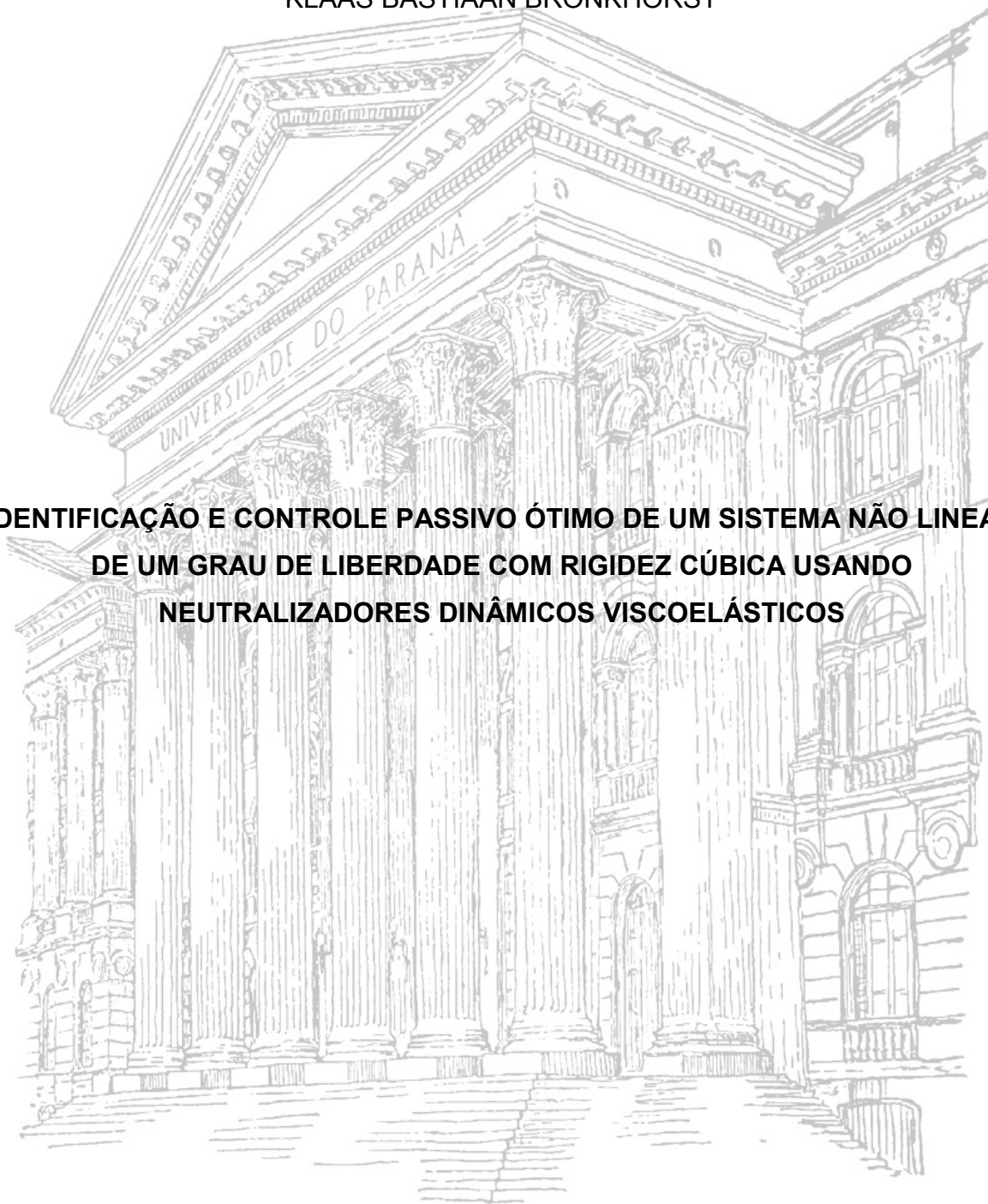


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

KLAAS BASTIAAN BRONKHORST

**IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE PASSIVO ÓTIMO DE UM SISTEMA NÃO LINEAR  
DE UM GRAU DE LIBERDADE COM RIGIDEZ CÚBICA USANDO  
NEUTRALIZADORES DINÂMICOS VISCOELÁSTICOS**



CURITIBA

2017

KLAAS BASTIAAN BRONKHORST

**IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE PASSIVO ÓTIMO DE UM SISTEMA NÃO LINEAR  
DE UM GRAU DE LIBERDADE COM RIGIDEZ CÚBICA USANDO  
NEUTRALIZADORES DINÂMICOS VISCOELÁSTICOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri

CURITIBA  
2017

---

L864i

Bronkhorst, Klaas Bastiaan

Identificação e controle passivo ótimo de um sistema não linear de um grau de liberdade com rigidez cúbica usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos / Klaas Bastiaan Bronkhorst. – Curitiba, 2017. 99 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

Orientador: Eduardo Márcio de Oliveira Lopes.

Coorientador: Carlos Alberto Bavastrí.

1. Controle de vibrações. 2. Neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. 3. Sistemas não lineares cúbicos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Lopes, Eduardo Márcio de Oliveira. III. Bavastrí, Carlos Alberto. IV. Título.

CDD: 620.105

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
Setor TECNOLOGIA  
Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA  
Código CAPES: 40001016040P5

### TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de KLAAS BASTIAAN BRONKHORST, intitulada: "IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE PASIVO ÓTIMO DE UM SISTEMA NÃO LINEAR DE UM GRAU DE LIBERDADE COM RIGIDEZ CÚBICA USANDO NEUTRALIZADORES DINÂMICOS VISCOELÁSTICOS", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 19 de Maio de 2017.

CARLOS ALBERTO BAVASTRI  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

ANA GABRIELA MARTINEZ  
Avaliador Externo (UFPR)

JOSÉ MANOEL BALTHAZAR  
Avaliador Externo (UNESP)

Para minha esposa Ceres,  
a minha amada, alicerce e confidente.

Para meus pais, Koosje e Marius,  
que me apoiaram e me ensinaram a ser perseverante  
e a acreditar em meu trabalho.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, nosso criador e que nos dá o dom de viver, conviver e descobrir como as coisas criadas por ele se relacionam entre si.

À minha família, pelos inúmeros ensinamentos e pelo carinho sem medida.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri, por todo apoio, dedicação, orientação e paciência, sempre disposto a discutir o trabalho para se obter o melhor resultado.

Ao Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, pelo auxílio em momentos importantes do desenvolvimento deste trabalho.

À toda equipe do Laboratório de Vibrações e Som (LAVIBS): Thiago da Silva, Francielly Elizabeth de Castro Silva, Gabriela Wessling Oening Dicati, Jederson da Silva, João do Carmo Lopes Gonçalves, José Eduardo Gubaua, Igor Fernando Rodrigues e Tiago Lima de Souza. Ao secretário Marcio Brandani Tenório sempre a postos para ajudar. Obrigado pelas conversas e pela ótima convivência.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Abraço a todos.

Nada é mais digno do nosso patrocínio que o fomento da ciência e da literatura. O conhecimento é, em todo e qualquer país, a base mais segura da felicidade pública.  
(George Washington, discurso de 8 de janeiro de 1790)

Equilíbrio vem do entendimento, humildade e tolerância. O mais elevado estado de equilíbrio é voar livre de tudo e ainda assim manter-se firmemente enraizado na realidade do mundo.  
(Brahma Kumaris – entidade indiana)

## RESUMO

Em dinâmica de estruturas, sistemas não lineares têm sido amplamente estudados nas últimas décadas, tanto para o desenvolvimento de modelos matemáticos que representem fidedignamente suas características dinâmicas quanto para as metodologias de controle de vibração propostas. Em controle de vibração, o conhecimento preciso do comportamento dinâmico do sistema em estudo é fundamental. Este trabalho tem como objetivos propor uma metodologia para identificação de um sistema não linear de um grau de liberdade com rigidez cúbica e uma metodologia para o projeto ótimo de um neutralizador dinâmico viscoelástico com comportamento linear, com o intuito de reduzir as vibrações do primeiro ao máximo possível. A identificação é realizada através de um processo inverso. Esta identificação se dá através de um ajuste por mínimos quadrados entre uma resposta de transmissibilidade medida experimentalmente e sua equivalente numérica. O deslocamento na base do sistema físico, na faixa de frequência de interesse, também deve ser medido. Uma vez identificados os parâmetros físicos do sistema não linear, um neutralizador dinâmico viscoelástico com comportamento linear é projetado de forma ótima. Para tal, conceitos e procedimentos como parâmetros equivalentes generalizados, modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros (para representar o material viscoelástico), técnicas de otimização não linear e método do balanço harmônico (para resolver o sistema de equações não lineares) permitem o projeto ótimo desejado. Simulações da identificação e do controle ótimo de vibrações sobre um sistema composto por uma massa com quatro molas em paralelo trabalhando lateralmente, ligando esta massa a uma base de acrílico considerada rígida, são apresentadas. Os resultados numéricos são comparados com medições realizadas no sistema físico real, com e sem a presença do dispositivo de controle. Verifica-se, nessas comparações, a adequação das metodologias propostas.

Palavras-chave: Controle de vibrações. neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. sistemas não lineares cúbicos. identificação de sistemas.

## ABSTRACT

In structural dynamics, nonlinear systems have been widely studied during the last decades, to develop mathematical models that are able to faithfully represent the dynamic characteristics of the systems and proposed methodologies of vibration control. To the design of vibration control devices, a precise knowledge of the dynamic behavior of the system to be controlled is very important. This work aims to propose a methodology to identify a single-degree-of-freedom nonlinear system with cubic stiffness and a methodology to optimally design a dynamic viscoelastic neutralizer with linear behavior, with the intention of reducing the vibration of the nonlinear system as much as possible. The identification is performed through an inverse problem. This identification is carried out through a least squares curve fit procedure between a transmissibility response measured experimentally and its numerical equivalent. The displacement at the base of the physical system, on the frequency range of interest, must also be measured. Once the parameters of the nonlinear physical system are identified, a viscoelastic dynamic neutralizer with linear behavior is optimally designed. To this purpose, concepts and procedures like generalized equivalent parameters, four-parameter fractional derivative model (to represent the viscoelastic material), nonlinear optimization techniques and harmonic balance method (to solve the equation of motion) are applied. Simulations of the identification and optimum vibration control of a system consisting of a lump of mass and four springs connected to an acrylic base (considered as rigid) are presented. The numerical results are compared with measurements of the real physical system, with and without the viscoelastic neutralizer. In those comparisons, it is verified the adequacy of the proposed methodologies.

Keywords: Vibration control. optimum viscoelastic dynamic absorbers. cubic nonlinear systems. system identification.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 - FORÇA IDEALIZADA DOS TIPOS DE NÃO LINEARIDADES.....	19
FIGURA 3.1 - NOMOGRAMA DA BORRACHA BUTÍLICA.....	29
FIGURA 3.2 - NEUTRALIZADOR DINÂMICO VISCOELÁSTICO SIMPLES.....	30
FIGURA 3.3 - SISTEMAS EQUIVALENTES. MODELO TRADICIONAL (A). MODELO COM PEG (B).....	31
FIGURA 4.1 - REPRESENTAÇÃO DA CURVA DE RESPOSTA DE UM SISTEMA COM NÃO-LINEARIDADE CÚBICA NA RIGIDEZ.....	35
FIGURA 4.2- CURVA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM OSCILADOR QUADRÁTICO.....	36
FIGURA 4.3 - CARACTERÍSTICA DA RIGIDEZ BILINEAR.....	37
FIGURA 4.4 - CARACTERÍSTICA DO AMORTECIMENTO BILINEAR.....	37
FIGURA 5.1 - SISTEMA GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR CONSISTINDO DE MOLAS LINEARES E MASSA.....	42
FIGURA 5.2 - REAÇÃO NÃO DIMENSIONAL PARA $d_0d = 0,9$ .....	43
FIGURA 5.3 - SISTEMA NÃO LINEAR COM <i>SHAKER</i> : REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA FÍSICO (A), REPRESENTAÇÃO SIMPLIFICADA (B).....	44
FIGURA 5.4 - SISTEMA NÃO LINEAR COM NEUTRALIZADOR.....	49
FIGURA 5.5 - SISTEMA NÃO LINEAR COM NEUTRALIZADOR NA FORMA DE PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS.....	50
FIGURA 6.1 - CURVA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA EXPERIMENTAL CARACTERÍSTICA.....	53
FIGURA 7.1 - REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR.....	57
FIGURA 7.2 - FIXAÇÃO DO SISTEMA NÃO-LINEAR AO <i>SHAKER</i> .....	58
FIGURA 7.3 - SISTEMA DE MEDIÇÃO.....	58
FIGURA 7.4 – CONFIGURAÇÃO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO.....	59
FIGURA 7.5 - INFLUÊNCIA DA TENSÃO NO CABO.....	61
FIGURA 7.6 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE EXPERIMENTAL COM DIFERENTES ACELERAÇÕES NA BASE.....	62
FIGURA 7.7 - SISTEMA NÃO-LINEAR COM ACELERÔMETROS NA MASSA E NA BASE.....	63
FIGURA 7.8 - CURVA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.....	64
FIGURA 7.9 - RESULTADO DA IDENTIFICAÇÃO.....	65

FIGURA 7.10 - CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE NUMÉRICA DO SISTEMA PRIMÁRIO E COMPOSTO. ....	67
FIGURA 7.11 – NDV A) PENDULAR B) E SISTEMA COMPOSTO EXPERIMENTAL. ....	68
FIGURA 7.12 – CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE EXPERIMENTAIS DOS SISTEMAS PRIMÁRIO E COMPOSTO. ....	69
FIGURA 7.13 - CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DO SISTEMA COMPOSTO. ....	70
FIGURA 7.14 – CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE DO SISTEMA COMPOSTO NUMÉRICA CORRIGIDA E EXPERIMENTAL.....	71
FIGURA 7.15 - RESULTADO EXPERIMENTAL DO SISTEMA COMPOSTO COM: (A)AMPLITUDES DE EXCITAÇÃO 4, 6 E 8 M/S <sup>2</sup> ; (B) AMPLITUDES DE EXCITAÇÃO 1, 6 E 10 M/S <sup>2</sup> .....	73
FIGURA 7.16 – RESULTADO EXPERIMENTAL DO SISTEMA COMPOSTO COM AMPLITUDES DE EXCITAÇÃO 6 E 18 M/S <sup>2</sup> .....	74

## LISTA DE FIGURAS DOS APÊNDICES

FIGURA A.1 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO O AMORTECIMENTO.....	84
FIGURA A.2 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A RIGIDEZ LINEAR. ....	85
FIGURA A.3 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A RIGIDEZ NÃO-LINEAR. ....	86
FIGURA A.4 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A MASSA. ....	86
FIGURA A.5 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A ACELERAÇÃO NA BASE.....	87
FIGURA A.6 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,1 M/S <sup>2</sup> .....	88
FIGURA A.7 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,2 M/S <sup>2</sup> .....	89
FIGURA A.8 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,4 M/S <sup>2</sup> .....	89
FIGURA A.9 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,6 M/S <sup>2</sup> .....	90
FIGURA A.10 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,8 M/S <sup>2</sup> .....	90
FIGURA A.11 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 1,0 M/S <sup>2</sup> .....	91
FIGURA A.12 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 1,2 M/S <sup>2</sup> .....	91
FIGURA A.13 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 1,7 M/S <sup>2</sup> .....	92
FIGURA A.14 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 2,0 M/S <sup>2</sup> .....	92
FIGURA A.15 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 2,5 M/S <sup>2</sup> .....	93
FIGURA A.16 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 3,0 M/S <sup>2</sup> .....	93

FIGURA A.17 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 3,5 M/S <sup>2</sup> .....	94
FIGURA A.18 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 4,0 M/S <sup>2</sup> .....	94
FIGURA A.19 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 4,5 M/S <sup>2</sup> .....	95
FIGURA A.20 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 5,0 M/S <sup>2</sup> .....	95
FIGURA A.21 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 5,5 M/S <sup>2</sup> .....	96
FIGURA A.22 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 6,5 M/S <sup>2</sup> .....	96
FIGURA A.23 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 7,5 M/S <sup>2</sup> .....	97
FIGURA A.24 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 9,0 M/S <sup>2</sup> .....	97
FIGURA A.25 - CONSTRUÇÃO DA CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE. ....	99

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - PARÂMETROS RESULTANTES DA IDENTIFICAÇÃO.....	64
TABELA 2 - PARÂMETROS DO SISTEMA PRIMÁRIO.....	65
TABELA 3 - PARÂMETROS DA BORRACHA BUTÍLICA.....	66
TABELA 4 - PARÂMETROS ÓTIMOS DO NDV.....	66

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	:	Área em cisalhamento do elemento viscoelástico
$b$	:	Constante de relaxamento do modelo fracionário
$b_0$	:	Constante de relaxamento do modelo fracionário
$c_e(\Omega)$	:	Amortecimento equivalente do neutralizador viscoelástico
$c_F$		Amortecimento de atrito
$c_{NL}$	:	Amortecimento não-linear
$c_1$	:	Amortecimento do sistema primário
$d_0$	:	Comprimento da mola não distendida
$d$	:	Comprimento da mola no ponto de equilíbrio do sistema
$z$	:	Deslocamento relativo entre a massa e a base
$f(t)$	:	Força
$f_d(\dot{x})$	:	Força de amortecimento
$f_s(y)$	:	Força de restituição elástica da mola bilinear
$f_{obj}^{id}(x): R^n$	:	Função objetivo de identificação
$f_{obj}^{nv}(y)$	:	Função objetivo de otimização do controle
$F(\Omega)$	:	Força na base do neutralizador
$F_s$	:	Força de restituição da mola transversal
$G_c(\Omega, T)$	:	Módulo de cisalhamento complexo
$G_I(\Omega, T)$	:	Parcela imaginária do módulo de cisalhamento
$G_R(\Omega, T)$	:	Parcela real do módulo de cisalhamento
$G_0$	:	Assíntota inferior do módulo de cisalhamento
$G_\infty$	:	Assíntota superior do módulo de cisalhamento
$h$	:	Espessura do elemento viscoelástico
$k_1$	:	Rigidez linear do sistema primário
$k_2$		Rigidez não-linear quadrática do sistema primário
$k_3$	:	Rigidez não-linear cúbica do sistema primário
$k_a(\Omega)$	:	Rigidez complexa da mola viscoelástica
$m_a$	:	Massa do neutralizador
$m_e(\Omega)$	:	Massa equivalente do neutralizador viscoelástico
$m_1$	:	Massa do sistema primário

$r_a$	:	Razão entre os módulos de cisalhamento
$T$	:	Temperatura absoluta
$T_0$	:	Temperatura absoluta de referência
$\bar{T}_1$	:	Transmissibilidade complexa
$\bar{T}_1^{num}(\Omega)$	:	Curva de transmissibilidade numérica do sistema primário
$\bar{T}_1^{exp}(\Omega)$	:	Curva de transmissibilidade experimental do sistema primário
$\bar{T}_2^{num}(\Omega)$	:	Curva de transmissibilidade numérica do sistema composto
$\bar{T}_2^{exp}(\Omega)$	:	Curva de transmissibilidade experimental do sistema composto
$x$	:	Vetor de projeto
$x(t)$	:	Deslocamento do sistema primário
$x_b(t)$	:	Deslocamento da base
$X_b$	:	Amplitude do deslocamento da base
$X_b(\Omega)$	:	Deslocamento da base no domínio da frequência
$\bar{X}_b$	:	Deslocamento complexo na base
$x_1(t)$	:	Deslocamento do sistema primário
$X_1$	:	Amplitude do deslocamento do sistema primário
$X_1(\Omega)$	:	Deslocamento do sistema primário no domínio da frequência
$\bar{X}_1$	:	Deslocamento complexo do sistema primário
$x_2(t)$	:	Deslocamento do neutralizador viscoelástico
$X_2(\Omega)$	:	Deslocamento do neutralizador no domínio da frequência
$y$	:	Vetor de projeto
$z(t)$	:	Deslocamento relativo entre a massa e a base
$Z(\Omega)$	:	Amplitude do deslocamento relativo
$\bar{Z}$	:	Deslocamento relativo complexo
$\alpha$	:	Parâmetro do modelo matemático cúbico
$\alpha_T$	:	Fator de deslocamento
$\beta$	:	Ordem fracionária da derivada
$\varepsilon_a$	:	Razão entre frequências
$\eta(\Omega, T)$	:	Fator de perda do material viscoelástico ao cisalhamento
$\omega_n$	:	Frequência natural efetiva do sistema
$\omega_{10}$	:	Frequência natural do sistema primário
$\Omega$	:	Frequência

$\Omega_a$	:	Frequência natural do neutralizador viscoelástico
$\theta_1$	:	Parâmetro do material viscoelástico
$\theta_2$	:	Parâmetro do material viscoelástico
$\vartheta$	:	Fator de forma do elemento viscoelástico
$\lambda_1$	:	Parâmetro do modelo matemático cúbico
$\psi_{x_b}$	:	Fase do deslocamento na base
$\psi_{x_1}$	:	Fase do deslocamento da massa do sistema primário
$\psi_z$	:	Fase do deslocamento relativo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS NÃO LINEARES E CONTROLE DE VIBRAÇÕES.....</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>NEUTRALIZADOR DINÂMICO VISCOELÁSTICO.....</b>	<b>26</b>
3.1	MATERIAIS VISCOELÁSTICOS.....	26
3.2	DIMENSIONAMENTO E CONSTRUÇÃO DE UM NDV .....	29
3.3	PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS.....	31
<b>4</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES TÍPICOS.....</b>	<b>34</b>
4.1	TIPOS DE NÃO LINEARIDADES.....	34
4.1.1	Rigidez Cúbica.....	34
4.1.2	Rigidez Quadrática .....	35
4.1.3	Rigidez Bilinear.....	36
4.1.4	Amortecimento Bilinear.....	37
4.1.5	Amortecimento Não Linear Geral .....	38
4.1.6	Atrito de Coulomb .....	38
4.2	SOLUÇÕES PARA UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL NÃO LINEAR.....	39
<b>5</b>	<b>O SISTEMA NÃO-LINEAR COM RIGIDEZ CÚBICA: PRIMÁRIO E COMPOSTO .....</b>	<b>41</b>
5.1	SISTEMA PRIMÁRIO NÃO LINEAR COM RIGIDEZ CÚBICA .....	42
5.1.1	Solução para Amplitude Relativa de Deslocamento.....	44
5.1.2	Solução para Transmissibilidade .....	46
5.2	SISTEMA COMPOSTO .....	48
5.2.1	Sistema composto com dois graus de liberdade .....	48
5.2.2	Sistema composto representado por PEG .....	49
<b>6</b>	<b>METODOLOGIAS DE IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE .....</b>	<b>52</b>
6.1	IDENTIFICAÇÃO.....	53
6.2	CONTROLE.....	55
<b>7</b>	<b>MODELO FÍSICO .....</b>	<b>57</b>
7.1	CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DO MODELO FÍSICO .....	60
7.1.1	Influência da Tensão no Cabo .....	60
7.1.2	Influência da Amplitude de Excitação .....	61
7.2	IDENTIFICAÇÃO .....	63
7.3	CONTROLE.....	65
7.3.1	Investigação do Amortecimento.....	70
7.3.2	Investigação da Amplitude de Excitação .....	71
7.4	DISCUSSÃO CONSOLIDADA .....	74
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS .....</b>	<b>76</b>

REFERÊNCIAS.....	79
APÊNDICE A - INFLUÊNCIA DE CADA PARÂMETRO DO MODELO NUMÉRICO.....	84
APÊNDICE B - RESULTADO EXPERIMENTAL DA VARIAÇÃO DA AMPLITUDE DE ACELERAÇÃO NA BASE .....	88
APÊNDICE C - CONSTRUÇÃO DA CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE NUMÉRICA.....	98

## 1 INTRODUÇÃO

Em qualquer estrutura ou equipamento que estiver sob carregamentos dinâmicos ocorrem vibrações, sejam elas imperceptíveis ou severas, a ponto de poder causar o colapso da estrutura ou equipamento. Desta forma, estudos com o objetivo de conhecer as características dinâmicas de um sistema, a forma com que este responde aos carregamentos dinâmicos e as maneiras de mitigar as vibrações excessivas se tornam necessários e, em alguns casos, imprescindíveis.

O grupo de pesquisa GVIBS vem desenvolvendo, ao longo dos últimos 20 anos, uma metodologia robusta para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos, atuando em sistemas lineares com qualquer complexidade geométrica. Para tal, são utilizados os parâmetros modais do sistema ou estrutura a controlar, obtidos através de análise modal experimental ou do método de elementos finitos, junto com conceitos e procedimentos como parâmetros equivalentes generalizados e técnicas de otimização não linear. Várias aplicações usando tal metodologia mostram a robustez e generalidade da mesma.

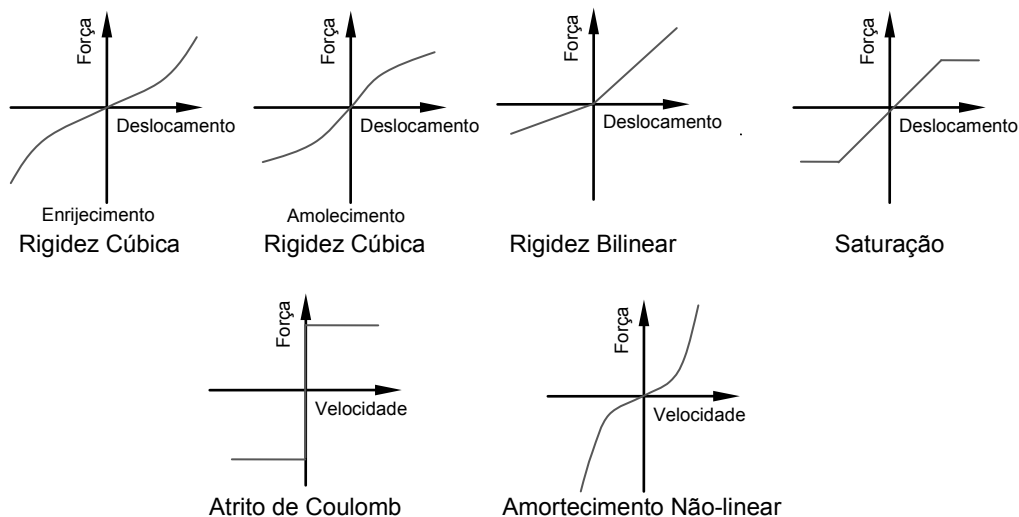
Tentando expandir esses estudos para sistemas com comportamento dinâmico não linear, surgiram nos últimos anos, por parte desse grupo de pesquisa, alguns trabalhos considerando um sistema primário de um grau de liberdade com uma não linearidade cúbica no elemento de rigidez, sendo o controle realizado de forma passiva, através de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos (BAVASTRI et al., 2014; FEBBO et al., 2014). Nesses trabalhos, o projeto ótimo do neutralizador é baseado no modelo de resposta do sistema a controlar para uma excitação de força na massa (curva de resposta em frequência) e os parâmetros físicos são considerados conhecidos. Os trabalhos apresentados pelos autores realizam estudos utilizando apenas o modelo matemático, não sendo realizado o ensaio experimental para a identificação de um sistema não-linear, assim como o controle passivo ótimo do mesmo.

