UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Cristian Schmidt

Complexos Tilting e Dimensão Global Forte em Álgebras Hereditárias por Partes

Curitiba, 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Cristian Schmidt

Complexos Tilting e Dimensão Global Forte em Álgebras Hereditárias por Partes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares (UFPR - Brasil)

Curitiba, 2017.

S349c Schmidt, Cristian
Complexos tilting e dimensão global forte em álgebras hereditárias por partes / Cristian Schmidt. – Curitiba, 2017.
137 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Edson Ribeiro Alvares .
Bibliografia: p. 135-137.

1. Álgebra. 2. Complexos Tilting. I. Universidade Federal do Paraná. II.Alvares, Edson Ribeiro. III. Título.

CDD: 512

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA

ATA Nº14

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia trinta e um de Julho de dois mil e dezessete às 14:00 horas, na sala Sala de Video Conferência do Departamento de Informática, Centro Politécnico, Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição do doutorando **CRISTIAN SCHMIDT** para a Defesa Pública de sua tese intitulada **Complexos Tilting e Dimensão Global Forte em Álgebras Hereditárias por Partes**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: EDSON RIBEIRO ALVARES (UFPR), EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS (USP), VIKTOR BEKKERT (UFMG), FLAVIO ULHOA COELHO (USP), TANISE CARNIERI PIERIN (UFPR), . Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais. A Banca Examinadora, então, reuniu-se e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação do aluno. O doutorando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência faz a leitura do Parecer da Banca Examinadora. A aprovação no rito de defesa deverá ser homologada pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais do programa. A outorga do título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, EDSON RIBEIRO ALVARES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 31 de Julho de 2017.

EDSON RIBEIRO ALVARES
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS
Avaliador Externo (USP)

VIKTOR BEKKERT
Avaliador Externo (UFMG)

Flavio U. Coelho
FLAVIO ULHOA COELHO
Avaliador Externo (USP)

Tanise C. Pierin
TANISE CARNIERI PIERIN
Avaliador Externo (UFPR)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **CRISTIAN SCHMIDT** intitulada: **Complexos Tilting e Dimensão Global Forte em Álgebras Hereditárias por Partes**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 31 de Julho de 2017.

EDSON RIBEIRO ALVARES
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS
Avaliador Externo (USP)

VIKTOR BEKKERT
Avaliador Externo (UFMG)

Flávio U. Coelho
FLAVIO ULHOA COELHO
Avaliador Externo (USP)

Tanise C. Pierin
TANISE CARNIERI PIERIN
Avaliador Externo (UFPR)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

À minha família.

Agradecimentos

Esta parte do texto é sempre uma tarefa difícil de se fazer, pois deseja-se encontrar as palavras que possam descrever o quão grato sou a diversas pessoas. Tentarei em poucas linhas expressar tal sentimento.

Quero começar agradecendo aos meus pais por sempre me apoiarem ao longo de minha vida acadêmica, em especial, gostaria de ressaltar aqui todos os esforços de minha mãe, Sonia.

Agradeço a todos os meus amigos, pelos momentos felizes que compartilhamos juntos. Em especial, agradeço a amizade dos meus companheiros da "sala dos mitos"do PPGM e aos "bros".

Ao meu orientador Edson Ribeiro Alvares, agradeço pela amizade, dedicação e confiança que já completam mais de uma década, desde a iniciação cientifíca na graduação.

Agradeço ao PPGM pela oportunidade e apoio dados nesses anos, em especial ao professor Marcelo e a Cinthia Souza. Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro ao longo deste 4 anos de doutorado. Aqui gostaria de deixar registrado meu agradecimento ao grupo de pesquisa em Representações de álgebras da UFPR, em especial às professoras Tanise e Heily e também ao Wesley, nosso salvador em matéria de latex.

Agradeço também à Ong Em Ação, que além de propiciar o cursinho pré-vestibular gratuito que permitiu minha entrada na universidade, também proporcionou belos momentos em minha trajetória.

Finalmente, agradeço minha namorada, Gislaine, por sempre estar ao meu lado, me apoiar e continuar acreditando em mim. Muito provavelmente eu não chegaria aonde cheguei se não fosse por ela.

“A liberdade jamais é dada pelo opressor,
ela tem que ser conquistada pelo oprimido.”

Martin Luther King

“A ciência nunca resolve um problema
sem criar pelo menos outros dez.”

George Bernard Shaw

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo dos complexos tilting em categorias derivadas de categorias hereditárias de tal forma que possamos apresentar um limitante para a dimensão global forte das álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin, Euclidiano e do tipo feixe.

Palavras-chave: *Dimensão Global Forte, Complexos Tilting, Categorias Perpendiculares, Sequências Excepcionais*

Abstract

The main goal of this work is to present a study of tilting complexes in the derived category of a hereditary category in such a way that it allows us to introduce an upper bound to the strong global dimension of piecewise hereditary algebras of Dynkin, Euclidean and Sheaf types.

Keywords: *Strong Global Dimension, Tilting Complexes, Perpendicular Categories, Exceptional Sequences*

Sumário

Introdução **12**

1 Preliminares **17**
- 1.1 Categorias Hereditárias 19
  - 1.1.1 Categorias Abelianas 19
  - 1.1.2 Definição e exemplo 20
  - 1.1.3 Categoria Derivada de Categorias Hereditárias 20
  - 1.1.4 Teoria Tilting em Categorias Hereditárias 21
- 1.2 Complexos Tilting 24
- 1.3 Componentes tubulares 29
- 1.4 Sequências Excepcionais e Categorias Perpendiculares 32
  - 1.4.1 Sequências Excepcionais 32
  - 1.4.2 Categorias Perpendiculares 34
- 1.5 Dimensão Global Forte 38
- 1.6 Álgebras hereditárias 40

2 Dimensão Global Forte na Categoria Derivada de Álgebras Hereditárias **46**
- 2.1 Algumas propriedades dos complexos tilting em álgebras hereditárias 47
- 2.2 Álgebras hereditárias do tipo $\mathbb{A}_n$ 52
- 2.3 Álgebras hereditárias do tipo $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ e $\mathbb{E}_8$ 59
- 2.4 Álgebra de Kronecker 72
- 2.5 Álgebras hereditárias do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ 74
- 2.6 Álgebras hereditárias do tipo $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ 83

3 Complexos Tilting em Tubos **90**
- 3.1 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 2$ 107
- 3.2 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 3$ 109

3.3 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$ 111
3.4 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 5$ 113

4 Dimensão Global Forte na Categoria Derivada de Feixes Coerentes 115
4.1 Um resultado geral sobre a Dimensão Global Forte 118
4.2 Retas Projetivas Domésticas 120
4.3 Retas Projetivas Tubulares 120
    4.3.1 Sequência peso (2,2,2,2) 121
    4.3.2 Sequência peso (3,3,3) 123
    4.3.3 Sequência peso (2,4,4) 125
    4.3.4 Sequência peso (2,3,6) 128

Referências Bibliográficas 135

Introdução

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k. A categoria dos A-módulos finitamente gerados à esquerda é denotada por mod$A$. Então, A é dita uma álgebra hereditária por partes se a categoria derivada limitada $\mathscr{D}^b(\text{mod}A)$ é trianguladamente equivalente à categoria $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ em que $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária abeliana com espaços de morfismos e extensões de dimensão finita, e além disso, com objetos tilting. No caso particular em que $A \simeq \text{End}_{\mathscr{H}} T^{\bullet op}$ para algum objeto tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{H}$, dizemos que a álgebra A é quasi-tilted. Mais ainda, se $\mathscr{H} \simeq \text{mod}H$ para alguma álgebra hereditária de dimensão finita H, A é dita uma álgebra tilted. Em [Hap01], Happel provou que uma categoria hereditária abeliana como descrita acima é derivadamente equivalente à categoria de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra hereditária ou à categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva com peso, tendo estes últimos conceitos sido introduzidos em [GL87].

A caracterização homológica das álgebras quasi-tilted apresentada em [HRS96] sugere que as álgebras quasi-tilted são as álgebras hereditárias por partes que estão mais próximas das álgebras hereditárias em um certo sentido, entretanto, tal caracterização não permite medirmos o quão longe uma álgebra hereditária por partes qualquer está de uma álgebra hereditária. Um dos objetivos desta tese é utilizar um outro critério homológico, e com isso, determinar o quão longe álgebras hereditárias por partes estão de ser álgebras hereditárias.

Este outro critério homológico mencionado acima é a *dimensão global forte*, que foi definida em [Sko87] em termos do comprimento de complexos. Em [HZ08], Happel e Zacharia redefiniram dimensão global forte, ainda em termos do comprimento de complexos. A definição original pode ser recuperada a partir desta última adicionando-se 1 ao invariante obtido. A dimensão global forte de uma álgebra A, denotada por s.gl.dim.$A \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, é definida a seguir. Seja X um objeto indecomponível na categoria homotópica de complexos limitados de A-módulos projetivos finitamente gerados $\mathscr{K}^b(\mathscr{P}_A)$. Seja

$$P : \cdots \to 0 \to 0 \to P^r \to P^{r+1} \to \cdots \to P^{s-1} \to P^s \to 0 \to 0 \to \cdots ,$$

uma resolução projetiva minimal de X, em que $P^r \neq 0$ e $P^s \neq 0$. Então definimos o comprimento de X como

$$\ell(X) = s - r.$$

A definição de dimensão global forte é dada em função deste comprimento, como

$$\text{s.gl.dim} A = \sup_X \ell(X),$$

em que X percorre todos os objetos indecomponíveis de $\mathscr{K}^b(\mathscr{P}_A)$. Segue diretamente da definição que s.gl.dim.$A = 1$ se e somente se A é uma álgebra hereditária que não é semissimples. Em [HZ08], Happel e Zacharia provaram que s.gl.dim.$A < \infty$ se e somente se a álgebra A é hereditária por partes, mais ainda, provaram que para uma álgebra hereditária por partes A vale s.gl.dim.$A \leq \text{rk} K_0(A) + 1$, em que $K_0(A)$ denota o grupo de Grothendieck da álgebra A e $\text{rk} K_0(A)$ denota o posto do grupo $K_0(A)$. Em 2010, Happel e Zacharia melhoraram este resultado em [HZ10], provando que para uma álgebra hereditária por partes A vale s.gl.dim.$A \leq \text{rk} K_0(A)$.

Tal limitante encontrado por Happel e Zacharia descrito no parágrafo anterior não é sempre ótimo, isto é, não é necessariamente o menor limitante possível para a dimensão global forte. Um dos principais objetivos deste trabalho é melhorar este resultado para as álgebras hereditárias por partes de tipo finito, manso e também para as álgebras de tipo feixe coerente sobre uma reta projetiva com peso de tipo tubular. Para isso, necessitamos estudar algumas particularidades das categorias hereditárias e também diversas propriedades sobre complexos tilting na categoria derivada de categorias hereditárias.

Como queremos encontrar limitantes melhores para a dimensão global forte de certas classes de álgebras, utilizaremos a caracterização de dimensão global forte apresentada em [ALMM17], que descreve tal invariante em termos do espalhamento de um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada de categorias hereditárias. Ainda em [ALMM17], Alvares, Le Meur e Marcos mostraram que dado um complexo tilting $T^\bullet$ em uma categoria triangulada, se existir uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \in \mathbb{Z}, \tag{0.1}$$

então a dimensão global forte da álgebra de endomorfismos $\text{End} T^{\bullet op}$ será menor ou igual à $\ell + 2$, ou seja, neste caso teremos

$$\text{s.gl.dim.End} T^{\bullet op} \leq \ell + 2.$$

Motivados então por este resultado, estudaremos de que maneira um complexo tilting $T^\bullet$ poderá estar espalhado na categoria derivada de uma categoria hereditária $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ e mostraremos então que existe um par $(\mathscr{H},\ell)$ como em (0.1) de tal maneira que ℓ seja o menor possível. Utilizando tal técnica, como toda álgebra hereditária por partes pode ser escrita como uma álgebra de endomorfismos de um complexo tilting na categoria derivada de uma categoria hereditária, estaremos aptos a encontrar, em alguns casos, um limitante ótimo para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes. Cabe lembrar que alguns resultados sobre o espalhamento de complexos tilting foram estudados por Seidel em [Sei03], em sua tese de doutorado. No entanto, naquele período ainda não tínhamos uma definição de dimensão global forte que dependesse do espalhamento do complexo tilting. Neste trabalho, com as técnicas de [ALMM17], que são fortemente aplicadas no quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de uma categoria hereditária, melhoramos diversos resultados de Seidel que nos permitiram ir na direção de calcular a dimensão global forte. A seguir falaremos um pouco mais sobre a estrutura do texto.

No primeiro capítulo apresentamos alguns conceitos básicos e alguns resultados necessários para a compreensão dos capítulos posteriores. Primeiramente relembraremos algumas propriedades de categorias hereditárias e apresentaremos alguns exemplos de tais categorias. Após isso, discutiremos propriedades dos complexos tilting, introduzindo toda a notação necessária para o resto do texto, bem como propriedades básicas que decorrem da definição. Relembraremos também algumas propriedades básicas de álgebras hereditárias, em particular, sobre as componentes tubulares em uma álgebra hereditária mansa. Os conceitos de sequências excepcionais e categorias perpendiculares também serão introduzidos neste capítulo, merecendo um ponto de destaque, uma vez que essas são as ferramentas que nos permitirão estudar o comportamento de complexos tilting em categorias derivadas de categorias hereditárias, nos possibilitando assim encontrar majorantes para a dimensão global forte, conceito este também introduzido neste capítulo.

No segundo capítulo investigaremos algumas propriedades de complexos tilting na categoria derivada de álgebras hereditárias de tipo de representação finito e de álgebras hereditárias mansas. Para tanto, estudaremos diversas propriedades das categorias de módulos sobre tais álgebras, utilizando nesse ponto a teoria de Auslander-Reiten. Em particular, estudaremos o espalhamento de complexos tilting na categoria derivada destas álgebras, e então, utilizando os resultados de [ALMM17], estaremos aptos a encontrar majorantes para dimensão global forte de álgebras hereditárias por partes que sejam derivadamente equivalentes à álgebras hereditárias de tipo de representação finito e mansas. Para as álgebras hereditárias por partes que são derivadamente equivalentes às álgebras hereditárias de tipo de representação finito, destacamos que apresentaremos exemplos de álgebras que realizam a dimensão global forte máxima, a saber, $n-1$, para álgebras do tipo $\mathbb{A}_n$ e $n-2$ para álgebras do tipo $\mathbb{D}_n$, 4 para álgebras do tipo $\mathbb{E}_6$, 5 para álgebras do tipo $\mathbb{E}_7$, e finalmente, 6 para álgebras do tipo $\mathbb{E}_8$. Com relação às álgebras hereditárias por partes de tipo manso, fizemos uma seção introdutória sobre álgebras de Kronecker. O objetivo é motivar o uso de técnicas utilizadas em [ALMM17] para explorar algumas classes de álgebras mansas. Para as álgebras hereditárias por partes que são derivadamente equivalentes às álgebras hereditárias mansas de tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$, os majorantes para a dimensão global forte são $n-1$, $n-2$, 5, 6 e 7, respectivamente. Para que fique mais claro ao leitor, dispomos os majorantes na tabela abaixo.

Grafo Subjacente	Valor de ℓ	s.gl.dim
$\mathbb{A}_n$	$n-3$	$n-1$
$\mathbb{D}_n$	$n-4$	$n-2$
$\mathbb{E}_6$	2	4
$\mathbb{E}_7$	3	5
$\mathbb{E}_8$	4	6
$\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$	$\leq n-3$	$\leq n-1$
$\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$	$\leq n-4$	$\leq n-2$
$\tilde{\mathbb{E}}_6$	≤ 3	≤ 5
$\tilde{\mathbb{E}}_7$	≤ 4	≤ 6
$\tilde{\mathbb{E}}_8$	≤ 5	$\leq 7.$

O terceiro capítulo apresenta resultados mais técnicos, porém, necessários para o bom entendimento do capítulo seguinte. Preferimos apresentar tais resultados nesta ordem, pois, além de serem necessários ao próximo capítulo, também nos permitem relembrar várias propriedades de complexos tilting em componentes tubulares. O leitor pode primeiramente ler o capítulo 4, para que assim tenha uma boa noção de como serão utilizados tais resultados. Este capítulo contém a técnica que permitiu obter um dos resultados centrais deste trabalho, que é a possibilidade de troca de um complexo tilting $T^{\bullet}$ por outro T' com o mesmo espalhamento, e além disso, que contenha somandos diretos indecomponíveis com algumas propriedades melhores, a saber, trocaremos um somando que não está na boca de um tubo por um objeto que esteja, isto é, trocaremos por um objeto quase-simples em uma componente tubular. O espalhamento mencionado acima é o mesmo devido aos cortes que podemos realizar na categoria derivada, cortes estes descritos no teorema 4.3. Para provarmos tal resultado, utilizaremos fortemente que os tubos mencionados acima são estáveis e estândar, e além disso, utilizaremos também as propriedades de sequências de Auslander-Reiten e também do posicionamento do último somando do complexo tilting dentro de um tubo estável estândar. A vantagem da troca do complexo tilting $T^\bullet$ pelo complexo tilting T' é que para T' podemos aplicar os resultados de [Mel04].

Por fim, no quarto e último capítulo desta tese, utilizando os resultados apresentados nos três capítulos anteriores, seremos capazes de determinar um limitante para o espalhamento de complexos tilting na categoria derivada de uma categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva com peso tubular. Sabemos que para uma reta projetiva com peso tubular, a categoria dos feixes coerentes sobre tal reta é formada por uma família infinita de famílias tubulares (ver [GL87]). Utilizando então essa estrutura, dado um complexo tilting na categoria derivada, analisaremos onde está localizado o seu último somando direto indecomponível, isto é, uma vez que o último somando deve estar em um tubo estável estândar, trabalharemos com sua profundidade dentro de tal tubo. Para os casos em que a sequência peso da reta projetiva com peso for igual à $(2,2,2,2)$, $(3,3,3)$ e $(2,4,4)$, temos uma descrição completa do limitante almejado. Para o caso em que a sequência peso da reta projetiva com peso for igual à $(2,3,6)$, se o último somando do complexo tilting estiver em um tubo de posto 2 ou 3, o problema também estará resolvido. Já quando tal somando estiver em um tubo de posto 6, precisaremos de algumas hipóteses adicionais para determinar um limitante para o espalhamento do complexo tilting citado anteriormente. Finalmente, utilizando novamente os resultados presentes em [ALMM17], determinaremos majorantes para a dimensão global forte de álgebras hereditárias por partes que sejam derivadamente equivalentes à categorias de feixes coerentes sobre retas projetivas com peso tubulares. A tabela abaixo apresenta os majorantes encontrados.

Sequência peso	Valor de ℓ	s.gl.dim
$(2,2,2,2)$	2	4
$(3,3,3)$	4	6
$(2,4,4)$	6 ou 5	8 ou 7
$(2,3,6)$	7 ou 6	9 ou 8.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos alguns resultados que serão necessários para o entendimento do texto. Grande parte destes são bem conhecidos(ver por exemplo [ASS06], [ARS97], [Hap88], [Mil], [SS06] e [SS07]).

Ao longo deste trabalho, k denotará um corpo algebricamente fechado. Uma álgebra Λ é uma k-álgebra associativa, com dimensão finita e identidade. Como usual assumiremos que Λ é uma álgebra básica e conexa. Sabemos que para uma álgebra básica Λ, existem um quiver Q e um ideal admissível I tais que $\Lambda \simeq kQ/I$ (ver [ASS06]).

Por um Λ-módulo queremos dizer, a menos que mencionado o contrário, um Λ-módulo à direita. Denotaremos por modΛ a categoria dos Λ-módulos de dimensão finita e por indΛ a subcategoria de modΛ consistindo do conjunto completo de Λ-módulos indecomponíveis não isomorfos. Sabemos também que modΛ é uma categoria abeliana. Como a álgebra Λ tem dimensão finita, temos, a menos de isomorfismo, somente um número finito n de módulos simples $S(i)$ com $S(i) \neq S(j)$ para $i \neq j$. Esse número n coincide com o número de vértices do quiver Q.

Definamos agora a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ de uma categoria abeliana $\mathscr{H}$. Denotamos por $\mathscr{C}^b(\mathscr{H})$ a categoria dos complexos limitados sobre $\mathscr{H}$ e por $\mathscr{K}^b(\mathscr{H})$ a correspondente categoria de homotopia. Então obtemos a **categoria derivada** $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ de $\mathscr{K}^b(\mathscr{H})$ fazendo a localização com relação ao conjunto de quasi-isomorfismos. Seja $X^\bullet$ um complexo em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Denotamos por [i] o funtor i-ésimo shift, e então a imagem de $X^\bullet$ por este funtor é expressa por $X^\bullet[i]$. Como em geral iremos trabalhar com categorias de módulos sobre uma álgebra Λ, por vezes utilizaremos a notação $\mathscr{D}^b(\Lambda)$ ao invés de $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)$. Note que neste caso temos um mergulho da categoria modΛ em $\mathscr{D}^b(\Lambda)$, que associa cada módulo Y ao seu complexo stalk $Y^\bullet = (Y^i, d^i)$, em que $Y^0 = Y$ e $Y^i = 0$ para todo $i \neq 0$. Identificaremos este complexo com Y.

Seja kQ a álgebra de caminhos associada a um quiver Q sem ciclos orientados. Sabemos então que esta é uma álgebra hereditária. Podemos descrever o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ da categoria derivada da álgebra kQ facilmente. De fato, se Γ é o quiver de Auslander-Reiten da álgebra kQ, Γ_i denota uma cópia de Γ para $i \in \mathbb{Z}$. Então o quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ é dado por

$$\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)) = \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_i$$

adicionando-se uma flecha do módulo injetivo indecomponível $I(v)$ em Γ_i para o módulo projetivo indecomponível $P(w)$ em Γ_{i+1} para cada flecha de v para w no quiver Q.

Dada uma álgebra Λ com dimensão finita, considere em modΛ a translação de Auslander-Reiten, denotada por τ. Sua extensão para $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ é tal que para um módulo M não projetivo indecomponível temos

$$\tau_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}M[r] = (\tau_{kQ}M)[r],$$

e para um módulo projetivo indecomponível $P(i)$ associado ao vértice i, temos

$$\tau_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}P(i)[r] = I(i)[r-1],$$

onde $I(i)$ é o módulo injetivo indecomponível associado ao vértice i de Q.

Generalizando o que foi dito anteriormente, se considerarmos uma categoria $\mathscr{H}$ hereditária, isto é, com espaços $\text{Hom}_{\mathscr{H}}$ e $\text{Ext}^1_{\mathscr{H}}$ de dimensão finita, e além disso, $\text{Ext}^n_{\mathscr{H}}(\ ,\ ) = 0$ para todo $n \geq 2$, podemos descrever o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathscr{D}^b(\mathscr{H}))$ da categoria derivada de $\mathscr{H}$ de maneira similar à apresentada anteriormente. Seja Γ o quiver de Auslander-Reiten da categoria $\mathscr{H}$ e denote por Γ_i uma cópia de Γ para $i \in \mathbb{Z}$. Então o quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é dado por

$$\Gamma(\mathscr{D}^b(\mathscr{H})) = \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_i.$$

Ainda, para uma categoria abeliana $\mathscr{H}$ podemos considerar seu grupo de Grothendieck, $K_0(\mathscr{H})$, construído da seguinte maneira: Seja $\mathscr{H}$ uma categoria abeliana. Denotemos por $F(\mathscr{H})$ o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismo dos objetos de $\mathscr{H}$. Seja $F_0(\mathscr{H})$ o subgrupo gerado por $[X]-[Y]+[Z]$ para todas as sequências exatas $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ em $\mathscr{H}$. Então o **grupo de Grothendieck** é por definição o grupo quociente $K_0(\mathscr{H}) = F(\mathscr{H})/F_0(\mathscr{H})$.

Para simplificar a notação, escreveremos $K_0(\Lambda)$ ao invés de $K_0(\mathrm{mod}\Lambda)$ no caso de uma categoria de módulos $\mathrm{mod}\Lambda$, e $K_0(\mathbb{X})$ no lugar de $K_0(\mathrm{coh}\mathbb{X})$, no caso de uma categoria de feixes coerentes $\mathrm{coh}\mathbb{X}$.

1.1 Categorias Hereditárias

Nessa seção estamos interessados em investigar categorias k-lineares, categorias essas que são abelianas, com espaço de homomorfismos e extensões de dimensão finita sobre o corpo k e hereditárias.

1.1.1 Categorias Abelianas

Uma k-categoria $\mathscr{H}$ é dita **categoria aditiva** se toda família finita de objetos têm um produto, cada conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y)$ é um grupo abeliano, e a composição

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Y,Z)\times \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Z) \\ (g,f) & \mapsto & gf \end{array}$$

é k-bilinear para todos os objetos X, Y e Z em $\mathscr{H}$. Dado um número finito de objetos $A_1,\ldots,A_r$ de uma categoria aditiva $\mathscr{H}$, existe a soma direta $A_1\oplus\ldots\oplus A_r$, que é por definição um objeto A junto com morfismos $i_i : A_i \to A$ e $\pi_i : A\to A_i$ para $1\leq i\leq r$ tais que $\sum_{i=1}^{r} i_i\pi_i = id_A$, $\pi_i i_i = id_{A_i}$ e $\pi_j i_i = 0$ para $i\neq j$. Note que os morfismos i_i e π_i induzem isomorfismos

$$\coprod_{i=1}^{r} A_i \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} A_i \simeq \prod_{i=1}^{r} A_i.$$

Dado um objeto A em $\mathscr{H}$, denotamos por $\mathrm{add}A$ a subcategoria plena de $\mathscr{H}$ consistindo em todas as somas diretas finitas de cópias de A e seus somandos diretos.

Uma decomposição $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\coprod\mathscr{H}_2$ de uma categoria aditiva $\mathscr{H}$ é um par de subcategorias plenas $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ tais que cada objeto em $\mathscr{H}$ é soma direta de dois objetos de $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$, e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(A_1,A_2)=0=\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(A_2,A_1)$ para todo $A_1\in\mathscr{H}_1$ e $A_2\in\mathscr{H}_2$. Uma categoria aditiva $\mathscr{H}$ é dita uma **categoria conexa** se não admite uma decomposição própria $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\coprod\mathscr{H}_2$.

Um funtor $F:\mathscr{H}\to\mathscr{G}$ entre categorias aditivas é dito **funtor aditivo** se a função induzida $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(FX,FY)$ é linear para todos os objetos X, Y em $\mathscr{H}$. O **núcleo** $\ker F$ de um funtor aditivo $F:\mathscr{H}\to\mathscr{G}$ é por definição a subcategoria plena de todos os objetos X tais que $FX = 0$. A **imagem** im$F$ de $F : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ é a subcategoria plena de $\mathscr{G}$ cujos objetos são aqueles Y tais que $Y \simeq FX$ para algum X na categoria $\mathscr{H}$.

Uma categoria aditiva $\mathscr{H}$ é dita **categoria abeliana** se todo morfismo $\phi : X \to Y$ tem um núcleo e um co-núcleo, e a fatoração canônica de ϕ

$$\begin{tikzcd}
\ker\phi \arrow[r, "\phi'"] & X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\phi''"] & \mathrm{coker}\phi \\
& \mathrm{coker}\phi' \arrow[r, "\overline{\phi}"] & \ker\phi'' \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

induz um isomorfismo $\overline{\phi}$.

1.1.2 Definição e exemplo

Uma categoria abeliana $\mathscr{H}$ é dita **categoria hereditária** se $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{H}}(X, Y) = 0$ para todo $n \geq 2$ e para todos X, Y objetos de $\mathscr{H}$. Isto é equivalente a assumir que os funtores $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\_, Y)$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X, \_)$ são exatos à direita, isto é, enviam sequências exatas curtas em sequências exatas curtas à direita.

Exemplo 1.1 *Seja H uma k-álgebra hereditária de dimensão finita. Neste caso, $H \simeq kQ$, para algum quiver Q sem ciclos orientados. Então a categoria dos H-módulos à direita finitamente gerados, $\mathscr{H} = modH$, é uma categoria abeliana hereditária. A categoria $\mathscr{H} = modH$ tem um objeto tilting (ou módulo tilting) T, como por exemplo$T = H_H$.*

1.1.3 Categoria Derivada de Categorias Hereditárias

Como mencionado anteriormente, a **categoria derivada limitada** de uma categoria abeliana $\mathscr{H}$ é obtida da categoria de complexos limitados em $\mathscr{H}$ via localização, de forma que os quasi-isomorfismos de $\mathscr{K}^b(\mathscr{H})$ são isomorfismos na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$.

Teorema 1.1 (ver [Len06], pág. 10) *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria abeliana hereditária. Então a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é naturalmente equivalente à categoria repetitiva $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{H}[n]$, em que cada $\mathscr{H}[n]$ é uma cópia de $\mathscr{H}$, com objetos denotados por $X[n]$ para X objeto de $\mathscr{H}$, e com morfismos dados da seguinte maneira:*

$$Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X[n], Y[m]) = Ext^{m-n}_{\mathscr{H}}(X, Y).$$

A expressão $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[n]$ tem dois significados. Primeiramente, devemos entender tal expressão como o fecho aditivo $\text{add}(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[n])$ da união de todos os $\mathscr{H}[i]$, e segundo, essa expressão indica que não existe morfismo de $\mathscr{H}[n]\to\mathscr{H}[m]$ para $n>m$.

Observação 1.1 *(1) Todo objeto indecomponível de $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ pertence a alguma $\mathscr{H}[n]$. Então se soubermos quem são os objetos indecomponíveis em $\mathscr{H}$, saberemos também quem são os objetos indecomponíveis em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$.*

*(2) Da descrição feita anteriormente sobre os objetos indecomponíveis de $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, segue que $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é uma categoria **Hom-finita** e além disso, pode-se provar que $\mathscr{H}$ também é uma categoria **Krull-Schmidt**.*

(3) Somente existem morfismos não nulos $\mathscr{H}[n]\to\mathscr{H}[m]$ se $m\in\{n,n+1\}$. Para mostrar este fato, utilizamos que não existem extensões não nulas com grau negativo ou grau $n\geq 2$.

A categoria derivada de $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, pode ser ilustrada por:

$$\cdots \qquad \boxed{\mathscr{H}[-1]} \qquad \boxed{\mathscr{H}[0]=\mathscr{H}} \qquad \boxed{\mathscr{H}[1]} \qquad \cdots$$

em que morfismos entre objetos indecomponíveis existem somente da esquerda para a direita, e de $\mathscr{H}[n]$ para $\mathscr{H}[n]$ ou para $\mathscr{H}[n+1]$.

Definição 1.1 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária e $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ sua categoria derivada. Dizemos que uma subcategoria hereditária $\mathscr{H}'\subset\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é **geradora** se*

$$\bigvee_{i\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}'[i]=\mathscr{D}^b(\mathscr{H}).$$

1.1.4 Teoria Tilting em Categorias Hereditárias

O objetivo desta seção é apresentar os principais resultados sobre a teoria tilting clássica. Daremos aqui definições que entendemos ser importantes e citaremos algumas propriedades, deixando as referências das provas ou demonstrando tais propriedades.

Seja $\mathscr{H}$ uma categoria abeliana hereditária conexa sobre um corpo algebricamente fechado k.

Definição 1.2 *Um objeto T é dito **objeto tilting** em $\mathscr{H}$ se $FacT=\mathscr{E}(T)$, em que os objetos de $FacT$ são quocientes de somas diretas finitas de cópias de T e X está em $\mathscr{E}(T)$ se $Ext^1_{\mathscr{H}}(T,X)=0$.*

Uma vez que a definição acima é um tanto técnica, a proposição abaixo nos apresenta um critério interessante para decidir se um objeto em uma categoria hereditária $\mathscr{H}$ é um objeto tilting.

Proposição 1.2 (ver [CK09], pág. 25) *Assuma que $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária. Então um objeto T em $\mathscr{H}$ é um objeto tilting se, e somente se, $Ext^1_{\mathscr{H}}(T,T)=0$ e o número de somandos indecomponíveis não isomorfos de T for igual ao posto do grupo de Grothendieck $K_0(\mathscr{H})$.*

Se um objeto T na categoria $\mathscr{H}$ cumpre apenas a condição $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,T)=0$, diremos que T é um **objeto tilting parcial** em $\mathscr{H}$ (ver [AST08], pág. 426). Nesta seção assumiremos que $\mathscr{H}$ não possui objeto projetivo não-nulo e os seguintes resultados mostrarão que podemos fazer isso sem perda de generalidade.

Proposição 1.3 (ver [Hap98], pág. 66)) *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting. Se $\mathscr{H}$ tem algum objeto projetivo não nulo, então $\mathscr{H}$ é equivalente à categoria de módulos finitamente gerados mod H, para alguma álgebra hereditária H de dimensão finita.*

Vamos agora definir o conceito de sequência quase-cindida, também conhecida como sequência de Auslander-Reiten, para uma categoria abeliana $\mathscr{H}$.

Definição 1.3 *Uma sequência exata em $\mathscr{H}$*

$$0 \to X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \to 0$$

é dita sequência quase-cindida se não é cindida, X e Y são objetos indecomponíveis em $\mathscr{H}$ e se para $h \in Hom_{\mathscr{H}}(W,Y)$ epimorfismo que não cinde existir um morfismo $\phi \in Hom_{\mathscr{H}}(W,E)$ tal que $h = g\phi$.

Proposição 1.4 (ver [HRS96],págs. 24 e 25) *Assuma que a categoria hereditária $\mathscr{H}$ tenha um objeto tilting. Então:*

- *$\mathscr{H}$ tem sequências quase cindidas.*
- *O grupo de Grothendieck $K_0(\mathscr{H})$ é um grupo abeliano livre de posto finito.*

Vejamos agora que para uma categoria hereditária $\mathscr{H}$ com objeto tilting podemos definir uma equivalência com propriedades muito interessantes, equivalência essa conhecida como dualidade de Serre.

Proposição 1.5 (ver [CK09], pág. 23) *Assuma que $\mathcal{H}$ tem objeto tilting e não tenha objetos projetivos. Então existe uma equivalência exata de categorias $\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ com as seguintes propriedades:*

- *Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ é sequência quase cindida, então $A \simeq \tau C$.*
- *$DExt^1_{\mathcal{H}}(X,Y) \simeq Hom_{\mathcal{H}}(\tau^{-1}Y, X) \simeq Hom_{\mathcal{H}}(Y, \tau X)$ para X, Y em $\mathcal{H}$, $D(Z) = Hom_k(Z,k)$.*

Relembramos agora que um objeto não nulo S em uma categoria abeliana é dito **objeto simples** se S não tem subobjetos próprios, isto é, não existe subobjeto U de S tal que $0 \neq U \subsetneq S$. A seguir introduziremos o conceito de comprimento de um objeto em uma categoria abeliana.

Definição 1.4 *Seja $\mathcal{H}$ uma categoria abeliana. Um objeto X de $\mathcal{H}$ tem **comprimento finito** se existir uma cadeia de subobjetos*

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$$

*tal que cada quociente X_i/X_{i-1} é um objeto simples. Tal cadeia é chamada **série de composição** de X. A série de composição de um objeto X não é necessariamente única, mas o seu comprimento é invariante, denotado por $\ell(X)$. Além disso, os quocientes que aparecem na série de composição de um objeto X são os mesmos, apenas mudando a ordem com que aparecem.*

Obs:. Dizemos que um objeto X em $\mathcal{H}$ tem comprimento infinito se X não tiver comprimento finito, isto é, não existe cadeia de subobjetos de X

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$$

com X_i/X_{i-1} é objeto simples.

Denotemos por $\mathcal{H}_0$ a subcategoria plena de $\mathcal{H}$ cujos objetos são aqueles de comprimento finito, e por $\mathcal{H}_\infty$ a subcategoria plena de $\mathcal{H}$ em que cada somando indecomponível dos objetos tem comprimento infinito. Denotaremos por ind$\mathcal{H}_0$ e ind$\mathcal{H}_\infty$ a categoria forma pelos objetos indecomponíveis em $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_\infty$ respectivamente. Veremos mais adiante, na seção 1.3, uma estudo mais detalhado sobre tubos estáveis, onde a proposição a seguir ficará mais clara.

Proposição 1.6 (ver [HR02b], pág. 417) *Assuma que $\mathcal{H}$ tem um objeto tilting. Então ind$\mathcal{H}_0$ é uma união de tubos.*

A partir de agora, a menos que mencionado o contrário, quando utilizarmos o termo categoria hereditária para uma categoria $\mathcal{H}$, estaremos nos referindo a uma categoria hereditária com objeto tilting e sem objetos projetivos.

1.2 Complexos Tilting

Primeiramente apresentaremos alguns resultados sobre teoria tilting. Módulos tilting já foram exaustivamente estudados e a literatura nos fornece uma ampla descrição sobre tais objetos. Vamos relembrar aqui apenas alguns fatos importantes.

Definição 1.5 *Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita. Um Λ-módulo T é dito um módulo tilting se satisfizer as seguintes condições:*
(i) *$pdT \leq 1$;*
(ii) *$Ext^1_\Lambda(T,T) = 0$;*
(iii) *O número de classes de isomorfismo dos somandos diretos indecomponíveis de T é igual ao posto do grupo de Grothendieck $K_0(\Lambda)$.*

Qualquer módulo satisfazendo as condições **(i)** e **(ii)** é chamado de módulo tilting parcial. Se Λ é uma álgebra hereditária, então a álgebra $B = \text{End}T^{op}$, com T um módulo tilting em modΛ, é chamada de **álgebra tilted**. Estamos interessados agora em uma noção mais geral, que é a noção de complexo tilting. Antes, enunciaremos uma proposição que nos motivará a definir tal conceito.

Proposição 1.7 (Teorema de Rickard, ver [Ric89], pág. 450) *Sejam Λ e A duas álgebras e denotemos por ${}_\Lambda\mathscr{P}$ (respectivamente ${}_A\mathscr{P}$) a categoria dos Λ-módulos projetivos finitamente gerados (respectivamente A-módulos). Então, a seguintes condições são equivalentes:*
(i) *$\mathscr{D}^b(mod\Lambda)$ e $\mathscr{D}^b(modA)$ são equivalentes como categorias trianguladas;*
(ii) *$\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ e $\mathscr{K}^b({}_A\mathscr{P})$ são equivalentes como categorias trianguladas;*
(iii) *A é isomorfa à algebra $EndT^{\bullet op}$, em que $T^\bullet$ é um objeto de $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ satisfazendo*

- *$Hom_{\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$ para $i \neq 0$;*
- *$addT^\bullet$ gera $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ como categoria triangulada.*

Definição 1.6 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $T^\bullet$ um objeto na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Então $T^\bullet$ é um* ***complexo tilting*** *se*
(i) *$Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$ para $i \neq 0$;*
(ii) *$addT^\bullet$ gera $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ como categoria triangulada.*

Um objeto $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ que satisfaz a condição **(i)** acima é chamado **complexo tilting parcial**.

Aqui add$T^{\bullet}$ consiste em todos os somandos diretos de somas finitas de cópias de $T^{\bullet}$. Dizemos que uma classe de objetos gera uma categoria triangulada $\mathscr{C}$ como uma categoria triangulada se não existir subcategoria triangulada plena e própria de $\mathscr{C}$, fechada para isomorfismos, que contenha tal classe de objetos. Nesse texto consideraremos complexos livres de multiplicidade, isto é, todos os somandos diretos indecomponíveis são não isomorfos.

