_{\mathcal{U}})^{-1}$.

3. ${}^*\mathbb{R}$ é ordenável

Definição 1.3.1. *Um corpo K é dito ordenável se é possível definir uma relação de ordem total sobre K, relação esta compatível com a estrutura de anel de K.*

Definição 1.3.2. *Uma relação de ordem é cosiderada compatível com a estrutura de anel de um corpo K, quando, e apenas quando, os seguintes axiomas se verificam*

(a) $(\forall a, b, c \in K)(a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$;

compatibilidade com a adição

(b) $(\forall a, b \in K)(0 \leq a \quad \text{e} \quad 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab)$

compatibilidade com a multiplicação

Vejamos que a relação $\leq$ definida em (1.2) é compatível com a adição e a multiplicação de ${}^*\mathbb{R}$.

i. da forma com que foi definida a relação de ordem $\leq$ em ${}^*\mathbb{R}$

$$f_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{U}$$

temos uma relação de ordem total, pois, cada dois elementos quaisquer de ${}^*\mathbb{R}$ podem ser comparados.

ii. devemos agora verificar se $\leq$ é compatível com a estrutura de anel de ${}^*\mathbb{R}$, ou seja, que os axiomas abaixo se verifiquem:

A. $(\forall f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}}, h_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R})(f_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}} \Rightarrow f_{\mathcal{U}} + h_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}} + h_{\mathcal{U}}):$

Temos que $f_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}}$, logo $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{U}$. Como $f(n) \leq g(n)$ com $f(n), g(n) \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, então, para $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n) + h(n) \leq g(n) + h(n)$. Assim $\{n \in \mathbb{N} | f(n) + h(n) \leq g(n) + h(n)\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq g(n)\}$. Portanto $\{n \in \mathbb{N} | f(n) + h(n) \leq g(n) + h(n)\} \in \mathcal{U}$. Deste modo podemos concluir que $f_{\mathcal{U}} + h_{\mathcal{U}} \leq g_{\mathcal{U}} + h_{\mathcal{U}}$.

B. $(\forall f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R})({}^*0 \leq f_{\mathcal{U}} \quad \text{e} \quad {}^*0 \leq g_{\mathcal{U}} \Rightarrow {}^*0 \leq f_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}}):$

Temos,

$$
\begin{aligned}
{}^{*}0 \leq f_{\mathcal{U}} &\Leftrightarrow A = \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq f(n)\} \in \mathcal{U} \\
{}^{*}0 \leq g_{\mathcal{U}} &\Leftrightarrow B = \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq g(n)\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
$$

Sendo $A, B \in \mathcal{U}$, pela propriedade da interseção finita de um filtro, $A \cap B \in \mathcal{U}$, então, $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq f(n) \text{ e } 0 \leq g(n)\} \in \mathcal{U}$. Como $f(n), g(n) \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, temos para os mesmos $n's$ $0 \leq f(n)$ e $0 \leq g(n)$ implica $0 \leq f(n)g(n)$. Deste modo $\{n \in \mathbb{N} | 0 \leq f(n)g(n)\} \in \mathcal{U}$. Portanto ${}^{*}0 \leq f_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}}$. □

Com isto provamos que ${}^{*}\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.

4. Prova-se facilmente que $^{*} : \mathbb{R} \hookrightarrow {}^{*}\mathbb{R}$ é uma função injetiva. Com efeito, se ${}^{*}r = {}^{*}s$, então, $(f_r)_{\mathcal{U}} = (f_s)_{\mathcal{U}}$, isto é, $\{n \in \mathbb{N} | r = s\} = \{n \in \mathbb{N} | f_r(n) = f_s(n)\} \in \mathcal{U}$. Portanto, como esse conjunto é não vazio, teremos que $r = s$.

   A prova de que ${}^{*}(r+s) = {}^{*}r + {}^{*}s$ e ${}^{*}(rs) = {}^{*}r\,{}^{*}s$ usa argumentos análogos.

1.3.2 Existência de Elementos Infinitos e Elementos Infinitésimos

A noção de infinitésimos é muito antiga: ela apareceu na Europa no final do século XVII, com matemáticos como Leibniz, Newton, l'Hospital, no início do cálculo. Mas a idéia de "número infinitesimal" foi rejeitada por alguns matemáticos porque eles não puderam dar uma definição adequada para esses números. A base para a fundamentação da análise chamada clássica ou standard, sem infinitésimos, foi obtida graças à definição de limite dada por Cauchy no século XIX, às custas da intuição. Porém, nos anos 60 do século XX, os infinitésimos voltaram à matemática em decorrência dos desenvolvimentos da lógica matemática. Foi Abraham Robinson quem os construiu como elementos duma ultrapotência dos reais.

Definição 1.3.3. *Um elemento positivo* $\delta \in {}^*\mathbb{R}$ *é um infinitésimo se, e somente se,* $\forall n \geq 1, |\delta| \leq \frac{1}{n}$.*(A função* $|\cdot|$ *em* ${}^*\mathbb{R}$ *defini-se como em* $\mathbb{R}$*). Um elemento* $\omega \in {}^*\mathbb{R}$ *é dito infinito se* $|\omega| > n, \forall n \geq 1$*. Uma elemento que não é infinito será dito finito.*

Observe-se que, segundo a definição, ^{*0} é um infinitésimo.

Prova-se que um infinitésimo positivo δ, deve satisfazer ${}^*0 < \delta < {}^*r, \forall r > 0, r \in \mathbb{R}$. Tomando $\delta = [\{\frac{1}{n}\}]$ temos:

1. ${}^*0 < \delta \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | 0 < \frac{1}{n}\} \in \mathcal{U}$, pois, $\{n \in \mathbb{N} | 0 < \frac{1}{n}\} = \mathbb{N} - \{0\} \in Cof \subseteq \mathcal{U}$.

2. Seja $r > 0$ real,

   $\delta < {}^*r \Leftrightarrow A = \{n \in \mathbb{N} | \frac{1}{n} < r\} \in \mathcal{U}$.

   Para mostrarmos que o conjunto $A \in \mathcal{U}$, devemos lembrar da propriedade arquimediana dos números reais:

   Dado $r > 0, \exists n_0 \geq 1$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$. Daí, $\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} < r$, isto é, o conjunto cofinito $\{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} | \frac{1}{n} < r\}$. Portanto $A \in \mathcal{U}$.

Como ${}^*\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, δ possui inverso multiplicativo. Seja $\omega \in {}^*\mathbb{R}$, tal que $\omega = \delta^{-1}$. Então, para qualquer $r \in \mathbb{R}, {}^*r < \omega$, portanto ω é um número infinito. Além disso, podemos notar que $\delta' = [\{\frac{1}{n^2}\}]$ *e* $\omega' = [\{n^2\}]$ definem outro infinitésimo e outro número infinito respectivamente, com $\delta' < \delta$ e $\omega < \omega'$ em ${}^*\mathbb{R}$.

Com a introdução de números infinitos e infinitésimos, obtemos ${}^*\mathbb{R}$ como uma extensão própria não arquimediana de $\mathbb{R}$ e consequentemente uma nova estrutura.

Vejamos agora, que a diferença de $\mathbb{R}, {}^*\mathbb{R}$ não é completo.

Proposição 1.3.2. $\mathbb{N}$ *não é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$

Prova:

Basta provarmos que para qualquer $r \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$. Com efeito, se $r \in \mathbb{R}^+, r = m.d_1 d_2 \ldots$, então basta tomar $n = m + 2 > r$. □

Proposição 1.3.3. $\mathbb{N}$ *é limitado superiormente em* ${}^*\mathbb{R}$

Prova:

Devemos encontrar alguma cota superior para $\mathbb{N}$ em $^*\mathbb{R}$. Seja $\delta > 0$, onde $\delta < \frac{1}{n}, \forall n$. Podemos escolher $\delta = [\{\frac{1}{n}\}]$. Como $^*\mathbb{R}$ é um corpo e $\delta \neq 0$, então existe $\omega = \delta^{-1}$ com $\omega > n, \forall n$. Logo ω é cota superior de $\mathbb{N}$. $\square$

Proposição 1.3.4. *O subconjunto $\mathbb{N}$ de $^*\mathbb{R}$ é não vazio, limitado superiormente, porém não tem supremo. Portanto $^*\mathbb{R}$ não é completo.*

Prova: Suponhamos, por absurdo, que existe $S = \sup \mathbb{N}$. Observe que $S \notin \mathbb{N}$, pois se $S \in \mathbb{N}$, então, não seria supremo, já que, $S + 1 \in \mathbb{N}$. Sabemos que $n < S, \forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $n < S - 1, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é $S - 1$ é ainda cota superior de $\mathbb{N}$. Uma contradição.

Pelo absurdo, suponhamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq S - 1$, então, $S \leq n + 1$, ou ainda, $S < n + 1$, pois $S \notin \mathbb{N}$, o que é uma contradição, pois S é supremo de $\mathbb{N}$.

Com isso concluimos que $^*\mathbb{R}$ não é completo. $\square$

1.3.3 Extensão de Relações de $\mathbb{R}$ a $^*\mathbb{R}$

Do mesmo modo como estendemos as operações binárias de adição e multiplicação e a relação de igualdade de $\mathbb{R}$ a $^*\mathbb{R}$ podemos estender qualquer função ou relação de $\mathbb{R}$ a $^*\mathbb{R}$, ou seja, se $S \subseteq \mathbb{R}^n$, então, definiremos convenientemente $^*S \subseteq (^*\mathbb{R})^n$ de modo que $S \subseteq {}^*S$.

1. Extensão de subconjuntos de $\mathbb{R}$ a $^*\mathbb{R}$: observe que todo subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ corresponde a uma relação unária, temos então a extensão $^*E$ caracterizada pela condição:

   $$f_{\mathcal{U}} \in {}^*E \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E\} \in \mathcal{U}.$$

   Por exemplo, se $E = (0, 1]$ então $^*E$, como subconjunto de $^*\mathbb{R}$, terá todo infinitésimo positivo como elemento, mas não ^{*0}.

   $^*E$ é extensão de E, isto é, $E \subseteq {}^*E$, através do mergulho $^* : \mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$. Provaremos na sequência que $E \subseteq \mathbb{R}$ implica $^*r \in {}^*E, \forall r \in E$.

Concluímos que ${}^*E$ é uma extensão de E no sentido de ${}^*[E] \subseteq {}^*E$, sendo ${}^*[E]$ a imagem direta do subconjunto E através do mergulho $*$.

Observa-se o seguinte:

- ${}^*\emptyset$ é o conjunto vazio em ${}^*\mathbb{R}$.

  Suponha que ${}^*\emptyset$ não é o conjunto vazio de ${}^*\mathbb{R}$, logo existe $f_{\mathcal{U}} \in {}^*\emptyset \subseteq {}^*\mathbb{R}$, então,

$$f_{\mathcal{U}} \in {}^*\emptyset \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \emptyset\} \in \mathcal{U}.$$

  Como $\emptyset$ não possui elementos, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \emptyset\} = \emptyset$, o que é um absurdo, pois, como $\mathcal{U}$ é um filtro, $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

- Seja $E = \{r\}$, então,

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{U}} \in {}^*E &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) = r\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow f_{\mathcal{U}} = {}^*r \\ &\Leftrightarrow {}^*E = \{{}^*r\}. \end{aligned}$$

- $*$ é um homomorfismo booleano pois preserva a união e a interseção.

  a) ${}^*(E_1 \cup E_2) = {}^*E_1 \cup {}^*E_2$

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{U}} \in {}^*E_1 \cup {}^*E_2 &\Leftrightarrow f_{\mathcal{U}} \in {}^*E_1 \text{ ou } f_{\mathcal{U}} \in {}^*E_2 \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_1\} \in \mathcal{U} \text{ ou } \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_2\} \in \mathcal{U} \\ {}^* &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_1\} \cup \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_2\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_1 \cup E_2\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow f_{\mathcal{U}} \in {}^*(E_1 \cup E_2). \end{aligned}$$

  $(*)$: A implicação $(\Leftarrow)$ decorre de que $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro.

b)$^*(E_1 \cap E_2) = {}^*E_1 \cap {}^*E_2$

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{U}} \in {}^*E_1 \cap {}^*E_2 &\Leftrightarrow f_{\mathcal{U}} \in {}^*E_1 \text{ e } f_{\mathcal{U}} \in {}^*E_2 \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_1\} \in \mathcal{U} \text{ e } \{n \in \mathbb{N}\ f(n) \in E_2\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_1\} \cap \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_2\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E_1 \cap E_2\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow f_{\mathcal{U}} \in {}^*(E_1 \cap E_2). \end{aligned}$$

- ${}^*E_1 = {}^*E_2 \Leftrightarrow E_1 = E_2$

  ($\Rightarrow$) Suponha que $E_1 \neq E_2$, logo existe $r \in E_1$, tal que $r \notin E_2$, ou viceversa, ou seja, $\{n \in \mathbb{N} | r \in E_1\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, mas $\{n \in \mathbb{N} | r \in E_2\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$. Portanto, ${}^*r \in {}^*E_1$ e ${}^*r \notin {}^*E_2$, daí, ${}^*E_1 \neq {}^*E_2$, o que contraria a hipótese. Portanto $E_1 = E_2$.

  ($\Leftarrow$) é imediato.

- ${}^*r \in {}^*E \Leftrightarrow r \in E$

  ($\Leftarrow$) Como para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in E$, teremos $\{n \in \mathbb{N} | r \in E\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, então, ${}^*r \in {}^*E$

  ($\Rightarrow$) Suponha que $r \notin E$. Como por hipótese ${}^*r \in {}^*E$, temos:

  ${}^*r \in {}^*E \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | r \in E\} \in \mathcal{U}$. O que é uma contradição, pois $\{n \in \mathbb{N} | r \in E\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$. Portanto $r \in E$.

- $*$ não é sobrejetor

  Nem todo elemento de ${}^*\mathbb{R}$ provém de $\mathbb{R}$ pela operação $*$, pois ${}^*\mathbb{R}$ contém elementos infinitos e todo elemento da forma ${}^*r$, com $r \in \mathbb{R}$, é finito.

2. Extensão de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ a ${}^*\mathbb{R}^2$: dado $S \subseteq \mathbb{R}^2$ uma relação binária, assim definimos ${}^*S$ em ${}^*\mathbb{R}^2$:

$$(f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}}) \in {}^*S \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | (f(n), g(n)) \in S\} \in \mathcal{U}.$$

Um exemplo desta é a relação de ordem dos reais.

3. Extensão de relações n-árias: dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos ${}^*S$, da forma

$$(f_{1\mathcal{U}}, \ldots, f_{n\mathcal{U}}) \in {}^*S \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | (f_1(n), \ldots, f_n(n)) \in S\} \in \mathcal{U}.$$

${}^*S$ é uma extensão de S pois $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$,

$(x_1, \ldots, x_n) \in S \Leftrightarrow ({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n) \in {}^*S$, ou seja $S \hookrightarrow {}^*S$.

4. Extensão de funções de $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$: dado $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, então, para $f_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$, definimos

$${}^*F(f_{\mathcal{U}}) = g_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | F(f(n)) = g(n)\} \in \mathcal{U}.$$

Vejamos que ${}^*F$ é uma extensão de F, isto é, ${}^*F_{|\mathbb{R}} = F$

Seja $x \in \mathbb{R}$, devemos verificar que ${}^*F({}^*x) = F(x) = {}^*(F(x))$.

De fato, basta observar que $\{n \in \mathbb{N} | F(x) = F(x)\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

Como exemplo, definimos a função módulo em ${}^*\mathbb{R}$, por

$${}^*|f_{\mathcal{U}}| = g_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} || f(n)| = g(n)\} \in \mathcal{U}.$$

Podemos provar que

$${}^*|f_{\mathcal{U}}| = \begin{cases} f_{\mathcal{U}} & \text{se} \quad f_{\mathcal{U}} \geq {}^*0 \\ -f_{\mathcal{U}} & \text{se} \quad f_{\mathcal{U}} < {}^*0. \end{cases}$$

De fato, como $f(n) \in \mathbb{R}$ e $|\cdot|$ é a função módulo em $\mathbb{R}$, temos por definição

$$|f(n)| = \begin{cases} f(n) & \text{se} \quad f(n) \geq 0 \\ -f(n) & \text{se} \quad f(n) < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} {}^*|f_{\mathcal{U}}| = f_{\mathcal{U}} \quad & \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} || f(n)| = f(n)\} \in \mathcal{U} \\ & \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} | f(n) \geq 0\} \in \mathcal{U} \\ & \Leftrightarrow \quad f_{\mathcal{U}} \geq {}^*0. \end{aligned}$$

5. Dada a função $F : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$, temos que ${}^*F : {}^*E \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$.

   Com efeito, seja $f_{\mathcal{U}} \in {}^*E$

$$^*F(f_{\mathcal{U}}) = g_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | F(f(n)) = g(n)\} \in \mathcal{U}.$$

   Para concluir, basta demonstrar a seguinte proposição.

   Proposição 1.3.5. *Se dom $F = E$, então, dom ${}^*F = {}^*E$*

   Prova:

   $(dom^*F \subseteq {}^*E)$

   Seja $f_{\mathcal{U}} \in dom^*F$, isto é, ${}^*F(f_{\mathcal{U}})$ está definido. Se ${}^*F(f_{\mathcal{U}}) = g_{\mathcal{U}}$, então $\{n \in \mathbb{N} | F(f(n)) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Devemos provar que $f_{\mathcal{U}} \in {}^*E$, isto é, $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E\} \in \mathcal{U}$.

   De fato, basta observar que $\{n \in \mathbb{N} | F(f(n)) = g(n)\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E\}$.

   $({}^*E \subseteq dom^*F)$

   Seja $f_{\mathcal{U}} \in {}^*E$, isto é, $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E\} \in \mathcal{U}$, devemos provar que $f_{\mathcal{U}} \in dom^*F$. Sabemos que $A = \{n \in \mathbb{N} | F(f(n)) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ é válida para ${}^*F :^* \mathbb{R} \longrightarrow^* \mathbb{R}$. Deste modo a conclusão segue de

$$\begin{aligned} \{n \in \mathbb{N} | F(f(n)) = g(n)\} &= \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in E \text{ e } F(f(n)) = g(n)\} \\ &= A \cap \{n \in \mathbb{N} | F(f(n)) = g(n)\} \qquad \square \end{aligned}$$

1.3.4 Números Hiperreais Finitos

A fundamentação da análise não standard é de alguma forma sutil, assim então, ela nos possibilita escrever definições de maneira muito natural e intuitiva.

Para todo x real (standard ou não), dizemos que (ver definição 1.3.3):

- x é $finito$ se, e somente se, existe um inteiro natural maior que $|x|$;
- x é $infinito$ se, e somente se, $|x|$ é maior que qualquer inteiro natural;

- x é $infinitesimal$ se, e somente se, seu valor absoluto é menor que $\frac{1}{n}$ para todo inteiro natural n;

- x é *infinitamente próximo de* y se, e somente se, $x - y$ é infinitesimal.

Ao contrário dos inteiros, os números hiperreais finitos não são necessáriamente números reais standard, mas está infinitamente próximo de um único número real standard.

Pode-se provar que um elemento $x \in {}^*\mathbb{R}$ é finito se, $|x| < {}^*r$ para algum $r > 0$, com $r \in \mathbb{R}$.

Denotamos com ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ a coleção de números hiperreais finitos.

Cada $x \in {}^*\mathbb{R}$ finito é infinitamente próximo a algum $r \in \mathbb{R}$, que é único, no sentido de que $|x - {}^*r| = 0$ ou $|x - {}^*r| = \delta$, onde δ é um infinitésimo não negativo em ${}^*\mathbb{R}$. O r único é chamado de parte standard de x, e é indicado por $st(x)$.

Proposição 1.3.6. *Se x é finito, então, existe um único $r \in \mathbb{R}$, tal que $|x - r|$ é um infinitesimal.*

Prova:

- existência: seja x finito. Suponhamos $x \geq 0$. Como x é finito, existe $s \in \mathbb{R}$, tal que $|x| < s$. Assim, $0 \leq x < s$.

  Considere $A_x = \{s \in \mathbb{R} | |x| < s\}$. Temos que $A_x \neq \emptyset, A_x \subseteq \mathbb{R}$, e mais ainda, A_x é limitado inferiormente por 0, ou seja, existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $r = inf A_x$. Provaremos agora que r é o real procurado, isto é, que $|x-r|$ é um infinitesimal, ou seja $|x - r| \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$.

  Seja $n \geq 1$, então $\frac{1}{n} > 0$. Como r é o ínfimo de A_x, existe $s \in A_x$, tal que $r \leq s \leq r + \frac{1}{n}$. Por outro lado, $r - \frac{1}{n} \notin A_x$, deste modo, $x \geq r - \frac{1}{n}$, e $x \leq r + \frac{1}{n}$, ou seja $|x - r| \leq \frac{1}{n}$.

