

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

Wesley dos Santos Villela Batista

**UM ESTUDO SOBRE OS CONJUNTOS TILTING  
E A RELAÇÃO ENTRE OS SILTING E OS AISLES  
SEPARÁVEIS**

Curitiba

2017

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

Wesley dos Santos Villela Batista

**UM ESTUDO SOBRE OS CONJUNTOS TILTING  
E A RELAÇÃO ENTRE OS SILTING E OS AISLES  
SEPARÁVEIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Dr. Edson Ribeiro Alvares.

Co-orientador: Dr. Clezio Aparecido Braga

**Curitiba**

**2017**

---

B333e

Batista, Wesley dos Santos Villela

Um estudo sobre os conjuntos tilting e a relação entre os silting e os aisles separáveis / Wesley dos Santos Villela Batista. – Curitiba, 2017.

91 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, 2017.

Orientador: Edson Ribeiro Alvares.

Coorientador: Clezio Aparecido Braga.

1. Conjuntos tilting. 2. Conjuntos silting. 3. Aisles separáveis.  
I. Universidade Federal do Paraná. II. Alvares, Edson Ribeiro. III. Braga, Clezio Aparecido. IV. Título.

CDD: 511.4

---



## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **WESLEY DOS SANTOS VILLELA BATISTA** intitulada: **UM ESTUDO SOBRE OS CONJUNTOS TILTING E A RELAÇÃO ENTRE OS SILTING E OS AISLES SEPARÁVEIS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação.

Curitiba, 21 de Fevereiro de 2017.



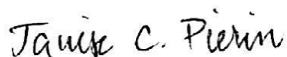
CLEZIO APARECIDO BRAGA

Presidente da Banca Examinadora (UNIOESTE)



VIKTOR BEKKERT

Avaliador Externo (UFMG)



TANISE CARNIERI PIERIN

TANISE CARNIERI PIERIN

Avaliador Externo (UFPR)



**ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA**

No dia vinte e um de Fevereiro de dois mil e dezessete às 16:00 horas, na sala Anfiteatro B, Rua Cel. Francisco H. dos Santos, 100 - Jardim das Américas, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **WESLEY DOS SANTOS VILLELA BATISTA** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada **UM ESTUDO SOBRE OS CONJUNTOS TILTING E A RELAÇÃO ENTRE OS SILTING E OS AISLES SEPARÁVEIS**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: CLEZIO APARECIDO BRAGA (UNIOESTE), VIKTOR BEKKERT (UFMG), TANISE CARNIERI PIERIN (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, CLEZIO APARECIDO BRAGA, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 21 de Fevereiro de 2017.

CLEZIO APARECIDO BRAGA  
Presidente da Banca Examinadora (UNIOESTE)

VIKTOR BEKKERT  
Avaliador Externo (UFMG)

TANISE CARNIERI PIERIN  
Avaliador Externo (UFPR)

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de desenvolver tal estudo sempre com saúde, disposição e por estar acompanhado de pessoas maravilhosas que fizeram parte dessa caminhada.

Agradeço a todas as pessoas que me ajudaram e me apoiaram durante minha formação. Em especial meus pais, Celso Villela Batista Junior e Luzia Carvalho dos Santos, que sempre me incentivaram aos estudos desde pequeno. E também a minha namorada, Janaina Rayane Rodrigues, por estar ao meu lado me apoiando desde o início do mestrado e por continuar acreditando em mim, mesmo nos momentos em que nem mesmo eu acreditava.

Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares e ao Prof. Dr. Clezio Aparecido Braga por terem me orientado neste trabalho. E que com toda sua sabedoria e paciência me ajudaram em diversos encontros no desenvolvimento deste trabalho. O direcionamento deles foi imprescindível tanto para o início quanto para a conclusão do mesmo. Também gostaria de agradecer as professoras Heily Wagner e Tanise Carnieri Pierin, as quais sempre se mostraram dispostas a me ajudar durante essa caminhada.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos do PPGMA pelos vários momentos agradáveis que pudemos compartilhar durante minha jornada.

*“Agradeço todas as dificuldades que enfrentei; não fosse por elas, eu não teria saído do lugar. As facilidades nos impedem de caminhar.”*

Chico Xavier

*“Não diga que a vitória está perdida se é de batalhas que se vive a vida...  
Tenha fé em Deus, tenha fé na vida. Tente outra vez!”*

Raul Seixas

# Resumo

O presente trabalho possui dois objetivos distintos. O primeiro é realizar um estudo a respeito de uma aplicação  $\varphi$ , introduzida por Keller e Vossieck em [13], que expressa uma bijeção entre os  $\vec{A}_n$ -quivers e os conjuntos tilting completos em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . A motivação para estudarmos essa aplicação é o fato de Keller e Vossieck provarem a bijeção e não mostrarem a dedução da aplicação  $\varphi$ . Nosso objetivo é apresentar de forma intuitiva a razão pela qual a aplicação funciona.

Nosso segundo objetivo é fazer um estudo da classificação, feita por Keller e Vossieck em [13], de certos tipos de aisles  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. Keller e Vossieck introduziram dois tipos de aisles em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$ , os aisles fiéis e os aisles separáveis. Um aisle é dito fiel se a inclusão  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$  se estende a uma  $S$ -equivalência  $\mathcal{D}^b(\mathcal{U}^0) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[-n]$ , e um aisle é dito separável se  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[n] = 0$ . Em [13], Keller e Vossieck classificam os aisles fiéis afirmando que existe uma bijeção entre eles e os conjuntos tilting completos. Estamos interessados em estudar uma classificação parecida para os aisles separáveis, através de uma bijeção entre eles e os conjuntos silting de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

No último capítulo mostraremos como é possível usufruir dos resultados vistos nos capítulos anteriores, utilizando-os como ferramentas na teoria tilting.

**Palavras-chave:**  $\vec{A}_n$ -quivers, conjuntos tilting, conjuntos silting, aisles separáveis.

# Abstract

The present work has two distinct objectives. The first is to make a study about a map  $\varphi$  introduced by Keller and Vossieck in [13], which expresses a bijection between  $\vec{A}_n$ -quivers and the complete tilting sets in  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . The motivation for studying this map is that Keller and Vossieck prove the bijection but do not show the deduction of the application  $\varphi$ . Our objective is to present intuitively why the application works.

The second objective is to make a study of the classification, made by Keller and Vossieck in [13], of aisles  $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , where  $\Delta$  is a Dynkin-quiver. Keller and Vossieck introduced two types of aisle into a triangulated category  $\mathcal{T}$ , the faithful aisle and the separable aisle. An aisle is said to be faithful if the inclusion  $\mathcal{U}^0 \rightarrow \mathcal{T}$  extends to an  $S$ -equivalence  $\mathcal{D}^b(\mathcal{U}^0) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[-n]$ ; it is separated if  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[n] = 0$ . In [13], Keller and Vossieck classify the faithful aisles by a bijection between them and the complete tilting sets. We are interested in studying a similar classification for the separable aisles, through a bijection between them and the silting sets of  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

In the last chapter we will show how it is possible to take advantage of the results seen in previous chapters, using them as tools in tilting theory.

**Keywords:**  $\vec{A}_n$ -quivers, tilting sets, silting sets, aisle separated.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Definições e Resultados Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Categorias Trianguladas . . . . .	14
1.2 Categoria Derivada . . . . .	16
1.2.1 A Categoria Derivada de uma Categoria Hereditária . . . . .	19
1.2.2 A Categoria Derivada $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ . . . . .	20
<b>2 Os <math>\vec{A}_n</math>-quivers e os conjuntos tilting completos</b>	<b>23</b>
2.1 Conjunto tilting completo . . . . .	24
2.2 Sucessores e antecessores imediatos . . . . .	25
2.3 Um estudo sobre a localização dos conjuntos tilting em $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . . . . .	27
2.3.1 Análise de $T$ através de dois elementos fixados . . . . .	28
2.3.2 Análise de $T$ através de três elementos fixados . . . . .	30
2.3.3 Uma fórmula recursiva para localizar os elementos de $T$ . . . . .	32
2.3.4 Recuperando os conjuntos tilting através dos $\vec{A}_n$ -quivers . . . . .	34
2.4 Relação entre os $\vec{A}_n$ -quivers e os tilting completos . . . . .	37
2.4.1 Resultados básicos sobre $\vec{A}_n$ -quiver e a aplicação $\varphi = (g, h)$ . . . . .	38
2.4.2 A relação biunívoca entre os tilting e os $\vec{A}_n$ -quivers . . . . .	40
2.5 Os conjuntos tilting completos de $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$ . . . . .	46
<b>3 Aisles e objetos silting em <math>\mathcal{D}^b(k\Delta)</math></b>	<b>51</b>
3.1 Aisles em categorias trianguladas . . . . .	52
3.2 A imagem essencial de um funtor . . . . .	55
3.3 Aisles separáveis e a aplicação $T \mapsto \mathcal{F}(T)$ . . . . .	57
3.4 Objetos silting e os aisles separáveis . . . . .	59
3.4.1 Alguns resultados sobre os aisles separáveis . . . . .	59
3.4.2 A relação entre os silting e os aisles separáveis . . . . .	64
<b>4 Teoria tilting e par de torção</b>	<b>68</b>
4.1 Um breve resumo sobre a teoria tilting . . . . .	69
4.2 Definições e resultados básicos . . . . .	70
4.3 Aplicação da técnica para se extrair um silting a partir de um aisle . . . . .	85
<b>Bibliografia</b>	<b>91</b>

# Introdução

Categorias derivadas de categorias abelianas foram introduzidas no início dos anos 60 por Grothendieck e Verdier no âmbito da Geometria Algébrica e da Álgebra Homológica. Rapidamente suas aplicações se estenderam a outras áreas da Matemática tais como Equações Diferenciais Parciais e Topologia.

Happel em [9] introduziu o conceito de categorias trianguladas e, mais especificamente, de categorias derivadas da categoria de módulos de uma álgebra, na Teoria de Representações. O passo determinante nesta direção foi a prova obtida pelo próprio Happel de que categorias derivadas são invariantes na teoria tilting.

A Teoria Tilting surge como um método universal para a construção de equivalências entre categorias. Originalmente introduzida no contexto das categorias de módulos sobre álgebras de dimensão finita, a teoria tilting é agora considerada uma ferramenta essencial no estudo de muitas áreas da matemática, incluindo teoria dos grupos finitos e algébricos, geometria algébrica comutativa e não comutativa e topologia algébrica. A Teoria Tilting descreve uma maneira de relacionar as categorias de módulos de duas álgebras usando os chamados módulos tilting e os funtores tilting. Aqui, a segunda álgebra é a álgebra de endomorfismos de um módulo tilting definido sobre primeira álgebra. Dado um  $A$ -módulo tilting  $T$ , definimos a álgebra de endomorfismos  $B = \text{End}_A(T)$ . Os funtores tilting  $\text{Hom}_A(T, \_)$ ,  $\text{Ext}_A^1(T, \_)$ ,  $\_ \otimes_B T$  e  $\text{Tor}_1^B(\_, T)$  relacionam as categorias  $\text{mod}(A)$ , dos  $A$ -módulos à direita finitamente gerados, e  $\text{mod}(B)$ , dos  $B$ -módulos à direita finitamente gerados. De acordo com Brenner e Butler, em [7], a restrição de  $\text{Hom}_A(T, \_)$  à subcategoria  $\mathcal{T} = \ker(\text{Ext}_A^1(T, \_))$  de  $\text{mod}(A)$  nos fornece uma equivalência entre  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{Y} = \ker(\text{Tor}_1^B(\_, T))$ , e a restrição de  $\text{Ext}_A^1(T, \_)$  à subcategoria  $\mathcal{F} = \ker(\text{Hom}_A(T, \_))$  nos fornece uma equivalência entre  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{X} = \ker(\_ \otimes_B T)$ . Além disso  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  e  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  formam pares de torção em  $\text{mod}(A)$  e  $\text{mod}(B)$ , respectivamente, o que nos assegura que todo  $A$ -módulo pode ser obtido como uma extensão de módulos em  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{F}$ , e todo  $B$ -módulo pode ser obtido como uma extensão de módulos em  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ .

Na prática, muitas vezes são consideradas álgebras hereditárias de dimensão finita, já que as categorias de módulos sobre essas álgebras são razoavelmente bem compreendidas. A álgebra de endomorfismos de um módulo tilting sobre uma álgebra hereditária de dimensão finita é chamada de álgebra tilted.

Happel, em [9], mostrou que as categorias  $\mathcal{D}^b(A)$  e  $\mathcal{D}^b(B)$  são equivalentes como ca-

tegorias trianguladas. Generalizando a noção de módulo tilting para complexo tilting, Rickard, em [18], generalizou o resultado de Happel. Ele mostrou que uma condição necessária e suficiente para a equivalência derivada  $\mathcal{D}^b(A) \cong \mathcal{D}^b(B)$ , de duas álgebras  $A$  e  $B$ , é a existência de um complexo limitado  $T^\bullet$  de  $A$ -módulos projetivos finitamente gerados, chamado complexo tilting, tal que  $\text{End}(T^\bullet) \cong B$ . Pela semelhança com o Teorema de Morita costuma-se dizer que Rickard desenvolveu uma teoria de Morita para as categorias derivadas.

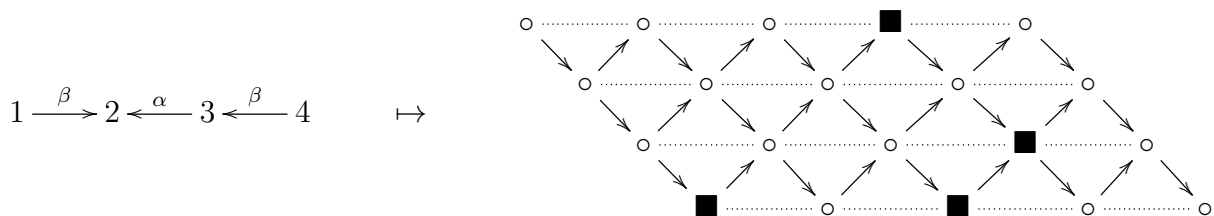
A noção de categoria triangulada tem provado ser muito útil na teoria de representações de álgebras. Em particular, existe uma forte relação entre o estudo de t-estruturas e teoria tilting. Keller e Vossieck consideraram certas subcategorias chamadas aisles, e mostraram que se  $\mathcal{U}$  é um aisle, então  $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\perp[1])$  é uma t-estrutura, e reciprocamente toda t-estrutura é dessa forma.

Um de nossos objetivos é justamente fazer um estudo a respeito dessas subcategorias. Mais especificamente estamos interessados em estudar os aisles da categoria derivada limitada  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos e possui dois objetivos distintos.

O primeiro objetivo é estudar os conjuntos tilting da categoria derivada  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ , introduzidos por Keller e Vossieck em [13]. Neste artigo, Keller e Vossieck mostraram, por meio de uma aplicação  $\varphi$ , que existe uma relação biunívoca entre os conjuntos tilting completos de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  e os chamados  $\vec{A}_n$ -quivers, porém não é mostrada uma prova ou uma noção intuitiva da razão pela qual a aplicação  $\varphi$ , definida por eles, funciona. Buscamos, então, uma justificativa para a escolha de  $\varphi$ .

Esta aplicação se mostrou muito útil pelo fato de nos proporcionar uma maneira rápida de gerarmos conjuntos tilting completos em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Um conjunto tilting completo é um conjunto  $\{T_1, \dots, T_n\} \subset \text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  tal que  $\text{Hom}(T_i, T_j[\ell]) = 0$  para todo  $i, j = 1, \dots, n$  e para todo  $\ell \neq 0$ . A figura abaixo ilustra a aplicação  $\varphi$  relacionando um  $\vec{A}_4$ -quiver com um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$ .



Nosso segundo objetivo é fazer um estudo da classificação, feita por Keller e Vossieck em [13], de certos tipos de aisles  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , ditos aisles separáveis. Keller e Vossieck introduziram dois tipos de aisles em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$ , os aisles fiéis e os aisles separáveis. Um aisle é dito fiel se a inclusão  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$  se estende a uma  $S$ -equivalência

$\mathcal{D}^b(\mathcal{U}^0) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[-n]$ , e um aisle é dito separável se  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[n] = 0$ . Em [13] foram classificados os aisles fiéis através da existência de uma bijeção com os conjuntos tilting completos. Estamos interessados em estudar uma classificação parecida para os aisles separáveis e para isso, introduziremos o conceito de conjunto silting, o qual é uma generalização de conjunto tilting. Mostraremos que há uma bijeção entre os conjuntos silting de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  e os aisles separáveis.

No capítulo 4 apresentaremos um resumo da teoria tilting. Mostraremos como é possível usufruirmos dos resultados vistos nos capítulos anteriores, utilizando-os como ferramentas nessa teoria.

Encerramos o presente trabalho resolvendo o seguinte problema:

Suponha que nos seja fornecido um conjunto de objetos em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , tal que esses objetos representem a categoria de módulos de uma álgebra tilted  $A$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , e que queiramos encontrar um objeto tilting  $T$  tal que  $A = \text{End } T$ .

Para resolvermos este problema, iremos utilizar o fato de que  $\text{mod}(A)$  é o coração de um aisle em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  e que, portanto, podemos gerar um aisle através desse coração e, posteriormente, utilizarmos os resultados do capítulo 3 para encontrarmos o objeto tilting  $T$  tal que  $A = \text{End } T$ .

**Observações quanto à leitura do texto:** Pelo fato do capítulo 2 ser o mais extenso e o mesmo possuir como objetivo principal uma discussão a respeito da aplicação  $\varphi$  definida por Keller e Vossieck, informamos ao leitor que há duas maneiras possíveis de ler o texto.

- (i) Ler de forma contínua do capítulo 1 até o capítulo 4.
- (ii) Ler o capítulo 1, em seguida ler os capítulos 3 e 4 e posteriormente ir ao capítulo 2.

Para ler da maneira (ii), é necessário apenas saber a definição de conjunto tilting completo, que pode ser encontrada na página 15.

# Capítulo 1

## Definições e Resultados Preliminares

O objetivo deste capítulo é fornecer algumas definições e alguns resultados básicos que iremos utilizar ao longo dos capítulos seguintes. Nos próximos capítulos iremos trabalhar frequentemente com a categoria  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  (isto é,  $\mathcal{D}^b(\text{mod}(k\Delta))$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin) e sua estrutura de categoria triangulada. Portanto, neste primeiro capítulo, temos como principal objetivo definirmos o conceito de categoria triangulada e posteriormente a categoria derivada  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

Como o objetivo deste capítulo é apenas suprir alguns pré-requisitos para um bom entendimento dos capítulos seguintes, não iremos demonstrar os resultados aqui apresentados.

Iniciaremos a segunda seção deste capítulo trazendo uma breve definição da categoria derivada de uma categoria abeliana  $\mathcal{A}$ . Esses primeiros resultados podem ser encontrados em [8], [19] e [1].

Em seguida, iremos enunciar um resultado que caracteriza as categorias derivadas de categorias hereditárias. Para isso vamos introduzir o conceito de álgebra hereditária e categoria hereditária. Através dessas definições será fácil ver que se  $A$  é uma álgebra hereditária, então a categoria  $\text{mod}(A)$ , dos  $A$ -módulos à direita finitamente gerados, é uma categoria hereditária. Além disso apresentaremos o seguinte resultado: se  $\mathcal{H}$  é uma categoria hereditária, então  $\mathcal{D}^b(\mathcal{H}) \cong \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}[n]$ . Mais informações a respeito dessa teoria podem ser encontradas em [20], [5] e [9].

Finalizaremos a seção fazendo um estudo sobre a categoria derivada de  $\text{mod}(k\Delta)$ , onde  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. Para isso iremos introduzir o conceito de álgebra de caminhos e também definiremos quiver do tipo Dynkin. Apresentaremos um resultado que nos fornece certas condições para que a álgebra de caminhos  $k\Delta$  seja uma álgebra hereditária, que pode ser encontrado em [9] e [4]. Veremos que se  $\Delta$  for do tipo Dynkin, então  $k\Delta$  é uma álgebra hereditária. Portanto a categoria  $\text{mod}(k\Delta)$  é uma categoria hereditária, e disto segue que  $\mathcal{D}^b(k\Delta) \cong \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \text{mod}(k\Delta)[n]$ . Finalizaremos a seção com o seguinte resultado fornecido por Happel em [9]: se  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin, então  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  é equivalente a categoria Mesh  $k(\mathbb{Z}\Delta)$ .

## 1.1 Categorias Trianguladas

**Definição 1.1.1** Uma categoria  $\mathcal{A}$  é dita **aditiva** se satisfaz:

- Para todo  $X, Y \in \mathcal{A}_0$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  é um grupo abeliano, e a composição de morfismos é bilinear.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \\ (\gamma, \alpha + \beta) &\longmapsto \gamma\alpha + \gamma\beta \\ (\alpha + \beta, \gamma) &\longmapsto \alpha\gamma + \beta\gamma \end{aligned}$$

- Possui objeto zero.
- Toda família finita de objetos de  $\mathcal{A}$  admite um produto e uma soma direta em  $\mathcal{A}$ .

**Definição 1.1.2** Seja  $\mathcal{T}$  uma categoria aditiva e  $S : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  um automorfismo de  $\mathcal{T}$ . Ao functor  $S$  chamaremos de **functor suspensão**. Utilizaremos a seguinte notação,  $S^n(X) = X[n]$  e  $S^n(f) = f[n]$ , diremos que  $X[n]$  é o  $n$ -ésimo shift do objeto  $X$ .

**Definição 1.1.3** Um **triângulo** em  $\mathcal{T}$  é uma sequência de objetos e morfismos em  $\mathcal{T}$  da forma

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

Um **morfismo de triângulos** em  $\mathcal{T}$  é uma tripla  $(f, g, h)$  de morfismos tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

Se os morfismos  $f, g, h$  são isomorfismos em  $\mathcal{T}$ , então o morfismo de triângulos é dito isomorfismo.

**Definição 1.1.4** Uma categoria triangulada é uma tripla  $(\mathcal{T}, S, \mathcal{F})$  em que  $\mathcal{T}$  é uma categoria aditiva,  $S$  é o functor suspensão e  $\mathcal{F}$  é uma família de triângulos exatos que satisfazem os seguintes axiomas:

(TR1) Todo triângulo isomorfo a um triângulo exato também é exato. Para cada objeto  $X$  em  $\mathcal{T}$ , o triângulo

$$X \xrightarrow{Id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

é um triângulo exato. Todo morfismo  $u : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{T}$  pode ser completado para formar um triângulo exato

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1].$$

(TR2) Um triângulo  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  é um triângulo exato se, e somente se, o triângulo

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$$

é um triângulo exato.

(TR3) Dados dois triângulos exatos  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  e  $A \xrightarrow{u'} B \xrightarrow{v'} C \xrightarrow{w'} A[1]$ , cada diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f[1] \\ A & \xrightarrow{u'} & B & \xrightarrow{v'} & C & \xrightarrow{w'} & A[1] \end{array}$$

pode ser completado de maneira a formar um morfismo de triângulos (não necessariamente único).

(TR4) Axioma do Octaedro. Dados triângulos exatos  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  e  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  com  $\gamma_1 = \beta_1\alpha_1$ , existe um triângulo exato  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  fazendo comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha_1} & Y & \xrightarrow{\alpha_2} & U & \xrightarrow{\alpha_3} & X[1] \\ \downarrow 1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \delta_1 & & \downarrow 1[1] \\ X & \xrightarrow{\gamma_1} & Z & \xrightarrow{\gamma_2} & V & \xrightarrow{\gamma_3} & X[1] \\ & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \alpha_1[1] \\ & & W & \xrightarrow{1} & W & \xrightarrow{\beta_3} & Y[1] \\ & & \downarrow \beta_3 & & \downarrow \delta_3 & & \\ & & Y[1] & \xrightarrow{\alpha_2[1]} & U[1] & & \end{array}$$

**Lema 1.1.1** *Seja  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  um triângulo exato. Então a composição de quaisquer dois morfismos consecutivos é nula.*

**Proposição 1.1.1** *Seja  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  um triângulo exato em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$ . Então para todo objeto  $X_0 \in \mathcal{T}$ , as seguintes seqüências são exatas:*

$$\text{Hom}(X_0, X) \xrightarrow{\text{Hom}(X_0, u)} \text{Hom}(X_0, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(X_0, v)} \text{Hom}(X_0, Z)$$

$$\text{Hom}(Z, X_0) \xrightarrow{\text{Hom}(v, X_0)} \text{Hom}(Y, X_0) \xrightarrow{\text{Hom}(u, X_0)} \text{Hom}(X, X_0).$$

**Lema 1.1.2** *Seja  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  um triângulo exato. Então são equivalentes:*

(i)  $u$  é um isomorfismo.

(ii)  $Z = 0$

**Proposição 1.1.2** *As seguintes afirmações são equivalentes para um triângulo exato  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ .*

(a)  $u$  é um monomorfismo que cinde.

(b)  $v$  é um epimorfismo que cinde.

(c)  $w = 0$ .

**Definição 1.1.5** *Dado um morfismo  $u : X \rightarrow Y$  em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$ , existe um triângulo  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ . Dizemos que  $Z$  é o **cone** de  $u$ .*

**Definição 1.1.6** *Uma categoria  $\mathcal{A}$  é **abeliana** se é aditiva, possui kernel e cokernel, todo monomorfismo é kernel de algum morfismo, todo epimorfismo é cokernel de algum morfismo, e todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  pode ser escrito como  $X \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} Y$ , em que  $u$  é um epimorfismo e  $v$  é um monomorfismo.*

## 1.2 Categoria Derivada

**Definição 1.2.1** *Um complexo em uma categoria abeliana  $\mathcal{A}$  é uma seqüência de objetos e morfismos em  $\mathcal{A}$  (chamados diferenciais)*

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

tal que  $d^n d^{n-1} = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 1.2.2** *Sejam  $X^\bullet$  e  $Y^\bullet$  dois complexos sobre  $\mathcal{A}$ . Um morfismo de complexos  $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  é uma seqüência de morfismos  $f^n : X^n \rightarrow Y^n$  satisfazendo*

$$f^n d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} f^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

isto é, fazendo comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Os complexos sobre uma categoria abeliana  $\mathcal{A}$  formam a categoria  $C(\mathcal{A})$ , chamada de **categoria dos complexos sobre  $\mathcal{A}$** .

**Observação:** Se  $\mathcal{A}$  é uma categoria abeliana, então a categoria  $C(\mathcal{A})$  é abeliana.

- O complexo zero é o complexo onde cada termo é o zero de  $\mathcal{A}$ .
- A soma direta  $X^\bullet \oplus Y^\bullet$  é por definição, o complexo onde o  $n$ -ésimo termo é  $X^n \oplus Y^n$  e cuja  $n$ -ésima diferencial é dada por  $(d_X^n \oplus d_Y^n)(x, y) = d_X^n(x) + d_Y^n(y)$ .

- Se  $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  é um morfismo de complexos, definimos o kernel de  $f^\bullet$  por:

$$\text{Ker}(f^\bullet) = \dots \longrightarrow \text{Ker}(f^{n-1}) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \text{Ker}(f^n) \xrightarrow{\delta^n} \text{Ker}(f^{n+1}) \longrightarrow \dots,$$

em que  $\delta^n$  é a restrição de  $d_X^n$  ao  $\text{Ker}(f^n)$ . De maneira análoga, define-se o complexo  $\text{Coker}(f^\bullet)$ .

**Proposição 1.2.1** *Seja  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana. O funtor  $C : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A})$  que associa  $X \in \mathcal{A}_0$  ao complexo  $X^\bullet$ , com  $X^0 = X$  e  $X^i = 0$  para todo  $i \neq 0$ , é fiel e pleno.*

Todo objeto  $X$  em  $\mathcal{A}$  pode ser considerado um complexo

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

chamado de **0-complexo** ou **stalk**.

Um complexo  $X^\bullet$  é dito **limitado** se existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tais que  $X^n = 0$  para todo  $n < n_1$  e  $n_2 < n$ . Denotamos por  $C^b(\mathcal{A})$  a subcategoria plena de  $C(\mathcal{A})$  consistindo dos complexos limitados.

**Definição 1.2.3** *Dois morfismos  $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  em  $C(\mathcal{A})$  são ditos **homotópicos** ( $f^\bullet \sim g^\bullet$ ) se existe uma família  $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos  $s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$  em  $\mathcal{A}$  satisfazendo:*

$$f^n - g^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

isto é, comutando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \swarrow s^n & \downarrow g^n & \swarrow f^n & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

**Observação:** A relação  $\sim$  é uma congruência. Portanto está definida a categoria quociente

$$C(\mathcal{A}) / \sim.$$

**Definição 1.2.4** *Seja  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana. A categoria de homotopia  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  possui os mesmos objetos de  $C(\mathcal{A})$ , complexos sobre  $\mathcal{A}$ , e se  $X, Y \in C(\mathcal{A})$ , então*

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) = \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y) / \sim.$$

**Observação:** Se  $\mathcal{A}$  é uma categoria abeliana, então  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  é uma categoria aditiva. Note que a categoria  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  pode não ser abeliana, pois morfismos homotópicos não possuem o mesmo kernel ou cokernel em geral.

**Proposição 1.2.2** *O funtor  $\mathcal{K} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$  é fiel e pleno.*

**Proposição 1.2.3** *Seja  $f^\bullet$  um morfismo de complexos, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $f^\bullet$  é homotópico à zero.
- (b)  $f^\bullet[1]$  é homotópico à zero.

Como consequência deste resultado, temos que o funtor suspensão induz o seguinte isomorfismo:

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet[1], Y^\bullet[1])$$

**Teorema 1.2.1** *A categoria de homotopia  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  é uma categoria triangulada.*

**Definição 1.2.5** *Seja  $X^\bullet$  um complexo em  $C(\mathcal{A})$ . Definimos a  $n$ -ésima cohomologia do complexo  $X^\bullet$  como:*

$$H^n(X^\bullet) = \frac{\text{Ker}(d^n)}{\text{Im}(d^{n-1})}.$$

**Proposição 1.2.4** *Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , temos que  $H^n(\_) : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  é um funtor.*

Esse funtor possui as seguintes propriedades:

$$H^n(X^\bullet[1]) = H^{n+1}(X^\bullet)$$

$$H^n(f^\bullet[1]) = H^{n+1}(f^\bullet).$$

Portanto  $H^n = H^0 \circ S^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 1.2.2** *Se  $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  em  $C(\mathcal{A})$  são homotópicos, então:*

$$H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Demonstração:** Por definição temos

$$H^n(f^\bullet)(\bar{x}) = \overline{f^n(x)} \quad e \quad H^n(g^\bullet)(\bar{x}) = \overline{g^n(x)}$$

Mostremos que  $f^n(x) - g^n(x) \in \text{Im}(d_Y^{n-1})$ . Como  $f^\bullet \sim g^\bullet$ , então existe um morfismo  $s^n : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  tal que

$$f^n(x) - g^n(x) = (f^n - g^n)(x) = d_Y^{n-1}s^n(x) + s^{n+1}d_X^n(x), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que  $x \in \text{Ker}(d_X^n)$ , segue que  $f^n(x) - g^n(x) = d_Y^{n-1}s^n(x)$ . Com isso temos

$$f^n(x) - g^n(x) \in \text{Im}(d_Y^{n-1})$$

e portanto  $H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet)$ . ■

**Definição 1.2.6** Um morfismo  $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  é dito **quase isomorfismo** se

$$H^n(f^\bullet) : H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet)$$

for isomorfismo para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 1.2.7** Seja  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana. A categoria derivada  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  é uma categoria tal que existe um funtor  $Q : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$  que leva quase isomorfismos em isomorfismos, e satisfaz a seguinte propriedade universal: se  $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}$  é um funtor tal que  $F(f^\bullet)$  é isomorfismo para todo  $f^\bullet$  quase isomorfismo, então  $F$  se fatora por  $Q$ , i.e., existe um único funtor  $G$  tal que  $F = G \circ Q$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

**Proposição 1.2.5** A categoria derivada  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  é uma categoria triangulada, com um automorfismo  $S$  dado pelo funtor suspensão.

**Definição 1.2.8** Definimos a categoria derivada limitada  $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$  como sendo a categoria derivada dos complexos limitados  $C^b(\mathcal{A})$ .

## 1.2.1 A Categoria Derivada de uma Categoria Hereditária

**Definição 1.2.9** Uma álgebra  $A$  é dita **hereditária à direita** se todo ideal à direita de  $A$  é um  $A$ -módulo projetivo.

**Teorema 1.2.3** Seja  $A$  uma álgebra. As seguintes condições são equivalentes:

- (a)  $A$  é hereditária à direita.
- (b)  $\text{gldim } A \leq 1$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [4], pág. 245. ■

**Definição 1.2.10** Uma categoria abeliana  $\mathcal{H}$  é dita **hereditária** se  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(X, Y) = 0$  para todo  $X, Y \in \mathcal{H}$  (ou equivalentemente,  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^n(X, Y) = 0$  para todo  $n \geq 2$ ).

**Proposição 1.2.6** Seja  $\text{mod}(A)$  a categoria de todos os  $A$ -módulos à direita de dimensão finita sobre uma  $k$ -álgebra hereditária de dimensão finita  $A$ . Então  $\text{mod}(A)$  é uma categoria hereditária.

**Teorema 1.2.4** *Seja  $\mathcal{H}$  uma categoria abeliana hereditária. Então a categoria derivada limitada  $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$  é naturalmente equivalente à categoria  $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}[n]$ , onde cada  $\mathcal{H}[n]$  é uma cópia de  $\mathcal{H}$ , com objetos  $X[n]$  para cada  $X \in \mathcal{H}$  e morfismos dados por*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(X[n], Y[m]) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{H}}^{m-n}(X, Y)$$

Aqui a expressão  $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}[n]$  significa duas coisas. Em primeiro lugar significa o fecho aditivo  $\mathrm{add}(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}[n])$  da união de todos os  $\mathcal{H}[i]$ . A expressão também indica que não existem morfismos não nulos voltando, isto é, morfismos de  $\mathcal{H}[n]$  para  $\mathcal{H}[m]$  com  $n > m$ .

## 1.2.2 A Categoria Derivada $\mathcal{D}^b(k\Delta)$

**Definição 1.2.11** *Um quiver  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, s, t)$  é uma 4-upla formada por dois conjuntos:  $\Delta_0$  (cujos elementos são chamados de pontos) e  $\Delta_1$  (cujos elementos são chamados de flechas), e por duas funções  $s, t : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ , que associam a cada flecha  $\alpha \in \Delta_1$  um início  $s(\alpha) \in \Delta_0$  e um final  $t(\alpha) \in \Delta_0$ , respectivamente.*

Um quiver  $\Delta$  é dito **finito** se  $\Delta_0$  e  $\Delta_1$  são conjuntos finitos. O grafo subjacente de um quiver  $\Delta$  é obtido, através dele, retirando as orientações de suas flechas. Dizemos que  $\Delta$  é **conexo** se seu grafo subjacente é conexo.

