RODRIGO NAZARENO DE CAETANO

UTILIZAÇÃO DA PESQUISA OPERACIONAL NA ATIVIDADE AGROINDUSTRIAL

CURITIBA

2011

RODRIGO NAZARENO DE CAETANO

UTILIZAÇÃO DA PESQUISA OPERACIONAL NA ATIVIDADE AGROINDUSTRIAL

Trabalho apresentado para a obtenção do título de especialista em Agronegócio no curso de MBA em Gestão do Agronegócio do departamento de Economia Rural e Extensão, Setor de Ciências Agrárias, Universidade Federal do Paraná.
Orientador: Prof. Dr. Julio Arce.

CURITIBA

2011

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A atividade agroindustrial envolve todo o processo produtivo, desde a produção na fazenda, a armazenagem, a comercialização e a distribuição nos pontos de venda, seja atacado ou varejo. Falar desse conjunto de atividades é a mesma coisa que falar de um sistema agroindustrial. A definição de sistema exemplifica melhor o que vem a ser toda essa atividade, essa definida como o ordenamento ou disposição das partes ou elos de um todo coordenados entre si que funcionam como uma estrutura organizada (MENDES e PADILHA JR, 2007). Como envolve todo um ordenamento de atividades, cada parte desse processo tem suas peculiaridades e seus problemas específicos, assim necessidades de resoluções de problemas distintos. O produtor depara-se com o que produzir, quanto produzir e para quem vender. A indústria depara-se com o problema de quem comprar, quanto comprar, como produzir e quanto e para quem vender. Cada problema deve ser modelado de uma forma tal que o maior número de variáveis possa ser inserido de uma maneira que se minimize o risco dentro dessa tomada de decisão.

A pesquisa operacional é o ramo da ciência que procura modelar os diversos problemas e fornecer as respostas mais plausíveis possíveis para cada situação. Dentro da pesquisa operacional vários “braços” podem ser desmembrados como, por exemplo, a programação inteira, programação dinâmica e a programação não linear, cada tipo de programação específica para o problema que busca-se resolver. Através dessa poderosa ferramenta esses problemas específicos da atividade agroindustrial podem ser solucionados.

Esse trabalho tem como objetivo analisar as atividades que envolvem um sistema agroindustrial e com base em exemplificações apontar as possíveis soluções que podem ser obtidas com o auxílio dessa excelente ferramenta de gestão. Para isso foi feita uma revisão bibliográfica com livros e artigos científicos que abordam o tema.

2. OBJETIVO

Indicar através da revisão de literatura as principais utilizações da pesquisa operacional aplicada nos sistemas agroindustriais.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Para atingir esse objetivo foi utilizada a literatura especializada encontrada no acervo de bibliotecas da Universidade Federal do Paraná, especificamente no campus Jardim Botânico. Neste campus concentram-se as ciências sociais aplicadas, dispondo de inúmeras literaturas de pesquisa operacional de diferentes autores. Na pesquisa por trabalhos para a revisão utilizando a busca na internet, foi utilizada a ferramenta de pesquisa do Google Acadêmico e a ferramenta de pesquisa do Scielo, grandes fontes *online* de pesquisa acadêmica. As palavras chaves utilizadas na pesquisa estão relacionadas ao conteúdo do trabalho, como por exemplo, “programação não linear nas *commodities*” e “programação linear na agricultura”.

Utilizando dessas ferramentas foi possível selecionar o melhor escopo de revisão relacionada ao objeto de pesquisa e desenvolver o texto do trabalho.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A pesquisa operacional surgiu durante a segunda guerra mundial, quando o exército britânico deparado com os problemas logísticos militares utilizou de técnicas para a resolução dos problemas do emprego de material militar. Após a guerra o estudo dessas técnicas continuou e evoluiu no meio civil, onde virou base para a tomada de decisão na maioria dos setores.

Independente da forma de resolução, todo problema a princípio deve ser modelado, ou seja, utilizando de um conjunto de equações matemáticas em que o maior número possível de variáveis envolvendo o problema esteja incluso, e essa parte é a parte mais demorada e mais difícil na resolução de problemas que envolvam P.O.(Pesquisa Operacional). Modelos de uma maneira geral são representações idealizadas para situações do mundo real (CAIXETA FILHO, 2001). Dentro desses modelos temos uma equação que define o objetivo, assim chamada função objetivo, e equações que definem as restrições a que estão sujeitas as variáveis como, por exemplo, limitação de determinada quantidade de matéria prima ou insumo. A partir dessas equações saberemos qual tipo de programação dentro da P.O. o problema está inserido. Se esse conjunto de equações encontrada no modelo for exclusivamente de equações do primeiro grau, onde as soluções podem ser valores atribuídos ao conjunto dos números reais, o problema é caracterizado como de programação linear. Quando essas soluções somente podem ser atribuídas valores inclusos no conjunto dos números inteiros, o problema é de programação inteira. Se o modelo original é muito complexo e pode ser subdividido em problemas menores, de mais fácil resolução, a solução é por programação dinâmica. Quando as equações que envolvem o modelo apresentam alguma variável quadrática, cúbica ou com o expoente maior que um, envolvendo a função objetivo, as restrições ou qualquer uma delas, o modelo é de programação não linear. Caso o modelo possa ser modelado como se fosse uma rede, a resolução é por otimização em redes.

Os exemplos de modelagem a seguir envolvem a programação linear.

