

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FERDINAND KANKE

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CAMADAS RESTRITORAS APLICADA AO
CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM PLACAS SEMI-ESPESSAS**

CURITIBA

2017

FERDINAND KANKE

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CAMADAS RESTRITORAS APLICADA AO
CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM PLACAS SEMI-ESPESSAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, Área de Concentração em Mecânica dos Sólidos e Vibrações, Setor de Tecnologia.

Orientador: Prof. Jucélio Tomás Pereira, *D.Sc.*

CURITIBA

2017

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

K16o Kanke, Ferdinand
Otimização topológica de camadas restritoras aplicada ao controle de vibrações em placas semi-espessas / Ferdinand Kanke. – Curitiba, 2017. 120 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

Orientador: Jucélio Tomás Pereira .
Bibliografia: p. 116-120.

1. Otimização estrutural. 2. Materiais laminados. 3. Método dos elementos finitos. 4. Dinâmica estrutural. 5. Vibração. 6. Algoritmos genéticos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pereira, Jucélio Tomás. III. Título.

CDD: 660.2812

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor TECNOLOGIA
Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA
Código CAPES: 40001016040P5

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **FERDINAND KANKE**, intitulada: "**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CAMADAS RESTRITORAS APLICADA AO CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM PLACAS SEMI-ESPESSAS**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 01 de Setembro de 2017.


JUCÉLIO TOMAS PEREIRA
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

CARLOS ALBERTO BAVASTRI
Avaliador Interno (UFPR)


MARCO ANTONIO LUERSEN
Avaliador Externo (UFPR)

Dedico esta dissertação a minha esposa
Vanessa, ao meu filho Vinicius, aos meus pais e
irmãos por todo apoio prestado

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Dr. Jucélio Tomás Pereira pela orientação, atenção e contribuição para a elaboração deste trabalho.

Minha esposa Vanessa pelo incentivo e compreensão durante toda a jornada.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PG-Mec) por propiciar as condições necessárias para o desenvolvimento deste estudo.

Ao Professor Dr. Carlos Alberto Bavastri pelos diversos ensinamentos e colaborações prestadas.

Aos meus colegas do Laboratório de Vibrações e Som que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todas as pessoas que de alguma maneira contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

RESUMO

O estudo do controle de vibrações possui grande importância para diversos ramos da indústria, pois é possível melhorar o desempenho estrutural e/ou conforto acústico dos mais diversos equipamentos. Frequentemente esses equipamentos são submetidos a excitações que podem ocasionar vibrações mecânicas. Uma forma de reduzir as vibrações desse tipo de equipamento é pela utilização de técnicas de controle passivo, em especial, pelo uso de camada de restrição (CR). Este estudo tem por objetivo desenvolver uma metodologia para controle de vibrações que possibilite a obtenção da configuração ótima de recobrimento com material viscoelástico linear (MVE) em uma placa sob uma excitação harmônica. A análise de vibrações é realizada via Método dos Elementos Finitos através da formulação de placas laminadas com camadas discretas, onde cada camada utiliza a teoria cisalhante de primeira ordem. A CR é composta de MVE sobreposto por uma camada metálica. O comportamento do MVE é descrito pelo modelo de Zener fracionário. A solução do problema de posicionamento ótimo da CR é obtida via algoritmos genéticos. A metodologia proposta é implementada computacionalmente em um conjunto de rotinas no software Matlab® onde, esta é aplicada a diversos casos de controle passivo em placas, considerando várias condições de contorno e modos de vibrações. Para todos os casos, os resultados mostram eficiência em relação à redução dos níveis de vibrações com uma boa aproximação, quando comparados a estudos similares na literatura.

Palavras-chave: Otimização estrutural topológica, Materiais viscoelásticos, Placa laminada, Método dos Elementos Finitos, Controle passivo de vibrações, Algoritmos genéticos.

ABSTRACT

The study of vibration control has great importance for several areas of the industry, since it is possible to improve the structural performance and / or acoustic comfort of the many different equipment. These equipments, are often submitted to excitations that can cause mechanical vibration. One way to reduce the vibration of this type of equipment is by the use of passive control techniques, especially by the use of constrained layer (CL). This study aims to develop a methodology for vibration control that allows to obtain the optimum configuration of coating with linear viscoelastic material (VEM) in a plate under a harmonic excitation. The analysis of vibrations is performed using Finite Element Method with the layerwise plate theory, where each layer uses the first order shear theory. The CL is composed of VEM overlapped by a metallic layer. The behavior of MVE is based on the fractional Zener model. The solution of the optimal positioning problem of CL is achieved using genetic algorithms. The presented methodology is implemented computationally in a set of routines in Matlab® software. This is applied to several cases of passive control in plates, considering several boundary conditions and modes of vibrations. For all cases the results present efficiency in relation to the reduction of vibration levels with a good approximation when compared to similar studies in the literature.

keywords Topological Structural Optimization, Viscoelastic Materials, Laminated Plate, Finite Element Method, Passive Vibration Control, Genetic Algorithms

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Representação de uma estrutura com camada de restrição.	20
Figura 2.1 - Teorias para formulação do problema de flexão em placas.	24
Figura 2.2 - Teorias para formulação do problemas de placas laminadas.....	24
Figura 3.1 - Tipos básicos de otimização estrutural.	28
Figura 3.2 - Fluxograma de uma algoritmo genético padrão.....	30
Figura 3.3 - Representação binária de m indivíduos em uma população em AG.....	33
Figura 3.4 - Seleção via método da roleta ponderada.....	35
Figura 3.5 - Aplicação do operador de cruzamento em dois indivíduos.....	36
Figura 3.6 - Operadores de mutação.....	37
Figura 3.7 - Comportamento típico para MVEs.	42
Figura 3.8 - Modelos reológicos de a) Maxwell e b) Kelvin-Voigt.....	43
Figura 3.9 - Formas equivalentes do modelo reológico de Zener.	43
Figura 3.10 - Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a temperatura para uma frequência constante.	49
Figura 3.11 - Representação dos parâmetros do modelo de derivada fracionária.	50
Figura 3.12 - Campo de deslocamentos u e v em função dos ângulos de flexão.....	51
Figura 3.13 - Definições para tensões, momentos e carregamentos.....	54
Figura 3.14 - Teoria de deformação por camadas discretas.	57
Figura 3.15 - Elemento quadrilátero de 4 nós. (a) coordenadas globais no elemento, (b) coordenadas locais no elemento.	65
Figura 4.1 - Intervalo de frequências de interesse no problema de otimização.....	84
Figura 4.2 - Representação das variáveis de projeto.	85
Figura 4.3 - Aptidão ponderada.	87
Figura 4.4 - Fluxograma do algoritmo.	89
Figura 5.1 - Nomograma do MVE C1002.	91
Figura 5.2 - Discretização da placa com representação dos nós e elementos da malha.	92
Figura 5.3 - Modos de vibrar para placa de Mindlin biapoiada com espessura de 25mm e relação de aspecto 2,5.	94
Figura 5.4 - Comparação da FRF para placa de Mindlin e Placa laminada metálica na condição biapoiada.....	96
Figura 5.5 - FRF para placa em balanço sem MVE com excitação no nó 13 e resposta no nó 78.	97

Figura 5.6 - Comportamento da placa em balanço sem MVE para o 1º modo de vibração.	97
Figura 5.7 - Solução para o 1º modo de vibração da placa em balanço com 10% de recobrimento de MVE.	98
Figura 5.8 - Resultados para o 1º modo de vibração da placa em balanço com 10% de recobrimento de MVE.	98
Figura 5.9 - Solução para o 1º modo de vibração da placa em balanço com 25% de recobrimento de MVE.	99
Figura 5.10 - Resultados para o 1º modo de vibração da placa em balanço com 25% de recobrimento de MVE.	99
Figura 5.11 - Solução para o 1º modo de vibração da placa em balanço com 50% de recobrimento de MVE.	100
Figura 5.12 - Resultados para 1º modo de vibração da placa em balanço com 50% de recobrimento de MVE.	100
Figura 5.13 - Comportamento da placa em balanço sem MVE para o 2º modo de vibração.	101
Figura 5.14 - Solução para o 2º modo de vibração da placa em balanço com 10% de recobrimento de MVE.	101
Figura 5.15 - Resultados para o 2º modo de vibração da placa em balanço com 10% de recobrimento de MVE.	102
Figura 5.16 - Solução para o 2º modo de vibração da placa em balanço com 25% de recobrimento de MVE.	102
Figura 5.17 - Resultados para o 2º modo de vibração da placa em balanço com 25% de recobrimento de MVE.	102
Figura 5.18 - Solução para o 2º modo de vibração da placa em balanço com 50% de recobrimento de MVE.	103
Figura 5.19 - Resultados para o 2º modo de vibração da placa em balanço com 50% de recobrimento de MVE.	103
Figura 5.20 - FRF para placa biapoiada sem MVE com excitação no nó 4 e resposta no nó 75.	104
Figura 5.21 - Comportamento da placa biapoiada sem MVE para o 1º modo de vibração.	105
Figura 5.22 - Solução para o 1º modo de vibração da placa biapoiada com 10% de recobrimento de MVE.	105
Figura 5.23 - Resultados para o 1º modo de vibração da placa biapoiada com 10% de recobrimento de MVE.	105

Figura 5.24 - Solução para o 1º modo de vibração da placa biapoiada com 25% de recobrimento de MVE.	106
Figura 5.25 - Resultados para o 1º modo de vibração da placa biapoiada com 25% de recobrimento de MVE.	106
Figura 5.26 - Solução para o 1º modo de vibração da placa biapoiada com 50% de recobrimento de MVE.	106
Figura 5.27 - Resultados para o 1º modo de vibração da placa biapoiada com 50% de recobrimento de MVE.	107
Figura 5.28 - Comportamento da placa biapoiada sem MVE para o 2º modo de vibração.	108
Figura 5.29 - Solução para o 2º modo de vibração da placa biapoiada com 10% de recobrimento de MVE.	108
Figura 5.30 - Resultados para o 2º modo de vibração da placa biapoiada com 10% de recobrimento de MVE.	108
Figura 5.31 - Solução para o 2º modo de vibração da placa biapoiada com 25% de recobrimento de MVE.	109
Figura 5.32 - Resultados para o 2º modo de vibração da placa biapoiada com 25% de recobrimento de MVE.	109
Figura 5.33 - Solução para o 2º modo de vibração da placa biapoiada com 50% de recobrimento de MVE.	109
Figura 5.34 - Resultados para o 2º modo de vibração da placa biapoiada com 50% de recobrimento de MVE.	110
Figura 5.35 – Solução ótima de recobrimento com MVE placa em balanço.....	111
Figura 5.36 – Condição ótima considerando os 3 primeiros modos de vibração para uma placa em balanço.....	111
Figura 5.37 - Solução ótima de recobrimento com MVE placa biapoiada.....	112
Figura 5.38 - Condição ótima considerando os 3 primeiros modos de vibração para uma placa biapoiada.....	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Propriedades mecânicas do aço ASTM A36.....	90
Tabela 5.2 - Parametros do MVE EAR C1002.	91
Tabela 5.3 - Placa biapoiada com relação de aspecto de 2,5, espessura de 25mm e malha $h_e = 40\text{mm}$	93
Tabela 5.4 - Placa biapoiada com relação de aspecto de 2,5, espessura de 25mm e malha $h_e = 20\text{mm}$	93
Tabela 5.5 - Placa biapoiada com relação de aspecto de 2,5, espessura de 50mm e malha $h_e = 40\text{mm}$	93
Tabela 5.6 - Placa biapoiada com relação de aspecto de 2,5, espessura de 50mm e malha $h_e = 20\text{mm}$	94
Tabela 5.7 - Comparação dos resultados da placa de Mindlin e placa laminada metálica com 3 camadas e condição biapoiada.....	95
Tabela 5.8 - Fator de perda para placa em balanço.....	111
Tabela 5.9 - Fator de perda para placa em biapoiada.....	113

LISTA DE ABREVIATURAS

AG	Algoritmos genéticos.
CR	Camada de restrição
FRF	Função resposta em frequência.
GL	Graus de liberdade.
MEF	Método dos elementos finitos.
MVEs	Materiais viscoelásticos.
TCD	Teoria de camadas discretas.
TCOS	Teoria cisalhante de ordem superior.
TCP	Teoria clássica de placas.
TCPO	Teoria cisalhante de primeira ordem.
TCUE	Teoria de camada única equivalente.
WLF	Modelo de Williams-Landel-Ferry.

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto latino

$A(\Omega)$	Inertância.
$A_{ks}(\Omega)$	Inertância com excitação no k-ésimo nó e resposta no s-ésimo nó.
a_1	Parâmetros dependentes do material para o modelo de Zener fracionário.
b_1	Parâmetros dependentes do material para o modelo de Zener fracionário.
b_j	Variáveis de projeto binarias.
$\underline{\underline{B_c}}$	Matriz de deformações relativa ao termo de cisalhamento.
$\underline{\underline{B_f}}$	Matriz de deformações relativa ao termo de flexão.
$\underline{\underline{B_k}}$	Matriz de deformações-deslocamentos.
$\underline{\underline{\hat{B}_k}}$	Matriz de deformações-deslocamentos modificada.
c_1, c_2	Constante do material para o fator de deslocamento de temperatura (WLF).
$\underline{\underline{C}}$	Matriz de amortecimento viscoso.
\underline{d}	Vector de deslocamentos generalizados.
$\underline{\dot{d}}$	Vector de velocidades generalizados.
D^α	Derivada fracionária de Riemann-Liouville.
$\underline{\underline{D_c}}$	Matriz de elasticidade devida ao cisalhamento.
$\underline{\underline{D_f}}$	Matriz de elasticidade devida a flexão.
$\underline{\underline{D_k}}$	Matriz de elasticidade na camada k.
$\underline{\underline{\hat{D}_k}}$	Matriz de elasticidade modificada na camada k.
E	Módulo de elasticidade.
E_c	Módulo de elasticidade complexo.
E_0	Módulo dinâmico em $\Omega \rightarrow \infty$

E_∞	Módulo dinâmico em $\Omega \rightarrow 0$
F_j	Aptidão do j-ésimo indivíduo.
F	Força aplicada.
$f(\underline{x})$	Função objetivo.
$f^*(\underline{x})$	Função objetivo sem restrição.
$\underline{f}(t)$	Vetor de força de excitação.
G	Módulo de cisalhamento.
G_c	Módulo de cisalhamento complexo.
$g_p(\underline{x})$	Restrições de igualdade.
h	Espessura da placa.
h_k	Espessura da k-ésima camada da placa.
$h_q(\underline{x})$	Restrições de desigualdade.
H	Integral de ação
$H(\Omega)$	Receptância.
i	Número imaginário, $i = \sqrt{-1}$.
\underline{I}^e	Matriz de inércia no elemento para placa de Reissner-Mindlin.
\underline{I}_k^e	Matriz de inércia elementar na camada k para placa laminada.
$\hat{\underline{I}}_k$	Matriz de inércia modificada na camada k para placa laminada.
$J(t)$	Módulo de fluência.
\underline{K}	Matriz de rigidez.
\underline{K}_b^e	Matriz de rigidez a flexão no elemento.
\underline{K}_c^e	Matriz de rigidez ao cisalhamento transversal no elemento.
\underline{K}_e	Matriz de rigidez no elemento de placa.
\underline{K}^e	Matriz de rigidez global no elemento de placa.
\underline{K}_v	Matriz de rigidez viscoelástica.
$\tilde{\underline{K}}_v$	Matriz de rigidez viscoelástica modificada.

ℓ	Número equivalente na forma decimal.
\underline{L}	Matriz de operadores diferenciais.
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	Componentes de momentos no plano.
$\underline{\underline{M}}_e$	Matriz de massa consistente no elemento.
$\underline{\underline{M}}$	Matriz de massa.
m	Tamanho da população.
n_b	Número de algarismos binários.
n_{el}	Número de elementos da placa.
n_h	Número de restrições de desigualdade.
n_g	Número de restrições de igualdade.
N	Matriz de funções de forma.
P_z	Carregamento de força na direção do eixo z.
P_j	Probabilidade para a seleção do j-ésimo indivíduo.
q_x	Carregamento de momento em torno do eixo x.
q_y	Carregamento de momento em torno do eixo y.
Q_{xz}, Q_{yz}	Componentes de esforços cortantes no plano.
\underline{q}_e	Vetor de deslocamento generalizado no elemento.
$R(t)$	Módulo de relaxação.
r_g	Termo de penalização para restrições de igualdade.
r_h	Termo de penalização para restrições de desigualdade.
S_j	Área de superfície do elemento.
S_{max}	Área máxima de recobrimento da placa.
T^e	Energia cinética no elemento para placa de Reissner-Mindlin.
T_L^e	Energia cinética no elemento para placa laminada.
t	Tempo.
$\dot{\underline{u}}$	Campo de velocidade.
\underline{u}_k	Campo de deslocamentos na camada k.
u, v, w	Componentes do vetor de deslocamentos no plano.

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	Componentes do vetor de velocidades no plano.
u_k, v_k, w_k	Componentes do vetor de deslocamentos na camada k.
U^e	Energia potencial no elemento para placa de Reissner-Mindlin.
U_L^e	Energia potencial no elemento para placa laminada.
V	Volume.
w^e, ϕ_x^e, ϕ_y^e	Campo de deslocamento no elemento de placa.
W	Trabalho.
x, y, z	Componentes do sistema de coordenadas cartesianas globais.
x^l	Limites inferiores do vetor de variáveis de projeto.
x^u	Limites superiores do vetor de variáveis de projeto.
$X(\Omega)$	Resposta dinâmica da estrutura.
\underline{x}	Vetor de variáveis de projeto reais.
$\underline{x}(t)$	Vetor resposta em deslocamento.
$Y(\Omega)$	Mobilidade.
z_k	Coordenada no eixo z da k-ésima camada.

Alfabeto Grego

α_T	Fator de translação da temperatura para o modelo WLF.
α	Ordem da derivada fracionaria.
β_k^x	Rotação da camada k em x.
β_k^y	Rotação da camada k em y.
Γ	Função Gama de Euler.
γ	Componente de deformação cisalhante no plano.
γ_k	Componente de deformação cisalhante na camada k.
δ	Operador funcional.
Δx	Precisão da variável binária de projetos.
ε_0	Deformação constante.
$\varepsilon(t)$	Deformação.

$\underline{\varepsilon_c}$	Vetor de deformação cisalhante.
$\underline{\varepsilon_f}$	Vetor de deformações em flexão.
$\underline{\varepsilon_k}$	Vetor de deformações na camada k.
$\dot{\varepsilon}$	Taxa de deformação constante.
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Componentes do vetor de deformações no plano.
$\varepsilon_k^{xx}, \varepsilon_k^{yy}, \gamma_k^{xy}, \gamma_k^{xz}, \gamma_k^{yz}$	Componentes de deformações no plano em uma camada k.
$\eta(\Omega)$	Fator de perda.
θ	Temperatura.
θ_0	Temperatura de referência.
κ	Fator de correção.
μ	Coefficiente de viscosidade.
ν	Coefficiente de Poisson.
ξ, η	Componentes do sistema de coordenadas locais no elemento.
ρ	Densidade do material.
ρ_k	Densidade do material da a camada k.
$\sigma(t)$	Tensão.
σ_0	Tensão constante.
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	Componentes de tensões no plano.
τ	Tensão de cisalhamento.
ϕ_x, ϕ_y	Componentes do vetor de rotações no plano.
Φ	Matriz modal.
$\underline{\chi}$	Matriz de deslocamentos na placa laminada.
Ω	Frequência.
Ω_r	Frequência reduzida.
Ω_i	Frequência natural.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	OBJETIVOS	21
1.1.1	Objetivos Gerais	21
1.1.2	Objetivos Específicos	21
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO	21
2	REVISÃO DA LITERATURA	23
2.1	TEORIAS DE PLACAS LAMINADAS	23
2.2	CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS DO TIPO PLACAS	25
3	REVISÃO CONCEITUAL	27
3.1	CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO	27
3.2	OTIMIZAÇÃO VIA ALGORITMOS GENÉTICOS	30
3.2.1	Definições	31
3.2.2	Aptidão	32
3.2.3	Variáveis de Projeto	32
3.2.4	Operadores Genéticos	33
3.2.5	Elitismo	37
3.2.6	Problemas de Otimização com Restrições	38
3.2.7	Critérios de Parada	38
3.3	MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	40
3.3.1	Modelos de MVEs de Derivada Inteira	42
3.3.2	Modelos de MVEs de Derivada Fracionária	45
3.3.3	Influência da Temperatura	48
3.4	TEORIA DE FLEXÃO DE PLACAS	50
3.4.1	Teoria de Placas Semi-Espessas	50
3.4.2	Teoria de Placa Laminadas	56
3.5	VIBRAÇÕES EM PLACAS LAMINADAS	62
3.5.1	Princípio de Hamilton	63
3.6	VIBRAÇÕES EM PLACAS VIA ELEMENTOS FINITOS	64
3.6.1	Elemento Quadrilateral (Q4) para placa de Reissner-Mindlin	64
3.6.2	Elemento Quadrangular para Placa Laminada	69

3.7	FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	73
3.7.1	Obtenção dos parâmetros modais	76
3.7.2	Fator de perda modal	77
3.8	OBTENÇÃO DA RESPOSTA NUMÉRICA PARA FRF	78
4	METODOLOGIA.....	83
4.1	PROBLEMA PROPOSTO	83
4.2	OBTENÇÃO DA FRF E DA FUNÇÃO OBJETIVO	86
4.3	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	86
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	90
5.1	PARÂMETROS MATERIAIS E DE SOLUÇÃO	90
5.2	VALIDAÇÃO DO ALGORITMO PARA O MODELO DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN	92
5.3	VALIDAÇÃO DO ALGORITMO PARA O MODELO DE PLACA LAMINADA DE MOREIRA, RODRIGUES E FERREIRA (2006).	95
5.4	VALIDAÇÃO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO	96
5.4.1	Caso 1 - 1º modo de vibrar para placa em balanço	97
5.4.2	Caso 2 - 2º modo de vibrar para placa em balanço	100
5.4.3	Caso 3 - 1º modo de vibrar para placa biapoiada	103
5.4.4	Caso 4 - 2º modo de vibrar para placa biapoiada	107
5.5	BANDA LARGA DE FREQUÊNCIA PARA PLACA EM BALANÇO	110
5.6	BANDA LARGA DE FREQUÊNCIA PARA PLACA BIAPOIADA.	112
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	114
6.1	CONCLUSÕES	114
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	115
	REFERÊNCIAS.....	116

1 INTRODUÇÃO

Atualmente existe uma grande quantidade de equipamentos fabricados com estruturas esbeltas do tipo placas e/ou cascas que fazem parte do cotidiano. Esses equipamentos, frequentemente, são dotados de motores que podem ocasionar vibração na estrutura. A vibração pode gerar ruído que, em geral, é desagradável para quem está próximo e pode ocasionar danos estruturais ao equipamento.

Em muitos casos, a vibração passa despercebida pelo projetista no momento da concepção do equipamento, pois o fenômeno não é visível ou, no caso de um fenômeno acústico, este é muito mais difícil de ser detectado em uma fase inicial do projeto. Em alguns casos, os problemas de vibrações podem levar a estrutura ao colapso, como no caso da ponte de Tacoma Narrows (EUA) ou da ponte de Great Belt (Dinamarca) e da ponte Millennium (Inglaterra), na qual foi necessária uma intervenção para evitar maiores danos. Para esses casos é possível realizar o controle de vibrações através de neutralizadores dinâmicos de vibrações, utilizando a técnica de dessintonização, alterando a massa, a rigidez ou inserindo amortecimento do sistema.

Além dos motivos citados, há casos onde a vibração é conhecida devido uma condição do sistema, como em cabos de transmissão de energia elétrica, que são auto excitados pela ação do vento. Há também, casos em que a vibração é necessária e precisa ser mantida constante, como em equipamentos de academia, máquinas de compactação e outras.

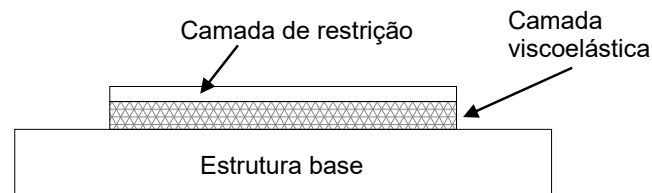
Para todos os casos citados o conhecimento do fenômeno de vibrações e dos modelos matemáticos que governam o mesmo é fundamental para garantir uma solução adequada para cada problema.

Segundo Mead (1988), as técnicas de controle de vibrações podem ser divididas em controle ativo e controle passivo. O controle ativo de vibrações é aquele em que é necessário o monitoramento constante e requer fornecer energia ao sistema para realizar o controle.

O controle passivo é realizado através da inserção adequada de materiais com capacidade de dissipação de energia, como é o caso de amortecedores viscosos e materiais viscoelásticos.

A técnica que utiliza material viscoelástico aplicado entre uma estrutura base e uma camada metálica (Figura 1.1), é denominada de camada de restrição (*constrained layer*). Essa técnica é largamente utilizada na indústria, principalmente para controle passivo de vibrações em estruturas do tipo placas e cascas, conforme mostrado nos estudos realizados por Rao (2003).

FIGURA 1.1 - REPRESENTAÇÃO DE UMA ESTRUTURA COM CAMADA DE RESTRIÇÃO.



Quando é utilizada a técnica com camada de restrição para controle de vibrações em placas, esta passa a ser considerada como uma estrutura laminada e necessita de uma teoria adequada para sua formulação.

Para analisar o comportamento das estruturas com múltiplas camadas, utiliza-se a teoria de camada única equivalente (TCUE) e as teorias de camadas discretas (TCD), também conhecido por *layerwise* (REDDY, 2004).

Existem vários estudos que utilizam teoria das camadas discretas para solucionar problemas de estruturas laminadas. Alguns desses estudos são apresentados nos trabalhos realizados por Oñate (2013), Reddy (2004) e Moreira, Rodrigues e Ferreira (2006). Aplicando os conceitos de camadas discretas, em conjunto com as técnicas de otimização estrutural e o Método dos Elementos Finitos (MEF) é possível obter uma metodologia eficiente para soluções de problemas de controle passivo de vibrações. Essa metodologia tem sido utilizada em vários estudos recentes, como os trabalhos de Zheng *et al.* (2013) e Xu, Lin e Yang (2015).

Nesse sentido, esta dissertação busca obter a distribuição ótima de material viscoelástico com camada de restrição uma placa laminada isotrópica, aplicando as técnicas de otimização estrutural topológica e controle passivo. Considerando ainda que a quantidade de MVE na placa será controlado através de uma restrição em área de recobrimento, e o domínio é definido entre um intervalo de frequências.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos Gerais

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma metodologia de otimização topológica utilizando algoritmos genéticos, buscando obter a condição ótima de vibrações em placas, aplicando a técnica de controle passivo via camada de restrição.

1.1.2 Objetivos Específicos

O objetivo geral pode ser detalhado nos seguintes objetivos secundários:

- a) Implementar uma estrutura computacional em Matlab® visando a análise de vibrações por MEF em placas laminadas com camadas de restrições e MVE.
- b) Desenvolver uma metodologia para solucionar problemas de controle passivo ótimo em placas laminadas, a partir dos conceitos gerais apresentados.
- c) Implementar computacionalmente e validar um algoritmo com as premissas apresentadas.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

No corrente capítulo, é apresentado sucintamente o problema de controle passivo de vibrações com base na otimização estrutural topológica, bem como a sua importância e relevância para o desenvolvimento de projetos estruturais. Também são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

A partir do segundo capítulo têm-se a base teórica do trabalho, aonde são explanadas as teorias e um histórico de estudos sobre otimização topológica estrutural, materiais viscoelásticos, teoria de placas laminadas e Método de Elementos Finitos.

Também são apresentados alguns trabalhos relevantes que relacionam os temas citados e suas aplicações no campo de análises estruturais, materiais viscoelástico e vibrações em placas.

No terceiro capítulo, é realizada uma revisão conceitual apresentando a teoria base para o estudo de controle passivo com camada de restrição.

No quarto capítulo, é apresentada a metodologia adotada para resolver o problema de otimização proposto, bem como as considerações utilizadas.

No quinto capítulo, são mostrados e discutidos os resultados obtidos.

No sexto capítulo, apresentam-se as conclusões finais relativas à metodologia apresentada, além de mostrar possíveis pontos a serem implementados em trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura referente ao estado da arte e dos tópicos de relevância deste trabalho. Quais sejam: placas laminadas, controle passivo de vibrações, camada de restrição e técnicas de otimização.

