

Universidade Federal do Paraná

Roberto Cesar Budzinski Neto

**SOBRE A ESTACIONARIEDADE DE REDES NEURAIS  
SOB O REGIME DE PEQUENO MUNDO**

Curitiba  
2018

Universidade Federal do Paraná

Roberto Cesar Budzinski Neto

**SOBRE A ESTACIONARIEDADE DE REDES NEURAIS  
SOB O REGIME DE PEQUENO MUNDO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

Curitiba  
2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

---

B927s

Budzinski Neto, Roberto Cesar  
Sobre a estacionariedade de redes neurais sob o regime de pequeno mundo / Roberto Cesar Budzinski Neto. – Curitiba, 2018.  
103 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

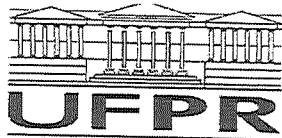
Orientador: Sergio Roberto Lopes .  
Bibliografia: p. 97-103.

1. Redes Neurais (Neurobiologia). 2. Neurônios. 3. Eterno retorno. 4.  
Modelo de Hodgkin-Huxley. 5. Sequências de recorrência (Matemática). I.  
Universidade Federal do Paraná. II.Lopes, Sergio Roberto. III. Título.

CDD: 612.82

---

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTERIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR CIÊNCIAS DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ROBERTO CESAR BUDZINSKI NETO** intitulada: "**Sobre a estacionariedade de redes neurais sob o regime de pequeno mundo**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 26 de Fevereiro de 2018.

  
SERGIO ROBERTO LOPES

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

  
IBERÉ LUIZ CALDAS

Avaliador Externo (USP)



RICARDO LUIZ VIANA

Avaliador Interno (UFPR)

# Agradecimentos

Uma das frases mais conhecidas e citadas em epígrafes de trabalhos científicos, a exemplo deste trabalho, é creditada a Isaac Newton:

*“Se longe enxerguei é porque estive apoiado em ombros de gigantes”.*

Dentro do contexto científico ela é muito bem colocada, uma vez que a ciência é uma construção coletiva, que transcende a existência de uma única pessoa, seja qual for o tamanho da sua genialidade. No que diz respeito a este trabalho, a referência científica é válida, considerando que o conteúdo desta dissertação teve início alguns anos atrás graças ao meu orientador, prof. Dr. Sergio Roberto Lopes e ao prof. Dr. Ricardo Luiz Viana, bem como aqueles que foram orientados pelos mesmos e fizeram, ou ainda fazem parte do grupo ao qual pertenço, em especial ao prof. Dr. Thiago Prado, aos quais eu agradeço, assim como todo o departamento e o programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal do Paraná. Também gostaria de agradecer ao prof. Dr. Carlos de Carvalho pelo suporte computacional e à CAPES pelo apoio financeiro. Ainda, gostaria de deixar meus agradecimentos aos membros da pré-banca, prof. Dr. Marcus Beims e prof. Dr. Wilson Marques Junior e aos membros da banca, prof. Dr. Ricardo Luiz Viana e prof. Dr. Iberê Caldas.

Entretanto, no contexto deste trabalho, a frase de Isaac Newton tem um sentido mais profundo, não sendo restrita apenas ao científico, mas contemplando a vida como um todo. Os primeiros gigantes que quero agradecer são os meus pais, Valéria Popenda Brasil e Maurício Ribeiro Brasil, por serem meus exemplos de vida e porque não é possível mensurar todo o esforço que fizeram e fazem por mim. Gostaria de deixar registrado meu amor, admiração e agradecimento a eles. Da mesma forma, agradeço ao restante da minha família, em especial aos meus avós e a minha irmã, Laura Popenda Brasil.

Outro alicerce da minha vida é constituído pelas amizades, sejam elas antigas ou proporcionadas pela Física. Agradeço aos meus amigos que me acompanham desde a infância, em especial ao Lucas Ramos do Santos, pela lealdade e parceria que sei que vamos levar para toda a vida. Agradeço também aos meus amigos da adolescência, em particular à Camila de Souza por estar ao meu lado sempre que precisei, por todas as discussões e reflexões que foram e são de grande valor para mim e por ter dedicado seu tempo para correção e revisão deste texto. Gostaria de deixar registrado meus agradecimentos aos amigos Caroline Wrobel, Flávia Feris, Henrique Goulart, Mauro Abati e Rafael Coutinho, que o ciclismo e a vida me proporcionaram, em especial aos meus companheiros de casa por longos bons anos, João Henrique Gonçalves e Gustavo Rorhbacher, pelas experiências e aprendizados vividos no tempo que moramos juntos.

A Física foi responsável por proporcionar grandes amizades para minha vida, talvez não tão antigas como as citadas anteriormente, mas não menos importantes. Não poderia deixar de agradecer, em especial ao Bruno Boaretto e ao Matheus Kiataki, amigos que me acompanham na caminhada profissional e pessoal e que me auxiliam de diferentes formas. Gostaria de agradecer também aos amigos Aron Oliveira, Carollina Ortiz, César Machado, Fernando Caron, Larissa Gonzaga, Miguel Prado e Thales Silva por toda convivência e aprendizado que me são proporcionados além das gostosas discussões em almoços ou cafés da tarde.

Gostaria de deixar registrados meus sinceros agradecimentos e minha admiração pelo mais novo gigante que me ajuda a enxergar cada vez mais longe, minha companheira Sandrine Schueller Mafra. Quero agradecer todo apoio e suporte que me é dado, por todas as discussões, troca de conhecimentos e experiência, além de todas as correções e dicas que foram dadas para este e outros trabalhos relacionados à Física. Quero agradecer por ser meu porto seguro e por dividir a vida comigo.

Por fim, quero reiterar os agradecimentos aqui feitos a cada um que de alguma forma me ajudou durante o desenvolvimento deste trabalho, espero que todos continuem a me auxiliar para enxergar cada vez mais longe e espero também que eu possa ceder meus ombros para que outros também o possam fazer.

Obrigado.

# Resumo

---

O cérebro talvez seja o órgão mais complexo do corpo humano e mesmo nos dias atuais existem muitas questões abertas no que diz respeito ao mesmo. Dessa forma, existem grandes esforços a nível mundial para o desenvolvimento de pesquisas que tornem possível uma melhor compreensão sobre este que é um objeto fundamental à vida. O presente trabalho tem por objetivo o estudo do comportamento dinâmico de redes neurais com acoplamento fraco, especificamente, com relação à sincronização, (não)estacionariedade e estabilidade da mesmas. Para tal, simula-se o comportamento de 1024 neurônios termicamente sensíveis, sob o regime de pequeno mundo, por meio do modelo desenvolvido por Braun *et. al.*, o qual é baseado nas ideias originais de Hodgkin e Huxley, considerando também a dependência do sistema em relação à temperatura. Como ferramenta de análise do problema, utilizam-se os conceitos de análise de recorrência (RQA), especificamente, o quantificador chamado de determinismo, o qual expressa ideias sobre a densidade de pontos recorrentes em estruturas diagonais no espaço de recorrência, uma vez que estas estruturas estão ligadas à dinâmica (temporal) do sistema de interesse. Como análise complementar do método adotado, compara-se os resultados obtidos por meio da análise de recorrência (determinismo), a qual utiliza dados de campo médio local da rede, com os resultados obtidos através de um parâmetro de ordem de Kuramoto, o qual necessita da informação individual dos neurônios. Por fim, pode-se concluir que uma rede de 1024 neurônios termicamente sensíveis, sob topologia de pequeno mundo, apresenta sincronização anômala, não estacionariedade relacionada a intermitência de dois estados e multiestabilidade para região de acoplamento fraco e para transição para sincronização, sendo que tais características podem estar associadas à doenças neuronais. No que diz respeito a metodologia utilizada, pode-se concluir que a análise de recorrência (RQA) é mais eficaz para avaliar (não)estacionariedade, se comparada ao parâmetro de ordem de Kuramoto, além do fato de utilizar dados de campo médio, os quais podem ser facilmente obtidos experimentalmente.

**Palavras-chave:** Redes Neurais, Análise de Recorrência, Modelo de Hodgkin-Huxley, Análise de Dados

# Abstract

---

The brain may be the most complex organ in the human body, and even nowadays there are many notanswered questions about it. In this way, there are great efforts in the world for the development of researches to possible a better understanding about its, which is a fundamental object of life. The present work has the objective of studying the dynamic behavior of neural networks with weak coupling, specifically, with respect to the synchronization, (non) stationarity and stability of the same. In this way, simulation of 1024 thermally sensitive neurons under the small world regime are performed by the model developed by Braun et al, which is based on the original ideas of Hodgkin and Huxley, also considering the system's dependence on temperature. As a tool for analyzing the problem, we use the concepts of recurrence analysis (RQA), specifically, the quantifier called determinism, which expresses ideas about the density of recurrent points in diagonal structures in the space of recurrence, once these structures are associated to the (temporal) dynamics of the system. As a complementary analyses of the adopted method, we compare the results obtained through the recurrence analysis (determinism), which uses local mean field data from network, with the results obtained through Kuramoto order parameter, which requires individual neuron information. Finally, it can be concluded that a network of 1024 thermally sensitive neurons, under small-world topology, presents anomalous synchronization, non-stationarity related to two-state intermittence and multistability, for weak coupling region and for transition to synchronization, such characteristics may be associated with neuronal diseases. Regarding the methodology used, it can be concluded that the recurrence analysis (RQA) is more efficient to evaluate (non) stationarity compared to the Kuramoto order parameter, besides, RQA use data of local field potential, which can be easily obtained experimentally.

**Keywords:** Neural Networks, Recurrence Analysis, Hodgkin-Huxley Model, Data Analysis.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação do atrator de Lorenz, tirado de [29]. . . . .	26
Figura 2 – Representação do circuito equivalente de Hodgkin-Huxley, considerando neste caso três canais iônicos. . . . .	33
Figura 3 – Exemplo de resultado obtido através do modelo de Hodgkin-Huxley com a adição de um estímulo externo. . . . .	35
Figura 4 – Exemplo da dinâmica de <i>bursts</i> produzido pelo modelo de Braun <i>et. al.</i> . Pode-se perceber que existe um sequência rápida de disparos seguida de um período quiescente. . . . .	37
Figura 5 – Diagrama de bifurcação dos intervalos entre disparos ( <i>ISI - Inter spikes interval</i> ) para o modelo de Braun <i>et. al.</i> . Para este trabalho, os parâmetro de temperatura são alterados de modo a se adequar a realidade do cérebro humano ( $T \approx 38$ graus celsius). . . . .	38
Figura 6 – Ilustração das pontes de Königsberg - Tirado de [45]. . . . .	41
Figura 7 – Exemplo de rede direcional. . . . .	42
Figura 8 – Exemplo de rede não direcional. . . . .	42
Figura 9 – Rede com acoplamento de primeiros vizinhos. . . . .	47
Figura 10 – Rede com acoplamento de segundos vizinhos. . . . .	47
Figura 11 – Rede com acoplamento global. . . . .	47
Figura 12 – Representação da rota de Watts-Strogatz: de (a) até (c) a probabilidade de ocorrer a troca de conexões é aumentada, sendo que (a) representa uma rede regular, (b) uma rede de pequeno mundo e (c) uma rede aleatória. . . . .	48
Figura 13 – Representação da rota de Newman-Watts: de (a) até (c) a probabilidade de ocorrer a troca de conexões é aumentada, sendo que (a) representa uma rede regular, (b) uma rede de pequeno mundo e (c) uma rede com acoplamento global. . . . .	49
Figura 14 – Figura explicitando o livre caminho médio e o coeficiente de <i>clustering</i> para a rede utilizada neste trabalho (1024 elementos) mostrando as variáveis que definem o limite da região de pequeno mundo. Vale notar que a probabilidade escolhida para os cálculos no presente trabalho está contida nesta região, ou seja, com coeficiente de aglomeração alto e livre caminho médio baixo. . . . .	50
Figura 15 – Exemplos de Gráficos de Recorrências característicos: (A) Homogêneo; (B) Periódico (oscilações harmônicas superpostas); (C) Deriva (mapa logístico com ruído); (D) Descontínuo (movimento browniano) - Figuras retiradas de [62]. . . . .	52

Figura 16 – Exemplo de gráficos de recorrência para série temporal do campo médio de 1024 neurônios termicamente sensíveis. Em (a) está representado um sistema com menor grau de sincronização e em (b) um sistema com maior grau de sincronização, fato que pode ser entendido pela maior definição nas estruturas diagonais. . . . .	53
Figura 17 – Representação da matriz de recorrência para o sistema de interesse do presente trabalho. . . . .	54
Figura 18 – Representação de um <i>burst</i> para um neurônio (linha preta contínua). Juntamente com o potencial do neurônio, é plotado a dinâmica da variável $U \equiv \frac{1}{\alpha_{sa}}$ (linha vermelha tracejada), onde $\alpha_{sa}$ é definida no Modelo de Braun <i>et. al.</i> (Seção (2.4)). Pode-se perceber que a todo início de uma sequência de disparos do neurônio é definido um marcador temporal ( $t_k$ ) de modo que considerando dois <i>bursts</i> sequenciais, é possível associar uma fase ao mesmo. . . . .	57
Figura 19 – Exemplo da dinâmica neural de dois neurônios desacoplados obtida através do modelo de Braun <i>et. al.</i> . No caso (a) pode-se perceber que os <i>bursts</i> acontecem em tempos diferentes, ou seja, tem-se um exemplo de dessincronização. Já no caso (b), tem-se o exemplo de um estado de sincronização, uma vez que os <i>bursts</i> começam e terminam nos mesmos instantes de tempo. . . . .	62
Figura 20 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para $\varepsilon = 0,0040$ . . . . .	63
Figura 21 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para $\varepsilon = 0,0064$ . . . . .	64
Figura 22 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para $\varepsilon = 0,0080$ . . . . .	64
Figura 23 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para $\varepsilon = 0,0096$ . . . . .	65
Figura 24 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para $\varepsilon = 0,0136$ . . . . .	65
Figura 25 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para $\varepsilon = 0,0200$ . . . . .	66
Figura 26 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para $\varepsilon = 0,0480$ . . . . .	66
Figura 27 – Campos médios da rede para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) - $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) - $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) - $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) - $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) - $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) - $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) - $\varepsilon = 0,0480$ . . . . .	68
Figura 28 – Parâmetro de ordem médio (em relação ao tempo e às 40 condições iniciais distintas) em função do parâmetro de acoplamento $\varepsilon$ . As barras de erro em vermelho representam a dispersão sobre as condições iniciais distintas. É possível ver que para valores de $\varepsilon < 0,03$ a dispersão é grande, sendo que para região fortemente acoplada, a rede perde a sensibilidade às condições iniciais. . . . .	70
Figura 29 – Parâmetro de ordem de Kuramoto (R) variando no tempo para uma rede de 1024 neurônios sob a topologia de pequeno mundo para diferentes valores do parâmetro de acoplamento:(a) - $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) - $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) - $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) - $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) - $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) - $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) - $\varepsilon = 0,0480$ . . . . .	71

- Figura 30 – Histogramas ( $p(R)$ ) representando a distribuição dos valores parâmetro de ordem de Kuramoto em função do tempo para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ . . . . . 72
- Figura 31 – Determinismo médio (em relação ao tempo e às 40 condições iniciais distintas) em função do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$ . As barras de erro em vermelho representam a dispersão sobre as condições iniciais distintas. É possível ver que para valores de  $\varepsilon < 0,03$  a dispersão é grande, sendo que para valores onde a rede é fortemente acoplada esta sensibilidade às condições iniciais desaparece. . . . . 74
- Figura 32 – Exemplo de teste de otimização pra parâmetro de vizinhança  $\delta$ . No gráfico, nota-se o determinismo médio (temporal) (curva preta) em função do *threshold*. Pode-se perceber que para  $\delta \approx 0,11$  a derivada (normalizada) (curva vermelha) é máxima, indicando o valor para o qual o determinismo capta as menores variações do sistema. . . . . 75
- Figura 33 – Superfície representando o determinismo em função do tempo em função do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$ . É possível notar a presença de regiões de comportamento não estacionário. . . . . 76
- Figura 34 – Determinismo ( $\Delta$ ) em função do tempo para uma rede com 1024 neurônios sob o regime de pequeno mundo para uma única condição inicial e determinados valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ . É possível observar diferentes comportamentos dinâmicos, sendo que em (a) o determinismo apresenta comportamento difuso, em (b), (d) e (f) o determinismo varia entre alguns valores e, para (c) e (g), é possível observar estacionariedade. . . . . 78
- Figura 35 – Histogramas ( $p(\Delta)$ ) representando a distribuição dos valores do determinismo em função do tempo para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ . É possível notar que, para as regiões não estacionárias próximas ao máximo local ( $\varepsilon = 0,0064$  e  $\varepsilon = 0,0096$ ), as distribuições indicam a presença de dois estados preferenciais. . . . . 80

Figura 36 – Determinismo temporais obtidos com o mesmo valor de $\delta$ para diferentes valores de $\varepsilon$ na região próxima ao máximo local observado na figura (31). Fica claro o surgimento e desaparecimento do fenômeno intermitência de dois estados. Neste caso, (1) - $\varepsilon = 0,0050$ ; (2) - $\varepsilon = 0,0054$ ; (3) - $\varepsilon = 0,0058$ ; (4) - $\varepsilon = 0,0062$ ; (5) - $\varepsilon = 0,0066$ ; (6) - $\varepsilon = 0,0070$ ; (7) - $\varepsilon = 0,0074$ ; (8) - $\varepsilon = 0,0078$ ; (9) - $\varepsilon = 0,0082$ ; (10) - $\varepsilon = 0,0086$ ; (11) - $\varepsilon = 0,0090$ ; (12) - $\varepsilon = 0,0094$ . . . . .	81
Figura 37 – $P(\tau)$ denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 1 ( $\Delta$ maior) para $\varepsilon = 0,0064$ . . . . .	82
Figura 38 – $P(\tau)$ denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 2 ( $\Delta$ menor) para $\varepsilon = 0,0064$ . . . . .	82
Figura 39 – $P(\tau)$ denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 1 ( $\Delta$ maior) para $\varepsilon = 0,0096$ . . . . .	83
Figura 40 – $P(\tau)$ denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 2 ( $\Delta$ menor) para $\varepsilon = 0,0096$ . . . . .	83
Figura 41 – $P(\tau)$ denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 1 ( $\Delta$ maior) para $\varepsilon = 0,0200$ . . . . .	83
Figura 42 – $P(\tau)$ denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 2 ( $\Delta$ menor) para $\varepsilon = 0,0200$ . . . . .	83
Figura 43 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local $p = 0,0001$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas. . . . .	87
Figura 44 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local $p = 0,0005$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas. . . . .	87
Figura 45 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local $p = 0,0050$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas. . . . .	88

Figura 46 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local $p = 0,0100$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas. . . . .	89
Figura 47 – Comportamento dinâmico de um neurônio obtido por meio do modelo de Rulkov com os parâmetros $\phi = 4,1$ e $\sigma = \varphi = 0,001$ . $x_n$ é a variável rápida e denota o comportamento de <i>burst</i> enquanto $y_n$ é a variável lenta do sistema. . . . .	90
Figura 48 – Determinismo médio para um rede de 1024 neurônio de Rulkov sob topologia de pequeno mundo com $p = 0,001$ . Para cada valor de $\varepsilon$ o sistema foi simulado por 200 segundos para 50 condições iniciais distintas. Neste caso, os parâmetros de recorrência usados foram: $\delta = 0,18$ e $l_{\min} = 60$ . . . . .	91
Figura 49 – Determinismo médio para um rede de 1024 neurônio de Rulkov sob topologia de pequeno mundo com $p = 0,0005$ . Para cada valor de $\varepsilon$ o sistema foi simulado por 200 segundos para 50 condições iniciais distintas. Neste caso os parâmetros de recorrência usados foram: $\delta = 0,18$ e $l_{\min} = 60$ . . . . .	92
Figura 50 – Na figura da esquerda tem-se o determinismo em função do tempo para um rede de 1024 neurônios de Rulkov com $p = 0,001$ para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) - $\varepsilon = 0,005$ ; (b) - $\varepsilon = 0,010$ ; (c) - $\varepsilon = 0,015$ ; (d) - $\varepsilon = 0,020$ ; (e) - $\varepsilon = 0,021$ ; (f) - $\varepsilon = 0,022$ ; (g) - $\varepsilon = 0,090$ . Na figura da direita tem-se a distribuição das séries temporais do determinismo para os mesmos valores de $\varepsilon$ . Neste caso os parâmetros de recorrência usados foram: $\delta = 0,18$ e $l_{\min} = 60$ . . . . .	93
Figura 51 – Na figura da esquerda tem-se o determinismo em função do tempo para um rede de 1024 neurônios de Rulkov com $p = 0,0005$ para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) - $\varepsilon = 0,005$ ; (b) - $\varepsilon = 0,010$ ; (c) - $\varepsilon = 0,015$ ; (d) - $\varepsilon = 0,020$ ; (e) - $\varepsilon = 0,021$ ; (f) - $\varepsilon = 0,022$ ; (g) - $\varepsilon = 0,090$ . Na figura da direita tem-se a distribuição das séries temporais do determinismo para os mesmos valores de $\varepsilon$ . Neste caso, os parâmetros de recorrência usados foram: $\delta = 0,18$ e $l_{\min} = 60$ . . . . .	94

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores para os parâmetros $\alpha_X$ e $\beta_X$ das equações mestras do Modelo de Hodgkin-Huxley . . . . .	35
Tabela 2 – Valores para os potenciais de repouso e condutâncias máximas para os íons de interesse do Modelo de Hodgkin-Huxley. . . . .	35
Tabela 3 – Valores dos parâmetros utilizados no presente trabalho para os cálculos numéricos por meio do modelo de neurônios de Hodgkin-Huxley termicamente sensíveis. . . . .	40
Tabela 4 – Parâmetros do modelo utilizado para o acoplamento dos neurônios da rede no presente trabalho. . . . .	61
Tabela 5 – Valores otimizados de <i>threshold</i> para os valores do parâmetro de acoplamento utilizados para as análises temporais via determinismo. . . . .	77

# Lista de símbolos

$f$	Mapa
$x^*$	Ponto fixo
$\Lambda$	Crítério de estabilidade de ponto fixo
$\mathcal{J}$	Matriz Jacobiana
$\omega$	Autovalores da matriz Jacobiana
$d_t$	Distância entre dois pontos
$\lambda$	Expoente de Lyapunov
$q$	Carga elétrica
$V$	Potencial elétrico
$C$	Capacitância elétrica
$E$	Campo elétrico
$\epsilon$	Permissividade elétrica
$I$	Corrente elétrica
$J_{\text{dif}}$	Fluxo iônico de difusão
$D_X$	Coefficiente de difusão do íon X
$K$	Constante de Boltzmann
$\mu$	Mobilidade
$T$	Temperatura absoluta
$z$	Valência do íon considerado
$V_X$	Potencial de Nerst do íon X
$J_{\text{ind}}$	Fluxo iônico induzido
$J_{\text{total}}$	Fluxo iônico total
$J_X$	Fluxo do íon X

$G_X$	Condutância específica do íon X
$C_m$	Capacitância da membrana
$J_1$	Fluxo de vazão
$J$	Fluxo externo
$n$	Probabilidade da abertura do canal de potássio
$\bar{G}_X$	Condutância constante do íon X
$\alpha_n, \beta_n$	Chaves de ativação (ou não ativação) do canal de potássio
$m$	Probabilidade de abertura do canal de sódio
$\alpha_m, \beta_m$	Chaves de ativação (ou não ativação) do canal de sódio
$h$	Probabilidade da inativação do canal de sódio
$\alpha_h, \beta_h$	Chaves de inativação (ou não inativação) do canal de sódio
$\rho, \phi$	Coefficientes com dependência térmica do modelo de Braun <i>et. al.</i>
$\tau_X$	Tempo característico do íon X
$\eta, \gamma$	Fatores de controle da quantidade de sódio
$\alpha_{X,\infty}$	Variáveis dos estados estacionários do íon X
$a_{ij}$	Elemento da matriz adjacente
$L_{ij}$	Menor distância possível entre o sítio $i$ e $j$
$\bar{L}$	Livre caminho médio
$Cn_i$	Número de conexões do sítio $i$
$C_{\max,i}$	Número máximo de conexões possíveis para o sítio $i$
$C_i$	Coefficiente de aglomeração do sítio $i$
$k_i$	Número de vizinhos do sítio $i$
$\bar{C}$	Coefficiente de aglomeração da rede
$p_{er}$	Probabilidade de existir uma conexão aleatória entre os sítios da rede
$p_{nl}$	Probabilidade de existir uma conexão não local em uma rede regular na rota de Newman-Watts



$n_1$	Número de conexões locais em uma rede de pequeno mundo obtida por meio da rota de Newman-Watts
$\sigma$	Variável de pequeno mundo
$\kappa$	Razão entre os livre caminhos médios de uma rede qualquer por uma aleatória
$\zeta$	Razão entre os coeficientes de aglomeração médios de uma rede qualquer por uma aleatória
$\mathbf{R}_{ij}$	Elementos da Matriz de Recorrência
$\Theta$	Função de Heaviside
$\delta$	<i>Threshold</i>
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$RR$	Taxa de recorrência
$\Delta$	determinismo
$l$	Tamanho da estrutura diagonal na matriz de recorrência
$l_{min}$	Tamanho da estrutura diagonal mínima
$P(\delta, l)$	Frequência de estruturas diagonais na matriz de recorrência
$\theta$	Fase associada aos neurônios
$R$	parâmetro de ordem de Kuramoto
$J_{acop}$	Fluxo devido ao acoplamento dos neurônios da rede
$J_{ext}$	Fluxo devido a um estímulo externo
$\varepsilon$	Parâmetro de acoplamento da rede
norm	Fator de normalização do acoplamento da rede
$S_{i,j}$	Matriz de adjacência do tipo <i>Small-World</i> usada no acoplamento da rede
$r_{i,j}$	Termo associado a fração de canais iônicos pós-sinápticos no estado “aberto”
$V_{pos-sin}$	Constante relacionada ao termo de acoplamento da rede
$\tau_r, \tau_d$	Tempos característicos do modelo de acoplamento
$V_0$	Potencial característico do modelo de acoplamento

$s_0$	Constante unitária do modelo de acoplamento
$\langle R \rangle$	Média temporal do parâmetro de ordem de Kuramoto
$\langle \bar{R} \rangle$	Média temporal e em relação as condições iniciais do parâmetro de ordem de Kuramoto
$R(t)$	Parâmetro de ordem de Kuramoto em função do tempo
$\langle \Delta \rangle$	Média temporal do determinismo
$\langle \bar{\Delta} \rangle$	Média temporal e em relação as condições iniciais do determinismo
$\phi, \sigma, \varphi$	Parâmetros do modelo de Rulkov

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS</b> . . . . .	<b>23</b>
1.1	<b>Definições e propriedades</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>2</b>	<b>MODELOS NEURAIS</b> . . . . .	<b>29</b>
2.1	<b>Modelo Capacitivo</b> . . . . .	<b>29</b>
2.2	<b>Potencial de Nernst</b> . . . . .	<b>31</b>
2.3	<b>Modelo de Hodgkin-Huxley</b> . . . . .	<b>32</b>
2.4	<b>Neurônio termicamente sensível</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>REDES</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	<b>Características Gerais</b> . . . . .	<b>42</b>
3.2	<b>Propriedades da Rede</b> . . . . .	<b>43</b>
3.3	<b>Topologia da Rede</b> . . . . .	<b>45</b>
3.3.1	Redes Regulares . . . . .	46
3.3.2	Redes Aleatórias . . . . .	46
3.3.3	Redes de Pequeno Mundo . . . . .	48
<b>4</b>	<b>FERRAMENTAS DE ANÁLISE</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1	<b>Análise de Recorrência</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1.1	Características Gerais . . . . .	52
4.1.2	Quantificadores de Recorrência . . . . .	55
4.2	<b>Parâmetro de ordem de Kuramoto</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE PARA UMA REDE COM 1024 NEURÔNIOS SOB O RE- GIME DE PEQUENO MUNDO</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1	<b>Caracterização Geral da Rede</b> . . . . .	<b>59</b>
5.2	<b>Obtenção dos Dados e Primeiras análises</b> . . . . .	<b>61</b>
5.3	<b>Análise via parâmetro de ordem de Kuramoto</b> . . . . .	<b>69</b>
5.4	<b>Análise via determinismo</b> . . . . .	<b>73</b>
5.4.1	Comportamento não estacionário . . . . .	75
5.4.2	Não estacionariedade com intermitência de dois estados . . . . .	79
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>85</b>
6.1	<b>Dependência com o Número de Conexões da Rede</b> . . . . .	<b>86</b>
6.2	<b>Comportamentos Semelhantes no Modelo de Rulkov</b> . . . . .	<b>89</b>

<b>6.3</b>	<b>Perspectivas Futuras</b> . . . . .	<b>95</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>97</b>

# Introdução

*“Se longe enxerguei é porque estive apoiado em ombros de gigantes”  
(Isaac Newton)*

O cérebro é um sistema composto por centenas de bilhões de neurônios que apresentam distintas estruturas e distintas funções, sendo que a estrutura de conexão é, muitas vezes, mais importante que as próprias características fisiológicas [1]. Esta estrutura é tal que, redes neurais podem ser entendidas como redes complexas [2]. A abordagem por meio de redes complexas é útil não somente para estudo de sistemas neurais, mas sim em diversas áreas do conhecimento que vão de sistemas biológicos até problemas sociais, passando por problemas relacionados a engenharia, química, física e economia [3]. Uma importante característica de sistemas complexos consiste no comportamento emergente [4], onde o comportamento global exibido por este tipo de sistema é distinto, sendo normalmente mais complexo que a soma das contribuições dos comportamentos individuais dos elementos que compõe o mesmo. Nesse sentido, o presente trabalho investiga o comportamento espaço-temporal de redes neurais, sendo mostrado em [5] que ela pode apresentar não estacionariedade, multiestabilidade e sincronização anômala.

Ainda sobre a modelagem a partir de redes, pode-se abordar o problema de uma forma microscópica, onde cada neurônio é entendido como um elemento e suas conexões como arestas da rede, ou ainda em uma perspectiva macroscópica, onde cada área cerebral é entendida como elemento da rede e suas conexões podem ser entendidas como conexões geradas pelas fibras axonais [6, 7]. Nesse sentido, as principais formas de comunicação utilizadas pelos neurônios se dão por via química, por meio dos neurotransmissores, ou por via elétrica, por transporte de carga. Para simular o comportamento neural, o presente trabalho utiliza o modelo construído por Braun *et. al.* [8], o qual pode ser entendido como um modelo modificado em relação às ideias originais de Hodgkin-Huxley [9], onde novos fluxos iônicos e a temperatura do sistema são consideradas. Este modelo, composto por 5 equações diferenciais, considera o fluxo devido aos principais íons envolvidos no processo neural, além da dependência do sistema em relação à temperatura, sendo que possui um grande respaldo fisiológico. Além disso, vale ressaltar sua comprovação experimental e ainda o fato de que a modelagem feita por Hodgkin e Huxley em 1952 [9–11] rendeu aos mesmos o prêmio Nobel (de fisiologia) em 1963 [12].

Entretanto, além dos fatores biofísicos, são de extrema importância para entendimento das redes neurais as questões relacionadas à topologia das mesmas, como mencionado

anteriormente. É sabido que estruturas relacionadas às redes de interesse apresentam características e propriedades das topologias de: pequeno mundo (*Small World*), livre de escala (*Scale Free*) e aleatória (*Random*) [13–15], sendo que em ambas arquiteturas de conexão, a rede apresenta transição pra sincronização [2, 16, 17]. Este trabalho considera a topologia de pequeno mundo, sendo que o comportamento dinâmico é estudado em função do parâmetro de acoplamento [18, 19].

Dessa forma, especificamente, o trabalho é realizado segundo a análise de uma rede com 1024 neurônios termicamente sensíveis, simulados via modelo de neurônios de Hodgkin-Huxley termicamente sensíveis, formando uma rede do tipo de pequeno mundo. O objetivo central consiste na análise e caracterização desta rede em relação a sua dinâmica, particularmente, sincronização, (não)estacionariedade e multiestabilidade como função do seu parâmetro de acoplamento. Para isso, utiliza-se como ferramentas de análise, parâmetro de ordem de Kuramoto [20], o qual através da informação individual de cada neurônio produz resultados sobre a sincronização de fase dos mesmos e, por outro lado, usa-se também a análise de recorrência [21], a qual por meio do campo médio da rede investiga sua dinâmica temporal.

Para tal, o trabalho é dividido em 6 capítulos. O primeiro deles (1) contém informações e conceitos referentes a sistemas dinâmicos clássicos, complexos e caóticos, bem como as suas propriedades.

No capítulo que segue (2), é feita a dedução do modelo de Hodgkin-Huxley, bem como a do modelo de Braun *et. al.*. Para tal, parte-se da hipótese de que os neurônios podem ser aproximados por capacitores de placas paralelas onde a membrana faz o papel do dielétrico. A partir deste ponto, pode-se utilizar os resultados conhecidos na literatura sobre o tema para chegar no que é conhecido como potencial de Nerst. Para chegar no modelo de Hodgkin-Huxley pode-se utilizar a ideia de circuito equivalente de Hodgkin-Huxley [22] onde são consideradas as correntes ou fluxos originados pela presença dos íons de sódio  $\text{Na}^{2+}$ , potássio  $\text{K}^+$  e o que é chamada de corrente de vazamento (além de um possível estímulo externo), desta forma, o modelo reproduz o comportamento conhecido como *spike*. Para o modelo de Braun *et. al.*, além dos fatores mencionados acima, considera-se dois novos fluxos devido a presença do cálcio, que, juntamente com a consideração da temperatura do sistema, levam ao novo comportamento dinâmico observado: os *bursts*.

O capítulo (3) consiste na conceituação de redes e suas topologias. Dessa forma, esse capítulo fornece as bases para entendimento da topologia de conexão do sistema, em específico, as propriedades e delimitações do regime escolhido: o de pequeno mundo.

No quarto capítulo (4) são descritas as ferramentas de análise que são empregadas no trabalho, sendo elas constituídas pela análise de recorrência [21] e parâmetro de ordem de Kuramoto [20]. No que diz respeito a esta segunda ferramenta de análise, sabe-se que o parâmetro de ordem de Kuramoto é amplamente utilizado para análise de sistemas dinâmicos e é

---

capaz de fornecer informações referentes à sincronização de fase dos mesmos. Entretanto, no presente trabalho é utilizado o determinismo, para analisar a estacionariedade das séries geradas pelo modelo utilizado e é possível mostrar que esta ferramenta de RQA (*recurrence quantifier analysis*) reproduz os resultados gerados pelo parâmetro de ordem e ainda fornece informações adicionais sobre (não)estacionariedade e multiestabilidade da rede.

No capítulo (5), é apresentado a modelagem da rede neural, bem como os métodos utilizados para obtenção dos dados e suas posteriores análises. Apresenta-se dessa forma, a análise via parâmetro de ordem de Kuramoto seguida da análise via análise de recorrência, especificamente com o uso do determinismo. Dessa forma, é possível comparar os resultados obtidos e mostrar que o determinismo é uma ferramenta válida para a análise proposta e que inclusive, fornece novas perspectivas que não se fazem possíveis com a primeira ferramenta. A partir desses resultados, o capítulo segue na interpretação dos mesmos, primeiramente com a caracterização da rede segundo o conceito de (não)estacionariedade seguida da identificação dos fenômenos consequentes desse comportamento.

Por fim, no capítulo final (6) são feitas conclusões referentes aos resultados do capítulo anterior e ainda sobre fenômenos aparentes que não são devidamente explorados neste trabalho, como a dependência dos resultados obtidos com relação ao número de conexões da rede, bem como a utilização de outro modelo matemático para simulação do comportamento neural que gera resultados semelhantes.

Vale frisar que as pesquisas que envolvem o cérebro estão cada vez mais avançando em diferentes campos, desde a neurociência, no que diz respeito a sua parte relacionada a medicina, até área mais teóricas como a física e informática. Isso é possível graças aos avanços tecnológicos na área da computação, possibilitando simulações cada vez mais poderosas e também à colaboração multidisciplinar, uma vez que essa pesquisa só se fez possível devido a contribuições de cientistas de diferentes áreas do conhecimento.





