Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Estimativas A-Priori em Equações Diferenciais Elípticas e Aplicações

Por

Tatiana Tortato

sob orientação do

Prof. Dr. João Batista de Mendonça Xavier

Curitiba / PR

2006

Estimativas A-Priori em Equações Diferenciais Elípticas e Aplicações

Por

Tatiana Tortato

sob orientação do

Prof. Dr. João Batista de Mendonça Xavier

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Curitiba / PR

2006

Aos meus pais, com quem aprendi a sonhar,
a crer no sonho,
e, acima de tudo,
lutar pelo sonho,
pois me mostraram, com a própria vida,
que sempre é possível tudo realizar...

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus pelo dom da vida, por me ter permitido, sempre com muito amor e fé, ultrapassar todos os obstáculos e por todas as oportunidades que me tem oferecido.
- Aos meus pais pela educação, dedicação e coragem que me deram de enfrentar os desafios e nunca desanimar.
- As minhas irmãs pela ajuda e incentivo na luta de meus objetivos.
- Ao meu marido pelo apoio, compreensão e carinho em todos os momentos.
- Ao meu orientador Professor João Batista de Mendonça Xavier pela paciência, atenção, amizade e por estar sempre disposto em ajudar no que fosse preciso.
- Aos colegas de mestrado pelo constante auxílio.
- E a todos que, de alguma forma, contribuiram para a concretização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO

Este trabalho trata da solubilidade do problema de valores de fronteira elíptico quasilinear $\Delta u = f(x, u, Du)$ em Ω e $u = \varphi$ na $\partial\Omega$, no espaço de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$, com $p > n$, seguindo as orientações de Pohožaev [19]. Para tanto lançou-se mão de instrumentos como estimativas a-priori, super e sub-soluções e teoremas de ponto fixo. Ainda foi dada atenção especial ao estudo dos espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, e em particular dos teoremas de imersão de Sobolev, os quais também foram utilizados na prova da existência de solução do problema em questão. A título de completar o trabalho, estudou-se a existência e unicidade de solução para operadores elípticos no caso clássico.

Palavras-chave: Estimativas A-Priori, Super e Sub-Soluções, Teoremas de Imersão de Sobolev, Teoremas de Ponto Fixo.

ABSTRACT

This paper deal with the solvability of the quasilinear elliptic boundary value problem $\Delta u = f(x, u, Du)$ in Ω and $u = \varphi$ na $\partial\Omega$, in the Sobolev space $W^{2,p}(\Omega)$, with $p > n$, following the Pohožaev research [19]. For this, it was used tools like a-priori estimates, upper and lower-solutions and fixed point theorems. It was still given special attention to Sobolev space $W^{k,p}(\Omega)$, in particular of the Sobolev's imbedding theorems, which were also used in the proof of the existence of solution for the target equation. In order to complete this work, the existence and uniqueness of classic solution for elliptic operators was studied as well.

Key words: A-Priori Estimates, Upper and Lower-Solutions, Sobolev's Imbedding Theorem, Fixed Point Theorems.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo principal mostrar, sob determinadas condições, a existência de solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x,u,Du) \quad \text{em } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

no espaço de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$, $p > n$, onde Du é o gradiente da função u. Consideramos Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suficientemente suave. Pode-se observar, durante o desenvolvimento do Capítulo IV, que para tanto foi se exigido uma estimativa a-priori em $L^\infty(\Omega)$ para a solução do problema (1), no entanto esta necessidade não é considerada um ponto adverso, tendo em vista que esta questão já foi estudada por Xavier [24].

Uma aplicação deste tipo de situação foi apresentada por Delgado e Suárez [6] através de um problema de dinâmica populacional, o qual é modelado, para o caso $n = 3$, como

$$\begin{aligned} -\Delta u &= n(x) + u(\gamma - m(x)u) + (b(x)\cdot Du)^\alpha \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

sendo que $\gamma \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} < \alpha < 2$, $m \in L^p(\Omega)$, $n \in L^\infty(\Omega)$, $b \in (L^\infty(\Omega))^3$, $n \geq 0$, $p > 3$ e $m \geq m_0 > 0$. O coeficiente $m = m(x)$ está associado com o limite do crescimento da população, enquanto que o efeito do transporte e a influência do meio circundante são responsáveis pelas presenças de $b = b(x)$ e $n = n(x)$, respectivamente. Neste contexto, qualquer solução positiva de (2) pode ser vista como a densidade populacional no estado estacionário.

Problemas como (1) são de grande interesse por descreverem uma vasta quantidade de situações. Por exemplo, em um problema de condução de calor não homogêneo bidimensional a temperatura $u(x,y,t)$ deve obedecer a equação diferencial $u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x,y,t)$, onde α^2 é a constante de difusividade térmica. No estado permanente, u é função exclusiva de x e y e a derivada em relação ao tempo se anula. Neste caso a equação se reduz a $u_{xx} + u_{yy} = f\,(x, y)\,,$ e este problema pode ser visto como o problema $(1)\,.$ Analogamente, se analisarmos o movimento de uma membrana elástica delgada com as extremidades fixas, como por exemplo a tampa de um tambor, sujeita a forças externas, este problema em seu estado estacionário se resume a resolver um problema como $(1)\,.$ Além destes casos, podemos encontrar outros ramos da física matemática nos quais temos situações como (1) a serem resolvidas, dentre eles citamos o caso da função potencial elétrico num meio dielétrico que não contém cargas elétricas ou o caso da função energia potencial de uma partícula no espaço livre sobre a qual atuam somente forças gravitacionais, ou o problema de resolver uma equação da forma $y'' + a\,(x)\,y' + b(x)y = f(x)$. Estes exemplos servem para ilustrar o porque de vários autores, dentre os quais [4, 5, 14, 19, 22, 23, 26], dedicarem-se a casos como $(1)\,.$

Ainda mais, a fim de se obter tais conclusões faremos também alguns breves comentários, no Capítulo I, a respeito de espaços L^p, teoria de distribuição, transformada de Fourier, solução fundamental e espaços de Schauder, uma vez que estes, entre outros assuntos, constituem a base de nosso trabalho.

Já no Capítulo II tratamos, de um modo mais formal, dos espaços de Sobolev, visto que buscamos obter solução para o problema (1) em $W^{2,p}\,(\Omega)\,.$ Também dedicamos uma seção especial aos teoremas de imersão, pois eles apresentam-se como poderosas ferramentas na resolução do problema principal. Além disso, fizemos uma prova bastante cuidadosa desses resultados devido a sua importância e por não encontrarmos muitas bibliografias em português.

O Capítulo III trata da questão de existência e unicidade de solução para operadores elípticos no caso clássico. Para isto estudamos o princípio do máximo forte e vimos algumas estimativas a-priori. Em particular analisou-se o problema de Dirichlet e os teoremas de ponto fixo de Leray-Schauder, estes foram utilizados no capítulo seguinte.

Por fim obtemos, no Capítulo IV, a garantia de solubilidade do problema (1) baseando-se no método de super e sub-soluções. Vemos também a condição exata de crescimento da função $f\,(x, s, \xi)$ em relação a $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Vale ainda ressaltar que a forma detalhada com que o conteúdo aqui presente foi tratado o torna um material possível de ser utilizado como notas de aula e faz com que sua leitura seja bastante acessível para todos os interessados.

N O T A Ç Ã O

Antes de iniciarmos nossos estudos vejamos algumas notações básicas.

Seja $n \in I\!\!N$. Dizemos que o vetor α é um $n-$multiíndice se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ onde os α_i's são, para cada i, inteiros não negativos.

1. Dado um multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, escrevemos $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$;
2. Para $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, denotaremos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$;
3. Escreveremos $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} ... \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$;
4. Além do mais,
$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{i\partial x_2} \right)^{\alpha_2} ... \left(\frac{\partial}{i\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$
e para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ definimos $D^0 u = u$ para toda função u;
5. Por D_j, para $j = 1, 2, ..., n$, representa-se a derivação parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$;
6. Ω denotará um domínio em $I\!\!R^n$, ou seja, um conjunto aberto e conexo;
7. No caso de trabalharmos com Ω limitado ou de medida finita, explicitaremos no decorrer do texto.
8. A fronteira do conjunto B será representada por ∂B;
9. $A \subset\subset \Omega$ significa que $\overline{A}$ é um conjunto compacto de Ω;
10. $\|\cdot\|_p$, veja página 1;
11. $\|\cdot\|_\infty$, veja página 1;
12. C_0^∞, veja página 3;
13. f_ϵ, veja página 4;

14. $\mathcal{D}'(\Omega)$, veja página 8;

15. $\mathcal{E}'(\Omega)$, veja página 15;

16. $\widehat{f}$, veja página 20;

17. $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}_x$, veja página 24;

18. $\|\cdot\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}$, veja página 33;

19. $\|\cdot\|_{C^{m}(\overline{\Omega})}$, veja página 34;

20. $\|\cdot\|_{C^{m+\alpha}(\overline{\Omega})}$, veja página 34;

21. $W^{k}(\Omega)$, veja página 35;

22. u^{+} e u^{-}, veja página 40;

23. $W^{k,p}(\Omega)$, veja página 43;

24. $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, veja página 43;

25. $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, veja página 52;

26. u_{+}, veja página 100;

27. u_{-}, veja página 101.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

No presente capítulo serão fixadas certas terminologias e alguns resultados a respeito de espaços L^p e da teoria de distribuições, os quais serão utilizados no desenvolver do trabalho. Para isto, supomos que o leitor tenha uma noção básica de integral de Lebesgue e compreenda expressões como funções mensuráveis, funções iguais em quase todo ponto e conjunto de medida nula.

Além disso, faremos um breve tratamento da operação de convolução e da transformada de Fourier, a fim de esclarecer o processo utilizado para se obter solução fundamental de um operador diferencial. Algumas noções a respeito dos espaços de Schauder também serão tratadas, visto que trabalharemos no Capítulo III com esta classe de funções.

1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Trabalharemos com funções mensuráveis em Ω e integráveis a Lebesgue. Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mensurável; } \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ é o espaço de Banach das funções essencialmente limitadas em Ω com a norma

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = supess_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

E, para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg \; dx.$$

No decorrer deste trabalho utilizaremos, em vários momentos, a Desigualdade de Hölder, a qual diz que se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$,

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, com a notação própria, mesmo no caso $p = \infty$ ou $q = \infty$.

Definição 1.1.1 (***O espaço*** $L^p_{loc}(\Omega)$). *Seja $1 \leq p < \infty$. Então $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se, e somente se, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ for mensurável e para qualquer compacto K de Ω*

$$\int_K |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Neste caso diremos que a função mensurável f é localmente integrável em $L^p(\Omega)$.

Proposição 1.1.2 (***Desigualdade de Interpolação***). *Considere a função $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ com $1 \leq p \leq r < \infty$. Então $f \in L^q(\Omega)$ para todo $p \leq q \leq r$ e tem-se a desigualdade*

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde $0 \leq \lambda \leq 1$ verifica $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$.

Demonstração. Caso $p = r$ então $\lambda = \frac{1}{2}$; se $q = p$ temos $\lambda = 1$ e, para $q = r$, $\lambda = 0$. Nos três casos temos, de fato, a igualdade.

Consideremos agora o caso $1 \leq p < q < r$. Então $0 < \lambda < 1$. Logo, pela desigualdade de Hölder

$$\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^{q\lambda} |f|^{q(1-\lambda)} \, dx \leq \left\| |f|^{q\lambda} \right\|_s \left\| |f|^{q(1-\lambda)} \right\|_{\bar{s}}$$

com $s = \frac{p}{q\lambda}$ e $\bar{s} = \frac{r}{q(1-\lambda)}$. Observe que $\frac{1}{s} + \frac{1}{\bar{s}} = q\left(\frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}\right) = 1$. Daí

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^{q\lambda} \|f\|_r^{q(1-\lambda)} \Rightarrow \|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{(1-\lambda)},$$

como queríamos. ∎

1.2 Elementos Básicos Sobre Distribuições

Antes de definirmos o que é uma distribuição vejamos algumas idéias a respeito do espaço das funções testes, o qual está diretamente ligado com esta teoria.

Considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos o suporte da função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ como o conjunto

$$S(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Desta forma definimos o espaço das **funções testes** pelo conjunto $C_0^\infty(\Omega)$, onde

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C};\ f \in C^\infty \text{ e } S(f) \text{ é compacto}\}.$$

Este é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e também denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$. No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ será simplesmente escrito como C_0^∞ ou $\mathcal{D}$.

De modo geral, o conjunto das funções de classe $C^k(\Omega)$ possuindo suporte compacto será indicado por $C_0^k(\Omega)$.

Exemplo 1.2.1. *Para x em $\mathbb{R}^n$, defina*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/\left(\|x\|^2 - 1\right)}, & se\ \|x\| < 1 \\ 0, & para\ \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Então φ é uma função teste real. Além disso, se multiplicarmos φ por uma constante positiva obtemos uma função teste não negativa ρ de modo que $\int \rho = 1$ e $S(\rho) = \overline{B(0,1)}$. Aqui $\|x\|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$.

Exemplo 1.2.2. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Então, dados a em Ω e $\epsilon > 0$, a função*

$$\phi_\epsilon^a(x) = \begin{cases} e^{1/\left(\|x-a\|^2 - \epsilon\right)}, & se\ \|x-a\| < \epsilon \\ 0, & para\ \|x-a\| \geq \epsilon, \end{cases}$$

pertence a C_0^∞ e $S(\phi_\epsilon^a) = \overline{B(a,\epsilon)}$. Logo, escolhendo ϵ pequeno vemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio.

Observação: Considere $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$. A **função regularizante** da função f, denotada por f_ϵ, é definida como

$$f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) f(y)\, dy = \int_\Omega f(x - \epsilon y)\, \rho(y)\, dy,$$

onde fizemos mudança de variáveis escrevendo $f \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ e onde ρ é a função teste real definida no Exemplo 1.2.1.

Alguns resultados de densidade serão utilizados no decorrer do trabalho. Dentre eles estão:

Teorema 1.2.3. *Dados $1 \leq p < \infty$ e um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, o conjunto das funções contínuas em Ω é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Consulte [20, Theorem 3.14, pg. 71] ou o leitor veja a referência [1, Theorem 2.13, pg. 28]. ■

Teorema 1.2.4. *Conhecidos $1 \leq p < \infty$ e um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, o conjunto das funções contínuas em Ω, com suporte compacto, é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Veja [25, Teorema 4.1.5]. ■

Teorema 1.2.5. *Considere $f, \rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tais que $\rho \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, $\int \rho = 1$, $\rho \geq 0$ e $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $\epsilon > 0$ faça $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como*

$$f_\epsilon(x) = \int f(x - \epsilon y)\, \rho(y)\, dy. \tag{1.2.1}$$

Então $f_\epsilon \in L^p$. Além disso, se p for finito e $0 \in S(\rho)$ então

$$\|f_\epsilon - f\|_p \to 0 \quad \textit{quando } \epsilon \to 0.$$

Demonstração. Para $p = 1$, obtemos de (1.1.1) que

$$\begin{aligned}
\int |f_\epsilon(x)|\, dx &\leq \int\int |f(x - \epsilon y)|\, \rho(y)\, dy dx \\
&= \int\int |f(x - \epsilon y)|\, \rho(y)\, dx dy \\
&\leq \int \left[\int |f(x - \epsilon y)|\, dx\right] \rho(y)\, dy = \|f\|_1,
\end{aligned}$$

e, portanto $f_\epsilon \in L^1$.

Quando $p = \infty$, temos por (1.2.1) que

$$|f_\epsilon(x)| \leq \int |f(x-\epsilon y)| \rho(y)\, dy \leq \|f\|_\infty \int \rho(y)\, dy = \|f\|_\infty$$

daí

$$\|f_\epsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

Logo temos que $f_\epsilon \in L^\infty$.

Suponhamos então que $1 < p < \infty$. Vemos que para $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned}
|f_\epsilon(x)|^p &\leq \left[\int |f(x-\epsilon y)| \rho(y)\, dy\right]^p \\
&= \left[\int |f(x-\epsilon y)| \rho^{1/p}(y) \rho^{1/q}(y)\, dy\right]^p \\
&\leq \left[\int |f(x-\epsilon y)|^p \rho(y)\, dy\right] \left[\int \rho(y)\, dy\right]^{p/q} \\
&= \int |f(x-\epsilon y)|^p \rho(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int |f_\epsilon(x)|^p\, dx &\leq \int\int |f(x-\epsilon y)|^p \rho(y)\, dy dx \\
&= \int \rho(y) \left[\int |f(x-\epsilon y)|^p\, dx\right] dy = \|f\|_p^p .
\end{aligned}$$

Assim $\|f_\epsilon\|_p \leq \|f\|_p$ e, portanto, $f_\epsilon \in L^p$, com $1 < p < \infty$. Para demonstrar que $f_\epsilon \to f$ em L^p, $1 \leq p < \infty$, usaremos o argumento de densidade. Neste caso suponha que a função f seja contínua e possua suporte compacto. Então, considerando o caso em que $p > 1$ (quando $p = 1$ o tratamento é similar), seja q o expoente conjugado de p. Deste modo temos

$$\begin{aligned}
|f_\epsilon(x) - f(x)|^p &= \left|\int f(x-\epsilon y) \rho(y)\, dy - \int f(x) \rho(y)\, dy\right|^p \\
&\leq \left[\int |f(x-\epsilon y) - f(x)| \rho(y)\, dy\right]^p \\
&= \left[\int |f(x-\epsilon y) - f(x)| \rho^{1/p}(y) \rho^{1/q}(y)\, dy\right]^p \\
&\leq \left[\int |f(x-\epsilon y) - f(x)|^p \rho(y)\, dy\right] \left[\int \rho(y)\, dy\right]^{p/q} \\
&= \int |f(x-\epsilon y) - f(x)|^p \rho(y)\, dy,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}\int |f_\epsilon(x) - f(x)|^p \, dx &\leq \int \left[\int |f(x-\epsilon y) - f(x)|^p \rho(y) \, dy \right] dx \\ &\leq \int \rho(y) \left[\int |f(x-\epsilon y) - f(x)|^p \, dx \right] dy.\end{aligned}$$

Assim, sejam $S(f)$ e $S(\rho)$ os suportes de f e ρ, respectivamente. Observando que a integral acima em y é apenas no suporte de ρ e que

$$(x,y) \to |f(x-\epsilon y) - f(x)|^p$$

é uniformemente contínua no compacto $A = [S(f) + \epsilon S(\rho)] \times S(\rho)$ e, além disso se anula fora desse conjunto, pois se $f(c-\epsilon s) - f(c) \neq 0$ para algum s no suporte de ρ, temos duas hipóteses a considerar:

1. Se $f(c-\epsilon s) \neq 0$, implicaria que $c \in S(f) + \epsilon S(\rho)$ ou

2. Caso $f(c) \neq 0$, o que nos diz que $c \in S(f) + \epsilon S(\rho)$ já que zero pertence a $S(\rho)$,

daí vemos que dado um número positivo t, é possível escolher um outro número positivo ϵ de modo que

$$|f(x-\epsilon y) - f(x)|^p < \left[\frac{t}{med(A)} \right]^p, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Consequentemente $\|f_\epsilon - f\|_p < t$, completando a prova. ∎

Pode-se mostrar, utilizando argumentos de indução, que a função $f_\epsilon \in C_0^\infty$ se $S(f)$ for compacto e $\rho \in C_0^\infty$.

Teorema 1.2.6. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [25, Teorema 4.2.4]. ∎

Um resultado muito empregado nos diz que se K é um subconjunto compacto não vazio de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma função ψ em $C_0^\infty(\Omega)$ que vale um numa vizinhança de K e $0 \leq \psi \leq 1$ em Ω.

Definição 1.2.7 (***Partição da Unidade***)*. Consideremos* $\Omega \subset I\!R^n$ *um aberto e* $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *uma família de funções teste em* Ω*. Diremos que esta família é uma partição da unidade se*

a) para cada ponto c *de* Ω *existir uma vizinhança* V_c *do ponto* c *que intercepta apenas um número finito dos* $S(\varphi_\alpha)'$ *s;*

b) para todo x *de* Ω, $\sum_{\alpha \in I} \varphi(x) = 1$ *e*

c) sempre que x *estiver em* Ω, $\varphi_\alpha(x) \geq 0$.

Definição 1.2.8 (***Convergência em*** $C_0^\infty(\Omega)$)*. Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $I\!R^n$*. Dizemos que a seqüência* $(\varphi_j)_{j \in I\!N} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *converge a zero em* $C_0^\infty(\Omega)$ *se:*

a) existir um subconjunto compacto K *de* Ω *tal que* $S(\varphi_j) \subset K$, $\forall j = 1, 2, ...$

b) para cada multiíndice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\partial^\alpha \varphi_j$ *converge a zero uniformemente em* K.

Diremos que $(\varphi_j)_{j \in I\!N} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para a função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando $\varphi_j - \varphi \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$.

Exemplo 1.2.9. *Dada qualquer função teste* ψ *e qualquer seqüência* $(a_j)_{j \in I\!N} \subset \mathbb{C}$ *convergindo a zero, a seqüência* $\varphi_j = a_j \psi$ *converge a zero em* $C_0^\infty(\Omega)$.

Para verificarmos isto fixemos $\epsilon > 0$. Sejam α um multiíndice e $\tilde{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{M}$, tal que $|\partial^\alpha \psi(x)| \leq M$, $\forall x \in S(\psi)$. Como $a_j \to 0$, existe $j_0' \in I\!N$ tal que $|a_j| < \tilde{\epsilon}$, $\forall j \geq j_0'$. Daí, notando que $S(\psi)$ é um compacto de Ω e $S(\varphi_j) \subset S(\psi)$ para todo $j = 1, 2, ...$, sejam $x \in S(\psi)$ e $j \geq j_0'$, então

$$\left|\partial^\alpha \varphi_j(x)\right| = |\partial^\alpha a_j \psi(x)| = |a_j| \, |\partial^\alpha \psi(x)| \leq |a_j| \, M < \tilde{\epsilon} M = \epsilon,$$

como queríamos.

Definição 1.2.10 (***Distribuição***)*. Seja* $\Omega \subset I\!R^n$ *um aberto. Denomina-se distribuição um funcional linear* $u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *contínuo.*

Observações: $a)$ O valor da distribuição u na função teste ϕ será denotado por $\langle u, \phi \rangle$ ou $u(\phi)$.

$b)$ Indicaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o conjunto das distribuições definidas em $C_0^\infty(\Omega)$.

$c)$ Tendo em vista que qualquer funcional linear é contínuo se, e somente se, ele for contínuo no ponto zero, então podemos dizer que o funcional linear u é contínuo quando, e somente quando, qualquer seqüência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergindo a zero em $C_0^\infty(\Omega)$, $u(\varphi_j)$ converge a zero em $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.2.11. *Considerando Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e a um ponto de Ω, façamos $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. Então δ_a é uma distribuição e é conhecida como distribuição de* ***Dirac****, neste caso, centrada no ponto a.*

De fato δ_a é um funcional linear, pois $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \in \mathbb{C}$ e se $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{C}$

$$\langle \delta_a, \beta\varphi + \psi \rangle = (\beta\varphi + \psi)(a) = \beta\varphi(a) + \psi(a) = \beta \langle \delta_a, \varphi \rangle + \langle \delta_a, \psi \rangle.$$

Para mostrarmos que δ_a é também contínuo, considere $\epsilon > 0$ e $\varphi_j \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Como $\varphi_j \to 0$ existe um compacto K de Ω tal que $S(\varphi_j) \subset K$ e existe j_0' tal que $|\varphi_j(x)| < \epsilon$, $\forall j \geq j_0'$ e $\forall x \in K$. Logo, sendo $|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)|$, basta tomarmos $j_0 = j_0'$ se $a \in S(\varphi_j)$ senão tome $j_0 = 1$.

Exemplo 1.2.12. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional*

$$\langle T_f, \psi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

é uma distribuição.

Primeiramente vejamos que T_f é um funcional linear. Assim, sejam $\beta \in \mathbb{C}$ e $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \psi \rangle| &\leq \int_\Omega |f(x)|\,|\psi(x)|\,dx = \int_{S(\psi)} |f(x)|\,|\psi(x)|\,dx \\ &\leq \|\psi\|_\infty \int_{S(\psi)} |f(x)|\,dx \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

uma vez que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \langle T_f, \beta\varphi + \psi \rangle &= \int_\Omega f(x)[\beta\varphi + \psi](x)\,dx = \beta \int_\Omega f(x)\varphi(x) + \int_\Omega f(x)\psi(x)\,dx \\ &= \beta \langle T_f, \varphi \rangle + \langle T_f, \psi \rangle . \end{aligned}$$

Agora fixemos $\epsilon > 0$. Seja $\varphi_j \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Então existe um compacto K de Ω tal que $S(\varphi_j) \subset K$, e considerando $\tilde{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{2M}$, onde $M = \int_K |f(x)|\,dx$, existe $j_0 \in I\!N$ tal que

$$\left|\varphi_j(x)\right| < \tilde{\epsilon}, \quad \forall j \geq j_0 \text{ e } \forall x \in K.$$

Daí, se $j \geq j_0$

$$\begin{aligned} \left|\langle T_f, \varphi_j \rangle\right| &\leq \int_{S(\varphi_j)} |f(x)| \left|\varphi_j(x)\right| dx \leq \int_K |f(x)| \left|\varphi_j(x)\right| dx \\ &< \tilde{\epsilon} \int_K |f(x)|\,dx = \tilde{\epsilon} M < \epsilon, \end{aligned}$$

mostrando que T_f é contínuo.

Note que a função f do Exemplo 1.2.12 poderia ser tomada em $L^p_{loc}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, tendo em vista que $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Esta inclusão pode ser mostrada utilizando-se a desigualdade de Hölder.

A proposição seguinte relaciona duas funções f e g de $L^1_{loc}(\Omega)$ com seus funcionais lineares contínuos.

Proposição 1.2.13. *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $\langle T_f, \psi \rangle = \langle T_g, \psi \rangle$ para toda $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então $f = g$ q.t.p em Ω.*

Demonstração. Sejam K um subconjunto compacto de Ω e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x) = 1$, $\forall x \in V_K$, onde V_K é uma vizinhança de K. Estendendo f, g e φ por zero em $\Omega \backslash I\!R^n$, considere $h = f - g$. Então $\varphi h \in L^1(I\!R^n)$ e para cada $\epsilon > 0$ considere a regularizada $(\varphi h)_\epsilon(x) = \int (\varphi h)(x - \epsilon y)\rho(y)\,dy$. Obtemos, denotando $\rho_\epsilon(z) = \rho(z/\epsilon)$,

$$\begin{aligned} (\varphi h)_\epsilon(x) &= \int (\varphi h)(x - \epsilon y)\rho(y)\,dy = \epsilon^{-n} \int (\varphi h)(y)\rho_\epsilon(x - y)\,dy \\ &= \epsilon^{-n} \left[\int f(y)\varphi(y)\rho_\epsilon(x - y)\,dy - \int g(y)\varphi(y)\rho_\epsilon(x - y)\,dy \right] \\ &= \epsilon^{-n} \left[\langle T_f, \varphi\rho_\epsilon \rangle - \langle T_g, \varphi\rho_\epsilon \rangle \right] = \epsilon^{-n} \left[\langle T_f, \psi \rangle - \langle T_g, \psi \rangle \right] = 0, \end{aligned}$$

$\psi = \varphi\rho_\epsilon$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Como $(\varphi h)_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ e $(\varphi h)_\epsilon \to (\varphi h)$ em L^1, deduzimos que $\varphi h = 0$ $q.t.p$ em K. Tomando uma seqüência de compactos K_n da forma

$$K_n = \left\{ x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \text{ e } \|x\| \leq n \right\},$$

vemos que $f = g$ $q.t.p$ em Ω, uma vez que $\cup_{n=1}^\infty K_n = \Omega$. ∎

Quando não houver confusão de notação, a distribuição T_f será escrita simplesmente como f.

1.3 Operações com Distribuições

Se u e v são duas distribuições conhecidas, a distribuição $u + v$ é definida de forma natural, o que equivale a dizer que

$$\langle u + v, \psi \rangle = \langle u, \psi \rangle + \langle v, \psi \rangle \quad \text{para cada } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Com o intuito de definirmos outros tipos de operações envolvendo distribuições, consideremos dois operadores lineares contínuos $L, L' : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que L é o adjunto do operador L', e vice-versa, se e somente se,

$$\int (L\varphi)\,\psi dx = \int \varphi\,(L'\psi)\,dx, \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Neste caso escrevemos $\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L'\psi \rangle$.

Dizer que o operador linear L é contínuo em $C_0^\infty(\Omega)$ significa dizer que $L(\psi_j) \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$ sempre que $\psi_j \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$.

Tendo em vista que $C_0^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, pode-se mostrar que se $L, L' : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ são operadores lineares contínuos tais que, para toda $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L'\psi \rangle$, então existe $\widetilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ linear de modo que $\widetilde{L} = L$ em $C_0^\infty(\Omega)$.

Exemplo 1.3.1 (***Produto por função***). *Considere a função $f \in C^\infty(\Omega)$ e defina o operador $L : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ fazendo $L\varphi = f\varphi$. Facilmente podemos* *mostrar que L é um operador linear contínuo e $L' = L$. Daí, dada uma distribuição u, definamos a distribuição fu pondo*

$$\langle fu, \psi \rangle = \langle u, f\psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Em particular esta fórmula funciona quando f for uma constante.

Um caso interessante é com a distribuição delta de Dirac centrada no ponto $a \in \Omega$, pois

$$\langle f\delta_a, \psi \rangle = \langle \delta_a, f\psi \rangle = f(a)\,\psi(a) = \langle f(a)\,\delta_a, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o que significa que $f\delta_a = f(a)\,\delta_a$.

Exemplo 1.3.2 (***Derivação***). *Sejam $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Estendendo φ e ψ por zero em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ e fazendo integração por partes vemos que*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \psi dx = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx.$$

Desta forma o transposto formal do operador $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é $L' = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Por isto definimos

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \psi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \forall u \in D'(\Omega).$$

Na verdade, por aplicação repetida da fórmula anterior e indução em $|\alpha|$, onde α é um multiíndice, vemos que

$$\langle \partial^\alpha u, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \forall u \in D'(\Omega).$$

Exemplo 1.3.3. *Considere a função de **Heaviside** deslocada de $a \in \mathbb{R}$ dada por*

$$H_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > a \\ 0, & \text{se } x < a. \end{cases}$$

Como H_a está em L^1_{loc} ela define uma distribuição. Neste caso

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dH_a}{dx}, \varphi \right\rangle &= -\langle H_a, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H_a(x)\,\varphi'(x)\,dx \\ &= -lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -\int_a^\infty \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Isto significa que $\dfrac{dH_a}{dx} = \delta_a$.

EXEMPLO 1.3.4. *Sejam $f \in C^{\infty}(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, para cada $j = 1, 2, ..., n$*

$$\frac{\partial (fu)}{\partial x_j} = f\frac{\partial u}{\partial x_j} + u\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

De fato, seja $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial (fu)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle u, f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle u, \varphi\frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle f\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}u, \varphi \right\rangle = \left\langle f\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}u, \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

como gostaríamos de mostrar.

Afirmar que duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ são iguais significa dizer que $\langle u_1, \psi \rangle = \langle u_2, \psi \rangle$, para cada $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Contudo podemos dizer também quando é que duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ são iguais em um aberto U de Ω dizendo que $\langle u_1, \psi \rangle = \langle u_2, \psi \rangle$, $\forall \psi \in C_0^{\infty}(U)$. Fazendo $\psi = 0$ em $\Omega \backslash U$ observamos que $C_0^{\infty}(U) \subset C_0^{\infty}(\Omega)$. Relacionando estes fatos obtemos o seguinte resultado:

TEOREMA 1.3.5. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e suponha que todo ponto c de Ω tenha um aberto U_c contendo c onde*

$$\langle u_1, \psi \rangle = \langle u_2, \psi \rangle, \forall \psi \in C_0^{\infty}(U_c).$$

Então $u_1 = u_2$.