Sejam  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, s, t)$  um quiver e  $a, b \in \Delta_0$ . Um **caminho** de comprimento  $\ell \geq 0$ , com início  $a$  e final  $b$ , é uma sequência

$$(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell|b),$$

em que  $\alpha_k \in \Delta_1$ , para todo  $1 \leq k \leq \ell$ , além disso,  $s(\alpha_1) = a$ ,  $t(\alpha_\ell) = b$  e  $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$  para todo  $1 < k < \ell$ .

**Definição 1.2.12** *Seja  $\Delta$  um quiver. A álgebra de caminhos  $k\Delta$  é uma  $k$ -álgebra cujo  $k$ -espaço vetorial subjacente possui como base o conjunto de todos os caminhos  $(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell|b)$  de comprimento  $\ell \geq 1$  em  $\Delta$ . Sejam  $(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell|b)$  e  $(c|\beta_1, \dots, \beta_k|d)$  dois elementos da base de  $k\Delta$ , o produto desses vetores é definido por:*

$$(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell|b)(c|\beta_1, \dots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k|d)$$

onde  $\delta_{bc}$  é igual a 1 se  $b = c$ , e é igual a zero se  $b \neq c$ .

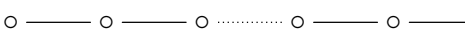
**Lema 1.2.1** *Sejam  $\Delta$  um quiver e  $k\Delta$  uma álgebra de caminhos. Então:*

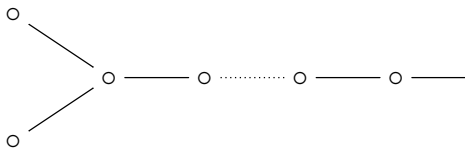
- (a)  $k\Delta$  é uma álgebra associativa.
- (b)  $k\Delta$  possui o elemento identidade se, e somente se,  $\Delta_0$  é finito.
- (c)  $k\Delta$  é de dimensão finita se, e somente se,  $\Delta$  é finito e acíclico.

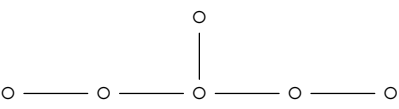
**Lema 1.2.2** *Seja  $\Delta$  um quiver finito. A álgebra de caminhos  $k\Delta$  é conexa se, e somente se,  $\Delta$  é um quiver conexo.*

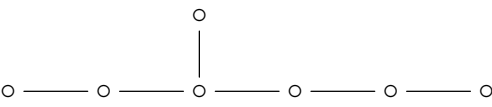
**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [4], pág. 47. ■

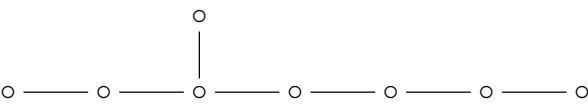
**Definição 1.2.13** *Um quiver  $\Delta$  é dito de tipo Dynkin se seu grafo subjacente é de uma das seguintes formas:*

$A_n$  :  , para  $n \geq 1$ , onde  $n$  é o número de vértices.

$D_n$  :  , para  $n \geq 4$ , onde  $n$  é o número de vértices.

$E_6$  : 

$E_7$  : 

$E_8$  : 

**Proposição 1.2.7** *Seja  $\Delta$  um quiver finito sem ciclos orientados. Então a álgebra de caminhos  $k\Delta$  é hereditária.*

**Demonstração:** Ver [9], pág. 45. ■

**Definição 1.2.14** *Seja  $\Delta$  um quiver de tipo Dynkin. Então  $\mathbb{Z}\Delta$  é o quiver associado a  $\Delta$  definido como abaixo:*

(i) *Os vértices são pares  $(n, i)$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$  e  $i \in \Delta_0$ .*

(ii) *Para cada  $\alpha \in \Delta_1$ , com  $\alpha : i \rightarrow j$ , existem duas flechas*

$$(n, i) \rightarrow (n, j) \quad e \quad (n, j) \rightarrow (n + 1, i) \in (\mathbb{Z}\Delta)_1.$$

**Corolário 1.2.1** *Seja  $k\Delta$  uma  $k$ -álgebra hereditária de dimensão finita, onde  $\Delta$  é de tipo Dynkin. Então*

$$\Gamma(\mathcal{D}^b(k\Delta)) \cong \mathbb{Z}\Delta,$$

*em que  $\Gamma(\mathcal{D}^b(k\Delta))$  é o quiver de Auslander-Reiten de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .*

**Demonstração:** Ver [9], pág. 54. ■

**Proposição 1.2.8** *Seja  $\Delta$  um quiver de tipo Dynkin. Então  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  é equivalente a categoria mesh  $k(\mathbb{Z}\Delta)$ .*

**Demonstração:** Ver [9], pág. 55. ■

**Exemplo 1.2.1** *Consideremos  $\Delta : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ . Denotemos por  $P_i$  e  $I_i$  os projetivos e injetivos, respectivamente, relacionados a cada vértice  $i \in \Delta_0$ . Então*

$$\begin{array}{ll} P_3 : K \rightarrow K \rightarrow K & I_3 : K \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ P_2 : 0 \rightarrow K \rightarrow K & I_2 : K \rightarrow K \rightarrow 0 \\ P_1 : 0 \rightarrow 0 \rightarrow K & I_1 : K \rightarrow K \rightarrow K \end{array}$$

*Temos que  $P_2 = \text{rad}(P_3)$ ,  $P_1 = \text{rad}(P_2)$ ,  $P_1$  é simples e  $I_3$  é simples. Portanto o quiver de Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{D}^b(k\Delta))$  é dado por:*

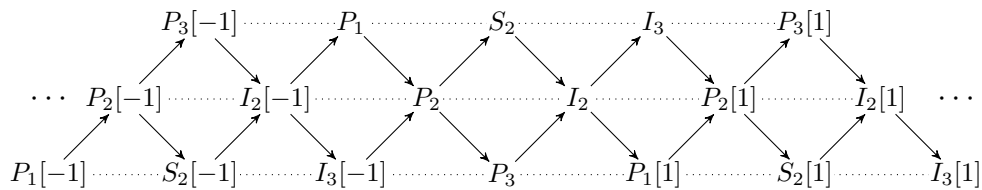


Figura 1.1

**Teorema 1.2.5** *Seja  $k$  um corpo. Se  $\Delta$  e  $\Delta'$  são quivers de tipo Dynkin que possuem um mesmo grafo subjacente  $\Lambda$ , mas possuem orientações distintas, então  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  e  $\mathcal{D}^b(k\Delta')$  são equivalentes como categorias trianguladas.*

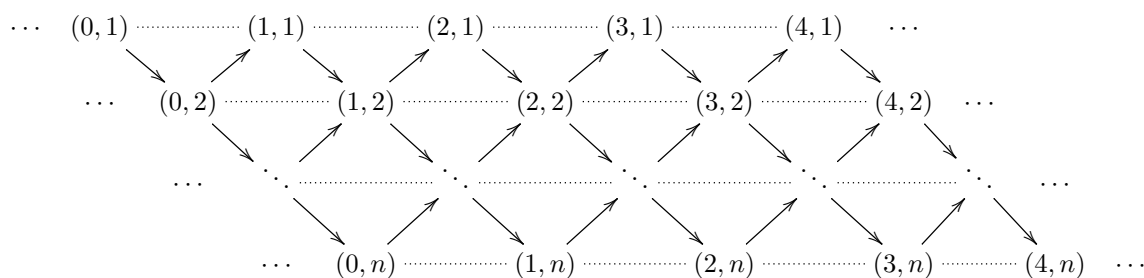
**Demonstração:** Ver [9], pág. 53. ■

## Capítulo 2

# Os $\vec{A}_n$ -quivers e os conjuntos tilting completos

Nosso objetivo ao longo deste capítulo é estabelecer uma relação biunívoca entre os conjuntos tilting completos de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  e os  $\vec{A}_n$ -quivers. Para isso vamos introduzir os conceitos de  $\vec{A}_n$ -quiver e conjunto tilting completo. Esta relação foi dada por Keller-Vossieck em [13]. Neste artigo, Keller-Vossieck apresentaram uma fórmula que associa a cada  $\vec{A}_n$ -quiver um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . No entanto não apresentam uma prova ou uma noção intuitiva da razão pela qual a fórmula funciona.

Nosso objetivo é apresentar elementos suficientes para o entendimento desta fórmula. Para isso, ao longo deste capítulo, denotaremos a categoria derivada ind  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  por  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Cada vértice será denotado por sua coordenada conforme a convenção estabelecida na figura abaixo.



Nosso primeiro objetivo será realizar um estudo sobre os conjuntos tilting completos de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Este estudo advém da propriedade dos conjuntos tilting, pois uma vez escolhido um elemento  $T_i$  de um conjunto tilting  $T$  de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  (ou equivalentemente um vértice de  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ ), uma série de restrições se impõem para a escolha dos outros elementos de  $T$ . É exatamente a existência destas restrições que nos permitirá dizer como estão espalhados os elementos do conjunto tilting  $T$  em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Estas mesmas restrições nos proporcionarão chegarmos à fórmula que estabelece a correspondência biunívoca entre  $\vec{A}_n$ -quivers e conjuntos tilting completos em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ .

## 2.1 Conjunto tilting completo

Nesta seção iremos apenas apresentar algumas definições preliminares e resultados básicos. Iremos definir o conceito de conjunto tilting completo e daremos um exemplo dos elementos de um desses conjuntos.

**Definição 2.1.1** Um conjunto tilting em  $\mathcal{D}^b(A)$  é um conjunto finito  $T = \{T_1, \dots, T_s\} \subset \text{ind } \mathcal{D}^b(A)$  tal que  $\text{Hom}(T_i, T_j[\ell]) = 0$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  e para todo  $\ell \neq 0$ .

**Exemplo 2.1.1** Abaixo segue um exemplo de um conjunto tilting em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$ .

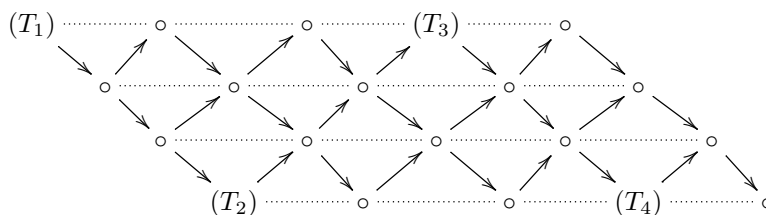


Figura 2.1

Ao longo do capítulo justificaremos que o conjunto  $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$  acima é um conjunto tilting.

**Definição 2.1.2** Seja  $A$  uma  $k$ -álgebra de dimensão finita. Definimos o **espectro** de um conjunto tilting  $T \subset \mathcal{D}^b(A)$  como sendo a subcategoria plena de  $\mathcal{D}^b(A)$  cujos objetos são elementos de  $T$ .

**Exemplo 2.1.2** O espectro do conjunto tilting do exemplo 2.1.1 é dado por:

$$T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow T_4$$

**Definição 2.1.3** Seja  $A$  uma  $k$ -álgebra de dimensão finita. Um conjunto tilting  $T \subset \mathcal{D}^b(A)$  é dito **completo** se sua cardinalidade é igual ao número de classes de isomorfismos de  $A$ -módulos simples.

Temos por I. Assem [2], corolário 4.7 (pág. 222), que o número de classes de isomorfismos de  $A$ -módulos simples é igual ao número de classes de isomorfismos de  $A$ -módulos projetivos indecomponíveis e que por sua vez é igual ao número de classes de isomorfismos de  $A$ -módulos injetivos indecomponíveis. Com isso temos que se  $T$  é um conjunto tilting completo na categoria derivada de uma álgebra de caminhos de um quiver de tipo Dynkin  $\Delta$ , então  $T$  possui  $|\Delta_0|$  elementos. Em particular temos que o conjunto do exemplo 2.1.1 é um conjunto tilting completo.

Ao longo do trabalho, para podermos discutir a respeito da localização dos elementos de um conjunto tilting completo  $T = \{T_1, \dots, T_n\}$  em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ , iremos utilizar um sistema de coordenadas em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ , definido como no exemplo abaixo.

**Exemplo 2.1.3** Sistema de coordenadas definido em  $\mathbb{Z}\vec{A}_4$ :

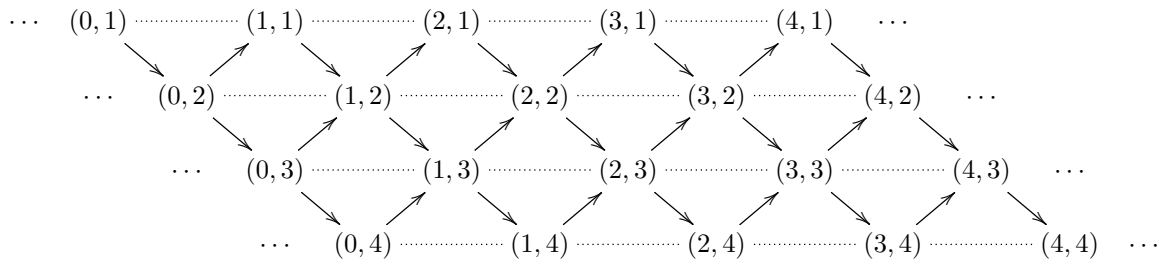


Figura 2.2

Utilizando esse sistema de coordenadas, temos que o conjunto tilting dado no exemplo 2.1.1 corresponde à  $\{(0, 1), (0, 4), (3, 1), (3, 4)\}$ .

## 2.2 Sucessores e antecessores imediatos

Com o objetivo de iniciarmos uma primeira análise a respeito da disposição dos elementos de um conjunto tilting completo  $T$  em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ , vamos definir os conceitos de sucessor e antecessor imediato de um elemento  $T_i \in T$ , e analisaremos onde eles se encontram em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Para isso será necessário utilizarmos o sistema de coordenadas definido no exemplo 2.1.3, e também será necessário introduzirmos duas classes de caminhos em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ , isto é, duas classes de morfismos em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ .

**Definição 2.2.1** Seja  $T = \{T_1, \dots, T_n\}$  um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Considere dois elementos  $T_i, T_j \in T$ , com  $i \neq j$ . Dizemos que  $T_i$  é sucessor imediato de  $T_j$  se existe um morfismo não nulo  $\psi : T_j \rightarrow T_i$  em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ , tal que  $\psi$  não se fatora por algum  $T_\ell \in T$ , com  $\ell \neq i$ . Dizemos que  $T_j$  é antecessor imediato de  $T_i$  se  $T_i$  for sucessor imediato de  $T_j$ .

Vamos analisar onde se encontram os sucessores e os antecessores imediatos de um dado elemento  $T_i \in T$ , em que  $T$  é um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Iniciemos nossa análise através do exemplo abaixo.

**Exemplo 2.2.1** Seja  $T = \{T_1, \dots, T_7\}$  um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ . Seja  $T_i \in T$  um dado elemento disposto como na figura abaixo. Então, pela definição de conjunto tilting, sabemos que os elementos restantes de  $T$  encontram-se na parte destacada por  $(\bullet)$ .

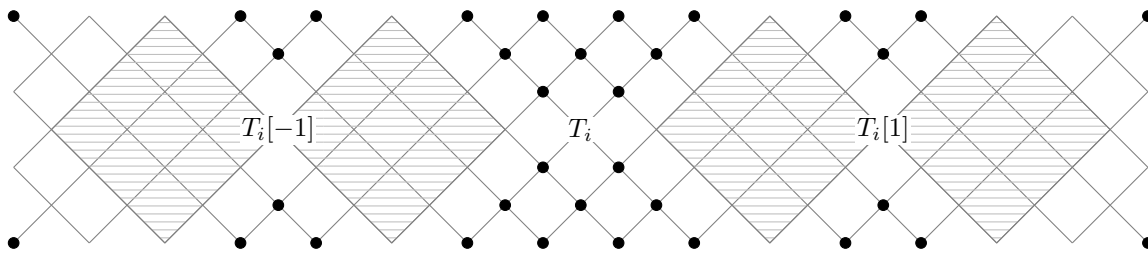


Figura 2.3

É fácil ver que a região hachurada, que não está destacada por  $(\bullet)$ , é justamente o conjunto:

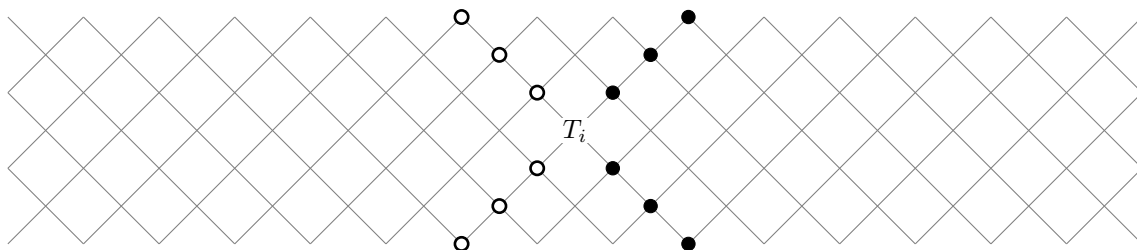
$$\{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_i[j]) \neq 0, j \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(T_i[j], X) \neq 0, j \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Na figura 2.3 tomamos  $n = 7$ , porém, pela configuração de  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ , é fácil ver que o mesmo padrão encontrado na figura 2.3 é válido para o caso em que  $T_i \in T$ , onde  $T$  é um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  para qualquer  $n$ . Portanto conseguimos encontrar uma região específica onde estão localizados os sucessores e antecessores imediatos de  $T_i$ . A proposição a seguir irá nos auxiliar a restringir ainda mais essa região.

**Proposição 2.2.1** *Se  $T \in \mathcal{D}^b(A)$  é um conjunto tilting completo, então seu espectro é dado por um quiver conexo.*

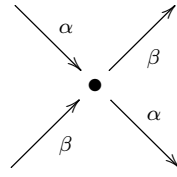
**Demonstração:** Basta mostrarmos que  $B = \text{End}(T)$  é conexa. Sabemos que uma álgebra  $A$  é conexa se, e somente se, seu centro  $Z(A)$  é conexo (ver [4], pág. 205). Como equivalência derivada preserva o centro, temos que  $Z(A) \cong Z(B)$  (ver [18], pág. 454). Disto segue que  $B$  é conexa. ■

Utilizando essa proposição, podemos restringir ainda mais a região onde se encontram os sucessores e antecessores imediatos de  $T_i$ . Para o caso do exemplo 2.2.1, temos que esta região é a destacada na figura abaixo.

Figura 2.4:  $\bullet$  = sucessores,  $\circ$  = antecessores

**Definição 2.2.2** *Em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n \cong \text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  os caminhos  $(i, j) \rightsquigarrow (i + k, j - k)$  serão chamados de caminhos tipo  $\beta$ , e os caminhos  $(i, j) \rightsquigarrow (i, j + k)$  serão ditos caminhos tipo  $\alpha$ . Como na categoria derivada estes caminhos podem ser tomados como sendo morfismos*

não nulos, então os chamaremos também de morfismos tipo  $\beta$  e tipo  $\alpha$ , respectivamente.



Pela proposição 2.2.1 temos que, pelo fato de  $T$  ser completo, seu espectro é conexo. Portanto, se  $T_i$  possui sucessores e antecessores imediatos em  $T$ , temos que eles estão ligados à  $T_i$  através de um morfismo tipo  $\alpha$  ou um morfismo tipo  $\beta$ .

**Proposição 2.2.2** *Sejam  $T_i, T_j \in T$  tais que  $T$  é um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Se  $T_i$  é sucessor imediato de  $T_j$ , então existe um morfismo  $\psi : T_j \rightarrow T_i$  que não se fatora por nenhum elemento  $T_\ell \in T$  com  $\ell \neq i$ , e temos que  $\psi$  é um morfismo do tipo  $\alpha$  ou do tipo  $\beta$ .*

**Demonstração:** A demonstração é resultado imediato da discussão feita acima. ■

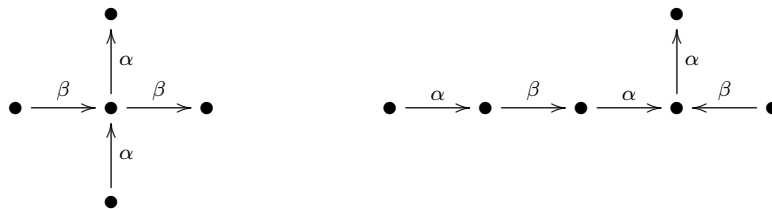
Como consequência da proposição 2.2.2, temos que um conjunto tilting completo  $T \subset \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  pode ser representado por um quiver conexo possuindo duas classes de flechas, classes essas herdadas das classes dos caminhos em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ .

Esse fato serve como motivação para a definição abaixo.

**Definição 2.2.3** *Um  $\vec{A}_n$ -quiver é um quiver conexo, cujo grafo subjacente é uma árvore com  $n$  vértices, onde seu conjunto de flechas é decomposto em uma classe de  $\alpha$ -flechas e uma classe de  $\beta$ -flechas de tal modo que em cada vértice chegam no máximo uma  $\alpha$ -flecha e uma  $\beta$ -flecha e também saem no máximo uma  $\alpha$ -flecha e uma  $\beta$ -flecha.*

Através dessa definição podemos afirmar que todo conjunto tilting completo  $T \subset \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  pode ser representado por um  $\vec{A}_n$ -quiver.

**Exemplo 2.2.2** *São exemplos de um  $A_5$ -quiver e  $A_6$ -quiver, respectivamente:*



## 2.3 Um estudo sobre a localização dos conjuntos tilting em $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$

Seja  $T$  um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Dado um elemento fixado  $T_i \in T$ , podemos restringir a localização dos sucessores e antecessores imediatos de  $T_i$ , através da

proposição 2.2.2, a uma pequena região de  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Com o objetivo de fazermos o mesmo com os demais elementos de  $T$ , iremos analisar, ao longo desta seção, como estão dispostos os elementos do conjunto tilting  $T$  quando temos mais de um elemento fixado. Iremos analisar de que maneira a disposição desses elementos fixados influenciam nos demais, e desta forma buscaremos um padrão que descreva como estão dispostos os elementos dos conjuntos tilting completos em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ .

Para auxiliar o leitor no entendimento das discussões que serão realizadas, consideraremos a categoria  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ , porém todos os resultados encontrados podem ser generalizados para  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ .

### 2.3.1 Análise de $T$ através de dois elementos fixados

Consideremos um conjunto tilting completo  $T = \{T_1, \dots, T_7\} \subset \mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ . Suponha que  $T$  esteja ordenado de maneira que  $T_i$  seja antecessor imediato de  $T_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, 6$ . Fixada a posição de  $T_i$ , já sabemos, da proposição 2.2.2, em qual região encontra-se  $T_{i+1}$ . Agora, fixados  $T_i$  e  $T_{i+1}$ , vamos analisar em qual região é possível encontrarmos  $T_{i-1}$  e onde podemos encontrar  $T_{i+2}$ .

Utilizando o sistema de coordenadas introduzido no exemplo 2.1.3, vamos analisar o que ocorre se alterarmos a segunda coordenada do elemento  $T_{i+1}$  em função da segunda coordenada de  $T_i$ .

Iremos utilizar as seguintes legendas nas imagens de cada um dos casos a seguir:

- = possível posição de  $T_{i+2}$
- ⊖ =  $\{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(T_{i+1}[-1], X) \neq 0\}$
- = possível posição de  $T_{i-1}$
- ⊕ =  $\{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_i[1]) \neq 0\}$

(i) Fixemos  $T_i = (x, y)$  e iniciemos analisando o que ocorre quando  $T_{i+1} = (x, y + 1)$ .

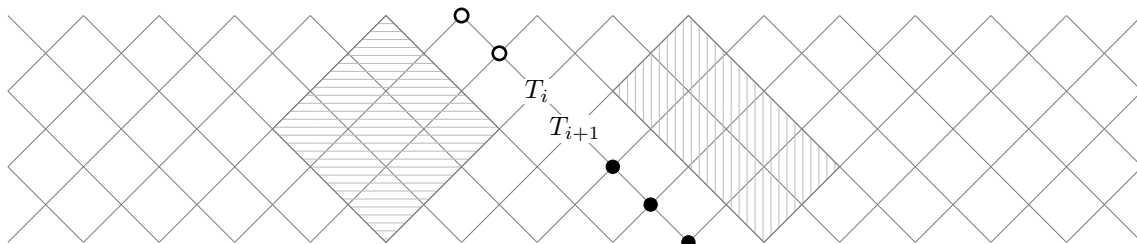


Figura 2.5

Neste caso podemos observar que não existe a possibilidade de termos um morfismo  $T_j \rightarrow T_i$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ . Também podemos observar que não existe a possibilidade de termos um morfismo  $T_{i+1} \rightarrow T_j$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ .

(ii) Agora suponhamos que  $T_{i+1} = (x, y + 2)$ . Neste caso temos:

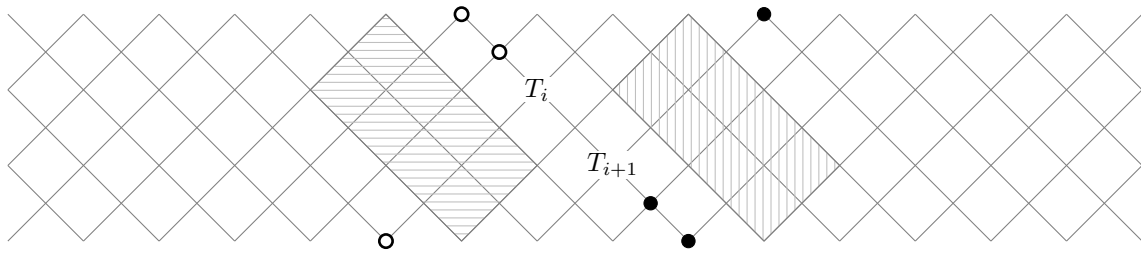


Figura 2.6

Podemos observar que existe apenas uma possibilidade de termos um morfismo  $T_j \rightarrow T_i$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ . Também podemos observar que existe apenas uma possibilidade de termos um morfismo  $T_{i+1} \rightarrow T_j$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ .

(iii) Tomemos agora  $T_{i+1} = (x, y + 3)$ , então

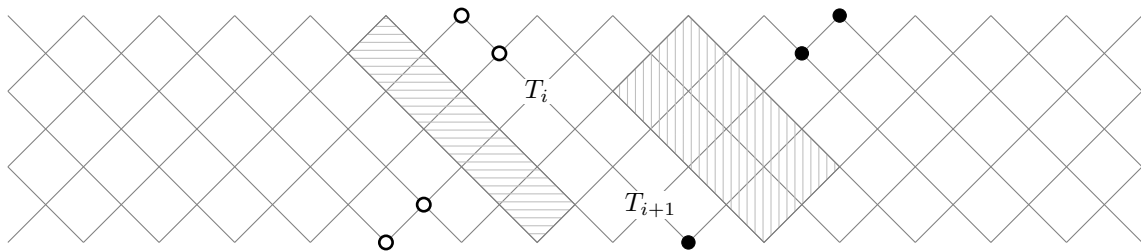


Figura 2.7

Aqui temos duas possibilidades de termos um morfismo  $T_j \rightarrow T_i$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ . Também temos duas possibilidades de termos um morfismo  $T_{i+1} \rightarrow T_j$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ .

(iv) Por fim, seja  $T_{i+1} = (x, y + 4)$ , neste caso

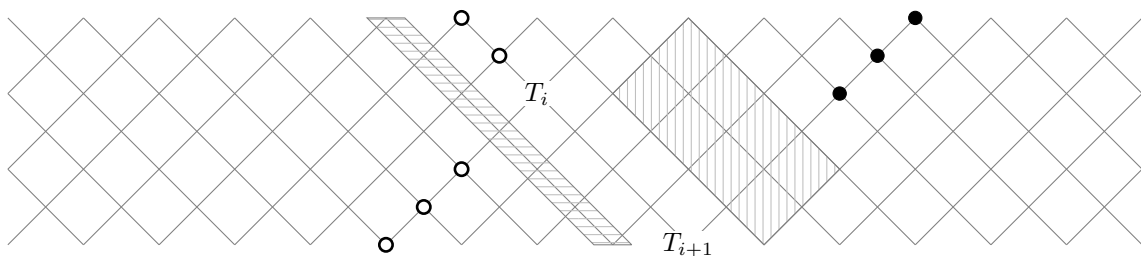


Figura 2.8

Aqui temos três possibilidades de termos um morfismo  $T_j \rightarrow T_i$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ . Também temos três possibilidades de termos um morfismo  $T_{i+1} \rightarrow T_j$  do tipo  $\beta$  para algum  $T_j$ .

Através dos quatro casos acima, podemos observar que ao aumentarmos a segunda coordenada do elemento  $T_{i+1}$  em relação a  $T_i$ , aumentamos as possibilidades de existirem

morfismos  $T_j \rightarrow T_i$  do tipo  $\beta$  e morfismos  $T_{i+1} \rightarrow T_r$  também do tipo  $\beta$ , com  $T_j, T_r \in T$ . Com isso temos que se  $T_{i+1}$  é sucessor de  $T_i$  e  $\psi : T_i \rightarrow T_{i+1}$  é do tipo  $\alpha$ , então a segunda coordenada do elemento  $T_{i+1} \in T$  está em função da quantidade de elementos  $T_j \in T$  que chegam em  $T_i$  por um morfismo  $\beta$  e da quantidade de elementos  $T_r \in T$  tais que existe um morfismo  $\beta$  de  $T_{i+1}$  para  $T_r$ .

Se considerarmos o problema dual, isto é, quando  $\psi : T_i \rightarrow T_{i+1}$  é do tipo  $\beta$ , teremos que a segunda coordenada de  $T_{i+1}$  está em função da quantidade de elementos  $T_j \in T$  que chegam em  $T_i$  por um caminho  $\alpha$  e da quantidade de elementos  $T_r \in T$  tais que existe um caminho  $\alpha$  de  $T_{i+1}$  até  $T_r$ .

**Notação:** Com o objetivo de facilitar e desenvolver discussões a respeito das observações feitas acima, vamos estabelecer a seguinte notação.

- $(T_i)^\beta$  é igual a quantidade de elementos  $T_j \in T$  que possuem morfismo não nulo  $f : T_j \rightarrow T_i$ , do tipo  $\beta$ . Analogamente definimos  $(T_i)^\alpha$ .
- $(T_i)_\beta$  é igual a quantidade de elementos  $T_j \in T$  que possuem morfismo não nulo  $f : T_i \rightarrow T_j$ , do tipo  $\beta$ . Analogamente definimos  $(T_i)_\alpha$ .

Iremos utilizar essa notação ao longo das próximas subseções, porém em cada uma delas chegaremos a novas conclusões sobre onde estão localizados os elementos de um conjunto tilting completo, e essa notação terá seu significado alterado duas vezes durante o texto com o objetivo de não introduzirmos novas notações a cada passo em que a discussão é mais desenvolvida. A primeira alteração ocorrerá ao fim de 2.3.3 e a segunda ao final de 2.3.4.

### 2.3.2 Análise de $T$ através de três elementos fixados

Utilizando as notações introduzidas ao final de 2.3.1, vamos dar prosseguimento à análise dos quatro casos feita em 2.3.1, porém agora vamos fixar  $T_i, T_{i+1}$  e  $T_{i+2}$ .

Iremos utilizar as seguintes legendas nas imagens de cada um dos casos a seguir:

$$\begin{aligned} \bullet &= \text{possível região de } T_{i+2} & \ominus &= \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(T_{i+1}[-1], X) \neq 0\} \\ \circ &= \text{possível região de } T_{i-1} & \oplus &= \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_i[1]) \neq 0\} \\ \odot &= \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_{i+2}[\ell]) \neq 0 \text{ ou } \text{Hom}(T_{i+2}[\ell], X) \neq 0 \text{ para algum } \ell \neq 0\} \end{aligned}$$

- (i) Sabemos que dadas as disposições de  $T_i$  e  $T_{i+1}$  como na figura 2.6, temos a possibilidade de no máximo  $(T_{i+1})_\beta = 1$ . Então fixemos  $T_{i+2}$  nesta única posição possível.

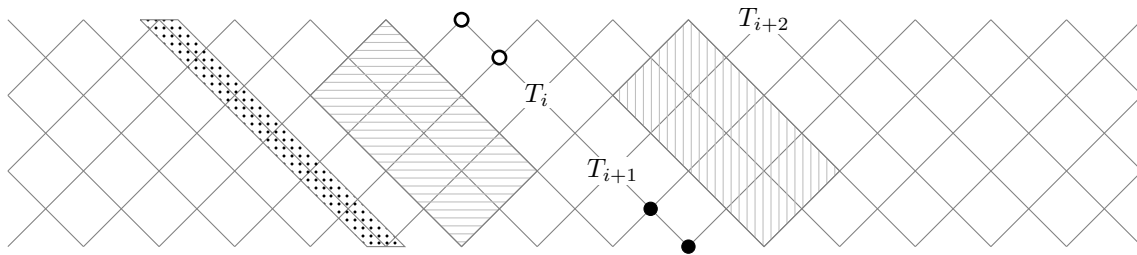


Figura 2.9

Desta maneira, podemos ver que  $(T_i)^\beta = 0$ , pois a única posição possível anteriormente recebe agora um morfismo de  $T_{i+2}[-2]$ .

- (ii) Da figura 2.7, uma vez fixada as posições de  $T_i$  e  $T_{i+1}$ , temos a possibilidade de no máximo  $(T_{i+1})_\beta = 2$ . Fixemos agora  $T_{i+2}$  em cada uma dessas duas posições.

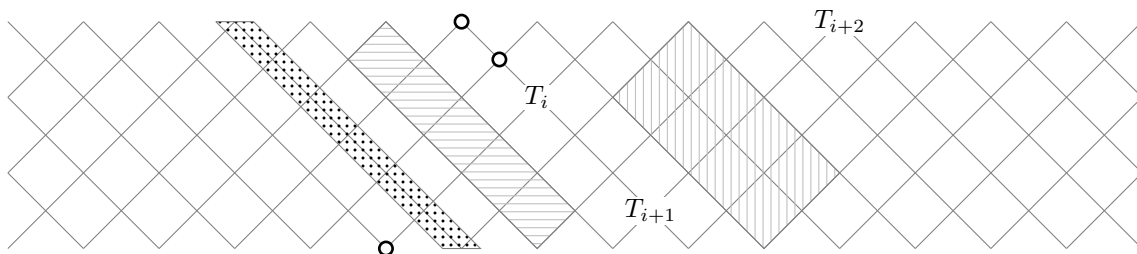


Figura 2.10

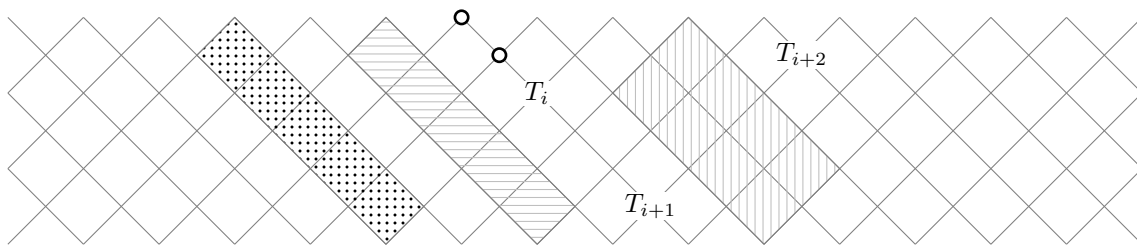


Figura 2.11

Podemos observar que no primeiro caso temos  $(T_i)^\beta = 1$  e, no segundo,  $(T_i)^\beta = 0$ .

