

Universidade Federal do Paraná  
Curso de Pós-graduação em Física  
Dissertação de Mestrado

Daniel Fernandes Orsini

Estudo de Uma Proposta de Medida de Emaranhamento para Estados Puros: Comparação com outros Procedimentos e uma Visualização Geométrica.

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física.

**Orientador:** *Prof. Dr. Marcos G. E. da Luz*

Curitiba - PR

2014

---

O76e

Orsini, Daniel Fernandes

Estudo de uma proposta de medida de emaranhamento para estados puros : comparação com outros procedimentos e uma visualização geométrica / Daniel Fernandes Orsini. – Curitiba, 2014.  
122f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Física, 2014.

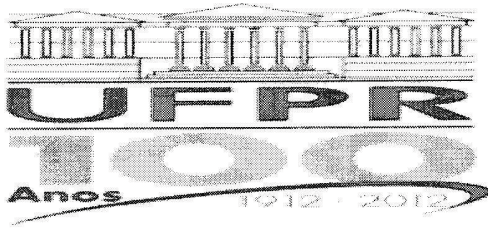
Orientador: Marcos G. E. da Luz.

Bibliografia: p. 117-122.

1. Teoria quântica. 2. Entrelaçamento quântico. 3. Entropia Linear. I. Universidade Federal do Paraná. II. Luz, Marcos G. E. da. III. Título.

CDD: 530.12

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)

## PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do aluno **DANIEL FERNANDES ORSINI**, consideram aprovada a redação final da dissertação, cujo título é: “Estudo de Uma Proposta de Medida de Emaranhamento para Estados Puros: Comparação com outros Procedimentos e uma Visualização Geométrica”.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2014.

### Banca Examinadora

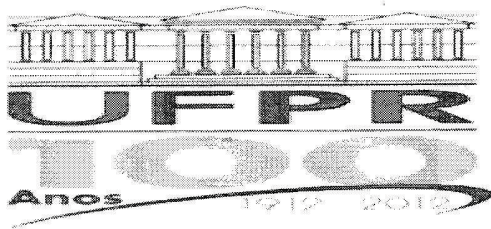
Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz  
(UFPR)

Prof. Dr. Marcus Werner Beims  
(UFPR)

Prof. Dr. Luis Guilherme de Carvalho Rego  
(UFSC)

### Assinatura

Two handwritten signatures are shown, each on a horizontal line. The first signature is for Marcos W. B. and the second is for Luis Guilherme C. Rego.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)



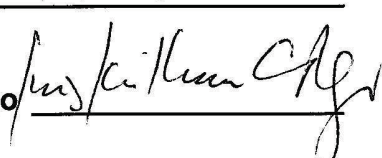
## DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo de Uma Proposta de Medida de Emaranhamento para Estados Puros:  
Comparação com outros Procedimentos e uma Visualização Geométrica.**

**ALUNO**

**DANIEL FERNANDES ORSINI**

Em sessão pública iniciada às 9 horas do dia 27 de fevereiro de 2014, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu aprovar o candidato com o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Luis Guilherme de Carvalho Rego (UFSC)		<u>A</u>

# Agradecimentos

- Ao Prof. Marcos G. E. da Luz pela orientação;
- Aos familiares e amigos, que sempre estiveram presentes;
- Ao CNPq pelo suporte financeiro;
- Ao Grupo FISUX pelo código de formatação dessa dissertação.

# Resumo

Neste trabalho propomos uma medida de emaranhamento baseada em relações entre os coeficientes da função de onda. Desenvolvemos primeiramente a ideia para sistemas puros com duas partículas e dois estados. Fazemos comparações entre essa proposta e outras, numérica e analiticamente. Em seguida, generalizamos a medida para sistemas puros de quaisquer dimensões, fazemos novas comparações e mostramos que a proposta atende aos requisitos básicos esperados de uma medida de emaranhamento. O trabalho prossegue demonstrando que para sistemas de  $N$  partículas, cada uma com acesso a dois estados, nossa proposta é idêntica ao Emaranhamento Global, de Meyer e Wallach. É discutida a relação entre o Emaranhamento Global e a Entropia Linear, demonstrada por Brennen. Nós demonstramos que a mesma relação é válida para a nossa proposta, lembrando que essa se estende a casos de qualquer dimensão. Por fim, trabalhamos com uma visualização geométrica do emaranhamento, representando em um espaço tridimensional estados com mesmo emaranhamento.

# Abstract

In this work we propose an entanglement measure based on relations between the wave function's coefficients. At first, we develop the idea for pure systems constituted of two particles, each with access to two states. We compare this proposal with other measures, numerically and analytically. Following, we generalize this measure to pure systems with any dimensions, make new comparisons and show that this proposal has the basic requisites required by entanglement measures. The work follows with the demonstration that for systems with  $N$  particles, each with access to two states, our proposal is identical to the Global Entanglement, proposed by Meyer and Wallach. The relation between the Global Entanglement and the Linear Entropy, demonstrated by Brennen, is discussed. We show that the same relation holds for our proposal, despite the fact that it covers systems with any dimension. Finally, we work out a geometric visualization of the entanglement, representing in a three-dimensional space states with the same entanglement.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Sumário</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos Fundamentais</b>	<b>4</b>
2.1 Experimento Dupla Fenda . . . . .	4
2.2 Os Postulados da Mecânica Quântica . . . . .	7
2.3 Operador Densidade . . . . .	9
2.4 Operador Densidade Reduzido . . . . .	11
2.5 Emaranhamento . . . . .	13
2.6 Medidas de Emaranhamento . . . . .	15
<b>3 A Proposta <math>C</math> para sistemas <math>2 \times 2</math></b>	<b>16</b>



3.1	Comparações . . . . .	18
3.1.1	Comparação Numérica . . . . .	20
3.1.2	Comparação Analítica . . . . .	21
3.1.3	Distância . . . . .	26
<b>4</b>	<b>A Proposta <math>C</math> para sistemas de quaisquer dimensões</b>	<b>30</b>
4.1	Sistemas com mais partículas e níveis . . . . .	30
4.1.1	Contando Coeficientes de Emaranhamento . . . . .	31
4.1.2	Sistemas $2 \times 3$ . . . . .	33
4.1.3	Sistemas $3 \times 2$ . . . . .	39
4.2	Propriedades Básicas . . . . .	42
4.2.1	Primeira Propriedade . . . . .	43
4.2.2	Segunda Propriedade . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Emaranhamento Global, Entropia Linear e <math>C</math></b>	<b>51</b>
5.1	Emaranhamento Global . . . . .	51
5.2	Equivalência entre o Emaranhamento Global e $C$ . . . . .	52
5.3	$C$ , Emaranhamento Global e Entropia Linear . . . . .	53
5.3.1	Entropia Linear . . . . .	53
5.3.2	A Relação entre $E.G.$ e a Entropia Linear . . . . .	54
5.4	Escrevendo $C$ em termos de E.G. . . . .	54
5.4.1	Proposta . . . . .	55
5.5	$C$ e a Entropia Linear . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Uma Análise Geométrica do Emaranhamento</b>	<b>61</b>
6.1	Elaboração do Problema . . . . .	61

6.2	$t = 0$ . . . . .	64
6.3	$t > 0$ . . . . .	70
6.4	Análise para $t < 0$ . . . . .	84
6.5	Figuras de Emaranhamento . . . . .	85
6.5.1	Distância Geométrica e Distância de Emaranhamento . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Distância de um Estado Real a um Não Emaranhado</b>	<b>98</b>
A.1	Sistemas 2x2 . . . . .	98
<b>B</b>	<b>Relação entre Emaranhamento Global e a Entropia Linear</b>	<b>100</b>
<b>C</b>	<b>Soluções e Limites para <math>t &gt; 0</math></b>	<b>106</b>
C.1	Soluções . . . . .	106
C.2	Determinação da variação de $z$ . . . . .	108
C.3	Limites de $z$ a partir da normalização . . . . .	115
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>117</b>

## Introdução

Até o início do século XX, a visão predominante da ciência a respeito do mundo era a do “universo mecânico”. Suas leis eram plenamente compreendidas e todo o futuro poderia ser previsto a partir das condições iniciais. Chegou-se a dizer que “não havia nada mais a ser descoberto na física, apenas restava fazer medidas mais e mais precisas”. Essa concepção caiu com o surgimento de duas teorias: a Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade de Einstein.

A Mecânica Quântica se desenvolveu com os trabalhos de Einstein, Planck, Bohr, Schrödinger, Heisenberg e outros. Ela envolve conceitos estranhos à nossa intuição. As características de um objeto passam a ser indeterminadas até que as mesmas sejam medidas. Um dos efeitos disso é a perda da noção de trajetória, essencial à física clássica. Essa indeterminação também faz com que probabilidades apareçam como inerentes às leis físicas, e não apenas como fruto de limites experimentais. Nosso conhecimento sobre sistemas físicos passa a ser limitado, como evidencia o Princípio da Incerteza, que nos diz que à medida que soubermos com maior precisão o momento de um objeto, maior será nossa incerteza sobre sua posição, e vice-versa. O modo como problemas de muitos corpos são descritos também difere fundamentalmente do modo como o são na física clássica, o que faz com que surjam correlações não-locais inimagináveis em um universo clássico [1], [2].

Quem primeiro notou que correlações não-locais surgiam com a Mecânica Quântica foram Einstein, Podolski e Rosen [3]. Eles associavam a esse tipo de correlação a impossi-

bilidade da Mecânica Quântica como uma descrição completa da realidade. Schrödinger [4] respondeu em favor da Mecânica Quântica e dessas correlações, dando a elas o nome de emaranhamento. A disputa ficou em aberto até Bell [5] propor um experimento que resolveria o problema e deixaria claro se essas correlações existiam ou não, estando a questão sujeita à violação de uma desigualdade, hoje conhecida como desigualdade de Bell. Esse experimento foi realizado pela primeira vez por Aspect *et al.* [6], sendo que depois foram feitos diversos outros experimentos confirmando esse resultado [7], [8], [9], [10], [11]. Os resultados foram todos favoráveis à posição já adotada por Schrödinger, e com respaldo experimental, a disputa terminou em favor do emaranhamento e do universo quântico.

Por vezes, embora possamos descrever um dado sistema quântico composto, não podemos descrever seus subsistemas individualmente. Para casos assim, medidas feitas em um dos subsistemas afetam todos os outros, instantaneamente, mesmo que eles estejam separados espacialmente. Essa correlação não-local é o que chamamos de emaranhamento.

As possibilidades abertas com o emaranhamento são diversas. Como podemos ver em Horodecki *et al.* [12], a teoria de emaranhamento é fundamental em descobertas como criptografia quântica [13], “quantum dense coding” [14] e teleporte quântico [15], efeitos esses todos demonstrados experimentalmente [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23]. O emaranhamento é também fundamental na Computação Quântica, disciplina que estuda algoritmos factíveis apenas com recursos quânticos, onde estados emaranhados desempenham papel fundamental [24].

Acerca do emaranhamento, podemos propor outro problema: sua quantificação. Dado que um estado seja emaranhado, quão emaranhado ele é? Como posso afirmar se um estado é mais emaranhado do que outro? Essas perguntas deram início a todo um novo campo de pesquisas, campo no qual essa dissertação se inclui.

Trataremos aqui de medidas de emaranhamento. Será feita uma proposta de medida matematicamente simples, que será analisada e comparada com outros procedimentos presentes na literatura.

No capítulo 2, retomaremos os conceitos básicos da Mecânica Quântica e do fenômeno de emaranhamento, conceitos esses necessários para o entendimento dos capítulos seguintes.

No terceiro capítulo, trabalharemos com sistemas puros de duas partículas e dois níveis. Analisaremos uma expressão simples que nos diz se um estado desse tipo é ou não emaranhado. Essa expressão será utilizada para estimar o emaranhamento de sistemas quânticos. Faremos uma comparação entre esse modo de medir emaranhamento e outros estabelecidos na literatura, numérica e analiticamente.

No quarto capítulo, estenderemos a idéia desenvolvida no terceiro capítulo, propondo uma expressão para medir o emaranhamento de sistemas puros com quaisquer dimensões. Também faremos comparações com outros procedimentos de medida. Ao final do capítulo, demonstraremos que a medida proposta atende aos requisitos exigidos para que ela configure uma medida de emaranhamento válida.

No quinto capítulo, veremos que para casos de  $N$  partículas com dois níveis de energia cada, essa proposta torna-se idêntica a uma outra existente na literatura, o Emaranhamento Global, proposto por Meyer e Wallach [25]. Será explorado o resultado de Brennen [26] que conecta essa medida com outra, a entropia linear. Em seguida, mostraremos como nossa proposta também se conecta à entropia linear.

No sexto capítulo, exploraremos uma visão geométrica do emaranhamento, visualizando a distribuição do mesmo em um espaço tridimensional. Por fim, serão feitas as considerações finais acerca dos resultados obtidos.

## Conceitos Fundamentais

### 2.1 Experimento Dupla Fenda

O Experimento da Dupla Fenda é um dos mais famosos na história da física. Sua simplicidade e a forma como coloca em evidência as discrepâncias entre a física clássica e quântica o tornam ideal como introdução aos conceitos desta. Ele será aqui descrito de maneira similar à que aparece no livro de Audretsch [27]. A montagem do experimento consiste em três partes: um aparato que ejete partículas, uma após a outra, um anteparo onde essas partículas serão detectadas e duas fendas paralelas entre o ejetor e o anteparo, que denominaremos “fenda 1” e “fenda 2”. A esquematização do experimento pode ser vista na figura (2.1).

Primeiro descreveremos o que acontece no caso clássico, ou seja, caso as partículas ejetadas obedecem às leis da física clássica. Nosso aparato ejeta partículas sob três situações: fenda 1 aberta e fenda 2 fechada, fenda 1 fechada e fenda 2 aberta, e ambas as fendas abertas. Com um número suficiente de partículas ejetadas, obteremos um padrão com a distribuição estatística do local de choque das mesmas no anteparo,  $P(x)$ . Caso mantenhemos uma das fendas abertas e a outra fechada, obtemos o resultado mostrado na figura (2.2). Caso a fenda aberta seja a número 2, o resultado é o mesmo, porém centrado nessa fenda. Para as duas fendas abertas, obtemos o esperado, padrões idênticos aos anteriores, sob ambas as fendas (propriamente normalizados com um fator  $1/2$ ). O resultado é o que esperamos intuitivamente: a distribuição de probabilidades com as duas

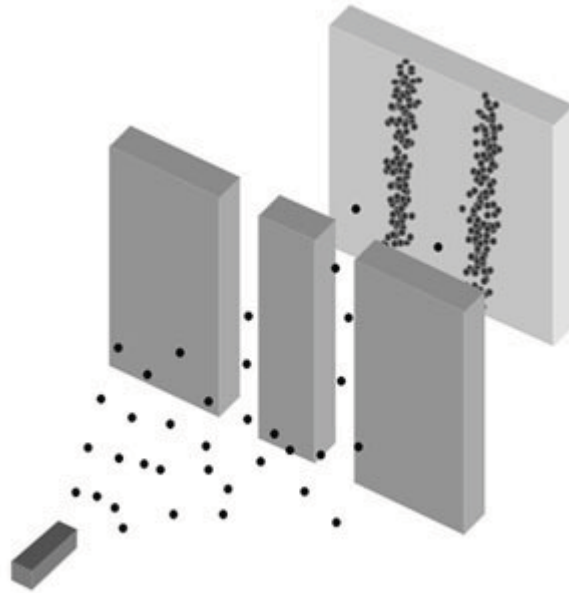


Figura 2.1: Esquematização do Experimento de Dupla Fenda.

Fonte: <http://www.blacklightpower.com/theory-2/theory/double-slit/>

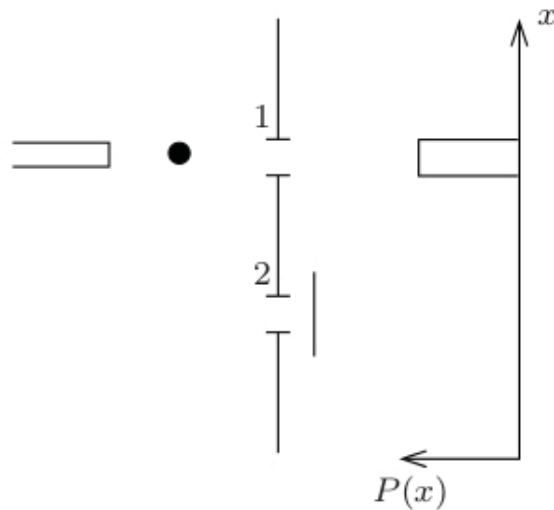


Figura 2.2: Esquematização do experimento de Dupla Fenda realizado com partículas clássicas e com uma fenda fechada.  $P(x)$  representa a distribuição estatística do local de choque das partículas. Fonte: Entangled Systems [27], p.24

fendas abertas é a soma das distribuições com cada uma delas aberta separadamente.

Vamos analisar o que acontece se, ao invés de lançarmos objetos macroscópicos, lançarmos objetos quânticos, átomos, por exemplo. O experimento é montado de tal maneira

que, não fosse a dupla fenda, os impactos se distribuiriam aleatoriamente pelo anteparo de detecção. Com apenas uma das fendas abertas, obtemos o padrão mostrado na figura (2.3), com o máximo diretamente posicionado sob a abertura da fenda.

Caso a fenda 2 seja aberta e a 1 fechada, o resultado é idêntico, com a curva posicionada sob ela. Quando abrimos as duas fendas, porém, obtemos algo não esperado. O padrão formado pode ser visto na figura (2.4).

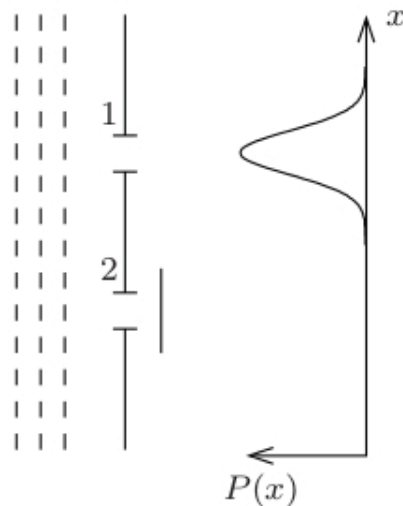


Figura 2.3: Esquemática do experimento de Dupla Fenda realizado com partículas quânticas e com uma fenda fechada.  $P(x)$  representa a distribuição estatística do local de choque das partículas. Fonte: Entangled Systems [27], p.24

Observamos uma distribuição que não é a soma das distribuições de probabilidades dos casos individuais, mas semelhante a um padrão de interferência, como o presente no experimento quando ele é feito com luz. Um padrão desses é impossível se associarmos uma trajetória individual clássica a cada uma das partículas lançadas, e portanto, podemos presumir que a descrição das mesmas se dará de modo análogo à descrição de ondas e suas interferências por superposição. Nós não podemos dizer se um átomo passou pela fenda 1 ou pela 2, e assim perdemos a noção de trajetória clássica para os mesmos.

Com esses resultados em mente, vamos tentar descobrir, incrementando esse experimento, por qual das fendas um determinado átomo passa. Isso pode ser feito da seguinte maneira: lasers são posicionados atrás de cada uma das fendas, de modo que, quando um átomo passa por ela, espalha a luz para depois chocar-se com o anteparo detector. Dessa forma, saberemos por onde o átomo afinal passou, e onde ele chegou após isso. Realizando



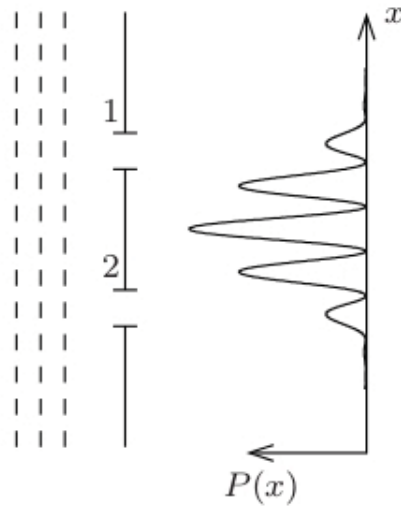


Figura 2.4: Esquemática do experimento de Dupla Fenda realizado com partículas quânticas e com as duas fendas abertas.  $P(x)$  representa a distribuição estatística do local de choque das partículas. Fonte: Entangled Systems [27], p.25

esse experimento, obtemos como distribuição de impacto curvas como as apresentadas na figura (2.3) sob cada uma das fendas, ou seja, o resultado será a soma das distribuições para o caso de apenas uma das fendas abertas. Isso deixa claro que o próprio ato de medida modifica o nosso sistema em mecânica quântica.

## 2.2 Os Postulados da Mecânica Quântica

Apresentaremos nesta seção os postulados que sustentam a Mecânica Quântica. Eles descrevem os objetos básicos dessa teoria e as relações entre eles. Os postulados são aqui apresentados da maneira como o são por Nielsen e Chuang [24].

### Postulado 1

*A qualquer sistema físico isolado existe associado um espaço vetorial complexo com produto interno (ou seja, um espaço de Hilbert), conhecido como espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu vetor de estado, um vetor unitário no espaço de estados.*

Esse postulado nos diz como descrever objetos quaisquer em mecânica quântica, como os átomos no experimento de dupla fenda.

### Postulado 2

*A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Ou seja, o estado  $|\Psi\rangle$  de um sistema em um tempo  $t_1$  está relacionado ao estado  $|\Psi'\rangle$  do sistema em  $t_2$  por um operador univário  $U$  que depende somente de  $t_1$  e  $t_2$ :  $|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$ .*

Aqui é descrita a dinâmica dos objetos quânticos. Em nosso experimento, seria a descrição do que acontece com o átomo entre a ejeção e seu choque com o anteparo.

### Postulado 3

*As medidas quânticas são descritas por determinados operadores de medida  $\{M_m\}$ . Esses operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema. O índice  $m$  se refere aos possíveis resultados da medida. Se o estado de um sistema quântico for  $|\Psi\rangle$ , imediatamente antes da medida, a probabilidade de um resultado  $m$  ocorrer é dada por:*

$$p(m) = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle, \quad (2.1)$$

*e o estado do sistema após a medida será:*

$$\frac{M_m |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}}. \quad (2.2)$$

*Os operadores de medida satisfazem a relação de completude:*

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (2.3)$$

Aqui são descritas as medidas e seus efeitos nos sistemas. Nesse postulado aparece o caráter probabilístico da teoria quântica e o conceito de colapso da função de onda, a saber, o fato de instantaneamente após a medida o sistema assumir a forma (2.2). Em nosso experimento, medidas acontecem quando as partículas se chocam com o anteparo

ou espalham o laser posicionado atrás das fendas. Esse postulado justifica os resultados diferentes do experimento se feito com ou sem o laser.

#### Postulado 4

*O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados de sistemas físicos individuais. Se os sistemas forem enumerados de 1 até  $n$ , e o sistema  $i$  for preparado no estado  $|\Psi_i\rangle$ , decorre que o estado do sistema composto será  $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_n\rangle$ .*

O quarto postulado diz como devemos tratar problemas com mais de um objeto. O fato de muitos objetos serem descritos pelo produto tensorial de seus espaços de estados está no cerne do fenômeno de emaranhamento, aspecto quântico recorrente nessa dissertação.

## 2.3 Operador Densidade

Por vezes nos deparamos com situações em que nosso sistema quântico não é plenamente conhecido. Voltemos ao experimento da dupla fenda, descrito na seção (2). Em nossa última configuração desse experimento, um laser era posicionado atrás de cada fenda, emitindo um flash quando a partícula passava por ele. Vamos dizer que quando uma partícula passa pela fenda 1, acionando o respectivo laser, ela assume o estado  $|\Psi_1\rangle$ , e quando aciona o laser posicionado na fenda 2, o estado  $|\Psi_2\rangle$ . Agora, imaginemos que esse experimento passe a ser o nosso aparato de ejeção de partículas. As partículas espalham o laser e depois são utilizadas em algum novo experimento. Em que estado saem essas partículas? É óbvio que não podemos associar um estado único a todas elas. Há 50% de chance de estarem no estado  $|\Psi_1\rangle$  e 50% de estarem no estado  $|\Psi_2\rangle$ . Como resolver esse problema? O operador densidade surge para descrever esse tipo de situação.

O operador densidade descreve uma mistura de estados puros. O definimos como:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (2.4)$$

onde  $p_i$  é a probabilidade de o sistema estar no estado  $|\Psi_i\rangle$ .

O operador densidade deve satisfazer as seguintes características:

$$\text{Tr}[\rho] = 1, \quad (2.5)$$

e

$$\langle \Psi | \rho | \Psi \rangle \geq 0, \quad (2.6)$$

com  $|\Psi\rangle$  sendo um estado qualquer.

Podemos reformular os postulados apresentados na seção (2.2), utilizando operadores densidade no lugar de vetores de estado. Abaixo, apresentamos os postulados revistos, novamente como apresentados por Nielsen e Chuang [24].

### Postulado 1

*Associado a qualquer sistema físico existe um espaço vetorial complexo com produto interno, um espaço de Hilbert, conhecido como espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu operador densidade, que é um operador positivo com traço 1 atuando no espaço de estados. Se o sistema está no estado  $\rho_i$  com probabilidade  $p_i$ , o seu operador densidade será  $\sum_i p_i \rho_i$ .*

### Postulado 2

*A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por transformações unitárias. Isto é, o estado  $\rho$  do sistema em um instante  $t_1$  está relacionado ao estado  $\rho'$  em um instante  $t_2$  por um operador unitário  $U$  que depende somente de  $t_1$  e  $t_2$ , sendo a relação entre eles  $\rho' = U\rho U^\dagger$ .*

### Postulado 3

*Medidas quânticas são descritas por uma coleção de operadores de medidas  $\{M_m\}$ . Esses operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema sendo medido. O índice  $m$  refere-se a um resultado possível da medida. Se o estado do sistema imediatamente antes*

da medida for  $\rho$ , a probabilidade de o resultado  $m$  ocorrer será

$$p(m) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (2.7)$$

e o estado do sistema após a medida será

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.8)$$

Os operadores de medida satisfazem a seguinte equação de completude

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (2.9)$$

#### Postulado 4

*O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados de suas componentes. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 a  $n$ , e o  $i$ -ésimo sistema for preparado em  $\rho_i$ , o estado do sistema composto será  $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n$ .*

Esses postulados são equivalentes aos anteriores, e se tornam extremamente úteis ao se trabalhar com sistemas cujos estados não são completamente conhecidos. Vale notar outra propriedade do operador densidade, a saber

$$\text{tr}[\rho^2] \leq 1, \quad (2.10)$$

sendo a igualdade alcançada apenas para estados puros.

## 2.4 Operador Densidade Reduzido

Neste trabalho tratamos de sistemas puros, assim, por que trazer à tona a teoria de sistemas mistos? Isso se deve ao *operador densidade reduzido*. Esse operador descreve subsistemas de sistemas quânticos compostos, e é fundamental no estudo dos mesmos. Dado um sistema composto  $\rho_{AB}$ , dizemos que o operador densidade reduzido em relação

ao subsistema A é:

$$\rho_A \equiv \text{tr}_B[\rho_{AB}], \quad (2.11)$$

sendo  $\text{tr}_B$  o traço parcial sobre  $B$ , definido como

$$\text{tr}_B[|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|] \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{tr}[|b_1\rangle\langle b_2|]. \quad (2.12)$$

O operador densidade reduzido é importante por oferecer a estatística para as medidas realizadas sobre o subsistema em questão. Vamos aplicá-lo a dois casos e ver o que obtemos. Primeiro, tomemos  $\rho_{AB} = \rho \otimes \sigma$ . Para  $\rho_A$ , temos

$$\rho_A = \text{tr}_B[\rho \otimes \sigma] = \rho \text{tr}[\sigma] = \rho. \quad (2.13)$$

Como esperado, para um sistema composto de subsistemas separáveis, obtivemos um dos subsistemas como operador densidade reduzido. Vamos agora efetuar procedimento semelhante para um estado puro, no caso, um dos chamados estados de Bell,

$$|\Psi_{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle). \quad (2.14)$$

Seu operador densidade é dado por

$$\rho = \frac{|0_1\rangle\langle 0_1| \otimes |0_2\rangle\langle 0_2| + |1_1\rangle\langle 0_1| \otimes |1_2\rangle\langle 0_2| + |0_1\rangle\langle 1_1| \otimes |0_2\rangle\langle 1_2| + |1_1\rangle\langle 1_1| \otimes |1_2\rangle\langle 1_2|}{2}, \quad (2.15)$$

e seu operador densidade reduzido

$$\rho_1 = \text{tr}_2[\rho] = \frac{|0_1\rangle\langle 0_1| + |1_1\rangle\langle 1_1|}{2} = \frac{\mathbb{1}}{2}. \quad (2.16)$$

Há algo notável nesse resultado. Podemos calcular o traço do quadrado do operador obtido:

$$\text{tr}[(\rho_1)^2] = \text{tr}\left[\frac{1}{4}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)\right] = \frac{1}{2}. \quad (2.17)$$

A propriedade apresentada na equação (2.10) nos diz que, caso o traço do quadrado de um operador densidade seja menor do que 1, esse operador representa um estado misto.

Portanto, é possível que estados puros sejam formados por subsistemas em estados mistos. Embora conheçamos completamente nosso sistema, nos é vedado o conhecimento total de cada um dos subsistemas. Esse aspecto é intimamente ligado ao emaranhamento.

## 2.5 Emaranhamento

Imaginemos que possuímos duas partículas preparadas no estado descrito em (2.14). Podemos colocar uma dessas partículas em um laboratório A, e a outra em um laboratório B, de modo que possam ser feitas medidas em cada uma delas nos respectivos laboratórios onde se encontram. Caso seja medido o estado da partícula localizada no laboratório A e obtenha-se  $|0\rangle$  como resultado, sabemos que o estado da partícula no laboratório B imediatamente colapsará em  $|0\rangle$  também. A medida feita no laboratório A afeta a partícula do laboratório B, mesmo as partículas estando distantes. A essa correlação não-local damos o nome de emaranhamento.

Caracterizar o emaranhamento de um sistema puro pode ser encarado como um problema de separabilidade. Dizemos que um sistema de  $N$  partículas não é emaranhado se podemos decompor sua função de onda no produto tensorial das funções de onda de cada partícula.

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\Psi_N\rangle, \quad (2.18)$$

onde  $|\Psi_i\rangle$  refere-se à função de onda da partícula  $i$ . Caso seja impossível colocar o sistema na forma descrita pela eq. (2.18), dizemos que tal sistema é emaranhado.