2.1 TEORIAS DE PLACAS LAMINADAS

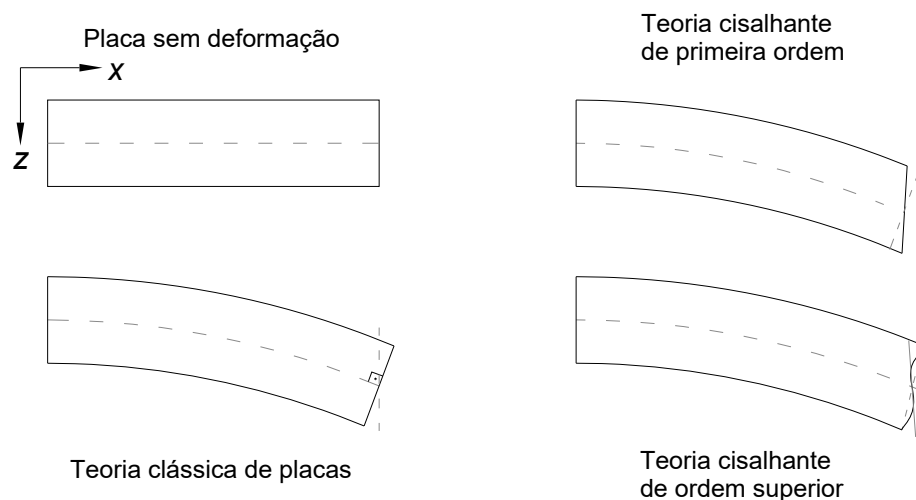
Placas planas são comumente utilizadas como componentes estruturais em muitos ramos da tecnologia moderna, como nas áreas da mecânica, aeroespacial, eletrônica, naval e outras. Além disso, este tipo de componente é frequentemente susceptível a vibrações elevadas. Portanto, o conhecimento do seu comportamento vibracional é de grande importância para os engenheiros.

Considerando sua ampla aplicação e sua importância na indústria, realizou-se diversos estudos envolvendo placas e estruturas laminadas, o que levou o desenvolvimento de várias teorias para prever a resposta de laminados com mais precisão (PISKUNOV e RASSKAZOV, 2002). Revisões abrangentes da literatura sobre o desenvolvimento de teorias de placas foram realizadas por diversos autores (ALAM e KHAN, 2013; REDDY, 1990; FIEDLER, LACARBONARA e VESTRONI, 2010).

As teorias de flexão em geral podem ser classificadas de acordo com a forma assumida pelos seus campos de deslocamentos (Figura 2.1). Segundo Reddy (2007), tais modelos podem ser divididos em:

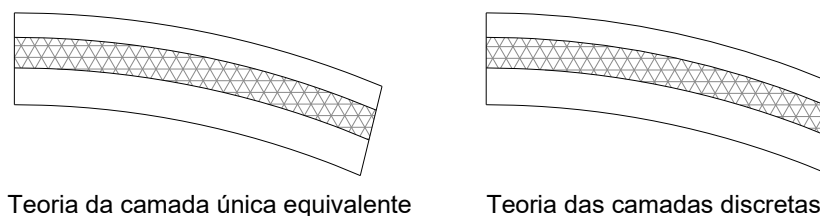
- Teoria clássica de placas (TCP),
- Teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO),
- Teoria cisalhante de ordem superior (TCOS).

FIGURA 2.1 - TEORIAS PARA FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE FLEXÃO EM PLACAS.



Para estruturas do tipo laminadas (Figura 2.2) tem-se a teoria da camada única equivalente (TCUE) e as teorias das camadas discretas (TCD).

FIGURA 2.2 - TEORIAS PARA FORMULAÇÃO DO PROBLEMAS DE PLACAS LAMINADAS.



Na abordagem da TCUE, as propriedades dos materiais de todas as camadas são ‘fundidas’ em um único material, e o laminado é modelado como uma camada única, homogênea, equivalente e isotrópica (REDDY, 2004). Essa teoria baseia-se na hipótese de Kirchhoff, a qual é imprecisa para placas compostas laminadas, pois negligencia as deformações de cisalhamento transversais, as tensões normais e transversais no laminado. Já, a TCD considera os deslocamentos individuais para cada camada.

Vários pesquisadores se dedicaram ao desenvolvimento e à aplicação da TCD. Di Sciuva (1986) propôs um modelo de deslocamento linear por partes que satisfizesse o campo de deslocamentos e a continuidade da tensão transversal para análises estática e dinâmica em placas ortótropas. Reddy (1990) realizou um estudo utilizando análises estática e dinâmica em compósitos laminados.

A TCD utilizada neste trabalho se baseia na formulação proposta Moreira, Rodrigues e Ferreira (2006). Esse estudo é baseado na TCPO para cada camada e na imposição de continuidade de deslocamentos nas interfaces das camadas. A teoria é genérica e pode ser aplicada a placas com qualquer número de camadas. Nessa abordagem a TCPO fornece boas previsões do comportamento geral da placa como deslocamentos, frequências naturais e flambagem. A TCD garante que a continuidade e as propriedades de cada camada sejam consideradas na formulação.

2.2 CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS DO TIPO PLACAS

Controle passivo de vibrações (CP) é reconhecido como sendo vantajoso em termos de eficácia para controle de frequências em bandas mais amplas, além de ser fácil aplicação (NASHIF, JONES e HENDERSON, 1985). O CP tem sido amplamente utilizado no tratamento de vibrações em placas, cascas e em muitos campos da engenharia, incluindo automóveis, aviões, navios, equipamento eletrônicos e outros. A eficiência do amortecimento relacionado a camada de restrição baseia-se na deformação de cisalhamento da camada viscoelástica (MEAD e MARKUS, 1969; RAO e SHULIN, 1993). Nesse caso, o cisalhamento é o principal mecanismo de dissipação de energia de vibração, a qual é transformada em calor ou em outras formas de energia.

Uma contribuição muito importante no estudo dos MVE aplicados em estruturas multicamadas foi apresentado no trabalho desenvolvido por Ross, Ungar e Kerwin, (1959). Neste estudo, os autores apresentaram pela primeira vez uma formulação matemática para o cálculo de controle passivo utilizando a técnica de camadas de restrição em viga.

Huang *et al.* (2015), descreve, de uma forma generalizada, a teoria para vigas, placas espessas e cascas espessas que utilizam amortecimento com CR. Neste trabalho é apresentado vários exemplos numéricos aplicando MVE. Vários estudos têm sugerido diferentes técnicas de formulação e obtenção da solução para problemas de controle passivo de vibrações.

Os métodos mais comuns para soluções dos problemas de CR é o método de solução direta da FRF e o método da superposição modal (MARTINEZ-AGIRRE e ELEJABARRIETA, 2011). O método da solução direta é baseado no cálculo exato,

realizando a inversão da matriz de rigidez dinâmica para cada frequência do intervalo. Para modelos com muitos GL esta técnica se torna ineficiente devido ao custo computacional elevado, portanto faz-se necessário o uso de técnicas de redução de ordem, também conhecidos como métodos de superposição modal.

Existem vários estudos voltados para a solução de problemas de vibrações utilizando a técnica de espaço de estado. Por exemplo, os estudos realizados por Daya e Potier-Ferry, (2001), Adhikari e Pascual, (2009) e Adhikari e Pascual, (2011). Abdoun *et al* (2009) apresentou um método numérico para análise de vibração harmônica forçada em estruturas laminadas com base no método numérico assintótico e o método de perturbação. Bilasse, Azrar e Daya (2011) discutiram os modos complexos baseados em métodos numéricos para problemas de vibrações em placas com MVE.

Além das técnicas para obtenção da FRF é comum a solução de problemas de controle passivo que utilizam a abordagem baseada no fator de perda modal. Esta técnica considera a energia de deformação da placa e não é necessário resolver um problema de autovalores / autovetores para cada frequência. (RO e BAZ, 2002; MOREIRA, RODRIGUES e FERREIRA, 2006; LING, RONGLU, EL-SABBAGH, 2011).

Em estruturas do tipo placa ou casca, o recobrimento total da superfície com MVE não é adequado, devido ao aumento de massa e ao consumo excessivo de MVE. Portanto, para se obter a melhor eficiência do sistema é necessário otimizar a distribuição do material de amortecimento. Com o objetivo de encontrar o ponto de ótimo de uma estrutura com MVE, diversos autores utilizam-se das técnicas citadas anteriormente juntamente com técnicas de otimização.

Xu, Lin e Yang (2015) utilizam a técnica de otimização multiobjectivo para minimizar a massa, maximizar o fator de perda e maximizar a rigidez, utilizando uma rotina de otimização baseada em AG. Alvelid (2008) estudou as posições e as formas de trechos ideais de camada de restrição para minimizar a frequência média de resposta. Zheng *et al.* (2013) utilizou Algoritmos Genéticos (AG) juntamente com a técnica Material Sólido Isotrópico com Penalização (do inglês, SIMP) para encontrar as posições ideais das camadas de amortecimento e minimizar a resposta de vibração de uma estrutura do tipo placa.

3 REVISÃO CONCEITUAL

Este capítulo apresenta, inicialmente, um breve resumo do equacionamento matemático para um problema padrão de otimização estrutural topológica e os principais conceitos envolvidos. Na sequência, de uma forma mais detalhada, é apresentado a técnica de otimização via algoritmo genético (AG). São apresentados os modelos e a formulação matemática para os materiais viscoelásticos (MVEs), dando ênfase no modelo de Zener fracionário, que é o modelo adotado no presente trabalho. Também são discutidas a teoria de placas semi-espessa, que utiliza a TCPO, a teoria de placas laminadas através da técnica de camadas discretas e a formulação do problema de elementos finitos.

3.1 CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO

A otimização matemática pode ser definida como um conjunto de procedimentos por meio dos quais se busca minimizar ou maximizar uma determinada função, denominada função objetivo, sujeita ou não a restrições de igualdade ou desigualdade, obtendo assim um melhor aproveitamento dos recursos disponíveis.

Segundo Rao (2009), a forma padrão de um problema de otimização pode ser posta como:

$$\text{Encontrar } \underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ o qual minimiza } f(\underline{x}) : R^n \rightarrow R \quad (3.1)$$

sujeito a

$$g_p(\underline{x}) \leq 0, \quad p=1,2,\dots,n_g$$

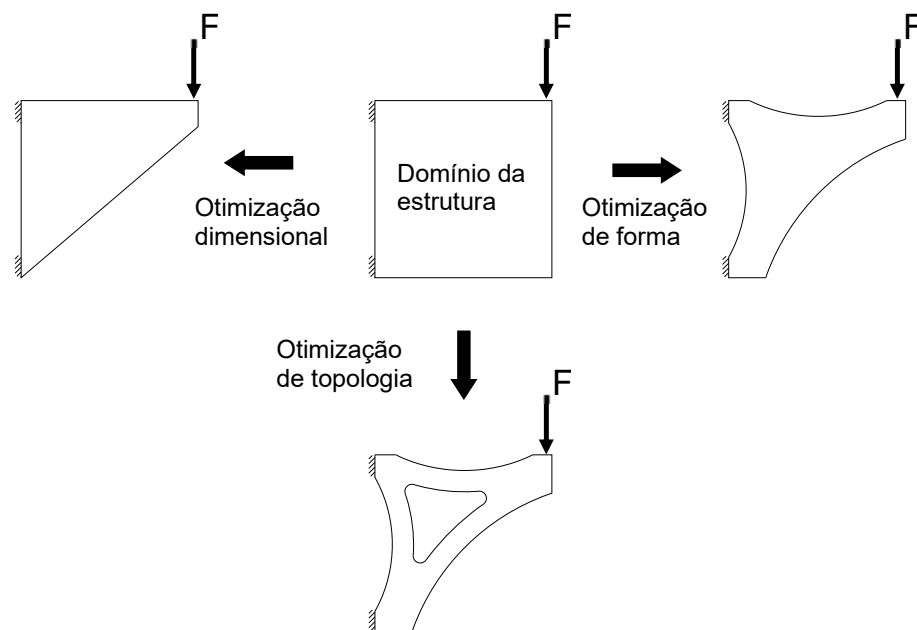
$$h_q(\underline{x}) = 0, \quad q=1,2,\dots,n_h,$$

onde \underline{x} é um vetor n-dimensional que contém as variáveis de projeto, $f(\underline{x})$ é a função objetivo, $\underline{g}(\underline{x}) : R^n \rightarrow R^{n_g}$ e $\underline{h}(\underline{x}) : R^n \rightarrow R^{n_h}$ são as funções vetoriais de restrições

de desigualdade e igualdade, respectivamente. Essas funções variam de 1 a n_g restrições de desigualdade e 1 a n_h restrições de igualdade.

Aplicando os conceitos matemáticos de otimização em estruturas ou componentes mecânicos, define-se um campo de estudo chamado de otimização estrutural. De acordo com Bendsoe (2003), a otimização estrutural pode ser dividida em otimização dimensional, de forma e de topologia, onde cada categoria leva em conta as características geométricas da estrutura (Figura 3.1).

FIGURA 3.1 - TIPOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.



Otimização dimensional é aquela onde as variáveis de projeto estão relacionadas apenas com as dimensões básicas da estrutura (altura, comprimento, largura, espessura *etc.*).

Otimização de forma é quando a variável de projeto altera o contorno que delimita fisicamente a estrutura, dando a ela um novo formato, mas mantendo a distribuição e conectividade dos elementos iniciais.

Otimização de topologia é quando o processo de otimização tem capacidade de modificar a forma da estrutura alterando a conectividade dos seus elementos ou até mesmo acrescentando ou retirando material.

Em um problema de otimização é importante considerar a forma e as propriedades matemáticas da função objetivo, restrições e variáveis de projeto. Por

exemplo, a função objetivo pode ser linear ou não linear, diferenciável ou não diferenciável, côncava ou convexa, entre outras. As variáveis de projeto podem ser contínuas, discretas ou mistas. Realizar essa análise no processo de formulação do problema é de grande importância, pois a técnica de solução adotada para o problema de otimização está diretamente relacionada com a classe do problema (SARKER, MOHAMMADIAN e YAO, 2003).

As abordagens mais comuns para se obter a solução ótima de um problema de otimização são através de métodos determinísticos ou de algoritmos evolucionários.

Entre os métodos determinísticos, destacam-se as técnicas de otimização não linear, que podem ser classificadas em métodos diretos e métodos da descida.

Os métodos de busca direta requerem apenas os valores da função objetivo, não necessitando do gradiente da função para encontrar o mínimo. Estes métodos são mais adequados para problemas simples que envolvem um número relativamente pequeno de variáveis ou quando as derivadas da função objetivo são muito difíceis de serem obtidas.

Normalmente as técnicas de descida, também conhecidas como métodos baseados em gradiente requerem, além dos valores da função, o seu gradiente e em alguns casos, a matriz Hessiana associada à função objetivo.

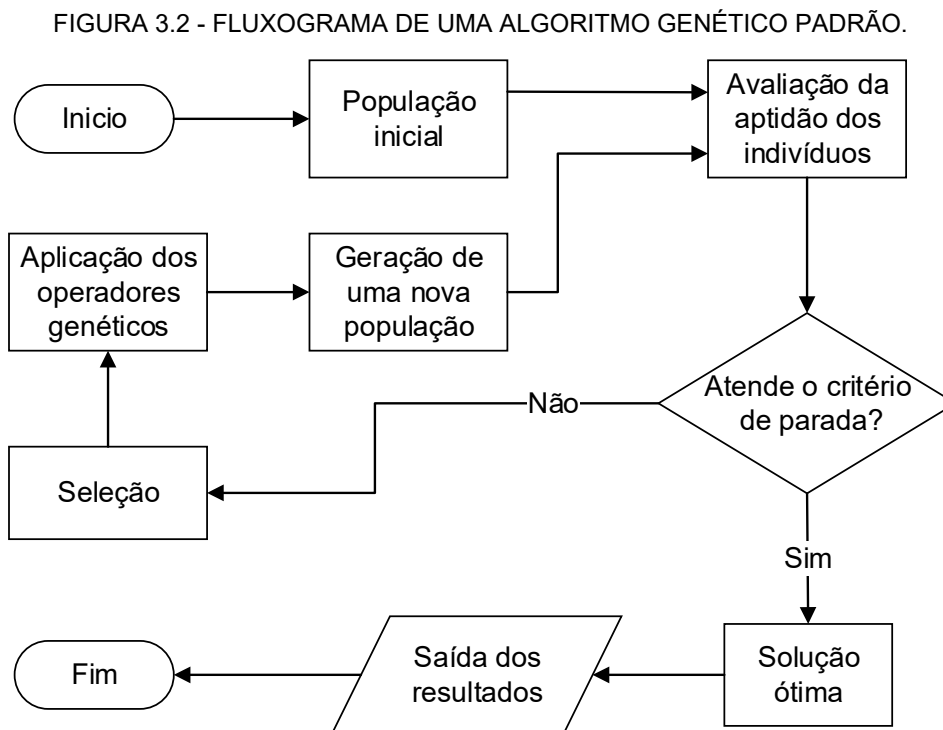
Algoritmos evolucionários utilizam técnicas heurísticas que se baseiam no processo de evolução natural e adaptação como mecanismo de busca para resolver problemas físicos. Em casos de problemas multimodais ou com variáveis discretas, as técnicas de otimização não linear apresentam algumas dificuldades como não garantir a obtenção do ponto de mínimo global ou ter um custo computacional muito elevado. Por outro lado, apesar das técnicas heurísticas não garantirem um ponto de ótimo global, estas apresentam bons resultados e, portanto, são bastante utilizadas nesses problemas (SARKER e NEWTON, 2008).

Como exemplo de algoritmos baseados em técnicas heurísticas podem-se citar (MESSAC, 2015): *Hill-Climbing* (Subida da Montanha), *Simulated Annealing* (Recozimento Simulado), *Particle Swarm* (Enxame de Partículas), *Tabu Search* (Busca Tabu), *Ant Colony* (Colônia de Formigas) e *Genetic Algorithms* (Algoritmo Genético).

3.2 OTIMIZAÇÃO VIA ALGORITMOS GENÉTICOS

Algoritmo genético (AG) é uma técnica de busca probabilística desenvolvida a partir de conceitos da biologia e da teoria de seleção natural proposta por Charles Darwin¹. Os primeiros estudos com AG foram realizados por John Henry Holland que desenvolveu a ideia básica na década de 1960 (HAUPT e HAUPT, 2004). O livro *Adaptation in Natural and Artificial System*, publicado em 1975, foi o resultado desse trabalho e descreve como aplicar os princípios da evolução natural em problemas de otimização.

O princípio de funcionamento de um AG é obter um conjunto de indivíduos gerado de forma aleatória, o qual caracteriza a população inicial, onde cada indivíduo é avaliado segundo a função objetivo. Se o critério de parada não for satisfeito, aplicam-se operadores genéticos e gera-se uma nova população a partir da população anterior, de forma que a cada geração obtenha-se nova população com um desempenho melhor que a antecessora. A Figura 3.2 ilustra o fluxograma de um algoritmo genético padrão.



¹ Charles Robert Darwin (1809-1882) foi um naturalista e cientista inglês, pioneiro em pesquisas sobre o evolucionismo e origem da vida. C. R. Darwin e o autor de "Origem das Espécies, através da Seleção Natural".

3.2.1 Definições

Como AG foi desenvolvido utilizando conceitos da evolução e seleção natural, existem diversos termos utilizados em biologia que são compartilhados no estudo e otimização. Os estudos iniciais com AG, Holland (1975) e Goldberg (1989) mostraram a analogia dos termos da biologia com a otimização. Os principais conceitos, terminologias e operadores são apresentados a seguir:

- O cromossomo, em biologia, é o conjunto completo de características de um indivíduo. Em AG, representa o conjunto de variáveis de projeto na forma binária.
- Na biologia, gene é a unidade fundamental de hereditariedade que contém as informações genéticas. Em AG, o gene é um elemento ou uma parcela do vetor de variáveis de projeto.
- Alelo, em biologia, são as formas alternativas que um mesmo gene pode assumir determinando a existência, ou não, de uma característica específica no indivíduo. Em AG, representa os valores que o gene pode assumir (0 ou 1).
- Na biologia, *locus* é a posição específica de cada gene no cromossomo. Em AG é a posição do bit no cromossomo.
- Genótipo, em biologia, representa todas as informações contida no cromossomo. Em AG, representa o conjunto de valores das variáveis de projeto na forma binária.
- Na biologia, fenótipo representa as características visíveis de um organismo ou população. Em AG, representa o conjunto características do indivíduo após a análise, na forma decimal.
- Tanto na biologia quanto em AG, a população representa o conjunto de indivíduos.
- Em biologia, geração corresponde à descendência de uma população. Em AG, também está associada a um conjunto de indivíduos (população) que é transformado em outro e está associada ao número de iterações que o algoritmo executa. As gerações mostram a evolução que as populações vão tendo ao longo do tempo, em função da aplicação dos operadores genéticos.

- Em cada geração, tanto na biologia quanto no AG, tem-se uma nova população. Uma delas é denominada de população de pais a qual é usada para criar indivíduos para a próxima geração, dita população de filhos.

3.2.2 Aptidão

A aptidão de um indivíduo em um AG é um valor associado ao valor da função objetivo naquele ponto. Para o cálculo da aptidão, o cromossomo deve de ser decodificado usando uma posição (ponto) no espaço de projeto e, a partir deste, avaliada a função objetivo. A aptidão do indivíduo indica a quão boa é a solução e através em conjunto de aptidões de várias gerações é possível avaliar a convergência do problema como um todo.

No caso de otimização multiobjectivo, a aptidão é definitivamente mais difícil determinar e não será discutida no presente trabalho.

3.2.3 Variáveis de Projeto

Em AG existem várias formas de representar as variáveis de projeto. A mais utilizada é a forma binária, 0 ou 1 (Figura 3.3). Neste caso, para avaliar o indivíduo na função objetivo é necessário que as variáveis estejam na forma decimal. Portanto é necessário um processo de decodificação. Segundo Rao (2009), o valor de uma variável na forma decimal (ℓ) pode ser representado utilizando um conjunto de valores binários posto na forma vetorial \underline{b} , na forma

$$\underline{\ell} = \sum_{j=0}^{n_b} 2^j . b_j , \quad (3.2)$$

sendo b_j igual a 0 ou 1 e j um número real inteiro.

A quantidade de algarismos necessários para representar as variáveis de projeto depende da precisão requerida no problema. A quantidade de dígitos binários

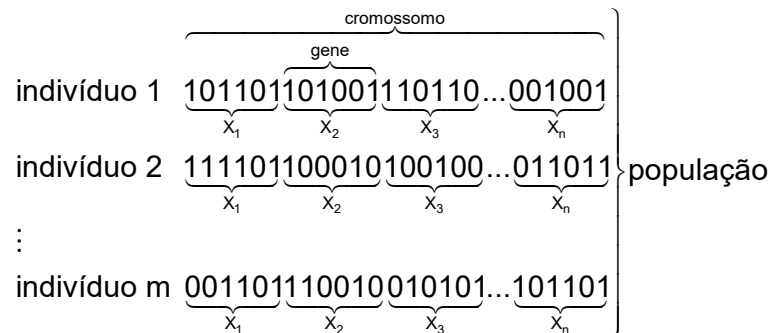
(denotada por n_b) necessários para representar uma variável com precisão Δx , pode ser obtida através da relação

$$2^{n_b} \geq \frac{x^u - x^l}{\Delta x} + 1, \quad (3.3)$$

onde x^u e x^l são os limites superior e inferior, respectivamente.

Representação binária de m indivíduos em uma população em AG.

FIGURA 3.3 - REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DE m INDIVÍDUOS EM UMA POPULAÇÃO EM AG.



3.2.4 Operadores Genéticos

A população inicial é criada de forma aleatória ou a partir de um conhecimento prévio do problema. Os indivíduos são avaliados com objetivo quantificar a aptidão dos candidatos à próxima geração. A fim de gerar ou evoluir a descendência (isto é, novas soluções), operadores genéticos são aplicados à população atual. Segundo Coley (1999), os principais operadores genéticos utilizados para evolução da população são cruzamento, mutação e elitismo. Estas técnicas estão intimamente relacionadas com o modelo básico de um algoritmo genético, pois são elas que conduzem a evolução da população.

Seleção

Seleção é um processo de escolha de indivíduos da população atual com base em seus valores de aptidão, sobre os quais são aplicados os operadores genéticos. Existem vários métodos para determinar quais os indivíduos serão selecionados para gerar a próxima população. Os métodos mais comuns são a roleta ponderada, seleção por torneio e seleção por posição.

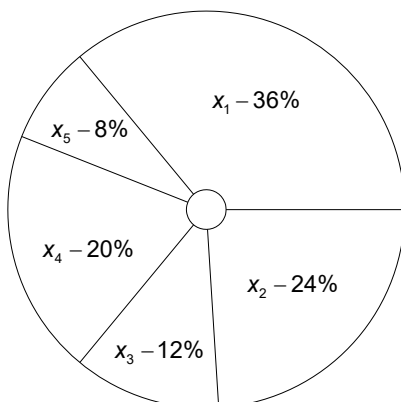
a) Roleta ponderada

A partir de um processo probabilístico selecionam-se indivíduos que possuem aptidão acima da média da população para fazer parte da nova geração, onde serão realizadas múltiplas cópias para a próxima população. Segundo Rao (2009), considerando a aptidão do j -ésimo indivíduo, representada por F_j ($j = 1, \dots, m$) em uma população de tamanho m , a probabilidade (P_j) para a seleção do j -ésimo indivíduo da população atual é dada pela expressão

$$P_j = \frac{F_j}{\sum_{q=1}^m F_q}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

A implementação deste processo pode ser associada a uma roleta dividida em segmentos (Figura 3.4) onde, para cada indivíduo é atribuída uma fatia na roleta de forma que o tamanho da fatia é proporcional à aptidão do indivíduo. Sendo m o número total de indivíduos na população, a roda é girada m vezes e, em cada rodada, um indivíduo sob marcador da roda é selecionado para estar entre os pais da próxima geração.

FIGURA 3.4 - SELEÇÃO VIA MÉTODO DA ROLETA PONDERADA.



Através deste método, os indivíduos com mais (ou menos) aptidão serão mais (ou menos) frequentemente selecionados e, conseqüentemente, os indivíduos com maior aptidão na população terão mais cópias na próxima geração, enquanto os indivíduos com menos aptidão são eliminados do processo.

b) Seleção por torneio

Na seleção por torneio, dois indivíduos são escolhidos aleatoriamente a partir da população e comparadas as suas aptidões. O mais apto dos indivíduos é selecionado para ser um pai e em seguida são devolvidos à população original podendo ser selecionado novamente. Uma análise mais detalhada deste método foi apresentada por Goldberg e Deb (1991).

c) Seleção por posição

Neste método os indivíduos da população são ordenados do melhor para o pior de acordo com sua aptidão. O valor esperado de cada indivíduo depende de sua posição e não da sua aptidão absoluta.

Na seleção por posição, nenhum indivíduo gera um número excessivo de filhos, pois o intervalo de reprodução é limitado. O método de seleção por posição introduz um escalonamento uniforme em toda a população e fornece uma maneira

simples e eficaz de controlar a pressão seletiva, evitando assim alguns problemas de convergência.

Cruzamento

O operador de cruzamento empregado em AG é usado para criar duas novas soluções (filhos) a partir de duas soluções existentes (pais) na população. Este operador é aplicado na população com a esperança de que ele crie uma população mais apta. Existem várias técnicas para realizar o cruzamento, como ponto simples, ponto duplo, pontos múltiplos, cruzamento uniforme, cruzamento ordenado, máscara de cruzamento, entre outros.

No cruzamento do tipo ponto simples (Figura 3.5) são selecionados dois indivíduos de forma aleatória e um ponto na *string* de cada indivíduo é escolhido ao acaso. As partes entre o ponto selecionando são trocadas e duas novas soluções são produzidas. As outras técnicas citadas utilizam o mesmo raciocínio, porém com mais pontos de corte e/ou com outras taxas de permutação diferenciadas.

FIGURA 3.5 - APLICAÇÃO DO OPERADOR DE CRUZAMENTO EM DOIS INDIVÍDUOS.



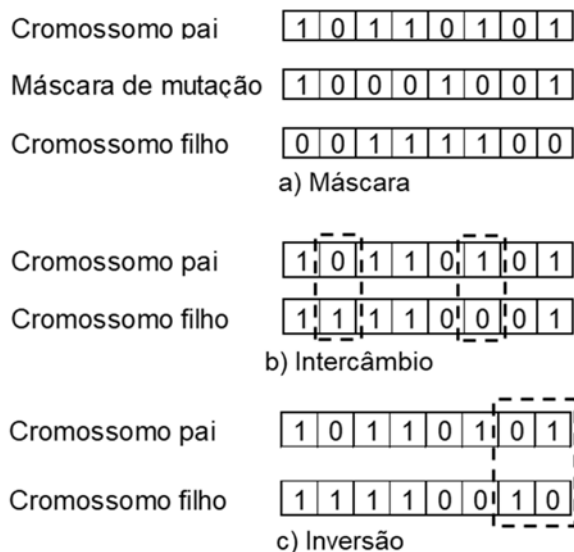
Mutação

Durante a mutação, as variáveis dos descendentes sofrem alterações através de pequenas perturbações (tamanho do passo de mutação), com baixa probabilidade. Um gene (ou subconjunto de genes) é escolhido aleatoriamente e o alelo (valor) dos genes escolhidos são alterados.