# 1 Sistemas Dinâmicos

Um das maiores contribuições ao longo da história para a criação e desenvolvimento da área de estudo referente ao movimento dos corpos e suas causas (dinâmica) foi feita por Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.). Este, que foi discípulo de Platão (428 a.C. - 348 a.C.), foi o responsável pela criação de um modelo dinâmico que explicava os movimentos da natureza, o qual, apesar de equivocado em muitos pontos, perdurou por cerca de 2000 mil anos, sendo que sua refutação culminou com os trabalhos e contribuições de Galileu (1564 - 1642) e Newton (1642 - 1727) compondo assim, uma grande revolução científica. Entretanto, durante todo esse tempo, o modelo de Aristóteles influenciou muitos outros, desde de Ptolomeu (90 d.C. - 168 d.C.), Copérnico (1473 - 1543), Kepler (1571 - 1630) até mesmo, Galileu e Newton. A queda da teoria aristotélica veio acompanhada do surgimento e consolidação da teoria newtoniana. Atualmente, dá-se o nome a esta área de estudo de Mecânica Clássica. Seu surgimento é creditado, principalmente a Isaac Newton que em 1687 publicou um dos livros mais famosos da história da ciência (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), o qual contém as principais ideias das famosas três leis de Newton e da lei da gravitação universal. Com o passar do tempo, novas interpretações e modelos matemáticos para os movimentos dos corpos foram surgindo e o sucesso da Mecânica Clássica foi se estabelecendo. A teoria ganhou tanta força e respaldo que culminou com o chamado determinismo científico. Em 1825, Laplace (1749 - 1827) publicou seu livro “Ensaio filosófico sobre as probabilidades” onde ele afirma que:

*Uma inteligência que, em certo momento, conhecesse todas as forças que atuam no universo e o estado inicial de todos os corpos que constituem a natureza, abarcaria na mesma expressão matemática os movimentos dos grandes objetos do universo bem como do mais ínfimo dos átomos: nada lhe seria duvidoso e o futuro, tal qual o passado, seria como o presente a seus olhos.*

Infelizmente, no fim do século XIX e começo do século XX, com o surgimento e avanço da mecânica quântica, bem como com o avanço dos estudos dos fenômenos não-lineares o determinismo científico foi contestado, sendo que, independentemente de quão poderosa seja essa *inteligência* prevista por Laplace, jamais o conhecimento futuro seria como aquele almejado pelo mesmo.

Em 1886, o rei da Suécia e da Noruega propôs um desafio para os cientistas da época: provar (ou refutar) a estabilidade do sistema solar. O vencedor do concurso foi Poincaré (1854-1912) que apesar de não conseguir afirmar sobre a estabilidade propriamente dita, mostrou ser impossível resolver qualquer problema dinâmico com três corpos ou mais. Com o avanço da

computação, na segunda metade do século XX, Lorenz (1917 -2008) conseguiu, pela primeira vez, mostrar que determinados problemas apresentam comportamento caótico e em 1963 apresentou seu famoso artigo com um compilado das informações que havia obtido até então sobre os movimentos caóticos e sistemas não-lineares [23]. No que diz respeito aos fenômenos não-lineares, eles dão origem aos sistemas complexos e caóticos, tal qual o sistema estudado no presente trabalho. Para análise desses sistemas é importante o entendimento dos conceitos que seguem nas próximas seções.

## 1.1 Definições e propriedades

Sistemas dinâmicos podem ser definidos como regras matemáticas que delimitam a evolução (temporal) de determinadas variáveis do seu interesse. Tal evolução pode ocorrer de forma contínua e neste caso tem-se os fluxos, representados por equações diferenciais, ou ainda podem acontecer de forma discreta, desta forma tem-se os mapas, representados por equações de diferença [24]. Para melhor entendimento ou análise de um sistema dinâmico é importante o uso do chamado espaço de fase que pode ser definido como um espaço abstrato onde suas dimensões representam as variáveis (generalizadas) do sistema. Como caso mais conhecido, dentro do formalismo Hamiltoniano, o espaço de fase é formado pelo momento (generalizado) e posição (generalizada) [25].

Outro ponto importante no que diz respeito à análise de sistemas dinâmicos consiste no entendimento sobre a estabilidade (ou não) do mesmo. No caso de sistemas discretos, ou mapas, é necessário o estudo dos pontos fixos dos mesmos. Um ponto fixo é definido como um ponto do mapa tal que ele mapeia a ele mesmo [24], ou seja:

$$f(x^*) = x^*. \quad (1.1)$$

Neste caso  $f$  representa o mapa em questão e  $x^*$  o ponto fixo.

Entretanto, o ponto fixo pode ser estável ou instável, ou seja, se escolhido uma condição inicial próxima à  $x^*$ , o sistema pode convergir para o ponto em questão e então  $x^*$  é dito estável, ou ainda o sistema pode divergir de  $x^*$  e então o ponto é dito instável. Generalizando, pode-se escrever:

$$\Lambda \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*}, \quad (1.2)$$

onde se  $|\Lambda| < 1$  então o ponto fixo é estável e se  $|\Lambda| > 1$ , então o ponto fixo é dito instável [26]. O procedimento descrito acima é suficiente para analisar problemas unidimensionais, entretanto, para analisar problemas mais complexos (ou mesmo os que envolvem fluxos) é necessário recorrer ao uso da chamada matriz Jacobiana ( $\mathcal{J}$ ), que pode ser descrita como a matriz formada

pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial [24].

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

A equação (1.3) representa a matriz Jacobina de um sistema  $n$ -dimensional onde  $f$  pode representar o mapa em questão ou mesmo o fluxo. Para analisar o sistema com base na matriz  $\mathcal{J}$  basta calcular os autovalores ( $\omega$ ) de (1.3). Desta forma,

- o ponto é estável se o módulo da parte real de todos os  $\omega$  forem menores que 1 (analisado no ponto de interesse).
- o ponto é instável se o módulo da parte real de um ou mais  $\omega$  forem maiores que 1 (analisado no ponto de interesse).

Outro elemento importante dentro deste contexto é o atrator, que pode ser descrito como uma região do espaço de fase de volume nulo para onde as trajetórias do sistema dinâmico em questão migram com o passar do tempo [27]. Sistemas que possuem atratores podem ser considerados dissipativos, uma vez que a variação de volume do espaço de fase está ligada a (não)conservação de energia, desta forma, depois de um tempo suficientemente longo, todas as trajetórias migram para essa região de volume nulo [28]. Em sistemas caóticos, os atratores são ditos estranhos e sua dimensão é fractal [24]. Na figura (1) é possível ver a representação do famoso atrator do sistema de Lorenz (figura 1) [23].

No que diz respeito a sistemas caóticos, sabe-se que eles apresentam características específicas, tais como, sensibilidade extrema as condições iniciais, aperiodicidade e expoente de Lyapunov positivo [24, 27, 30]. Este último descreve como as trajetórias de dois pontos arbitrariamente próximos (condições iniciais, por exemplo) evoluem no tempo, se afastando, se aproximando ou mesmo mantendo duas distâncias originais. Para quantificar estes conceitos, pode-se supor que, inicialmente, a distância entre duas condições iniciais  $y_0$  e  $y'_0$  é dada por:

$$d_0 = |y'_0 - y_0|, \quad (1.4)$$

e que depois de  $t$  iteradas, a distância entre as trajetórias é dada por:

$$d_t = |y'_t - y_t|. \quad (1.5)$$

Desta forma, pode-se supor que a relação entre as distâncias dependa exponencialmente do número de iteradas  $t$ , logo pode-se escrever, considerando as condições iniciais

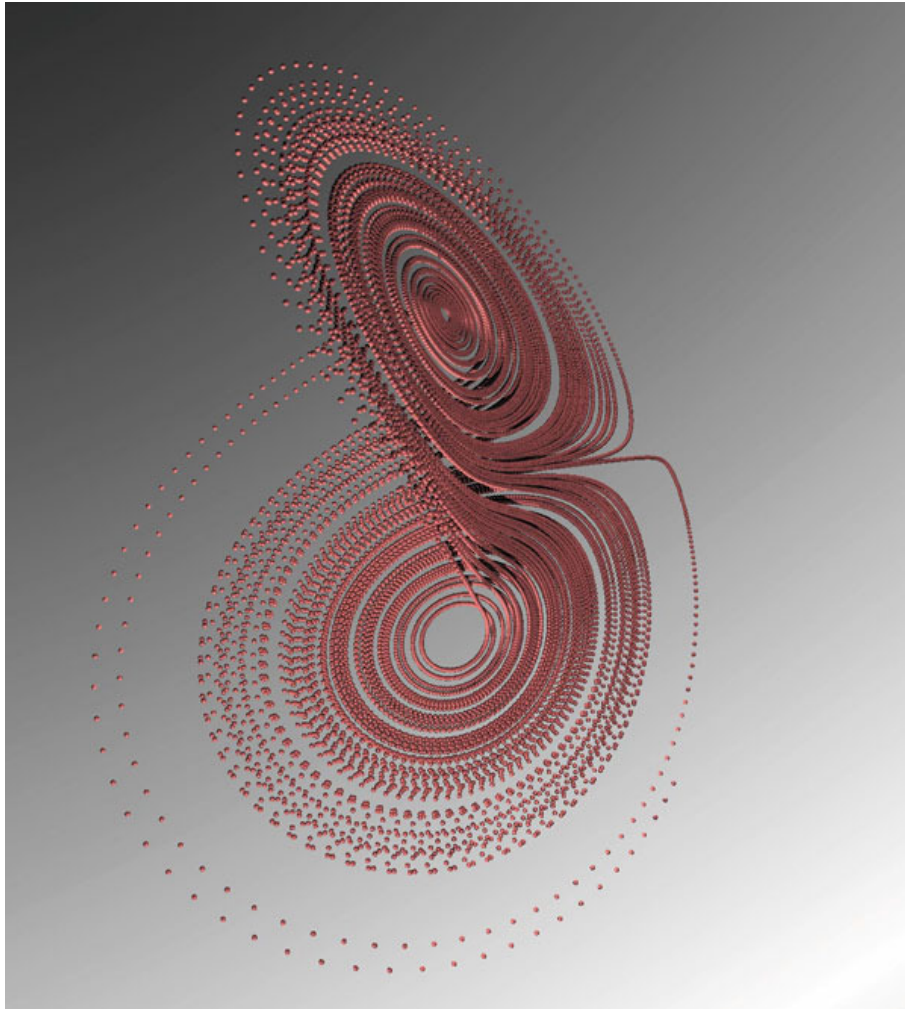


Figura 1 – Representação do atrator de Lorenz, tirado de [29].

arbitrariamente próximas e que muitas iteradas foram realizadas:

$$d_t = d_0 e^{\lambda t}, \quad (1.6)$$

onde  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov do sistema [30].

- Se  $\lambda > 0$  então as órbitas se afastam exponencialmente e o sistema é dito caótico.
- Se  $\lambda < 0$  então as órbitas se aproximam exponencialmente e tem-se ou pontos fixos ou órbitas periódicas.
- Se  $\lambda = 0$  então o sistema encontra-se em uma bifurcação.

Ainda sobre os sistemas caóticos, é importante para seu entendimento o conceito de bifurcação, sendo que uma das rotas que levam o sistema a se tornar caótico é conhecida como rota de duplicação de período, que ocorre, por exemplo, graças ao fenômeno de bifurcação [27] que pode ser entendido como o surgimento de novas órbitas. Uma ferramenta importante para

análise de sistemas dinâmicos é chamada de diagrama de bifurcação, que pode ser entendido como o *plot* de uma variável do sistema *versus* um parâmetro de controle de interesse do mesmo.

Nesse diagrama é possível ver para quais valores do parâmetro escolhido ocorre a criação de novas órbitas, sendo que o comportamento caótico é evidenciado quando o diagrama apresenta órbitas de infinitos períodos [24]. Como citado anteriormente, isso pode ocorrer por duplicação de períodos, de modo que formam-se cascatas de duplicação até que o comportamento caótico seja expresso. Na seção (2.4) é mostrado o diagrama de bifurcação para o modelo utilizado nessa pesquisa.

Dentro do estudo de sistemas dinâmicos, incluindo o presente trabalho, é de interesse a análise do comportamento do sistema em função dos chamados parâmetros de controle. Estes parâmetros são grandezas independentes do tempo, entretanto, sua variação causa alterações no comportamento do sistema, sendo que pode levar o sistema, inclusive, ao comportamento caótico. No trabalho atual, o parâmetro de controle usado para análise é o acoplamento entre os neurônios [18].



## 2 Modelos Neurais

No presente capítulo, constroem-se modelos de interesse para a dinâmica de uma célula neural e mostram-se as principais características e resultados das simulações dos mesmos, além dos principais fatores biológicos que interferem no funcionamento do sistema neural. Dessa forma, partindo do modelo capacitivo, obtém-se a condição de equilíbrio para o neurônio, conhecido como potencial de Nerst e então, utilizando a noção de circuito equivalente, obtém-se o famoso modelo de Hodgkin-Huxley. Considerando, por fim, a dependência em relação à temperatura por partes dos neurônios, além das contribuições por parte dos íons de cálcio, é possível chegar no modelo desenvolvido por Braun *et. al.*, o qual é utilizado para simulação neural neste trabalho.

### 2.1 Modelo Capacitivo

A unidade básica de uma rede neural é o neurônio que, na condição de célula, apresenta três regiões bem definidas: o meio intra-celular (que contém o núcleo e as organelas celulares), a membrana e o meio extra-celular. Para estudo do presente trabalho é de interesse as informações sobre a dinâmica da diferença de potencial a qual a membrana celular do neurônio é sujeita, pois este fato está diretamente ligado à condição de ativação ou não do mesmo. Para isso, é necessário analisar as três regiões. De um modo geral, existem cerca de  $\approx 10^{11}$  células neurais que podem ser classificadas de acordo com sua função, localização e até mesmo forma, as quais estão interconectadas através de  $\approx 10^{15}$  sinapses [1, 31].

Primeiramente, sabe-se que existem íons nos meios intra e extra-celular e que devido a diferença de concentração dos mesmos, ocorre a diferença de potencial associada à membrana celular do neurônio (entre a parte interior e exterior). É sabido que no meio interno existe (em maior quantidade), basicamente, o cátion  $K^+$  (potássio) e que no meio externo existem os cátions  $Na^+$  (sódio) e  $Ca^{2+}$  (cálcio) e o ânion  $Cl^-$  (cloro) [22].

O objetivo desse trabalho, como colocado anteriormente, consiste no estudo da dinâmica da rede. Dessa forma, o interesse maior em relação ao modelo se dá pela reprodução do comportamento dinâmico da diferença de potencial existente no(s) neurônio(s), ou seja, é de interesse a variação (temporal) da concentração dos íons - citados anteriormente - nas regiões interna e externa da célula.

O transporte iônico é um processo fundamental para a dinâmica de interesse, uma vez que a variação de concentração dos íons citados só acontece graças ao fato de que a membrana da célula possibilita a passagem (seletiva) dos mesmos. Isso ocorre pelo fato de que a membrana é composta de lipídios e proteínas e possui canais de passagem seletiva que conectam os meios

internos e externos [22, 32]. Geralmente, os modelos matemáticos consideram estes canais como específicos para cada íon e, dessa forma, é possível que ocorra o fluxo iônico específico no neurônio. Com isso, pode ocorrer citada a variação da concentração iônica e, conseqüentemente, a variação do potencial do neurônio. Partindo deste ponto, para estudo da dinâmica do potencial do neurônio é necessário estudar, primeiramente, o fluxo iônico sobre o mesmo.

Biologicamente, existem três fatores que influenciam a abertura ou não dos canais para os íons presentes no neurônio: a diferença de potencial sobre a membrana, neurotransmissores (na parte externa) e mensageiros internos (no meio interno) [33]. Entretanto, o que gera este gradiente, ou diferença de potencial, é o acúmulo de cargas dentro e fora do neurônio, que como citado anteriormente, ocorre devido a variação de concentração dos íons. Desta forma, pode-se fazer uma analogia entre o neurônio e um capacitor de placas paralelas, onde a membrana faz o papel de meio dielétrico e existe um campo elétrico associado ela por conta da diferença de potencial existente. Com isso, sob essa perspectiva, pode-se utilizar o conhecimento sobre circuitos elétrico [34] para modelagem da dinâmica neural.

Sabe-se que para um capacitor de placas paralelas, pode-se escrever:

$$q = \frac{AV}{d}\epsilon. \quad (2.1)$$

Além disso, pode-se definir:

$$C \equiv \frac{q}{V}. \quad (2.2)$$

Logo,

$$C = \frac{A}{d}\epsilon, \quad (2.3)$$

onde  $A$  é a área da placa,  $d$  a distância entre o meio interno e externo,  $\epsilon$  é a permissividade da membrana considerada,  $q$  a carga associada,  $C$  é a condutância e  $V$  a diferença de potencial sobre a mesma. Com isso, pode-se derivar (2.1) e substituir (2.3), lembrando que a derivada temporal da carga elétrica é definida como corrente elétrica ( $I$ ), com isso, chega-se em:

$$I = C \frac{dV}{dt}. \quad (2.4)$$

Por outro lado, o fluxo iônico também pode ser entendido como corrente elétrica, uma vez que, a rigor, existe uma variação temporal de carga. Para analisar a difusão dos íons através dos canais da membrana, pode-se utilizar a Lei de Fick (considerando uma dimensão apenas) [35]:

$$J_{\text{dif}} = -D_X \frac{d[X]}{dx}, \quad (2.5)$$

onde  $J_{\text{dif}}$  ( $\frac{\text{mol}}{\text{cm}^2\text{s}}$ ) é o fluxo iônico (devido a difusão do mesmo),  $[X]$  ( $\frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}$ ) representa a concentração de um íon genérico e  $D_X$  ( $\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ ) o coeficiente de difusão associado ao íon  $X$ .



Pode-se, então, utilizar a relação de Einstein [36]:

$$D_X = \frac{KT\mu_X}{q}, \quad (2.6)$$

onde  $K$  é a constante de Boltzmann,  $\mu_X$  é a mobilidade do íon genérico  $X$  e  $T$  é a temperatura absoluta do mesmo. Com isso, substituindo (2.6) em (2.5), tem-se que:

$$J_{\text{dif}} = -\frac{KT\mu_X}{q} \frac{d[X]}{dt}. \quad (2.7)$$

Entretanto, ao acontecer a difusão dos íons presentes nas células neurais, ocorre a concentração de cargas elétricas, ou seja, ocorre o fenômeno de polarização. Com isso, devido a esta divisão de cargas, surge um gradiente de potencial e, conseqüentemente, surge o campo elétrico associado, o qual faz com que estes íons sofram a ação de uma força elétrica. Desta forma, surge um novo fluxo de íons em consequência da força proveniente do campo elétrico. Pode-se, então, escrever este novo fluxo iônico - induzido - utilizando a versão microscópica da lei de Ohm [37]:

$$J_{\text{ind}} = -\mu_X z[X]E, \quad (2.8)$$

onde  $J_{\text{ind}}$  é o fluxo induzido de íons,  $z$  é a valência do íon considerado e o campo elétrico  $E$  pode ser escrito como:

$$E = \frac{dV}{dt}. \quad (2.9)$$

Logo,

$$J_{\text{ind}} = -\mu_X z[X] \frac{dV}{dt}. \quad (2.10)$$

## 2.2 Potencial de Nernst

Para a dedução do modelo utilizado no presente trabalho, é necessário a obtenção da equação que revela o potencial de repouso do neurônio. Para tal, deve-se analisá-lo na situação de equilíbrio. Com base nas equações deduzidas anteriormente, pode-se propor que o equilíbrio ocorrerá quando o fluxo induzido se anular com o fluxo de difusão [22], logo:

$$J_{\text{dif}} + J_{\text{ind}} = 0, \quad (2.11)$$

ou, substituindo (2.10) e (2.7), tem-se que:

$$\frac{KT\mu_X}{q} \frac{d[X]}{dt} = -\mu_X z[X] \frac{dV}{dt}, \quad (2.12)$$

ou ainda,

$$\frac{d[X]}{[X]} = -\frac{zq}{KT} dV. \quad (2.13)$$

Integrando do meio intracelular até o extracelular, tem-se que:

$$-V_X \frac{zq}{KT} = \ln \left( \frac{[X]_{\text{extra}}}{[X]_{\text{intra}}} \right). \quad (2.14)$$

Ou, por fim:

$$V_X = -\frac{KT}{zq} \ln \left( \frac{[X]_{\text{extra}}}{[X]_{\text{intra}}} \right), \quad (2.15)$$

onde  $V_X$  é a diferença de potencial sobre a membrana, ou ainda potencial de repouso, que também é conhecido como potencial de Nernst, uma vez que para obter a expressão (2.15) foi considerada a situação de equilíbrio da célula neural. Por sua vez, esta equação é conhecida como equação de Nernst, desenvolvida por Walther Nernst (1864 - 1941) no século XIX.

Vale notar que o desenvolvimento acima foi feito considerando um íon genérico  $X$ . Para, finalmente, escrever o fluxo iônico total  $J_{\text{total}}$  sobre a membrana do neurônio deve-se considerar os íons de interesse para o processo:

$$J_{\text{total}} = C \frac{dV}{dt} + J_{\text{Na}} + J_{\text{K}} + J_{\text{Cl}}, \quad (2.16)$$

onde  $J_{\text{Na}}$ ,  $J_{\text{K}}$  e  $J_{\text{Cl}}$  representam o fluxo dos íons de sódio, potássio e cloro, e sua expressão pode ser escrita como:

$$J_X = G_X(V - V_X), \quad (2.17)$$

onde  $X$  representa um íon genérico (como anteriormente),  $G_X$  a condutância (por área) do íon  $X$  e  $V_X$  é dada pela equação de Nernst (2.15), já desenvolvida.

## 2.3 Modelo de Hodgkin-Huxley

O modelo de Hodgkin-Huxley (1952) foi pioneiro na descrição da dinâmica neural por meio de equações matemáticas. Para tal, o modelo considera que a membrana do neurônio pode ser entendida através de um circuito equivalente composto por capacitores e resistores. Como colocado anteriormente, a membrana em si pode ser considerada como um meio dielétrico de modo que a concentração de cargas (devido aos íons) gere um campo elétrico de tal forma que a analogia com um capacitor de placas paralelas é válida. Nesse sentido, pode-se entender os canais iônicos como resistores, os quais apresentam características (condutâncias) que dependem do íon considerado.

Com isso, pode-se utilizar as equações deduzidas na seção anterior e associar um fluxo de corrente devido a cada íon e seu respectivo canal. A partir deste ponto, pode-se utilizar a equação do capacitor para modelar a dinâmica do potencial sobre a membrana celular. Desta forma, baseando-se na equação (2.16), obtém-se a seguinte expressão:

$$C_m \frac{dV}{dt} = -J_{\text{Na}} - J_{\text{K}} - J_{\text{I}} + J, \quad (2.18)$$

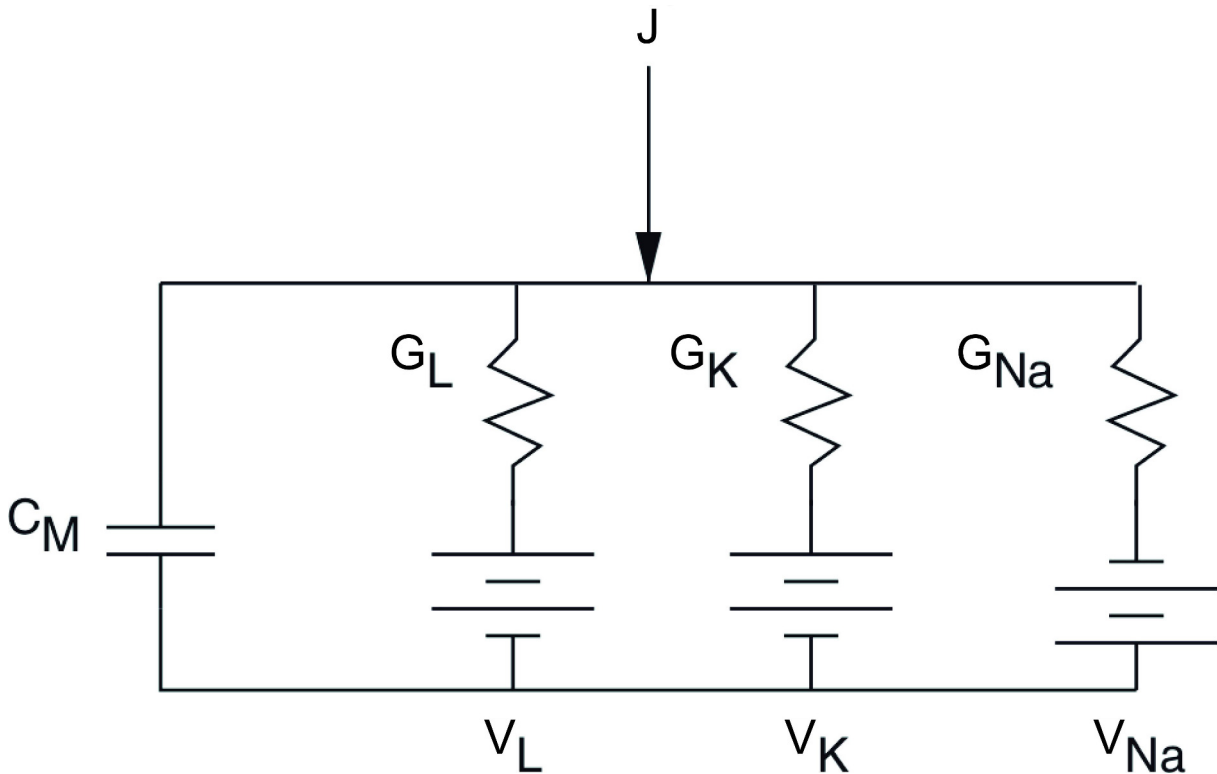


Figura 2 – Representação do circuito equivalente de Hodgkin-Huxley, considerando neste caso três canais iônicos.

onde,  $C_m$  é a capacitância da membrana (por unidade de área),  $J_{Na}$  é o fluxo devido ao íon de sódio,  $J_K$  é o fluxo devido ao íon de potássio,  $J_l$  é o chamado fluxo de vazão, ou seja, representa o fluxo dos demais íons e substâncias cuja condutância pode ser considerada constante (atualmente, sabe-se que essa corrente se dá basicamente pelos íons de cloro  $Cl^-$ ), e por fim,  $J$  representa o fluxo de corrente devido a estímulos externos ao neurônio em questão, o qual pode ser entendido como a contribuição dos demais neurônios da rede ou mesmo um estímulo produzido externamente à rede. Utilizando agora a equação (2.17) e considerando o neurônio isolado, ou seja, sem estímulos externos, pode-se escrever:

$$C_m \frac{dV}{dt} = -G_{Na}(V - V_{Na}) - G_K(V - V_K) - G_l(V - V_l), \quad (2.19)$$

onde o  $G_{Na}$ ,  $G_K$  e  $G_l$  representam as condutâncias (por unidade de área) e, por outro lado,  $V_{Na}$ ,  $V_K$  e  $V_l$  os potenciais de repouso de cada íon, que são dados pela equação de Nernst.

Um dos principais problemas enfrentados no início do modelo foi a determinação da condutância de cada íon, uma vez que ela possui uma dinâmica temporal própria e os modelos e equações que existiam até então consideravam apenas valores de condutância constante (não dependentes da diferença de potencial aplicada). Entretanto, com o avanço da ciência, foi possível a obtenção de dados experimentais por meio da análise da membrana do axônio de uma lula [9–11] e então determinar as equações que governam o comportamento das condutâncias.

Para solucionar este problema, Hodgkin e Huxley propuseram a existência de um

sistema de chaveamento que controla a ativação ou não-ativação de um determinado canal. Para o caso do potássio, esse sistema se dá com base na probabilidade da presença de um agente de abertura no canal ( $n$ ). Usando os dados experimentais dos trabalhos acima citados, os autores encontraram a expressão que melhor se adequava aos mesmos:

$$G_K = n^4 \bar{G}_K. \quad (2.20)$$

Por outro lado, é necessário agora determinar a dinâmica de  $n$ , uma vez que o mesmo depende da diferença de potencial aplicada à membrana. Os autores introduziram novas variáveis ligadas ao estado de ativação e não-ativação, logo, se  $n$  é a probabilidade da presença de um agente de ativação,  $1 - n$  tem sentido antagônico. Segue daí que:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n. \quad (2.21)$$

A obtenção dos valores de  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  só foram possíveis através de resultados experimentais [9, 38] e seguem na tabela (1).

No que diz respeito ao íon de sódio, o procedimento foi semelhante. Entretanto, além do agente de ativação, ocorre um fenômeno relacionado à inativação, mesmo quando a célula está despolarizada. Por conta disso, para o íon  $\text{Na}^{2+}$  existe o fator  $m$ , ligado à probabilidade de existir um agente de ativação e o fator  $h$ , ligado à probabilidade de existir um agente de inativação. Usando as mesmas ideias acima descritas, pode-se escrever então:

$$G_{\text{Na}} = m^3 h \bar{G}_{\text{Na}}, \quad (2.22)$$

onde os fatores são regidos pelas equações que seguem:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m, \quad (2.23)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h. \quad (2.24)$$

Novamente, os valores de  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $\alpha_h$  e  $\beta_h$  foram obtidos com base nos dados experimentais [9, 38] e estão na tabela (1).

Desta forma, pode-se reescrever a equação (2.19), adicionando o termo de contribuição referente aos estímulos dos neurônios vizinhos, obtendo assim, a equação principal do modelo de Hodgkin-Huxley:

$$C_m \frac{dV}{dt} = -n^4 \bar{G}_K (V - V_K) - m^3 h \bar{G}_{\text{Na}} (V - V_{\text{Na}}) - \bar{G}_1 (V - V_1) + J. \quad (2.25)$$

Lembrando que  $G_1$  foi considerado constante, logo  $G_1 = \bar{G}_1$ . Desta forma, o modelo de Hodgkin-Huxley pode ser resumido nas equações (2.21), (2.23), (2.24) e (2.25) juntamente com os dados das tabelas (1) e (2).

$\alpha_n(V) = 0,01 \frac{V+55}{1-\exp\left(\frac{-(V+55)}{10}\right)}$	$V_K = -77,0 \text{ mV} \quad \bar{G}_K = 36,0 \frac{\text{mS}}{\text{cm}^2}$ $V_{Na} = 50 \text{ mV} \quad \bar{G}_{Na} = 120,0 \frac{\text{mS}}{\text{cm}^2}$ $V_l = -54,4 \text{ mV} \quad \bar{G}_l = 0,3 \frac{\text{mS}}{\text{cm}^2}$
$\beta_n(V) = 0,125 \exp\left(\frac{-(V+55)}{80}\right)$	
$\alpha_m(V) = 0,10 \frac{V+40}{1-\exp\left(\frac{-(V+40)}{10}\right)}$	
$\beta_m(V) = 4 \exp\left(\frac{-(V+65)}{18}\right)$	
$\alpha_h(V) = 0,07 \exp\left(\frac{-(V+65)}{20}\right)$	
$\beta_h(V) = \frac{1}{1+\exp\left(\frac{-(V+35)}{10}\right)}$	

Tabela 1 – Valores para os parâmetros  $\alpha_X$  e  $\beta_X$  das equações mestras do Modelo de Hodgkin-Huxley

Tabela 2 – Valores para os potenciais de repouso e condutâncias máximas para os íons de interesse do Modelo de Hodgkin-Huxley.

Na figura (3), pode ser visto um exemplo da dinâmica neuronal chamado de *spike* ou disparo, obtido a partir da integração computacional do modelo acima descrito sob condições específicas de estímulo externo. Pode-se perceber através desta figura que a dinâmica neuronal é caracterizada inicialmente com a condição de potencial de repouso - que é caracterizada pela inatividade da célula - e, após um mecanismo interno, ocorre a abertura dos canais iônicos e a consequente polarização da célula. Com isso, pode-se perceber que a diferença de potencial cresce caracterizando a atividade neural. Por fim, ocorre a despolarização com o fechamento dos canais iônicos e então o neurônio volta ao seu estado de repouso.

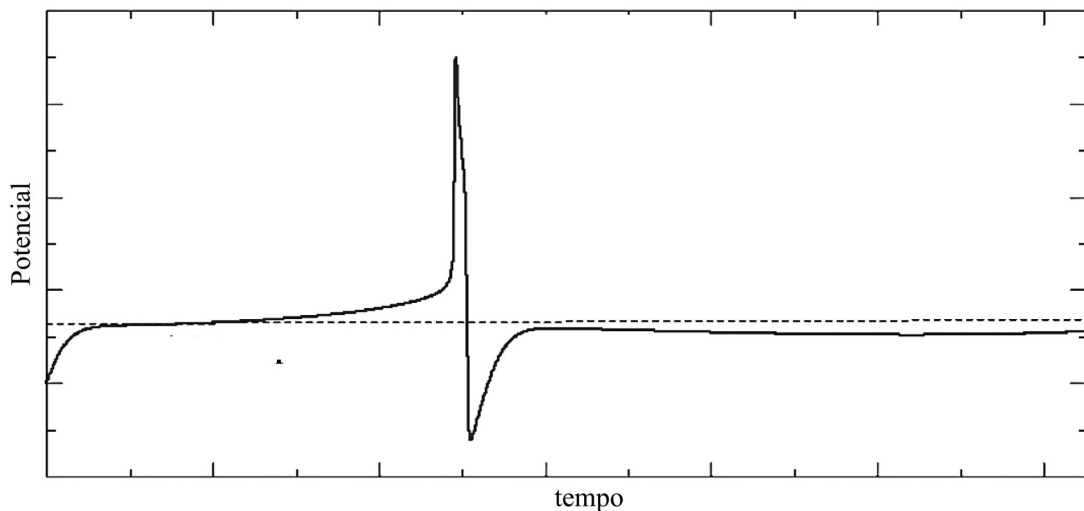


Figura 3 – Exemplo de resultado obtido através do modelo de Hodgkin-Huxley com a adição de um estímulo externo.

Nesse ponto, é importante colocar que durante o desenvolvimento do modelo os pesquisadores já haviam notado que a temperatura exercia grande influência nos resultados experimentais (para os apresentados acima, a temperatura foi de aproximadamente 6,3°C), entretanto, apenas no modelo que segue na próxima seção esse quesito foi melhor abordado. Também é necessário se ater aos fatores limitantes do modelo de Hodgkin-Huxley, uma vez que o fator geométrico não foi amplamente abordado (a modelagem considera apenas capacitores de placas paralelas) e também foi considerado que o canal iônico é exclusivo ao seu respectivo íon, fato que se sabe que não é completamente correto e, por fim, não foi considerada a interação entre os íons, fator presente nos processos reais. De qualquer forma, o modelo consegue reproduzir ótimos resultados e se mostrou pioneiro na área, tanto que, como citado anteriormente, rendeu aos seus autores o prêmio Nobel [12].

## 2.4 Neurônio termicamente sensível

O modelo de Hodgkin-Huxley, descrito acima, se mostrou muito eficaz e com uma sólida base fisiológica e experimental. Entretanto, este modelo não consegue descrever todos os tipos de comportamentos neurais verificados experimentalmente. A dinâmica descrita pelo modelo de Hodgkin-Huxley é conhecida como “disparos” ou *spikes*, que consiste em uma atividade neural de transferência de informação - como demonstrado pela figura (3). Porém, existem outros comportamentos dinâmicos verificados experimentalmente no que diz respeito as redes neurais [39].

O modelo desenvolvido por Braun *et. al.* pode ser entendido como uma modificação do modelo de Hodgkin-Huxley, uma vez que considera a dependência dos neurônios em relação à temperatura e, ainda, nas equações que descrevem o modelo atual [8] existem, além dos termos dos fluxos iônicos presentes no modelo anterior, outros dois fluxos iônicos relacionados ao cálcio, os quais são responsáveis pelos novos fenômenos dinâmicos observados.

Este novo comportamento dinâmico observado via modelo de Braun *et. al.* é conhecido como “sequência de disparos” ou *bursting*, que consiste em uma sequência de disparos e posterior período quiescente, como se os canais iônicos fossem impedidos de entrar no estado de inativação após o primeiro disparo- como ocorre no fenômeno de *spike* - e somente o fazendo após uma sequência dos mesmos.

É importante chamar atenção ao fato de que esse comportamento de sequência de disparos, ou *bursting*, foi verificada experimentalmente em certas células neuronais de ratos [40], bagres de água doce [41] e lagostas [42]. Além disso, o mesmo comportamento pode ser verificado (com o estímulo certo) em neurônios piramidais lamocorticais do tálamo [6]. De forma geral, sabe-se que é possível transmitir uma maior quantidade de informação em um *burst* do que em um simples *spike*.