Proposição 1.8 (ver [Mel04], pág. 83) *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting. Se $T^{\bullet}$ é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com anel de endomorfismos $\Sigma = EndT^{\bullet op}$, então o funtor derivado*

$$\mathbb{R}Hom(T^{\bullet},\_) : \mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \to \mathscr{D}^b(mod\Sigma)$$

é uma equivalência de categorias trianguladas.

É conhecido que para um módulo tilting T em uma álgebra hereditária conexa, a álgebra End$T$ é uma álgebra conexa. Utilizando o resultado anterior é possível estender esse resultado para complexos tilting, como veremos a seguir.

Proposição 1.9 *Seja $T^{\bullet}$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, com $\mathscr{H}$ categoria hereditária com objeto tilting e conexa. Então a álgebra de endomorfismos $EndT^{\bullet op}$ é uma álgebra conexa.*

Demonstração: Uma vez que $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária com objeto tilting e conexa, sabemos que $\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(\text{End}C)$, em que C é uma álgebra canônica conexa ou uma álgebra hereditária conexa (ver [Hap01]). Além disso, como $T^{\bullet}$ é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, segue da proposição anterior que $\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(\text{End}T^{\bullet op})$, e assim podemos obter que $\mathscr{D}^b(\text{End}T^{\bullet op}) \simeq \mathscr{D}^b(\text{End}C)$.

Relembre agora que o centro de uma álgebra é um invariante sob equivalências derivadas, ou seja, uma vez que $\mathscr{D}^b(\text{End}T^{\bullet op}) \simeq \mathscr{D}^b(\text{End}C)$, obtemos que os centros de tais álgebras são isomorfos, ou seja, $Z(\text{End}T^{\bullet op}) \simeq Z(\text{End}C)$. Como a álgebra End$C$ é conexa, segue que $Z(\text{End}C)$ é conexo, e portanto o centro $Z(\text{End}T^{\bullet op})$ da álgebra End$T^{\bullet op}$ é conexo, de onde podemos concluir que a álgebra End$T^{\bullet op}$ é conexa (ver [ASS06]). ■

O próximo lema será muito útil para cálculos posteriores envolvendo complexos tilting, uma vez que podemos trocar a condição **(ii)** da definição de complexo tilting apresentada anteriormente.

Lema 1.10 (ver [Mel04], pág. 84) *Seja* $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ *um complexo tilting parcial livre de multiplicidade. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *add*$T^\bullet$ *gera* $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ *como categoria triangulada;*

(b) *O número de somandos diretos indecomponíveis de* $T^\bullet$ *coincide com o posto do grupo de Grothendieck* $K_0(\mathscr{H})$.

Antes de prosseguirmos, apresentaremos algumas propriedades básicas que decorrem diretamente da definição de complexo tilting e do lema 1.10.

Lema 1.11 *Sejam* $\mathscr{H}$ *uma categoria hereditária com objeto tilting e* $T^\bullet$ *um complexo tilting na categoria derivada* $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. *As seguintes afirmações são válidas:*

(a) *Podemos escrever o complexo tilting* $T^\bullet$ *como*

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{t} T_i[n_i],$$

com $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_t$ *e* $T_i \in \mathscr{H}$ *não nulo para todo* $0 \leq i \leq t$;

(b) $Hom_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = 0$, *para* $i \neq j$;

(c) $Ext^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = 0$, *para* $i \geq j$;

(d) *Cada objeto* T_i *pode ser escrito como uma soma direta de objetos indecomponíves*

$$T_i = \bigoplus_{l=0}^{s} X_l^{(i)},$$

e além disso, para $l_a > l_b$, *vale*

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathscr{H}}(X_{l_a}^{(i)}, X_{l_b}^{(i)}) & = & 0; \\ Ext^1_{\mathscr{H}}(X_{l_a}^{(i)}, X_{l_b}^{(i)}) & = & 0. \end{array}$$

Demonstração:

(a) Como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, sabemos que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ pode ser escrita como o fecho aditivo da categoria $\mathscr{H}$. Sendo assim, como $T^\bullet$ é um objeto em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, podemos escrevê-lo como a soma dos elementos em diferentes shifts, e além disso, ao ordenar tais shifts, obtemos a decomposição desejada.

(b) Como $i \neq j$, temos que $n_i \neq n_j$, e assim podemos escrever

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[n_i], T_j[n_j][n_i - n_j]).$$

Como $T_i[n_i]$ e $T_j[n_j]$ são somandos do complexo tilting $T^\bullet$ e $n_i - n_j$ é diferente de zero, segue da definição de complexo tilting que

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[n_i], T_j[n_j][n_i - n_j]) = 0,$$

e portanto

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = 0.$$

(c) Como $i \geq j$, temos que $n_i \geq n_j$, e assim obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, T_j[1]) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[n_i], T_j[n_j][n_i - n_j + 1]) = 0, \end{aligned}$$

pois $n_i - n_j + 1 \geq 1$ e $T_i[n_i]$, $T_j[n_j]$ são somandos do complexo tilting $T^\bullet$.

(d) Primeiramente, como T_i é um objeto em uma categoria hereditária com objeto tilting, podemos escrevê-lo como a soma direta finita de objetos indecomponíveis de $\mathscr{H}$, isto é, para cada T_i temos a decomposição

$$T_i = \bigoplus_{l=0}^{s} X_l^{(i)},$$

em que cada objeto $X_l^{(i)}$ de $\mathscr{H}$ é indecomponível. Agora, ao considerarmos $l_a > l_b$, segue diretamente do item (c) que

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X_{l_a}^{(i)}, X_{l_b}^{(i)}) = 0,$$

uma vez que T_i não possui autoextensões.

Para provarmos que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(X_{l_a}, X_{l_b}) = 0$ quando $l_a > l_b$, note que uma vez que T_i é um objeto tilting parcial na categoria $\mathscr{H}$, então de acordo com o lema 2.2 de [AST08], a álgebra $B = \operatorname{End} T_i = \operatorname{End}(\oplus_{l=0}^{s} X_l^{(i)})$ é quasi-tilted, e portanto uma álgebra triangular. Isto nos permite então ordenar os B-módulos projetivos P_l de tal maneira que $\operatorname{Hom}_B(P_{l_a}, P_{l_b}) = 0$ para $l_a > l_b$. Como os B-módulos projetivos P_l estão em correspondência biunívoca com os objetos $X_l^{(i)}$ de $\mathscr{H}$, podemos ordená-los de tal maneira que, para $l_a > l_b$, tenhamos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_{l_a}^{(i)}, X_{l_b}^{(i)}) = 0.$$

■

Suponha agora que $\mathrm{rk} K_0(\mathscr{H}) = n$. Utilizando o lema 1.11, podemos então escrever o complexo tilting $T^\bullet$ como uma soma direta

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i],$$

em que cada T_i é um objeto indecomponível da categoria $\mathscr{H}$ e $r_0 \leq r_1 \leq ... \leq r_{n-1}$.

Agora, vamos estudar algumas propriedades dos complexos tilting. Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária. Como visto anteriormente, $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ consiste em cópias da categoria $\mathscr{H}$. Seja como antes $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Como $T^\bullet$ tem um número finito de somandos diretos indecomponíveis, sabemos que existem números inteiros r e s, $r \leq s$, tais que para todo somando indecomponível $T_i[r_i]$ de $T^\bullet$, $r \leq r_i \leq s$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a categoria $\mathscr{H}$ é conexa, logo, a álgebra $\Lambda = \mathrm{End} T^{\bullet op}$ será conexa também.

Proposição 1.12 *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting, e seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ e suponha que $\mathrm{rk}K_0(\mathscr{H}) = n$. Sejam $\mathscr{H}[r_0]$ e $\mathscr{H}[r_{n-1}]$ a primeira e última cópias de $\mathscr{H}$ em que aparecem somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ respectivamente. Então $r_{n-1} - r_0 + 1 \leq n$.*

Demonstração: Lembre que para dois objetos M e N em $\mathscr{H}$, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(M[r], N[r+i]) = 0, \forall i \neq 0, 1.$$

Logo, se temos dois somandos indecomponíveis $T[r]$ e $T[r']$ de $T^\bullet$, com $r \leq r'$, então devem existir somandos $T''[r'']$ para todo $r \leq r'' \leq r'$, pois $\Lambda = \mathrm{End} T^{\bullet op}$ é conexa. Como o complexo tilting $T^\bullet$ tem n somandos diretos indecomponíveis, então existem somandos $T_i[r_i]$ se e somente se $r_0 \leq r_i \leq r_{n-1}$, e portanto $r_{n-1} - r_0 + 1 \leq n$.

■

Chamaremos então $\nu(T^\bullet) = r_{n-1} - r_0 + 1$ de **espalhamento do complexo tilting** $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Ao longo deste trabalho utilizaremos este conceito de forma sucinta em várias proposições e demonstrações. Mais adiante mostraremos como o espalhamento de um complexo tilting $T^\bullet$ se relaciona com a dimensão global forte da álgebra $\mathrm{End} T^{\bullet op}$.

1.3 Componentes tubulares

Nessa seção apresentaremos algumas definições básicas e também a linguagem necessária para entendermos o comportamento de objetos tilting dentro de tubos.

Definição 1.7 *Seja* $(\mathscr{T},\tau)$ *um quiver de translação.*

(a) $(\mathscr{T},\tau)$ *é dito um* ***tubo estável de posto*** $r = r_{\mathscr{T}} \geq 1$ *se existir um isomorfismo entre quivers de translação* $\mathscr{T} \simeq \mathbb{Z}\mathbb{A}_{\infty}/(\tau^{r})$.

(b) Um tubo estável de posto $r = 1$ *é chamado de* ***tubo homogêneo****.*

(c) Seja $(\mathscr{T},\tau)$ *um tubo estável de posto* $r \geq 1$*. Uma sequência de pontos* $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ *em* $\mathscr{T}$ *é dito um* τ*-ciclo se* $\tau x_1 = x_r, \tau x_2 = x_1, \cdots, \tau x_r = x_{r-1}$.

Por exemplo, um tubo estável de posto 3 é obtido a partir do quiver

$$\begin{tikzcd}
X_1=\tau X_2 \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & X_2=\tau X_3 \arrow[dr] & & X_3=\tau X_1 \arrow[dr] & & X_1 \arrow[dd, dash, dashed] \\
& Y_1=\tau Y_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y_2=\tau Y_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y_3=\tau Y_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
Z_1=\tau Z_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & Z_2=\tau Z_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z_3=\tau Z_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z_1 \arrow[dd, dash, dashed] \\
& W_1=\tau W_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & W_2=\tau W_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & W_3=\tau W_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\vdots \arrow[ur] & & \vdots \arrow[ur] & & \vdots \arrow[ur] & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Definição 1.8 *Seja* $\mathbf{T} = \{\mathscr{T}_i\}_{i\in\Lambda}$ *uma família de tubos estáveis e* $(m_1, m_2, \cdots, m_s)$ *uma sequência de números inteiros satisfazendo* $1 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_s$*. Dizemos que* $\mathbf{T}$ *é de tipo tubular* $(m_1, \cdots, m_s)$ *se* $\mathbf{T}$ *admite* s *tubos* $\mathscr{T}_{i_1}, \cdots, \mathscr{T}_{i_s}$ *de posto* $(m_1, m_2, \cdots, m_s)$*, respectivamente, e os tubos remanescentes* $\mathscr{T}_i$ *de* $\mathbf{T}$*, com* $i \notin \{i_1, \cdots, i_s\}$ *são homogêneos.*

Antes de continuarmos, recordemos que um caminho $x_0 \to \cdots \to x_t$ em um quiver de translação é chamado **seccional** se $\tau x_i \not\simeq x_{i-2}$, para todo $i \in \{2, ..., t\}$, (ver pág.361, [ASS06]). Recordemos também que se existe uma flecha de um objeto X para um objeto Y, então X é dito **predecessor imediato** de Y, e Y é dito **sucessor imediato** de X (ver pág. 43, [ASS06]).

Definição 1.9 *Seja* $(\mathscr{T},\tau)$ *um tubo estável.*

(a) O conjunto dos pontos em $\mathscr{T}$ *que têm exatamente um predecessor imediato (ou equivalentemente um sucessor imediato) é chamado de* ***boca*** *do tubo* $\mathscr{T}$.

(b) Dado um ponto x *na boca do tubo* $\mathscr{T}$*, o* ***raio*** *começando em* x *é o único caminho seccional infinito*

$$x = x[1] \to x[2] \to \cdots x[m] \to \cdots .$$

(c) Dado um ponto x *na boca do tubo* $\mathscr{T}$*, o* ***co-raio*** *terminando em* x *é o único caminho seccional infinito*

$$\cdots \to [m]x \to \cdots \to [3]x \to \cdots [2]x \to [1]x = x.$$

Lema 1.13 (ver [SS06], pág. 5) *Seja* Λ *uma álgebra e* $\mathscr{T}_\lambda$ *um tubo estável de posto* $r = r_\lambda \geq 1$ *em* $\Gamma(modA)$*. Assuma que* $(X_1, \cdots, X_r)$ *é um* τ*-ciclo de* A*-módulos indecomponíveis na boca do tubo* $\mathscr{T}_\lambda$*, então*

(a) Para cada $i \in \{1, \cdots, r\}$*, existe um único raio*

$$X_i = X_i[1] \to X_i[2] \to \cdots \to X_i[m] \to \cdots .$$

(b) Cada A*-módulo indecomponível* M *em* $\mathscr{T}_\lambda$ *é da forma* $M \simeq X_i[m]$*, para algum* i *pertencente ao conjunto* $\{1, \cdots, r\}$ *e* $m \geq 1$.

Definição 1.10 *Seja* $\mathscr{C}$ *uma componente do quiver de Auslander-Reiten* $\Gamma(modA)$ *da álgebra* A*. Dizemos então que* $\mathscr{C}$ *é uma* ***componente estândar*** *se existir uma equivalência de* K*-categorias*

$$K(\mathscr{C}) = K\mathscr{C}/M_{\mathscr{C}} \simeq ind\mathscr{C},$$

onde $ind\mathscr{C}$ *é a* k*-subcategoria plena de* $modA$ *cujos objetos são representantes das classes de isomorfismos dos módulos indecomponíveis em* $\mathscr{C}$ *e a categoria quociente* $k(\mathscr{C})$ *é a categoria mesh.*

Para um módulo indecomponível $M \simeq X_i[j]$ num tubo estável $\mathscr{T}_\lambda$, o **cone** determinado por M, que denotaremos por CM, consiste dos A-módulos $X_s[u]$, com $s \in \{i, i+1, \cdots, i+j-1\}$ e $u \leq i+j-s$. Além disso, o inteiro j é denotado por $\ell_\lambda(M)$. Graficamente, o cone de M tem a forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X_i[1] \arrow[dr] & & X_{i+1}[1] \arrow[dr] & & X_{i+2}[1] \arrow[dr] & & \cdots & & X_{i+j-2}[1] \arrow[dr] & & X_{i+j-1}[1] \\
& X_i[2] \arrow[ur] \arrow[dr] & & X_{i+1}[2] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \ddots \arrow[dr] & & \iddots \arrow[ur] \arrow[dr] & & X_{i+j-2}[2] \arrow[ur] & \\
& & X_i[3] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \ddots \arrow[dr] & & \iddots \arrow[dr] & & \iddots \arrow[ur] & & \\
& & & \ddots \arrow[dr] & & X_{i+1}[j-2] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \iddots \arrow[ur] & & & \\
& & & & X_i[j-1] \arrow[ur] \arrow[dr] & & X_{i+1}[j-1] \arrow[ur] & & & & \\
& & & & & M \simeq X_i[j] \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Com a definição de cone apresentada e com a notação fixada, temos a seguinte proposição, que será importante ao longo do texto.

Proposição 1.14 (ver [SS07], pág. 106) *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo indecomponível em um tubo estável estândar $\mathcal{T}_\lambda$ de $\Gamma(modA)$ de posto $r_\lambda \geq 1$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) $Ext_A^1(M,M)=0$*;*

(b) $r_\lambda \geq 2$*,* $End(M) \simeq k$*, e além disso,* $\ell_\lambda(M) \leq r_\lambda - 1$.

Da proposição anterior podemos concluir então que os objetos M que estão na boca de um tubo estável estândar $\mathcal{T}$ são tijolos, isto é, End$M \simeq k$.

Vejamos agora que ao trabalharmos com tubos estáveis estândares, todos os morfismos entre objetos deste tubo estão contidos dentro do tubo. Para tanto, antes precisamos da seguinte definição.

Definição 1.11 *Uma família $\mathcal{E} \subseteq modA$ é dita* ***auto-hereditária*** *se $Ext_A^2(X,Y)=0$ para todo par de A-módulos X e Y em $\mathcal{E}$.*

Note que se estivermos considerando uma álgebra hereditária A, todos os objetos da categoria mod$A$ serão auto-hereditários.

Proposição 1.15 (ver [ASS06], pág. 24) *Seja A uma álgebra, $\mathscr{T}$ um tubo estável estândar de $\Gamma(modA)$ de posto $r \geq 1$ e $\{E_1, ..., E_r\}$ uma família auto-hereditária formando a boca do tubo $\mathscr{T}$. Então os únicos homomorfismos entre dois módulos indecomponíveis em $\mathscr{T}$, além das identidades, são as combinações k-lineares de composições dos homomorfismos u_{ij} e p_{ij}, onde tais morfismos são, de acordo com a notação que utilizamos ao longo desta seção,*

$$\begin{aligned} u_{ij}: \quad & X_i[j-1] \quad \to X_i[j]; \\ p_{ij}: \quad & X_i[j] \quad \to X_{i+1}[j-1], \end{aligned}$$

para $j \geq 2$.

1.4 Sequências Excepcionais e Categorias Perpendiculares

1.4.1 Sequências Excepcionais

Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária e $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Nosso próximo objetivo é definir o conceito de sequência excepcional, mas para tanto, necessitamos de algumas definições prévias.

Definição 1.12 *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária. Dizemos então que um objeto M é* ***excepcional*** *se ele é indecomponível, e além disso, vale a igualdade*

$$Ext^1_{\mathscr{H}}(M, M) = 0.$$

Dizemos que um par de objetos excepcionais (M, N) é um ***par excepcional*** *se*

$$Hom_{\mathscr{H}}(N, M) = 0 = Ext^1_{\mathscr{H}}(N, M).$$

Uma sequência de objetos $(X_1, X_2, \cdots, X_r)$ é dita uma ***sequência excepcional*** *se (X_i, X_j) é um par excepcional para todos $i < j$. Se, além disso, $r = n$, em que $n = rkK_0(\mathscr{H})$, chamamos a sequência de* ***sequência excepcional completa***.

Podemos enunciar então o seguinte resultado, que será muito importante no decorrer deste texto.

Teorema 1.16 (ver [Mel04], pág. 84) *Dada uma categoria hereditária $\mathscr{H}$, os somandos diretos indecomponíveis não isomorfos de um complexo tilting parcial $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ podem ser ordenados de tal maneira que eles formem uma sequência excepcional ϵ. Mais ainda, se $T^\bullet$ for um complexo tilting, então ϵ é completa.*

Demonstração: Como visto anteriormente no lema 1.11, o complexo tilting parcial $T^\bullet$ pode ser escrito como

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=1}^{t} T_i[n_i]$$

para alguns objetos tilting parciais T_i na categoria $\mathscr{H}$ e $n_i \in \mathbb{Z}$ com $n_1 < n_2 < \ldots < n_t$. Em particular temos que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_i) = 0$. Do lema 1.11 obtemos $\operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = 0$ e $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = 0$ para $i > j$. Note que ao decompormos o complexo tilting $T^\bullet$ dessa maneira, os objetos T_i não são necessariamente indecomponíveis.

Segue também do item (d) do lema 1.11 que ao escrevermos $T_i = \oplus_{l=1}^{s} X_l^{(i)}$, ou seja, sua decomposição em objetos indecomponíveis de $\mathscr{H}$, podemos ordenar os objetos $X_l^{(i)}$ de tal maneira que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(X_{l_a}^{(i)}, X_{l_b}^{(i)}) = 0$ se $l_a > l_b$. E assim obtemos uma sequência excepcional.

Além disso, se $T^\bullet$ for um complexo tilting, então o número de somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ é igual ao posto do grupo de Grothendieck da categoria $\mathscr{H}$, e a sequência excepcional é completa.

■

Chamaremos esta sequência excepcional de sequência excepcional do complexo tilting. Note que em geral pode existir mais do que uma sequência excepcional completa para um complexo tilting e que, por outro lado, nem sempre uma sequência excepcional completa determina um complexo tilting.

Em geral, a menos que seja mencionado o contrário, quando escrevemos o complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ como uma soma de shifts de objetos indecomponíveis da categoria $\mathscr{H}$, isto é,

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i],$$

consideramos que cada T_i é um objeto indecomponível em $\mathscr{H}$, que $r_0 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_{n-2} \leq r_{n-1}$, e além disso, para $i > j$,

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) = 0.$$

1.4.2 Categorias Perpendiculares

Iremos frequentemente lidar com categorias perpendiculares neste trabalho. Esta ferramenta nos será muito útil para trabalhar com sequências excepcionais, mas também nos ajudará em provas onde utilizaremos indução.

Definição 1.13 *Seja C uma classe de objetos em uma categoria hereditária $\mathscr{H}$. Então definimos as* ***categorias perpendiculares*** *$C^{\perp}$ e $^{\perp}C$ como as seguintes subcategorias:*

$$C^{\perp} = \{X \in \mathscr{H} | Hom_{\mathscr{H}}(M,X) = 0 = Ext^1_{\mathscr{H}}(M,X), \forall M \in C\},$$

$$^{\perp}C = \{X \in \mathscr{H} | Hom_{\mathscr{H}}(X,M) = 0 = Ext^1_{\mathscr{H}}(X,M), \forall M \in C\}.$$

Categorias perpendiculares foram introduzidas em [GL91]. Um resultado clássico apresentado nesse texto é que se Λ é uma álgebra hereditária com n módulos simples e X é um Λ-módulo excepcional, então a categoria perpendicular à direita $X^{\perp}$, formada em modΛ, é equivalente a uma categoria de módulos modΛ_0 para alguma álgebra hereditária Λ_0 com $n-1$ módulos simples.

Dizemos que um objeto A em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ tem dimensão projetiva menor ou igual a n (pd$A \leq n$) se $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{A}}(A,\_) = 0$ para todo $k \geq n+1$. Além disso, se pd$A \leq n$ e pd$A > n-1$, dizemos que pd$A = n$. Se pd$S \leq n$ para todo $S \in \mathscr{S}$, escreveremos pd$\mathscr{S} \leq n$.

Proposição 1.17 (ver [GL91], pág. 274) *Seja $\mathscr{S}$ um sistema de objetos em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$. Então a categoria $\mathscr{S}^{\perp}$ é fechada para extensões e núcleos. Se adicionalmente dp$\mathscr{S} \leq 1$, então $\mathscr{S}^{\perp}$ é uma subcategoria exata de $\mathscr{A}$, isto é, $\mathscr{S}^{\perp}$ é abeliana e a inclusão $\mathscr{S}^{\perp} \hookrightarrow \mathscr{A}$ é exata.*

Ao considerarmos uma álgebra hereditária Λ e tomarmos um Λ-módulo indecomponível projetivo em modΛ, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.18 (ver [GL91], pág. 300) *Sejam $\Lambda = kQ$ uma álgebra hereditária e $P(i) = e_i\Lambda$ o Λ-módulo projetivo associado ao vértice i no quiver Q. Então temos*

$$P(i)^{\perp} \simeq mod\Lambda/\Lambda e_i \Lambda.$$

No caso em que consideramos a categoria perpendicular de um módulo tilting parcial, além das propriedades já vistas anteriormente, temos alguns resultados a mais, que enunciaremos a seguir.

Proposição 1.19 (ver [SS07], pág. 255) *Sejam Λ uma álgebra e T um Λ-módulo tilting parcial. Então o funtor inclusão $T^{\perp} \hookrightarrow mod\Lambda$ admite um funtor adjunto à esquerda $p_T : mod\Lambda \to T^{\perp}$, isto é, para cada módulo $N \in T^{\perp}$ e para cada módulo M em $mod\Lambda$, existe um isomorfismo funtorial de k-espaços vetoriais*

$$Hom_{\Lambda}(p_T(M), N) \xrightarrow{\simeq} Hom_{\Lambda}(M, N).$$

Em particular, $p_T(N) \cong N$, para cada módulo N em $T^{\perp}$.

Corolário 1.20 *Sejam Λ uma álgebra arbitrária, T um Λ-módulo tilting parcial e $p_T : mod\Lambda \to T^{\perp}$ como descrito na proposição acima. Então o funtor*

$$Hom_{\Lambda}(p_T(\Lambda), \_) : T^{\perp} \to modEnd_{\Lambda}(p_T(\Lambda))$$

é uma equivalência de categorias.

Teorema 1.21 (ver [SS07], pág. 260) *Sejam Λ uma álgebra hereditária e $T \in mod\Lambda$ um módulo tilting parcial. Então:*

- *Existe uma álgebra hereditária B satisfazendo a equivalência k-linear de categorias: $T^{\perp} \simeq modB$.*
- *$rkK_0(\Lambda) = rkK_0(B) + r$, onde $r \geq 1$ é o número de somandos indecomponíveis do módulo T.*

Ao considerarmos uma sequência excepcional ϵ, podemos sempre construir as categorias perpendiculares $\epsilon^{\perp}$ e ${}^{\perp}\epsilon$. Sabemos também que, dado um complexo tilting $T^{\bullet}$ em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, podemos reordenar seus somandos diretos indecomponíveis de tal maneira que os módulos associados aos somandos de $T^{\bullet}$ formem uma sequência excepcional.

Proposição 1.22 (ver [GL91], pág. 290) *Seja $j : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ uma inclusão exata de categorias abelianas. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) O morfismo natural

$$Ext^1_{\mathscr{A}'}(A, B) \to Ext^1_{\mathscr{A}}(jA, jB)$$

é um isomorfismo para todo $A, B \in \mathscr{A}'$ e $n \geq 0$.

(2) O funtor induzido entre categorias derivadas

$$\mathscr{D}^b(j) : \mathscr{D}^b(\mathscr{A}') \to \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$$

é uma inclusão plena.

O próximo lema, que será utilizado exaustivamente neste trabalho, nos apresenta alguns complexos tilting especiais, construídos a partir de um complexo tilting dado $T^\bullet$, utilizando as ideias expostas anteriormente.

Lema 1.23 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária tal que $rkK_0(\mathscr{H}) = n$ e $T^\bullet = \oplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i]$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, em que cada T_i é um objeto indecomponível em $\mathscr{H}$. Seja também $\epsilon = (T_0, T_1, \cdots, T_{n-1})$ uma sequência excepcional de $T^\bullet$. Então*

$$T_R^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{s} T_i[r_i]$$

é complexo tilting em $\mathscr{D}^b((T_{s+1}, \cdots, T_{n-1})^\perp)$. Analogamente,

$$T_L^\bullet = \bigoplus_{i=t+1}^{n-1} T_i[r_i]$$

é complexo tilting em $\mathscr{D}^b({}^\perp(T_0, \cdots, T_t))$.

Demonstração: Provaremos aqui somente a primeira parte do lema, a prova da outra parte é análoga. Vejamos primeiramente que $T_R^\bullet$ está na categoria $\mathscr{D}^b((T_{s+1}, \cdots, T_{n-1})^\perp)$. Note que uma vez que $\epsilon = \{T_0, ..., T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional, para todo $j \in \{s+1, ..., n-1\}$ e para todo $i \in \{0, ..., s\}$, valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_j, T_i) &= 0; \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_j, T_i) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que, para todo $i \in \{0, ..., s\}$, o objeto T_i pertence à categoria $(T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp$, e portanto $T_R^\bullet = \oplus_{i=0}^{s} T_i[r_i] \in \mathscr{D}^b((T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp)$.

Agora provaremos que $T_R^\bullet$ é de fato um complexo tilting. Utilizando então o lema 1.10, temos que mostrar que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b((T_{s+1},...,T_{n-1})^\perp)}(T_R^\bullet, T_R^\bullet[m]) = 0$$

para todo $m \neq 0$ e que o número de somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet_R$ é igual ao posto do grupo de Grothendieck da categoria $(T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp$.

Para $i, j \in \{0, ..., s\}$ e para $m \neq 0$ temos a seguinte sequência de morfismos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b((T_{s+1},...,T_{n-1})^\perp)}(T^\bullet_R, T^\bullet_R[m]) &= \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b((T_{s+1},...,T_{n-1})^\perp)}(T_i[r_i], T_j[r_j][m]) \\ &= \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_j[r_j][m]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $T_i[r_i]$ e $T_j[r_j]$ são somandos diretos indecomponíveis do complexo tilting $T^\bullet$. Note que ao passarmos da primeira para a segunda linha na sequência de morfismos acima, utilizamos a proposição 1.22. Agora, finalmente, note que

$$|T^\bullet_R| = s+1 = n-[(n-1)-(s+1)+1] = \mathrm{rk} K_0((T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp).$$

■

A proposição anterior, aliada ao último lema, nos permitirá utilizar o comportamento de um complexo tilting em uma subcategoria específica $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ para descrever o seu comportamento na categoria $\mathscr{A}$.

Observação 1.2 *Note que no nosso caso, isto é, quando estamos trabalhando com uma categoria hereditária com objeto tilting $\mathscr{H}$, para todo H objeto de $\mathscr{H}$ temos $pdH \leq 1$, isto é, para todo $n \geq 2$ temos $Ext^n_{\mathscr{H}}(H, \_) = 0$, e então, da proposição 1.17, temos que a categoria perpendicular $(T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp$ é abeliana e a inclusão $(T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp \hookrightarrow \mathscr{H}$ é exata, e de acordo com o corolário 2.4 de [GL91], o item (1) do lema anterior sempre se verifica. Assim, utilizando a proposição 1.22 e o lema 1.23, quando tivermos um complexo tilting*

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i]$$

na categoria $\mathscr{H}$, podemos concluir que

$$\mathscr{D}^b((T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp) \hookrightarrow \mathscr{D}^b(\mathscr{H}).$$

Além disso, como $(T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp \subset \mathscr{H}$ e a categoria derivada de uma categoria hereditária é o fecho aditivo de tal categoria, para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos $(T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp[i] \subset \mathscr{H}[i]$, e assim, se tivermos um objeto espalhado em ℓ cópias na categoria $\mathscr{D}^b((T_{s+1}, ..., T_{n-1})^\perp)$, esse mesmo objeto *poderá estar espalhado em no máximo* ℓ *cópias de* $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$.

1.5 Dimensão Global Forte

Nosso objetivo nessa seção é definir a **dimensão global forte** de uma álgebra, bem como apresentar alguns resultados gerais sobre tal invariante. No caso da dimensão global de uma álgebra, sabemos que essa medida nos diz o quão longe uma álgebra está de ser uma álgebra hereditária. O conceito de dimensão global forte é um invariante que nos ajuda a medir o quão longe uma álgebra hereditária por partes está de ser uma álgebra quasi-tilted.

Definição 1.14 *Sejam* Λ *uma álgebra de dimensão finita e* $X^\bullet \in \mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ *um objeto indecomponível na categoria de homotopia de complexos limitados de* Λ*-módulos projetivos finitamente gerados. Seja*

$$P: \cdots \to 0 \to 0 \to P^r \to P^{r+1} \to \cdots \to P^{s-1} \to P^s \to 0 \to 0 \to \cdots$$

uma resolução projetiva minimal de $X^\bullet$*, em que* $P^r \neq 0$ *e* $P^s \neq 0$. *Então defina o comprimento de* $X^\bullet$ *como*

$$\ell(X^\bullet) = s - r.$$

*A **dimensão global forte** é dada por*

$$s.gl.dim.\Lambda = \sup_{X^\bullet}\{\ell(X^\bullet)\},$$

em que $X^\bullet$ *percorre todos os objetos indecomponíveis.*

Note que da definição acima, garantimos que s.gl.dim.$\Lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Segue também da definição que se a álgebra Λ for uma álgebra hereditária, então s.gl.dim.$\Lambda \leq 1$. Além disso, para uma álgebra quasi-tilted que não seja uma álgebra hereditária, o próximo resultado nos fornece o valor de s.gl.dim.Λ.

Proposição 1.24 (ver [HZ08], pág. 185) *Seja* Λ *uma álgebra com dimensão finita. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $gl.dim\Lambda = s.gl.dim.\Lambda = 2$;

(ii) Λ *é uma álgebra quasi-tilted que não é hereditária.*

Além disso, em [HZ08] e [HZ10], Happel e Zacharia também mostraram os seguintes resultados, que nos fornecem uma caracterização alternativa para álgebras hereditárias por partes.

Proposição 1.25 (ver [HZ10], pág. 1145) *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes com dimensão finita. Então s.gl.dim.$\Lambda \leq rkK_0(\Lambda)$. Em particular, s.gl.dim.$\Lambda < \infty$.*

Teorema 1.26 (ver [HZ08], pág. 184) *Seja Λ uma álgebra com dimensão finita. Então Λ é hereditária por partes se, e somente se, s.gl.dim.$\Lambda < \infty$.*

Neste trabalho um de nossos objetivos é encontrar majorantes para a dimensão global forte de certos tipos de álgebras. Para isto, utilizaremos a seguinte caracterização para a dimensão global forte, que pode ser encontrada em [ALMM17].

Sejam $T^\bullet$ e $X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$, em que $\mathscr{A}$ é uma categoria hereditária. Definimos então $\ell^+_{T^\bullet}(X^\bullet)$, $\ell^-_{T^\bullet}(X^\bullet) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ da seguinte maneira:

$$\ell^+_{T^\bullet}(X^\bullet) = \sup\{n \in \mathbb{Z} | \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{A})}(X^\bullet, T^\bullet[n]) \neq 0\}$$
$$\ell^-_{T^\bullet}(X^\bullet) = \inf\{n \in \mathbb{Z} | \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{A})}(T^\bullet[n], X^\bullet) \neq 0\}$$

Proposição 1.27 (ver [ALMM17]) *Sejam $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ um complexo tilting e $\Lambda = EndT^{\bullet op}$. Então $-\infty < \ell^-_{T^\bullet}(X^\bullet) \leq \ell^+_{T^\bullet}(X^\bullet) < +\infty$ para todo $X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ indecomponível, e além disso,*

$$s.gl.dim.\Lambda = sup\{\ell^+_{T^\bullet}(X^\bullet) - \ell^-_{T^\bullet}(X^\bullet) | X^\bullet \in ind\mathscr{D}^b(\mathscr{A})\}.$$

No que segue, se $T^\bullet$ é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$, e se $X^\bullet \in \mathrm{ind}\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$, então $\ell_{T^\bullet}(X^\bullet)$ denota a diferença $\ell^+_{T^\bullet}(X^\bullet) - \ell^-_{T^\bullet}(X^\bullet)$. Note que $\ell_{T^\bullet}(X^\bullet) = \ell_{T^\bullet}(X^\bullet[i])$ para todo $X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ e $i \in \mathbb{Z}$. Logo, temos o seguinte:

$$\mathrm{s.gl.dim.}\Lambda = \sup\{\ell_{T^\bullet}(X^\bullet) | X^\bullet \in \mathrm{ind}\mathscr{D}^b(\mathscr{A}),\ \ell^-_{T^\bullet}(X^\bullet) = 0\}.$$

O próximo resultado nos mostra uma forma de relacionar a dimensão global forte com o espalhamento de um complexo tilting, e será uma ferramenta muito importante na prova de diversos resultados futuros neste trabalho.

Lema 1.28 (ver [ALMM17]) *Sejam $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ uma subcategoria hereditária geradora e $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ um complexo tilting. Assuma que $l \geq 0$ é um número inteiro tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{t=0}^{l} \mathscr{H}[i].$$

Então

$$s.gl.dim.EndT^{\bullet op} \leq l + 2.$$

Demonstração: Seja $X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ um objeto indecomponível. A menos de shift, podemos considerar que $\ell^-_{T^\bullet}(X^\bullet) = 0$. Seja $d = \ell^+_{T^\bullet}(X^\bullet) = \ell_{T^\bullet}(X^\bullet)$. Existem então T_1, T_2 somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ tais que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{A})}(T_1, X^\bullet) \neq 0 \,\mathrm{e}\, \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{A})}(X^\bullet, T_2[d]) \neq 0.$$

Além disso, existem inteiros $i \in \mathbb{Z}$ e $j, k \in \{0, \cdots, l\}$ tais que

$$X^\bullet \in \mathscr{H}[i],\ T_1 \in \mathscr{H}[j],\ \mathrm{e}\ T_2 \in \mathscr{H}[k].$$

Temos $0 \leq i - j \leq 1$ e $0 \leq (d+k) - i \leq 1$, e então

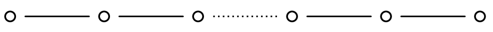
$$d \leq 1 + i - k = 1 + \underbrace{(i-j)}_{\leq 1} + \underbrace{(j-k)}_{\leq l} \leq l + 2.$$

■

1.6 Álgebras hereditárias

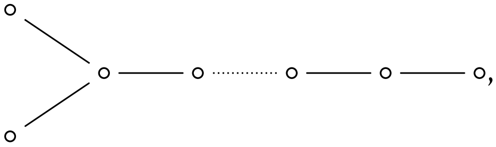
Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre categorias de módulos sobre álgebras hereditárias que serão necessários ao longo do texto. Antes de prosseguirmos, relembre que uma álgebra hereditária Λ é dita de tipo de representação finito se a categoria de módulos modΛ tem um número finito de módulos indecomponíveis não-isomorfos. Além disso, sabemos também que tais álgebras podem ser representadas como álgebras de caminhos kQ, em que o grafo subjacente de Q é do tipo Dynkin, ou seja, tem uma das seguintes formas:

$\mathbb{A}_n$:



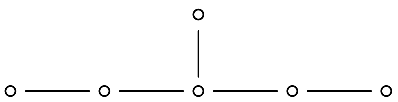
, $n \geq 1$.

$\mathbb{D}_n$:

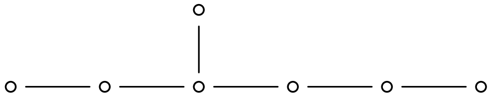


, $n \geq 4$.

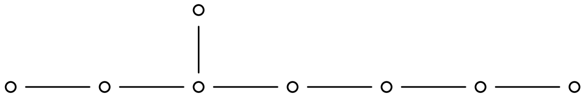
$\mathbb{E}_6$:



$\mathbb{E}_7$:



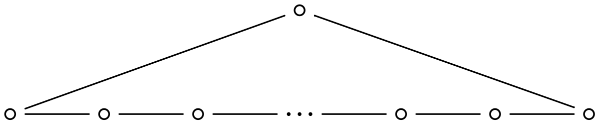
$\mathbb{E}_8$:



Os índices nos grafos Dynkin se referem ao número de vértices(por exemplo, $\mathbb{A}_n$ tem n vértices).