Segundo Sivanandam e Deepa (2008), os operadores de mutação mais comuns são através de máscara, intercâmbio e inversão, ilustrados na Figura 3.6. Cada processo citado ocorre da seguinte forma:

- **Máscara:** A mutação de um bit envolve a alteração do seu valor de 0 para 1 ou de 1 para 0 com base em uma máscara de mutação gerada aleatoriamente. A mutação ocorre no cromossomo pai se o alelo na máscara for igual a 1, caso contrário, o alelo permanece igual ao do cromossomo pai. Após realizado esta analogia para todos os *locus*, tem-se o cromossomo filho;
- **Intercâmbio:** Duas posições aleatórias da *string* são escolhidas e os alelos correspondentes as posições são trocadas;
- **Inversão:** Uma posição é escolhida aleatoriamente e os alelos próximos a essa posição são invertidos.

FIGURA 3.6 - OPERADORES DE MUTAÇÃO.



3.2.5 Elitismo

Segundo Simon (2013), o elitismo foi inicialmente proposto por Kenneth De Jong na década de 70. O elitismo é um complemento aos métodos de seleção, pois força o AG a reter um número mínimo dos melhores indivíduos em cada geração. Caso essa técnica não seja aplicada, esses indivíduos podem ser perdidos se não

forem selecionados para reproduzir ou podem ser destruídos por cruzamento ou mutação. Muitos pesquisadores consideram que elitismo melhora significativamente o desempenho do GA.

3.2.6 Problemas de Otimização com Restrições

Em problemas de otimização com restrições, a abordagem mais conveniente é transformar o problema com restrições em um problema sem restrições. Esta operação pode ser realizada incorporando as restrições do problema à função objetivo. Para tal aplica-se o conceito de penalização, na qual a função objetivo é penalizada quando as restrições são violadas. Essa técnica é conhecida como método da penalização.

Partindo do problema de otimização posto na forma padrão (equação (3.1)), pode-se obter um novo problema utilizando o conceito de penalização externa quadrática das restrições $g_p(\underline{x})$ e $h_q(\underline{x})$ na forma

$$f^*(\underline{x}; \underline{r}_g; \underline{r}_h) = f(\underline{x}) + \sum_{p=1}^{n_g} r_{g_p} [g_p^+(\underline{x})]^2 + \sum_{q=1}^{n_h} r_{h_q} [h_q(\underline{x})]^2, \quad (3.5)$$

onde \underline{r}_g e \underline{r}_h são os vetores de penalização associados as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. A partir dessas considerações, o novo problema sem restrição é minimizar $f^*(\underline{x}; \underline{r}_g; \underline{r}_h): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $\underline{r}_g \in \mathbb{R}_{n_g}^+$, $\underline{r}_h \in \mathbb{R}_{n_h}^+$ e $g_p^+(\underline{x}) = \max\{g_p(\underline{x}); 0\}$

3.2.7 Critérios de Parada

O número de gerações que evoluem depende se uma solução aceitável é alcançada ou se um número determinado de iterações é excedido. Entre as técnicas mais comuns adotadas como critério de parada, tem-se aqueles que utilizam o valor da aptidão e os que utilizam o limite do número de iterações. Considerando estes

critérios, as formas mais comuns utilizadas no processo de otimização com AG são (Yu e Gen, 2010):

a) Critério de parada considerando o valor da aptidão

Se o valor da aptidão da solução ideal é conhecido, então pode-se definir um limite para que AG pare quando o valor de aptidão estiver próxima deste valor, considerando de uma tolerância.

Outra maneira de realizar uma parada utilizando o valor de aptidão é verificar a variância dos valores de aptidão na população atual. Se a maioria dos indivíduos na população atual são semelhantes, diz que essa é uma situação de convergência. Se a população converge, a variância dos valores de aptidão é pequena. Assim, uma tolerância pode ser definida de modo que AG pare quando a variância da população atual atingir esse valor de tolerância pré-definido.

A terceira forma de parar o algoritmo de acordo com o valor de aptidão é usar a razão entre o valor máximo de aptidão e o valor mínimo ou o erro relativo entre eles. Quanto mais perto a relação estiver de 1 (ou quanto menor for o erro relativo), mais próximo da convergência a população atual se encontrar. Desta forma, um limiar pode ser utilizado para encerrar o processo de busca.

b) Critério de parada considerando a mudança de aptidão

Pode-se monitorar as mudanças dos valores de aptidão dos melhores indivíduos para cada geração. Se a alteração for inferior a um limite de valor pré-definido, o AG para. As alterações no valor médio da aptidão também poderiam ser utilizadas.

c) Critério de parada considerando um valor limite para o número de iterações

Neste caso, é utilizado somente o número de geração para determinar quando o AG encerra o processo de busca, sem levar em conta os demais parâmetros de saída do processo de otimização. Quando o número de gerações atingir um valor

máximo predefinido, o AG para. Pode-se também registrar o número de avaliação da função objetivo, se este número atinge o valor predefinido, o AG para.

Em uma maneira geral, os critérios citados representam os casos mais comuns. Durante o processo de otimização, os critérios devem ser adaptados para cada caso específico, de forma que, vários critérios poderiam ser combinados para atingir uma regra mais flexível e eficaz para determinar a convergência de um AG.

3.3 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Atualmente, os MVEs são amplamente utilizados em diversas aplicações, como pneus, coxins, indústria aeroespacial, equipamentos médicos, indústria eletrônica, no esporte, entre outros. O presente trabalho trata da aplicação dos MVEs lineares no controle passivo de vibrações.

Os materiais sólidos com propriedades viscoelásticas apresentam simultaneamente comportamentos elástico e viscoso quando submetidos a esforços externos. Os comportamentos destes materiais podem ser representados por meio de modelos conceituais constituídos de arranjos de elementos elásticos e viscosos.

Para representar o comportamento elástico, utiliza-se a relação direta entre tensão ($\sigma(t)$) e deformação ($\varepsilon(t)$), estabelecida pela lei de Hooke para uma mola ideal, e posta, para um problema uniaxial, por

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \quad (3.6)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material.

O comportamento viscoso é representado por um elemento de amortecimento viscoso e pode ser abordado de duas formas. A primeira abordagem é através da lei de Newton para viscosidade, dada por

$$\sigma(t) = \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \mu \dot{\varepsilon}, \quad (3.7)$$

onde a tensão ($\sigma(t)$) é proporcional a taxa de deformação e ao coeficiente de viscosidade do material (μ).

A outra abordagem utiliza o modelo de Scott Blair que, por meio do cálculo fracionário, relaciona a tensão à derivada fracionária de ordem α da deformação através da relação

$$\sigma(t) = \mu \frac{d\varepsilon^\alpha(t)}{dx^\alpha}. \quad (3.8)$$

Essa expressão generaliza a lei de Newton (equação (3.7)) e considera que a ordem da derivada (α) pode assumir valores não inteiros.

Segundo Gibson (2012), os MVEs termo-reologicamente simples apresentam um comportamento linear entre a tensão e a deformação, porém esta relação é dependente do tempo. Os métodos mais utilizados para caracterizar o comportamento dos MVEs são através do teste de fluência e do teste de relaxação.

No teste de fluência (Figura 3.7a) aplica-se uma tensão constante (σ_0) a uma barra de MVE com carregamento uniaxial e observa-se a ocorrência de deformações longitudinais variáveis com o tempo ($\varepsilon(t)$). A partir desse teste, define-se o módulo de fluência ($J(t)$), como

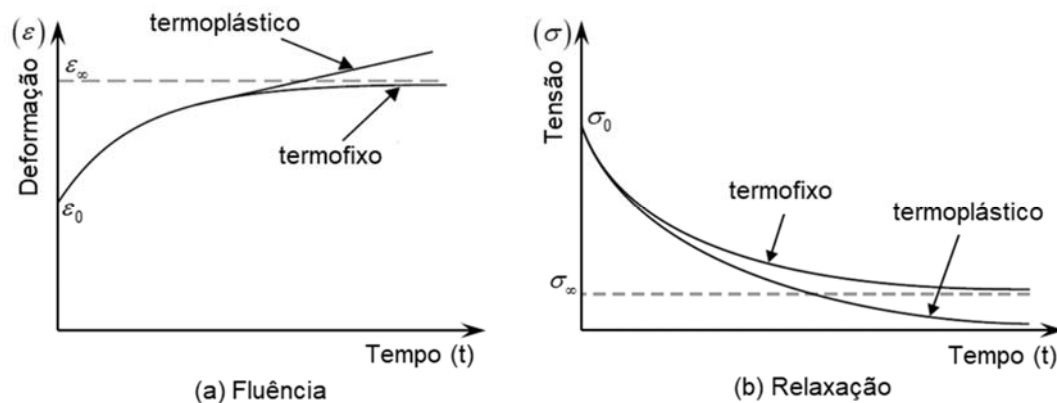
$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}, \quad (3.9)$$

Já no teste de relaxação (Figura 3.7b), é aplicada uma deformação constante (ε_0) a uma barra com carregamento uniaxial e observa-se que há uma redução na tensão ao longo do tempo ($\sigma(t)$). Assim, é possível definir o módulo de relaxação $R(t)$, como

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (3.10)$$

Nota-se que a curva do comportamento dos materiais termoplásticos² e termofixos³, nos teste de fluência de relaxação, são diferentes devido a composição de sua estrutura molecular.

FIGURA 3.7 - COMPORTAMENTO TÍPICO PARA MVES.



3.3.1 Modelos de MVEs de Derivada Inteira

Segundo Brinson e Brinson (2008), as primeiras tentativas de representar o comportamento dos MVEs foram realizadas por Maxwell⁴, Kelvin⁵ e Voigt⁶. O modelo de Maxwell combina mola e amortecedor em série (Figura 3.8a), enquanto o estudo realizado por Kelvin-Voigt utiliza um modelo que combina mola e amortecedor em paralelo (Figura 3.8b). Os comportamentos dos modelos clássicos para MVEs podem ser encontrados de forma detalhada em diversas literaturas, como Brinson e Brinson (2008); Findley, Lai e Onaran, (1976); Mainardi (2010), entre outros.

² Os polímeros da classe termoplásticos amolecem quando são aquecidos (e eventualmente liquefazem) e endurecem quando são resfriados. Este processo é totalmente reversíveis e pode ser repetidos inúmeras vezes. A nível molecular, os termoplásticos possuem, ligações fracas do tipo Van Der Waals o que justifica a facilidade de moldar esta classe de polímeros

³ Os polímeros da classe termofixo são polímeros que formam cadeias moleculares. Eles se tornam permanentemente duros durante a formação e não amolecem após o aquecimento. Estes polímeros têm ligações covalentes entre cadeias, que são mais resistentes que as ligações do tipo Van Der Waals. Os polímeros desta classe geralmente são mais resistentes do que os termoplásticos e possuem uma melhor estabilidade dimensional.

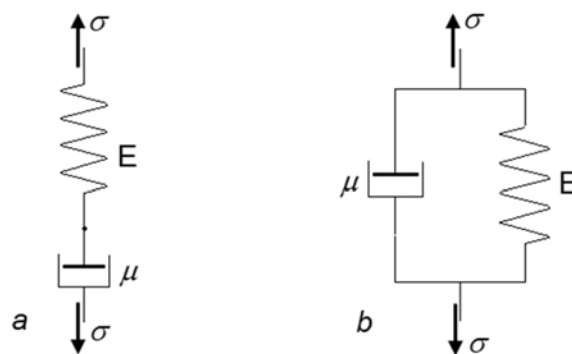
⁴ James Clerk Maxwell (1831 - 1879) foi um cientista escocês que realizou vários trabalhos no campo da matemática e da física. Seu mais notável trabalho resultou nas equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

⁵ William Thomson, Lorde Kelvin (1824 - 1907), engenheiro, matemático e físico norte-irlandês que contribuiu de forma significativa para a ciência em diversas áreas.

⁶ Woldemar Voigt (1850 - 1919) físico alemão que desenvolveu vários estudos no campo física, termodinâmica e eletro-óptica.

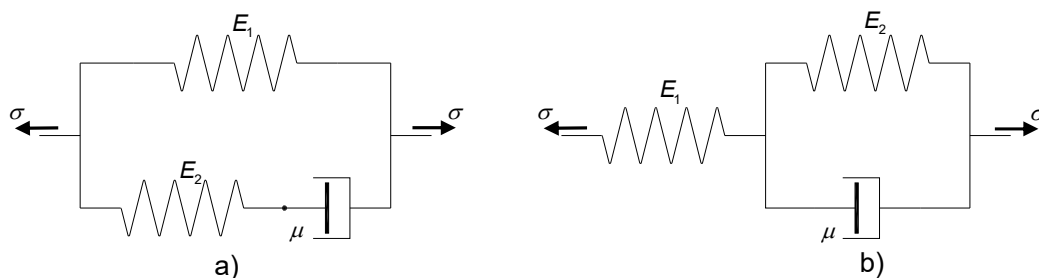
Segundo Findley, Lai e Onaran, (1976), os modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt não representam com precisão o comportamento dos MVEs. Por exemplo, o modelo de Kelvin-Voigt não exibe a dependência no tempo para a deformação, em caso de carregamento ou descarregamento e nem descreve a deformação permanente após o descarregamento. Por outro lado, o modelo de Maxwell não mostra nenhuma dependência no tempo para recuperação e não considera a taxa de deformação diminuindo para tensão constante, a qual é uma característica primária da fluência.

FIGURA 3.8 - MODELOS REOLÓGICOS DE A) MAXWELL E B) KELVIN-VOIGT.



Além dos modelos clássicos citados anteriormente, um modelo bastante utilizado no estudo dos MVEs é o modelo de Zener (Figura 3.9a) e a sua forma equivalente (Figura 3.9b). Os modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt falham ao representar o comportamento dos materiais viscoelásticos no domínio do tempo. Já o modelo de Zener apresenta uma boa aproximação para fluência e relaxação no domínio do tempo.

FIGURA 3.9 - FORMAS EQUIVALENTES DO MODELO REOLÓGICO DE ZENER.



Montando as equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva a partir da Figura 3.9, obtém-se a equação diferencial para o modelo Zener, posta na forma geral através da expressão

$$\sigma(t) + a_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} = E_0 \varepsilon(t) + b_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (3.11)$$

sendo a_1 , b_0 e b_1 parâmetros dependentes do material.

Os modelos clássicos, considerados de forma isolada, são muito simples para permitir uma boa representação do comportamento real dos MVEs. Para melhorar o modelo matemático, é comum combinar várias molas e amortecedores em série ou paralelo, os quais são chamados de modelos generalizados.

Combinando os elementos reológicos básicos é possível construir um grande número de modelos diferenciais constitutivos. Alguns destes modelos são equivalentes e outros independentes, de forma que a equação constitutiva para um número arbitrário de molas e amortecedores pode ser representada através de um somatório. Segundo Pritz (1996), o modelo constitutivo de um MVE, baseado em derivadas inteiras, pode ser generalizado através de um somatório e posto na forma

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^p a_k \frac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k}. \quad (3.12)$$

Esse modelo possui uma boa capacidade representar o comportamento dos MVEs, porém exige muitos termos no somatório. Uma alternativa para reduzir o número de termos da série é utilizar o cálculo fracionário, onde as ordens de diferenciação podem assumir valores não inteiros, permitindo fazer um melhor ajuste da curva característica do MVE, alterando o valor da ordem de diferenciação.

3.3.2 Modelos de MVEs de Derivada Fracionária

O cálculo fracionário teve início há mais de 300 anos, com a carta de Leibniz⁷ à Bernoulli⁸, mas não teve grandes avanços científicos até o início do século XX, quando diversos matemáticos retomaram o estudo do cálculo fracionário e desenvolveram diferentes teorias para o cálculo de derivadas e integrais fracionárias.

Segundo Mainardi (2010), entre as várias definições existentes para a derivada fracionária, a mais utilizada no estudo de engenharia é a formulação de Riemann-Liouville. Nesta formulação, a derivada de ordem α da função $\varphi(t)$ no ponto t , definida no intervalo de 0 a t , é representada pela expressão

$${}_0D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \varphi(\tau) \cdot (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau, \quad (3.13)$$

$$(n-1) \leq \alpha < n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0,$$

sendo $\Gamma(n)$ a função Gama de Euler, definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt. \quad (3.14)$$

Esta função generaliza o conceito de fatorial para um número inteiro n e permite que este assumam valores reais.

Nas últimas décadas, o cálculo fracionário tem sido aplicado em diversas áreas da engenharia, como eletromagnetismo, engenharia de controle, processamento de sinais, materiais viscoelásticos, entre outros.

O uso do cálculo fracionário em viscoelasticidade linear permite generalizar o conceito dos modelos da mecânica clássica de modo que, o elemento de amortecimento de Newton é substituído pelo modelo de Scott Blair, que é mais abrangente e considera a derivada de ordem não inteira.

⁷ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) foi um filósofo, cientista, matemático e diplomata alemão.

⁸ Daniel Bernoulli (1700 - 1782) foi um matemático suíço lembrado principalmente por seus estudos ligados a matemática e a mecânica, especialmente a mecânica de fluidos. Também realizou trabalhos nas áreas de probabilidade e estatística.

G. W. Scott Blair⁹ realizou vários experimentos reológicos em materiais viscoelásticos e propôs que as propriedades desses materiais sejam determinadas por vários estados entre o sólido elástico e o fluido viscoso, ao invés da combinação entre os elementos elástico e viscoso proposto por Maxwell. Scott Blair concluiu que esses materiais satisfazem uma lei intermediária entre Hooke e Newton, representada pela equação (3.8), a qual é caracterizada pelos parâmetros $\alpha \in (0,1)$ e μ . Substituindo os limites do intervalo de validade do parâmetro α , obtém-se a mola de Hooke para $\alpha=0$ e o amortecedor de Newton para $\alpha=1$.

Utilizando os mesmos modelos clássicos de viscoelasticidade, pode-se montar composições a partir de elementos de Hooke e de elementos de Scott Blair, dispostos em série ou paralelo.

Utilizando este conceito, é possível obter o modelo fracionário de Zener a partir da equação (3.12), substituindo o elemento de Newton pelo elemento de Scott Blair, obtém-se a expressão

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^p a_k D^{\alpha_k} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^q b_k D^{\alpha_k} \varepsilon(t). \quad (3.15)$$

para $k=1$, tem-se

$$\sigma(t) + a_1 D^{\alpha} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + b_1 D^{\alpha} \varepsilon(t). \quad (3.16)$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação (3.16), obtém-se

$$\sigma(\Omega) + a_1 (i\Omega)^{\alpha} \sigma(\Omega) = E_0 \varepsilon(\Omega) + b_1 (i\Omega)^{\alpha} \varepsilon(\Omega). \quad (3.17)$$

Com isso, é possível definir o módulo complexo do material ($E_c(\Omega)$), caracterizado no domínio da frequência (Ω), como

⁹ George William Scott Blair (1902–1987) foi um químico britânico conhecido por suas contribuições para o estudo de reologia.

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)}. \quad (3.18)$$

Esta expressão pode ser posta explicitamente agrupando os termos semelhantes na equação (3.17), resultando em

$$E_c(\Omega) = \frac{E_0 + b_1(i\Omega)^\alpha}{1 + a_1(i\Omega)^\alpha}. \quad (3.19)$$

Definindo $b_1 = E_\infty a_1$ e substituindo na equação (3.19), obtêm-se a equação do módulo complexo do MVE para o modelo constitutivo em 4 parâmetros, definido por

$$E_c(\Omega) = \frac{E_0 + E_\infty a_1(i\Omega)^\alpha}{1 + a_1(i\Omega)^\alpha}. \quad (3.20)$$

Os parâmetros α , a_1 , E_0 e E_∞ são características de cada MVE e são utilizados para ajustar a curva dos dados experimentais.

Separando o módulo complexo nas partes real e imaginária, obtêm-se o módulo dinâmico (E_c') e o módulo de perda (E_c''). Assim, o módulo complexo pode ser reescrito na forma

$$E_c(\Omega) = E_c'(\Omega) + iE_c''(\Omega). \quad (3.21)$$

A capacidade de dissipação do MVE é medida através do fator de perda ($\eta(\Omega)$), sendo este definido pela relação entre a parte real e a parte imaginária do módulo complexo e representado por

$$\eta(\Omega) = \frac{E_c''(\Omega)}{E_c'(\Omega)}. \quad (3.22)$$

Escrevendo a equação (3.21) em função do fator de perda, o módulo de complexo pode ser representada por

$$E_c(\Omega) = E'_c(\Omega)(1 + i\eta(\Omega)). \quad (3.23)$$

3.3.3 Influência da Temperatura

A importância de considerar a dependência da temperatura nos MVEs deve-se ao fato da sua capacidade de amortecimento e rigidez estarem fortemente relacionadas com a temperatura de operação. Esta temperatura é responsável pela passagem do seu estado vítreo (material com elevada rigidez), para o seu estado borrachoso (material com baixa rigidez) e região de transição.

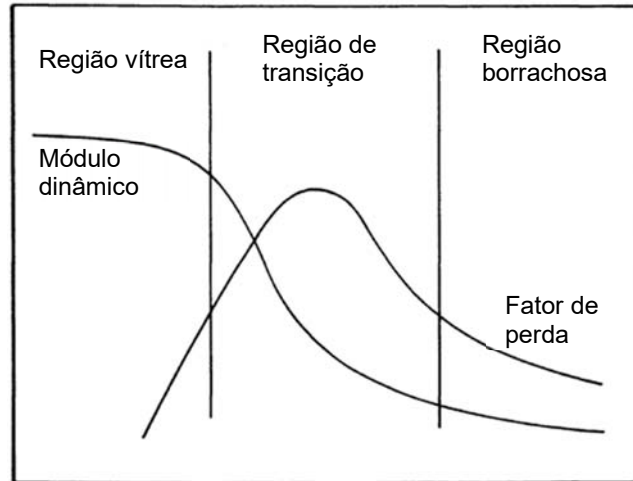
A eficiência do amortecimento dos MVEs depende fortemente da relação entre a temperatura de trabalho e a temperatura de transição do material, pois é nessa fase que o material apresenta o seu valor máximo de amortecimento, representados esquematicamente na Figura 3.10.

O princípio de superposição tempo-temperatura (também conhecido por método de redução de variáveis) estabelece que existe uma relação entre os efeitos do tempo e da temperatura no comportamento dos polímeros (FERRY, 1980). Isso implica que existe um fator de translação (α_T) que, quando aplicado nas diferentes curvas obtidas para diferentes temperaturas, estas podem ser transladadas para uma curva mestre que, junto com a curva do fator de perda é definida como nomograma. Segundo Gibson (2012), para os MVEs termo-reologicamente simples, o modelo mais utilizado para obter o fator de translação da temperatura ($\alpha_T = \alpha_T(\theta; \theta_0)$) é o de William-Landel-Ferry (WLF), dado pela expressão

$$\log(\alpha_T) = \frac{-c_1(\theta - \theta_0)}{c_2 + (\theta - \theta_0)}, \quad (3.24)$$

onde c_1 e c_2 são constantes constitutivas do material a serem determinadas, θ é temperatura de trabalho considerada e θ_0 é a temperatura de referência na qual é construída a curva mestre.

FIGURA 3.10 - VARIAÇÃO DO MÓDULO DINÂMICO E DO FATOR DE PERDA COM A TEMPERATURA PARA UMA FREQUÊNCIA CONSTANTE.



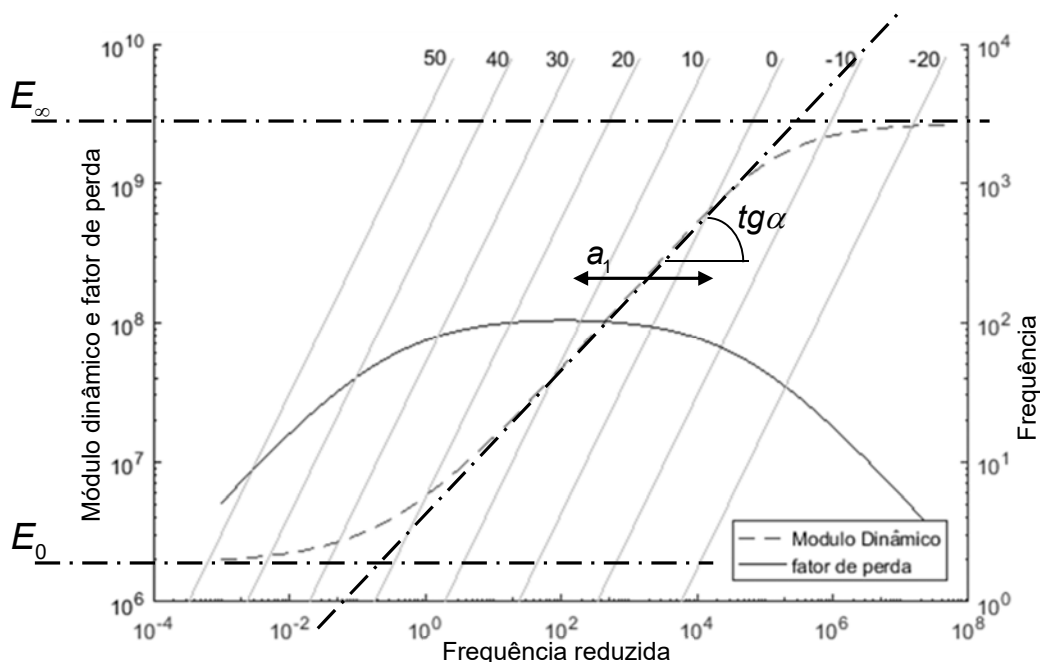
Uma maneira prática e muito usual de representar os parâmetros de um material viscoelástico que corresponde a uma curva mestre é através de um nomograma (Figura 3.11). Desta forma é possível representar o módulo dinâmico e o fator de perda em função de uma variável que representa o efeito conjunto da frequência e da temperatura. Esta variável é denominada de frequência reduzida, representada pela equação

$$\Omega_r = \alpha_T(\theta, \theta_0)\Omega. \quad (3.25)$$

Com isso, a equação (3.20) pode ser reescrita em como

$$E_c(\Omega_r) = \frac{E_0 + E_\infty a_1 (i\Omega_r)^\alpha}{1 + a_1 (i\Omega_r)^\alpha}. \quad (3.26)$$

FIGURA 3.11 - REPRESENTAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE DERIVADA FRACIONÁRIA.



3.4 TEORIA DE FLEXÃO DE PLACAS

Placas é a denominação dada a elementos estruturais planos submetidos a carregamentos transversais (portanto ocasionando flexão), onde a espessura é muito menor que as outras dimensões. As propriedades de flexão de uma placa dependem, em grande parte, da sua espessura (h) em comparação com outras dimensões. Desta forma, as placas podem ser classificadas de acordo com a relação a/h , onde a é uma dimensão típica da placa ao longo do seu plano de definição. A classificação usual para placas é dividida em placas finas, placas semi-espessas e membranas (VENTSEL e KRAUTHAMMER, 2001).

3.4.1 Teoria de Placas Semi-Espessas

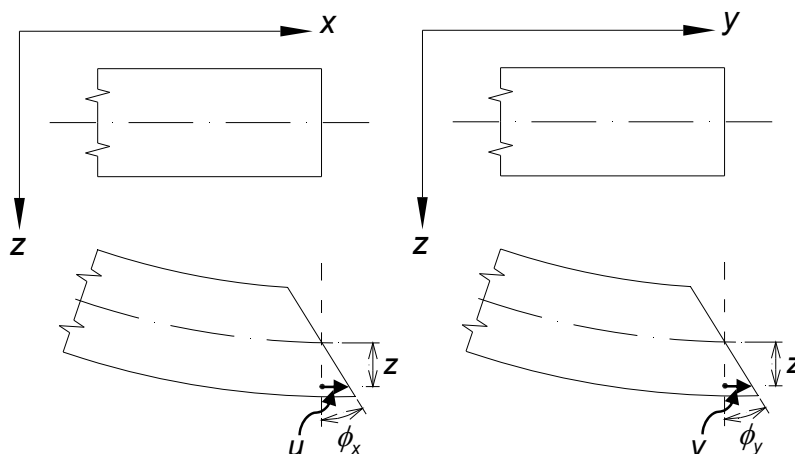
No caso específico de placas semi-espessas, o mais comum é a utilização da teoria desenvolvida por Reissner-Mindlin, também conhecida por teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO). As hipóteses aplicadas nesta teoria são semelhantes às hipóteses aplicadas na teoria clássica de placas (TCP), com exceção da quinta e sexta

hipóteses, as quais estão associadas a espessura e a rotação da seção normal (SZILARD, 2004). Estas hipóteses são:

1. O material é homogêneo, isotrópico e elástico linear. Portanto, obedece a Lei de Hooke;
2. As deflexões transversais $w(x, y)$ são pequenas comparadas à espessura da chapa. Uma deflexão máxima de $h/10$ é considerada como limite pela teoria de pequenas deformações;
3. As tensões normais na direção transversal à superfície da placa podem ser negligenciadas;
4. A superfície média da placa permanece indeformada durante a flexão;
5. A espessura da placa é constante e tem uma relação de $a/h > 10$, onde “ a ” é a aresta de menor dimensão e “ h ” é a espessura da placa;
6. Seções normais à superfície média antes da deformação não estão necessariamente normais à mesma após a deformação.

Nesse caso, o campo de deslocamentos pode ser expresso em termos da cinemática do plano médio, conforme representado na Figura 3.12.