Para explorar e entender melhor essa condição, vamos aplicá-la a um caso simples, um sistema de duas partículas, cada uma com acesso a dois níveis de energia. Vamos tomar uma função de onda explícita e verificar se ela é ou não emaranhada. A função será

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \frac{1}{2}|1_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \frac{1}{2}|0_1\rangle \otimes |1_2\rangle + \frac{1}{2}|1_1\rangle \otimes |1_2\rangle. \quad (2.19)$$

Analisando essa função, percebemos que conseguimos escrevê-la da seguinte maneira:

$$|\Psi\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|0_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_1\rangle \right) \otimes \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|0_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_2\rangle \right), \quad (2.20)$$

que possui o formato da equação (2.18), com

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_1\rangle \quad \text{e} \quad |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_2\rangle. \quad (2.21)$$

Esse resultado nos diz que a função de onda apresentada em (2.19) não é emaranhada. Podemos fazer outro teste com essa função. Na seção anterior foi visto como se calcula o operador densidade reduzido de um subsistema. Foi dito também que esse operador descreve o subsistema, sendo que em um caso analisado, obtivemos um subsistema misto para um estado puro, deixando claro que embora tivessemos informação completa sobre o estado, o mesmo não era verdade para um de seus subsistemas. Vamos calcular o operador densidade reduzido para a partícula 1 da função de onda (2.19) e ver o que obtemos.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{tr}_2[|\Psi\rangle\langle\Psi|] = \text{tr}_2[|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| \otimes |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|] \\ &= |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| \text{tr}[|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|] = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O operador densidade reduzido obtido representa um estado puro. Isso nos diz que assim como nosso conhecimento sobre o sistema é total, também o é sobre o subsistema. Esse resultado era esperado, dado que, com a decomposição (2.20) conseguimos separar a função de onda de cada um dos subsistemas (nesse caso, cada partícula constituindo um subsistema), ou seja, conhecemos completamente cada um deles. Para a função de onda definida na equação (2.14), é impossível realizar uma separação em termos das funções de onda individuais dos subsistemas. Esse estado é emaranhado, o que condiz com o fato de seus subsistemas serem mistos. Como notado anteriormente, chamamos esse estado de estado de Bell. Há quatro estados de Bell:  $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle)$ ,  $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle - |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle)$ ,  $|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |1_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle)$  e  $|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |1_2\rangle - |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle)$ . Esses estados são importantes pois, como veremos adiante, é possível medir o emaranhamento de sistemas físicos, e os quatro estados apontados são os mais emaranhados para sistemas com duas partículas e dois níveis.

Reunindo esses resultados, vemos que o emaranhamento está ligado à separabilidade do sistema e a incompletude da informação sobre os subsistemas. Não podemos analisar cada um dos subsistemas sem fazer referência a todos os outros.



## 2.6 Medidas de Emaranhamento

Como vimos na seção anterior, o problema de verificar se há emaranhamento em um estado puro é bem definido. Sendo possível uma separação do sistema nos termos da equação (2.18), o sistema não é, outrossim, é. Podemos, entretanto, fazer outra pergunta. Dado que um sistema é emaranhado, quão emaranhado ele é?

Há diversas propostas na literatura, tanto para estados puros quanto para estados mistos [12]. Há também discussão, em aberto, sobre quais critérios uma medida deve obedecer [28], [29], sendo que há medidas que obedecem uns e não outros. Os critérios realmente necessários, no entanto, para estados puros, são dois: que o valor da medida seja nulo para, e somente para, estados separáveis e que a mudança de base de uma das partículas do sistema não altere a medida [12]. Durante a dissertação, diversas medidas serão enunciadas e explicadas, conforme necessário.

## A Proposta $C$ para sistemas 2x2

Como vimos no capítulo anterior, caracterizar o emaranhamento de um sistema puro pode ser encarado como um problema de separabilidade. Analisamos um sistema 2x2 (2.19) e chegamos à conclusão de que ele era não emaranhado, devido à possibilidade de escrevê-lo como uma multiplicação tensorial das funções de onda individuais dos subsistemas (2.20). Vamos analisar agora o caso geral para sistemas puros 2x2, em busca dos requisitos que um sistema desse tipo deva possuir para que seja separável.

Assumindo que um estado  $|\Phi\rangle$  seja não emaranhado, podemos escrevê-lo na forma (2.18). Definimos:

$$|\Phi_1\rangle = a_0|0_1\rangle + a_1|1_1\rangle \quad \text{e} \quad |\Phi_2\rangle = b_0|0_2\rangle + b_1|1_2\rangle. \quad (3.1)$$

Efetuando a multiplicação tensorial,

$$|\Phi\rangle = a_0b_0|00\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_1|11\rangle, \quad (3.2)$$

sendo que foi utilizada a seguinte notação:  $|ij\rangle = |i_1\rangle \otimes |j_2\rangle$ .

Agora, vamos escrever um estado 2x2,  $|\Psi\rangle$ , da maneira mais geral possível, sem restrições sobre sua separabilidade.

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle. \quad (3.3)$$

Esse estado será separável caso seus coeficientes possam ser escritos como em (3.2), ou seja,  $c_{ij} = a_i b_j$ . Podemos notar que, caso os coeficientes da função de onda tenham essa forma, as razões  $c_{00}/c_{10}$  e  $c_{01}/c_{11}$  serão iguais a  $a_0/a_1$ , assim como  $c_{11}/c_{10}$  e  $c_{01}/c_{00}$  serão iguais a  $b_1/b_0$ . Isso nos leva à seguinte relação satisfeita por estados separáveis:

$$c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01} = 0. \quad (3.4)$$

Caso o estado seja separável, satisfará à relação acima. Porém, podemos afirmar que caso a relação (3.4) seja satisfeita, o estado é necessariamente separável? Isso pode ser verificado com o seguinte expediente. Dados  $c_{00}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{10}$  quaisquer, podemos escrever

$$c_{00} = a_0 b_0 \quad c_{11} = a_1 b_1 \quad c_{10} = a_1 b_0, \quad (3.5)$$

com  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  convenientes. Assumindo a forma (3.5) e impondo a condição (3.4), obtemos  $c_{01} = a_0 b_1$ , e dessa forma, nos é garantido que o sistema é separável.

Portanto, para um estado puro 2x2, o critério para saber se tal estado é ou não emaranhado é simples, basta verificar se a equação (3.4) é obedecida. Caso sim, o estado é não emaranhado.

Caso a equação (3.4) não seja obedecida, sabemos que o sistema é emaranhado. Mas quão emaranhado? Vamos dizer que o lado esquerdo da equação (3.4) seja uma quantidade. Quando essa quantidade é igual a zero, o estado é não emaranhado, necessariamente. Intuitivamente, quanto mais essa quantidade se afastar de 0, mais emaranhado será o sistema. Porém,  $c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}$  é tipicamente complexo. Para uma medida, precisamos de um número real maior ou igual a zero. Assim, definimos:

$$C = |c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}|^2, \quad (3.6)$$

e dizemos que  $C$  mede o emaranhamento para um sistema 2x2.

Podemos rapidamente encontrar quais são os estados mais emaranhados de acordo com  $C$ . Para isso, temos que achar o máximo da eq. (3.6) tendo como vínculo a normalização:

$$|c_{00}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{11}|^2 = 1. \quad (3.7)$$

Podemos eliminar a subtração existente em  $C$ , igualando  $c_{10}$  e  $c_{01}$  a zero (o mesmo pode ser feito com  $c_{00}$  e  $c_{11}$ ). Dessa forma, obtemos possibilidades de  $C$ 's maiores. Ficamos com o problema de maximizar  $C$  sob as seguintes condições:

$$C = |c_{00}c_{11}|^2$$

$$|c_{00}|^2 + |c_{11}|^2 = 1 \quad . \quad (3.8)$$

A solução para esse problema é  $c_{11} = c_{00}$ , com

$$c_{00} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad C = \frac{1}{4}. \quad (3.9)$$

Se buscarmos todas as soluções que satisfazem essa condição de  $C$  máximo, encontramos:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle),$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle),$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle).$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle).$$

Esses são os estados de Bell. O resultado era o esperado, pois, como dito, esses estados são os mais emaranhados para sistemas 2x2. Podemos normalizar  $C$ , de modo que seu valor máximo seja 1:

$$C = 4|c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}|^2. \quad (3.10)$$

## 3.1 Comparações

Definido  $C$ , ao menos para o caso 2x2, podemos compará-lo com outras medidas estabelecidas. Utilizaremos para a comparação as seguintes: Entropia de von Neumann, Concorrência e Distância. Abaixo, elas são descritas.

### Entropia de von Neumann

Essa seja talvez a medida mais utilizada para sistemas bipartidos. Foi introduzida por Bennet *et al.* [30] e mede nossa falta de informação sobre o subsistema em questão. Origina-se da entropia de Shannon, conceito proveniente da Teoria da Informação. Sua expressão é:

$$S(\rho) = -\text{tr}[\rho_A \log_2 \rho_A], \quad (3.11)$$

sendo  $\rho_A \equiv \text{tr}_B[\rho]$  o operador densidade reduzido do sistema.

A entropia de von Neumann pode ser calculada realizando o seguinte somatório:

$$S(\rho) = \sum -\lambda \log_2 \lambda, \quad (3.12)$$

onde  $\lambda$  são os auto-valores da matriz do operador densidade reduzido.

### Concorrência

A concorrência é uma medida de emaranhamento definida por Hill e Wothers [31] e depois generalizada por Wothers [32]. A expressão para essa medida é:

$$\text{Con}(\rho) = \sqrt{2(1 - \text{tr}[(\rho_A)^2])}. \quad (3.13)$$

### Distância

A seguinte medida baseada na distância entre estados é definida por Wei e Goldbart [33]. Dados dois estados,  $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |i\rangle$  e  $|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^n d_i |i\rangle$ , podemos definir a distância entre eles como:

$$D(\Psi, \Phi) = \sum_{i=1}^n \|c_i - d_i\|^2. \quad (3.14)$$

Para um estado  $|\Psi\rangle$  qualquer, podemos medir seu emaranhamento encontrando o estado  $|\Phi\rangle$  não emaranhado que minimize essa distância. A idéia é que quanto mais distante um estado esteja de um não emaranhado, mais emaranhado ele é. Desse modo,

a medida de emaranhamento é dada por:

$$DE(\Psi) = D_{min}(\Psi, \Phi). \quad (3.15)$$

### 3.1.1 Comparação Numérica

Definidas as medidas que compararemos, podemos aplicá-las às mesmas funções de onda e comparar os resultados. Foram geradas mil funções de onda aleatórias (reais). Calculamos  $C$  para cada uma das funções e as ordenamos de acordo com essa medida. Chamamos de  $|\Psi_1\rangle$  o estado com menor  $C$ ,  $|\Psi_2\rangle$  o estado com segundo menor  $C$ , e assim sucessivamente, até  $|\Psi_{1000}\rangle$ , o estado com maior  $C$ . Em seguida, os outros três métodos foram aplicados aos mesmo estados, com as funções na ordem obtida através de seus valores de  $C$ . Com exceção da Distância, todos os métodos consistem em manipulação direta dos coeficientes da função de onda. Para a Distância, utilizamos o resultado apresentado no Apêndice A, a saber, que o estado não emaranhado mais próximo de um estado real é, por sua vez, um estado real também.

Com os valores de cada uma das medidas calculados para cada  $|\Psi_j\rangle$ , podemos construir um gráfico que nos mostre o comportamento das medidas quando aplicadas aos mesmo estados. Basicamente, queremos ver se as medidas apresentam a mesma tendência de crescimento que  $C$ . Em busca disso, fizemos um gráfico da seguinte maneira: no eixo horizontal distribuimos os índices  $j$  de cada função de onda  $|\Psi_j\rangle$ , de 1 a 1000. No eixo vertical, são colocados os valores de cada medida para cada função de onda. A figura 3.1 apresenta o resultado obtido com esse procedimento.

O gráfico acima nos permite observar se as medidas apresentam o mesmo ordenamento. Dizemos que duas medidas possuem o mesmo ordenamento quando, se para uma medida temos  $\epsilon(|\Psi_i\rangle) \geq \epsilon(|\Psi_j\rangle)$ , para outra também teremos  $\epsilon'(|\Psi_i\rangle) \geq \epsilon'(|\Psi_j\rangle)$ , onde  $\epsilon$  designa o valor do emaranhamento.

A curva para  $C$  é necessariamente crescente, dado que foi com essa medida que ordenamos as funções de onda. O fato de todas as outras curvas apresentarem o mesmo padrão crescente indica que as medidas produzem o mesmo ordenamento.

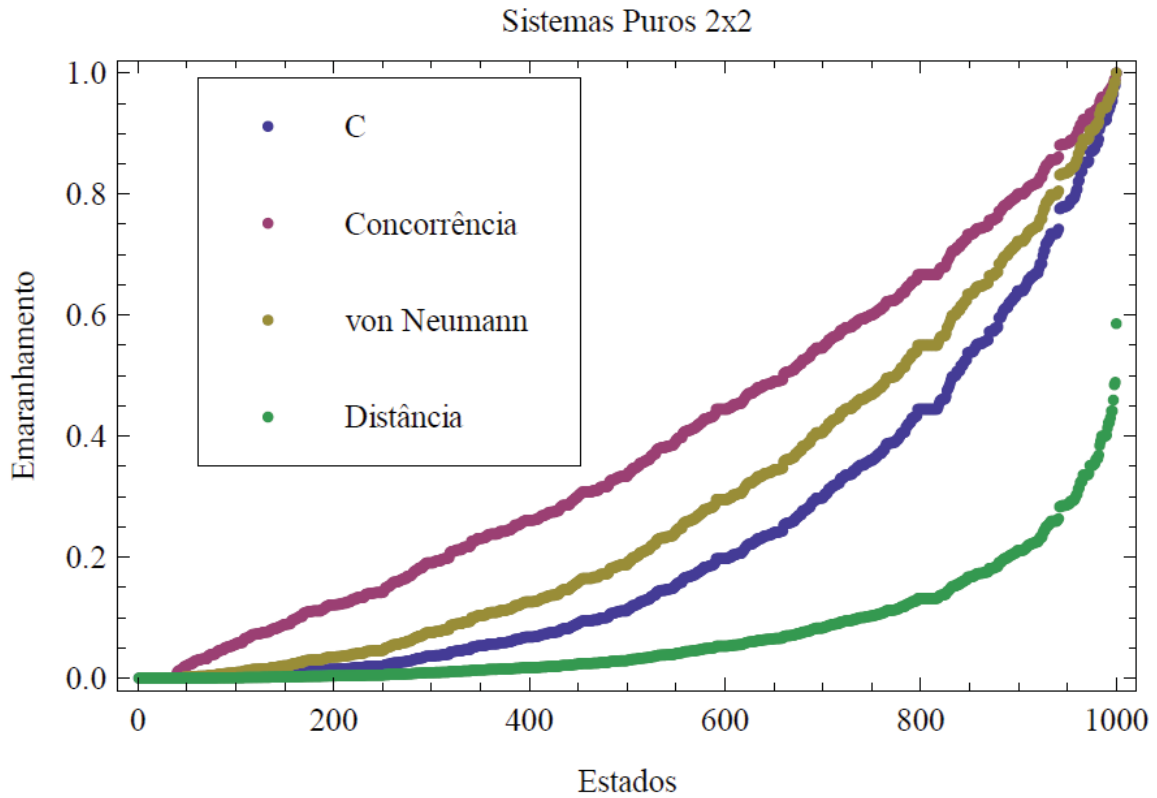


Figura 3.1: Medidas  $C$ , Concorrência, Entropia de von Neumann e Distância aplicadas a mil estados puros  $2 \times 2$ . Os estados são numerados de um a mil, de acordo com seu valor crescente de  $C$ , e esses índices são distribuídos no eixo horizontal. Cada medida é aplicada a cada um dos estados, e seu valor apresentado na vertical do índice do respectivo estado.

### 3.1.2 Comparação Analítica

Vamos agora tratar essa equivalência de ordenamento analiticamente, demonstrando que, no caso  $2 \times 2$ , a Entropia de von Neumann, Concorrência e Distância são funções crescentes de  $C$ .

#### Entropia de von Neumann

Um sistema descrito pela função de onda:

$$|\Psi\rangle = c_{00} |00\rangle + c_{10} |10\rangle + c_{01} |01\rangle + c_{11} |11\rangle, \quad (3.16)$$

terá o seguinte operador densidade:

$$\rho_{AB} = \sum_{ijj'} c_{ij} c_{i'j'}^* |ij\rangle \langle i'j'|. \quad (3.17)$$

Calculando o operador densidade reduzido, em relação a qualquer uma das duas partículas, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{tr}_B(\rho_{AB}) \\ &= \sum_k \sum_{ijj'} c_{ij} c_{i'j'}^* |i\rangle \langle i'| (\langle k|j\rangle \langle j'|k\rangle) \\ &= \sum_k \sum_{ijj'} c_{ij} c_{i'j'}^* |i\rangle \langle i'| \delta_{jk} \delta_{j'k} \\ &= \sum_{kii'} c_{ik} c_{i'k}^* |i\rangle \langle i'|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim, para nossa função de onda,

$$\begin{aligned} \rho_A &= (c_{00} c_{00}^* + c_{01} c_{01}^*) |0\rangle \langle 0| + (c_{10} c_{00}^* + c_{11} c_{01}^*) |1\rangle \langle 0| \\ &\quad + (c_{00} c_{10}^* + c_{01} c_{11}^*) |0\rangle \langle 1| + (c_{10} c_{10}^* + c_{11} c_{11}^*) |1\rangle \langle 1|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Em representação matricial,

$$\rho_A = \begin{pmatrix} c_{00} c_{00}^* + c_{01} c_{01}^* & c_{10} c_{00}^* + c_{11} c_{01}^* \\ c_{00} c_{10}^* + c_{01} c_{11}^* & c_{10} c_{10}^* + c_{11} c_{11}^* \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Dado que a entropia de von Neumann pode ser calculada a partir dos autovalores dessa matriz, precisamos diagonalizá-la:

$$\begin{vmatrix} c_{00} c_{00}^* + c_{01} c_{01}^* - \lambda & c_{10} c_{00}^* + c_{11} c_{01}^* \\ c_{00} c_{10}^* + c_{01} c_{11}^* & c_{10} c_{10}^* + c_{11} c_{11}^* - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.21)$$



Resolvendo o determinante, obtemos:

$$\lambda^2 - \lambda + c_{00}c_{11}c_{00}^*c_{11}^* + c_{10}c_{01}c_{10}^*c_{01}^* - c_{00}c_{11}c_{10}^*c_{01}^* - c_{10}c_{01}c_{00}^*c_{11}^* = 0. \quad (3.22)$$

Equação essa que pode ser escrita como

$$\lambda^2 - \lambda + (c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01})(c_{00}^*c_{11}^* - c_{10}^*c_{01}^*) = 0. \quad (3.23)$$

Introduzindo o  $C$  definido em (3.10), a equação transcendental fica da seguinte forma:

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{C}{4} = 0. \quad (3.24)$$

Calculando os auto-valores, obtemos:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - C}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - C}}{2}. \quad (3.25)$$

Agora, podemos calcular a entropia de von Neumann:

$$\begin{aligned} S &= -\lambda_1 \log \lambda_1 - \lambda_2 \log \lambda_2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - C}\right) \log \left[1 + \sqrt{1 - C}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - C}\right) \log \left[1 - \sqrt{1 - C}\right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assim, temos  $S = S(C)$ , com  $S(0) = 0$  e  $S(1) = 1$ , ou seja, os extremos das medidas são correspondentes. Agora, precisamos mostrar que  $S(C)$  é crescente para  $0 < C < 1$ . Com esse objetivo, fazemos a seguinte troca de variável:

$$x = 1 + \sqrt{1 - C}. \quad (3.27)$$

A entropia, em função de  $x$ , é:

$$S(x) = 1 - \frac{1}{2}x \log x - \frac{2-x}{2} \log(2-x). \quad (3.28)$$

Derivando,

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} \log(2-x) - \frac{1}{2} \log x. \quad (3.29)$$

Em seguida, descobre-se em que intervalo  $S(x)$  é decrescente.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \log(2-x) \leq \log x \\ x \geq 1. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para  $0 \leq C \leq 1$ , temos  $1 \leq x \leq 2$ , e nesse intervalo, como vemos na eq. (3.30),  $S(x)$  é decrescente em  $x$ .

Derivando  $x$  em relação a  $C$ ,

$$\frac{dx}{dC} = -\frac{1}{2\sqrt{1-C}}. \quad (3.31)$$

Como podemos ver acima, para  $0 \leq C \leq 1$ ,  $x$  é decrescente. Portanto, dado que, no intervalo de interesse,  $x$  é decrescente em  $|C|$ , e  $S(x)$  é decrescente em  $x$ ,  $S(x(|C|))$  é crescente. Assim, demonstrado que  $S(C)$  é crescente para  $0 \leq C \leq 1$ , temos que os dois métodos possuem o mesmo ordenamento para sistemas 2x2.

### Concorrência

Precisamos calcular o traço de  $\rho_A^2$ . Utilizando a equação (3.20), podemos calcular os elementos  $a_{11}$  e  $a_{22}$  da matriz  $\rho_A^2$

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\rho_A^2] &= |c_{00}|^4 + |c_{01}|^4 + |c_{10}|^4 + |c_{11}|^4 + 2|c_{00}|^2|c_{01}|^2 \\
&\quad + 2|c_{00}|^2|c_{10}|^2 + 2|c_{11}|^2|c_{01}|^2 + 2|c_{11}|^2|c_{10}|^2 \\
&\quad + 2c_{00}c_{10}^*c_{11}c_{01}^* + 2c_{00}^*c_{10}c_{11}^*c_{01}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Utilizando a seguinte igualdade,

$$\begin{aligned}
(|c_{00}|^2 + c_{10}^2 + |c_{01}|^2 + c_{11}|^2)^2 &= |c_{00}|^4 + |c_{10}|^4 + |c_{01}|^4 + |c_{11}|^4 \\
&\quad + 2|c_{00}|^2|c_{10}|^2 + 2|c_{00}|^2|c_{01}|^2 + 2|c_{00}|^2|c_{11}|^2 \\
&\quad + 2|c_{01}|^2c_{10}^2 + 2|c_{10}|^2|c_{11}|^2 + 2|c_{01}|^2|c_{11}|^2,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

podemos escrever a eq. (3.32) como

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\rho_A^2] &= (|c_{00}|^2 + c_{10}^2 + |c_{01}|^2 + c_{11}|^2)^2 - 2|c_{00}|^2|c_{11}|^2 - 2|c_{10}|^2|c_{01}|^2 \\
&\quad - 2c_{00}c_{11}c_{10}^*c_{01}^* + 2c_{10}c_{01}c_{00}^*c_{11}^* \\
&= 1 - 2(c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01})(c_{00}^*c_{11}^* - c_{10}^*c_{01}^*).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Substituindo esse resultado na eq. (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Con}(\rho) &= \sqrt{2(1 - \text{tr}(\rho_A^2))} \\
 &= \sqrt{4|c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}|^2} \\
 &= \sqrt{C}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Essa relação para a concorrência já havia sido identificada por [34].

### 3.1.3 Distância

Dados dois estados reais de sistemas 2x2,  $|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij}|ij\rangle$  e  $|\Phi\rangle = \sum_{ij} d_{ij}|ij\rangle$ , podemos chamar de  $T$  a distância entre eles, definida em (3.14):

$$T = (d_{00} - c_{00})^2 + (d_{10} - c_{10})^2 + (d_{01} - c_{01})^2 + (d_{11} - c_{11})^2. \tag{3.36}$$

Queremos encontrar o estado  $|\Phi\rangle$  não emaranhado mais próximo de  $|\Psi\rangle$ . Para isso, devemos minimizar a função  $T$ , postos os seguintes vínculos:

$$d_{00}^2 + d_{10}^2 + d_{01}^2 + d_{11}^2 = 1 \tag{3.37}$$

$$d_{00}d_{11} - d_{10}d_{01} = 0. \tag{3.38}$$

Para tal, utilizaremos os multiplicadores de Lagrange. Eles serão rapidamente introduzidos abaixo.

#### Multiplicadores de Lagrange

Encaremos o problema de encontrar os extremos de uma função  $f(x, y)$  sujeita a um vínculo  $g(x, y) = c$ . Primeiro criamos a função auxiliar:

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot (g(x, y) - c). \tag{3.39}$$

Após, resolvemos

$$\nabla_{x,y,\lambda}\Lambda(x, y, \lambda) = 0, \quad (3.40)$$

que nos dará os pontos  $(x, y)$  extremos. Para mais variáveis ou vínculos, o processo é similar.

Voltando ao nosso problema, contruímos a seguinte função auxiliar:

$$T_{\mu,v} = T + \mu(d_{00}d_{11} - d_{10}d_{01}) + v(d_{00}^2 + d_{10}^2 + d_{01}^2 + d_{11}^2 - 1). \quad (3.41)$$

Derivando sobre os  $d$ 's e as variáveis dos vínculos, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$2(d_{00} - c_{00}) + 2vd_{00} + \mu d_{11} = 0, \quad (3.42)$$

$$2(d_{11} - c_{11}) + 2vd_{11} + \mu d_{00} = 0, \quad (3.43)$$

$$2(d_{01} - c_{01}) + 2vd_{01} + \mu d_{10} = 0, \quad (3.44)$$

$$2(d_{10} - c_{10}) + 2vd_{10} + \mu d_{01} = 0, \quad (3.45)$$

$$d_{00}^2 + d_{10}^2 + d_{01}^2 + d_{11}^2 = 1, \quad (3.46)$$

$$d_{00}d_{11} - d_{10}d_{01} = 0, \quad (3.47)$$

sendo as equações (3.46) e (3.47) os vínculos do problema.

Definindo

$$\gamma = \frac{\mu}{2}, \quad (3.48)$$

as equações (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45) tornam-se:

$$(1 + v)d_{00} + \gamma d_{11} = c_{00}, \quad (3.49)$$

$$(1 + v)d_{11} + \gamma d_{00} = c_{11}, \quad (3.50)$$

$$(1 + v)d_{01} + \gamma d_{10} = c_{01}, \quad (3.51)$$

$$(1 + v)d_{10} + \gamma d_{01} = c_{10}. \quad (3.52)$$

Precisamos resolver esse sistema. Somando  $(3.49)^2 + (3.50)^2 + (3.51)^2 + (3.52)^2$ , obtemos:

$$(1 + v)^2 + \gamma^2 = 1. \quad (3.53)$$

Podemos também fazer  $(3.49) \cdot (3.50) - (3.51) \cdot (3.52)$ , obtendo:

$$\begin{aligned} (1 + v)\gamma &= c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01} \\ &= c, \end{aligned} \quad (3.54)$$

com  $c = c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}$ .

Além disso, rearranjando as equações (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52) no seguinte formato:

$$(d_{00} - c_{00}) = -vd_{00} - \gamma d_{11}, \quad (3.55)$$

$$(d_{11} - c_{11}) = -vd_{11} - \gamma d_{00}, \quad (3.56)$$

$$(d_{01} - c_{01}) = -vd_{01} + \gamma d_{10}, \quad (3.57)$$

$$(d_{10} - c_{10}) = -vd_{10} + \gamma d_{01}, \quad (3.58)$$

e somando os quadrados dessas equações, obtemos:

$$T = v^2 + \gamma^2. \quad (3.59)$$

Assim, precisamos encontrar os valores de  $v$  e  $\gamma$ , e nosso problema está resolvido. Para isso, podemos resolver o sistema de equações formado por (3.53) e (3.54). Isolando  $\gamma$  em (3.54) e substituindo em (3.53), ficamos com a seguinte equação:

$$(1 + v)^2 - (1 + v)^2 + c^2 = 0, \quad (3.60)$$

que tem como solução:

$$v = -1 \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c^2}}{2}}. \quad (3.61)$$

Porém, dado que quando  $c = 0$  temos  $T = 0$ , precisamos que, caso  $c$  seja nulo,  $v$  também o seja. Notemos também que o  $c$  aqui definido relaciona-se com  $C$  de (3.10) como  $C = 4c^2$ . Dessa forma, temos:

$$v = -1 + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - C}}{2}}. \quad (3.62)$$

Agora, de (3.53) temos que:

$$v^2 + \gamma^2 = -2v, \quad (3.63)$$

e portanto, de (3.58):

$$T = 2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - C}}. \quad (3.64)$$

Sendo essa a relação entre a medida  $C$  e a Distância.

# A Proposta $C$ para sistemas de quaisquer dimensões

## 4.1 Sistemas com mais partículas e níveis

O problema de duas partículas e dois níveis é simples no seguinte aspecto: apenas uma combinação entre os coeficientes da função de onda já define se o estado é ou não emaranhado (3.10).

Assim, voltando à grandeza que, caso nula, garante o não emaranhamento de um sistema 2x2, temos,

$$\begin{aligned} C &= c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01} \\ &= a_0b_0a_1b_1 - a_1b_0a_0b_1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Observando a eq. (4.1), percebemos que  $C$  é simplesmente a subtração do produto de duplas de coeficientes da função de onda que, caso decompostos na forma  $c_{ij} = a_i b_j$ , apresentam os mesmos fatores, mas em ordens diferentes.

Para um sistema 2x2, há apenas uma subtração com essa propriedade. Para sistemas separáveis com mais partículas e mais dimensões, haverá mais permutações possíveis entre



os fatores do lado direito de

$$c_{i_1 \dots i_N} c_{i'_1 \dots i'_N} = a_{i_1} \dots a_{i_N} a_{i'_1} \dots a_{i'_N}, \quad (4.2)$$

e conseqüentemente, mais quantidades do tipo  $c_X c_Y - c_Z c_T$  que serão nulas caso o sistema seja separável. Vamos chamar essas quantidades de coeficientes de emaranhamento.

Como encontrar esses coeficientes de emaranhamento, quais escolher e como somá-los é o que trataremos a seguir.

### 4.1.1 Contando Coeficientes de Emaranhamento

Temos de encontrar todos coeficientes de emaranhamento do tipo descritos na seção anterior para o caso de  $N$  partículas. Para um estado separável  $|\Phi\rangle = \sum a_i b_j \dots z_k |i j \dots k\rangle$ , os coeficientes terão o formato:

$$a_i b_j \dots z_k \times a_{i'} b_{j'} \dots z_{k'} - a_i b_{j'} \dots z_{k'} \times a_{i'} b_j \dots z_k = 0, \quad (4.3)$$

ou seja,

$$c_{ij\dots k} \times c_{i'j'\dots k'} - c_{ij'\dots k'} \times c_{i'j\dots k} = 0. \quad (4.4)$$

Como podemos ver, o índice referente a uma das partículas se mantém fixo, e o de todas as outras trocam-se entre si, da primeira para a segunda multiplicação. No caso acima, o índice da primeira é fixado em  $i$  e  $i'$ , sendo que os índices  $(j \dots k)$  acompanham o índice  $i$  e os  $(j' \dots k')$  o  $i'$  na primeira multiplicação, e o inverso ocorre na segunda.

O índice fixo não precisa ser necessariamente o primeiro, e assim, de forma geral, teremos:

$$c_{K_1 i K_2} c_{K'_1 i' K'_2} - c_{K'_1 i K'_2} c_{K_1 i' K_2}, \quad (4.5)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são conjuntos de índices, com a soma do número de índices de  $K_1 + K_2$  igual a  $N - 1$ , sendo  $N$  o número de partículas. Além disso,  $i \neq i'$  e, tomados na ordem,  $K_1 K_2 \neq K'_1 K'_2$ . Identificada a forma geral dos coeficientes, para encontrar todos devemos fazer o seguinte: varrer as combinações possíveis entre diferentes  $(K_1 K_2, K'_1 K'_2)$ , entre diferentes  $(i, i')$  e, finalmente, variar a posição do índice que se mantém fixo (isso é, a

posição de  $i$  e  $i'$  no conjunto de índices).