- (iii) Sabemos que dada a disposição de  $T_i$  e  $T_{i+1}$  como na figura 2.8, temos a possibilidade de no máximo  $(T_{i+1})_\beta = 3$ . Então fixemos  $T_{i+2}$  em cada uma dessas três posições possíveis.

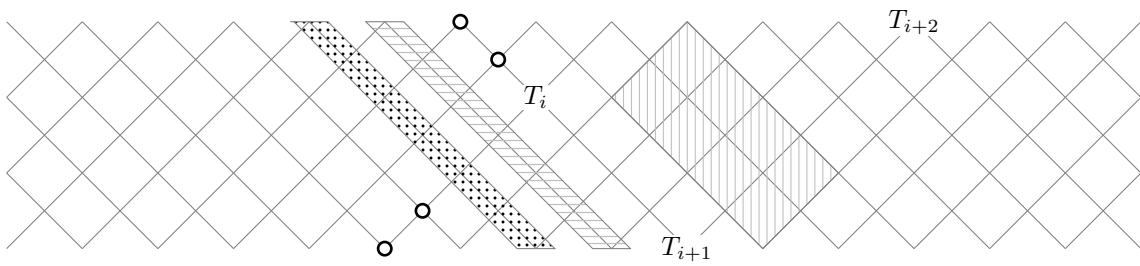


Figura 2.12

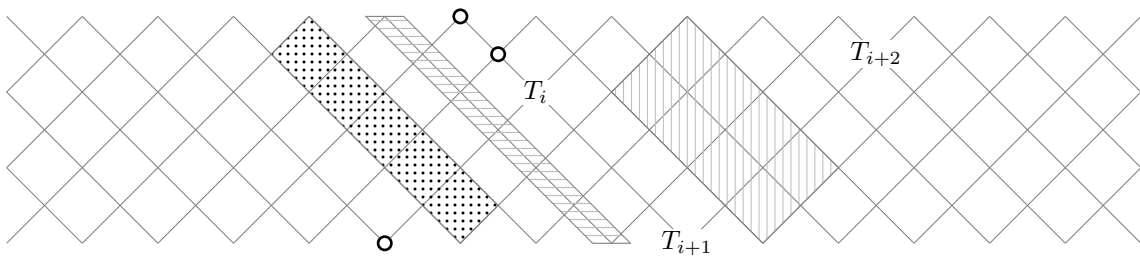


Figura 2.13

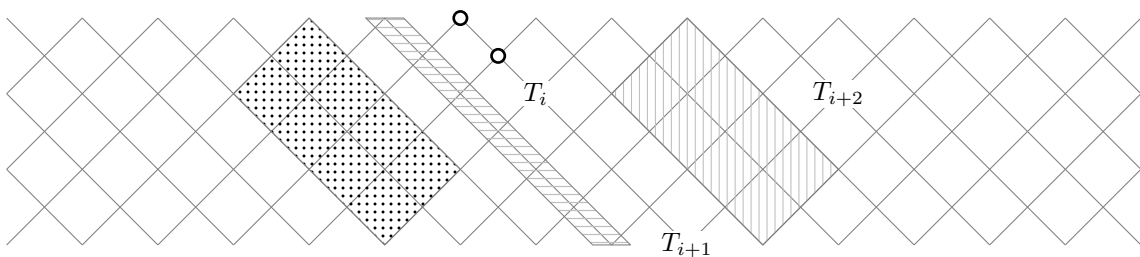


Figura 2.14

Observamos que no primeiro caso temos no máximo  $(T_i)^\beta = 2$ , no segundo,  $(T_i)^\beta = 1$  e, no terceiro,  $(T_i)^\beta = 0$ .

Podemos generalizar esse fato para  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Suponha que  $T_i = (x, y)$  e  $T_{i+1} = (x, y + 1 + k)$ , com  $k \geq 0$ . Então a análise feita acima nos mostra que apesar de possuímos no máximo  $(T_i)^\beta = k$  e  $(T_{i+1})_\beta = k$  (como foi mostrado em 2.3.1), se fixarmos  $(T_{i+1})_\beta = t$ , com cada um desses  $t$  elementos possuindo a segunda coordenada como sendo a menor possível, então teremos que o valor de  $(T_i)^\beta$  será no máximo igual a  $k - t$ .

Disto segue que, dado um conjunto tilting completo  $T$ , se conhecermos a segunda coordenada de  $T_i \in T$ , por exemplo  $T_i = (x, y)$ , e conhecermos  $(T_i)^\beta$  e  $(T_{i+1})_\beta$ , então temos que a segunda coordenada de  $T_{i+1}$  dever ser maior ou igual a:

$$y + 1 + (T_i)^\beta + (T_{i+1})_\beta.$$

### 2.3.3 Uma fórmula recursiva para localizar os elementos de $T$

Ao final de 2.3.2 foi possível encontrarmos uma fórmula recursiva para majorarmos a segunda coordenada do elemento  $T_{i+1}$  em relação à coordenada de  $T_i$ . Nosso próximo passo

será analisar novamente os casos vistos em 2.3.2, porém desta vez fixando quatro elementos de  $T$ . Isso será feito com o propósito de enxergarmos melhor os padrões encontrados até o momento, e com isso poderemos aprimorar a fórmula encontrada.

Analisemos o caso abaixo, em que estão fixados  $T_1, T_2, T_3, T_4 \in T$ , onde  $T$  é um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ . Aqui temos apenas  $T_1$  como antecessor de  $T_2$ , não necessariamente antecessor imediato, pois iremos discutir as possibilidades para outros antecessores de  $T_2$ .

Iremos utilizar as seguintes legendas na imagem abaixo:

$$\begin{aligned} \ominus &= \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_3[\ell]) \neq 0 \text{ ou } \text{Hom}(T_3[\ell], X) \neq 0 \text{ para algum } \ell < 0\} \\ \oplus &= \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_2[\ell]) \neq 0 \text{ ou } \text{Hom}(T_2[\ell], X) \neq 0 \text{ para algum } \ell < 0\} \\ \odot &= \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_1[1]) \neq 0\} \\ \oplus &= \{X \in \mathbb{Z}\vec{A}_7; \text{Hom}(X, T_4[\ell]) \neq 0 \text{ ou } \text{Hom}(T_4[\ell], X) \neq 0 \text{ para algum } \ell < 0\} \end{aligned}$$

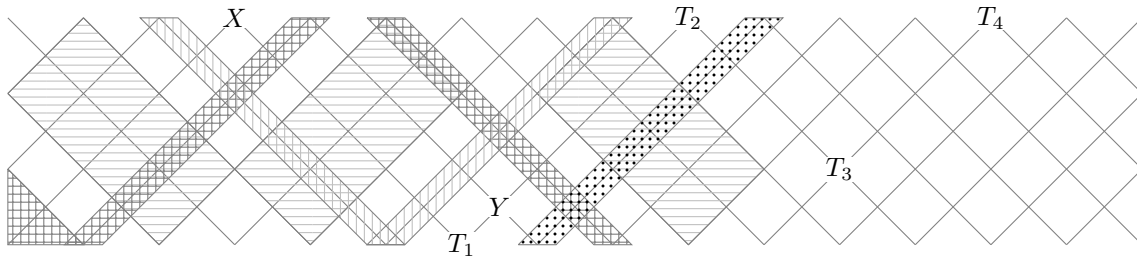


Figura 2.15

Pela escolha da segunda coordenada de  $T_3$  em relação a  $T_2$ , e da existência de  $T_4$ , é sabido, do final de 2.3.2, que temos no máximo  $(T_2)^\beta = 3 - 1 = 2$ , que são os elementos  $T_1$  e  $Y$  representados acima. Note que fixados  $T_1, T_2, T_3, T_4 \in T$ , nos restam apenas  $X$  e  $Y$  como possíveis candidatos, antecessores de  $T_2$ , a pertencerem ao conjunto  $T$ . Observe que  $\text{Hom}(Y, X[1]) \neq 0$ , portanto se  $X \in T$ , então  $Y \notin T$  (analogamente, se  $Y \in T$ , temos  $X \notin T$ ). Além disso, podemos observar que se o conjunto fixado fosse  $\{Y, T_2, T_3, T_4\}$ , então  $T_1$  seria o único candidato possível para pertencer a  $T$  como antecessor de  $T_2$ .

Isto ilustra o fato de que, dados  $T_i, T_{i+1} \in T$ , com  $T_i \xrightarrow{\alpha} T_{i+1}$ , ao aumentarmos a segunda coordenada de  $T_{i+1}$ , não apenas aumentamos a possibilidade de termos elementos  $T_j \in T$  com  $T_j \xrightarrow{\beta} T_i$ , mas também aumentamos a possibilidade de termos elementos  $T_j \in T$  tais que existe, no espectro de  $T$ , um caminho de  $T_j$  até  $T_i$  terminando com uma flecha  $\beta$  chegando em  $T_i$  (na imagem acima, esse é o caso de  $X$  chegando até  $T_2$ ).

Podemos generalizar o fato acima para  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Aqui faremos a primeira modificação quanto às notações  $(T_i)^\beta$  e  $(T_i)_\beta$ , que apenas generalizam um pouco mais seus significados. A partir de agora vamos considerar:

- $(T_i)^\beta$  é igual ao número de elementos  $T_j \in T$  tais que existe um caminho de  $T_j$  para  $T_i$ , no espectro de  $T$ , terminando com uma flecha  $\beta$  chegando em  $T_i$ .

- $(T_i)_\beta$  é igual ao número de elementos  $T_j \in T$  tais que existe um caminho de  $T_i$  para  $T_j$ , no espectro de  $T$ , iniciando com uma flecha  $\beta$  saindo de  $T_i$ .

Disto segue que, dado um conjunto tilting completo  $T$ , se conhecermos a segunda coordenada de  $T_i \in T$ , por exemplo  $T_i = (x, y)$ , e conhecermos  $(T_i)^\beta$  e  $(T_{i+1})_\beta$ , temos que a segunda coordenada de  $T_{i+1}$  deve ser no mínimo igual a:

$$y + 1 + (T_i)^\beta + (T_{i+1})_\beta.$$

### 2.3.4 Recuperando os conjuntos tilting através dos $\vec{A}_n$ -quivers

Seja  $T$  um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ . Da análise feita ao final de 2.3.3, sabemos que se tivermos o espectro de  $T$  e informações a respeito a qual classe, de morfismos em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ , pertence cada flecha desse espectro, então podemos recuperar informações a respeito de como  $T$  está disposto em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ . Sabemos da definição 2.2.3 que os  $\vec{A}_n$ -quivers carregam toda essa informação. Então se soubermos como é o  $\vec{A}_n$ -quiver que representa  $T$ , podemos recuperar  $T$  através dos padrões discutidos até o momento.

Consideremos  $T = \{T_1, \dots, T_7\}$  cujo  $\vec{A}_n$ -quiver que o representa é da forma:

$$T_1 \xrightarrow{\alpha} T_2 \xrightarrow{\beta} T_3 \xrightarrow{\beta} T_4 \xrightarrow{\alpha} T_5 \xrightarrow{\beta} T_6 \xrightarrow{\alpha} T_7$$

Como  $T_1$  é antecessor de  $T_2, \dots, T_7$ , então fixemos sua primeira coordenada como sendo igual a zero. Digamos que  $T_1 = (0, y)$ . Analisemos onde está localizado o objeto  $T_2$  em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ . Como  $(T_2)_\beta = 5$ , sabemos que a segunda coordenada de  $T_2$  deve ser, no mínimo, igual a  $y + 1 + 5$ . Como estamos em  $\mathbb{Z}\vec{A}_7$ , temos que isso só é possível se  $T_1 = (0, 1)$  e  $T_2 = (0, 7)$ .

Agora analisando  $T_3$ , podemos observar que o morfismo  $T_2 \rightarrow T_3$  é do tipo  $\beta$ . Como este é o caso dual de  $\alpha : T_i \rightarrow T_{i+1}$ , iremos utilizar o dual da fórmula  $y + 1 + (T_i)^\beta + (T_{i+1})_\beta$ , isto é,

$$y - 1 - (T_i)^\alpha - (T_{i+1})_\alpha.$$

Desta maneira sabemos que a segunda coordenada de  $T_3$  é igual a 5. Como  $T_2$  é antecessor imediato de  $T_3$ , sabemos que eles devem estar numa mesma diagonal, portanto segue que  $T_3 = (2, 5)$ .

Continuando com esse raciocínio para encontrar todos os elementos de  $T$ , chegamos que  $T$  é como dado na figura abaixo:

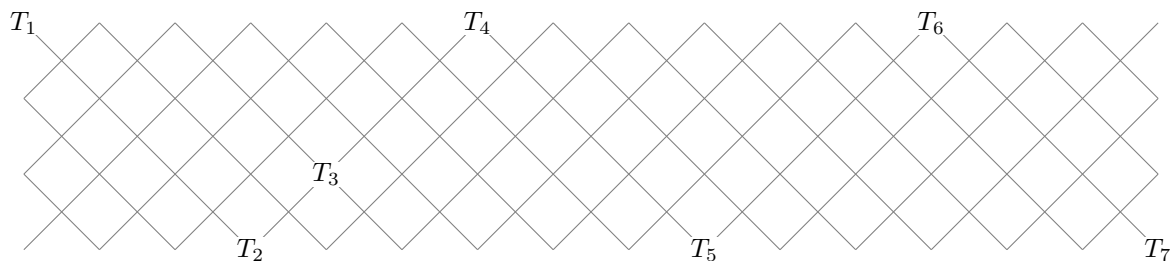


Figura 2.16

E neste caso  $T$  é um conjunto tilting completo.

O exemplo acima ilustra que apenas utilizando a fórmula recursiva

$$y + 1 + (T_i)^\beta + (T_{i+1})_\beta \quad (*)$$

é possível recuperar um conjunto tilting, a partir do  $\vec{A}_n$ -quiver que o representa. Porém isso não é válido para um  $T$  qualquer, pois na fórmula (\*) da maneira como estão definidos  $(T_i)^\beta$  e  $(T_{i+1})_\beta$ , não conseguimos analisar  $T$  e obter um resultado preciso se seu  $\vec{A}_n$ -quiver for por exemplo igual a:

$$\begin{array}{ccccccccc} T_1 & \xrightarrow{\alpha} & T_2 & \xrightarrow{\beta} & T_3 & \xrightarrow{\beta} & T_4 & \xrightarrow{\alpha} & T_5 & \xrightarrow{\beta} & T_6 \\ & & & & \downarrow \alpha & & & & & & \\ & & & & T_7 & & & & & & \end{array}$$

Vejamos no exemplo abaixo o que ocorre ao tentarmos recuperar  $T$  a partir desse espectro.

**Exemplo 2.3.1** *Seja  $T$  um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(\vec{A}_7)$ , tal que o  $\vec{A}_n$ -quiver que o representa é dado por:*

$$\begin{array}{ccccccccc} T_1 & \xrightarrow{\alpha} & T_2 & \xrightarrow{\beta} & T_3 & \xrightarrow{\beta} & T_4 & \xrightarrow{\alpha} & T_5 & \xrightarrow{\beta} & T_6 \\ & & & & \downarrow \alpha & & & & & & \\ & & & & T_7 & & & & & & \end{array}$$

*Tentemos recuperar informações a respeito de como  $T$  está disposto em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_7)$ .*

*Como o  $\vec{A}_n$ -quiver é muito semelhante ao dado anteriormente, então é fácil ver que as coordenadas de  $T_1$  e  $T_2$  irão permanecer as mesmas, isto é,  $T_1 = (0, 1)$  e  $T_2 = (0, 7)$ . A segunda coordenada de  $T_3$  é igual a*

$$7 - 1 - (T_2)^\alpha - (T_3)_\alpha = 7 - 1 - 1 - 1 = 4$$

*Agora, analisando  $T_7$ , temos que sua segunda coordenada é dada por*

$$4 + 1 + (T_3)^\beta + (T_7)_\beta = 4 + 1 + 2 = 7$$

*A segunda coordenada de  $T_4$  é igual a*

$$4 - 1 - (T_3)^\alpha - (T_4)_\alpha = 4 - 1 - 0 - 2 = 1$$

*Para  $T_5$  temos que sua segunda coordenada deve ser maior ou igual a:*

$$1 + 1 + (T_4)^\beta + (T_5)_\beta = 1 + 1 + 3 + 1 = 6$$

*ou seja, sua segunda coordenada é igual a 6 ou 7.*

*Analogamente para  $T_6$ , temos que sua coordenada deve ser menor ou igual a:*

$$6 - 1 - (T_5)^\alpha - (T_6)_\alpha = 6 - 1 - 4 = 1$$

ou

$$7 - 1 - (T_5)^\alpha - (T_6)_\alpha = 7 - 1 - 4 = 2$$

isto é, sua segunda coordenada é igual a 1 ou 2.

Analisemos o primeiro caso, o qual a segunda coordenada de  $T_5$  é igual a 6. Neste caso a segunda coordenada de  $T_6$  deve ser igual a 1.

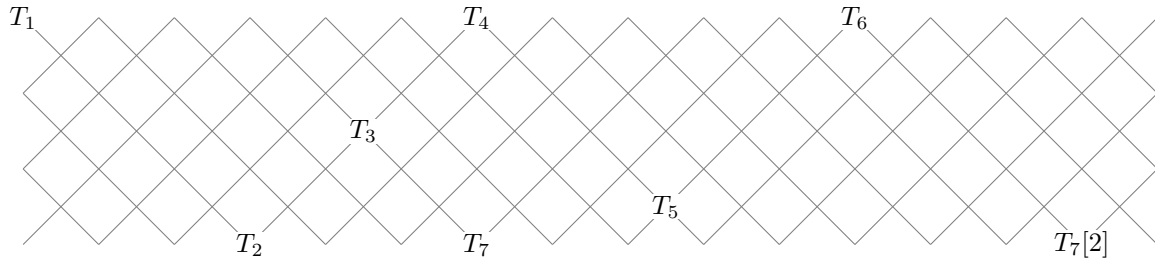


Figura 2.17

Como  $\text{Hom}(T_6, T_7[2]) \neq 0$ , o conjunto acima não é tilting. Portanto a segunda coordenada de  $T_5$  não pode ser igual a 6.

Analisemos agora o que ocorre se a segunda coordenada de  $T_5$  for igual a 7. Neste caso temos duas possibilidades para  $T_6$ .

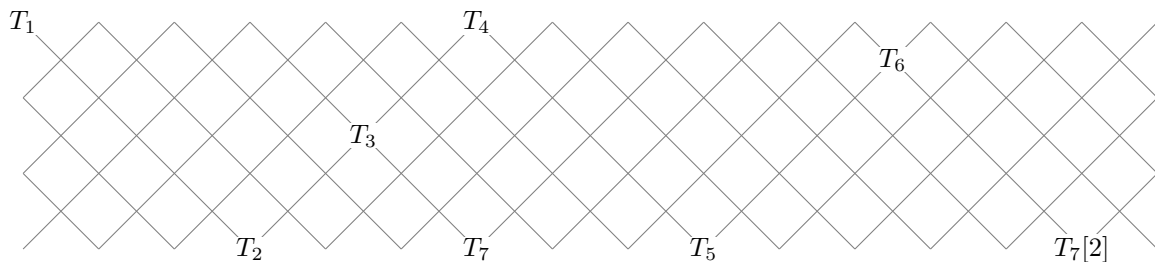


Figura 2.18

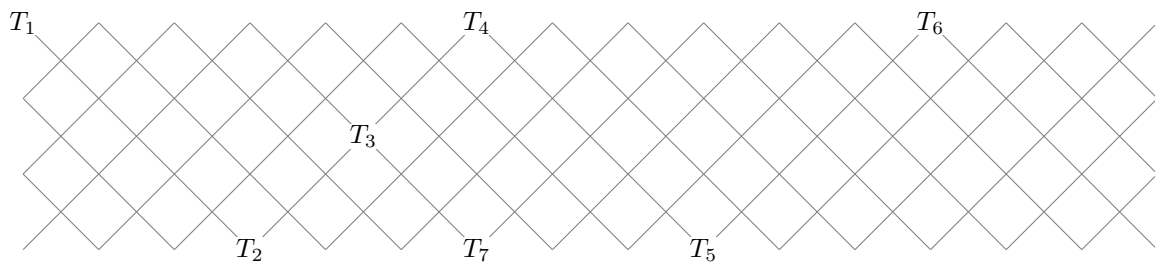


Figura 2.19

Podemos ver que na figura 2.18 temos novamente  $\text{Hom}(T_6, T_7[2]) \neq 0$ . Portanto a única opção possível é a da figura 2.19, onde a segunda coordenada de  $T_5$  é igual a 7 e de  $T_6$  é igual a 1.

Portanto temos que a fórmula (\*) não nos forneceu precisamente quem é  $T$ , porém ela nos apontou três possibilidades (figuras 2.17, 2.18 e 2.19). Isso ocorreu pelo fato de

não considerarmos a influência do elemento  $T_7$  em relação à localização de  $T_5$  e  $T_6$ . Por este motivo iremos fazer uma segunda modificação quanto às notações  $(T_i)^\beta$  e  $(T_i)_\beta$ . A partir de agora vamos considerar:

- $(T_i)^\beta$  é igual ao número de elementos  $T_j \in T$  tais que existe um passeio de  $T_j$  para  $T_i$ , no espectro de  $T$ , terminando com uma flecha  $\beta$  chegando em  $T_i$ .
- $(T_i)_\beta$  é igual ao número de elementos  $T_j \in T$  tais que existe um passeio de  $T_i$  para  $T_j$ , no espectro de  $T$ , iniciando com uma flecha  $\beta$  saindo de  $T_i$ .

Note que se tentarmos novamente recuperar  $T$  através do  $\vec{A}_n$ -quiver fornecido no exemplo 2.3.1, porém dessa vez utilizando a fórmula (\*) com essa alteração no significado das notações acima, obteremos exatamente o conjunto tilting dado na figura 2.19.

Disto segue que, dado um conjunto tilting completo  $T$ , se conhecermos a segunda coordenada de  $T_i \in T$ , por exemplo  $T_i = (x, y)$ , e conhecermos  $(T_i)^\beta$  e  $(T_{i+1})_\beta$ , teremos que a segunda coordenada de  $T_{i+1}$  estará determinada por:

$$y + 1 + (T_i)^\beta + (T_{i+1})_\beta, \text{ se } \psi : T_i \rightarrow T_{i+1} \text{ for do tipo } \alpha$$

$$y - 1 - (T_i)^\alpha - (T_{i+1})_\alpha, \text{ se } \psi : T_i \rightarrow T_{i+1} \text{ for do tipo } \beta$$

**Afirmção:** As fórmulas acima, com as últimas definições de  $(T_i)^\beta$  e  $(T_i)_\beta$ , determinam a localização da segunda coordenada do elemento  $T_{i+1}$ .

Visto que, pela proposição 2.2.2, os elementos  $T_i$  e  $T_{i+1}$  devem estar ligados por um morfismo do tipo  $\alpha$  ou  $\beta$ , então a primeira coordenada do elemento  $T_{i+1}$  fica determinada por sua segunda coordenada. Com isso podemos concluir que se soubermos quem é o  $\vec{A}_n$ -quiver que representa o conjunto tilting completo  $T \subset \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ , então seremos capazes de dar uma localização para os elementos de  $T$  em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ .

## 2.4 Relação entre os $\vec{A}_n$ -quivers e os tilting completos

O objetivo desta seção é formalizar a relação vista até o momento entre os  $\vec{A}_n$ -quivers e os conjuntos tilting completos de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Para isso iremos definir de maneira recursiva uma aplicação  $\varphi$  entre o conjunto de vértices de um  $\vec{A}_n$ -quiver e o conjunto de vértices de  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Essa aplicação levará cada  $\vec{A}_n$ -quiver no respectivo conjunto tilting completo o qual ele representa.

Finalizaremos a seção enunciando um teorema que nos diz que a aplicação  $\varphi$  induz uma bijeção entre as classes de isomorfismos de  $\vec{A}_n$ -quivers e os conjuntos tilting completos de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ .

### 2.4.1 Resultados básicos sobre $\vec{A}_n$ -quiver e a aplicação $\varphi = (g, h)$

Aqui iremos iniciar introduzindo o conceito de morfismos entre  $\vec{A}_n$ -quivers, para posteriormente trabalhar com suas classes de isomorfismos. Iremos formalizar a relação vista na seção anterior, entre os  $\vec{A}_n$ -quivers e os conjuntos tilting completos. Para isso definiremos uma aplicação recursiva  $\varphi$  entre o conjunto de vértices de um  $\vec{A}_n$ -quiver e o conjunto de vértices de  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ .

**Definição 2.4.1** *Sejam  $Q$  e  $Q'$  dois quivers. Um morfismo de quivers  $f : Q' \rightarrow Q$  é um par de aplicações  $f_0 : Q'_0 \rightarrow Q_0$  e  $f_1 : Q'_1 \rightarrow Q_1$  tais que se  $\phi \in Q'_1$ , com  $s(\phi) = x$  e  $t(\phi) = y$ , então  $f_1(\phi) \in Q_1$  e  $s(f_1(\phi)) = f_0(x)$  e  $t(f_1(\phi)) = f_0(y)$ . Diremos que  $f$  é um isomorfismo de quivers se  $f_0$  e  $f_1$  forem aplicações sobrejetoras.*

**Exemplo 2.4.1** *Considere os seguintes quivers:*

$$(a) Q_1 : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$$

$$(b) Q_2 : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

$$(c) Q_3 : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3$$

$$(d) Q_4 : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

É fácil ver que apenas os quivers  $Q_1$  e  $Q_2$  são isomorfos.

Podemos definir isomorfismos entre  $\vec{A}_n$ -quivers a partir da definição de morfismos de quiver, dada acima. Porém, além de levarmos em consideração as flechas e os vértices, também precisamos manter as classes as quais as flechas pertencem.

**Definição 2.4.2** *Sejam  $K$  e  $K'$  dois  $\vec{A}_n$ -quivers. Um morfismo de  $\vec{A}_n$ -quivers  $f : K \rightarrow K'$  é um morfismo de quivers  $(f_0, f_1)$  tal que, se  $\phi \in K_1$ , então a classe de  $f_1(\phi)$  é igual a classe de  $\phi$ . Em outras palavras, se  $\phi$  é uma flecha tipo  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ), então  $f_1(\phi)$  é do tipo  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ).*

**Notação:** Seja  $K$  um  $\vec{A}_n$ -quiver, para cada vértice  $x$  de  $K$  temos:

- $x^\alpha$  o número de vértices  $y$  de  $K$  tal que o passeio mais curto de  $y$  para  $x$  termina com uma  $\alpha$ -flecha chegando em  $x$
- $x_\alpha$  o número de vértices  $y$  de  $K$  tal que o passeio mais curto de  $x$  para  $y$  inicia com uma  $\alpha$ -flecha saindo de  $x$

Analogamente, definimos  $x^\beta$  e  $x_\beta$ .

**Proposição 2.4.1** [Keller-Vossieck [13]] *Seja  $\mathcal{A}_n$  o conjunto das classes de isomorfismos dos  $\vec{A}_n$ -quivers, e seja  $K \in \mathcal{A}_n$ . Existe uma única aplicação sobre o conjunto dos vértices de  $K$  tal que:*

$$\begin{aligned} \varphi : K_0 &\rightarrow (\mathbb{Z}\vec{A}_n)_0 \\ x &\mapsto (gx, hx) \end{aligned}$$

- a)  $\min_{x \in K} gx = 0$
- b)  $(gy, hy) = (gx, hx + x^\beta + y_\beta + 1)$  para cada  $\alpha$ -flecha  $x \xrightarrow{\alpha} y$
- c)  $(gy, hy) = (gx + x^\alpha + y_\alpha + 1, hx - x^\alpha - y_\alpha - 1)$  para cada  $\beta$ -flecha  $x \xrightarrow{\beta} y$

Como  $hx = 1 + x^\alpha + x_\beta$ , então essa aplicação está bem definida.

Note que cada  $(gx, hx) \in \varphi(K_0)$  está completamente determinada pela configuração do vértice  $x \in K_0$ , isto é, pelos seus vértices e flechas adjacentes, levando em consideração as classes dessas flechas e suas orientações. Portanto temos que se  $\varphi(K_0) = \varphi(K'_0)$ , então existe um isomorfismo de  $\vec{A}_n$ -quivers  $\phi : K \rightarrow K'$ . Com isso podemos concluir que a aplicação  $\varphi$  é injetora nas classes de isomorfismos de  $\vec{A}_n$ -quivers.

**Exemplo 2.4.2** Seja  $K = 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\alpha} 4$ . Calculemos  $\varphi(K_0)$ :

- $g(1) = g(2)$ , pois existe  $\alpha : 2 \rightarrow 1$ .
- $g(3) = g(4)$ , pois existe  $\alpha : 4 \rightarrow 3$ .
- $g(3) = g(2) + 2^\alpha + 3_\alpha + 1$ , pois existe  $\beta : 2 \rightarrow 3$ .

Como  $2^\alpha = 0$  e  $3_\alpha = 0$ , então  $g(3) = g(2) + 1$ . Neste caso, temos

$$g(1) = g(2) \quad \text{e} \quad g(3) = g(4) = g(2) + 1.$$

Por (a) temos que  $\min_{x \in K} gx = 0$  e, portanto,  $g(1) = g(2) = 0$  e  $g(3) = g(4) = 1$ .

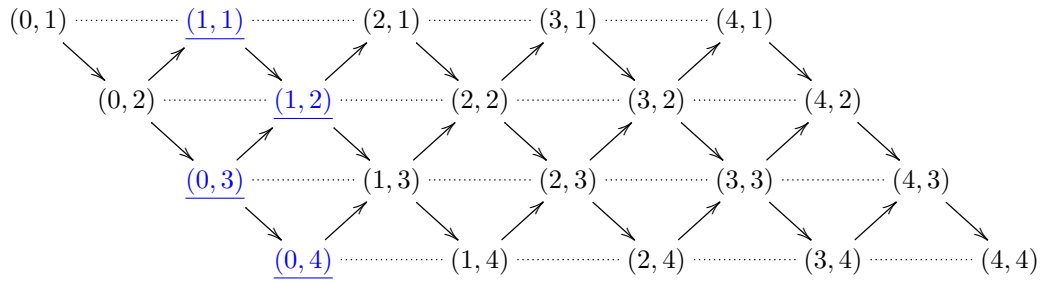
Agora calculemos  $h(x)$ .

- $h(1) = 1 + 1^\alpha + 1_\beta = 1 + 3 + 0 = 4$
- $h(2) = 1 + 2^\alpha + 2_\beta = 1 + 0 + 2 = 3$
- $h(3) = 1 + 3^\alpha + 3_\beta = 1 + 1 + 0 = 2$
- $h(4) = 1 + 4^\alpha + 4_\beta = 1 + 0 + 0 = 1$

Disto segue que

$$\begin{aligned} \varphi : K_0 &\longrightarrow (\mathbb{Z}\vec{A}_4)_0 \\ 1 &\mapsto (0, 4) \\ 2 &\mapsto (0, 3) \\ 3 &\mapsto (1, 2) \\ 4 &\mapsto (1, 1) \end{aligned}$$

Abaixo temos a disposição de  $\varphi(K_0)$  em  $\mathbb{Z}\vec{A}_4$ :



Note que  $\varphi(K_0)$ , apresentada no exemplo acima, forma um conjunto tilting em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$ .

Comprovemos a afirmação acima utilizando a definição de slice (ver [12] pág. 430).

Sabemos que  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_4) = \mathbb{Z}\vec{A}_4$ , logo cada vértice  $T_1 = (0, 3)$ ,  $T_2 = (0, 4)$ ,  $T_3 = (1, 1)$ ,  $T_4 = (1, 2)$  de  $\mathbb{Z}\vec{A}_4$  pode ser pensado como um objeto indecomponível de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$ . Estes objetos estão na subcategoria abeliana e hereditária  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$  assim definida:

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{D}^b(k\vec{A}_4); (\forall S \in \Sigma)(\forall i \neq 0) \text{Hom}(S, X[i]) = 0\},$$

em que  $\Sigma$  é o slice  $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)$ . Desde que  $T \in \mathcal{H}$ , temos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)}(T, T[1]) = \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, T).$$

Além disso, como  $T$  é um slice em  $\mathcal{H}$ , segue que  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, T) = 0$ .

A justificativa de  $\mathcal{H}$  ser hereditária pode ser encontrada em [15] pág. 117 e [3] pág. 72.

O fato de  $\varphi(K_0)$ , do exemplo anterior, ser um conjunto tilting é geral, isto é, a função  $\varphi$  associa cada  $\vec{A}_n$ -quiver de  $\mathcal{A}_n$  a um conjunto tilting em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ .

### 2.4.2 A relação biunívoca entre os tilting e os $\vec{A}_n$ -quivers

Aqui analisaremos mais profundamente a aplicação  $\varphi$  introduzida na proposição 2.4.1. Também iremos exibir alguns resultados relevantes que são utilizados por Keller-Vossieck para demonstrar a bijeção entre as classes de isomorfismos de  $\vec{A}_n$ -quivers e os conjuntos tilting completos de  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ .

**Proposição 2.4.2** *Seja  $K$  um  $\vec{A}_n$ -quiver, e seja  $x$  um vértice de  $K$ . Então:*

(i) *Temos que  $h(x) = 1$  se, e somente se, os subquivers plenos de  $K$  que contêm  $x$  são de uma, e somente uma, das formas abaixo:*

$$\bullet \xrightarrow{\beta} x \xrightarrow{\alpha} \bullet, \quad x \xrightarrow{\alpha} \bullet, \quad \bullet \xrightarrow{\beta} x$$

(ii) *Temos que  $h(x) = n$  se, e somente se, os subquivers plenos de  $K$  que contêm  $x$  são de uma, e somente uma, das formas abaixo:*

$$\bullet \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} \bullet, \quad x \xrightarrow{\beta} \bullet, \quad \bullet \xrightarrow{\alpha} x$$

**Demonstração:** (i) ( $\Rightarrow$ ) Por definição,  $h(x) = 1 + x^\alpha + x_\beta$ . Se  $h(x) = 1$ , então  $x^\alpha = 0$  e  $x_\beta = 0$ , isto é, não existe uma flecha  $\alpha$  chegando em  $x$  e não existe uma flecha  $\beta$  saindo de  $x$ . Portanto, pela definição de  $\vec{A}_n$ -quiver, temos que  $x$  deve ser de uma das três formas descritas.

( $\Leftarrow$ ) Resultado imediato da definição de  $h(x)$ .