FIGURA 3.12 - CAMPO DE DESLOCAMENTOS u e v EM FUNÇÃO DOS ÂNGULOS DE FLEXÃO.



A partir da Figura 3.12 pode-se expressar os deslocamentos u e v em termos das rotações em torno do eixo x (ϕ_y) e rotação em torno do eixo y (ϕ_x), na forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.27)$$

As equações cinemáticas descrevem as relações entre os deslocamentos e as deformações. Assim, aplicando as hipóteses de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, obtém-se relações de deformação e cisalhamento cinemáticas (BHASKAR e VARADAN, 2013), postas na forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Substituindo o campo de deslocamentos (equação (3.27)) na expressão (3.28) obtém-se o vetor de deformações em flexão ($\underline{\varepsilon}_f$), dado por

$$\underline{\varepsilon}_f = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

e o vetor de deformações cisalhantes na direção transversal $(\underline{\varepsilon}_c)$, como

$$\underline{\varepsilon}_c = \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

As componentes de tensão estão relacionadas com as componentes de deformação através da lei de Hooke generalizada para material isotrópico. Considerando $\sigma_{zz} = 0$, as relações constitutivas para placas semi-espessas podem ser expressas pela equação

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.31)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson do material. Essas tensões variam linearmente através da espessura da placa e para um ponto (x, y) fixo no plano, são funções dependentes somente da coordenada z .

Segundo Blaauwendraad (2010) e com auxílio da Figura 3.13, pode-se definir os momentos de flexão e torção, por unidade de comprimento, na forma

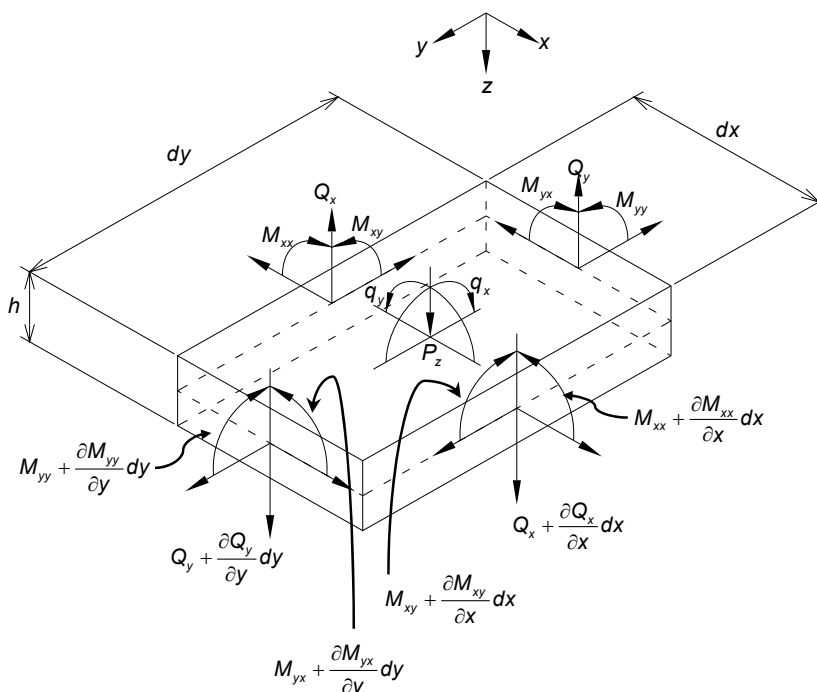
$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_h z \sigma_{xx} dz \\ M_{yy} &= \int_h z \sigma_{yy} dz. \\ M_{xy} &= \int_h z \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (3.32)$$

As tensões de cisalhamento transversal τ_{xz} e τ_{yz} podem ser consideradas constantes através da espessura da placa e resultam em forças de cisalhamento por unidade de comprimento Q_{xz} e Q_{yz} , definidas por

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= \int_h \tau_{xz} dz \\ Q_{yz} &= \int_h \tau_{yz} dz \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para os esforços cortantes, é necessário introduzir um fator de correção κ . Esse fator considera a variação da tensão de cisalhamento e da deformação ao longo da espessura. Para placas homogêneas e isotrópicas é usual utilizar $\kappa = \pi^2/12$ ou $5/6$, como originalmente proposto por Reissner¹⁰ e Mindlin¹¹, respectivamente (BHASKAR E VARADAN, 2013).

FIGURA 3.13 - DEFINIÇÕES PARA TENSÕES, MOMENTOS E CARREGAMENTOS.



FONTE: adaptado de BLAAUWENDRAAD, 2010.

¹⁰ Eric Max Reissner (1913 - 1996) foi matemático e engenheiro alemão. Desenvolveu um modelo de placas que inclui os efeitos das deformações cisalhantes transversais.

¹¹ Raymond David Mindlin (1906 - 1987) foi um engenheiro que contribuiu de forma significativa para a teoria da elasticidade e mecânica aplicada.

Para definir as equações diferenciais de equilíbrio é considerado um elemento infinitesimal da placa (Figura 3.13) com dimensões dx e dy . A densidade de carga no centro da superfície é composta pelas componentes P_z , q_x e q_y sendo P_z a densidade carga ao longo do eixo z, q_x a densidade de momento no plano yz e q_y a densidade momento no plano xz.

No sistema de coordenadas cartesianas, a placa semi-espessa é composta por cinco componentes de força interna: momentos de flexão M_{xx} e M_{yy} , o momento de torção $M_{xy} = M_{yx}$ e as forças transversais de cisalhamento Q_x e Q_y . Realizando o balanço dos carregamentos em torno do eixo x, em torno do eixo y e fazendo as simplificações algébricas necessárias, é possível obter as equações de equilíbrio para a placa semi-espessa (SZILARD, 2004), posta na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_z &= 0 \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + q_x &= 0 . \\ \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - Q_y + q_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicando a hipótese 1 da teoria de placas semi-espessas, tem-se a matriz de propriedades elástica do material. Porém, por conveniência, neste estudo essa matriz será separada em matriz de rigidez à flexão

$$\underline{\underline{D_f}} = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

e em matriz de rigidez de esforço cortante

$$\underline{\underline{D_c}} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Fazendo as substituições das equações (3.31), (3.32) e (3.33) na equação (3.34), resolvendo e agrupando os termos semelhantes, obtém-se o conjunto de equações diferenciais para placa semi-espessa:

$$\begin{aligned}
 & -\underline{D}_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \underline{D}_c \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) = p \\
 & \underline{D}_c \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\underline{D}_c - \underline{D}_f \frac{\partial \phi_x^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(1-\nu) \underline{D}_f \frac{\partial \phi_x^2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2}(1+\nu) \underline{D}_f \frac{\partial \phi_y^2}{\partial x \partial y} = q_x \cdot \quad (3.37) \\
 & \underline{D}_c \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\underline{D}_c - \underline{D}_f \frac{\partial \phi_y^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}(1-\nu) \underline{D}_f \frac{\partial \phi_y^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2}(1+\nu) \underline{D}_f \frac{\partial \phi_x^2}{\partial x \partial y} = q_y
 \end{aligned}$$

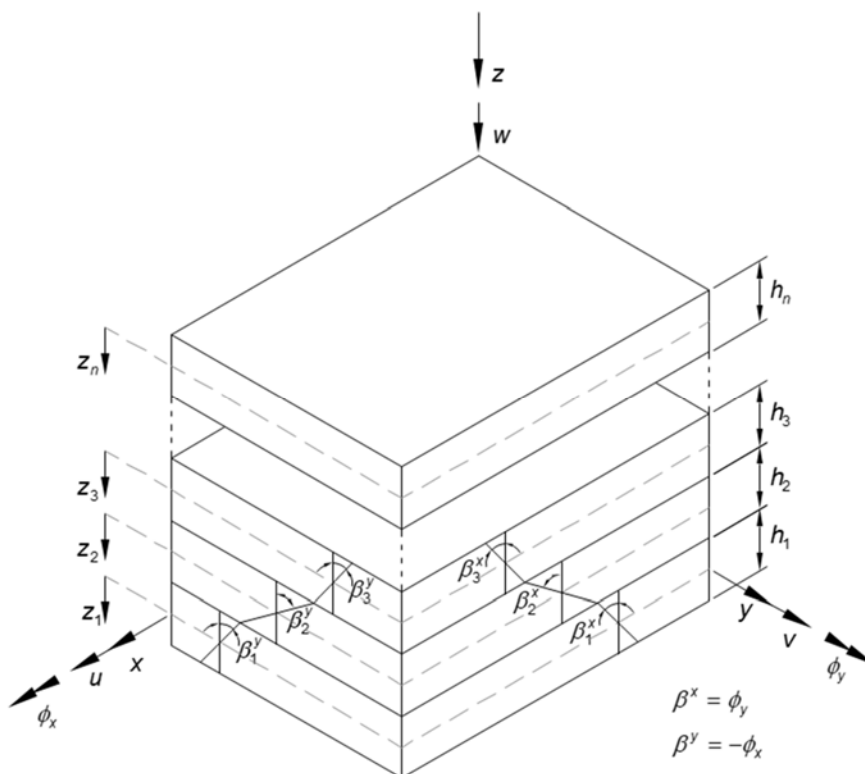
Devido à dificuldade de se obter a forma fraca para a equação (3.37), a formulação para MEF é realizada através de métodos baseados em energia, discutidos na secção 3.5.1.

3.4.2 Teoria de Placa Laminadas

A teoria da deformação de placas por camadas, que constitui a base do modelo de camadas discretas adotado neste estudo, associa campo de rotações independentes a cada uma das camadas, conforme mostram os estudos realizados por Xu, Lin e Yang, (2015) e Moreira, Rodrigues e Ferreira, (2006).

Considerando uma placa laminada constituída de n camadas (Figura 3.14), pode-se associar a cada camada genérica k uma rotação em torno do eixo x (β_k^x) e uma rotação em torno do eixo y (β_k^y), particulares para cada camada e independentes das demais. A continuidade entre as camadas é assegurada na formulação do campo de deslocamentos, definida neste trabalho como componente de acoplamento. Assim, é possível descrever com maior precisão o comportamento de placas laminadas constituídas por camadas de materiais diferentes.

FIGURA 3.14 - TEORIA DE DEFORMAÇÃO POR CAMADAS DISCRETAS.



O modelo de placa por camadas (Figura 3.14) é usualmente designado por modelo de camadas discretas (MCD), também conhecido por modelo zig-zag. Segundo Moreira, Rodrigues e Ferreira, (2006), pode-se definir o campo de deslocamentos de uma camada genérica k ($k = 3, 4, \dots$) como

$$\underline{u}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \frac{h_1}{2} \beta_1^x + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^x + \frac{h_k}{2} \beta_k^x + z_k \beta_k^x \\ v + \frac{h_1}{2} \beta_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^y + \frac{h_k}{2} \beta_k^y + z_k \beta_k^y \\ w \end{Bmatrix}, \quad (3.38)$$

Ou, na forma matricial, por

$$\underline{u}_k = \underline{\chi}_k \underline{d}. \quad (3.39)$$

Nesse caso, o vetor de deslocamentos generalizados (\underline{d}) de cada ponto (x, y) para o conjunto de camadas da placa é definido por

$$\underline{d}^T = \{u, v, w, \beta_1^x, \beta_1^y, \dots, \beta_j^x, \beta_j^y, \dots, \beta_k^x, \beta_k^y, \dots, \beta_n^x, \beta_n^y\}, \quad (3.40)$$

e a matriz $\underline{\chi}_k$, que relaciona os deslocamentos generalizados ao vetor de deslocamentos de cada ponto da k-ésima lâmina \underline{u}_k , é dada por

$$\underline{\chi}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \dots & h_j & 0 & \dots & \frac{h_1}{2} + z_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & \dots & 0 & h_j & \dots & 0 & \frac{h_1}{2} + z_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

sendo z_k , a posição absoluta da superfície média na coordenada z na camada k.

Com base no campo de deslocamentos descrito pela equação (3.38), o campo de deformações de uma camada genérica k é definido por

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{xx} &= \frac{\partial u_k}{\partial x}, \\ \varepsilon_k^{yy} &= \frac{\partial v_k}{\partial y}, \\ \gamma_k^{xy} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}, \\ \gamma_k^{xz} &= \frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \text{ e} \\ \gamma_k^{yz} &= \frac{\partial v_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Substituindo o campo de deslocamentos (equação (3.38)) na equação (3.42), obtém-se os campo de deformações, escrito em termos das componentes do vetor de deslocamentos generalizados, como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k^{xx} &= \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^1 + \overbrace{\frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial x} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^x}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^x}{\partial x}}^2 + \overbrace{z_k \frac{\partial \beta_k^x}{\partial x}}^3, \\
\varepsilon_k^{yy} &= \overbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}^1 + \overbrace{\frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial y} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial y} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^y}{\partial y}}^2 + \overbrace{z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial y}}^3, \\
\gamma_k^{xy} &= \overbrace{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}^1 + \overbrace{\frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial y} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^x}{\partial y} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^x}{\partial y}}^2 + \\
&+ \overbrace{\frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x}}^2 + \overbrace{z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x} + z_k \frac{\partial \beta_k^x}{\partial y}}^3, \\
\gamma_k^{xz} &= \overbrace{\beta_k^x + \frac{\partial w}{\partial x}}^4 \mathbf{e} \\
\gamma_k^{yz} &= \overbrace{\beta_k^y + \frac{\partial w}{\partial y}}^4.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Nota-se que os termos numerados de 1 a 4, representam as componentes de membrana, de acoplamento, de flexão e de cisalhamento, respectivamente.

A partir da equação (3.42), é possível definir o vetor de deformações ($\underline{\varepsilon}_k$), aplicando a matriz de operadores diferenciais ao campo de deslocamentos, como

$$\underline{\varepsilon}_k = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{u}}_k, \tag{3.44}$$

sendo a matriz $\underline{\underline{L}}$ dada por

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Segundo a equação (3.39), o campo de deslocamentos de uma camada genérica k é definido através das componentes de um vetor de deslocamentos generalizados \underline{d} , que representam os graus de liberdade da placa. Assim, pode-se relacionar o campo de deformações diretamente ao vetor de deslocamentos generalizados, através de uma matriz de deformações-deslocamentos ($\underline{\underline{B}}_k$), como

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_k = \underline{\underline{B}}_k \underline{d}. \quad (3.46)$$

Considerando o vetor de deslocamentos generalizados \underline{d} , definido na equação (3.40), a matriz $\underline{\underline{B}}_k$ pode ser obtida pela multiplicação matricial

$$\underline{\underline{B}}_k = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\chi}}_k, \quad (3.47)$$

resultando em

$$\underline{\underline{B}}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \dots & h_j \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \dots & 0 & h_j \frac{\partial}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \dots & h_j \frac{\partial}{\partial y} & h_j \frac{\partial}{\partial x} & \dots & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & z_k \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_k \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & z_k \frac{\partial}{\partial y} & z_k \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

Note-se que as linhas tracejadas na equação (3.48) induzem a definição de três submatrizes, as quais correspondem à matriz de membrana e acoplamento, matriz de deformação da componente de flexão e matriz devida à componente de cisalhamento.

A relação entre o campo de deformações e o campo de tensões é obtida através da lei constitutiva do material. Considerando que as deformações da placa ocorrem no regime elástico e que o material é elástico, linear e isotrópico em cada camada, esta relação é representada por

$$\underline{\underline{\sigma}}_k = \underline{\underline{D}}_k \underline{\underline{\varepsilon}}_k. \quad (3.49)$$

Levando em conta a divisão imposta aos campos de deformações e de tensões, pode-se definir a matriz de elasticidade $\underline{\underline{D}}_k$ na forma,

$$\underline{\underline{D}}_k = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_k^{MA} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}_k^F & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_k^C \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

onde as sub-matrizes $\underline{\underline{D}}_k^{MA}$, $\underline{\underline{D}}_k^F$, $\underline{\underline{D}}_k^C$ representam, respectivamente, os termos correspondentes à membrana e acoplamento, à flexão e ao cisalhamento e são definidas como

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_k^{MA} &= \underline{\underline{D}}_k^F = \underline{\underline{D}}_f \\ \underline{\underline{D}}_k^C &= \underline{\underline{D}}_c \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nesse caso, as matrizes $\underline{\underline{D}}_f$ e $\underline{\underline{D}}_c$ representam as matrizes de elasticidade no plano e de cisalhamento de placa espessa, definidas pelas equações (3.35) e (3.36), respectivamente.

3.5 VIBRAÇÕES EM PLACAS LAMINADAS

O estudo de vibração em placas é uma área extremamente importante devido à sua grande variedade de aplicações na engenharia. Neste contexto, muitos trabalhos já foram realizados nas últimas décadas. Entre as diversas publicações disponíveis sobre este tema é importante citar o estudo realizado por Leissa (1973), onde é apresentado a solução analítica de vibrações em placas utilizando a TCP para várias condições de contorno. Hashemi e Arsanjani (2005), apresentam a solução para vários casos de vibrações em placas semi-espessas, de forma analítica e aproximada. Reddy (2007), dedicou uma publicação de forma ampla e detalhada abordando tanto a TCP quanto a TCPO.

Com a popularização dos materiais compósitos várias pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de encontrar métodos mais eficientes para o cálculo vibrações em placas laminadas, visto que nestes casos o número de graus de liberdade aumenta consideravelmente.

3.5.1 Princípio de Hamilton

Para problemas com grande número de graus de liberdade ou que utilizam coordenadas generalizadas para descrever o campo de deslocamentos, é recomendado aplicar técnicas que utilizam os conceitos de variação de energia (GENTA, 2009), como é o caso do princípio de Hamilton¹².

O princípio de Hamilton é um princípio geral que se aplica a uma grande classe de problemas na mecânica. Esta abordagem baseia-se no pressuposto de que um sistema dinâmico é caracterizado pela energia cinética (T), energia potencial (U) e o trabalho realizado pelas forças externas (W). Dessa forma, segundo Petyt (2010), o princípio de Hamilton estabelece que, para todos os caminhos possíveis que uma partícula poderia percorrer, da posição t_1 para a posição t_2 , o caminho real será aquele para qual a ação (H), definida pela integral

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - W) dt, \quad (3.52)$$

é um valor mínimo. Assim, o princípio de Hamilton pode ser posto na forma variacional como

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - U - W) dt = 0, \quad (3.53)$$

sendo δ o operador variacional de primeira variação. Considerando que as forças são conservativas ($\delta W = 0$), como é o caso de vibrações livres (CASSEL, 2013), o princípio de Hamilton pode ser expresso pela integral

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - U) dt = 0. \quad (3.54)$$

¹² William Rowan Hamilton (1805 - 1865) foi um matemático, físico e astrônomo irlandês que contribuiu com vários trabalhos nos campos da óptica, dinâmica e álgebra.

Considerando um caso geral, a energia potencial interna de deformação no domínio pode ser definida pela integral (LIU e QUEK, 2014)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV \quad (3.55)$$

e a energia cinética total no domínio, pela expressão

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \underline{\underline{\dot{u}}}^T \underline{\underline{\dot{u}}} dV, \quad (3.56)$$

onde $\underline{\underline{\dot{u}}}$ representa o vetor de velocidades.

3.6 VIBRAÇÕES EM PLACAS VIA ELEMENTOS FINITOS

Devido à grande importância da aplicação de placas na indústria, o MEF tem sido constantemente utilizado na solução de problemas de vibrações neste tipo de estrutura. Nesta seção é apresentada a formulação do elemento quadrilateral de 4 nós, utilizando a TCPO, o qual é aplicado para placas de Reissner-Mindlin e para placas laminadas.

3.6.1 Elemento Quadrilateral (Q4) para placa de Reissner-Mindlin

Tendo como base o estudo apresentado na seção 3.4.1, é apresentada a formulação de MEF para um elemento quadrilátero de 4 nós (Figura 3.15a).

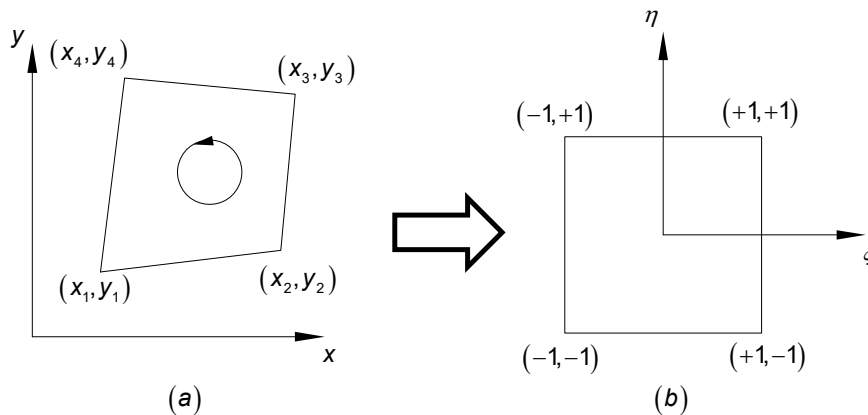
Na TCPO, as rotações ϕ_x e ϕ_y são independentes dos deslocamentos transversais. Segundo Petyt (2010), o campo de deslocamentos generalizados de um elemento quadrilateral pode ser representado através das relações

$$\begin{aligned}
 w^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i^e(x, y) w_i^e \\
 \phi_x^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i^e(x, y) \phi_{xi}^e \\
 \phi_y^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i^e(x, y) \phi_{yi}^e
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

As funções de forma ($N_i^e(x, y)$, $i = 1 \dots 4$) devem satisfazer as condições de continuidade dentro do elemento e permitir a aproximação da variável interpolada. Segundo Petyt (2010), para o elemento de 4 nós, as funções de forma são bilineares e independentes e, considerando um sistema de coordenadas locais ξ , η (Figura 3.15b), podem ser postas na forma

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

FIGURA 3.15 - ELEMENTO QUADRILÁTERO DE 4 NÓS. (a) COORDENADAS GLOBAIS NO ELEMENTO, (b) COORDENADAS LOCAIS NO ELEMENTO.



Reescrevendo a equação (3.57) na forma matricial, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} w^e \\ \phi_x^e \\ \phi_y^e \end{Bmatrix} = \underline{\underline{N}}^e \underline{\underline{q}}^e, \quad (3.59)$$

onde $\underline{\underline{q}}^e$ é o vetor de deslocamentos generalizados nodais do elemento, representado por

$$\underline{\underline{q}}^{eT} = [w_1^e \ \phi_{x1}^e \ \phi_{y1}^e \ \cdots \ w_4^e \ \phi_{x4}^e \ \phi_{y4}^e] \quad (3.60)$$

e $\underline{\underline{N}}^e$ é a matriz de das funções de forma que, posta no formato explícito, é representada por

$$\underline{\underline{N}}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & \cdots & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & \cdots & 0 & N_4^e & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & \cdots & 0 & 0 & N_4^e \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Obtenção da matriz de rigidez no elemento

Por conveniência, a equação da energia potencial, que em elementos finitos representa a energia de deformação, pode ser dividida em dois termos: um relativo à parcela de flexão e o outro relativo ao cisalhamento. Assim, a energia de deformação no elemento pode ser representada a partir da equação (3.55), na forma

$$U^e = \int_{A_e} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} \, dA \, dz + \int_{A_e} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\tau}}^T \underline{\underline{\gamma}} \, dA \, dz, \quad (3.62)$$

onde a relação entre a tensão e a deformação relativa ao cisalhamento é

$$\underline{\underline{\tau}} = \kappa \underline{\underline{D}}_s \underline{\underline{\gamma}}. \quad (3.63)$$

Substituindo a equação (3.59) na expressão da energia potencial (equação (3.62)) e integrando na espessura obtém-se a equação para a energia de deformação no elemento, representada por

$$U^e = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T \underline{K}^e \underline{q}_e, \quad (3.64)$$

sendo \underline{K}^e a matriz de rigidez global do elemento para placa de Mindlin, posta como

$$\underline{K}^e = \frac{h_3}{12} \int_{\Omega_e} \underline{B}_f^T \underline{D}_f \underline{B}_f dA + \kappa h \int_{\Omega_e} \underline{B}_c^T \underline{D}_c \underline{B}_c dA. \quad (3.65)$$

Nessa equação, a matriz B_f representa as deformações relativas ao termo de flexão no elemento e é posta na forma

$$\underline{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4^e}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & -\frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & -\frac{\partial N_4^e}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

e a matriz B_c representa as deformações relativa ao termo de cisalhamento transversal, representada por

$$\underline{B}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & N_1^e & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & 0 & N_4^e \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & -N_1^e & 0 & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & -N_4^e & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Obtenção da matriz de massa no elemento

Segundo Petyt (2010), a energia cinética no elemento pode ser obtida pela integral no domínio do elemento, definida por

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho (\dot{u}^{e2} + \dot{v}^{e2} + \dot{w}^{e2}) dV_e. \quad (3.68)$$

Substituindo o campo de deslocamentos do elemento (equação (3.57)) na equação (3.68), obtém-se a expressão para a energia cinética no elemento, posta na forma

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \rho \left(h \dot{w}^{e2} + \frac{h^3}{12} \dot{\phi}_x^{e2} + \frac{h^3}{12} \dot{\phi}_y^{e2} \right) dA = \frac{1}{2} \int_{A_e} \dot{\underline{q}}^{eT} \underline{I}^e \underline{\dot{q}}^e dA, \quad (3.69)$$

sendo $\underline{\dot{q}}^e$ o vetor de velocidades generalizadas

$$\underline{\dot{q}}^e = \begin{Bmatrix} \dot{w}^e \\ \dot{\phi}_x^e \\ \dot{\phi}_y^e \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

e \underline{I}^e representa a matriz de inércia do elemento, definida por

$$\underline{I}^e = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \rho \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \rho \frac{h^3}{12} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Substituindo a equação (3.59) na expressão da energia cinética do elemento (equação (3.69)), obtém-se

$$T^e = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^{eT} \underline{\underline{M}}^e \underline{\dot{q}}^e, \quad (3.72)$$

onde a matriz de massa consistente no elemento é dada por

$$\underline{\underline{M}}^e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \underline{\underline{N}}^{eT} I^e \underline{\underline{N}}^e dA. \quad (3.73)$$

3.6.2 Elemento Quadrangular para Placa Laminada

A abordagem para placas laminada adotada neste trabalho é baseada na formulação de Moreira, Rodrigues e Ferreira, (2006). Neste caso, o campo de deslocamentos (equação (3.39)) pode ser reescrita na forma

$$\underline{u}_k = \underline{\chi}_k \underline{\underline{N}}_L^e \underline{d}, \quad (3.74)$$

onde $\underline{\underline{N}}_L^e$ é a matriz de funções de forma para placa laminada, representada por

$$\underline{\underline{N}}_L^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & \dots & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & \dots & 0 & N_4^e & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & N_1^e & \dots & 0 & 0 & N_4^e \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Obtenção da matriz de rigidez no elemento para placa laminada

Considerando uma placa laminada definida por um conjunto de n camadas, a energia de deformação no elemento (U_L^e) poder ser obtida através da equação (3.55) reescrita na forma de um somatório da energia de deformação de cada camada individualmente, na forma

$$U_L^e = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{V_k^e} \underline{\varepsilon}_k^{eT} \underline{\sigma}_k^e dV_k^e, \quad (3.76)$$

onde $\underline{\varepsilon}_k^e$ é o vetor de deformações na camada k , $\underline{\sigma}_k^e$ é o vetor de tensões na camada k e V_k^e é o domínio do elemento na camada k . Substituindo o vetor de tensões, dado pela equação (3.49) na equação (3.76), obtém-se a expressão

$$U_L^e = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{V_k^e} \underline{\varepsilon}_k^{eT} \underline{D}_k \underline{\varepsilon}_k^e dV_k^e. \quad (3.77)$$

Além disso, substituindo a expressão (3.46) em (3.77), e realizando a integração ao longo da espessura, pode-se reescrever a expressão para a energia potencial no elemento na forma

$$U_L^e = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{A^e} \underline{d}^T \underline{\hat{B}}_k^T \underline{\hat{D}}_k \underline{\hat{B}}_k \underline{d} dA, \quad (3.78)$$

onde $\underline{\hat{D}}_k$ representa a matriz de elasticidade, modificada pela inclusão do resultado da integração na espessura, definida por

$$\underline{\hat{D}}_k = \begin{bmatrix} h_k \underline{D}_k & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{h_k^3}{12} \underline{D}_k & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & h_k \underline{G}_k \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

e matriz $\hat{\underline{\underline{B}}}_k$, que corresponde à matriz de deformação modificada, é obtida a partir da equação (3.48), e pode ser representada pela expressão

$$\hat{\underline{\underline{B}}}_k = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_k^{MA} \\ \frac{1}{z_k} \underline{\underline{B}}_k^F \\ \underline{\underline{B}}_k^C \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Substituindo as equações (3.74) na equação da energia potencial (equação (3.78)) e integrando na espessura, obtém-se a expressão energia de deformação no elemento de placa laminada, posta na forma

$$U_L^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{d}}_e^T \underline{\underline{K}}_L^e \underline{\underline{d}}_e, \quad (3.81)$$

sendo $\underline{\underline{K}}_L^e$ a matriz de rigidez global do elemento para placa laminada, expressa por

$$\underline{\underline{K}}_L^e = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \underline{\underline{N}}^T \hat{\underline{\underline{B}}}_k^T \hat{\underline{\underline{D}}}_k \hat{\underline{\underline{B}}}_k \underline{\underline{N}} dA^e, \quad (3.82)$$

Obtenção da matriz de massa no elemento

A obtenção da energia cinética em placas laminadas se dá, por exemplo, pela aplicação da equação (3.56) onde, neste caso, a matriz de densidade é diferenciada para cada camada e é posta na forma

$$\underline{\underline{I}}_k^e = \begin{bmatrix} \rho_k^e & 0 & 0 \\ 0 & \rho_k^e & 0 \\ 0 & 0 & \rho_k^e \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

sendo ρ_k^e a densidade no elemento da camada k . Assim, tomando $\underline{\dot{u}}$ como o campo de velocidades obtido através da derivada no tempo da equação (3.74), tem-se

$$\underline{\dot{u}}_k = \underline{\chi}_{=k} N^e \underline{\dot{d}}. \quad (3.84)$$

Para o conjunto de n camadas, a energia cinética do elemento laminado é dada pelo somatório individual da energia de cada camada,

$$T_L^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{V_k^e} \underline{\dot{u}}_k^{eT} \underline{I}_k^e \underline{\dot{u}}_k^e dV_k. \quad (3.85)$$

Substituindo a relação (3.84) em (3.85), esta é reescrita como

$$T_L^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{V_k^e} \underline{\dot{d}}^{eT} \underline{I}_k^e \underline{\dot{d}}^e dV_k, \quad (3.86)$$

sendo

$$\underline{I}_k^e = \underline{\chi}_{=k}^T \underline{I}_{=k}^e \underline{\chi}_{=k}. \quad (3.87)$$

Integrando a equação (3.87) na espessura, a equação para energia cinética na camada k do elemento é representada pela expressão

$$T_k^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{A_e} \underline{\dot{d}}^{eT \wedge e} \underline{\hat{I}}_{=k}^e \underline{\dot{d}}^e dA, \quad (3.88)$$

onde a matriz de inércia modificada $\underline{\hat{I}}_{=k}^e$, resultante da inclusão do resultado da integração analítica, é definida por

$$\underline{\hat{I}}_k^e = \rho_k^e h_k^e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \dots & h_j & 0 & \dots & \frac{h_k}{2} & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1^2}{4} & \dots & 0 & h_j & \dots & 0 & \frac{h_k}{2} \\ & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \frac{h_1^2}{4} & 0 & \dots & \frac{h_1}{2} h_j & 0 & \dots & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} & 0 \\ & & & & \frac{h_1^2}{4} & \dots & 0 & \frac{h_1}{2} h_j & \dots & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & h_j^2 & 0 & \dots & \frac{h_k}{2} h_j & 0 \\ & & & & & & & h_j^2 & \dots & 0 & \frac{h_k}{2} h_j \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \frac{h_k^2}{3} & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{k_k^2}{3} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

sim.

e a expressão para a matriz de massa no elemento é representada na forma

$$\underline{M}_L^e = \sum_{k=1}^n \int_{A^e} \underline{N}^{eT} \underline{\hat{I}}_k^e \underline{N}^e dA \quad (3.90)$$

3.7 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Aplicando as expressões para energia potencial (equações (3.78)) e energia cinética (equação (3.88)) ao princípio de Hamilton, é possível obter a equação do movimento para um sistema harmônico (INMAN, 2014), dado pela expressão

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t), \quad (3.91)$$

onde \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} representam, respectivamente, a matriz de massa, matriz de amortecimento viscoso e a matriz de rigidez do sistema. Os vetores $\underline{x}(t)$ e $\underline{f}(t)$

representam o vetor resposta e o vetor excitação no domínio do tempo, respectivamente.