Para facilitar nosso trabalho, e mesmo a visualização do problema, vamos escrever de um jeito diferente os coeficientes da função de onda. Para um coeficiente qualquer, escreveremos  $g_{i_j, K}$ , onde  $i$  e  $j$  são números, e  $K$  pode ser um conjunto de números  $k_1 \dots k_n$ . A transcrição para o formato tradicional do coeficiente se dá da seguinte forma, os índices  $k$ 's são escritos normalmente, até que se chega à  $j$ -ésima posição. Nela, é inserido o índice  $i$ , e após, terminam-se os  $k$ 's. Ou seja,

$$g_{i_j, K=k_1 k_2 \dots k_n} = c_{k_1 \dots i k_j \dots k_n}. \quad (4.6)$$

Por exemplo, temos:

$$g_{1_2, 0000} = c_{01000}. \quad (4.7)$$

Definido isso, podemos descrever todos os coeficientes de emaranhamento da seguinte maneira:

$$D_{j, i, i', K, K'} = g_{i_j, K} g_{i'_j, K'} - g_{i_j, K'} g_{i'_j, K}, \quad (4.8)$$

onde  $i \neq i'$  e  $K \neq K'$ . O número de índices de  $K$  será  $N - 1$ , sendo  $N$  o número de partículas. O índice  $i$  pode variar por todos os níveis permitidos para a  $j$ -ésima partícula. Ao percorrermos todas as combinações possíveis de  $i$  e  $i'$ , de  $K$  e  $K'$ , e variarmos  $j$  de 1 a  $N$ , teremos encontrado todos os coeficientes de emaranhamento possíveis.

Podemos notar também as seguintes simetrias:

$$D_{j, i, i', K, K'} = -D_{j, i', i, K, K'}, \quad (4.9)$$

e

$$D_{j, i, i', K, K'} = -D_{j, i, i', K', K}. \quad (4.10)$$

As simetrias descritas acima nos livram de calcular  $D_{j, i, i', K', K}$  ou  $D_{j, i, i', K, K}$  caso já tenhamos calculado  $D_{j, i, i', K, K'}$ .

Por fim, encontrados os coeficientes de emaranhamento (4.8), propomos a soma de

seus módulos ao quadrado como medida de emaranhamento:

$$\begin{aligned}
 C &= A \sum_{j,i,i',K,K'} |D_{j,i,i',K,K'}|^2 \\
 &= A \sum_{j,i,i',K,K'} |g_{i_j,K} g_{i'_j,K'} - g_{i_j,K'} g_{i'_j,K}|^2,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde a soma é efetuada com  $j$  indo de 1 a  $N$  (número de partículas), e sobre todas as combinações possíveis entre diferentes  $(i, i')$  e  $(K, K')$ .  $A$  é uma constante de normalização. Devemos atentar também que, calculado o termo para  $(K, K')$ , é desnecessário contabilizar o termo com  $(K', K)$ , já que pela simetria apontada, isso apenas acrescentaria um fator multiplicativo 2 ao resultado. O mesmo se dá em relação a  $(i, i')$  e  $(i', i)$ .

Há, entretanto, um questão não citada aqui. Se supusermos um estado separável, todos esses coeficientes de emaranhamento são nulos. Porém, para esse caso, eles não são independentes. Eles podem ser escritos uns em função dos outros, de modo que a nulidade de alguns implica na nulidade dos demais. Sendo assim, será que apenas um grupo menor de coeficientes de emaranhamento já não traria a informação de quão emaranhado é o sistema, sem a necessidade do cálculo de todos? Isso será discutido adiante, por enquanto, vamos ver como fica a aplicação desse método a um sistema de duas partículas com três níveis de energia cada.

### 4.1.2 Sistemas 2x3

Um sistema 2x3 geral é dado por

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{20}|20\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle \\
 &\quad + c_{21}|21\rangle + c_{02}|02\rangle + c_{12}|12\rangle + c_{22}|22\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Utilizaremos agora a eq.(4.8) para calcular os coeficientes de emaranhamento necessários para o cálculo da medida:

$$D_{1,0,1,0,1} = c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10}, \tag{4.13}$$

$$D_{1,0,1,0,2} = c_{00}c_{12} - c_{02}c_{10}, \quad (4.14)$$

$$D_{1,0,1,1,2} = c_{01}c_{12} - c_{02}c_{11}, \quad (4.15)$$

$$D_{1,0,2,0,1} = c_{00}c_{21} - c_{01}c_{20}, \quad (4.16)$$

$$D_{1,0,2,0,2} = c_{00}c_{22} - c_{02}c_{20}, \quad (4.17)$$

$$D_{1,0,2,1,2} = c_{01}c_{22} - c_{02}c_{21}, \quad (4.18)$$

$$D_{1,1,2,0,1} = c_{10}c_{21} - c_{11}c_{20}, \quad (4.19)$$

$$D_{1,1,2,0,2} = c_{10}c_{22} - c_{12}c_{20}, \quad (4.20)$$

$$D_{1,1,2,1,2} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}. \quad (4.21)$$

O próximo passo seria mudar  $j$  de 1 para 2. Porém, por termos apenas duas partículas, e ambas tendo o mesmo número de níveis disponíveis, teremos  $D_{2,i,i',K,K'} = D_{1,K,K',i,i'}$ , bastando considerar  $j = 1$ . Calculados os coeficientes, podemos aplicar a eq. (4.11) para encontrar o emaranhamento.

Vamos novamente fazer uma comparação numérica entre  $C$ , Entropia de von Neumann, Concorrência e Distância. Utilizaremos o mesmo método que o utilizado para construir o gráfico (3.1) na seção 3.1 Geramos mil funções de onda (reais) aleatorias, calculamos  $C$  para cada uma delas e as reordenamos de acordo com o valor crescente dessa medida. Em seguida, aplicamos as outras medidas às funções nessa ordem. No eixo horizontal estão os índices das funções de onda (obtidos a partir de seu ordenamento pelo valor de  $C$ ) e no vertical as medidas de emaranhamento. O resultado pode ser visto na figura (4.1).

Para a normalização de  $C$ , utilizamos um fator 3, de modo que as curvas ficassem de tamanho comparáveis. Como podemos ver, nem a entropia de von Neumann e nem a Distância obedecem o ordenamento de  $C$ , enquanto a Concorrência obedece. Na literatura, é verificado que medidas diferentes, quando aplicadas a sistemas mais complexos do que um 2x2, produzem ordenamentos diferentes [35]. Também podemos observar que a entropia de von Neumann destoa mais do que a distância, que só começa a oscilar consideravelmente no final. O ordenamento com a Concorrência é interessante, e uma ligação entre as duas medidas aparecerá adiante.

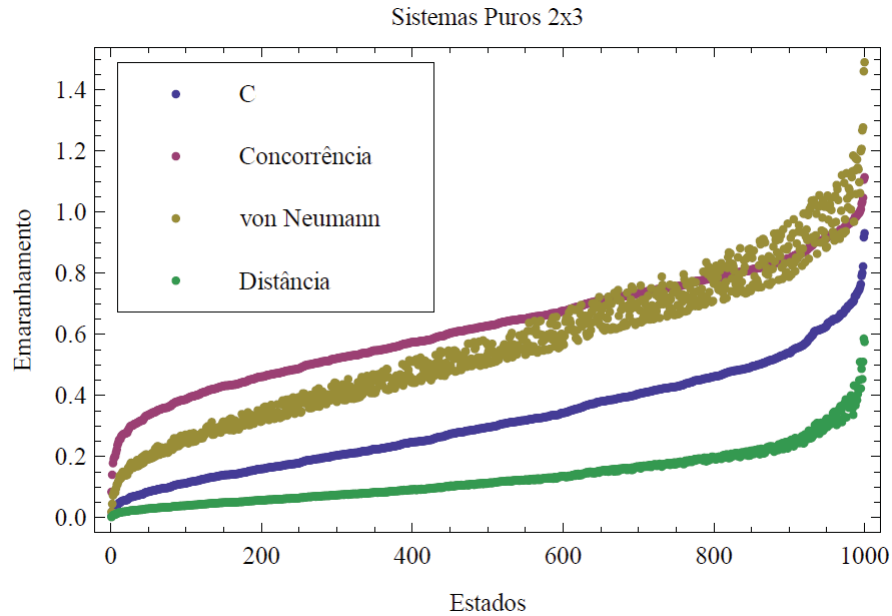


Figura 4.1: Medidas  $C$ , Concorrência, Entropia de von Neumann e Distância aplicadas a mil estados puros  $2 \times 3$ . Os estados são numerados de um a mil, de acordo com seu valor crescente de  $C$ , e esses índices são distribuídos no eixo horizontal. Cada medida é aplicada a cada um dos estados, e seu valor apresentado na vertical do índice do respectivo estado.

### Tentativa de medir emaranhamento com um número mínimo de coeficientes de emaranhamento

Agora que temos um problema com muitos coeficientes de emaranhamento, podemos voltar à questão: precisamos de todos eles? Se com um número menor de coeficientes de emaranhamento pudéssemos estimar eficientemente o emaranhamento de um sistema, o trabalho matemático seria reduzido, já que precisaríamos calcular apenas alguns dos coeficientes de emaranhamento, e não todos. Como podemos ver acima, temos nove coeficientes de emaranhamento. Caso o estado seja separável, todos serão nulos. Entretanto, verificando se alguns deles são nulos, já saberíamos que todos o são. São necessários quatro coeficientes de emaranhamento para tal, e isso se dá pelo fato de que, escolhendo quatro desses coeficientes, pode-se escrever os outros cinco a partir daqueles. Abaixo, isso ficará evidente.

Imaginemos um estado separável. Nesse caso, as equações de (4.13) a (4.21) terão  $D = 0$ . Vamos reescrevê-las da seguinte maneira:

$$c_{00}c_{11} = c_{01}c_{10}, \quad (4.22)$$

$$c_{00}c_{12} = c_{02}c_{10}, \quad (4.23)$$

$$c_{01}c_{12} = c_{02}c_{11}, \quad (4.24)$$

$$c_{00}c_{21} = c_{01}c_{20}, \quad (4.25)$$

$$c_{00}c_{22} = c_{02}c_{20}, \quad (4.26)$$

$$c_{01}c_{22} = c_{02}c_{21}, \quad (4.27)$$

$$c_{10}c_{21} = c_{11}c_{20}, \quad (4.28)$$

$$c_{10}c_{22} = c_{12}c_{20}, \quad (4.29)$$

$$c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21}. \quad (4.30)$$

Utilizarei como equações mínimas para escrever todas as outras as equações (4.22), (4.24), (4.26) e (4.28).

Dividindo (4.22)/(4.24), obtemos:

$$\frac{c_{00}c_{11}}{c_{02}c_{11}} = \frac{c_{10}c_{01}}{c_{01}c_{12}} \rightarrow c_{00}c_{12} = c_{10}c_{02} \rightarrow \text{eq.}(4.23). \quad (4.31)$$

Fazendo (4.22)/(4.28),

$$\frac{c_{00}c_{11}}{c_{11}c_{20}} = \frac{c_{10}c_{01}}{c_{10}c_{21}} \rightarrow c_{00}c_{21} = c_{20}c_{01} \rightarrow \text{eq.}(4.25). \quad (4.32)$$

Multiplicando (4.26)·(4.22)·(4.28), obtemos

$$c_{11}c_{20}c_{10}c_{01}c_{00}c_{22} = c_{00}c_{11}c_{02}c_{20}c_{10}c_{21} \rightarrow c_{01}c_{22} = c_{02}c_{21} \rightarrow \text{eq.}(4.27). \quad (4.33)$$

Multiplicando (4.22)·(4.26)·(4.24),

$$c_{02}c_{11}c_{00}c_{22}c_{10}c_{01} = c_{00}c_{11}c_{02}c_{20}c_{01}c_{12} \rightarrow c_{22}c_{10} = c_{12}c_{20} \rightarrow \text{eq.}(4.29). \quad (4.34)$$

Multiplicando (4.28)·(4.26)·(4.24),

$$c_{02}c_{11}c_{00}c_{22}c_{11}c_{20} = c_{10}c_{21}c_{02}c_{20}c_{12}c_{01} \rightarrow c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21} \rightarrow \text{eq.(4.30)}. \quad (4.35)$$

E portanto, as outras cinco equações podem ser descritas a partir de (4.22), (4.24), (4.26) e (4.28). Isso significa que, caso os coeficientes (4.13), (4.15),(4.17) e (4.19) sejam nulos, sabemos que os outros também o serão. Podemos ver que esse é o mínimo pelo fato de que, em cada equação, aparece um termo da função de onda que está ausente em todas as outras, e portanto, ela não pode ser escrita em função delas. Será que podemos usar apenas esses quatro para medir o emaranhamento do sistema? Vamos testar essa idéia.

Supondo que os quatro coeficientes apontados dêem uma medida do emaranhamento de um sistema 2x3, vamos definir:

$$\begin{aligned} C_{min} &= |D_{1,0,1,0,1}|^2 + |D_{1,0,1,1,2}|^2 + |D_{1,0,2,0,2}|^2 + |D_{1,1,2,0,1}|^2 \\ &= |c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10}|^2 + |c_{01}c_{12} - c_{02}c_{11}|^2 + |c_{00}c_{22} - c_{02}c_{20}|^2 + |c_{10}c_{21} - c_{11}c_{20}|^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para uma comparação numérica, utilizaremos a mesma tática usada anteriormente. Mil estados aleatórios são gerados,  $C_{min}$  é aplicado a todos eles, que por sua vez são ordenados de acordo com seu valor crescente de  $C_{min}$ . Em seguida, as outras medidas são aplicadas aos estados nessa ordem. Construimos um gráfico com os índices que identificam as funções de onda na horizontal e os valores de emaranhamento na vertical. Os resultados são apresentados na figura (4.2), onde, para  $C_{min}$ , usamos um fator 5 na normalização, para melhor visualização dos resultados.

Como podemos ver, a correlação é quase totalmente perdida. Ao serem ordenados a partir de  $C_{min}$ , os resultados das outras medidas ficam espalhados pelo gráfico. Antes de interpretarmos esse resultado, vamos observar outra abordagem.

Embora o conjunto de equações (4.22), (4.24), (4.26) e (4.28) garanta a separabilidade de um sistema, ele não é o único. É possível verificar que outros conjuntos desempenham a mesma função. Seguindo procedimento análogo ao já feito, é possível demonstrar que

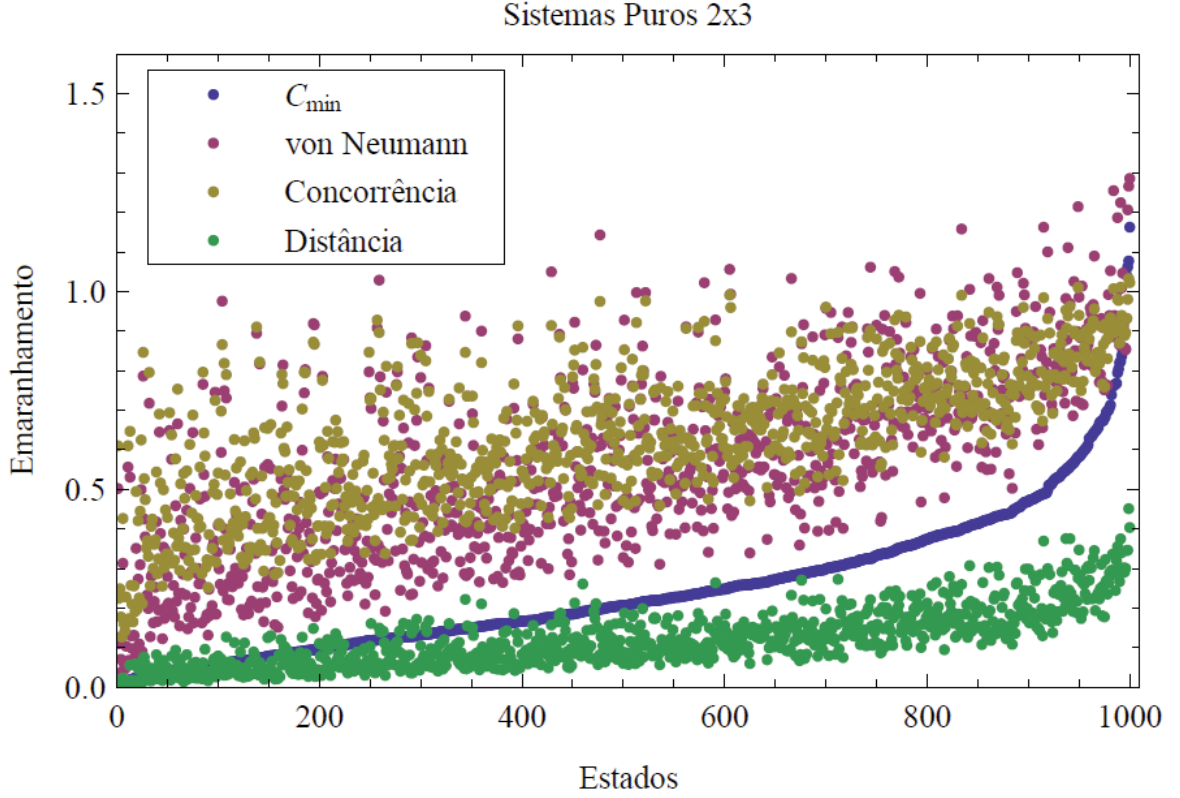


Figura 4.2:  $C_{\min}$ , Concorrência, Entropia de von Neumann e Distância aplicadas a mil estados puros 2x3. Os estados são numerados de um a mil, de acordo com seu valor crescente de  $C$ , e esses índices são distribuídos no eixo horizontal. Cada medida é aplicada a cada um dos estados, e seu valor apresentado na vertical do índice do respectivo estado.

outros conjuntos de equações podem servir como equações mínimas. Como exemplo, temos (4.22), (4.24), (4.25) e (4.26). A partir dessas quatro equações também podemos escrever as outras cinco. Vamos definir, baseada nessas equações, uma medida análoga à eq. (4.36):

$$\begin{aligned}
 C'_{\min} &= |D_{1,0,1,0,1}|^2 + |D_{1,0,1,1,2}|^2 + |D_{1,0,2,0,1}|^2 + |D_{1,0,2,0,2}|^2 \\
 &= |c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10}|^2 + |c_{01}c_{12} - c_{02}c_{11}|^2 + |c_{00}c_{21} - c_{01}c_{20}|^2 + |c_{00}c_{22} - c_{02}c_{20}|^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Temos duas medidas baseadas nos mesmos princípios, ou seja, termos mínimos que, quando nulos, garantem a nulidade de todas. Vamos aplicá-las a dois sistemas, sendo



esses:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|20\rangle + |01\rangle) \quad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|21\rangle + |10\rangle). \quad (4.38)$$

Os estados são análogos. Se eu disser que o nível 1 se chama 0, e 0 se chama 1, os estados intercambiam-se. Portanto, devem possuir o mesmo emaranhamento. Aplicando  $C_{min}$  e  $C'_{min}$  aos dois estados, obtemos:

$$\begin{aligned} C_{min}(|\Psi\rangle) &= 0 & C'_{min}(|\Psi\rangle) &= \frac{1}{4} \\ C_{min}(|\Phi\rangle) &= \frac{1}{4} & C'_{min}(|\Phi\rangle) &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como podemos ver, os resultados são absurdos. Uma medida diz que  $|\Psi\rangle$  é mais emaranhado do que  $|\Phi\rangle$ , mas ao trocarmos o conjunto de equações mínimas, obtemos que  $|\Phi\rangle$  é mais emaranhado de  $|\Psi\rangle$ , e isso tudo sendo que o emaranhamento dos estados deveria ser igual. Fica claro que é impossível utilizar um conjunto mínimo de equações nesses moldes para estimar o emaranhamento de um estado. Dependendo do conjunto escolhido, certas correlações do sistema serão levadas mais em conta do que outras, que podem inclusive nem serem contabilizadas. É necessário o uso de todos os coeficientes, para abarcar todas essas correlações sem gerar um desequilíbrio para uma ou outra.

### 4.1.3 Sistemas 3x2

Na seção anterior, fugimos do sistema mais simples, 2x2, mantendo o número de partículas e aumentando o número de dimensões disponíveis para cada uma. Agora faremos o oposto, manteremos o número de dimensões em 2, mas aumentaremos o de partículas para 3. A função de onda geral de um sistema 3x2 é dada por:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= c_{000}|000\rangle + c_{100}|100\rangle + c_{010}|010\rangle + c_{001}|001\rangle \\ &+ c_{110}|110\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{011}|011\rangle + c_{111}|111\rangle. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Vale notar que, para calcular os coeficientes  $D_{j,i,i',K,K'}$ , dado que  $i$  está restrito em 0 e 1, podemos desde o início fixar  $i = 0$  e  $i' = 1$ , simplificando a notação. Caso alguma partícula tivesse acesso a três níveis, como anteriormente, esse procedimento não seria possível. Resumindo, para os coeficientes de emaranhamento, escreveremos:

$$D_{j,i,i',K,K'} = D_{j,0,1,K,K'} = D_{j,K,K'}. \quad (4.41)$$

Agora, vamos calculá-los, primeiro os com  $j = 1$ :

$$\begin{aligned} D_{1,00,01} &= c_{000}c_{101} - c_{001}c_{100} & D_{1,00,10} &= c_{000}c_{110} - c_{010}c_{100}, \\ D_{1,00,11} &= c_{000}c_{111} - c_{011}c_{100} & D_{1,01,10} &= c_{001}c_{110} - c_{010}c_{101}, \\ D_{1,01,11} &= c_{001}c_{111} - c_{011}c_{101} & D_{1,10,11} &= c_{010}c_{111} - c_{011}c_{110}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para  $j = 2$ ,

$$\begin{aligned} D_{2,00,01} &= c_{000}c_{011} - c_{001}c_{010} & D_{2,00,10} &= c_{000}c_{110} - c_{100}c_{010}, \\ D_{2,00,11} &= c_{000}c_{111} - c_{101}c_{010} & D_{2,01,10} &= c_{001}c_{110} - c_{100}c_{011}, \\ D_{2,01,11} &= c_{001}c_{111} - c_{101}c_{011} & D_{2,10,11} &= c_{100}c_{111} - c_{101}c_{110}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Por fim, para  $j = 3$ ,

$$\begin{aligned}
 D_{3,00,01} &= c_{000}c_{011} - c_{010}c_{001} & D_{3,00,10} &= c_{000}c_{101} - c_{100}c_{001}, \\
 D_{3,00,11} &= c_{000}c_{111} - c_{110}c_{001} & D_{3,01,10} &= c_{010}c_{101} - c_{100}c_{011}, \\
 D_{3,01,11} &= c_{010}c_{111} - c_{110}c_{011} & D_{3,10,11} &= c_{100}c_{111} - c_{110}c_{101}.
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

Com esses coeficientes em mãos, temos tudo o que precisamos para calcular a medida  $C$  de um sistema  $3 \times 2$ .

Novamente fizemos uma comparação numérica, mas como a Concorrência e a Entropia de von Neumann se aplicam a sistemas de duas partículas, comparamos nosso resultado apenas com a distância. O método é novamente o já utilizado. Mil estados aleatórios são gerados,  $C$  é aplicado a todos eles, que por sua vez são ordenados de acordo com seu valor crescente de  $C$ . Em seguida, a Distância é calculada para os estados nessa ordem. Construímos um gráfico com os índices que identificam as funções de onda na horizontal e os valores de emaranhamento na vertical. O resultado pode ser visto na figura (4.3).

Podemos observar novamente uma discordância entre a medida do emaranhamento a partir da Distância e a partir de  $C$ . Também podemos comparar essa imagem com a figura (4.1), e observar que a dispersão da medida da distância é ainda maior, mesmo o número de coeficientes que a formam sendo menor nesse caso (8 contra 9, no caso  $2 \times 3$ ). Pode-se supor que isso ocorra pelo fato de que um sistema com três partículas ter menor simetria do que um de duas. Quando se mede o emaranhamento de um sistema puro de duas partículas, invariavelmente se mede o emaranhamento entre uma partícula e o resto do sistema, nesse caso, a outra partícula. Já em um sistema com três, o número de subsistemas é maior e as correlações não são mais tão simples. A simetria do problema é menor e métodos diferentes de medida de emaranhamento, dando prominência para diferentes características do sistema, devem discordar mais entre si.

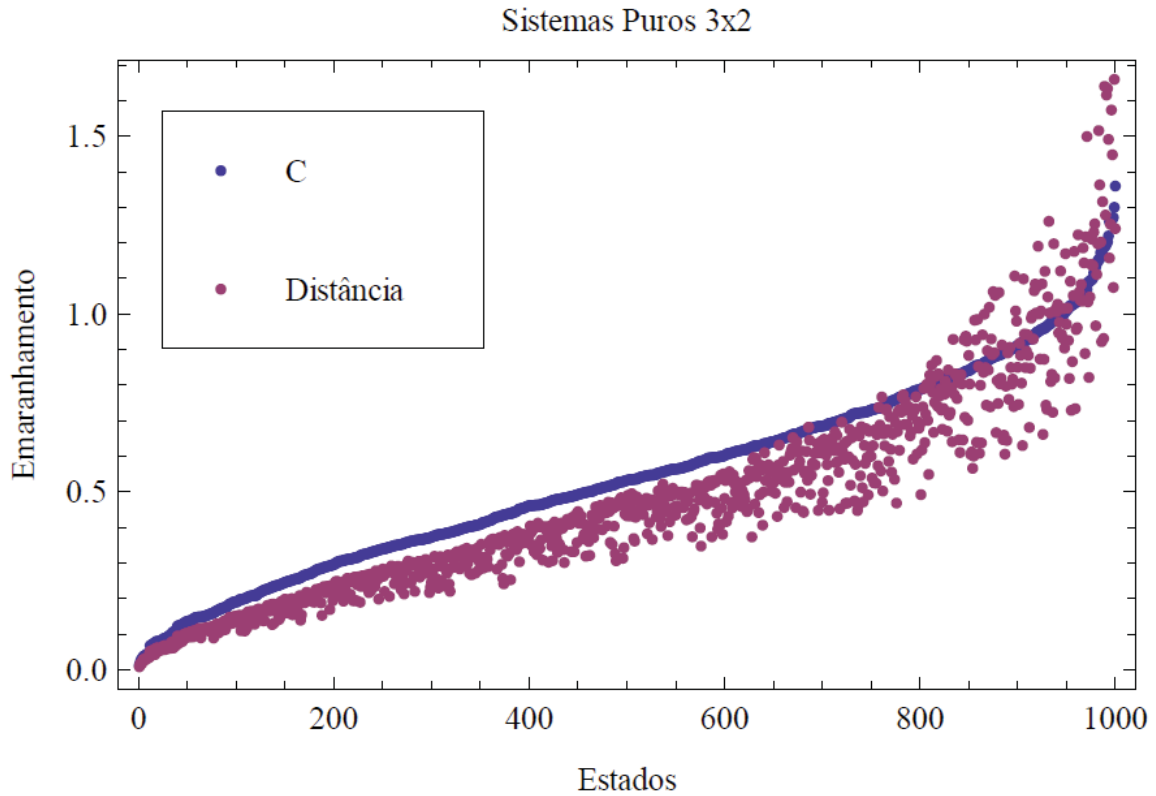


Figura 4.3:  $C$  e Distância aplicadas a mil estados puros 3x2. Os estados são numerados de um a mil, de acordo com seu valor crescente de  $C$ , e esses índices são distribuídos no eixo horizontal. Cada medida é aplicada a cada um dos estados, e seu valor apresentado na vertical do índice do respectivo estado.

## 4.2 Propriedades Básicas

Definimos uma medida e a comparamos com algumas outras, numérica e analiticamente. Os resultados sugerem que essa medida é funcional. Entretanto, falta fazer algo importantíssimo: verificar que  $C$  respeita as propriedades apontadas na seção (2.6). A primeira dessas propriedades diz que uma medida deve ser nula se, e somente se, o sistema é separável. A segunda exige que uma mudança de base feita em uma das partículas do sistema não altere o valor da medida.

### 4.2.1 Primeira Propriedade

Dizemos até agora que, sempre que o sistema é separável,  $C$  é nula. Porém, precisamos demonstrar uma condição mais forte: que caso tenhamos  $C(\Psi) = 0$ , nosso sistema será necessariamente separável. Novamente, temos um sistema  $\Psi = \sum c_{i_1 \dots i_N} |i_1 \dots i_N\rangle$  com  $N$  partículas. A dimensão do espaço de Hilbert de cada partícula é dada por  $d_j$ , com  $1 \leq i_j \leq d_j$ .

Comecemos notando que para  $C = 0$ , todos os  $D_j$  serão igualmente nulos. Para  $j = 1$ , as equações serão da forma:

$$g_{i_1, K} g_{i'_1, K'} - g_{i_1, K'} g_{i'_1, K} = 0, \quad (4.45)$$

onde  $K$  mapeia os índices  $i_2 \dots i_N$ , com  $1 \leq K \leq \prod_{j=2}^N d_j$ .

Vamos agora analisar a equação (4.45) com  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = 2$ ,  $K = 1$  e  $K' = 2$ . Substituindo os índices, temos:

$$g_{1,1} g_{2,2} - g_{1,2} g_{2,1} = 0, \quad (4.46)$$

onde omitimos, por clareza da equação, o índice 1 de  $g_{i_1, K}$ .

Para três das incógnitas, podemos escrever  $g_{1,1} = a_1 P_1$ ,  $g_{2,2} = a_2 P_2$  e  $g_{1,2} = a_1 P_2$ . Esse procedimento é independente da equação (4.46) e pode ser feito para quaisquer três números. Substituindo essas formas na citada equação, obtemos

$$a_1 P_1 a_2 P_2 - a_1 P_2 g_{2,1} = 0, \quad (4.47)$$

e portanto  $g_{2,1} = a_2 P_1$ .

Agora, mantemos  $i = 1$  e  $i' = 2$ , e utilizamos  $K = 1$  e  $K' = 3$ . Para esses índices, a equação (4.45) nos diz:

$$g_{1,1} g_{2,3} - g_{1,3} g_{2,1} = 0. \quad (4.48)$$

Podemos escrever  $g_{2,3} = a_2 P_3$ . Substituindo na equação (4.48), obtemos  $g_{1,3} = a_1 P_3$ . Repetindo o processo, variando  $K'$  até  $\prod_{j=2}^N d_j$ , obtemos que podemos escrever  $g_{1,K} = a_1 P_K$  e  $g_{2,K} = a_2 P_K$ , para quaisquer  $K$ .

Feito isso, repetimos o processo realizado para  $i = 1$  e  $i' = 2$  para combinações com  $i = 1$  e  $2 < i' \leq d_1$ . Com isso, obtemos enfim que  $g_{i_1, K} = a_i P_K$ , para quaisquer  $K$  e  $i$ . Ou seja, podemos escrever  $c_{i_1 i_2 \dots i_N} = a_{i_1} P_{i_2 \dots i_N}$ .

Em seguida, analisemos as equações da forma  $D_2 = 0$ . Elas nos dizem:

$$c_{i_1 i_2 \dots i_N} c_{i'_1 i'_2 \dots i'_N} - c_{i'_1 i'_2 \dots i'_N} c_{i_1 i_2 \dots i_N} = 0. \quad (4.49)$$

Utilizando o resultado obtido anteriormente, isto é, que podemos escrever  $c_{i_1 i_2 \dots i_N} = a_{i_1} P_{i_2 \dots i_N}$ , nossa equação torna-se:

$$a_{i_1} a_{i'_1} (P_{i_2 i_3 \dots i_N} P'_{i'_2 i'_3 \dots i'_N} - P_{i'_2 i'_3 \dots i'_N} P_{i_2 i_3 \dots i_N}) = 0. \quad (4.50)$$

Como o produto  $a_{i_1} a_{i'_1}$  não pode ser nulo para todas as combinações de  $i_1$  e  $i'_1$ , dado que nessa caso a função de onda seria nula, temos

$$P_{i_2 i_3 \dots i_N} P'_{i'_2 i'_3 \dots i'_N} - P_{i'_2 i'_3 \dots i'_N} P_{i_2 i_3 \dots i_N} = 0, \quad (4.51)$$

sendo que a equação acima é válida para todas as combinações possíveis (não idênticas) entre  $i_2$  e  $i'_2$  e entre  $(i_3 \dots i_N)$  e  $(i'_3 \dots i'_N)$ . Esse caso é idêntico ao que acabamos de resolver, porém com uma partícula a menos. Realizando processo idêntico ao feito para  $j = 1$ , obteremos  $P_{i_2 i_3 \dots i_N} = b_{i_2} P'_{i_3 \dots i_N}$ , resultado esse que aplicado a  $D_3 = 0$ , fornecerá

$$P'_{i_3 i_4 \dots i_N} P'_{i'_3 i'_4 \dots i'_N} - P_{i_3 i_4 \dots i_N} P'_{i'_3 i'_4 \dots i'_N} = 0. \quad (4.52)$$

Repetindo o processo, adicionando 1 ao  $j$  a cada passo até  $j = N$ , obteremos:

$$c_{i_1 i_2 \dots i_N} = a_{i_1} b_{i_2} \dots z_{i_N}, \quad (4.53)$$

expressão essa que nos garante a separabilidade do sistema. Assim, dado que  $C(\Psi) = 0$ , o sistema é separável.