- unicidade: suponhamos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, tais que $|x - r_1|$ e $|x - r_2|$ são infinitesimais, então,

$$|r_1 - r_2| = |r_1 - x + x - r_2| \leq |r_1 - x| + |x - r_2| = \delta_1 + \delta_2 = \delta.$$

Como $|r_1 - r_2| = \delta < \frac{1}{n}$ para todo n, então $|r_1 - r_2| = 0$ e, portanto, $r_1 = r_2$. $\square$

Se $x \in {}^*\mathbb{R}$ e x é finito, então a parte standard de x, que denotamos por $st(x)$, está bem definida, o que permite definir uma função

$$\begin{aligned} st : {}^*\mathbb{R}_{fin} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto st(x). \end{aligned}$$

Comportamento da Função "Parte Standard"

1. $r \in \mathbb{R} \Rightarrow st({}^*r) = r$

   Para provar que $st({}^*r) = r$, basta observar que $|{}^*r - r|$ é igual a 0 ou um infinitésimo. De fato, em ${}^*\mathbb{R}$ temos $|{}^*r - r| = |{}^*r - {}^*r| = 0$.

2. Se x, y são finitos, então $st(x + y) = st(x) + st(y)$

   Seja $st(x) = a$ e $st(y) = b$, logo, $|x - a| \leq \alpha$ e $|y - b| \leq \beta$,onde α e β são infinitésimos, então, $|x-a|+|y-b| \leq \alpha+\beta$. Como $|x+y-(a+b)| \leq |x-a|+|y-b|$, fazendo $a + b = r$ e $\alpha + \beta = \delta$, teremos, $|x + y - r| \leq \delta$, ou seja $st(x + y) = r$.

3. Se x, y são finitos, então $st(xy) = st(x)st(y)$ e $st(\frac{x}{y}) = \frac{st(x)}{st(y)}$ se $st(y) \neq 0$.

Denotando por ${}^*\mathbb{R}_0 = \{x \in {}^*\mathbb{R} | x \text{ é infinitesimal}\}$, temos:

$${}^*\mathbb{R}_0 \subseteq {}^*\mathbb{R}_{fin} \subseteq {}^*\mathbb{R}.$$

Temos as seguintes propriedades:

1. ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ é um domínio de integridade

(a) $(\forall x, y)(x, y \in {}^*\mathbb{R}_{fin} \Rightarrow x + y \in {}^*\mathbb{R}_{fin})$

Seja $x, y \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$, então $|x| < {}^*r_1$ e $|y| < {}^*r_2$, para algum $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Devo provar que $|x + y| < {}^*r$, para algum $r \in \mathbb{R}$.

$|x+y| \leq |x|+|y| < {}^*r_1 + {}^*r_2 = {}^*(r_1 + r_2)$. Deste modo, $|x+y| < {}^*(r_1 + r_2)$. Portanto $x + y \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$.

(b) $(\forall x, y)(x, y \in {}^*\mathbb{R}_{fin} \Rightarrow xy \in {}^*\mathbb{R}_{fin})$

Como $x, y \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$, existe $st(x)$ e $st(y)$. Sabendo que $st(x)st(y) = st(xy)$, podemos concluir que $xy \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$.

(c) $(\forall x)(x \in {}^*\mathbb{R}_{fin} \Rightarrow -x \in {}^*\mathbb{R}_{fin})$

De fato, pois, $st(-x) = -st(x)$.

De 1, 2 e 3 concluímos que ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ é um subanel de ${}^*\mathbb{R}$.

(d) ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ é um anel com unidade. Basta observar que ${}^*1 \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$

Como ${}^*\mathbb{R}$ é um corpo, ${}^*\mathbb{R}_{fin} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ e ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ é um subanel, então, ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ é um domínio de integridade.

2. ${}^*\mathbb{R}_0$ é um ideal maximal de ${}^*\mathbb{R}_{fin}$

(a) ${}^*\mathbb{R}_0$ é um ideal de ${}^*\mathbb{R}_{fin}$

i. $(\forall x, y)(x, y \in {}^*\mathbb{R}_0 \Rightarrow x + y \in {}^*\mathbb{R}_0)$
Como x, y são infinitésimos, $x + y$ é um infinitésimo, logo $x + y \in {}^*\mathbb{R}_0$.

ii. $(\forall a, x)(a \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$ e $x \in {}^*\mathbb{R}_0 \Rightarrow ax \in {}^*\mathbb{R}_0)$
Como $a \in {}^*\mathbb{R}_{fin}, |a| < {}^*r$ para algum $r \in \mathbb{R}$. Assim, sendo x um infinitésimo, $|x| \leq {}^*s$ para todo $s \in \mathbb{R}, s > 0$. Portanto, $|ax| = |a||x| < {}^*r{}^*s = {}^*(rs)$ para todo $s > 0$, isto é, $ax \in {}^*\mathbb{R}_0$.

(b) ${}^*\mathbb{R}_0$ é maximal em ${}^*\mathbb{R}_{fin}$

Suponhamos I um ideal de ${}^*\mathbb{R}_{fin}$, tal que ${}^*\mathbb{R}_0 \subseteq I \subseteq {}^*\mathbb{R}_{fin}$. Devemos provar que ou $I = {}^*\mathbb{R}_0$ ou $I = {}^*\mathbb{R}_{fin}$. Suponha $I \neq {}^*\mathbb{R}_0$, logo existe $x \in I$

tal que $x \notin {}^*\mathbb{R}_0$. Como $I \subseteq {}^*\mathbb{R}_{fin}$, existe $r_2 \in \mathbb{R}$, tal que, $|x| < r_2$. Como $x \notin {}^*\mathbb{R}_0$, existe r, tal que, $|x| \geq r > 0$. Temos, então, $0 < r \leq |x| < r_2$.

Provaremos que I é todo o anel, e para isto, basta provar que $x \in I$ é inversível em ${}^*\mathbb{R}_{fin}$.

Como $0 < r \leq |x|$, temos, $\frac{1}{r} \geq |\frac{1}{x}| = |x^{-1}|$, sendo x^{-1} o inverso de x em ${}^*\mathbb{R}$ e $r^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Portanto, $x^{-1} \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$.

3. A aplicação

$$\begin{aligned} st : {}^*\mathbb{R}_{fin} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto st(x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de anéis sobrejetivo.

   (a) $(\forall x, y)(x, y \in {}^*\mathbb{R}_{fin} \Rightarrow st(x+y) = st(x) + st(y))$

   De fato, pois como $x, y \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$, a parte standard está bem definida, ou seja existem $st(x)$ e $st(y)$. Logo pelo comportamento da parte standard já provado $st(x+y) = st(x) + st(y)$.

   (b) $(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R}_{fin})(st(xy) = st(x)st(y))$

   Se x e y são finitos, então, existem $r, s \in \mathbb{R}$, únicos, tais que, $|x - r| = \alpha$ e $|y - s| = \gamma$, onde α, γ são infinitésimos, e $st(x) = r$ e $st(y) = s$. Devemos mostrar que $st(xy) = rs$, ou seja, que $|xy - rs|$ é um infinitésimo. De fato: $|xy - rs| = |xy - ry + ry - rs| = |y(x-r) + r(y-s)| \leq |y||x-r| + |r||y-s| = |y|\alpha + |r|\gamma$. Como ${}^*\mathbb{R}_0$ é um ideal, $|y|\alpha + |r|\gamma \in {}^*\mathbb{R}_0$.

   Portanto $st(xy) = rs = st(x)st(y)$.

   (c) st é sobrejetor, pois para cada $r \in \mathbb{R}$, existe $x \in {}^*\mathbb{R}$, tal que $st(x) = r$.

4. $ker(st) = {}^*\mathbb{R}_0$

Sabendo que $ker(st) = \{x \in {}^*\mathbb{R}_{fin} | st(x) = 0\}$, podemos concluir que $x \in ker(st)$ se e somente se x é um infinitésimo, ou seja, $x \in {}^*\mathbb{R}_0$. Deste modo, $ker(st) = {}^*\mathbb{R}_0$. $\square$

Definição 1.3.4. *Chamamos por mônada de um número real, e indicamos por* $\mu(r)$*, o conjunto de todos os* $x \in {}^*\mathbb{R}$*, tais que,* $st(x) = r$*.*

Usando a definição de mônada podemos escrever

$$^*\mathbb{R}_{fin} = \cup_{a\in\mathbb{R}} mon(a).$$

De fato, a mônada de um número real é a classe lateral desse número a respeito da relação "infinitamente próximo de" em ${}^*\mathbb{R}_{fin}$.

1.4 O Princípio de Transferência

Com as considerações anteriores pudemos notar que ${}^*\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ são semelhantes em vários aspectos, como por exemplo, ambos são corpos totalmente ordenados. Porém, de forma geral, nem todas as propriedades de $\mathbb{R}$ são transferidas a ${}^*\mathbb{R}$. Veremos que esta tranferência só será possível para determinadas propriedades de ${}^*\mathbb{R}$ que envolvam subconjuntos de ${}^*\mathbb{R}$ chamados conjuntos internos.

Para tanto, devemos explicitar uma determinada linguagem formal onde tais propriedades possam ser expressas.

1.4.1 Noção Geral de Estrutura Algébrica

Uma estrutura algébrica é uma upla $\mathbb{A} = \langle A, \{R_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K}\rangle$, onde

- A é um conjunto não vazio, chamado de domínio ou universo da estrutura;
- I, J, K são conjuntos quaisquer, que podem ser vazios;
- para cada $i \in I, R_i$ é um a relação n-ária (para algum n) definida em A, isto é $R_i \subseteq A^n$;
- para cada $j \in J, f_j : A^m \longrightarrow A$ é uma função m-ária (para algum m);
- para cada $k \in K, c_k \in A$.

Exemplo 1: $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R}, \{\leq\}, \{+, \cdot\}, \{0, 1\} \rangle$

$\mathbb{R}$ = conjunto de números reais;

$\leq \subseteq \mathbb{R}^2$, isto é, é uma relação binária;

$+, \cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$;

$0, 1 \in \mathbb{R}$

Esta estrutura corresponde ao corpo ordenado dos números reais.

Exemplo 2: $^*\mathbb{R} = \left\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}, \{^*\leq\}, \{^*+, ^*\cdot\}, \{^*0, ^*1\} \right\rangle$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} = \{[\{x_n\}]/\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R}\}$

Esta estrutura corresponde ao corpo ordenado dos números hiperreais.

1.4.2 Linguagens Formais

Definiremos agora uma linguagem formal de primeira ordem ou elementar, adequada a estrutura algébrica $\mathbb{A} : L(\mathbb{A})$.

Para estrutura algébrica $\mathbb{A} = \langle A, \{R_i\}_i, \{f_j\}_j, \{c_k\}_k \rangle$, definimos a seguinte linguagem formal:

1. vocabulário

   (a) símbolos lógicos: $\vee, \wedge, \neg, \forall, \exists, \longrightarrow, \longleftrightarrow, =$.

   (b) símbolos próprios da estrutura: $\{\overline{R_i}\}, \{\overline{f_j}\}, \{\overline{c_k}\}$.

2. expressões

   (a) termos: denotam elementos ou novas funções da estrutura $\mathbb{A}$, que podem ser definidos com o vocabulário básico.

      i. variáveis: x,y,z...;

      ii. constantes: $\overline{c_k}$, para cada elemento constante c_k da estrutura $\mathbb{A}$;

      iii. se $t_1, \ldots, t_n$ são termos, e f_j é uma função n-ária, então, $\overline{f_j}(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

(b) fórmulas: são expressõs que denotam fatos ou novas relações acerca da estrutura, isto é, são afirmações sobre a estrutura (independente delas serem verdadeiras ou não).

i. se t_1, t_2 são termos, então $t_1 = t_2$ é uma fórmula atômica.

ii. se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e R_i é uma relação n-ária, então, $\overline{R_i}(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica;

iii. se φ, ψ são fórmulas, então,

$$\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \longrightarrow \psi, \varphi \longleftrightarrow \psi, (\forall x)\varphi, (\exists x)\varphi$$

se x for uma variável, também são fórmulas.

3. variáveis livres: uma variável $(x, y, z \ldots)$ que aparece em uma expressão (termo ou fórmula) é dita livre, se não está no escopo de um quantificador que quantifica esta variável. Em caso contrario, a variável é dita ligada.

A linguagem $L(\mathbb{A})$ é dita de 1^a ordem porque os quantificadores são aplicados apenas em variáveis que denotam elementos da estrutura.

Se φ é uma fórmula da linguagem $L(\mathbb{A})$, e $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis livres de φ, então escreveremos $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

1.4.3 Relação entre $\mathbb{A}$ e $L(\mathbb{A})$

Para Alfred Tarski(1936)

"O verdadeiro está na linguagem e não no mundo real".

Se $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ é uma fórmula de $L(\mathbb{A})$ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos sem variáveis livres de $L(\mathbb{A})$, então denotaremos por $\mathbb{A} \models \varphi(t_1, \ldots, t_n)$, o fato de $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ ser verdadeiro em $\mathbb{A}$.

Definição 1.4.1. *"Denotação" é a relação entre termos e elementos de $\mathbb{A}$. Se t é um termo de $L(\mathbb{A})$, chamaremos d(t) o elemento de $\mathbb{A}$ que t denota.*

- $d(x)$ denota um elemento variável de $L(\mathbb{A})$;
- se t é a constante $\overline{c_k}$, então, $d(t) = c_k$;
- se t é o termo $\overline{f_j}(t_1, \ldots, t_n)$, então, $d(t) = f_j(d(t_1), \ldots, d(t_n))$.

Verdade Formal

Seja $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $L(\mathbb{A})$ e $t_1, \ldots, t_n$ termos de $L(\mathbb{A})$. A seguir definiremos por indução, o que significa $\mathbb{A} \models \varphi(t_1, \ldots, t_n)$.

1. para fórmulas atômicas:

   (a) $\mathbb{A} \models (t_1 = t_2) \Leftrightarrow d(t_1) = d(t_2)$

   (b) $\mathbb{A} \models \overline{R_i}(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow R_i(d(t_i), \ldots, d(t_n))$

2. para outras fórmulas

   (a) $\mathbb{A} \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi$ e $\mathbb{A} \models \psi$;

   (b) $\mathbb{A} \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi$ ou $\mathbb{A} \models \psi$;

   (c) $\mathbb{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathbb{A} \not\models \varphi$;

   (d) $\mathbb{A} \models (\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow \forall a \in A; \mathbb{A} \models \varphi(\overline{a})$;

   (e) $\mathbb{A} \models (\exists x)\varphi(x) \Leftrightarrow \exists a \in A; \mathbb{A} \models \varphi(\overline{a})$.

É importante destacar que a linguagem $L(\mathbb{A})$, apesar de ser construída à partir da estrutura $\mathbb{A}$, ela é a mesma para qualquer estrutura de mesmo tipo de similaridade que $\mathbb{A}$. Por exemplo, $\mathbb{R}$ e $^*\mathbb{R}$ são do mesmo tipo, $L(\mathbb{R})$ e $L(^*\mathbb{R})$ é o mesmo. Nesse contexto, se duas estruturas $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ de mesmo tipo satisfazem as mesmas propriedades de primeira ordem, diremos que elas são elementarmente equivalentes e denotaremos $\mathbb{A} \equiv_L \mathbb{B}$.

1.4.4 Ultrapotências

Para formular e demonstrar o que chamaremos de *princípio de transferência*, construiremos as ultrapotências de uma estrutura $\mathbb{A}$, as quais serão do mesmo tipo que $\mathbb{A}$.

Seja $I \neq \emptyset$ um conjunto (de índices) qualquer. Um ultrafiltro em I é uma coleção $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$, tal que:

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}, I \in \mathcal{U}$;

2. $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$;

3. $A \in \mathcal{U}$ e $B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{U}$;

4. $A \subseteq I \Rightarrow A \in \mathcal{U}$ ou $A^c \in \mathcal{U}$ (filtro maximal).

Construção da Ultrapotência

Seja $\mathbb{A} = \langle A, \{R_i\}, \{f_j\}, \{c_k\} \rangle$ uma estrutura. Então,

$$A^I = \{g : I \longrightarrow A | g \text{ é uma função}\} = \{\{x_r\}_{r \in I} | x_r \in A, \forall r \in I\}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & A \\ r & \longmapsto & g(r) = x_r \end{array}$$

Definimos, agora, a seguinte relação de equivalência em A^I:

$$\{x_r\}_{r \in I} \equiv_{\mathcal{U}} \{y_r\}_{r \in I} \Leftrightarrow \{r \in I | x_r = y_r\} \in \mathcal{U}.$$

Denotamos por ${}^*A = A^I/_{\mathcal{U}}$, onde ${}^*A$ é o conjunto das classes de equivalência módulo $\mathcal{U}$.

Definição 1.4.2. *A ultrapotência de $\mathbb{A}$ módulo $\mathcal{U}$ é a nova estrutura*

$${}^*\mathbb{A} = \left\langle A^I/_{\mathcal{U}}, \{{}^*R_i\}, \{{}^*f_j\}, \{{}^*c_k\} \right\rangle$$

do mesmo tipo que $\mathbb{A}$, onde se $[\{x_r\}]$ denota a classe de equivalência da família $\{x_r\}$, definimos:

- $^*R_i([\{x_r^1\}], \ldots, [\{x_r^n\}]) \Leftrightarrow \{r \in I | R_i(x_r^1, \ldots, x_r^n)\} \in \mathcal{U}$;
- $^*f_j([\{x_r^1\}], \ldots, [\{x_r^n\}]) = [\{f_j(x_r^1, \ldots, x_r^n)\}_{r \in I}]$;
- $^*c_k = [\{c_k\}]$ *(classe de equivalência da família constante c_k).*

$\mathbb{A}$ está mergulhada em $^*\mathbb{A}$ através de

$$\begin{array}{rcl} * : A & \hookrightarrow & A^I/_{\mathcal{U}} \\ a & \longmapsto & [\{a\}] = {}^*a \end{array}$$

Teorema 1.4.1 (Princípio de Transferência de Łoś $\approx$ 1956)**.** *Seja $\mathbb{A}$ uma estrutura algébrica e $L(\mathbb{A})$ a linguagem de primeira ordem correspondente.*

Então, para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ e para todo elemento $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \in A^n$, temos

$$\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \models \varphi({}^*\overline{a}_1, \ldots, {}^*\overline{a}_n)$$

Prova:

Prova por indução sobre a complexidade de φ.

1. se φ é da forma $t_1 = t_2$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A} \models t_1 = t_2 & \Leftrightarrow & d(t_1) = d(t_2) \\ & \Leftrightarrow & \{r \in I | d(t_1) = d(t_2)\} = I \in \mathcal{U} \\ & \Leftrightarrow & [\{d(t_1)\}] = [\{d(t_2)\}] \\ & \Leftrightarrow & {}^*d(t_1) = {}^*d(t_2) \\ & \Leftrightarrow & {}^*\mathbb{A} \models t_1 = t_2. \end{array}$$

2. se φ é $\overline{R}_i(t_1, \ldots, t_n)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} \models \overline{R}_i(t_1, \ldots, t_n) &\Leftrightarrow R_i(d(t_1), \ldots, d(t_n)) \\
&\Leftrightarrow \{r \in I | R_i(d(t_1), \ldots, d(t_n))\} = I \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow {}^*R_i([\{d(t_1)\}], \ldots, [\{d(t_n)\}]) \\
&\Leftrightarrow {}^*R_i({}^*d(t_1), \ldots, {}^* d(t_n)) \\
&\Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \models \overline{R_i}(t_1, \ldots, t_n)
\end{aligned}$$

3. se φ é da forma $\psi \wedge \theta$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} \models \psi \wedge \theta &\Leftrightarrow \mathbb{A} \models \psi \text{ e } \mathbb{A} \models \theta \\
{\scriptstyle (1)} &\Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \models \psi \text{ e } {}^*\mathbb{A} \models \theta \\
&\Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \models \psi \wedge \theta
\end{aligned}$$

   (1): hipótese indutiva

   A prova é análoga para $\vee$.

4. se φ é da forma $\neg\psi$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} \models \neg\psi &\Leftrightarrow \mathbb{A} \not\models \psi \\
{\scriptstyle (2)} &\Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \not\models \psi \\
&\Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \models \neg\psi
\end{aligned}$$

   (2): hipótese indutiva

5. os quantificadores: basta provar para o quantificador existencial, pois o quantificador universal pode ser definido a partir dele.

   Se φ é da forma $(\exists x)\psi(x)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} \models (\exists x)\psi(x) &\Leftrightarrow \exists a \in A; \mathbb{A} \models \psi(\overline{a}) \\
{\scriptstyle (3)} &\Leftrightarrow \exists^* a \in {}^*A; {}^*\mathbb{A} \models \psi({}^*\overline{a}) \\
&\Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \models (\exists x)\psi(x)
\end{aligned}$$

   (3): hipótese indutiva $\square$

Ampliação de $L(\mathbb{A})$

O objetivo é ampliar a linguagem $L(\mathbb{A})$ mantendo o teorema de transferência entre $\mathbb{A}$ e ${}^*\mathbb{A}$.

