ENSAIO PARA DEFINIÇÃO DE PARÂMETROS DE TRANSFORMAÇÃO ENTRE O SAD 69 E O NSWC 9Z2

RAFAEL MARCH CASTAÑEDA FILHO

Engº Cartógrafo

1986

RAFAEL MARCH CASTAÑEDA FILHO
ENGº CARTÓGRAFO

ENSAIO PARA DEFINIÇÃO DE PARÂMETROS DE TRANSFORMAÇÃO ENTRE O SAD 69 E O NSWC 9Z2

Dissertação apresentada ao Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

CURITIBA
Dezembro/1986

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi elaborado na Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), onde o autor tem a honra de prestar serviço profissional como geodesista. Sua realização só foi possível graças ao descortino e apoio dos seguintes dirigentes ibegeanos, a quem manifestamos nossa imensa gratidão:

– Engº Prof. Mauro Pereira de Mello, titular da Diretoria de Geodésia e Cartografia (DGC).

– Engº Angelo José Pavan, titular da Superintendência de Geodésia (SUDEG).

Ficamos especialmente gratos também:

– ao Prof. Dr. José Bittencourt de Andrade, da UFPR/CPGCG. Pelos conselhos e estímulo proporcionado com seu valioso voto de confiança, num trabalho cujo desenrolar deu-se tão distante daquele centro de pesquisa.

– ao Prof. Dr. Denizar Blitzkow, da USP/IAG. Não apenas pela permanente troca de opiniões, mas também pelo seu notável exemplo de dedicação à pesquisa em Geodésia.

– ao Prof. Petr Vaníček, da UNB - Canada. Pela solicitude dispensada, tanto pessoalmente como em correspondências. Algumas de suas concepções originaram a espinha dorsal deste trabalho.

– ao Engº Luiz Paulo S. Fortes, chefe do Deptº de Cálculo e Análise/SUDEG/DGC/IBGE. Pelas sugestões sempre oportunas e objetivas.

– aos prezados colegas de batente, Marcus Vinicius D. da Silva e José D. Correa, da Divisão de Pesquisas em Geodésia, responsáveis pelo clima de entusiasmo científico que tanto nos estimulou.

– a Jupira de Oliveira, funcionária da DGC/IBGE. Por sua dedicação e competência nas tarefas de datilografia e revisão do texto.

RESUMO

Neste trabalho, realiza-se um estudo crítico - conceptual do problema de conexão entre referenciais geodésicos clássicos e o Sistema Terrestre Médio, com o seguinte objetivo em vista: determinar parâmetros de transformação entre o SAD 69 (Datum Sul-Americano de 1969) e o sistema Doppler NSWC 9Z2, implícito a efemérides precisas. O preenchimento desse objetivo induz uma investigação de erros sistemáticos significantes, possivelmente ocorridos no projeto de definição do SAD 69. Os modelos de transformação focalizados lidam com coordenadas cartesianas de pontos comuns a ambos os referenciais, aplicando-se o método dos mínimos quadrados como ferramenta matemática para cálculo dos respectivos parâmetros. O trabalho se encerra com a proposição de uma técnica ("Justaposição Elipsoidal"), que permite estimar parâmetros de translação, sem recorrer ao uso de altitudes geométricas referentes ao SAD 69.

ABSTRACT

In this work, a critical-conceptual study is made about the problem of conection between some classical geodetic reference system and the Average Terrestrial, with the following aim: to determine transformation parameters between the SAD 69 (South American Datum of 1969) and the Doppler system NSWC 9Z2, implicit to precise ephemeris. The fulfilment of this aim induces the investigation of significant systematic errors, possibly occurred in the SAD 69 definition project. The focused transformation models deal with cartesian coordinates of points whose positions are available in both systems, being the least-squares method the mathematical tool applied for estimation of correspondent parameters. Finally, a technique ("Ellipsoid Matching") is proposed,which allows to evaluate translation parameters making no use of SAD 69 geometric heights.

SUMÁRIO

Página

TÍTULO ..... *i*

AGRADECIMENTOS ..... *ii*

RESUMO ..... *iii*

ABSTRACT ..... *iv*

SUMÁRIO ..... *v*

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 2

SISTEMAS GEODÉSICOS - REGIONAIS CLÁSSICOS E DE SATÉLITE 3

2.1 - SISTEMAS COORDENADOS 3

2.2 - SISTEMAS GEODÉSICOS NATURAIS 9

2.2.1 - COORDENADAS NATURAIS-SISTEMA TERRESTRE INSTANTÂNEO 10

2.2.2 - SISTEMA ASTRONÔMICO LOCAL 12

2.2.3 - MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA-SISTEMA TERRESTRE MÉDIO 14

2.3 - SISTEMAS GEODÉSICOS CONVENCIONAIS 17

2.3.1 - ELIPSOIDAL GEODÉSICO 19

2.3.2 - CARTESIANO GEODÉSICO 20

2.3.3 - GEODÉSICO LOCAL 22

2.4 - MATERIALIZAÇÃO DE SISTEMAS GEODÉSICOS 23

2.4.1 - REDES GEODÉSICAS CLÁSSICAS 24

2.4.2 - REDES GEODÉSICAS TRIDIMENSIONAIS 29

2.4.3 - SISTEMAS DE SATÉLITE - O NSWC 9Z2 32

2.5 - POSICIONAMENTO E ORIENTAÇÃO DE UM DATUM GEODÉSICO HORIZONTAL..... 40

2.5.1 - MÉTODO CLÁSSICO 41

2.5.1.1 - CONDIÇÕES DE PARALELISMO - A EQUAÇÃO DE LAPLACE 45

2.5.1.2 - IMPLICAÇÕES CONCEITUAIS 54

2.5.2 - MÉTODOS ALTERNATIVOS 60

2.6 - REDUÇÕES DE OBSERVAÇÕES 63

CAPÍTULO 3

O DATUM SUL-AMERICANO DE 1969 67

3.1 - DEFINIÇÃO DO SISTEMA 67

3.2 - A QUESTÃO DE ORIENTAÇÃO ESPACIAL 73

3.3 - POSICIONAMENTO PLANIMÉTRICO 76

3.4 - POSICIONAMENTO ALTIMÉTRICO - MAPA GEOIDAL SAD 69 79

CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÕES COORDENADAS ENTRE SISTEMAS GEODÉSICOS
— CONEXÃO NSWC 9Z2 ↔ SAD 69 — 85

4.1 - ABORDAGEM GEOMÉTRICA 85

4.2 - MODELOS CONVENCIONAIS 90

4.2.1 - O PROBLEMA DE ESCALA E PREMISSAS BÁSICAS 91

4.2.2 - MODELO BURSA-WOLF 93

4.2.3 - MODELO MOLODENSKII-BADEKAS 97

4.2.4 - MODELO VEIS 102

4.2.5 - CONEXÃO NSWC 9Z2 ↔ SAD 69 105

4.2.5.1 - DETECÇÃO DE ERROS SISTEMÁTICOS NA DEFINIÇÃO DO SAD 69 110

4.2.5.2 - ANÁLISE DO "GEÓIDE ASTRO-GEODÉSICO" SAD 69.... 124

4.2.5.3 - CRÍTICA DOS PARÂMETROS ATUAIS 132

4.3 - MODELOS ESPECIAIS 137

4.3.1 - A MATRIZ E 137

4.3.2 - MODELO VANICEK-WELLS 140

4.3.3 - MODELO VANICEK-WELLS MODIFICADO 143

4.3.3.1 - AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES 145

4.3.3.2 - EXPERIÊNCIAS 153

4.4 - A TÉCNICA DE JUSTAPOSIÇÃO ELIPSOIDAL 161

4.4.1 - METODOLOGIA 162

4.4.2 - EXPERIÊNCIAS 167

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO 172

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 177

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

Há alguns anos, a Fundação IBGE iniciou no país, um projeto pioneiro de estabelecimento de pontos Doppler em vértices da gede geodésica planimétrica de 1ª ordem, mediante operações de rastreio de satélites artificiais, componentes do conhecido Sistema TRANSIT, cujo controle pertence à marinha norte-americana. O processamento dessas posições isoladas tem-se realizado por aplicação de efemérides precisas. Com isto, as coordenadas resultantes descrevem as respectivas posições, relativamente a um certo referencial cartesiano denominado NSWC 9Z2.

O sistema geodésico — ou datum —, em relação ao qual se posicionam os pontos da rede planimétrica de 1ª ordem, no Brasil, é o SAD 69 (Datum Sul Americano de 1969). Trata-se de um exemplo típico de datum regional, cuja implantação visou atender o interesse das nações sul-americanas em referir seus documentos cartográficos a um único sistema coordenado. No processo conceptivo do SAD 69, buscou-se posicionar um certo elipsóide de revolução — superfície de referência adotada no estabelecimento de qualquer datum regional —, de tal forma que bem se adaptasse ao geóide, na área de abrangência do continente sul-americano. Este e outros aspectos distinguem o SAD 69 do NSWC 9Z2. Com certeza em posicionamento, e possivelmente em orientação, aqueles referenciais diferem entre si.

O principal objetivo deste trabalho consiste em se resolver o problema de conexão entre os sistemas geodésicos supra citados. Isto significa determinar parâmetros que, aplicados segundo um certo modelo matemático, tornem compatíveis com o SAD 69, coordenadas originalmente referidas ao NSWC 9Z2 (e vice-versa, quando se empregar o modelo em sentido oposto). Para tanto, dispomos de toda a massa de informação concernente aos pontos Doppler mencionados no primeiro parágrafo.

Basicamente, são duas as aplicações dos parâmetros de transformação almejados. A primeira é o traçado do mapa geoidal relativo ao SAD 69, segundo metodologia que abordaremos no trabalho. A importância daquele documento remonta à necessidade de se reduzir, ao elipsóide de referência do datum regional, as medições lineares realizadas ao nível da superfície topográfica, no processo de constituição da rede planimétrica. A segunda aplicação dos parâmetros terá lugar no futuro projeto de reajustamento da rede, com inserção de po

sições isoladas NSWC 9Z2, para controle das distorções de orientação e escala típicas das grandes malhas geodésicas implantadas mediante técnicas clássicas. As coordenadas dos pontos Doppler deverão ser previamente compatibilizadas com o SAD 69.

Pretendemos ainda explorar a possibilidade de detecção de erros sistemáticos, provavelmente ocorridos na definição do SAD 69, com base na maior homogeneidade de precisão das coordenadas Doppler, relativamente a suas homólogas obtidas por técnicas clássicas. Pela mesma diretriz, temos em vista analisar a primeira (e única) determinação geoidal astro-geodésica relativa ao SAD 69, que se consolidou como base para refinamentos subsequentes do mapa geoidal, realizados segundo técnica distinta da astro-geodésica. Nesta análise, também atentaremos para possíveis distorções sistemáticas significantes. Os propósitos expressos neste parágrafo se justificam, face à influência que erros sistemáticos presentes nas coordenadas necessárias à recuperação dos parâmetros almejados, possam exercer sobre tais grandezas.

O preenchimento dos objetivos delineados requer uma sólida base conceitual e informativa, como aliás o leitor já terá percebido. Para melhor situar os interessados, com respeito à estruturação geral do texto, podemos distinguir as seguintes tendências predominantes nos três capítulos centrais: cap. 2 — conceitual; cap. 3 — informativo; cap. 4 — analítico. Em cada um destes haverá um introito, de maneira a posicionar o leitor na etapa que nele pretendemos vencer, sempre orientados segundo nosso intento principal. Almejamos alcançar um equilíbrio entre a objetividade e o aprofundamento analítico necessário a uma abordagem não superficial do tema focalizado.

Os capítulos centrais serão desmembrados em divisões. Estas, eventualmente, em seções e itens. Isso vai depender da extensão da matéria tratada em cada divisão, bem como da necessidade de destacar conceitos, informações e análises merecedoras de ênfase.

A preocupação didática há de se preservar ao longo deste trabalho, na medida do possível. Tanto na exposição de conceitos, quanto na construção de argumentos, que tentaremos fundamentar em referências externas, no próprio texto ou em simples intuição; bem como encadear numa sequência lógica.

Contamos com a tolerância do leitor, pois será impossível realizar com perfeição tudo o que nos propomos. Nossa esperança é a de produzir uma pesquisa honesta e, de alguma forma, útil à comunidade geodésica do Brasil.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS GEODÉSICOS - REGIONAIS CLÁSSICOS E DE SATÉLITE

O tema central deste trabalho é a solução de um certo problema cujas incógnitas são os parâmetros de transformação entre sistemas coordenados especiais, conhecidos como sistemas ou referenciais geodésicos. Uma abordagem abrangente desse tema requer, primeiramente, o domínio conceitual pleno dos métodos de estabelecimento ou definição daqueles referenciais, bem como dos procedimentos básicos necessários à obtenção de coordenadas a eles relativas. Tal é a preocupação que norteia este capítulo. Apresenta-se inicialmente, um sumário dos principais conceitos geométricos de interesse neste contexto, pertinentes ao estudo de sistemas coordenados.

2.1 - SISTEMAS COORDENADOS

Define-se sistema coordenado (no espaço físico ou abstrato) como uma relação de regras que especifica univocamente a posição de cada ponto do espaço através de um conjunto ordenado de números reais denominados coordenadas.

A propriedade mais importante de qualquer espaço é a sua dimensionalidade, que se mede pelo número de coordenadas necessárias à especificação do posicionamento de cada um de seus pontos. Neste contexto lidaremos, quase exclusivamente, apenas com espaços tridimensionais (3-D), nos quais a posição de cada ponto fica univocamente definida através de ternos de coordenadas.

Os espaços 3-D considerados neste trabalho são conhecidos como euclideanos. Neles, sempre é possível definir-se um sistema coordenado cartesiano, como o [xyz] da fig. 1, caracterizado por um conjunto de três retas orientadas (x,y e z), denominadas eixos coordenados, mutuamente perpendiculares e com escalas idênticas. As coordenadas de um ponto P são dadas então pelos comprimentos das projeções ortogonais, sobre cada eixo coordenado, do vetor de origem em O (interseção dos eixos ≡ origem do sistema) e extremidade em P, atribuindo-se-lhes sinais positivos ou negativos conforme a orientação de cada projeção coincida ou não com a do eixo correspondente. O vetor $\vec{OP}$ é dito vetor-posição de P em relação ao sistema.

Tendo em vista facilitar futuras definições, introduziremos uma terminologia específica para descrição de sistemas coordenados cartesianos. Consideremos ainda, para tanto, o sistema [xyz] da fig. 1, observando o seguinte: conquanto a notação adotada seja essencialmente arbitrária, a caracterização dos

eixos sempre se dá em concordância com a ordenação dos ternos coordenados. Isso posto, os eixos x, y e z passam a ser denominados, nessa ordem, eixos primário, secundário e terciário; o eixo terciário, também chamado polar primária, corresponde normalmente, nas aplicações geodésicas em espaços físicos, a um eixo de simetria. A (xy) dá-se o nome de plano primário e a (zx), plano secundário, sendo este usualmente escolhido segundo alguma convenção, naquelas aplicações.

Não apenas sistemas cartesianos podem ser definidos nos espaços 3-D euclideanos, mas também os chamados sistemas coordenados curvilíneos, aos quais sempre corresponde pelo menos uma coordenada de tipo angular. Um exemplo clássico desse tipo de sistema coordenado, e de particular interesse neste contexto, é o sistema esférico, cujas regras de posicionamento encontram-se esquematizadas na fig. 2. Naquela ilustração o sistema esférico $[r\Theta\gamma]$ aparece associado ao cartesiano $[xyz]$. Aliás, esse tipo de associação, entre sistemas cartesianos e curvilíneos em geral, é freqüentemente considerado em aplicações geodésicas como veremos.

Num sistema coordenado 3-D qualquer, definem-se as chamadas curvas coordenadas e superfícies coordenadas. As primeiras resultam da fixação dos valores de duas das três coordenadas, como no caso evidente, por exemplo, dos eixos de um sistema cartesiano. Aliás, para esse tipo de sistema é simples concluir que suas infinitas curvas coordenadas, a menos dos próprios eixos, são sempre retas a esses paralelas. Ora, sendo os eixos mutuamente perpendiculares, as curvas coordenadas também o serão, ponto a ponto do espaço. Tal é a condição caracterizadora dos chamados sistemas ortogonais.

Os sistemas cartesianos de interesse neste trabalho são todos ortogonais. Não foi por outra razão inclusive que nos restringimos, na caracterização daquele particular tipo de sistema, aos de eixos mutuamente perpendiculares. A característica de ortogonalidade acarreta vantagens no aspecto de manipulação matemática, nas operações intra e entre sistemas coordenados.

Superfícies coordenadas são geradas, por seu turno, pela fixação do valor de uma das três coordenadas. Obtém-se uma superfície coordenada básica ou de referência quando esse valor fixado é igual a zero. Assim, os planos definidos pelos três pares distintos de eixos de um sistema cartesiano são exemplos característicos de superfícies coordenadas básicas. A título de exercício mental, deixamos ao leitor a constatação de que no sistema esférico representado na fig. 2, duas das três superfícies coordenadas básicas degeneram-se num ponto ($r=0$) e numa semi-reta ($\Theta=0$). É uma situação especial.

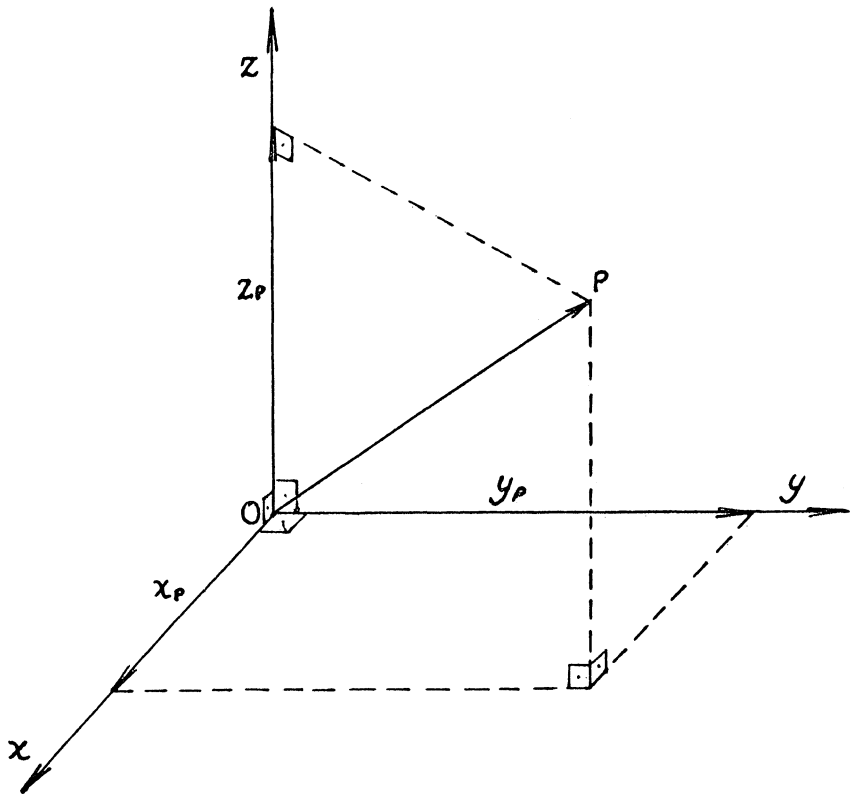


FIG. 1 - SISTEMA CARTESIANO TRI-ORTOGONAL

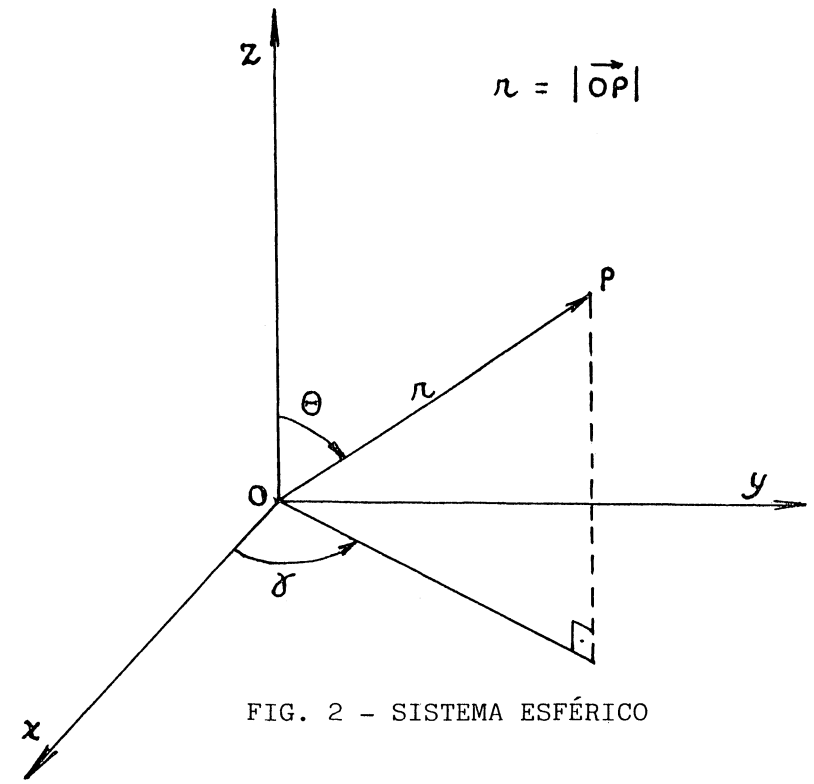


FIG. 2 - SISTEMA ESFÉRICO

Em Geodésia, normalmente emprega-se o termo datum em alusão a certas superfícies coordenadas de referência, participantes das próprias definições dos sistemas aos quais se vinculam. Em 2.2 e 2.3, dois data fundamentais – o geóide e a superfície de um elipsóide de revolução –, serão introduzidos na conceituação de importantes sistemas geodésicos curvilíneos.

Um conjunto de regras que associa ternos de coordenadas relativos a um certo sistema, a ternos referidos a outro sistema, recebe a denominação de transformação coordenada. A expressão matemática dessas regras constitui uma equação de transformação. De uma tal equação podem constar outras grandezas além das próprias coordenadas. Tais grandezas são conhecidas como parâmetros de transformação. Tornemos esses conceitos mais claros, analisando as seguintes transformações coordenadas:

a - $[r\ \theta\ \gamma] \rightarrow [xyz]$: fig. 2

Uma simples inspeção do esquema nos permite escrever, genericamente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\text{sen}\,\theta\cos\gamma \\ r\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\gamma \\ r\cos\theta \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Temos nesse caso um exemplo típico de transformação coordenada que dispensa parâmetros de transformação.

b - $[x_1 y_1 z_1] \rightarrow [x_2 y_2 z_2]$: fig. 3

Temos agora dois sistemas cartesianos independentes a considerar. Estando genericamente orientado e posicionado no espaço em relação a $[x_2 y_2 z_2]$, o sistema $[x_1 y_1 z_1]$ deve ser rotacionado e transladado (nessa ordem) para tornar-se coincidente com aquele. Assim, sendo dado o vetor-posição $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de um ponto genérico (P) no sistema $[x_1 y_1 z_1]$, pode-se obter seu homólogo $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ no segundo sistema aplicando-se a seguinte equação de transformação:

$$\vec{r}_2 = \vec{T} + R(\omega,\psi,\varepsilon)\ \vec{r}_1 \qquad (2.2)$$

onde

$\vec{T} = (Tx, Ty, Tz)$ simboliza o vetor-posição da origem O_1 de $[x_1 y_1 z_1]$ em relação a $[x_2 y_2 z_2]$. Será denominado vetor-translação.

$R(\omega,\psi,\varepsilon)$ representa a composição matricial de três rotações fundamentais em torno dos eixos x_1, y_1, z_1 respectivamente denotadas por ε, ψ, ω, às quais passaremos a nos referir como rotações primária, secundária e terciária, em consonância com a nomenclatura proposta para os eixos coordenados. A expressão matemática aqui adotada para $R(\omega,\psi,\varepsilon)$ é a seguinte:

$$R(\omega,\psi,\varepsilon) = R_1(\varepsilon).R_2(\psi).R_3(\omega),$$

onde:

$$R_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \operatorname{sen}\varepsilon \\ 0 & -\operatorname{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix}; \quad R_2(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\operatorname{sen}\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}; \quad R_3(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & \operatorname{sen}\omega & 0 \\ -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Em aplicações geodésicas, as rotações fundamentais são sempre ângulos de pequena magnitude. Nesses casos, a ordem de aplicação das mesmas é essencialmente arbitrária, na medida em que irrelevante na imposição da condição de paralelismo entre os sistemas. Todavia, os valores das rotações ε, ψ e ω a serem considerados na (2.2) devem ser aqueles que tornam os dois sistemas paralelos, quando aplicados segundo a ordenação adotada, dada pela (2.3).

A transformação coordenada expressa pela (2.2) é um exemplo clássico de participação de parâmetros de transformação, dados, no caso, pelas componentes Tx, Ty e Tz do vetor-translação e pelas rotações fundamentais ε, ψ e ω. Ela constitui a pedra fundamental, segundo o enfoque que se pretende adotar neste trabalho, da teoria de conexão de sistemas geodésicos, tema do capítulo 4.

Finalmente, introduzimos o conceito de <u>polaridade</u> de um sistema coordenado cartesiano. Quanto à polaridade, os sistemas cartesianos classificam-se em <u>destrógiros</u> ou <u>levógiros</u>. São destrógiros, por exemplo, os sistemas da fig. 3. Sua característica é a seguinte: para fazer coincidir o semi-eixo positivo primário com o secundário, necessita-se girá-lo no sentido trigonométrico do ponto de vista de uma hipotético observador que,apoiado na origem, estivesse orientado segundo o semi-eixo positivo terciário. Nos sistemas levógiros essa rotação dar-se-ia no sentido oposto (horário). Assim, rotações fundamentais são positivas quando processadas nos sentidos trigonométrico e horário, para os sistemas destrógiros e levógiros, respectivamente.

Caso as polaridades dos sistemas da fig. 3 fossem opostas, digamos $[x_1 y_1 z_1]$ levógiro e $[x_2 y_2 z_2]$ destrógiro, a equação de transformação (2.2) deveria ser reformulada. Uma possível forma para a equação resultante seria:

$$\vec{r}_2 = \vec{T} + R(\omega,\psi,\varepsilon) P_1 \vec{r}_1$$

onde P_1 simboliza u'a matriz de reflexão primária; seu efeito é o de inversão da orientação do eixo primário, sendo dada por:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4\text{-a})$$

A reflexão poderia arbitrariamente ser aplicada a priori ou a posteriori

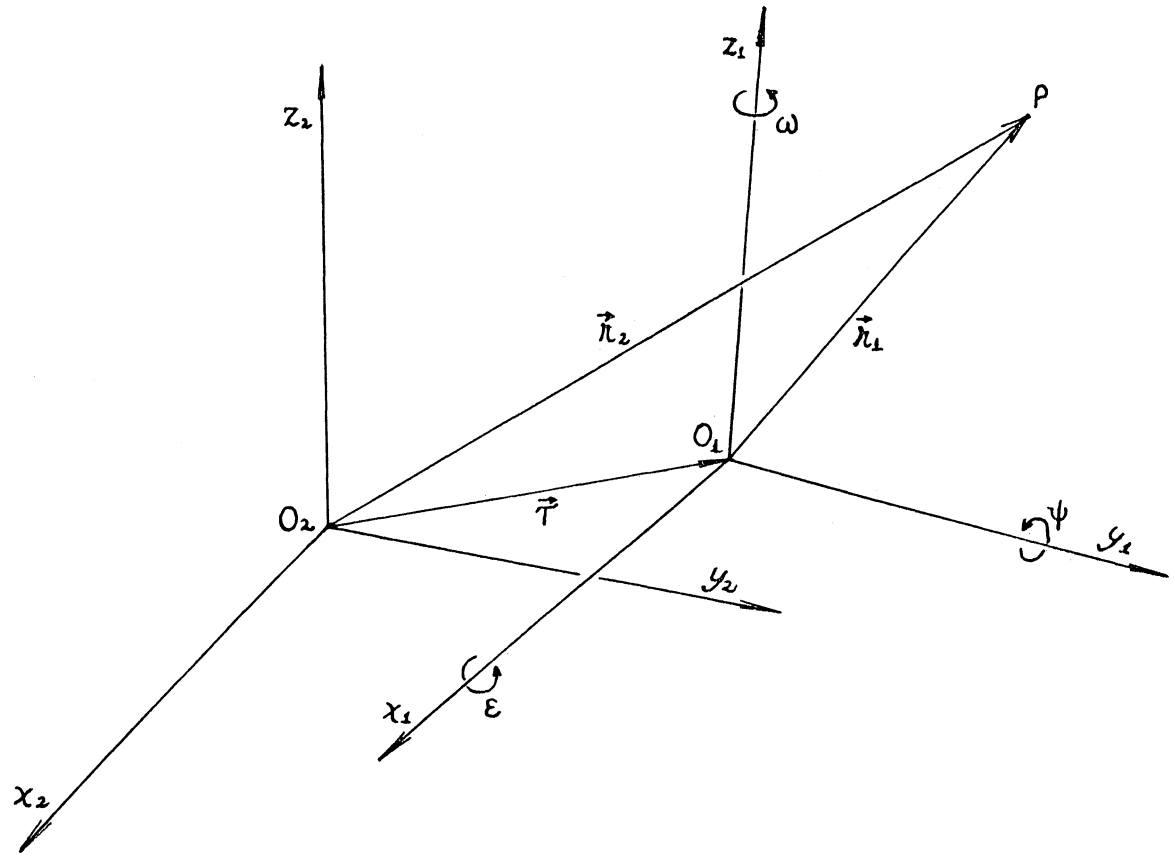


FIG. 3 - TRANSFORMAÇÃO COORDENADA ENTRE
SISTEMAS CARTESIANOS TRI-ORTOGONAIS

das rotações.

Nas duas próximas divisões introduzem-se dois grandes grupos de sistemas coordenados ou referenciais geodésicos: o dos naturais e o dos convencionais , de acordo com terminologia proposta por *Vaníček, P. & Wells, D. E.*(1974).

2.2 - SISTEMAS GEODÉSICOS NATURAIS

Recebem a denominação de sistemas geodésicos naturais, no presente contexto, os referenciais solidários à Terra e intrinsecamente relacionados com certas características físicas do planeta, às quais passaremos a nos referir como propriedades naturais. Antes de introduzirmos as definições dos sistemas geodésicos naturais de interesse, portanto, faremos uma abordagem objetiva das chamadas propriedades naturais. Ao leitor interessado em iniciação matemática neste campo, recomendamos *Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967) ou *Torge, W.*(1980).

Todo corpo em repouso sobre a superfície da Terra encontra-se submetido à resultante de uma composição vetorial de duas forças: a gravitacional e a centrífuga. A primeira, de natureza atrativa, obedece à conhecida lei newtoniana da gravitação universal, estando orientada para a região interior da Terra. A segunda, de magnitude bem inferior à da força gravitacional, decorre do movimento de rotação do planeta, estando direcionada perpendicularmente ao eixo de rotação e orientada em sentido a ele oposto. Da citada força resultante, suposta exercida sobre uma partícula de massa m[(1)], origina-se o conceito de gravidade ($\vec{g}$), vetor produto daquela força pelo escalar 1/m. O vetor $\vec{g}$ representa portanto uma aceleração, à luz da 2ª lei de Newton.

O campo vetorial definido em cada ponto do espaço pelo vetor gravidade é conhecido sob a denominação de campo gravífico (ou campo da gravidade terrestre). Uma característica notória do campo gravífico é o fato dele ser conservativo, ou seja, de existir uma função escalar W tal que, para um certo sistema coordenado cartesiano [xyz] solidário à Terra e em princípio arbitrário, verifique-se em cada ponto do espaço a relação:

$$\vec{g} = \text{grad } W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right) \qquad (2.5)$$

A função W = W (x, y, z) é conhecida como potencial gravífico (ou geopotencial). Uma propriedade matemática bastante conhecida do cálculo vetorial nos permite inferir, da relação (2.5), a importante noção de perpendicularismo entre o vetor gravidade relativo a um certo ponto do espaço e a superfície W =cte. que contém o mesmo ponto. As superfícies assim equacionáveis denominam-se equipo

(1) Poderíamos conceber tal partícula, imaginando a concentração de toda a matéria do corpo de massa m em seu centro de massa.

tenciais, ou superfícies de nível. Linhas de força são curvas que interceptam perpendicularmente as infinitas equipotenciais; vale dizer, então, que a direção do vetor gravidade coincide com a da linha de força em cada ponto do campo gravífico. A reta que tangencia uma linha de força num ponto, apresentando portanto a direção do vetor gravidade a ele associado, denomina-se vertical do ponto.

Face à distribuição heterogênea de massas no interior da Terra, as linhas de força são na realidade curvas reversas no espaço. Sua configuração geométrica reflete, mais intensamente na vizinhança da superfície topográfica, os excessos e vazios de massa da crosta terrestre. Com isso, a reta suporte do vetor gravidade em cada ponto da superfície topográfica não intercepta, necessariamente, o eixo terrestre de rotação. As infinitas equipotenciais do campo gravífico vão refletir, por seu turno, essa complexidade de configuração geométrica das linhas de força.

Suponhamos agora que as águas oceânicas constituissem massa líquida livre e homogênea, de tal forma que a única força de ação à distância sobre ela atuante fosse a da gravidade. Em estado de equilíbrio dinâmico, a superfície desse oceano hipotético, que poderíamos inclusive supor estendendo-se por sob os continentes através de um sistema de tubos comunicantes, estaria materializando uma equipotencial do campo gravífico. Esta particular superfície de nível chegou a ser proposta por C. F. *Gauss* (1777-1855) como *"figura matemática da Terra"*, tendo posteriormente recebido a denominação de geóide. Apesar de sofisticadas teorias modernas sobre a determinação da superfície física da Terra relegarem o conceito de geóide a um segundo plano, sua relevância prática permanece inalterada como veremos adiante.

As medições geodésicas clássicas realizadas sobre a superfície topográfica estão quase que exclusivamente referidas ao sistema implícito às linhas de força (curvas coordenadas) e superfícies equipotenciais (superfícies coordenadas) do campo gravífico, no qual se destaca o conceito de geóide. Trata-se de um sistema coordenado curvilíneo natural, de forte significação física, relativamente ao qual serão definidas as chamadas coordenadas naturais, como veremos na seqüência.

2.2.1 - COORDENADAS NATURAIS - SISTEMA TERRESTRE INSTANTÂNEO

Considere-se inicialmente um ponto P qualquer da superfície física da Terra (fig. 4) e uma reta que o contenha, sendo paralela ao eixo de rotação do planeta. Esta paralela e a vertical do ponto, nele concorrentes, defi

nem em P um plano solidário à Terra, denominado meridiano astronômico ou, simplesmente, meridiano de P.

Define-se então a latitude astronômica (Φ) de P como sendo o ângulo medido no meridiano astronômico do ponto, entre a sua vertical e o plano equatorial (normal ao eixo de rotação pelo centro de massa da Terra), positivo ou negativo conforme P encontre-se no hemisfério norte ou sul, respectivamente. O campo de variação de Φ é $[-90^{o}, 90^{o}]$.

A longitude astronômica (Λ) de P corresponde, por seu turno, ao retilíneo do diedro formado pelo meridiano do ponto e um segundo plano conhecido como meridiano de Greenwich, arbitrariamente adotado como superfície de referência para medição de longitudes. Este plano origem não se define segundo a maneira usual de um meridiano astronômico qualquer. Ele contém o eixo de rotação e uma certa *"posição média"* de Greenwich, estabelecida não ao nível de latitude do velho observatório inglês, antiga referência de longitudes, mas ao nível do plano equatorial. Voltaremos a nos referir à *"posição média"* de Greenwich mais pormenorizadamente em 2.2.3. Por enquanto, basta admitir-se o plano por ela definido juntamente com o eixo de rotação, como uma superfície de referência convencional para medição de longitudes. (Em termos mais precisos, a longitude astronômica de P é medida entre dois semi-planos: o semi-meridiano convencional de Greenwich e o semi-meridiano astronômico de P). Quanto à convenção de sinal para Λ, adota-se aqui a seguinte: positiva ou negativa conforme P encontre-se a leste ou oeste de Greenwich, respectivamente. Nesse caso, o campo de variação correspondente é $[-180^{o}, 180^{o})$.

As grandezas astronômicas Φ e Λ constituem duas das três coordenadas naturais de P. O posicionamento espacial do ponto se completa então com a inclusão de sua altitude ortométrica (H), cujo módulo é dado pela distância linear do ponto ao geóide, considerada ao longo da linha de força que o contém; positiva ou negativa conforme P seja exterior ou interior ao geóide, respectivamente. A tradução matemática dessa definição expressa-se através do quociente entre o número geopotencial de P —dado pela diferença entre os geopotenciais do geóide e da superfície de nível que contém o ponto —, e o valor médio da gravidade ao longo da linha de força de P, determinado entre este ponto e o geóide. Assim, ao contrário do que se poderia supor,o conceito de H não é puramente geométrico. (O cálculo do referido valor médio subentende uma integração).

Evidencia-se portanto o papel de datum natural, referência de altitudes, exercido pelo geóide no sistema coordenado de linhas de força e equipoten

ciais do campo gravífico. À luz do próprio conceito de geóide, as altitudes ortométricas são, usual e imprecisamente, referidas como elevações sobre o "nível médio dos mares" (n.m.m).

As coordenadas naturais caracterizam-se pelo fato de serem passíveis de obtenção por via direta, na medida em que vinculam-se essencialmente às propriedades naturais da Terra. A observação, no tempo e no espaço, de certos parâmetros associados ao movimento de corpos celestes naturais (em geral o sol ou as estrelas) possibilita, conjugadamente com o conhecimento das posições desses astros ao longo do tempo, num certo sistema coordenado celeste, a obtenção de coordenadas astronômicas (Φ, Λ) ponto a ponto da superfície terrestre. Quanto à obtenção de altitudes ortométricas, seremos mais específicos na divisão 2.4, particularmente em 2.4.1.

Define-se afinal o chamado Sistema Terrestre Instantâneo (TI), representado na fig. 4 por $[x_{TI}\ y_{TI}\ z_{TI}]$. Trata-se, podemos dizer, de um sistema cartesiano implicitamente associado ao curvilíneo natural em que se obtêm as coordenadas astronômicas Φ e Λ. Temos então:

– Origem coincidente com o centro de massa da Terra, o que o caracteriza como um sistema geocêntrico.

– Eixo terciário coincidente com o eixo terrestre de rotação, sendo orientado positivamente para o pólo norte. (O plano primário corresponde portanto ao próprio plano equatorial).

– Plano secundário estabelecido pelo meridiano de Greenwich, sendo que a orientação positiva do eixo primário é definida pelo semi-plano secundário que contêm a *"posição média"* de Greenwich.

– Polaridade: destrógira.

2.2.2 - SISTEMA ASTRONÔMICO LOCAL

O Sistema Astronômico Local (AL) é também um sistema coordenado cartesiano, muito embora nosso principal interesse em sua apresentação recaia sobre coordenadas esféricas a ele associadas.

A definição do AL, representado por $[x_{AL}\ y_{AL}\ z_{AL}]$ na fig. 5, é a seguinte:

– Origem coincidente com um ponto P qualquer da superfície topográfica, o que o caracteriza como um sistema topocêntrico.

– Eixo terciário coincidente com a vertical de P e orientado positivamente para o exterior da equipotencial que contêm aquele ponto. (O plano primário tangencia portanto a equipotencial na origem do sistema; recebe

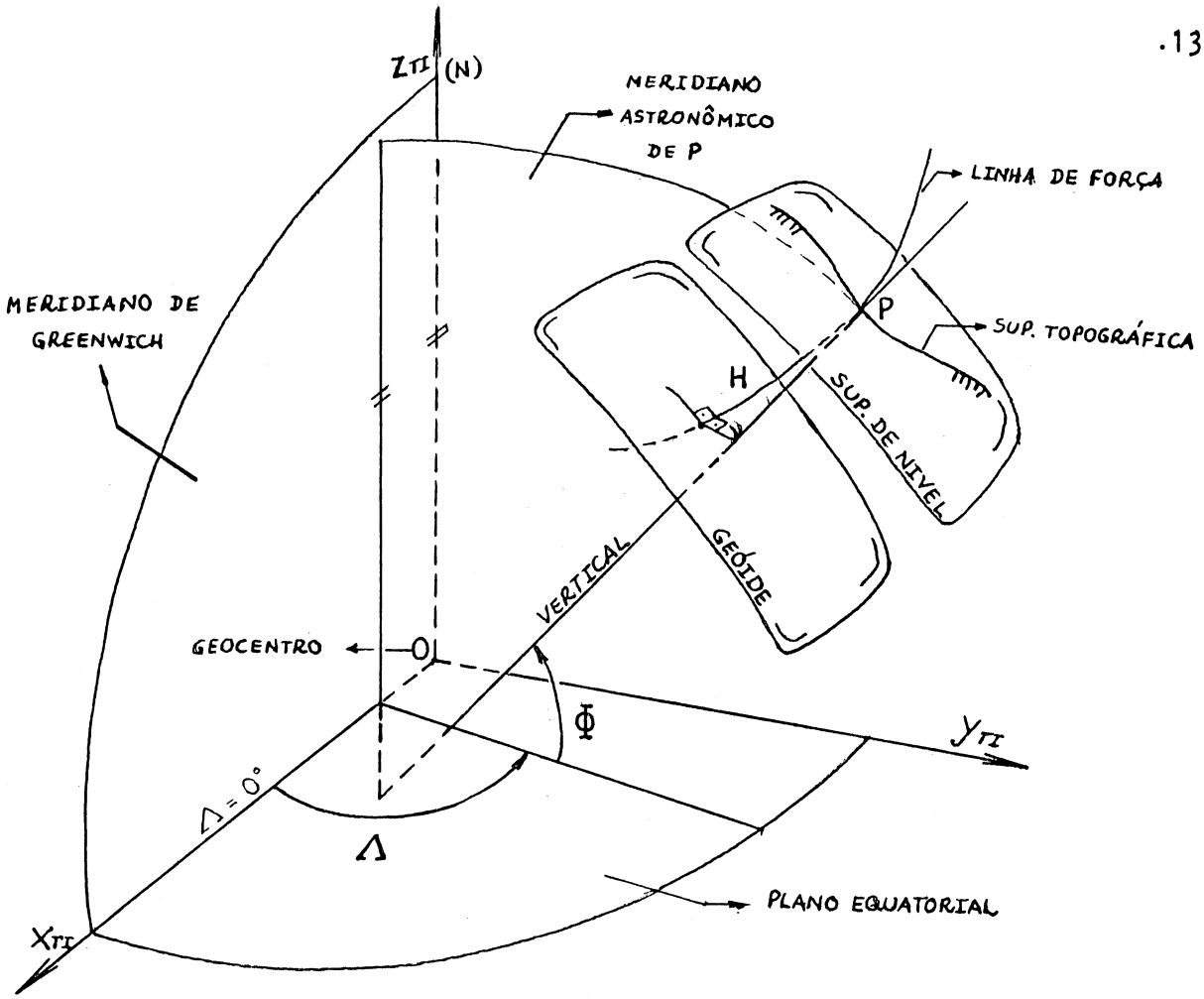


FIG. 4 - COORDENADAS NATURAIS

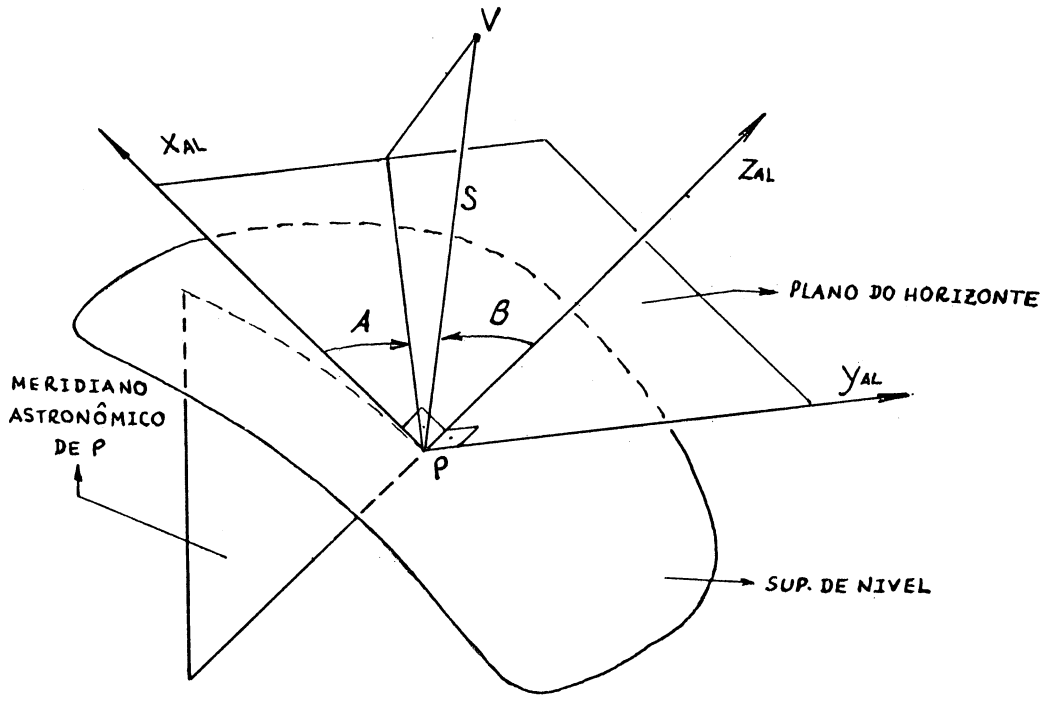


FIG. 5 - SISTEMA ASTRONÔMICO LOCAL

a denominação de plano do horizonte de P).

— Plano secundário correspondente ao meridiano astronômico de P. Orienta-se o eixo primário positivamente para o norte.

— Polaridade: levógira.

As medições geodésicas terrestres ficam particularmente bem representadas no AL. Elas constituem, para cada estação origem P, um terno coordenado esférico relativo a uma segunda estação V, visível de P. As estações P eV correspondem, respectivamente, a ponto de observação e ponto observado.

Antes de introduzirmos as coordenadas esféricas associadas ao AL, apresentaremos o conceito de plano vertical: qualquer plano que contenha a vertical de um ponto da superfície terrestre é dito plano vertical no ponto. Exemplos notáveis dessa categoria de plano são o meridiano e o primeiro vertical astronômico, sendo este definido como um plano vertical perpendicular ao primeiro. Isso posto, passemos às coordenadas esféricas acima referidas:

— Distância espacial (S): é o comprimento do segmento de reta $\overline{PV}$.

— Distância zenital (B): é o ângulo medido no plano vertical em P que contém o ponto observado V, entre a vertical de P e o vetor-posição $\vec{PV}$, sendo a direção origem a do semi-eixo terciário positivo do AL. Seu intervalo de variação é $[0^o, 180^o]$.

— Azimute astronômico (A): é o ângulo medido no plano do horizonte de P, entre o meridiano astronômico desse ponto e o plano vertical em P que contém o ponto observado V, sendo a direção origem a do semi-eixo primário positivo do AL. Sua variação pode se dar, opcionalmente, nos seguintes campos reais: $[0^o, 360^o)$ ou $[0^o, 180^o]$, caso V esteja a leste de P e $[0^o, -180^o)$, caso V esteja a oeste de P.

Distâncias espaciais são observadas diretamente através dos conhecidos medidores eletrônicos de distâncias. Distâncias zenitais são observadas também diretamente, através de teodolitos apropriados. Quanto a azimutes astronômicos, sua técnica de obtenção é similar à das demais grandezas astronômicas, Φ e Δ, baseando-se na observação direta do movimento de corpos celestes naturais.

2.2.3 - MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA - SISTEMA TERRESTRE MÉDIO

Numa primeira abordagem é usual admitir-se a Terra girando em torno de um eixo de rotação fixo em relação ao seu corpo e a uma velocidade angular de módulo constante. Mas na verdade, nem o eixo terrestre de rotação se mantém fixo em relação ao planeta, nem o módulo da velocidade angular permanece constante.

Os eixos terrestres de rotação e de máxima inércia não coincidem. Dessa discrepância resulta o fato do eixo de rotação não ser fixo em relação à Terra. A variação temporal de sua posição no espaço origina o fenômeno conhecido como movimento do pólo. Trata-se de um movimento migratório, aproximadamente circular e de sentido anti-horário(se observado do norte), descrito sobre a superfície terrestre pelo ponto(norte) de interseção do eixo de rotação com essa superfície. A amplitude do movimento do pólo atinge cerca de cinco metros e seu período principal (de Chandler) é de aproximadamente 430 dias.

A conseqüência mais importante, neste contexto, da variação direcional do eixo terrestre de rotação reside no fato dela afetar diretamente as grandezas naturais astronômicas Φ, Λ e A. Dessa constatação decorre a necessidade de se reduzir latitudes, longitudes e azimutes astronômicos a uma época comum de referência, o que equivale a fixar o TI no tempo. Isso é feito de u'a maneira estritamente convencional, da qual decorre a definição de Sistema Terrestre Médio (TM), como veremos com as explicações que se seguem.

Duas organizações internacionais, o IPMS ("*International Polar Motion Service*") e o BIH ("*Bureau International de l'Heure*") determinam rotineiramente o movimento do pólo através de observações astronômicas. Os resultados são publicados periodicamente na forma de pares coordenados (x_p, y_p) do pólo instantâneo p (fig.6), em relação a um sistema cartesiano plano cuja origem é um ponto fixo da superfície terrestre, definido pelas coordenadas médias dos cinco observatórios principais do antigo ILS ("*International Latitude Service*"), atual IPMS, no período 1900 a 1906.0. Esse "pólo médio" recebe a denominação de CIO ("*Conventional International Origin*"). Ele estabelece, com o centro de massa da Terra, um "eixo médio" convencional de rotação (z), invariável no tempo, ao contrário do eixo real de rotação (z_{TI}).

Outras irregularidades no movimento de rotação da Terra têm sido detectadas nas últimas décadas. Elas provocam variações na velocidade de rotação do planeta, classificando-se basicamente em três categorias, a saber: variações periódicas ou sazonais,para as quais provavelmente concorrem fatores de origem meteorológica, além das marés; decréscimo secular, decorrente de um fenômeno de atrito originado nas marés e variações irregulares de causas diversificadas. Dessas, as variações periódicas apresentam-se como as mais significativas sendo as únicas, atualmente, passíveis de modelagem. Assim, principalmente em decorrência delas,os meridianos astronômicos não giram uniformemente, surgindo daí a necessidade de se definir um meridiano origem para longitudes astronômicas, que não seja afetado pelas variações periódi-

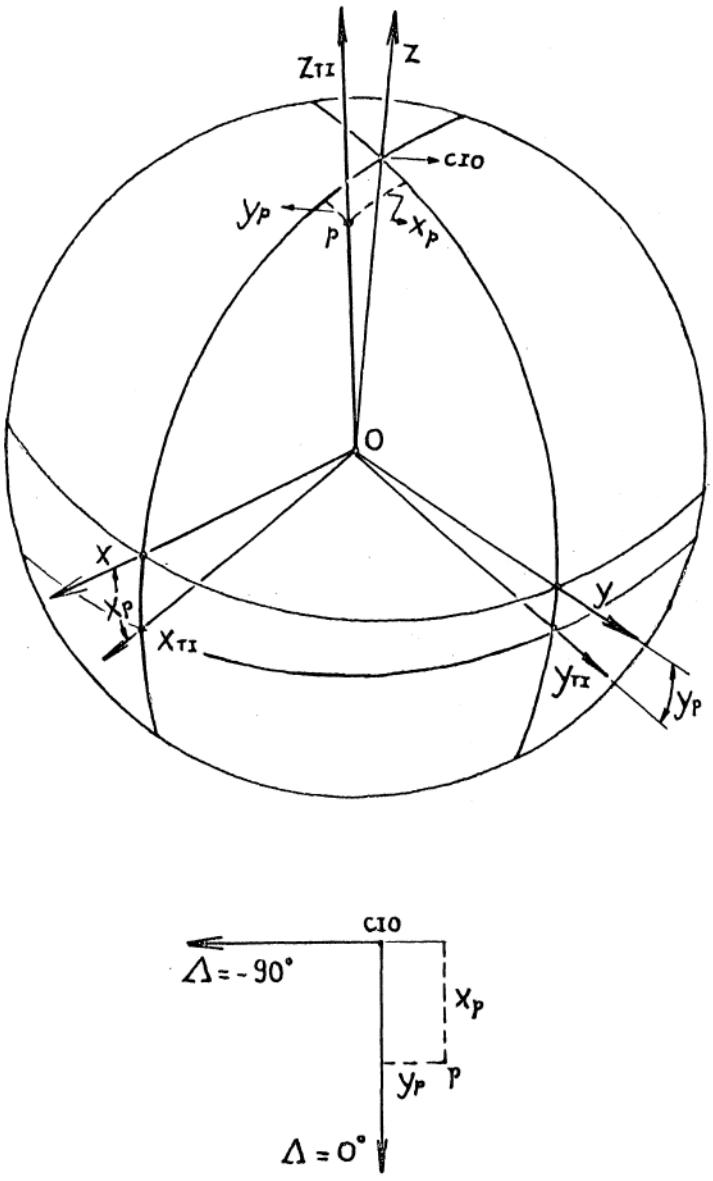


FIG. 6 - TRANSFORMAÇÃO COORDENADA TI → TM

cas em seu movimento de rotação. O chamado meridiano médio de Greenwich preenche tal necessidade sendo que em sua definição, estabelecida pelo BIH, considera-se também o efeito do movimento do pólo. Ele fica determinado, destarte, pelo *"eixo médio"* convencional fixado pelo CIO e a já mencionada (2.2.1) *"posição média"* de Greenwich, que se define ao nível do plano equatorial, já corrigida de variações sazonais.

Isso posto, passemos à definição do TM, representado na fig. 6 por [xyz]:

– Origem coincidente com o centro de massa da Terra (sistema geocêntrico).

– Eixo terciário coincidente com o *"eixo médio"* convencional fixado pelo CIO; orienta-se positivamente para o norte. (O plano primário recebe a denominação de plano equatorial médio).

– Plano secundário estabelecido pelo meridiano médio de Greenwich, sendo a orientação positiva do eixo primário definida pelo semi-plano secundário que contém a *"posição média"* de Greenwich.

Ao contrário do efeito das variações periódicas, o do movimento do pólo varia com a posição geográfica de cada estação terrestre. É modelado através da transformação coordenada TI →TM. Os pares coordenados (xp, yp) representam os parâmetros de transformação que na prática são aplicados diretamente sobre as grandezas astronômicas Φ, Λ e A, mediante equações de transformação que podem ser encontradas em *Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pg. 189.

É notório o fato do TM tratar-se de um referencial definido com base em certas convenções arbitrárias; inclusive modernamente vem sendo denominado Sistema Terrestre Convencional (*Vaníček, P. & Krakiwsky, E. J.* (1982), pg. 296). Todavia ele é definido basicamente em função da necessidade de redução das grandezas naturais astronômicas a uma época comum de referência, aparecendo portanto com um sistema *"semi-natural"*, conforme colocado por *Vaníček, P.* (1975), pg. 10. Por outro lado, a motivação das convenções adotadas na definição do TM difere por completo da inerente aos aqui denominados sistemas geodésicos convencionais, como veremos na seqüência. Justifica-se, destarte, a inclusão do TM no contexto dos sistemas geodésicos naturais.

2.3 - SISTEMAS GEODÉSICOS CONVENCIONAIS

Ao contrário de seus correspondentes naturais, os sistemas geodésicos convencionais não se vinculam a propriedades do espaço físico. Eles são definidos de maneira essencialmente arbitrária, tendo em vista facilitar a manipula

ção matemática do problema fundamental de posicionamento de estações terrestres. Com efeito, a complexidade de equacionamento das equipotenciais e linhas de força do campo gravífico justifica o recurso à adoção de um certo sistema curvilíneo ortogonal, que viabilize a aplicação de modelos matemáticos simples para cômputo rápido e preciso de coordenadas geodésicas(convencionais) em larga escala. Em 2.4 veremos que através de operações geodésicas clássicas preenche-se tal objetivo apenas parcialmente, com a obtenção de coordenadas convencionais análogas às naturais astronômicas Φ e Λ.

O geóide foi introduzido em 2.2 como um datum natural no complexo sistema de equipotenciais e linhas de força do campo da gravidade. No sistema curvilíneo convencional correspondente ele será substituído por um elipsóide de revolução[2]. Conforme demonstrado por Newton, caso a Terra consistisse em uma massa fluída homogênea em movimento de rotação uniforme, ela assumiria a forma de um elipsóide de revolução. Trata-se da forma geométrica mais simples que proporciona melhor adaptação global ao geóide.

O Elipsoidal Geodésico e mais dois outros sistemas convencionais serão introduzidos no seguimento. Suas definições pressupõem a existência de um elipsóide de revolução, com o que torna-se necessário definir este sólido geométrico a priori. Ele é gerado pela rotação de uma elipse em torno de seu eixo menor. Sendo assim, os semi-eixos **a** (maior) e **b** (menor) da elipse são suficientes para caracterizá-lo. Em Geodésia porém, duas outras alternativas são mais comumente empregadas na fixação da dimensão e forma de um elipsóide de revolução, quais sejam:

a) Parâmetros **a** e **f**; f é achatamento do sólido, dado por:

$$f = 1 - (b/a) \qquad (2.6)$$

b) Parâmetros **a** e $\mathbf{e}^2$; $\mathbf{e}^2$ é o quadrado da excentricidade primeira do sólido, dado por:

$$e^2 = 1 - (b^2/a^2) = 2f - f^2 \qquad (2.7)$$

A caracterização de um sistema geodésico convencional exige que os parâmetros elipsóidicos (a, f) ou (a, e^2) sejam tais que proporcionem, global ou parcialmente, uma boa adaptação do elipsóide ao geóide. A motivação e a reali

---

(2) A expressão correta seria *"superfície de um elipsóide de revolução"*. Todavia consagrou-se o uso da expressão mais concisa do texto, que se refere na verdade a um sólido geométrico.

zação dessa exigência serão oportunamente esclarecidas. É suficiente por enquanto apenas admitir-se sua observância.

Com isso, passemos à apresentação dos chamados sistemas geodésicos convencionais, conjuntamente ilustrados na fig. 7.

2.3.1 - ELIPSOIDAL GEODÉSICO

Mais simplesmente conhecido como Sistema Geodésico (G), este primeiro sistema convencional é do tipo curvilíneo. O posicionamento de um ponto P qualquer da superfície física da Terra dá-se, nesse referencial, segundo regras inteiramente análogas às empregadas na definição de coordenadas naturais, considerando-se a substituição do geóide por um elipsóide de revolução e as conseqüências geométricas decorrentes desse fato.

Num sistema geodésico definem-se as normais elipsoidais e os meridianos geodésicos. As primeiras são retas perpendiculares ao elipsóide de revolução. Cada ponto do espaço pertence portanto a uma e somente uma normal elipsoidal que, por seu turno, intercepta necessariamente o eixo de revolução do elipsóide. O plano definido por este eixo com a normal traçada por um ponto qualquer do espaço é o meridiano geodésico do ponto, que se divide em dois semi-planos meridianos a partir do eixo de revolução.

O primeiro vertical geodésico de um ponto guarda completa analogia com seu correspondente astronômico; trata-se, portanto, de um plano normal no ponto (i.e, que contém a normal elipsoidal do mesmo), sendo perpendicular ao correspondente meridiano geodésico. As elipses geradas pelas interseções de um meridiano e um primeiro vertical(geodésicos) com a superfície do elipsóide denominam-se seções meridiana e primeiro vertical. Elas constituem, para cada ponto do espaço, as chamadas seções normais principais do elipsóide de revolução.

O chamado plano equatorial geodésico é o plano perpendicular ao eixo de revolução do elipsóide pelo centro geométrico deste. Ele divide o elipsóide em dois hemisférios perfeitamente simétricos que guardarão correspondência com os hemisférios norte e sul da Terra.

As definições das coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) de um ponto P qualquer da superfície física da Terra (fig. 7) são finalmente apresentadas abaixo:

– Latitude geodésica (ϕ): é o ângulo medido no meridiano geodésico de P, entre a normal elipsoidal do ponto e o plano equatorial geodésico. Apresenta convenção de sinal e campo de variação idênticos aos da latitude as

tronômica.

– Longitude geodésica (λ): é o retilíneo do diedro entre o semi-plano meridiano geodésico de P e um semi-plano meridiano geodésico qualquer, simplesmente adotado como superfície de referência para medição de longitudes convencionais (função análoga à do semi-plano meridiano de Greenwich na definição de longitude astronômica. A convenção de sinal para λ apresenta inteira correspondência com a de Λ, sendo idênticos os campos de variação dos dois tipos de longitude.

– Altitude geométrica (h): também denominada altura elipsoidal. Corresponde à distância linear de P à superfície do elipsóide, medida ao longo da normal elipsoidal do ponto, positiva ou negativa conforme P seja exterior ou interior ao elipsóide respectivamente.

2.3.2 - CARTESIANO GEODÉSICO

Extremamente importante neste contexto, o Sistema Cartesiano Geodésico (CG) aparece representado como [uvw] na fig. 7. Sua definição é a seguinte:

– Origem coincidente com o centro geométrico do elipsóide.

– Eixo terciário coincidente com o eixo de revolução do elipsóide, Sua orientação positiva é para o norte. (O plano primário corresponde portanto ao equatorial geodésico).

– Plano secundário: é o que contém o semi-plano meridiano de referência de longitudes geodésicas; o semi-eixo primário positivo está contido naquele semi-plano.

– Polaridade: destrógira.