## 4.2.2 Segunda Propriedade

Precisamos demonstrar que caso mudemos a base de apenas umas das partículas, o valor de  $C$  permanece inalterado. Começemos com uma função de onda para um sistema de  $N$  partículas (cada uma com acesso a um número qualquer de estados):

$$|\Psi\rangle = \sum_{b_1 \dots b_N} c_{b_1 \dots b_N} |b_1 \dots b_N\rangle. \quad (4.54)$$

A mudança de base de uma de suas partículas pode ser descrita da seguinte maneira:

$$|b\rangle = \sum_p \alpha_{bp} |p\rangle \quad \text{com} \quad \sum_p \alpha_{bp} \alpha_{b'p}^* = \delta_{bb'}. \quad (4.55)$$

Para demonstrar a invariância de  $C$  com uma mudança de base como descrita na equação (4.55), vamos aplicar tal transformação à função de onda (4.54), calcular  $C$  a partir da função nessa base e mostrar que é igual ao valor de  $C$  se calculado na base anterior. Mudando a base da primeira partícula de nossa função de onda, a base do sistema completo será alterada como abaixo:

$$|b_1 b_2 \dots b_N\rangle = \sum_p \alpha_{b_1 p} |p b_2 \dots b_N\rangle. \quad (4.56)$$

Podemos, dessa forma, passar  $|\Psi\rangle$  para a base  $|p b_2 \dots b_N\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{b_1 \dots b_N} c_{b_1 \dots b_N} |b_1 \dots b_N\rangle = \sum_{b_1 \dots b_N} c_{b_1 \dots b_N} \left( \sum_p \alpha_{b_1 p} |p b_2 \dots b_N\rangle \right) \\ &= \sum_{p b_2 \dots b_N} \left( \sum_{b_1} c_{b_1 \dots b_N} \alpha_{b_1 p} \right) |p b_2 \dots b_N\rangle. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Na equação acima fica clara a forma que adquirem os coeficientes dos estados na nova base. Também fica clara sua relação com os coeficientes anteriores:

$$c'_{p b_2 \dots b_N} = \sum_{b_1} c_{b_1 b_2 \dots b_N} \alpha_{b_1 p}. \quad (4.58)$$

Lembremos, como pode ser visto na equação (4.11), que a medida  $C$  é dada por:

$$C = N \sum_{j,i,i',K,K'} |D_{j,i,i',K,K'}|^2. \quad (4.59)$$

A variável  $j$  percorre o índice associado a cada uma das partículas, e isso nos leva a dois casos a analisar:  $j$  sendo o índice da partícula cuja base foi alterada e  $j$  sendo o índice de uma das outras partículas. Vamos primeiro ao caso  $j = 1$ , supondo essa a partícula cuja base foi alterada.

$$j = 1$$

Vamos chamar de  $D_{j=1}$  o somatório (4.59) realizado sobre  $i, i', K, K'$ , ficando  $j$  fixo em 1. Calculando  $D_{j=1}$  para uma função de onda na base  $|p b_2 \dots b_N\rangle$  obtemos:

$$D_1 = \sum_{\substack{p \neq p' \\ K \neq K'}} \left| \dot{c}'_{pK} \dot{c}'_{p'K'} - \dot{c}'_{pK'} \dot{c}'_{p'K} \right|^2, \quad (4.60)$$

onde  $\dot{c}'$  indica o fato de o coeficiente ser da base  $|p b_2 \dots b_N\rangle$ .  $K$  representa os índices  $b_2 \dots b_N$ .

Utilizando a equação (4.58), podemos representar esses termos em função dos coeficientes na base  $|b_1 b_2 \dots b_N\rangle$ .

$$\begin{aligned} \dot{c}'_{pK} \dot{c}'_{p'K'} &= \sum_i c_{iK} \alpha_{ip} \sum_j c_{jK'} \alpha_{jp'} \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} c_{iK} c_{jK'} \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\dot{c}'_{pK'} \dot{c}'_{p'K} = \sum_{i,j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} c_{iK'} c_{jK}. \quad (4.62)$$

Subtraindo,

$$\dot{c}'_{pK} \dot{c}'_{p'K'} - \dot{c}'_{pK'} \dot{c}'_{p'K} = \sum_{i,j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} c_{iK} c_{jK'} - \sum_{i,j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} c_{iK'} c_{jK}. \quad (4.63)$$



Agora dividimos cada somatório em dois, trocando  $i$  com  $j$  no segundo deles. O lado direito da equação (4.63) resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} c_{iK} c_{jK'} - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} c_{iK'} c_{jK} + \frac{1}{2} \sum_{j,i}^{j \neq i} \alpha_{jp} \alpha_{ip'} c_{jK} c_{iK'} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j,i}^{j \neq i} \alpha_{jp} \alpha_{ip'} c_{jK'} c_{iK}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde  $i \neq j$  devido ao fato de os somatórios se anularem para  $i = j$ . Agrupando os termos,

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} (c_{iK} c_{jK'} - c_{iK'} c_{jK}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} \alpha_{jp} \alpha_{ip'} (c_{iK} c_{jK'} - c_{iK'} c_{jK}), \quad (4.65)$$

e portanto, a equação (4.63) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\acute{c}'_{pK} \acute{c}'_{p'K'} - \acute{c}'_{pK'} \acute{c}'_{p'K} = \sum_{i,j}^{i \neq j} \frac{1}{2} (\alpha_{ip} \alpha_{jp'} - \alpha_{jp} \alpha_{ip'}) (c_{iK} c_{jK'} - c_{iK'} c_{jK}). \quad (4.66)$$

Dessa maneira, podemos calcular  $D_1$ :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{4} \sum_{K,K'}^{K \neq K'} \sum_{i,j}^{i \neq j} \sum_{i',j'}^{i' \neq j'} \sum_{p,p'}^{p \neq p'} (\alpha_{ip} \alpha_{jp'} - \alpha_{jp} \alpha_{ip'}) (\alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p'}^* - \alpha_{j'p}^* \alpha_{i'p'}^*) \\ &\quad \times (c_{iK} c_{jK'} - c_{iK'} c_{jK}) (c_{i'K}^* c_{j'K'}^* - c_{i'K'}^* c_{j'K}^*). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Vamos analisar a soma em  $p$  e  $p'$ .

$$\sum_{p,p'} (\alpha_{ip} \alpha_{jp'} - \alpha_{jp} \alpha_{ip'}) (\alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p'}^* - \alpha_{j'p}^* \alpha_{i'p'}^*). \quad (4.68)$$

A multiplicação acima resulta em quatro termos, sendo o primeiro:

$$\begin{aligned} \sum_{p,p'}^{p \neq p'} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p'}^* &= \left( \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{i'p}^* \right) \left( \sum_{p'} \alpha_{jp'} \alpha_{j'p'}^* \right) - \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^* \\ &= \delta_{ii'} \delta_{jj'} - \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^*. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Para os outros termos, temos:

$$-\sum_{\substack{p \neq p' \\ p, p'}} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} \alpha_{j'p}^* \alpha_{i'p'}^* = -\delta_{ij'} \delta_{ji'} + \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^*, \quad (4.70)$$

$$-\sum_{\substack{p \neq p' \\ p, p'}} \alpha_{jp} \alpha_{ip'} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p'}^* = -\delta_{ji'} \delta_{ij'} + \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^*, \quad (4.71)$$

$$\sum_{\substack{p \neq p' \\ p, p'}} \alpha_{jp} \alpha_{ip'} \alpha_{j'p}^* \alpha_{i'p'}^* = \delta_{jj'} \delta_{ii'} - \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^*. \quad (4.72)$$

Os somatórios em  $p$  se cancelam, e nos sobra:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2} \sum_{K, K'} \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j}} \sum_{\substack{i' \neq j' \\ i', j'}} (\delta_{ii'} \delta_{jj'} - \delta_{ij'} \delta_{ji'}) (c_{iK} c_{jK'} - c_{iK'} c_{jK}) (c_{i'K}^* c_{j'K'}^* - c_{i'K'}^* c_{j'K}^*) \\ &= \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j}} \sum_{\substack{K \neq K' \\ K, K'}} |c_{iK} c_{jK'} - c_{iK'} c_{jK}|^2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

O resultado obtido acima é idêntico a  $D_1$  calculado na base  $|b_1 b_2 \dots b_N\rangle$ , e portanto, a mudança de base de uma das partículas não altera o seu valor.

$j \neq 1$

Vamos efetuar procedimento semelhante ao anterior, porém calcularemos  $D_2$ . O procedimento para qualquer outro  $j > 2$  é semelhante. Na base  $|p b_2 b_3 \dots b_N\rangle$ , temos:

$$D_2 = \sum_{\substack{b_2 \neq b'_2 \\ b_2, b'_2}} = \sum_{\substack{p, K \\ p', K'}}^{p, K \neq p', K'} |c'_{pb_2K} c'_{p'b'_2K'} - c'_{p'b_2K'} c'_{pb'_2K}|^2. \quad (4.74)$$

Passando a subtração para a base  $|b_1 b_2 \dots b_N\rangle$ , obtemos:

$$c'_{pb_2K} c'_{p'b'_2K'} - c'_{p'b_2K'} c'_{pb'_2K} = \sum_{i, j} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} (c_{ib_2K} c_{jb'_2K'} - c_{jb_2K'} c_{ib'_2K}). \quad (4.75)$$

Assim, para  $D_2$ :

$$D_2 = \sum_{b_2, b'_2} \sum_{\substack{p, p' \\ K, K'}} \sum_{\substack{i, j \\ i', j'}} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p'}^* (c_{ib_2K} c_{jb'_2K'} - c_{jb_2K'} c_{ib'_2K}) (c_{ib_2K}^* c_{jb'_2K'}^* - c_{jb_2K'}^* c_{ib'_2K}^*). \quad (4.76)$$

Vamos separar o somatório acima em duas somas feitas sob índices distintos, de modo que levando em conta as duas, obtemos o somatório original. Primeiro, faremos a soma com  $p \neq p'$ , e portanto, com  $K$  e  $K'$  podendo assumir quaisquer configurações. Após, calcularemos os casos com  $p = p'$ , onde necessariamente  $K \neq K'$ .

Para  $p \neq p'$ ,

$$\sum_{b_2, b'_2} \sum_{K, K'} \sum_{\substack{i, j \\ i', j'}} \sum_{p \neq p'} \alpha_{ip} \alpha_{jp'} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p'}^* (c_{ib_2K} c_{jb'_2K'} - c_{jb_2K'} c_{ib'_2K}) (c_{ib_2K}^* c_{jb'_2K'}^* - c_{jb_2K'}^* c_{ib'_2K}^*). \quad (4.77)$$

O somatório em  $p, p'$  é idêntico ao que aparece na equação (4.69). Efetuando-o, obtemos para a expressão (4.77):

$$\begin{aligned} & \sum_{b_2 \neq b'_2} \sum_{\substack{i, j \\ K, K'}} \sum_{iK \neq jK'} |c_{ib_2K} c_{jb'_2K'} - c_{jb_2K'} c_{ib'_2K}|^2 \\ & - \sum_{b_2 \neq b'_2} \sum_{K, K'} \sum_{\substack{i, j \\ i', j'}} \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^* (c_{ib_2K} c_{jb'_2K'} - c_{jb_2K'} c_{ib'_2K}) (c_{ib_2K}^* c_{jb'_2K'}^* - c_{jb_2K'}^* c_{ib'_2K}^*). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Agora vamos calcular o somatório (4.76) para  $p = p'$ . Temos:

$$\sum_{b_2 \neq b'_2} \sum_{K \neq K'} \sum_{\substack{i, j \\ i', j'}} \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^* (c_{ib_2K} c_{jb'_2K'} - c_{jb_2K'} c_{ib'_2K}) (c_{ib_2K}^* c_{jb'_2K'}^* - c_{jb_2K'}^* c_{ib'_2K}^*). \quad (4.79)$$

A expressão acima é idêntica ao segundo termo de (4.78), exceto pela restrição  $K \neq K'$  e pelo sinal. Dessa forma, somando as duas, ficamos com o somatório sendo realizado em

$K = K'$ , com sinal negativo.

$$\sum_{b_2 \neq b'_2} \sum_K \sum_{\substack{i,j \\ i',j'}} \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} \alpha_{i'p}^* \alpha_{j'p}^* (c_{ib_2K} c_{jb'_2K} - c_{jb_2K} c_{ib'_2K}) (c_{ib_2K}^* c_{jb'_2K}^* - c_{jb_2K}^* c_{ib'_2K}^*). \quad (4.80)$$

Podemos explorar a simetria dessa expressão para mostrar que ela é nula. Dividindo-a em duas partes, e na segunda trocando  $i' \leftrightarrow j'$ , o somatório permanece idêntico, mas muda de sinal. Portanto, somando as metades, obtemos zero.

Feito isso, podemos afirmar para  $D'_2$ :

$$D'_2 = \sum_{b_2 \neq b'_2} \sum_{\substack{i,j \\ K,K'}}^{iK \neq jK'} |c_{ib_2K} c_{jb'_2K'} - c_{jb_2K'} c_{ib'_2K}|^2. \quad (4.81)$$

Que é idêntico ao que obteríamos calculando a partir da base  $|b_1 b_2 \dots b_N\rangle$ .

# Emaranhamento Global, Entropia Linear e $C$

## 5.1 Emaranhamento Global

Em artigo publicado em 2002, Meyer e Wallach [25] definiram uma medida para sistemas puros, com  $N$  partículas, cada uma com acesso a dois estados. A essa medida foi dado o nome de Emaranhamento Global. Abaixo, ela é descrita.

O espaço de Hilbert  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$  de  $N$  qubits (bits quânticos) possui uma base com  $2^N$  vetores, cada um sendo identificado por uma sequência de  $N$  bits:  $|b_1 \dots b_N\rangle$ , com  $b_j \in \{0, 1\}$ . Para  $b \in \{0, 1\}$ , definimos:

$$i_j(b)|b_1 \dots b_N\rangle = \delta_{bb_j}|b_1 \dots \hat{b}_j \dots b_N\rangle, \quad (5.1)$$

onde  $\hat{\phantom{b}}$  denota ausência. Podemos notar que  $i_j$  é um mapa  $\mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes N-1}$ .

Para  $u, v \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes N-1}$  podemos escrever:

$$u = \sum u_x |x\rangle \quad v = \sum v_y |y\rangle, \quad (5.2)$$

onde  $x$  e  $y$  representam sequências de  $(N - 1)$  bits, com  $0 \leq x, y \leq 2^{N-1}$ .

Em seguida, definimos:

$$D(u, v) = \sum_{x < y} |u_x v_y - u_y v_x|^2. \quad (5.3)$$

E por fim, para  $\Psi \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ , definimos como medida de emaranhamento:

$$Q(\Psi) = \frac{4}{N} \sum_{j=1}^N D(i_j(0)\Psi, i_j(1)\Psi), \quad (5.4)$$

onde  $4/N$  é um fator de normalização.

## 5.2 Equivalência entre o Emaranhamento Global e $C$

Para sistemas com  $N$  qubits, a medida  $C$  e o Emaranhamento Global são idênticos, a menos da normalização utilizada. Vamos demonstrar isso abaixo.

Começemos definindo  $|\Psi\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = \sum c_{b_1 \dots b_N} |b_1 \dots b_N\rangle, \quad (5.5)$$

onde  $b \in \{0, 1\}$ .

Aplicando em  $|\Psi\rangle$  o operador  $i_j(b)$  definido em (5.1), obtemos:

$$i_j(0)|\Psi\rangle = \sum c_{b_1 \dots b_{j-1} 0 b_{j+1} \dots b_N} |b_1 \dots b_{j-1} 0 b_{j+1} \dots b_N\rangle, \quad (5.6)$$

$$i_j(1)|\Psi\rangle = \sum c_{b_1 \dots b_{j-1} 1 b_{j+1} \dots b_N} |b_1 \dots b_{j-1} 1 b_{j+1} \dots b_N\rangle. \quad (5.7)$$

Identificando o conjunto de  $(N - 1)$  índices com  $X$  ( $Y$ ), e utilizando a notação apresentada em (4.6), podemos escrever:

$$c_{b_1 \dots b_{j-1} 1 b_{j+1} \dots b_N} = g_{1_j, X}, \quad (5.8)$$

com  $X = b_1 \dots b_{j-1} b_{j+1} \dots b_N$ .

Dessa forma, ficamos com:

$$i_j(0)|\Psi\rangle = \sum g_{0_j, X}|X\rangle \quad (5.9) \quad i_j(1)|\Psi\rangle = \sum g_{1_j, Y}|Y\rangle \quad (5.10)$$

Portanto, calculando a partir de (5.3),

$$D(i_j(0)|\Psi\rangle, i_j(1)|\Psi\rangle) = \sum_{X<Y} |g_{0_j, X}g_{1_j, Y} - g_{0_j, Y}g_{1_j, X}|^2, \quad (5.11)$$

e utilizando a eq. (5.4)

$$Q(|\Psi\rangle) = \frac{4}{N} \sum_{j, X, Y} |g_{0_j, X}g_{1_j, Y} - g_{0_j, Y}g_{1_j, X}|^2. \quad (5.12)$$

Podemos notar que a equação acima, a menos da constante de normalização, é idêntica à eq. (4.11), com  $i = 0$  e  $i' = 1$ . O fato de se usar  $X < Y$  simplesmente diz que os índices não se repetem com ordem invertida. Se  $(X', Y')$  já foi contabilizado,  $(Y', X')$  não será. Na eq. (4.11) também notamos esse fato para as combinações  $(K, K')$ .

Dessa forma, as medidas são idênticas para sistemas Nx2, a menos da normalização.

## 5.3 $C$ , Emaranhamento Global e Entropia Linear

Na seção anterior vimos a identidade, em casos Nx2, entre  $C$  e o Emaranhamento Global. Agora, vamos nos aprofundar na conexão entre o E.G. (Emaranhamento Global) e a Entropia Linear.

### 5.3.1 Entropia Linear

A Entropia Linear entre dois sistemas assemelha-se à Concorrência. Foi sugerida como medida de informação para estados globais puros por Fano [36] e subsequentemente

aplicada por outros autores [37], [38], [39]. Sua definição é:

$$SL(\rho_A) = 1 - \text{tr}[\rho_A^2], \quad (5.13)$$

onde  $\rho_A$  é o operador densidade reduzido entre a parte  $A$  do sistema e o restante.

### 5.3.2 A Relação entre $E.G.$ e a Entropia Linear

Brennen [26] encontrou a seguinte relação entre o Emaranhamento Global e a Entropia Linear:

$$Q(|\Psi\rangle) = 2 \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}[\rho_k^2] \right). \quad (5.14)$$

A relação acima é válida para sistemas de  $N$  partículas, cada uma com acesso a dois níveis. Como podemos ver, a medida  $Q$  de Meyer e Wallach ( $E.G.$ ) aparece como uma média da entropia linear entre cada qubit e o resto do sistema. Assim, fica claro o significado físico de  $Q$ . Dado um sistema de  $N$  qubits, podemos sempre medir a entropia linear entre um de seus elementos,  $k$ , e o resto do sistema. Isso nos dirá quão emaranhado ele está com o resto do sistema. Fazendo isso sobre todos os qubits e dividindo pelo número de elementos, temos  $Q$ .

Essa expressão elucidada o significado físico do Emaranhamento Global como uma média do emaranhamento de cada qubit com o resto do sistema [26]. A demonstração dessa relação pode ser vista no apêndice B.

## 5.4 Escrevendo $C$ em termos de E.G.

Entendida a medida E.G., sua conexão com a Entropia Linear e a interpretação física que daí surge, podemos tentar estender tal interpretação a  $C$ . Vamos escrever  $C$  em termos de E.G., como uma generalização do mesmo. Isso, unido à conexão entre E.G. e a Entropia Linear, pode nos esclarecer qual a interpretação física de  $C$ .



### 5.4.1 Proposta

Como dito, vamos definir  $C$  de acordo com a notação de E.G.. Começemos com uma função de onda de qualquer dimensão:

$$|\Psi\rangle = \sum c_{b_1 \dots b_n} |b_1 \dots b_n\rangle, \quad (5.15)$$

com  $b_j \in \{0, \dots, d_j - 1\}$ , sendo  $d_j$  a dimensionalidade da partícula  $j$ .

A definição do operador  $i$  segue idêntica:

$$i_j(b) |b_1 \dots b_n\rangle = \delta_{bb_j} |b_1 \dots \widehat{b}_j \dots b_n\rangle, \quad (5.16)$$

porém, agora é um mapa com a seguinte propriedade dimensional:

$$\mathbb{C}^{d_j} \otimes (\mathbb{C}^{d_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{d_j}) \rightarrow \mathbb{C}^{d_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{d_{j-1}} \otimes \mathbb{C}^{d_{j+1}} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{d_n}. \quad (5.17)$$

Escrevemos para  $u, v \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{d_{j-1}} \otimes \mathbb{C}^{d_{j+1}} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{d_n}$

$$u = \sum u_x |X\rangle \quad (5.18) \quad v = \sum v_y |Y\rangle, \quad (5.19)$$

onde  $X$  e  $Y$  representam sequências de  $(n - 1)$  índices, com

$$0 \leq x, y \leq d_1 \dots d_{j-1} \cdot d_{j+1} \dots d_n.$$

O produto representado por  $D$  também se mantém idêntico:

$$D(u, v) = \sum_{x < y} |u_x v_y - u_y v_x|^2. \quad (5.20)$$

Por fim, para  $Q$ , ao invés de fazermos uma soma apenas no coeficiente  $j$ , que designa as partículas, faremos também em outros dois, que designarão as combinações possíveis dos índices da partícula  $j$ . Antes isso não era necessário, dado que apenas dois índices eram possíveis, 0 e 1. Assim, temos:

$$Q(|\Psi\rangle) = N \sum_{j, l, l'} D \left( i_j(l) |\Psi\rangle, i_j(l') |\Psi\rangle \right), \quad (5.21)$$

com  $N$  como constante de normalização. O somatório é realizado entre as combinações de  $l$  e  $l'$ , com  $l = \{0, \dots, d_j - 1\}$ .

Em seguida, vamos demonstrar que essa formalização de  $C$  é compatível com a anteriormente apresentada.

### *Demonstração*

Aplicando o operador  $i$ , com dois argumentos diferentes, à função de onda descrita na eq. (5.15), obtemos:

$$i_j(l)|\Psi\rangle = \sum c_{b_1 \dots b_{j-1} l b_{j+1} \dots b_n} |b_1 \dots b_{j-1} b_{j+1} \dots b_n\rangle, \quad (5.22)$$

e

$$i_j(l')|\Psi\rangle = \sum c_{b_1 \dots b_{j-1} l' b_{j+1} \dots b_n} |b_1 \dots b_{j-1} b_{j+1} \dots b_n\rangle, \quad (5.23)$$

Identificando o conjunto de  $(n-1)$  índices com  $X(Y)$ , e utilizando a notação apresentada em (4.6), escrevemos:

$$c_{b_1 \dots b_{j-1} l b_{j+1} \dots b_n} = g_{l_j, X}, \quad (5.24)$$

com  $X = b_1 \dots b_{j-1} b_{j+1} \dots b_n$ . Assim,

$$i_j(l)|\Psi\rangle = \sum g_{l_j, X} |X\rangle \quad (5.25) \quad i_j(l')|\Psi\rangle = \sum g'_{l'_j, Y} |Y\rangle. \quad (5.26)$$

Agora, podemos calcular  $D$  entre os dois vetores:

$$D \left( i_j(l)|\Psi\rangle, i_j(l')|\Psi\rangle \right) = \sum_{X < Y} \left| g_{l_j, X} \cdot g'_{l'_j, Y} - g_{l'_j, Y} \cdot g_{l_j, X} \right|^2. \quad (5.27)$$

Por fim, aplicando a eq. (5.21), obtemos:

$$Q(|\Psi\rangle) = N \sum_{j, l, l', X, Y} \left| g_{l_j, X} \cdot g'_{l'_j, Y} - g_{l'_j, Y} \cdot g_{l_j, X} \right|^2, \quad (5.28)$$

que, comparada à eq. (4.11), deixa clara a equivalência entre os dois formalismos.

## 5.5 $C$ e a Entropia Linear

A diferença básica entre  $C$  e o E.G. é o fato de aquela se estender sobre quaisquer dimensões finitas, enquanto esta trata de sistemas de  $n$  qubits. Como vimos, Brennen [26] demonstra a equivalência entre a média da entropia linear do sistema e o E.G.. Feito isso, era óbvio o salto de utilizar essa média para quaisquer outros sistemas, e não apenas qubits. Isso foi proposto por Scott [40], que propôs também fazer-se a média entre subsistemas maiores do que uma partícula e o resto do sistema.

Porém, podemos nos fazer a seguinte pergunta: será que  $C$  se mantém igual a média de entropia linear para qualquer dimensão, ou são equivalentes apenas para sistemas  $N \times 2$ , quando  $C$  é idêntico ao E.G.? A resposta para isso é sim, não importa a dimensionalidade do sistema, calcular  $C$  é equivalente a fazer a média da entropia linear do sistema. Vamos demonstrar tal relação.

Para a seguinte função de onda:

$$|\Psi\rangle = \sum c_{k_1 k_2 \dots k_N} |k_1 \dots k_N\rangle. \quad (5.29)$$

Temos como operador densidade:

$$\rho = \sum c_{k_1 \dots k_N} c_{k'_1 \dots k'_N}^* |k_1 \dots k_N\rangle \langle k'_1 \dots k'_N|. \quad (5.30)$$

O operador densidade reduzido em relação à partícula  $j$  é dado por:

$$\rho_j = \sum_{k_1 \dots k_N} \sum_{k_j, k'_j} c_{k_1 \dots k_j \dots k_N} c_{k_1 \dots k'_j \dots k_N}^* |k_j\rangle \langle k'_j|. \quad (5.31)$$

Utilizando a notação apresentada em (4.6), com  $X = k_1 \dots k_{j-1} k_{j+1} \dots k_N$ , podemos escrever:

$$\rho_j = \sum_X \sum_{k, k'} g_{k_j, X} g_{k'_j, X}^* |k_j\rangle \langle k'_j|. \quad (5.32)$$

Agora, calculamos o quadrado de  $\rho_j$ .

$$\begin{aligned}
\rho_j^2 &= \left( \sum_{X,k,k'} g_{k_j,X} g_{k'_j,X}^* |k_j\rangle \langle k'_j| \right) \left( \sum_{Y,p,p'} g_{p_j,Y} g_{p'_j,Y}^* |p_j\rangle \langle p'_j| \right) \\
&= \sum_{X,k,k'} \sum_{Y,p,p'} g_{k_j,X} g_{k'_j,X}^* g_{p_j,Y} g_{p'_j,Y}^* |k_j\rangle \langle k'_j| |p_j\rangle \langle p'_j| \\
&= \sum_{\substack{k,p,p' \\ X,Y}} g_{k_j,X} g_{p_j,X}^* g_{p_j,Y} g_{p'_j,Y}^* |k_j\rangle \langle p'_j|. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Em seguida, calculamos o traço de  $\rho_j^2$ :

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\rho_j^2] &= \sum_i \sum_{\substack{k,p,p' \\ X,Y}} g_{k_j,X} g_{p_j,X}^* g_{p_j,Y} g_{p'_j,Y}^* \langle i|k_j\rangle \langle p'_j|i\rangle \\
&= \sum_{\substack{k,p \\ X,Y}} g_{k_j,X} g_{p_j,X}^* g_{p_j,Y} g_{k_j,Y}^*. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Podemos quebrar o somatório da equação (5.34) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\rho_j^2] &= \sum_{k,X} (g_{k_j,X} g_{k_j,X}^*)^2 + \sum_{k,X,Y}^{X \neq Y} g_{k_j,X} g_{k_j,X}^* g_{k_j,Y} g_{k_j,Y}^* \\
&\quad + \sum_{\substack{k \neq p \\ k,p,X}} g_{k_j,X} g_{k_j,X}^* g_{p_j,X} g_{p_j,X}^* + \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} g_{k_j,X} g_{p_j,X}^* g_{p_j,Y} g_{k_j,Y}^*. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Vamos guardar esse resultado e expandir a seguinte expressão:

$$\left( \sum_{k,X} g_{k_j,X} g_{k_j,X}^* \right)^2 = \sum_{\substack{k,p \\ X,Y}} g_{k_j,X} g_{k_j,X}^* g_{p_j,Y} g_{p_j,Y}^*. \tag{5.36}$$

Dividindo esse somatório de modo semelhante ao feito no anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k,X} g_{k_j, X} g_{k_j, X}^* \right)^2 &= \sum_{k,X} (g_{k_j, X} g_{k_j, X}^*)^2 + \sum_{\substack{X \neq Y \\ k, X, Y}} g_{k_j, X} g_{k_j, X}^* g_{k_j, Y} g_{k_j, Y}^* \\ &\quad + \sum_{\substack{k \neq p \\ k, p, X}} g_{k_j, X} g_{k_j, X}^* g_{p_j, X} g_{p_j, X}^* + \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} g_{k_j, X} g_{k_j, X}^* g_{p_j, Y} g_{p_j, Y}^* \end{aligned} \quad (5.37)$$

Podemos observar que os três primeiros termos do lado direito das equações (5.35) e (5.37) são idênticos. Com isso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\rho_j^2] &= \left( \sum_{k,X} g_{k_j, X} g_{k_j, X}^* \right)^2 - \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} g_{k_j, X} g_{k_j, X}^* g_{p_j, Y} g_{p_j, Y}^* + \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} g_{k_j, X} g_{p_j, X}^* g_{p_j, Y} g_{k_j, Y}^* \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} \left( g_{k_j, X} g_{k_j, X}^* g_{p_j, Y} g_{p_j, Y}^* + g_{k_j, Y} g_{k_j, Y}^* g_{p_j, X} g_{p_j, X}^* \right. \\ &\quad \left. - g_{k_j, X} g_{p_j, X}^* g_{p_j, Y} g_{k_j, Y}^* - g_{k_j, Y} g_{p_j, Y}^* g_{p_j, X} g_{k_j, X}^* \right), \end{aligned} \quad (5.38)$$

e portanto,

$$\text{tr}[\rho_j^2] = 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} |g_{k_j, X} g_{p_j, Y} - g_{k_j, Y} g_{p_j, X}|^2. \quad (5.39)$$

Resultado esse que nos leva a

$$\begin{aligned} 2 \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \text{tr}[\rho_j^2] \right) &= 2 \left( 1 - \frac{1}{N} \left( N - \frac{1}{2} \sum_j \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} |g_{k_j, X} g_{p_j, Y} - g_{k_j, Y} g_{p_j, X}|^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_j \sum_{\substack{k \neq p \\ X \neq Y}} |g_{k_j, X} g_{p_j, Y} - g_{k_j, Y} g_{p_j, X}|^2. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Assim, está demonstrada a equivalência entre  $C$  e a média da entropia linear para sistemas de quaisquer dimensões, desde que tomemos a constante de normalização de  $C$  como  $1/N$ . Se fizermos o somatório sobre combinações entre  $(X, Y)$  e  $(k, p)$ , sem contabilizar termos com alteração apenas da ordem, o familiar fator 4 aparecerá.