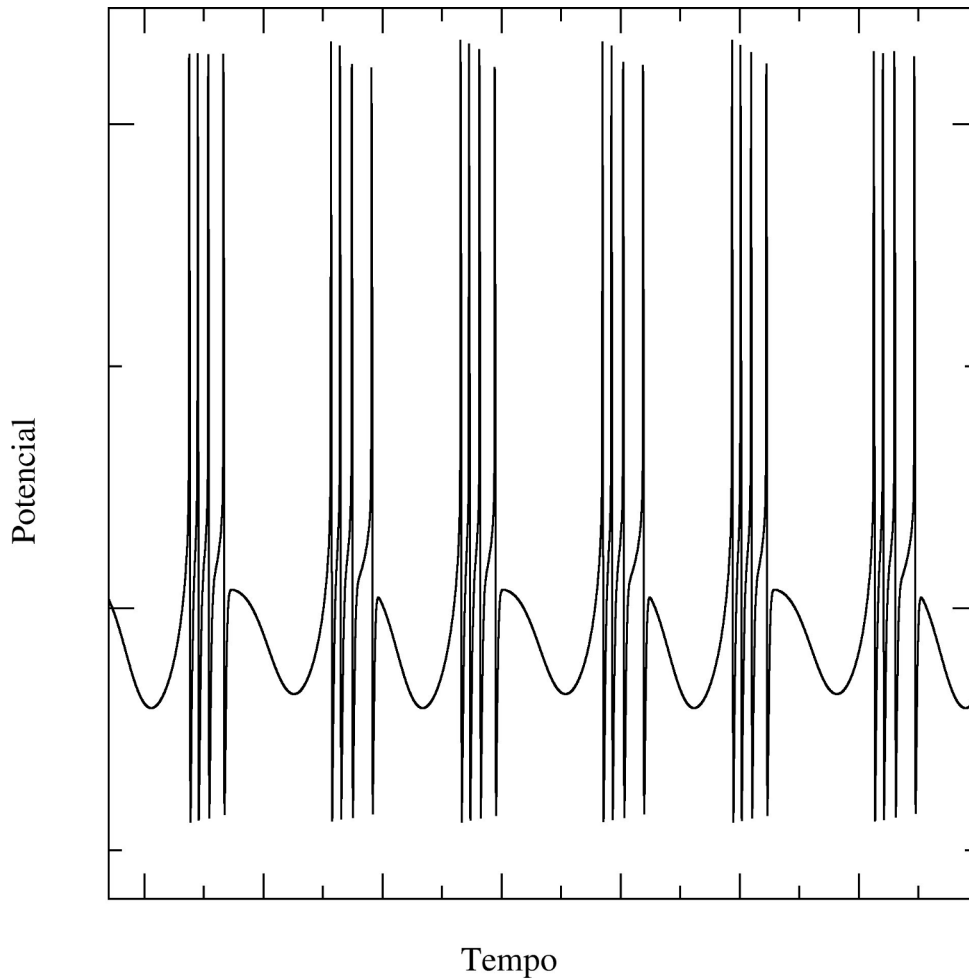


Figura 4 – Exemplo da dinâmica de *bursts* produzido pelo modelo de Braun *et. al.*. Pode-se perceber que existe um sequência rápida de disparos seguida de um período quiescente.

O modelo utilizado no trabalho é capaz de reproduzir diversos tipos de comportamentos (entre *spikes* e *bursts*). Tal comportamento é dependente da temperatura do sistema. É possível ver isso em simulações para diferentes temperaturas [43], bem como, através do diagrama de bifurcação para os intervalos entre disparos (ISI) para o modelo em questão. É fácil perceber que existe uma região com comportamento simples e que, a partir de determinada temperatura, o sistema começa a apresentar comportamento caótico.

Matematicamente, o modelo desenvolvido por Braun *et. al.* se baseou no modelo de Hodgkin-Huxley, dessa forma, utiliza-se a modelagem a partir das equações de capacitor de placas planas, considerando a membrana como meio dielétrico e os canais iônicos como resistores. Finalmente, pode-se representar o modelo de utilizado no trabalho pelas equações que seguem:

$$C_m \frac{dV}{dt} = -J_{Na} - J_K - J_{sd} - J_{sa} - J_l + J, \quad (2.26)$$

onde os termos novos em relação ao modelo de Hodgkin-Huxley são  $J_{sd}$  e  $J_{sa}$  que estão associados aos íons de cálcio, os quais, posteriormente, estão relacionados ao novo fenômeno dinâmico observado. Ambos os fluxos são responsáveis pelo disparo dos neurônios mesmo

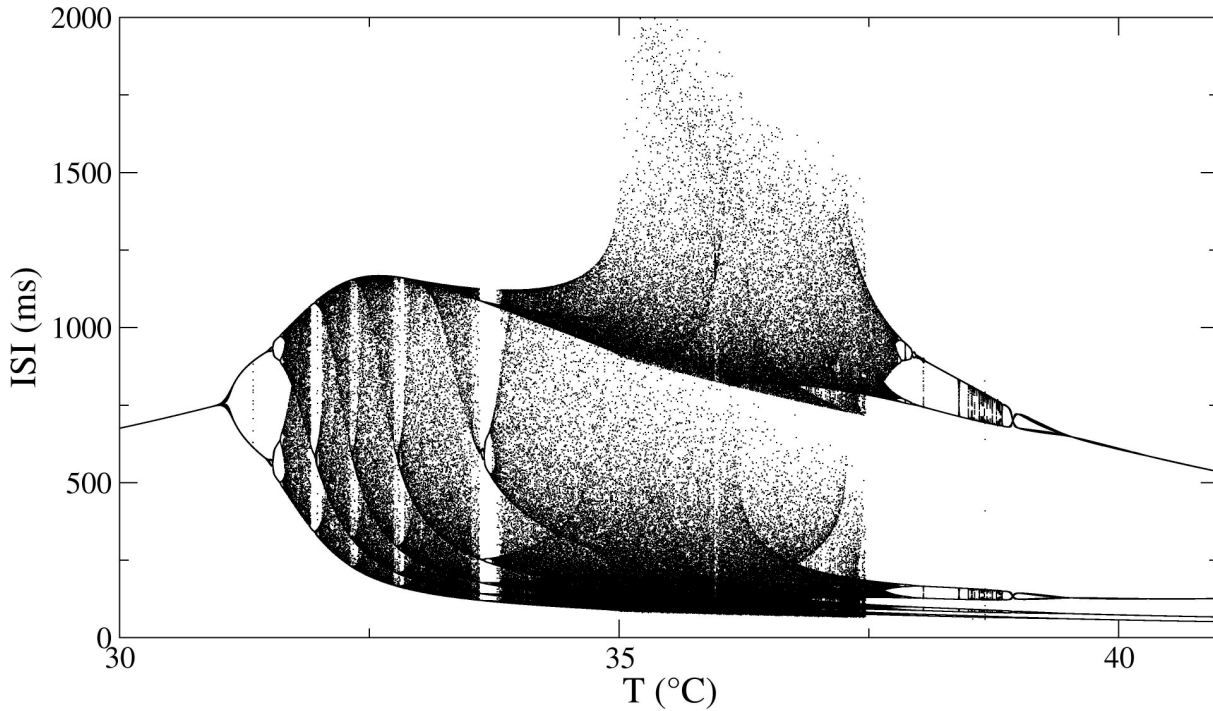


Figura 5 – Diagrama de bifurcação dos intervalos entre disparos (*ISI - Inter spikes interval*) para o modelo de Braun *et. al.*. Para este trabalho, os parâmetro de temperatura são alterados de modo a se adequar a realidade do cérebro humano ( $T \approx 38$  graus celsius).

quando os mesmos estão fora da condição propriamente dita para tal. diferentemente do modelo de Hodgkin-Huxley, onde um disparo é seguido de uma repolarização, no presente modelo a repolarização não ocorre (após o primeiro disparo) sendo que seguem disparos sequenciais antes do período de repouso.

Além dos termos novos, existem outras diferenças no que diz respeito à modelagem da dinâmica dos fluxos, uma vez que no modelo de HB os neurônios são termicamente sensíveis, ou seja, existem dependências explícitas com a temperatura. De qualquer modo, a modelagem segue ideias semelhantes ao do modelo anterior. Desta forma, as equações dinâmicas dos fluxos são dadas por:

$$J_{Na} = \rho \bar{G}_{Na} \alpha_{Na} (V - V_{Na}), \quad (2.27)$$

$$J_K = \rho \bar{G}_K \alpha_K (V - V_K), \quad (2.28)$$

$$J_{sd} = \rho \bar{G}_{sd} \alpha_{sd} (V - V_{sd}), \quad (2.29)$$

$$J_{sa} = \rho \bar{G}_{sa} \alpha_{sa} (V - V_{sa}), \quad (2.30)$$

$$J_l = \bar{G}_l (V - V_l), \quad (2.31)$$



$$\rho = \rho_0 \frac{(T-T_0)}{\tau_0} . \quad (2.32)$$

Neste caso,  $\overline{G}_X$  são as condutâncias que, juntamente com o coeficiente  $\rho$  - que depende da temperatura  $T$  e dos valores de referência  $T_0$ ,  $\rho_0$  e  $\tau_0$  - e as funções de ativação  $\alpha_X$ , fazem a modelagem dinâmica das correntes  $J_X$ . (Neste caso  $X$  representa Na, K, sd, sa ou I).

Seguindo as ideias do modelo anterior, as funções de ativação também seguem uma dinâmica própria cujas equações são descritas por:

$$\frac{d\alpha_{Na}}{dt} = \frac{\phi}{\tau_{Na}} (\alpha_{Na,\infty} - \alpha_{Na}), \quad (2.33)$$

$$\frac{d\alpha_K}{dt} = \frac{\phi}{\tau_K} (\alpha_{K,\infty} - \alpha_K), \quad (2.34)$$

$$\frac{d\alpha_{sd}}{dt} = \frac{\phi}{\tau_{sd}} (\alpha_{sd,\infty} - \alpha_{sd}), \quad (2.35)$$

$$\frac{d\alpha_{sa}}{dt} = \frac{\phi}{\tau_{sa}} (\eta J_{sd} - \gamma \alpha_{sa}). \quad (2.36)$$

Neste ponto,  $\eta$  e  $\gamma$  são fatores de controle da quantidade de cálcio  $Ca^{2+}$  (aumento e diminuição, respectivamente) [18], uma vez que existem interpretações para o fenômeno de *burst* como consequência da presença do íon de cálcio ( $Ca^{2+}$ ) no sistema [44].

É importante observar que o fator  $\phi$  expressa a dependência térmica das funções de ativação e pode ser escrito como:

$$\phi = \phi_0 \frac{T-T_0}{\tau_0} . \quad (2.37)$$

As variáveis  $\alpha_{Na,\infty}$ ,  $\alpha_{K,\infty}$ ,  $\alpha_{sd,\infty}$  representam os estados estacionários das variáveis de ativação, os quais estão relacionados à condição de saturação, e podem ser escritas como:

$$\alpha_{Na,\infty} = \frac{1}{1 + \exp[-s_{Na}(V - V_{Na})]}, \quad (2.38)$$

$$\alpha_{K,\infty} = \frac{1}{1 + \exp[-s_K(V - V_K)]}, \quad (2.39)$$

$$\alpha_{sd,\infty} = \frac{1}{1 + \exp[-s_{sd}(V - V_{sd})]}. \quad (2.40)$$

Os parâmetros utilizados no modelo estão na tabela (3), sendo que alguns são os mesmos que foram descritos no modelo de Hodgkin-Huxley.

De um modo geral, este é o modelo utilizado para obtenção de dados para desenvolvimento do presente trabalho. No capítulo (5), é detalhado o desenvolvimento do procedimento adotado para utilizar o modelo Braun *et. al.* no regime de pequeno mundo com 1024 neurônios.

$$C_m = 1,0 \mu \frac{F}{cm^2}$$

**Condutâncias** ( $\frac{mS}{cm^2}$ ):

$$\begin{array}{llll} \bar{G}_{Na} = 1,5 & \bar{G}_K = 2,0 & \bar{G}_{sd} = 0,25 & \bar{G}_{sa} = 0,4 \\ \bar{G}_l = 0,1 & & & \end{array}$$

**Tempos Característicos** (ms)

$$\tau_{Na} = 0,05 \quad \tau_K = 2,0 \quad \tau_{sd} = 10 \quad \tau_{sa} = 20$$

**Potenciais de reversão** (mV):

$$\begin{array}{llll} V_{Na} = 50 & V_K = -90 & V_{sd} = 50 & V_{sa} = -90 \\ V_l = -60 & V_{0Na} = -25 & V_{0K} = -25 & V_{0sd} = -40 \end{array}$$

**Outros parâmetros:**

$$\begin{array}{llll} \eta = 0,012 \mu A & \phi_0 = 3,0 & T_0 = 50^\circ C & \tau_0 = 10^\circ C \\ \gamma = 0,17 & \rho_0 = 1,3 & s_{Na} = 0,25 \frac{1}{mV} & s_K = 0,25 \frac{1}{mV} \\ s_{sd} = 0,09 \frac{1}{mV} & & & \end{array}$$

Tabela 3 – Valores dos parâmetros utilizados no presente trabalho para os cálculos numéricos por meio do modelo de neurônios de Hodgkin-Huxley termicamente sensíveis.

### 3 Redes

O estudo de redes vem se mostrando cada vez mais importante para entendimento de fenômenos de diferentes áreas do conhecimento. Matematicamente, a responsável por esse estudo é a teoria de grafos. Historicamente, o trabalho pioneiro desta área foi desenvolvido por Leonhard Euler (1707 - 1783). Este famoso problema, conhecido também por problema de Königsberg, consiste em atravessar todas as sete pontes da cidade que dá origem ao nome do problema, sem repetir nenhum dos caminhos já escolhidos. Em 1736, Euler mostrou, de forma rigorosa no que diz respeito a matemática, que era impossível o fato almejado pelo problema, constituindo assim as bases do que atualmente é utilizado no estudo de redes. Posteriormente, Carl Hierholzer (1840 - 1871) revisitou este problema e corroborou os resultados de Euler.

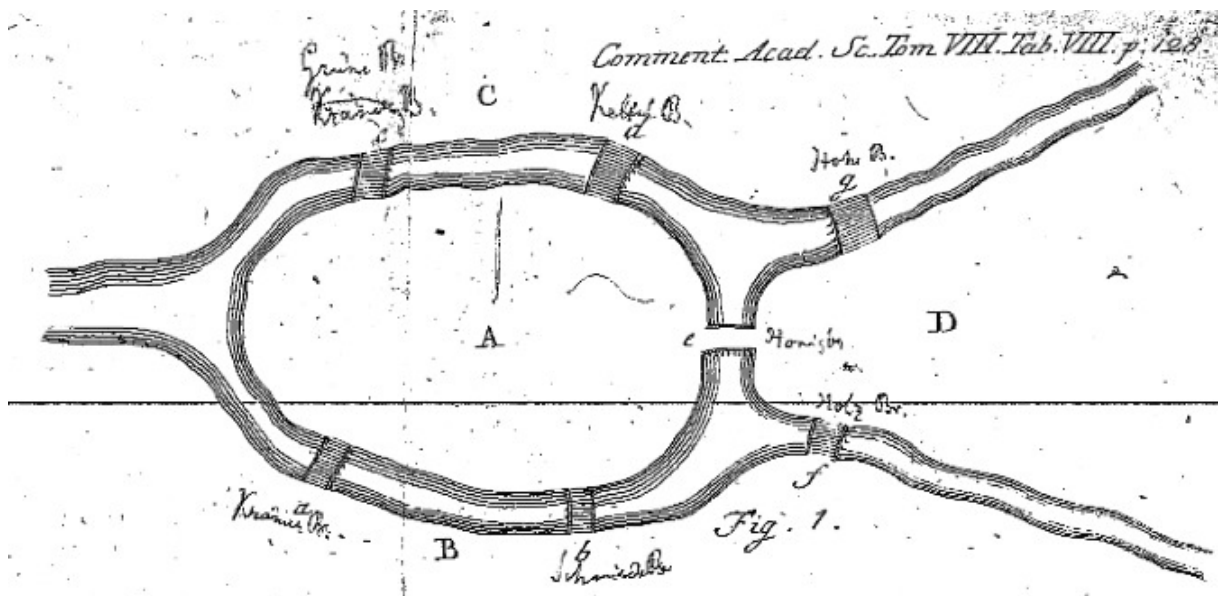


Figura 6 – Ilustração das pontes de Königsberg - Tirado de [45].

Atualmente, existe muitos trabalhos que estudam sistemas complexos [2, 3]. Estes sistemas podem ser entendidos como aqueles em que o comportamento dinâmico global é distinto (em geral, mais diverso) que a somatória dos comportamentos individuais. A abrangência desse tipo de sistema é tal que os estudos daí derivados contemplam assuntos climáticos, sociais, financeiros e até biológicos (a exemplo do trabalho atual). Muitos desses sistemas funcionam sem um fator centralizador, ou seja, sua dinâmica depende apenas dos comportamentos do seus elementos individuais que, como colocado acima, a despeito de serem simples, podem resultar em comportamentos (globais) muito complexos [4, 31, 46], neste sentido, tal fenômeno é conhecido como comportamento emergente [4]. Por outro lado, os conhecimentos relacionados às redes são importantes para análises desse sistemas dinâmicos, uma vez que existem ganhos conceituais, operacionais e informacionais com a utilização das mesmas [47], pois na literatura

existe uma diversidade considerável de conhecimento sobre redes, ao passo que constituem um assunto geral e muitos sistemas específicos podem ser entendidos através desse viés. O presente trabalho pode ser considerado um grande exemplo nesse sentido, uma vez que o cérebro pode ser entendido como uma grande rede complexa, visto que o comportamento individual da unidade neural é relativamente simples em comparação com as características apresentadas pelo cérebro como um todo. Tal fato é explorado na sequência do trabalho, sendo que é mostrado que a rede apresenta comportamentos “não-triviais” e com grande riqueza dinâmica.

### 3.1 Características Gerais

Uma rede pode ser entendida como um conjunto de elementos (sítios ou nodos) que possuem determinadas conexões entre si. Tais conexões podem (ou não) representar quantidades físicas, no sentido de que dentro de uma rede, uma conexão pode ser entendida como distância entre dois nodos ou, simplesmente, o fato de existir uma conexão entre os sítios de interesse. As redes podem ser classificadas como direcionais ou não-direcionais. As primeiras são entendidas como uma rede onde um determinado sítio pode estar ligado a outro e isso não implica que este outro sítio esteja conectado ao primeiro, ou seja, existe uma direção de conexão preferencial e não um caso de reciprocidade de conexão. As redes não-direcionais são aquelas onde o comportamento recíproco é presente. Nesse sentido, se um determinado sítio está conectado a outro, então este segundo também está conectado ao primeiro. Nas figuras (7) e (8) é possível observar a representação dessas redes.

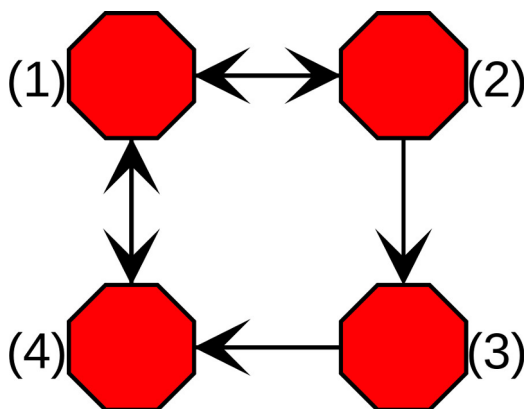


Figura 7 – Exemplo de rede direcional.

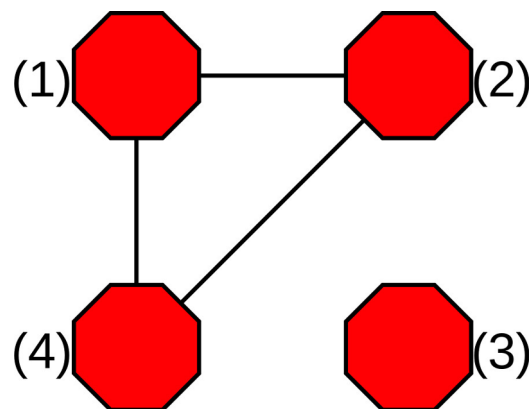


Figura 8 – Exemplo de rede não direcional.

Outra forma de entender e interpretar uma rede é através da matriz de conexão, ou matriz adjacente [48]. Os elementos  $a_{ij}$  dessa matriz são os responsáveis por indicar se o elemento  $i$  está ou não ligado ao elemento  $j$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Se } i \text{ está conectado com } j \\ 0, & \text{Se } i \text{ não está conectado com } j \end{cases} \quad (3.1)$$

Para este caso, não existe *peso* associado a cada conexão entre os sítios, ou seja, todos os nodos estão conectados da mesma forma. Se eventualmente, existe alguma interpretação física por trás da modelagem de rede (no que diz respeito a conexão entre os seus elementos) é necessário modificar a matriz de adjacência de modo a explicitar quais sítios estão conectados e de que maneira o fazem. Uma forma para isso é elencar *pesos* para as conexões de modo a diferenciar as características de cada conexão.

Abaixo seguem representações matriciais das redes representadas nas figuras (7) e (8). É possível verificar imediatamente a diferença entre uma rede direcional ( $A$ ) e outra não-direcional ( $B$ ), uma vez que a segunda destas é representada por uma matriz simétrica, ou espelhada pela diagonal principal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Por meio apenas das matrizes  $A$  e  $B$ , é possível inferir que na primeira rede o sítio 1 está conectado com o 2 e o 4, o sítio 2 está conectado com o 1 e 3, o sítio 3 com o 4 e o sítio 4 está conectado com 1. Já na segunda rede, é possível ver que a matriz é espelhada pela diagonal (simétrica) sendo que o sítio 1 está conectado com o 2 (e vice-versa) e com o 4 (e vice-versa) e que o sítio 2 está conectado com o 4 (e vice-versa).

Nas páginas seguintes, são explicitadas definições e propriedades importantes para o entendimento das características resultantes das diferentes formas de conexão que os elementos de uma rede podem apresentar, ou seja, sobre sua topologia.

## 3.2 Propriedades da Rede

A forma como as conexões ocorrem em uma rede é um fator que revela uma grande quantidade de informação sobre a mesma e conseqüentemente sobre o sistema representado, sendo que, especificamente sobre redes neurais, sabe-se que as propriedades topológicas podem ser, muitas vezes, mais importantes para dinâmica do sistema que suas próprias características fisiológicas [1, 49]. Nesse sentido, uma primeira análise se dá através da distribuição de conectividade da rede. Tal ferramenta fornece informações sobre quantas conexões cada sítio recebe.

Matematicamente, basta contabilizar o número de conexões ( $Cn_i$ ) de cada nodo. Desta forma, é possível mapear a rede no que diz respeito aos sítios mais ou menos conectados e, como o nome sugere, inferir sobre o grau de conexão de cada sítio, obtendo assim a distribuição dos mesmos sobre toda a rede.

Outra informação relevante acerca de uma rede é chamada de livre caminho médio. A ideia expressa por essa ferramenta consiste na média das menores distâncias possíveis entre os sítios da rede [50]. Vale ressaltar que a distância entre o sítio  $i$  e o sítio  $j$  não está ligada àquela desenvolvida por Euclides e sim ao número de sítios existentes entre  $i$  e  $j$ . Seja  $L_{ij}$  a menor distância possível entre  $i$  e  $j$ , então o livre caminho médio pode ser escrito como:

$$\bar{L} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1, j=1}^N L_{ij}, \quad (3.4)$$

onde  $\bar{L}$  é o livre caminho médio da rede em questão e  $N$  é o número de sítios dessa rede. Pode-se, por exemplo, calcular o livre caminho médio da rede representada pela matriz  $A$  (equação 3.2). Contabilizando as menores distâncias possíveis entre os elementos da rede, pode-se fazer:

$$\begin{aligned} L_{12} = 1 \quad L_{13} = 2 \quad L_{14} = 1 \\ L_{21} = 1 \quad L_{23} = 1 \quad L_{24} = 2 \\ L_{31} = 2 \quad L_{32} = 3 \quad L_{34} = 1 \\ L_{41} = 1 \quad L_{42} = 2 \quad L_{43} = 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para este caso, usando a equação (3.4) é possível obter o valor de  $\bar{L} = 1,5$  para a rede representada pela matriz  $A$ . Esta informação sobre a topologia da rede é de grande importância para determinação das características importantes da mesma, que por sua vez tem grande influência sobre o comportamento dinâmico do sistema em questão.

Nesse sentido, pode-se avaliar também o coeficiente de aglomeração da rede. Este parâmetro, como o nome sugere, traz informações sobre a aglomeração (ou *clustering*) das conexões entre os sítios da mesma. De um modo geral, considerando apenas os vizinhos de um determinado nodo, o seu coeficiente de aglomerações é a fração das conexões efetivas em relação às suas conexões (locais) possíveis. Seja  $C_{\max,i}$  o número máximo de conexões locais que um sítio da rede pode ter, então, matematicamente, pode-se escrever

$$C_{\max,i} = \frac{k_i(k_i - 1)}{2}, \quad (3.6)$$

onde  $k_i$  é o número de vizinhos que o sítio  $i$  possui. Segue então que [50] o coeficiente de aglomeração do sítio  $i$  pode ser escrito como

$$C_i = \frac{Cn_i}{C_{\max,i}}, \quad (3.7)$$

onde  $C_i$  representa o coeficiente de *clustering* do sítio  $i$ , sendo que  $Cn_i$  denota o número de conexão do sítio  $i$ .

Para obter finalmente o coeficiente de aglomeração da rede como um todo ( $\bar{C}$ ), basta fazer a média dos coeficientes de aglomeração de todos os seus sítios pertencentes:

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (3.8)$$

Pode-se, por exemplo, obter o coeficiente de aglomeração da rede para a rede dada pela matriz  $A$ :

$$\begin{aligned} k_1 = 3 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 3 \quad k_4 = 3 \\ C_1 = 3 \quad C_2 = 3 \quad C_3 = 3 \quad C_4 = 3. \\ C_1 = \frac{2}{3} \quad C_2 = \frac{2}{3} \quad C_3 = \frac{1}{3} \quad C_4 = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Neste caso, usando a equação (2.8) chega-se que  $\bar{C} \approx 0,583$ .

### 3.3 Topologia da Rede

A topologia de uma rede pode ser entendida como as características e propriedades definidas a partir das conexões da mesma. Nesse sentido, as definições apresentadas na seção (3.2) auxiliam no entendimento das topologias de interesse. A respeito de redes neurais, sabe-se que existem indícios da formação de topologias do tipo de pequeno mundo, livre de escala e redes aleatórias [13–15, 51]. Ainda, é sabido que em ambas estas topologias, redes neurais apresentam transição a partir do caso dessincronizado para sincronizado em função do parâmetro de acoplamento [2, 16, 17] e, como explicitado anteriormente, os objetivos desse trabalho consistem no estudo do comportamento dinâmico de redes neurais para região de acoplamento fraco, bem como na transição para sincronização.

Em outros trabalhos [50, 52, 53], foi observado que em outros tipos de sistemas (neste caso, em redes sociais) é possível identificar elementos topológicos presentes nos modelos teóricos acima citados, em especial as características de *small-world* foram verificadas, sendo que os criadores do modelo deste regime (cuja abordagem é aqui utilizada) se basearam nestes trabalhos para idealização de sua proposta. Um dos pioneiros e mais interessantes trabalhos da área foi feito pelo psicólogo Stanley Milgram (1933 - 1984) em 1967 [53]. Neste trabalho, ele enviou quase uma centena de encomendas a determinadas pessoas em Omaha (EUA), sendo que em cada uma delas constava um informativo sobre qual deveria ser o destino final das mesmas (que no caso era uma pessoa que morava em Boston (EUA)). As informações dadas em cada encomenda sugeriam aos portadores do pacote que o enviassem para outra pessoa conhecida e que parecesse o mais próximo do destino final, entretanto, cada portador do pacote deveria registrar sua posse no informativo. Ao fim do experimento, dos 96 pacotes, 18 chegaram ao destino final, sendo que em média, cada encomenda passou por aproximadamente 6 pessoas antes do desfecho. Tal logística pode ser interpretada como uma rede, onde cada pessoa é vista como um nodo e o fato de ter sido enviado à pessoa mais próxima ao destino final pode ser

entendido como o menor caminho possível entre dois nodos. Dessa forma, como comentado anteriormente, outros pesquisadores se inspiraram e formaram um modelo teórico para uma rede com topologia de pequeno mundo.

Na sequência do trabalho, serão exploradas as características topológicas das redes citadas.

### 3.3.1 Redes Regulares

Uma rede é considerada regular quando todos os seus sítios possuem as mesmas características e propriedades (vide seção anterior). Nesse sentido, existem diferentes formas de se construir uma rede deste tipo. Basicamente, pode-se subdividir uma rede regular entre aquelas que possuem acoplamento local e acoplamento global. Esta última, como o próprio nome sugere, é uma rede onde cada sítio está conectado com todos os outros e assim cada sítio possui  $N(N - 1)$  conexões, sendo  $N$  o tamanho da rede. Já no que diz respeito ao acoplamento local, pode-se ter diferentes possibilidades para sua formação, sendo que a rede pode ser formada com conexão de primeiros vizinhos (onde o sítio  $i$  está conectado com o sítio  $i + 1$  e  $i - 1$ ) e assim, cada sítio possui 2 conexões locais como representado na figura (9), segundos vizinhos (onde o sítio  $i$  está conectado com o sítio  $i + 2$ ,  $i + 1$ ,  $i - 1$  e  $i - 2$ ), onde cada sítio possui 4 conexões locais como representado na figura (10) e assim por diante, chegando por fim na estrutura de rede global, como representado na figura (11).

Vale frisar, neste ponto, que este tipo de estrutura é encontrada em diferentes arranjos da natureza, como exemplo, pode-se citar arranjos atômicos e moleculares, observados em [54]. No que diz respeito às redes neurais, sabe-se que existem conexões locais e não-locais, sendo elas separadas em conexões químicas e elétricas. Pode-se utilizar o exemplo do organismo *C. elegans* que possui (quase) todas suas conexões mapeadas, sendo que muitas delas preservam características regulares [55].

### 3.3.2 Redes Aleatórias

A principal ideia acerca de redes aleatórias é encontrada no modelo de Erdős-Rényi (Paul Erdős (1913 - 1996); Alfred Rényi (1921 - 1970)) [56]. Para se obter uma rede aleatória de Erdős-Rényi basta construir as conexões entre os nodos da rede, de forma aleatória, segundo uma probabilidade (de que a conexão efetivamente exista)  $p_{er}$  [4]. O número de conexões  $n$  em uma rede com  $N$  nodos pode ser descrito como:

$$n = \frac{N(N - 1)p_{er}}{2}. \quad (3.10)$$

Ainda em uma rede com  $N$  nodos, onde  $N \gg 1$ , pode-se obter, analiticamente, o livre caminho médio e o coeficiente de aglomeração da mesma. Para isso, pode-se voltar ao



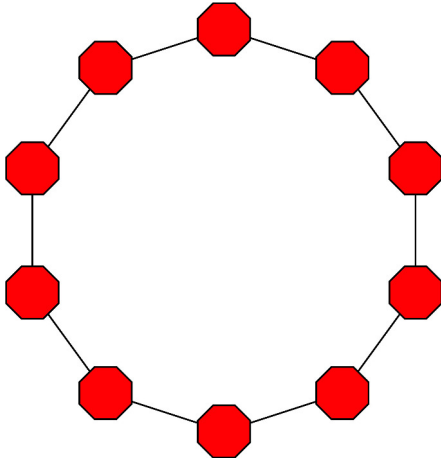


Figura 9 – Rede com acoplamento de primeiros vizinhos.

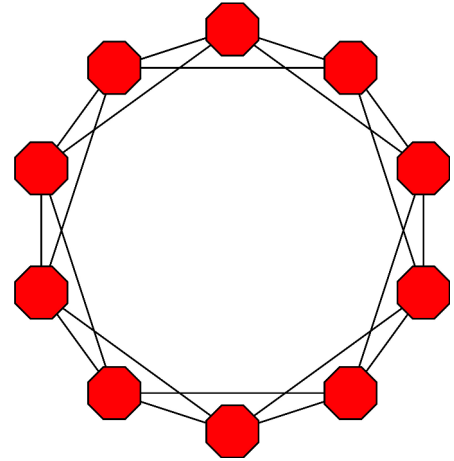


Figura 10 – Rede com acoplamento de segundos vizinhos.

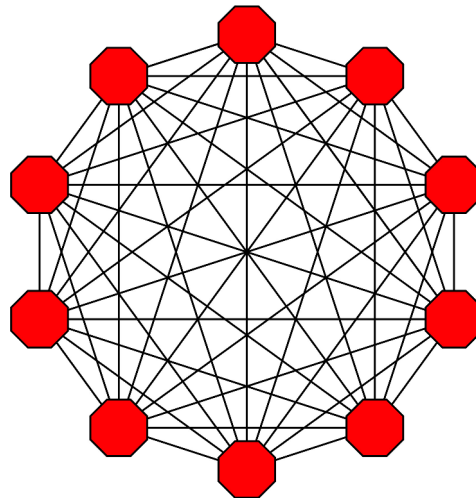


Figura 11 – Rede com acoplamento global.

conceito descrito nas seções anteriores sobre número de conexão por sítio e considerar a média dos mesmos na rede de interesse:

$$\overline{Cn} = \frac{1}{N} \sum_i^N Cn_i, \quad (3.11)$$

seja, agora

$$p_{er} \approx \frac{\overline{Cn}}{N}, \quad (3.12)$$

a probabilidade da existência de uma conexão aleatória entre dois sítios, então, usando as propriedades exibidas na seção (3.2), é possível mostrar que [4] o livre caminho médio e o coeficiente de aglomeração de uma rede aleatória são dados por:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{aleatório} &\approx \frac{\overline{Cn}}{N} \\ \overline{L}_{aleatório} &\approx \frac{\ln N}{\ln \overline{Cn}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3.3 Redes de Pequeno Mundo

O presente trabalho considera uma rede neural com 1024 neurônios cuja arquitetura de conexão se dá na forma de uma rede de pequeno mundo. Este tipo de topologia foi desenvolvido, originalmente, por Steven Strogatz (1959 - atual) e Duncan Watts (1971 - atual). Eles partiram de uma rede regular do tipo segundos vizinhos - que possui um coeficiente de aglomeração médio e livre caminho médio alto - (vide figura (10)) e a partir desta, definiram uma probabilidade de que a conexão existente entre dois nodos (vizinhos) seja desfeita e trocada por uma conexão com outro nodo aleatório [50]. Dessa forma, ao aumentar o valor da probabilidade de acontecer o fato acima citado, o livre caminho médio da rede é reduzido, pois conexões não locais começam a surgir. Sendo assim, pode-se obter uma rede de pequeno mundo, onde o coeficiente de aglomeração médio da rede continua alto e o livre caminho médio da mesma é reduzido. Obviamente, se a probabilidade de que as conexões locais sejam trocadas por conexões aleatórias continuar a crescer, o coeficiente de aglomeração médio da rede tende a diminuir, juntamente com o livre caminho médio. Desta forma, chega-se em uma rede do tipo aleatória. Para construir essa ideia, os autores se inspiraram em trabalhos empíricos acerca de redes sociais que podem ser visto em [52, 53]. Na figura (12) pode-se perceber a rota de Watts-Strogatz para construção das redes, ou seja, perceber o efeito do aumento do valor da probabilidade da troca de conexões e a mudança da topologia.

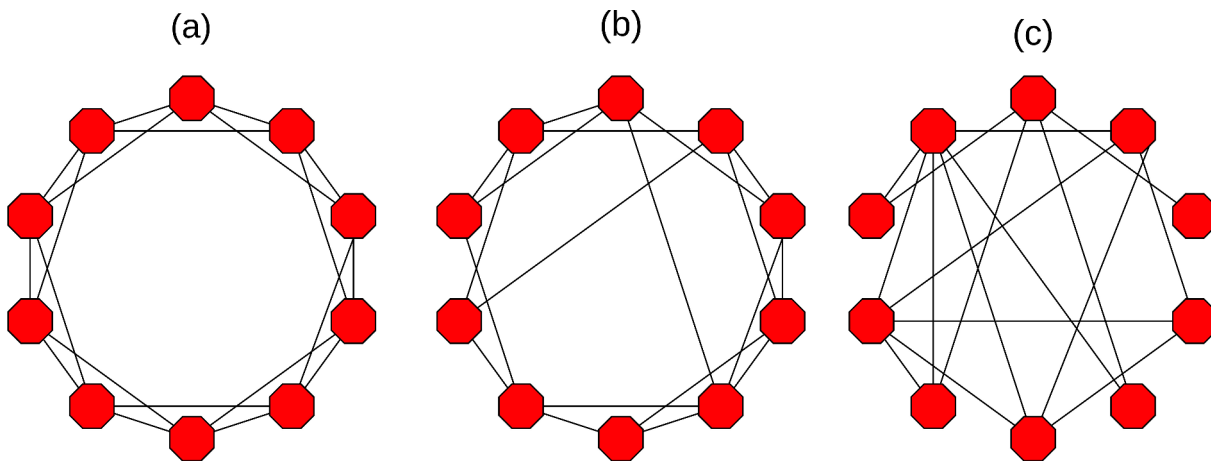


Figura 12 – Representação da rota de Watts-Strogatz: de (a) até (c) a probabilidade de ocorrer a troca de conexões é aumentada, sendo que (a) representa uma rede regular, (b) uma rede de pequeno mundo e (c) uma rede aleatória.