A transformação coordenada G → CG realiza-se através da conhecida equação de transformação abaixo:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi & \cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi & \operatorname{sen}\lambda \\ [N(1-e^2)+h]\operatorname{sen}\phi & \end{bmatrix}, \qquad (2.8)$$

onde

$$N = \frac{a}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\phi)^{1/2}} \qquad (2.9)$$

corresponde à chamada grande normal do ponto, geometricamente definida como o raio de curvatura da seção primeiro vertical a ele relativa; a e e^2 já foram definidos.

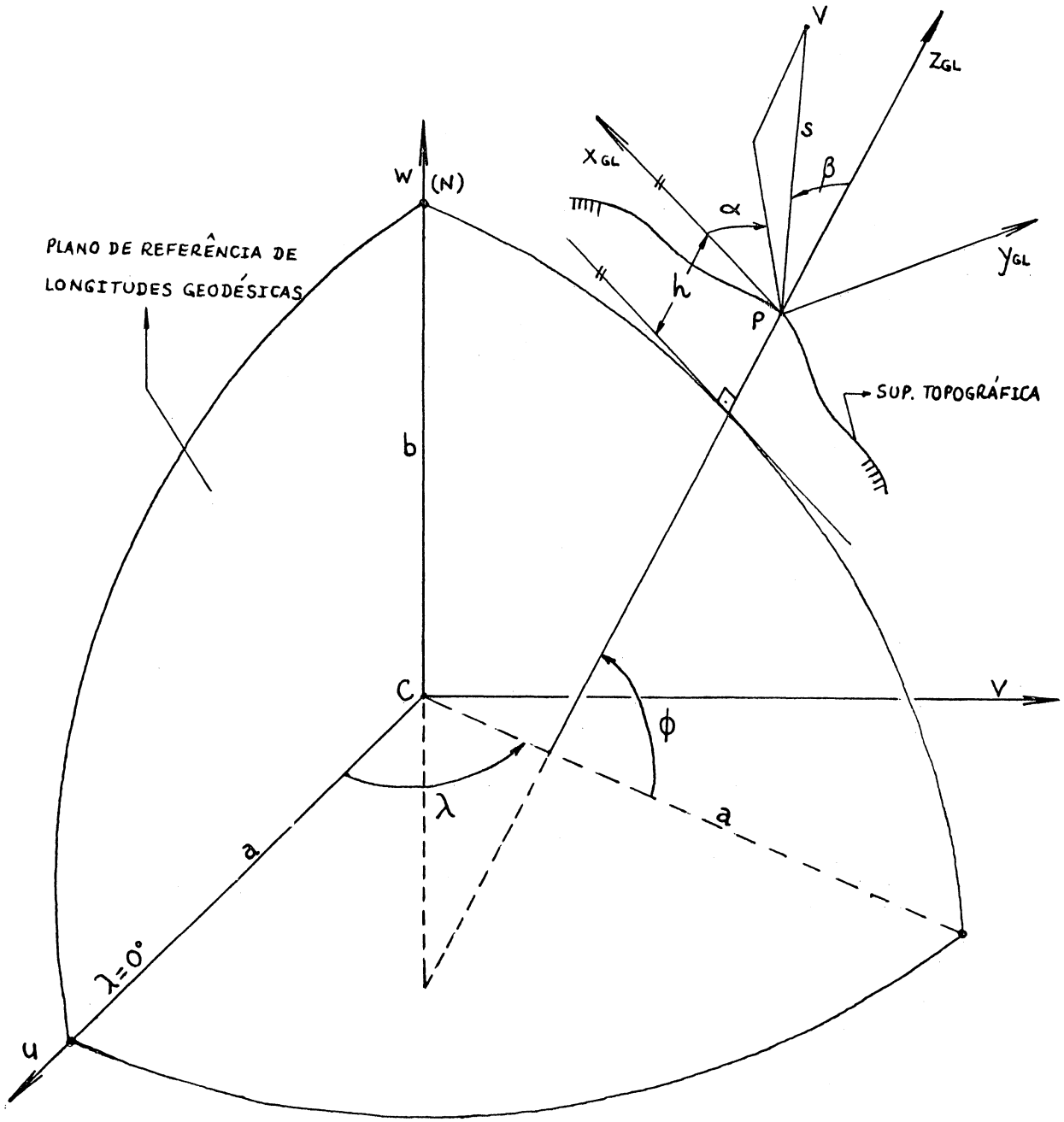


FIG. 7 - SISTEMAS GEODÉSICOS CONVENCIONAIS

A transformação coordenada inversa, *i.e.*, CG → G não é tão imediata, sendo a latitude ϕ usualmente determinada por processos iterativos. Embora exista recurso de cálculo de ϕ por fórmula fechada (*Paul, K.* (1973)), uma opção mais vantajosa parece-nos a apresentada em *Bowring, B. R.* (1976), onde se propõe uma fórmula muito simples para cálculo de latitude geodésica e que, apesar de teoricamente utilizável apenas segundo um processo iterativo, proporciona o valor final de ϕ já no primeiro passo para todas as aplicações na faixa $-5000\,m < h < 10.000\,m$; vale dizer, todas as aplicações correntes possíveis em Geodésia. Transcrevemos abaixo a solução de *Bowring* (ibid.):

$$\phi = \arctan\left(\frac{w + e'^2\, b\, \mathrm{sen}^3\rho}{\sqrt{u^2 + v^2} - e^2\, a\, \cos^3\rho}\right) \qquad (2.10)$$

onde e'^2 representa o quadrado da excentricidade segunda do elipsóide, calculável pela fórmula

$$e'^2 = (a^2/b^2) - 1, \qquad (2.11)$$

e ρ representa a latitude reduzida do ponto, grandeza essa dependente da própria latitude geodésica ϕ, mas que pode ser calculada com precisão sucifiente para uma única aplicação da (2.10), dentro da faixa de altura h acima referida, pela seguinte aproximação:

$$\rho = \arctan\left[\left(\frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\right] \qquad (2.12)$$

O cálculo da longitude geodésica independe de ϕ mas requer o cuidado de uma análise de quadrante; a fórmula é imediata:

$$\lambda = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \qquad (2.13)$$

O cálculo da altura elipsoidal, por seu turno, requer a obtenção prévia de ϕ, como vemos abaixo:

$$h = \sqrt{u^2 + v^2}\ \sec\phi - N, \qquad (2.14)$$

onde N é dado pela (2.9).

2.3.3 - GEODÉSICO LOCAL

Trata-se de um sistema cartesiano que se pode definir em analogia com o AL, bastando para tanto admitir-se a coincidência entre as origens dos dois sistemas. A cada ponto da superfície topográfica e do espaço de pon-

tos, numa concepção mais abrangente –, pode-se associar um sistema do tipo Geodésico Local (GL), tanto quanto um AL. Caracterizemos então um sistema GL, de acordo com a fig. 7, onde consta respresentado por $[x_{GL}\ y_{GL}\ z_{GL}]$:

– Origem: vamos admití-la coincidente com um ponto P qualquer da superfície topográfica.

– Eixo terciário coincidente com a normal elipsoidal de P e orientado positivamente para o exterior do elipsóide de revolução. (O plano primário contém P e é perpendicular ao eixo terciário).

– Plano secundário correspondente ao meridiano geodésico de P. Orienta-se o eixo primário positivamente para o norte.

– Polaridade: levógira.

Em completa analogia com o AL, interessam-nos na realidade certas coordenadas esféricas associadas ao GL. Assim, considerando-se um determinado ponto V, visível de P, define-se o terno esférico (S, β, α) correspondente a V, de acordo com os seguintes conceitos:

– Distância espacial (S): vide 2.2.2.

– Distância zenital geodésica (β): é o ângulo medido no plano normal em P que contém V, entre a normal elipsoidal de P e o vetor-posição $\vec{PV}$, tomando-se por direção origem a do semi-eixo terciário positivo do GL. Seu campo de variação é dado por $[0^0, 180^0]$.

– Azimute geodésico (α): é o ângulo medido no plano primário do GL, entre o meridiano geodésico de P e o plano normal em P que contém V, tendo por direção origem a do semi-eixo primário positivo do GL. Repetem-se para seu campo de variação as alternativas apresentadas para o azimute astronômico (A) em 2.2.2.

2.4 - MATERIALIZAÇÃO DE SISTEMAS GEODÉSICOS

Os diversos referenciais geodésicos introduzidos atuam basicamente como sistemas coordenados em relação aos quais determinam-se as posições de pontos da superfície física da Terra, naquela que representa uma das principais operações de Geodésia, e cujo objetivo último é a determinação daquela superfície. Impõe-se portanto a necessidade de ocupação, para observações e monumentação, de conjuntos de pontos da superfície topográfica, selecionados mediante determinados critérios, e cujas coordenadas relativas a um ou mais sistemas geodésicos sejam de alguma forma obtidas. Esses conjuntos de estações terrestres constituem as chamadas malhas ou redes geodésicas, que idealmente deveriam pro

porcionar uma possível forma de representação (puntual) da superfície física do planeta, claro que tão mais abrangente quanto maior a área coberta pelas estações e tão mais rigorosa quanto maior a densidade de distribuição das mesmas (por razões óbvias nosso interesse presente recai exclusivamente no posicionamento de pontos da superfície topográfica, mas convém ressaltar que a descrição da superfície e do fundo dos oceanos é também objeto de estudo em Geodésia). Em tese é válido afirmar que as redes constituem instrumentos de materialização dos sistemas geodésicos.

Didaticamente podemos classificar as redes geodésicas em três categorias, dependendo do tipo de posicionamento realizado para suas estações. As duas primeiras correspondem às clássicas redes verticais e redes horizontais. Veremos a seguir que a informação de posicionamento inerente a cada estação, nos dois casos, mostra-se incompleta na medida em que não tridimensional. Essa deficiência característica das redes clássicas busca-se superar mediante a constituição das chamadas redes geodésicas tridimensionais, de acordo com alternativas que serão abordadas em 2.4.2.

2.4.1 - REDES GEODÉSICAS CLÁSSICAS

Conjuntos de estações terrestres para cada uma das quais se determina com precisão apenas sua altitude ortométrica (H), constituem as redes altimétricas ou verticais. Se nesta assertiva substituirmos "altitude ortométrica (H)" por "pares coordenados (ϕ,λ) relativos a um certo sistema elipsoidal geodésico pré-definido", teremos caracterizado as redes planimétricas ou horizontais.[3] O motivo dessa disjunção é eminentemente histórico porquanto no passado eramais vantajoso, tanto no aspecto operacional quanto no econômico, proceder-se a determinações altimétricas e planimétricas separadamente. Com efeito, as observações de campo necessárias em cada caso são completamente distintas, além de ser fraca a influência mútua entre coordenadas altimétricas H e bidimensionais (ϕ, λ). É evidente contudo que as estações de uma rede vertical devem dispor de pares coordenados (ϕ, λ) referentes a algum sistema geodésico, ainda que imprecisos, de maneira a possibilitar sua representação cartográfica. E também altitudes aproximadas das estações de uma rede horizontal são necessárias, no caso para viabilizar certos procedimentos de reduções de observações (voltaremos a este assunto adiante). Em suma, no que concerne ao rigor de precisão de coorde

(3) Note-se a imprecisão de tais expressões. São adotadas ante a inexistência de termos concisos mais adequados, bem como pelo seu uso já consagrado.

nadas no âmbito das redes clássicas, prevalecem as altimétricas no caso das redes verticais e as bidimensionais(ϕ,λ) no caso das horizontais.

Nos três parágrafos seguintes analisaremos mais detidamente as redes geodésicas verticais e a questão de definição de um referencial altimétrico:

Já introduzimos o geóide como datum natural do campo gravífico, superfície de referência para altitudes ortométricas. Daí a denominação que lhe atribuem *Vaníček, P. & Krakiúsky, E. J.*(1982), pg. 98: datum geodésico vertical. Na prática é mister materializá-lo de alguma forma mediante a qual sejam especificados um ou mais pontos com altitude ortométrica nula (H=0), de maneira que a esses pontos altimetricamente definidos possa-se então vincular uma rede vertical numa região qualquer de interesse. A técnica empregada com tal finalidade é a da observação e registro, no decurso de um intervalo de tempo bem definido, das variações do nível da superfície oceânica, através de instrumentos especiais - os marégrafos -, que são instalados ao longo de linhas costeiras. Porém, esse procedimento de materialização do nível médio dos mares está sujeito a tendenciosidades regionais, oriundas tanto de fenômenos oceânicos quanto de feições geológico-estruturais, que originam o chamado "erro de zero", discrepância entre o ponto de cota nula resultante de observações maregráficas, e o geóide. É possível, mediante certo tratamento matemático, reduzir a magnitude do "erro de zero" à faixa de $\pm$ (1 a 2m). Mas na realidade ele não impede o estabelecimento de redes verticais com elevada consistência interna, pois reflete tão somente a maior ou menor exatidão da referência altimétrica. Assim, através de procedimentos específicos que serão abordados nos dois parágrafos seguintes é possível obter-se com grande precisão, elevações sobre o datum altimétrico resultante de observações maregráficas, independentemente da provável discrepância entre aquela referência e o geóide. Na verdade, sendo essa defasagem praticamente inevitável, pode-se afirmar que as altitudes das estações de uma rede vertical clássica não são rigorosamente ortométricas. Entretanto, prosseguiremos nos referindo àquelas grandezas como se altitudes ortométricas fossem, preservando assim uma forma de expressão já consagrada. No Brasil definiu-se a cota zero da rede altimétrica fundamental mediante observações maregráficas realizadas na baía de Imbituba, estado de Santa Catarina, em trabalho supervisionado pela Fundação IBGE.

As operações de campo que originam as principais informações necessárias ao transporte de altitudes ortométricas, a partir de estações já definidas altimetricamente, recebem a denominação geral de nivelamento. Existem três tipos de nivelamento: geométrico, trigonométrico e barométrico, dos quais o pri

meiro proporciona a mais elevada precisão (1ª ordem), sendo em geral conduzido ao longo de circuitos fechados que possibilitam um controle permanente da propagação de erros. No percurso de um circuito são implantadas as conhecidas referências de nível (RN's), pontos cotados correspondentes às extremidades de seções de nivelamento que normalmente acompanham diretrizes rodo ou ferroviárias. Em média, a extensão de uma seção de nivelamento é da ordem de 3 km, os quais se subdividem em segmentos de no máximo 200 m, denominados lances de nivelamento. Nestas unidades operacionais é que se realizam leituras a ré e a vante das cotas de interseção do plano horizontal estabelecido por um instrumento nivelador (nível), com réguas especiais (miras) verticalmente posicionadas nos pontos extremos. O nível é operado aproximadamente a meio lance de cada mira. Da diferença de leituras obtém-se o desnível entre os extremos de cada lance. Nos trabalhos mais rigorosos — 1ª ordem —, cada seção é nivelada nos dois sentidos, com o fechamento não podendo ultrapassar o limite de 3 mm $\sqrt{k}$, sendo k o comprimento em quilômetros da seção de nivelamento. Esse é apenas o resumo de uma rotina de campo que deveria culminar, em gabinete, num processo de ajustamento das observações pelo método dos mínimos quadrados, visando uma perfeita geometrização da rede altimétrica. Entretanto, isto só é possível desde que sejam depuradas, a priori, todas as influências sistemáticas típicas do nivelamento geométrico. Dentre essas tendenciosidades, certamente a mais relevante traduz-se na chamada correção ortométrica. Trata-se de uma parcela que deve ser agregada às diferenças de nível acumuladas em cada seção, a fim de se converte-las em diferenças de altitudes ortométricas. Sua obtenção rigorosa requer a realização de medidas de gravidade ao longo dos circuitos de nivelamento. A propósito, este procedimento é imprescindível à obtenção de altitudes ortométricas consoante sua definição, apresentada em 2.2.1, não tendo sido porém, observado na constituição da rede altimétrica de 1ª ordem do Brasil (vide 2.6-II. 2). Sobre esta, teceremos considerações específicas na divisão 3.4 do próximo capítulo.

As operações dos nivelamentos trigonométrico e barométrico normalmente são apoiadas em RN's. Ao contrário do nivelamento de alta precisão, o trigonométrico se adapta bem a topografias movimentadas, correspondendo à técnica mais usual para determinação das altitudes dos vértices de redes planimétricas. Pode ser executado alternativamente por dois métodos: visadas unilaterais, para o qual bastam um teodolito com círculo vertical e um alvo, ou visadas recíprocas simultâneas, realizável com dois teodolitos dotados de círculos verticais, operando simultaneamente. Sob condições operacionais adequadas, es

ta segunda técnica pode proporcionar precisão da ordem de ± 1 m por desnível entre estações afastadas em até 25 km (por cancelamento matemático ela praticamente elimina o problema crítico de refração vertical presente no primeiro método). Quanto ao nivelamento barométrico, trata-se de uma técnica de obtenção de desníveis entre estações da superfície topográfica a partir das diferenças de pressão atmosférica entre os pontos ocupados. Tais observações são realizadas mediante instrumentos conhecidos como barômetros aneróides. Ao nivelamento barométrico recorre-se em regiões onde o emprego das outras técnicas mostre-se inviável — caso da Amazônia, por exemplo —, bem como em trabalhos nos quais se admitam erros da ordem de 2 m por desnível determinado.

Tendo discorrido sobre redes verticais e a questão do referencial altimétrico, procederemos analogamente com respeito às redes horizontais:

Conforme ressaltado em sua caracterização, às redes horizontais clássicas vincula-se necessariamente um certo sistema elipsoidal geodésico. Sendo assim, o estabelecimento de uma rede horizontal implica na pré-definição de um elipsóide de revolução, ao qual estarão referenciadas as coordenadas bidimensionais das estações da rede. A tal elipsóide passaremos a nos referir, neste capítulo, como datum geodésico horizontal (d.g.h), mesma expressão utilizada em *Vaníček, P. & Krakiwsky, E. J.* (1982), pg. 99. Portanto, os pares coordenados (ϕ,λ) definem o conjunto de projeções normais das estações da rede sobre o d.g.h adotado — projeções de Helmert. Sua adequada obtenção pressupõe a realização das duas etapas básicas abaixo discriminadas, e a priori das quais vamos supor já definido o elipsóide a empregar:

1ª - Definição da situação espacial do elipsóide em relação à Terra, vale dizer, em relação ao TM. Esta etapa receberá, neste capítulo, a denominação de posicionamento e orientação de um datum geodésico horizontal. Levando-se em conta a pré-definição do elipsóide a empregar, ela complementa o estabelecimento do referencial geodésico dos pares coordenados (ϕ,λ). Será detidamente analisada na divisão 2.5.

2ª - Redução, ao d.g.h, das medidas geométricas de distâncias e direções (ou ângulos), realizados ao nível da superfície topográfica, tendo em vista a execução de um processo matemático de transporte de coordenadas (ϕ,λ) sobre o datum. Esta etapa será focalizada na divisão 2.6.

A título de complementação conceitual convém observar que, em decorrência dos inevitáveis erros de observação, a operação de transporte de coordenadas é realizada implicitamente com ou a posteriori de um processo

de ajustamento de observações, pelo método dos mínimos quadrados, tendo em vista uma distribuição criteriosa daqueles erros e a perfeita geometrização da rede implantada, num procedimento similar ao das redes altimétricas.

A definição da situação espacial de um d.g.h em relação à Terra é uma operação que classicamente se tem realizado com base em alguma injunção matemática pré-estabelecida, que assegure uma boa adaptação do respectivo elipsóide ao geóide, numa dada região de interesse. Conseqüência natural dessa imposição essencialmente relativa é a existência de diversos data estabelecidos para diferentes regiões da superfície terrestre (fig. 8). Este é o caso do SAD 69 (Datum Sul-Americano de 1969), referencial oficialmente adotado para uniformização dos trabalhos geodésicos e cartográficos desenvolvidos no continente sul-americano. Sistemas geodésicos como o SAD 69 apresentam algumas características em comum, a exemplo do não-geocentrismo decorrente da condição de boa adaptação localizada do elipsóide ao geóide. Surge daí o conceito de sistema geodésico regional (ou sistema quasi-geocêntrico).

As redes horizontais podem ser classificadas em diferentes ordens, de acordo com o nível de precisão almejado. As redes de 1ª ordem apresentam a mais elevada precisão de posicionamento relativo, vale dizer, de diferenças entre coordenadas de pontos da rede. Numa diferença equivalente a 10 km, por exemplo, o erro não pode ultrapassar 10 cm, ou seja, deve-se ter uma precisão relativa superior a 1/100.000. Técnicas e instrumentos modernos possibilitam níveis de precisão relativa ainda mais elevados, mas neste trabalho interessa-nos considerar somente 1ª ordem. O espaçamento característico entre estações adjacentes de redes horizontais de primeira ordem alcança dezenas de quilômetros, sendo a intervisibilidade das estações seu principal fator limitante.

Técnicas convencionais distintas podem ser empregadas no estabelecimento de uma rede horizontal, a saber: triangulação, poligonação e trilateração. Destas, apenas as duas primeiras vêm sendo utilizadas sistematicamente pelo IBGE, no preenchimento de seu encargo de implantação da chamada rede planimétrica fundamental do Brasil, arcabouço geodésico de 1ª ordem no qual se apóiam trabalhos de densificação planimétrica, a níveis inferiores de precisão, tendo em vista a confecção de documentos cartográficos de âmbito regional ou local. Na triangulação medem-se direções (ou ângulos), algumas distâncias (bases) e alguns azimutes astronômicos, ao passo que na poligonação medem-se ângulos e distâncias, além de alguns azimutes astronômicos.

Independentemente de técnicas de implantação, todas as redes horizontais clássicas apresentam uma característica em comum, qual seja: o acúmulo

irreversível de erros de observação à medida que aumentam as distâncias para uma certa estação fixa da rede — o ponto origem —, relativamente à qual encontra-se definido o posicionamento espacial do d.g.h, como veremos em 2.5. Essa tendência não é controlável sequer mediante o processo de ajustamento a que se submetem as redes. Assim, inevitavelmente a precisão absoluta de posicionamento ou exatidão, numa rede planimétrica clássica, tende a ser suplantada pela de posicionamento relativo (entenda-se que a exatidão de uma posição planimétrica resulte tão mais elevada, quanto mais perfeita for a correspondência entre o par coordenado (ϕ,λ) e a respectiva projeção de Helmert do ponto-físico sobre o d.g.h estabelecido). Essa mesma tendência aliás se observa também nas redes altimétricas, para as quais o(s) ponto(s) cotado(s) aprioristicamente com H=0 (zero) exerce(m),(cada um), função análoga à do mencionado ponto-origem das redes horizontais.

2.4.2 - REDES GEODÉSICAS TRIDIMENSIONAIS

O estudo das redes geodésicas clássicas, realizado em 2.4.1, evidenciou uma deficiência comum a malhas verticais e horizontais, pois em nenhum dos dois casos a informação mais precisa de posicionamento mostra-se auto-suficiente para situar estações terrestres no espaço tridimensional. Com efeito, as altitudes ortométricas (sempre) disponíveis para os vértices de uma rede horizontal de 1ª ordem são, via de regra, obtidas por nivelamento trigonométrico, o que significa um nível de precisão vertical incompatível com o do posicionamento horizontal.

Ainda assim, uma primeira alternativa imediata de obtenção de coordenadas tridimensionais, e de grande importância neste contexto, consiste na conjugação de pares coordenados (ϕ,λ) com as respectivas altitudes ortométricas (H) dos pontos correspondentes da superfície topográfica. Como porém essas altitudes encontram-se referidas ao geóide (no melhor das hipóteses), e não ao elipsóide, precisamos inicialmente convertê-las em altitudes geométricas (h), para que então cada ponto fique definido pelo seu respectivo terno elipsoidal (ϕ, λ, h). Para tanto, requer-se o conhecimento da separação geóide-elipsóide correspondente a cada ponto. Tal separação é conhecida sob as denominações de ondulação ou desnível geoidal, neste trabalho denotado por ν. O desnível geoidal é usualmente obtido por interpolação em mapas especiais onde são plotadas iso-curvas daquela grandeza (mapas geoidais). Assim, para cada ponto teremos (fig. 9):

$$h = H + \nu \qquad (2.15)$$

Na verdade a relação (2.15) não é exata, pois diferentemente do representado na

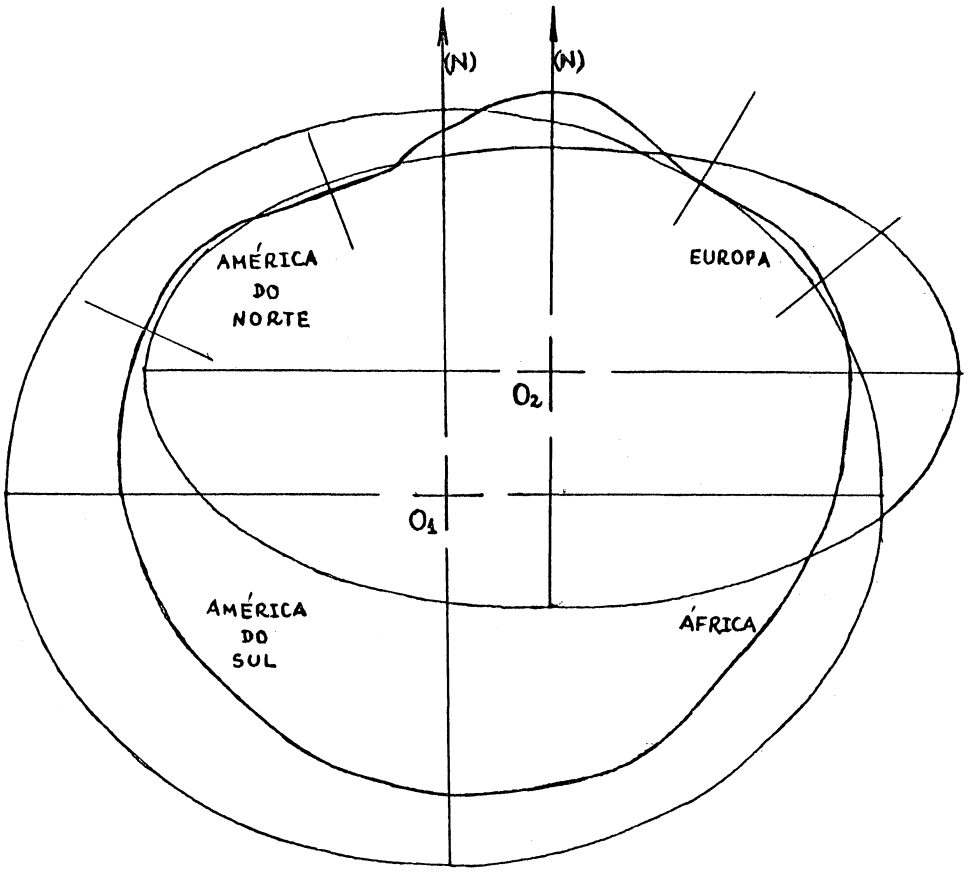


FIG. 8 - SISTEMAS GEODÉSICOS REGIONAIS

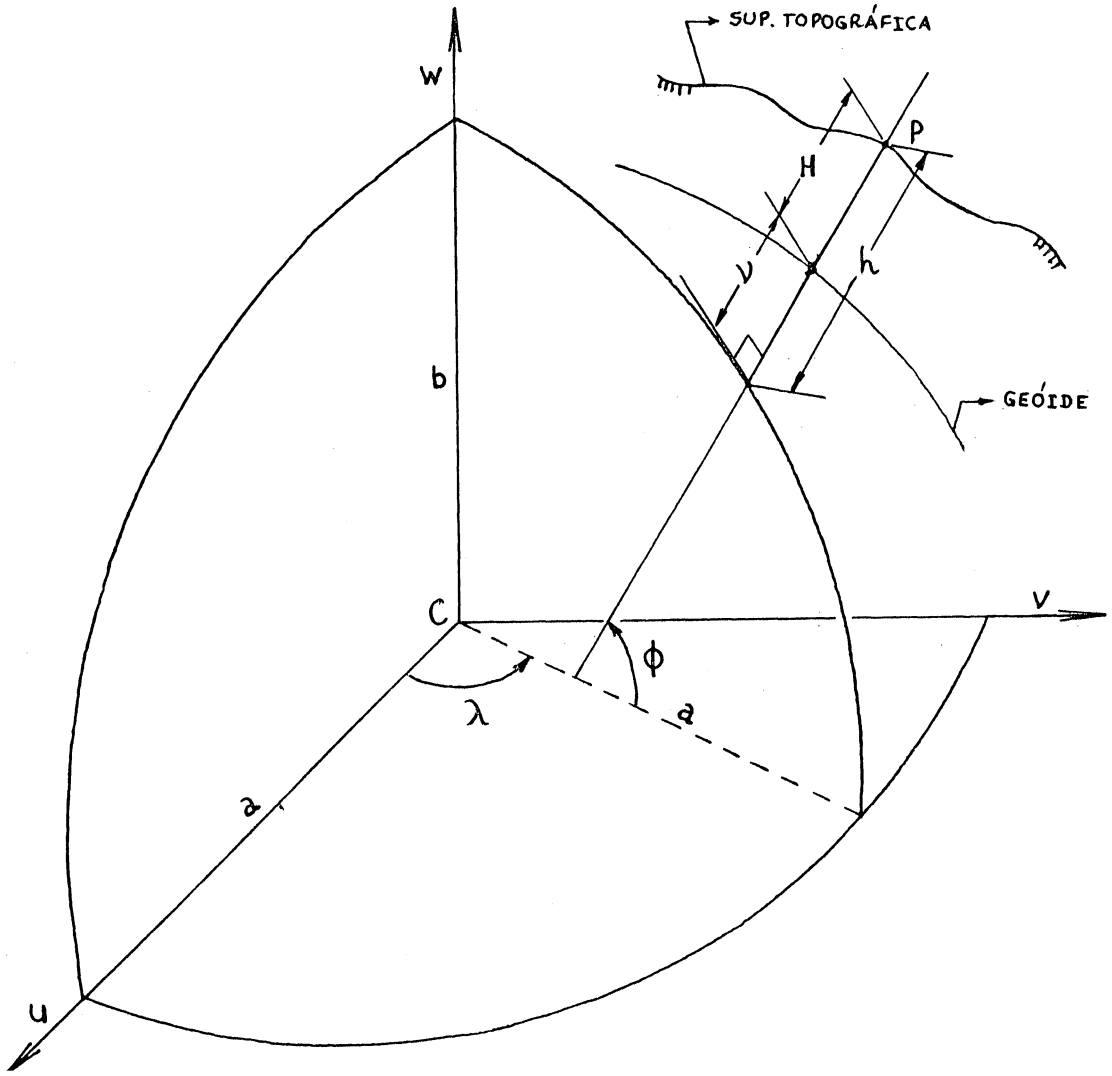


FIG. 9 - CONSTITUIÇÃO CLÁSSICA DE TERNOS COORDENADOS GEODÉSICOS (ϕ, λ, h)

fig. 9, nem a altitude ortométrica, como sabemos, e tampouco o desnível geoidal são medidos ao longo da normal ao elipsóide, mas sim ao longo da linha de força da estação (mais exatamente ainda, ν corresponde à distância ao elipsóide, do ponto de interseção da linha de força com o geóide). Todavia, a aproximação implícita naquela relação é perfeitamente viável para o tipo de aplicação que temos em vista neste trabalho.

O procedimento acima é o que normalmente se aplica à obtenção de coordenadas tridimensionais relativamente a um sistema geodésico convencional. Ou seja, a informação de posicionamento espacial é obtida indiretamente, face à disjunção verificada entre os processos de determinação de pares coordenados (ϕ,λ) e altitudes (h). Uma vez constituídos, os ternos (ϕ, λ, h) são facilmente conversíveis em correspondentes cartesianos (u,v,w), através das (2.8) e (2.9).

Outra alternativa para a constituição de redes geodésicas tridimensionais é o uso de técnicas, terrestres ou extra-terrestres, que possibilitem a obtenção direta de ternos coordenados em algum referencial. Nosso maior interesse neste campo recai sobre as redes associadas aos aqui chamados sistemas de satélite. O estabelecimento desses sistemas geodésicos especiais realiza-se com o auxílio de satélites artificiais, colocados em órbita especificamente para atendimento de finalidades geodésicas (técnica extra-terrestre). Dada a relevância do assunto no presente contexto, destacaremos a próxima seção para analisá-lo mais detidamente, em abordagem já direcionada para o preenchimento do principal objetivo deste trabalho.

2.4.3 - SISTEMAS DE SATÉLITE - O NSWC 9Z2

Os referenciais cartesianos terrestres resultantes da aplicação de técnicas usuárias de satélites artificiais — sistemas de satélite —, são definidos de maneira completamente distinta dos já mencionados sistemas geodésicos regionais. Conquanto os pormenores do processo de estabelecimento de um sistema regional não tenham sido ainda abordados, sabe-se já que esse tipo de referencial é apropriado para lidar somente com parte da superfície terrestre, sendo tipicamente não geocêntrico. Veremos adiante que o sistema de satélite com o qual lidaremos futuramente neste trabalho (NSWC 9Z2), apresenta, por definição, feições teóricas opostas àquelas, caracterizando-se portanto como um sistema geodésico geocêntrico de âmbito global.

Em Geodésia, a utilização de métodos extra-terrestres baseados no uso de satélites artificiais apresenta um variado leque de produtos derivados,

desde informações de interesse prático imediato, como o posicionamento de estações terrestres, até resultados de elevado teor científico, como a determinação da forma da Terra. De acordo com o tipo de produto(s) gerado(s), esses métodos têm sido classificados em dois grupos: o dos dinâmicos e dos geométricos.

Os chamados métodos dinâmicos são implementados a partir de informações geradas pela observação permanente do movimento orbital de satélites artificiais de uso geodésico. Basicamente, dois tipos de incógnitas participam de seu equacionamento, a saber: os parâmetros físicos definidores do campo de força ao qual encontra-se submetido o satélite em seu movimento, e as coordenadas geocêntricas (TM) de um conjunto pré-definido de pontos fixos de observação (estações rastreadoras). A solução para essas incógnitas é iterativa, pois seu conhecimento é requerido a priori, na própria valorização das equações de observação, segundo as quais as incógnitas se relacionam com posições e velocidades do satélite, observadas ao longo do tempo a partir das estações rastreadoras. Assim é que os métodos dinâmicos podem proporcionar o aperfeiçoamento, tanto de coordenadas geocêntricas tridimensionais de um conjunto fixo de estações, como de parâmetros caracterizadores do campo de força atuante sobre o satélite rastreado (estabelecimento de um sistema de satélite por métodos dinâmicos) permitindo, por via de conseqüência, o aperfeiçoamento de modelos para o campo da gravidade terrestre (modelos geopotenciais). Podem gerar, portanto, elementos para a predição de posições e velocidades do satélite (predição de órbitas).

O posicionamento de estações terrestres em algum sistema coordenado, pode ser apontado como o objetivo dos chamados métodos geométricos. Neles, ao contrário do verificado nos dinâmicos, prescinde-se do conhecimento da órbita do satélite, na medida em que este passa a ser utilizado meramente como um alvo celeste (inclusive, um balão especial ou até um foguete poderiam ser utilizados, alternativamente). Dependendo do tipo de observação realizada entre as estações ocupadas e o satélite, duas técnicas se distinguem: triangulação e trilateração celestes. No primeiro caso observam-se, simultaneamente, as direções dos vetores posição do satélite em relação a cada uma das estações, entre as quais pelo menos uma deve dispor de coordenadas conhecidas, num determinado referencial. O objetivo é posicionar as demais naquele mesmo sistema (sendo apenas uma a estação já posicionada, requer-se ainda uma distância entre estações). Isto pode ser realizado fotografando-se o satélite contra um fundo estrelado, simultaneamente, a partir de todos os pontos. Já na trilateração celeste observam-se distâncias em lugar de direções. As duas técnicas encontram-se descritas didaticamente em *Torge, W.* (1980), pgs. 175-178. Elas podem ser combinadas com provei

to, mas o fato é que já se encontram ultrapassadas por alternativas mais operacionais e econômicas. Ressalta-se contudo, o elevado nível de precisão de posicionamento relativo que os métodos geométricos podem proporcionar.

Sistemas de satélite podem ser materializados por um conjunto de estações terrestres, utilizando-se métodos geométricos. O posicionamento espacial desses referenciais requer a fixação, a priori, de coordenadas tridimensionais de pelo menos uma ou duas estações, conforme se utilize triangulação ou trilateração celestes, respectivamente. Ora, a não ser que as coordenadas fixadas sejam rigorosamente geocêntricas, fato pouco provável, o sistema estabelecido será não geocêntrico. Quanto à orientação do mesmo, mormente nos casos em que se tenham observado direções e utilizado um bom catálogo de estrelas no tratamento de certas informações extraídas das fotografias, pode-se admitir o paralelismo de eixos entre o sistema estabelecido e o TM.

Uma das diferentes metodologias de Geodésia Celeste que empregam o recurso do conhecido efeito Doppler para fins de posicionamento de estações terrestres, vem sendo utilizada em larga escala no Brasil, tanto pelo IBGE como por usuários particulares, em função de sua elevada eficiência técnico-operacional e econômica. Malgrado sua finalidade identificar-se com a dos métodos geométricos, as técnicas Doppler não se enquadram perfeitamente entre aqueles. Com efeito, todas elas são equacionadas com base em informações sobre as órbitas descritas por satélites artificiais específicos, componentes de um serviço internacional conhecido sob as denominações de NNSS ("Navy Navigation Satellite System") ou Sistema Transit. Por essa razão, as técnicas Doppler têm sido classificadas por alguns autores, a exemplo de *Mueller, I. I.*(1975), como métodos semi-dinâmicos.

Das diferentes metodologias de posicionamento de estações terrestres baseadas na aplicação do efeito Doppler, lidaremos neste trabalho com a das posições isoladas. Nesta técnica, da ocupação de uma certa estação para rastreio de satélites Transit resultam, após um processo automatizado de ajustamento com programas apropriados, as coordenadas da estação relativas a um certo sistema de satélite. Há completa independência entre os procedimentos operacionais e computacionais conduzidos para diferentes estações. A órbita é considerada fixa, sendo seu conhecimento indispensável na fase final de processamento. Mais objetivamente, são necessárias as coordenadas de pontos ocupados pelos satélites, nos trechos rastreados de suas trajetórias. Essa informação orbital é então conjugada com as observações do método-contagens Doppler-, tendo em vista a constituição do sistema de equações de observação cujas prin

cipais incógnitas são precisamente as coordenadas da estação rastreadora no sistema de satélite.

Nos métodos Doppler em que a órbita é considerada fixa, como o das posições isoladas, o sistema de satélite encontra-se definido a priori como o sistema coordenado cartesiano em relação ao qual são fornecidas as chamadas efemérides do satélite. Mais adiante, distinguiremos dois tipos de efemérides, às quais se vinculam dois sistemas de satélites distintos. As efemérides representam em essência os dados através dos quais direta ou indiretamente obtêm-se as posições orbitais do satélite para instantes ou épocas desejadas. Elas se baseiam, e portanto implicitamente o respectivo sistema de satélite, nas coordenadas geocêntricas (TM) estipuladas para um conjunto de estações rastreadoras fixas, num modelo geopotencial adotado para o campo da gravidade terrestre e no conjunto de constantes abaixo discriminadas:

1ª - Produto da constante de gravitação universal pela massa da Terra.

2ª - Módulo da velocidade angular de rotação da Terra.

3ª - Velocidade da luz.

4ª - Correções de cronômetro e derivas de osciladores nas estações rastreadoras fixas, utilizadas para cômputo das efemérides.

A inclusão do modelo geopotencial na definição do sistema de satélite assegura, pelo menos a nível teórico, o geocentrismo do mesmo; ou seja, espera-se que sua origem coincida com o centro de massa da Terra. Já o problema de orientação é sempre crítico para este particular tipo de sistema estabelecido por métodos dinâmicos. O padrão de referência é dado pelo TM mas, na prática, fica difícil assegurar de maneira rigorosa o paralelismo entre os dois referenciais. Em princípio, no entanto, o tipo de sistema de satélite acima caracterizado pode ser considerado uma "estimativa" do próprio TM. Outra feição importante da definição acima é o fato dela prescindir de um elipsóide de referência, contrariamente ao que se verifica com sistemas geodésicos regionais. Todavia é usual associar-se um determinado elipsóide ao sistema de satélite, de maneira a possibilitar a obtenção de coordenadas elipsoidais, mais familiares que as cartesianas geocêntricas resultantes das operações correntes de posicionamento Doppler.

Os dois tipos de efemérides com os quais se pode alternativamente processar uma posição isolada são: transmitidas (ou operacionais) e precisas. As primeiras são disponíveis para qualquer usuário no próprio tempo de observa

ção ou rastreio, através de feixes de ondas emitidos pelos satélites Transit. Estes sinais são então gravados em fita cassete no próprio equipamento, juntamente com as contagens Doppler. As efemérides transmitidas são processadas com base em dados de observação coletados em quatro estações fixas, distribuídas em território norte-americano e operadas pelo NAG ("Navy Astronautics Group"), órgão gerenciador do Sistema Transit. Essas estações mantêm-se intermitentemente rastreando os satélites e transmitindo informações para um centro computacional localizado em *Point Mugu*, na *Califórnia*, E.U.A, onde então se extrapolam os parâmetros orbitais que serão injetados na memória de cada satélite, pelas estações rastreadoras (predição de órbita). Tais parâmetros, ou efemérides transmitidas, são de dois tipos complementares: os fixos, invariáveis por períodos de 12 horas, definem órbitas elípticas não perturbadas, i.e., exclusivamente regidas pelas leis de Kepler; e os efêmeros, variáveis a cada dois ou quatro minutos de Tempo Universal (TU), permitem posicionar o satélite em relação à órbita kepleriana. As coordenadas do satélite para os exatos instantes requeridos são obtidas empregando-se determinados algoritmos de interpolação.

Ao contrário das operacionais, as efemérides precisas não resultam de um processo de predição de órbita. Elas consistem já das próprias coordenadas geocêntricas (sistema de satélite) e velocidades do satélite para todos os minutos TU (vale aqui também a observação do parágrafo anterior acerca de algoritmos de interpolação). A informação orbital necessária ao cômputo das efemérides precisas é obtida através da conhecida rede TRANET, composta por cerca de 20 estações rastreadoras distribuídas pela superfície terrestre, mas predominantemente concentradas no hemisfério norte. O processamento dessa informação se dá no NSWC ("Naval Surface Weapons Center"), situado em *Dahlgren, Virginia, E.U.A.* Sob a supervisão do DMAHTC ("Defense Mappping Agency Hidrographic/Topographic Center") os resultados são então liberados na forma de relatórios para um grupo restrito de usuários, em função de dados operacionais específicos fornecidos por cada interessado, somente 30 dias após as correspondentes requisições. Cabe ressaltar que as efemérides precisas são computadas atualmente com base na informação orbital de apenas dois dos cinco satélites Transit. O IBGE é um dos usuários credenciados com acesso às relações de efemérides precisas.

Futuramente, neste trabalho, nossa atenção estará voltada para a análise e solução de um certo problema de transformação entre sistemas coordenados geodésicos, um dos quais é exatamente o sistema de satélite associado às

efemérides precisas. Esse referencial, que tem sofrido algumas alterações no transcorrer dos últimos anos, em função do aperfeiçoamento de modelos e/ou parâmetros dentre os relacionados no § 8, denomina-se atualmente NSWC 9Z2. Podemos dizer que as estações da rede TRANET materializam tal sistema que, geometricamente, deveria representar uma "estimativa" do TM consoante as colocações do § 9. Do processamento de posições isoladas com efemérides precisas resultam, para cada estação, ternos cartesianos do tipo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, relativos ao NSWC 9Z2. O respectivo elipsóide de revolução apresenta os seguintes parâmetros de dimensão e forma:

$$\bar{a} = 6378145 \text{ m}$$
$$\bar{f} = 1/298{,}25$$

Com esses parâmetros e utilizando-se o algoritmo de Bowring (vide 2.3.2), além das relações (2.7), consegue-se facilmente obter coordenadas elipsoidais correspondentes às cartesianas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. (Naturalmente subtende-se a substituição de (u, v, w) por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ no algoritmo de Bowring).

Técnicas extra-terrestres sofisticadas como VLBI ("Very Long Baseline Interferometry"), LLR ("Lunar Laser Ranging"), DSN ("Deep Space Network") e SLR ("Satellite Laser Ranging"), bem como poligonais terrestres especiais de elevada precisão ("ordem zero"), já foram empregadas como poderosos recursos para o estabelecimento de padrões externos de comparação, tendo em vista a detecção de tendenciosidades ("bias") em orientação e escala, incidentes sobre o NSWC 9Z2. Vários trabalhos relacionados com tais investigações já foram publicados, dentre os quais destacamos *Hothem, L. D.* (1979). Como atestam comunicações pessoais dos pesquisadores *D. Blitzkow* do I.A.G, USP, Brasil e *T. Soler* do NOAA, E.U.A, os valores indicados na citada referência apresentam ampla aceitação pela comunidade geodésica internacional. Expressos em termos de correções às coordenadas NSWC 9Z2 esses valores são os seguintes: 0,80" ($\pm$0,05") em longitude e -0,4 p.p.m ($\pm$ 0,1 p.p.m) em escala. A compatibilidade entre o pólo de referência de latitudes do NSWC 9Z2 e o CIO, pólo correspondente no TM, está ao nível de 0,05" o que em termos práticos representa o paralelismo entre os correspondentes eixos terciários. Por conseguinte, uma rotação terciária de - 0,80" deve ser aplicada ao NSWC 9Z2 a fim de se compatibilizar sua orientação com a do TM (facilmente o leitor perceberá que tal operação equivale a somar 0,80" às longitudes Doppler). A redução de escala, por sua vez, decorre de certas deficiências inerentes ao Sistema Transit, que não afetam as medidas terrestres lineares convencionais de 1ª ordem (vide re

ferência indicada).

Também o geocentrismo do NSWC 9Z2 já foi questionado, como atestam *Lachapelle, G. & Kouba, J.*(1980). Segundo esses autores, o vetor-translação da origem do NSWC 9Z2 em relação ao TM é dado por (0,0,4)m. Uma possível explicação para essa tendenciosidade seria a predominância de distribuição das estações TRANET no hemisfério norte.

Em *Kouba, J.* (1983) temos uma referência bem recente onde se confirmam os parâmetros de rotação e translação acima indicados, necessários à compatibilização de coordenadas Doppler NSWC 9Z-2 com o sistema TM. Igualmente se confirma a redução em escala.

O posicionamento Doppler é um problema geodésico e, como tal, como bem adverte *Hoar, G. J.* (1982) [4], pg. 2-37, deve ser abordado sob a observância do conhecido princípio de remoção dos efeitos sistemáticos distorcivos conhecidos, de maneira que os resultados se apresentem o menos possível eivados de tendenciosidades. Com base nessa argumentação, o autor citado propõe que se apliquem sobre coordenadas NSWC 9Z2 as correções já referidas (exceto a do não geocentrismo do sistema, simplesmente por ignorá-lo), a priori do emprego das mesmas (coordenadas) em problemas de conexão de sistemas geodésicos de que participem. Ora, é este precisamente o caso do problema central deste trabalho. A possibilidade de obtenção de coordenadas cartesianas (x, y,z) consistentes com o TM, a partir dos ternos $(\bar{x}, \bar{y},\bar{z})$ resultantes do processamento de posições isoladas Doppler com efemérides precisas, será oportunamente explorada no cap. 4. Mas pode-se agora equacionar a respectiva transformação coordenada NSWC 9Z2 $\longrightarrow$ TM. Para tanto, consideram-se os parâmetros de transformação supra-indicados e a equação vetorial (2.2), que reescreveremos em forma matricial já adaptada à notação proposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + (1-0,4\times10^{-6})\, R(-0,8'',0,0) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

O fator $(1 + \delta)$, onde $\delta = - 0,4\times10^{-6}$ no caso da (2.16), não consta na (2.2). Ele realiza a variação de escala preconizada para coordenadas Doppler(redução), de maneira que a escala inerente aos ternos resultantes (x,y,z) venha a corres

---

(4) Nesta referência o leitor interessado poderá obter informações mais específicas sobre as técnicas Doppler.

ponder à métrica Doppler devidamente corrigida. É uma operação que não se havia previsto na introdução da (2.2) face à perspectiva puramente geométrica que norteava o estudo de sistemas coordenados realizado na correspondente divisão. Na verdade, δ é antes um fator corretivo do que propriamente um parâmetro de transformação, no caso da (2.16). Tal equação pode ser reescrita mais objetivamente, com base nas (2.3) e (2.4), tendo em vista sua futura utilização:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + (1-0{,}4 \times 10^{-6}) \begin{bmatrix} \cos 0{,}8'' & -\operatorname{sen} 0{,}8'' & 0 \\ \operatorname{sen} 0{,}8'' & \cos 0{,}8'' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

Finalmente, resta-nos abordar o tema da precisão do método Doppler de posições isoladas, face ao emprego de efemérides precisas. Na técnica das posições isoladas, todas as distorções incidentes sobre as respectivas efemérides transmitem-se diretamente às coordenadas resultantes, porquanto consideram-se fixas as órbitas dos satélites. No caso de restrição das efemérides disponíveis às operacionais, a opção pelas posições isoladas deve ser, se possível, preterida pela da translocação, na qual o efeito resultante das citadas distorções é minimizado através de um artifício operacional que assegura excelente precisão final de posicionamento relativo entre as estações ocupadas (a translocação subentende operação simultânea de receptores em pelo menos duas estações). Por outro lado, ante a possibilidade de acesso e uso de efemérides precisas, o posicionamento isolado pode se apresentar, dentro de condições operacionais adequadas, suficientemente preciso para diversas aplicações de interesse em Geodésia, como por exemplo a confecção de mapas geoidais. Aliás, esta particular aplicação será abordada no cap. 3 (3.4) sob motivação especial para este trabalho.

Em memorando de agosto de 1984, especialmente emitido em resposta a frequentes solicitações respeitantes ao tema da precisão de posições isoladas Doppler, o DMA ("Defense Mapping Agency") dos E.U.A divulgou a seguinte informação, para o caso de emprego de efemérides precisas [5]:

---

(5) O referido memorando encontra-se arquivado na Superintendência de Geodésia - Deptº de Cálculo e Análise - DGC - IBGE.

PRECISÃO DE POSIÇÕES ISOLADAS DOPPLER
(EFEM. PRECISAS)

Nº de passagens de satélite aproveitadas (np)	Precisão (m)	Nº de dias de observação
$35 \leq np$	$\pm$ 1,5	6-7
$20 \leq np < 35$	$\pm$ 2,0	4
$12 \leq np < 20$	$\pm$ 2,5	3

TABELA 1

Cada registro de precisão refere-se a cada uma das coordenadas cartesianas $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ resultantes para a estação. O DMA faz a ressalva de não poder assegurar as estimativas de precisão da tabela 1 para qualquer usuário, pois há que se considerar tanto o programa de processamento de coordenadas como o próprio equipamento rastreador disponíveis. Dentre os instrumentos empregados pelo DMA encontram-se o Geoceiver (Magnavox) e o JMR-1, também utilizados pelo IBGE.

Contrariamente ao que se verifica nos métodos clássicos de posicionamento de estações terrestres (vide 2.4.1), a técnica Doppler das posições isoladas caracteriza-se pela homogeneidade de precisão absoluta. Exatamente pelo fato de neste caso operar-se ponto a ponto, o processamento de cada estação independe da rotina das demais, em decorrência do que inexiste o problema do acúmulo de erros de observação verificado nos métodos clássicos planimétricos, por exemplo, com o aumento das distâncias ao ponto-origem. Esse quadro implica numa típica flutuação randônica, com alternância de sinal, dos erros das posições isoladas. Vale dizer, a referida técnica é capaz de prover coordenadas homogeneamente consistentes com o sistema de satélite ao qual se referem, dentro de um certo nível de precisão, especialmente no caso de emprego de efemérides precisas. Essa feição típica da técnica Doppler em questão será oportunamente explorada na solução do problema central deste trabalho.

2.5 - POSICIONAMENTO E ORIENTAÇÃO DE UM DATUM GEODÉSICO HORIZONTAL

Os pares coordenados (ϕ,λ) relativos às estações de uma rede horizontal clássica encontram-se associados a um determinado sistema elipsoidal geodésico, ao qual necessariamente corresponde um elipsóide de revolução denominado datum geodésico horizontal (vide 2.4.1). O processo de estabelecimento de um d.g.h. equivale portanto à definição do sistema de referência dos pares coordenados (ϕ,λ); ele subentende o preenchimento de duas condições: a fixação dos parâme

tros caracterizadores da geometria do elipsóide e a definição do posicionamento e orientação do mesmo em relação ao TM. Quanto aos referidos parâmetros, vamos simplesmente admiti-los pré-fixados por algum critério, a fim de focalizar com exclusividade o tema concernente à definição da situação espacial do datum, tendo em vista sua relevância no presente contexto.

Três critérios ou métodos de abordagem do problema de posicionamento e orientação de um d.g.h serão analisados nesta divisão. Entre eles, confere-se atenção especial ao apresentado em 2.5.1, por razão que logo se evidenciará.

2.5.1 - MÉTODO CLÁSSICO

O aqui denominado método clássico de posicionamento e orientação de um d.g.h. destaca-se, neste trabalho, por corresponder ao procedimento típico empregado no projeto de estabelecimento do SAD 69, sistema geodésico regional oficialmente adotado no Brasil. Aspectos mais específicos respeitantes àquele projeto serão abordados no cap. 3.

O conceito básico que permeia o método clássico de posicionamento e orientação de um d.g.h é a possibilidade de se arbitrar livremente certos parâmetros definidores da situação espacial do datum relativamente à Terra, posto que os sistemas geodésicos convencionais solidários ao datum não guardam, por si mesmos, qualquer vínculo necessário com as propriedades naturais do planeta (vide explicações introdutórias de 2.2 e 2.3). Tal é o conceito que se deve ter em mente nas considerações subsequentes.

Na seção 2.3.2 introduzimos o CG como um sistema cartesiano tri ortogonal, solidário a um determinado elipsóide de revolução e com origem coincidente com o centro geométrico do mesmo. Consequentemente, definir a situação espacial de um d.g.h equivale a fixar o posicionamento e a orientação do CG a ele associado, em relação ao TM. Ora, tal objetivo pode ser preenchido através da prescrição dos seis parâmetros da transformação coordenada expressa pela (2.2), equação que modela precisamente a relação matemática de conexão entre dois sistema cartesianos tri-ortogonais. A fig. 10 ilustra o significado geométrico específico daqueles parâmetros, para o problema agora enfocado: ε, ψ e ω representam as rotações fundamentais que, aplicadas sobre o CG numa certa ordem pré-estabelecida, tornam-no paralelo ao TM, correspondendo portanto aos parâmetros de orientação do datum; as componentes x_c, y_c e z_c do vetor-translação definem, por seu turno, o posicionamento espacial do datum em relação ao TM.

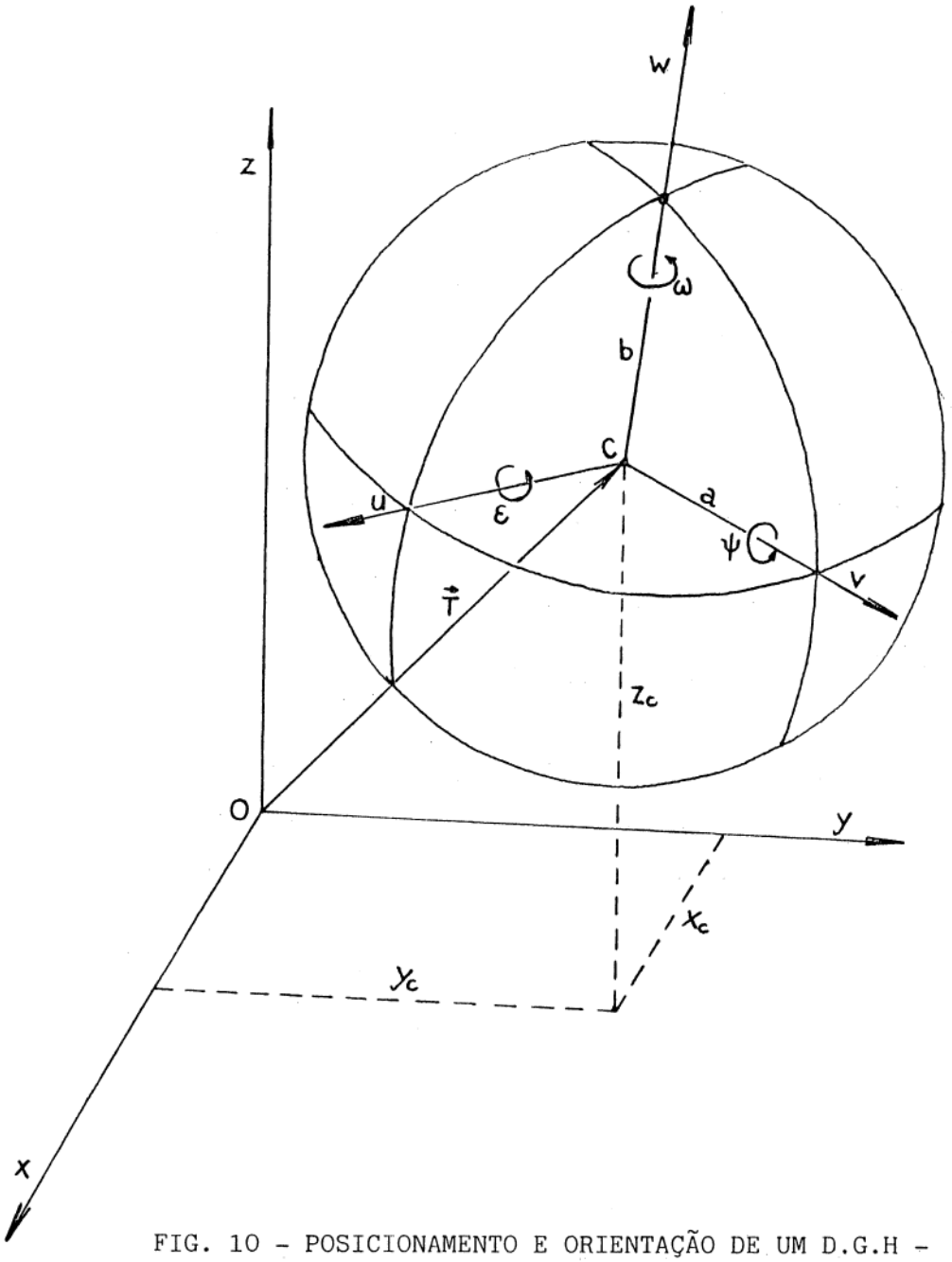


FIG. 10 - POSICIONAMENTO E ORIENTAÇÃO DE UM D.G.H - ABORDAGEM GEOCÊNTRICA

A perspectiva do parágrafo anterior para o problema de definição da situação espacial de um d.g.h corresponde ao que se poderia denominar abordagem geocêntrica. O objetivo de sua apresentação é o de evidenciar a quantidade e natureza dos parâmetros definidores da situação espacial do datum. Pois, em realidade, na prática de estabelecimento de um sistema geodésico regional pelo método clássico, opta-se por uma técnica distinta, conquanto equivalente, mais adequada à necessidade de implantação de uma rede de estações terrestres posicionadas (bidimensionalmente) em relação àquele referencial. A esta segunda alternativa podemos nos referir, por motivos que logo se evidenciarão, como abordagem topocêntrica para solução do problema focalizado.

A abordagem topocêntrica começa pela escolha de um determinado ponto da superfície topográfica, localizado na região em que se pretenda estabelecer um sistema geodésico de referência, e em relação ao qual definir-se-á a situação espacial do datum através da prescrição dos seis parâmetros para tanto necessários, os quais deverão guardar equivalência, implícita ou explícita, com três translações e três rotações. Essa particular estação integrará a rede geodésica horizontal associada ao sistema definido e embora não o seja, necessariamente, pode ser considerada para melhor encadeamento de idéias, como um ponto de partida do processo de implantação da malha geodésica. Por essa razão decidimos denominá-la ponto-origem (P_0), preterindo as expressões mais usuais "ponto-datum" ou, simplesmente, "datum" (neste caso, mesmo porque empregamos o termo datum com outra acepção). Os seis parâmetros topocêntricos de posicionamento e orientação do datum, a serem prescritos para P_0, serão aqui denotados por: ϕ_0, λ_0, h_0, ξ_0, η_0, α_0. Na sequência apresenta-se a descrição funcional de cada um desses parâmetros.

A latitude e a longitude geodésicas de P_0 — ϕ_0 e λ_0 —, especificam univocamente uma normal ao datum. Ora, essa normal elipsoidal relativa a P_0 apresenta-se livre, e com ela solidariamente o elipsóide, para girar em torno de P_0, mantendo-se fixa somente por esse ponto. É necessário portanto definir sua direção em relação a algum referencial solidário à Terra. O sistema de referência adotado com essa finalidade é o AL, com origem em P_0 (vide 2.2.2). Para se definir a direção da normal relativamente àquele sistema, dois parâmetros são necessários. Utilizam-se com essa finalidade as componentes (ortogonais) do chamado desvio ou deflexão relativa da vertical em P_0 – ângulo entre a nor

mal ao elipsóide e a vertical, com vértice naquele ponto –, nos respectivos planos meridiano e primeiro-vertical astronômicos. Nessa mesma ordem, trata-se dos parâmetros designados por ξ_0 e η_0 (pode-se estender o conceito enunciado para desvio relativo da vertical a qualquer ponto).

Uma vez definidas então a normal e sua direção no espaço, a prescrição da altura elipsoidal h_0 do ponto-origem fixa a distância entre esse ponto e o elipsóide. Nesse estágio, o único grau de liberdade restante ao datum manifesta-se através de uma possível rotação do mesmo em torno da normal elipsoidal de P_0. Finalmente, elimina-se este último grau de liberdade via prescrição de α_0, azimute geodésico de uma direção terrestre arbitrária, com origem em P_0, a qual denominaremos direção de partida.