Sistemas inicialmente lineares podem passar a se comportar de modo não linear sob determinadas condições de carregamento. Isso gera mudanças no comportamento projetado para a estrutura ou equipamento, como se vê, por exemplo, em Ishida e Inoue (2007), em que a folga axial dos rolamentos provoca uma não linearidade cúbica na rigidez de um sistema girante. A maior parte dos engenheiros que trabalha com projetos de estruturas expostas a carregamentos

dinâmicos eventualmente vai se deparar com algum fenômeno de vibração não linear.

Em contraste com um sistema linear que responderá sempre de forma harmônica a uma excitação harmônica, um sistema não linear responderá de forma diferente para diferentes amplitudes e tipos de excitações. Os tipos mais comuns de não linearidades que podem ser encontrados em testes são as não linearidades polinomiais no amortecimento e na rigidez, bem como as oriundas de folgas, impactos, atrito e efeitos de saturação. A Figura 1.1 representa o efeito de alguns destes tipos de não linearidades, retratando a força idealizada em relação ao deslocamento ou velocidade.

FIGURA 1.1 - FORÇA IDEALIZADA DOS TIPOS DE NÃO LINEARIDADES.



Uma forma muito comum de reduzir vibrações é a aplicação de neutralizadores dinâmicos, que pode ser realizada quando já se conhece o comportamento da estrutura, sendo esta linear ou não linear. O controle passivo é bastante eficiente e confiável (MEAD, 1999). Além disso, é possível controlar vibrações ativamente, modificando características estruturais ou aplicando carregamentos controlados. O controle ativo exige equipamentos sofisticados e modelos precisos e apresenta resultados muito satisfatórios (GHANDCHI-TEHRANI et al., 2013).

Em trabalhos anteriores (BAVASTRI et al., 2014; FEBBO et al., 2014) foi apresentada uma metodologia para o projeto ótimo de um neutralizador dinâmico viscoelástico (NDV) atuando em um sistema de um grau de liberdade (1GL) não linear cúbico. A metodologia mostra que o sistema composto pode tornar-se linear

se o sistema a controlar mais o neutralizador trabalham na condição ótima de projeto. Além disso, Prêve (2015) descreve um modelo de identificação de um sistema de um grau de liberdade não linear cúbico através das curvas de resposta em frequência do sistema. O modelo proposto naquele trabalho foi verificado numericamente, realizando-se a identificação do sistema a partir de uma curva de resposta gerada numericamente. Uma metodologia baseada no projeto ótimo de um NDV foi implementada usando o modelo de resposta do sistema composto e os resultados mostraram o potencial dessa metodologia.

Neste trabalho, como uma continuação dos trabalhos anteriormente realizados pelo grupo, são apresentadas duas metodologias: uma para identificar os parâmetros de um sistema de um grau de liberdade não linear cúbico na rigidez, e outra para projetar de forma ótima um neutralizador dinâmico viscoelástico linear. Um modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros é utilizado para determinar as características do material viscoelástico empregado. De forma distinta dos trabalhos anteriores, tanto a identificação do sistema a controlar quanto o projeto ótimo do dispositivo de controle, usam uma formulação baseada na função de transmissibilidade, o que permite uma implementação experimental mais conveniente.

Um sistema físico composto por uma massa e elementos de molas trabalhando lateralmente, para criar um sistema equivalente de um grau de liberdade não linear cúbico, é desenvolvido, construído e testado. A etapa da metodologia que corresponde à identificação é implementada de forma numérico-experimental, utilizando as curvas de transmissibilidade do modelo matemático e comparando-as com as curvas obtidas experimentalmente.

Uma vez que o sistema é identificado, o neutralizador é projetado de forma que a sua frequência natural seja a ótima, ou seja, apresente o melhor resultado de controle possível. Para isso, utiliza-se o modelo matemático do sistema composto através de parâmetros equivalentes generalizados.

Após a simulação numérica, o dispositivo é construído e acoplado ao sistema primário, para validar a sua eficácia e a metodologia proposta. A realização física, não realizada em trabalhos anteriores, tanto do sistema primário quanto do sistema composto, mostra a robustez da metodologia, a eficácia dos neutralizadores e a exatidão dos modelos utilizados.

## 2 SISTEMAS NÃO LINEARES E CONTROLE DE VIBRAÇÕES

Os sistemas dinâmicos não lineares têm sido intensamente estudados nas últimas décadas, tal como se vê em Nayfeh e Mook (1979), Worden e Tomlinson (2001) e Thomsen (2010). Diversos sistemas não lineares foram investigados em suas diferentes formas e tipos de soluções, podendo-se mencionar como alguns dos métodos mais consagrados o método dos balanços harmônicos, o método das múltiplas escalas, o método das médias (“*averaging method*”) e a expansão por séries de Volterra, entre outros.

Mais recentemente, Johannessen (2015) descreve um método analítico de solução do oscilador tipo Duffing com amortecimento, assumindo uma solução que utiliza funções elípticas de Jacobi. A solução apresentada pelo autor para o oscilador de Duffing não forçado é simples e precisa, fornecendo uma expressão muito útil para entender e analisar experimentos com o oscilador.

Em um sistema com dois graus de liberdade (2GL), Gatti et al. (2010a e 2010b) utilizam o método de balanços harmônicos e o método das médias para verificar a interação entre a ressonância de um sistema não linear com a ressonância linear da estrutura ao qual aquele está acoplado. O grau de liberdade não linear é associado a um oscilador de Duffing, sendo sua massa muito menor que a massa associada ao grau de liberdade linear. Verifica-se a interação entre a ressonância do grau de liberdade linear com o não linear e uma boa concordância dos modelos numérico e analítico com os resultados experimentais encontrados.

O estudo de não linearidades também inclui o desenvolvimento de modelos de isoladores, como mostra o trabalho de Ravindra e Mallik (1994), em que o isolador é modelado com rigidez e amortecimento não lineares. Uma comparação numérica da eficácia do isolamento considerando a influência de não linearidades na rigidez e no amortecimento com diferentes amplitudes é realizada pelos autores. De modo a aumentar o conforto dos passageiros, Silveira et al. (2014) mostram os resultados positivos na utilização de amortecedores bilineares em veículos.

Outros exemplos são as contribuições de Peng et al. (2012), onde é aplicado o método de balanços harmônicos (MBH) para verificar a influência de amortecimento com não linearidade cúbica na transmissibilidade de um isolador, e o trabalho de Xiao et al. (2013), em que se estuda a influência do amortecimento dependente da velocidade e do deslocamento em um isolador cuja não linearidade

do amortecimento também é cúbica. A vantagem de um isolamento com não linearidade no amortecimento é a eficácia que este tem para reduzir a transmissibilidade na região de ressonância desse isolamento sem aumentar a transmissibilidade na região das frequências mais altas, como acontece em um isolamento totalmente linear.

Além das não linearidades geométricas, há outros tipos de fontes de não linearidades em sistemas físicos. Tem-se, por exemplo, o uso de materiais piezoelétricos, que podem apresentar uma relação não linear entre deformação e campo elétrico, provocando uma característica não linear de amolecimento (SAMAL et al., 2005). Há ainda sistemas girantes cuja não linearidade decorre da folga angular dos rolamentos dos mancais (ISHIDA e INOUE, 2007) e sistemas com interação entre cabo e viga, em que uma das extremidades da viga é engastada e a outra é fixa por um cabo, o que gera não linearidades quadráticas, devido à variação de ângulo entre viga e cabo, e também cúbicas (GATULLI e LEPIDI, 2003).

É importante salientar que não linearidades podem simplesmente surgir devido ao chamado efeito Sommerfeld, como estudado em Balthazar et al. (2016). Esse efeito se revela quando uma máquina rotativa não possui potência suficiente para transpor a sua rotação crítica, não conseguindo alcançar rotações de trabalho maiores do que aquela rotação. Neste estudo, são modeladas constantes de rigidez fracionárias e amortecimentos não lineares de sistemas não-ideais, assim como estruturas como moldura de portal.

Barry et al. (2014) apresentam o estudo de uma viga cuja não linearidade provém da tensão axial aplicada a ela e de molas não lineares posicionadas ao longo de sua extensão. Observa-se que o aumento da tensão axial tende a alterar o tipo de não linearidade com característica de enrijecimento para característica de flexibilização.

Huang et al (2011) desenvolvem seu estudo sobre uma viga curva sujeita a uma excitação harmônica uniforme na base. Para resolver a equação diferencial do movimento, que possui não linearidades cúbicas e quadráticas, os autores utilizam o método do balanço harmônico incremental. Este método é descrito pelos autores como sendo eficiente e confiável para tratar de vibrações em sistemas fortemente não lineares.

Sistemas não lineares com mais de 2 graus de liberdade são encontrados nos seguintes trabalhos. Em Gayesh et al. (2011), se estuda uma viga discretizada

com molas não lineares e massas concentradas em seus nós, introduzidas como condições de contorno internas. Já em Rudenko e Solodov (2011) analisa-se a propagação de ondas de vibração em sistemas não lineares cúbicos de  $n$  graus de liberdade ( $n$ -GL).

O controle de vibrações é um importante ramo da ciência, já que a presença de vibrações na engenharia é muito comum. Ahmadabadi e Khadem (2012) utilizam um neutralizador dinâmico de vibrações não linear (NDNL) para controlar a vibração de uma viga simplesmente engastada, comparando a eficiência na dissipação de energia de um amortecedor de vibrações “aterrado” e um neutralizador livre. Gourdon et al. (2007) controlam vibrações prediais durante abalos sísmicos utilizando um NDNL. O sistema se mostra efetivo para diferentes excitações do tipo terremoto, conseguindo-se uma atenuação da vibração da estrutura primária pelo acoplamento entre o prédio o neutralizado dinâmico fortemente não linear.

Também é possível controlar um sistema não linear pela modificação das características não lineares, como mostram os trabalhos de Gandchi-Tehrani et al. (2013 e 2015). O posicionamento de polos para o controle de bifurcações é realizado em um oscilador de Duffing. Além disso, o limite de excitação para a ocorrência de bifurcações pode ser determinado na solução apresentada pelos autores.

O controle de sistemas não lineares foi estudado ainda por Ji e Zhang (2010), aplicando um neutralizador dinâmico (massa-mola) de vibrações em um sistema não linear. Como resultado, apresenta-se uma redução significativa na amplitude de vibração não linear, sendo a massa do neutralizador igual a 6% da massa do sistema não linear.

Sun et al. (2014) apresentam um estudo experimental de atenuação de vibração de um sistema primário com não linearidade cúbica, utilizando um NDNL em paralelo com um neutralizador pendular. Quando o NDNL é utilizado sozinho, é encontrado um pico com grande amplitude de ressonância na faixa de baixas frequências. De modo a atenuar este pico de ressonância, é aplicado um neutralizador pendular com frequência natural variável. Resultados mostram uma melhora significativa no controle de vibração do sistema primário.

Os trabalhos de Bavastri et al. (2014) e Febbo et al. (2014) apresentam, respectivamente uma metodologia para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos (NDVs) com comportamento linear, aplicados em sistemas não

lineares com rigidez cúbica, e uma investigação da influência da temperatura na dessintonização destes sistemas de controle. O NDV é modelado utilizando-se o conceito de parâmetros equivalentes generalizados, para construir o modelo matemático do sistema composto. Este conceito permite que o sistema composto, que fisicamente possui um grau de liberdade a mais devido à adição do NDV, seja modelado utilizando-se apenas as coordenadas generalizadas do sistema primário. Já o material viscoelástico é modelado através do modelo de derivada fracionária com 4 parâmetros. Técnicas de otimização não linear também são aplicadas para se encontrar as características ótimas do NDV. Dentro desta abordagem, há, em Prêve (2015), uma descrição detalhada do modelo matemático do sistema não linear com neutralizador viscoelástico acoplado ao mesmo.

Neutralizadores dinâmicos de vibração (NDs) são extensivamente utilizados para o controle passivo de vibrações pela sua simplicidade de construção e aplicação. Os NDs são dispositivos mecânicos ressonantes acoplados a outro sistema mecânico, o sistema primário, com o intuito de reduzir ou controlar as vibrações (ou o ruído irradiado) desse. Desde as primeiras utilizações mais conhecidas de NDs, como o controle de tombamento de navios de Frahm (1909), o controle de vibrações em sistemas rotativos desbalanceados (Lehr e Weighand, 1938) e a aplicação de ND do tipo Stockbridge em cabos excitados pelo vento (Pipes, 1936), muitos artigos foram apresentados demonstrando sua eficácia.

Uma teoria generalizada para a otimização de sistemas de neutralizadores, aplicados em estruturas genéricas de geometrias complexas e qualquer distribuição de amortecimento, é apresentada em Espíndola e Silva (1992). Nesse trabalho, um conjunto de NDs é projetado de forma ótima, utilizando uma equivalência com a teoria dos pontos fixos de Den Hartog (1956), em um controle modo a modo.

A teoria é baseada no conceito dos parâmetros de massa e amortecimento equivalentes generalizados, com o qual é possível descrever o movimento do sistema composto (sistema primário mais ND) utilizando apenas as coordenadas generalizadas (graus de liberdade) do sistema primário. Isso é realizado apesar dos graus de liberdade adicionais que o sistema composto terá com o acoplamento do ND.

Em Bavastri (1997) e Espíndola e Bavastri (1999), esta metodologia é ampliada para um controle em banda larga, onde uma ou várias frequências naturais

do sistema primário estão presentes. Esta teoria é utilizada com sucesso nos trabalhos de Espíndola et al. (2008), Espíndola et al. (2010) e Bavastri et al. (2014).

O avanço tecnológico e científico em volta dos materiais viscoelásticos torna a construção de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos (NDVs) possível. O comportamento desses materiais pode ser representado por um modelo de derivada fracionária com 4 parâmetros, em que poucos parâmetros representam com exatidão adequada o comportamento dinâmico de interesse (BAGLEY e TORVIK, 1983 e 1986; PRITZ, 1996). Uma metodologia capaz de caracterizar dinamicamente estes materiais usando modelos de derivadas fracionárias pode ser encontrada em Lopes et al. (2004) e em Espindola et al. (2005).

Uma aplicação comum de materiais viscoelásticos é apresentada por Saidi et al. (2011), que utilizam esses materiais em um NDV formado por uma massa e uma viga sanduíche, para reduzir a vibração de baixas frequências em pisos. O modelo numérico se mostra em excelente concordância com os resultados experimentais. Já Doubrawa Filho et al. (2010) aplicam os materiais viscoelásticos com êxito na construção de NDVs em que o material viscoelástico é responsável pela rigidez e amortecimento do mesmo.

Para o controle de vibrações, é importante conhecer o sistema primário. Um dos métodos mais consagrados, aplicados geralmente a sistemas lineares, é conhecido como problema inverso. Nesse, realiza-se o ajuste entre as curvas características do sistema obtidas experimentalmente e as curvas do modelo numérico, por meio de técnicas de otimização não lineares, com o intuito de identificar os parâmetros físicos do sistema. O uso do problema inverso para identificar sistemas não-lineares requer alguns cuidados em relação à excitação utilizada, uma vez que a resposta depende totalmente da excitação.

Embora sejam menos genéricos, métodos paramétricos também podem ser utilizados. Malaktar e Nayfeh (2003) realizaram a identificação paramétrica de uma viga com geometria cúbica, comparando o resultado obtido com o resultado da identificação por otimização não linear. O modelo considera rigidez cúbica e amortecimento não linear quadrático. A não linearidade no amortecimento é justificada pelo arrasto que a viga tem no ar quando a vibra.

### 3 NEUTRALIZADOR DINÂMICO VISCOELÁSTICO

O controle de vibrações pode ser realizado de diversas maneiras. É possível, por exemplo, reduzir a amplitude de vibrações em uma determinada faixa estreita de frequência, realizando uma modificação estrutural por meio de adição ou retirada de massa ou introduzindo elementos que modifiquem a rigidez do sistema. Desta forma, é possível deslocar a(s) frequência(s) de ressonância para fora da faixa de frequência de excitação. Além disso, podem-se adicionar elementos de amortecimento que irão dissipar a energia vibratória, reduzindo as amplitudes de vibração na vizinhança das frequências de ressonância.

Uma outra ação de controle que se enquadra na linha de modificação estrutural é a adição de um sistema ressonante chamado de neutralizador dinâmico, também conhecido como absorvedor dinâmico. Em geral, estes dispositivos podem ser construídos, mecanicamente, como uma massa e um elemento resiliente (mola-amortecedor ou partes de material viscoelástico), hidráulico, eletromecânico ou qualquer outra forma que permita criar um sistema ressonante. Quando o elemento resiliente é composto por uma mola e um amortecedor, o neutralizador pode ser denominado viscoso. Por outro lado, se o elemento resiliente é composto com material viscoelástico, o neutralizador pode ser denominado viscoelástico.

As ações acima são ditas passivas. O controle pode ainda ser ativo, em que a redução de vibração é alcançada, por exemplo, pela aplicação de atuadores que respondem de acordo com a frequência e amplitude de vibração do sistema, geralmente aplicando uma força contrária à vibração com intuito de anulá-la. Uma outra forma de controle ativo ou adaptativo de interesse é controlar o neutralizador dinâmico, o que faz com que a energia necessária ao controle seja drasticamente reduzida.

#### 3.1 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Materiais como plásticos, borrachas, fibras naturais e sintéticas, madeiras e metais em altas temperaturas possuem propriedades viscoelásticas, isto é, combinam a elasticidade com a viscosidade. Essas propriedades são dependentes, dentre outros, do tempo/frequência e da temperatura (FINDLEY et al., 1976, ESPINDOLA et. al, 2005). Materiais perfeitamente elásticos têm comportamento que pode ser descrito pela lei de Hooke, ou seja, a tensão presente no material é

diretamente proporcional à deformação que ele apresenta. Já um material viscoso se deforma de maneira contínua e irreversível sob tensão. O material que possui intrinsecamente ambas formas de deformação é denominado viscoelástico, sendo que a parcela elástica do material armazena energia e a parcela viscosa é encarregada de dissipá-la.

Materiais viscoelásticos são amplamente utilizados com o intuito de mitigar respostas vibratórias ressonantes. Seja pela construção de isoladores, neutralizadores dinâmicos, painéis sanduíche ou tirantes estruturais, este tipo de material tem um amplo poder de amortecimento e geram ações altamente eficazes no controle de vibração (MEAD, 1999; ESPINDOLA et. al, 2005).

As propriedades dos materiais viscoelásticos são amplamente estudadas e há diversos modelos matemáticos para representar o seu comportamento dinâmico, em termos do fator de perda e do módulo dinâmico de elasticidade. Modelos reológicos baseados no conceito clássico de derivadas temporais exigem a utilização de um número considerável de parâmetros, o que os tornam dispendiosos do ponto de vista do tempo computacional. Bagley e Torvik (1986) apresentam um modelo com base no conceito de derivadas fracionárias que necessita de apenas 4 parâmetros para descrever o material.

O modelo de derivada fracionária com 4 parâmetros será apresentado de modo sucinto neste trabalho. Resultante deste modelo é apresentado o módulo complexo de cisalhamento de um material viscoelástico na seguinte forma:

$$G_c(\Omega, T) = \frac{G_0 + G_\infty(ib\Omega)^\beta}{1 + (ib\Omega)^\beta} = \frac{G_0 + G_\infty\varphi_0[i\alpha_T(T)\Omega]^\beta}{1 + \varphi_0[i\alpha_T(T)\Omega]^\beta}. \quad (3.1)$$

Onde,

$G_0$  e  $G_\infty$  são as assíntotas inferior e superior, respectivamente,  $\beta$  é a ordem fracionária da derivada, surgindo na equação diferencial constitutiva do material viscoelástico, e  $b$  é a constante relacionada com o tempo de relaxação do material.

O tempo de relaxação é altamente sensível à temperatura e é normalmente expresso como  $b = \alpha_T(T)b_0$ , onde  $b_0$  é  $b$  computado na chamada temperatura absoluta de referência  $T_0$ . O fator de deslocamento  $\alpha_T(T)$  pode ser calculado como

$\alpha_T(T) = 10^{-\theta_1(T-T_0)/(\theta_2+T-T_0)}$ , onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são constantes a serem determinadas experimentalmente. A expressão empírica em questão é conhecida como equação de William-Landel-Ferry (WLF) e pode ser encontrada em Ferry (1980). Fazendo  $\varphi_0 = b_0^\beta$ , completa-se a passagem apresentada na Equação (3.1).

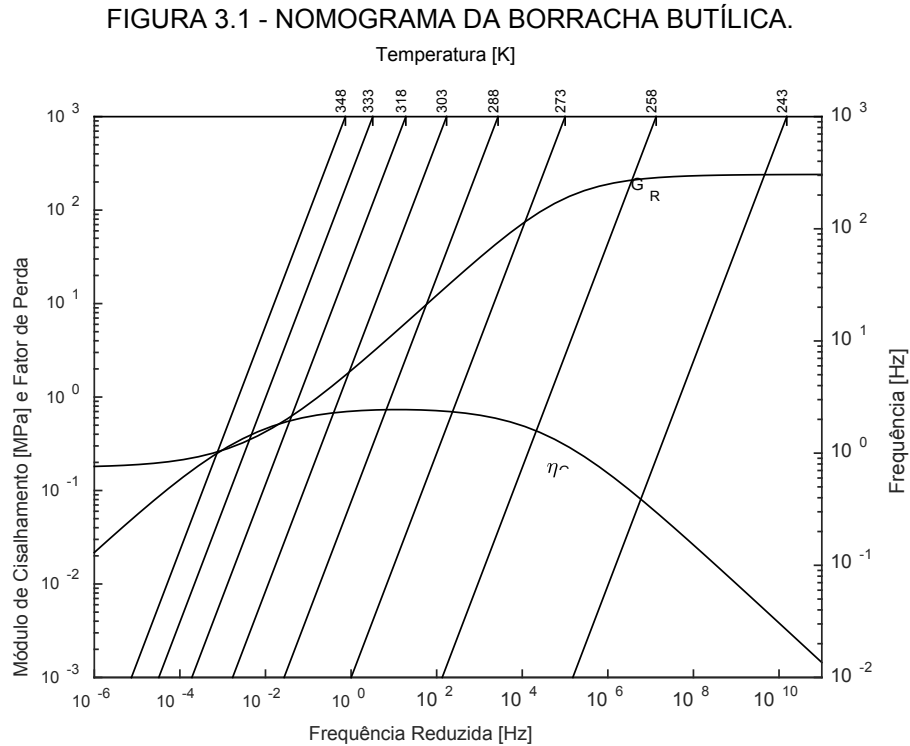
Pode-se definir

$$G_c(\Omega, T) = G_R(\Omega, T) + iG_I(\Omega, T) = G_R(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)] \quad (3.2)$$

em que  $G_R(\Omega, T)$  é a parcela real e  $G_I(\Omega, T)$  é a parcela imaginária do módulo de cisalhamento. O fator de perda do material é definido pelo quociente da parte imaginária com a parte real do módulo complexo de cisalhamento, a saber,

$$\eta(\Omega, T) = G_I(\Omega, T)/G_R(\Omega, T). \quad (3.3)$$

O modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros pode ser representado graficamente através de um nomograma, como na Figura 3.1, em que se apresenta o comportamento da borracha butílica. Os códigos escritos para a construção do mesmo foram cedidos por Lopes (1988).



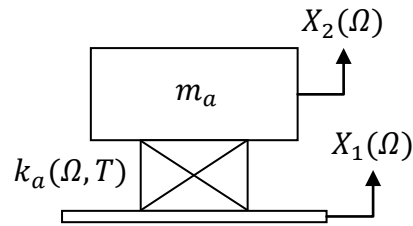
O módulo de cisalhamento referido na escala vertical à esquerda é a parte real do módulo de cisalhamento complexo, também chamado de módulo dinâmico de cisalhamento.

No nomograma acima, para se obter o fator de perda e o módulo dinâmico de elasticidade do material em determinada frequência, inicia-se com a frequência desejada na escala vertical à direita. Traça-se, então, uma linha horizontal até a linha inclinada correspondente à temperatura desejada. Desse ponto traça-se uma linha vertical até as curvas do fator de perda e do módulo dinâmico, respectivamente. A partir desses pontos de intersecção, traçam-se linhas horizontais até a escala da esquerda para se obter os valores desejados.

### 3.2 DIMENSIONAMENTO E CONSTRUÇÃO DE UM NDV

O modelo matemático do neutralizador dinâmico viscoelástico apresentado e utilizado neste trabalho é o mesmo modelo apresentado por Espindola et al. (2008).

FIGURA 3.2 - NEUTRALIZADOR DINÂMICO VISCOELÁSTICO SIMPLES.



A Figura 3.2 ilustra um NDV simples onde a massa rígida,  $m_a$ , responde com um deslocamento  $X_2(\Omega)$  a um deslocamento  $X_1(\Omega)$  proveniente da base. Esta resposta depende das características da mola viscoelástica que está inserida entre a massa e a base. A rigidez complexa dessa mola,  $k_a(\Omega)$ , é determinada por (Espíndola e Silva, 1992)

$$k_a(\Omega, T) = \vartheta G_c(\Omega, T) = \vartheta G_R(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)]. \quad (3.4)$$

Na Equação (3.4), o fator de forma  $\vartheta$  é uma constante geométrica da mola viscoelástica, que, como o nome já sugere, depende das dimensões do elemento de material empregado. Quando o elemento viscoelástico trabalha em cisalhamento puro,  $\vartheta = A/h$ , onde  $A$  é a área cisalhada e  $h$  a espessura do elemento.