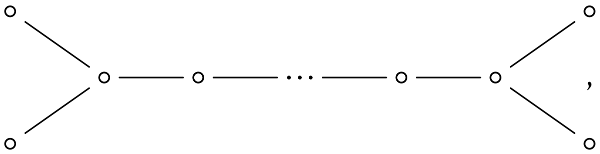
Relembremos que uma álgebra hereditária Λ é dita de tipo de representação manso se é uma álgebra de caminhos kQ cujo grafo subjacente ao quiver Q é Euclidiano, ou seja, tem uma das seguintes formas:

$\tilde{\mathbb{A}}_n$:



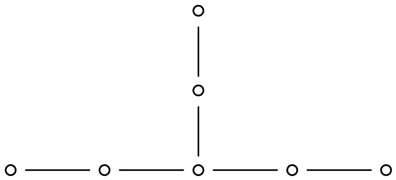
, $n \geq 1$.

$\tilde{\mathbb{D}}_n$:

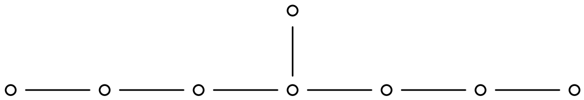


, $n \geq 4$.

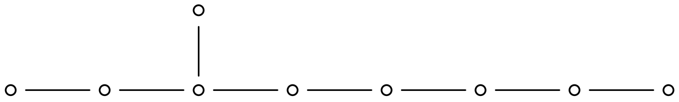
$\tilde{\mathbb{E}}_6$:



$\tilde{\mathbb{E}}_7$:



$\tilde{\mathbb{E}}_8$:



Os índices nos grafos Euclidianos se referem ao número de vértices menos um(por exemplo, $\tilde{\mathbb{A}}_n$ tem $n+1$ vértices). De fato, um grafo Euclidiano pode ser construído a partir de seu correspondente grafo Dynkin adicionando-se um novo vértice.

No resto desta seção apresentaremos resultados sobre o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra hereditária mansa.

Definição 1.15 *Seja A uma k-álgebra arbitrária e $\Gamma(modA)$ o quiver de Auslander-Reiten de A.*

- ***a)*** *Uma componente conexa $\mathbf{P}$ de $\Gamma(modA)$ é dita **pós-projetiva** se $\mathbf{P}$ for acíclica e, para todo módulo indecomponível M em $\mathbf{P}$, existirem $t \geq 0$ e $a \in (Q_A)_0$ tais que $M \simeq \tau^{-t}P(a)$, onde $P(a)$ é o módulo projetivo associado ao vértice a. Um A-módulo indecomponível é dito pós-projetivo se pertence à uma componente pós-projetiva de $\Gamma(modA)$, e um A-módulo arbitrário é dito pós-projetivo se for soma direta de A-módulos indecomponíveis pós-projetivos.*

- ***b)*** *Uma componente conexa $\mathbf{Q}$ de $\Gamma(modA)$ é dita **pré-injetiva** se $\mathbf{Q}$ for acíclica e, para todo módulo indecomponível M em $\mathbf{Q}$, existirem $s \geq 0$ e $b \in (Q_A)_0$ tais que $M \simeq \tau^{s}I(b)$, onde $I(b)$ é o módulo injetivo associado ao vértice b. Um A-módulo indecomponível é dito pré-injetivo se pertence à uma componente pré-injetiva de $\Gamma(modA)$, e um A-módulo arbitrário é dito pré-injetivo se for soma direta de A-módulos indecomponíveis pré-injetivos.*

- ***c)*** *Uma componente conexa $\mathbf{C}$ de $\Gamma(modA)$ é dita **regular** se $\mathbf{C}$ não contém A-módulos pós-projetivos e pré-injetivos. Um A-módulo indecomponível é dito regular se pertence à uma componente regular de $\Gamma(modA)$, e um A-módulo arbitrário é dito regular se for soma direta de A-módulos indecomponíveis regulares.*

Definição 1.16 *Uma família $\mathbf{C} = \{\mathscr{C}_i\}_{i\in\Lambda}$ de componentes no quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(modA)$ de uma álgebra A é dita **separante** se os A-módulos indecomponíveis fora da família $\mathbf{C}$ se separam em 2 classes $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ tais que as seguintes condições são satisfeitas:*
(a) *As componentes em $\mathbf{C}$ são duas a duas ortogonais.*
(b) *$Hom_A(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = 0$, $Hom_A(\mathbf{Q},\mathbf{C}) = 0$, $Hom_A(\mathbf{C},\mathbf{P}) = 0$.*
(c) *Para cada $i \in \Lambda$, qualquer morfismo $f : P \rightarrow Q$, com $P \in add\mathbf{P}$ e $Q \in add\mathbf{Q}$, se fatora por um módulo de $add\mathscr{C}_i$.*
Neste caso dizemos que $\mathbf{C}$ separa $\mathbf{P}$ de $\mathbf{Q}$.

O próximo teorema, que pode ser encontrado em [SS06], descreve o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod}\Lambda)$ de qualquer álgebra hereditária $\Lambda = kQ$ mansa. Para a definição de quiver Euclidiano orientado canonicamente recomendamos a leitura de [SS06], pág. 146.

Teorema 1.29 (ver [SS06], pág. 154) *Sejam k um corpo algebricamente fechado e Q um quiver acíclico cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é Euclidiano, e seja também $A = kQ$ a álgebra de caminhos de Q.*
(a) *Existe um quiver Euclidiano $\triangle$ orientado canonicamente tal que Q é obtido de $\triangle$ através de*

uma sequência finita de reflexões e A é uma álgebra tilted de tipo $\triangle$.
(b) *O quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(modA)$ de A consiste dos seguintes três tipos de componentes:*

- *Uma componente pós-projetiva $\mathbf{P}(A)$ contendo todos os A-módulos projetivos indecomponíveis;*
- *Uma componente pré-injetiva $\mathbf{Q}(A)$ contendo todos os A-módulos injetivos indecomponíveis;*
- *Uma única $\mathbb{P}_1(k)$-família*

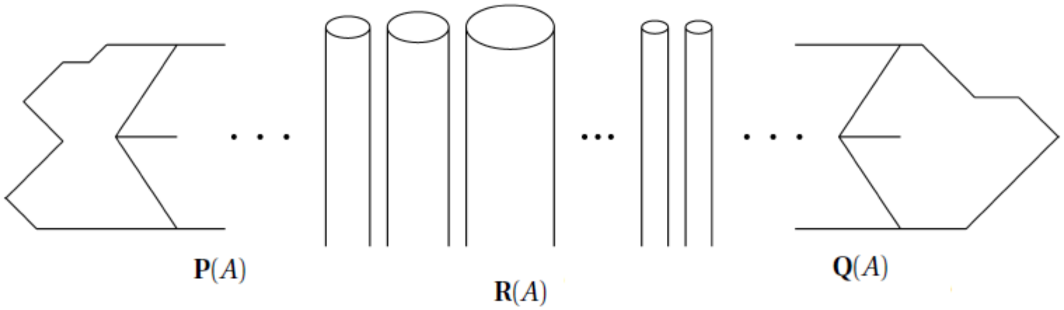
  $$\mathbf{T}^Q = \{\mathcal{T}_\Lambda^Q\}_{\lambda\in\mathbb{P}_1(k)}$$

  de tubos estáveis, na componente regular $\mathbf{R}(A)$ de $\Gamma(modA)$, separando $\mathbf{P}(A)$ de $\mathbf{Q}(A)$.

(c) *Seja $\mathbf{m}_Q = (m_1, \cdots, m_s)$ o tipo tubular da $\mathbb{P}_1(k)$-família $\mathbf{T}^Q$. Então*

- *$\mathbf{m}_Q = (p, q)$, se $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_m$, $m \geq 1$, $p = min\{p', p''\}$, e $q = max\{p', p''\}$, em que p' e p'' são os números de flechas orientadas no sentido anti-horário e horário em Q, respectivamente;*
- *$\mathbf{m}_Q = (2, 2, m-2)$, se $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_m$ e $m \geq 4$;*
- *$\mathbf{m}_Q = (2, 3, 3)$, se $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_6$;*
- *$\mathbf{m}_Q = (2, 3, 4)$, se $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_7$;*
- *$\mathbf{m}_Q = (2, 3, 5)$, se $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_8$;*

Vejamos abaixo a representação geométrica do teorema acima.



Segue do teorema 1.29 que a parte regular $\mathbf{R}(A)$ de $\Gamma(\text{mod}A)$ é justamente a $\mathbb{P}_1(k)$-família $\mathbf{T}^Q = \{\mathcal{T}_\Lambda^Q\}_{\lambda\in\mathbb{P}_1(k)}$ de tubos estáveis. Aplicando este resultado a uma algebra hereditária kQ, obtemos o seguinte resultado, que nos será muito útil.

Corolário 1.30 (ver [SS06], pág.154) *Sejam k um corpo algebricamente fechado e Q um quiver acíclico cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é Euclidiano, e seja também $A = kQ$ álgebra de caminhos relacionada à Q.*
(a) *A única $\mathbb{P}_1(k)$-família $\mathbf{T}^Q = \{\mathcal{T}_\Lambda^Q\}_{\lambda\in\mathbb{P}_1(k)}$ de tubos estáveis de 1.29 contém no máximo 3 tubos $\mathcal{T}_\lambda^Q$ não homogêneos.*
(b) *A família $\mathbf{T}^Q$ contém exatamente 3 tubos não homogêneos se o grafo subjacente $\overline{Q}$ é igual aos grafos $\tilde{\mathbb{D}}_m$, $m \geq 4$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$.*
(c) *A família $\mathbf{T}^Q$ contém exatamente 2 tubos não homogêneos se $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_m$, $m \geq 3$, $p = min\{p', p''\}$ ≥ 2, e $q = max\{p', p''\} \geq 2$, em que p' e p'' são os números de flechas orientadas no sentido anti-horário e horário em Q, respectivamente.*
(d) *A família $\mathbf{T}^Q$ contém exatamente 1 tubo não homogêneo se $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_m$, $m \geq 2$, $p = min\{p', p''\} =$ 1, e $q = max\{p', p''\} \geq 2$, e*
(e) *$\mathbf{T}^Q$ consiste apenas de tubos homogêneos se, e somente se, kQ é algebra de Kronecker.*

Utilizando então conceitos apresentados anteriormente durante este capítulo, estamos aptos a estudar o comportamento da categoria perpendicular de objetos regulares indecomponíveis na categoria de módulos de uma álgebra hereditária mansa.

Teorema 1.31 *Seja Λ uma álgebra hereditária mansa conexa, e além disso, suponha que o tipo tubular de Λ é $m_\Lambda = (p, q, r)$. Se T é um objeto regular indecomponível no tubo $\mathcal{T}_p$ em modΛ tal que $Ext^1_\Lambda(T, T) = 0$, então*

$$T^\perp \simeq mod\Lambda',$$

em que Λ' é uma álgebra hereditária mansa conexa de tipo tubular $m_{\Lambda'} = (p-1, q, r)$.

Demonstração: Primeiramente suponha que T esteja no tubo de posto p, denotado por $\mathcal{T}_p$. Como $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T) = 0$, segue de 1.21 que existe uma álgebra hereditária Λ' tal que $T^\perp \simeq \mathrm{mod}\Lambda'$, e além disso, $\mathrm{rk}K_0(\Lambda') = \mathrm{rk}K_0(\Lambda) - 1$. De [CK09], página 51, sabemos que $\mathrm{rk}K_0(\Lambda) = (p-1)+(q-1)+(r-1)+2$, e portanto $\mathrm{rk}K_0(\Lambda') = (p-1)+(q-1)+(r-1)+2-1$. Além disso, também temos que os tubos $\mathcal{T}_q$, $\mathcal{T}_r$ e $\mathcal{T}$ estão na categoria modΛ', pois os tubos em modΛ são ortogonais. Assim, concluímos que Λ' é mansa e que o tubo $\mathcal{T}_p$ se torna um tubo $\mathcal{T}_{p-1}$ de posto $p-1$, e então o tipo tubular de Λ' é dado por $m_{\Lambda'} = (p-1, q, r)$.

Vejamos agora que a álgebra Λ' é conexa. Para tanto, mostraremos que existe um Λ' - módulo indecomponível R tal que $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(P_k, R) \neq 0$ para todo módulo projetivo indecomponível P_k em modΛ'.

Note que ao fazermos isto, uma vez que para quaisquer módulos M, M' de modΛ' existem projetivos indecomponíveis P_i e P_j tais que $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(P_i, M) \neq 0$ e $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(P_j, M') \neq 0$, então dados

M e M' em modΛ', sempre existirá um passeio

$$M \leftarrow P_i \rightarrow R \leftarrow P_j \rightarrow M',$$

e portanto a categoria modΛ' será conexa, e assim concluiremos que a álgebra Λ' é conexa.

Relembre da proposição 1.19 que o funtor inclusão $\iota : \text{mod}\Lambda' \hookrightarrow \text{mod}\Lambda$ admite um funtor adjunto à esquerda, denotado por $p_T : \text{mod}\Lambda \rightarrow \text{mod}\Lambda'$. Resta provarmos que de fato existe tal objeto R descrito anteriormente. Para tanto, tome R um objeto indecomponível simples regular e homogêneo em modΛ. Segue então de [HHK], página 128, axioma $H6$, que $\text{Hom}_\Lambda(P', R) \neq 0$ para todo objeto P' na componente pós-projetiva de modΛ. Note também que $R \in \text{mod}\Lambda'$, logo $p_T(R) = R$, e assim temos que R é um objeto indecomponível simples homogêneo em modΛ'.

Por fim, ao considerarmos um Λ'-módulo projetivo P, segue do corolário 1.20 que P deve ser um somando do módulo $p_T(\Lambda)$. Como podemos escrever $\Lambda = \oplus \Lambda_i$, em que cada Λ_i é um Λ-módulo projetivo indecomponível, temos então que existe um índice i_k tal que $P_i = p_T(\Lambda_{i_k})$ e

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Lambda'}(P_i, R) &= \text{Hom}_{\Lambda'}(p_T(\Lambda_{i_k}), R) \\ &\simeq \text{Hom}_\Lambda(\Lambda_{i_k}, R) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Concluímos assim que para qualquer Λ'-módulo projetivo P_i temos $\text{Hom}_{\Lambda'}(P_i, R) \neq 0$, e como mencionado anteriormente, segue que a álgebra Λ' é conexa. ■

O teorema anterior será uma peça fundamental no estudo da distribuição dos somandos diretos indecomponíveis de um complexo tilting na categoria derivada de uma álgebra hereditária mansa, nos auxiliando assim a encontrar majorantes para a dimensão global forte de álgebras hereditárias por partes que sejam derivadamente equivalentes à álgebras hereditárias mansas.

Capítulo 2

Dimensão Global Forte na Categoria Derivada de Álgebras Hereditárias

Como visto anteriormente, se Λ é uma álgebra hereditária, a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)$ pode ser escrita como uma colagem dos quivers de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod}\Lambda)$, em que cada cópia é um shift da categoria original. Esta colagem é feita mediante triângulos de Auslander-Reiten, que estão descritos em [Hap88]. Então, ao tomarmos um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)$, a menos de shifts, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{k} \text{mod}\Lambda[i].$$

Porém, ao considerarmos uma subcategoria hereditária geradora qualquer $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)$, a menos de shifts, existe algum $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i]. \tag{2.1}$$

Um dos objetivos deste capítulo é, dados uma álgebra hereditária Λ de tipo de representação finito ou manso, e $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)$, encontrar um par $(\mathscr{H}, \ell)$, como descrito acima em (2.1), de tal maneira que ℓ seja o menor número natural possível. Como consequência, ao aplicarmos o lema 1.28, poderemos encontrar um majorante para a dimensão global forte da álgebra $\text{End}\, T^{\bullet op}$, que como já vimos, será dado por $\ell + 2$.

2.1 Algumas propriedades dos complexos tilting em álgebras hereditárias

Como visto anteriormente, Happel e Zacharia provaram em [HZ10] que, dada uma álgebra hereditária por partes Λ, temos que s.gl.dim.$\Lambda \leq n$, em que n é o posto do grupo de Grothendieck da álgebra Λ. Provaremos o teorema 2.5 e o teorema 2.6, e utilizando as técnicas apresentadas em [ALMM17], generalizaremos o resultado de Happel e Zacharia no caso de álgebras hereditárias por partes que são derivadamente equivalentes à álgebras hereditárias mansas ou de tipo de representação finito.

Outro aspecto importante é que para obter os resultados relativos à dimensão global forte, provaremos primeiro uma série de resultados importantes sobre complexos tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$. O próximo lema nos diz como estão distribuídos objetos regulares satisfazendo certas propriedades dentro da categoria derivada de uma álgebra hereditária mansa. Relembramos aqui que um objeto é dito regular em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ se ele for um objeto regular na categoria modkQ. Vale ressaltar que as componentes regulares de modkQ são tubos estáveis estândar, já introduzidas anteriormente, mas por abuso de notação, diremos que a união da $\mathbb{P}_1^k$-família de tubos ortogonais de modkQ é uma componente regular. Note que

Lema 2.1 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver Euclidiano, e seja kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Se $X^\bullet$ é um objeto em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ cujos somandos diretos indecomponíveis estão todos em componentes regulares e tal que a álgebra de endomorfismos End$X^{\bullet op}$ é conexa, então existe um tubo estável $\mathscr{T}$ de modkQ tal que os somandos de $X^\bullet$ estão todos em shifts do tubo $\mathscr{T}$.*

Demonstração: Sabemos que um objeto $X^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tem a seguinte forma

$$X^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{r} X_i[r_i], X_i \in \text{mod}kQ.$$

Temos como hipótese que a álgebra End$X^{\bullet op}$ é conexa, logo, para cada somando $X_i[r_i]$ fixado, deve existir outro somando $X_j[r_j]$ de $X^\bullet$ satisfazendo uma das duas condições abaixo:

- $\text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}(X_i[r_i], X_j[r_j]) \neq 0$;
- $\text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}(X_j[r_j], X_i[r_i]) \neq 0$.

Podemos concluir então que $|r_i - r_j| \leq 1$, e considerando apenas os kQ-módulos X_i e X_j temos que eles satisfazem alguma das quatro condições abaixo:

- $\mathrm{Hom}_{kQ}(X_i, X_j) \neq 0$;
- $\mathrm{Hom}_{kQ}(X_j, X_i) \neq 0$;
- $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(X_i, X_j) \neq 0$;
- $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(X_j, X_i) \neq 0$.

Isto nos diz então que X_i e X_j devem estar em um mesmo tubo $\mathscr{T}$ da componente regular **R** de modkQ, uma vez que do teorema 1.29 temos que os tubos em **R** são dois a dois ortogonais. Além disso, o kQ-módulo X_i foi tomado de forma arbitrária, logo podemos utilizar o mesmo raciocínio de conexidade apresentado acima para mostrar que todos os kQ-módulos X_i estão no mesmo tubo $\mathscr{T}$, e assim concluímos que os somandos diretos indecomponíveis de $X^\bullet$ estão todos em shifts de um mesmo tubo.

■

O próximo lema nos mostrará que sequências excepcionais dentro de tubos estáveis estândar podem ter no máximo um determinado número de objetos.

Lema 2.2 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting, $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto r_λ e $\{X_1, X_2, ..., X_n\} \subset \mathscr{T}_\lambda$ uma sequência excepcional. Então $n \leq r_\lambda - 1$.*

Demonstração: Relembre antes que como $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ é uma sequência excepcional, temos então que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_i, X_j) = 0$ para $i > j$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X_i, X_j) = 0$ para $i \geq j$. Provemos o lema utilizando indução sobre o posto do tubo $\mathscr{T}_\lambda$.

Para $r_\lambda = 2$, as únicas possibilidades de objetos excepcionais são os objetos na boca de $\mathscr{T}_2$, fato este que segue da proposição 1.14. Logo, ao tomarmos $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ sequência excepcional em $\mathscr{T}_2$, ao fixarmos X_n na boca do tubo, como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_n, X_n) \neq 0$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X_n, \tau X_n) \neq 0$, temos que não existe nenhum outro elemento X_i que possa ser tomado em $\mathscr{T}_2$ de tal maneira que $\{X_i, X_n\}$ seja sequência excepcional e assim concluímos que $n = 1$.

Suponha que a afirmação seja válida para $2 \leq k \leq r_\lambda - 1$, ou seja, dada uma sequência excepcional $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ em $\mathscr{T}_k$ temos que $n \leq k - 1$. Vejamos então que a afirmação é válida para $k = r_\lambda$. Para tanto, consideremos $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ sequência excepcional em $\mathscr{T}_\lambda$. Ao tomarmos $X_n^\perp$, do teorema 1.31, temos que $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ estão em um tubo $\mathscr{T}_k$ em $X_n^\perp$, com $k = r_\lambda - 1$. Logo, concluímos que $n - 1 \leq k - 1 \leq r_\lambda - 2$ e portanto $n \leq r_\lambda - 1$.

■

Definição 2.1 *Dada uma álgebra hereditária mansa* $\Lambda = kQ$*, dizemos que uma componente na categoria derivada* $\mathscr{D}^b(mod\Lambda)$ *é **transjectiva** se é da forma*

$$\mathbf{Q}[i] \vee \mathbf{P}[i+1], \textit{para algum } i \in \mathbb{Z},$$

adicionando-se uma flecha do módulo injetivo indecomponível $I(v)[i]$ *em* $\mathbf{Q}[i]$ *para o módulo projetivo indecomponível* $P(w)[i+1]$ *em* $\mathbf{P}[i+1]$ *para cada flecha de* v *para* w *no quiver* Q*.*

Antes de prosseguirmos, precisaremos do lema a seguir, que nos permitirá construir uma secção em $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ cujas fontes são somandos diretos indecomponíveis de um complexo tilting. A prova deste lema pode ser encontrada em [ALMM17]. Para a definição de **secção**, indicamos [ASS06], página 302.

Lema 2.3 (ver [ALMM17], pág. 14) *Seja* $T^\bullet$ *um objeto tilting em uma categoria triangulada* $\mathscr{T}$*. Assuma que* $T^\bullet$ *comece em uma componente de Auslander-Reiten transjectiva* Γ*. Então existe uma secção* Σ *em* Γ *tal que toda fonte de* Σ *é um somando direto indecomponível de* $T^\bullet$*, e para todo somando direto indecomponível* Y *de* $T^\bullet$ *em* Γ*, existe um caminho em* Γ *começando em* Σ *e terminando em* Y*. Analogamente, se* $T^\bullet$ *termina em uma componente transjectiva* Γ'*, existe uma secção* Σ' *em* Γ' *tal que todo poço de* Σ' *é um somando direto indecomponível de* $T^\bullet$*, e para todo somando direto indecomponível* Y *de* $T^\bullet$ *em* Γ'*, existe um caminho em* Γ' *começando em* Y *e terminando em* Σ*.*

Utilizando a secção definida no lema acima, podemos obter uma subcategoria $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{T}$ com propriedades importantes, como veremos a seguir.

Lema 2.4 (ver [ALMM17], pág. 60) *Seja* $T^\bullet$ *um complexo tilting em uma categoria triangulada* $\mathscr{T}$ *e seja* Σ *a secção definida em 2.3. Então*

$$\mathscr{H} = \{X^\bullet \in \mathscr{T} / Hom(\Sigma, X^\bullet[i]) = 0 \, \forall i \neq 0\}$$

é subcategoria hereditária e geradora de $\mathscr{T}$*.*

Demonstração: Segue do fato de Σ ser uma secção.

■

Juntando as informações dos lemas acima, podemos então provar que dado um complexo tilting na categoria derivada de uma álgebra hereditária mansa, deve existir pelo menos um somando direto indecomponível de tal complexo tilting em componente transjectiva.

Teorema 2.5 *Seja Λ uma álgebra hereditária de tipo de representação finito ou mansa, e $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(mod\Lambda)$. Então*

- ***a)*** *Se Λ for uma álgebra hereditária mansa com $rkK_0(\Lambda) = n$, então existe um somando direto indecomponível de $T^\bullet$ que está em uma componente transjectiva;*
- ***b)*** *Existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(mod\Lambda)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-2.$$

Demonstração: a) Podemos escrever o complexo tilting $T^\bullet$ como

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i],\ T_i \in \text{ind}\Lambda,$$

e assim temos uma sequência excepcional $\epsilon = \{T_0, ..., T_{n-1}\}$. Suponha por absurdo que não exista somando de $T^\bullet$ em componentes transjectivas. Segue então do lema 2.1 que todos os objetos T_i devem estar em um mesmo tubo $\mathscr{T}_\lambda$ da categoria modΛ, pois a álgebra End$T^{\bullet op}$ é sempre conexa. Como Λ é uma álgebra hereditária mansa, o maior posto possível de um tubo no caso em que rk$K_0(\Lambda) = n$ é igual à $n-1$. Assim, teríamos uma sequência excepcional de tamanho n em um tubo de posto $r_\lambda = n-1$, o que é um absurdo, devido ao lema 2.2. Logo concluímos que deve existir então algum somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em componente transjectiva.

b) Como sempre existe um somando $T_i[r_i]$ do complexo tilting $T^\bullet$ em uma componente transjectiva de $\mathscr{D}^b$(modΛ), para o caso em que $T_i[r_i]$ não é o último somando de $T^\bullet$, podemos considerar a secção $\Sigma[r_i]$ tal que $T_i[r_i]$ seja uma fonte de $\Sigma[r_i]$. Caso $T_i[r_i]$ seja o último somando de $T^\bullet$, o argumento a ser utilizado é o dual do que faremos a seguir. Considere a subcategoria

$$\mathscr{H} = \{X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)/\text{Hom}(\Sigma, X^\bullet[i]) = 0 \,\forall i \neq 0\}.$$

Tal subcategoria pode ser vista como $\mathscr{H} = \text{mod}(\text{End}\Sigma^{op})$, e uma vez que Σ é uma secção, segue que $\mathscr{H}$ é uma subcategoria hereditária geradora. Assim, uma vez que $T_i[r_i]$ é fonte de $\Sigma[r_i]$ e $T^\bullet$ é conexo, deve existir outro somando direto indecomponível $T_j[r_i]$ de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[r_i]$, e então, a menos de shifts, podemos dizer que

$$T^\bullet \in \bigvee\nolimits_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-2.$$

■

Ao considerarmos um complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)$ e a secção $\Sigma[r_i]$ apresentada na demonstração do item **b)** do teorema 2.5, construímos uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)$ de tal maneira que o complexo tilting $T^\bullet$ esteja espalhado em no máximo $n-1$ cópias de $\mathscr{H}$. Para tanto, utilizamos o fato de $\Sigma[r_i]$ ter como fonte um somando direto indecomponível de $T^\bullet$. No caso em que tal secção tenha mais fontes que sejam somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ temos o seguinte resultado.

Teorema 2.6 *Sejam Λ uma álgebra hereditária, r um número inteiro positivo e $\Sigma[r_i]$ uma secção de $\Gamma(\mathscr{D}^b(mod\Lambda))$ cujas fontes $S_0[r_i],\cdots,S_{r-1}[r_i]$ são somandos diretos indecomponíveis de um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(mod\Lambda)$. Então existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(mod\Lambda)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-(r+1)} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Por hipótese temos que as fontes $S_0[r_i],\cdots,S_{r-1}[r_i]$ da secção $\Sigma[r_i]$ são somandos diretos indecomponíveis de um complexo tilting $T^\bullet$. Consideremos a subcategoria hereditária geradora

$$\mathscr{H} = \{X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)/\mathrm{Hom}(\Sigma, X^\bullet[i]) = 0\,\forall i \neq 0\}.$$

Uma vez que $S_0[r_i],\cdots,S_{r-1}[r_i]$ são fontes de $\Sigma[r_i]$ e $T^\bullet$ é conexo, deve existir outro somando direto indecomponível $T_j[r_i]$ de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[r_i]$, e então, a menos de shifts, podemos dizer que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-(r+1).$$

■

Os teoremas 2.5 e 2.6 nos permitiram encontrar um limitante para o espalhamento de um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)$. Podemos então utilizar o lema 1.28 e a fim de obter um majorante para a dimensão global forte de Λ.

Corolário 2.7 (Happel-Zacharia, 2010) *Seja Λ uma álgebra tal que $\mathscr{D}^b(mod\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(modkQ)$, em que kQ é uma álgebra hereditária de tipo de representação finito ou mansa, e tal que o posto do grupo de Grothendieck $rkK_0(\Lambda)$ seja igual à n. Então*

$$s.gl.dim.\Lambda \leq n = rkK_0(\Lambda).$$

Demonstração: Utilizando o teorema de Rickard, existe um complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ tal que $\Lambda \simeq \mathrm{End}T^\bullet$. Considerando então $r = 1$ no teorema 2.6 e aplicando em seguida o lema

1.28, obtemos o resultado desejado. ■

2.2 Álgebras hereditárias do tipo $\mathbb{A}_n$

Um dos objetivos desta seção é apresentar resultados sobre o espalhamento de complexos tilting na categoria derivada de uma álgebra hereditária do tipo $\mathbb{A}_n$. O teorema 2.9 e os corolários 2.10 e 2.13 são alguns dos resultados que provaremos. Uma álgebra hereditária Λ de dimensão finita pode ser escrita como uma álgebra de caminhos kQ, em que k é um corpo algebricamente fechado e Q é um quiver conexo, finito e sem ciclos orientados. Nesta seção, consideraremos álgebras de caminhos kQ em que o grafo subjacente $\overline{Q}$ do quiver Q seja igual à $\mathbb{A}_n$. Sabemos que neste caso o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ é da forma $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$, e de acordo com [Hap88], pág. 183, podemos parametrizá-lo como segue. Cada vértice de $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ pode ser escrito como um par (i,j), em que i é um número inteiro e j está no conjunto finito $\{1,\cdots,n\}$. Além disso, para cada par (i,j) podemos associar duas flechas:

$$(i,j) \longrightarrow (i,j+1), \;\; 1 \leq j \leq n-1,$$

$$(i,j) \longrightarrow (i+1,j-1), \;\; 2 \leq j \leq n.$$

Podemos visualizar o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr] & & (-2,n) \arrow[dr] & & (-1,n) \arrow[dr] & & (0,n) \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots & (-2,n-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,n-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,n-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-1,n-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \iddots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \iddots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \iddots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots & (-1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots \\
(-1,1) \arrow[ur] & & (0,1) \arrow[ur] & & (1,1) \arrow[ur] & & (2,1) \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

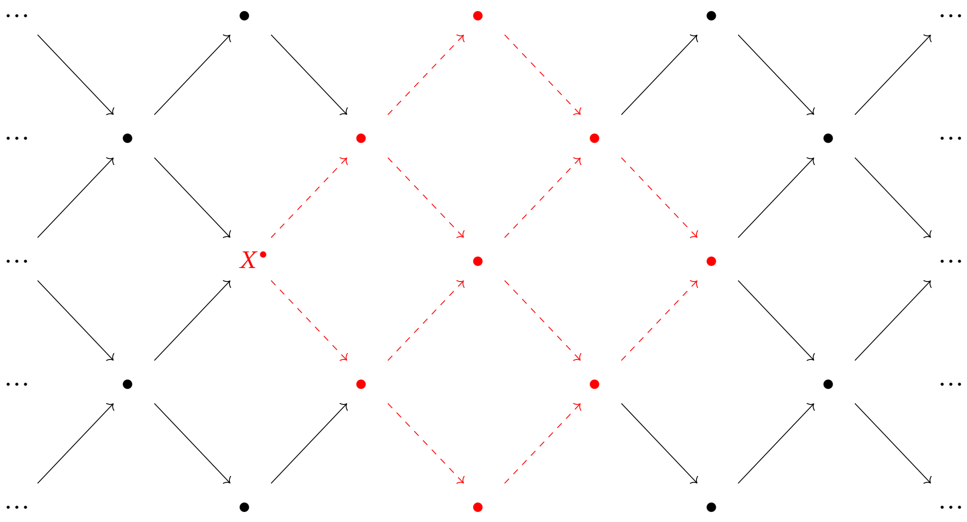
Considerando a parametrização dada anteriormente, o lema a seguir, que pode ser encontrado em [Hap88], nos permite descrever com precisão o shift de elementos em $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ e também os morfismos não-nulos entre seus objetos.

Lema 2.8 (ver [Hap88], pág. 184) *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q} = \mathbb{A}_n$ e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Dado um elemento $X^\bullet = (i,j) \in \Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ))$, as seguintes afirmações são válidas:*

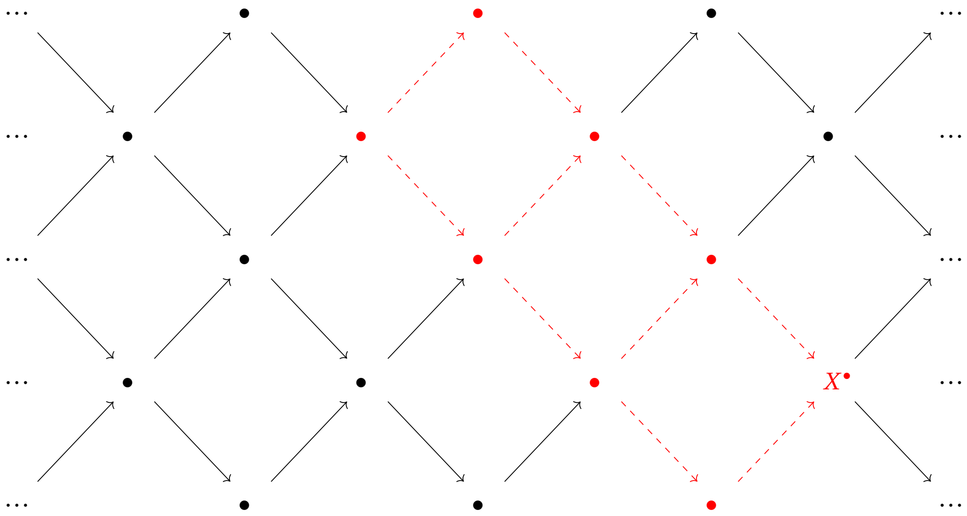
- ***(i)*** $X^\bullet[1] = (i,j)[1] = (i+j, n+1-j)$;
- ***(ii)*** $X^\bullet[-1] = (i,j)[-1] = (i+j-n-1, n+1-j)$;
- ***(iii)*** $Suppf_{X^\bullet} = \{Y = (i',j') \in \Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ)) |\ i \leq i' \leq i+j-1;\ i+j \leq i'+j' \leq n+i\}$, *em que* $f_{X^\bullet} = Hom_{\mathscr{D}^b(modkQ)}(X^\bullet, \_)$;
- ***(iv)*** $Suppg_{X^\bullet} = \{Y = (i',j') \in \Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ)) |\ i+j-n \leq i' \leq i;\ i+1 \leq i'+j' \leq i+j\}$, *em que* $g_{X^\bullet} = Hom_{\mathscr{D}^b(modkQ)}(\_, X^\bullet)$.

Graficamente, os itens **(iii)** e **(iv)** do lema anterior representam o "retângulo"construído a partir de um objeto fixado. Os próximos exemplos nos darão uma ideia clara de como visualizar tal retângulo.

Exemplo 2.1 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q} = \mathbb{A}_5$ e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Dado um objeto $X^\bullet$ no quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ))$, representamos em vermelho tracejado o $Suppf_{X^\bullet}$:*



Analogamente, dado um objeto $X^\bullet$ no quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ))$ da categoria derivada $\mathscr{D}^b(modkQ)$, podemos representar o $Suppg_{X^\bullet}$ por:



Agora, utilizando a parametrização de $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ definida anteriormente e o lema 2.3, estamos aptos a provar um dos resultados mais importante desta seção, que nos auxiliará na busca por um majorante para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes do tipo $\mathbb{A}_n$. Sabemos que uma secção em $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$, em que $\overline{Q} = \mathbb{A}_n$, tem no máximo

$$k = \frac{(1-(-1)^n)n+1}{4} + \frac{(1-(-1)^{n+1})n}{4}$$

fontes, ou seja, para n par uma secção pode ter no máximo $n/2$ fontes enquanto para n ímpar uma secção pode ter no máximo $(n+1)/2$ fontes. Os resultados a seguir são um desdobramento do trabalho de Seidel (ver [Sei03]).

Teorema 2.9 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente é $\overline{Q} = \mathbb{A}_n$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Dados r com $1 \leq r \leq k$, e uma secção Σ de $\Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ))$ cujas fontes $S_0, \cdots, S_{r-1}$ são somandos diretos indecomponíveis de um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(modkQ)$, existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(modkQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-(r+2)} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Como a álgebra de caminhos kQ é uma álgebra hereditária, sabemos que sua categoria derivada pode ser escrita como

$$\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ) \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{mod}kQ[i]$$

e, além disso, como $T^\bullet$ deve ter n somandos indecomponíveis, podemos escrever

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i],$$

em que cada T_i é um kQ-módulo indecomponível. Do enunciado sabemos que existe uma secção Σ de $\Gamma(\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ))$ tal que as fontes S_0, $S_1, \cdots, S_{r-1}$ de Σ são todas somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$. Podemos construir então uma subcategoria plena $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ da seguinte forma:

$$\mathscr{H} = \{X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)/\mathrm{Hom}(\Sigma, X^\bullet[i]) = 0, \forall i \neq 0\}.$$

Temos então que

$$\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ) \simeq \mathscr{D}^b(\mathscr{H}) = \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} \mathscr{H}[i],$$

ou seja, $\mathscr{H}$ é uma subcategoria hereditária geradora de $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$. Pela nossa construção, $S_0, S_1, \cdots, S_{r-1} \in \mathscr{H}[0]$, logo podemos escrevê-los como $S_0[0], S_1[0], \cdots, S_{r-1}[0] \in \mathscr{H}[0]$.

Agora, como $S_0[0], S_1[0], \cdots, S_{r-1}[0] \in \Sigma$ e $\mathrm{End}T^{\bullet op}$ é uma álgebra conexa, segue da definição de $\mathscr{H}$ que deve existir outro somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[0]$, somando este que denotaremos por $S_r[0]$. Vejamos agora que $S_r[0] \in \Sigma$.

De fato, utilizando o lema 2.8, uma vez que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(\oplus_{i=0}^{r-1} S_i[0], S_r[0]) \neq 0$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(S_r[0], \oplus_{i=0}^{r-1} S_i[1]) = 0$, podemos concluir que $S_r[0] \in \Sigma$. Logo, como $S_r[0] \in \Sigma$ e a álgebra $\mathrm{End}T^{\bullet op}$ é conexa, deve existir $S_{r+1}[0]$ somando indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[0]$. Assim, existem pelo menos $r+2$ somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[0]$.

Como o complexo tilting $T^\bullet$ tem n somandos diretos indecomponíveis, então $T^\bullet$ estará espalhado em no máximo $n-(r+1)$ cópias de $\mathscr{H}$, ou seja, a menos de shifts temos

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-(r+2)} \mathscr{H}[i].$$

■

Para encontrar o maior espalhamento possível para o complexo tilting $T^\bullet$, o natural é supormos que a secção Σ tenha apenas uma fonte, como veremos a seguir

Corolário 2.10 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver com grafo subjacente $\overline{Q} = \mathbb{A}_n$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Então, dado um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(modkQ)$, temos o seguinte:*

a) *Existe uma secção Σ de $\Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ))$ tal que as fontes $S_0, S_1, \cdots, S_r$ de Σ são somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$;*

b) *Existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(modkQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i],\ \ell \leq n-3.$$

Demonstração: a) Pelo lema 2.3, sabemos que existe uma secção Σ de $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ tal que as fontes $S_0, S_1, \cdots, S_r$ de Σ são todos somandos diretos indecomponíveis do complexo tilting $T^\bullet$.

b) Do teorema 2.9 e do item **a)** podemos concluir que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-(r+2)} \mathscr{H}[i].$$

Ao considerarmos $r = 1$, obtemos então o resultado desejado, ou seja,

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i],\ \ell \leq n-3.$$

■

A partir do teorema 2.9 e do lema 1.28, dado um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, podemos então encontrar um majorante para a dimensão global forte da álgebra $\text{End}T^{\bullet op}$. Este majorante dependerá do número de somandos indecomponíveis de $T^\bullet$ em uma determinada secção, como veremos a seguir.