A relação (2.15) indica que h_0 deve corresponder à soma da altitude ortométrica (H_0) do ponto-origem com o desnível geoidal (N_0) referente ao mesmo ponto e relativo ao datum a ser posicionado. Decorre desse fato a possibilidade de se optar pela prescrição de N_0 em lugar de h_0, já que a altitude ortométrica independe da situação espacial do datum.

Na abordagem geocêntrica, o CG é o sistema convencional escolhido como objeto do processo de orientação do datum, realizado naquele caso em relação ao TM. Já na abordagem topocêntrica, como facilmente se percebe, adota-se como sistema convencional o GL (vide 2.3.3), definindo-se sua orientação relativamente ao natural homólogo, qual seja, o AL com origem coincidente.

Em suma, inicialmente através das coordenadas geodésicas (ϕ_0,λ_0,h_0) estipuladas para P_0, caracterizou-se um sistema do tipo GL associado ao elipsóide adotado e com origem naquele ponto. Nota-se, com respeito a esse procedimento, a equivalência funcional entre os parâmetros topocêntricos ϕ_0, λ_0 e h_0 e os de translação, posicionadores do elipsóide na abordagem geocêntrica. Com efeito, as coordenadas TM de P_0 não coincidirão, no caso mais geral, com as cartesiano - geodésicas correspondentes a (ϕ_0,λ_0,h_0), obteníveis através das (2.8). O passo lógico seguinte foi fixar a orientação do GL, vale dizer, do elipsóide, em relação à Terra, o que se realiza com a prescrição de ξ_0,η_0 e α_0.

A vantagem efetiva dos parâmetros topocêntricos sobre os geocêntricos ficará evidente apenas a partir do próximo item, onde se apresentam as chamadas condições de paralelismo. Nele, veremos que os parâmetros topocêntricos prescritos no estabelecimento de sistemas geodésicos regionais pelo método clássico relacionam-se diretamente, por imposição matemática, com grandezas naturais observadas na superfície topográfica.

2.5.1.1 - CONDIÇÕES DE PARALELISMO - A EQUAÇÃO DE LAPLACE

Na apresentação introdutória desta seção, prevaleceu a idéia da prescrição arbitrária dos parâmetros que posicionam e orientam um d. g.h em relação à Terra. Entretanto, como veremos neste item, a certas restrições matemáticas invariavelmente submetem-se os referidos parâmetros, no método clássico, tendo em vista assegurar-se o paralelismo entre os eixos dos sistemas CG e TM [6]. Pois, ao contrário da condição de geocentrismo, exequível apenas através de modelos dinâmicos que incluam parâmetros do campo gravífico, pode-se impor o paralelismo entre aqueles sistemas, geometricamente. A motivação de fundo é a garantia de compatibilidade entre as referências astronômica e geodésica para latitudes e longitudes, objetivo este consistente com o princípio básico segundo o qual os sistemas geodésicos convencionais devam corresponder a boas aproximações dos naturais homólogos.

A partir do momento em que se impõe o paralelismo entre o CG e o TM, três graus de liberdade são subtraídos do total de seis relativo ao caso mais geral de posicionamento e orientação do datum em relação à Terra. Esses três graus de liberdade devem corresponder, evidentemente, às três possíveis rotações fundamentais em que poderíamos decompor, numa situação genérica, a diferença de orientação espacial entre os sistemas supra citados. Ora, sob o enfoque teórico da abordagem geocêntrica, a situação resultante é bem clara (vide fig. 10). Ficaríamos restritos às três translações x_C, y_C e z_C, anulando-se as rotações ε, ψ e ω, posto que os sistemas convencional e natural nela envolvidos são exatamente o CG e o TM. Mas, no caso de interesse prático da abordagem topocêntrica, já não é tão evidente o efeito resultante da imposição de paralelismo entre o CG e o TM, sobre os parâmetros a serem prescritos no ponto-origem. As relações matemáticas tradutoras desse efeito constituem as chamadas condições de paralelismo. Nossa proposta para este item resume-se à apresentação e análise conceitual das mesmas.

Vamos inicialmente introduzir as grandezas mensuráveis que encontram correspondência direta entre os parâmetros topocêntricos de posicionamento e orientação do datum: temos as coordenadas naturais (Φ_0, Λ_0 e H_0) do ponto-origem P_0 e o azimute astronômico (A_0) da direção de partida. A essas grandezas naturais correspondem, respectivamente, as convencionais ϕ_0, λ_0, h_0 e α_0, já definidas em 2.5.1.

---

(6) Mais precisamente, impõe-se equipolência entre eixos homólogos. O uso consagrado da expressão paralelismo justifica porém sua adoção no texto.

Ora, sabemos que subsiste implicitamente uma equivalência funcional entre (ϕ_0, λ_0, h_0) e o terno de parâmetros de translação (x_c, y_c, z_c), posicionadores do datum em relação à Terra. Por conseguinte, na prevalência de paralelismo entre o CG e o TM, é de prever que a situação espacial do datum seja plenamente definida através das coordenadas geodésicas prescritas para o ponto-origem. Tendo em vista assegurar a referida condição de paralelismo, entretanto, é necessário que os parâmetros de orientação ξ_0, η_0 e α_0 preencham as seguintes relações matemáticas:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \Phi_0 - \phi_0 \\ \eta_0 &= (\Lambda_0 - \lambda_0)\cos\phi_0 \\ \alpha_0 &= A_0 - \eta_0 \tan\phi_0 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

As relações (2.18) traduzem-se, essencialmente, nas três componentes ortogonais (AL) da diferença de orientação espacial subsistente entre os sistemas AL e GL com origem em P_0, deduzidas sob a hipótese de paralelismo entre o CG e o TM. Sob essa perspectiva, aliás, convém ressalvar o seguinte: é o termo $\eta_0 \tan\phi_0$, e não α_0, que guarda correspondência com ξ_0 e η_0. Este fato se evidencia bem através da primeira dedução matricial proposta em *Vaníček, P. & Wells, D.E.* (1974) para as (2.18).

Na supra citada dedução das (2.18) supõem-se as diferenças $(\Phi_0 - \phi_0)$ e $(\Lambda_0 - \lambda_0)$ suficientemente pequenas a ponto de validar as aproximações $\operatorname{sen}(\Phi_0 - \phi_0) \cong (\Phi_0 - \phi_0)$ e $\operatorname{sen}(\Lambda_0 - \lambda_0) \cong (\Lambda_0 - \lambda_0)$. Com efeito, coordenadas astronômicas e geodésicas correspondentes devem ser tão próximas quanto possível, tendo em vista o preenchimento da clássica condição de boa adaptação elipsóide-geóide, na região para a qual se pretende estabelecer o d.g.h (vide observação pertinente em 2.4.1). Conseqüentemente, as linhas trigonométricas aplicadas sobre ϕ_0 nas (2.18) poderiam constar aplicadas sobre Φ_0 sem perda de precisão.

As (2.18) constituem condições locais ou topocêntricas de paralelismo entre os sistemas CG e TM. Dada sua importância, procuraremos analisá-las em seus aspectos particulares de maior interesse. Primeiramente enfatizamos o seguinte: tendo sido aplicadas no ponto-origem e segundo a direção de partida adotados no estabelecimento de um sistema geodésico regional pelo método clássico, as condições (2.18) devem teoricamente prevalecer em qualquer estação ocupada e segundo todas as direções observadas no processo de materialização do sistema (implantação da rede horizontal associada), posto que

são deduzidas genericamente, sob a referida premissa de paralelismo. Por conseguinte, podemos reescrever as duas primeiras das (2.18) sob a forma geral:

$$\xi = \Phi - \phi \qquad (2.19)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\phi,$$

destacando-as como expressões de definição das componentes ξ (meridiana) e η (primeiro vertical) do desvio da vertical, numa estação genérica (ϕ,λ) da superfície topográfica, relativamente ao datum estabelecido. A fig. 11 ilustra parcialmente as (2.19).

Quanto à terceira das (2.18), trata-se da conhecida equação ou condição de Laplace em sua expressão simplificada usual, aplicada naquele caso à direção de partida. A equação de Laplace pode ser conceituada como a expressão matemática da conversão de azimutes astronômicos em seus correspondentes geodésicos (este conceito será aperfeiçoado no item 2.5.1.2). Transcrevê-mo-la abaixo sob forma geral:

$$\alpha = A - \eta\tan\phi \qquad (2.20)$$

O termo $\eta\tan\phi$ decorre precisamente da discrepância angular entre os eixos x_{AL} e x_{GL}, origens respectivas de referência de azimutes astronômicos e geodésicos; resulta idêntico, portanto, para todas as direções que emanam do ponto de observação. Mas, na verdade, a influência do desvio relativo da vertical no ponto de observação, sobre a diferença entre azimutes astronômico e geodésico referentes à mesma direção, não se limita, no caso mais geral, ao termo $\eta\tan\phi$. Isto se esclarecerá com a apresentação e análise da equação de Laplace em sua expressão rigorosa, mais adiante neste item.

Nos procedimentos usuais de campo conduzidos para implantação de redes planimétricas, a observação de distâncias zenitais, quando ocorre, visa especialmente o cálculo de nivelamento trogonométrico, que permite o transporte de altitudes ortométricas ao longo da rede (vide 2.4.1). Distâncias zenitais não são requeridas no cálculo direto dos pares coordenados (ϕ, λ). Entretanto, na chamada triangulação tridimensional — técnica terrestre para estabelecimento de redes geodésicas em três dimensões, pormenorizada em *Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pgs. 217 - 224 —, distâncias zenitais devem ser observadas, porquanto participam do equacionamento do método, sendo este fato apontado inclusive como sua principal deficiência em relação à técnica bidimensional clássica (observações verticais não resultam tão precisas quanto as horizontais, devido à influência mais acentuada da componente verti

cal da refração atmosférica, de difícil modelagem). A apresentação e crítica das condições de paralelismo, deduzidas para uso no caso mais abrangente da"Geodésia Tridimensional", é de particular interesse neste item, pois auxilia na compreensão de alguns aspectos essenciais da teoria de posicionamento e orientação de um d.g.h segundo o método clássico. Destacam-se abaixo tais condições, extraídas de *Moritz, H.*(1978):

$$\beta_0 = B_0 + \xi_0 \cos \alpha_0 + \eta_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \qquad (2.21)$$

$$\alpha_0 = A_0 - \eta_0 \tan \phi_0 - (\xi_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \eta_0 \cos \alpha_0) \cot \beta_0,$$

onde B_0 é a distância zenital observada em P_0, segundo a linha de visada da direção de partida e β_0 é a grandeza geodésica correspondente. As demais grandezas envolvidas nas (2.21) são as mesmas já apresentadas, sendo ξ_0 e η_0 dados pelas duas primeiras das (2.18) as quais, como sabemos, devem prevalecer na hipótese de paralelismo entre o CG e o TM. Assim, as (2.21) representam as condições restritivas sobre (α_0,β_0), em termos das grandezas mensuráveis $(\Phi_0,\Lambda_0,A_0, B_0)$ e parâmetros posicionadores (ϕ_0,λ_0) prescritos, que devem ser preenchidas em P_0 para assegurar-se o paralelismo entre o CG e o TM (na verdade, em "Geodésia Tridimensional" requer-se a imposição das (2.21) no mínimo segundo duas direções distintas, para observância da situação de paralelismo; essa ressalva está bem explicada em *Hotine, M.* (1969), pg. 134).

Identifica-se na segunda das (2.21),a expressão rigorosa da equação de Laplace, aplicada no caso à direção de partida. Nela, consideram-se todas as possíveis influências do desvio relativo da vertical no ponto de observação, sobre a transformação de azimutes astronômicos em geodésicos. Transcrevêmo-la abaixo, sob forma geral:

$$\alpha = A - \eta \tan\phi - (\xi \operatorname{sen}\alpha - \eta \cos\alpha) \cot\beta \qquad (2.22)$$

Nota-se a influência (implícita) da distância zenital observada segundo a linha de visada da direção escolhida, sobre a diferença entre azimutes astronômico e geodésico relativos àquela direção. Geometricamente, interpreta-se o terceiro termo do membro direito como a discrepância angular entre as retas de interseção, com o plano do horizonte, dos planos vertical e normal no ponto de observação, que contêm o ponto observado. Para efeito de cálculo, as grandezas α e β presentes no membro direito podem ser substituídas pelas mensuráveis A e B. Em *Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pgs. 184-187, propõe-se uma derivação geométrica de simples visualização para a (2.22).

Segundo *Moritz, H.* (1978), mesmo em "Geodésia

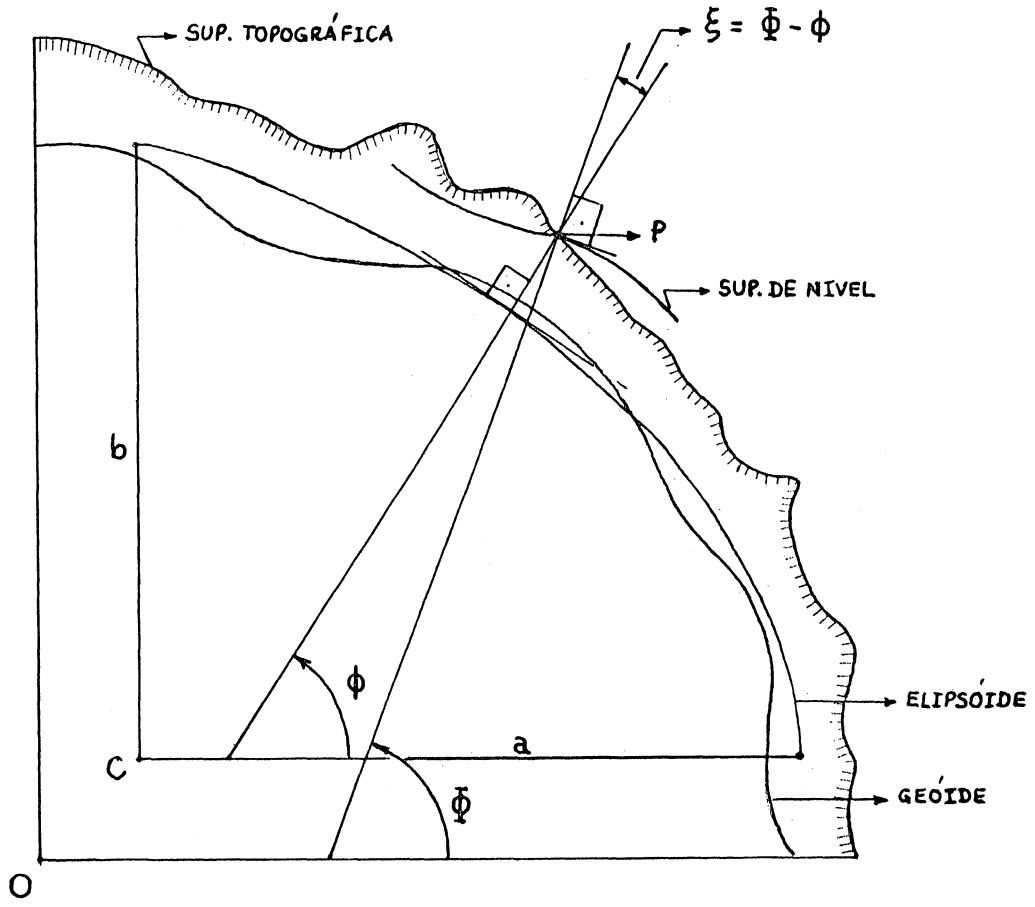


FIG. 11 - DESVIO RELATIVO DA VERTICAL - SEÇÃO MERIDIANA

Tridimensional", a condição das distâncias zenitais — primeira das (2.21) —, praticamente não influencia a orientação do sistema geodésico. No cálculo de uma triangulação tridimensional, aproveitando-se as distâncias zenitais observadas, a aplicação sistemática da referida condição (em sua forma geral) contribui quase tão somente para o refinamento de alturas elipsoidais.

Nada invalida a opção de análise do tema da orientação de um d.g.h sob o enfoque das condições (2.21); porquanto apesar da primeira daquelas envolver uma grandeza sequer empregada diretamente no cálculo de redes planimétricas, nem por isso elas deixam de expressar uma forma alternativa de equacionamento da situação de paralelismo entre o CG e o TM. Ora, a utilização de distâncias zenitais (geodésicas) nos procedimentos clássicos de cômputo dos pares coordenados (ϕ,λ) restringe-se, no melhor das hipóteses, ao cálculo de termos corretivos de pequena magnitude, para ângulos (ou direções) e distâncias (vide 2.6). Sendo assim, do não preenchimento da primeira das (2.21) poder-se-ia esperar efeito sensível apenas sobre as coordenadas (ϕ,λ) calculadas para pontos vizinhos a P_0. Essa constatação vem de encontro à colocação de *Moritz, H.* (1978), para o caso abrangente da "Geodésia Tridimensional", acerca da irrelevância da condição das zenitais no processo de orientação espacial de um sistema geodésico.

Na verdade, por equacionar a diferença $(B_0 - \beta_0)$, a primeira das (2.21) expressa nada mais que a própria componente do desvio da vertical em P_0, segundo a direção de azimute geodésico α_0, deduzida sob a premissa de paralelismo entre o CG e o TM. Portanto, a partir do momento em que se assumem as duas primeiras das (2.18) como definições de ξ_0 e η_0, pode-se supor a primeira das (2.21) implícita e automaticamente preenchida, em sua forma geral, para todas as direções que emanam de P_0. Ou seja, subsiste uma equivalência funcional entre as duas primeiras das (2.18) e a primeira das (2.21).

As argumentações anteriores sustentam uma importante conclusão: as equações de ξ_0 e η_0 são pouco significativas no processo de orientação de um d.g.h. Em realidade, as duas primeiras das (2.18) atuam basicamente como expressões às quais se recorre para obtenção das coordenadas (ϕ_0,λ_0) do ponto-origem, uma vez estipulados os valores de ξ_0 e η_0 ou por simples prescrição arbitrária, ou por algum processo que assegure boa adaptação do elipsóide ao geóide na região de interesse (tema de 3.1). Com isso, têm-se definidas tanto a normal elipsoidal (ϕ_0,λ_0) como a orientação espacial da mesma em relação ao AL, com origem em P_0. Admitindo-se então já fixada a distância do ponto-origem ao elipsóide (ho), é precisamente através da equação da Laplace, apli

cada segundo a direção de partida, que se elimina o último grau de liberdade do datum — possível rotação em torno da normal (ϕ_0,λ_0) —, orientando-o sob a condição básica de paralelismo entre o CG e o TM. Assim é que o azimute geodésico da direção de partida, além de ser empregado diretamente na inicialização do processo de transporte de coordenadas para a rede implantada, exerce a função de parâmetro topocêntrico orientador do datum estabelecido, apesar da sua condição teórica de grandeza derivada. Com efeito, não se deve perder de vista a suficiência da prescrição de ϕ_0 (ou ξ_0), λ_0 (ou η_0) e h_0 (ou ν_0) — fig.12 — para definição da situação espacial do datum, sob a prevalência de paralelismo entre o CG e o TM.

Dada sua importância, o uso da equação de Laplace requer considerações adicionais. No parágrafo anterior mostramos sua atuação essencial no processo de orientação de um d.g.h. Tentaremos agora apreciar o tema de sua assimilação na operação de ajustamento, sobre aquela superfície de referência, de uma rede horizontal implantada. Vamos admitir, para clareza de exposição, que as observações geométricas realizadas na constituição da rede encontram-se já reduzidas ao elipsóide (vide 2.6). Ora, independentemente da(s) técnica(s) de campo empregada(s) na construção do arcabouço, necessita-se de um conjunto mínimo de injunções que, juntamente com as observações inerentes a cada técnica (vide 2.4.1), viabilize o cálculo básico de toda a rede. Esse conjunto mínimo de condições iniciais pode-se supor constituído por: coordenadas geodésicas (ϕ_0,λ_0) do ponto-origem P_0, o azimute α_0 da direção de partida (o mesmo que orienta o d.g.h estabelecido) e uma distância observada, digamos de P_0 a uma outra estação do arcabouço (através da mesma fixa-se a escala da rede). Teoricamente, nenhuma outra informação, além das referidas, é necessária ao cálculo completo de uma rede geodésica horizontal. De fato, temos aí uma situação perfeitamente caracterizada em termos geométricos. Do cálculo da rede resultam, mediante aplicação de fórmulas bem conhecidas em Geodésia, tanto os pares coordenados (ϕ,λ) das estações quanto os azimutes geodésicos das direções observadas. Tais grandezas referem-se ao d.g.h estabelecido e portanto deveriam vincular-se às astronômicas correspondentes, através das condições de paralelismo expressas sob as formas gerais (2.19) e (2.20) (ou (2.22)).

Ao contrário das relações (2.19), cujos produtos (ξ e η) são, no melhor das hipóteses, utilizados apenas no cômputo das reduções de observações geométricas realizadas na superfície topográfica, a equação de Laplace proporciona uma grandeza diretamente envolvida no próprio cálculo da

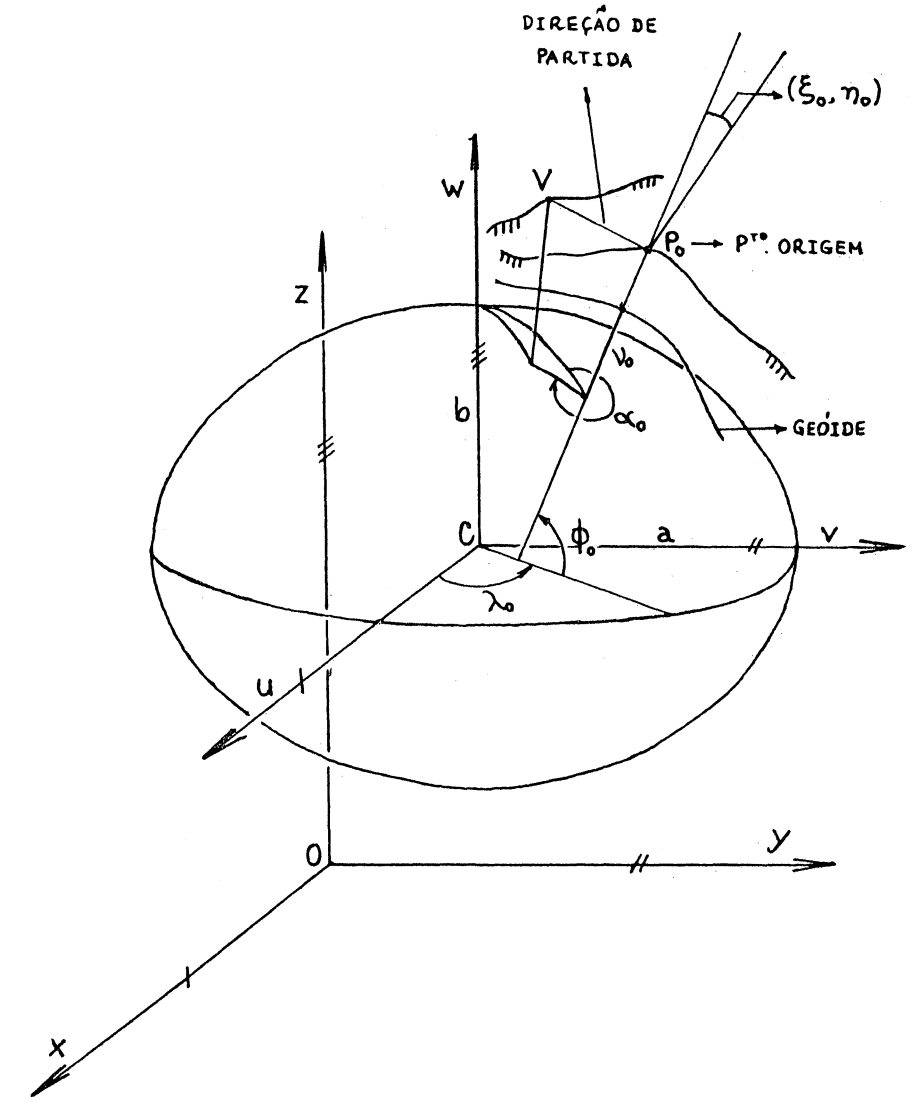


FIG. 12 - PARÂMETROS TOPOCÊNTRICOS DE POSICIONAMENTO E ORIENTAÇÃO DE UM D.G.H

rede. Assim, tomando-se o azimute geodésico α de uma certa direção observada, resultante daquele cálculo, é possível compará-lo com o valor derivado da equação de Laplace, bastando para tanto proceder-se à observação das grandezas naturais requeridas. Como em geral as linhas de visada apresentam-se quase horizontais na prática de implantação de redes planimétricas, a expressão rigorosa (2.22) da equação de Laplace é sistematicamente preterida pela simplificada(2.20); sendo assim, as observações necessárias restringem-se às de azimute e longitude astronômica. Vamos por hora admitir a perfeita validade dessa aproximação, ao nível de precisão considerado. Nesse caso, as duas alternativas acima indicadas para obtenção do azimute geodésico de uma direção genérica deveriam conduzir a resultados idênticos, não fossem, é claro, os inevitáveis erros de observação incidentes sobre as operações de medida em geral, tanto as geométricas quanto as astronômicas. Daí decorre a motivação de emprego da equação de Laplace, como uma relação condicionante (equação de injunção) no processo de ajustamento ao qual se submetem as redes planimétricas, concomitantemente ao cálculo das mesmas. Através de sua imposição naquele processo, para determinadas estações — os chamados pontos de Laplace —, regularmente espaçadas de acordo com critério dependente do nível de precisão requerido, e segundo direções observadas daqueles pontos, espera-se restaurar da melhor maneira possível as condições geométricas ideais da rede: orientação correta e compatibilidade com a situação de paralelismo entre o TM e o CG associado ao datum estabelecido. Assim, subsequentemente ao ajuste da rede, pelo menos segundo as direções selecionadas prevalecerá a igualdade entre azimutes geodésicos obtidos segundo os dois caminhos indicados. Tal procedimento não assegura, necessariamente, condições geométricas ideais na plena extensão da rede, conforme observado por *Hotine, M.* (1969), pg. 134, mas é razoável aceitá-lo como uma alternativa válida de aproximação daquelas condições. Enfim, cabe assinalar com *Moritz, H.* (1978), que a necessidade de redução das observações geométricas ao datum, a priori do ajustamento da rede, não interfere nas conclusões anteriores.

O ponto essencial nesta análise do emprego da equação de Laplace nos procedimentos clássicos de "Geodésia bidimensional" é, sem dúvida, a suficiência de uma única aplicação daquela — em P_0, segundo a direção de partida —, para se definir a orientação espacial do sistema geodésico de referência. Com isso, a menos de possíveis erros acidentais e sistemáticos implícitos no uso corrente da equação de Laplace — tema que se abordará no próximo item —, pode-se efetivamente admitir a observância da situação de paralelis

mo almejada. Assim, a aplicação sistemática da referida equação em ajustamentos de redes planimétricas, conquanto válida e mesmo necessária face aos motivos já expostos, não exerce a menor influência sobre a orientação espacial do sistema estabelecido; feita é claro, a ressalva de invariância do azimute α_o da direção de partida naqueles ajustamentos. Na verdade, como deve estar claro a esta altura, no método clássico sequer necessita-se implantar uma rede de estações para posicionar um d.g.h e orientá-lo sob a conhecida premissa de paralelismo. Todavia é válido utilizar-se, mesmo no âmbito daquele método, o recurso de relaxação do azimute α_o, num ajustamento planimétrico injuncionado por outras condicionantes de Laplace, de maneira que ao azimute de partida seja agregada uma correção tendo em vista o refinamento da condição básica de paralelismo entre o CG e o TM; mas isto, ao nível da própria etapa de definição da orientação espacial do datum (*Vaníček, P.* 1975, pg.17). A tal processo passaremos a nos referir como técnica de orientação de um d.g.h por relaxação do azimute de partida. Como veremos no cap. 3, trata-se do método empregado no estabelecimento do SAD 69.

2.5.1.2 - IMPLICAÇÕES CONCEITUAIS

Da concepção clássica de posicionamento e orientação espaciais de um d.g.h decorrem certas conseqüências de notável importância conceitual para este trabalho. Por essa razão destacamos o presente item para abordá-las.

No método clássico, a situação espacial de um d.g.h não resulta rigorosamente especificada em relação à Terra. Isto se dá em virtude do sistema AL apresentar-se sujeito a variações temporais do campo gravífico terrestre. Contudo, é usual e válido, fora dos limites da Geodésia de alta precisão, admitir-se um sistema geodésico de concepção clássica como realmente fixo no espaço físico do planeta. Ora, a um tal sistema coordenado referem-se, invariavelmente, as coordenadas dos pontos de alguma rede geodésica horizontal implantada. Por conseguinte, quaisquer modificações sofridas pela rede, digamos através de reajustamentos ou incorporação de novos pontos, não influenciam a situação espacial do sistema geodésico, a não ser que o conjunto de parâmetros fundamentais $(\phi_o,\lambda_o,h_o,\alpha_o)$ sofra alteração. As distorções inevitavelmente implícitas às coordenadas (ϕ,λ) das estações, decorrentes tanto do acúmulo de erros de observação como de técnicas inadequadas de ajustamento e da negligência de correções ou reduções variadas (erros sistemáticos),

são interpretadas, portanto, simplesmente como erros no posicionamento bidimensional das estações. De maneira que esta primeira consequência do método clássico de posicionamento e orientação de um d.g.h resume-se no seguinte: rede horizontal e correspondente sistema geodésico de referência são categorias dsitintas e independentes.

Em suma, os pares coordenados (ϕ, λ) dos pontos de uma rede planimétrica convencional deveriam rigorosamente descrever cada projeção elipsóidica num certo sistema (geodésico) definido (terminologia inspirada em *Andrade, J. B.*(1984)), referencial quasi-geocêntrico, de concepção tipicamente clássica, a exemplo do SAD 69[7]. A descrição matemática da relação [pontos físicos – sistema definido] resulta, porém, distorcida pelos erros mencionados.

Em princípio, considera-se paralelo ao TM o sistema CG associado a qualquer referencial geodésico definido segundo o método clássico, face à imposição das condições de paralelismo, conforme visto no item anterior. Todavia, é válido questionar o rigor de observância da condição ideal de orientação de um d.g.h. É o que faremos no seguimento.

No item 2.5.1.1 evidenciou-se a importância de uma adequada prescrição do azimute α_0 da direção de partida, no processo clássico de orientação de um d.g.h. Do rigor com que se procede à transformação de azimute astronômico em geodésico no ponto-origem, bem como em todos os demais pontos de Laplace aproveitados, na hipótese de emprego da técnica de relaxação do azimute de partida (vide conclusão de 2.5.1.1), depende a qualidade de observância da situação de paralelismo. Veremos adiante que a referida transformação não se restringe ao preenchimento da equação de Laplace, sendo este inclusive um dos pontos levantados no questionamento da condição de paralelismo. Antes, porém, examinemos os aspectos críticos do uso da equação de Laplace.

Sendo sua aplicação dependente da observação de grandezas naturais, a equação de Laplace propaga os erros daquelas observações ao azimute geodésico calculado. No caso mais geral de uso da expressão rigorosa (2.22), o erro resultante ($d\alpha$) sobre o azimute genérico α seria dado, considerando-se as (2.19), pela seguinte expressão (termos de segunda ordem negligenciados — *Vaníček, P. & Wells, D. E.* (1974)):

$$d\alpha = dA - d\Lambda \operatorname{sen}\phi - (d\Phi \operatorname{sen}\alpha - d\Lambda \cos\alpha) \cot\beta, \qquad (2.23)$$

na qual dA, $d\Lambda$ e $d\Phi$ denotam os erros destas respectivas observações astronômi

(7) O "sistema realizado" de *Andrade (ibid.)* corresponde, neste contexto, a "sistema definido".

cas (vale também para a (2.23) o recurso de aproximação das grandezas geodésicas do membro direito, pelas astronômicas correspondentes). Em cada um desses erros podem conjugar-se contribuições de parcelas tanto de natureza aleatória quanto determinística. Ora, mediante a realização de várias séries de medidas é possível minimizar-se o efeito dos erros acidentais nas determinações astronômicas isoladas; o mesmo não ocorre, porém, com eventuais erros sistemáticos oriundos da negligência de certas reduções que, sabidamente, devem ser aplicadas sobre observações astronômicas (vide 2.6). Tal colocação assume particular importância quando se analisa um procedimento de orientação de datum em relação ao qual pairem dúvidas sobre a correta aplicação daquelas reduções.

Outras colocações respeitantes à (2.23) fazem-se necessárias. Na verdade, somente na hipótese de orientação explícita do datum sem recorrência à técnica de relaxação do azimute de partida, que a referida relação, aplicada especificamente para ponto-origem (Φ_0,Λ_0) e direção de partida (B_0, A_0), expressaria por completo o erro de orientação $d\alpha_0$ do sistema definido. Já na hipótese de emprego da técnica supra mencionada, a cada ponto de Laplace aproveitado, além do ponto-origem, corresponderia um erro $d\alpha$ dado pela (2.23). Que efeito resultante incidiria então sobre α_0 é uma questão de difícil abordagem. Acredita-se que o recurso à referida técnica permita minimizar o efeito dos erros acidentais em geral. Todavia, nada se pode afirmar, neste sentido, com respeito a possíveis erros sistemáticos incidentes sobre as determinações astronômicas.

Mesmo a expressão rigorosa (2.22) da condição de Laplace não esgota a transformação de azimutes astronômicos em geodésicos, que se deve proceder através da fórmula seguinte, na qual se observa uma nova parcela em relação à (2.22) (*Torge, W.* (1980), pg. 142):

$$\alpha = A - \eta\tan\phi - (\xi\,\mathrm{sen}\alpha - \eta\cos\alpha)\cot\beta + \frac{e^2}{2b\ \mathrm{sen}\ 1''} h_v \cos^2\phi\,\mathrm{sen}\ 2\alpha, \qquad (2.24)$$

onde b é o semi-eixo menor do elipsóide de referência, e^2 o quadrado de sua excentricidade primeira e h_v a altura elipsoidal do ponto observado. O termo adicional à (2.22) representa o efeito sobre observações azimutais, da não coplanaridade das normais ao elipsóide relativas aos pontos de observação e observado ("redução de torção" na referência indicada); por sinal, corresponde a uma das reduções a que se deve idealmente submeter qualquer direção observada na implantação de uma rede horizontal. Mas, em se tratando de uma simples re

dução geométrica independente do desvio da vertical no ponto de observação, não se considera o referido termo parcela integrante da equação de Laplace, que permanece restrita à (2.22).

Segundo justificativa apresentada no item anterior, nas aplicações práticas correntes em "Geodésia bidimensional" consagrou-se o uso da expressão simplificada (2.20) da equação de Laplace em detrimento da rigorosa (2.22). Um primeiro aspecto crítico dessa aproximação é que dificilmente o termo em $\cot \beta$ é calculado para se confirmar a validade de sua negligência em cada aplicação da (2.24), devendo-se ter em mente possíveis circunstâncias operacionais desfavoráveis àquele procedimento. Por outro lado, embora não se verifique com a sistematicidade da aproximação anterior, pode acontecer, no caso de predominância de baixas altitudes na topografia regional, de se negligenciar também o termo corretivo função de h_V na (2.24) (sugerido por *Torge, W.* (1980), pg. 142). Bem, para se ter uma noção ainda que restrita da ordem de grandeza dos termos corretivos adicionais a $\eta \tan\phi$ na equação enfocada, indicam-se abaixo os valores por eles assumidos nas condições verificadas no ponto-origem (Chuã) e direção de partida (Chuã-Uberaba) do SAD 69. (ξ_o= 0,31"; η_o= = - 3,52"; α_o= 91° 30' 04,05"; $\beta_o \cong$ 89° 54'; $h_V \cong$ 806 m; ϕ_o= 19° 45' 41,65", de acordo com informações arquivadas no IBGE; os parâmetros **b** e $\mathbf{e}^2$ resultam das (2.6) e (2.7), considerando-se **a** = 6378160 m e f = 1/298,25).

$$- (\xi_o \operatorname{sen}\alpha_o - \eta_o \cos\alpha_o) \cot\beta_o \cong - 0{,}0004"$$

$$+ \frac{e^2}{2b \operatorname{sen} 1"} hv \cos^2\phi_o \operatorname{sen}2\alpha_o \cong - 0{,}004"$$

Nota-se a pequena magnitude de cada termo face ao erro-padrão desejável de 0,2", numa determinação de azimute astronômico de primeira ordem (IBGE, Boletim de Serviço nº 1602 (Suplemento), agosto de 1983). Entretanto, ainda que se mostre satisfatória para algumas aplicações isoladas, como de fato acontece em Chuã dadas as condições extremamente favoráveis de distância zenital e azimute da direção de partida, não se pode afastar a possibilidade da negligência sistemática dos referidos termos da (2.24) produzir, no caso de recorrência à técnica de relaxação do azimute de partida, um efeito resultante significativo sobre a orientação do datum. Pois nesse caso, para cada aproximação considerada nos pontos de Laplace aproveitados, mormente nos mais próximos ao ponto-origem, existe um canal de influência sobre o azimute α_o de orientação do sistema.

Aliás, esse mesmo canal estaria aberto também à influência distorciva resultante na hipótese, já ventilada, de um tratamento incompleto das observações astronômicas, mormente as de azimute. Enfim, um questionamento mais objetivo da condição de orientação espacial de um sistema geodésico definido requer um levantamento cuidadoso de todas as possíveis tendenciosidades verificadas em cada aplicação da (2.24) considerada no processo de definição de α_0.

Em *Vaníček, P. & Wells, D. E.* (1974), pela primeira vez utilizaram-se os fundamentos da argumentação anterior com o intuito de se demonstrar a possibilidade de um sistema geodésico clássico resultar significativamente mal orientado em relação ao TM (vale dizer, não paralelismo entre CG e TM). Todavia, algumas diferenças prevalecem entre a presente e a supra citada abordagens. Naquela, os autores enfocaram especificamente o caso do NAD 27, sistema geodésico regional adotado no continente norte-americano. Assim, provavelmente em função das características particulares do processo empregado na orientação daquele referencial, a retórica de questionamento da condição de paralelismo restringiu-se a uma análise dos aspectos críticos da transformação de azimute astronômico em geodésico para *Meades Ranch*, ponto - origem daquele sistema (os autores referem-se inclusive a um procedimento precário que teria sido empregado na determinação do azimute astronômico da direção de partida *Meades Ranch - Waldo*). Já neste contexto, procuramos adaptar e ampliar a base de argumentação lançada pelos autores citados, para o caso de aplicação do método de orientação de um d.g.h por relaxação do azimute de partida, de interesse já comentado no que concerne ao SAD 69.

A fig. 13 ilustra a consequência geométrica mais importante de uma possível orientação incorreta de um datum geodésico horizontal em relação ao TM. Com efeito, existe um certo valor α_0 de azimute de partida, para o qual os sistemas CG e TM seriam perfeitamente paralelos entre si. Entretanto, face a todos os possíveis fatores causais levantados neste item, pode ocorrer de um erro resultante significativo incidir sobre o valor prescrito para α_0. Ora, este erro no azimute básico de orientação do sistema manifesta-se, geometricamente, como uma rotação residual Δ do datum, em torno da normal ao elipsóide relativa ao ponto-origem. Portanto, com respeito a um sistema geodésico clássico, posicionado e orientado mediante a estipulação dos parâmetros topocêntricos $(\phi_0, \lambda_0, h_0, \alpha_0)$, vale afirmar: em se admitindo o não paralelismo entre o sistema CG a ele associado e o TM, tal premissa de orientação inadequada matematicamente se traduz na forma de uma rotação do CG em torno da reta (ϕ_0, λ_0).

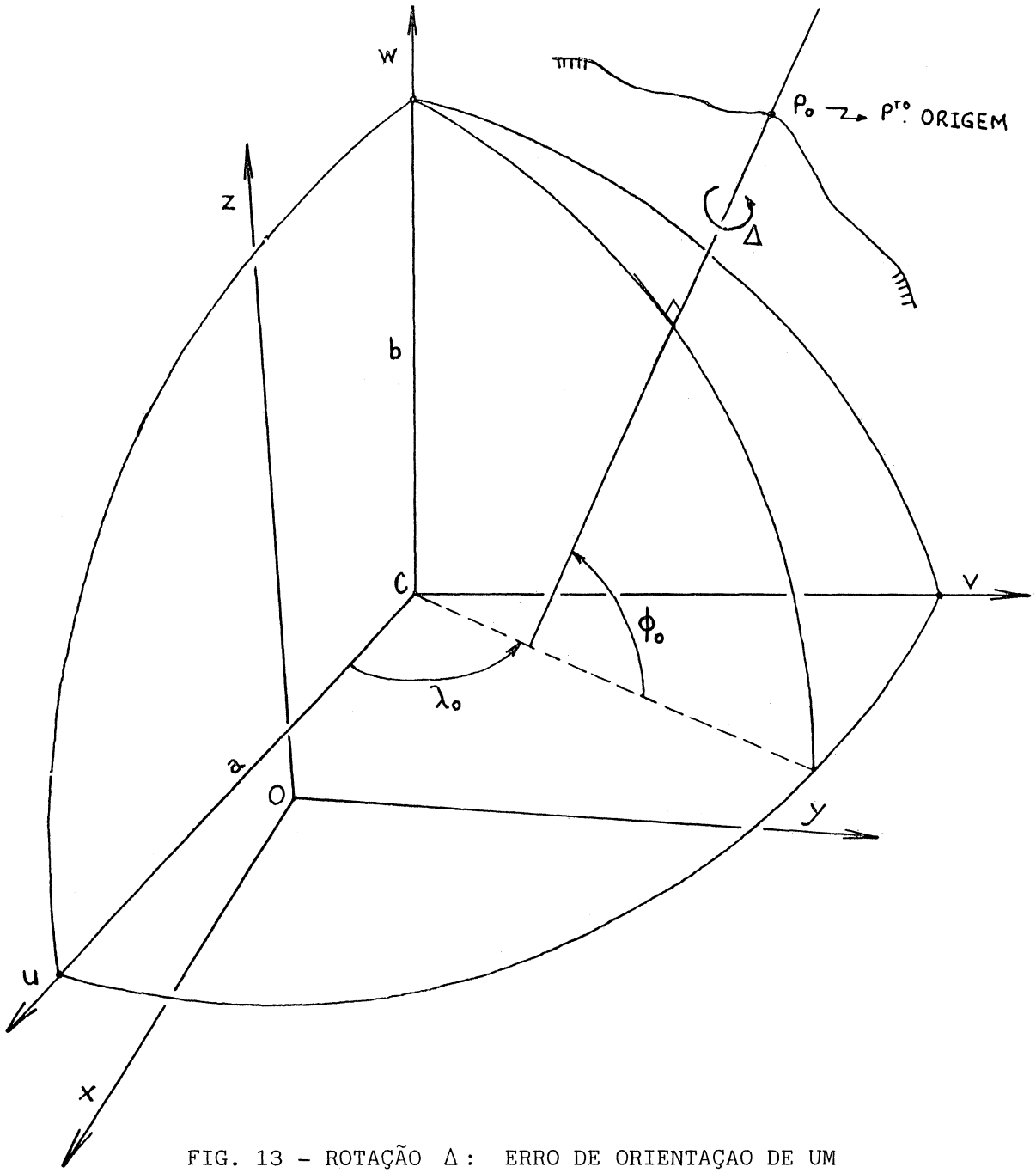


FIG. 13 - ROTAÇÃO Δ: ERRO DE ORIENTAÇAO DE UM SISTEMA GEODÉSICO DE CONCEPÇÃO CLÁSSICA

Para o caso do NAD 27, por exemplo, um valor entre -0,2" e -0,3" foi estimado para a rotação Δ por *Wells, D. E. & Vaníček, P.*(1975).

2.5.2 - MÉTODOS ALTERNATIVOS

Uma característica básica do método clássico, bem evidenciada na seção 2.5.1, é a forma explícita através da qual nele se define a situação espacial de um sistema geodésico, via prescrição de certos parâmetros de posicionamento e orientação daquele referencial em relação à Terra. Por outro lado, existem dois métodos alternativos ao clássico, os quais nos propomos introduzir nesta seção, que se fundamentam em caracterizações implícitas da situação espacial de um d.g.h. O primeiro deles receberá ênfase neste contexto da da sua futura participação conceitual no estudo sobre conexão de referenciais geodésicos (cap. 4); foi batizado em *Vaníček, P.*(1975), pg. 16, sob a denominação datum flutuante, versão literal da expressão inglesa "floating datum".

Na verdade, ao contrário do que se verifica com o método clássico, não é possível assumir o datum flutuante como uma técnica de posicionamento e orientação de um d.g.h. Ele é, isto sim, um critério opcional conceptivo para a situação espacial do sistema geodésico de referência, associado a uma rede horizontal clássica já implantada e ajustada. Segundo tal opção, considera-se a situação espacial do datum como sendo definida pelas coordenadas geodésicas — bi ou tridimensionais —, de todas as estações da respectiva rede planimétrica. Implicitamente é esta a concepção que prevalece sob a ótica do usuário corrente de controle geodésico pois, para ele, os parâmetros definidores da situação espacial do datum são inerentes às próprias coordenadas das estações específicas, em que apóia suas operações localizadas de posicionamento. O sistema geodésico posicionado e orientado via prescrição direta de parâmetros fundamentais, válidos no ponto-origem (sistema definido), não apresenta significação prática para aquele tipo de usuário, malgrado seja o sistema coordenado em relação ao qual se busque posicionar as estações da correspondente rede planimétrica, com a maior precisão possível.

Algumas consequências inconvenientes decorrem do conceito de datum flutuante. Em primeiro lugar, a caracterização geométrica da situação espacial de um sistema geodésico, segundo tal concepção, não resulta tão cristalina como a do método clássico. Pois, em consequência das distorções de causas e efeitos variados, que incidem tanto sobre as coordenadas bidimensionais (ϕ,λ), como sobre as alturas elipsoidais (h) correspondentes — obteníveis mediante o

processo descrito em 2.4.2 –, não é possível conceber-se um sistema coordenado rigorosamente implícito a todos os pares (ϕ,λ) ou, menos ainda, aos ternos (ϕ,λ,h). Em contrapartida, associado à mesma rede de estações – convém enfatizar –, existe um certo referencial perfeitamente caracterizado desde a prescrição de certos parâmetros topocêntricos num dado ponto-origem (sistema definido). Assim, como bem observa *Lambeck, K.*, (1971), somente na condição hipotética ideal em que fosse possível obter-se as coordenadas geodésicas das estações de uma rede planimétrica, isentas de distorções de qualquer natureza, é que a concepção datum flutuante guardaria plena equivalência com a própria definição do sistema geodésico clássico associado àquela rede (convém ressalvar que o citado autor não emprega a terminologia datum flutuante). Por outro lado, a concepção enfocada implica na variabilidade da situação espacial do datum, com a incorporação de novos pontos à rede, reajustamentos localizados, ou qualquer outra operação da qual resulte alterado o conjunto de coordenadas geodésicas das estações da malha horizontal (daí a denominação datum flutuante). Com isso, os parâmetros de transformação entre o sistema assim concebido, e outros referenciais, resultariam variáveis no tempo. Todavia, enquanto no método clássico os erros nas posições das estações referem-se exclusivamente à rede, ou seja, apenas a representação geométrica da realidade é considerada distorcida, sob a perspectiva da concepção datum flutuante aqueles erros distribuem-se entre a malha de estações e o sistema coordenado. Com efeito, mesmo segundo aquela concepção deve-se distinguir entre rede e sistema geodésicos, malgrado estes não mais se apresentem independentes como no método clássico.

Ao contrário do que se poderia supor inicialmente, portanto, não existe obrigatoriedade em se considerar uma rede tridimensional clássica e o sistema geodésico a ela associado, como categorias independentes, na abordagem de processos nos quais se manipulem coordenadas dos pontos da rede. Ora, esse é precisamente o caso do problema de transformação entre referenciais geodésicos, de interesse maior neste contexto. Como veremos oportunamente (cap. 4), mesmo na circunstância em que um dos referenciais envolvidos naquela espécie de problema seja do tipo clássico, nada, a não ser uma possível tendência pessoal do próprio investigador, poderia obrigá-lo a rejeitar a aplicação do critério conceptivo datum flutuante em sua proposta de solução (*Vaníček, P.(1975)*, pgs. 18-19), muito embora tal opção fique sujeita, no caso, a certas críticas que serão futuramente formuladas. Exemplo claro dessa possibilidade é dado por *Lambeck, K.(ibid.)* - na solução de problemas de transformação entre sistemas

geodésicos regionais do tipo clássico, e o TM, o citado pesquisador recorre implicitamente à alternativa datum flutuante, como um critério conceptivo "mais prático" para a situação espacial dos referenciais quasi-geocêntricos. Dessa premissa decorre, contudo, uma consequência direta sobre o modelo de transformação a adotar, porquanto "as distorções incidentes sobre as coordenadas poderão se manifestar como rotações do sistema regional em relação ao TM". Esses conceitos serão devidamente aprofundados no capítulo 4.

O segundo método alternativo ao clássico, para posicionamento e orientação de um d.g.h, inclui-se neste contexto mais como notícia. A exemplo daquele, é válido considerá-lo uma técnica ou processo de definição da situação espacial do datum. Esta, no caso, se define via fixação das coordenadas geodésicas de um conjunto de pontos, selecionados dentre as estações de uma rede planimétrica, com boa distribuição na área de abrangência da mesma (*Vaníček, P.* (1975), pg. 15). De acordo com tal definição, pode-se entender o objeto constituído no espaço tridimensional, pelo conjunto de marcos das estações selecionadas, como a referência física em relação à qual se posiciona e orienta o sistema coordenado (interpretação similar a esta é possível no método clássico, considerando-se os marcos do ponto-origem e da estação visada na direção de partida). Normalmente subentende-se que, em quaisquer operações tais como reajustamentos localizados ou incorporação de novas estações à rede, as coordenadas dos pontos escolhidos permanecerão invariantes; vale dizer, ao contrário do verificado na concepção datum flutuante, aquelas operações ou similares não modificam a situação espacial do datum. Esta é a técnica naturalmente empregada quando se pretende posicionar um d.g.h geocentricamente, conforme verificado no processo de redefinição do datum norte-americano, no qual as estações escolhidas tiveram suas coordenadas tridimensionais geocêntricas determinadas num certo sistema de satélite (estimativa do próprio TM) e assimiladas como valores fixos definidores da situação espacial do sistema coordenado de referência (palestra do Prof. *P. Vaníček*, UNB, Canada - proferida no IBGE, Jun. 1984). A partir de uma distribuição adequada das estações selecionadas, espera-se restringir o efeito degenerativo da propagação de erros, observado radialmente a partir dos respectivos pontos-origem em sistemas geodésicos de concepção clássica.

2.6 - REDUÇÕES DE OBSERVAÇÕES

Do ponto de vista dos objetivos deste trabalho, as etapas mais relevantes do processo de obtenção de pares coordenados (ϕ,λ) associados a um determinado d.g.h, correspondem às delineadas no estudo das redes geodésicas horizontais, em 2.4.1. A primeira delas foi amplamente abordada na divisão anterior. Acompanhando a sequência, reservamos esta divisão conclusiva do cap. 2 para a profundamento objetivo do tema das reduções de observações.

As reduções de observações geométricas (direções ou ângulos e distâncias) foram referidas com exclusividade nas etapas explicitadas em 2.4.1, mais por uma imposição didática na sequência de encadeamento de conceitos. Porquanto àquela altura ainda não se delineara a necessidade da observação de azimutes astronômicos nos procedimentos clássicos da "Geodésia bidimensional". Mas agora, face a tal necessidade, que se verifica tanto ao nível do processo de orientação de um d.g.h segundo o método clássico, como na própria sistemática de expansão de uma rede planimétrica convencional (vide 2.5.1.1), justifica-se apresentar nesta divisão uma síntese das reduções necessárias sobre observações astronômicas em geral (convém recordar que não só azimutes mas também longitudes astronômicas devem ser obtidas nos pontos de Laplace). Também pretende-se focalizar a questão de obtenção de altitudes ortométricas a partir dos desníveis observados nas operações de nivelamento geométrico (vide 2.4.1).

Em benefício da concisão de texto, opta-se por indicar entre colchetes, para cada redução, as principais grandezas necessárias ao cômputo do correspondente fator corretivo, omitindo-se a apresentação de fórmulas que podem ser encontradas em diversas fontes da literatura especializada, algumas das quais serão oportunamente referidas.

I - Reduções de observações geométricas:

As observações geométricas devem ser reduzidas da superfície topográfica ao elipsóide de referência, sobre o qual procede-se então ao transporte de coordenadas (ϕ,λ). Seguem-se as correspondentes reduções:

1. De bases: (*Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pg. 191):[altitudes ortométricas, desníveis geoidais e componentes de deflexão da vertical dos pontos extremos]. A redução de distâncias espaciais medidas eletronicamente dispensa o conhecimento de desvios da vertical (ibid., pg. 192).

2. De direções: (*Merry, C. L. & Vaníček, P.* (1973))
   a) Pela deflexão da vertical: [componentes de deflexão da vertical do ponto de observação e distância zenital do ponto observado].

b) Pela não coplanaridade das normais elipsoidais nos pontos de observação e observado: [altura elipsoidal do ponto observado].

c) Pelo ângulo entre a seção normal elipsoidal e a linha geodésica, entre os pontos de observação e observado: [distância elipsoidal entre os dois pontos].

A redução 2a corresponde precisamente ao termo em $\cot\beta$ na equação rigorosa de Laplace, (2.22). A 2b é a já conhecida "redução de torção" que aparece agregada à equação de Laplace na (2.24). No caso de observação de ângulos, ao invés de direções, as reduções correspondentes são dadas pelas diferenças dos fatores corretivos que seriam aplicados sobre as direções formadoras de cada ângulo.

II - Reduções de observações naturais:

Por observações naturais subentendam-se tanto as medidas astronômicas de latitude, longitude e azimute, quanto os desníveis resultantes de operações de nivelamento geométrico (terminologia proposta por *Mueller, I.I.* (1974)). Seguem-se as reduções:

1. As observações astronômicas em geral devem ser "corrigidas", necessariamente, do efeito do movimento do pólo. Essa redução corresponde à própria transformação coordenada TI → TM. Vide 2.2.3: [coordenadas do pólo instantâneo em relação ao CIO].

As determinações astronômicas de longitude estão intrinsecamente relacionadas com medidas do tempo. O Tempo Universal (TU) obtido na observação, e portanto referido ao pólo instantâneo, é chamado TU0. O TU0 corrigido do efeito do movimento do pólo é chamado TU1, sendo este o tempo de interesse em Astronomia pois vincula-se ao verdadeiro movimento de rotação da Terra. Todavia, estações de rádio que transmitem sinais horários utilizam, convencionalmente, o chamado Tempo Universal Coordenado (TUC). O TUC preserva a rigorosa uniformidade do conhecido Tempo Atômico Internacional (TAI), diferindo deste por um número inteiro de segundos, que se faz variar em saltos de 1 s a cada ano, de maneira que sempre se tenha:

$$|\mathrm{TUC} - \mathrm{TU}| = \mathrm{DTU}\ 1 < 0{,}75\ \mathrm{s}$$

O valor de DTU 1, divulgado diariamente pelas referidas estações, mostra-se necessário portanto para realizar-se a transformação TUC → TU1. Tal correção temporal pode ser assumida como outra redução necessária, específica para determinações astronômicas de longitude.

2. As observações astronômicas, em particular latitudes e longitudes, podem sofrer também reduções ao geóide em função da curvatura de cada linha de força, de maneira que resultem espacialmente referidas a uma única equipotencial do campo gravífico. Porém, tais reduções são de fato necessárias apenas em certas técnicas de determinação do geóide (*Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pg. 193), a exemplo do método astro-geodésico para obtenção de desníveis geoidais relativos a algum datum regional, de interesse específico neste trabalho, como veremos adiante. Geralmente, na implementação daquele método recorre-se a um certo artifício que suprime o procedimento explícito das citadas reduções (ibid., pgs. 200-201). De qualquer maneira, a influência das mesmas sobre coordenadas (ϕ,λ) é muito pequena (efeito de 3ª ordem), notadamente em topografias suaves como a do território brasileiro.

3. Correção ortométrica sobre diferenças de nível resultantes do nivelamento geométrico, objetivando transformá-las em diferenças de altitudes ortométricas (vide comentários finais do segundo parágrafo sobre redes geodésicas verticais, em 2.4.1). Tal correção é motivada pelo não paralelismo entre as superfícies equipotenciais do campo gravífico. Sua expressão rigorosa pode ser encontrada em *Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pg. 168: [gravidade média ao longo das linhas de força, entre o geóide e as estações terminais das linhas de nivelamento; observações de gravidade no percurso das seções de nivelamento].

No IBGE, organismo nacional oficialmente responsável pela implantação de uma rede altimétrica de primeira ordem com ampla cobertura do território brasileiro, tem-se procedido à correção ortométrica através de um equacionamento simplificado que prescinde da coleta de informação gravimétrica no campo. Tal artifício fundamenta-se no conceito de Terra Normal, modelo de aproximação do campo gravífico (*Gemael, C.*(1981 a), pgs. 8.2-8.3). Na verdade, ele confere um caráter essencialmente geométrico, e portanto errôneo, ao problema de obtenção de altitudes ortométricas. Com isso, ainda que pequenas as diferenças, as altitudes resultantes não podem ser rigorosamente assumidas como ortométricas, de acordo com a definição apresentada em 2.2.1 para a terceira das coordenadas naturais de uma estação terrestre.

As reduções de observações geométricas e naturais astronômicas devem ser adequadamente realizadas, a fim de que os pares coordenados (ϕ,λ) dos pontos de uma rede horizontal clássica venham a expressar da maneira mais rigorosa possível, o posicionamento bidimensional daqueles pontos em relação ao sistema

geodésico definido. Pressuposto, bem entendido, um processo rigoroso de ajustamento de observações. Retornaremos a esse tema na divisão 3.3 do próximo capítulo.

A execução das reduções de observações geométricas só é possível portanto a posteriori da confecção de mapas que possibilitem a interpolação das grandezas ξ, η e ν, relativas ao d.g.h adotado, para qualquer estação da respectiva rede planimétrica. Ora, a implementação do já citado método astro-geodésico para determinação do geóide requer, como se sabe, tanto coordenadas astronômicas (Φ,Λ) quanto correspondentes geodésicas (ϕ,λ) de um conjunto bem distribuído de estações. Decorre desse fato uma aparente inviabilidade da sistemática rigorosa de obtenção dos pares coordenados (ϕ,λ), pelo menos no âmbito da aplicação restrita do método astro-geodésico. Todavia, conforme enfatizam *Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pgs. 198-199, valores aproximados de ξ, η e ν são suficientes para a finalidade de redução de observações, de sorte que sua determinação astro-geodésica pode se dar com base em coordenadas (ϕ,λ) oriundas de um ajustamento planimétrico preliminar, em que simplesmente se considere $\xi = \eta = \nu = 0$. Porém, tal procedimento requer alguma precaução, como veremos no próximo capítulo (divisão 3.1).

CAPÍTULO 3

O DATUM SUL-AMERICANO DE 1969

O Datum Sul-Americano de 1969 (SAD 69) é o sistema geodésico regional de concepção clássica, cuja conexão geométrica com o sistema de satélite NSWC 9Z2 pretende-se estabelecer neste trabalho. As características essenciais do processo de definição do NSWC 9Z2, bem como os procedimentos básicos concernentes à obtenção de coordenadas tridimensionais a ele referidas, foram delineados no cap. 2 (seção 2.4.3). Também no capítulo anterior procurou-se aprofundar, sob uma perspectiva bem abrangente, a metodologia clássica de definição da situação espacial de um d.g.h — empregada no caso do SAD 69 —, e suas implicações, além dos tratamentos requeridos sobre observações em geral, tendo em vista a correta obtenção de coordenadas bidimensionais (ϕ,λ) relativas ao datum estabelecido. Neste capítulo (divisões 3.1 e 3.2), pretende-se abordar aspectos mais específicos do projeto de definição do SAD 69, na medida em que relevantes na elaboração de uma proposta criteriosa para solução do mencionado problema de conexão de referenciais geodésicos. Essa mesma finalidade justifica, ademais, um levantamento das possíveis distorções incidentes sobre os ternos coordenados (ϕ, λ,h) resultantes para as estações da rede planimétrica de 1ª ordem do Brasil, porquanto a tal universo de coordenadas pertence parte das informações necessárias a qualquer tentativa de recuperação dos parâmetros de posicionamento e orientação do SAD 69, em relação a algum outro sistema coordenado. Todavia, dada a disjunção existente entre os processos de obtenção de coordenadas bidimensionais (ϕ,λ) e de alturas elipsoidais (h), observam-se características diferenciadas entre as possíveis fontes de distorção em cada caso, justificando-se portanto análises específicas para os mesmos (divisões 3.3 e 3.4).

Doravante, o significado atribuído ao termo datum conforme referido na expressão do título deste capítulo, não mais se restringirá a uma simples superfície elipsóidica de revolução, acepção esta empregada no cap. 2. Em conformidade com o uso consagrado, o termo em questão passará a significar o próprio sistema geodésico definido. No cap. 4 ele será empregado inclusive em alusão a sistemas de satélite, o que também é usual.

3.1 - DEFINIÇÃO DO SISTEMA

Recomendada sua utilização desde 1969 como datum único para a América do Sul, em decorrência da aprovação do relatório final do Grupo de Trabalho sobre

o Datum Sul Americano,[8] pelo Comitê de Geodésia reunido na *XI Consultoria Panamericana sobre Cartografia*, em Washington, D.C., E.U.A, o SAD 69 foi oficialmente adotado como sistema de referência para trabalhos geodésicos e cartográficos desenvolvidos em território brasileiro, apenas em 1979.