(ii) ( $\Rightarrow$ ) Temos por definição que se  $h(x) = n$ , então  $x^\alpha + x_\beta = n - 1$ . Suponha que  $x^\alpha = 0$ , então  $x_\beta = n - 1$  e segue que  $x$  é da forma

$$x \xrightarrow{\beta} \bullet$$

Agora suponhamos que  $x_\beta = 0$ , então  $x^\alpha = n - 1$  e segue que  $x$  é da forma

$$\bullet \xrightarrow{\alpha} x$$

Resta verificar o caso em que  $x^\alpha \neq 0$  e  $x_\beta \neq 0$ . Neste caso sabemos que  $x$  deve possuir uma flecha  $\alpha$  chegando e uma flecha  $\beta$  saindo. Suponhamos que existe mais uma flecha chegando em  $x$  (ou saindo de  $x$ ). Como  $x^\alpha + x_\beta = n - 1$ , temos que existem  $n - 1$  vértices em  $K$  tais que para cada um desses vértices existe um caminho dele até  $x$ , terminando com uma flecha  $\alpha$ , ou de  $x$  até ele, iniciando com uma flecha  $\beta$ . Por definição de  $K$ , se existir mais uma flecha chegando ou saindo de  $x$ , haverá um vértice que não possui caminho dele até  $x$ , terminando com uma flecha  $\alpha$ , ou de  $x$  até ele, iniciando com uma flecha  $\beta$ . Como  $K$  possui  $n$  vértices, isso não pode ocorrer.

( $\Leftarrow$ ) Resultado imediato da definição de  $h(x)$ . ■

**Definição 2.4.3** *Seja  $K$  definido como na proposição anterior. Se  $x$  é um vértice de  $K$  tal que  $h(x) = 1$  ou  $h(x) = n$ , então  $x$  é chamado de pico e  $\varphi(x) \in \mathbb{Z}\vec{A}_n$  é dito vértice marginal. Aqui a aplicação  $\varphi$  é a definida na proposição 2.4.1*

**Lema 2.4.1** *Seja  $K$  um  $\vec{A}_n$ -quiver que possui apenas vértices do tipo pico. Então  $K = K_\alpha$  ou  $K = K_\beta$ , onde*

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet \xrightarrow{\alpha} \dots \\ K_\beta &= \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \dots \end{aligned}$$

**Demonstração:** Resultado imediato da proposição 2.4.2. ■

**Lema 2.4.2** *Seja  $K$  um  $\vec{A}_n$ -quiver que possui apenas vértices do tipo pico. Então  $\varphi(K)$  é um conjunto tilting completo satisfazendo  $\min_{x \in K} g(x) = 0$ .*

**Demonstração:** O fato de  $\varphi(K)$  satisfazer  $\min_{x \in K} g(x) = 0$  segue diretamente da definição de  $\varphi$ . Pelo lema anterior, sabemos que  $K = K_\alpha$  ou  $K = K_\beta$ . Mostremos que  $\varphi(K_\alpha)$  é um conjunto tilting completo, o caso  $\varphi(K_\beta)$  é análogo. Primeiramente vamos analisar como  $\varphi(K_\alpha)$  está espalhado em  $\mathbb{Z}\vec{A}_n$ . Temos que

$$K_\alpha = x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2 \xrightarrow{\beta} x_3 \xrightarrow{\alpha} \dots$$

portanto, pela proposição 2.4.2, segue que

$$h(x_i) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ for ímpar} \\ n & , \text{ se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

Também temos que

$$(x_i)^\alpha = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ for ímpar} \\ i - 1 & , \text{ se } i \text{ for par} \end{cases} \quad \text{e} \quad (x_i)_\alpha = \begin{cases} n - i & , \text{ se } i \text{ for ímpar} \\ 0 & , \text{ se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

Pela definição de  $g(x)$ , temos

$$g(x_i) = \begin{cases} g(x_{i-1}) + (x_{i-1})^\alpha + (x_i)_\alpha + 1 & , \text{ se } i \text{ for ímpar e } i \neq 1 \\ g(x_{i-1}) & , \text{ se } i \text{ for par} \end{cases}$$

e, reescrevendo  $g(x_i)$ ,

$$g(x_i) = \begin{cases} g(x_{i-1}) + n - 1 & , \text{ se } i \text{ for ímpar e } i \neq 1 \\ g(x_{i-1}) & , \text{ se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

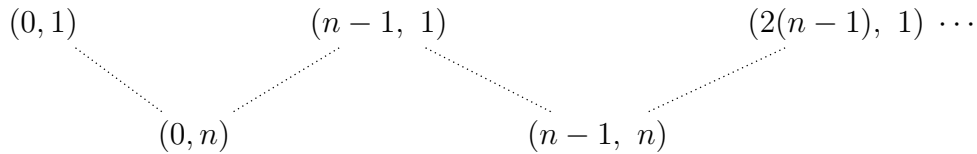
Portanto segue que, para  $i \neq 1$ , temos  $g(x_{i-1}) \leq g(x_i)$ . Como  $g(x_2) = g(x_1)$ , temos que

$$g(x_1) \leq g(x_i), \text{ para todo } i.$$

Com isso podemos concluir que  $g(x_1) = 0$ .

Após essa análise de  $g(x)$  e  $h(x)$ , podemos deduzir que

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} \left( \left( \frac{i-1}{2} \right) (n-1), 1 \right) & , \text{ se } i \text{ for ímpar e } i \neq 1 \\ (g(x_{i-1}), n) & , \text{ se } i \text{ for par} \end{cases}$$



Seja  $\Sigma$  o subquiver pleno de  $\mathbb{Z}\vec{A}_n = \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  dado pelos vértices  $\{(0,1), \dots, (0,n)\}$ .

Consideremos a álgebra de caminhos dada pelo quiver abaixo.

$$(0,1) \leftarrow (0,2) \leftarrow \dots \leftarrow (0,n)$$

Então os vértices  $(0,i)$  correspondem aos projetivos  $P_i$  de  $k\vec{A}_n$  e

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n); \text{Hom}(\oplus P_i, X[i]) = 0, \forall i \neq 0\}$$

é equivalente à  $\text{mod} k\vec{A}_n$ .

Dado  $M$  um módulo indecomponível de  $\mathcal{H}$ , sabemos que:

$$\begin{cases} \tau_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(M[n]) = (\tau_{\mathcal{H}}M)[n] & , \text{ para } M \text{ não projetivo.} \\ \tau_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(P_i[n]) = I_i[n-1] & , \text{ para } P_i \text{ projetivo.} \end{cases}$$

No que segue, denotaremos  $\tau(M[i])$  por  $\tau X[i]$ .

Deste modo temos que  $\varphi(K) = \{P_1, P_n, I_n, \tau I_n[1], \tau^2 I_n[2], \tau^3 I_n[3], \dots, \tau^{n-3} I_n[n-3]\}$ .

Chamemos  $T = \varphi(K)$ . Podemos reescrever  $T$  da seguinte forma

$$T = \{P_1, P_n, \tau P_n[1], \tau^2 P_n[2], \dots, \tau^{n-2} P_n[n-2]\}.$$

Vejamos que  $T$  é um conjunto tilting em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ , isto é,  $\text{Hom}(T, T[\ell]) = 0$ , para todo  $\ell \neq 0$ .

Se  $\ell \geq 2$  ou  $\ell \leq -1$ , vale a igualdade, pois  $\mathcal{H}$  é hereditária. Se  $\ell = 1$ , então

$$\text{Hom}(P_i, T[1]) = \text{Ext}^1(P_i, P_1) \oplus \text{Ext}^1(P_i, P_n) \oplus \text{Ext}^2(P_i, \tau P_n) \oplus \dots \oplus \text{Ext}^{n-1}(P_i, \tau^{n-2} P_n).$$

Como  $P_i$  é projetivo para  $i \in \{1, n\}$ , cada um dos somandos acima é nulo.

Fixando  $t \in \{1, \dots, n-2\}$ , vamos analisar  $\text{Hom}(\tau^t P_n[t], \tau^i P_n[i+1])$  para  $1 \leq i \leq n-2$ .

Temos que

$$\tau^t P_n[t] = \tau^t(P_n[t]) = (\tau^{t-1} I_n)[t-1]$$

e

$$\tau^i P_n[i+1] = \tau^i(P_n[i+1]) = (\tau^{i-1} I_n)[i].$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\tau^t P_n[t], \tau^i P_n[i+1]) &= \text{Hom}((\tau^{t-1} I_n)[t-1], (\tau^{i-1} I_n)[i]) \\ &= \text{Hom}(\tau^{t-1} I_n, (\tau^{i-1} I_n)[i-t+1]) \quad (*) \end{aligned}$$

- Se  $i-t+1 < 0$  ou  $i-t+1 \geq 2$ , então  $(*) = 0$ .
- Se  $i-t+1 = 0$ , temos  $i = t-1$ . Neste caso,

$$(*) = \text{Hom}(\tau^{t-1} I_n, \tau^{t-2} I_n) = 0$$

- Se  $i-t+1 = 1$ , então  $i = t$ . Neste caso,

$$(*) = \text{Hom}(\tau^{t-1} I_n, \tau^{t-1} I_n[1]) = \text{Ext}^1(\tau^{t-1} I_n, \tau^{t-1} I_n) \cong D\text{Hom}(\tau^{t-1} I_n, \tau^t I_n) = 0$$

Resta verificar que  $\text{Hom}(\tau^t P_n[t], P_n[1]) = 0$ , para  $1 \leq t \leq n-2$ . De fato,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\tau^t P_n[t], P_n[1]) &= \text{Hom}((\tau^{t-1} I_n)[t-1], P_n[1]) \\ &= \text{Hom}(\tau^{t-1} I_n, P_n[2-t]) \\ &= \text{Ext}^{2-t}(\tau^{t-1} I_n, P_n) \quad (**) \end{aligned}$$

- Se  $2-t < 0$ , então  $(**) = 0$
- Se  $2-t \geq 2$ , então  $(**) = 0$
- Se  $2-t = 1$ , então  $t = 1$ . Disto segue que

$$(**) = \text{Ext}^1(I_n, P_n) = D\text{Hom}(P_n, \tau I_n) = 0$$

- Se  $2 - t = 0$ , então  $t = 2$ . Disto segue que

$$(**) = \text{Hom}(\tau I_n, P_n) = 0$$

De maneira análoga é fácil ver que  $\text{Hom}(\tau^t P_n[t], P_1[1]) = 0$ , para  $1 \leq t \leq n - 2$ .

Disto segue que  $T = \varphi(K)$  é com conjunto tilting completo. ■

**Exemplo 2.4.3** Consideremos  $T \in \mathbb{Z}\vec{A}_5$  um conjunto tilting completo que possui um dado vértice interno  $P$ , como abaixo:

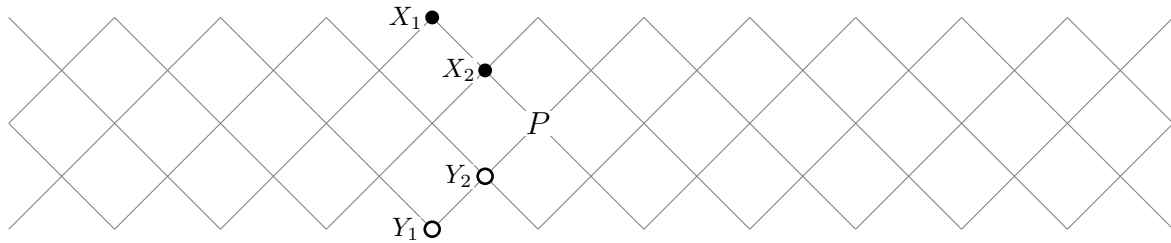


Figura 2.20

Os conjuntos tilting  $\{X_1, X_2, P\}$  e  $\{Y_1, Y_2, P\}$  dão origem a mergulhos fiéis e plenos  $j_X : \mathcal{D}^b(k\vec{A}_3) \rightarrow \mathcal{D}^b(k\vec{A}_5)$  e  $j_Y : \mathcal{D}^b(k\vec{A}_3) \rightarrow \mathcal{D}^b(k\vec{A}_5)$ . Podemos assumir que  $j_X(\mathbb{Z}\vec{A}_3)_0 \subset (\mathbb{Z}\vec{A}_5)_0$  e  $j_Y(\mathbb{Z}\vec{A}_3)_0 \subset (\mathbb{Z}\vec{A}_5)_0$ , em particular,  $j_X P_X = P$  e  $j_Y P_Y = P$  onde  $P_X = (0, 3) \in (\mathbb{Z}\vec{A}_3)_0$  e  $P_Y = (0, 3) \in (\mathbb{Z}\vec{A}_3)_0$ , como na figura abaixo.

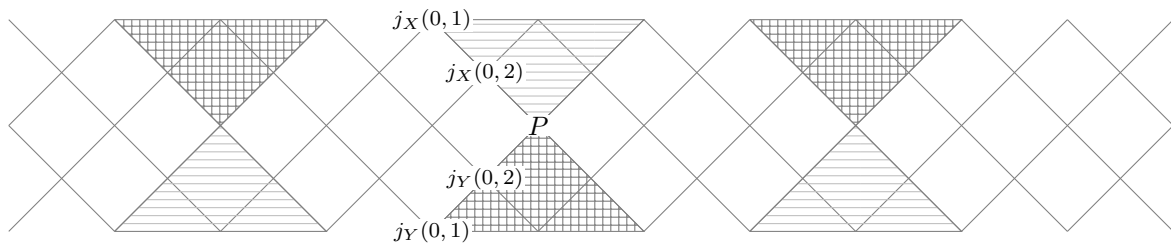


Figura 2.21

Com essas notações, os conjuntos tilting completos  $T$  de  $k(\mathbb{Z}\vec{A}_5)$  contendo  $P$  são exatamente os conjuntos  $j_X(L) \cup j_Y(N)$  onde  $L \subset (\mathbb{Z}\vec{A}_3)_0$  e  $N \subset (\mathbb{Z}\vec{A}_3)_0$  são conjuntos tilting completos contendo  $P_X$  e  $P_Y$ , respectivamente.

Em particular, se considerarmos o conjunto  $T = \{T_1, T_2, P, T_4, T_5\}$  abaixo,

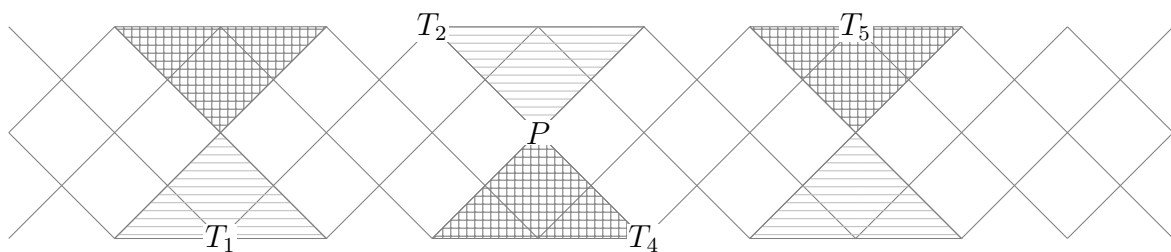


Figura 2.22

temos que

$$T_1 = j_X(-2, 3), T_2 = j_X(0, 1), P = j_X(0, 3) = j_Y(0, 3), T_4 = j_Y(2, 1), T_5 = j_Y(2, 3)$$

Portanto os conjuntos  $L = \{L_1, L_2, P_X\}$  e  $N = \{N_1, N_3, P_Y\}$  são respectivamente:

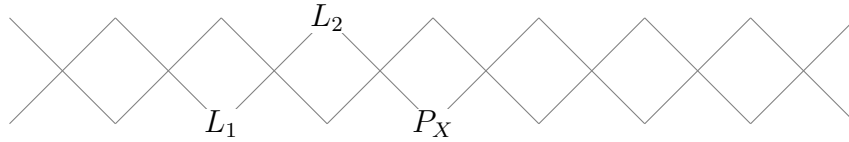


Figura 2.23:  $L_1 = (-2, 3)$ ,  $L_2 = (0, 1)$ ,  $P_X = (0, 3)$

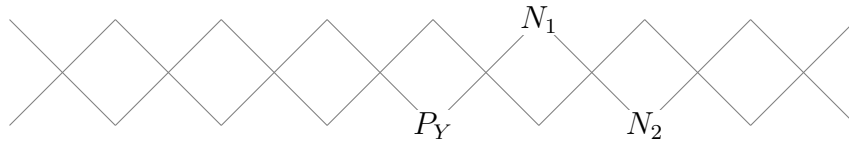


Figura 2.24:  $P_Y = (0, 3)$ ,  $N_1 = (2, 1)$ ,  $N_2 = (2, 3)$

Os  $\vec{A}_n$ -quivers de  $L$  e  $N$  são respectivamente:

$$L_1 \xrightarrow{\beta} L_2 \xrightarrow{\alpha} P_X$$

$$P_Y \xrightarrow{\beta} N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2$$

e o  $\vec{A}_n$ -quiver de  $T$  é dado por:

$$T_1 \xrightarrow{\beta} T_2 \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\alpha} T_4 \xrightarrow{\beta} T_5$$

isto é, como o mergulho  $j_Y$  inverte a numeração das coordenadas em relação aos eixos  $(\alpha, \beta)$  dos elementos de  $N$ , então quando juntamos os  $\vec{A}_n$ -quivers temos uma inversão com respeito às classes das flechas.

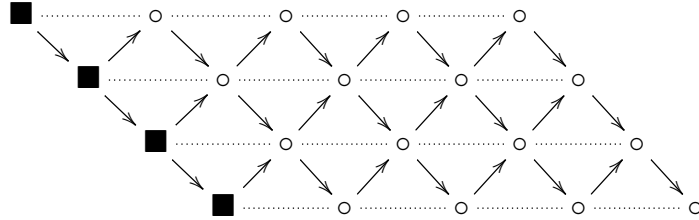
Uma discussão sobre a prova do resultado a seguir pode ser encontrada em 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4. A demonstração desse teorema, dada por Keller-Vossieck, pode ser encontrada em [13], tal demonstração utiliza o resultado do lema 2.4.2 e os mergulhos definidos no exemplo 2.4.3.

**Teorema 2.4.1** [Keller-Vossieck [13]] A aplicação  $\varphi : K_0 \mapsto M_K$  induz uma bijeção da classe de isomorfismos de  $\vec{A}_n$ -quivers para os conjuntos tilting completos de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n) = k(\mathbb{Z}\vec{A}_n)$  com  $\min_{(g,h) \in M} g = 0$ . Além disso, o espectro de  $M_K$  é descrito pelo quiver  $K$  limitado por todas as possíveis relações  $\alpha\beta = 0$  e  $\beta\alpha = 0$ .

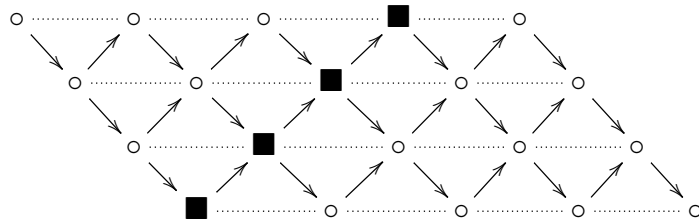
## 2.5 Os conjuntos tilting completos de $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$

Aqui vamos utilizar a aplicação da proposição 2.4.1 para encontrarmos todos os conjuntos tilting completos de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$ . Para isso, basta listarmos todos os possíveis  $\vec{A}_4$ -quivers e em seguida calcularmos suas imagens através da aplicação  $\varphi$ .

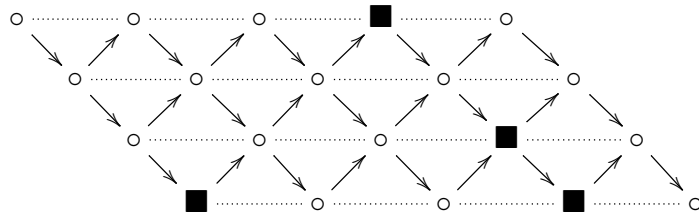
1.  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\alpha} 4$



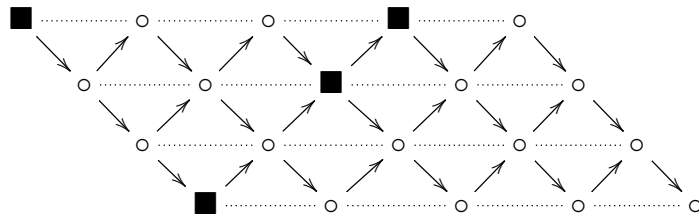
2.  $1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\beta} 4$



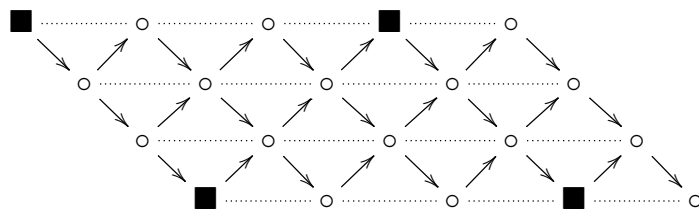
3.  $1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\alpha} 4$



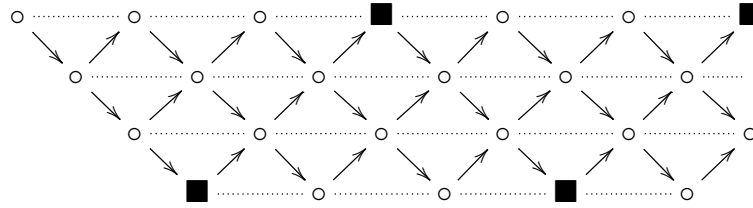
4.  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\beta} 4$



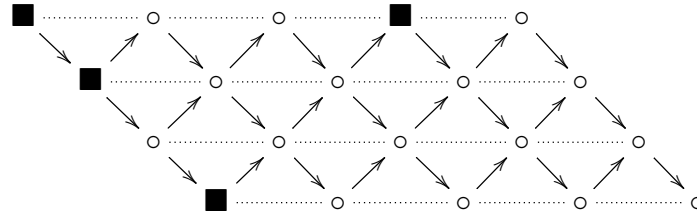
5.  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\alpha} 4$



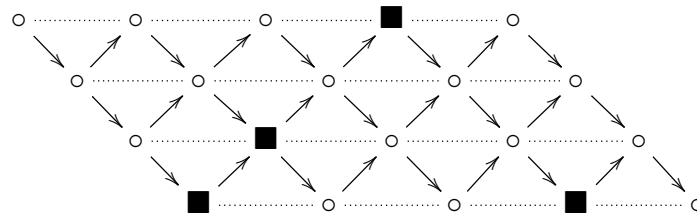
6.  $1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta} 4$



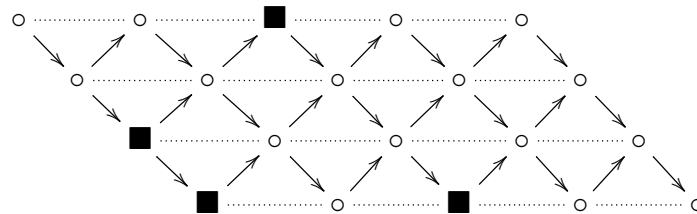
7.  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta} 4$



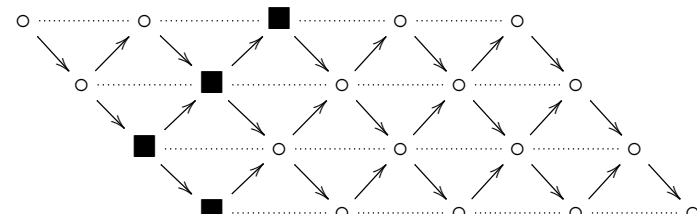
8.  $1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\alpha} 4$



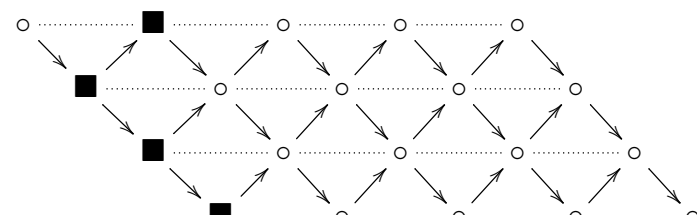
9.  $1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\alpha} 4$



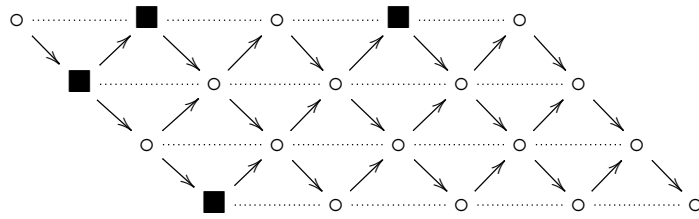
10.  $1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\beta} 4$



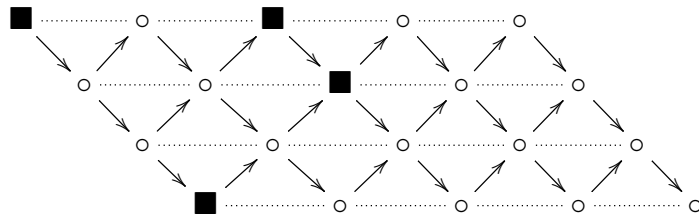
11.  $1 \xleftarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\alpha} 4$



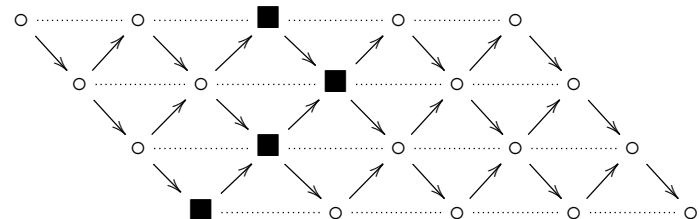
12.  $1 \xleftarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta} 4$



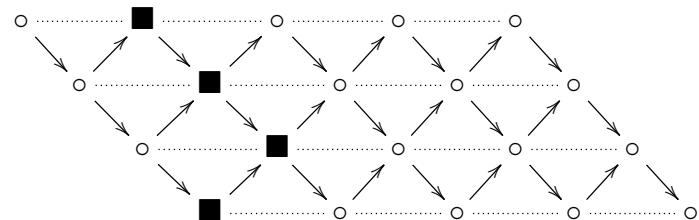
13.  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\alpha} 4$



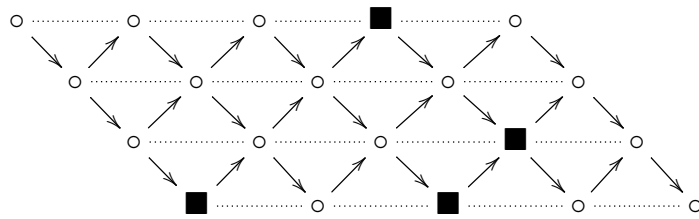
14.  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\beta} 4$



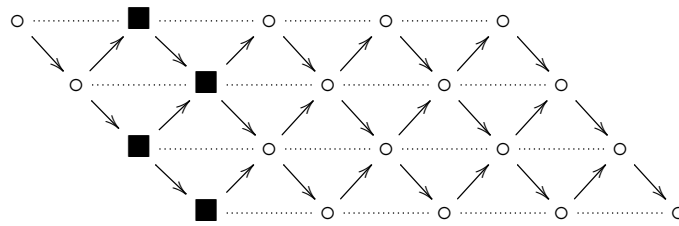
15.  $1 \xrightarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3 \xleftarrow{\alpha} 4$



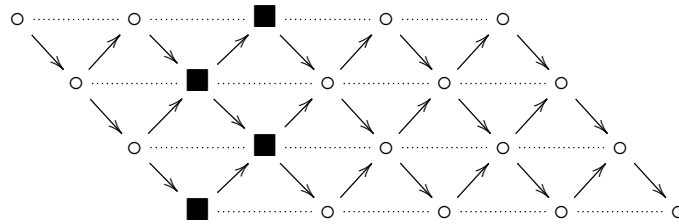
16.  $1 \xrightarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3 \xleftarrow{\beta} 4$



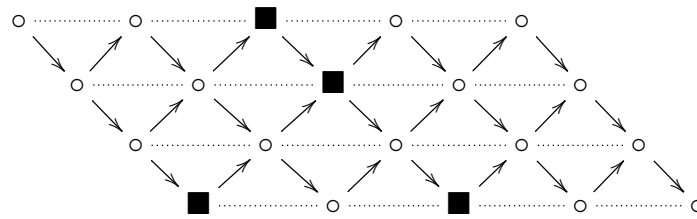
17.  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\alpha} 4$



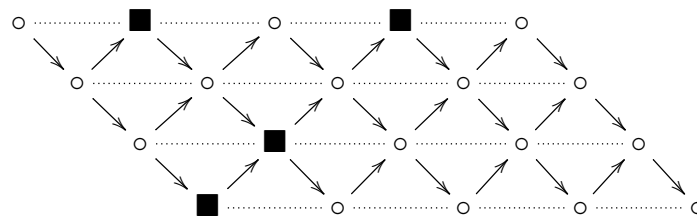
18.  $1 \xrightarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta} 4$



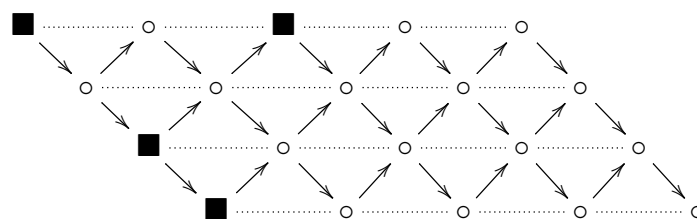
19. 
$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \downarrow \beta & & \\ 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\alpha} & 3 \end{array}$$



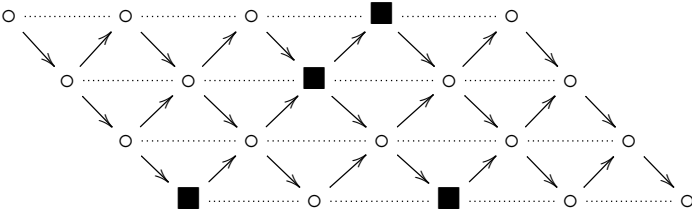
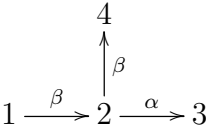
20. 
$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \downarrow \beta & & \\ 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\beta} & 3 \end{array}$$



21. 
$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \uparrow \beta & & \\ 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\alpha} & 3 \end{array}$$



22.



## Capítulo 3

# Aisles e objetos silting em $\mathcal{D}^b(k\Delta)$

A noção de categoria triangulada tem provado ser muito útil na teoria de representações de álgebras. Em particular, existe uma forte relação entre o estudo de t-estruturas e teoria tilting. Keller e Vossieck consideraram certas subcategorias chamadas aisles, e mostraram que, se  $\mathcal{U}$  é um aisle, então  $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\perp[1])$  é uma t-estrutura, e reciprocamente toda t-estrutura é dessa forma.

Neste capítulo iremos fazer um estudo a respeito dessas subcategorias. Mais especificamente estamos interessados em estudar os aisles da categoria derivada limitada  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , onde  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. O objetivo é fazer um estudo da classificação, feita por Keller e Vossieck em [13], a respeito de certos tipos de aisles  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , ditos aisles separáveis. Keller e Vossieck introduziram dois tipos de aisles em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$ , os aisles fiéis e os aisles separáveis. Um aisle é dito fiel se a inclusão  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$  se estende a uma  $S$ -equivalência  $\mathcal{D}^b(\mathcal{U}^0) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[-n]$ , e um aisle é dito separável se  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[n] = 0$ . Em [13], Keller e Vossieck classificam os aisles fiéis afirmando que existe uma bijeção entre eles e os conjuntos tilting completos (apresentados no capítulo 2).

Estamos interessados em dar uma classificação parecida para os aisles separáveis e, para isso, introduziremos o conceito de conjunto silting, o qual é uma generalização de conjunto tilting. Ao final deste capítulo iremos enunciar um resultado que classifica os aisles separáveis através de uma bijeção entre eles e os conjuntos silting de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

Para atingirmos nosso objetivo, fizemos em um primeiro momento um estudo a respeito das propriedades que os aisles possuem em geral, contemplado na primeira seção deste capítulo. Nela foram definidos aisles em categorias trianguladas, categoria perpendicular e categoria estendida. Mostramos que é possível construirmos aisles ao relacionarmos essas duas últimas categorias de uma certa forma específica.

Em seguida, iniciamos um estudo específico a respeito dos aisles separáveis da categoria  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , onde  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. Aqui definimos aisles separáveis e apresentamos alguns exemplos, assim como alguns resultados específicos sobre esses aisles. Um desses resultados, que se mostrou crucial para alcançarmos nosso objetivo, foi o fato de todo aisle separável possuir ao menos uma fonte.

Além de estudarmos resultados a respeito dos aisles separáveis, iremos definir uma aplicação que gera um aisle a partir de um subconjunto finito de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ . Essa aplicação será responsável por relacionar os conjuntos silting com os aisles separáveis. Mostraremos que dado um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , é possível extrairmos dele um conjunto silting. Esse resultado é essencial para um melhor entendimento a respeito da bijeção entre os conjuntos silting e os aisles separáveis de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

### 3.1 Aisles em categorias trianguladas

O objetivo desta seção é fornecer algumas definições e resultados básicos a respeito dos aisles. Iniciaremos definindo um aisle  $\mathcal{U}$  em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$  qualquer, em seguida, enunciaremos duas proposições as quais caracterizam quando uma subcategoria  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$  é um aisle.

Também iremos introduzir os conceitos de categoria perpendicular e categoria estendida. Faremos isso com o objetivo de mostrar que dados dois aisles  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$ , se  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}^\perp$ , então a categoria estendida  $\mathcal{U} * \mathcal{V}$  é um aisle. Finalizaremos a seção com um exemplo desse caso.

**Definição 3.1.1** *Seja  $\mathcal{T}$  uma categoria triangulada com funtor suspensão  $S$ . Uma subcategoria plena e aditiva  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{T}$  é dita um **aisle** em  $\mathcal{T}$  se:*

- (a)  $S\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ .
- (b)  $\mathcal{U}$  é estável para extensões, isto é, para cada triângulo  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow SX$  de  $\mathcal{T}$ , temos que  $Y \in \mathcal{U}$  sempre que  $X, Z \in \mathcal{U}$ .
- (c) A inclusão  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$  admite um adjunto à direita  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $X \mapsto X_{\mathcal{U}}$ .

Ao longo do texto, por vezes, iremos denotar  $S^n(X) = X[n]$  e diremos que  $X[n]$  é o  $n$ -ésimo shift do objeto  $X$ .