Ex. 1: Um produtor possui duas fazendas, fazenda A e fazenda B, onde deseja-se plantar a mesma quantidade de soja (x) e trigo(y) em ambas fazendas. Ele sabe que o lucro da soja na fazenda A é de $2 e na fazenda B é de $3 e que o lucro de trigo na fazenda A é de \$4 e na fazenda B é de \$2 por unidade de área, considerando que ele conhece os seus custos de produção em cada local. Com base em seu planejamento ele espera obter um lucro anual na fazenda A de \$80 e na fazenda B de \$90. Quanto o produtor deve produzir em cada local?

Modelagem:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 80 \\ 3x + 2y = 90 \end{cases}$$

Com um simples sistema de equações lineares é possível resolver o questionamento do produtor. Se o produtor tivesse uma terceira fazenda, basta apenas inserir mais uma linha de equações relativas a essa fazenda. Caso tivesse mais uma cultura a ser plantada em cada fazenda, bastaria apenas inserir mais uma variável em cada equação.

Resolução:

Multiplicando a segunda linha por (-2) e somando-se a primeira linha, obtemos $x = 25$. Substituindo na primeira equação obtemos $y = 7,5$. Dessa forma sabe-se que o produtor deve produzir 25 unidades de área de soja na fazenda A e B e 7,5 de trigo.

Ex. 2: Uma indústria do ramo de alimentos produtos três produtos x, y e t, utilizando duas máquinas A e B. Cada produto demanda um certo tempo em cada máquina, conforme a tabela abaixo.

	x	y	t
A	2	3	4
B	4	7	5

Sabe-se que o tempo máximo em horas que a máquina A pode trabalhar por mês é de 300 horas e que a máquina B é de 200 horas. Sabe-se também que o lucro dos 3 produtos, é respectivamente \$5, \$3 e \$6. Quanto deverá ser produzido de cada produto, considerando as restrições de tempo de cada máquina.

Modelagem:

Restrições:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4t \leq 300 \\ 4x + 7y + 5t \leq 200 \end{cases}$$

Função Objetivo:

Max (Z) = $5x + 3y + 6t$

Nesse caso a solução não pode ser simplesmente resolvida por um conjunto de equações algébricas. Utiliza-se como notação padrão a letra Z como valor objetivo a ser atingido dentro de um problema. Quando busca-se o valor máximo, a notação padrão é Max(Z) e quando busca-se o valor mínimo a notação padrão é Min(Z). Para a resolução desse problema pode-se utilizar o método gráfico ou o método simplex. O método gráfico consiste na plotagem das equações que envolvem o sistema e a busca da solução que satisfaz as restrições e maximiza ou minimiza a função objetivo.

Ex. 3. Utilizando o método gráfico, resolver o seguinte problema de programação linear adaptado de ARCE (2010) envolvendo uma fábrica de fertilizantes. Uma determinada empresa de fertilizantes utiliza três insumos A, B e C para produzir dois tipos de fertilizantes x e y. Pela tabela abaixo é possível identificar a quantidade de insumo utilizado para produzir 1 unidade dos fertilizantes.

	x	y
A	2	1
B	1	1
C	1	0

Sabe-se que a receita do fertilizante x é de \$15 por unidade produzida e a receita do fertilizante y é de \$10 por unidade produzida. A restrição de uso dos insumos é de 1500 unidades do insumo A por mês, 1200 do insumo B e 500 unidades do insumo C por mês. Deseja-se saber quanto de cada fertilizante a empresa deve produzir mensalmente para maximizar o seu lucro.

Solução:

Modelagem do problema:

Restrições:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 1500 \\ x + y \leq 1200 \\ x \leq 500 \end{cases}$$

Função objetivo:

Max (Z) = 15x + 10y

O primeiro passo consiste em plotar todas as restrições no plano cartesiano, transformando as restrições de menor igual (≤) em igualdades (=).

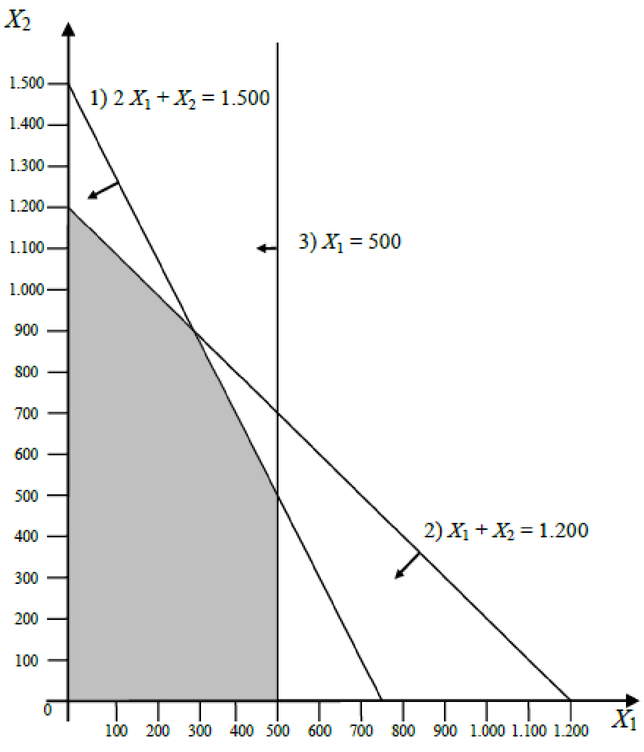

FIGURA 1: ADAPTADO DE ARCE (2010). GRÁFICO DAS RESTRIÇÕES E DA REGIÃO FACTÍVEL DO PROBLEMA DOS FERTILIZANTES.

