UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Diego das Neves de Souza

Dualidade de Blattner-Montgomery para álgebras com unidades locais

Curitiba

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Diego das Neves de Souza

Dualidade de Blattner-Montgomery para álgebras com unidades locais

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

Curitiba

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

SO729d Souza, Diego das Neves de

Dualidade de Blattner-Montgomery para álgebras com unidades locais / Diego das Neves de Souza. – Curitiba, 2018.

112 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientador: Marcelo Muniz Silva Alves.

1. Álgebra. 2. Produto cruzado. 3. Produto smash. 4. Dualidade. I. Universidade Federal do Paraná. II. Alves, Marcelo Muniz Silva. III. Título.

CDD: 512

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **DIEGO DAS NEVES DE SOUZA** intitulada: **Dualidade de Blattner-Montgomery para álgebras com unidades locais**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 26 de Fevereiro de 2018.

MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Presidente da Banca Examinadora

Ana Cristina Munaretto
ANA CRISTINA CORREA MUNARETTO
Avaliador Externo

Francismar Ferreira Lima
FRANCISMAR FERREIRA LIMA
Avaliador Externo

Eliezer Batista
ELIEZER BATISTA
Avaliador Externo

Wagner de Oliveira Cortes
WAGNER DE OLIVEIRA CORTES
Avaliador Externo

ATA Nº018

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia vinte e seis de fevereiro de dois mil e dezoito às 09:30 horas, na sala Anfiteatro B, Rua Cel. Francisco H. dos Santos, 100 - Jardim das Américas, foram instalados os trabalhos de arguição do doutorando **DIEGO DAS NEVES DE SOUZA** para a Defesa Pública de sua tese intitulada **Dualidade de Blattner-Montgomery para álgebras com unidades locais**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: MARCELO MUNIZ SILVA ALVES (UFPR), ANA CRISTINA CORREA MUNARETTO (UP), FRANCISMAR FERREIRA LIMA (UTFPR), ELIEZER BATISTA (UFSC), WAGNER DE OLIVEIRA CORTES (UFRGS), . Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais. A Banca Examinadora, então, reuniu-se e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O doutorando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. A aprovação no rito de defesa deverá ser homologada pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais do programa. A outorga do título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, MARCELO MUNIZ SILVA ALVES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 26 de Fevereiro de 2018.

MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Presidente da Banca Examinadora

Ana Cristina Munaretto
ANA CRISTINA CORREA MUNARETTO
Avaliador Externo

Francismar Ferreira Lima
FRANCISMAR FERREIRA LIMA
Avaliador Externo

Eliezer Batista
ELIEZER BATISTA
Avaliador Externo

Wagner de Oliveira Cortes
WAGNER DE OLIVEIRA CORTES
Avaliador Externo

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força e capacidade de conduzir meu trajeto de vida e por ter me colocado diante de pessoas que me ensinaram boas lições.

A todos os professores que tive, pelo conhecimento transmitido.

Aos meus pais e familiares que acreditaram, apoiaram e me ajudaram durante todos os anos de minha vida.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR por ter me proporcionado uma boa formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Aos meus amigos pela paciência, motivação, incentivo e companheirismo.

Em especial ao professor Marcelo, pelo vínculo de amizade que fizemos durante tanto tempo em que me orientou, pela paciência e dedicação que teve comigo.

Olhar para trás após uma longa caminhada pode fazer perder a noção da distância que percorremos, mas, se nos detivermos em nossa imagem, quando a iniciamos e ao término, certamente nos lembraremos do quanto nos custou chegar até o ponto final, e hoje temos a impressão de que tudo começou ontem. Não somos os mesmos, mas sabemos mais uns dos outros. E é por esse motivo que dizer adeus se torna complicado! Digamos então que nada se perderá.

João Guimarães Rosa

Resumo

Sejam K um corpo, A uma K-álgebra unitária e H uma K-álgebra de Hopf. Neste trabalho estenderemos, para o contexto de álgebras com unidades locais, os Teoremas de Dualidade de Blattner-Montgomery para produtos cruzados de A por H, quando a dimensão de H é finita, e para produtos smash de A por H, quando H tem dimensão infinita. Em outra parte abordamos a álgebra de multiplicadores $M(A)$ de uma álgebra A. Dependendo de como se comporta o produto de A, $M(A)$ será extensão maximal de A dentre aquelas que a contém como ideal essencial. No caso em que A é algebra com unidades locais e que H age sobre A mediante algumas condições, nos é possível incluir o produto smash de $M(A)$ por H na álgebra de multiplicadores do produto smash de A por H. Além disso, conseguimos explicitar condições sob as quais estas álgebras são isomorfas.

Palavras-chave: Álgebras com unidades locais; Álgebra de Multiplicadores; Produto Cruzado; Produto Smash; Dualidade.

Abstract

Let be K be a field, A be a unital K-algebra and H be a Hopf K-algebra. In this work we will extend, in the context of algebras with local units, the Duality Theorems of Blattner-Montgomery for crossed products of A by H, when H is a finite-dimensional Hopf algebra, and for smash products of A by H, when H has infinite dimension. In another part we address the algebra of multipliers $M(A)$ of an algebra A. Depending on how the product of A behaves, $M(A)$ will be an extension of A which is maximal among those which contain A as an essential ideal. In the case where A is an algebra with local units and that H acts on A complying with some conditions, we can embed the smash product of $M(A)$ by H in the algebra of multipliers of the smash product of A by H. Moreover, we determine conditions under which these algebras are isomorphic.

Keywords: Algebra with locals units; Algebra of Multipliers; Crossed Product; Smash Product; Duality.

Sumário

Introdução

Os Teoremas de Dualidade de Blattner-Montgomery, bem como os Teoremas de Dualidade de Cohen-Montgomery que os precederam, são resultados fundamentais da teoria de álgebras de Hopf obtidos ao longo da década de 1980. Desde então várias extensões destes resultados foram obtidas em diferentes contextos, como ações de álgebras de Hopf fracas [19], ações e coações de grupoides [20], ações parciais de grupos e de álgebras de Hopf [2, 17], e mais recentemente para ações de álgebras de Hopf em K-categorias [23].

Nesta tese, estendemos ambos os Teoremas de Dualidade de Blattner-Montgomery para ações de álgebras de Hopf em álgebras com unidades locais. A motivação vem da teoria de ações e coações de álgebras de Hopf em K-categorias desenvolvida a partir do início dos anos 2000, que inclui tópicos em extensões de Hopf-Galois [9, 15, 22, 23], recobrimentos de Galois de K-categorias [8, 9] e ações parciais em K-categorias [1]. A passagem de K-categorias para álgebras com unidades locais é sugerida por um resultado de [9] que mostra como associar a cada K-categoria com um número finito de objetos $\mathscr{C}$ uma K-álgebra com unidade $a(\mathscr{C})$. Se esta mesma construção é aplicada a uma K-categoria $\mathscr{C}$ arbitrária então $a(\mathscr{C})$ torna-se uma álgebra com unidades locais $a(\mathscr{C})$, e uma (co)ação de H em $\mathscr{C}$ determina uma (co)ação de H em $a(\mathscr{C})$. Com isso, em [18] a autora introduz uma nova construção de produto cruzado para álgebras com unidades locais que estende o produto cruzado de uma K-categoria por H apresentado em [23], e é com relação a esta construção que este trabalho será desenvolvido.

Um produto cruzado $A\#_\sigma H$ entre uma álgebra unitária A e uma álgebra de Hopf H é um U-módulo álgebra, sendo U uma subálgebra de Hopf de H°, via

$$f \cdot (a\#h) = \sum a\#f(h_2)h_1, \quad \forall a \in A, h \in H \text{ e } f \in U$$

sendo assim podemos formar o produto smash $(A\#_\sigma H)\#U$. Quando σ é trivial, veremos que $A\#_\sigma H = A\#H$, neste caso, é provado sob certas hipóteses em [5], que $(A\#H)\#U \simeq A \otimes (H\#U)$. Este resultado é conhecido como Teorema de Dualidade. Outra versão do Teorema de Dualidade é provada em [6] para o caso em que σ é invertível por convolução e H é arbitrário de dimensão finita, tal prova passa por conceitos de H-extensões e resulta em $(A\#_\sigma H)\#H^* \simeq A \otimes \mathrm{End}_K(H) \simeq M_n(A)$. Ambos Teoremas de Dualidade, resultados de trabalho de Blattner e Montgomery, terão como foco nos capítulos 4 e 5 deste trabalho as suas abordagens e respectivas generalizações para o contexto de álgebras com unidades locais.

O presente trabalho está descrito como segue abaixo.

No primeiro capítulo apresentamos a definição de produto cruzado entre uma álgebra e uma álgebra de Hopf. Exibimos algumas considerações bem como resultados envolvendo produtos cruzados, sem demonstração, mas que podem ser encontrados em [11]. Abordaremos também resultados apresentados em [6] a respeito de produtos cruzados e H-extensões. Veremos juntamente com resultados Doi e Takeuchi em [14] e [13] que produtos cruzados com cociclo invertível por convolução podem ser caracterizados como certas classes de H-extensões.

No segundo capítulo provaremos o Teorema de Dualidade de Blattner-Montgomery apresentada em [6].

No terceiro capítulo fazemos algumas considerações sobre sistemas e limites diretos e K-álgebra com unidades locais, bem como definimos produto cruzado entre uma álgebra desse tipo com uma álgebra de Hopf. Definiremos o conceito de extensão H-Galois para álgebras com unidades locais e veremos a generalização de um resultado válido para álgebras unitárias dentro desse contexto. O que será abordado nesse capítulo é baseado no trabalho [18], de onde se pode encontrar maiores detalhes do que será nesse capítulo mencionado.

No quarto capítulo generalizamos para o contexto de álgebras com unidades locais o Teorema de Dualidade de Blattner-Montgomery apresentado em [6] e abordado no capítulo 2. Todas as considerações feitas e resultados apresentados nos capítulos anteriores são de fundamental importância para o que será feito nesse capítulo.

O quinto capítulo é baseado em [5] onde é apresentada uma versão do Teorema de Dualidade para o caso em que a álgebra de Hopf envolvida é de dimensão infinita. Mediante algumas modificações em que em [4] era utilizada a unidade de uma álgebra A, para uma respectiva álgebra com unidades locais adaptaremos expressões similares, onde valham resultados análogos para unidades locais adequadas, e com isso mostraremos a respectiva generalização dessa segunda versão do Teorema de Dualidade. Veremos ainda que segundo uma caracterização topológica apresentada em [11] para conjunto de funções, tal generalização generaliza o Teorema de Dualidade apresentada em [6] - para o caso em que o cociclo é trivial - e que é abordada no capítulo 2, e ainda, coincidem no caso em que a álgebra de Hopf subjacente tiver dimensão finita.

No sexto e último capítulo, associado a uma álgebra A, veremos o conceito de álgebra de multiplicadores desta, sendo esta denotada por $M(A)$ e abordada em [10]. Veremos no caso em que A for um H-módulo álgebra com unidades locais e H possuir antípoda bijetiva que $M(A)$ admitirá estrutura de H-módulo álgebra, o que nos permitirá formar o produto smash $M(A)\#H$. Em [9] é construído a partir de uma ação de H sobre uma K-categoria $\mathscr{C}$ a K-categoria smash $\mathscr{C}\#H$. No caso em que $\mathscr{C}$ tem um número finito de objetos, $a(\mathscr{C})$ é um H-módulo álgebra, o que permite formar o produto smash $a(\mathscr{C})\#H$. Nesse contexto, as K-álgebras $a(\mathscr{C})\#H$ e $a(\mathscr{C}\#H)$ são canonicamente isomorfas como mostra o referido trabalho. Em analogia com a álgebra de multiplicadores, onde temos as álgebras $M(A)\#H$ e $M(A\#H)$, nos questionamos se estas são isomorfas, ou então, qual a relação entre ambas. Veremos que há uma imersão de $M(A)\#H$ em $M(A\#H)$ e que em um caso particular, tal imersão é ou não um isomorfismo dependendo da finitude da dimensão de H. Tal exemplo nos faz questionar se no caso geral a sobrejetividade de tal imersão é um fato exclusivamente peculiar à dimensão de H. A última subseção deste capítulo trata de caracterizar no caso geral a imagem de tal imersão e concluir dentre outros fatos, que se H for de dimensão finita então certamente a imersão é um isomorfismo.

Capítulo 1

Produtos cruzados

Neste trabalho H denotará uma álgebra de Hopf sobre K. Referente a comultiplicação Δ associada a estrutura de coálgebra de H, usaremos a notação simplificada de Sweedler dada por: $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$, para cada $h \in H$. Igualmente, para um H-comódulo à direita B via $\rho : B \longrightarrow B \otimes H$, usaremos a notação simplificada: $\rho(b) = b_0 \otimes b_1$, para cada $b \in B$.

Este primeiro capítulo é composto de duas seções. Na primeira seção abordaremos a definição de produto cruzado, bem como citaremos alguns exemplos e resultados pertinentes. Quase toda a totalidade dessa seção foi extraída de [11]. Na segunda seção definiremos o conceito de H-extensões, analisaremos sua relação com produtos cruzados e explicitaremos alguns resultados nesse contexto. As definições, considerações e resultados dessa segunda seção foram extraídos de [6].

1.1 Definição e resultados

Definição 1.1 *Seja H uma álgebra de Hopf com uma ação fraca sobre a K-álgebra A, isto é, A é um H-módulo álgebra com exceção da associatividade da multiplicação por escalar de H (não necessariamente vale que $h \cdot (l \cdot a) = (hl) \cdot a$). Seja $\sigma : H \times H \longrightarrow A$ um morfismo K-bilinear. Denotamos por $A\#_\sigma H$ o K-espaço vetorial $A \otimes H$ com produto:*

$$(a\#_\sigma h)(b\#_\sigma k) = a(h_1 \cdot b)\sigma(h_2, k_1)\#h_3k_2$$

$A\#_\sigma H$ é dito produto cruzado se o produto é associativo e $1_A\#_\sigma 1_H$ é a unidade em $A\#_\sigma H$, isto é, se $A\#_\sigma H$ for uma K-álgebra.

Notação 1.2 Para não carregar a notação denotaremos um elemento $a\#_\sigma h \in A\#_\sigma H$ simplesmente por $a\#h$ quando σ ficar subentendido.

Exemplo 1.3 O produto smash é um produto cruzado onde o cociclo é trivial, isto é,

$$\sigma(h,k) = \epsilon(h)\epsilon(k)1_A$$

para cada $h, k \in H$. Nesse caso

$$(a\#h)(b\#k) = a(h_1 \cdot b)\sigma(h_2, k_1)\#h_3k_2 = a(h_1 \cdot b)\#h_2k$$

Exemplo 1.4 O produto torcido é um produto cruzado onde a ação de H em A é trivial, isto é,

$$h \cdot b = \epsilon(h)b$$

para cada $h \in H$ e $b \in A$, porém o coclico não. Nesse caso

$$(a\#h)(b\#k) = a(h_1 \cdot b)\sigma(h_2, k_1)\#h_3k_2 = ab\sigma(h_1, k_1)\#h_2k_2$$

Proposição 1.5 *Valem as seguintes afirmações:*

1. *$A\#_\sigma H$ é um produto cruzado se, e só se, valem:*

   (a) A condição de normalidade:

   $$\sigma(1_H, h) = \sigma(h, 1_H) = \epsilon(h)1_A, \quad \forall h \in H$$

   (b) A condição de cociclo:

   $$(h_1 \cdot \sigma(l_1, m_1))\sigma(h_2, l_2m_2) = \sigma(h_1, l_1)\sigma(h_2l_2, m), \quad \forall h, l, m \in H$$

   (c) A condição de módulo torcido:

   $$(h_1 \cdot (l_1 \cdot a))\sigma(h_2, l_2) = \sigma(h_1, l_1)((h_2l_2) \cdot a), \quad \forall h, l \in H \text{ e } a \in A$$

   Assumindo que $A\#_\sigma H$ seja um produto cruzado, temos que:

2. *A função*

   $$\begin{array}{rccc} i_A: & A & \longrightarrow & A\#_\sigma H \\ & a & \longmapsto & a\#1_H \end{array}$$

   é um morfismo injetivo de K-álgebras;

3. *$A\#_\sigma H \simeq A \otimes H$ como A-módulos à esquerda. Em particular, $A\#_\sigma H$ é livre como A-módulo à esquerda.*

Teorema 1.6 *Se $A\#_\sigma H$ é um produto cruzado com σ invertível com respeito a convolução e a antípoda S de H for bijetiva, então $A\#_\sigma H \simeq H \otimes A$ como A-módulo à direita. Em particular, $A\#_\sigma H$ é livre como A-módulo à direita.*

Observação 1.7 Nas condições do teorema acima, o isomorfismo citado bem como sua inversa são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & A\#_\sigma H & \longrightarrow & H \otimes A \\ & a\#h & \longmapsto & h_4 \otimes (S^{-1}(h_3)\cdot a)\sigma(S^{-1}(h_2), h_1) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & H \otimes A & \longrightarrow & A\#_\sigma H \\ & h \otimes a & \longmapsto & \sigma^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1))(h_3\cdot a)\#h_4 \end{array}$$

1.2 Caracterização de produtos cruzados como uma classe de H - extensões

Recordamos que um H-comódulo à direita é um K-espaço vetorial M, com uma aplicação $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$, e tal que os diagramas

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes H \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\ M \otimes H \arrow[r, "\rho\otimes I"'] & M \otimes H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\ & M \otimes K \\ M \otimes H \arrow[ur, "I\otimes\epsilon"] & \end{tikzcd}$$

comutam. O subespaço dos coinvariantes é

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1_H\}.$$

Uma álgebra B é um H-comódulo álgebra à direita se (B,ρ) é um H-comódulo e $\rho : B \longrightarrow B \otimes H$ é um morfismo de álgebras; dizemos também que ρ é uma coação de H em B. É fácil verificar que B^{coH} é uma subálgebra de B, e portanto toda estrutura de H-comódulo álgebra em B dá origem a uma extensão de álgebras $B^{coH} \subseteq B$.

Seja $B = A\#_\sigma H$ um produto cruzado e definamos

$$\begin{array}{rccl} \rho: & B & \longrightarrow & B \otimes H \\ & a\#h & \longmapsto & (a\#h_1) \otimes h_2 \end{array}$$

Dessa forma temos

Lema 1.8 *ρ torna B um H-comódulo álgebra à direita e $B^{coH} := \{b \in B \mid \rho(b) = b \otimes 1_H\} = A\#_\sigma 1_H$. Além disso,*

$$\begin{array}{rccc} \nu: & H & \longrightarrow & B \\ & h & \longmapsto & 1_A\#h \end{array}$$

é um morfismo de H-comódulos à direita.

Proposição 1.9 *Seja $B = A\#_\sigma H$ um produto cruzado. Então ν é invertível por convolução em $\mathrm{Hom}_K(H, B)$ se e só se σ é invertível por convolução em $\mathrm{Hom}_K(H \otimes H, A)$.*

Definição 1.10 *Sejam A e B K-álgebras e H uma álgebra de Hopf. Suponhamos que:*

1. *B é H-comódulo álgebra à direita com morfismo $\rho : B \longrightarrow B \otimes H$;*

2. *Temos morfismo injetivo de álgebras $i : A \longrightarrow B$ tal que $i(A) = B^{coH}$.*

Dizemos então que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ é uma H-extensão à direita de A.

Teorema 1.11 *Sendo $B = A\#_\sigma H$ um produto cruzado e*

$$\begin{array}{rccc} i_A: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & a\#1_H \end{array}$$

temos que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} B$ é uma H-extensão à direita de A.

Definição 1.12 *Duas H-extensões $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ e $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} B'$ de A são ditas equivalentes se existe uma bijeção $\psi : B \longrightarrow B'$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[dd, "\psi"] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & \\ & & B' \end{tikzcd}$$

comuta e ψ é um morfismo de H-comódulos à direita e de álgebras.

Vale observar ainda que se $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ é uma H-extensão de A, então B torna-se um A-bimódulo por restrições de escalares, isto é, com ações dada por:

$$a \cdot b := i(a)b \quad \text{e} \quad b \cdot a := bi(a), \quad \forall b \in B \text{ e } \forall a \in A$$

Definição 1.13 *Uma H-extensão à direita $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$:*

1. *é H-Galois à direita se o morfismo*

$$\begin{array}{rrcl} \gamma: & B \otimes_A B & \longrightarrow & B \otimes H \\ & b \otimes_A c & \longmapsto & (b \otimes 1_H)\rho(c) \end{array}$$

   é bijetivo;

2. *é fendida à direita se existe um morfismo de H-comódulos à direita $\nu : H \longrightarrow B$ que é invertível na álgebra de convolução $\mathrm{Hom}_K(H, B)$;*

3. *tem a propriedade de base normal à direita se existe um isomorfismo K-linear de $A \otimes_K H$ para B que é um morfismo de A-módulos à esquerda e de H-comódulos à direita.*

Teorema 1.14 *A H-extensão $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A\#_\sigma H$, tem a propriedade de base normal e é fendida se σ for invertível por convolução.*

O seguinte teorema combina resultados de Doi e Takeuchi com o que temos visto até o momento:

Teorema 1.15 *Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ uma H-extensão à direita. São equivalentes:*

1. *$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ é equivalente à $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A\#_\sigma H$ para alguma ação fraca de H sobre A e algum cociclo normal invertível satisfazendo a condição de módulo torcido;*

2. *$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ é fendida;*

3. *$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ é H-Galois e tem a propriedade de base normal.*

Além disso se a antípoda de H for bijetiva, então qualquer uma das condições acima implicam que $B \simeq H \otimes A$ como A-módulos à direita.

Capítulo 2

O Teorema de Dualidade de Blattner-Montgomery

O objetivo desse capítulo é exibir e demonstrar o Teorema de Dualidade presente em [6]. Apresentamos inicialmente alguns resultados necessários para tal demonstração. O seguinte resultado pode ser encontrado em [16] na Proposição 1.2.

Proposição 2.1 *Sejam B um H-comódulo álgebra com respeito à $\rho : B \longrightarrow B \otimes H$, $A = B^{coH}$, sejam γ e γ' as aplicações*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & B \otimes_A B & \longrightarrow & B \otimes H \\ & b \otimes_A c & \longmapsto & (b \otimes 1_H)\rho(c) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \gamma' : & B \otimes_A B & \longrightarrow & B \otimes H \\ & b \otimes_A c & \longmapsto & \rho(b)(c \otimes 1_H) \end{array}$$

Então o homomorfismo de B-módulos à esquerda γ é injetor, sobrejetor ou bijetor se e só se o homomorfismo de B-módulos à direita γ' é injetor, sobrejetor ou bijetor respectivamente.

O seguinte resultado é abordado em [16] no Lema 1.3.

Lema 2.2 *A imagem de $\gamma' : B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes H$ pelo funtor $\mathrm{Hom}_B(\_, B_B)$ determina um homomorfismo de B-módulos à esquerda de $B \otimes H^*$ em $\mathrm{End}_A(B_A)$ que é um homomorfismo de álgebras do produto smash $B\#H^*$ na álgebra $\mathrm{End}_A(B_A)$.*

Observação 2.3 A ação de H^* sobre B que permite formar o produto smash mencionado no lema é dada do seguinte modo: sendo B um H-comódulo álgebra com

$$\begin{array}{rccc} \rho : & B & \longrightarrow & B \otimes H \\ & b & \longmapsto & b_0 \otimes b_1 \end{array}$$

então B torna-se um H^*-módulo álgebra via: $f \cdot b = b_0 f(b_1)$, para cada $f \in H^*$ e $b \in B$.

Demonstração. Fazendo composições de alguns isomorfismos canônicos é possível encontrar um morfismo $\theta : B \otimes H^* \longrightarrow \mathrm{End}_A(B_A)$ da forma

$$\theta : B \otimes H^* \xrightarrow[\simeq]{\varphi} \mathrm{Hom}_B((B \otimes H)_B, B_B) \xrightarrow{(\gamma')^*} \mathrm{Hom}_B((B \otimes_A B)_B, B_B) \xrightarrow[\simeq]{\psi} \mathrm{End}_A(B_A)$$

onde a expressão final é dada por:

$$\theta(b \otimes f)(c) = (bf(c_1))c_0$$

de onde se pode verificar que θ satisfaz as condições do enunciado.

Para efeito de esclarecimento, vale informar que o isomorfismo K-linear φ é dado pela composição dos seguintes isomorfismos K-lineares:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & B \otimes H^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(H, B \otimes K) \\ & b \otimes f & \longmapsto & \varphi_1(b \otimes f) \end{array}$$

onde $\varphi_1(b \otimes f)(h) = b \otimes f(h)$, $\forall h \in H$;

$$(\varphi_2)_* : \mathrm{Hom}_K(H, B \otimes K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(H, B)$$

que é a imagem do isomorfismo K-linear

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & B \otimes K & \longrightarrow & B \\ & b \otimes k & \longmapsto & bk \end{array}$$

pelo funtor $\mathrm{Hom}_K(H, \_)$;

$$(\varphi_3)_* : \mathrm{Hom}_K(H, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(H, \mathrm{Hom}_B(B_B, B_B))$$

que é imagem do isomorfismo K-linear

$$\begin{array}{rccc} \varphi_3 : & B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(B_B, B_B) \\ & b & \longmapsto & \varphi_{3,b} \end{array}$$

dado por $\varphi_{3,b}(c) = bc$, $\forall c \in B$, pelo funtor $\mathrm{Hom}_K(H, \_)$;

$$\begin{array}{rccc} \varphi_4 : & \mathrm{Hom}_K(H, \mathrm{Hom}_B(B_B, B_B)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B((H \otimes B)_B, B_B) \\ & f & \longmapsto & \varphi_4(f) \end{array}$$

onde $\varphi_4(f)(h \otimes b) = f(h)(b)$, $\forall h \otimes b \in H \otimes B$;

e

$$(\varphi_5)^* : \mathrm{Hom}_B((H \otimes B)_B, B_B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B((B \otimes H)_B, B_B)$$

que é a imagem do isomorfismo K-linear

$$\begin{array}{rccc} \varphi_5: & B\otimes H & \longrightarrow & H\otimes B \\ & b\otimes h & \longmapsto & h\otimes b \end{array}$$

pelo funtor $\mathrm{Hom}_B(\,\_\,, B_B)$.

Quanto ao isomorfismo K-linear ψ, este é dado pelas composições de

$$\begin{array}{rccc} \psi_1: & \mathrm{Hom}_B((B\otimes_A B)_B, B_B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(B_A, \mathrm{Hom}_B(B_B, B_B)_A) \\ & f & \longmapsto & \psi_1(f) \end{array}$$

onde $\psi_1(f)(b)(c) = f(b\otimes c)$, $\forall b, c\in B$, e

$$(\psi_2)_* : \mathrm{Hom}_A(B_A, \mathrm{Hom}_B(B_B, B_B)_A) \longrightarrow \mathrm{End}_A(B_A)$$

que é a imagem do isomorfismo K-linear

$$\begin{array}{rccc} \psi_2: & \mathrm{Hom}_B(B_B, B_B) & \longrightarrow & B \\ & f & \longmapsto & f(1_B) \end{array}$$

pelo funtor $\mathrm{Hom}_A(B_A,\,\_\,)$.

Vale ainda ressaltar que os isomorfismos φ_1, φ_4 e ψ_1 podem ser encontrados em [3] para maiores detalhes. $\square$

No caso em que tivermos uma extensão H-Galois $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B$, isto é, quando $\gamma : B\otimes_A B \longrightarrow B\otimes H$ for bijetivo, teremos de acordo com a proposição vista anteriormente que $\gamma' : B\otimes_A B \longrightarrow B\otimes H$ será bijetivo, e por consequência do lema anterior, θ será um isomorfismo de álgebras, pois será composta de três isomorfismos. Resumindo, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4 *Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B$ uma extensão H-Galois de A. Então $B\#H^* \simeq \mathrm{End}_A(B_A)$ como álgebra.*

Finalmente anunciamos o teorema principal, encontrado em [6] no Teorema 2.2.

Teorema 2.5 (Dualidade de Blattner-Montgomery) *Sejam H uma K-álgebra de Hopf com $n = \dim_K H < \infty$ e $A\#_\sigma H$ um produto cruzado com σ invertível por convolução. Então temos os isomorfismos de álgebras:*

$$(A\#_\sigma H)\#H^* \simeq A\otimes \mathrm{End}_K(H) \simeq M_n(A)$$

Demonstração. Sendo σ invertível por convolução temos pelo Teorema 1.14 que a H-extensão $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A\#_\sigma H$ é fendida, e consequentemente pelo Teorema 1.15 esta H-extensão é H-Galois. Sendo assim, pelo teorema anterior temos que

$$(A\#_\sigma H)\#H^* \simeq \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$$

Como $n = \dim_K H < \infty$, temos que a antípoda de H é bijetiva, e juntamente com o fato de σ ser invertível por convolução temos de acordo com o Teorema 1.6 que

$$A\#_\sigma H \simeq H \otimes A$$

como A-módulo à direita. Também $H \otimes A$ é livre como A-módulo à direita, pois se $\{h_1, \cdots, h_n\}$ é base de H como K-espaço vetorial então o conjunto $\{h_1 \otimes 1_A, \cdots, h_n \otimes 1_A\}$ é uma base de $H \otimes A$ como A-módulo à direita. Assim,

$$A\#_\sigma H \simeq H \otimes A \simeq A^n$$

como A-módulo à direita, e disso segue que

$$(A\#_\sigma H)\#H^* \simeq \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A) \simeq \mathrm{End}_A(A^n) \simeq M_n(A)$$

como álgebras. Por fim, o conjunto $\{E^{p,q} \mid 1 \leq p, q \leq n\}$ de K-endomorfismos de H definidos por

$$\begin{array}{rccc} E^{p,q}: & H & \longrightarrow & H \\ & h_i & \longmapsto & \delta_{iq} h_p \end{array}$$

forma uma K-base para $\mathrm{End}_K H$. Consequentemente definimos

$$\begin{array}{rccc} \theta: & A \otimes \mathrm{End}_K H & \longrightarrow & M_n(A) \\ & \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E^{i,j} & \longmapsto & \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \end{array}$$

sendo E_{ij} a matriz elementar com 1_A na linha i e coluna j e 0 nas demais. A aplicação θ assim definida é um isomorfismo de álgebras. $\square$

Capítulo 3

K-Álgebras com unidades locais: Produtos cruzados e extensões de Hopf-Galois

Neste capítulo abordaremos o conceito de K-álgebras com unidades locais, o qual generaliza o conceito de álgebras unitárias, e é o objeto sobre o qual iremos trabalhar nos próximos capítulos. Trataremos do conceito de limites diretos, sendo esta uma ferramenta útil para obtenção de resultados envolvendo álgebras desse tipo. Por fim, dentro desse contexto de álgebras com unidades locais, veremos a definição de produto cruzado e extensão H-Galois, bem como alguns resultados envolvendo tais estruturas.

Grande parte das definições, considerações e resultados mencionadas neste capítulo, foram obtidos de [18], de onde pode obter maiores informações.

3.1 Limites diretos

Definição 3.1 *Seja I um conjunto parcialmente ordenado. Um sistema direto sobre I em uma categoria $\mathscr{C}$ é um par $((A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j})$ sendo A_i um objeto em $\mathscr{C}$ para cada $i \in I$ e ${}_j\alpha_i : A_i \longrightarrow A_j$ morfismo em $\mathscr{C}$ para cada $i, j \in I$, $i \leq j$, tais que:*

1. ${}_i\alpha_i = 1_{A_i}, \quad \forall i \in I;$

2. *Se $i \leq j \leq k$ então ${}_k\alpha_j \circ {}_j\alpha_i = {}_k\alpha_i$, ou seja, o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "{}_k\alpha_i"] \arrow[dr, "{}_j\alpha_i"'] & A_k \\ & A_j \arrow[u, "{}_k\alpha_j"'] \end{tikzcd}$$

comuta

Definição 3.2 *Seja I um conjunto parcialmente ordenado e $((A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j})$ um sistema direto em $\mathscr{C}$. O limite direto (ou colimite) do sistema em questão, quando existe, é um par $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$ onde A é um objeto em $\mathscr{C}$ e $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$ morfismo em $\mathscr{C}$ para cada $i \in I$ tais que:*

1. $\alpha_j \circ {}_j\alpha_i = \alpha_i \quad \forall i \leq j$, *ou seja, o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"'] & A \\ A_j \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

2. *Se X é um objeto em $\mathscr{C}$ e $f_i : A_i \longrightarrow X$ são morfismos em $\mathscr{C}$ tais que $f_j \circ {}_j\alpha_i = f_i$ $\forall i \leq j$, então existe único $\theta : A \longrightarrow X$ que torna o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, bend left, "\theta"] & A_i \arrow[l, "\alpha_i"'] \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] & X \\ & A_j \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

comutativo

Notação 3.3 Quando não houver risco de confusão denotaremos o limite direto $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$ do sistema direto $((A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j})$ por $\varinjlim((A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = (A, (\alpha_i)_{i\in I})$ ou simplesmente por $\varinjlim A_i = A$.

Observação 3.4 O limite direto, quando existe, é único a menos de isomorfismo. Com efeito, supondo que $\varinjlim((A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = (A, (\alpha_i)_{i\in I})$ e $\varinjlim((A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = (B, (\beta_i)_{i\in I})$ temos o seguinte diagrama comutativo proveniente dos respectivos sistemas diretos:

$$\begin{tikzcd}
B & A_i \arrow[l, "\beta_i"'] \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] & A \\
& A_j \arrow[ul, "\beta_j"] \arrow[ur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

como $\varinjlim A_i = A$, então $\exists!\ \theta' : A \longrightarrow B$ tal que

$$\theta' \circ \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in I \tag{3.1}$$

também como $\varinjlim A_i = B$, então $\exists!\ \theta : B \longrightarrow A$ tal que

$$\theta \circ \beta_i = \alpha_i \quad \forall i \in I \tag{3.2}$$

Segue também do fato que $\varinjlim A_i = A$ que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, dashed, "1_A"] & A_i \arrow[l, "\alpha_i"'] \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] & A \\
& A_j \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[ur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

ou seja, $1_A : A \longrightarrow A$ é o único morfismo que torna verdadeira a equação $1_A \circ \alpha_i = \alpha_i \, \forall i \in I$. De 3.1 e 3.2 temos que

$$(\theta \circ \theta') \circ \alpha_i = \theta \circ (\theta' \circ \alpha_i) = \theta \circ \beta_i = \alpha_i \quad \forall i \in I$$

e da unicidade de 1_A tal que $1_A \circ \alpha_i = \alpha_i \, \forall i \in I$, temos que $\theta \circ \theta' = 1_A$. De maneira análoga, temos do fato de que $\varinjlim A_i = B$ que $\theta' \circ \theta = 1_B$, e consequentemente $A \simeq B$.