O primeiro passo será estender subconjuntos de A e funções definidas em subconjuntos de A para ${}^*\mathbb{A} = A^I/_{\mathcal{U}}$.

1. Extensão de subconjuntos de A.

   Seja $\mathbb{A}$ uma estrutura e $B \subseteq A$. Sabendo que

   $$^*\mathbb{A} = A^I/_{\mathcal{U}} = \{[\{x_i\}_{i\in I}] | x_i \in A\},$$

   definimos ${}^*B \subseteq {}^*\mathbb{A}$ da seguinte maneira,

   $$[\{x_i\}_{i\in I}] \in {}^*B \Leftrightarrow \{i \in I | x_i \in B\} \in \mathcal{U},$$

   isto é,

   $$^*B = \{[\{x_i\}_{i\in I}] | \{i \in I / x_i \in B\} \in \mathcal{U}\} \subseteq {}^*\mathbb{A}.$$

   ${}^*B$ é uma extensão de B no sentido de que $B \subseteq {}^*B$, através da identificação de $a \in B$ com $[\{a\}] \in {}^*B$, de fato, pois, se $a \in B, \{i \in I | a \in B\} = I \in \mathcal{U}$.

   Um exemplo importante é o conjunto dos números hipernaturais que desenvolveremos a seguir. O conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma extensão não standard ${}^*\mathbb{N}$ cujos elementos são chamados números hipernaturais. ${}^*\mathbb{N}$ é o subconjunto de números hiperreais da forma $\nu = [\{m_i\}_{i\in I}]$ onde m_i pertence a $\mathbb{N}$ para quase todo o $i \in I$ (a menos do ultrafiltro $\mathcal{U}$). $\mathbb{N}$ é um subconjunto de ${}^*\mathbb{N}$ já que para todo $m \in \mathbb{N}$ podemos fazer corresponder o número $[\{m\}]$ pertencente a ${}^*\mathbb{N}$. Por outro lado, $\mathbb{N}$ coincide com o conjunto de todos os elementos finitos de ${}^*\mathbb{N}$. De fato, se $\nu = [\{m_i\}]$ for um elemento finito de ${}^*\mathbb{N}$, então existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $m_i \leq p$ para quase todo $i \in I$. Para $k = 1, 2, \ldots, p$, seja $A_k = \{i \in I | m_i = k\}$. Como $A_k \cap A_j = \emptyset$ se $k \neq j$ e $\cup_{k=1}^{p} A_k = \{i \in I | m_i \leq p\} \in \mathcal{U}$, então um e só um dos conjuntos A_k

pertencem a $\mathcal{U}$, isto é, existe apenas um número natural $r \leq p$, tal que $A_r \in \mathcal{U}$, daí, $\nu = [\{r\}] = {}^*r \in \mathbb{N}$.

Portanto, ${}^*\mathbb{N} = \{\nu = [\{m_i\}_{i\in I}] | m_i \in \mathbb{R} \text{ e } \{i \in I | m_i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}\}$.

O conjunto ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, é constituído por todos os números hipernaturais infinitos, que denotaremos por ${}^*\mathbb{N}_\infty$.

2. Extensão de Funções

Considere a estrutura $\mathbb{A}$ e seja $B \subseteq A$, então a função $h : B \longrightarrow A$ pode ser estendida a uma função ${}^*h : {}^*B \longrightarrow {}^*A$ da seguinte maneira:

$$ {}^*h([\{x_i\}_{i\in I}]) = [\{h(x_i)\}_{i\in I}]. $$

Como $[\{x_i\}] \in {}^*B$, temos que $\{i \in I | x_i \in B\} \in \mathcal{U}$. Em geral $\{i \in I | x_i \in B\} \neq I$, isto é, algum x_i pode não pertencer a B. Deste modo quem seria $h(x_i)$?

Para evitar este problema, basta fazer a seguinte re-interpretação de $h(x_i)$ para $i \in I$: se $J = \{i \in I | x_i \in B\}$, definimos

$$ h_1(x_i) = \begin{cases} h(x_i) & \text{se} \quad i \in J \\ a & \text{se} \quad i \notin J \end{cases} $$

onde a é um elemento fixo de A.

Prova-se facilmente que $[\{h_1(x_i)\}] = [\{h(x_i)\}]$, pois $\{h_1(x_i)\} \equiv_{\mathcal{U}} \{h(x_i)\}$, já que $\{i \in I | h_1(x_i) = h(x_i)\} \supseteq J$ e $J \in \mathcal{U}$. Logo pela propriedade do fechamento $\{i \in I | h_1(x_i) = h(x_i)\} \in \mathcal{U}$.

Um exemplo importante da extensão de funções é a extensão de seqüências em $\mathbb{R}$ a hiperseqüências em ${}^*\mathbb{R}$.

Uma seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pode ser vista como uma função

$$ \begin{aligned} x : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto x(n) = x_n \end{aligned} $$

Portanto, ela admite uma extensão a ${}^*\mathbb{R}$ dada por:

$$^*x : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow^* \mathbb{R}$$

onde, ${}^*x([\{n_i\}_{i\in I}]) = [\{x(n_i)\}_{i\in I}] = [\{x_{n_i}\}_{i\in I}]$.

Em geral ${}^*h|_B = h$ (${}^*h$ é uma extensão de h). De fato, se $a \in B$, então

$$\begin{aligned} {}^*h(a) &= {}^*h([\{a\}_{i\in I}]) \\ &= [\{h(a)\}_{i\in I}] \\ &= h(a) \end{aligned}$$

Portanto, a seqüência ${}^*x|_{\mathbb{N}} = x$.

Sendo $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, podemos entender ${}^*x$ da seguinte forma:

$$^*x = \overbrace{(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}^{n\in\mathbb{N}}\underbrace{, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots)}_{\nu\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}$$

${}^*x$ pode ser chamada de hiperseqüência.

A linguagem ampliada de $L(\mathbb{A})$ é definida mediante as mesmas cláusulas que $L(\mathbb{A})$ acrescentando no vocabulário inicial, como termos, além das variáveis de indivíduos e dos termos constantes c_k, variáveis ou constantes que representem subconjuntos de $\mathbb{A}$ ou funções de $B(\subseteq A)$ em A. A única restrição é que as tais novas variáveis não podem ser quantificadas, e as variáveis quantificadas só podem aparecer na forma $(\forall x)(x \in B \Rightarrow \ldots)$ ou $(\exists x)(x \in B \wedge \ldots)$ sendo B um subconjunto constante de A.

Nesse caso, dada uma sentença p nessa linguagem ampliada, defini-se ${}^*p$ como a sentença p, onde foram substituídas as constantes B de subconjuntos de A por ${}^*B \subseteq {}^*A$ e as funções $f : B \longrightarrow A$ por ${}^*f : {}^*B \longrightarrow {}^*A$.

Prova-se, então, o seguinte princípio de transferência ampliado, o qual é devido a Abraham Robinson.

Teorema 1.4.2 (Segundo Princípio de Transferência)**.** *Seja* $\mathbb{A}$ *uma estrutura e* p *uma sentença da linguagem* $L(\mathbb{A})$ *ampliada. Então,*

$$\mathbb{A} \models p \Leftrightarrow {}^*\mathbb{A} \models {}^*p \qquad \square$$

Veremos a seguir, como podem ser demonstradas, usando o segundo princípio de transferência, algumas propriedades de seqüências em $\mathbb{R}$ através das hiperseqüências correspondentes.

Proposição 1.4.1. *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de números reais, então*

$$x_n \to a(\in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall \nu)(\nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty \Rightarrow x_\nu \approx a).$$

Prova:

Suponha que $x_n \to a$, e seja $\nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ fixado mas arbitrário. Pela definição de convergência temos que, dado um número real $e > 0$, existe $n_e \in \mathbb{N}$, tal que é satisfeita a seguinte propriedade expressa na linguagem $L(\mathbb{R})$:

$$\forall n[n \in \mathbb{N} \longrightarrow (n \geq n_e \longrightarrow |x_n - a| < e)].$$

Logo, aplicando o princípio de transferência, temos

$$\forall n[n \in {}^*\mathbb{N} \longrightarrow (n \geq n_e \longrightarrow {}^*|x_n - a| < e)].$$

Seja ν um número hipernatural infinito, então, $\nu > n_e$ e, portanto, ${}^*|x_\nu - a| = |x_\nu - a| < e$. Como o número real $e > 0$ pode ser tomado arbitrariamente, então, $|x_\nu - a|$ é menor que todo número real positivo donde $|x_\nu - a|$ é um infinitésimo, isto é, $x_\nu \approx a$.

Para provar o recíproco, suponhamos que $x_\nu \approx a$ para todo $\nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. Mostraremos então que dado um número real $e > 0$ arbitrário, quase todos os termos da seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, pertencem ao intervalo $(a - e, a + e)$. Seja $\sigma \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ um número fixado. Como $x_\nu \approx a$

$$\exists \sigma[\sigma \in {}^*\mathbb{N} \wedge \forall \nu[\nu \in {}^*\mathbb{N} \longrightarrow [\nu \geq \sigma \longrightarrow |x_\nu - a| < e]].$$

Aplicando o princípio de transferência, temos

$$\exists s[s \in \mathbb{N} \wedge \forall n[n \in \mathbb{N} \longrightarrow [n \geq s \longrightarrow |x_n - a| < e]]]$$

o que significa que a é o limite de x_n, quando $n \to \infty$. $\square$

Demonstrações com argumentos análogos podem ser encontradas para as seguintes proposições.

Proposição 1.4.2. *Uma seqüência* $x = \{x_n\}$ *é limitada* $\Leftrightarrow \forall \nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty, {}^*x(\nu) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$.

Proposição 1.4.3. $\{x_n\}$ *é de Cauchy em* $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \nu, \mu \in {}^*\mathbb{N}_\infty, x_\nu \approx x_\mu$.

Teorema 1.4.3 (Completude de $\mathbb{R}$)**.** *Seja* $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, *então* $\{x_n\}$ *é convergente se e somente se* $\{x_n\}$ *é de Cauchy.*

Prova:

$(\Rightarrow)$

Suponha $\{x_n\}$ convergente, isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \to \alpha$. Portanto, $\forall \mu \in {}^*\mathbb{N}_\infty, x_\nu \approx \alpha$.

Sejam $\nu, \mu \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, então $x_\nu \approx \alpha$ e $x_\mu \approx \alpha$, logo $x_\nu \approx x_\mu$, ou seja $\{x_n\}$ é de Cauchy.

$(\Leftarrow)$

Suponhamos $\{x_n\}$ de Cauchy, então $\{x_n\}$ é limitada, isto é, $\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty, x_\nu \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$.

Devemos encontrar um $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \to \alpha$. Seja $\nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, então, como $x_\nu \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$, existe $\alpha_\nu = st(x_\nu)$, assim $x_\nu \approx \alpha_\nu$.

Resta provar que α_ν não depende de ν, e assim, $\alpha = \alpha_\nu, \forall \nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ e $x_\nu \approx \alpha$. Suponhamos $\nu, \mu \in {}^*\mathbb{N}$, então, por um lado $x_\nu \approx x_\mu$ e por outro, $x_\nu \approx \alpha_\nu$ e $x_\mu \approx \alpha_\mu$. Deste modo, $\alpha_\nu \approx \alpha_\mu$, isto é, $\alpha_\nu = \alpha_\mu$, pois são reais. $\square$

Capítulo 2

Objetos Internos no Universo de ${}^*\mathbb{R}$

2.1 Subconjuntos Internos de ${}^*\mathbb{R}$

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, havíamos definido(no capítulo 1)

$$ {}^*A = \{[\{x_i\}] \in {}^*\mathbb{R} | \{i \in I | x_i \in A\} \in \mathcal{U}\}. $$

Observamos que no conjunto $\{i \in I | x_i \in A\}, A$ é fixo, isto é, não depende de i.

Definição 2.1.1. *Seja, agora* $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ *uma família se subconjuntos de* $\mathbb{R}$*, então, definimos à partir dessa família, o seguinte subconjunto de* ${}^*\mathbb{R}$*,*

$$ {}^*\mathcal{F}(= {}^*\{A_i\}) = \{[\{x_i\}] \in {}^*\mathbb{R} | \{i \in I | x_i \in A_i\} \in \mathcal{U}\}, $$

temos, então, ${}^*\{A_i\} \subseteq {}^*\mathbb{R}$.

Definição 2.1.2. *Um conjunto* $B \subseteq {}^*\mathbb{R}$ *é dito interno se existe uma família* $\{A_i\}_{i \in I}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}$*, tal que,* $B = {}^*\{A_i\}$.

Em particular, para todo $A \subseteq \mathbb{R}, {}^*A$ é interno.

Por exemplo, ${}^*\mathbb{R}, {}^*\mathbb{N}$, são subconjuntos internos.

Veremos que ${}^*\mathbb{N}_\infty$ não é interno apesar de ser um subconjunto de ${}^*\mathbb{R}$. Os subconjuntos de ${}^*\mathbb{R}$ que não são internos serão ditos *externos*. Uma pergunta natural é a seguinte: se considerarmos ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^I/_{\mathcal{U}}$, qual será a relação entre ${}^*\mathbb{N}$ assim definido e como subconjunto de ${}^*\mathbb{R}$?

Pela definição, como subconjunto interno, ${}^*\mathbb{N} = \{[\{x_i\}] \in {}^*\mathbb{R} | \{i \in I | x_i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}\}$, donde existem elementos $[\{x_i\}]$ tais que nem todos os $x_i's$ são naturais, no entanto, em $\mathbb{N}^I/_{\mathcal{U}}$ todos os elementos de todas as classes são naturais.

Proposição 2.1.1. *Se* ${}^*\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^I/_{\mathcal{U}}$, *então,* ${}^*\mathbb{N}_1 = {}^*\mathbb{N}$.

Prova:

Basta mostrarmos que toda classe de equivalência $[\{x_i\}] \in {}^*\mathbb{N}$, tem um representante com todas os seus componentes naturais.

Chamemos de $J = \{i \in I | x_i \in \mathbb{N}\}$ e

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{se} \quad i \in J \\ 1 & \text{se} \quad i \notin J. \end{cases}$$

Obviamente, $[\{y_i\}] \in {}^*\mathbb{N}_1$.

Resta provar que $\{x_i\} \equiv_{\mathcal{U}} \{y_i\}$. De fato, $\{i \in I | x_i = y_i\} \supseteq J$, logo, como $J \in \mathcal{U}$, temos que $\{i \in I | x_i = y_i\} \in \mathcal{U}$, donde podemos concluir que $[\{x_i\}] = [\{y_i\}] \in {}^*\mathbb{N}_1$, ou seja, ${}^*\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}_1$. A inclusão recíproca é óbvia. $\square$

Pode-se provar facilmente que se $A, B \subseteq {}^*\mathbb{R}$ são internos, então: $A \cup B, A \cap B$ e $A \setminus B$ são internos.

A seguir veremos que algumas propriedades de subconjuntos de $\mathbb{R}$ podem ser também provados para subconjuntos internos de ${}^*\mathbb{R}$.

Proposição 2.1.2. *Todo subconjunto interno não vazio de* ${}^*\mathbb{N}$ *tem elemento mínimo.*

Prova:

Seja $A \subseteq {}^*\mathbb{N}, A \neq \emptyset$ e A interno, então $A = {}^*\{A_i\}$ onde cada $A_i \subseteq \mathbb{N}$, isto é, $A = \{[\{n_i\}] \in {}^*\mathbb{N} | \{i \in I | n_i \in A_i\} \in \mathcal{U}\}$. Como $A \neq \emptyset$, existe $[\{n_i\}] \in A$ e portanto $J = \{i \in I | n_i \in A_i\} \in \mathcal{U}$.

Observa-se que $A_i \neq \emptyset, \forall i \in J$, logo, como $A_i \subseteq \mathbb{N}$, temos que para cada $i \in J$, existe um elemento mínimo de A_i, m_i.

Definimos

$$x_i = \begin{cases} m_i & \text{se} \quad i \in J \\ 1 & \text{se} \quad i \notin J. \end{cases}$$

Afirmação: $[\{x_i\}]$ é o elemento mínimo de A.

De fato, $[\{x_i\}] \in A$, pois $\{i \in I | x_i \in A_i\} \in \mathcal{U}$, já que contém J.

Finalmente, seja $[\{n_i\}] \in A$, isto é, $\{i \in I | n_i \in A_i\} \in \mathcal{U}$.

Provaremos que $[\{x_i\}] \leq [\{n_i\}]$. Para que $[\{x_i\}] \leq [\{n_i\}]$ é necessário e suficiente que $\{i \in I | x_i \leq n_i\} \in \mathcal{U}$, o que é verdadeiro, pois, como $J \in \mathcal{U}$, e $J \subseteq \{i \in I | x_i \leq n_i\}$, temos que, $\{i \in I | x_i \leq n_i\} \in \mathcal{U}$. $\square$

Proposição 2.1.3. *Seja $B \subseteq {}^*\mathbb{R}$, interno, não vazio e limitado superiormente, então existe o supremo de B em ${}^*\mathbb{R}$.*

Prova:

Seja $B = {}^*\{A_i\}$ um subconjunto interno não vazio de ${}^*\mathbb{R}$ limitado superiormente por $a = [\{a_i\}_{i \in I}] \in {}^*\mathbb{R}$. Então para quase todo $i \in I$, o conjunto $A_i \subseteq \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente por $a_i \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $sup(A_i)$ existe para quase todo $i \in I$ e, portanto, o número hiperreal

$$sup(B) = [\{sup(A_i)\}_{i \in I}]$$

é o supremo de B em ${}^*\mathbb{R}$. $\square$

Se B é interno e $\{A_i\}$ é uma família que define B, denotaremos

$$B = [\{A_i\}],$$

isto é, $B = {}^*\{A_i\} = [\{A_i\}]$.

Teorema 2.1.1 (Transbordo superior). *Seja $A = [\{A_i\}_{i \in I}]$ um subconjunto interno de ${}^*\mathbb{R}$. Se A contiver elementos finitos arbitrariamente grandes, então A contém algum elemento infinito.*

Prova:

Se A for ilimitado em ${}^*\mathbb{R}$ nada temos que provar. De fato, pois se A não contiver algum elemento infinito, teríamos que $A \subseteq {}^*\mathbb{R}_{fin}$ e portanto, A seria limitado já que ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ o é.

Suponhamos, então, que A é limitado superiormente. Seja a o supremo de A. É evidente que a não pode ser finito pela hipótese. Da definição de supremo resulta então que existe $x \in A$, tal que $\frac{a}{2} \leq x \leq a$ e, portanto, sendo a infinito, temos que x também é, logo, A possui um elemento infinito. $\square$

Teorema 2.1.2 (Tranbordo inferior). *Seja $A = [\{A_i\}_{i \in I}]$ um subconjunto interno de ${}^*\mathbb{R}$. Se A contiver elementos infinitos positivos arbitrariamente pequenos, então A contém um elemento finito.*

Prova: Seja A^+ o subconjunto constituído pelos elementos positivos de A, o qual também é interno, e seja $b = inf(A^+)$. Da hipótese segue-se que $b \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$ pelo que, da definição de ínfimo de um conjunto limitado inferiormente existe $x \in A^+$ tal que $b \leq x < b + 1$ e, portanto, $x \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$. Então, A contém um elemento finito. $\square$

O teorema anterior tem como consequência que ${}^*\mathbb{N}_\infty$ não é um subconjunto interno de ${}^*\mathbb{R}$.

2.1.1 Subconjuntos Hiperfinitos e Cardinalidade Interna

Um subconjunto $B \subseteq {}^*\mathbb{R}$ será dito *hiperfinito* se B é interno com $B = [\{A_i\}]$, onde $\{i \in I | A_i \text{ é finito}\} \in \mathcal{U}$, isto é, quase todos os A_i são finitos.

Chamando de $J = \{i \in I | A_i \text{ é finito}\}$, temos que para cada $i \in J$, existe $n_i = |A_i| \in \mathbb{N}$ ($|A|$ denota a cardinalidade de A). Definimos, então, $\mu = [\{m_i\}]$ onde:

$$m_i = \begin{cases} n_i & \text{se} \quad i \in J \\ k & \text{se} \quad i \notin J \end{cases}$$

sendo k qualquer em $\mathbb{R}$. $\mu (\in {}^*\mathbb{N})$ será chamado de **cardinalidade interna** de B e será denotada também por $|B|$.

Vejamos o seguinte exemplo: consideremos ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^\mathbb{N}/_\mathcal{U}$;

1. para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \{0, 1, 2, \ldots n\}$, então $B = [\{A_n\}]$ é um subconjunto hiperfinito de ${}^*\mathbb{R}$. Tomando $\omega = [\{n\}_{n\in\mathbb{N}}] = [\{0, 1, 2, \ldots\}]$, temos que $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ e $|B| = \omega$;

2. para cada $n > 1$, seja
$$A_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}.$$
Consideremos o conjunto hiperfinito $B = [\{A_n\}]$. Assim definido, qual será a cardinalidade interna de B?