O Projeto do Datum Sul-Americano subdividiu-se em duas etapas (*Fisher, I.* (1973), pg. 6): o estabelecimento de um sistema geodésico tal que o respectivo elipsóide apresentasse "boa adaptação" regional ao geóide, e o ajustamento de uma rede planimétrica de âmbito continental referenciada ao sistema definido. Nesta divisão, abordaremos aspectos de interesse concernentes à primeira etapa.

Um procedimento clássico elementar para definição da situação espacial de um elipsóide de referência corresponde à antiga técnica de posicionamento astronômico (fig. 14). Nela, arbitra-se a coincidência da normal elipsoidal com a vertical no ponto-origem; vale dizer, consideram-se nulas, naquele ponto, as componentes do desvio-relativo da vertical, e portanto idênticas coordenadas astronômicas e geodésicas correspondentes. Em primeira instância, também coincidem os azimutes astronômico e geodésico da direção de partida. Outra premissa usual na técnica de posicionamento astronômico é a da coincidência do elipsóide com o geóide "sob" o ponto-origem, expressa através da anulação do desnível geoidal naquela estação (ν_o=0), cuja projeção de Helmert passa então a corresponder a um ponto de tangência entre as duas superfícies. Nessas condições caracteriza-se a situação espacial do datum assim:

$$\phi_o = \Phi_o; \quad \lambda_o = \Lambda_o; \quad h_o = H_o,$$

sendo o paralelismo entre CG e TM assegurado por $\alpha_o = A_o$.

O conhecido Astro-Datum Chuá — ponto-origem em Chuá, estado de Minas Gerais, e elipsóide internacional de 1924 (a=6378388 m e f = 1/297) —, é um exemplo de datum estabelecido segundo a técnica de posicionamento astronômico. Tal foi o sistema empregado como base de referência para definição do SAD 69, sob a motivação expressa pela seguinte colocação de *Fischer, I.*(1969), pg. 4: "a definição de um Datum Sul Americano ótimo deve ser precedida pela uniformização de todos os dados disponíveis em algum datum razoável, que não precisa corresponder ainda ao sistema ideal". As expressões "datum ótimo" e "datum razoável" são bastante vagas. Elas devem ser interpretadas à luz do con

(8) Equipe norte-americana do DMA ("Defense Mapping Agency").

ceito de boa adaptação elipsóide-geóide numa dada região de interesse, como veremos na sequência.

Na divisão 2.6 evidenciou-se a necessidade de conhecimento do geóide relativamente ao datum regional, tendo em vista proceder-se de forma rigorosa às reduções de observações ao elipsóide. Contudo, nem sempre dispõe-se de informação geoidal suficientemente densa e precisa para realização daquelas reduções, sendo esta inclusive a situação de ocorrência mais provável na fase inicial de qualquer projeto de implantação e cálculo de redes planimétricas. Diante de tal situação é usual assumir-se a coincidência entre elipsóide e geóide, i.e., considerar-se $\xi = \eta = \nu = 0$ em todos os pontos da rede, tendo em vista um ajustamento preliminar da mesma. Isto significa, a nível de reduções de observações, ignorar-se completamente as componentes de desvio relativo da vertical e substituir-se alturas elipsoidais por respectivas altitudes ortométricas. Entretanto, essa alternativa de cálculo de redes horizontais, à qual *Mueller, I. I.*(1975) atribui a denominação de "desenvolvimento", pode acarretar acentuadas distorções sobre coordenadas (ϕ,λ), nos casos em que os respectivos elipsóides de referência estejam mal-adaptados ao geóide nas áreas de abrangência correspondentes. Esta condição poderia resultar, por exemplo, da utilização indevida da técnica de posicionamento astronômico para definição de um datum, em casos cuja previsão fosse o emprego do sistema em área muito extensa da superfície terrestre. Com efeito, em tais situações, embora nem sempre seja possível, o ideal é que o ponto-origem encontre-se razoavelmente próximo ao centro geométrico da área de interesse, de preferência em região pouco movimentada. Caso contrário, a tendência geométrica natural de ampliação das discrepâncias geóide-elipsóide com o aumento das distâncias ao ponto-origem pode se manifestar, prejudicando significativamente a aplicação do "método de desenvolvimento", mesmo sob a perspectiva de um mero ajustamento preliminar que apenas viabilizasse a determinação astro-geodésica do geóide, tendo em vista posterior refinamento das coordenadas (ϕ,λ) numa segunda etapa de ajustamento.

Essa condição de má adaptação ao geóide, e suas sequelas em termos de distorções sistemáticas sobre coordenadas bidimensionais,foi constatada por *Fischer* (ibid) com respeito ao aproveitamento do chamado PSAD 56 — datum com ponto-origem em La Canoa, na Venezuela — como datum geodésico horizontal único para o continente sul-americano. Malgrado o fato do PSAD 56 não ter sido posicionado astronomicamente, a técnica utilizada em sua definição lançava mão de informações gravimétricas bastante limitadas às cercanias de La Canoa,

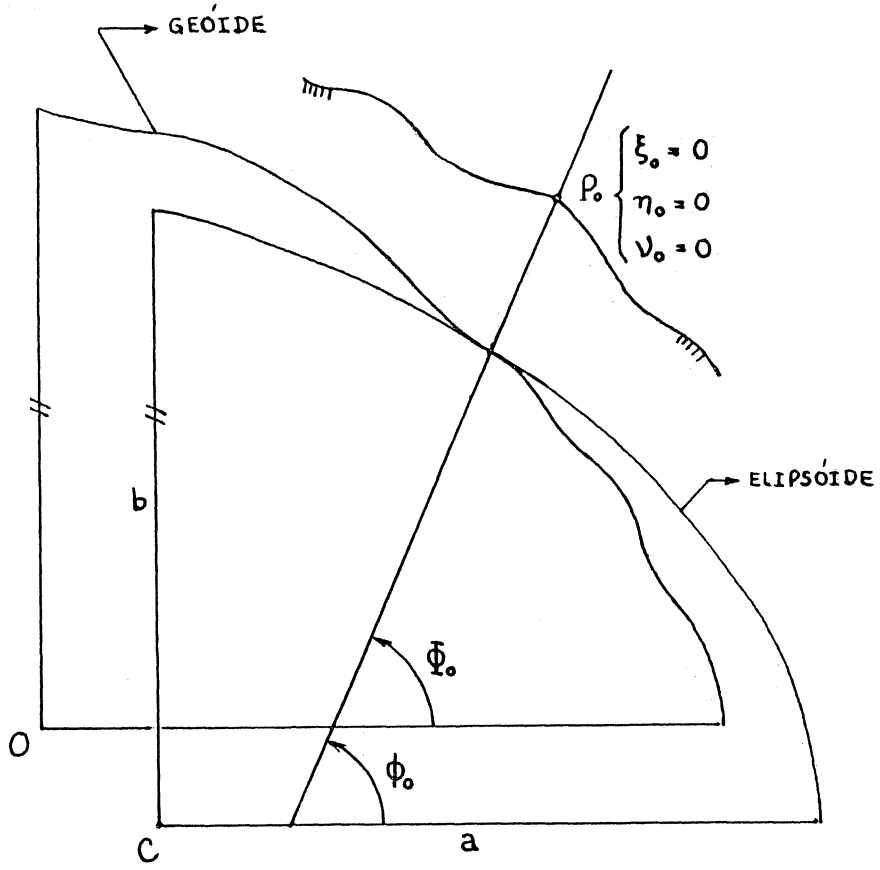


FIG. 14 - DEFINIÇÃO DE UM DATUM POR POSICIONAMENTO ASTRONÔMICO - SEÇÃO MERIDIANA

de maneira que não poderia ter proporcionado nada melhor que um datum com boa adaptação ao geóide numa área muito restrita em torno do ponto-origem. O mais aconselhável era então que se partisse — numa etapa intermediária do projeto de definição de um d.g.h "ótimo" para a América do Sul —, para a adoção de um datum que não introduzisse distorções sistemáticas tão acentuadas como as induzidas pelo PSAD 56. Esse "datum razoável" acabou sendo o já mencionado Astro-Chuá. Sua escolha deu-se basicamente por motivo de ordem prática, já que o IBGE acabara de concluir o ajustamento, naquele sistema, de um grande bloco de triangulação na região centro-sul do Brasil. Pelo menos em termos da rede planimétrica brasileira até então constituída — a mais expressiva do continente —, o ponto-origem Chuá mostrava-se razoavelmente bem situado.

Conexões entre redes de países vizinhos foram providenciadas à época, do que resultaram duas grandes cadeias que se fechavam em Chuá como anéis ("loops"), uma para o sul e outra para o norte. Uma boa densidade de distribuição de estações astronômicas ao longo das cadeias, principalmente entre Brasil central e Argentina, possibilitou a determinação astro-geodésica de deflexões da vertical e desníveis geoidais relativamente ao Astro-Datum Chuá. Constatou-se então uma melhora acentuada na adaptação continental elipsóide-geóide em relação ao PSAD 56, fato evidente na confrontação dos respectivos mapas de desníveis geoidais e de desvios da vertical apresentados em *Fischer, I.* (1969). Entretanto, o efeito real desse aperfeiçoamento limitava-se praticamente ao território brasileiro. Além dos limites nacionais uma certa tendenciosidade manifestava-se sobre a orientação dos desvios da vertical, de forma crescente com o aumento das distâncias para Chuá, notadamente em direção à Cordilheira dos Andes. Quanto aos desníveis geoidais, excelentemente baixos na região leste do continente — em média 5 m nas cadeias nacionais brasileira e argentina —, remontavam a valores da ordem de 60 m na região andina. Logicamente, uma parcela significativa desse comportamento geoidal podia-se atribuir à influência dos Andes. Na verdade, fatores estruturais tão notáveis sempre se refletem nas feições geoidais, independentemente do datum em relação ao qual se descreve o geóide. Mas ainda assim, em se tratando da adoção de um sistema único para toda a América do Sul, estava claro que o Astro-Datum Chuá era passível de aperfeiçoamento no sentido de se aprimorar a adaptação geoidal na região ocidental do continente. Veremos, na sequência, como se procedeu para tanto.

Uma feição desejável observada na determinação astro-geodésica acima referida eram os valores reduzidos de desnível geoidal resultantes para Brasil centro-oriental (região da rede planimétrica nacional de 1ª ordem), Uru

guai e Argentina. Uma grande densidade de perfis astro-geodésicos, implantados entre Chuá e Campo Inchauspe (astro-estação argentina), assegurava uma boa qualidade de determinação geoidal entre aquelas estações. Julgou-se então conveniente a anulação dos desníveis geoidais em ambas, pois com isso a separação geóide-elipsóide tenderia a se manter reduzida na região oriental do continente. Convém lembrar que o desnível geoidal já era nulo no ponto-origem Chuá, que aliás foi mantido como tal para o novo sistema que se pretendia definir. Em Campo Inchauspe entretanto, uma certa variação de desnível geoidal verificar-se-ia em relação as Astro-Datum Chuá.

Com respeito ao elipsóide de revolução a adotar, certos estudos anteriores de *Fischer* haviam demonstrado vantagem, em termos de adaptação elipsóide-geóide, na adoção de um esferóide menor que o Internacional de 1924, elipsóide utilizado em todos os data nacionais da América do Sul, como também no próprio Astro-Chuá. Ora, a UGGI (União de Geodésia e Geofísica Internacional) acabara de propor na Assembléia Geral de Lucerna, 1967, a substituição do Elipsóide de 1924 por um menor associado ao chamado "Sistema Geodésico de Referência 1967". Os novos parâmetros de dimensão e forma eram a= = 6378160 m e f = 1/298,25. Julgou-se então conveniente adotar o novo esferói de para o SAD 69, datum continental sul-americano que se pretendia definir a primorando-se o Astro-Chuá.

Ora, uma vez adotado determinado elipsóide de referência, torna-se necessário fixar três parâmetros tendo em vista a definição de seu posicionamento espacial (vide 2.5.1.1). Destes, dois já estavam implicitamente estipulados com a anulação dos desníveis geoidais em Chuá e Campo Inchauspe. Restava um último grau de liberdade que, de certa forma, podia-se interpretar como uma rotação em torno da linha de referência Chuá-Campo Inchauspe. Essa rotação deveria ocasionar a redução dos desníveis geoidais na região ocidental do continente, em relação ao Astro-Datum Chuá. A fim de se preencher tal objetivo levou-se em conta a feição notável representada pelos Andes, onde preferencialmente os desníveis geoidais deveriam mesmo apresentar-se maiores, em média, que no resto do continente. Destarte a nova determinação geoidal não deixaria de refletir os diferentes aspectos da realidade geológico-estrutural continental. Em termos práticos, atentou-se para essa injunção estipulando-se em 20 m o desnível geoidal em San Lorenzo, nos Andes bolivianos. Com isso, mesmo as mais elevadas regiões andinas resultariam com desníveis inferiores a 50 m. Esta solução, conforme se constatara, mostrava-se consistente com a minimização da soma dos quadrados dos desníveis geoidais ao longo dos perfis astro-geo

dêsicos, considerando-se as injunções impostas em Chuã e Campo Inchauspe (*Fischer, I.* (1969), pg. 29).

As condições descritas para definição do posicionamento espacial do SAD 69 foram então traduzidas em termos de parâmetros topocêntricos em Chuã, ponto-origem do novo datum. A terceira das fórmulas (5.30) de *Torge, W.* (1980) expressa justamente a variação de desnível geoidal numa certa estação, em decorrência de uma mudança de datum, como função das seguintes variações: $\delta\xi_o$, $\delta\eta_o$ e $\delta\nu_o$, respectivamente das componentes do desvio relativo da vertical e do desnível geoidal no ponto-origem; δa e δf, dos parâmetros elipsóidicos. Aliás, é com base em equações daquele tipo que se implementa o procedimento clássico, mencionado no parágrafo anterior, de minimização da soma dos quadrados dos desníveis astro-geodésicos, tendo em vista uma "adaptação ótima" entre geóide e elipsóide na região de interesse (no próximo capítulo, divisão 4.1, apresentam-se as fórmulas de *Graff-Hunter*, similares às supra-citadas). Os parâmetros definidores do SAD 69, estipulados para Chuã, são os seguintes:

$$\xi_o = 0{,}31"; \quad \eta_o = -3{,}52"; \quad \nu_o = 0m$$

As coordenadas geodésicas bidimensionais resultaram $\phi_o = 19^o\ 45'\ 41",6527S$ e $\lambda_o = 48^o\ 06'\ 04",0639W$, as quais evidentemente se relacionam com as astronômicas correspondentes, Φ_o e Λ_o, segundo as duas primeiras das (2.18). A fig. 15 ilustra o mapa astro-geodésico de desníveis geoidais relativo ao SAD 69.

O SAD 69 é um exemplo típico de datum estabelecido segundo o método clássico (vide 2.5.1). Conforme observado em *Vaníček, P. & Krakiwsky, E. J.* (1982), pg. 395, sob a perspectiva de tão somente definir-se a situação espacial de um d.g.h, a procedência dos parâmetros ξ_o, η_o e ν_o é absolutamente irrelevante. Importa apenas que os valores estipulados sejam mantidos invariantes. Essa colocação se estende, é claro, ao azimute geodésico da direção de partida, na medida em que se trata do parâmetro caracterizador da orientação do sistema definido. Dada sua importância neste contexto, abordaremos separadamente, na próxima divisão, o tema da orientação espacial do SAD 69.

3.2 - A QUESTÃO DE ORIENTAÇÃO ESPACIAL

A segunda etapa do Projeto do Datum Sul-Americano consistiu no ajustamento de uma rede planimétrica de âmbito continental referida ao sistema SAD 69, recém definido. Na verdade, tal rede se decompunha nos dois grandes "loops" já mencionados em 3.1, aos quais novas observações foram incorporadas na forma de injunções e refinamentos. As observações astronômicas — latitudes, longitu-

des e azimutes —, sofreram as reduções adequadas pelo efeito do movimento do pólo (o mapa geoidal da fig. 15 já leva em conta esse tratamento). Também as bases foram corretamente manipuladas, tendo-se empregado a determinação geoidal recém-concluída na redução das mesmas ao elipsóide. Triangulação foi a técnica de campo predominante na coleta dos dados aproveitados para constituição dessa rede internacional. Mas coordenadas e distâncias HIRAN injunciona ram o ajustamento do "loop" norte, na ligação das redes nacionais brasileira e venezuelana. Pormenores operacionais respeitantes ao ajustamento desse arcabouço planimétrico continental podem ser encontrados em *Fischer, I.* (1973).

O azimute α_o da direção inicial, Chuá-Uberaba, resultou como produto do ajustamento supra-citado, conduzido mediante a técnica de relaxação do azimute de partida (vide itens 2.5.1.1 — conclusão —, e 2.5.1.2). Assim, o valor inicial de α_o, obtido através da condição de Laplace, recebeu determinada correção na forma de um resíduo de ajustamento, para o qual contribuiram com maior ou menor intensidade todas as injunções de Laplace incorporadas ao processo. Naturalmente é de se esperar que injunções relativas a direções vizinhas a Chuá tenham exercido maior influência sobre o valor α_o. Com efeito, dados os azimutes astronômico e geodésico resultantes para a direção Chuá-Uberaba (referência sul), respectivamente iguais a:

$$A_o = 271^o\ 30'\ 05",42 \text{ e}$$
$$\alpha_o = 271^o\ 30'\ 04",05,$$

pode-se facilmente constatar, de posse dos valores η_o e ϕ_o indicados em 3.1, que A_o e α_o não verificam a condição de Laplace em sua forma simplificada de utilização usual (2.20). O resultado da aplicação da (2.20) difere de α_o em 0,11", discrepância tal explicável justamente com base no fato de α_o representar uma grandeza ajustada. Desde então esse azimute foi mantido invariante, sendo ele o parâmetro definidor da orientação do SAD 69.

Em suma, as informações disponíveis sobre o processo de orientação do SAD 69 apontam no sentido de uma operação cuidadosa, tendo em vista assegurar-se o paralelismo entre o sistema CG a ele associado e o TM. De todas as possíveis fontes de erro na imposição daquela condição geométrica -vide 2.5.1.2-, a negligência das reduções de observações astronômicas pelo efeito de movimento do pólo apresenta-se, no caso, como a mais crítica. Entretanto, conforme mencionado anteriormente, as reduções pertinentes foram aplicadas. Com respeito à negligência sistemática do termo em $\underline{\cot \beta}$, presente na expressão rigorosa da equação de Laplace (2.22), é razoável presumir que dificilmente re

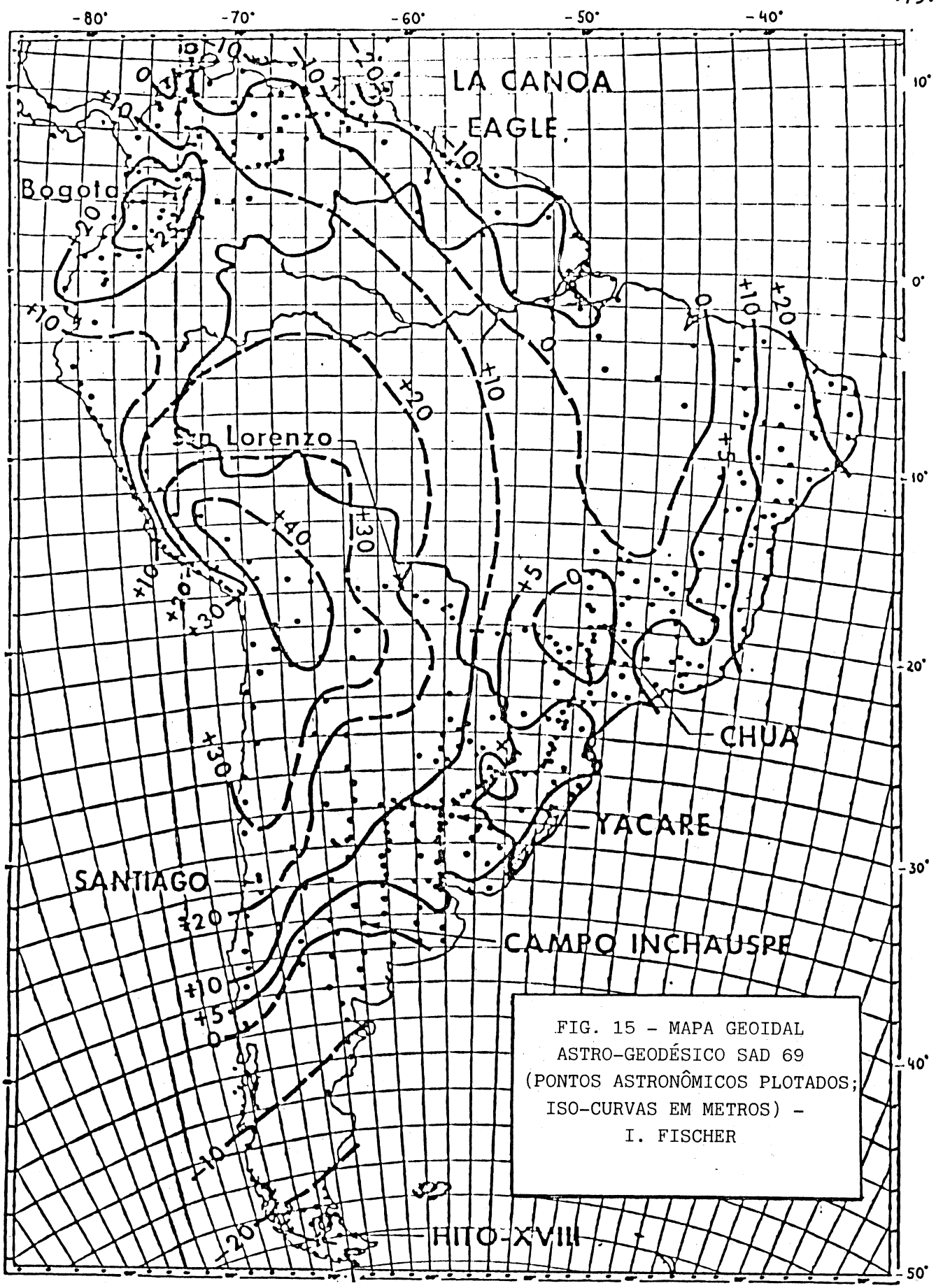


FIG. 15 - MAPA GEOIDAL ASTRO-GEODÉSICO SAD 69 (PONTOS ASTRONÔMICOS PLOTADOS; ISO-CURVAS EM METROS) - I. FISCHER

sultasse significativo em qualquer aplicação daquela equação em território brasileiro, justamente onde se situam os pontos de Laplace mais críticos no processo de orientação do SAD 69. Essa hipótese é corroborada pelo resultado obtido para o termo citado, segundo a direção Chuá-Uberaba, no item 2.5.1.2. Por seu turno, a correção presente na (2.24), função da altura elipsoidal hv do ponto visado, tem sido incorporada ao próprio conjunto de reduções a que se submetem azimutes astronômicos. Essa rotina ficou consagrada no IBGE desde que fontes norte-americanas introduziram no país os procedimentos básicos da Astronomia de Posição. Isso é um indício da possível consideração da parcela corretiva mencionada, no tratamento dos pontos de Laplace participantes do processo em questão. (No IBGE, altitudes ortométricas e não as geométricas têm sido consideradas na referida parcela corretiva. É possível que se tenha procedido identicamente no processo de orientação do SAD 69. Mas tal fato não parece crítico, face às condições topográficas e de adaptação geoidal reinantes nas cercanias de Chuá).

Apesar dos indícios favoráveis, baseados nos registros disponíveis, ainda assim podemos encarar a questão de orientação espacial do datum sul-americano com a cautela preconizada na análise genérica do item 2.5.1.2. Na verdade, não se pode assumir os argumentos do parágrafo anterior como provas definitivas de uma rigorosa observância da condição de parelelismo entre o sistema CG associado ao SAD 69 e o TM. Com isto, configura-se a possibilidade de se parametrizar o ângulo Δ da fig.13, segundo um modelo que equacione a transformação entre aqueles referenciais. Evidentemente, tal modelo deve também levar em conta a excentricidade entre as origens dos dois sistemas. Retomando essa diretriz no cap. 4, fundamentaremos uma proposta para solução do problema central deste trabalho, qual seja: determinação de parâmetros de transformação entre o sistema de satélite NSWC 9Z2 e o SAD 69.

3.3 - POSICIONAMENTO PLANIMÉTRICO

Uma vez discutidos os principais aspectos concernentes à definição do SAD 69, passamos agora a uma tentativa de avaliação das possíveis distorções incidentes sobre os pares coordenados (ϕ,λ) das estações da rede planimétrica brasileira de 1ª ordem.

A rede planimétrica continental SAD 69, ajustada pelo Grupo de Trabalho sobre o Datum Sul-Americano, constituiu o grande arcabouço homogêneo de controle geodésico no qual foram apoiadas as diversas cadeias planimétricas nacio

nais de 1ª ordem, inclusive a brasileira. Esta, em função de sua amplitude, foi segmentada em diversos compartimentos ou blocos, tendo em vista viabilizar seu ajustamento face às restrições computacionais da época. Este trabalho também foi coordenado e executado pela equipe norte-americana do DMA. Seus resultados foram entregues ao IBGE de maneira que futuras densificações da rede viessem a se apoiar adequadamente naqueles blocos, em procedimento similar ao da transição entre as redes continental e nacional.

Pontos de contacto dos "loops" da cadeia continental com a rede brasileira foram fixados no ajustamento de blocos que se apoiavam nos "loops". Além dos contactos com os "loops" existem ainda os pontos de enlace entre blocos adjacentes (alguns destes não apresentam contacto direto com a rede continental). Assim, uma vez ajustado determinado bloco, as estações de blocos adjacentes, comuns ao ajustado, eram mantidas fixas de maneira que a cada ponto da rede correspondesse um único par coordenado ao final de todo o processo. Desde então tem-se preservado tal sistemática nos adensamentos subsequentes realizados pelo IBGE. Conquanto represente o que de melhor tenha sido possível realizar até o momento, tal processo de seccionamento geográfico para o ajuste de grandes redes horizontais pode provocar um acúmulo significativo de distorções geométricas,, tanto em escala (*Askenazi, V.*(1977), pg.5), quanto em orientação (*Vaníček, P.*(1975), pg.17).

Essa tendência degenerativa da precisão de posicionamento planimétrico em função de uma técnica inadequada de ajustamento, torna-se mais crítica no caso de não observância criteriosa das reduções de observações. Neste sentido, de forma geral são favoráveis as informações sobre o procedimento adotado no caso dos blocos da rede planimétrica brasileira, ajustados pela equipe norte-americana. Todas as observações lineares foram reduzidas ao elipsóide, com base no mapa geoidal da fig. 15, da mesma forma como se procedera no ajustamento da cadeia continental. Mas em contrapartida, ressalta-se a inexistência de um padrão uniforme de medidas lineares de 1ª ordem, que se realizaram no Brasil com instrumentos variados — desde fitas de invar até medidores eletrônicos de distâncias —, ao longo de décadas, gerando-se dessa forma um contexto propício à ocorrência de distorções localizadas em escala. Acrescente-se a isso o fato de não terem sido considerados desníveis geoidais na redução das medidas lineares presentes em setores da rede ajustados no IBGE, a posteriori da colaboração norte-americana (estes setores totalizam atualmente cerca de 40% de toda a rede ajustada). O motivo desse procedimento residiu no fato daqueles segmentos localizarem-se, na sua maior parte, em região de incerteza do mapa geoi

dal de *Fischer*. Hoje, sabe-se que a eles corresponde uma faixa significativa de variação de desnível geoidal. Convém observar com *Fischer, I.* (1974), que para cada 6,4 m de ondulação geoidal negligenciados, comete-se um erro de 1 p.p.m em escala. A fig. 16 ilustra o estado presente da rede planimétrica fundamental do Brasil.

Por seu turno, as reduções de direções relacionam-se com o controle de orientação de uma rede planimétrica. A rigor, todas as reduções referidas na divisão 2.6 (I.2) deveriam ser aplicadas sobre direções observadas. Assim tem ocorrido sistematicamente com as reduções **b** e **c**, nos ajustamentos de setores da rede realizados no IBGE, e muito provavelmente deu-se o mesmo no trabalho da equipe do DMA. A redução **a** no entanto, não se tem aplicado atodas as direções da rede, mesmo porque não se dispõe ainda de um mapa satisfatório de desvios relativos da vertical. Que efeito poderíamos esperar desse procedimento? Na verdade, o uso pleno daquela redução equivaleria a injuncionar-se cada direção da rede mediante a equação de Laplace (2.22), conforme observado por *Moritz, H.*(1978),pg.71. Ora,o estabelecimento de pontos de Laplace criteriosamente distanciados entre si baseia-se exatamente na necessidade de controle de orientação da malha, objetivando assegurá-lo dentro de limite imposto pelo nível de precisão almejado. De maneira que a negligência da redução **a** tende a ser bem suprida pela cobertura de pontos de Laplace, que no caso da rede planimétrica brasileira de 1ª ordem pode ser considerada satisfatória. Acrescente-se a isso o aspecto já observado de condições topográficas favoráveis, em geral, à negligência dos termos corretivos dependentes das distâncias zenitais das direções. Mas não se pode, apenas em função dessas colocações, descartar a hipótese de ocorrência de distorções significativas em orientação no âmbito de cada bloco de ajustamento, nas zonas intermediárias entre pontos de Laplace. E mesmo para a rede horizontal como um todo, considerando-se o possível acúmulo dedistorções geométricas, face ao emprego da técnica de subdivisão geográfica da malha em diversos blocos de ajustamento (tendência geral distorciva em orientação).

Com respeito a reduções de observações astronômicas, todas as medidas do gênero têm sido,de acordo com os registros disponíveis no IBGE, adequadamente reduzidas do efeito do movimento do pólo (vide 2.6 (II.1)), inclusive as observações tratadas pela equipe do DMA. Esse cuidado se requer nos pontos de Laplace, daí sua importância para a correta orientação da rede horizontal.

Todo esse mosaico de métodos e critérios observados na constituição da rede planimétrica brasileira de 1ª ordem, do qual simplesmente apresentou-se um breve resumo, provavelmente se manifesta na forma de um quadro extre

mamente complexo de distorções localizadas em escala e orientação. Quão significativas são essas distorções é uma pergunta de difícil resposta. Em tempo, sequer são disponíveis as estimativas de precisão de coordenadas nos blocos ajustados pelo DMA, diferentemente do que se verifica para os setores ajustados no IBGE. Entretanto, mesmo as estimativas disponíveis constituem informação de validade muito restrita, pois não expressam a qualidade do posicionamento de cada estação no contexto global da rede. Essa lacuna de informação torna-se crítica na abordagem de problemas como o que se propõe resolver neste trabalho, porquanto prejudica a atribuição de pesos adequados aos pares coordenados (ϕ,λ)SAD 69.

A confrontação de coordenadas geodésicas regionais com um padrão externo homogêneo, livre das influências sistemáticas provavelmente incidentes sobre aquelas, é uma alternativa para detecção de distorções planimétricas. Percebe-se já nesse ponto uma possível aplicação dos parâmetros que descrevem a conexão entre o SAD 69 e o NSWC 9Z2. Importa evidentemente que a determinação dos mesmos seja da melhor maneira possível depurada da influência de distorções sistemáticas presentes nas coordenadas regionais.

3.4 - POSICIONAMENTO ALTIMÉTRICO — MAPA GEOIDAL SAD 69

Em abordagem similar à da divisão anterior — referente aos pares coordenados (ϕ,λ) das estações da rede planimétrica brasileira de 1ª ordem —, nesta divisão focalizam-se as possíveis distorções incidentes sobre alturas elipsoidais (h) obtidas para as mesmas estações, relativamente ao SAD 69.

Para cada ponto da superfície topográfica, dois tipos de informação são necessários ao cálculo de h (vide 2.4.2): altitude ortométrica (H) e ondulação do geóide (ν) relativa ao sistema geodésico regional. Nesta ordem apresentam-se, a seguir, considerações específicas.

Como se sabe, via de regra as altitudes disponíveis para vértices de redes planimétricas de 1ª ordem derivam de nivelamento trigonométrico (vide §3 sobre redes verticais, em 2.4.1). As condições ideais para obtenção de altitudes segundo aquele método seriam: emprego sistemático da técnica de visadas recíprocas simultâneas, conexões com RN's e ajustamento de toda a cadeia altimétrica, a começar pela rede de 1ª ordem, levando-se em conta as reduções necessárias face a efeitos sistemáticos. Os cuidados operacionais implícitos nas duas primeiras condições vêm sendo observados no planejamento de campanhas do IBGE, mas o ajustamento global da rede altimétrica de 1ª ordem é a grande meta do REALTI, projeto em desenvolvimento naquele órgão. Complementarmente, o REALTII



FIG. 16 - REDE PLANIMÉTRICA FUNDAMENTAL DO BRASIL

prevê o ajuste da rede de nivelamento trigonométrico, injuncionado com altitudes de alta precisão.

O estado presente da rede altimétrica fundamental resume-se num quadro de enorme complexidade, principalmente em decorrência da variação natural de métodos, instrumentos, especificações e critérios ao longo de décadas de observações, que culminaram com a implantação de uma das maiores redes altimétricas nacionais do planeta. De um universo de cerca de 50000 RN's, somente em torno de 24% tiveram suas altitudes obtidas mediante um processo de ajustamento (por blocos) pelo M.M.Q. Cerca de 36% são altitudes basicamente tratadas apenas com a correção de não paralelismo das superfícies equipotenciais, baseada no conceito de Terra Normal, tal como observado em 2.6 (II.3); são estas as chamadas "altitudes preliminares"(9). Circunstancialmente, algum processo primário de distribuição de erros foi considerado na obtenção de "altitudes preliminares". Já as 40% restantes — "altitudes provisórias"(9) —, praticamente correspondem a somatórias de desníveis brutos acumulados ao longo de percursos arbitrários. Acrescente-se ainda a esse quadro as deficiências típicas de redes altimétricas clássicas, discutidas em 2.4.1: o "erro de zero" e a histórica abordagem essencialmente geométrica do processo de obtenção de altitudes sobre o n.m.m. Afinal, o que realmente é o datum altimétrico do Brasil? Por enquanto, continua sendo um ponto sobre a régua de um marégrafo instalado na baía de Imbituba, ao qual se atribui cota nula, ou melhor H=0. Para que a altitude de uma RN qualquer da rede altimétrica de 1ª ordem viesse a expressar ao menos a elevação vertical da estação sobre a superfície de nível que contém o ponto H=0, seria necessário primeiramente enriquecer os circuitos de nivelamento com observações gravimétricas. Essa preocupação, além da questão de redefinição do datum vertical, consta do Plano Geral de Trabalho da Superintendência de Geodésia do IBGE para o quinquênio 1986-1990.

No âmbito deste trabalho, as principais consequências decorrentes do quadro que se acaba de apresentar são as seguintes: incômoda realidade de não se dispor de altitudes ortométricas propriamente ditas; total inexistência de estimativa de precisão para a informação altimétrica disponível — a consistência interna da rede fundamental pode estar bastante prejudicada face à diferenciação de critérios para obtenção de altitudes, aspecto este agravado pela grande magnitude da cadeia; predominância de altitudes obtidas por nivelamento trigonométrico para os vértices da rede horizontal de 1ª ordem, acrescentando-se

(9) Terminologia de caráter interno empregada no IBGE.

destarte, à toda problemática da rede altimétrica fundamental, a menor precisão daquele tipo de nivelamento em relação ao geométrico (na verdade este problema torna-se crítico basicamente por não se dispor de todo o arcabouço altimétrico ajustado, com respectivos desvios - padrão por estação). Conquanto esses aspectos possivelmente não preocupem o usuário típico de controle geodésico altimétrico, para quem a inegável qualidade superior das observações da rede fundamental constitui motivo suficiente para utilizá-la como suporte de suas operações topográficas, o mesmo não ocorre no tipo de aplicação científica que temos em vista neste trabalho.

O mapa geoidal SAD 69 apresentado na fig. 17 é uma versão aperfeiçoada da edição pioneira elaborada no IBGE, em 1979, de um mapa de desníveis geoidais com boa cobertura do território brasileiro.

Atualmente, o mapa da fig. 17 é a fonte de informação geoidal (ν) empregada na composição de alturas elipsoidais SAD 69. Parte dele reproduz fielmente a determinação astro-geodésica de *Fischer* (fig. 15) para o continente sul-americano, elaborada por ocasião do projeto de implantação do SAD 69. Pode-se percebê-lo claramente nas iso-curvas da região centro-sul e do segmento oriental limitado pelo meridiano 48^{o} W. O grande vazio de informação geoidal observado no mapa de *Fischer*, para o restante do território brasileiro, foi posteriormente preenchido no IBGE mediante o estabelecimento de estações Doppler processadas com efemérides precisas, sobre 60 pontos cotados, em sua maioria pertencentes à rede altimétrica fundamental. Ora, a obtenção de desníveis geoidais SAD 69 para essas estações exigia um cálculo prévio de parâmetros para a transformação de coordenadas NSWC 9Z2 (antigo NWL 9D) — sistema Doppler associado a efemérides precisas —, em grandezas referentes ao SAD 69, exatamente o objetivo maior deste trabalho. Para tanto, prevaleceu então (*Kadlec, F.A. & Gomes, J. P.* (1978)) a hipótese mais simples de paralelismo entre o sistema de satélite e o CG associado ao SAD 69, premissa por sinal teoricamente plausível na medida em que se desconhecia, na época, a correção de orientação necessária sobre o NSWC 9Z2 (a partir de 1978 foram publicados os trabalhos já referidos em 2.4.3, informando a correção ainda vigente e outras). Os dados foram proporcionados por 20 estações Doppler distribuídas ao longo da rede planimétrica brasileira de 1ª ordem, na região de melhor definição do mapa geoidal de *Fischer*, de sorte que as alturas elipsoidais (h) SAD 69 das estações resultassem razoavelmente (?) precisas. Assim, componentes do vetor-translação entre os dois sistemas (vide 2.1) foram estimadas mediante simples médias aritméticas das diferenças entre coordenadas cartesianas de satélite e correspondentes cartesia

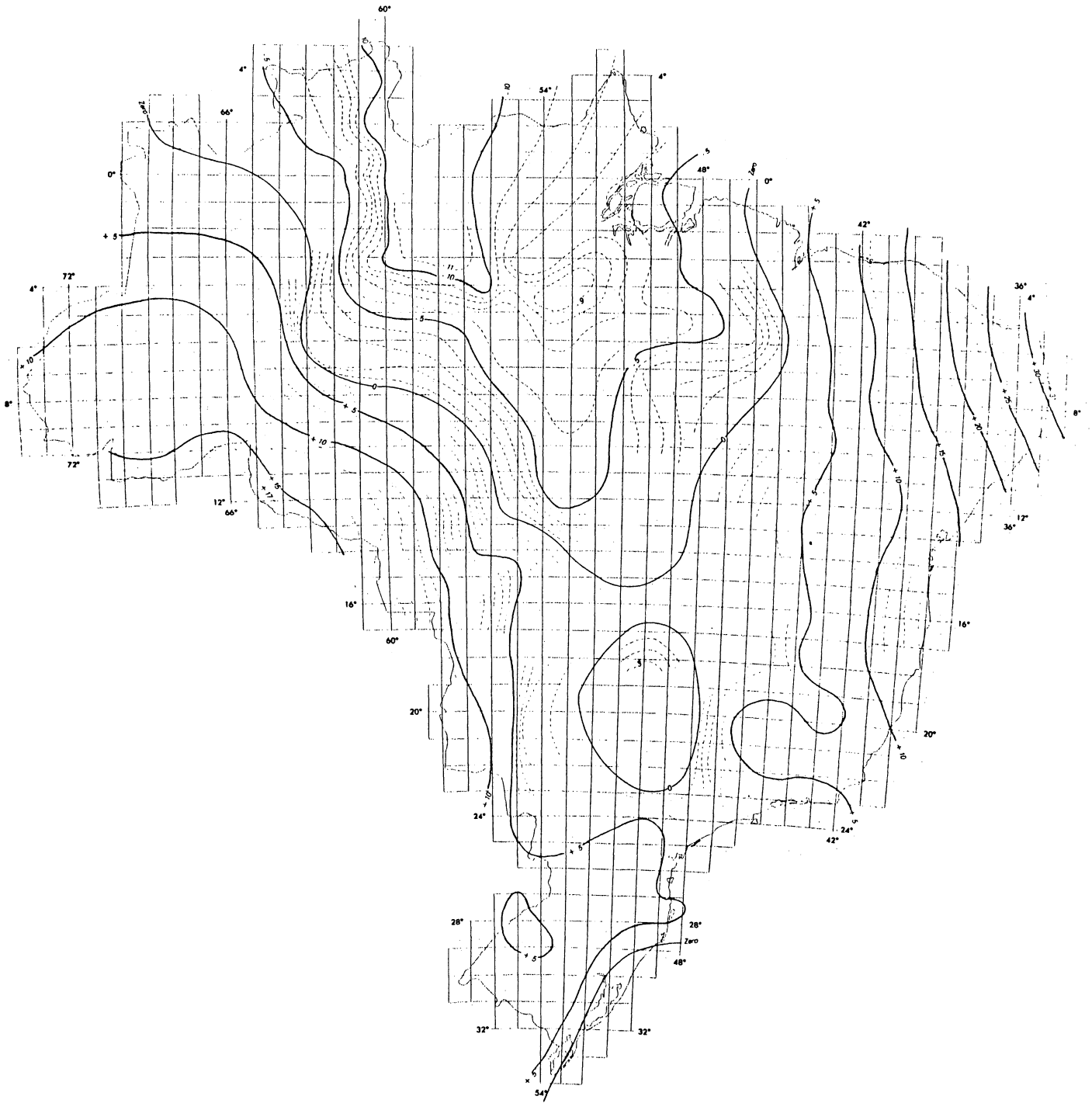


FIG. 17 - MAPA GEOIDAL SAD 69 - COMPOSIÇÃO DE DADOS ASTRO-GEODÉSICOS E POSIÇÕES DOPPLER SOBRE PONTOS NIVELADOS (IBGE-1986)

nas SAD 69 obtidas a partir de termos (ϕ,λ,h), com base nas (2.8). Ora, todo esse procedimento, conquanto represente o que de melhor fosse então cabível realizar, mostra-se influenciável por possíveis deficiências do mapa geoidal de Fischer. Tanto as de natureza sistemática, que temos em vista investigar no próximo capítulo (seção 4.2.5), como as decorrentes do próprio acúmulo de erros acidentais. Pois, como observam *Vaníček, P. & Krakiwsky, E.J.*(1982), pgs. 560-565, a precisão das determinações astro-geodésicas deteriora-se, tipicamente, com o aumento das distâncias ao ponto-origem, em particular quando se emprega a técnica de nivelamento astro-geodésico, caso do trabalho de Fischer. Tudo isso sem contar com as distorções presentes nas altitudes sobre o n. m. m ("ortométricas"), de comportamento quase imprevisível como sabemos.

As considerações do parágrafo anterior ressaltam a estreita correlação existente entre duas determinações básicas em Geodésia, quais sejam: a de parâmetros de transformação entre referenciais geocêntricos e regionais e a de desníveis geoidais a estes referidos, ante à facilidade atual de posicionamento de estações terrestres em sistemas de satélite. Atualmente dispõe-se, em território brasileiro, de um universo bem mais abrangente de estações comuns aos referenciais NSWC 9Z2 e SAD 69, em comparação à época do último cálculo afim de parâmetros de transformação (os respectivos valores constam no cap. 4; tratam-se dos resultados da determinação descrita no parágrafo anterior, ainda vigentes no IBGE). Cabe porém a seguinte indagação: não seria necessário repensar a premissa de paralelismo entre os dois referenciais, tendo em vista um novo cálculo daqueles parâmetros? Pois admitir que o SAD 69 encontre-se bem orientado segundo o sistema TM significa, atualmente, rejeitar a hipótese de paralelismo entre o CG SAD 69 e o NSWC 9Z2. Aquele e outros questionamentos motivam o estudo conceitual que, no próximo capítulo, culminará com uma proposta para solução da conexão NSWC 9Z2 $\leftrightsquigarrow$ SAD 69.

CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÕES COORDENADAS ENTRE SISTEMAS GEODÉSICOS - CONEXÃO NSWC 9Z2 ↔ SAD 69 -

Neste capítulo finalmente elabora-se uma proposta para determinação de parâmetros de transformação entre o NSWC 9Z2 e o SAD 69, sistemas sobre os quais já se discorreu com a profundidade necessária ao estudo que ora se inicia. Uma proposta criteriosa com a referida finalidade deve-se logicamente forjar com base num exame crítico de diversos modelos matemáticos já apresentados na literatura especializada, para estabelecimento de conexão entre sistemas geodésicos geocêntricos, de âmbito global, e quasi-geocêntricos, de âmbito regional. Essa é a tônica do cap. 4.

Na divisão 4.1 focaliza-se o problema de transformações de datum sob um ponto de vista geral e essencialmente geométrico.

4.1 - ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Equações de transformação de datum foram desenvolvidas desde o início do século para dar solução aos primeiros problemas práticos enfrentados pelos geodesistas, no campo das conexões entre sistemas regionais de concepção clássica, os quais como sabemos definem-se pela prescrição de: parâmetros topocêntricos de posicionamento (ξ_o, η_o, ν_o), estipulados para um certo ponto-origem P_o, e parâmetros elipsóidicos (a, f), caracterizadores da dimensão e forma do elipsóide de referência (vide 3.1 - caso do SAD 69). Assim, a mudança de datum expressava-se tipicamente, na situação mais geral, mediante variações do tipo $\delta\xi_o$, $\delta\eta_o$, $\delta\nu_o$, δa e δf. É o caso, por exemplo, das conhecidas fórmulas de Graff-Hunter, transcritas a seguir:

$$\begin{aligned}
\delta\xi_i'' = &- (1 - h_i/a)[\operatorname{sen}\phi_i \cos(\lambda_i-\lambda_o)(U\operatorname{sen}\phi_o + V\cos\phi_o)/a + \\
&+ \operatorname{sen}\phi_i \operatorname{sen}(\lambda_i-\lambda_o)\,\delta\eta_o - \cos\phi_i(V\operatorname{sen}\phi_o - U\cos\phi_o)/a + \\
&+ \operatorname{sen}2\phi_i\,\delta f]\ \operatorname{cossec}1'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\eta_i'' = &- (1 - h_i/a)[\operatorname{sen}(\lambda_i-\lambda_o)\,(U\operatorname{sen}\phi_o + V\cos\phi_o)/a - \\
&- \cos(\lambda_i-\lambda_o)\,\delta\eta_o]\ \operatorname{cossec} 1'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\nu_i = &- \cos\phi_i \cos(\lambda_i-\lambda_o)\,(U\operatorname{sen}\phi_o + V\cos\phi_o) - \\
&- a\cos\phi_i \operatorname{sen}(\lambda_i-\lambda_o)\operatorname{sen} 1''\delta\eta_o'' - \\
&- \operatorname{sen}\phi_i(V\operatorname{sen}\phi_o - U\cos\phi_o) - \delta a + \operatorname{sen}^2\phi_i\,\delta f,
\end{aligned}$$

nas quais

$$U = - a \operatorname{sen}1'' \delta\xi_o'' - a \operatorname{sen}2\phi_o \delta f \quad e$$

$$V = - \delta\nu_o - \delta a + a \operatorname{sen}^2\phi_o \delta f,$$

sendo $\delta\nu_i$, $\delta\nu_o$, a e δa em metros. As fórmulas de Graff-Hunter proporcionam então as respectivas variações das componentes do desvio-relativo da vertical $(\delta\xi_i, \delta\eta_i)$ e do desnível geoidal $(\delta\nu_i)$, verificadas numa estação genérica **i**, dada por suas coordenadas elipsoidais (ϕ_i, λ_i, h_i) referentes a um certo sistema clássico, com ponto-origem em P_o (ϕ_o, λ_o) e definido por $(\xi_o, \eta_o, \nu_o, a, f)$. As grandezas $\delta\xi_o$, $\delta\eta_o$, $\delta\nu_o$, δa e δf — calculadas no sentido "datum-final"-"datum inicial" —, constituem os parâmetros de transformação, devendo ser conhecidas a priori, é claro, para que se possa aplicar as fórmulas em questão de maneira direta. A inferência dos correspondentes incrementos coordenados $\delta\phi_i$, $\delta\lambda_i$ e δh_i é imediata com base nas (2.19) e (2.15). (As longitudes são consideradas positivas para oeste, nas fórmulas de Graff-Hunter).

Equações de transformação enquadráveis sob a forma geral das de Graff-Hunter são especialmente apropriadas para atender a necessidade de conexão de sistemas regionais clássicos. Mas, com o advento da era dos satélites artificiais em Geodésia, o problema de transformações de datum resultou ampliado ante a necessidade de se estabelecer conexões em que um dos referenciais envolvidos fosse um sistema de satélite, em especial um dos associados a técnicas Doppler, como o NSWC 9Z2 — caso específico de interesse neste trabalho. Assim, o desenvolvimento de "novas" equações de transformação deveria preferencialmente tirar proveito da característica de tridimensionalidade cartesiana inerente ao posicionamento Doppler. Essa necessidade nos reporta ao estudo das transformações coordenadas entre sistemas cartesianos, empreendido em 2.1. Ora, a expressão mais geral dessas transformações é dada pela relação (2.2). Trata-se portanto de aplicá-la ao problema específico que se pretende equacionar. Na fig. 18 aparecem esquematizados os sistemas $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}]$, de satélite, e [u v w], CG associado a certo datum regional clássico (parâmetros elipsóidicos **a** e **f**), cuja conexão com o primeiro pretende-se estabelecer. Os vetores-posição da estação genérica P_i são respectivamente $\vec{\bar{x}}_i$ e $\vec{u}_i$. Da (2.2) resulta, portanto:

$$\vec{\bar{x}}_i = \vec{T} + R\ (\omega, \psi, \varepsilon)\ \vec{u}_i, \text{ ou} \qquad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} + R(\omega, \psi, \varepsilon) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

As relações (2.3) e (2.4) permitem obter a expressão analítica da matriz $R(\omega, \psi, \omega)$, chamada matriz de Euler. Levando-se em conta a pequena magnitude prevista para rotações entre sistemas geodésicos, algumas simplificações trigonométricas e de cálculo conduzem ao seguinte resultado:

$$R(\omega, \psi, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \omega & -\psi \\ -\omega & 1 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Sejam (ϕ_i, λ_i, h_i) as coordenadas elipsoidais de P_i. Vamos então substituir as (2.8) e (4.3) na equação de transformação (4.2):

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \omega & -\psi \\ -\omega & 1 & \varepsilon \\ \psi & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (N_i + h_i)\cos\phi_i \cos\lambda_i \\ (N_i + h_i)\cos\phi_i \operatorname{sen}\lambda_i \\ [N_i(1 - e^2) + h_i]\operatorname{sen}\phi_i \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

onde N_i — grande normal em P_i —, é dada pela (2.9) e e^2 por uma das (2.7).

As rotações fundamentais, ou ângulos de Euler, — ε, ψ, ω —, expressam na (4.4), possíveis deficiências na definição de cada referencial. Porquanto sempre procura-se defini-los paralelamente ao TM (vide 2.4.3 e 2.5.1.1), de maneira que a nível teórico as rotações seriam nulas. É usual aliás, a aceitação apriorística da hipótese de paralelismo entre os sistemas definidos, em decorrência do que a expressão geral de conexão (4.4) resulta simplificada ($\varepsilon = \psi = \omega = 0$):

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N_i + h_i)\cos\phi_i \cos\lambda_i \\ (N_i + h_i)\cos\phi_i \operatorname{sen}\lambda_i \\ [N_i(1 - e^2) + h_i] \operatorname{sen}\phi_i \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Nessa hipótese, os parâmetros de transformação resumem-se às componentes TX, TY, TZ do vetor-translação.

Com base na diferenciação da (4.4) e em manipulações algébri-

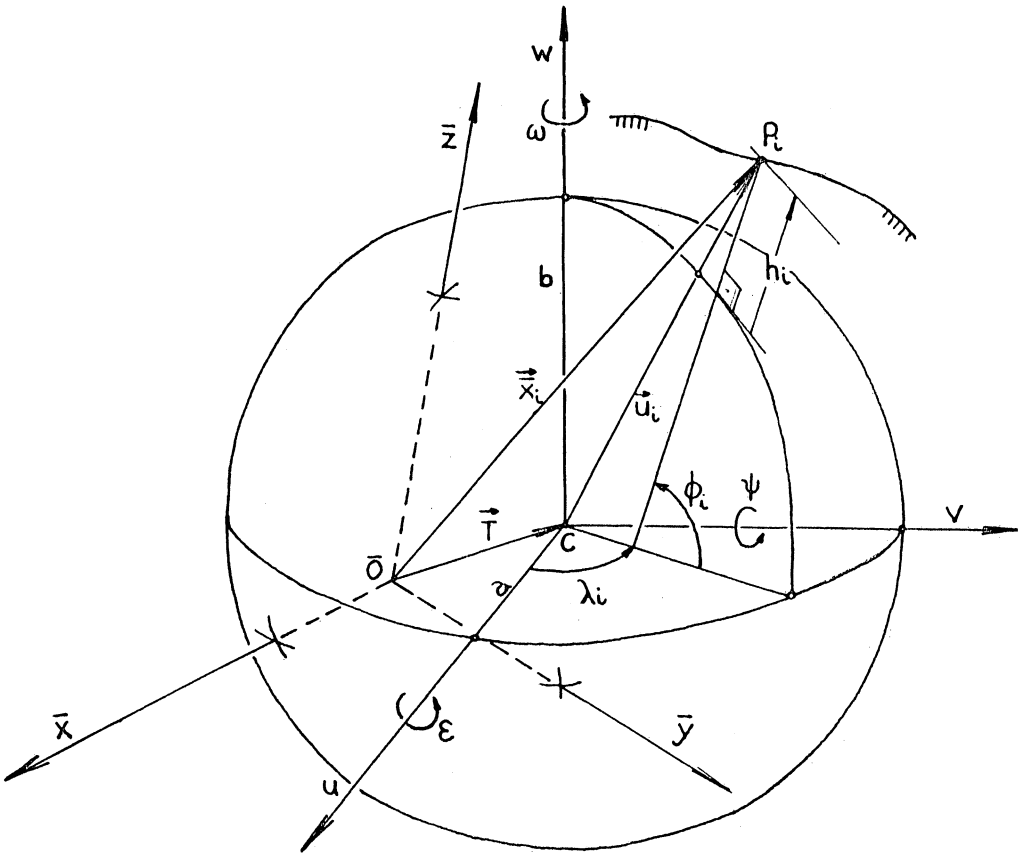


FIG. 18 - CONEXÃO ENTRE UM SISTEMA DE SATÉLITE
E UM REGIONAL CLÁSSICO - ENFOQUE CARTESIANO

cas elementares é possível, após certas considerações conceituais, estabelecer fórmulas para variações $\delta\phi_i$, $\delta\lambda_i$ e δh_i de coordenadas curvilíneas, em função dos mesmos parâmetros de transformação TX, TY, TZ, ε, ψ, ω. Recordando o procedimento usual de se vincular algum elipsóide de referência (parâmetros $\bar{a}$ e $\bar{f}$) ao sistema de satélite (vide 2.4.3), aos ternos cartesianos $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ corresponderão elipsoidais $(\bar{\phi}_i, \bar{\lambda}_i, \bar{h}_i)$, obtidos mediante as (2.10) - (2.14) (o semi-eixo menor $\bar{b}$ pode-se calcular a partir de $\bar{a}$ e $\bar{f}$, recorrendo-se à (2.6)). Considerando $\delta\phi_i = \bar{\phi}_i - \phi_i$, $\delta\lambda_i = \bar{\lambda}_i - \lambda_i$ e $\delta h_i = \bar{h}_i - h_i$, *Merry, C.L.& Vaníček, P.* (1974) apresentam equações de transformação com o seguinte teor (aproximação esférica[10]):

$$\delta\phi_i = (\text{sen}\phi_i\cos\lambda_i TX + \text{sen}\phi_i\text{sen}\lambda_i TY - \cos\phi_i TZ)/a - \psi\cos\lambda_i + \varepsilon\,\text{sen}\lambda_i + \\ + 2\text{sen}\phi_i\cos\lambda_i\,\delta f,$$

$$\delta\lambda_i = (\text{sen}\lambda_i TX - \cos\lambda_i TY)/(a\cos\phi_i) + \omega - \psi\tan\phi_i\,\text{sen}\lambda_i - \varepsilon\tan\phi_i\cos\lambda_i, \quad (4.6)$$

$$\delta h_i = -\cos\phi_i\cos\lambda_i TX - \cos\phi_i\text{sen}\lambda_i TY - \text{sen}\phi_i TZ - \delta a + a\,\text{sen}^2\phi_i\,\delta f,$$

onde $\delta a = \bar{a} - a$ e $\delta f = \bar{f} - f$ são grandezas normalmente conhecidas a priori. É interessante observar como elas ficam explicitadas sob este enfoque diferencial do problema de conexão de sistemas geodésicos. Isto não acontece no enfoque cartesiano, equacionado na (4.1) em sua expressão vetorial mais completa. Outra feição notória das (4.6) é o fato das diferenças altimétricas δh_i não se mostrarem sensíveis a eventuais rotações entre os sistemas definidos (efeitos de 2ª ordem).

Existem fórmulas diferenciais alternativas às (4.6) na medida em que se considerem ou não certas simplificações em cada dedução. Usualmente recorre-se à hipótese de paralelismo. É o caso, por exemplo, das fórmulas de Molodenskii, abreviadas ou exatas (*Gemael, C.* (1981 b), pg. 4.11). Bem como das (5.55) de *Heiskanen, W. & Moritz, H.* (1967), pg. 207, deduzidas a partir das (4.5) admitindo-se aproximação esférica. As expressões resultantes correspondem, como era de se esperar, às (4.6) a menos dos termos em ε, ψ e ω. Mas, adicionalmente, preservando o enfoque diferencial, a hipótese de paralelismo e a aproximação esférica, os citados autores deduzem equações em que a transformação de datum é parametrizada mediante as variações de coordenadas

---

(10) Por aproximação esférica entenda-se basicamente a negligência de termos em $\underline{e}^2$ ou $\underline{f}^2$. É um procedimento válido para a maioria das aplicações geodésicas correntes.

geodésicas no ponto-origem do sistema regional. No tipo de problema focalizado, considerando-se a notação proposta, tem-se para tais variações: $\delta\phi_o = \overline{\phi}_o - \phi_o$, $\delta\lambda_o = \overline{\lambda}_o - \lambda_o$ e $\delta h_o = \overline{h}_o - h_o$. As equações resultantes são similares às de Graff-Hunter, apresentadas anteriormente nesta divisão e àquelas equivalentes, a menos de aproximações. Sua forma de expressão mostra-se, contudo, mais adequada para o embasamento de análises futuras neste capítulo. Por isso transcrevêmo-las a seguir:

$$\begin{aligned}
\delta\phi_i &= [\cos\phi_o\cos\phi_i + \operatorname{sen}\phi_o\operatorname{sen}\phi_i\cos(\lambda_i - \lambda_o)]\,\delta\phi_o - \operatorname{sen}\phi_i\operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_o)\cos\phi_o\,\delta\lambda_o + \\
&+ [\operatorname{sen}\phi_o\cos\phi_i - \cos\phi_o\operatorname{sen}\phi_i\cos(\lambda_i - \lambda_o)]\,(\delta h_o/a + \\
&+ \delta a/a + \operatorname{sen}^2\phi_o\,\delta f) + 2\cos\phi_i(\operatorname{sen}\phi_i - \operatorname{sen}\phi_o)\,\delta f \\
\\
\delta\lambda_i &= [\operatorname{sen}\phi_o\operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_o)/\cos\phi_i]\delta\phi_o + [\cos(\lambda_i - \lambda_o)\cos\phi_o/\cos\phi_i]\,\delta\lambda_o - \qquad (4.7) \\
&- \cos\phi_o\operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_o)(\delta h_o/a + \delta a/a + \operatorname{sen}^2\phi_o\,\delta f)/\cos\phi_i \\
\\
h_i &= a\,[\cos\phi_o\operatorname{sen}\phi_i - \operatorname{sen}\phi_o\cos\phi_i\cos(\lambda_i - \lambda_o)]\delta\phi_o + a\cos\phi_i\operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_o)\cos\phi_o\,\delta\lambda_o + \\
&+ a\,[\operatorname{sen}\phi_o\operatorname{sen}\phi_i + \cos\phi_o\cos\phi_i\cos(\lambda_i - \lambda_o)](\delta h_o/a + \delta a/a + \operatorname{sen}^2\phi_o\,\delta f) - \\
&- \delta a + a(\operatorname{sen}^2\phi_i - 2\operatorname{sen}\phi_o\operatorname{sen}\phi_i)\,\delta f
\end{aligned}$$

A título de informação a quem interessar possa, *Soler,T.*(1976) deduz fórmulas diferenciais para transformação de datum, elegantemente condensadas sob forma matricial.

Face à natureza do objetivo prático deste trabalho, modelos matemáticos de conexão de referenciais geodésicos não serão empregados em sentido direto, mas antes na constituição de sistemas de equações tendo em vista a recuperação de parâmetros de transformação. Nesse caso, coordenadas de estações conectoras — pontos posicionados em ambos os referenciais envolvidos —, constituem as observações com as quais lidaremos. Logo, erros de qualquer tipo inerentes a tais coordenadas poderão, de alguma forma, repercutir naqueles parâmetros. Tal aspecto não foi considerado nesta divisão, cuja perspectiva de análise equacionou-se em termos da geometria de conexão de sistemas definidos, tão somente. Mas será importante objeto de estudo nas próximas etapas do capítulo.