A frequência natural do NDV é determinada para se controlar a vibração do sistema primário em uma faixa de frequência escolhida, reduzindo ao mínimo a amplitude de vibração. Para a obtenção da geometria do NDV, deve-se determinar a sua massa,  $m_a$ , e a sua frequência natural,  $\Omega_a$ , sendo que

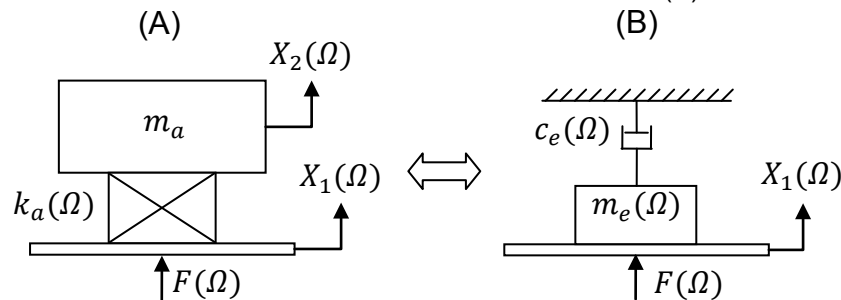
$$\Omega_a^2 = \frac{\text{real}(k_a(\Omega_a, T))}{m_a} = \frac{\vartheta \text{real}(G_c(\Omega_a, T))}{m_a}. \quad (3.5)$$

Na Equação (3.5), é possível isolar o fator de forma para determinar a geometria necessária do elemento de material viscoelástico que será utilizado para construir o NDV. Ressalta-se que o módulo de cisalhamento complexo é uma função da frequência circular  $\Omega$  e da temperatura absoluta  $T$ . Os modelos considerados neste trabalho possuem uma temperatura de trabalho  $T$  constante. Assim, de modo a simplificar a notação das equações, a temperatura de trabalho será omitida de agora em diante.

### 3.3 PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS

O conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG) é utilizado para simplificar matematicamente a equação de movimento do sistema composto (ou seja, do sistema primário com o NDV conectado a ele). A Figura 3.3 apresenta a equivalência dinâmica entre o NDV na sua forma tradicional e o NDV na sua forma representada por PEG.

FIGURA 3.3 - SISTEMAS EQUIVALENTES. MODELO TRADICIONAL (A). MODELO COM PEG (B).



Ambas as representações apresentadas na Figura 3.3 são dinamicamente equivalentes (Espíndola e Silva, 1992), de forma que a rigidez dinâmica na base, “percebida” pelo sistema primário, é a mesma em ambos os casos. O maior interesse em utilizar a representação por PEG reside no fato de possibilitar a representação de um sistema de 2GL em função apenas do grau de liberdade do sistema primário.

Como mostrado na representação simplificada do NDV na Figura 3.3(A), ele é formado por uma massa uniforme e rígida,  $m_a$ , conectada à estrutura primária através de um elemento resiliente (mola), que tem, assumidamente, propriedades de natureza viscoelásticas. A Equação (3.4) apresenta a rigidez complexa deste elemento, para uma determinada temperatura  $T$  constante.

A base na Figura 3.3(A) é assumida como sendo sem massa. As funções  $X_1(\Omega)$  e  $F(\Omega)$  representam a transformada de Fourier do deslocamento da superfície da estrutura primária, ou base do NDV,  $x_1(t)$ , e da força aplicada,  $f(t)$ , respectivamente. A força é resultante da interação entre o NDV e o ponto da estrutura primária em que esse está acoplado (Bavastri et al., 2014).

É possível verificar, a partir da Figura 3.3(A), que a relação entre a força de interação  $F(\Omega)$ , no ponto de acoplamento e o deslocamento  $X_1(\Omega)$  é dada por

$$k_a = \frac{F(\Omega)}{X_1(\Omega)} = \frac{m_a \Omega^2 \vartheta G_R(\Omega) [1 + i\eta(\Omega)]}{m_a \Omega^2 - \vartheta G_R(\Omega) [1 + i\eta(\Omega)]} \quad (3.6)$$

A frequência de antirressonância,  $\Omega_a$ , do NDV, apresentada na Equação (3.5), define a frequência em que, na ausência de amortecimento ( $\eta = 0$ ), o denominador da Equação (3.6) é igual a zero.

Usando a Equação (3.5), definindo  $r_a = G_R(\Omega)/G_R(\Omega_a)$  e dividindo a Equação (3.6) por  $\vartheta G_R(\Omega_a)$  no numerador e no denominador, é possível reescrever essa última na seguinte forma:

$$\frac{F(\Omega)}{X_1(\Omega)} = \frac{-m_a \Omega^2 [\Omega_a^2 r_a(\Omega) + i\eta(\Omega) \Omega_a^2 r_a(\Omega)]}{\Omega_a^2 r_a(\Omega) - \Omega^2 + i\eta(\Omega) \Omega_a^2 r_a(\Omega)} \quad (3.7)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{F(\Omega)}{X_1(\Omega)} = & -m_a \Omega^2 \frac{\{[\Omega_a^2 r_a(\Omega) - \Omega^2] \Omega_a^2 r_a(\Omega) + [\eta(\Omega) \Omega_a^2 r_a(\Omega)]^2\}}{D(\Omega)} \\ & + i\Omega m_a \frac{\Omega^3 \eta(\Omega) \Omega_a^2 r_a(\Omega)}{D(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Onde,

$$D(\Omega) = [\Omega_a^2 r_a(\Omega) - \Omega^2]^2 + [\eta(\Omega) \Omega_a^2 r_a(\Omega)]^2.$$

Considere agora o esquema da Figura 3.3(B), em que uma massa “ $m_e$ ” está conectada a um referencial fixo através de um elemento viscoso de constante “ $c_e$ ”. Quando uma força  $f(t)$  é aplicada à massa, esta responderá com um movimento  $x_1(t)$ . A razão entre a força e o deslocamento resultante, no domínio da frequência, pode ser obtida por um diagrama de corpo livre associado à Figura 3.3(B) e será dada por

$$\frac{F(\Omega)}{X_1(\Omega)} = -\Omega^2 m_e(\Omega) + i\Omega c_e(\Omega) \quad (3.9)$$

Comparando a Equação (3.9) com a Equação (3.8), é possível observar que a estrutura primária “percebe” o NDV no ponto de acoplamento como uma massa equivalente e dependente da frequência,  $m_e(\Omega)$ , que está conectada a um elemento viscoso equivalente e dependente da frequência,  $c_e(\Omega)$ , cuja outra extremidade está fixa a um referencial rígido.

Tomando a parte real da Equação (3.8), igualando-a com a parte real da Equação (3.9), dividindo numerador e denominador decorrentes por  $\Omega_a^4$  e realizando essas mesmas operações para a parte imaginária daquelas equações, obtêm-se os parâmetros equivalentes generalizados  $m_e(\Omega)$  e  $c_e(\Omega)$ . As Equações (3.10) e (3.11) representam, respectivamente, esses parâmetros, quais sejam, a massa equivalente  $m_e(\Omega)$  e o amortecimento equivalente  $c_e(\Omega)$  (Bavastri et al., 2014).

$$m_e(\Omega) = m_a \frac{r_a(\Omega)[r_a(\Omega)(1 + \eta^2(\Omega)) - \varepsilon_a^2]}{(r_a(\Omega) - \varepsilon_a^2)^2 + (r_a(\Omega)\eta(\Omega))^2} \quad (3.10)$$

$$c_e(\Omega) = m_a \Omega_a \frac{r_a(\Omega)\eta(\Omega)\varepsilon_a^3}{(r_a(\Omega) - \varepsilon_a^2)^2 + (r_a(\Omega)\eta(\Omega))^2} \quad (3.11)$$

Estas equações estão escritas em função dos parâmetros adimensionais  $r_a(\Omega) = G_R(\Omega)/G_R(\Omega_a)$  e  $\varepsilon_a = \Omega/\Omega_a$ .

## 4 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES TÍPICOS

Sistemas e estruturas que normalmente são modelados usando equações e formulações lineares apresentam, sob certas condições, características não lineares. Essas características podem surgir devido a diversos fatores, como condições de contorno, materiais e geometrias, sendo que o comportamento resultante depende da amplitude da excitação e da presença de fricção ou folgas, dentre outros.

Desta forma, na equação de movimento do sistema ou da estrutura são utilizados termos polinomiais de ordem quadrática, cúbica ou de ordens superiores. A equação mais comum e investigada é a equação de Duffing (Kovacic e Brennan, 2011, entre outros). Para o presente caso de interesse, adiciona-se à equação diferencial de um sistema de 1GL, inicialmente linear, um termo polinomial cúbico de rigidez, podendo o amortecimento estar ou não presente.

### 4.1 TIPOS DE NÃO LINEARIDADES

A não linearidade de um sistema se apresenta de diversas formas. Algumas delas são a geometria da estrutura, os materiais envolvidos e o tipo de excitação. Com o intuito de incorporá-las em análises e simulações, é comum adicionar termos à equação de movimento do sistema de interesse com a finalidade de modelagem. Os tipos de não linearidade mais comumente utilizados são discutidos nesta seção.

#### 4.1.1 Rigidez Cúbica

Escopo deste trabalho, o modelo de não linearidade com rigidez cúbica adiciona, à equação de movimento do sistema de 1 grau de liberdade, um termo de reação elástica proporcional ao deslocamento ao cubo. Tem-se assim,

$$m_1\ddot{x}(t) + c_1\dot{x}(t) + k_1x(t) + k_3x^3(t) = f(t). \quad (4.1)$$

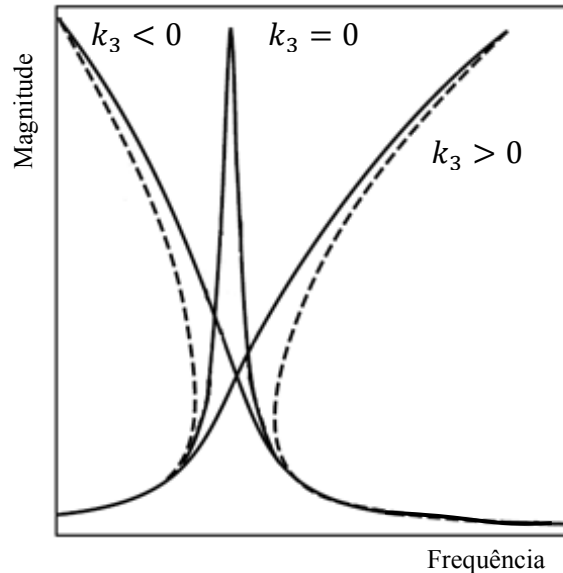
Onde,

$k_3x^3(t)$  é o termo não linear, sendo que  $k_3$  pode ser positivo ou negativo.

Quando  $k_3 > 0$ , tem-se que, quanto maior o nível de excitação, maior a rigidez no sistema, com o conseqüente aumento, em sistemas com um grau de liberdade, da frequência de ressonância. Tal propriedade pode ser vista em vigas e

placas engastadas. Se  $k_3 < 0$ , a rigidez diminui e a frequência de ressonância decai à medida que a força de excitação aumenta. Sistemas com esse comportamento cúbico atenuado aparecem na flambagem de vigas e placas.

FIGURA 4.1 - REPRESENTAÇÃO DA CURVA DE RESPOSTA DE UM SISTEMA COM NÃO-LINEARIDADE CÚBICA NA RIGIDEZ.



Por outro lado, se a amplitude de excitação é tal que  $x(t)$  é pequeno, o termo  $k_3x^3(t)$  se aproxima de zero. Desta forma o comportamento do sistema se torna praticamente linear. A Figura 4.1 ilustra os casos expostos anteriormente.

Como já antecipado, a Equação (4.1) é a mais estudada na análise do comportamento não linear em engenharia. Apesar de sua simplicidade, ela é capaz de mostrar quase todos os comportamentos de interesse característicos de sistemas não lineares.

#### 4.1.2 Rigidez Quadrática

Esta característica é representada pela equação de movimento

$$m_1\ddot{x}(t) + c_1\dot{x}(t) + k_1x(t) + k_2x^2(t) = f(t) \quad (4.2)$$

em que se nota a inclusão do termo polinomial de ordem quadrática.

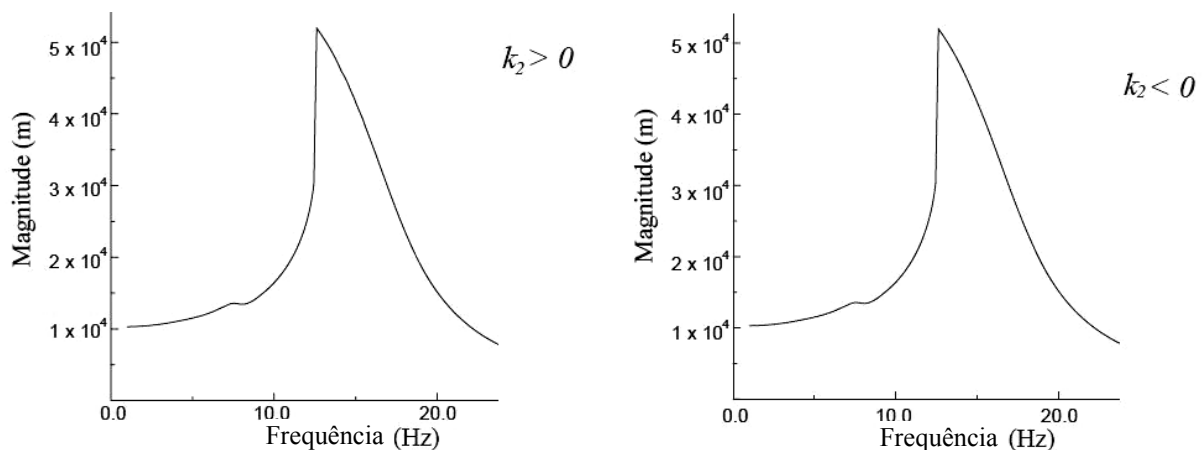
Para obter a solução deste sistema através do método de balanço harmônico, deve-se considerar uma componente constante na solução, ou seja,  $x(t) = X_0 + X_1\text{sen}(\omega t + \phi)$ . Isto é realizado para que a solução não recaia em um

sistema subjacente (Worden e Tomlinson, 2001). Desta forma, a frequência natural efetiva do sistema é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2X_0}{m_1}}. \quad (4.3)$$

Resolvendo a Equação (4.2) através de simulação computacional, de forma equivalente a uma medição de varredura lenta, como a utilizada no presente trabalho, obtém-se uma curva de resposta em frequência como a apresentada na Figura 4.2. Um sistema deste tipo possui sempre a característica de amolecimento, independente do sinal de  $k_2$  (Worden e Tomlinson, 2001).

FIGURA 4.2- CURVA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM OSCILADOR QUADRÁTICO.



FONTE: adaptado de Worden e Tomlinson, (2001).

#### 4.1.3 Rigidez Bilinear

Uma forma de não linearidade com interesse físico importante é a rigidez bilinear. Dada a equação de movimento

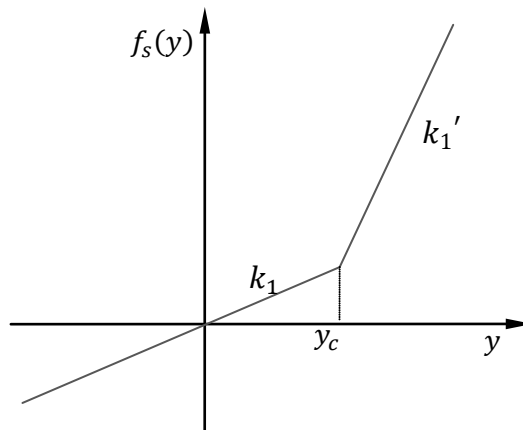
$$m_1\ddot{x}(t) + c_1\dot{x}(t) + f_s(x) = f(t), \quad (4.4)$$

a rigidez em um sistema bilinear é dada pela função  $f_s(y)$ , apresentada matematicamente na Equação (4.5) e graficamente na Figura 4.3.

$$f_s(y) = \begin{cases} k_1, & y < y_c \\ k_1' y + (k_1 - k_1') y_c, & y \geq y_c. \end{cases} \quad (4.5)$$

Quando  $y_c = 0$ , o sistema torna-se homogêneo de grau um, isto é, a característica da resposta do sistema não depende da amplitude de excitação (Worden e Tomlinson, 2001). Um sistema com rigidez bilinear pode ser homogêneo de grau um, mas não é um sistema linear. Isto demonstra que a condição de homogeneidade é necessária, mas não suficiente para que se tenha um sistema linear.

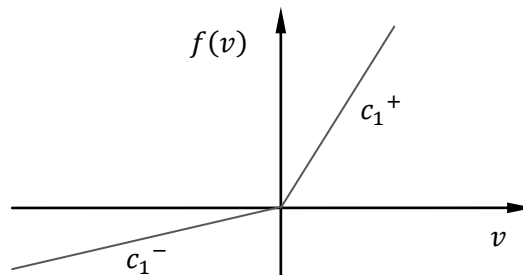
FIGURA 4.3 - CARACTERÍSTICA DA RIGIDEZ BILINEAR.



#### 4.1.4 Amortecimento Bilinear

A equação de movimento de um sistema pode também contemplar o amortecimento bilinear, ilustrado na Figura 4.4. Silveira et al. (2014) estudam a aplicação deste tipo de amortecimento na dinâmica de um veículo de passageiros. Nesse caso, o veículo apresenta características de amortecimento do movimento diferente na compressão da suspensão e retorno da mesma à posição de equilíbrio.

FIGURA 4.4 - CARACTERÍSTICA DO AMORTECIMENTO BILINEAR.



#### 4.1.5 Amortecimento Não Linear Geral

O amortecimento não linear geral ocorre em sistemas onde fluidos escoam por orifícios, como, por exemplo, amortecedores de veículos, coxins hidráulicos ou ao redor de componentes delgados, como estruturas montadas no oceano.

A forma mais comum de não linearidade geral para o amortecimento é o amortecimento quadrático, em que se tem

$$f_d(\dot{x}) = c_{NL}\dot{x}|\dot{x}|. \quad (4.6)$$

O módulo da velocidade,  $|\dot{x}|$ , é introduzido acima para garantir que a força de amortecimento,  $f_d(\dot{x})$ , esteja sempre oposta à direção da velocidade do movimento,  $x$ . Este é um exemplo da força de arrasto que atua em corpos que estão em velocidades altas em fluidos viscosos, como o ar.

#### 4.1.6 Atrito de Coulomb

O atrito de Coulomb está geralmente presente em qualquer situação onde existe movimento entre superfícies em contato. Estruturas desmontáveis, como andaimes e arquibancadas, apresentam este tipo de comportamento. Além disso, neste tipo de estruturas, o atrito de Coulomb se apresenta em conjunto com não linearidades geradas por folgas. O atrito de Coulomb é mais evidente em casos que apresentam níveis baixos de excitação e em casos extremos, onde ocorrem movimentos intermitentes de deslizamento e travamento (por atrito).

A forma mais comum que se utiliza para representar este tipo de amortecimento não linear é apresentada na Equação (4.7) (Worden e Tomlinson, 2001), qual seja,

$$f_d(\dot{x}) = c_F \text{sgn}(\dot{x}) \quad (4.7)$$

Onde,

a força de amortecimento  $f_d(\dot{x})$  é definida pela constante de amortecimento  $c_F$  e o sinal da velocidade do movimento definido pela função  $\text{sgn}(\dot{x})$ .

## 4.2 SOLUÇÕES PARA UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL NÃO LINEAR

Os sistemas não lineares geralmente não apresentam soluções analíticas exatas como os sistemas lineares. Para encontrar as funções de resposta em frequência exatas dos sistemas lineares, basta aplicar a transformada de Fourier para definir a característica dinâmica do sistema. Já para sistemas não lineares, pode-se encontrar uma solução aproximada utilizando-se de técnicas de solução numérica da equação diferencial correspondente ou através de soluções analíticas aproximadas. Não existe uma curva única que represente o sistema e sim curvas de resposta em frequência que dependem, por exemplo, do tipo e intensidade da excitação.

Na teoria de equações diferenciais, define-se como um problema de valor inicial (PVI) uma equação diferencial e as condições iniciais associadas, onde o número de condições iniciais corresponde à ordem da derivada mais elevada na equação diferencial. No domínio do tempo, um PVI pode ser resolvido por integração numérica. A integração numérica é um método aproximado utilizado para resolver equações diferenciais e possui resultado satisfatório. Por isso, é uma das abordagens mais utilizadas para a solução de equações diferenciais.

Os métodos que resultam em uma solução analítica aproximada também possuem seus atrativos, uma vez que, encontrada a solução analítica, a análise paramétrica torna-se mais breve e clara. Os métodos mais populares para determinar a solução analítica aproximada de uma equação diferencial não linear são: o método do balanço harmônico (MBH), o método de Galerkin-Urabe, o método de múltiplas escalas, o método de Lindsted-Poincaré e o método de determinação de médias. Os dois primeiros métodos acima são baseados em expansões de harmônicos, enquanto os três últimos são métodos de perturbação (NAYFEH e MOOK, 1979).

Os métodos de perturbação são exatos quando a não linearidade presente em um sistema é fraca, pois, segundo Hamdam e Burton (1993), esses métodos podem não convergir para alguns valores dos parâmetros. Observa-se que, mesmo com a adição de termos à solução aproximada, a qualidade das soluções de baixa ordem não muda. Além disso, eles são bastante trabalhosos.

Assim, utilizar um método como o método do balanço harmônico (MBH) é mais vantajoso, considerando o fato de que tal método tem a forma mais simples de

aplicação, além de apresentar resultados satisfatórios e ser atualmente o mais utilizado na literatura. A seguir é apresentada a equação de Duffing com rigidez não linear cúbica, sendo sua solução obtida através do método de balanço harmônico.

## 5 O SISTEMA NÃO-LINEAR COM RIGIDEZ CÚBICA: PRIMÁRIO E COMPOSTO

O modelo matemático e a metodologia utilizada para o presente trabalho são apresentados neste capítulo. Inicialmente, é apresentado o sistema de 1GL com não linearidade cúbica na rigidez, que é, no caso, o sistema primário. Uma descrição concisa da formulação do NDV na forma de parâmetros equivalentes generalizados é então apresentada para, em seguida, descrever-se o sistema composto (sistema primário + NDV) usando tais conceitos.

A equação não linear que descreve um oscilador com não linearidade cúbica é chamada de equação de Duffing. O engenheiro alemão Georg Duffing desenvolveu um trabalho completo sobre essa equação. Por causa de sua aparência simples e enigmática e pelo grande conhecimento gerado sobre ela, muitos pesquisadores a utilizam como um modelo aproximado para diversos sistemas físicos ou como um modelo matemático conveniente para investigar novos métodos de solução (Kovacic e Brennan, 2011).

Em sua forma original, a equação de Duffing é essencialmente uma equação diferencial de movimento de segunda ordem linear, com a adição de termos de rigidez não linear polinomiais de segunda e terceira ordem. Tem-se assim, a seguinte equação:

$$m_1\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 = f(t) \quad (5.1)$$

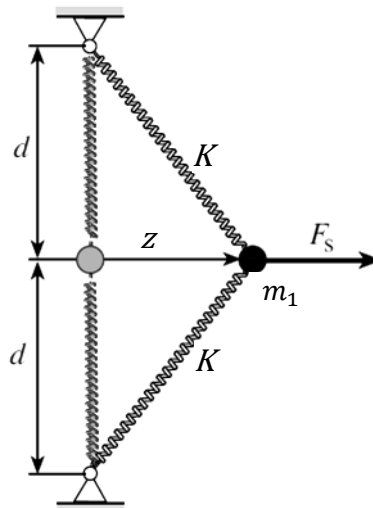
A simples adição destes termos abre as portas para a descrição de um imenso conjunto de fenômenos interessantes, que representam características de sistemas físicos, a partir da equação fundamental da teoria de vibrações. A partir dos estudos realizados por Georg Duffing, diversos autores sugeriram formas diferentes para a equação, de forma a descrever uma variedade ainda maior de sistemas não lineares. Estes sistemas podem variar desde o comportamento de um pêndulo até o comportamento não linear de alguns isoladores, vigas, cabos e sistemas elétricos.

No presente trabalho, é estudado um sistema em que a não linearidade é introduzida devido à geometria do mesmo.

## 5.1 SISTEMA PRIMÁRIO NÃO LINEAR COM RIGIDEZ CÚBICA

O sistema estudado no presente trabalho pode ser representado pela Figura 5.1. O sistema é basicamente composto por uma massa,  $m_1$ , fixa por molas transversais, cuja constante elástica linear é  $K$ . Quando a massa é deslocada de uma distância  $z$  do ponto de equilíbrio, as molas são esticadas transversalmente, gerando uma relação não linear entre o deslocamento da massa e a força necessária para deslocá-la.

FIGURA 5.1 - SISTEMA GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR CONSISTINDO DE MOLAS LINEARES E MASSA.



FONTE: Kovacic e Brennan, (2011).

A relação entre a força  $F_s$  e o deslocamento resultante encontrada para esta configuração geométrica é dada por

$$F_s = nKz \left( 1 - \frac{d_0}{\sqrt{z^2 + d^2}} \right). \quad (5.2)$$

Onde,

$d_0 \leq d$  é o comprimento livre da mola e  $n$  é o número de molas, distribuídas radialmente de forma simétrica.

Aplicando série de Taylor até a terceira ordem e considerando pequenos valores de  $z$ , a Equação (5.2) pode ser escrita da seguinte forma:

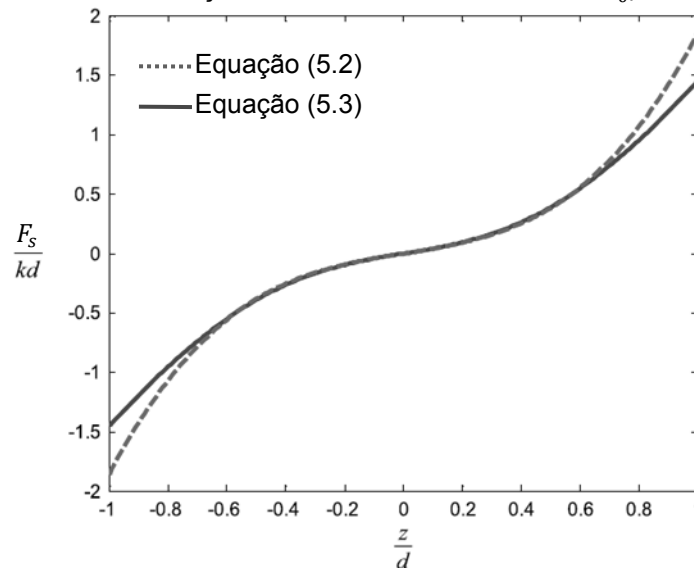
$$F_s \approx k_1 z + k_3 z^3. \quad (5.3)$$

Onde,

$$k_1 = nK(1 - d_0/d) \text{ e } k_3 = (nK/2) d_0/d^3.$$

A forma adimensional exata da Equação (5.2) e a forma aproximada da Equação (5.3) estão apresentadas na Figura 5.2 para o caso particular em que  $d_0/d = 0,9$ . É possível observar que o erro é menor que 5% para valores de  $z/d \leq 0,4$ . Além disso, este erro diminui para valores de  $d_0/d$  menores. Ressalta-se que o sistema apresentado na Figura 5.1 não possui amortecimento, porém, em sistemas reais, o amortecimento está presente.