3.2 K-Álgebras com unidades locais

Nesta seção definiremos o conceito de uma K-álgebra com unidades locais de maneira análoga a encontrada em [7]. Além disso, boa parte dos demais resultados abordados nesta seção encontram-se de maneira implícita no Lema 4.1 da mesma referência.

Definição 3.5 *Uma K-álgebra A é dita ser uma K-álgebra com unidades locais se possui um subconjunto $u = \{e_i \mid i \in I\}$ tal que:*

1. $e_i \cdot e_i = e_i$, *$\forall i \in I$, ou seja, cada $e_i \in A$ é idempotente;*

2. *Para todo subconjunto finito* $F \subseteq A, \exists\, e_i \in u$ *tal que* $e_i \cdot a = a \cdot e_i = a$*,* $\forall a \in F$*.*

O conjunto u satisfazendo as condições da definição precedente, é dito ser um sistema de unidades locais para A. Também dizemos que cada elemento $e_i \in u$ é uma unidade local de A. O resultado a seguir é de fácil verificação.

Proposição 3.6 *Se* A *é uma* K*-álgebra com um sistema de unidades locais* $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$*, então os subconjuntos* A_i *definidos por* $A_i = e_i A e_i$ *são* K*-subálgebras unitárias de* A *com* $1_{A_i} = e_i$*.*

Definição 3.7 *Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado* I *é direcionado se para cada subconjunto finito* $F \subseteq I, \exists\, i \in I$ *tal que* $f \leq i \,\forall f \in F$*.*

Se A é uma K-álgebra com um sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$ e $\forall i, j \in I$ com $i \neq j$ tivermos $e_i \neq e_j$, então podemos definir uma ordem parcial em I dada por:

$$i \leq j \iff e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = e_i$$

Com efeito, a relação acima é:

1. reflexiva, pois $e_i \cdot e_i = e_i$ o que implica em $i \leq i$;

2. antissimétrica, pois se $i \leq j$, isto é, $e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = e_i$ e também se $j \leq i$, isto é, $e_j \cdot e_i = e_i \cdot e_j = e_j$, então $e_i = e_i \cdot e_j = e_j$ o que implica que $i = j$, pois estamos assumindo que $\forall i, j \in I$ com $i \neq j$ vale $e_i \neq e_j$;

3. transitiva, pois sendo $i \leq j$, isto é, $e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = e_i$ e $j \leq k$, isto é, $e_j \cdot e_k = e_k \cdot e_j = e_j$, então $e_k \cdot e_i = e_k \cdot (e_j \cdot e_i) = (e_k \cdot e_j) \cdot e_i = e_j \cdot e_i = e_i$. Analogamente $e_i \cdot e_k = e_i$, o que implica em $i \leq k$.

Ademais, com essa relação de ordem I se torna um conjunto parcialmente ordenado direcionado. De fato, sendo $F = \{i_1, \ldots, i_n\} \in I$, consideramos o subconjunto das respectivas unidades locais $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\} \subseteq A$, logo, das propriedades de álgebra com unidades locais existe $e_t \in A$ tal que

$$e_{i_k} \cdot e_t = e_t \cdot e_{i_k} = e_{i_k} \quad \forall k = 1, \cdots, n. \qquad \iff \qquad i_k \leq t \quad \forall k = 1, \cdots, n.$$

Vale também ressaltar que com essa relação de ordem, temos que $A_i \subseteq A_j$ sempre que $i \leq j$. Com efeito, $i \leq j$ significa que $e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = e_i$, desse modo, $A_i = e_i A e_i = (e_j \cdot e_i) A (e_i \cdot e_j) \subseteq e_j A e_j = A_j$.

Proposição 3.8 *Sejam A uma K-álgebra com um sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$, $\{A_i\}_{i \in I}$ a família de K-subálgebras unitárias de A dada por $A_i = e_i A e_i$ para cada $i \in I$. Então $\varinjlim A_i = A$ na categoria das K-álgebras.*

Demonstração. Considerando que $A_i \subseteq A_j$, $\forall i \leq j$ e tomando ${}_j\alpha_i : A_i \longrightarrow A_j$ sendo o morfismo inclusão, temos que tais morfismo são morfismos de álgebras e além disso satisfazem as condições

$$ {}_i\alpha_i = 1_{A_i} \quad \text{para todo} \quad i \in I \quad \text{e} \quad {}_k\alpha_j \circ {}_j\alpha_i = {}_k\alpha_i \quad \text{sempre que} \quad i \leq j \leq k. $$

Assim, $((A_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$ é um sistema direto sobre I na categoria das K-álgebras.

Considerando $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$ também como morfismo inclusão para todo $i \in I$, o que acarreta novamente em morfismos de álgebras, X uma K-álgebra e $f_i : A_i \to X$ morfismos de álgebras tais que $f_j \circ {}_j\alpha_i = f_i$ sempre que $i \leq j$, teremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A & A_i \arrow[l, "\alpha_i"'] \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] & X \\
& A_j \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

definamos então

$$\begin{array}{rccc} \theta : & A & \longrightarrow & X \\ & a & \longmapsto & f_i(a) \end{array}$$

considerando $a \in A_i$. Desse modo temos que

- θ está bem definido:

  de fato, sendo $a \in A$ de modo que $a \in A_i \cap A_k$, tomamos $j \in I$ tal que $i, k \leq j$, com isso $a \in A_j$. Assim

  $$ f_j(a) = f_j({}_j\alpha_i(a)) = (f_j \circ {}_j\alpha_i)(a) = f_i(a) $$

  e analogamente

  $$ f_j(a) = f_j({}_j\alpha_k(a)) = (f_j \circ {}_j\alpha_k)(a) = f_k(a) $$

- θ é morfismo de álgebras:

  dados $a, b \in A$ podemos tomar $j \in I$ de modo que $a, b \in A_j$, pois considerando $a \in A_i$

e $b \in A_k$, basta tomarmos $j \in I$ tal que $i, k \leq j$ para que $A_i \subseteq A_j$ bem como $A_k \subseteq A_j$, em particular $a, b \in A_j$. Como A_j é K-álgebra $a + kb \in A_j$ para todo $k \in K$, então

$$\theta(a + kb) = f_j(a + kb) = f_j(a) + kf_j(b) = \theta(a) + k\theta(b)$$

o que verifica a K-linearidade de θ. Vale rassaltar que na segunda igualdade da equação usamos o fato que f_j é morfismo K-linear, pois é morfismo de álgebras. Novamente, do fato de f_j ser morfismo de álgebras temos

$$\theta(ab) = f_j(ab) = f_j(a)f_j(b) = \theta(a)\theta(b)$$

- $\theta \circ \alpha_i = f_i$ para todo $i \in I$:
  dado $a \in A_i$ por definição $\theta(a) = f_i(a)$, como $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$ se trata de inclusão então $\alpha_i(a) = a$. Logo $\theta(\alpha_i(a)) = f_i(a)$.

Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo na categoria das K-álgebras

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed, bend left, "\theta"] & A_i \arrow[l, "\alpha_i"'] \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] & X \\
& A_j \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

A seguir definimos o conceito de parte unitária de um módulo sobre uma álgebra. Logo após daremos sua caracterização para o caso em que tal álgebra for uma K-álgebra com unidades locais.

Definição 3.9 *Seja A uma K-álgebra possivelmente sem unidade.*

1. *Um A-módulo à esquerda sobre A é um K-espaço vetorial com uma aplicação K-linear $A \otimes M \longrightarrow M$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes M \arrow[d] \\
A \otimes M \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

2. *Se M é um A-módulo à esquerda mediante a ação $A \otimes M \longrightarrow M$, definimos AM como sendo o conjunto imagem da ação $A \otimes M \longrightarrow M$, assim, $m \in AM$ se, e somente se, $m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$ com $a_i \in A$ e $m_i \in M$. Diremos que AM é a parte unitária do A-módulo M.*

Observação 3.10 De maneira análoga, podemos definir a parte unitária de um A-módulo à direita M, isto é, o conjunto MA.

Se A é uma K-álgebra com unidade, a definição usual de A-módulo à esquerda é equivalente a dizer que (i) M é um A-módulo segundo a Definição 3.9, (ii) $1_A \cdot m = m$ para cada $m \in M$. Podemos ainda ver que, no caso de uma K-álgebra A com unidade, a definição usual de A-módulo corresponde à definição de A-módulo unitário. De fato, se vale (ii) então claramente $M = AM$; reciprocamente, se $M = AM$ então cada $m \in M$ pode ser escrito na forma $m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$, e disso segue que

$$1_A m = 1_A \left(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (1_A a_i) m_i = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i = m$$

No caso de A ser uma álgebra com um sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$ temos que $m \in AM$ se, e só se, existe unidade local $e_j \in u$ tal que $e_j m = m$. Com efeito, se existe tal $e_j \in u \subseteq A$, então $m = e_j m \in AM$. Reciprocamente, se $m \in AM$ temos que $m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$, e considerando o subconjunto finito $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subseteq A$ podemos considerar unidade local $e_j \in u$ tal que $e_j a_i = a_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$; e com isso,

$$e_j m = e_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (e_j a_i) m_i = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i = m$$

De maneira análoga, MA, no caso em que A é uma álgebra com unidades locais, é o conjunto dos elementos $m \in M$ tais que existe $e_j \in u$ com $m e_j = m$. Por fim, no caso em que M é um A-bimódulo e estivermos considerando as partes unitárias à direita e à esquerda de M ao mesmo tempo, isto é: AMA, podemos inferir que $m \in AMA$ se existe uma mesma unidade local e_j que age trivialmente em ambos os lados, ou seja, existe $e_j \in u$ tal que $e_j m = m e_j = m$. Pois caso isso não seja imediato no sentido de que a ação trivial se dê por unidades locais diferentes em cada lado, isto é, $m = e_i m = m e_k$ com $e_i, e_k \in u$, então bastaria tomar $j \in I$ tal que $i, k \leq j$ para que $e_j m = e_j(e_i m) = (e_j e_i) m = e_i m = m$ e analogamente $m e_j = (m e_k) e_j = m(e_k e_j) = m e_k = m$.

3.3 Produtos cruzados para uma álgebra com unidades locais

Definição 3.11 *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma K-álgebra com um sistema de unidades locais $u = \{e_i \mid i \in I\}$. Dizemos que H age fracamente sobre A pela aplicação K-linear*

$$\begin{array}{rccc} \triangleright : & H \otimes A & \longrightarrow & A \\ & h \otimes a & \longmapsto & h \triangleright a \end{array}$$

se:

1. $h \triangleright (ab) = (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright b)$;

2. $h \triangleright e_i = \epsilon(h) e_i$.

$\forall a, b \in A, h \in H$ *e* $i \in I$.

Observe que nessas condições é possível afirmar que $H \triangleright A_i \subseteq A_i$, com efeito, dados $h \in H$ e $a_i \in A_i$ temos

$$\begin{array}{rcl} h \triangleright a_i & = & h \triangleright (e_i a_i e_i) = (h_1 \triangleright e_i)(h_2 \triangleright a_i)(h_3 \triangleright e_i) \\ & = & (\epsilon(h_1) e_i)(h_2 \triangleright a_i)(\epsilon(h_3) e_i) = e_i (h \triangleright a_i) e_i \in A_i \end{array}$$

Agora, para cada K-álgebra unitária A_i vamos considerar uma aplicação K-linear

$$\sigma_i : H \otimes H \longrightarrow A_i$$

que satisfaz as condições:

1. de normalidade, isto é,

$$\sigma_i(1_H, h) = \sigma_i(h, 1_H) = \epsilon(h) e_i, \quad \forall h \in H$$

2. de cociclo, isto é,

$$(h_1 \triangleright \sigma_i(l_1, m_1)) \sigma_i(h_2, l_2 m_2) = \sigma_i(h_1, l_1) \sigma_i(h_2 l_2, m), \quad \forall h, l, m \in H$$

3. de módulo torcido, isto é,

$$(h_1 \triangleright (l_1 \triangleright a)) \sigma_i(h_2, l_2) = \sigma_i(h_1, l_1)((h_2 l_2) \triangleright a), \quad \forall h, l \in H \text{ e } a \in A_i$$

Destas condições segue que cada σ_i induz um produto cruzado $A_i\#_{\sigma_i}H$ que tem como unidade o elemento $e_i\#_{\sigma_i}1_H$.

Definição 3.12 *Diremos que a família $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}$ de morfismos K-lineares é um 2-cociclo normalizado que satisfaz a condição de módulo torcido para uma K-álgebra A com unidades locais, se cada σ_i desta família satisfizer as condições de normalidade, cociclo e módulo torcido mencionado anteriormente e além disso, houver a seguinte compatibilidade:*

$$e_i\sigma_j = \sigma_i \quad \forall i \leq j$$

Suponhamos então que temos um 2-cociclo normalizado que safisfaça a condição de módulo torcido. Como bem sabemos, como conjunto $A_i\#_{\sigma_i}H = A_i \otimes H$, podemos então considerar as inclusões ${}_j\beta_i : A_i\#_{\sigma_i}H \longrightarrow A_j\#_{\sigma_j}H$, que sob as hipóteses que estamos admitindo são morfismos de álgebras. De fato,

$$\begin{aligned}
{}_j\beta_i(a\#_{\sigma_i}h)\,{}_j\beta_i(b\#_{\sigma_i}k) &= (a\#_{\sigma_j}h)(b\#_{\sigma_j}k) \\
&= a(h_1 \triangleright b)\sigma_j(h_2,k_1)\#_{\sigma_j}h_3k_2 \\
&= a(h_1 \triangleright b)e_i\sigma_j(h_2,k_1)\#_{\sigma_j}h_3k_2 \\
&= a(h_1 \triangleright b)\sigma_i(h_2,k_1)\#_{\sigma_j}h_3k_2 \\
&= {}_j\beta_i(a(h_1 \triangleright b)\sigma_i(h_2,k_1)\#_{\sigma_i}h_3k_2) \\
&= {}_j\beta_i((a\#_{\sigma_i}h)(b\#_{\sigma_i}k))
\end{aligned}$$

Vamos agora definir o produto cruzado entre uma álgebra com unidades locais e uma álgebra de Hopf.

Definição 3.13 *Seja A uma K-álgebra com unidades locais tal que H age fracamente sobre A por $\triangleright$, e $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}$ um 2-cociclo normalizado que satisfaz a condição de módulo torcido. O produto cruzado $A\#_\sigma H$ é o K-espaço vetorial $A\otimes H$ com a multiplicação dada por: dados $a\#h$ e $b\#k$ em $A\#_\sigma H$, existe índice $i \in I$ tal que $a\#h, b\#k \in A_i \otimes H$. Sendo assim, o produto fica determinado pelo respectivo produto cruzado $A_i\#_{\sigma_i}H$ que contém esses elementos, isto é,*

$$(a\#h)(b\#k) := a(h_1 \triangleright b)\sigma_i(h_2,k_1)\#h_3k_2$$

Podemos observar que o produto da definição está bem definido devido a compatibilidade dos $\sigma_i's$. Com efeito, se existe $i \neq j$ tal que $a\#h, b\#k \in A_j \otimes H$, então devido a relação de ordem em I, existe $t \in I$ com $i,j \leq t$ tal que $a\#h, b\#k \in A_t \otimes H$. Assim,

$$(a\#h)(b\#k) \;=\; a(h_1 \triangleright b)\sigma_i(h_2,k_1)\#h_3k_2$$

$$
\begin{aligned}
&= a(h_1 \triangleright b)e_i\sigma_t(h_2, k_1)\#h_3k_2 \\
&= a(h_1 \triangleright b)\sigma_t(h_2, k_1)\#h_3k_2
\end{aligned}
$$

e analogamente

$$
\begin{aligned}
(a\#h)(b\#k) &= a(h_1 \triangleright b)\sigma_j(h_2, k_1)\#h_3k_2 \\
&= a(h_1 \triangleright b)e_j\sigma_t(h_2, k_1)\#h_3k_2 \\
&= a(h_1 \triangleright b)\sigma_t(h_2, k_1)\#h_3k_2
\end{aligned}
$$

Ademais, o produto é associativo, pois, dados $a\#h, b\#k$ e $c\#l \in A\#_\sigma H$, podemos escolher $i \in I$ de modo que $a\#h, b\#k, c\#l \in A_i \otimes H$, onde o produto destes é associativo devido ao fato de estar definido em $A_i\#_{\sigma_i}H$. Finalmente, o subconjunto $u' = \{e_i\#1_H \mid i \in I\}$ de $A\#_\sigma H$ forma um sistema de unidades locais para $A\#_\sigma H$, e as K-subálgebras unitárias induzidas por este sistema são dadas por

$$(A\#_\sigma H)_i = A_i\#_{\sigma_i}H$$

de fato, dado $a\#h \in (A\#_\sigma H)_i$ e assumindo que $a\#h \in A_t \otimes H$ para algum $i \leq t$, temos:

$$
\begin{aligned}
a\#h &= (e_i\#1_H)(a\#h)(e_i\#1_H) \\
&= (e_i(1_H \triangleright a)\sigma_t(1_H, h_1)\#1_H \cdot h_2)(e_i\#1_H) \\
&= (e_ia\#h)(e_i\#1_H) \\
&= (e_ia)(h_1 \triangleright e_i)\sigma_t(h_2, 1_H)\#h_3 \cdot 1_H \\
&= e_iae_i\#h \in A_i\#_{\sigma_i}H
\end{aligned}
$$

de onde temos $(A\#_\sigma H)_i \subseteq A_i\#_{\sigma_i}H$. Quanto à inclusão contrária, basta tomarmos $a\#h \in A_i\#_{\sigma_i}H$ e levar em consideração que $e_i\#1_H = 1_{A_i\#_{\sigma_i}H}$, pois disso segue que:

$$a\#h = (e_i\#1_H)(a\#h)(e_i\#1_H) \in (e_i\#1_H)(A\#_\sigma H)(e_i\#1_H) := (A\#_\sigma H)_i$$

segue da Proposição 3.8 o seguinte resultado:

Proposição 3.14 *Seja $A\#_\sigma H$ um produto cruzado com A sendo uma K-álgebra com unidades locais. Então $((A_i\#_{\sigma_i}H)_{i\in I}, ({}_j\beta_i)_{i\leq j})$ forma um sistema direto sobre I e*

$$\varinjlim((A_i\#_{\sigma_i}H)_{i\in I}, ({}_j\beta_i)_{i\leq j}) = (A\#_\sigma H, (\beta_i)_{i\in I})$$

na categoria das K-álgebras sendo $\beta_i : A_i\#_{\sigma_i}H \longrightarrow A\#_\sigma H$ inclusão para todo $i \in I$.

Exemplo 3.15 Em [23] é definido um produto cruzado $\mathscr{D}\#_\sigma H$ onde $\mathscr{D}$ é uma K-categoria, H é uma álgebra de Hopf, $\cdot = ({}_y\cdot_x : H \otimes {}_y\mathscr{D}_x \longrightarrow {}_y\mathscr{D}_x)_{y,x\in\mathscr{D}_o}$ é uma família de morfismos K-lineares satisfazendo as condições

$$\begin{aligned} h\,{}_x\cdot_z(f\circ f') &= (h_1\,{}_x\cdot_y f)\circ(h_2\,{}_y\cdot_z f') \\ h\,{}_x\cdot_x 1_x &= \epsilon(h)1_x \\ 1_H\,{}_x\cdot_y f &= f \end{aligned}$$

para cada $x, y, z \in \mathscr{D}_o, f \in {}_x\mathscr{D}_y, f' \in {}_y\mathscr{D}_z, h \in H$, e $\sigma = (\sigma_x : H \times H \longrightarrow {}_x\mathscr{D}_x)_{x\in\mathscr{D}_o}$ é uma família de morfismos K-bilineares com a qual definimos morfismos K-lineares

$$\begin{aligned} {}_x\circ_z^y :\ ({}_x\mathscr{D}_y\otimes H)\otimes({}_y\mathscr{D}_z\otimes H) &\longrightarrow {}_x\mathscr{D}_z\otimes H \\ (f\otimes h)\otimes(f'\otimes h') &\longmapsto f\circ(h_1\,{}_y\cdot_z f')\circ\sigma_z(h_2,h_1')\otimes h_3h_2' \end{aligned}$$

para cada $x, y, z \in \mathscr{D}_o, f \in {}_x\mathscr{D}_y, f' \in {}_y\mathscr{D}_z$ e $h, h' \in H$. Se forem verificados as condições

$$\begin{aligned} \sigma_x(1_H,h) &= \sigma_x(h,1_H) = \epsilon(h)1_x \\ (h_1\,{}_x\cdot_x\sigma_x(l_1,m_1))\circ\sigma_x(h_2,l_2m_2) &= \sigma_x(h_1,l_1)\circ\sigma_x(h_2l_2,m) \\ (h_1\,{}_x\cdot_y(l_1\,{}_x\cdot_y f))\circ\sigma_y(h_2,l_2) &= \sigma_x(h_1,l_1)\circ((h_2l_2)\,{}_x\cdot_y f) \end{aligned}$$

para cada $x, y \in \mathscr{D}_o, f \in {}_x\mathscr{D}_y$ e $h, l, m \in H$, teremos de acordo com o Teorema 3.3 em [23] que $\mathscr{D}\#_\sigma H$ será uma K-categoria onde $(\mathscr{D}\#_\sigma H)_o = \mathscr{D}_o$, para cada $x, y \in \mathscr{D}_o$, ${}_y(\mathscr{D}\#_\sigma H)_x = {}_y\mathscr{D}_x \otimes H$ e com respeito aos morfismos composição $\{{}_x\circ_z^y\}_{x,y,z\in\mathscr{D}_o}$ e morfismos identidades $\{1_x \otimes 1_H\}_{x\in\mathscr{D}_o}$.

Associada à K-categoria $\mathscr{D}$, podemos definir $a(\mathscr{D}) = \bigoplus_{y,x\in\mathscr{D}_o} {}_y\mathscr{D}_x$ que é uma K-álgebra com produto dado por: $({}_ya_x)({}_yb_x) = (\sum_z {}_ya_z \circ {}_zb_x)$. No caso em que $\mathscr{D}_o$ é um conjunto infinito, ao considerarmos $\mathcal{P}_{fin}(\mathscr{D}_o)$ como sendo o conjunto dos subconjuntos finitos de $\mathscr{D}_o$, definimos para cada $i = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}_{fin}(\mathscr{D}_o)$ a soma $E_i = \sum_{j=1}^n E_{x_j}$, sendo $E_{x_j} \in a(\mathscr{D})$ o elemento com a identidade de x_j na posição (x_j, x_j) e zero nas demais. Desse modo, $a(\mathscr{D})$ é uma K-álgebra com sistema de unidades locais dado por $u = \{E_i \mid i \in \mathcal{P}_{fin}(\mathscr{D}_o)\}$.

Mediante a família de morfismos $\cdot = ({}_y\cdot_x)_{y,x\in\mathscr{D}_o}$ definimos a aplicação K-linear

$$\begin{aligned} \bullet :\ H\otimes a(\mathscr{D}) &\longrightarrow a(\mathscr{D}) \\ h\otimes f &\longmapsto h\bullet f \end{aligned}$$

dada por: $h \bullet f = (h\,{}_y\cdot_x\,{}_yf_x)$, para cada $h \in H$ e $f = ({}_yf_x) \in a(\mathscr{D})$. Temos que H age fracamente sobre $a(\mathscr{D})$ pela aplicação $\bullet$. Ademais, a família de morfismos

$$\sigma = (\sigma_x : H \times H \longrightarrow {}_x\mathscr{D}_x)_{x\in\mathscr{D}_o}$$

induz outra família de morfismos K-bilineares $\overline{\sigma} = (\overline{\sigma_i} : H \times H \longrightarrow a(\mathscr{D})_i)_{i \in \mathcal{P}_{fin}(\mathscr{D}_o)}$ onde $\overline{\sigma_i}(h_1, h_2) = \sum_{x_j \in i} \sigma_{x_j}(h_1, h_2)$ para cada $h_1, h_2 \in H$ e $a(\mathscr{D})_i = E_i a(\mathscr{D}) E_i$ para cada $i \in \mathcal{P}_{fin}(\mathscr{D}_o)$. Dessa forma $\overline{\sigma}$ é um 2-cociclo normalizado que satisfaz a condição de módulo torcido para $a(\mathscr{D})$ o que juntamente com a aplicação $\bullet$ nos permite formar o produto cruzado $a(\mathscr{D})\#_{\overline{\sigma}}H$. Segue então que a partir do produto cruzado entre uma K-categoria $\mathscr{D}$ e uma álgebra de Hopf H induz-se um produto cruzado entre uma K-álgebra com unidades locais $a(\mathscr{D})$ e H.

Observação 3.16 Observemos que a condição 2 da Definição 3.11, referente a ação $\bullet$ de H sobre $a(\mathscr{D})$, ocorre naturalmente no exemplo anterior.

3.4 Extensões H-Galois

Definição 3.17 *Seja H uma álgebra de Hopf. Dizemos que B é um H-comódulo álgebra com unidades locais se B é uma K-álgebra com unidades locais e um H-comódulo à direita via $\rho : B \longrightarrow B \otimes H$ tal que, para todo $a, b \in B$ vale:*

1. $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$;
2. $\rho(e_i) = e_i \otimes 1_H \; \forall i \in I$, *onde $u = \{e_i \mid i \in I\}$ é um sistema de unidades locais para B.*

Vale observar que segundo essa definição podemos concluir que $\rho(B_i) \subseteq B_i \otimes H$. De fato,

$$\rho(B_i) = \rho(e_i B e_i) = \rho(e_i)\rho(B)\rho(e_i) \subseteq (e_i \otimes 1_H)(B \otimes H)(e_i \otimes 1_H) = e_i B e_i \otimes H = B_i \otimes H$$

Também, sendo $B^{coH} = \{b \in B \mid \rho(b) = b \otimes 1_H\}$ a subálgebra de coinvariantes de B e sendo $\rho(e_i) = e_i \otimes 1_H$, isto mostra que $e_i \in B^{coH}$ e portanto $u = \{e_i \mid i \in I\}$ é um sistema de unidades locais para B^{coH} o que sugere que tenhamos as K-subálgebras $(B^{coH})_i$ de B^{coH}. Podemos concluir que $(B^{coH})_i = (B_i)^{coH}$, com efeito, afim de verificar a inclusão $(B^{coH})_i \subseteq (B_i)^{coH}$ tomemos $b \in (B^{coH})_i$, dessa forma $b = e_i b' e_i$ para algum $b \in B^{coH}$, logo

$$b \in B_i \text{ e } \rho(b) = \rho(e_i)\rho(b')\rho(e_i) = (e_i \otimes 1_H)(b' \otimes 1_H)(e_i \otimes 1_H) = e_i b e_i \otimes 1_H = b \otimes 1_H$$

o que mostra que $b \in (B_i)^{coH}$.
Por outro lado, tomando $b \in (B_i)^{coH}$ temos:

$$\begin{aligned} b \in (B_i)^{coH} \quad &\Longrightarrow \quad b \in B_i \quad \text{e} \quad \rho(b) = b \otimes 1_H \\ &\Longleftrightarrow \quad b \in B_i \quad \text{e} \quad b \in B^{coH} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \quad b = e_i b e_i \quad \text{e} \quad b \in B^{coH} \\ &\iff \quad b = e_i b e_i \in e_i B^{coH} e_i = (B^{coH})_i \end{aligned}$$

o que mostra a inclusão contrária. Podemos então denotar $B_i^{coH} = (B_i)^{coH} = (B^{coH})_i$.

Sendo B um H-comódulo álgebra com unidades locais e usando a notação: $A = B^{coH}$ e $A_i = (B^{coH})_i = (B_i)^{coH} = B_i^{coH}$ temos a seguinte definição:

Definição 3.18 *A H-extensão $A \subseteq B$ é dita extensão H-Galois com unidades locais se cada extensão $A_i \subseteq B_i$ é H-Galois, isto é, se os morfismos*

$$\begin{aligned} \gamma_i : \quad B_i \otimes_{A_i} B_i &\longrightarrow B_i \otimes H \\ b \otimes_{A_i} c &\longmapsto (b \otimes 1_H)\rho(c) \end{aligned}$$

são isomorfismos.

Para finalizar essa subseção, enunciamos um caso de extensão H-Galois envolvendo produto cruzado e que será usado no próximo capítulo. A saber:

Teorema 3.19 *Sejam A uma K-álgebra com unidades locais e $A\#_\sigma H$ um produto cruzado com $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}$ invertível por convolução (isto é, cada σ_i é invertível por convolução). Temos então que $A \subseteq A\#_\sigma H$ é uma extensão H-Galois com unidades locais.*

Demonstração. $A\#_\sigma H$ é um H-comódulo álgebra com unidades locais via

$$\begin{aligned} \rho : \quad A\#_\sigma H &\longrightarrow A\#_\sigma H \otimes H \\ a\#h &\longmapsto a\#h_1 \otimes h_2 \end{aligned}$$

sendo $A \equiv A\#1_H = (A\#_\sigma H)^{coH} \subseteq A\#_\sigma H$ segue o resultado, pois para qualquer $i \in I$, $(A\#_\sigma H)_i = A_i\#_{\sigma_i} H$ e do caso clássico para álgebras unitárias sabíamos que $A_i \subseteq A_i\#_{\sigma_i} H$ é H-Galois já que σ_i é invertível por convolução. $\square$

Capítulo 4

O Teorema de Dualidade de Blattner-Montgomery para álgebras com unidades locais: Primeiro caso

Neste capítulo iremos generalizar o Teorema de Dualidade de Blattner-Montgomery, que é abordado no capítulo 2 e proveniente de [6], para o contexto de álgebras com unidades locais. A ideia que envolve a demonstração nesse caso seguirá basicamente os mesmos passos do caso original, que como mencionado, pode ser consultado no capítulo 2.

O texto deste capítulo foi organizado de modo que as duas primeiras seções tratam de verificar dois isomorfismos. O primeiro deles, abordado na primeira seção, trata-se de um isomorfismo de A-módulos à direita entre $A\#_\sigma H$ e $H \otimes A$, onde $A\#_\sigma H$ é um produto cruzado como estudado no capítulo anterior para o caso em que A é uma K-álgebra com unidades locais. Nessa ocasião, o limite direto é a ferramenta utilizada para obter tal isomorfismo. O segundo isomorfismo, abordado na segunda seção, trata-se de um isomorfismo de álgebras entre $B\#H^*$ e $A\,\mathrm{End}_A(B_A)A$, sendo B um H-comódulo álgebra com unidades locais. Entretanto, nessa ocasião, além do limite direto que garantirá a existência de tal morfismo bem como sua injetividade, será necessário trabalhar um método à parte, que por sua vez nos garantirá a sobrejetividade.

Na terceira e última seção reuniremos esses dois isomorfismos citados considerando $B = A\#_\sigma H$. Além disso, juntamente com o estudo das partes unitárias de A-módulos à esquerda e à direita, iremos através de isomorfismos de A-bimódulos e álgebras passar de uma álgebra envolvendo produto cruzado e smash para uma álgebra de matrizes. Isso em síntese esboça a demonstração do teorema.

4.1 O isomorfismo de A-módulos à direita: $A\#_\sigma H \simeq H \otimes A$

O objetivo dessa seção é exibir, sob algumas hipóteses, a relação entre $A\#_\sigma H$ e $H \otimes A$. Para tanto, ao longo do texto, além da Proposição 3.14 faremos uso do seguinte resultado:

Lema 4.1 *Sejam A uma K-álgebra com unidades locais e H uma K-álgebra de Hopf. Então $((H \otimes A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j})$ forma um sistema direto na categoria das K-álgebras e $\varinjlim ((H \otimes A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = (H \otimes A, (\alpha_i)_{i\in I})$ onde ${}_j\alpha_i$ e α_i são inclusões.*

Demonstração. Sendo $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$ um sistema de unidades locais para A então $H \otimes A$ torna-se uma K-álgebra com sistema de unidades locais $u' = \{1_H \otimes e_i \,|\, i \in I\}$. De fato, $H \otimes A$ é K-álgebra com o produto $(h \otimes a)(l \otimes b) = hl \otimes ab$, além disso:

1. $(1 \otimes e_i)(1 \otimes e_i) = 1 \otimes e_i^2 = 1 \otimes e_i$, ou seja, $1 \otimes e_i$ é idempotente $\forall i \in I$

2. Seja $\{h_i \otimes a_i\}_{i=1}^n$ um subconjunto finito de elementos de $H \otimes A$. Considerando o subconjunto finito $\{a_i\}_{i=1}^n$ de A, temos pelo fato de u ser um sistema de unidades locais para A, que existe indice $j \in I$ tal que $e_j a_i = a_i e_j = a_i \; \forall i = i. \cdots n$. Assim $1 \otimes e_j \in u'$ é tal que

$$(1 \otimes e_j)(h_i \otimes a_i) = h_i \otimes e_j a_i = h_i \otimes a_i \quad \forall i = 1 \cdots n.$$

e analogamente

$$(h_i \otimes a_i)(1 \otimes e_j) = h_i \otimes a_i e_j = h_i \otimes a_i \quad \forall i = 1 \cdots n.$$

o que conclui a afirmação de que u' forma um sistema de unidades locais para $H \otimes A$. Ademais, as K-subálgebras $(H \otimes A)_i$ de $H \otimes A$ induzidas por u' são dadas por:

$$(H \otimes A)_i := (1 \otimes e_i)(H \otimes A)(1 \otimes e_i) = H \otimes e_i A e_i = H \otimes A_i$$

dessa forma, de acordo com a Proposição 3.8, temos o sistema direto

$$(((H \otimes A)_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = ((H \otimes A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j})$$

sendo ${}_j\alpha_i : H \otimes A_i \longrightarrow H \otimes A_j$ inclusões tais que

$$\varinjlim ((H \otimes A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = (H \otimes A, (\alpha_i)_{i\in I})$$

sendo também $\alpha_i : H \otimes A_i \longrightarrow H \otimes A$ inclusão.