**Proposição 3.1.1** *Uma subcategoria plena  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{T}$  é um aisle se, e somente se, satisfaz:*

- (a)  $\mathcal{U}[1] \subset \mathcal{U}$ .
- (b)  $\mathcal{U}$  é estritamente plena, isto é,  $\mathcal{U}$  é plena e fechada para isomorfismos.
- (c) Para cada objeto  $X \in \mathcal{T}$ , existe um triângulo  $X_{\mathcal{U}} \rightarrow X \rightarrow X^{\mathcal{U}^\perp} \rightarrow X_{\mathcal{U}}[1]$ , com  $X_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$  e  $X^{\mathcal{U}^\perp} \in \mathcal{U}^\perp$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [16] na página 113. ■

A seguir vamos definir categoria Krull-Schmidt, e enunciar um resultado que nos diz quando uma subcategoria plena de uma categoria triangulada Krull-Schmidt é um aisle.

**Definição 3.1.2** *Chamamos uma categoria aditiva  $\mathcal{T}$  de **categoria Krull-Schmidt** se cada objeto de  $\mathcal{T}$  é uma soma direta finita de objetos com anel de endomorfismos local.*

**Proposição 3.1.2** *Seja  $\mathcal{T}$  uma categoria triangulada Krull-Schmidt e  $\mathcal{U}$  uma subcategoria plena aditiva, a qual é fechada tomando somandos diretos. A subcategoria  $\mathcal{U}$  é um aisle em  $\mathcal{T}$  se, e somente se, satisfaz:*

- (a)  $\mathcal{U}[1] \subset \mathcal{U}$ .
- (b)  $\mathcal{U}$  é estável para extensões, isto é, para cada triângulo  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$  de  $\mathcal{T}$ , temos que  $Y \in \mathcal{U}$  sempre que  $X, Z \in \mathcal{U}$ .
- (c) Para cada objeto  $X$  de  $\mathcal{T}$  o funtor  $\text{Hom}(\_, X)|_{\mathcal{U}}$  é finitamente gerado, isto é, existe  $U \in \mathcal{U}$  e um epimorfismo  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\_, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\_, X)|_{\mathcal{U}}$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [13] na página 3. ■

Vamos agora definir categoria estendida e categoria perpendicular. Mostraremos como é possível utilizar a categoria perpendicular para produzirmos um aisle na categoria estendida.

**Definição 3.1.3** *Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  aisles em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$ . Definimos a categoria estendida de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  por:*

$$\mathcal{U} * \mathcal{V} = \{X \in \mathcal{T}; \exists \text{ um triângulo } U \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow U[1], \text{ com } U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

**Definição 3.1.4** *Para cada subcategoria plena  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{T}$ , denotamos por  $\mathcal{V}^\perp$  e  ${}^\perp\mathcal{V}$  as subcategorias plenas e aditivas definidas por:*

$$\mathcal{V}^\perp = \{Y \in \mathcal{T}; \text{Hom}(X, Y) = 0, \forall X \in \mathcal{V}\}$$

$${}^\perp\mathcal{V} = \{Y \in \mathcal{T}; \text{Hom}(Y, X) = 0, \forall X \in \mathcal{V}\}$$

As categorias  $\mathcal{V}^\perp$  e  ${}^\perp\mathcal{V}$  são ditas categorias perpendiculares.

Note que  $(\mathcal{U} * \mathcal{V})^\perp = \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$ . De fato, como existem os triângulos  $U \rightarrow U \rightarrow 0 \rightarrow U[1]$  e  $0 \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow 0[1]$ , então  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{U} * \mathcal{V}$ . Portanto  $(\mathcal{U} * \mathcal{V})^\perp \subset \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$ . Seja  $Y \in \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$ , então  $\text{Hom}(U, Y) = 0 = \text{Hom}(V, Y) \forall U \in \mathcal{U}$  e  $\forall V \in \mathcal{V}$ . Se  $X \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$ , então existe um triângulo

$$U \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow U[1], \text{ com } U \in \mathcal{U} \text{ e } V \in \mathcal{V}.$$

Aplicando  $\text{Hom}(\_, Y)$  ao triângulo acima, temos que  $\text{Hom}(X, Y) = 0$ . Disto segue que  $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp \subset (\mathcal{U} * \mathcal{V})^\perp$ .

Este fato nos será útil na demonstração da proposição abaixo.

**Proposição 3.1.3** *Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  aisles em uma categoria triangulada  $\mathcal{T}$  tais que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}^\perp$ . Então*

$$\mathcal{W} := \mathcal{U} * \mathcal{V} = \{X \in \mathcal{T}; \exists \text{ um triângulo } U \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow U[1], \text{ com } U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

também é um aisle em  $\mathcal{T}$ .

**Demonstração:** Mostremos que  $\mathcal{W}$  satisfaz as condições da proposição 3.1.1. Primeiro mostremos que  $\mathcal{W}[1] \subset \mathcal{W}$ . De fato, seja  $X \in \mathcal{W}$ , então existe um triângulo  $U \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow U[1]$  com  $U \in \mathcal{U}$  e  $V \in \mathcal{V}$ . Portanto existe o triângulo  $U[1] \rightarrow X[1] \rightarrow V[1] \rightarrow U[2]$ . Como  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  são aisles,  $U[1] \in \mathcal{U}$  e  $V[1] \in \mathcal{V}$ , disto segue que  $X[1] \in \mathcal{W}$ . Agora mostremos a terceira condição. Como  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  são aisles, dado  $X \in \mathcal{T}$  existem os seguintes triângulos:

$$X_{\mathcal{U}} \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} X^{\mathcal{U}^\perp} \xrightarrow{w} X_{\mathcal{U}}[1] \quad \text{e} \quad (X^{\mathcal{U}^\perp})_{\mathcal{V}} \xrightarrow{u'} X^{\mathcal{U}^\perp} \xrightarrow{v'} (X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} \xrightarrow{w'} (X^{\mathcal{U}^\perp})_{\mathcal{V}}[1],$$

em que  $X_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ ,  $X^{\mathcal{U}^\perp} \in \mathcal{U}^\perp$ ,  $(X^{\mathcal{U}^\perp})_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$  e  $(X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} \in \mathcal{V}^\perp$ . Temos o seguinte quadrado comutativo que pode ser completado de maneira a formar um morfismo de triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{v} & X^{\mathcal{U}^\perp} & \xrightarrow{w} & X_{\mathcal{U}}[1] & \xrightarrow{-u[1]} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow v' & & \downarrow \theta & & \parallel \\ X & \xrightarrow{v'v} & (X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1]. \end{array}$$

Portanto existe o triângulo

$$Z[-1] \longrightarrow X \xrightarrow{v'v} (X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} \longrightarrow Z.$$

Resta mostrar que  $Z[-1] \in \mathcal{W}$  e que  $(X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} \in \mathcal{W}^\perp$ . De fato, pelo axioma do octaedro temos:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{v} & X^{\mathcal{U}^\perp} & \xrightarrow{w} & X_{\mathcal{U}}[1] & \xrightarrow{-u[1]} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow v' & & \downarrow \theta & & \parallel \\ X & \xrightarrow{v'v} & (X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & C & \xlongequal{\quad} & C & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & X^{\mathcal{U}^\perp}[1] & \longrightarrow & X_{\mathcal{U}}[2] & & \end{array}$$

Sabemos que  $C = (X^{\mathcal{U}^\perp})_{\mathcal{V}}[1]$  e, portanto, existe o triângulo

$$\underbrace{X_{\mathcal{U}}}_{\in \mathcal{U}} \rightarrow Z[-1] \rightarrow \underbrace{(X^{\mathcal{U}^\perp})_{\mathcal{V}}}_{\in \mathcal{V}} \rightarrow X_{\mathcal{U}}[1]$$

disto segue que  $Z[-1] \in \mathcal{W}$ . Para mostrar que  $(X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} \in \mathcal{W}^\perp$ , basta observar que  $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$ . Como  $(X^{\mathcal{U}^\perp})^{\mathcal{V}^\perp} \in \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$ , segue o resultado desejado. Vejamos que  $\mathcal{W}$  é estritamente plena. Sejam  $X \in \mathcal{W}$  e  $Y \in \mathcal{T}$  tais que existe um isomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ , então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{v} & X_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & X_{\mathcal{U}}[1] \\ \parallel & & \downarrow f & & \parallel & & \parallel \\ X_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{fu} & Y & \xrightarrow{vf^{-1}} & X_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & X_{\mathcal{U}}[1] \end{array}$$

Disto segue que  $Y \in \mathcal{W}$ . ■

**Proposição 3.1.4** *Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  aisles em  $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ , onde  $\mathcal{A}$  é uma categoria abeliana. Se  $\mathcal{U} \subset {}^\perp\mathcal{V}$ , então  $\mathcal{U} * \mathcal{V}$  é um aisle.*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [21]. ■

**Exemplo 3.1.1** *Considere  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  aisles em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_5)$  tais que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}^\perp$ , como é ilustrado na imagem abaixo:*

$$\mathcal{U} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} U[n], \quad \mathcal{V} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} V[n]$$

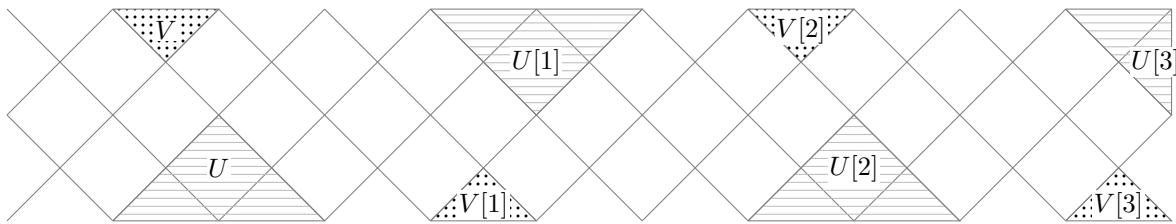


Figura 3.1

Então temos que  $\mathcal{W} = \mathcal{U} * \mathcal{V}$  é o aisle representado na figura abaixo:

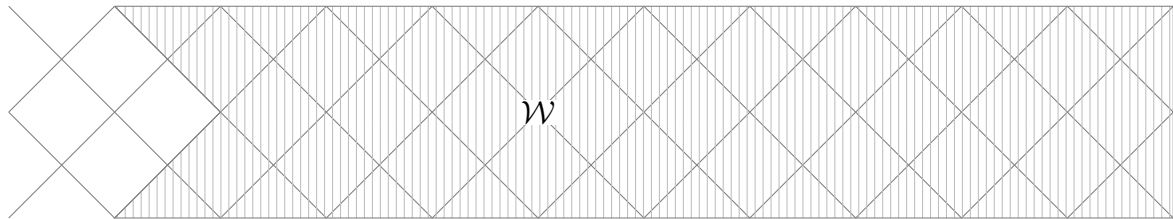


Figura 3.2

## 3.2 A imagem essencial de um funtor

O objetivo desta seção é apresentarmos um  $S$ -funtor fiel e pleno  $F : \mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$ , onde  $A$  é uma álgebra de dimensão finita e  $B = \text{End}(\bigoplus_{i=1}^s T_i)$ , onde  $\{T_1, \dots, T_s\}$  é um conjunto tilting  $\mathcal{D}^b(A)$ , tal que a imagem essencial desse  $S$ -funtor  $F$  é um aisle em  $\mathcal{D}^b(A)$ .

Para isso iniciaremos definindo categoria suspensa, e logo em seguida definiremos o conceito de  $S$ -funtor entre categorias suspensas.

Finalizaremos a seção apresentando a definição de imagem essencial, e enunciaremos que a imagem do nosso  $S$ -funtor  $F$  é um aisle.

**Definição 3.2.1** *Seja  $\mathcal{T}$  uma categoria triangulada. Uma subcategoria plena  $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ , fechada para somandos diretos, é dita **suspensa** se é fechada para shifts positivos e extensões, isto é,*

(a) Se  $X \in \mathcal{C}$ , então  $X[1] \in \mathcal{C}$ .

(b) Se  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$  é um triângulo em  $\mathcal{T}$ , com  $X, Z \in \mathcal{C}$ , então  $Y \in \mathcal{C}$ .

**Definição 3.2.2** *Seja  $\mathcal{T}$  uma categoria triangulada. Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  duas subcategorias suspensas de  $\mathcal{T}$ . Um  $S$ -funtor de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{C}'$  é formado por um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  e uma transformação natural  $\phi : FS \rightarrow SF$  tal que, para todo triângulo de  $\mathcal{C}$ ,*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX$$

temos que

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{(\phi_X)(Fw)} SFX$$

é um triângulo em  $\mathcal{C}'$ . Esta condição aplicada ao caso em que  $Y = 0$ , implica que  $\phi$  é invertível. De fato, note que, se  $Y = 0$ , então temos  $FY = 0$  e portanto  $w$  e  $(\phi_X \circ Fw)$  são isomorfismos. Neste caso,  $Fw$  é isomorfismo, pelo fato de  $w$  ser, e conseqüentemente  $\phi_X$  é um isomorfismo. Um  $S$ -funtor  $(F, \phi)$  é dito uma  $S$ -equivalência se  $F$  é uma equivalência de categorias.

Agora iremos apresentar alguns resultados relevantes para iniciarmos a construção do  $S$ -funtor  $F$  citado no início da seção. A proposição abaixo é o primeiro resultado que vem nos auxiliar nesse sentido.

**Proposição 3.2.1** *Sejam  $A$  e  $B$  duas  $k$ -álgebras de dimensão finita e  $F : \mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$  um  $S$ -funtor fiel e pleno. Então o conjunto  $\{FP; P \text{ é um } B\text{-módulo projetivo indecomponível}\}$  é um conjunto tilting.*

**Demonstração:** Dados  $P_i$  e  $P_j$   $B$ -módulos projetivos indecomponíveis, temos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(FP_i, (FP_j)[\ell]) &\cong \text{Hom}(FP_i, F(P_j[\ell])), \text{ pois } F \text{ é um } S\text{-funtor.} \\ &\cong \text{Hom}(P_i, P_j[\ell]), \text{ pois } F \text{ é fiel e pleno.} \\ &\stackrel{(*)}{=} \text{Ext}_B^\ell(P_i, P_j) \\ &= 0, \text{ para } \ell \neq 0. \end{aligned}$$

A igualdade  $(*)$  pode ser encontrada em [8] na página 166. ■

Agora vamos definir o conceito de imagem essencial e logo em seguida iniciaremos a construção do  $S$ -funtor  $F$ .

**Definição 3.2.3** *A imagem essencial de um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  é a subcategoria plena de  $\mathcal{C}'$  cujos objetos são dados por todos os objetos de  $\mathcal{C}'$  que são isomorfos a algum objeto de  $\text{Im}(F)$ .*

Seja  $\{T_1, \dots, T_s\}$  um conjunto tilting em  $\mathcal{D}^b(A)$  e  $B = \text{End}(T)$ , em que  $T = \bigoplus_{i=1}^s T_i$ . Considere o funtor

$$\begin{aligned} i : \mathcal{P}_B &\longrightarrow \mathcal{D}^b(A) \\ \text{Hom}(T, T_i) &\mapsto T_i^\bullet \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{P}_B$  é a subcategoria plena de  $\text{mod}(B)$  consistindo dos  $B$ -módulos projetivos e  $T_i^\bullet$  é o complexo concentrado no grau zero. O funtor  $i$  se estende a um  $S$ -funtor fiel e pleno (ver [14], 3.2)

$$E : \mathcal{K}^b(\mathcal{P}_B) \longrightarrow \mathcal{D}^b(A)$$

em que  $\mathcal{K}^b(\mathcal{P}_B)$  é a categoria de homotopia de  $C^b(\mathcal{P}_B)$  dos complexos limitados sobre  $\mathcal{P}_B$ .

Disto temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.2** *Considere  $A$  uma  $k$ -álgebra de dimensão finita, com  $\text{gldim } A < \infty$ . Seja  $T = \{T_1, \dots, T_s\}$  um conjunto tilting tal que  $\text{Hom}(T_i, T_j) = 0$  para todo  $i > j$  e  $\text{End}(T_i) \cong k$ . Se  $B = \text{End}(\bigoplus_{i=1}^s T_i)$ ,  $\forall i$ , então a imagem essencial do  $S$ -funtor fiel e pleno  $F$ , obtido da composição*

$$\mathcal{D}^b(B) \longrightarrow \mathcal{K}^b(\mathcal{P}_B) \longrightarrow \mathcal{D}^b(A)$$

é um aisle em  $\mathcal{D}^b(A)$ , onde  $\mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{K}^b(\mathcal{P}_B)$  é a equivalência natural. Em particular,  $F$  possui um adjunto à direita.

**Demonstração:** Por hipótese temos  $\text{gldim } A < \infty$ , então é possível mostrar que  $\text{gldim } B < \infty$ , e por isso temos a equivalência natural  $\mathcal{K}^b(\mathcal{P}_B) \rightarrow \mathcal{D}^b(B)$ . O restante da prova pode ser encontrado em [14]. ■

### 3.3 Aisles separáveis e a aplicação $T \mapsto \mathcal{F}(T)$

O objetivo desta seção é definirmos aisles separáveis e fornecermos alguns exemplos. Também iremos definir uma aplicação que gera um aisle a partir de um dado subconjunto de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

**Definição 3.3.1** *Sejam  $\mathcal{T}$  uma categoria triangulada e  $\mathcal{U}$  um aisle de  $\mathcal{T}$ . Dizemos que  $\mathcal{U}$  é um aisle separável se  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[n] = 0$ .*

**Exemplo 3.3.1** *Consideremos  $\mathcal{W} = \bigvee_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}[i]$  um aisle em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_5)$ , como na imagem abaixo:*

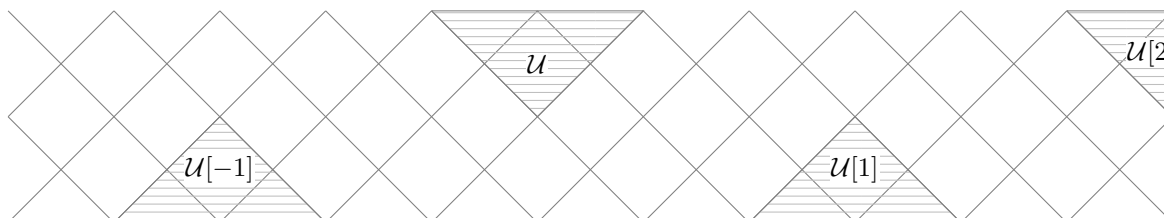


Figura 3.3

Neste caso temos  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}[n] = \mathcal{W}$ , portanto  $\mathcal{W}$  não é um aisle separável.

**Definição 3.3.2** *Seja  $k\Delta$  uma álgebra de caminhos de um quiver tipo Dynkin  $\Delta$ . Dado um subconjunto  $M \subset \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , definimos  $\mathcal{F}(M)$  como a menor subcategoria estritamente plena de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  que contém  $M$ , é estável por  $S$  e fechada para extensões e somandos diretos.*

A subcategoria  $\mathcal{F}(M)$ , definida acima, é um aisle (ver [13], pág. 10).

**Exemplo 3.3.2** *Consideremos  $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$  como sendo o conjunto tilting completo de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\vec{A}_4)$ , dado abaixo:*

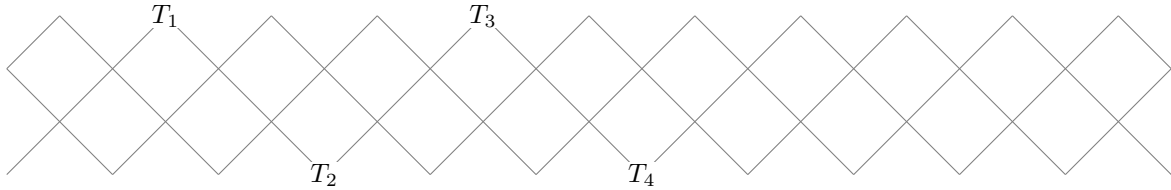


Figura 3.4

Analisemos quem é  $\mathcal{F}(T)$ . Como  $\mathcal{F}(T)$  deve ser estável por  $S$ , temos que  $T[\ell] \subset \mathcal{F}(T)$  para todo  $\ell \geq 0$ .

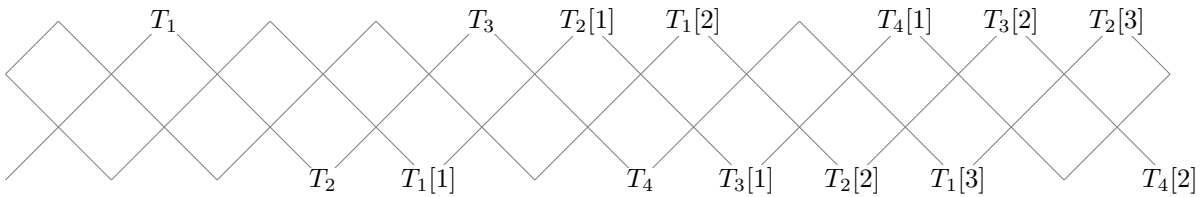


Figura 3.5

Agora, precisamos que  $\mathcal{F}(T)$  seja fechado para extensões:

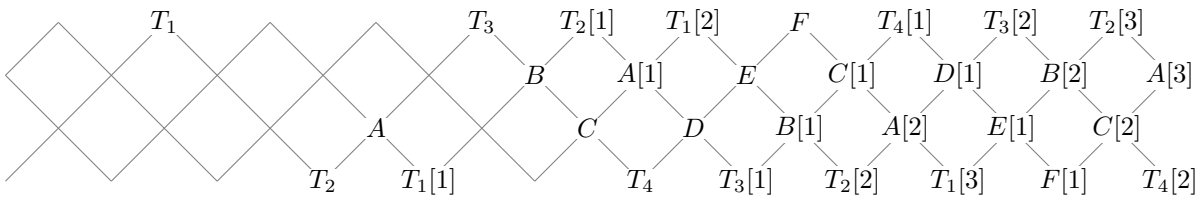


Figura 3.6

Aqui temos os seguintes triângulos:

$$\begin{array}{lll} T_2 \rightarrow A \rightarrow T_1[1] \rightarrow T_2[1] & B \rightarrow C \rightarrow T_1[2] \rightarrow B[1] & D \rightarrow E \rightarrow T_2[2] \rightarrow D[1] \\ T_3 \rightarrow B \rightarrow T_2[1] \rightarrow T_3[1] & T_4 \rightarrow D \rightarrow T_3[1] \rightarrow T_4[1] & E \rightarrow F \rightarrow T_1[3] \rightarrow E[1] \end{array}$$

Disto segue que  $\mathcal{F}(T)$  é dado por

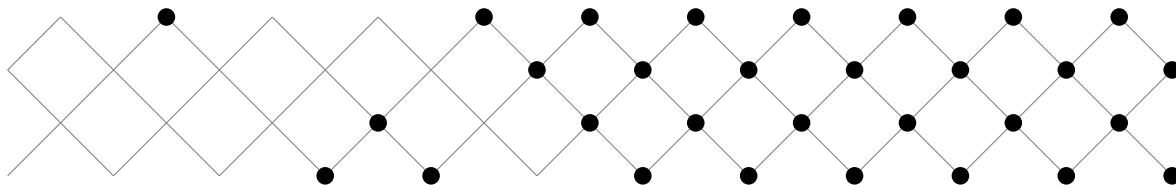


Figura 3.7

Note que, no exemplo acima, temos que  $\mathcal{F}(T)$  é um aisle separável.

### 3.4 Objetos silting e os aisles separáveis

Keller e Vossieck, em [13], introduzem a seguinte definição de aisle fiel. Um aisle  $\mathcal{U}$  é dito fiel se a inclusão  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$  se estende a uma  $S$ -equivalência  $\mathcal{D}^b(\mathcal{U}^0) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[-n]$ . Neste mesmo artigo, afirmam que a aplicação  $T \mapsto \mathcal{F}(T)$ , definida em 3.3.2, é uma bijeção entre os conjuntos tilting completos de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  e os aisles fiéis, onde  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin.

Nesta seção vamos generalizar o conceito de um conjunto tilting, de modo a obter uma descrição análoga para todos os aisles separáveis de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , essa generalização será justamente o conceito de conjunto silting.

#### 3.4.1 Alguns resultados sobre os aisles separáveis

**Lema 3.4.1** *Seja  $\Delta$  um quiver tipo Dynkin. Se  $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}^b(k\Delta)$  é um aisle separável, então  $\mathcal{U}$  possui ao menos uma fonte.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $\mathcal{U}$  não possui fonte, logo para todo objeto  $X_0 \in \mathcal{U}$  existe um caminho infinito

$$\cdots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \quad (*)$$

em  $\mathcal{U}$ , isto é,  $X_i \in \mathcal{U}$  e  $X_i \rightarrow X_{i-1}$  são morfismos não nulos em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ . Como

$$\mathcal{D}^b(k\Delta) = \bigvee_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}[i], \quad \text{onde } \mathcal{H} = \text{mod}(k\Delta),$$

existe algum  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $X_j = M[-n_1]$ , para algum  $M \in \mathcal{H}[0]$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$ . Suponhamos que  $j$  é o menor inteiro com essa propriedade, e denotemos por  $j_1$ , isto é,  $X_{j_1} = M[-n_1]$  com  $M \in \mathcal{H}[0]$ . Uma vez que  $\mathcal{H}[0]$  tem um número finito de vértices, segue que existe  $j_2 > j_1$  tal que  $X_{j_2} = M'[-n_2]$  com  $n_2 > n_1$  e  $M' \in \mathcal{H}[0]$ .

Como o caminho  $(*)$  é infinito, e todos os elementos são distintos - já que  $\mathcal{H}$  não possui ciclo -, temos que no caminho  $(*)$  existem infinitos  $X_{j_i}$  tais que  $X_{j_i} = M_i[-n_i]$  com  $n_i > n_{i-1}$ , onde  $n_i \in \mathbb{N}$  e  $M_i \in \mathcal{H}[0]$ . Temos que  $\mathcal{U}$  é fechado para shift positivo, portanto como  $X_{j_i} \in \mathcal{U}$ , segue que

$$\{M_i[-n_i], M_i[-(n_i - 1)], M_i[-(n_i - 2)], \dots, M_i[-1], M_i, \dots\} \in \mathcal{U}.$$

Como  $\mathcal{H}$  é finito e  $M_i \in \mathcal{H}$ , para todo  $i$ , logo existe  $Z \in \mathcal{H}[0]$  tal que para infinitos índices  $\ell$ 's, temos  $M_\ell = Z$ , isto é,  $X_{j_\ell} = Z[-n_\ell]$ . Como  $Z[-n_\ell] \in \mathcal{U}$  para infinitos  $n_\ell$ 's com  $n_{\ell_{k+1}} > n_{\ell_k}$ , então  $Z[-n] \in \mathcal{U}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Disto segue que  $Z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}[n]$ , o que contradiz a hipótese de  $\mathcal{U}$  ser separável. ■

**Definição 3.4.1** *Seja  $\mathcal{W}$  um aisle em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. Se  $Q \in \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , definimos  $\mathcal{B}_Q$  como sendo a subcategoria plena de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  cujos objetos são somas diretas de objetos  $Q[n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Além disso, definimos:*

$$\mathcal{W}_Q = \mathcal{W} \cap \mathcal{B}_Q \quad e \quad \mathcal{W}_{\perp Q} = \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{B}_Q)$$

**Proposição 3.4.1** [Keller-Vossieck, [13]] *Seja  $\mathcal{W}$  um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. Dada uma fonte  $Q$  em  $\mathcal{W}$ , podemos escolher  $\Delta$  com um poço  $q$  tal que  $Q = e_q k\Delta$ . Além disso, existe um  $S$ -funtor fiel e pleno  $\mathcal{D}^b(k\Delta') \rightarrow \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta'$  é obtido de  $\Delta$  omitindo o vértice  $q$  e todas as flechas chegando nele. A imagem essencial deste  $S$ -funtor é igual a  ${}^\perp \mathcal{B}_Q$ .*

**Corolário 3.4.1** *Seja  $\mathcal{W}$  um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. Dada uma fonte  $Q$ , temos que  ${}^\perp \mathcal{B}_Q$  é um aisle em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .*

**Demonstração:** É resultado imediato das proposições 3.2.2 e 3.4.1. ■

**Lema 3.4.2** *Seja  $\mathcal{W}$  um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo Dynkin. Então existe uma fonte  $Q \in \mathcal{W}$  tal que*

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q.$$

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{W}$  um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  (ie,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}[n] = 0$ ), e seja  $Q$  uma fonte em  $\text{ind } \mathcal{W}$ . Podemos supor que  $\Delta$  possui um único poço  $q$  e que  $Q = (0, q)$ . Seja  $\mathcal{B}_Q$  a subcategoria plena de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  cujos objetos são somas diretas de objetos de  $Q[n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . O conjunto tilting  $\{(0, r); r \in \Delta_0, r \neq q\} \subset k(\mathbb{Z}\Delta)$  nos fornece um  $S$ -funtor fiel e pleno  $\mathcal{D}^b(k\Delta') \rightarrow \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta'$  é obtido de  $\Delta$  omitindo o vértice  $q$  e todas as flechas chegando nele. Pela proposição 3.4.1, a imagem essencial desse funtor é igual a  ${}^\perp(\mathcal{B}_Q)$ .

Mostremos que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ . Por definição, temos que  $\mathcal{W}_{\perp Q} \subset \mathcal{W}$  e  $\mathcal{W}_Q \subset \mathcal{W}$ . Sendo  $\mathcal{W}$  fechado para extensões, segue que  $\mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q \subset \mathcal{W}$ . Agora mostremos que  $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ . Seja  $X$  um indecomponível em  $\mathcal{W}$  não isomorfo a  $Q$ . Temos o triângulo

$$X_{\perp \mathcal{B}_Q} \rightarrow X \rightarrow X^{\mathcal{B}_Q} \rightarrow X_{\perp \mathcal{B}_Q}[1]$$

Como  $X \in \mathcal{W}$ , segue que  $X^{\mathcal{B}_Q} \in \mathcal{W}_Q[1]$ , pois  $Q$  é fonte. Considere o triângulo

$$X^{\mathcal{B}_Q}[-1] \rightarrow X_{\perp \mathcal{B}_Q} \rightarrow X \rightarrow X^{\mathcal{B}_Q}.$$

Pelo fato de  $X^{\mathcal{B}_Q}[-1] \in \mathcal{W}_Q \subset \mathcal{W}$  e  $X \in \mathcal{W}$ , segue que  $X_{\perp \mathcal{B}_Q} \in \mathcal{W}$  e, portanto,  $X_{\perp \mathcal{B}_Q} \in \mathcal{W}_{\perp Q}$ . Com isso concluímos que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ . ■



A imagem essencial desse funtor é igual a  ${}^\perp\mathcal{B}_Q$ . Mostremos que

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q.$$

Primeiramente, vejamos quem são  $\mathcal{W}_{\perp Q}$  e  $\mathcal{W}_Q$ .

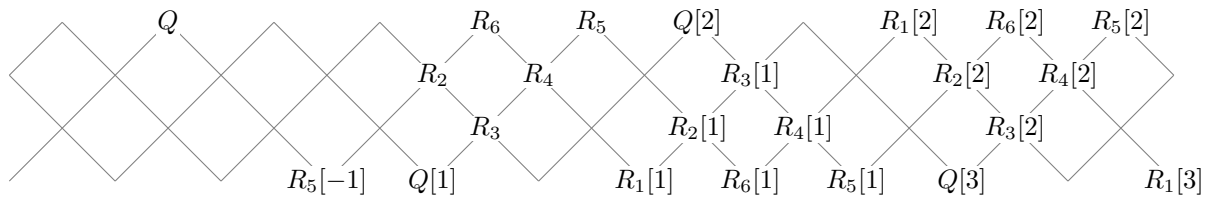


Figura 3.11

Aqui temos  $\mathcal{W}_{\perp Q} = \{R_i[n]; i = 1, \dots, 6, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{R_1\} \cup \{R_5[-1]\}$

Agora vejamos quem são os elementos de  $\mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ . Temos os seguintes triângulos

$$R_5[-1] \rightarrow A \rightarrow Q[1] \rightarrow R_5, \quad R_3 \rightarrow B \rightarrow Q[2] \rightarrow R_3[1], \quad R_4 \rightarrow C \rightarrow Q[2] \rightarrow R_4[1]$$

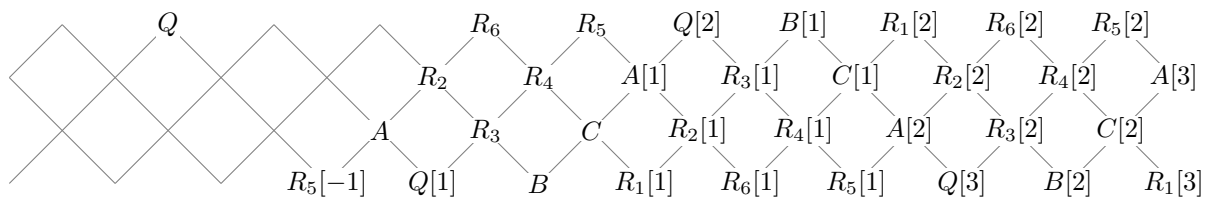
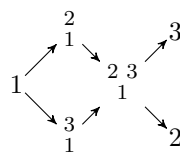


Figura 3.12

Portanto segue que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ .

**Exemplo 3.4.2** Seja  $\Delta$  o quiver dado por  $2 \rightarrow 1 \leftarrow 3$ . Então temos  $\Gamma(\text{mod}(k\Delta))$  como abaixo:



Considere  $\mathcal{W}$  o aisle em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  dado abaixo:

$$\mathcal{W} = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} \text{mod}(k\Delta)[i]$$

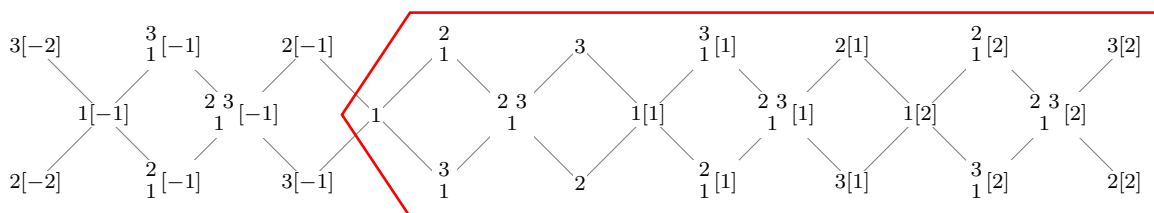


Figura 3.13

Temos que o projetivo 1 em  $\text{mod}(k\Delta)$  é uma fonte em  $\mathcal{W}$ . Tomemos  $Q = (0, 2)$  uma fonte em  $\mathcal{W}$  que corresponde ao projetivo 1. Assim temos que  $\mathcal{B}_Q$  é como abaixo,

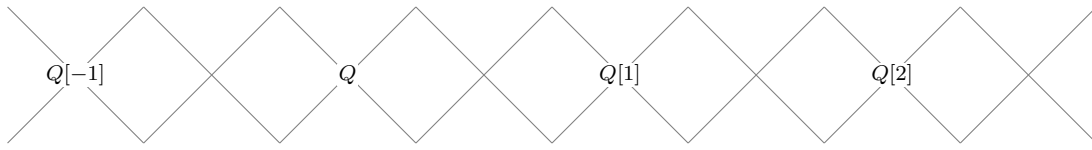


Figura 3.14

e, além disso,  ${}^\perp\mathcal{B}_Q$  é dado por:

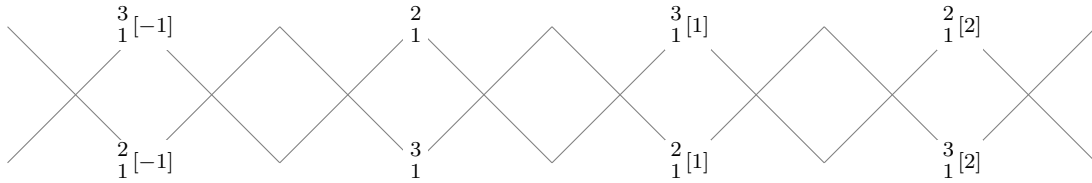


Figura 3.15

Mostremos que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ .

Primeiramente vejamos quem são  $\mathcal{W}_{\perp Q}$  e  $\mathcal{W}_Q$ ,

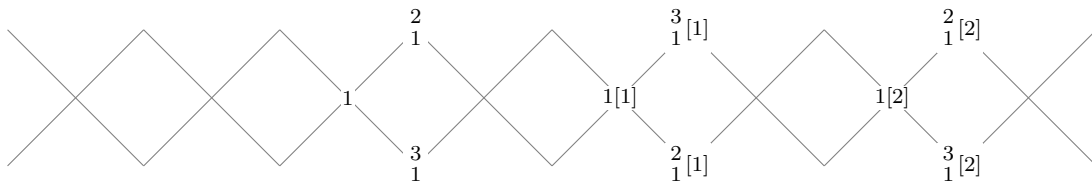


Figura 3.16

Agora, vejamos quem são os elementos de  $\mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ . Temos os seguintes triângulos:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} &\rightarrow 2 \rightarrow 1[1] \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} [1] \\ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} &\rightarrow 3 \rightarrow 1[1] \rightarrow \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} [1] \\ \left( \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right) &\rightarrow \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \rightarrow 1[1] \rightarrow \left( \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right) [1] \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$  é aisle, segue que os shifts positivos desses objetos também estão em  $\mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ .

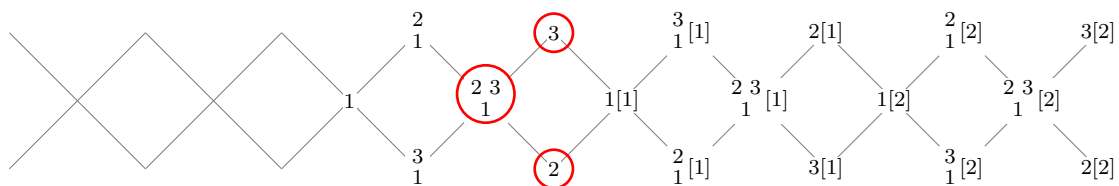


Figura 3.17

Portanto segue que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ .

### 3.4.2 A relação entre os silting e os aisles separáveis

Após termos estudado algumas propriedades a respeito dos aisles separáveis, vamos agora introduzir o conceito de conjunto silting e mostrar como esses conjuntos estão relacionados com esses aisles.

**Definição 3.4.2** *Um conjunto silting em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  é um subconjunto finito  $\{R_1, \dots, R_s\} \subset \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  tal que  $\text{Hom}(R_i, R_j[\ell]) = 0$ , para todo  $\ell > 0$ .*

Seja  $T = \{T_1, \dots, T_s\}$  um conjunto tilting em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  ordenado de maneira que  $\text{Hom}(T_j, T_i) = 0$ , para todo  $j > i$ . Consideremos  $p : \{1, \dots, s\} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função não decrescente tal que  $p(1) = 0$ . Então, pela definição 3.4.2, temos que

$$\{R_1 := T_1[p(1)], \dots, R_s := T_s[p(s)]\}$$

é um conjunto silting em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

Keller e Vossieck, em [13], demonstram que no caso específico em que  $\Delta = \vec{A}_n$ , temos que todos os conjuntos silting são gerados a partir de algum tilting através desse processo.

**Proposição 3.4.2** *Seja  $\mathcal{W}$  um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver tipo Dynkin. Então  $\mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1]) \cap \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  é um conjunto silting, além disso, todas as fontes de  $\mathcal{W}$  estão nesse conjunto.*

**Demonstração:** Primeiramente mostremos que  $\mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1]) \cap \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta) \neq \emptyset$ . Sabemos que existe pelo menos uma fonte  $Q$  em  $\mathcal{W}$ , mostremos que  $Q \in {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ . De fato, suponha que  $Q \notin {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , logo existe  $Y \in \mathcal{W}$  e um morfismo não nulo  $f : Q \rightarrow Y[\ell]$ , com  $\ell \geq 1$ . Considere o triângulo

$$Q \longrightarrow Y[\ell] \longrightarrow C_f \longrightarrow Q[1],$$

então temos também o triângulo

$$Y[\ell] \longrightarrow C_f \longrightarrow Q[1] \longrightarrow Y[\ell + 1].$$

Como  $Y[\ell], Q[1] \in \mathcal{W}[1]$ , segue que  $C_f \in \mathcal{W}[1]$  e, portanto,  $C_f[-1] \in \mathcal{W}$ . Logo, existe o triângulo

$$C_f[-1] \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{f} Y[\ell] \longrightarrow C_f \text{ em } \mathcal{W}$$

mas como  $Q$  é fonte em  $\mathcal{W}$ , temos que  $C_f[-1] = 0$  e portanto  $Q = Y[\ell]$ . Agora como  $Q$  é fonte, temos que  $Q \notin \mathcal{W}[1]$ , o que implica que  $Y[\ell] \notin \mathcal{W}[1]$  e isso é uma contradição. Portanto temos que  $Q \in {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , e segue que  $\mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1]) \cap \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta) \neq \emptyset$ .

Mostremos agora que esse conjunto é silting. Sejam  $R_i, R_j \in \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1]) \cap \text{ind } \mathcal{T}$ . Então, para  $n > 0$ , temos  $R_j[n] \in \mathcal{W}[1]$ . Logo, como  $R_i \in {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , segue que  $\text{Hom}(R_i, R_j[n]) = 0$ , para todo  $n > 0$ . ■

**Lema 3.4.3** *Seja  $\{R_1, \dots, R_s\}$  um conjunto silting em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver tipo Dynkin. Considere  $\mathcal{W} = \mathcal{F}(R_1, \dots, R_s)$ , como na definição 3.3.2. Então  $R_i \in \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , para  $i = 1, \dots, s$ .*

**Demonstração:** Já sabemos que  $R_i \in \mathcal{W}$ , para cada  $i = 1, \dots, s$ . Resta mostrar que  $R_i \in {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , isto é, que dado  $Y \in \mathcal{W}[1]$ , temos  $\text{Hom}(R_i, Y) = 0$ . De fato, se  $Y = R_j[\ell]$  para algum  $\ell > 0$ , temos que  $\text{Hom}(R_i, Y) = 0$  diretamente da definição de conjunto silting. Caso contrário, se  $Y = X[\ell]$  com  $X \notin \{R_1, \dots, R_s\}$  então, por construção de  $\mathcal{W}$ , existe um triângulo

$$X_{\mathcal{W}^\perp_Q} \longrightarrow X \longrightarrow X^{\mathcal{W}_Q} \longrightarrow X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[1]$$

tal que  $Q \in \{R_1, \dots, R_s\}$ , pois  $Q$  é fonte em  $\mathcal{W}$ . Podemos reescrever o triângulo acima da seguinte forma

$$X_{\mathcal{W}^\perp_Q} \longrightarrow X \longrightarrow R_t[n] \longrightarrow X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[1], \text{ para algum } t \in \{1, \dots, s\} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Disto segue que também existe o triângulo

$$X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[\ell] \longrightarrow \underbrace{X[\ell]}_Y \longrightarrow R_t[n + \ell] \longrightarrow X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[1 + \ell].$$

Suponha que  $\text{Hom}(R_i, Y) \neq 0$ , ou seja, que existe  $\varphi$  como abaixo

$$\begin{array}{ccccc} & & R_i & & \\ & \swarrow \theta_1 & \downarrow \varphi & & \\ X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[\ell] & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & R_t[n + \ell] \longrightarrow X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[1 + \ell]. \end{array}$$

Sendo  $\text{Hom}(R_i, R_t[n + \ell]) = 0$ , existe  $\theta_1$  não nulo fazendo o diagrama comutar.

Temos que  $X_{\mathcal{W}^\perp_Q} \in \mathcal{W}$ , então existe um triângulo,

$$\underbrace{\overline{X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[\ell]}}_{\in \mathcal{W}^\perp_Q} \longrightarrow X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[\ell] \longrightarrow \underbrace{R_t[m]}_{\in \mathcal{W}_Q} \longrightarrow \overline{X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[1 + \ell][1]}.$$

Pelo mesmo argumento anterior, temos que existe  $\theta_2 : R_i \rightarrow \overline{X_{\mathcal{W}^\perp_Q}}$  tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} & & R_i & & \\ & \swarrow \theta_2 & \downarrow \theta_1 & & \\ \overline{X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[\ell]} & \longrightarrow & X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[\ell] & \longrightarrow & R_t[m] \longrightarrow \overline{X_{\mathcal{W}^\perp_Q}[1 + \ell]} \end{array}$$

Repetindo este processo um número finito de vezes, concluiremos que existe um morfismo não nulo  $\theta_n : R_i \rightarrow R_j[\ell]$ , o que contradiz o fato de  $R_i$  pertencer ao conjunto silting  $\{R_1, \dots, R_s\}$ . Portanto  $\text{Hom}(R_i, Y) = 0$  para todo  $Y \in \mathcal{W}[1]$ , e disto segue que  $R_i \in {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ . ■

**Proposição 3.4.3** *Seja  $\mathcal{W}$  um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , com  $\Delta$  quiver do tipo Dynkin. Então  $\mathcal{W}_{\perp Q}$  é um aisle separável, em que  $Q$  é uma fonte em  $\mathcal{W}$ .*

**Lema 3.4.4** *Seja  $\mathcal{W}$  como nas hipóteses da proposição anterior. Se  $X \in \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  tal que  $X \in \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , então  $X = Q$  ou  $X \in \mathcal{W}_{\perp Q} \cap {}^\perp(\mathcal{W}_{\perp Q}[1])$ .*

**Demonstração:** Considere  $X \in \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ . Pelo lema 3.4.2, temos que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp Q} * \mathcal{W}_Q$ , então existe o triângulo

$$X_{\mathcal{W}_{\perp Q}} \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} X^{\mathcal{W}_Q} \xrightarrow{w} X_{\mathcal{W}_{\perp Q}}[1]$$

Se  $X^{\mathcal{W}_Q} = Q$ , então como  $Q$  é fonte em  $\mathcal{W}$  temos  $X = Q$  e  $X \rightarrow X^{\mathcal{W}_Q}$  é isomorfismo. Se  $X^{\mathcal{W}_Q} \neq Q$ , então  $X^{\mathcal{W}_Q} = Q[i]$  para algum  $i > 0$ , isto é,  $X^{\mathcal{W}_Q} \in \mathcal{W}_Q[1]$ . Porém  $X \in {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , portanto  $\text{Hom}(X, X^{\mathcal{W}_Q}) = 0$ , pois  $\mathcal{W}_Q[1] \subset \mathcal{W}[1]$ . Disto segue que o morfismo  $v$  é nulo e, pela proposição 1.1.2, segue que  $w$  é mono que cinde. Portanto  $X^{\mathcal{W}_Q}$  é somando de  $X_{\mathcal{W}_{\perp Q}}[1]$ . Como  $X^{\mathcal{W}_Q} = Q[i]$ , então  $X_{\mathcal{W}_{\perp Q}}[1] = Q[i] \oplus X'$  para algum  $X'$ , logo existe um morfismo

$$X_{\mathcal{W}_{\perp Q}}[1] = Q[i] \oplus X' \longrightarrow Q[i] = X^{\mathcal{W}_Q}$$

mas como  $X_{\mathcal{W}_{\perp Q}}[1] \in \mathcal{W}_{\perp Q}$ , segue que  $X^{\mathcal{W}_Q} = 0$ . Com isso concluímos que  $X \cong X_{\mathcal{W}_{\perp Q}} \in \mathcal{W}_{\perp Q}$ . Como por hipótese  $X \in {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ , então temos  $X \in \mathcal{W}_{\perp Q} \cap {}^\perp(\mathcal{W}_{\perp Q}[1])$ . ■

**Proposição 3.4.4** *Seja  $\{R_1, \dots, R_s\}$  um conjunto silting em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , com  $\Delta$  quiver do tipo Dynkin. Considere  $\mathcal{W} = \mathcal{F}(R_1, \dots, R_s)$ , como na definição 3.3.2. Então temos*

$$\mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1]) \cap \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta) = \{R_1, \dots, R_s\}.$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [13]. ■

**Proposição 3.4.5** *Seja  $\mathcal{W}$  é um aisle separável em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , com  $\Delta$  quiver do tipo Dynkin. Seja  $\mathcal{F}$  a aplicação definida em 3.3.2, então  $\mathcal{W} = \mathcal{F}(R_1, \dots, R_s)$  para algum conjunto silting  $\{R_1, \dots, R_s\}$  de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .*

**Demonstração:** Pelo lema 3.4.1 sabemos que  $\mathcal{W}$  possui uma fonte. Chamemos essa fonte de  $R_1$ . Então, pelo lema 3.4.2, temos que

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\perp R_1} * \mathcal{W}_{R_1}.$$

Pela proposição 3.4.2, sabemos que o conjunto  $\mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1])$  é silting e que  $R_1$  pertence a ele. De agora em diante vamos tomar mais objetos em  $\mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{W}[1])$ . Pelo lema 3.4.4, sabemos que os outros elementos desse conjunto estão em  $\mathcal{W}_{\perp R_1} \cap {}^\perp(\mathcal{W}_{\perp R_1}[1])$ , e pela proposição 3.4.3, sabemos que  $\mathcal{W}_{\perp R_1}$  é um aisle separável. Portanto existe uma fonte  $R_2$  em  $\mathcal{W}_{\perp R_1}$ , que pertence  $\mathcal{W}_{\perp R_1} \cap {}^\perp(\mathcal{W}_{\perp R_1}[1])$ , tal que

$$\mathcal{W}_{\perp R_1} = (\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2} * (\mathcal{W}_{\perp R_1})_{R_2}$$

portanto,

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2} * (\mathcal{W}_{\perp R_1})_{R_2} * \mathcal{W}_{R_1}.$$

Note que  $R_2 \in {}^{\perp}\mathcal{B}_{R_1}$  e, portanto,

$$(\mathcal{W}_{\perp R_1})_{R_2} = \mathcal{W} \cap {}^{\perp}\mathcal{B}_{R_1} \cap \mathcal{B}_{R_2} = \mathcal{W} \cap \mathcal{B}_{R_2} = \mathcal{W}_{R_2},$$

ou seja,

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2} * \mathcal{W}_{R_2} * \mathcal{W}_{R_1}.$$

Agora repetindo o processo para o aisle  $\mathcal{W}_{\perp R_1}$ , temos que se  $X \in \mathcal{W}_{\perp R_1} \cap {}^{\perp}(\mathcal{W}_{\perp R_1}[1])$ , então  $X = R_2$  ou  $X \in (\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2} \cap {}^{\perp}((\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2}[1])$ . Como  $(\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2}$  também é aisle separável, tomemos nele uma fonte  $R_3$ , então

$$(\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2} = ((\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2})_{\perp R_3} * ((\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2})_{R_3}$$

e utilizando um raciocínio análogo ao caso anterior, temos que

$$\mathcal{W} = (((\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2})_{\perp R_3}) * \mathcal{W}_{R_3} * \mathcal{W}_{R_2} * \mathcal{W}_{R_1}.$$

Repetindo este mesmo processo um número finito de vezes, concluímos que

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{R_s} * \mathcal{W}_{R_{s-1}} * \cdots * \mathcal{W}_{R_3} * \mathcal{W}_{R_2} * \mathcal{W}_{R_1}.$$

Como a operação  $*$  é associativa, temos que  $\mathcal{W} = \mathcal{F}(R_1, \dots, R_s)$ . ■

**Teorema 3.4.1** *Dado um conjunto silting  $\{R_1, \dots, R_s\}$ , a aplicação  $\{R_1, \dots, R_s\} \mapsto \mathcal{W} = \mathcal{F}(R_1, \dots, R_s)$  é uma bijeção entre os conjuntos silting em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  e os aisles separáveis.*

**Demonstração:** A injetividade segue diretamente da proposição 3.4.4, e a sobrejetividade segue da proposição 3.4.5. ■

O teorema acima nos diz que, se  $\{R_1, \dots, R_s\}$  é um conjunto silting, então  $\mathcal{F}(R_1, \dots, R_s)$  é um aisle separável. Como todo tilting é um silting, e  $T \mapsto \mathcal{F}(T)$  é uma bijeção entre os tilting e os aisles fiéis, então segue que todo aisle fiel é separável.

# Capítulo 4

## Teoria tilting e par de torção

Neste capítulo não iremos fazer um estudo aprofundado sobre a teoria tilting em geral. Iremos enunciar apenas algumas definições e resultados principais que nos proporcionem uma certa base para a compreensão do resultado fornecido pelos seguintes teoremas:

**Teorema 1:** [Teorema 4.2.2] Sejam  $\mathcal{H}$  uma categoria abeliana hereditária com objeto tilting  $T$  e  $A = \text{End } T$ . Então existe uma equivalência triangulada  $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$  com a seguinte propriedade: se  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  é o par de torção em  $\mathcal{H}$  induzido por  $T$ , então  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  é um par de torção cindido em  $\text{mod}(A)$ , em que  $\mathcal{Y} = F(\mathcal{T})$  e  $\mathcal{X} = F(\mathcal{F}[1])$ .

**Teorema 2:** [Teorema 4.2.5] Sejam  $A$  uma  $R$ -categoria abeliana e  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  um par de torção induzido por um objeto tilting  $T$ . Considere  $\mathcal{B}$  a categoria abeliana definida por

$$\mathcal{B} = \{X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}); H^0(X^\bullet) \in \mathcal{T}, H^{-1}(X^\bullet) \in \mathcal{F} \text{ e } H^i(X^\bullet) = 0 \text{ para } i \neq 0, -1\},$$

então

- (a)  $\mathcal{B} \cong \text{mod}(\text{End } T)$ .
- (b)  $(\mathcal{F}[1], \mathcal{T})$  é um par de torção em  $\text{mod}(\text{End } T)$ .

Maiores informações a respeito dessa teoria podem ser encontradas em [17].

Este capítulo possui dois objetivos principais. Um deles é apresentarmos, através de vários exemplos ao longo do texto, como é realizado um processo tilting e como os dois teoremas acima são utilizados nesse processo.

Nosso segundo objetivo é mostrar como é possível utilizarmos as técnicas e resultados apresentados nos capítulos 2 e 3 na teoria tilting. Por exemplo, podemos justificar que um módulo  $T \in \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  é tilting apenas verificando se os somandos indecomponíveis de  $T$  formam um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$ . Para isso podemos utilizar a bijeção entre os conjuntos tilting completos e os  $\vec{A}_n$ -quivers introduzida no capítulo 2. Então, se queremos justificar que  $T = \oplus R_i \in \mathcal{D}^b(k\vec{A}_n)$  é tilting, basta apresentarmos um  $\vec{A}_n$ -quiver  $K$  tal que  $\varphi(K) = \{R_1, \dots, R_n\}$ .

Seja  $A$  uma categoria satisfazendo as hipóteses do **Teorema 2**. Utilizaremos os aisles, introduzidos no capítulo 3, para apresentarmos como  $\text{mod}(\text{End } T)$  está mergulhada na categoria  $\text{ind } \mathcal{D}^b(A)$ . Para isso iremos utilizar o fato de  $\text{mod}(\text{End } T)$  ser o coração de um aisle específico.

Finalizaremos o capítulo apresentando uma aplicação do teorema 3.4.1, através da bijeção entre os aisles separáveis e os conjuntos silting de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , com  $\Delta$  quiver tipo Dynkin. Essa aplicação terá como objetivo mostrar como realizar o inverso do processo descrito no parágrafo anterior. Isto é, considere a categoria  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , com  $\Delta$  quiver tipo Dynkin. Suponha que nos é fornecido um conjunto de objetos em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  que representem a categoria de módulos de uma álgebra tilted  $A$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ . Como  $\text{mod}(A)$  é o coração de um aisle em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , podemos gerar um aisle e posteriormente utilizar os resultados do capítulo 3 para encontrarmos o objeto tilting  $T$  tal que  $A = \text{End } T$ .

## 4.1 Um breve resumo sobre a teoria tilting

A Teoria Tilting surge como um método universal para a construção de equivalências entre categorias. Originalmente introduzida no contexto das categorias de módulos sobre álgebras de dimensão finita, a teoria tilting é agora considerada uma ferramenta essencial no estudo de muitas áreas da matemática, incluindo teoria dos grupos finitos e algébricos, geometria algébrica comutativa e não comutativa e topologia algébrica. Em particular, complexos tilting foram mostrados por Rickard como sendo o ingrediente necessário no desenvolvimento da teoria de Morita para as categorias derivadas.

A Teoria Tilting descreve uma maneira de relacionar as categorias de módulos de duas álgebras usando os chamados módulos tilting e os funtores tilting. Aqui, a segunda álgebra é a álgebra de endomorfismos de um módulo tilting sobre a primeira álgebra.

Mais especificamente, dados uma álgebra  $A$  de dimensão finita e um  $A$ -módulo tilting  $T$ , definimos  $B = \text{End}_A(T)$ , que é ainda uma álgebra de dimensão finita. Além disso,  $T$  é um  $B$ -módulo, à esquerda, finitamente gerado. Os funtores tilting  $\text{Hom}_A(T, \_)$ ,  $\text{Ext}_A^1(T, \_)$ ,  $\_ \otimes_B T$  e  $\text{Tor}_1^B(\_, T)$  relacionam as categorias  $\text{mod}(A)$ , dos  $A$ -módulos à direita finitamente gerados, e  $\text{mod}(B)$ , dos  $B$ -módulos à direita finitamente gerados.

Na prática, muitas vezes são consideradas álgebras hereditárias de dimensão finita, já que as categorias de módulos sobre essas álgebras são razoavelmente bem compreendidas. A álgebra de endomorfismos de um módulo tilting sobre uma álgebra hereditária de dimensão finita é chamada de **álgebra tilted**.

### Alguns fatos:

Suponha que  $A$  é uma álgebra de dimensão finita,  $T$  é um  $A$ -módulo tilting e  $B = \text{End}_A(T)$ . Denotando  $F = \text{Hom}_A(T, \_)$ ,  $F' = \text{Ext}_A^1(T, \_)$ ,  $G = \_ \otimes_B T$  e  $G' = \text{Tor}_1^B(\_, T)$ , então  $F$  é adjunto à direita de  $G$  e  $F'$  é adjunto à direita de  $G'$ .

Brenner e Butler (em [7]) mostraram que os funtores tilting nos fornecem equivalências entre certas subcategorias de  $\text{mod}(A)$  e  $\text{mod}(B)$ . Especificamente, se definimos as duas subcategorias  $\mathcal{F} = \ker(F)$  e  $\mathcal{T} = \ker(F')$  de  $\text{mod}(A)$ , e as duas subcategorias  $\mathcal{X} = \ker(G)$  e  $\mathcal{Y} = \ker(G')$  de  $\text{mod}(B)$ , então  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  é um par de torção em  $\text{mod}(A)$  e  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  é um par de torção em  $\text{mod}(B)$ . Além disso, as restrições dos funtores  $F$  e  $G$  nos fornecem equivalências entre  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{Y}$ , enquanto as restrições de  $F'$  e  $G'$  nos fornecem equivalências entre  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{X}$ .

## 4.2 Definições e resultados básicos

A seguir apresentamos a definição original de módulo tilting que foi apresentada em [12].

**Definição 4.2.1** *Seja  $A$  uma álgebra. Um  $A$ -módulo  $T$  é chamado de **tilting** se as seguintes condições são satisfeitas:*

(T1)  $\text{pd } T_A \leq 1$ .

(T2)  $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$ .

(T3) *Existe uma sequência exata curta  $0 \rightarrow A_A \rightarrow T'_A \rightarrow T''_A \rightarrow 0$ , com  $T', T'' \in \text{add } T$ .*

Posteriormente, foi provado em [6] que o axioma (T3) pode ser substituído pela seguinte condição:

- O número de somandos diretos indecomponíveis de  $T$  (a menos de isomorfismo) é igual ao número de módulos simples definidos sobre a álgebra  $A$  (a menos de isomorfismo).

A seguir apresentamos um exemplo de um módulo tilting sobre uma álgebra hereditária. Vamos utilizar o Teorema 2.4.1 para verificar se o módulo apresentado é de fato um módulo tilting.

**Exemplo 4.2.1** *Considere o quiver  $\Delta$  dado abaixo*

$$\Delta : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7.$$

*Temos que o quiver de Auslander Reiten  $\Gamma(\text{mod}(k\Delta))$  é dado por:*

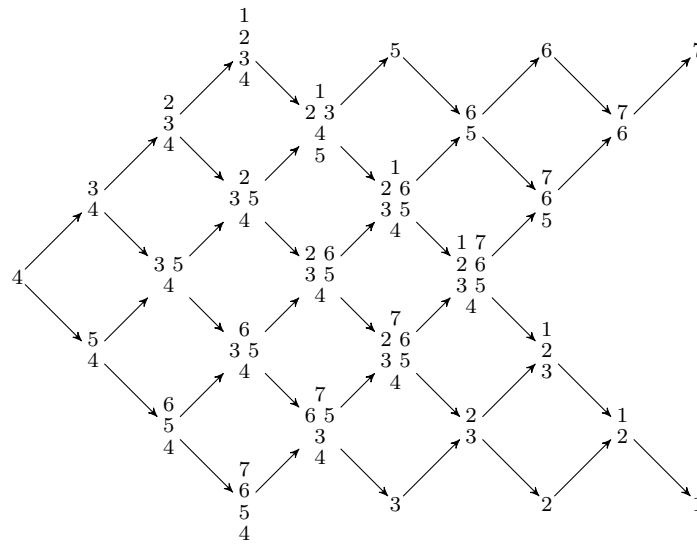


Figura 4.1:  $\Gamma(\text{mod}(k\Delta))$

Tomemos  $R_1, \dots, R_7$  objetos indecomponíveis de  $\text{mod}(k\Delta)$  de tal maneira que

$$T_0 = \bigoplus_{i=1}^7 R_i$$

seja um módulo tilting. Vamos considerar  $T_0$  como abaixo,

$$T_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 & 5 \\ 3 & & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & & 5 \end{pmatrix} \oplus 3 \oplus 5 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & & 4 \end{pmatrix} \oplus 1 \oplus 7$$

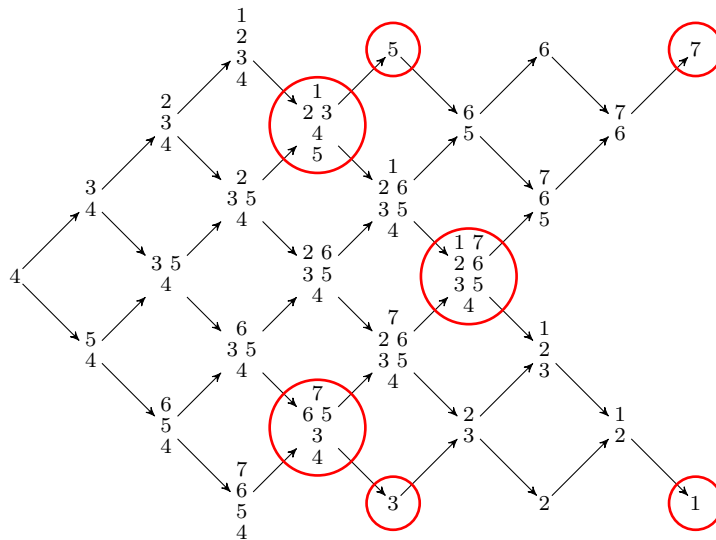
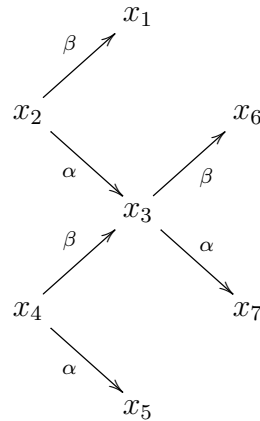


Figura 4.2: Somandos de  $T_0$

Mostremos agora que  $T_0$  assim definido é módulo tilting. Isso será justificado mostrando que o conjunto  $\{R_1, \dots, R_7\}$ , da figura 4.2, é igual a  $\varphi(K)$  em que  $\varphi$  é a aplicação

definida na proposição 2.4.1 e  $K$  é o  $\vec{A}_n$ -quiver dado por:



De fato, calculemos  $\varphi(K) = (g(x_i), h(x_i))$ . Como  $h(x) = 1 + x^\alpha + x_\beta$ , segue que:

- $h(x_1) = 1 + 0 + 0 = 1$
- $h(x_2) = 1 + 0 + 1 = 2$
- $h(x_3) = 1 + 2 + 1 = 4$
- $h(x_4) = 1 + 0 + 5 = 6$
- $h(x_5) = 1 + 6 + 0 = 7$
- $h(x_6) = 1 + 0 + 0 = 1$
- $h(x_7) = 1 + 6 + 0 = 7$

Agora considerando  $\text{mod}(k\Delta)$  em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  como sendo a parte hachurada da figura abaixo,

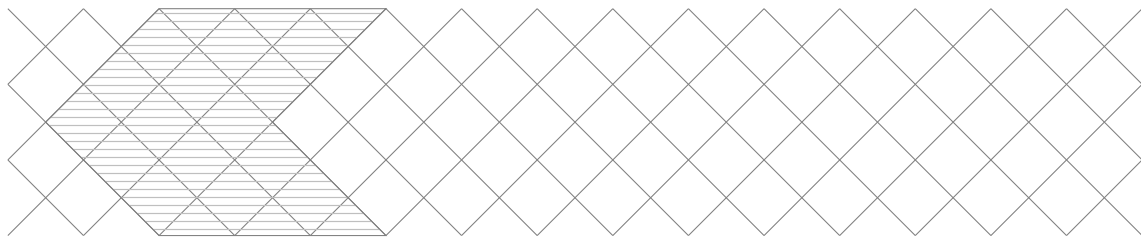


Figura 4.3:  $\text{mod}(k\Delta)[0]$

e definindo o sistema de coordenadas da seguinte maneira,

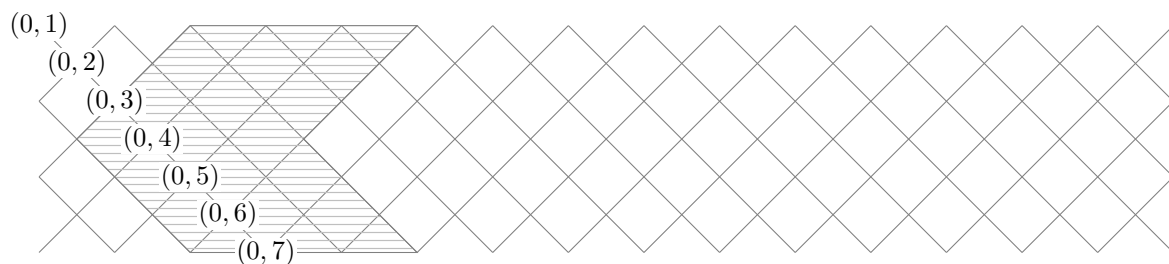


Figura 4.4: Sistema de coordenadas em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$

temos que  $\varphi(K) \in \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  é dado por:

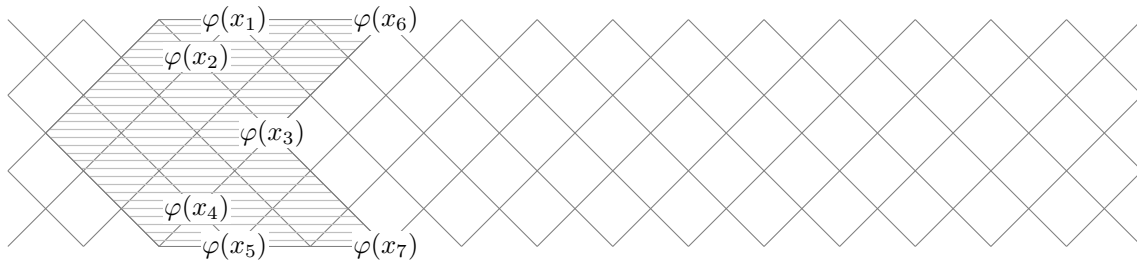


Figura 4.5:  $\varphi(K)$  em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$

É fácil ver  $\varphi(K)$  é justamente os somandos de  $T_0$  na figura 4.2. Portanto, pelo teorema 2.4.1, temos que os somandos de  $T_0$  formam um conjunto tilting completo em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , disto segue que  $\text{Ext}^1(T_0, T_0) = 0$ .

Temos também que  $\text{pd } T_0 \leq 1$ , pois  $k\Delta$  é hereditária. Como o número de somandos de  $T_0$  é igual a  $|\Delta_0|$  e  $\varphi(K) \subset \text{mod}(k\Delta)[0]$ , então segue que  $T_0$  é módulo tilting.

Com os módulos tilting, podemos definir duas importantes subcategorias da categoria de módulos. A seguir daremos a definição de par de torção e os resultados que relacionam esse conceito com módulos tilting.

**Definição 4.2.2** Um par  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  de subcategorias plenas de  $\text{mod}(A)$  é chamado de **par de torção** se as seguintes condições são satisfeitas:

- (a)  $\text{Hom}_A(M, N) = 0$  para todo  $M \in \mathcal{T}$  e todo  $N \in \mathcal{F}$ .
- (b)  $\text{Hom}_A(M, \_)|_{\mathcal{F}} = 0$  implica em  $M \in \mathcal{T}$ .
- (c)  $\text{Hom}_A(\_, N)|_{\mathcal{T}} = 0$  implica em  $N \in \mathcal{F}$ .

Um par de torção  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  tal que cada  $A$ -módulo indecomponível pertence a  $\mathcal{T}$  ou pertence a  $\mathcal{F}$  é chamado de **par de torção cindido**.

Se  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  é um par de torção, então  $\mathcal{T}$  é chamada de **classe de torção**, e  $\mathcal{F}$  é chamada de **classe livre de torção**.

**Proposição 4.2.1** Seja  $A$  um álgebra. Cada  $A$ -módulo tilting  $T$  induz um par de torção  $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$  na categoria  $\text{mod}(A)$ , em que

$$\mathcal{T}(T) := \text{Gen}(T) = \{X \in \text{mod}(A); \text{Ext}_A^1(T, X) = 0\}$$

e

$$\mathcal{F}(T) := T^\perp = \{X \in \text{mod}(A); \text{Hom}_A(T, X) = 0\}.$$

**Exemplo 4.2.2** Seja  $\Delta$  o quiver dado no exemplo 4.2.1 e consideremos  $T_0$  o módulo tilting dado na figura 4.2. Então o par de torção  $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$  de  $\text{mod}(k\Delta)$ , induzido pelo módulo tilting  $T_0$ , é dado pela figura abaixo.