Na técnica de controle de vibrações com camada de restrição, a dissipação de energia ocorre devido à deformação da camada de MVE. Desta forma o amortecimento das camadas metálicas é pequeno quando comparado com o da camada viscoelástica, portanto a matriz de amortecimento $\underline{\underline{C}}$, na equação (3.91), pode ser desconsiderada e reescrita na forma

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}(t) = \underline{f}(t). \quad (3.92)$$

A matriz de rigidez global $\underline{\underline{K}}$ contém termos complexos e dependentes da frequência, podendo ser dividida numa componente elástica $\underline{\underline{K}}_e$ e numa componente viscoelástica $\underline{\underline{K}}_v(\Omega)$, na forma

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_e + \underline{\underline{K}}_v(\Omega). \quad (3.93)$$

Enquanto que a matriz de rigidez elástica $\underline{\underline{K}}_e$ é real e constante, a matriz de rigidez viscoelástica $\underline{\underline{K}}_v(\Omega)$ é complexa, dependente da frequência e da temperatura. Porém, neste estudo, a temperatura é considerada constante e não será representada na equação.

Em um caso mais geral, a matriz de rigidez complexa é formada por termos associados ao módulo de elasticidade complexo $E_c(\Omega)$ e por termos proporcionais ao módulo de cisalhamento complexo $G_c(\Omega)$ do material.

Embora estes dois módulos não sejam diretamente proporcionais entre si, pois o coeficiente Poisson também depende da frequência, na região de transição do MVE a dependência da frequência e da temperatura do módulo de cisalhamento e do módulo elástico são similares (HAMBRIC, SUNG e NEFSKE, 2016). Portanto, considera-se a existência de uma relação proporcional entre ambos através da equação

$$G_c(\Omega) = \frac{E_c(\Omega)}{2(1+\nu)}. \quad (3.94)$$

Desta forma, é possível decompor a matriz de rigidez viscoelástica através da expressão

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}_v(\Omega) = G_c(\Omega)\underline{\underline{K}}_v, \quad (3.95)$$

onde $G_c(\Omega)$ é o módulo de cisalhamento complexo do material que depende da frequência e $\underline{\underline{K}}_v$ representa a matriz de rigidez viscoelástica, definida por termos reais e constantes. Assim, a equação (3.92), escrita no domínio da frequência, pode ser posta na forma

$$\left[\underline{\underline{K}}_e + G_c(\Omega)\underline{\underline{K}}_v - \Omega^2 \underline{\underline{M}} \right] \underline{\underline{X}}(\Omega) = \underline{\underline{F}}(\Omega). \quad (3.96)$$

Considerando que a estrutura é submetida a uma excitação harmônica de uma frequência genérica Ω e que o material opera em uma temperatura constante, a solução da equação (3.96), implica em encontrar a solução para cada valor de frequência do intervalo em análise através da expressão

$$\left[\underline{\underline{K}}(\Omega) - \lambda \underline{\underline{M}} \right] \underline{\underline{X}}(\Omega) = \underline{\underline{F}}(\Omega), \quad (3.97)$$

sendo λ os autovalores. Como a resposta do sistema depende das propriedades mecânicas e da frequência, a equação (3.97) pode ser reescrita na forma

$$H_{ks}(\Omega) = \frac{X_k(\Omega)}{F_s(\Omega)}, \quad (3.98)$$

onde $H_{ks}(\Omega)$ é definido como receptância e representa a resposta da estrutura em deslocamento no ponto k para uma excitação no ponto s . A resposta do sistema também pode ser definido para velocidade e aceleração.

Substituindo o deslocamento ($\underline{X}(\Omega)$) pela velocidade ($i\Omega\underline{X}(\Omega)$), pode-se definir a FRF de mobilidade ($Y(\Omega)$), como

$$Y_{ks}(\Omega) = \frac{i\Omega X_k(\Omega)}{F_s(\Omega)}, \quad (3.99)$$

e substituindo o deslocamento ($\underline{X}(\Omega)$) pela aceleração ($-\Omega^2\underline{X}(\Omega)$), pode-se definir a FRF de inércia ($A(\Omega)$), na forma

$$A_{ks}(\Omega) = \frac{-\Omega^2 X_k(\Omega)}{F_s(\Omega)}, \quad (3.100)$$

3.7.1 Obtenção dos parâmetros modais

Para um problema de vibrações livre, a equação (3.97) é reduzida a um problema de autovalores/autovetores, definido pela equação

$$[\underline{K}(\Omega_i) - \lambda_i \underline{M}] \underline{\Phi}_i = 0, \quad (3.101)$$

sendo Ω_i a i -ésima frequência natural, $\underline{\Phi}_i$ o i -ésimo autovetor e λ_i o i -ésimo autovalor correspondente. Resolvendo a equação (3.101) para $i = 1 \dots n$, obtém-se a matriz modal

$$\underline{\Phi} = [\underline{\Phi}_i]_{n \times n}, \quad (3.102)$$

e a matriz espectral

$$\underline{\underline{\Lambda}} = [\text{diag}(\lambda_i)]_{n \times n}. \quad (3.103)$$

Normalizando as matrizes de massa e de rigidez pela matriz modal ($\underline{\underline{\Phi}}$), obtém-se a matriz de massa-modal ($\underline{\underline{M}}_r$)

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{M}}_r, \quad (3.104)$$

e a matriz de rigidez modal ($\underline{\underline{K}}_r$)

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{K}}_r. \quad (3.105)$$

3.7.2 Fator de perda modal

Segundo Inman (2014), o fator de perda modal (η_i), para o i-ésimo modo de vibrar, pode ser definido como a taxa de energia dissipada por ciclo (ΔU_i) pela energia total armazenada (U_i) e posto na forma

$$\eta_i = \frac{\Delta U_i}{2\pi U_i} \quad (3.106)$$

onde, a taxa de energia dissipada por ciclo pode ser obtida através da expressão

$$\Delta U_i = \pi \underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{K}}_{\text{Im}} \underline{\underline{\Phi}}_i \quad (3.107)$$

e a energia total armazenada a partir da equação

$$U_i = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{K}}_{\text{Re}} \underline{\underline{\Phi}}_i. \quad (3.108)$$

Desta forma, o fator de perda modal pode ser dado por

$$\eta_i = \frac{\underline{\Phi}_i^T \underline{K}_{\text{Im}} \underline{\Phi}_i}{\underline{\Phi}_i^T \underline{K}_{\text{Re}} \underline{\Phi}_i}, \quad (3.109)$$

onde as matrizes $\underline{K}_{\text{Im}}$ e $\underline{K}_{\text{Re}}$ correspondem à parte imaginária e à parte real da matriz de rigidez global do sistema, respectivamente.

3.8 OBTENÇÃO DA RESPOSTA NUMÉRICA PARA FRF

A solução de um problema de vibrações com MVE implica em resolver a equação (3.96) para cada frequência em um intervalo de interesse. A solução numérica parte da discretização de um intervalo em n valores de frequência variando de 1 a n ou seja, resolver n problemas de autovalores/autovetores.

Como a solução de um problema de autovalores/autovetores demanda um tempo computacional elevado, nesta seção é apresentada uma técnica para reduzir o tempo de cálculo onde um problema de autovalores/autovetores é calculado em uma frequência de referência e a solução para as demais frequências é obtida atualizando o incremento do módulo complexo a partir da frequência de referência.

Assim, a matriz de rigidez de um MVE para uma frequência de referência Ω_0 , pode ser definida por

$$\underline{K}'_v(\Omega_0) = E_c(\Omega_0) \underline{K}_v. \quad (3.110)$$

Desta forma a matriz de rigidez da estrutura laminada para uma frequência de referência, pode ser representada pela expressão

$$\underline{K}' = \underline{K}_e + \underline{K}'_v(\Omega_0). \quad (3.111)$$

A solução da equação (3.96), porém considerando a matriz de rigidez \underline{K}' , é obtida através do problema de autovalores/autovetores, posto na forma

$$\lambda_i' M \Phi_i' = K' \lambda_i'. \quad (3.112)$$

Com i variando de 1 a n . Φ_i' representa os autovetores na frequência de referência Ω_0 e λ_i' os autovalores correspondentes.

Normalizando as matrizes de massa e de rigidez pela matriz modal ($\underline{\underline{\Phi}}'$), obtém-se a matriz de massa-modal ($\underline{\underline{M}}_r'$)

$$\underline{\underline{\Phi}}'^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}}' = \underline{\underline{M}}_r', \quad (3.113)$$

e a matriz de rigidez modal ($\underline{\underline{K}}_r'$)

$$\underline{\underline{\Phi}}'^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}}' = \underline{\underline{K}}_r', \quad (3.114)$$

sendo $\underline{\underline{\Phi}}'$ a matriz modal composta pelos autovetores Φ_i' .

Assumindo que os modos fora do intervalo de frequência de interesse possuem uma contribuição muito pequena para o cálculo da função resposta em frequência (FRF), aqui estes são desprezados. Seguindo este raciocínio, a matriz modal pode ser reduzida aos \hat{n} primeiros modos ($\hat{n} \ll n$), considerando que n o número total de graus de liberdade do sistema. Assim, definido $\hat{\Phi}_{n \times \hat{n}}$ como a matriz modal truncada e $\hat{p}(t)$ como o vetor de coordenadas generalizadas no subespaço modal, pode-se aplicar a transformação de coordenadas

$$\underline{\underline{x}}(t) = \hat{\Phi} \hat{p}(t) \quad (3.115)$$

à equação (3.92) e multiplicando por todos os termos por $\hat{\Phi}^T$, obtém-se a equação de movimento

$$\underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{M}} \underline{\hat{\Phi}} \underline{\hat{p}}(t) + \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{K}}(\Omega) \underline{\hat{\Phi}} \underline{\hat{p}}(t) = \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{f}}(t), \quad (3.116)$$

para um subespaço modal de um sistema multicamadas.

Escrevendo o módulo de elasticidade, segundo uma frequência de referência Ω_0 , posto na forma

$$E_c(\Omega) = E_c(\Omega_0) + \Delta E_c(\Omega) \Rightarrow \Delta E_c(\Omega) = E_c(\Omega) - E_c(\Omega_0), \quad (3.117)$$

a matriz de rigidez da estrutura laminada ($\underline{\hat{K}}$) pode ser reescrita na forma

$$\underline{\hat{K}} = \underline{\hat{K}}' + \Delta E(\Omega) \underline{\hat{K}}_v = \underline{\hat{K}}_e + E_c(\Omega_0) \underline{\hat{K}}_v + \Delta E(\Omega) \underline{\hat{K}}_v. \quad (3.118)$$

Substituindo a equação (3.118) na equação (3.116), é possível obter a equação do movimento da estrutura laminada no subespaço modal do sistema multicamadas obtido para uma dada frequência, através da equação

$$\underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{M}} \underline{\hat{\Phi}} \underline{\hat{p}}(t) + \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{K}}'(\Omega) \underline{\hat{\Phi}} \underline{\hat{p}}(t) + \Delta E(\Omega) \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{K}}_v \underline{\hat{\Phi}} \underline{\hat{p}}(t) = \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{f}}(t). \quad (3.119)$$

Reescrevendo a equação (3.119) em função da massa modal (equação (3.113)) e da rigidez modal (equação (3.114)), obtém-se

$$\underline{\hat{M}}_r \underline{\hat{p}}(t) + \underline{\hat{K}}_r \underline{\hat{p}}(t) + \Delta E_c(\Omega) \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{K}}_v \underline{\hat{\Phi}} \underline{\hat{p}}(t) = \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{f}}(t). \quad (3.120)$$

No domínio da frequência, a equação (3.120) é posta na forma

$$\left[-\Omega^2 \underline{\hat{M}}_r + \underline{\hat{K}}_r + \Delta E_c(\Omega) \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{K}}_v \underline{\hat{\Phi}} \right] \underline{\hat{P}}(\Omega) = \underline{\hat{\Phi}}^T \underline{\hat{F}}(\Omega). \quad (3.121)$$

A partir da equação (3.121) é possível determinar a resposta dinâmica da estrutura laminada para qualquer frequência utilizando a expressão

$$\hat{\underline{P}}(\Omega) = \left[-\Omega^2 \hat{\underline{M}}_r + \hat{\underline{K}}_r + \Delta E_c(\Omega) \hat{\underline{\Phi}}^T \hat{\underline{K}}_v \hat{\underline{\Phi}} \right]^{-1} \hat{\underline{\Phi}}^T \underline{F}(\Omega). \quad (3.122)$$

Na equação (3.122), a resposta dinâmica está expressa em função das coordenadas generalizadas.

A partir da equação (3.115) é possível obter a expressão para a transformação de coordenadas no subespaço modal no domínio da frequência, dada por

$$\underline{Q}(\Omega) = \hat{\underline{\Phi}} \hat{\underline{P}}(t). \quad (3.123)$$

Substituindo a equação (3.123) na equação (3.122) é possível obter a expressão para a resposta dinâmica do sistema multicamadas no sistema de coordenadas espaciais, dada pela equação

$$\underline{Q}(\Omega) = \hat{\underline{\Phi}} \left[-\Omega^2 \hat{\underline{M}}_r + \hat{\underline{K}}_r + \Delta E_c(\Omega) \hat{\underline{\Phi}}^T \hat{\underline{K}}_v \hat{\underline{\Phi}} \right]^{-1} \hat{\underline{\Phi}}^T \underline{F}(\Omega), \quad (3.124)$$

sendo que o termo

$$\left[-\Omega^2 \hat{\underline{M}}_r + \hat{\underline{K}}_r + \Delta E(\Omega) \hat{\underline{\Phi}}^T \hat{\underline{K}}_v \hat{\underline{\Phi}} \right]^{-1} = \underline{H}(\Omega) \quad (3.125)$$

denominado de receptância ($\underline{H}(\Omega)$). Desta forma, a equação (3.124) pode ser reescrita na forma

$$\underline{Q}(\Omega) = \underline{H}(\Omega) \underline{F}(\Omega). \quad (3.126)$$

Com base na equação (3.126) é possível obter a resposta em deslocamento da estrutura para um dado ponto de excitação e resposta. Para calcular a resposta em aceleração (inertância) é necessário multiplicar a equação (3.126) por $-\Omega^2$.

4 METODOLOGIA

Nos capítulos anteriores são apresentados vários estudos relativos às técnicas de soluções de problemas de otimização de estruturas multicamadas. Entre esses trabalhos estão Zheng *et al.* (2013) e Xu, Lin e Yang (2015), os quais serão usadas como principais referências neste estudo.

Com base na teoria descrita nas seções anteriores, este capítulo tem por objetivo apresentar a metodologia, bem como as considerações utilizadas, para implementação da rotina de otimização com o objetivo de obter o recobrimento ótimo com MVE em placas.

4.1 PROBLEMA PROPOSTO

Em virtude da dificuldade de obtenção da expressão para análise de sensibilidade da função objetivo do projeto e da não garantia de que o problema a ser resolvido é convexo, a solução do mesmo via método baseado em gradiente não é adequado, portanto, no presente estudo optou-se pelo uso de AG para minimização da inertância total do sistema dentro de uma faixa de frequência pré-definida e restringido a área total de recobrimento com camada viscoelástica.

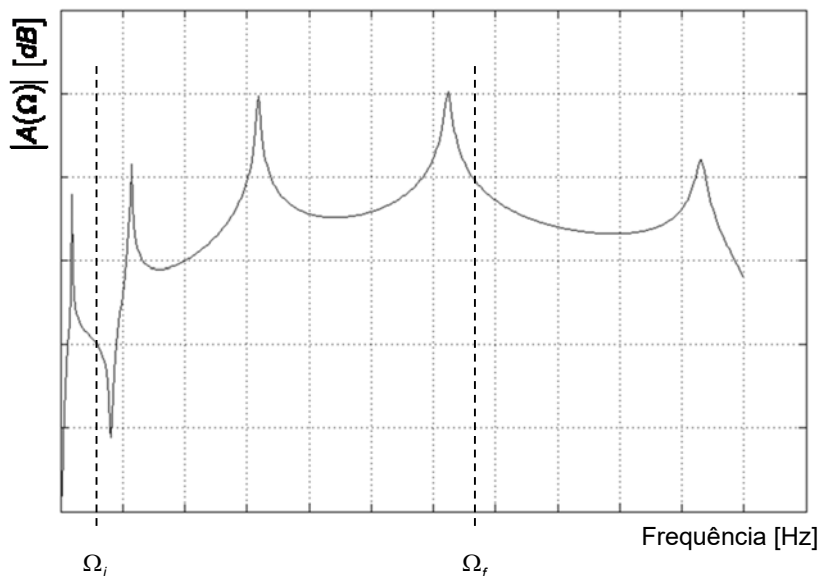
Os principais conceitos necessários para definir o problema proposto neste estudo são apresentados a seguir.

Função objetivo: É a função que descreve o mérito de cada configuração do sistema ao longo do processo de busca da solução ótima. Como o problema em questão trata a inertância total do sistema dentro do intervalo de frequência, a função objetivo adotada é uma aproximação da norma L_2 , ou norma Euclidiana da inertância, posta na forma

$$f(\underline{x}) = \sqrt{\int_{\Omega_i}^{\Omega_f} |A_{ks}(\Omega)|^2 d\Omega} \cong \sqrt{\sum_{k=1}^{nna} |A_{ks}(\Omega)|^2 \Delta\Omega}, \text{ com } \Delta\Omega = \Omega_f - \Omega_i, \quad (4.1)$$

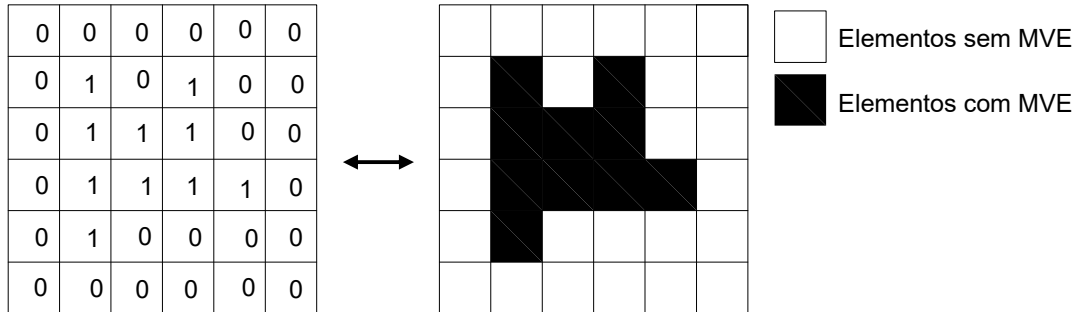
sendo Ω_i e Ω_f as frequências inicial e final, respectivamente, as quais limitam o intervalo de frequência de interesse (Figura 4.1) e nna o número de valores de inércia amostrados dentro do intervalo.

FIGURA 4.1 - INTERVALO DE FREQUÊNCIAS DE INTERESSE NO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.



Variáveis de projeto: Correspondem aos parâmetros que são alterados externamente durante o processo de otimização. Neste trabalho, o vetor de variáveis de projeto é composto pelos elementos obtidos via discretização da placa. Neste caso, o vetor de variáveis de projeto é do tipo binário, onde o elemento pode ou não receber a camada de MVE (Figura 4.2). Desta forma, define-se o vetor de variáveis de projeto como sendo um vetor de valores binários ($x_i = 0$ ou 1) de dimensão n_{el} , sendo n_{el} o número de elementos da placa.

FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE PROJETO.



Restrições: As restrições do problema de otimização são descritas na formulação do mesmo através de funções restrições. A restrição considerada neste trabalho é dada pela limitação de área total máxima de recobrimento com MVE (denotada por S_{\max}), posta na forma

$$g(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n_{el}} x_j S_j - S_{\max} \leq 0, \quad (4.2)$$

onde S_j é a área da superfície de cada elemento.

Levando em conta as considerações levantadas neste capítulo, o problema de otimização abordado no presente estudo, posto na forma padrão, é

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(\underline{x}) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{nna} |A_{ks}(\Omega)|^2 \Delta\Omega} \\ \text{sujeito a } g(\underline{x}) &= \sum_{j=1}^{n_{el}} x_j S_j - S_{\max} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2 OBTENÇÃO DA FRF E DA FUNÇÃO OBJETIVO

Devido à natureza do problema que envolve os MVE's, é necessário atualizar a matriz de rigidez para cada frequência onde é obtida a FRF. Considerando ainda o grande número de graus de liberdade do problema e a quantidade de iterações necessárias para a obtenção da solução ótima, é necessário utilizar alguns recursos matemáticos para a obtenção da solução em um tempo razoável.

Na solução do problema de autovalores/autovetores através do software Matlab®, optou-se pela utilização da *eigs* (), a qual soluciona do problema através de matrizes esparsas e utiliza o método de Arnoldi (LEHOUCQ, 1998).

Para a encontrar o valor de inertância foi utilizado o método proposto por Bortolotto, Lopes e Bavastri, (2013) e descrito no item 3.8. Neste método são considerados somente os modos contidos no intervalo da frequência de interesse, isto porque assume-se que a participação dos demais modos é pequena neste intervalo de frequência e podem ser desprezados.

4.3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Cálculo da aptidão

Um dos principais fatores que influenciam a eficiência do AG é a forma como são realizados o processo de seleção e o cálculo da aptidão. Para uma população com muitos indivíduos, a distribuição linear da aptidão faz com que os indivíduos mais aptos tenham uma probabilidade de seleção muito próxima aos demais indivíduos. Uma estratégia que pode ser adotada para melhorar o processo de seleção é a utilização de pesos no cálculo da aptidão, que podem ser lineares ou não lineares.

A Figura 4.3) ilustra quantitativamente como que cada método influencia no processo de seleção. Quando não é aplicado nenhum peso a maioria dos indivíduos apresentam uma aptidão muito próxima. Quando aplicado um peso com distribuição linear, observa-se os indivíduos mais aptos se destacam dos demais. E quando se atribui uma distribuição não linear os indivíduos mais aptos são muito mais representativos no processo de seleção.

Neste estudo, foi utilizado a técnica com peso não linear ($Sp = 3$) de forma a causar uma pressão maior no processo de seleção, forçando que os indivíduos mais aptos tenham uma maior representatividade no momento da seleção.

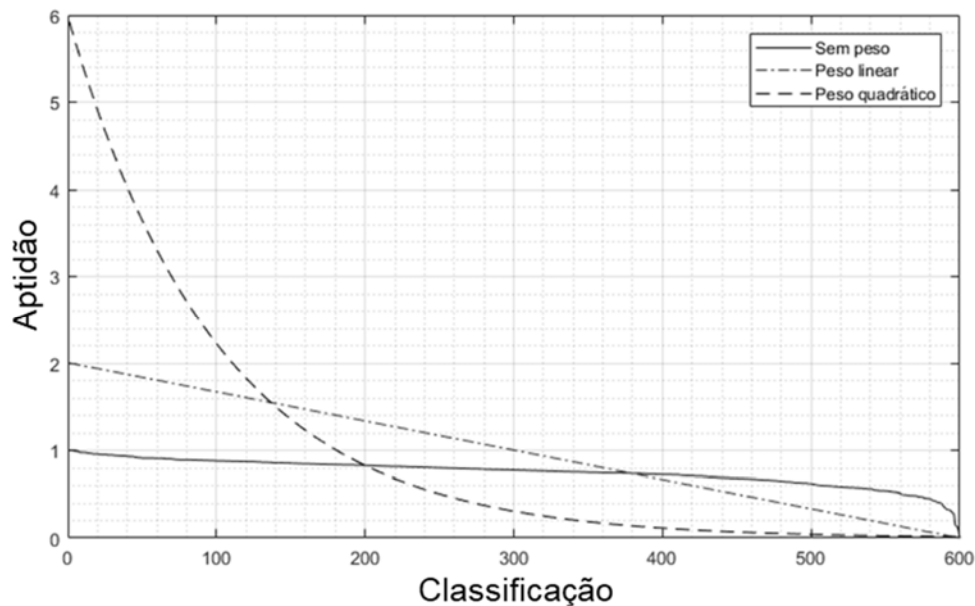
Segundo Sumathi (2008), a aptidão com peso não linear pode ser calculada segundo a equação

$$Ap = \frac{Ni \lambda^{pk-1}}{\sum_{i=1}^{Ni} \lambda^{i-1}}, \quad (4.4)$$

sendo Ni o número de indivíduos, pk a posição que o indivíduo ocupa no vetor e λ é o valor da raiz do polinômio

$$0 = (Sp - Ni) \lambda^{Ni-1} + Sp \lambda^{Ni-2} + \dots + Sp \lambda + Sp. \quad (4.5)$$

FIGURA 4.3 - APTIDÃO PONDERADA.



No processo de otimização através de AG, o mecanismo de evolução é realizado através dos operadores genéticos. Como a restrição relativa à área máxima de recobrimento influencia na quantidade de variáveis de projeto, foi necessário criar uma rotina específica para controle desta restrição. Como os operadores genéticos

consistem em eventos randômicos, após esse processo é realizado uma correção na quantidade de elementos com MVE para garantir a restrição em área do problema.

Critério de parada

A solução ótima obtida pelo AG, ou seja, o melhor indivíduo da última geração avaliada, deve satisfazer ao menos um dos seguintes critérios de parada:

1. Quando a diferença entre a geração atual e a décima segunda geração anterior for inferior a uma tolerância pré-determinada;
2. Quando atinge um valor limite de gerações.

Parâmetros do GA

Para validar os parâmetros aplicados aos operadores genéticos do algoritmo, como o tamanho da população, número de gerações e o número de indivíduos de elite, foram realizadas várias simulações. Após esta etapa, verificou-se que com uma população inferior a 12 vezes o número de variáveis de projeto, os resultados não convergiam de maneira satisfatória. Assim, o tamanho da população adotado em todas as análises é de no mínimo 15 vezes o número de variáveis de projeto.