Outro tipo de rota para obtenção de uma rede do tipo *Small World* foi construída por Mark Newman, Duncan Watts e Steven Strogatz, conhecida por rota de Newman-Watts [57]. Este procedimento não prevê troca de conexões locais por conexões a nodos aleatórios, mas parte de uma rede com conexões locais (com os nodos vizinhos), normalmente regular, e para obtenção de uma rede do tipo de pequeno mundo, faz-se a adição de conexões não-locais (através de uma probabilidade de conexão  $p_{nl}$ ) as quais são responsáveis pela diminuição do valor do livre caminho médio da rede, resultando assim na topologia desejada. A principal diferença entre

a rota de Watts-Strogatz e Newman-Watts consiste no fato de que quando  $p_{er} = 1$  tem-se uma rede aleatória, sendo que se  $p_{nl}$  resulta-se em uma rede regular com acoplamento global, como pode ser visto nas figuras (12) e (13).

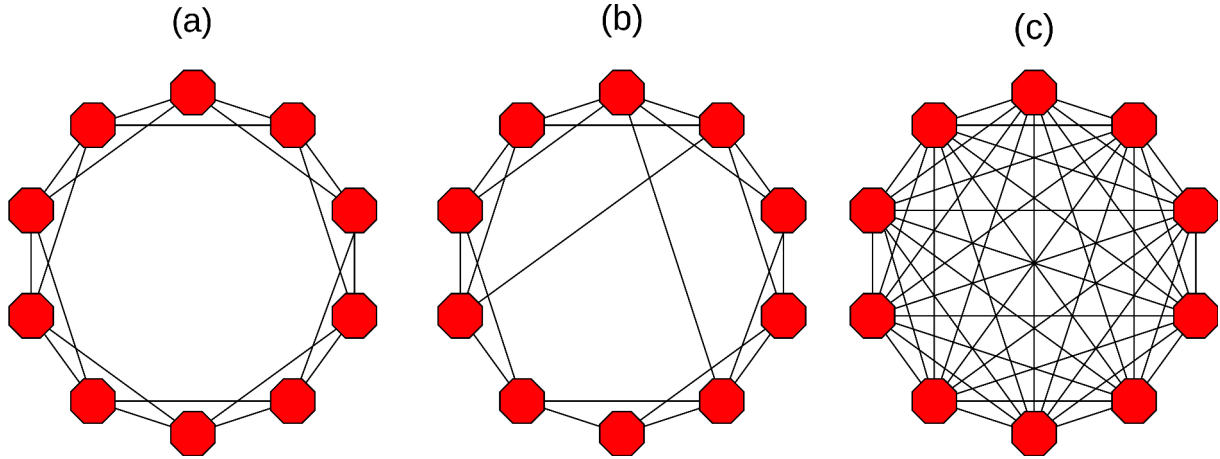


Figura 13 – Representação da rota de Newman-Watts: de (a) até (c) a probabilidade de ocorrer a troca de conexões é aumentada, sendo que (a) representa uma rede regular, (b) uma rede de pequeno mundo e (c) uma rede com acoplamento global.

Matematicamente, o número de conexões ( $n$ ) em uma rede de pequeno mundo, obtida por meio da rota de Newman-Watts pode ser escrito como:

$$n = n_l + \frac{N(N-1)p_{nl}}{2}, \quad (3.14)$$

onde  $n_l$  representa o número de conexões locais na rede.

De um modo geral, uma rede é considerada na condição de pequeno mundo, quando seu livre caminho médio é baixo e seu coeficiente de aglomeração é alto. Na figura (14) é possível observar as variáveis  $\bar{C}$  e  $\bar{L}$  para a rede utilizada no trabalho e desta forma garantir que a probabilidade escolhida para realização dos cálculos assegura que a mesma se encontra na topologia do tipo pequeno mundo, uma vez que a probabilidade da existência de uma conexão não-local para este trabalho foi de  $p_{nl} = 0,001$ , resultando em uma rede com 4096 conexões locais e 523 conexões não-locais. Para construção dessa figura é necessário calcular as relações:

$$\frac{\bar{C}(p)}{\bar{C}(p^*)}, \quad p^* \rightarrow 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\bar{L}(p)}{\bar{L}(p^*)}, \quad p^* \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

Entretanto, existe uma forma quantitativa para se garantir se a rede escolhida encontra-se no regime de pequeno mundo. Assim, pode-se definir uma variável de mérito (variável de pequeno mundo), tal que

$$\sigma \equiv \frac{\kappa}{\zeta}, \quad (3.17)$$

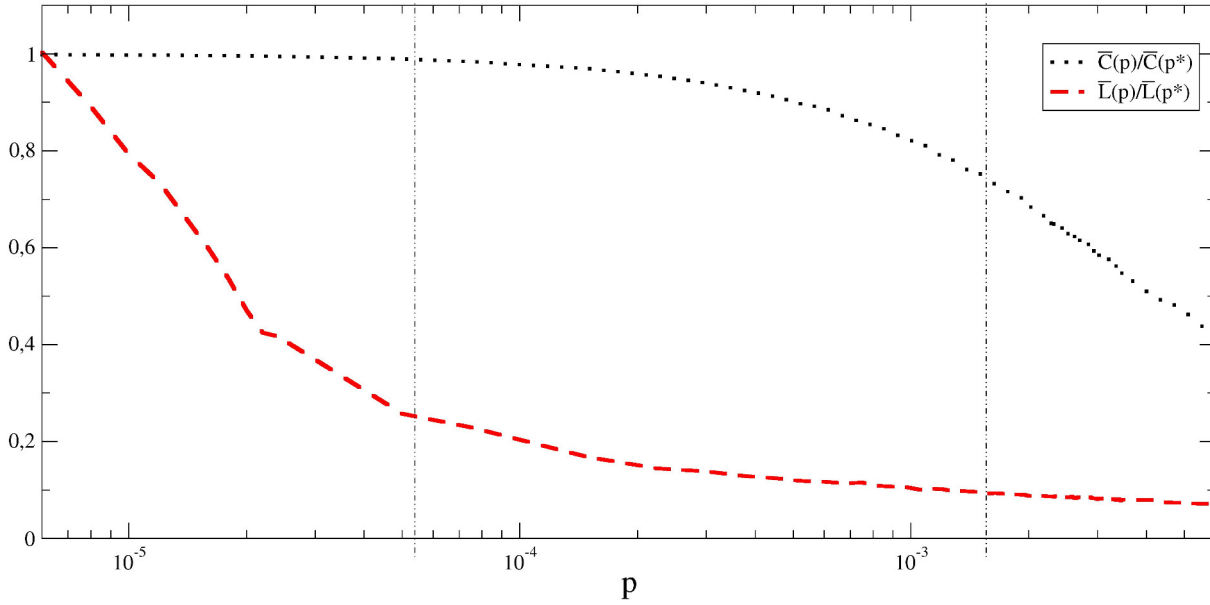


Figura 14 – Figura explicitando o livre caminho médio e o coeficiente de *clustering* para a rede utilizada neste trabalho (1024 elementos) mostrando as variáveis que definem o limite da região de pequeno mundo. Vale notar que a probabilidade escolhida para os cálculos no presente trabalho está contida nesta região, ou seja, com coeficiente de aglomeração alto e livre caminho médio baixo.

onde  $\kappa$  e  $\zeta$  representam as frações dos quantificadores de livre caminho médio e coeficiente de aglomeração médio da rede de interesse em relação a uma rede equivalente sob a condição de conectividade tal que a mesma seja considerada como aleatória. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\kappa = \frac{\bar{L}}{\bar{L}_{\text{aleatória}}}, \quad (3.18)$$

$$\zeta = \frac{\bar{C}}{\bar{C}_{\text{aleatória}}}. \quad (3.19)$$

Os valores de  $\bar{L}_{\text{aleatória}}$  e  $\bar{C}_{\text{aleatória}}$  são facilmente obtidos com auxílio das equações (3.13). No que diz respeito aos valores de  $\bar{L}$  e  $\bar{C}$ , é válido perceber que estes valores são dependentes da probabilidade de conexão  $p$  adotada. De fato,  $\bar{L}_{\text{aleatória}} \rightarrow \bar{L}_{\text{aleatória}}(p)$  e  $\bar{C}_{\text{aleatória}} \rightarrow \bar{C}_{\text{aleatória}}(p)$ . Para que a rede se encontre na condição de pequeno mundo, o seu coeficiente de aglomeração médio deve ser alto e o livre caminho médio deve ser baixo. De um modo geral, se  $\sigma > 1$  então a rede está na topologia desejada, fato este que ocorre nas condições utilizadas no presente trabalho.

## 4 Ferramentas de Análise

O presente capítulo é dedicado à descrição das ferramentas utilizadas para análise quantitativa e qualitativa dos dados acerca dos sistemas de interesse. Em particular, são utilizados o quantificador de recorrência chamado determinismo e o já conhecido na literatura (sobre redes e sistemas dinâmicos) parâmetro de ordem de Kuramoto. Dessa forma, neste capítulo são definidos tais quantificadores e suas propriedades exploradas. Por fim, no capítulo (5) são comparados os resultados produzidos pelas duas ferramentas citadas.

### 4.1 Análise de Recorrência

Henri Poincaré foi um dos pioneiros nos estudos de comportamentos dinâmicos complexos também o é no que diz respeito aos conceitos de recorrência. No seu famoso trabalho *Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique* ele escreveu:

*[...] Exceto para algumas trajetórias cuja probabilidade de existência é muito baixa, pode-se mostrar que o sistema retorna infinitas vezes arbitrariamente próximo da sua condição inicial.*

Estas ideias posteriormente foram escritas na forma de teoremas matemáticos, como seguem em [58, 59].

No que diz respeito a sistemas caóticos, é impossível que uma trajetória, ou um ponto, seja estritamente recorrente a outro, ou seja, nestes casos a definição de recorrente, tal que

$$x_i = x_j \tag{4.1}$$

deve ser revista de modo que a mesma pode ser flexibilizada, sendo que a recorrência entre pontos pode ser avaliada como

$$x_i \approx x_j, \tag{4.2}$$

tal que a condição de quão *próximos* os pontos devem ser é definido por critérios determinados de acordo com o interesse do sistema. Baseado nessas ideias e no trabalho original de Poincaré, Eckmann et al. [60] criaram o que é conhecido como *Recurrence Plots*. Esta análise dinâmica consiste na caracterização visual do sistema de interesse a partir do conceito de recorrência escrito em 4.2. Este método teve aplicações em diferentes áreas do conhecimento e se mostrou muito eficaz.

Mais tarde, este conceito ganhou uma formulação matemática mais elaborada baseada na matriz de recorrência e, a partir desta, foram desenvolvidos os quantificadores de

recorrência, compondo assim a chamada análise de recorrência (RQA). As principais propriedades destas ferramentas são discutidas em [21] por Marwan *et. al.* e, atualmente, fornecem ferramentas de análises para os mais distintos problemas [61].

#### 4.1.1 Características Gerais

A noção de recorrência remete à repetição e retorno. Em sistemas dinâmicos, é de interesse o estudo relacionado ao comportamento dos mesmos quando existem repetições e padrões recorrentes, pois, desta forma é possível prever seu comportamento e funcionamento, além de estudar as características dinâmicas e suas propriedades.

Entretanto, como citado anteriormente, em sistemas reais é impossível que ocorra uma repetição, assim como descrito pela equação (4.1). Dessa forma, com base na equação (4.2), pode-se perceber a necessidade de atribuir uma margem de recorrência, cujo valor é definido de acordo com as características do sistema e com os interesse de estudo. Esta margem de recorrência é chamada de raio de vizinhança, ou *threshold* [21].

Como já mencionado, uma ferramenta importante para análise de sistemas dinâmicos através dos conceitos de recorrência foi desenvolvida nos anos de 1980 e é conhecida como Gráficos de Recorrência. A análise por meio desta ferramenta é de forma visual e exemplos podem ser visualizados na figura (15). Vale notar que esta análise traz grande quantidade de informação sobre a dinâmica do sistema de interesse, e tudo isso ocorre apenas de forma visual, o que representa um grande ganho, nesse sentido.

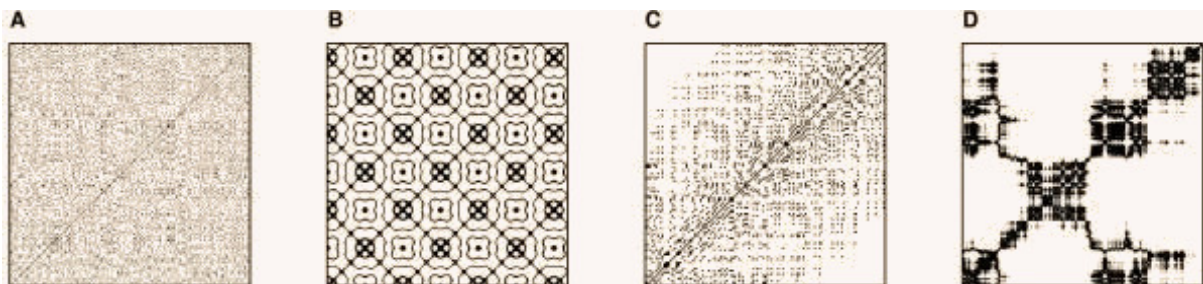


Figura 15 – Exemplos de Gráficos de Recorrências característicos: (A) Homogêneo; (B) Periódico (oscilações harmônicas superpostas); (C) Deriva (mapa logístico com ruído); (D) Descontínuo (movimento browniano) - Figuras retiradas de [62].

Pode-se, por exemplo, analisar o problema de interesse do presente trabalho por meio desta ferramenta de análise dinâmica. Na figura (16) pode-se visualizar o *recurrence plot* para a série temporal do campo médio de 1024 neurônios termicamente sensíveis sob o regime de pequeno mundo para uma situação de menor grau de sincronização (a) e maior grau de sincronização (b). O grande problema desta ferramenta consiste no fato de que a análise para longos períodos de tempo se torna inviável, uma vez que, no exemplo em questão, a análise temporal se dá por apenas 6s e, como é mostrado no presente trabalho, investigações acerca da estacionariedade de redes neurais necessitam de análise por mais de 1000s. Nesse sentido, é

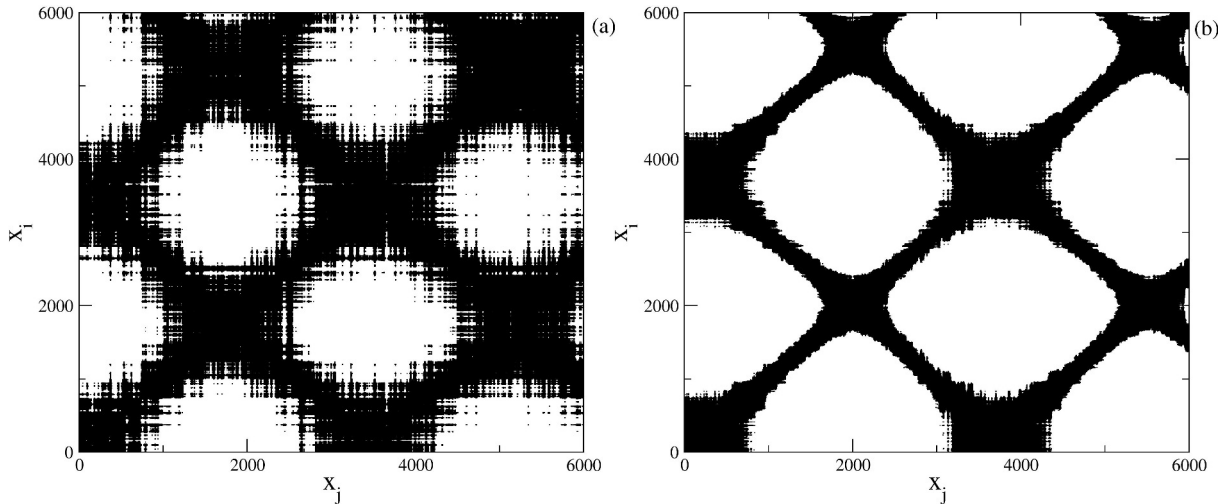


Figura 16 – Exemplo de gráficos de recorrência para série temporal do campo médio de 1024 neurônios termicamente sensíveis. Em (a) está representado um sistema com menor grau de sincronização e em (b) um sistema com maior grau de sincronização, fato que pode ser entendido pela maior definição nas estruturas diagonais.

possível utilizar os quantificadores de recorrência, os quais são baseados na matriz de recorrência, cuja definição pode ser escrita usando o conceito de *threshold* anteriormente citado, como [21]:

$$\mathbf{R}_{ij}(\delta) = \Theta(\delta - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \dots, N,$$

onde  $\Theta$  é a função de Heaviside,  $\delta$  é o *threshold*,  $\|\cdot\|$  representa a norma euclidiana e  $N$  é o tamanho da série analisada. Nesse sentido, a Matriz de Recorrência é construída de forma que se

- a distância entre um ponto  $i$  e outro  $j$  for menor que um determinado limiar ( $\delta$ ), então  $\mathbf{R}_{ij}$  recebe o rótulo 1, ou ainda, no caso dos gráficos de recorrência, um ponto preto.
- a distância entre os pontos seja maior que o *threshold* definido, então o elemento da matriz recebe o valor 0, ou um ponto branco.

Da mesma forma que os gráficos de recorrência, a matriz de recorrência possui muitas informações sobre a dinâmica do sistema de interesse, sendo que vários trabalhos discorrem sobre as várias propriedades que ela pode apresentar, além do fato de que os quantificadores de recorrência são baseados nesta matriz [21, 60, 63].

Ainda acerca dos gráficos de recorrência, é importante salientar as principais estruturas observadas nos mesmos. As mais simples se dão pelos próprios pontos nos *plots*, uma vez que eles representam os pontos recorrentes do sistema. Nesse sentido, existem estruturas verticais ou horizontais de pontos recorrentes onde estas linhas estão associadas ao comprimento (temporal) de estados estacionários.

Da mesma forma, existem estruturas dentro da matriz de recorrência, sendo que para o esse trabalho, o interesse maior se dá na concentração de linhas diagonais na matriz, uma vez que a existência das mesmas está relacionada com a evolução temporal do sistema, a exemplo da figura (16).

Neste sentido, a análise de recorrência é utilizada para estudo das séries temporais do campo médio dos potenciais elétricos dos 1024 neurônios. Dessa forma, a matriz de recorrência, nesse caso, é da ordem  $n \times n$  onde  $n$  é o tempo pelo qual o sistema é integrado.

$R_{1,1}$	$R_{1,2}$	$\cdots$	$R_{1,N}$
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$	$\cdots$	$R_{2,N}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$R_{N,1}$	$R_{N,2}$	$\cdots$	$R_{N,N}$

Figura 17 – Representação da matriz de recorrência para o sistema de interesse do presente trabalho.

Na figura (17), pode-se observar uma representação da matriz de recorrência, onde os termos  $R_{i,j}$  são obtidos através da equação (4.3), onde  $x_i$  e  $x_j$  são entendidos, nesse caso, como os campos médios da rede nos tempos  $i$  e  $j$ . De um modo geral, as análises através dos gráficos de recorrência são válidas de uma forma qualitativa, uma vez que oferecem uma descrição visual característica para várias propriedades de sistemas dinâmicos, como pode ser visto na figura (15). Entretanto, deve-se dar atenção à definição da matriz de recorrência (equação (4.3)) e notar que a mesma depende do parâmetro  $\delta$  (raio de vizinhança), o qual pode ser entendido, em primeira análise como um parâmetro livre. Entretanto, deve-se ter cuidado ao escolher o seu valor, uma vez que ele pode ofuscar as características dinâmicas do sistema [64, 65]. No Capítulo (5), é apresentado o método utilizado para otimização do valor de  $\delta$  para o presente trabalho.

Outro fator importante na utilização da análise de recorrência consiste no fato de que é possível utilizar os conceitos de janelamento para estudo do sistema. Para tal, é importante tomar cuidado para que o procedimento seja feito de tal forma que ocorra uma sobreposição ou *overlap* das janelas, de modo que a análise temporal seja coerente. Este fato é importante para detecção de (não)estacionariedade (objetivo do trabalho), além de contribuir para uma análise de transições de forma mais lenta e precisa e ainda, para redução do ruído eventualmente presente na análise através de RQA, como demonstram alguns trabalhos da área [66, 67].

Por fim, para sistemas muito grandes ou de longa duração temporal, as análises se tornam complicadas de serem feitas através dos gráficos de recorrência, ou seja, de um modo



qualitativo. Nesse sentido, o uso da análise de recorrência se mostra importante, principalmente por meio dos RQA, os quais são descritos na próxima seção.

### 4.1.2 Quantificadores de Recorrência

As medidas dos quantificadores de recorrência, ou RQA (*Recurrence Quantification Analysis*), foram desenvolvidas para uma análise mais profunda acerca dos sistemas dinâmicos [21, 60]. Como dito anteriormente, o presente trabalho tem por objetivo central o estudo da dinâmica de redes neurais para região de acoplamento fraco e transição para sincronização - especificamente sobre a sincronização de fase, sensibilidade às condições iniciais e também sobre a (não)estacionariedade das mesmas. Dessa forma, dentre os vários quantificadores existentes, utiliza-se aqui aquele que expressa ideias sobre as estruturas diagonais da matriz de recorrência, ou determinismo, pois sabe-se que as mesmas estão ligadas à evolução temporal do sistema.

O quantificador mais simples dentro da RQA é chamado de taxa de recorrência, ou *recurrence rate* (RR). O mesmo pode ser escrito matematicamente como:

$$RR(\delta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{R}_{i,j}(\delta), \quad (4.4)$$

onde  $\delta$  é o *threshold*,  $n$  é o número de pontos analisados (ordem da matriz de recorrência) e  $\mathbf{R}_{i,j}$  representa os elementos da matriz de recorrência dada pela equação (4.3). Dessa forma, RR nada mais é que a densidade de pontos recorrentes na matriz de recorrência.

O maior interesse na análise da matriz de recorrência, como já dito, consiste nas estruturas diagonais. Nesse sentido existe o quantificador chamado de determinismo, o qual mede a densidade dos pontos recorrentes que se encontram em estruturas diagonais. O determinismo pode ser entendido também como um avaliador acerca das trajetórias no espaço de fase, ponderando se elas, em diferentes tempos, são paralelas e passam perto (o quão perto é definido pelo raio de vizinhança) de outras trajetórias. Com isso, pode-se escrever:

$$\Delta(\delta) = \frac{\sum_{l=l_{min}}^n lP(\delta, l)}{\sum_{i,j} R_{i,j}}, \quad (4.5)$$

onde  $\Delta$  é o determinismo,  $l$  é o tamanho da estrutura diagonal,  $l_{min}$  é o tamanho mínimo para que uma estrutura diagonal seja contabilizada e  $P(\delta, l)$  pode ser entendida como a frequência da ocorrência de estruturas diagonais (de acordo com os parâmetros  $\delta$  e  $l$ ) na matriz de recorrência. Entretanto, a partir da ideia de densidade de estruturas diagonais, pode-se reescrever a equação para o determinismo tal como segue

$$\Delta(\delta) = \frac{\sum_{l=l_{min}}^n lP(\delta, l)}{\sum_{l=1}^n lP(\delta, l)}, \quad (4.6)$$

onde fica claro que o determinismo representa a taxa de pontos recorrentes que recaem em estruturas diagonais a partir de um tamanho mínimo em relação a todos os pontos recorrentes da matriz.

Dessa forma, o conjunto de equações acima define o conjuntos de ferramentas usado para análise (através da recorrência) do sistema. Em relação aos parâmetros presentes nestas equações, no Capítulo (5) são apresentados os seus valores, bem como os procedimentos e considerações usadas para escolha dos mesmos.

## 4.2 Parâmetro de ordem de Kuramoto

O parâmetro de ordem de Kuramoto é uma ferramenta usada para análise de sincronização de fase de sistemas dinâmicos. Tal parâmetro foi idealizado por Yoshiki Kuramoto (1940 - atual) [20], e avalia sincronização através da análise de fasores relacionados aos elementos dinâmicos do sistema de interesse, dessa forma, ele é capaz de capturar sincronização de fase do sistema.

No caso de redes neurais, para a utilização do parâmetro, pode-se associar a cada neurônio um marcador que indica o início e o fim de *burst* (ver seção (2.4)) e a partir daí, associar uma fase ao mesmo. Dessa forma, pode-se fazer o mesmo para todos os neurônios da rede. Segue que, se os neurônios da redes estiverem iniciando e finalizando a atividade neural ao mesmo tempo, então eles se encontram *em fase* e o parâmetro de ordem de Kuramoto assume valores  $\approx 1$ . Entretanto, se os mesmos estiverem *fora de fase*, então as atividades neurais iniciam e acabam em tempos diferentes e o parâmetro assume valores próximos a zero. A figura (18) ilustra o caso para um neurônio.

A partir da figura (18), pode-se definir uma fase geométrica para um neurônio da rede. Matematicamente, pode-se escrever [68]:

$$\theta(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}, \quad (4.7)$$

$$t_k < t < t_{k+1}.$$

onde  $t_k$  está associado ao tempo do início da atividade neural de cada neurônio.

Para obter o parâmetro de ordem de Kuramoto, basta agora fazer o mesmo para todos os neurônios da rede de interesse, de modo que  $\theta(t) \rightarrow \theta_j(t)$  e somar as fases dos mesmos. Considerando uma rede com  $N$  osciladores, pode-se definir o parâmetro de ordem de Kuramoto ( $R$ ) como [20, 68]:

$$R(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right|. \quad (4.8)$$

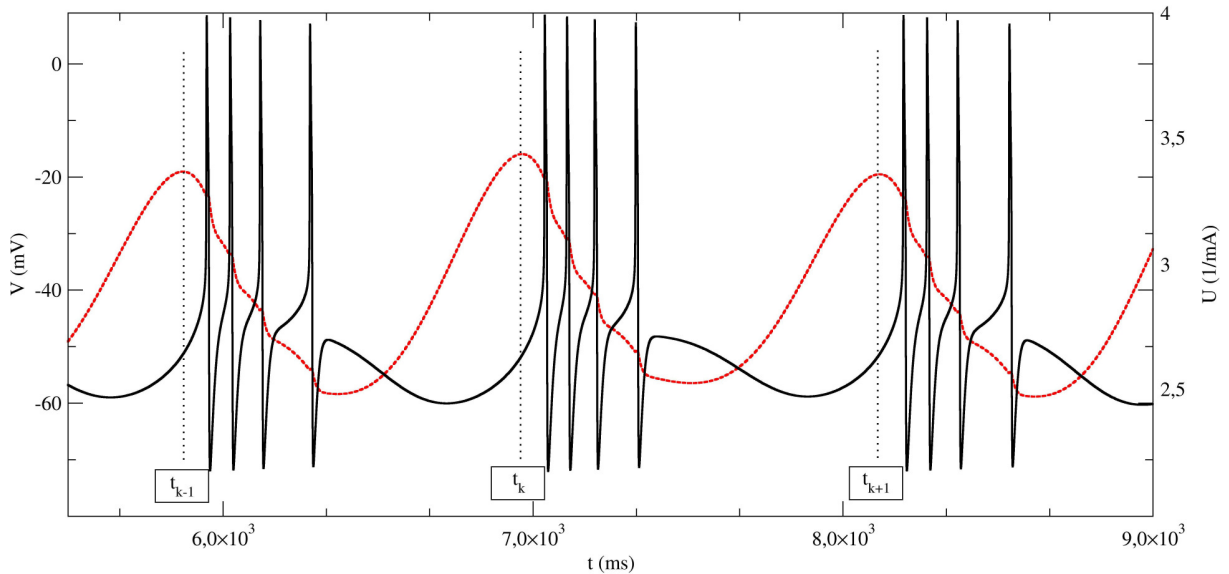


Figura 18 – Representação de um *burst* para um neurônio (linha preta contínua). Juntamente com o potencial do neurônio, é plotado a dinâmica da variável  $U \equiv \frac{1}{\alpha_{sa}}$  (linha vermelha tracejada), onde  $\alpha_{sa}$  é definida no Modelo de Braun *et. al.* (Seção (2.4)). Pode-se perceber que a todo início de uma sequência de disparos do neurônio é definido um marcador temporal ( $t_k$ ) de modo que considerando dois *bursts* sequenciais, é possível associar uma fase ao mesmo.

A ferramenta descrita pela equação (4.8) é muito bem sucedida para diagnosticar sincronização de fase de um sistema dinâmico, entretanto, no que diz respeito a outros tipos de sincronização, ou mesmo considerando sistemas que apresentem comportamento de *quimera* ou *clustering synchronization*, o mesmo não apresenta grande eficácia. No trabalho [5] é mostrado esse fato, bem como são feitas comparações entre os diagnósticos produzidos pelo determinismo e pelo parâmetro de ordem de Kuramoto. O mesmo é feito nas discussões dos resultados do presente trabalho (Capítulo (5)).



# 5 Análise para uma Rede com 1024 Neurônios sob o Regime de Pequeno Mundo

O presente capítulo descreve o modelo utilizado, juntamente com as equações que representam o acoplamento escolhido para simular um rede de 1024 neurônio sob o regime de *Small-World*. Além disso, nas páginas que seguem são explicados os procedimentos, metodologias e ferramentas, além dos processo de otimização adotadas para obtenção e interpretação dos dados. Dessa forma, neste capítulo são descritos os valores usados nos parâmetros do modelo e, por fim, os resultados e conclusões obtidas.

## 5.1 Caracterização Geral da Rede

Como dito em seções anteriores, o modelo utilizado no trabalho foi o desenvolvido por Braun *et. al.* [8], o qual pode ser descrito pelas equações (2.26 - 2.40). Entretanto, ao analisar tais equações, pode-se perceber que elas estão escritas para um neurônio apenas e, ainda, pode-se perceber que o último termo da equação (2.26) é responsável por descrever a interação do mesmo com o mundo externo, que pode ser entendido como a contribuição dos demais neurônios da rede, bem como eventuais correntes externas a mesma. Dessa forma, pode-se escrever este termo como

$$J = J_{acop} + J_{ext}, \quad (5.1)$$

onde  $J_{acop}$  se refere à contribuição dos demais neurônios da rede e  $J_{ext}$  a uma eventual corrente externa que poderia ser interpretada como eletrodos na região de interesse, assim como feito em trabalhos experimentais mostram que estímulos elétricos podem reduzir atividades neurais anômalas [69, 70].

Para este trabalho, o termo de acoplamento é descrito através da equação da corrente pós-sináptica [71] dentro do regime de pequeno mundo e o estímulo externo é tomado como nulo, logo  $J_{ext} = 0$  (entretanto, para trabalho futuro a mesma pode ser utilizada para modelar os estímulos externos). Nesse sentido, pode-se generalizar as equações que compõem o modelo utilizado de modo a considerar que cada neurônio possui seu próprio conjunto de equações, logo

$$\begin{aligned} J_{Na} &\rightarrow J_{i,Na} & J_K &\rightarrow J_{i,K} & J_{sd} &\rightarrow J_{i,sd} \\ J_{sa} &\rightarrow J_{i,sa} & J_l &\rightarrow J_{i,l} & J &\rightarrow J_i, \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo que o acoplamento entre eles é dado segundo o modelo citado anteriormente, desta forma,

pode-se escrever:

$$C_{i,m} \frac{dV_i}{dt} = -J_{i,Na} - J_{i,K} - J_{i,sd} - J_{i,sa} - J_{i,l} + J_i. \quad (5.3)$$

Onde os termos da equação são completamente equivalentes à descrição feita no capítulo (2) e o termo  $J_i$  representa a equação sináptica, responsável pelo acoplamento da rede, o qual depende do potencial da membrana e conseqüentemente deve ser integrada junto as equações do modelo. Matematicamente, pode-se escrever:

$$J_i = \frac{\varepsilon}{\text{norm}} \sum_{j=1}^N S_{i,j} r_j (V_{\text{syn}} - V_j), \quad (5.4)$$

onde o termo “norm” representa o fator de normalização, tal que este representa o número de conexões do sítio com mais conexões dentro da rede, pois desta forma se evita a formação de uma rede homogenia não condizente com a realidade,  $\varepsilon$  representa o parâmetro de acoplamento, o termo  $V_{\text{syn}}$  representa o potencial de reversão, cujo valor segue na tabela (4) e  $S_{i,j}$  representa a matriz de adjacência da rede, neste caso, do tipo de pequeno mundo.

O termo  $r_j$ , proposto em [72], está relacionado ao fato de que a transmissão de informação por parte dos neurônios está sujeito a determinados processos químicos, pois, como dito anteriormente, as sinapses neurais podem ser do tipo elétrica ou química. Estas primeiras acontecem por meio da conexão direta entre os neurônios envolvidos, através de poros que atravessam a membrana de ambos, possibilitando, assim, o transporte iônico e alterando a dinâmica neural. Já as sinapses químicas acontecem através de uma fenda sináptica, a qual, normalmente, é bem maior que o *gap* que envolve sinapses elétricas. Nesse sentido, a conexão química ocorre por meio de neurotransmissores, sendo que os neurônios pré-sinápticos liberam determinadas substâncias químicas (neurotransmissores) de modo que estes se difundem através da fenda sináptica até o neurônios pós-sinápticos, se ligando ao receptor específico e alterando assim a condição de abertura (ou não) dos canais iônicos e, conseqüentemente, a dinâmica neural [71, 73, 74]. Nesse sentido, a dinâmica envolvendo a conexão entre os neurônios depende de *estados de ativação (ou inativação)* dos receptores sinápticos, de forma semelhante às ideias propostas no modelo de Hodgkin-Huxley (bem como no modelo de Braun *et. al.*) para os canais iônicos. Desta forma, o termo em questão representa a fração de receptores que se encontram no estado *aberto* para os neurotransmissores nos neurônios pós-sinápticos [75].

Pode-se modelar a evolução temporal de  $r_j$  considerando a dependência do processo em relação aos potenciais dos neurônios da rede, como proposto em [74]. Dessa forma, pode-se escrever

$$\frac{dr_j}{dt} = \left( \frac{1}{\tau_r} - \frac{1}{\tau_d} \right) \frac{1 - r_j}{1 + \exp[-s_0(V_j - V_0)]} - \frac{r_j}{\tau_d}, \quad (5.5)$$

onde  $\tau_r$ ,  $\tau_d$  e  $V_0$  são constantes do modelo cujos valores podem ser verificados na tabela (4).  $s_0$  é apenas uma constante unitária com unidade de  $\frac{1}{\text{mV}}$ .

$$\left\| \begin{array}{ll} V_{\text{syn}} = 20\text{mV} & V_0 = -20\text{mV} \\ \tau_r = 0,5\text{ms} & \tau_d = 8,0\text{ms} \end{array} \right\|$$

Tabela 4 – Parâmetros do modelo utilizado para o acoplamento dos neurônios da rede no presente trabalho.

No que diz respeito à matriz de conexão utilizada ( $S_{i,j}$ ), vale ressaltar que a mesma possui a topologia do tipo *Small World*, cujo procedimento de criação é conhecido como rota de Newman-Watts [57], descrita na subseção (3.3.3). Desta forma, a probabilidade da existência de uma conexão não local utilizada para obtenção da matriz é dada por  $p = 0,001$ . Nesse sentido, como a rede é do tipo pequeno mundo com topologia local de segundos vizinhos, especificamente para o presente trabalho, a mesma possui 4618 conexões. Devido às características das conexões locais adotadas, uma rede com 1024 neurônios possui 4096 destas, logo, do total de conexões existentes na rede de interesse, 522 são ditas não locais. Com base na equação (3.17) e na figura (14) é possível verificar as condições de obtenção da topologia de pequeno mundo.

Para a integração numérica das equações que descrevem a rede, é utilizado o método de Adams [76] de 4ª ordem, com tolerância absoluta de menos de  $10^{-8}$  juntamente com os parâmetros descritos nas tabelas (3) e de acordo com [42].

## 5.2 Obtenção dos Dados e Primeiras análises

Como dito anteriormente, o trabalho consiste na análise de uma rede neural a respeito da sua dinâmica. Especificamente, deseja-se analisar a sincronização, estacionariedade, multi estabilidade e sensibilidade às condições iniciais. Nesse sentido, são necessários duas abordagens distintas, sendo que, por meio de uma delas, pode-se obter informações específicas para detalhes da rede e, a partir da outra, informações gerais. No que diz respeito à não estacionariedade, é necessário que o sistema seja simulado por longos períodos de tempo, pois somente assim o comportamento de interesse é observado [5]. Nesse sentido, uma parte do trabalho consiste na fixação do parâmetro de controle ( $\varepsilon$ ), bem como da condição inicial e a integração por um longo período de tempo ( $\sim 1000$  segundos) para simulação da rede. Por outro lado, faz-se simulações para intervalos de tempos menores ( $\sim 100$  segundos) em função do parâmetro de acoplamento ( $\varepsilon$ ) para diferentes condições iniciais. Dessa forma, é possível obter informações gerais acerca da dependência da rede em relação ao parâmetro de acoplamento e, a partir destes resultados, elencar determinados valores de  $\varepsilon$  para uma análise mais detalhada por longos períodos temporais para tornar possíveis considerações sobre a estacionariedade do sistema, como mencionado anteriormente.