$\square$

Teorema 4.2 *Sejam H uma K-álgebra de Hopf com antípoda S bijetiva, A uma K-álgebra com unidades locais e $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}$ invertível por convolução (isto é, cada σ_i é invertível por convolução) que é um 2-cociclo normalizado e tal que A é um H-módulo torcido com respeito à σ. Então existe um isomorfismo de A-módulos à direita entre $A\#_\sigma H$ e $H \otimes A$.*

Demonstração. Do Teorema 1.6 para álgebras unitárias, segue a existência do isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & A_i\#_{\sigma_i}H & \longrightarrow & H \otimes A_i \\ & a\#h & \longmapsto & h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright a)\sigma_i(S^{-1}(h_2), h_1) \end{array}$$

de A_i-módulos à direita, que tem como inversa

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i^{-1} : & H \otimes A_i & \longrightarrow & A_i\#_{\sigma_i}H \\ & h \otimes a & \longmapsto & \sigma_i^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1))(h_3 \triangleright a)\#h_4 \end{array}$$

$\forall i \in I$.

Considerando ${}_j\beta_i : A_i\#_{\sigma_i}H \longrightarrow A_j\#_{\sigma_j}H$ e ${}_j\alpha_i : H \otimes A_i \longrightarrow H \otimes A_j$ inclusões, temos devido a compatibilidade $e_i\sigma_j = \sigma_i$ que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i\#_{\sigma_i}H \arrow[r, "\varphi_i", "\simeq"'] \arrow[d, "{}_j\beta_i"'] & H \otimes A_i \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] \\ A_j\#_{\sigma_j}H \arrow[r, "\varphi_j", "\simeq"'] & H \otimes A_j \end{tikzcd}$$

comuta, $\forall i, j \in I$ sempre que $i \leq j$. Com efeito, dado $a\#h \in A_i\#_{\sigma_i}H$ temos

$$\begin{aligned} {}_j\alpha_i \circ \varphi_i(a\#h) &= {}_j\alpha_i(\varphi_i(a\#h)) \\ &= {}_j\alpha_i\left(h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright a)\sigma_i(S^{-1}(h_2), h_1)\right) \\ &= h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright a)\sigma_i(S^{-1}(h_2), h_1) \end{aligned}$$

por outro lado, como $a \in A_i$ então $S^{-1}(h_3) \triangleright a \in A_i$, assim, $S^{-1}(h_3) \triangleright a = (S^{-1}(h_3) \triangleright a)e_i$ e consequentemente:

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ {}_j\beta_i(a\#h) &= \varphi_j(a\#h) \\ &= h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright a)\sigma_j(S^{-1}(h_2), h_1) \\ &= h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright a)e_i\sigma_j(S^{-1}(h_2), h_1) \\ &\overset{e_i\sigma_j=\sigma_i}{=} h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright a)\sigma_i(S^{-1}(h_2), h_1) \end{aligned}$$

sendo válido que ${}_j\alpha_i \circ \varphi_i = \varphi_j \circ {}_j\beta_i$. Usando as funções inversas φ_i^{-1} e φ_j^{-1} temos que $\varphi_j^{-1} \circ {}_j\alpha_i = {}_j\beta_i \circ \varphi_i^{-1}$, ou seja, temos também a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \#_{\sigma_i} H \arrow[d, "{}_j\beta_i"'] & H \otimes A_i \arrow[l, "\varphi_i^{-1}"', "\simeq"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] \\ A_j \#_{\sigma_j} H & H \otimes A_j \arrow[l, "\varphi_j^{-1}"', "\simeq"] \end{tikzcd}$$

$\forall i, j \in I$ sempre que $i \leq j$.

Consideremos agora o seguinte diagrama na categoria dos K-espaços vetoriais:

$$\begin{tikzcd} A\#_\sigma H & & & H \otimes A \\ & A_i \#_{\sigma_i} H \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[r, "\varphi_i", "\simeq"'] \arrow[d, "{}_j\beta_i"] & H \otimes A_i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"'] & \\ & A_j \#_{\sigma_j} H \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[r, "\varphi_j", "\simeq"'] & H \otimes A_j \arrow[uur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

vimos que o quadrado comuta bem como o triângulo da direita, devido ao fato de termos o sistema direto $((H \otimes A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j})$. Assim temos:

$$(\alpha_j \circ \varphi_j) \circ {}_j\beta_i = \alpha_j \circ (\varphi_j \circ {}_j\beta_i) = \alpha_j \circ ({}_j\alpha_i \circ \varphi_i) = (\alpha_j \circ {}_j\alpha_i) \circ \varphi_i = \alpha_i \circ \varphi_i$$

e disso segue que temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A\#_\sigma H & & H \otimes A \\ & A_i \#_{\sigma_i} H \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[ur, "\alpha_i \circ \varphi_i"] \arrow[d, "{}_j\beta_i"] & \\ & A_j \#_{\sigma_j} H \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[uur, "\alpha_j \circ \varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\varinjlim((A_i\#_{\sigma_i} H)_{i\in I}, ({}_j\beta_i)_{i\leq j}) = (A\#_\sigma H, (\beta_i)_{i\in I})$ em Vec_K, então garantimos a existência de um único morfismo K-linear $\varphi : A\#_\sigma H \longrightarrow H \otimes A$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} A\#_\sigma H \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & H \otimes A \\ & A_i \#_{\sigma_i} H \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[ur, "\alpha_i \circ \varphi_i"] \arrow[d, "{}_j\beta_i"] & \\ & A_j \#_{\sigma_j} H \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[uur, "\alpha_j \circ \varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

comutativo, isto é, φ é único morfismo K-linear que torna válido a igualdade:

$$\varphi \circ \beta_i = \alpha_i \circ \varphi_i, \quad \forall i \in I \tag{4.1}$$

De maneira similar, do fato de termos os quadrados comutativos com os morfismos φ_i^{-1}'s e o limite direto $\varinjlim((H \otimes A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = (H \otimes A, (\alpha_i)_{i\in I})$ em Vec_K, garantimos a existência de único morfismo K-linear $\varphi' : H \otimes A \longrightarrow A\#_\sigma H$ que torna o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
A\#_\sigma H & & H \otimes A \arrow[ll, dashed, "\varphi'"'] \\
& H \otimes A_i \arrow[ul, "\beta_i \circ \varphi_i^{-1}"'] \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] & \\
& H \otimes A_j \arrow[uul, "\beta_j \circ \varphi_j^{-1}"] \arrow[uur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

comutativo, isto é, φ' é único morfismo K-linear que torna válido a igualdade:

$$\varphi' \circ \alpha_i = \beta_i \circ \varphi_i^{-1}, \quad \forall i \in I \tag{4.2}$$

De 4.1 e 4.2 temos:

$$(\varphi \circ \varphi') \circ (\alpha_i \circ \varphi_i) = \varphi \circ (\varphi' \circ \alpha_i \circ \varphi_i) = \varphi \circ \beta_i = \alpha_i \circ \varphi_i, \quad \forall i \in I$$

vale ainda ressaltar que sendo φ_i bijetor para todo $i \in I$, então

$$(\varphi \circ \varphi') \circ (\alpha_i \circ \varphi_i) \circ \varphi_i^{-1} = \alpha_i \circ \varphi_i \circ \varphi_i^{-1} \Rightarrow (\varphi \circ \varphi') \circ \alpha_i = \alpha_i, \quad \forall i \in I$$

Porém temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes A \arrow[rr, dashed, "1_{H\otimes A}"] & & H \otimes A \\
& H \otimes A_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[d, "{}_j\alpha_i"] & \\
& H \otimes A_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

e novamente do fato que $\varinjlim((H \otimes A_i)_{i\in I}, ({}_j\alpha_i)_{i\leq j}) = (H \otimes A, (\alpha_i)_{i\in I})$ em Vec_K, segue a unicidade do morfismo $1_{H\otimes A}$, isto é, único tal que $1_{H\otimes A} \circ \alpha_i = \alpha_i, \quad \forall i \in I$. Porém, vimos que $\varphi \circ \varphi'$ também safisfaz essa condição, logo

$$\varphi \circ \varphi' = 1_{H\otimes A}$$

Analogamente, do fato de

$$(\varphi' \circ \varphi) \circ (\beta_i \circ \varphi_i^{-1}) = \varphi' \circ (\varphi \circ \beta_i \circ \varphi_i^{-1}) = \varphi' \circ \alpha_i = \beta_i \circ \varphi_i^{-1}, \quad \forall i \in I$$

e consequentemente

$$(\varphi' \circ \varphi) \circ \beta_i = (\varphi' \circ \varphi) \circ (\beta_i \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_i = \beta_i \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i = \beta_i, \quad \forall i \in I$$

do diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A\#_\sigma H \arrow[rr, dashed, "1_{A\#_\sigma H}"] & & A\#_\sigma H \\
& A_i\#_{\sigma_i} H \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[d, "{}_j\beta_i"] & \\
& A_j\#_{\sigma_j} H \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[uur, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

e de $\varinjlim((A_i\#_\sigma H)_{i\in I}, ({}_j\beta_i)_{i\leq j}) = (A\#_\sigma H, (\beta_i)_{i\in I})$ em Vec_K, que garante a unicidade do morfismo K-linear $1_{A\#_\sigma H}$ tal que $1_{A\#_\sigma H} \circ \beta_i = \beta_i,\ \forall i \in I$, temos que

$$\varphi' \circ \varphi = 1_{A\#_\sigma H}$$

Portanto $\varphi : A\#_\sigma H \longrightarrow H \otimes A$ é isomorfismo K-linear. Resta verificar que φ é A-linear à direita. Seja então $a\#h \in A\#_\sigma H$ e $a' \in A$, existem índices $i, j \in I$ tais que $a\#h \in A_i\#_{\sigma_i} H$ e $a' \in A_j$, dessa forma tomamos índice $t \in I$ com $i, j \leq t$, então $a\#h \in A_t\#_{\sigma_t} H$ e $a' \in A_t$, logo

$$\begin{array}{rcl}
\varphi((a\#h)a') & = & \varphi(\beta_t((a\#h)a')) \\
& = & \alpha_t(\varphi_t((a\#h)a')) \\
& = & \varphi_t((a\#h)a') \\
& \overset{\varphi_t\ A_t-linear}{=} & \varphi_t(a\#h)a' \\
& = & \alpha_t(\varphi_t(a\#h))a' = \varphi(\beta_t(a\#h))a' \\
& = & \varphi(a\#h)a'
\end{array}$$

□

4.2 O isomorfismo de álgebras: $B\#H^* \simeq A\,\text{End}_A(B_A)A$

Nesta seção vamos considerar H de dimensão finita. Com isso, H^* possui uma estrutura canônica de álgebra de Hopf. Consideremos B um H-comódulo álgebra com um sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$ e $A = B^{coH} \subseteq B$ H-Galois com unidades locais, isto é, $A_i \subseteq B_i$ H-Galois $\forall i \in I$. Sendo B um H-comódulo álgebra com unidades locais via

$$\begin{array}{rccc} \rho: & B & \longrightarrow & B \otimes H \\ & b & \longmapsto & b_0 \otimes b_1 \end{array}$$

então temos definida a ação de H^* sobre B dada por

$$f \cdot b = b_0 f(b_1)$$

para cada $f \in H^*$ e $b \in B$, que nos permite formar o produto smash $B\#H^*$. De modo análogo as K-subálgebras $B_i's$ possuem estruturas de H^*-módulo álgebra com essa ação. Ademais, decorrente do Teorema 2.4 para álgebras unitárias, sendo $A_i \subseteq B_i$ H-Galois para todo $i \in I$, temos isomorfismos de K-álgebras:

$$\theta_i : B_i\#H^* \to \mathrm{End}_{A_i}(B_{i A_i}), \quad \forall i \in I$$

onde $\theta_i(b_i\#f)(c) = b_i f(c_1)c_0, \ \forall b_i, c \in B_i$ e $f \in H^*$. Usando expressão análoga para o morfismo θ_i, definimos o morfismo injetivo:

$$\theta_i' : B_i\#H^* \longrightarrow \mathrm{End}_A(B_A)$$

dado por

$$\theta_i'(b_i\#f)(c) = b_i f(c_1)c_0 \in e_iB, \quad \forall b_i \in B_i, c \in B \text{ e } f \in H^*$$

Vejamos de fato que $\theta_i'(b_i\#f)$ pertence a $\mathrm{End}_A(B_A)$. Dado $a \in A = B^{coH}$ e $c \in B$,

$$\rho(ca) = \rho(c)\rho(a) = c_0 a \otimes c_1$$

com isso:

$$\theta_i'(b_i\#f)(ca) = b_i f(c_1)c_0 a = (\theta_i'(b_i\#f)(c))a$$

Sendo B um A-bimódulo, então $\mathrm{End}_A(B_A)$ possui estruturas de:

- A-módulo à direita por $(f \cdot a)(b) := f(ab)$;
- A-módulo à esquerda por $(a \cdot f)(b) := af(b)$.

Sendo u um sistema de unidades locais para B é também para A já que $\rho(e_i) = e_i \otimes 1_H$, isto é, $e_i \in A, \ \forall i \in I$. Considerando $\mathrm{End}_A(B_A)$ com a estrutura de bimódulo exibida anteriormente, temos de acordo com a Definição 3.9 e a Observação 3.10 que $f \in A\,\mathrm{End}_A(B_A)A$ se, e só se, existe $e_j \in u$ tal que $e_j \cdot f = f \cdot e_j = f$, ou seja,

$$(e_j \cdot f)(b) = e_j f(b) = f(b)$$

$$(f \cdot e_j)(b) = f(e_j b) = f(b)$$

$\forall b \in B$. Observe que o fato de B não ter unidade implica que o morfismo identidade $I_B \notin A\operatorname{End}_A(B_A)A$. De fato, se $I_B \in A\operatorname{End}_A(B_A)A$ então $e_i \cdot I_B = I_B \cdot e_i = I_B$ para alguma unidade local e_i. Segue disso que para todo $b \in B$,

$$b = I_B(b) = ((e_i \cdot I_B) \cdot e_i)(b) = (e_i \cdot I_B)(e_i b) = e_i(e_i b) = e_i^2 b = e_i b$$

com isso e_i se torna unidade à esquerda em B. E ainda nessas condições, para $b, c \in B$ arbitrários temos

$$(be_i)c = b(e_i c) = bc.$$

Segue que $(be_i - b)c = 0$. Como c é arbitrário e B é álgebra com unidades locais, conclui-se que $be_i - b = 0$, ou seja, $be_i = b$ para todo $b \in B$. Segue então que e_i é também unidade à direita para B. O que não é verdade, pois estamos supondo que B não possui unidade. Afirmamos que:

$$\operatorname{Im}(\theta_i') \subseteq A\operatorname{End}_A(B_A)A, \quad \forall i \in I$$

Com efeito, dados $b_i \# f \in B_i \# H^*$ e $b \in B$ mostraremos que:

$$(e_i \cdot \theta_i'(b_i \# f))(b) = (\theta_i'(b_i \# f) \cdot e_i)(b) = \theta_i'(b_i \# f)(b), \ \forall b \in B.$$

Vejamos:

$$(e_i \cdot \theta_i'(b_i \# f))(b) = e_i \underbrace{\theta_i'(b_i \# f)(b)}_{\in\, e_i B} = \theta_i'(b_i \# f)(b) \quad \forall b \in B$$

e com isto

$$e_i \cdot \theta_i'(b_i \# f) = \theta_i'(b_i \# f).$$

Por outro lado, como $\rho(e_i b) = \rho(e_i)\rho(b) = e_i b_0 \otimes b_1$, temos:

$$\begin{aligned}(\theta_i'(b_i \# f) \cdot e_i)(b) &= \theta_i'(b_i \# f)(e_i b) \\ &= b_i f(b_1) e_i b_0 \\ &= b_i e_i f(b_1) b_0 \\ &= b_i f(b_1) b_0 \\ &= \theta_i'(b_i \# f)(b)\end{aligned}$$

$\forall b \in B$. Logo

$$\theta_i'(b_i \# f) \cdot e_i = \theta_i'(b_i \# f)$$

Queremos relacionar as álgebras $B \# H^*$ e $A\operatorname{End}_A(B_A)A$. Começamos observando o seguinte lema:

Lema 4.3 *Sejam H uma K-álgebra de Hopf de dimensão finita e B um H-comódulo álgebra com um sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$. Então $((B_i \# H^*)_{i\in I}, ({}_j\beta_i)_{i\leq j})$ forma um sistema direto na categoria das K-álgebras e $\varinjlim((B_i\#H^*)_{i\in I}, ({}_j\beta_i)_{i\leq j}) = (B\#H^*, (\beta_i)_{i\in I})$, sendo ${}_j\beta_i$ e β_i inclusões.*

Esse resultado segue da Proposição 3.8, já que $B_i\#H^* = (e_i\#1_{H^*})(B\#H^*)(e_i\#1_{H^*})$ para cada $i \in I$. Consideremos agora o seguinte diagrama na categoria das K-álgebras:

$$\begin{tikzcd}
B\#H^* & & A\,\mathrm{End}_A(B_A)A \\
& B_i\#H^* \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[ur, "\theta'_i"] \arrow[d, "{}_j\beta_i"] & \\
& B_j\#H^* \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[uur, "\theta'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

do lema anterior temos que o triângulo da esquerda comuta, vejamos que o mesmo vale para o triângulo da direita. Para isso, sejam $b_i\#f \in B_i\#H^*$ e $b \in B$, assim:

$$(\theta'_j \circ {}_j\beta_i(b_i\#f))(b) = \theta'_j({}_j\beta_i(b_i\#f)(b)) = \theta'_j(b_i\#f)(b) = b_i f(b_1)b_0 = \theta'_i(b_i\#f)(b) \;\forall b \in B$$

como $\varinjlim((B_i\#H^*)_{i\in I}, ({}_j\beta_i)_{i\leq j}) = (B\#H^*, (\beta_i)_{i\in I})$, garantimos a existência de único morfismo de álgebras θ que torna o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B\#H^* \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & A\,\mathrm{End}_A(B_A)A \\
& B_i\#H^* \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[ur, "\theta'_i"] \arrow[d, "{}_j\beta_i"] & \\
& B_j\#H^* \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[uur, "\theta'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

comutativo, isto é, $\theta : B\#H^* \longrightarrow A\,\mathrm{End}_A(B_A)A$ é único morfismo de álgebras tal que $\theta \circ \beta_i = \theta'_i,\ \forall i \in I$.

Afirmamos agora que θ é uma bijeção. De fato,

<u>Injetividade</u>: Seja $\sum_{j=1}^k b_{l_j}\#f_{l_j} \in (B\#H^*) \cap \mathrm{Ker}\,\theta$. Podemos supor $b_{l_j}\#f_{l_j} \in B_{l_j}\#H^*,\ \forall l_j \in I, j = i, \cdots, k$. Consideramos então $t \in I$ tal que $l_j \leq t,\ \forall j = 1, \cdots, k$. Com isso $B_{l_j} \subseteq B_t \;\forall l_j$ e consequentemente $\sum_{j=1}^k b_{l_j}\#f_{l_j} \in B_t\#H^*$, assim

$$0 = \theta\left(\sum_{j=1}^k b_{l_j}\#f_{l_j}\right) = \theta\left(\beta_t\left(\sum_{j=1}^k b_{l_j}\#f_{l_j}\right)\right) = (\theta\circ\beta_t)\left(\sum_{j=1}^k b_{l_j}\#f_{l_j}\right) = \theta'_t\left(\sum_{j=1}^k b_{l_j}\#f_{l_j}\right).$$

Sendo θ'_t injetor, $\sum_{j=1}^{k} b_{l_j} \# f_{l_j} = 0$ e portanto, θ é injetor.

Antes de tratarmos da sobrejetividade em si, façamos duas observações:

1. Os morfismos $\theta_i : B_i \# H^* \longrightarrow \mathrm{End}_{A_i}(B_{i A_i})$ são A_i-lineares à direita. De fato, dados $a_i \in A_i = B_i^{coH},\ b_i \in B_i$ e $f \in H^*$, temos que

$$\begin{aligned}
(b_i \# f) \cdot a_i &= (b_i \# f) \cdot (a_i \# 1_{H^*}) = b_i(f_1 \cdot a_i) \# f_2 1_{H^*} \\
&\overset{a_i \in B_i^{coH}}{=} b_i(a_i f_1(1_H)) \# f_2 = b_i(a_i \epsilon_{H^*}(f_1)) \# f_2 \\
&= b_i a_i \# \epsilon_{H^*}(f_1) f_2 = b_i a_i \# f
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\theta_i((b_i \# f) \cdot a_i)(b) = \theta_i(b_i a_i \# f)(b) = b_i a_i f(b_1) b_0, \quad \forall b \in B_i.$$

Por outro lado, sendo $\rho(a_i b) = \rho(a_i)\rho(b) = a_i b_0 \otimes b_1$, temos que

$$(\theta_i(b_i \# f) \cdot a_i)(b) = \theta_i(b_i \# f)(a_i b) = b_i f(b_1) a_i b_0, \quad \forall b \in B_i$$

Logo, $\theta_i((b_i \# f) \cdot a_i) = \theta_i(b_i \# f) \cdot a_i$.

2. Se $\lambda \in A\,\mathrm{End}_A(B_A)A$ com $e_i \cdot \lambda = \lambda \cdot e_i = \lambda$ então $\lambda|_{B_t} \in \mathrm{End}_{A_t}(B_{t A_t})$ sempre que $i \leq t$. De fato,

$$\lambda(B_i) = (e_i \cdot \lambda)(B_i) = e_i \lambda(B_i) = e_i \lambda(B_i e_i) = e_i \lambda(B_i) e_i \in B_i$$

Ademais, como λ é A-linear à direita é em particular A_i-linear à direita, logo $\lambda|_{B_i} : B_i \longrightarrow B_i$ é A_i-linear à direita, isto é, $\lambda|_{B_i} \in \mathrm{End}_{A_i}(B_{i A_i})$. Se $i \leq t$,

$$e_t \cdot \lambda = e_t \cdot (e_i \cdot \lambda) = (e_t e_i) \cdot \lambda \overset{i \leq t}{=} e_i \cdot \lambda = \lambda$$

e de maneira análoga temos que $\lambda \cdot e_t = \lambda$. Dessa forma, reproduzindo os cálculos anteriores para mostrar que $\lambda|_{B_i} \in \mathrm{End}_{A_i}(B_{i A_i})$, concluímos que $\lambda|_{B_t} \in \mathrm{End}_{A_t}(B_{t A_t})$.

<u>Sobrejetividade</u>: Sejam $\lambda \in A\,\mathrm{End}_A(B_A)A$ com $e_i \cdot \lambda = \lambda \cdot e_i = \lambda$, $t \in I$ tal que $i \leq t$ e $b \in B_t$. Assim:

$$\begin{aligned}
\lambda(b) &= (\lambda \cdot e_i)(b) \\
&= \lambda(e_i b) \\
&\overset{b \in B_t}{=} \lambda(e_i b e_t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{i\leq t}{=} && \lambda(e_t e_i b e_t)\\
&= && \lambda|_{B_t}(e_t e_i b e_t)\\
&\overset{i\leq t,\, b\in B_t}{=} && \lambda|_{B_t}(e_i b)\\
&= && \star
\end{aligned}
$$

como $i \leq t$, da observação feita há pouco temos que $\lambda|_{B_t} \in \mathrm{End}_{A_t}(B_{t\,A_t}) = \theta_t(B_t\#H^*)$, sendo θ_t isomorfismo de álgebras, logo existe único elemento $\sum_j b_{t_j}\#f_{t_j} \in B_t\#H^*$ tal que $\lambda|_{B_t} = \theta_t\left(\sum_j b_{t_j}\#f_{t_j}\right)$. Além disso, lembrando também de outra observação vista anteriormente temos que θ_t é A_t-linear à direita, assim:

$$
\begin{aligned}
\star &= \theta_t\left(\sum_j b_{t_j}\#f_{t_j}\right)(e_i b)\\
&= \left(\theta_t\left(\sum_j b_{t_j}\#f_{t_j}\right)\cdot e_i\right)(b)\\
&\overset{A_i\subseteq A_t}{=} \theta_t\left(\left(\sum_j b_{t_j}\#f_{t_j}\right)\cdot e_i\right)(b)\\
&= \theta_t\left(\sum_j b_{t_j}e_i\#f_{t_j}\right)(b)
\end{aligned}
$$

e ainda

$$
\begin{aligned}
\lambda(b) &= (e_i\cdot\lambda)(b) = e_i\lambda(b)\\
&= e_i\theta_t\left(\sum_j b_{t_j}e_i\#f_{t_j}\right)(b)\\
&= \sum_j e_i\theta_j(b_{t_j}e_i\#f_{t_j})(b)\\
&= \sum_j \underbrace{e_i b_{t_j} e_i}_{\in B_i} f_{t_j}(b_1)b_0\\
&= \sum_j \theta'_i(e_i b_{t_j} e_i\#f_{t_j})(b)\\
&= \theta'_i\left(\sum_j e_i b_{t_j} e_i\#f_{t_j}\right)(b)
\end{aligned}
$$

$\forall b \in B_t$. Portanto,

$$
\lambda|_{B_t} = \theta'_i\left(\sum_j e_i b_{t_j} e_i\#f_{t_j}\right)\Bigg|_{B_t}, \quad \forall t\in I \text{ tal que } i\leq t
$$

também

$$
\lambda|_{B_i} = (\lambda|_{B_t})|_{B_i}
$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\theta_i'\left(\sum_j e_i b_{t_j} e_i \# f_{t_j}\right)\Bigg|_{B_t}\right)\Bigg|_{B_i} \\
&= \theta_i'\left(\sum_j e_i b_{t_j} e_i \# f_{t_j}\right)\Bigg|_{B_i} \\
&= \theta_i\left(\sum_j e_i b_{t_j} e_i \# f_{t_j}\right)
\end{aligned}$$

Mas por outro lado, $\lambda|_{B_i} \in \operatorname{End}_{A_i}(B_{iA_i}) = \theta_i(B_i \# H^*)$ sendo θ_i um isomorfismo de álgebras, consequentemente, existe único elemento $\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j} \in B_i \# H^*$ tal que $\lambda|_{B_i} = \theta_i\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right)$. Pela injetividade de θ_i concluímos que

$$\sum_j e_i b_{t_j} e_i \# f_{t_j} = \sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}$$

e com isso

$$\lambda|_{B_t} = \theta_i'\left(\sum_j e_i b_{t_j} e_i \# f_{t_j}\right)\Bigg|_{B_t} = \theta_i'\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right)\Bigg|_{B_t}, \quad \forall t \in I \text{ tal que } i \leq t$$

Se $k \in I$ não é maior ou igual a i, podemos tomar $t \in I$ tal que $i, k \leq t$ e com isso $B_i, B_k \subseteq B_t$, logo

$$\lambda|_{B_k} = (\lambda|_{B_t})|_{B_k} \overset{i \leq t}{=} \left(\theta_i'\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right)\Bigg|_{B_t}\right)\Bigg|_{B_k} = \theta_i'\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right)\Bigg|_{B_k}$$

ou seja,

$$\lambda(b) = \theta_i'\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right)(b), \quad \forall b \in B$$

e portanto

$$\lambda = \theta_i'\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right) = (\theta \circ \beta_i)\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right) = \theta\left(\beta_i\left(\sum_j b_{i_j} \# f_{i_j}\right)\right)$$

Para concluir esta seção enunciamos o seguinte teorema que resume todas as considerações feitas na mesma:

Teorema 4.4 *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, B um H-comódulo álgebra com unidades locais e $A = B^{coH} \subseteq B$ uma extensão H-Galois com unidades locais, então $B \# H^* \simeq A \operatorname{End}_A(B_A) A$ como K-álgebras.*

4.3 O Teorema de Dualidade

Nesta seção, iremos supor H uma K-álgebra de Hopf de dimensão finita n, que, por consequência, possui antípoda bijetiva, e $A\#_\sigma H$ um produto cruzado com σ invertível por convolução. Nessas condições, temos que $A \subseteq A\#_\sigma H$ é uma extensão H-Galois com unidades locais.

Vimos na seção anterior que dado uma K-álgebra com unidades locais, se $A = B^{coH} \subseteq B$ é H-Galois com unidades locais então $B\#H^* \simeq A\,\mathrm{End}_A(B_A)A$ como álgebras.

No nosso caso, para $B = A\#_\sigma H$ temos

$$(A\#_\sigma H)\#H^* \simeq A\,\mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)A$$

como K-álgebras.

Nas condições que estamos trabalhando, isto é, onde σ é invertível por convolução e S bijetiva, vimos que existe um isomorfismo $\varphi : A\#_\sigma H \longrightarrow H \otimes A$ de A-módulos à direita. A partir de φ, dado $f \in \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$ definimos

$$\varphi'(f) : H \otimes A \xrightarrow{\varphi^{-1}} A\#_\sigma H \xrightarrow{f} A\#_\sigma H \xrightarrow{\varphi} H \otimes A$$

como φ é um morfismo de A-módulos à direita bem como φ^{-1}, então $\varphi'(f) \in \mathrm{End}_A((H\otimes A)_A)$. Fica então definido

$$\begin{array}{rccc} \varphi' : & \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A) & \longrightarrow & \mathrm{End}_A((H \otimes A)_A) \\ & f & \longmapsto & \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

que é bijeção, pois tem como inversa $(\varphi')^{-1}(g) = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$.

Com o intuito de obter um isomorfismo de álgebras entre as partes unitárias à esquerda e à direita de $\mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$ e $\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)$ é necessário definir uma nova ação de A sobre $H \otimes A$, que por sua vez induzirá outra sobre $\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)$, e sobre a qual φ' será morfismo de A-módulos à esquerda e à direita. De fato, considerando a ação original de A sobre $H \otimes A$, para que φ' sequer fosse morfismo de A-módulos à esquerda, ou seja, para que fosse válida a condição $\varphi'(b \cdot f) = b \cdot \varphi'(f), \forall\, b \in A$ e $f \in \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$ seria necessário que

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(b \cdot f)(h \otimes a) & = & (b \cdot \varphi'(f))(h \otimes a) \\ \varphi((b \cdot f)(\varphi^{-1}(h \otimes a))) & = & b(\varphi'(f)(h \otimes a)) \\ \varphi(bf(\varphi^{-1}(h \otimes a))) & = & b\varphi(f(\varphi^{-1}(h \otimes a))) \end{array}$$

$\forall\, h \otimes a \in H \otimes A$. Tal condição não necessariamente ocorre uma vez que φ é morfismo de A-módulos à direita e não de A-módulos à esquerda. Buscando então obter igualdades

$$b \odot \varphi'(f) = \varphi'(b \cdot f) \quad \text{e} \quad \varphi'(f) \odot b = \varphi'(f \cdot b)$$

$\forall\, b \in A$, $f \in \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$ e para uma nova ação $\odot$ de A sobre $\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)$, deveremos em particular ter

$$b \odot \varphi'(I_{A\#H}) = \varphi'(b \cdot I_{A\#H})$$

como $\varphi'(I_{A\#H}) = \varphi \circ I_{A\#H} \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = I_{H\otimes A}$, segue que

$$\begin{aligned} (b \odot I_{H\otimes A})(h \otimes a) &= \varphi'(b \cdot I_{A\#H})(h \otimes a) \\ b \odot (I_{H\otimes A}(h \otimes a)) &= \varphi((b \cdot I_{A\#H})(\varphi^{-1}(h \otimes a))) \\ b \odot (h \otimes a) &= \varphi(b\varphi^{-1}(h \otimes a)) \end{aligned}$$

$\forall\, h \otimes a \in H \otimes A$. Definamos então tal ação de A sobre $H \otimes A$:

$$\begin{aligned} \odot : \quad A \times (H \otimes A) &\longrightarrow H \otimes A \\ (b, h \otimes a) &\longmapsto b \odot (h \otimes a) = \varphi(b\varphi^{-1}(h \otimes a)) \end{aligned}$$

Nos próximos passos veremos que φ' é morfismo de A-módulos à direita e à esquerda com relação a ação $\odot$, bem como morfismo de álgebras, o que nos garantirá obter um isomorfismo de álgebras: $A\,\mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)A \simeq A \odot \mathrm{End}_A((H \otimes A)_A) \odot A$. E ainda, detalhando a ação $\odot$ através das expressões de φ e φ^{-1} verificaremos que $\odot$ se relaciona com a ação original de A sobre $H \otimes A$ de tal modo que é possível obtermos a igualdade: $A \odot \mathrm{End}_A((H \otimes A)_A) \odot A = A\,\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)A$. Com isso obteremos um isomorfismo de álgebras $A\,\mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)A \simeq A\,\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)A$.

A ação $\odot$ torna $H \otimes A$ um A-módulo à esquerda. Com efeito, dados $b, c \in A$ e $h \otimes a \in H \otimes A$, temos por exemplo que

$$\begin{aligned} b \odot (c \odot (h \otimes a)) &= b \odot (\varphi(c\varphi^{-1}(h \otimes a))) \\ &= \varphi(b\varphi^{-1}(\varphi(c\varphi^{-1}(h \otimes a)))) \\ &= \varphi(bc(\varphi^{-1}(h \otimes a)) \\ &= (bc) \odot (h \otimes a) \end{aligned}$$

as demais propriedades se verificam de maneira análoga e direta da definição da ação.