DEMONSTRAÇÃO. Veja [12, Teorema III.1.3, pg. 35]. ■

DEFINIÇÃO 1.3.6 (***Suporte de Distribuição***). *O suporte da distribuição u de $\mathcal{D}'(\Omega)$, indicado por $S(u)$, é a interseção de todos os fechados fora dos quais $u = 0$, isto é, $\langle u, \psi \rangle = 0$ para cada ψ em $C_0^{\infty}(\Omega \backslash S(u))$.*

EXEMPLO 1.3.7. *O suporte da função de Heavisidade H_a é o intervalo fechado $[a, \infty)$.*

Suponha que $c \notin [a, \infty)$ e seja $r = \dfrac{a - c}{2} > 0$. Ainda considere a bola $B(c, r)$ e $\varphi \in C_0^{\infty}(B(c, r))$. Então

$$\langle H_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_a(x)\varphi(x)\,dx = \int_{B(c,r)} H_a(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Logo $c \notin S(H_a)$. Também podemos ver que $[a, \infty) \subset S(H_a)$.

Exemplo 1.3.8. $S(\delta_a) = \{a\}$.

Sejam $c \in I\!R$, $c > a$ e $r = \dfrac{c-a}{2} > 0$. Considere também a bola $B(c,r)$ e $\varphi \in C_0^\infty(B(c,r))$. Então $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$. Donde temos que $c \notin S(\delta_a)$. Da mesma forma se tem a inclusão quando $c < a$ e que $\{a\} \subset S(\delta_a)$.

Exemplo 1.3.9. *Seja $f \in L^1(\Omega)$ tal que $f = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado $F \subset \Omega$. Então f define uma distribuição e $S(f) \subset F$ como distribuição.*

De maneira simples podemos mostrar que qualquer função contínua no aberto Ω pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Mas, o interessante é podermos verificar que os suportes de f, como função ou como distribuição, coincidem.

Teorema 1.3.10. *Suponhamos que as funções u e f, definidas em Ω, sejam contínuas e que*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \psi \right\rangle = \langle f, \psi \rangle \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então u possui derivada clássica $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f$.

Demonstração. Primeiramente adimitamos que $S(u)$ seja compacto. Sendo u contínua, o suporte de u como distribuição ou função coindicem. Além disso $S\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) \subset S(u)$. Assim $S(f)$ é também compacto. Estendendo f e u por zero fora de Ω, considere, para cada $\epsilon > 0$, a função regularizadora de u

$$u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int u(y)\, \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy.$$

Daí obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_j}(x) &= \epsilon^{-n} \int u(y) \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] dy \\
&= -\epsilon^{-n} \int u(y) \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] dy \\
&= \epsilon^{-n} \int \frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\, \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy \\
&= \epsilon^{-n} \int f(y)\, \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy = f_\epsilon(x).
\end{aligned}$$

Sabemos que $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, e que $f_\epsilon \xrightarrow{u} f$ quando $\epsilon \to 0$ uma vez que f é contínua e tem suporte compacto. Além disso, pelo fato que $u_\epsilon \xrightarrow{u} u$, segue que u possui derivada clássica em relação a x_j e $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f$ no sentido clássico.

Agora, dado um ponto c de Ω, escolha uma função teste ψ que vale um numa vizinhança de c. Pelo Exemplo 1.3.4 vemos que

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x_j} = \psi\frac{\partial u}{\partial x_j} + u\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \psi f + u\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

no sentido de distribuição. Tendo em vista que $S(\psi u)$ é compacto e que $\widetilde{u} = \psi u$ e $\widetilde{f} = \psi f + u\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}$ são contínuas e possuem suportes compactos, vemos, aplicando o que foi feito anteriormente para $\widetilde{f}$ e $\widetilde{u}$, que

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x_j} = \psi\frac{\partial u}{\partial x_j} + u\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \psi f + u\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

no sentido clássico. Entretanto $\psi f + u\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} = f$ e $\psi u = u$ numa vizinhança de c. Portanto u possui derivada clássica nesta vizinhança com $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f$ no sentido clássico, completando a prova. ■

Definição 1.3.11 (***Suporte Singular de Distribuição***). *O suporte singular de uma distribuição u de $\mathcal{D}'(\Omega)$, indicado por $SS(u)$, é a interseção de todos os fechados fora dos quais u é C^∞, isto é, $u \in C^\infty(\Omega \backslash SS(u))$.*

Observação: Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é de classe C^∞ no aberto U de Ω se existir uma função $f : U \to \mathbb{C}$ de modo que

$$\langle u, \psi\rangle = \int f(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(U).$$

Exemplo 1.3.12. 1) $SS(H_a) = \{a\}$.

2) *Dada $u \in D'(\Omega)$, então $SS(u) \subset S(u)$.*

De fato, seja $c \in S(u)^c$. Então existe $r > 0$ tal que $B(c,r) \subset S(u)^c$ e, para $\varphi \in C_0^\infty(B(c,r))$, $\langle u, \varphi\rangle = 0$. Seja $f \in C^\infty(B(c,r))$ tal que $f(x) = 0$ $\forall x \in B(c,r)$. Daí $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{B(c,r)} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$. Portanto

$$\langle u, \varphi\rangle = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

donde $c \in SS(u)^c$.

Definição 1.3.13 (***O espaço*** $\mathcal{E}'(\Omega)$). *O conjunto das distribuições de suporte compacto será denotado por* $\mathcal{E}'(\Omega)$, *ou seja*

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\,;\ S(u) \ \text{ é compacto}\}.$$

Teorema 1.3.14. *Seja* $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. *Então existe um único funcional linear* $\widetilde{u} : C^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *tal que*

a) $\widetilde{u}(\varphi) = u(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$;

b) $\widetilde{u}(\psi) = 0$ *se* $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ *e* $S(\psi) \cap S(u) = \emptyset$.

Demonstração da Existência: Dada $f \in C^{\infty}(\Omega)$ escreva $f = f_0 + f_1$, onde $f_0 \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $S(f_1) \cap S(u) = \emptyset$ é uma decomposição qualquer de f nesta forma. Defina $\widetilde{u}(f) = u(f_0)$, com $\widetilde{u}$ linear. Assim vemos que é necessário demonstrar que esta definição independe da decomposição escolhida. Para isto, suponha que $f \in C^{\infty}(\Omega)$ e que

$$f = f_0 + f_1 = \widetilde{f_0} + \widetilde{f_1},$$

onde $f_0, \widetilde{f_0} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $S(f_1) \cap S(u) = \emptyset$ e $S(\widetilde{f_1}) \cap S(u) = \emptyset$. Neste caso devemos mostrar que $\widetilde{u}(f_0) = \widetilde{u}(\widetilde{f_0})$. Como $f_0 - \widetilde{f_0} = f_1 - \widetilde{f_1}$, resulta que

$$S\left(f_0 - \widetilde{f_0}\right) \cap S(u) = \emptyset,$$

de modo que pelo item *b*), $\widetilde{u}\left(f_0 - \widetilde{f_0}\right) = 0$, ou seja, $\widetilde{u}(f_0) = \widetilde{u}(\widetilde{f_0})$, como queríamos.

A Unicidade: Sejam $\widetilde{u_1}$ e $\widetilde{u_2}$ satisfazendo as condições *a*) e *b*). Considere a função $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ valendo um no $S(u)$. Levando em consideração que qualquer função $f \in C^{\infty}(\Omega)$ pode ser escrita da forma

$$f = f\psi + (1 - \psi) f = f_0 + f_1$$

onde $f_0 \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $S(f_1) \cap S(u) = \emptyset$. Então pela linearidade, por *b*) e por *a*) temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{u_1}(f) &= \widetilde{u_1}(f_0) + \widetilde{u_1}(f_1) = \widetilde{u_1}(f_0) = u(f_0) \\ &= \widetilde{u_2}(f_0) = \widetilde{u_2}(f_0) + \widetilde{u_2}(f_1) = \widetilde{u_2}(f), \end{aligned}$$

completando a prova. ■

Pode-se provar que uma forma equivalente de se dizer que o funcional linear u em $C_0^\infty(\Omega)$ é contínuo é mostrar que para cada compacto K de Ω é possível escolher constantes C_K e um número inteiro não negativo N_K tal que para toda $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $S(\psi) \subset K$

$$|\langle u, \psi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq N_K} sup_K |\partial^\alpha \psi| .$$

No intuito de estudar distribuições com suporte compacto com um pouco mais de detalhes vejamos as seguintes definições:

Definição 1.3.15 (***Convergência em*** $C^\infty(\Omega)$). *Consideremos Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a seqüência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ se para cada K compacto de Ω e cada inteiro não negativo n, as derivadas de ordem n de φ_j convergem uniformemente a zero em K quando j tende para o infinito.*

Naturalmente vemos que a convergência a zero em $C_0^\infty(\Omega)$ implica na convergência a zero em $C^\infty(\Omega)$.

Definição 1.3.16 (***Distribuições em*** $C^\infty(\Omega)$). *Dizemos que o funcional linear u definido em $C^\infty(\Omega)$ é contínuo se, e somente se, para cada seqüência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $C^\infty(\Omega)$ convergindo a zero em $C^\infty(\Omega)$ tivermos que $u(\varphi_j) \to 0$ quando j tende para o infinito.*

Reunindo estes conceitos pode-se mostrar (veja [12, Teorema III.2.2, pg. 39]) que um funcional linear u de $C^\infty(\Omega)$ é contínuo quando, e somente quando, existirem um compacto K de Ω, uma constante positiva C e um inteiro não negativo m tais que

$$|\langle u, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} sup_K |\partial^\alpha \psi| , \quad \forall \psi \in C^\infty(\Omega) .$$

Definição 1.3.17 (***Convergência em*** $\mathcal{D}'(\Omega)$). *Dizemos que uma seqüência de distribuições $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para a distribuição u de $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) .$$

Exemplo 1.3.18. *Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $S(\varphi) \subset \overline{B(0,1)}$, $\varphi \geq 0$ e $\int \varphi = 1$. Então, dado $a \in I\!R^n$, a seqüencia (φ_ϵ) dada por $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi\left(\dfrac{a-x}{\epsilon}\right)$ converge para δ_a.*

De fato, considere $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo

$$\begin{aligned}\langle \varphi_\epsilon, \psi \rangle &= \epsilon^{-n}\int \psi(x)\varphi\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right)dx = \int \psi(a-\epsilon y)\varphi(y)\,dy \\ &= \psi_\epsilon(a) \to \psi(a) = \langle \delta_a, \psi\rangle .\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.19. *Seja $(K_n)_{n\in I\!N}$ uma seqüência de compactos tais que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ e $\cup K_n = \Omega$. Assim, tomando $(\varphi_n)_{n\in I\!N}$ uma seqüência de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ tais que $\varphi_n = 1$ em uma vizinhança de K_n e dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então $u_n = \varphi_n u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e u_n converge a u em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Logo $\mathcal{E}'(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Teorema 1.3.20. *Considere $(u_n)_{n\in I\!N}$ uma seqüência de distribuições de $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que a seqüência numérica $(\langle u_n, \varphi\rangle)_{n\in I\!N}$ seja convergente para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Defina*

$$\langle u, \psi\rangle = lim_{n\to\infty}\langle u_n, \psi\rangle, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração. Como $u_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pode-se mostrar facilmente que u é linear.

Para verificarmos a continuidade considere a seqüência $(\varphi_j)_{j\in I\!N}$ de $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Devemos mostrar que $\langle u, \varphi_j\rangle \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$.

Suponha que $\langle u, \varphi_j\rangle$ não convirja a zero em $C_0^\infty(\Omega)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $j_0 \in I\!N$, existe $j \geq j_0$ de modo que $|\langle u, \varphi_j\rangle| \geq \epsilon$, ou seja, $|lim_{n\to\infty}\langle u_n, \varphi_j\rangle| \geq \epsilon$. Logo, para $n \geq n_0$,

$$|\langle u_n, \varphi_j\rangle| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $\varphi_j \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$, existe um compacto $\widetilde{K}$ de Ω tal que $S(\varphi_j) \subset \widetilde{K}$ para todo $j = 1, 2, ...$ e para cada multiíndice α, $\partial^\alpha \varphi_j$ converge uniformemente a zero em $\widetilde{K}$. Como u_n é contínua, fazendo $K = \widetilde{K}$, existem C_K e N_K tais que

$$|\langle u_n, \varphi_j\rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq N_K} sup_K |\partial^\alpha \varphi_j| \to 0,$$

o que é uma contradição. ∎

1.4 Propriedades Básicas da Convolução

Suponha que f e g são funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ e que uma delas possua suporte compacto, digamos que $S(f)$ seja compacto. Então

$$\int f(y)\, g(x-y)\, dy = \int_{S(f)} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

Logo, fazendo uma mudança de variável, vemos que as integrais

$$\int f(x-y)\, g(y)\, dy \quad \text{e} \quad \int f(y)\, g(x-y)\, dy$$

são iguais. Escrevemos isto pela fórmula

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Segue então que $f * g = g * f$. E, na linguagem de distribuição temos,

$$(g * f)(x) = \langle g, \check{f}_x \rangle \quad \text{onde } \check{f}_x(y) = f(x-y), \ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Além das regras acima, podemos mostrar que se f e g forem diferenciáveis em relação à variável x_j, então

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

e, por um processo indutivo

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g),$$

desde que estas expressões façam sentido.

DEFINIÇÃO 1.4.1 (***Convolução de distribuição com função***). *Sejam u em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). A convolução de u com φ é a função indicada por $u * \varphi$, a qual calculada no ponto a é $\langle u, \check{\varphi}_a \rangle$, ou seja, para cada a em $\mathbb{R}^n$,*

$$(u * \varphi)(a) = \langle u, \check{\varphi}_a \rangle,$$

onde $\check{\varphi}_a = \varphi(a-x)$, $\forall x, a \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.4.2. *Considere $c \in \mathbb{R}^n$, δ_c a distribuição de Dirac centrada em c e φ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$(\delta_c * \varphi)(a) = \langle \delta_c, \check{\varphi}_a \rangle = \langle \delta_c, \varphi(a-x) \rangle = \varphi(a-c).$$

Em particular, quando $c = 0$, isto é, $\delta_c = \delta_0 = \delta$, $\delta * \varphi = \varphi$.

Observamos que $u * \varphi$ é uma função, na verdade é uma função de classe C^∞ como nos mostra o:

Teorema 1.4.3. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e a função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), então:*

i) A função $u * \varphi$ é de classe C^∞. E, para qualquer multiíndice α, valem as igualdades:

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi).$$

ii) $S(u * \varphi) \subset S(u) + S(\varphi)$.

Demonstração. Ver [12, Teorema IV.3.1]. ■

Além destas relações pode-se mostrar que a operação de convolução é associativa, ou seja, dadas $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi).$$

Com base no Exemplo 1.3.19 e sendo válida a relação de associatividade pode-se verificar que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $D'(\Omega)$.

Definição 1.4.4 (***Convolução com distribuições***). *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que pelo menos uma delas possua suporte compacto. Então, dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, faz sentido a expressão $u_1 * (u_2 * \varphi)$. Define-se $(u_1 * u_2) * \varphi = u_1 * (u_2 * \varphi)$.*

Exemplo 1.4.5. *Considere $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\delta_0 = \delta$ a distribuição de Dirac centrada em zero. Usando o Exemplo 1.4.2 vemos que,*

$$\begin{aligned} \langle u * \delta, \varphi \rangle &= [(u * \delta) * \check{\varphi}](0) = [u * (\delta * \check{\varphi})](0) \\ &= (u * \check{\varphi})(0) = \langle u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

donde temos que, $u * \delta = u$. *Por outro lado,*

$$\begin{aligned} \langle \delta * u, \varphi \rangle &= [(\delta * u) * \check{\varphi}](0) = [\delta * (u * \check{\varphi})](0) \\ &= (u * \check{\varphi})(0) = \langle u, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Daí resulta que $\delta * u = u * \delta$.

1.5 Transformada de Fourier

DEFINIÇÃO 1.5.1 (***Transformada de Fourier***). *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *A transformada de Fourier da função* f, *indicada por* $\widehat{f}$, *é a função*

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx,$$

onde $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_j \xi_j$.

Utilizando o teorema da convergência dominada pode-se mostrar que $\hat{f}$ é uma função contínual em $\mathbb{R}^n$. Além disso,

$$\left\| \widehat{f} \right\|_\infty \leq \|f\|_1 ,$$

donde temos que $\widehat{f}$ é também limitada. De fato, o Lema de Riemann-Lebesgue nos diz que dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $\xi \to 0$.

Vejamos agora a definição do espaço de Schwarz, chamado de espaço $\mathcal{S}$:

DEFINIÇÃO 1.5.2. *O conjunto das funções* f *de* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com decaimento rápido no infinito, ou seja, para todos os multiíndices* α *e* β, $sup_{\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty$, *é denominado por* $\mathcal{S}$ *ou* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

EXEMPLO 1.5.3. *Claramente* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$. *No entanto, a função* $f(x) = e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *é um exemplo clássico de função de* $\mathcal{S}$ *mas que não pertence a* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

DEFINIÇÃO 1.5.4 (***Convergência em*** $\mathcal{S}$). *Dizemos que a seqüência* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{S}$ *converge a zero em* $\mathcal{S}$, *escrevemos* $\varphi_j \to 0$ *em* $\mathcal{S}$, *se para quaisquer multiíndices* α *e* β, $x^\alpha \partial^\beta \varphi_j(x)$ *tende a zero uniformemente em* $\mathbb{R}^n$. *Também diremos que* $\varphi_j \to \psi$ *em* $\mathcal{S}$ *quando* $\psi_j = \varphi_j - \psi \to 0$ *em* $\mathcal{S}$.

Para quaisquer multiíndices α e β, e φ em $\mathcal{S}$, podemos mostrar, utilizando integração por partes e integrais repetidas, que

$$\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi),$$

e observando que é lícito derivar sob o sinal de integração em relação a qualquer variável ξ_j até ordem $|\beta|$ a expressão $\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx$, podemos obter

$$\widehat{x^\beta \varphi}(\xi) = (-1)^{|\beta|} D^\beta \widehat{\varphi}(\xi).$$

Fazendo uso das duas relações anteriores obtemos

Teorema 1.5.5. *O operador $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, onde $\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ está bem definido e é contínuo.*

Demonstração. Antes de checarmos que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ está bem definido, observemos primeiro que $\mathcal{F}$ é linear e, segundo que para quaisquer multiíndices α e β, e $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \xi^\alpha (-1)^{|\beta|} \widehat{x^\beta \varphi}(\xi) = (-1)^{|\beta|} \widehat{D^\alpha (x^\beta \varphi)}(\xi).$$

Mas então

$$\left|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi)\right| = \left|(-1)^{|\beta|} \widehat{D^\alpha (x^\beta \varphi)}(\xi)\right| \leq \int \left|e^{-ix\cdot\xi} D^\alpha \left(x^\beta \varphi(x)\right)\right| dx = C(\alpha, \beta),$$

onde $C(\alpha,\beta)$ é uma constante, uma vez que $\varphi \in \mathcal{S}$. Donde temos que $\widehat{\varphi}(\xi)$ também está em $\mathcal{S}$. Portanto $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, de modo que $\mathcal{F}$ está bem definido.

Para mostrarmos que $\mathcal{F}$ é contínuo, tomemos uma seqüência $(\varphi_k)_{k\in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ convergindo a zero em $\mathcal{S}$. Então, considerando α e β multiíndices quaisquer, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi_k}(\xi)\right| &\leq \int \left|D^\alpha \left(x^\beta \varphi_k(x)\right)\right| dx \\
&\leq \int \left|\frac{\left(|x|^2+1\right)^{n+1} D^\alpha \left(x^\beta \varphi_k(x)\right)}{\left(|x|^2+1\right)^{n+1}}\right| dx \\
&\leq sup_{\mathbb{R}^n} \left|\left(|x|^2+1\right)^{n+1} D^\alpha \left(x^\beta \varphi_k(x)\right)\right| \int \frac{dx}{\left(|x|^2+1\right)^{n+1}} \\
&= c_k \int \frac{dx}{\left(|x|^2+1\right)^{n+1}} \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty,
\end{aligned}$$

visto que $c_k \to 0$ quando $k \to \infty$, demonstrando que $\mathcal{F}(\varphi_k) \to 0$ em $\mathcal{S}$, completando a prova do teorema. ■

Um exemplo interessante de aplicação das relações já vistas é o seguinte:

Exemplo 1.5.6. *Considere $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in I\!R$. Então a função φ é solução de*

$$\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0 \quad e \quad \varphi(0) = 1.$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação $\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0$, temos que $i\xi\widehat{\varphi}(\xi) - \frac{1}{i}\widehat{\varphi}'(\xi) = 0$ e, donde vemos que $\widehat{\varphi}$ satisfaz a mesma equação diferencial anterior. Logo

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2}\int e^{-x^2/2}dx = (2\pi)^{1/2}e^{-\xi^2/2}.$$

Daí segue que se $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$, $x \in I\!R^n$, então $\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}$.

Teorema 1.5.7. *$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, onde $\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ é continuamente inversível, com*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}.$$

Demonstração. Considere $\varphi \in \mathcal{S}$ e a função $\psi(x) = e^{-|x|^2/2}$. Pelo que vimos no Exemplo 1.5.6 sabemos que $\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}$. Agora, dado $\epsilon > 0$, seja $\psi_\epsilon(x) = \psi(\epsilon x)$. Deste modo

$$\widehat{\psi}_\epsilon(\xi) = \epsilon^{-n}(2\pi)^{n/2}\psi(\xi/\epsilon).$$

Assim podemos inverter a ordem de integração nas integrais abaixo para escrever

$$\begin{aligned}
\int \psi_\epsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi &= \int \psi_\epsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\int e^{-iy\cdot\xi}\varphi(y)\,dy \\
&= \int \varphi(y)\int \psi_\epsilon(\xi)e^{-(y-x)\cdot\xi}d\xi dy = \int \varphi(y)\widehat{\psi}_\epsilon(y-x)\,dy \\
&= \epsilon^{-n}(2\pi)^{n/2}\int \varphi(y)\psi\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right)dy.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança $z = \dfrac{y-x}{\epsilon}$ obtemos,

$$\int \psi_\epsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{n/2}\int \varphi(x+\epsilon z)\psi(z)\,dz.$$

Agora, usando o teorema da convergência dominada e passando o limite com $\epsilon \to 0$, chegamos a

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi,$$

uma vez que $\int \psi(z)\, dz = (2\pi)^{n/2}$.

A continuidade de $\mathcal{F}^{-1}$ é análoga a de $\mathcal{F}$. ■

A importância da transformada de Fourier provém do fato que ela normalmente torna a resolução de uma equação diferencial, aparentemente mais complicada, em uma equação mais simples após sua aplicação. E, tendo em vista a fórmula da inversa, podemos chegar a solução desejada para a equação original.

Algumas relações que auxiliam neste sentido são:

i) $\int \widehat{\varphi}\psi = \int \varphi\widehat{\psi}$; *ii)* $\int \varphi\overline{\psi} = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}$;

iii) $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$; *iv)* $\widehat{\widehat{\varphi}} = (2\pi)^n \check{\varphi}$, onde $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$;

v) $\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.

DEFINIÇÃO 1.5.8 (***Distribuição temperada***). *Chamamos de distribuição temperada qualquer funcional linear contínuo em $\mathcal{S}$. Indicaremos por $\mathcal{S}'$ o conjunto das distribuições temperadas.*

OBSERVAÇÕES: *a)* Uma vez que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}$, o espaço $\mathcal{S}'$ pode ser olhado como subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Deste modo, $\mathcal{S}$ é denso em $\mathcal{S}'$.

b) Como $\mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, vemos que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$.

Em virtude de *i)* temos

DEFINIÇÃO 1.5.9. *Seja $u \in \mathcal{S}'$. A transformada de Fourier de u, indicada por $\widehat{u}$, é definida por*

$$\langle \widehat{u}, \psi \rangle = \left\langle u, \widehat{\psi} \right\rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}.$$

EXEMPLO 1.5.10. *Considere δ_a a distribuição de Dirac centrada no ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$\left\langle \widehat{\delta}_a, \varphi \right\rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int e^{-ix\cdot a} \varphi(x)\, dx = \left\langle e^{-ix\cdot a}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Logo, $\widehat{\delta}_a = e^{-ix\cdot a}$. Em particular, $\widehat{\delta} = 1$.

Considere agora um subconjunto Ω de $I\!R^n$ e uma função $f : \Omega \times I\!R^N \to I\!R$ mensurável. Suponha que para cada compacto K de Ω

$$\int_K dt \int |f(t,x)|\, dx < \infty.$$

Assim, pelo Teorema de Fubini, a função f é integrável em x para quase todo t, e portanto podemos definir a **transformada de Fourier parcial** de f na variável x pondo

$$\widetilde{f}(t,\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(t,x)\, dx.$$

Como função da variável ξ, $\widetilde{f}$ é uma função contínua para quase todo t. Donde temos que $\widetilde{f}$ está em $L^1_{loc}\left(\Omega \times I\!R^N\right)$. Deste modo vemos que a transformada parcial de Fourier consiste simplesmente em congelar (manter fixas) algumas variáveis e realizar a transformada de Fourier nas demais.

Às vezes, para enfatizar a transformada de Fourier parcial na variável x, escrevemos $\widetilde{f}_x$.

No que segue, $\pi_1 : I\!R^n \times I\!R^N \to I\!R$ é a projeção na primeira coordenada.

Definição 1.5.11. *Denotaremos por $C_0^\infty\left(\Omega; \mathcal{S}\left(I\!R^N\right)\right)$ o conjunto das funções ϕ de $\mathcal{S}\left(I\!R^n \times I\!R^N\right)$ tais que $\pi_1(S(\phi))$ é compacto. Também diremos que $\left(\varphi_j\right)_{j\in I\!N}$ de $C_0^\infty\left(\Omega; \mathcal{S}\left(I\!R^N\right)\right)$ converge a zero em $C_0^\infty\left(\Omega; \mathcal{S}\left(I\!R^N\right)\right)$, escrevemos $\varphi_j \to 0$ em $C_0^\infty\left(\Omega; \mathcal{S}\left(I\!R^N\right)\right)$ se φ_j tende a zero em $\mathcal{S}\left(I\!R^n \times I\!R^N\right)$ e se existir um compacto K tal que $\mathcal{S}\left(\varphi_j\right) \subset K \times I\!R^N$.*

O operador $\mathcal{F} : C_0^\infty\left(\Omega; \mathcal{S}\left(I\!R^N\right)\right) \to C_0^\infty\left(\Omega; \mathcal{S}\left(I\!R^N\right)\right)$, dado por $\mathcal{F}(f) = \widetilde{f}_x$, onde

$$\widetilde{f}_x = \widetilde{f}(t,\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(t,x)\, dx,$$

é um operador contínuo e inversível, cuja fórmula da inversa é dada por

$$f(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \widetilde{f}(t,\xi)\, d\xi.$$

Além do mais, para quaisquer multiíndices α e β e $\varphi, \psi \in C_0^\infty\left(\Omega; \mathcal{S}\left(I\!R^N\right)\right)$, valem as relações:

i) $\widetilde{D_x^\alpha \varphi}(t,\xi) = \xi^\alpha \widetilde{\varphi}(t,\xi)$; *ii)* $\widetilde{x^\beta \varphi}(t,\xi) = (-1)^{|\beta|} D_\xi^\beta \widetilde{\varphi}(t,\xi)$;

iii) $\widetilde{D_t^\beta \varphi}(t,\xi) = D_t^\beta \widetilde{\varphi}(t,\xi)$.

Definição 1.5.12 (***Distribuição temperada em*** x). *Qualquer funcional linear contínuo sobre o espaço* $C_0^\infty\left(\Omega;\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ *é dito uma distribuição temperada em* x. *Denota-se o conjunto de tais distribuições por* $\mathcal{D}'\left(\Omega;\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

Definição 1.5.13 (***Transformada parcial de distribuições***). *Considere* u *em* $\mathcal{D}'\left(\Omega;\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$. *A transformada de Fourier parcial de* u, *indicada por* $\widetilde{u}$ *ou* $\widetilde{u}_x$ *quando se quer ressaltar a variável em que está sendo realizada a transformada, é definida por*

$$\langle\widetilde{u},\varphi\rangle = \langle u,\widetilde{\varphi}\rangle, \quad \forall\varphi\in C_0^\infty\left(\Omega;\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right)\right).$$

1.6 Solução Fundamental

Trabalharemos nesta seção no sentido de construir solução fundamental para alguns operadores diferenciais, embora na seqüência tenhamos usado apenas o resultado obtido para o operador laplaciano. Para isto, consideremos um intervalo I de $\mathbb{R}$, contendo a origem. Como vimos no Exemplo 1.3.3, a distribuição $E = H_0$ é tal que $\dfrac{dE}{dx} = \delta$. Suponhamos que quiséssemos resolver a equação

$$\frac{du}{dx} = f, \quad \text{onde } f\in\mathcal{E}'(I).$$

Tomando $u = E * f$, vemos, primeiro, que $u\in\mathcal{D}'(I)$ e, segundo, que

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(E*f) = \left(\frac{dE}{dx}\right)*f = \delta*f = f.$$

Neste caso construímos uma solução u. Isto mostra o quão importante é a função E na presente situação.

Definição 1.6.1 (***Solução Fundamental***). *Seja* $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ *um operador diferencial, onde as funções* a_α *estão definidas em um aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *contendo a origem. Dizemos que* $E\in\mathcal{D}'(\Omega)$ *é uma solução fundamental para o operador* $P(x,D)$ *se* $P(x,D)E = \delta$.

O teorema seguinte nos explica o porque do nome solução fundamental:

Teorema 1.6.2. *Considere* $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ *um operador diferencial com coeficientes constantes e* $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *uma solução fundamental para* $P(D)$. *Sejam* $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Então:*

a) a equação em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $P(D)w = v$ *tem uma solução* $w = E * v$;

b) se $P(D)u = f$, $u = E * f$.

Demonstração. Observe que pelo fato de $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então $w = E * v$ está bem definida e

$$P(D)w = P(D)[E * v] = [P(D)E] * v = \delta * v = v,$$

provando a).

Para verificarmos b), note primeiramente que $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, uma vez que u está em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $P(D)u = f$. Assim faz sentido escrevermos $E * f$. Ainda mais,

$$u = \delta * u = [P(D)E] * u = E * [P(D)u] = E * f,$$

finalizando a prova. ■

Vejamos como encontrar uma solução fundamental para algumas equações diferenciais parciais clássicas.

Inicialmente analisemos o operador de Cauchy-Riemann.

Exemplo 1.6.3. *Consideremos o operador de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right].$$

Então uma solução fundamental é $E = \dfrac{1}{\pi z}$.

De fato, supondo que este operador tenha uma solução fundamental E temperada na variável y, tentemos então obter uma solução fundamental dele efetuando a transformada parcial de Fourier em relação à variável y. Donde temos que

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial x} - \eta \widetilde{E}\right] = \delta(x).$$

Resolvendo esta equação encontramos a solução

$$\widetilde{E}(x,\eta) = 2[H(x) + C(\eta)]e^{\eta x}.$$

Mas, se quisermos que $\widetilde{E}$ seja temperada na variável η, e portanto E na variável y, devemos ter $H(x) + C(\eta) = 0$ sempre que $\eta x > 0$. Assim, olhando os casos $\eta > 0$ e $x > 0$ e $\eta < 0$ e $x < 0$, obtemos que $C(\eta) = -H(\eta)$. Daí,

$$\widetilde{E}(x,\eta) = 2\left[H(x) - H(\eta)\right] e^{\eta x}.$$

De modo que

$$\widetilde{E}(x,\eta) = \begin{cases} 2H(x)\, e^{\eta x}, & \text{caso } \eta < 0 \text{ e} \\ 2\left[H(x) - 1\right] e^{\eta x}, & \text{se } \eta > 0. \end{cases}$$

Portanto, utilizando a fórmula da inversa para $\widetilde{E}(x,\eta)$ na variável η, obtemos

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\eta}\widetilde{E}(x,\eta)\, d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{2H(x)\int_{-\infty}^{0} e^{(x+iy)\eta} d\eta + 2\left[H(x)-1\right]\int_{0}^{\infty} e^{(x+iy)\eta} d\eta\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{H(x)\left.\frac{e^{(x+iy)\eta}}{x+iy}\right|_{\eta=-\infty}^{0} + \left[H(x)-1\right]\left.\frac{e^{(x+iy)\eta}}{x+iy}\right|_{\eta=0}^{\infty}\right\} \\ &= \frac{H(x)}{\pi}\frac{1}{x+iy} - \frac{\left[H(x)-1\right]}{\pi}\frac{1}{x+iy} \\ &= \frac{1}{\pi z}. \end{aligned}$$

Logo $E = \dfrac{1}{\pi z}$ é uma solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann.