Ao integrar as equações do modelo utilizado para a rede neural obtém-se os valores dos potenciais da membrana dos 1024 neurônios em função do tempo ( $V_i(t)$ ). Para análise via

parâmetro de ordem de Kuramoto, é imprescindível que se tenha informação sobre todos os neurônios, uma vez que é necessário associar uma fase aos mesmos para que seja possível o cálculo do parâmetro, como mostra a equação (4.8). Por outro lado, a análise com a utilização do determinismo é feita com base no campo médio da rede, o qual pode ser escrito como

$$\langle V \rangle(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i(t). \quad (5.6)$$

Neste sentido, já é possível identificar uma vantagem no uso do determinismo como ferramenta de análise, uma vez que, em situações reais, a obtenção do potencial de cada neurônio é inviável (ao menos com a tecnologia atual) sendo que, a rigor, os dados experimentais existentes são do campo médio de alguma determinada região cerebral.

Sobre a dinâmica neural, sabe-se que o modelo utilizado reproduz o comportamento de *burst* e, ainda, como descrito na seção (4.2), os neurônios podem estar no estado sincronizado, caracterizado pela coincidência temporal de início da rajada de disparos, bem como no estado dessincronizado, quando os *bursts* não coincidem temporalmente. Um exemplo pode ser visto na figura (19).

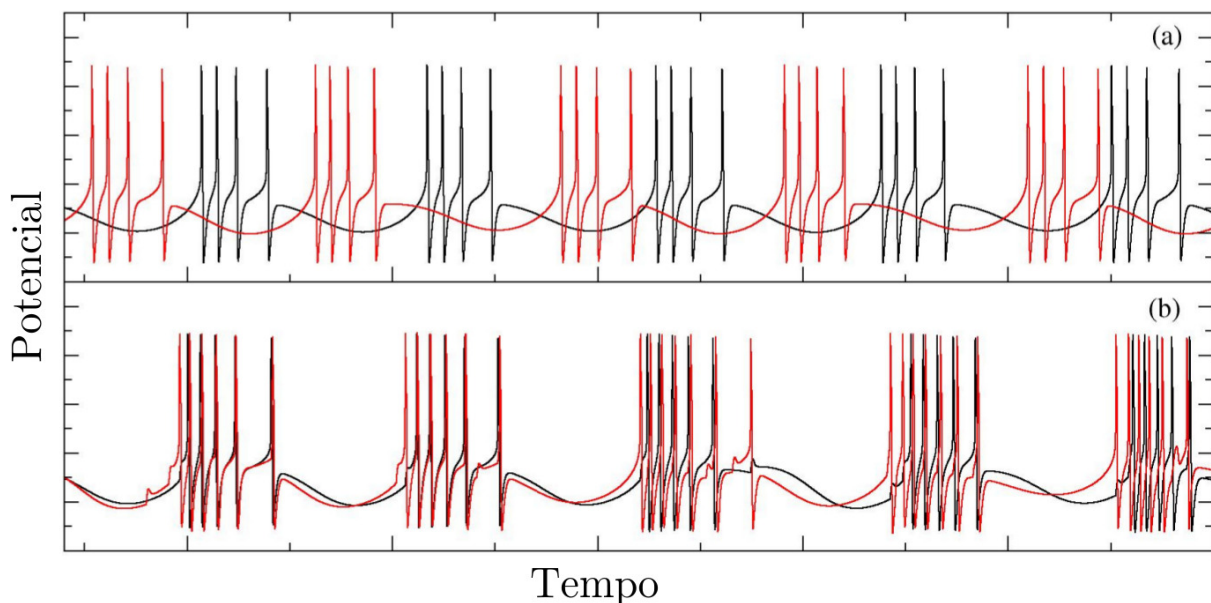


Figura 19 – Exemplo da dinâmica neural de dois neurônios desacoplados obtida através do modelo de Braun *et. al.*. No caso (a) pode-se perceber que os *bursts* acontecem em tempos diferentes, ou seja, tem-se um exemplo de dessincronização. Já no caso (b), tem-se o exemplo de um estado de sincronização, uma vez que os *bursts* começam e terminam nos mesmos instantes de tempo.

Nesse sentido, o presente trabalho utiliza como parâmetro de controle dinâmico o fator de acoplamento da rede e, como mostram alguns trabalhos da área [43, 75, 77], sistemas de redes neurais apresentam dependência em relação ao parâmetro de acoplamento no que diz respeito à sincronização e, de fato existe, como abordado anteriormente, transição para



sincronização em diversas topologias de redes, a exemplo da topologia de pequeno mundo. Nesse sentido, é esperado que a rede neural apresente diferentes comportamentos dinâmicos nas diferentes regiões dinâmicas. Minimamente, sabe-se que existe a região antes da sincronização, a transição para a sincronização e a região sincronizada. Desta forma, pode-se escolher valores do parâmetro de acoplamento que representem a dinâmica da rede em cada uma dessas regiões e analisar o comportamento do potencial das membranas da rede. As figuras (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26) são superfícies que representam o potencial de cada neurônio variando no tempo. É possível observar que, para diferentes valores de  $\varepsilon$ , a rede apresenta comportamentos dinâmicos distintos:

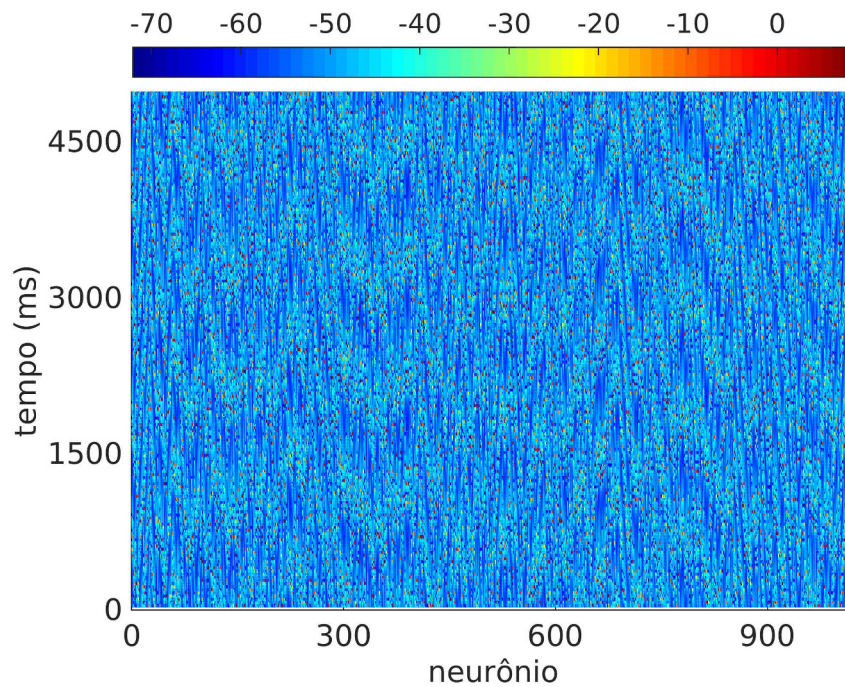
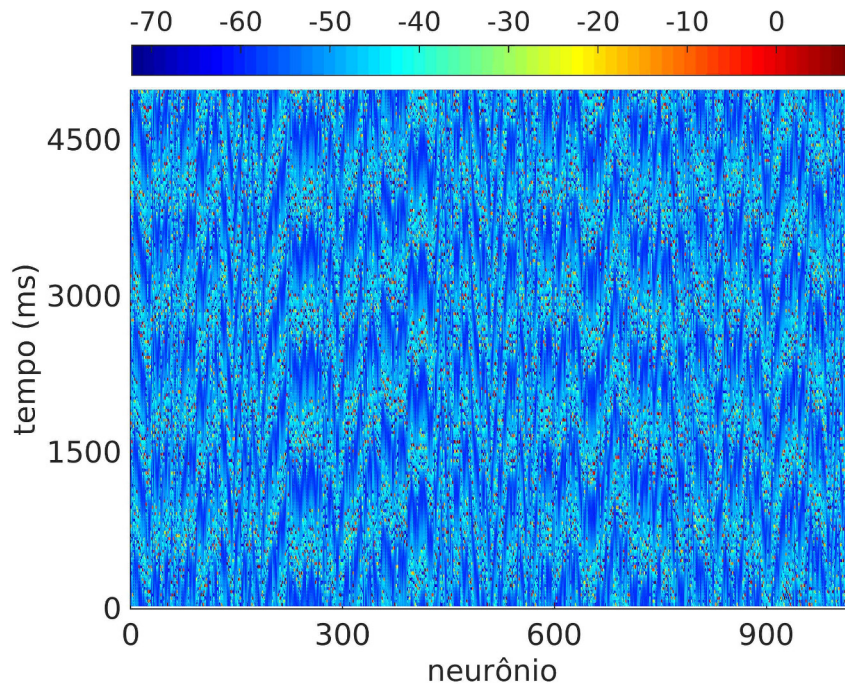
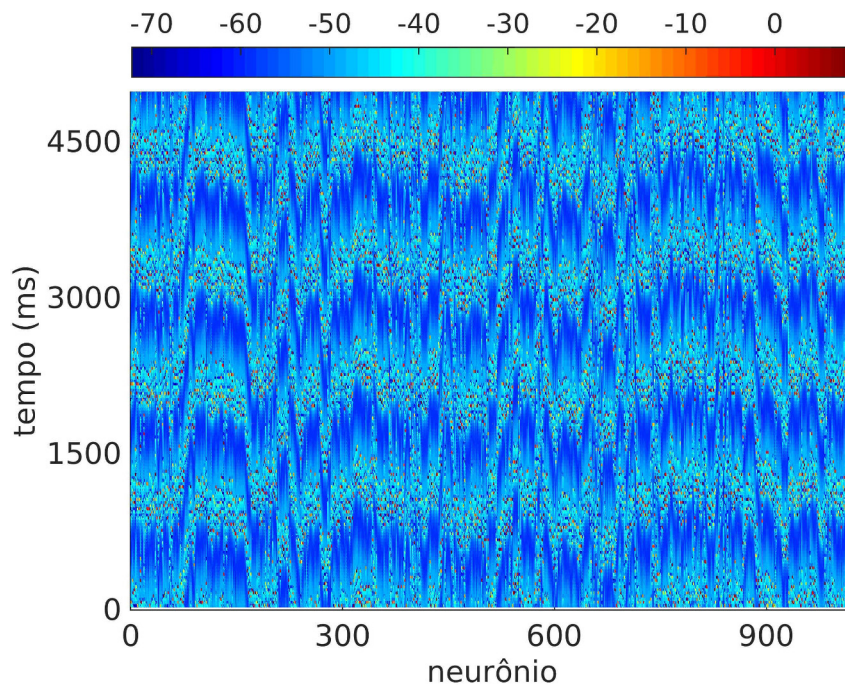
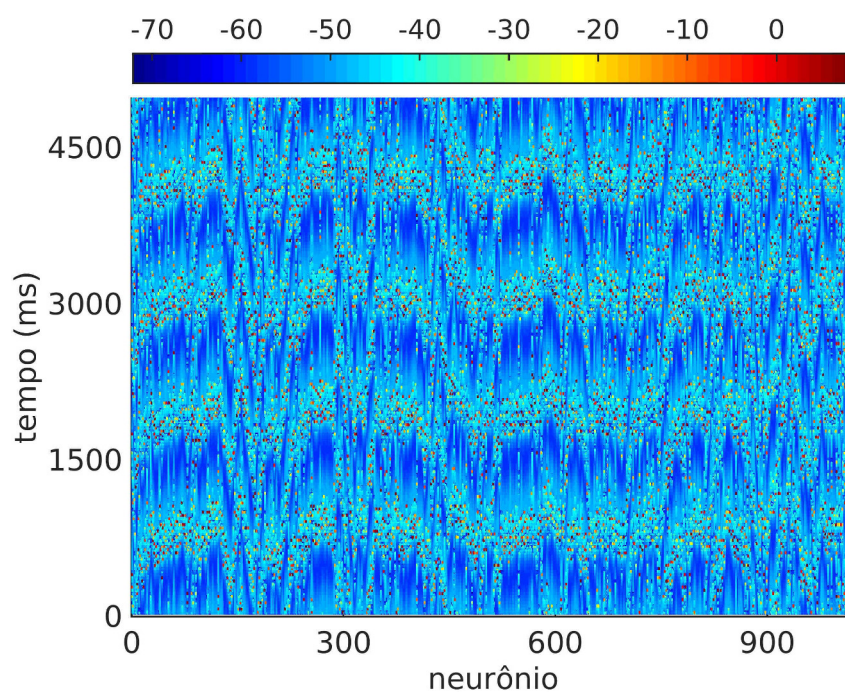
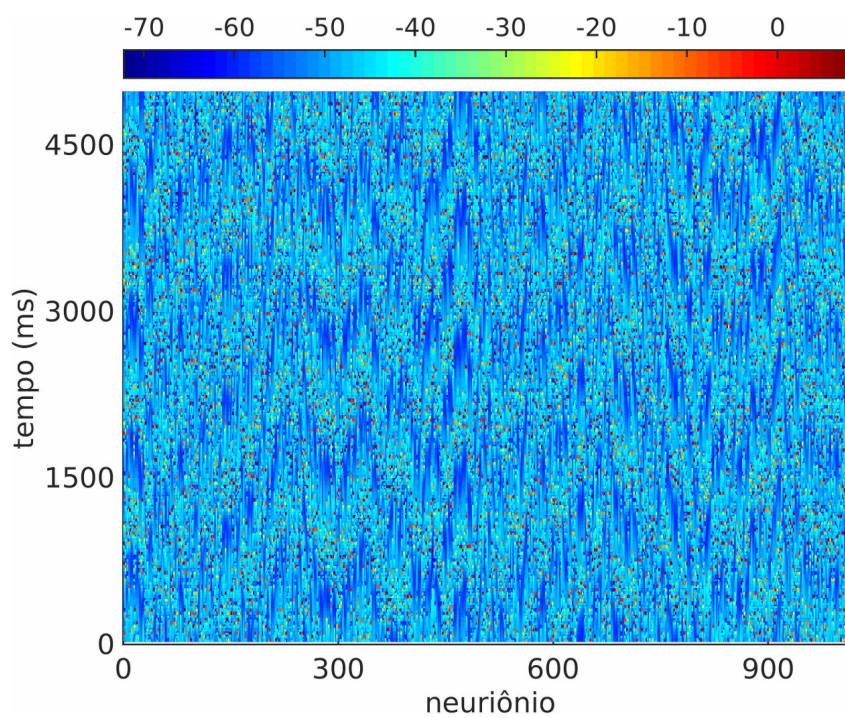
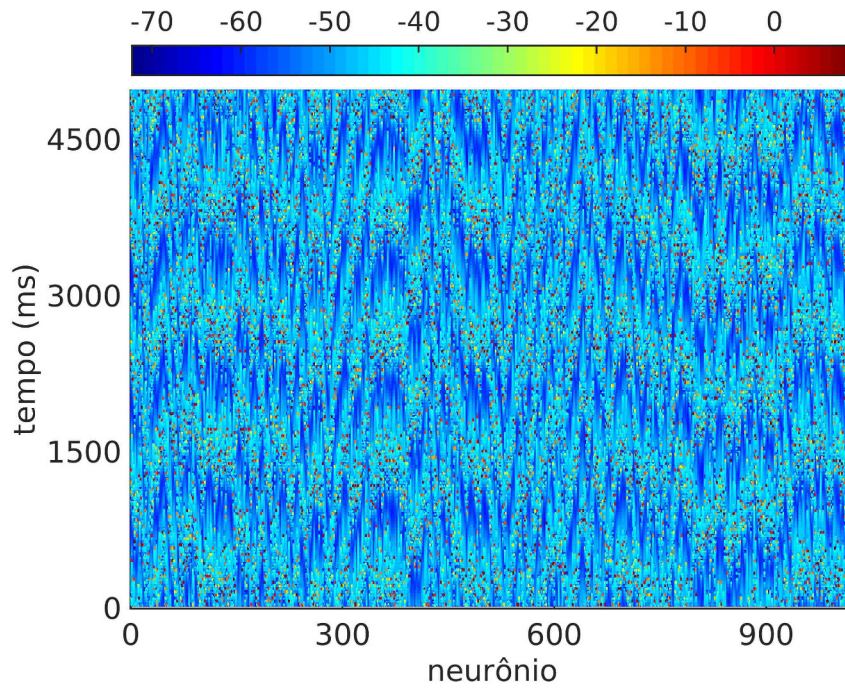
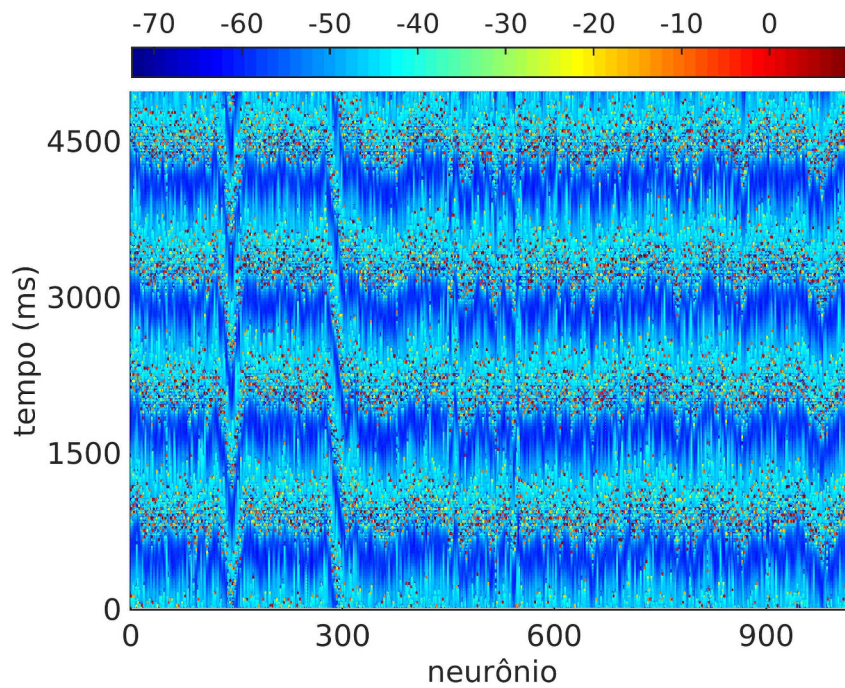


Figura 20 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para  $\varepsilon = 0,0040$ .

Figura 21 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para  $\varepsilon = 0,0064$ .Figura 22 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para  $\varepsilon = 0,0080$ .

Figura 23 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para  $\varepsilon = 0,0096$ .Figura 24 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para  $\varepsilon = 0,0136$ .

Figura 25 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para  $\varepsilon = 0,0200$ .Figura 26 – Superfície (potencial; sítio; tempo) para  $\varepsilon = 0,0480$ .

Com base nessas figuras, é possível dividir a rede em diferentes regiões com diferentes características.

- $\varepsilon = 0,0040$  (figura (20)): Pode-se notar que, de um modo geral, os neurônios da rede disparam em momentos distintos, não existindo assim nenhum tipo de sincronização.
- $\varepsilon = 0.0064$  (figura (21)): Novamente, de um modo geral, os neurônios ainda estão no estado dessincronizado, entretanto, é possível perceber que existem pequenas regiões onde uma “sincronização local” é observada.
- $\varepsilon = 0.0080$  (figura (22)): Neste caso, pode-se perceber que o sistema apresenta um certo grau de sincronização.
- $\varepsilon = 0.0096$  (figura (23)): Para este valor do parâmetro de acoplamento, pode-se perceber um comportamento semelhante ao caso em que  $\varepsilon = 0.0064$ , ou seja, existe pequenas regiões com “sincronização local”.
- $\varepsilon = 0.0136$  (figura (24)): Nesta situação, pode-se notar que o sistema perde completamente a sincronização, de modo que se assemelha ao caso do menor parâmetro considerado.
- $\varepsilon = 0.0200$  (figura (25)): Pode-se perceber que o sistema ganha um certo grau de sincronização, apresentando novamente regiões com “sincronização local”.
- $\varepsilon = 0.0480$  (figura (26)): Para valores alto do parâmetro de acoplamento, o sistema adquire sincronização total.

Pode-se também analisar o campo médio dos 1024 neurônios para os valores de  $\varepsilon$  utilizados acima e, desta forma, analisar a rede como um todo. Na figura (27) é possível observar que para  $\varepsilon = 0,0080$  e  $\varepsilon = 0,0480$  (painéis (c) e (g)) o campo médio do sistema indica que o mesmo está no estado sincronizado (ou quase sincronizado para (c)), uma vez que sua amplitude é aumentada. Entretanto, para os demais valores de  $\varepsilon$  (painéis (a), (b), (d), (e) e (f)) não é possível obter informações conclusivas apenas com a análise qualitativa do campo médio, sendo necessário o uso de outras ferramentas de análise.

Desta forma, tem-se uma primeira abordagem com o comportamento dinâmico da rede em diferentes regiões no que diz respeito ao parâmetro de acoplamento. É possível perceber que existem diferenças no que diz respeito à sincronização de fase, entretanto, para valores intermediários entre o completamente dessincronizado e estado assintótico (sincronizado), pode-se notar que comportamentos mais complexos aparecem como sincronização local. Nesse sentido, pode-se analisar a rede por meio das ferramentas propostas no capítulo (4) e, assim, obter mais informações sobre a mesma.

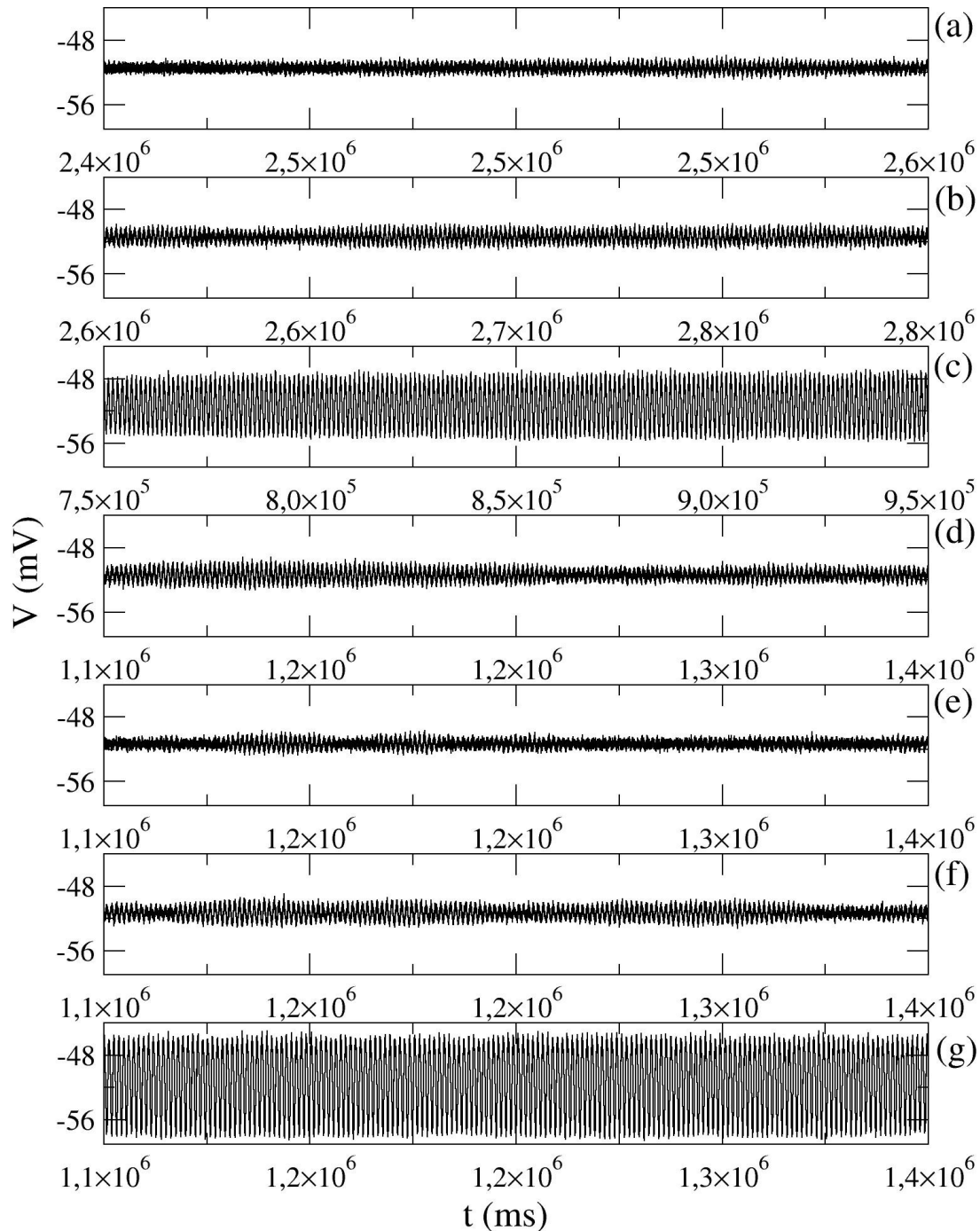


Figura 27 – Campos médios da rede para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ .

## 5.3 Análise via parâmetro de ordem de Kuramoto

O parâmetro de ordem de Kuramoto, descrito na seção (4.2), é um quantificador utilizado para análise de sincronização de fase de sistemas dinâmicos [20]. Nesse sentido, pode-se utilizá-lo para obter as primeiras impressões acerca dessa característica do sistema de interesse para o presente trabalho. De acordo com a equação (4.8), pode-se notar que o parâmetro de ordem é naturalmente uma média espacial, sendo que o somatório das fases, feito sobre toda a rede, é dividido pelo tamanho da mesma. Neste trabalho, as análises feitas se dão de duas formas distintas. Primeiramente, integram-se as equações do modelo utilizado para intervalos de tempo  $\sim 100$ s variando o valor do parâmetro de acoplamento ( $\varepsilon \in [0; 0,056]$ ). Desta forma, para cada valor de  $\varepsilon$  tem-se uma série temporal do parâmetro de ordem  $R(t)$ . Nesse sentido, pode-se dividir cada uma dessas séries temporais de  $R(t)$  pelo tempo de integração, de modo que seja feita uma média espacial da rede, como mostra a equação (4.8) e então uma média temporal, para que seja obtido o parâmetro de ordem em função de  $\varepsilon$ :  $R(t) \rightarrow R(\varepsilon)$ . Dessa forma, pode-se escrever:

$$\langle R \rangle = \frac{\sum_{t_0}^{t_f} R(t)}{t_f - t_0}, \quad (5.7)$$

onde  $\langle R \rangle$  representa a média temporal do parâmetro de ordem de Kuramoto.

Outro ponto importante a ser considerado consiste no fato de que o procedimento acima descrito é repetido para 40 condições iniciais distintas, dessa forma, pode-se fazer uma média, agora sobre as diferentes condições iniciais, e ainda obter a dispersão das mesmas. Nesse sentido, pode-se fazer  $\langle R \rangle \rightarrow \langle \bar{R} \rangle$ , onde esta última representa a média temporal e em relação às condições iniciais do parâmetro de ordem.

Na figura (28) é possível observar que, ao aumentar o valor do parâmetro de acoplamento, a rede adquire um estado que indica sincronização ( $\varepsilon \approx 0,0080$ ), o qual é perdido com a continuação do aumento do valor de  $\varepsilon$ . Entretanto, para valores de  $\varepsilon > 0,035$  o sistema caminha para estados sincronizados, pois o valor do parâmetro de ordem se aproxima de 1. Tal resultado corrobora a análise feita com base nos campos médios da rede (figura (27)), bem como, com a caracterização da rede através da superfície de potencial para cada neurônio (variando no tempo) (figuras (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26)), pois, para valores de  $\varepsilon < 0,0080$ , o sistema apresenta dessincronização, sendo que para  $\varepsilon = 0,0080$ , o parâmetro de ordem apresenta um máximo local e, ainda, para o intervalo  $0,0080 < \varepsilon < 0,035$  o parâmetro de ordem volta a assumir valores baixos, indicando a perda de sincronização e, por fim, para os valores mais altos de  $\varepsilon$ , finalmente o sistema caminha para sincronização. É importante ressaltar a existência de uma sincronização não esperada, a qual pode ser classificada como anômala, uma vez que acontece para região de acoplamento fraco e perde efeito com o aumento do fator de acoplamento  $\varepsilon$ , como mostrado em [78].

Outro ponto interessante na figura (28) é a dispersão apresentada para diferentes

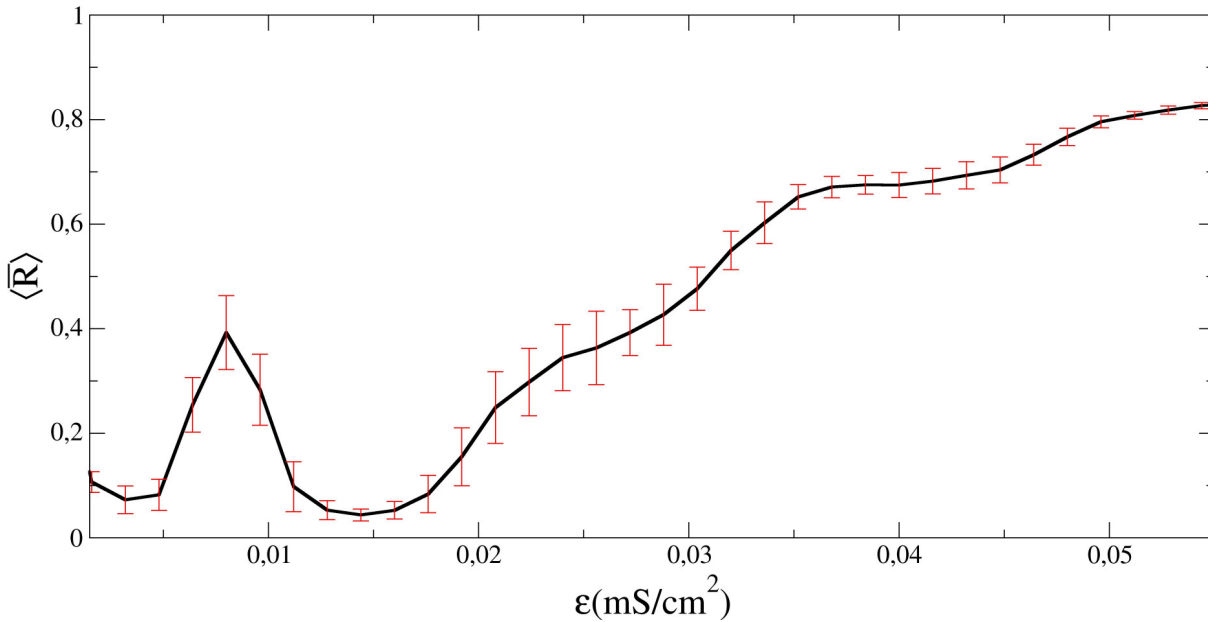


Figura 28 – Parâmetro de ordem médio (em relação ao tempo e às 40 condições iniciais distintas) em função do parâmetro de acoplamento  $\epsilon$ . As barras de erro em vermelho representam a dispersão sobre as condições iniciais distintas. É possível ver que para valores de  $\epsilon < 0,03$  a dispersão é grande, sendo que para região fortemente acoplada, a rede perde a sensibilidade às condições iniciais.

condições iniciais, sendo que, antes dos estados sincronizados, a rede apresenta valores altos para dispersão, indicando que o sistema é sensível a condições externas para estes valores de acoplamento e, ainda, que torna-se alheio a tais condições para valores mais altos de  $\epsilon$ .

A outra análise feita com base no parâmetro de ordem de Kuramoto consiste na iteração por longos períodos de tempo ( $\sim 1000s$ ). Para tal, com base na figura (28), é possível verificar que existem diferentes regiões de comportamento dinâmico, dessa forma, fixa-se alguns valores de  $\epsilon$  e também a condição inicial para que sejam feitas as análises mais detalhadas (são escolhidos os mesmos valores de  $\epsilon$  que são mostrados na figura (27)). Nesta análise, é utilizada a equação (4.8) em detrimento da equação (5.7), pois para tal deseja-se observar a variação temporal do parâmetro de ordem para os valores de acoplamento escolhidos. Na sequência do trabalho, a notação adotada se dá tal que  $R(t) \rightarrow R$ .

É possível observar na figura (29) que, para os diferentes valores de  $\epsilon$ , o parâmetro de ordem de Kuramoto apresenta diferentes comportamentos dinâmicos. Para os casos (a), (b), (d), (e) e (f) o valor de  $R$  é baixo, indicando estados não sincronizados e, além disso, é possível notar que não existem variações consideráveis ao longo do tempo. O mesmo pode ser visto nos casos restantes, (c) e (g), onde não é possível observar variações temporais, apesar dos valores mais altos para  $R$ , indicando estados de sincronização, ou quase sincronização, como discutido anteriormente.

Dando continuidade a análise temporal do parâmetro de ordem de Kuramoto para os



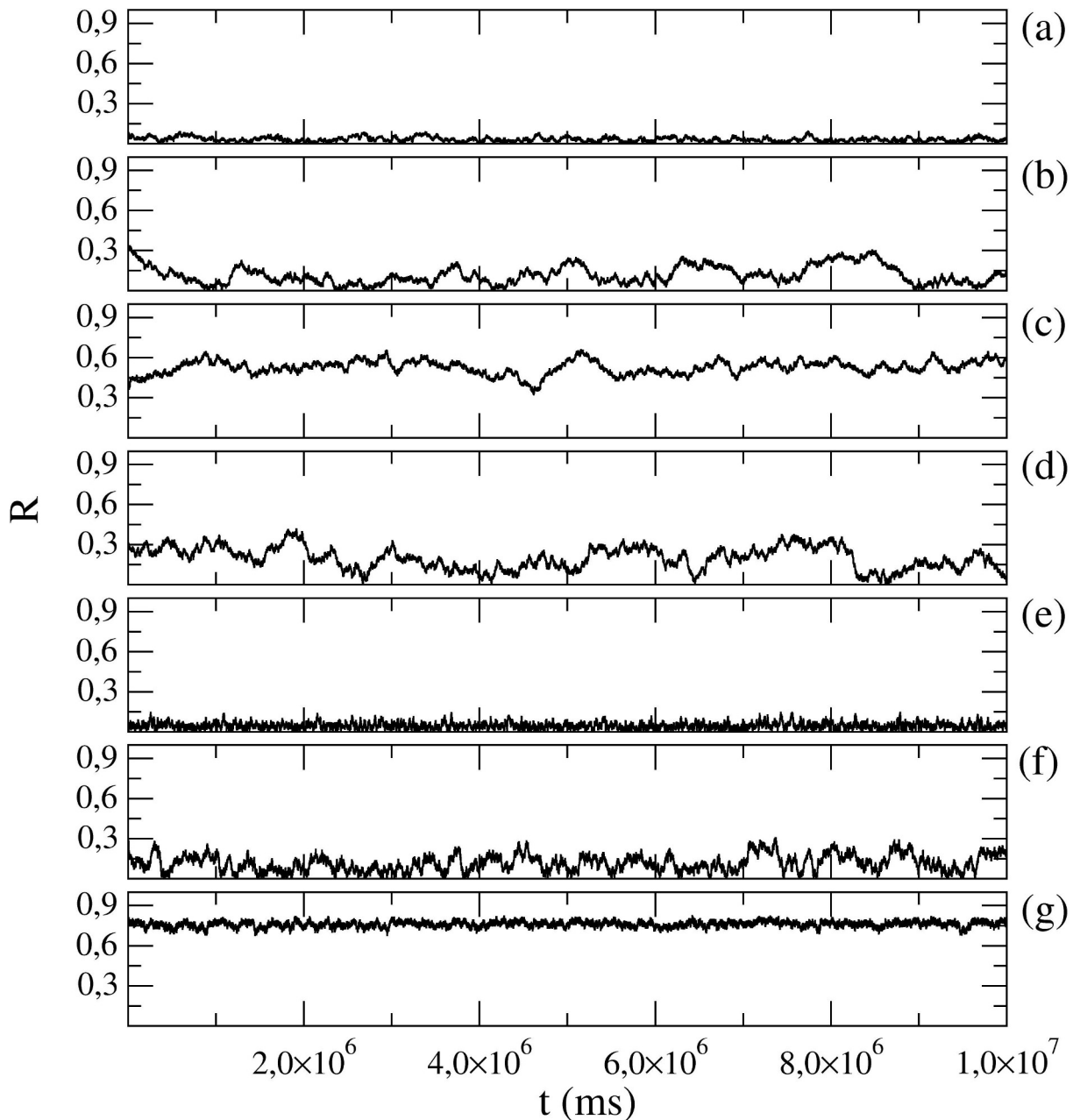


Figura 29 – Parâmetro de ordem de Kuramoto ( $R$ ) variando no tempo para uma rede de 1024 neurônios sob a topologia de pequeno mundo para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ .

diferentes valores de  $\varepsilon$  elencados, pode-se fazer a distribuição dos valores de  $R$ , ou seja, fazer a contagem da frequência dos valores assumidos pelo parâmetro de ordem em função do tempo e construir o histograma dos mesmos (para cada valor de  $\varepsilon$ ). Na figura (30),  $p(R)$  representa a distribuição dos valores do parâmetro de ordem (em função do tempo) e é possível verificar que para os casos (a), (b), (d), (e) e (f) os valores assumidos por  $R$  são baixos, denunciando estados de dessincronização e não oferecendo qualquer outra conclusão. Novamente, (c) e (g) apresentam valores mais altos para  $R$  e indicam estados de sincronização, entretanto, não é possível extrair outras informações acerca do sistema.