Em relação ao número de gerações, procurou-se obter uma margem segura de forma a garantir que o algoritmo encontrasse o ponto de ótimo, portanto, adotou-se um valor máximo de 100 gerações.

Para os indivíduos de elite, não existir um senso comum em relação ao valor ideal a ser utilizado, porém costuma-se usar valores inferiores a 1% do tamanho da população.

Apesar da taxa de mutação variar muito conforme o problema, alguns autores (COLEY, 1999; LIBELLI e ALBA, 2000), sugerem utilizar a relação,

$$P_m = \frac{1}{L}, \quad (4.6)$$

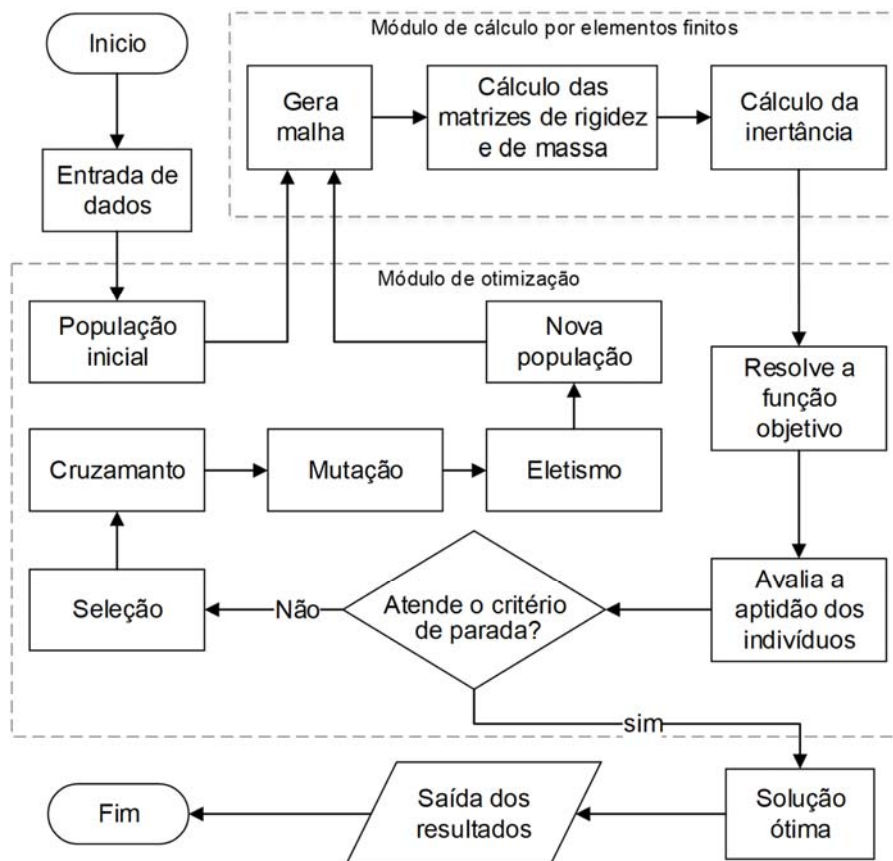
sendo P_m a taxa percentual de mutação e L o quantidade de *bits* do gene.

Todas as etapas de cálculo do algoritmo para solução do problema proposto, foram implementadas no software Matlab®. O algoritmo de solução pode ser decomposto em duas etapas principais:

1. Etapa de avaliação da solução: É realizada através do MEF, onde necessita ser acessada através de um laço de repetição que avalia todo os indivíduos da população.
2. Etapa de otimização: É onde ocorre o processo de avaliação da função objetivo e evolução da população através de operadores genético.

A Figura 4.4 representa do fluxograma do algoritmo, sendo possível identificar as etapas citadas, bem como as etapas de pré e pós processamento, onde ocorrem a entrada de dados e saída dos resultados, respectivamente.

FIGURA 4.4 - FLUXOGRAMA DO ALGORITMO.



5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem por objetivo avaliar e validar a metodologia apresentada nos capítulos anteriores, bem como o algoritmo desenvolvido para este trabalho. Inicialmente, para garantir que o algoritmo está funcionando de maneira correta, é realizado um processo de validação por etapas considerando diversos casos de condições de contorno, modos de vibrar e percentuais de recobrimento de MVE.

A validação da metodologia de solução é dividida em 3 etapas:

1. Validação do modelo de placa de Mindlin: Avalia somente o modelo TCPO que é utilizada para a placa base.
2. Validação do modelo de placa laminada de Moreira, Rodrigues e Ferreira, (2006): Avalia somente o modelo de placa laminada.
3. Validação do processo de otimização via AG: Considera as etapas anteriores juntamente com o processo de otimização por AG.

Após as etapas de validação, a metodologia apresentada é aplicada a 2 casos envolvendo análises em banda larga de frequência.

5.1 PARÂMETROS MATERIAIS E DE SOLUÇÃO

O material metálico utilizado é um aço de uso comum, neste caso o aço ASTM A36, onde suas propriedades estão disponibilizadas no site MATWEB e são apresentadas na Tabela 5.1. Este material é utilizado como material de base da placa e na camada de restrição.

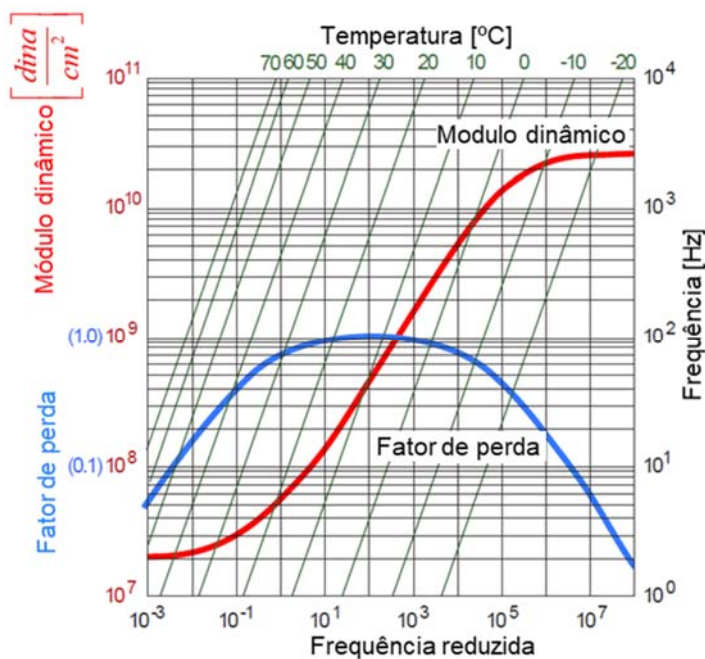
TABELA 5.1 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DO AÇO ASTM A36.

E [GPa]	ρ [Kg/m ³]	ν
2,00E+11	7860	0,3

Análise envolvendo MVEs necessitam de vários parâmetros, normalmente obtidos através de ensaios experimentais. Porém, devido à dificuldade de realizar o experimento no laboratório de vibrações da UFPR, foi utilizado a técnica apresentado

por Sousa *et al* (2017). A técnica proposta neste artigo realiza um ajuste por mínimos quadrados dos pontos obtidos manualmente do nomograma através de otimização não linear. O MVE adotado foi o EAR C1002 e o nomograma está representado na Figura 5.1.

FIGURA 5.1 - NOMOGRAMA DO MVE C1002.



FONTE: EARGLOBAL (2017)

Aplicando a técnica de ajuste de pontos citada, é possível obter os parâmetros do material C1002 e estão apresentados na Tabela 5.2.

TABELA 5.2 - PARAMETROS DO MVE EAR C1002.

E_0 [MPa]	E_∞ [MPa]	a_1	c_1	c_2	α	θ_0 [°C]	θ [°C]	ρ [Kg/m]	ν
1,93	2,70E+03	2,09E-03	34,67	333,92	0,54	12,7	10	1289	0,49

Em todos os casos analisados, o corpo de prova empregado é uma placa retangular com dimensões 500mm x 200mm, discretizada em 60 elementos (Figura 5.2). O material da placa o aço ASTM A36 com 25mm de espessura, o MVE é o EAR C1002 com de 3mm de espessura e a camada de restrição é de aço ASTM A36 com 3mm de espessura.

FIGURA 5.2 - DISCRETIZAÇÃO DA PLACA COM REPRESENTAÇÃO DOS NÓS E ELEMENTOS DA MALHA.

	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	
	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	65	
	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64		
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	52	
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51		
	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	39	
	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38		
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	26	
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		

Na etapa de otimização, os parâmetros aplicados aos operadores genéticos do algoritmo, como o tamanho da população, o número de gerações e o número de indivíduos de elite, foram obtidos com base na literatura e avaliados após uma série testes e análises.

Neste caso, são obtidos resultados satisfatórios utilizando uma população com 1200 indivíduos, uma taxa de elitismo de 1% e um valor máximo de iterações de 100 gerações. Considerando que próximo da convergência uma grande parte dos indivíduos terão o mesmo genótipo, foi considerada uma taxa constante de cruzamento de 100%.

5.2 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO PARA O MODELO DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN

Para garantir que o algoritmo está resolvendo o problema de placa de Mindlin de forma adequada, são comparados os valores de frequência dos modos de vibrar apresentados no estudo de Hashemi e Arsanjani (2005), os valores obtidos através de um modelo de elementos finitos utilizando um software comercial Hyperworks (HW) com os valores encontrados pela rotina implementada para o presente estudo. Para os casos comparados que utilizam a solução através do MEF, a malha utilizada é do tipo quadrangular linear com tamanho de elemento aproximado de 40mm.

Neste caso, a correlação dos dados para placa de Mindlin é avaliada para quatro condições, considerando diferentes espessuras de placa e diferentes níveis de refinamento da malha. Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 5.3, Tabela 5.4,

Tabela 5.5 e Tabela 5.6. Os modos de vibrações para a placa analisada podem ser visualizados na Figura 5.3.

TABELA 5.3 - PLACA BIAPOIADA COM RELAÇÃO DE ASPECTO DE 2,5, ESPESSURA DE 25mm e MALHA $h_e = 40\text{mm}$.

Modos	Freq. [Hz] Analítico ⁽¹⁾	Freq. [Hz] FEA Matlab®	Erro [%]	Freq. [Hz] FEA HW	Erro [%]
1	229,14	231,03	-0,82	229,60	-0,20
2	776,84	753,67	2,98	743,38	4,31
3	913,94	945,07	-3,41	921,05	-0,78
4	1723,90	1708,88	0,87	1649,18	4,33
5	2029,27	2186,70	-7,76	2061,37	-1,58
6	2942,70	3024,77	-2,79	2821,00	4,14
7	3528,05	3682,73	-4,38	3247,52	7,95
8	3536,81	4017,02	-13,58	3613,62	-2,17
9	4398,27	4500,71	-2,33	3959,89	9,97

(1) - Valores de frequência apresentado por Hashemi e Arsanjani (2005).

TABELA 5.4 - PLACA BIAPOIADA COM RELAÇÃO DE ASPECTO DE 2,5, ESPESSURA DE 25mm e MALHA $h_e = 20\text{mm}$.

Modos	Freq. [Hz] Analítico ⁽¹⁾	Freq. [Hz] FEA Matlab®	Erro [%]	Freq. [Hz] FEA HW	Erro [%]
1	229,14	229,48	-0,15	229,39	-0,11
2	776,84	752,64	3,12	758,90	2,31
3	913,94	920,14	-0,68	918,02	-0,45
4	1723,90	1687,65	2,10	1694,07	1,73
5	2029,27	2061,20	-1,57	2048,50	-0,95
6	2942,70	2919,15	0,80	2912,05	1,04
7	3528,05	3559,05	-0,88	3519,56	0,24
8	3536,81	3625,88	-2,52	3581,31	-1,26
9	4398,27	4379,56	0,43	4340,43	1,32

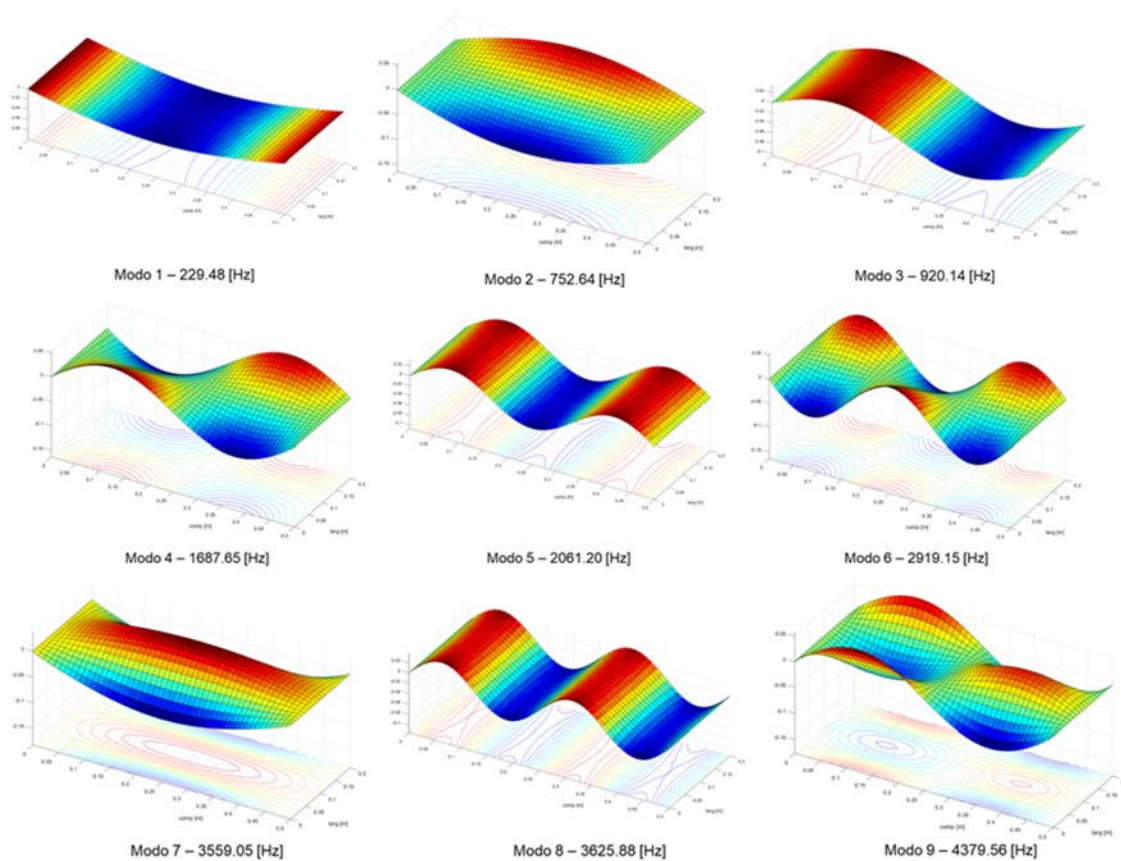
TABELA 5.5 - PLACA BIAPOIADA COM RELAÇÃO DE ASPECTO DE 2,5, ESPESSURA DE 50mm e MALHA $h_e = 40\text{mm}$.

Modos	Freq. [Hz] Analítico ⁽¹⁾	Freq. [Hz] FEA Matlab®	Erro [%]	Freq. [Hz] FEA HW	Erro [%]
1	452,20	455,61	-0,75	454,18	-0,44
2	1440,14	1351,07	6,18	1369,07	4,94
3	1741,87	1794,34	-3,01	1767,81	-1,49
4	3113,86	3001,55	3,61	2988,60	4,02
5	3689,08	3929,40	-6,51	3780,66	-2,48
6	5121,92	5119,53	0,05	4956,73	3,23
7	6089,89	6324,45	-3,85	5949,90	2,30
8	6131,70	6755,44	-10,17	6260,68	-2,10
9	7359,81	7388,31	-0,39	6949,07	5,58

TABELA 5.6 - PLACA BIAPOIADA COM RELAÇÃO DE ASPECTO DE 2,5, ESPESSURA DE 50mm e MALHA $h_e = 20\text{mm}$.

Modos	Freq. [Hz] Analítico ⁽¹⁾	Freq. [Hz] FEA Matlab®	Erro [%]	Freq. [Hz] FEA HW	Erro [%]
1	452,20	452,65	-0,10	453,74	-0,34
2	1440,14	1348,38	6,37	1389,72	3,50
3	1741,87	1750,13	-0,47	1763,05	-1,22
4	3113,86	2970,75	4,60	3059,35	1,75
5	3689,08	3729,81	-1,10	3768,99	-2,17
6	5121,92	4980,11	2,77	5114,51	0,14
7	6089,89	6136,01	-0,76	6259,58	-2,79
8	6131,70	6206,07	-1,21	6418,61	-4,68
9	7359,81	7244,92	1,56	7508,87	-2,03

FIGURA 5.3 - MODOS DE VIBRAR PARA PLACA DE MINDLIN BIAPOIADA COM ESPESSURA DE 25MM E RELAÇÃO DE ASPETO 2,5.



5.3 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO PARA O MODELO DE PLACA LAMINADA DE MOREIRA, RODRIGUES E FERREIRA (2006).

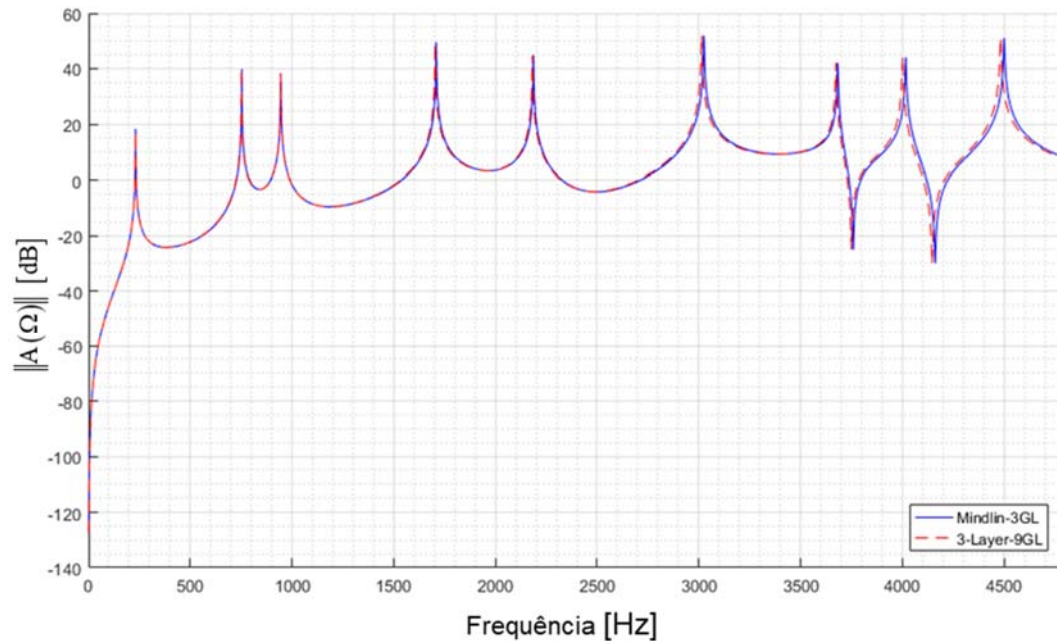
Utilizando a técnica descrita neste estudo para o cálculo de placas laminadas, porém considerando que todas as camadas são metálicas, é possível comparar os resultados do modelo de deformação multicamadas com o modelo de Reissner-Mindlin de uma única camada. Desta forma, a validação do modelo para placa laminada é realizada através de uma correlação dos dados obtidos para a placa de Mindlin com os dados obtidos para placa laminada, considerando que as camadas são todas metálicas e a soma das espessuras de cada camada, ou seja, espessura total é igual a placa de Mindlin. Assim, pode-se considerar que as placas são equivalentes e, portanto, devem apresentar valores de frequência muito próximos.

Aplicado esse conceito ao problema proposto, identificou-se que valores de frequências e inércia são muito próximos, onde estes podem ser verificados na Tabela 5.7 e na Figura 5.4, respectivamente.

TABELA 5.7 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA PLACA DE MINDLIN E PLACA LAMINADA METÁLICA COM 3 CAMADAS E CONDIÇÃO BIAPOIADA.

modo	Frequências [Hz]		Erro [%]
	Mindlin 3GL	Laminado 9GL	
1	231,03	230,96	-0,03
2	753,67	751,74	-0,26
3	945,07	944,09	-0,10
4	1708,88	1703,89	-0,29
5	2186,70	2181,82	-0,22
6	3024,77	3013,41	-0,38
7	3682,73	3674,20	-0,23
8	4017,02	4001,42	-0,39
9	4500,71	4483,22	-0,39

FIGURA 5.4 - COMPARAÇÃO DA FRF PARA PLACA DE MINDLIN E PLACA LAMINADA METÁLICA NA CONDIÇÃO BIAPOIADA.



5.4 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

O mecanismo de amortecimento do MVE ocorre através do efeito de cisalhamento da camada viscoelástica (INMAN, 2014). Considerando este conceito, nesta seção é realizada uma comparação entre uma solução estimada baseado na energia de deformação da placa e a solução obtida pela rotina de otimização.

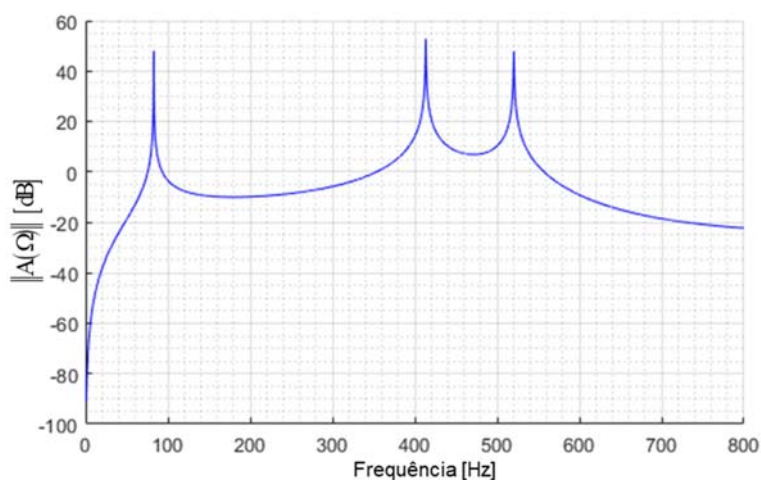
Para a validação do processo de otimização é considerada uma placa em balanço e uma placa biapojada, que são dois casos bem conhecidos e muito estudado em diversos trabalhos (BILASSE, AZRAR e DAYA, 2011; PRADYUMNA e PANDEY, 2015; HU e DOKAINISH, 1993). Para ambos os casos, são analisados os dois primeiros modos de vibração de forma individual e considerando taxa de recobrimento de 10%, 25% e 50% de MVE.

Para todos os casos, é calculada a FRF da placa sem MVE através da análise modal, com um fator de amortecimento de 4×10^{-4} (RAO, 2011), a qual é usada como referência para as curvas com amortecimento.

5.4.1 Caso 1 - 1º modo de vibrar para placa em balanço

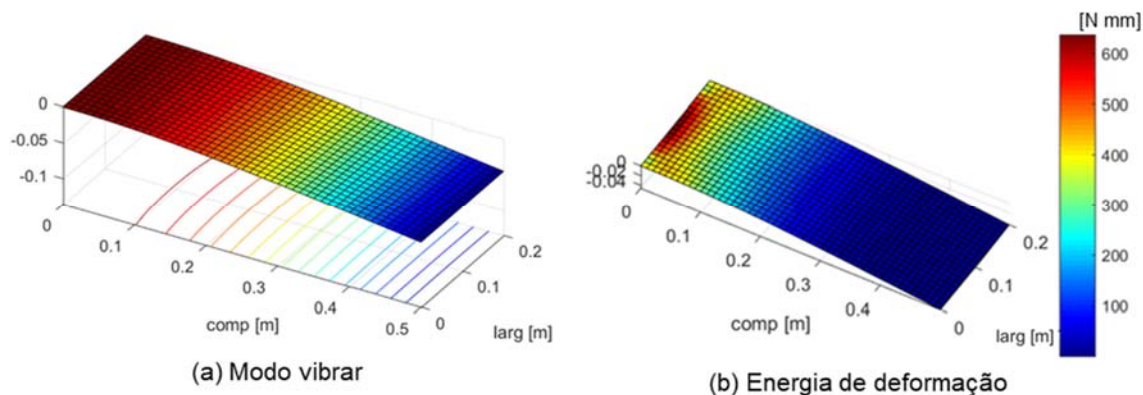
O primeiro caso analisado se refere aos modos de vibrar de uma placa em balanço sendo aplicada uma excitação no nó 13 e medida a resposta no nó 78, os quais, neste caso, são os pontos de maior deslocamento da placa. A FRF obtida para este caso está representada na Figura 5.5.

FIGURA 5.5 - FRF PARA PLACA EM BALANÇO SEM MVE COM EXCITAÇÃO NO NÓ 13 E RESPOSTA NO NÓ 78.



Considerando o primeiro modo de vibração da placa sem MVE (Figura 5.6a) e sua respectiva energia de deformação no elemento (Figura 5.6b), é possível estimar que uma solução óbvia seria preencher com MVE os elementos próximo ao engaste.

FIGURA 5.6 - COMPORTAMENTO DA PLACA EM BALANÇO SEM MVE PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO.



Neste caso recobrando 6 elementos (10%) da placa com MVE (Figura 5.7) é possível verificar, através da Figura 5.8a, que a solução encontrada pela rotina de otimização apresenta um valor menor para a inertância que a condição proposta. A curva de convergência para esta análise está representada na Figura 5.8b.

FIGURA 5.7 - SOLUÇÃO PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

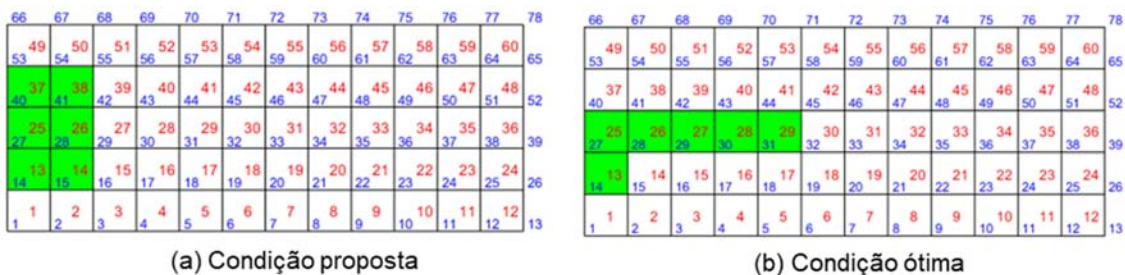
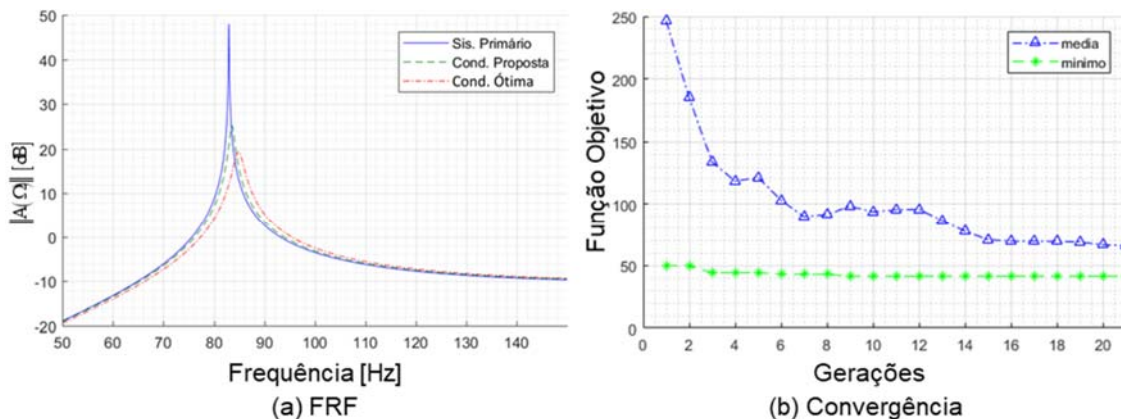


FIGURA 5.8 - RESULTADOS PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.



Realizando outra análise, porém considerando agora os casos com 25% (15 elementos) e 50% (30 elementos) de recobrimento com MVE, são encontrados resultados que seguem os mesmos conceitos aplicados para o caso anterior. Na Figura 5.9a e na Figura 5.9b estão representadas a condição proposta e a condição ótima para o caso com 25% de MVE, respectivamente.

Através da Figura 5.10a observa-se que a solução encontrada pelo algoritmo é melhor que a condição proposta baseada na deformação da placa. Na Figura 5.10b está representada a curva de convergência para o caso com 25% de MVE.