Corolário 2.11 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q} = \mathbb{A}_n$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Suponha que exista uma secção Σ de $\Gamma(\mathscr{D}^b(modkQ))$ cujas fontes $S_0, \cdots, S_{r-1}$ são somandos diretos indecomponíveis de um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(modkQ)$. Então*

$$s.gl.dim.EndT^{\bullet op} \leq n-r.$$

Demonstração: Do teorema 2.9, se existir uma secção Σ de $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ))$ cujas fontes $S_0,\cdots,S_{r-1}$ são somandos diretos indecomponíveis de um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, então existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}\subset\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ de tal maneira que

$$T^\bullet\in\bigvee_{i=0}^{n-(r+2)}\mathscr{H}[i].$$

Logo, aplicando o lema 1.28, obtemos que

$$\text{s.gl.dim.End}T^{\bullet op}\leq n-r.$$

■

Dada uma álgebra hereditária por partes Λ satisfazendo $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)\simeq\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, podemos utilizar o teorema de Rickard e mostrar que existe um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que $\Lambda\simeq\text{End}T^{\bullet op}$. Por outro lado, o corolário 2.10 nos permite encontrar um par $(\mathscr{H},\ell)$ de tal maneira que

$$T^\bullet\in\bigvee_{i=0}^{\ell}\mathscr{H}[i],$$

e além disso, $\ell\leq n-3$. Aplicando então o lema 1.28, conseguiremos obter um majorante para a dimensão global forte de álgebras hereditárias por partes do tipo $\mathbb{A}_n$, como podemos ver no corolário a seguir.

Corolário 2.12 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente é* $\overline{Q}=\mathbb{A}_n$, *e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Considere* Λ *uma k-álgebra de dimensão finita satisfazendo* $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)\simeq\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$. *Então*

$$s.gl.dim.\Lambda\leq n-1=rkK_0(\Lambda)-1.$$

Demonstração: Basta considerarmos $r=1$ no corolário 2.11 e assim obtemos o resultado.

■

Como vimos anteriormente no corolário 2.12, para uma álgebra hereditária por partes Λ do tipo $\mathbb{A}_n$, sempre temos $\text{s.gl.dim.}\Lambda\leq n-1$. Quando $\text{s.gl.dim.}\Lambda=n-1$, ou seja, assume seu valor máximo, o próximo teorema nos diz como será o quiver ordinário da álgebra Λ.

Teorema 2.13 *Sejam k corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente* $\overline{Q}$ *é* $\mathbb{A}_n$, *e kQ a álgebra de caminhos associada à Q. Seja* Λ *uma k-álgebra de dimensão finita* *satisfazendo* $\mathscr{D}^b(mod\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(modkQ)$*. Além disso, suponha que s.gl.dim.* $\Lambda = n-1$*. Então* $\Lambda \simeq kQ'/R^2$*, em que* Q' *é o quiver*

$$\begin{tikzcd}\bullet & \bullet \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l]\end{tikzcd},$$

e R *o ideal radical da álgebra* kQ*.*

Demonstração: Como $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, pelo teorema de Rickard sabemos que existe um complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ tal que $\Lambda = \mathrm{End}T^{\bullet op}$. Além disso, como s.gl.dim.$\Lambda = n-1$, temos que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-3} \mathscr{H}[i],$$

em que $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ é a subcategoria plena introduzida na demonstração do corolário 2.10. Ainda utilizando a demonstração de 2.10, como $T^\bullet$ está espalhado em $n-2$ cópias, podemos ver que existem três somandos de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[0]$ e um somando em cada cópia $\mathscr{H}[i], 1 \leq i \leq n-3$. Denotaremos então por $T_0, T_1 e\, T_2$ os somandos de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[0]$ e por T_{i+2} o somando da cópia $\mathscr{H}[i], 1 \leq i \leq n-3$.

Para todo $1 \leq i \leq n-5$, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(T_{i+2}, T_{i+4}) = 0$, uma vez que $T_{i+2} \in \mathscr{H}[i]$ e $T_{i+4} \in \mathscr{H}[i+2]$. Pela construção de $\mathscr{H}$, temos que $T_1 \in \Sigma$ e $T_3 \in \mathscr{H}[1]$, logo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(T_1, T_3) = 0$. Resta mostrarmos agora que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(T_0, T_2) = 0$.

De fato, suponha por absurdo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(T_0, T_2) \neq 0$. Então, pela demonstração do corolário 2.10, teríamos que $T_2 \in \Sigma$ e assim $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(T_2, T_3) = 0$, de onde segue que $\mathrm{End}T^\bullet$ é desconexa, o que é uma contradição. E finalmente podemos concluir que

$$\Lambda \simeq kQ'/R^2.$$

■

No teorema anterior, ao tomarmos a dimensão global forte máxima para a álgebra Λ, isto é, ao supormos s.gl.dim. $\Lambda = n-1$, obtivemos que $\Lambda = kQ'/R^2$, onde Q' é um quiver com grafo subjacente do tipo $\mathbb{A}_n$. Note que a dimensão global de tal álgebra é igual à $n-1$, ou seja, neste caso temos que s.gl.dim.Λ = gl.dim.Λ.

2.3 Álgebras hereditárias do tipo $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ e $\mathbb{E}_8$

Nesta seção consideraremos álgebras de caminho da forma kQ, em que k é um corpo algebricamente fechado e Q é um quiver cujo grafo subjacente é igual à $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$. Dado um complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\mathrm{mod} kQ)$, como na seção anterior, nosso objetivo é encontrar um par $(\mathscr{H}, \ell)$ de tal maneira que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i]$$

e, além disso, ℓ seja o menor número natural satisfazendo tal condição. Ao encontrarmos tal ℓ, encontramos automaticamente um majorante para dimensão global forte da álgebra $\mathrm{End}\, T^{\bullet op}$, o que nos permitirá encontrar um majorante para as álgebras hereditárias por partes do tipo $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$. Para provarmos tais fatos, necessitamos antes enunciar o próximo teorema, cuja prova pode ser encontrada em [Hap88]. Tal teorema nos diz como o quiver ordinário de uma álgebra tilted iterada do tipo $\mathbb{A}_n$ deve ser.

Teorema 2.14 ([Hap88], pág. 185) *Seja Λ uma k-álgebra básica, conexa e com dimensão finita, dada por um quiver limitado Q e um conjunto de relações J. Então, Λ é tilted iterada do tipo $\mathbb{A}_n$ se, e somente se, Λ satisfaz as seguintes condições:*

***(i)** Q é uma árvore com n vértices.*

***(ii)** J pode ser gerado por caminhos de tamanho 2.*

***(iii)** Cada vértice de Q tem no máximo 4 vizinhos.*

***(iv)** Se um vértice tem 4 vizinhos, então a configuração local é da forma*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, "\beta"] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ \bullet \arrow[ur, "\delta"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

com $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$ é um subquiver limitado pleno de Q/J.

***(v)** Se um vértice tem 3 vizinhos, então a configuração local é da forma*

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet \arrow[r, "\alpha"] & \bullet \end{tikzcd}$$

com $\alpha\beta = 0$ ou

$$\begin{tikzcd} & \bullet & \\ \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet \arrow[u] \arrow[r, "\alpha"] & \bullet \end{tikzcd}$$

com $\alpha\beta = 0$

é um subquiver limitado pleno de Q/J.

Como vimos no teorema 2.5, dado um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, podemos supor que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-2.$$

Utilizando o teorema 2.14, vejamos algumas propriedades interessantes que ocorrem quando $\ell = n-2$ e $\ell = n-3$.

Lema 2.15 *Sejam $\mathscr{H} = modkQ$, com Q um quiver com n vértices cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é Dynkin, $n \geq 4$ e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Considere $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(modkQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-2.$$

Além disso, suponha que ${}^\perp T_0$ e $T_{n-1}^\perp$ são categorias de módulos sobre álgebras de caminhos do tipo $\mathbb{A}_{n-1}$. Valem as afirmações:

1) *Se $\ell = n-2$, então Q é do tipo $\mathbb{A}_n$ ou $n = 4$.*

2) *Se $\ell = n-3$, então Q é do tipo $\mathbb{A}_n$ ou $n = 4$ ou 5.*

Demonstração: Provaremos aqui somente o item **2)**. A prova do item **1)** é análoga. Suponha que $T_{n-1}^\perp$ e ${}^\perp T_0$ sejam categorias de módulos sobre uma álgebra de caminhos do tipo $\mathbb{A}_{n-1}$. Pelo lema 1.23, sabemos que $T^\bullet \backslash T_{n-1}[n-3]$ e $T^\bullet \backslash T_0[0]$ são complexos tilting nas categorias derivadas $\mathscr{D}^b(T_{n-1}^\perp)$ e $\mathscr{D}^b({}^\perp T_0)$, respectivamente. Logo, podemos concluir que as álgebras $\Sigma = \text{End}(T^\bullet \backslash T_{n-1}[n-3])^{op}$ e $\Sigma' = \text{End}(T^\bullet \backslash T_0[0])^{op}$ são álgebras tilted iteradas do tipo $\mathbb{A}_{n-1}$, por hipótese. Nós iremos agora verificar quais das condições de **(i)** até **(v)** do teorema 2.14 valem ou não para a álgebra $\Lambda = \text{End}T^{\bullet op}$. Como $T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-3} \mathscr{H}[i]$ e $T^\bullet$ tem n somandos indecomponíveis, então alguma cópia $\mathscr{H}[i]$ deve ter 3 somandos de $T^\bullet$ ou 2 cópias $\mathscr{H}[i]$ devem ter 2 somandos de $T^\bullet$ cada. Em ambos os casos, cada vértice de Λ terá no máximo 4 vizinhos, ou seja, a condição **(iii)** do teorema 2.14 vale.

Suponha agora que o quiver de Λ não seja uma árvore. Como Σ e Σ' o são, Λ deveria ser uma álgebra tilted iterada do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, o que é um absurdo. Logo, o quiver de Λ sempre será uma árvore, e além disso, como $T^\bullet$ tem n somandos, o quiver de Λ deve ter n vértices, logo a condição **(i)** do teorema 2.14 sempre é válida.

Suponha agora que a condição **(ii)** de 2.14 não seja válida para Λ. Como tal condição é válida para as álgebras Σ e Σ', deve existir uma relação de tamanho 3 envolvendo os somandos $T_0[0]$ e $T_{n-1}[n-3]$ de $T^\bullet$. Tal relação deve começar em $T_0[0]$ e acabar em $T_{n-1}[n-3]$. Como o tamanho de tal relação é 3, então devem existir pelo menos 2 somandos em $\mathscr{H}[1]$ e $\mathscr{H}[n-4]$ simultaneamente ou devem existir 3 somandos em $\mathscr{H}[1]$ e $\mathscr{H}[n-3]$ simultaneamente. Da primeira observação concluímos que $n=5$ e da segunda observação concluímos que $n=4$.

Agora, seguindo a ideia anterior, suponha que a condição **(v)** do teorema 2.14 não seja válida para a álgebra Λ. Como tal condição vale para as álgebras Σ e $\Sigma^{'}$, novamente os vértices relacionados aos indecomponíveis $T_0[0]$ e $T_{n-1}[n-3]$ devem estar envolvidos. Existe então somando $T_i[r_i]$ de $T^\bullet$ com 3 vizinhos de tal maneira que a seguinte composta é não nula:

$$T_0[0] \xrightarrow{f} T_i[r_i] \xrightarrow{g} T_{n-1}[n-3].$$

Como $f \circ g \neq 0$, teríamos então: $0 \leq n-3 \leq 1 \Rightarrow 3 \leq n \leq 4$. Além disso, sabemos que $n \geq 4$, e assim concluímos que $n=4$ neste caso.

Por fim, analisemos a condição **(iv)** do teorema 2.14. Se supormos que ela não vale para Λ, como tal condição é satisfeita por Σ e $\Sigma^{'}$, então os vértices envolvidos devem ser novamente os vértices relacionados aos indecomponíveis $T_0[0]$ e $T_{n-1}[n—3]$. Logo, deve existir pelo menos um somando $T_i[r_i]$ 4 com vizinhos em $\mathscr{H}[1]$ e $\mathscr{H}[n—4]$ simultaneamente. Logo, teríamos $n—4=1$ e portanto $n=5$. Finalmente, concluímos então que a álgebra Λ é álgebra tilted iterada do tipo $\mathbb{A}_n$ ou $n=4$ ou 5.

■

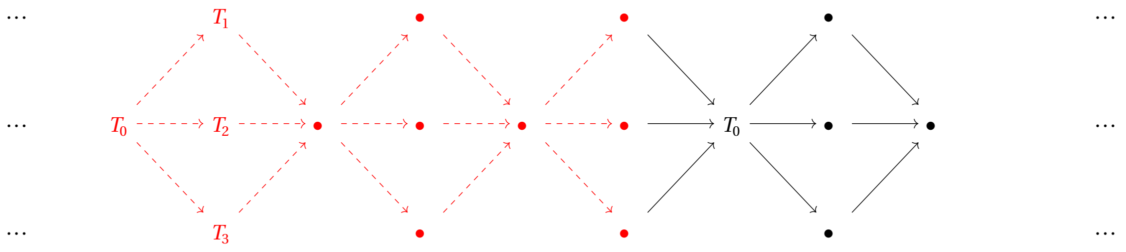
Observação 2.1 *Sejam k corpo algebricamente fechado, Q um quiver com grafo subjacente $\overline{Q}=\mathbb{D}_4$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Dado um complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(modkQ)$, veremos a seguir que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ contida em $\mathscr{D}^b(modkQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \mathscr{H}[0].$$

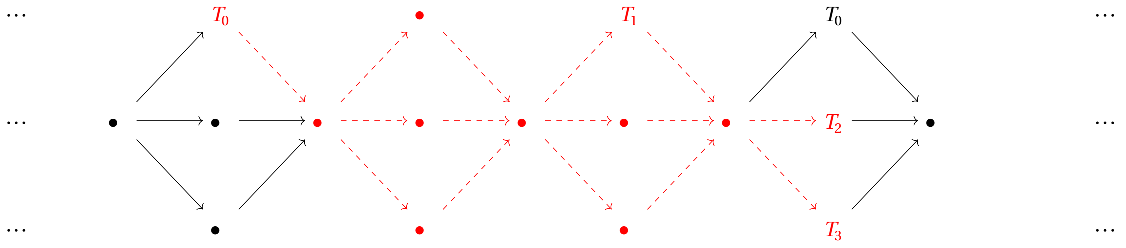
Para tanto, ao considerarmos um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(modkQ)$, podemos tomar o primeiro somando direto indecomponível T_0 de $T^\bullet$ e construir uma secção Σ, como apresentado em 2.3, de tal maneira que T_0 seja a única fonte. A partir disso, podemos construir a subcategoria hereditária geradora:

$$\mathscr{H}=\{X^\bullet \in \mathscr{D}^b(modkQ)/Hom(\Sigma, X^\bullet[i])=0\,\forall i \neq 0\}.$$

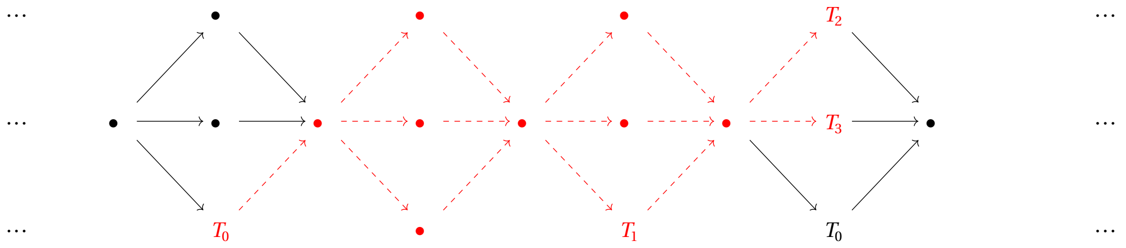
Tal subcategoria satisfaz a propriedade de $T^\bullet \in \mathscr{H}[0]$, basta analisar os morfismos saindo de T_0 e chegando $T_0[1]$. Entretanto, note que temos 4 possibilidades para o primeiro somando de $T^\bullet$, uma vez que ele pode estar em qualquer uma das 4 órbitas do quiver de Auslander-Reiten *da categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$. Abaixo, apontaremos em vermelho tracejado como fica a categoria $\mathscr{H}$, e além disso, indicaremos o complexo tilting com o maior espalhamento possível em cada caso. Denotaremos os somandos em vermelho por T_0, T_1, T_2 e T_3. Por abuso de notação, denotaremos $T_0[1]$ por T_0.*



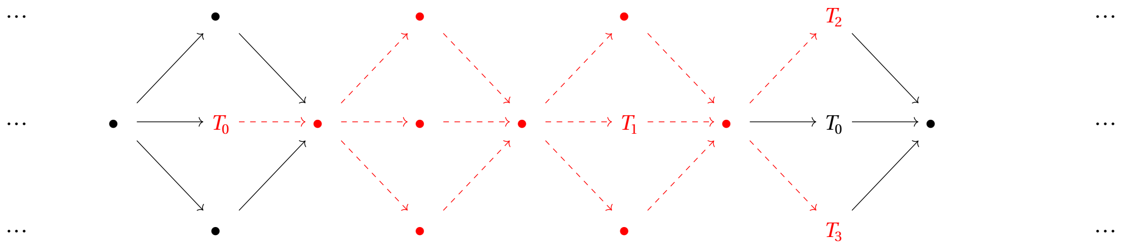
(2.2)



(2.3)



(2.4)



(2.5)

Uma consequência imediata da observação 2.1 é a próxima proposição.

Proposição 2.16 *Seja $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria $\mathscr{D}^b(modkQ)$, em que Q é um quiver cujo grafo subjacente é $\overline{Q} = \mathbb{D}_4$. Então a álgebra $EndT^{\bullet op}$ é uma álgebra tilted.*

Analogamente, se considerarmos Q um quiver cujo grafo subjacente é $\overline{Q} = \mathbb{D}_5$, dado um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, veremos no próximo exemplo que neste caso também existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ tal que

$$T^\bullet \in \mathscr{H}[0] \cup \mathscr{H}[1].$$

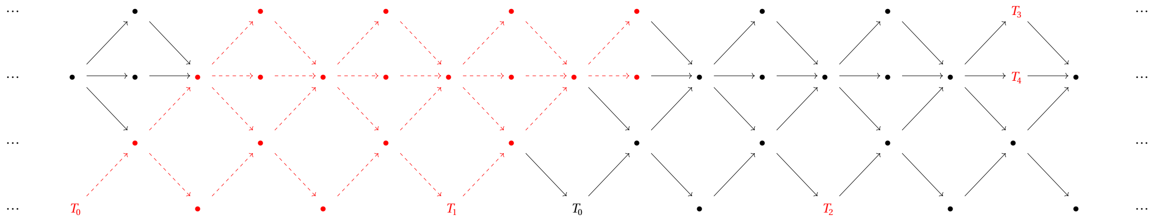
Observação 2.2 *Sejam k corpo algebricamente fechado, Q um quiver com grafo subjacente $\overline{Q} = \mathbb{D}_5$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Dado um complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(modkQ)$, veremos a seguir que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(modkQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \mathscr{H}[0] \cup \mathscr{H}[1].$$

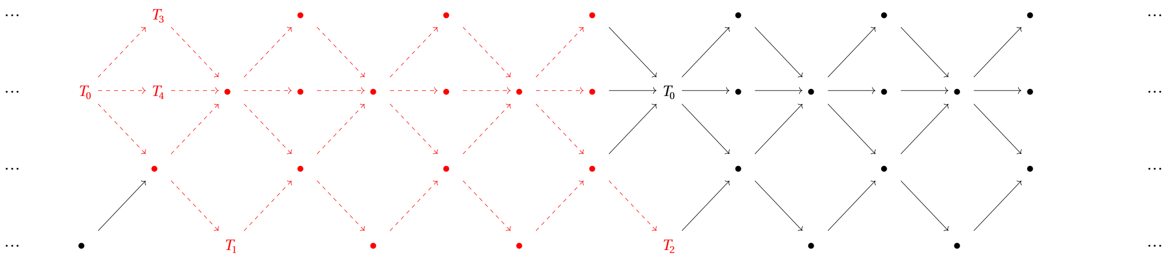
Assim como no exemplo anterior, ao considerarmos um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(modkQ)$, podemos tomar o primeiro somando indecomponível T_0 de $T^\bullet$ e construir uma secção Σ de tal maneira que T_0 seja a única fonte. A partir disso, podemos construir a subcategoria hereditária geradora

$$\mathscr{H} = \{X^\bullet \in \mathscr{D}^b(modkQ)/Hom(\Sigma, X^\bullet[i]) = 0\,\forall i \neq 0\}.$$

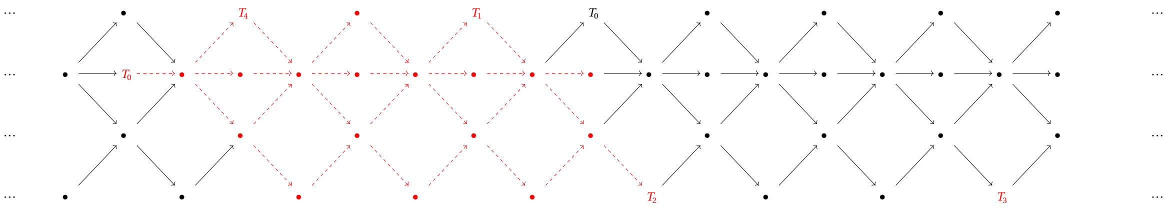
Tal subcategoria satisfaz a propriedade de $T^\bullet \in \mathscr{H}[0]$, basta analisar os morfismos saindo de T_0 e chegando $T_0[1]$. Entretanto, note que temos 5 possibilidades para o primeiro somando de $T^\bullet$. Abaixo, apontaremos em vermelho como fica a categoria $\mathscr{H}$ em cada caso, e além disso, apontaremos o complexo tilting com o maior espalhamento possível em cada caso. Denotaremos os somandos em vermelho por T_0, T_1, T_2, T_3 e T_4. Por abuso de notação, denotaremos $T_0[1]$ por T_0.



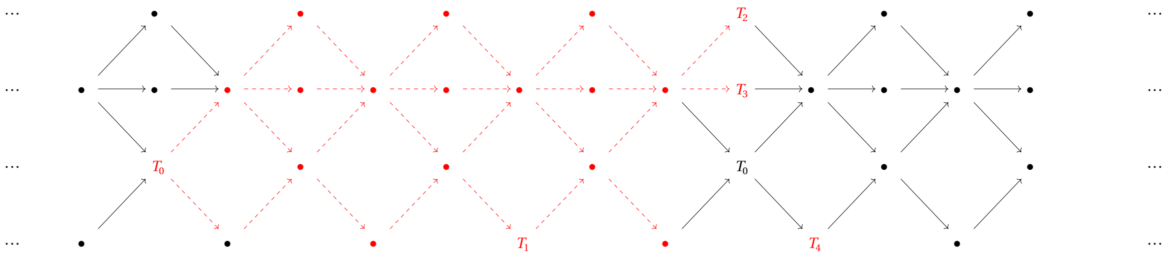
(2.6)



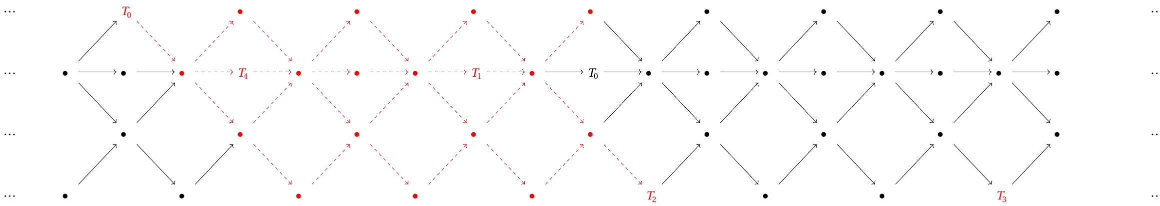
(2.7)



(2.8)



(2.9)



(2.10)

Uma consequência imediata da observação 2.2 é a próxima proposição.

Proposição 2.17 *Seja $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, em que o quiver Q tem grafo subjacente $\overline{Q} = \mathbb{D}_5$. Então a álgebra End$T^{\bullet op}$ é uma álgebra tilted ou então a dimensão global forte da álgebra End$T^{\bullet op}$ é igual a* 3.

Utilizando então as observações 2.1 e 2.2 apresentadas anteriormente, finalmente poderemos enunciar o principal resultado desta seção. Mostraremos que dado um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ de uma álgebra de caminhos hereditária do tipo

$\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$, existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ com $T^\bullet$ espalhado em no máximo $n-3$ cópias de $\mathscr{H}$.

Teorema 2.18 *Sejam k corpo algebricamente fechado, Q um quiver com grafo subjacente $\overline{Q} = \mathbb{D}_n$ ou $\overline{Q} = \mathbb{E}_n$, $n = 6, 7$ ou 8, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$. Então existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-4} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Se $T^\bullet$ pertence à união $\vee_{i=0}^{n-4}\mathrm{mod}kQ[i]$, bastaria considerar $\mathscr{H} = \mathrm{mod}kQ$ e o resultado já seria válido. Já vimos também no teorema 2.5 que dado um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada de uma álgebra de caminhos kQ com quiver Q Dynkin, existe uma categoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ tal que $T^\bullet \in \vee_{i=0}^{n-2}\mathscr{H}[i]$. Logo, podemos supor que $T^\bullet$ está em $\vee_{i=0}^{n-2}\mathrm{mod}kQ[i]$ ou em $\vee_{i=0}^{n-3}\mathrm{mod}kQ[i]$.

Para provar o resultado, utilizaremos indução forte sobre o número de somandos diretos indecomponíveis do complexo tilting $T^\bullet$, que denotaremos aqui por n. Para $n = 4$ e $n = 5$ o resultado já é válido, basta recordar as observações 2.1 e 2.2. Para que a ideia da prova fique mais clara, vejamos que o resultado é válido para $n = 6$ antes de aplicarmos a hipótese de indução. Como $n = 6$, temos que nosso complexo tilting é da forma

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{5} T_i[r_i].$$

Consideremos então as categorias perpendiculares $T_5^\perp$ e ${}^\perp T_0$. Pelo teorema 1.21, devem existir álgebras hereditárias B e $B^{'}$ de tal maneira que as categorias $T_5^\perp$ e ${}^\perp T_0$ sejam equivalentes às categorias $\mathrm{mod}B$ e $\mathrm{mod}B'$, respectivamente e, além disso, $\mathrm{rk}K_0(B) = \mathrm{rk}K_0(B') = 5$. Como B e B' são álgebras hereditárias, podemos supor que existem quivers Δ e Δ' tais que $B = k\Delta$ e $B^{'} = k\Delta'$, em que k é um corpo algebricamente fechado. Reunindo as informações anteriores, podemos concluir que o grafo subjacente $\overline{\Delta}$ é $\mathbb{D}_5$ ou $\mathbb{A}_5$, e analogamente, o grafo subjacente $\overline{\Delta'}$ é $\mathbb{D}_5$ ou $\mathbb{A}_5$.

Sabemos do lema 1.23 que $T^\bullet \backslash T_5[r_5]$ é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(T_5^\perp) \simeq \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Delta)$. Se supormos então que $\overline{\Delta} = \mathbb{D}_5$, podemos concluir da observação anterior que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}^{'} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Delta)$ tal que

$$T^\bullet \backslash T_5[r_5] \in \bigvee_{i=0}^{1} \mathscr{H}^{'}[i].$$

Logo, existe subcategoria geradora hereditária $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ tal que

$$T^\bullet \backslash T_5[r_5] \in \bigvee_{i=0}^{1} \mathscr{H}[i]$$

e, então, ao adicionarmos o somando $T_5[r_5]$, obtemos

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{2} \mathscr{H}[i]. \tag{2.11}$$

Para o caso em que o grafo subjacente $\overline{\Delta'}$ é $\mathbb{D}_5$, a prova é totalmente análoga e da mesma maneira concluímos que existe subcategoria geradora hereditária $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ satisfazendo (2.11).

Por fim, só nos resta o caso em que $\overline{\Delta} = \overline{\Delta'} = \mathbb{A}_5$. Neste caso, como $n = 6$, segue do lema 2.15 que o grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\mathbb{A}_6$, o que é um absurdo. Portanto, para o caso $n = 6$ o resultado vale.

Seja agora m um número natural tal que $m > 6$ e suponha que o resultado seja válido para todo $6 < l < m$, ou seja, para cada $6 < l < m$, existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}_l \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ_l)$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{l-4} \mathscr{H}_l[i].$$

Vejamos que o resultado também é válido para m.

Seja Q um quiver do tipo $\mathbb{D}_m$ ou $\overline{Q} = \mathbb{E}_m$, $m = 6, 7, 8$. Sabemos que um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ deve ser da forma

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{m-1} T_i[r_i].$$

Consideremos agora as categorias perpendiculares $T_{m-1}^\perp$ e ${}^\perp T_0$. Utilizando então o teorema 1.21 novamente, podemos concluir que existem álgebras de caminhos kQ_{m-1} e kQ_0 satisfazendo as equivalências $T_{m-1}^\perp \simeq \mathrm{mod}kQ_{m-1}$ e ${}^\perp T_0 \simeq \mathrm{mod}kQ_0$. Mais ainda, podemos dizer também que $\mathrm{rk}K_0(kQ_{m-1}) = \mathrm{rk}K_0(kQ_0) = m - 1$, de onde segue que $\overline{Q_{m-1}} = \mathbb{D}_{m-1} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{E}_{m-1} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{A}_{m-1}$, e analogamente, $\overline{Q_0} = \mathbb{D}_{m-1} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{E}_{m-1} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{A}_{m-1}$.

Se $\overline{Q_{m-1}} = \mathbb{D}_{m-1} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{E}_{m-1}$, como $T^\bullet \backslash T_{m-1}[r_{m-1}]$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(T_{m-1}^\perp)$, pela nossa hipótese de indução, podemos concluir que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}_{m-1} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ_{m-1})$ tal que

$$T^{\bullet}\backslash T_{m-1}[r_{m-1}] \in \bigvee_{i=0}^{m-5} \mathscr{H}_{m-1}[i].$$

Logo, podemos concluir que existe subcategoria geradora hereditária $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que

$$T^{\bullet}\backslash T_{m-1}[r_{m-1}] \in \bigvee_{i=0}^{m-5} \mathscr{H}[i]$$

e, então, ao adicionarmos o somando $T_{m-1}[r_{m-1}]$, obtemos que

$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{m-4} \mathscr{H}[i].$$

Analogamente, no caso em que $\overline{Q_0} = \mathbb{D}_{m-1}\,\text{ou}\,\mathbb{E}_{m-1}$, o resultado continua válido. Por fim, precisamos analisar apenas o caso em que $\overline{Q_{m-1}} = \overline{Q_0} = \mathbb{A}_{m-1}$. Mas neste caso, como $m > 6$, segue do lema 2.15 que $\overline{Q} = \mathbb{A}_m$, o que seria um absurdo, finalizando a demonstração.

■

A proposição acima, juntamente com o lema 1.28, nos permite então encontrar um majorante para a dimensão global forte das álgebras hereditária por partes dos tipos $\mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ e $\mathbb{E}_8$, como veremos no corolário a seguir.

Corolário 2.19 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e Q um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$. Considere Λ uma k-álgebra de dimensão finita derivadamente equivalente à álgebra kQ, isto é, $\mathscr{D}^b(mod\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(modkQ)$. Então*

$$s.gl.dim.\Lambda \leq n-2 = rkK_0(\Lambda)-2.$$

Demonstração: Como $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, pelo teorema de Rickard, existe um complexo tilting $T^{\bullet}$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que $\Lambda \simeq \text{End}T^{\bullet op}$. Utilizando o lema 1.28, concluímos então que s.gl.dim.End$T^{\bullet op} \leq n-4+2 = n-2$. Finalmente, como End$T^{\bullet op} \simeq \Lambda$, concluímos que

$$\text{s.gl.dim.}\Lambda \leq n-2.$$

■

Uma pergunta natural é se os majorantes que encontramos para o espalhamento de um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ são de fato ótimos, ou seja, os menores majorantes possíveis. Nos casos em que $\overline{Q} = \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$, a resposta é positiva, e apresentaremos agora exemplos de complexos tilting que realizam a dimensão global forte máxima apresentada anteriormente.

Comecemos então com o caso em que o grafo subjacente é $\overline{Q} = \mathbb{D}_n$. Neste caso sabemos que o quiver Q tem n vértices, e além disso, vimos que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que $T^\bullet$ esteja espalhado em no máximo $n-3$ cópias de $\mathscr{H}$.

Exemplo 2.2 *Como vimos na figura 2.6, ao considerarmos o complexo tilting*

$$T^\bullet = T_0 \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4,$$

construímos a secção Σ *que admite* T_0 *como sua única fonte de* Σ*, e então construímos a categoria* $\mathscr{H}$ *como sendo a categoria tal que os elementos de* Σ *sejam os módulos projetivos de* $\mathscr{H}$*. Para simplificarmos a notação, podemos considerar então que* T_0 *é o módulo projetivo* $P(1)$*, e assim tem-se que* $\mathscr{H} = modkQ$*, em que* Q *é o quiver*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 5 \arrow[dr] & & & \\
\mathbb{D}_5 : & & 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1. \\
 & 4 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

E assim, podemos escrever o complexo tilting $T^\bullet$ *como*

$$T^\bullet = P(1) \oplus I(1) \oplus \tau I(1)[1] \oplus \tau I(4)[1] \oplus \tau I(5)[1],$$

em que $T_0 = P(1)$, $T_1 = I(1)$, $T_2 = \tau I(1)[1]$, $T_3 = \tau I(4)[1]$ *e* $T_4 = \tau I(5)[1]$. *Seguindo este mesmo raciocínio, para* $\mathbb{D}_n$*, consideramos a categoria* $\mathscr{H} = modkQ$*, com quiver*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & n \arrow[dr] & & & & \\
\mathbb{D}_n : & & n-2 \arrow[r] & \cdots\cdots & 2 \arrow[r] & 1, \\
 & n-1 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

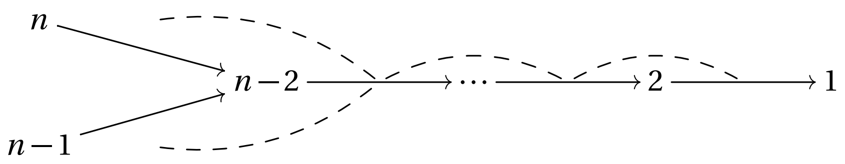
e tomando o complexo tilting

$$T^\bullet = P(1) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-4} \tau^i I(1)[i] \oplus \tau^{n-4} I(n-1)[n-4] \oplus \tau^{n-4} I(n)[n-4]$$

obtemos que $T^\bullet \in \vee_{i=0}^{n-4} \mathscr{H}[i]$. *Como essa é a maior subcategoria possível, temos que para tal complexo tilting vale*

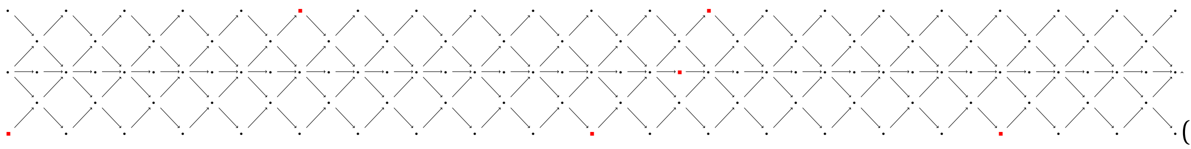
$$s.gl.dim.EndT^{\bullet op} = n-2 = rkK_0(\Lambda)-2.$$

Neste caso, o quiver ordinário da álgebra $EndT^{\bullet op}$ *é :*



Vejamos agora o que acontece quando o grafo subjacente do quiver Q é $\overline{Q} = \mathbb{E}_6$.

Exemplo 2.3 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente é $\overline{Q} = \mathbb{E}_6$ e seja kQ a álgebra de caminhos relacionada ao quiver Q. Então existe um complexo tilting $T^{\bullet}$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ tal que para qualquer subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ de $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, o complexo tilting $T^{\bullet}$ esteja distribuído em um número maior ou igual à 3 cópias. Abaixo mostraremos graficamente a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, e então em seu quiver de Auslander-Reiten apresentaremos o objeto tilting $T^{\bullet}$ almejado.*



(2.12)

Como vimos na figura acima, ao considerarmos o complexo tilting

$$T^{\bullet} = T_0 \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5,$$

construímos a secção Σ tal que T_0 fosse a única fonte de Σ, e então construímos a categoria $\mathscr{H}$ como sendo a categoria tal que os elementos de Σ sejam os módulos projetivos de $\mathscr{H}$. Para simplificarmos a notação, podemos considerar então que T_0 é o módulo projetivo $P(1)$, e assim tem-se que $\mathscr{H} = \mathrm{mod}kQ$, em que Q é o quiver

$$\begin{tikzcd}
 & & & 6 \arrow[d] & & \\
\mathbb{E}_6 : & 5 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

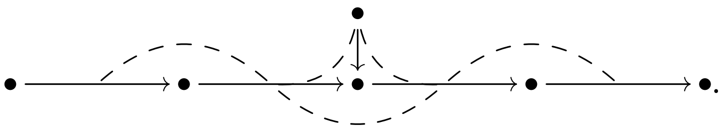
E assim, podemos escrever o complexo tilting $T^{\bullet}$ como

$$T^{\bullet} = P(1) \oplus I(1) \oplus \tau I(1)[1] \oplus \tau I(5)[1] \oplus \tau I(6)[1] \oplus \tau^2 I(5)[2],$$

em que $T_0 = P(1)$, $T_1 = I(1)$, $T_2 = \tau I(1)[1]$, $T_3 = \tau I(5)[1]$, $T_4 = \tau I(6)[1]$ e $T_5 = \tau^2 I(5)[1]$. Temos que $T^{\bullet} \in \vee_{i=0}^{2} \mathscr{H}[i]$, e como essa é a maior subcategoria possível neste caso, temos que para tal complexo tilting vale

$$s.gl.dim.EndT^{\bullet op} = 4 = rkK_0(\Lambda) - 2.$$

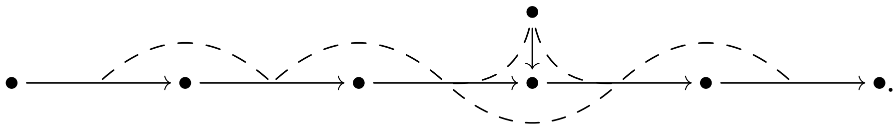
Além disso, neste caso o quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é:



Seguindo o mesmo raciocínio apresentado para o caso $\mathbb{E}_6$, para o caso em que o grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\mathbb{E}_7$, existe um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que

$$\text{s.gl.dim.End}T^{\bullet op} = 5 = \text{rk}K_0(\Lambda) - 2.$$

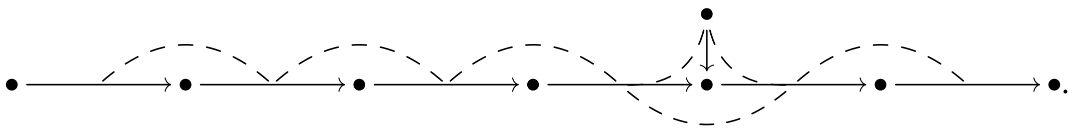
Mais ainda, neste caso o quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é:



Analogamente, quando considerarmos que o grafo subjacente do quiver Q é $\overline{Q} = \mathbb{E}_8$, também existe um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que para qualquer $\mathscr{H}$ subcategoria hereditária geradora de $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, o complexo tilting $T^\bullet$ está espalhado em um número maior ou igual à 5 cópias. Temos que $T^\bullet \in \vee_{i=0}^{4} \mathscr{H}[i]$, e para tal complexo tilting vale

$$\text{s.gl.dim.End}T^{\bullet op} = 6 = \text{rk}K_0(\Lambda) - 2.$$

Neste caso, o quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é:



Concluímos então pelo lema 1.28, se tivermos um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ existirá uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i]$$

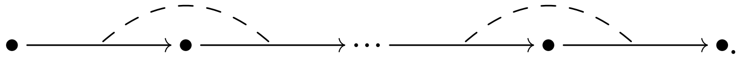
e, ainda mais, s.gl.dim.End$T^{\bullet op} = \ell + 2$. Com os resultados anteriores temos então a tabela

Tabela 2.1: Caso Dynkin

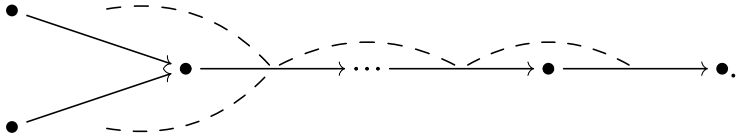
Grafo Subjacente	Valor de ℓ	s.gl.dim
$\mathbb{A}_n$	$n-3$	$n-1$
$\mathbb{D}_n$	$n-4$	$n-2$
$\mathbb{E}_6$	2	4
$\mathbb{E}_7$	3	5
$\mathbb{E}_8$	4	6

As álgebras que atingem estes valores máximos são descritas a seguir.