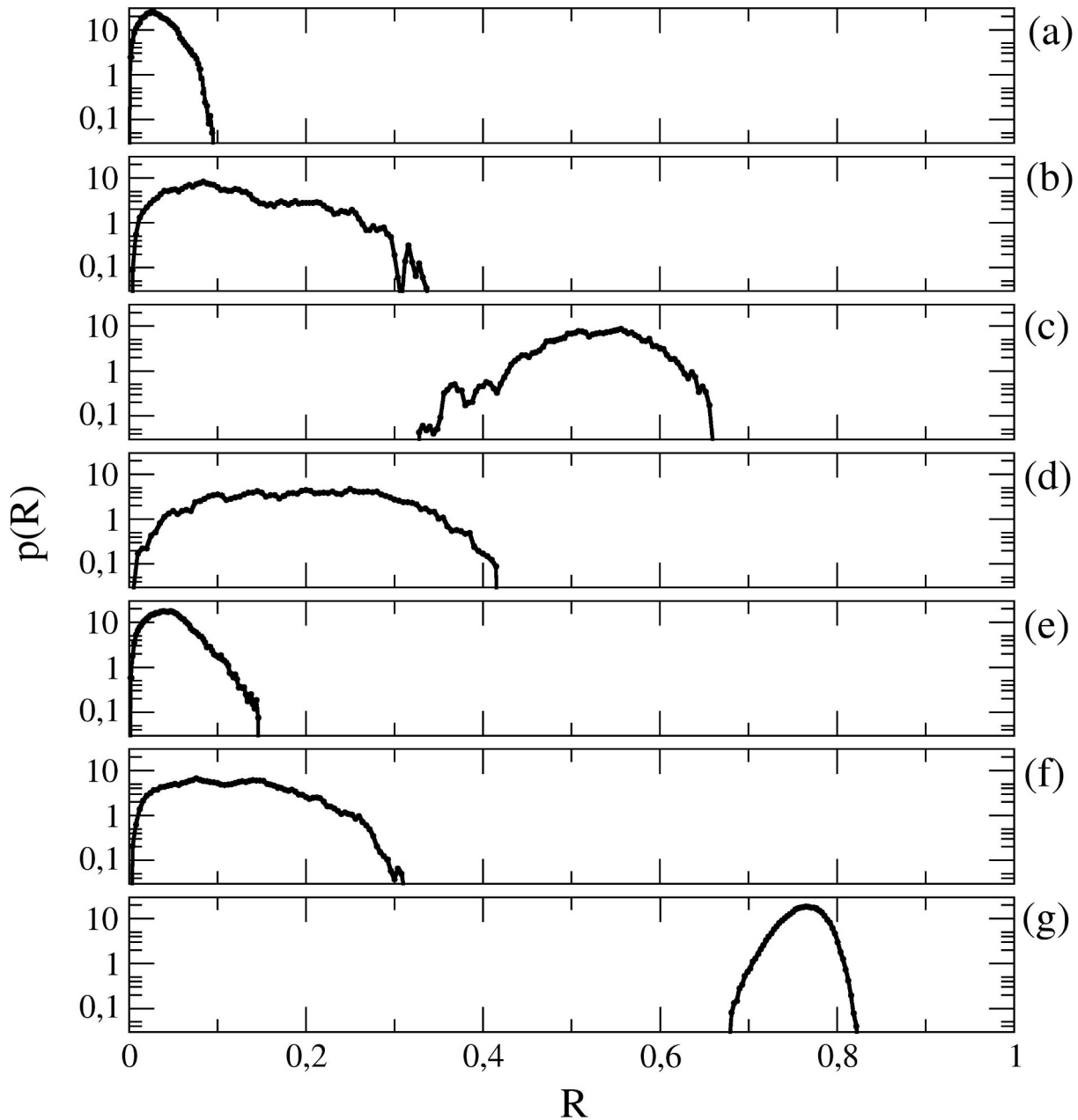


Figura 30 – Histogramas ( $p(R)$ ) representando a distribuição dos valores parâmetro de ordem de Kuramoto em função do tempo para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ .

De um modo geral, as conclusões que são possíveis traçar através das análises do parâmetro de ordem de Kuramoto são conhecidas na literatura, como mostra [20, 75, 77]. Nesse sentido, é possível distinguir estados sincronizados de estados dessincronizados (sincronização de fase), como é possível observar nas figuras (28, 29, 30) e corroborar os resultados apresentados na seção (5.2) nas figuras (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27), onde a rede apresenta dessincronização para  $\varepsilon = 0,0040$ ,  $\varepsilon = 0,0064$ ,  $\varepsilon = 0,0096$ ,  $\varepsilon = 0,0136$ ,  $\varepsilon = 0,0200$ , apresenta sincronização para  $\varepsilon = 0,0480$  e quase sincronização (máximo local) para  $\varepsilon = 0,0080$ .

Entretanto, como colocado no início do presente trabalho, deseja-se analisar, além da sincronização e dependência em relação às condições iniciais, a estacionariedade de redes neurais sob o regime de pequeno mundo. Nesse sentido, o parâmetro de ordem de Kuramoto não se mostra como uma ferramenta de análise eficiente, uma vez que, ao observar a variação temporal do mesmo para diferentes valores do parâmetro de acoplamento (figura (29)), não é possível encontrar qualquer sinal claro de eventuais comportamentos não-estacionários por parte da rede, sendo que o mesmo pode ser visto na figura (30), pois, ao analisar a distribuição dos valores de  $R$ , não é possível identificar estados distintos para um mesmo  $\varepsilon$ , o que impossibilita considerações acerca da estacionariedade da rede.

De um modo geral, o parâmetro de ordem de Kuramoto investiga acerca da sincronização de fase do sistema de interesse, nesse sentido é compreensível que o mesmo não leve a conclusões acerca da estacionariedade do sistema, sendo necessário, o uso da análise de recorrência para o citado fim, como é feito na sequência do trabalho, mas, é possível, ao menos, concluir acerca da sincronização da rede e da dependência em relação às condições iniciais.

## 5.4 Análise via determinismo

As análises por meio das ferramentas de recorrência foram estabelecidas no fim do século passado e, desde então, estão sendo amplamente utilizadas com êxito no que diz respeito à investigação de sistemas dinâmicos [21, 60, 65–67, 79]. Como dito anteriormente, um dos objetivos do presente trabalho consiste na investigação da estacionariedade de uma rede neural de 1024 neurônios sob o regime de *Small World*, com isso, pode-se usar análise de recorrência para tal fim, uma vez que, como mostrado na seção (4.1), as estruturas diagonais da matriz de recorrência de um determinado sistema revelam informações acerca da sua evolução temporal. Nesse sentido, pode-se utilizar o determinismo ( $\Delta$ ) para tal fim.

A utilização da ferramenta da recorrência se dá de duas formas distintas. Igualmente ao que foi feito com o parâmetro de ordem de Kuramoto como mostrado na seção anterior (5.3), o modelo é simulado por  $\sim 100s$  para 40 condições iniciais distintas e, então, calcula-se o determinismo das séries geradas pelo campo médio dos neurônios da rede para cada condição inicial com o valor do parâmetro de acoplamento ( $\varepsilon$ ) variando de 0 até 0,056. Vale notar que, como mencionado anteriormente, o parâmetro de ordem de Kuramoto é naturalmente uma média espacial, e que o análogo a este fato, no caso do uso do determinismo, se dá ao adotar a utilização do campo médio como série temporal de análise, uma vez que, com base na equação (5.6), pode-se perceber que o mesmo é também uma média espacial. Também inspirado no caso anterior, pode-se calcular o determinismo ao longo do tempo de iteração e então tomar a média temporal, de modo que seja possível obter o determinismo em função do parâmetro de

acoplamento, ou seja,  $\Delta(t) \rightarrow \Delta(\varepsilon)$ . Para isso, pode-se escrever:

$$\langle \Delta \rangle = \frac{\sum_{t_0}^{t_f} \Delta(t)}{t_f - t_0}, \quad (5.8)$$

onde  $\langle \Delta \rangle$  representa a média temporal do determinismo.

Outro ponto importante consiste no fato de que, além do tempo, é feita uma média sobre as 40 condições iniciais utilizadas para as simulações, dessa forma, faz-se  $\langle \Delta \rangle \rightarrow \langle \overline{\Delta} \rangle$ , onde  $\langle \overline{\Delta} \rangle$  denota a média temporal e sobre as condições iniciais do determinismo.

Na figura (31) está representada a dependência de  $\langle \overline{\Delta} \rangle$  em função do parâmetro de acoplamento da rede. Primeiramente, pode-se perceber que o perfil dado pelo determinismo, como ferramenta de análise, é semelhante ao dado pelo parâmetro de ordem de Kuramoto, sendo que existe um máximo local para  $\varepsilon \approx 0,0080$ . Outro ponto que mostra que a primeira análise corrobora a segunda (e vice-versa) consiste no fato de que para  $\varepsilon < 0,030$  o sistema apresenta alta dispersão com respeito às condições iniciais. Ou seja, existe uma dependência do mesmo com a forma que o sistema é inicializado, indicando que a rede possui uma característica (nessa região) que pode ser associada ao fenômeno de multi estabilidade, o que significa que o sistema pode evoluir para diferentes estados. Por fim, pode-se perceber que para  $\varepsilon > 0,030$  a rede apresenta baixa dispersão e o alto valor do determinismo indica que a mesma está em um estado (único) com sincronização.

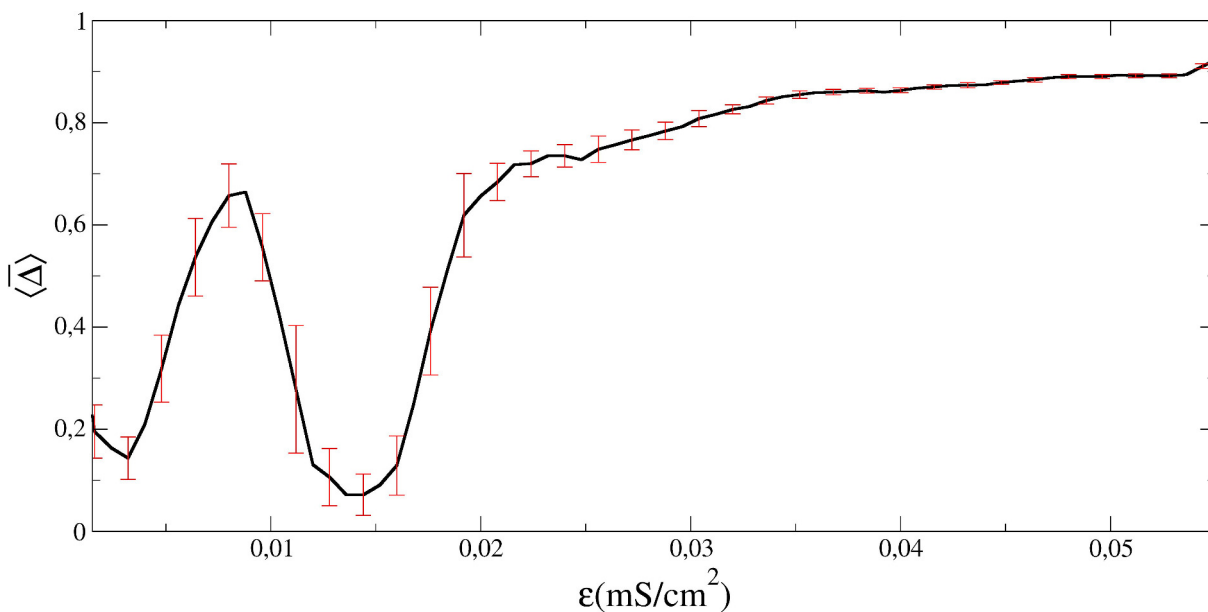


Figura 31 – Determinismo médio (em relação ao tempo e às 40 condições iniciais distintas) em função do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$ . As barras de erro em vermelho representam a dispersão sobre as condições iniciais distintas. É possível ver que para valores de  $\varepsilon < 0,03$  a dispersão é grande, sendo que para valores onde a rede é fortemente acoplada esta sensibilidade às condições iniciais desaparece.

No que diz respeito aos parâmetros usados para o cálculo do determinismo (equação (4.6)), o valor de *threshold* foi de 0,11 (para a figura (31), sendo que tal valor foi otimizado para o sistema, cujo método consiste em calcular o determinismo médio (temporal) em função de *threshold*, ou seja, calcula-se o determinismo médio temporal ( $\langle \Delta \rangle$ ) para cada valor do parâmetro de vizinhança ( $\delta$ ), variando de 0 até 0,7. Em seguida, pode-se calcular a derivada desta curva e então obter o ponto (*threshold* otimizado) onde a variação da mesma é máxima. Nesse sentido, obtém-se o valor do limiar de recorrência para o qual o determinismo é capaz de captar a maior quantidade de detalhes do sistema. Na figura (32) pode-se observar um exemplo do método. Vale notar também que o cálculo do determinismo foi feito de modo janelado, ou seja, analisa-se um determinado ponto da série dentro de uma janela de vizinhança. Este fato é importante para diminuir o ruído (intrínseco) do determinismo. O valor utilizado para tal janela foi de 10000 pontos (ou 10s, uma vez que a análise é feita no tempo (em milissegundos)) pois cada evento de *burst* tem duração de  $\sim 1$ s (como pode ser visto nas figuras (26, 22)), dessa forma, ocorre o fenômeno de *overlap* e, assim, o ruído é diminuído. Por fim, para diagonal mínima ( $l_{min}$ ) é adotado o valor de 50.

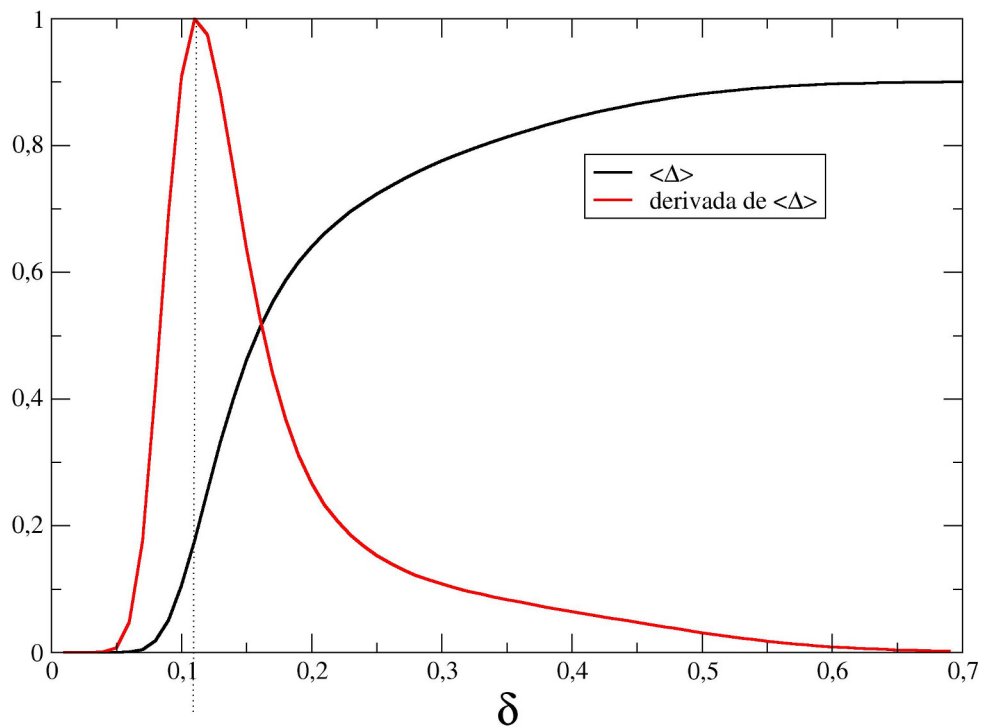


Figura 32 – Exemplo de teste de otimização pra parâmetro de vizinhança  $\delta$ . No gráfico, nota-se o determinismo médio (temporal) (curva preta) em função do *threshold*. Pode-se perceber que para  $\delta \approx 0,11$  a derivada (normalizada) (curva vermelha) é máxima, indicando o valor para o qual o determinismo capta as menores variações do sistema.

#### 5.4.1 Comportamento não estacionário

Na sequência do trabalho, faz-se a análise temporal do determinismo em função do parâmetro de acoplamento da rede. Vale ressaltar que, para esta fase da análise, fixa-se a

condição inicial, bem como o valor do acoplamento utilizado, para que assim seja possível simular o sistema por longos períodos de tempo, assim como é mostrado em [5] para obtenção de dados sobre (não)estacionariedade.

Na figura (33) é possível ter uma noção geral sobre o comportamento temporal do determinismo da rede em função do parâmetro de acoplamento. Pode-se notar que existem regiões de estacionariedade (determinismo constante (ou quase) no tempo) e não estacionariedade (determinismo variando no tempo). Claramente, o resultado está em concordância com as análises feitas via parâmetro de ordem e determinismo médios - figuras (28, 31). Pode-se notar que no máximo local ( $\varepsilon \approx 0,0080$ ) o sistema não apresenta sinais de intermitência, sendo que na transição (de subida e descida de  $\Delta$ ) este comportamento é notado, da mesma forma que na transição para sincronização ( $0,0018 < \varepsilon < 0,0030$ ) pode-se observar comportamento semelhante. Por fim, para  $\varepsilon > 0,0030$  a rede caminha para um estado de sincronização de fase e, então, o comportamento estacionário e mono-estável se mostra como única opção.

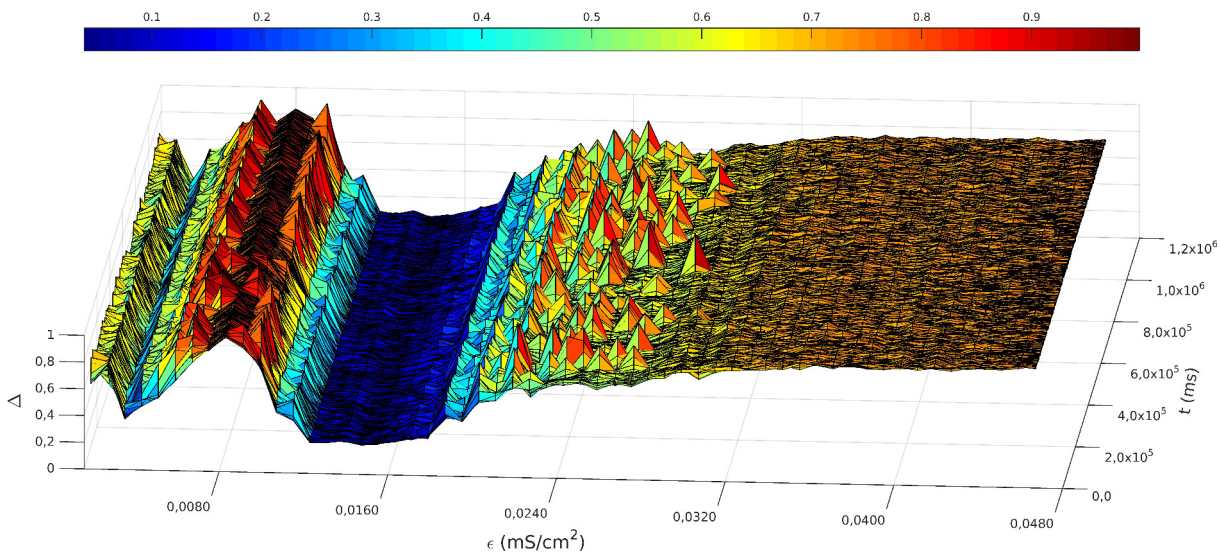


Figura 33 – Superfície representando o determinismo em função do tempo em função do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$ . É possível notar a presença de regiões de comportamento não estacionário.

Assim como para o parâmetro de ordem, simulações por longos períodos de tempo ( $\sim 1000s$ ) são feitas com condições iniciais e parâmetros de acoplamento fixados. Com base na figura (31), são escolhidos valores de  $\varepsilon$  de interesse para análise da rede, da mesma forma que feito com o parâmetro  $R$ .

Na figura (34), pode-se observar o determinismo em função do tempo para determinados valores do parâmetro de acoplamento e para uma única condição inicial. Vale ressaltar que os valores para o *threshold* de cada caso foram otimizados através do processo descrito e mostrado na figura (32) e constam na tabela (5). Além disso, o fato de se utilizar apenas uma condição inicial se justifica, uma vez que o comportamento temporal mostrado na figura (34) é observado independentemente da inicialização da rede, a menos que todos os neurônios sejam

iniciados em estado de sincronização, fato que no presente trabalho é evitado com a utilização de um *range* para os potenciais iniciais de cada neurônio. Além de que o modelo utilizado no presente trabalho apresenta uma grande complexidade quando se considera uma rede acoplada com 1024 elementos, sendo assim, se tornaria inviável a análise para muitas condições iniciais por longos períodos de tempo.

$\varepsilon = 0,0040 \rightarrow \delta = 0,18$	$\varepsilon = 0,0064 \rightarrow \delta = 0,16$	$\varepsilon = 0,0080 \rightarrow \delta = 0,15$
$\varepsilon = 0,0096 \rightarrow \delta = 0,15$	$\varepsilon = 0,0136 \rightarrow \delta = 0,14$	$\varepsilon = 0,0200 \rightarrow \delta = 0,12$
$\varepsilon = 0,0480 \rightarrow \delta = 0,10$		

Tabela 5 – Valores otimizados de *threshold* para os valores do parâmetro de acoplamento utilizados para as análises temporais via determinismo.

Na figura (34) é possível observar que, para  $\varepsilon = 0,0040$  (painel (a)), o sistema apresenta o comportamento não-estacionário, uma vez que o valor do determinismo varia no tempo. Entretanto, vale notar que o comportamento é altamente difuso, sendo que o sistema não apresenta permanência em um único estado - somente para períodos de tempos relativamente pequenos - se comparados ao comportamento apresentado pelo sistema para valores de  $\varepsilon$  maiores, isso pode ser entendido pelo fato de que neste caso o valor do acoplamento não é suficiente para fazer com que a rede, como um todo, supere o comportamento difuso dos neurônios como entidades individuais. No caso em que o  $\varepsilon$  é aumentado para 0,0064 (painel (b)), pode-se notar que o sistema continua com sua característica não estacionária, entretanto, para este valor de acoplamento, percebe-se a existência de dois estados preferenciais, sendo um com valor de determinismo mais alto e outro mais baixo. Desta forma, pode-se entender um com maior grau de sincronização e outro com menor grau de sincronização, relativamente falando, uma vez que os valores de *threshold* utilizados para cada valor de  $\varepsilon$  foram otimizados, logo, a comparação absoluta do valor mostrado pelo determinismo é inválida. Continuando a análise para valores maiores de acoplamento, é possível notar que, para o valor de  $\varepsilon = 0,0080$  (painel (c)), a rede apresenta comportamento estacionário. Vale notar que este valor de acoplamento se refere ao máximo local presente antes da transição pra sincronização, mostrado nas figuras (31), (33) e (28). Curiosamente, após o máximo local, para o valor de  $\varepsilon = 0,0120$  (painel (d)), a rede volta a apresentar o comportamento não estacionário, de forma semelhante à observada para  $\varepsilon = 0,0064$  (painel (b)). Pode-se ainda notar o fato de que estes dois valores estão na transição para o máximo local e na transição do máximo local, ou seja, na subida (do determinismo ou parâmetro de ordem) e descida em relação ao mesmo. Para  $\varepsilon = 0,0136$  (painel (e)) o sistema perde novamente o comportamento de não estacionariedade e volta a ser constante no tempo, entretanto, com um valor mais baixo. No que diz respeito à transição pra sincronização, é possível observar que, para  $\varepsilon = 0,0200$  (painel(f)), o comportamento não estacionário ressurgiu, entretanto, é possível notar que a duração do fenômeno se dá de forma distinta. Por fim, para valores de acoplamento onde a

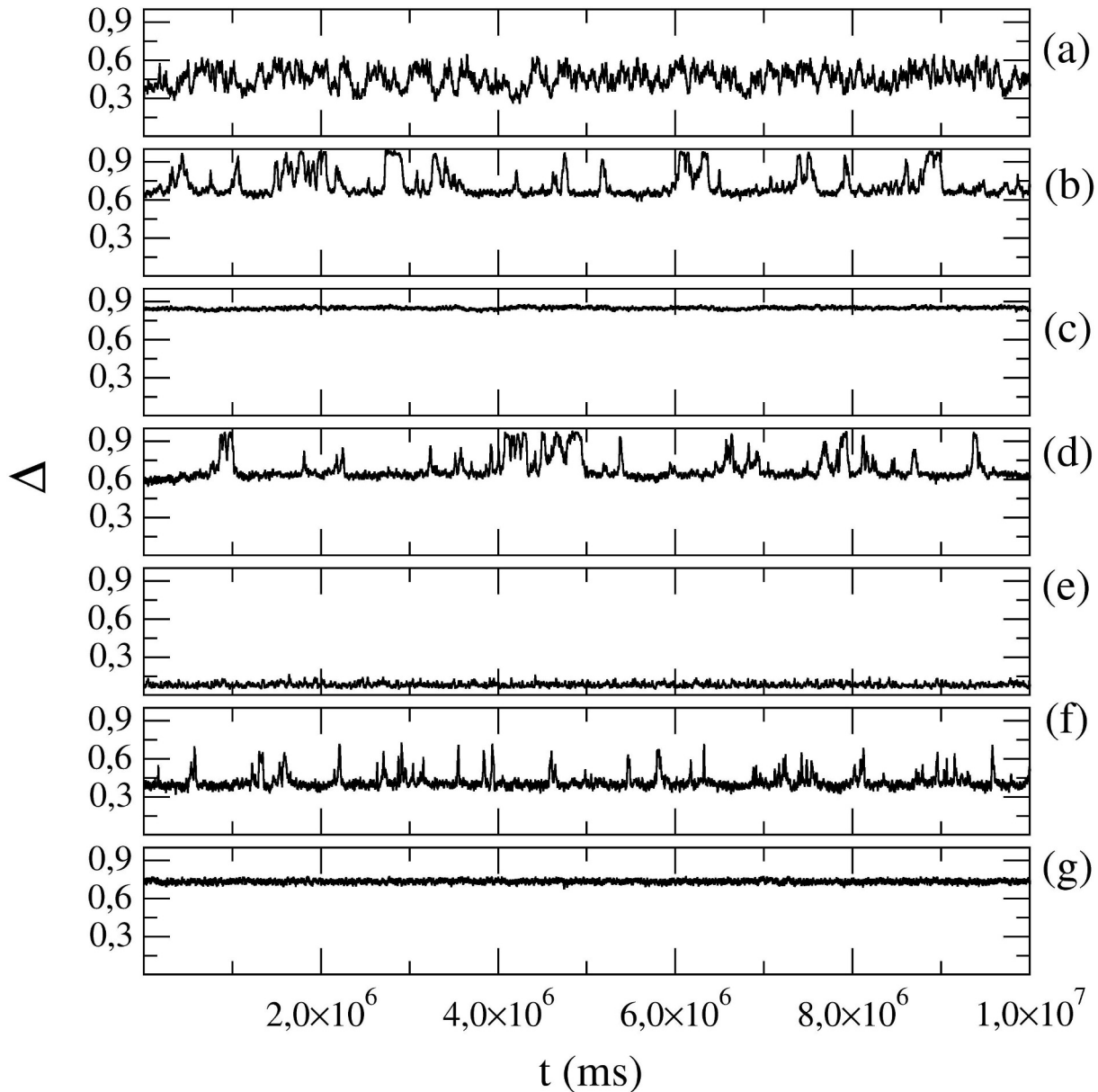


Figura 34 – Determinismo ( $\Delta$ ) em função do tempo para uma rede com 1024 neurônios sob o regime de pequeno mundo para uma única condição inicial e determinados valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ . É possível observar diferentes comportamentos dinâmicos, sendo que em (a) o determinismo apresenta comportamento difuso, em (b), (d) e (f) o determinismo varia entre alguns valores e, para (c) e (g), é possível observar estacionariedade.

rede apresenta comportamento de sincronização de fase, como visto para  $\varepsilon = 0,0480$  (painel(g)), o sistema apresenta comportamento estacionário.

Pode-se, agora, analisar a distribuição dos valores do determinismo para cada  $\varepsilon$  escolhido, assim como feito na análise utilizando o parâmetro de ordem. Na figura (35) é possível notar que para o menor valor de  $\varepsilon$  analisado (painel (a)) existe uma gama de valores que o determinismo assume, indicando assim o comportamento não estacionário, entretanto, fica claro



que não existe nenhum estado preferencial. Diferentemente, para o caso mostrado no painel (b), o sistema continua apresentando o comportamento não estacionário. Entretanto, é possível observar que existem dois estados mais frequentes. O mesmo ocorre para  $\varepsilon = 0,0096$  (painel (d)), sendo que entre o caso (b) e (d), a rede passa pelo máximo local (expresso pelo parâmetro de ordem e determinismo - figuras (28) e (31)) e para  $\varepsilon = 0,0080$  (painel (c)), o sistema alcança a estacionariedade. Esta transição presente na região  $0,0064 < \varepsilon < 0,0096$  é melhor explorada na sequência do trabalho (5.4.2). Para  $\varepsilon = 0,0136$  (painel (e)), a rede exhibe, novamente, uma distribuição de  $\Delta$  concentrada, indicando o comportamento estacionário. No que diz respeito à transição para sincronização (painel (f)), a rede adquire, mais um vez, o comportamento não estacionário. É importante notar que existem indícios de que toda transição pra sincronização apresenta este tipo de comportamento, sendo que, na parte final deste trabalho, mostra-se para outro modelo que a transição pra sincronização apresenta comportamento semelhante. Por fim, para  $\varepsilon = 0,0480$  (painel (g)), a distribuição a ser concentrada, indicando o comportamento estacionário, como esperado tendo em vista o resultado mostrado pela figura (33). Vale ressaltar que os resultados exibidos pela figura (35) são baseados nos dados mostrados na figura (34), ou seja, com os valores otimizados de *threshold*, como explicitado acima. Desta forma, os valores absolutos de  $\Delta$  não podem ser comparados com aqueles mostrados na figura (31), fato este que não apresenta nenhum problema, sendo que o principal objetivo desta análise consiste no estudo da dependência temporal, ou seja, relativa ao tempo do sinal do campo médio da rede sob as condições de interesse.

#### 5.4.2 Não estacionariedade com intermitência de dois estados

A análise da rede de 1024 neurônios através do determinismo mostra que existem regiões onde o comportamento não estacionário é observado (vide figura (33)). Entretanto, ao realizar uma análise mais detalhada, é possível verificar que, para determinados valores do parâmetro de acoplamento, o sistema apresenta um comportamento que pode ser comparado a uma intermitência do tipo dois estados [80]. Uma indicação deste fato pode ser observada na figura (35), pois, como dito anteriormente, para os valores do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon = 0,0064$  (painel (b)) e  $\varepsilon = 0,0096$  (painel (d)) é possível notar que as distribuições dos determinismos (em função do tempo) para estes casos denunciam a existência de dois estados preferenciais, com uma frequência maior de aparecimento.

Nesse sentido, pode-se realizar simulações para valores intermediários de  $\varepsilon$  dentro deste intervalo, usando o mesmo valor de *threshold* para tal, pois dessa forma é possível comparar, além da dinâmica temporal, o valor absoluto de  $\Delta$ . Pode-se observar na figura (36) que, ao passo que se aumenta o valor do parâmetro de acoplamento e a rede se aproxima do máximo local, o comportamento não estacionário e de dois estados se torna presente. Entretanto, pode-se perceber que, ao continuar aumentando o valor de  $\varepsilon$ , a rede vai perdendo tal comportamento e se tornando estacionária, ao passo que continuado o processo, é possível ver que novamente o comportamento

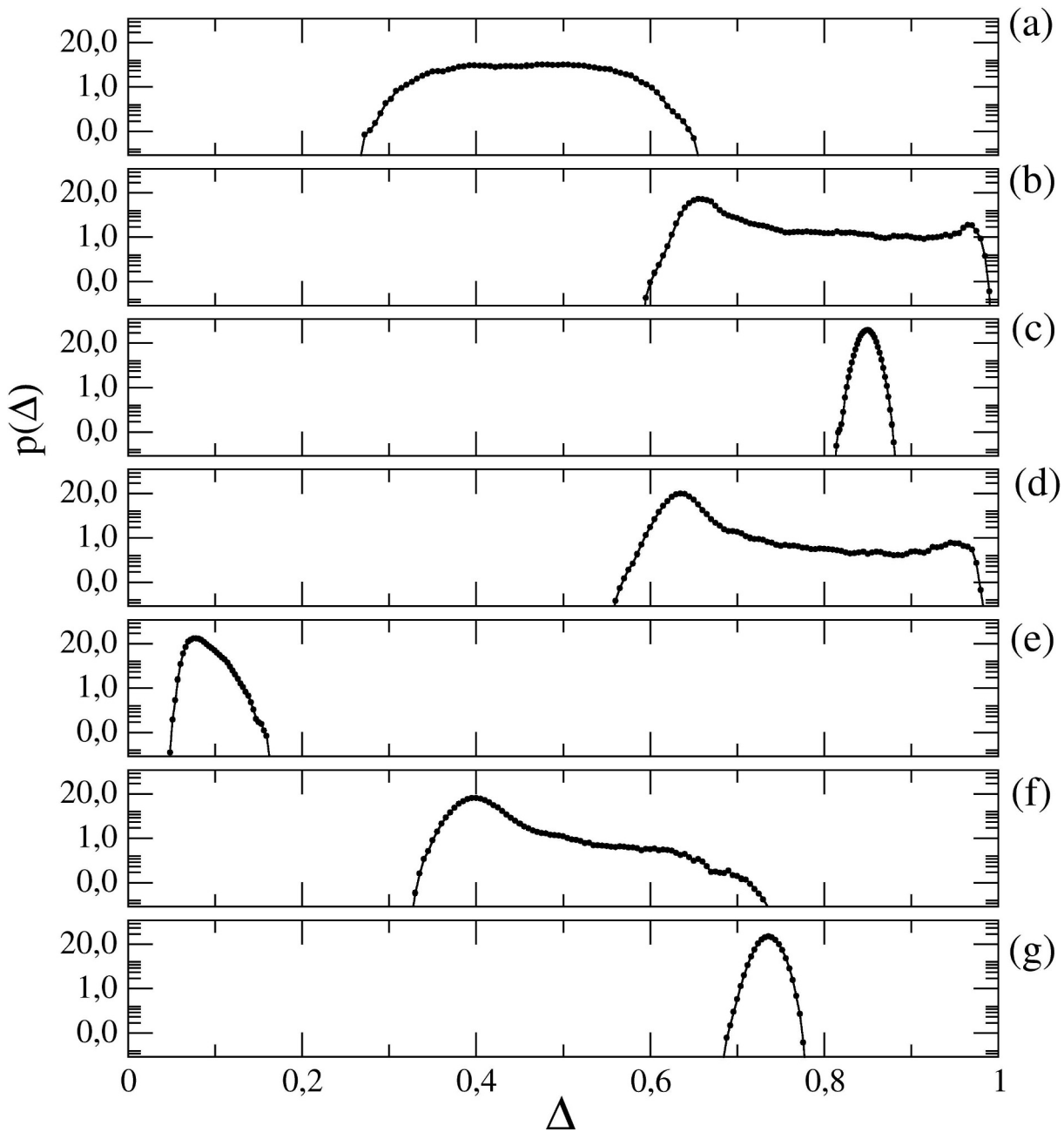


Figura 35 – Histogramas ( $p(\Delta)$ ) representando a distribuição dos valores do determinismo em função do tempo para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,0040$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,0064$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,0080$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,0096$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,0136$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,0200$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,0480$ . É possível notar que, para as regiões não estacionárias próximas ao máximo local ( $\varepsilon = 0,0064$  e  $\varepsilon = 0,0096$ ), as distribuições indicam a presença de dois estados preferenciais.

não estacionário com característica de dois estados aparece. Tal fato é corroborado com os resultados mostrados na figura (33), pois é possível perceber uma região de não estacionariedade antes do máximo local, seguida do comportamento estacionário no máximo local e, por fim, mais uma região não estacionária depois do máximo local.