FIGURA 5.2 - REAÇÃO NÃO DIMENSIONAL PARA  $d_0/d = 0,9$ .



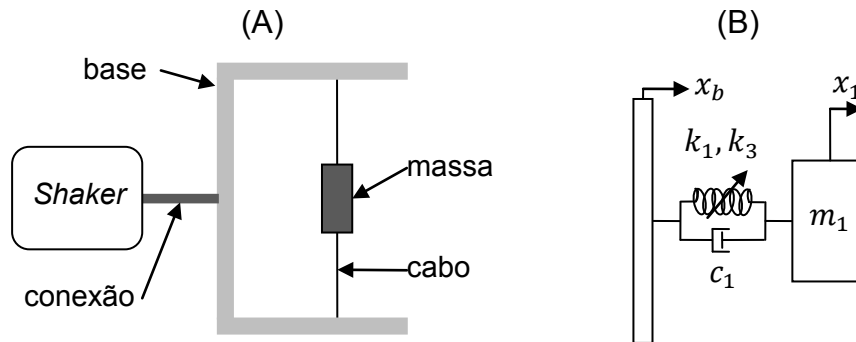
FONTE: Gatti et al., (2010a).

A Figura 5.3(A) apresenta, de forma completa, todos os elementos presentes no sistema estudado neste trabalho. A massa do sistema primário é fixada através de quatro cabos de aço trançado, com capa polimérica, a uma caixa de acrílico, que serve de base para o sistema não linear. Através de uma haste de conexão, é aplicado um deslocamento controlado nessa base, realizado por um *shaker*.

Já Figura 5.3(B) mostra a representação simplificada do sistema em que a base sofre um deslocamento harmônico  $x_b$  aplicado pelo *shaker*. Os cabos estão representados pela mola não linear, de coeficientes  $k_1$  e  $k_3$ , e pelo amortecedor

viscoso, de coeficiente  $c_1$ , A massa  $m_1$ , do sistema primário, responde com um deslocamento  $x_1$ , quando a base é movimentada pelo *shaker*.

FIGURA 5.3 - SISTEMA NÃO LINEAR COM SHAKER: REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA FÍSICO (A), REPRESENTAÇÃO SIMPLIFICADA (B).



Aplicando a segunda lei de Newton, encontra-se a equação de movimento do sistema primário, que é dada por

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_b) + k_1 (x_1 - x_b) + k_3 (x_1 - x_b)^3 = 0. \quad (5.4)$$

Onde,

$m_1$  é a massa do sistema primário, enquanto  $c_1$ ,  $k_1$ ,  $k_3$  denotam, respectivamente, os coeficientes de amortecimento, rigidez linear e rigidez não linear cúbica.

O deslocamento da massa  $m_1$  é representado por  $x_1$  e o deslocamento da base por  $x_b$ .

A base é excitada com aceleração de amplitude controlada.

Para encontrar uma solução para a Equação (5.4), é definida a amplitude relativa de deslocamento e aplicado o método do balanço harmônico. O processo de solução está apresentado na seção 5.1.1.

### 5.1.1 Solução para Amplitude Relativa de Deslocamento

Introduzindo o deslocamento relativo entre a base e a massa,  $z = x_1 - x_b$ , a Equação (5.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$m_1 (\ddot{z} + \ddot{x}_b) + c_1 \dot{z} + k_1 z + k_3 z^3 = 0 \quad (5.5)$$

Assumindo as soluções  $z = Z\text{sen}(\Omega t + \psi_z)$  e  $x_b = X_b\text{sen}(\Omega t + \psi_{x_b})$ , a Equação (5.5) toma a forma

$$\begin{aligned} -m_1\Omega^2 Z \text{sen}(\Omega t + \psi_z) + c_1\Omega Z \cos(\Omega t + \psi_z) + k_1 Z \text{sen}(\Omega t + \psi_z) \\ + k_3 [Z \text{sen}(\Omega t + \psi_z)]^3 = m_1\Omega^2 X_b \text{sen}(\Omega t + \psi_{x_b}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

As soluções assumidas para  $z$  e  $x_b$ , apresentadas em Worden e Tomlinson (2001) consideram a fase apenas para o deslocamento da base. No presente trabalho, no entanto, deve-se considerar a fase em ambas as respostas, para que seja possível realizar a comparação com as curvas experimentais. Isso será verificado mais adiante.

Utilizando as relações trigonométricas

$$\text{sen}^3(a) = \frac{1}{4}(3\text{sen}(a) - \text{sen}(3a)) \quad (5.7)$$

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(b)\cos(a) + \cos(b)\text{sen}(a) \quad (5.8)$$

$$\cos(a + b) = \cos(b)\cos(a) - \text{sen}(b)\text{sen}(a) \quad (5.9)$$

e ignorando o termo  $\text{sen}(3a)$ , é possível expandir os termos da Equação (5.6), de forma a encontrar a Equação (5.10), qual seja,

$$\begin{aligned} & -m_1\Omega^2 Z [\text{sen}(\psi_z)\cos(\Omega t) + \cos(\psi_z)\text{sen}(\Omega t)] \\ & + c_1\Omega Z [\cos(\psi_z)\cos(\Omega t) - \text{sen}(\psi_z)\text{sen}(\Omega t)] \\ & + k_1 Z [\text{sen}(\psi_z)\cos(\Omega t) + \cos(\psi_z)\text{sen}(\Omega t)] \\ & + \frac{3}{4} k_3 Z^3 [\text{sen}(\psi_z)\cos(\Omega t) + \cos(\psi_z)\text{sen}(\Omega t)] \\ & = -m_1\Omega^2 X_b [\text{sen}(\psi_{x_b})\cos(\Omega t) + \cos(\psi_{x_b})\text{sen}(\Omega t)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Quando são separados os termos da Equação (5.10) que contêm  $\text{sen}(\Omega t)$  e os que contêm  $\cos(\Omega t)$ , respectivamente, são encontradas duas equações distintas. Colocando  $\text{sen}(\psi_z)$  e  $\cos(\psi_z)$  em evidência, decorrem as seguintes equações:

$$\left[ \left( -m_1 \Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 Z^2 \right) \cos(\psi_z) - c \Omega \sin(\psi_z) \right] Z = m_1 \Omega^2 X_b \cos(\psi_{x_b}) \quad (5.11)$$

$$\left[ \left( -m_1 \Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 Z^2 \right) \sin(\psi_z) + c \Omega \cos(\psi_z) \right] Z = m_1 \Omega^2 X_b \sin(\psi_{x_b}) \quad (5.12)$$

E elevando as Equações (5.11) e (5.12) ao quadrado e somando o resultado, encontra-se a equação característica em Z, cujas raízes fornecem a curva de resposta em frequência de um sistema não linear com rigidez cúbica. Esta equação característica é dada por

$$\left[ \left( -m_1 \Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 Z^2 \right)^2 + \Omega^2 c_1^2 \right] Z^2 = m_1^2 \Omega^4 X_b^2 \quad (5.13)$$

Para encontrar a fase  $\psi_z$ , deve-se dividir a Equação (5.11) pela Equação (5.12) e isolar o termo  $\psi_z$ . Assim, a fase é dada por

$$\psi_z = \tan^{-1} \left[ \frac{\left( -m_1 \Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 Z^2 \right) \tan(\psi_{x_b}) - \Omega c_1}{\left( -m_1 \Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4} k_3 Z^2 \right) + \Omega c_1 \tan(\psi_{x_b})} \right] \quad (5.14)$$

A medição experimental neste trabalho utiliza a curva de transmissibilidade. A seção 5.1.2 mostra como é possível transformar o resultado das Equações (5.13) e (5.14), que definem a curva de resposta em frequência para o deslocamento relativo, em uma curva de transmissibilidade.

### 5.1.2 Solução para Transmissibilidade

A configuração do sistema não linear físico investigado e o sistema de medição utilizado requerem que seja utilizada a curva de transmissibilidade tanto na identificação quanto no controle do sistema. O sistema físico é medido com um acelerômetro instalado na base e outro na massa, determinando assim a transmissibilidade  $\bar{T}_1$  do sistema como sendo, conceitualmente, o quociente

$$\bar{T}_1 = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_b} \quad (5.15)$$

Onde,

$\bar{X}_1$  é a amplitude complexa de  $x_1(t)$  e  $\bar{X}_b$  é a amplitude complexa de  $x_b(t)$ .

É possível relacionar a transmissibilidade com o deslocamento relativo considerando novamente a relação  $z = x_1 - x_b$  e as soluções assumidas,  $z = Z \sin(\Omega t + \psi_z)$  e  $x_b = X_b \sin(\Omega t + \psi_{x_b})$ . Representando as soluções assumidas em suas formas complexas, quais sejam,

$$x_b = \frac{1}{2}iX_b(e^{-i\Omega t}e^{-i\psi_{x_b}} - e^{i\Omega t}e^{i\psi_{x_b}}), \quad (5.16)$$

$$z = \frac{1}{2}iZ(e^{-i\Omega t}e^{-i\psi_z} - e^{i\Omega t}e^{i\psi_z}), \quad (5.17)$$

e considerando que  $x_1 = z + x_b$ , a resposta na massa do sistema pode ser escrita por

$$x_1 = \frac{1}{2}i[e^{-i\Omega t}(Ze^{-i\psi_z} + X_b e^{-i\psi_{x_b}}) - e^{i\Omega t}(Ze^{i\psi_z} + X_b e^{i\psi_{x_b}})]. \quad (5.18)$$

Considerando o estudo de verificação da influência dos harmônicos superiores de Febbo et al. (2014), pode-se assumir que a solução para  $x_1$  também tem a mesma forma. Ou seja,  $x_1 = X_1 \sin(\Omega t + \psi_{x_1})$ . Assim, quando a excitação é harmônica, a resposta também é harmônica, de modo que

$$X_1 e^{i\psi_{x_1}} = Ze^{i\psi_z} + X_b e^{i\psi_{x_b}}. \quad (5.19)$$

A Equação (5.19) nada mais é do que a soma das formas complexas,  $\bar{X}_1 = \bar{Z} + \bar{X}_b$ , sendo que a mesma soma também é válida para os complexos conjugados. Sendo assim pode-se reescrever a Equação (5.15) como sendo

$$\bar{T}_1 = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_b} = \frac{\bar{Z} + \bar{X}_b}{\bar{X}_b}. \quad (5.20)$$

A transmissibilidade na sua forma complexa  $\bar{T}_1$  é obtida substituindo os valores encontrados a partir das Equações (5.13) e (5.14) e os valores de  $\bar{X}_b$  obtidos

experimentalmente. A transmissibilidade para o sistema primário será denominada daqui em diante como  $\bar{T}_1^{num}(\Omega)$ , quando se referir ao modelo numérico, e  $\bar{T}_1^{exp}(\Omega)$  quando se referir à medição experimental. É importante salientar que, no presente trabalho, a fase do deslocamento  $\psi_z$  não é considerada nula e deve ser obtida experimentalmente. No trabalho de Prêve (2015), este valor foi considerado nulo, o que pode gerar erros na transformação de deslocamento relativo em transmissibilidade, ao serem usados valores de medições experimentais.

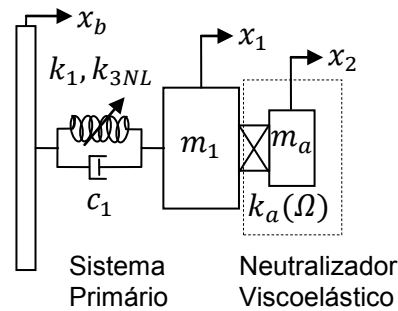
## 5.2 SISTEMA COMPOSTO

Com a adição de um NDV ao sistema primário surge um sistema composto de 2 graus de liberdade. Assim, são necessárias duas coordenadas para descrever, de forma completa, o movimento do sistema resultante. Aqui são apresentadas as equações de movimento do sistema de dois graus de liberdade, utilizando tanto o modelo clássico, que resulta em um sistema de duas equações, quanto o modelo de parâmetros equivalentes generalizados (PEG) (Espíndola e Silva, 1992). O primeiro grau de liberdade está associado ao sistema primário não linear com rigidez cúbica e o segundo ao NDV.

### 5.2.1 Sistema composto com dois graus de liberdade

Com o modelo clássico, o sistema físico pode ser representado pela Figura 5.4. Este sistema é excitado na base por um atuador do tipo *shaker*, com um movimento harmônico de amplitude controlada, respondendo com os movimentos da massa do sistema primário,  $m_1$ , e do NDV,  $m_a$ .

FIGURA 5.4 - SISTEMA NÃO LINEAR COM NEUTRALIZADOR.



As equações diferenciais do movimento encontradas para este sistema, por meio da geração de diagramas de corpo livre e da aplicação da segunda lei de Newton, são:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_b) + k_1(x_1 - x_b) + k_{3NL}(x_1 - x_b)^3 - k_a(\Omega)(x_2 - x_1) = 0 \quad (5.21)$$

$$m_a \ddot{x}_2 + k_a(\Omega)(x_2 - x_1) = 0. \quad (5.22)$$

Onde,

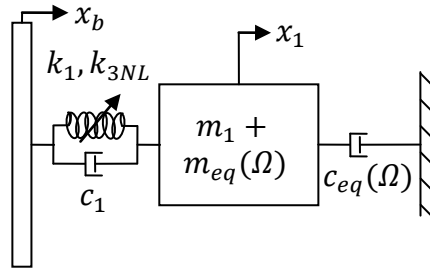
$k_a(\Omega)$  é a rigidez do elemento viscoelástico, parâmetro que é dependente da frequência.

É possível encontrar uma solução para o sistema composto acima, de dois graus de liberdade, através do método do balanço harmônico, como mostrado em Prêve (2015). No presente trabalho, essa solução é obtida substituindo o modelo clássico do NDV (Figura 5.4) pelo modelo dinamicamente equivalente, usando o conceito de parâmetros equivalentes generalizados. Esta solução é apresentada na seção 5.2.2.

### 5.2.2 Sistema composto representado por PEG

Os sistemas da Figura 5.4 e da Figura 5.5 são dinamicamente equivalentes (vide seção 3.3), ou seja, a resposta  $x_1$  é exatamente a mesma para a mesma  $x_b$  excitação na base. A principal vantagem na utilização de PEG é a possibilidade de representar um sistema composto através das coordenadas originais do sistema primário, sendo que este pode ter 1 ou mais graus de liberdade.

FIGURA 5.5 - SISTEMA NÃO LINEAR COM NEUTRALIZADOR NA FORMA DE PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS.



A equação diferencial que rege o movimento do sistema é determinada através da geração do diagrama de corpo livre e da aplicação da segunda lei de Newton. Essa equação é

$$[m_1 + m_{eq}(\Omega)]\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_b) + c_{eq}(\Omega)\dot{x}_1 + k_1(x_1 - x_b) + k_{3NL}(x_1 - x_b)^3 = 0 \quad (5.23)$$

Seguindo os mesmos passos apresentados na seção 5.1.1, em especial, assumindo a mesma solução do sistema primário através do método do balanço harmônico, obtêm-se as equações para o movimento relativo entre a base e a massa do sistema primário,  $Z$ , e sua respectiva fase,  $\psi_z$ . Essas equações são dadas por

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ -[m_1 + m_{eq}(\Omega)]\Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4}k_{3NL}Z^2 \right\} + \Omega^2 (c_1 + c_{eq}(\Omega))^2 \right\} Z^2 \\ & = \left\{ [m_1 + m_{eq}(\Omega)]\Omega^2 X_b \right\}^2 + [\Omega c_{eq}(\Omega) X_b]^2, \end{aligned} \quad (5.24)$$

e

$$\psi_z = \tan^{-1} \left\{ \frac{\left\{ -[m_1 + m_{eq}(\Omega)]\Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4}k_{3NL}Z^2 \right\} f(\psi_{x_b}) - \Omega [c_1 + c_{eq}(\Omega)]}{\left\{ -[m_1 + m_{eq}(\Omega)]\Omega^2 + k_1 + \frac{3}{4}k_{3NL}Z^2 \right\} + \Omega [c_1 + c_{eq}(\Omega)] f(\psi_{x_b})} \right\} \quad (5.25)$$

em que

$$f(\psi_{x_b}) = \frac{[m_1 + m_{eq}(\Omega)] \sin(\psi_{x_b}) - \Omega c_{eq}(\Omega) \cos(\psi_{x_b})}{[m_1 + m_{eq}(\Omega)] \cos(\psi_{x_b}) + \Omega c_{eq}(\Omega) \sin(\psi_{x_b})}. \quad (5.26)$$

Os resultados obtidos acima também devem ser transformados em transmissibilidade, substituindo as Equações (5.24) e (5.25) na Equação (5.20). A transmissibilidade para o sistema composto será tratada daqui em diante como  $\bar{T}_2^{num}(\Omega)$ , ao se referir ao modelo numérico, e  $\bar{T}_2^{exp}(\Omega)$ , ao se referir à medição experimental.

Importante comentar que o modelo do sistema composto apresentado por Prêve (2015) possui uma interpretação limitada. Naquele trabalho, o amortecimento equivalente é considerado como estando em paralelo com o amortecimento do sistema primário. No entanto, para completa generalidade, ele deve ser localizado entre a massa do sistema primário e um referencial fixo, como na Figura 5.5. Isto é devido à forma como os parâmetros equivalentes são definidos.

Um estudo sobre a presença de harmônicos de ordens superiores no sistema composto em questão foi realizado por Febbo et al. (2014), com a realização de integração numérica para obtenção da resposta dinâmica do sistema, aqui modelado pela Equação (5.23). Esse estudo mostra que o terceiro harmônico, que surge no espectro da resposta por consequência da não-linearidade cúbica, pode ser negligenciado, sem que se insira um erro considerável na curva de resposta em frequência.

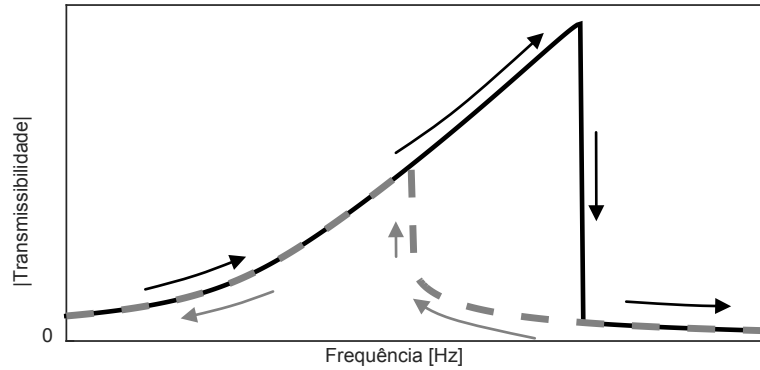
## 6 METODOLOGIAS DE IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE

Definidos os modelos matemáticos que representam os modelos físicos dos sistemas primário e composto, abordam-se os problemas de otimização para encontrar os parâmetros físicos do sistema primário (identificação) e definir as características físicas do NDV, de modo que se obtenha um controle ótimo de vibração. Essas metodologias são apresentadas neste capítulo. Observa-se que, para identificar os parâmetros que caracterizam o sistema primário e, posteriormente, determinar as características ótimas do NDV, são utilizados conceitos tais como problema inverso e técnicas de otimização não linear.

Após a realização da medição no sistema primário, obtendo a curva de transmissibilidade  $\bar{T}_1^{exp}(\Omega)$  e os valores de excitação  $\bar{X}_b$ , é possível identificar os parâmetros do sistema não linear, ajustando, por mínimos quadrados, as curvas de transmissibilidade numérica e experimental,  $\bar{T}_1^{num}(\Omega)$  e  $\bar{T}_1^{exp}(\Omega)$ , respectivamente. Para aplicar essa metodologia em um sistema com comportamento não linear, tal como o estudado no presente trabalho, cuidados especiais devem ser tomados com a excitação, uma vez que diferentes tipos de excitação e suas amplitudes levam a respostas diferentes em tais sistemas. Como um modelo de resposta a uma excitação harmônica é usado, deve-se efetivamente realizar a medição do sistema com um sinal harmônico, aumentando e reduzindo a frequência de excitação de forma lenta e com amplitude constante (neste caso de aceleração), para gerar as curvas necessárias.

De modo a obter, na curva de medição experimental, o fenômeno de salto em amplitude, que ocorre no sistema não linear, deve-se realizar uma varredura senoidal lenta, variando discretamente a frequência. Desta forma, é possível construir a curva de resposta em frequência do sistema. A varredura é realizada aumentando a frequência, de modo que se obtenha o salto para cima, posteriormente reduzindo-a, para obter o salto para baixo, como pode ser observado na Figura 6.1.

FIGURA 6.1 - CURVA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA EXPERIMENTAL CARACTERÍSTICA.



Uma vez que os parâmetros do sistema primário sejam encontrados, é realizada a otimização do NDV para um material viscoelástico escolhido. O passo seguinte é a construção e acoplamento do NDV ao sistema primário e a medição do sistema composto, podendo-se assim comparar o resultado numérico  $\bar{T}_2^{num}(\Omega)$  com o experimental  $\bar{T}_2^{exp}(\Omega)$ .

### 6.1 IDENTIFICAÇÃO

O sistema não linear físico é medido utilizando acelerômetros na base e na massa. Desta forma, é determinada a curva de transmissibilidade do mesmo. A utilização da curva de transmissibilidade não permite identificar a massa do sistema primário, pois nenhuma força ou impulso é medida. Para contornar esta limitação do sistema de medição, introduzem-se os parâmetros

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \lambda_1 = \frac{c_1}{m_1}, \quad \alpha = \frac{k_{3NL}}{m_1}.$$

Desta maneira, as Equações (5.13) e (5.14) tomam, respectivamente, a seguinte forma:

$$\left[ \left( -\Omega^2 + \omega_{10}^2 + \frac{3}{4}\alpha Z^2 \right)^2 + \Omega^2 \lambda_1^2 \right] Z^2 = \Omega^4 X_b^2 \quad (6.1)$$

e

$$\psi_z = \tan^{-1} \left[ \frac{\left( -\Omega^2 + \omega_{10}^2 + \frac{3}{4}\alpha Z^2 \right) \tan(\psi_{x_b}) - \Omega \lambda_1}{\left( -\Omega^2 + \omega_{10}^2 + \frac{3}{4}\alpha Z^2 \right) + \Omega \lambda_1 \tan(\psi_{x_b})} \right]. \quad (6.2)$$

A função objetivo utilizada na identificação é definida como sendo a norma de Frobenius do erro médio quadrático, denotada por  $\|\cdots\|_F$ . Esse erro é o existente entre as curvas de transmissibilidade experimental e numérica. Assim, em sistemas não lineares, é necessário medir tanto a curva obtida com a frequência crescente, denominada doravante como curva de subida, quanto a curva com frequência decrescente, ou simplesmente, curva de descida.

Portanto, no problema de otimização criado para a identificação do sistema primário, a função objetivo é definida por

$$f_{obj}^{id}(x): R^n \rightarrow R = \left\| \left| \bar{T}_1^{exp}(\Omega, x) \right| - \left| \bar{T}_1^{num}(\Omega, x) \right| \right\|_F^{subida} + \left\| \left| \bar{T}_1^{exp}(\Omega, x) \right| - \left| \bar{T}_1^{num}(\Omega, x) \right| \right\|_F^{descida}. \quad (6.3)$$

sendo que o objetivo, nesta parte, é reduzir o erro médio quadrático entre as curvas de transmissibilidade experimental e numérica a valores mínimos.

A função objetivo é avaliada no intervalo de frequência compreendido por  $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ , em que  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são os limites inferior e superior da banda de frequência de interesse. O vetor de projeto é representado por  $x$  e definido por

$$x = [\omega_{10}, \lambda_1, \alpha]. \quad (6.4)$$

Para identificar o sistema não linear cúbico, é utilizado um algoritmo evolucionário de otimização (algoritmos genéticos). A otimização ajusta sistematicamente os parâmetros do sistema primário através da função objetivo, que é estabelecida conforme a Equação (6.3).

Como o próprio nome já diz, a técnica de algoritmos genéticos se baseia em conceitos de genética, em particular na a teoria darwiniana da evolução das espécies, como pode ser visto em Holland (1973). Nesse tipo de algoritmo, existem os indivíduos, ou genótipo de uma população. Os indivíduos são compostos de unidades que equivalem aos genes. Cada gene corresponde a uma variável do vetor de projeto. Assim, um indivíduo é um projeto viável.

Algoritmos genéticos são iterativos e, em cada iteração (ou também chamada de geração), a população é modificada utilizando-se as melhores

características da geração anterior (SARAMAGO, 2003). A técnica consiste em quatro estágios, ou operações genéticas. Elas são: a evolução, que mede a aptidão (valor da função objetivo) de cada indivíduo solução; a seleção, que, baseada na aptidão, escolhe os indivíduos da população que servirão de base para a próxima geração; a reprodução (“crossover”), que toma indivíduos e os combina para gerar novos indivíduos da próxima população; e a mutação que, aleatoriamente, modifica os indivíduos através de alterações nos genes.

O número de indivíduos da população deve representar a complexidade do problema. O processo se repete até que um número pré-determinado de gerações seja atingido. A solução é representada pelo elemento mais apto (melhor valor da função objetivo) da última geração.

Nesse trabalho, são utilizadas 300 gerações, com 50 indivíduos em cada uma delas. A probabilidade de cruzamento é ajustada em 80% e a de mutação mantida no padrão do algoritmo do Matlab<sup>®</sup>.

## 6.2 CONTROLE

Os parâmetros ótimos do NDV também são alcançados usando técnicas de otimização não linear. Denotando a transmissibilidade do sistema composto como sendo  $|\bar{T}_2^{num}(\Omega)|$ , a função objetivo toma a seguinte forma:

$$f_{obj}^{nv}(y): R^n \rightarrow R = \max_{\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2} (|\bar{T}_2^{num}(\Omega, y)|), \quad (6.5)$$

onde  $\max(\dots)$  representa o valor máximo da curva de transmissibilidade,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são os limites inferior e superior da banda de frequência de interesse, respectivamente, e  $y$  é o vetor projeto.

A finalidade é reduzir, tanto quando possível, a amplitude de transmissibilidade entre o movimento da massa do sistema primário e o movimento da sua base, quando o neutralizador está acoplado. Assim, o procedimento busca encontrar um  $y$  que provoque o menor valor para  $|\bar{T}_2^{num}(\Omega, x)|$ , na faixa de frequência considerada ( $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ ). É importante ressaltar que, durante o processo de otimização, a temperatura de trabalho escolhida é mantida constante.

O vetor de projeto, no caso desta otimização, é dado por

$$y = \Omega_a \quad (6.6)$$

Onde,

$\Omega_a$  é a frequência característica (natural) do neutralizador.

