

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FELIPE TESTON

Instabilidade gravitacional para um Universo  
estático e em expansão sob influência de  
termos dissipativos

CURITIBA

2017

FELIPE TESTON

Instabilidade gravitacional para um Universo  
estático e em expansão sob influência de  
termos dissipativos

CURITIBA

2017

FELIPE TESTON

# Instabilidade gravitacional para um Universo estático e em expansão sob influência de termos dissipativos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

CURITIBA

2017

---

T345i

Teston, Felipe

Instabilidade gravitacional para um Universo estático e em expansão sob influência de termos dissipativos / Felipe Teston. – Curitiba, 2017.  
80 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, 2017.

Orientador: Gilberto Medeiros Kremer.

1. Mecânica dos fluidos. 3. Cosmologia. Gravitação. I. Universidade  
Federal do Paraná. II. Kremer, Gilberto Medeiros. III. Título.

CDD: 532

---



ATA Nº011/2017

**ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM FÍSICA**

No dia vinte e dois de Fevereiro de dois mil e dezessete às 09:30 horas, na sala 109, Prédio do Setor de Ciências Exatas - 1º Andar - Centro Politécnico, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **FELIPE TESTON** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada **Instabilidade Gravitacional para um Universo Estático e expansão sob influência de termos dissipativos**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: GILBERTO MEDEIROS KREMER (UFPR), MARTIN GUSTAVO RICHARTE (UFPR), THIAGO DOS SANTOS PEREIRA (UEL). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, GILBERTO MEDEIROS KREMER, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2017.

  
GILBERTO MEDEIROS KREMER  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

  
MARTIN GUSTAVO RICHARTE  
Avaliador Externo (UFPR)

  
THIAGO DOS SANTOS PEREIRA  
Avaliador Externo (UEL)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
Setor CIÊNCIAS EXATAS  
Programa de Pós-Graduação FÍSICA

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **FELIPE TESTON** intitulada: **Instabilidade Gravitacional para um Universo Estático e expansão sob influência de termos dissipativos**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2017.

GILBERTO MEDEIROS KREMER  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

MARTIN GUSTAVO RICHARTE  
Avaliador Externo (UFPR)

THIAGO DOS SANTOS PEREIRA  
Avaliador Externo (UEL)

# Resumo

Com o início da fase da recombinação e por consequência o desacoplamento dos fótons da matéria, as primeiras estruturas passaram a ser formadas no Universo. A Cosmologia tenta, desde os séculos passados, determinar relações matemáticas que descrevem o crescimento destas estruturas para pequenas e grandes escalas. Jeans inaugurou o estudo da formação de estruturas em 1902 levando em conta a geração de flutuações e a evolução dos modos perturbados para diferentes eras do Universo. Com seu trabalho, Jeans introduziu uma constante que hoje é conhecida como comprimento de Jeans que descreve a condição mínima, em termos de comprimento de onda, para que uma estrutura cósmica seja formada. Neste trabalho iremos fazer uso das equações de fluido da Cosmologia Newtoniana para estudar pequenas flutuações de densidade e temperatura em um Universo estático e em expansão.

# Abstract

After the decoupling of photons from matter, the process of structure formation was ignited, giving origin to the large scale structure of the Universe as is known today. One of the main goal of the XIX century cosmology was to establish a fundamental framework to describe the growth of small ripples and the mechanism behind the generation of such structures within small and large cosmological scales. The seminal work of Jeans in 1902 gave the first approach to deal with structures formation process by taking into account the physical origin of small fluctuation, along with the evolution of the perturbed modes during different kinds of cosmological eras. In the aforesaid work, Jeans introduced a characteristic scale, known as Jeans scale, which indicates the minimal condition which assures the formation of cosmic structures. In the present thesis, we are going to make use of such formalism within the context of Newtonian cosmology with a cosmic fluid as the main source. Our aim is to examine the small fluctuations of matter density along with small fluctuation of temperature for a static universe and for an expanding universe.