Partindo então da hipótese de que o sistema apresenta dois estados preferenciais,

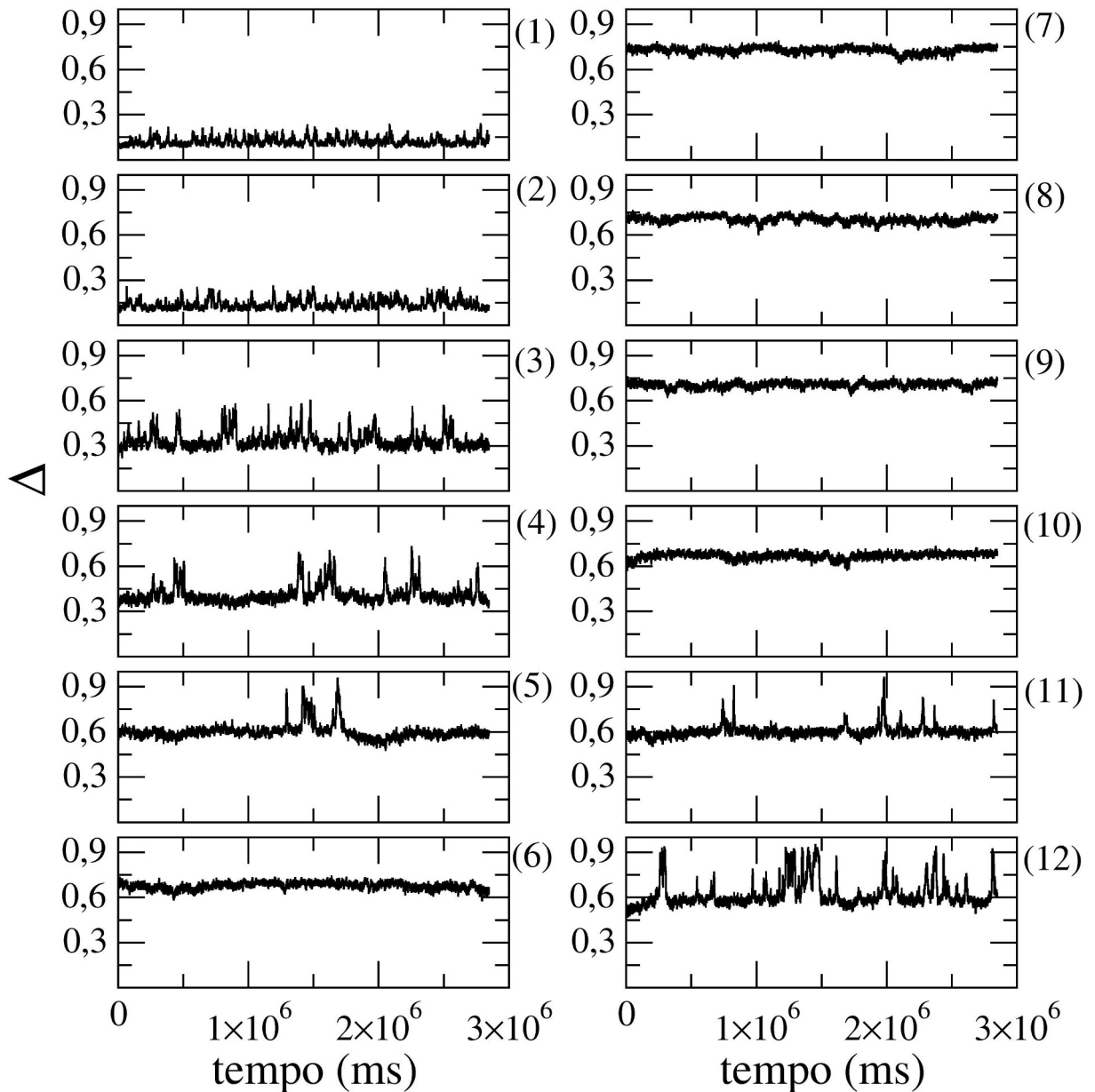


Figura 36 – Determinismo temporais obtidos com o mesmo valor de  $\delta$  para diferentes valores de  $\varepsilon$  na região próxima ao máximo local observado na figura (31). Fica claro o surgimento e desaparecimento do fenômeno intermitência de dois estados. Neste caso, (1) -  $\varepsilon = 0,0050$ ; (2) -  $\varepsilon = 0,0054$ ; (3) -  $\varepsilon = 0,0058$ ; (4) -  $\varepsilon = 0,0062$ ; (5) -  $\varepsilon = 0,0066$ ; (6) -  $\varepsilon = 0,0070$ ; (7) -  $\varepsilon = 0,0074$ ; (8) -  $\varepsilon = 0,0078$ ; (9) -  $\varepsilon = 0,0082$ ; (10) -  $\varepsilon = 0,0086$ ; (11) -  $\varepsilon = 0,0090$ ; (12) -  $\varepsilon = 0,0094$ .

pode-se então determinar os intervalos de tempo de permanência em cada um destes. Para tal, analisa-se o sinal do determinismo em função do tempo e considera-se um estado de menor valor de  $\Delta$  (estado 2) e outro com os picos apresentados no sinal de  $\Delta$  (estado 1). Nas figuras (37), (38), (40) e (39) é possível observar as distribuições do intervalos de tempo que o sistema permanece em cada um dos dois estados para o caso de  $\varepsilon = 0.0064$  e  $\varepsilon = 0.0096$ , pois, para estes valores de acoplamento, o sistema possui maior característica associada ao comportamento de dois estados. Pode-se notar que, de um modo geral, considerando uma única série temporal e um

único parâmetro de acoplamento, o estado de menor valor de  $\Delta$  apresenta maior probabilidade de ocorrência, como se fosse o estado com maior preferência no sistema. É interessante perceber também que, para intervalos de tempo mais longos, a probabilidade da existência destes é maior para o estado (2), sendo pouco provável para o estado de maior valor de  $\Delta$  (1), o que corrobora a afirmação anterior.

Outro ponto interessante, no que se refere às distribuições mostradas nas figuras (37), (38), (40) e (39) consiste no fato de que, para ambos os casos, as distribuições escalam com leis de potência, de um modo geral. Para os intervalos de tempo maiores, a distribuição se aproxima de uma exponencial e, desta forma, o sistema se mostra intermitente entre dois estados, localmente estáveis, mas globalmente instáveis, sendo que mudanças pequenas no parâmetro de acoplamento são suficientes para mudar o comportamento da dinâmica do sistema, como proposto em [80] e mostrado em [5]. Na figura (36) esta característica se torna evidente, uma vez que o sistema ganha a característica intermitente com o aumento do parâmetro de acoplamento ( $\varepsilon$ ), mas que, com a continuação deste aumento, a rede ganha estabilidade em um único estado, voltando a apresentar o comportamento não estacionário com a volta do acréscimo de  $\varepsilon$ . É importante perceber que a estabilidade é atingida próxima ao valor do máximo local expresso pelo parâmetro de ordem médio (figura (28)) e pelo determinismo médio (figura (31)), como se o sistema adquirisse estabilidade global nesta região, mas apresentando apenas estabilidade local nas proximidades (a respeito do parâmetro de acoplamento da rede).

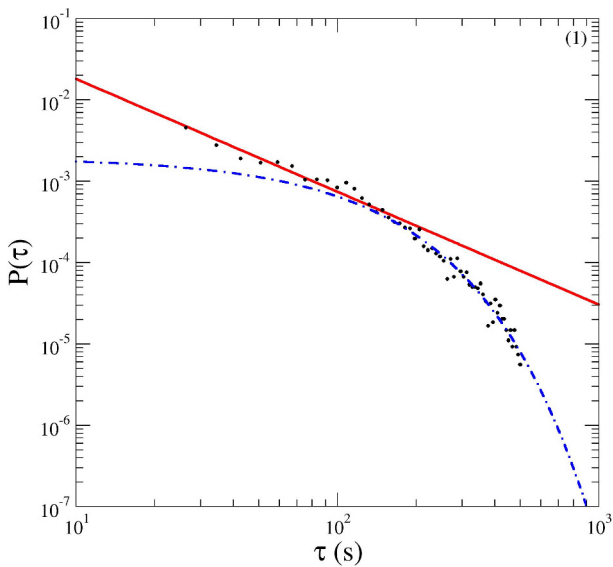


Figura 37 –  $P(\tau)$  denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 1 ( $\Delta$  maior) para  $\varepsilon = 0,0064$ .

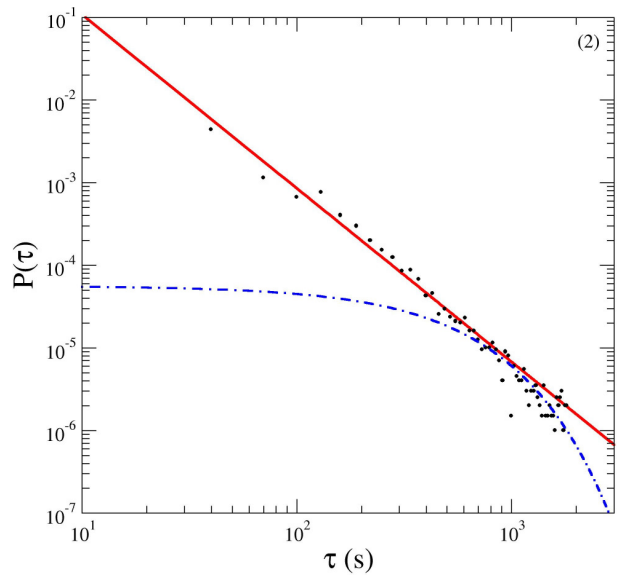


Figura 38 –  $P(\tau)$  denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 2 ( $\Delta$  menor) para  $\varepsilon = 0,0064$ .

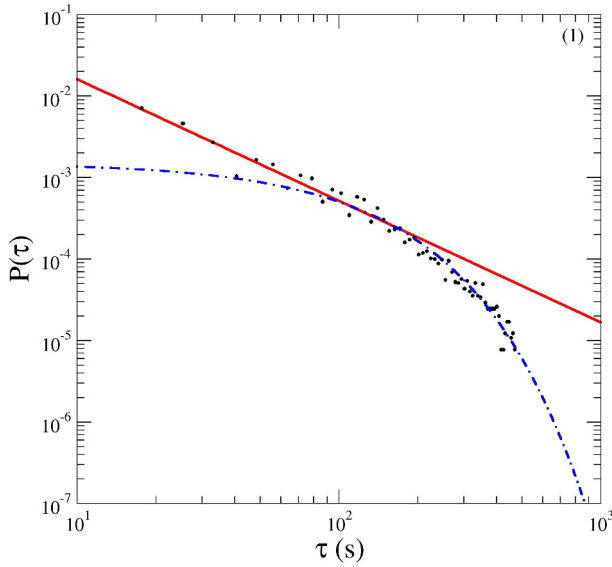


Figura 39 –  $P(\tau)$  denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 1 ( $\Delta$  maior) para  $\varepsilon = 0,0096$ .

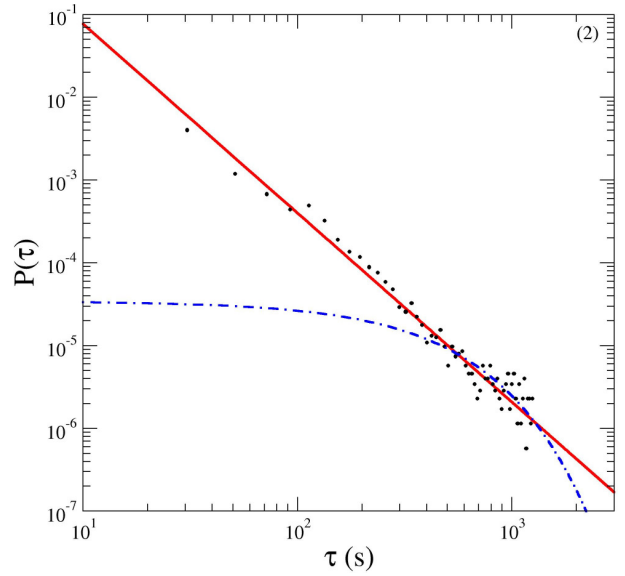


Figura 40 –  $P(\tau)$  denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 2 ( $\Delta$  menor) para  $\varepsilon = 0,0096$ .

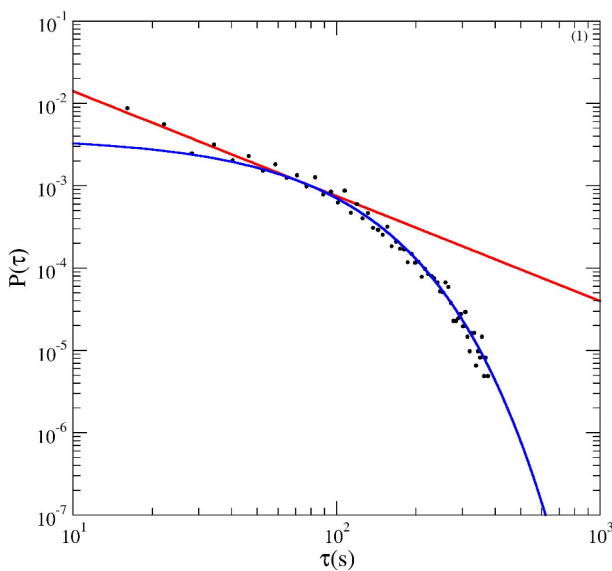


Figura 41 –  $P(\tau)$  denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 1 ( $\Delta$  maior) para  $\varepsilon = 0,0200$ .

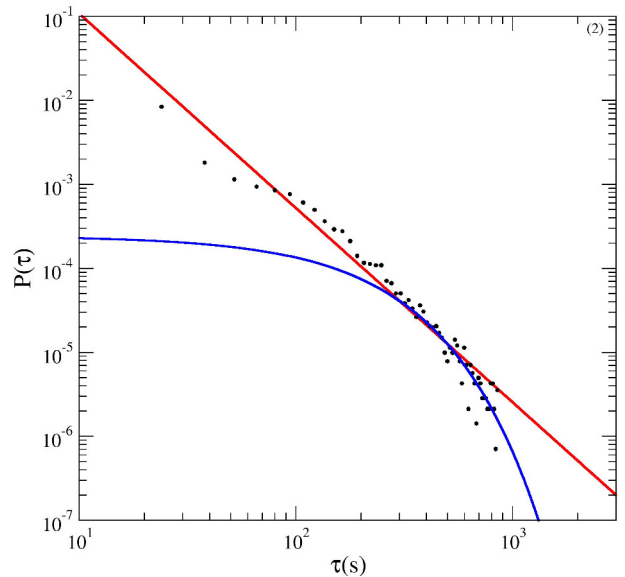


Figura 42 –  $P(\tau)$  denota a probabilidade da distribuição dos intervalos de tempo que o sistema permanece no estado 2 ( $\Delta$  menor) para  $\varepsilon = 0,0200$ .



## 6 Considerações Finais

O presente trabalho utiliza a modelagem matemática para investigação acerca de comportamentos físicos/biológicos/fisiológicos de sistemas reais. Devido o grande avanço computacional que ocorreu no fim do século XX e o início do século atual, esta abordagem se mostra cada vez mais eficaz, pois se torna mais próxima à realidade e capaz de expressar comportamentos cada vez mais complexos. Nesse sentido, é importante perceber e explorar as características e vantagens que a abordagem matemática/computacional oferece em comparação às técnicas experimentais.

Por outro lado, a utilização de ideias referentes à análise de recorrência, a qual é empregada com sucesso para estudo de sistemas dinâmicos desde sua criação, se mostrou interessante para caracterização da dinâmica de redes neurais, uma vez que foi possível detectar comportamentos e características até então desconhecidas, sendo que, não seriam possíveis essas observações com a utilização de ferramentas mais tradicionais, como o parâmetro de ordem de Kuramoto.

Através deste trabalho, pode-se concluir que redes neurais, simuladas com a utilização de um modelo capacitivo considerando a sensibilidade térmica do neurônios, com arquitetura de conexão do tipo *small world*, apresentam características não triviais e até então não muito exploradas na literatura. Estes comportamentos podem ser listados como:

- **Sincronização anômala:** pode-se perceber que na região de acoplamento fraco, a rede apresenta indicações de sincronização, observadas pelos máximos locais no parâmetro de ordem médio, determinismo médio, no campo médio da rede e no próprio potencial dos neurônios, a qual pode ser considerada como anômala, uma vez que, ao aumentar o parâmetro de acoplamento, a rede perde coerência, ou apresenta características de dessincronização. Além disso, a mesma pode ser associada a doenças relacionadas às redes neurais, como mostrado em [78].
- **Não estacionariedade:** para região de acoplamento fraco, a rede apresenta características de não estacionariedade. Como dito anteriormente, a rede apresenta um máximo local (mostrado pelo parâmetro de ordem médio e determinismo médio) nesta região, dessa forma, o comportamento não estacionário é observado na transição e posteriormente ao máximo local, bem como na transição para os estados assintóticos (sincronizados). Estes estados não estacionários apresentam características do tipo intermitência de dois estados, cuja estabilidade escala com leis de potência.
- **Dependência com as condições iniciais:** é possível notar que, para região de acoplamento

e na transição para os estados assintóticos, a rede apresenta alta dispersão nos quantificadores médios em relação às condições iniciais, indicando assim que há sensibilidade do sistema nestas regiões.

- **Estabilidade global e local:** para a região de acoplamento forte, a rede apresenta comportamento assintótico, sendo ele caracterizado por sincronização, insensibilidade às condições iniciais e estacionariedade, desta forma, apresentando estabilidade global. Entretanto, para a região de acoplamento fraco, o sistema apresenta as características acima listadas e, desta forma, a rede pode ser caracterizada pela existência de estabilidade local, porém não global.

## 6.1 Dependência com o Número de Conexões da Rede

Todo o trabalho foi desenvolvido com a utilização da arquitetura de conexão do tipo pequeno mundo, a qual pode ser caracterizada como uma estrutura que possui um alto grau de aglomeração de conexões e um baixo livre caminho médio, como definido anteriormente. Nesse sentido, para construir uma rede com tal topologia, parte-se de uma rede regular com segundos vizinhos e adiciona-se conexões não locais com uma probabilidade  $p$ .

O trabalho foi desenvolvido utilizando  $p = 0,001$ , pois nesse sentido garante-se que a topologia é do tipo pequeno mundo, uma vez que, como mostrado na figura (14), existe um intervalo de probabilidades em que este regime é obtido. Nesse sentido, pode-se analisar o sistema para diferentes valores de probabilidade de conexões não locais. Para valores de  $p$  menores que aqueles que geram uma arquitetura de pequeno mundo, ou mesmo para o limite inferior da topologia de pequeno mundo, o sistema apresenta alta aglomeração de conexões, devido às conexões locais, de segundos vizinhos, mas apresenta um alto livre caminho médio, pela ausência, ou pelo baixo número de conexões não locais.

Pode-se analisar o sistema dentro desta configuração de conexão com a utilização da análise de recorrência. Primeiramente, pode-se calcular o determinismo médio da rede com baixo grau de conexões não locais utilizando o mesmo procedimento descrito nas seções anteriores: fazendo o procedimento para diferentes condições iniciais e calculando a média sobre as mesmas.



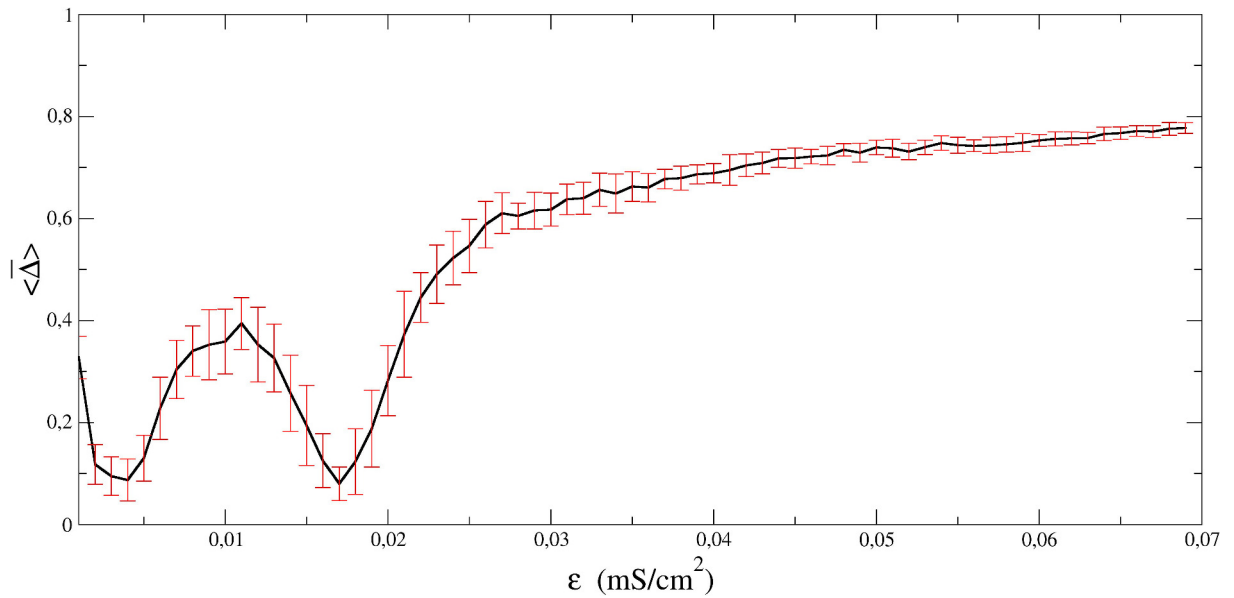


Figura 43 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local  $p = 0,0001$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas.

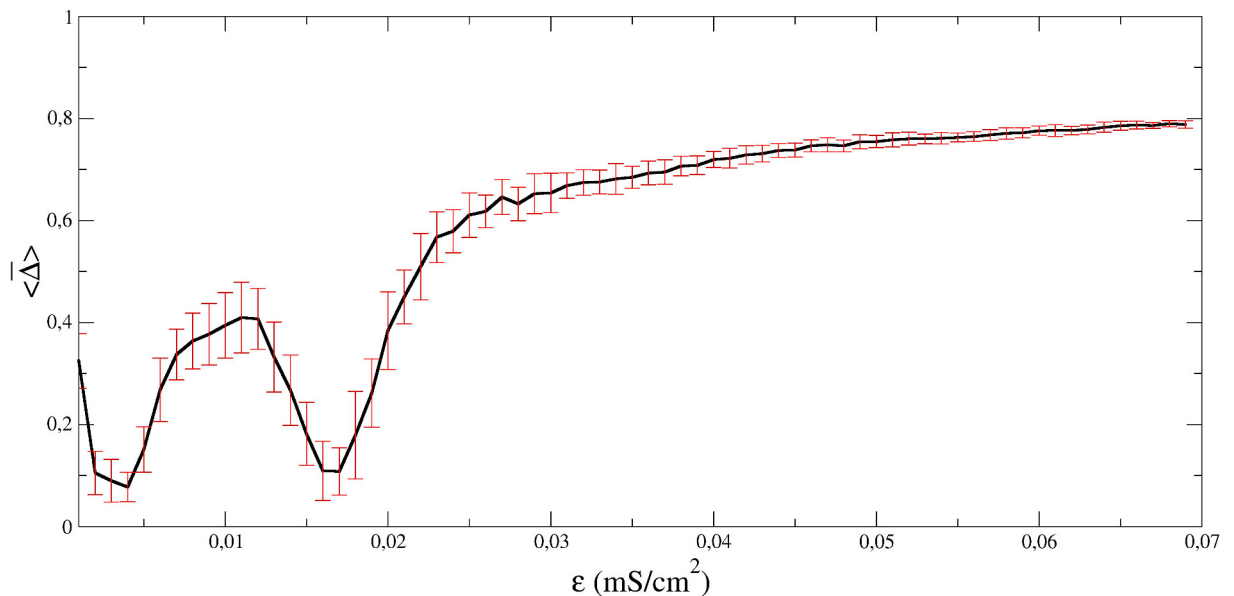


Figura 44 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local  $p = 0,0005$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas.

Por completeza, pode-se analisar a rede com um alto número de conexões não locais. Sabe-se que, nesta condição, a topologia de pequeno mundo é perdida, entretanto, devido ao aumento do número de conexões, o sistema adquire o comportamento sincronizado de forma mais fácil. Novamente, pode-se realizar os mesmos procedimentos anteriormente citados e calcular o determinismo médio em relação ao tempo e às condições iniciais.

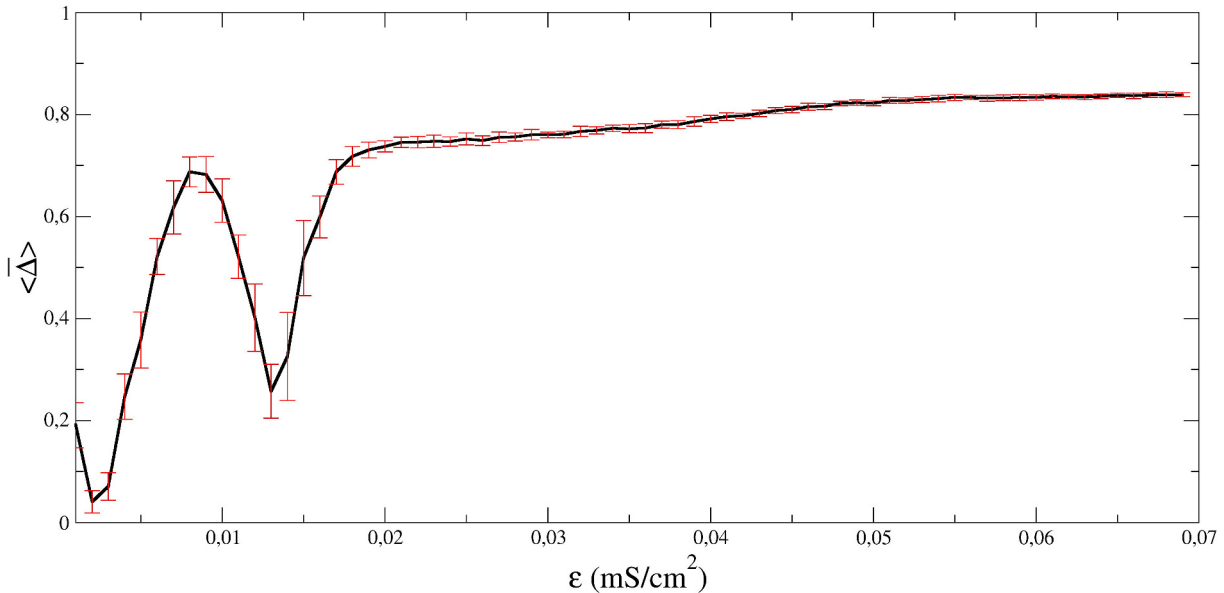


Figura 45 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local  $p = 0,0050$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas.

As avaliações feitas nesta seção consistem em diferentes arquiteturas de conexão, pois varia-se o  $p$ , sendo que para os valores pequenos de probabilidade de conexão, pode-se obter o começo da região de pequeno mundo, entretanto, para os valores maiores de  $p$  este regime é perdido, pois como mostrado na figura (14), sendo que para  $p > 0,001$  o coeficiente de aglomeração diminui, pois muitas conexões não locais são adicionadas à rede e, desta forma, caminha-se para arquitetura de acoplamento global. É interessante observar que, em ambos os casos, a sincronização anômala para baixo acoplamento acontece, entretanto, a sensibilidade às condições iniciais é reduzida.

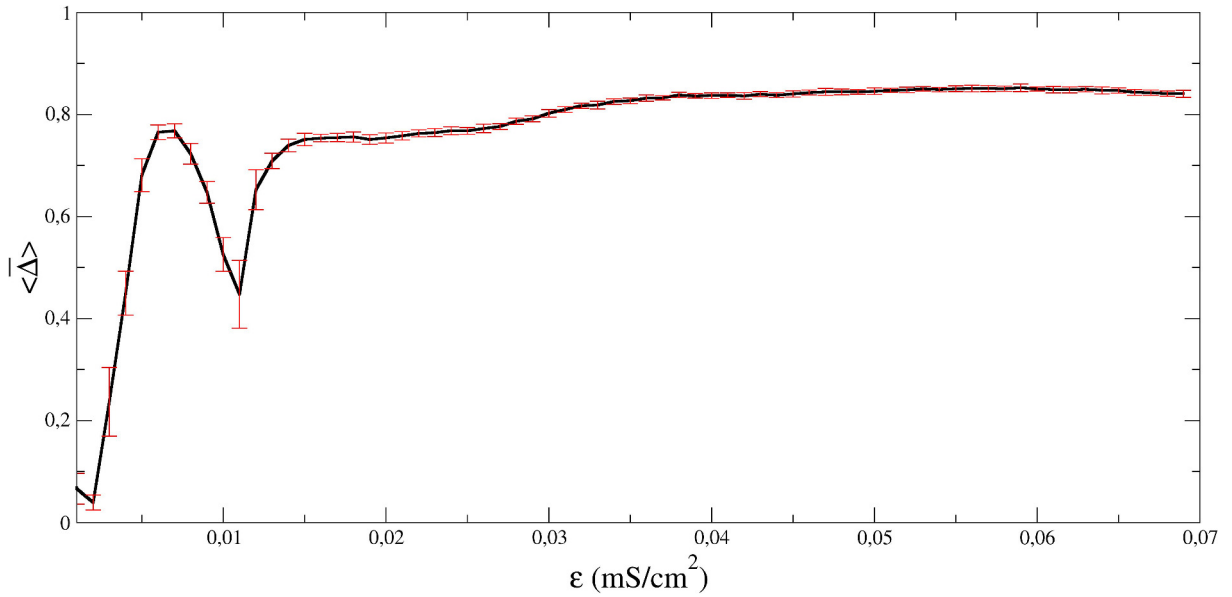


Figura 46 – Determinismo médio (em relação ao tempo e a 40 diferentes condições iniciais) para uma rede com 1024 neurônios com arquitetura de conexão de segundos vizinhos e uma probabilidade conexão não local  $p = 0,0100$ . Pode-se perceber a existência de um máximo local para região de acoplamento fraco, bem como uma alta dispersão em relação às condições iniciais, indicada pelas barras vermelhas.

## 6.2 Comportamentos Semelhantes no Modelo de Rulkov

O modelo de Rulkov [81] foi proposto em 2001 por Nikolai Rulkov e pode ser entendido como um mapa acoplado bidimensional que é capaz de reproduzir o comportamento dinâmico neuronal conhecido como *burst*. Vale ressaltar que existem diversos modelos de equações diferenciais que reproduzem o mesmo padrão dinâmico, entretanto, a grande vantagem do modelo adotado consiste no fato de ser uma equação de diferença e, desta forma, o tempo computacional é extremamente reduzido. Matematicamente, o modelo pode ser escrito como:

$$x_{n+1,i} = \frac{\phi}{1 + x_{n,i}^2} + y_{n,i} + \frac{\varepsilon}{\text{norm}} \sum_{j=1}^N S_{i,j} x_{n,j}, \quad (6.1)$$

$$y_{n+1,i} = y_{n,i} - \sigma x_{n,i} + \varphi, \quad (6.2)$$

onde  $x_i$  representa a variável rápida ou, ainda, o potencial sobre a membrana do neurônio  $i$ ,  $y_i$  a variável lenta do neurônio  $i$ ,  $\varepsilon$  é o parâmetro de acoplamento da rede,  $\text{norm}$  o fator de normalização com base no número de conexões do neurônio mais conectado da rede e  $S_{i,j}$  representa a matriz de adjacência que contém as informações sobre as conexões da rede.  $\phi$ ,  $\sigma$  e  $\varphi$  são parâmetros de modelagem que, para o este trabalho, foram fixados em  $\phi = 4,1$  e  $\sigma = \varphi = 0,001$ , pois dessa forma o comportamento de *burst* é obtido.

Na figura (47) é possível observar o comportamento reproduzido pelo modelo. Para variável rápida, o mesmo pode ser caracterizado como uma sequência de disparos seguidos

de um período quiescente, de forma semelhante ao produzido pelo modelo de neurônios de Hodgkin-Huxley termicamente sensíveis.

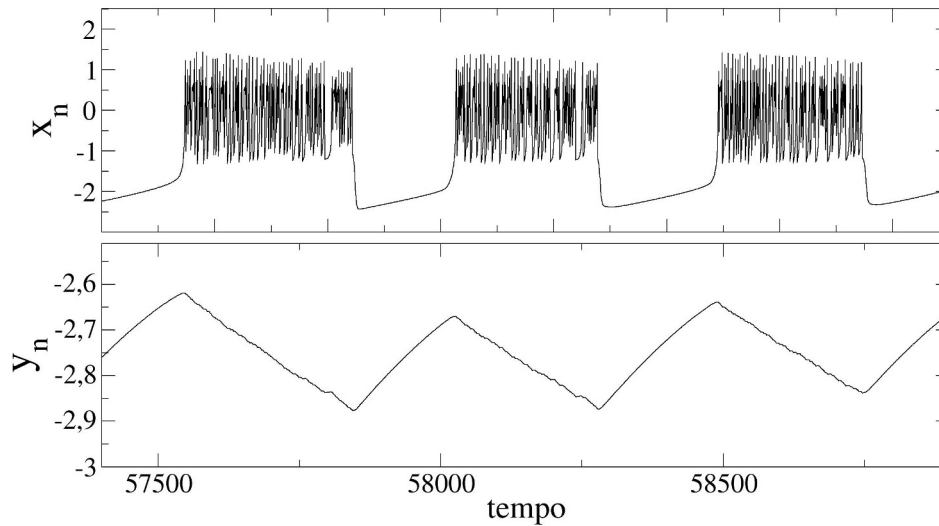


Figura 47 – Comportamento dinâmico de um neurônio obtido por meio do modelo de Rulkov com os parâmetros  $\phi = 4,1$  e  $\sigma = \varphi = 0,001$ .  $x_n$  é a variável rápida e denota o comportamento de *burst* enquanto  $y_n$  é a variável lenta do sistema.

Para as análises feitas com o uso do determinismo, foi utilizada a mesma ideia do capítulo anterior onde é calculado o campo médio dos 1024 neurônios, com a utilização da equação (27), produzindo assim uma única série temporal que representa a rede como um todo. Dessa forma, pode-se seguir com o mesmo procedimento adotado para o modelo anterior, onde, primeiramente, faz-se análises para tempos mais curtos para diferentes condições iniciais, obtendo assim o determinismo médio (em relação ao tempo e às condições iniciais) da rede, através da equação (5.8), para que seja possível caracterizá-la em termos gerais. Posteriormente, é possível realizar as análises para longos intervalos de tempo, obtendo o determinismo como função do tempo e, através da distribuição temporal do mesmo, é possível analisar a estacionariedade do sistema.

Na figura (48) é possível observar o determinismo médio para uma rede de 1024 neurônios, simulados com o modelo de Rulkov, sob uma arquitetura de pequeno mundo com  $p = 0,001$ . De um modo geral, a principal diferença entre este resultado e aquele produzido pelo modelo neural termicamente sensível consiste na ausência do máximo local para acoplamento fraco, entretanto, a transição para sincronização e os estados assintóticos são semelhantes. As barras vermelhas representam a dispersão sobre 50 condições iniciais. Pode-se perceber que, para  $\varepsilon > 0,03$ , esta dispersão é nula, indicando assim que o sistema não é mais afetado pela forma de inicialização, entretanto, na transição (para baixo acoplamento) o sistema é sensível a estas condições.