Trabalhemos agora com o operador de calor. Isto será considerado no

Exemplo 1.6.4. *Tomemos o operador de calor*

$$P(t,x,D) = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x.$$

Uma solução fundamental deste operador é

$$E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-|x|^2/4t}, & \textit{se } t > 0 \\ 0, & \textit{para } t \leq 0. \end{cases}$$

Neste caso pretendemos resolver a equação $P(t,x,D)\, E = \delta(t)\,\delta(x)$. Suponha que E seja uma solução fundamental temperada em relação à variável x. Efetuando a transformada parcial de Fourier nesta variável encontramos

$$\frac{\partial \widetilde{E}(t,\xi)}{\partial t} + |\xi|^2\, \widetilde{E}(t,\xi) = \delta(t).$$

Com isto, se quisermos que $\widetilde{E}$ seja temperada na variável ξ, e, portanto E na variável x, então

$$\widetilde{E}(t,\xi) = H(t)\, e^{-t|\xi|^2}.$$

Deste modo, utilizando a fórmula de inversão chegamos a

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} e^{-t|\xi|^2} d\xi = H(t) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int e^{ix_j\cdot\xi_j} e^{-t\left|\xi_j\right|^2} d\xi_j.$$

No entanto, o Exemplo 1.5.6 nos mostra que a transformada de Fourier da função $\psi(x) = e^{-|x|^2/2}$, $x \in I\!R$, é $\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{1/2}\, e^{-|\xi|^2/2}$. Assim, com a mudança de variável $\xi_j = s_j/\sqrt{2t}$, obtemos, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j\cdot\xi_j} e^{-t\left|\xi_j\right|^2} d\xi_j &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j\cdot\left(s_j/\sqrt{2t}\right)} e^{-|s_j|^2/2} ds_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}\int e^{i\left(x_j/\sqrt{2t}\right)\cdot s_j} e^{-|s_j|^2/2} ds_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\left(x_j/\sqrt{2t}\right)\cdot s_j} e^{-|s_j|^2/2} ds_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}\widehat{\psi}\left(x_j/\sqrt{2t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}(2\pi)^{1/2}\, e^{-\left|x_j/\sqrt{2t}\right|^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x_j|^2/4t},
\end{aligned}$$

donde temos que

$$E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-|x|^2/4t}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{para } t \leq 0 \end{cases}$$

é uma solução fundamental para o operador de calor.

Vejamos o caso do operador da onda.

Exemplo 1.6.5. *Analisemos o operador de onda*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x.$$

Então uma solução fundamental deste operador é

$$E_+(t,x) = \begin{cases} H(t-x)\, H(t+x) & n = 1; \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left(t^2 - |x|^2\right)^{-1/2}, & \textit{se } |x| < t \\ 0, & \textit{caso } |x| \geq t \end{cases} & n = 2; \\ \dfrac{1}{4\pi|x|}\delta(t - |x|) & n = 3. \end{cases}$$

Suponha que $E(x,t)$ seja uma solução fundamental para o operador de onda temperada na variável x. Assim, efetuando a transformada parcial de Fourier na variável x obtemos

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}}{\partial t^2} + |\xi|^2 \widetilde{E} = \delta(t). \tag{1.6.1}$$

Uma solução U da equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + |\xi|^2 U = 0, \text{ com } U(0,\xi) = 0 \text{ e } U'(0,\xi) = 1$$

é dada por $U(t,\xi) = \dfrac{sen\,(t\,|\xi|)}{|\xi|}$, para $\xi \neq 0$. Portanto, uma solução de $(1.6.1)$, com suporte em $t \geq 0$, é

$$\widetilde{E}_+(t,\xi) = H(t)\frac{sen\,(t\,|\xi|)}{|\xi|}.$$

De modo semelhante, contas simples mostram que a distribuição

$$\widetilde{E}_-(t,\xi) = -H(-t)\frac{sen\,(t\,|\xi|)}{|\xi|}$$

é uma outra solução de (1.6.1) com suporte em $t \leq 0$.

Como podemos ver, $\widetilde{E}_\pm$ são temperadas na variável ξ. No entanto, como $\widetilde{E}_\pm$ não pertence a $L^1(I\!R^n)$, não é possível usar a fórmula de inversão de Fourier para restaurar as distribuições $E_\pm$. Neste caso, introduzimos um fator de convergência (dependendo de ϵ) e fazemos ϵ tender a zero. Considere então a função g dada por $g(\xi) = e^{-\epsilon|\xi|}$. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} E_\pm(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\widetilde{E}_\pm(t,\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}H_\pm lim_{\epsilon\to 0^+}\int e^{ix\cdot\xi}e^{-\epsilon|\xi|}\frac{sen\,(t\,|\xi|)}{|\xi|}d\xi \end{aligned}$$

onde $H_+(t) = H(t)$ e $H_-(t) = -H(-t)$.

Os cálculos não são fáceis, mas nos casos em que $n = 1, 2, 3$ obtemos

$$E_+(t,x) = \begin{cases} H(t-x)\,H(t+x) & n = 1; \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left(t^2 - |x|^2\right)^{-1/2}, & \text{se } |x| < t \\ 0, \quad \text{caso } |x| \geq t \end{cases} & n = 2; \\ \dfrac{1}{4\pi\,|x|}\delta(t - |x|) & n = 3. \end{cases}$$

Estudaremos agora um dos operadores diferenciais mais importantes na teoria das EDP's de segunda ordem, que é o laplaciano. Trabalharemos no intuito de resolver a equação diferencial

$$\Delta E = \delta. \tag{1.6.2}$$

Exemplo 1.6.6. *Uma solução E de $\Delta E = \delta$ é*

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2-n}}{(2-n)\,\omega_n}, & se\ n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} ln\,|x|\,, & para\ n = 2. \end{cases}$$

Uma vez que estamos interessados somente em encontrar uma solução fundamental, o que faremos é procurar soluções que sejam dependentes apenas de

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = |x|\,.$$

Em outros termos, vejamos se é possível selecionar uma função f, definida em $[0,\infty)$, de modo que $E(x) = f(|x|)$ seja uma distribuição temperada. Neste caso teremos que relacionar o laplaciano de E com o da f.

Proposição 1.6.7. *Considere f uma função de classe C^2 definida em $[0,\infty)$. Então $E(x) = f(|x|)\,,\ r = |x|\,,\ x \in I\!R^n$, é tal que*

$$\Delta E(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right] f(r)\,, \quad r \neq 0. \tag{1.6.3}$$

Demonstração. Basta observar que, para $r \neq 0$, $\dfrac{\partial E}{\partial x_j} = f'(r)\,\dfrac{x_j}{r}$ e, portanto

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2} = f''(r)\,\frac{x_j^2}{r^2} + f'(r)\left[\frac{r - x_j^2/r}{r^2}\right].$$

Daí, somando de $j = 1$ a $j = n$, chegamos a expressão $(1.6.3)$. ■

Como pretendemos resolver $(1.6.2)$, observe que $\Delta E = 0$ fora da origem. Assim, para que $E(x) = f(r)$, devemos resolver

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0, \quad \text{com } 0 < r < \infty.$$

Facilmente pode-se verificar que as soluções desta equação diferencial são dadas por

$$f(r) = \begin{cases} ar^{2-n} + b, & \text{se } n \geq 3 \\ aln(r) + b, & \text{para } n = 2. \end{cases} \tag{1.6.4}$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Observe que a função $E(x) = f(|x|)$ é uma função de $L^1_{loc}(I\!R^n)$ e desta forma define uma distribuição. Iremos ver que com uma escolha conveniente da constante a, $E(x) = f(|x|)$ é uma solução fundamental para o laplaciano. Para tanto lançaremos mão da identidade

$$\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi = div(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi),$$

que é válida para quaisquer funções φ e ψ de classe C^2, onde div é o operador divergência. Levando em conta que $E(x) = f(|x|)$ é C^∞ fora da origem, então se $\varphi \in C_0^\infty(I\!R^n)$

$$\langle E, \varphi \rangle = \int E(x)\varphi(x)\,dx = lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\epsilon} E(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.6.5}$$

Logo, se quisermos demonstrar que E é solução fundamental para o laplaciano, devemos checar a igualdade

$$\langle E, \Delta\varphi \rangle = lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\epsilon} E(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(I\!R^n)$. Assim, dada φ em $C_0^\infty(I\!R^n)$, tomemos $R > 0$ tal que $S(\varphi) \subset \overline{B(0,R)}$. Uma vez que $\Delta E = 0$ em $I\!R^n\backslash\{0\}$, então, obtemos que em $I\!R^n\backslash\{0\}$

$$E\Delta\varphi = E\Delta\varphi - \varphi\Delta E = div(E\nabla\varphi - \varphi\nabla E)$$

e daí, denotando $B_\epsilon = \{x;\ \epsilon \leq |x| \leq R\}$ e usando o Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\epsilon} E\Delta\varphi &= \int_{B_\epsilon} E\Delta\varphi = \int_{B_\epsilon} div(E\nabla\varphi - \varphi\nabla E) \\ &= \int_{|x|=\epsilon} (E\nabla\varphi - \varphi\nabla E)\cdot n d\sigma \end{aligned}$$

onde n é o vetor normal unitário exterior a B_ϵ, neste caso, à esfera de centro em 0 e raio ϵ, isto é, apontando para a origem, e $d\sigma$ é o elemento de área nesta esfera. Note que a integral em $|x| = R$ é nula, pois $S(\varphi) \subset \overline{B(0,R)}$. Por outro lado, se denotarmos por $\dot{x}$ a variável em $S^{n-1} = \{x; |x| = 1\}$ e $d\dot{\sigma}$ o elemento de área em S^{n-1}, então $d\sigma = \epsilon^{n-1} d\dot{\sigma}$. Deste modo podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\epsilon} E\Delta\varphi &= \int_{|x|=\epsilon} (E\nabla\varphi - \varphi\nabla E)\cdot n d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[-f(\epsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(\epsilon\dot{x}) + f'(\epsilon)\varphi(\epsilon\dot{x})\right]\epsilon^{n-1} d\dot{\sigma}\end{aligned}$$

uma vez que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \nabla\varphi\cdot n$, $\nabla E = -f'(r)\, n$ e $n = -\dot{x}$. No entanto, de $(1.6.4)$, com $b = 0$, vemos que

$$\begin{cases} f(\epsilon)\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}(\epsilon\dot{x})\,\epsilon^{n-1} \to 0 \quad \text{e} \\ f'(\epsilon)\,\varphi(\epsilon\dot{x})\,\epsilon^{n-1} \to \begin{cases} a(2-n)\,\varphi(0), & \text{se } n > 2 \\ a\varphi(0), & \text{para } n = 2 \end{cases} \end{cases}$$

uniformemente em $\dot{x}$ de S^{n-1}. Daí, usando $(1.6.5)$, trocando φ por $\Delta\varphi$, temos

$$\langle E, \Delta\varphi\rangle = \begin{cases} a(2-n)\,\varphi(0)\displaystyle\int_{S^{n-1}} d\dot{\sigma}, & \text{caso } n > 2 \\ a\varphi(0)\displaystyle\int_{S^{n-1}} d\dot{\sigma} = 2\pi a\varphi(0), & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Portanto basta escolher $a = \dfrac{1}{(2-n)\,\omega_n}$, onde ω_n é a área da esfera unitária em $I\!R^n$, para $n > 2$ e $a = \dfrac{1}{2\pi}$ se $n = 2$, ou seja,

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2-n}}{(2-n)\,\omega_n}, & \text{se } n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} ln\,|x|, & \text{para } n = 2 \end{cases}$$

é solução fundamental para o operador de Laplace.

Um elemento importante que nos permite verificar quando é que a solução de uma equação diferencial parcial é suficientemente regular, dependendo de os dados serem também regulares, são os operadores hipoelípticos definidos como:

Definição 1.6.8. *Sejam Ω um subconjunto aberto do $I\!R^n$, m um número natural e $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq m$, funções. Dizemos que o operador*

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

é hipoelíptico em Ω se $SS(P(x,D)\,u) = SS(u)$ para cada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

De forma equivalente, podemos dizer que o operador $P(x, D)$ é hipoelítico se para cada conjunto aberto U de Ω e para toda u de $\mathcal{D}'(\Omega)$, $u \in C^{\infty}(U)$ sempre que $P(x, D)\, u \in C^{\infty}(U)$.

Considerando um operador diferencial com coeficientes constantes

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} D^{\alpha}$$

e $E \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$ uma solução fundamental de $P(D)$, mostra-se que $P(D)$ é hipoelíptico sempre que E pertence a $C^{\infty}(I\!R^n \backslash \{0\})$. Logo, tendo em vista as soluções fundamentais obtidas anteriormente, podemos concluir que os operadores de Cauchy-Riemann, de calor e de Laplace são hipoelípticos, no entanto o operador de onda não é hipoelítico.

1.7 Os Espaços de Schauder

Definição 1.7.1. *Dizemos que a função $f : X \to I\!R$ é Hölder contínua no subconjunto $A \subset X$ se existirem constantes α $(0 < \alpha < 1)$, $\delta = \delta(A) > 0$ e $K = K(A) > 0$ tais que*

$$|f(t) - f(s)| \leq K\, |t - s|^{\alpha}$$

para $t, s \in A$.

Definição 1.7.2. *Consideramos o espaço $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, das funções Hölder contínuas em $\overline{\Omega}$, tendo o expoente Hölder α $(0 < \alpha < 1)$, com a norma*

$$\|u\|_{C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{\alpha} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty.$$

Dizemos que a função $u \in C^2(\Omega)$ se $D^{\beta} u$ são contínuas em Ω para cada multiíndice β com $|\beta| \leq 2$. Da mesma forma se define quando $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ e, neste caso, definimos a norma em $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, como

$$\|u\|_{C^2\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_2 = \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \underset{1 \leq j \leq n}{máx} \|D_j u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \underset{1 \leq i,j \leq n}{máx} \|D_i D_j u\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Também definimos $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ como a classe das funções $C^{2}\left(\overline{\Omega}\right)$ cujas as derivadas segunda estão em $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Este espaço é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{2+\alpha} = \|u\|_{2} + \underset{1\leq i,j\leq n}{máx} \|D_i D_j u\|_{\alpha} .$$

De um modo geral, se m é um inteiro não negativo, designamos por $C^{m}(\overline{\Omega})$ o espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ que são restrições a $\overline{\Omega}$ de funções diferenciáveis até ordem m e definidas em uma vizinhança aberta de $\overline{\Omega}$. Este é um espaço de Banach na norma

$$\|u\|_{C^{m}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{m} = \sum_{|p|\leq m} \underset{|\beta|=|p|}{máx} \left\|D^{\beta}u\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} .$$

E designamos por $C^{m+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ o espaço das funções de $C^{m}\left(\overline{\Omega}\right)$ cujas as $m-$ ésimas derivadas são Hölder contínuas de ordem $\alpha \in (0,1)$; $C^{m+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ é um espaço de Banach na norma

$$\|u\|_{C^{m+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{m+\alpha} = \|u\|_{m} + \underset{|p|=m}{máx} \|D^{p}u\|_{\alpha} .$$

C A P Í T U L O   I I

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Este capítulo desempenha um papel fundamental para a busca de solução do problema proposto na introdução, pois nele será dada a noção de espaços de Sobolev, além de serem demonstrados resultados básicos a serem aplicados às equações diferenciais parciais. Também demonstraremos os teoremas de imersão contínua e compacta, os quais poderemos constatar no Capítulo IV são de suma importância.

2.1 Derivadas Fracas

Definição 2.1.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multiíndice qualquer. Então a função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é dita a α^{th}* ***derivada fraca*** *de u se satisfizer*

$$\int_\Omega \varphi v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Neste caso escrevemos $D^\alpha u = v$.

Observe que é equivalente dizer que v é a α^{th} derivada da distribuição u. Note também que $D^\alpha u$ é unicamente determinada a menos de um conjunto de medida nula.

Definição 2.1.2. *Dizemos que uma função $u \in W^k(\Omega)$ se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e para todo α com $|\alpha| \leq k$, existem funções $v_\alpha \in L^1_{loc}$ tais que*

$$\int_\Omega \varphi v_\alpha \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^{|k|}(\Omega). \tag{2.1.1}$$

Observação: $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$. De fato, se $u \in C^k(\Omega)$ então $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Assim basta mostrarmos que existem funções $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, com $|\alpha| \leq k$, tais que (2.1.1) é satisfeito. Como $u \in C^k(\Omega)$, tome $v_\alpha = D^\alpha u$.

O resultado seguinte nos dá uma idéia do porque do nome função regularizante na Observação que segue o Exemplo 1.2.2:

Lema 2.1.3. *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, α um multiíndice e suponha que $D^\alpha u$ existe. Então, se dist $(x, \partial\Omega) > \epsilon$, temos que*

$$D^\alpha u_\epsilon(x) = (D^\alpha u)_\epsilon(x).$$

Demonstração. Derivando sob o sinal de integração, obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\epsilon(x) &= D^\alpha\left[\epsilon^{-n}\int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)u(y)\,dy\right] \\ &= \epsilon^{-n}\int_\Omega D^\alpha\rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)u(y)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}\epsilon^{-n}\int_\Omega D^\alpha_y\rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)u(y)\,dy \\ &= \epsilon^{-n}\int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)D^\alpha u(y)\,dy = (D^\alpha u)_\epsilon(x), \end{aligned}$$

donde segue o resultado procurado. ■

Teorema 2.1.4. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multiíndice. Então $v = D^\alpha u$ se, e somente se, existe uma seqüência de funções (u_m) em $C^\infty(\Omega)$ convergindo para u em $L^1_{loc}(\Omega)$ e a seqüência $(D^\alpha u_m)$ converge para v em $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Por hipótese existe uma seqüência $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ e $D^\alpha u_m \to v$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Daí temos que para cada $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_m dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_m D^\alpha\varphi dx \to (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha\varphi dx,$$

pois

$$\int_\Omega |u_m - u|\,|D^\alpha\varphi|\,dx \leq M\int_{S(\varphi)} |u_m - u|\,dx \to 0.$$

Além disso,

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_m dx \to \int_\Omega \varphi v dx, \qquad \forall\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Logo

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Como $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e satisfaz a igualdade precedente, $v = D^{\alpha} u$.

$\Rightarrow$) Fazendo $\epsilon = \dfrac{1}{m}$, considere $u_m = u_{\epsilon}$. Precisamos mostrar que para cada K compacto de Ω e $\delta > 0$ existe $n_0 \in I\!N$ tal que

$$\int_K |u_m - u| \, dx < \delta, \quad \forall m \geq n_0.$$

Sejam K um compacto de Ω e $\delta > 0$ tais que se $x \in K$, $dist(x, \partial\Omega) > \delta$, caso contrário basta trocar δ por um menor. Por argumentos de densidade vamos supor que u seja contínua. Então

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u(x)| &= \left| \int_{\Omega} u(x - \epsilon y) \rho(y) \, dy - u(x) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} u(x - \epsilon y) \rho(y) \, dy - \int_{\Omega} u(x) \rho(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x - \epsilon y) - u(x)| \rho(y) \, dy, \end{aligned}$$

donde temos que

$$\begin{aligned} \int_K |u_m(x) - u(x)| \, dx &\leq \int_K \int_{\Omega} |u(x - \epsilon y) - u(x)| \rho(y) \, dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_K |u(x - \epsilon y) - u(x)| \rho(y) \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} \rho(y) \left[\int_K |u(x - \epsilon y) - u(x)| \, dx \right] dy. \end{aligned}$$

Considerando que a integral acima em y é apenas no suporte de ρ e que a função $(x, y) \to |u(x - \epsilon y) - u(x)|$ é uniformemente contínua em $K \times S(\rho)$ existe n_0 em $I\!N$ tal que $\epsilon = \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n_0} \leq \delta$ para todo $m \geq n_0$ e

$$|u(x - \epsilon y) - u(x)| < \frac{\delta}{med(K)}, \quad \forall (x, y) \in K \times S(\rho).$$

Donde

$$\int_K |u_m(x) - u(x)| \leq \int_{\Omega} \rho(y) \int_K \frac{\delta}{med(K)} dx dy = \delta, \ \forall m \geq n_0.$$

Além disso, temos pelo Lema 2.1.3 que

$$D^{\alpha} u_m(x) = (D^{\alpha} u)_m(x) = v_m(x).$$

Logo, pelo que foi feito anteriormente, $v_m \to v$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ e, daí,

$$D^\alpha u_m \to v \quad \text{em } L^1_{loc}(\Omega),$$

completando a prova. ∎

Observação: Pode-se mostrar que $D_j(uv) = uD_jv + vD_ju$ para toda função $u, v \in W^1(\Omega)$ tal que $uv, uD_jv + vD_ju \in L^1_{loc}(\Omega)$. Também, se $u \in W^1(\Omega)$, $\psi \in C^1(\Omega)$, $\psi^{-1} \in C^1\left(\widetilde{\Omega}\right)$, onde $\widetilde{\Omega} \subset I\!R^n$ é um domínio e $v = u \circ \psi^{-1}$, então $v \in W^1\left(\widetilde{\Omega}\right)$ e

$$D_i u(x) = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} D_{y_j} v(y),$$

para quase todo $x \in \Omega$, $y \in \widetilde{\Omega}$, $y = \psi(x)$.

Lema 2.1.5. *Seja $f \in C^1(I\!R)$, $f' \in L^\infty(I\!R)$ e $u \in W^1(\Omega)$. Então a composta*

$$f \circ u \in W^1(\Omega) \qquad e \qquad D(f \circ u) = f'(u)\, Du.$$

Demonstração. Sejam $j \in \{1, ..., n\}$ e K um compacto de Ω. Então, como por hipótese $f \in C^1(I\!R)$, temos que

$$\int_K |f(u(x))|\, dx < \infty,$$

donde $f \circ u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Também, usando o fato que $f' \in L^\infty(I\!R)$ e $u \in W^1(\Omega)$, temos

$$\int_K |f'(u(x))|\, |D_j u(x)|\, dx \leq \|f'\|_\infty \int_K |D_j u(x)|\, dx < \infty,$$

e daí, $f'(u)\, D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Considere $(u_m) \in C^1(\Omega)$, $m = 1, 2, ...$, de maneira que $u_m \to u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ e $Du_m \to Du$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Então, utilizando o Teorema do Valor Médio, temos que

$$\begin{aligned} \int_K |f(u_m(x)) - f(u(x))|\, dx &= \int_K |f'(c(x))|\, |u_m(x) - u(x)|\, dx \\ &\leq \|f'\|_\infty \int_K |u_m(x) - u(x)|\, dx \to 0 \end{aligned}$$

quando $m \to \infty$, e

$$\begin{aligned}
\int_K |f'(u_m(x))\, D_j u_m(x) - f'(u(x))\, D_j u(x)| dx = & \int_K |f'(u_m(x))\, [D_j u_m(x) - D_j u(x)] \\
& + [f'(u_m(x)) - f'(u(x))]\, D_j u(x)| dx \\
\leq & \int_K |f'(u_m(x))||D_j u_m(x) - D_j u(x)| dx \\
+ & \int_K |f'(u_m(x)) - f'(u(x))||D_j u(x)| dx \\
\leq & \|f'\|_\infty \int_K |D_j u_m(x) - D_j u(x)| dx \\
+ & \int_K |f'(u_m(x)) - f'(u(x))||D_j u(x)| dx.
\end{aligned}$$

Como $u_m \to u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, considerando uma subseqüência de (u_m) se necessário, temos que $u_m \to u$ $q.t.p.$ em K. Sendo f' contínua então $f'(u_m) \to f'(u)$ $q.t.p.$ em K. Daí, fazendo $g_m = f'(u_m)\, D_j u$ temos que $g_m \to g$ $q.t.p.$ em K, onde $g = f'(u)\, D_j u$ e

$$|g_m(x)| = |f'(u_m(x))|\, |D_j u(x)| \leq M\, |D_j u(x)| \in L^1(K).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$lim \int_K f'(u_m(x))\, D_j u_m(x)\, dx = \int_K f'(u(x))\, D_j u(x)\, dx.$$

Logo

$$\int_K |f'(u_m(x)) - f'(u(x))|\, |D_j u(x)|\, dx \to 0.$$

Consequentemente

$$\int_K |f'(u_m(x))\, D_j u_m(x) - f'(u(x))\, D_j u(x)|\, dx \to 0$$

quando $m \to \infty$ e deste modo

$$f(u_m) \to f(u) \quad \text{e} \quad f'(u_m)\, D_j u_m \to f'(u)\, D_j u \quad q.t.p. \text{ em } K.$$

Assim, se $\varphi \in C^1_0(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(x)\, D_j f(u_m(x))\, dx &= -\int_\Omega f(u_m(x))\, D_j \varphi(x)\, dx \\
&\to -\int_\Omega f(u(x))\, D_j \varphi(x)\, dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x) D_j f(u_m(x))\,dx &= \int_\Omega \varphi(x)\left[f'(u_m(x)) D_j u_m(x)\right] dx \\ &\to \int_\Omega \varphi(x)\left[f'(u(x)) D_j u(x)\right] dx.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_\Omega \varphi(x)\left[f'(u(x)) D_j u(x)\right] dx = -\int_\Omega f(u(x)) D_j\varphi(x)\,dx$$

e, portanto

$$D_j(f\circ u) = f'(u) D_j u,$$

donde segue o resultado procurado. ■

As partes positiva e negativa da função u são definidas por

$$u^+(x) = máx\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = máx\{-u(x), 0\}.$$

Claramente

$$u = u^+ - u^- \quad \text{e} \quad |u| = u^+ + u^-.$$

Lema 2.1.6. *Seja $u \in W^1(\Omega)$. Então u^+, u^-, $|u| \in W^1(\Omega)$ e, para $j = 1, ..., n$,*

$$Du^+ = \begin{cases} Du, & se\ u > 0 \\ 0, & para\ u \le 0, \end{cases} \qquad Du^- = \begin{cases} 0, & caso\ u \ge 0 \\ -Du, & quando\ u < 0 \end{cases} \quad e$$

$$D|u| = \begin{cases} Du, & se\ u > 0 \\ 0, & para\ u = 0 \\ -Du, & caso\ u < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $j \in \{1, ..., n\}$. Para $\epsilon > 0$ defina $f_\epsilon : I\!R \to I\!R$ por

$$f_\epsilon(s) = \begin{cases} (s^2+\epsilon^2)^{1/2} - \epsilon, & \text{se } s > 0 \\ 0, & \text{se } s \le 0. \end{cases}$$

Como $f_\epsilon \in C^1(I\!R)$ e $f'_\epsilon \in L^\infty(I\!R)$, o Lema 2.1.5 nos dá que, para cada $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_\epsilon(u(x)) D_j\varphi(x)\,dx &= -\int_\Omega \varphi(x) D_j f_\epsilon(u(x))\,dx \\ &= -\int_{\Omega\cap\{u>0\}} \varphi(x)\frac{u(x) D_j u(x)}{(u^2(x)+\epsilon^2)^{1/2}} dx \\ &\to -\int_{\Omega\cap\{u>0\}} \varphi(x) D_j u(x)\,dx\end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0$. Por outro lado,

$$\int_\Omega f_\epsilon(u(x))\, D_j\varphi(x)\, dx \to \int_\Omega u^+(x)\, D_j\varphi(x)\, dx,$$

donde temos que

$$D_j u^+ = \begin{cases} D_j u, & \text{para } u > 0 \\ 0, & \text{quando } u \leq 0. \end{cases}$$

Agora mostraremos que $u^+ \in W^1(\Omega)$: Seja $K \subset \Omega$ compacto, então

$$\int_K \left|u^+(x)\right| dx = \int_{K\cap\{u>0\}} |u(x)|\, dx \leq \int_K |u(x)|\, dx < \infty \Rightarrow u^+ \in L^1_{loc}(\Omega)$$

e

$$\begin{aligned} \int_K \left|D_j u^+(x)\right| dx &= \int_{K\cap\{u>0\}} |D_j u(x)|\, dx \\ &\leq \int_K |D_j u(x)|\, dx < \infty \Rightarrow D_j u^+ \in L^1_{loc}(\Omega). \end{aligned}$$

Além disso, pelo que vimos anteriormente, temos que para cada $\varphi \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \varphi(x)\, D_j u^+(x)\, dx = -\int_\Omega u^+(x)\, D_j\varphi(x)\, dx.$$

Vejamos agora o caso u^-. Observe inicialmente que $u^- = (-u)^+$. Assim, seja $v = -u$. Então, para cada $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^-(x)\, D_j\varphi(x)\, dx &= \int_\Omega v^+(x)\, D_j\varphi(x)\, dx \\ &= -\int_{\Omega\cap\{v>0\}} \varphi(x)\, D_j v(x)\, dx \\ &= -\int_{\Omega\cap\{u<0\}} \varphi(x)\, D_j(-u(x))\, dx \\ &= -\int_{\Omega\cap\{u<0\}} \varphi(x)\, (-D_j u(x))\, dx. \end{aligned}$$

Logo

$$D_j u^- = \begin{cases} 0, & \text{para } u \geq 0 \\ -D_j u, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Além disso,

$$\int_\Omega \left|u^-(x)\right| dx = \int_{K\cap\{u<0\}} |u(x)|\, dx \leq \int_K |u(x)|\, dx < \infty \Rightarrow u^- \in L^1_{loc}(\Omega)$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left|D_j u^-(x)\right| dx &= \int_{K\cap\{u<0\}} |D_j u(x)|\, dx \\ &\leq \int_K |D_j u(x)|\, dx < \infty \Rightarrow D_j u^- \in L^1_{loc}(\Omega).\end{aligned}$$

Portanto, como $|u| = u^+ + u^-$, temos também que $|u| \in W^1(\Omega)$ e

$$D_j|u| = \begin{cases} D_j u, & \text{caso } u > 0 \\ 0, & \text{quando } u = 0 \\ -D_j u, & \text{se } u < 0, \end{cases}$$

completando a demonstração. ■

LEMA 2.1.7. *Se $u \in W^1(\Omega)$, então $Du = 0$ q.t.p. em qualquer conjunto onde u é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A = \{x \in \Omega : u(x) = k\}$, onde k é uma constante. Caso $k \neq 0$, basta trabalhar com a função $v(x) = u(x) - k$. Senão, como $u \in W^1(\Omega)$, pelo Lema 2.1.6, $u^+, u^- \in W^1(\Omega)$ e, além disso, para cada $j \in \{1, ..., n\}$

$$D_j u = D_j\left(u^+ - u^-\right) = 0, \quad q.t.p \text{ em } A.$$

Logo $Du = 0$ $q.t.p.$ em A. ■

TEOREMA 2.1.8. *Seja $f \in C(\mathbb{R})$ com f' seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ e $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, se $u \in W^1(\Omega)$ temos que $f \circ u \in W^1(\Omega)$. Além disso, denotando como L o conjunto dos pontos de descontinuidade de f, temos que*

$$D(f \circ u) = \begin{cases} f'(u)\, Du, & se\ u \notin L \\ 0, & se\ u \in L. \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando um argumento indutivo podemos reduzir a prova, sem perca de generalidade, ao caso em que f tem somente um "bico" na origem, ou seja, f' é descontínua somente na origem. Considere as funções $f_1,\ f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo $f_1',\ f_2' \in L^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$\begin{aligned} f_1(s) &= f(s) \quad \text{se } s \geq 0 \quad \text{e} \\ f_2(s) &= f(s) \quad \text{para } s \leq 0. \end{aligned}$$

Então

$$f(u(x)) = f_1\left(u^+(x)\right) - f_2\left(-u^-(x)\right).$$

Entretanto, pelos Lemas 2.1.5 e 2.1.6 temos que $f_1 \circ u^+,\ f_2 \circ (-u^-) \in W^1(\Omega)$. Donde $f \circ u \in W^1(\Omega)$. Além disso, para $j \in \{1, ..., n\}$

$$D_j\left(f_1 \circ u^+\right) = f_1'\left(u^+\right) D_j u^+ = \begin{cases} f_1'(u^+) D_j u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{para } u \leq 0 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} D_j\left(f_2 \circ \left(-u^-\right)\right) &= f_2'\left(-u^-\right) D_j\left(-u^-\right) = -f_2'\left(-u^-\right) D_j u^- \\ &= \begin{cases} 0, & \text{para } u > 0 \\ f_2'(-u^-) D_j u, & \text{se } u \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} D_j(f \circ u) &= D_j\left(f_1 \circ u^+\right) - D_j\left(f_2 \circ \left(-u^-\right)\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{caso } u = 0 \\ f_1'(u^+) D_j u - f_2'(-u^-) D_j u, & \text{em } \Omega \backslash \{u = 0\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{caso } u = 0 \\ f'(u) D_j u, & \text{em } \Omega \backslash \{u = 0\}, \end{cases} \end{aligned}$$

completando a prova. ■

2.2 Os Espaços $W^{k,p}(\Omega)$

Definição 2.2.1. *Definimos os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ por*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in W^k(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq k\right\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$, para p finito, é um espaço vetorial normado com a norma definida por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p}$$

e uma norma equivalente seria

$$\|u\|'_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_p .$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach: De fato, seja $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma seqüência de Cauchy. Então, pela definição de norma neste espaço, temos

$$\|D^\alpha (u_n - u_m)\|_p \leq \|u_n - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} .$$

Logo $(D^\alpha u_n)$ é uma seqüência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo, existem funções $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ em $L^p(\Omega)$. Tomando $u = v_\alpha$ com $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ temos que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Desta forma basta mostrarmos que $u \in W^k(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Como $u \in L^p(\Omega)$ então $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Além disso $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ e, para cada $\varphi \in C^1_0(\Omega)$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_n dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi dx \to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx.$$

Por outro lado

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_n dx \to \int_\Omega \varphi v_\alpha dx,$$

portanto

$$\int_\Omega \varphi v_\alpha dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^1_0(\Omega)$$

donde temos $v_\alpha = D^\alpha u$. Logo $u \in W^k(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$.