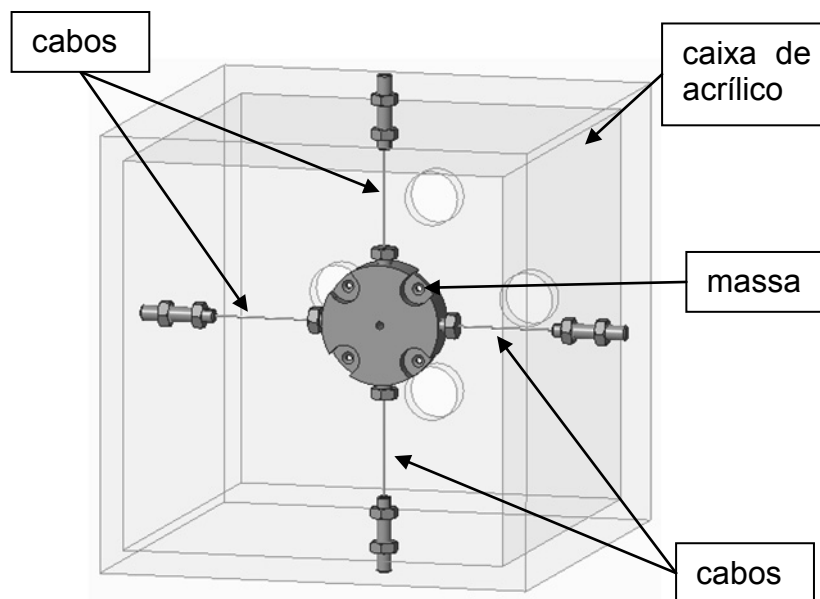
Nessa etapa, o método de Nelder-Mead (Lagarias et al., 1998) é usado como a técnica de otimização não linear. Restrições para o vetor de projeto não são empregadas. Tanto as soluções do problema não linear,  $\bar{T}_2^{num}(\Omega, x)$ , quanto a técnica de otimização não linear são implementadas pelo autor no ambiente de programação do Matlab<sup>®</sup>.

As características de frequência natural ótima,  $\Omega_a^*$ , resultam do processo de otimização. Então, com  $m_a$  assumindo um valor entre 0,1 a 0,2 de  $m_1$  (Den Hartog, 1956), o fator geométrico do NDV,  $\vartheta$ , é calculado a partir da Equação (3.5). Finalmente, para chegar à realização experimental do NDV, deve-se seguir o procedimento descrito em Espindola et al. (2010).

## 7 MODELO FÍSICO

Neste capítulo, é apresentado o sistema não linear utilizado no presente trabalho, assim como a aplicação da metodologia de identificação e da metodologia de controle e seus resultados. A construção do sistema não linear consiste na fixação de uma massa, por meio de cabos de aço revestidos de plástico, à uma caixa de acrílico, como mostra a Figura 7.2.

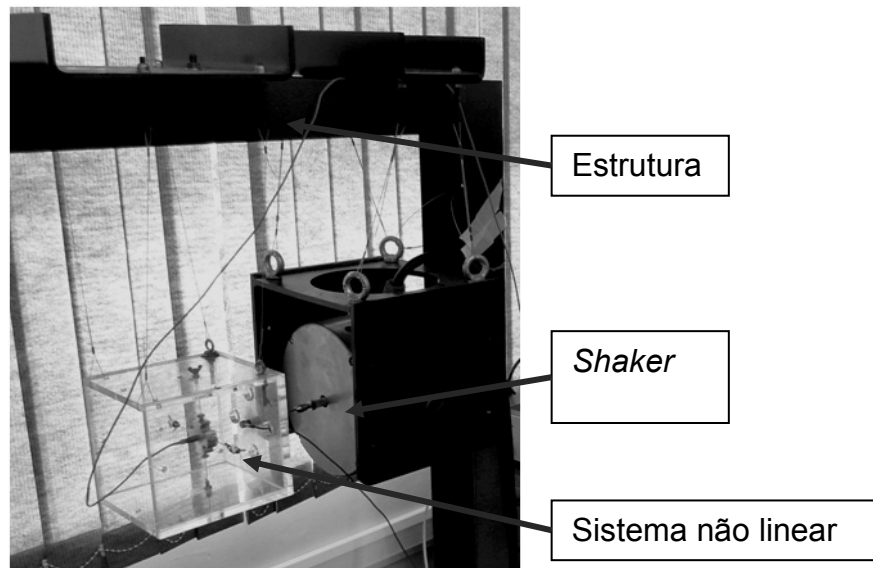
FIGURA 7.1 - REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR.



A fixação dos cabos na caixa de acrílico permite o ajuste da tensão inicial daqueles, de modo a manter a simetria no sistema e ajustar a frequência em que o sistema entra em ressonância. A caixa é construída em acrílico para possibilitar a visualização do sistema durante a excitação.

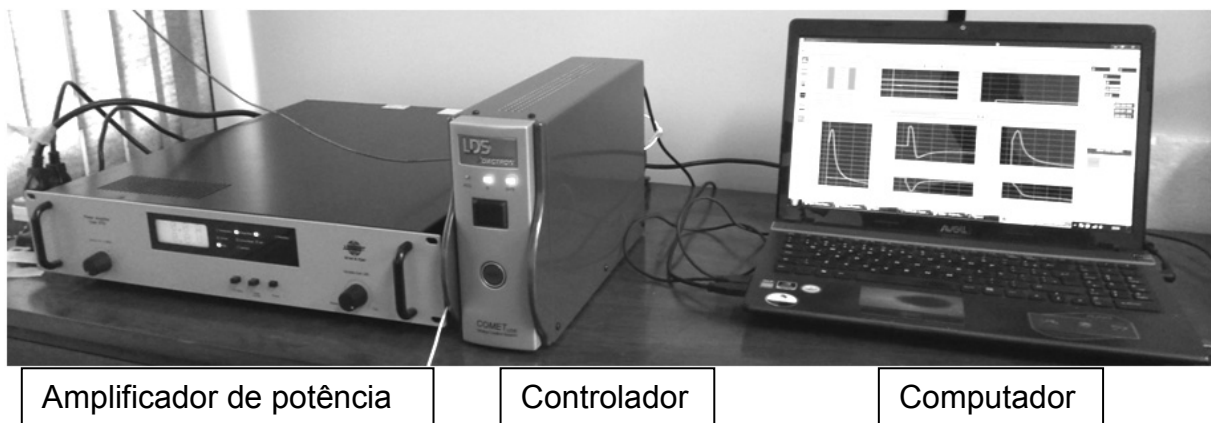
Para a conexão desse sistema a um excitador de vibrações (*shaker*), utiliza-se uma estrutura rígida, na qual se pendura tanto o sistema não linear quanto o excitador, mantendo a direção de excitação na horizontal. Isto é realizado de tal forma que se garanta o movimento relativo livre entre o *shaker* e o sistema não linear. Além disso, como a massa fixa do excitador é muito maior que a massa do sistema não linear, ele não se movimenta, de modo a transferir toda a excitação para o sistema. A Figura 7.2 ilustra a conexão *shaker*-sistema não linear.

FIGURA 7.2 - FIXAÇÃO DO SISTEMA NÃO-LINEAR AO SHAKER.



Para realizar a medição das curvas de transmissibilidade do sistema, são utilizados um amplificador de potência, um controlador com placa de aquisição integrada (para garantir o controle da amplitude na base do sistema) e um computador (para rodar o programa associado ao controlador). A Figura 7.3 mostra esses equipamentos.

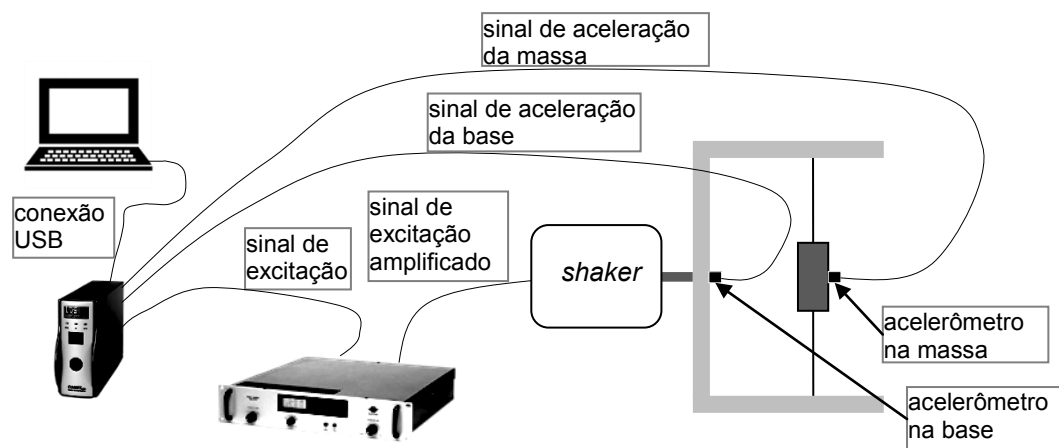
FIGURA 7.3 - SISTEMA DE MEDIÇÃO



Os sinais de excitação gerados neste trabalho são harmônicos e controlados, para manter a amplitude constante e a frequência variável tanto em subida quanto em descida. Os sinais de vibração obtidos são a aceleração da base do sistema não linear e a aceleração da massa, através da instalação de um acelerômetro em cada posição.

Apresenta-se na Figura 7.4, a configuração do sistema de medição utilizado para determinar as transmissibilidades. Com o computador, através do programa que comanda o controlador, é determinada a faixa de frequência que se quer medir, a velocidade de incremento ou redução da frequência e a amplitude da aceleração aplicada à base. Quando se inicia a medição, o sinal de excitação harmônico gerado é comunicado ao amplificador de potência. Esse, por sua vez, amplifica o sinal para gerar o movimento mecânico no *shaker*. A aceleração da base é constantemente monitorada pelo controlador, de modo a mantê-la constante.

FIGURA 7.4 – CONFIGURAÇÃO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO.



Os sinais de aceleração da base e da massa são tratados pelo programa de modo a gerar as curvas de transmissibilidade, como na Equação (5.15). Após o término de cada medição, as curvas de aceleração da base e da massa e as curvas de transmissibilidade são armazenadas. O programa permite o armazenamento das curvas de aceleração na forma real e a curva de transmissibilidade na forma complexa.

São relacionados abaixo os equipamentos utilizados para as medições, quais sejam,

- Notebook: Lenovo ThinkPad T410
  - Processador: Intel Core i5-540M com 2.53GHz
  - Memória: 4GB DDR3 RAM
  - Sistema Operacional: Windows 7 Professional (64bit)
- Controlador: LDS Dactron, COMET Shaker Control System
- Amplificador de Potência: Bruel & Kjaer, Type 2732
- *Shaker*: Bruel & Kjaer, Modal Exciter Type 4824

- Acelerômetros Piezoelétricos
  - 352C65 SN77264, com sensibilidade de 10.14 mV/m/s<sup>2</sup>
  - 352C68 SN77120, com sensibilidade de 10.43 mV/m/s<sup>2</sup>

Com a forma de medição do sistema não linear definida, é realizado um conjunto de medições nesse sistema, de modo a compreender suas características dinâmicas. Essas medições são descritas a seguir.

## 7.1 CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DO MODELO FÍSICO

A geometria do modelo físico e a forma de excitação influenciam diretamente a resposta medida nesse sistema. O modelo estudado consiste em uma massa fixa por quatro cabos à uma base. Os cabos trabalham lateralmente, gerando a componente de rigidez cúbica. Aqui, é relatado o estudo realizado para verificar experimentalmente a influência da tensão nos cabos.

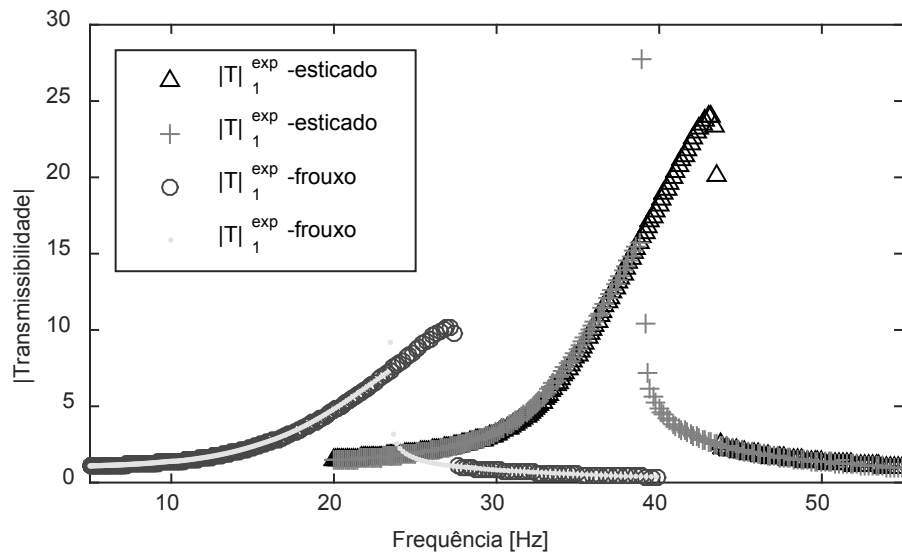
O sistema é excitado harmonicamente, sendo a frequência varrida lentamente, para que se crie a curva medida. A amplitude da excitação na base tem grande influência no resultado medido. Nesta seção, também é apresentado o comportamento do sistema em estudo quando exposto a diferentes amplitudes de excitação.

### 7.1.1 Influência da Tensão no Cabo

A tensão no cabo apresenta uma influência considerável na curva de transmissibilidade do sistema não linear. A Figura 7.5 apresenta a comparação entre duas situações com diferentes tensões no cabo. O caso com a menor tensão foi denominado “frouxo” e o caso com maior tensão foi denominado “esticado”. As curvas foram obtidas usando a mesma amplitude constante de aceleração na base, sendo esta 4,5 m/s<sup>2</sup>.

Como é de se esperar, com uma tensão maior no cabo, a frequência de ressonância do sistema não linear aumenta. Isso ocorre devido ao aumento da força de restituição da mola,  $F_s$ , exposta na Equação (5.3). Em outras palavras, a rigidez equivalente do sistema não linear aumenta. Além disso, aumenta também o valor da transmissibilidade.

FIGURA 7.5 - INFLUÊNCIA DA TENSÃO NO CABO.

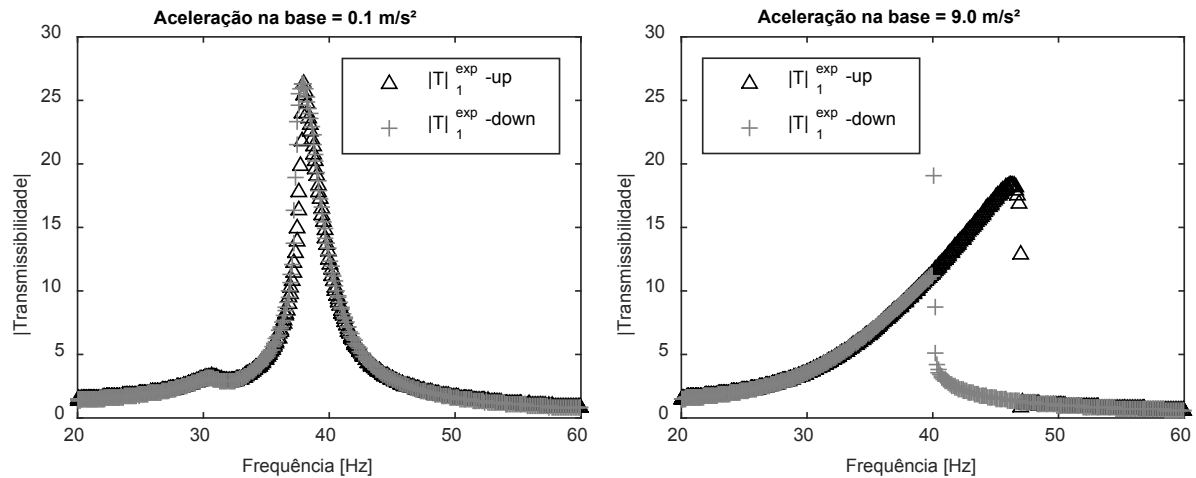


Como discutido na Seção 5.1, quanto maior a tensão no cabo, menor o erro entre a solução exata da força de restituição,  $F_s$ , e a sua aproximação pelo modelo cúbico. No presente trabalho, procurou-se trabalhar com a maior tensão possível, evitando apenas o rompimento dos cabos e/ou quebra da caixa de acrílico. Assim, consegue-se uma frequência de ressonância maior, o que facilita a construção do neutralizador.

### 7.1.2 Influência da Amplitude de Excitação

Também é importante considerar a influência da amplitude de excitação constante na curva de transmissibilidade. Para tanto, o sistema primário não linear físico é excitado com amplitudes de excitação entre  $0,1 \text{ m/s}^2$  e  $9 \text{ m/s}^2$ . A Figura 7.6 apresenta os resultados da maior e da menor amplitudes de excitação. As demais curvas de transmissibilidade, obtidas com outras amplitudes, são apresentadas no APÊNDICE B. As curvas de subida estão identificadas nas figuras deste trabalho com a descrição “up” e as curvas de descida com a descrição “down”.

FIGURA 7.6 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE EXPERIMENTAL COM DIFERENTES ACELERAÇÕES NA BASE.



É possível verificar que o sistema físico, quando excitado com aceleração de  $0,1\text{m/s}^2$  na base, se comporta de modo muito semelhante a um sistema com rigidez quadrática. Para tanto, basta comparar o resultado correspondente com a Figura 4.2. O APÊNDICE B apresenta uma sequência de gráficos representando as curvas com amplitude crescente de excitação na base, nos quais é possível observar a transição do comportamento do sistema.

Além disso, é possível observar que a amplitude da transmissibilidade inicialmente diminui com o aumento da amplitude de aceleração na base. Acima de  $0,4\text{ m/s}^2$ , a amplitude da transmissibilidade começa a aumentar, até que volta a diminuir, quando a aceleração na base é maior que  $2\text{ m/s}^2$ . Espera-se em um sistema não linear que apresenta apenas a rigidez cúbica, que a amplitude do pico sempre aumente com o aumento da amplitude da excitação.

Diferentemente do que se espera do comportamento de um sistema não linear com rigidez cúbica, o sistema investigado apresenta componentes de não linearidade que não estão contemplados no modelo escolhido como base para este trabalho. Isso pode ser observado mais detalhadamente no APÊNDICE A .

As características não consideradas no modelo podem estar relacionadas com a presença de uma rigidez não linear quadrática, com influência muito menor que a rigidez cúbica, mas que aparece em amplitudes de vibração pequenas. Além disso, para as amplitudes de vibração maiores, a velocidade e o deslocamento da massa são também maiores. Neste ponto poder-se-ia considerar que a massa sofre

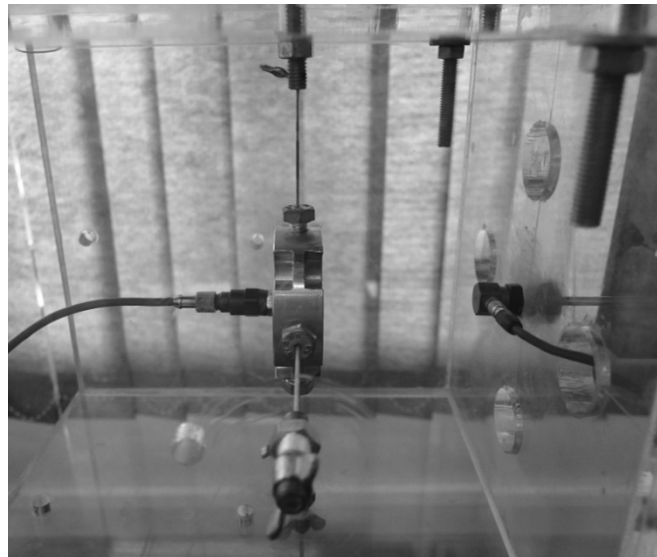
um arrasto aerodinâmico devido à sua geometria. Este tipo de efeito poderia ser introduzido no modelo através de uma componente de amortecimento quadrático.

Devido a esta mudança grande de comportamento do modelo físico com diferentes amplitudes de aceleração, é escolhida uma aceleração na base dentro da faixa na qual o sistema físico se comporta fundamentalmente como um sistema não linear cúbico. Assim, as metodologias de identificação e de controle são aplicadas a curvas de transmissibilidade obtidas com  $6 \text{ m/s}^2$  de amplitude de aceleração na base. Os resultados obtidos desta forma são plenamente satisfatórios.

## 7.2 IDENTIFICAÇÃO

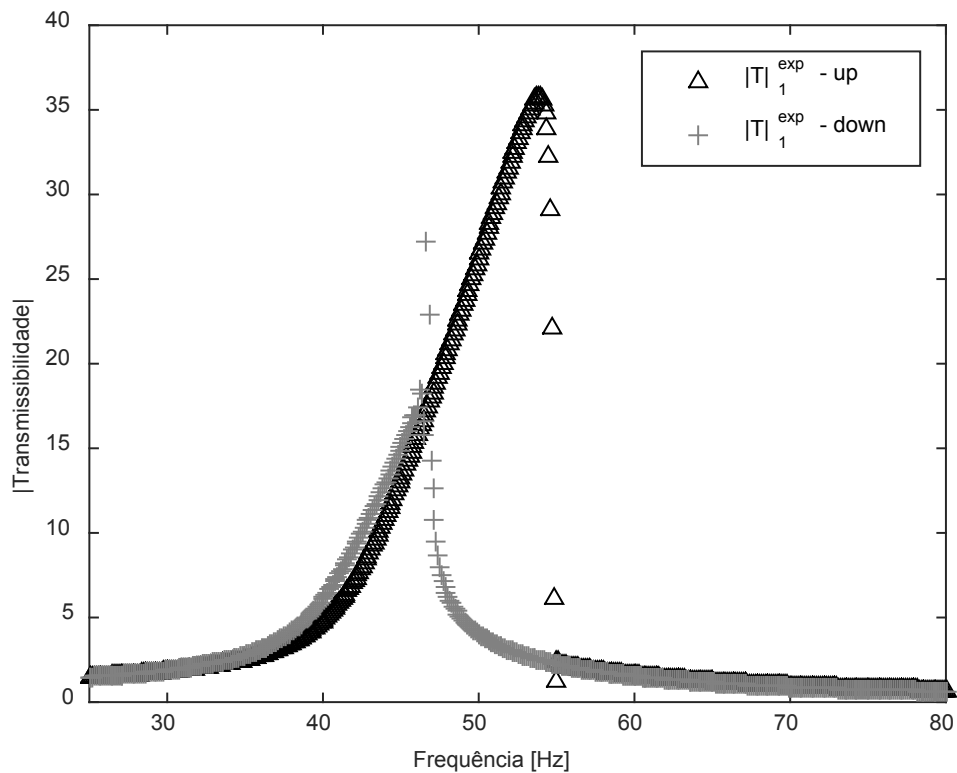
A identificação dos parâmetros do sistema não linear é realizada em uma curva de transmissibilidade obtida aplicando a amplitude de aceleração constante na base de  $6 \text{ m/s}^2$ . O intervalo de frequência medido foi de 25 Hz a 85 Hz, no qual acontecem ambos os saltos do sistema não linear. A Figura 7.7 apresenta a instalação dos acelerômetros utilizados na massa e na base, para a obtenção da transmissibilidade.

FIGURA 7.7 - SISTEMA NÃO-LINEAR COM ACELERÔMETROS NA MASSA E NA BASE.



A curva de transmissibilidade obtida é apresentada na Figura 7.8. Devido ao número elevado de pontos da curva, a identificação é efetivamente realizada com um número reduzido de pontos, para reduzir o tempo computacional.

FIGURA 7.8 - CURVA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.



O resultado da identificação pode ser observado na Figura 7.9. Verifica-se que existe uma boa concordância entre as curvas numérica e experimental. Os valores encontrados na identificação são apresentados na Tabela 1.

TABELA 1 - PARÂMETROS RESULTANTES DA IDENTIFICAÇÃO.

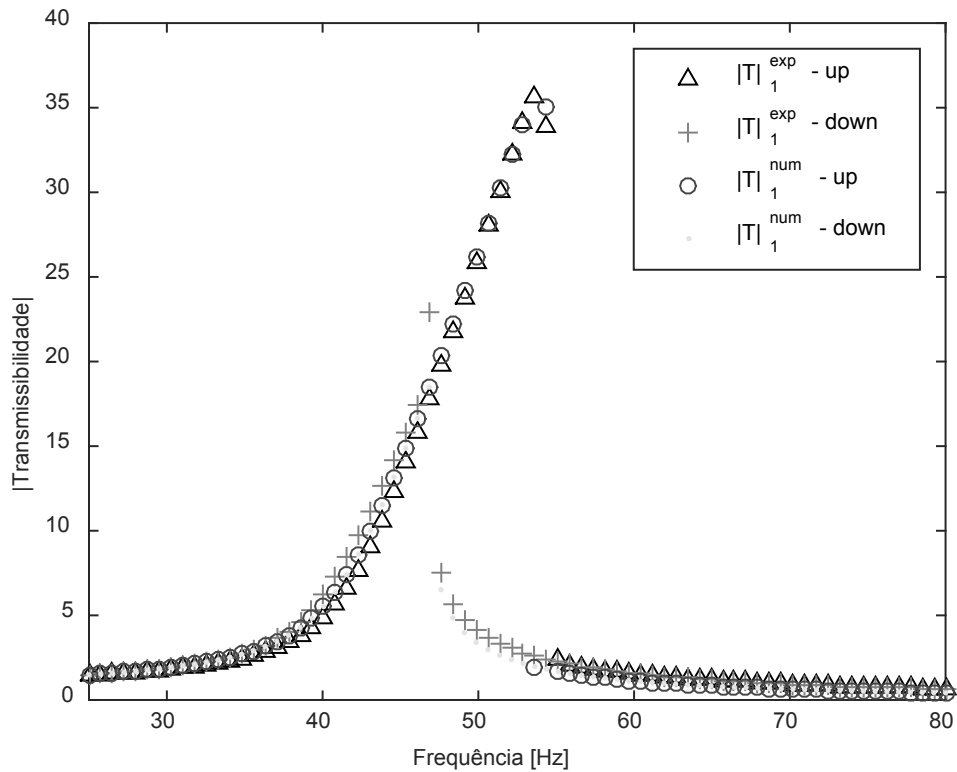
$\omega_{10}$	$\lambda_1$	$\alpha$
43,66	9,59	$1,41 \cdot 10^{10}$

De modo a obter a massa ótima que deverá ser utilizada no NDV, é necessário conhecer também a massa do sistema primário,  $m_1$ . No entanto, a identificação do sistema primário utilizando a curva de transmissibilidade não permite que a massa  $m_1$  seja obtida através do processo de identificação inversa. Essa massa é obtida, então, com uma balança de precisão e está apresentada na Tabela 2, juntamente com os outros parâmetros que decorrem do resultado da identificação, conforme exposto na seção 6.1.