# Agradecimentos

- Ao professor Dr. Gilberto Medeiros Kremer: "Se eu fui capaz de ver mais longe, foi porquê estive em pé sobre os ombros de gigantes";
- À minha família;
- Aos colegas da pós-graduação em especial aos do grupo de cosmologia;
- Aos meus amigos Dr. Valdemar Moratto González e Me. Édipo Luis Féderle pelas impagáveis ajudas;
- À CAPES pelo apoio financeiro;
- À coordenação da pós-graduação;

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Mecânica dos Fluidos</b>	<b>7</b>
2.1	Definição de um Fluido . . . . .	7
2.2	Teoria do Contínuo . . . . .	9
2.3	Tópicos da Mecânica do Contínuo . . . . .	11
2.4	Cinemática de um Fluido . . . . .	11
2.4.1	Aceleração de uma Partícula Fluida em um Campo de Velocidade . . . . .	11
2.4.2	Taxa de Deformação de um Fluido . . . . .	13
2.4.3	Tensor Taxa de Deformação . . . . .	15
2.5	Equações Constitutivas . . . . .	16
2.5.1	Transferência de Quantidade de Movimento . . . . .	17
2.5.2	Lei de Fourier . . . . .	19
2.6	Fluidos newtonianos e não-newtonianos . . . . .	20
2.7	Equações de Balanço para Fluidos . . . . .	22
2.7.1	Transporte de Reynolds . . . . .	22
2.7.2	Balanço de Massa . . . . .	23
2.7.3	Balanço de Momento Linear . . . . .	24
2.7.4	Equação de Navier-Stokes . . . . .	26
2.7.5	Balanço de Energia Interna . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Cosmologia</b>	<b>29</b>
3.1	Princípio Cosmológico . . . . .	29
3.1.1	Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	30

3.2	Métrica de Robertson-Walker . . . . .	32
3.2.1	Lei de Hubble . . . . .	33
3.2.2	Desvio para o Vermelho (Redshift) . . . . .	35
3.2.3	Parâmetro de Desaceleração . . . . .	37
3.3	Equações de Friedmann . . . . .	37
3.4	Equação de Poisson . . . . .	38
3.5	Teoria da Formação de Estruturas . . . . .	40
3.5.1	Teoria de Jeans . . . . .	41
3.5.2	Teoria de Jeans para Fluidos . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Instabilidade gravitacional com pressão e energia interna em função da densidade e temperatura</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>Instabilidade gravitacional para um Universo estático e dissipativo</b>	<b>51</b>
5.1	Relação de Dispersão de Jeans . . . . .	51
5.1.1	$k_* = 0,5$ . . . . .	54
5.1.2	$k_* = 1,5$ . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Instabilidade gravitacional para um Universo em expansão e dissipativo</b>	<b>57</b>
6.1	Comprimento de Jeans e perturbação da densidade na ausência de dissipação .	57
6.1.1	$\Lambda = 100$ . . . . .	61
6.1.2	$\Lambda = 1/2$ . . . . .	62
6.2	Perturbação da densidade e temperatura na presença de dissipação . . . . .	62
6.2.1	$\Lambda = 100$ . . . . .	64
6.2.2	$\Lambda = 1/2$ . . . . .	66
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>70</b>
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

# Capítulo 1

## Introdução

A cosmologia é um ramo da astronomia que faz uso de métodos científicos para explicar a origem, estrutura e evolução do Universo. O principal postulado define o Universo altamente homogêneo e isotrópico. Essa propriedade garante que as observações feitas a partir do nosso único ponto de observação são representativas do Universo como um todo e podem, portanto, ser legitimamente usadas para testar modelos cosmológicos, [27].

O Universo visível parece o mesmo em todas as direções ao nosso redor, pelo menos, se olharmos para distâncias maiores que cerca de 300 milhões de anos-luz. A isotropia possui uma precisão com cerca de uma parte em  $10^5$  na radiação cósmica de fundo. Essa radiação vem viajando para nós há cerca de 14 bilhões de anos, apoiando a hipótese de que o Universo é o mesmo em todas as direções, [34].

A cosmologia aparece, para Einstein, como aplicação formal necessária de sua teoria da gravitação em uma totalidade que parecia inobservável. Essa questão impediu, durante um longo tempo, a caracterização da cosmologia como ciência. Embora a descoberta de Hubble de que o Universo está em expansão date do final dos anos 20, foi somente em 1964, graças a medida da radiação de 2,7 K pelo experimento COBE, que a cosmologia passou a ser considerada ciência.

Com o surgimento de técnicas de espectroscopia, em meados do século XIX, foi possível identificar elementos químicos que compõe o Sol e outras estrelas, assim como suas velocidades. Em 1929, Hubble usou esta técnica para medir o espectro de 45 galáxias e obteve desvios para o vermelho. Seu resultado evidenciou uma relação aproximadamente linear entre as velocidades e as distâncias, o que era esperado para um Universo em expansão, [28].