   Se $\omega = [\{n\}_{n\in\mathbb{N}}] = [\{0, 1, 2, \ldots\}]$, então, provaremos que $|B| = \omega + 1$. Para cada $n \geq 1$, $|A_n| = n+1$, logo, $|B| = [\{n+1\}_{n\in\mathbb{N}}] = [\{n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{1\}] = [\{n\}] + [\{1\}] = \omega + 1$.

   Veremos, agora, como é o conjunto B:

   Provaremos que $B = \{\frac{k}{\omega} | k = 0, 1, 2, \ldots, \omega\}$.

   $[\{x_n\}] \in B \Leftrightarrow K = \{n \in \mathbb{N} | x_n \in A_n\} \in \mathcal{U}$. Para cada $n \in K$, existe k_n, tal que, $x_n = \frac{k_n}{n}$, sendo $0 \leq k_n \leq n$. Definimos,
$$l_n = \begin{cases} k_n & \text{se } n \in K \\ p & \text{se } n \notin K \end{cases}$$
com p qualquer em $\mathbb{R}$. Se $k = [\{l_n\}]$, podemos afirmar que $[\{x_n\}] = \frac{k}{\omega}$ com $0 \leq k \leq \omega$. De fato, definindo
$$y_n = \begin{cases} \frac{k_n}{n} & \text{se} \quad n \in K \\ p & \text{se} \quad n \notin K \end{cases}$$
temos que, $[\{x_n\}] = [\{\frac{k_n}{n}\}] = \frac{[\{k_n\}]}{[\{n\}]} = \frac{[\{l_n\}]}{[\{n\}]} = \frac{k}{\omega}$.

   Finalmente, $0 \leq k \leq \omega$ pois $\{n \in \mathbb{N} | 0 \leq k_n \leq n\} \in \mathcal{U}$, já que contém K. $\square$

Proposição 2.1.4. *Se $B \subseteq {}^*\mathbb{R}$ é hiperfinito, então, existe máximo e mínimo de B.*

Prova:

Suponhamos $B = [\{A_i\}]$, onde $J = \{i \in I | A_i \text{ é finito}\} \in \mathcal{U}$.

Como para todo $i \in J, A_i$ é finito, existem $m_i = min(A_i)$ e $M_i = max(A_i)$. Tomando $m = [\{m_i\}]$ e $M = [\{M_i\}]$, provaremos que $m = min(B)$ e $M = max(B)$.

Suponha que m não seja o mínimo de B. Logo existe $m_1 = [\{k_i\}] \in B$ tal que $m_1 < m$, logo, $\{i \in J | k_i < m_i\} \in \mathcal{U}$, o que é impossível, pois

$$\{i \in J | k_i < m_i\} = \emptyset \notin \mathcal{U}.$$

Portanto, $m = min(B)$. Do mesmo modo provamos que $M = max(B)$. □

2.2 Funções Internas

Do mesmo modo que fizemos para conjuntos, podemos fazer a distinção entre funções internas e externas definidas em um subconjunto $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$.

Vimos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ onde, $A \subseteq \mathbb{R}$ é uma função, então, ela pode ser estendida a ${}^*f : {}^*A \longrightarrow {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^I/_{\mathcal{U}}$ dada por ${}^*f([\{x_i\}]) = [\{f(x_i)\}]$.

Definição 2.2.1. *Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $\{f_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ uma família de funções, então, essa família define uma função $F : A \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$, onde $A = [\{A_i\}]$, da seguinte maneira*

$$F([\{x_i\}]) = [\{f_i(x_i)\}].$$

F será denotado por $[\{f_i\}]$.

Na realidade , como a construção de ${}^*f$, $f_i(x_i)$ pode não estar definida se $x_i \notin A_i$. A rigor, devemos considerar para cada $i \in I$ e para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\bar{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{se} \quad x \in A_i \\ k, & \text{se} \quad x \notin A_i, \end{cases}$$

onde k é constante, e definir $F([x_i]) = [\{\bar{f}_i(x_i)\}]$.

Proposição 2.2.1. *Se* $\{i \in I | f_i = f\} \in \mathcal{U}$*, então* $F = {}^*f$*.*

Prova:

Como $\{i \in I | f_i = f\} \in \mathcal{U}$ temos também que $\{i \in I | f_i(x_i) = f(x_i)\} \in \mathcal{U}$, logo, $F([\{x_i\}]) = [\{f_i(x_i)\}] = [\{f(x_i)\}] = {}^*f([\{x_i\}])$. $\square$

Definição 2.2.2. *Seja* $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ *e* $F : A \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ *uma função, então,* F *é chamada* ***interna*** *se é obtida pelo processo anterior, isto é, se* A *é um subconjunto interno de* ${}^*\mathbb{R}$ *da forma* $A = [\{A_i\}]$ *e* $F = [\{f_i\}]$ *onde para cada* $i \in I, f_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$*. Qualquer outra função é externa.*

Vejamos o seguinte exemplo: considere ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}}$ e $\omega = [\{n\}_{n\in\mathbb{N}}] \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. Definimos $F : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ por $F(x) = \frac{\omega}{1+\omega^2x^2} \in {}^*\mathbb{R}$.

Vejamos que F é interna. Basta considerar $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$.

Seja $x = [\{x_n\}]$, então, $F(x) = \frac{\omega}{1+\omega^2x^2} = \frac{[\{n\}]}{[\{1\}]+[\{n^2\}][\{x_n^2\}]} = \frac{[\{n\}]}{[\{1+n^2x_n^2\}]} = [\{\frac{n}{1+n^2x_n^2}\}] = [\{f_n(x_n)\}]$.

Integral de Funções Internas

Consideremos ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}}$ e seja $f_n : K_n \longrightarrow \mathbb{R}$, uma família de funções reais onde K_n é um intervalo finito do tipo $K_n = [a_n, b_n]$. Suponhamos que todas as f_n sejam integráveis em K_n, isto é, existem $\int_{K_n} f_n(t)dt$ (por exemplo, se as funções f_n forem contínuas). Então, definindo $F = [\{f_n\}]$, isto é, $F([\{x_n\}]) = [\{f_n(x_n)\}]$, e $K = [\{K_n\}]$, temos que $F : K \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$, para a qual é possível definir a integral da seguinte maneira:

$$^*\int_K F(t)dt = [\{\int_{K_n} f_n(t)dt\}] \in {}^*\mathbb{R}.$$

$^*\int_K F(t)dt$ é chamada de *integral hiperreal.*

2.3 Superestruturas

Seja I um conjunto infinito de índices e $\mathcal{U}$ um ultrafiltro livre sobre I fixo. Denotaremos ${}^*\mathbb{R}$ como o quociente $\mathbb{R}^I/_{\mathcal{U}}$, o conjunto dos números hiperreais. Para podermos estender o princípio de transferência a todas as "entidades" possíveis da análise não standard, construiremos sistematicamente um hiperuniverso de modo que envolva $\mathbb{R}$, subconjuntos e relações de $\mathbb{R}$, funções reais de uma ou mais variáveis, espaços, etc.

Neste hiperuniverso, poderemos efetuar a quantificação sobre variáveis que denotem conjuntos de números, funções, etc.

Diferentemente da teoria de conjunto de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, onde todos os seus objetos são conjuntos, desenvolveremos uma teoria onde poderemos considerar certos objetos que não tem elementos ou seja que é um todo sem partes. O conjunto de todos esses elementos encarados como não conjuntos, será chamado de **conjunto de átomos** da teoria.

Seja X um conjunto apropriado de átomos, que pode ser $\mathbb{R}$. Consideremos a família de conjuntos $\{X_n\}_{n=0,1,\ldots}$ definida, indutivamente por

$$X_0 = X; X_1 = X_0 \cup \mathcal{P}(X_0); \ldots; X_{n+1} = X_n \cup \mathcal{P}(X_n), n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definição 2.3.1. *Chamamos de superestrutura sobre o conjunto X de átomos ao conjunto definido por*

$$\mathcal{V}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n.$$

Se $X = \mathbb{R}$, temos, $\mathcal{V}(\mathbb{R})$, onde se faz a análise real usual. Se $X = {}^*\mathbb{R}$, temos, $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$, onde se faz a análise não standard. Os elementos de X_0 são os *átomos* e, aos elementos de $\mathcal{V}(X) \setminus X_0$ dá-se o nome de *entidades* da superestrutura.

Observa-se que $X_n \subseteq X_{n+1}, \forall n \geq 0$, em particular $X \subseteq X_n$, o que implica $\mathcal{P}(X_n) \subseteq \mathcal{P}(X_{n+1})$, então, por indução finita, podemos verificar que

$$X_{n+1} = X \cup \mathcal{P}(X_n), n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definição 2.3.2. *Um conjunto Y é dito transitivo se $a \in b \in Y$, implica $a \in Y$.*

Por exemplo, se $A = \{a, b, \ldots\}, \mathcal{P}(A)$ não é transitivo, pois, $b \in \{b\} \in \mathcal{P}(A)$, mas $b \notin \mathcal{P}(A)$.

Proposição 2.3.1. $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ *é transitivo.*

Prova:

Seja $b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) = \cup \mathbb{R}_n$ e seja $a \in b$. Devemos provar que $a \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$. Temos que $b \in \mathbb{R}_k$ para algum $k > 0$, pois b não pode ser um átomo já que contém a. Como $\mathbb{R}_k = \mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R}_{k-1})$, temos que $b \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_{k-1})$.

Isto significa que $b \subseteq \mathbb{R}_{k-1}$, portanto, como $a \in b$, temos que $a \in \mathbb{R}_{k-1} \subseteq \mathcal{V}(\mathbb{R})$. $\square$

Prova-se facilmente que X_n é transitivo para $n \geq 1$.

Observa-se que $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_1 \subseteq \mathbb{R}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{V}(\mathbb{R}) = \cup \mathbb{R}_n$, e também, $\mathbb{R} \in \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_2 \in \ldots \in \mathbb{R}_n \in \mathbb{R}_{n+1} \in \ldots$.

Definição 2.3.3. *Se $a \in X_{n+1} \setminus X_n$, diremos que a é uma entidade de **posto** $n+1$, o qual denotaremos por*

$$r(a) = n + 1.$$

Se $t \in X$, então $r(t) = 0$.

Proposição 2.3.2.

1. se $a \in X_n$, então, $\{a\} \in X_{n+1}$;
2. se $a, b \in X_n$, então, $\{a, b\} \in X_{n+1}$;
3. se $a, b \in X_n$, então, $(a, b) \in X_{n+2}$;

Prova:

1. Como $a \in X_n$ temos que $\{a\} \in \mathcal{P}(X_n)$. Sabendo que $X_{n+1} = X_n \cup \mathcal{P}(X_n)$, podemos concluir que $\{a\} \in X_{n+1}$;
2. análogo à prova do item 1;
3. demonstraremos este item baseados na definição de par ordenado como um conjunto; essa definição é devida a Kuratowski:

$$(a, b) =_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Logo, decorre de 1 e 2 que $(a,b) \in X_{n+2}$. $\square$

Pode-se provar, também, que se $a \in X_n$, então, $\mathcal{P}(a) \in X_{n+2}$.

Corolário 2.3.1. *Se R é uma relação binária em X_n, isto é, $R \subseteq X_n \times X_n$, então $R \in X_{n+3}$. Em particular, $X_n \times X_n \in X_{n+3}$ e toda função $f : X_n \longrightarrow X_n$ é uma entidade de X_{n+3}.*

Prova:

Já vimos que $\forall a, b \in X_n, (a,b) \in X_{n+2}$, logo $X_n \times X_n \subseteq X_{n+2}$. Portanto, $R \subseteq X_{n+2}$, ou seja, $R \in \mathcal{P}(X_{n+2}) \subseteq X_{n+3}$. $\square$

Proposição 2.3.3. *Um subconjunto $A \subseteq \mathcal{V}(X)$ pertence a $\mathcal{V}(X)$ se, e somente se existe $max\{r(x)|x \in A\}$.*

Prova:

($\Leftarrow$): se $n = max\{r(x)|x \in A\}$, e $A \subseteq \mathcal{V}(X)$, então $A \subseteq X_n$, logo $A \in X_{n+1} \subseteq \mathcal{V}(X)$, isto é, $A \in \mathcal{V}(X)$.

($\Rightarrow$): suponhamos $A \subseteq \mathcal{V}(X)$, então, pela hipótese $A \in \mathcal{V}(X) = \bigcup_{n \geq 0} X_n$, logo, existe m, tal que, $A \in X_m$.

Seja $x \in A$, então pela transitividade de X_m, temos que $x \in X_m$, portanto $r(x) \leq m$, deste modo existe $max\{r(x)|x \in A\} \leq m$. $\square$

2.3.1 Espaços Topológicos

Um espaço topológico é um par (X, τ), onde X é um conjunto e τ uma topologia em X. Uma topologia sobre o conjunto X é uma subcoleção de $\mathcal{P}(X)$ cujos elementos são chamados de **os abertos de** X que satisfaz:

- $\emptyset, X \in \tau$;
- $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$;
- $\{A_i\} \subseteq \tau \Rightarrow \cup A_i \in \tau$.

Proposição 2.3.4. *Se X é um conjunto e τ uma topologia sobre X, então, o espaço topológico $(X, \tau) \in \mathcal{V}(X)$.*

Prova:

Como τ é uma topologia sobre X, temos $\tau \subseteq \mathcal{P}(X) \subseteq X_1 \subseteq \mathcal{V}(X)$, sendo, então, $r(x) \leq 1, \forall x \in \tau$. Portanto, $\tau \in \mathcal{V}(X) = \cup X_n$. Logo $\tau \in X_m$ para algum $m \geq 1$.

Por outro lado, como, por definição, os conjuntos $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ satisfazem a seguintes cadeias de relações

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_m \subset \ldots$$

$$X_0 \in X_1 \in X_2 \in \ldots \in X_m \in \ldots$$

Deste modo, $X \in X_m$.

Assim, como $\tau, X \in X_m$, temos pela proposição 2.4.2, item 3, que $(X, \tau) \in X_{m+2}$ e portanto, $(X, \tau) \in \mathcal{V}(X)$. $\square$

Temos como casos particulares:

- se τ é a topologia usual de $\mathbb{R}$, então $(\mathbb{R}, \tau) \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$;
- se τ é a topologia usual de $\mathbb{R}^n$, então, $(\mathbb{R}^n, \tau) \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$.

O mesmo argumento anterior pode ser usado para espaços mensuráveis $(X, \mathcal{X})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra sobre X.

2.4 Mergulho de Superestruturas

Começamos formulando o seguinte problema:

Como estender a função

$${}^* : \mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R} \quad \text{para outra} \quad {}^* : \mathcal{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{V}({}^*\mathbb{R}),$$

de modo que restrita a $\mathbb{R}$ coincida com a anterior.

As exigências mínimas para essa extensão serão as seguintes (observe-se que estamos usando o mesmo símbolo * para a extensão):

1. se $a \in \mathbb{R}$, então, ${}^*a = [\{a\}] \in {}^*\mathbb{R}$;

2. se $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, então, $a \in b \Leftrightarrow {}^*a \in {}^*b$.

2.4.1 Construção da Extensão "$*$"

Para podermos estender a função "$*$" de modo que tenha características tais que às relações de pertinência e igualdade em $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ venham a corresponder em $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$ verdadeiras relações de pertinência e igualdade, no sentido conjuntista, para então estabelecermos um princípio geral de transferência, teremos que definir a aplicação "$*$" por composição de outras duas aplicações: a aplicação constante ou mergulho k, e a aplicação μ chamada de **Colapso de Mostowski**, como veremos a seguir.

Para aqueles mesmos conjunto de índices I e ultrafiltro $\mathcal{U}$, definimos a ultrapotência

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}(\mathbb{R})^I/_{\mathcal{U}} = {}^*\mathcal{V}(\mathbb{R}).$$

Os elementos de $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ são da forma $[\{a_i\}_{i \in I}]$, onde $a_i \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$. Em particular, se cada $A_i \subseteq \mathbb{R}$, então $[\{A_i\}] \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$. Veremos, depois, que $[\{A_i\}]$ corresponde ao que na seção 2.1 tinhamos definido por ${}^*\{A_i\}$.

Em $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$, temos por definição:

1. $[\{a_i\}] = [\{b_i\}] \Leftrightarrow \{i \in I | a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$

2. $[\{a_i\}] \in' [\{b_i\}] \Leftrightarrow \{i \in I | a_i \in b_i\} \in \mathcal{U}$.

Observe-se que $\in'$ não é uma pertinência conjuntista, pois é a relação correspondente a "$\in$" em $\mathcal{V}(\mathbb{R})^I/_{\mathcal{U}}$.

Aplicação Constante ou Mergulho k

Para $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$, podemos definir, em analogia com o caso de ${}^*\mathbb{R}$, o mergulho

$$\begin{aligned} k : \mathcal{V}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto k(a) = [\{a\}]. \end{aligned}$$

Proposição 2.4.1. *Para todo* $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, *temos:*

1. $a = b \Leftrightarrow k(a) = k(b)$;

2. $a \in b \Leftrightarrow k(a) \in' k(b)$.

Prova:

1. $a = b \Leftrightarrow \{i \in I | a = b\} = I \in \mathcal{U} \Leftrightarrow k(a) = [\{a\}] = [\{b\}] = k(b)$.

2. $a \in b \Leftrightarrow I = \{i \in I | a \in b\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow k(a) = [\{a\}] \in' [\{b\}] = k(b)$. $\square$

De (1) resulta que k é injetiva. Portanto, podemos considerar $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ mergulhado em $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$. Mais ainda, podemos observar que $k|_{\mathbb{R}} = {}^* : \quad \mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$

Definição 2.4.1. *Uma família* $a = \{a_i\}_{i \in I}$ *de elementos de* $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ *diz-se limitada se existir* $m \in \mathbb{N}$ *(fixado), tal que* $\{i \in I | r(a_i) \leq m\} \in \mathcal{U}$. *Chama-se Ultrapotência Limitada de* $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ *à parte de* $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ *constituída pelas classes de equivalência representáveis por famílias limitadas. Denotaremos a ultrapotência limitada de* $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ *por* $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$.

Desta definição tem-se imediatamente a igualdade:

$$\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) = \{[\{a_i\}] \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) | \exists n; \{i \in I | r(a_i) \leq n\} \in \mathcal{U}\}.$$

Observa-se que $k[\mathcal{V}(\mathbb{R})] \subseteq \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$. Observa-se também que ${}^*\mathbb{R} \subseteq \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$, pois se $[\{x_i\}] \in {}^*\mathbb{R}$, então, cada $x_i \in \mathbb{R} = \mathbb{R}_0$, logo, os postos dos x_i estão limitados. Também ${}^*\mathbb{R} \subseteq \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$.

Colapso de Mostowski:

Definiremos agora, uma nova aplicação μ que permite passar de $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$ a qual, como veremos, por composição com a aplicação constante k, nos permitirá realizar o mergulho * procurado, isto é, ${}^* = \mu \circ k$.

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$$

$$\searrow {}^* = \mu \circ k \nearrow$$

Definição 2.4.2. *Chamamos Colapso de Mostowski à aplicação*

$$\mu : \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) a restrição de μ a $\mathbb{R}^I/_{\mathcal{U}}(= {}^*\mathbb{R})$ é a aplicação identidade;

(b) para um elemento $[\{a_i\}_{i\in I}]$ qualquer de $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) \setminus (\mathbb{R}^I/_{\mathcal{U}})$ define-se a transformada de Mostowski $\mu([\{a_i\}_{i\in I}])$, indutivamente por

$$\mu([\{a_i\}_{i\in I}]) = \{\mu([\{x_i\}_{i\in I}]) | [\{x_i\}_{i\in I}] \in' [\{a_i\}_{i\in I}]\}.$$

Essa definição é a que permite transformar a pertinência $\in'$ de $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ numa pertinência conjuntista em $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$. A definição de μ é indutiva.

A seguinte proposição mostra que, através do Colapso de Mostowski, subconjuntos internos de ${}^*\mathbb{R}$ podem ser definidos.

Proposição 2.4.2. *Seja $\{A_i\}$ uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}$, e consideremos o subconjunto interno A de ${}^*\mathbb{R}$, definido pela família $\{A_i\}$, isto é, $A = {}^*\{A_i\}$. Como cada $A_i \in \mathbb{R}_1$, temos que $[\{A_i\}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$. Nesse caso, $\mu([\{A_i\}]) = A$.*

Prova:

Como os $A_i's$ não são números reais, então, pela definição de μ, temos:

$$\mu([\{A_i\}]) = \{\mu([\{x_i\}]) | \{i \in I | x_i \in A_i\} \in \mathcal{U}\}.$$

Como quase todo $x_i \in \mathbb{R}$, temos que $[\{x_i\}] \in {}^*\mathbb{R}$, e portanto, $\mu([\{x_i\}]) = [\{x_i\}]$, logo

$$\mu([\{A_i\}]) = \{[\{x_i\}] | \{i \in I | x_i \in A_i\} \in \mathcal{U}\} = A. \qquad \square$$

Uma demonstração análoga pode ser feita para provar que funções internas em ${}^*\mathbb{R}$ podem ser definidas mediante o Colapso de Mostowski.