Outro espaço de Banach é o espaço $W^{k,p}_0(\Omega)$, o qual é constituído pelo fecho de $C^k_0(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

O caso $p = 2$ é especial, sendo os espaços $W^{k,2}(\Omega)$, $W^{k,2}_0(\Omega)$ (algumas vezes escritos $H^k(\Omega)$ e $H^k_0(\Omega)$) espaços de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_k = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

OBSERVAÇÃO: O Teorema 2.1.4 mostra que as funções em $W^{1,p}(\Omega)$, com suporte compacto, estão em $W^{1,p}_0(\Omega)$.

De fato, seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com suporte compacto. Pelo Teorema 2.1.4 existe $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$, $|\alpha| \leq 1$, em $L^1_{loc}(\Omega)$. Seja $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ tal que $\varphi \equiv 1$ em uma vizinhança do suporte de u. Considere $w_m = \varphi u_m$. Então, dado K um compacto de Ω

$$\begin{aligned}\int_K |w_m - u|\,dx &= \int_K |\varphi u_m - \varphi u + (\varphi - 1)\,u|\,dx \\ &\leq \int_K |\varphi|\,|u_m - u|\,dx + \int_K (\varphi - 1)\,udx \\ &\to 0 \ \text{ quando } m \to \infty\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}D_j w_m - D_j(\varphi u) &= D_j w_m - \varphi D_j u - u D_j \varphi \\ &= \varphi D_j u_m + u_m D_j \varphi - \varphi D_j u - u D_j \varphi \\ &= \varphi\,(D_j u_m - D_j u) + D_j \varphi\,(u_m - u)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\int_K |D_j w_m - D_j(\varphi u)|\,dx &\leq \int_K |\varphi|\,|D_j u_m - D_j u|\,dx + \int_K |D_j \varphi|\,|u_m - u|\,dx \\ &\to 0 \quad \text{quando } m \to \infty.\end{aligned}$$

Logo $(w_m) \subset C_0^\infty$ e $w_m \to u$. Portanto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.2.2. *O subespaço $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja Ω_j, $j = 1, 2, ...$, um subdomínio contido estritamente em Ω satisfazendo $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1}$ e $\cup \Omega_j = \Omega$, e seja $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, ...$ uma partição da unidade subordinada a cobertura B_j, onde $B_j = \{\Omega_{j+1} - \overline{\Omega}_{j-1}\}$ e Ω_0 é o conjunto vazio. Então, para qualquer $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\delta > 0$, nós podemos escolher ϵ_j, $j = 1, 2, ...$ satisfazendo

$$dist\,(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1}) \geq \epsilon_j, \qquad \left\|\left(\psi_j u\right)_{\epsilon_j} - \psi_j u\right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^j}.$$

Escrevendo $v_j = \left(\psi_j u\right)_{\epsilon_j}$, temos que dado qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe somente um número finito de v_j não nulas em Ω', uma vez que $\{\psi_j\}$ é uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{B_j\}$. Consequentemente a função $v = \sum_{j=1}^\infty v_j$ está em $C^\infty(\Omega)$ e portanto em $W^{k,p}(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left\|\sum_{j=1}^\infty \psi_j u - \sum_{j=1}^\infty v_j\right\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\|\sum_{j=1}^\infty [v_j - \psi_j u]\right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty \|v_j - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^\infty \frac{\delta}{2^j} = \delta,\end{aligned}$$

completando a prova. ■

O Teorema 2.2.2 mostra que $W^{k,p}(\Omega)$ poderia ser caracterizado pela completude de $C^{\infty}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

2.3 Teoremas de Imersão

Consideramos, nesta seção, que Ω é um domínio de medida finita.

Veremos agora a conhecida Desigualdade de Sobolev para funções em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.3.1 (***de Sobolev***). *Temos que*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega), & \text{para } p < n \\ C^0\left(\overline{\Omega}\right), & \text{caso } p > n. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\|u\|_{np/(n-p)} \leq C \|Du\|_p, && \text{para } p < n \\ &\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_p, && \text{se } p > n. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Demonstração. Primeiramente nós consideraremos $u \in C_0^1(\Omega)$, e então usaremos argumentos de densidade. O resultado será provado em várias etapas:

i) $p = 1$: Seja $x \in \Omega$. Extendendo u como $u \equiv 0$ fora de Ω, então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e para qualquer i, $i = 1, ..., n$, temos

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |D_i u(x)| \, dx_i \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(x)| \, dx_i.$$

Donde

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(x)| \, dx_i$$

e, daí

$$|u(x)|^{n/(n-1)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(x)| \, dx_i \right]^{1/(n-1)}.$$

Nós agora integramos a desigualdade acima com respeito a $x_1, ..., x_n$ e usamos, após cada integração, a desigualdade de Hölder generalizada. Vejamos o que acontece inicialmente com relação a x_1,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{n/(n-1)} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(x)| \, dx_i\right]^{1/(n-1)} dx_1 \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u(x)| \, dx_1\right]^{1/(n-1)} \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(x)| \, dx_i\right]^{1/(n-1)} dx_1\end{aligned}$$

uma vez que $\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u(x)| \, dx_1 = \int |D_1 u(x)| \, dx_1$ é independente de x_1. Desta forma, usando a desigualdade de Hölder para as $n-1$ funções definidas em $I\!R$, com $p_1 = ... = p_{n-1} = n-1$, obtemos

$$\int |u(x)|^{n/(n-1)} dx_1 \leq \left[\int |D_1 u(x)| \, dx_1\right]^{1/(n-1)} \prod_{i=2}^{n} \left[\int \int |D_i u(x)| \, dx_i dx_1\right]^{1/(n-1)}.$$

Esta desigualdade nós integramos agora com respeito a variável x_2, notando que somente o primeiro termo do produtório independe de x_2 e aplicando a desigualdade de Hölder para as $n-1$ funções temos

$$\begin{aligned}\iint |u|^{n/(n-1)} dx_1 dx_2 &\leq \int \left\{ \left[\int |D_1 u| dx_1\right]^{1/(n-1)} \prod_{i=2}^{n} \left[\iint |D_i u| dx_i dx_1\right]^{1/(n-1)} \right\} dx_2 \\ &= \left[\int \int |D_2 u| \, dx_2 dx_1\right]^{1/(n-1)} \times \\ &\quad \int \left\{ \left[\int |D_1 u| dx_1\right]^{1/(n-1)} \prod_{i=3}^{n} \left[\iint |D_i u| dx_i dx_1\right]^{1/(n-1)} \right\} dx_2 \\ &\leq \left[\iint |D_2 u| dx_2 dx_1\right]^{1/(n-1)} \left[\iint |D_1 u| dx_1 dx_2\right]^{1/(n-1)} \times \\ &\quad \prod_{i=3}^{n} \left[\int \int \int |D_i u| \, dx_i dx_1 dx_2\right]^{1/(n-1)}.\end{aligned}$$

Então, por indução nos chegamos a

$$\int ... \int |u(x)|^{n/(n-1)} dx_1 ... dx_n \leq \prod_{i=1}^{n} \left[\int ... \int |D_i u(x)| \, dx_1 ... dx_n\right]^{1/(n-1)}.$$

Como $u \equiv 0$ fora de Ω temos

$$\int_\Omega |u(x)|^{n/(n-1)} dx \leq \prod_{i=1}^{n} \left[\int_\Omega |D_i u(x)| \, dx\right]^{1/(n-1)} = \left[\prod_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i u(x)| \, dx\right]^{1/(n-1)}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{n/(n-1)} &\leq \left[\prod_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u(x)|\, dx\right]^{1/n} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u(x)|\, dx = \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |D_i u(x)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Assim, usando equivalências entre normas, obtemos

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i u(x)|^2\right)^{1/2} dx,$$

donde temos

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|Du\|_1\,, \tag{2.3.2}$$

o que estabelece a desigualdade para o caso $p = 1$.

Para $p > 1$, nós usamos a desigualdade (2.3.2) para obtermos estimativas para $\left\||u|^{\gamma}\right\|_{n/(n-1)}$, onde $\gamma > 1$. Pela regra da cadeia temos

$$\left\||u|^{\gamma}\right\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left\|D|u|^{\gamma}\right\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\Omega} \gamma |u|^{\gamma-1} |Du|\, dx,$$

o que implica

$$\left\||u|^{\gamma}\right\|_{n/(n-1)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int_{\Omega} |u|^{\gamma-1} |Du|\, dx. \tag{2.3.3}$$

Daí, pela desigualdade de Hölder,

$$\left\||u|^{\gamma}\right\|_{n/(n-1)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left\||u|^{\gamma-1}\right\|_q \|Du\|_p\,, \tag{2.3.4}$$

onde $q = \dfrac{p}{p-1}$.

$ii)$ Para $p < n$ escolhemos γ satisfazendo $\dfrac{\gamma n}{n-1} = \dfrac{(\gamma-1)\,p}{p-1}$, isto é, $\gamma = \dfrac{(n-1)\,p}{n-p}$. Então, pela desigualdade (2.3.4), obtemos

$$\|u\|_{np/(n-p)}^{(n-1)p/(n-p)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|u\|_{np/(n-p)}^{(p-1)n/(n-p)} \|Du\|_p\,.$$

Donde, após alguns cálculos, temos

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|Du\|_p\,,$$

como queríamos.

iii) $p > n$: Assumamos primeiramente que $|\Omega| = 1$. Escrevendo

$$\tilde{u} = \frac{|u|\sqrt{n}}{\|Du\|_p}$$

nós temos pelas desigualdades (2.3.2) e de Hölder, que para $\gamma > 1$, $\bar{n} = \dfrac{n}{n-1}$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}^\gamma\|_{\bar{n}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|D\tilde{u}^\gamma\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_\Omega \left[\left(\frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_p}\right)^\gamma \gamma\,|u|^{\gamma-1}\,|Du|\right]dx \\
&= \frac{\gamma}{\|Du\|_p}\int_\Omega \tilde{u}^{\gamma-1}\,|Du|\,dx \leq \frac{\gamma}{\|Du\|_p}\left\|\tilde{u}^{\gamma-1}\right\|_q \|Du\|_p = \gamma\left\|\tilde{u}^{\gamma-1}\right\|_q .
\end{aligned}$$

Donde temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{\gamma\bar{n}} &= \|\tilde{u}^\gamma\|_{\bar{n}}^{1/\gamma} \leq \gamma^{1/\gamma}\left\|\tilde{u}^{\gamma-1}\right\|_q^{1/\gamma} = \gamma^{1/\gamma}\|\tilde{u}\|_{(\gamma-1)q}^{(\gamma-1)/\gamma} \\
&\leq \gamma^{1/\gamma}\|\tilde{u}\|_{\gamma q}^{1-1/\gamma}, \quad \text{sendo } |\Omega| = 1.
\end{aligned}$$

Substituindo γ por valores δ^ν, $\nu = 1, 2, ...$ onde $\delta = \dfrac{\bar{n}}{q} > 1$, temos

$$\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta^\nu} \leq \delta^{\nu\delta^{-\nu}}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta^{\nu-1}}^{1-\delta^{-\nu}}, \quad \nu = 1, 2, ... \tag{2.3.5}$$

Usando esta desigualdade, nós daremos agora uma prova indutiva que

$$\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta^\nu} \leq \delta^{\sum_{\alpha=1}^{\nu}\alpha\delta^{-\alpha}}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}}^{\prod_{\alpha=1}^{\nu}\left(1-\delta^{-\alpha}\right)}. \tag{2.3.6}$$

Nós temos por (2.3.5) que

$$\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta} \leq \delta^{\delta^{-1}}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}}^{1-\delta^{-1}}$$

donde vemos que (2.3.6) acontece para $\nu = 1$ como queríamos. Suponha que (2.3.6) seja válido para $\nu = \lambda \in I\!N$. Então por (2.3.5) temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta^{\lambda+1}} &\leq \delta^{(\lambda+1)\delta^{-(\lambda+1)}}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta^{(\lambda+1)-1}}^{1-\delta^{-(\lambda+1)}} \\
&\leq \delta^{(\lambda+1)\delta^{-(\lambda+1)}}\left[\delta^{\sum_{\alpha=1}^{\lambda}\alpha\delta^{-\alpha}}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}}^{\prod_{\alpha=1}^{\lambda}\left(1-\delta^{-\alpha}\right)}\right]^{1-\delta^{-(\lambda+1)}}
\end{aligned}$$

pela hipótese de indução. E, rearranjando, segue que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta^{\lambda+1}} &\leq \delta^{(\lambda+1)\delta^{-(\lambda+1)}+\left[\sum_{\alpha=1}^{\lambda}\alpha\delta^{-\alpha}\right]\left[1-\delta^{-(\lambda+1)}\right]}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}}^{\prod_{\alpha=1}^{\lambda+1}\left(1-\delta^{-\alpha}\right)} \\
&\leq \delta^{\sum_{\alpha=1}^{\lambda+1}\alpha\delta^{-\alpha}-\delta^{-(\lambda+1)}\sum_{\alpha=1}^{\lambda}\alpha\delta^{-\alpha}}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}}^{\prod_{\alpha=1}^{\lambda+1}\left(1-\delta^{-\alpha}\right)} \\
&\leq \delta^{\sum_{\alpha=1}^{\lambda+1}\alpha\delta^{-\alpha}}\|\tilde{u}\|_{\bar{n}}^{\prod_{\alpha=1}^{\lambda+1}\left(1-\delta^{-\alpha}\right)}
\end{aligned}$$

pois sendo $\delta > 1$, então $\delta^{-\delta^{-(\lambda+1)}\sum_{\alpha=1}^{\lambda}\alpha\delta^{-\alpha}} < 1$. Assim vemos que a hipótese de indução acontece para $\lambda + 1$, também. Logo (2.3.6) é válido para todo $\nu \in \mathbb{N}$ por indução. Além disso, pela desigualdade (2.3.2)

$$\|\tilde{u}\|_{\bar{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_p}\|u\|_{\bar{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_p}\frac{\|Du\|_1}{\sqrt{n}} = \frac{\|Du\|_1}{\|Du\|_p}.$$

Agora, utilizando a desigualdade de Holder e o fato de que $|\Omega| = 1$, vemos que, para $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\|Du\|_1 = \int_\Omega |Du|\, dx \leq \|Du\|_p \|1\|_q = \|Du\|_p\,,$$

donde, $\|\tilde{u}\|_{\bar{n}} \leq \dfrac{\|Du\|_1}{\|Du\|_p} \leq 1$. Logo, reunindo esses resultados com a desigualdade (2.3.6) temos

$$\|\tilde{u}\|_{\bar{n}\delta^\nu} \leq \delta^{\sum_{\alpha=1}^{\nu}\alpha\delta^{-\alpha}} \leq \delta^{\sum_{\alpha=1}^{\infty}\alpha\delta^{-\alpha}} \equiv \chi.$$

Note que a série $\sum_{\alpha=1}^{\infty}\alpha\delta^{-\alpha}$ é convergente aplicando o teste da razão, pois $\delta > 1$. Fazendo $\nu \to \infty$, obtemos

$$\sup_\Omega |\tilde{u}| \leq \chi.$$

Donde temos

$$\sup_\Omega |u| \leq \frac{\chi}{\sqrt{n}}\|Du\|_p\,, \tag{2.3.7}$$

que é a desigualdade procurada com $|\Omega| = 1$.

Para retirar a restrição $|\Omega| = 1$, considere

$$\Omega' = \left\{|\Omega|^{-1/n}x : x \in \Omega\right\}.$$

Daí

$$|\Omega'| = \int_{\Omega'} dy = \int_\Omega \left(|\Omega|^{-1/n}\right)^n dx = \int_\Omega |\Omega|^{-1}\, dx = 1.$$

Sejam $\alpha \in C^\infty(\Omega')$ dada por $\alpha(y) = |\Omega|^{1/n} y$ e $h \in C_0^1(\Omega')$ dada por

$$h(y) = u(\alpha(y)) = u\left(|\Omega|^{1/n} y\right).$$

Então a desigualdade (2.3.7) nos fornece

$$\begin{aligned} \underset{\Omega}{sup}\,|u| &= \underset{\Omega'}{sup}\,|h| \leq \frac{\chi}{\sqrt{n}}\,\|Dh\|_{p,\Omega'} = \frac{\chi}{\sqrt{n}}\left(\int_{\Omega'}|Dh|^p\,dy\right)^{1/p} \\ &= \frac{\chi}{\sqrt{n}}\left(\int_{\Omega'}\left[|\Omega|^{1/n}\left|Du\left(|\Omega|^{1/n}\,y\right)\right|\right]^p dy\right)^{1/p} \\ &= \frac{\chi}{\sqrt{n}}\,|\Omega|^{1/n}\left(\int_{\Omega}|\Omega|^{-1}\,|Du\,(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \frac{\chi}{\sqrt{n}}\,|\Omega|^{1/n-1/p}\,\|Du\|_{p,\Omega}\,, \end{aligned}$$

que é a desigualdade procurada, completando a prova no caso $p > n$.

iv) Agora, para extendermos estes resultados para funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, seja $(u_m) \subset C_0^1(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Para $m_1, m_2 \in I\!N$, temos que a diferença $u_{m_1} - u_{m_2}$ está em $C_0^1(\Omega)$. Daí, aplicando as desigualdades (2.3.1) obtemos

$$\begin{aligned} &\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{np/(n-p)} \leq C\,\|D\,(u_{m_1} - u_{m_2})\|_p\,, \quad \text{para } p < n \\ &sup\,|u_{m_1} - u_{m_2}| \leq C\,|\Omega|^{1/n-1/p}\,\|D\,(u_{m_1} - u_{m_2})\|_p\,, \quad \text{se } p > n. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Além disso, sendo (u_m) uma seqüência de Cauchy em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos, fazendo $m_1, m_2 \to \infty$ que

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha\,(u_{m_1} - u_{m_2})\|_p = \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to 0, \\ \Rightarrow\;& \|D_j\,(u_{m_1} - u_{m_2})\|_p \to 0, \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}\,, \\ \Rightarrow\;& \|D\,(u_{m_1} - u_{m_2})\|_p \to 0. \end{aligned}$$

Logo, por $(2.3.8)$, (u_m) é uma seqüência de Cauchy, para $p < n$, no espaço completo $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ e, no espaço completo $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ para $p > n$. Assim, caso $p < n$, $u_m \to u$ em $L^{np/(n-p)}(\Omega)$, e $u_m \to u$ em $C^o\left(\overline{\Omega}\right)$ se $p > n$, donde vemos que a função u está no espaço desejado de acordo com os valores de p e n.

Então, supondo primeiramente que $p < n$. Temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{np/(n-p)} &\leq \|u - u_m\|_{np/(n-p)} + \|u_m\|_{np/(n-p)} \\ &\leq \|u - u_m\|_{np/(n-p)} + C\,\|Du_m\|_p\,. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $m \to \infty$ e utilizando o Teorema 2.1.4, obtemos

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leq C\,\|Du\|_p\,.$$

E, caso $p > n$, o Teorema 2.1.4 nos dá

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |u| &\leq \sup_{\Omega} |u - u_m| + \sup_{\Omega} |u_m| \\ &\leq \sup_{\Omega} |u - u_m| + C\,|\Omega|^{1/n-1/p} \|Du_m\|_p \\ &\to C\,|\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_p\,, \qquad \text{quando } m \to \infty. \end{aligned}$$

Isto completa a prova do teorema. ■

Um espaço de Banach $\mathcal{B}_1$ é dito **continuamente imerso** em um espaço de Banach $\mathcal{B}_2$ (notação $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$) se existir uma aplicação linear limitada e injetiva de $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$. O Teorema 2.3.1 mostra então que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \begin{array}{l} \nearrow \; L^{np/(n-p)}(\Omega) \quad \text{se } p < n \\ \searrow \; C^o\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{para } p > n. \end{array}$$

Iterando o resultado do Teorema de Sobolev $k-$vezes chegamos a uma extensão para o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$:

Corolário 2.3.2. *As imersões*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \begin{array}{l} \nearrow \; L^{np/(n-kp)}(\Omega) \quad \textit{caso } kp < n \\ \searrow \; C^m\left(\overline{\Omega}\right) \quad \textit{se } 0 \leq m < k - \dfrac{n}{p} \end{array} .$$

são contínuas.

Demonstração. $i)$ Mostraremos, por indução em k, que para $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{np/(n-kp)} \leq C\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,.$$

Pelo Teorema de Sobolev, a desigualdade anterior acontece para $k = 1$.

Suponha que a desigualdade seja válida para $k = \lambda$, e seja $u \in W_0^{\lambda+1,p}(\Omega)$ com $(\lambda + 1)\,p < n$. Então $u \in W_0^{\lambda,p}(\Omega)$, e sendo $\lambda p < n$ podemos aplicar a hipótese de indução para obtermos que $u \in L^{np/(n-\lambda p)}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{np/(n-\lambda p)} \leq C_1\,\|u\|_{W^{\lambda,p}(\Omega)}\,.$$

Como $\|u\|_{W^{\lambda,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{\lambda+1,p}(\Omega)}$ temos

$$\|u\|_{np/(n-\lambda p)} \leq C_1\,\|u\|_{W^{\lambda+1,p}(\Omega)}\,.$$

Além disso, temos também que, para $i = 1, ..., n$, $D_i u \in W_0^{\lambda,p}(\Omega)$, donde (pela hipótese de indução) $D_i u \in L^{np/n-\lambda p}(\Omega)$ e

$$\|D_i u\|_{np/(n-\lambda p)} \leq C_2 \|D_i u\|_{W^{\lambda,p}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{W^{\lambda+1,p}(\Omega)}.$$

Logo $u \in W_0^{1,\tilde{p}}(\Omega)$, onde $\tilde{p} = \dfrac{np}{n-\lambda p}$. E, sendo $(\lambda+1)p < n$, obtemos que $\tilde{p} = \dfrac{np}{n-\lambda p} < n$. Daí, pelo Teorema de Sobolev chegamos a

$$\|u\|_q \leq C_3 \|Du\|_{np/(n-\lambda p)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,\tilde{p}}(\Omega)}$$

onde $q = \dfrac{n\tilde{p}}{n-\tilde{p}} = \dfrac{n\dfrac{np}{n-\lambda p}}{n-\dfrac{np}{n-\lambda p}} = \dfrac{np}{n-(\lambda+1)p}$.

Assim, reunindo as desigualdades anteriores obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{np/[n-(\lambda+1)p]} &\leq C_3 \|u\|_{W^{1,\tilde{p}}(\Omega)} = C_3 \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_{np/(n-\lambda p)} \\
&= C_3 \left(\|u\|_{np/(n-\lambda p)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{np/(n-\lambda p)} \right) \leq C \|u\|_{W_0^{\lambda+1,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde vemos que o resultado é verdadeiro para $k = \lambda + 1$, e portanto para todo k por indução.

ii) Usamos indução em k para mostrar o resultado para $0 \leq m < k - \dfrac{n}{p}$. Vejamos primeiramente o caso $k = 1$. Como $1 - \dfrac{n}{p} < 1$ para $p > n$, a única possibilidade para $m \geq 0$ inteiro é $m = 0$. Logo, pelo Teorema de Sobolev temos que o resultado é válido.

Suponha agora que o resultado aconteça para $k = \lambda$, e seja $u \in W_0^{\lambda+1,p}(\Omega)$. Então, para $j = 1, ..., n$, temos que $D_j u \in W_0^{\lambda,p}(\Omega)$. Com isto, pela hipótese de indução $D_j u \in C^\gamma\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $0 \leq \gamma < \lambda - \dfrac{n}{p}$. Donde segue que $u \in C^{\gamma+1}\left(\overline{\Omega}\right)$ com $0 \leq \gamma + 1 < \lambda + 1 - \dfrac{n}{p}$. Portanto o resultato é válido para $k = \lambda + 1$, e daí para todo k por indução. ∎

Em geral, $W_0^{k,p}(\Omega)$ não pode ser substituído por $W^{k,p}(\Omega)$ no corolário anterior. No entanto esta substituição pode ser feita para uma ampla classe de domínios Ω, por exemplo domínios Ω limitados que satisfazem a condição uniforme do cone interior (isto é, existe um cone fixo K_Ω tal que cada $x \in \partial\Omega$ é um vértice de um cone $K_\Omega(x) \subset \overline{\Omega}$ e congruente com K_Ω), então existe uma imersão

$$W^{k,p}(\Omega) \begin{array}{l} \nearrow L^{np/(n-kp)}(\Omega) \quad \text{se } kp < n \\ \searrow C_B^m\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{se } 0 \leq m < k - \dfrac{n}{p}. \end{array}$$

contínua, onde $C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega);\ D^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \text{ para } |\alpha| \leq m\}$.

As estimativas (2.3.1) e a extensão delas para o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ mostram que uma norma em $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente a $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{1/p}$ poderá ser definida por

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Vejamos aqui que esta equivalência é válida em $W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja, mostraremos que existem constantes positivas β e γ tais que

$$\beta\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \gamma\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Assim, seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 1} |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{1/p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \gamma\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

com $\gamma = 1$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 1} |D^\alpha u|^p\, dx = \int_\Omega |u|^p\, dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^p\, dx \\ &= \|u\|_p^p + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Mas, tendo em vista a Observação seguinte, temos que existe uma constante positiva M onde

$$M^{-1/p}\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|_p + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{1/n}\,\|u\|_{np/(n-p)}.$$

Logo, pelo Teorema de Sobolev, e pelas relações anteriores obtemos

$$\begin{aligned} M^{-1/p} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq |\Omega|^{1/n} \|u\|_{np/(n-p)} + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq C |\Omega|^{1/n} \|Du\|_p + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Portanto, desde que $|\Omega| < \infty$ e $\|Du\|_p \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, fazendo $\beta = \dfrac{M^{-1/p}}{C |\Omega|^{1/n} + 1}$ chegamos a

$$\beta \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} .$$

Observação: Considere a função $f : I\!R^2 \to I\!R$, dada por $f(s,t) = \dfrac{(|s| + |t|)^p}{|s|^p + |t|^p}$, $s^2 + t^2 > 0$. Podemos ver que f é homogênea de ordem zero, e como é contínua no compacto $\Gamma = \{s, t \in I\!R : s^2 + t^2 = 1\}$ assume um máximo $M > 0$ e um mínimo $m > 0$. Daí

$$m(|s| + |t|)^p \leq |s|^p + |t|^p \leq M(|s| + |t|)^p , \quad \forall s, t \in I\!R.$$

Consideremos agora $\mathcal{B}_1$ um espaço de Banach continuamente imerso em um espaço de Banach $\mathcal{B}_2$. Então dizemos que $\mathcal{B}_1$ está **compactamente imerso** em $\mathcal{B}_2$ se o operador de imersão $I : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ é compacto, isto é, a imagem de conjuntos limitados em $\mathcal{B}_1$ é precompacto em $\mathcal{B}_2$. Neste caso vejamos o teorema de compacidade de Kondrachov para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para isto nos valeremos dos dois seguintes resultados:

Teorema 2.3.3 (***de Morrey***). *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. Então $u \in C^\gamma\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$. Além disso, para qualquer bola $B = B_R$*

$$\underset{\Omega \cap B_R}{osc}\, u \leq C R^\gamma \|Du\|_p ,$$

onde $C = C(n,p)$.

Demonstração. Veja [10, Theorem 7.17]. ■

Teorema 2.3.4 (***de Ascoli-Arzelá***). *Seja $K \subset \Omega$ compacto. Toda seqüência equicontínua e simplesmente limitada de funções $f_n : K \to I\!R$ possui uma subseqüência uniformemente convergente.*

Demonstração. Veja [17, Teorema 22, pg. 329]. ∎

Agora vejamos o Teorema de Kondrachov:

Teorema 2.3.5. *O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, com Ω limitado está compactamente imerso:*

i) no espaço $L^q(\Omega)$ para qualquer $q < \dfrac{np}{n-p}$, se $p < n$;

ii) em $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, caso $p > n$.

Demonstração. *ii)* Seja $(u_m) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ com $p > n$, limitada. Então pelo Teorema de Morrey, $u_m \in C^\gamma\left(\overline{\Omega}\right)$ onde $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$, para todo $m \in I\!N$. Além disso (u_m) é uma seqüência equicontínua, pois considere $x_0 \in \Omega$, então dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt[\gamma]{\dfrac{\epsilon}{2M}}$ (aqui $M = C(n,p)L$, onde $C(n,p)$ é a constante que aparece no Teorema de Morrey e L é a constante de limitação de $\|Du_m\|_p$). Daí, se $R = \delta$ e $x \in \Omega$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |u_m(x) - u_m(x_0)| \leq \underset{\Omega \cap B_R}{osc}\, u_m \leq MR^\gamma < \epsilon.$$

Portanto podemos ver que a seqüência (u_m) satisfaz as hipóteses do Teorema de Ascoli-Arzelá. Logo (u_m) possui uma subseqüência (u_{m_k}) que converge uniformemente, digamos para $\overline{u}$.

Como $(u_{m_k}) \subset C^\gamma\left(\overline{\Omega}\right)$ e a convergência é uniforme, então $\overline{u} \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, como queríamos.

i) Inicialmente provaremos o caso $q = 1$.

Seja A um conjunto limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando argumentos de densidade podemos supor que $A \subset C_0^1(\Omega)$. Além disso, seja $M > 0$ tal que $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M$, para toda $u \in A$.

Para $h > 0$, defina $A_h = \{u_h; u \in A\}$ onde u_h é a regularizada de u. Então temos que o conjunto A_h é precompacto (ou seja, possui fecho compacto) em $L^1(\Omega)$.