Tendo a evidência da expansão do Universo e da radiação cósmica de fundo, pode-se supor que o Universo primordial fora muito quente. O Universo se expande e isso nos mostra que a sua temperatura da radiação está sempre caindo. Portanto, quanto mais primitivo for o instante cósmico considerado, mais alta poderia ter sido sua temperatura, [30]. Como consequência, as taxas das reações entre as partículas eram muito maiores no Universo primitivo.

De acordo com o modelo cosmológico padrão, a radiação cósmica de fundo mostra um Universo homogêneo e isotrópico em grandes escalas porém heterogêneo em escalas menores, demonstrando um padrão complexo de grandes estruturas filamentosas com dimensões típicas da ordem de  $10 - 100 \text{ Mpc}^1$ .

Para se entender estas estruturas no processo de evolução do Universo é necessário uma análise do modelo padrão de partículas elementares que descreve a sua *história térmica*, que passa por um período de hadronização (formação de prótons e nêutrons), nucleossíntese primordial (formação de átomos de hélio a partir de nêutrons), tornando abundante a presença de elementos leves como hidrogênio, deutério, hélio e lítio, [28]. Deste modo, com o modelo padrão de partículas e o modelo cosmológico padrão, teve-se início a descrição matemática da formação das primeiras estruturas do Universo.

Num Universo dominado por matéria, o crescimento substancial das pequenas flutuações primordiais passa a ocorrer. Regiões mais densas do que a média acabam gerando concentrações de matéria resultando em formação de estruturas ainda hoje em evolução.

Os primeiros trabalhos que trouxeram à tona a teoria da formação de estruturas foi descrita por Jeans<sup>2</sup> em 1902, [11], [21]. A instabilidade de Jeans tem sido reconhecida como o mecanismo chave para explicar a formação de estruturas e sua evolução no regime linear, [25]. Em fluidos astrofísicos, o colapso de um objeto é atribuído a uma força auto-gravitacional que é responsável pela produção desta instabilidade, [32]. O modelo de Jeans descreve a condensação gravitacional de uma nuvem de gás auto-gravitante e procura as condições em que pequenas perturbações de uma nuvem gasosa crescem exponencialmente, levando a um colapso, [21]. Essa instabilidade provoca a fragmentação das nuvens de gás interestelar e subsequente formação de estruturas quando a pressão interna do gás não é suficiente para equilibrar a força da gravidade. Tem importância no plasma astrofísico, em particular na formação de estrelas no meio interestelar (ISM), [3]. Os parâmetros que são utilizados para

---

<sup>1</sup> $1pc = 1 \text{ parsec} = 3,08.10^{16}m.$

<sup>2</sup>James Hopwood Jeans, 1877-1946

quantificar esta instabilidade são o comprimento de Jeans e massa de Jeans, [21].

A evolução destas perturbações depende das equações de estado referente ao fluido dominante. Em um artigo publicado em [18], o tratamento das perturbações foi realizado considerando um fluido viscoelástico<sup>3</sup>. Neste trabalho, verificou-se que o limiar para o início da instabilidade aparece em comprimentos de onda mais elevados em um meio viscoelástico. O limite superior do número de onda, até que a instabilidade gravitacional é observada, é reduzido. Para um dado valor do número de onda, a taxa de crescimento diminui com o aumento dos valores dos coeficientes de módulo de elasticidade.

No artigo publicado em [3], estudou-se a teoria linear para a instabilidade de Jeans em um meio viscoelástico magnetizado na presença de rotação, fazendo uso do modelo hidrodinâmico generalizado (GH). Após a obtenção de uma relação de dispersão geral, com a ajuda de equações de perturbação linearizadas, a instabilidade de Jeans mostrou-se inalterada pela presença de campos magnéticos rotativos, porém ainda mantendo dependência de efeitos viscoelásticos.

No artigo [7], a análise de Jeans foi feita considerando um Universo estático e em expansão sob a influência de um fluido com viscosidade volumétrica. No primeiro caso para um Universo estático, os resultados demonstraram como a viscosidade volumétrica condiciona a evolução do contraste de densidade mantendo inalterado o valor da massa de Jeans. Para o segundo, foi obtida uma relação semelhante a de Jeans no qual demonstrou um amortecimento considerável do contraste de densidade.