FIGURA 5.9 - SOLUÇÃO PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

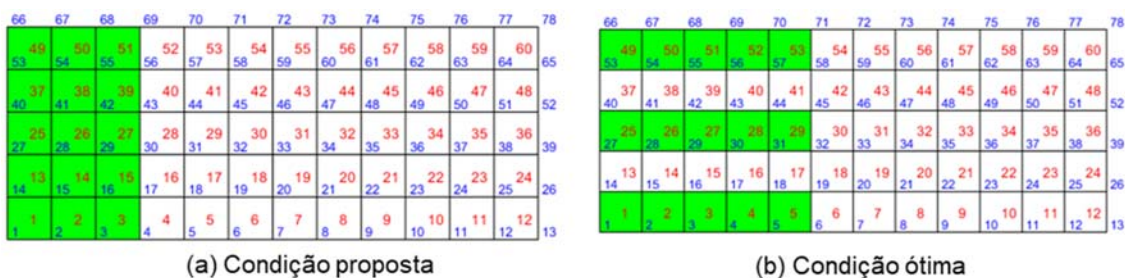
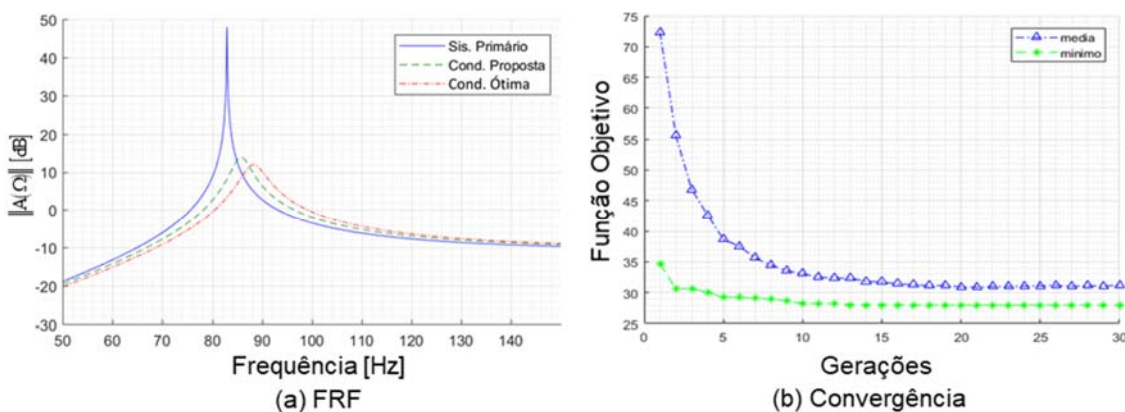


FIGURA 5.10 - RESULTADOS PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.



A Figura 5.11 representa o caso com 50% de recobrimento, ilustrando a condição proposta e a condição ótima. Através da Figura 5.12a é possível identificar, por meio da FRF para as duas condições, que a solução ótima encontrada pelo algoritmo é melhor que aquela proposta baseada na deformação da placa. A Figura 5.12b representa curva de convergência para este caso.

FIGURA 5.11 - SOLUÇÃO PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

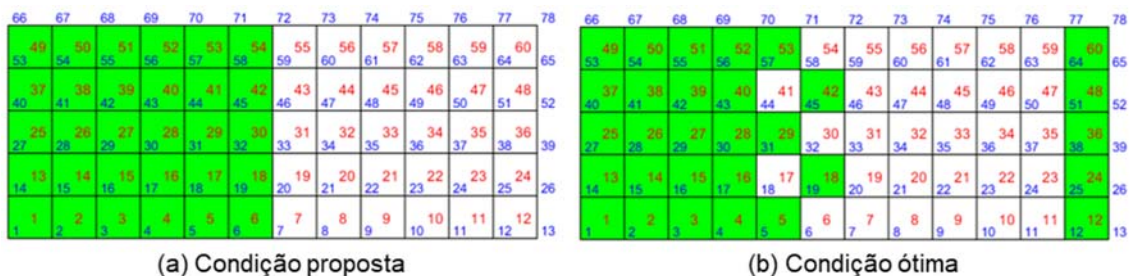
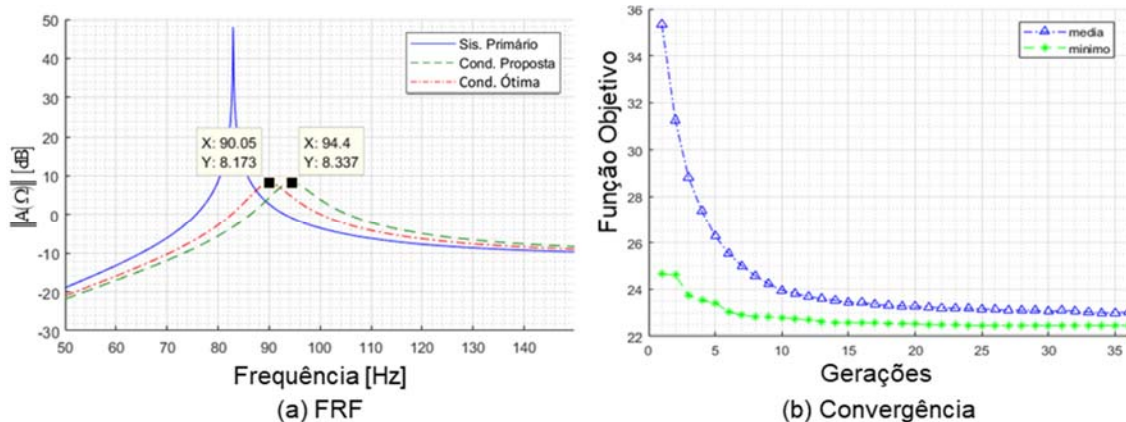


FIGURA 5.12 - RESULTADOS PARA 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.



Realizando uma análise crítica sobre a solução ótima observada, pode-se concluir que esta solução tem um melhor desempenho devido a uma distribuição mais uniforme ao longo da curvatura da placa.

5.4.2 Caso 2 - 2º modo de vibrar para placa em balanço

Outra condição analisada para a placa em balanço foi o segundo modo de vibração considerando sua respectiva energia de deformação (Figura 5.13). Este modo de vibração representa uma condição importante a ser avaliada, pois a placa apresenta uma oscilação de torção e, conseqüentemente, é mais difícil de prever o comportamento nesta condição.

Aplicando uma excitação no nó 13 e medido a resposta no nó 78 é possível obter a FRF para este modo e comparar as condições proposta e ótima.

Neste caso, são avaliadas as condições de 10%, 25% e 50% de recobrimento com MVE, onde as distribuições dos elementos com MVE podem ser visualizadas nas Figura 5.14, 5.16 e 5.18 e a suas respectivas FRF estão representadas nas Figura 5.15a, 5.17a e 5.19a. Como objetivo de checar a eficiência do algoritmo, as curvas de convergência podem ser visualizadas nas figuras 5.15b, 5.17b e 5.19b.

FIGURA 5.13 - COMPORTAMENTO DA PLACA EM BALANÇO SEM MVE PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO.

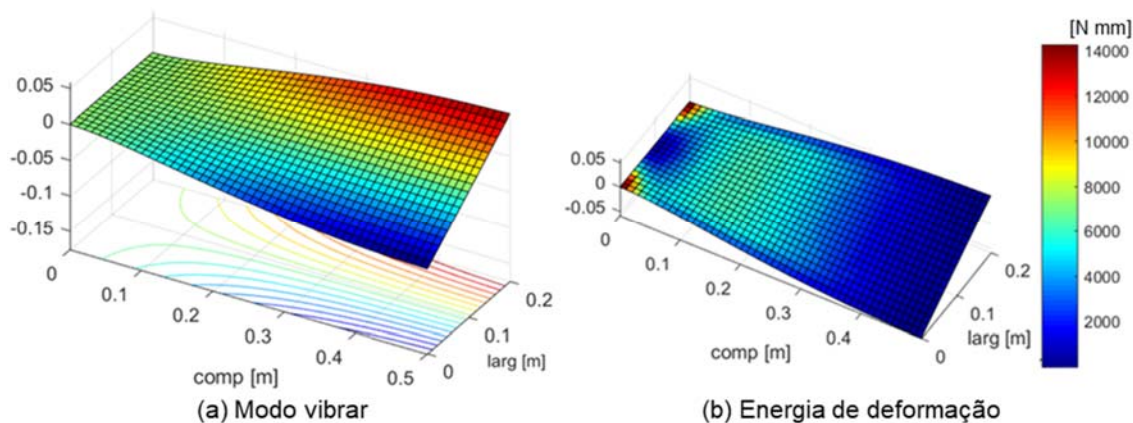


FIGURA 5.14 - SOLUÇÃO PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

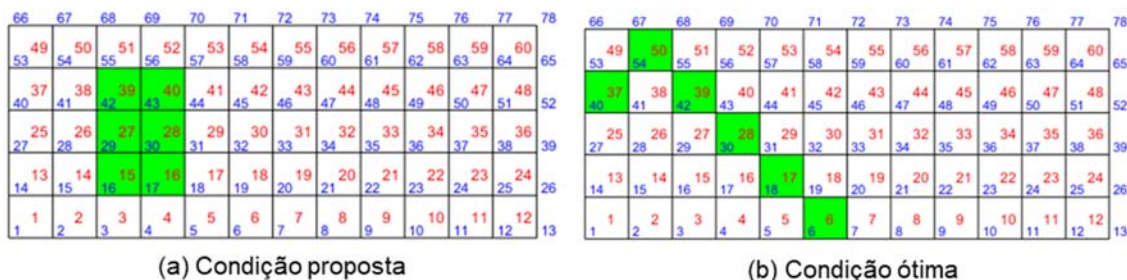


FIGURA 5.15 - RESULTADOS PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

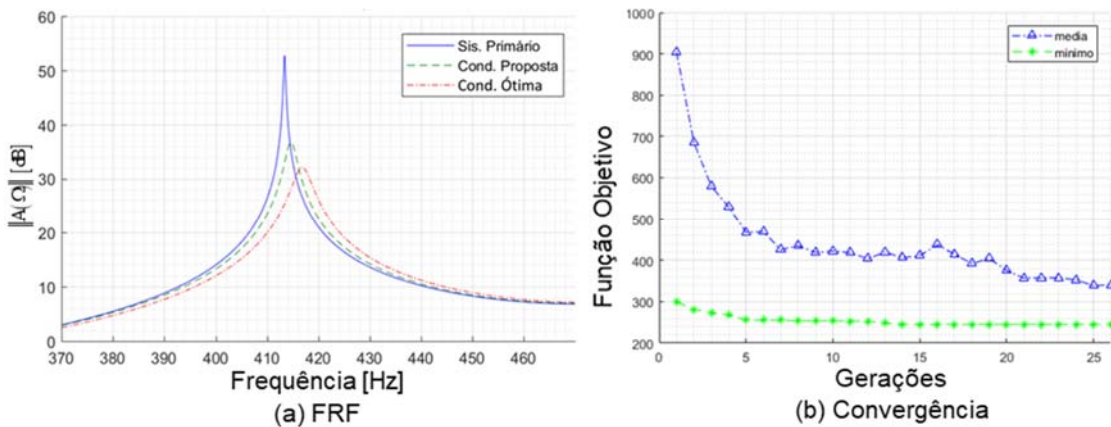


FIGURA 5.16 - SOLUÇÃO PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

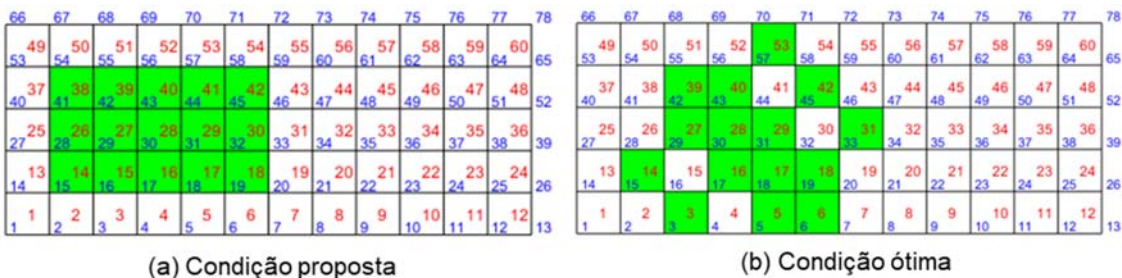


FIGURA 5.17 - RESULTADOS PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

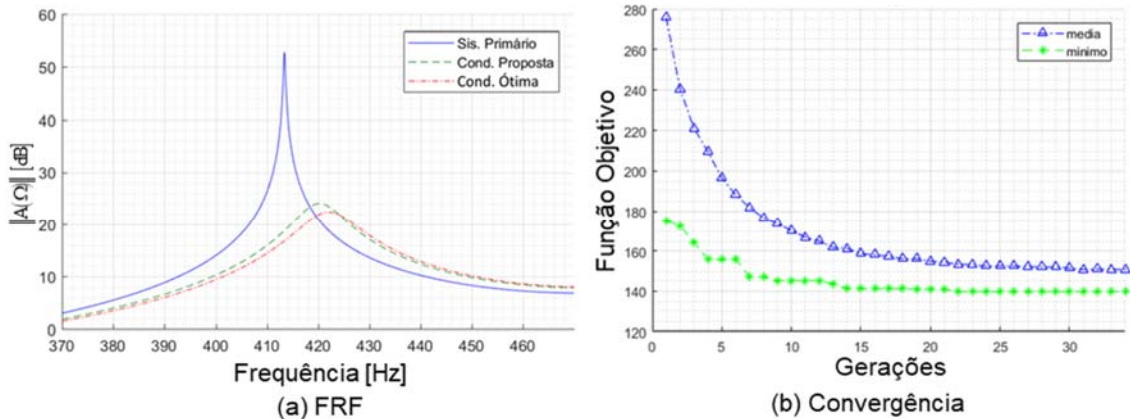


FIGURA 5.18 - SOLUÇÃO PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

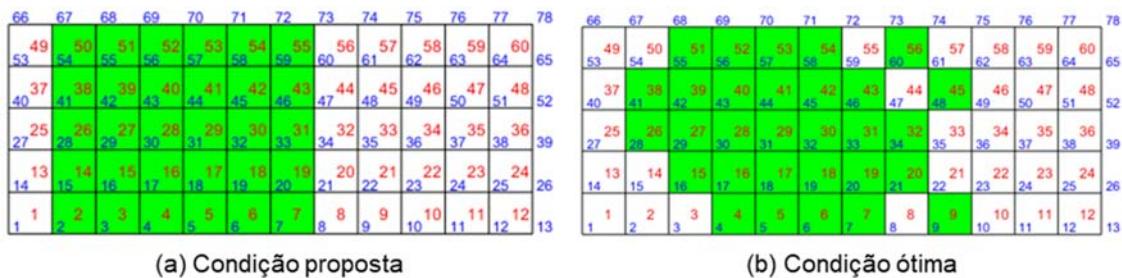
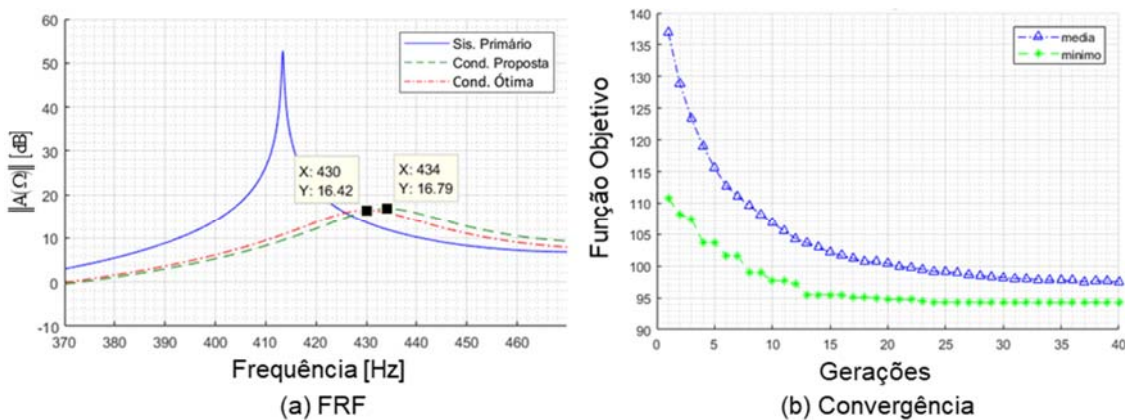


FIGURA 5.19 - RESULTADOS PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA EM BALANÇO COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.



Como, neste caso, o modo de vibrar é uma oscilação de torção, observa-se que a condição ótima apresenta uma simetria em relação à diagonal da primeira metade da placa, ao contrário da distribuição de MVE proposta, que é uma região uniforme na parte central da primeira metade da placa, conforme supõe-se observando a distribuição da energia de deformação.

5.4.3 Caso 3 - 1º modo de vibrar para placa biapojada

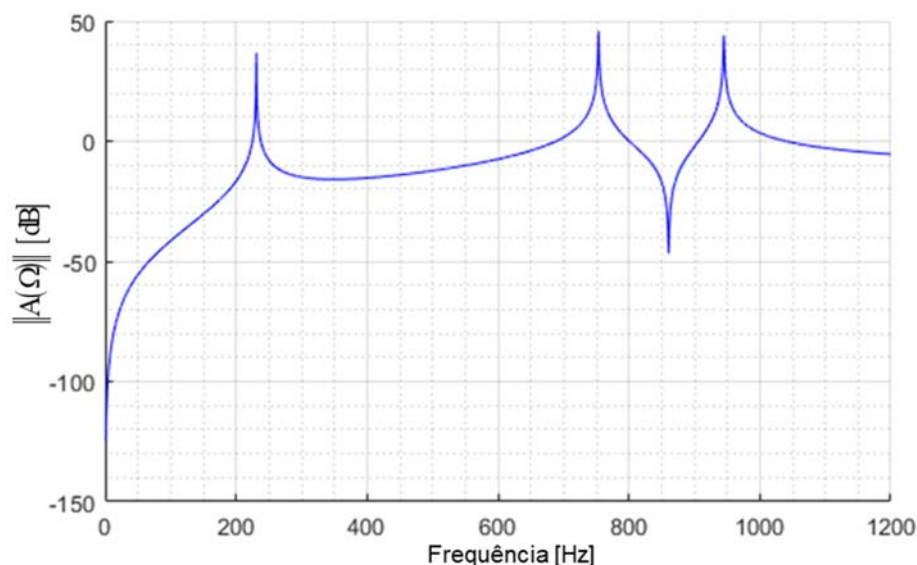
O segundo caso analisado refere-se a uma placa biapojada em duas extremidades opostas e livre nas outras duas. Nesta condição, a placa está em

simetria, de forma que fica evidente que a solução deve ser simétrica e distribuída de forma homogênea.

Para esta condição, foi aplicada uma excitação no nó 7 e medida a resposta no nó 72. Porém, a FRF da placa sem MVE (Figura 5.20) foi representada com excitação no nó 4 e resposta no nó 75 devido ao terceiro modo ter um ponto de nó no centro da placa.

Realizando um estudo para as condições com 10%, 25% e 50% de MVE é possível obter as condições ótimas para recobrimento para a placa.

FIGURA 5.20 - FRF PARA PLACA BIAPOIADA SEM MVE COM EXCITAÇÃO NO NÓ 4 E RESPOSTA NO NÓ 75.



De forma análoga a seção anterior, é utilizado o modo de vibrar e a energia de deformação da placa (Figura 5.21) como referência para estimar uma distribuição de MVE na placa. Aplicando este conceito, é possível observar através das Figura 5.22, 5.24 e 5.26 as condições propostas e as condição ótimas obtidas os níveis de recobrimento de 10%, 25% e 50% de MVE.

Através das Figura 5.23a, 5.25a e 5.27a verifica-se que a solução ótima obtida pelo algoritmo é melhor que a solução estimada.

As curvas de convergências para cada condição analisada estão representadas nas Figura 5.23b, 5.25b e 5.27b.

FIGURA 5.21 - COMPORTAMENTO DA PLACA BIAPOIADA SEM MVE PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO.

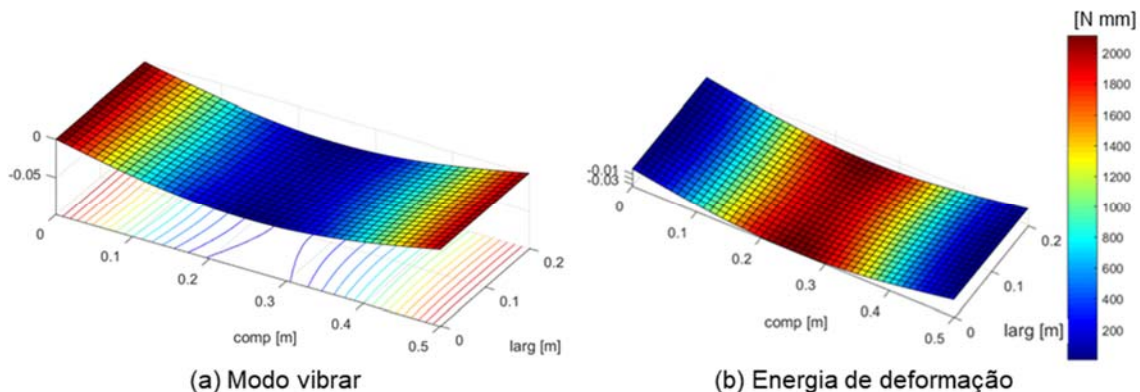


FIGURA 5.22 - SOLUÇÃO PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

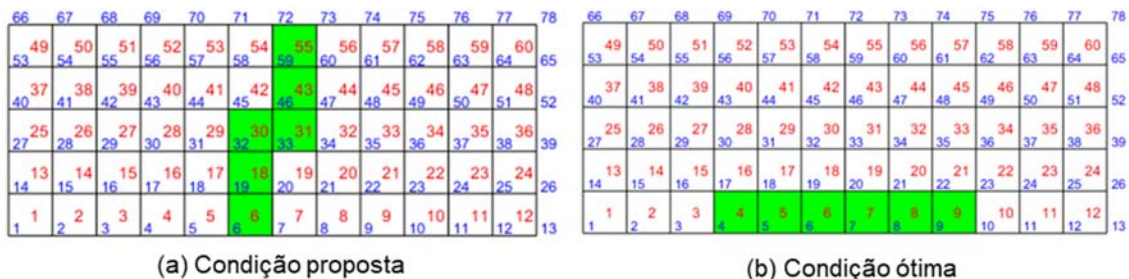


FIGURA 5.23 - RESULTADOS PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

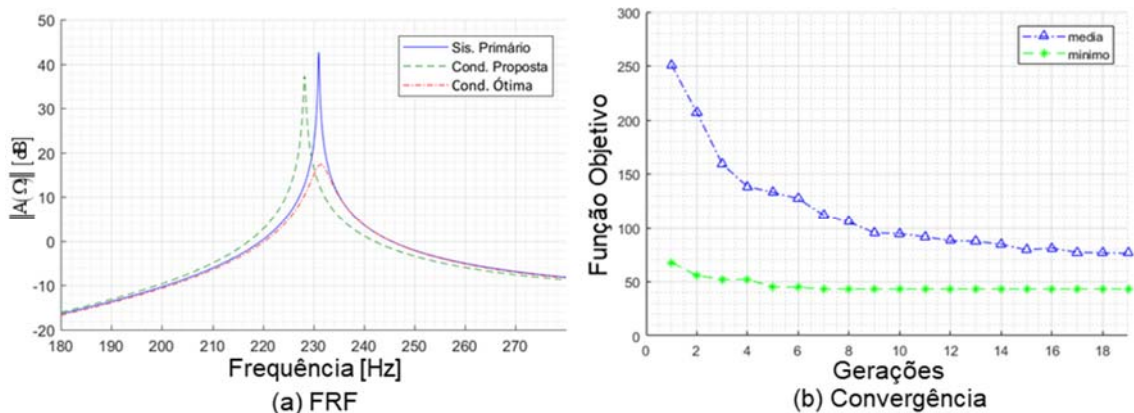


FIGURA 5.24 - SOLUÇÃO PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

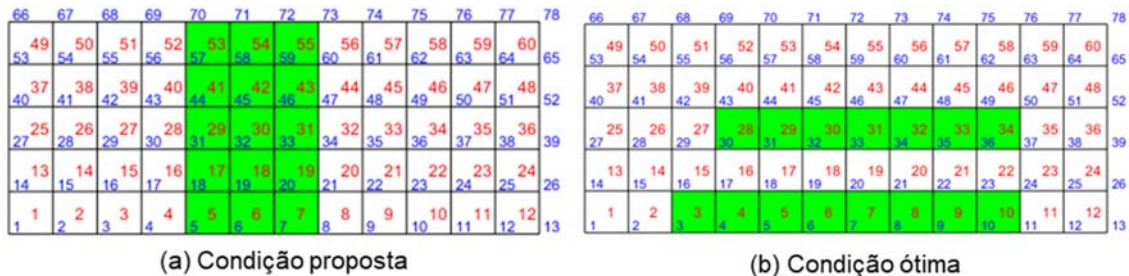


FIGURA 5.25 - RESULTADOS PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

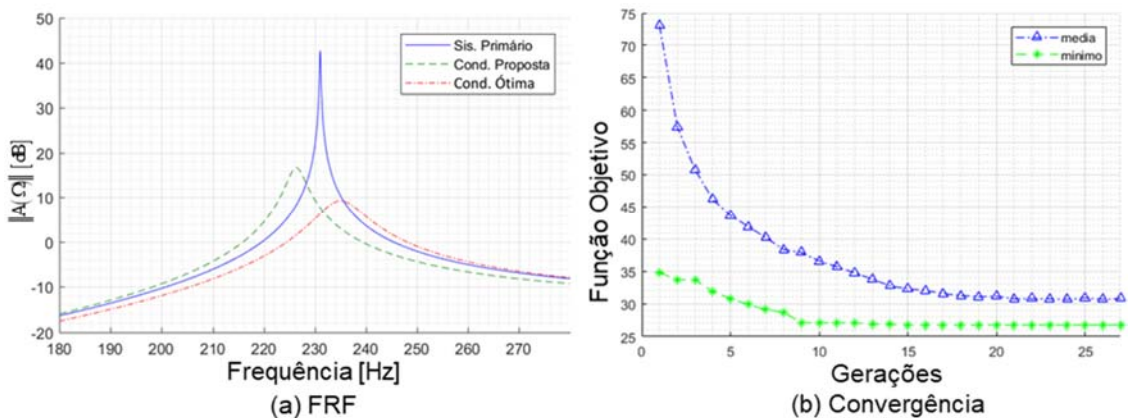


FIGURA 5.26 - SOLUÇÃO PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

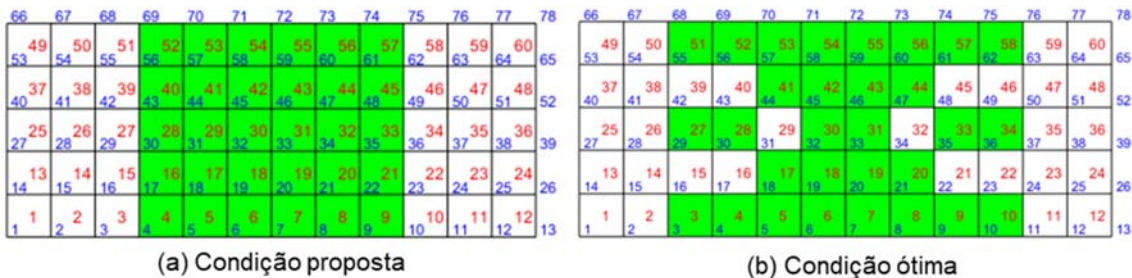
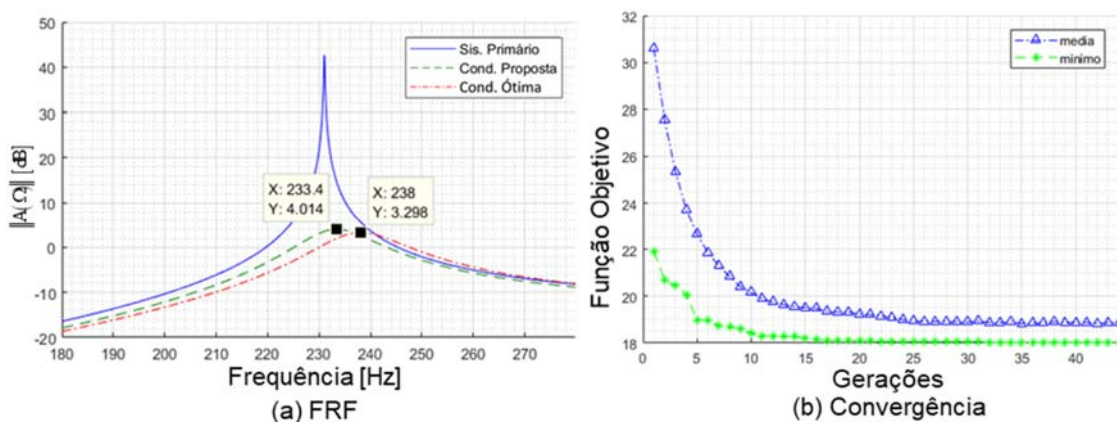


FIGURA 5.27 - RESULTADOS PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.