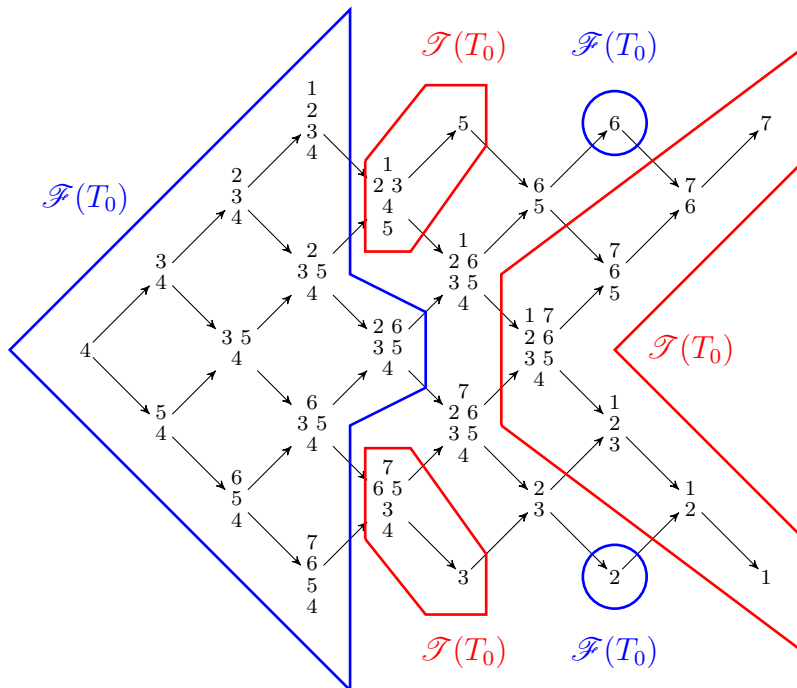


Figura 4.6:  $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$

onde

$$\mathcal{T}(T_0) = \text{Gen}(T_0) = \{X; \text{Ext}^1(T_0, X) = 0\}$$

e

$$\mathcal{F}(T_0) = \{X; \text{Hom}(T_0, X) = 0\}$$

Na teoria clássica, temos os seguintes resultados que relacionam este par de torção definido acima com um outro par de torção definido na categoria de módulos de  $\text{End } T$ . Para maiores detalhes sobre estes resultados veja [4].

**Proposição 4.2.2** Seja  $A$  um álgebra. Cada  $A$ -módulo tilting  $T$  induz um par de torção  $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$  na categoria  $\text{mod}(B)$ , onde  $B = \text{End } T$  e

$$\mathcal{X}(T) = \{X \in \text{mod}(B); \text{Hom}_B(X, DT) = 0\} = \{X \in \text{mod}(B); X \otimes_B T = 0\}$$

$$\mathcal{Y}(T) = \{Y \in \text{mod}(B); \text{Ext}_B^1(Y, DT) = 0\} = \{Y \in \text{mod}(B); \text{Tor}_1^B(Y, T) = 0\}$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [4], pág. 207. ■

**Teorema 4.2.1 (Brenner-Butler)** Considere  $A$  uma álgebra,  $T$  um  $A$ -módulo tilting e  $B = \text{End } T$ . Sejam  $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$  e  $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$  os pares de torção induzidos por  $T$  em  $\text{mod}(A)$  e  $\text{mod}(B)$ , respectivamente. Então seguem os seguintes resultados:

- (a) Os funtores  $\text{Hom}_A(T, \_)$  e  $\_ \otimes_B T$  induzem uma equivalência entre  $\mathcal{T}(T)$  e  $\mathcal{Y}(T)$ .
- (b) Os funtores  $\text{Ext}_A^1(T, \_)$  e  $\text{Tor}_1^B(\_, T)$  induzem uma equivalência entre  $\mathcal{F}(T)$  e  $\mathcal{X}(T)$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [4], pág. 207. ■

Com estes resultados temos uma equivalência entre as subcategorias  $\mathcal{T}(T_0)$  do exemplo 4.2.2 e  $\mathcal{Y}(T_0)$ , em que esta última subcategoria está em  $\text{mod}(\text{End } T_0)$ . De forma análoga, a subcategoria  $\mathcal{F}(T_0)$  é equivalente a  $\mathcal{X}(T_0)$ .

Estamos interessados em apresentar estas subcategorias dentro da categoria derivada limitada de  $\text{mod}(k\Delta)$ . A seguir iremos apresentar um pouco da teoria que relaciona a categoria derivada de  $\text{mod}(k\Delta)$  e  $\text{mod}(\text{End } T_0)$ . Primeiramente esta álgebra de endomorfismos recebe um nome especial dentro da teoria de representações, como apresentamos a seguir.

**Definição 4.2.3** *Uma álgebra  $B$  é chamada de **tilted** se existem uma álgebra hereditária  $\mathcal{H}$  e um  $\mathcal{H}$ -módulo tilting  $T$  tais que  $B \cong \text{End } T_{\mathcal{H}}$ .*

No caso particular em que o módulo tilting  $T$  é escolhido em uma categoria hereditária, o par de torção induzido na categoria de módulos de  $\text{End } T$  é cindido, como afirma o seguinte teorema.

**Proposição 4.2.3** *Sejam  $A$  uma álgebra hereditária,  $T$  um  $A$ -módulo tilting e  $B = \text{End } T$ . Então o par de torção  $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$  é cindido.*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [4], pág. 318. ■

Ou seja, neste caso especial, podemos obter todos os módulos de  $\text{mod}(\text{End } T)$ .

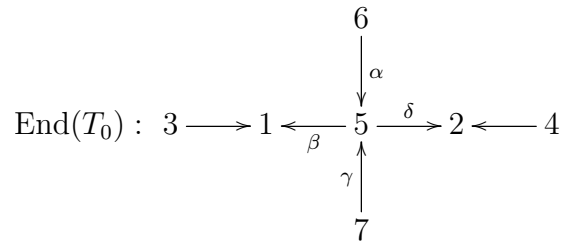
O teorema a seguir relaciona as categorias derivadas destas álgebras, assim como nos diz a maneira em que estão relacionados os pares de torção nessas categorias derivadas.

**Teorema 4.2.2** *Sejam  $\mathcal{H}$  uma categoria abeliana hereditária com objeto tilting  $T$  e  $A = \text{End } T$ . Então existe uma equivalência triangulada  $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$  com a seguinte propriedade: se  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  é o par de torção em  $\mathcal{H}$  induzido por  $T$ , então  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  é um par de torção cindido em  $\text{mod}(A)$ , em que  $\mathcal{Y} = F(\mathcal{T})$  e  $\mathcal{X} = F(\mathcal{F}[1])$ .*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [10], pág. 59. ■

Como afirmamos anteriormente, queremos apresentar a categoria derivada de  $\text{mod}(k\Delta)$  do exemplo 4.2.1, assim como os respectivos pares de torção  $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$  e  $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$  mergulhados na categoria derivada.

**Exemplo 4.2.3** *Consideremos a categoria  $\text{mod}(k\Delta)$  e o módulo tilting  $T_0$  do exemplo 4.2.1. A seguir vamos apresentar o quiver ordinário de  $\text{End}(T_0)$  e também o quiver de Auslander Reiten  $\Gamma(\text{mod}(\text{End } T_0))$ .*



com as relações  $\alpha\beta = 0$  e  $\gamma\delta = 0$ .

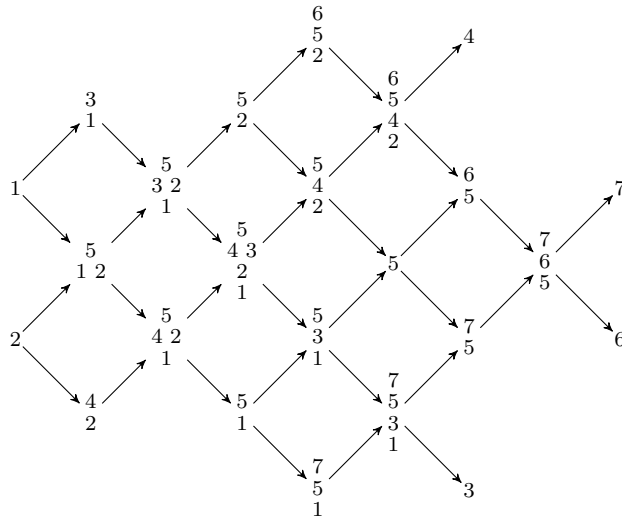


Figura 4.7: Quiver de Auslander Reiten  $\Gamma(\text{mod}(\text{End } T_0))$

Agora, considerando  $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$  o par de torção dado na figura 4.6 do exemplo 4.2.2, temos pelo teorema 4.2.2 que

$$\text{mod}(\text{End } T_0) = \mathcal{T}(T_0) \vee \mathcal{F}(T_0)[1].$$

A figura abaixo ilustra  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  mergulhada na categoria derivada  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

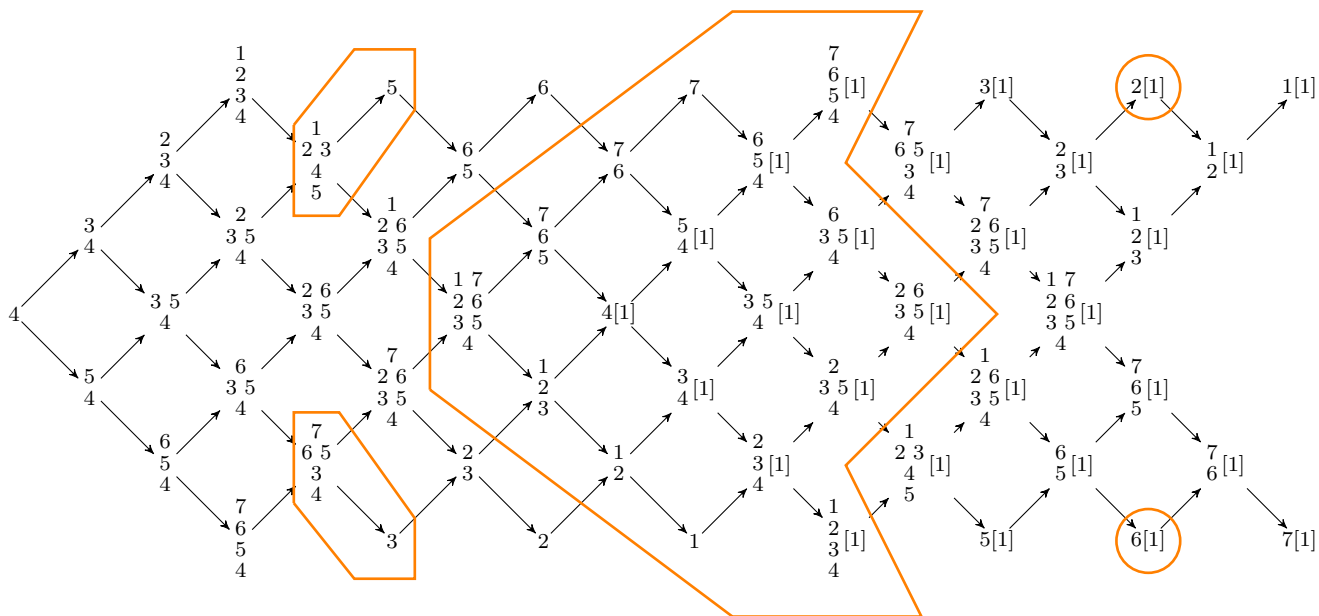


Figura 4.8:  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  mergulhada na categoria derivada  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$

Para os propósitos que temos ao final desta seção, convém apresentar a categoria de módulos acima como sendo o coração de uma aisle.

**Proposição 4.2.4** *Seja  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  um par de torção em uma categoria abeliana  $\mathcal{A}$ . Sejam*

$$\mathcal{D}^{\leq 0} = \{X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}); H^i(X^\bullet) = 0, i > 0, H^0(X^\bullet) \in \mathcal{T}\}$$

e

$$\mathcal{D}^{\geq 0} = \{X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}); H^i(X^\bullet) = 0, i < -1, H^{-1}(X^\bullet) \in \mathcal{F}\}.$$

Então  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  é um aisle. Além disso,  $\mathcal{D}^{\geq 0} = (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp[1]$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [11], pág. 12. ■

No caso do exemplo 4.2.2, este resultado está nos dizendo que com o par de torção  $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$ , é possível construir um aisle na categoria derivada  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ . Com este aisle podemos construir uma categoria abeliana  $\mathcal{B}$ , como apresentado no resultado a seguir.

**Teorema 4.2.3** *Sejam  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana e  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  um par de torção em  $\mathcal{A}$ . Então*

$$\mathcal{B} = \{X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}); H^0(X^\bullet) \in \mathcal{T}, H^{-1}(X^\bullet) \in \mathcal{F} \text{ e } H^i(X^\bullet) = 0 \text{ para } i \neq 0, -1\}$$

é uma categoria abeliana. Além disso, temos que  $\mathcal{B}$  é o coração do aisle  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  definido na proposição 4.2.4, isto é,  $\mathcal{B} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp[1]$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [11], pág. 13. ■

Vamos relacionar esta categoria abeliana  $\mathcal{B}$  com a categoria  $\text{mod}(\text{End } T_0)$ . Para isso, iremos apresentar mais alguns resultados a respeito desta teoria.

**Definição 4.2.4** *Seja  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana, e seja  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  um par de torção em  $\mathcal{A}$ . Dizemos que  $\mathcal{T}$  é uma **classe tilting de torção** se  $\mathcal{T}$  é um cogrador para  $\mathcal{A}$ , isto é, para todo  $X \in \mathcal{A}$  existe  $T_X \in \mathcal{T}$  e um monomorfismo  $\mu_X : X \rightarrow T_X$ .*

**Definição 4.2.5** *Seja  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana, e  $T \in \mathcal{A}$ . Então  $T$  é dito um **objeto tilting** se existe um par de torção  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i)  $\mathcal{T}$  é uma classe tilting de torção.
- (ii)  $\mathcal{T} = \text{Gen}(T)$ .
- (iii)  $\text{Ext}^i(T, X) = 0$  para todo  $X \in \mathcal{T}$  e  $i > 0$ .
- (iv) Se  $Z \in \mathcal{T}$  satisfaz  $\text{Ext}^i(Z, X) = 0$  para todo  $X \in \mathcal{T}$  e  $i > 0$ , então  $Z \in \text{add } T$ .
- (v) Se  $\text{Ext}^i(T, X) = 0$  para  $i \geq 0$  e  $X \in \mathcal{A}$ , então  $X = 0$ .

Nestas condições, dizemos que a classe de torção  $\mathcal{T}$  é induzida pelo objeto tilting  $T$ .

**Teorema 4.2.4** *Sejam  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana e  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  um par de torção induzido por um objeto tilting  $T$ .*

- (a) *Se  $\mathcal{B}$  tem suficientes projetivos, então existe um funtor  $G : \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$  tal que  $G|_{\mathcal{B}}$  é o funtor identidade e  $G$  é uma equivalência triangulada.*
- (b) *Se  $\mathcal{A}$  tem suficientes injetivos, então existe um funtor  $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$  tal que  $F|_{\mathcal{B}}$  é o funtor identidade e  $F$  é uma equivalência triangulada.*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [11], pág. 18. ■

**Definição 4.2.6** *Seja  $R$  um anel artiniano comutativo com unidade. Dizemos que  $\mathcal{A}$  é uma  $R$ -categoria se é uma categoria abeliana tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  é um  $R$ -módulo para todo  $X, Y \in \mathcal{A}$  e a composição de morfismos em  $\mathcal{A}$  é bilinear.*

**Teorema 4.2.5** *Seja  $\mathcal{A}$  uma  $R$ -categoria abeliana e  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  um par de torção induzido por um objeto tilting  $T$ . Então*

- (a)  $\mathcal{B} \cong \text{mod}(\text{End } T)$ , em que  $\mathcal{B}$  é a categoria abeliana definida no teorema 4.2.3.
- (b)  $(\mathcal{F}[1], \mathcal{T})$  é um par de torção em  $\text{mod}(\text{End } T)$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [11], pág. 22. ■

Já temos uma ideia de como estão mergulhados os pares de torção na categoria derivada de  $k\Delta$ . Porém, queremos fazer estes mergulhos através dos aisles que permitem definir as categorias de módulos.

**Exemplo 4.2.4** Consideremos a categoria  $\text{mod}(k\Delta)$  do exemplo 4.2.1. Seja  $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$  o par de torção dado na figura 4.6. Calculemos agora quem é  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  com base na proposição 4.2.4.

Se  $X^\bullet \in \mathcal{T}(T_0)$ , então  $H^0(X^\bullet) = X \in \mathcal{T}(T_0)$  e  $H^i(X^\bullet) = 0$ , para  $i \neq 0$ , pois  $X^\bullet \in \text{mod}(k\Delta)$ . Portanto  $\mathcal{T}(T_0) \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$ . Se  $X^\bullet \in \text{mod}(k\Delta)$ , então

$$H^0(X^\bullet[i]) = H^i(X^\bullet) = 0, \text{ para todo } i > 0$$

donde  $H^0(X^\bullet[i]) \in \mathcal{T}(T_0)$ . Para  $H^j(X^\bullet[i])$ , temos

$$X^\bullet = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{X}_{H^0(X^\bullet)} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

$$X^\bullet[1] = \cdots \rightarrow X \rightarrow \underbrace{0}_{H^0(X^\bullet[1])} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

disto segue que, se  $i > 0$ , temos  $H^j(X^\bullet[i]) = 0$  para todo  $j > 0$ . Com isso, temos

$$\text{mod}(k\Delta)[i] \subset \mathcal{D}^{\leq 0}, \text{ para todo } i > 0.$$

Portanto é possível concluir que  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  é a subcategoria de  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$  destacada como abaixo:

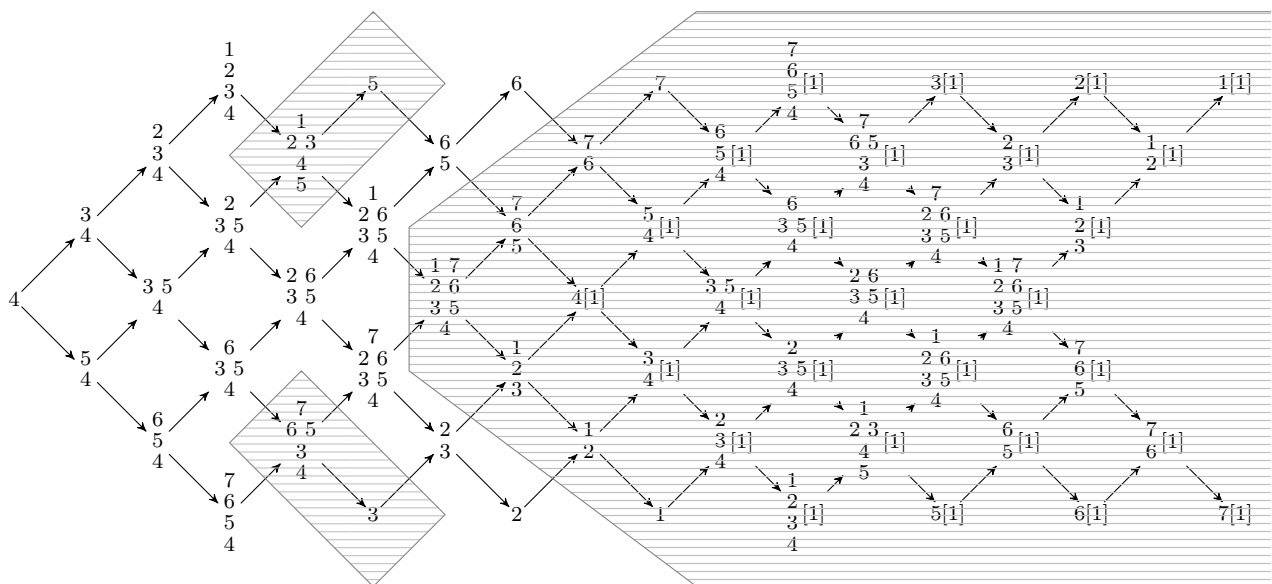


Figura 4.9:  $\mathcal{D}^{\leq 0}$

De agora em diante não iremos mais escrever explicitamente cada objeto de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  em nossas figuras, isto é, a categoria acima será ilustrada como no figura abaixo.

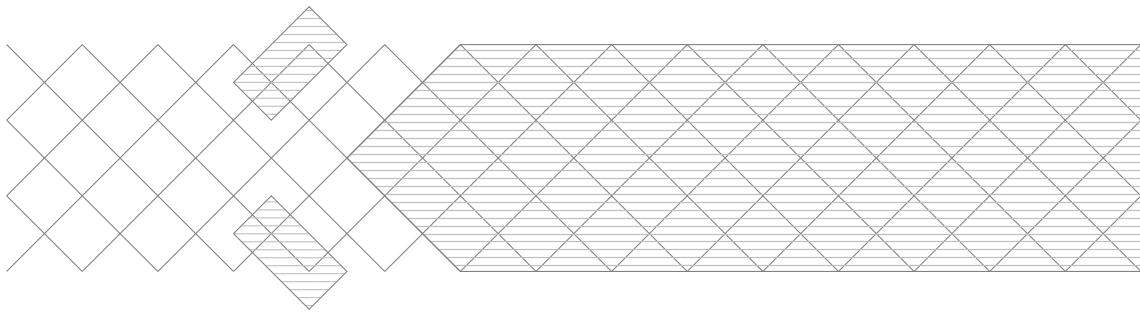


Figura 4.10:  $\mathcal{D}^{\leq 0}$

Por meio da figura 4.10, podemos facilmente encontrar quem é  $(\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$ , isto é, quem são os objetos  $X \in \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  tais que  $\text{Hom}(Y, X) = 0$ , para todo  $Y \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ .

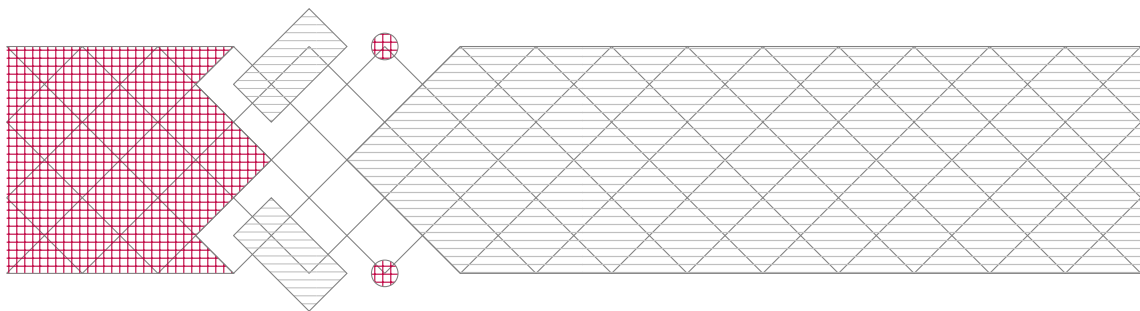


Figura 4.11:  $(\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$  e  $\mathcal{D}^{\leq 0}$

Portanto podemos encontrar o coração de  $\mathcal{D}^{\leq 0}$ , isto é,  $\mathcal{D}^{\leq 0} \cap (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp[1]$ .

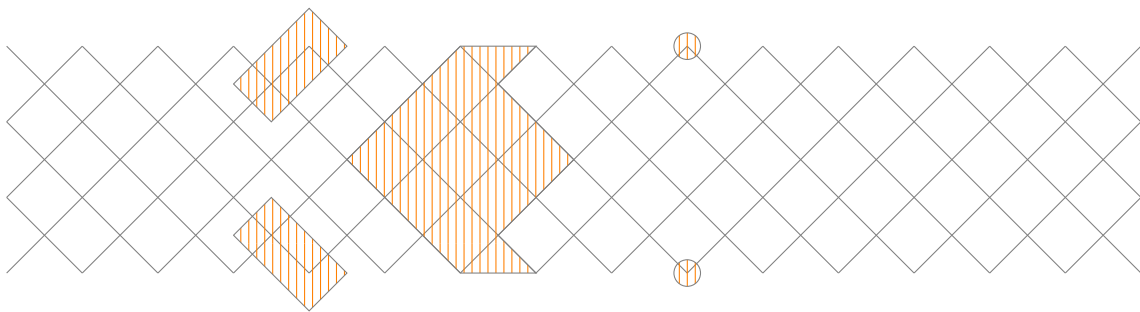


Figura 4.12: Coração de  $\mathcal{D}^{\leq 0}$

Podemos notar que o coração de  $\mathcal{D}^{\leq 0}$ , calculado desta maneira, é justamente a categoria  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  apresentada na figura 4.8.

**Exemplo 4.2.5** Consideremos a categoria  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  do exemplo 4.2.3. Tomemos um módulo tilting  $T_1$  em  $\text{mod}(\text{End } T_0)$ .

$$T_1 = 1 \oplus 2 \oplus \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

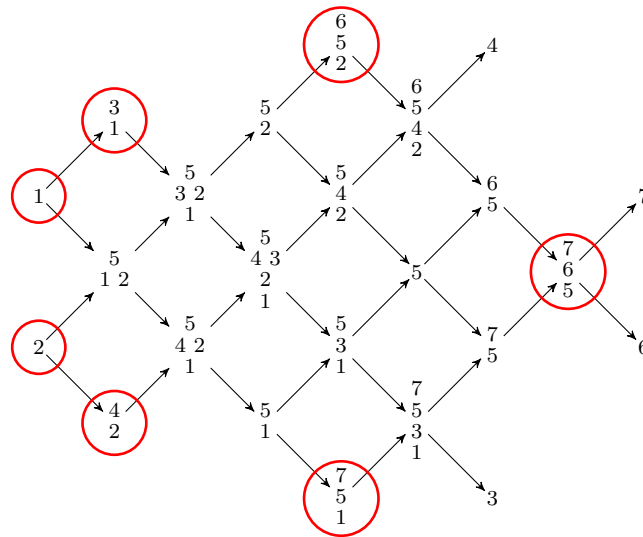


Figura 4.13: Somandos de  $T_1$

O quiver ordinário de  $\text{End}(T_1)$  é dado por:

$$3 \longrightarrow 1 \xleftarrow{\alpha} 6 \xleftarrow{\beta} 7 \xrightarrow{\gamma} 5 \xrightarrow{\delta} 2 \longleftarrow 4$$

com as relações  $\beta\alpha = 0$  e  $\gamma\delta = 0$ .

O quiver de Auslander Reiten  $\Gamma(\text{mod}(\text{End } T_1))$  é como abaixo

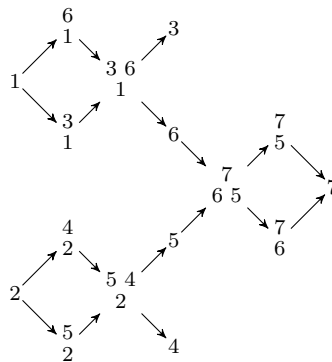


Figura 4.14:  $\Gamma(\text{mod}(\text{End } T_1))$

Agora, consideremos o par de torção  $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$  como na figura abaixo.

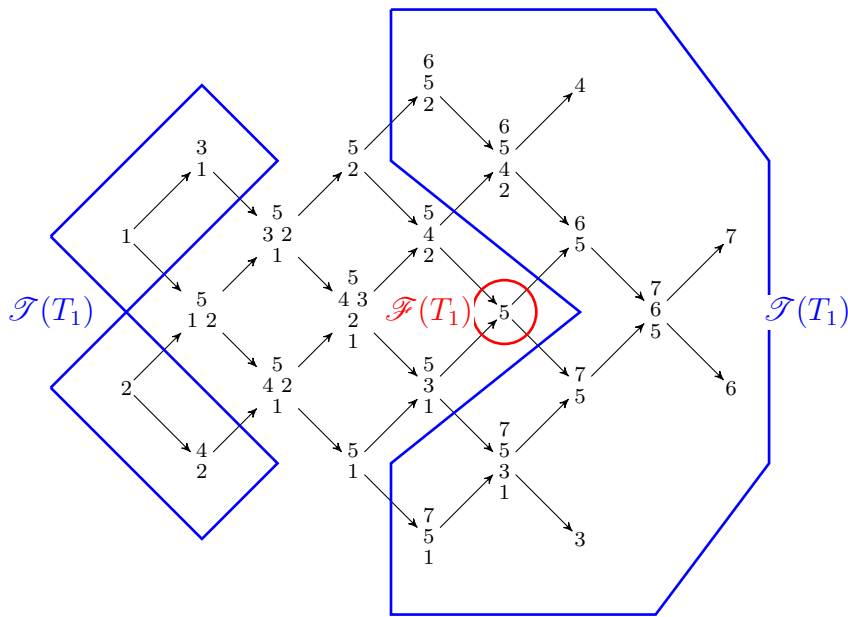


Figura 4.15:  $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$

Vamos representar o par de torção  $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$  em  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  mergulhado na categoria derivada  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ . Pela figura 4.8, temos que  $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$  está mergulhado como abaixo.

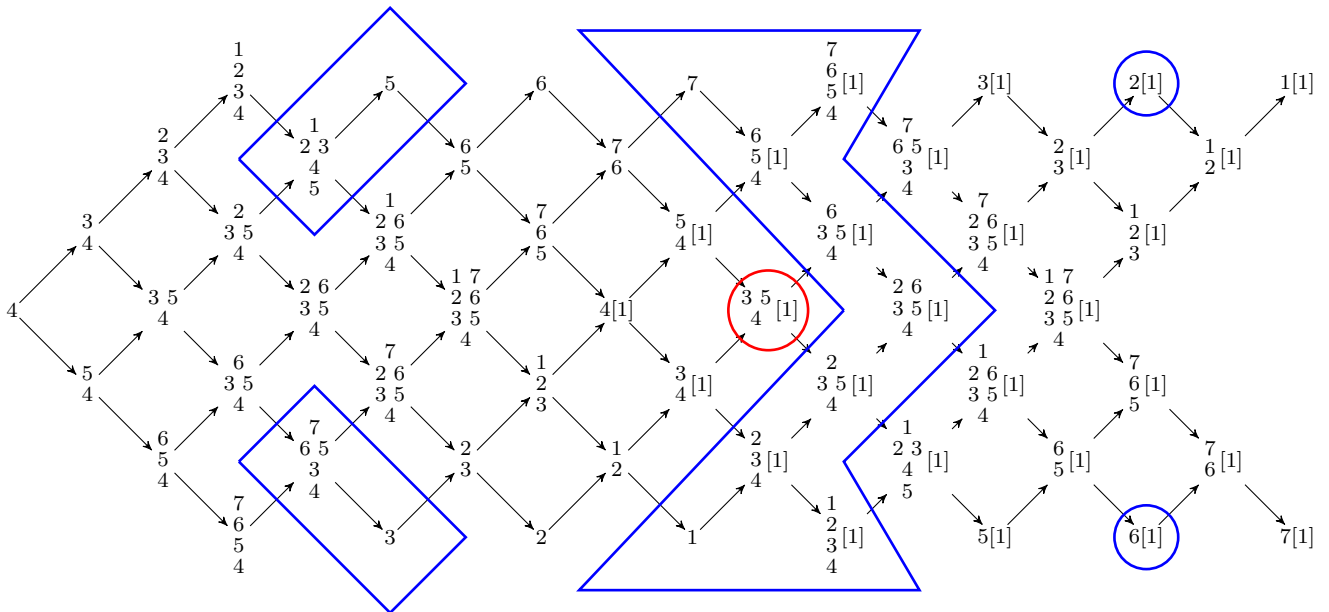


Figura 4.16:  $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$  mergulhado em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$

Agora calculando  $\mathcal{B}$ , como definido no teorema 4.2.3, temos que  $\mathcal{B}$  é dado como na figura abaixo.

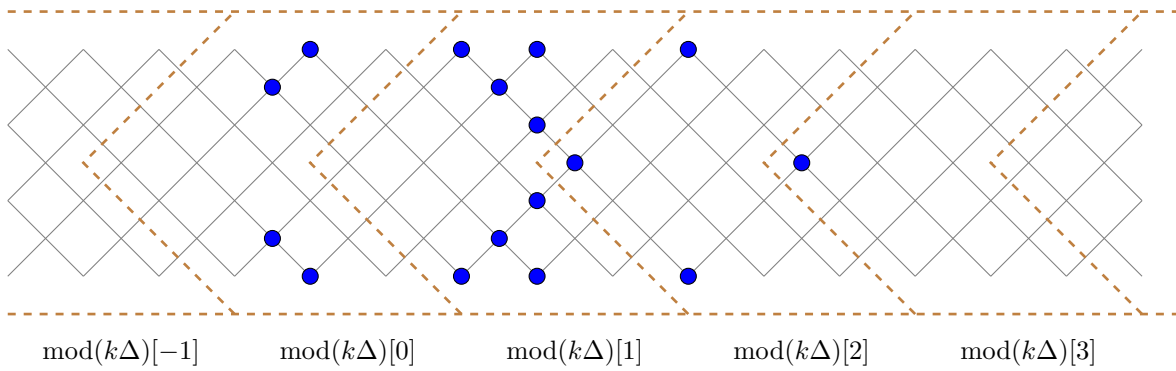
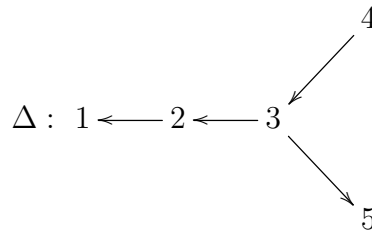


Figura 4.17:  $\mathcal{B} = \text{mod}(\text{End } T_1)$  mergulhada em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$

Pelo teorema 4.2.5, temos que  $\mathcal{B}$  é justamente a categoria  $\text{mod}(\text{End } T_1)$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

Estivemos trabalhando, nos exemplos anteriores, a partir de  $\text{mod}(k\Delta)$ , em que  $\Delta$  é um quiver do tipo  $A_n$ . Vamos finalizar esta seção apresentando mais um exemplo de como encontrar  $\text{mod}(\text{End } T)$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , com  $T$  um módulo tilting de  $\text{mod}(k\Delta)$ . Porém, agora, vamos considerar  $\Delta$  como sendo um quiver do tipo  $D_n$ .