Proposição 2.4.3. *μ é injetiva.*

Prova:

Sejam $[\{a_i\}], [\{b_i\}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ e suponhamos, $[\{a_i\}] \neq [\{b_i\}]$, assim, $\{i \in I | a_i \neq b_i\} \in \mathcal{U}$. Queremos provar que $\mu([\{a_i\}]) \neq \mu([\{b_i\}])$.

Caso 1: $[\{a_i\}], [\{b_i\}] \in {}^*\mathbb{R}$. Neste caso,

$$\mu([\{a_i\}]) = [\{a_i\}] \neq [\{b_i\}] = \mu([\{b_i\}]).$$

Caso 2: $[\{a_i\}], [\{b_i\}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) \setminus {}^*\mathbb{R}$. Neste caso,

$$\mu([\{a_i\}]) = \{\mu([\{x_i\}]) | [\{x_i\}] \in' [\{a_i\}]\}$$

$$\mu([\{b_i\}]) = \{\mu([\{y_i\}]) | [\{y_i\}] \in' [\{b_i\}]\}.$$

O fato de termos $[\{a_i\}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) \setminus^* \mathbb{R}$, significa que $\{i \in I | a_i \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus^* \mathbb{R}\} \in \mathcal{U}$. Logo, podemos supor que $a_i \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus^* \mathbb{R}$ para todo $i \in I$. De forma análoga podemos supor que $b_i \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus^* \mathbb{R}$, para todo $i \in I$.

Do mesmo modo podemos supor $\forall i, a_i \neq b_i$. Portanto, $a_i \neq b_i$ equivale a a_i não está contido em b_i ou b_i não está contido em a_i, isto é

$$\begin{aligned} I &= \{i \in I | a_i \neq b_i\} \\ &= \{i \in I | a_i \text{ não está contido em } b_i\} \cup \{i \in I | b_i \text{ não está contido em } a_i\}. \end{aligned}$$

Como $I \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro temos que ou $\{i \in I | a_i \text{ não está contido em } b_i\} \in \mathcal{U}$ ou $\{i \in I | b_i \text{ não está contido em } a_i\} \in \mathcal{U}$.

Suponhamos que $\{i \in I | a_i \text{ não está contido em } b_i\} \in \mathcal{U}$, isto é, para quase todo i, existe $x_i \in a_i$ com $x_i \notin b_i$. Provaremos que $\mu([\{x_i\}]) \in \mu([\{a_i\}])$ e $\mu([\{x_i\}]) \notin \mu([\{b_i\}])$, donde $\mu([\{a_i\}]) \neq \mu([\{b_i\}])$. Com efeito, $\mu([\{x_i\}]) \in \mu([\{a_i\}])$, pois $[\{x_i\}] \in' [\{a_i\}]$, já que $\{i \in I | x_i \in a_i\} \in \mathcal{U}$.

Analogamente teremos $\mu([\{x_i\}]) \notin \mu([\{b_i\}])$, pois $\{i \in I | x_i \notin b_i\} \in \mathcal{U}$.

Caso 3: $[\{a_i\}] \in {}^*\mathbb{R}$ e $[\{b_i\}] \notin {}^*\mathbb{R}$.

Neste caso $\mu([\{a_i\}]) \in {}^*\mathbb{R}$ e $\mu([\{b_i\}]) \in \mathcal{V}({}^*\mathbb{R}) \setminus^* \mathbb{R}$, logo são diferentes. $\square$

Como k e μ são aplicações injetivas, então, ${}^* = \mu \circ k$ é também injetiva.

Teorema 2.4.1. *A aplicação*

$$^* = \mu \circ k : \mathcal{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{V}(^*\mathbb{R})$$

definida, para cada $a \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, por

$$^*a = \mu \circ k(a) = \mu([\{a\}_{i\in I}])$$

é um mergulho da superestrutura $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ na superestrutura $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$.

Prova:

Devemos provar que as duas exigências mínimas para o mergulho são satisfeitas.

(i) Se $a \in \mathbb{R}$, então, $^*a = \mu(k(a)) = \mu([\{a\}]) = [\{a\}] = {}^*a$;

(ii) $a \in b \Leftrightarrow {}^*a \in {}^*b$

($\Rightarrow$) Seja $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, quaisquer com $b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$. Suponhamos que $a \in b$, então, pela proposição 2.5.1 $k(a) \in' k(b)$ e portanto, da definiçao de μ, temos que $\mu \circ k(a) \in \mu \circ k(b)$, ou seja $^*a \in {}^*b$;

($\Leftarrow$) Considere agora $^*a \in {}^*b$. Temos, então $\mu \circ k(a) \in \mu \circ k(b)$. Logo levando em conta a defição de $\mu(k(b))$, podemos concluir que, a menos do ultrafiltro $\mathcal{U}$, $k(a) \in' k(b)$. Portanto, novamente pela proposição 2.5.1, temos que $a \in b$. $\square$

Teorema 2.4.2. *O contradomínio do Colapso de Mostowski é:*

$$\mu[\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})] = {}^*\mathbb{R} \cup {}^*(\mathbb{R}_1) \cup \ldots \cup {}^*(\mathbb{R}_k) \cup \ldots$$

Prova:

Seja $a \in \mu[\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})]$ qualquer. Então, $a = \mu([\{a_i\}_{i\in I}])$ com $[\{a_i\}_{i\in I}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$. Isso significa que $[\{a_i\}_{i\in I}] \in \mathbb{R}^I/_{\mathcal{U}}$ ou $[\{a_i\}_{i\in I}] \in (\mathbb{R}_k \setminus \mathbb{R}_{k-1})^I/_{\mathcal{U}}$, para algum $k \geq 1$. Logo $\{i \in I | a_i \in \mathbb{R}_k\} \in \mathcal{U}$. Deste modo podemos concluir que para algum $k \in \mathbb{N}$, temos

$$a = \mu([\{a_i\}]) \in \mu([\{\mathbb{R}_k\}]) = \mu \circ k(\mathbb{R}_k) = {}^*(\mathbb{R}_k).$$

Reciprocamente, seja a um elemento de $^*(\mathbb{R}_k)$ para algum k pertencente aos naturais. Então, $a = \mu([\{a_i\}])$ com $[\{a_i\}] \in' [\{\mathbb{R}_k\}]$, para algum k natural e, portanto $a \in \mu[\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})]$. $\square$

2.5 Objetos Internos e Externos de $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$

Já vimos conjuntos e funções internas de $^*\mathbb{R}$, todos eles recuperáveis através do Colapso de Mostowski, agora veremos como estas definições são estendidas à superestrutura $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$ que é um universo muito mais rico que o universo standard $\mathcal{V}(\mathbb{R})$

Definição 2.5.1. *Uma entidade* $\alpha \in \mathcal{V}(^*\mathbb{R})$ *é dita interna se* $\alpha = \mu([\{a_i\}])$ *com* $[\{a_i\}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ *isto é, se* $\alpha \in im(\mu) \subseteq \mathcal{V}(^*\mathbb{R})$.

Se $\alpha \in \mathcal{V}(^*\mathbb{R}) \setminus im(\mu)$, então α é chamada de entidade externa de $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$.

Se $a \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, então $^*a$ é uma entidade interna de $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$, pois

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}(\mathbb{R}) & \overset{k}{\hookrightarrow} & \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}) & \overset{\mu}{\hookrightarrow} & \mathcal{V}(^*\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & [\{a\}] & \mapsto & ^*a = \mu([\{a\}]) \end{array}$$

$^*a$ é chamado de *extensão não standard de* a.

Proposição 2.5.1. *Uma entidade* α *de* $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$ *é interna se, e somente se* $\alpha \in {}^*a$ *para algum* $a \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$.

Prova:

($\Rightarrow$) Suponha α interna, isto é, $\alpha = \mu([\{a_i\}])$ com $[\{a_i\}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$, e seja $n = max(r(a_i))$, então $\{i \in I | r(a_i) \leq n\} \in \mathcal{U}$, isto é, $\{i \in I | a_i \in \mathbb{R}_n\} \in \mathcal{U}$, logo $[\{a_i\}] \in' [\{\mathbb{R}_n\}]$.

Portanto, $\mu([\{a_i\}]) \in \mu([\{\mathbb{R}_n\}]) = {}^*(\mathbb{R}_n)$. Tomando $a = \mathbb{R}_n \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, temos que $\alpha = \mu([\{a_i\}]) \in {}^*a$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\alpha \in {}^*a = \mu([\{a\}])$. Necessariamente $a \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$ ou seja, a é um conjunto, logo $\alpha \in \mu([\{a\}])$, isto é, $\alpha = \mu([\{x_i\}])$, onde $[\{x_i\}] \in' [\{a\}]$, e portanto α é uma entidade interna. $\square$

2.5.1 Teorema de Transferência Generalizada

Redefinição de $L(\mathbb{R})$

Anteriormente definimos $L(\mathbb{R})$ para a estrutura $\langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$, onde as variáveis $x, y, z \ldots$ significavam elementos de $\mathbb{R}$. Agora estenderemos $L(\mathbb{R})$ a $\mathcal{V}(\mathbb{R})$, isto é, as variáveis $x, y, z, \ldots$, poderão representar entidades quaisquer de $\mathcal{V}(\mathbb{R})$, podendo ser quantificadas.

Uma fórmula da linguagem $L(\mathbb{R})$ pode conter constantes de $\mathcal{V}(\mathbb{R})$: elementos de $\mathbb{R}$, subconjuntos fixos de $\mathbb{R}$, funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, etc.

Definição 2.5.2. *Dada uma fórmula φ de $L(\mathbb{R})$, chama-se *extensão de φ à fórmula $\Phi \equiv {}^*\varphi$ de $L(\mathbb{R})$, que se obtém substituindo em φ cada constante $\alpha \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ que nela ocorra pela sua extensão não standard $^*\alpha$.*

Por exemplo, a fórmula $\varphi(a)$ definida por

$$\varphi(a) : \forall\varepsilon(\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \exists\delta(\delta \in \mathbb{R}^+ \wedge \forall x(x \in \mathbb{R} \longrightarrow (|x-a| < \delta \longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon))))$$

traduz a continuidade de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ num ponto $a \in \mathbb{R}$ dado. Neste caso as constantes são os conjuntos $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, as funções f e $|.|$ e a relação $<$. As variáveis ε, δ e x são variáveis ligadas enquanto que a é uma variável livre. Por uma questão de simplificação denotaremos as *extensão da relação $<$ e da função $|.|$ pelos mesmos símbolos, então a *extensão da fórmula $\varphi(a) \in L(\mathbb{R})$ dada é a fórmula $^*\varphi(a) \in L(^*\mathbb{R})$ definida por

$$^*\varphi(a) : \forall\varepsilon(\varepsilon \in {}^*(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \exists\delta(\delta \in {}^*(\mathbb{R}^+) \wedge \forall x(x \in {}^*\mathbb{R} \longrightarrow (|x-a| < \delta \longrightarrow |{}^*f(x) - {}^*f(a)| < \varepsilon))))$$

onde ε, δ e x variam agora em $^*(\mathbb{R}^+)$ e $^*\mathbb{R}$, que expressa a *continuidade de extensão não standard $^*f$ (da função f) no ponto $a \in {}^*\mathbb{R}$.

Teorema 2.5.1 (Princípio de Leibniz)**.** *Se $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ é uma fórmula de $L(\mathbb{R})$, onde $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, então*

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{V}(^*\mathbb{R}) \models {}^*\varphi(^*a_1, \ldots, {}^*a_n). \quad \square$$

Usando o princípio de Leibniz podem ser demonstradas as seguintes propriedades.

Teorema 2.5.2. *Se* $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, *então*

1. ${}^*\emptyset = \emptyset$;

2. $a = b \Leftrightarrow {}^*a = {}^*b$;

3. ${}^*\{a, b\} = \{{}^*a, {}^*b\}$;

4. ${}^*(a \cup b) = ({}^*a \cup {}^*b)$;

5. ${}^*(a \cap b) = ({}^*a \cap {}^*b)$;

6. ${}^*(a \setminus b) = {}^*a \setminus {}^*b$;

7. ${}^*(a \times b) = {}^*a \times {}^*b$.

Prova:

1. Suponha por absurdo que ${}^*\emptyset \neq \emptyset$ ou seja, $(\exists x)(x \in {}^*\emptyset)$, logo pelo princípio de Leibniz, $(\exists x)(x \in \emptyset)$ o que é um absurdo. Portanto ${}^*\emptyset = \emptyset$;

2. Se $a, b \in \mathbb{R}$, temos por definição que ${}^*a = {}^*b$, pois, $(\forall a, b)(a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow {}^*a = a \wedge {}^*b = b)$. Como $a = b$, temos ${}^*a = {}^*b$.

   Suponha então que $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$. Deste modo, temos que se $a = b$, então, $\mathcal{V}(\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in a \longleftrightarrow x \in b)$, logo por transferência, teremos, $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in {}^*a \longleftrightarrow x \in {}^*b)$, ou seja ${}^*a = {}^*b$.

   Analogamente, prova-se que $a \subseteq b \Leftrightarrow {}^*a \subseteq {}^*b$.

3. Seja $c = \{a, b\} \in \mathbb{R}_n, n \geq 1$, então $a, b \in \mathbb{R}_{n-1}$. Logo, temos

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in \mathbb{R}_{n-1} \longrightarrow (x \in c \longleftrightarrow x = a \vee x = b)).$$

   Aplicando o princípio de Leibniz, temos

$$\mathcal{V}({}^*\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in {}^*(\mathbb{R}_{n-1}) \longrightarrow (x \in {}^*c \longleftrightarrow x = {}^*a \vee x = {}^*b)),$$

portanto $^*\{a,b\} = {}^*c = \{^*a,^*b\}$.

Como consequência de (c) concluímos o seguinte:

$$\begin{aligned} ^*(a,b) &= {}^*\{\{a\},\{a,b\}\} \\ &= \{^*\{a\},{}^*\{a,b\}\} \\ &= \{\{^*a\},\{^*a,{}^*b\}\} = (^*a,{}^*b). \end{aligned}$$

4. Seja $a,b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in a \cup b \longleftrightarrow x \in a \vee x \in b).$$

Aplicando o princípio de transferência

$$\mathcal{V}(^*\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in {}^*(a \cup b) \longleftrightarrow x \in {}^*a \vee x \in {}^*b),$$

isto é, $^*(a \cup b) = \{x | x \in {}^*a \vee x \in {}^*b\} = {}^*a \cup {}^*b$.

5. Seja $a,b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in a \cap b \longleftrightarrow x \in a \wedge x \in b).$$

Aplicando o princípio de transferência

$$\mathcal{V}(^*\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in {}^*(a \cap b) \longleftrightarrow x \in {}^*a \wedge x \in {}^*b),$$

isto é, $^*(a \cap b) = \{x | x \in {}^*a \wedge x \in {}^*b\} = {}^*a \cap {}^*b$.

6. Seja $a,b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in a \setminus b \longleftrightarrow x \in a \wedge x \notin b).$$

Aplicando o princípio de transferência

$$\mathcal{V}(^*\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in {}^*(a \setminus b) \longleftrightarrow x \in {}^*a \wedge x \notin {}^*b),$$

isto é, $^*(a \setminus b) = \{x | x \in {}^*a \wedge x \notin {}^*b\} = {}^*a \setminus {}^*b$.

7. Seja $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{V}(R) \models (\forall x)(x \in a \times b \longleftrightarrow x = (x_1, x_2) \wedge x_1 \in a \wedge x_2 \in b).$$

Aplicando o princípio de transferência

$$\mathcal{V}(^*\mathbb{R}) \models (\forall x)(x \in {}^*(a \times b) \longleftrightarrow x = {}^*(x_1, x_2) = ({}^*x_1, {}^*x_2) \wedge {}^*x_1 \in {}^*a \wedge {}^*x_2 \in {}^*b),$$

donde ${}^*(a \times b) = {}^*a \times {}^*b$. $\square$

Teorema 2.5.3. *Seja $A \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$, então, ${}^*(\mathcal{P}(A)) = \{B \subseteq {}^*A / B$ é interno$\}$.*

Prova:

Abreviaremos ${}^*(\mathcal{P}(A))$ por ${}^*\mathcal{P}(A)$. Observa-se que ${}^*\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}({}^*A)$.

1. Seja $B \in {}^*\mathcal{P}(A)$. Devemos provar que $B \subseteq {}^*A$ e que B é interno.

   (a) Sabemos que em $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ é válido

   $$(\forall x)(x \in \mathcal{P}(A) \longrightarrow x \subseteq A).$$

   Logo, aplicando o princípio de transferência, temos

   $$(\forall x)(x \in {}^*\mathcal{P}(A) \longrightarrow x \subseteq {}^*A)$$

   é válido em $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$.

   Como é válido para todo x, vale em especial para $x = B$. Deste modo, temos

   $$B \in {}^*\mathcal{P}(A) \longrightarrow B \subseteq {}^*A$$

   é válido. Como por hipótese $B \in {}^*\mathcal{P}(A)$, podemos concluir que $B \subseteq {}^*A$.

   (b) Para provarmos que B é interno usaremos a proposição 2.5.1, que diz:

   Se $\alpha \in \mathcal{V}(^*\mathbb{R})$, então, α é interna se, e somente se $\alpha \in {}^*a$, para algum $a \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$.

   Portanto, como $B \in {}^*\mathcal{P}(A)$, podemos concluir que B é interno.

2. Seja $B \subseteq {}^*A$ com B interno. Como B é interno, então existe $C \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, tal que, $B \in {}^*C$. Por outro lado, sabemos que em $\mathcal{V}(\mathbb{R})$, é válido

$$(\forall x)(x \in C \longrightarrow \underbrace{(x \subseteq A \longrightarrow x \in \mathcal{P}(A))}_{\text{sempre válido}}).$$

Logo, aplicando o princípio de transferência, temos

$$(\forall x)(x \in {}^*C \longrightarrow (x \subseteq {}^*A \longrightarrow x \in {}^*\mathcal{P}(A)))$$

é válido em $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$. Assim, se é válido para todo x, é válido em particula para $x = B$, então

$$B \in {}^*C \longrightarrow (B \subseteq {}^*A \longrightarrow B \in {}^*\mathcal{P}(A)).$$

Como de fato temos $B \in {}^*C$ e $B \subseteq {}^*A$, temos $B \in {}^*\mathcal{P}(A)$. $\square$

Definição 2.5.3. *Seja $A \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$. Chamamos de cópia não-standard de A, e representamos por ${}^\sigma A$, à entidade de $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$, definida por*

$${}^\sigma A = \{{}^*a | a \in A\}.$$

Teorema 2.5.4 (Compreensão)**.** *Sejam $A, B \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ e $f : {}^\sigma A \longrightarrow {}^*B$, então, existe uma extensão $F : {}^*A \longrightarrow {}^*B$ interna, tal que$F|_{{}^\sigma A} = f$.*

Prova:

Seja $z \in {}^*A$. Devemos definir $F(z)$ de modo que F seja interna e $F(z) \in {}^*B$.

Como para cada ${}^*a \in {}^\sigma A$ se tem $f({}^*a) \in {}^*B$, então, $f({}^*a) = \mu([\{b_i\}]_{i \in I})$ com $[\{b_i\}_{i\in I}] \in' [\{B\}_{i \in I}]$, isto é, $\{i \in I | b_i \in B\} \in \mathcal{U}$. Deste modo, podemos supor que $\forall i \in I, b_i \in B$.

A seguir definimos uma família de funções: para cada $i \in I$,

$$\begin{array}{rcl} f_i : A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & f_i(a) = b_i. \end{array}$$

Para cada $i \in I, f_i \in \mathcal{P}(A \times B)$ pelo que $\{i \in I | f_i \in \mathbb{R}_k\} \in \mathcal{U}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, existe $j \leq k$, tal que $\{i \in I | f_i \in \mathbb{R}_j \setminus \mathbb{R}_{j-1}\} \in \mathcal{U}$.