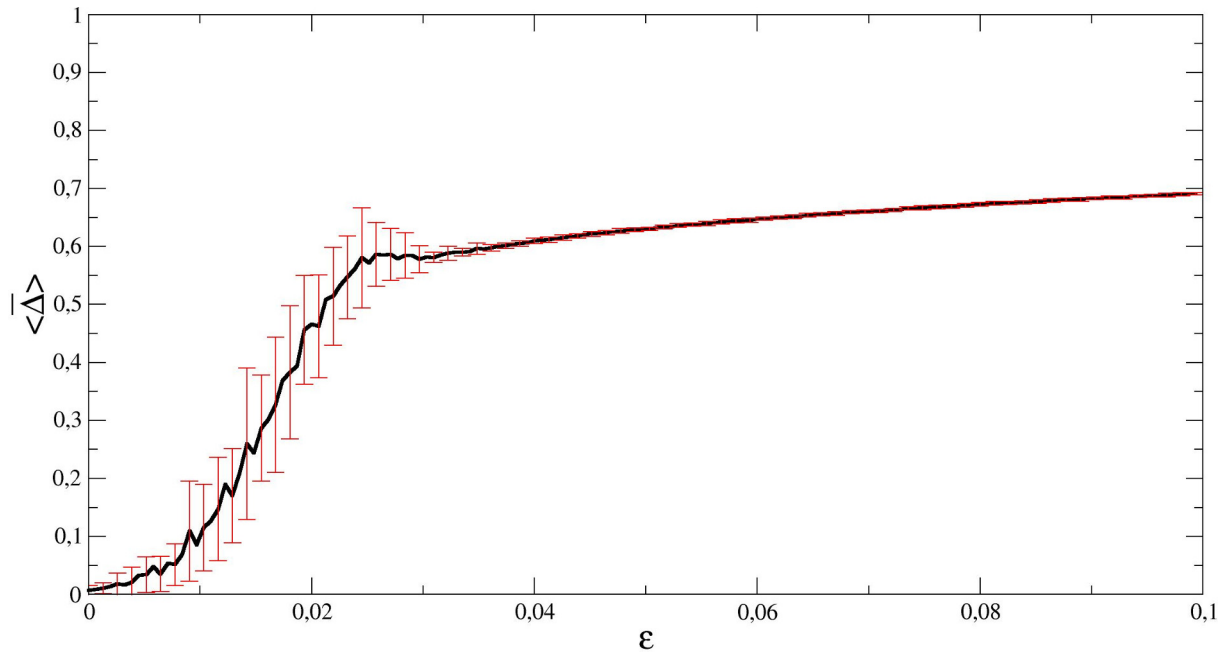


Figura 48 – Determinismo médio para um rede de 1024 neurônio de Rulkov sob topologia de pequeno mundo com  $p = 0,001$ . Para cada valor de  $\varepsilon$  o sistema foi simulado por 200 segundos para 50 condições iniciais distintas. Neste caso, os parâmetros de recorrência usados foram:  $\delta = 0,18$  e  $l_{\min} = 60$ .

Para a mesma configuração, entretanto com  $p = 0,0005$ , tem-se comportamento semelhante. Novamente, não há máximo local, indicando a ausência de (tendência) de sincronização para acoplamento fraco, porém, a transição para sincronização, bem como os estados sincronizados apresentam comportamento semelhante. Pode-se notar que a dispersão para condições iniciais se anula para  $\varepsilon = 0,05$ , indicando, assim, um dos efeitos da topologia sobre a rede, sendo que é necessário um acoplamento maior para que ela se torne insensível às condições de inicialização.

Como sequência da análise da rede, pode-se então fixar a condição inicial e o valor do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$  para analisar o comportamento dinâmico da rede por longos períodos de tempo. Nesse sentido, escolhe-se alguns valores de  $\varepsilon$  na região da transição para sincronização, bem como na região sincronizada e, através da equação (4.6), é possível obter o determinismo como função do tempo para os parâmetros de interesse.

Na figura (50) é possível observar o comportamento temporal do determinismo para a rede com  $p = 0,001$ . Para os valores mais baixos de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,005$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,010$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,015$ , o determinismo se mostra difuso. Para a região de transição para sincronização (casos (d), (e) e (f)) é possível notar a existência de "dois estados" mais destacados, de forma semelhante ao que ocorre no modelo de Braun *et. al.*. Para a região sincronizada, o comportamento é muito semelhante, sendo caracterizado por estacionariedade e mono estabilidade.

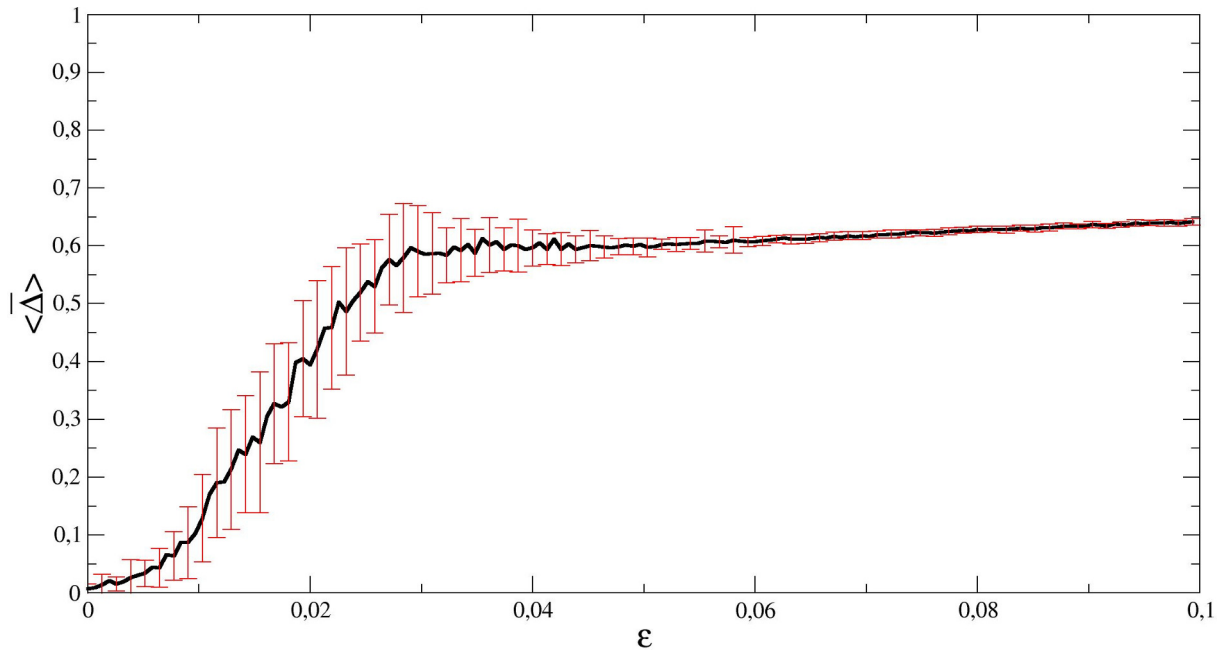


Figura 49 – Determinismo médio para um rede de 1024 neurônio de Rulkov sob topologia de pequeno mundo com  $p = 0,0005$ . Para cada valor de  $\varepsilon$  o sistema foi simulado por 200 segundos para 50 condições iniciais distintas. Neste caso os parâmetros de recorrência usados foram:  $\delta = 0,18$  e  $l_{\min} = 60$ .

De forma semelhante, para o caso onde a probabilidade da existência de uma conexão não local é dada por  $p = 0,0005$ , o sistema apresenta difusidade para os valores mais baixos de acoplamento (casos (a), (b) e (c)) sendo que na transição para sincronização (casos (d), (e) e (f)) o comportamento de "dois estados" se mostra presente novamente e, por fim, na região sincronizada ocorre o mesmo fenômeno que anteriormente descrito. Entretanto, pode-se perceber na figura (51) que os valores de acoplamento onde os fenômenos de não estacionariedade são observados para o caso de  $p = 0,0005$  são mais altos se comparados ao caso de  $p = 0,001$ .

Por fim, de um modo geral, é possível concluir que os fenômenos relacionados à não estacionariedade, multi estabilidade e sensibilidade às condições iniciais não são restritos apenas ao modelo de Braun *et. al.*, sendo possível verificar os mesmos com a utilização do modelo de Rulkov, que apresenta o mesmo comportamento dinâmico (o *burst*). Nesse sentido, é possível encontrar regiões (em relação ao parâmetro de acoplamento) onde o sistema apresenta não estacionariedade, indicando uma possível intermitência do tipo "dois estados", além de sensibilidade às condições iniciais.

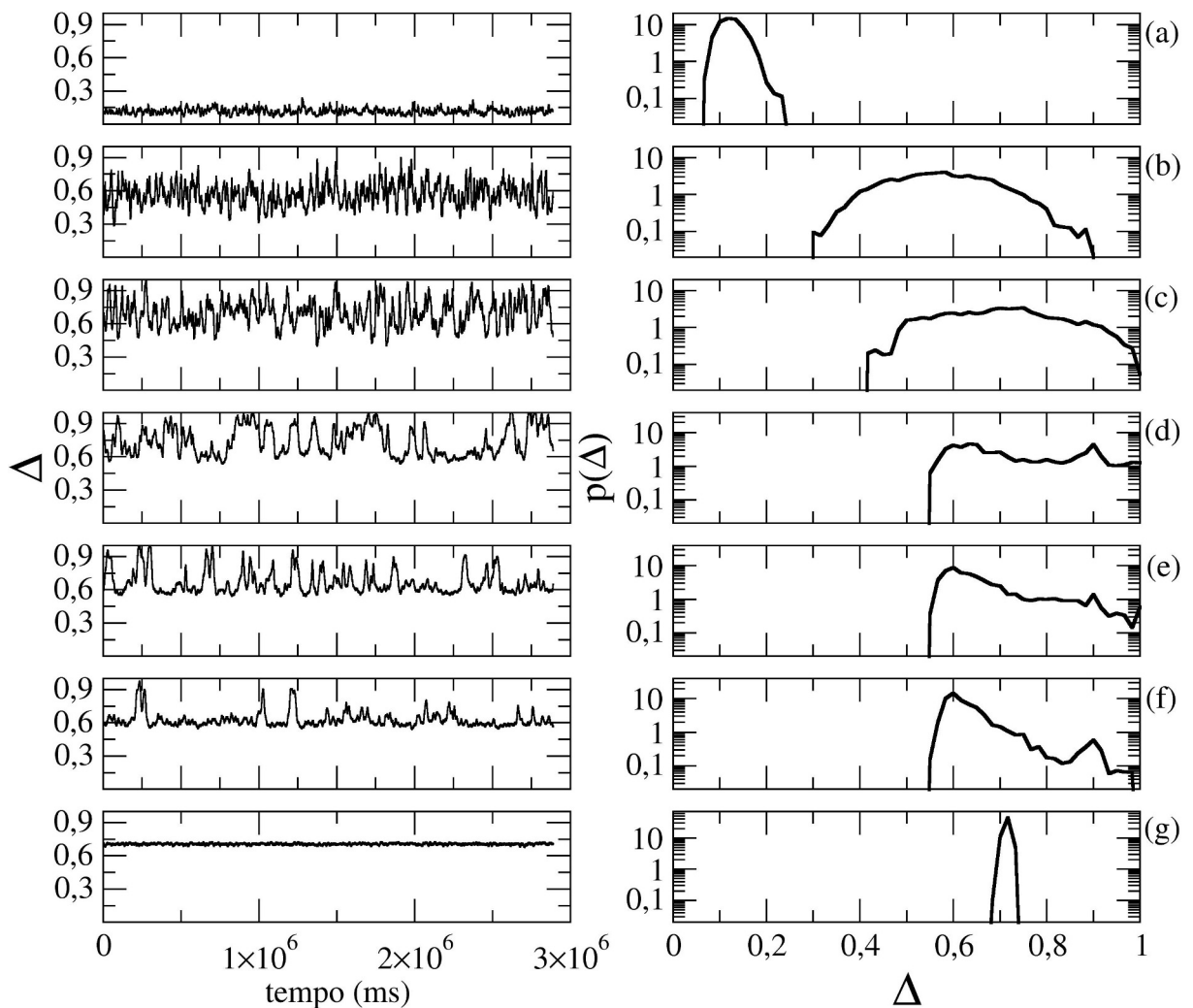


Figura 50 – Na figura da esquerda tem-se o determinismo em função do tempo para um rede de 1024 neurônios de Rulkov com  $p = 0,001$  para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,005$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,010$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,015$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,020$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,021$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,022$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,090$ . Na figura da direita tem-se a distribuição das séries temporais do determinismo para os mesmos valores de  $\varepsilon$ . Neste caso os parâmetros de recorrência usados foram:  $\delta = 0,18$  e  $l_{\min} = 60$ .

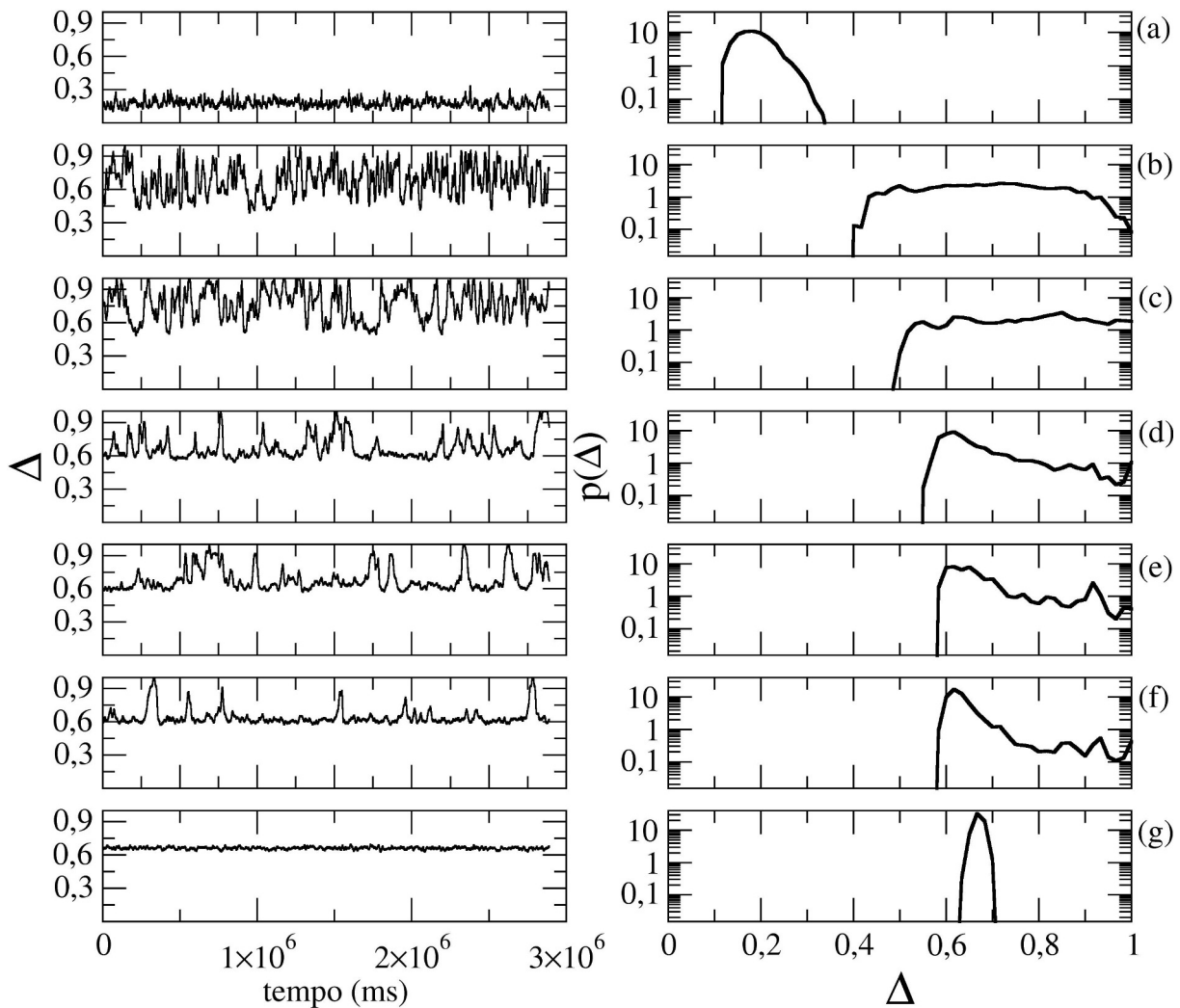


Figura 51 – Na figura da esquerda tem-se o determinismo em função do tempo para um rede de 1024 neurônios de Rulkov com  $p = 0,0005$  para diferentes valores do parâmetro de acoplamento: (a) -  $\varepsilon = 0,005$ ; (b) -  $\varepsilon = 0,010$ ; (c) -  $\varepsilon = 0,015$ ; (d) -  $\varepsilon = 0,020$ ; (e) -  $\varepsilon = 0,021$ ; (f) -  $\varepsilon = 0,022$ ; (g) -  $\varepsilon = 0,090$ . Na figura da direita tem-se a distribuição das séries temporais do determinismo para os mesmos valores de  $\varepsilon$ . Neste caso, os parâmetros de recorrência usados foram:  $\delta = 0,18$  e  $l_{\min} = 60$ .



## 6.3 Perspectivas Futuras

A ciência vem se tornando cada vez mais multidisciplinar e, desta forma, diferentes perspectivas provenientes de diferentes áreas do conhecimento auxiliam na produção de um conhecimento mais robusto acerca de um determinado problema. Nesse sentido, como dito anteriormente, os estudos sobre redes neurais estão crescendo a partir de diferentes abordagens, e, desde o fim do século passado, os avanços na área da computação possibilitaram a ampliação do uso da modelagem matemática e da análise numérica para o estudo do assunto de interesse.

A metodologia empregada no presente trabalho se mostrou eficaz na avaliação da dinâmica de redes neurais a respeito do seu comportamento temporal, bem como, acerca da sensibilidade às condições iniciais. Entretanto, o modelo utilizado para simulação dos neurônios reproduz o comportamento conhecido como *burst*, o qual consiste em uma sequência de disparos e um período de repouso. Porém, é sabido que o cérebro apresenta, além deste comportamento, outro conhecido por *spike*, ou ainda, um disparo único. Nesse sentido, pretende-se estudar a dinâmica da rede considerando este outro comportamento neural.

Por outro lado, para desenvolvimento do modelo foram considerados apenas neurônios excitatórios, ou seja, aqueles que excitam os outros neurônios a entrarem em atividade. Entretanto, sabe-se que no cérebro existe uma parte dos neurônios que age com a característica de inibição [82–84]. Dessa forma, é de interesse o estudo da dinâmica da rede considerando os dois tipos de neurônios, uma vez que, dessa forma, a análise se aproxima mais da realidade.

Outro ponto interessante consiste na análise do problema abordado neste trabalho com a utilização de outras ferramentas de recorrência, a exemplo da entropia [85]. Nas figuras (28) e (31) é possível perceber que após o máximo local, o qual mostra indícios de sincronização para acoplamento fraco, existe um vale acerca dos valores dos quantificadores médios. Neste vale, tanto o parâmetro de ordem médio quanto o determinismo médio exibem valores menores que aqueles para a condição de desacoplamento, ou seja, existem valores de acoplamento para os quais o sistema apresenta uma desorganização maior do que para o caso de acoplamento nulo. Nesse sentido, a investigação sobre esta região e este comportamento se mostra interessante pois este comportamento ainda não foi explorado na literatura.

Por fim, deseja-se também explorar o problema a respeito da topologia da rede. Como dito anteriormente, existem indícios experimentais de que redes neurais podem se comportar como diversas arquiteturas de conexão matemática. No presente trabalho, abordou-se a de pequeno mundo, então, é de interesse o estudo para diferentes topologias de conexão para que seja possível estabelecer a relação entre a arquitetura da rede e seu comportamento dinâmico.

Vale explicitar que o desenvolvimento desta dissertação resultou na publicação de um trabalho intitulado "*Detection of nonstationary transition to synchronized states of a neural network using recurrence analyses*" na revista "*Physical Review E*" [5].

## Detection of nonstationary transition to synchronized states of a neural network using recurrence analyses

R. C. Budzinski,<sup>1</sup> B. R. R. Boaretto,<sup>1</sup> T. L. Prado,<sup>2</sup> and S. R. Lopes<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-980 Curitiba, Paraná, Brazil*

<sup>2</sup>*Instituto de Engenharia, Ciência e Tecnologia, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, 39100-000 Janaúba, Minas Gerais, Brazil*

(Received 26 April 2017; published 25 July 2017)

We study the stability of asymptotic states displayed by a complex neural network. We focus on the loss of stability of a stationary state of networks using recurrence quantifiers as tools to diagnose local and global stabilities as well as the multistability of a coupled neural network. Numerical simulations of a neural network composed of 1024 neurons in a small-world connection scheme are performed using the model of Braun *et al.* [*Int. J. Bifurcation Chaos* **08**, 881 (1998)], which is a modified model from the Hodgkin-Huxley model [*J. Phys.* **117**, 500 (1952)]. To validate the analyses, the results are compared with those produced by Kuramoto's order parameter [*Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984)]. We show that recurrence tools making use of just integrated signals provided by the networks, such as local field potential (LFP) (LFP signals) or mean field values bring new results on the understanding of neural behavior occurring before the synchronization states. In particular we show the occurrence of different stationary and nonstationary asymptotic states.

DOI: [10.1103/PhysRevE.96.012320](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.012320)

### I. INTRODUCTION

Many systems in nature are modeled by complex networks where sites are elements of the system and edges simulate the interactions between them. Examples of such networks spread along physical, biological, social, or chemical systems [1]. Coupled networks, in general, find applications in all of modern life since problems involving them occur in all science, engineering, social or life studies, finding examples from neurobiology to statistical physics from power line stabilities to the stock market [1,2]. Among many important properties of a coupled network, one of the particular fundamental interests is the emergence of spatial-temporal patterns that comes spontaneously as a result of the collective phenomenon that comes from the interaction of a large number of sites, implying nonuniformity of the network and diversity of behaviors [3–5].

Complex systems allow the presence of globally and/or locally multistable states. In fact, they are a typical feature of high-dimensional systems in general since they reflect the vast possibility of high-dimensional phase space in which two or more attractors or, at least, invariant portions of the phase space can coexist.

In this scenario, tools to characterize the structural properties and stability of stationary and nonstationary patterns displayed by those networks configure an important issue in understanding the complex dynamics of coupled systems. A correlated issue is how to capture and quantify structural properties and stability *using just integrated signals provided by the networks, such as local field potential (LFP) (LFP signals) or mean field values.*

Simple neural networks consist of just hundreds of neurons. On the other hand, we find that the human brain, a complex network composed of  $N \approx 10^{11}$  neuron cells, is connected through  $M \approx 10^{15}$  synapses [6]. On a microscopic level, the understanding of brain behavior should consider the neurons as

nodes and their synaptical connections as links. It is clear that, for the human brain, this task is far yet from the actual technical capability. However, there are several description levels in which we can investigate complex anatomical networks on a macroscopic level. In these cases, areas of a complex network can be taken as nodes, and the edges being axonal fibers connecting not neurons but neuronal areas [7]. In these cases, the exchange of information occurs through a mean field of the involved areas. Another approximation is the functional networks for which nodes still model cortical areas, but the links are determined from correlations between distinct areas when the subject performs tasks [8].

Different connection architectures were proposed to model networks' connectivity on its microscopic and macroscopic levels [9]. The main topologies are random networks [10], scale-free networks in which there are highly connected hubs [11] and small-world networks [1]. Independent of the connection architecture, the literature has dedicated in the past decades, particular attention to the transition from nonsynchronized to synchronized states of a coupled network as a function of the coupling strength, the degree or range of connections [12]. For all these network connection architectures, we observe that the system suffers a clear transition from a completely nonsynchronized state to a synchronized one. Nevertheless the behavior of the network before the transition to a globally stable synchronized state is not well understood [13].

Here, we focus on the loss of stability of stationary states of neural networks using recurrence quantifiers as tools to diagnostic local and global stabilities as well as the multistability of a coupled neural network. We show that recurrence tools bring new results on the understanding of the neural behavior occurring before the complete synchronization states and that these diagnostic tools can provide information based on just easily accessed measures of the mean field of the systems.

We pay attention to partial, phase, and cluster synchronizations of a complex network that occur before the transition to a

\*[lopes@fisica.ufpr.br](mailto:lopes@fisica.ufpr.br)

# Referências

- [1] E. R. Kandel, J. H. Schwartz, T. M. Jessell, S. A. Siegelbaum, A. J. Hudspeth, et al. *Principles of neural science*, volume 4. McGraw-hill New York, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 19, 29 e 43.
- [2] S. H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410(6825):268–276, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 41 e 45.
- [3] Y. Bar-Yam. *Dynamics of complex systems*. Addison-Wesley, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 41.
- [4] N. Boccarda. *Modeling complex systems*. Springer Science & Business Media, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 19, 41, 46 e 47.
- [5] R. C. Budzinski, B. R. R. Boaretto, T. L. Prado, and S. R. Lopes. Detection of nonstationary transition to synchronized states of a neural network using recurrence analyses. *Physical Review E*, 96:012320, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 19, 57, 61, 76, 82 e 95.
- [6] M. F. Bear, B. W. Connors, and M. A. Paradiso. *Neuroscience*, volume 2. Lippincott Williams & Wilkins, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 36.
- [7] C. C. Hilgetag and M. Kaiser. *Lectures in Supercomputational Neuroscience: Dynamics in Complex Brain Networks*. Springer, Berlin, 2008. Citado na página 19.
- [8] H. A. Braun, M. T. Huber, M. Dewald, K. Schafer, and K. Voigt. Computer simulations of neuronal signal transduction: the role of nonlinear dynamics and noise. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(05):881–889, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 19, 36 e 59.
- [9] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117(4):500, 1952. Citado 3 vezes nas páginas 19, 33 e 34.
- [10] A. L. Hodgkin, A. F. Huxley, and B. Katz. Measurement of current-voltage relations in the membrane of the giant axon of loligo. *The Journal of Physiology*, 116(4):424–448, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.
- [11] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of loligo. *The Journal of Physiology*, 116(4):449, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.

- [12] The nobel prize in physiology or medicine 1963. [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/medicine/laureates/1963/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1963/). Acesso 24/02/2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 36.
- [13] D. S. Bassett and E. D. Bullmore. Small-world brain networks. *The Neuroscientist*, 12(6):512–523, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 45.
- [14] O. Sporns and J. D. Zwi. The small world of the cerebral cortex. *Neuroinformatics*, 2(2):145–162, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 45.
- [15] V. M. Eguiluz, D. R. Chialvo, G. A. Cecchi, M. Baliki, and A. V. Apkarian. Scale-free brain functional networks. *Physical Review Letters*, 94(1):018102, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 45.
- [16] E. L. Lameu, C. A. S. Batista, A. M. Batista, K. Iarosz, R. L. Viana, S. R. Lopes, and J. Kurths. Suppression of bursting synchronization in clustered scale-free (rich-club) neuronal networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(4):043149, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 45.
- [17] W. Zhou, J. Yang, L. Zhou, and D. Tong. *Stability and Synchronization Control of Stochastic Neural Networks*. Springer, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 45.
- [18] C. A. S. Batista, R. L. Viana, F. A. S. Ferrari, S. R. Lopes, A. M. Batista, and J. C. P. Coninck. Control of bursting synchronization in networks of hodgkin-huxley-type neurons with chemical synapses. *Physical Review E*, 87(4):042713, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 20, 27 e 39.
- [19] H. Bi, X. Hu, S. Boccaletti, X. Wang, Y. Zou, Z. Liu, and S. Guan. Coexistence of quantized, time dependent, clusters in globally coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 117:204101, 2016. Citado na página 20.
- [20] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, volume 19. Springer Science & Business Media, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 20, 56, 69 e 72.
- [21] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438(5):237–329, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 20, 52, 53, 55 e 73.
- [22] G. B. Ermentrout and D. H. Terman. *Mathematical foundations of neuroscience*. 2010. Citado 4 vezes nas páginas 20, 29, 30 e 31.
- [23] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- [24] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 27.

- [25] J. B. Marion and S. T. Thornton. *Classical mechanics of particles and systems*. Saunders College Pub, 1995. Citado na página 24.
- [26] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, and J. D. Crawford. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. AIP, 1997. Citado na página 24.
- [27] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- [28] A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman. Regular and chaotic dynamics, vol. 38 of. *Applied Mathematical Sciences*, 1992. Citado na página 25.
- [29] W. Tucker. The lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(12):1197–1202, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 26.
- [30] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- [31] J. G. Nicholls, A. R. Martin, B. G. Wallace, and P. A. Fuchs. *From Neuron to Brain*. Sinauer, Sunderland, MA, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 41.
- [32] J. Keener and J. Sneyd. *Mathematical physiology: I: cellular physiology*. Springer Science & Business Media, 2010. Citado na página 30.
- [33] E. M. Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007. Citado na página 30.
- [34] H. M. Nussenzveig. *Curso de física básica, vol. 3*. E. Blucher, 2002. Citado na página 30.
- [35] A. N. Gorban, H. P. Sargsyan, and H. A. Wahab. Quasichemical models of multicomponent nonlinear diffusion. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 6(5):184–262, 2011. Citado na página 30.
- [36] A. Scott. *Neuroscience: A mathematical primer*. Springer Science & Business Media, 2002. Citado na página 31.
- [37] D. J. Griffiths and R. College. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1999. Citado na página 31.
- [38] D. Sterratt, B. Graham, A. Gillies, and D. Willshaw. *Principles of computational modelling in neuroscience*. Cambridge University Press, 2011. Citado na página 34.
- [39] B. G. Burton, M. N. Economo, G. J. Lee, and J. A. White. Development of theta rhythmicity in entorhinal stellate cells of the juvenile rat. *Journal of Neurophysiology*, 100(6):3144–3157, 2008. Citado na página 36.

- [40] H. A. Braun, M. Dewald, K. Schäfer, K. Voigt, X. Pei, K. Dolan, and F. Moss. Low-dimensional dynamics in sensory biology 2: facial cold receptors of the rat. *Journal of Computational Neuroscience*, 7(1):17–32, 1999. Citado na página 36.
- [41] K. Schäfer, H. A. Braun, R. C. Peters, and F. Bretschneider. Periodic firing pattern in afferent discharges from electroreceptor organs of catfish. *Pflügers Archiv European Journal of Physiology*, 429(3):378–385, 1995. Citado na página 36.
- [42] U. Feudel, A. Neiman, X. Pei, W. Wojtenek, H. Braun, M. Huber, and F. Moss. Homoclinic bifurcation in a hodgkin–huxley model of thermally sensitive neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(1):231–239, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 61.
- [43] T. L. Prado. *Dinâmica em Rede de Redes Neurônais e Acoplamentos de Redes Biofísicas*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 62.
- [44] P. R. Shorten and D. J. N. Wall. A hodgkin-huxley model exhibiting bursting oscillations. *Bulletin of Mathematical Biology*, 62(4):695–715, 2000. Citado na página 39.
- [45] L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 41.
- [46] M. Cross and H. Greenside. *Patterns formation and dynamics in nonequilibrium systems*. Cambridge University Press, New York, NY, 2009. Citado na página 41.
- [47] N. Boers, B. Bookhagen, H. M. J. Barbosa, N. Marwan, J. Kurths, and J. A. Marengo. Prediction of extreme floods in the eastern central andes based on a complex networks approach. *Nature Communications*, 5, 2014. Citado na página 41.
- [48] D. B. West et al. *Introduction to graph theory*, volume 2. Prentice Hall Upper Saddle River, 2001. Citado na página 42.
- [49] A. Réka and B. Albert-László. Statistical mechanics of complex networks. *Review of Modern Physics*, 74:47–97, 2002. Citado na página 43.
- [50] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440–442, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 48.
- [51] P. J. Menck, J. Heitzig, N. Marwan, and J. Kurths. How basin stability complements the linear-stability paradigm. *Nature Physics*, 9(2):89–92, 2013. Citado na página 45.
- [52] S. Wasserman and K. Faust. *Social network analysis: Methods and applications*, volume 8. Cambridge university press, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 48.
- [53] J. Travers and S. Milgram. The small world problem. *Psychology Today*, 1:61–67, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 48.

- [54] W. D. Callister and D. G. Rethwisch. *Fundamentals of materials science and engineering: an integrated approach*. John Wiley & Sons, 2012. Citado na página 46.
- [55] L. R. Varshney, B. L. Chen, E. Paniagua, D. H. Hall, and D. B. Chklovskii. Structural properties of the caenorhabditis elegans neuronal network. *PLOS Computational Biology*, 7(2):1–21, 2011. Citado na página 46.
- [56] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. 1960. Citado na página 46.
- [57] M. E. J. Newman and D. J. Watts. Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E*, 60:7332–7342, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 61.
- [58] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Y. G. Sinai. *Ergodic theory*, volume 245. Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 51.
- [59] M. Kac. On the notion of recurrence in discrete stochastic processes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(10):1002–1010, 1947. Citado na página 51.
- [60] J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst, and D. Ruelle. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, 4(9):973, 1987. Citado 4 vezes nas páginas 51, 53, 55 e 73.
- [61] 7th international symposium on recurrence plots. : <http://symposium.recurrence-plot.tk/>. Acesso 17/10/2017. Citado na página 52.
- [62] Examples of recurrence plots. [www.recurrence-plot.tk](http://www.recurrence-plot.tk). Acesso 26/04/2017. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 52.
- [63] J. Gao and H. Cai. On the structures and quantification of recurrence plots. *Physics Letters A*, 270(1):75–87, 2000. Citado na página 53.
- [64] G. M. Mindlin and R. Gilmore. Topological analysis and synthesis of chaotic time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 58(1-4):229–242, 1992. Citado na página 54.
- [65] M. Koebe and G. Mayer-Kress. Use of recurrence plots in the analysis of time-series data. volume 12, pages 361–361. Addison-Wesley Publishing CO., 1992. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 73.
- [66] M. Thiel, M. C. Romano, J. Kurths, R. Meucci, E. Allaria, and F. T. Arecchi. Influence of observational noise on the recurrence quantification analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 171(3):138–152, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 73.
- [67] L. Matassini, H. Kantz, J. Hołyst, and R. Hegger. Optimizing of recurrence plots for noise reduction. *Physical Review E*, 65(2):021102, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 73.
- [68] M. V. Ivanchenko, G. V. Osipov, V. D. Shalfeev, and J. Kurths. Phase synchronization in ensembles of bursting oscillators. *Physical Review Letters*, 93:134101, 2004. Citado na página 56.

- [69] A. L. Benabid, P. Pollak, D. Gao, D. Hoffmann, P. Limousin, E. Gay, I. Payen, and A. Benazzouz. Chronic electrical stimulation of the ventralis intermedius nucleus of the thalamus as a treatment of movement disorders. *Journal of Neurosurgery*, 84(2):203–214, 1996. Citado na página 59.
- [70] Deep-Brain Stimulation for Parkinson’s Disease Study Group et al. Deep-brain stimulation of the subthalamic nucleus or the pars interna of the globus pallidus in parkinson’s disease. *New England Journal of Medicine*, 2001(345):956–963, 2001. Citado na página 59.
- [71] A. Destexhe, Z. F. Mainen, and T. J. Sejnowski. An efficient method for computing synaptic conductances based on a kinetic model of receptor binding. *Neural Computation*, 6(1):14–18, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- [72] A. Destexhe, Z. F. Mainen, and T. J. Sejnowski. Synthesis of models for excitable membranes, synaptic transmission and neuromodulation using a common kinetic formalism. *Journal of Computational Neuroscience*, 1(3):195–230, 1994. Citado na página 60.
- [73] M. Perc. Optimal spatial synchronization on scale-free networks via noisy chemical synapses. *Biophysical Chemistry*, 141(2):175–179, 2009. Citado na página 60.
- [74] C. Morris and H. Lecar. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical Journal*, 35(1):193–213, 1981. Citado na página 60.
- [75] T. L. Prado, S. R. Lopes, C. A. S. Batista, J. Kurths, and R. L. Viana. Synchronization of bursting hodgkin-huxley-type neurons in clustered networks. *Physical Review E*, 90(3):032818, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 60, 62 e 72.
- [76] S. D. Cohen, A. C. Hindmarsh, P. F. Dubois, et al. Cvode, a stiff/nonstiff ode solver in c. *Computers in Physics*, 10(2):138–143, 1996. Citado na página 61.
- [77] C. A. S. Batista, E. L. Lameu, A. M. Batista, S. R. Lopes, T. Pereira, G. Zamora-López, J. Kurths, and R. L. Viana. Phase synchronization of bursting neurons in clustered small-world networks. *Physical Review E*, 86(1):016211, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 72.
- [78] B. R. R. Boaretto, R. C. Budzinski, T. L. Prado, J. Kurths, and S. R. Lopes. Suppression of anomalous synchronization and nonstationary behavior of neural network under small-world topology. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 85.
- [79] E. G. Souza. Caracterização de sistemas dinâmicos através de gráficos de recorrência, 2008. Citado na página 73.



- 
- [80] P. P. Galuzio, S. R. Lopes, and R. L. Viana. Two-state on-off intermittency and the onset of turbulence in a spatiotemporally chaotic system. *Physical Review Letters*, 105(5):055001, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 82.
- [81] N. F. Rulkov. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 65(4):041922, 2002. Citado na página 89.
- [82] J. R. Gibson, M. Beierlein, and B. W. Connors. Two networks of electrically coupled inhibitory neurons in neocortex. *Nature*, 402(6757):75, 1999. Citado na página 95.
- [83] C. Börgers and N. Kopell. Synchronization in networks of excitatory and inhibitory neurons with sparse, random connectivity. *Neural Computation*, 15(3):509–538, 2003. Citado na página 95.
- [84] C. Van Vreeswijk, H. Sompolinsky, et al. Chaos in neuronal networks with balanced excitatory and inhibitory activity. *Science*, 274(5293):1724–1726, 1996. Citado na página 95.
- [85] C. Letellier. Estimating the shannon entropy: recurrence plots versus symbolic dynamics. *Physical Review Letters*, 96(25):254102, 2006. Citado na página 95.
-