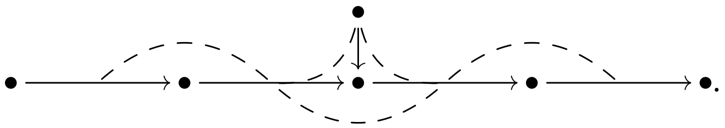
$\mathbb{A}_n$: O quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é dado por



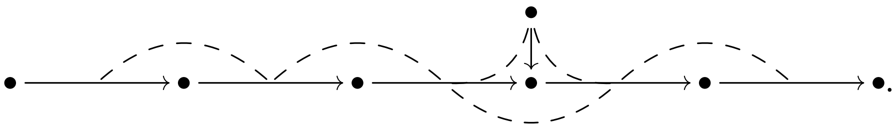
$\mathbb{D}_n$: O quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é dado por



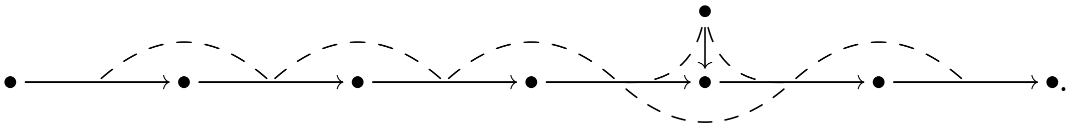
$\mathbb{E}_6$: O quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é dado por



$\mathbb{E}_7$: O quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é dado por



$\mathbb{E}_8$: O quiver ordinário da álgebra End$T^{\bullet op}$ é dado por



Uma propriedade interessante que podemos observar é que as álgebras com dimensão global forte máxima descritas acima são todas álgebras com radical quadrado zero. Para os casos $\mathbb{A}_n$ e $\mathbb{D}_n$, tais resultados já foram obtidos por Zhang, utilizando o conceito de largura cohomológica global (ver [Zha17]).

A partir de agora estudaremos propriedades de complexos tilting na categoria derivada de álgebras hereditárias mansas, sempre com o objetivo de utilizar tais propriedades para encontrar um majorante para a dimensão global forte de álgebras hereditárias por partes que sejam derivadamente equivalentes a tais álgebras. Começaremos estudando como se comportam complexos tilting da álgebra de Kronecker.

2.4 Álgebra de Kronecker

Nesta seção faremos uma classificação dos complexos tilting na categoria derivada da álgebra de Kronecker, que é um caso particular de álgebra hereditária mansa. Isto não somente nos servirá como uma motivação, mas também como base para entender melhor os casos mais gerais.

Seja k um corpo algebricamente fechado. Então a álgebra de Kronecker sobre k pode ser vista como a álgebra de caminhos kQ, em que o quiver Q tem a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
\underset{1}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

Seguindo então a ideia apresentada em [ARS97], pág. 302, dados os módulos projetivos indecomponíveis $P(1)$ e $P(2)$ associados aos vértices 1 e 2, respectivamente, podemos parametrizar a componente pós-projetiva de $\Gamma(\mathrm{mod}kQ)$ da seguinte maneira: dado um número inteiro não-negativo t, denotaremos

$$P_{2t} = \tau^{-t}P(1)$$
$$\text{e } P_{2t+1} = \tau^{-t}P(2).$$

Graficamente, temos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & P_1 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & P_3 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \cdots \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & P_{2t+1} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \cdots \\
P_0 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & P_2 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & P_4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & \cdots & P_{2t} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Da mesma maneira, dados os módulos injetivos indecomponíveis $I(1)$ e $I(2)$ associados aos vértices 1 e 2, respectivamente, podemos parametrizar a componente pré-injetiva do quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod}kQ)$: dado um número inteiro não-negativo t, denotaremos

$$Q_{2t+1} = \tau^t I(1)$$
$$\text{e } Q_{2t} = \tau^t I(2).$$

Graficamente temos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & Q_{2t+1} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \cdots \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & Q_3 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & Q_1 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
\cdots \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & Q_{2t} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & Q_4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & Q_2 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & Q_0
\end{tikzcd}$$

Com essas parametrizações, podemos enunciar agora o seguinte teorema, que pode ser encontrado em [ARS97], e que será muito útil para estudarmos as possíveis configurações do complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada da álgebra de Kronecker.

Teorema 2.20 ([ARS97], pág. 308) *Sejam k um corpo algebricamente fechado e kQ a álgebra de Kronecker, definida anteriormente. Então*

- $max\{0, n-m+1\} = dim_k Hom_{kQ}(P_m, P_n)$;
- $max\{0, m-1-n\} = dim_k Ext^1_{kQ}(P_m, P_n)$;
- $max\{0, m-n+1\} = dim_k Hom_{kQ}(Q_m, Q_n)$;
- $max\{0, n-1-m\} = dim_k Ext^1_{kQ}(Q_m, Q_n)$.

A álgebra kQ tem dois módulos simples não-isomorfos $S(1)$ e $S(2)$ correspondendo aos vértices 1 e 2 do quiver Q. Logo, um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ deve ser da forma

$$T^\bullet = T_0[r_0] \oplus T_1[r_1],$$

em que T_0 e T_1 são módulos indecomponíveis na categoria $\text{mod}kQ$. Além disso, como $T^\bullet$ é um complexo tilting, temos por definição que

$$\text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0 \text{ para todo} i \neq 0.$$

Utilizando esta informação, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.21 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e kQ a álgebra de Kronecker, definida anteriormente. Então, dado um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, todos os somandos indecomponíveis de $T^\bullet$ pertencem à componentes transjectivas.*

Demonstração: Suponha que algum somando indecomponível $T_i[r_i]$ esteja em uma componente regular de $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$. Como os tubos na componente regular do quiver de Auslander-Reiten da álgebra de Kronecker têm todos posto 1, temos então:

$$\begin{aligned} 0 \neq \; & \text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}(T_i[r_i], T_i[r_i]) \\ & \simeq \text{Hom}_{kQ}(T_i, T_i) \\ & \simeq \text{Hom}_{kQ}(T_i, \tau T_i) \\ & \simeq \text{Ext}^1_{kQ}(T_i, T_i) \\ & \simeq \text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}(T_i[0], T_i[1]) \\ & \simeq \text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}(T_i[r_i], T_i[r_i+1]), \end{aligned}$$

e portanto $\text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)}(T^\bullet, T^\bullet[1]) \neq 0$, o que é um absurdo. Logo, o complexo tilting $T^\bullet$ não pode ter nenhum somando indecomponível em componentes regulares de $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, ou seja, todos os seus somandos estão em componentes transjectivas.

■

Utilizando os conceitos anteriores, demonstra-se facilmente o próximo teorema, que é uma consequência da proposição anterior juntamente com o teorema 2.20.

Teorema 2.22 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e kQ a álgebra de Kronecker. Dado então um complexo tilting $T^\bullet \in \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, a álgebra $\text{End}T^{\bullet op}$ é isomorfa à algebra de caminhos kQ.*

2.5 Álgebras hereditárias do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$

Considere agora um quiver Q cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ seja do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, e seja kQ a álgebra de caminhos deste quiver. Sabemos que para um quiver Q do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, o posto do grupo de Grothendieck da álgebra kQ é igual à n, ou ainda, o número de vértices do quiver Q é n.

O objetivo desta seção é mostrar que para um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada de uma álgebra hereditária mansa do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, existe uma subcategoria hereditária geradora

$\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que

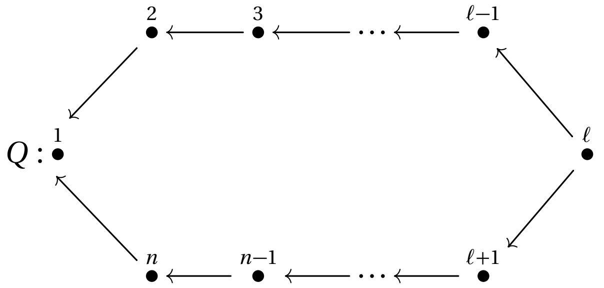
$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-3.$$

Vimos no teorema 2.6 que ao consideramos uma uma secção Σ cujas $r-1$ fontes sejam somandos diretos indecomponíveis de $T^{\bullet}$, garantimos a existência de uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ que satisfaz

$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{n-(r+1)} \mathscr{H}[i].$$

Logo, se considerarmos $r \geq 2$, teremos que o resultado almejado já estará provado. Logo, o que faremos é considerar o caso em que $r = 1$, isto é, quando a secção Σ a ser construída tem apenas uma fonte. O próximo lema nos mostra que a fonte de tal secção Σ atinge todos os módulos na componente pós-projetiva.

Lema 2.23 *Considere o quiver*



e seja $\Lambda = kQ$ *a álgebra de caminhos associada à* Q*. Então, para todo módulo indecomponível* X *na componente pós projetiva de* $\Gamma(modkQ)$*, temos que* $Hom_{\Lambda}(P(1), X) \neq 0$*, em que* $P(1)$ *é o módulo projetivo indecomponível associado ao vértice* 1 *de* Q*.*

Demonstração: Podemos ver que o módulo simples relacionado ao vértice 1, denotado por $S(1)$, é somando do socle de todos os módulos projetivos indecomponíveis em modkQ. Mais ainda, sabemos que $S(1) = P(1)$, em que $P(1)$ é o módulo projetivo indecomponível associado ao vértice 1 de Q, e que $P(1)$ está apenas uma vez no socle dos módulos projetivos indecomponíveis $P(k)$, $k \neq \ell$, e aparece duas vezes no socle de $P(\ell)$.

Lembre que para todo módulo indecomponível X na componente pós projetiva do quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod}kQ)$, existem $r \in \mathbb{N}$ e $P(k)$ módulo projetivo indecomponível tais que $X = \tau^{-r}P(k)$. Para mostrarmos então que $\text{Hom}_{\Lambda}(P(1), X) \neq 0$ para todo X na componente pós-projetiva de $\Gamma(\text{mod}kQ)$, basta mostrarmos que $P(1)$ está no socle de $\tau^{-r}P(k)$ para todo $r \in \mathbb{N}$ e para todo $k \in \{1, 2, \cdots, n-1, n\}$. Provaremos tal fato utilizando o princípio de indução.

Primeiramente, considere a seguinte sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(1) \longrightarrow P(2) \oplus P(n) \longrightarrow \tau^- P(1) \longrightarrow 0.$$

O número de vezes que um simples S está no socle de um módulo M qualquer será denotado por $m_S(M)$. Como sabemos que $P(1)$ está duas vezes no socle de $P(2) \oplus P(n)$, temos que $m_{P(1)}(\tau^- P(1)) = 1$.

Suponha agora que a afirmação seja válida para todo $2 \leq k \leq \ell - 3$, e então para $k = \ell - 2$, podemos construir a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(k) \longrightarrow P(k+1) \oplus \tau^- P(k-1) \longrightarrow \tau^- P(k) \longrightarrow 0.$$

Dessa forma, concluímos que $m_{P(1)}(\tau^- P(k)) = 1$. Para $\ell + 2 \leq k \leq n$, o raciocínio é análogo. Vejamos agora que $P(1)$ está no socle de $\tau^{-1} P(\ell - 1)$, para isso, considere a seguinte sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(\ell - 1) \longrightarrow P(\ell) \oplus \tau^- P(\ell - 2) \longrightarrow \tau^- P(\ell - 1) \longrightarrow 0.$$

Como $m_{P(1)}(P(\ell - 1)) = 1$, $m_{P(1)}(P(\ell)) = 2$ e $m_P(1)(\tau^- P(\ell - 2)) = 1$, podemos concluir que $m_{P(1)}(\tau^- P(\ell - 1)) = 2$. Com o mesmo argumento provamos que $m_{P(1)}(\tau^- P(\ell + 1)) = 2$. Nos resta verificar agora que $P(1)$ está no socle de $\tau^{-1} P(\ell)$.

De fato, considere a sequência de Auslander-Reiten começando em $P(\ell)$

$$0 \longrightarrow P(\ell) \longrightarrow \tau^- P(\ell - 1) \oplus \tau^- P(\ell + 1) \longrightarrow \tau^- P(\ell) \longrightarrow 0.$$

A partir dessa sequência podemos provar que $m_{P(1)}(\tau^- P(l)) = 2$. Logo, concluímos que o módulo projetivo indecomponível $P(1)$ está no socle de todos os módulos indecomponíveis da forma $\tau^- P(k)$, $k \in \{1, 2, \cdots, n-1, n\}$. Seguindo a mesma ideia, conclui-se que $P(1)$ está no socle de qualquer módulo indecomponível da forma $\tau^{-r} P(k)$, $r \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, \cdots, n-1, n\}$.

■

Seja k um corpo algebricamente fechado. Como visto no teorema 1.29, o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod}\Lambda)$ de uma k-álgebra hereditária mansa Λ está dividido em três tipos de componentes: uma componente pós-projetiva, denotada por $\mathbf{P}_\Lambda$, uma componente regular, $\mathbf{R}_\Lambda$, constituída de uma $\mathbb{P}_1(k)$-família de tubos, e por fim, uma componente pré-injetiva, denotada por $\mathbf{Q}_\Lambda$. Quando construímos o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda))$ da categoria derivada, sabemos que é apenas a colagem dos quivers de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod}\Lambda)$, em que cada cópia é um shift da categoria original. Esta colagem é feita mediante triângulos de Auslander-Reiten, que estão descritos em [Hap88]. Para a cópia $\mathrm{mod}\Lambda[i]$ de $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)$, denotaremos a componente pós-projetiva por $\mathbf{P}_\Lambda[i]$, a componente regular por $\mathbf{R}_\Lambda[i]$ e a componente pré-injetiva por $\mathbf{Q}_\Lambda[i]$.

Uma vez que componentes regulares são estáveis sob a ação do funtor τ, podemos facilmente concluir que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)}(\mathbf{P}_\Lambda[i],\mathbf{R}_\Lambda[i+1])=0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)}(\mathbf{R}_\Lambda[i],\mathbf{Q}_\Lambda[i+1])=0. \tag{2.13}$$

Lema 2.24 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver como no lema 2.23 e kQ a álgebra de caminhos associada à Q. Considere na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ um complexo tilting da forma*

$$T^\bullet = P(1)[r_{j_0}]\oplus(\oplus_i T_i[r_i]),$$

em que $P(1)$ é o kQ-módulo projetivo associado ao vértice 1 do quiver Q. Então $T_i[r_i]\notin \mathbf{P}_{kQ}[r_i]$ para $r_i\neq r_{j_0}$.

Demonstração: Suponha que $T_i[r_i]\in \mathbf{P}_{kQ}[r_i]$, então sabemos que o kQ-módulo T_i está em $\mathbf{P}_{kQ}$. Segue do lema 2.23 que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(P(1)[r_{j_0}],\, T_i[r_{j_0}])\neq 0.$$

Logo, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)}(P(1)[r_{j_0}],\, T_i[r_i][r_{j_0}-r_i])\neq 0.$$

Como $P(1)[r_{j_0}]$ e $T_i[r_i]$ são somandos diretos indecomponíveis do complexo tilting $T^\bullet$, segue que $r_i-r_{j_0}=0$ e portanto $r_i=r_{j_0}$.

■

Em [ALMM17], na página 42, os autores apresentam uma descrição detalhada e formal sobre somandos de um complexo tilting iniciando e terminando em alguma subcategoria, assim podemos falar do "primeiro"somando direto indecomponível de um complexo tilting.

Lema 2.25 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver como no lema 2.23 e $\Lambda = kQ$ a álgebra de caminhos associada à Q. Considere na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ um complexo tilting da forma*

$$T^\bullet = P(1)[r_{j_0}]\oplus(\oplus_i T_i[r_i]),$$

em que $P(1)$ é o kQ-módulo projetivo associado ao vértice 1 do quiver Q. Suponha que

- $P(1)[r_{j_0}]$ *é o primeiro somando direto indecomponível de* $T^\bullet$ *em componente transjectiva, e além disso, o único somando direto indecomponível de* $T^\bullet$ *em* $\mathbf{P}_\Lambda[r_{j_0}]$*;*

- *Existem somandos diretos* $T_{j_0-1}[r_{j_0}-1] \in mod\Lambda[r_{j_0}-1]$ *e* $T'_{j_0}[r_{j_0}] \in \mathbf{R}_\Lambda[r_{j_0}] \cup \mathbf{Q}_\Lambda[r_{j_0}]$ *tais que* $Hom_{\mathscr{D}^b(mod\Lambda)}(T_{j_0-1}[r_{j_0-1}], T'_{j_0}[r_{j_0}]) \neq 0$*;*

- $T^\bullet$ *está distribuído em* $n-1$ *cópias de mod*Λ*, onde* $n = rkK_0(\Lambda)$*.*

Então a álgebra End$(T^\bullet \backslash P(1)[r_{j_0}])^{op}$ *é conexa e todos os somandos de* $T^\bullet \backslash P(1)[r_{j_0}]$ *estão em shifts de um mesmo tubo* $\mathscr{T}$*.*

Demonstração: Note que uma vez que $T^\bullet$ está espalhado em $n-1$ cópias de modΛ, então deve existir um somando de $T^\bullet$ em cada cópia mod$\Lambda[r_i]$ com $r_i \neq r_{j_0}$ e exatamente dois somandos em mod$\Lambda[r_{j_0}]$, que já sabemos ser $P(1)[r_{j_0}]$ e $T'_{j_0}[r_{j_0}]$.

Uma vez que a álgebra End$T^{\bullet op}$ é conexa e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)}(T_{j_0-1}[r_{j_0}-1], T'_{j_0}[r_{j_0}]) \neq 0$, temos então que para todo $T_i \neq P(1)$ vale $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)}(T_{i-1}[r_i-1], T_i[r_i]) \neq 0$, e concluímos assim que a álgebra End$(T^\bullet \setminus P(1)[r_{j_0}])$ é conexa.

Agora, como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)}(T_{j_0-1}[r_{j_0}-1], T'_{j_0}[r_{j_0}]) \neq 0$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\Lambda)}(\mathbf{R}_\Lambda[i], \mathbf{Q}_\Lambda[i+1]) = 0$, segue que $T'_{j_0}[r_{j_0}] \in \mathbf{R}_\Lambda[r_{j_0}]$. Seguindo esta mesma ideia, concluímos que $T_i[r_i] \in \mathbf{R}_\Lambda[r_i]$ para todo $r_i > r_{j_0}$. Assim concluímos que todos os somandos $T_i[r_i]$ de $T^\bullet \backslash P(1)[r_{j_0}]$ estão em componentes regulares $\mathbf{R}_\Lambda[r_i]$. Como visto acima, a álgebra End$(T^\bullet \backslash P(1)[r_{j_0}])$ é conexa, e então segue do lema 2.1 que todos os Λ-módulos T_i estão em um mesmo tubo $\mathscr{T}$. ■

O próximo teorema servirá de base para a prova de outro resultado desta seção, onde trataremos sobre o número de cópias em que um complexo tilting na categoria derivada de uma álgebra hereditária do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ pode estar distribuído.

Teorema 2.26 (ver [AS87], pág. 271.) *Sejam* k *um corpo algebricamente fechado e* Λ *uma* k*-álgebra básica e conexa de dimensão finita. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- Λ *é uma álgebra tilted iterada do tipo* $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$*.*

- Λ *é isomorfa à algebra de caminhos* kQ/J*, em que o quiver limitado* (Q,J) *satisfaz as seguintes condições:*
  (a) *Para cada vértice* i *de* Q*, existem no máximo duas flechas distintas chegando ou saindo de* i*.*
  (b) *Para cada flecha* α*, existem no máximo uma flecha* β *e uma flecha* γ *tais que* $\alpha\beta$ *e* $\gamma\alpha$ *não pertençam à* J*.*

***(c)** J é gerado por um conjunto de caminhos de tamanho dois.*

***(d)** Para cada flecha α, existem no máximo uma flecha η e uma flecha δ tais que $\alpha\eta$ e $\delta\alpha$ pertençam à J.*

***(e)** Q contém um único ciclo C não-orientado.*

***(f)** No ciclo C, o número de relações orientadas no sentido anti-horário é igual ao número de relações orientadas no sentido horário.*

***(g)** Q tem exatamente n vértices.*

Uma álgebra de caminhos satisfazendo as condições **(a)**-**(d)** é dita **Gentle**, e tais álgebras já foram muito bem estudadas.

Teorema 2.27 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver com grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Então, dado um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-3} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Uma vez que o grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, o quiver Q tem n vértices, logo o complexo tilting $T^\bullet$ pode ser escrito como

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i],$$

em que cada T_i é um kQ-módulo indecomponível.

Utilizando o item **a)** do lema 2.5, podemos afirmar que existe algum somando direto indecomponível do complexo tilting $T^\bullet$ em alguma componente transjectiva. Denotemos por $T_{j_0}[r_{j_0}]$ o primeiro somando indecomponível de $T^\bullet$ em uma componente transjectiva, ou seja, para todo somando direto indecomponível $T_k[r_k]$ de $T^\bullet$ que esteja em uma componente transjectiva, temos $r_{j_0} \leq r_k$. Note que podemos supor que $r_{j_0} < r_{n-2}$, pois caso $r_{j_0} = r_{n-2}, r_{n-1}$, do lema 2.3 poderíamos considerar o processo dual ao que faremos agora.

Utilizando então o lema 2.3, podemos construir uma secção de $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, denotada por Σ, de tal maneira que todas as suas fontes sejam somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$, e mais ainda, tal que $T_{j_0}[r_{j_0}]$ seja uma fonte também. A partir da secção Σ podemos definir uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ por

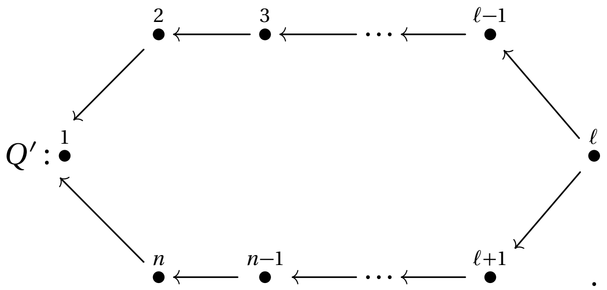
$$\mathscr{H}[r_{j_0}] = \{X^\bullet \in \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)/\text{Hom}(\Sigma, X^\bullet[i]) = 0\, \forall i \neq 0\}.$$

Note que $\mathscr{H}[r_{j_0}] = \text{mod}(\text{End}\Sigma)$. Segue da definição de $\mathscr{H}[r_{j_0}]$ que $\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, e mais ainda, $\text{Hom}(\Sigma, \mathscr{H}[r_{j_0}+1]) = 0$. Além disso, como a álgebra $\text{End}T^{\bullet op}$ é conexa, deve existir algum somando indecomponível de $T^\bullet$ diferente de $T_{j_0}[r_{j_0}]$ em $\mathscr{H}[r_{j_0}]$. Vejamos agora que, a menos de shifts, a subcategoria $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ é a subcategoria hereditária geradora de $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ que cumpre as condições apresentadas no enunciado da proposição.

Note primeiramente que se a secção Σ tiver duas ou mais fontes, segue dos fatos que $\text{Hom}(\Sigma, \mathscr{H}[r_{j_0}+1]) = 0$ e que a álgebra $\text{End}T^{\bullet op}$ é conexa, que existe um terceiro somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[r_{j_0}]$. Como o complexo tilting $T^\bullet$ tem n somandos diretos indecomponíveis e concentramos três desses somandos em uma mesma cópia, segue que, a menos de shifts,

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-3} \mathscr{H}[i],$$

e então o teorema está provado. Podemos supor então que a secção Σ tenha apenas uma única fonte, a saber $T_{j_0}[r_{j_0}]$. Neste caso, isto é, quando Σ tem uma única fonte, o quiver ordinário Q' da álgebra $\text{End}\Sigma$ admite um único poço. Como Q' é tal que $\overline{Q'} = \tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, isto quer dizer que devemos analisar o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de caminhos kQ' em que



Note que $T_{j_0}[r_{j_0}]$ é o único $\text{End}\Sigma$-módulo projetivo simples. Assim, aplicando o lema 2.24, temos que não podem existir somandos diretos indecomponíveis do complexo tilting $T^\bullet$ em componentes pós-projetivas da forma $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}[r_i]$ para $r_i \neq r_{j_0}$.

Vejamos agora que o complexo tilting só pode estar distribuído em no máximo $n-2$ cópias da categoria $\mathscr{H}$. Como já discutimos anteriormente nessa demonstração, deve existir um somando direto indecomponível $T'_{j_0}[r_{j_0}]$ de $T^\bullet$ diferente de $T_{j_0}[r_{j_0}]$ em $\mathscr{H}[r_{j_0}]$, o que nos leva a duas possibilidades:

1) $T'_{j_0}[r_{j_0}] \in \mathbf{P}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}]$; ou

2) $T'_{j_0}[r_{j_0}] \in \mathbf{R}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}] \cup \mathbf{Q}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}]$.

Consideremos agora a possibilidade **1)**, isto é, o caso em que $T'_{j_0}[r_{j_0}] \in \mathbf{P}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}]$. Mostraremos que neste caso deve existir um terceiro somando indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{H}[r_{j_0}]$. De fato, uma vez que $T'_{j_0}[r_{j_0}] \in \mathbf{P}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}]$, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T'_{j_0}[r_{j_0}], \mathbf{R}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}+1] \cup \mathbf{Q}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}+1]) = 0,$$

e, além disso, como já mencionado acima, a componente $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}+1]$ não contém somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$. Segue então da conexidade da álgebra $\mathrm{End}\, T^{\bullet op}$ que deve existir somando direto indecomponível $T''_{j_0}[r_{j_0}]$ de $T^\bullet$ em $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}] \cup \mathbf{R}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}] \cup \mathbf{Q}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}]$. Logo, como temos três somandos indecomponíveis do complexo tilting $T^\bullet$ em uma mesma cópia $\mathscr{H}[r_{j_0}]$, podemos então concluir que, a menos de shifts,

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-3} \mathscr{H}[i].$$

Consideremos agora a possibilidade **2)** apresentada anteriormente, ou seja, o caso em que $T'_{j_0}[r_{j_0}] \in \mathbf{R}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}] \cup \mathbf{Q}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}]$. Mostraremos que o complexo tilting $T^\bullet$ não pode estar espalhado em mais do que $n-2$ cópias. Para tanto, suponha por absurdo que o complexo tilting $T^\bullet$ esteja espalhado em mais do que $n-2$ cópias, isto é, existe algum $\ell \geq n-2$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i].$$

Como $T^\bullet$ tem exatamente n somandos indecomponíveis e a álgebra $\mathrm{End}\, T^{\bullet op}$ é conexa, segue que $\ell < n$. Podemos considerar então apenas os casos em que $\ell = n-1$ ou $\ell = n-2$. Utilizando o teorema 2.5, como $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, podemos descartar o caso em que $\ell = n-1$.

Suponhamos então que $\ell = n-2$. Sabemos que $T_{j_0}[r_{j_0}]$ e $T'_{j_0}[r_{j_0}]$ pertencem à categoria $\mathscr{H}[r_{j_0}]$. Disso podemos concluir que para cada $0 \leq r_i \leq \ell$ com $r_i \neq r_{j_0}$, existe apenas um somando indecomponível $T_i[r_i] \in \mathscr{H}[r_i]$. Mais ainda, podemos dizer que para todo $r_i < r_{j_0}$, o somando indecomponível $T_i[r_i]$ pertence à componente $\mathbf{R}_{\mathscr{H}}[r_i]$, uma vez que tomamos $T_{j_0}[r_{j_0}]$ como o primeiro somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em uma componente transjectiva de $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\, kQ)$.

Uma vez que sabemos como os somandos do complexo tilting $T^\bullet$ estão dispostos na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, podemos então extrair algumas informações sobre o quiver ordinário Δ da álgebra de caminhos $\mathrm{End}\, T^{\bullet op}$. Note primeiramente que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T[r_{j_0}-1], T'_{j_0}[r_{j_0}]) = 0$. De fato, suponha que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T[r_{j_0}-1], T'_{j_0}[r_{j_0}]) \neq 0$. Segue do lema 2.1 que todos os somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ diferentes de $T_{j_0}[r_{j_0}]$ estão em shifts de um mesmo tubo $\mathscr{T}_\lambda$.

Além disso, os somandos de $T^\bullet \backslash T_{j_0}[r_{j_0}]$ formam uma sequência excepcional com $n-1$ elementos em um tubo $\mathscr{T}_\lambda$ em $\mathscr{H}$. Por outro lado, o posto de um tubo $\mathscr{T}_\lambda$ em $\mathscr{H}$ assume no máximo o valor $r_\lambda = n-1$, ou seja, construímos uma sequência excepcional com $n-1$ elementos em tubo com posto $r_\lambda \leq n-1$, o que é uma contradição de acordo com o lema 2.2.

Além disso, note que $\text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_{j_0}[r_{j_0}], T[r_{j_0}+1]) = 0$. Para isto, basta apenas relembrarmos que vale $\text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\mathbf{P}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}], \mathbf{R}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}+1] \cup \mathbf{Q}_{\mathscr{H}}[r_{j_0}+1]) = 0$. Por fim, como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, temos que $\text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\mathscr{H}[r_i], \mathscr{H}[r_i+2]) = 0$, e assim provamos que a concatenação de duas flechas no quiver ordinário Δ é sempre nula.

Por outro lado, o teorema 2.26 nos diz exatamente como deve ser o quiver ordinário de uma álgebra tilted iterada do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$. Do item **(e)** de 2.26, sabemos que o quiver Δ deve conter um único ciclo. Juntando esta informação com o que tínhamos antes, deduzimos que o quiver Q' deve ter uma das seguintes configurações:

$$\begin{tikzcd} \Delta = \bullet & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] & \bullet \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] ; \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta = \bullet & \bullet \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] ; \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta = \bullet & \bullet \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] . \end{tikzcd}$$

Em todos os casos, a álgebra de caminhos é dada por $k\Delta/R^2$, em que R representa o ideal gerado pelas flechas. Porém, do item **(d)** do teorema 2.26, para cada flecha α em Δ, existem no máximo uma flecha β e uma flecha η tais que $\eta\alpha$ e $\alpha\beta$ pertençam ao ideal R^2, e isto então nos gera um absurdo, que veio do fato de supormos $\ell = n-2$. Logo, concluímos que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-3} \mathscr{H}[i].$$

■

Utilizando a técnica apresentada em [ALMM17], estamos aptos a encontrar um majorante para a dimensão global forte da álgebra $\text{End}\, T^{\bullet op}$.

Corolário 2.28 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Considere Λ uma k-álgebra de dimensão finita satisfazendo $\mathscr{D}^b(mod\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(modkQ)$. Então*

$$s.gl.dim.\Lambda \leq n-1 = rkK_0(\Lambda)-1.$$

Demonstração: Como $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, pelo teorema de Rickard, existe um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que $\Lambda \simeq \text{End}T^{\bullet op}$.
Utilizando o lema 1.28 e o teorema 2.27 concluímos então que s.gl.dim.End$T^{\bullet op} \leq n-3+2 = n-1$. Finalmente, como End$T^{\bullet op} \simeq \Lambda$, concluímos que

$$\text{s.gl.dim.}\Lambda \leq n-1 = \text{rk}K_0(\Lambda)-1.$$

■

2.6 Álgebras hereditárias do tipo $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$

Esta seção tem por objetivo estudar o comportamento de complexos tilting em categorias derivadas de álgebras hereditárias do tipo $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$. O principal objetivo é provar que existe um limitante para o espalhamento de tais objetos na categoria derivada, e com isso, aplicando a técnica descrita em [ALMM17], encontrar um majorante para a dimensão global forte de álgebras hereditárias por partes do tipo $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$. Para tanto, enunciaremos e provaremos alguns resultados sobre propriedades de complexos tilting para este tipo de álgebra.

Seguindo a notação apresentada em [HHK], uma decomposição $\mathscr{H} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ é dita um **corte** de $\mathscr{H}$ se $\text{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) = 0$ e $\text{Hom}(\mathbf{B}, \tau\mathbf{A}) = 0$.

Proposição 2.29 (ver [HHK], pág. 121) *Seja $\mathscr{H} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ um corte em uma categoria hereditária $\mathscr{H}$ com dualidade de Serre. Então a subcategoria plena $\overline{\mathscr{H}} = \mathbf{B} \vee \mathbf{A}[1]$ de $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é uma categoria abeliana que é derivadamente equivalente à categoria $\mathscr{H}$.*

Sabemos que ao considerarmos um complexo tilting, de acordo com o teorema 1.16, podemos ordenar seus somandos diretos indecomponíveis de tal modo que formem uma sequência excepcional. Mais ainda, construímos tal ordenação considerando os somandos de $T^\bullet$ da esquerda para a direita, e portanto podemos dizer que $T_{n-1}[r_{n-1}]$ é o último somando direto indecomponível de $T^\bullet$. Para tal somando, temos duas possibilidades: estar em uma componente regular ou em uma componente transjectiva.

Lema 2.30 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver com grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$, e seja kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Dado um complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, suponha que o último somando direto indecomponível $T_{n-1}[r_{n-1}]$ de $T^\bullet$ esteja em uma componente regular, e que além disso, exista uma equivalência de categorias*

$T_{n-1}^{\perp} \simeq \text{mod}k\Delta$, com $\overline{\Delta} = \tilde{\mathbb{A}}_{n-2}$. Então todos os somandos diretos indecomponíveis não-regulares de $T^{\bullet}$ estão na componente transjectiva $\mathbf{Q}_{kQ}[r_{n-1}-1] \vee \mathbf{P}_{kQ}[r_{n-1}]$.

Demonstração: Como o grafo subjacente $\overline{Q}$ é da forma $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$, sabemos que o complexo tilting $T^{\bullet}$ tem exatamente n somandos indecomponíveis, e assim podemos representar na forma:

$$T^{\bullet} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i],\, T_i \in \text{ind}kQ.$$

Ao tomarmos $\mathbf{A} = \mathbf{P}_{kQ}[-1] \vee \mathbf{R}_{kQ}[-1]$ e $\mathbf{B} = \mathbf{Q}_{kQ}[-1]$, é fácil ver que $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ é um corte da categoria mod$kQ[-1]$. Segue então da proposição 2.29 que a categoria $\mathscr{H} = \mathbf{B} \vee \mathbf{A}[1] = \mathbf{Q}_{kQ}[-1] \vee \mathbf{P}_{kQ} \vee \mathbf{R}_{kQ}$ é uma categoria abeliana hereditária. Como a componente $\mathbf{Q}_{kQ}[-1] \vee \mathbf{P}_{kQ}$ é uma componente da forma $\mathbb{Z}Q$ para um quiver cujo grafo subjacente é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$ e a componente $\mathbf{R}_{kQ}$ é uma família de tubos, podemos chamar $\mathbf{Q}_{kQ}[-1] \vee \mathbf{P}_{kQ}$ de $\mathscr{H}_+$ e $\mathbf{R}_{kQ}$ de $\mathscr{H}_0$.

Consideremos então o último somando direto indecomponível $T_{n-1}[r_{n-1}]$ de $T^{\bullet}$. Por hipótese temos que $T_{n-1}^{\perp} \simeq \text{mod}k\Delta$, em que $\overline{\Delta} = \tilde{\mathbb{A}}_{n-2}$, e que o módulo T_{n-1} é regular. Logo, utilizando os teoremas 1.31 e 1.29, concluímos que T_{n-1} deve estar em um tubo $\mathscr{T}_{\lambda}$ de posto $r_{\lambda} = 2$. Consideremos agora o módulo $M = T_{n-1} \oplus \tau T_{n-1}$. Como T_{n-1} está em um tubo de posto 2, segue de [HHK], página 128, axioma $H6$, que $\text{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, M) \neq 0$ para todo módulo T_i em $\mathscr{H}_+ = \mathbf{Q}_{kQ}[-1] \vee \mathbf{P}_{kQ}$. Logo, temos

$$\begin{aligned} 0 &\neq \text{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, M) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[0], M[0]) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_{\ell}], M[r_{\ell}]), \forall r_{\ell} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Perceba que, uma vez que o módulo M está em tubo de posto 2, vale

$$\tau M = \tau T_{n-1} \oplus \tau^2 T_{n-1} = \tau T_{n-1} \oplus T_{n-1} = M,$$

ou seja, $\tau^j M = M$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Consideremos agora $T_i[r_i]$ um somando indecomponível de $T^{\bullet}$ que esteja em uma componente transjectiva, isto é, $T_i[r_i] \in \mathbf{Q}_{kQ}[r_i - 1] \vee \mathbf{P}_{kQ}[r_i] = \mathscr{H}_+[r_i]$. Primeiramente, note que da equação (2.14) segue

$$\begin{aligned} 0 &\neq \text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], M[r_i]) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], (T_{n-1} \oplus \tau T_{n-1})[r_i]), \end{aligned}$$

o que nos dá então duas possibilidades:

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_{n-1}[r_i]) \neq 0$; ou

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau T_{n-1}[r_i]) \neq 0$.