A região delimitada pela área cinza é a região comum a todas as restrições. Cada reta possui um sinal referente a região cuja restrição é satisfeita, ou seja, regida pelo sinal da inequação encontrada no modelo. Essa região comum a todas as restrições é chamada região factível.

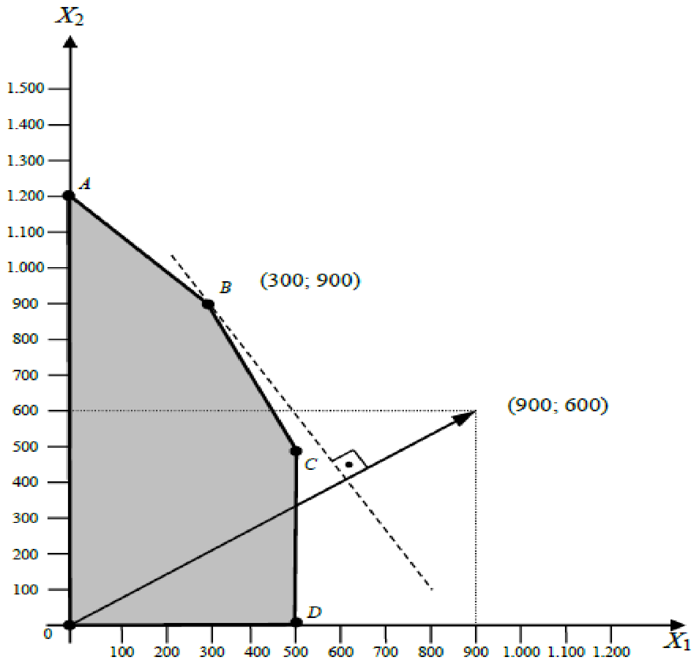

FIGURA 2: ADAPTADO DE ARCE (2010). GRÁFICO DA REGIÃO FACTÍVEL E DA DIREÇÃO DO GRADIENTE DA F.O. DO PROBLEMA DOS FERTILIZANTES.

Na figura 2 a reta pontilhada simboliza uma das possíveis retas da função objetivo (F.O.), pois como foi definido no modelo, a função a ser maximizada é $15x_1 + 10x_2$. Se igualarmos a zero, a cem, a duzentos e assim sucessivamente, formaremos um conjunto de retas paralelas a linha pontilhada no gráfico. Como o objetivo é a maximização, quanto mais para fora do polígono estiver essa reta maior será o resultado obtido. Essa direção é conhecida como direção do gradiente, e este é sempre perpendicular a reta da função objetivo. Pelo gráfico é possível perceber que o ponto mais externo que satisfaz todas as restrições é o ponto B, onde x_1 equivale a 300 e x_2 equivale a 900. Substituindo na F.O. obtemos uma receita de $13.500,00 que é a receita máxima possível para esse problema.

Esse tipo de resolução gráfica é amplamente utilizada, como por exemplo, SILVA (2006) resolveu problemas de otimização industrial da produção de brinquedos de madeira. Vale ressaltar que para o espaço bidimensional, envolvendo duas variáveis, ou tridimensional, envolvendo três variáveis, pode-se tentar a resolução gráfica plotando com o auxílio de computadores. Entretanto para problemas que envolvam mais de 3 variáveis no espaço euclidiano, já não é mais possível usar esse método e devemos usar métodos como o simplex para a busca de soluções.

O algoritmo simplex foi uma técnica desenvolvida pelo matemático Dantzig em 1951, a partir de estudos envolvendo problemas de programação linear (SOUZA, SILVA e ARENALES, 2005). O algoritmo – conjunto de procedimentos matemáticos enumerados que levam a uma solução final – simplex é iterativo, ou seja, parte-se de um ponto a outro onde é realizada a análise de cada ponto. Caso a solução seja a melhor possível esse é chamado de ponto ótimo e o algoritmo acaba. Caso não seja a solução ótima, parte-se para um próximo ponto – nova iteração – onde é realizada a nova análise situacional e assim sucessivamente. Tomando como exemplo a figura 2, esse algoritmo partiria do ponto (0,0), eixo das coordenadas. Far-se-ia uma avaliação desse ponto e encontrar-se-ia um valor para Z. Como nesse caso o valor de Z não é o melhor valor, partir-se-ia para o próximo ponto A, fazendo uma nova análise do valor de Z obtido e assim sucessivamente, para B, C até completar todo o polígono formado pela região factível. O maior valor de Z, num caso de maximização, ou um valor mínimo de Z, num caso de minimização, seriam a solução ideal do problema.

Essa interpretação do método é muito simplória, algebricamente falando não necessitaria passar por todos os pontos, o método acusaria pelo *tableau* – representação tabular das equações envolvendo o problema – o melhor ponto. Algebricamente esse movimento de um ponto a outro é chamado de pivoteamento, onde pelo auxílio de operações básicas envolvendo linhas de matriz e variáveis artificiais nos casos de inequações, o algoritmo acusa os valores de Z e das variáveis envolvidas no problema em cada etapa do processo. A implementação computacional desse método é amplamente utilizada, como por exemplo o próprio Microsoft Office Excel trás nas suas versões com complementos um *Solver* onde é utilizado o algoritmo simplex para a resolução de problemas de programação linear.