De fato, se $u \in A$, temos para $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\overline{p}} = 1$

$$\begin{aligned} |u_h(x)| &\leq \int_{|y|\leq 1} \rho(y)\,|u(x - hy)|\,dy \leq \|\rho\|_{\overline{p}}\,\|u\|_p \\ &\leq \|\rho\|_{\overline{p}}\,\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M\,\|\rho\|_{\overline{p}} = C_1 \end{aligned}$$

e, para $j = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} |D_j u_h(x)| &\leq \int_{|y|\leq 1} \rho(y) |D_j u(x - hy)| \, dy \leq \|\rho\|_{\bar{p}} \|D_j u\|_p \\ &\leq \|\rho\|_{\bar{p}} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M \|\rho\|_{\bar{p}} \end{aligned}$$

donde

$$|Du_h(x)| \leq C_2.$$

Logo A_h é um conjunto limitado. Vejamos que A_h é também equicontínuo: seja $x_0 \in \Omega$ e $R > 0$ tal que $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$. Então dado $\epsilon > 0$, tome o número $\delta = mín\left\{R, \dfrac{\epsilon}{2C_2}\right\}$. Daí se $x \in \Omega$ e $|x - x_0| < \delta$ temos, pelo Teorema do Valor Médio, que

$$|u_h(x) - u_h(x_0)| \leq C_2\delta < \epsilon$$

e portanto A_h é equicontínuo. Logo, pelo Teorema 2.3.4, A_h é precompacto (ou seja, possui fecho compacto) em $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ e conseqüentemente em $L^1(\Omega)$.

Agora, para $u \in A$, e utilizando o Teorema do Valor Médio temos

$$\begin{aligned} |u(x) - u_h(x)| &\leq \int_{|y|\leq 1} \rho(y) |u(x) - u(x - hy)| \, dy \\ &\leq h \int_{|y|\leq 1} \rho(y) |Du(x - t_0 hy)| \, dy, \quad \text{para } t_0 \in [0, 1] \\ &\leq h \; sup|\rho| \;\; \|Du\|_1 = hC_3, \end{aligned}$$

então, integrando em x obtemos

$$\int_\Omega |u(x) - u_h(x)| \, dx \leq hC_3 |\Omega|.$$

Donde temos que u_h está uniformemente próxima de u em $L^1(\Omega)$. Como nós mostramos que A_h é precompacto em $L^1(\Omega)$ então A_h é totalmente limitado (veja a Observação seguinte) em $L^1(\Omega)$ para todo $h > 0$. Daí segue que A é totalmente limitado em $L^1(\Omega)$ também, e portanto precompacto (veja [16]). Logo temos que $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^1(\Omega)$.

Vejamos agora a extensão do resultado para $q < \dfrac{np}{n-p}$ arbitrário. Pela Proposição 1.1.2, temos para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_1^\lambda \|u\|_{np/(n-p)}^{1-\lambda}$$

onde $\dfrac{1}{q} = \lambda + (1-\lambda)\dfrac{n-p}{np}$. Daí, pelo Teorema 2.3.1,

$$\|u\|_q \leq C\,\|u\|_1^{\lambda}\,\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-\lambda}.$$

Assim, seja (u_m) uma seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^1(\Omega)$, existe uma subseqüência (u'_m) que converge em $L^1(\Omega)$ e portanto é uma seqüência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Logo

$$\begin{aligned}
\left\|u'_{m_1} - u'_{m_2}\right\|_q &\leq C\left\|u'_{m_1} - u'_{m_2}\right\|_1^{\lambda}\left\|u'_{m_1} - u'_{m_2}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-\lambda}\\
&\leq C\left\|u'_{m_1} - u'_{m_2}\right\|_1^{\lambda}\left(\left\|u'_{m_1}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \left\|u'_{m_2}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{1-\lambda}\\
&\to 0 \ \text{ quando } m_1, m_2 \to \infty,
\end{aligned}$$

donde temos que (u'_m) é uma seqüência de Cauchy em $L^q(\Omega)$ que é completo, e portanto convergente em $L^q(\Omega)$. Daí segue o resultado procurado. ■

Algumas das idéias utilizadas para a demonstração do Teorema de Kondrachov foram vistas em [1, Theorem 6.2, pg. 144] e [10, Theorem 7.22, pg. 160].

Observação: Dizemos que um conjunto K é totalmente limitado se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um número finito de $a_i \in K$, $i = 1, \ldots n$, tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \epsilon).$$

Utilizando argumentos indutivos podemos mostrar também que as imersões

$$W_0^{k,p}(\Omega) \begin{array}{l} \nearrow\ L^{np/(n-kp)}(\Omega) \quad \text{para } kp < n \\ \searrow\ C^m\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{se } 0 \leq m < k - \dfrac{n}{p}, \end{array}$$

são compactas.

É interessante ressaltar que podemos substituir $W_0^{k,p}(\Omega)$ por $W^{k,p}(\Omega)$ desde que Ω seja um domínio limitado com fronteira regular.

CAPÍTULO III

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

O problema de se mostrar a existência de solução para operadores elípticos está intimamente ligado com o de se encontrar estimativas a-priori, pois deste modo pode-se fazer uso de teoremas de fixo para garantir a solubilidade do problema. Ainda mais, o princípio do máximo forte vem como uma forma eficaz de se provar a unicidade desta solução.

Em particular estudamos aqui o caso do operador laplaciano, mostrando que o problema de Dirichlet tem uma única solução na bola e em um domínio limitado Ω qualquer. Para tanto, faz-se uso do conceito de solução fundamental, da equação de Poisson e do potencial Newtoniano, além disso é suposto que o leitor tenha uma certa noção a respeito de pontos regulares.

Também dedicamos uma seção deste capítulo aos teoremas de ponto fixo de Leray-Schauder, por se constituirem como uma forma eficiente de garantia de solução para determinados operados elípticos, sempre que tivermos em mão uma estimativa a-priori

3.1 Princípio do Máximo Forte

Considere a equação diferencial parcial linear

$$P(u) \equiv A(u) + au = f \tag{3.1.1}$$

onde

$$A(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\, u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i},$$

em um domínio limitado $\Omega \subset I\!R^n$, com $\partial\Omega$, a fronteira de Ω, sendo suficientemente suave. Nós assumiremos que $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, $x \in \Omega$, e que as funções a_{ik}, a_i, a e f são todas contínuas em $\overline{\Omega}$, $i, k = 1, 2, ...n$. Assumiremos também que P é elíptico, o que significa dizer que para todo $x \in \Omega$, e qualquer $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \neq 0$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\, \xi_i \xi_k > 0. \tag{3.1.2}$$

Portanto, se $\mathcal{A} = [a_{ik}(x)]$ é a matriz $n \times n$ definida pela parte principal do operador P, (3.1.2) implica que a forma bilinear determina por $\mathcal{A}$ é não negativa, isto é, $(\mathcal{A}\xi, \xi) > 0$, $\forall \xi \in I\!R^n$, $\xi \neq 0$.

Definição 3.1.1 (***Solução clássica***). *Uma solução de* (3.1.1) *é uma função* $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ *que satisfaz* $P(u) \equiv A(u) + au = f$ *em* Ω.

Lema 3.1.2. *Se* $Au \geq 0$ (*resp.* $Au \leq 0$) *em* Ω *e existe* $c \in \Omega$ *tal que* $u(x) \leq u(c)$ (*resp.* $u(x) \geq u(c)$) $\forall x \in \Omega$, *então* $u \equiv u(c)$ *em* $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Assumamos que $Au \geq 0$. Uma prova similar pode ser feita no caso $Au \leq 0$. Suponha que $u(c) = m$ e seja $B = \{x \in \Omega; u(x) = m\}$.

Nós iremos assumir que o lema seja falso. Neste caso B é um subconjunto próprio não-vazio de Ω.

Seja $x_1 \in \Omega \backslash B$. Como Ω é aberto e conexo, ele é conexo por caminhos. Assim podemos ligar x_1 a c por um caminho $\gamma : [0,1] \to \Omega$. Desde que $\gamma([0,1])$ é compacto, existe $\delta > 0$ de modo que se $p \in \gamma([0,1])$, então $dist(p, \partial\Omega) \geq \delta$. Daí, sendo $u(c) > u(x_1)$, existe $\delta_1 < \delta$ tal que $u(c) > u(x)$ em uma bola centrada em x_1 de raio δ_1. Fazendo x_1 movimentar-se ao longo de $\gamma([0,1])$, em direção a c, a fronteira desta bola eventualmente contém um ponto de B. Deste modo, existe uma bola S cujo fecho está contido em Ω e para o qual $\partial S \cap B \neq \emptyset$, mas $S \cap B = \emptyset$. Seja x_0 um ponto de $\partial S \cap B$. Veja a Figura 3.1.2.

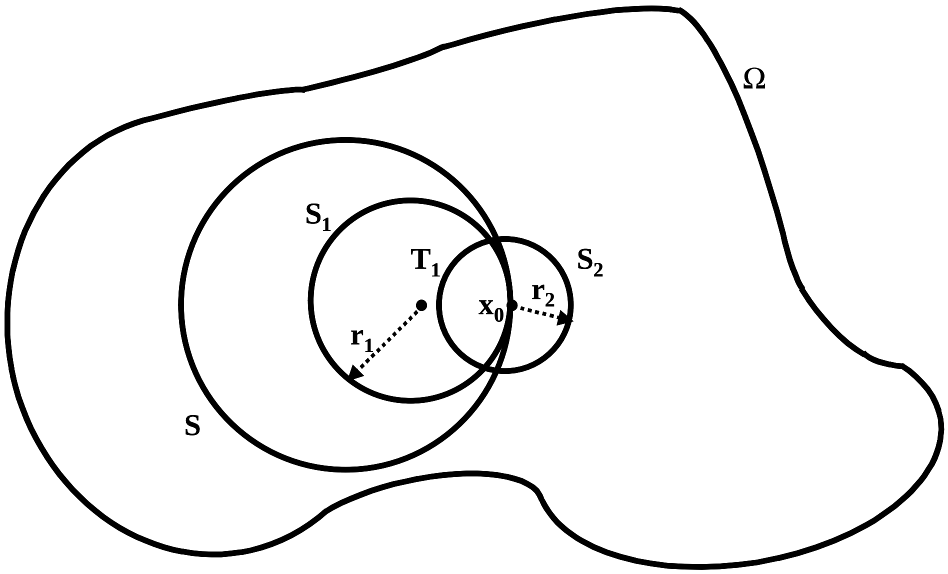

Figura 3.1.2

Seja $S_1 \subset \overline{S}$ uma pequena bola de raio $r_1 < \delta_1$ e centrada em $\bar{x}$ tal que $x_0 \in \partial S_1$. Então $u < m$ em $\overline{S_1} \backslash \{x_0\}$. Considere $S_2 \subset \Omega$ uma terceira bola centrada em x_0 de raio $r_2 < r_1$. Escrevendo $\partial S_2 = T_1 \cup T_2$ onde $T_1 = \partial S_2 \cap \overline{S_1}$, então T_1 é compacto, e sendo $u < m$ em T_1 temos que $u \leq m - \epsilon$ em T_1 para algum $\epsilon > 0$.

Considere a função de comparação

$$h(x) = e^{-\alpha|x-\bar{x}|^2} - e^{-\alpha r_1^2},$$

onde $\alpha > 0$ será escolhido posteriormente. Alguns cálculos nos mostram que

$$e^{\alpha|x-\bar{x}|^2} A(h) = 4\alpha^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_i - \bar{x}_i)(x_k - \bar{x}_k) - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} [a_{ii} + a_i(x_i - \bar{x}_i)] \,. \qquad (3.1.3)$$

Mas, como $r_2 < r_1$, $\bar{x} \notin \overline{S_2}$, pela hipótese de elipticidade, obtemos

$$\varphi(x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_i - \bar{x}_i)(x_k - \bar{x}_k) \geq \sigma > 0, \ \forall x \in S_2.$$

Logo (3.1.3) mostra que $A(h) > 0$ em S_2 para α suficientemente grande.

Sejam $v(x) = u(x) + \epsilon_1 h(x)$ e $k = m\acute{a}x\{h(x); x \in T_1\}$. Então, em T_1 temos, se $\epsilon_1 < \dfrac{\epsilon}{k}$, que valem as relações

$$v(x) \leq m - \epsilon + \epsilon_1 h(x) \leq m - \epsilon + \epsilon_1 k < m.$$

Tendo escolhido $\epsilon_1 < \dfrac{\epsilon}{k}$, nós vemos que em T_2, $h(x) < 0$ sendo $|x - \bar{x}| > r_1$. Portanto

$$v(x) = u(x) + \epsilon_1 h(x) < u(x) \leq m.$$

Assim $v(x) < m$ para cada x em $T_1 \cup T_2 = \partial S_2$. Como $v(x_0) = u(x_0) = m$, nós vemos que v tem um máximo em um ponto $\tilde{x} \in S_2$. Daí $\nabla v(\tilde{x}) = 0$, e para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}(\tilde{x})\, \xi_i \xi_k \leq 0.$$

Mas por elipticidade, nós temos

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\tilde{x})\, \xi_i \xi_k \geq 0.$$

Logo, pelo Lema 3.1.3 a seguir, temos

$$0 \geq \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\tilde{x})\, v_{x_i x_k}(\tilde{x}) = (Av)(\tilde{x}) = (Au)(\tilde{x}) + \epsilon_1 (Ah)(\tilde{x}) > (Au)(\tilde{x}),$$

o que contradiz a hipótese $Au \geq 0$ em Ω. ■

Lema 3.1.3. *Suponha que A e B são matrizes simétricas $n \times n$ com $A \geq 0$ e $B \leq 0$. Então $tr(AB) \leq 0$.*

Demonstração. Como A e B são matrizes simétricas, existem matrizes ortogonais P e Q tais que

$$PAP^{-1} = D_1 \text{ e } QBQ^{-1} = D_2$$

onde D_i são matrizes diagonais e D_1 tem elementos não negativos e D_2 tem elementos não positivos. Além disso, tendo em vista que o traço de um produto de matrizes independe da ordem dos fatores, obtemos

$$tr(AB) = tr\left(PAP^{-1}QBQ^{-1}\right) = tr(D_1 D_2) \leq 0,$$

como queríamos. ■

Teorema 3.1.4 (***Princípio do Máximo***). *Suponha que $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. Se $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$) em $\overline{\Omega}$, então toda solução não constante de (3.1.1) atinge, se existir, seu máximo positivo (resp. mínimo negativo) na fronteira de Ω e não em Ω.*

A demonstração deste teorema está baseada em Smoller [13, Theorem 8.1, pg. 66]. No entanto uma outra referência que também pode ser consultada é Han & Lin [11].

Demonstração. Suponha que $f \geq 0$. Se u tem um máximo positivo em $x_0 \in \Omega$, e $u(x_0) = m$, seja $B = \{x \in \Omega; u(x) = m\}$. Desta forma temos que B é fechado e não-vazio. Além disso, $u(x) \leq u(x_0)$ em uma bola aberta S centrada em x_0 e $u(x) > 0$ em S. Como $A(u) = -au + f \geq 0$ em S, o Lema 3.1.2 mostra que $u(x) = m$, $\forall x \in S$, uma vez que S é aberto. Como Ω é conexo, aplicando a prova em cada ponto de Ω, temos que $u \equiv m$ em Ω. Uma prova similar é construída no caso $f \leq 0$ em Ω. ∎

Corolário 3.1.5. *Sejam u_1 e u_2 soluções de $Pu = f$ em Ω, com $u_i = \phi_i$ na $\partial\Omega$, $i = 1, 2$. Então, se $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$,*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

Demonstração. Escreva $u = u_1 - u_2$. Seja x_0 um ponto da fronteira de Ω tal que $|\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)| \geq |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$, $\forall x \in \partial\Omega$. Então pelo Princípio do Máximo

$$u(x) \leq |\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)|, \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por outro lado, pelo mesmo argumento temos que

$$-u(x) \leq |\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)|, \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo

$$|u(x)| \leq |\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)|, \ \forall x \in \overline{\Omega},$$

donde segue o resultado procurado. ∎

Corolário 3.1.6. *O problema $Pu = f$ em Ω e $u = \phi$ na $\partial\Omega$ tem no máximo uma solução, sendo $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. Suponha que u_1 e u_2 são soluções do problema $Pu = f$ em Ω e $u = \phi$ na $\partial\Omega$. Considere $u = u_1 - u_2$. Então $Pu = 0$ em Ω e $u = 0$ na $\partial\Omega$.

Logo, como u deve atingir seu máximo positivo (mínimo negativo) na $\partial\Omega$ temos que $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Portanto $u_1 \equiv u_2$. ■

Suponha que seja dada a equação $P(u) \equiv A(u) + au = f$ em Ω, onde $f \geq 0$ e $a \leq 0$ em Ω, e que $\partial\Omega$ é suficientemente suave, digamos de classe C^1. Pelo Teorema 3.1.4 sabemos que o máximo de u é atingido em um ponto $p \in \partial\Omega$. Logo

$$\frac{du}{d\nu} \geq 0 \text{ em } p,$$

onde ν é um vetor externo qualquer e $\frac{du}{d\nu}$ denota a derivada direcional de u em p na direção ν. Mas de fato, um resultado ainda mais forte será mostrado a seguir.

Teorema 3.1.7. *Suponha que $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. Considere u uma solução de $P(u) \equiv A(u) + au = f$. Logo, se $f \leq 0$ (resp. $f \geq 0$) em $\overline{\Omega}$, e u atinge seu mínimo negativo em $p \in \partial\Omega$ (resp. máximo positivo), então toda derivada externa direcional de u em p é positiva (resp. negativa) a menos que u seja constante em Ω.*

Para demonstrarmos este teorema, de acordo com [13, Theorem 8.6, pg. 69], vejamos primeiramente o:

Lema 3.1.8. *Suponha que u é contínua em $\overline{\Omega}$, $Au \geq 0$ (resp. $Au \leq 0$) em $\overline{\Omega}$ e que u atinge seu máximo (resp. mínimo) em $p \in \partial\Omega$. Então toda derivada direcional externa de u em p é positiva (resp. negativa) a menos que u seja constante em Ω.*

Demonstração. Suponha que $Au \geq 0$ e que $p \in \partial\Omega$ é o ponto de máximo de u. Como vimos nós podemos encontrar uma bola $B \subset \overline{\Omega}$ com $\partial B \subset \Omega \cup \{p\}$. Seja r o raio desta bola e q o centro de B. Considere ainda uma bola K centrada em p de raio $r/2$. Veja a Figura 3.1.8.

Defina a função auxiliar

$$h(x) = e^{-\alpha|x-q|^2} - e^{-\alpha r^2},$$

onde $\alpha > 0$ será escolhido tão grande de modo que $P(h) > 0$ em K.

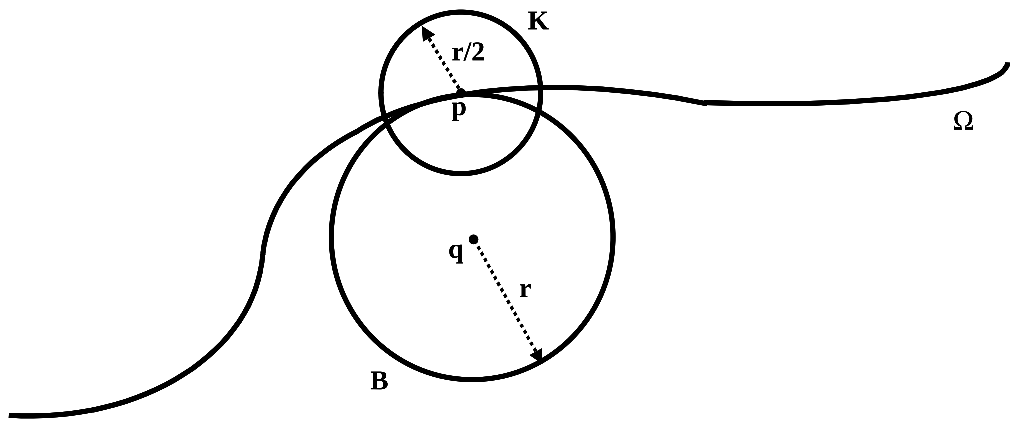

Figura 3.1.8

Defina ainda $v(x) = u(x) + \epsilon h(x)$. Se u não for identicamente $u(p)$, então, pelo Lema 3.1.2 $u < u(p)$ em $\overline{B}\backslash\{p\}$. Desta forma escolha $\epsilon > 0$ pequeno de modo que

$$v(x) \leq v(p) - \delta, \ \forall x \in T_1 = \partial K \cap B,$$

onde

$$\delta = \delta_1 - \epsilon k,$$

$\delta_1 > 0$ é tal que $u(p) = u(\bar{x}) + \delta_1$, com $u(\bar{x}) = máx\{u(x); x \in T_1\}$ e ainda $k = máx\{h(x), x \in T_1\}$. Portanto, considerando $a = 0$ em $\overline{\Omega}$ no princípio do máximo e levando em conta que $Pv = Au + \epsilon Ah \geq 0$, concluímos deste modo que $v(x) \leq v(p), \forall x \in K \cap B$. Sendo $u(x) = v(x) - \epsilon h(x)$, e

$$\frac{dv}{d\nu}(p) = \lim_{t \to 0^-} \frac{v(p + t\nu) - v(p)}{t} \geq 0$$

basta mostrarmos que $\frac{dh}{d\nu}(p) < 0$, para concluirmos que $\frac{du}{d\nu}(p) > 0$. Mas

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -2\alpha(x_i - q_i)e^{-\alpha|x-q|^2}$$

e daí temos que h é diferenciável. Logo $\frac{dh}{d\nu}(p) = \nabla h(p) \cdot \nu$ e sendo ν exterior obtemos que $\frac{dh}{d\nu}(p) < 0$, completando a prova nestas condições. De modo semelhante procedemos a prova no caso $Au \leq 0$. ∎

Demonstração do Teorema 3.1.7. Suponha que $f \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e u atinge seu mínimo negativo em p, o caso $f \geq 0$ segue de forma similar. Além disso suponha também que u é não constante em uma vizinhança do ponto p, pois neste caso não há o que fazer.

Como $\partial\Omega$ é suficientemente suave, digamos de classe C^1, nós podemos encontrar uma bola $B \subset \overline{\Omega}$ satisfazendo $\overline{B} \cap \partial\Omega = \{p\}$ e $u \leq 0$ em $\overline{B}$. Sendo $\dfrac{du}{d\nu}(p) \leq 0$ e $Au = -au + f \leq 0$ em B, então o lema implica que $\dfrac{du}{d\nu}(p) < 0$. ■

Uma generalização destes resultados para os espaços de Sobolev é dado pelo Princípio do Máximo de Aleksandrov, ver [3, Theorem 2]. Para enunciá-lo usaremos as seguintes notações para o operador elíptico

$$P(u) \equiv A(u) + au = f,$$

onde

$$A(u) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}(x)\, u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, u_{x_i}.$$

Aqui $b_{ik} = b_{ki}$, a e c_i são funções mensuráveis bem como $b(x) = det \left\| b_{ik}(x) \right\|$ e $c(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2(x)}$.

Teorema 3.1.9 (***Princípio do Máximo de Aleksandrov***). *Suponha que $a \leq 0$ em Ω e que $b^{-1}c^n$ é integrável em Ω. Então*

i) se $P(u) \geq 0$ (resp. $P(u) \leq 0$) e $u(x_0) > 0$ (resp. $u(x_0) < 0$) para algum x_0 em Ω, então $u(x)$ atinge seu máximo (resp. mínimo) na $\partial\Omega$;

ii) se $P(u) \geq P(v)$ (resp. $P(u) \leq P(v)$) e $u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}$ (resp. $u|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}$), então $u \leq v$ (resp. $u \geq v$);

iii) O problema $P(u) = f$ em Ω e $u = \phi$ na $\partial\Omega$ tem no máximo uma solução. Aqui consideramos $f \in L^p(\Omega)$ e $\phi = \widetilde{\phi}|_{\partial\Omega}$, com $\widetilde{\phi} \in W^{2,p}(\Omega)$.

3.2 Estimativas A-Priori

Uma estimativa a-priori para soluções de uma equação diferencial parcial é simplesmente uma desigualdade que é válida para todas as soluções de um determinado problema cujos os dados e coeficientes obedecem a certas restrições, ou seja, existe uma constante k tal que se u é uma solução do problema então $\|u\| \leq k$ em alguma norma $\|\cdot\|$. Com freqüência, o problema de pertubar a equação $Pu = f$ pode ser considerado através da família de equações

$$A_\epsilon (u) = (1-\epsilon) Q(u) + \epsilon P(u) = f,$$

onde $0 \leq \epsilon \leq 1$ e é conhecida a solução do problema $Q(u) = f$. Considere o conjunto $S = \{\epsilon \in [0,1] : A_\epsilon (u) = f \text{ tem solução}\}$. Então $S \neq \emptyset$.

As estimativas a-priori são usadas para mostrar que S é aberto e/ou fechado. Se pudermos mostrar que S é aberto e fechado ao mesmo tempo, então $S = [0,1]$; sempre que $\epsilon = 1$ está em S o problema original tem solução.

Iniciaremos aqui com um resultado que segue diretamente do princípio do máximo. Considere o seguinte problema em um domínio limitado Ω, com $\partial\Omega$ suficientemente suave:

$$\begin{aligned} P(u) = Au + au = f \quad &\text{em } \Omega \\ u = \phi \quad &\text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

onde $a \leq 0$ em Ω, Au é definida como no início da seção anterior, isto é,

$$A(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i},$$

e P é uniformemente elíptico.

Seja K o limite para as quantidades $|a_{ik}(x)|$, $|a_i(x)|$ e $|a(x)|$ em $\overline{\Omega}$, com $i,k = 1,...,n$.

Teorema 3.2.1. *Se $f \in C(\overline{\Omega})$ e $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ é uma solução de (3.2.1), então existe uma constante $M = M(m, \Omega, K)$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}. \tag{3.2.2}$$

Aqui $m > 0$ é a constante proveniente da desigualdade de elipticidade, isto é, $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq m |\xi|^2$ para cada ξ e para todo x de Ω.

Demonstração. Seja x_0 tal que para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{\Omega}$, $x_1 \geq x_0$. Considere

$$h(x) = \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \left(e^{\alpha\xi} - e^{\alpha(x_1 - x_0)}\right) \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})},$$

onde $\xi > máx\left\{x_1 - x_0 : x \in \overline{\Omega}\right\}$ e $\alpha > 0$ é escolhido tão grande de forma que as desigualdades

$$m\alpha^2 - K(\alpha+1) \geq 1 \;\text{ e }\; e^{\alpha\xi} > 2máx_{x\in\overline{\Omega}} e^{\alpha(x_1-x_0)}$$

sejam válidas. Note que $h(x) \geq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ se $x \in \partial\Omega$. Também, se $\tilde{\xi} = (1, 0, ..., 0)$, então a desigualdade de elipticidade mostra que $a_{11} \geq m$, daí, sendo $a \leq 0$ temos

$$\begin{aligned}
-P(h) &= -Ah - ah \\
&= -a\|\phi\|_\infty + \left[-ae^{\alpha\xi} + e^{\alpha(x_1-x_0)}\left(a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + a\right)\right]\|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\
&\geq \left[-ae^{\alpha\xi} + e^{\alpha(x_1-x_0)}\left(a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + a\right)\right]\|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\
&\geq \left[m\alpha^2 + a + a_1\alpha\right]e^{\alpha(x_1-x_0)}\|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\
&= \left[m\alpha^2 - K(\alpha+1)\right]e^{\alpha(x_1-x_0)}\|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\
&\geq e^{\alpha(x_1-x_0)}\|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \geq \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.
\end{aligned}$$

Isto será usado para mostrar que $|u(x)| \leq h(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, pois se for verdade, para $x \in \overline{\Omega}$

$$|u(x)| \leq h(x) \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M\|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})},$$

onde $M = \underset{x\in\overline{\Omega}}{máx}\left(e^{\alpha\xi} - e^{\alpha(x_1-x_0)}\right) \leq e^{\alpha\xi} - 1$.

Fazendo $v = u - h$, então na $\partial\Omega$,

$$v = \phi - h \leq 0 \;\text{ e }\; Pv = Pu - Ph \geq f + \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \geq 0.$$

Então o Teorema 3.1.4 mostra que $v \leq 0$ em $\overline{\Omega}$, isto é, $u \leq h$ em $\overline{\Omega}$. De modo semelhante, se $v = u + h$, então na $\partial\Omega$,

$$v = \phi + h \geq 0 \;\; e \;\; Pv = Pu + Ph \leq f - \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq 0,$$

e ainda pelo Teorema 3.1.4 temos que $u + h \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, isto é, $u \geq -h$ em $\overline{\Omega}$. Logo $|u(x)| \leq h(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, completando a prova. ■

Observe que se não assumirmos $a \leq 0$, podemos ainda obter uma estimativa da forma

$$\|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq c\left(\|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}\right)$$

onde c depende de K, m e Ω contanto que Ω seja suficientemente limitado em uma determinada direção, digamos a x_1- direção. Mais precisamente a desigualdade acima aconteceria se $\left(e^{\alpha\xi}-1\right)\|a\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}<1$, onde ξ e α são como na prova do Teorema 3.2.1.

Para ver isto, seja $b(x)=m\acute{\imath}n\,(a(x),0)$ e escreva a equação como

$$A(u)+bu=(b-a)\,u+f=g.$$

Nós podemos aplicar (3.2.2) para a equação $A(u)+bu=g$ donde obtemos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)} &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\left(e^{\alpha\xi}-1\right)\|g\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}\\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\left(e^{\alpha\xi}-1\right)\left(\|f\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}+\|u\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}\|a\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}\right)\end{aligned}$$

e daí

$$\|u\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}\leq\frac{\|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\left(e^{\alpha\xi}-1\right)\|f\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}}{1-\left(e^{\alpha\xi}-1\right)\|a\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}}.$$

Observamos também que isto implica na unicidade de solução do problema $(3.2.1)$. De fato, suponha que u_1 e u_2 são soluções de $(3.2.1)$. Seja $u=u_1-u_2$, então $Pu=0$ em Ω e $u=0$ na $\partial\Omega$. Logo (3.2.2) implica que $\|u\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}=0$, donde, $u=0$. Portanto $u_1=u_2$.

3.3 O Problema de Dirichlet

A garantia de existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet, em um domínio Ω qualquer, está baseada na equação de Poisson e em propriedades do potencial newtoniano. Também necessitamos de algumas idéias a respeito de ponto regular. Inicialmente vejamos o problema de Dirichlet na bola.

Teorema 3.3.1. *Considere a bola $B=B(0,R)$ e φ uma função contínua na ∂B. Então a função u definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B} \dfrac{\varphi(y)}{|x-y|^n} ds_y, \ \ \textit{para } x \in B \\ \\ \varphi(x), \ \ \textit{quando } x \in \partial B \end{cases} \tag{3.3.1}$$

está em $C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ *e satisfaz* $\Delta u = 0$ *em* B.

Demonstração. Para verificarmos a continuidade de u na ∂B, considere a fórmula de Poisson (veja [10, pg. 20]) para a função harmônica em B, $v \equiv 1$, que é:

$$1 = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{1}{|x-y|^n} ds_y, \text{ para } x \in B \text{ e } y \in \partial B. \tag{3.3.2}$$

Então, seja $x_0 \in \partial B$ e $\epsilon > 0$. Como φ é contínua na ∂B, escolha $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\epsilon}{4} \text{ sempre que } |x - x_0| < \delta_1, \quad x \in \partial B.$$

Considere $\|\varphi\|_\infty = M$. Logo, se $|x - x_0| < \dfrac{\delta_1}{2}$, por (3.3.1) e (3.3.2)

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &= \left| \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{|x-y|^n} ds_y \right| \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B \cap \{|y - x_0| \leq \delta_1\}} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x_0)|}{|x-y|^n} ds_y \\ &\quad + \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B \cap \{|y - x_0| > \delta_1\}} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x_0)|}{|x-y|^n} ds_y \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{ds_y}{|x-y|^n} + \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right)}{\omega_n R} \int_{\partial B \cap \{|y - x_0| > \delta_1\}} \frac{ds_y}{|x-y|^n} \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right)}{(\delta_1/2)^n} \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B} ds_y \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{2MR^{n-2}}{(\delta_1/2)^n} \left(R^2 - |x|^2\right) \\ &= \frac{\epsilon}{4} + C(n, R) \left(R^2 - |x|^2\right). \end{aligned}$$

Considere $\delta < \delta_1$ tal que se $|x - x_0| < \delta$ então $\left|C(n,R)\left(R^2 - |x|^2\right)\right| < \dfrac{\epsilon}{4}$. Logo $|u(x) - u(x_0)| < \epsilon$ para todo $|x - x_0| < \delta$, donde temos que u é contínua na ∂B.