**Exemplo 4.2.6** Consideremos o quiver dado por



Então temos que o quiver de Auslander Reiten  $\Gamma(\text{mod}(k\Delta))$  é:

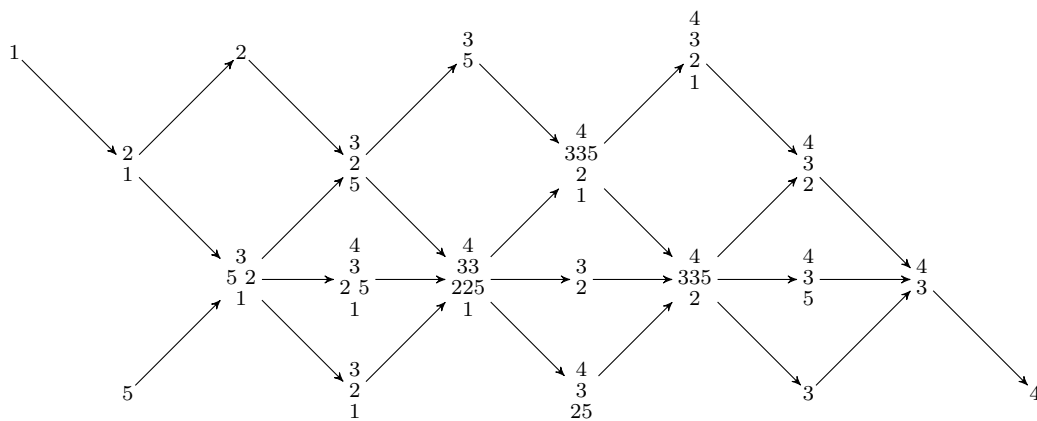


Figura 4.18:  $\Gamma(\text{mod}(k\Delta))$

Consideremos  $T$  como sendo o módulo tilting abaixo

$$T = 5 \oplus \begin{pmatrix} 4 & \\ 3 & \\ 2 & 5 \\ 1 & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & \\ 3 & \\ 2 & 5 \\ & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & \\ 3 & \\ 5 & \\ & \end{pmatrix} \oplus 4$$

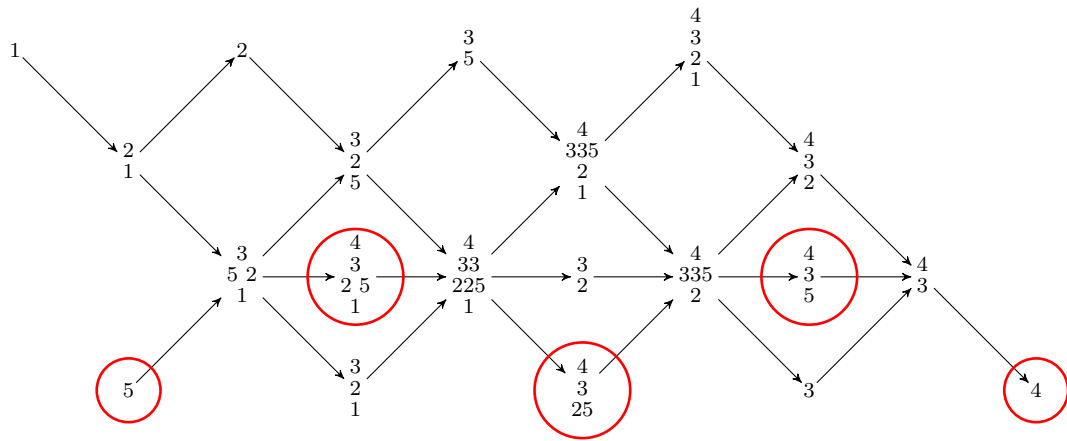


Figura 4.19: Somandos de  $T$

Deixaremos a cargo do leitor verificar que  $D\text{Hom}(T, \tau T) = 0$ . Como  $k\Delta$  é hereditária, segue que  $D\text{Hom}(T, \tau T) = 0$  implica em  $\text{Ext}^1(T, T) = 0$ . Como  $\text{pd } T \leq 1$  e  $T$  possui  $|\Delta_0|$  somando indecomponíveis, segue que  $T$  é módulo tilting.

Agora calculando  $\mathcal{T}(T) = \text{Gen}(T)$ , temos que  $\mathcal{T}(T)$  é dado por:

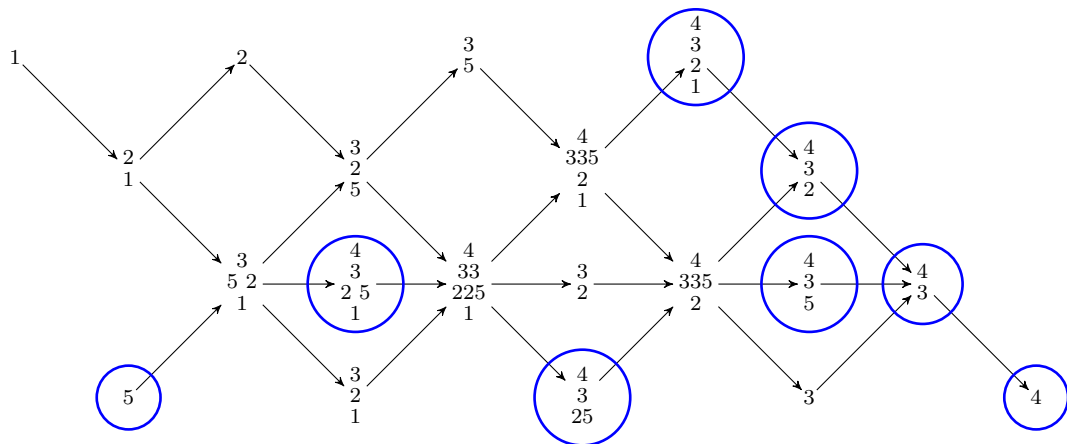


Figura 4.20:  $\mathcal{T}(T) = \text{Gen}(T) = \{X; \text{Ext}^1(T, X) = 0\} \cong \{X; D\text{Hom}(X, \tau T) = 0\}$

A seguir, vamos ilustrar  $\mathcal{T}(T)$  mergulhada dentro de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  e, para isso, vamos representar os objetos de  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  apenas utilizando vértices, como na figura abaixo.

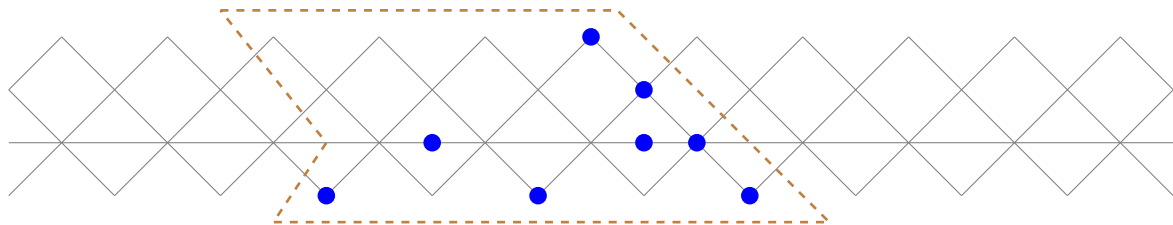


Figura 4.21: A parte tracejada representa  $\text{mod}(k\Delta)[0]$  em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$

Utilizando a proposição 4.2.4, podemos calcular quem é  $\mathcal{D}^{\leq 0}$ . É fácil ver que

$$\mathcal{D}^{\leq 0} = \mathcal{F}(T) \vee \left( \bigvee_{i \in \mathbb{N}^*} \text{mod}(k\Delta)[i] \right)$$

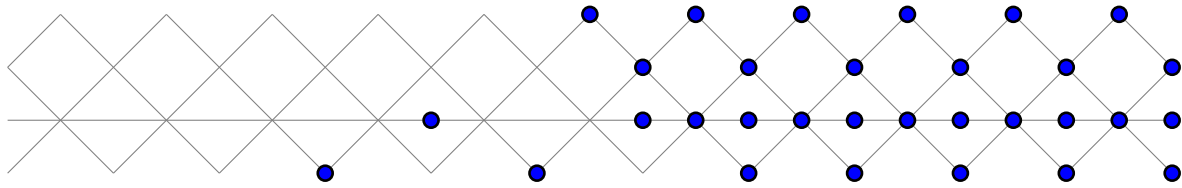


Figura 4.22:  $\mathcal{D}^{\leq 0}$

Agora vamos ilustrar na imagem abaixo quem é  $(\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$ , isto é, quem são os objetos  $X \in \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  tais que  $\text{Hom}(Y, X) = 0$ , para todo  $Y \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ .

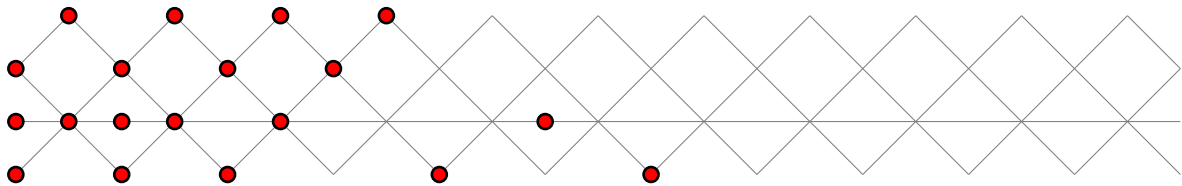


Figura 4.23:  $(\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$

Portanto temos que o coração de  $\mathcal{D}^{\leq 0}$ , denotado por  $(\mathcal{D}^{\leq 0})^0 = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp[1]$ , é como na figura abaixo.

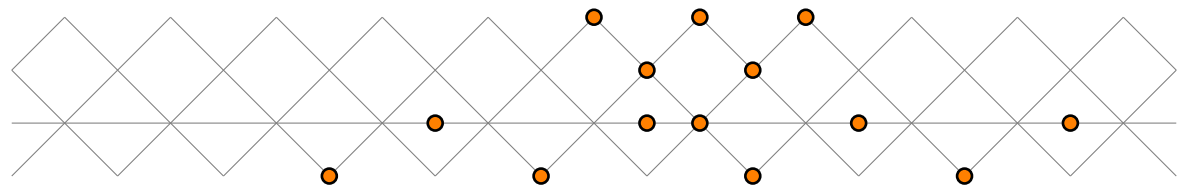


Figura 4.24:  $(\mathcal{D}^{\leq 0})^0 = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp[1]$

Como  $(\mathcal{D}^{\leq 0})^0 = \text{mod}(\text{End } T)$ , temos que  $\text{mod}(\text{End } T)$  é representado pela figura 4.24.

### 4.3 Aplicação da técnica para se extrair um silting a partir de um aisle

Pelos teoremas 4.2.3 e 4.2.5, temos que dado um módulo tilting  $T \in \text{mod}(k\Delta)$ , para algum  $\Delta$ , podemos encontrar  $\text{mod}(\text{End } T)$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  através do cálculo de  $\mathcal{B} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp[1]$ , em que  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  é um aisle gerado a partir de  $\mathcal{F}(T)$ . Os exemplos 4.2.4, 4.2.5 e 4.2.6 vieram justamente para ilustrar esse fato.

O objetivo dessa seção é analisar este problema pelo caminho inverso; isto é, supor que temos  $\text{mod}(\text{End } T)$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , com  $\Delta$  do tipo Dynkin, e descobrir

quem é  $T$ . Pelo teorema 4.2.5, sabemos que  $\text{mod}(\text{End } T)$  é igual a  $\mathcal{B}$ , isto é, sabemos que  $\text{mod}(\text{End } T)$  é o coração de um aisle. Como  $\Delta$  é do tipo Dynkin, temos por definição que  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  é um aisle separável. Portanto se soubermos quem é  $\mathcal{D}^{\leq 0}$ , podemos utilizar os resultados do capítulo 3 para encontrarmos quem é  $T$ .

A seguir vamos considerar a categoria  $\text{mod}(\text{End } T_1)$  da figura 4.17 do exemplo 4.2.5, que é uma categoria abeliana mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

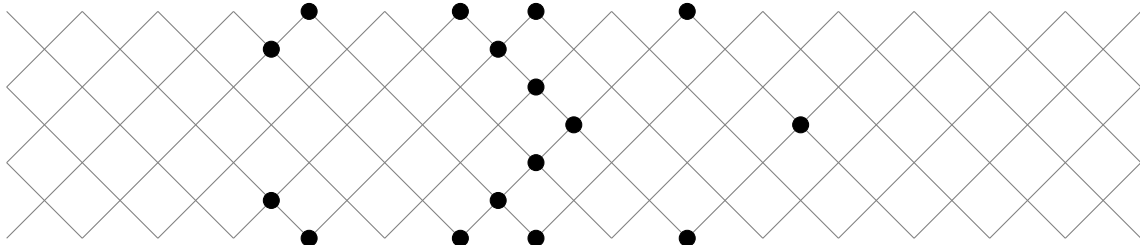


Figura 4.25:  $\text{mod}(\text{End } T_1)$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

Vamos encontrar quem é  $T_1$  apenas utilizando as informações contidas na figura 4.25 dada acima. Se a figura 4.25 mostra  $\text{mod}(\text{End } T_1)$  mergulhada em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$ , então significa que ela representa o coração de um aisle separável  $\mathcal{W}$ , isto é,  $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp[1]$ . Portanto, primeiramente, vamos calcular quem é o aisle  $\mathcal{W}$ .

Como  $\mathcal{W}^0 = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp[1] \subset \mathcal{W}$  e  $\mathcal{W}$  deve ser fechado para shifts positivos, temos que  $\mathcal{W}^0[n] \subset \mathcal{W}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A figura abaixo ilustra  $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}^0[n]$ .

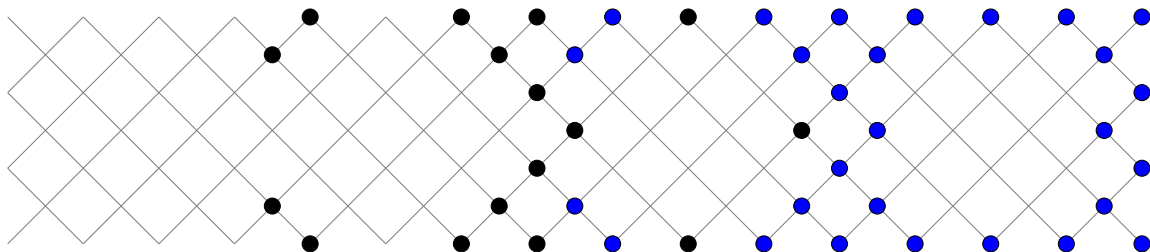


Figura 4.26:  $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}^0[n]$ .

Já que  $\mathcal{W}$  deve ser um aisle, temos que  $\mathcal{W}$  deve ser fechado para extensões. A figura a seguir ilustra por  $(\circ)$  os elementos  $X \in \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  tais que existe um triângulo  $Z \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z[1]$ , com  $Z, Y \in \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}^0[n]$ .

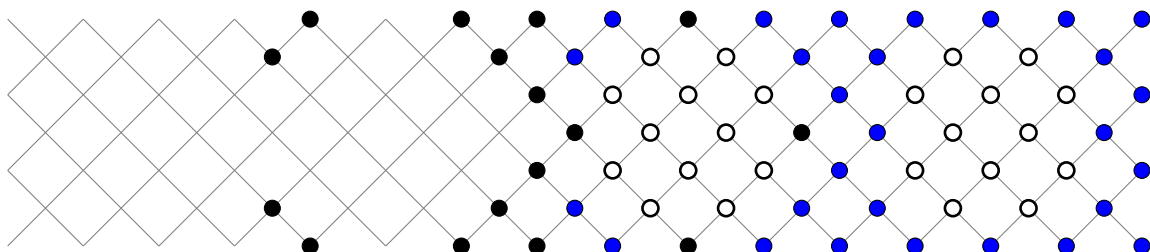


Figura 4.27:  $(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}^0[n]) * (\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}^0[n])$ .

Portanto segue que o aisle  $\mathcal{W}$  é dado como na figura abaixo

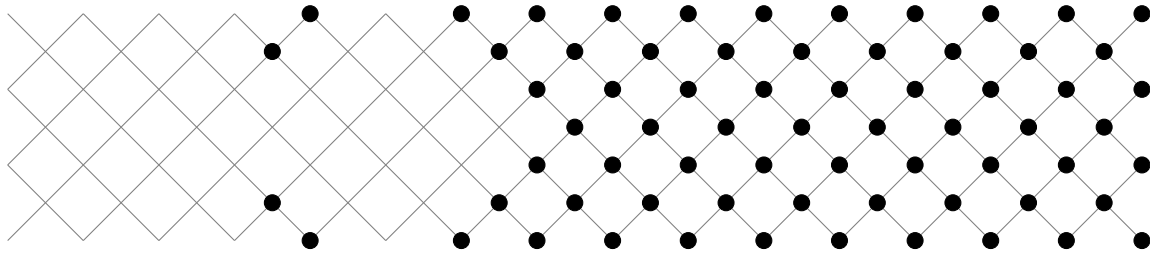


Figura 4.28: Aisle  $\mathcal{W}$

É fácil verificar que  $\mathcal{W}$ , assim definido, é de fato um aisle. Abaixo vamos ilustrar  $\mathcal{W}^\perp$  por  $(\circ)$ .

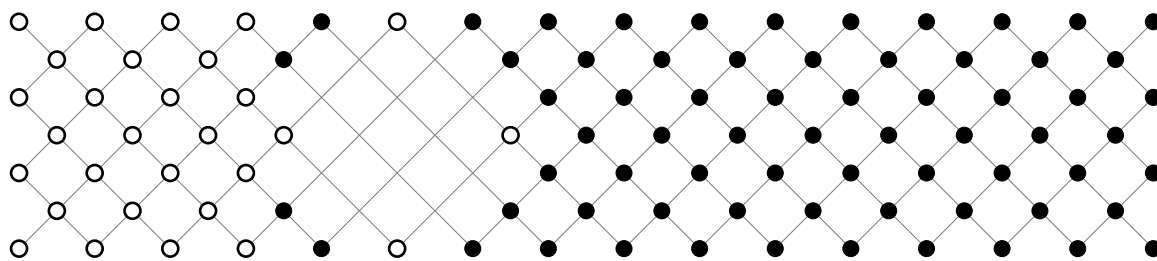


Figura 4.29:  $\mathcal{W}^\perp \vee \mathcal{W}$

Note que para todo  $X \in \text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$  existe um triângulo  $X_{\mathcal{W}} \rightarrow X \rightarrow X^{\mathcal{W}^\perp} \rightarrow X_{\mathcal{W}}[1]$ , com  $X_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$  e  $X^{\mathcal{W}^\perp} \in \mathcal{W}^\perp$ . Disto segue que  $\mathcal{W}$  é um aisle.

Dessa forma,  $\mathcal{W}^0 = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp[1]$  consiste dos objetos representados abaixo por 

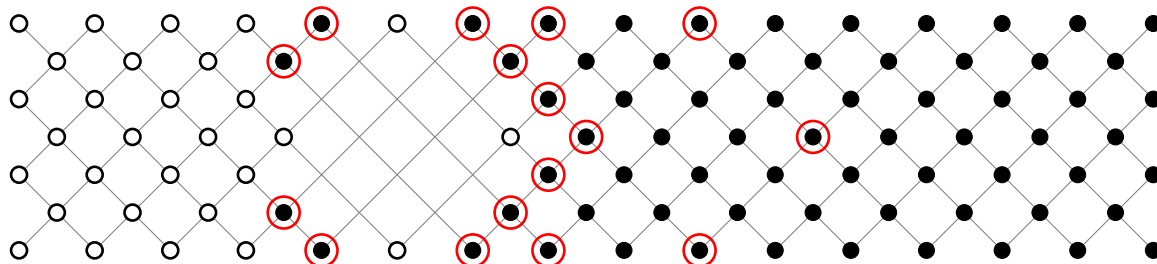


Figura 4.30

que é exatamente igual a  $\text{mod}(\text{End } T_1)$ , da figura 4.25.

Agora que já encontramos quem é  $\mathcal{W}$ , vamos utilizar os resultados do capítulo 3 para encontrarmos  $T_1$ .

Temos, pela proposição 3.4.5, que  $\mathcal{W} = \mathcal{F}(R_1, \dots, R_7)$  para algum conjunto silting  $\{R_1, \dots, R_7\}$ , em que  $\mathcal{F}$  é a aplicação definida em 3.3.2. Vamos encontrar o conjunto  $\{R_1, \dots, R_7\}$  utilizando a mesma construção feita na demonstração da proposição 3.4.5.

Escolha uma fonte  $R_1$  em  $\mathcal{W}$  e calculemos  $\mathcal{W}_{\perp R_1}$ .

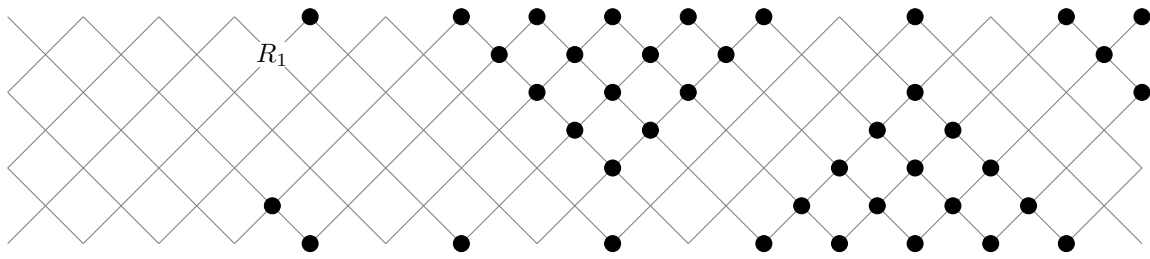


Figura 4.31:  $R_1 \vee \mathcal{W}_{\perp R_1}$

Agora escolha uma fonte  $R_2$  em  $\mathcal{W}_{\perp R_1}$  e calculemos  $(\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2}$ .

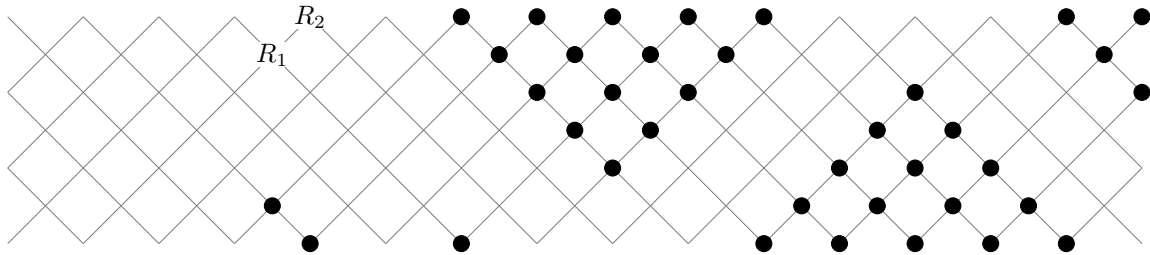


Figura 4.32:  $\{R_1, R_2\} \vee (\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2}$

Novamente escolha uma fonte  $R_3$  em  $(\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2}$  e calculemos  $((\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2})_{\perp R_3}$ .

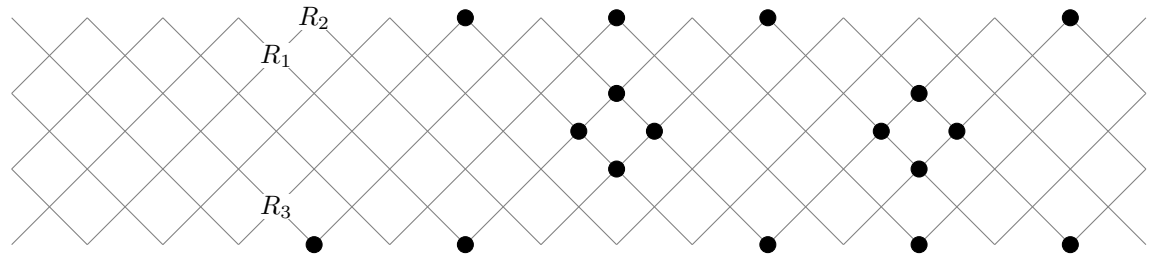


Figura 4.33:  $\{R_1, R_2, R_3\} \vee ((\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2})_{\perp R_3}$

Continuando com esse processo um número finito de vezes, é possível encontrar um conjunto  $\{R_1, \dots, R_7\}$  como na figura 4.37.

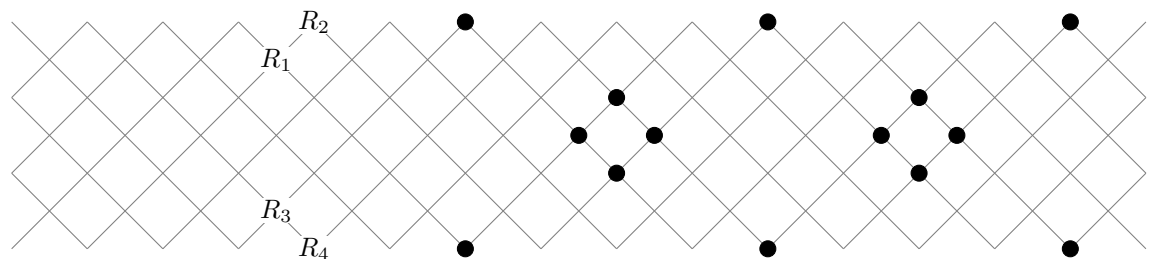


Figura 4.34:  $\{R_1, R_2, R_3, R_4\} \vee (((\mathcal{W}_{\perp R_1})_{\perp R_2})_{\perp R_3})_{\perp R_4}$

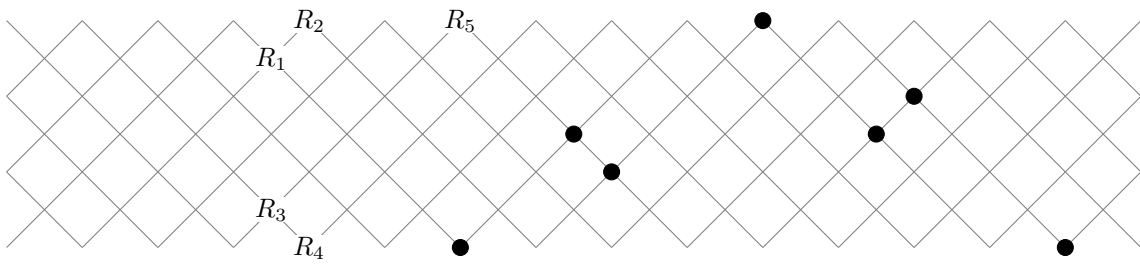


Figura 4.35:  $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\} \vee (((((\mathcal{W}^{\perp_{R_1}})^{\perp_{R_2}})^{\perp_{R_3}})^{\perp_{R_4}})^{\perp_{R_5}})$

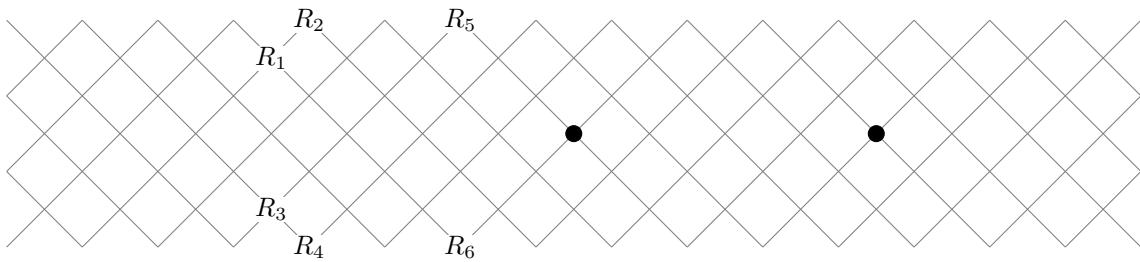


Figura 4.36:  $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\} \vee ((((((\mathcal{W}^{\perp_{R_1}})^{\perp_{R_2}})^{\perp_{R_3}})^{\perp_{R_4}})^{\perp_{R_5}})^{\perp_{R_6}})$

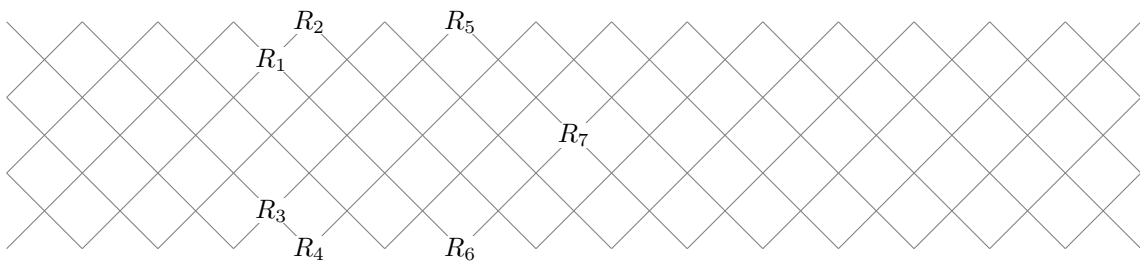


Figura 4.37:  $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_7\}$

Note que  $R_1 \oplus \cdots \oplus R_7$  é exatamente o módulo tilting  $T_1$  de  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  dado pela figura 4.13 do exemplo 4.2.5. Para ilustrar melhor esse fato, vamos exibir na figura abaixo, através da área hachurada, a categoria  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  mergulhada em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ .

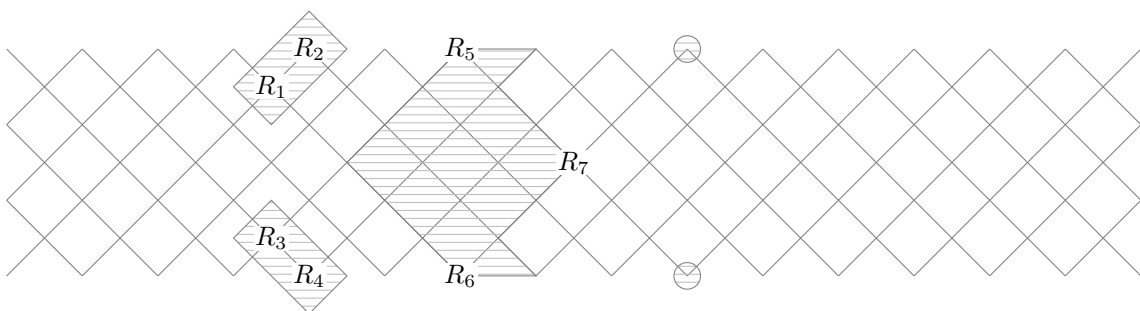


Figura 4.38:  $\text{mod}(\text{End } T_0)$  em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$

Portanto, mostramos como é possível utilizarmos os resultados do capítulo 3 como ferramentas que nos auxiliam dentro da teoria tilting.

**Observação:** Apesar de  $T_1$  ser um módulo tilting em  $\text{mod}(\text{End } T_0)$ , temos que  $T_1 = \bigoplus_{i=1}^7 R_i$  não é um módulo tilting em  $\text{mod}(k\Delta)$ . A figura abaixo ilustra, através da parte hachurada, onde se encontra  $\text{mod}(k\Delta)[0]$  em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$

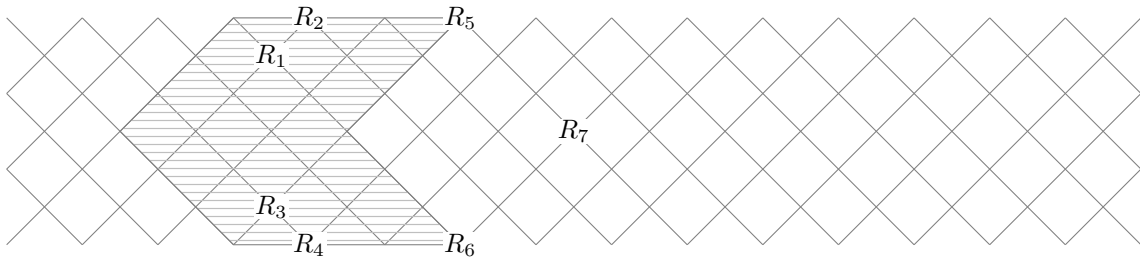


Figura 4.39:  $\text{mod}(k\Delta)[0]$  em  $\text{ind } \mathcal{D}^b(k\Delta)$

Podemos notar que  $R_7 \in \text{mod}(k\Delta)[1]$ , portanto  $T_1$  não pertence a  $\text{mod}(k\Delta)$ . Porém  $T_1$  é um complexo tilting em  $\mathcal{D}^b(k\Delta)$ , isto é, ele satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $\text{Hom}(T_1, T_1[n]) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^*$ .
- (ii) Se para cada  $X \in \mathcal{D}^b(k\Delta)$  temos  $\text{Hom}(T, X[n]) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ , então segue que  $X = 0$ .

# Bibliografía

- [1] E. R. Alvares. *A Course on Derived Categories*, Escola de Álgebra - Universidade Estadual de Maringá, 2014.
- [2] Ibrahim Assem. *Algèbres et modules. Cours et exercices*. Paris: Masson, 1997.
- [3] Ibrahim Assem, Juan Angel Cappa, María Inés Platzeck, and Melina Verdecchia. *Módulos inclinantes y álgebras inclinadas*. Bahia Blanca: Universidad Nacional del Sur, Instituto de Matemática, 2008.
- [4] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1: Techniques of representation theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [5] Maurice Auslander and Sverre O. Smalø Idun Reiten. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [6] Klaus Bongartz. Tilted algebras. Representations of algebras, Proc. 3rd int. Conf., Puebla/Mex. 1980, Lect. Notes Math. 903, 26-38., 1981.
- [7] Sheila Brenner and M.C.R. Butler. Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. Representation theory II, Proc. 2nd int. Conf., Ottawa 1979, Lect. Notes Math. 832, 103-169., 1980.
- [8] S.I. Gelfand and Yu.I. Manin. *Methods of homological algebra. Transl. from the Russian. 2nd ed.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2003.
- [9] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, 1988.
- [10] Dieter Happel. Quasitilted algebras. In *Algebras and modules, I (Trondheim, 1996)*, volume 23 of *CMS Conf. Proc.*, pages 55–82. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [11] Dieter Happel, Idun Reiten, and Sverre O. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Mem. Am. Math. Soc.*, 575:88, 1996.

- 
- [12] Dieter Happel and Claus Michael Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):399–443, 1982.
- [13] B. Keller and D. Vossieck. Aisles in derived categories. *Bull. Soc. Math. Belg., Sér. A*, 40(2):239–253, 1988.
- [14] Bernhard Keller and Dieter Vossieck. Sous les catégories dérivées. (Beneath the derived categories). *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*, 305:225–228, 1987.
- [15] D. Happel L. A. Hugel and H. Krause. *Handbook of tilting theory*. London Mathematical Society, 2007.
- [16] O. A. Hernández Morales. Uma introdução às t-estruturas e aplicações. Master's thesis, Universidade Federal do Paraná, 2015.
- [17] Tanise Carnieri Pierin. *Álgebras m-quase inclinadas e m-quase hereditárias*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2015.
- [18] Jeremy Rickard. Morita theory for derived categories. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 39(3):436–456, 1989.
- [19] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra. 2nd ed.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2009.
- [20] Cristian Schmidt. Um estudo sobre categorias hereditárias com objeto inclinante. Master's thesis, Universidade Federal do Paraná, 2013.
- [21] Donald Stanley and Adam-Christiaan van Roosmalen. t-structures for hereditary categories. <https://arxiv.org/abs/1202.4803>, 2012.