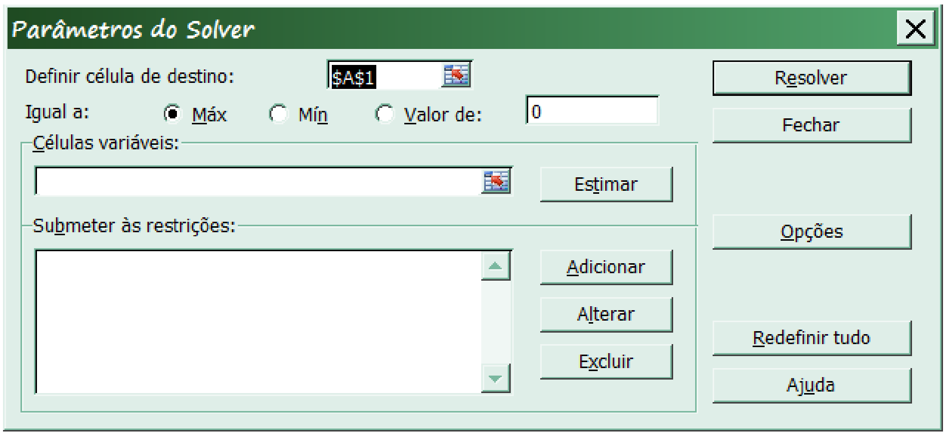

FIGURA 3. SOLVER DO MICROSOFT OFFICE EXCEL 2007 QUE UTILIZA O ALGORITMO SIMPLEX PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL).

O algoritmo simplex foi de grande importância para a resolução de PPL, entretanto não é o único algoritmo de busca de soluções ótimas. Outro algoritmo utilizado é o Método de Pontos Interiores. Nesse algoritmo, contrariamente ao simplex, a busca é feita por pontos interiores a região factível, definindo para isso uma região de busca interior e um gradiente de orientação do vetor solução. Dependendo do objetivo da programação, esse gradiente será crescente ou decrescente. A figura 4 ilustra graficamente a essência do método.

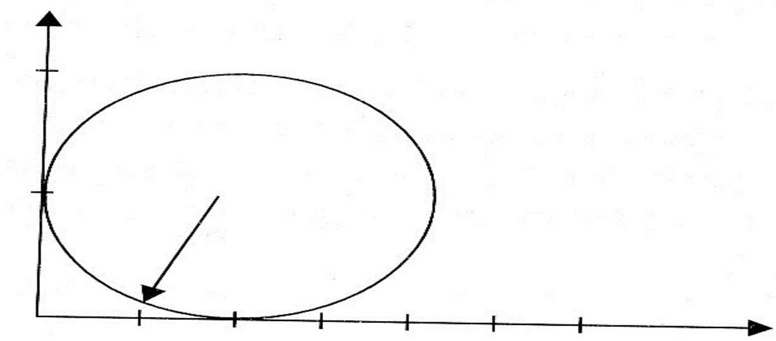

FIGURA 4. VETOR DE DIREÇÃO E CÍRCULO INSCRITO NA REGIÃO FACTÍVEL ORIGINAL. EXTRAÍDO DE CAIXETA FILHO, 2001.

Esse método foi usado por CARVALHO et al. (2009) para a resolução de problemas de produção agrícola. Neste trabalho o autor utilizou o método dos pontos interiores com trajetória central, uma variação do método, para determinar os níveis de água e nitrogênio a serem aplicados nas culturas de aveia e laranja pêra, avaliado o desempenho produtivo e econômico comparando os custos da irrigação e da adubação. Os resultados obtidos pelos autores foram satisfatórios e equivalentes a outros ensaios encontrados na literatura pesquisada.

Outro problema da agroindústria que utiliza da programação linear é o problema da fabricação de rações. Os componentes das rações são vários como, por exemplo, farinha de soja, farinha de trigo, cálcio, sal, fosfatos e dessa forma as características nutricionais de cada insumo também é variável. Assim como os demais PPL, este pode ser modelado e resolvido por algoritmos como o simplex, método dos pontos interiores e também por programação inteira. A programação inteira consiste na acepção apenas de variáveis pertencentes ao conjunto dos números inteiros. Neste tipo de programação também há outros algoritmos como o B&B (*branch-and-bound*) e planos de corte, eficientes para a resolução destes tipos de modelos (TAHA, 2008). Vale ressaltar que originalmente o problema pode aceitar variáveis contínuas não inteiras, mas em determinado momento da modelagem, essas variáveis não inteiras devem ser transformadas em uma forma binária onde apenas sejam aceitas essa combinação inteira, chamada assim de um problema de programação linear inteira mista.

TOSO e MORABITO (2005) utilizaram dessa programação linear inteira mista para a determinação da produção dentro de uma fábrica de rações. Nesse estudo foi utilizada uma unidade fabril real onde foi analisado o setor de produção de suplementos vitamínicos para animais. Os autores modelaram o processo produtivo com base nos grupo de produtos que a empresa produzia, com base nas matérias primas, tempo de preparo total de cada produto e tempo de descontaminação dos silos e misturadores, realizados em determinados grupos de produtos. O estudo considerou a demanda mensal da empresa baseada no seu histórico de vendas, tendo como função objetivo reduzir os custos de estoque das matérias primas e reduzir os gastos com pagamento de hora extra para funcionários, através do planejamento e da utilização da programação linear inteira mista. O modelo encontrou soluções até 77,5% mais baratas do que a empresa via realizando, através da melhora do uso capacidade ociosa da unidade fabril pela produção antecipada em alguns períodos e também pela melhor combinação e dosagem de matérias primas para a manufatura de algumas famílias de produtos.