Agora ressaltaremos algumas propriedades que relacionam a ação $\odot$ com o isomorfismo K-linear

$$\begin{array}{rccc} \varphi': & \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A) & \longrightarrow & \mathrm{End}_A((H\otimes A)_A) \\ & f & \longmapsto & \varphi\circ f\circ\varphi^{-1} \end{array}$$

1. φ' é um morfismo de A-módulos à esquerda com relação a ação $\odot$ de A em $H\otimes A$. De fato, dados $b\in A$ e $f\in \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$, temos

   $$\varphi'(b\cdot f)(h\otimes a) = (\varphi\circ(b\cdot f)\circ\varphi^{-1})(h\otimes a) = \varphi(bf(\varphi^{-1}(h\otimes a))), \quad \forall h\otimes a\in H\otimes A$$

   por outro lado,

   $$\begin{aligned} (b\odot\varphi'(f))(h\otimes a) &= b\odot(\varphi'(f)(h\otimes a)) \\ &= b\odot(\varphi(f(\varphi^{-1}(h\otimes a)))) \\ &= \varphi(b\varphi^{-1}(\varphi(f(\varphi^{-1}(h\otimes a))))) \\ &= \varphi(bf(\varphi^{-1}(h\otimes a))), \quad \forall a\otimes h\in A\otimes H \end{aligned}$$

   portanto,

   $$\varphi'(b\cdot f) = b\odot\varphi'(f)$$

2. φ' é morfismo de A-módulos à direita com respeito a ação $\odot$ de A em $H\otimes A$. De fato,

   $$\varphi'(f\cdot b)(h\otimes a) = (\varphi\circ(f\cdot b)\circ\varphi^{-1})(h\otimes a) = \varphi(f(b\varphi^{-1}(h\otimes a))), \ \forall h\otimes a\in H\otimes A$$

   por outro lado,

   $$\begin{aligned} (\varphi'(f)\odot b)(h\otimes a) &= \varphi'(f)(b\odot(h\otimes a)) \\ &= \varphi'(f)(\varphi(b\varphi^{-1}(h\otimes a))) \\ &= \varphi(f(\varphi^{-1}(\varphi(b\varphi^{-1}(h\otimes a))))) \\ &= \varphi(f(b\varphi^{-1}(h\otimes a))), \quad \forall h\otimes a\in H\otimes A \end{aligned}$$

   portanto,

   $$\varphi'(f\cdot b) = \varphi'(f)\odot b$$

Por fim, φ' é também morfismo de álgebras, pois dados $f,g\in \mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$

$$\begin{aligned} \varphi'(f\circ g) &= \varphi\circ(f\circ g)\circ\varphi^{-1} \\ &= \varphi\circ(f\circ 1_{A\#_\sigma H}\circ g)\circ\varphi^{-1} \\ &= \varphi\circ(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ g)\circ\varphi^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) \\ &= \varphi'(f) \circ \varphi'(g) \end{aligned}$$

logo, $\mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A) \simeq \mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)$ como A-bimódulo e álgebra. Em particular, sendo esse isomorfismo de A-bimódulos, são também isomorfos as partes unitárias à esquerda e à direita de $\mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)$ e $\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)$, isto é, temos o seguinte isomorfismo de álgebras:

$$A\,\mathrm{End}_A((A\#_\sigma H)_A)A \simeq A \odot \mathrm{End}_A((H \otimes A)_A) \odot A$$

Supondo que $h \otimes a \in H \otimes A_i$ e $b \in A_j$, podemos tomar $t \in I$ tal que $i, j \leq t$, desse modo $h \otimes a \in H \otimes A_t$ e $b \in A_t$. Logo,

$$\begin{aligned} b \odot (h \otimes a) &= \varphi(b\varphi^{-1}(h \otimes a)) \\ &= \varphi\left(b\left(\sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1))(h_3 \triangleright a)\#h_4\right)\right) \\ &= \varphi((b\#1_H)(\sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1))(h_3 \triangleright a)\#h_4)) \\ &= \varphi(b\sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1))(h_3 \triangleright a)\underbrace{\sigma_t(1_H, h_4)}_{=\epsilon(h_4)e_t}\#h_5) \\ &= \varphi(b\sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1))(h_3 \triangleright a)\#h_4) \\ &= h_7 \otimes (S^{-1}(h_6) \triangleright [b\sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1))(h_3 \triangleright a)]\sigma_t(S^{-1}(h_5), h_4) \\ &= h_9 \otimes (S^{-1}(h_8) \triangleright b)(S^{-1}(h_7) \triangleright \sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1)))(S^{-1}(h_6) \triangleright (h_3 \triangleright a)) \\ &\quad\ \sigma_t(S^{-1}(h_5), h_4) \\ &\overset{m.torc.}{=} h_9 \otimes (S^{-1}(h_8) \triangleright b)(S^{-1}(h_7) \triangleright \sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1)))\sigma_t(S^{-1}(h_6), h_3) \\ &\quad\ (\underbrace{S^{-1}(h_5)h_4}_{=\epsilon(h_4)1_H} \triangleright a) \\ &= h_7 \otimes (S^{-1}(h_6) \triangleright b)(S^{-1}(h_5) \triangleright \sigma_t^{-1}(h_2, S^{-1}(h_1)))\sigma_t(S^{-1}(h_4), h_3)a \\ &= \star. \end{aligned}$$

Da condição de cociclo, temos que para quaisquer h', l' e $m' \in H$,

$$h' \triangleright \sigma_t(l', m') = \sigma_t(h'_1, l'_1)\sigma_t(h'_2l'_2, m'_1)\sigma_t^{-1}(h'_3, l'_3m'_2),$$

e como $h' \triangleright \sigma_t(l', m')$ tem inverso convolutivo dado por $h' \triangleright \sigma_t^{-1}(l', m')$, segue que

$$\begin{aligned} h' \triangleright \sigma_t^{-1}(l', m') &= (h' \triangleright \sigma_t(l', m'))^{-1} \\ &= (\sigma_t(h'_1, l'_1)\sigma_t(h'_2l'_2, m'_1)\sigma_t^{-1}(h'_3, l'_3m'_2))^{-1} \\ &= \sigma_t(h'_1, l'_1m'_1)\sigma_t^{-1}(h'_2l'_2, m'_2)\sigma_t^{-1}(h'_3, l'_3). \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em $\star$ para o caso em que $h' = S^{-1}(h_5), l' = h_2$, e $m' = S^{-1}(h_1)$, temos

$$\begin{aligned}
\star &= h_{12} \otimes (S^{-1}(h_{11}) \triangleright b)[\sigma_t(S^{-1}(h_{10}), h_3 S^{-1}(h_2)) \\
&\quad \sigma_t^{-1}(S^{-1}(h_9)h_4, S^{-1}(h_1)) \underbrace{\sigma_t^{-1}(S^{-1}(h_8), h_5)]\sigma_t(S^{-1}(h_7), h_6)}_{\epsilon(S^{-1}(h_6))\epsilon(h_5)1_A} a \\
&= h_8 \otimes (S^{-1}(h_7) \triangleright b)\sigma_t(S^{-1}(h_6), \underbrace{h_3 S^{-1}(h_2)}_{\epsilon(h_2)})\sigma_t^{-1}(\underbrace{S^{-1}(h_5)h_4}_{\epsilon(h_4)}, S^{-1}(h_1))a \\
&= h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright b)\sigma_t(S^{-1}(h_2), 1_H)\sigma_t^{-1}(1_H, S^{-1}(h_1))a \\
&= h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright b)\epsilon(S^{-1}(h_2))\epsilon(S^{-1}(h_1))1_A a \\
&= h_4 \otimes (S^{-1}(h_3) \triangleright b)\epsilon(h_2)\epsilon(h_1)a \\
&= h_2 \otimes (S^{-1}(h_1) \triangleright b)a
\end{aligned}$$

Dessa forma, tomando-se unidade local $e_i \in u$, temos que

$$\begin{aligned}
e_i \odot (h \otimes a) &= h_2 \otimes (S^{-1}(h_1) \triangleright e_i)a \\
&= h_2 \otimes \epsilon(S^{-1}(h_1))e_i a \\
&= h_2 \epsilon(S^{-1}(h_1)) \otimes e_i a \\
&= h_2 \epsilon(h_1) \otimes e_i a \\
&= h \otimes e_i a \\
&= e_i(h \otimes a).
\end{aligned}$$

Com base nisso, dados $x \in H \otimes A$ e $f \in \operatorname{End}_A((H \otimes A)_A)$ arbitrários, temos que

$$(f \odot e_i)(x) = f(e_i \odot x) = f(e_i \cdot x) = (f \cdot e_i)(x)$$

logo $f \odot e_i = f$ se, e só se $f \cdot e_i = f$ e assim $\operatorname{End}_A((H \otimes A)_A) \odot A = \operatorname{End}_A((H \otimes A)_A)A$. De modo análogo podemos concluir que $A \odot \operatorname{End}_A((H \otimes A)_A) = A\operatorname{End}_A((H \otimes A)_A)$. Portanto

$$A\operatorname{End}_A((A\#_\sigma H)_A)A \simeq A \odot \operatorname{End}_A((H \otimes A)_A) \odot A = A\operatorname{End}_A((H \otimes A)_A)A$$

Como estamos supondo $\dim_K H = n < \infty$, temos

$$H \simeq K^n$$

e consequentemente

$$H \otimes A \simeq K^n \otimes A \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{n} K\right) \otimes A \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}(K \otimes A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} A$$

em que essa composta de isomorfismos K-lineares é dada por

$$\begin{array}{rccc} \phi: & H \otimes A & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} A \\ & (\sum_{i=1}^{n} k_i h_i) \otimes a & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} k_i a \end{array}$$

onde $\beta_H = \{h_1, \cdots, h_n\}$ é uma base para H e $h = \sum_{i=1}^{n} k_i h_i \in H$. Pela expressão de ϕ podemos inferir que este é um morfismo de A-bimódulos. Definamos agora

$$\begin{array}{rccc} \phi': & \mathrm{End}_A((H \otimes A)_A) & \longrightarrow & \mathrm{End}_A\left((\bigoplus_{i=1}^{n} A)_A\right) \\ & f & \longmapsto & \phi \circ f \circ \phi^{-1} \end{array}$$

Deste modo, da maneira como foi definido, podemos concluir que ϕ' é um isomorfismo de álgebras. Também, ϕ' é morfismo de A-bimódulos. Com efeito, dados $f \in \mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)$, $b \in A$ e $x \in \bigoplus_{i=1}^{n} A$ árbitrários, temos

$$\begin{aligned} \phi'(b \cdot f)(x) &= (\phi \circ (b \cdot f) \circ \phi^{-1})(x) = \phi((b \cdot f)(\phi^{-1}(x))) = \phi(bf(\phi^{-1}(x))) \\ &= b\phi(f(\phi^{-1}(x))) = b(\phi \circ f \circ \phi^{-1})(x) = (b \cdot (\phi \circ f \circ \phi^{-1}))(x) \\ &= (b \cdot \phi'(f))(x) \end{aligned}$$

observe que na quarta igualdade usamos o fato de que ϕ é um morfismo de A-módulos à esquerda. Concluímos que $\phi'(b \cdot f) = b \cdot \phi'(f)$, isto é, ϕ' é um morfismo de A-módulos à esquerda. Vejamos também que ϕ' é um morfismo de A-módulos à direita:

$$\begin{aligned} \phi'(f \cdot b)(x) &= (\phi \circ (f \cdot b) \circ \phi^{-1})(x) = \phi((f \cdot b)(\phi^{-1}(x))) = \phi(f(b\phi^{-1}(x))) \\ &= \phi(f(\phi^{-1}(bx))) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(bx) = ((\phi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot b)(x) \\ &= (\phi'(f) \cdot b)(x). \end{aligned}$$

Na quarta igualdade, usamos o fato de que ϕ^{-1} é um morfismo de A-módulos à esquerda, o que é verdade já que sua inversa ϕ o é. Portanto, $\phi'(f \cdot b) = \phi'(f) \cdot b$ como queríamos. Segue que são isomorfas como álgebra as partes unitárias à esquerda e à direita de $\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A)$ e $\mathrm{End}_A((\bigoplus_{i=1}^{n} A)_A)$, isto é,

$$A \,\mathrm{End}_A((H \otimes A)_A) A \simeq A \,\mathrm{End}_A\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A\right)_A\right) A$$

Considerando $q_j : A \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{n} A$ e $p_i : \bigoplus_{k=1}^{n} A \longrightarrow A$ as inclusões e projeções associadas à soma direta e produto direto da família $\{A\}_{k=1}^{n}$ respectivamente, temos um isomorfismo K-linear dado por

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathrm{End}_A((\bigoplus_{i=1}^{n} A)_A) & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{End}_A(A_A) \\ & f & \longmapsto & (p_i \circ f \circ q_j)_{i,j=1}^{n} \end{array}$$

Façamos agora algumas observações a respeito de ψ:

1. Segue das propriedades universais de soma e produto direto que ψ é uma bijeção canônica. Tal resultado pode ser encontrado com detalhes em [3].

2. ψ é morfismo de A-bimódulos. Com efeito, dados $a \in A$ e $f \in \mathrm{End}_A((\bigoplus_{i=1}^n A)_A)$ temos que:

   (a) ψ é morfismo de A-módulos à esquerda, pois sendo p_i morfismo de A-módulos à esquerda, temos

   $$\begin{aligned}(p_i \circ (a \cdot f) \circ q_j)(b) &= p_i(a \cdot f(q_j(b))) = p_i(af(q_j(b))) \\ &= ap_i(f(q_j(b))) = (a \cdot (p_i \circ f \circ q_j))(b)\end{aligned}$$

   $\forall b \in A, \forall i, j = 1 \cdots, n$. Dessa forma

   $$\psi(a \cdot f) = (p_i \circ (a \cdot f) \circ q_j)_{i,j} = (a \cdot (p_i \circ f \circ q_j))_{i,j} = a(p_i \circ f \circ q_j)_{i,j} = a\psi(f)$$

   (b) ψ é morfismo de A-módulos à direita, pois sendo q_j morfismo de A-módulos à esquerda, temos

   $$\begin{aligned}(p_i \circ (f \cdot a) \circ q_j)(b) &= p_i(f \cdot a(q_j(b))) = p_i(f(aq_j(b))) \\ &= p_i(f(q_j(ab))) = ((p_i \circ f \circ q_j) \cdot a)(b)\end{aligned}$$

   $\forall b \in A, \forall i, j = 1 \cdots, n$. Dessa forma

   $$\psi(f \cdot a) = (p_i \circ (f \cdot a) \circ q_j)_{i,j} = ((p_i \circ f \circ q_j) \cdot a)_{i,j} = (p_i \circ f \circ q_j)_{i,j}a = \psi(f)a$$

3. ψ é morfismo de álgebras, pois dados $f, g \in \mathrm{End}_A((\bigoplus_{i=1}^n A)_A)$ temos

   $$\psi(f)\psi(g) = (p_i \circ f \circ q_r)_{i,r}(p_l \circ g \circ q_j)_{l,j} = (t_{ij})_{i,j} = \star$$

   onde

   $$\begin{aligned}t_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(p_i \circ f \circ q_k) \circ (p_k \circ g \circ q_j) = p_i \circ f \circ \left(\sum_{k=1}^{n} q_k \circ p_k\right) \circ g \circ q_j. \\ &= p_i \circ f \circ (I_{\bigoplus_{i=1}^n A}) \circ g \circ q_j = p_i \circ f \circ g \circ q_j\end{aligned}$$

   Assim,

   $$\star = (p_i \circ (f \circ g) \circ q_j)_{i,j} = \psi(f \circ g).$$

Vamos considerar agora o morfismo

$$\begin{array}{rccl} \psi' : & \bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{End}_A(A_A) & \longrightarrow & M_n(\mathrm{End}_A(A_A)) \\ & (g_{ij})_{i,j=1}^n & \longmapsto & [g_{ij}]_{i,j=1}^n \end{array}$$

Com relação a este morfismo temos:

1. ψ' é um isomorfismo K-linear. De fato, da própria expressão da função como definida podemos concluir que ψ' é uma bijeção, bem como preserva a estrutura K-linear de $\bigoplus_{i,j=1}^n \mathrm{End}_A(A_A)$.

2. ψ' é morfismo de A-bimódulos. Com efeito, dados $a \in A$ e $(g_{ij})_{i,j=1}^n \in \bigoplus_{i,j=1}^n \mathrm{End}_A(A_A)$, temos que:

   (a) ψ' é morfismo de A-módulos à esquerda, pois

   $$\psi'(a(g_{ij})_{i,j}) = \psi'((a \cdot g_{ij})_{i,j}) = [a \cdot g_{ij}]_{i,j} = a[g_{ij}]_{i,j} = a\psi'((g_{ij})_{i,j});$$

   (b) ψ' é morfismo de A-módulos à direita, pois

   $$\psi'((g_{ij})_{i,j}a) = \psi'((g_{ij} \cdot a)_{i,j}) = [g_{ij} \cdot a]_{i,j} = [g_{ij}]_{i,j}a = \psi'((g_{ij})_{i,j})a.$$

3. ψ' é morfismo de álgebras. Com efeito, dados $(g_{il})_{i,l}, (q_{tj})_{t,j} \in \bigoplus_{i,j=1}^n \mathrm{End}_A(A_A)$, temos

   $$\psi'((g_{il})_{i,l} \cdot (q_{tj})_{t,j}) = \psi'((t_{ij})_{i,j}) = \star$$

   onde

   $$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \circ q_{kj}$$

   e assim

   $$\star = [t_{ij}]_{i,j} = [g_{il}]_{i,l}[q_{tj}]_{t,j} = \psi'((g_{il})_{i,l})\psi'((q_{tj})_{t,j}).$$

Temos então a composição dos morfismos de A-bimódulos e álgebras

$$\mathrm{End}_A\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A\right)_A\right) \xrightarrow[\simeq]{\psi} \bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{End}_A(A_A) \xrightarrow[\simeq]{\psi'} M_n(\mathrm{End}_A(A_A))$$

e por consequência disso, são isomorfas como álgebras $\mathrm{End}_A((\bigoplus_{i=1}^n A)_A)$ e $M_n(\mathrm{End}_A(A_A))$, bem como suas partes unitárias, isto é,

$$A\,\mathrm{End}_A\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A\right)_A\right)A \simeq AM_n(\mathrm{End}_A(A_A))A$$

e além disso, $AM_n(\mathrm{End}_A(A_A))A = M_n(A\,\mathrm{End}_A(A_A)A)$. De fato, vejamos isto através de inclusões.

$\subseteq$: Seja $f \in AM_n(\mathrm{End}_A(A_A))A$, então $f = [f_{ij}]_{i,j}$ e existe $e_k \in u$ tal que $e_k f = f e_k = f$, ou seja,

$$[f_{ij}]_{i,j} = f = e_k f = e_k[f_{ij}]_{i,j} = [e_k \cdot f_{ij}]_{i,j}$$

portanto $f_{ij} = e_k \cdot f_{ij}, \forall i,j = 1,\cdots,n$. De maneira análoga, partindo do fato que $f = fe_k$, verifica-se que $f_{ij} = f_{ij} \cdot e_k, \forall i,j = 1,\cdots n$. Portanto, $f_{ij} \in A\,\mathrm{End}_A(A_A)A, \forall i,j = 1,\cdots,n$. Isto mostra que $f \in M_n(A\,\mathrm{End}_A(A_A)A)$.

$\supseteq$: Seja $f \in M_n(A\,\mathrm{End}_A(A_A)A)$, então $f = [f_{ij}]_{i,j}$ e para cada par $i,j \in \{1,\cdots,n\}$ existe índice $k(i,j) \in I$ e respectiva unidade local $e_{k(i,j)} \in u$ tal que $e_{k(i,j)} \cdot f_{ij} = f_{ij} \cdot e_{k(i,j)} = f_{ij}$. Consideramos então índice $t \in I$ tal que $k(i,j) \leq t\ \forall i,j = 1,\cdots,n,$ e a respectiva unidade local $e_t \in u$, com isso

$$\begin{aligned} e_t f &= e_t[f_{ij}]_{i,j} = [e_t \cdot f_{ij}]_{i,j} \\ &= [e_t \cdot (e_{k(i,j)} \cdot f_{ij})]_{i,j} = [(e_t e_{k(i,j)}) \cdot f_{ij}]_{i,j} \\ &\overset{k(i,j)\leq t}{=} [e_{k(i,j)} \cdot f_{ij}]_{i,j} = [f_{ij}]_{i,j} \\ &= f. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos verificar que $fe_t = f$, e assim, $f \in AM_n(\mathrm{End}_A(A_A))A$. Portanto,

$$A\,\mathrm{End}_A\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A\right)_A\right)A \simeq AM_n(\mathrm{End}_A(A_A))A = M_n(A\,\mathrm{End}_A(A_A)A)$$

Vejamos agora que $A\,\mathrm{End}_A(A_A)A$ é isomorfo à A como álgebra. Para isso, primeiramente vamos definir um isomorfismo de A-módulos à esquerda e de K-álgebras entre A e $\mathrm{End}_A(A_A)A$. Seja então

$$\begin{aligned} \rho: \quad A &\longrightarrow \mathrm{End}_A(A_A)A \\ a &\longmapsto \rho(a) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \rho(a): \quad A &\longrightarrow A \\ b &\longmapsto ab \end{aligned}$$

Vale observar que de fato $\mathrm{Im}(\rho) \subseteq \mathrm{End}_A(A_A)A$, pois dados $a,b,c \in A$ arbitrários, temos

$$\rho(a)(bc) = a(bc) = (ab)c = (\rho(a)(b))c$$

$$\rho(a)(b+c) = a(b+c) = ab + ac = \rho(a)(b) + \rho(a)(c)$$

Com isso $\mathrm{Im}(\rho) \subseteq \mathrm{End}_A(A_A)$. E, para verificar que $\mathrm{Im}(\rho)$ está na parte unitária à direita de $\mathrm{End}_A(A_A)$, tomamos para $a \in A$, um elemento $i(a) \in I$ e a respectiva unidade local $e_{i(a)} \in u$ tais que $e_{i(a)}a = ae_{i(a)} = a$. Assim,

$$(\rho(a) \cdot e_{i(a)})(b) \;=\; \rho(a)(e_{i(a)}b) = a(e_{i(a)}b) = (ae_{i(a)})b = ab = \rho(a)(b),$$

$\forall b \in A$. Portanto, $\rho(a) \cdot e_{i(a)} = \rho(a)$, ou seja, $\rho(a) \in \mathrm{End}_A(A_A)A$.

Definamos também

$$\begin{array}{rccc} \epsilon : & \mathrm{End}_A(A_A)A & \longrightarrow & A \\ & f & \longmapsto & f(e_{i_f}) \end{array}$$

onde $i_f \in I$ é tal que a respectiva unidade local e_{i_f} satisfaz: $f \cdot e_{i_f} = f$. Vale observar que ϵ está bem definido. De fato, se além de $i_f \in I$ tivermos $j_f \in I$ tal que $f \cdot e_{j_f} = f$, podemos tomar $t \in I$ com $i_f, j_f \leq t$ e com isso

$$\epsilon(f) = f(e_{i_f}) \overset{i_f \leq t}{=} f(e_{i_f}e_t) = (f \cdot e_{i_f})(e_t) = f(e_t)$$

assim como

$$\epsilon(f) = f(e_{j_f}) \overset{j_f \leq t}{=} f(e_{j_f}e_t) = (f \cdot e_{j_f})(e_t) = f(e_t)$$

Afirmamos agora que ϵ é a inversa de ρ. De fato, dado $f \in \mathrm{End}_A(A_A)A$ com $f \cdot e_{i_f} = f$, temos

$$\begin{aligned} (\rho \circ \epsilon)(f)(a) &= \rho(\epsilon(f))(a) = \rho(f(e_{i_f}))(a) \\ &= f(e_{i_f})a = f(e_{i_f}a) = (f \cdot e_{i_f})(a) = f(a) \end{aligned}$$

$\forall a \in A$. Portanto $(\rho \circ \epsilon)(f) = f$, como f arbitrário, concluímos que $\rho \circ \epsilon = 1_{\mathrm{End}_A(A_A)A}$.

Afim de verificar que a outra composição também resulta na identidade, tomamos $a \in A$ arbitrário e $e_{i(a)} \in u$ tal que $ae_{i(a)} = a$, com isso primeiro observamos que

$$(\rho(a) \cdot e_{i(a)})(b) \;=\; \rho(a)(e_{i(a)}b) = a(e_{i(a)}b) = (ae_{i(a)})b = ab = \rho(a)(b)$$

$\forall b \in A$. Assim $\rho(a) \cdot e_{i(a)} = \rho(a)$, logo

$$(\epsilon \circ \rho)(a) = \epsilon(\rho(a)) = \rho(a)(e_{i(a)}) = ae_{i(a)} = a, \quad \forall a \in A$$

e portanto $\epsilon \circ \rho = 1_A$.

Por fim, façamos algumas observações à respeito do morfismo ϵ, a saber:

1. ϵ é morfismo de A-módulos à esquerda. Com efeito, sejam $f, g \in \mathrm{End}_A(A_A)A$ com $f \cdot e_{i_f} = f, g \cdot e_{i_g} = g$ e $a \in A$. Assim:

   (a) como
   $$(a \cdot f) \cdot e_{i_f} = a \cdot (f \cdot e_{i_f}) = a \cdot f$$
   então
   $$\epsilon(a \cdot f) = (a \cdot f)(e_{i_f}) = af(e_{i_f}) = a\epsilon(f)$$

   (b) tomando $t \in I$ com $i_f, i_g \leq t$, temos que
   $$\begin{array}{rcl} (f+g) \cdot e_t & = & f \cdot e_t + g \cdot e_t \\ & = & (f \cdot e_{i_f}) \cdot e_t + (g \cdot e_{i_g}) \cdot e_t \\ & = & f \cdot (e_{i_f} e_t) + g \cdot (e_{i_g} e_t) \\ & \overset{i_f, i_g \leq t}{=} & f \cdot e_{i_f} + g \cdot e_{i_g} \\ & = & f + g. \end{array}$$
   Sendo assim,
   $$\begin{array}{rcl} \epsilon(f+g) & = & (f+g)(e_t) \\ & = & f(e_t) + g(e_t) \\ & = & (f \cdot e_{i_f})(e_t) + (g \cdot e_{i_g})(e_t) \\ & = & f(e_{i_f} e_t) + g(e_{i_g} e_t) \\ & \overset{i_f, i_g \leq t}{=} & f(e_{i_f}) + g(e_{i_g}) \\ & = & \epsilon(f) + \epsilon(g). \end{array}$$

2. ϵ é morfismo de K-álgebras. Com efeito, sejam $f, g \in \mathrm{End}_A(A_A)A$ com $g \cdot e_{i_g} = g$ e $k \in K$. Assim:

   (a) já vimos que $\epsilon(f+g) = \epsilon(f) + \epsilon(g)$;

   (b) como $(kf) \cdot e_{i_f} = k(f \cdot e_{i_f}) = kf$, então
   $$\epsilon(kf) = (kf)(e_{i_f}) = kf(e_{i_f}) = k\epsilon(f)$$

   (c) como
   $$((f \circ g) \cdot e_{i_g})(a) = (f \circ g)(e_{i_g} a) = f(g(e_{i_g} a)) = f((g \cdot e_{i_g})(a)) = f(g(a))$$

$\forall a \in A$, então $(f \circ g) \cdot e_{i_g} = f \circ g$, e decorrente disso

$$\begin{aligned}
\epsilon(f)\epsilon(g) &= f(e_{i_f})\underbrace{g(e_{i_g})}_{\in A} = f(e_{i_f}g(e_{i_g})) \\
&= (f \cdot e_{i_f})(g(e_{i_g})) = f(g(e_{i_g})) \\
&= (f \circ g)(e_{i_g}) = \epsilon(f \circ g).
\end{aligned}$$

Sendo então ϵ isomorfismo de A-módulos à esquerda e de álgebras, são isomorfas como álgebras as partes unitárias à esquerda de $\operatorname{End}_A(A_A)A$ e A, isto é,

$$A\operatorname{End}_A(A_A)A \simeq AA$$

e além disso $AA = A$, pois, como conjunto $AA \subseteq A$ e dado $a \in A$ é sabido que existe unidade local $e_i \in u$ tal que $e_i a = a$, ou seja, $a \in AA$. Portanto,

$$A\operatorname{End}_A(A_A)A \simeq AA = A$$

como A-módulos à esquerda e álgebras. Deste modo, concluímos que temos um isomorfismo de K-álgebras

$$M_n(A\operatorname{End}_A(A_A)A) \simeq M_n(A)$$

induzido por ϵ. Para finalizar o resultado principal, vale relembrar que passamos por diversos isomorfismos de álgebras, a saber:

$$\begin{aligned}
(A\#_\sigma H)\#H^* &\simeq A\operatorname{End}_A((A\#_\sigma H)_A)A \simeq A \odot \operatorname{End}_A((H \otimes A)_A) \odot A \\
&= A\operatorname{End}_A((H \otimes A)_A)A \simeq A\operatorname{End}_A\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A\right)_A\right)A \\
&\simeq AM_n(\operatorname{End}_A(A_A))A = M_n(A\operatorname{End}(A_A)A) \\
&\simeq M_n(A)
\end{aligned}$$

Logo, todas as considerações feitas nesta seção levam-nos a enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.5 (Dualidade para álgebras com unidades locais) *Sejam H uma K-álgebra de Hopf com $\dim_K H = n < \infty$, A uma K-álgebra com unidades locais e $A\#_\sigma H$ um produto cruzado com σ invertível por convolução. Então,*

$$(A\#_\sigma H)\#H^* \simeq M_n(A)$$

como K-álgebras.

Capítulo 5

O Teorema de Dualidade de Blattner-Montgomery para álgebras com unidades locais: Segundo caso

Neste capítulo vamos considerar H uma K-álgebra de Hopf não necessariamente de dimensão finita, e com isso temos associada a esta seu dual finito $H^\circ \subseteq H^*$. A saber, considerando a estrutura de álgebra de H dada pelo produto $m : H \otimes H \longrightarrow H$ e unidade $\mu : K \longrightarrow H$, podemos definir o dual finito, como apresentado na Proposição 2.5.1. em [21], do seguinte modo

$$H^\circ = (m^*)^{-1}(i(H^* \otimes H^*))$$

onde $i : H^* \otimes H^* \longrightarrow (H \otimes H)^*$ é o morfismo injetivo dado por $i(a^* \otimes b^*)(x \otimes y) = a^*(x)b^*(y)$, para todo $a^* \otimes b^* \in H^* \otimes H^*$ e $x \otimes y \in H \otimes H$. Desse modo, é possível verificar que H° é um K-subespaço de H^*, e que decorrente da injetividade de i, fica bem definida a aplicação K-linear

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & H^\circ & \longrightarrow & H^\circ \otimes H^\circ \\ & a^* & \longmapsto & a_j^* \otimes b_j^* \end{array}$$

para todo $a^* \in H^\circ$, onde $m^*(a^*) = i\left(a_j^* \otimes b_j^*\right)$. Ademais, considerando

$$\begin{array}{rccc} \phi : & K^* & \longrightarrow & K \\ & \alpha^* & \longmapsto & \alpha^*(1_K) \end{array}$$

e $\epsilon = \phi \circ \eta^*$, o que resulta em

$$\epsilon(a^*) = (\phi \circ \mu^*)(a^*) = \mu^*(a^*)(1_K) = a^*(\mu(1_K)) = a^*(1_H)$$

para todo $a^* \in H^\circ$, é possível verificar que H° com Δ e ϵ tem estrutura de coálgebra. Com a multiplicação e unidade induzida de H^* temos também que H° tem estrutura de álgebra bem como de álgebra de Hopf. Maiores detalhes sobre H° podem ser encontrados em [11] e [21].

A generalização do Teorema de Dualidade proveniente de [5], onde a álgebra de Hopf envolvida é de dimensão infinita, para o contexto de álgebras com unidades locais, é o objetivo principal desse capítulo. As definições e resultados envolvendo a K-álgebra com unidades locais A aqui consideradas, serão análogas as obtidas de [5], a menos de haver a necessidade de ajustá-las às unidades locais quando necessário, o que será feito. A sequência de passos para a obtenção do resultado final será basicamente a mesma no caso original. Por fim, na última seção veremos uma interpretação topológica para espaços de funções. Por meio de tal interpretação teremos oportunidade de reinterpretar o presente Teorema de Dualidade e compará-lo com a Dualidade abordada no capítulo 2, onde H era de dimensão finita e A uma álgebra unitária.

Começamos tomando A um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais, isto é, A é uma K-álgebra com sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$, bem como um H-módulo à esquerda com ação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & H \otimes A & \longrightarrow & A \\ & h \otimes a & \longmapsto & h \cdot a \end{array}$$

e onde são satisfeitas as condições:

1. $h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$;

2. $h \cdot e_i = \epsilon(h) e_i$;

$\forall a, b \in A, h \in H$ e $i \in I$. Vale observar que nessas condições podemos formar o produto smash $A\#H$. Temos que H é H°-módulo álgebra à esquerda e à direita via

$$f \rightharpoonup h = f(h_2)h_1 \quad \text{e} \quad h \leftharpoonup f = f(h_1)h_2 \quad \text{onde} \quad \Delta(h) = h_1 \otimes h_2.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em [5], no Lema 1.1.

Lema 5.1 *Sejam $f \in H^\circ$ e $h \in H$. Então*

$$\Delta(f \rightharpoonup h) = h_1 \otimes (f \rightharpoonup h_2) \quad e \quad \Delta(h \leftharpoonup f) = (h_1 \leftharpoonup f) \otimes h_2$$

Demonstração.

$$\Delta(f \rightharpoonup h) = \Delta\left(f(h_2)h_1\right) = f(h_2)\Delta(h_1)$$

$$\begin{aligned} &= f(h_3)(h_1 \otimes h_2) = h_1 \otimes f(h_3)h_2 \\ &= h_1 \otimes (f \rightharpoonup h_2). \end{aligned}$$

O outro caso é similar. □

O produto smash $A\#H$ é um H°-módulo álgebra à esquerda com unidades locais via

$$f \cdot (a\#h) = a\#(f \rightharpoonup h).$$

Segue disso que podemos formar o produto smash $(A\#H)\#H^{\circ}$, que terá relação com o que será enunciado no teorema principal. Antes de enunciar tal teorema, vejamos algumas definições auxiliares.