Seja agora $x_0 \in B$. Escolha $r > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r)} \subset B$. Assim temos que a função $h_1(x,y) = \dfrac{1}{|x-y|^n}$, $(x,y) \in \overline{B(x_0,r)} \times \partial B$ é uniformemente contínua. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$, porém menor que r tal que

$$|h_1(x,y) - h_1(x_0,y)| < \frac{\epsilon}{4MR^n}, \quad \forall (x,y) \in \overline{B(x_0,r)} \times \partial B,$$

onde $M = \|\varphi\|_{\infty}$. Fazendo o mesmo tipo de análise, pode-se mostrar que a função $h_2(x,y) = \dfrac{|x|^2}{|x-y|^n}$, $(x,y) \in \overline{B(x_0,r)} \times \partial B$ é uniformemente contínua. Daí temos que existe $\delta_2 > 0$, porém menor que r tal que

$$|h_2(x,y) - h_2(x_0,y)| < \frac{\epsilon}{4MR^{n-2}}, \quad \forall (x,y) \in \overline{B(x_0,r)} \times \partial B.$$

Tomando $\delta = mín\{\delta_1, \delta_2\}$ temos, para $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_0)| &= \left| \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} ds_y - \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x_0-y|^n} ds_y \right| \\
&\leq \left| \frac{R^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} ds_y - \frac{R^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x_0-y|^n} ds_y \right| \\
&\quad + \left| \frac{|x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x_0-y|^n} ds_y - \frac{|x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} ds_y \right| \\
&\leq \frac{RM}{\omega_n} \int_{\partial B} \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x_0-y|^n} \right| ds_y \\
&\quad + \frac{M}{\omega_n R} \int_{\partial B} \left| \frac{|x|^2}{|x-y|^n} - \frac{|x_0|^2}{|x_0-y|^n} \right| ds_y \\
&\leq \frac{\epsilon}{4MR^n} \frac{RM}{\omega_n} \int_{\partial B} ds_y + \frac{\epsilon}{4MR^{n-2}} \frac{M}{\omega_n R} \int_{\partial B} ds_y \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo u é contínua em B. Além disso, podemos verificar por cálculos diretos que a função u definida em (3.3.1) é harmônica em B. Portanto a função u definida no teorema está em $C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em B. ■

Agora, tendo como base as Equações de Poisson e o Potencial Newtoniano analisemos o problema de Dirichlet em um domínio Ω limitado. Também, o operador D é a derivada em relação à variável x.

Como sabemos, uma solução fundamental para a equação de Laplace é dada por

$$E(x) = E(|x|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & \text{para } n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} ln|x|, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Assim, considere a função Γ como

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, & \text{para } n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} ln|x-y|, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Facilmente podemos mostrar as estimativas

$$|D_i\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{1-n} \tag{3.3.3}$$

e

$$|D_{ij}\Gamma(x-y)| \leq \frac{n}{\omega_n}|x-y|^{-n}, \tag{3.3.4}$$

$i,j = 1,...,n$ que serão utilizadas posteriormente.

Para uma função integrável f em um domínio Ω, o pontencial Newtoniano de f é a função w definida por

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y)\, dy. \tag{3.3.5}$$

Lema 3.3.2. *Seja f uma função limitada e integrável em Ω, e seja w o pontencial newtoniano de f. Então $w \in C^1(\overline{\Omega})$ e para qualquer $x \in \Omega$*

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y) f(y)\, dy, \quad i = 1,...,n.$$

Demonstração. Considere a função

$$v(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y) f(y)\, dy.$$

Assim, utilizando as hipóteses sobre f e as estimativas anteriores podemos verificar que v está bem definida. Agora, para mostrar que $v = D_i w$, nós iremos fixar uma função $\eta \in C^1(I\!R)$ satisfazendo $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta\prime \leq 2$, $\eta(t) = 0$ para $t < 1$ e $\eta(t) = 1$ para $t \geq 2$ e defina para $\epsilon > 0$

$$w_\epsilon(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) f(y)\, dy.$$

Então, dado $\epsilon_1 > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon_1}{M}$, onde $M = \|f\|_\infty \|\nabla h\|_\infty |\Omega|$ e h é dada por $h(x) = \Gamma(x-y)\eta\left(\dfrac{|x-y|}{\epsilon}\right)$. Daí, se $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
|w_\epsilon(x) - w_\epsilon(x_0)| &= \left|\int_\Omega \Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) f(y)\, dy \right. \\
&\quad \left. - \int_\Omega \Gamma(x_0-y)\eta\left(\frac{|x_0-y|}{\epsilon}\right) f(y)\, dy\right| \\
&\leq \|f\|_\infty \int_\Omega \left|\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) - \Gamma(x_0-y)\eta\left(\frac{|x_0-y|}{\epsilon}\right)\right| dy \\
&= \|f\|_\infty \int_{|x_0-y|>\epsilon/2} |h(x) - h(x_0)|\, dy.
\end{aligned}$$

Observando que $\Gamma \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e $\eta(t) = 0$ para t próximo de zero, a função $h \in C^1(\overline{\Omega})$. Logo para algum $s = s(x)$ no segmento de reta ligando x_0 a x,

$$|h(x) - h(x_0)| = |\nabla h(s)|\,|x - x_0| \le \|\nabla h\|_{\infty}\,|x - x_0|.$$

Daí

$$\begin{aligned} |w_{\epsilon}(x) - w_{\epsilon}(x_0)| &\le \|f\|_{\infty}\,\|\nabla h\|_{\infty} \int_{\Omega} |x - x_0|\,dy \\ &= \|f\|_{\infty}\,\|\nabla h\|_{\infty}\,|\Omega|\,|x - x_0| < M\delta = \epsilon_1. \end{aligned}$$

Portanto $w_{\epsilon} \in C^0(\overline{\Omega})$. Por uma argumento similar podemos mostrar que de fato $w_{\epsilon} \in C^1(\overline{\Omega})$. Além do mais,

$$\begin{aligned} |v(x) - D_i w_{\epsilon}(x)| &= \left| \int_{\Omega} D_i\Gamma(x-y) f(y)\,dy - D_i \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) f(y)\,dy \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \left\{ D_i\Gamma(x-y) f(y) - D_i\left[\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) f(y)\right]\right\} dy \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} D_i \left\{ \left(1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right) \Gamma(x-y) \right\} f(y)\,dy \right| \\ &\le \|f\|_{\infty} \int_{\Omega} \left| D_i \left\{ \left(1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right) \Gamma(x-y) \right\} \right| dy \\ &= \|f\|_{\infty} \int_{|x-y| \le 2\epsilon} \left| D_i \left\{ \left(1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right) \Gamma(x-y) \right\} \right| dy \\ &\le \|f\|_{\infty} \int_{|x-y| \le 2\epsilon} \left(|D_i\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon}\,|\Gamma(x-y)| \right) \end{aligned}$$

donde temos que

$$|v(x) - D_i w_{\epsilon}(x)| \le \|f\|_{\infty} \begin{cases} 4\epsilon\,(1 + |ln 2\epsilon|)\,, & \text{para } n = 2 \\ \dfrac{2n\epsilon}{n-2}, & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Logo, quando $\epsilon \to 0$, w_{ϵ} e $D_i w_{\epsilon}$ convergem uniformemente em $\overline{\Omega}$ para w e v respectivamente. Portanto $w \in C^1(\overline{\Omega})$ e $D_i w = v$. ■

Lema 3.3.3. *Seja f uma função limitada e localmente Hölder contínua em Ω, e considere w o potencial newtoniano de f. Então a função w dada em (3.3.5) está em $C^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ em Ω e, para qualquer $x \in \Omega$*

$$\begin{aligned} D_{ij} w(x) = &\int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)\,(f(y) - f(x))\,dy \\ &- f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\,\nu_j(y)\,ds_y, \qquad i, j = 1, ..., n; \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

aqui Ω_0 é um domínio qualquer contendo Ω para o qual o Teorema da Divergência seja válido e tal que f seja estendida como $f \equiv 0$ fora de Ω.

Demonstração. Em virtude das estimativas (3.3.3) e (3.3.4) , e utilizando o fato de f ser Hölder contínua em Ω a função

$$u(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)\left(f(y)-f(x)\right)dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\,\nu_j(y)\,ds_y$$

está bem definida.

Seja $v = D_i w$. Defina, para $\epsilon > 0$

$$v_\epsilon(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)f(y)\,dy$$

onde $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ é a mesma função da demonstração anterior. Então, dado $\epsilon_1 > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon_1}{M}$, com $M = \|f\|_\infty \|\nabla h\|_\infty |\Omega|$ e onde $h(x) = D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\dfrac{|x-y|}{\epsilon}\right)$. Daí, se $|x-x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(x_0)| &= \left|\int_\Omega D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)f(y)\,dy\right.\\
&\quad \left. - \int_\Omega D_i\Gamma(x_0-y)\,\eta\left(\frac{|x_0-y|}{\epsilon}\right)f(y)\,dy\right|\\
&\le \|f\|_\infty \int_\Omega \left|D_i\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) - D_i\Gamma(x_0-y)\eta\left(\frac{|x_0-y|}{\epsilon}\right)\right|dy\\
&= \|f\|_\infty \int_{|x_0-y|>\epsilon/2} |h(x)-h(x_0)|\,dy.
\end{aligned}$$

Observando que $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e $\eta(t) = 0$ para t próximo de zero, a função $h \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Logo, para algum $s = s(x)$ no segmento de reta ligando x_0 a x,

$$|h(x) - h(x_0)| = |\nabla h(s)|\,|x-x_0| \le \|\nabla h\|_\infty |x-x_0|.$$

Daí

$$\begin{aligned}
|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(x_0)| &\le \|f\|_\infty \|\nabla h\|_\infty \int_\Omega |x-x_0|\,dy\\
&= \|f\|_\infty \|\nabla h\|_\infty |\Omega|\,|x-x_0| < M\delta = \epsilon_1.
\end{aligned}$$

Portanto $v_\epsilon \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Na verdade, por um procedimento análogo vê-se que $v_\epsilon \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Daí diferenciando obtemos

$$\begin{aligned}
D_j v_\epsilon(x) &= \int_\Omega D_j \left\{ D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right\} f(y)\,dy \\
&= \int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right\} (f(y)-f(x))\,dy \\
&\quad + f(x)\int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right\} dy \\
&= \int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right\} (f(y)-f(x))\,dy \\
&\quad - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\nu_j(y)\,ds_y \\
&= \int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right\} (f(y)-f(x))\,dy \\
&\quad - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\,\nu_j(y)\,ds_y
\end{aligned}$$

contanto que ϵ seja suficientemente pequeno. Assim

$$\begin{aligned}
|u(x) - D_j v_\epsilon(x)| &= \left| \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))\,dy \right.\\
&\quad - f(x)\left[\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\,\nu_j(y)\,ds_y - \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\,\nu_j(y)\,ds_y\right] \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_0} D_j\left\{D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right\}(f(y)-f(x))\,dy \right| \\
&= \left| \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))\,dy \right.\\
&\quad \left. - \int_{\Omega_0} D_j\left\{D_i\Gamma(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right\}(f(y)-f(x))\,dy \right| \\
&= \left| \int_{|x-y|\le 2\epsilon} D_j\left\{\left[1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right] D_i\Gamma(x-y)\right\}(f(y)-f(x))\,dy \right| \\
&\le \|f\|_\alpha \int_{|x-y|\le 2\epsilon} \left| D_j\left\{\left[1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right] D_i\Gamma(x-y)\right\}\right| |x-y|^\alpha\,dy,
\end{aligned}$$

mas como

$$\begin{aligned}
D_j\left\{\left[1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right] D_i\Gamma(x-y)\right\} &= D_{ij}\Gamma(x-y)\left[1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)\right] \\
&\quad + \frac{x_j-y_j}{\epsilon\,|x-y|}\eta'\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) D_i\Gamma(x-y) \\
&\le |D_{ij}\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon}\,|D_i\Gamma(x-y)|
\end{aligned}$$

temos que

$$|u(x) - D_j v_\epsilon(x)| \leq \|f\|_\alpha \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} \left(|D_{ij}\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon} |D_i\Gamma(x-y)| \right) |x-y|^\alpha dy$$
$$\leq \|f\|_\alpha \left(\frac{n}{\alpha} + \frac{4}{(\alpha+1)} \right) (2\epsilon)^\alpha$$

contanto que $\epsilon < dist(x, \partial\Omega)$. Consequentemente $D_j v_\epsilon$ converge uniformente para u em um subconjunto compacto de Ω quando $\epsilon \to 0$, e como v_ϵ converge uniformemente para $v = D_i w$ em Ω temos que $D_j v_\epsilon \xrightarrow{u} D_{ij} w$ em Ω. Portanto $w \in C^2(\Omega)$ e $u = D_{ij} w$. Finalmente, fazendo $\Omega_0 = B(x, R)$ em $(3.3.6)$, nós temos para R suficientemente grande

$$\Delta w(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} f(x) \int_{|x-y|=R} \nu_i(y) \nu_i(y) ds_y = f(x),$$

completando a prova. ∎

Observações: Considere Ω um domínio limitado:

1) Uma função u de $C^0(\Omega)$ será dita sub-harmônica (super-harmônica) em Ω se para toda bola $B \subset\subset \Omega$ e toda função h harmônica em B satisfazendo $u \leq (\geq) h$ na $\partial\Omega$, nós tivermos também $u \leq (\geq) h$ em B.

2) Seja ϕ uma função limitada na $\partial\Omega$. Uma função v de $C^0(\Omega)$ sub-harmônica (super-harmônica) é dita uma subfunção (superfunção) relativa a ϕ se satisfaz $v \leq (\geq) \phi$ na $\partial\Omega$.

3) S_ϕ denota o conjunto de todas as subfunções relativas a ϕ.

4) Considere $\xi \in \partial\Omega$. Então uma função w de $C^0(\overline{\Omega})$ é chamada de uma barreira em ξ relativa a Ω se: *i)* w é super-harmônica em Ω; *ii)* $w > 0$ em $\overline{\Omega} - \xi$; $w(\xi) = 0$.

5) Um ponto da fronteira será dito **regular** (com respeito ao Laplaciano) se existir uma barreira neste ponto.

Teorema 3.3.4. *O problema de Dirichlet, $\Delta u = 0$ em Ω e $u = \phi$ na $\partial\Omega$, onde ϕ é uma função contínua e Ω é um domínio limitado tem solução para valores arbitrários contínuos da fronteira se, e somente se, os pontos da fronteira são todos regulares.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja ξ um ponto regular da fronteira de Ω e $u(x) = sup_{v \in S_\phi} v(x)$. Como a função ϕ é contínua em ξ, então $u(x) \to \phi(\xi)$ sempre que $x \to \xi$ (veja [10, Lemma 2.13]). Logo, como a função u construída pelo método de Perron (ver [10, Theorem 2.12]) é harmônica em Ω temos que $u(x) = sup_{v \in S_\phi} v(x)$ é solução do problema de Dirichlet.

Reciprocamente, suponha que o problema de Dirichlet tenha solução para todos os valores contínuos da fronteira. Seja $\xi \in \partial\Omega$. Assim temos que a função $\phi(x) = |x - \xi|$ é contínua na fronteira de Ω e a função harmônica u que soluciona o problema de Dirichlet em Ω com $u = \phi$ na $\partial\Omega$ é uma barreira em ξ. Logo ξ é regular. Como $\xi \in \partial\Omega$, temos a conclusão do teorema. ■

TEOREMA 3.3.5. *Suponha que Ω é um domínio limitado e que cada ponto da fronteira de Ω é regular (com respeito ao laplaciano). Então, se f é uma função limitada, localmente Hölder contínua em Ω, o problema clássico de Dirichlet*

$$\Delta u = f \ \ em\ \Omega \quad e \quad u = \phi \ \ na\ \partial\Omega$$

tem uma única solução para qualquer função contínua limitada ϕ.

DEMONSTRAÇÃO DA EXISTÊNCIA: Considere w o potencial Newtoniano de f e seja $v = u - w$. Então o problema

$$\Delta u = f \text{ em } \Omega \text{ e } u = \phi \text{ na } \partial\Omega$$

é equivalente ao problema

$$\Delta v = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } v = \phi - w \text{ na } \partial\Omega,$$

o qual tem solução de acordo com o Teorema 3.3.4.

A Unicidade: Sejam u_1 e u_2 soluções clássicas do problema de Dirichlet. Considere $u = u_1 - u_2$. Então u é solução do problema $\Delta u = 0$ em Ω e $u = 0$ na $\partial\Omega$. Portanto $u \equiv 0$, donde temos $u_1 \equiv u_2$. ■

O estudo do problema de Dirichlet em certos domínios especiais de $I\!R^2$, como num retângulo, no disco ou no semiplano, pode ser feito usando métodos como série de Fourier e transformada de Fourier, os quais são consideravelmente mais simples que os utilizados anteriormente. Para discutir a solubilidade do problema de Dirichlet neste casos o leitor pode consultar o livro de Figueiredo [8]. O leitor também poderá encontrar nesta referência o princípio do máximo formulado para uma classe especial de funções, a qual facilita sua prova.

3.4 Existência de Solução para Operadores Elípticos

A existência de solução para o problema $Pu \equiv Au + au = f$ em Ω e $u = \phi$ na $\partial\Omega$, onde P é uniformemente elíptico, depende de estabelecermos uma estimativa a-*priori* ("The Schauder Estimate ")

$$\|u\|_{2+\alpha} \leq c\,\|f\|_{\alpha}$$

para soluções u de classe $C^{2+\alpha}$ do problema

$$Pu = f \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \tag{3.4.1}$$

Aqui $c = c\,(K, m, \Omega)$, onde m é a constante de elipticidade e K é o limite dos coeficientes de P.

Nós não iremos provar esta estimativa aqui, veja [10, Theorem 6.6] para a prova.

Definição 3.4.1. *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Dizemos que uma aplicação $F : X \to X$ é uma contração em X se existe um número real M, $0 \leq M < 1$, tal que $d\,(F\,(x)\,, F\,(y)) \leq M d\,(x, y)\,, \forall x, y \in X$.*

O teorema seguinte será utilizado na prova da existência de solução do problema $(3.4.1)$.

Teorema 3.4.2 (***do Ponto Fixo de Banach***). *Considere (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração. Então F tem um único ponto fixo p, isto é, $F\,(p) = p$.*

Demonstrações como a que faremos podem ser vistas em [15] e [21].

Demonstração. Seja M a constante de contração de F, onde $0 \leq M < 1$.

Unicidade: Suponha que p_1 e p_2 são dois pontos fixos de F, então $F(p_1) = p_1$ e $F(p_2) = p_2$. Logo, como F é uma contração,

$$d(p_1, p_2) = d(F(p_1), F(p_2)) \leq M d(p_1, p_2),$$

donde, $d(p_1, p_2)(1 - M) \leq 0$, o que implica que $d(p_1, p_2) = 0$. Portanto $p_1 = p_2$.

Existência: Nós vamos construir uma seqüência (x_n) e mostrar que é de Cauchy no espaço completo X, e portanto convergente. Em seguida provaremos que o ponto limite p é um ponto fixo de F.

Seja $x_0 \in X$ e defina a "seqüência iterativa " (x_n) por

$$x_1 = F^1(x_0) = F(x_0), \; x_2 = F^2(x_0) = F(x_1), ..., \; x_n = F^n(x_0) = F(x_{n-1}).$$

Daí, por um argumento de indução temos que

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &= d\left(F^{n+r}(x_0), F^n(x_0)\right) = d(F^n(F^r(x_0)), F^n(x_0)) \\ &= d(F^n(x_r), F^n(x_0)) \leq M^n d(x_r, x_0) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} d(x_0, x_r) &\leq d(x_0, F(x_0)) + d\left(F(x_0), F^2(x_0)\right) + ... + d\left(F^{r-1}(x_0), F^r(x_0)\right) \\ &\leq d(x_0, F(x_0)) + d(F(x_0), F(F(x_0))) + ... + d\left(F^{r-1}(x_0), F^{r-1}(F(x_0))\right) \\ &\leq \left(1 + M + M^2 + ... + M^{r-1}\right) d(x_0, F(x_0)). \end{aligned}$$

Portanto

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq M^n d(x_0, x_r) \leq \frac{M^n}{1 - M} d(x_0, F(x_0)).$$

Como $d(x_0, F(x_0))$ é fixa e $0 \leq M < 1$, $M^n \to 0$. Logo (x_n) é convergente, pois é uma seqüência de Cauchy em X que é completo.

Provemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ é ponto fixo de F. De fato, sendo F contínuo,

$$F(p) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p,$$

completando a prova. ■

Teorema 3.4.3. *O problema* (3.4.1) *tem solução única para cada* $f \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, *com a condição que* P *seja elíptico em* Ω.

Demonstração. De acordo com o que vimos nas seções 3.1 e 3.2, basta mostrarmos que o problema (3.4.1) tem solução. Sendo que $\|u\|_{2+\alpha} \leq c \|Pu\|_{\alpha}$ para toda solução $u \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, a idéia é envolver nosso problema em uma família de problemas

$$\begin{aligned} P_t(u) = tP(u) + (1-t)\Delta u = f \quad &\text{em } \Omega \\ u = 0 \quad &\text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

onde $t \in I = [0,1]$. Se $t = 0$, o problema é $\Delta u = f$ em Ω e $u = 0$ na $\partial\Omega$, o qual, como vimos, tem solução. Seja

$$T = \left\{ t \in I : f \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \Rightarrow \text{existe solução } u \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ de } (3.4.2) \right\}.$$

Iremos mostrar que $1 \in T$. Primeiramente vamos mostrar que dado $t_0 \in T$ existe um $\epsilon > 0$ tal que se $|t - t_0| < \epsilon$ e $t \in I$ implica que $t \in T$. Para isto seja t um ponto de I. Definimos a aplicação $\phi_t : C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ dada por $\phi_t(u) = v$, onde v é a única solução de

$$\begin{aligned} P_{t_0} v = (t - t_0)[\Delta u - Pu] + f \quad &\text{em } \Omega \\ v = 0 \quad &\text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Se ϕ_t tem um ponto fixo, isto é, $\phi_t(w) = w$ então $w = 0$ na $\partial\Omega$ e de (3.4.3),

$$P_{t_0} w = (t - t_0)[\Delta w - Pw] + f \quad \text{em } \Omega$$

temos que $P_t w = f$. Isto é, um ponto fixo de ϕ_t corresponde a uma solução de (3.4.2). Iremos encontrar um $\epsilon > 0$ tal que se $|t - t_0| < \epsilon$, então ϕ_t tem um ponto fixo. Esta última afirmação será provada mostrando que ϕ_t é uma contração para t suficientemente próximo de t_0.

Assim, se u_1 e u_2 estão em $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, considere $v_1 = \phi_t(u_1)$, $v_2 = \phi_t(u_2)$ tal que

$$\begin{aligned} P_{t_0} v_i = (t - t_0)[\Delta u_i - Pu_i] + f \quad &\text{em } \Omega \\ v_i = 0 \quad &\text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Subtraindo-as, temos

$$P_{t_0}(v_1 - v_2) = (t - t_0)\left[\Delta(u_1 - u_2) - P(u_1 - u_2)\right]$$

Usando $\|u\|_{2+\alpha} \leq c\,\|f\|_\alpha$ nesta equação, obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi_t(u_1) - \phi_t(u_2)\|_{2+\alpha} &= \|v_1 - v_2\|_{2+\alpha} \\ &\leq c\,|t - t_0|\,\|\Delta(u_1 - u_2) - P(u_1 - u_2)\|_\alpha \\ &\leq cc_1\,|t - t_0|\,\|u_1 - u_2\|_{2+\alpha} \end{aligned}$$

para alguma constante c_1 independente de u_1, u_2, c e t. Se $\epsilon = (2cc_1)^{-1}$, então para $|t - t_0| \leq \epsilon$,

$$\|\phi_t(u_1) - \phi_t(u_2)\|_{2+\alpha} \leq \frac{1}{2}\,\|u_1 - u_2\|_{2+\alpha}.$$

Logo, o Teorema de Ponto Fixo de Banach implica que se, $|t - t_0| \leq \epsilon$, ϕ_t tem um ponto fixo.

Considerando que $0 \in T$ temos o intervalo $[0, \epsilon] \subset T$. Desta forma, como $\epsilon \in T$, $[\epsilon, 2\epsilon] \subset T$. Repetindo este procedimento sucessivamente podemos ver que $1 \in T$, completando a prova. ∎

Argumentos semelhantes mostram que o problema $Pu = 0$ em Ω e $u = \phi$ na $\partial\Omega$, com $\phi \in C^0(\partial\Omega)$, tem uma única solução. Vejamos agora o caso geral:

TEOREMA 3.4.4. *O problema $Pu = f$ em Ω, $u = \phi$ na $\partial\Omega$, onde $f \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\phi \in C^0(\partial\Omega)$, tem uma única solução $u \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Assumiremos primeiramente que $\phi \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Seja h uma solução de $Ph = 0$ em Ω, $h = \phi$ na $\partial\Omega$. Usando o Teorema 3.4.3, considere v uma solução de

$$Pv = f - Ph \text{ em } \Omega, \quad v = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Então se $u = v + h$, temos $Pu = Pv + Ph = f$ em Ω e $u = v + h = \phi$ na $\partial\Omega$.

Agora assuma que $\phi \in C^0(\partial\Omega)$. Considere (ϕ_j) uma seqüência de funções em $C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ uniformemente na $\partial\Omega$ (por exemplo, a seqüência (ϕ_j) podem ser polinômios obtidos do Teorema da Aproximação de Weierstrass). Seja

u_j uma solução de $Pu_j = f$ em Ω, $u_j = \phi_j$ na $\partial\Omega$. Pelo Princípio do Máximo, vemos que u_j converge uniformemente em Ω para uma função $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ e que $u = \phi$ na $\partial\Omega$.

Agora se Q é um subconjunto compacto de Ω, tem-se uma estimativa a-priori para as soluções de $Pu = f$; a saber

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}\left(\overline{Q}\right)} \leq c\left(\|f\|_{C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)} + \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}\right),$$

onde $c = c\,(m, K, \Omega, Q)$ (a demonstração desta relação é similar à prova da desigualdade $\|u\|_{2+\alpha} \leq c\,\|f\|_{\alpha}$), segue que

$$\|u_j - u\|_{C^{2+\alpha}\left(\overline{Q}\right)} \leq c\,\|u_j - u\|_{L^{\infty}(\Omega)},$$

sendo que $u_j \to u$ em $C^{2+\alpha}\left(\overline{Q}\right)$ para todo compacto $Q \subset \Omega$. Assim $u \in C^{2+\alpha}\left(\overline{Q}\right)$ e $f = \lim\limits_{j\to\infty} Pu_j = Pu$, para cada ponto em Ω, encerrando a prova. ■

Considerando o problema

$$Pu = f \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

com $f \in L^p\,(\Omega)$, é possível mostrar, utilizando idéias semelhantes as empregadas no Teorema 3.4.3, que existe uma solução $u \in W^{2,p}\,(\Omega)$ para este problema. Este fato será usado posteriormente no Capítulo IV.

3.5 Teoremas de Ponto Fixo de Leray-Schauder

Nesta seção veremos um modo diferente do discutido anteriormente para garantirmos a existência de solução para a equação diferencial parcial quasilinear

$$Qu = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\,(x, u, Du)\, D_{ij}u + \bar{b}\,(x, u, Du) = 0,$$

em um domínio limitado $\Omega \subset I\!R^n$, com $\partial\Omega$, a fronteira de Ω, sendo suficientemente suave. Assumiremos que $\bar{a}_{ij}\,(x, s, \xi) = \bar{a}_{ji}\,(x, s, \xi)$, $(x, s, \xi) \in \Omega \times I\!R \times I\!R^n$, que as funções $\bar{a}_{ij}$ e $\bar{b}$ são todas contínuas em $\overline{\Omega} \times I\!R \times I\!R^n$, $i, j = 1, 2, ...n$ e que Q é elíptico, ou seja, a matriz $[\bar{a}_{ij}]$ é positiva definida.

Definição 3.5.1 (***Conjunto precompacto***). *Dizemos que o conjunto A é precompacto se $\overline{A}$ é compacto.*

Definição 3.5.2 (***Operador compacto***). *Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que o operador $T : X \to Y$ é compacto se T leva conjuntos limitados de X em conjuntos precompactos em Y, ou equivalentemente, T transforma seqüências limitadas de X em seqüências de Y que contém uma subseqüência convergente.*

Algumas vezes nos referimos a conjuntos precompactos como conjuntos relativamente compactos. Também vale a pena ressaltar que a prova dos teoremas desta seção foram baseadas em [7] e [10].

Teorema 3.5.3. *Seja C um conjunto fechado convexo, em um espaço de Banach X, e T uma aplicação contínua de C em C tal que a imagem $T(C)$ é precompacta. Então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Podemos considerar C um conjunto limitado, pois caso contrário basta trabalhar com o conjunto C_1, onde C_1 é a envoltória convexa de $\overline{T(C)}$.

Como $\overline{T(C)}$ é um conjunto compacto, para cada $\epsilon > 0$ podemos determinar um número finito de bolas abertas $B_\epsilon(x_j)$ de raio $\epsilon > 0$ e centradas em $x_j \in \overline{T(C)}$, $j = 1, ..., N$ tais que

$$\overline{T(C)} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(x_j). \tag{3.5.1}$$

Sejam F_N o subespaço vetorial de X gerado por $x_1, ..., x_N$ e $\phi_1, ..., \phi_N$ uma partição da unidade formada por funções contínuas associada à cobertura $\{B_\epsilon(x_j)\}$ de $\overline{T(C)}$ tal que $0 \leq \phi_j \leq 1$, $S(\phi_j) \subset B_\epsilon(x_j)$ e $\sum_j \phi_j(x) = 1$ se $x \in \overline{T(C)}$. Definindo

$$T_N x = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(Tx)\, x_j,$$

podemos ver que T_N é uma aplicação contínua de $C \cap F_N$ em $C \cap F_N$. Como $C \cap F_N$ é um subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de dimensão finita, segue, pelo Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (ver [10, Theorem 10.14, pg. 238]) que T_N tem um ponto fixo, ou seja, existe $x_N \in C \cap F_N$ tal que $T_N x_N = x_N$. E ainda, temos que

$$\begin{aligned} \|Tx_N - T_N x_N\| &= \left\|Tx_N \sum \phi_j (Tx_N) - \sum \phi_j (Tx_N)\, x_j\right\| \\ &= \left\|\sum \phi_j (Tx_N) [Tx_N - x_j]\right\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ obtemos uma seqüência $(x_n) \subset C$ tal que $T_n x_n = x_n$ e, pela desigualdade acima, $\|Tx_n - T_n x_n\| < \dfrac{1}{n}$. Como $T(C)$ é precompacto, existe uma subseqüência $(Tx_{n_k}) \subset (Tx_n)$ tal que $Tx_{n_k} \longrightarrow y$. Além disso, sendo $\|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| < \dfrac{1}{n_k}$ temos que $x_{n_k} \longrightarrow y$, e da continuidade de T chegamos a $Tx_{n_k} \longrightarrow Ty$. Portanto $Ty = y$, isto é, T tem um ponto fixo. ■

TEOREMA 3.5.4 (***de Leray-Schauder - caso especial***). *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador contínuo e compacto. Suponha que exista uma constante M tal que $\|x\|_X < M$ para todo $x \in X$ satisfazendo $x = \sigma Tx$, $\sigma \in [0,1]$. Então T tem um ponto fixo.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a aplicação T^* definida como

$$T^* x = \begin{cases} Tx, \text{ para } \|Tx\| \le M \\ \dfrac{MTx}{\|Tx\|}, \text{ se } \|Tx\| \ge M. \end{cases}$$

Seja $(x_n) \subset X$ e $x_n \to z$. Como T é contínuo, então $Tx_n \to Tz$. Vejamos que o operador T^* também é contínuo. Suponha que $\|Tz\| < M$. Então, para n suficientemente grande,

$$T^* x_n = Tx_n \to Tz = T^* z.$$

Se $\|Tz\| > M$, existe um n_0 tal que $\|Tx_n\| > M$ para cada $n \ge n_0$ e daí

$$T^* x_n = \frac{MTx_n}{\|Tx_n\|} \to \frac{MTz}{\|Tz\|} = T^* z.$$

E para analisar o caso $\|Tz\| = M$, devemos considerar dois subcasos: primeiramente suponha que existe $(Tx_{n_k}) \subset (Tx_n)$ e $\|Tx_{n_k}\| \le M$, então

$$T^* x_{n_k} = Tx_{n_k} \to Tz = T^* z,$$

e, caso exista $(Tx_{n_k}) \subset (Tx_n)$ e $\|Tx_{n_k}\| > M$ temos

$$T^* x_{n_k} = \frac{MTx_{n_k}}{\|Tx_{n_k}\|} \to \frac{MTz}{\|Tz\|} = T^* z.$$

Portanto T^* é um operador contínuo. Além disso, o operador T^* leva a bola fechada $\overline{B(0,M)} = \overline{B} \subset X$ em $\overline{B} \subset X$ e T^* é um operador precompacto, pois considere $(x_n) \subset \overline{B}$ e $\|Tx_n\| \geq M$. Então, sendo T compacto, e trabalhando com uma subseqüência se necessário, temos que $Tx_{n_k} \to y$, daí

$$T^* x_{n_k} - \frac{My}{\|y\|} = \frac{MTx_n}{\|Tx_n\|} - \frac{My}{\|y\|} \to 0.$$

Logo, pelo Teorema 3.5.3, o operado T^* tem um ponto fixo $\overline{x}$.