Outro problema bastante comum na agropecuária e na agroindústria é o problema dos transportes. Este está relacionado à função física de comercialização de transporte e a utilidade de lugar, necessários em todos os processos produtivos (MENDES e PADILHA JR, 2007). Por se tratar na maioria dos casos de problemas que envolvam equações lineares, esses tipos de problema normalmente são solucionados pela aplicação do método simplex. Na área florestal, onde é necessária a utilização de caminhões de diferentes tipos, levando matéria prima (toras curtas e longas) para diferentes unidades fabris, é comum o estudo e aplicação dos métodos de otimização linear para essas situações.

BERGER et al. (2003) desenvolveram um estudo na área florestal onde foi utilizado o método simplex para a resolução de um problema de transportes. O problema foi modelado a partir de um caso real. Os autores dispunham de 5 caminhões diferentes, que deveriam abastecer uma serralheria com toras curtas e longas, oriundas de 3 fazendas diferentes, sendo que cada caminhão podia ou não transportar os dois tipos de tora. Havia a demanda mínima por cada tipo de matéria prima e a produção máxima de cada tora em cada fazenda. Primeiramente os autores realizaram o cálculo do custo do transporte por caminhão, por etéreo transportado por quilometro. Com essa informação modelaram a função objetivo como sendo o custo mínimo para abastecer a serralheria, com as restrições de produção e transporte e utilizando do método simplex obtiveram custos até 18,33% inferiores aos que vinham sendo praticado pela companhia, atendendo as necessidades de madeira da unidade fabril.

BAHIA, TOBIAS e SOUZA (2007) utilizaram da mesma metodologia simplex, com o auxílio do software *LINDO*, para a resolução do problema de escoamento da safra de soja do estado de Mato Grosso para exportação via portos brasileiros. Nesse estudo foi considerado os três modais (rodoviário, ferroviário e hidroviário) como a alternativa para a chegada do produto (soja) até o porto de destino, assim como calculado o frete com base nesse tipo de transporte. Foi considerado como origem quatorze principais cidades produtoras de soja do estado e como destino os portos de Santos, Paranaguá, Rio Grande, Santarém, Itacoatiara e São Luís. Foi encontrado que Paranaguá deveria receber a maioria da soja matogrossense seguida do porto de Santarém, ambos os portos com suas capacidades máximas de recebimento sendo utilizadas pela solução encontrada.

Como mencionado, o software *LINDO* foi utilizado nesse estudo para a resolução do problema. Esse é apenas um dos softwares disponíveis no mercado para a resolução de PPL. SILVA JR e SARAMAGO (2007) realizaram um estudo de transporte onde utilizaram de três ferramentas computacionais, o *LINDO*, o *LINPROG* e o *MOSEK* para a resolução do mesmo problema de transporte modelado. Ambos programas encontraram a mesma solução ótima, cada programa diferenciando no seu números de iterações e no tempo computacional de obtenção da solução. Isso mostra que existem diferentes ferramentas computacionais e que a solução de PPL não está atrelada a um tipo específico de software, existem vários tipos de programas no mercado e estão acessíveis a todos que demandarem seu uso.

De todos esses casos analisados, a solução ótima foi encontrada utilizando o método simplex. Entretanto existem outros algoritmos que podem ser utilizados para obtenção de uma solução não ótima, mas factível, que são uma solução inicial do *tableau* simplex e encurtam o tempo de resolução desses problemas de transporte. CAIXETA FILHO (2001) demonstra outros algoritmos como a regra do canto noroeste, o método do mínimo custo, o método de aproximação de Vogel e o método *stepping-stone*, sendo que estes dois últimos podem chegar a uma solução ótima igual a obtida pelo método simplex. LACHTERMACHER (2009) utiliza em seu livro Pesquisa Operacional da Tomada de Decisões variáveis *dummy*, que são destinos ou origens artificiais nos casos onde a demanda ou a oferta são desiguais, de forma que os custos de transportes dessas variáveis *dummy* são unitários e na modelagem do problema todas as restrições são dadas por igualdades. Dessa forma existem diferentes formas de se resolver problemas envolvendo transportes e diferentes ferramentais técnicos e teóricos que podem ser utilizados para resolver esses problemas gerenciais.

Outro tipo de programação que pode ser utilizada para a determinação de melhores rotas é a programação dinâmica. Com base em cada etapa, distância de um nó a outro, pode-se calcular separadamente a melhor maneira de se chegar a um destino final x_n passando por i = 0 até n. A programação dinâmica determina a solução ótima de um problema com várias variáveis, decompondo-o em estágios, sendo que cada estágio compreende apenas um subproblema com apenas uma variável (TAHA, 2008). Cada etapa do estágio, considerando o ponto i, em programação dinâmica é chamado de estado, e assim como cada solução encontrada em cada estado é ótima, não há necessidade de se reavaliar os estados anteriores para se planejar os estados seguintes, garantindo a eficiência do método. Ao escrever a função objetivo considerando todas as etapas (estágios) de i=0 até n, essa F.O. passa a se chamar equação recursiva. Há várias aplicações da programação dinâmica no meio agroindustrial.

SILVA et al. (2007) utilizaram dessa ferramenta da pesquisa operacional para determinar o melhor planejamento de um determinado povoamento florestal. Para isso os autores usaram a equação de recorrência, incluindo as receitas e os custos, para determinar qual deveria ser a decisão a tomar quando o povoamento florestal estivesse jovem ou adulto. Com esse estudo foi possível identificar quando os povoamentos devem ser mantidos, cortados ou conduzidos variando a sua idade. Nas populações jovens, foi constatado que o corte era inviável e o desejado era o seu crescimento. Nos povoamentos mais velhos, cortar e reformar ou cortar e conduzir foi a melhor opção encontrada. Foi possível concluir também a melhor opção quando cortar, reformar e conduzir em povoamentos com horizonte de planejamento pré-determinados. Os autores enfatizaram que para esse estudo, os talhões onde havia povoamentos de idades distintas, a P.D. não encontrou melhores soluções, sendo recomendado outros algoritmos de programação linear.