---

Esse resultado deixa claro que, assim como o Emaranhamento Global,  $C$  também pode ser interpretado como a média da entropia linear entre cada partícula e o resto do sistema.

## Uma Análise Geométrica do Emaranhamento

Tratamentos geométricos a sistemas analíticos costumam ser interessantes. Diversas abordagens nesse ramo podem ser vistas no livro de Bengtsson e Zyczkowski [41]. A visualização espacial de um conjunto de equações pode fornecer interpretações dificilmente assimiláveis apenas a partir da álgebra. Assim, faremos aqui algo nesse sentido: visualizar geometricamente as equações de medida de emaranhamento. Nos restringiremos a sistemas  $2 \times 2$ , por motivos adiante explicados. A medida de emaranhamento utilizada será  $C$ , que para esses sistemas corresponde ao Emaranhamento Global. Sua forma simples ajudará na tarefa.

Para visualizarmos algo geometricamente precisamos colocá-lo em um espaço, no máximo, tridimensional. Sistemas  $2 \times 2$  serão convenientes para esse objetivo. Sistemas quânticos desse tipo são constituídos por quatro coeficientes. Esse coeficientes podem ser complexos, porém, como veremos adiante, com algumas restrições, podemos representar esses estados em um espaço tridimensional, e assim, visualizar como se distribuem geometricamente estados com o mesmo valor de emaranhamento.

### 6.1 Elaboração do Problema

Representemos a função de onda de nosso sistema da seguinte maneira:

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle. \quad (6.1)$$

Esse sistema respeita a normalização, e portanto,

$$|c_{00}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{11}|^2 = 1. \quad (6.2)$$

O emaranhamento do sistema, como podemos ver na equação (4.11), é dado por:

$$C(|\Psi\rangle) = 4 |c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}|^2. \quad (6.3)$$

Podemos fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$c_{10} \equiv x e^{i\phi_x}, \quad c_{01} \equiv y e^{i\phi_y}, \quad c_{00} \equiv z e^{i\phi_z}, \quad c_{11} \equiv t e^{i\phi_t}, \quad d^2 \equiv \frac{C}{4}, \quad (6.4)$$

com  $x, y, z, t, \phi_x, \phi_y, \phi_z$  e  $\phi_t$  reais.

Aplicadas essas definições, ficamos com o seguinte sistema para resolver:

$$\text{Normalização :} \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad (6.5)$$

$$\text{Emaranhamento :} \quad |xy e^{i(\phi_x + \phi_y)} - zt e^{i(\phi_z + \phi_t)}|^2 = d^2. \quad (6.6)$$

Agora será explicado como será feita a representação dos estados em um espaço tridimensional. A restrição imposta será a seguinte: as fases serão todas fixas. Assim, definido um valor para  $C$ , e portanto para  $d$ , e para as fases, podemos encontrar todos os valores de  $(x, y, z, t)$  que sejam soluções para as equações (6.5) e (6.6). Conhecendo  $x, y$ , e  $z$  podemos calcular, via normalização, o módulo de  $t$ . Feito isso, podemos associar as soluções  $(x, y, z, t)$  e  $(x, y, z, -t)$  a um ponto  $(x, y, z)$  de um espaço tridimensional. Dessa forma, para um dado sinal de  $t$ , a relação se torna unívoca e cada ponto do espaço representará um estado específico.

A equação (6.9) pode ser trabalhada de forma a assumir o seguinte aspecto:

$$x^2 y^2 - 2xyzt \cos \phi + z^2 t^2 = d^2, \quad (6.7)$$

com  $\phi \equiv \phi_z + \phi_t - \phi_x - \phi_y$ .

A análise neste trabalho se restringirá a coeficientes reais, e portanto,  $\cos \phi = 1$ . A



análise seria idêntica para estados com fases  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$  e  $\phi_t$  tais que  $\phi = 2n\pi$ . Para esse caso, ficamos com o seguinte sistema a resolver:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad (6.8)$$

$$(xy - zt)^2 = d^2. \quad (6.9)$$

Caso  $\cos \phi \neq 1$  a análise seguiria o mesmo caminho da que será feita daqui em frente, mas o sistema seria constituído das equações (6.8) e (6.7).

Há diversos modos de atacar esse problema. Um deles é supor uma das variáveis fixa, resolver o sistema com essa restrição, e depois, por iteração dessa variável fixa, encontrar todas as soluções. Seguindo esse procedimento, vamos supor  $t$  fixo. Além disso, usaremos a seguinte definição:

$$R^2 \equiv 1 - t^2. \quad (6.10)$$

Com isso, as equações (6.8) e (6.9) ficam:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (6.11)$$

$$\left(xy - \sqrt{1 - R^2}z\right)^2 = d^2. \quad (6.12)$$

Como podemos ver em (6.11), para cada valor de  $t$ , os valores de  $(x, y, z)$  distribuem-se sobre uma esfera de raio  $R$ . Assim, dado um valor de  $t$ , para encontrarmos os estados que possuem emaranhamento definido por  $d$ , precisamos encontrar os pontos que estão sobre essa esfera e satisfaçam (6.12).

Entendido e enunciado o problema, e definida a estratégia de solução, podemos atacá-lo. Começaremos devagar, resolvendo o caso mais simples de  $t$  constante:  $t = 0$ . Esse exemplo, embora simples, tornará claro o procedimento que é aplicado a frente, de modo mais complicado, ao caso geral.

## 6.2 $t = 0$

Para  $t = 0$ , temos  $R = 1$ . Assim, as equações (6.11) e (6.12) ficam:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (6.13)$$

$$x^2 y^2 = d^2. \quad (6.14)$$

Utilizaremos a seguinte substituição:

$$r^2 = 1 - z^2. \quad (6.15)$$

Com isso, as equações (6.13) e (6.14) tornam-se:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (6.16)$$

$$x^2 y^2 = d^2. \quad (6.17)$$

Agora, consideremos  $z$ , e portanto também  $r$ , fixo. A solução para a eq.(6.16) será uma circunferência. Para a eq.(6.17) uma curva semelhante a de  $1/x$ . No plano  $xy$ , teremos:

As intersecções das curvas, marcadas em preto, são os pontos procurados.

Para que haja ao menos uma intersecção em cada quadrante, é necessário que  $r \geq l$ . Vamos então encontrar essa relação em função de  $d$ . Para isso, calculemos  $l$  em função dos dados do problema. Sabemos que no caso extremo, onde haja apenas uma intersecção em cada quadrante, temos simetria de  $|x| = |y|$ , e  $r = l$ . Chamemos esse ponto de  $(a, a)$ . A equação (6.17) fica:

$$a^2 = d. \quad (6.18)$$

Além disso, a partir da eq. (6.16)

$$\begin{aligned} l^2 &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

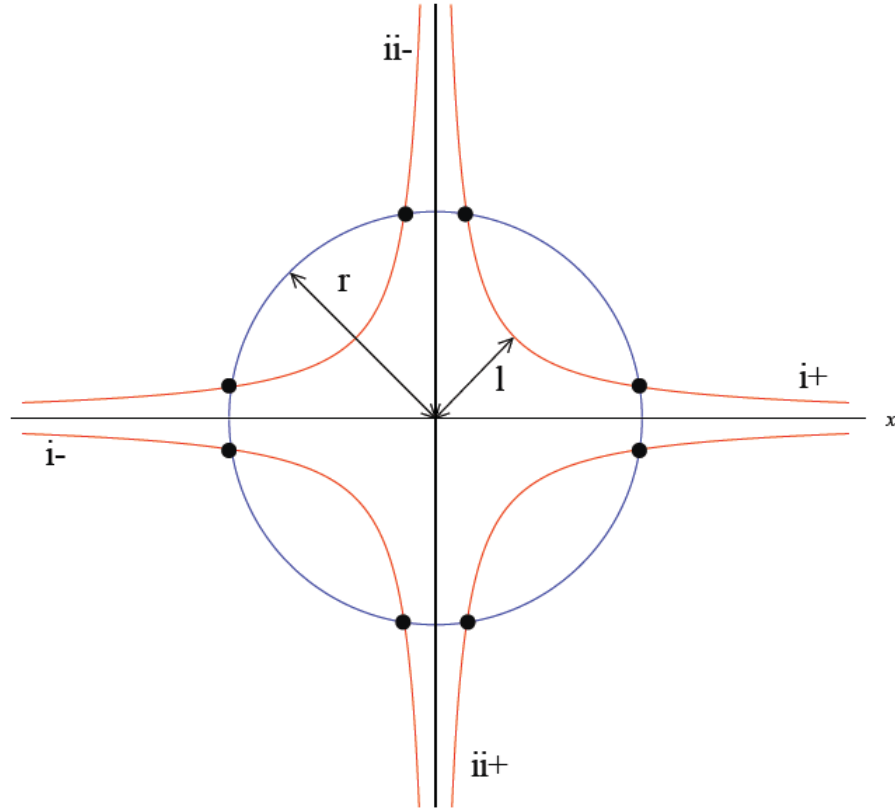


Figura 6.1: Intersecção entre as curvas das soluções para as equações (6.16), em azul, e (6.17), em vermelho.

Portanto, de (6.18) e (6.19) temos:

$$l = \sqrt{2d}, \quad (6.20)$$

e a condição de existência de intersecção:

$$r \geq \sqrt{2d}. \quad (6.21)$$

Analisando a figura (6.2), podemos notar que os trechos  $i+$  e  $i-$  contêm soluções do tipo  $xy = d$ , e os trechos  $ii+$  e  $ii-$  do tipo  $xy = -d$ .

Sabendo onde se encontram as soluções, que limites respeitam e os sinais que devem apresentar, vamos obter suas expressões. Primeiro, analisemos o caso  $d = 0$ .

$$d = 0$$

Com  $d = 0$ , as equações (6.16) e (6.17) tornam-se extremamente simples:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (6.22)$$

$$xy = 0. \quad (6.23)$$

As soluções da eq. (6.23) são  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

Para  $x = 0$ , temos

$$y^2 + z^2 = 1, \quad (6.24)$$

com soluções  $(0, \pm r, z)$ .

Para  $y = 0$  acontece semelhante, e teremos soluções  $(\pm r, 0, z)$ . Em ambas as soluções,  $z$  está sujeito ao intervalo  $0 \leq z \leq 1$ .

$d \neq 0$

Isolando  $x$  em (6.17) e substituindo em (6.16), obtemos

$$x^2 + \frac{d^2}{x^2} = r^2,$$

multiplicando por  $x^2$ ,

$$x^4 - r^2 x^2 + d^2 = 0. \quad (6.25)$$

De onde obtemos para  $x$ ,

$$x^2 = \frac{r^2}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{2d}{r^2} \right)^2} \right), \quad (6.26)$$

que nos dá os seguintes valores possíveis para  $x$ :

$$x_{\pm} = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{2d}{r^2} \right)^2}}. \quad (6.27)$$

Substituindo esse resultado na eq. (6.17), obtemos para  $y$ :

$$y_{\pm} = \frac{\sqrt{2}d}{r\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2d}{r^2}\right)^2}}}, \quad (6.28)$$

sendo  $y_+$  solução para  $x_+$  e  $y_-$  solução para  $x_-$ .

Deste modo, para os pontos marcados na figura (6.2), temos as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} i_+ &\Rightarrow (x_+, y_+) \text{ e } (x_-, y_-) & i_- &\Rightarrow (-x_+, -y_+) \text{ e } (-x_-, -y_-) \\ ii_+ &\Rightarrow (x_+, -y_+) \text{ e } (x_-, -y_-) & ii_- &\Rightarrow (-x_+, y_+) \text{ e } (-x_-, y_-). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Essas soluções respeitam a condição (6.21). Vamos agora colocar a referida equação em termos de  $z$ .

$$\begin{aligned} r^2 &\geq 2d \\ 1 - z^2 &\geq 2d \\ z^2 &\leq 1 - 2d, \end{aligned}$$

e portanto,

$$-z_{max} \leq z \leq z_{max}, \quad (6.30)$$

com

$$z_{max} = \sqrt{1 - 2d}. \quad (6.31)$$

Munidos das soluções  $(x, y)$  e dos limites de  $z$  para os quais elas são válidas, podemos variar  $z$  de seu mínimo ao seu máximo, obtendo as soluções ao longo do caminho, e observar o contorno que as soluções  $(x, y, z)$  apresentam. Abaixo, algumas dessas curvas. A primeira está sobreposta a uma esfera de raio 1. As outras soluções também estendem-se por essa superfície, mas não colocamos a esfera, de modo que a curva inteira fique visível. Ao analisar as imagens, lembremos que  $t$  é um dos coeficientes da função de onda, e  $d$  está relacionado de forma crescente ao emaranhamento do sistema.

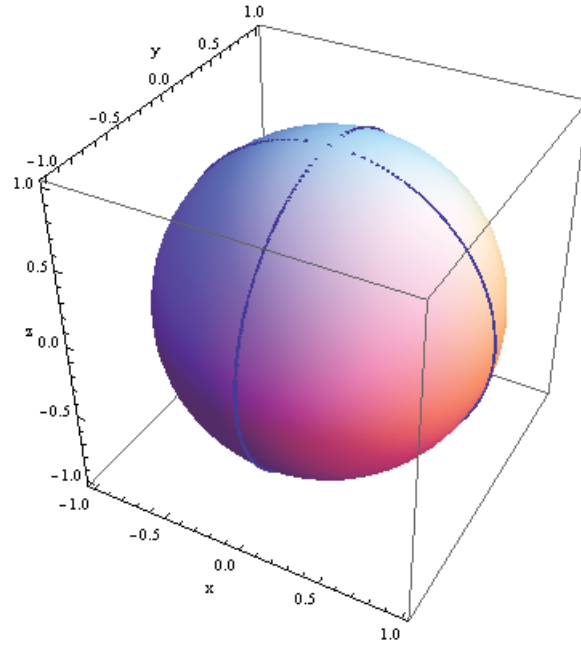


Figura 6.2: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0$  e  $d = 0$ , apresentadas sobre uma esfera.

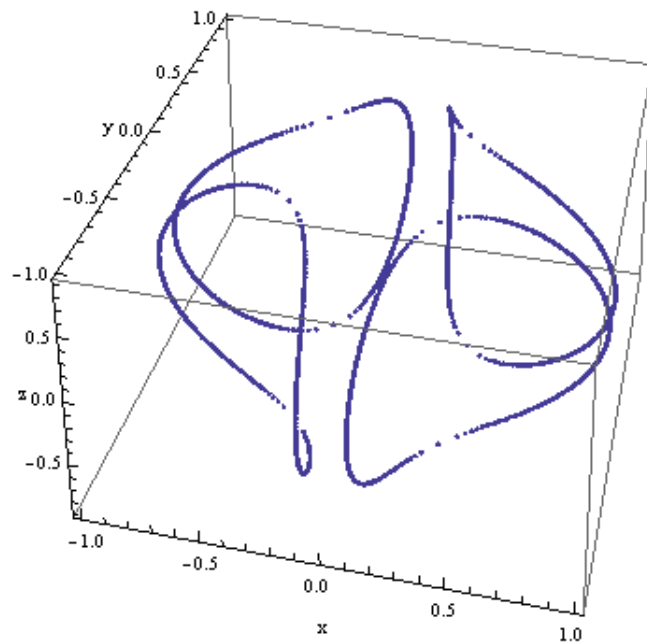


Figura 6.3: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0$  e  $d = 0.1$ .

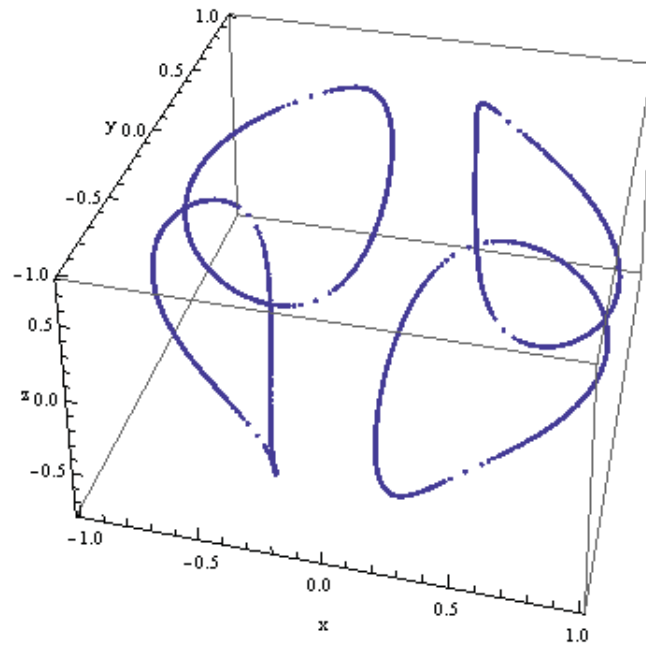


Figura 6.4: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0$  e  $d = 0.2$ .

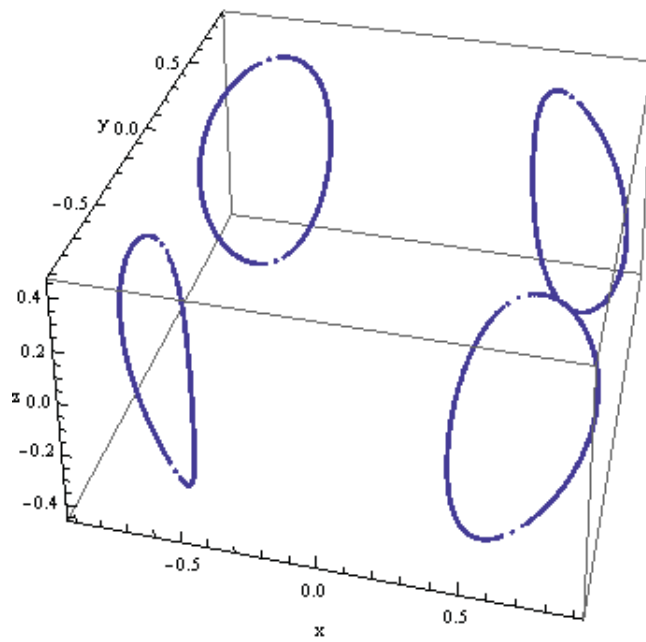


Figura 6.5: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0$  e  $d = 0.4$ .

Nas figuras podemos observar as simetrias contidas nas equações (6.13) e (6.14). Os quatro quadrantes apresentam mesma solução, dado que as equações são invariantes pelas trocas  $x \rightarrow -x$  ou  $y \rightarrow -y$  (ou ambas). Além disso, também é fácil ver que a simetria no eixo  $z$ , que se dá pela invariância da equação (6.13) com a troca  $z \rightarrow -z$ .

Lembremos que o caso analisado aqui,  $t = 0$ , corresponde a funções de onda com a seguinte configuração:

$$|\Psi\rangle = x|10\rangle + y|01\rangle + z|00\rangle. \quad (6.32)$$

Observando a figura (6.2), vemos duas circunferências que circundam a esfera. Fica evidente que, quando o emaranhamento é nulo em um sistema do tipo definido em (6.32), ou  $x$  ou  $y$  tem de ser nulos. Conforme o emaranhamento aumenta, formam-se curvas fechadas, cada vez mais estreitas e distantes do extremo em  $z$  da esfera. Na figura (6.6), sobreposemos as curvas apresentadas da figura (6.2) a (6.5), com a curva azul representando soluções para  $d = 0$ , a curva roxa as soluções para  $d = 0.1$ , a amarela para  $d = 0.2$  e a verde para  $d = 0.4$ . O ponto em preto representa um estado de Bell. Fica claro que, com o aumento do emaranhamento, cada vez menores são os valores possíveis de  $z$ , e mais próximos entre si são os de  $x$  e  $y$ . As curvas afastam-se dos estados não emaranhados, tornando-se menores com o aumento do emaranhamento e circundando o ponto destacado, até que convergem, com  $d = 0.5$ , para  $z = 0$  e  $x = y$ , e o sistema apresentado na eq. (6.32) assume a forma de um estado de Bell.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle. \quad (6.33)$$

### 6.3 $t > 0$

Tratado o caso mais simples, vamos ao problema em que  $t \neq 0$ . Com isso, o sistema perde muito de sua simetria, surgem condições a serem analisadas e o problema se torna mais complicado. O trabalho algébrico completo pode ser visto no Anexo C, enquanto aqui indicaremos os caminhos e resultados.

Vamos definir as seguintes variáveis:

$$f = \sqrt{1 - R^2}z, \quad (6.34)$$



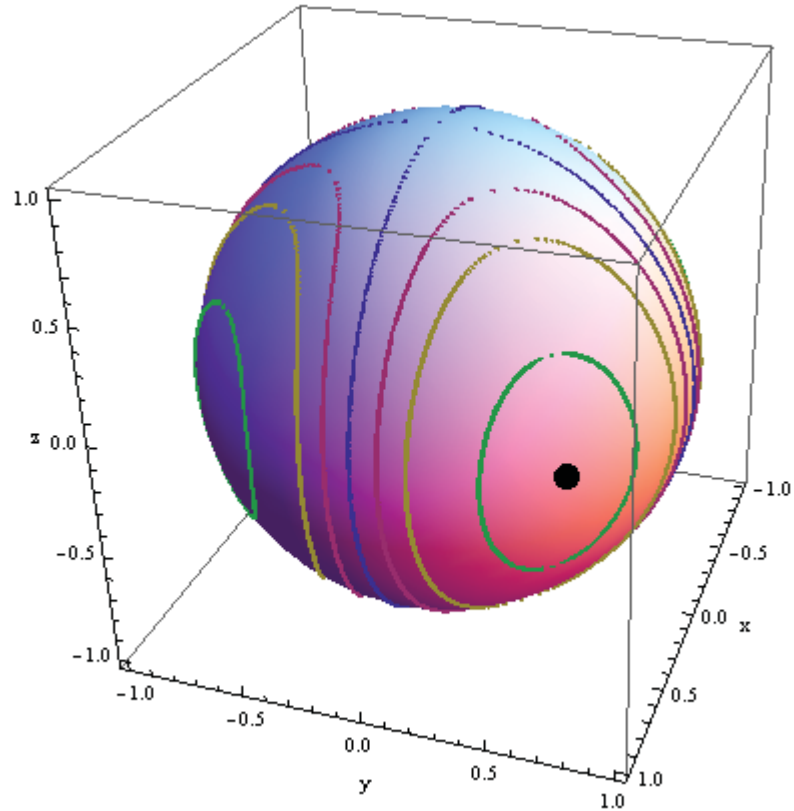


Figura 6.6: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9) são apresentadas sobre uma esfera, para diversos valores de  $d$ . A curva azul representa soluções para  $d = 0$ , a curva roxa as soluções para  $d = 0.1$ , a amarela para  $d = 0.2$  e a verde para  $d = 0.4$ . O ponto em preto representa um estado de Bell.

e

$$r^2 = R^2 - z^2. \quad (6.35)$$

Substituindo essas novas variáveis nas equações (6.11) e (6.12), ficamos com:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (6.36)$$

$$(xy - f)^2 = d^2, \quad (6.37)$$

Vamos procurar quais as soluções para  $t$  constante. Dado  $t$  contante,  $R$  consequentemente também o é. Fixando também a variável  $z$ ,  $f$  e  $r$  fixam-se. Considerando esse caso,

analisemos a equação (6.37) Para  $f \neq 0$  ( $f = 0$  foi resolvido na seção anterior) temos:

$$xy - f = \pm d, \quad (6.38)$$

o que leva a duas possibilidades:

$$xy = d + f \quad (6.39) \quad xy = -d + f. \quad (6.40)$$

Temos agora algumas possibilidades, de acordo com a relação entre  $d$  e  $f$ . Vamos analisá-las:

$$d > f$$

A equação (6.39) é análoga à  $xy = d$ , mas com  $d \rightarrow d + f$ . Portanto, a curva será idêntica à do caso  $f = 0$ , com  $l = \sqrt{2(d + f)}$ . De (6.40), temos  $xy = -d + f$ , que leva a  $xy = -(d - f)$ , que é análoga a  $xy = -d$ , com  $d \rightarrow d - f$ , e portanto,  $l = \sqrt{2(d - f)}$ .

No plano  $xy$ , as curvas se apresentam como mostrado na figura (6.7), sendo,

$$l_+ = \sqrt{2(d + f)} \quad \text{e} \quad l_- = \sqrt{2(d - f)}. \quad (6.41)$$

Como podemos observar, embora a estrutura geral seja a mesma do caso  $t = 0$ , agora os quadrantes ímpares possuem  $l$  diferente dos pares.

### Segundo Caso: $d < f$

A equação (6.39) recai no caso  $f = 0$  se fizermos  $l = \sqrt{2(d + f)}$ . Já a equação (6.40) torna-se:

$$xy = (f - d). \quad (6.42)$$

com  $(f - d) > 0$ . Logo, a curva assemelha-se à de  $i_{\pm}$ , ou seja, corre sobre os quadrantes ímpares. As curvas resultantes podem ser conferidas na figura (6.8).

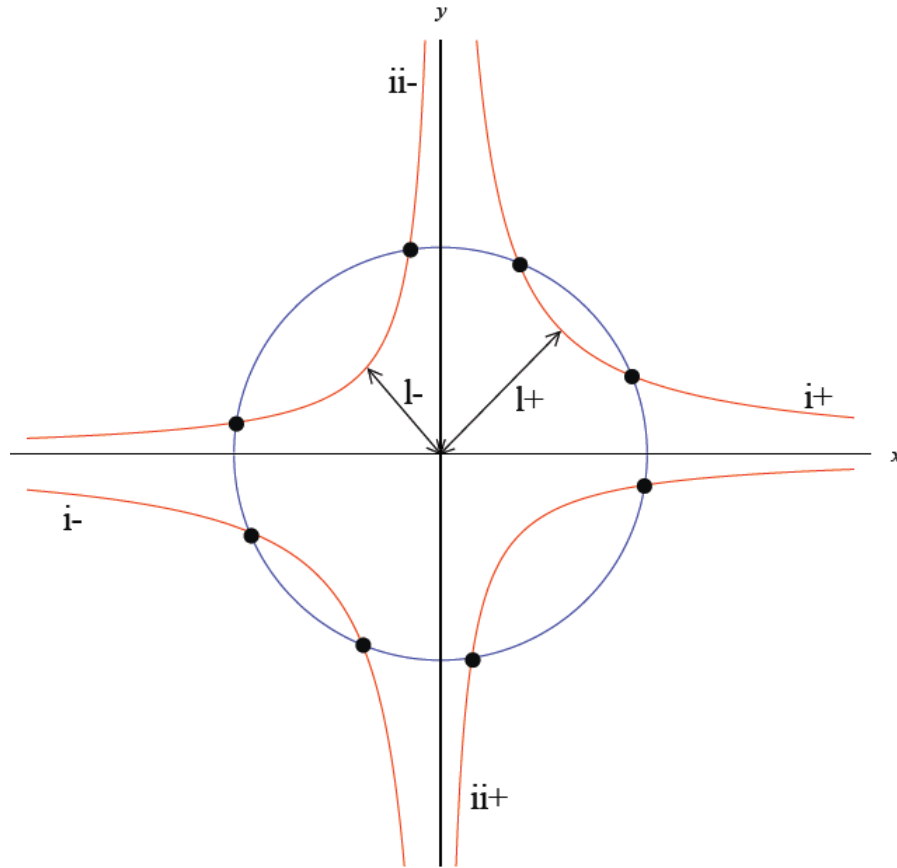


Figura 6.7: Intersecção entre as curvas das soluções das equações (6.36), em azul, e (6.37), em vermelho, para o caso  $d > f$

**Terceiro Caso:**  $d = f$

Só temos solução para o trecho  $i$ , dado que (6.40) se torna  $xy = 0$ . A equação (6.39), porém, adquire a seguinte forma:

$$xy = 2d \quad l_+ = \sqrt{4d} = 2\sqrt{d}. \quad (6.43)$$

Podemos visualizar o resultado no plano na figura (6.9)

### Soluções e Limites de Existência

Vamos fazer para o caso  $t > 0$  o mesmo que para o caso  $t = 0$ . Encontram-se as soluções  $(x, y)$  em função de  $z$ , e o intervalo de  $z$  em que existem soluções. Os cálculos

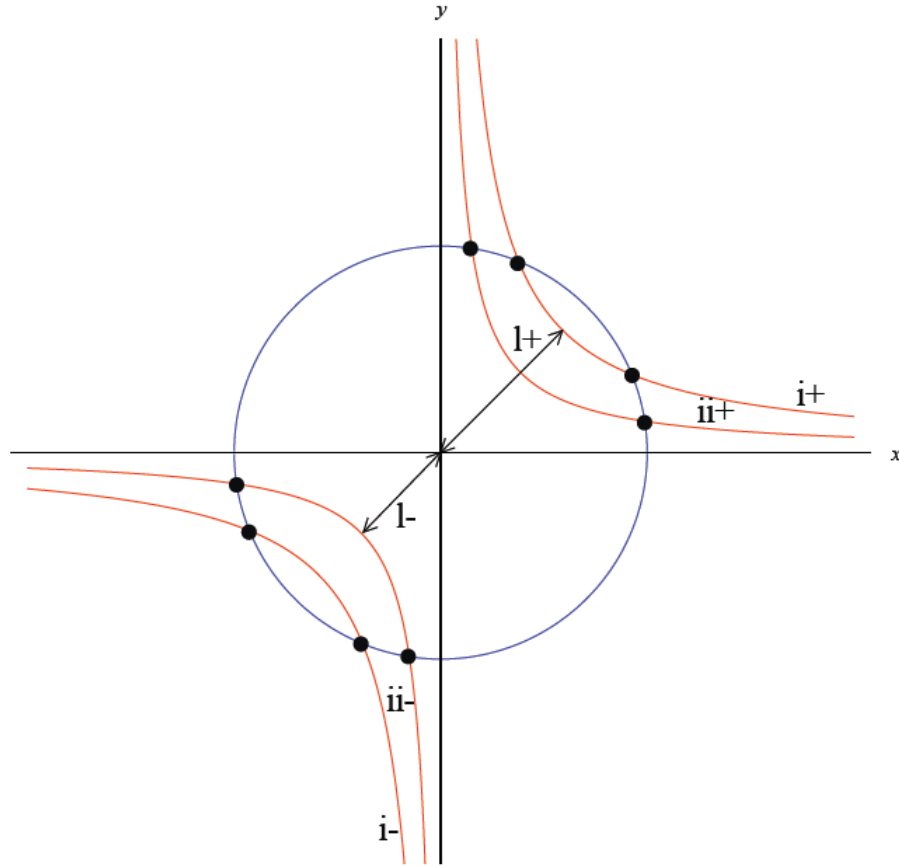


Figura 6.8: Intersecção entre as curvas das soluções das equações (6.36), em azul, e (6.37), em vermelho, para o caso  $d < f$

podem ser conferidos no Apêndice C, sendo aqui expostos os resultados:

### Trechos $i_+$ e $i_-$

Para os trechos  $i_+$  e  $i_-$  encontramos as seguintes soluções:

$$i_+ \rightarrow (x_{++}, y_{++}) \text{ e } (x_{+-}, y_{+-}) \quad \text{e} \quad i_- \rightarrow (-x_{++}, -y_{++}) \text{ e } (-x_{+-}, -y_{+-}), \quad (6.44)$$

com

$$x_{++} = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2(f+d)}{r^2}\right)^2}} \quad x_{+-} = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2(f+d)}{r^2}\right)^2}}, \quad (6.45)$$

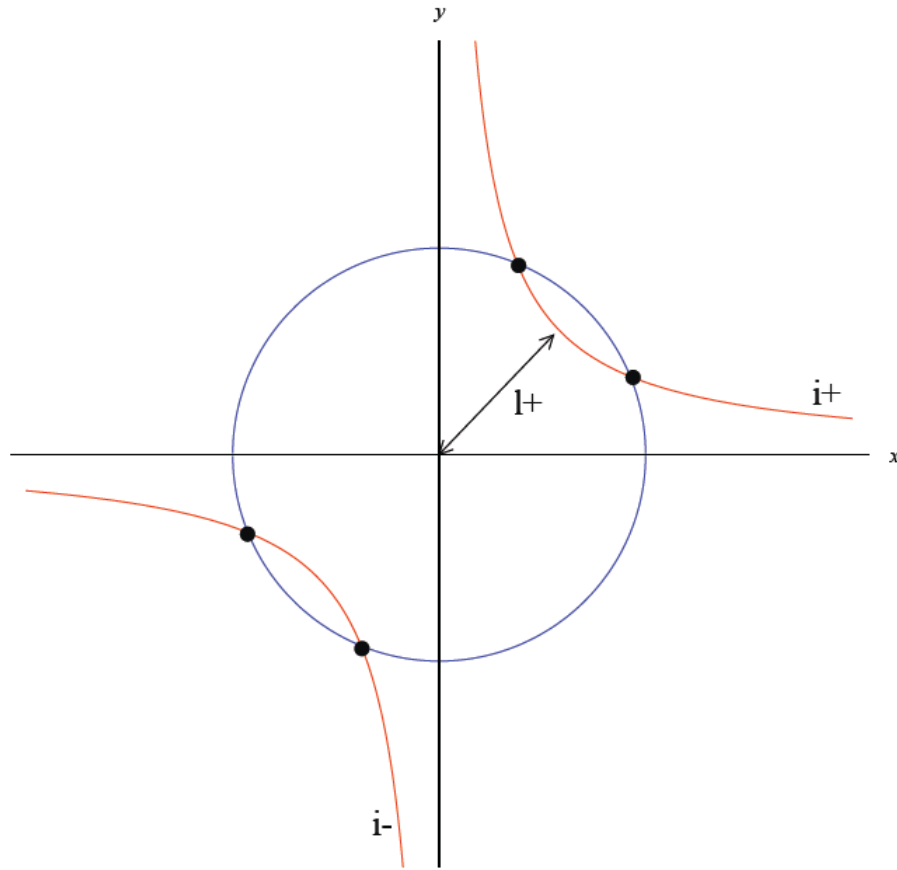


Figura 6.9: Intersecção entre as curvas das soluções das equações (6.36), em azul, e (6.37), em vermelho, para o caso  $d = f$

e

$$y_{++} = \frac{f+d}{x_{++}} \quad y_{+-} = \frac{f+d}{x_{+-}}. \quad (6.46)$$

Essas soluções existem para  $z_{min} \leq z \leq z_{max}$  com

$$z_{min} = \text{Max} [\sqrt{1-R^2} - \sqrt{1+2d}, -\sqrt{1-R^2} - \sqrt{1-2d}] ,$$

$$z_{max} = -\sqrt{1-R^2} + \sqrt{1-2d}. \quad (6.47)$$

**Trechos  $ii_+$  e  $ii_-$** 

Para os trechos  $ii_+$  e  $ii_-$  as soluções são:

$$ii_+ \rightarrow (x_{-+}, y_{-+}) \text{ e } (x_{--}, y_{--}) \text{ e } ii_- \rightarrow (-x_{-+}, -y_{-+}) \text{ e } (-x_{--}, -y_{--}), \quad (6.48)$$

com

$$x_{-+} = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2(f-d)}{r^2}\right)^2}} \quad x_{--} = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2(f-d)}{r^2}\right)^2}}, \quad (6.49)$$

e

$$y_{-+} = \frac{f-d}{x_{-+}} \quad y_{--} = \frac{f-d}{x_{--}}. \quad (6.50)$$

O intervalo de  $z$  que possui solução agora possui alguns condicionais. Teremos

$$z_{min} \leq z \leq z_{max}, \quad (6.51)$$

onde  $z_{max}$  e  $z_{min}$  dependem da relação entre  $f$  e  $d$  e de alguns condicionantes. Temos:

$$f < d$$

Para situações em que  $f < d$ , a condição de existência será:

$$R > \frac{1}{2} \left( \sqrt{1+2d} - \sqrt{1-2d} \right), \quad (6.52)$$

com limites:

$$z_{min} = \sqrt{1-R^2} - \sqrt{1-2d} \quad z_{max} = \text{Min} \left[ \frac{d}{\sqrt{1-R^2}}, \sqrt{1-R^2} + \sqrt{1-2d} \right]. \quad (6.53)$$

$$f > d$$

Para situações com  $f > d$ , temos a seguinte condição de existência:

$$R\sqrt{1 - R^2} > d, \quad (6.54)$$

com limites:

$$z_{min} = \frac{d}{\sqrt{1 - R^2}} \quad z_{max} = -\sqrt{1 - R^2} + \sqrt{1 + 2d}. \quad (6.55)$$

O limite superior de  $t$  depende apenas do emaranhamento  $d$ , e é dado por  $\sqrt{(1 + \sqrt{1 - 4d^2})} / 2$ .

Com isso em mãos, podemos efetuar o mesmo procedimento que o feito para  $t = 0$  e obter curvas que representam os estados que possuam um certo emaranhamento e um certo valor de  $t$ . Abaixo, mostramos alguns desses resultados.

Primeiro, vamos ver curvas com  $t = 0.6$  e emaranhamento aumentando progressivamente. A primeira curva é sobreposta a uma esfera de raio  $R$ , para deixar evidente o fato de as soluções se estenderem por essa esfera.

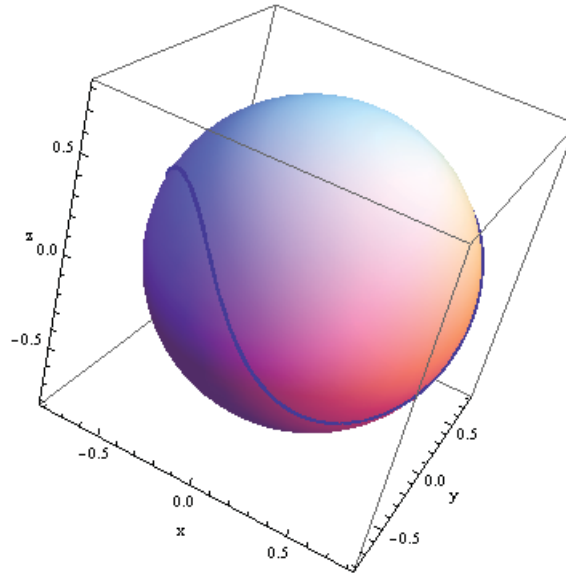


Figura 6.10: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9) apresentadas sobre uma esfera, com  $t = 0.6$  e  $d = 0$ .

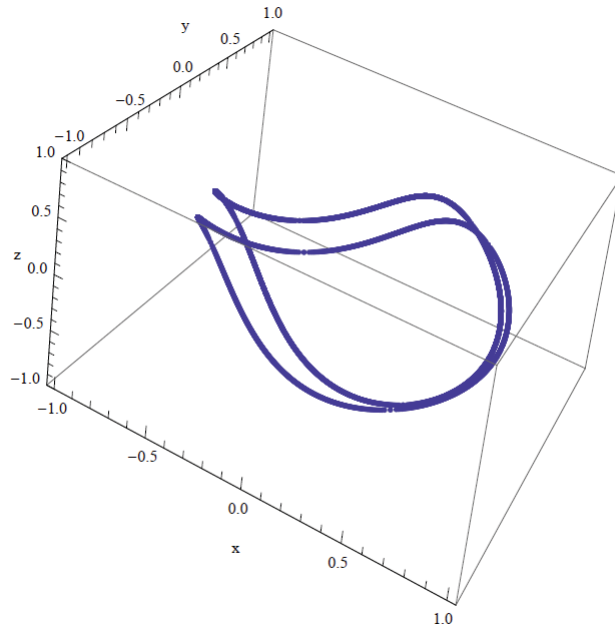


Figura 6.11: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.6$  e  $d = 0.1$ .

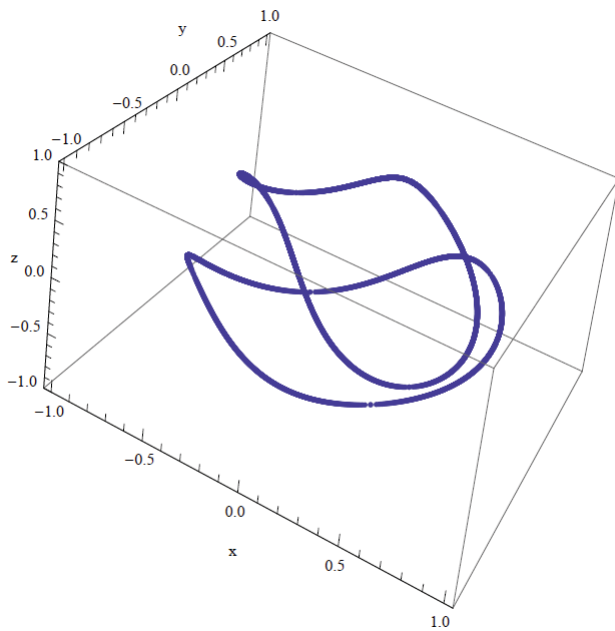


Figura 6.12: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.6$  e  $d = 0.3$ .



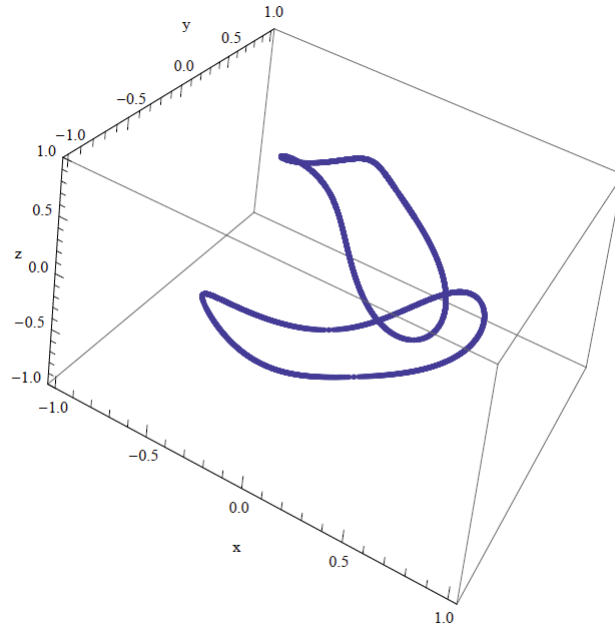


Figura 6.13: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.6$  e  $d = 0.45$ .

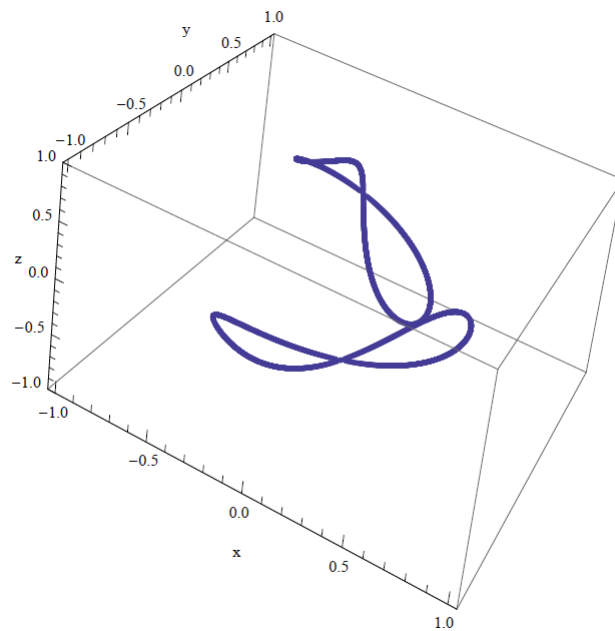


Figura 6.14: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.6$  e  $d = 0.48$ .

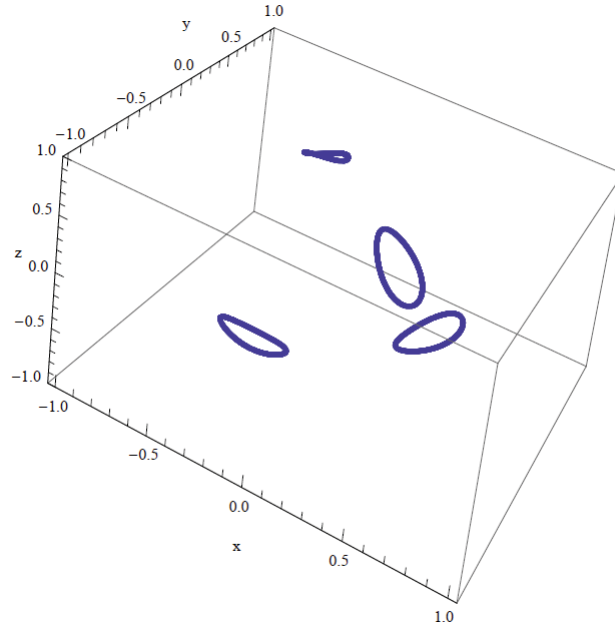


Figura 6.15: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.6$  e  $d = 0.49$ .

A primeira diferença que notamos nessas imagens em relação às figuras para  $t = 0$  é a quebra de simetria. Não temos mais simetria no eixo  $z$  e tampouco entre os quatro quadrantes do plano  $xy$ . Em acordo com as equações (6.36) e (6.37) e com as figuras de (6.7) à (6.9), observamos uma simetria entre quadrantes pares e ímpares. Isso fica evidente no fato de que fazendo  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  não alteramos as equações. Além disso, há outra simetria que pode ser observada nas imagens. Se pegarmos uma das curvas, girá-la de  $90^\circ$  e a invertermos no eixo  $z$ , obtemos a outra metade da solução. Isso também pode ser observado nas equações (6.36) e (6.37), que são invariantes pelas seguintes trocas:  $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z)$  ou  $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z)$ .

Pode-se notar também que, novamente, estados muito emaranhados tendem a  $x = y$ , porém agora não são estados de Bell, dado que um coeficiente,  $t$ , é fixo e diferente de 0.

Nas figuras (6.16), (6.17), (6.18), (6.19), (6.20) e (6.21) podemos ver outra série de representações de estados com o mesmo emaranhamento, porém com  $t = 0.2$ .

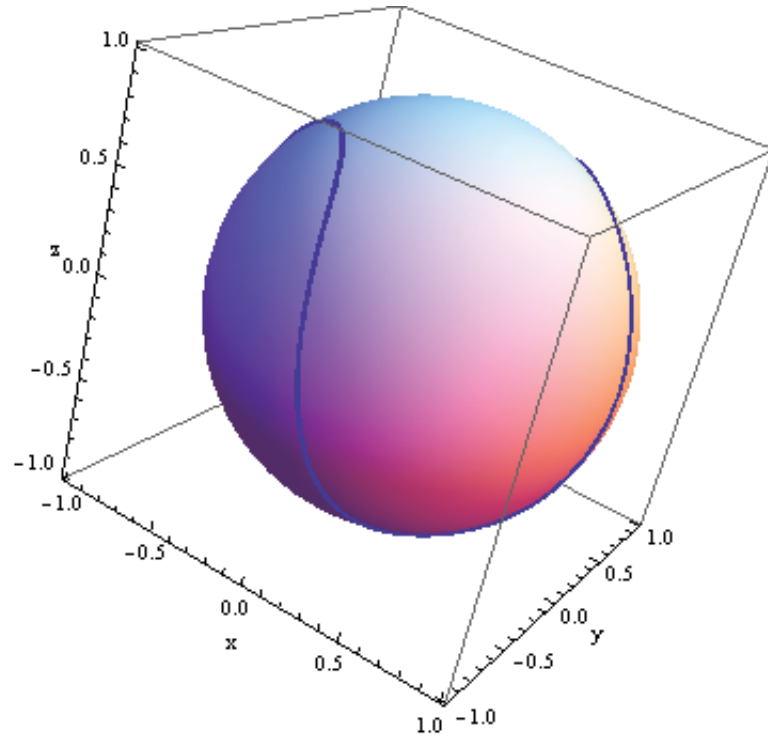


Figura 6.16: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9) apresentadas sobre uma esfera, com  $t = 0.2$  e  $d = 0$ .

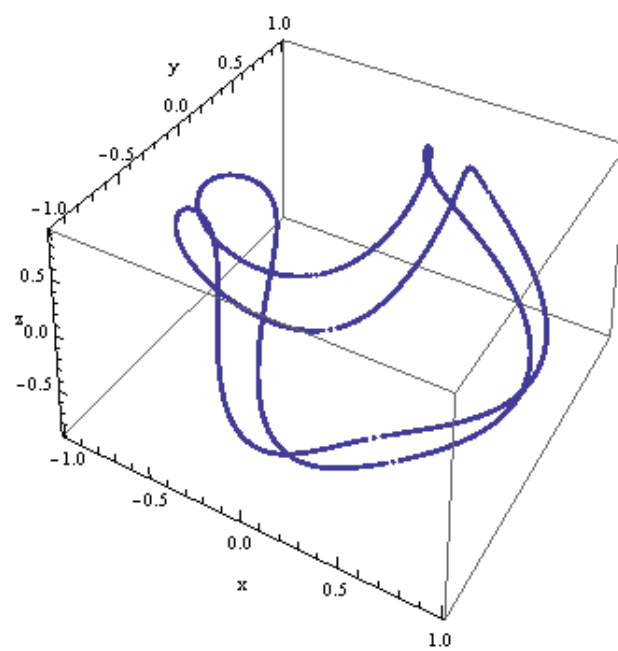


Figura 6.17: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.2$  e  $d = 0.1$ .

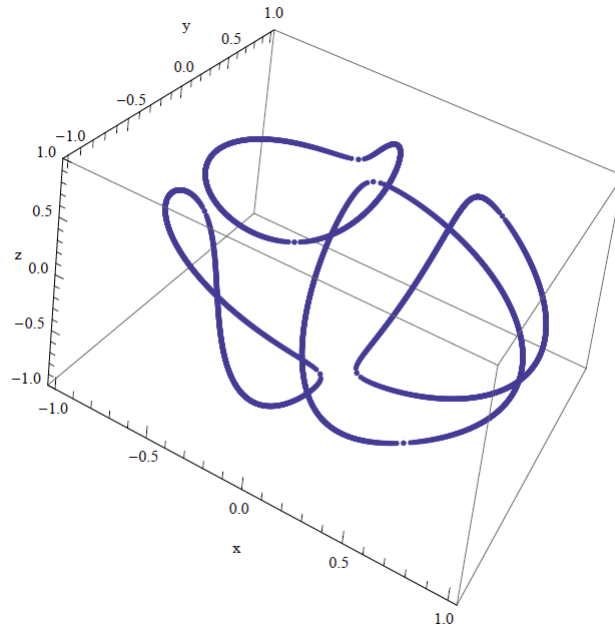


Figura 6.18: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.2$  e  $d = 0.2$ .

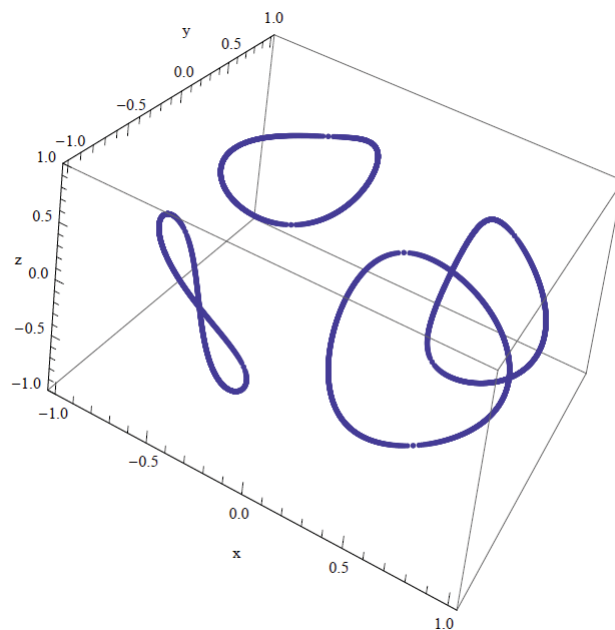


Figura 6.19: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.2$  e  $d = 0.3$ .

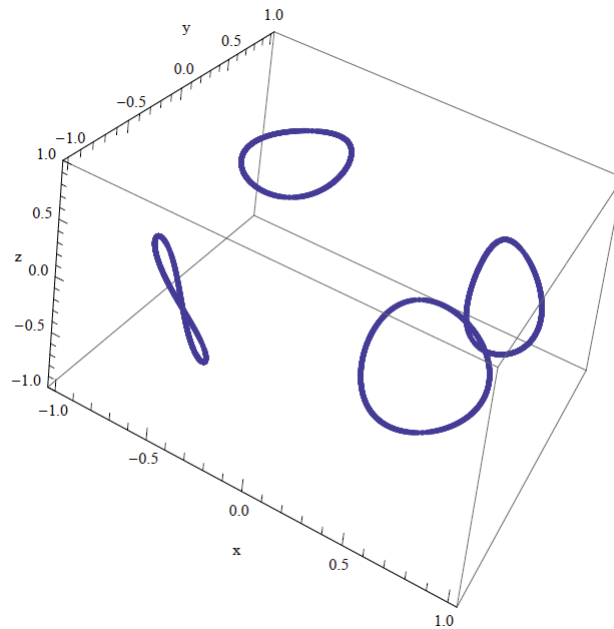


Figura 6.20: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.2$  e  $d = 0.45$ .

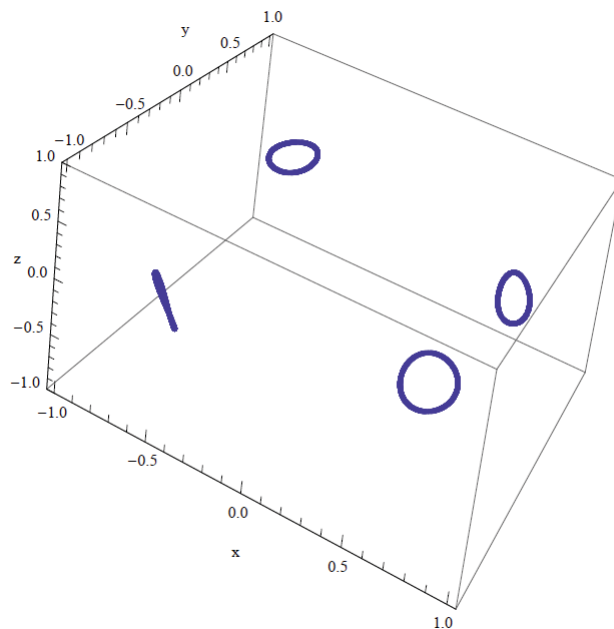


Figura 6.21: Soluções  $(x, y, z)$  para as equações (6.8) e (6.9), com  $t = 0.2$  e  $d = 0.48$ .

Podemos ver as mesmas simetrias que no caso  $t = 0.6$ , porém a dinâmica da mudança com o emaranhamento é um pouco diferente. O “laço” que observamos na figura (6.14) se forma mais cedo, e é consideravelmente maior (tanto mais levando em conta que a

esfera aqui utilizada possui maior raio). Novamente, para emaranhamento alto, os valores tendem a  $x = y$ .

## 6.4 Análise para $t < 0$

As análises foram todas feitas supondo-se  $0 \leq t \leq 1$ . Vamos analisar a situação para  $t$  negativo. Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 & \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ \Rightarrow \\ \left(xy - \sqrt{1 - R^2}z\right)^2 = d^2 & \quad \left(xy + \sqrt{1 - R^2}z\right)^2 = d^2. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Substituindo  $z' = -z$ , as equações (6.56) assumem a forma:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z'^2 &= 1, \\ \left(xy - \sqrt{1 - R^2}z'\right)^2 &= d^2. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Definindo agora,

$$r^2 = R^2 - z'^2 \quad f = \sqrt{1 - R^2}z', \quad (6.58)$$

(6.57) torna-se:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2, \\ (xy - f)^2 &= d^2. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Essas equações são idênticas a (6.36) e (6.37). Assim, todos os resultados obtidos até aqui aplicam-se para  $t < 0$ , sendo os resultados idênticos aos de  $t$ , com  $z- > -z$ .

## 6.5 Figuras de Emaranhamento

Com todas as curvas para todos os valores possíveis de  $t$  em mãos, podemos fazer  $t$  variar de  $t_{min}$  a  $t_{max}$ , com um certo  $\Delta t$  e sobrepor todas essas curvas em um mesmo espaço. Isso nos dará uma ideia de como se distribuem espacialmente estados com o mesmo emaranhamento. É importante que nos lembremos de destacar quando  $t \geq 0$  e quando  $t \leq 0$ , para que possamos associar a cada ponto um estado específico. Vamos também retomar as variáveis originais, isto é,  $c_{10} \equiv x$ ,  $c_{01} \equiv y$ ,  $c_{00} \equiv z$ ,  $c_{11} \equiv t$ ,  $d^2 \equiv \frac{C}{4}$ . Alguns resultados para  $c_{11} \geq 0$  podem ser vistos nas figuras (6.22), (6.23), (6.24) e (6.25).

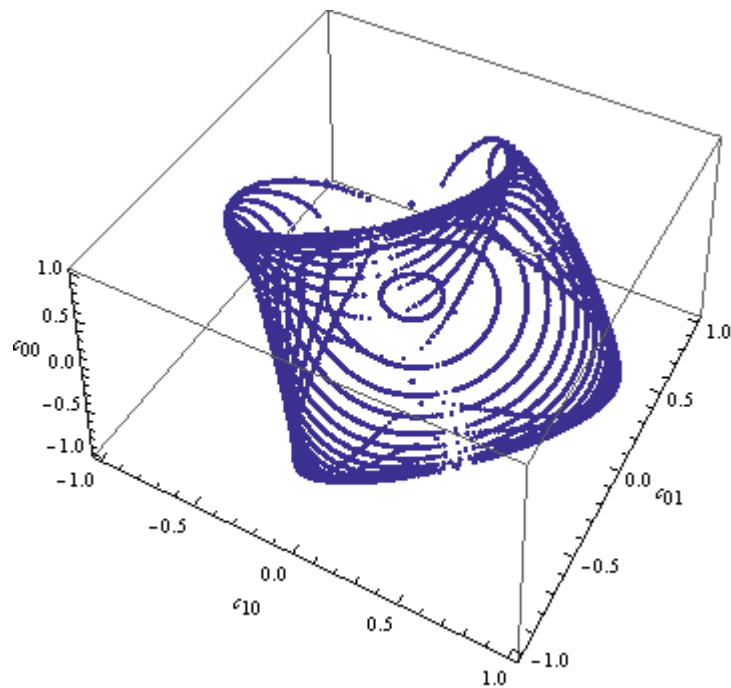


Figura 6.22: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo  $c_{11} \geq 0$  e determinado por normalização.

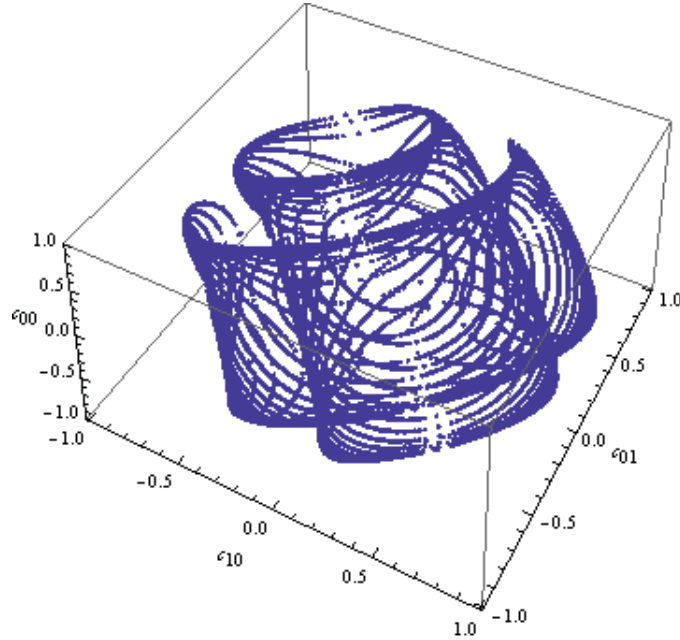


Figura 6.23: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0.2$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo  $c_{11} \geq 0$  e determinado por normalização.

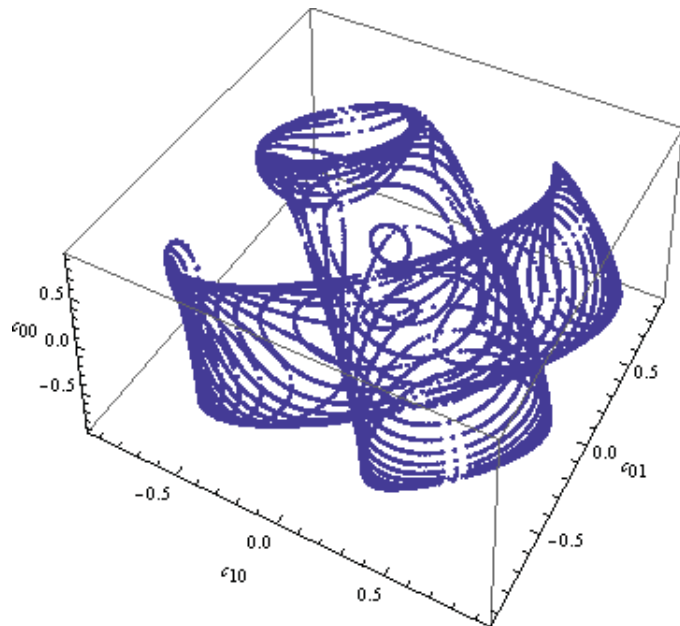


Figura 6.24: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0.5$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo  $c_{11} \geq 0$  e determinado por normalização.



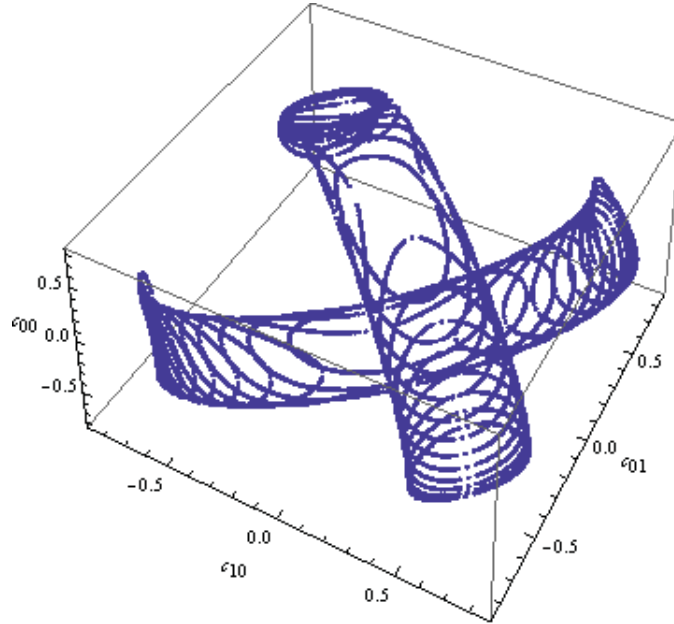


Figura 6.25: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0.8$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo  $c_{11} \geq 0$  e determinado por normalização.