Um outro trabalho realizado em [10], para regiões após a fase da recombinação, as ondas de densidade hidrodinâmicas foram analisadas incluindo viscosidade de cisalhamento e condução de calor para  $\rho = \rho_c$  bem como para  $\rho < \rho_c$  ( $\rho_c$  é a densidade crítica do Universo). Muito próximo ao final da fase da recombinação foi encontrado a já conhecida instabilidade de Jeans onde mostrou-se que a influência da viscosidade de cisalhamento sobre as instabilidades é desprezível, no entanto, está presente uma influência visível da viscosidade volumétrica.

Este trabalho teve como objetivo obter uma relação de dispersão afim de descrever, em termos dos comprimentos de onda das flutuações, o comportamento da instabilidade de Jeans para um gás ideal e dissipativo. Para isso, foi necessário o uso das equações de balanço de massa, momento linear e energia da Mecânica do Contínuo para determinação dos campos

---

<sup>3</sup>Fluido com características de elasticidade e viscosidade ao mesmo tempo.

escalares de densidade de massa, velocidade e temperatura. Para descrição dos termos dissipativos, foram atribuídas equações constitutivas para a viscosidade dinâmica e condução de calor, que são descritas pelo tensor das tensões presentes no fluido e pela Lei de Fourier, respectivamente.

A estrutura deste trabalho possui a seguinte forma. Inicialmente será abordado uma introdução a respeito dos princípios básicos da Mecânica dos Fluidos e da Cosmologia. Em seguida, serão feitas análises a respeito da relação de dispersão de Jeans na presença de viscosidade e condução de calor em um Universo estático, para logo em seguida serem feitas análises do comportamento dos contrastes de densidade e temperatura para um Universo em expansão, também na presença de viscosidade e condução de calor. E por fim, uma descrição dos resultados obtidos. Os capítulos 2 e 3 dizem respeito a estudos já existentes na literatura.

# Capítulo 2

## Mecânica dos Fluidos

### 2.1 Definição de um Fluido

Esta seção se baseia em [6]. A mecânica dos fluidos é a ciência que estuda o comportamento físico dos fluidos, assim como as leis que regem seu comportamento.

Esta área compreende ramos fundamentais de aplicações em engenharia como escoamento de fluidos em canais e condutos, a lubrificação, os esforços em barragens, os corpos flutuantes, as máquinas hidráulicas, a ventilação, a aerodinâmica e muitos outros assuntos que fazem das leis da Mecânica dos Fluidos um ótimo meio para resultados de aplicação prática.

A definição de um fluido é geralmente determinada por comparação deste com um sólido. A definição mais elementar diz: *Fluido é uma substância que não tem uma forma própria, assume o formato do recipiente.*

Podemos analisar essa distinção entre fluidos e sólidos com o experimento chamado "Experiência de Duas Placas", como descrita na figura 2.1.

Seja um sólido preso entre duas placas planas, uma inferior fixa e outra superior sendo submetida a uma força tangencial  $F_t$  (na direção do plano da placa).

Ao manter a força  $F_t$  constante, nota-se que o sólido sofre uma deformação angular até alcançar uma nova posição de equilíbrio. Neste equilíbrio, as tensões internas se igualam a força externa aplicada até que o sólido seja submetido novamente a uma nova força  $F_t$  para ter uma nova configuração.

Pode-se dizer então, que um sólido, quando sob força tangencial constante, deforma-se angularmente, mas atinge uma nova configuração de equilíbrio estático.

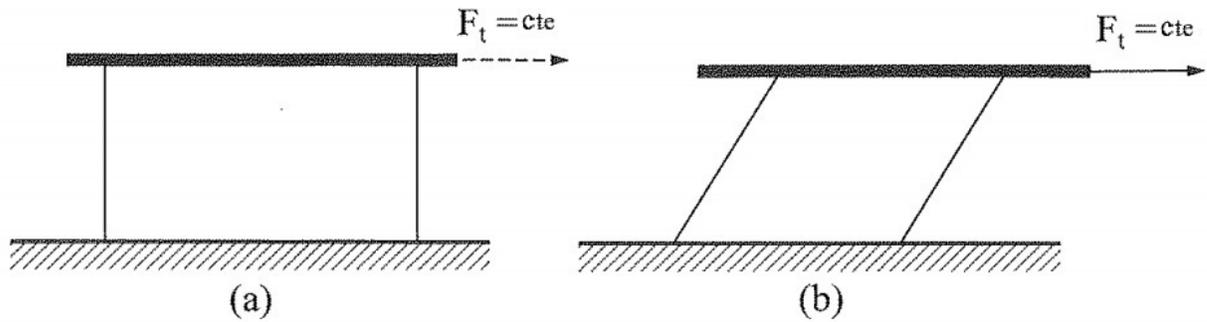


Figura 2.1: *Experiência de duas placas para um sólido sob força tangencial. Fonte: [6]*

Podemos fazer a mesma experiência mas agora inserindo um fluido entre as placas, como mostra a figura 2.2. Uma placa superior móvel e uma placa inferior fixa. A placa superior movimenta-se com a aplicação de uma força tangencial  $F_t$ .