Consequentemente $[\{f_i\}_{i\in I}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ e, portanto,

$$F = \mu([\{f_i\}_{i\in I}])$$

está bem definida. Resta verificar que F satisfaz as condições do teorema. Por um lado F é uma entidade interna e, por outro lado, visto que para todo $z = \mu([\{z_i\}_{i\in I}]) \in {}^*A$ se tem $F(z) = \mu([\{f_i(z_i)\}_{i\in I}])$, então F está bem definida em ${}^*A$. Para ${}^*a \in {}^\sigma A \subseteq {}^*A$ vem $F({}^*a) = \mu([\{f_i(a)\}_{i\in I}]) = \mu([\{b_i\}_{i\in I}]) = f({}^*a)$ e portanto, $F|_{{}^\sigma A} = f$. $\square$

Do teorema de compreensão da análise não standard resulta imediatamente que se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for uma família de entidades de ${}^*(\mathbb{R}_k)$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então existe uma hipersequência interna de entidades $\{B_\nu\}_{\nu\in{}^*\mathbb{N}}$ tal que $A_n = B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Medida de Lebesgue Via Medida de Loeb

Neste capítulo demonstraremos o teorema principal deste trabalho que relaciona a medida de Lebesgue com a medida de contagem de Loeb. Para tanto introduziremos alguns conceitos da teoria da medida standard e aspectos importantes da construção de medidas devida a P. Loeb. Também far-se-á a demonstração de alguns lemas que serão necessários a prova principal.

3.1 Conceitos Básicos da Teoria Standard da Medida

Definição 3.1.1. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{M}$ é dita uma σ-álgebra sobre X se*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{M}$;

2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$;

3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$. *(união enumerável)*

$(X, \mathcal{M})$ é chamado de *espaço mensurável*, e os elementos de $\mathcal{M}$ de *subconjuntos mensuráveis* de X.

Observa-se que se $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$, então, $\cap A_n \in \mathcal{M}$, pois $\cap A_n = (\cup A_n)^c$.

Definição 3.1.2. *Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma família qualquer de subconjuntos de X, então, a menor σ-álgebra sobre X que contém $\mathcal{A}$ é chamada de σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ e é dada por*

$$<\mathcal{A}> \quad = \quad \cap\{\mathcal{M}/\mathcal{M} \text{ é } \sigma - \text{álgebra e } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}\}.$$

Por exemplo, seja (X, τ) um espaço topológico, onde τ é uma topologia. Então, a σ-álgebra gerada por τ é chamada de σ-álgebra de Borel e os conjuntos mensuráveis correspondentes são chamados conjuntos borelianos. Um caso particular são os espaços métricos. Assim, se $X = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$) com a métrica usual e $\mathcal{A} = \{]a, b[|a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, então, prova-se que os Borelianos de $\mathbb{R}$ são os elementos da σ-álgebra $\mathcal{B} =< \mathcal{A} >$.

Definição 3.1.3. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

$\mathcal{A}$ é dito uma álgebra de conjuntos sobre X se:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Como consequência temos que, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{A}$.

Obviamente, toda σ-álgebra é uma álgebra de conjuntos.

3.1.1 Medidas

Definição 3.1.4. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma medida nesse espaço é uma função*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{M} \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ A \quad &\mapsto \quad \mu(A) \end{aligned}$$

tal que:

1. $\forall A \in \mathcal{M}, \mu(A) \geq 0$;

2. $\mu(\emptyset) = 0$;

3. *μ é σ-aditiva: se $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ é uma família enumerável disjunta, então*

$$\mu(\cup_n A_n) = \Sigma_n \mu(A_n).$$

Proposição 3.1.1. *Sejam $A, B \in \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra, então,*

1. $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$;

2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$;

3. $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Prova:

1. Como $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$, temos:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{M} &\Rightarrow A^c \in \mathcal{M} \\ A^c, B \in \mathcal{M} &\Rightarrow A^c \cup B \in \mathcal{M} \\ A^c \cup B \in \mathcal{M} &\Rightarrow (A^c \cup B)^c \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

2. Sendo $A \subseteq B$, então, $B = A \cup (B \setminus A)$. Logo, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Com efeito, como A e B pertencem a $\mathcal{M}$, temos pelo item 1 que $(B \setminus A) \in \mathcal{M}$. Deste modo , sendo A e $B \setminus A$ disjuntos, $\mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.

3. É consequência imediata de (b). $\square$

Os seguintes casos particulares de medidas são importantes:

- se $\mu(X)$ é finita, então, $\forall A \in X$, teremos $\mu(A) \leq \mu(X) < \infty$. Neste caso μ é chamada de *medida finita*.

- se $\mu(X) = \infty$, mas $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $\mu(A_n)$ finita para cada n, então, μ é chamada de *medida σ-finita*.

Por exemplo, seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

Aqui podemos definir uma medida chamada de *medida de contagem* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{se} \quad A \quad \text{for finito} \\ \infty & \text{se} \quad A \quad \text{for infinito} \end{cases}$$

μ não é finita, pois $\mu(\mathbb{N}) = \infty$, mas é σ-finita, pois $\mathbb{N} = \bigcup_n \{n\}$ e $\mu(\{n\}) = 1 < \infty$ para cada n.

Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto. Se $\mathcal{M}$ for uma σ-álgebra sobre X e μ uma medida definida em $\mathcal{M}$, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é chamado de *espaço de medida.*

3.1.2 Ultrafiltros e Medida

Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Lembrando que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é dito um ultrafiltro sobre X se

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$;
2. $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$
3. $A \in \mathcal{U}, B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{U}$
4. $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \in \mathcal{U}$ ou $A^c \in \mathcal{U}$.

Proposição 3.1.2. *Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre X, então, existe uma medida finitamente aditiva*

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\},$$

isto é,

1. *$\mu_{\mathcal{U}}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{P}(X)$;*
2. *$\mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$ e $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1$;*
3. *Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(X)$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $\forall i \neq j$, então,*

$$\mu_{\mathcal{U}}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu_{\mathcal{U}}(A_1) + \ldots + \mu_{\mathcal{U}}(A_n).$$

Prova:

Define-se $\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ por

$$\mu_{\mathcal{U}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad A \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se} \quad A^c \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

Observa-se que os conjuntos de medida nula são justamente os conjuntos que não pertencem ao ultrafiltro. Deste modo:

1. para todo A pertencente às partes de X, temos por definição que se $A \in \mathcal{U}$, então, $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 1$ e se $A^c \in \mathcal{U}$, então $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 0$, portanto $\mu_{\mathcal{U}}(A) \geq 0$;

2. $\mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$, pois $\emptyset \notin \mathcal{U}$, além disso, $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1$, pois $X \in \mathcal{U}$;

3. sabendo que

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists! k; A_k \in \mathcal{U}$$

a prova é imediata. $\square$

Decorre dos itens (1) e (3) acima que se $A \subseteq B$, então, $\mu_{\mathcal{U}}(A) \leq \mu_{\mathcal{U}}(B)$.

Proposição 3.1.3. *Se $X \neq \emptyset$ é um conjunto e $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ é uma medida que satisfaz os itens (1), (2) e (3) da proposição anterior, então o conjunto*

$$\mathcal{U}_\mu = \{A \in \mathcal{P}(X) | \mu(A) = 1\}$$

é um ultrafiltro sobre X.

Prova:

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}_\mu$. De fato, pois $\mu(\emptyset) = 0$;

2. Sejam $A, B \in \mathcal{U}_\mu$, logo $\mu(A) = \mu(B) = 1$. Devemos provar que $A \cap B \in \mathcal{U}_\mu$.

   Como $A \subseteq (A \cup B)$ e $\mu(A) = 1$, então, $\mu(A \cup B) = 1$.

   Sabendo que $(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, temos

$$1 = \mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \qquad (1)$$

   pois, $(A \setminus B), (A \cap B), (B \setminus A)$ são disjuntos.

Lema 3.1.1. *Sendo μ uma medida que satisfaz os itens 1, 2 e 3 da proposição anterior, temos,* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Prova do Lema: Sabendo que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$$

temos

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus A) &= \mu(A \cup B) - \mu(A) \qquad (2) \\ \mu(A \setminus B) &= \mu(A \cup B) - \mu(B) \qquad (3) \end{aligned}$$

Substituindo (2) e (3) em (1):

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B) - \mu(B) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) - \mu(A)$$

e, portanto

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Continuando com a demonstração da proposição, como $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = 1$, podemos concluir que

$$\mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) - \mu(A) - \mu(B) = 1,$$

ou seja, $A \cap B \in \mathcal{U}_\mu$;

3. Seja $A \in \mathcal{U}_\mu$ e $B \supseteq A$, logo $\mu(A) = 1$ e deste modo, como $\mu(B) \leq \mu(A)$, temos que $\mu(B) = 1$ e portanto $B \in \mathcal{U}_\mu$;

4. Seja $A \in \mathcal{P}(X)$. Suponha que $A \notin \mathcal{U}_\mu$. Devemos provar que $A^c \in \mathcal{U}_\mu$.

   De fato, pois como $\mu(X) = 1$ e por hipótese temos $\mu(A) = 0$, pois $A \notin \mathcal{U}_\mu$, então,

   $$1 = \mu(X) = \mu(A \cup A^c) = \mu(A) + \mu(A^c) = \mu(A^c),$$

   portanto, $A^c \in \mathcal{U}_\mu$. $\square$

3.1.3 Construção de Medidas

- Medidas definidas numa álgebra de conjuntos:

  Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto, e $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos de X. Então, uma medida sobre $\mathcal{A}$ é uma função

  $$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

  tal que,

  1. $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$;
  2. $\mu(\emptyset) = 0$;
  3. se $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ é uma família enumerável disjunta de elementos de $\mathcal{A}$, tal que $\cup A_n \in \mathcal{A}$, então
  $$\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n).$$

- Extensão de medidas:

  Temos o seguinte problema: dada uma álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ sobre X e uma medida μ sobre $\mathcal{A}$, queremos construir uma σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ sobre X e uma medida μ^* sobre $\mathcal{A}^*$ de modo que

  1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$
  2. $\mu^*(A) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{A}$

  Veremos que, em geral, a σ -álgebra $\mathcal{A}^*$ será "maior" que a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Seja $E \subseteq X$ qualquer, definimos primeiro a aplicação

  $$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

  por

  $$\mu^*(E) = inf\{\sum \mu(A_n) | \{A_n\} \subseteq \mathcal{A}, E \subseteq \cup A_n\}.$$

  $\mu^*(E)$ é chamada de *medida exterior* de E.

  Podem ser demonstradas as seguintes propriedades:

1. $\mu^*(E) \geq 0, \forall E \subseteq X$;

2. $\mu^*(\emptyset) = 0$;

3. $E \subseteq F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;

4. $\forall A \in \mathcal{A}, \mu^*(A) = \mu(A)$;

5. Se $\{E_n\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, não necessariamente disjuntos, então

$$\mu^*(\cup E_n) \leq \sum \mu^*(E_n).$$

Prova-se facilmente que uma medida σ-aditiva μ definida numa σ-álgebra $\mathcal{M}$ sobre X também satisfaz essa última propriedade.

Temos então que a medida exterior μ^* não é, em geral, uma medida em $\mathcal{P}(X)$ por não ser σ-aditiva. Carathèodory consegue definir uma σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ com $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(X)$, de modo que μ^* restrito a $\mathcal{A}^*$ é uma medida.

Definição 3.1.5. *Seja $E \in \mathcal{P}(X)$, então diremos que E é μ^*-mensurável se $\forall A \subseteq X$ temos*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Observe que a medida μ^* é completa no seguinte sentido: se $E \in \mathcal{A}^*$ com $\mu^*(E) = 0$, então, $\forall F \subseteq E$ temos $F \in \mathcal{A}^*$ e $\mu^*(F) = 0$.

Se μ é uma medida σ-finita em $\mathcal{A}$, então, existe uma única extensão μ^* de μ em $\mathcal{A}^*$.

A seguir veremos como se constrói a medida de Lebesgue na reta.

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$:

1. Conjuntos Borelianos: Coonsidere τ a coleção de abertos de $\mathbb{R}$ (topologia de $\mathbb{R}$), então, a σ-álgebra gerada por τ e $\mathcal{B} =< \tau >= \{\text{conjuntos borelianos}\}$. $\mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra que contém os abertos.

2. Pode-se provar que o mesmo $\mathcal{B}$ é gerado por outro conjunto mais simples

$$\mathbb{A} = \{\text{todos os intervalos finitos ou infinitos, abertos ou semi-abertos}\},$$

os elementos de $\mathbb{A}$ são intervalos do tipo: $]a,b[, [a,b], [a,\infty[,]-\infty, b[, \ldots, \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

A σ-álgebra dos conjuntos borelianos não é ainda a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis no sentido de Lebesgue.

3. Medidas em $\mathcal{B}$: Pode-se provar que existe uma única medida

$$\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tal que

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \mu([a,b[) = \mu(]a,b]) = b - a$$

(μ, em particular, deve ser σ-aditiva).

Podemos chamar μ de medida de Borel.

4. A coleção de conjuntos mensuráveis no sentido de Lebesgue será uma outra σ-álgebra $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{B}$ e a medida de Lebesgue será uma extensão dessa medida de Borel

$$\lambda : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

tal que $\lambda(A) = \mu(A)$ se $A \in \mathcal{B}$.

5. Para construir $\mathcal{L}$ e λ necessitaremos da medida exterior

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

definida anteriormente.

Já vimos que μ^* não é necessariamente uma medida pois em geral não é σ-aditiva.

6. Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ mensuráveis no sentido de Lebesgue, serão os elementos de $\mathcal{A}^*$, construídos pelo processo de Carathèodory. Então, sendo

$$\mathcal{L} = \{\text{mensuráveis no sentido de Lebesgue}\}$$

prova-se que $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra, tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ e definindo

$$\lambda : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

por $\lambda(E) = \mu^*(E)$, temos que λ é uma medida (σ-aditiva) em $\mathcal{L}$ e $\lambda(A) = \mu^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

λ será chamada de medida de Lebesgue na reta.

7. Algumas propriedades da medida de Lebesgue:

   (a) se $A \in \mathcal{L}$, então, $\forall \epsilon > 0, \exists G_\epsilon$ aberto em $\mathbb{R}$, tal que $A \subseteq G_\epsilon$ e

   $$\lambda(A) \leq \lambda(G_\epsilon) \leq \lambda(A) + \epsilon;$$

   (b) se $A \in \mathcal{L}$, então existe um boreliano $B \in \mathcal{B}$, tal que $A \subseteq B$ e $\lambda(B \setminus A) = 0$;

   (c) se $A \in \mathcal{L}$, então $\lambda(A) = inf\{\lambda(G) | A \subseteq G, G \text{ aberto}\}$;

   (d) se $A \in \mathcal{L}$, com A limitado, então, $\forall \sigma > 0, \exists F_\sigma$ compacto (fechado e limitado) em $\mathbb{R}$, tal que $F_\sigma \subseteq A$ e $\lambda(F_\sigma) \leq \lambda(A) \leq \lambda(F_\sigma) + \sigma$;

   (e) se $A \in \mathcal{L}$ e A é limitado, então, $\lambda(A) = sup\{\lambda(F) | F \subseteq A, F \text{ compacto}\}$.

3.2 Medida de Contagem de Loeb

A teoria da medida estuda operações que atribuem grandezas a conjuntos. Nos espaços de medida onde tais operações são definidas, a σ-álgebra correspondente tem como propriedade ser fechada sob uniões enumeráveis de conjuntos, o que é fundamental para a teoria. Todavia, no caso da análise não standard, quando falamos de conjuntos internos, a união enumerável nem sempre é interna, ou seja, nem sempre pertence a álgebra. Por exemplo, se (X, A) é um espaço mensurável, isto é, X é um conjunto e A é uma σ- álgebra sobre X, nem sempre $({}^*X, {}^*A)$ é um espaço mensurável no sentido de ${}^*A$ ser uma σ- álgebra sobre ${}^*X$. Por transferência, ${}^*A$ tem todas as propriedades de uma σ-álgebra, menos a σ-aditividade. Esta adota a forma de uma hiper-σ-aditividade: se $\{A_\nu\}_{\nu \in {}^*\mathbb{N}}$ é uma hipersequência de elementos de ${}^*A$ com $A_\nu \cap A_\mu = \emptyset$ para $\nu \neq \mu$, então, $\bigcup_{\nu \in {}^*\mathbb{N}} A_\nu \in {}^*A$. Essa propriedade não é a que se precisa para definir uma medida standard em ${}^*X$.

Entretanto, em 1973, Peter Loeb descobriu que a partir deste problema, podia-se construir medidas standard em espaços não standard, definidos geralmente de forma mais simples como é o caso da medida de contagem em espaços hiperfinitos.

Os espaços hiperfinitos tem por base um conjunto interno hiperfinito da forma

$$\Pi = \{-\frac{k}{2} + j\epsilon / j = 0, 1, \ldots, k^2 - 1\} \subseteq {}^*\mathbb{R}$$

onde k é um hipernatural infinito par e ϵ é um infinitésimo positivo, definido por $\epsilon = k^{-1}$. Esse conjunto hiperfinito tem cardinalidade interna k^2, o que permite associar a cada subconjunto interno de Π o número de elementos que ele contém. Desenvolveremos agora a construção de Loeb e depois aplica-la-emos para demostrar que a medida de Lebesgue sobre a reta, pode ser representada por uma medida de contagem ponderada sobre conjuntos hiperfinitos usando pesos infinitesimais.

A princípio apresentaremos a construção de Loeb num contexto mais amplo, ou seja, consideraremos em substituição a Π um subconjunto interno X de ${}^*\mathbb{R}$ qualquer.

Definição 3.2.1. *Chama-se de álgebra interna sobre X a todo o subconjunto interno $\mathcal{A}$ de partes de X que contém $\emptyset, X$ e é fechado para complementação e união finita, ou seja: $\mathcal{A} \subseteq {}^*\mathcal{P}(X) \quad (= {}^*(\mathcal{P}(X)))$ é uma álgebra interna se*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$.

Definição 3.2.2. *Uma medida interna finitamente aditiva definida em $\mathcal{A}$ é uma função interna*

$$\xi : \mathcal{A} \longrightarrow ({}^*\mathbb{R})_0^+ \cup \{\infty\}$$

que satisfaz as seguintes propriedades (*$({}^*\mathbb{R})_0^+$ é o conjunto dos hiperreais não-negativos*):

1. $\xi(\emptyset) = 0$;

2. $A, B \in \mathcal{A}$ *e* $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B)$.

A tripla $(X, \mathcal{A}, \xi)$, com $\mathcal{A}$ e ξ relativos às definições acima, é um *espaço de medida interno.*

Observa-se que sendo ξ uma função finitamente aditiva, temos que $A_i \cap A_j = \emptyset \Longrightarrow \xi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \xi(A_k)$, logo por transferência, teremos que ela é também *finitamente aditiva, isto é $A_i \cap A_j = \emptyset \Longrightarrow \xi(A_1 \cup \ldots \cup A_\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} \xi(A_k)$, com $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, onde $\sum_{k=1}^{\nu} \xi(A_k)$ é o valor de $n = \nu$, da extensão não-standard da sequência $\{\sum_{k=}^{n} \xi(A_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Porém em geral ξ não será σ-aditiva, pois, se $\{A_n\}$ for uma sucessão de conjuntos internos da σ-álgebra $\mathcal{A}$ a união $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ só é interna, se existir um número natural p, tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{p} A_n$. Contudo veremos que mesmo a união enumerável não pertencendo a $\mathcal{A}$, está muito próximo de um conjunto de $\mathcal{A}$.

Definição 3.2.3. *Dada uma medida interna ξ definida em $\mathcal{A}$ podemos construir a partir dela uma medida real*

$${}^0\xi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

definida por ${}^0\xi(A) = st\xi(A), \forall A \in \mathcal{A}$, onde por convenção, temos que se $r \in ({}^*\mathbb{R})_\infty^+ \cup \{\infty\}, st(r) = \infty$ (($({}^*\mathbb{R})_\infty^+$ é o conjunto dos hiperreais positivos infinitos).

A medida de Loeb associada à medida interna ξ, que denotaremos por ξ_L, será, basicamente, a extensão de ${}^0\xi$ a uma medida σ-aditiva. Para isto será necessário, primeiramente, estender a álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos internos de X a uma σ-álgebra contendo conjuntos internos, ou "suficientemente próximos" de conjuntos de $\mathcal{A}$.

Definição 3.2.4. *Um subconjunto B de X (interno ou externo) diz-se ξ-aproximável se para todo o número real $e > 0$ existirem conjuntos internos de medida-ξ finita, $A_e, C_e \in \mathcal{A}$, tais que $A_e \subseteq B \subseteq C_e$ e $\xi(C_e) - \xi(A_e) < e$.*

Se reunirmos a família de todos os subconjuntos ξ-aproximáveis de X e os conjuntos internos pertencentes a $\mathcal{A}$, em geral, não teremos uma σ-álgebra, apesar de estarem na σ-extensão de $\mathcal{A}$. Então para obtermos uma σ-álgebra de conjuntos de X que inclua $\mathcal{A}$, teremos que considerar certos conjuntos $B \subseteq X$ que não sendo ξ-aproximáveis, estarão também, de algum modo, próximos a $\mathcal{A}$.