TABELA 2 - PARÂMETROS DO SISTEMA PRIMÁRIO.

$m_1$ [kg]	$c_1$ [N.s/m]	$k_1$ [N/m]	$k_{3NL}$ [N/m <sup>3</sup> ]
$44,5 \cdot 10^{-3}$	0,429	$3,349 \cdot 10^3$	$6,281 \cdot 10^8$

FIGURA 7.9 - RESULTADO DA IDENTIFICAÇÃO.



A identificação alcança um resultado em que o modelo não linear de rigidez cúbica se mostra muito próximo da curva medida no sistema físico. O intervalo de frequências em que a curva de transmissibilidade possui duas amplitudes possíveis de vibração é muito bem representado pelo modelo, sendo que os dois saltos são perfeitamente identificados.

### 7.3 CONTROLE

Uma vez identificado o sistema, ou seja, uma vez conhecidos os parâmetros físicos ( $c_1$ ,  $k_1$ ,  $k_{3NL}$ ) utilizam-se esses valores no modelo numérico para determinar a frequência natural ótima do NDV, a ser acoplado ao sistema primário. Utilizando a curva de transmissibilidade formada pelas raízes da Equação (5.24) e a função objetivo da Equação (6.5), é possível determinar esta característica.

A otimização do NDV é realizada à temperatura constante (20°C), na qual são realizados os ensaios experimentais. O material viscoelástico escolhido para a construção do NDV é a borracha butílica, cujos valores do modelo de derivada fracionária de quatro parâmetros são apresentados na Tabela 3. Estes parâmetros são fornecidos pelo grupo de pesquisa GVIBS, a partir de trabalhos anteriores. A borracha butílica foi escolhida por apresentar uma elevada capacidade de dissipação de energia mecânica na temperatura escolhida para o experimento.

TABELA 3 - PARÂMETROS DA BORRACHA BUTÍLICA.

Parâmetros do Modelo		Parâmetros Complementares	
$G_0$ [N/m <sup>2</sup> ]	$1,76 \cdot 10^5$	$\theta_1$	9,91
$G_\infty$ [N/m <sup>2</sup> ]	$2,41 \cdot 10^8$	$\theta_2$	119
$\beta$	0,424	$T$ [K]	293
$\varphi_0$	$4,24 \cdot 10^{-3}$	$T_0$ [K]	273

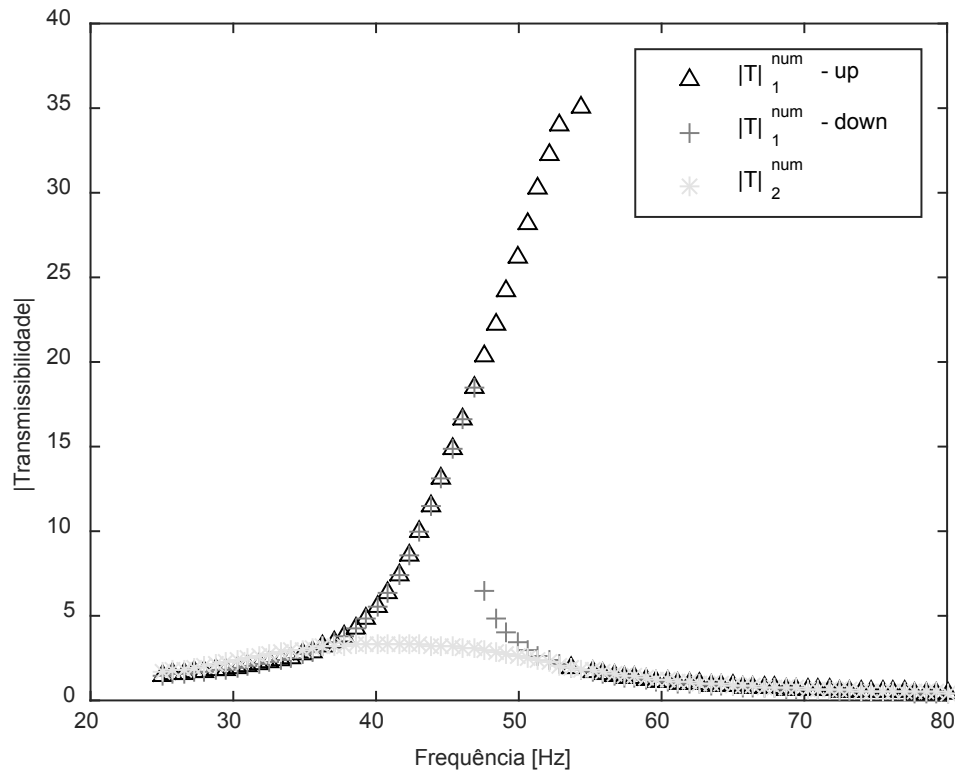
A massa do NDV é determinada como sendo 19,5% da massa do sistema primário. Esse valor é apresentado na Tabela 4, juntamente com o resultado da otimização.

TABELA 4 - PARÂMETROS ÓTIMOS DO NDV.

$m_a$ [kg]	$\Omega_a$ [Hz]
$8,7 \cdot 10^{-3}$	33,99

O resultado gráfico da otimização do NDV pode ser avaliado na Figura 7.10. Verifica-se que a redução na amplitude de vibração do sistema é drástica, chegando a uma amplitude de vibração no sistema composto que é mais de 10 vezes menor, se comparada com a do sistema primário.

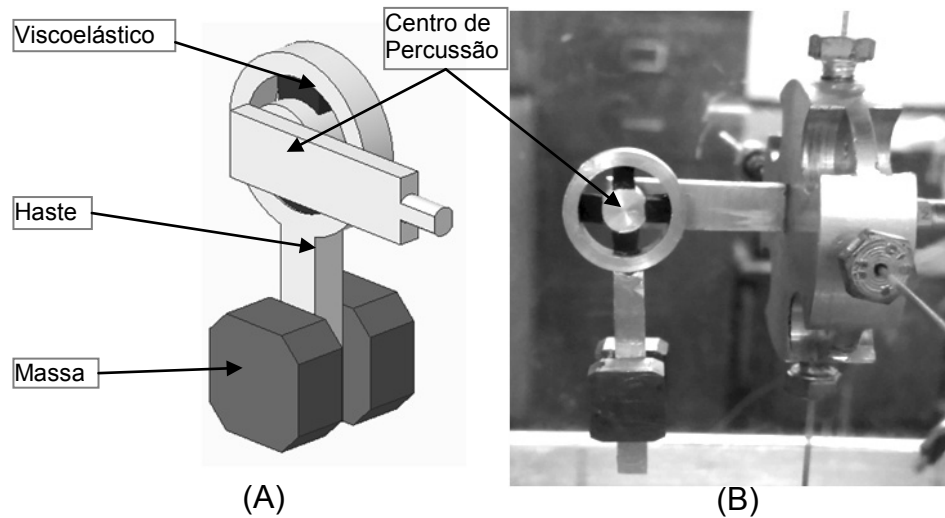
FIGURA 7.10 - CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE NUMÉRICA DO SISTEMA PRIMÁRIO E COMPOSTO.



Como pode ser verificado na Tabela 4, a frequência ótima do neutralizador dinâmico é razoavelmente baixa e a sua massa é muito pequena, o que torna difícil a sua construção. Por isto, o NDV é construído utilizando o conceito de centro de percussão. Neste tipo de NDV, para gerar cisalhamento, de forma predominante no material viscoelástico, trabalha-se com a massa fixa em uma haste, fazendo com que a massa gire ao redor de um centro de percussão, com deslocamentos angulares pequenos, de forma similar ao modelo apresentado por Espindola e Bavastri (1999).

A rigidez e o amortecimento são determinados pela geometria dos elementos de material viscoelástico. Já a frequência do NDV pode ser determinada por meio da geometria dos elementos viscoelásticos e pela distância da massa em relação ao centro de percussão. O NDV empregado, denominado NDV pendular, é ilustrado na Figura 7.11.

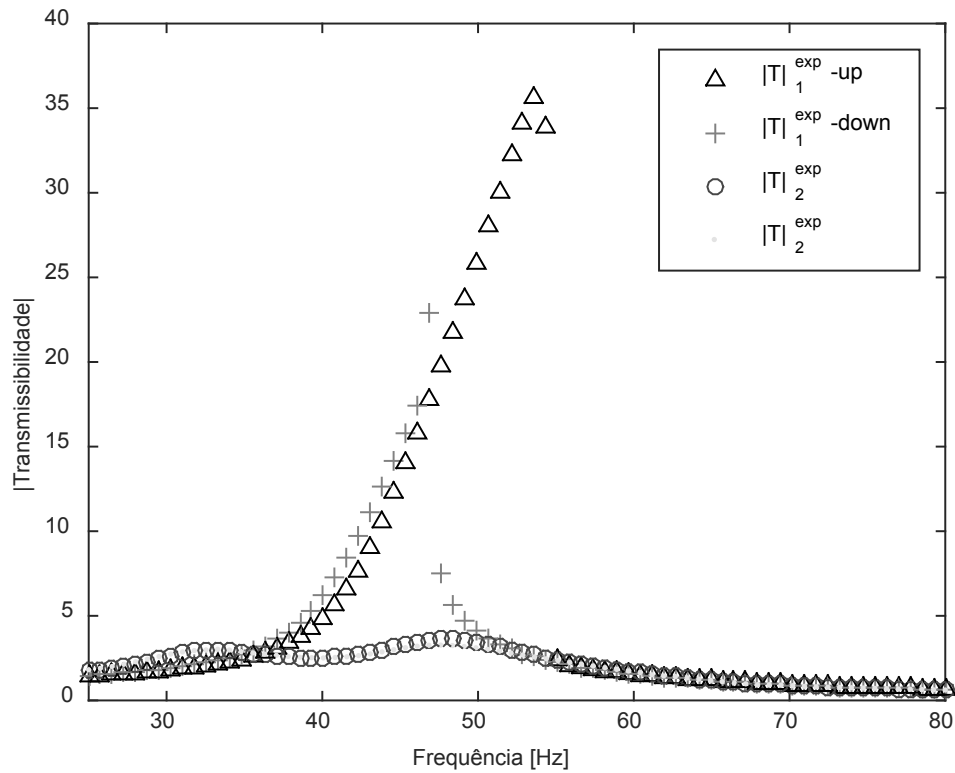
FIGURA 7.11 – NDV A) PENDULAR B) E SISTEMA COMPOSTO EXPERIMENTAL.



A utilização da geometria acima exposta possibilita a construção de um NDV estável, do ponto de vista estrutural, com frequências naturais baixas. Além disso, tem-se o fato de que o material viscoelástico trabalha, de forma predominante, em cisalhamento.

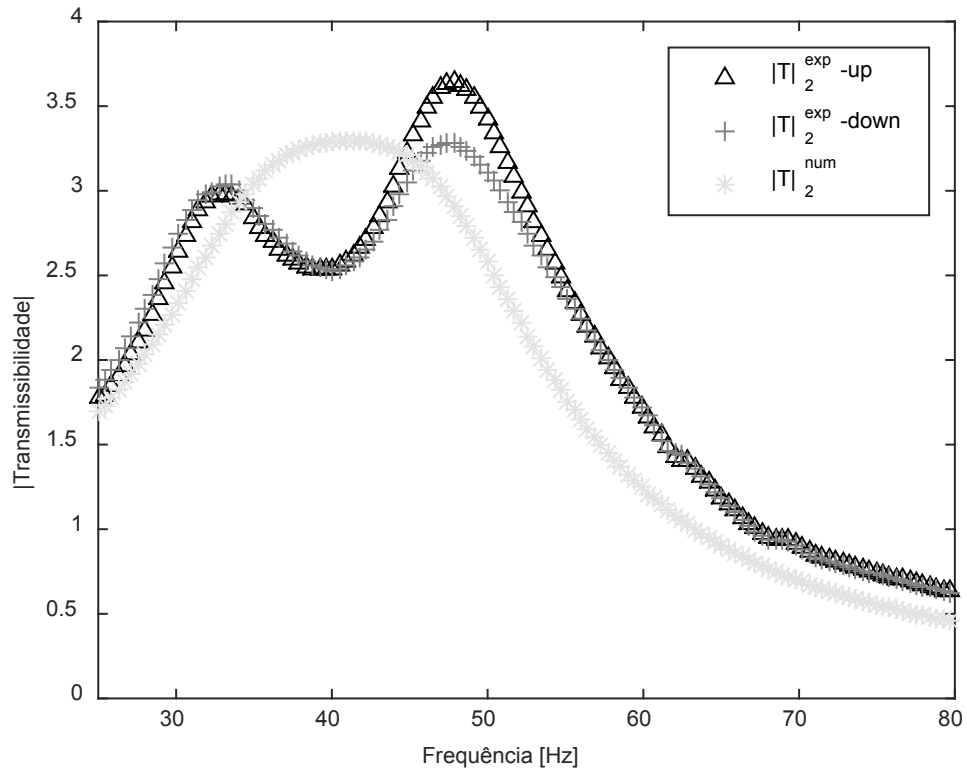
As curvas de transmissibilidade dos sistemas primário e composto são apresentadas na Figura 7.12. Observa-se, nessa figura, a redução na máxima amplitude de vibração do sistema experimental de 19,8 dB, sendo que a redução prevista pelo modelo numérico é de 20,5 dB, conforme se nota na Figura 7.10. Ou seja, previsão e valor alcançado são muito próximos (diferença menor do que 1 dB).

FIGURA 7.12 – CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE EXPERIMENTAIS DOS SISTEMAS PRIMÁRIO E COMPOSTO.



A comparação amplificada dos resultados relativos ao sistema composto, experimental e numérico, pode ser observada na Figura 7.13. Essa figura mostra, em detalhe, as curvas de transmissibilidade predita e medida.

FIGURA 7.13 - CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DO SISTEMA COMPOSTO.

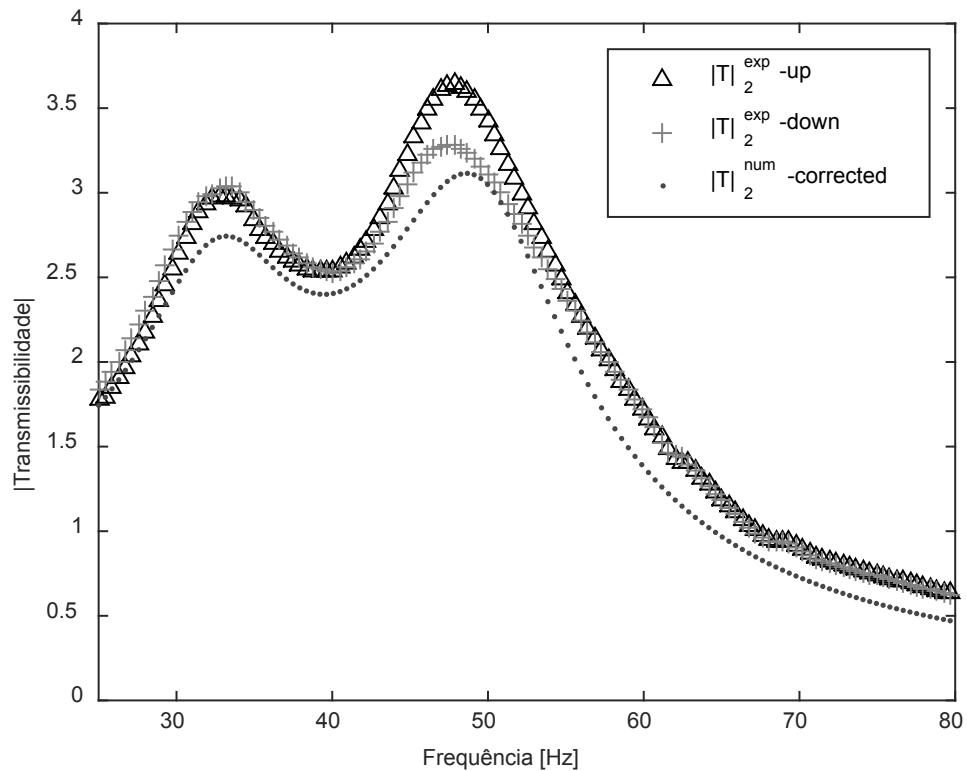


### 7.3.1 Investigação do Amortecimento

Embora os resultados numérico e experimental mostrem reduções equivalentes, pode-se verificar que o modelo numérico apresenta maior amortecimento. Com o intuito de investigar essa diferença na forma das curvas de transmissibilidade numérica e experimental do sistema composto, introduz-se um coeficiente de multiplicação no modelo numérico que altera o fator de perda do NDV no sistema composto. O sistema é então simulado, reduzindo o amortecimento do NDV em 35%, com o resultado sendo observado na Figura 7.14.

Esse resultado aponta para o fato de que os insertos de material viscoelástico do NDV construído (Figura 7.11) podem não estar trabalhando exclusivamente em cisalhamento, mas, de algum modo, também estar sofrendo flexão. Por outro lado, deve-se deixar explícito que a configuração escolhida para o NDV é necessária para alcançar as características ótimas do neutralizador, que tem maior importância na ação de controle de vibração em foco.

FIGURA 7.14 – CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE DO SISTEMA COMPOSTO NUMÉRICA CORRIGIDA E EXPERIMENTAL.



### 7.3.2 Investigação da Amplitude de Excitação

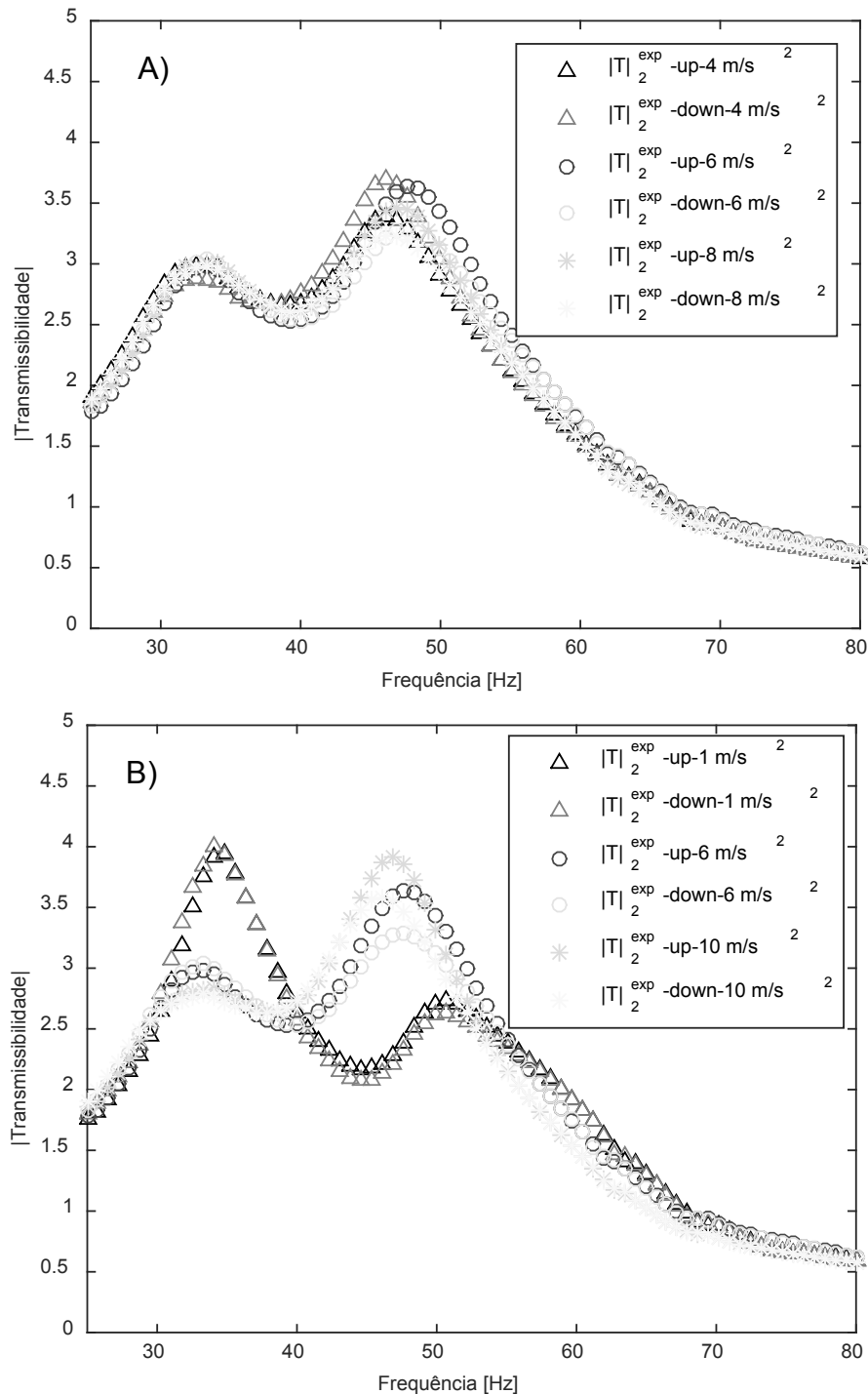
A influência da variação da amplitude da aceleração da base também é investigada para o sistema composto, considerando inicialmente os valores adicionais de  $4\text{m/s}^2$  e  $8\text{m/s}^2$ . Esta parte do estudo visa avaliar a robustez que se tem no controle de vibrações passivo do sistema não linear cúbico usando o NDV pendular. As curvas obtidas estão apresentadas na Figura 7.15(A).

Observa-se que o sistema composto se comporta virtualmente da mesma forma com as três amplitudes de excitação, com um aumento pequeno no segundo pico da transmissibilidade para a excitação de  $4\text{ m/s}^2$  e um primeiro pico ligeiramente mais baixo. Já para a excitação de  $8\text{ m/s}^2$ , o efeito é o oposto, ou seja, o primeiro pico é ligeiramente mais alto e o segundo pico é ligeiramente mais baixo.

Continuando nesta linha de investigação e afastando ainda mais a amplitude de excitação daquela para a qual o NDV é projetado, as curvas com amplitudes de aceleração de  $1\text{ m/s}^2$  e  $10\text{ m/s}^2$  também são consideradas. As diferenças para estas amplitudes estão mais pronunciadas, embora o sistema composto continue se comportando da mesma maneira, como pode ser verificado na Figura 7.15 (B).

Para a amplitude de aceleração de  $1 \text{ m/s}^2$ , em particular, o primeiro pico tem amplitude maior, sendo que a amplitude do segundo pico reduz significativamente. Nota-se que este comportamento é o oposto do que mostra a curva de transmissibilidade quando se reduz a amplitude de aceleração de 6 para  $4 \text{ m/s}^2$ . O mesmo pode ser observado para as curvas com amplitude de 8 e  $10 \text{ m/s}^2$ , em que o comportamento dos picos também é o oposto.

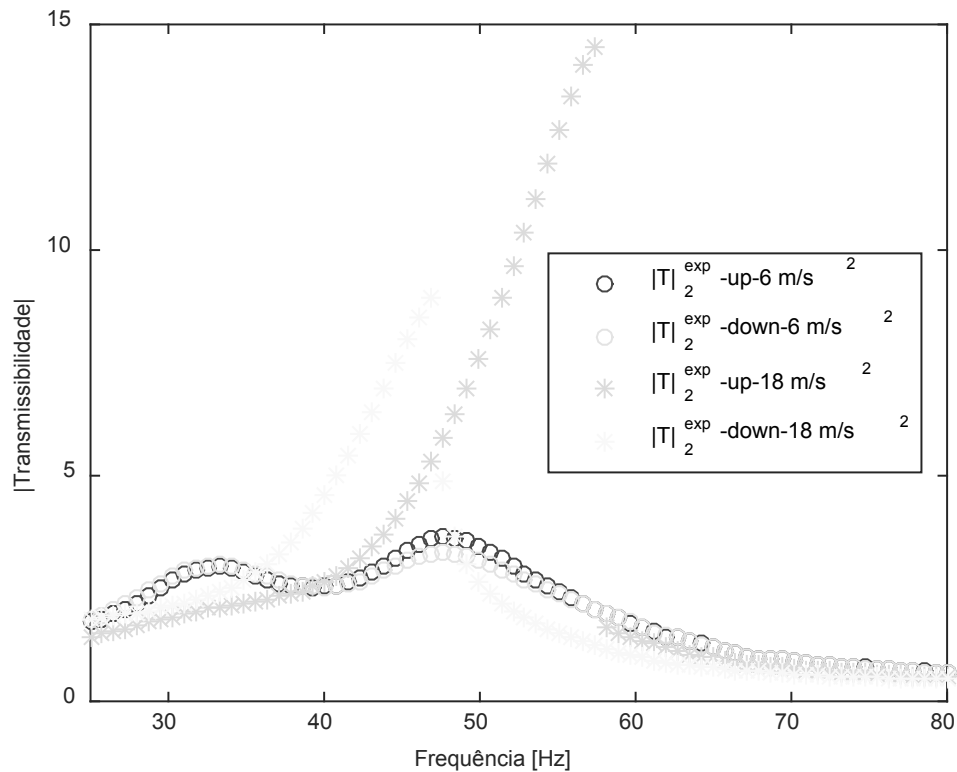
FIGURA 7.15 - RESULTADO EXPERIMENTAL DO SISTEMA COMPOSTO COM: (A) AMPLITUDES DE EXCITAÇÃO 4, 6 E 8 M/S<sup>2</sup>; (B) AMPLITUDES DE EXCITAÇÃO 1, 6 E 10 M/S<sup>2</sup>



O sistema composto volta a se comportar de maneira claramente não linear quando é aplicada a amplitude de aceleração na base de 18 m/s<sup>2</sup>, como pode ser observado na Figura 7.16. Verifica-se que, neste caso, o sistema não possui mais as mesmas características de um sistema de um grau de liberdade com não linearidade cúbica na rigidez, pois as curvas de subida (verde) e de descida (amarela) estão

claramente separadas. Este comportamento pode ser provocado pela presença de outros tipos de não linearidades no sistema primário, como já explorado na seção 7.1.2.

FIGURA 7.16 – RESULTADO EXPERIMENTAL DO SISTEMA COMPOSTO COM AMPLITUDES DE EXCITAÇÃO 6 E 18 M/S<sup>2</sup>.



#### 7.4 DISCUSSÃO CONSOLIDADA

O sistema físico estudado é formado por uma massa fixa a uma base por meio de molas que trabalham transversalmente. O sistema é excitado pela base com uma amplitude controlada. Para diferentes amplitudes de excitação, o sistema possui um comportamento diferente. Desta forma é definida uma amplitude de excitação dentro da faixa na qual o sistema se comporta fundamentalmente com um sistema com rigidez não linear cúbica.