Definição 5.2 *Para qualquer álgebra de Hopf H e qualquer H-módulo álgebra com unidades locais B, temos definido o morfismo de álgebra*

$$\lambda_{B,H} : B\#H \longrightarrow \mathrm{End}_K(B)$$

dado por $\lambda_{B,H}(b\#h)(c) = b(h \cdot c), \forall b, c \in B$ e $h \in H$.

Segue da definição acima que de fato $\lambda_{B,H}$ é um morfismo de álgebra, pois para qualquer $c \in B$,

$$\begin{aligned} (\lambda_{B\#H}(b\#h) \circ \lambda_{B,H}(d\#k))(c) &= \lambda_{B,H}(b\#h)(d(k \cdot c)) = b(h \cdot (d(k \cdot c))) \\ &= b(h_1 \cdot d)(h_2 \cdot (k \cdot c)) = b(h_1 \cdot d)((h_2 k) \cdot c) \\ &= \lambda_{B,H}(b(h_1 \cdot d)\#h_2 k)(c) = \lambda_{B,H}((b\#h)(d\#k))(c). \end{aligned}$$

Em alguns casos temos que o morfismo $\lambda_{B,H}$ é injetivo, mas isso nem sempre é verdade. Veremos no final deste capítulo por exemplo, que no caso de H ser uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e U uma subálgebra de Hopf de H° então $\lambda_{H,U}$ será injetivo.

Definição 5.3 *Dados uma álgebra de Hopf H e uma subálgebra de Hopf U de H°, definimos o antimorfismo de álgebras*

$$\rho_{H,U} : U \longrightarrow \mathrm{End}_K(H)$$

dado por $\rho_{H,U}(f)(h) = h \leftharpoonup f, \forall f \in U$ e $h \in H$.

Na definição acima a referida estrutura de álgebra de U é dada pelo produto de convolução. Com essa estrutura, de fato, $\rho_{H,U}$ é um antimorfismo de álgebras, pois, para qualquer $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(\rho_{H,U}(g) \circ \rho_{H,U}(f))(h) &= \rho_{H,U}(g)(h \leftharpoonup f) = \rho_{H,U}(g)\left(f(h_1)h_2\right) \\
&= f(h_1)\rho_{H,U}(g)(h_2) = f(h_1)g(h_2)h_3 \\
&= (f * g)(h_1)h_2 = h \leftharpoonup (f * g) \\
&= \rho_{H,U}(f * g)(h).
\end{aligned}$$

A próxima definição é encontrada em [5] na Definição 1.2.

Definição 5.4 *Sejam H uma álgebra de Hopf e U uma subálgebra de Hopf de H°. Dizemos que U satisfaz a condição RL com respeito a H se*

$$\rho_{H,U}(U) \subseteq \lambda_{H,U}(H\#U)$$

Definição 5.5 *Sejam A um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais e U uma subálgebra de Hopf de H°. Dizemos que A é U-localmente finito se, para qualquer $a \in A$, existirem $f_1, \cdots, f_r \in U$ tais que*

$$\left(\bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} f_j\right) \cdot a = 0$$

Com relação a essa definição temos o seguinte resultado

Lema 5.6 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais. A é U-localmente finito se, e só se, para cada $a \in A$ existirem $f_1, \cdots, f_r \in U$ e $a_1, \cdots, a_r \in A$ tais que*

$$h \cdot a = \sum_{j=1}^{r} f_j(h)a_j, \quad \forall h \in H$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que A seja U-localmente finito. Sejam $a \in A$ e $f_1, \cdots, f_r \in U$ como na definição e assumamos que estes sejam $L.I.'s$. Escolha $h_1, \cdots, h_r \in H$ tais que $f_i(h_j) = \delta_{ij}, \forall\ 1 \leq i, j \leq r$. Então,

$$h - \sum_{j=1}^{r} f_j(h)h_j \in \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} f_i, \quad \forall h \in H.$$

Segue que

$$\left(h - \sum_{j=1}^{r} f_j(h)h_j\right) \cdot a = 0 \quad \Longrightarrow \quad h \cdot a = \sum_{j=1}^{r} f_j(h)h_j \cdot a$$

fazendo $h_j \cdot a = a_j$ temos a relação desejada.

($\Longleftarrow$) Se $h \in \operatorname{Ker} f_j$ $, \forall j = 1, \cdots, r$, então $h \cdot a = \sum_{j=1}^{r} f_j(h)a_j = \sum_{j=1}^{r} 0a_j = 0$. $\square$

5.1 O Teorema de Dualidade

Começamos esta seção enunciando o principal teorema deste capítulo, a saber:

Teorema 5.7 *Sejam H uma K-álgebra de Hopf com antípoda bijetiva, U uma subálgebra de Hopf de H° também com antípoda bijetiva e A um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais U-localmente finito. Assumamos que U satisfaz a condição RL com respeito à H. Então*

$$(A\#H)\#U \simeq A \otimes (H\#U)$$

como K-álgebras.

A demonstração desse teorema é um tanto extensa e baseia-se na ideia de mostrar que as subálgebras $(A\#H)\#U$ e $A \otimes (H\#U)$ podem ser identificadas com subálgebras de $\mathrm{End}_K(A\#H)$, onde estas serão conjugadas via um morfismo invertível em $\mathrm{End}_K(A\#H)$. Explicitaremos então primeiramente resultados nessa direção, e posteriormente os reuniremos para concluir tal prova.

Considerando o morfismo da Definição 5.2, definimos morfismos α e β como segue

$$\alpha := \lambda_{A\#H,U} : (A\#H)\#U \longrightarrow \mathrm{End}_K(A\#H)$$

com isso

$$\alpha((a\#h)\#f)(b\#k) = (a\#h)(f \cdot (b\#k)) = (a\#h)(b\#(f \rightharpoonup k))$$

$\forall\, a, b \in A, h, k \in H$ e $f \in U$.

$$\beta := l \otimes \lambda_{H,U} : A \otimes (H\#U) \longrightarrow \mathrm{End}_K(A) \otimes \mathrm{End}_K(H) \hookrightarrow \mathrm{End}_K(A\#H)$$

onde $l : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(A)$ é a representação regular, isto é, $l(a)(b) = ab, \forall a, b \in A$, com isso

$$\beta(a \otimes (h\#f))(b\#k) = l(a)(b)\#\lambda_{H,U}(h\#f)(k) = ab\#h(f \rightharpoonup k)$$

$\forall\, a, b \in A, h, k \in H$ e $f \in U$.

Proposição 5.8 *Sejam H uma K-álgebra de Hopf com antípoda bijetiva, U uma subálgebra de Hopf de H° e A um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais. Então os morfismos α e β são morfismos injetivos de álgebras.*

Demonstração. Como $\alpha = \lambda_{A\#H,U}$ já podemos concluir que α é morfismo de álgebras. No caso de $\beta = l \otimes \lambda_{H,U}$, como $\lambda_{H,U}$ é morfismo de álgebras, é suficiente ver que l é morfismo de álgebras para concluir que β também o é. Vejamos:

$$(l(a) \circ l(b))(c) = l(a)(l(b)(c)) = a(bc) = (ab)c = l(ab)(c), \quad \forall c \in A$$

logo, $l(a) \circ l(b) = l(ab)$ $\forall a, b \in A$, como desejado. Quanto à injetividade de α e β, vamos verificar isso construindo morfismos lineares injetivos α', β' e ϕ tais que $\alpha = \phi \circ \alpha'$ e $\beta = \phi \circ \beta'$. A saber,

$$\alpha' : (A\#H)\#U \longrightarrow \mathrm{End}_K(A\#H)$$

onde

$$\alpha'((a\#h)\#f)(b\#k) = f(k)(a\#h)(b\#1_H)$$

$\forall\, a, b \in A, h, k \in H$ e $f \in U$.

$$\beta' : A \otimes (H\#U) \longrightarrow \mathrm{End}_K(A\#H)$$

onde

$$\beta'(a \otimes (h\#f))(b\#k) = f(k)ab\#h$$

$\forall\, a, b \in A, h, k \in H$ e $f \in U$.

$$\phi : \mathrm{End}_K(A\#H) \longrightarrow \mathrm{End}_K(A\#H)$$

onde

$$\phi(\zeta)(b\#k) = \zeta(b\#k_2)k_1 \tag{5.1}$$

$\forall\, b \in A, k \in H$ e $\zeta \in \mathrm{End}_K(A\#H)$. Na definição de ϕ a expressão 5.1 se refere a estrutura de H-módulo à direita de $A\#H$ dada por: $(a\#h)k = a\#hk$, $\forall a \in A$ e $h, k \in H$. Vejamos agora as injetividades dos morfismos.

α' é injetivo: Seja $u \in \mathrm{Ker}\,\alpha'$. Podemos assumir que $u = \sum_{j=1}^{r} v_j\#f_j$, onde os elementos $v_j's \in A_i\#H$ para algum $i \in I$ e tal que $\{f_j\}_{j=1}^{r}$ é $L.I.$ em U. Sejam $k_1, \cdots, k_r \in H$ tais que $f_i(k_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \cdots, r$. Assim,

$$0 \;=\; \alpha'(u)(e_i\#k_l) = \sum_{j=1}^{r} \alpha'(v_j\#f_j)(e_i\#k_l) = \sum_{j=1}^{r} f_j(k_l)v_j(e_i\#1_H) = v_l$$

$\forall l = 1, \cdots, r$. Portanto, $u = 0$.

β' é injetivo: Seja $u \in \operatorname{Ker}\beta'$. Podemos assumir que $u = \sum_{j=1}^{r} v_j \# f_j$, onde os elementos $v_j's$ são da forma $v_j = \sum_l a_{l_j} \otimes h_{l_j}$ com $a_{l_j} \otimes h_{l_j} \in A_i \otimes H$ $\forall j, l$ e para algum $i \in I$. Consideremos as famílias $\{f_j\}_{j=1}^{r}$ e $\{k_j\}_{j=1}^{r}$ como antes. Dessa forma,

$$\begin{aligned} 0 &= \beta'(u)(e_i \# k_t) = \beta'\left(\sum_{j,l} a_{l_j} \otimes h_{l_j} \# f_j\right)(e_i \# k_t) \\ &= \sum_{j,l} f_j(k_t) a_{l_j} e_i \# h_{l_j} = \sum_{j,l} \delta_{jt} a_{l_j} e_i \# h_{l_j} \\ &= \sum_{l} a_{l_t} \# h_{l_t} = v_t \end{aligned}$$

$\forall t = 1, \cdots, r$. Portanto, $u = 0$.

ϕ é injetivo: Para ver que ϕ é injetivo construímos uma inversa à esquerda para ϕ. A saber,

$$\varphi : \operatorname{End}_K(A \# H) \longrightarrow \operatorname{End}_K(A \# H)$$

onde

$$\varphi(\zeta)(b \# k) = \zeta(b \# k_2) S^{-1}(k_1)$$

$\forall\, b \in A, k \in H$ e $\zeta \in \operatorname{End}_K(A \# H)$. Vejamos que de fato φ é a inversa à esquerda de ϕ:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi)(\zeta)(b \# k) &= (\phi(\zeta)(b \# k_2)) S^{-1}(k_1) = (\zeta(b \# k_3) k_2) S^{-1}(k_1) \\ &= \zeta(b \# k_3)(k_2 S^{-1}(k_1)) = \zeta(b \# k_2)\epsilon(k_1) 1_H = \zeta(b \# k) \end{aligned}$$

$\forall b \# k \in A \# H$ e $\zeta \in \operatorname{End}_K(A \# H)$, o que conclui a afirmação. Por fim, vejamos as composições anteriormente mencionadas

$$\begin{aligned} \phi(\alpha'((a \# h) \# f))(b \# k) &= (\alpha'((a \# h) \# f)(b \# k_2)) k_1 = f(k_2)(a \# h)(b \# 1_H) k_1 \\ &= f(k_2)(a \# h)(b \# k_1) = (a \# h)(b \# (f(k_2) k_1)) \\ &= (a \# h)(b \# (f \rightharpoonup k)) = \alpha((a \# h) \# f)(b \# k) \end{aligned}$$

$\forall\, a, b \in A, h, k \in H$ e $f \in U$. Portanto, $\phi \circ \alpha' = \alpha$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \phi(\beta'(a \otimes h \# f))(b \# k) &= (\beta'(a \otimes h \# f)(b \# k_2)) k_1 = (f(k_2) ab \# h) k_1 \\ &= f(k_2) ab \# h k_1 = ab \# h(f(k_2) k_1) \\ &= ab \# h(f \rightharpoonup k) = \beta(a \otimes h \# f)(b \# k) \end{aligned}$$

$\forall\, a, b \in A, h, k \in H$ e $f \in U$. Portanto, $\phi \circ \beta' = \beta$. $\square$

Consideremos agora o seguinte morfismo

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & A\#H & \longrightarrow & A\#H \\ & b\#k & \longmapsto & S^{-1}(k_1)\cdot b\#k_2 \end{array}$$

Temos que γ é invertível com inversa v dada por

$$\begin{array}{rccl} v: & A\#H & \longrightarrow & A\#H \\ & b\#k & \longmapsto & k_1\cdot b\#k_2 \end{array}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \gamma(v(b\#k)) &= \gamma\left(k_1\cdot b\#k_2\right) = S^{-1}(k_2)\cdot(k_1\cdot b)\#k_3 \\ &= (S^{-1}(k_2)k_1)\cdot b\#k_3 = \epsilon(k_1)1_H\cdot b\#k_2 \\ &= b\#\epsilon(k_1)k_2 = b\#k \end{aligned}$$

de onde $\gamma\circ v = I_{A\#H}$. Analogamente,

$$\begin{aligned} v(\gamma(b\#k)) &= v\left(S^{-1}(k_1)\cdot b\#k_2\right) = k_2\cdot(S^{-1}(k_1)\cdot b)\#k_3 \\ &= (k_2S^{-1}(k_1))\cdot b\#k_3 = (\epsilon(k_1)1_H)\cdot b\#k_2 \\ &= b\#\epsilon(k_1)k_2 = b\#k \end{aligned}$$

portanto $v\circ\gamma = I_{A\#H}$, concluindo assim que $v=\gamma^{-1}$. O próximo passo é usar os morfismos γ e γ^{-1} para mostrar que valem as inclusões

$$\gamma^{-1}\circ\beta(A\otimes(H\#U))\circ\gamma\subseteq\alpha((A\#H)\#U) \tag{5.2}$$

$$\gamma\circ\alpha((A\#H)\#U)\circ\gamma^{-1}\subseteq\beta(A\otimes(H\#U)). \tag{5.3}$$

Os próximos dois lemas irão nos auxiliar a concluir isso. Vejamos:

Lema 5.9 *Para todo $h\in H, f\in U$ e $i\in I$ vale a igualdade*

$$\gamma^{-1}\circ\beta(e_i\otimes(h\#f))\circ\gamma = \alpha((e_i\#h)\#f)$$

Demonstração. Para qualquer $b\#k\in A\#H$, temos

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1}\circ\beta(e_i\otimes(h\#f))\circ\gamma)(b\#k) &= (\gamma^{-1}\circ\beta(e_i\otimes(h\#f)))(S^{-1}(k_1)\cdot b\#k_2) \\ &= \gamma^{-1}(e_i(S^{-1}(k_1)\cdot b)\#h(f\rightharpoonup k_2)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (h(f \rightharpoonup k_2))_1 \cdot (e_i(S^{-1}(k_1) \cdot b))\#(h(f \rightharpoonup k_2))_2 \\
&= h_1(f \rightharpoonup k_2)_1 \cdot (e_i(S^{-1}(k_1) \cdot b))\#h_2(f \rightharpoonup k_2)_2 \\
&\overset{lema\ 5.1}{=} (h_1k_2) \cdot (e_i(S^{-1}(k_1) \cdot b))\#h_2(f \rightharpoonup k_3) \\
&= ((h_1k_2)_1 \cdot e_i)((h_1k_2)_2 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#h_2(f \rightharpoonup k_3) \\
&= (\epsilon((h_1k_2)_1)e_i)((h_1k_2)_2 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#h_2(f \rightharpoonup k_3) \\
&= e_i(\epsilon((h_1k_2)_1)(h_1k_2)_2 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#h_2(f \rightharpoonup k_3) \\
&= e_i((h_1k_2) \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#h_2(f \rightharpoonup k_3) \\
&= e_i((h_1k_2S^{-1}(k_1)) \cdot b)\#h_2(f \rightharpoonup k_3) \\
&= e_i((h_1\epsilon(k_1)1_H) \cdot b)\#h_2(f \rightharpoonup k_2) \\
&= e_i(h_1 \cdot b)\#h_2(f \rightharpoonup \epsilon(k_1)k_2) \\
&= e_i(h_1 \cdot b)\#h_2(f \rightharpoonup k) \\
&= (e_i\#h)(b\#(f \rightharpoonup k)) \\
&= \alpha((e_i\#h)\#f)(b\#k)
\end{aligned}
$$

□

Observe que o presente lema mostra que

$$\gamma^{-1} \circ \beta(e_i \otimes (H\#U)) \circ \gamma = \alpha((e_i\#H)\#U),\ \forall i \in I.$$

Para o próximo lema consideramos que A é U-localmente finito e fixamos elementos $f_1, \cdots, f_r \in U$ e $a, a_1, \cdots, a_r \in A$ como no Lema 5.6. Com isso teremos:

Lema 5.10 *Valem as igualdades*

1. $\gamma^{-1} \circ \beta(a \otimes (1_H\#1_U)) \circ \gamma = \sum_{j=1}^{r} \alpha((a_j\#1_H)\#1_U) \circ \gamma^{-1} \circ (I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j)) \circ \gamma$
2. $\gamma \circ \alpha((a\#1_H)\#1_U) \circ \gamma^{-1} = \sum_{j=1}^{r} \beta(a_j \otimes (1_H\#1_U)) \circ (I_A \otimes \rho_{H,U}(S_U^{-1}(f_j)))$

Demonstração.

1.

$$
\begin{aligned}
(\gamma^{-1} \circ \beta(a \otimes (1_H\#1_U)) \circ \gamma)(b\#k) &= (\gamma^{-1} \circ \beta(a \otimes (1_H\#1_U)))(S^{-1}(k_1) \cdot b\#k_2) \\
&= \gamma^{-1}(a(S^{-1}(k_1) \cdot b)\#1_H(1_U \rightharpoonup k_2)) \\
&= \gamma^{-1}(a(S^{-1}(k_1) \cdot b)\#k_2) \\
&= k_2 \cdot (a(S^{-1}(k_1) \cdot b))\#k_3
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= (k_2 \cdot a)(k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#k_4 \\
&= \sum_{j=1}^{r} f_j(k_2)a_j(k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#k_4 \\
&= \star
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
f_j(k_2)a_j(k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#k_4 &= a_j(f_j(k_2)k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b))\#k_4 \\
&= a_j(1_H \cdot (f_j(k_2)k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)))\#1_H(1_U \rightharpoonup k_4) \\
&= (a_j\#1_H)(f_j(k_2)k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)\#(1_U \rightharpoonup k_4)) \\
&= \alpha((a_j\#1_H)\#1_U)(f_j(k_2)k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)\#k_4)
\end{aligned}$$

substituindo essa expressão em $\star$, temos

$$\star = \sum_{j=1}^{r} \alpha((a_j\#1_H)\#1_U)(f_j(k_2)k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)\#k_4)$$

e com isso, para chegar a expressão desejada é suficiente verificar que

$$f_j(k_2)k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)\#k_4 = (\gamma^{-1} \circ (I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j)) \circ \gamma)(b\#k).$$

Vejamos:

$$\begin{aligned}
f_j(k_2)k_3 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)\#k_4 &= (k_2 \leftharpoonup f_j) \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)\#k_3 \\
&= (k_2 \leftharpoonup f_j)_1 \cdot (S^{-1}(k_1) \cdot b)\#(k_2 \leftharpoonup f_j)_2 \\
&= \gamma^{-1}(S^{-1}(k_1) \cdot b\#(k_2 \leftharpoonup f_j)) \\
&= \gamma^{-1}((I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j))(S^{-1}(k_1) \cdot b\#k_2)) \\
&= \gamma^{-1}((I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j))(\gamma(b\#k))) \\
&= (\gamma^{-1} \circ (I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j)) \circ \gamma)(b\#k)
\end{aligned}$$

como desejado.

2. Nesse item é o único lugar no qual usamos a bijetividade da antípoda de U. Vejamos,

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ \alpha((a\#1_H)\#1_U) \circ \gamma^{-1})(b\#k) &= (\gamma \circ \alpha((a\#1_H)\#1_U))(k_1 \cdot b\#k_2) \\
&= \gamma((a\#1_H)(k_1 \cdot b\#(1_U \rightharpoonup k_2))) \\
&= \gamma((a\#1_H)(k_1 \cdot b\#k_2)) \\
&= \gamma(a(1_H \cdot (k_1 \cdot b))\#1_H k_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma(a(k_1 \cdot b)\#k_2) \\
&= S^{-1}(k_2) \cdot (a(k_1 \cdot b))\#k_3 \\
&= (S^{-1}(k_3) \cdot a)(S^{-1}(k_2) \cdot (k_1 \cdot b))\#k_4 \\
&= (S^{-1}(k_3) \cdot a)(S^{-1}(k_2)k_1 \cdot b)\#k_4 \\
&= \sum_{j=1}^{r} f_j(S^{-1}(k_3))a_j(S^{-1}(k_2)k_1 \cdot b)\#k_4 \\
&= \sum_{j=1}^{r} f_j(S^{-1}(k_2))a_j(\epsilon(k_1)1_H \cdot b)\#k_3 \\
&= \sum_{j=1}^{r} f_j(S^{-1}(\epsilon(k_1)k_2))a_j(1_H \cdot b)\#k_3 \\
&= \sum_{j=1}^{r} f_j(S^{-1}(k_1))a_j b\#k_2 \\
&= \sum_{j=1}^{r} a_j b\#f_j(S^{-1}(k_1))k_2 = \star\star
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r} \beta(a_j \otimes (1_H\#1_U)) \circ (I_A \otimes \rho_{H,U}(S_U^{-1}(f_j)))(b\#k) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r} \beta(a_j \otimes (1_H\#1_U))(b\#\rho_{H,U}(S_U^{-1}(f_j))(k)) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r} \beta(a_j \otimes (1_H\#1_U))(b\#(k \leftharpoonup S_U^{-1}(f_j))) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r} \beta(a_j \otimes (1_H\#1_U))(b\#S_U^{-1}(f_j)(k_1)k_2) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r} \beta(a_j \otimes (1_H\#1_U))(b\#f_j(S^{-1}(k_1))k_2) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r} a_j b\#1_H(1_U \rightharpoonup (f_j(S^{-1}(k_1))k_2)) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r} a_j b\#f_j(S^{-1}(k_1))k_2 = \star\star\star
\end{aligned}
$$

vale observar que substituímos a expressão $S_U^{-1}(f_j)(k_1)$ na quarta igualdade da equação anterior por $f_j(S^{-1}(k_1))$. Isso se dá pelo fato de que $S_U^{-1} = S_{H^\circ}^{-1}\big|_U$ onde $S_{H^\circ}^{-1} = (S^{-1})^*$, assim

$$S_U^{-1}(f_j)(k_1) = (S^{-1})^*(f_j)(k_1) = (f_j \circ S^{-1})(k_1) = f_j(S^{-1}(k_1)).$$

Por fim, como $\star\star = \star\star\star$, chegamos a expressão requerida.

□

Valendo-nos da condição RL estamos em condição de exibir as inclusões 5.2 e 5.3. Para verificar 5.2 vamos tomar $f_j \in U$ e sem perda de generalidade considerar pela condição RL que $\rho_{H,U}(f_j) = \lambda_{H,U}(h_j \# g_j)$ para algum $h_j \# g_j \in H \# U$. Observando que para $c\#t \in A\#H$ qualquer, e considerando que $c\#t \in A_i \# H$ para algum $i \in I$, temos

$$(I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j))(c\#t) = c \otimes \rho_{H,U}(f_j)(t) = e_i c \otimes \lambda_{H,U}(h_j\#g_j)(t) = \beta(e_i \otimes (h_j\#g_j))(c\#t).$$

Em particular,

$$(I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j))(\gamma(c\#t)) = \beta(e_i \otimes (h_j\#g_j))(\gamma(c\#t))$$

pois pela própria expressão de γ podemos concluir que $\gamma(A_i\#H) \subseteq A_i\#H\ \forall i \in I$. Com isso, segue do Lema 5.10 que

$$\begin{aligned}
&(\gamma^{-1} \circ \beta(a \otimes (1_H\#1_U)) \circ \gamma)(c\#t) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} (\alpha((a_j\#1_H)\#1_U) \circ (\gamma^{-1} \circ (I_A \otimes \rho_{H,U}(f_j)) \circ \gamma))(c\#t) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} (\alpha((a_j\#1_H)\#1_U) \circ (\gamma^{-1} \circ \beta(e_i \otimes (h_j\#g_j)) \circ \gamma))(c\#t) \\
&\quad \overset{Lema\ 5.9}{=} \sum_{j=1}^{r} (\alpha((a_j\#1_H)\#1_U) \circ \alpha((e_i\#h_j)\#g_j))(c\#t) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} \alpha(((a_j\#1_H)\#1_U)((e_i\#h_j)\#g_j))(c\#t) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} \alpha((a_j e_i\#h_j)\#g_j)(c\#t) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} (a_j e_i\#h_j)(c\#(g_j \rightharpoonup t)) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} (a_j e_i)((h_j)_1 \cdot c)\#(h_j)_2(g_j \rightharpoonup t) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} a_j (e_i((h_j)_1 \cdot c))\#(h_j)_2(g_j \rightharpoonup t) \\
&\quad \overset{(h_j)_1 \cdot c\, \in\, A_i}{=} \sum_{j=1}^{r} a_j((h_j)_1 \cdot c)\#(h_j)_2(g_j \rightharpoonup t) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{r} (a_j\#h_j)(c\#(g_j \rightharpoonup t))
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \alpha((a_j\#h_j)\#g_j)(c\#t)$$
$$= \alpha\left(\sum_{j=1}^{r}(a_j\#h_j)\#g_j\right)(c\#t).$$

Concluímos que

$$(\gamma^{-1}\circ\beta(a\otimes(1_H\#1_U))\circ\gamma)(c\#t) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{r}(a_j\#h_j)\#g_j\right)(c\#t), \quad \forall c\#t \in A\#H$$

isto é, $\gamma^{-1}\circ\beta(A\otimes(1_H\#1_U))\circ\gamma \subseteq \alpha((A\#H)\#U)$. Logo, dado $a\otimes(h\#f)\in A\otimes(H\#U)$ com $a\in A_i$ e sendo β morfismo de álgebras, temos

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1}\circ\beta(a\otimes(h\#f))\circ\gamma &= \gamma^{-1}\circ\beta((a\otimes(1_H\#1_U))(e_i\otimes(h\#f)))\circ\gamma \\
&= \gamma^{-1}\circ\beta(a\otimes(1_H\#1_U))\circ\beta(e_i\otimes(h\#f))\circ\gamma \\
&= \underbrace{\gamma^{-1}\circ\beta(a\otimes(1_H\#1_U))\circ\gamma}_{\in\,\alpha((A\#H)\#U)}\circ\underbrace{\gamma^{-1}\circ\beta(e_i\otimes(h\#f))\circ\gamma}_{\in\,\alpha((A\#H)\#U)}
\end{aligned}$$

e portanto, como α é morfismo de álgebra

$$\gamma^{-1}\circ\beta(a\otimes(h\#f))\circ\gamma\in\alpha((A\#H)\#U), \quad \forall a\otimes(h\#f)\in A\otimes(H\#U)$$

o que finalmente verifica a inclusão 5.2.

Analogamente podemos verificar a inclusão 5.3 mostrando primeiramente que $\gamma\circ\alpha((A\#1_H)\#1_U)\circ\gamma^{-1}\subseteq\beta(A\otimes(H\#U))$. Com efeito, dados $a,b\in A$ e $k\in H$ quaisquer, e assumindo que $b\in A_i$ para algum $i\in I$, temos do Lema 5.10 que

$$\begin{aligned}
&(\gamma\circ\alpha((a\#1_H)\#1_U)\circ\gamma^{-1})(b\#k) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r}\beta((a_j\otimes(1_H\#1_U)))((I_A\otimes\rho_{H,U}(S_U^{-1}(f_j)))(b\#k)) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{r}\beta(a_j\otimes(1_H\#1_U))(b\otimes\rho_{H,U}(S_U^{-1}(f_j))(k)) = \star.
\end{aligned}$$

Novamente, da condição RL podemos assumir sem perda de generalidade que $\rho_{H,U}(S_U^{-1}(f_j)) = \lambda_{H,U}(h_j\#g_j)$ para algum $h_j\#g_j\in A\#H$. Segue disso que

$$\begin{aligned}
\star &= \sum_{j=1}^{r}\beta(a_j\otimes(1_H\#1_U))(e_ib\otimes\lambda_{H,U}(h_j\#g_j)(k)) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\beta(a_j\otimes(1_H\#1_U))(l(e_i)(b)\#\lambda_{H,U}(h_j\#g_j)(k)) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\beta(a_j\otimes(1_H\#1_U))(\beta(e_i\otimes(h_j\#g_j))(b\#k))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{r}(\beta(a_j \otimes (1_H \# 1_U)) \circ \beta(e_i \otimes (h_j \# g_j)))(b \# k) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \beta(a_j e_i \otimes (h_j \# g_j))(b \# k) = \sum_{j=1}^{r}(a_j e_i) b \# h_j (g_j \rightharpoonup k) \\
&= \sum_{j=1}^{r} a_j (e_i b) \# h_j (g_j \rightharpoonup k) \overset{b \in A_i}{=} \sum_{j=1}^{r} a_j b \# h_j (g_j \rightharpoonup k) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \beta(a_j \otimes (h_j \# g_j))(b \# k) = \beta\left(\sum_{j=1}^{r} a_j \otimes (h_j \# g_j)\right)(b \# k)
\end{aligned}
$$

de onde segue que $\gamma \circ \alpha((a \# 1_H) \# 1_U) \circ \gamma^{-1} = \beta\left(\sum_{j=1}^{r} a_j \otimes (h_j \# g_j)\right)$. Por fim, para um elemento $(a \# h) \# f \in (A \# H) \# U$ qualquer, podemos assumir que $a \in A_i$ para algum $i \in I$ e com isso

$$
\begin{aligned}
\gamma \circ \alpha((a \# h) \# f) \circ \gamma^{-1} &= \gamma \circ \alpha(((a \# 1_H) \# 1_U)((e_i \# h) \# f)) \circ \gamma^{-1} \\
&= \gamma \circ \alpha((a \# 1_H) \# 1_U) \circ \alpha((e_i \# h) \# f) \circ \gamma^{-1} \\
&= \underbrace{\gamma \circ \alpha((a \# 1_H) \# 1_U) \circ \gamma^{-1}}_{\in \beta(A \otimes (H \# U))} \circ \underbrace{\gamma \circ \alpha((e_i \# h) \# f) \circ \gamma^{-1}}_{\in \beta(A \otimes (H \# U))}
\end{aligned}
$$

sendo β um morfismo de álgebras temos $\gamma \circ \alpha((a \# h) \# f) \circ \gamma^{-1} \in \beta(A \otimes (H \# U))$ como queríamos.

5.1.1 A demonstração do Teorema

Com as inclusões 5.2 e 5.3 podemos concluir que

$$\gamma^{-1} \circ \beta(A \otimes (H \# U)) \circ \gamma = \alpha((A \# H) \# U).$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&\gamma \circ \alpha((A \# H) \# U) \circ \gamma^{-1} \subseteq \beta(A \otimes (H \# U)) \\
&\implies \gamma^{-1} \circ \gamma \circ \alpha((A \# H) \# U) \circ \gamma^{-1} \circ \gamma \subseteq \gamma^{-1} \circ \beta(A \otimes (H \# U)) \circ \gamma \\
&\implies \alpha((A \# H) \# U) \subseteq \gamma^{-1} \circ \beta(A \otimes (H \# U)) \circ \gamma \subseteq \alpha((A \# H) \# U) \\
&\implies \gamma^{-1} \circ \beta(A \otimes (H \# U)) \circ \gamma = \alpha((A \# H) \# U).
\end{aligned}
$$

Definamos

$$
\begin{array}{rccc}
\theta : & \beta(A \otimes (H \# U)) & \longrightarrow & \alpha((A \# H) \# U) \\
& f & \longmapsto & \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma
\end{array}
$$

Obviamente θ é morfismo de álgebras e é bijetivo com inversa $\theta^{-1}(g) = \gamma \circ g \circ \gamma^{-1}$. São portanto isomorfos como álgebras $\beta(A\otimes(H\#U))$ e $\alpha((A\#H)\#U)$. Como α e β são morfismos injetivos de álgebras concluímos que

$$A \otimes (H\#U) \simeq \beta(A \otimes (H\#U)) \simeq \alpha((A\#H)\#U) \simeq (A\#H)\#U$$

como álgebras.

5.2 A Dualidade em um contexto topológico

Veremos nesta seção como reinterpretar o Teorema de Dualidade da seção anterior dentro de um contexto topológico, para tanto, vamos nos valer do conceito de topologia finita encontrada em [11].

Sejam X e Y conjuntos não vazios e Y^X o conjunto de todas as funções de X para Y. Podemos considerar Y^X como o produto cartesiano da família de conjuntos $Y_x = Y$, isto é,

$$Y^X = \prod_{x\in X} Y_x = \prod_{x\in X} Y$$

A topologia finita de Y^X é obtida tomando o espaço produto em $\prod_{x\in X} Y$ onde cada Y_x é visto como espaço topológico discreto. Uma base para o conjunto de abertos nesta topologia é dada pelos conjuntos

$$\beta_f = \{g \in Y^X \mid g(x_i) = f(x_i) \text{ com } i = 1, \cdots, n\}$$

onde $\{x_i \mid i = 1, \cdots, n\}$ é um conjunto finito de elementos de X e f é um elemento fixado de Y^X. Portanto, cada aberto em Y^X trata-se de uma união de conjuntos deste tipo. O conjunto β_f é na verdade uma vizinhança para $f \in Y^X$. Se considerarmos X e Y K-espaços vetoriais, podemos tomar sobre o espaço vetorial $\mathrm{Hom}_K(X, Y) \subseteq Y^X$ a topologia induzida da topologia finita de Y^X. Esta topologia sobre $\mathrm{Hom}_K(X, Y)$ é também dita topologia finita.