Definição 3.2.5. *Um conjunto $B \subseteq X$ é dito próximo de $\mathcal{A}$ se para todo $F \in \mathcal{A}$ com $\xi(F) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$ o conjunto $B \cap F$ for ξ-aproximável.*

Levando em conta a definição acima e considerando todas as situações simultaneamente, podemos definir:

Definição 3.2.6. *Chama-se álgebra de Loeb gerada pela álgebra interna $\mathcal{A}$ à família $\mathcal{A}_L$ que é constituída por todos os subconjuntos B de X (internos ou externos) para os quais $B \cap F$ é ξ-aproximável qualquer que seja o conjunto $F \in \mathcal{A}$ com $\xi(F) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$.*

Teorema 3.2.1. *$\mathcal{A}_L$ é uma σ-álgebra que estende $\mathcal{A}$.*

Prova:

1. $\mathcal{A}_L$ estende $\mathcal{A}$:

   Da definição de $\mathcal{A}_L$ obtemos imediatamente a inclusão $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_L$;

2. Devemos provar agora que $\mathcal{A}_L$ é uma σ-álgebra

   (a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}_L$.

   De fato, pois, como $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_L$, podemos concluir que $\emptyset, X \in \mathcal{A}_L$;

   (b) $B \in \mathcal{A}_L \Longrightarrow B^c \in \mathcal{A}_L$

Seja $B \in \mathcal{A}_L, e > 0$ e $F \in \mathcal{A}$, com $\xi(F) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$. Pela definição de álgebra de Loeb, temos que $B \cap F$ é ξ-aproximável, ou seja, existem conjuntos internos $A, C \in \mathcal{A}$, com medida-ξ finita, tais que

$$A \subseteq (B \cap F) \subseteq C \qquad \text{e} \qquad \xi(C) - \xi(A) < e.$$

Então, tomando o complementar: $C^c \subseteq (B \cap F)^c \subseteq A^c$.

Como $(B \cap F)^c = B^c \cup F^c$, teremos, $C^c \subseteq (B^c \cup F^c) \subseteq A^c$, portanto, fazendo a interseção com F, podemos concluir: $C^c \cap F \subseteq (B^c \cup F^c) \cap F \subseteq A^c \cap F$, ou seja,

$$C^c \cap F \subseteq (B^c \cap F) \subseteq A^c \cap F.$$

Como, F tem medida-ξ finita, $C^c \cap F$ e $A^c \cap F$, também têm medida-ξ finita, deste modo, basta provarmos agora que $\xi(A^c \cap F) - \xi(C^c \cap F) < e$.

Como

$$\begin{aligned}(A^c \cap F) \setminus (C^c \cap F) &= A^c \cap F \cap (C^c \cap F)^c \\ &= A^c \cap F \cap (F^c \cup C) \\ &= (C \cap F) \setminus A \subseteq C \setminus A\end{aligned}$$

então,

$$\xi(A^c \cap F) - \xi(C^c \cap F) \leq \xi(C) - \xi(A) < e$$

e, portanto, $B^c \in \mathcal{A}_L$.

(c) $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_L \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_L$

Seja $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_L, e > 0$ e $F \in \mathcal{A}$ com medida-ξ finita. Chamemos de $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, logo devemos provar que $B \in \mathcal{A}_L$.

Sabemos que por hipótese, para $n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{A}_L$, logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $e_n = \frac{e}{2^{n+1}}$, existem conjuntos internos, $A_n, C_n \in \mathcal{A}$, com medida-ξ finita, tais que

$$A_n \subseteq (B_n \cap F) \subseteq C_n \quad \text{e} \quad \xi(C_n) - \xi(A_n) < e_n.$$

Temos então, $\xi(C_n) - \xi(A_n) < \frac{e}{2^{n+1}}$.

Como $A_n \subseteq (B_n \cap F) \subseteq (B \cap F) \subseteq F$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\xi(F) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$, temos $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq F$, logo $\xi(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \xi(F) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$, daí:

$$^0\xi(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq {}^0\xi(F) \in \mathbb{R}^+$$

Concluímos que a sequência $\{^0\xi(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada por $^0\xi(F)$, portanto o limite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} {}^0\xi(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$$

existe e é um número real finito. Deste modo, $\gamma = \sup_n {}^0\xi(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$.

Assim, existe $n_e \in \mathbb{N}$, tal que:

$$^0\xi(\bigcup_{k=1}^{n_e} A_k) > \gamma - \frac{e}{2}.$$

Chamando de $A = \bigcup_{k=1}^{n_e} A_k$ que é uma união finita, temos então: $\xi(A) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$, com $A \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq (B \cap F)$.

Temos agora que construir um conjunto interno C, de medida-ξ finita, tal que, $(B \cap F) \subseteq C$.

Construção de C: Temos que $A_n \subseteq (B_n \cap F) \subseteq C_n$, onde $A_n, C_n \in \mathcal{A}$ e tem medida-ξ finita, com $\xi(C_n) - \xi(A_n) < \frac{e}{2^{n+1}}$. Logo para cada n, teremos: $\bigcup_{k=1}^{n} C_k \in \mathcal{A}$.

Se considerarmos

$$\xi(\bigcup_{k=1}^{n} C_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \xi(C_k) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$$

teremos que existe a medida real de $\bigcup_{k=1}^{n} C_k$, ou seja

$$^0\xi(\bigcup_{k=1}^{n} C_k) = Z_n \in \mathbb{R}^+$$

Afirmação:

$$(\exists n)(n \in \mathbb{N} \wedge \bigcup_{k=1}^{n} C_k \in \mathcal{A} \wedge \xi(\bigcup_{k=1}^{n} C_k) < \gamma + \frac{e}{2}).$$

Se isto for provado, teremos por transferência

$$(\exists n)(n \in {}^*\mathbb{N} \wedge \bigcup_{k=1}^{n} C_k \in \mathcal{A} \wedge \xi(\bigcup_{k=1}^{n} C_k) < \gamma + \frac{e}{2}).$$

Tomando $n = \nu$ e $C = \bigcup_{k=1}^{\nu} C_k$, poderemos concluir que

$$B \cap F = (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap F = \cup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \cap F) \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\nu} C_n = C$$

e que

$$\xi(C) - \xi(A) < \gamma + \frac{e}{2} - \xi(A) < \gamma + \frac{e}{2} - \gamma + \frac{e}{2} = e,$$

sendo que, por transferência, $C \in \mathcal{A}$.

Prova da Afirmação: Basta tomar $n = n_e$. Temos que provar que $\xi(\bigcup_{k=1}^{n_e} C_k) < \gamma + \frac{e}{2}$.

Temos que

$$A = \bigcup_{k=1}^{n_e} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_e} C_k$$

logo, $\xi(A) \leq \sum_{k=1}^{n_e} \xi(C_k)$.

Como $C_k = A_k \cup (C_k \setminus A_k)$, temos

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{n_e} C_k &= \bigcup_{k=1}^{n_e}(A_k \cup (C_k \setminus A_k)) \\ &= (\bigcup_{k=1}^{n_e} A_k) \cup \bigcup_{k=1}^{n_e}(C_k \setminus A_k) \\ &= A \cup \bigcup_{k=1}^{n_e} (C_k \setminus A_k) \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \xi(\bigcup_{k=1}^{n_e} C_k) &\leq \xi(A) + \xi(\bigcup_{k=1}^{n_e}(C_k \setminus A_k)) \\ &\leq \xi(A) + \sum_{k=1}^{n_e} \xi(C_k \setminus A_k) \\ &< \xi(A) + \sum_{k=1}^{n_e} \tfrac{e}{2^{k+1}} \\ &< \gamma + e \sum_{k=1}^{n_e} \tfrac{1}{2^{k+1}} \\ &< \gamma + \tfrac{e}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $B \in \mathcal{A}_L$ como queríamos mostrar. $\square$

Podemos considerar agora a função externa

$$\xi_L : \mathcal{A}_L \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

definida por

$$\xi_L(B) = inf\{{}^0\xi(C) | C \in \mathcal{A} \text{ e } B \subseteq C\}$$

para todo o $B \in \mathcal{A}_L$. Temos então:

Teorema 3.2.2. *ξ_L é uma medida completa definida na álgebra $\mathcal{A}_L$*

Prova:

Para provarmos o teorema teremos que mostrar que ξ_L é uma medida definida em $\mathcal{A}_L$ e é completa.

(a) ξ_L é uma medida definida em $\mathcal{A}_L$. Sabendo que

$$\xi_L : \mathcal{A}_L \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

onde, $\xi_L(A) = inf\{{}^0\xi(C|C \in \mathcal{A} \text{ e } A \subseteq C\}$, devemos provar:

i. $\xi_L(A) \geq 0$

De fato, pois, para todo $A \in \mathcal{A}_L$, $\xi_L(A) \in \mathbb{R}_0^+$.

ii. $\xi_L(\emptyset) = 0$

Como, por definição, $\xi_L(\emptyset) = inf\{{}^0\xi_L(C) | C \in \mathcal{A} \text{ e } \emptyset \subseteq C\}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$, podemos tomar $C = \emptyset$, logo

$${}^0\xi(\emptyset) = st(\xi(\emptyset)) = st(0) = 0.$$

Sendo o ínfimo de um conjunto, por definição, menor ou igual a qualquer elemento deste conjunto, teremos

$$0 \leq \xi_L(\emptyset) \leq {}^0\xi(\emptyset) = 0.$$

Portanto, $\xi_L(\emptyset) = 0$.

iii. $\xi_L(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_L(B_n)$, sempre que $\{B_n\}$ for uma coleção disjunta enumerável de conjuntos de $\mathcal{A}_L$.

Caso 1: $\xi_L(B_n) = \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Então, temos trivialmente $\xi_L(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_L(B_n) = \infty$.

Caso 2: $\xi_L(B_n) < \infty$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.2.3. *Se $B \in \mathcal{A}_L$ é tal que $\xi_L(B) < \infty$, então B é ξ-aproximável.*

Prova do Lema: Temos por hipótese que

$$\xi_L(B) = inf\{^0\xi(C)|C \in \mathcal{A}, B \subseteq C\} = i < \infty$$

logo, dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon \in \mathcal{A}$, com

$$B \subseteq C_\epsilon, \qquad {}^0\xi(C_\epsilon) < i + \frac{\epsilon}{2}.$$

Do mesmo modo, se tomarmos

$$sup\{^0\xi(A)|A \in \mathcal{A}, A \subseteq B\} = s < \infty,$$

teremos para o mesmo ϵ , que existe $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ com $A_\epsilon \subseteq B$ e ${}^0\xi(A_\xi) > s - \frac{\epsilon}{2}$.

Prova-se que $i = s$, portanto, temos

$A_\epsilon, C_\epsilon \in \mathcal{A}$ com $A_\epsilon \subseteq B \subseteq C_\epsilon$ e ${}^0\xi(C_\epsilon) < i + \epsilon/2$ e ${}^0\xi(A_\epsilon) > i - \epsilon/2$, donde

$${}^0\xi(C_\epsilon) - \epsilon/2 < i < {}^0\xi(A_\epsilon) + \epsilon/2$$

então:

$${}^0\xi(C_\epsilon) - {}^0\xi(A_\epsilon) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Assim, ${}^0\xi(C_\epsilon \setminus A_\epsilon) = st(\xi(C_\epsilon \setminus A_\epsilon)) < \epsilon$

Podemos agora ter duas situações:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_L(B_n) = \infty$

  Como para cada n, $\xi_L(B_n) < {}^0\xi(A_n) + \epsilon/2^n$, para certo $A_n \in \mathcal{A}$ com $B_n \subseteq A_n$ temos
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_L(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} {}^0\xi(A_n) + \epsilon$$
  logo $\sum_{n=1}^{\infty} {}^0\xi(A_n) = \infty$ Assim, como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, existe $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ de medida finita, tal que, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

  Porém se $n \to \infty$, teremos $\xi_L(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \to \infty$

Portanto, a igualdade vale, pois

$$\xi_L(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \infty.$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}(B_n) = \gamma < \infty$

  Do lema anterior temos que para cada n, existem $A_n, C_n \in \mathcal{A}$, tais que ${}^0\xi(C_n) - \epsilon/2^{n+1} \leq \xi_L(B_n) \leq \xi(A_n) + \epsilon/2^{n+1}$,

  Aplicando $\sum_{n=1}^{\infty}$, vemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}^0\xi(C_n) - \epsilon/2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi_L(B_n) = \gamma \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) + \epsilon/2$$

  Se tomarmos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, então

$$\xi(\bigcup_{n=1}^{m} A_n) = \sum_{n=1}^{m} \xi(A_n) > \gamma - \epsilon/2$$

  e

$$A = \bigcup_{n=1}^{m} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

  onde $A \in \mathcal{A}$.

  Com isto obtivemos uma aproximação interior. Para obtermos uma aproximação exterior, podemos utilizar o mesmo $C \in \mathcal{A}$ do teorema 3.4.2, assim

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\nu} C_n = C$$

  onde $\nu \in {}^*\mathbb{N}$.

  Consequentemente

$$\bigcup_{n=1}^{m} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\nu} C_n \quad \text{e} \quad \gamma - \epsilon/2 < \xi_L(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) < \gamma + \epsilon/2.$$

  Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\xi_L(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_L(B_n)$$

  Como queríamos demostrar. $\square$

Do fato de que a medida ξ_L é uma medida completa definida na álgebra $\mathcal{A}_L$, resulta a consistência da seguinte definição:

Definição 3.2.7. *Chamamos de* ***Medida de Loeb*** *associada à medida interna ξ à função(externa) $\xi_L : \mathcal{A}_L \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ definida para qualquer conjunto $B \in \mathcal{A}_L$ por*

$$\xi_L(B) = inf\{{}^0\xi(C)|C \in \mathcal{A}, B \subseteq C\}.$$

Logo, a tripla $L(\xi) = (X, \mathcal{A}_L, \xi_L)$ é dita um **Espaço de Medida de Loeb** associada ao espaço de medida interno $(X, \mathcal{A}, \xi)$.

3.3 Representação Hiperfinita da Medida de Lebesgue

Nesta seção demonstraremos o teorema principal deste trabalho que relaciona a medida de Loeb com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, que é uma das mais importantes aplicações da medida de contagem hiperfinita.

Seja, então, $X = \Pi$ e $\mathcal{A}$ a álgebra de todos os subconjuntos internos de Π. Devemos lembrar que todo elemento A de $\mathcal{A}$, tem cardinalidade interna hiperfinita menor ou igual a k^2, que denotaremos por $|A|$. Em $\mathcal{A}$ podemos considerar uma função interna $\xi : \mathcal{A} \longrightarrow ({}^*\mathbb{R})_0^+$, definida por

$$\xi(A) = \epsilon\,|A| = \frac{|A|}{k}.$$

Como, dados dois conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$, temos que $A = [\{A_i\}_{i\in I}]$ e $B = [\{B_i\}_{i\in I}]$, então a cardinalidade interna de A e B será: $|A| = [\{|A_i|\}_{i\in I}]$ e $|B| = [\{|B_i|\}_{i\in I}]$. Deste modo, se $A \cap B = \emptyset$, então,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - 2\,|A \cap B| = |A| + |B|\,.$$

Sendo assim, podemos afirmar que ξ é uma medida interna finitamente aditiva, pois satisfaz:

a)$\xi(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{k} = \frac{0}{k} = 0$

b)$A \cap B = \emptyset$ implica

$$\xi(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{k} = \frac{|A| + |B|}{k} = \xi(A) + \xi(B).$$

Definição 3.3.1. $(\Pi, \mathcal{A}, \xi)$, *é um espaço de medida hiperfinitamente aditiva chamada de medida de contagem.*

Definição 3.3.2. *Seja* $L(\xi) = (\Pi, \mathcal{A}_L, \xi_L)$ *o espaço de medida de Loeb associado a* ξ. $L(\xi)$ *é denominada de espaço de medida de contagem de Loeb.*

Definição 3.3.3. *Dado um ponto* $r \in \mathbb{R}$, *denotaremos por* $mon_\Pi(r)$ *o conjunto (externo) constituído por todos os pontos pertencentes a* Π *infinitamente próximos a* r, *ou seja*

$$mon_\Pi(r) = st_\Pi^{-1}(r) = \{x \in \Pi | st(x) = r\} = mon(r) \cap \Pi.$$

A este conjunto damos o nome de Π-mônada do ponto $r \in \mathbb{R}$.

A união das Π-mônadas de todos os números reais será:

$$\Pi_{fin} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} mon_\Pi(r) = st_\Pi^{-1}(\mathbb{R}) = \Pi \cap {}^*\mathbb{R}_{fin}$$

e constitui a parte finita de Π.

Definição 3.3.4. *Dado um subconjunto* V *de* $\mathbb{R}$, *denotaremos por*

$$st_\Pi^{-1}(V) = \{x \in \Pi | st(x) \in V\}.$$

Chamaremos por $\mathcal{L}$ *a família de todos os subconjuntos* $V \subseteq \mathbb{R}$ *para os quais* $st_\Pi^{-1}(V)$ *pertence a* $\mathcal{A}_L$, *isto é,*

$$\mathcal{L} = \{V \subseteq \mathbb{R} | st_\Pi^{-1}(V) \in \mathcal{A}_L\},$$

e consideraremos, então, a função $\lambda : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, *definida por*

$$\lambda(V) = \xi_L(st_\Pi^{-1}(V))$$

para todo o conjunto $V \in \mathcal{L}$.

Teorema 3.3.1 (Teorema Principal)**.** $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ *é o espaço de medida de Lebesgue, isto é, um conjunto (standard)* $V \subseteq \mathbb{R}$ *é mensurável a Lebesgue com medida de Lebesgue* $l(V)$*, se e somente se o conjunto* $st_{\Pi}^{-1}(V) \subseteq \Pi$ *for* ξ_L*-mensurável, e*

$$l(V) = \lambda(V) = \xi_L(st_{\Pi}^{-1}(V)).$$

Prova:

Pela definição 3.3.3, temos que a parte finita de Π, está definida por

$$st_{\Pi}^{-1}(\mathbb{R}) = \Pi \cap {}^*\mathbb{R}_{fin} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \Pi | |x| \leq n\}.$$

Sendo $st_{\Pi}^{-1}(\mathbb{R})$ uma união enumerável de conjuntos internos de Π, é ξ_L-mensurável e, como λ está definido em função de ξ_L, podemos concluir que $\mathbb{R}$ é λ-mensurável.

Para concluirmos a prova do teorema principal, devemos demonstrar agora quatro lemas auxiliares. São eles:

Lema 3.3.2. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$*, o intervalo aberto (a,b) é* λ*-mensurável, e* $\lambda((a,b)) = b - a \quad (= l((a,b)))$.

Prova:

Mostraremos aqui que λ coincide, em intervalos abertos de $\mathbb{R}$, com a medida de Lebesgue.

Para o intervalo aberto (a, b), temos:

$$st_{\Pi}^{-1}(a,b) = A = \{x \in \Pi | a < st(x) < b\}.$$

Provaremos que A é igual a $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Pi | a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\}$.

Para provarmos a igualdade acima, considere $a, b \in \mathbb{R}$.

i)$A \subseteq B$

Seja $st(x) = r$ e $x \in A = \{x \in \Pi | a < st(x) < b\}$, isto é, $a < r < b$. Logo, este $r \in \mathbb{R}$ é o único elemento dos reais que está infinitamente próximo de x, ou seja, para todo $n \geq 1, |x - r| \leq \frac{1}{n}$. Deste modo, como $a, b \in \mathbb{R}$, temos que, $a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}$. Assim, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Pi / a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\}$.

ii)$B \subseteq A$

Seja $x \in B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in \Pi | a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\}$. Logo, existe $n \geq 1$ pertencente aos naturais, tal que, $a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}$.

Aplicando à desigualdade acima a parte standard, teremos:

$$\begin{aligned} st(a + \tfrac{1}{n}) &\leq st(x) \leq & st(b - \tfrac{1}{n}) \\ a + \tfrac{1}{n} &\leq st(x) \leq & b - \tfrac{1}{n} \\ a < a + \tfrac{1}{n} &\leq st(x) \leq & b - \tfrac{1}{n} < b \end{aligned}$$

Portanto $x \in A$.

Assim, como $A = B$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\{x \in \Pi | a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\}$$

é um subconjunto interno de Π, pois, é um intervalo hiperreal fechado, pertence a $\mathcal{A}$. Logo, sendo $\mathcal{A}_L$ uma σ-álgebra que estende $\mathcal{A}$, temos que, $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in \Pi | a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\} = st_{\Pi}^{-1}(a, b) \in \mathcal{A}_L$. Deste modo, $st_{\Pi}^{-1}(a, b)$ é ξ-mensurável e, portanto (a, b) é λ-mensurável.