A identificação do sistema utilizando a curva de transmissibilidade apresenta um resultado muito satisfatório, sendo possível obter os parâmetros de amortecimento, rigidez linear e rigidez não linear. O trabalho realizado mostra que o modelo matemático com rigidez cúbica é capaz de reproduzir com boa exatidão o sistema real estudado.

A otimização do NDV é realizada usando o modelo matemático em que ele é adicionado utilizando PEG. A comparação do resultado da otimização com a curva de transmissibilidade medida no sistema composto mostra boa concordância. Entende-se que a diferença entre as curvas ocorre pelo fato do material viscoelástico do NDV não estar trabalhando em cisalhamento puro.

O sistema composto continua com amplitude de vibração baixa, mesmo que diferentes amplitudes de excitação sejam aplicadas à base. Porém, quando é aplicada uma amplitude de excitação muito maior que a excitação para a qual o NDV é projetado, o sistema primário muda de tal forma que o sistema composto volta a se comportar de forma não linear.

## 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS

Neste trabalho, relata-se a implementação de metodologias para identificar e controlar, de forma ótima, um sistema de 1GL não linear, com rigidez cúbica, usando um neutralizador dinâmico viscoelástico. O modelo adotado para caracterizar o sistema a controlar é baseado na curva de transmissibilidade, em que, ao contrário das soluções normalmente apresentadas, se considera a fase, tanto para o deslocamento relativo quanto para a excitação da base. Por isso, o trabalho apresenta a solução das equações de movimento dos sistemas primário e composto resultantes através do método de balanço harmônico.

Curvas de transmissibilidade são utilizadas para a aplicação da metodologia de identificação. Revisada no presente trabalho, essa metodologia promove o ajuste entre a curva experimental e sua equivalente numérica, o que é realizado considerando as curvas de subida e descida, para mostrar a localização e a amplitude do salto provocado pela não linearidade do sistema. A técnica utilizada para esse ajuste é a dos algoritmos genéticos e, no processo de otimização, o erro numérico quadrático entre ambas as curvas é minimizado.

No tocante ao projeto ótimo do NDV, é utilizado o conceito de PEG para modelar o NDV. Isso propicia um modelo enxuto, sem a adição de um grau de liberdade, o que reduz consideravelmente o tempo computacional, como mostrado em trabalhos anteriores. Na presente abordagem, são revisados os modelos do sistema composto, utilizando a função de transmissibilidade, novamente considerando a fase do deslocamento relativo e da excitação na base. Além disso, é generalizada a representação do modelo com PEG, considerando o amortecimento equivalente entre a massa equivalente e um referencial fixo (terra), o que repercute diretamente na equação de movimento do sistema composto.

Para o projeto do NDV, uma otimização específica é realizada, utilizando os parâmetros do sistema primário identificados anteriormente e as características da borracha butílica, que é o material viscoelástico empregado. O intuito aqui é reduzir a resposta do sistema primário com a escolha dos parâmetros físicos do NDV. Nesse sentido, são revisados, no trabalho, o conceito de PEG, o modelo de derivada fracionária de 4 parâmetros (para prever o comportamento dinâmico do material viscoelástico) e a técnica de otimização não linear usada na metodologia.

Na identificação do sistema primário, é usada a técnica do problema inverso, com a excitação, que é a aceleração prescrita na base, mantida constante, graças à utilização de um controlador, também utilizado como gerador de sinais. A montagem da função objetivo é cuidadosamente realizada, para considerar as curvas numéricas e experimentais, de subida e de descida. A metodologia de identificação apresenta resultados muito satisfatórios, com o modelo matemático mostrando uma concordância muito boa com as curvas obtidas experimentalmente.

No controle ótimo via NDV, os resultados mostram uma redução de resposta do sistema primário de 20,5 dB. Devido à metodologia de identificação usada, essa redução é realista, como pode ser observado na comparação da resposta experimental do sistema com e sem o NDV na qual a redução observada é de 19,8 dB, o que mostra que a combinação das metodologias de identificação e controle é eficaz para o sistema estudado neste trabalho.

As metodologias propostas, tanto para a identificação quanto para controle por NDV se mostraram eficientes, com tempos de processamento razoáveis. Esse são de aproximadamente 115 segundos para a identificação e aproximadamente 10 segundos para a otimização do NDV.

Os modelos apresentados, quando comparadas às curvas de resposta, se mostraram fidedignas, reproduzindo com boa exatidão os resultados experimentais. A solução da equação de movimento, neste trabalho, é realizada por meio do método do balanço harmônico, no qual são desconsiderados os harmônicos superiores. No entanto, isso não trouxe prejuízos para o modelo numérico, como pode ser observado nos resultados obtidos, o que se alinha com o demonstrado por Febbo et al. (2014) sobre a pequena influência dos harmônicos superiores e sua consequente desconsideração nesse caso.

O comportamento apresentado pelo sistema quando exposto a diferentes amplitudes de excitação indica que o sistema é cúbico na rigidez dentro de uma curta faixa. Fora dela, ele provavelmente possui outras não linearidades. Para trabalhos futuros, sugere-se a construção de um modelo numérico mais amplo, com a inclusão de termos polinomiais quadráticos na rigidez e no amortecimento. Nesse caso, pode ser necessário que o modelo seja resolvido através de outras técnicas que não o método do balanço harmônico, como, por exemplo, o método das médias.

Além disso, o sistema composto pode ser investigado pela verificação da influência da temperatura de trabalho sobre a eficácia do neutralizador dinâmico

viscoelástico. Salienta-se ainda que é interessante expandir o estudo para sistemas de múltiplos graus de liberdade, a fim de representar estruturas complexas.

## REFERÊNCIAS

AHMADABADI, Z.N.; KHADEM, S.E. Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink. **Mechanism and Machine Theory**, v.50, p.134-149, 2012. doi:[10.1016/j.mechmachtheory.2011.11.007](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2011.11.007).

BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. A theoretical basis for application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, v.27, p.201-210, 1983. doi:[10.1122/1.549724](https://doi.org/10.1122/1.549724).

BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, v.30, p.133-155, 1986. doi:[10.1122/1.549887](https://doi.org/10.1122/1.549887).

BALTHAZAR, J.M.; BRASIL, R.M.L.F.; FELIX, J.L.P.; TUSSET, A.M.; PICIRILLO, V.; ILUIK, I.; NABARRETE A.; OLIVEIRA C.; Dynamics behaviour of an elastic non-ideal (NIS) portal frame, including fractional nonlinearities. **Journal of Physics: Conference Series** 721, 2016. doi:[10.1088/1742-6596/721/1/012004](https://doi.org/10.1088/1742-6596/721/1/012004)

BARRY, O.R.; OGUAMANAM, D.C.D.; ZU, J.W. Nonlinear vibration of an axially loaded beam carrying multiple mass–spring–damper systems. **Nonlinear Dynamics**, v.77, p.1597-1608, 2014. doi: [10.1007/s11071-014-1402-5](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1402-5)

BAVASTRI, C.A.; **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 1997.

BAVASTRI, C.A.; FEBBO M.; GONÇALVES, V.V.; LOPES, E.M.O. Optimum viscoelastic absorbers for cubic nonlinear systems. **Journal of Vibration and Control**, v.20(10), p.1464-1474, 2014. doi:[10.1177/1077546312473322](https://doi.org/10.1177/1077546312473322).

Den HARTOG, J.P. **Mechanical Vibrations**. New York, McGraw-Hill, 1956.

DOUBRAWA FILHO, F.J.; LUERSEN, M.A.; BAVASTRI, C.A. Optimal design of viscoelastic vibration absorbers for rotating systems. **Journal of Vibration and Control**, v.17, p.699-710, 2010. doi:[10.1177/1077546310374335](https://doi.org/10.1177/1077546310374335)

ESPINDOLA, J.J.; BAVASTRI, C.A. Optimum Conceptual Design of Viscoelastic Dynamic Vibration Neutralizer for Low Frequency Complex Structures. **EURODINAME 99**, Ulm. International Symposium on Dynamic Problems in Mechanics and Mechatronics, v.1. p. 251-258, 1999.

ESPINDOLA, J.J.; BAVASTRI, C.A.; LOPES, E.M.O. Design of Optimum Systems of Viscoelastic Vibration Absorbers for a Given Material Based on the Fractional Calculus Model. **Journal of Vibration and Control**, v.14(9-10), p.1607-1630, 2008. doi:[10.1177/1077546308087400](https://doi.org/10.1177/1077546308087400).

ESPINDOLA, J.J.; BAVASTRI, C.A.; LOPES, E.M.O. On the passive control of vibrations with viscoelastic dynamic absorbers of ordinary and pendulum types. **Journal of the Franklin Institute**, v.347, p.102-115, 2010. doi:[10.1016/j.jfranklin.2009.09.004](https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2009.09.004).

ESPINDOLA, J.J.; SILVA NETO, J.M.; LOPES, E.M.O. A generalized fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. **Applied Mathematics and Computation**, v.164, p.493-506, 2005. doi:[10.1016/j.amc.2004.06.099](https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.099).

ESPÍNDOLA, J.J.; SILVA, H.P. Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers: A generalized approach. **IMAC 10-10<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference. Society for Experimental Mechanics**, San Diego. v.2, pp. 1367-1373, 1992.

FEBBO, M.; LOPES, E.M.O.; BAVASTRI, C.A. Influence of temperature on optimum viscoelastic absorbers in cubic nonlinear systems. **Journal of Vibration and Control**, 2014. doi:[10.1177/1077546314560202](https://doi.org/10.1177/1077546314560202).

FERRY, J.D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. New York, John Wiley and Sons, 1980.

FINDLEY, W.N.; LAI, J.S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976.

FRAHM, H.; **Device for Damping Vibrations of bodies**. Application filed (US 989959 A), 1909, patented, 1911.

GATTI, G.; BRENNAN, M.J.; KOVACIC, I. On the interaction of the responses at the resonance frequencies of a nonlinear two degrees-of-freedom system. **Physica D**, v.239, p.591-599, 2010a, doi:[10.1016/j.physd.2010.01.006](https://doi.org/10.1016/j.physd.2010.01.006).

GATTI, G.; KOVACIC, I.; BRENNAN, M.J. On the response of a harmonically excited two degree-of-freedom system consisting of a linear and a nonlinear quasi-zero stiffness oscillator. **Journal of Sound and Vibration**, v.329, p.1823-1835, 2010b. doi:[10.1016/j.jsv.2009.11.019](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.11.019).

GATTULLI, V.; LEPIDI, M. Nonlinear interactions in the planar dynamics of cable-stayed beam. **International Journal of Solids and Structures**, v.40, p.4729-4748, 2003. doi:[10.1016/S0020-7683\(03\)00266-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00266-X).

GHANDCHI-TEHRANI, M.; WILMHURST, L.I.; ELLIOTT, S.J. Receptance method for active vibration control of a nonlinear system. **Journal of Sound and Vibration**, v.332, p.4440-4449, 2013. doi:[10.1016/j.jsv.2013.04.002](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.04.002).

GHANDCHI-TEHRANI, M.; WILMHURST, L.I.; ELLIOTT, S.J. Bifurcation control of a Duffing oscillator using pole placement. **Journal of Vibration and Control**, v.21(14), p.2838-2851, 2015. doi:[10.1177/1077546313517586](https://doi.org/10.1177/1077546313517586).

GAYESH, M.H.; KAZEMIRAD, S.; DARABI, M.A. A general solution procedure for vibrations of systems with cubic nonlinearities and nonlinear/time-dependent internal boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v.330, p.5382-5400, 2011. doi:[10.1016/j.jsv.2011.06.001](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.06.001).

GOURDON, E.; ALEXANDER, N.A.; TAYLOR C.A.; LAMARQUE, C.H.; PERNOT, S. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results. **Journal of Sound and Vibration**, v.300, p.522-551, 2007. doi:[10.1016/j.jsv.2006.06.074](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.074).

HAMDAN, M.N.; BURTON, T.D. On the steady state response and stability of non-linear oscillators using harmonic balance. **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 166(2), p.255-266, 1993.

HOLLAND, J.H. Genetic algorithms and the optimal allocations of trials. *SIAM Journal of Computing*, 2(2), p.88-105, 1973.

HUANG, J.L.; SU, R.K.L.; LEE, Y.Y.; CHEN, S.H. Nonlinear vibration of a curved beam under uniform base harmonic excitation with quadratic and cubic nonlinearities. **Journal of Sound and Vibration**, v.330, p.5151-5164, 2011. doi:[10.1016/j.jsv.2011.05.023](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.05.023).

ISHIDA, Y.; INOUE, T. Vibration Suppression of Nonlinear Rotor Systems Using a Dynamic Damper. **Journal of Vibration and Control**, v.13(8), p.1127-1143, 2007. doi:[10.1177/1077546307074577](https://doi.org/10.1177/1077546307074577).

JI, J.C.; ZHANG, N. Suppression of the primary resonance vibrations of a forced nonlinear system using a dynamic vibration absorber. **Journal of Sound and Vibration**, v.329, p.2044-2056, 2010. doi:[10.1016/j.jsv.2009.12.020](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.12.020).

JOHANNESSEN, K. The Duffing oscillator with damping. **European Journal of Physics**, v.36, 2015. doi:[10.1088/0143-0807/36/6/065020](https://doi.org/10.1088/0143-0807/36/6/065020).

KOVACIC, I.; BRENNAN, M.J. **The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour**. Chichester, John Wiley & Sons, 2011.

LAGARIAS, J.C.; REEDS, J. A.; WRIGHT, M.H.; WRIGHT, P.E. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. **SIAM Journal of Optimization**, v.9(1, p.112–147), 1998.

LEHR, E.; WEIGAND, A. Dämpfung erzwungener Schwingungen durch ein angekoppeltes System. **Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A**, v.9(5), p.219-228, 1938.

LOPES, E.M.O.; BAVASTRI, C.A.; SILVA NETO, J.M.; ESPÍNDOLA, J.J. Caracterização Integrada de Elastômeros por Derivadas Generalizadas. **III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM)**, Belém, 2004.

LOPES, E.M.O. **On the Experimental Response Reanalysis of Structures with Elastomeric Materials**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, University Of Wales Cardiff, UWC, Grã-Bretanha, 1998.

MALAKTAR, P.; NAYFEH, A.H. A Parametric Identification Technique for Single-Degree-of-Freedom Weakly Nonlinear Systems with Cubic Nonlinearities. **Journal of Vibration and Control**, v.9, p.317-336, 2003. doi:[10.1177/107754603030754](https://doi.org/10.1177/107754603030754).

MEAD, D.J. **Passive Vibration Control**. New York, John Wiley and Sons, 1999.

NAYFEH A.H.; MOOK, D.T. **Nonlinear Oscillations**. New York, John Wiley and Sons, 1979.

PENG, Z.K.; *et al.* Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using Harmonic Balance Method. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v.47, p.1073-1080, 2012. doi:[10.1016/j.ijnonlinmec.2011.09.013](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.09.013).

PIPES, L.A. Cable Damper Vibration Studies. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v.55(6), p.600-614, 1936.

PREVE, C. **Identificação e Controle de um Sistema com um Grau de Liberdade Não Linear Cúbico usando Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, 2015.

PRITZ, T. Analysis of Four-Parameter Fractional Derivate Model of Real Solid Materials. **Journal of Sound and Vibration**, v.195, p.103-115, 1996. doi:[10.1006/jsvi.1996.0406](https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0406).

RAVINDRA, B.; MALLIK, A.K. Performance of Non-Linear Vibration Isolators under Harmonic Excitation. **Journal of Sound and Vibration**, v.170, p.325-337, 1994. doi:[10.1006/jsvi.1994.1066](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1066).

RUDENKO, O.V.; SOLODOV, E.V. Strongly Nonlinear Shear Perturbations in Discrete and Continuous Cubic Nonlinear Systems. **Acoustical Physics**, v.57, p.51-58, 2011. doi:[10.1134/S1063771011010143](https://doi.org/10.1134/S1063771011010143).

SAIDI, I.; GAD, E.F.; WILSON, J.L.; HARITOS, N. Development of passive viscoelastic damper to attenuate excessive floor vibrations. **Engineering Structures**, v.33, p.3317-3328, 2011. doi:[10.1016/j.engstruct.2011.05.017](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.05.017).

SAMAL, M.K.; *et al.* A finite element model for nonlinear behaviour of piezoceramics under weak electric fields. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.41, p.1464-1480, 2005. doi :[10.1016/j.finel.2005.05.002](https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.05.002).

SARAMAGO, S.F.P.; **Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”**. Notas em Matemática Aplicada: 6. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC). São Carlos, SP. 2003.

SILVEIRA, M.; PONTES Jr B.R.; BALTHAZAR J.M.; Use of nonlinear asymmetrical shock absorber to improve comfort on passenger vehicles, **Journal of Sound and Vibration**, doi:[10.1016/j.jsv.2013.12.001](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.001)

SUN, C.; NAGARAJIAH, S.; DICK, A.J. Experimental investigation of vibration attenuation using nonlinear tuned mass damper and pendulum tuned mass damper in parallel, **Nonlinear Dynamics**, v.78, p.2699-2715, 2014. doi:[10.1007/s11071-014-1619-3](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1619-3).

THOMSEN, J.J. **Vibrations and Stability**. Berlin, Springer-Verlag, 2010.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G.R. **Nonlinearity in Structural Dynamics - Detection, Identification and Modeling**. London, Bristol: Institute of Physics Publishing, 2001.

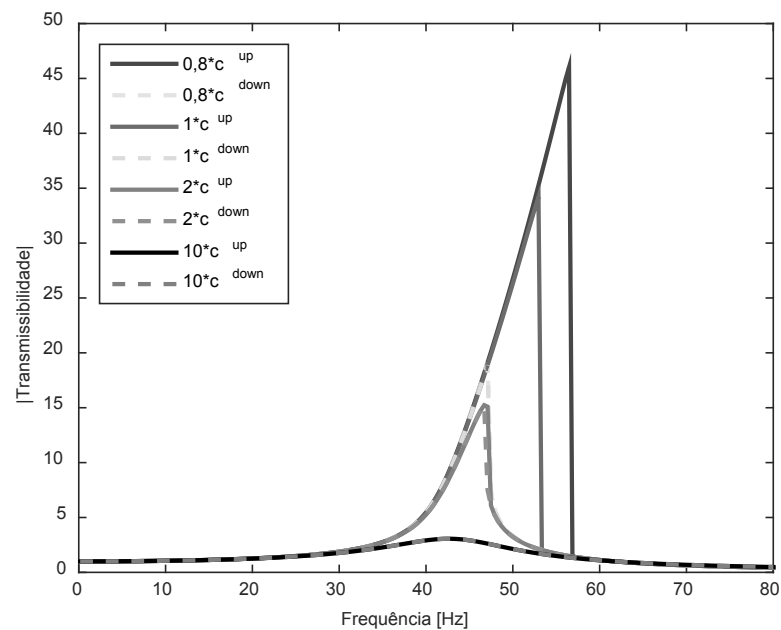
XIAO, Z.; JING, X.; CHENG, L. The transmissibility of vibration isolators with cubic nonlinear damping under both force and base excitations. **Journal of Sound and Vibration**, v.332, p.1335-1354, 2013. doi: [10.1016/j.jsv.2012.11.001](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.11.001).

## APÊNDICE A - INFLUÊNCIA DE CADA PARÂMETRO DO MODELO NUMÉRICO

Para melhor compreensão da influência dos parâmetros físicos do modelo matemático, na forma da curva de transmissibilidade do sistema primário, é apresentada neste apêndice uma comparação entre as formas obtidas para as curvas do modelo matemático, variando cada um dos parâmetros. Os gráficos são construídos multiplicando cada parâmetro da Tabela 2 pelos fatores indicados na legenda de cada figura.

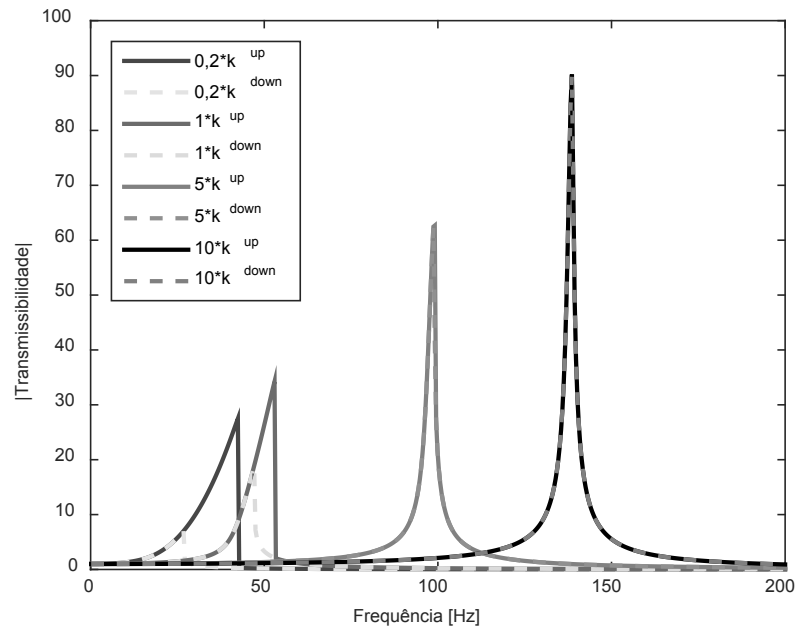
Na Figura A.1, observa-se a influência do amortecimento. Quanto maior o valor do amortecimento, menor é a amplitude de vibração, como era de se esperar. Além disso, o sistema se torna linear para valores altos de amortecimento.

FIGURA A.1 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO O AMORTECIMENTO.



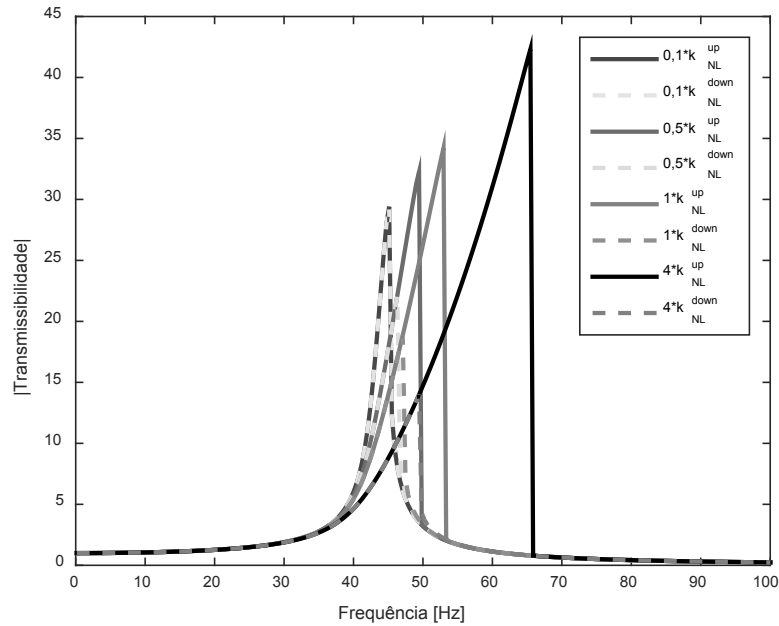
Na Figura A.2, tem-se a influência da rigidez linear. A variação da rigidez linear mostra que, para valores pequenos de rigidez o sistema se comporta de forma não linear. Contudo, quando o valor da rigidez linear é alto, o sistema se comporta de forma linear.

FIGURA A.2 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A RIGIDEZ LINEAR.



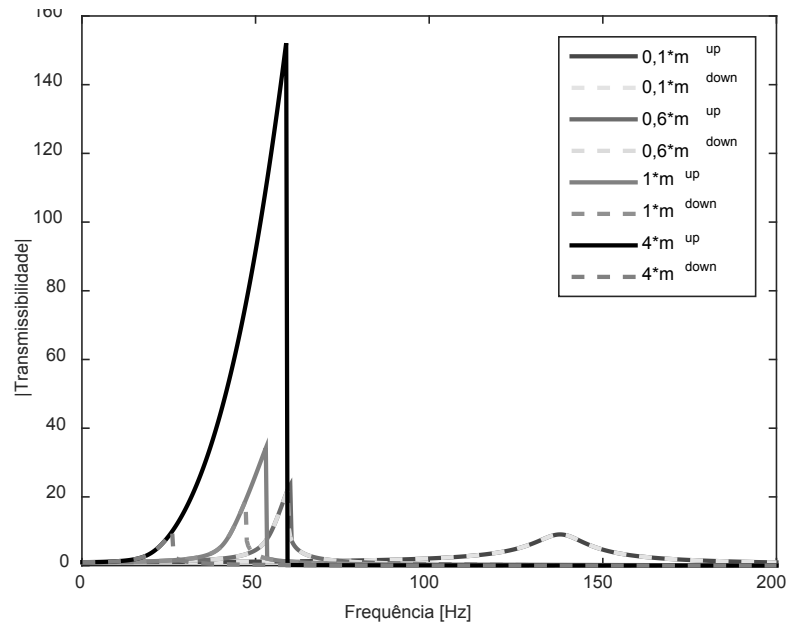
Na Figura A.3, aborda-se a rigidez não linear. O valor da rigidez não linear altera o sistema de forma que este se torna altamente não linear para valores maiores de rigidez não linear. Já quando valores menores de rigidez não linear são utilizados, o sistema apresenta-se como linear.

FIGURA A.3 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A RIGIDEZ NÃO-LINEAR.



Na Figura A.4, observa-se a influência da massa. Quanto maior o valor da massa usado no modelo, maior é a não linearidade do sistema e maior é a amplitude de vibração do mesmo.

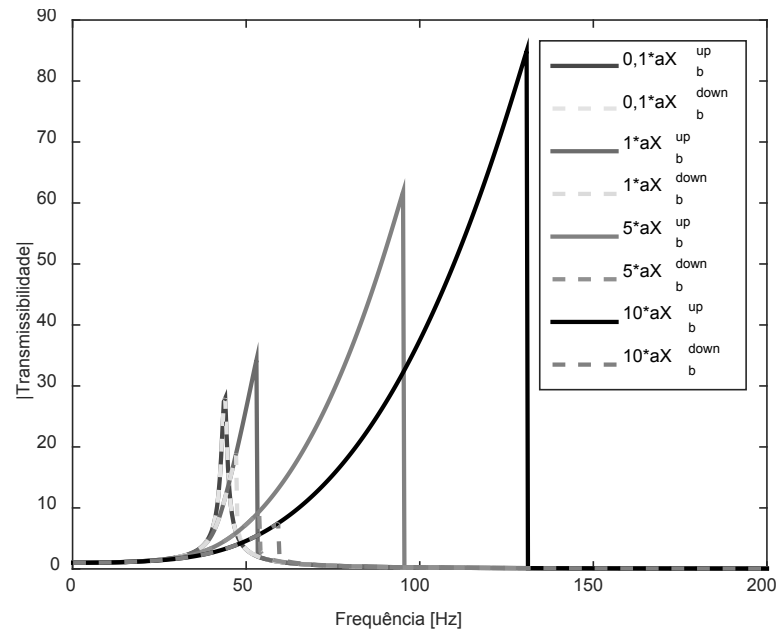
FIGURA A.4 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A MASSA.