4.2 - MODELOS CONVENCIONAIS

Como veremos, os modelos convencionais para conexão de referenciais geo

désicos enquadram-se essencialmente no enfoque cartesiano da equação de transformação (4.1). Mas esta sofrerá algumas adaptações, a primeira das quais relaciona-se com o tema das diferenças de métrica entre sistemas geodésicos cartesianos, questão não abordada na divisão anterior. Esta será a motivação inicial no estudo dos referidos modelos.

4.2.1 - O PROBLEMA DE ESCALA E PREMISSAS BÁSICAS

Sob a perspectiva de análise geométrica do problema de conexão de data, referenciais geodésicos cartesianos receberam tratamento de sistemas coordenados com mesma escala ou métrica. Vale dizer, prevaleceu a hipótese de igualdade entre os padrões de medida linear inerentes a cada sistema envolvido. Contudo, em se tratando de recuperar parâmetros de transformação mediante equações constituidas com base na (4.1), é razoável admitir que os vetores $\vec{u}_i$ e $\vec{x}_i$ induzam padrões lineares médios diferentes para cada sistema cartesiano. Porquanto a materialização de sistemas regionais clássicos demanda a realização de medidas lineares por métodos terrestres convencionais — via de regra, instrumentos variados são empregados com essa finalidade —, ao passo que a métrica Doppler fica implicitamente definida pelo valor adotado para a constante GM (produto da constante de gravitação universal pela massa da Terra — *Hoar, G. J.* (1982), pg. 2-37). Essa concepção do problema de escala nas transformações coordenadas do tipo (4.1) traduz-se, analiticamente, mediante a aplicação de um fator $(1 + \delta)$ aos vetores $\vec{u}_i$ na referida equação. O parâmetro δ corresponderá então a uma diferença relativa de escala entre os dois sistemas, cujas métricas no caso pressupõe-se estabelecidas pelas respectivas redes terrestres associadas; ou, mais restritamente, pelas estações conectoras disponíveis. Da (4.1) resulta, portanto:

$$\vec{x}_i = \vec{T} + (1 + \delta)\, R(\omega, \psi, \varepsilon)\, \vec{u}_i \qquad (4.8)$$

Temos, na (4.8), o equacionamento de uma transformação de similaridade completa no espaço tridimensional, mais coerente com a realidade de conexão de sistemas geodésicos do que a (4.1).

Vamos agora reescrever a (4.8), levando em conta a seguinte substituição:

$$\vec{u}_i = \vec{u}_o + \vec{u}_{oi}, \qquad (4.9)$$

onde $\vec{u}_o$ é o vetor-posição, relativamente a [u v w], do ponto-origem P_o do sistema regional e $\vec{u}_{oi}$, consequentemente, o vetor-topocêntrico com origem em P_o e extremidade na estação genérica P_i. Nesse caso vem:

$$\vec{\bar{x}}_i = \vec{T} + (1 + \delta)\, R\,(\omega, \psi, \varepsilon)(\vec{u}_o + \vec{u}_{oi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\bar{x}}_i = \vec{T} + (1 + \delta)\, R(\omega, \psi, \varepsilon)\, \vec{u}_o + (1 + \delta)\, R(\omega, \psi, \varepsilon)\, \vec{u}_{oi} \qquad (4.10)$$

Num enfoque alternativo ao precedente, para o problema de escala, pode-se admitir que as métricas dos sistemas cartesianos independam das respectivas redes materializadoras. Neste segundo caso, simplesmente impõe-se igualdade entre as escalas dos dois referenciais. Sendo assim, o parâmetro δ passa a ser interpretado como uma distorção de escala, introduzida pelas coordenadas da rede terrestre regional. Apenas esta permanece então afetada por $(1 + \delta)$. Com isso, a (4.10) pode ser assim reescrita:

$$\vec{\bar{x}}_i = \vec{T} + R(\omega, \psi, \varepsilon)\, \vec{u}_o + (1 + \delta)\, R(\omega, \psi, \varepsilon)\, \vec{u}_{oi} \qquad (4.11)$$

Ambas as abordagens do problema de escala em modelos cartesianos para conexão de referenciais geodésicos são inteiramente válidas. Entretanto, convém interpretá-las adequadamente. A primeira (eq. (4.8)) nos reporta ao conceito de datum flutuante, apresentado e discutido na seção 2.5.2 (recomenda-se sua leitura). Já a segunda (eq. (4.11)) mostra-se compatível com uma das mais relevantes implicações conceituais da teoria de posicionamento e orientação de um datum regional pelo método clássico (vide 2.5.1.2), porquanto nela se nota uma clara distinção entre rede e sistema geodésicos, assumidos como entidades não apenas distintas, mas também independentes. Essa análise parece sugerir uma opção preferencial pela segunda abordagem conceptiva do problema de escala, quando se trata de estabelecer conexão entre um sistema de satélite e um regional clássico. Em termos de cálculo, no entanto, veremos (seção 4.2.3) que as duas concepções proporcionam resultados iguais.

As equações (4.8) e (4.11) constituem a base analítica dos aqui chamados modelos convencionais para conexão de sistemas geodésicos, que serão estudados nas seções subsequentes desta divisão. A aplicação desses modelos cartesianos num problema de cômputo de parâmetros de transformação, do tipo aqui focalizado com maior interesse, deveria idealmente realizar-se sob certas condições ou premissas básicas, abaixo descritas e discutidas:

1ª - As coordenadas $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ são homogeneamente consistentes com o sistema de satélite, que se pode portanto admitir como implícito a elas. As respectivas matrizes variância-covariância (MVC's) resultam, no caso específico de interesse neste trabalho, do processamento de cada posição iso

lada Doppler.

2ª - Os pares coordenados (ϕ_i, λ_i), referentes ao sistema geodésico regional, são conjugados com as correspondentes alturas elipsoidais h_i, bem como respectivas MVC's, resultando dessa operação ternos coordenados homogêneos (ϕ_i, λ_i, h_i) e MVC's associadas. Para tanto, é necessário que coordenadas geodésicas bidimensionais e altitudes ortométricas (H_i) procedam de ajustamentos rigorosos de observações homogêneas — a priori dos quais se realizem todas as reduções necessárias sobre observações —, e se disponha de um bom mapa de desníveis geoidais (ν_i) referido ao datum regional, com estimativa de precisão conhecida.

A primeira premissa constitui, no âmbito deste trabalho, antes uma questão de aceitação do que propriamente de constatação. Vamos simplesmente admitir sua validade, tomando por base as colocações finais de 2.4.3, concernentes à técnica Doppler de posições isoladas no caso de emprego de efemérides precisas, condição sobre a qual trabalharemos. Em tal circunstância, a aceitação da primeira premissa é fato usual na literatura especializada. A segunda, porém, geralmente envolve aspectos mais críticos e diferenciados. Com respeito à aplicação em vista, a propósito, nas divisões 3.3 e 3.4 apresentou-se uma síntese das deficiências incidentes sobre as fontes de informação que se conjugam para a composição de ternos coordenados (ϕ_i, λ_i, h_i) referentes ao SAD 69, no caso de estações brasileiras.

No estudo teórico de modelos convencionais para conexão de data, concederemos ênfase ao tipo de problema que se pretende resolver. Em função dessa perspectiva e face às considerações precedentes, estaremos atentos para a possibilidade de distorções sistemáticas incidirem sobre as coordenadas regionais. Bem como para as consequências desse quadro hipotético de distorções, sobre os parâmetros de transformação a serem determinados.

4.2.2 - MODELO BURSA-WOLF

O modelo Bursa-Wolf (BW) — fig. 19 — consiste numa equação de transformação de similaridade completa, no espaço tridimensional. Sua expressão analítica é portanto a própria (4.8), aliás já escrita para o tipo específico de conexão aqui focalizado. Vamos reescrevê-la com certas alterações necessárias em notação: (Referência original: Bursa, M. - Studia Geophysica et Geodaetica, vol. 4, pgs. 390-396, Academia Praha, 1967)

$$\vec{x}_i = \vec{T}_b + (1 + \delta_b)\ (\omega_b, \psi_b, \varepsilon_b)\ \vec{u}_i \qquad (4.12)$$

Tentaremos agora sintetizar os principais efeitos de uma possível opção pelo

modelo BW, tendo em vista o cômputo de parâmetros de translação (TX_b, TY_b, TZ_b), de escala (δ_b) e de rotação (ε_b, ψ_b, ω_b) entre o sistema de satélite e o CG associado ao regional clássico.

Parece claro que os parâmetros ε_b, ψ_b e ω_b tenderão a absorver distorções sistemáticas rotacionais possivelmente incidentes sobre as coordenadas (u_i, v_i, w_i), oriundas tanto dos pares coordenados (ϕ_i, λ_i) quanto das altitudes geométricas h_i. Este fato acarreta a impossibilidade de separar rotações entre sistemas definidos (ε, ψ, ω), de "rotações médias" resultantes das citadas distorções ($\Delta\varepsilon$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$). Com isso, tem-se algo do tipo:

$$\varepsilon_b = \varepsilon + \Delta\varepsilon; \quad \psi_b = \psi + \Delta\psi; \quad \omega_b = \omega + \Delta\omega,$$

ocorrendo portanto um mascaramento dos parâmetros de orientação relativa entre os sistemas coordenados envolvidos. (*Krakiwsky, E.J. & Thomson, D.B.*(1974), pg. 608). Consequentemente, na fig. 19 o sistema [u v w], cujo não paralelismo a [$\overline{x}$ $\overline{y}$ $\overline{z}$] expressa-se através de ε_b, ψ_b e ω_b, não corresponderia ao sistema CG associado ao datum regional, tal como este foi definido.

Outro aspecto a considerar no uso do modelo BW, particularmente em aplicações do tipo de maior interesse neste contexto, refere-se à incidência de algumas correlações elevadas entre parâmetros de translação e rotação (*Boucher, C.* (1979), pg. 1015). Neste sentido, *Badekas, J.* (1969), pg. 19 observa existir uma equivalência de efeitos geométricos entre uma translação e uma rotação em torno de um ponto impróprio ("no infinito"). Ora, o centro de rotações no modelo BW (C na fig. 19) situa-se nas proximidades do geocentro, muito afastado portanto da pequena área de distribuição das conectoras. Torna-se consequentemente difícil separar os efeitos geométricos de translações e pequenas rotações, num processo de ajustamento a que se submeta um sistema de equações de observação constituidas com base no modelo focalizado. Isso explica as fortes correlações mencionadas. Demonstra-se porém, que elas tendem a diminuir quanto mais uniforme e abrangente for a distribuição das estações conectoras sobre a superfície terrestre, situação exequível obviamente apenas nos casos de conexão de sistemas cujas conectoras apresentem cobertura global.

Similarmente ao que se verifica com as rotações, também o parâmetro de escala tende a se correlacionar fortemente com as translações. O efeito geométrico de uma variação de escala nos vetores cartesianos $\vec{u}_i$ pode equivaler, de forma aproximada, ao de uma translação do sistema [u v w], em virtude do seguinte: pela pequena magnitude esperada para δ_b — usualmente da ordem de $\pm$ 1 ppm — e, mais uma vez, em decorrência da concentração de conectoras numa

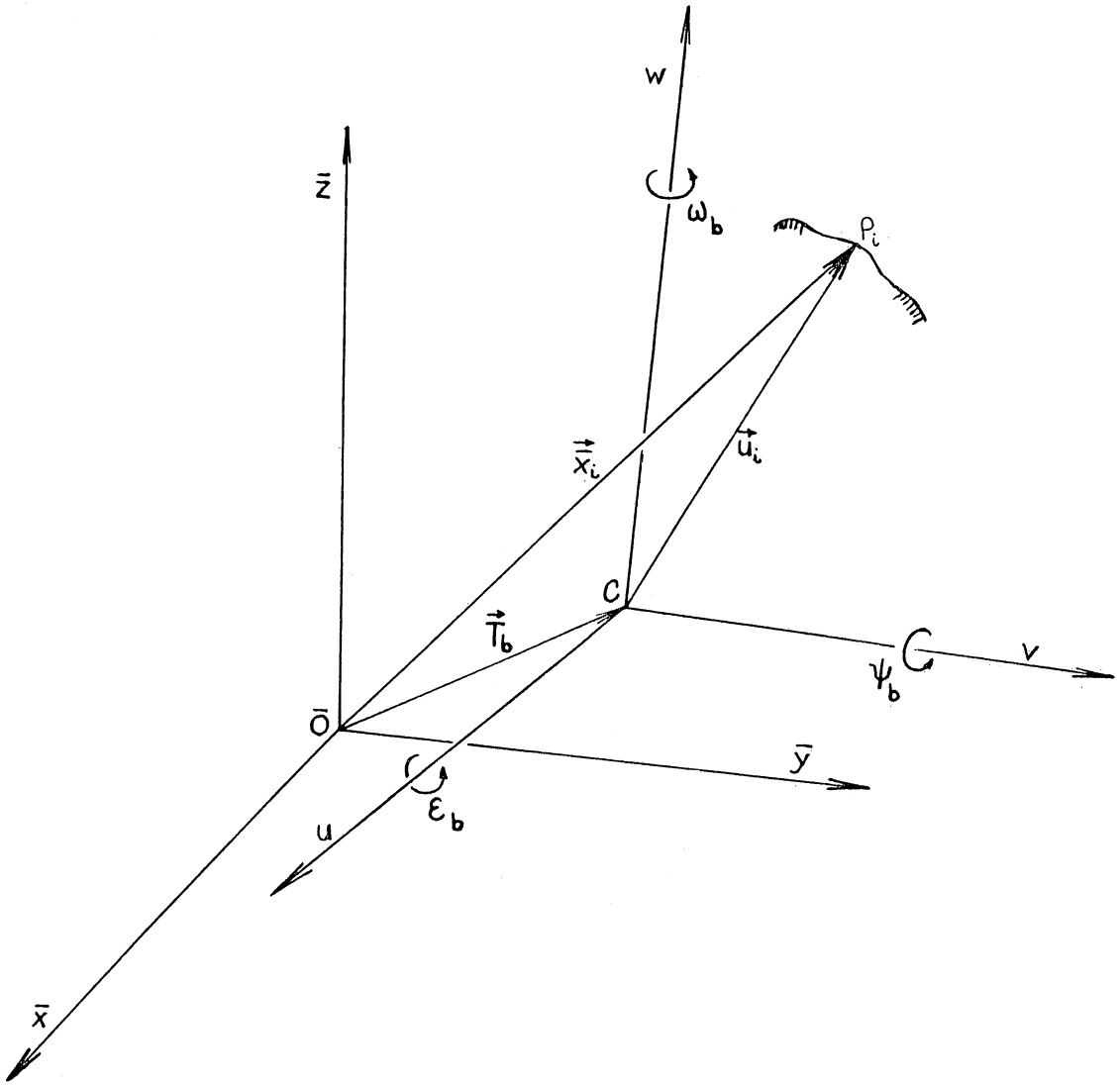


FIG. 19 - MODELO BURSA-WOLF

área restrita da superfície terrestre, aspecto crítico na aplicação de nosso interesse. Também importa considerar a localização geográfica das conectoras. Por exemplo, encontrando-se elas limitadas a uma região equatorial, intuitivamente percebe-se que a correlação $[TZ_b - \delta_b]$ tende a ser menor que as $[TX_b - \delta_b]$ e $[TY_b - \delta_b]$, sendo as magnitudes destas dependentes da posição média das conectoras em relação ao semi-plano origem de longitudes. Aliás, análise semelhante é possível igualmente para as correlações entre translações e rotações.

Quanto menos correlacionados entre si resultarem os parâmetros de transformação para um determinado modelo, tão mais independentes serão suas correspondentes estimativas (*Hoar, G. J.* (1982), pg. 2-44). Todavia, ao contrário do que se pode pensar, a incidência de correlações elevadas não interfere no potencial de adequação do modelo à realidade física. Assim, é possível acontecer por exemplo, do modelo BW proporcionar resultados satisfatórios numa certa aplicação — i. e. resíduos de observações predominatemente pequenos e com boa aderência a uma distribuição normal de média zero —, e ainda assim resultarem elevadas algumas correlações entre seus parâmetros. Porquanto estas não dependem da capacidade de parametrização da realidade física apresentada pelo modelo; mas sim da própria equação de transformação adotada e da localização geográfica das conectoras, em cada caso.

Para finalizar essa abordagem objetiva do modelo BW, manipulemos a (4.12) a fim de expressá-la numa forma mais conveniente à constituição de equações de observação. Prevendo pequenas magnitudes para as rotações, podemos empregar a (4.3) naquela equação. Mas antes de fazê-lo procederemos à seguinte decomposição:

$$\mathcal{R}(\omega_b, \psi_b, \varepsilon_b) = I_3 + \mathcal{Q}_b \,, \tag{4.13}$$

onde

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_b = \begin{bmatrix} 0 & \omega_b & -\psi_b \\ -\omega_b & 0 & \varepsilon_b \\ \psi_b & -\varepsilon_b & 0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Substituindo então a (4.13) na (4.12) e negligenciando termos de 2ª ordem (produtos de δ_b pelas rotações) resulta:

$$\vec{x}_i = \vec{T}_b + \vec{u}_i + \delta_b \vec{u}_i + \mathcal{Q} \vec{u}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{T}_b + \vec{u}_i + \delta_b \vec{u}_i + \mathcal{Q}_b \vec{u}_i - \vec{x}_i = \vec{0} \tag{4.15}$$

Krakiwsky, E. J. & Thomson, D. B. (1974), pg. 607, apresentam as matrizes para ajustamento da (4.15) pelo M.M.Q, tendo em vista a determinação dos parâmetros de transformação (com a ressalva de empregarem notação diferente). Recomenda-se o método combinado (*Gemael, C.* (1984), cap. 10) como processo mais conveniente para o ajustamento, lembrando que tanto os vetores $\vec{x}_i$ como os $\vec{u}_i$ representam observações, ou seja, tem-se seis observações por conectora. Evidentemente são necessárias no mínimo três estações para viabilizar o processo.

A interpretação do parâmetro de escala δ_b, no modelo BW, é a correspondente à equação (4.8), discutida na seção anterior.

4.2.3 - MODELO MOLODENSKII - BADEKAS

Badekas, J. (1969) foi o primeiro pesquisador a conferir tratamento cartesiano a certas fórmulas diferenciais propostas por *Molodenskii* em 1962 (11), para modelagem da conexão entre o TM e algum sistema regional clássico (hoje em dia, onde se lê TM pode-se considerar, numa primeira aproximação, algum sistema de satélite, v. g. – NSWC 9Z2). O modelo resultante passou então a ser conhecido sob a denominação de Molodenskii-Badekas (MB). Ele aparece ilustrado na fig. 20, acerca da qual convém observar não tratar-se de um esquema rigoroso, malgrado corresponda à representação gráfica mais usual do modelo focalizado. Mais adiante veremos porquê a fig. 20 pode gerar confusão.

Apesar de diferir da concepção do próprio Badekas, a interpretação de *Krakiwsky, E. J. & Thomson, D. B.* (1974), pg. 610, para o modelo MB(em sua "1ª versão" naquela referência) simplifica a tarefa de apresentação do mesmo. Por isso convém considerá-la. Ela se baseia numa premissa apriorística de paralelismo entre os sistemas definidos de satélite e CG regional,aos quais se impõe a condição de métricas idênticas. (Os citados autores admitem ser o sistema de satélite consistente com o TM). Sendo assim, tanto o fator de escala (δ_m) como as rotações (ε_m, ψ_m, ω_m) do novo modelo vão parametrizar distorções da rede terrestre regional ou, mais exatamente, do conjunto de coordenadas regionais das estações conectoras. De acordo com essa diretriz, vamos então adaptar a equação (4.11), que se baseia naquele mesmo conceito funcional do parâmetro de escala. O vetor-posição $\vec{u}_o$ (acompanhar pela fig. 20), pelo fato de não estar afetado por distorções da rede, só poderia mesmo sofrer

---

(11) In Molodenskii et alii – "*Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*" (tradução do original em russo).

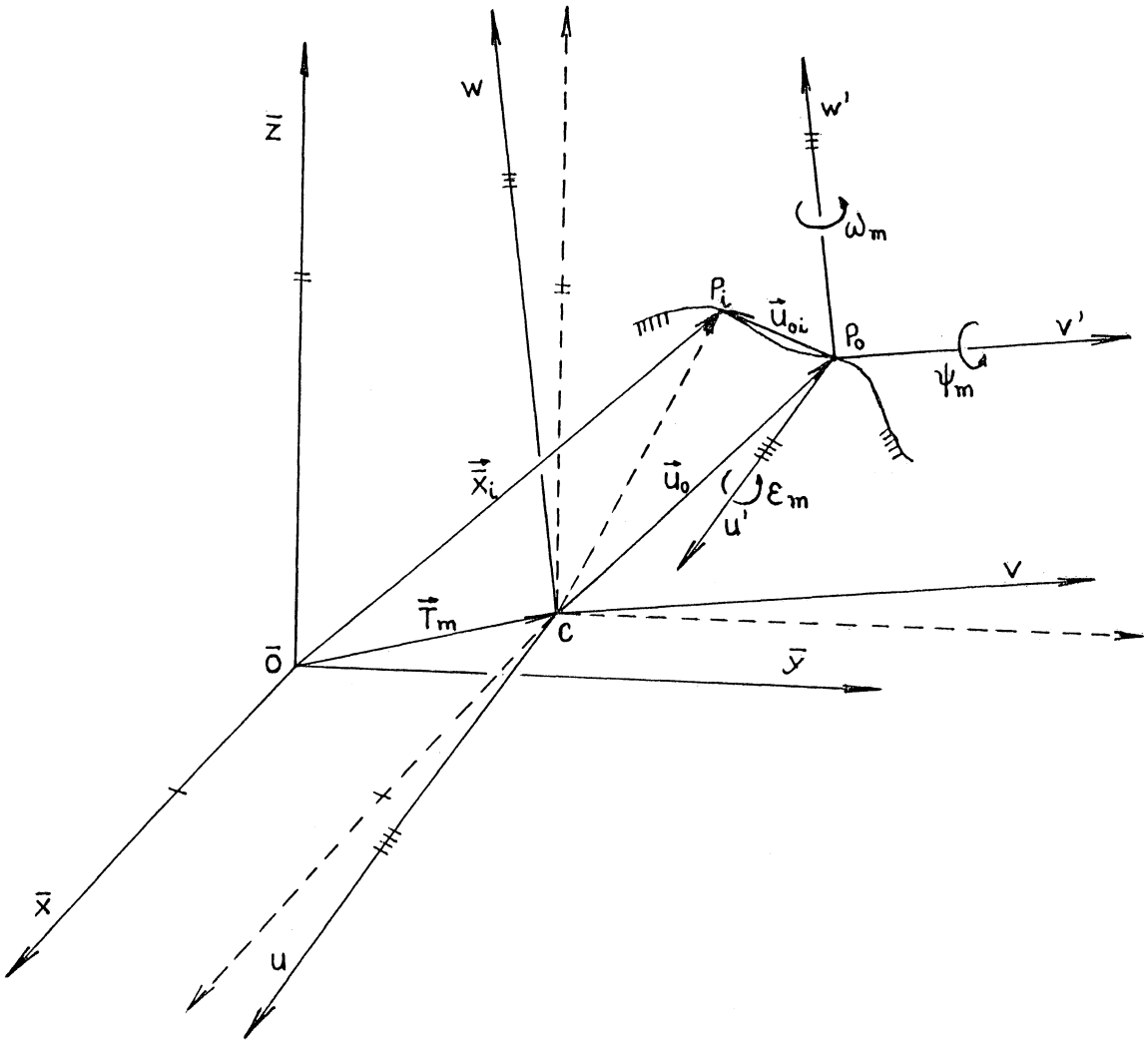


FIG. 20 - MODELO MOLODENSKII - BADEKAS

o efeito de eventuais rotações entre sistemas definidos (ε, ψ, ω), tal como se expressa na referida equação. No entanto, face à hipótese de paralelismo supra-mencionada, sobre $\vec{u}_o$ não incidirá efeito algum de rotações, de maneira que da (4.11) resulta, com as necessárias adaptações de notação:

$$\vec{x}_i = \vec{T}_m + \vec{u}_o + (1 + \delta_m)\, R(\omega_m, \psi_m, \varepsilon_m)\, \vec{u}_{oi}, \qquad (4.16)$$

onde $\vec{u}_{oi}$ — vetor topocêntrico com origem em P_o e extremidade na conectora genérica P_i—, pode ser extraído da (4.9), resultando então para a (4.16):

$$\vec{x}_i = \vec{T}_m + \vec{u}_o + (1 + \delta_m)\, R(\omega_m, \psi_m, \varepsilon_m)(\vec{u}_i - \vec{u}_o) \qquad (4.17)$$

A (4.17) é a expressão analítica do modelo MB. Mas ainda na fig. 20, atente-se para o fato de [u v w] não corresponder ao sistema CG regional definido, pois este (eixos tracejados com origem em C) é suposto paralelo ao de satélite; [u v w] já representa portanto, segundo a ótica de *Krakiwsky & Thomson*, algo como um sistema cartesiano "médio" implícito às coordenadas regionais das estações conectoras. Ele tenderia ao definido, somente na hipótese (inexequível) de ausência de distorções sistemáticas naquelas coordenadas. As rotações, por seu turno, verificam-se em torno dos eixos do sistema topocêntrico [u' v' w'] , com origem em P_o e equipolente a [u v w].

Em sua proposição original, *Badekas* simplesmente não se valeu da premissa de paralelismo entre sistemas definidos. Veremos pouco adiante ser ela dispensável à compreensão geométrica do modelo, apesar de influir na interpretação das rotações resultantes. *Badekas* (*ibid.* pg. 14) também distingue, com respeito ao datum regional, o sistema definido da rede associada. Porém, observa que os parâmetros de transformação vão inevitavelmente absorver "não apenas os erros inerentes à definição do datum, mas também todos os erros sistemáticos presentes em sua materialização". Essa colocação implica em que o sistema [u v w] venha incorporar erros oriundos das duas fontes, tal como esclarecido no estudo do modelo BW. Trata-se de uma concepção mais rigorosa que a de *Krakiwsky & Thomson* pois não se pode assegurar a priori que os erros de definição dos data — tanto o regional quanto o de satélite, convém ressaltar —, sejam não significativos.

Quanto à presença de $\vec{u}_o$ livre no membro direito da (4.16), como explicá-la sem o recurso da hipótese de paralelismo entre os sistemas definidos? *Badekas* não o faz claramente, mas *Leick, A, & Gelder, B. H. W. van* (1975), pg. 8, sim. O modelo MB, esclarecem eles, baseia-se no pressuposto de que o

vetor $\vec{u}_o$, expresso relativamente a [u v w], permaneça invariante com as rotações que tornam aquele sistema paralelo a $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}]$. Facilita a aceitação dessa hipótese remontarmos, na fig. 20, ao fato das rotações não se verificarem em torno dos eixos de [u v w], mas sim dos de seu equipolente [u' v' w'], cuja origem P_o é portanto o ponto fixo ou centro de rotações. Ora, é possível interpretar a ação destas imaginando o deslocamento do espaço de pontos em torno de P_o (transformação ativa), inclusive do próprio centro C de [u v w] e, com ele, dos eixos daquele sistema, até que se tornassem paralelos aos de $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}]$ sem alteração dos cossenos diretores de $\vec{u}_o$ (convém recordar a pequena magnitude das rotações). Na verdade, a própria imposição da (4.16) sustenta a premissa de invariância de $\vec{u}_o$. Esta é a base da diferença entre os modelos MB e BW. Porquanto estivesse o vetor $\vec{u}_o$ na (4.16) afetado por rotações e fator de escala, tal como na (4.10) – expressão analiticamente igual à de BW –, os dois modelos resultariam idênticos. Veremos, na sequência, como essa diferença entre eles se manifesta geometricamente.

A característica geométrica essencial do modelo MB é o fato do centro de rotações ser um ponto da superfície topográfica – dado pelo vetor $\vec{u}_o$ –, diferentemente do modelo BW, no qual aquela função é exercida pelo ponto C, origem quasi-geocêntrica de [u v w]. Com efeito, fazendo-se $\vec{u}_o = \vec{0}$ em (4.17), o modelo MB reduz-se essencialmente à expressão (4.12) de BW. Naquela particularidade de MB (e somente nela), *Badekas (ibid., pg. 19)* vislumbra uma possível vantagem do mesmo sobre BW, tendo em vista o cômputo de parâmetros de transformação entre um sistema de âmbito global e um regional. Sua justificativa toma por base a questão das correlações elevadas entre rotações e translações no modelo BW, pois de fato elas tendem a diminuir ao se aproximar o centro de rotações da área de espalhamento das conectoras. Porém, com grande elegância *Leick & Gelder (ibid., pgs. 19-23)* questionam esta suposta vantagem de MB, após demonstrarem ser enganosa a redução de correlações nele observada, na medida em que se a obtém mediante o ônus de uma alteração sensível e indesejável do vetor-translação, comparativamente a BW. Noutras palavras, o novo vetor-translação $\vec{T}_m$ de fato correlaciona-se menos com as rotações ε_m, ψ_m e ω_m, mas perde a significação geométrica plena de $\vec{T}_b$ no modelo BW, não mais correspondendo ao vetor-posição da origem de [u v w] em relação a $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}]$. Aliás, as considerações do parágrafo anterior já permitiriam antever esse fato, face à explicação do deslocamento do ponto C com as rotações ε_m, ψ_m e ω_m. Eis porquê a fig. 20 é enganosa, pois ao se compará-la com a ilustração de BW

(fig. 19) pode-se concluir erroneamente que $\vec{T}_m$ apresente a mesma significação geométrica de $\vec{T}_b$. Na verdade é difícil conceber o modelo MB de uma forma estática, daí a dificuldade em esquematizá-lo (*Leick & Gelder* inclusive optam por não fazê-lo). A relação funcional entre os dois vetores-translação, deduzida por aqueles autores, é a seguinte:

$$\vec{T}_m = \vec{T}_b + \delta R \vec{u}_o + \vec{u}_o, \qquad (4.18)$$

onde δ e R simbolizam, generica e respectivamente, fator de escala e matriz de rotações. Pois como também o demonstram *Leick & Gelder (ibid.)*, quando aplicados nas mesmas condições (observações e pesos iguais) os dois modelos em questão proporcionam rotações homólogas e parâmetros de escala idênticos, igualmente assim resultando respectivas MVC's. Como era de se esperar, pois BW e MB só diferem geometricamente, na opção pelo centro de rotações. Com isso então, $\delta_b = \delta_m$ $(= \delta)$ e $R(\omega_b, \psi_b, \varepsilon_b) = R(\omega_m, \psi_m, \varepsilon_m)$ $(=R)$. Portanto, as diferentes concepções de escala dos dois modelos acabam por proporcionar resultados iguais para δ_b e δ_m.

Leick & Gelder (ibid.) realizaram um estudo comparativo completo dos modelos BW e MB, cujo principal resultado foi sem dúvida a constatação de que o segundo não apresenta qualquer vantagem sobre o primeiro, ao contrário do que julgavam alguns pesquisadores, a começar pelo próprio *Badekas. Mueller, I. I. & Kumar, M. (1975)*, por exemplo, apontam o modelo MB como mais adequado para uso em problemas como o de interesse maior neste trabalho, precisamente por considerar o ponto-origem do datum regional como centro de rotações. Mas na verdade, a atribuição de um significado geodésico ao vetor $\vec{u}_o$ é absolutamente irrelevante na aplicação de MB, pois para qualquer escolha daquele vetor os parâmetros de rotação e escala (e correspondentes estimativas de precisão) permaneceriam invariantes, conforme o demonstram *Leick & Gelder*. Apenas o vetor-translação $\vec{T}_m$ se modifica em resposta a mudanças no centro de rotações, ocorrendo assim uma espécie de compensação tal que $\vec{T}_m$ e $\vec{T}_b$ sempre se relacionem segundo a (4.18). Enfim, os parâmetros de transformação gerados por MB e BW são interdependentes nas mesmas condições de uso de ambos os modelos. Em aplicações diretas, estes proporcionam as mesmas coordenadas transformadas e respectivas MVC's. Os resíduos de observações correspondentes são também iguais, indicando capacidades idênticas de parametrização da realidade física.

Apesar de tudo, o modelo MB tem preservado sua fama infundada de equação de transformação mais conveniente para uso em problemas de conexão en

tre sistemas de satélite e regionais clássicos. *Hoar, G. J. (1982)*, pgs. 2-43 e 2-44 , porporciona um bom exemplo disso, indicando inclusive a valorização do vetor $\vec{u}_o$ – agora já concebido como uma variável na (4.16) –, que minimiza as correlações críticas entre translações e rotações. É a seguinte:

$$u_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}; \quad v_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n}; \quad w_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{n},$$

onde n é o número de estações conectoras disponíveis.

Finalmente, tal como feito para o modelo BW, a (4.16) pode ser manipulada a fim de se expressá-la numa forma mais adequada à constituição de equações de observação. Finalmente obtém-se:

$$\vec{T}_m + \vec{u}_o + \vec{u}_{oi} + \delta_m \vec{u}_{oi} + Q \vec{u}_{oi} - \vec{\bar{x}}_i = \vec{0} \qquad (4.19)$$

onde Q_m se define analogamente a Q_b (segunda das (4.14)). *Krakiwsky, E. J. & Thomson, D. B. (1974), pg. 609*, apresentam as matrizes para ajustamento da (4.19), com o objetivo de se determinar os parâmetros de transformação. No mais , prevalecem aqui os mesmos comentários sobre ajustamento de observações, feitos ao final da seção 4.2.2.

4.2.4 - MODELO VEIS

Em sua definição original, o modelo Veis[12] (fig. 21) também utiliza o ponto-origem P_o do datum regional como ponto fixo ou centro de rotações. Contudo, estas agora se verificam em torno dos eixos do sistema geodésico local (GL) $[x_{GL}\ y_{GL}\ z_{GL}]$ com origem em P_o (vide definição em 2.3.3). Assim, semelhantemente à equação (4.17) de MB, tem-se para o modelo Veis:

$$\vec{\bar{x}}_i = \vec{T}_v + \vec{u}_o + (1 + \delta_v)\, M\,(\alpha_v, \xi_v, \eta_v)\,(\vec{u}_i - \vec{u}_o), \qquad (4.20)$$

onde as rotações diferenciais η_v, ξ_v e α_v constituem os parâmetros de rotação do modelo. Sendo (ϕ_o, λ_o) as coordenadas geodésicas bidimensionais de P_o relativamente ao datum regional, e considerando-se rotações η_v, ξ_v e α_v positivas, demonstra-se com facilidade (orientação em *Badekas, J. (1969)*, pgs. 14 -18)

---

(12) In *Veis, G. (1960) – "Geodetic Uses of Artificial Satellites", Smithsonian Contributions of Astrophysics*, Vol. 3, No. 9, Washington, D. C., USA.

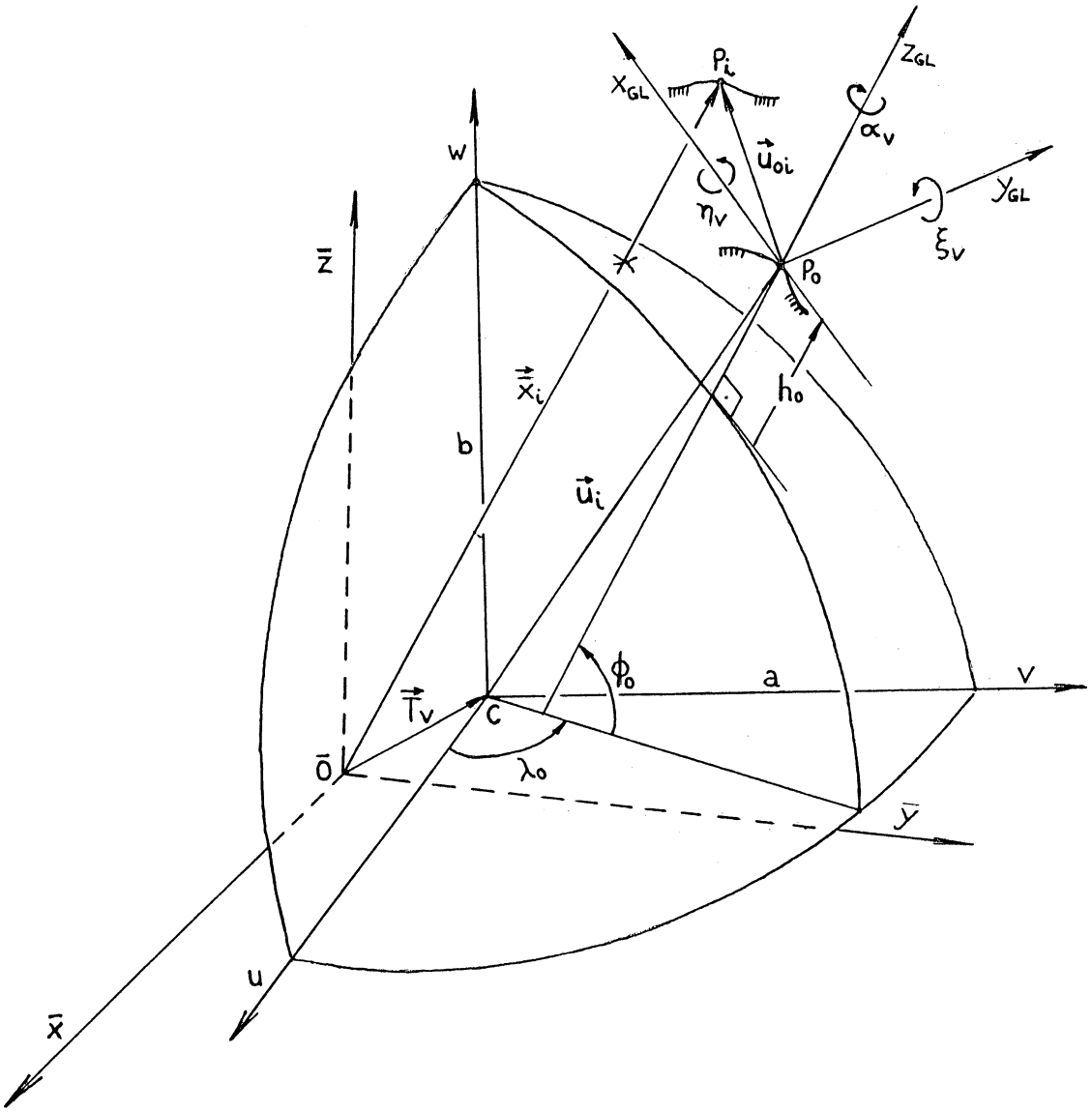


FIG. 21 - MODELO VEIS

que:

$$M(\alpha_V, \xi_V, \eta_V) = R_3^t(\lambda_0)\, R_2^t(90^o - \phi_0)\, P_1\, R_1(\eta_V) R_2(\xi_V) R_3(\alpha_V) P_1$$

$$R_2(90^o - \phi_0)\, R_3(\lambda_0) \qquad (4.21)$$

As matrizes R_1, R_2, R_3 e P_1 são dadas pelas (2.4) e (2.4-a). *Leick, A. & Gelder, B. H. W. van (1975)*, pg. 9 apresentam a forma final de $M(\alpha_V, \xi_V, \eta_V)$, com a ressalva de considerarem o sistema GL destrógiro; por isso não lançam mão da matriz de reflexão primária P_1.

Nas mesmas condições de aplicação, os parâmetros de translação e escala Veis resultariam idênticos aos obtidos por MB ($\vec{T}_V = \vec{T}_m$ e $\delta_V = \delta_m$). A única diferença entre os dois modelos reside no fato das rotações de Veis constituirem quantidades mais familiares que as de MB. Com efeito, o parâmetro α_V representa um giro azimutal no ponto P_0, enquanto ξ_V e η_V correspondem respectivamente a rotações segundo o meridiano e primeiro vertical geodésicos de P_0. Mas, exatamente como as rotações de MB e BW, α_V, ξ_V e η_V também apresentam-se insuficientes para separar rotações entre sistemas definidos (erros de orientação dos data), de distorções rotacionais possivelmente presentes nas coordenadas da rede terrestre regional.

As rotações de Veis relacionam-se matematicamente, de maneira simples, com as de MB (ou BW). Uma vez obtidos, em determinada aplicação, os ângulos ω_m, ψ_m e ε_m (ou, equivalentemente, ω_b, ψ_b e ε_b), pode-se com facilidade determinar os valores α_V, ξ_V e η_V correspondentes, sem necessidade de novo ajustamento, mediante a seguinte relação matricial (*Thomson, D. B. & Krakiwsky, E. J. (1976)*, pg. 731):

$$\begin{bmatrix} \alpha_V \\ \xi_V \\ \eta_V \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \omega_m \\ \psi_m \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}, \qquad (4.22)$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} -\text{sen}\phi_0 & -\cos\phi_0 \text{sen}\lambda_0 & -\cos\phi_0 \cos\lambda_0 \\ 0 & -\cos\lambda_0 & \text{sen}\lambda_0 \\ -\cos\phi_0 & \text{sen}\phi_0 \text{sen}\lambda_0 & \text{sen}\phi_0 \cos\lambda_0 \end{bmatrix} \qquad (4.23)$$

No caso, os ângulos de Veis estariam referidos ao sistema GL com origem em P_0 (ϕ_0, λ_0), ainda que não se tivesse optado por esse mesmo ponto como centro de rotações na aplicação de MB (pois a escolha de tal centro não influi nos parâmetros de rotação resultantes). Sendo ainda Σ_m a MVC de ω_m, ψ_m e ε_m, a correspondente Σ_V de α_V, ξ_V e η_V é dada por:

$$\Sigma_v = G \; \Sigma_m G^t, \qquad (4.24)$$

segundo a lei de propagação de covariâncias (*Gemael, C. (1984) pg. 4.13*).

4.2.5 - CONEXÃO NSWC 9Z 2 ⇝ SAD 69

Pretende-se, nesta seção, desenvolver um estudo interpretativo sobre vários resultados obtidos por *Blitzkow, D. (1986 a)*, concernentes à conexão de sistemas focalizada. O citado pesquisador aplicou o modelo BW para estimativa de parâmetros de transformação, pelo M.M.Q, segundo diferentes alternativas de: tratamento das observações a priori dos processos de ajuste, e grau de parametrização. Deve-se atentar para as restrições teóricas já conhecidas, concernentes ao emprego de modelos convencionais com a finalidade de interesse específico neste contexto (vide especialmente 4.2.2).

Na tabela 2 constam as diferentes estimativas de parâmetros, resultantes das referidas experiências (suprimiu-se o índice b, indicativo do modelo BW, por não haver possibilidade de confusão). As estações conectoras empregadas por *Blitzkow (ibid.)* totalizam 54 pontos razoavelmente distribuidos ao longo da rede planimétrica brasileira de 1ª ordem. Encontram-se plotados no mapa da fig. 22, onde constam seus respectivos códigos numéricos, extraidos do arquivo de posições isoladas Doppler, do Deptº de Cálculo e Análise da Superintendência de Geodésia - DGC/IBGE (em benefício da clareza, omitiu-se o milhar fixo 90000 presente nos códigos reais).

Nas três primeiras experiências, *Blitzkow (ibid.)* procedeu à compatibilização prévia das coordenadas cartesianas NSWC 9Z2 com o sistema TM, mediante aplicação da (2.17), precisamente em consonância com a advertência de *Hoar, G. J. (1982)*, expressa no parágrafo da relação (2.16) (seção 2.4.3). Já na quarta experiência, (apenas) a orientação do sistema de satélite não foi corrigida.

O mapa geoidal empregado por *Blitzkow (ibid.)* é o da fig.17, confeccionado no IBGE. Levando em conta suas características, descritas na divisão 3.4, bem como a localização das estações conectoras, infere-se que os valores de ondulação geoidal utilizados nos ensaios de *Blitzkow* procedem, basicamente, da determinação astro-geodésica de *I. Fischer* (fig. 15). Ao conjunto de alturas elipsoidais das estações conectoras, obtidas segundo a (2.15) para o SAD 69, vamos doravante nos referir sob a denominação de sistema altimétrico (ou vertical).

Convém comentar algo a respeito do critério de atribuição de pe

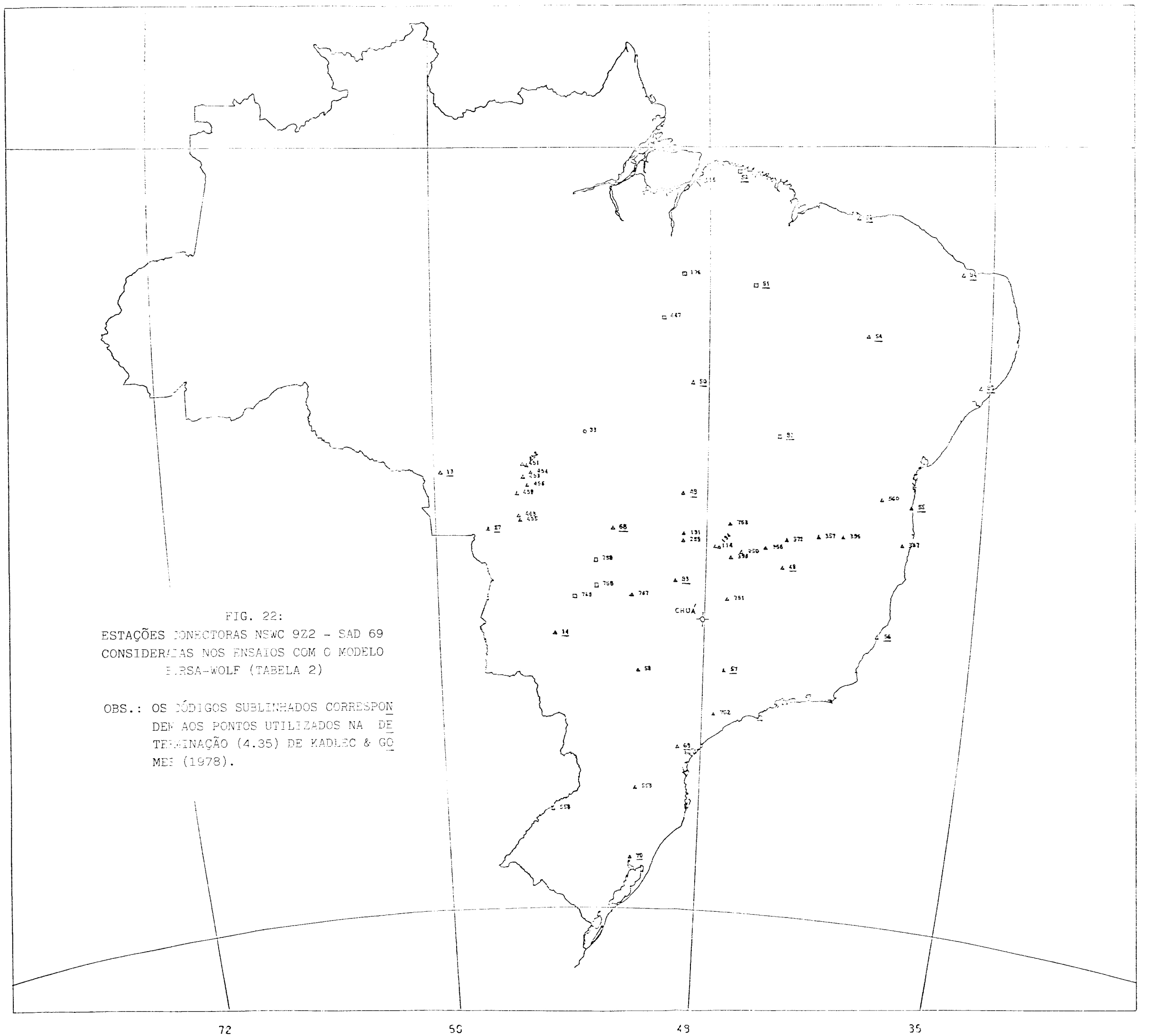


FIG. 22:
ESTAÇÕES CONECTORAS NSWC 9Z2 - SAD 69 CONSIDERADAS NOS ENSAIOS COM O MODELO BARSA-WOLF (TABELA 2)

OBS.: OS CÓDIGOS SUBLINHADOS CORRESPONDEM AOS PONTOS UTILIZADOS NA DETERMINAÇÃO (4.35) DE MADLEC & GOMES (1978).

sos às observações, considerado nas experiências da tabela 2. Em particular, a ponderação das coordenadas geodésicas SAD 69 constitui um problema que dificilmente se pode resolver por um critério ideal, face à escassez e pouca significância da informação disponível, no momento, sobre precisão das coordenadas bidimensionais (ϕ,λ), e das componentes H e ν das altimétricas (h). Sendo assim, *Blitzkow (ibid.)* se permitir adotar as conhecidas fórmulas de *Simmons* (*Vaníček, P. & Krakiwsky,E. J. (1982)*, pg. 195) para avaliação dos erros em ϕ, λ e H. Quanto à precisão dos desníveis geoidais ν, arbitrou uma estimativa de $\pm$ 3 m. As fórmulas de *Simmons* são relações empíricas das quais resultam variâncias para (ϕ,λ) e H, exponencialmente crescentes com o aumento da distância a um ponto-fixo. Este será o ponto-origem do datum regional, no caso da fórmula para (ϕ, λ), ou o ponto de referência da rede altimétrica, com respeito à fórmula para H. *Blitzkow (ibid.)* negligenciou os elementos não pertencentes à diagonal principal da MVC resultante, para cada estação, da propagação de covariâncias na transformação (ϕ, λ, h) $\rightarrow$ (u, v, w)(*Gemael,C.(1984)* pg. 4.13). Trata-se de uma simplificação cabível, face à pequena magnitude daqueles valores. Além disso, um efeito possivelmente mais crítico origina-se no desconhecimento das covariâncias entre diferentes estações. Pelo certo, o ideal seria contar com a MVC completa das coordenadas geodésicas, constituída tal como descrito na segunda premissa básica para uso de modelos convencionais em 4.2.1. E nesse caso então, propagar covariâncias adequadamente. Quanto à ponderação de coordenadas cartesianas Doppler, *Blitzkow (ibid.)* também constituiu MVC diagonal para cada conectora, calculando as variâncias(elementos diagonais) com base na tabela 1 (seção 2.4.3). É o melhor que se pode fazer no momento. *Leick, A. & Gelder, B. H. W. van (1975)* realizaram inúmeras experiências análogas às de *Blitzkow (ibid.)*, valendo-se praticamente do mesmo critério geral de ponderação. Constataram que os parâmetros são pouco sensíveis a alterações significativas nas variâncias das coordenadas (u, v, w) (ibid., pg. 65). Conclusão favorável a análises futuras, nesta seção, baseadas nas estimativas de parâmetros da tabela 2.

Tendo arbitrado sempre o valor 1 (um) para a variância da unidade de peso a priori (σ_o^2), *Blitzkow (ibid.)* obteve as seguintes estimativas para a variância a posteriori ($\hat{\sigma}_o^2$):

EXP. 1: 0,85
EXP. 2: 0,94
EXP. 3: 1,17
EXP. 4: 1,15

A um nível de significância de 5% admite-se a igualdade estatística $\sigma_o^2 = \bar{\sigma}_o^2$ para os quatro ajustamentos, observando-se os respectivos números de graus de liberdade . Trata-se de um indício de ausência de anormalidades naqueles processos (*Gemael, C. (1984)*, pg. 7.11).

As tabelas 3 e 4 complementam o conjunto de informações de interesse nesta seção. Nelas relacionam-se os resíduos elipsoidais ($V\phi$, $V\lambda$, Vh) resultantes das diferenças em ϕ, λ e h, para cada conectora, entre as coordenadas geodésicas SAD 69 e valores homólogos, obtidos mediante aplicação dos diferentes conjuntos de parâmetros da tabela 2 sobre coordenadas geocêntricas (tal aplicação dá-se em sentido inverso ao da validade dos parâmetros). Logicamente, os ternos cartesianos transformados são convertidos em coordenadas geodésicas adotando-se o mesmo elipsóide do SAD 69. As estações encontram-se relacionadas por ordem decrescente de longitude (recorde-se que neste trabalho consideram-se negativas as longitudes de pontos a oeste de Greenwich).

Daremos atenção especial para a disponibilidade de resultados concernentes à conexão TM $\leftrightarrow$ SAD 69. Pois com isso, revela-se a oportunidade de explorarmos os conceitos básicos, estudados na seção 2.5.1, da teoria de posicionamento e orientação de um sistema geodésico clássico. O objetivo em vista é avaliar a situação espacial do SAD 69 relativamente ao sistema TM, em particular no tocante ao nível de observância da condição de paralelismo.

Uma análise objetiva dos resultados da tabela 2 deve levar em conta o uso principal dos parâmetros de translação, qual seja: complementar o recurso a metodologias distintas da astro-geodésica, visando a obtenção de desníveis geoidais referidos ao datum regional. Na divisão 3.4, a propósito, focalizou-se uma dessas técnicas. A de estabelecimento de posições isoladas Doppler em pontos cotados, conforme realizado na confecção de parte do mapa da fig. 17. Existem outras alternativas, de complexidade variável. Maior, por exemplo, no caso do método gravimétrico, que demanda o conhecimento da magnitude do vetor gravidade em pontos distribuídos por toda a superfície terrestre, com maior densidade na região de interesse, onde as anomalias localizadas do campo gravífico exercem maior influência sobre a determinação geoidal restrita àquela área (*Gemael, C. (1981 a)*, pgs. 6.9 a 6.16). Modernamente, graças à contribuição de satélites artificiais, cujo rastreamento continuado possibilita estimar os parâmetros mais significantes do campo gravífico (vide 2.4.3 - § 2 e § 3), pode-se recorrer aos chamados modelos geopotenciais para determinação aproximada do geóide (*Blitzkow, D. & Sá, N. C. de (1983)*). Eles

proporcionam, com grande facilidade de manipulação matemática, vantajosa para a etapa de tradução gráfica da informação numérica, uma perspectiva geral do comportamento do geóide para qualquer região da superfície terrestre, com maior ou menor precisão dependendo da natureza e quantidade de dados empregados na derivação de cada modelo.

A tendência atual no campo da determinação do geóide, relativamente a um típico datum não geocêntrico, consiste em se conjugar, segundo algum critério matemático, todas as metodologias referidas no parágrafo anterior — a astro-geodésica inclusive —, de tal forma que as deficiências de cada técnica sejam supridas por vantagens das demais (*Blitzkow, D. (1986 b)*). Com efeito, medite-se acerca das restrições factíveis ao método baseado no estabelecimento de pontos Doppler sobre RN's, ou sobre demais tipos de pontos cotados: além da propagação dos erros das altitudes sobre o n. m. m. aos desníveis geoidais, a qualidade do produto final (mapa geoidal) será ainda mais prejudicada no caso (provável) de não se dispor de uma boa densidade areal de distribuição das estações. Ora, tais problemas desaparecem, por exemplo, quando se emprega um modelo geopotencial, malgrado esta alternativa não gere exatamente desníveis geoidais, mas sim determinadas "alturas esferoidais" (*Blitzkow & Sá (ibid.)*) similares aos desníveis.

Mas o aspecto essencial do recurso a metodologias distintas da astro-geodésica é justamente o fato de nenhuma delas prescindir do vetor-posição da origem do datum regional, determinado em relação ao sistema TM (vetor-translação). Pois todas, em princípio, proporcionam desníveis geoidais ou grandezas similares, referidos a um elipsóide qualquer, porém geocêntrico. Assim, por exemplo, as "alturas esferoidais" resultantes da aplicação de um certo modelo geopotencial numa dada região de interesse, devem ser compatibilizadas com o respectivo sistema regional através da terceira das (4.6). Eis a importância de uma estimativa precisa do vetor-translação do SAD 69. Um dos objetivos desta seção consiste justamente em estudar a perspectiva de uso dos modelos convencionais com aquele fim.

As considerações precedentes podem parecer destituídas de valor prático a quem observar o fato de já se dispor, no IBGE, de um mapa geoidal razoavelmente completo como o da fig. 17. Cabe contudo recordar a origem dos parâmetros de translação empregados para inferência de desníveis geoidais, nos grandes vazios astro-geodésicos do território (vide 3.4 - penúltimo parágrafo). O resultado desse processo pode ter sido prejudicado por não se dispor, à época da estimativa daqueles parâmetros, dos valores corretivos necessários à

compatibilização prévia das coordenadas Doppler com o TM, notadamente a correção de orientação. Cabe portanto averiguar se assim ocorreu e, caso positivo, com que significância. Afinal, agora não mais se justifica negligenciar as citadas correções.

Ademais, o método empregado na confecção do mapa geoidal da fig. 17 tende a ser substituído, num futuro próximo, por alguma técnica mais rigorosa baseada na conjugação de dados de natureza diversificada, tal como aludido anteriormente.

4.2.5.1 - DETECÇÃO DE ERROS SISTEMÁTICOS NA DEFINIÇÃO DO SAD 69

As duas primeiras experiências da tabela 2 revelam, com respeito a parâmetros de rotação, um fato expressivo: é inquestionável a forte significância da rotação terciária (ω). Contrariamente, as demais rotações resultaram não significativas. Poderiam portanto ser excluídas em outro teste. *Blitzkow, D. (1986 a)* aliás assim procedeu, preservando apenas as translações e a rotação ω no modelo. Mas as novas estimativas desses parâmetros não apresentaram qualquer variação sensível, relativamente aos resultados da segunda experiência. Por isso, sequer foram relacionadas na tabela 2.

O cálculo do coeficiente de correlação entre δ e ω, feito com base na MVC dos parâmetros ajustados da exp. 1 (*Gemael, C. (1984), pgs. 4.12 - 4.13*), revelou um valor bastante reduzido: 0,05. Isto significa ser bem fraca a tendência de ω em absorver qualquer efeito tipicamente modelável pelo parâmetro de escala , quando se exclui o mesmo do modelo como na exp. 2. Este é um argumento forte para considerarmos a estimativa de ω feita naquela experiência ($\cong$ - 0,8"), um resultado mais expressivo que o da exp. 1($\cong$-0,9"), apesar da discrepância entre os dois ser pouco significante face ao desvio-padrão de cerca de 0,1". A variação sofrida por ω com a inclusão de δ no modelo, da exp. 2 para a exp. 1, deve-se ao efeito indireto de correlações altas existentes entre o parâmetro de escala e as translações TX e TY (-0,53 e 0,63 respectivamente), porquanto estas se correlacionam ainda mais fortemente com a rotação terciária (0,77 e 0,75). Trata-se portanto de um efeito indesejável, na medida em que não decorre da autêntica função do parâmetro ω. Sobre esta, trataremos na sequência.

Em condições ideais nenhum dos três parâmetros de rotação, na exp. 2, deveria resultar significante. Logo, o resultado obtido para ω requer explicação. Das três rotações do modelo BW, a terciária é precisamente a única que apresenta significação geométrica familiar. No caso, ela revela a incidência de uma tendenciosidade geral sobre as longitudes geodési

DIFERENTES GRAUS DE PARAMETRIZAÇÃO DA
CONEXÃO NSWC 9Z2 – SAD 69 SEGUNDO O MODELO
BURSA-WOLF (CONECTORAS: FIG.22)

	EXP. 1	EXP. 2	EXP. 3	EXP. 4
TX	-69,83	-82,48	-64,51	-82,01
σ_{TX}	3,11	3,07	0,38	0,34
TY	-29,95	-13,85	2,10	-13,27
σ_{TY}	3,30	2,99	0,36	0,33
TZ	-41,67	-37,97	-38,48	-38,46
σ_{TZ}	3,31	3,89	0,44	0,38
ε	- 0,060	- 0,013		
σ_{ε}	0,103	0,122		
ψ	- 0,076	- 0,011		
σ_{ψ}	0,098	0,117		
ω	- 0,869	- 0,824		
σ_{ω}	0,114	0,132		
δ	$- 0{,}323 \times 10^{-5}$			
σ_{δ}	$0{,}042 \times 10^{-5}$			

OBS.: EXCETO PELA EXP. 4, NAS DEMAIS APLICOU-SE A CORREÇÃO DE 0,8" ÀS LONGITUDES DOPPLER, A PRIORI DOS RESPECTIVOS AJUSTES.

VALORES LINEARES EM METROS E ANGULARES EM SEGUNDOS DE ARCO.

TABELA 2

cas relativas ao SAD 69, tomando-se como padrão externo de comparação o próprio sistema TM. Mas, qual poderia ser a causa de uma tal distorção? Primeiramente, observamos certa dificuldade em concebê-la como um fenômeno não vinculado ao processo de definição do datum regional. A diretriz desse raciocínio é a seguinte: o ponto-origem do SAD 69 não é uma estação conectora; é difícil porém admitir, caso fosse, que sua longitude (SAD 69) viesse a contrariar a tendência sistemática nitidamente revelada pela estimativa de ω, para tantas estações de uma rede horizontal de 1ª ordem referida àquele datum. Tentaremos a seguir elaborar uma hipótese explicativa para o fenômeno em questão.

Suponhamos que um erro sistemático, provocado por alguma deficiência instrumental, tenha distorcido as longitudes astronômicas observadas em todas as astro-estações participantes do projeto de definição do SAD 69, inclusive o ponto-origem Chuá (os cronógrafos, instrumentos registradores de instantes de tempo, utilizados naquele tipo de observação astronômica, são muito suscetíveis a imprecisões por causas variadas, notadamente os modelos mais antigos). Com base no fato de se ter pré-definido a componente η_o do desvio relativo da vertical para aquele ponto (bem como ξ_o - vide 3.1), é válido assimilar o suposto erro $d\Lambda_o$ verificado em sua longitude astronômica, na forma de um $d\lambda_o$ incidente sobre sua longitude geodésica. A segunda das (2.18), além de embasar matematicamente tal afirmativa, permite escrever: $d\lambda_o = d\Lambda_o$.