Vamos provar agora que a possibilidade **(2)** nunca pode acontecer. Para isso, suponha por absurdo que **(2)** seja verdade, isto é,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau T_{n-1}[r_i]) \neq 0.$$

Temos então

$$\begin{aligned} 0 &\neq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau T_{n-1}[r_i]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[0], \tau T_{n-1}[0]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau T_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $\epsilon = \{T_0, ..., T_i, ..., T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional e $\mathrm{DExt}^1_{kQ}(T_{n-1}, T_i) \neq 0$, obtemos um absurdo. Logo, **(1)** deve ser verdadeira, isto é, devemos ter

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_{n-1}[r_i]) \neq 0.$$

Temos então

$$\begin{aligned} 0 &\neq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_{n-1}[r_i]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_{n-1}[r_{n-1}][r_i - r_{n-1}]). \end{aligned}$$

Como $T^\bullet$ é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, devemos ter $r_i - r_{n-1} = 0$, de onde concluímos que $r_i = r_{n-1}$. Portanto $T_i[r_i] \in \mathbf{Q}[r_{n-1} - 1] \vee \mathbf{P}[r_{n-1}]$. Como tomamos $T_i[r_i]$ um somando direto indecomponível não-regular arbitrário, concluímos que todos os somandos indecomponíveis não-regulares de $T^\bullet$ estão em $\mathbf{Q}[r_{n-1} - 1] \vee \mathbf{P}[r_{n-1}]$.

■

No próximo resultado apresentaremos um limitante para o número de cópias em que um complexo tilting pode estar espalhado na categoria derivada de uma álgebra hereditária do tipo $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$.

Teorema 2.31 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Então ao considerarmos $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(modkQ)$, existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(modkQ)$ tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-4} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Faremos a prova dessa proposição nos baseando no caso em que o grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$. Para os casos em que o grafo subjacente $\overline{Q}$ é igual à $\tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou$\tilde{\mathbb{E}}_8$, a ideia da prova é a mesma. Dito isto, sabemos então que o complexo tilting $T^\bullet$ tem exatamente n somandos diretos indecomponíveis e então podemos escrevê-lo na forma

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i].$$

Temos dois casos a considerar:

1) T_{n-1} está em uma componente transjectiva;

2) T_{n-1} está em uma componente regular.

Para o caso **1)** temos que o somando direto indecomponível $T_{n-1}[r_{n-1}]$ de $T^\bullet$ está em uma componente transjectiva. Como podemos olhar para o módulo T_{n-1} como um módulo projetivo indecomponível $P(i)$ em modkQ, segue da proposição 1.18 que podemos supor que a categoria perpendicular à direita do módulo T_{n-1} é isomorfa à categoria mod$\Lambda/\Lambda e_i \Lambda$, e então podemos considerar $T_{n-1}^{\perp}$ como uma subcategoria plena de mod$(k\Delta)$, em que $\overline{\Delta} = \mathbb{D}_{n-1}$. Assim, utilizando o lema 1.23, sabemos que $T^\bullet \backslash T_{n-1}[r_{n-1}]$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(T_{n-1}^{\perp}) \subseteq \mathscr{D}^b(\text{mod}k\Delta)$, e pelo teorema 2.18, existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}k\Delta)$ tal que

$$T^\bullet \backslash T_{n-1}[r_{n-1}] \in \bigvee_{i=0}^{(n-1)-4} \mathscr{H}'[i].$$

Podemos considerar então a categoria $\mathscr{H}'' = \mathscr{H}' \cap T_{n-1}^{\perp}$. Tal categoria é uma categoria hereditária, uma vez que é a interseção de duas categorias hereditárias, e além disso, $\mathscr{H}''$ também é uma subcategoria geradora de $\mathscr{D}^b(T_{n-1}^{\perp})$, pois

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^b(\mathscr{H}'') &= \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} \mathscr{H}''[i] \\ &= \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} (\mathscr{H}' \cap T_{n-1}^{\perp})[i] \\ &= \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} \mathscr{H}'[i] \cap \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} T_{n-1}^{\perp}[i] \\ &= \mathscr{D}^b(T_{n-1}^{\perp}).\end{aligned}$$

Da definição de $\mathscr{H}''$ temos que

$$T^{\bullet}\backslash T_{n-1}[r_{n-1}] \in \bigvee_{i=0}^{(n-1)-4} \mathscr{H}''[i],$$

e assim utilizando a observação 1.2, quando voltarmos para a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, obteremos uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \in \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$ tal que

$$T^{\bullet}\backslash T_{n-1}[r_{n-1}] \in \bigvee_{i=0}^{n-5} \mathscr{H}[i],$$

e ao adicionarmos o somando direto indecomponível $T_{n-1}[r_{n-1}]$, podemos aumentar em apenas um o número de cópias em que o complexo tilting $T^{\bullet}$ está espalhado, isso pelo fato da álgebra $\mathrm{End}T^{\bullet op}$ ser conexa. E nesse caso concluímos que

$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{n-4} \mathscr{H}[i].$$

Vejamos agora como fica o caso **2)**, isto é, suponha que o último somando direto indecomponível $T_{n-1}[r_{n-1}]$ de $T^{\bullet}$ esteja em uma componente regular. Pelo teorema 1.31 sabemos que a categoria perpendicular à direita de T_{n-1} satisfaz a equivalência $T_{n-1}^{\perp} \simeq \mathrm{mod}(k\Delta)$, em que o grafo subjacente é da forma:

2.a) $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_{n-2}$, no caso em que T_{n-1} pertence a um tubo $\mathscr{T}_{\lambda}$ de posto $r_{\lambda} = 2$;

2.b) $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_{n-2}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$, no caso em que T_{n-1} pertence a um tubo $\mathscr{T}_{\lambda}$ de posto $r_{\lambda} \neq 2$.

Para o caso **2.a)**, isto é, o caso em que $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_{n-2}$, segue do lema 2.30 que todos os somandos diretos indecomponíveis não-regulares de $T^{\bullet}$ estão na última componente transjectiva, ou seja, se $T_i[r_i]$ é um somando direto não-regular de $T^{\bullet}$, então $T_i[r_i] \in \mathbf{Q}_{kQ}[r_{n-1}-1] \cup \mathbf{P}_{kQ}[r_{n-1}]$.

Suponhamos por absurdo que não exista subcategoria hereditária geradora satisfazendo as condições do enunciado, ou seja, suponha que

$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \geq n-3,$$

para toda subcategoria geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod} kQ)$.

Temos então $m \geq n-3$ somandos $T_j[r_j]$ espalhados de $\mathscr{H}[0]$ até $\mathscr{H}[n-4]$ em componentes regulares. Utilizando o lema 2.1 percebemos que todos estes somandos estão em shifts de um mesmo tubo $\mathscr{T}_{\lambda}$.

O maior posto possível para um tubo na categoria modkQ, $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$, é $r_{\lambda} = n-3$. Além disso, sabemos que os módulos $T_0, \cdots, T_{n-1}$ formam uma sequência excepcional, pois $T^{\bullet}$ é um complexo tilting. Por outro lado, do teorema 2.2 segue que um tubo de posto r_{λ} só pode conter sequências excepcionais com no máximo $r_{\lambda}-1$ módulos. Obtemos assim um absurdo, pois existirá uma sequência excepcional com $m \geq n-3$ módulos em um tubo com posto no máximo $n-3$. Portanto, nesse caso deve existir subcategoria $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod} kQ)$ satisfazendo

$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{n-4} \mathscr{H}[i].$$

Vejamos agora o que acontece no caso **2b)**, isto é, no caso em que o grafo subjacente $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_{n-2}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou $\tilde{\mathbb{E}}_8$. Aqui, utilizaremos um argumento de recorrência, ou seja, primeiramente observaremos se o último somando direto indecomponível do complexo tilting $T^{\bullet} \setminus T_{n-1}[r_{n-1}]$ está em uma componente regular ou em uma componente transjectiva de $\mathscr{D}^b(T_{n-1}^{\perp})$, e assim sucessivamente. Se em qualquer passo o último somando direto indecomponível estiver em uma componente transjectiva ou se a categoria perpendicular obtida for do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{n-l}$, a prova será análoga ao que fizemos para os casos **1)** e **2.a)**, e então o teorema já estará provado. No caso em que último somando direto indecomponível do novo complexo tilting obtido sempre estiver em uma componente regular, e além disso, a categoria perpendicular obtida for do tipo $\tilde{\mathbb{D}}_{n-l}$, aplicamos o processo anterior repetidamente, pois em algum momento chegaremos em um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod} kQ_4)$, em que $\overline{Q}_4 = \tilde{\mathbb{D}}_4$. Neste caso, a categoria perpendicular $T_4^{\perp}$ será equivalente à categoria de módulos kQ_3, em que $\overline{Q}_3 = \tilde{\mathbb{A}}_3$. E então pelo item **2.a)**, concluímos que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}_4$ tal que

$$\bigoplus_{i=0}^{4} T_i[r_i] \in \mathscr{H}_4[0] \cup \mathscr{H}_4[1].$$

Da observação 1.2 e do fato de End$T^{\bullet op}$ ser uma álgebra conexa, quando retornamos para o complexo tilting original, estaremos adicionando $n-5$ somandos, logo deverá existir uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{n-4} \mathscr{H}[i].$$

■

Uma vez encontrado um limitante para o espalhamento de um complexo tilting $T^\bullet$ qualquer, utilizando então a técnica apresentada em [ALMM17], estamos aptos a encontrar um majorante para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes do tipo $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou$\tilde{\mathbb{E}}_8$.

Corolário 2.32 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Q um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$, ou$\tilde{\mathbb{E}}_8$, e kQ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q. Considere Λ uma k-álgebra de dimensão finita satisfazendo $\mathscr{D}^b(mod\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(modkQ)$. Então*

$$s.gl.dim.\Lambda \leq n-2 = rkK_0(\Lambda)-2.$$

Demonstração: Como $\mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, pelo teorema de Rickard sabemos que existe um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$ tal que $\Lambda \simeq \text{End}T^{\bullet op}$. Utilizando o teorema 2.31 e o lema 1.28, concluímos que s.gl.dim.End$T^{\bullet op} \leq n-4+2 = n-2$. Finalmente, como End$T^{\bullet op} \simeq \Lambda$, concluímos que

$$\text{s.gl.dim.}\Lambda \leq n-2 = \text{rk}K_0(\Lambda)-2.$$

■

Podemos reunir os dados obtidos nos resultados anteriores e construir então a seguinte tabela:

Tabela 2.2: Caso Euclidiano

Grafo Subjacente	Valor de ℓ	s.gl.dim
$\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$	$\leq n-3$	$\leq n-1$
$\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$	$\leq n-4$	$\leq n-2$
$\tilde{\mathbb{E}}_6$	≤ 3	≤ 5
$\tilde{\mathbb{E}}_7$	≤ 4	≤ 6
$\tilde{\mathbb{E}}_8$	≤ 5	≤ 7

Capítulo 3

Complexos Tilting em Tubos

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados mais técnicos, porém necessários para o melhor entendimento dos teoremas que serão apresentados no capítulo 4, onde trataremos em particular, de complexos tilting na categoria derivada de categorias de feixes coerentes sobre retas projetivas com peso de tipo tubular.

Para tanto, um lema básico sobre complexos tilting, bastante similar com o lema 1.11, será apresentado agora, para uma melhor organização dos cálculos que serão efetuados ao longo deste capítulo. Perceba que neste lema consideraremos somandos diretos indecomponíveis $T_i[r_i]$ de um complexo tilting $T^\bullet$, então mesmo que tenhamos $i \neq j$, podemos ter $r_i = r_j$, basta relembrar a enumeração definida anteriormente.

Lema 3.1 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $T^\bullet = \oplus T_i[r_i]$, em que cada $T_i \in \mathscr{H}$ é indecomponível, um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. As seguintes afirmações são válidas:*

(a) *Se $Hom_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) \neq 0$, então $r_j = r_i$.*

(b) *Se $Ext^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) \neq 0$, então $r_j = r_i + 1$.*

Demonstração:

(a) Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, T_j) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_j[r_j][r_i - r_j]) \neq 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $T_i[r_i]$ e $T_j[r_j]$ são somandos do complexo tilting $T^\bullet$, temos que $r_i - r_j = 0$.

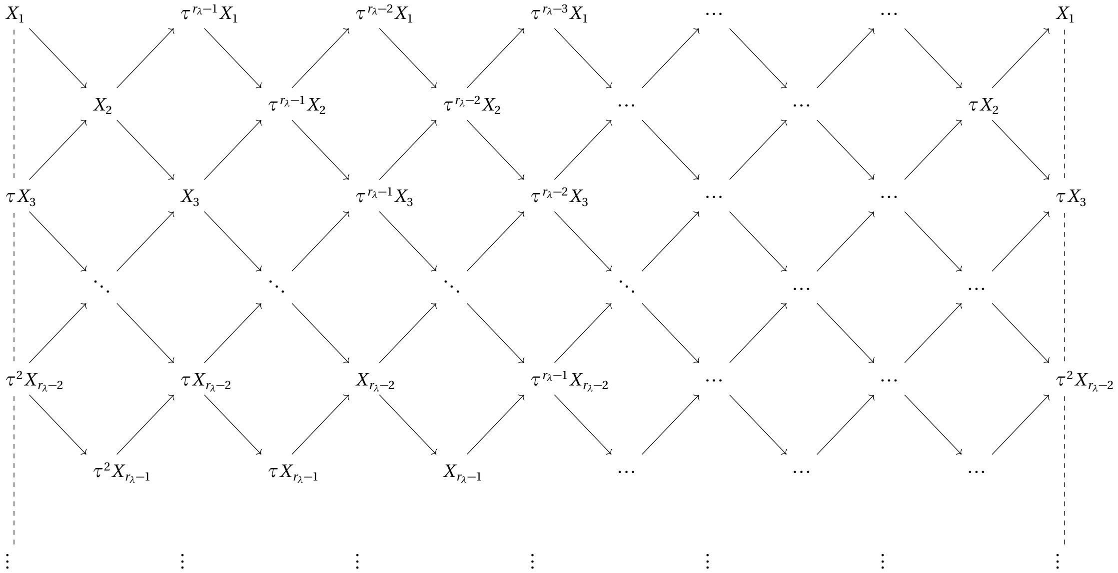
(b) Note agora que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_j) \neq 0 \;&\Rightarrow\; \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, T_j[1]) \neq 0 \\ &\Rightarrow\; \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_j[r_j][r_i - r_j + 1]) \neq 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $T_i[r_i]$ e $T_j[r_j]$ são somandos do complexo tilting $T^\bullet$, temos que $r_i - r_j + 1 = 0$.

■

Note também, que ao longo deste capítulo, consideraremos tubos estáveis e estândar, cujas propriedades já foram descritas anteriormente na seção 1.3 no capítulo 1. Vejamos abaixo então como seria a representação gráfica de um tubo estável e estândar $\mathscr{T}_\lambda$ cujo posto é $r_\lambda \geq 2$.



(3.1)

Neste capítulo trataremos de algumas propriedades de complexos tilting cujo último somando se encontra em um tubo estável estândar $\mathscr{T}_\lambda$ de posto r_λ. Considere ao longo deste capítulo uma categoria hereditária $\mathscr{H}$ com objeto tilting e posto do grupo de Grothendieck $\mathrm{rk}K_0(\mathscr{H}) = n$, e $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Podemos então decompor $T^\bullet$ na soma direta de shifts de objetos indecomponíveis de $\mathscr{H}$, isto é,

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i[r_i], \quad T_i \in \mathrm{ind}\mathscr{H}.$$

Além disso, utilizando o teorema 1.16, assumimos que $\{T_0, ..., T_{n-1}\}$ forma uma sequência excepcional e que $r_0 \leq r_1 \leq ... \leq r_{n-1}$. Sabemos do lema 3.1 que para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$ temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_i) = 0$, e então podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.2 *Sejam $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 2$ em $\mathscr{H}$ e $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Suponha que $T_i[r_i] \in \mathscr{T}_\lambda[r_i]$. Então $\ell_\lambda(T_i) \leq r_\lambda - 1$.*

Demonstração: Segue diretamente do lema 3.1 e da proposição 1.14.

■

Seguindo a notação apresentada na figura (3.1), suponhamos agora que o somando direto $T_{n-1}[r_{n-1}] = X_\ell[r_{n-1}]$ pertença ao tubo $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$, para algum $\ell \geq 2$. Pelo resultado anterior, sabemos então que $\ell_\lambda(T_{n-1}) \leq r_\lambda - 1$. Note que ao considerarmos um objeto T tal que exista morfismo não-nulo $T_{n-1} \to T$, uma vez que T_{n-1} é o último elemento da sequência excepcional $\epsilon = \{T_0, ..., T_{n-1}\}$ construída a partir do complexo tilting $T^\bullet$, $T[r_i]$ não pode ser somando direto indecomponível de $T^\bullet$ para nenhum r_i inteiro. Note também que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_1, T_{n-1}) \neq 0$, e portanto segue do lema 3.1 que se $X_1[r_i]$ é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$, então devemos ter $r_i = r_{n-1}$. A partir daí concluímos que para $r_i \neq r_{n-1}$ temos $T_i \ncong X_1$ e que temos dois casos a considerar: quando $X_1[r_{n-1}]$ é somando de $T^\bullet$ e quando $X_1[r_{n-1}]$ não é um somando direto do complexo tilting $T^\bullet$. Nos próximos dois lemas mostraremos que para para alguns casos particulares podemos substituir um complexo tilting dado por outro cujo último somando seja um objeto simples.

Lema 3.3 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 3$ em $\mathscr{H}$ e seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ tal que que $T_{n-1} = X_\ell \in \mathscr{T}_\lambda$, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = \ell \leq r_\lambda - 1$. Suponha que $T_i \ncong H$ para qualquer H no cone $C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$ e que $X_1[r_{n-1}]$ não é somando de $T^\bullet$. Então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i] \oplus \tau^{r_\lambda - 1} X_1[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-2}, \tau^{r_\lambda - 1}X_1\}$ é uma sequência excepcional completa.

Demonstração: Note primeiramente que para o caso em que $\ell = 2$ teremos o cone $C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$ $= \emptyset$, e neste caso a hipótese $T_i \ncong H$ para qualquer H no cone $C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$ se verifica automaticamente. Podemos considerar que $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}]$ não é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$, pois estamos supondo que $T_i \ncong H$ para todo objeto $H \in C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$. Dito isto, o número de somandos diretos indecomponíveis de

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i] \oplus \tau^{r_\lambda - 1} X_1[r_{n-1}],$$

é igual à n, ou seja, igual ao posto do grupo de Grothendieck da categoria $\mathscr{H}$. Logo, segue do lema 1.10 e da definição de complexo tilting que nos resta apenas verificar que, para todo inteiro $j \neq 0$, a seguinte igualdade é válida:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\overline{T}, \overline{T}[j]) = 0.$$

Observe que pelo fato de $T^\bullet$ ser um complexo tilting, para todo $j \neq 0$, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus T_i[r_i], \bigoplus T_i[r_i][j]) = 0.$$

Além disso, como $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}]$ está na boca do tubo $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$, segue da proposição 1.14 que para todo $j \neq 0$ temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Note também que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_{n-1}) & = & 0, \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_{n-1}) & = & 0, \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X_1) & = & 0, \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X_1) & = & 0, \end{array}$$

e assim, como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, concluímos então que para todo j inteiro temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_{n-1}[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0;$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_{n-1}[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Logo, o que realmente precisamos mostrar é que para todo $j \neq 0$, teremos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0; \tag{3.2}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i][j]) = 0. \tag{3.3}$$

Provemos primeiramente o fato (3.2). Suponha que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0$ para algum i. Então como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, temos que $j + r_{n-1} = r_i$ ou $j + r_{n-1} = r_i + 1$.

Se $j+r_{n-1}=r_i$, teremos então:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i],\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j])\neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i,\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}+j-r_i])\neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i,\tau^{r_\lambda-1}X_1)\neq 0.\end{aligned}$$

Como $0\to X_1\to X_2\to\tau^{r_\lambda-1}X_1\to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i\not\simeq\tau^{r_\lambda-1}X_1$ (pois $\tau^{r_\lambda-1}X_1\in C(\tau^{r_\lambda-1}X_{\ell-2})$), temos então que existe um morfismo não-nulo $f:T_i\to X_2$. Desde que o morfismo $X_2\to T_{n-1}$ em $\mathscr{T}_\lambda$ é um monomorfismo, segue que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i,\tau^{r_\lambda-1}X_1)\neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i,X_2)\neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i,T_{n-1})\neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i],T_{n-1}[r_{n-1}][r_i-r_{n-1}])\neq 0\\ &\Rightarrow r_i-r_{n-1}=0\\ &\Rightarrow r_i=r_{n-1}.\end{aligned}$$

Como $j+r_{n-1}=r_i$, concluímos que $j=0$.

Se $j+r_{n-1}=r_i+1$, teremos então o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i],\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j])\neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i,\tau^{r_\lambda-1}X_1[1])\neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i,\tau^{r_\lambda-1}X_1)\neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1,\tau T_i)\neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1,T_i)\neq 0.\end{aligned}$$

Como o morfismo $\tau^{r_\lambda-1}X_2\to\tau^{r_\lambda-2}X_1$ é um epimorfismo, existe um morfismo não-nulo $f:\tau^{r_\lambda-1}X_2\to T_i$. Analogamente, uma vez que $0\to\tau^{r_\lambda-1}X_2\to\tau^{r_\lambda-2}X_1\oplus\tau^{r_\lambda-1}X_3\to\tau^{r_\lambda-2}X_2\to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i\not\simeq\tau^{r_\lambda-1}X_2$ (pois $\tau^{r_\lambda-1}X_2\in C(\tau^{r_\lambda-1}X_{\ell-2})$), existe um morfismo não-nulo $f:\tau^{r_\lambda-2}X_1\oplus\tau^{r_\lambda-1}X_3\to T_i$. Repetindo este processo, note que em algum momento chegaremos a conclusão de que existe um morfismo não nulo $f:\oplus\tau^{r_\lambda-k}X_l\to T_i$, em que cada $\tau^{r_\lambda-k}X_l$ é um elemento do co-raio iniciando em T_{n-1}. Além disso, temos o morfismo $T_{n-1}\to\tau^{r_\lambda-k}X_l$ em $\mathscr{T}_\lambda$, que será um epimorfismo. Logo $\mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_{n-1},T_i)\neq 0$, e isto nos dá um absurdo, uma vez que $\epsilon=\{T_0,\cdots,T_{n-2},T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional. Concluímos assim que para todo $j\neq 0$, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i=0}^{n-2}T_i[r_i],\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j])=0.$$

Provemos agora o fato 3.3. Suponha que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0$. Como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, temos que $j + r_i = r_{n-1}$ ou $j + r_i = r_{n-1} + 1$.

Se $j + r_i = r_{n-1}$, teremos então:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i[r_i - r_{n-1} + j]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Desde que $0 \longrightarrow \tau^{r_\lambda-1}X_1 \longrightarrow \tau^{r_\lambda-1}X_2 \longrightarrow \tau^{r_\lambda-2}X_1 \longrightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda-1}X_1$ (pois $\tau^{r_\lambda-1}X_1 \in C(\tau^{r_\lambda-1}X_{\ell-2})$), existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda-1}X_2 \longrightarrow T_i$, e assim como no caso anterior, tal morfismo não-nulo nos levará a um absurdo.

Agora, se considerarmos $j + r_i = r_{n-1} + 1$, teremos então:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i[r_i - r_{n-1} + j]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i[1]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Como $0 \longrightarrow \tau X_1 \longrightarrow \tau X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq X_1$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_2) \neq 0$. Como o morfismo $\tau X_2 \longrightarrow \tau T_{n-1}$ em $\mathscr{T}_\lambda$ é um monomorfismo, temos então

$$\begin{aligned} \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_2) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau T_{n-1}) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, T_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Obtemos novamente um absurdo, pois $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional. Podemos concluir então que para todo $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], \bigoplus T_i[r_i][j]) = 0.$$

Concluímos assim que $\overline{T}$ é um complexo tilting. Além disso, vimos na demonstração acima que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) = 0$. Logo, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X_1\}$ é uma sequência excepcional.

■

Vejamos agora o caso em que o objeto $X_1[r_{n-1}]$ em $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ é também um somando direto indecomponível do complexo tilting $T^\bullet$.

Lema 3.4 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 3$ em $\mathscr{H}$. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ tal que $T_{n-1} = X_\ell \in \mathscr{T}_\lambda$, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = \ell \leq r_\lambda - 1$. Suponha que $T_i \not\simeq H$ para qualquer H no cone $C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$ e que $X_1[r_{n-1}] = T_r[r_{n-1}]$ é somando de $T^\bullet$. Então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i \neq r} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., \widehat{T_r}, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 1}X_1\}$ é uma sequência excepcional completa.

Demonstração: Note primeiramente que assim como no lema anterior, para o caso em que $\ell = 2$, teremos $C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2}) = \emptyset$, e neste caso a hipótese $T_i \not\simeq H$ para qualquer H no cone $C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$ se verifica automaticamente. Podemos considerar que $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}]$ não é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$, pois estamos supondo que $T_i \not\simeq H$ para todo objeto $H \in C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$. Dito isto, o número de somandos indecomponíveis do complexo

$$\overline{T} = \bigoplus_{i \neq r} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}],$$

é igual à n, ou seja, igual ao posto do grupo de Grothendieck da categoria $\mathscr{H}$. Logo, segue do lema 1.10 e da definição de complexo tilting que nos resta apenas verificar que, para todo inteiro $j \neq 0$, a seguinte igualdade é válida:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\overline{T}, \overline{T}[j]) = 0.$$

Note primeiramente que pelo fato de $T^\bullet$ ser um complexo tilting, para todo $j \neq 0$, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i \neq r} T_i[r_i], \bigoplus_{i \neq r} T_i[r_i][j]) = 0.$$

Além disso, como $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}]$ está na boca do tubo $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$, segue que para todo $j \neq 0$ temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Note também que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_{n-1}) &= 0,\\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_{n-1}) &= 0,\\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X_1) &= 0,\end{aligned}$$

e assim, como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, concluímos então que para todo j inteiro temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_{n-1}[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0;$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_i[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Logo, o que realmente precisamos mostrar é que para todo $j \neq 0$, teremos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i\neq r} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0; \tag{3.4}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], \bigoplus_{i\neq r} T_i[r_i][j]) = 0. \tag{3.5}$$

A prova do fato 3.4 segue exatamente as mesmas contas contas do fato 3.2, enquanto a prova do fato 3.5 segue exatamente a mesma ideia da prova do fato 3.3. Podemos concluir então que para todo $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i\neq r} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0.$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], \bigoplus_{i\neq r} T_i[r_i][j]) = 0,$$

e assim concluímos que $\overline{T}$ é um complexo tilting. Além disso, segue da demonstração que temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) = 0$. Logo, podemos concluir que $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., \widehat{T_r}, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X_1\}$ é uma sequência excepcional.

■

Agora vejamos o caso em que o objeto $X_1[r_{n-1}]$ não é um somando de $T^\bullet$, mas por outro lado, existe i_0 tal que $\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{i_0}]$ é somando direto indecomponível de $T^\bullet$.

Lema 3.5 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 3$ em $\mathscr{H}$. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ tal que que $T_{n-1} = X_\ell \in \mathscr{T}_\lambda$, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = \ell \leq r_\lambda - 1$. Suponha que $X_1[r_{n-1}]$ não é somando direto indecomponível de $T^\bullet$, que exista r_{i_0} tal que $T_{i_0}[r_{i_0}] = \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{i_0}]$, e que $T_i \not\simeq H$ para qualquer H no cone $C(\tau^{r_\lambda-1}X_{\ell-2}) \setminus$*

$\tau^{r_\lambda - 1}X_1$. *Então* $r_{i_0} = r_{n-1}$, *e neste caso podemos escrever*

$$T^\bullet = \bigoplus_{i \neq i_0} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}].$$

Mais ainda, $\epsilon = \{T_0, ..., \widehat{T_{i_0}}, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 1}X_1\}$ *é uma sequência excepcional completa.*

Demonstração: Relembre que dado um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ de uma categoria hereditária com objeto tilting, a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}\, T^{\bullet op}$ deve ser conexa. O que faremos nessa demonstração é mostrar que para $r_{i_0} \neq r_{n-1}$ temos que $\mathrm{End}\, T^{\bullet op}$ não é uma álgebra conexa. Suponha então que $r_{i_0} \neq r_{n-1}$. Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1, T_{n-1}) &= 0, \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1, T_{n-1}) &= 0, \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) &= 0, \end{aligned}$$

e, assim, como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, para todo j inteiro temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_{n-1}[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0;$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}], T_{n-1}[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Em particular, ao considerarmos $j = r_{n-1} - r_{i_0}$ e $j = r_{i_0} - r_{n-1}$, sendo $j \neq 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{i_0}], T_{n-1}[r_{n-1}]) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}], T_{n-1}[r_{n-1}][r_{n-1} - r_{i_0}]) \\ &= 0; \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_{n-1}[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{i_0}]) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_{n-1}[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][r_{i_0} - r_{n-1}]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que para todo $j \neq 0$, teremos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i \neq i_0} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0; \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}], \bigoplus_{i \neq i_0} T_i[r_i][j]) = 0. \tag{3.7}$$

Provemos primeiramente o fato (3.6). Suponha que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0$. Sendo

$\mathscr{H}$ uma categoria hereditária, temos que $j + r_{n-1} = r_i$ ou $j + r_{n-1} = r_i + 1$.

Se $j + r_{n-1} = r_i$, teremos então:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1} + j - r_i]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Como $0 \to X_1 \to X_2 \to \tau^{r_\lambda - 1}X_1 \to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \ncong \tau^{r_\lambda - 1}X_1$, existe um morfismo não-nulo $f : T_i \to X_2$. Desde que o morfismo $X_2 \to T_{n-1}$ em $\mathscr{T}_\lambda$ é um monomorfismo, segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_2) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_{n-1}) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_{n-1}[r_{n-1}][r_i - r_{n-1}]) \neq 0 \\ &\Rightarrow r_i - r_{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow r_i = r_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $j + r_{n-1} = r_i$, concluímos que $j = 0$.

Se $j + r_{n-1} = r_i + 1$, teremos então o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1[1]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1, \tau T_i) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda - 2}X_1, T_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Uma vez que o morfismo $\tau^{r_\lambda - 1}X_2 \to \tau^{r_\lambda - 2}X_1$ é um epimorfismo, existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda - 1}X_2 \to T_i$. Analogamente, como $0 \to \tau^{r_\lambda - 1}X_2 \to \tau^{r_\lambda - 2}X_1 \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X_3 \to \tau^{r_\lambda - 2}X_2 \to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \ncong \tau^{r_\lambda - 1}X_2$, existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda - 2}X_1 \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X_3 \to T_i$. Repetindo este processo, note que em algum momento chegaremos a conclusão de que existe um morfismo não nulo $f : \oplus \tau^{r_\lambda - k}X_l \to T_i$, em que cada $\tau^{r_\lambda - k}X_l$ é um elemento do co-raio iniciando em T_{n-1}. Além disso, como o morfismo $T_{n-1} \to \tau^{r_\lambda - k}X_l$ em $\mathscr{T}_\lambda$ é um epimorfismo, temos $\mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, T_i) \neq 0$, e isto nos dá um absurdo, uma vez que $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_{n-2}, T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional. Concluímos assim que para todo $j \neq 0$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i \neq i_0} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Provemos agora o fato (3.7). Suponha que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0$. Como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, temos que $j + r_i = r_{n-1}$ ou $j + r_i = r_{n-1} + 1$.

Se $j + r_i = r_{n-1}$, teremos então:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i[r_i - r_{n-1} + j]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $0 \longrightarrow \tau^{r_\lambda-1}X_1 \longrightarrow \tau^{r_\lambda-1}X_2 \longrightarrow \tau^{r_\lambda-2}X_1 \longrightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\cong \tau^{r_\lambda-1}X_1$, existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda-1}X_2 \longrightarrow T_i$, e assim como no caso anterior, tal morfismo não-nulo nos levará a um absurdo.

Agora, se considerarmos $j + r_i = r_{n-1} + 1$, teremos então:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i[r_i - r_{n-1} + j]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i[1]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-1}X_1, T_i) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Como $0 \longrightarrow \tau X_1 \longrightarrow \tau X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\cong X_1$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_2) \neq 0$. Sendo o morfismo $\tau X_2 \longrightarrow \tau T_{n-1}$ em $\mathscr{T}_\lambda$ um monomorfismo, temos então

$$\begin{aligned} \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_2) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau T_{n-1}) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, T_i) \neq 0, \end{aligned}$$

o que nos dá novamente um absurdo, pois $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional. Segue então de (3.6) e de (3.7) que, para todo $j \neq 0$, valem

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i\neq i_0} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][j]) = 0,$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}], \bigoplus_{i\neq i_0} T_i[r_i][j]) = 0.$$

Considerando $j = r_{i_0} - r_{n-1}$, uma vez que $r_{i_0} - r_{n-1} \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i\neq i_0} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{i_0}]) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bigoplus_{i\neq i_0} T_i[r_i], \tau^{r_\lambda-1}X_1[r_{n-1}][r_{i_0} - r_{n-1}]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, por outro lado, para $j = r_{n-1} - r_{i_0}$, vale

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{i_0}], \bigoplus_{i \neq i_0} T_i[r_i]) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}], \bigoplus_{i \neq i_0} T_i[r_i][r_{n-1} - r_{i_0}]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, $r_{i_0} = r_{n-1}$, uma vez que como no caso de serem diferentes, mostramos que não existe morfismo entre $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{i_0}]$ e os outros somandos de $T^\bullet$, e assim a álgebra $\mathrm{End}T^{\bullet op}$ seria desconexa, um absurdo. Dessa forma, podemos escrever então

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i] \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1}].$$

■

Perceba que ao supormos que o objeto $X_1[r_{n-1}]$ é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$, se existir algum número inteiro r_{i_0} tal que $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{i_0}]$ seja somando de $T^\bullet$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{i_0}], X_1[r_{n-1}][r_{i_0} - r_{n-1} + 1]) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1, X_1[1]) \\ &\simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda - 1}X_1, X_1) \\ &\simeq \mathrm{D}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_1, X_1) \neq 0,\end{aligned}$$

e então concluímos que $r_{i_0} = r_{n-1} - 1$. A partir deste fato podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 3.6 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 4$ em $\mathscr{H}$. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, suponha que $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1} - 1]$, $X_1[r_{n-1}]$ e $T_{n-1}[r_{n-1}] = X_\ell[r_{n-1}]$ sejam somandos de $T^\bullet$, $3 \leq \ell_\lambda(T_{n-1}) = \ell \leq r_\lambda - 1$ e que $T_i \not\simeq H$ para qualquer H no cone $C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2}) \setminus \tau^{r_\lambda - 1}X_1$. Então*

$$\overline{T} = \bigoplus T_i[r_i] \oplus X_1[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 2}X_1\}$ é uma sequência excepcional completa.

Demonstração: Uma vez que $\tau^{r_\lambda - 2}X_1 \in C(\tau^{r_\lambda - 1}X_{\ell-2})$, concluímos que $\tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_i]$ não pode ser um somando direto de $T^\bullet$, para qualquer i. Como estamos substituindo o somando $\tau^{r_\lambda - 1}X_1[r_{n-1} - 1]$ por $\tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1}]$, temos que o número de somandos diretos indecomponíveis de $\overline{T}$ é o mesmo número de somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$, que é igual ao posto do grupo de Grothendieck da categoria $\mathscr{H}$. Logo, segue do lema 1.10 que precisamos apenas verificar, para todo $j \neq 0$, que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\overline{T}, \overline{T}[j]) = 0.$$

Note primeiramente que uma vez que $T^\bullet$ é um complexo tilting, para todo $j \neq 0$, temos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T^\bullet \setminus \tau^{r_\lambda - 1} X_1[r_{n-1} - 1], T^\bullet \setminus \tau^{r_\lambda - 1} X_1[r_{n-1} - 1][j]) = 0.$$

Pela proposição 1.15, sabemos que todos os morfismos não invertíveis entre objetos de $\mathscr{T}_\lambda$ são compostas de morfismos irredutíveis de $\mathscr{T}_\lambda$, e assim concluímos que

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1, T_{n-1}) & = & 0; \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1, T_{n-1}) & = & 0; \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-2}X_1) & = & 0; \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1, X_1) & = & 0; \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_1, \tau^{r_\lambda-2}X_1) & = & 0; \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1, X_1) & = & 0; \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X_1, \tau^{r_\lambda-2}X_1) & = & 0.
\end{array}$$

Como a categoria $\mathscr{H}$ é hereditária, as igualdades acima nos permitem garantir que

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}], T_{n-1}[r_{n-1}][j]) & = & 0; \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_{n-1}[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}][j]) & = & 0; \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}], X_1[r_{n-1}][j]) & = & 0; \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X_1[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}][j]) & = & 0, \text{ para todo } j \neq 0.
\end{array}$$

Além disso, como $\tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}]$ está na boca do tubo $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$, segue da proposição 1.14 que, para todo $j \neq 0$, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}], \tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Logo, o que precisamos mostrar de fato é que, para todo $j \neq 0$, teremos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1[r_{n-1}], T^\bullet \setminus (X_1[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}])[j]) = 0; \tag{3.8}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T^\bullet \setminus (X_1[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}]), \tau^{r_\lambda -2}X_1[r_{n-1}][j]) = 0. \tag{3.9}$$

Provemos primeiramente o fato (3.8). Para tanto, suponha que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1[r_{n-1}], T^\bullet \setminus (X_1[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}])[j]) \neq 0$. Em outras palavras, estamos supondo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0$, para $T_i \neq X_1, T_{n-1}, \tau^{r_\lambda -1}X_1$. Novamente, como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, temos que $j + r_i = r_{n-1}$ ou $j + r_i = r_{n-1} + 1$.

Se $j + r_i = r_{n-1}$, temos então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1, T_i[r_i - r_{n-1} + j]) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda -2}X_1, T_i) \neq 0.
\end{aligned}$$

Sendo $0 \to \tau^{r_\lambda -2}X_1 \to \tau^{r_\lambda -2}X_2 \to \tau^{r_\lambda -3}X_1 \to 0$ uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda -2}X_1$, existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda -2}X_2 \to T_i$. Analogamente, como $0 \to \tau^{r_\lambda -2}X_2 \to \tau^{r_\lambda -3}X_1 \oplus \tau^{r_\lambda -2}X_3 \to \tau^{r_\lambda -3}X_2 \to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda -2}X_2$, existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda -3}X_1 \oplus \tau^{r_\lambda -2}X_3 \to T_i$. Repetindo este processo, note que em algum momento chegaremos a conclusão de que existe um morfismo não nulo $f : \oplus \tau^{r_\lambda -k}X_l \to T_i$, em que cada $\tau^{r_\lambda -k}X_l$ é um elemento do co-raio iniciando em T_{n-1}. Além disso, temos o morfismo $T_{n-1} \to \tau^{r_\lambda -k}X_l$ em $\mathscr{T}_\lambda$, que será um epimorfismo. Logo

$$\begin{aligned}
\mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda -2}X_1, T_i) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\oplus \tau^{r_\lambda -k}X_l, T_i) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, T_i) \neq 0,
\end{aligned}$$

o que nos dá um absurdo, uma vez que $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_{n-2}, T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional.