SCHEIDT et al.(2009) utilizaram a programação dinâmica para simular estágios dentro de um sistema de terminação de bovinos, determinando para cada estágio dentro da terminação o melhor opção a ser tomada: a venda ou a manutenção do animal. Para a simulação foi utilizada as recomendações padrão das normas NRC (*National Research Council*) para as necessidades nutricionais dos animais, os valores de séries históricas de preços de commodities para a confecção dos preços dos insumos em um determinado tempo futuro de planejamento e as estatísticas padrão de engorda de animal para a determinação do ganho de peso. Esse modelo foi implementado em software denominado *Netbeans 6.5*, sendo que como se tratava de uma simulação, os valores tabelados de preços e taxas podiam ser alterados a qualquer momento. Por se tratar de uma fase da criação, dentro dessa fase cada etapa foi considerada como um estágio, caracterizando a programação dinâmica. Os autores encontraram resultados muito parecidos com os resultados ótimos encontrados com pacotes operacionais consagrados, evidenciando que a implementação computacional da programação dinâmica é eficiente e auxilia na tomada de decisão.

Como descrito no inicio do texto, quando as equações que envolvem a modelagem apresentam qualquer variável quadrática, cúbica ou com qualquer expoente maior que 1, a programação passa a ser não linear. Diferentemente da programação linear, onde existem algoritmos que resolvem a maioria dos problemas, como o algoritmo simplex, na não linear não existe essa resolução pela própria dificuldade de se achar soluções ótimas. Segundo TAHA (2008) os algoritmos de resolução de programação não linear estão divididos em diretos e indiretos. Os diretos são aqueles relacionados ao gradiente, onde o algoritmo segue a taxa de decréscimo ou crescimento mais rápida. Já os indiretos o algoritmo é fundamentado na resolução de um problema auxiliar baseado no problema original onde a solução ótima é obtida. Em programação não linear existem ótimos locais e ótimos globais, como mostra a figura abaixo.

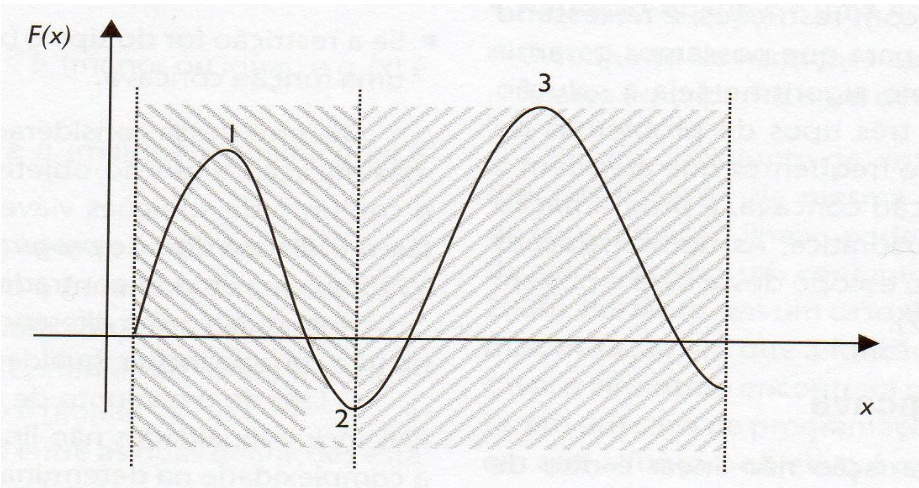

FIGURA 5. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO NÃO LINEAR E SUA REGIÃO FACTÍVEL. EXTRAÍDO DE LACHTERMACHER (2009).

Conforme se observa na figura acima, os pontos 1 e 3 delimitam um máximo da função e o ponto 2 é um mínimo da função. Caso o objetivo da modelagem fosse maximizar a função acima, o ponto 1 seria um máximo local e o ponto 3 seria um máximo global. Isto pois o ponto 3 é o ponto de maior coordenada y dentro da região factível. O ponto 1 por ter a sua derivada igual a zero, é um ponto de máximo mas local, pois a coordenada y desse ponto certamente é menor que a coordenada y do ponto 3. Vários são os problemas que envolvem as equações não lineares, como por exemplo, as funções custo total. Como a característica da função custo total é a soma da função custo fixo mais a função custo variável, sendo que esta não é linear, trata-se portanto de uma função não linear. A seguir um exemplo extraído de CAIXETA FILHO (2001) de um problema envolvendo função objetivo não linear e restrição linear.

Função Objetivo:

$Z = x_1x_2 + 2x_1$

Sujeito à:

$4x_1 + 2x_2 = 60$

Para a resolução de um problema envolvendo a não linearidade das funções, inicialmente deve-se avaliar o número de restrições e a característica dessa restrição, se é uma igualdade ou uma desigualdade. Caso seja uma igualdade e o número de variáveis seja até duas, pela teoria clássica da otimização poder-se-ia resolver facilmente esse problema.