Procuremos agora equacionar o efeito do "erro" $d\lambda_o$, sobre coordenadas geodésicas relativas ao sistema regional então definido (SAD 69). Para tanto consideremos, numa primeira etapa, uma situação hipotética ideal em que não tivesse ocorrido qualquer erro sistemático no processo de definição do datum. Focalizemos então, a nível teórico, a transformação coordenada entre o "sistema ideal" resultante e o TM. Em termos de diferenças entre coordenadas geodésicas — geocêntricas (G) e não geocêntricas "ideais" (I) —, dispomos de duas alternativas de equacionamento da transformação, dadas pelas (4.6) e (4.7), às quais recorreremos nessa mesma ordem (logicamente, nas (4.6) deve-se fazer $\varepsilon = \psi = \omega = 0$ (zero)). Tendo em vista simplificar as expressões, vamos admitir associado ao TM o mesmo elipsóide do SAD 69, i.e., $\delta a = \delta f = 0$. Isso posto, vem, sob forma genérica:

$$G_j - I_j = k_j\, TX' + l_j\, TY' + m_j\, TZ', \qquad (4.25)$$

ou, alternativamente,

$$G_j - I_j = p_j\, \delta\phi_o + q_j\, \delta\lambda_o + r_j\, \delta h_o, \qquad (4.26)$$

com j = 1, 2, 3 designando expressões para ϕ, λ, h nessa ordem. (TX',TY',TZ') é o vetor-translação do sistema não geocêntrico "ideal". A segunda etapa do raciocínio começa neste ponto. Reportemo-nos à hipótese inicial de incidência do "erro" $d\lambda_o$ sobre a longitude geodésica de Chuá. Ademais, suponhamos que tenha sido o único erro significante, de natureza sistemática, ocorrido na definição do SAD 69. Vamos então reescrever a (4.26), adaptando-a à "nova" circunstância. As coordenadas geodésicas SAD 69 serão genericamente denotadas por S_j:

$$G_j - S_j = p_j\ \delta\phi_o + q_j\ \delta'\lambda_o + r_j\ \delta h_o \qquad (4.27)$$

A única modificação com respeito ao caso ideal deu-se na diferença de longitudes geodésicas (geocêntrica - regional) para o ponto-origem, precisamente um dos parâmetros de transformação na (4.27). Ora, a nova diferença ($\delta'\lambda_o$) corresponde à da situação ideal ($\delta\lambda_o$) afetada, convenientemente, pelo erro $d\lambda_o$. Ou seja:

$$\delta'\lambda_o = \delta\lambda_o - d\lambda_o, \qquad (4.28)$$

Apliquemos então a (4.28) à (4.27):

$$G_j - S_j = p_j\ \delta\phi_o + q_j\ \delta\lambda_o + r_j\ \delta h_o - q_j\ d\lambda_o \qquad (4.29)$$

Finalmente, levando em conta a (4.26) podemos reescrever a (4.29) na forma seguinte:

$$G_j - S_j = G_j - I_j - q_j\ d\lambda_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_j = I_j + q_j\ d\lambda_o \qquad (4.30)$$

Não se perca de vista o objetivo maior da proposição de uma hipótese explicativa viável, sobre a rotação ω estimada na segunda experiência da tabela 2. Ora, aquele parâmetro, como sabemos, é capaz de modelar uma eventual tendenciosidade em longitudes geodésicas (j = 2). Analisemos então na (4.30), o efeito resultante do "erro" $d\lambda_o$ sobre as longitudes da situação ideal de referência (I_2). Para tanto, com base na segunda das (4.7) (segundo termo de seu membro direito), expressemos $q_2 d\lambda_o$ sob forma explícita:

$$\frac{\cos\ (\lambda_i - \lambda_o)\ \cos\phi_o}{\cos\ \phi_i}\ d\lambda_o \qquad (4.31)$$

Da (4.31), com auxílio do mapa da fig. 22, conclui-se facilmente o seguinte: o efeito de $d\lambda_o$ sobre as longitudes I_2 apresentaria, em média, para estações localizadas em território brasileiro, a mesma ordem de grandeza e o mesmo sinal de $d\lambda_o$. Digamos então que no ponto-origem Chuá tivesse ocorrido um erro $d\Lambda_o$ (= $d\lambda_o$) = 0,85", na definição do SAD 69. Essa distorção se transmitiria às longitudes geodésicas das demais estações da rede planimétrica, com um valor médio provavelmente incluso no intervalo [-0,85", - 0,80"]. Por via de consequência, seria detectável na forma de uma rotação terciária de BW, quando se confrontassem coordenadas SAD 69 com um padrão externo de referência, consistente com o TM e suficientemente preciso, tal como verificado nas duas primeiras experiências da tabela 2 (uma variação de 0,80" em longitude provoca um deslocamento de cerca de 25 m para os valores médios de -15° e 6400 km de latitude e raio de curvatura). O mecanismo dessa parametrização será melhor compreendido mais adiante, ainda neste item.

A hipótese de incidência de um erro sistemático nas observações astronômicas de longitude aproveitadas no projeto de definição do SAD 69 receberá, doravante, tratamento de fato efetivamente ocorrido naquele projeto. Pelo menos até que algum outro resultado venha, eventualmente, contrariá-la.

Convém esclarecer a questão de sinais. *Blitzkow, D.(1986a)* montou sua matriz de rotações exatamente de acordo com a (4.3), que subentende o conceito de transformação passiva, no qual o sistema coordenado e não o espaço de pontos se modifica. Vale dizer: o sinal negativo da rotação ω atua , no caso, no sentido de compatibilizar a orientação do SAD 69 com a do TM. É o sinal do erro $d\Lambda_o$.

Para auxiliar a sedimentação das colocações precedentes, procuremos repensar o processo de definição do SAD 69 levando em conta a ocorrência do erro $d\Lambda_o$ na longitude astronômica de Chuá. É possível que a assimilação de $d\Lambda_o$ na forma de um "erro" na longitude geodésica do ponto-origem($d\lambda_o$) tenha causado, anteriormente, alguma estranheza. Pois, como se sabe da teoria de concepção de um sistema geodésico clássico (vide 2.5.1), a opção por diferentes valores de λ_o deveria significar apenas deslocamentos espaciais do datum, por translações, com respeito ao TM. E neste caso, nenhum erro estaria configurado, não fosse o posicionamento espacial de um sistema clássico, essencialmente arbitrário. Tudo isso vale, porém, se e somente se prevalecer a observância rigorosa da equação de Laplace (2.22) segundo a direção de partida do sistema. Ou seja, que a conhecida condição de paralelismo ao TM seja

sempre satisfeita. Mas, o que dizer neste sentido acerca do SAD 69? Agora, diferentemente da situação na qual elaboramos a análise preliminar da divisão 3.2, sobre o tema da orientação espacial daquele datum, dispomos de informações mais concretas para uma reavaliação dessa matéria. Com tal objetivo, vamos nos valer da (2.23), que expressa a influência de erros nas diversas observações astronômicas participantes da equação Laplace, sobre o valor de azimute geodésico dela derivado para alguma direção terrestre. Conforme demonstrou-se em 2.5.1.2, é perfeitamente negligenciável o termo de influência da distância zenital para a direção de partida Chuá-Uberaba,do SAD 69. Isso posto, quando aplicada àquela direção, a (2.23) resume-se a:

$$d\alpha_o = dA_o - d\Lambda_o \operatorname{sen}\phi_o \qquad (4.32)$$

Ora, no caso focalizado $d\Lambda_o$ pode remontar a cerca de -0,85", como se sabe. Com isso, ainda que dA_o fosse não significativo, teríamos um erro $d\alpha_o$ de aproximadamente -0,3" ($\phi_o \cong -20^o$). Entretanto, se realmente $d\Lambda_o$ foi causado por uma deficiência geral dos cronógrafos, hipótese bem provável, também o azimute A_o pode ter sido afetado por aquela mesma fonte de erro, pois observações astronômicas de azimute, em 1ª ordem, são influenciáveis por distorções nas medidas de tempo. Logo, é possível que dA_o seja significativo para a direção Chuá-Uberaba. A conclusão evidente dessa análise é a seguinte: definiu-se, no caso do SAD 69, um sistema CG sensivelmente não paralelo ao TM. Ademais, convém frisar que o fato de se ter empregado a técnica de relaxação do azimute de partida no processo de orientação do SAD 69 (vide 2.5.1.2), até consolida a conclusão precedente. Porquanto em cada uma das estações de Laplace participantes daquela operação, verificou-se a mesma tendenciosidade instrumental causadora dos erros $d\Lambda_o$ e dA_o. Isto decerto ocorreu pelo menos nas estações dos arredores de Chuá, as mais influentes sobre o valor ajustado final de α_o.

Avancemos um pouco mais na importante questão abordada no parágrafo anterior. Um erro $d\alpha_o$ manifesta-se geometricamente segundo o ângulo Δ da fig. 13 (vide 2.5.1.2 – último parágrafo). Logo, o sistema CG SAD 69 encontra-se afetado por uma rotação significativa daquele tipo. Ainda não formulamos matematicamente a consequência de um pequeno giro Δ de um sistema cartesiano tridimensional, em torno de um eixo com direção genérica no espaço. Mas, tendo em vista facilitar a argumentação presente, anteciparemos que equi

vale ao efeito conjugado de três rotações fundamentais — componentes angulares de Δ —, resultantes do produto de Δ pelos respectivos cossenos diretores do eixo. Ora, única rotação significativa estimada na exp. 2 (tabela 2) para a conexão TM $\leftrightarrow$ SAD 69, ω é interpretável como uma discrepância angular entre os planos de referência de longitudes daqueles referenciais, defasagem que não existiria na hipotética situação ideal, pouco atrás considerada, em que não tivesse ocorrido qualquer erro sistemático na definição do datum regional. Sendo assim, parece lógico identificar na estimativa daquela rotação, a própria componente terciária de Δ. Quanto às rotações ε e ψ não significativas, resultantes da mesma experiência, a aparente contradição com o fato de ao ângulo Δ necessariamente corresponderem certas componentes primária e secundária, justifica-se numas das deficiências do uso típico de modelos convencionais, qual seja: os ângulos de rotação entre sistemas definidos resultam mascarados por distorções, incidentes notadamente sobre as coordenadas relativas ao datum regional (vide 4.2.2). Na divisão 4.3 tentaremos recuperar o ângulo Δ para o SAD 69.

Resta preencher uma lacuna na argumentação do parágrafo precedente. Não se desenvolva o falso conceito de que apenas as rotações ε e ψ, no modelo BW, sejam influenciáveis por distorções rotacionais presentes nas coordenadas das estações conectoras. O leitor atento terá percebido, com respeito ao tipo de problema de conexão aqui analisado, o seguinte: o parâmetro ω é potencialmente capaz de revelar uma possível deficiência de orientação do sistema não geocêntrico, precisamente graças à sua capacidade de absorver alguma distorção sistemática incidente sobre as longitudes regionais. Trata-se de uma feição geométrica singular da rotação terciária de BW, que não encontra correspondência nos demais parâmetros de rotação daquele modelo. Mas a discussão da influência de distorções das coordenadas regionais sobre a estimativa de ω, para a conexão TM $\leftrightarrow$ SAD 69, ainda não se esgota com este parágrafo, como veremos mais adiante.

Da possível falha instrumental originadora do erro $d\Lambda_0$ verificado na longitude astronômica de Chuá, decorrem dois efeitos sobre o SAD 69, relativamente à situação hipotética em que o processo de definição do datum não fosse afetado por erros sistemáticos significativos. São eles: deslocamento da origem do sistema geodésico (efeito exclusivo de $d\Lambda_0$) e não paralelismo entre o CG a ele associado e o TM. O primeiro é simples consequência do fato de se atribuir ao ponto-origem uma longitude geodésica diferente do va-

lor que resultaria na situação hipotética. O aspecto crítico nele implícito é o fato da longitude geodésica de Chuá preencher a segunda das (2.18), juntamente com o valor pré-definido para η_0, em relação à medida incorreta de longitude astronômica. Vale dizer: a posição espacial do SAD 69 não corresponde à desejável. Tal distorção reflete-se no segundo efeito. Não fosse por ele, a conexão TM $\hookleftarrow$ SAD 69 resultaria idealmente equacionável mediante apenas translações. Isto, no entanto, seria possível apenas caso se corrigisse também o posicionamento do datum, pois os dois efeitos se correlacionam.

Em termos práticos, preenchida ou não a condição de paralelismo pelo SAD 69, nosso objetivo consiste exatamente em avaliar seu estado real de orientação, seja ele qual for. Além de determinar o vetor-posição do centro geométrico do elipsóide de referência. Em suma, estimar parâmetros de posicionamento (translações) e orientação (rotações) do SAD 69, tal como este se encontra definido em relação ao TM. Originalmente, estabelecemos que essas grandezas seriam determinadas com respeito ao referencial NSWC 9Z2. Mas, doravante, por motivos já bem conhecidos, passaremos a considerar o próprio TM ao invés daquele sistema de satélite.

No tocante à estimativa de parâmetros de orientação — ou de rotação, como temos nos referido —, análise anterior deste item comprovou a objeção teórica desfavorável ao uso de modelos convencionais, pelo menos na forma como tipicamente são utilizados; ou seja, com um número razoável de estações conectoras bem distribuídas por toda a extensão da rede horizontal. Mas, e quanto aos parâmetros de translação? O que se pode afirmar, a propósito, acerca deles na segunda experiência da tabela 2? Claro, seria desejável que representassem as componentes do vetor-posição da origem do SAD 69. No entanto isso não ocorre, como pretendemos mostrar na sequência.

A parametrização parcial do modelo BW considerada com a finalidade da exp. 2 deve originar resultados idênticos aos que decorreriam do emprego das duas primeiras das (4.6), em condições iguais, com o mesmo objetivo de estimar TX, TY, TZ, ε, ψ e ω, num processo de ajuste pelo M.M.Q. Não fossem aquelas relações componentes de uma tradução matemática (diferencial) alternativa e equivalente à equação matricial (4.4), que expressa justo o caso mencionado de parametrização do modelo BW. Considerar a terceira das (4.6) na argumentação presente não vem ao caso, pois interessa-nos avaliar a influência das rotações sobre as translações, numa solução conjunta para es

sas grandezas (além do mais, as equações (4.6) são independentes entre si). Para tanto, apliquemos as (4.26) e (4.25) à (4.29). Vem:

$$G_j - S_j = k_j\ TX' + l_j\ TY' + m_j\ TZ' - q_j d\lambda_o \qquad (4.33)$$

Observe-se a correspondência entre a (4.33) e as duas primeiras das (4.6). A (4.33) de certa maneira informa o que se poderia obter daquelas relações caso fossem aplicadas à conexão TM↗↘SAD 69 (fazendo-se $\delta a = \delta f = 0$) para estimativa de parâmetros de transformação. O termo genérico $- q_j d\lambda_o$ na (4.33) é gerador de efeitos complementares à parametrização por translações, a exemplo da tendenciosidade em longitudes geodésicas, causadora típica da rotação ω presente na segunda das (4.6). Portanto, existindo parâmetros de rotação capazes de absorver os citados efeitos, os de translação acomodam-se aos valores TX', TY', TZ' das componentes do vetor-posição da origem do "sistema geodésico ideal", que se pretendera definir como SAD 69, livre de erros sistemáticos em sua concepção. Este sistema "ideal", convém frisar, além de excêntrico em relação ao SAD 69 é paralelo ao TM, ao contrário daquele. Torna-se com isso patente a deficiência do modelo BW — decerto extensível aos demais modelos convencionais —, no que tange à determinação de translações simultaneamente a rotações, quando pelo menos uma destas for significativa. Pois neste caso,as translações resultantes não guardam correspondência com o significado geométrico ideal a elas atribuído naquele modelo. Confirma-se assim outra restrição ao uso típico de modelos convencionais, concernente à problemática das correlações entre diversos parâmetros (vide 4.2.2). As estimativas das translações podem ser influenciadas pela presença, no modelo, de parâmetros de rotação que se justifiquem na realidade física. No caso estudado, as fortes correlações entre ω e as componentes primária e secundária das translações (vide § 2 deste item) indicam que estas são afetadas, com maior intensidade, pela única rotação significativa resultante. Evidentemente, quanto maior a magnitude de $d\lambda_o$ na (4.33), ou seja, da rotação ω, maior será a discrepância entre (TX', TY', TZ') e o vetor-translação real.

Tendo em vista consolidar as análises precedentes, tentaremos tirar proveito das concepções geométricas mais familiares dos parâmetros de rotação do modelo Veis, relativamente aos do modelo BW empregado por *Blitzkow, D. (1986 a)* em suas experiências. Para tanto, vamos utilizar as relações (4.22) a (4.24), cujos dados de entrada deveriam ser, como se sabe, rotações de MB (ω_m, ψ_m e ε_m) com respectiva MVC (Σ_m). Note-se contudo que, ti

vesse *Blitzkow (ibid.)* optado pelo modelo MB para estimativa de parâmetros, preservando as mesmas condições de aplicação da exp. 2, os resultados de interesse teriam sido idênticos aos disponíveis, independentemente da opção que fizesse pelo centro de rotações (vide 4.2.3). Vale dizer: podemos empregar os resultados conhecidos, com a finalidade acima expressa. Apresenta-se a seguir a MVC dos parâmetros de rotação obtida na exp. 2:

$$\Sigma_b\ (=\Sigma_m) = \begin{bmatrix} 0{,}017336 & 0{,}000292 & 0{,}003764 \\ 0{,}000292 & 0{,}013654 & 0{,}003008 \\ 0{,}003764 & 0{,}003008 & 0{,}014902 \end{bmatrix}''^2$$

No penúltimo parágrafo de 3.1 encontram-se as coordenadas (ϕ_o, λ_o) de Chuá. Com elas valoriza-se a (4.23), do que resulta:

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}338106770 & 0{,}700489753 & -0{,}628488598 \\ 0 & -0{,}667817891 & -0{,}744324704 \\ -0{,}941107758 & 0{,}251661222 & -0{,}225793750 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se então a (4.22) com as rotações da segunda experiência da tabela 2, obtêm-se os correspondentes parâmetros de Veis. Da propagação de covariâncias (4.24), realizada com a matriz Σ_b, vem:

$$\Sigma_v = \begin{bmatrix} 0{,}010457970 & -0{,}000735212 & -0{,}000174710 \\ -0{,}000735212 & 0{,}017335809 & 0{,}002920028 \\ -0{,}000174710 & 0{,}002920028 & 0{,}018098221 \end{bmatrix}''^2$$

Extraindo-se a raiz quadrada de cada elemento da diagonal principal de Σ_v obtêm-se os desvios-padrão das rotações de Veis. Indicam-se a seguir os resultados finais:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= (-0{,}278 \pm 0{,}102)'' \\ \xi_v &= (\ 0{,}017 \pm 0{,}132)'' \\ \eta_v &= (\ 0{,}776 \pm 0{,}135)'' \end{aligned} \qquad (4.34)$$

O parâmetro α_v corresponde a um giro azimutal em torno do ponto-origem. Apresenta-se portanto capaz de absorver o efeito da rotação Δ do SAD 69, originada no erro de orientação do sistema. O resultado significativo encontrado para α_v é sintoma de uma deficiência de orientação azimutal

da rede planimétrica em torno de Chuã. No entanto, não se pode considerá-lo uma boa avaliação do parâmetro Δ. O motivo reside nas possíveis distorções azimutais significativas que, atuantes sobre os pares coordenados (ϕ, λ) dos pontos da rede, são capazes de mascarar o valor verdadeiro daquele parâmetro. Essa hipótese é corroborada principalmente por dois fatos: a ocorrência, por causas já conhecidas, de erros sistemáticos sensíveis nas observações astronômicas necessárias nos pontos de Laplace, e o emprego da técnica de segmentação da rede em diversos blocos de ajustamento (vide 3.3 - § 3). Note-se uma vez mais a restrição factível sobre rotações estimadas mediante uso típico de um modelo convencional qualquer. Não expressam o estado de orientação relativa entre os sistemas coordenados envolvidos, como seria ideal.

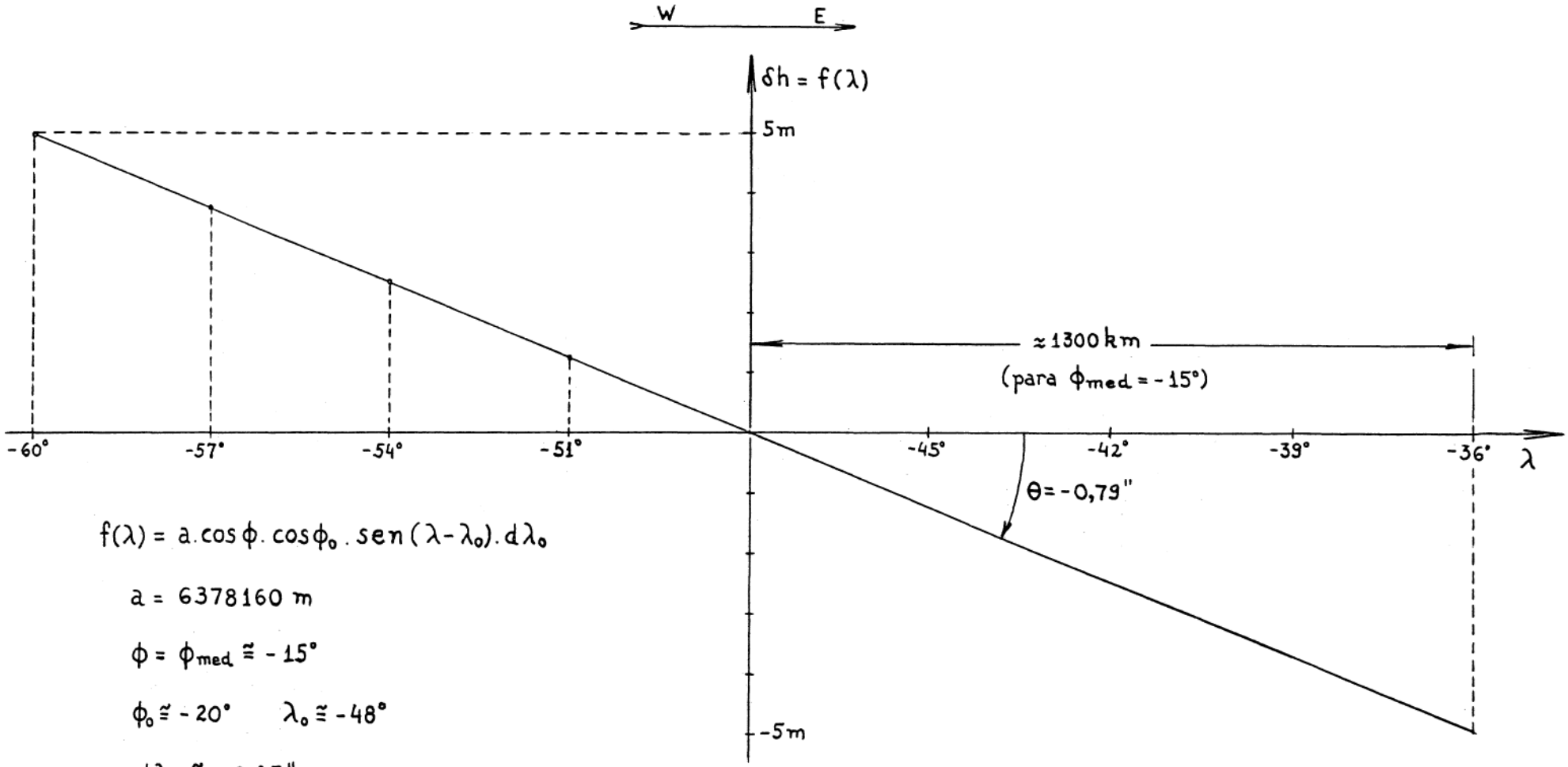
Além de α_V, apenas a rotação primária η_V resultou significante dentre as estimativas (4.34). Mas η_V, diferentemente de α_V, não pode indicar alguma rotação do elipsóide de referência do SAD 69. A rotação primária de Veis é capaz, isto sim, de modelar alguma tendenciosidade rotacional no sistema altimétrico, verificada segundo a direção E-W (e ξ_V segundo a N-S). Há que se identificar portanto, os possíveis fatores causais de uma tal tendenciosidade tão sensível como a detectada no problema em questão. Em primeiro plano observe-se o seguinte: malgrado suas rotações apresentem significados geométricos mais familiares, o modelo Veis não proporciona qualquer vantagem efetiva sobre BW. Seus parâmetros de translação — não estimados no caso —, estariam implicitamente afetados pela mesma deficiência das translações de BW. Vale dizer, não corresponderiam às componentes do vetor-posição da origem do datum regional, ainda que se "descontasse", segundo a (4.18) com $\delta = 0$, o efeito da escolha de um centro de rotações na superfície topográfica (convém recordar que os vetores $\vec{T}_m$ e $\vec{T}_V$, dos modelos MB e Veis, se equivalem - vide 4.2.4). Ora, nesse fato com certeza origina-se a rotação η_V estimada, não fossem as diferenças altimétricas bastante sensíveis a variações no vetor-translação (vide terceira das(4.6)). A tendenciosidade indicada por η_V no sistema altimétrico não passa portanto, nesta aplicação, de um efeito aparente, na medida em que originado não numa distorção rotacional efetiva, mas antes numa deficiência do próprio modelo.

Investiguemos uma forma de consolidar quantitativamente a análise anterior. Para tanto, façamos $j = 3$ na (4.30). Vamos estudar o efeito induzido pelo incremento $d\lambda_o$ sobre o sistema altimétrico. A situação de referência consiste naquela hipotética ideal, em que não tivesse ocorrido qual

quer erro sistemático na definição do datum não geocêntrico. Na fig. 23 apresenta-se o gráfico da função $f(\lambda) = q_3\, d\lambda_0$, traçado para uma latitude média de -15^o, referente às estações conectoras da fig. 22. A expressão matemática de q_3 consta da terceira das (4.7) (coeficiente do segundo termo de seu membro direito). A $d\lambda_0$ atribuímos o valor -0,85", estimado anteriormente neste item (§ 6). A função $f(\lambda)$, simétrica em relação à origem $\lambda = \lambda_0$, é praticamente linear dada a amplitude máxima de 12^o do intervalo $(\lambda - \lambda_0)$ na aplicação focalizada. Para as longitudes extremas, -36^o (est. 95) e -60^o (est.13), obtém-se $|f(\lambda)| = 5m$. Com este valor pode-se facilmente estimar o do ângulo θ de inclinação da reta $f(\lambda)$: -0,79".

O gráfico da fig. 23 indica que o "erro" $d\lambda_0$ ocorrido na definição do SAD 69 produz um efeito rotacional no sistema altimétrico, segundo a direção E-W, relativamente ao "datum ideal". Não é outro, aliás, o efeito parametrizado pela rotação η_V no modelo Veis. É sintomática, neste sentido, a igualdade modular praticamente verificada entre a estimativa de η_V (0,78") e a do ângulo θ na fig. 23 (0,79"), apesar de todas as aproximações consideradas para obtenção de θ (a divergência de sinais justifica-se na oposição de polaridade entre os sistemas de tipo GL, referencial de η_V, e CG, referencial de ω ou $d\lambda_0$). Enfim, pode-se afirmar que o parâmetro η_V complementa a modelagem da conexão TM $\hookrightarrow$ SAD 69, realizada apenas parcialmente com os parâmetros de translação. Ele desempenha função análoga à da rotação terciária ω no modelo BW.

O emprego do modelo BW mediante o grau de parametrização da exp. 2, em que apenas o fator de escala não foi considerado , originou uma estimativa incorreta para o vetor-translação do SAD 69,relativo ao TM. Uma solução para o problema, seria excluir as incógnitas angulares, numa primeira etapa para determinação exclusiva de translações. Favorável a tal procedimento, é a pequena magnitude do parâmetro de escala, estimado na exp. 1 (*Leick, A. & Gelder, B. H. W.van* (1975), pg. 41). Desfavorável é o fato dos sistemas cartesianos envolvidos (CG SAD 69 e TM) não serem paralelos. Contudo, pequenas rotações entre os sistemas coordenados não representam aspecto tão crítico, no caso, quanto uma possível distorção no sistema vertical. Não fossem as diferenças altimétricas as principais determinantes do vetor- translação, além de não serem influenciadas sensivelmente por rotações entre os referenciais (vide as (4.6)). Portanto, a alternativa de parametrização restrita a translações, constitui a melhor hipótese de uso dos modelos convencio



$$f(\lambda) = a.\cos\phi.\cos\phi_0.\operatorname{sen}(\lambda-\lambda_0).d\lambda_0$$

$a = 6378160\ m$

$\phi = \phi_{med} \cong -15°$

$\phi_0 \cong -20°$ $\quad \lambda_0 \cong -48°$

$d\lambda_0 \cong -0{,}85"$

$$\Rightarrow f(\lambda) \cong 23{,}86.\operatorname{sen}(\lambda+48°)$$

FIG. 23 - ANÁLISE DO EFEITO, SOBRE ALTURAS ELIPSOIDAIS, DE UM INCREMENTO $d\lambda_0$ À LONGITUDE DO PONTO-ORIGEM DE UM SISTEMA GEODÉSICO CLÁSSICO.

nais, neste contexto. Impõe-se, todavia, um exame prévio das condições do sistema vertical.

Ainda que se considere inexistir uma distorção sistemática sensível no conjunto de altitudes sobre o n. m. m disponíveis, há forte razão para se pensar opostamente com respeito ao "geóide astro-geodésico". O motivo origina-se no erro de orientação espacial inerente ao SAD 69. *I. Fischer* com certeza desconhecia essa deficiência do datum regional sul-americano. Sua determinação astro-geodésica seria válida para o hipotético "datum ideal" não afetado pelo erro de orientação. Pois apenas neste caso, as componentes η do desvio relativo da vertical, dadas pela segunda das (2.19), seriam corretas em cada estação dos perfis astro-geodésicos. Note-se que o erro sistemático presente nas longitudes astronômicas — numericamente igual a $d\Lambda_0$ —, tende a se cancelar em cada astro-estação, com a variação mais ou menos uniforme induzida por $d\Lambda_0$ sobre as longitudes geodésicas de todos os pontos da rede(vide § 6). Ou seja, *I. Fischer* com isso obteve valores η praticamente iguais aos que resultariam numa situação livre do erro sistemático nas longitudes astronômicas. Por via de consequência, pode-se esperar um efeito degenerativo sobre sua determinação astro-geodésica, segundo a direção E-W, gradativamente crescente com o aumento das distâncias ao ponto-origem, onde o desnível geoidal é nulo por definição (*Vaníček, P. & Carrera, G (1982)* deduzem fórmulas para as variações sofridas pelas componentes do desvio da vertical, relativas a um sistema geodésico clássico, em função do ângulo Δ de rotação do sistema com respeito ao TM; rotação esta,significativa no caso do SAD 69). Essa distorção do sistema altimétrico, caso verdadeira e sensível, pode invalidar a idéia de cálculo do vetor-translação do SAD 69 com base numa parametrização parcial de modelos convencionais, restrita às componentes daquele vetor. Além disso, poderia afetar importante conclusão anterior deste item, qual seja: atribuição do valor encontrado para a rotação ω, no segundo teste da tabela 2, ao efeito exclusivo de um erro sistemático nas longitudes astronômicas. Pois, manifestando-se na forma de uma tendenciosidade rotacional, a distorção do sistema altimétrico tenderia a influenciar a estimativa de ω. Para compreender bem este fato, basta atentar para a inter-relação entre ω e o parâmetro η_V do modelo Veis (examinar relações (4.22) e (4.23)). A rotação η_V, esta sem dúvida alguma, seria capaz de absorver a possível distorção rotacional do "geóide astro-geodésico".

As colocações do parágrafo anterior motivam fortemente uma

investigação cuidadosa sobre as condições gerais do mapa astro-geodésico de *I. Fischer* para o SAD 69. Tentaremos desenvolvê-la no item subsequente.

4.2.5.2 - ANÁLISE DO "GEÓIDE ASTRO-GEODÉSICO" SAD 69

Neste item, temos como primeiro objetivo confirmar se de fato a determinação astro-geodésica de desníveis geoidais referida ao SAD 69, realizada por *I. Fischer* (fig. 15), apresenta alguma tendência distorciva significante em território brasileiro. Iniciaremos essa investigação pela análise dos resíduos altimétricos (Vh) referentes à exp. 3 da tabela 2. Tais valores encontram-se relacionados na tabela 4.

No experimento agora focalizado, realizou-se basicamente uma média ponderada das diferenças entre coordenadas cartesianas TM e SAD 69 homólogas, para o conjunto de 54 estações conectoras da fig. 22. Em suma, trata-se de uma estimativa do vetor-translação do SAD 69, baseada no emprego de um dos modelos convencionais, sob parametrização parcial restrita a translações. Condição em que os três modelos – BW, MB e Veis –, simplesmente se equivalem.

Os resíduos Vh da exp. 3 deveriam apresentar-se normalmente distribuídos em torno de zero, com predominância numérica de valores mais próximos àquela média. Este comportamento padrão indicaria consistência do sistema vertical com o SAD 69, confirmando as translações obtidas como boas estimativas das componentes do vetor posição da origem daquele datum. Contudo, a inspeção dos resíduos mencionados revela um quadro atípico, bem diverso do desejável. Distorções localizadas, mais provavelmente oriundas de erros isolados nas elevações sobre o n. m. m, dificultam a detecção de tendências sistemáticas. Mesmo assim, porém, percebe-se que os resíduos altimétricos vão decrescendo gradualmente, de leste para oeste, desde um valor máximo de 5 m verificado na estação mais oriental (95), localizada na região NE, próxima ao meridiano -36^{o}. Nas cercanias do meridiano -48^{o}, ou seja, numa certa faixa de longitude em torno do ponto-origem Chuá, os resíduos altimétricos estão próximos de zero. Avançando para oeste, em direção ao meridiano limite de -60^{o} (est. 13), acontece uma inversão de sinal, mas já não parece tão nítida a preservação da tendência descrescente dos resíduos. A confirmação do comportamento previsto para os valores Vh, pelo menos na faixa $[-48^{o}, -36^{o}]$de longitudes, é sintomática. Mas faz-se necessário averiguar o que realmente se passa a oeste de Chuá. É a nossa próxima etapa de investigação.

Confeccionou-se o mapa da fig. 24 (*Blitzkow, D.(1986a)*

RESÍDUOS ELIPSOIDAIS RESULTANTES DA APLICAÇÃO DOS PARÂMETROS DE TRANSFORMAÇÃO DA TABELA 2 (EXPS. 1 E 2)

COD. DA ESTAÇÃO	EXP. 1			EXP. 2		
	$V\phi''$	$V\lambda''$	V_h(m)	$V\phi''$	$V\lambda''$	V_h(m)
95	0,06	0,06	-0,48	0,15	0,19	0,02
94	0,03	0,05	-0,10	0,17	0,17	0,41
55	0,05	0,03	-0,17	0,08	0,14	0,15
387	0,05	0,00	-0,42	0,06	0,11	-0,07
56	0,00	-0,01	-0,61	-0,03	0,09	-0,14
560	0,04	0,05	-4,64	0,07	0,14	-4,42
54	0,06	0,02	0,51	0,17	0,10	0,64
53	0,02	0,12	-0,03	0,19	0,19	0,22
396	0,09	0,06	-5,39	0,10	0,14	-5,22
357	0,06	0,00	-2,44	0,08	0,06	-2,33
372	0,07	0,01	-2,19	0,08	0,06	-2,14
48	0,06	-0,07	0,28	0,06	-0,02	0,37
92	0,05	0,04	1,95	0,11	0,08	1,88
366	0,05	0,05	1,95	0,05	0,09	1,97
51	-0,07	0,07	0,76	0,06	0,10	0,70
350	0,06	0,00	2,35	0,06	0,03	2,34
52	-0,18	0,03	0,74	0,00	0,05	0,86
398	0,02	0,03	0,91	0,02	0,05	0,91
763	-0,01	-0,01	0,68	0,00	0,01	0,61
761	0,06	-0,04	0,07	0,04	-0,02	0,14
57	0,01	-0,08	-0,43	-0,04	-0,05	-0,17
762	-0,02	0,02	0,59	-0,10	0,04	0,99
134	0,09	0,06	-1,43	0,10	0,07	-1,47
114	0,06	0,02	3,78	0,06	0,03	3,74
115	-0,33	0,11	1,96	-0,14	0,10	2,01
50	0,03	0,06	0,86	0,12	0,05	0,67
131	-0,03	0,16	1,62	-0,02	0,16	1,53
259	-0,07	0,15	1,85	-0,07	0,15	1,77
49	0,00	-0,12	0,43	0,03	-0,13	0,28
69	-0,01	0,01	-0,18	-0,10	0,01	0,31
176	-0,20	0,21	1,24	-0,06	0,20	1,11
93	0,11	-0,05	0,16	0,10	-0,06	0,15
447	-0,15	0,35	-1,82	-0,04	0,33	-2,01
58	0,06	-0,01	0,02	0,00	-0,03	0,23
553	0,01	-0,01	-0,02	-0,10	-0,03	0,62
70	-0,01	0,04	-0,83	-0,16	0,01	0,14
787	-0,17	-0,08	-2,89	-0,20	-0,11	-2,89
68	-0,04	-0,01	0,85	-0,03	-0,05	0,72
768	0,01	0,04	3,91	-0,01	-0,01	3,90
788	-0,09	-0,10	-2,62	-0,10	-0,15	-2,69
33	-0,04	0,05	0,56	0,02	-0,01	0,35
769	-0,01	-0,02	1,47	-0,03	-0,08	1,49
14	0,15	-0,12	0,10	0,11	-0,19	0,23
558	0,01	0,07	0,93	-0,11	0,00	1,69
454	-0,13	-0,10	-1,68	-0,10	-0,18	-1,83
456	-0,12	-0,05	0,27	-0,09	-0,14	0,14
452	-0,17	-0,13	-0,82	-0,13	-0,22	-0,97
453	-0,10	-0,07	-1,08	-0,06	-0,16	-1,21
451	-0,18	-0,06	-2,88	-0,14	-0,15	-3,02
455	-0,05	0,00	-1,50	-0,04	-0,09	-1,58
463	-0,02	-0,02	-0,70	-0,01	-0,11	-0,78
458	-0,06	-0,05	-1,44	-0,04	-0,14	-1,55
27	-0,01	-0,07	0,58	0,00	-0,17	0,55
13	-0,15	-0,13	3,30	-0,11	-0,26	3,29
MÉDIA	-0,02	0,01	-0,04	0,00	0,01	0,05
D.M.Q	0,09	0,09	1,82	0,09	0,13	1,81

COD. DA ESTAÇÃO	EXP. 3			EXP. 4		
	$V\phi''$	$V\lambda''$	V_h(m)	$V\phi''$	$V\lambda''$	V_h(m)
95	0,18	0,14	5,05	0,16	0,19	0,14
94	0,18	0,11	5,07	0,17	0,17	0,48
55	0,12	0,11	4,05	0,08	0,14	0,28
387	0,10	0,08	3,70	0,06	0,11	0,07
56	0,01	0,09	3,27	-0,03	0,10	0,02
560	0,10	0,11	-1,05	0,07	0,14	-4,31
54	0,18	0,05	3,68	0,17	0,10	0,68
53	0,20	0,14	3,03	0,19	0,19	0,22
396	0,13	0,12	-2,50	0,10	0,14	-5,12
357	0,10	0,05	-0,04	0,08	0,06	-2,24
372	0,09	0,04	-0,43	0,08	0,06	-2,07
48	0,07	-0,03	2,02	0,06	-0,02	0,45
92	0,12	0,05	3,39	0,11	0,08	1,91
366	0,07	0,08	3,32	0,05	0,09	2,04
51	0,06	0,05	1,71	0,06	0,10	0,66
350	0,07	0,01	3,27	0,06	0,03	2,40
52	0,00	0,00	1,56	0,00	0,05	0,78
398	0,03	0,04	1,66	0,02	0,05	0,96
763	0,01	-0,01	1,34	0,01	0,01	0,65
761	0,04	-0,02	0,87	0,04	-0,02	0,21
57	-0,03	-0,04	0,56	-0,04	-0,05	-0,08
762	-0,09	0,06	1,57	-0,10	0,04	1,09
134	0,10	0,06	-0,93	0,10	0,07	-1,43
114	0,06	0,02	4,22	0,06	0,03	3,78
115	-0,14	0,06	2,00	-0,14	0,10	1,91
50	0,12	0,02	0,64	0,12	0,05	0,63
131	-0,02	0,14	1,44	-0,02	0,16	1,55
259	-0,07	0,13	1,67	-0,07	0,15	1,79
49	0,03	-0,15	0,14	0,03	-0,13	0,28
69	-0,11	0,04	0,27	-0,10	0,01	0,40
176	-0,06	0,15	0,87	-0,06	0,20	1,03
93	0,09	-0,07	-0,06	0,10	-0,06	0,18
447	-0,04	0,29	-2,59	-0,03	0,33	-2,08
58	-0,01	-0,02	-0,57	0,00	-0,03	0,27
553	-0,11	0,02	-0,12	-0,10	-0,03	0,71
70	-0,17	0,08	-0,64	-0,16	0,01	0,24
787	-0,21	-0,12	-3,86	-0,19	-0,11	-2,87
68	-0,05	-0,07	-0,64	-0,03	-0,05	0,70
768	-0,03	-0,01	2,29	-0,01	-0,01	3,89
788	-0,11	-0,17	-4,33	-0,09	-0,15	-2,71
33	0,00	-0,04	-1,58	0,02	-0,01	0,27
769	-0,05	-0,09	-0,51	-0,03	-0,08	1,47
14	0,08	-0,19	-2,09	0,11	-0,19	0,21
558	-0,15	0,05	-0,49	-0,11	0,00	1,74
454	-0,12	-0,21	-4,68	-0,10	-0,18	-1,91
456	-0,11	-0,17	-2,77	-0,09	-0,14	0,06
452	-0,15	-0,25	-3,90	-0,13	-0,22	-1,06
453	-0,09	-0,19	-4,20	-0,06	-0,16	-1,30
451	-0,17	-0,18	-6,03	-0,14	-0,15	-3,12
455	-0,07	-0,12	-4,58	-0,04	-0,09	-1,66
463	-0,03	-0,14	-3,81	-0,01	-0,11	-0,86
458	-0,06	-0,17	-4,63	-0,04	-0,14	-1,63
27	-0,04	-0,20	-3,01	0,00	-0,17	0,47
13	-0,15	-0,30	-1,16	-0,11	-0,26	3,16
MÉDIA	0,00	-0,01	0,03	0,00	0,01	0,06
D.M.Q	0,10	0,12	2,82	0,09	0,13	1,81

TABELA 4

com base no modelo geopotencial GEM 9, empregando-se os parâmetros de translação obtidos na exp. 3 (vide § 9 e § 10 do intróito desta seção). O GEM 9 foi concebido exclusivamente a partir da análise do movimento de satélites de uso geodésico. As alturas esferoidais dele derivadas apresentam boa compatibilidade com os desníveis geoidais resultantes do estabelecimento, sobre pontos cotados (em sua maioria pertencentes à rede altimétrica de 1ª ordem do Brasil), de posições isoladas Doppler processadas com efemérides precisas (*Blitzkow, D. & Sá, N. C. de (1983)*). Assim, livre do problema de acúmulo de erros de observação com o aumento das distâncias a um certo ponto fixo da superfície topográfica, deficiência típica do "geóide astro-geodésico" (vide 3.4 – penúltimo parágrafo), o mapa da fig. 24 confere uma noção geral bem aproximada do comportamento do geóide em território brasileiro, relativamente ao SAD 69. Mas sem dúvida restringida pela precisão das translações da exp. 3 (observe-se que um dos intentos desta análise é justamente o de avaliar a confiabilidade daquelas estimativas).

Na fig. 25 apresenta-se a edição pioneira, confeccionada no IBGE, do mapa geoidal da fig. 17. Nele empregou-se, predominantemente, informação astro-geodésica. Com auxílio dos desníveis geoidais calculados para umas posições isoladas Doppler, foi possível completar as iso-curvas do mapa geoidal de *Fischer* (fig. 15) em território brasileiro.

Tendo em vista facilitar a tarefa de confrontação entre os dois mapas – figs. 24 e 25 –, foram plotados alguns pontos de verificação em cada figura. Na estação conectora 95, próxima ao meridiano -36^{o}, confirma-se nitidamente a diferença de 5 m revelada na forma do respectivo resíduo altimétrico da exp. 3. Mas, a oeste de Chuá o quadro é diferente, senão vejamos: no ponto L, simétrico à est. 95, tomando-se o meridiano -48^{o} como "eixo de simetria" ($\lambda = -60^{o}$), os valores das iso-curvas são praticamente iguais(7m); e na conectora 13, também com $\lambda \cong -60^{o}$, tem-se uma diferença pouco significante de uns 2 m. Para confirmar a tendência que já se delinea, inspecionemos os pontos M ($\phi = -16^{o}\ 30'$, $\lambda = -40^{o}$) e N ($\phi = -16^{o}\ 30'$, $\lambda = -56^{o}$), igualmente simétricos em longitude com respeito a Chuá, mas não tão afastados do ponto-origem. Em M a diferença remonta a uns 3 m, coerentes portanto com os 5 m da estação 95. Mas em N não passa de 1 m (o valor astro-geodésico agora mostra-se menor). Finalmente observa-se no ponto O ($\phi = -9^{o}$, $\lambda = -72^{o}$), extremo ocidental do território, uma diferença de 4 a 5 m, no mesmo sentido constatado na região NE.

A análise precedente parece ter comprovado a existência da distorção rotacional do "geóide astro-geodésico", segundo a direção E-W, em território brasileiro. Mas ela se manifesta de forma assimétrica com respeito ao meridiano de Chuá. Dividindo-se o território em três faixas, limitadas pelos meridianos -36^{o}, -48^{o}, -60^{o} e -72^{o}, constatamos que somente nas externas a determinação astro-geodésica deteriora-se forma sensível, sistematicamente crescente para leste de $\lambda = -48^{o}$ e para oeste de $\lambda = -60^{o}$. Essa distorção pode remontar a uns 5 m nos meridianos extremos. Na faixa intermediária parece haver um certo controle da tendência distorciva. Mas, qual seria a explicação do fenômeno? Possivelmente, o fato de *I. Fischer* ter injunciona do os valores de ondulação geoidal em outras duas astro-estações, além de Chuá: San Lorenzo, na Bolívia, e Campo Inchauspe, na Argentina (vide 3.1). Com efeito, é sintomática a localização de San Lorenzo, bem próxima ao meridiano -60^{o} (fig. 15) e com latitude pouco diferente da de Chuá.

A constatação do parágrafo anterior confere certa confiabilidade aos parâmetros obtidos por *Blitzkow, D. (1986 a)* em seu terceiro experimento sobre a conexão TM $\hookrightarrow$ SAD 69. Porquanto as estações conectoras da fig. 22 encontram-se predominantemente distribuídas numa região favorável, em termos de significância da distorção do "geóide astro-geodésico". Sendo bem rarefeita a contribuição de pontos situados na região NE, a influência da distorção geoidal decerto diluiu-se na estimativa de *Blitzkow (ibid.)* para o vetor-translação do SAD 69. Isto se pode confirmar facilmente. Basta refazer a experiência com estações selecionadas, ou seja, excluindo os pontos localizados nas áreas mais críticas. Será feito adiante, neste capítulo.

Outra consequência importante do fato das estações da fig. 22 estarem na sua maioria localizadas em área de boa consistência do sistema altimétrico com o SAD 69, é a confirmação da estimativa do parâmetro ω – exp. 2, tabela 2 –, como valor essencialmente vinculado à deficiência de orientação do datum regional. O leitor atento terá observado porém, que os resíduos altimétricos obtidos naquela experiência (tabela 3), para estações pertencentes à faixa de longitude compreendida entre os meridianos -36^{o} e -48^{o}, mostram-se concentrados em torno de zero, a menos de esparsos erros localizados. As duas estações mais orientais (95 e 94), por exemplo, que no exp.3 indicaram resíduos Vh da ordem de 5 m, exibem, na exp. 2, valores correspondentes quase nulos. Com respeito a esse fenômeno, deve-se atentar para sua verdadeira causa, qual seja: o efeito que a inclusão do parâmetro ω no modelo e

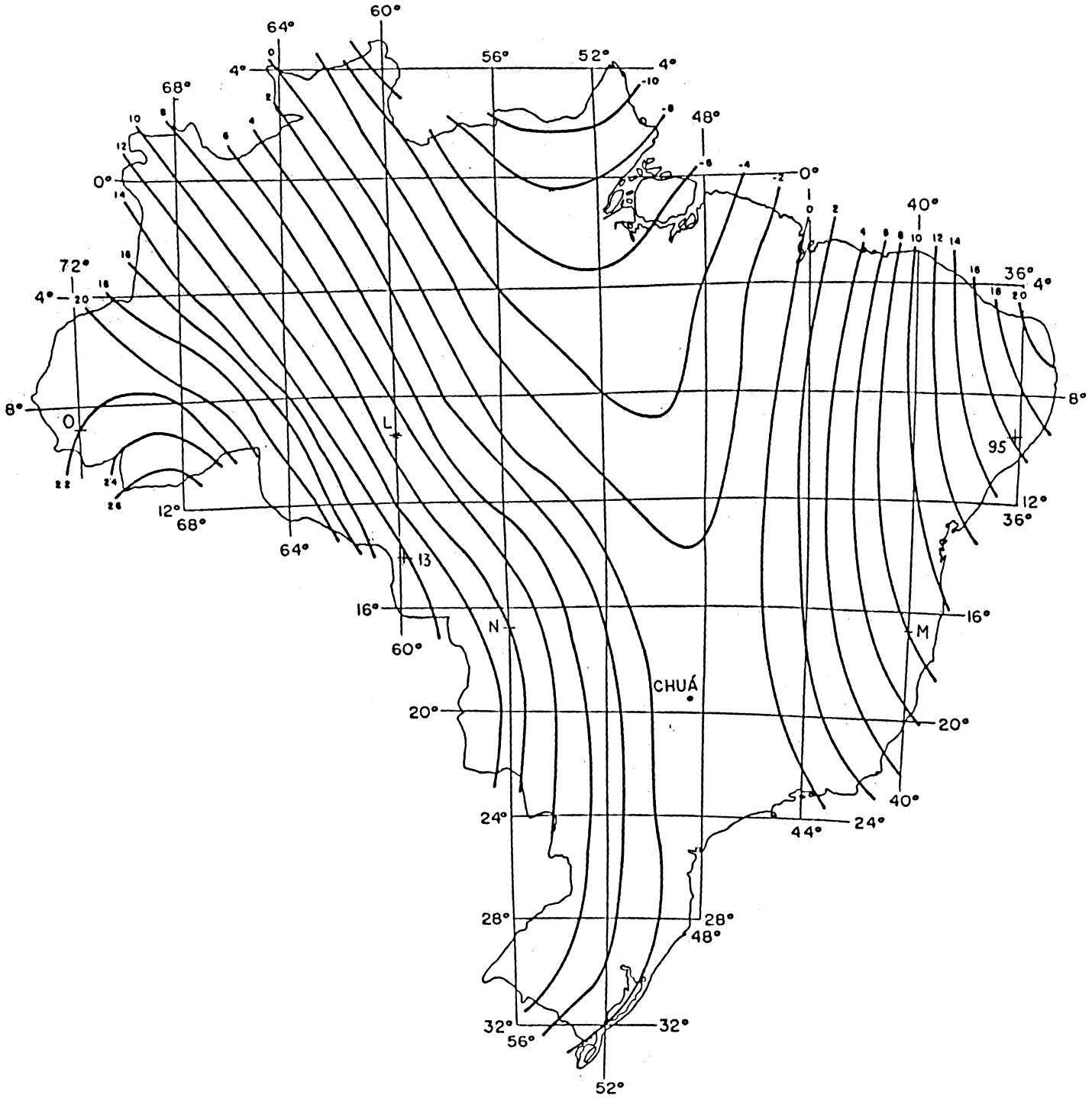


FIG. 24 - MAPA DE ALTURAS ESFEROIDAIS SAD 69 DERIVADAS DO MODELO GEM 9, POR APLICAÇÃO DOS PARÂMETROS DA EXP. 3 - TABELA 2.



FIG. 25 - MAPA GEOIDAL SAD 69 - PREDOMINÂNCIA DE DADOS ASTRO-GEODÉSICOS (IBGE-1979)

xerce sobre as translações. Pois, conforme demonstrado no item anterior, as translações obtidas na exp. 2 seriam corretas para o datum regional que se pretendera definir sob rigorosa observância da condição de paralelismo ao TM. Esta é a razão pela qual os resíduos altimétricos apresentam-se satisfatórios na exp. 2, exatamente na área em que a distorção do "geóide astro-geodésico" não está controlada, enquanto na exp. 3 dá-se justo o oposto, pois a ela corresponde uma estimativa razoável do vetor-translação do sistema definido, que se encontra afetado pelo erro de orientação. Não fosse a determinação geoidal de *Fischer* incompatível com o estado real de orientação do SAD 69.

O tipo de distorção incidente sobre o mapa geoidal confeccionado por *Fischer* para o SAD 69 decerto não representa um fato isolado no elenco das inúmeras determinações astro-geodésicas já implementadas, relativamente a diversos data regionais. *Mueller, I. I. (1974)* constatou o mesmo fenômeno no caso do "geóide astro-geodésico" NAD 27. Para tanto, por sinal, valeu-se basicamente de uma análise de resíduos altimétricos, como a realizada no terceiro parágrafo deste item.

Uma vez concluído o estudo do "geóide astro-geodésico" SAD 69, investiguemos agora a variação sofrida pelas translações, da exp. 2 para a exp. 3. Nosso objetivo é confirmar se de fato $d\lambda_o$ = - 0,85", estimativa do incremento induzido sobre a longitude geodésica de Chuá pelo erro original $d\Lambda_o$ na longitude astronômica desse ponto, é capaz de responder por aquela variação vetorial. Pode-se fazê-lo com base nas (2.8), levando em conta que a posição geocêntrica (TM) do ponto-origem permanece invariante. Assim, pelas diferenças entre coordenadas cartesianas escritas genericamente segundo aquelas relações, para os ternos elipsoidais (ϕ_o, λ_o, h_o) e $(\phi_o, \lambda_o - 0{,}85", h_o)$, o leitor confirmará, após simples manipulações algébricas, o seguinte: as componentes primária (TX) e secundária (TY) do vetor-translação sofrem variações de mesmo sinal, respectivamente iguais a 18 m e 17 m (cálculo aproximado feito com os valores $\phi_o = -19^o\ 45'$, $\lambda_o = 48^o\ 06'$ e h_o = 760 m). Esse procedimento é algo impreciso, em virtude do não paralelismo entre o sistema CG afetado por $d\lambda_o$ e o TM. Mostra-se contudo aceitável para se constatar o que pretendemos. De fato, note-se a razoável concordância entre os valores estimados e as variações observadas entre os parâmetros de translação das experiências 2 e 3 (a variação de TZ, como era de se esperar, não foi sensível). Isto confirma os respectivos significados atribuidos àqueles parâmetros.

A inspeção, nas tabelas 3 e 4, dos resíduos bidimensionais

das experiências 2 e 3 revela que a presença do parâmetro ω no modelo não contribui sensivelmente para a melhoria dos mesmos. Em particular, com respeito a longitudes é sintomática a igualdade entre as diferenças médias quadráticas calculadas para as duas relações correspondentes de resíduos. Essa constatação complementa a do parágrafo anterior, pois demonstra que de fato as translações são capazes de responder pela exclusão do parâmetro ω do modelo. Mas sendo assim, torna-se necessário reforçar a base de toda a argumentação do item precedente: a significância da estimativa de ω na exp. 2. É o que se segue, na conclusão deste item.

Dada sua pequena magnitude e à localização geográfica das estações conectoras, o efeito rotacional da componente terciária do erro de orientação Δ do SAD 69 — identificada no parâmetro ω, em 4.2.5.1 —, é bem absorvido pelas variações das componentes TX e TY do vetor-translação, verificadas entre os experimentos 2 e 3. Essas variações não passam de um acomodamento à verdadeira posição espacial do datum, fenômeno que pode gerar uma falsa impressão de paralelismo entre o CG SAD 69 e o TM, pois parece indicar a irrelevância da estimativa de ω. Porém, não se deve perder de vista que o processo de orientação de um sistema geodésico clássico constitui uma etapa independente daquela na qual se prescreve seu posicionamento no espaço. Ora, tal processo, no caso do SAD 69, foi influenciado pela mesma fonte de erro sistemático causadora da distorção $d\Lambda_0$ na longitude astronômica de Chuá. Note-se aí, uma vez mais, o vínculo entre o erro de orientação do SAD 69 e a manifestação sensível do parâmetro ω, induzida por aquele erro $d\Lambda_0$. Numa experiência complementar, *Blitzkow, D. (1986 a)* fixou as translações com os valores obtidos na exp. 3 e reprocessou as estimativas das rotações. De fato, as três resultaram não significantes. Entretanto, é errôneo daí concluir que o CG SAD 69 seja paralelo ao TM. Trata-se simplesmente de um fenômeno de mascaramento dos ângulos de rotação entre aqueles referenciais, por influência dos erros incidentes sobre as coordenadas das conectoras. Principalmente as regionais, ponderadas realisticamente segundo as fórmulas de Simmons, que levam em conta a degeneração crescente da precisão de posicionamento, com o aumento das distâncias a pontos fixos. (*Vaníček, P. (1975), pg. 22*).

4.2.5.3 - CRÍTICA DOS PARÂMETROS ATUAIS

Antes de procedermos à análise crítica sugerida pelo título deste item, teceremos algumas considerações sobre o resultado significante obtido para o fator de escala (δ) na exp. 1, tabela 2.

Empregaremos a exp. 2 como referência, na medida em que difere da primeira apenas pela exclusão de δ do modelo. O confronto entre diferenças médias quadráticas de resíduos correspondentes (tabela 3) revela que apenas a parametrização das diferenças coordenadas em longitudes resulta algo mais rigorosa na presença do fator de escala. Isto provavelmente se deve, pelo menos em parte, à distorção (transversal aos meridianos) do "geóide astrogeodésico" empregado para redução de bases da rede planimétrica, à superfície do elipsóide do SAD 69. Outra possível parcela distorciva incorporável ao fator δ origina-se no fato de vários segmentos daquela rede ($\cong$40% do total) terem sido ajustados sem redução prévia de suas bases ao elipsóide (vide 3.3). Apenas quando sanadas essas deficiências, futuramente, será então possível realizar comparações efetivas entre padrões de medida linear inerentes a cada conjunto de coordenadas. O fator δ tenderá a indicar a discrepância entre uma "escala média" da rede e a escala Doppler quando muitas estações conectoras, com boa distribuição por toda a malha, forem empregadas em sua estimativa (vide 4.2.1). No mais, a exp. 1 evidencia a influência indesejável exercida pelo fator de escala sobre os parâmetros de translação, notadamente sobre TY, como se constata no confronto da estimativa -29,95 m com sua correspondente na exp. 2. A presença de δ no modelo tornou TY ainda mais discrepante do seu valor real, melhor estimado na exp. 3 (2,10 m). Trata-se do já conhecido problema das correlações, mais crítico entre δ e TY no caso, em decorrência da localização geográfica das conectoras (baixas latitudes e longitudes inferiores a -45^{o}, em sua maioria). A principal consequência desse fato: recomenda-se, com respeito à inclusão do fator δ em modelos convencionais, em processos de recuperação de parâmetros para o tipo de conexão aqui focalizado, a mesma cautela necessária em relação a rotações. Pois o vetor-translação resulta mascarado na presença de um fator de escala significativo.

A exp. 4 representa basicamente um refinamento, face à ampliação da massa de dados, da antiga determinação de *Kadlec, F. A. & Gomes, J. P. (1978)* (vide 3.4-penúltimo parágrafo) feita com os 20 pontos assinalados na fig. 22. Os parâmetros de translação por eles obtidos para a conexão NSWC 9Z 2 $\hookleftarrow$ SAD 69, ainda vigentes no IBGE, são os seguintes:

$$\begin{aligned} TX &= -80{,}80 \text{ m} \\ TY &= -14{,}81 \text{ m} \\ TZ &= -44{,}01 \text{ m} \end{aligned} \qquad (4.35)$$

No confronto das estimativas acima com as da exp. 4, deve-se ter em mente que

Blitzkow, D. (1986a) deixou de efetuar apenas a correção de orientação do sistema de satélite. Portanto, 4m da diferença entre as componentes TZ devem-se exclusivamente ao fato dele ter compatibilizado o posicionamento espacial do NSWC 9Z2 com o TM, mediante a translação (0,0,4)m, procedimento não verificado no cálculo de 1978. Mas também à correção de escala das coordenadas Doppler (-0,4 p.p.m), igualmente considerada no tratamento de observações para a exp. 4, pode-se atribuir certa parcela das diferenças entre as duas determinações em questão, mormente em TX e TY. Note-se ainda a falta de estimativas de precisão para os resultados (4.35); mas isto pouco influencia na comparação com os valores mais atuais (vide colocações no intróito desta seção -§ 5). Por outro lado, em virtude de se ter atribuído pesos unitários a todas as observações (ponderação irreal) na estimativa dos parâmetros (4.35), os desvios-padrão então obtidos apresentavam significado restrito. Por isso foram omitidos.