Afirmação: $\overline{x}$ também é um ponto fixo de T. De fato, se $\|T\overline{x}\| \geq M$, então $\overline{x} = T^*\overline{x} = \sigma T\overline{x}$ com $\sigma = \dfrac{M}{\|T\overline{x}\|}$ e $\|\overline{x}\| = \|T^*\overline{x}\| = \sigma \|T\overline{x}\| = M$, o que contradiz a hipótese $\|\overline{x}\| < M$. Portanto, $\|T\overline{x}\| < M$ e consequentemente $\overline{x} = T^*\overline{x} = T\overline{x}$, isto é, $\overline{x}$ é um ponto fixo de T. ∎

Para aplicarmos o Teorema 3.5.4 para o problema de Dirichlet para equações quasilineares, nós fixamos um número $\beta \in (0,1)$ e pegamos o espaço de Banach X como o espaço das funções Hölder $C^{1+\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. Seja Q o operador dado por

$$Qu = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(x,u,Du)\, D_{ij}u + \bar{b}(x,u,Du)$$

e assuma que Q é elíptico em $\overline{\Omega}$. Suponha, também, que para qualquer $\alpha \in (0,1)$ os coeficientes $\bar{a}_{ij}$ e $\bar{b}$ estão em $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$, que a função φ dada está em $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e que $\partial\Omega$ seja suficientemente suave. Para toda $v \in C^{1+\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$, defina o operador T como $u = Tv$, onde u é a única solução em $C^{2+\alpha\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ do problema de Dirichlet linear

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(x,v,Dv)\, D_{ij}u + \bar{b}(x,v,Dv) = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = \varphi \text{ na } \partial\Omega.$$

A unicidade de solução deste problema é garantida pelo resultado de existência linear, veja o Teorema 3.4.4. A solubilidade do problema $Qu = 0$ em Ω e $u = \varphi$ na $\partial\Omega$, no espaço $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ é portanto equivalente a solubilidade da equação $u = Tu$

no espaço de Banach $X = C^{1+\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$. A equação $u = \sigma T u$ em X, $\sigma \in [0,1]$, corresponde ao problema de Dirichlet

$$Q_\sigma u = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(x,u,Du)\, D_{ij}u + \sigma \bar{b}(x,u,Du) = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = \sigma\varphi \text{ na } \partial\Omega.$$

Assim, aplicando o Teorema 3.5.4 pode-se provar o seguinte critério de existência:

Teorema 3.5.5. *Considere $\Omega \subset I\!R^n$ um domínio limitado e suponha que Q é elíptico em $\overline{\Omega}$, com coeficientes $\bar{a}_{ij}, \bar{b}$ em $C^\alpha\left(\overline{\Omega} \times I\!R \times I\!R^n\right)$, $0 < \alpha < 1$, e φ em $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Se dado um número $0 < \beta < 1$ existir uma constante M, independente de u e σ, tal que toda solução u em $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ do problema de Dirichlet, $Q_\sigma u = 0$ em Ω e $u = \sigma\varphi$ na $\partial\Omega$, $0 \le \sigma \le 1$, satisfaz $\|u\|_{C^{1+\beta}\left(\overline{\Omega}\right)} < M$, então o problema de Dirichlet $Qu = 0$ em Ω e $u = \varphi$ na $\partial\Omega$, tem solução em $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.*

Lema 3.5.6. *Seja $B = B(0,M)$ uma bola em X e considere T um operador contínuo de $\overline{B}$ em X tal que $T\overline{B}$ é precompacto e $T(\partial B) \subset B$. Então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Defina o operador T^* como

$$T^* x = \begin{cases} Tx, \text{ para } \|Tx\| \le M \\ \dfrac{MTx}{\|Tx\|}, \text{ se } \|Tx\| \ge M. \end{cases}$$

Claramente, pelo que já foi visto no Teorema 3.5.4, T^* é uma aplicação contínua de $\overline{B}$ em $\overline{B}$, e também, sendo $T\overline{B}$ precompacto, temos que $T^*\overline{B}$ é precompacto. Logo, pelo Teorema 3.5.3 T^* tem um ponto fixo $\overline{x}$, e como $T(\partial B) \subset B$ nós temos que $\|\overline{x}\| < M$. Portanto $\overline{x} = T\overline{x}$. ■

Teorema 3.5.7 (***de Leray-Schauder***). *Seja X um espaço de Banach e T um operador compacto e contínuo, $T : X \times [0,1] \to X$, tal que $T(x,0) = 0$ para cada $x \in X$. Suponha que existe uma constante M tal que $\|x\|_X < M$ para todo $(x,\sigma) \in X \times [0,1]$ que satisfaz $x = T(x,\sigma)$. Então o operador $T_1 : X \to X$, dado por $T_1 x = T(x,1)$, tem um ponto fixo.*

Demonstração. Para cada $0 < \epsilon \leq 1$ defina o operador $T_\epsilon : \overline{B(0,M)} \to X$ por

$$T_\epsilon x = \begin{cases} T\left(\dfrac{Mx}{\|x\|}, \dfrac{M - \|x\|}{\epsilon}\right), \text{ se } M - \epsilon \leq \|x\| \leq M \\ \\ T\left(\dfrac{Mx}{M-\epsilon}, 1\right), \text{ quando } \|x\| < M - \epsilon. \end{cases}$$

Desta forma temos que T_ϵ é um operador contínuo. De fato, seja $(x_n) \subset \overline{B(0,M)}$ tal que $x_n \to z$. Então, se $\|z\| > M - \epsilon$ temos que $\|x_n\| > M - \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, donde

$$T_\epsilon x_n = T\left(\frac{Mx_n}{\|x_n\|}, \frac{M - \|x_n\|}{\epsilon}\right) \to T\left(\frac{Mz}{\|z\|}, \frac{M - \|z\|}{\epsilon}\right) = T_\epsilon z.$$

Caso $\|z\| < M - \epsilon$, temos que $\|x_n\| < M - \epsilon$ para todo $n \geq n_1$. Logo

$$T_\epsilon x_n = T\left(\frac{Mx_n}{M-\epsilon}, 1\right) \to T\left(\frac{Mz}{M-\epsilon}, 1\right) = T_\epsilon z.$$

Se tivermos $\|z\| = M - \epsilon$, devemos analisar as seguintes possibilidades: suponha que existe $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $\|x_{n_k}\| \geq M - \epsilon$ para todo $k \geq k_0$. Então

$$T_\epsilon x_{n_k} = T\left(\frac{Mx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}, \frac{M - \|x_{n_k}\|}{\epsilon}\right) \to T\left(\frac{Mz}{\|z\|}, \frac{M - \|z\|}{\epsilon}\right) = T_\epsilon z,$$

e se existe $\left(x_{n_j}\right) \subset (x_n)$ tal que $\left\|x_{n_j}\right\| < M - \epsilon$ para todo $j \geq j_0$, então

$$T_\epsilon x_{n_j} = T\left(\frac{Mx_{nj}}{M-\epsilon}, 1\right) \to T\left(\frac{Mz}{M-\epsilon}, 1\right) = T\left(\frac{Mz}{\|z\|}, \frac{M - \|z\|}{\epsilon}\right) = T_\epsilon z.$$

Além disso, $T_\epsilon \partial B(0,M) \subset \{0\}$, pois se $x \in \partial B(0,M)$, então temos que $\|x\| = M$ e $T_\epsilon x = T(x,0) = 0$. Portanto, para aplicarmos o Lema 3.5.6 em T_ϵ basta mostrarmos que $T_\epsilon \overline{B(0,M)}$ é precompacto. Assim, suponha que $(y_n) \subset T_\epsilon \overline{B(0,M)}$. Então $y_n = T_\epsilon x_n$ para alguma seqüência (x_n) em $\overline{B(0,M)}$. No caso em que temos $M - \epsilon \leq \|x_n\| \leq M$, considere o conjunto $Z = \left(\dfrac{Mx_n}{\|x_n\|}, \dfrac{M - \|x_n\|}{\epsilon}\right)$. Como $Z \subset \overline{B(0,M)} \times [0,1]$, Z é um conjunto limitado. Ainda, de $M - \epsilon \leq \|x_n\| \leq M$

$$y_n = T_\epsilon x_n = T\left(\frac{Mx_n}{\|x_n\|}, \frac{M - \|x_n\|}{\epsilon}\right).$$

Daí, sendo T compacto e Z limitado, TZ possui uma subseqüência convergente. Logo (y_n) possui uma subseqüência convergente. Caso $\|x_n\| < M - \epsilon$,

$$y_n = T_\epsilon x_n = T\left(\frac{Mx_n}{M-\epsilon}, 1\right).$$

Mas o conjunto $W = \left(\dfrac{Mx_n}{M-\epsilon}, 1\right)$ é limitado pois $W \subset \overline{B(0,M)} \times [0,1]$. Logo, uma vez que T é compacto, então TW possui uma subseqüência convergente. Portanto se $\|x_n\| < M - \epsilon$, (y_n) possui uma subseqüência convergente. Por outro lado se $(x_n) \subset \overline{B(0,M)}$ é tal que existe $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ e $\|x_{n_k}\| \geq M - \epsilon$, então

$$y_{n_k} = T_\epsilon x_{n_k} = T\left(\frac{Mx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}, \frac{M - \|x_{n_k}\|}{\epsilon}\right).$$

Contudo $T\left(\dfrac{Mx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}, \dfrac{M - \|x_{n_k}\|}{\epsilon}\right)$ contém uma subseqüência convergente, uma vez que o conjunto $\left(\dfrac{Mx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}, \dfrac{M - \|x_{n_k}\|}{\epsilon}\right)$ é limitado. Logo (y_n) contém uma subseqüência convergente. E, caso exista $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ seja tal que $\|x_{n_k}\| < M - \epsilon$ temos que

$$y_{n_k} = T_\epsilon x_{n_k} = T\left(\frac{Mx_{n_k}}{M-\epsilon}, 1\right).$$

Mas neste caso (y_n) também contém uma subseqüência convergente, pois o conjunto $\left(\dfrac{Mx_{n_k}}{M-\epsilon}, 1\right)$ é limitado e T é compacto.

Desta forma podemos ver que T_ϵ tem um ponto fixo $x(\epsilon)$. Consideremos agora o conjunto

$$\epsilon = \frac{1}{k}, \qquad x_k = x\left(\frac{1}{k}\right) \text{ e } \qquad \sigma_k = \begin{cases} k\left(M - \|x_k\|\right), \text{ se } M - \dfrac{1}{k} \leq \|x_k\| \leq M \\ 1, \text{ para } \|x_k\| < M - \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Como $\sigma_k \in [0,1]$, passando a trabalhar com uma subseqüência, se necessário, temos que $\sigma_k \to \sigma \in [0,1]$. Além disso, sendo T um operador compacto, podemos também trabalhar com uma subseqüência de $T(x_k, \sigma_k)$, se necessário, tal que $T(x_k, \sigma_k) \to T(x, \sigma)$. Logo se $\sigma < 1$, como $\sigma_k \to \sigma$, temos que para k suficientemene grande $\sigma_k < 1$ e daí $M - \dfrac{1}{k} \leq \|x_k\| \leq M$, donde temos que $\|x\| = M$. Assim

$$\begin{aligned} x_k &= T_{1/k} x_k = T\left(\frac{Mx_k}{\|x_k\|}, \frac{M - \|x_k\|}{\frac{1}{k}}\right) \\ &= T\left(\frac{Mx_k}{\|x_k\|}, k\left(M - \|x_k\|\right)\right) \to T\left(\frac{Mx}{\|x\|}, \sigma\right) = T(x, \sigma). \end{aligned}$$

Daí $x = T(x, \sigma)$, o que nos dá $\|x\| < M$, o que é uma contradição e portanto σ vale 1. Neste caso analisemos as seguintes possibilidades: primeiramente se

$\sigma_k < 1$, obtemos que $M - \dfrac{1}{k} \leq \|x_k\| \leq M$, donde $\|x\| = M$. Daí

$$\begin{aligned} x_k &= T_{1/k}x_k = T\left(\frac{Mx_k}{\|x_k\|}, k\left(M - \|x_k\|\right)\right) \\ &= T\left(\frac{Mx_k}{\|x_k\|}, \sigma_k\right) \to T\left(\frac{Mx}{\|x\|}, \sigma\right) = T\left(x, 1\right) = T_1 x. \end{aligned}$$

No caso $\sigma_k = 1$, para k suficientemente grande, temos $\|x_k\| < M - \dfrac{1}{k}$. Então, $\|x\| \leq M$. Deste modo

$$x_k = T_{1/k}x_k = T\left(\frac{Mx_k}{M - \frac{1}{k}}, 1\right) \to T\left(\frac{Mx}{M}, 1\right) = T\left(x, 1\right) = T_1 x$$

Portanto $x = T_1 x$. ■

CAPÍTULO IV

EQUAÇÕES DA FORMA

$\Delta u = f(x, u, Du)$

Neste capítulo veremos como obter uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$ para o problema de valores de fronteira

$$\Delta u = f(x, u, Du) \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = \varphi \text{ na } \partial\Omega$$

contanto que a função f satisfaça certas condições, as quais estarão descritas na seqüência.

4.1 Uma Estimativa A-Priori Fundamental

Seja Ω um domínio limitado em $I\!R^n$ com a fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Nós trataremos do seguinte problema de valores de fronteira

$$\Delta u = f(x, u, Du) \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \tag{4.1.1}$$

Aqui, Δ é o operador de Laplace, $u = u(x)$ e $Du = Du(x)$ é o gradiente da função u.

Este problema será estudado para uma classe de funções reais do espaço de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ com $p > n$, tal que a função φ é o traço, $\varphi = \widetilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$, da função $\widetilde{\varphi}$ de $W^{2,p}(\Omega)$, isto é, $\varphi \in W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)$ e a norma satisfaz

$$\|\varphi\|'_{W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq c_0 \|\widetilde{\varphi}\|_{W^{2,p}(\Omega)},$$

onde c_0 é uma constante que não depende de $\widetilde{\varphi}$. A demonstração deste resultado é baseada no Teorema do Traço, e pode ser vista em [18].

Nós assumimos que a função f satisfaz as seguintes condições:

$(A1)$ Seja $f(x,s,\xi)$ definida em $\Omega \times I\!R \times I\!R^n$ com valores em $I\!R$, e suponha que f satisfaz a condição de Carathéodory, ou seja, é uma função mensurável com respeito a x para todo $(s,\xi) \in I\!R \times I\!R^n$, e contínua em relação a (s,ξ) para quase todo $x \in \Omega$.

$(A2)$ Considere

$$|f(x,s,\xi)| \leq b(x,s)\left(1+|\xi|^{\mu}\right)$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $(s,\xi) \in I\!R \times I\!R^n$, com $\mu = 2 - \dfrac{n}{p}$ e $p > n$, onde a função $b(x,s)$ é mensurável com respeito a x para todo $s \in I\!R$, contínua em relação à s para quase todo $x \in \Omega$, e tal que para qualquer $l > 0$ fixo

$$sup_{|s|\leq l} b(\cdot,s) \in L^p(\Omega).$$

Utilizando argumentos semelhantes ao do Teorema 3.4.3 podemos encontrar uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$ do problema

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = \varphi \text{ na } \partial\Omega,$$

a qual chamaremos de u_1. Então a função $u = u_2 - u_1$, onde $u_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ é solução de $(4.1.1)$, será solução do seguinte problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta u_2 - \Delta u_1 = f(x,u_2,Du_2) \text{ em } \Omega \\ u &= u_2 - u_1 = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Desta forma, sendo $u_2 = u + u_1$, com u_1 conhecida, temos que

$$\begin{aligned} &\Delta u = f(x, u+u_1, D(u+u_1)) = \widetilde{f}(x,u,Du) \text{ em } \Omega \\ &u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{f} : \Omega \times I\!R \times I\!R^n \to I\!R$ satisfaz também as hipóteses $(A1)$ e $(A2)$.

Assim, para solucionarmos o problema $(4.1.1)$ ou obter informações a respeito de sua solução, basta analisarmos o problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x,u,Du) \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Também, um resultado frequentemente usado no estudo da equação $(4.1.2)$ é a Desigualdade de Gagliardo-Niremberg que enunciamos em seguida e que o leitor pode consultar [9, Theorem 10.1, pg. 27].

Teorema 4.1.1 (***Desigualdade de Gagliardo-Niremberg***). *Seja Ω um domínio limitado com $\partial\Omega$ em C^k, e $u \in W^{k,p} \cap L^{\widetilde{q}}$, $1 \leq p,\ q \leq \infty$. Para qualquer j inteiro, $0 \leq j < k$, e qualquer a no intervalo $j/k \leq a \leq 1$, escreva*

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{p} - \frac{k}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\widetilde{q}}.$$

Quando $k - j - n/p$ não for um inteiro não negativo, então

$$\|D_j u\|_{\widetilde{p}} \leq C\left(\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right)^a \left(\|u\|_{\widetilde{q}}\right)^{1-a}.$$

Se $k - j - n/p$ é um inteiro não negativo, então a desigualdade acontece para $a = \dfrac{j}{k}$ (C independe de u).

Um dos principais resultados desta seção está no

Teorema 4.1.2 (***Pohožaev***). *Suponha que as condições $(A1)$ e $(A2)$ são satisfeitas com $p > n$. Então existe uma função $\psi : I\!R_+^2 \to I\!R_+$, limitada em todo compacto, tal que qualquer solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$, com $p > n$, do problema (4.1.2) satisfaz*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \psi\left(M, \|b_M\|_p\right) \tag{4.1.3}$$

contanto que $\|u\|_\infty \leq M$. Aqui $b_M(x) = sup_{|u|\leq M} b(x,u)$, $I\!R_+^2 = I\!R_+ \times I\!R_+$ e $I\!R_+ = \{t \in I\!R; t \geq 0\}$.

Demonstração. Temos que

$$\Delta u = f(x,u,Du) = \frac{f(x,u,Du)}{1+|Du|^\mu}\left(1+|Du|^\mu\right).$$

Então

$$\Delta u - c(x)u = \frac{f(x,u,Du)}{1+|Du|^\mu}\left(1+|Du|^\mu\right) - c(x)u,$$

onde $c(x) = b_M(x) \geq 0$. Assim a função u satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta u - c(x)u &= f_1(x)|Du|^\mu + f_0(x) \ \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

onde

$$f_1(x) = \frac{f(x,u(x),Du(x))}{1+|Du(x)|^\mu} \quad \text{e} \quad f_0(x) = f_1(x) - c(x)u(x).$$

Nosso objetivo é obter uma estimativa para $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ em termos das quantidades $\|u\|_\infty$, $\|f_1\|_p$ e $\|f_0\|_p$, que são limitadas em função de M e $\|b_M\|_p$. Para isto consideremos, no espaço $W^{2,p}(\Omega)$ com $p > n$, o problema de valores de fronteira

$$\begin{gathered} \Delta v - c(x)\,v = f_1(x)\,|Dv|^\mu + t f_0(x) \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{gathered} \tag{4.1.5}$$

com o parâmetro $t \in [0,1]$ e as funções c, f_1 e f_0 definidas anteriormente.

Tendo em vista o Lema 4.1.3 a seguir, observe que a solução do problema (4.1.5) para $t = 1$ coincide com a solução do problema (4.1.4) e, em virtude da notação usada, com a solução do problema (4.1.2).

Agora sejam v_1 e v_2 soluções de (4.1.5) correspondentes aos valores t_1 e t_2, $t_2 > t_1$, parâmetros t. Então a diferença $\widetilde{v} = v_2 - v_1$ satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta\widetilde{v} - c(x)\,\widetilde{v} &= f_1(x)\left[|Dv_2|^\mu - |Dv_1|^\mu\right] + (t_2 - t_1)\,f_0(x) \quad \text{em } \Omega \\ \widetilde{v} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \|\Delta\widetilde{v} - c(x)\,\widetilde{v}\|_p &\leq \|f_1\left[|Dv_2|^\mu - |Dv_1|^\mu\right]\|_p + (t_2 - t_1)\,\|f_0\|_p \\ &\leq 2^{\mu-1}\,\|f_1\|_p\,\|D\widetilde{v}\|_\infty^\mu + 2^\mu\,\|f_1\|_p\,\|Dv_1\|_\infty^\mu + (t_2 - t_1)\,\|f_0\|_p \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

para $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$. Da prova da interpolação da Desigualdade de Gagliardo-Niremberg (veja [9, Theorem 10.1, pg. 27]) para a função $\widetilde{v}$ em $W^{2,p}(\Omega)$ com $p > n$ e do fato que $\mu = 2 - \dfrac{n}{p}$, segue que

$$\|D\widetilde{v}\|_\infty \leq C_1\,\|\widetilde{v}\|_{W^{2,p}(\Omega)}^{\mu^{-1}}\,\|\widetilde{v}\|_\infty^{1-\mu^{-1}} \tag{4.1.7}$$

onde $C_1 = C_1(\Omega, n, p)$. Por outro lado, da desigualdade para operadores elípticos, veja [2, Theorem 7.1], temos que

$$\|\widetilde{v}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq A\,\|\Delta\widetilde{v} - c(x)\,\widetilde{v}\|_p \tag{4.1.8}$$

aqui $A = A\left(\Omega, n, p, \|c\|_p\right)$.

Logo, utilizando (4.1.6), (4.1.7) e o Lema 4.1.4 a ser visto em seguida, nesta ordem, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta\widetilde{v} - c(x)\widetilde{v}\right\|_p &\leq 2^{\mu-1}\left\|f_1\right\|_p \left\|D\widetilde{v}\right\|_\infty^\mu + 2^\mu \left\|f_1\right\|_p \left\|Dv_1\right\|_\infty^\mu + (t_2 - t_1)\left\|f_0\right\|_p \\
&\leq 2^{\mu-1}C_1^\mu \left\|f_1\right\|_p \left\|\widetilde{v}\right\|_\infty^{\mu-1} \left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} + 2^\mu \left\|f_1\right\|_p \left\|Dv_1\right\|_\infty^\mu + \left\|f_0\right\|_p \\
&\leq 2^{\mu-1}C_1^\mu \left\|f_1\right\|_p (t_2 - t_1)^{\mu-1}\left(1 + \left\|u\right\|_\infty\right)^{\mu-1} \left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\
&\quad + 2^\mu \left\|f_1\right\|_p \left\|Dv_1\right\|_\infty^\mu + \left\|f_0\right\|_p .
\end{aligned}$$

Então, por (4.1.8) chegamos a

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq 2^{\mu-1}C_1^\mu A \left\|f_1\right\|_p (t_2 - t_1)^{\mu-1}\left(1 + \left\|u\right\|_\infty\right)^{\mu-1} \left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\
&\quad + 2^\mu A \left\|f_1\right\|_p \left\|Dv_1\right\|_\infty^\mu + A\left\|f_0\right\|_p .
\end{aligned}$$

Daí, considerando

$$0 < t_2 - t_1 \leq r, \tag{4.1.9}$$

onde $r = (2C_1)^{-\mu/(\mu-1)}\left(A\left\|f_1\right\|_p\right)^{-1/(\mu-1)}\left(1 + \left\|u\right\|_\infty\right)^{-1}$ temos que

$$\left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq 2^{-1}\left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} + 2^\mu A \left\|f_1\right\|_p \left\|Dv_1\right\|_\infty^\mu + A\left\|f_0\right\|_p .$$

Donde

$$\left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq 2^{\mu+1} A \left\|f_1\right\|_p \left\|Dv_1\right\|_\infty^\mu + 2A\left\|f_0\right\|_p .$$

Como $\left\|v_2\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \left\|\widetilde{v}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \left\|v_1\right\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ e tendo em vista a desigualdade proveniente da imersão $W^{2,p}(\Omega) \to C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ para $p > n$, isto é,

$$\left\|Dv_1\right\|_\infty \leq C_2 \left\|v_1\right\|_{W^{2,p}(\Omega)}$$

onde $C_2 = C_2(\Omega, n, p)$ obtemos

$$\left\|v_2\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \left\|v_1\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} + 2^{\mu+1}C_2^\mu A \left\|f_1\right\|_p \left\|v_1\right\|_{W^{2,p}(\Omega)}^\mu + 2A\left\|f_0\right\|_p .$$

Agora, com r fixado seja k um número natural tal que $(k-1)r \leq 1$ e $kr > 1$. Considere v_j as soluções em $W^{2,p}(\Omega)$ do problema (4.1.5) correspondentes aos parâmetros $t_j = (j-1)r$, $j = 1, ..., k$, e v_{k+1} a solução associada ao parâmetro $t_{k+1} = 1$.

AFIRMAÇÃO: $\left\|v_j\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \psi_j\left(M, \left\|b_M\right\|_p\right)$.

De fato, para $j = 1$ temos que $t_1 = 0$ e portanto $v_1 = 0$, donde obtemos a desigualdade desejada. Suponha que para $j = l$ a desigualdade seja verdadeira. Então, para $j = l + 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\|v_{l+1}\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq \|v_l\|_{W^{2,p}(\Omega)} + 2^{\mu+1} C_2^{\mu} A \|f_1\|_p \|v_l\|^{\mu}_{W^{2,p}(\Omega)} + 2A \|f_0\|_p \\
&\leq \psi_l \left(M, \|b_M\|_p\right) + 2^{\mu+1} C_2^{\mu} A \|f_1\|_p \left[\psi_l \left(M, \|b_M\|_p\right)\right]^{\mu} + 2A \|f_0\|_p \\
&= \psi_{l+1} \left(M, \|b_M\|_p\right).
\end{aligned}$$

Assim, sendo a função v_{k+1} associada ao parâmetro $t_{k+1} = 1$, pelo que já foi dito ela coincide com a solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$ do problema $(4.1.2)$, donde temos que a desigualdade $(4.1.3)$ é satisfeita. ■

Lema 4.1.3. *Para qualquer t fixo o problema $(4.1.5)$ tem no máximo uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$, $p > n$.*

Demonstração. Suponha que v e z são duas soluções arbitrárias de $(4.1.5)$. Então a diferença $w = v - z$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\Delta w - c(x) w &= f_1(x) \left(|Dv|^{\mu} - |Dz|^{\mu}\right) = f_1(x) \sum_{i=1}^{n} h_i(x) D_i w \quad \text{em } \Omega \\
w &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega,
\end{aligned}$$

onde $h_i(x) = \int_0^1 H_i(x,\tau)\, d\tau$ com

$$H_i(x,\tau) = \mu \left[\sum_{k=1}^{n} (\tau D_k w + D_k z)^2\right]^{\mu/2-1} (\tau D_i w + D_i z)(x)$$

para $\sum_{k=1}^{n} (\tau D_k w + D_k z)^2 (x) \neq 0$ e $H_i(x,\tau) = 0$ para $\sum_{k=1}^{n} (\tau D_k w + D_k z)^2 (x) = 0$. Como $c(x) \geq 0$, $c \in L^p(\Omega)$, $f_1 \in L^p(\Omega)$, $h_i \in L^{\infty}(\Omega)$ $(i = 1, ..., n)$ e $p > n$, segue do Princípio do Máximo de Aleksandrov para funções em $W^{2,p}(\Omega)$ que $w \equiv 0$, donde temos que $v \equiv z$, completando a prova. ■

Lema 4.1.4. *Sejam v_1 e v_2 soluções de $(4.1.5)$ correspondentes aos valores t_1 e t_2, $t_2 > t_1$. Então*

$$\|v_2 - v_1\|_{\infty} \leq (t_2 - t_1)(1 + \|u\|_{\infty}).$$

Demonstração. Consideremos $K = (t_2 - t_1)(1 + \|u\|_\infty)$ e $\widetilde{v} = v_2 - v_1$. A função $\widetilde{v} - K$ satisfaz

$$-[\Delta(\widetilde{v}-K) - c(x)(\widetilde{v}-K)] = -f_1(x)\sum_{i=1}^{n}\widetilde{h}_i(x)\,D_i(\widetilde{v}-K) - (t_2-t_1)\,f_0(x) - c(x)K$$

em Ω e

$$\widetilde{v} - K = -K \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Aqui $\widetilde{h}_i(x) = \int_0^1 \widetilde{H}_i(x,\tau)\,d\tau$ com

$$\widetilde{H}_i(x,\tau) = \mu\left[\sum_{k=1}^{n}(\tau D_k\widetilde{v} + D_k v_1)^2\right]^{\mu/2-1}(\tau D_i\widetilde{v} + D_i v_1)(x)$$

para $\sum_{k=1}^{n}(\tau D_k\widetilde{v} + D_k v_1)^2(x) \neq 0$ e

$$\widetilde{H}_i(x,\tau) = 0 \text{ para } \sum_{k=1}^{n}(\tau D_k\widetilde{v} + D_k v_1)^2(x) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
-(t_2 - t_1)\,f_0(x) - c(x)\,K &= -(t_2 - t_1)\,f_0(x) - (t_2 - t_1)(1 + \|u\|_\infty)\,c(x)\\
&= -(t_2 - t_1)\left[f_0(x) + c(x) + \|u\|_\infty\, c(x)\right]\\
&= -(t_2 - t_1)\left[f_1(x) - c(x)\,u(x) + c(x) + \|u\|_\infty\, c(x)\right]\\
&= -(t_2 - t_1)\left[f_1(x) + c(x) + (\|u\|_\infty - u(x))\,c(x)\right] \leq 0
\end{aligned}$$

em Ω e $\widetilde{v} - K = -(t_2 - t_1)(1 + \|u\|_\infty) \leq 0$ na $\partial\Omega$. Então, segue do princípio do máximo que $\widetilde{v} \leq K$ em $\overline{\Omega}$. Ainda, fazendo uma análise semelhante a anterior com a função $\widetilde{v} + K$ chegamos que $-K \leq \widetilde{v}$ em $\overline{\Omega}$. Portanto $\|\widetilde{v}\|_\infty \leq K$, donde temos o resultado procurado. ∎

Consideremos agora que a função de Carathéodory f satisfaz a condição seguinte:

$(A2)^*$ Suponha que

$$|f(x,s,\xi) - b(x,s)| \leq b_1(x,s)\,|\xi|^\nu$$

com $\nu = 2 - \dfrac{n}{q}$, $q \geq p > n$ e $\nu = 2$ se $q = \infty$, para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $(s,\xi) \in I\!R \times I\!R^n$ com as funções de Carathéodory $b \geq 0$ e $b_1 \geq 0$ satisfazendo, para qualquer $l > 0$ fixo,

$$sup_{|s|\leq l}\, b(\cdot,s) \in L^p(\Omega), \quad sup_{|s|\leq l}\, b_1(\cdot,s) \in L^q(\Omega).$$

Corolário 4.1.5 (***do Teorema*** **4.1.2**). *Suponha que sejam satisfeitas as condições (A1) e (A2)* com $q \geq p > n$. Então existe uma função $\psi : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$, limitada em todo compacto, tal que qualquer solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$, com $p > n$, do problema* (4.1.2) *satisfaz a desigualdade*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \psi\left(M, \|b_M\|_p, \|b_{1,M}\|_q\right)$$

contanto que $\|u\|_\infty \leq M$. Aqui estamos considerando $b_M(x) = sup_{|u|\leq M} b(x,u)$ e $b_{1,M}(x) = sup_{|u|\leq M} b_1(x,u)$.