Reescrevendo as funções:

$Z = x_1 (x_2 + 2)$

Sujeito a:

$x_2 = 30 – 2x_1$

Substituindo a restrição na função objetivo:

$Z = x_1 (30 – 2x_1) + 2x_1$

$Z = 30x_1 - 2x_1^2 + 2x_1 = 32x_1 – 2x_1^2$

Pela derivação de 1ª e 2ª ordem da função objetivo, sabe-se se a função apresenta um máximo ou mínimo.

$dU/dx_1 = - 4x_1 + 32 = 0$

$d^2U/dx_1^2 = - 4 < 0$

Como a derivada segunda é negativa, a função apresenta um ponto de máximo. Igualando a derivada primeira igual a zero obtém-se o valor de x_1 onde está esse ponto de máximo.

$- 4x_1 + 32 = 0$

$x_1 = 8$

Substituindo na restrição, obtém-se que $x_2 = 14$. Nesse ponto, a função objetivo vale 128, sendo considerado o ótimo do problema. Entretanto essa resolução serve apenas para problemas simples. Caso envolva mais de uma variável, o método do multiplicador de Lagrange é um dos métodos recomendados para a resolução do problema. A resolução por Lagrange tem como base o seguinte modelo:

$Z = f(x,y)$

s.a.:

$h(x,y) = a$

O Lagrangeano necessário para a resolução do problema seria:

$L = f(x,y) + \lambda[(a – h(x,y)]$

Tendo como base o exemplo de CAIXETA FILHO (2001) supracitado, o Lagrangeano ficaria da seguinte forma.

$L = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 – 4x_1 – 2x_2)$

O λ significa multiplicador de Lagrange, e serve para a resolução do problema. Note que no exemplo acima não foi realizada a simplificação da função restrição, apenas foi substituído as equações originais no modelo de Lagrange. Utilizando a derivação parcial de cada componente dessa função, os valores estacionários de L são obtidos. Dessa forma:

L_λ $(dL/d\lambda) = a – h(x,y) = 0$

L_x $(dL/dx) = f_x – \lambda h(x) = 0$

L_Y $(dL/dy) = f_y - \lambda h(y) = 0$

Aplicando as derivações nas equações do exemplo:

$dL/d\lambda = 60 – 4x_1 – 2x_2 = 0$

$dL/dx_1 = x_2 + 2 - 4\lambda = 0$; $\lambda = x_2 + 2 / 4$

$dL/dx_2 = x_1 - 2\lambda = 0$; $\lambda = x_1 / 2$

Igualando λ e substituindo nas derivadas parciais, encontramos que $\lambda = 4$, $x_2 = 14$, $x_1 = 8$ e o valor do L é igual a 128, a mesma solução encontrada pela outra resolução.

Uma forma de avaliar a otimalidade de um ponto – afirmar se ele é um ótimo, independente se local ou global - é através da utilização das condições de Karush-Kuhn-Tucker. TAHA (2008) cita em seu livro a utilização das condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) para a resolução de um problema de função objetivo quadrática e restrições lineares, definindo assim um espaço de soluções convexo. Em uma função f(x,y) o ponto definido pelas coordenadas (x_1, y_1) define um máximo local dessa função, sujeita a uma restrição tipo desigualdade h(x,y) ≤ a. Existe a condição de KKT somente se existir um λ não negativo tal que:

$df(x,y) / dx_1 + \lambda\ (dh(x,y) / dx_1) = dL/dx_1 = 0$

$df(x,y) / dx_2 + \lambda\ (dh(x,y) / dx_2) = dL/dx_2 = 0$

$\lambda\ (a – h(x,y)) = 0$

Estabelecidas essas condições, é valido também para as condições de um mínimo local sujeito a uma restrição tipo h(x,y) ≥ a.

PAULO (2006) utilizou da programação não linear, especificamente a quadrática, para desenvolver um modelo de mix ótimo de vendas de uma empresa hipotética, utilizando como base a função custo total da empresa, a capacidade instalada da empresa e o mercado. O modelo desenvolvido pelo autor levou em consideração que a empresa atuava em um mercado de concorrência perfeita, levando em consideração as elasticidades hipotéticas de demanda para a confecção desta função. Foi utilizado o software *MatLab*® para a resolução do modelo quadrático. O autor encontrou quantidades ótimas que satisfaziam as restrições e maximizavam o lucro total. Vale ressaltar nesse artigo a importância de se conhecer as funções demanda e custo de produção da empresa, sem estas informações não haveria como modelar tal problema.

MENDES e PADILHA JR (2008) também utilizaram da programação não linear, especificamente a programação quadrática, para estabelecer portfólios ótimos de comercialização de soja, levando em consideração a aversão ao risco do tomador de decisão (produtor) e considerando o custo de armazenagem e a média histórica de preços da *commoditie*. Utilizando a modelagem avançada pelo software *GAMS*, os autores encontraram estratégias que maximizavam as expectativas de risco dos produtores, discriminando uma série de vendas que o produtor deveria fazer ao longo dos meses para alcançar tal objetivo.

OJIMA e YAMAKAMI (2003) desenvolveram um modelo quadrático onde foi analisado o custo de transporte e a melhor distribuição do canal de comercialização da soja oriunda da região Centro-Norte do país. Os autores analisaram os custos de transporte tendo como base os modais rodoviário, ferroviário e hidroviário e a melhor alocação da demanda e oferta nacional e demanda internacional, considerando os estados de Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Amazonas, Rondônia, São Paulo e Minas Gerais, a partir de dados estatísticos de produção de cada estado. Como se trata de um modelo foi aumentado o custo rodoviário em 10% e reduzido o custo dos modais ferroviário e hidroviário em 10% para análise do sistema. Foi constatada a relevância do estudo para previsão de cenários ótimos envolvendo o canal de comercialização da soja, servindo como base teórica para o desenvolvimento de políticas públicas de melhoria dos transportes e escoamento da safra.