Por fim, na Figura A.5, aborda-se a aceleração na base. Esse parâmetro é particularmente interessante, pois, neste trabalho, o sistema físico também é sujeito a diferentes amplitudes de excitação na base. Quanto maior a amplitude de

excitação utilizada no modelo matemático, maior é a amplitude de vibração do sistema e maior é o intervalo de frequências em que o sistema se comporta de modo não linear.

FIGURA A.5 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE VARIANDO A ACELERAÇÃO NA BASE.



## APÊNDICE B - RESULTADO EXPERIMENTAL DA VARIAÇÃO DA AMPLITUDE DE ACELERAÇÃO NA BASE

Também o modelo físico apresenta uma variação em suas características quando são aplicadas diferentes amplitude de excitação na base. A seção 7.1.2 apresenta a discussão realizada em relação à presença destas diferentes características. Já neste apêndice, são apresentados, na íntegra, os vários resultados da medição da curva de transmissibilidade, para diferentes valores de aceleração aplicado à base.

As Figuras A.6 a A.24 ilustram, respectivamente os seguintes valores de amplitude de aceleração aplicada à base: 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,7; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,5; 7,5 e 9,0m/s<sup>2</sup>. Todas as curvas são de transmissibilidade por frequência.

FIGURA A.6 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,1 M/S<sup>2</sup>.

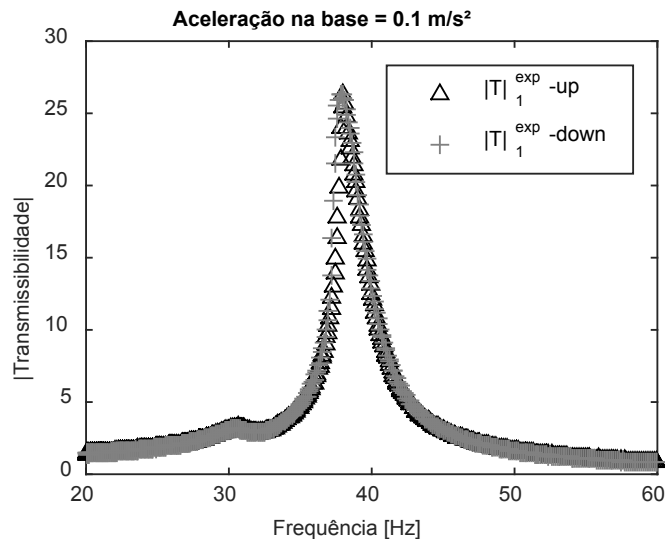


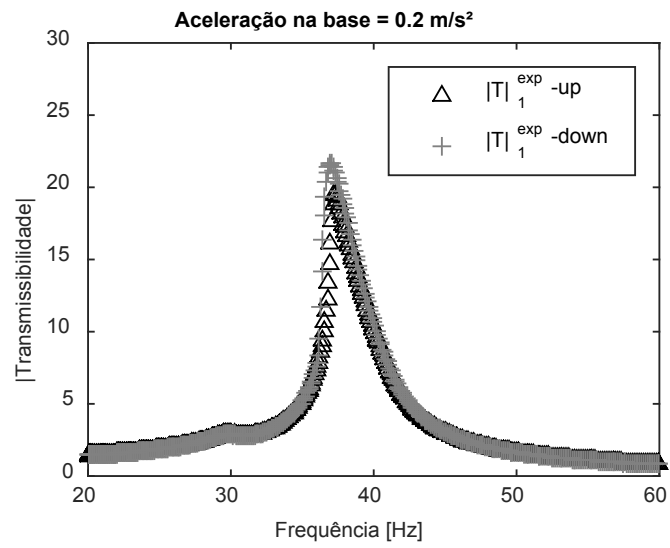
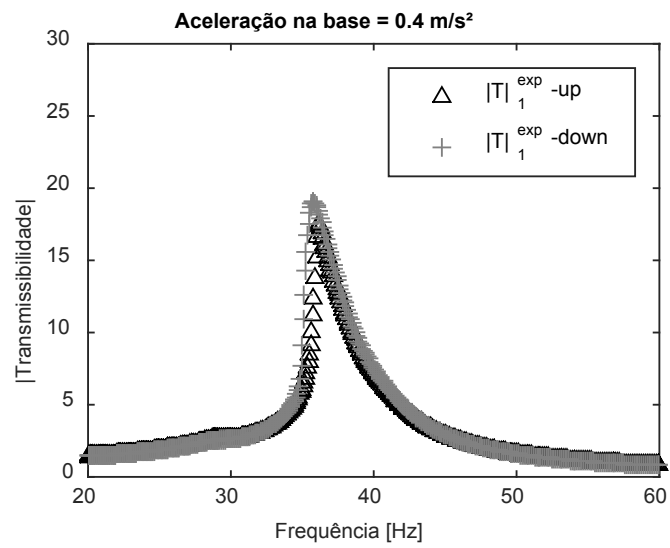
FIGURA A.7 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,2 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.8 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,4 M/S<sup>2</sup>.

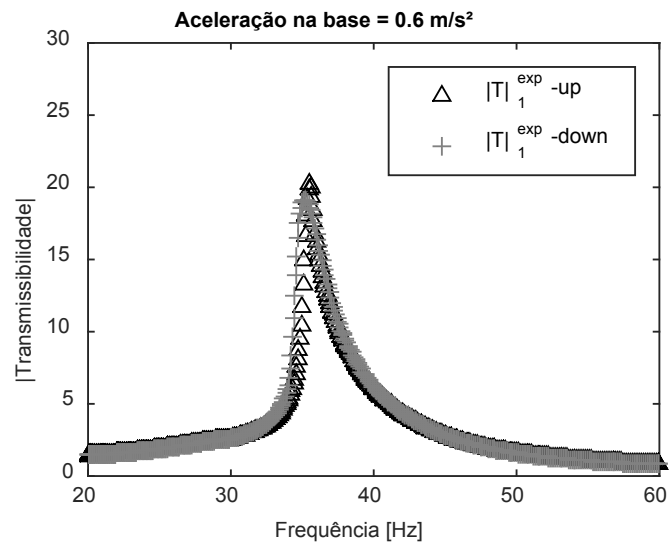
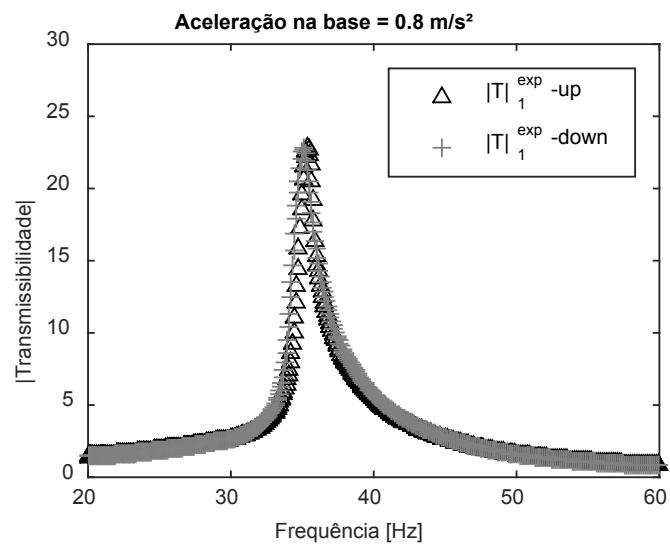
FIGURA A.9 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,6 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.10 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 0,8 M/S<sup>2</sup>.

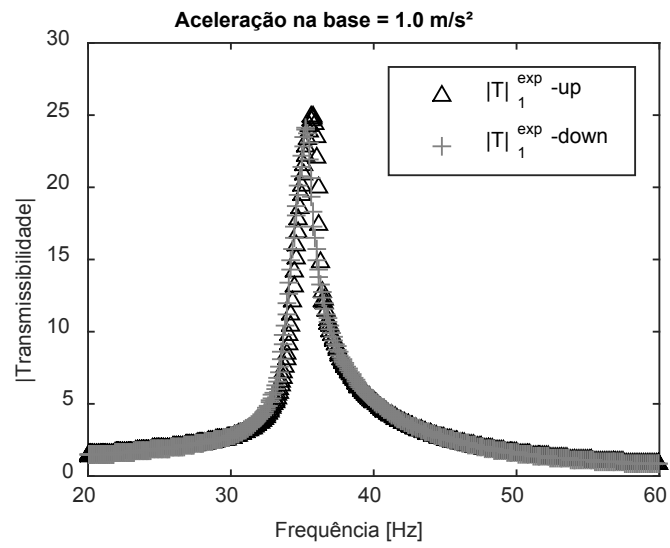
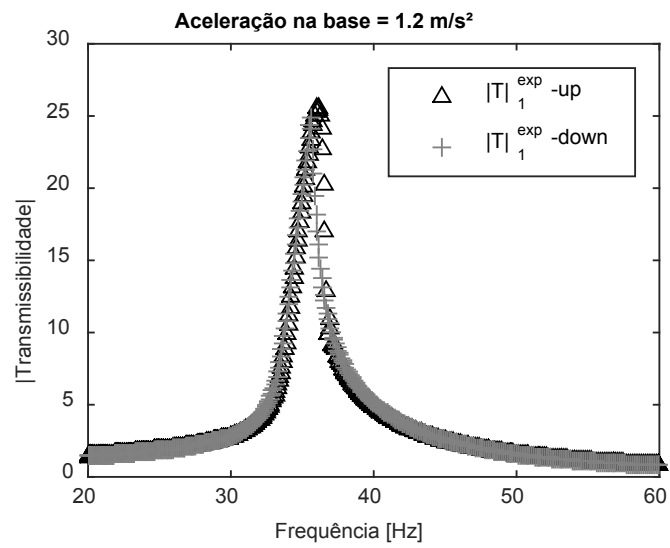
FIGURA A.11 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 1,0 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.12 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 1,2 M/S<sup>2</sup>.

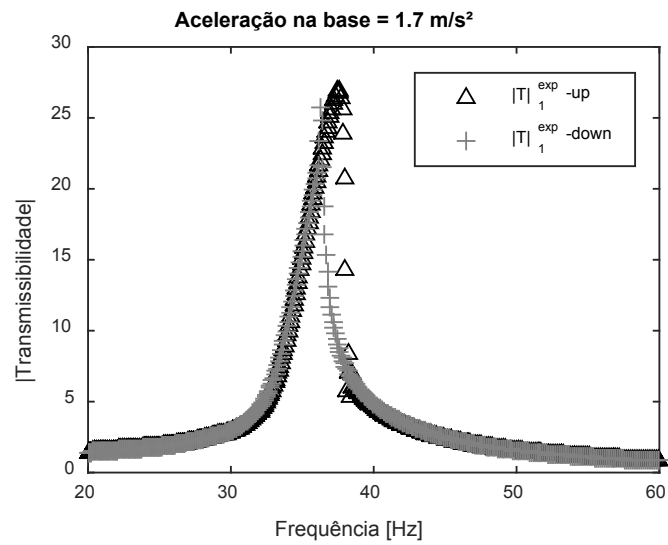
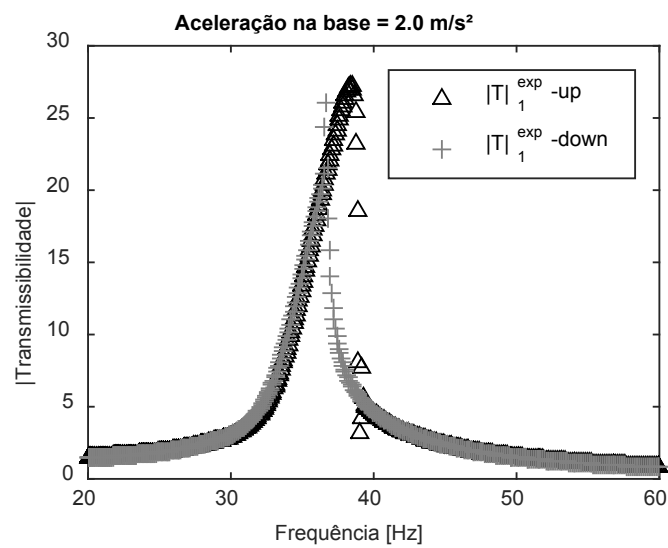
FIGURA A.13 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 1,7 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.14 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 2,0 M/S<sup>2</sup>.

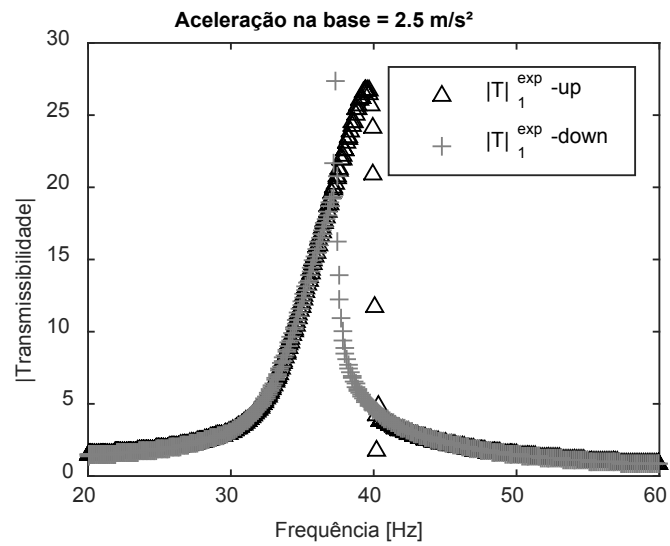
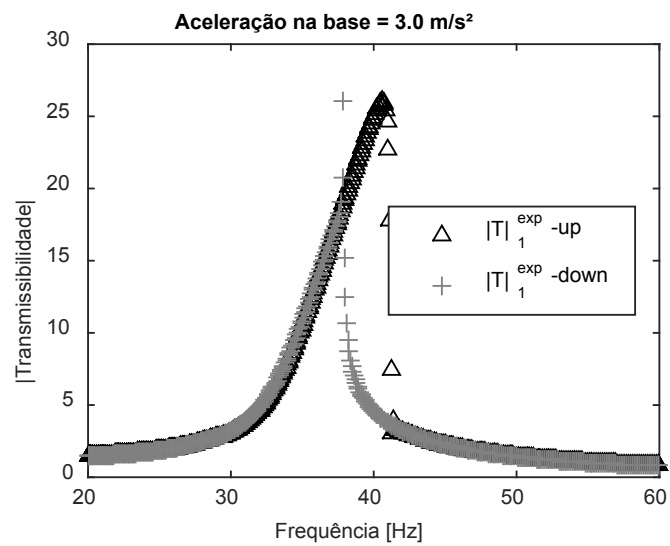
FIGURA A.15 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 2,5 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.16 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 3,0 M/S<sup>2</sup>.

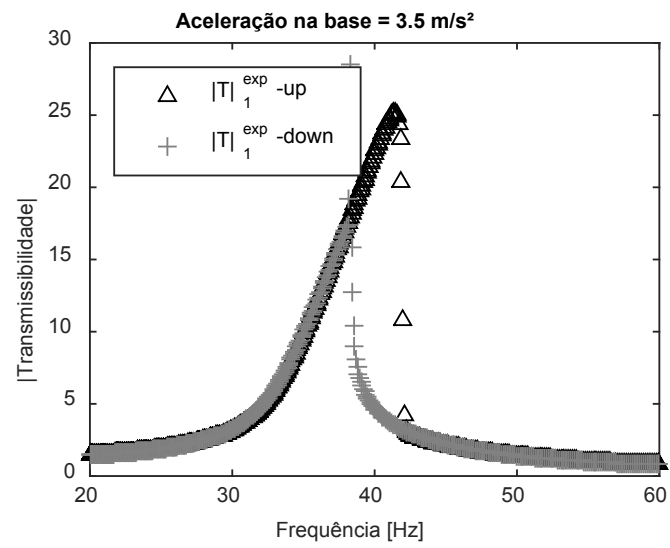
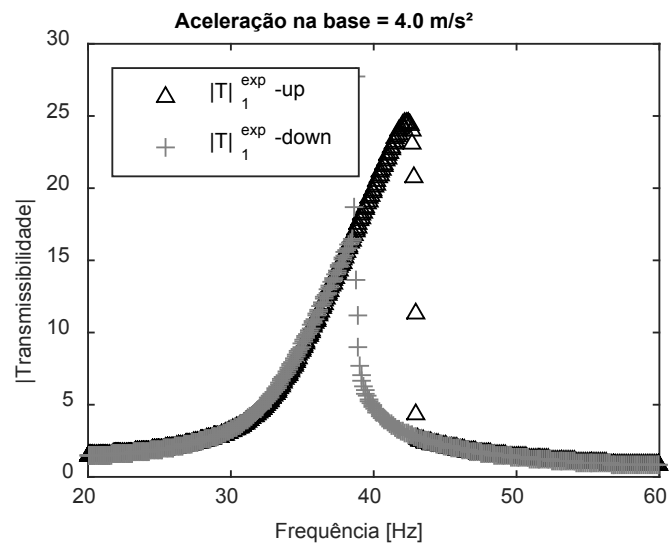
FIGURA A.17 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 3,5 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.18 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 4,0 M/S<sup>2</sup>.

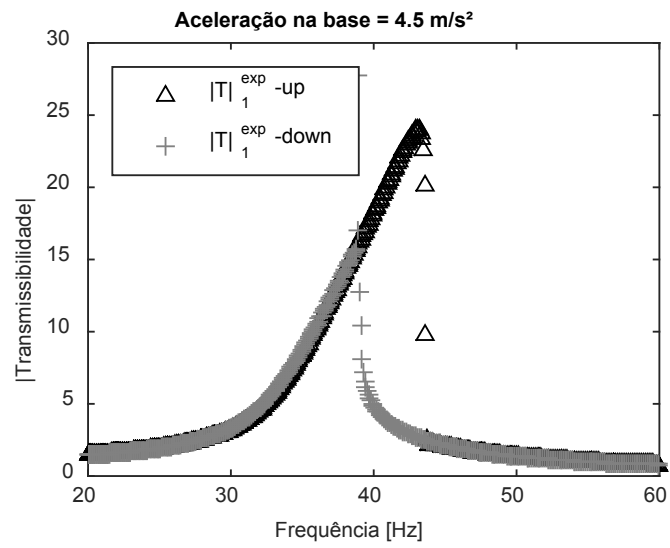
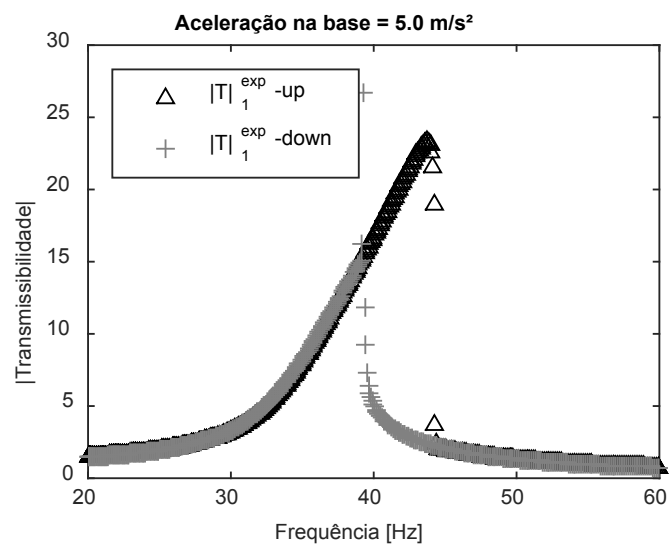
FIGURA A.19 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 4,5 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.20 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 5,0 M/S<sup>2</sup>.

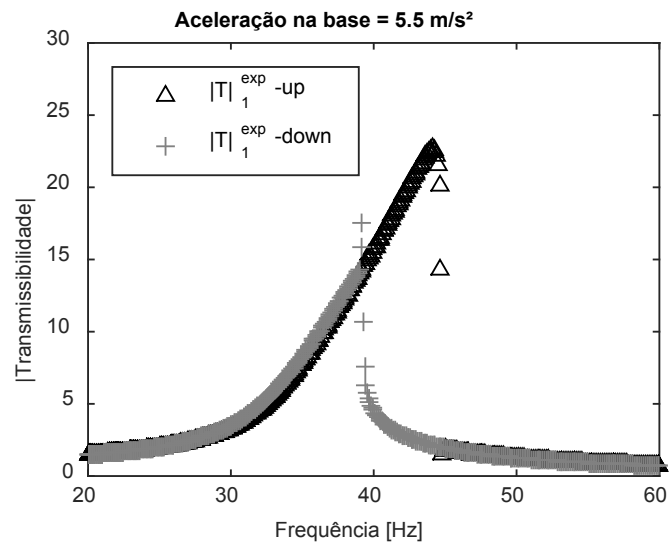
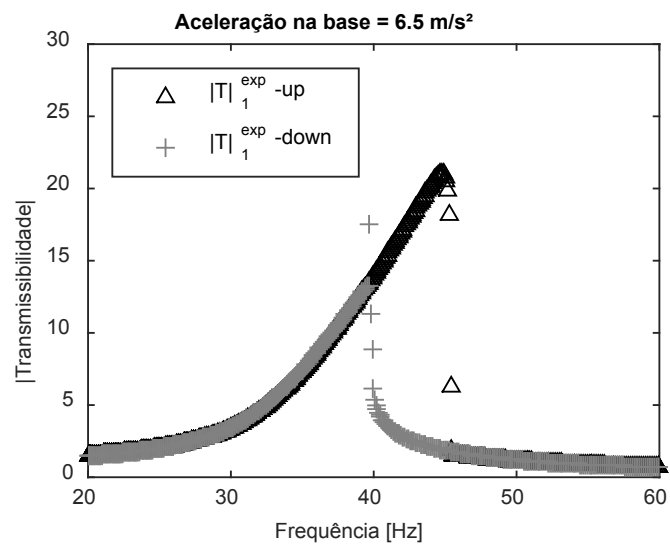
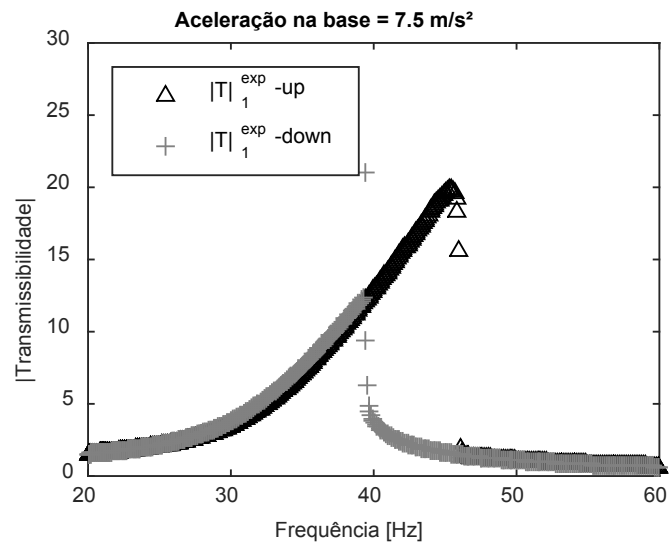
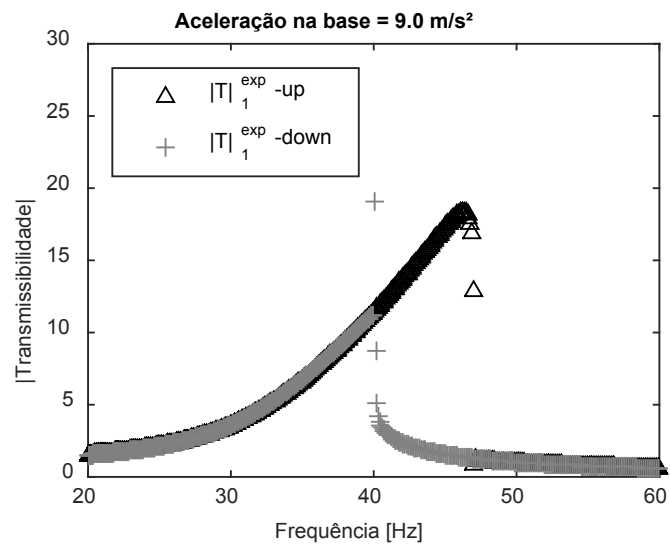
FIGURA A.21 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 5,5 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.22 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 6,5 M/S<sup>2</sup>.

FIGURA A.23 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 7,5 M/S<sup>2</sup>.FIGURA A.24 – CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE COM ACELERAÇÃO NA BASE DE 9,0 M/S<sup>2</sup>.

## APÊNDICE C - CONSTRUÇÃO DA CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE NUMÉRICA

A partir da Equação (6.1), é possível separar os termos para formar um polinômio de sexto grau. A Equação (A.1) mostra a forma deste polinômio qual seja,

$$\frac{9}{16}\alpha^2 Z^6 - \frac{3}{2}(\Omega^2\alpha - \omega_{10}\alpha)Z^4 + (\Omega^4 + \omega_{10}^4 + \Omega^2\lambda_1^2 - 2\Omega^2\omega_{10}^2)Z^2 - \Omega^4 X_b^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

Para o intervalo de frequências considerado, deve-se encontrar as raízes da equação polinomial para cada valor de frequência  $\Omega$  do intervalo.

As raízes da equação, quando a solução está fora da região não linear, são formadas por dois números reais de mesmo valor, mas sinais contrários, dois números complexos, cuja parte real tem mesmo valor, mas sinal contrário, e dois complexos conjugados dos anteriores. Já no intervalo de frequências em que o sistema é não linear, as raízes são todas reais, sendo três com sinal positivo e três com o mesmo valor das anteriores, mas com sinal negativo.

Cada ponto na curva de transmissibilidade é formado pelas raízes reais positivas. De forma mais clara, das seis raízes do polinômio, toma-se apenas aquelas com a parte real positiva. Desta forma restarão apenas três raízes. Quando apenas uma das três raízes restantes é real, este valor será utilizado para a curva de subida e de descida. Agora, quando as três raízes restantes são reais, o maior valor é usado na curva de subida e o menor valor é usado na curva de descida.

Nos pontos em que ocorrem os saltos, as três raízes restantes serão reais, sendo que duas delas serão iguais.

A Figura A.25 busca representar, a partir do exposto acima, o processo de construção das curvas de transmissibilidade, em subida e em descida.

FIGURA A.25 - CONSTRUÇÃO DA CURVA DE TRANSMISSIBILIDADE.