As figuras todas apresentam as simetrias já observadas em soluções para  $t$  particulares. Podemos ver que de  $C = 0.2$  em diante, as figuras apresentam um aspecto de segmento de toro, como um cilindro derformado.

Para uma visualização mais completa, vamos mostrar agora os resultados incluindo também  $c_{11} \leq 0$ . As curvas azuis representam estados com  $c_{11} \geq 0$ , e as curvas roxas estados com  $c_{11} \leq 0$ . As figuras (6.26), (6.27) e (6.28) apresentam as imagens obtidas.

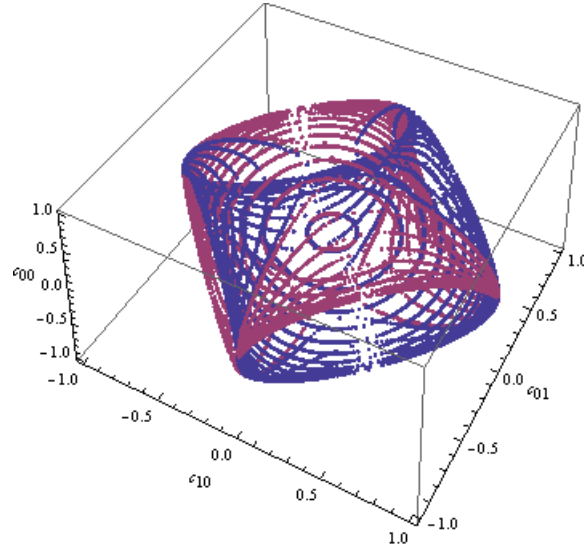


Figura 6.26: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo os estados com  $c_{11} \geq 0$  representados em azul e os estados com  $c_{11} \leq 0$  representados em roxo.

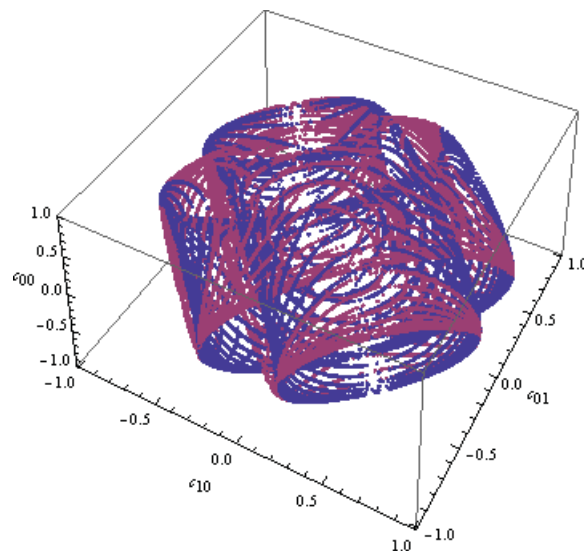


Figura 6.27: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0.2$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo os estados com  $c_{11} \geq 0$  representados em azul e os estados com  $c_{11} \leq 0$  representados em roxo.

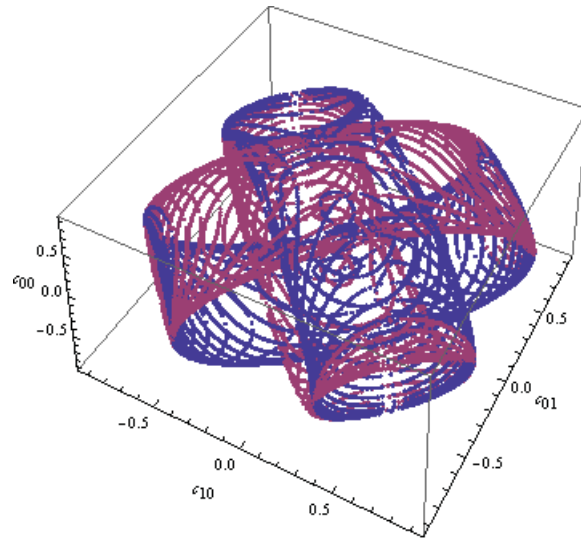


Figura 6.28: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0.5$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo os estados com  $c_{11} \geq 0$  representados em azul e os estados com  $c_{11} \leq 0$  representados em roxo.

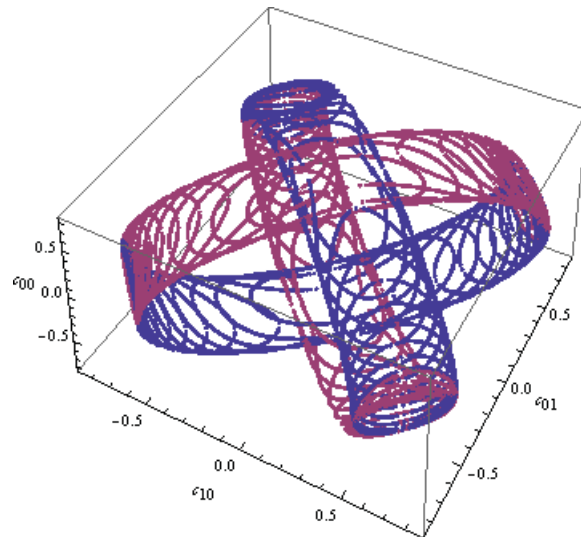


Figura 6.29: Representação de todos os estados 2x2 (reais) com  $C = 0.8$ . Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo os estados com  $c_{11} \geq 0$  representados em azul e os estados com  $c_{11} \leq 0$  representados em roxo.

Para deixar mais claro o que acontece, apresentaremos apenas um trecho da figura

(6.29) na figura (6.30). Podemos observar nessa figura que os segmentos de toro se interceptam, formando uma superfície contínua.

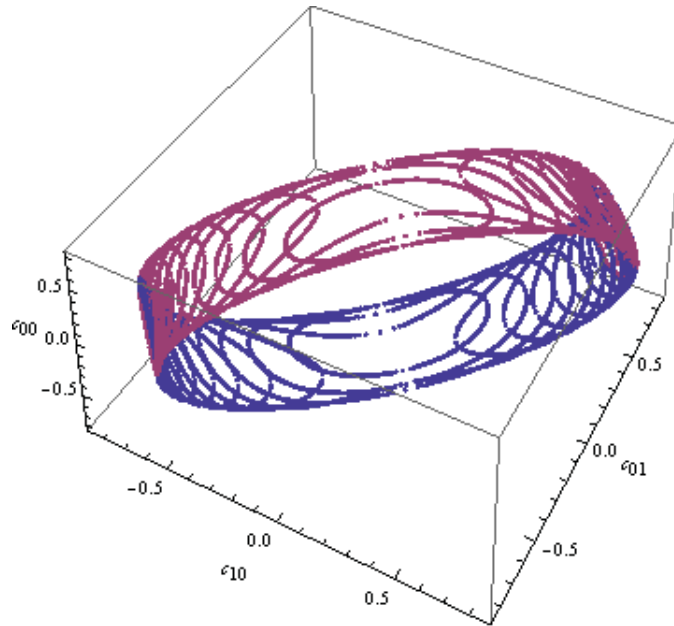


Figura 6.30: Representação de estados 2x2 (reais) com  $C = 0.8$ . Apenas um trecho da solução é apresentado, para clareza da imagem. Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ , sendo os estados com  $c_{11} \geq 0$  representados em azul e os estados com  $c_{11} \leq 0$  representados em roxo.

Como dito, precisamos definir o sinal de  $c_{11}$  para associarmos um ponto a um estado. Disso decorre que as figuras de emaranhamento geradas para determinado sinal de  $c_{11}$  nunca podem se tocar, já que o mesmo estado não pode possuir dois valores diferentes de emaranhamento. A figura (6.31) apresenta trechos da representação de estados com emaranhamento  $C = 0.2$  e  $C = 0.8$ . Todos os estados possuem  $c_{11} \geq 0$ . Podemos ver que o segmento de toro em roxo, representando estados com  $C = 0.8$ , posiciona-se dentro do segmento de todo com  $C = 0.2$ , representado em azul.

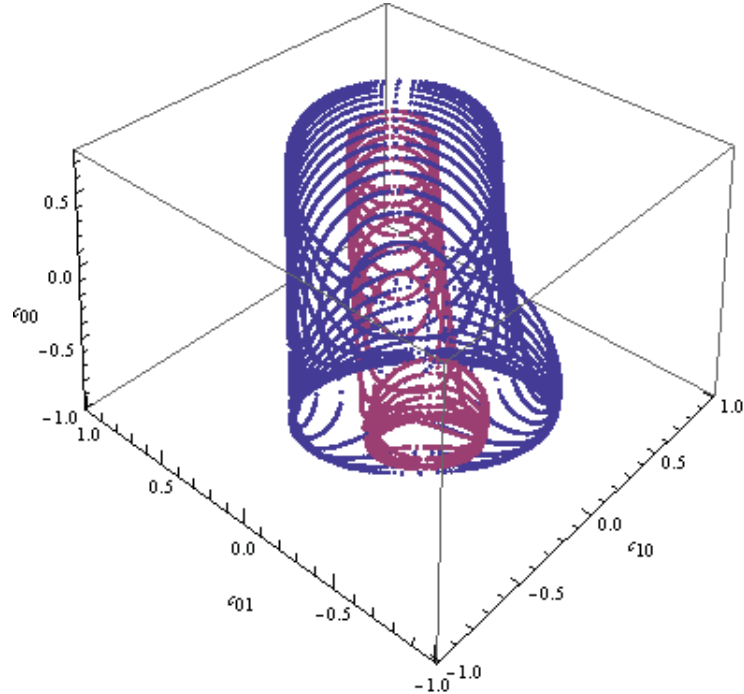


Figura 6.31: Representação de estados  $2 \times 2$  (reais) com  $C = 0.2$ , em azul, e com  $C = 0.8$ , em roxo. Apenas um trecho da solução é apresentado para cada valor de emaranhamento, para clareza da imagem. Os estados, escritos como  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ . Os estados apresentados aqui possuem  $c_{11} \geq 0$

Figuras geradas considerando diferentes sinais de  $c_{11}$  podem se interceptar. Analisando as equações (6.1) e (6.2), e assumindo todos os coeficientes reais, vemos, como já notado, que o ponto  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$  pode representar tanto o estado  $(c_{10}, c_{01}, c_{00}, c_{11})$  quanto o estado  $(c_{10}, c_{01}, c_{00}, -c_{11})$ . Esses estados, a princípio, tem emaranhamento diferente um do outro. Dessa maneira, o mesmo ponto  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$  pode aparecer em duas figuras representando estados com emaranhamento diferentes. A figura (6.31) apresenta trechos da representação de estados com emaranhamento  $C = 0.2$  e  $c_{11} \geq 0$  em azul, e estados com emaranhamento  $C = 0.8$  e  $c_{11} \leq 0$  em roxo. Como vemos, os segmentos de toros se interceptam. A intersecção é formada por pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$  que respeitam as condições:  $(c_{10}c_{01} - c_{00}c_{11})^2 = 0.2$  e  $(c_{10}c_{01} + c_{00}c_{11})^2 = 0.8$ .

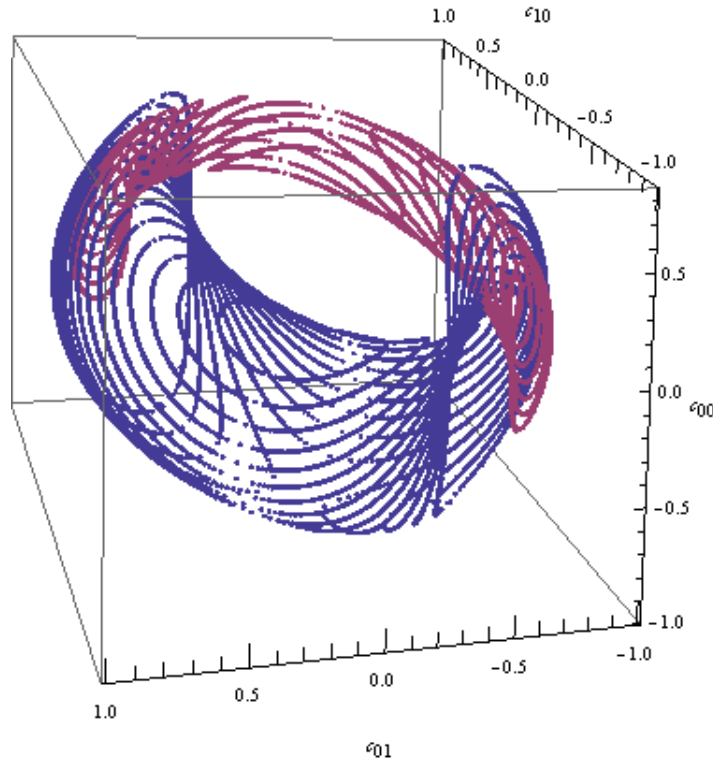


Figura 6.32: Representação de estados 2x2 (reais) descritos por  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ . Os estados são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ . Estados com  $C = 0.2$  e  $c_{11} \geq 0$  são representados em azul, e estados com  $C = 0.8$  e  $c_{11} \leq 0$  são representados em roxo. Apenas um trecho das soluções é apresentado para cada valor de emaranhamento, para clareza da imagem.

### 6.5.1 Distância Geométrica e Distância de Emaranhamento

Dado um estado 2x2 descrito por (6.1), com coeficientes todos reais, podemos calcular rapidamente seu valor de  $C$ . Com esse valor em mãos, é fácil achar sua medida de emaranhamento a partir da distância, medida descrita na seção (3.1). Como visto na mesma seção, dado que um estado possua emaranhamento  $C$ , sua Distância de Emaranhamento será  $DE(|\Psi\rangle) = 2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - C}}$ . Podemos nos perguntar se essa Distância de Emaranhamento tem alguma correspondência com a distância geométrica entre os pontos que utilizamos para representar estados em um espaço tridimensional.

A Distância de Emaranhamento, para  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , é

dada pela minimização da função

$$DE(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) = |c_{00} - d_{00}|^2 + |c_{10} - d_{10}|^2 + |c_{01} - d_{01}|^2 + |c_{11} - d_{11}|^2, \quad (6.60)$$

onde  $(d_{00}, d_{10}, d_{01}, d_{11})$  descreve um estado não emaranhado  $|\Phi\rangle = d_{00}|00\rangle + d_{10}|10\rangle + d_{01}|01\rangle + d_{11}|11\rangle$ .

Definimos aqui a Distância Geométrica como a minimização da distância, no espaço tridimensional, entre um ponto que represente o estado  $|\Psi\rangle$  e o ponto que represente o estado  $|\Phi\rangle$  não emaranhado mais próximo. Essa é a distância que podemos medir entre os pontos de nossas figuras de emaranhamento. Mantemos  $c_{11}$  como o coeficiente que não aparece e é determinado a partir dos outros três via normalização. Lembramos também que precisamos conhecer seu sinal para associar corretamente estados a pontos. Utilizando os mesmos  $|\Psi\rangle$  e  $|\Phi\rangle$  definidos há pouco, a Distância Geométrica será dada pela minimização da função

$$DG(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) = |c_{00} - d_{00}|^2 + |c_{10} - d_{10}|^2 + |c_{01} - d_{01}|^2. \quad (6.61)$$

A figura (6.25) representa todos os estados com  $C = 0.8$  e  $c_{11} \geq 0$ . A Distância de Emaranhamento é a mesma para todos os estados representados nessa figura, e dada por  $DE(|\Psi\rangle) = 0.3$ . A distância, tal como definida em (6.60), entre cada um dos estados e o estado não emaranhado mais próximo será essa. O objetivo aqui é observar se o mesmo ocorre com a Distância Geométrica. Estados com mesmo emaranhamento apresentarão a mesma Distância Geométrica até estados não emaranhados? Um modo de observar isso é colocar em um mesmo espaço tridimensional duas figuras de emaranhamento: uma de estados emaranhados e uma de estados não emaranhados. Feito isso, podemos observar a distância entre elas. A figura (6.33) apresenta as figuras de emaranhamento para  $C = 0.8$ , formada por curvas azuis, e  $C = 0$ , a superfície verde. As duas figuras são feitas para estados com  $c_{11} \geq 0$ .

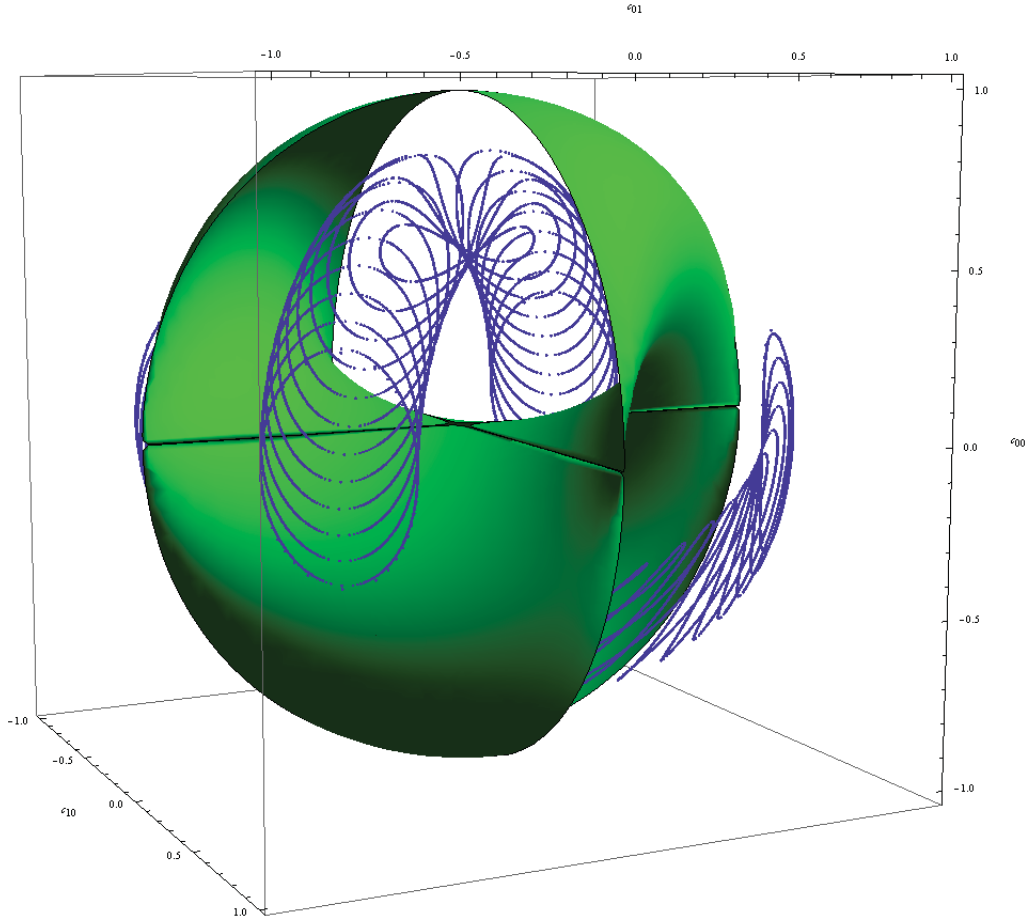


Figura 6.33: Representação de estados  $2 \times 2$  (reais) descritos por  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ . Os estados são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ . Estados reais com  $C = 0$  são representados pela superfície verde, e estados com  $C = 0.8$ , pelas curvas em azul. Em ambos os casos temos  $c_{11} \geq 0$

Podemos observar que a parte superior, próxima a  $(x, y) = (0, 0)$ , do segmento de toro que representa estados com  $C = 0.8$  está mais próxima da superfície que representa estados não emaranhados do que a parte inferior, apontando incompatibilidade entre a Distância de Emaranhamento e a Distância Geométrica.

Ao sobrepor uma figura de emaranhamento com  $c_{11} \leq 0$  e uma com  $c_{11} \geq 0$ , a incompatibilidade entre a Distância de Emaranhamento e a Distância Geométrica fica ainda mais evidente. A figura (6.34) apresenta novamente as figuras de emaranhamento para  $C = 0.8$ , representada por curvas azuis, e  $C = 0$ , representada pela superfície verde. Agora porém, os estados com  $C = 0.8$  possuem  $c_{11} \geq 0$  e os estados com  $C = 0$  possuem



$$c_{11} \leq 0.$$

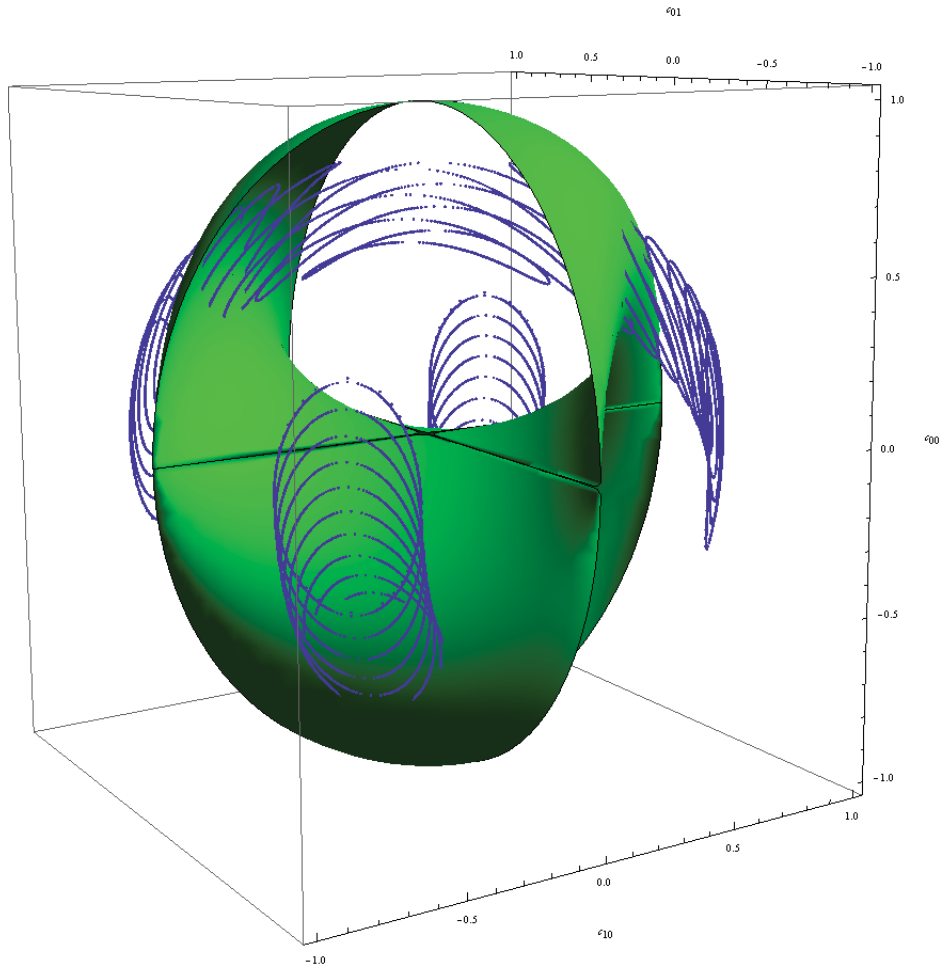


Figura 6.34: Representação de estados 2x2 (reais) descritos por  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ . Os estados são representados pelos pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$ . Estados reais com  $C = 0$  são representados pela superfície verde e possuem  $c_{11} \leq 0$ . Estados com  $C = 0.8$  são representados pelas curvas em azul e possuem  $c_{11} \geq 0$

Como já observado anteriormente, superfícies formadas por estados com os coeficientes  $c_{11}$  de sinais opostos cruzam-se (Figura 6.32). Assim, embora todos os pontos pertencentes às curvas azuis possuam a mesma Distância de Emaranhamento, a Distância Geométrica até o estado não emaranhado mais próximo chega a zero para alguns estados. Dessa forma, fica claro que embora a Distância de Emaranhamento seja uma boa medida de emaranhamento, o mesmo não ocorre para a Distância Geométrica.

## Conclusão

Começamos nosso trabalho notando uma relação, construída a partir dos coeficientes da função de onda, que garante que estados 2x2 sejam separáveis. Propusemos, a partir dessa relação, uma grandeza que mede o emaranhamento de estados não separáveis. Nomeamos essa grandeza como  $C$  e a comparamos, numérica e analiticamente, com a Concorrência, Entropia de von Neumann e uma medida baseada na distância de um estado emaranhado até o não emaranhado mais próximo.

Em seguida, a partir desse caso simples, ampliamos  $C$  para estados puros de qualquer dimensionalidade. Comparamos novamente sua relação com as citadas medidas e demonstramos que  $C$  atende aos requisitos básicos que se espera de uma medida de emaranhamento:  $C(|\Psi\rangle) = 0$  apenas para estados separáveis e uma mudança de base em um dos subsistemas não altera  $C$ .

Dando prosseguimento, verificamos que para sistemas de  $n$  qubits, a medida proposta,  $C$ , é idêntica ao Emaranhamento Global, proposto por Meyer e Wallach [25]. Essa equivalência foi demonstrada, e também nos utilizamos da elegante notação utilizada por eles para reformular  $C$  em seus termos. Dessa forma, ficou claro  $C$  como uma espécie de generalização do Emaranhamento Global para dimensões maiores.

Trabalhamos a relação descoberta por Brennen [26], que conecta o Emaranhamento Global à média da Entropia Linear entre cada partícula e o resto do sistema. Demonstramos que a relação permanecia válida para dimensões maiores do que a de sistemas de  $n$  qubits. Isso elucidou a interpretação física de  $C$ : assim como o Emaranhamento Global,

$C$  é uma média do emaranhamento de cada um dos subsistemas com o resto do sistema.

Por último, fizemos um trabalho geométrico. Podemos associar um estado descrito pela função de onda  $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , com todos os coeficientes reais, a um ponto do espaço tridimensional. Para isso, basta sabermos o sinal de  $c_{11}$ , e assim, construímos uma relação unívoca entre os pontos  $(c_{10}, c_{01}, c_{00})$  e um determinado estado quântico. Associando cada ponto de um espaço tridimensional a um estado, fomos atrás das curvas que possuíam estados com mesmo emaranhamento, para com elas formar estruturas tridimensionais representando esses estados. Em busca disso, analisamos a equação que define  $C$  para estados  $2 \times 2$  e a equação de normalização, abrindo-as e estudando suas diversas ramificações. Obtivemos com isso curvas onde podíamos notar o que acontecia com estados para diversos valores de emaranhamento. Na figura (6.6), por exemplo, vemos os estados estreitando-se ao redor de um estado de Bell. Calculando essas curvas para diversos parâmetros e as agrupando, obtivemos as estruturas que representavam todos os estados (de coeficientes reais) com determinado emaranhamento. Observamos que as figuras, para determinado sinal de  $c_{11}$ , são formadas por segmentos de toro (exceto para emaranhamento nulo). Com o sinal oposto de  $c_{11}$  obtém-se as mesmas imagens, mas espelhadas no plano  $(c_{10}, c_{01})$ . Unindo as duas, forma-se uma superfície contínua. Constatamos que figuras com o mesmo sinal de  $c_{11}$  nunca se interceptam, embora o mesmo não aconteça para figuras com sinais opostos de  $c_{11}$ . Constatamos também que embora a medida de Distância de Emaranhamento descrita no terceiro capítulo seja uma boa medida, uma medida geométrica tridimensional, baseada na distância entre os pontos que representam estados em nossa visualização geométrica, não é funcional.

Uma possibilidade de trabalho futuro é aplicar processo similar ao utilizado na primeira parte da dissertação (Capítulos 3 e 4) a estados mistos, em busca de relações entre os coeficientes do operador densidade que, ao menos para casos específicos, garanta a separabilidade do operador em matrizes dos sistemas individuais. Outra possibilidade é o aprofundamento do estudo dessas representação geométricas. Pode-se buscar meios para entender melhor as características das superfícies formadas por estados de mesmo emaranhamento, investigar se elas possuem uma forma geral e se essas estruturas já são catalogadas na matemática.

# Apêndice **A**

## Distância de um Estado Real a um Não Emaranhado

### A.1 Sistemas 2x2

Suponhamos  $|\Phi\rangle$  não emaranhado:

$$|\Phi\rangle = c_{00}e^{i\phi_{00}}|00\rangle + c_{10}e^{i\phi_{10}}|10\rangle + c_{01}e^{i\phi_{01}}|01\rangle + c_{11}e^{i\phi_{11}}|11\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Como ele é não emaranhado, satisfaz a seguinte condição:

$$c_{00}e^{i\phi_{00}}c_{11}e^{i\phi_{11}} = c_{10}e^{i\phi_{10}}c_{01}e^{i\phi_{01}}, \quad (\text{A.2})$$

que pode ser quebrada em

$$c_{00}c_{11} = c_{10}c_{01} \quad \text{e} \quad \phi_{00} + \phi_{11} = \phi_{10} + \phi_{01} + 2n\pi. \quad (\text{A.3})$$

Assim, se soubermos que um estado  $|\Phi\rangle$  é não emaranhado, o estado  $|\Psi\rangle$  dado por:

$$|\Phi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle, \quad (\text{A.4})$$

também o será, já que ele é idêntico ao estado  $|\Phi\rangle$ , porém com  $\phi_{00} = \phi_{10} = \phi_{01} = \phi_{11} = 0$ .

A distância entre um estado qualquer,  $|\zeta\rangle$ , com coeficientes reais, e  $|\Phi\rangle$  é dada por:

$$D(|\Phi\rangle, |\zeta\rangle) = \sum |d_{ij} - c_{ij}e^{i\phi_{ij}}| \quad i, j = 0, 1 \quad c_{ij}, d_{ij} \in \mathfrak{R}. \quad (\text{A.5})$$

Agora, vamos analisar o termo da soma.

$$\begin{aligned} |d - ce^{i\phi}|^2 &= (d - ce^{i\phi})(d - ce^{-i\phi}) \\ &= d^2 - dce^{-i\phi} - dce^{i\phi} + c^2 \\ &= d^2 - 2dc \cos \phi + c^2 \\ &\geq d^2 - 2dc + c^2 \\ &\geq |d - c|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O termo que aparece ao final é o que apareceria se tivéssemos feito o cálculo com  $\phi = 0$ , ou seja, houvéssemos calculado a distância entre  $|\zeta\rangle$  e  $|\Psi\rangle$ . Assim, retomando  $|\Phi\rangle$  e  $|\Psi\rangle$  definidas anteriormente, temos que a distância de uma função de onda real qualquer para ela respeita o seguinte:

$$D(|\Psi\rangle, |\zeta\rangle) \leq D(|\Phi\rangle, |\zeta\rangle). \quad (\text{A.7})$$

Portanto, dada uma função de onda  $|\zeta\rangle$  com coeficientes reais, a função de onda não emaranhada mais próxima também terá apenas coeficientes reais. Para sistemas de maior dimensão, a análise é idêntica.