5. CONCLUSÃO

Pode-se constatar que a pesquisa operacional está envolvida em diversos ramos da agropecuária. A sua aplicabilidade se dá através dos diversos ramos da programação, envolvendo os algoritmos genéricos de programação linear e a complexidade dos problemas envolvendo a programação não linear. A modelagem é a principal etapa de um problema, pois das equações envolvendo o modelo é que se parte para a solução em si, avaliando o grau das equações envolvidas, seja a função objetivo ou as restrições do problema.

Na maioria dos modelos e exemplos citados foi utilizada a implementação computacional na resolução dos problemas. Com o advento da tecnologia e da modernização dos computadores, técnicas que antes não podiam ser aplicadas devido a grande complexidade de cálculos e demora de resolução agora estão acessíveis em pacotes de software disponíveis para a maioria das pessoas.

Com o desenvolvimento da aplicabilidade da técnica para as diversas áreas, a pesquisa operacional está acessível para todos os tomadores de decisão e deve ser obrigatória para todas as pessoas envolvidas no gerenciamento e direção de qualquer parte do processo produtivo. Deve ser utilizada em todos os ramos onde se exija decisões mediante restrições e objetivos, podendo dessa forma abranger todos os setores da economia, auxiliando assim no crescimento e desenvolvimento nacional.

6. REFERÊNCIAS

ARCE, J. **Pesquisa Operacional Aplicada ao Agronegócio**. Curitiba. MBA em Gestão do Agronegócio – Material Didático. UFPR. Setor de Ciências Agrárias. Departamento de Economia Rural e Extensão. 2010. 61 p.

BAHIA, P. Q.; TOBIAS, M. S. G.; SOUZA, M. S. A Competitividade do estado do Mato Grosso a partir de um modelo de minimização de custos logísticos totais de transporte de grãos de soja. In: XLV Congresso da Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural, Londrina, 2007. **Anais...** Londrina, 2007.

BERGER, R.; TIMOFEICZYK JR, R.; CARNIERI, C.; LACOWICZ, P. G.; SAWINSKYI JR, J.; BRASIL, A. A. Minimização de Custo de Transporte Florestal com a Utilização da Programação Linear. **Revista Floresta**, Curitiba, v.33, p. 53-62, 2003.

CAIXETA FILHO, J. V. **Pesquisa Operacional**. Técnicas de Otimização Aplicadas a Sistemas Agroindustriais. São Paulo: Editora Atlas, 2001. 171 p.

CARVALHO, D.F.; DELGADO, A. R. S.; OLIVEIRA, R. F.; SILVA, W. A.; FORTE, V. L. Maximização da produção e da receita agrícola com limitações de água e nitrogênio utilizando método de pontos interiores. **Revista Engenharia Agrícola**, Jaboticabal, v.29, n.2, p.321-327, abr./jun. 2009.

LACHTERMARCHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. 223 p.

MENDES, J. T. G; PADILHA JR, J.B. **Agronegócio: uma abordagem econômica**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. 369 p.

MENDES, J. T. G.; PADILHA JR., J. B. P. Estratégias de comercialização da soja: análise de portfólios, sob condições de risco. **Produção**, v. 18, n. 3, p. 441-451, set./dez. 2008.

OJIMA, A. L. R. O.; YAMAKAMI, A. Analysis of the logistical movement and competitiveness of soybean in the brazilian center-north region: na application of a spatial equilibrium model with quadratic programming. In: IV Congresso Internacional de Economia e Gestão de Redes Agroalimentares, Ribeirão Preto, 2003. **Anais...** Ribeirão Preto, 2003.

PAULO, E. Programação quadrática na determinação de preço de multiprodutos em um cenário de curto prazo. **Revista Universo Contábil**, Blumenau, v. 2, n. 2, p. 37-53, maio/ago. 2006.

SILVA, L.C. Fundamentos de Programação Linear – PL. **Boletim Técnico MS: 01/06** – **Departamento de Engenharia Rural – Universidade Federal do Espírito Santo**, 2006.

SILVA, M. L.; SILVA, R. F.; LEITE, H. G. Aplicação da Programação Dinâmica na Substituição de Povoamentos Florestais. **Revista Árvore**, Viçosa, v.31, n.6, p.1063-1072, 2007.

SILVA JR, C. A.; SARAMAGO, S. P. F. Programação Linear Aplicada ao Problema de Planejamento de Transportes. In: 17º Simpósio do Programa de Pós - Graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, 2007. **Anais...** Uberlândia, 2007.

SCHEIDT, A.; BRACARENSE, J. C.; GOMES, M. R.; SCHEMBERGER, E. Sistema de Informação: estudo de caso em pecuária de corte. In: III EPAC - Encontro Paranaense de Computação, Cascavel, 2009. **Anais...** Cascavel, 2009.

SOUZA, R. S.; SILVA, C. T. L.; ARENALES, M. N. Métodos do tipo dual simplex para problemas de otimização linear canalizados. **Pesquisa Operacional**, v.25, n.3, p.349-382, set./dez., 2005.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 359 p.

TOSO, E. A. V.; MORABITO, R. Otimização no dimensionamento e seqüenciamento de lotes de produção: estudo de caso numa fábrica de rações. **Gestão & Produção**, v.12, n.2, p.203-217, mai./ago. 2005.