É notória a forte semelhança entre as translações da exp. 4 — substitutas naturais da determinação análoga de 1978 - e as da exp.2, em que além de se ter compatibilizado a priori e por completo o sistema de satélite com o TM, foram estimados parâmetros de rotação conjuntamente com as translações. Tal semelhança ocorre pelo seguinte: a tendenciosidade das longitudes SAD 69, única distorção rotacional significante detectada na exp. 2, com o valor médio -0,82", coincide praticamente com a rotação, também terciária, que se aplica ao NSWC 9Z2, no sentido de compatibilizá-lo em orientação com o TM (-0,80"). Ou seja, na exp. 4 tudo se passa como se fosse refeita a exp. 2, afetando-se a priori as longitudes SAD 69 com uma parcela de + 0,82" (procedimento que equivaleria a uma redefinição do datum tendo em vista corrigir a distorção sistemática das longitudes geodésicas). Simplesmente o parâmetro ω resultaria não significante, preservando-se as translações com os mesmos valores obtidos. Pois estes, como sabemos, representam justo as componentes do vetor-posição da origem não do SAD 69, mas do "datum ideal" que se pretendera definir, corretamente orientado segundo o TM. Conclui-se então o seguinte: o vetor-translação do SAD 69, referido ao NSWC 9Z2, coincide com o do "datum ideal", referido ao TM (supõe-se, nessa afirmativa, que ao sistema de satélite se aplique a priori a translação terciária de 4 m, conforme realizado em todas as experiências da tabela 2). Não se presta, portanto, ao uso mais relevante dos parâmetros de translação: a determinação relativa do geóide para o datum regional.

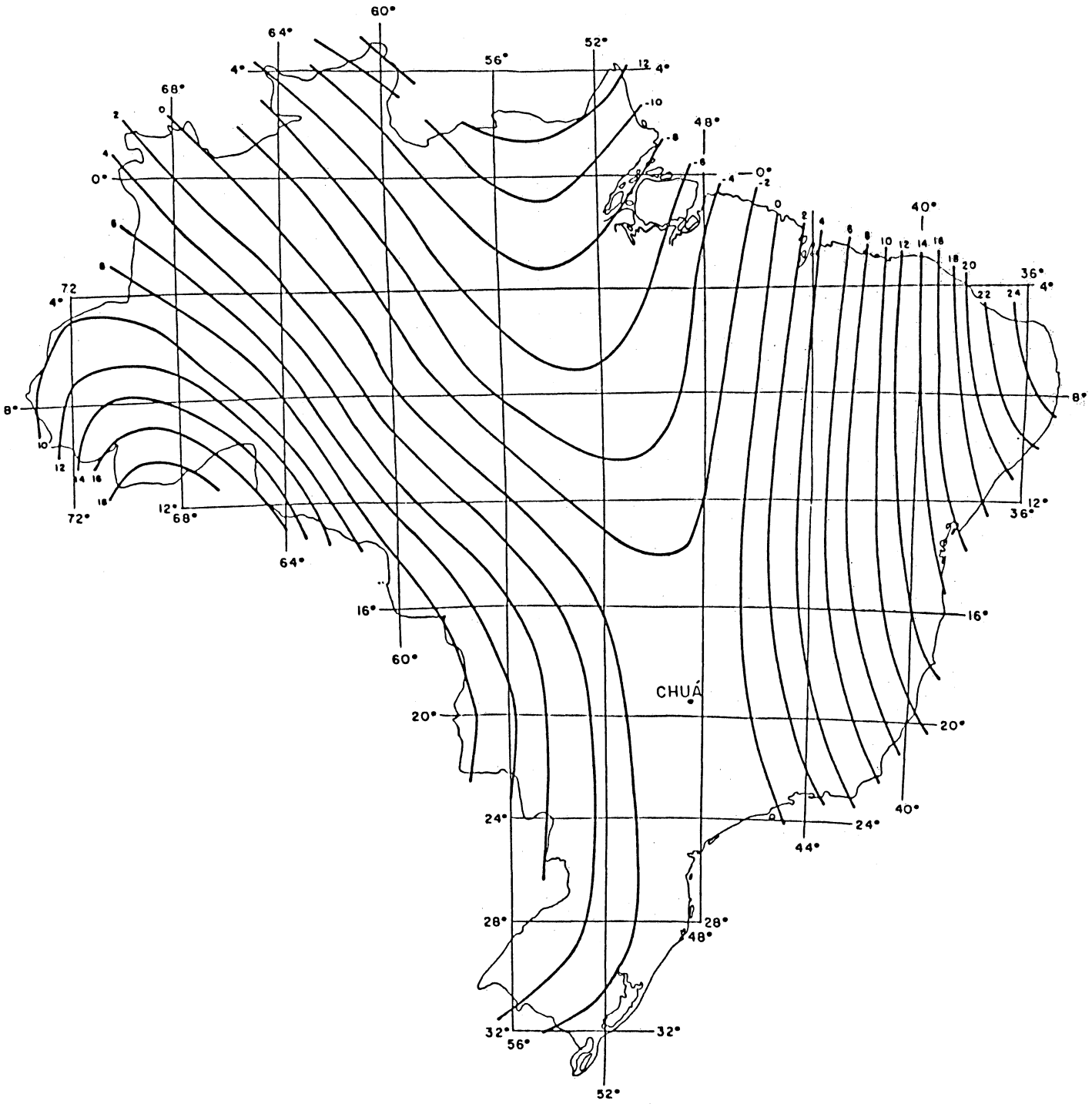


FIG. 26 - MAPA DE ALTURAS ESFEROIDAIS SAD 69 DERIVADAS DO MODELO GEM 9, POR APLICAÇÃO DOS PARÂMETROS DA EXP. 4 - TABELA 2.

Pode-se confirmar a conclusão precedente com base no mapa da fig. 26 (*Blitzkow, D. (1986a)*), elaborado de maneira análoga ao da fig. 24 (vide 4.2.5.2 - § 4), tomando-se como parâmetros de translação os da exp. 4. Recoorendo-se à própria fig. 24 como padrão de comparação, por razões já conhecidas, percebe-se com clareza as distorções geradas pelo uso daqueles parâmetros. No extremo sul do Acre, por exemplo, consta, na fig. 26, a iso-curva de 18 m onde pelo certo tem-se algo próximo a 26 m. Note-se a razoável concordância geral com o mapa geoidal da fig. 17, de certa forma previsível a oeste do meridiano -60^{o}, onde estações Doppler estabelecidas sobre pontos cotados exerceram maior influência sobre o traçado das iso-curvas. No mais, a semelhança entre as figs. 26 e 17 a leste de $\lambda = -60^{o}$ cristaliza uma conclusão do item 4.2.5.2: a determinação astro-geodésica de *I. Fischer* mostra-se compatível com o mesmo sistema a que anteriormente nos referimos como "datum ideal".

A principal ilação das colocações anteriores é a seguinte: malgrado apresente uma certa homogeneidade, dada sua razoável coerência com o sistema geodésico que se pretendera definir como SAD 69, o mapa geoidal da fig. 17 é, no geral, incorreto para o datum regional sul-americano.

Como saldo conclusivo de toda a análise elaborada nesta seção, ficam comprovadas as restrições teóricas relativas ao uso típico de modelos convencionais, em problemas de estimativa de parâmetros de transformação como o focalizado neste contexto. Os adeptos do conceito de datum flutuante (vide 2.5.2) tendem porém a negligenciá-las, na medida em que adotam parametrizações completas sob o pressuposto de expressarem mais realisticamente as diferenças entre coordenadas homólogas. Ora, conforme demonstrado, tal procedimento pode acarretar degeneração de coordenadas geocêntricas, quando os parâmetros obtidos forem a elas convenientemente aplicados (considere-se, por exemplo, o aproveitamento dos resultados das exps. 1 ou 2).

Na verdade, a concepção datum flutuante torna nebulosa a diferença entre sistema geodésico e rede tridimensional associada, o que nos parece indesejável. Seja qual for a situação espacial de um datum não geocêntrico com respeito ao TM, em sua região de abrangência os pontos da rede associada devem ser relativamente a ele posicionados com a maior precisão possível. O mesmo se diga sobre pontos em princípio posicionados no TM, cujas coordenadas relativas ao datum regional deseja-se obter por aplicação de parâmetros de transformação. Neste sentido, importa que os parâmetros expressem,

com rigor, a situação espacial relativa entre os dois referenciais. Razão pela qual convém depurar a determinação daquelas grandezas, da influência degenerativa das distorções presentes nas coordenadas de pontos empregados no processo. Essas idéias corroboram a importância de se fazer clara distinção entre redes e sistemas, no sentido de tratá-los como categorias geodésicas independentes.

No tocante a uma estimativa do vetor-translação do SAD 69 referenciado ao TM, já dispomos de resultados aceitáveis (exp.3 - tabela 2) mas ainda passíveis de refinamento, consoante colocações do item anterior(§8). Mas, e quanto à orientação relativa entre aqueles referenciais? Nessa matéria, mesmo que distorções presentes nas coordenadas das estações conectoras não afetassem as estimativas dos parâmetros de rotação no uso de modelos convencionais, seria ilógico modelar a diferença de orientação entre os sistemas cartesianos envolvidos, mediante três rotações independentes, quando sabemos que elas se reduzem a uma única: o ângulo Δ da fig. 13. Entretanto, na transição entre a teoria e a prática surge uma dificuldade: a de bloquear a influência das distorções sobre a determinação de Δ. Trataremos deste assunto na divisão seguinte, cujo objetivo prático será precisamente o de estimar aquele parâmetro de rotação para o SAD 69.

4.3 - MODELOS ESPECIAIS

O equacionamento rigoroso do estado de orientação espacial de um sistema geodésico clássico, relativamente ao TM, impõe a necessidade de se expressar o efeito de um possível giro do respectivo elipsóide de referência, ao redor da normal do ponto-origem (fig. 13). Em termos matemáticos, trata-se de formular a rotação de um sistema coordenado cartesiano — no caso, o CG vinculado ao datum —, em torno de uma direção genérica no espaço. *Thompson, E.H.(1969)*, pgs. 149 e 150 , apresenta a dedução de uma certa matriz de 3ª ordem, mediante a qual realiza-se aquele tipo de operação. Vamos introduzi-la na sequência.

4.3.1 - A MATRIZ E

Seja o vetor $\vec{r}=(x, y, z)$ dado no sistema cartesiano [X Y Z] da fig. 27. Pretende-se expressá-lo no referencial [X' Y' Z'] resultante de uma rotação com valor Δ, de [X Y Z] em torno do semi-eixo U, cujos cossenos diretores são ℓ, m, n (transformação passiva). O vetor-solução $\vec{r}'$ é dado por:

$$\vec{r}' = E\,\vec{r} \qquad (4.36)$$

onde

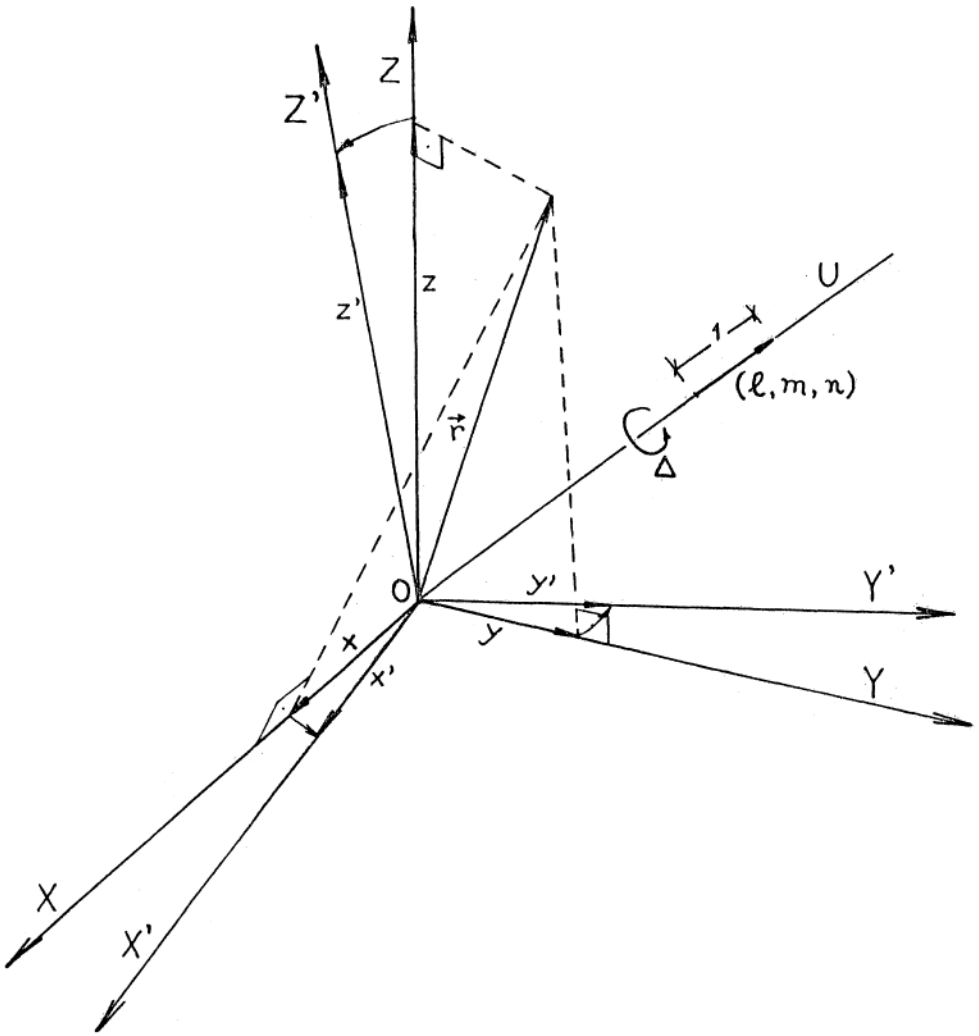


FIG. 27 - ROTAÇÃO DE UM SISTEMA CARTESIANO EM TORNO DE UM SEMI-EIXO NÃO EXCÊNTRICO, COM DIREÇÃO GENÉRICA.

$$E = \begin{bmatrix} \ell^2+(1-\ell^2)\cos\Delta & m\ell\ (1-\cos\Delta)+n\,\mathrm{sen}\Delta & n\ell\ (1-\cos\Delta)-m\,\mathrm{sen}\Delta \\ m\ell(1-\cos\Delta)-n\,\mathrm{sen}\Delta & m^2+(1-m^2)\cos\Delta & nm\ (1-\cos\Delta)+\ell\,\mathrm{sen}\Delta \\ n\ell(1-\cos\Delta)+m\,\mathrm{sen}\Delta & nm\ (1-\cos\Delta)-\ell\,\mathrm{sen}\Delta & n^2+(1-n^2)\cos\Delta \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Entendendo-se por pequena rotação aquela cujas potências superiores à primeira podem ser negligenciadas (aproximação de 1ª ordem), é razoável admitir ser este o caso do parâmetro Δ que temos em vista estimar, correspondente ao giro azimutal do SAD 69 em torno do ponto-origem Chuá. Sendo assim, convém reescrever a matriz E mais adequadamente para aquela aplicação, bastando considerar as aproximações $\cos\Delta \cong 1$ e $\mathrm{sen}\,\Delta \cong \Delta$. Daí resulta:

$$E \cong \begin{bmatrix} 1 & \Delta n & -\Delta m \\ -\Delta n & 1 & \Delta\ell \\ \Delta m & -\Delta\ell & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Confrontando a (4.38) com a matriz de **Euler** (4.3), resultante da conjugação de pequenas rotações fundamentais (ε, ψ, ω), observa-se uma interessante analogia entre suas configurações. Obtém-se a (4.38) a partir da (4.3), ao se considerar:

$$\varepsilon = \Delta\ell; \quad \psi = \Delta m; \quad \omega = \Delta n \quad (4.39)$$

Essa correspondência revela a possibilidade de se conferir uma interpretação vetorial para pequenas rotações de sistemas cartesianos, em torno de semi-eixos genericamente direcionados e com origem coincidente com a do sistema. No caso, a menos de seu sinal, que obedece às mesmas regras estabelecidas de acordo com a polaridade do sistema (vide 2.1), Δ corresponde ao módulo de um "vetor-rotação" direcionado segundo o semi-eixo em torno do qual dá-se o giro do referencial. As componentes ortogonais desse vetor, expressas nos membros direitos das (4.39), valorizam rotações ao redor dos eixos X, Y, Z, nesta ordem. Portanto, equivalem-se os efeitos de: uma pequena rotação do tipo Δ e uma conjugação de três rotações fundamentais resultantes, para cada eixo coordenado, do produto de Δ pelos respectivos cossenos diretores do semi-eixo em torno do qual dá-se aquela pequena rotação.

Para concluir essas notas sobre a matriz E, sugerimos ao leitor um exercício de interesse didático: verificar a consistência entre a (4.37) e cada uma das matrizes (2.4), mediante as quais realizam-se rotações primária, secundária e terciária. Por exemplo, a imposição de $\ell=1$, $m=0$; $n=0$ e $\Delta=\varepsilon$ na

(4.37) deve reproduzir $R_1(\varepsilon)$. E assim por diante.

4.3.2 - MODELO VANICEK-WELLS

Proposto por *Vaníček, P. & Wells, D. E. (1974)*, este modelo (VW) fundamenta-se em premissas distintas das usualmente consideradas para os modelos convencionais. Trataremos de resumi-las a seguir:

a) O sistema TM: [x y z] é o referencial "padrão".

b) Considera-se que o sistema de satélite $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}]$, em relação ao qual encontram-se referidas as coordenadas de um conjunto de estações conectoras dispostas ao longo de uma rede tridimensional clássica, difere do TM tanto em posicionamento quanto em orientação espaciais.

c) O sistema geodésico regional, de concepção clássica, e a rede tridimensional nele descrita, são tratados como categorias independentes. Ou seja, o sistema coordenado não sofre influência de modificações ou erros incidentes sobre coordenadas de pontos da rede.

A hipótese do item c foi inclusive apontada como uma das implicações conceituais pertinentes ao método clássico de definição de um datum (vide 2.5.1.2), malgrado sua aceitação seja opcional (vide 2.5.2). No mesmo contexto, classifica-se a restrição geométrica que vincula possíveis erros cometidos na imposição da condição básica de paralelismo (CG// TM), à ocorrência de uma rotação do respectivo elipsóide em torno da normal do ponto-origem. O modelo VW deve, portanto, equacionar o estado de orientação do sistema geodésico regional, com respeito ao referencial "padrão" (TM), sob aquele enfoque.

O equacionamento do modelo em questão evidencia suas premissas básicas:

$$\vec{T}_s + R(\omega, \psi, \varepsilon)\ \vec{\bar{x}}_i = \vec{T}_g + (1+\delta)\ R(\Delta)\ \vec{u}_i, \qquad (4.40)$$

onde (fig. 28):

$\vec{T}_s$: vetor-translação do sistema de satélite, referenciado ao TM.

$\omega, \psi, \varepsilon$: rotações fundamentais necessárias para compatibilizar a orientação do sistema de satélite com a do TM.

$\vec{\bar{x}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$: vetor-posição da estação genérica P_i, referenciado ao sistema de satélite.

$\vec{T}_g$: vetor-translação de [u v w] (sistema CG regional), referenciado ao TM.

δ: diferença relativa de escala entre os sistemas coordenados de satélite e regional (interpretação segundo a eq. (4.8)).

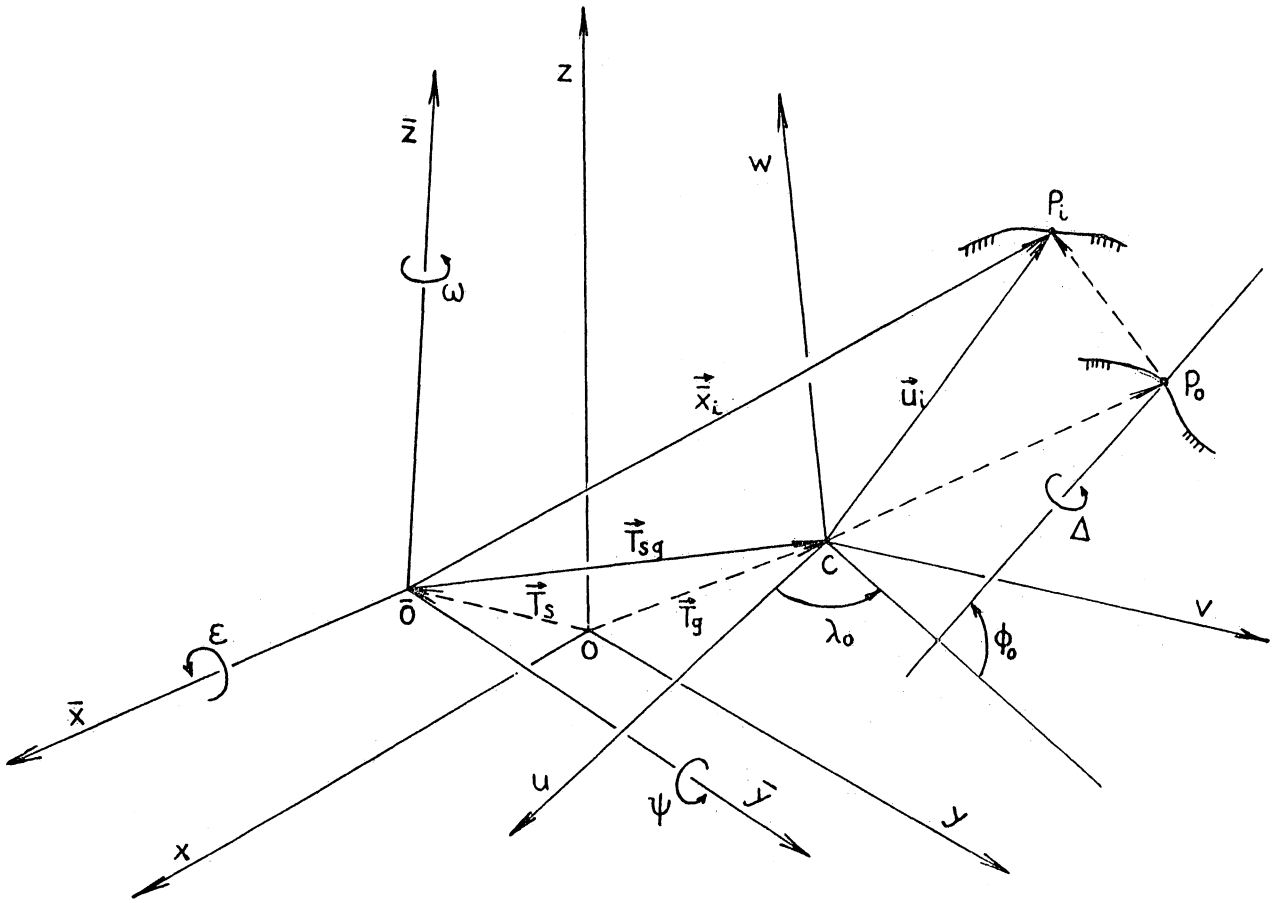


FIG. 28 - MODELO VANICEK-WELLS

Δ: rotação em torno da normal elipsoidal do ponto-origem $P_o(\phi_o, \lambda_o)$do sistema clássico, necessária para compatibilizar a orientação de [u v w] com a do TM.

$\vec{u}_i = (u_i, v_i, w_i)$: vetor-posição de P_i, referenciado a [u v w].

Com respeito ao parâmetro Δ, observe-se o fato do eixo de rotação não conter a origem de [u v w] (eixo excêntrico). Porém, é válido assimilar a aplicação $R(\Delta)$ na forma, já familiar, de um giro com valor Δ, de [u v w] ao redor de um semi-eixo com origem em C, paralelo à normal elipsoidal de P_o. A diferença entre essas operações reside no fato da origem de [u v w] deslocar-se em consequência da rotação em torno de um eixo excêntrico, o que não ocorre no caso de rotação ao redor do semi-eixo com origem em C. Vale dizer, o erro de orientação do datum regional origina uma translação de [u v w]. No entanto, as componentes desse deslocamento devem remontar a poucos centímetros no caso do SAD 69. Isto, pela pequena magnitude prevista para Δ e a baixa latitude ϕ_o. Decerto, essa translação residual será pouco significante face à precisão possível na estimativa de parâmetros de translação.

Os argumentos anteriores reportam-nos ao estudo da matriz E. Conceitos assimilados em 4.3.1 permitem-nos escrever:

$$R(\Delta) = R(\omega_g, \psi_g, \varepsilon_g), \tag{4.41}$$

onde

$$(\varepsilon_g, \psi_g, \omega_g) = \Delta\vec{u}_n, \tag{4.42}$$

sendo

$$\vec{u}_n = (\cos\phi_o \cos\lambda_o, \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o, \operatorname{sen}\phi_o) \tag{4.43}$$

o vetor-unitário na direção da normal de P_o. Considerando então a (4.3), vem:

$$R(\Delta) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\operatorname{sen}\phi_o & -\Delta\cos\phi_o\operatorname{sen}\lambda_o \\ -\Delta\operatorname{sen}\phi_o & 1 & \Delta\cos\phi_o\cos\lambda_o \\ \Delta\cos\phi_o\operatorname{sen}\lambda_o & -\Delta\cos\phi_o\cos\lambda_o & 1 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

Façamos agora, na equação (4.40), as seguintes substituições:

$$R(\omega, \psi, \varepsilon) = I_3 + Q(\omega, \psi, \varepsilon) \tag{4.45}$$
$$R(\Delta) = I_3 + Q(\Delta) \quad ,$$

em analogia com as (4.13) e (4.14). Resulta:

$$\vec{T}_s + [I_3 + Q(\omega, \psi, \varepsilon)]\,\vec{x}_i = \vec{T}_g + (1 + \delta)[I_3 + Q(\Delta)]\vec{u}_i \tag{4.46}$$

Negligenciando quantidades de 2ª ordem, obtém-se:

$$\vec{T}_s + \vec{\bar{x}}_i + \mathcal{Q}(\omega, \psi, \varepsilon)\vec{\bar{x}}_i \cong \vec{T}_g + \vec{u}_i + \delta\vec{u}_i + \mathcal{Q}(\Delta)\ \vec{u}_i \qquad (4.47)$$

Mas, como não há meio de distinção entre as incógnitas $\vec{T}_s$ e $\vec{T}_g$, somente o vetor diferença

$$\vec{T}_{sg} = \vec{T}_g - \vec{T}_s \qquad (4.48)$$

pode ser determinado. Sendo assim, convém reescrever a (4.47):

$$\mathcal{Q}(\omega, \psi, \varepsilon)\ \vec{\bar{x}}_i - \mathcal{Q}(\Delta)\ \vec{u}_i - \delta\vec{u}_i - \vec{T}_{sg} \cong \vec{u}_i - \vec{\bar{x}}_i \qquad (4.49)$$

Levando em conta a diferença de poucas centenas de metros, ou menos, existente entre os vetores $\vec{u}_i$ e $\vec{\bar{x}}_i$, nas aplicações em áreas restritas da superfície terrestre, uma nova aproximação mostra-se factível na (4.49). Podemos substituir $\vec{u}_i$ por $\vec{\bar{x}}_i$ nos termos em que $\vec{u}_i$ consta multiplicado pelas pequenas quantidades em $\mathcal{Q}(\Delta)$ e por δ. Isso acarreta a seguinte relação:

$$[\mathcal{Q}(\omega, \psi, \varepsilon) - \mathcal{Q}(\Delta) - \delta I_3]\ \vec{\bar{x}}_i - \vec{T}_{sg} + (\vec{\bar{x}}_i - \vec{u}_i) \cong \vec{0} \qquad (4.50)$$

Na (4.50) temos a equação de observação utilizada para se estimar as oito incógnitas (ε, ψ, ω, Δ, δ e $\vec{T}_{sg}$) do modelo VW, por mínimos quadrados. Todavia, conforme proposto o modelo, não haveria como distinguir os diferentes parâmetros de rotação, porquanto $\mathcal{Q}(\omega, \psi, \varepsilon)$ e $\mathcal{Q}(\Delta)$ são aditivas na (4.50). A fim de evitar a consequente singularidade no conjunto de equações normais, faz-se então necessário empregar pelo menos dois sistemas de tipo regional clássico. A cada um devem referir-se no mínimo duas estações, logicamente também posicionadas no sistema de satélite, para viabilizar a estimativa das incógnitas por eles introduzidas, na taxa de cinco por sistema. Sendo **g** o número de referenciais regionais, a quantidade total de parâmetros será portanto igual a $3 + 5\ \mathbf{g}$.

Wells, D.E & Vaníček, P. (1975) empregaram a (4.50) visando determinar a situação espacial de diversos data de concepção clássica. Diferentes sistemas de satélite também participaram dos ensaios descritos naquela referência.

Na próxima seção, vamos manipular a forma original (4.40) do modelo VW, no sentido de adequá-la ao aproveitamento do conjunto de dados disponível para realização deste trabalho.

4.3.3 - MODELO VANICEK-WELLS MODIFICADO

O modelo VW foi pioneiro na abordagem da hipótese de não coincidência entre referenciais de satélite e o TM. Contudo, escapa aos objetivos

deste trabalho determinar a situação espacial de qualquer sistema de satélite. Mesmo porque, para tanto, o emprego de informação concernente a uma área restrita da superfície terrestre, como a disponível, torna-se desaconselhável. Aqui, o aspecto de maior interesse do modelo focalizado reside no tratamento conferido ao tema da orientação dos sistemas geodésicos clássicos.

De encontro às colocações precedentes, vem o fato de se dispor dos parâmetros definidores da situação espacial do NSWC 9Z 2, relativamente ao TM. Isto viabiliza uma proveitosa alteração na forma original (4.40) do modelo VW, na medida em que $\vec{T}_S$, ω, ψ e ε simplesmente deixam de ser incógnitas. Ou seja, na aplicação em vista pode-se compatibilizar cada $\vec{\vec{x}}_i$ com o TM (membro esquerdo da (4.40)), a priori da etapa de ajustamento para estimativa dos parâmetros de transformação. Sob tal perspectiva, vamos então reescrever a (4.40):

$$\vec{x}_i = \vec{T} + (1 + \delta)\, R(\Delta)\, \vec{u}_i \qquad (4.51)$$

Na fig. 29 tem-se a ilustração da (4.51), equação do modelo VW modificado. $\vec{T} = (TX, TY, TZ)$ é o vetor-translação do datum regional, referenciado ao TM. Quanto ao vetor-posição $\vec{x}_i$, para cada estação conectora será obtido mediante a transformação (2.17), que se processa sobre coordenadas NSWC 9Z2.

Um aspecto positivo do modelo VW modificado é o fato dele prescindir do envolvimento de dois ou mais sistemas regionais. Esta dificuldade desapareceu quando os parâmetros de rotação do referencial de satélite foram suprimidos do modelo original, onde constituiam incógnitas.

A diretriz de trabalho que culminou na proposta modificadora do modelo VW aponta para a necessidade de se investigar o estado efetivo de orientação espacial do SAD 69. Portanto, interessa-nos determinar a rotação Δ para aquele datum, objetivo que relega os parâmetros de translação ($\vec{T}$) e de escala (δ) a um segundo plano, nesta etapa do trabalho. O erro de orientação (Δ)praticamente independe do vetor-translação. Matematicamente, isto se traduz na forma de baixas correlações entre Δ e as componentes de $\vec{T}$ (o que na prática é simples confirmar). Por este motivo, podemos empregar o modelo VW modificado, observando estritamente as condições adequadas a uma boa estimativa de Δ, ainda que desfavoráveis a uma correta determinação de $\vec{T}$. Nesta mesma linha de raciocínio, note-se que erros incidentes sobre o sistema vertical – críticos, como sabemos, nos procedimentos usuais para obtenção do vetor $\vec{T}$ –, exercem influência negligenciável sobre o parâmetro Δ.

Em defesa dos principais argumentos do parágrafo precedente, apelamos

para a sensibilidade geométrica do leitor.

A precaução essencial em qualquer experiência com a finalidade de estimar Δ, consiste no aproveitamento de estações conectoras restritas às cercanias do ponto-origem do datum regional (*Wells, D. E. & Vaníček, P.* (1975)). Trata-se do único recurso para evitar o mascaramento daquele parâmetro por distorções azimutais da rede planimétrica. Todavia, esse cuidado implica numa possível perda de qualidade estatística no processo, pois nem sempre contaremos com uma boa quantidade de estações próximas ao ponto-origem. Outra dificuldade decorrente da necessária limitação no aproveitamento de conectoras resume-se na seguinte indação: qual o limite admissível de afastamento do ponto-origem, a considerar? Esta, dificilmente lograríamos responder a nível teórico. Resta-nos portanto abordar, na prática, nosso problema específico. Não se perca de vista porém, uma conclusão essencial do item 4.2.5.1 (§ 10). Sendo previamente conhecido o valor provável da componente terciária (ω_g) do ângulo Δ para o SAD 69, é possível confrontar cada avaliação daquele parâmetro com $\omega_g/\text{sen}\phi_0$ (vide relações (4.42) e (4.43)). Esperamos que coincidam para a melhor estimativa de Δ.

4.3.3.1 - AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Neste item, pretendemos sintetizar os aspectos de maior interesse no processo de ajustamento por mínimos quadrados a que se deve submeter o modelo VW modificado, com o objetivo principal de estimar o erro de orientação do SAD 69.

A expressão (4.51) do modelo em foco pode ser manipulada no sentido de se explicitar melhor o relacionamento entre observações e parâmetros. O primeiro passo consiste em reescrevê-la, considerando a segunda das (4.45). Vem:

$$\vec{x}_i = \vec{T} + (1 + \delta)[I_3 + \mathcal{Q}(\Delta)]\,\vec{u}_i \qquad (4.52)$$

Negligenciando quantidades de 2ª ordem, obtêm-se:

$$[R(\underline{\Delta}) + \underline{\delta} I_3]\,\vec{u}_i + \underline{\vec{T}} - \vec{x}_i \cong \vec{0}, \qquad (4.53)$$

onde os parâmetros de transformação constam sublinhados, num total de cinco incógnitas. Da (4.53) infere-se que uma relação (matricial) do tipo

$$F\,(X\alpha, L\alpha) = 0 \qquad (4.54)$$

prevalece entre parâmetros e observações ajustados, simbólica e respectivamente denotados pelos vetores $X\alpha$ e $L\alpha$ (nestes, a seta característica será omiti

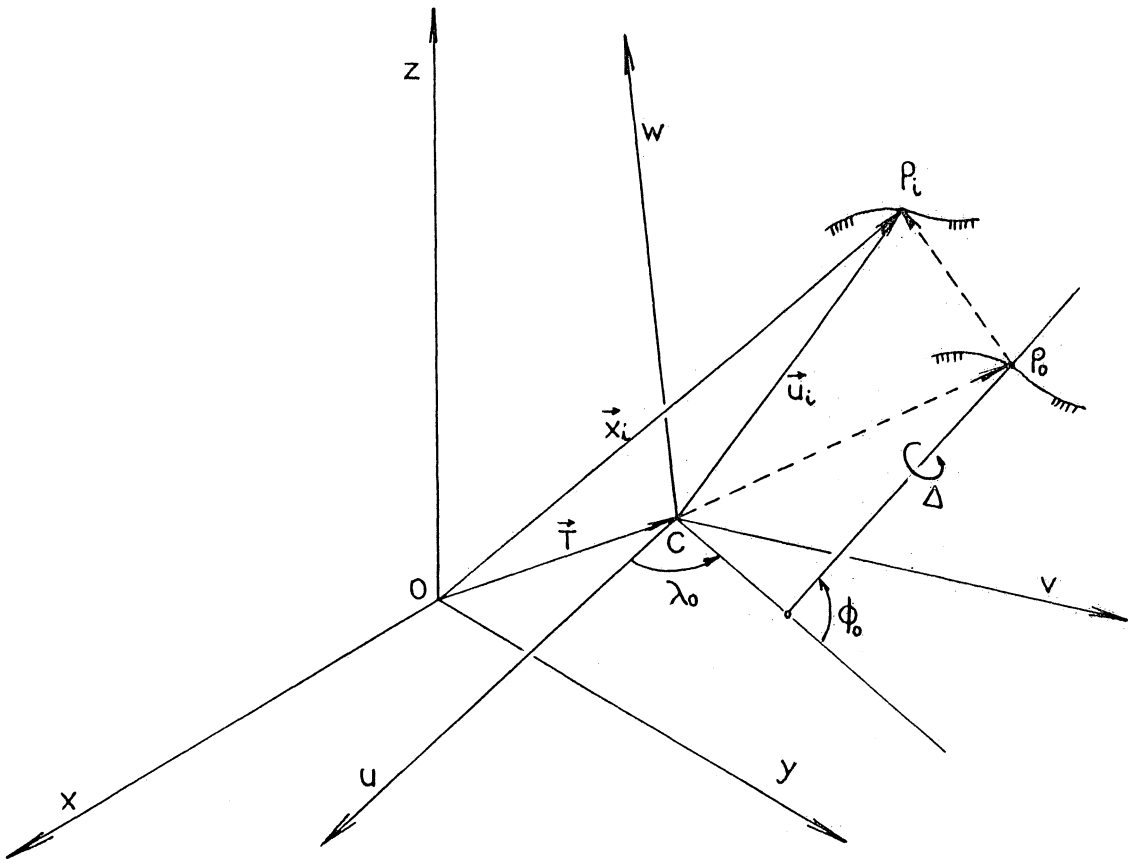


FIG. 29 - MODELO VANICEK-WELLS MODIFICADO

da em benefício da clareza).

Seja **n** o número de estações conectoras selecionadas para o ajustamento da (4.53). Teremos assim um total de 3n equações de observação. A montagem de um sistema redundante, necessário à implementação do M.M.Q, requer no caso a observância da condição $3n > 5$. Logo, no mínimo duas conectoras serão necessárias. As observações ($\vec{u}_i$ e $\vec{x}_i$) totalizam 6n valores.

Modelos do tipo (4.54) são típicos do chamado método combinado de ajustamento (*Gemael, C, (1984)*, cap. 10). O resultado de sua linearização denota-se usualmente mediante a seguinte expressão matricial:

$$AX + BV + W = 0 \tag{4.55}$$

Dimensionando matrizes e vetores para a aplicação em vista, tem-se:

$$A(3nx5) = \left.\frac{\partial F}{\partial Xa}\right|_{(Xo,\ Lb)} \qquad B(3nx6n) = \left.\frac{\partial F}{\partial La}\right|_{(Xo,Lb)} \qquad W(3nx1) = F(Xo,\ Lb) \tag{4.56}$$

Lb: vetor (6n x 1) dos valores observados.
V : vetor (6n x 1) dos resíduos das observações.
Xo: vetor (5 x 1) de valores aproximados dos parâmetros.
X : vetor (5 x 1) de correções aos elementos de Xo,

de forma que:

$$La = Lb + V \quad e \quad Xa = Xo + X \tag{4.57}$$

Estaremos basicamente interessados em estimar Xa, além de sua respectiva matriz variância- covariância ΣXa, concernente à precisão de estimativa dos parâmetros. A inspeção dos resíduos V permite uma avaliação do comportamento do modelo no processo de ajuste. Espera-se deles boa aderência a uma distribuição normal com média nula, segundo cada componente do vetor Lb (primária, secundária e terciária para coordenadas de satélite e regionais), desde que as observações não estejam afetadas por erros grosseiros ou sistemáticos.

As expressões fundamentais de cálculo são:

$$X = -(A^t\ M^{-1}\ A)^{-1}\ A^t\ M^{-1}\ W \ e \tag{4.58}$$

$$V = P^{-1}B^t\ K,$$

nas quais:

$$M = B\ P^{-1}\ B^t \ e \tag{4.59}$$

$$K = M^{-1}(AX + W)$$

Quanto a P(6nx6n), trata-se da matriz dos pesos das observações, sobre a qual comentaremos mais adiante. A MVC $\Sigma Xa(5 \times 5)$ é dada por:

$$\Sigma Xa = \hat{\sigma}_o^2 \, (A^t \, M^{-1} A)^{-1}, \tag{4.60}$$

onde $\hat{\sigma}_o^2$ representa a chamada variância da unidade de peso a posteriori, cuja expressão de cálculo,

$$\hat{\sigma}_o^{\,2} = \frac{V^t \, P \, V}{3n - 5} \tag{4.61}$$

apresenta como denominador o número de graus de liberdade do sistema de equações de observação.

Segue-se a dedução das matrizes de derivadas parciais (A e B) e do chamado vetor dos erros de fechamento (W). As configurações matriciais transpostas assumidas para Xo e Lb são as seguintes:

$$X_o^t = (TX \; TY \; TZ \; \delta \; \Delta) \tag{4.62}$$

$$L^t = (u_1 \; v_1 \; w_i \; x_1 \; y_1 \; z_1 \; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; u_n \; v_n \; w_n \; x_n \; y_n \; z_n)$$

Teremos então:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \text{ onde } A_i(3x5) = \left.\frac{\partial F_i}{\partial Xa}\right|_{(Xo, Lb)} \tag{4.63}$$

F_i consiste no conjunto de membros esquerdos das três equações de observação relativas à i-ésima conectora. Baseados na (4.53) e levando em conta a configuração (4.44) de $R(\Delta)$, resulta para F_i:

$$F_i \equiv \begin{bmatrix} 1+\delta & \Delta \operatorname{sen}\phi_o & -\Delta \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o \\ -\Delta \operatorname{sen}\phi_o & 1+\delta & \Delta \cos\phi_o \cos\lambda_o \\ \Delta \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o & -\Delta \cos\phi_o \cos\lambda_o & 1+\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

Consequentemente, A_i assume a forma seguinte:

$$A_i = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & u_i & v_i \operatorname{sen}\phi_o - w_i \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o \\ 0 & 1 & 0 & v_i & -u_i \operatorname{sen}\phi_o + w_i \cos\phi_o \cos\lambda_o \\ 0 & 0 & 1 & w_i & u_i \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o - v_i \cos\phi_o \cos\lambda_o \end{array}\right] \qquad (4.65)$$

Portanto, as coordenadas cartesianas SAD 69 da i-ésima conectora são as observações requeridas para valorizar A_i.

Quanto à matriz B, sua configuração geral é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & \overline{0} & \\ & & \ddots & \\ & \overline{0} & & B_i \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_n \end{bmatrix}, \text{onde } B_i\,(3x6) = \left.\frac{\partial F_i}{\partial La}\right|(Xo,\ Lb) \qquad (4.66)$$

Facilmente conclui-se que $B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_i = \ldots\ldots B_n =$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1+\delta & \Delta\operatorname{sen}\phi_o & -\Delta\cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o & -1 & 0 & 0 \\ -\Delta\operatorname{sen}\phi_o & 1+\delta & \Delta\cos\phi_o \cos\lambda_o & 0 & -1 & 0 \\ \Delta\cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o & -\Delta\cos\phi_o \cos\lambda_o & 1+\delta & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad (4.67)$$

Ou seja, apenas os valores aproximados dos parâmetros δ e Δ são necessários à valorização da matriz B.

Finalmente, o vetor dos erros de fechamento:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}, \text{ onde } W_i\,(3x1) = F_i\,(Xo,\ Lb) \qquad (4.68)$$

No membro direito da (4.64) tem-se, portanto, a composição de W_i. Em seu cálculo, são necessárias todas as observações referentes à i-ésima estação, bem como os valores aproximados dos cinco parâmetros.

A já mencionada matriz dos pesos (P) deriva-se de ΣLb, MVC das observações. Atribuindo peso unitário a um dos valores observados, designemos por σ_o^2 uma grandeza adimensional, igual à variância da observação esco-

lhida. Define-se a matriz dos coeficientes de peso das observações (C_ℓ), segundo a relação:

$$C_\ell = \frac{1}{\sigma_o^2} \Sigma Lb \tag{4.69}$$

Se a matriz C_ℓ for não singular terá, como inversa, a matriz dos pesos das observações. Logo,

$$P = C_\ell^{-1} = \sigma_o^2 (\Sigma Lb)^{-1} \tag{4.70}$$

Em princípio, pode-se arbitrar livremente um valor para a variância da unidade de peso a priori (σ_o^2). Adotaremos $\sigma_o^2 = 1$, avaliando a resposta do ajustamento mediante o teste estatístico em que se compara σ_o^2, com a estimativa $\bar{\sigma}_o^2$ dada pela (4.61) (vide em 4.2.5, o § 6 do introito). Por sua vez, a matriz ΣLb apresenta, no problema focalizado, a seguinte configuração:

$$\Sigma Lb \ (3n \times 6n) = \begin{bmatrix} \Sigma\vec{u}_1 & & & & & \\ & \Sigma\vec{x}_1 & & & \bar{0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \Sigma\vec{u}_i & & \\ & & & & \Sigma\vec{x}_i & \\ & \bar{0} & & & & \ddots \\ & & & & & \Sigma\vec{u}_n \\ & & & & & & \Sigma\vec{x}_n \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

$\Sigma\vec{u}_i$ e $\Sigma\vec{x}_i$ (ambas 3 x 3) representam, nesta ordem, as MVC's dos ternos cartesianos SAD 69 e geocêntricos da i-ésima conectora. Reflete-se em ΣLb o desconhecimento de covariâncias entre os diferentes pares coordenados (ϕ_i, λ_i) relativos ao SAD 69. Fossem disponíveis aqueles dados, a configuração bloco-diagonal, que facilita manipulações computacionais, não prevaleceria em ΣLb.

Logicamente, é preciso adotar algum critério para atribuição de variâncias $(\sigma\phi_i)^2$, $(\sigma\lambda_i)^2$, $(\sigma h_i)^2$ às coordenadas elipsoidais (ϕ_i, λ_i, h_i) que, mediante as (2.8), originam as cartesianas (u_i, v_i, w_i). Neste sentido, seremos mais específicos somente no próximo item, reiterando agora, porém, nossa adesão à hipótese de independência entre as componentes de cada terno elipsoidal. Mas, a transformação coordenada (2.8) implica num proceso de propagação de covariâncias (*Gemael, C. (1984)*, pg. 4.13), cuja expressão de cálculo é a seguinte, no caso:

$$\Sigma\vec{u}_i = J_i \begin{bmatrix} (\sigma\phi_i)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma\lambda_i)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma h_i)^2 \end{bmatrix} J_i^t \tag{4.72}$$

onde J_i é a matriz de derivadas parciais de (u_i, v_i, w_i) em relação a (ϕ_i, λ_i, h_i), valorizada para i-ésima estação. Segundo *Soler, T. (1976), pg. 11*,

$$J_i = \begin{bmatrix} -(M_i + h_i)\text{sen}\phi_i\cos\lambda_i & -(N_i + h_i)\cos\phi_i\text{sen}\lambda_i & \cos\phi_i\cos\lambda_i \\ -(M_i + h_i)\text{sen}\phi_i\text{sen}\lambda_i & (N_i + h_i)\cos\phi_i\cos\lambda_i & \cos\phi_i\text{sen}\lambda_i \\ (M_i + h_i)\cos\phi_i & 0 & \text{sen}\phi_i \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

O cálculo da grande normal N_i segue a fórmula (2.9). M_i é o raio de curvatura da respectiva seção meridiana. Em sua fórmula,

$$M_i = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\,\text{sen}^2\,\phi_i)^{3/2}}, \quad (4.74)$$

os parâmetros elipsóidicos a e e^2 são grandezas já conhecidas.

Quanto à constituição de cada $\Sigma\vec{x}_i$, temos em vista considerar o número de passagens de satélite aproveitadas nos respectivos processamentos de pontos Doppler, tal como procedeu *Blitzkow, D. (1986 a)* em seus ensaios com modelos convencionais (vide em 4.2.5, § 5 do intróito). Atentos, no entanto, para possíveis variações sobre o informe de precisão da tabela 1, empregada pelo citado pesquisador. Prevalecerá a hipótese de covariâncias nulas entre as componentes de cada terno coordenado, pois os dados disponíveis no momento não oferecem outra alternativa.

Por sua relevância na análise do grau de interdependência entre incógnitas do ajustamento, a matriz dos coeficientes de correlação entre parâmetros (R) requer orientação para cálculo. Tem-se (*Gemael, C.(1984)*, pg. 4.12):

$$R_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\,\sigma_j} \quad (4.75)$$

onde σ_{ij} é a covariância entre o i-ésimo e o j-ésimo parâmetros, cujas respectivas variâncias são σ_i^2 e σ_j^2. Esses valores são extraídos diretamente da ΣXa. Facilmente se conclui que os elementos diagonais de R serão unitários, importando os demais. Quanto à dimensão, repete-se para R a de ΣXa — (5x5) no caso. (Note-se que os coeficientes de correlação são adimensionais).

É criticável a opção pelo método combinado de ajuste, para tratamento do modelo VW modificado. Veremos em que sentido, manipulando a (4.53) a fim de isolar, em seu membro direito, a diferença $\vec{x}_i - \vec{u}_i$. Para tanto, dissociemos $R(\Delta)$ com base na segunda das (4.45):

$$[Q(\Delta) + (1 + \delta)\,I_3]\,\vec{u}_i + \vec{T} - \vec{x}_i \cong \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [Q(\Delta) + \delta\,I_3]\,\vec{u}_i + \vec{T} \cong \vec{x}_i - \vec{u}_i \quad (4.76)$$

Procedimento análogo ao anterior pode ser adotado no preparo das equações de observação para modelos convencionais. Agindo dessa forma, *Blitzkow, D. (1986 a)* se permitiu considerar um relacionamento do tipo

$$F\,(Xa) = La \qquad (4.77)$$

entre parâmetros e observações ajustados, nas experiências descritas em 4.2.5. Nessa premissa, os valores observados resultam das diferenças $(\vec{x}_i - \vec{u}_i)$enquanto as componentes dos vetores $\vec{u}_i$ são absorvidas como coeficientes constantes, onde constem multiplicadas por elementos de pequena magnitude – feições claramente identificáveis na (4.76). A grande vantagem desse procedimento reside na simplicidade de cálculo do método paramétrico de ajuste, aplicável a equações de observação do tipo (4.77) (*Gemael, C. (1984), cap. 7*). Ademais, a (4.76) dispensa iterações por ser linear. Vale dizer, já na etapa básica de cálculo ("iteração zero") obtêm-se os resultados finais do ajustamento.

É simples demonstrar que os dois métodos de ajustamento abordados, o combinado e o paramétrico, originariam resultados (Xa e ΣXa) idênticos na aplicação de interesse. O fato dos vetores $\vec{u}_i$ e $\vec{x}_i$ serem tratados separadamente como observações, no combinado, é irrelevante em termos de cálculo dos parâmetros e respectiva MVC. Decerto, deve-se impor uma correspondência entre ponderações nas duas alternativas. Assim, uma propagação de covariâncias, executada com os mesmos $\Sigma\vec{x}_i$ e $\Sigma\vec{u}_i$ presentes na (4.71), seria o procedimento correto para a montagem da MVC das observações no método paramétrico $(\Sigma(\vec{x}_i - \vec{u}_i))$.

Observe-se porém, que a opção feita pelo método combinado obriga considerar a necessidade de iterações. Isto porque, quando focalizada sob a ótica daquela técnica de ajuste, a (4.76) perde a característica de linearidade. No entanto, face à pequena magnitude prevista tanto para as incógnitas Δ e δ quanto para os resíduos dos vetores $\vec{u}_i$, espera-se que iterações não acrescentem mudanças significativas sobre os resultados da etapa básica de cálculo. Um programa bem elaborado pode confirmá-lo facilmente.

A opção pelo método combinado, de programação mais laboriosa que o paramétrico, deu-se por sua maior capacidade em gerar informações sobre os dados. Enquanto no paramétrico os resíduos das observações referem-se a diferenças de coordenadas, no combinado geram-se resíduos para cada um dos vetores-posição $\vec{x}_i$ e $\vec{u}_i$. Isto facilita análises sobre a qualidade das observações, especialmente ante uma extensa massa de dados.

Resta-nos sumarizar as principais experiências realizadas com o modelo VW modificado, com vistas à determinação do parâmetro de rotação Δ para o SAD 69.

4.3.3.2 - EXPERIÊNCIAS

Tendo em vista o ajustamento, pelo M.M.Q, de um sistema de equações de observação constituídas segundo o modelo (4.51), desenvolvemos o programa DELTA em linguagem FORTRAN, para o sistema IBM/370 MOD 3032. No item anterior encontram-se as matrizes e equações empregadas na rotina de ajuste.

O programa DELTA seleciona dados do arquivo DISIPSAT, constituído pela atual Divisão de Métodos Físicos e Orbitais da Superintendência de Geodésia do IBGE. No DISIPSAT constam as principais informações geodésicas disponíveis para todas as posições isoladas Doppler estabelecidas pelo IBGE, sem restrição quanto ao tipo de efemérides empregadas em cada uma. A condição básica de aproveitamento de uma estação do arquivo, é que ela pertença à rede planimétrica de 1ª ordem e tenha sido processada com efemérides precisas. As coordenadas cartesianas NSWC 9Z 2 de cada conectora são então compatibilizadas com o sistema TM, pelo programa, mediante a (2.17).

O DELTA opera com dois critérios alternativos de enquadramento das estações: o retangular e o circular. No primeiro, selecionam-se pontos interiores a uma quadrilátero elipsóidico, cujos paralelos (N-S) e meridianos (E-W) limítrofes são dados de entrada. No segundo, alimenta-se o programa com o raio (RENQ) definidor de uma zona circular centrada no ponto-origem Chuá. Outra feição do DELTA é a possibilidade de ajuste segundo parametrizações parciais do modelo empregado, quais sejam: apenas translações, translações e fator de escala, translações e rotação.

Duas alternativas de ponderação das observações são disponíveis para o DELTA. Na primeira, considera-se $P = I_{6n}$, como se todas as observações fossem independentes e igualmente precisas. Na segunda, segue-se a rotina pormenorizada no item anterior (§ 9 a § 11). Nesse caso, dependendo do tipo de operação mediante a qual incorporou-se cada conectora à rede planimétrica fundamental, atribuímos diferentes valores de desvio-padrão em latitude ($\sigma\phi_i$) e longitude ($\sigma\lambda_i$) SAD 69. São dois tipos de conectoras, a saber: vértices de triangulação (VT's) e estações poligonais (EP's). Os respectivos desvios-padrão alimentam o vetor ERTIC, de quatro posições. Assim, a todos os VT's correspondem desvios fixos, iguais a ERTIC (1) e ERTIC (2), para ϕ e λ. Analogamente, às EP's associam-se ERTIC (3) e ERTIC (4). De forma

similar, procedemos para altitudes ortométricas (H_i). Em correspondência aos três tipos de nivelamento – geométrico, trigonométrico e barométrico –, arbitramos σH_i = 0,005m; 1,0 m e 3,0 m. Para os desníveis geoidais (astro-geodésico), informação também constante do arquivo DISIPSAT, adotamos o erro médio fixo σv_i = 3m considerado por *Blitzkow, D. (1986 a)* em seus experimentos com modelos convencionais. A variância de cada altura elipsoidal h_i é então calculada pelo programa, mediante a expressão:

$$(\sigma h_i)^2 = (\sigma H_i)^2 + (\sigma v_i)^2 \qquad (4.78)$$

Utiliza-se $(\sigma h_i)^2$ juntamente com $(\sigma \phi_i)^2$ e $(\sigma \lambda_i)^2$ no cálculo de $\Sigma \vec{u}_i$, segundo a (4.72). Acerca da (4.78), ela decorre da aplicação da lei de propagação de covariâncias à relação (2.15).

Com respeito a erros altimétricos, cabe recordar a perspectiva de sua pouca influência sobre o parâmetro Δ. Isto significa que o desconhecimento da precisão efetiva de altitudes e desníveis geoidais deve exercer um efeito negligenciável na estimativa daquela incógnita.

No item anterior, abordamos o critério para atribuição de variâncias às coordenadas geocêntricas. A informação básica necessária encontra-se na tabela 1. Entretanto, os desvios $\sigma x_i = \sigma y_i = \sigma z_i$ conferidos ao i-ésimo terno coordenado, em função do respectivo número de passagens de satélite aproveitadas, recebem tratamento de variáveis no programa, sendo armazenados no vetor ERDOP, de três posições. Assim, ERDOP (1), ERDOP (2) e ERDOP (3) são os desvios estipulados para número de passagens maior ou igual a 35, menor que 35 e maior ou igual a 20 e menor que 20, respectivamente (esse número é sempre maior ou igual a 12).

Finalmente, alcançamos a etapa de análise dos resultados. Na tabela 5, apresenta um sumário das principais experiências efetuadas com o programa DELTA. O tipo de enquadramento de estações adotado foi sempre o circular.

Os três testes iniciais empregaram praticamente todas as 108 conectoras disponíveis. Neles, selecionamos a primeira alternativa de ponderação das observações ($P = I_{6n}$). Os respectivos valores de $\tilde{\sigma}_o^2$ revelam tratar-se de uma opção inadequada. Mas, a exp. 3 evidencia um fato relevante, ao se confrontar as translações obtidas, com determinações análogas de *Blitzkow, D. (1986 a)*, registradas na exp. 3 da tabela 2. Pode-se dizer que as duas avaliações coincidem, apesar das diferenças sensíveis entre conjuntos de observações e critérios de ponderação. Por sua vez, as exps. 1 e 2 con

EXPERIÊNCIAS COM O MODELO VANICEK-WELLS MODIFICADO - ESTIMATIVAS DO ERRO DE ORIENTAÇÃO (Δ) DO SAD 69 EM RELAÇÃO AO TM
(EXPS. 10-14: FIG. 30)

	DADOS		RESULTADOS						
EXP. Nº	RENQ (km)	ERTIC(I), I=1,4(") ERDOP(I), I=1,3(m)	Nº DE EST.	TX (m)	TY (m)	TZ (m)	$\delta .10^5$	Δ (")	$\hat{\sigma}_o^2$
1	2000	—x —	104	-53,56 ± 1,54	-11,69 ± 1,67	-43,30 ± 0,69	-0,291 ± 0,036	0,296 ± 0,075	5,8255
2	2000	—x —	104	-53,04 ± 1,57	-11,18 ± 1,70	-43,38 ± 0,70	-0,291 ± 0,037	—x—	6,0986
3	2000	—x —	104	-65,01 ± 0,37	1,89 ± 0,37	-38,59 ± 0,37	—x—	—x—	7,2911
4	1000	0,04/0,05/0,05/0,06 2,0/2,5/3,0	64	-65,04 ± 0,40	2,02 ± 0,41	-38,08 ± 0,33	—x—	0,505 ± 0,114	1,0085
5	800	0,03/0,04/0,04/0,05 2,0/2,5/3,0	52	-65,28 ± 0,43	1,93 ± 0,45	-38,24 ± 0,35	—x—	0,518 ± 0,146	0,9991
6	600	0,02/0,03/0,03/0,04 2,0/2,5/3,0	41	-65,30 ± 0,47	1,86 ± 0,49	-38,45 ± 0,37	—x—	0,494 ± 0,187	0,9552
7	400	0,03/0,04/xxx/xxx/ 1,5/2,0/2,5	22	-65,77 ± 0,60	2,90 ± 0,63	-38,37 ± 0,46	—x—	0,744 ± 0,315	1,0093
8	250	0,03/0,05/xxx/xxx 2,0/2,5/xx	6	-66,52 ± 1,40	3,12 ± 1,42	-39,36 ± 1,04	— x—	0,780 ± 1,463	1,0162
(1) 9	250	0,02/0,03/xxx/xxx 2,5/3,0/xx	5	-67,01 ± 1,57	2,77 ± 1,63	-38,69 ± 1,30	—x —	1,551 ± 1,897	0,9511
10	200	0,03/0,05/xxx/xxx 2,5/3,0/xx	4	-67,70 ± 1,74	2,41 ± 1,87	-37,71 ± 1,59	—x —	2,594 ± 2,571	0,9505
(2) 11	200	0,03/0,05/xxx/xxx 1,5/2,0/xx	3	-70,08 ± 1,65	2,61 ± 1,74	-37,37 ± 1,25	—x —	3,438 ± 1,973	0,9537
(3) 12	200	0,04/0,06/xxx/xxx 2,5/3,0/xx	3	-66,38 ± 2,13	1,91 ± 2,24	-37,44 ± 2,02	—x—	3,901 ± 3,094	1,0568
(4) 13	200	0,06/0,07/xxx/xxx 3,0/3,5/xx	3	-68,57 ± 2,40	2,59 ± 2,48	-37,56 ± 2,26	—x—	2,408 ± 3,626	1,0168
14	200	0,02/0,03/xxx/xxx 2,5/3,0/xx	4	-131,31 ± 48,33	71,96 ± 52,81	- 4,87 ± 24,97	1,566 ± 1,189	2,649 ± 2,449	0,9499

EST. EXCLUÍDAS: (1)-90884; (2)-90741; (3)-90628; (4)-90761

TABELA 5

firmam um efeito já comentado, decorrente das fortes correlações entre o parâmetro de escala e os de translação, em particular TX e TY (vide 4.2.5.3 - § 2). Note-se as discrepâncias acentuadas entre as translações das exps. 1 e 2 (praticamente iguais) e as da exp. 3, mais realistas.

Na exp. 1, o resultado obtido para Δ é indício de ocorrência de uma torção azimutal média significante, da rede planimétrica em torno de Chuá. Decerto, uma parcela dessa estimativa inicial se deve ao erro de orientação do SAD 69, que pretendemos avaliar precisamente através do parâmetro Δ, restringindo as conectoras até um certo afastamento do ponto-origem. Isso nos faz remontar à análise elaborada em 4.2.5.1, no parágrafo seguinte às rotações de *Veis* (4.34), inferidas para o conjunto de 54 conectoras da fig. 22, com base no qual *Blitzkow, D. (1986a)* realizou seus ensaios sobre modelos convencionais. Os pontos da fig. 22 constituem um subconjunto bem representativo das 104 conectoras da exp. 1. E de fato, é notória a semelhança entre a magnitude da rotação terciária de *Veis* $-\alpha_V$ nas (4.34) –, e a estimativa da exp.1 para Δ. A diferença de sinal decorre apenas da oposição de polaridades entre sistemas coordenados envolvidos em cada ensaio.

Ainda na exp. 1 destacam-se as fraquíssimas correlações entre Δ e os demais parâmetros. A mais elevada (Δ-TX) resultou 0,09 enquanto a menor (Δ-δ) foi da ordem de 10^{-15}. Por isso, as translações e o fator de escala praticamente não sofreram alteração na exp. 2, na qual excluiu-se Δ do modelo.