Se $j + r_i = r_{n-1} + 1$, temos então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1[r_{n-1}], T_i[r_i][j]) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1, T_i[r_i - r_{n-1} + j]) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda -2}X_1, T_i[1]) \neq 0. \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda -2}X_1, T_i) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda -1}X_1) \neq 0.
\end{aligned}$$

Uma vez que $0 \to X_1 \to X_2 \to \tau^{r_\lambda -1}X_1 \to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda -1}X_1$, existe um morfismo não-nulo $f : T_i \to X_2$. Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_1, X_2) \neq 0$ e

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X_2, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) \neq 0$, se $T_i \simeq X_2$ para algum i, segue do lema 3.1 que por um lado $r_i = r_{n-1}$ e por outro lado $r_i = r_{n-1} - 1$, o que é um absurdo. Assim, podemos considerar $T_i \not\simeq X_2$, e da sequência de Auslander-Reiten $0 \to \tau X_2 \to X_1 \oplus \tau X_3 \to X_2 \to 0$, concluímos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_1) \neq 0$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_3) \neq 0$. Se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_3) \neq 0$, então teríamos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_3) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau T_{n-1}) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, T_i) \neq 0, \end{aligned}$$

o que é novamente um absurdo, uma vez que $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional. Por outro lado, se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_1) \neq 0$, como $T_i \not\simeq X_1$ e $0 \to \tau X_1 \to \tau X_2 \to X_1 \to 0$ é sequência de Auslander-Reiten, existe um morfismo não-nulo $f : T_i \to \tau X_2$. Além disso, como o morfismo $\tau X_2 \to \tau T_{n-1}$ é um monomorfismo em $\mathscr{T}_\lambda$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau X_2) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau T_{n-1}) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, T_i) \neq 0. \end{aligned}$$

O que é um absurdo, uma vez que $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional. Concluímos assim que para todo j inteiro vale

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1}], T^\bullet \setminus (X_1[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}])[j]) = 0.$$

Provemos agora o fato (3.9). Suponha que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T^\bullet \setminus (X_1[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}]), \tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0$. Em outras palavras, estamos supondo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0$, em que $T_i \neq X_1, T_{n-1}$. Utilizando novamente o fato da categoria $\mathscr{H}$ ser hereditária, podemos concluir que $j + r_{n-1} = r_i$ ou $j + r_{n-1} = r_i + 1$.

Se $j + r_{n-1} = r_i$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, \tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1} - r_i + j]) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 2}X_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Como $0 \to \tau^{r_\lambda - 1}X_1 \to \tau^{r_\lambda - 1}X_2 \to \tau^{r_\lambda - 2}X_1 \to 0$ é sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda - 2}X_1$, existe morfismo não-nulo $f : T_i \to \tau^{r_\lambda - 1}X_2$. Sendo $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda - 1}X_2$ e a sequência $0 \to X_2 \to X_3 \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X_1 \to \tau^{r_\lambda - 1}X_2 \to 0$ é de Auslander-Reiten, segue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) \neq 0$ ou

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_3) \neq 0$. Caso $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_3) \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_3) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_{n-1}) \neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_{n-1}[r_{n-1}][r_i - r_{n-1}]) \neq 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $T_i[r_i]$ e $T_{n-1}[r_{n-1}]$ são somandos diretos indecomponíveis do complexo tilting $T^{\bullet}$, devemos ter $r_i - r_{n-1} = 0$ e portanto $j = 0$. Por outro lado, se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) \neq 0$, como $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda - 1}X_1$ e a sequência $0 \to X_1 \to X_2 \to \tau^{r_\lambda - 1}X_1 \to 0$ de Auslander-Reiten, existe morfismo não-nulo $f : T_i \to X_2$. Além disso, temos que o morfismo $X_2 \to T_{n-1}$ é um monomorfismo em $\mathscr{T}_\lambda$, logo

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 1}X_1) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, X_2) \neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T_i, T_{n-1}) \neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], T_{n-1}[r_{n-1}][r_i - r_{n-1}]) \neq 0.\end{aligned}$$

Desde que $T_i[r_i]$ e $T_{n-1}[r_{n-1}]$ são somandos diretos indecomponíveis do complexo tilting $T^{\bullet}$, devemos ter $r_i - r_{n-1} = 0$ e portanto $j = 0$.

Se $j + r_{n-1} = r_i + 1$, teremos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i[r_i], \tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1}][j]) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, \tau^{r_\lambda - 2}X_1[r_{n-1} - r_i + j]) \neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T_i, \tau^{r_\lambda - 2}X_1[1]) \neq 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, \tau^{r_\lambda - 2}X_1) \neq 0\\ &\Rightarrow D\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda - 2}X_1, \tau T_i) \neq 0\\ &\Rightarrow D\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda - 3}X_1, T_i) \neq 0.\end{aligned}$$

Como $\tau^{r_\lambda - 2}X_2 \to \tau^{r_\lambda - 3}X_1 \to 0$ é um epimorfismo, existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda - 2}X_2 \to T_i$. Analogamente, como $0 \to \tau^{r_\lambda - 2}X_2 \to \tau^{r_\lambda - 3}X_1 \oplus \tau^{r_\lambda - 2}X_3 \to \tau^{r_\lambda - 3}X_2 \to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda - 2}X_2$, temos então que existe um morfismo não-nulo $f : \tau^{r_\lambda - 3}X_1 \oplus \tau^{r_\lambda - 2}X_3 \to T_i$. Repetindo este processo, note que em algum momento chegaremos a conclusão de que existe um morfismo não nulo $f : \oplus \tau^{r_\lambda - k}X_l \to T_i$, em que cada $\tau^{r_\lambda - k}X_l$ é um elemento do co-raio iniciando em T_{n-1}. Além disso, o morfismo $T_{n-1} \to \tau^{r_\lambda - k}X_l$ em $\mathscr{T}_\lambda$ é um epimorfismo, logo

$$\begin{aligned} \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1, T_i) \neq 0 &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\oplus\tau^{r_\lambda-k}X_l, T_i) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T_{n-1}, T_i) \neq 0, \end{aligned}$$

o que gera um absurdo, uma vez que $\epsilon = \{T_0, ..., T_{n-1}\}$ é uma sequência excepcional. Concluímos assim, que para todo $j \neq 0$ temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T^\bullet \setminus (X_1[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}]), \tau^{r_\lambda-2}X_1[r_{n-1}][j]) = 0.$$

Dessa forma, $\overline{T}$ é de fato um complexo tilting. Além disso, vimos também que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1, T_i) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{r_\lambda-2}X_1, T_i) = 0$ para $i \in \{0, ..., n-1\}$. Logo, temos que a sequência $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-2}X_1\}$ é uma sequência excepcional completa.

■

Na próxima seção apresentaremos alguns resultados para o caso em que $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 2$, isto é, o caso em que o somando direto indecomponível $T_{n-1}[r_{n-1}]$ de $T^\bullet$ está na segunda linha do tubo $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$.

3.1 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 2$

Trataremos agora do caso em que o último somando do complexo tilting $T^\bullet$, a saber, $T_{n-1}[r_{n-1}]$, está na segunda linha de um tubo estável estândar $\mathcal{T}_\lambda[r_{n-1}]$ de posto $r_\lambda \geq 3$. Para uma melhor compreensão, a seguir vejamos graficamente como T_{n-1} está situado dentro de tal tubo.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & \tau^{r_\lambda-1}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-3}X \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \tau X \arrow[dr] & & X \arrow[dd, dash, dashed] \\
& T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau Z \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau Z \arrow[dd, dash, dashed] \\
& \tau W \arrow[ur] \arrow[dr] & & W \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}W \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^2 W \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau^2 T \arrow[ur] \arrow[d, dash, dashed] & & \tau T \arrow[ur] & & T \arrow[ur] & & \tau^{r_\lambda-1}T \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \tau^2 T \arrow[d, dash, dashed] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

O que faremos a seguir é mostrar que dado um complexo tilting cujo último somando esteja na segunda linha de um tubo estável estândar, é sempre possível substituí-lo por outro complexo tilting de tal maneira que o último somando direto indecomponível deste novo complexo seja um objeto simples nesse mesmo tubo. Para tanto, seguindo a notação da figura acima, note que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(X, T_{n-1}) \neq 0$, mais ainda, temos que X **é o antecessor imediato de** T_{n-1}, e portanto segue do lema 3.1 que se $X[r_i]$ é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$, então devemos ter $r_i = r_{n-1}$. A partir daí concluímos que para $r_i \neq r_{n-1}$ temos $T_i \not\simeq X$ e que há dois casos a se considerar: quando $X[r_{n-1}]$ é somando de $T^\bullet$ e quando $X[r_{n-1}]$ não é um somando direto do complexo tilting $T^\bullet$.

Lema 3.7 *Sejam $\mathcal{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathcal{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 3$ em $\mathcal{H}$. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ tal que que $T_{n-1}[r_{n-1}] \in \mathcal{T}_\lambda[r_{n-1}]$ e $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 2$. Então são válidas as afirmações:*

a) *$Hom_{\mathcal{H}}(X, T_i) = 0$ e $Ext^1_{\mathcal{H}}(X, T_i) = 0$ para todo somando $T_i \neq T_{n-1}, X$;*

b) *Se $X[r_{n-1}]$ não é somando direto indecomponível de $T^{\bullet}$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i] \oplus \tau^{r_\lambda - 1} X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-2}, \tau^{r_\lambda - 1} X\}$ é uma sequência excepcional completa;

c) *Suponha que $X[r_{n-1}]$ e $T_{n-1}[r_{n-1}]$ sejam somandos de $T^{\bullet}$ em $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$, e além disso, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 2$. Então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{n-3} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 1} X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-3}, T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 1} X\}$ é uma sequência excepcional completa.

Demonstração: a) Note que se supormos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, T_i) \neq 0$, como $0 \to X \to T_{n-1} \to \tau^{-1}X \to 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten e $T_i \not\simeq X$, deve existir então um morfismo não-nulo $f : T_{n-1} \to T_i$, o que é um absurdo, uma vez que $\epsilon = \{T_0, ..., T_{n-1}\}$ é sequência excepcional. Para provar que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X, T_i) \neq 0$, os cálculos são análogos.
b) Basta tomar $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 2$ no lema 3.3 e então obtemos o resultado.
c) Ao considerarmos que $X[r_{n-1}]$ é um somando direto indecomponível do complexo tilting $T^{\bullet}$, uma vez que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, T_i) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X, T_i) = 0$ para todo somando $T_i \neq T_{n-1}, X$, podemos tomar $X = T_{n-2}$, ou seja, X é o penúltimo elemento da sequência excepcional $\epsilon = \{T_0, ..., T_{n-2}, T_{n-1}\}$ obtida através do complexo tilting $T^{\bullet}$. Além disso, escrevemos o complexo tilting $T^{\bullet}$ como

$$T^{\bullet} = \bigoplus_{i=0}^{n-3} T_i[r_i] \oplus X[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}].$$

Dito isto, basta considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 2$ no lema 3.4, e assim obtemos o resultado desejado.

■

Com isso acabamos de mostrar então que dado um complexo tilting cujo último somando esteja na segunda linha de um tubo estável estândar, sempre podemos substituí-lo por outro complexo tilting cujo último somando esteja na primeira linha deste mesmo tubo.

3.2 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 3$

Nesta seção trataremos do caso em que o último somando do complexo tilting $T^\bullet$, a saber, $T_{n-1}[r_{n-1}]$, está na terceira linha de um tubo estável estândar $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ de posto $r_\lambda \geq 4$. Para uma melhor compreensão, vejamos graficamente como T_{n-1} está situado dentro de tal tubo.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & \tau^{r_\lambda-1}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-3}X \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & X \arrow[dd, dash, dashed] \\
& Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau T_{n-1} \arrow[dd, dash, dashed] \\
& \tau W \arrow[ur] \arrow[dr] & & W \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}W \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^2 W \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau^2 T \arrow[ur] \arrow[d, dash, dashed] & & \tau T \arrow[ur] & & T \arrow[ur] & & \tau^{r_\lambda-1}T \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \tau^2 T \arrow[d, dash, dashed] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

O que faremos agora é análogo ao que fizemos na seção anterior, ou seja, mostraremos que dado um complexo tilting cujo último somando esteja na terceira linha de um tubo estável estândar, é sempre possível substituí-lo por outro complexo tilting de tal maneira que o último somando direto indecomponível deste novo complexo seja um objeto simples nesse mesmo tubo. Para tanto, seguindo a notação da figura acima, note que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, T_{n-1}) \neq 0$, e portanto segue do lema 3.1 que se $X[r_i]$ é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$, então devemos ter $r_i = r_{n-1}$. A partir daí concluímos que para $r_i \neq r_{n-1}$ temos $T_i \not\simeq X$ e que há dois casos a serem considerados: quando $X[r_{n-1}]$ é somando de $T^\bullet$ e quando $X[r_{n-1}]$ não é um somando direto do complexo tilting $T^\bullet$. Além disso, precisamos também estudar o caso em que $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda-1}X$ e o caso em que existe algum índice i_0 tal que $T_{i_0} \simeq \tau^{r_\lambda-1}X$.

Lema 3.8 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 4$ em $\mathscr{H}$. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ tal que $T_{n-1}[r_{n-1}] \in \mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ e $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 3$. Então são válidas as afirmações:*

a) *Se $X[r_{n-1}]$ não é somando direto indecomponível de $T^\bullet$ e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda-1}X$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i] \oplus \tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-2}, \tau^{r_\lambda-1}X\}$ é uma sequência excepcional completa;

b) *Se $X[r_{n-1}]$ não é somando direto indecomponível de $T^\bullet$ e existe r_{i_0} tal que $T_{i_0}[r_{i_0}] = \tau^{r_\lambda-1}X[r_{i_0}]$, então $r_{i_0} = r_{n-1}$ e podemos escrever*

$$T^\bullet = \bigoplus_{i\neq i_0} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}].$$

Mais ainda, $\epsilon = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X\}$ é uma sequência excepcional completa;

c) *Se $X[r_{n-1}] = T_r[r_{n-1}]$ é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda-1}X$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i\neq r} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X\}$ é uma sequência excepcional completa;

d) *Se $\tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}-1]$ e $X[r_{n-1}]$ são somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus T_i[r_i] \oplus X[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda-2}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-2}X\}$ é uma sequência excepcional completa.

Demonstração: a) Basta considerar $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 3$ no lema 3.3 e obtemos o resultado.
b) Basta tomarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 3$ no lema 3.5 e obtemos o resultado.
c) Basta considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 3$ no lema 3.4 e obtemos o resultado desejado.
d) Basta considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 3$ no lema 3.6 e obtemos o resultado.

■

Com isso acabamos de mostrar que, dado um complexo tilting cujo último somando esteja na terceira linha de um tubo estável estândar cujo posto r_λ é maior ou igual a 4, sempre podemos substituí-lo por outro complexo tilting cujo último somando direto indecomponível esteja na primeira linha deste mesmo tubo.

3.3 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$

Nesta seção trataremos do caso em que o último somando do complexo tilting $T^\bullet$, a saber, $T_{n-1}[r_{n-1}]$, está na quarta linha de um tubo estável estândar $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ de posto $r_\lambda \geq 5$. Para uma melhor compreensão, vejamos graficamente como T_{n-1} está situado dentro de tal tubo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & \tau^{r_\lambda-1}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-3}X \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & X \arrow[dd, dash, dashed] \\
& Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau Z \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau Z \arrow[dd, dash, dashed] \\
& \tau T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^2 T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau^2 T \arrow[ur] \arrow[d, dash, dashed] & & \tau T \arrow[ur] & & T \arrow[ur] & & \tau^{r_\lambda-1}T \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \tau^2 T \arrow[d, dash, dashed] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

O que faremos agora é análogo ao que fizemos nas seções anteriores, ou seja, mostraremos que dado um complexo tilting cujo último somando esteja na quarta linha de um tubo estável estândar e satisfazendo algumas hipóteses adicionais, é sempre possível substituí-lo por outro complexo tilting de tal maneira que o último somando direto indecomponível deste novo complexo seja um objeto simples nesse mesmo tubo.

Lema 3.9 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 5$ em $\mathscr{H}$. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ tal que $T_{n-1}[r_{n-1}] \in \mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$. Então são válidas as afirmações:*

a) *Se $X[r_{n-1}]$ não é somando direto indecomponível de $T^\bullet$ e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda-1}X, \tau^{r_\lambda-2}X, \tau^{r_\lambda-1}Y$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i] \oplus \tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-2}, \tau^{r_\lambda-1}X\}$ é uma sequência excepcional completa;

b) *Se* $X[r_{n-1}]$ *não é somando direto indecomponível de* $T^\bullet$*,* $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda - 2}X, \tau^{r_\lambda - 1}Y$*, e existe* r_{i_0} *tal que* $T_{i_0}[r_{i_0}] = \tau^{r_\lambda - 1}X[r_{i_0}]$*, então* $r_{i_0} = r_{n-1}$ *e podemos escrever*

$$T^\bullet = \bigoplus_{i \neq i_0} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X[r_{n-1}].$$

Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 1}X\}$ *é uma sequência excepcional completa;*

c) *Se* $X[r_{n-1}] = T_r[r_{n-1}]$ *é um somando direto indecomponível de* $T^\bullet$ *em* $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ *e* $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda - 1}X$*,* $\tau^{r_\lambda - 2}X, \tau^{r_\lambda - 1}Y$*, então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i \neq r} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 1}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$*. Mais ainda,* $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 1}X\}$ *é uma sequência excepcional completa;*

d) *Se* $\tau^{r_\lambda - 1}X[r_{n-1} - 1]$ *e* $X[r_{n-1}]$ *são somandos diretos indecomponíveis de* $T^\bullet$ *em* $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ *e* $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda - 2}X, \tau^{r_\lambda - 1}Y$*, então*

$$\overline{T} = \bigoplus T_i[r_i] \oplus X[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda - 2}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$*. Mais ainda,* $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda - 2}X\}$ *é uma sequência excepcional completa.*

Demonstração: a) Basta considerar $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$ no lema 3.3 e então obtemos o resultado.
b) Ao considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$ no lema 3.5, obtemos então o resultado.
c) Basta considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$ no lema 3.4 e temos o resultado desejado.
d) Basta considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$ no lema 3.6 e obtemos o resultado.

■

Com isso mostramos que, dado um complexo tilting cujo último somando esteja na quarta linha de um tubo estável estândar cujo posto r_λ é maior ou igual a 5, e tal que $T_i \not\simeq H$, com $H \in C(\tau^{r_\lambda - 1}Y)$, sempre podemos substituí-lo por outro complexo tilting cujo último somando direto indecomponível esteja na primeira linha deste mesmo tubo.

3.4 O caso $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 5$

Nesta seção trataremos do caso em que o último somando do complexo tilting $T^\bullet$, a saber, $T_{n-1}[r_{n-1}]$, está na quinta linha de um tubo estável estândar $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ de posto $r_\lambda \geq 6$. Para uma melhor compreensão, vejamos graficamente como T_{n-1} está situado dentro de tal tubo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, no head] & & \tau^{r_\lambda-1}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}X \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-3}X \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & X \arrow[dd, dashed, no head] \\
& Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau Z \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, no head] & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-2}Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau Z \arrow[dd, dashed, no head] \\
& \tau W \arrow[ur] \arrow[dr] & & W \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{r_\lambda-1}W \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^2 W \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\tau^2 T_{n-1} \arrow[ur] \arrow[d, dashed, no head] & & \tau T_{n-1} \arrow[ur] & & T_{n-1} \arrow[ur] & & \tau^{r_\lambda-1}T_{n-1} \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \tau^2 T_{n-1} \arrow[d, dashed, no head] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Assim como nas seções anteriores, mostraremos que dado um complexo tilting cujo último somando esteja na quinta linha de um tubo estável estândar e satisfazendo algumas hipóteses adicionais, é sempre possível substituí-lo por outro complexo tilting de tal maneira que o último somando direto indecomponível deste novo complexo seja um objeto simples nesse mesmo tubo.

Lema 3.10 *Sejam $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto tilting e $\mathscr{T}_\lambda$ um tubo estável estândar de posto $r_\lambda \geq 6$ em $\mathscr{H}$. Seja $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ tal que $T_{n-1}[r_{n-1}] \in \mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 5$. As seguintes afirmações são válidas:*

a) *Se $X[r_{n-1}]$ não é somando direto indecomponível de $T^\bullet$ e $T_i \not\simeq \tau^{r_\lambda-1}X, \tau^{r_\lambda-2}X, \tau^{r_\lambda-3}X, \tau^{r_\lambda-1}Y$, $\tau^{r_\lambda-2}Y, \tau^{r_\lambda-1}Z$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} T_i[r_i] \oplus \tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-2}, \tau^{r_\lambda-1}X\}$ é uma sequência excepcional completa;

b) *Se $X[r_{n-1}]$ não é somando direto indecomponível de $T^\bullet$, $\tau^{r_\lambda-1}X, \tau^{r_\lambda-2}X, \tau^{r_\lambda-3}X, \tau^{r_\lambda-1}Y$, $\tau^{r_\lambda-2}Y, \tau^{r_\lambda-1}Z$, e existe r_{i_0} tal que $T_{i_0}[r_{i_0}] = \tau^{r_\lambda-1}X[r_{i_0}]$, então $r_{i_0} = r_{n-1}$ e podemos escrever*

$$T^\bullet = \bigoplus_{i\neq i_0} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}].$$

Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X\}$ é uma sequência excepcional completa;

c) *Se $X[r_{n-1}] = T_r[r_{n-1}]$ é um somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ e $T_i \not\leq \tau^{r_\lambda-1}X$, $\tau^{r_\lambda-2}X, \tau^{r_\lambda-3}X, \tau^{r_\lambda-1}Y, \tau^{r_\lambda-2}Y, \tau^{r_\lambda-1}Z$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus_{i\neq r} T_i[r_i] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-1}X\}$ é uma sequência excepcional completa;

d) *Se $\tau^{r_\lambda-1}X[r_{n-1}-1]$ e $X[r_{n-1}]$ são somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_\lambda[r_{n-1}]$ e $T_i \not\leq \tau^{r_\lambda-1}X, \tau^{r_\lambda-2}X, \tau^{r_\lambda-3}X, \tau^{r_\lambda-1}Y, \tau^{r_\lambda-2}Y, \tau^{r_\lambda-1}Z$, então*

$$\overline{T} = \bigoplus T_i[r_i] \oplus X[r_{n-1}] \oplus T_{n-1}[r_{n-1}] \oplus \tau^{r_\lambda-2}X[r_{n-1}]$$

é um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Mais ainda, $\overline{\epsilon} = \{T_0, ..., T_{n-1}, \tau^{r_\lambda-2}X\}$ é uma sequência excepcional completa.

Demonstração: a) Basta considerar $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 5$ no lema 3.3 e então obtemos o resultado.
b) Ao considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 5$ no lema 3.5, obtemos então o resultado.
c) Basta considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 5$ no lema 3.4 e temos o resultado desejado.
d) Basta considerarmos $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 5$ no lema 3.6 e obtemos o resultado.

■

Com isso mostramos que, dado um complexo tilting cujo último somando esteja na quinta linha de um tubo estável estândar cujo posto r_λ é maior ou igual a 6, e tal que $T_i \not\leq H$, com $H \in C(\tau^{r_\lambda-1}Z)$, sempre podemos substituí-lo por outro complexo tilting cujo último somando direto indecomponível esteja na primeira linha deste mesmo tubo.

Capítulo 4

Dimensão Global Forte na Categoria Derivada de Feixes Coerentes

Uma reta projetiva com peso $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w, p)$ é a reta projetiva $\mathbb{P}^1_k$ juntamente com um número finito de pontos $p_1, \cdots, p_r \in \mathbb{P}^1_k$, e para cada um desses pontos um peso $w_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, obtendo assim uma sequência $w = (w_1, \cdots, w_r)$, que chamaremos de sequência peso. Seja $\mathscr{H} = \text{coh}\mathbb{X}$ a categoria de feixes coerentes sobre $\mathbb{X}$. Para mais detalhes sobre retas projetivas com peso e feixes coerentes, recomendamos [GL87]. Relembraremos aqui apenas os resultados que utilizaremos no decorrer do trabalho.

O próximo teorema será muito útil para construirmos complexos tilting na categoria derivada de coh$\mathbb{X}$, que denotaremos aqui por $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$.

Teorema 4.1 (ver [CK09], pág. 51) *Seja $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w, p)$ uma reta projetiva com peso. Então o posto do grupo de Grothendieck de coh$\mathbb{X}$ é dado por*

$$rkK_0(\mathbb{X}) = 2 + \sum_{p_i \in \mathbb{P}^1_k} (w_i - 1).$$

Denotamos por $\mathscr{H}_0$ a subcategoria plena de $\mathscr{H}$ formada pelos objetos de comprimento finito em $\mathscr{H}$, isto é, os feixes de torção em $\mathbb{X}$, e denotaremos por $\mathscr{H}_+$ a subcategoria plena de $\mathscr{H}$ cujos objetos são fibrados vetorias, ou feixes livres de torção.

Teorema 4.2 (ver [GL87], pág. 28 ou [Opp10], pág. 6) *Seja $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w, p)$ uma reta projetiva com peso. Então coh$\mathbb{X} = \mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \vee \mathscr{H}_0$, isto é, qualquer feixe em $\mathscr{H}$ é a soma direta de um fibrado vetorial e um feixe de torção. Mais ainda, $Hom_{\mathbb{X}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_+) = 0 = Ext^1_{\mathbb{X}}(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_0)$. A categoria dos feixes de torção se decompõe como uma união disjunta de categorias $\mathscr{H}_0 = \vee_{p \in \mathbb{P}^1_k} \mathscr{T}_p$.*

Para $p \notin \{p_1, \cdots, p_r\}$, $\mathscr{T}_p$ *é a categoria unisserial de comprimento finito com um único objeto simples, isto é, seu quiver de Auslander-Reiten é um tubo homogêneo. Nesse caso denotaremos* $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}_1$. *Para* $p = p_i$, *a categoria* $\mathscr{T}_p$ *é a categoria unisserial conexa de comprimento finito com* w_i *objetos simples, isto é, seu quiver de Auslander-Reiten é um tubo de posto* w_i, *e denotaremos* $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}_{w_i}$.

A estrutura de $\mathscr{H}_+$ *depende dos pesos:*

(1) *Se existirem no máximo dois pesos, ou se existirem três pesos da forma* $(w_1, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, *ou* $(2, 3, 5)$ *para algum* w_1, *então a reta projetiva com peso* $\mathbb{X}$ *é chamada* ***doméstica*** *e* $\mathscr{H}_+$ *consiste de somente uma única componente de Auslander-Reiten da forma* $\mathbb{Z}Q$, *em que* Q *é um quiver com grafo subjacente Euclidiano.*

(2) *Se as sequências peso forem* $(2, 2, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, *ou* $(3, 3, 3)$, *então a reta projetiva com peso* $\mathbb{X}$ *é chamada* ***tubular***. *Neste caso,* $\mathscr{H}_+ = \vee_{q\in\mathbb{Q}} \mathscr{H}^{(q)}$. *Mais ainda,* $\mathscr{H}^{(q)} \simeq \mathscr{H}_0$ *para qualquer* $q \in \mathbb{Q}$, *e para* $q_1 < q_2$ *temos* $Hom_{\mathbb{X}}(\mathscr{H}^{(q_2)}, \mathscr{H}^{(q_1)}) = 0 = Ext^1_{\mathbb{X}}(\mathscr{H}^{(q_1)}, \mathscr{H}^{(q_2)})$.

(3) *Em todos os outros casos,* $\mathscr{H}_+$ *é uma união disjunta de componentes da forma* $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$. *Nesse caso dizemos que a reta projetiva com peso* $\mathbb{X}$ *é* ***selvagem***.

Observação 4.1 *Ao consideramos o caso* **(1)** *do teorema 4.2, ou seja, o caso em que a reta projetiva com peso* $\mathbb{X}$ *é doméstica, cada peso* w_i *corresponde a um tubo de posto* $\mathscr{T}_{w_i}$ *em* $\mathscr{H}_0$, *e* $\mathscr{H}_+$ *consiste de somente uma única componente de Auslander-Reiten da forma* $\mathbb{Z}Q$, *em que* Q *é um quiver com grafo subjacente Euclidiano. Utilizando o teorema 1.29, conseguimos identificar então qual é o grafo subjacente, uma vez que a sequência peso* w *corresponde ao tipo tubular da* $\mathbb{P}_1(k)$-*família* $\mathbf{T}^Q$. *Uma vez que a categoria coh*$\mathbb{X}$ *é hereditária, segue que* $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X}) = \vee_{i\in\mathbb{Z}} coh\mathbb{X}[i]$, *e o mesmo acontece para a categoria* $modkQ$, *ou seja,* $\mathscr{D}^b(modkQ) = \vee_{i\in\mathbb{Z}} modkQ[i]$. *Como nesse caso temos* $\vee_{i\in\mathbb{Z}} coh\mathbb{X}[i] = \vee_{i\in\mathbb{Z}} modkQ[i]$, *segue então que*

$$\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X}) \simeq \mathscr{D}^b(modkQ).$$

Para mais detalhes o leitor pode consultar [Len86], pág. 222, ou [GL87], pág. 30.

A observação acima nos mostra então que o estudo da categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva com peso $\mathbb{X}$ doméstica se resume ao estudo de álgebras hereditárias mansas, estudo este realizado no capítulo anterior.

Vejamos agora que ao trabalharmos com uma categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva com peso $\mathbb{X}$, é muito importante saber onde podemos "cortar"as categorias de tal modo que sejam equivalentes. Para tanto, estudaremos agora um resultado apresentado por Lenzing e Skowroński em [LS96], no qual eles mostram como devem ser as categorias hereditárias $\mathscr{H}$ que são derivadamente equivalentes à categoria coh$\mathbb{X}$ para algumas retas projetivas $\mathbb{X}$.

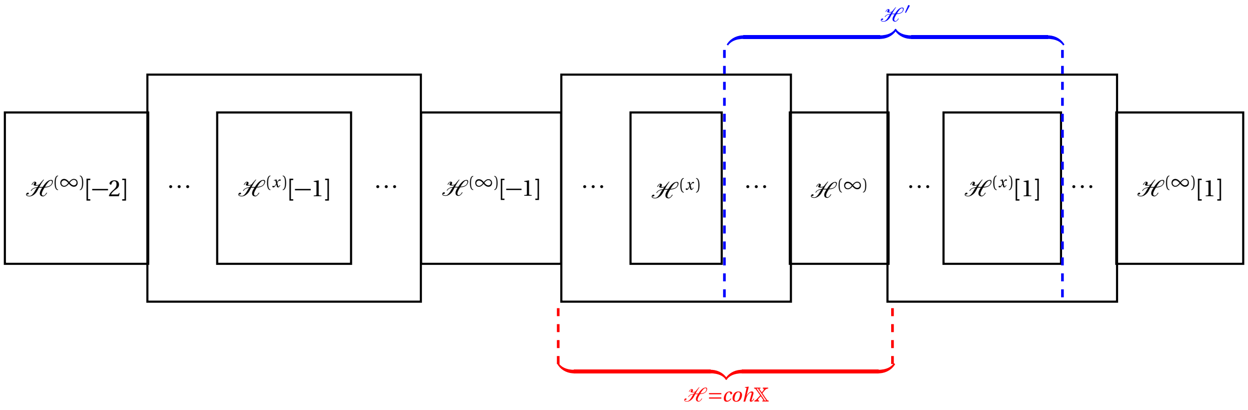
Teorema 4.3 (ver [LS96], pág. 167, ou [Opp10], pág. 6) *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária derivadamente equivalente a coh$\mathbb{X}$ para alguma reta projetiva com peso $\mathbb{X}$. Então $\mathscr{H}$ é equivalente a uma das seguintes categorias (aqui olhamos para $\mathscr{H}$ como uma subcategoria de $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$):*

1) *mod$H$ para uma álgebra hereditária mansa H, se $\mathbb{X}$ for doméstica;*

2) *$\mathscr{T}_S[-1] \vee \mathscr{H}_+ \vee \mathscr{T}_{\mathbb{P}^1_k \setminus S}$ para algum subconjunto $S \subseteq \mathbb{P}^1_k$, se $\mathbb{X}$ for selvagem;*

3) *$(\vee_{q \in \mathbb{Q}_{>x}} \mathscr{H}^{(q)}) \vee \mathscr{H}_0 \vee (\vee_{q \in \mathbb{Q}_{\leq x}} \mathscr{H}^{(q)}[1])$ para algum $x \in \mathbb{Q}$, se as sequências peso de $\mathbb{X}$ forem $(2,2,2,2)$, $(2,3,6)$, $(2,4,4)$, ou $(3,3,3)$.*

Observação 4.2 *Abaixo representamos geometricamente o item **3)** do teorema 4.3. Através de tal representação, fica claro que para qualquer $x \in \mathbb{Q}$, podemos considerar $\mathscr{H}^{(x)}$ como a parte de torção de uma alguma categoria $\mathscr{H}'$ equivalente à categoria coh$\mathbb{X} = \mathscr{H}$.*



Ao considerarmos objetos excepcionais em coh$\mathbb{X}$, isto é, objetos M tais que $\text{Ext}^1_{\mathbb{X}}(M,M) = 0$, temos os seguintes resultados, que serão de fundamental importância ao longo deste capítulo. Recordamos aqui que um objeto S é dito **simples** em um tubo $\mathscr{T}_\lambda$ se S estiver na boca de $\mathscr{T}_\lambda$, ou equivalentemente, se S não tem nenhum subobjeto em $\mathscr{T}_\lambda$.

Teorema 4.4 (ver [GL91], pág. 325, ou [Mel04], pág. 25) *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ uma reta projetiva com peso e S um objeto simples excepcional de comprimento finito concentrado em p_i, isto é, S está na boca do tubo $\mathscr{T}_{w_i}$. Então a categoria perpendicular $S^\perp$, formada em coh$\mathbb{X}$, é equivalente a uma categoria de feixes coerentes coh$\mathbb{X}'$ sobre uma reta projetiva $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w',p)$ com sequência peso $w' = (w_1, \cdots, w_{i-1}, w_i - 1, w_{i+1}, \cdots, w_r)$. Em particular, rk$(K_0(\mathbb{X}'))$ = rk$(K_0(\mathbb{X})) - 1$.*

Teorema 4.5 *(ver [Mel04], pág. 25) Seja E um fibrado vetorial excepcional na categoria coh$\mathbb{X}$, em que $\mathbb{X}$ é uma reta projetiva com peso e rk$(K_0(\mathbb{X})) = n$. Então a categoria perpendicular $E^{\perp}$, subcategoria de coh$\mathbb{X}$, é equivalente a uma categoria de módulos mod$H$, em que H é uma k-álgebra hereditária com $n-1$ H-módulos simples.*

4.1 Um resultado geral sobre a Dimensão Global Forte

Como já mencionado anteriormente, Happel e Zacharia provaram em [HZ10] que dada uma álgebra hereditária por partes Λ, temos que s.gl.dim.$\Lambda \leq n$, em que n é o posto do grupo de Grothendieck da álgebra Λ. Em [ALMM17], os autores apresentaram uma nova definição para a dimensão global forte, e vários de seus resultados são decorrentes de técnicas aplicadas ao quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada. Como motivação para esse capítulo, apresentamos novamente a prova do resultado de [HZ10] mencionado acima, porém, aplicando as mesmas técnicas de [ALMM17].

Teorema 4.6 *Sejam $\mathbb{X}$ uma reta projetiva com peso doméstica ou tubular e $T^{\bullet}$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$. Então*

- ***a)*** *Se $\mathbb{X}$ for uma reta projetiva com peso doméstica tal que rk$K_0(\mathbb{X}) = n$, então existe um somando direto indecomponível de $T^{\bullet}$ que não está em componente regular;*
- ***b)*** *Existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{mod}\Lambda)$ tal que*

$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-2.$$

Demonstração: a) Segue da observação 4.1 que, para uma reta projetiva com peso $\mathbb{X}$ doméstica, temos que a categoria coh$\mathbb{X}$ é derivadamente equivalente à categoria de módulos modΛ, em que Λ é uma álgebra hereditária mansa. Assim, a prova é análoga a prova do item **a)** do teorema 2.5 no capítulo 2.
b) Para o caso em que a reta projetiva com peso $\mathbb{X}$ é doméstica, a prova é análoga ao item **b)** do teorema 2.5. Já para o caso em que a reta projetiva com peso $\mathbb{X}$ é tubular, para provar que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ como descrita no enunciado, suporemos por absurdo que

$$T^{\bullet} \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \geq n-1,$$

para toda subcategoria hereditária $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$. Neste caso, como um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ deve ter exatamente n somandos e a álgebra $\text{End}T^{\bullet op}$ é conexa, deve existir exatamente um somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em cada cópia de $\mathscr{H}$. Segue do teorema 4.3 e da observação 4.2 que podemos supor que todos esses somandos estão em shifts de uma mesma componente $\mathscr{H}^{(x)}$, pois caso não estivessem, conseguiríamos concentrar 2 somandos de $T^\bullet$ em um mesmo shift de alguma categoria hereditária $\mathscr{H}'$, e então $T^\bullet$ estaria espalhado em $\vee_{i=0}^{n-2}\mathscr{H}'$, contradizendo nossa suposição. Como a álgebra $\text{End}T^{\bullet op}$ é conexa, todos os somandos devem estar em shifts de um mesmo tubo de $\mathscr{H}^{(x)}$. Por outro lado, sabemos que os somandos diretos indecomponíveis de $T^\bullet$ formam uma sequência excepcional completa. Como o posto de um tubo em $\mathscr{H}^{(x)}$ é no máximo $n-4$, do lema 2.2 obtemos um absurdo, que decorre do fato de supormos que não existe subcategoria hereditária geradora tal que o complexo tilting $T^\bullet$ esteja espalhada em um número menor do que $n-1$. Portanto, concluímos que deve existir uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i], \ell \leq n-2.$$

■

O teorema 4.6 nos permitiu encontrar um limitante para o espalhamento de um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$. Podemos então utilizar o lema 1.28 e assim obter um majorante para a dimensão global forte de Λ.

Corolário 4.7 (Happel-Zacharia, 2010) *Sejam Λ uma álgebra hereditária por partes derivadamente equivalente à categoria coh$\mathbb{X}$ e tal que $rkK_0(\Lambda) = n$. Então*

$$s.gl.dim.\Lambda \leq n = rkK_0(\Lambda).$$

Demonstração: Basta utilizar o teorema de Rickard juntamente com o teorema 4.6 e com o lema 1.28.

■

Como já mencionado, o corolário 4.7 é um resultado já conhecido (ver 1.25). Ao longo deste capítulo veremos que para algumas classes de álgebras derivadamente equivalentes à categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva com peso é possível melhorar tal resultado.