## Relação entre Emaranhamento Global e a Entropia Linear

Vamos demonstrar aqui a relação entre a Entropia Linear e o Emaranhamento Global, de Meyer e Wallach. Para isso, abriremos os cálculos indicados por Brennen [26]. Começemos utilizando as mesmas definições que Brennen utiliza. Para a Medida  $Q$  (??), temos:

$$Q(|\Psi\rangle) = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^n D(|\tilde{u}^k\rangle, |\tilde{v}^k\rangle), \quad (\text{B.1})$$

com  $|\tilde{u}^k\rangle$  e  $|\tilde{v}^k\rangle$  vetores em  $C^{2N-2}$  não normalizados e obtidos via a seguinte projeção no  $k$ -ésimo qbit:

$$|\Psi\rangle = |0_k\rangle \otimes |\tilde{u}^k\rangle + |1_k\rangle \otimes |\tilde{v}^k\rangle. \quad (\text{B.2})$$

A função  $D(|\tilde{u}^k\rangle, |\tilde{v}^k\rangle)$ , como visto, mede uma forma de distância entre os vetores  $|\tilde{u}^k\rangle$  e  $|\tilde{v}^k\rangle$ , e é obtida a partir do seguinte produto vetorial generalizado:

$$D(|\tilde{u}^k\rangle, |\tilde{v}^k\rangle) = \sum_{i < j} \|\tilde{u}_i^k \tilde{v}_j^k - \tilde{u}_j^k \tilde{u}_i^k\|^2. \quad (\text{B.3})$$

$Q(|\Psi\rangle)$  é invariante sob transformações unitárias locais [25], portanto, podemos mudar a base de  $|\Psi\rangle$  sem que  $Q$  se altere. Vamos fazer a decomposição de Schmidt sobre a divisão do estado entre o qubit  $k$  e o resto do sistema. Essa decomposição sempre pode ser feita sobre estados puros e consiste em escrever um estado puro de um sistema consituído pelos

subsistemas  $A$  e  $B$  na forma  $|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle$ , sendo  $|i_A\rangle$  e  $|i_B\rangle$  estados ortonormais e  $\sum_i \lambda_i^2 = 1$  [42], [43]. Fazendo a decomposição, obtemos:

$$|\Psi\rangle = |\bar{0}_k\rangle \otimes |\tilde{x}^k\rangle + |\bar{1}_k\rangle \otimes |\tilde{y}^k\rangle. \quad (\text{B.4})$$

Como foi feita a decomposição de Schmidt, sabemos que  $\langle \tilde{x}^k | \tilde{y}^k \rangle = 0$ , e  $\{|\bar{0}_k\rangle, |\bar{1}_k\rangle\}$  é relacionado a  $\{|0_k\rangle, |1_k\rangle\}$  por uma transformação unitária  $U^k$ . Vamos calcular  $\text{tr}[\rho_k^2]$ , a pureza do qubit  $k$ . A partir da equação (B.4), temos:

$$\begin{aligned} \rho &= |\bar{0}_k\rangle\langle\bar{0}_k| \otimes |\tilde{x}^k\rangle\langle\tilde{x}^k| + |\bar{0}_k\rangle\langle\bar{1}_k| \otimes |\tilde{x}^k\rangle\langle\tilde{y}^k| \\ &+ |\bar{1}_k\rangle\langle\bar{0}_k| \otimes |\tilde{y}^k\rangle\langle\tilde{x}^k| + |\bar{1}_k\rangle\langle\bar{1}_k| \otimes |\tilde{y}^k\rangle\langle\tilde{y}^k|. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Tirando o traço parcial, obtemos:

$$\rho_k = \text{tr}_k[\rho] = |\tilde{x}^k\rangle\langle\tilde{x}^k| + |\tilde{y}^k\rangle\langle\tilde{y}^k|, \quad (\text{B.6})$$

$$\rho_k^2 = \rho_k. \quad (\text{B.7})$$

E por fim:

$$\text{tr}[\rho_k^2] = \langle \tilde{x}_k | \tilde{x}_k \rangle^2 + \langle \tilde{y}_k | \tilde{y}_k \rangle^2. \quad (\text{B.8})$$

Vamos guardar esse resultado e ir por outro caminho. Pela invariância de  $D$  sob transformações unitárias [25], temos:

$$D(|\tilde{u}^k\rangle, |\tilde{v}^k\rangle) = D(|\tilde{x}^k\rangle, |\tilde{y}^k\rangle). \quad (\text{B.9})$$

Dando prosseguimento, definimos o seguinte tensor antissimétrico:

$$M_k = |\tilde{x}^k\rangle\langle\tilde{y}^{*k}| - |\tilde{y}^k\rangle\langle\tilde{x}^{*k}|. \quad (\text{B.10})$$

A partir de agora, deduzimos o resultado desejado quebrando-o em passos.

**Passo 1**

$$D(|\tilde{x}^k\rangle, |\tilde{y}^k\rangle) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (M_k^\dagger)_{ij} (M_k)_{ji}. \quad (\text{B.11})$$

*Demonstração*

Vamos calcular o elemento  $(M_k)_{ij}$ . Para o operador  $|\tilde{x}^k\rangle\langle\tilde{y}^{*k}|$ , o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  é:

$$\tilde{x}_i^k (\tilde{y}_j^{*k})^*. \quad (\text{B.12})$$

Assim,

$$(M_k)_{ij} = \tilde{x}_i^k \tilde{y}_j^k - \tilde{x}_j^k \tilde{y}_i^k. \quad (\text{B.13})$$

Analogamente, para  $(M_k^\dagger)_{ji}$  obtemos:

$$(M_k^\dagger)_{ji} = \tilde{x}_i^{*k} \tilde{y}_j^{*k} - \tilde{x}_j^{*k} \tilde{y}_i^{*k} = (M_k)_{ij}^*, \quad (\text{B.14})$$

$\therefore$

$$(M_k)_{ij} (M_k^\dagger)_{ji} = |\tilde{x}_i^k \tilde{y}_j^k - \tilde{x}_j^k \tilde{y}_i^k|^2, \quad (\text{B.15})$$

e estendendo a soma a todos os índices, ficamos com

$$D(|\tilde{x}^k\rangle, |\tilde{y}^k\rangle) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (M_k^\dagger)_{ij} (M_k)_{ji}. \quad (\text{B.16})$$

**Passo 2**

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (M_k^\dagger)_{ij} (M_k)_{ji} = \frac{1}{2} \text{tr} [M_k^\dagger M_k]. \quad (\text{B.17})$$

*Demonstração*



Temos duas matrizes, A e B, ambas  $n \times n$ . Temos de mostrar que:

$$\sum_{i,j} a_{i,j} b_{j,i} = \text{tr}(AB). \quad (\text{B.18})$$

Um elemento da diagonal de AB é dado por:

$$(AB)_{ii} = \sum_j a_{ij} b_{ji}, \quad (\text{B.19})$$

e portanto,

$$\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji}. \quad (\text{B.20})$$

### Passo 3

$$\frac{1}{2} \text{tr} [M_k^\dagger M_k] = \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle. \quad (\text{B.21})$$

#### *Demonstração*

Temos,

$$M_k = |\tilde{x}^k\rangle \langle \tilde{y}^{*k}| - |\tilde{y}^k\rangle \langle \tilde{x}^{*k}|, \quad (\text{B.22})$$

$$M_k^\dagger = |\tilde{y}^{*k}\rangle \langle \tilde{x}^k| - |\tilde{x}^{*k}\rangle \langle \tilde{y}^k|, \quad (\text{B.23})$$

e portanto,

$$\begin{aligned} M_k^\dagger M_k &= (|\tilde{y}^{*k}\rangle \langle \tilde{x}^k| - |\tilde{x}^{*k}\rangle \langle \tilde{y}^k|) (|\tilde{x}^k\rangle \langle \tilde{y}^{*k}| - |\tilde{y}^k\rangle \langle \tilde{x}^{*k}|) \\ &= |\tilde{y}^{*k}\rangle \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \langle \tilde{y}^{*k}| + |\tilde{x}^{*k}\rangle \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle \langle \tilde{x}^{*k}|, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

assim,

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left[ M_k^\dagger M_k \right] &= \sum_i \langle i | \tilde{y}^{*k} \rangle \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \langle \tilde{y}^{*k} | i \rangle + \sum_i \langle i | \tilde{x}^{*k} \rangle \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle \langle \tilde{x}^{*k} | i \rangle \\
&= \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \sum_i \langle \tilde{y}^{*k} | i \rangle \langle i | \tilde{y}^{*k} \rangle + \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle \sum_i \langle \tilde{x}^{*k} | i \rangle \langle i | \tilde{x}^{*k} \rangle \\
&= 2 \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle,
\end{aligned} \tag{B.25}$$

e assim, decorre a eq.(B.21).

#### Passo 4

$$\langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle = \frac{1}{2} (1 - \text{tr}[\rho_k^2]). \tag{B.26}$$

#### *Demonstração*

Da eq.(2.10) temos,

$$\frac{1}{2} (1 - \text{tr}[\rho_k^2]) = \frac{1}{2} (1 - \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle^2 - \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle^2). \tag{B.27}$$

Agora, sabemos que  $\langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle + \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle = 1$  e seu quadrado também. Assim,

$$(\langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle + \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle)^2 = 1, \tag{B.28}$$

$$\langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle^2 + 2 \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle + \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle^2 = 1. \tag{B.29}$$

E dessa forma,

$$\langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle = \frac{1}{2} (1 - \langle \tilde{x}^k | \tilde{x}^k \rangle^2 - \langle \tilde{y}^k | \tilde{y}^k \rangle^2). \tag{B.30}$$

Portanto, recuperando todos os passos, temos:

$$D(|\tilde{x}^k\rangle, |\tilde{y}^k\rangle) = \frac{1}{2} (1 - \text{tr}[\rho_k^2]), \tag{B.31}$$

---

e utilizando esse resultado junto à eq. (B.1) obtemos:

$$Q = \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D(|\tilde{x}^k\rangle, |\tilde{y}^k\rangle) = 2 \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}[\rho_k^2] \right). \quad (\text{B.32})$$

Sendo assim demonstrada a relação desejada.

# Apêndice **C**

## Soluções e Limites para $t > 0$

Vamos demonstrar aqui como se chegam às soluções  $(x, y, z)$  e seus limites de existência para  $t > 0$ . A primeira condição que podemos notar, já nas figuras (6.7), (6.8) e (6.9) é que para que exista intersecção entre (6.36) e (6.37), é necessário:

$$\begin{aligned} r &\geq \sqrt{2(f+d)} && \text{soluções } ii \text{ e } i, \\ r &\geq \sqrt{2|f-d|} && \text{solução } ii. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Notado isso, vamos para as soluções.

### C.1 Soluções

Partindo de (6.37), temos:

$$\begin{aligned} (xy - f) &= \pm d, \\ xy &= f \pm d && y = \frac{f \pm d}{x}. \end{aligned}$$

Definimos então,

$$y_+ = \frac{f+d}{x} \quad y_- = \frac{f-d}{x}. \tag{C.2}$$

Agora, de (6.36), temos:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2, \\x^2 + \frac{(f \pm d)^2}{x^2} &= r^2, \\x^4 - x^2 r^2 + (f \pm d)^2 &= 0.\end{aligned}$$

E assim, para  $x$  temos:

$$x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2(f \pm d)}{r^2}\right)^2}}. \quad (\text{C.3})$$

Ou seja, são oito possíveis  $x$ , como esperado. Para organizar nossa solução, vamos definir:

$$\begin{aligned}x_{++} &= \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2(f+d)}{r^2}\right)^2}}, \\x_{+-} &= \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2(f+d)}{r^2}\right)^2}}, \\x_{-+} &= \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2(f-d)}{r^2}\right)^2}}, \\x_{--} &= \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2(f-d)}{r^2}\right)^2}}.\end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

O primeiro + do índice, como vemos em (6.37), indica se em nossa solução aparece  $(f+d)$  ou  $(f-d)$ . Para  $y$ , temos então:

$$y_{\pm\sigma} = \frac{f \pm d}{x_{\pm\sigma}}. \quad (\text{C.5})$$

Podemos agora destacar a solução de cada trecho:

$$i_+ \Rightarrow (x_{++}, y_{++}) \text{ e } (x_{+-}, y_{+-}),$$

$$i_- \Rightarrow (-x_{++}, -y_{++}) \text{ e } (-x_{+-}, -y_{+-}),$$

$$ii_+ \Rightarrow (x_{-+}, y_{-+}) \text{ e } (x_{--}, y_{--}),$$

$$ii_- \Rightarrow (-x_{-+}, -y_{-+}) \text{ e } (-x_{--}, -y_{--}).$$

(C.6)

## C.2 Determinação da variação de $z$

Vamos determinar, para cada  $t$ , o intervalo de variação de  $z$  que possua soluções. Lembro aqui que a análise está sendo feita para  $0 \leq t \leq 1$ . Dado que  $t$  é fixo,  $R$  também o é. Sendo  $z$  igualmente fixado, temos de (6.34) e (6.35) que  $f$  e  $r$  também são fixos. Assim, temos:

### Solução i

De (C.1),

$$r \geq \sqrt{2(f+d)},$$

$$r^2 \geq 2(f+d),$$

$$R^2 - z^2 \geq 2d + 2\sqrt{1-R^2}z.$$

Portanto, para

$$f(z) = z^2 + 2\sqrt{1-R^2}z - (R^2 - 2d), \quad (\text{C.7})$$

a condição de existência de solução é

$$f(z) \leq 0. \quad (\text{C.8})$$

$f(z)$  é uma parábola, com raízes

$$z_{\pm} = -\sqrt{1 - R^2} \pm \sqrt{1 - 2d}. \quad (\text{C.9})$$

Dessa maneira, soluções para  $i$  existem no intervalo:

$$-\sqrt{1 - R^2} - \sqrt{1 - 2d} \leq z \leq -\sqrt{1 - R^2} + \sqrt{1 - 2d}. \quad (\text{C.10})$$

### Solução ii

De (C.1),

$$r \geq \sqrt{2|f - d|},$$

$$r^2 \geq 2|f - d|,$$

$$R^2 - z^2 \geq 2|f - d|. \quad (\text{C.11})$$

Consequentemente, há dois casos possíveis:

**b-I** •  $f < d$

Nesse caso, temos:

$$R^2 - z^2 \geq 2d - 2f,$$

$$R^2 - z^2 \geq 2d - 2\sqrt{1 - R^2}z.$$

Assim, para

$$f(z) = z^2 - 2\sqrt{1 - R^2}z - (R^2 - 2d), \quad (\text{C.12})$$

precisamos de  $f(z) \leq 0$ .

Novamente, calculamos as raízes e encontramos:

$$f(z) = 0 \rightarrow z^2 - 2\sqrt{1-R^2}z - (R^2 - 2d),$$

$$z_{\pm} = \sqrt{1-R^2} \pm \sqrt{1-2d}, \quad (\text{C.13})$$

ou seja,

$$\sqrt{1-R^2} - \sqrt{1-2d} \leq z \leq \sqrt{1-R^2} + \sqrt{1-2d}. \quad (\text{C.14})$$

Porém, agora há uma segunda condição a ser verificada, a saber,  $f < d$ :

$$\sqrt{1-R^2}z < d,$$

$$z < \frac{d}{\sqrt{1-R^2}}. \quad (\text{C.15})$$

Assim, definindo:

$$z_0 = \frac{d}{\sqrt{1-R^2}},$$

$$z_- = \sqrt{1-R^2} - \sqrt{1-2d} \quad z_+ = \sqrt{1-R^2} + \sqrt{1-2d},$$

podemos fazer uma análise de sinais, vista pictoricamente na figura (C.1).

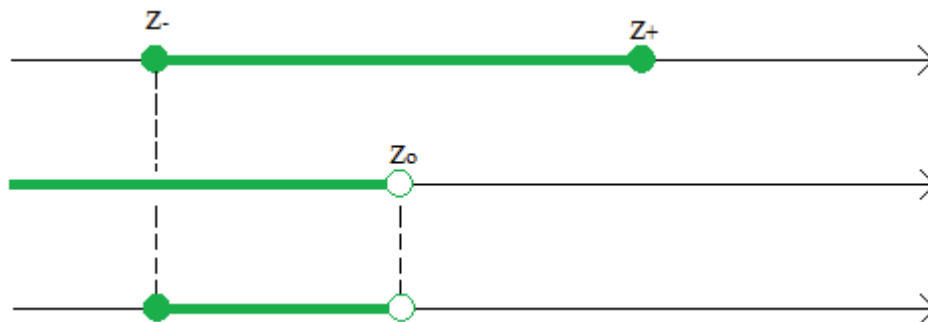


Figura C.1: Intervalo de Solução



Logo, para que haja solução do tipo **b-I**, precisamos que  $z > z_-$ , e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{\sqrt{1-R^2}} &> \sqrt{1-R^2} - \sqrt{1-2d}, \\ \frac{d}{\sqrt{1-R^2}} + \sqrt{1-2d} &> \sqrt{1-R^2}, \\ d + \sqrt{1-2d}\sqrt{1-R^2} &> 1-R^2, \\ 2d + 2\sqrt{1-2d}\sqrt{1-R^2} &> 2-2R^2, \\ -(1-2d) + 2\sqrt{1-2d}\sqrt{1-R^2} &> (1-R^2) - R^2, \\ R^2 &> (1-R^2) + (1-2d) - 2\sqrt{1-2d}\sqrt{1-R^2}, \\ R^2 &> \left(\sqrt{1-2d} - \sqrt{1-R^2}\right)^2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$R > \left| \sqrt{1-2d} - \sqrt{1-R^2} \right|. \quad (\text{C.16})$$

Com isso, chegamos a dois casos a serem analisados (para que  $z_0 > z_-$ )

- $R^2 > 2d$

Nesse caso, (C.16) nos dá:

$$\begin{aligned} R &> \sqrt{1-2d} - \sqrt{1-R^2}, \\ R + \sqrt{1-R^2} &> \sqrt{1-2d}, \\ R^2 + 1 - R^2 + 2R\sqrt{1-R^2} &> 1 - 2d, \\ R\sqrt{1-R^2} &> -d. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

A inequação (C.17) é sempre satisfeita, portanto, se  $R^2 > 2d$  é válido,  $z_0 > z_-$  também o será, e haverá soluções.

- $R^2 < 2d$

De (C.16),

$$\begin{aligned}
 R &> \sqrt{1 - R^2} - \sqrt{1 - 2d}, \\
 R + \sqrt{1 - 2d} &> \sqrt{1 - R^2}, \\
 R^2 + (1 - 2d) + 2R\sqrt{1 - 2d} &> 1 - R^2, \\
 R^2 + \sqrt{1 - 2d}R - d &> 0.
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

Novamente caímos em uma desigualdade de segundo grau. Definimos:

$$f(R) = R^2 + \sqrt{1 - 2d}R - d. \tag{C.19}$$

As raízes para  $R$  são:

$$R_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{1 - 2d} \pm \sqrt{1 + 2d} \right). \tag{C.20}$$

Assim, para  $f(R) > 0$ , podemos visualizar o intervalo de soluções como mostrado na figura (C.2).



Figura C.2: Intervalo de Solução

Porém,  $R_- < 0$ , e como estamos assumindo  $R > 0$ , esta parte da solução é jogada fora. Ficamos então com  $R > R_+$ , ou

$$R > \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 2d} - \sqrt{1 - 2d} \right). \tag{C.21}$$

Assim, para que tenhamos  $z_0 > z_-$ , no caso  $R^2 < 2d$ , temos que ter (C.21). Sendo

que, como

$$2d > \left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{1+2d} - \sqrt{1-2d} \right) \right)^2,$$

o caso  $R^2 > 2d$  também é coberto com essa condição.

Em resumo, a solução do tipo  $f < d$  existe se

$$R > \frac{1}{2} \left( \sqrt{1+2d} - \sqrt{1-2d} \right),$$

com  $z$  possuindo os seguintes limites:

$$\begin{aligned} z_- \leq z < z_0 \quad \text{se} \quad z_0 \leq z_+, \\ z_- \leq z \leq z_+ \quad \text{se} \quad z_0 > z_+. \end{aligned} \tag{C.22}$$

**b-II •  $f > d$**

Agora, de (C.11), temos:

$$\begin{aligned} R^2 - z^2 &\geq 2\sqrt{1-R^2}z - 2d, \\ z^2 + 2\sqrt{1-R^2}z - (R^2 + 2d) &\leq 0. \end{aligned} \tag{C.23}$$

Para

$$f(z) = z^2 + 2\sqrt{1-R^2}z - (R^2 + 2d), \tag{C.24}$$

precisamos de  $f(z) \leq 0$ .

Novamente,

$$\begin{aligned} f(z_{\pm}) &= 0, \\ z_{\pm} &= -\sqrt{1-R^2} \pm \sqrt{1+2d}. \end{aligned} \tag{C.25}$$

Logo,  $z$  obedece os seguintes limites:

$$-\sqrt{1-R^2} - \sqrt{1+2d} \leq z \leq -\sqrt{1-R^2} + \sqrt{1+2d}. \tag{C.26}$$

A condição de auto-consistência agora é

$$\begin{aligned} f &> d, \\ \sqrt{1-R^2}z &> d, \\ z &> \frac{d}{\sqrt{1-R^2}}. \end{aligned} \tag{C.27}$$

Definindo

$$z_0 = \frac{d}{\sqrt{1-R^2}}, \tag{C.28}$$

podemos analisar o intervalo de soluções, que pode ser visto na figura (C.3).

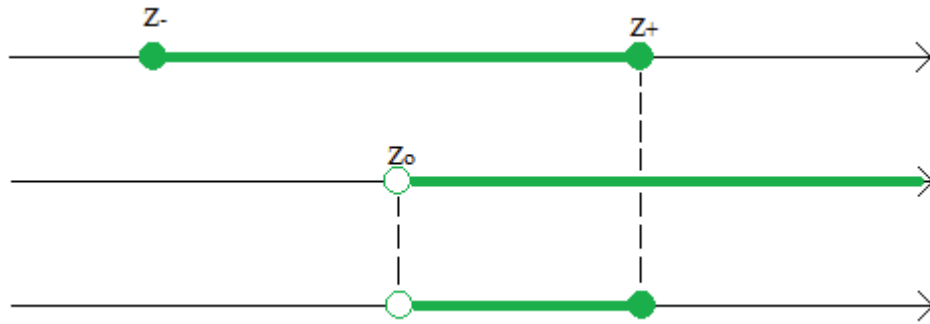


Figura C.3: Intervalo de Solução

Logo, para que haja solução do tipo **b-II**, precisamos de  $z_0 < z_+$ , ou, a partir de (C.25) e (C.27):

$$\begin{aligned} \frac{d}{\sqrt{1-R^2}} &< -\sqrt{1-R^2} + \sqrt{1+2d}, \\ \frac{d}{\sqrt{1-R^2}} + \sqrt{1-R^2} &< \sqrt{1+2d}, \\ \frac{d^2}{1-R^2} + 2d + 1 - R^2 &< 1 + 2d, \\ \therefore R\sqrt{1-R^2} &> d. \end{aligned} \tag{C.29}$$

Portanto, com (C.29) satisfeita, temos garantia de que há soluções do tipo **b-II**. Como

$z_- < z_0$ , teremos  $z$  delimitado por

$$z_0 < z \leq z_+. \quad (\text{C.30})$$

### C.3 Limites de $z$ a partir da normalização

Os limites de (C.10) provém da condição  $r \geq \sqrt{2(f+d)}$ . Porém, isso não limita o crescimento de  $z$  para além do que a normalização e o valor de emaranhamento permitem.  $z$  possui também um limite mais natural, proveniente destas equações:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 - t^2, \\ (xy - zt)^2 &= d^2. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Da segunda equação, decorre

$$zt - xy = \pm d. \quad (\text{C.32})$$

Queremos encontrar qual o  $z_{max}$  e  $z_{min}$  para as equações acima, dado que  $t$  e  $d$  sejam fixos. Observando (C.32), podemos ver que quanto maior o valor de  $|xy|$ , maior (menor) poderá ser o valor de  $z$ .  $x$  e  $y$  não são livres, mas vinculados pela normalização. Para  $x^2 + y^2 = \text{cte}$ , o máximo de  $|xy|$  acontece em  $|x| = |y|$ . Dessa maneira, teremos  $z_{max}$  como uma solução do sistema:

$$\begin{cases} z^2 + 2x^2 = 1 - t^2 \\ tz - x^2 = d \end{cases}, \quad (\text{C.33})$$

com,

$$z_{max} = \sqrt{1 + 2d} - t. \quad (\text{C.34})$$

Para  $z_{min}$  temos de resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} z^2 + 2x^2 = 1 - t^2 \\ tz + x^2 = -d \end{cases}, \quad (\text{C.35})$$

que nos dá:

$$z_{min} = t - \sqrt{1 + 2d}. \quad (\text{C.36})$$

Assim, o valor máximo para  $z$  será o mínimo entre o máximo calculado na seção C.2 e o calculado aqui, assim como o mínimo será o maior valor entre o calculado naquela seção e o calculado aqui.

## Referências Bibliográficas

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. *Quantum Mechanics, 2 Volume Set* (Wiley, 1992).
- [2] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)* (Addison Wesley, 1993).
- [3] A. Einstein, B. Podolsky e Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review* **47**, 777–780 (1935).
- [4] E. Schrodinger. Die gegenwartige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften* **23**, pp.807–812; 823–828; 844–849 (1935).
- [5] J. Bell. On the Einstein-Poldolsky-Rosen paradox. *Physics* **1**, 195–200 (1964).
- [6] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time- Varying Analyzers. *Physical Review Letters* **49**, 1804–1807 (1982).
- [7] Z. Y. Ou e L. Mandel. Violation of Bell’s Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50–53 (1988). doi: 10.1103/PhysRevLett.61.50. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.50>.
- [8] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko e Y. Shih. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337–4341 (1995). doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>.

- [9] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden e N. Gisin. Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3563–3566 (1998). doi: 10.1103/PhysRevLett.81.3563. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.3563>.
- [10] Y. Hasegawa, R. Loidl, G. Badurek, M. Baron e H. Rauch. Violation of a Bell-like inequality in neutron optical experiments: quantum contextuality. *JOURNAL OF OPTICS: QUANTUM AND SEMICLASSICAL OPTICS* **6**, S7–S12 (2004).
- [11] R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, H. Weier, T. Scheidl, M. Lindenthal, B. Blauensteiner, T. Jennewein, J. Perdigues, P. Trojek, B. Omer, M. Furst, M. Meyenburg, J. Rarity, Z. Sodnik, C. Barbieri, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Entanglement-based quantum communication over 144 km. *Nature Physics* **3**, 481 – 486 (2007).
- [12] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, Horodecki e Karol. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865–942 (2009). doi: 10.1103/RevModPhys.81.865. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>.
- [13] A. K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661–663 (1991). doi: 10.1103/PhysRevLett.67.661. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.661>.
- [14] C. H. Bennett e S. J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881–2884 (1992). doi: 10.1103/PhysRevLett.69.2881. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.2881>.
- [15] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895–1899 (1993). doi: 10.1103/PhysRevLett.70.1895. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1895>.
- [16] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu. Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121–1125 (1998).



- doi: 10.1103/PhysRevLett.80.1121. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.1121>.
- [17] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature* **390**, 6660, 575–579 (1997). URL <http://dx.doi.org/10.1038/37539>.
- [18] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik. Unconditional quantum teleportation. *Science* **282**, 5389, 706–709 (1998).
- [19] T. Jennewein, C. Simon, G. Weihs, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Quantum Cryptography with Entangled Photons. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4729–4732 (2000). doi: 10.1103/PhysRevLett.84.4729. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4729>.
- [20] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat e A. Zeilinger. Dense Coding in Experimental Quantum Communication. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4656–4659 (1996). doi: 10.1103/PhysRevLett.76.4656. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.4656>.
- [21] D. S. Naik, C. G. Peterson, A. G. White, A. J. Berglund e P. G. Kwiat. Entangled State Quantum Cryptography: Eavesdropping on the Ekert Protocol. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4733–4736 (2000). doi: 10.1103/PhysRevLett.84.4733. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4733>.
- [22] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons That Never Interacted. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3891–3894 (1998). doi: 10.1103/PhysRevLett.80.3891. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.3891>.
- [23] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden e N. Gisin. Quantum Cryptography Using Entangled Photons in Energy-Time Bell States. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4737–4740 (2000). doi: 10.1103/PhysRevLett.84.4737. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4737>.
- [24] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*

- (*Cambridge Series on Information and the Natural Sciences*) (Cambridge University Press, 2004), 1 edição.
- [25] D. A. Meyer e N. R. Wallach. Global entanglement in multiparticle systems. *Journal of Mathematical Physics* **43**, 9, 4273–4278 (2002). doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1497700>. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/43/9/10.1063/1.1497700>.
- [26] G. K. Brennen. An Observable Measure of Entanglement for Pure States of Multi-qubit Systems. *Quantum Info. Comput.* **3**, 6, 619–626 (2003). URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2011556.2011561>.
- [27] J. Audretsch. *Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics* (Wiley, Weinheim, 2007).
- [28] D. Bruss. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics* **43**, 9, 4237–4251 (2002). doi: 10.1063/1.1494474. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1494474>.
- [29] M. B. Plenio e S. Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quantum Information & Computation* **7**, 1, 1–51 (2007). URL <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/qic/qic7.html#PlenioV07>.
- [30] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu e B. Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A* **53**, 2046–2052 (1996). doi: 10.1103/PhysRevA.53.2046. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.2046>.
- [31] S. Hill e W. K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022–5025 (1997). doi: 10.1103/PhysRevLett.78.5022. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5022>.
- [32] W. K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 10, 2245–2248 (1998). doi: 10.1103/PhysRevLett.80.2245.
- [33] T.-C. Wei e P. M. Goldbart. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Phys. Rev. A* **68**, 042307

- (2003). doi: 10.1103/PhysRevA.68.042307. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.042307>.
- [34] W. K. Wootters. Entanglement of Formation and Concurrence. *Quantum Info. Comput.* **1**, 1, 27–44 (2001). URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2011326.2011329>.
- [35] I. Chattopadhyay e D. Sarkar. Entanglement of Formation is Non-monotonic with Concurrence: A Simple Proof. *Quantum Information Processing* **7**, 6, 243–249 (2008). doi: 10.1007/s11128-008-0085-6. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-008-0085-6>.
- [36] U. Fano. Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques. *Rev. Mod. Phys.* **29**, 74–93 (1957). doi: 10.1103/RevModPhys.29.74. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.29.74>.
- [37] P. C. Lichtner e J. J. Griffin. Evolution of a Quantum System: Lifetime of a Determinant. *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1521–1524 (1976). doi: 10.1103/PhysRevLett.37.1521. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.37.1521>.
- [38] W. H. Zurek e J. P. Paz. Decoherence, chaos, and the second law. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2508–2511 (1994). doi: 10.1103/PhysRevLett.72.2508. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.2508>.
- [39] J. I. Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza e H. E. Borges. Perturbative Expansion for Coherence Loss. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 207–210 (1996). doi: 10.1103/PhysRevLett.77.207. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.207>.
- [40] A. J. Scott. Multipartite entanglement, quantum-error-correcting codes, and entangling power of quantum evolutions. *Phys. Rev. A* **69**, 052330 (2004). doi: 10.1103/PhysRevA.69.052330. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.052330>.
- [41] I. Bengtsson e K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement* (Cambridge University Press, 2006).

- 
- [42] E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Mathematische Annalen* **63**, 433–476 (1907). URL <http://eudml.org/doc/158296>.
- [43] A. Ekert e P. L. Knight. Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *American Journal of Physics* **63**, 415–423 (1995). doi: 10.1119/1.17904.