5.4.4 Caso 4 - 2º modo de vibrar para placa biapoiada

O último caso analisado nesta etapa de validação do algoritmo é o 2º modo de vibrar de uma placa biapoiada. Novamente, tem-se uma oscilação de torção na placa o que torna este modo particularmente interessante para o processo de validação do algoritmo. O modo de vibrar e sua respectiva energia de deformação estão representados na Figura 5.28. Para este caso é aplicada uma excitação no nó 7 e medida a resposta no nó 72.

A distribuição dos elementos com MVE para as condições de 10%, 25% e 50% podem ser visualizadas nas Figura 5.29, 5.31 e 5.33. As respectivas FRF estão representadas nas Figura 5.30a, 5.32a e 5.34a. Com o objetivo de checar a eficiência do algoritmo, as curvas de convergência podem ser visualizadas nas Figura 5.30b, 5.32b e 5.34b.

FIGURA 5.28 - COMPORTAMENTO DA PLACA BIAPOIADA SEM MVE PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO.

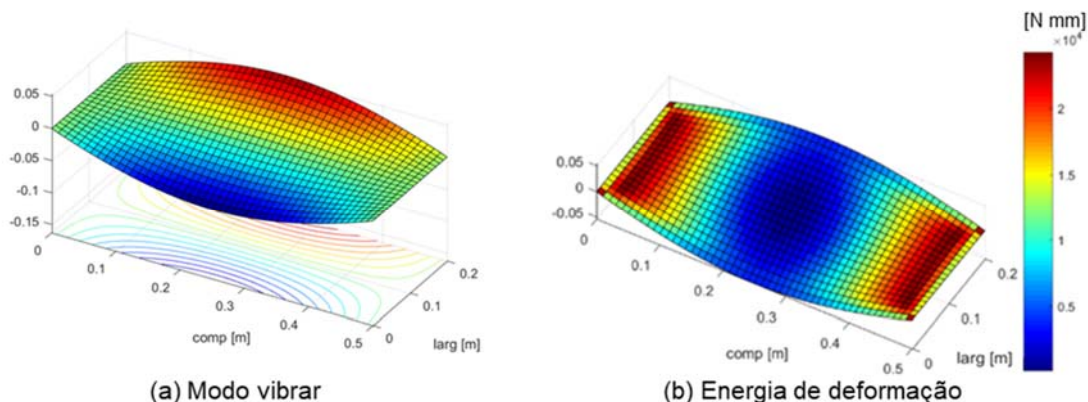


FIGURA 5.29 - SOLUÇÃO PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

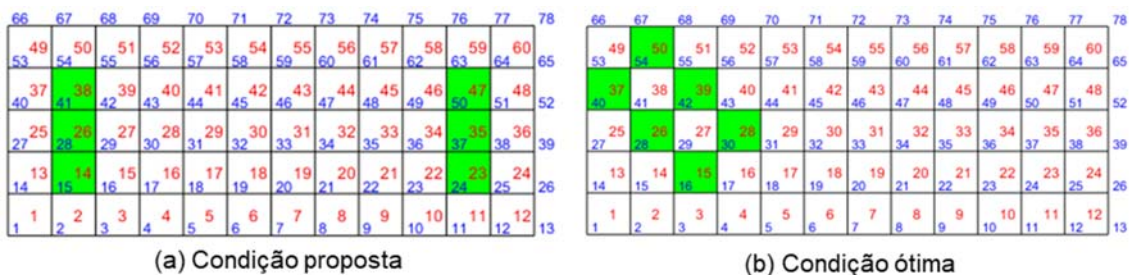


FIGURA 5.30 - RESULTADOS PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 10% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

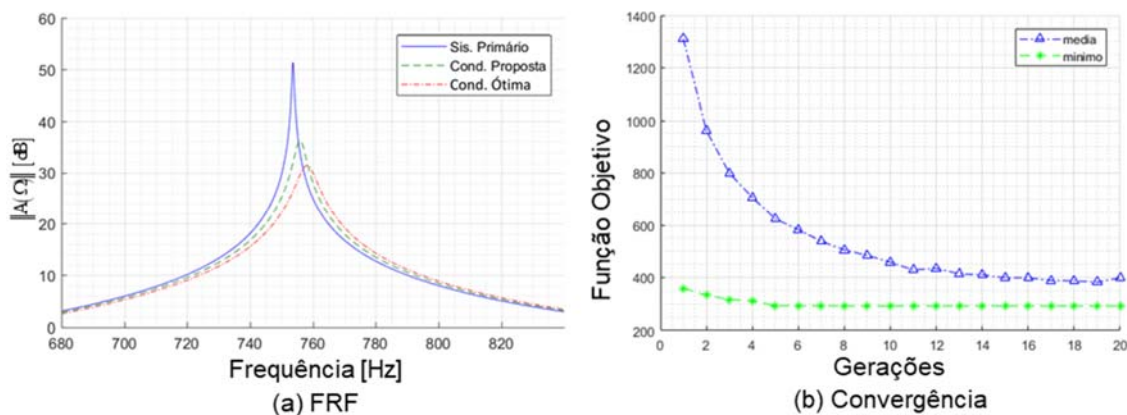


FIGURA 5.31 - SOLUÇÃO PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

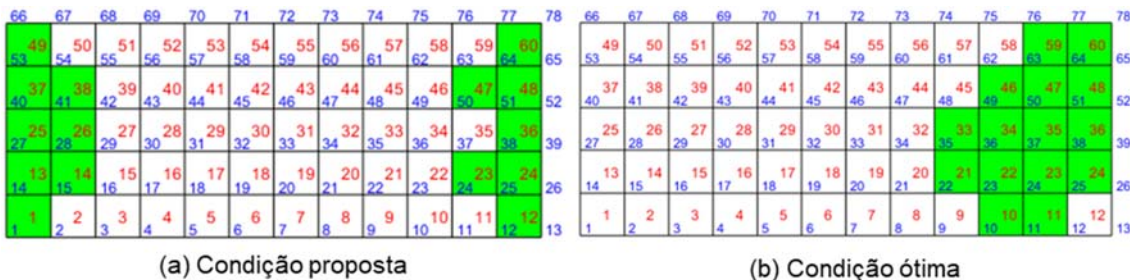


FIGURA 5.32 - RESULTADOS PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 25% DE RECOBRIMENTO DE MVE.

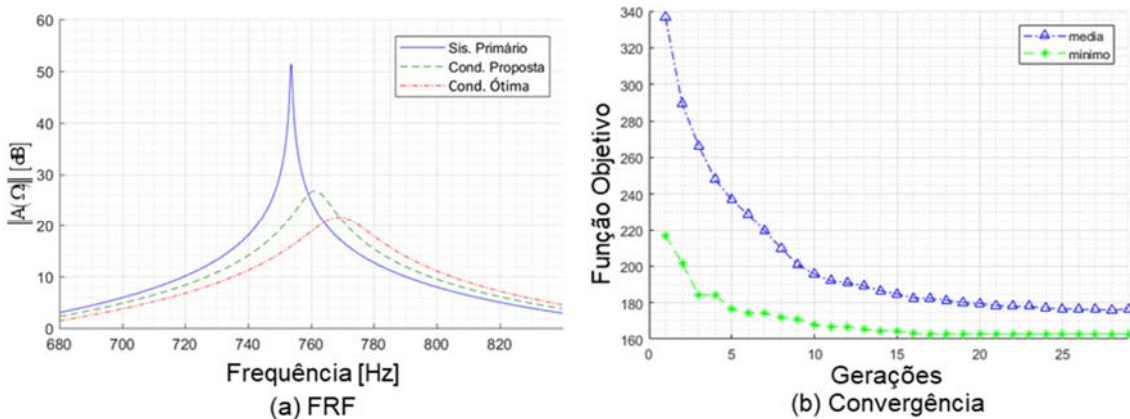
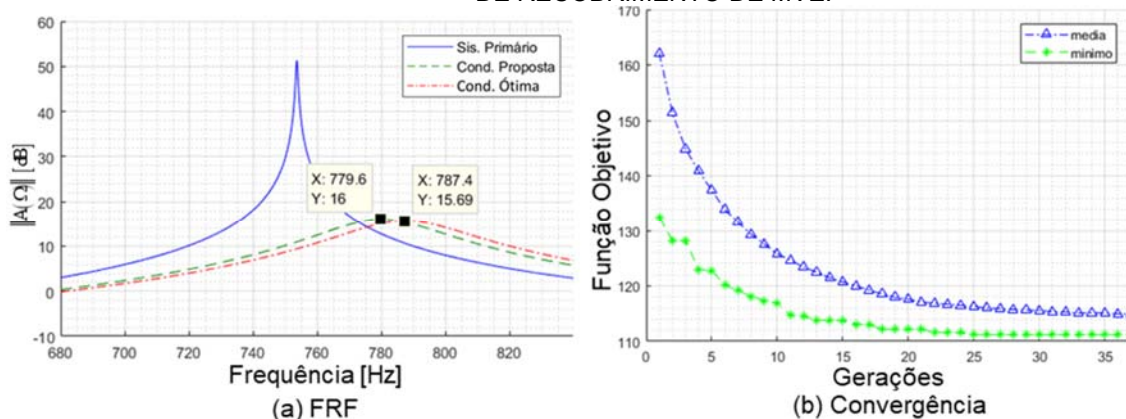


FIGURA 5.33 - SOLUÇÃO PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.



FIGURA 5.34 - RESULTADOS PARA O 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA PLACA BIAPOIADA COM 50% DE RECOBRIMENTO DE MVE.



Considerando os 4 casos analisados, observou-se que a rotina de otimização responde de forma eficiente, apresentando em alguns casos, soluções que não são óbvias. Para os casos onde o modo vibrar apresenta um modo de torção, foi observado o fenômeno conhecido como *checkerboard*, o qual apresenta um padrão alternado de preenchimento de MVE, similar a um tabuleiro de xadrez.

De uma forma geral, considerando os resultados obtidos, pode-se afirmar que tanto a metodologia adotada quanto o algoritmo de otimização estão funcionando de maneira satisfatória.

5.5 BANDA LARGA DE FREQUÊNCIA PARA PLACA EM BALANÇO

Nesta seção, a metodologia implementada é aplicada a um caso de controle de vibração em banda larga de frequência. O caso analisado é uma placa em balanço com excitação no nó 13 e resposta medida no nó 78 em um intervalo de frequência de 0 a 800Hz com 30% de recobrimento de MVE, que abrange os 3 primeiros modos de vibração.

Aplicado estas considerações, é possível obter a condição ótima de preenchimento com MVE (Figura 5.35), a FRF relacionada e a respectiva curva de convergência (Figura 5.36). O fator de perda para os três modos considerados nesta análise foram obtidos a partir da equação (3.109) e estão representados na Tabela 5.8.

FIGURA 5.35 – SOLUÇÃO ÓTIMA DE RECOBRIMENTO COM MVE PLACA EM BALANÇO.

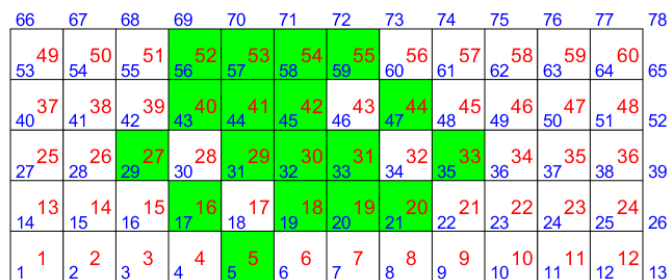


FIGURA 5.36 – CONDIÇÃO ÓTIMA CONSIDERANDO OS 3 PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO PARA UMA PLACA EM BALANÇO.

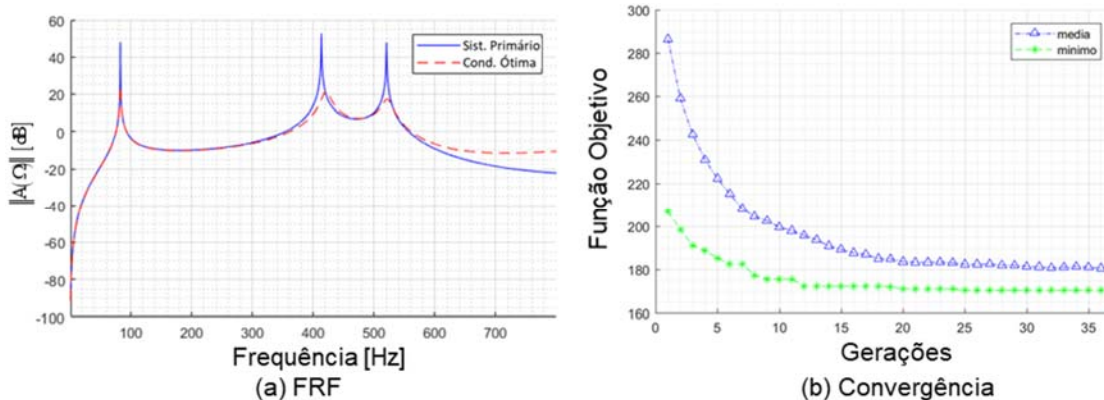


TABELA 5.8 - FATOR DE PERDA PARA PLACA EM BALANÇO

Modo	Frequência [Hz]	Fator de perda
1	83,84	0,0132
2	424,24	0,0273
3	525,08	0,0264

Através dos resultados apresentado, observa-se que a região de preenchimento prioriza o segundo e o terceiro modo por apresentarem regiões de deformação muito próximas.

5.6 BANDA LARGA DE FREQUÊNCIA PARA PLACA BIAPOIADA.

Um segundo caso analisado de controle de vibração em banda larga de frequência é uma placa biapojada com excitação no nó 13 e resposta medida no nó 78.

Esta análise difere do caso anterior por possuir uma condição de contorno simétrica, além de apresentar uma estrutura mais rígida devido as condições de contorno. Esta condição implica em considerar um intervalo de frequência mais amplo, de 0 a 1200Hz, para poder controlar os 3 primeiros modos. Para manter uma relação de referência foi mantido a área de recobrimento em 30% de MVE.

Aplicando estas considerações, é possível obter a condição ótima de preenchimento com MVE (Figura 5.37) a FRF com sua respectiva curva de convergência (Figura 5.38). O fator de perda para os três modos considerados nesta análise forma obtidos a partir da equação (3.109) e estão representados Tabela 5.9.

Neste caso, seguindo a lógica já apresentada para os casos analisados de forma individual, o MVE está concentrado em uma extremidade distribuído de forma uniforme em uma das extremidades. Este resultado favorece mais o amortecimento do 2 e 3 modos de vibrar como pode ser observado através dos resultados apresentados.

FIGURA 5.37 - SOLUÇÃO ÓTIMA DE RECOBRIMENTO COM MVE PLACA BIAPOIADA.

	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	
	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60		
53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65		
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52		
	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		

FIGURA 5.38 - CONDIÇÃO ÓTIMA CONSIDERANDO OS 3 PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO PARA UMA PLACA BIAPOIADA.

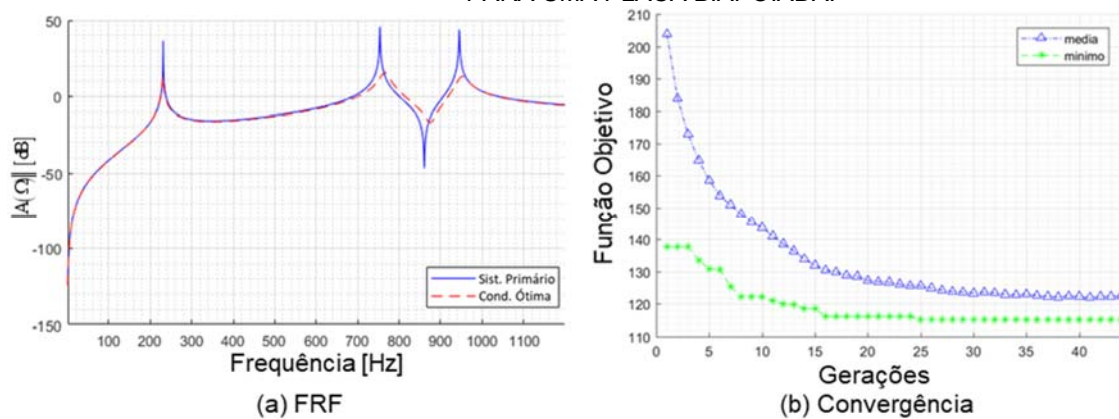


TABELA 5.9 - FATOR DE PERDA PARA PLACA EM BIAPOIADA.

Modo	Frequência [Hz]	Fator de perda
1	229,77	0,0111
2	757,80	0,0250
3	939,91	0,0238

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo são discutidos os aspectos gerais deste estudo bem como os resultados obtidos. Também são apresentados alguns tópicos a serem abordados em trabalhos futuros.

6.1 CONCLUSÕES

A presente dissertação trata de controle passivo ótimo de vibrações através da técnica de camadas com restrição. Para atingir este objetivo, foi desenvolvida uma metodologia para controle de vibrações possibilitando a obtenção da configuração ótima de recobrimento com MVE, em uma placa sob uma excitação harmônica.

Para garantir que o algoritmo está funcionando de forma correta foram realizados vários testes e análises, comparando os resultados obtidos pelo algoritmo com os resultados conhecidos. Como a formulação considera uma estrutura laminada onde cada camada utiliza a teoria cisalhante de primeira ordem foi possível realizar uma validação por etapas.

Na primeira etapa foi considerada somente a placa com formulação de Mindlin comparando os resultados com um modelo construído no software comercial Hypermesh e os resultados numéricos apresentados por Hashemi e Arsanjani (2005). Nesta etapa, verificou-se que o refinamento da malha tem uma grande influência nos resultados finais, porém com um refinamento adequado foi possível verificar que o algoritmo apresentou resultados precisos e bem correlacionados considerando a formulação para placa semi-espessa.

Em uma segunda etapa, foi analisada uma placa laminada considerando 3 camadas metálicas de forma que as somas das camadas seriam equivalentes a uma placa semi-espessa de mesmo material e espessura. Desta forma, foi possível observar que a metodologia, o algoritmo e a formulação estão funcionando de forma precisa e bem correlacionada, onde foi encontrado erros inferiores a 1%.

Na última etapa, foi verificado o funcionamento da rotina de otimização. Neste caso, não foi possível realizar uma correlação com modelos físicos ou numéricos. Assim, foram comparados a modelos simples para vários casos de condição de contorno, taxa de recobrimento e modos de vibrar.

Para os casos com pouco MVE disponível (10% e 25%) e nos casos de torção, observou-se a ocorrência do fenômeno conhecido como *checkerboard*. O padrão de distribuição de material na forma de *checkerboard* não é uma condição ótima e sim uma anomalia numérica que simula uma condição melhor gerado por uma microestrutura porosa (DIAZ e SIGMUND, 1995; JOG e HABERB, 1996). Apesar de ser uma condição bastante estudada em otimização topologia com variação da densidade de material, não se tem registros na literatura deste fenômeno ocorrendo em otimização com camada de restrição com variação da posição do recobrimento.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Além das conclusões apresentadas na seção anterior, a presente dissertação proporcionou identificar alguns tópicos importantes a serem investigados em um estudo futuro. São eles:

- Aplicação da metodologia apresentada neste estudo em modelos de cascas, permitindo desta forma, uma aplicação mais ampla desta técnica.
- Estudo de técnicas de soluções numéricas mais eficientes a com objetivo de melhorar o desempenho computacional para problemas de autovalores/ autovetores com muitos graus de liberdade.
- Verificar a influência da variação da espessura da camada viscoelástica e da espessura da camada de restrição no amortecimento da placa.
- Realizar estudo com outras funções objetivos no processo de otimização a fim de identificar a sensibilidade da distribuição do recobrimento do MVE.
- Investigar a possibilidade de utilizar alguma das metodologias já utilizadas em otimização em variação de densidade para correção do fenômeno *checkerboard*.

REFERÊNCIAS

- Abdoun, F.; Azrar, L.; Daya, E.; Potier-Ferry, M.. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. **Computers and Structures**, v.87, 91 - 100, 2009.
- Adhikari, S.; Pascual B.. Eigenvalues of linear viscoelastic systems. **Journal of Sound and Vibration**, v.325, p. 10000-10011, 2009.
- Adhikari, S.; Pascual B.. Iterative methods for eigenvalues of viscoelastic systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, v.133, 021002.1 - 021002.7, 2011.
- Alam, M. I.; Khan, T. A.. Comparative Analysis of Multi Layered Composite Plates using Higher Order Theories. **International Journal of Science and Research**, v. 2, p. 236-238, 2013.
- Alvelid, M.. Optimal position and shape of applied damping material. **Journal of Sound and Vibration**, v. 310, p. 947-965, 2008.
- Bendsøe, M. P.; Sigmund, O.. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Springer, 2003.
- Bhaskar, K.; Varadan, T. K.. **Plates - Theories and Applications**. John Wiley & Sons, 2013.
- Bilasse, M.; Azrar, L.; Daya, E. M.. Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations. **Computers and Structures**, v.89, p. 539-555, 2011.
- Bilasse, M.; Azrar, L.; Daya, E. M.. Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations. **Computers and Structures**, v.89, 539 - 555, 2011.
- Blaauwendraad, J.. **Plates and FEM**. Springer, 2010.
- Bortolotto, J. C.; Lopes, E. M. O.; Bavastri, C. A.. **Identificação e Controle de Vibrações De Estruturas Metálicas Parcialmente Compostas Com Lâminas Viscoelásticas Restringidas**. In Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering ABMEC, Pirenópolis, GO, Brazil, November 10-13, 2013
- Brinson, H. F.; Brinson L. C.. **Polymer Engineering Science and Viscoelasticity - An Introduction**. Springer, 2008.
- Cassel, K. W.. **Variational Methods with Applications in Science and Engineering**. Cambridge University Press, 2013.
- Coley, D. A.. **An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers**. World Scientific Publishing, 1999.

Daya, E.; Potier-Ferry, M.. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. **Computers and Structures**, v.79, 533 - 541, 2001.

Di Sciuva, M.. Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element. **Computer Structure**, v. 24, p. 845-854, 1986.

Diaz, A.; Sigmund, O.. Checkerboard patterns in layout optimization **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.10, p. 40-45, 1995.

EARGLOBAL, disponível em < <https://earglobal.com/en> > acessado em: Jan, 2017

Ferry, J. D.. **Viscoelastic Properties of Polymers**. 3^a. ed.. John Wiley & Sons, 1980.

Fiedler, L.; Lacarbonara, W.; Vestroni, F.. A generalized higher-order theory for multilayered, shear-deformable composite plates. **Acta Mechanica**, v. 209, p. 85-98, 2010.

Findley, W. N.; Lai, J. S.; Onaran, K.. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity**. North-Holland Publishing Company, 1976.

Genta, G.. **Vibration Dynamics and Control**. Springer, 2009.

Gibson, R. F.. **Principles of Composite Material Mechanics**. 3^a. ed.. CRC Press, 2012.

Goldberg, D. E.. **Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning**. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

Goldberg, D. E.; Deb, K.. A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. **Foundations of Genetic Algorithms**, v.1, p. 69-93, 1991.

Hambric, S. A.; Sung, S. H.; Nefske, D. J.. **Engineering Vibroacoustic Analysis: Methods and Applications**. John Wiley & Sons, 2016.

Hashemi, S. H.; Arsanjani, M.. Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, p. 819-853, 2005.

Haupt, R. L.; Haupt, S. L.. **Practical Genetic Algorithms**. 2^a. ed.. John Wiley & Sons, 2004.

He, J.; Fu, Z.. **Modal Analysis**. Butterworth-Heinemann, 2001.

Hu, B. G.; Dokainish, M. A.. Damped vibrations of laminated composite plates - Modeling and finite element analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.25, p. 103-124, 1993.

Huang, S. C.; Tsai, C. Y.; Liou, C. L.. A general vibration theory for constrained layer damping-treated thick sandwich structures. **Journal of Sandwich Structures and Materials**, v.18, 343 - 373, 2015.

Inman, D. J.. **Engineering Vibration**. Pearson, 2014.

Jog, S. C.; Haberb, B. R.. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.130, p. 203-226, 1996.

Lehoucq, R. B.; Sorensen, D. C.; Yang, C.. **ARPACK Users' Guide_ Solution of Large-scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods**. SIAM, 1998.

Leissa, A. W.. The Free Vibration of Rectangular Plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, p. 257-293, 1973.

Libelli, S. M.; Alba, P.. Adaptive mutation in genetic algorithms. **Soft Computing**, v4, p.76-80, 2000

Ling, Z.; Ronglu, X.; Yi, W.; El-Sabbagh, A.. Topology optimization of constrained layer damping on plates using Method of Moving Asymptote (MMA) approach. **Shock and Vibration**, v. 18, p. 221-244, (2011).

Liu, G. R.; Quek, S. S.. **The Finite Element Method A Practical Course**. Elsevier, 2014.

Mainardi, F.. **Fractional Calculus and Waves - An Introduction to Mathematical Models**. Imperial College Press, 2010.

Martinez-Agirre, M., Elejabarrieta, M. J.. Higher order eigensensitivities based numerical method for the harmonic analysis of viscoelastically damped structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.88, p. 1280-1296, 2011.

MATWEB, disponível em < <http://www.matweb.com> > acessado em: Maio, 2017

Mead, D. J.. **Passive Vibration Control**. John Wiley & Sons, 1988.

Mead, D. J.; Markus, S.. The Forced Vibration of a Three Layered Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 10, p. 163–175, 1969.

Messac, A.. **Optimization in Practice with MATLAB® for Engineering Students and Professionals**. Cambridge University Press, 2015.

Moreira, R. A. S.; Rodrigues, J. D.; Ferreira, A. J. M.. A generalized layerwise finite element for multi-layer damping treatments. **Computational Mechanics**, v. 37, p. 426-444, 2006.

Nashif, A. D.; Jones, D. I. G.; Henderson, J. P.. **Vibration Damping**. John Wiley & Sons, 1985.

Oñate, E.. **Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics Volume 2: Beams, Plates and Shells**. Artes Gráficas Torres S.A, 2013.

Petyt, M.. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. 2^a. ed.. Cambridge University Press, 2010.

Piskunov, V. G.; Rasskazov, A. O.. Evolution of the Theory of Laminated Plates and Shells. **International Applied Mechanics**, v. 38, p. 135-166, 2002.

Pradyumna, S.; Pandey, S.. A new C0 higher-order layerwise finite element formulation for the analysis of laminated and sandwich plates. **Computers and Structures**, v.131, p. 1-16, 2015.

Pritz, T.. Analysis of Four-Parameter Fractional Derivative Model of Real Solid Materials. **Journal of Sound and Vibration**, v. 195, n. 1 p. 103-115, 1996.

Rao, M. D.. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 262, p. 457-474, 2003.

Rao, M. D.; Shulin H.. Dynamic analysis and design of laminated composite beams with multiple damping layers. **AIAA Journal**, v. 31, p. 736-745, 1993.

Rao, S. S.. **Engineering Optimization Theory and Practice**. 4^a. ed.. John Wiley & Sons, 2009.

Rao, S. S.. **Mechanical Vibrations**. 5^a. ed.. Prentice Hall, 2011.

Reddy, J. N.. **Mechanics of Laminated Composite Plates and shells**. 2^a. ed.. CRC Press, 2004.

Reddy, J. N.. On refined theories of composite laminates. **Meccanica**, v. 25, p. 230-238, 1990.

Reddy, J. N.. **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells** 2^a. ed.. CRC Press, 2007.

Ro, J.; Baz, A.. Optimum Placement and Control of Active Constrained Layer Damping using Modal Strain Energy Approach. **Journal of Vibration and Control**, v. 8, p. 861-876, 2002.

Ross, D.; Ungar, E. E.; Kerwin, E. M.. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate structural damping. **ASME Structural Damping**; v1, p. 49-88, 1959.

Sarker, R. A.; Newton, C. S.. **Optimization Modelling - A Practical Approach**. CRC Press, 2008.

Sarker, R.; Mohammadian, M.; Yao, X.. **Evolutionary Optimization**. Kluwer Academic Publishers, 2003.

Simon, D.. **Evolutionary Optimization Algorithms**. John Wiley & Sons, 2013.

Sivanandam, S. N.; Deepa, S. N.. **Introduction to Genetic Algorithms**. Springer, 2008.

Sousa, T. L.; Kanke, F.; Pereira, J. T.; Bavastri, C. A.. Property Identification of Viscoelastic Solid Materials in Nomograms using Optimization Techniques. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, Aceito para publicação.

Sumathi, S.; Hamsapriya, T.; Surekha, P.. **Evolutionary Intelligence: An Introduction to Theory and Applications with Matlab**. Springer, 2008.

Szilard, R.. **Theories and Applications of Plate Analysis**. John Wiley & Sons, 2004.

Ventsel, E.; Krauthammer T.. **Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications**. CRC Press, 2001.

Xu, C.; Lin S.; Yang, Y.. Optimal design of viscoelastic damping structures using layerwise finite element analysis and multi-objective genetic algorithm. **Computers and Structures**, v. 157, p. 1-8, 2015.

Yu, X.; Gen, M.. **Introduction to Evolutionary Algorithms**. Springer-Verlag, 2010.

Zheng, W.; Lei, Y.; Li, S.; Huang, Q.. Topology optimization of passive constrained layer damping with partial coverage on plate. **Shock and Vibration**, v.20, p. 199-211, 2013.