4.2 Retas Projetivas Domésticas

Do teorema 4.2 e da observação 4.1 segue que a categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva com peso doméstica é derivadamente equivalente à categoria de módulos sobre uma álgebra hereditária mansa. As propriedades dos complexos tilting e a dimensão global forte para álgebras hereditárias por partes derivadamente equivalente à álgebras hereditárias mansas já foram estudadas nas seções 2.4, 2.5 e 2.6 do capítulo 2.

4.3 Retas Projetivas Tubulares

Como citado anteriormente, a reta projetiva com peso $\mathbb{X}(w,p)$ é dita tubular se a sequência peso w é igual à $(2,2,2,2)$, $(3,3,3)$, $(2,4,4)$, $(2,3,6)$. Pelo teorema 4.2, sabemos que a categoria $\text{coh}\mathbb{X}$ é da forma $(\vee_{q\in\mathbb{Q}}\mathscr{H}^{(q)})\vee\mathscr{H}_0$, em que $\mathscr{H}^{(q)}\simeq\mathscr{H}_0$ para qualquer $q\in\mathbb{Q}$. Uma vez que temos um isomorfismo entre $\mathscr{H}^{(q)}$ e $\mathscr{H}_0$, podemos denotar $\mathscr{H}_0$ por $\mathscr{H}^{(\infty)}$ e escrever

$$\text{coh}\mathbb{X} = \bigvee_{q\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}} \mathscr{H}^{(q)}.$$

Como $\mathscr{H}^{(q)}\simeq\mathscr{H}_0$, sabemos que cada componente $\mathscr{H}^{(q)}$ é uma família de tubos.

Observação 4.3 *Segue de [HR86] pág. 162, que cada um dos tubos nas famílias $\mathscr{H}^{(q)}$ é estável, standard e auto-hereditário, e assim podemos aplicar os resultados apresentados no primeiro capítulo, na seção 1.3.*

Para o caso em que $w=(2,2,2,2)$, para cada $q\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ temos que $\mathscr{H}^{(q)}$ é uma família de tubos parametrizada por $\mathbb{P}^1_k$, com quatro tubos de posto 2, que denotaremos por $\mathscr{T}_2^{(q)}$, e infinitos tubos homogêneos, isto é, tubos de posto 1, que aqui denotaremos simplesmente por $\mathscr{T}^{(q)}$.

Para o caso em que $w=(3,3,3)$, para cada $q\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ temos que $\mathscr{H}^{(q)}$ é uma família de tubos parametrizada por $\mathbb{P}^1_k$, com três tubos de posto 3, que denotaremos por $\mathscr{T}_3^{(q)}$, e infinitos tubos homogêneos, isto é, infinitos tubos de posto 1, que aqui denotaremos simplesmente por $\mathscr{T}^{(q)}$.

Para o caso em que $w=(2,4,4)$, para cada $q\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ temos que $\mathscr{H}^{(q)}$ é uma família de tubos parametrizada por $\mathbb{P}^1_k$, com um tubo de posto 2, que denotaremos por $\mathscr{T}_2^{(q)}$, dois tubos de posto 4, que denotaremos por $\mathscr{T}_4^{(q)}$, e infinitos tubos homogêneos, isto é, tubos de posto 1, que aqui denotaremos simplesmente por $\mathscr{T}^{(q)}$.

Para o caso em que $w = (2,3,6)$, para cada $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ temos que $\mathscr{H}^{(q)}$ é uma família de tubos parametrizada por $\mathbb{P}^1_k$, com um tubo de posto 2, que denotaremos por $\mathscr{T}_2^{(q)}$, um tubo de posto 3, que denotaremos por $\mathscr{T}_3^{(q)}$, um tubo de posto 6, que denotaremos por $\mathscr{T}_6^{(q)}$, e infinitos tubos homogêneos, isto é, tubos de posto 1, que aqui denotaremos simplesmente por $\mathscr{T}^{(q)}$.

O que faremos agora é, para cada sequência peso tal que a reta projetiva seja tubular, encontrar um majorante superior para a dimensão global forte da álgebra de endomorfismo $\operatorname{End} T^{\bullet op}$, em que $T^\bullet$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\operatorname{coh}\mathbb{X})$. Além disso, mostraremos em cada caso que esse majorante é estritamente menor que o posto do grupo de Grothendieck da categoria $\operatorname{coh}\mathbb{X}$. Ao longo desta seção utilizaremos a notação introduzida no capítulo 3, mais precisamente a notação introduzida na figura 3.1, ou seja, sempre consideraremos o último somando $T_{n-1} = X_\ell$, para algum ℓ específico.

4.3.1 Sequência peso (2,2,2,2)

Consideremos a categoria $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ dos feixes coerentes sobre a reta projetiva com peso $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ cuja sequência peso é $w = (2,2,2,2)$. Sabemos que $\mathbb{X}$ é de tipo tubular, e mais ainda, que o posto do grupo de Grothendieck nesse caso é igual à 6.

Logo, um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\operatorname{coh}\mathbb{X})$ pode ser escrito como

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{5} T_i[r_i],$$

em que cada T_i é um objeto indecomponível em $\operatorname{coh}\mathbb{X}$. Como o complexo tilting $T^\bullet$ termina em $\operatorname{coh}\mathbb{X}[r_5]$, existe $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tal que $T_5[r_5] \in \mathscr{H}^{(q)}[r_5]$. Desde que $T^\bullet$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\operatorname{coh}\mathbb{X})$, segue que, para cada i, temos $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T_i, T_i) = 0$, ou seja, cada T_i é um objeto tilting parcial em $\operatorname{coh}\mathbb{X}$, e assim concluímos que $T_5[r_5]$ deve estar em $\mathscr{T}_2^{(q)}$. Veremos agora que existe uma subcategoria $\mathscr{H}$ em $\mathscr{D}^b(\operatorname{coh}\mathbb{X})$ de tal maneira que o complexo tilting $T^\bullet$ esteja distribuído em no máximo 3 cópias de $\mathscr{H}$, isto é,

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i],\ \ell \leq 2.$$

Teorema 4.8 *Sejam* $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ *uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é dada por* $w = (2,2,2,2)$ *e* $T^\bullet$ *um complexo tilting na categoria derivada* $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$*. Então existe* $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$ *subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{2} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Como $T_5[r_5] \in \mathscr{T}_2^{(q)}[r_5]$, utilizando a proposição 1.14 temos que T_5 está na boca do tubo $\mathscr{T}_2^{(q)}$. Logo, T_5 é simples em $\mathscr{T}_2^{(q)}$, e sendo assim podemos então aplicar o teorema 4.4, obtendo que $T_5^\perp \simeq \text{coh}\mathbb{X}'$, onde $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w',p)$ é uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w' = (2,2,2)$.

Uma vez que a sequência peso é $w' = (2,2,2)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_4$.

Além disso, como $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_5\}$ é sequência excepcional, do lema 1.23 segue que $T^\bullet \setminus T_5[r_5]$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}') \simeq \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$.

Como visto anteriormente, do teorema 2.31 segue então que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}')$ tal que $T^\bullet \setminus T_5[r_5] \in \vee_{i=0}^{1} \mathscr{H}'[i]$.

E assim, utilizando a observação 1.2, garantimos então que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{2} \mathscr{H}[i].$$

■

Utilizando o limitante encontrado no teorema anterior, podemos aplicar então a técnica apresentada em [ALMM17] e obter um majorante para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes de tipo $(2,2,2,2)$, como veremos no corolário a seguir.

Corolário 4.9 *Sejam* $\mathbb{X}$ *uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é* $w = (2,2,2,2)$ *e* Λ *uma* k*-álgebra de dimensão finita satisfazendo* $\mathscr{D}^b(mod\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$*. Então*

$$s.gl.dim.\Lambda \leq 4.$$

Demonstração: Basta utilizar o teorema de Rickard juntamente com o teorema 4.8 e com o lema 1.28.

■

4.3.2 Sequência peso (3,3,3)

Consideremos a categoria coh$\mathbb{X}$ dos feixes coerentes sobre a reta projetiva com peso $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ cuja sequência peso é $w = (3,3,3)$. Sabemos que $\mathbb{X}$ é de tipo tubular, e mais ainda, que o posto do grupo de Grothendieck nesse caso é igual à 8.

Logo, um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ pode ser escrito como

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{7} T_i[r_i],$$

em que cada T_i é um objeto indecomponível em coh$\mathbb{X}$. Como o complexo tilting $T^\bullet$ termina em coh$\mathbb{X}[r_7]$, existe um número $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tal que $T_7[r_7] \in \mathscr{H}^{(q)}[r_7]$. Além disso, sendo $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$, cada T_i é um objeto tilting parcial em coh$\mathbb{X}$, e assim concluímos que $T_7[r_7]$ está em $\mathscr{T}_3^{(q)}$. Veremos agora que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ em $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ de tal maneira que o complexo tilting $T^\bullet$ esteja distribuído em no máximo 5 cópias de $\mathscr{H}$, isto é,

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i],\ \ell \leq 4.$$

Teorema 4.10 *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w = (3,3,3)$ e $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$. Então existe $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{4} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: O que faremos aqui é substituir o complexo tilting $T^\bullet$ por um outro complexo tilting, a saber

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{7} \overline{T}_i[r_i],$$

com o mesmo espalhamento de $T^\bullet$ e tal que $\overline{\epsilon} = \{\overline{T}_0, \cdots, \overline{T}_7\}$ é sequência excepcional. Além disso, mostraremos que $\overline{T}_7$ é um objeto simples no tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}$. Após provarmos isso, aplicando o teorema 4.4, obteremos que $\overline{T}_7^{\perp} \simeq \text{coh}\mathbb{X}'$, em que $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w',p)$ é uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w' = (2,3,3)$. Uma vez que a sequência peso é $w' = (2,3,3)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_6$.

Além disso, como $\overline{\epsilon} = \{\overline{T}_0, \cdots, \overline{T}_7\}$ é sequência excepcional, utilizando o lema 1.23, segue que $\overline{T} \setminus \overline{T}_7[r_7]$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}') \simeq \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$. Como visto anteriormente, é consequência do teorema 2.31 que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ tal que

$$\overline{T} \setminus \overline{T}_7[r_7] \in \bigvee_{i=0}^{3} \mathscr{H}'[i]$$

e, assim, utilizando a observação 1.2, garantimos então que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ tal que $\overline{T} \in \vee_{i=0}^{4} \mathscr{H}[i]$. Como $T^\bullet$ e $\overline{T}$ têm o mesmo espalhamento, segue que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{4} \mathscr{H}[i].$$

Resta provar então que dado um complexo tilting $T^\bullet$ tal que $T_7[r_7] \in \mathscr{T}_3^{(q)}[r_7]$, podemos trocá-lo por outro complexo tilting $\overline{T}$ como descrito anteriormente.

De fato, ao analisarmos o somando $T_7[r_7]$, como $T_7 \in \mathscr{T}_3^{(q)}$, segue da observação 4.3 e da proposição 1.14 que $\ell_\lambda(T_7) \leq 2$, e portanto nos restam apenas duas possibilidades:

(1) T_7 é simples, ou seja, ele está na boca do tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}$; ou

(2) T_7 não é simples, e como está no tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}$, deve estar na segunda linha do tubo, isto é, $T_7 = X_2$ e portanto $\ell_\lambda(T_7) = 2$.

No caso **(1)**, isto é, no caso em que T_7 é simples, podemos considerar $\overline{T} = T^\bullet$, e assim o resultado já estará demonstrado, uma vez que $\overline{T}$ cumpre as condições enunciadas anteriormente. Já no caso em que T_7 está na segunda linha do tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}$, temos dois casos:

(2a) $T_7[r_7]$ é o único somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_7]$;

(2b) $X_1[r_7]$ também é somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_7]$.

Se $T_7[r_7]$ for o único somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_7]$, o que faremos é trocar o complexo tilting $T^\bullet$ por

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{6} T_i[r_i] \oplus \tau^2 X_1[r_7],$$

que, conforme mostrado no item **b)** do lema 3.7, é de fato um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$. Além disso, como $T_7[r_7]$ e $X_1[r_7]$ estão no mesmo tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_7]$, segue do teorema 4.3 que o espalhamento dos complexos tilting $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

Consideremos agora o segundo caso, isto é, quando $X_1[r_7]$ também é somando direto indecomponível do complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_7]$. A ideia agora é substituir o somando $X_1[r_7]$ por $\tau^2 X_1[r_7]$, obtendo assim um complexo

$$\overline{T} = (T^\bullet \setminus X_1[r_7]) \oplus \tau^2 X_1[r_7],$$

que como vimos no item **c)** do lema 3.7 é de fato um complexo tilting. Além disso, utilizando o teorema 4.3, como $X_1[r_7]$ e $\tau^2 X_1[r_7]$ estão no mesmo tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_7]$, podemos concluir que o espalhamento de $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

■

Utilizando o limitante encontrado no teorema anterior, podemos então aplicar a técnica apresentada em [ALMM17] e encontrar um majorante para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes do tipo $(3,3,3)$, como veremos no corolário a seguir.

Corolário 4.11 *Sejam* $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ *uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é dada por* $w = (3,3,3)$ *e* Λ *uma* k*-álgebra de dimensão finita satisfazendo* $\mathscr{D}^b(mod\Lambda) \simeq \mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$. *Então*

$$s.gl.dim.\Lambda \leq 6.$$

Demonstração: Basta aplicarmos o teorema de Rickard juntamente com o teorema 4.10 e o lema 1.28.

■

4.3.3 Sequência peso (2,4,4)

Consideremos agora a categoria $\text{coh}\mathbb{X}$ dos feixes coerentes sobre a reta projetiva com peso $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ cuja sequência peso é $w = (2,4,4)$. Sabemos que $\mathbb{X}$ é de tipo tubular, e mais ainda, que o posto do grupo de Grothendieck nesse caso é igual à 9.

Logo, um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ pode ser escrito como

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{8} T_i[r_i],$$

em que cada T_i é um objeto indecomponível em $\text{coh}\mathbb{X}$. Como o complexo tilting termina em $\text{coh}\mathbb{X}[r_8]$, existe um número $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tal que $T_8[r_8] \in \mathscr{H}^{(q)}[r_8]$. Além disso, como $T^\bullet$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$, cada T_i é um objeto tilting parcial em coh$\mathbb{X}$, e assim concluímos que T_8 está em $\mathscr{T}_2^{(q)}$ ou em $\mathscr{T}_4^{(q)}$. Veremos agora que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ em $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ de tal maneira que o complexo tilting $T^\bullet$ esteja distribuído em no máximo 7 cópias de $\mathscr{H}$, isto é,

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i],\ \ell \leq 6.$$

Teorema 4.12 *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w = (2,4,4)$ e $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$. Se $T^\bullet$ terminar em um tubo de posto 2, isto é, $T_8[r_8] \in \mathscr{T}_2^{(q)}[r_8]$, então existirá $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$ subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Como $T_8[r_8] \in \mathscr{T}_2^{(q)}[r_8]$, utilizando a proposição 1.14 temos que T_8 está na boca do tubo $\mathscr{T}_2^{(q)}$. Logo, T_8 é simples em $\mathscr{T}_2^{(q)}$, e sendo assim podemos aplicar o teorema 4.4, obtendo que $T_8^\perp \simeq \text{coh}\mathbb{X}'$, em que $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w',p)$ é uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w' = (4,4)$.

Uma vez que a sequência peso é $w' = (4,4)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_7$.

Além disso, como $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_8\}$ é sequência excepcional, do lema 1.23 segue que $T^\bullet \setminus T_8[r_8]$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}') \simeq \mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$.

Como visto anteriormente, do teorema 2.27 temos que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}')$ tal que $T^\bullet \setminus T_8[r_8] \in \bigvee_{i=0}^{5} \mathscr{H}'[i]$. E assim, utilizando a observação 1.2, garantimos a existência de uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

■

No teorema anterior consideramos que o último somando, T_8, estava em um tubo de posto 2, e assim concluímos que T_8 deveria estar na boca deste mesmo tubo, podendo assim aplicar o teorema 4.4. Já no caso em que o último somando, T_8, está em um tubo de posto 4, T_8 pode estar também na segunda ou na terceira linha do tubo $\mathscr{T}_4^{(q)}$, e assim não podemos aplicar diretamente tal teorema. O que faremos agora é considerar este segundo caso, isto é, quando

T_8 está em um tubo de posto 4, e através de algumas manipulações algébricas tentar aplicar o teorema 4.4.

Teorema 4.13 *Sejam* $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w, p)$ *uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é* $w = (2,4,4)$ *e* $T^\bullet$ *um complexo tilting na categoria derivada* $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$*. Se* $T^\bullet$ *terminar em um tubo de posto 4, isto é,* $T_8[r_8] \in \mathscr{T}_4^{(q)}[r_8]$*, então existirá* $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$ *subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{5} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: O que faremos aqui é trocar o complexo tilting $T^\bullet$ por um outro complexo tilting, a saber

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{8} \overline{T}_i[r_i]$$

com o mesmo espalhamento de $T^\bullet$, tal que $\overline{\epsilon} = \{\overline{T}_0, \cdots, \overline{T}_8\}$ é sequência excepcional, e além disso, tal que $\overline{T}_8$ é simples no tubo $\mathscr{T}_4^{(q)}$.

Após provarmos isso, aplicando o teorema 4.4, obteremos que $\overline{T}_8^{\perp} \simeq \mathrm{coh}\mathbb{X}'$, em que $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w', p)$ é uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w' = (2,3,4)$. Uma vez que a sequência peso é $w' = (2,3,4)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_7$.

Como visto anteriormente, segue do teorema 2.31 que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ tal que $\overline{T} \setminus \overline{T}_8[r_8] \in \bigvee_{i=0}^{4} \mathscr{H}'[i]$, e assim utilizando a observação 1.2, garantimos então que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ tal que

$$\overline{T} \in \bigvee_{i=0}^{5} \mathscr{H}[i].$$

Como $T^\bullet$ e $\overline{T}$ têm o mesmo espalhamento, segue que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{5} \mathscr{H}[i].$$

Resta provar então que dado um complexo tilting $T^\bullet$ tal que $T_8[r_8] \in \mathscr{T}_4^{(q)}[r_8]$, podemos trocá-lo por outro complexo tilting $\overline{T}$ como descrito anteriormente.

De fato, ao analisarmos o somando $T_8[r_8]$, como $T_8 \in \mathscr{T}_4^{(q)}$, segue da observação 4.3 e do teorema 1.14 que $\ell_\lambda(T_8) \leq 3$, e portanto nos restam apenas três possibilidades:

(1) T_8 é simples, ou seja, ele está na boca do tubo $\mathscr{T}_4^{(q)}$; ou

(2) T_8 não é simples em $\mathscr{T}_4^{(q)}$, $T_8 = X_2$ e $\ell_\lambda(T_8) = 2$; ou

(3) T_8 não é simples em $\mathscr{T}_4^{(q)}$, $T_8 = X_3$ e $\ell_\lambda(T_8) = 3$.

No caso em que T_8 é simples, podemos considerar $\overline{T} = T^\bullet$, e assim o resultado já estará demonstrado, uma vez que o complexo tilting $\overline{T}$ cumpre as condições enunciadas anteriormente.

Ao considerarmos o caso em que T_8 não é simples e $\ell_\lambda(T_8) = 2$, segue dos itens **b)** e **c)** do lema 3.7 que conseguimos trocar $T^\bullet$ por outro complexo tilting $\overline{T}$ cujo último somando esteja na boca do tubo $\mathscr{T}_4^{(q)}[r_8]$, e mais ainda, do teorema 4.3 temos que o espalhamento de $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

Já no caso em que T_8 não é simples e $\ell_\lambda(T_8) = 3$, segue dos itens **a), b), c)** e **d)** do lema 3.8 que conseguimos trocar $T^\bullet$ por outro complexo tilting $\overline{T}$ cujo último somando esteja na boca do tubo $\mathscr{T}_4^{(q)}[r_8]$, e mais ainda, do teorema 4.3 temos que o espalhamento de $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

■

Utilizando os limitantes encontrados nos teoremas 4.12 e 4.13, podemos então encontrar um majorante para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes do tipo $(2,4,4)$, como veremos no corolário a seguir.

Corolário 4.14 *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é dada por $w = (2,4,4)$ e $\Lambda \simeq EndT^{\bullet op}$ uma k-álgebra de dimensão finita, para $T^\bullet$ um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$. Então*

- *s.gl.dim.*$\Lambda \leq 8$, *se* $T_8[r_8] \in \mathscr{T}_2^{(q)}[r_8]$;
- *s.gl.dim.*$\Lambda \leq 7$, *se* $T_8[r_8] \in \mathscr{T}_4^{(q)}[r_8]$.

Demonstração: Segue diretamente dos teoremas 4.12 e 4.13 e do lema 1.28.

■

4.3.4 Sequência peso (2,3,6)

Consideremos agora a categoria coh$\mathbb{X}$ dos feixes coerentes sobre a reta projetiva com peso $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ cuja sequência peso é $w = (2,3,6)$. Sabemos que $\mathbb{X}$ é de tipo tubular, e mais ainda, que o posto do grupo de Grothendieck nesse caso é igual à 10.

Logo, um complexo tilting $T^\bullet$ na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ pode ser escrito como

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=0}^{9} T_i[r_i],$$

em que cada T_i é um objeto indecomponível em coh$\mathbb{X}$. Como o complexo tilting $T^\bullet$ termina em coh$\mathbb{X}[r_9]$, existe um número $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tal que $T_9[r_9] \in \mathscr{H}^{(q)}[r_9]$. Além disso, desde que $T^\bullet$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$, segue que cada T_i é um objeto tilting parcial em coh$\mathbb{X}$, e assim concluímos que $T_9[r_9]$ está em $\mathscr{T}_2^{(q)}$ ou em $\mathscr{T}_3^{(q)}$ ou, por fim, em $\mathscr{T}_6^{(q)}$. Veremos agora que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}$ em $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ de tal maneira que o complexo tilting $T^\bullet$ esteja distribuído em no máximo 8 cópias de $\mathscr{H}$, isto é,

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{\ell} \mathscr{H}[i],\ \ell \leq 7.$$

Teorema 4.15 *Sejam* $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w, p)$ *uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é* $w = (2,3,6)$ *e* $T^\bullet$ *um complexo tilting na categoria derivada* $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$*. Se* $T^\bullet$ *terminar em um tubo de posto 2, isto é,* $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_2^{(q)}[r_9]$*, então existirá* $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ *subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{7} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: Como $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_2^{(q)}[r_9]$, utilizando a proposição 1.14 temos que T_9 está na boca do tubo $\mathscr{T}_2^{(q)}$. Logo, T_9 é simples em $\mathscr{T}_2^{(q)}$, e sendo assim podemos então aplicar o teorema 4.4, obtendo que $T_9^\perp \simeq \mathrm{coh}\mathbb{X}'$, em que $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w', p)$ e $w' = (3,6)$.

Uma vez que a sequência peso é $w' = (3,6)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{A}}_8$.

Além disso, como $\epsilon = \{T_0, \cdots, T_9\}$ é sequência excepcional, do lema 1.23 segue que $T^\bullet \setminus T_9[r_9]$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}') \simeq \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$.

Como visto anteriormente, do teorema 2.27 segue então que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ tal que $T^\bullet \setminus T_9[r_9] \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}'[i]$. E assim, utilizando a observação 1.2, garantimos que existe uma subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ tal que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{7} \mathscr{H}[i].$$

■

No teorema anterior consideramos que o último somando, T_9, estava em um tubo de posto 2, e dessa forma concluímos que T_9 deveria estar na boca deste mesmo tubo, podendo assim aplicar o teorema 4.4. Já no caso em que o último somando, T_9, está em um tubo de posto 3, não podemos garantir que T_9 esteja na boca deste mesmo tubo, não podendo portanto aplicar diretamente o teorema 4.4. O que faremos agora é considerar este segundo caso, isto é, quando T_9 está em um tubo de posto 3.

Teorema 4.16 *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w, p)$ uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w = (2,3,6)$ e $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$. Se $T^\bullet$ terminar em um tubo de posto 3, isto é, $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$, então existirá $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: O que faremos aqui é trocar o complexo tilting $T^\bullet$ por um outro complexo tilting, a saber,

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{9} \overline{T}_i[r_i]$$

com o mesmo espalhamento de $T^\bullet$ e de tal maneira que $\overline{\epsilon} = \{\overline{T}_0, \cdots, \overline{T}_9\}$ é sequência excepcional e, além disso, $\overline{T}_9$ é simples no tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}$.

Após provarmos isso, aplicando o teorema 4.4, obteremos que $\overline{T}_9^{\perp} \simeq \mathrm{coh}\mathbb{X}'$, em que $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w', p)$ é uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w' = (2,2,6)$. Uma vez que a sequência peso é $w' = (2,2,6)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_8$.

Como visto anteriormente, segue do teorema 2.31 que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ tal que $\overline{T} \setminus \overline{T}_9[r_9] \in \vee_{i=0}^{5} \mathscr{H}'[i]$, e assim utilizando a observação 1.2, garantimos que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ tal que $\overline{T} \in \vee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i]$. Como $T^\bullet$ e $\overline{T}$ têm o mesmo espalhamento, segue que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

Resta provar então que dado um complexo tilting $T^\bullet$ tal que $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$, podemos trocá-lo por outro complexo tilting $\overline{T}$ como descrito anteriormente.

De fato, ao analisarmos o somando $T_9[r_9]$, como $T_9 \in \mathscr{T}_3^{(q)}$, segue da observação 4.3 e do teorema 1.14 que $\ell_\lambda(T_9) \leq 2$, e portanto nos restam apenas duas possibilidades:

(1) T_9 é simples, ou seja, está na boca do tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}$; ou

(2) T_9 não é simples, e como está no tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}$, $T_9 = X_2$, isto é, $\ell_\lambda(T_9) = 2$.

No caso em que T_9 é simples, podemos considerar $\overline{T} = T^\bullet$, e assim o resultado já estará demonstrado, uma vez que $\overline{T}$ cumpre as condições enunciadas anteriormente.

Ao considerarmos o caso em que T_9 não é simples, ou seja, $\ell_\lambda(T_9) = 2$, existem dois casos possíveis:

(2a) $T_9[r_9]$ é o único somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$;

(2b) $X_1[r_9]$ também é somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$.

Se $T_9[r_9]$ for o único somando direto indecomponível de $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$, o que faremos é trocar o complexo tilting $T^\bullet$ por

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{8} T_i[r_i] \oplus \tau^2 X_1[r_9],$$

que, como vimos no item **b)** do lema 3.7, é de fato um complexo tilting em $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$. Além disso, como $T_9[r_9]$ e $X_1[r_9]$ estão no mesmo tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$, segue do teorema 4.3 que o espalhamento dos complexos tilting $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

Consideremos agora o segundo caso, isto é, quando $X_1[r_9]$ também é somando direto indecomponível do complexo tilting $T^\bullet$ em $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$. A ideia agora é substituir o somando $X_1[r_9]$ por $\tau^2 X_1[r_9]$, obtendo assim um complexo

$$\overline{T} = (T^\bullet \setminus X_1[r_9]) \oplus \tau^2 X_1[r_9],$$

que, como vimos no item **c)** do lema 3.7, é de fato um complexo tilting. Além disso, utilizando o teorema 4.3, como $X_1[r_9]$ e $\tau^2 X_1[r_9]$ estão no mesmo tubo $\mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$, podemos concluir que o espalhamento de $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

■

Uma vez que já tratamos dos casos em que o último somando do complexo tilting $T^\bullet$ está em tubos de posto 2 ou 3, vejamos agora como $T^\bullet$ estará distribuído em $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ quando seu último somando direto indecomponível estiver em um tubo de posto 6. Para tanto, precisaremos estudar separadamente quando $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 1, 2, 3$ e também quando $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4, 5$.

Teorema 4.17 *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w = (2,3,6)$ e $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$. Se $T^\bullet$ terminar em um tubo de posto 6, e além disso, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 1,2,3$, então existirá $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: A ideia aqui é trocar o complexo tilting $T^\bullet$ por um outro complexo tilting

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{9} \overline{T}_i[r_i]$$

com o mesmo espalhamento de $T^\bullet$ e de tal maneira que $\overline{\epsilon} = \{\overline{T}_0, \cdots, \overline{T}_9\}$ seja uma sequência excepcional, e além disso, $\overline{T}_9$ é simples no tubo $\mathscr{T}_6^{(q)}$.

Provando tal fato, podemos aplicar o teorema 4.4, obtendo assim que $\overline{T}_9^{\perp} \simeq \text{coh}\mathbb{X}'$, em que $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w',p)$ é uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w' = (2,3,5)$. Uma vez que a sequência peso é $w' = (2,3,5)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\text{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_8$.

Como visto anteriormente, segue do teorema 2.31 que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X}')$ tal que $\overline{T} \setminus \overline{T}_9[r_9] \in \bigvee_{i=0}^{5} \mathscr{H}'[i]$, e assim utilizando a observação 1.2, garantimos que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\text{coh}\mathbb{X})$ tal que $\overline{T} \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i]$. Como $T^\bullet$ e $\overline{T}$ têm o mesmo espalhamento, segue que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

Resta provarmos que dado um complexo tilting $T^\bullet$ tal que $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_6^{(q)}[r_9]$, podemos trocá-lo por outro complexo tilting $\overline{T}$ como descrito anteriormente.

Sabemos por hipótese que $\ell_\lambda(T_9) \leq 3$, e então estudaremos cada caso, ou seja, quando $\ell_\lambda(T_9) = 1$, $\ell_\lambda(T_9) = 2$ e $\ell_\lambda(T_9) = 3$. No caso em que T_9 é simples, podemos considerar $\overline{T} = T^\bullet$, e assim o resultado já estará demonstrado, uma vez que o complexo tilting $\overline{T}$ cumpre as condições enunciadas anteriormente.

Ao considerarmos o caso em que T_9 não é simples e $\ell_\lambda(T_9) = 2$, segue dos itens **b)** e **c)** do lema 3.7 que conseguimos trocar $T^\bullet$ por outro complexo tilting $\overline{T}$ cujo último somando esteja na boca do tubo $\mathscr{T}_6^{(q)}[r_9]$, e mais ainda, do teorema 4.3 temos que o espalhamento de $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

Já no caso em que T_9 não é simples e $\ell_\lambda(T_9) = 3$, segue do lema 3.8 que conseguimos trocar $T^\bullet$ por outro complexo tilting $\overline{T}$ cujo último somando esteja na boca do tubo $\mathscr{T}_6^{(q)}[r_9]$, e mais ainda, do teorema 4.3 temos que o espalhamento de $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

■

Agora para o caso em que o último somando $T_{n-1}[r_{n-1}]$ de $T^\bullet$ está em um tubo de posto 6 e, além disso, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 4$ ou 5, precisaremos de algumas hipóteses adicionais sobre os somandos do complexo tilting $T^\bullet$. Seguindo a notação da figura no início do capítulo, denotemos $T_{n-1} = X_\ell$.

Teorema 4.18 *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w, p)$ uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w = (2,3,6)$ e $T^\bullet$ um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$. Se $T^\bullet$ terminar em um tubo de posto 6, $\ell_\lambda(T_{n-1}) = \ell = 4$ ou 5 e $T_i \not\simeq H$ para $H \in C(\tau^5 X_{\ell-2})$, então existirá $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$ subcategoria hereditária geradora tal que*

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

Demonstração: A ideia aqui é trocar o complexo tilting $T^\bullet$ por um outro complexo tilting

$$\overline{T} = \bigoplus_{i=0}^{9} \overline{T}_i[r_i]$$

com o mesmo espalhamento de $T^\bullet$ e de tal maneira que $\overline{\epsilon} = \{\overline{T}_0, \cdots, \overline{T}_9\}$ seja uma sequência excepcional, e, além disso, $\overline{T}_9$ seja simples no tubo $\mathscr{T}_6^{(q)}$.

Provando tal fato, podemos aplicar o teorema 4.4, obtendo assim que $\overline{T}_9^{\perp} \simeq \mathrm{coh}\mathbb{X}'$, em que $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(w', p)$ é uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w' = (2,3,5)$. Uma vez que a sequência peso é $w' = (2,3,5)$, segue dos teoremas 4.2 e 1.29 e da observação 4.1 que a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ é equivalente à categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}kQ)$, em que o grafo subjacente de Q é $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_8$.

Como visto anteriormente, segue do teorema 2.31 que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}')$ tal que $\overline{T} \setminus \overline{T}_9[r_9] \in \bigvee_{i=0}^{5} \mathscr{H}'[i]$, e assim utilizando a observação 1.2, garantimos que existe subcategoria hereditária geradora $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ tal que $\overline{T} \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i]$. Como $T^\bullet$ e $\overline{T}$ têm o mesmo espalhamento, segue então que

$$T^\bullet \in \bigvee_{i=0}^{6} \mathscr{H}[i].$$

Resta provarmos que dado um complexo tilting $T^\bullet$ tal que $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_6^{(q)}[r_9]$, podemos trocá-lo por outro complexo tilting $\overline{T}$ como descrito anteriormente.

Sabemos por hipótese que $\ell_\lambda(T_9) \geq 3$, e então estudaremos cada caso, ou seja, quando $\ell_\lambda(T_9) = 4$ e $\ell_\lambda(T_9) = 5$.

Temos que $\ell_\lambda(T_9) = 4$ ou 5 e, além disso, sabemos que $T_i \not\leq H$ para $H \in C(\tau^5 X_{\ell-2})$, logo segue dos lemas 3.8, 3.9 e 3.10 que conseguimos trocar $T^\bullet$ por outro complexo tilting $\overline{T}$ cujo último somando esteja na boca do tubo $\mathscr{T}_6^{(q)}[r_9]$ e, mais ainda, do teorema 4.3 temos que o espalhamento de $T^\bullet$ e $\overline{T}$ é o mesmo.

■

Utilizando então os resultados obtidos nos teoremas 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18, podemos encontrar um majorante para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes do tipo $(2,3,6)$, como veremos no corolário a seguir.

Corolário 4.19 *Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{X}(w,p)$ uma reta projetiva com peso cuja sequência peso é $w = (2,3,6)$ e $\Lambda \simeq EndT^{\bullet op}$ uma k-álgebra de dimensão finita, em que $T^\bullet$ é um complexo tilting na categoria derivada $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X})$. Então*

- *s.gl.dim.$\Lambda \leq 9$, se $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_2^{(q)}[r_9]$;*
- *s.gl.dim.$\Lambda \leq 8$, se $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_3^{(q)}[r_9]$;*
- *s.gl.dim.$\Lambda \leq 8$, se $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_6^{(q)}[r_9]$ e $\ell_\lambda(T_{n-1}) = 1, 2$ ou 3;*
- *s.gl.dim.$\Lambda \leq 8$, se $T_9[r_9] \in \mathscr{T}_6^{(q)}[r_9]$, $\ell_\lambda(T_9) = 4$ ou 5 e $T_i \not\leq H$ para $H \in C(\tau^5 X_{\ell-2})$.*

Demonstração: Segue diretamente dos teoremas 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 e do lema 1.28.

■

Referências Bibliográficas

[ALMM17] E. R. Alvares, P. Le Meur, and E. N. Marcos. The strong global dimension of piecewise hereditary algebras. *Journal of Algebra*, 481:36 – 67, 2017.

[ARS97] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalo. *Representation Theory of Artin algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[AS87] I. Assem and A. Skowroński. Iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$. *Mathematische Zeitschrift*, 195:269–290, 1987.

[ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2006.

[AST08] I. Assem, M. J. S. Salorio, and S. Trepode. Ext-projectives in suspended subcategories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212(2):423 – 434, 2008.

[BD09] V. Bekkert and Y. Drozd. Derived categories for algebras with radical square zero. In *Algebras, representations and applications*, volume 483 of *Contemp. Math.*, pages 55–62. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[CK09] X. W. Chen and H. Krause. Introduction to coherent sheaves on weighted projective lines. *ArXiv e-prints*, November 2009.

[GL87] W. Geigle and H. Lenzing. A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras. In *Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985)*, volume 1273 of *Lecture Notes in Math.*, pages 265–297. Springer, Berlin, 1987.

[GL91] W. Geigle and H. Lenzing. Perpendicular categories with applications to representations and sheaves. *J. Algebra*, 144(2):273–343, 1991.

[Hap88] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[Hap98] D. Happel. Quasitilted algebras. In *Algebras and modules, I (Trondheim, 1996)*, volume 23 of *CMS Conf. Proc.*, pages 55–82. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[Hap01] D. Happel. A characterization of hereditary categories with tilting object. *Invent. Math.*, 144(2):381–398, 2001.

[HHK] L.A. Hügel, D. Happel, and H. Krause. *Handbook of Tilting Theory*. Number v. 13.

[HKL12] L. A. Hügel, S. Koenig, and Q. Liu. Jordan-Hölder theorems for derived module categories of piecewise hereditary algebras. *J. Algebra*, 352:361–381, 2012.

[HR86] D. Happel and C. M. Ringel. The derived category of a tubular algebra. *Representation theory, I (Ottawa, Ont., 1984)*, 1177:156–180, 1986.

[HR02a] D. Happel and I. Reiten. A characterization of the hereditary categories derived equivalent to some category of coherent sheaves on a weighted projective line. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(3):643–651 (electronic), 2002.

[HR02b] D. Happel and I. Reiten. Hereditary abelian categories with tilting object over arbitrary base fields. *J. Algebra*, 256(2):414–432, 2002.

[HRS96] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 120(575):viii+ 88, 1996.

[HZ08] D. Happel and D. Zacharia. A homological characterization of piecewise hereditary algebras. *Math. Z.*, 260(1):177–185, 2008.

[HZ10] D. Happel and D. Zacharia. Homological properties of piecewise hereditary algebras. *Journal of Algebra*, 323(4):1139–1154, 2010.

[Len86] H. Lenzing. Curve singularities arising from the representation theory of tame hereditary algebras. *Representation theory, I (Ottawa, Ont., 1984)*, 1177:199–231, 1986.

[Len06] H. Lenzing. *Hereditary Categories Lectures 1 and 2*. Advanced ICTP-school on Representation Theory and Related Topics, 2006.

[LS96] H. Lenzing and A. Skowroński. Quasi-tilted algebras of canonical type. *Colloq. Math.*, 71(2):161–181, 1996.

[Mel04] H. Meltzer. Exceptional vector bundles, tilting sheaves and tilting complexes for weighted projective lines. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 171(808):viii+139, 2004.

[Mil] D. Milicić. Lectures on derived categories. *Acessado em* `http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf` *em junho de 2016*.

[Opp10] S. Oppermann. Representation dimension of quasi-tilted algebras. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 81(2):435–456, 2010.

[Ric89] J. Rickard. Morita theory for derived categories. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-39(3):436–456, 1989.

[Rin94] C. M. Ringel. The braid group action on the set of exceptional sequences of a hereditary Artin algebra. In *Abelian group theory and related topics (Oberwolfach, 1993)*, volume 171 of *Contemp. Math.*, pages 339–352. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Sei03] U. Seidel. *On tilting complexes and piecewise hereditary algebras.* Dissertation, Technische Universitat Chemnitz, 2003.

[Sko87] A. Skowroński. On algebras with finite strong global dimension. *Bull.Polish Acad.Sci*, 35:539–547, 1987.

[SS06] D. Simson and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 2, Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type.* Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press, 2006.

[SS07] D. Simson and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 3, Representation-infinite Tilted Algebras.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2007.

[Zha17] C. Zhang. On global cohomological width of artin algebras. *Colloq. Math.*, 146:31–46, 2017.