A próxima definição e teorema são extraídos de [5], de onde se pode obter mais informações. Aqui simplesmente os enunciaremos e os usaremos com o simples propósito de reinterpretar o Teorema de Dualidade, bem como de verificar sua generalização e analogia com o caso clássico apresentada no capítulo 2, em que trabalhamos com uma álgebra unitária e uma álgebra de Hopf de dimensão finita.

Definição 5.11 *Uma álgebra B é dita residualmente de dimensão finita sobre K se existir uma família $\{\pi_\alpha\}$ de K-representações de dimensão finita de B tal que $\bigcap_\alpha \mathrm{Ker}\, \pi_\alpha = 0$.*

Teorema 5.12 *Sejam H uma álgebra de Hopf residualmente de dimensão finita com antípoda bijetiva S e U uma subálgebra de Hopf densa em H°. Então $\lambda_{H,U}(H\#U)$ é densa no anel de endomorfismos K-lineares de H.*

Observemos que a definição e teorema expostos são feitas basicamente sobre uma álgebra de Hopf H ou derivados desta, sem envolver uma outra álgebra A com ou sem unidades. Vamos então buscar juntar esse último teorema com o resultado da Dualidade obtida anteriormente.

Provamos antes que $(A\#H)\#U \simeq A\otimes(H\#U)$ usando morfismos injetivos de álgebras α e β. Na demonstração de tal isomorfismo passamos pelo isomorfismo

$$(A\#H)\#U \simeq \beta(A \otimes (H\#U))$$

onde

$$(A\#H)\#U \simeq \beta(A \otimes (H\#U)) = (l \otimes \lambda_{H,U})(A \otimes (H\#U)) = l(A) \otimes \lambda_{H,U}(H\#U) = \star$$

com $l : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(A)$ sendo a representação regular, que é morfismo de álgebras e é injetivo. Com efeito, já vimos que l é morfismo de álgebras e quanto à sua injetividade basta tomarmos $a \in \operatorname{Ker} l$ e verificar que $a = 0$, isso segue do fato que

$$l(a)(b) = 0 \;\forall b \in A \iff ab = 0 \;\forall b \in A.$$

Em particular, se $a \in A_i$ para algum $i \in I$, temos que $a = ae_i = l(a)(e_i) = 0$. Temos então que $A \simeq l(A)$ como álgebras e com isso

$$\star = l(A) \otimes \lambda_{H,U}(H\#U) \simeq A \otimes \lambda_{H,U}(H\#U).$$

Sendo assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.13 *Sejam H uma K-álgebra de Hopf residualmente de dimensão finita com antípoda bijetiva S, U uma subálgebra de Hopf densa em H° com antípoda bijetiva e A um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais U-localmente finito. Assumamos que U satisfaz a condição RL com respeito à H. Então,*

$$(A\#H)\#U \simeq A \otimes \lambda_{H,U}(H\#U)$$

onde $\lambda_{H,U}(H\#U)$ é uma subálgebra densa em $\mathrm{End}_K(H)$.

Vale relembrar que no teorema clássico da Dualidade de Blattner-Montgomery para H Hopf com $n = \dim_K H < \infty$, A uma álgebra unitária e $A\#_\sigma H$ um produto cruzado com σ invertível por convolução, tínhamos

$$(A\#_\sigma H)\#H^* \simeq A \otimes \mathrm{End}_K(H).$$

Para σ trivial, que em particular é invertível por convolução, tal expressão é análoga ao enunciado no último teorema, a menos que devido a infinitude da dimensão de H, $\lambda_{H,U}(H\#U)$ é uma subálgebra densa em $\mathrm{End}_K(H)$ e não necessariamente todo $\mathrm{End}_K(H)$. Entretanto, se $n = \dim_K H < \infty$ no último teorema e considerarmos $U = H^\circ = H^*$, temos a devida igualdade entre ambas expressões como mostrará o segundo item do próximo resultado. Tal resultado pode ser encontrado em [5] no Corolário 2.3.

Proposição 5.14 *São válidos:*

1. *Se H é uma K-álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e U uma subálgebra de Hopf de H°, então $\lambda_{H,U} : H\#U \longrightarrow \mathrm{End}_K(H)$ é injetivo;*

2. *Se H é uma K-álgebra de Hopf de dimensão finita n, então*

$$\lambda_{H,H^*} : H\#H^* \longrightarrow \mathrm{End}_K(H)$$

é bijetivo e $H\#H^* \simeq \mathrm{End}_K(H)$.

Demonstração.

1. Consideremos a ação trivial de H sobre K, isto é, $h \cdot k := \epsilon(h)k$. Com essa ação K torna-se um H-módulo álgebra. Temos nessas condições um isomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccc} \eta: & K\#H & \longrightarrow & H \\ & k\#h & \longmapsto & kh \end{array}$$

Com efeito, já sabemos que $K \otimes H = K \otimes_K H$ é isomorfo como K-espaço vetorial à H mediante identificação $k \otimes h \equiv kh$, resta verificar que η é um morfismo de álgebras. Vejamos:

$$\begin{aligned} \eta((k\#h)(r\#t)) &= \eta(k(h_1 \cdot r)\#h_2 t) = \eta(k\epsilon(h_1)r\#h_2 t) \\ &= k\epsilon(h_1)rh_2 t = kr(\epsilon(h_1)h_2)t = krht \\ &= (kh)(rt) = \eta(k\#h)\eta(r\#t). \end{aligned}$$

Tomemos

$$\beta : K \otimes (H\#U) \longrightarrow \mathrm{End}_K(K\#H)$$

como antes, ou seja,

$$\beta(k \otimes (h\#f))(r\#t) = kr\#h(f \rightharpoonup t), \quad \forall\, k, r \in K, h, t \in H \text{ e } f \in U$$

que é injetivo como vimos anteriormente. Agora, para qualquer $t \in H$ temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{H,U}(h\#f)(t) := h(f \rightharpoonup t) &= \eta(1_K\#h(f \rightharpoonup t)) \\
&= \eta(\beta(1_K \otimes (h\#f))(1_K\#t)) \\
&= \eta(\beta(1_K \otimes (h\#f))\eta^{-1}(t)) \\
&= (\eta \circ \beta(1_K \otimes (h\#f)) \circ \eta^{-1})(t).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_{H,U}(h\#f) = \eta \circ \beta(1_K \otimes (h\#f)) \circ \eta^{-1}$$

e, com isso, decorrente da injetividade de η e β, segue a injetividade de $\lambda_{H,U}$.

2. Como $n = \dim_K H < \infty$ temos que a antípoda de H é bijetiva. Tomando $U = H^\circ = H^*$ temos pelo item anterior que λ_{H,H^*} é injetivo. Ademais,

$$\dim_K(H\#H^*) = \dim_K(H)\dim_K(H^*) = n^2 = \dim_K(\mathrm{End}_K(H)).$$

Sendo assim, λ_{H,H^*} é também sobrejetivo e, portanto, um isomorfismo de álgebras.

$\square$

Capítulo 6

Álgebra de multiplicadores

Neste capítulo iremos estudar a álgebra de multiplicadores $M(A)$ de uma álgebra A. Sendo A arbitrária, $M(A)$ será uma álgebra unitária, indiferente se A é ou não dessa forma. E ainda, se o produto de A satisfizer certa propriedade, teremos como consequência que $M(A)$ será extensão de A. Além disso, tal extensão será maximal dentre as extensões que contém A como ideal essencial, ou seja, qualquer outra extensão deste tipo resulta em uma subálgebra de $M(A)$. Veremos que se a álgebra original A for um H-módulo álgebra com unidades locais, então a álgebra de multiplicadores associada será um H-módulo álgebra com ação induzida de H sobre A. Nesse contexto, referente ao produto smash abordada no Exemplo 1.3 no capítulo 1 e presente nos demais através dos Teoremas de Dualidade, o produto smash irá se relacionar com a álgebra de multiplicadores no sentido de que poderemos formar as álgebras $M(A\#H)$ e $M(A)\#H$. Para cada subálgebra unitária $A_j \subseteq A$ induzida do sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$ de A, teremos um isomorfismo entre $M(A_j\#H)$ e $M(A_j)\#H$. Tais isormofismos indicarão um modo de como definir um morfismo injetivo de $M(A)\#H$ em $M(A\#H)$. A verificação de que $M(A)\#H$ é uma subálgebra de $M(A\#H)$, bem como a análise de quando haverá um isomorfismo entre ambas as álgebras serão os objetivos principais deste capítulo.

Nesta primeira seção deste capítulo faremos considerações a respeito da álgebra de multiplicadores de uma K-álgebra arbitrária, e posteriormente em outra seção, estudaremos tais conceitos para um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais.

6.1 Multiplicadores de uma álgebra

As principais referências em que se baseia esta seção são [10] e [12].

Definição 6.1 *Seja A uma K-álgebra. Um multiplicador à esquerda de A é um morfismo*

$\rho_1 \in \mathrm{End}_K(A)$ *que satisfaz*

$$\rho_1(ab) = \rho_1(a)b, \quad \forall a, b \in A.$$

Um multiplicador à direita de A é um morfismo $\rho_2 \in \mathrm{End}_K(A)$ que satisfaz

$$\rho_2(ab) = a\rho_2(b), \quad \forall a, b \in A.$$

Um multiplicador de A é um par (ρ_1, ρ_2) tal que ρ_1 é um multiplicador à esquerda de A, ρ_2 é um multiplicador à direita de A e vale a condição de compatibilidade

$$a\rho_1(b) = \rho_2(a)b, \quad \forall a, b \in A.$$

Notação 6.2 Denotaremos por $L(A)$ o conjunto de multiplicadores à esquerda de A, $R(A)$ o conjunto de multiplicadores à direita de A e por $M(A)$ o conjunto de multiplicadores de A.

Os conjuntos $L(A)$, $R(A)$ e $M(A)$ possuem estrutura de K-espaço vetorial, os dois primeiros com estrutura induzida de $\mathrm{End}_K(A)$ e $M(A)$ com estrutura dada coordenada a coordenada e induzida de $L(A)$ e $R(A)$. Ademais, com a composição de funções, $L(A)$, $R(A)$ e $M(A)$ tornam-se K-álgebras, porém, no caso de $M(A)$ a multiplicação deve ter a composição invertida na segunda coordenada, isto é, para $(\rho_1, \rho_2), (\theta_1, \theta_2) \in M(A)$

$$(\rho_1, \rho_2) \cdot (\theta_1, \theta_2) = (\rho_1 \circ \theta_1, \theta_2 \circ \rho_2).$$

Isso é necessário para que tenhamos a condição de compatibilidade. De fato, dados $a, b \in A$,

$$a((\rho_1 \circ \theta_1)(b)) = a\rho_1(\theta_1(b)) = \rho_2(a)\theta_1(b).$$

Observe que na segunda igualdade acima usamos a compatibilidade de $(\rho_1, \rho_2) \in M(A)$. De maneira análoga, tendo em vista que $(\theta_1, \theta_2) \in M(A)$ e usando a compatibilidade deste, teremos

$$((\theta_2 \circ \rho_2)(a))b = \theta_2(\rho_2(a))b = \rho_2(a)\theta_1(b)$$

logo, $(\rho_1 \circ \theta_1, \theta_2 \circ \rho_2) \in M(A)$. Vale observar que mesmo A sendo uma álgebra qualquer, em particular, podendo ser álgebra sem unidade, $M(A)$ é álgebra unitária com $1_{M(A)} = (I_A, I_A)$.

Definição 6.3 *O produto em uma K-álgebra A é não degenerado se $ab = 0$, $\forall a \in A$, então $b = 0$ e se $ab = 0$, $\forall b \in A$, então $a = 0$.*

Proposição 6.4 *Seja o produto em A não degenerado e $(\rho_1, \rho_2) \in M(A)$. Então (ρ_1, ρ_2) está unicamente determinado no sentido que ρ_1 define ρ_2 e ρ_2 define ρ_1.*

Demonstração. Suponhamos que existam $(\rho_1, \rho_2), (\rho_1', \rho_2) \in M(A)$. Então da condição da compatibilidade para esses pares temos que

$$a\rho_1(b) = \rho_2(a)b = a\rho_1'(b) \quad \forall a, b \in A$$

logo

$$a\rho_1(b) - a\rho_1'(b) = 0 \quad \forall a, b \in A \iff a(\rho_1(b) - \rho_1'(b)) = 0 \quad \forall a, b \in A$$

Como o produto em A é não degenerado devemos ter

$$\rho_1(b) - \rho_1'(b) = 0 \quad \forall b \in A \iff \rho_1(b) = \rho_1'(b) \quad \forall b \in A$$

Com isso $\rho_1 = \rho_1'$. De modo análogo podemos verificar que se $(\rho_1, \rho_2), (\rho_1, \rho_2') \in M(A)$ então $\rho_2 = \rho_2'$. $\square$

Observação 6.5 Segundo a proposição anterior, dado um par $(q_1, q_2) \in M(A)$, se $q_1 = 0$ então $q_2 = 0$. De fato, se $(0, q_2) \in M(A)$, como $(0, 0) \in M(A)$, então $q_2 = 0$. De modo análogo, verifica-se que, se $q_2 = 0$ então $q_1 = 0$.

Proposição 6.6 *Se o produto em A é não degenerado, então existem morfismos injetivos de álgebras $l : A \longrightarrow L(A)$, $i : A \longrightarrow M(A)$ e um antimorfismo injetivo de álgebras $r : A \longrightarrow R(A)$.*

Demonstração. Fixado $a \in A$, temos que o morfismo

$$\begin{array}{rccc} l_a: & A & \longrightarrow & A \\ & b & \longmapsto & ab \end{array}$$

é K-linear por se tratar da multiplicação à esquerda por a, e ainda $l_a \in L(A)$, pois

$$l_a(bc) = a(bc) = (ab)c = l_a(b)c, \quad \forall b, c \in A$$

Analogamente,

$$\begin{array}{rccc} r_a: & A & \longrightarrow & A \\ & b & \longmapsto & ba \end{array}$$

é K-linear por se tratar da multiplicação à direita por a, e $r_a \in R(A)$ já que

$$r_a(bc) = (bc)a = b(ca) = br_a(c), \quad \forall b, c \in A$$

Além do mais, o par $(l_a, r_a) \in M(A)$. De fato,

$$bl_a(c) = b(ac) = (ba)c = r_a(b)c, \quad \forall b, c \in A$$

Temos então

$$\begin{array}{rccc} l: & A & \longrightarrow & L(A) \\ & a & \longmapsto & l_a \end{array}$$

que é uma função K-linear, já que dados $a, b \in A$ e $k \in K$

$$l(a+kb)(c) = (a+kb)c = ac + k(bc) = l(a)(c) + kl(b)(c) = (l(a) + kl(b))(c), \quad \forall c \in A$$

é também morfismo de álgebras, pois para $a, b \in A$

$$(l(a) \circ l(b))(c) = l(a)(l(b)(c)) = a(bc) = (ab)c = l(ab)(c), \quad \forall c \in A$$

e é injetivo devido o produto em A ser não degenerado. De fato, sendo $a \in \mathrm{Ker}(l)$,

$$l(a)(b) = 0, \ \forall b \in A \iff ab = 0, \ \forall b \in A \Longrightarrow a = 0$$

De modo análogo, verifica-se que

$$\begin{array}{rccc} r: & A & \longrightarrow & R(A) \\ & a & \longmapsto & r_a \end{array}$$

é K-linear e injetivo. Porém, trata-se de um antimorfismo de álgebras já que dados $a, b \in A$

$$(r(a) \circ r(b))(c) = (cb)a = c(ba) = r(ba)(c), \quad \forall c \in A$$

Por fim,

$$\begin{array}{rccc} i: & A & \longrightarrow & M(A) \\ & a & \longmapsto & (l_a, r_a) \end{array}$$

é K-linear e injetivo já que suas funções coordenadas o são, e ainda, é morfismo de álgebras. De fato, dados $a, b \in A$

$$i(a) \cdot i(b) = (l_a, r_a) \cdot (l_b, r_b) = (l_a \circ l_b, r_b \circ r_a) = (l(a) \circ l(b), r(b) \circ r(a)) = (l(ab), r(ab)) = i(ab)$$

□

No caso de A possuir unidade, automaticamente o produto em A é não degenerado, pois, se $ab = 0 \ \forall a \in A$, em particular $b = 1_A b = 0$. Analogamente, se $ab = 0 \ \forall b \in A$, em particular $a = a1_A = 0$. Ademais, nessas condições temos o seguinte resultado:

Proposição 6.7 *Se existe $1_A \in A$, os morfismos l, r e i da proposição anterior são bijetores. Assim $L(A) \simeq M(A) \simeq A \simeq R(A)$.*

Demonstração. É suficiente verificar que l, r e i são sobrejetores. Dado $f \in L(A)$,

$$f(a) = f(1_A a) = f(1_A)a = l_{f(1_A)}(a), \quad \forall a \in A$$

logo, $f = l_{f(1_A)}$ e com isso l é sobrejetor e consequentemente um isomorfismo de álgebras. Analogamente, dado $g \in R(A)$

$$g(a) = g(a1_A) = ag(1_A) = r_{g(1_A)}(a), \quad \forall a \in A$$

logo $g = r_{g(1_A)}$ e com isso r é sobrejetor e consequentemente um anti-isomorfismo de álgebras. Por fim, dado $(f, g) \in M(A)$

$$(f, g) = (l_{f(1_A)}, r_{g(1_A)}) = \star.$$

Como $(f, g) \in M(A)$, vale $1_A f(1_A) = g(1_A)1_A$, isto é, $f(1_A) = g(1_A)$. Logo,

$$\star = (l_{f(1_A)}, r_{f(1_A)}) = i(f(1_A))$$

o que mostra que i é sobrejetor, e então um isomorfismo de álgebras. $\square$

Consideremos agora a seguinte definição:

Definição 6.8 *Um ideal D de um anel R é dito essencial se para qualquer outro ideal $Q \neq \{0\}$ de R tivermos $Q \cap D \neq \{0\}$.*

No caso em que o produto de A é não degenerado, temos que A é um ideal essencial de $M(A)$ no seguinte sentido:

Lema 6.9 *Se o produto em A é não degenerado, ao considerar o morfismo injetivo $i : A \longrightarrow M(A)$, temos que a álgebra $i(A) \simeq A$ é um ideal essencial de $M(A)$.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que $i(A)$ é um ideal de $M(A)$. Para tanto, tomemos $i(a) = (l_a, r_a) \in i(A)$ e $(f, g) \in M(A)$ arbitrários. Assim, $(f, g) \cdot (l_a, r_a) = (f \circ l_a, r_a \circ g)$ e disso

$$(f \circ l_a)(b) = f(l_a(b)) = f(ab) = f(a)b = l_{f(a)}(b)$$

e por outro lado,

$$(r_a \circ g)(b) = r_a(g(b)) = g(b)a \overset{(f,g)\in M(A)}{=} bf(a) = r_{f(a)}(b)$$

para cada $b \in A$. Segue que $(f,g)\cdot(l_a, r_a) = (f \circ l_a, r_a \circ g) = (l_{f(a)}, r_{f(a)}) \in i(A)$, e com isso $M(A)\cdot i(A) \subseteq i(A)$. Analogamente verifica-se que $i(A)\cdot M(A) \subseteq i(A)$. Portanto $i(A)$ é um ideal de $M(A)$. Para verificar que é essencial, consideramos um ideal $Q \neq \{0\}$ de $M(A)$. Como $Q \neq \{0\}$, tomamos $0 \neq (q_1, q_2) \in Q$, em particular segue da Observação 6.5 que $q_1 \neq 0$, dessa forma existe $a \in A$ tal que $q_1(a) \neq 0$. Sendo assim, do produto $(q_1,q_2)\cdot(l_a, r_a) = (l_{q_1(a)}, r_{q_1(a)})$ temos que $l_{q_1(a)} \neq 0$. De fato, se $l_{q_1(a)} = 0$ então

$$l_{q_1(a)}(b) = 0 \; \forall b \in B \iff q_1(a)b = 0 \; \forall b \in B$$

o que implicaria devido ao produto em A ser não degenerado que $q_1(a) = 0$, o que é absurdo. Portanto $(l_{q_1(a)}, r_{q_1(a)}) \neq 0$ e consequentemente $Q \cap i(A) \neq \{0\}$. $\square$

Para encerrar esta seção vejamos o resultado que diz que dentre todas as extensões de A que o tem como ideal essencial, a extensão $i : A \longrightarrow M(A)$ é a maximal.

Teorema 6.10 *Considere que o produto em A é não degenerado. Se $q_A : A \longrightarrow B$ é um morfismo injetivo de álgebras tal que $q_A(A)$ é um ideal essencial de B, então existe um morfismo injetivo de álgebras $q_B : B \longrightarrow M(A)$ tal que $q_B \circ q_A = i$.*

Demonstração. Sendo q_A um morfismo injetivo, podemos para efeitos práticos considerar este como sendo a inclusão. Desse modo A é ideal essencial de B, e disso fica bem definido o morfismo

$$\begin{array}{rccc} q_B: & B & \longrightarrow & M(A) \\ & b & \longmapsto & (l_b, r_b) \end{array}$$

pois dado $a \in A$: $l_b(a) = ba \in BA \subseteq A$ e $r_b(a) = ab \in AB \subseteq A$. Pela expressão de q_B é facil verificar que q_B é morfismo de álgebras bem como torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "i"'] & B \arrow[d, "q_B"] \\ & M(A) \end{tikzcd}$$

Por fim afirmamos que q_B é injetivo. De fato, se supusermos que $\operatorname{Ker} q_B \neq \{0\}$, segue do fato de $\operatorname{Ker} q_B$ ser um ideal de B que $\operatorname{Ker} q_B \cap A \neq \{0\}$, pois A é um ideal essencial de B. Tomando $0 \neq x \in \operatorname{Ker} q_B \cap A$ temos de acordo com a comutatividade do diagrama que

$$q_B(x) = 0 \overset{x\in A}{\iff} i(x) = 0$$

e como i é injetor então $x = 0$, o que é absurdo. Desse modo q_B é injetivo como queríamos. $\square$

6.2 Álgebra de multiplicadores e produto smash

Nesta seção vamos considerar A um H-módulo álgebra à esquerda com unidades locais, sendo H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva S. Sendo em particular A uma K-álgebra com sistema de unidades locais $u = \{e_i \,|\, i \in I\}$, temos que o produto em A é não degenerado. Com efeito, se $ab = 0\, \forall a \in A$, então supondo que $b \in A_i$ teremos $b = e_i b = 0$. Analogamente, se $a \in A_j$ e tivermos $ab = 0\ \forall b \in A$, então em particular $a = ae_j = 0$. Segue do que vimos na seção anterior que dentre outros, temos um morfismo injetivo de álgebras $i : A \longrightarrow M(A)$. Como A não necessariamente tem unidade, não podemos garantir que i seja isomorfismo, porém, para as subálgebras unitárias $A_j \subseteq A$ teremos sim isomorfismo $i_j : A_j \longrightarrow M(A_j)\ \forall j \in I$, onde nesse caso, para $(f, g) \in M(A_j)$ qualquer, vale a relação: $i_j(f(e_j)) = (f, g)$.

6.2.1 A estrutura de H-módulo álgebra nos multiplicadores

Definimos a seguinte ação de H em $M(A)$: dados $h \in H$ e $(f, g) \in M(A)$

$$h \cdot (f, g) := (h \cdot f, h \cdot g)$$

onde

$$(h \cdot f)(a) = h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot a) \quad \text{e} \quad (h \cdot g)(a) = h_2 \cdot g(S^{-1}(h_1) \cdot a), \quad \forall a \in A.$$

Vejamos que a ação está bem definida, isto é, que $h \cdot (f, g) = (h \cdot f, h \cdot g) \in M(A)$. Primeiro vejamos que $h \cdot f \in L(A)$. Para isso tomemos $a, b \in A$, assim

$$\begin{aligned}
(h \cdot f)(ab) &= h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot (ab)) = h_1 \cdot f((S(h_3) \cdot a)(S(h_2) \cdot b)) \\
&\overset{f \in L(A)}{=} h_1 \cdot [f(S(h_3) \cdot a)(S(h_2) \cdot b)] = [h_1 \cdot f(S(h_4) \cdot a)][h_2 \cdot (S(h_3) \cdot b)] \\
&= [h_1 \cdot f(S(h_3) \cdot a)][\epsilon(h_2) 1_H \cdot b] = [(h_1 \epsilon(h_2)) \cdot f(S(h_3) \cdot a)]b \\
&= [h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot a)]b = [(h \cdot f)(a)]b.
\end{aligned}$$

Agora vejamos que $h \cdot g \in R(A)$. Tomando-se, então, $a, b \in A$

$$(h \cdot g)(ab) \quad = \quad h_2 \cdot g(S^{-1}(h_1) \cdot (ab)) = h_3 \cdot [g((S^{-1}(h_2) \cdot a)(S^{-1}(h_1) \cdot b))]$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{g\in R(A)}{=} && h_3\cdot[(S^{-1}(h_2)\cdot a)g(S^{-1}(h_1)\cdot b)]\\
&= && [h_3\cdot(S^{-1}(h_2)\cdot a)][h_4\cdot g(S^{-1}(h_1)\cdot b)]\\
&= && [\epsilon(h_2)1_H\cdot a][h_3\cdot g(S^{-1}(h_1)\cdot b)]=a[\epsilon(h_2)h_3\cdot g(S^{-1}(h_1)\cdot b)]\\
&= && a[h_2\cdot g(S^{-1}(h_1)\cdot b)]=a[(h\cdot g)(b)].
\end{aligned}
$$

Por fim, vejamos a condição de compatibilidade que garantirá $(h\cdot f, h\cdot g)\in M(A)$. Dados $a, b\in A$ temos que

$$
a((h\cdot f)(b))=a(h_1\cdot f(S(h_2)\cdot b))\quad \text{e}\quad ((h\cdot g)(a))b=(h_2\cdot g(S^{-1}(h_1)\cdot a))b. \tag{6.1}
$$

Assumamos que $a\in A_s, b\in A_r, f(S(h_2)\cdot b)\in A_k$ e $g(S^{-1}(h_1)\cdot a)\in A_t$ para índices r, s, k e $t\in I$. Tomemos $m\in I$ tal que $m\geq r, s, k, t$. Assim podemos reescrever 6.1 como

$$
\begin{aligned}
a((h\cdot f)(b)) &\overset{f(S(h_2)\cdot b)\in A_k\subseteq A_m}{=} && a[h_1\cdot(e_m(f(S(h_2)\cdot b)))]\overset{(f,g)\in M(A)}{=}a[h_1\cdot(g(e_m)(S(h_2)\cdot b))]\\
&= && a[(h_1\cdot g(e_m))(h_2\cdot(S(h_3)\cdot b))]=a[(h_1\cdot g(e_m))(\epsilon(h_2)1_H\cdot b)]\\
&= && a[(h_1\epsilon(h_2)\cdot g(e_m))b]=a(h\cdot g(e_m))b
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

e

$$
\begin{aligned}
((h\cdot g)(a))b &= && (h_2\cdot g(S^{-1}(h_1)\cdot a))b\overset{g(S^{-1}(h_1)\cdot a)\in A_t\subseteq A_m}{=}(h_2\cdot(g(S^{-1}(h_1)\cdot a)e_m))b\\
&\overset{(f,g)\in M(A)}{=} && (h_2\cdot((S^{-1}(h_1)\cdot a)f(e_m)))b=[h_2\cdot(S^{-1}(h_1)\cdot a)][h_3\cdot f(e_m)]b\\
&= && [\epsilon(h_1)1_H\cdot a][h_2\cdot f(e_m)]b=a[\epsilon(h_1)h_2\cdot f(e_m)]b\\
&= && a(h\cdot f(e_m))b.
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

Como $(f, g)\in M(A)$ temos que $e_mf(e_m)=g(e_m)e_m$, e decorrente disso $h\cdot(e_mf(e_m)) = h\cdot(g(e_m)e_m)$. Sendo que

$$
\begin{aligned}
h\cdot(e_mf(e_m)) &= (h_1\cdot e_m)(h_2\cdot f(e_m))\\
&= (\epsilon(h_1)e_m)(h_2\cdot f(e_m))\\
&= e_m(\epsilon(h_1)h_2\cdot f(e_m))\\
&= e_m(h\cdot f(e_m))
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
h\cdot(g(e_m)e_m) &= (h_1\cdot g(e_m))(h_2\cdot e_m)\\
&= (h_1\cdot g(e_m))(\epsilon(h_2)e_m)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= (h_1\epsilon(h_2)\cdot g(e_m))e_m \\ &= (h\cdot g(e_m))e_m. \end{aligned}$$

Então, $e_m(h\cdot f(e_m)) = (h\cdot g(e_m))e_m$. Com essa condição, temos a partir de 6.2 e 6.3 que

$$\begin{aligned} a((h\cdot f)(b)) &= a(h\cdot g(e_m))b \overset{b\in A_r\subseteq A_m}{=} a(h\cdot g(e_m))(e_m b) \\ &= a[(h\cdot g(e_m))e_m]b = a[e_m(h\cdot f(e_m))]b \\ &= (ae_m)(h\cdot f(e_m))b \overset{a\in A_s\subseteq A_m}{=} a(h\cdot f(e_m))b \\ &= ((h\cdot g)(a))b \end{aligned}$$

e portanto $h\cdot(f,g)\in M(A)$.

Nosso próximo passo é verificar que com essa ação $M(A)$ torna-se um H-módulo álgebra à esquerda. Para tanto vejamos primeiro que $L(A)$ tem estrutura de H-módulo à esquerda. Temos que $\forall f, f'\in L(A), h, l\in H$ e $a\in A$,

$$(1_H\cdot f)(a) = 1_H\cdot f(S(1_H)\cdot a) = 1_H\cdot f(1_H\cdot a) = f(a),$$

logo $1_H\cdot f = f$;

$$\begin{aligned} (h\cdot(f+f'))(a) &= h_1\cdot((f+f')(S(h_2)\cdot a)) = h_1\cdot[f(S(h_2)\cdot a) + f'(S(h_2)\cdot a)] \\ &= h_1\cdot f(S(h_2)\cdot a) + h_1\cdot f'(S(h_2)\cdot a) = (h\cdot f)(a) + (h\cdot f')(a) \\ &= (h\cdot f + h\cdot f')(a), \end{aligned}$$

logo $h\cdot(f+f') = h\cdot f + h\cdot f'$. Para a próxima propriedade lembramos que Δ é K-linear, disso

$$\Delta(h+l) = \Delta(h) + \Delta(l) = h_1\otimes h_2 + l_1\otimes l_2$$

e assim,

$$\begin{aligned} ((h+l)\cdot f)(a) &= (h+l)_1\cdot f(S((h+l)_2)\cdot a) = h_1\cdot f(S(h_2)\cdot a) + l_1\cdot f(S(l_2)\cdot a) \\ &= (h\cdot f)(a) + (l\cdot f)(a) = (h\cdot f + l\cdot f)(a), \end{aligned}$$

logo $(h+l)\cdot f = h\cdot f + l\cdot f$. Por fim,

$$\begin{aligned} [(hl)\cdot f](a) &= (hl)_1\cdot f(S((hl)_2)\cdot a) = (h_1 l_1)\cdot f((S(l_2)S(h_2))\cdot a) \\ &= h_1\cdot(l_1\cdot f(S(l_2)\cdot(S(h_2)\cdot a))) = h_1\cdot((l\cdot f)(S(h_2)\cdot a)) \\ &= (h\cdot(l\cdot f))(a) \end{aligned}$$

de onde segue que $(hl) \cdot f = h \cdot (l \cdot f)$.

Vejamos agora que $R(A)$ é igualmente um H-módulo à esquerda com a ação definida anteriormente. Tomando-se $g, g' \in R(A), h, l \in H$ e $a \in A$ arbitrários, teremos que

$$(1_H \cdot g)(a) = 1_H \cdot g(S^{-1}(1_H) \cdot a) = 1_H \cdot g(1_H \cdot a) = g(a),$$

logo $1_H \cdot g = g$;

$$\begin{aligned}(h \cdot (g + g'))(a) &= h_2 \cdot ((g + g')(S^{-1}(h_1) \cdot a)) = h_2 \cdot [g(S^{-1}(h_1) \cdot a) + g'(S^{-1}(h_1) \cdot a)] \\ &= h_2 \cdot g(S^{-1}(h_1) \cdot a) + h_2 \cdot g'(S^{-1}(h_1) \cdot a) = (h \cdot g)(a) + (h \cdot g')(a) \\ &= (h \cdot g + h \cdot g')(a),\end{aligned}$$

logo $h \cdot (g + g') = h \cdot g + h \cdot g'$. Novamente do fato de Δ ser K-linear teremos

$$\begin{aligned}((h + l) \cdot g)(a) &= (h + l)_2 \cdot g(S^{-1}((h + l)_1) \cdot a) = h_2 \cdot g(S^{-1}(h_1) \cdot a) + l_2 \cdot g(S^{-1}(l_1) \cdot a) \\ &= (h \cdot g)(a) + (l \cdot g)(a) = (h \cdot g + l \cdot g)(a),\end{aligned}$$

logo $(h + l) \cdot g = h \cdot g + l \cdot g$. Por fim,

$$\begin{aligned}[(hl) \cdot g](a) &= (hl)_2 \cdot g(S^{-1}((hl)_1) \cdot a) = (h_2 l_2) \cdot g((S^{-1}(l_1) S^{-1}(h_1)) \cdot a) \\ &= h_2 \cdot (l_2 \cdot g(S^{-1}(l_1) \cdot (S^{-1}(h_1) \cdot a))) = h_2((l \cdot g)(S^{-1}(h_1) \cdot a)) \\ &= (h \cdot (l \cdot g))(a)\end{aligned}$$

de onde segue que $(hl) \cdot g = h \cdot (l \cdot g)$.