Demonstração. Observe que

$$\Delta u = f(x,u,Du) = \frac{f(x,u,Du) - b(x,u)}{1 + |Du|^\nu}\left(1 + |Du|^\nu\right) + b(x,u).$$

Daí,

$$\Delta u - c(x)u = \frac{f(x,u,Du) - b(x,u)}{1 + |Du|^\nu}\left(1 + |Du|^\nu\right) + b(x,u) - c(x)u,$$

onde $c(x) = b_M(x) + b_{1,M}(x) \geq 0$. Assim a função u satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta u - c(x)u &= f_1(x)|Du|^\nu + f_0(x) \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde

$$f_1(x) = \frac{f(x,u,Du) - b(x,u)}{1 + |Du|^\nu} \quad \text{e} \quad f_0(x) = f_1(x) + b(x,u) - c(x)u.$$

A idéia agora é obter uma estimativa em $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ em termos das quantidades $\|u\|_\infty \leq M$, $\|f_1\|_p$ e $\|f_0\|_p$ que são limitadas em função de M, $\|b_M\|_p$ e $\|b_{1,M}\|_q$. Para isto, basta prosseguir a demonstração com passos semelhantes aos utilizados na prova do Teorema 4.1.2 considerando, no espaço $W^{2,p}(\Omega)$, com $p > n$, o problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned} \Delta v - c(x)v &= f_1(x)|Dv|^\nu + tf_0(x) \text{ em } \Omega \\ v &= 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

com o parâmetro $t \in [0,1]$ e as funções c, f_1 e f_0 definidas anteriormente.

Neste caso, utilizamos o fato que

$$\|f_1 (|Dv_2|^\nu - |Dv_1|^\nu)\|_p \le 2^{\nu-1} \|f_1\|_q \|D\widetilde{v}\|_{\widetilde{p}}^\nu + 2^\nu \|Dv_1\|_\infty^\nu \|f_1\|_p$$

onde $\widetilde{p} = \dfrac{\nu pq}{q-p}$. E a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para a função $\widetilde{v}$ em $W^{2,p}(\Omega)$ será dada por

$$\|D\widetilde{v}\|_{\widetilde{p}} \le C_1 \|\widetilde{v}\|_{W^{2,p}(\Omega)}^a \|\widetilde{v}\|_{\widetilde{q}}^{1-a},$$

com $a = \nu^{-1}$ e $\widetilde{q} = \infty$. ■

4.2 A Precisão do Índice $\mu = 2 - n/p$

O artigo de Kazdan e Kramer [14] nos fala que o Teorema 4.1.2 também é válido desde que seja satisfeita a hipótese $(A1)$ e a condição de Bernstein, isto é,

$$|f(x, s, \xi)| \le b(x, s) \left(1 + |\xi|^2\right)$$

com a função de Carathéodory b satisfazendo

$$sup_{|s|\le l} b(\cdot, s) \in L^\infty(\Omega)$$

para qualquer $l > 0$ fixo. Daí resulta que esta função b é tal que

$$sup_{|s|\le l} b(\cdot, s) \in L^p(\Omega), \quad \text{com } p > n,$$

ou seja, a função f não satisfaz somente a condição de Bernstein mas também a condição $(A2)$ com $\mu > 2 - \dfrac{n}{p}$, incluindo $2 \ge \mu > 2 - \dfrac{n}{p}$, o que em geral não implica que tenhamos a veracidade do Teorema 4.1.2.

Vejamos um contra-exemplo que mostra que o índice $\mu = 2 - \dfrac{n}{p}$ de $(A2)$ não pode ser trocado sem que tenhamos assumido hipóteses adicionais.

Seja $n = 1$, $\Omega = [0, 1] \subset I\!R$ e

$$\begin{aligned} \Delta u &= b(x) |Du|^\mu \quad \text{em } \Omega \\ u(0) &= 0 \quad \text{e} \quad u(1) = (1+\epsilon)^\theta - \epsilon^\theta \end{aligned}$$

com $b(x) = \theta^{1-\mu}(\theta - 1)(x+\epsilon)^{\theta-2-\mu(\theta-1)}$. Aqui $\mu > 2 - \dfrac{n}{p} = 2 - \dfrac{1}{p}$, $p > 1$, $\epsilon \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$ e $\Delta u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, $Du = \dfrac{du}{dx}$. Vale ressaltar que o número θ será fixado posteriormente para que uma determinada condição desejada seja satisfeita.

Cálculos simples mostram que este problema tem solução única

$$u(x) = (x+\epsilon)^{\theta} - \epsilon^{\theta}.$$

Além disso, a norma $\|b\|_p$ satisfaz

$$\begin{aligned} \|b\|_p &= \left(\int_0^1 |b(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \theta^{1-\mu}(1-\theta)\left(\int_0^1 \left|(x+\epsilon)^{\theta-2-\mu(\theta-1)}\right|^p dx\right)^{1/p} \\ &= \theta^{1-\mu}(1-\theta)\left|\frac{(1+\epsilon)^k - \epsilon^k}{k}\right|^{1/p}, \quad k = [\mu(1-\theta)+\theta-2]\,p+1. \end{aligned}$$

Agora fixemos $\theta \in (0,1)$ tal que $k > 0$, isto é,

$$\mu > \frac{2 - 1/p - \theta}{1-\theta}.$$

Assim, com os valores dos parâmetros indicados acima, a desigualdade

$$\|b\|_p \le \theta^{1-\mu}k^{-1/p}\left|(1+\epsilon)^k - \epsilon^k\right|^{1/p} \le \theta^{1-\mu}2^{k/p}k^{-1/p}$$

acontece para qualquer $\epsilon \in (0,1)$.

A função $\widetilde{\varphi}(x) = \left[(1+\epsilon)^{\theta} - \epsilon^{\theta}\right] x$ é tal que $\widetilde{\varphi}|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi}\|_{W^{2,p}(\Omega)} &= \left(\int_0^1 \sum_{|\alpha|\le 2} |D^{\alpha}\widetilde{\varphi}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\ &\le \left[(1+\epsilon)^{\theta} - \epsilon^{\theta}\right]\left[1 + (1+p)^{-1/p}\right] \\ &\le 2^{1+\theta} < 4, \end{aligned}$$

para os valores dos parâmetros dados. Portanto, para $p > 1$, $\mu > 2 - \dfrac{1}{p}$ e $\theta \in (0,1)$ fixos, as desigualdades

$$\|u\|_{\infty} \le 2, \quad \|b\|_p \le \theta^{1-\mu}2^{k/p}k^{-1/p} \quad \text{e} \quad \|\varphi\|'_{W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)} \le c_0\,\|\widetilde{\varphi}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le 4c_0$$

são válidas para qualquer $\epsilon \in (0,1)$. Como vimos no início da Seção 4.1, c_0 é uma constante que não depende da função $\widetilde{\varphi}$.

Por outro lado, a norma $\|Du\|_\infty$ satisfaz

$$\|Du\|_\infty = \theta \frac{1}{\epsilon^{1-\theta}} \to +\infty \quad \text{quando } \epsilon \to 0.$$

Logo, pela imersão $W^{2,p}(\Omega) \to C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, temos que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \to +\infty \quad \text{quando } \epsilon \to 0.$$

Desta forma vemos que o Teorema 4.1.2 não acontece para qualquer $\mu > 2 - \dfrac{1}{p}$ $(n = 1)$.

4.3 Teoria de Solubilidade

Considere o problema de valores de fronteira (4.1.2) com as condições $(A1)$, $(A2)$ e a seguinte condição de Lipschitz:

$(A3)$ Admita que

$$|f(x,s,\eta) - f(x,s,\xi)| \leq b_1(x,s,\xi,\eta) \cdot |\eta - \xi|$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $(s,\xi,\eta) \in I\!R \times I\!R^n \times I\!R^n$, onde a função $b_1(x,s,\xi,\eta)$ é mensurável com respeito a x, $\forall (s,\xi,\eta) \in I\!R \times I\!R^n \times I\!R^n$, contínua em relação a (s,ξ,η) para quase todo $x \in \Omega$ e tal que para qualquer $l > 0$ fixo

$$sup\{b_1(\cdot,s,\xi,\eta); |s| \leq l, |\xi| \leq l, |\eta| \leq l\} \in L^p(\Omega) \quad \text{com } p > n.$$

Na seqüência veremos um teorema que garante a existência de solução em $W^{2,p}(\Omega)$ do problema (4.1.2), mas para tanto vejamos as seguintes definições:

Definição 4.3.1 (***Super-solução***). *Uma função $u_+ \in W^{2,p}(\Omega)$ com $p > n$ é dita uma super-solução do problema* (4.1.2) *se*

$$\begin{aligned} -\Delta u_+ &\geq -f(x,u_+,Du_+) \quad q.t.p \text{ em } \Omega \\ u_+ &\geq 0 \quad na\ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Definição 4.3.2 (***Sub-solução***). *A função* $u_- \in W^{2,p}(\Omega)$ *com* $p > n$ *é dita uma sub-solução do problema* (4.1.2) *se*

$$\begin{aligned} -\Delta u_- &\leq -f(x, u_-, Du_-) \quad q.t.p \text{ em } \Omega \\ u_- &\leq 0 \quad na\ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Teorema 4.3.3. *Suponha que as condições* $(A1)$, $(A2)$ *e* $(A3)$ *sejam satisfeitas com* $p > n$. *Suponha também que existam super e sub-soluções,* u_+ *e* u_-, *respectivamente, em* $W^{2,p}(\Omega)$ *do problema* (4.1.2) *tal que* $u_+(x) \geq u_-(x)$ *para cada* $x \in \overline{\Omega}$. *Então o problema* (4.1.2) *tem uma solução* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *e*

$$u_-(x) \leq u(x) \leq u_+(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

A prova deste teorema basear-se-á nos dois lemas seguintes:

Lema 4.3.4. *Suponha que a função real* $F_0(x, s, \xi)$ *definida em* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *satisfaz a condição de Carathéodory* $(A1)$ *com* $f = F_0$, *e*

$$sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} |F_0(\cdot, s, \xi)| \in L^p(\Omega) \quad com\ p > n. \tag{4.3.1}$$

Então o problema de valores de fronteira

$$\Delta u = F_0(x, u, Du) \ \ em\ \Omega \quad e \quad u = 0\ \ na\ \partial\Omega$$

tem uma solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Demonstração. Considere o problema de valores de fronteira

$$\Delta u = F_0(x, v, Dv) \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega \tag{4.3.2}$$

para uma função arbitrária $v \in C^1(\overline{\Omega})$.

Então, de acordo com a teoria conhecida de problemas elípticos em $L^p(\Omega)$, para qualquer $v \in C^1(\overline{\Omega})$, o problema (4.3.2) tem uma única solução em $W^{2,p}(\Omega)$. Deste modo, para cada $v \in C^1(\overline{\Omega})$, defina $u = Tv$, onde u é solução de (4.3.2). Note que pelo fato de a solução ser única o operador T está bem definido. Por (4.3.1) u satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_1 \|F_0\|_p \leq C$$

onde C é uma constante que não depende de v. O operador

$$T : C^1\left(\overline{\Omega}\right) \to W^{2,p}(\Omega)$$

é contínuo, e como a imersão $W^{2,p}(\Omega) \to C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $p > n$, é compacta, o operador T é um operador compacto de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ em $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Em virtude da desigualdade $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$, existe uma bola B fechada em $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ em que T leva B em B. Então, pelo Teorema 3.5.3 o operador T tem um ponto fixo $\widetilde{u} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, que pela definição de T está em $W^{2,p}(\Omega)$, isto é, $T\widetilde{u} = \widetilde{u}$ com $\widetilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$. Daí temos que $\widetilde{u}$ é solução procurada, completando a prova do lema. ■

Para uma função u de $W^{2,p}(\Omega)$ com $p > n$ nós definimos o operador truncamento σ pela relação

$$\sigma u(x) = \begin{cases} u_+(x), & \text{para } u(x) > u_+(x) \\ u(x), & \text{se } u_-(x) \leq u(x) \leq u_+(x) \\ u_-(x), & \text{quando } u(x) < u_-(x), \end{cases}$$

e consideramos o problema de valores de fronteira

$$\Delta u = f(x, \sigma u, Du) \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \tag{4.3.3}$$

LEMA 4.3.5. *Suponha que a função f satisfaça as condições $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$ com $p > n$. Seja u em $W^{2,p}(\Omega)$ a solução do problema $(4.3.3)$. Então*

$$u_-(x) \leq u(x) \leq u_+(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A função $w = u - u_+$ satisfaz

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \Delta u_+ - \Delta u \leq f(x, u_+, Du_+) - f(x, \sigma u, Du) \quad \text{em } \Omega \\ w &= u - u_+ \leq 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Assumamos por contradição que existe $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ tal que $u_+(\bar{x}) < u(\bar{x})$. Então o conjunto

$$G = \{x \in \Omega;\ w(x) > 0\}$$

é não vazio e

$$-\Delta w \leq f(x, u_+, Du_+) - f(x, u_+, Du) \quad \text{em } G.$$

Em virtude da condição $(A3)$ nós obtemos que

$$\begin{aligned} -\Delta w &\leq b_1(x, u_+, Du, Du_+) \cdot |Du - Du_+| \\ &= \widetilde{b}_1(x) \cdot |Dw| = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j w \quad \text{em } G \end{aligned}$$

com $\widetilde{b}_1(x) = b_1(x, u_+, Du, Du_+)$, e, onde $a_j(x) = 0$ quando $|Dw| = 0$ e do contrário $a_j(x) = \widetilde{b}_1(x) \dfrac{D_j w}{|Dw|} \in L^p(\Omega)$ com $p > n$, e $w \equiv 0$ na ∂G. Pelo Princípio do Máximo de Aleksandrov (veja Teorema 3.1.9) segue que o máximo de w em G é zero, o que contraria o fato de G ser não vazio. Portanto temos que

$$u(x) \leq u_+(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Com uma análise semelhante na função $z = u_- - u$ obtemos que

$$u_-(x) \leq u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

concluindo a demonstração. ■

Demonstração do Teorema 4.3.3. Seja $M = máx\{\|u_+\|_\infty, \|u_-\|_\infty\}$ e considere a função $\psi\left(M, \|b_M\|_p\right)$ do Teorema 4.1.2. Além disso, tome

$$M_1 = C_2 \psi\left(M, \|b_M\|_p\right)$$

onde $C_2 = C_2(\Omega, n, p)$ é a constante proveniente da imersão $W^{2,p}(\Omega) \to C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ com $p > n$.

Agora defina a função

$$F_1(x, s, \xi) = \begin{cases} f(x, s, \xi), & \text{para } |\xi| \leq M_2 \\ f\left(x, s, M_2 \dfrac{\xi}{|\xi|}\right), & \text{se } |\xi| > M_2, \end{cases}$$

com

$$M_2 = máx\{M_1, \|Du_+\|_\infty, \|Du_-\|_\infty\}.$$

Esta função F_1 satisfaz as condições $(A1)$ e $(A2)$ com a correspondente desiguadade

$$|F_1(x,s,\xi)| \leq \begin{cases} b(x,s)\left(1+|\xi|^{\mu}\right), & \text{se } |\xi| \leq M_2 \\ b(x,s)\left(1+M_2^{\mu}\right), & \text{quando } |\xi| > M_2, \end{cases}$$

donde

$$|F_1(x,s,\xi)| \leq b(x,s)\left(1+M_2^{\mu}\right).$$

A função F_1 satisfaz também $(A3)$ com a desigualdade

$$|F_1(x,s,\xi) - F_1(x,s,\eta)| \leq b_2(x,s,\xi,\eta)\,|\xi-\eta|$$

onde

$$b_2(x,s,\xi,\eta) = \begin{cases} b_1(x,s,\xi,\eta), & \text{para } |\xi|,|\eta| \leq M_2, \\ b_1\left(x,s,\xi,M_2\dfrac{\eta}{|\eta|}\right), & \text{caso } |\xi| \leq M_2, |\eta| > M_2, \\ b_1\left(x,s,M_2\dfrac{\xi}{|\xi|},\eta\right), & \text{quando } |\xi| > M_2, |\eta| \leq M_2, \\ b_1\left(x,s,M_2\dfrac{\xi}{|\xi|},M_2\dfrac{\eta}{|\eta|}\right), & \text{se } |\xi|,|\eta| > M_2. \end{cases}$$

É fácil de se verificar esta desigualdade geometricamente, no entanto a prova analítica exige um pouco mais de trabalho.

Consideremos o problema

$$\Delta u = F_1(x,\sigma u,Du) \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \tag{4.3.4}$$

A função

$$\overline{F}_1(x,u,\xi) = \begin{cases} F_1(x,u_+(x),\xi), & \text{para } u(x) > u_+(x) \\ F_1(x,u,\xi), & \text{quando } u_-(x) < u(x) < u_+(x) \\ F_1(x,u_-(x),\xi), & \text{caso } u(x) < u_-(x) \end{cases}$$

é uma função real que satisfaz $(A1)$ e $sup_{(u,\xi)\in I\!R\times I\!R^n}\left|\overline{F}_1(\cdot,u,\xi)\right| \in L^p(\Omega)$. Ainda mais,

$$\overline{F}_1(x,u(x),Du(x)) = F_1(x,\sigma u(x),Du(x)).$$

Logo o Lema 4.3.4 pode ser aplicado para o problema $(4.3.4)$, donde obtemos que este problema tem uma solução $\widehat{u} \in W^{2,p}(\Omega)$.

Observando que as funções u_+ e u_- são, respectivamente, super e sub-soluções do problema

$$\Delta u = F_1(x, u, Du) \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \tag{4.3.5}$$

temos, pelo Lema 4.3.5, que

$$u_-(x) \leq \widehat{u}(x) \leq u_+(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Conseqüentemente, $\sigma\widehat{u}(x) = \widehat{u}(x)$. Então a solução $\widehat{u}$ obtida do problema (4.3.4) é também solução de (4.3.5).

Assim, como $\|\widehat{u}\|_\infty \leq M$, pelo Teorema 4.1.2, obtemos que

$$\|\widehat{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \psi\left(M, \|b_M\|_p\right)$$

e, pela desigualdade de imersão, $\|\widehat{u}\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C_2 \|\widehat{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}$, segue que

$$máx_{x\in\overline{\Omega}} |D\widehat{u}(x)| \leq C_2 \|\widehat{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_2\psi\left(M, \|b_M\|_p\right) = M_1.$$

Sendo $F_1 = f$ para $|\xi| \leq M_1 \leq M_2$, então a solução $\widehat{u}$ de (4.3.5) é também solução de (4.1.2), concluindo a prova do teorema. ∎

Exemplo 4.3.6. *É fácil verificar que as funções $u_- = 0$ e $u_+ = K$ são, respectivamente, sub e super-soluções do problema (2) apresentado na introdução, contanto que $K > 0$ seja suficientemente grande. Daí, utilizando o Teorema 4.3.3 vemos que existe uma solução positiva do problema (2) e*

$$0 \leq u \leq K \text{ em } \overline{\Omega}$$

como queríamos.

4.4 O Princípio do Máximo e a Condição $(A3)$

Considere $g(x, \xi)$ uma função definida em $\Omega \times I\!R^n$ com valores em $I\!R$ que satisfaz a condição de Carathéodory, isto é, uma função mensurável com respeito a x para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e contínua em relação a ξ para quase todo $x \in \Omega$. Assuma também que para qualquer $l > 0$ fixo

$$sup_{|\xi| \leq l} |g(\cdot, \xi)| \in L^p(\Omega), \quad \text{com } p > n.$$

Fixada uma função v em $W^{2,p}(\Omega)$, consideremos as seguintes desigualdades para uma função w de $W^{2,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\Delta w &\leq g(x, Dv) - g(x, Dv + Dw) \quad \text{em } \Omega \\ w &\leq 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Se a função g satisfizer somente as condições mencionadas acima, o princípio do máximo e (4.4.1) não garantem que

$$w \leq 0 \quad \text{em } \Omega. \tag{4.4.2}$$

Além disso, se a condição $(A3)$ é trocada pela condição de Hölder da forma

$$|f(x, s, \eta) - f(x, s, \xi)| \leq b_1(x, s, \xi, \eta) \cdot |\eta - \xi|^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1,$$

com a mesma função b_1 de $(A3)$, a desigualdade (4.4.2) para g também não segue de (4.4.1) para qualquer λ, $0 < \lambda < 1$.

Este fato é ilustrado pelo

Exemplo 4.4.1. *Para qualquer λ, $0 < \lambda < 1$, e $p > n$ a função $w(x) = 1 - |x|^{\alpha+1}$ com $\alpha > \dfrac{1 - n/p}{1 - \lambda}$ do espaço $W^{2,p}(\Omega)$, com $p > n$, satisfaz*

$$\begin{aligned} \Delta w &= g_0(x) |Dw|^\lambda \quad \text{em } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\} \\ w &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\} \end{aligned}$$

com

$$g_0(x) = -(1 + \alpha)^{1-\lambda} (\alpha + n - 1) \cdot |x|^{\alpha(1-\lambda)-1}$$

e $g_0 \in L^p(\Omega)$.

Observe que as condições (4.4.1) são satisfeitas para as funções $v \equiv 0$ e $g(x, \xi) = g_0(x) \cdot |\xi|^\lambda$, mas $w(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, ou seja, a desigualdade (4.4.2) não é verdadeira em Ω.

Observação: Para uma função arbitrária fixa v em $W^{2,p}(\Omega)$, $p > n$, nós consideramos as seguintes desigualdades para uma função w de $W^{2,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \Delta w - c(x)\,w \leq g(x, Dv + Dw) - g(x, Dv) \quad &\text{em } \Omega \\ w \leq 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

com a função g indicada no início da seção e a função c em $L^p(\Omega)$, $p > n$, com $c \geq 1$ em Ω. Então o caso geral da desigualdade (4.4.2) para g não segue de (4.4.3) e da condição de Hölder com $0 < \lambda < n/p$.

A observação precedente pode pode ser analisada através do

Exemplo 4.4.2. *Qualquer que sejam o número λ, $0 < \lambda < n/p$, e $p > n$ a função $w(x) = 1 - |x|^{\alpha+1}$ com $1 > \alpha > \dfrac{1 - n/p}{1 - \lambda}$ de $W^{2,p}(\Omega)$, satisfaz*

$$\begin{aligned} \Delta w - c(x)w &= h_0(x)\,|Dw|^{\lambda} \quad \textit{em } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\} \\ w &= 0 \quad \textit{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

em que

$$h_0(x) = g_0(x) - c(x)\,\frac{w(x)}{|Dw(x)|^{\lambda}},$$

e $h_0 \in L^p(\Omega)$. A função g_0 está definida no Exemplo anterior.

Note que, para as funções $v \equiv 0$ e $g(x, \xi) = h_0(x) \cdot |\xi|^{\lambda}$, as condições (4.4.1) são satisfeitas, contudo a desigualdade (4.4.2) não é verdadeira em Ω.

4.5 Algumas Aplicações

Através de alguns testes com conjuntos de funções super e sub-soluções, podemos obter vários exemplos de existência de soluções do problema de valores de fronteira da forma (4.1.2).

Deste modo, vamos ao "teste" do conjunto de funções super e sub-soluções da forma $u = t$, onde t é um número real.

EXEMPLO 4.5.1. *Suponha que as condições* $(A1)$, $(A2)$ *e* $(A3)$ *são satisfeitas com* $p > n$, *e que existam dois números reais* t_+ *e* t_-, $t_- \leq 0 \leq t_+$, *tais que*

$$f(x, t_-, 0) \leq 0 \leq f(x, t_+, 0) \quad em\ \Omega.$$

Então o problema de valores de fronteira $(4.1.2)$ *tem uma solução* $\overline{u}$ *em* $W^{2,p}(\Omega)$, *e*

$$t_- \leq \overline{u}(x) \leq t_+, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Para provar este exemplo é suficiente aplicar o Teorema 4.3.3 com $u_+ = t_+$ e $u_- = t_-$.

Vamos agora ao "teste" de um conjunto de funções super e sub-soluções da forma $u = t\dfrac{|x|^2}{2}$.

EXEMPLO 4.5.2. *Suponha que as condições* $(A1)$, $(A2)$ *e* $(A3)$ *são satisfeitas com* $p > n$, *e que existam dois números reais* t_+ *e* t_-, $t_- \leq 0 \leq t_+$, *para os quais*

$$\begin{aligned} f\left(x, t_-\frac{|x|^2}{2}, t_- x\right) &\leq nt_- \quad em\ \Omega, \\ f\left(x, t_+\frac{|x|^2}{2}, t_+ x\right) &\geq nt_+ \quad em\ \Omega. \end{aligned}$$

Então o problema de valores de fronteira $(4.1.2)$ *tem uma solução* $\overline{u}$ *em* $W^{2,p}(\Omega)$, *e*

$$t_-\frac{|x|^2}{2} \leq \overline{u}(x) \leq t_+\frac{|x|^2}{2}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Para demonstrar o exemplo basta aplicarmos o Teorema 4.3.3 com

$$u_+ = t_+\frac{|x|^2}{2} \quad \text{e} \quad u_- = t_-\frac{|x|^2}{2}.$$

De maneira similar podemos obter a validade do exemplo para o problema de valores de fronteira (4.1.2) se considerássemos o "teste" com o conjunto de funções super e sub-soluções da forma

$$u = \frac{t}{2}|x - \tilde{x}|^2,$$

com correspondentes $t_-, t_+ \in I\!R$ e $\tilde{x}_-, \tilde{x}_+ \in I\!R^n$, o qual seria

Exemplo 4.5.3. *Suponha que as condições* $(A1)$, $(A2)$ *e* $(A3)$ *são satisfeitas com* $p > n$, *e que existam dois números reais* t_+ *e* t_-, $t_- \leq 0 \leq t_+$, *e* $\tilde{x}_-, \tilde{x}_+ \in I\!R^n$ *para os quais*

$$\begin{aligned} f\left(x, t_-\frac{|x-\tilde{x}_-|^2}{2}, t_-\left(x-\tilde{x}_-\right)\right) &\leq nt_- \quad em\ \Omega\ e \\ f\left(x, t_+\frac{|x-\tilde{x}_+|^2}{2}, t_+\left(x-\tilde{x}_+\right)\right) &\geq nt_+ \quad em\ \Omega. \end{aligned}$$

Então o problema de valores de fronteira $(4.1.2)$ *tem uma solução* $\overline{u}$ *em* $W^{2,p}(\Omega)$, *e*

$$t_-\frac{|x-\tilde{x}_-|^2}{2} \leq \overline{u}(x) \leq t_+\frac{|x-\tilde{x}_+|^2}{2}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Consideremos agora um "teste" com um conjunto de funções super e sub-soluções da forma

$$u = t\psi_1$$

onde t é um número real e ψ_1 é a primeira autofunção do problema de valores de fronteira

$$\Delta\psi_1 + \lambda_1\psi_1 = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \psi_1 = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

com $\psi_1 > 0$ em Ω.

Exemplo 4.5.4. *Suponha que as condições* $(A1)$, $(A2)$ *e* $(A3)$ *são satisfeitas com* $p > n$, *e que existam dois números reais* t_+ *e* t_-, $t_- \leq 0 \leq t_+$, *para os quais*

$$\begin{aligned} f\left(x, t_-\psi_1(x), t_-D\psi_1(x)\right) &\leq -\lambda_1 t_-\psi_1(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ f\left(x, t_+\psi_1(x), t_+D\psi_1(x)\right) &\geq -\lambda_1 t_+\psi_1(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Então o problema de valores de fronteira $(4.1.2)$ *tem uma solução* $\overline{u}$ *em* $W^{2,p}(\Omega)$, *e*

$$t_-\psi_1(x) \leq \overline{u}(x) \leq t_+\psi_1(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

A prova deste resultado pode ser obtida aplicando-se o Teorema 4.3.3 com $u_+ = t_+\psi_1(x)$ e $u_- = t_-\psi_1(x)$.

Observação: Em alguns casos a mudança de variável $v(x) \to u(x)$, definida pela relação $u = S(x, v)$ com uma função suave S, pode transformar o problema de encontrar super e sub-soluções u_+ e u_- do problema (4.1.2) em um mais simples, o de encontrar super e sub-soluções v_+ e v_- de outro problema de fronteira, induzido pela função S.

Bibliografia

[1] Adams, Robert A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975.

[2] Agmon, Shmuel. *The L^p Approach to the Dirichlet Problem*. Ann Scuola Norm. Sup. 13 (1959), 405-448.

[3] Aleksandrov, A. D. *Uniqueness Conditions and Estimates for the Solution of the Dirichlet Problem*. American Mathematical Society Translation (Serie 2) 68 (1968), 89-119.

[4] Amann, H. & Crandall, M. *On Some Existence Theorems for Semilinear Elliptic Equations.* Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 779-790.

[5] Các, N. P. *Some Remarks on a Quasilinear Elliptic Boundary Value Problem.* Nonlinear Analysis 8 (1984), 697-709.

[6] Delgado, M. & Suárez, A. *Weak Solutions for Some Quasilinear Elliptic Equations by the Sub-supersolution Method*. Nonlinear Analysis 42 (2000), 995-1002.

[7] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Equações Elípticas não Lineares*. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1977.

[8] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[9] Friedman, Avner. *Partial Differential Equations*. New York: Academic Press, 1969.

[10] Gilbarg, T. & Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1977.

[11] Han, Qing & Lin, Hua. *Elliptic Partial Differential Equations.* New York: Courant Institute of Mathematical Science, New York University, 1997.

[12] Hounie, Jorge. *Teoria Elementar das Distribuições.* 12º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, 1979.

[13] Smoller, Joel. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Spring-Verlag - New York, 1982.

[14] Kazdan, J. L. & Kramer, R. J. *Invariant Criteria for Existence of Solutions to Second Order Quasilinear Elliptic Equations.* Comm. on Pure and Apllied Math. 31 (1978), 619-645.

[15] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Jonh Wiley & Sons.

[16] Kuelkamp, Nilo. *Introdução a Topologia Geral.* Florianópolis, Ed. da UFSC, 1988.

[17] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise, vol. I.* Projeto Euclides - IMPA, 1976.

[18] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M. *Espaços de Sobolev - Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos.* Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2000.

[19] Pohožaev, S. I. *On equations of the Form* $\Delta u = f(x, u, Du)$. American Mathematical Society 41 (1982), 269-280.

[20] Rudin,W. *Real and Complex Analysis.* Mc Graw-Hill, 1966.

[21] Sotomayor, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1979.

[22] Xavier, J. B. M. *Some Existence Theorems for Equations of the Form* $-\Delta u = f(x, u, Du)$. Nonlinear Analysis 15 (1990), 59-67.

[23] Xavier, J. B. M. *A priori Estimates for the Equation* $-\Delta u = f(x, u, Du)$. Nonlinear Analysis 22 (1994), 1501-1509.

[24] Xavier, J. B. M. *A priori Estimates and Multiplicity Results for Equations of the Form* $-\Delta u = f(x, u, Du)$. Dynamic Systems and Applications 3 (1994), 489-500.

[25] Xavier, J. B. M. *Equações Diferenciais Parciais*. Notas de Aula, 2001.

[26] Ziqian, Yan. *A Note on the Solvability in* $W^{2,p}(\Omega)$ *for the equation* $-\Delta u = f(x, u, Du)$. Nonlinear Analysis 24 (1995), 1413-1416.