A partir da exp. 4, procuramos atingir "valores ótimos" para $\hat{\sigma}_0^2$, no sentido de aproximá-los de $\sigma_0^2 = 1$ (*Leick, A. & Gelder, B. H. W. van (1975)*, pg. 67). A manipulação de variâncias para tanto necessária (coluna 3), sendo realizada dentro de limites aceitáveis, é um procedimento válido nesta situação em que desconhecemos a precisão das coordenadas dos pontos da rede planimétrica fundamental, além de possíveis covariâncias. O mesmo recurso nos permitimos adotar com respeito à precisão das coordenadas geocêntricas, pois há dúvida quanto à validade do informe constante na tabela 1, para as condições específicas observadas no estabelecimento dos nossos pontos Doppler. Com isso, buscou-se demonstrar que o modelo empregado é potencialmente capaz de parametrizar bem a realidade física. E de fato, mesmo sem excluir os poucos pontos cujos resíduos discreparam muito da média, em cada experiência, foi sempre possível obter "valores ótimos" para $\hat{\sigma}_0^2$.

A título de orientação para o leitor, com respeito à tercei

ra coluna da tabela 5: nas experiências em que não participaram EP's, assinalou-se ERTIC (2) e ERTIC (3) com "xxx"; e, analogamente, ERDOP (3) com "xx" naquelas em que pelo menos 20 passagens de satélite foram aproveitadas em cada estação. Pode-se ter uma noção dos valores lineares, em metros, correspondentes a cada desvio ERTIC"(I), multiplicando-os por 30. Note-se, com isso, que todos os valores arbitrados estão compreendidos entre 0,5 e 2,5 m. Em particular, nas cercanias do ponto-origem, aquela faixa de variação parece razoável, em se tratando de uma rede planimétrica de 1ª ordem.

Da exp. 4 em diante, realizamos um processo de redução gradativa do raio da zona de enquadramento das estações em torno de Chuá. A inclusão do parâmetro de escala no modelo torna-se supérflua, nesta etapa cujo objetivo final é estimar o erro de orientação do SAD 69. Percebe-se uma tendência crescente na estimativa de Δ, com a diminuição do RENQ. Mas, o desvio-padrão também aumenta face ao decréscimo do número de graus de liberdade. Não se perca de vista que quanto menor a quantidade de conectoras, tão mais comprometida apresenta-se qualquer análise estatística sobre os resultados. Isto porém não significa que os valores mais prováveis para Δ se tornem irreais, ao se restringir o universo de pontos àqueles mais próximos de Chuá. Pelo contrário, essa precaução é indispensável a uma correta estimativa do erro de orientação do datum regional.

Na exp. 9 tratamos de excluir a estação 90884 do conjunto de pontos existentes num raio de 250 km ao redor de Chuá. Aquela conectora apresentara os resíduos mais elevados na exp. 8. Percebe-se um acréscimo sensível no valor de Δ.

Finalmente, entre as exps. 10 e 14 temos a sequência mais importante da tabela 5. RENQ = 200 km define uma zona de abrangência dentro da qual é razoável admitir que a condição efetiva de orientação do SAD 69 se manifeste através de Δ, livre da influência de distorções azimutais da rede. As quatro estações desse enquadramento são VT's e apenas uma apresenta número de passagens de satélite inferior a 35, especificamente 34 (est.90740). Estão situadas consoante a fig. 30.

Com apenas duas conectoras evitamos trabalhar. A exp. 10, realizada com os quatro pontos, originou para Δ uma avaliação em torno de 2,6". O cálculo da respectiva componente terciária ($\Delta \operatorname{sen}\phi_0$) proporciona -0,88". Ora, este resultado mostra-se plenamente compatível com previsão anterior, segundo a qual a componente terciária de Δ deve corresponder à discrepância an-

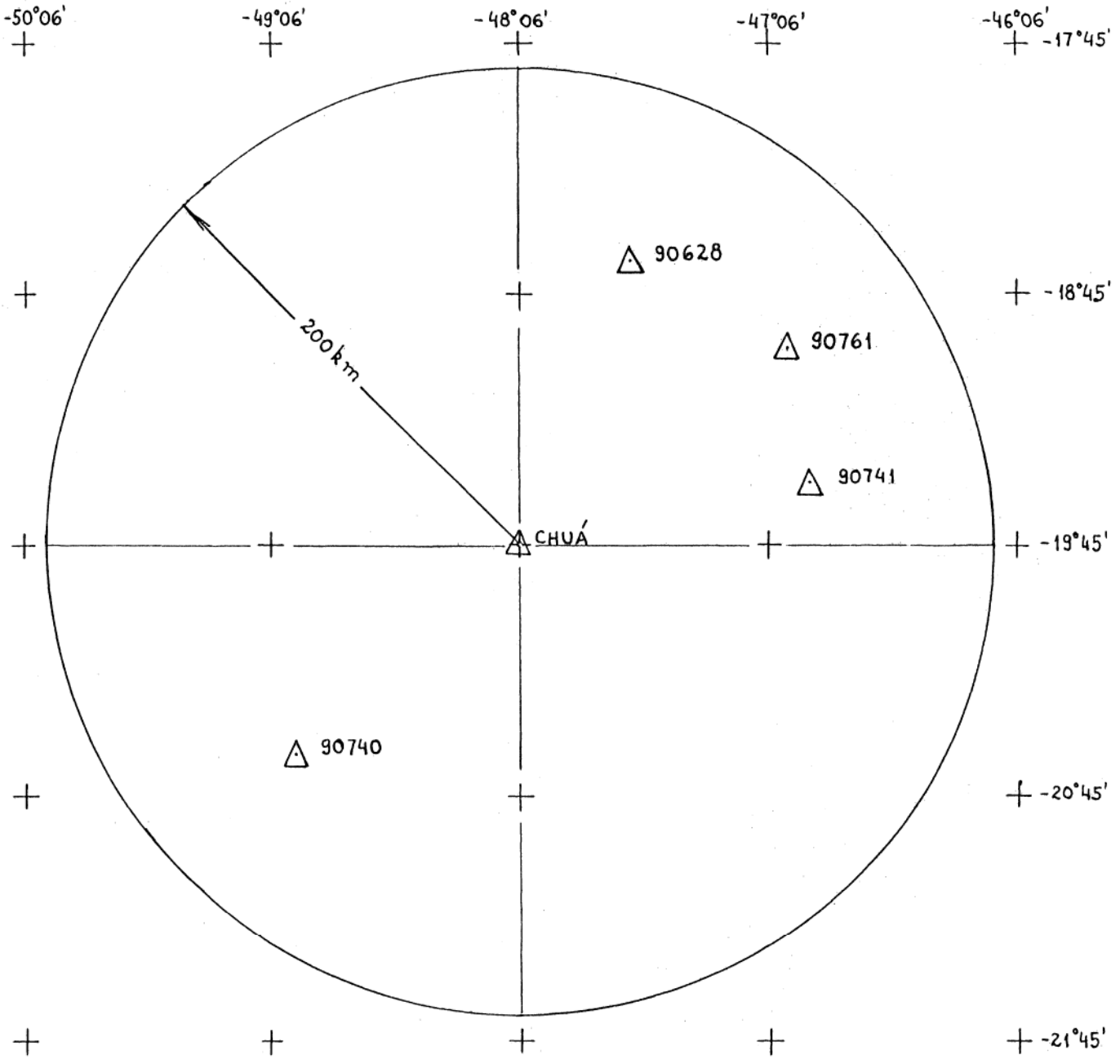


FIG. 30 - ESTAÇÕES CONECTORAS EMPREGADAS NAS EXPS. PARA ESTIMATIVA DO ERRO DE ORIENTAÇÃO DO SAD 69 (10-14/TABELA 5)

RESÍDUOS DE AJUSTAMENTO DA EXP. 10 - TABELA 5

	COORDENADAS SAD 69			COORDENADAS TM		
ESTAÇÃO	Vφ (")	Vλ (")	Vh (m)	Vφ (")	Vλ (")	Vh (m)
90628	- 0,003	- 0,021	- 1,931	0,022	0,061	1,207
90740	- 0,002	- 0,024	- 2,332	0,019	0,105	2,099
90741	0,004	0,032	3,074	- 0,033	- 0,095	- 1,921
90761	0,001	0,012	1,331	- 0,004	- 0,036	- 0,832

TABELA 6

gular entre os planos de referência de longitude do SAD 69 e do TM. Com efeito, tal discrepância (ω) foi avaliada por *Blitzkow, D. (1986a)* em - 0,82" ± ± 0,13" (exp. 2 - tabela 2), mediante emprego de um modelo convencional. Por outro lado, parece ainda mais preciso esperar que a mencionada componente se iguale ao erro cometido na determinação astronômica de longitude para o ponto -origem. A magnitude deste erro é necessariamente maior que a de ω, como sabemos do item 4.2.5.1 - § 6. E de fato, ω_g = -0,88" verifica essa relação, com respeito ao valor mais provável de ω estimado por *Blitzkow (ibid.)*.

As exps. 11, 12 e 13 consideram a exclusão de cada um dos três pontos a leste de Chuá. A exclusão do único ponto a oeste mascarou por completo o valor de Δ. Por isso, não registramos o teste sem a 90740. Este fenômeno apresenta algo de intuitivo, pois o ideal seria dispormos de conectoras uniformemente distribuídas em torno de Chuá. Ora, essa condição ótima não se verifica, mas sem dúvida as exps. 10 e 13 apresentam as melhores configurações, de acordo com a fig. 30. Sintomaticamente, elas proporcionaram as estimativas de Δ mais próximas do previsto.

Quanto a correlações entre Δ e os parâmetros de translação, as mais elevadas resultaram 0,43 (com TZ) e 0,26 (com TY), nas exps. 10 e 13 respectivamente. Mas, a exp. 14 revela uma feição interessante nesse particular. Face à inserção do parâmetro de escala no modelo, as correlações entre Δ e demais incógnitas diminuiram sensivelmente; a mais elevada foi 0,04. Entretanto, confirmou-se o resultado obtido para Δ na exp. 10. As translações, altamente correlacionadas com δ devido ao universo restrito de pontos pouco espaçados, ficaram completamente mascaradas.

Exceto pelo último, em que duas iterações foram necessárias para convergência, face à geometria desfavorável a uma parametrização simultânea de translações e fator de escala, todos os demais experimentos produziram seus resultados finais com apenas uma iteração. Ou seja, já na etapa básica de cálculo, porquanto os testes de convergência são acionados somente a partir do primeiro ciclo iterativo. Essa constatação está bem de acordo com o previsto no antepenúltimo parágrafo do item anterior. As tolerâncias estipuladas nos testes de convergência foram: 0,001 m para translações; 10^{-9} para δ; 0,001" para Δ e 0,001 m para observações. Até excessivamente rigorosas, como se nota.

Na tabela 6, relacionam-se os resíduos de ajustamento gerados na exp. 10. Face aos desvios-padrão estipulados para as observações na

quele ensaio, nada se constata de anormal. A opção por resíduos elipsoidais, em detrimento dos cartesianos, confere maior facilidade na avaliação do ajustamento.

4.4 - A TÉCNICA DE JUSTAPOSIÇÃO ELIPSOIDAL

Uma vez estimado o parâmetro de rotação do SAD 69 relativamente ao TM, cumpre estabelecer uma diretriz para estimativa do vetor-translação entre aqueles referenciais. Na verdade, algo já se fez neste sentido quando analisamos, na seçao 4.2.5, os resultados das experiências de *Blitzkow, D. (1986 a)* com o modelo BW. Os parâmetros de translação resultantes na exp. 3 – tabela 2 foram considerados satisfatórios, mas ainda passíveis de refinamento.

Com efeito, qualquer processo de cálculo do vetor-translação, baseado no confronto entre coordenadas de estações conectoras, permanece sujeito à influência predominante de possíveis distorções sistemáticas incidentes sobre as grandezas que compõem o sistema vertical (vide antepenúltimo parágrafo em 4.2.5.1). Por isso importa, na alternativa de refinamento supra- mencionada, selecionar conectoras em área favorável, no tocante ao controle da distorção rotacional do "geóide de base astro-geodésica", mapeado na fig. 17 (vide 4.2.5.2 - § 8). Isto será feito na seção 4.4.2.

Mesmo assim, entretanto, configura-se nas colocações anteriores uma solução prejudicada pelo desconhecimento da precisão de altitudes sobre o n.m.m (vide 3.4). A própria atribuição de desvios-padrão às ondulações geoidais interpoladas do mapa da fig. 17, carece do respaldo de qualquer estudo sobre a precisão daquele documento cartográfico.

Os argumentos precedentes justificam, no momento, o interesse acadêmico na busca de uma solução alternativa que possibilite obter os parâmetros de translação do SAD 69, restringindo por algum artifício a influência distorciva das deficiências do sistema vertical. A propósito, foi esta uma das motivações do modelo idealizado por *Andrade, J. B. (1984)*, cuja principal característica reside na parametrização dos desníveis geoidais das conectoras. Os desníveis são então estimados simultaneamente com parâmetros de translação, num processo de ajuste no qual empregam-se os pares (ϕ,λ) relativos ao datum regional, apenas para cálculo dos respectivos raios de curvatura N, pela(2.9). As coordenadas cartesianas Doppler, já compatibilizadas com o TM, constituem as observações necessárias ao emprego do modelo proposto, na aplicação de interesse neste contexto. Realizada a aplicação, *Andrade, J. B.(1986)*constatou que as translações resultantes não valem para o SAD 69 mas, a partir delas, é

possível estimar o vetor-translação desejado mediante uma simples operação geométrica. Os resultados finais dessa pesquisa serão oportunamente publicados.

Com motivação semelhante à do modelo *Andrade*, temos em vista apresentar uma técnica para estimativa do vetor-translação, especificamente elaborada para a conexão TM ⇝ SAD 69. O título a ela atribuído — *Justaposição Elipsoidal* —, encontrará justificativa na própria síntese de metodologia prevista para 4.4.1. Trata-se de uma técnica idealizada com base em simples intuição geométrica. Ao executá-la (seção 4.4.2), será possível então comparar seus resultados com os auferidos segundo o processo convencional.

4.4.1 - METODOLOGIA

Com auxílio do programa DELTA, ou, mais especificamente, de sua rotina para seleção de conectoras, elaboramos uma listagem das estações compreendidas entre os meridianos $39^{o}W$ - $55^{o}W$ e paralelos $10^{o}S$ - $25^{o}S$. Neste enquadramento do território brasileiro, aproximadamente centrado por Chuá, verifica-se a maior densidade de distribuição de conectoras. São 60 pontos concentrados principalmente na região central do quadrilátero, como revela o mapa da fig. 31.

Adotando o elipsóide de parâmetros $\bar{a}$ = 6378145 m e $\bar{f}$ = 1/298,25, que normalmente se associa ao NSWC 9Z2, convertemos coordenadas TM: (x, y, z) de cada um dos 60 pontos, em elipsoidais (ϕ', λ', h'). Utilizando a fórmula

$$\sqrt{(\delta\phi)^2 + (\delta\lambda\cos\phi)^2}\,, \qquad (4.79)$$

calculamos as 60 deflexões entre normais (ϕ', λ') e suas homólogas (ϕ,λ)SAD 69. O valor máximo resultou 3", vale dizer, as normais apresentam-se praticamente coincidentes. Em seguida, recorrendo aos desníveis geoidais astro-geodésicos e altitudes ortométricas, calculamos as 60 alturas elipsoidais (h) referentes ao SAD 69. O mapeamento das diferenças (h - h') conferiu, então, uma idéia aproximada da situação espacial relativa entre os dois esferóides: o de parâmetros ($\bar{a}$, $\bar{f}$) e o do SAD 69, definido com a = 6378160 m e f = 1/298,25. Sintomaticamente, o valor médio das diferenças altimétricas igualou a discrepância de 15 m entre a e $\bar{a}$. Tal constatação induziu-nos a aplicar um incremento δa = 15 m ao semi-eixo maior do SAD 69, tendo em vista deslocar a curva de interseção das duas superfícies (δh = 0), de maneira a dividir as conectoras em dois conjuntos de pontos razoavelmente equilibrados, para cada lado da curva. Na sequência, a motivação desse procedimento será esclarecida.

Examinemos a fig. 32. Nela, ilustra-se uma projeção, em plano

ortogonal à curva $\delta h = 0$, pelo centro geométrico da figura de distribuição das conectoras, a posteriori da aplicação $\delta a = 15$ m supra referida. A superfície elipsoidal $\mathbb{E}$ está centrada na origem C do sistema CG SAD 69 e apresenta semi-eixo maior $(a + \delta a)$. A superfície $\bar{\mathbb{E}}$, de semi-eixo maior $\bar{a}$, está centrada em O (geocentro). Às conectoras P_i e P_j, situadas em lados opostos da curva $\delta h = 0$, correspondem, respectivamente, os pares $(H_i, \bar{H}_i)$ e $(H_j, \bar{H}_j)$ de projeções de Helmert homólogas.

Nessa primeira etapa de argumentação, consideraremos paralelos os sistemas cartesianos TM: [x y z] e SAD 69: [u v w]. Isso posto, recorrendo à fig. 32, investiguemos a hipótese de se estimar os parâmetros de translação empregando, como grandezas observadas, os vetores-posição das projeções de Helmert homólogas de cada conectora. Ou seja, associando à estação genérica P_i, as observações $\vec{u}_i$ e $\vec{x}_i$ relativas não àquele ponto do terreno, propriamente, mas às suas projeções normais H_i e $\bar{H}_i$ sobre $\mathbb{E}$ e $\bar{\mathbb{E}}$. Ora, o ajuste pelo M.M.Q deve originar algo próximo a uma simples média aritmética das diferenças $(\vec{x}_i - \vec{u}_i)$. Percebe-se que as componentes do vetor-translação (resultante da ordem de 100 m) constituem, de fato, as parcelas sistemáticas daquelas diferenças. Por sua vez, os vetores $\overrightarrow{H_i \bar{H}_i}$ tenderão a se manifestar na forma de resíduos das coordenadas altimétricas, em cada par $(H_i, \bar{H}_i)$. Para tanto, será necessário apenas liberar, no ajustamento, as componentes verticais (inicialmente nulas) de um dos conjuntos de projeções de Helmert, a fim de que elas recebam correções na forma de resíduos. Note-se, porém, a importância de uma distribuição equilibrada de pontos para cada lado da curva $\delta h = 0$. Caso contrário, as discrepâncias vetorias $\overrightarrow{H_i \bar{H}_i}$ poderão induzir uma sistematicidade indesejável sobre a estimativa do vetor-translação. Nesse mesmo sentido, seria aconselhável u'a maior concentração de pontos nas proximidades da referida curva.

Cabe agora reformular a hipótese de paralelismo entre os sistemas TM e CG SAD 69, considerada no parágrafo anterior. Para tanto, deve-se levar em conta que a técnica de *Justaposição Elipsoidal* será implementada com inúmeras conectoras, não restritas às cercanias do ponto-origem do SAD 69. Portanto, seria incorreto aplicar o giro azimutal de ($\cong$) 2,5" em torno de Chuá, já estimado como valor do parâmetro de rotação do SAD 69 relativamente ao TM (vide 4.3.3.2), para compatibilizar os dois referenciais em orientação, a priori do emprego da *Justaposição Elipsoidal*. Todavia, nada impede que se utilize o modelo VW modificado (4.51), tendo em vista aproveitar sua capacida

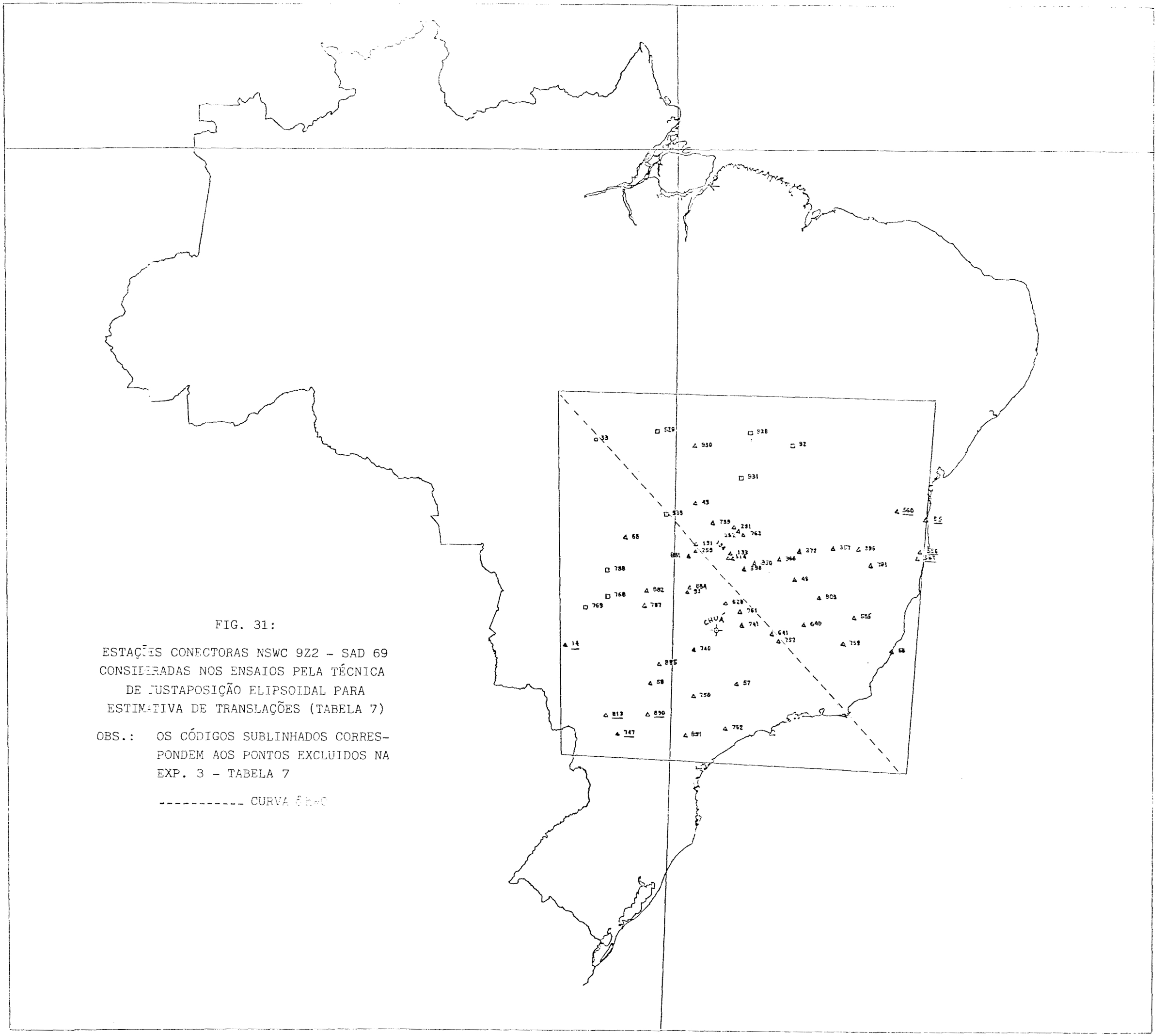


FIG. 31:

ESTAÇÕES CONECTORAS NSWC 9Z2 - SAD 69 CONSIDERADAS NOS ENSAIOS PELA TÉCNICA DE JUSTAPOSIÇÃO ELIPSOIDAL PARA ESTIMATIVA DE TRANSLAÇÕES (TABELA 7)

OBS.: OS CÓDIGOS SUBLINHADOS CORRESPONDEM AOS PONTOS EXCLUIDOS NA EXP. 3 - TABELA 7

---------- CURVA δ h=0

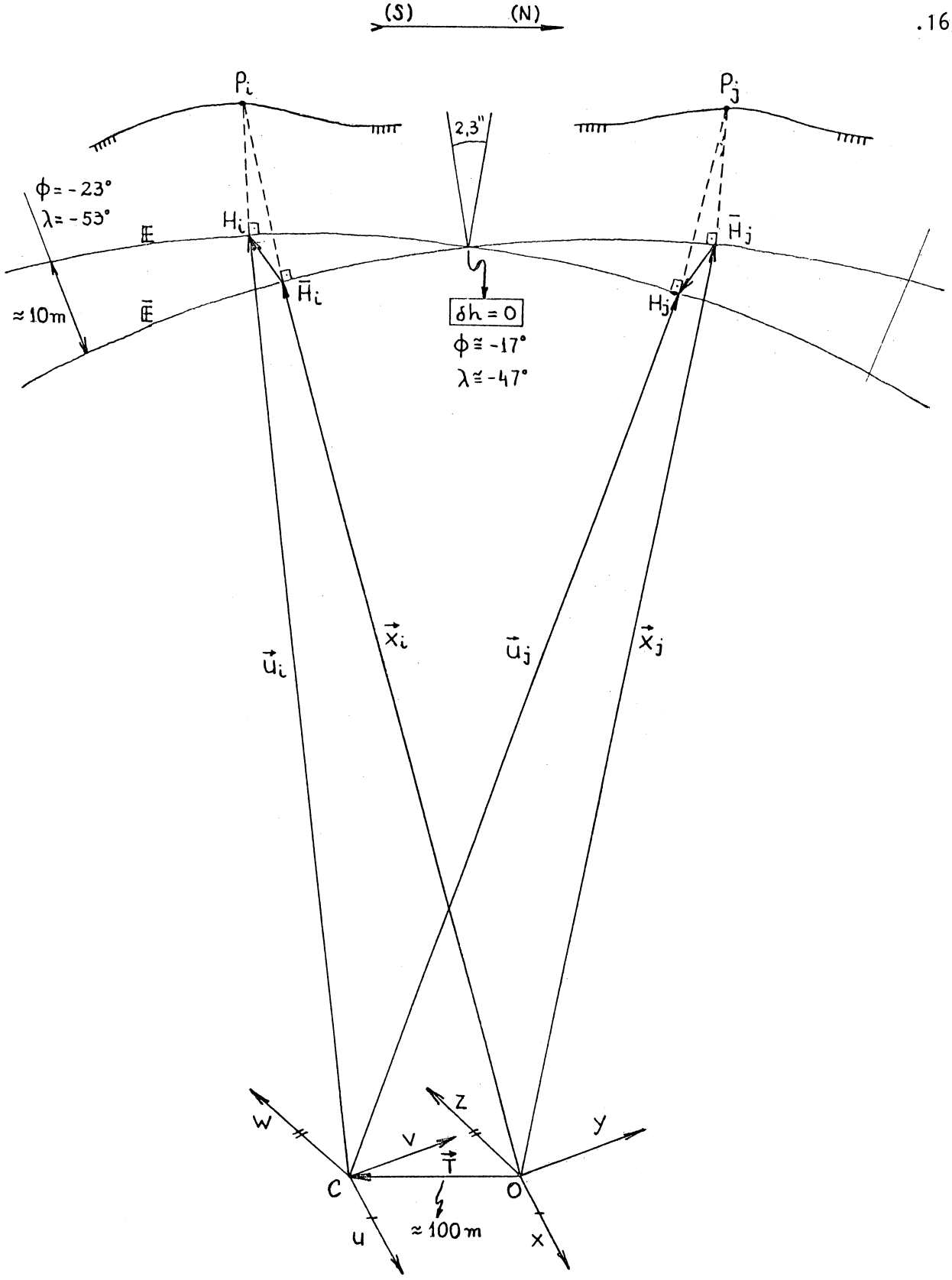


FIG. 32 - CONCEPÇÃO GEOMÉTRICA DA JUSTAPOSIÇÃO ELIPSOIDAL

de de absorver uma distorção azimutal média dos pares (ϕ,λ) SAD 69, em torno de Chuá, através de sua incógnita Δ. Simplesmente, a estimativa resultante para Δ não corresponderá ao erro de orientação do datum, tal como observado nas exps. 4 a 9 da tabela 5. Mas, cumprirá o papel de eliminar uma tendenciosidade rotacional que, além de significante, apresenta-se no caso como a única possível.

Por razões já conhecidas, não incluiremos o fator de escala como parâmetro a determinar. As incógnitas ficarão restritas a $\vec{T}$ e Δ. Com isso, as equações de observação assumem a forma

$$R(\Delta)\ \vec{u}_i + \vec{T} - \vec{x}_i \cong \vec{0}, \tag{4.80}$$

decorrente da imposição $\delta = 0$ sobre a (4.53). Atente-se, contudo, para o diferente significado das observações $\vec{u}_i$ e $\vec{x}_i$ na (4.80), face ao emprego da *Justaposição Elipsoidal*.

Apresenta-se, na sequência, a rotina operacional da técnica proposta para estimativa, em referência ao TM, do vetor-translação do SAD 69:

$$\begin{cases}
(1)\ (\phi_i,\ \lambda_i,\ h_i) \longrightarrow (\phi_i,\ \lambda_i,\ 0) \\
(2)\ (\phi_i,\ \lambda_i,\ 0) \xrightarrow{\delta a\ =\ 15\ m} (\phi_i,\ \lambda_i,\ 0)^{\mathbb{E}} \\
(3)\ (\phi_i,\ \lambda_i,\ 0)^{\mathbb{E}} \xrightarrow[(2.8)]{a^o;\ f} (u_i,\ v_i,\ w_i) \ldots\ a^o = a + \delta a
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(4)\ (\phi'_i,\ \lambda'_i,\ h'_i) \longrightarrow (\phi'_i,\ \lambda'_i,\ 0)^{\overline{\mathbb{E}}} \\
(5)\ (\phi'_i,\ \lambda'_i,\ 0)^{\overline{\mathbb{E}}} \xrightarrow[(2.8)]{\overline{a};\ \overline{f}} (x_i,\ y_i,\ z_i)
\end{cases} \tag{4.81}$$

$$(6)\ (u_i,\ v_i,\ w_i) \xrightarrow[(4.80)]{TX,TY,\ TZ\ \Delta} (x_i,\ y_i,\ z_i) \ldots\ \text{M.M.Q}$$

Seguem-se os esclarecimentos finais.

Como indicam as (4.6), a operação (2) não modifica latitudes nem longitudes, caso se considere aproximação esférica. As alturas sim, resultariam alteradas. Mas esse fato é irrelevante, porquanto interessam apenas as coordenadas das projeções de Helmert sobre $\mathbb{E}$. No caso de não se optar por aproximação esférica, apenas as latitudes sofrerão o efeito do incremento δa, de acordo com a seguinte relação (*Vaníček, P. & Krakiwsky, E. J. (1982)*, pg. 331):

$$\phi^{\mathbb{E}} = \phi + \frac{N}{a} \cdot \frac{e^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{(M+h)} \cdot \delta a \tag{4.82}$$

As fórmulas auxiliares de cálculo são: (2.7), (2.9) e (4.74). Um exercício matemático interessante para o leitor, consiste em determinar o valor máximo do incremento a ϕ na (4.82)[13]. Demonstra-se que ele ocorre para $\phi = 44^{o}\ 54'\ 13{,}64"$, no intervalo $[0^{o}, 90^{o}]$, resultando em cerca de 0,004" para $\delta a = 15$ m. Por simetria, no hemisfério sul o valor mais crítico seria a desprezível quantidade de -0,004". Como, ainda por cima, predominam baixas latitudes em território brasileiro, confirma-se a validade da aproximação esférica na operação (2), que acaba não afetando os ternos $(\phi_i, \lambda_i, 0)$.

Ainda com respeito à operação (2), caso a igualdade $f = \bar{f}$ não prevalecesse, aquela etapa da rotina deveria considerar também uma aplicação δf.

No mais, observe-se que os ternos $(\phi'_i, \lambda'_i, h'_i)$ da operação (4), já devem estar compatibilizados com o sistema TM. Como o arquivo DISIPSAT(vide 4.3.3.2) armazena coordenadas NSWC 9Z2 sob forma elipsoidal, convém traduzir a (2.17) em termos de correções diferenciais a latitudes $(\overline{\phi})$ e longitudes $(\overline{\lambda})$ Doppler. As respectivas expressões são as seguintes (*Vaníček, P. & Krakiwsky, E. J. (1982)* – eq. (15.97); *Soler, T. (1976)* – eq. (4.5.2 - b)):

$$\phi' = \overline{\phi} + \frac{\cos\phi}{(M+h)} \cdot (4m) \quad + \quad \frac{N e^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi}{(M+h)} \cdot (0{,}4)$$

$$\lambda' = \overline{\lambda} + 0{,}8" \qquad (4.83)$$

Na aplicação das (4.83), pode-se negligenciar h sem perda de precisão. As fórmulas auxiliares de cálculo são as mesmas requeridas pela (4.82).

4.4.2 - EXPERIÊNCIAS

Implementou-se a *Justaposição Elipsoidal* mediante o programa ELIMAT, cuja estrutura é a mesma do programa DELTA, comentado em 4.3.3.2. As diferenças ocorrem apenas na montagem dos vetores de observações. A rotina operacional (4.81), e os comentários a ela pertinentes, delineam o processamento realizado pelo ELIMAT.

É preciso discutir a ponderação de observações na *Justaposição Elipsoidal*. A operação (3) da rotina (4.81) implica na necessidade de se propagar covariâncias. No caso, isto se executa mediante a seguinte simplificação da (4.72):

---

(13) Considere-se h = 0 na demonstração. A influência de h na (4.82) é perfeitamente negligenciável, no caso.

$$\Sigma\vec{u}_i = \overline{J}_i \begin{bmatrix} (\sigma\phi_i)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma\lambda_i)^2 \end{bmatrix} \overline{J}_i{}^t, \qquad (4.84)$$

onde $\overline{J}_i$ (3x2) corresponde a J_i – expressa na (4.73) –, a menos de sua terceira coluna. Com isso, as projeções de Helmert $(\phi_i, \lambda_i, 0)^{\mathbb{E}}$ resultam fixadas verticalmente, vale dizer, anulam-se os resíduos altimétricos do ajustamento, para as observações não geocêntricas (o que aliás se confirma pelo ELIMAT). Em consequência, faz-se necessário liberar as componentes verticais das projeções homólogas $(\phi_i', \lambda_i', 0)^{\mathbb{E}}$ relativas a coordenadas geocêntricas (vide 4.4.1 – §4). Para tanto, basta preservar o critério de ponderação já conhecido, em função do número de passagens de satélite assimiladas em cada ponto: ou seja, constituir diretamente a MVC $(\Sigma\vec{x}_i)$ de cada terno cartesiano emergente da operação (5) – (4.81). Há uma coerência neste procedimento, pois o fato de operarmos com projeções de Helmert, por imposição geométrica da *Justaposição Elipsoidal*, não confere maior precisão às coordenadas cartesianas geocêntricas.

Na tabela 7, apresentam-se os números de cinco experiências realizadas, ora pela técnica proposta (JE), ora pela convencional (C). Respectivamente, aplicamos os programas ELIMAT e DELTA. O tipo de enquadramento de estações adotado foi o retangular. Na coluna 3, registram-se os paralelos e meridianos limítrofes da área de trabalho considerada em cada ensaio. Para a coluna 4, repetem-se as considerações feitas com respeito à sua equivalente na tabela 5.

Nas exps. 1 a 3 fixamos os limites indicados em 4.4.1 – §1. Nas exps. 4 e 5, os meridianos -45° e 57° definem uma faixa de longitude, em que a distorção detectada no "geóide astro-geodésico", possivelmente não chega a alcançar um nível significante, como se pode inferir da análise elaborada em 4.2.5.2. Portanto, em particular a exp. 4 representa um refinamento da determinação análoga de *Blitzkow, D. (1986 a)* (exp. 3 – tabela 2). Apesar do fato, observam-se variações pouco expressivas entre as respectivas avaliações. Isto confirma a previsão feita em 4.2.5.2 – § 8 (note-se que as 54 conectoras das exps. 4 e 5 - plotadas na fig. 33 –, não são exatamente as mesmas 54 dos ensaios concernentes à tabela 2).

Em relação ao primeiro, o segundo experimento comprova a pequena influência de Δ sobre as translações. Isto, como sabemos, se traduz na

forma de pequenos coeficientes de correlação entre aquelas incógnitas. Deveras, o mais elevado resultou 0,3 (Δ - TY). Em termos rigorosos, porém, as estimativas da exp. 2 para TX, TY e TZ prevalecem sobre suas antecedentes, pois resultam de uma parametrização mais adequada da realidade física. Ao contrário dos modelos convencionais, o modelo VW modificado permite estimar as translações efetivas simultaneamente a rotações (implícitas em Δ).

Na exp. 3, tratamos de excluir os oito pontos mais afastados da curva de interseção dos dois esferóides envolvidos na *Justaposição Elipsoidal* (quatro de cada lado). O motivo foi eliminar os resíduos altimétricos mais elevados. O fato das translações terem sofrido variações inexpressivas, com isso, é um indício de equilíbrio na distribuição de conectoras para cada lado da curva $\delta h = 0$. E realmente, o exame dos resíduos altimétricos da exp. 2 aponta 29 valores positivos, contra 31 negativos. Na exp. 3 confirmaram-se 25 contra 27, na mesma ordem, sendo 0,06 m seu valor médio (quanto mais próxima de zero esta média, tanto melhor). Apenas 1/3 desses resíduos apresentou magnitude superior a 4 m, mas sempre inferior a 7 m. Os resíduos em ϕ e λ foram plenamente satisfatórios. Suas médias modulares foram: 0,02" e 0,03" para coordenadas regionais; 0,03" e 0,04" para as geocêntricas.

Pela técnica convencional, a exp. 5 apresenta sobre sua antecedente a vantagem de ter incluído o parâmetro Δ. Suas translações constituem, portanto, o melhor termo de comparação para os valores correspondentes obtidos por *Justaposição Elipsoidal*. Aproximando para metros, os parâmetros de translação resultantes de cada técnica são os seguintes:

$$\begin{aligned} \text{JE:}\quad & TX = -64\text{m}; \quad TY = 1\ \text{m}; \quad TZ = -39\text{m} \\ \text{C:}\quad & TX = -64\text{m}; \quad TY = 2\ \text{m}; \quad TZ = -39\text{m} \end{aligned} \tag{4.85}$$

A diferença constatada em TY é sintomática. Pois se de fato existe uma distorção rotacional (remanescente) no sistema altimétrico, ela deve mesmo manifestar-se mais sensivelmente em TY, não fossem as longitudes do enquadramento considerado na exp. 5, todas inferiores a -45°.

Os desvios-padrão atribuídos às observações na *Justaposição Elipsoidal* são, em média, superiores aos considerados na técnica convencional (a tabela 5 consolida esta observação). Isto parece lógico, pois a técnica proposta nesta divisão lida com dois espaços de pontos efetivamente distintos.

ESTIMATIVAS DO VETOR-TRANSLAÇÃO DO SAD 69 EM RELAÇÃO AO TM,
POR TÉCNICAS DISTINTAS: JUSTAPOSIÇÃO ELIPSOIDAL E CONVENCIONAL
(FIGS. 31 E 33)

	DADOS			RESULTADOS					
EXP. Nº	TÉCNICA	LIMITES RETANG.	ERTIC (I), I = 1,4(") ERDOP (I), I = 1,3(m)	Nº DE EST.	TX (m)	TY (m)	TZ (m)	Δ (")	$\hat{\sigma}_o^2$
1	JE	$-10^o/-25^o$ $-39^o/-55^o$	0,09/0,10/0,10/0,11 3,0/3,5/4,0	60	-63,76 ± 0,48	1,16 ± 0,47	-38,99 ± 0,51	— x —	0,9351
2	JE	" "	0,08/0,09/0,09/0,10 3,0/3,5/4,0	60	-64,09 ± 0,50	0,78 ± 0,50	-38,87 ± 0,51	0,423 ± 0,198	0,9782
3 (1)	JE	" "	0,07/0,08/0,08/0,09 2,5/3,0/3,5	52	-64,21 ± 0,47	0,69 ± 0,47	-39,01 ± 0,46	0,468 ± 0,212	0,9635
4	C	$-9^o/-25^o$ $-45^o/-57^o$	0,06/0,07/0,07/0,08 2,0/2,5/3,0	54	-63,63 ± 0,45	2,20 ± 0,46	-37,95 ± 0,40	— x —	0,9730
5	C	" "	0,04/0,05/0,05/0,06 2,0/2,5/3,0	54	-64,46 ± 0,46	1,73 ± 0,46	-38,78 ± 0,39	0,746 ± 0,137	1,0134

(1) - EST. EXCLUÍDAS: 90014, 90055, 90387, 90556, 90560, 90747, 90813, 90890

TABELA 7

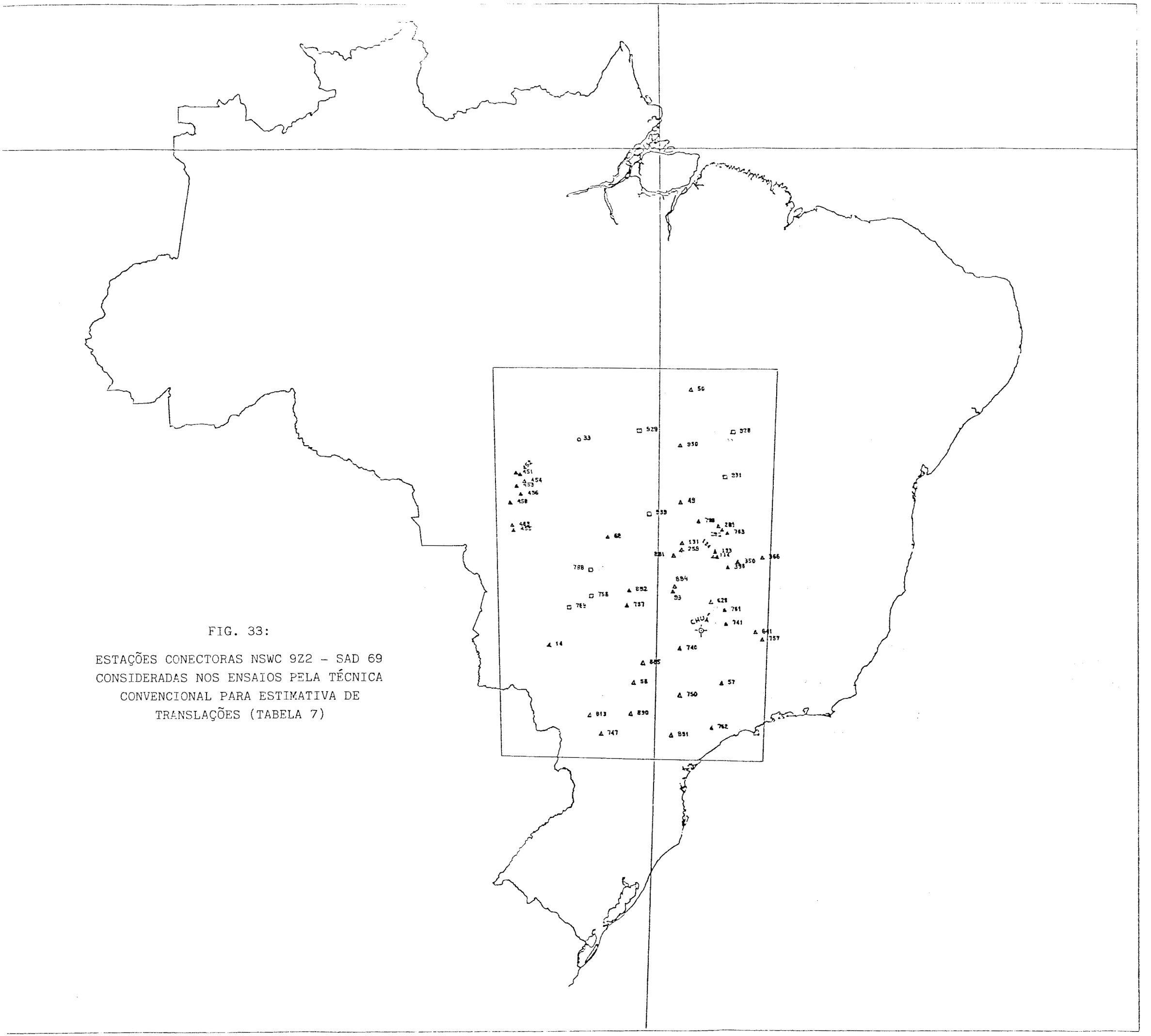


FIG. 33:

ESTAÇÕES CONECTORAS NSWC 9Z2 - SAD 69 CONSIDERADAS NOS ENSAIOS PELA TÉCNICA CONVENCIONAL PARA ESTIMATIVA DE TRANSLAÇÕES (TABELA 7)

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

O objetivo maior deste trabalho — definição de parâmetros de transformação entre o NSWC 9Z2 e o SAD 69 —, parece-nos preenchido. Neste capítulo final, tentaremos sumarizar as principais conclusões e previsões emergentes do estudo que, temporariamente, ora se encerra:

(1) Para compatibilizar ternos cartesianos de posições isoladas Doppler, obtidos mediante aplicação de efemérides precisas, com o SAD 69, recomenda-se:

(1a) Eliminar tendenciosidades intrínsecas às coordenadas Doppler, no sentido de torná-las consistentes com o TM.

(1b) Aplicar, sobre os ternos cartesianos resultantes, os seguintes parâmetros de translação:

$$\Delta X = 64 \text{ m}; \quad \Delta Y = -2 \text{ m}; \quad \Delta Z = 39 \text{ m}$$

(2) A fim de facilitar sua programação, as etapas (1a) e (1b) serão equacionadas no seguimento. A notação é a mesma de todo o trabalho:

$$\begin{aligned} u &= (1-4.10^{-7})\,\bar{x} - (0{,}8.\pi/648000)\,\bar{y} + (64) \\ v &= (1-4.10^{-7})\,\bar{y} + (0{,}8.\pi/648000)\,\bar{x} + (-2) \\ w &= (1-4.10^{-7})\,\bar{z} + 4 + (39) \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Logicamente, $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ devem estar em metros. Dos ternos cartesianos (u, v, w), pode-se facilmente obter os elipsoidais (ϕ, λ, h) para o SAD 69. Sugerimos a aplicação do algoritmo de Bowring, fórmulas (2.10) a (2.14).

(3) Com sinais opostos, os parâmetros indicados em (1b) representam a melhor estimativa atual das componentes do vetor-translação do SAD 69, relativamente ao TM. Porém, eles não expressam plenamente a situação relativa entre aqueles referenciais no espaço. Porquanto, o SAD 69 encontra-se rotacionado em torno da normal (ϕ_0, λ_0) relativa a seu ponto-origem (Chuá), em cerca de 2,5" (sentido horário). Isto equivale a uma composição de rotações eulerianas, em torno dos eixos do CG SAD 69, com os seguintes valores:

$$\varepsilon_g = 1{,}57"; \quad \psi_g = -1{,}75"; \quad \omega_g = -0{,}84"$$

(4) O giro azimutal do SAD 69 em Chuá representa uma distorção, pois implica no não-paralelismo entre o respectivo sistema CG e o TM. Trata-

se do erro de orientação do SAD 69. Não convém utilizá-lo como parâmetro de transformação, por razões que se esclarecem mais adiante.

(5) Experiências para cálculo de parâmetros de transformação entre o TM e o SAD 69, segundo o modelo Bursa-Wolf (transformação de similaridade típica), revelaram que um erro sistemático nas observações astronômicas de longitude afetou o projeto de definição do Datum Sul-Americano de 1969. Possivelmente, uma falha instrumental nas medidas de tempo realizadas nos pontos de Laplace mais antigos, empregados no referido projeto. O valor mais provável desse erro remonta a cerca de -0,85". Isto parece se confirmar na estimativa independente de ω_g — vide (3).

(6) Além do erro de orientação do datum, podemos apontar as seguintes consequências da distorção sistemática mencionada em (5):

(6a) O posicionamento do SAD 69, relativamente ao TM, não corresponde à pretensão original observada em seu projeto de definição. Basta considerar o fato da longitude geodésica de Chuá vincular-se a um valor sensivelmente incorreto de longitude astronômica.

(6b) A determinação geoidal astro-geodésica relativa ao SAD 69 (fig. 15) resultou distorcida, transversalmente aos meridianos. Em território brasileiro, os níveis mais críticos dessa distorção ocorrem nos extremos leste e oeste, podendo remontar a uns 5 m. Entre os meridianos -48^{o} e -60^{o}, no entanto, há um controle daquela distorção que, em princípio, deveria apresentar-se sistematicamente crescente a partir do meridiano do ponto-origem (-48^{o}), onde se anula.

(7) A seleção de estações conectoras localizadas numa faixa de longitude, para a qual se confirmara uma razoável consistência entre a determinação geoidal astro-geodésica e o SAD 69, conferiu certa credibilidade à estimativa dos parâmetros expressos em (1b). Realizou-se tal avaliação, restringindo-se as incógnitas dos modelos convencionais apenas a translações.

(8) A parametrização parcial restrita a translações revelou-se, por sinal, a mais adequada para uso criterioso dos modelos convencionais. Face à ocorrência de rotações e fator de escala significantes, determinar esses parâmetros simultaneamente a translações, para posterior aplicação,

é criticável pelo seguinte:

(8a) As translações resultantes não apresentam o significado geométrico desejável, de componentes do vetor-translação do datum regional. Por isso, não podem ser aproveitadas separadamente.

(8b) Aplicar as rotações e o fator de escala sobre coordenadas geocêntricas, em sentido inverso ao de sua determinação, significa realimentar distorções, o que absolutamente não interessa — vide (12).

(9) Ademais, quando utilizados segundo suas expressões completas, tendo em vista obter parâmetros de transformação, os modelos convencionais podem originar uma confusão indesejável entre os conceitos de sistema geodésico e respectiva rede terrestre associada.

(10) Uma avaliação do fator de escala, utilizando mais de 100 conectoras distribuídas por toda a rede, originou:

$$\delta \cong -2{,}9 \text{ p.p.m}$$

Ou seja, um fator de contração é necessário para compatibilizar o padrão métrico SAD 69 com o padrão Doppler (já corrigido em -0,4 p.p.m). Neste sentido, observe-se o seguinte:

(1º) As medidas lineares da rede planimétrica fundamental (e as alturas elipsoidais de cada um de seus pontos) são reduzidas (e referidas) a um esferóide com semi-eixo maior a = 6378160 m.

(2º) O esferóide de semi-eixo maior $\bar{a}$ = 6378145 m, associado ao sistema Doppler das efemérides precisas, resulta de um ajustamento global ao geóide, feito com posições isoladas NSWC 9Z2. Ou seja, o valor $\bar{a}$ é compatível com o padrão métrico Doppler.

Logo, o resultado global obtido para δ indica que apenas uma pequena fração do fator de escala se deve a distorções de causas variadas, pois a razão $(a - \bar{a})/a$ remonta a 2,3 p.p.m. E além disso, possivelmente não se considerou a correção de -0,4 p.p.m em escala, sobre os vetores-posição Doppler participantes do ajustamento supra mencionado. Registre-se, no entanto, que diferentes blocos ou setores da rede planimétrica originam resultados diversos entre si para o fator de escala.

(11) Sanar as deficiências constatadas no projeto de definição

do SAD 69 deve, necessariamente, constituir um dos objetivos da comunidade geodésica sul-americana para os próximos anos. No Brasil, orientada segundo esta diretriz, unidade competente da Fundação IBGE mobiliza-se para execução do projeto REPLAN: reajustamento da rede planimétrica nacional de 1ª ordem, com inserção de pontos Doppler (efemérides precisas) para controle de orientação e escala. Mas, um esforço conjunto das nações do continente, coordenado pelo IPGH (Instituto Pan-Americano de Geografia e História), seria necessário para ampliar a área de abrangência do REPLAN a nível continental. Essa hipótese merece uma avaliação mais profunda por comissão competente do IPGH.

(12) O projeto REPLAN encaminha-se para um ajustamento por variação de coordenadas, mediante o qual se parametrizem as distorções sistemáticas de escala e orientação típicas das redes planimétricas clássicas (*Ashkenazi, V. et alii (1982)*). Os pontos de controle Doppler não serão fixados, mas suas coordenadas receberão pesos convenientes. Aliás, uma das principais características desse ajustamento é o fato de não apresentar pontos fixos (ajustamento livre). O próprio ponto-origem Chuá será liberado, em consequência de que suas coordenadas (ϕ, λ) atuais sofrerão correções. A previsão final é justamente homogeneizar nossa rede planimétrica de 1ª ordem, com base no padrão Doppler de escala e orientação. Ao mesmo tempo em que eliminam-se os erros sistemáticos verificados no projeto de implantação do atual SAD 69. Isto significará uma redefinição do datum sul-americano. Por essa razão, o ideal é que todas as nações irmãs do continente participem de uma ampliação do REPLAN, tal como proposto em (11).

(13) A compatibilização prévia de coordenadas Doppler com o SAD 69, no âmbito do REPLAN, deve-se realizar mediante as (5.1). Quanto ao mapa geoidal recomendado para redução de medidas lineares ao elipsóide de referência, basta o da fig. 24. Mas convém refazê-lo a partir dos parâmetros registrados em (1b) (decerto, as alterações serão pequenas). Sugerimos ainda que se incorporem os inúmeros pontos Doppler disponíveis sobre RN's, nesse refinamento do mapa geoidal da fig. 24 com vistas ao REPLAN.

(14) Concluído o projeto REPLAN, procederemos a uma reavaliação do ângulo de giro do sistema geodésico em torno de seu ponto-origem. Esperamos com isso obter um valor não significativo. Da mesma forma, as distorções azimutais significantes acumuladas pela rede planimétrica, e cuja existência confirmou-se neste trabalho, tenderão a desaparecer. A hipótese de independência entre referencial geodésico e rede associada, e a concepção alternativa de

datum flutuante, convergirão para uma única realidade. É o ideal.

(15) O encerramento do REPLAN vai assinalar o início de uma fase de determinações geodésicas mais rigorosas. Um novo mapa geoidal deverá ser confeccionado, dessa feita com maior grau de sofisticação que o de seu antecedente (a base teórica dessa perspectiva encontra-se na introdução de 4.2.5 — §9 e § 10). Aos parâmetros de translação entre o TM e o novo datum sul-americano finalmente corresponderão estimativas de precisão confiáveis, ao contrário do que se observa na fase atual.

(16) A técnica alternativa de *Justaposição Elipsoidal* proporcionou resultados consistentes. Ela confirma as translações registradas em (1b), exceto por $\Delta Y = 1$ m. A diferença em ΔY, conquanto pouco significante, pode decorrer precisamente do fato da *Justaposição Elipsoidal* prescindir do uso de altitudes ortométricas e desníveis geoidais, no cômputo de parâmetros de translação pelo M.M.Q. Nesse caso, a referida diferença seria um ponto favorável à técnica proposta. Tal indício nos faz crer na eficácia da *Justaposição Elipsoidal*, mas cautelosamente optamos por parâmetros obtidos segundo um procedimento menos questionável.

Para concluir este trabalho, julgamos oportuna uma citação de *Oscar Wilde*: *"a verdade nunca é pura e raramente simples"*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. *Andrade, J.B.* - Determinação Simultânea de Parâmetros de Transformação entre Referenciais Geodésicos e de Desníveis Geoidais. Boletim da UFPR/ CPGCG, Geodésia Nº 30. Curitiba, 1984.

02. ..... - Comunicação pessoal, 1986.

03. *Ashkenazi, V.* - A Terrestrial - Doppler Continental Control Network for South America. Presented to "Seminario Sobre El Sistema Doppler Y Sua Aplicacion En La Determinacion de Estaciones de Control Geodesico". Buenos Aires, 1977.

04. *Ashkenazi, V.; Crane, A.S.; Preiss, W.J.; Williams, J.W.* - Ordnance Survey: The 1980 Readjustment of the Triangulation of the United Kingdon and the Republic of Ireland OS (SN) 1980. University of Nottingham, Geodesy Library, Professional Paper, New Series No 31. Southampton, 1985.

05. *Badekas, J.* - Investigations Related to the Establishment of a World Geodetic System. Ohio State University, Department of Geodetic Science, Rep. No 124. Columbus, June 1969.

06. *Blitzkow, D.* - Comunicação Pessoal, 1986 a.

07. ..... - A Combinação de Diferentes Tipos de Dados na Determinação das Alturas Geoidais. Tese de Doutoramento apresentada ao Deptº de Geofísica da USP/IAG, 1986 b.

08. *Blitzkow, D. & Sá, N. C. de* - As Alturas Geoidais Doppler e a Separação Elipsóide - Esferóide de Referência. Revista Brasileira de Geofísica, Vol. 2, 19-24, 1983.

09. *Boucher, C.* - Investigations on Geodetic Applications of Satellite Doppler Observations for Control Networks. Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning, 1001-1025. Austin, 1979.

10. *Bowring, B.R.* - Transformation from Spatial to Geographical Coordinates. Survey Review XXIII, 181, 323-327, July 1976.

11. *Fischer, I.* - The Geoid in South America Referred to Various Reference Systems. Presented to "XI Pan American Consultation on Cartography", IPGH. Washington, 1969.

12. ..... - The Basic Framework of the South American Datum of 1969. Presented to "XII Pan American Consultation on Cartography", IPGH. Panama, 1973.

13. ..... - The Role of the Geoid in Datum Definitions. The Canadian Surveyor, Vol. 28, No 5, 507-513, Dec. 1974.

14. *Gemael, C.* - Introdução à Geodésia Física. Apostila da UFPR/CPGCG. Curitiba, 1981 a.

15. ..... - Referenciais Cartesianos Utilizados em Geodésia. Apostila da UFPR/CPGCG. Curitiba, 1981 b.

16. ..... - Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas. Apostila da UFPR/CPGCG. Curitiba, 1984.

17. *Heiskanen, W. & Moritz, H.* - Physical Geodesy. W. H. Freeman and. Co. San Francisco, 1967.

18. *Hoar, G.J.* - Satellite Surveying. Magnavox Advanced Products and Systems Company. Torrance, 1982.

19. *Hothem, L.D.* - Determination of Accuracy, Orientation and Scale of Satellite Doppler Point Positioning Coordinates. Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning, 609-630. Austin, 1979.

20. *Hotine, M.* -Mathematical Geodesy. ESSA Monograph 2. Washington, 1969.

21. *Kadlec, F.A. & Gomes, J.P.* - Cálculo de Parâmetros de Transferência de Sistemas Geodésicos. Revista Brasileira de Cartografia, nº 22, 27-34, Dez. 1978.

22. *Kouba, J.* - A Review of Geodetic and Geodynamic Satellite Doppler Positioning. Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 21, No 1,27-40, Feb. 1983.

23. *Krakiwsky, E.J. & Thomson, D.B.* - Mathematical Models for the Combination of Terrestrial and Satellite Networks. The Canadian Surveyor, Vol. 28, No 5, 606-615, Dec. 1974.

24. *Lachapelle, G. & Kouba, J.* - Relationship between Terrestrial and Satellite Doppler Systems. Geodetic Survey, Surveys and Mapping Branch, Department of Energy, Mines and Resources, Collected Papers, 49-64. Ottawa, 1979.

25. *Lambeck, K.* - The Relation of Some Geodetic Datums to a Global Geocentric Reference System. Bulletin Géodésique No 99, 37-53, Mars 1971.

26. *Leick, A. & Gelder, B.H.W. van* - On Similarity Transformations and Geodetic Network Distortions Based on Doppler Satellite Observations. Ohio State University, Department of Geodetic Science, Rep. No 235. Columbus, Dec. 1975.

27. *Merry, C.L. & Vaníček, P.* - Horizontal Control and the Geoid in Canada. The Canadian Surveyor, Vol. 27, 23-31, March 1973.

28. ..... - The Geoid and Datum Translation Components. The Canadian Surveyor, Vol. 28, 56-62, March 1974.

29. *Moritz, H.* - The Definition of a Geodetic Datum. Proceedings of the Second International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Geodetic Networks, 63-75. Virginia, 1978.

30. *Mueller, I.I.* - Review of Problems Associated with Conventional Geodetic Datums. The Canadian Surveyor, Vol. 28, No 5, 514-523, Dec. 1974.

31. ..... - Tracking Station Positioning from Artificial Satellite Observations. Geophycial Surveys 2, 243-276, 1975.

32. *Mueller, I.I. & Kumar, M.* - The OSU275 System of Satellite Tracking Station Coordinates. Ohio State University, Department of Geodetic Science, Rep. No 228. Columbus, 1975.

33. *Paul, K.* - A Note on the Computation of Geodetic (Cartesian) Coordinates. Bulletin Géodésique No 198, 135-139, Juin 1973.

34. *Soler, T.* - On Differential Transformations between Cartesian and Curvilinear (Geodetic) Coordinate Systems. Ohio State University, Department of Geodetic Science, Rep. No 236. Columbus, 1976.

35. *Thompson, E.H.* - An Introduction to the Algebra of Matrices with Some Applications. John Wright & Sons Ltd. Bristol, 1969.

36. *Thomson, D.B. & Krakiwsky, E.J.* - Alternative Solutions to the Combination of Terrestrial and Satellite Geodetic Networks. Publications of the Earth Physics Branch, Vol. 45, No 3, 185-197. Ottawa, 1976.

37. *Torge, W.* - Geodesy, An Introduction. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 1980.

38. *Vaníček, P.* - Report on Geocentric and Geodetic Datums. University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering, Tech. Rep. No 32. Fredericton, Jan.1975.

39. *Vaníček, P. & Carrera, G.* - Ellipsoid Misalignment, Deflection Components and Geodetic Azimuth. The Canadian Surveyor, V. 39, No 2, 123-130, 1985.

40. *Vaníček, P. & Krakiwsky, E.J.* - Geodesy: The Concepts. North Holland Publishing Company. Amsterdam, 1982.

41. *Vaníček, P. & Wells, D.E.* - Positioning of Horizontal Geodetic Datums. The Canadian Surveyor, Vol. 28, No 5, 531-538, Dec. 1974.

42. *Wells, D.E. & Vaníček, P.* - Alignment of Geodetic and Satellite Coordinate Systems to the Average Terrestrial System. Bulletin Géodésique No 117, 241-257, 1975.