Sendo $L(A)$ e $R(A)$ H-módulos à esquerda e a ação de H em $M(A)$ induzida de $R(A)$ e $L(A)$ coordenada a coordenada, então $M(A)$ torna-se H-módulo à esquerda. Também sabemos que $M(A)$ é álgebra unitária, nos resta então verificar mais duas propriedades para concluir que $M(A)$ é um H-módulo álgebra à esquerda, a saber:

$$h \cdot [(\rho_1, \rho_2) \cdot (\theta_1, \theta_2)] = [h_1 \cdot (\rho_1, \rho_2)] \cdot [h_2 \cdot (\theta_1, \theta_2)] \tag{6.4}$$

para cada $(\rho_1, \rho_2), (\theta_1, \theta_2) \in M(A), h \in H$, e

$$h \cdot 1_{M(A)} = \epsilon(h) 1_{M(A)} \quad \text{isto é,} \quad h \cdot (I_A, I_A) = \epsilon(h)(I_A, I_A) \tag{6.5}$$

para cada $h \in H$. Quanto à igualdade 6.4, vale observar que ao desenvolver ambas expressões na ação de H e no produto em $M(A)$, ela equivale à

$$(h \cdot (\rho_1 \circ \theta_1), h \cdot (\theta_2 \circ \rho_2)) = ((h_1 \cdot \rho_1) \circ (h_2 \cdot \theta_1), (h_2 \cdot \theta_2) \circ (h_1 \cdot \rho_2))$$

e isso segue de

$$\begin{aligned}((h_1 \cdot \rho_1) \circ (h_2 \cdot \theta_1))(a) &= (h_1 \cdot \rho_1)(h_2 \cdot \theta_1(S(h_3) \cdot a)) \\ &= h_1 \cdot \rho_1(S(h_2) \cdot (h_3 \cdot \theta_1(S(h_4) \cdot a))) \\ &= h_1 \cdot \rho_1((S(h_2)h_3) \cdot \theta_1(S(h_4) \cdot a)) \\ &= h_1 \cdot \rho_1(\epsilon(h_2)\theta_1(S(h_3) \cdot a)) \\ &= h_1\epsilon(h_2) \cdot \rho_1(\theta_1(S(h_3) \cdot a)) \\ &= h_1 \cdot \rho_1(\theta_1(S(h_2) \cdot a)) \\ &= (h \cdot (\rho_1 \circ \theta_1))(a)\end{aligned}$$

e de,

$$\begin{aligned}((h_2 \cdot \theta_2) \circ (h_1 \cdot \rho_2))(a) &= (h_3 \cdot \theta_2)(h_2 \cdot \rho_2(S^{-1}(h_1) \cdot a)) \\ &= h_4 \cdot \theta_2(S^{-1}(h_3) \cdot (h_2 \cdot \rho_2(S^{-1}(h_1) \cdot a))) \\ &= h_4 \cdot \theta_2((S^{-1}(h_3)h_2) \cdot \rho_2(S^{-1}(h_1) \cdot a)) \\ &= h_3 \cdot \theta_2(\epsilon(h_2)\rho_2(S^{-1}(h_1) \cdot a)) \\ &= \epsilon(h_2)h_3 \cdot \theta_2(\rho_2(S^{-1}(h_1) \cdot a)) \\ &= h_2 \cdot \theta_2(\rho_2(S^{-1}(h_1) \cdot a)) \\ &= (h \cdot (\theta_2 \circ \rho_2))(a)\end{aligned}$$

$\forall a \in A$. Já 6.5 segue de

$$h \cdot I_A(a) = h_1 \cdot I_A(S(h_2) \cdot a) = h_1 \cdot (S(h_2) \cdot a) = (h_1 S(h_2)) \cdot a = \epsilon(h)a = \epsilon(h)I_A(a)$$

e

$$h \cdot I_A(a) = h_2 \cdot I_A(S^{-1}(h_1) \cdot a) = h_2 \cdot (S^{-1}(h_1) \cdot a) = (h_2 S^{-1}(h_1)) \cdot a = \epsilon(h)I_A(a)$$

$\forall a \in A$. O que conclui que $M(A)$ é H-módulo álgebra à esquerda. Podemos assim formar o produto smash $M(A)\#H$. Antes de finalizar esta subseção, observemos que das condições

$$h \cdot (\rho_1 \circ \theta_1) = (h_1 \cdot \rho_1) \circ (h_2 \cdot \theta_1) \quad \text{e} \quad h \cdot I_A = \epsilon(h)I_A$$

para $\rho_1, \theta_1 \in L(A)$ e $h \in H$ o H-módulo à esquerda $L(A)$ torna-se um H-módulo álgebra, porém, o mesmo não pode ser afirmado para $R(A)$ devido ao fato dos índices tomarem a ordem contrária em

$$h \cdot (\theta_2 \circ \rho_2) = (h_2 \cdot \theta_2) \circ (h_1 \cdot \rho_2) \tag{6.6}$$

para $\rho_2, \theta_2 \in R(A)$ e $h \in H$.

6.2.2 A inclusão de $M(A)\#H$ em $M(A\#H)$

Para cada índice $j \in I$ temos as subálgebras unitárias A_j e $A_j\#H$, e consequentemente temos definido o isomorfismo K-linear

$$\phi_j := M(A_j)\#H \xrightarrow[\simeq]{i_j^{-1}\otimes I_H} A_j\#H \xrightarrow[\simeq]{i} M(A_j\#H)$$

Observação 6.11 É possível verificar que o isomorfismo acima é também isomorfismo de álgebras. Isso segue do fato que i é isomorfismo de álgebras, já que $A_j\#H$ é álgebra unitária, bem como $i_j^{-1} \otimes 1_H$. Quanto esse segundo, segue do fato que i_j^{-1} é isomorfismo de álgebras já que A_j é álgebra unitária e é também morfismo de H-módulos à esquerda.

Dado $(f,g)\#h \in M(A_j)\#H$ temos

$$\phi_j((f,g)\#h) = [i \circ (i_j^{-1} \otimes I_H)]((f,g)\#h) = i(f(e_j)\#h) = (l_{f(e_j)\#h}, r_{f(e_j)\#h})$$

onde dado um elemento $a\#k \in A_j\#H$

$$\begin{aligned} l_{f(e_j)\#h}(a\#k) &= (f(e_j)\#h)(a\#k) = f(e_j)(h_1 \cdot a)\#h_2k \\ &= f(e_j(h_1 \cdot a))\#h_2k = f(h_1 \cdot a)\#h_2k. \end{aligned}$$

Vale observar que na terceira igualdade acima usamos o fato de que $f \in L(A_j)$ e que $h_1 \cdot a \in A_j$. Também temos que

$$\begin{aligned} r_{f(e_j)\#h}(a\#k) &= (a\#k)(f(e_j)\#h) = a(k_1 \cdot f(e_j))\#k_2h \\ &= a(k_1 \cdot f(\epsilon(k_2)e_j))\#k_3h = a(k_1 \cdot f(\epsilon(S(k_2))e_j))\#k_3h \\ &= a(k_1 \cdot f(S(k_2) \cdot e_j))\#k_3h = a((k_1 \cdot f)(e_j))\#k_2h \\ &= (k_1 \cdot g)(a)e_j\#k_2h = (k_1 \cdot g)(a)\#k_2h \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade acima usamos a compatibilidade de $k_1 \cdot (f,g) = (k_1 \cdot f, k_1 \cdot g) \in M(A_j)$. Devido expressão de tais equações nos é sugerido pensar em um morfismo da forma

$$\begin{aligned} \phi: \quad M(A)\#H &\longrightarrow M(A\#H) \\ (f,g)\#h &\longmapsto (l_{\phi((f,g)\#h)}, r_{\phi((f,g)\#h)}) \end{aligned}$$

onde

$$l_{\phi((f,g)\#h)}(a\#k) = f(h_1 \cdot a)\#h_2k \quad \text{e} \quad r_{\phi((f,g)\#h)}(a\#k) = (k_1 \cdot g)(a)\#k_2h$$

$\forall (f,g)\#h \in M(A)\#H$ e $\forall a\#k \in A\#H$, já que ambas expressões fazem sentido nesse contexto mais geral. Vejamos então que de fato

$$\phi((f,g)\#h) := (l_{\phi((f,g)\#h)}, r_{\phi((f,g)\#h)}) \in M(A\#H)$$

o que mostra que ϕ como ilustrado há pouco é uma função bem definida. Logo após, verificaremos que ϕ é um morfismo injetivo de álgebras, encerrando assim essa subseção.

Vejamos que $l_{\phi((f,g)\#h)} \in L(A\#H)$. Para tanto vamos considerar $a\#k, c\#l \in A\#H$ e mostrar através do desenvolvimento das expressões

$$l_{\phi((f,g)\#h)}((a\#k)(c\#l)) \quad \text{e} \quad [l_{\phi((f,g)\#h)}(a\#k)](c\#l)$$

que ambas coincidem. A saber,

$$\begin{aligned}
l_{\phi((f,g)\#h)}((a\#k)(c\#l)) &= l_{\phi((f,g)\#h)}(a(k_1 \cdot c)\#k_2 l) \\
&= f(h_1 \cdot (a(k_1 \cdot c)))\#h_2(k_2 l) \\
&= f((h_1 \cdot a)(h_2 \cdot (k_1 \cdot c)))\#h_3(k_2 l) \\
&\overset{f \in L(A)}{=} f(h_1 \cdot a)(h_2 \cdot (k_1 \cdot c))\#h_3(k_2 l)
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}
[l_{\phi((f,g)\#h)}(a\#k)](c\#l) &= (f(h_1 \cdot a)\#h_2 k)(c\#l) \\
&= f(h_1 \cdot a)((h_2 k)_1 \cdot c)\#(h_2 k)_2 l \\
&= f(h_1 \cdot a)((h_2 k_1) \cdot c)\#(h_3 k_2) l \\
&= f(h_1 \cdot a)(h_2 \cdot (k_1 \cdot c))\#(h_3 k_2) l.
\end{aligned}$$

De modo análogo temos que $r_{\phi((f,g)\#h)} \in R(A\#H)$, pois

$$\begin{aligned}
(a\#k) r_{\phi((f,g)\#h)}(c\#l) &= (a\#k)((l_1 \cdot g)(c)\#l_2 h) \\
&= a(k_1 \cdot ((l_1 \cdot g)(c)))\#k_2(l_2 h) \\
&= a(k_1 \cdot (l_2 \cdot g(S^{-1}(l_1) \cdot c)))\#k_2(l_3 h) \\
&= a((k_1 l_2) \cdot g(S^{-1}(l_1) \cdot c))\#k_2(l_3 h)
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}
& r_{\phi((f,g)\#h)}((a\#k)(c\#l)) = r_{\phi((f,g)\#h)}(a(k_1 \cdot c)\#k_2 l) \\
= \quad & ((k_2 l)_1 \cdot g)(a(k_1 \cdot c))\#(k_2 l)_2 h \\
= \quad & (k_2 l)_2 \cdot g(S^{-1}((k_2 l)_1) \cdot (a(k_1 \cdot c)))\#(k_2 l)_3 h \\
= \quad & (k_2 l)_3 \cdot g((S^{-1}((k_2 l)_2) \cdot a)(S^{-1}((k_2 l)_1) \cdot (k_1 \cdot c)))\#(k_2 l)_4 h \\
\overset{g \in R(A)}{=} \quad & (k_2 l)_3 \cdot [(S^{-1}((k_2 l)_2) \cdot a) g(S^{-1}((k_2 l)_1) \cdot (k_1 \cdot c))]\#(k_2 l)_4 h \\
= \quad & [(k_2 l)_3 \cdot (S^{-1}((k_2 l)_2) \cdot a)][(k_2 l)_4 \cdot g(S^{-1}((k_2 l)_1) \cdot (k_1 \cdot c))]\#(k_2 l)_5 h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\epsilon((k_2l)_2)a][(k_2l)_3 \cdot g(S^{-1}((k_2l)_1) \cdot (k_1 \cdot c))]\#(k_2l)_4h \\
&= a((k_2l)_2 \cdot g(S^{-1}((k_2l)_1) \cdot (k_1 \cdot c)))\#(k_2l)_3h \\
&= a((k_3l_2) \cdot g(S^{-1}(k_2l_1) \cdot (k_1 \cdot c)))\#(k_4l_3)h \\
&= a((k_3l_2) \cdot g((S^{-1}(l_1)S^{-1}(k_2)) \cdot (k_1 \cdot c)))\#(k_4l_3)h \\
&= a((k_3l_2) \cdot g((S^{-1}(l_1)(S^{-1}(k_2)k_1)) \cdot c))\#(k_4l_3)h \\
&= a((k_2l_2) \cdot g((S^{-1}(l_1)\epsilon(k_1)) \cdot c))\#(k_3l_3)h \\
&= a((\epsilon(k_1)k_2l_2) \cdot g(S^{-1}(l_1) \cdot c))\#(k_3l_3)h \\
&= a((k_1l_2) \cdot g(S^{-1}(l_1) \cdot c))\#(k_2l_3)h.
\end{aligned}$$

Agora tratemos de verificar a compatibilidade do par $(l_{\phi((f,g)\#h)}, r_{\phi((f,g)\#h)})$. Temos

$$(c\#l)l_{\phi((f,g)\#h)}(a\#k) = (c\#l)(f(h_1 \cdot a)\#h_2k) = c(l_1 \cdot f(h_1 \cdot a))\#l_2(h_2k)$$

e finalmente

$$\begin{aligned}
(r_{\phi((f,g)\#h)}(c\#l))(a\#k) &= ((l_1 \cdot g)(c)\#l_2h)(a\#k) \\
&= (l_1 \cdot g)(c)((l_2h)_1 \cdot a)\#(l_2h)_2k \\
&\overset{h_1\cdot(f,g)\in M(A)}{=} c((l_1 \cdot f)((l_2h)_1 \cdot a))\#(l_2h)_2k \\
&= c(l_1 \cdot f(S(l_2) \cdot ((l_3h)_1 \cdot a)))\#(l_3h)_2k \\
&= c(l_1 \cdot f(S(l_2) \cdot ((l_3h_1) \cdot a)))\#(l_4h_2)k \\
&= c(l_1 \cdot f(((S(l_2)l_3)h_1) \cdot a))\#(l_4h_2)k \\
&= c(l_1 \cdot f(\epsilon(l_2)h_1 \cdot a))\#(l_3h_2)k \\
&= c(l_1 \cdot f(h_1 \cdot a))\#(\epsilon(l_2)l_3h_2)k \\
&= c(l_1 \cdot f(h_1 \cdot a))\#(l_2h_2)k
\end{aligned}$$

logo, $(l_{\phi((f,g)\#h)}, r_{\phi((f,g)\#h)}) \in M(A\#H)$ como queríamos. Quanto à injetividade de ϕ, verifiquemos isto a partir de $\operatorname{Ker}\phi$. Seja então $\sum_{j\in J}(f_j, g_j)\#h_j \in \operatorname{Ker}\phi$ com $\{h_j \mid j \in J\}$ sendo um subconjunto $L.I.$ em H, disso segue que

$$0 = l_{\phi(\sum_{j\in J}(f_j,g_j)\#h_j)}(e_i\#1_H) = \sum_j f_j(h_{j,1} \cdot e_i)\#h_{j,2}1_H \quad \forall i \in I$$

logo

$$\sum_{j\in J} f_j(e_i)\#h_j = \sum_j f_j(\epsilon(h_{j,1}) \cdot e_i)\#h_{j,2} = \sum_j f_j(h_{j,1} \cdot e_i)\#h_{j,2}1_H = 0 \qquad (6.7)$$

e tomando $\{h_t^* \mid t \in J\} \subseteq H^*$ tal que $h_t^*(h_j) = \delta_{t,j}$, ao aplicar $I_A \otimes h_t^*$ em ambos os lados da equação 6.7, teremos que $f_t(e_i) = 0\ \forall t \in J, i \in I$. Assim $f_t = 0\ \forall t \in J$, pois dado $a \in A$ arbitrário, podemos supor que $a = e_i a$ para algum $i \in I$ e disso

$$f_t(a) = f_t(e_i a) = f_t(e_i)a = 0a = 0.$$

Consequentemente, $g_t = 0,\ \forall t \in J$, pois $f_t = 0$ e $(0,0) \in M(A)$ é unicamente determinado. Portanto, $\sum_{j \in J}(f_j, g_j)\#h_j = \sum_{j \in J}(0,0)\#h_j = 0$, com isso $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$ e segue então a injetividade do morfismo K-linear ϕ.

Para mostrar que ϕ é morfismo de álgebras, tomamos $(f,g)\#h, (m,n)\#t \in M(A)\#H$ arbitrários e verificaremos que

$$\phi(((f,g)\#h)((m,n)\#t)) = \phi((f,g)\#h) \cdot \phi((m,n)\#t) \tag{6.8}$$

mostrando que suas respectivas funções coordenadas coincidem. A expressão da esquerda em 6.8 é dada por

$$\begin{aligned}
\phi(((f,g)\#h)((m,n)\#t)) &= \phi((f,g)(h_1 \cdot (m,n))\#h_2 t) \\
&= \phi((f,g)(h_1 \cdot m, h_1 \cdot n)\#h_2 t) \\
&= \phi((f \circ (h_1 \cdot m), (h_1 \cdot n) \circ g)\#h_2 t) \\
&= (l_{\phi((f \circ (h_1 \cdot m),(h_1 \cdot n)\circ g)\#h_2 t)}, r_{\phi((f\circ(h_1\cdot m),(h_1\cdot n)\circ g)\#h_2 t)})
\end{aligned}$$

e a expressão do lado direito em 6.8 é dada por

$$\begin{aligned}
\phi((f,g)\#h) \cdot \phi((m,n)\#t) &= (l_{\phi((f,g)\#h)}, r_{\phi((f,g)\#h)}) \cdot (l_{\phi((m,n)\#t)}, r_{\phi((m,n)\#t)}) \\
&= (l_{\phi((f,g)\#h)} \circ l_{\phi((m,n)\#t)}, r_{\phi((m,n)\#t)} \circ r_{\phi((f,g)\#h)}).
\end{aligned}$$

Tomando então $a\#k \in A\#H$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
l_{\phi((f\circ(h_1\cdot m),(h_1\cdot n)\circ g)\#h_2 t)}(a\#k) &= (f \circ (h_1 \cdot m))((h_2 t)_1 \cdot a)\#(h_2 t)_2 k \\
&= f((h_1 \cdot m)((h_2 t_1) \cdot a))\#(h_3 t_2)k \\
&= f(h_1 \cdot m(S(h_2) \cdot ((h_3 t_1) \cdot a)))\#(h_4 t_2)k \\
&= f(h_1 \cdot m((S(h_2)h_3)t_1 \cdot a))\#(h_4 t_2)k \\
&= f(h_1 \cdot m((\epsilon(h_2)t_1 \cdot a)))\#(h_3 t_2)k \\
&= f(h_1 \cdot m(t_1 \cdot a))\#(\epsilon(h_2)h_3 t_2)k \\
&= f(h_1 \cdot m(t_1 \cdot a))\#(h_2 t_2)k
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}(l_{\phi((f,g)\#h)} \circ l_{\phi((m,n)\#t)})(a\#k) &= l_{\phi((f,g)\#h)}(l_{\phi((m,n)\#t)}(a\#k)) \\ &= l_{\phi((f,g)\#h)}(m(t_1 \cdot a)\#t_2k) \\ &= f(h_1 \cdot m(t_1 \cdot a))\#h_2(t_2k)\end{aligned}$$

logo os multiplicadores à esquerda em ambas expressões de 6.8 coincidem. Quanto aos multiplicadores à direita temos

$$\begin{aligned}r_{\phi((f\circ(h_1\cdot m),(h_1\cdot n)\circ g)\#h_2t)}(a\#k) &= (k_1 \cdot ((h_1 \cdot n) \circ g))(a)\#k_2(h_2t) \\ &= ((k_2 \cdot (h_1 \cdot n)) \circ (k_1 \cdot g))(a)\#k_3(h_2t) \\ &= (k_2 \cdot (h_1 \cdot n))((k_1 \cdot g)(a))\#k_3(h_2t).\end{aligned}$$

Vale destacar que na segunda igualdade acima consideramos a mesma propriedade que em 6.6 uma vez que $h_1 \cdot n, g \in R(A)$. Por fim,

$$\begin{aligned}(r_{\phi((m,n)\#t)} \circ r_{\phi((f,g)\#h)})(a\#k) &= r_{\phi((m,n)\#t)}(r_{\phi((f,g)\#h)}(a\#k)) \\ &= r_{\phi((m,n)\#t)}((k_1 \cdot g)(a)\#k_2h) \\ &= ((k_2h)_1 \cdot n)((k_1 \cdot g)(a))\#(k_2h)_2t \\ &= ((k_2h_1) \cdot n)((k_1 \cdot g)(a))\#(k_3h_2)t \\ &= (k_2 \cdot (h_1 \cdot n))((k_1 \cdot g)(a))\#(k_3h_2)t.\end{aligned}$$

Com isso concluímos que $\phi : M(A)\#H \longrightarrow M(A\#H)$ é um morfismo injetivo de álgebras.

6.2.3 Exemplo

Consideremos A um H-módulo álgebra com base $\{u_i\}_{i\in I}$ K-como espaço vetorial, sendo $|I| = \infty$, e tal que

$$u_iu_j = \delta_{i,j}u_i = \begin{cases} u_i & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

$\forall i, j \in I$. Nesse caso, $A \simeq K^{(I)}$ como K-álgebra e

$$u = \left\{ \sum_{i\in J\,,\,|J|<\infty} u_i \right\}$$

é um sistema de unidades locais para A. Consideremos $M(A)$ nesse caso. Sejam $(f, g) \in M(A)$ e $i \in I$. Assim, se

$$f(u_i) = \sum_j k_ju_j \quad \text{então} \quad f(u_i) = f(u_iu_i) = f(u_i)u_i = \sum_j (k_ju_j)u_i \overset{j=i}{=} k_iu_i$$

e

$$g(u_i) = \sum_s r_s u_s \quad \text{então} \quad g(u_i) = g(u_i u_i) = u_i g(u_i) = u_i \sum_s r_s u_s = \sum_s r_s u_i u_s \overset{s=i}{=} r_i u_i.$$

Ademais, da compatibilidade do par (f, g) temos

$$\begin{aligned} u_i f(u_i) = g(u_i) u_i \quad &\Longleftrightarrow \quad u_i(k_i u_i) = (r_i u_i) u_i \\ &\Longleftrightarrow \quad k_i u_i^2 = r_i u_i^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad k_i u_i = r_i u_i \end{aligned}$$

logo $f = g$, pois coincidem na base. Portanto, se $(f, g) \in M(A)$, então $f = g$ e $f(u_i) = k_i u_i$, $\forall i \in I$ com $k_i \in K$.

Observação 6.12 Através da caracterização obtida acima temos que a aplicação K-linear dada por

$$\begin{aligned} \omega : \quad M(A) &\longrightarrow K^I \\ (f, g) &\longmapsto (k_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

onde $f(u_i) = k_i u_i$ para cada $i \in I$ é uma bijeção. Ademais, dados $(f, g), (f', g') \in M(A)$ com $f(u_i) = k_i u_i$ e $f'(u_i) = k_i' u_i$ para cada $i \in I$, temos que

$$(f \circ f')(u_i) = f(f'(u_i)) = f(k_i' u_i) = k_i' f(u_i) = k_i' k_i u_i = k_i k_i' u_i$$

para cada $i \in I$. Segue disso que ω é morfismo de álgebras, pois

$$\omega((f, g))\omega((f', g')) = (k_i)_{i \in I}(k_i')_{i \in I} = (k_i k_i')_{i \in I} = \omega((f \circ f', g' \circ g)) = \omega((f, g)(f', g')).$$

Assim, $M(K^{(I)}) \simeq K^I$ como K-álgebras.

Analisemos agora $M(A\#H)$. Dados $(F, G) \in M(A\#H)$ e $i \in I$, podemos escrever

$$F(u_i\#1_H) = \sum_j u_j\#h_j \quad \text{com} \quad h_j \in H.$$

Segue disso que

$$\begin{aligned} F(u_i\#1_H) &= F((u_i\#1_H)(u_i\#1_H)) = F(u_i\#1_H) u_i\#1_H \\ &= \left(\sum_j u_j\#h_j \right) u_i\#1_H \overset{u_i \in u}{=} \sum_j u_j u_i\#h_j \\ &\overset{j=i}{=} u_i\#h_i. \end{aligned}$$

Analogamente, se

$$G(u_i\#1_H) = \sum_s u_s\#t_s \quad \text{com} \quad t_s \in H$$

então

$$\begin{aligned} G(u_i\#1_H) &= G((u_i\#1_H)(u_i\#1_H)) = u_i\#1_H G(u_i\#1_H) \\ &= u_i\#1_H\left(\sum_s u_s\#t_s\right) = \sum_s u_i u_s\#t_s \\ &\overset{s=i}{=} u_i\#t_i. \end{aligned}$$

E ainda, da compatibilidade do par (F, G) temos que

$$\begin{aligned} u_i\#1_H F(u_i\#1_H) = G(u_i\#1_H)u_i\#1_H &\iff (u_i\#1_H)(u_i\#h_i) = (u_i\#t_i)(u_i\#1_H) \\ &\iff u_i^2\#h_i = u_i^2\#t_i \\ &\iff u_i\#h_i = u_i\#t_i \end{aligned}$$

e aplicando $u_i^* \otimes I_H$ em ambos os lados da última equação teremos $h_i = t_i$. Portanto, temos que

$$F(u_i\#1_H) = G(u_i\#1_H) = u_i\#h_i \quad \text{para algum} \quad h_i \in H, \quad \forall i \in I.$$

Porém, vale ressaltar que essa condição não nos permite dizer que $F = G$, pois o conjunto $\{u_i\#1_H\}_{i\in I}$ não é uma K-base para $A\#H$. Entretanto, tal condição permite explicitar F e G na K-base de $A\#H$. Com efeito, considerando $\{g_l\}_{l\in L}$ como uma K-base para H e sendo $\{u_i\}_{i\in I}$ uma K-base para A, temos que $\{u_i\#g_l\}_{(i,l)\in I\times L}$ é uma K-base para $A\#H$. Assim

$$F(u_i\#g_l) = F((u_i\#1_H)(u_i\#g_l)) = F(u_i\#1_H)u_i\#g_l = (u_i\#h_i)(u_i\#g_l) = u_i\#h_i g_l$$

e

$$G(u_i\#g_l) = G((u_i\#g_l)(u_i\#1_H)) = u_i\#g_l G(u_i\#1_H) = (u_i\#g_l)(u_i\#h_i) = u_i\#g_l h_i$$

ou seja, F e G ficam definidos na K-base através da família $\{h_i\}_{i\in I}$.

Reciprocamente, dadas K-bases $\{g_l\}_{l\in L}, \{u_i\}_{i\in I}$ de H e A respectivamente, e uma família $\{h_i\}_{i\in I} \subseteq H$, ficam definidos os morfismos K-lineares F e G definidos sobre a K-base de $A\#H$

$$F(u_i\#g_l) := u_i\#h_i g_l \quad \text{e} \quad G(u_i\#g_l) := u_i\#g_l h_i.$$

Com isso $F \in L(A\#H)$, pois dados $i, r \in I$ e $l, s \in L$ temos

$$F((u_i\#g_l)(u_r\#g_s)) = F(u_i u_r\#g_l g_s) = F(\delta_{i,r}u_i\#g_l g_s) = \delta_{i,r}F(u_i\#g_l g_s) = \star$$

considerando que $g_l g_s = \sum_j k_j g_j$ teremos

$$\star \;=\; \delta_{i,r}F\left(u_i\#\sum_j k_j g_j\right) = \sum_j \delta_{i,r}k_j F(u_i\#g_j) = \sum_j \delta_{i,r}k_j(u_i\#h_i g_j)$$

$$= \delta_{i,r}u_i\#h_i\left(\sum_j k_jg_j\right) = \delta_{i,r}u_i\#h_i(g_lg_s)$$

e por outro lado

$$F(u_i\#g_l)u_r\#g_s = (u_i\#h_ig_l)(u_r\#g_s) = u_iu_r\#(h_ig_l)g_s = \delta_{i,r}u_i\#(h_ig_l)g_s.$$

De maneira análoga podemos concluir que $G \in R(A\#H)$. Com efeito,

$$G((u_i\#g_l)(u_r\#g_s)) = G(u_iu_r\#g_lg_s) = G(\delta_{i,r}u_i\#g_lg_s) = \delta_{i,r}G(u_i\#g_lg_s) = \star$$

e sendo $g_lg_s = \sum_j k_jg_j$

$$\begin{aligned}\star &= \delta_{i,r}G\left(u_i\#\sum_j k_jg_j\right) = \sum_j \delta_{i,r}k_jG(u_i\#g_j) = \sum_j \delta_{i,r}k_j(u_i\#g_jh_i)\\ &= \delta_{i,r}u_i\#\left(\sum_j k_jg_j\right)h_i = \delta_{i,r}u_i\#(g_lg_s)h_i\end{aligned}$$

e por outro lado

$$u_i\#g_lG(u_r\#g_s) = (u_i\#g_l)(u_r\#g_sh_r) = u_iu_r\#g_l(g_sh_r) = \delta_{i,r}u_i\#g_l(g_sh_r)$$

e onde ambas equações se equiparam para $i = r$ e se anulam caso contrário. Ademais, o par $(F, G) \in M(A\#H)$, pois

$$u_i\#g_lF(u_r\#g_s) = (u_i\#g_l)(u_r\#h_rg_s) = u_iu_r\#g_l(h_rg_s) = \delta_{i,r}u_i\#g_l(h_rg_s)$$

e

$$G(u_i\#g_l)u_r\#g_s = (u_i\#g_lh_i)(u_r\#g_s) = u_iu_r\#(g_lh_i)g_s = \delta_{i,r}u_i\#(g_lh_i)g_s$$

de onde ambas expressões coincidem, pois se equiparam para $i = r$ e se anulam caso contrário, garantindo assim a compatibilidade do par (F, G).

Resumindo, mostramos que $(F, G) \in M(A\#H)$ se, e só se, existe uma família $\{h_i\}_{i\in I} \subseteq H$ que define F e G na K-base de $A\#H$ por

$$F(u_i\#g_l) = u_i\#h_ig_l \quad \text{e} \quad G(u_i\#g_l) = u_i\#g_lh_i, \quad \forall i \in I, l \in L$$

e em particular, $F(u_i\#1_H) = G(u_i\#1_H) = u_i\#h_i, \forall i \in I.$

Com relação ao morfismo injetivo

$$\begin{aligned}\phi:\ M(A)\#H &\longrightarrow M(A\#H)\\ (f,f)\#h &\longmapsto (l_{\phi((f,f)\#h)}, r_{\phi((f,f)\#h)})\end{aligned}$$

consideramos $\{g_l\}_{l\in L}$ como uma K-base de H, e com isso podemos representar um elemento qualquer de $M(A)\#H$ por $\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}$ onde $g_{i_j} \in \{g_l\}_{l\in L}$ e $f_{i_j} \in L(A)$ $\forall j = 1, \cdots, n$. Assim

$$\phi\left(\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}\right) = \left(l_{\left(\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}\right)}, r_{\left(\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}\right)}\right).$$

Com isso

$$\begin{aligned} l_{\left(\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}\right)}(u_r\#1_H) &= \sum_{j=1}^n f_{i_j}(g_{i_j,1}\cdot u_r)\#g_{i_j,2}1_H = \sum_{j=1}^n f_{i_j}(\epsilon(g_{i_j,1})u_r)\#g_{i_j,2} \\ &= \sum_{j=1}^n f_{i_j}(u_r)\#\epsilon(g_{i_j,1})g_{i_j,2} = \sum_{j=1}^n f_{i_j}(u_r)\#g_{i_j} = \star \end{aligned}$$

considerando que f_{i_j} é dado por $f_{i_j}(u_r) = k_j^r u_r$ $\forall r \in I$, temos que

$$\star = \sum_{j=1}^n k_j^r u_r\#g_{i_j} = u_r\#\sum_{j=1}^n k_j^r g_{i_j}.$$

Segue disso as seguintes afirmações:

1. Se $\dim_K H = \infty$, ϕ não é sobrejetora e temos somente uma imersão de $M(A)\#H$ em $M(A\#H)$;

2. Se $\dim_K H = n < \infty$, ϕ é sobrejetora e temos então um isomorfismo de álgebras entre $M(A)\#H$ e $M(A\#H)$.

De fato:

1. Se para $(F,G) \in M(A\#H)$ tivessemos $(F,G) = \phi\left(\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}\right)$ então $F = l_{\phi\left(\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}\right)}$, com isso

$$u_r\#h_r = F(u_r\#1_H) = l_{\phi\left(\sum_{j=1}^n (f_{i_j}, f_{i_j})\#g_{i_j}\right)}(u_r\#1_H) = u_r\#\sum_{j=1}^n k_j^r g_{i_j}$$

   e ao aplicar $u_r^* \otimes I_H$ em ambos os lados da equação acima surge $h_r = \sum_{j=1}^n k_j^r g_{i_j}$, ou seja, $h_r \in \langle g_{i_1}, \cdots, g_{i_n}\rangle$ $\forall r \in I$ de onde temos um absurdo no caso de $\dim_K H = \infty$, pois nesse caso é possível considerar uma família $\{h_r\}_{r\in I} \subseteq H$ de tal forma que $\dim_K(\langle h_r\rangle_{r\in I}) = \infty$.