Seja $\mathcal{K} = [\frac{-k^2}{2}, \frac{k^2}{2} - 1] \subseteq \Pi$ e $t \in \mathbb{R}$ qualquer, logo, o conjunto

$$\{\nu \in {}^*\mathbb{Z} \cap \mathcal{K} | \frac{\nu}{k} \leq t\}$$

é interno (intervalo hiperreal fechado) e hiperfinito e portanto tem máximo. (proposição 2.1.2). Considere, então

$$\nu_t = max\{\nu \in {}^*\mathbb{Z} \cap \mathcal{K} | \frac{\nu}{k} \leq t\}.$$

Deste modo, $\frac{\nu_t}{k} = \nu_t \epsilon$ é o maior elemento de Π menor ou igual a t, pois, sendo t um número real e $\nu_t \in \Pi \subseteq {}^*\mathbb{R}$, então, $0 \leq t - \nu_t \epsilon < \epsilon \approx 0$, ou seja $t - \nu_t \epsilon$ é um infinitésimo positivo.

Observe que se multiplicarmos $\Pi = [-\frac{k}{2}, \frac{k}{2} - \epsilon]$ por k, teremos,

$$k\Pi = [-\frac{k^2}{2}, \frac{k^2}{2} - 1].$$

Como pela definição de Π, k é par, podemos concluir que:

$$k\Pi = {}^*\mathbb{Z} \cap [-\frac{k^2}{2}, \frac{k^2}{2} - 1].$$

Como vimos acima, $\nu_t\epsilon$ é o maior elemento de Π menor ou igual a t . Deste modo, se considerarmos $t = b - \frac{1}{n}$, teremos que $\nu_{b-\frac{1}{n}}\epsilon$ é o maior elemento de Π menor ou igual a $b - \frac{1}{n}$, então,

$$\nu_{b-\frac{1}{n}}\epsilon = max\{x \in \Pi | x \leq b - \frac{1}{n}\},$$

ou seja,

$$\nu_{b-\frac{1}{n}} = k\ max\{x \in \Pi | x \leq b - \frac{1}{n}\}.$$

Do mesmo modo, teremos que $\nu_{a+\frac{1}{n}}\epsilon$ é o menor elemento de Π maior ou igual a $a + \frac{1}{n}$, então:

$$\nu_{a+\frac{1}{n}}\epsilon = min\{x \in \Pi | x \geq a + \frac{1}{n}\},$$

ou seja,

$$\nu_{a+\frac{1}{n}} = k\ min\{x \in \Pi | / x \geq a + \frac{1}{n}\}.$$

Logo, a cardinalidade do conjunto $A_n = \{x \in \Pi | a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\}$, será:

$$\left| \{x \in \Pi | a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\} \right| = \nu_{b-\frac{1}{n}} - \nu_{a+\frac{1}{n}} \approx k\left(b - \frac{1}{n}\right) - k\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

Com isso, aplicando a função interna ξ em A, teremos:

$$\begin{aligned} \xi(A_n) = |A_n|\epsilon &\approx \left(k\left(b - \tfrac{1}{n}\right) - k\left(a + \tfrac{1}{n}\right)\right)\epsilon \\ &= b - \tfrac{1}{n} - a - \tfrac{1}{n} \\ &= b - a - \tfrac{2}{n}. \end{aligned}$$

Assim, como para cada $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x \in \Pi | a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$$

$$\xi_L(A_n) = {}^0\xi(A_n).$$

Por outro lado, podemos expressar

$$st_\Pi^{-1}((a, b)) = A_1 \bigcup (\cup_{n\geq 2}(A_n \setminus A_{n-1})).$$

Se aplicarmos a medida ξ_L, teremos:

$$\begin{aligned}
\xi_L(st_\Pi^{-1}(a,b)) &= {}^0\xi(A_1) +^0 \xi((\bigcup_{n\geq 2}(A_n \setminus A_{n-1})) \\
&= {}^0\xi(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} {}^0\xi(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= {}^0\xi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).
\end{aligned}$$

Como a união é crescente

$${}^0\xi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} {}^0\xi(A_n)$$

sendo, ${}^0\xi(A_n) = st(\xi(A_n)) = st\left(b - a - \frac{2}{n}\right) = b - a - \frac{2}{n}$, concluimos que:

$$\xi_L(st_\Pi^{-1}(a,b)) = \lim_{n\to\infty} = (b - a - \frac{2}{n}) = b - a.$$

Portanto,

$$\lambda((a,b)) = \xi_L(st_\Pi^{-1}(a,b)) = b - a = l((a,b)),$$

como queríamos mostrar. $\square$

Lema 3.3.3. *$\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra contendo a álgebra de todos os subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$.*

Prova:

1. $\mathcal{L}$ é uma σ- álgebra.

   (a) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{L}$. De fato, pois:

   $$st_\Pi^{-1}(\emptyset) = \{x \in \Pi | st(x) \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{A}_L,$$

   $$st_\Pi^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in \Pi | st(x) \in \mathbb{R}\} = \Pi \cap {}^*\mathbb{R} \in \mathcal{A}_L.$$

   (b) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$.

   Sabendo que $(st_\Pi^{-1}(A))^c = st_\Pi^{-1}(A^c)$, temos,

   $$\begin{aligned}
   A \in \mathcal{L} &\Rightarrow st_\Pi^{-1}(A) \in \mathcal{A}_L \\
   &\Rightarrow (st_\Pi^{-1}(A))^c \in \mathcal{A}_L \\
   &\Rightarrow st_\Pi^{-1}(A^c) \in \mathcal{A}_L \\
   &\Rightarrow A^c \in \mathcal{L}.
   \end{aligned}$$

(c) $\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \in \mathcal{L}$.

Seja $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de $\mathcal{L}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $st_{\Pi}^{-1}(V_n) \in \mathcal{A}_L$. Isto implica que, $\bigcup_{n=1}^{\infty} st_{\Pi}^{-1}(V_n)$ também pertence a $\mathcal{A}_L$.

Devemos mostrar agora que $st_{\Pi}^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} st_{\Pi}^{-1}(V_n)$

$$\begin{aligned} st_{\Pi}^{-1}(\textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n) &= \{x \in \Pi | st(x) \in \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n\} \\ &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \Pi | st(x) \in V_n\} \\ &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} st_{\Pi}^{-1}(V_n) \end{aligned}$$

então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \mathcal{L}$, ficando provado que $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra.

Na realidade, a prova de 1 não é outra coisa do que a prova de que a imagem inversa de uma σ-álgebra é uma σ-álgebra.

2. $\mathcal{L}$ contém a álgebra de todos os subconjuntos de Borel.

   De fato, pois, pelo lema anterior

$$st_{\Pi}^{-1}(a, b) \in \mathcal{A}_L \Rightarrow (a, b) \in \mathcal{L}$$

   ou seja, $\mathcal{L}$ contém todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ e, portanto, $\mathcal{L}$ contém todos os conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, pois essa coleção é a menor $\sigma-$álgebra que contém os intervalos abertos de $\mathbb{R}$. $\square$

Lema 3.3.4. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ *é um espaço de medida completo.*

Prova:

1. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ é um espaço de medida:

   Para isto basta mostrarmos que λ é uma medida, pois já provamos que $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra:

   (a) $\lambda(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{L}$, pois, $\lambda : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ é dada por

$$\lambda(A) = \xi_L(st_{\Pi}^{-1}(A)) \geq 0.$$

(b) $\lambda(\emptyset)=0$, pois como, $st_{\Pi}^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, temos:

$$\lambda(\emptyset)=\xi_L(st_{\Pi}^{-1}(\emptyset))=\xi_L(\emptyset)=0$$

já que ξ_L é uma medida.

(c) λ é σ-aditiva, ou seja

$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{L}$ é uma família enumerável disjunta, então $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}(V_n))=\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(V_n)$.

Seja $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de elementos de $\mathcal{L}$, dois a dois disjuntos, então, $\{st_{\Pi}^{-1}(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de elementos de $\mathcal{A}_L$, dois a dois disjuntos, pois: supondo por absurdo que $st_{\Pi}^{-1}(V_i)\cap st_{\Pi}^{-1}(V_j)\neq\emptyset$, para $i\neq j$, ou seja, que existe x tal que,

$$x\in st_{\Pi}^{-1}(V_i)\cap st_{\Pi}^{-1}(V_j)$$

para $i\neq j$, obtemos que, $x\in st_{\Pi}^{-1}(V_i)$ e $x\in st_{\Pi}^{-1}(V_j)$, ou seja, $st(x)\in V_i$ e $st(x)\in V_j$, e assim, $st(x)\in V_i\cap V_j=\emptyset$, o que é um absurdo.

Deste modo

$$\begin{aligned}\lambda(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V_n)) &= \xi_L(st_{\Pi}^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}}V_n))\\ &= \xi_L(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} st_{\Pi}^{-1}(V_n)).\end{aligned}$$

Como ξ_L é uma medida, é σ-aditiva, ou seja,

$$\xi_L(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} st_{\Pi}^{-1}(V_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_L(st_{\Pi}^{-1}(V_n))$$

Assim,

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_L(st_{\Pi}^{-1}(V_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(V_n).$$

Com isto mostramos que λ é uma medida e, que $(\mathbb{R},\mathcal{L},\lambda)$ é um espaço de medida.

2. $(\mathbb{R},\mathcal{L},\lambda)$ é um espaço de medida completo, ou seja, $\mathcal{L}$ contém todos os subconjuntos dos conjuntos de $\mathbb{R}$ de medida-λ nula.

Considere dois subconjuntos U e V de $\mathbb{R}$, com $V \subseteq U$

Desta forma temos:

$$V \subseteq U \Longrightarrow st_{\Pi}^{-1}(V) \subseteq st_{\Pi}^{-1}(U).$$

Sendo ξ_L uma medida completa, se tomarmos $\lambda(U) = 0$, teremos,

$$\lambda(V) = \xi_L(st_{\Pi}^{-1}(V)) \leq \xi_L(st_{\Pi}^{-1}(U)) = \lambda(U) = 0.$$

Sendo assim, $\lambda(V) = 0$ e portanto, como $st_{\Pi}^{-1}(V) \in \mathcal{A}_L$ por ser ξ_L completa, $V \in \mathcal{L}$.

Fica provado que $\mathcal{L}$ contém todos os conjuntos de medida-λ nula. $\square$

Concluimos à partir dos três lemas anteriores que λ é uma medida completa sobre $\mathbb{R}$ que coincide com a medida de Lebesgue em todos os borelianos de $\mathbb{R}$. Sendo assim, ou λ é a própria medida de Lebesgue ou alguma extensão desta medida a uma σ-álgebra que contém todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

Para mostrarmos que λ não é uma extensão da medida de Lebesgue, mas a própria, basta provarmos o lema a seguir para subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida-λ finita.

A razão pela qual este lema é suficiente para o que pretendemos é que o caso geral com medida arbitrária sempre pode ser reduzido a este caso, pois, $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap I_n)$ onde $\{I_n\}$ é uma sucessão de intervalos limitados que cobre $\mathbb{R}$, sendo então cada $A \cap I_n$ de medida finita.

No lema seguinte, especificamente na proposição 3.3.1 que o fundamenta, é necessário fazer uso de uma propriedade conjuntista da superestrutura $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$, onde ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^I/\mathcal{U}$, que depende da cardinalidade κ do conjunto de índices I, a saber, a κ-saturação. Nós restringiremos a nossa análise ao caso de $\kappa = \aleph_0$, isto é, tomando $I = \mathbb{N}$.

Teorema 3.3.5 (Saturação Enumerável)**.** *Seja dada uma sucessão $\{A_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos internos com a propriedade de interseção finita. Então, $\cap_{r\in\mathbb{N}} A_r \neq \emptyset$.*

Prova:

Cada elemento A_r da sucessão, por ser um conjunto interno, podemos escrever da seguinte forma

$$A_r = [\{A_{r,n}\}_{n\in\mathbb{N}}]$$

onde, para cada $n, A_{r,n}$ é um conjunto standard. Como $\{A_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ tem a propriedade da interseção finita, temos que para qualquer $r \in \mathbb{N}, A_r \neq \emptyset$. Em particular, $A_1 \neq \emptyset$ e portanto, sem qualquer perda de generalidade, podemos supor que $A_{1,n} \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Visto que

$$\bigcap_{r=1}^{i} A_r = \bigcap_{r=1}^{i} [\{A_{r,n}\}_{n\in\mathbb{N}}] = [\{\bigcap_{r=1}^{i} A_{r,n}\}_{n\in\mathbb{N}}]$$

então, da propriedade da interseção finita, resulta que

$$\{n \in \mathbb{N}| \bigcap_{r=1}^{i} A_{r,n} \neq \emptyset\} \in \mathcal{U}$$

para qualquer $i = 1, 2, \ldots$

Sendo

$$i_n = max\{i \in \{1, 2, \ldots\}| \bigcap_{r=1}^{i} A_{r,n} \neq \emptyset\},$$

i_n é um número bem definido, pois, por hipótese, se tem $A_{1,n} \neq \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a interseção $\bigcap_{r=1}^{i} A_{r,n}$ é não vazia, logo, existe $t_n \in \bigcap_{r=1}^{i} A_{r,n}$.

Sendo $t = [\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}] \in {}^*\mathbb{R}$ mostraremos a seguir que t pertence à interseção de todos os A_r e para tanto é suficiente verificar que para qualquer $r \in \mathbb{N}$ temos $t \in A_r$.

De fato, sendo i um número natural qualquer, então para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $i_n \geq i$, temos $t_n \in A_{i,n}$ e portanto,

$$\{n \in \mathbb{N}|t_n \in A_{i,n}\} \supseteq \{n \in \mathbb{N}|i_n \geq i\}.$$

Como

$$\{n \in \mathbb{N}|i_n \geq i\} = \{n \in \mathbb{N}|n \geq i\} \cap \{n \in \mathbb{N}| \bigcap_{r=1}^{i} A_{r,n} \neq \emptyset\}$$

então, o conjunto $\{n \in \mathbb{N}|i_n \geq i\}$ pertence a $\mathcal{U}$ o mesmo acontecendo, por consequência, ao conjunto $\{n \in \mathbb{N}/t_n \in A_{i,n}\}$. Assim, $t \in A_i$ e, pela arbitrariedade de i podemos concluir que a interseção dos A_r é não vazia. $\square$

Lema 3.3.6. *Seja A um subconjunto λ-mensurável de $\mathbb{R}$ tal que $\lambda(A) = \alpha < \infty$. Então A é mensurável à Lebesgue com medida $l(A) = \alpha$.*

Prova:

Seja A um subconjunto λ-mensurável de $\mathbb{R}$. Temos por hipótese que $\lambda(A) = \alpha < \infty$.

Sabendo que a definição de λ é

$$\lambda(A) = \xi_L(st_{\Pi}^{-1}(A))$$

onde $st_{\Pi}^{-1}(A) \in \mathcal{A}_L$, temos, $\xi_L(st_{\Pi}^{-1}(A)) = \alpha$.

Deste modo o conjunto $B = st_{\Pi}^{-1}(A)$ é ξ-aproximável. Portanto dado $\epsilon > 0$, existem $C, D \in \mathcal{A}$, tais que

$$C \subseteq st_{\Pi}^{-1}(A) \subseteq D$$

logo,

$$\xi_L(C) \leq \xi_L(st_{\Pi}^{-1}(A)) \leq \xi_L(D)$$

com

$$\xi_L(C) = {}^0\xi(C) > \alpha - \tfrac{\epsilon}{2}$$
$$\xi_L(D) = {}^0\xi(D) < \alpha + \tfrac{\epsilon}{2}$$

Observe a proposição abaixo:

Proposição 3.3.1. *Se A é um subconjunto interno de ${}^*\mathbb{R}$ então $st(A)$ é fechado para a topologia usual de $\mathbb{R}$.*

Prova da Proposição:

Chamemos $st(A) = B$. Devemos mostrar que B coincide com seu fecho, ou seja $\bar{B} = B$. Como $B \subseteq \bar{B}$ é então suficiente mostrar que a inclusão $\bar{B} \subseteq B$ se verifica. Seja $a \in \bar{B}$ um ponto qualquer. Para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto definido por

$$A_n = A \cap \{x \in {}^*\mathbb{R} | \, |a - x| < \frac{1}{n}\}$$

é interno pois é a interseção de dois conjuntos internos. Além disso é não vazio: de fato, pois, por hipótese a é um ponto aderente de B, existe $a' \in B$ tal que $|a' - a| < \frac{1}{n}$;

como $B = st(A)$, então, $a = st(x)$ para algum $x \in A$ e, portanto $x \in A_n$ o que mostra que A_n é não vazio. Por outro lado como $\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_n$ então qualquer interseção finita de conjuntos A_n é não vazia, donde, por saturação enumerável, resulta

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Se $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, então $x \in A$ e $x \approx a$ (pois $|x - a| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$); deste modo, $st(x) = a \in B = st(A)$. Portanto $st(A)$ é fechado. $\square$

A partir deste teorema, podemos concluir que como $C \in \mathcal{A}$, C é interno, $st(C) = C_\epsilon$ é fechado contido em A, e deste modo estando $C \subseteq st_\Pi^{-1}(C_\epsilon)$ verifica-se que

$$\lambda(C_\epsilon) = \xi_L(st_\Pi^{-1}(C_\epsilon)) \geq \xi_L(C) > \alpha - \frac{\epsilon}{2} \ldots \qquad (i)$$

Do mesmo modo, sendo D interno, $\Pi \setminus D$ é interno e, portanto, $st(\Pi \setminus D)$ é fechado. Logo seu complementar é aberto contendo A. Seja $D_\epsilon = \mathbb{R} \setminus st(\Pi \setminus D)$ este complementar tal que,

$$\lambda(D_\epsilon) = \xi_L(st_\Pi^{-1}(D_\epsilon)) < \alpha + \frac{\epsilon}{2} \ldots \qquad (ii)$$

Sabendo que $st_\Pi^{-1}(A) \subseteq D$, queremos provar ainda que $A \subseteq D_\epsilon$:

$$st_\Pi^{-1}(A) \subseteq D$$

então

$$\begin{aligned}
\Pi \setminus st_\Pi^{-1}(A) &\supseteq \Pi \setminus D \\
st(\Pi \setminus st_\Pi^{-1}(A)) &\supseteq st(\Pi \setminus D) \\
\mathbb{R} \setminus st(\Pi \setminus st_\Pi^{-1}(A)) &\subseteq \mathbb{R} \setminus st(\Pi \setminus D) \\
A \subseteq \mathbb{R} \setminus st(\Pi \setminus st_\Pi^{-1}(A)) &\subseteq \mathbb{R} \setminus st(\Pi \setminus D) = D_\epsilon
\end{aligned}$$

portanto, $A \subseteq D_\epsilon$.

Como consequência de (i) e (ii) temos:

$$C_\epsilon \subseteq A \subseteq D_\epsilon \qquad \text{e} \qquad \lambda(D_\epsilon) - \lambda(C_\epsilon) < \epsilon.$$

Provaremos agora que A é Lebesgue mensurável e que a medida de Lebesgue de A é igual a α.

O argumento é o seguinte:

Temos que, para cada $\epsilon > 0, C_\epsilon \subseteq A \subseteq D_\epsilon$, onde C_ϵ é fechado e D_ϵ aberto e $\lambda(D_\epsilon) - \lambda(C_\epsilon) < \epsilon$. Temos também que $\lambda(A) = \alpha$.

Definindo $B = \cap_{\epsilon>0}(D_\epsilon \setminus A)$ e ϵ racional, temos que B é mensurável, pois cada D_ϵ e A são mensuráveis.

Por outro lado, $B \subseteq D_\epsilon \setminus A$, assim,

$$0 \leq \lambda(B) \leq \lambda(D_\epsilon) - \lambda(A) \leq \lambda(D_\epsilon) - \lambda(C_\epsilon) < \epsilon.$$

Logo, sendo a medida de Lebesgue completa e pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$, temos que $\lambda(B) = 0$.

Deste modo, podemos dizer que A difere de D_ϵ a menos de um conjunto de medida-λ nula e, portanto:

$$\lambda(A) = \lambda(D_\epsilon).$$

Por outro lado, como D_ϵ é aberto, $\lambda(D_\epsilon) = l(D_\epsilon)$ já que λ e ϵ coincidem em abertos de $\mathbb{R}$ pois coincidem nos intervalos abertos. Assim, A é mensurável no sentido de Lebesgue e $l(A) = l(D_\epsilon) = \lambda(D_\epsilon) = \lambda(A) = \alpha$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Carl Boyer. *História da Matemática*. Ed. Edgard Blücher, Ltda., São Paulo, 1996.

[2] José J. M. Souza Pinto. *Métodos Infinitesimais de Análise Matemática*. Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2000.

[3] Peter A. Loeb, Albert Hurd. *An Introducion to Nonstandard Real Analysis*. Academic Press, Inc. Florida. USA, 1985.

[4] Ricardo Bianconi, João Carlos Prandini. *Análise Não-Standard*. USP, Brasil, 1992.

[5] Richard L. Wheeden, Antoni Zygmund. *Mensure and Integral: An Introduction to Real Analysis*. Marcel Dekker, Inc., New york, 1977.

[6] Robert Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals: An Introducion to Nonstandard Analysis*. Springer-Verlag, New York, Inc., New York, 1991.

[7] Sergio Albeverio. *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*. Academic Press, Inc., Florida, USA, 1986.