2. Sendo $\dim_K H = n < \infty$, fixemos $\beta_H = \{g_1, \cdots, g_n\}$ como sendo uma K-base para H. Dado $(F,G) \in M(A\#H)$ com as relações

$$F(u_i\#1_H) = G(u_i\#1_H) = u_i\#h_i \quad \forall i \in I$$

consideramos para cada $h_i \in H$ sua expressão em β_H dada por

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} k_j^i g_j \quad \text{onde} \quad k_j^i \in K$$

e definimos morfismos K-lineares $f_j : A \longrightarrow A, \forall j = 1, \cdots, n$ por

$$f_j(u_i) = k_j^i u_i \quad \forall i \in I.$$

Com isso temos multiplicadores $(f_j, f_j) \in M(A)$. Assim

$$\begin{aligned} l_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}(u_i\#1_H) &= \sum_{j=1}^{n} f_j(u_i)\#g_j = \sum_{j=1}^{n} k_j^i u_i\#g_j = u_i\#\sum_{j=1}^{n} k_j^i g_j \\ &= u_i\#h_i = F(u_i\#1_H) \end{aligned}$$

e multiplicando à direita em ambos os lados da expressão

$$l_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}(u_i\#1_H) = F(u_i\#1_H)$$

por $u_i\#g_r$ e considerando que $l_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}, F \in L(A\#H)$ concluímos que

$$l_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}(u_i\#g_r) = F(u_i\#g_r) \quad \forall i \in I, \forall r = 1, \cdots, n$$

logo, $l_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)} = F$. Analogamente

$$\begin{aligned} r_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}(u_i\#1_H) &= \sum_{j=1}^{n} f_j(u_i)\#g_j = \sum_{j=1}^{n} k_j^i u_i\#g_j = u_i\#\sum_{j=1}^{n} k_j^i g_j \\ &= u_i\#h_i = G(u_i\#1_H) \end{aligned}$$

e multiplicando à esquerda em ambos os lados da expressão

$$r_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}(u_i\#1_H) = G(u_i\#1_H)$$

por $u_i\#g_r$ e considerando que $r_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}, G \in R(A\#H)$ concluímos que

$$r_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}(u_i\#g_r) = G(u_i\#g_r) \quad \forall i \in I, \forall r = 1, \cdots, n.$$

donde segue que $r_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)} = G$. Portanto

$$(F, G) = \left(l_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}, r_{\phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j,f_j)\#g_j\right)}\right) = \phi\left(\sum_{j=1}^{n}(f_j, f_j)\#g_j\right)$$

logo $\phi : M(A)\#H \longrightarrow M(A\#H)$ é sobrejetor e consequentemente um isomorfismo.

6.2.4 Caracterização da imagem de $\phi : M(A)\#H \longrightarrow M(A\#H)$

Fixemos $\beta_H = \{g_j\}_{j\in J}$ como uma K-base para H. Dados $(F,G) \in M(A\#H)$ e $a \in A$, podemos escrever

$$F(a\#1_H) = \sum_{j\in L(a)} a_j(a)\#g_j \quad \text{e} \quad G(a\#1_H) = \sum_{j\in R(a)} b_j(a)\#g_j \tag{6.9}$$

onde $L(a) = \{j \in J \,|\, a_j(a) \neq 0\}$ e $R(a) = \{j \in J \,|\, b_j(a) \neq 0\}$. Vale ressaltar que consideramos a soma sobre o conjunto vazio como sendo identicamente nula. Dessas considerações temos que ficam definidos morfismos $a_j, b_j : A \longrightarrow A \; \forall j \in J$ através das expressões bem definidas de F e G.

Temos que $\forall l \in J, b_l \in R(A)$. De fato, dados $a, b \in A$ e $k \in K$

$$G((a+kb)\#1_H) = G(a\#1_H) + kG(b\#1_H)$$

ou seja

$$\sum_{l\in R(a+kb)} b_l(a+kb)\#g_l = \sum_{l\in R(a)} b_l(a)\#g_l + k\sum_{l\in R(b)} b_l(b)\#g_l \tag{6.10}$$

Consideremos agora $T = R(a+kb) \cup R(a) \cup R(b)$. Desse modo, temos que 6.10 pode ser escrito como

$$\sum_{l\in T} b_l(a+kb)\#g_l = \sum_{l\in T} b_l(a)\#g_l + k\sum_{l\in T} b_l(b)\#g_l \tag{6.11}$$

pois caso algum índice $l \in T$ seja de tal forma que $l \notin R(a+kb)$, $l \notin R(a)$ ou $l \notin R(b)$, então estaríamos simplesmente somando em 6.10 parcelas nulas, o que não alteraria a igualdade explicitada. Dado $l \in J$ se tivermos que $l \notin T$, então por definição $b_l(a+kb) = b_l(a) = b_l(b) = 0$ e com isso

$$b_l(a+kb) = b_l(a) + kb_l(b)$$

Caso $l \in T$ ao aplicar $I_A \otimes g_l^*$ em ambos os lados de 6.11 teremos que

$$b_l(a+kb) = b_l(a) + kb_l(b)$$

ou seja, de qualquer forma

$$b_l(a+kb) = b_l(a) + kb_l(b) \quad \forall a,b \in A \quad \forall l \in J$$

donde segue a K-linearidade de b_l. Para a A-linearidade à esquerda, tome $a, b \in A$. Então

$$G(ab\#1_H) = \sum_{l\in R(ab)} b_l(ab)\#g_l$$

por outro lado

$$\begin{aligned} G(ab\#1_H) &= G((a\#1_H)(b\#1_H)) = a\#1_H G(b\#1_H) \\ &= a\#1_H \sum_{l\in R(b)} b_l(b)\#g_l = \sum_{l\in R(b)} ab_l(b)\#g_l \end{aligned}$$

disso segue que

$$\sum_{l\in R(ab)} b_l(ab)\#g_l = \sum_{l\in R(b)} ab_l(b)\#g_l$$

ou ainda, considerando $T = R(ab) \cup R(b)$ tal expressão pode ser escrita como

$$\sum_{l\in T} b_l(ab)\#g_l = \sum_{l\in T} ab_l(b)\#g_l \tag{6.12}$$

Portanto

$$b_l(ab) = ab_l(b) \quad \forall a, b \in A \quad \forall l \in J$$

pois a igualdade é nula quando $l \notin T$ ou válida decorrente da aplicação $I_A \otimes g_l^*$ em 6.12 para $l \in T$. Segue então a A-linearidade à esquerda de b_l e com isso $b_l \in R(A)$ $\forall l \in J$.

Para cada $l \in J$, definimos

$$\begin{aligned} f_l : \; A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a_l(e_r)a \end{aligned}$$

para $a = e_r a$ e onde a_l vem de 6.9. Com relação a essa definição podemos afirmar que f_l está bem definida. De fato,

$$F(a\#1_H) = F((e_r\#1_H)(a\#1_H)) = F(e_r\#1_H)a\#1_H = \left(\sum_{j\in L(e_r)} a_j(e_r)\#g_j\right) a\#1_H = \star$$

para cada $j \in L(e_r)$ podemos escrever

$$\Delta(g_j) = \sum_{(k,l)\in A_K\times A_L} c^j_{k,l} g_k \otimes g_l$$

onde $c^j_{k,l} \in K$ e $A_K \times A_L = \{(k,l) \in J \times J \,|\, c^j_{k,l} \neq 0\}$. Dessa forma

$$\star = \sum_{j\in L(e_r)} \sum_{(k,l)\in A_K\times A_L} c^j_{k,l} a_j(e_r)(g_k \cdot a)\#g_l = \sum_{l\in A_L} \left(\sum_{j\in L(e_r),\, k\in A_K} c^j_{k,l} a_j(e_r)(g_k \cdot a) \right) \#g_l$$

e sendo

$$F(a\#1_H) = \sum_{l\in L(a)} a_l(a)\#g_l$$

temos que

$$\sum_{l\in L(a)} a_l(a)\#g_l = \sum_{l\in A_L}\left(\sum_{j\in L(e_r),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_r)(g_k\cdot a)\right)\#g_l$$

Considerando $T = L(a)\cup A_L$, podemos reescrever tal expressão como

$$\sum_{l\in T} a_l(a)\#g_l = \sum_{l\in T}\left(\sum_{j\in L(e_r),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_r)(g_k\cdot a)\right)\#g_l \tag{6.13}$$

com isso

$$a_l(a) = \sum_{j\in L(e_r),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_r)(g_k\cdot a) \quad \forall l\in J \quad \forall a\in A \text{ com } a = e_r a \tag{6.14}$$

pois a igualdade é nula quando $l\notin T$ ou válida decorrente da aplicação $I_A\otimes g_l^*$ em 6.13 para $l\in T$. Assim, se $a = e_r a = e_s a$, tomamos $m\in I$ tal que $r,s\leq m$ e com isso $e_r = e_m e_r$ e $e_s = e_m e_s$. De $e_r = e_m e_r$ sabemos por 6.14 que

$$a_l(e_r) = \sum_{j\in L(e_m),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_m)(g_k\cdot e_r) = \sum_{j\in L(e_m),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_m)\epsilon(g_k)e_r \quad \forall l\in J$$

analogamente, de $e_s = e_m e_s$

$$a_l(e_s) = \sum_{j\in L(e_m),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_m)(g_k\cdot e_s) = \sum_{j\in L(e_m),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_m)\epsilon(g_k)e_s \quad \forall l\in J$$

e portanto

$$a_l(e_r)a = \sum_{j\in L(e_m),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_m)\epsilon(g_k)e_r a \overset{e_r a = e_s a}{=} \sum_{j\in L(e_m),\, k\in A_K} c^j_{k,l}a_j(e_m)\epsilon(g_k)e_s a = a_l(e_s)a.$$

Logo, f_l está bem definida para cada $l\in J$. Temos também que f_l é K-linear $\forall l\in J$. Com efeito, dados $a,b\in A$ e $k\in K$ podemos considerar e_i de tal forma que $e_i a = a$ e $e_i b = b$, disso segue que $e_i(a+kb) = (e_i a) + k(e_i b) = a + kb$ e consequentemente

$$f_l(a+kb) = a_l(e_i)(a+kb) = a_l(e_i)a + ka_l(e_i)b = f_l(a) + kf_l(b)$$

e ainda f_l é A-linear à direita $\forall l\in J$. Com efeito, dados $a,b\in A$ e sendo $a = e_r a$ então $ab = (e_r a)b = e_r(ab)$, assim

$$f_l(ab) = a_l(e_r)(ab) = (a_l(e_r)a)b = f_l(a)b$$

portanto, $f_l\in L(A)\ \forall l\in J$.

Para cada $l \in J$, $(f_l, b_l) \in M(A)$. De fato, tomando $a, b \in A$ podemos considerar $t \in I$ de tal modo que $a = ae_t$ e $b = e_t b$. Assim,

$$af_l(b) = b_l(a)b \quad \forall l \in J \iff aa_l(e_t)b = ab_l(e_t)b \quad \forall l \in J.$$

Na equivalência acima usamos o fato de que $b = e_t b$ e com isso $f_l(b) = a_l(e_t)b$ e também que b_l é A-linear à esquerda para que $b_l(a) = b_l(ae_t) = ab_l(e_t)$. Vejamos então que tal condição é válida. Para isso consideramos a compatibilidade do multiplicador $(F, G) \in M(A\#H)$ para obter

$$\begin{aligned}
e_t\#1_H F(e_t\#1_H) &= G(e_t\#1_H)e_t\#1_H \\
e_t\#1_H \left(\sum_{l \in L(e_t)} a_l(e_t)\#g_l\right) &= \left(\sum_{l \in R(e_t)} b_l(e_t)\#g_l\right) e_t\#1_H \\
\sum_{l \in L(e_t)} e_t a_l(e_t)\#g_l &= \sum_{l \in R(e_t)} b_l(e_t)e_t\#g_l
\end{aligned}$$

ou ainda, considerando $T = L(e_t) \cup R(e_t)$ a última expressão acima pode ser escrita como

$$\sum_{l \in T} e_t a_l(e_t)\#g_l = \sum_{l \in T} b_l(e_t)e_t\#g_l \tag{6.15}$$

Portanto

$$e_t a_l(e_t) = b_l(e_t)e_t \quad \forall l \in J$$

pois a igualdade é nula quando $l \notin T$ ou válida decorrente da aplicação $I_A \otimes g_l^*$ em 6.15 para $l \in T$. Logo

$$\begin{aligned}
a(e_t a_l(e_t))b &= a(b_l(e_t)e_t)b \\
(ae_t)a_l(e_t)b &= ab_l(e_t)(e_t b) \\
aa_l(e_t)b &= ab_l(e_t)b
\end{aligned}$$

$\forall l \in J$, como gostaríamos.

Para cada $(F, G) \in M(A\#H)$ definimos o conjunto $\overline{J} = \{j \in J \,|\, b_j \neq 0\}$. Disso vale a seguinte afirmação:

Para cada $\overline{j} \in \overline{J}$ existe $l(\overline{j}) \in I$ tal que $\overline{j} \in R\left(e_{l(\overline{j})}\right)$.

De fato, se $\overline{j} \in \overline{J}$ então $b_{\overline{j}} \neq 0$, assim existe $a = ae_{l(\overline{j})} \in A$ tal que

$$b_{\overline{j}}(a) \neq 0 \iff b_{\overline{j}}(ae_{l(\overline{j})}) = ab_{\overline{j}}(e_{l(\overline{j})}) \neq 0$$

com isso, em particular $b_{\overline{j}}(e_{l(\overline{j})}) \neq 0$.

Considerando o morfismo injetivo $\phi : M(A)\#H \longrightarrow M(A\#H)$. Se $(F,G) \in \mathrm{Im}(\phi)$ com $(F,G) = \phi(x) = (l_{\phi(x)}, r_{\phi(x)})$ para algum

$$x = \sum_{r\in R}(f_r, b_r)\#g_r \in M(A)\#H$$

onde $|R| < \infty$, então em particular $r_{\phi(x)} = G$ sendo x único, já que ϕ é injetor. Temos então que

$$\begin{aligned} \sum_{j\in R\left(e_{l(\overline{j})}\right)} b_j\left(e_{l(\overline{j})}\right)\#g_j &= G\left(e_{l(\overline{j})}\#1_H\right) = r_{\phi(x)}\left(e_{l(\overline{j})}\#1_H\right) \\ &= r_{\phi\left(\sum_{r\in R}(f_r,b_r)\#g_r\right)}\left(e_{l(\overline{j})}\#1_H\right) \\ &= \sum_{r\in R} b_r\left(e_{l(\overline{j})}\right)\#g_r \end{aligned}$$

$\forall \overline{j} \in \overline{J}$. Considerando a definição de $R\left(e_{l(\overline{j})}\right)$, podemos inferir a partir da igualdade

$$\sum_{j\in R\left(e_{l(\overline{j})}\right)} b_j\left(e_{l(\overline{j})}\right)\#g_j = \sum_{r\in R} b_r\left(e_{l(\overline{j})}\right)\#g_r \quad \forall \overline{j} \in \overline{J}$$

que $R\left(e_{l(\overline{j})}\right) \subseteq R$ para cada $\overline{j} \in \overline{J}$. Segue disso e do fato que $\overline{j} \in R\left(e_{l(\overline{j})}\right)$ que

$$\overline{J} \subseteq \bigcup_{\overline{j}\in\overline{J}} R\left(e_{l(\overline{j})}\right) \subseteq R$$

o que é absurdo se $|\overline{J}| = \infty$. Portanto, se (F,G) está na imagem de ϕ então $|\overline{J}| < \infty$.

Reciprocamente, se $|\overline{J}| < \infty$, podemos considerar só os finitos índices $j_1, \cdots, j_n \in J$ para os quais $b_{j_1}, \cdots, b_{j_n} \neq 0$, isto é, $j_1, \cdots, j_n \in \overline{J}$ e escrever

$$G(a\#1_H) = \sum_{k=1}^{n} b_{j_k}(a)\#g_{j_k} \quad \forall a \in A$$

mesmo que alguns valores $b_{j_k}(a)$ venham a ser nulos de acordo com esta notação. Porém, dessa forma

$$G(e_l\#1_H) = \sum_{k=1}^{n} b_{j_k}(e_l)\#g_{j_k} = r_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}(e_l\#1_H) \quad \forall l \in I \tag{6.16}$$

e com isso

$$G(a\#h) = r_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}(a\#h) \quad \forall a\#h \in A\#H$$

De fato, para $a\#h = ae_l\#h = (a\#h)(e_l\#1_H)$, é suficiente multiplicar à esquerda em ambos os lados da equação 6.16 por $a\#h$ e considerar que G e $r_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)} \in R(A\#H)$ para obter tal expressão. Disso segue que

$$G = r_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}$$

Analisando agora F, tomamos $a \in A$ com $a = e_r a = a e_r$ e disso

$$\begin{aligned} F(a\#1_H) &= F((e_r\#1_H)(a\#1_H)) \\ &= F(e_r\#1_H)a\#1_H \\ &= \left(\sum_{j\in L(e_r)} a_j(e_r)\#g_j \right) a\#1_H \\ &= \sum_{j\in L(e_r)} a_j(e_r)(g_{j,1}\cdot a)\#g_{j,2} \\ &\overset{g_{j,1}\cdot a = e_r(g_{j,1}\cdot a)}{=} \sum_{j\in L(e_r)} f_j(g_{j,1}\cdot a)\#g_{j,2} = \star \end{aligned}$$

como $b_j = 0$ para $j \neq j_1, \cdots, j_n$ então o mesmo vale para os respectivos $f_j's$, isto é, $f_j = 0$ para $j \neq j_1, \cdots, j_n$, pois b_j determina f_j $\forall j \in J$, e além disso $(0,0) \in M(A)$. Dessa forma podemos escrever

$$\star = \sum_{k=1}^{n} f_{j_k}(g_{j_k,1}\cdot a)\#g_{j_k,2} = l_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}(a\#1_H)$$

e disso segue que

$$F(a\#h) = l_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}(a\#h) \quad \forall a\#h \in A\#H$$

pois basta multiplicar à direita em ambos os lados de

$$F(a\#1_H) = l_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}(a\#1_H)$$

por $e_r\#h$ e considerar que F e $l_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)} \in L(A\#H)$. Concluímos portanto que

$$F = l_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}$$

e consequentemente

$$(F,G) = \left(l_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)}, r_{\phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k}\right)} \right) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n}(f_{j_k},b_{j_k})\#g_{j_k} \right)$$

Resumindo, dado $(F,G) \in M(A\#H)$ e sendo

$$G(a\#1_H) = \sum_{j\in R(a)} b_j(a)\#g_j \quad \text{e} \quad \overline{J} = \{j \in J \mid b_j \neq 0\}$$

se $|\overline{J}| = \infty$ então $(F,G) \notin \mathrm{Im}(\phi)$ e se $|\overline{J}| < \infty$ então $(F,G) \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Com tais considerações vale ressaltar que se H tiver dimensão finita, então para qualquer multiplicador $(F,G) \in M(A\#H)$ teremos $\overline{J}$ associado à G com $|\overline{J}| < \infty$ e dessa forma segue o seguinte resultado

Teorema 6.13 *Se* $\dim H < \infty$, *então* $\phi : M(A)\#H \longrightarrow M(A\#H)$ *é um isomorfismo de álgebras.*

Referências Bibliográficas

[1] ALVARES, E. R.; ALVES, M. M. S.; BATISTA, E. ***Partial Hopf module categories***. Journal of Pure and Applied Algebra, v. 217 (8) (2013), 1517-1534.

[2] ALVES, M. M. S.; BATISTA, E. . ***Globalization theorems for partial Hopf (co)actions, and some of their applications***. Contemporary Mathematics - American Mathematical Society, v. 537 (2011), 13-30.

[3] ASSEM, I. ***Algèbres et modules***. Ed. Masson, 1997.

[4] BLATTNER, R. J.; COHEN, M.; MONTGOMERY, S. ***Crossed products and inners actions of Hopf algebras***. Transactions of the American Mathematical Society, v. 298 (2) (1986), 671-711.

[5] BLATTNER, R. J.; MONTGOMERY, S. ***A duality theorem for Hopf module algebras***. Journal of Algebra, v. 95 (1) (1985), 153-172.

[6] BLATTNER, R. J.; MONTGOMERY, S. ***Crossed Products and Galois Extensions of Hopf Algebras***. Pacific Journal of Mathematics, v. 137 (1) (1989), 37-54.

[7] CAENEPEEL, S.; GROOT, E.; VERCRUYSSE, J. ***Constructing infinite comatrix corings from colimits***. Applied Categorical Structures, v. 14 (2006), 539-565.

[8] CIBILS, C.; MARCOS, E. N. ***Skew category, Galois covering and smash product of a*** K***-category***. Proc. Amer. Math. Soc., v. 134 (1) (2006), 39-50.

[9] CIBILS, C.; SOLOTAR, A. ***Galois coverings, Morita equivalence and smash extensions of categories over a field***. Doc. Math., v. 11 (2006), 143-159.

[10] DAELE, A. V. ***Multiplier Hopf algebras***. Transactions of the American Mathematical Society, v. 342 (2) (1994), 917-932.

[11] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. ***Hopf Algebras: An Introduction***. Marcel Dekker, Inc., 2001.

[12] DAUNS, J. ***Multiplier rings and primitive ideals***. Transactions of the American Mathematical Society, v. 145 (1969), 125-158.

[13] DOI, Y. ***Cleft comodule algebras and Hopf modules***. Communications in Algebra, v. 12 (10) (1984), 1155-1169.

[14] DOI, Y.; TAKEUCHI, M. ***Cleft comodule algebras for a bialgebra***. Communications in Algebra, v. 14 (5) (1986), 801-817.

[15] HERSCOVICH E., SOLOTAR A. ***Hochschild-Mitchell cohomology and Galois extensions***. J. of Pure and Appl. Alg., v. 209 (1) (2007), 37-55.

[16] KREIMER, H. F.; TAKEUCHI, M. ***Hopf algebras and Galois extensions of an algebra***. Indiana University Mathematics Journal, v. 30 (5) (1981), 675-692.

[17] LOMP, C. ***Duality for Partial Group Actions***. International Electronic Journal of Algebra, v. 4 (2008), 53-62.

[18] MUNARETTO, A. C. C. ***H-módulo e H-comódulo álgebras com unidades locais***. Curitiba: UFPR, 2016. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

[19] NIKSHYCH, D. ***A duality theorem for quantum groupoids***. - Contemporary Mathematics, vol. 267 (2000), 237-243.

[20] PAQUES, A.; FLÔRES, D. ***Duality for Groupoid (Co)Actions*** . Communications in Algebra, v. 42 (2014), 637-663.

[21] RADFORD, D. E. ***Hopf Algebras***. World Scientific, 2012.

[22] STĂNESCU, A. ***On Hopf-Galois extensions of linear categories***. An. St. Univ. Ovidius Constanta, v. 20 (3) (2012), 111-130.

[23] STĂNESCU, A.; ŞTEFAN, D. ***Cleft comodule categories***. Communications in Algebra, v. 41 (5) (2013), 1697-1726.

[24] VAN DEN BERGH, M. ***A duality theorem for Hopf algebras***, in Methods in Ring Theory. Proceedings of the 1983 NATO ASI in Antwerp, Reidel, (1984), 517-522.

Apêndice

Álgebras de Hopf

Neste apêndice veremos alguns resultados e definições que podem ser encontrados em [11]. Buscaremos de maneira simplificada definir o que é uma álgebra de Hopf, bem como abordar algumas estruturas relacionadas a esta.

Definição *Uma K-álgebra com unidade é uma tripla (A, M, u), onde A é um K-espaço vetorial, $M : A \otimes A \longrightarrow A$ e $u : K \longrightarrow A$ são transformações lineares que fazem os diagramas abaixo comutarem*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "M \otimes I_A"] \arrow[d, "I_A \otimes M"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\
A \otimes A \arrow[r, "M"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "M"] & \\
K \otimes A \arrow[ur, "u \otimes I_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes K \arrow[ul, "I_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Os morfismos M e u da definição anterior são ditos multiplicação e unidade, respectivamente.

Definição *Uma K-coálgebra é uma tripla (C, Δ, ϵ) onde C é um K-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\epsilon : C \to K$ são transformações lineares que fazem os diagramas abaixo comutarem*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes I"] \\
C \otimes C \arrow[r, "I \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
K \otimes C & & C \otimes K \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\epsilon \otimes I"] \arrow[ur, "I \otimes \epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Os morfismos Δ e ϵ da definição anterior são ditos comultiplicação e counidade, respectivamente.

Definição *Seja* (C, Δ, ϵ) *uma* K*-coálgebra. Para um elemento* $c \in C$ *denotamos*

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Tal notação é dita notação de Sweedler. Também há a notação simplicada de Sweedler dada por:

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Vale observar que com tal notação, segue do diagrama comutativo envolvendo ϵ que:

$$\epsilon(c_1)c_2 = c_1\epsilon(c_2) = c.$$

Considerando agora a transformação linear

$$\begin{array}{rccc} T: & B \otimes A & \longrightarrow & A \otimes B \\ & b \otimes a & \longmapsto & a \otimes b \end{array}$$

e o isomorfismo canônico

$$\begin{array}{rccc} \phi: & K \otimes K & \longrightarrow & K \\ & r \otimes s & \longmapsto & rs \end{array}$$

Temos a partir destes os seguintes exemplos:

Exemplo Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) duas K-álgebras. Então $A \otimes B$ possui estrutura de K-álgebra com multiplicação e unidade dadas por:

$$M : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B \quad \text{e} \quad u : K \to A \otimes B,$$

respectivamente. Sendo $M = (M_A \otimes M_B) \circ (I_A \otimes T \otimes I_B)$ e $u = (u_A \otimes u_B) \circ \phi^{-1}$.

Exemplo Sejam $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ duas coálgebras. Então $C \otimes D$ possui estrutura de K-coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por:

$$\Delta : C \otimes D \to (C \otimes D) \otimes (C \otimes D) \quad \text{e} \quad \epsilon : C \otimes D \to K,$$

respectivamente. Sendo $\Delta = (I_C \otimes T \otimes I_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e $\epsilon = \phi \circ (\epsilon_C \otimes \epsilon_D)$.

Definição *Sejam* (A, M_A, u_A) *e* (B, M_B, u_B) *duas* K*-álgebras. Uma transformação linear* $f : A \to B$ *é dita um morfismo de* K*-álgebras se os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & K \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Observe que a comutatividade desses diagramas pode ser expressa em elementos por:

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{pois} \quad f \circ M_A(a \otimes b) = M_B \circ (f \otimes f)(a \otimes b), \forall a, b \in A;$$
$$f(1_A) = 1_B \quad \text{pois} \quad f \circ u_A(1_K) = u_B(1_K).$$

Definição *Sejam $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ duas K-coálgebras. Uma transformação linear $g : C \to D$ é dita um morfismo de K-coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Observe que a comutatividade desses diagramas pode ser expressa em elementos por:

$$\Delta(g(c)) = g(c_1) \otimes g(c_2) \quad \text{e} \quad \epsilon_C(c) = \epsilon_D(g(c)),\ \forall c \in C.$$

Baseado nas definições anteriores temos o seguinte resultado:

Teorema *Se H é um K-espaço vetorial dotado de uma estrutura de Álgebra (H, M, u) e de uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ϵ) então as afirmações são equivalentes:*

(i) M e u são morfismos de coálgebra;

(ii) Δ e ϵ são morfismos de álgebra.

Definição *Uma biálgebra é um K-espaço vetorial com uma estrutura de álgebra (H, M, u) e com uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ϵ) tal que M e u são morfismos de coálgebra.*

Definição *Sejam (C, Δ, ϵ) K-coálgebra e (A, M, u) K-álgebra. Temos que Hom(C, A) tem estrutura de álgebra ao definirmos:*

$$f * g(c) = f(c_1)g(c_2) \quad \textit{onde} \quad \Delta(c) = c_1 \otimes c_2 \quad \forall c \in C$$

Chamaremos $*$ de produto de convolução. Com respeito a esse produto, temos que $u \circ \epsilon$ é a identidade em Hom(C, A).

Definição *Se H é biálgebra podemos denotar por H^A a álgebra correspondente e H^C a coálgebra. Logo Hom(H^C, H^A) tem estrutura de álgebra com respectivo produto de convolução:*

$$f * g(h) = f(h_1)g(h_2) \quad \textit{onde} \quad \Delta(h) = h_1 \otimes h_2 \quad \forall h \in H.$$

Definição *Se H é biálgebra. Um operador $S : H \to H$ é chamado antípoda de H se S é inversa de I_H com respeito ao produto de convolução em Hom(H^C, H^A).*

Observação No caso de haver uma antípoda na biálgebra, a condição $S * I_H = I_H * S = u \circ \epsilon$, nos permite obter as seguintes igualdades:

$$S(h_1)h_2 = h_1 S(h_2) = \epsilon(h)1_H, \quad \forall h \in H$$

Definição *Uma biálgebra H que possui uma antípoda é chamada de uma **Álgebra de Hopf**.*

Exemplo O espaço vetorial KG é uma álgebra de Hopf com estrutura de álgebra (KG, M, u) e com estrutura de coálgebra (KG, Δ, ϵ) dada por:

$$\begin{array}{rccc} M: & KG \otimes KG & \longrightarrow & KG \\ & f \otimes g & \longmapsto & fg \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} u: & K & \longrightarrow & KG \\ & 1_K & \longrightarrow & e \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & KG & \longrightarrow & KG \otimes KG \\ & h & \longmapsto & h \otimes h \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \epsilon: & KG & \longrightarrow & K \\ & h & \longrightarrow & 1_K \end{array}$$

$\forall f, g, h \in G$. O elemento e representa o elemento neutro em G. A antípoda $S : KG \longrightarrow KG$ nesse caso é dada por $S(g) = g^{-1}, \forall g \in G$.

Exemplo Seja G um grupo finito. Sendo $(KG)^*$ o K-espaço vetorial com base $\{\delta_g\}_{g \in G}$, onde

$$\begin{array}{rccc} \delta_g: & KG & \longrightarrow & K \\ & h & \longmapsto & \delta_g(h) \end{array}$$

e

$$\delta_g(h) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad g = h \\ 0 & \text{se} \quad g \neq h \end{cases}$$

Temos que $(KG)^*$ é uma álgebra de Hopf com estrutura de álgebra $((KG)^*, M, u)$ e de coálgebra $((KG)^*, \Delta, \epsilon)$ dadas por:

$$\begin{array}{rccc} M: & (KG)^* \otimes (KG)^* & \longrightarrow & (KG)^* \\ & \delta_h \otimes \delta_g & \longmapsto & \delta_{g,h}\delta_g \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} u: & K & \longrightarrow & (KG)^* \\ & 1_K & \longrightarrow & \sum_{g \in G} \delta_g \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & (KG)^* & \longrightarrow & (KG)^* \otimes (KG)^* \\ & \delta_g & \longmapsto & \sum_{h \in G} \delta_h \otimes \delta_{h^{-1}g} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \epsilon: & (KG)^* & \longrightarrow & K \\ & g & \longrightarrow & \delta_{g,e} \end{array}$$

$\forall g, h \in G$. O elemento e representa o elemento neutro em G. Nesse caso, a antípoda $S : (KG)^* \longrightarrow (KG)^*$ é dada por: $S(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}, \forall g \in G$.

Exemplo Assumamos que a característica de K seja diferente de 2. Seja H_4 dado por geradores e relações como segue: H_4 é gerado como uma K-álgebra por c e x e satisfaz as relações:

$$c^2 = 1, \quad x^2 = 0 \quad \text{e} \quad xc = -cx$$

Deste modo H_4 tem dimensão 4 como espaço vetorial e possui base $\{1, c, x, cx\}$. Definimos em H_4 uma estrutura de coálgebra por:

$$\Delta(c) = c \otimes c, \qquad \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1$$

e

$$\epsilon(c) = 1, \qquad \epsilon(x) = 0$$

Deste modo H_4 torna-se uma álgebra de Hopf com antípoda S dado por: $S(c) = c^{-1}$ e $S(x) = -cx$. Esta álgebra de Hopf é dita álgebra de Hopf de Sweedler de dimensão 4.

Exemplo A álgebra de polinômios $K[x]$ é uma álgebra de Hopf com estrutura de coálgebra $(K[x], \Delta, \epsilon)$ dada por:

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & K[x] & \longrightarrow & K[x] \otimes K[x] \\ & x & \longmapsto & x \otimes 1_K + 1_K \otimes x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \epsilon: & K[x] & \longrightarrow & K \\ & x & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e antípoda $S : K[x] \longrightarrow K[x]$ definida por $S(x) = -x$.

Quando H é uma K-álgebra de Hopf de dimensão finita com estrutura de álgebra (H, M, u) e de coálgebra (H, Δ, ϵ), temos que H^* é uma K-álgebra de Hopf, dita álgebra de Hopf dual de H, com estrutura de álgebra (H^*, M_{H^*}, u_{H^*}) e de coálgebra $(H^*, \Delta_{H^*}, \epsilon_{H^*})$ dadas da seguinte maneira: Segue da finitude da dimensão de H que o morfismo

$$i : H^* \otimes H^* \longrightarrow (H \otimes H)^*$$

dado por: $i(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n),\ \forall f, g \in H^*,\ m, n \in H$, é um isomorfismo K-linear. Disso, podemos definir o produto

$$M_{H^*} := \Delta^* \circ i : H^* \otimes H^* \to H^*$$

dessa forma, para $h \in H$ arbitrário, temos que

$$M_{H^*}(f \otimes g)(h) = (\Delta^* \circ i)(f \otimes g)(h) = i(f \otimes g)(\Delta(h)) = i(f \otimes g)(h_1 \otimes h_2) = f(h_1)g(h_2).$$

O morfismo

$$u_{H^*} : K \longrightarrow H^*$$

é dado por: $u_{H^*}(k)(h) = k\epsilon(h),\ \forall h \in H$. Com relação a estrutura de coálgebra,

$$\Delta_{H^*} := i^{-1} \circ M^* : H^* \longrightarrow H^* \otimes H^*$$

Desse modo, é possível verificar que se denotarmos $\Delta_{H^*}(f) = f_1 \otimes f_2$, então

$$f(ab) = f_1(a)f_2(b),\ \forall f \in H^*, a, b \in H.$$

O morfismo

$$\epsilon_{H^*} : H^* \longrightarrow K$$

é dado por: $\epsilon_{H^*}(f) = f(u(1_K)), \ \forall f \in H^*$. Por fim, sendo S a antípoda de H^*, então a antípoda de H^* é dada por: $S_{H^*} := S^*$.

Exemplo Dado um grupo finito G, a álgebra de Hopf $(KG)^*$ é a álgebra de Hopf dual de KG.