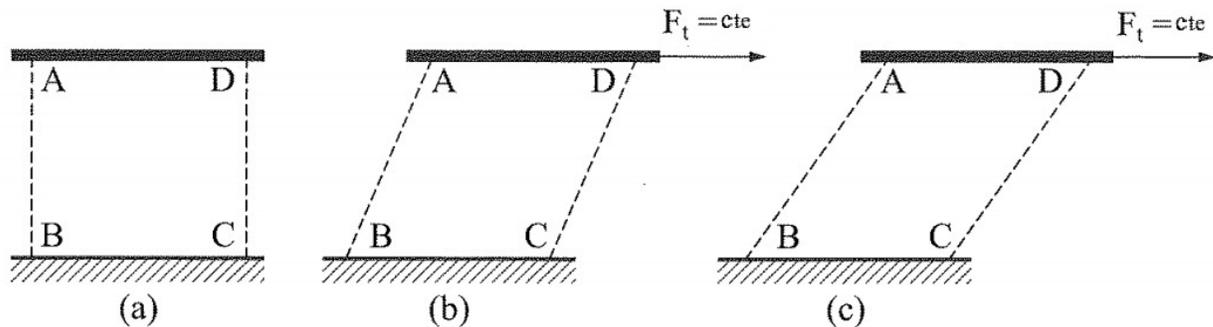


Figura 2.2: *Experiência de duas placas para um fluido escoando sob força tangencial. Fonte: [6]*

A primeira observação importante é que os pontos de contato entre o fluido e a placa superior continuam em correspondência durante o movimento, ou seja, as camadas de fluido adjacentes a placa terão a mesma velocidade da placa. Em contra partida, os pontos do fluido em contato com a placa fixa ficarão fixos junto a ela. Este é o chamado princípio da aderência: Os pontos de um fluido, em contato com uma superfície sólida, aderem aos pontos dela, com os quais estão em contato.

Então, ao contrário do comportamento do sólido, o volume de fluido ABCD não atinge uma nova posição de equilíbrio devido a ação da força  $F_t$ , mas sim, continua deformando-se continuamente, supondo-se as placas de comprimento infinito.

Pode-se dizer então que: *Fluido é uma substância que se deforma continuamente, quando submetida a uma força tangencial constante qualquer ou, em outras palavras, fluido é uma*

*substância que, submetida a uma força tangencial constante, não atinge uma nova configuração de equilíbrio estático.*

## 2.2 Teoria do Contínuo

A área de pesquisa também conhecida como Fenômenos de Transporte, formou-se ao longo do século XIX devido a necessidade de compreensão entre as analogias que viriam a surgir entre processos de transporte de quantidade de movimento, massa e energia em meios contínuos. A Mecânica do contínuo serve como base para estudos de Fenômenos de Transporte, [16].

A matéria é formada de átomos, que por sua vez são formados de prótons, elétrons e nêutrons, dessa forma dizemos que a matéria não é contínua. No entanto, hoje diversas teorias são desenvolvidas desconsiderando as estruturas moleculares dos materiais. Experimentos são feitos como, deflexão de um material devido a presença de uma força, taxa de escoamento de um fluido devido a gradientes de pressão, ou a análise da força de arrasto sob um corpo em movimento de queda no ar. Essas teorias são chamadas de Teorias do Contínuo. Tal teoria leva em consideração de que a matéria é infinitamente divisível. Sendo assim, a teoria do contínuo aceita materiais com volumes infinitesimais, referido como uma partícula do contínuo, e que em todos os sítios dessa partícula existem partículas vizinhas, [23].

O conceito de um contínuo é a base da mecânica clássica dos fluidos. A hipótese do contínuo é válida no tratamento de fluidos sob condições normais, [14]. Porém ela não apresenta resultados satisfatórios que estão de acordo com a propagação de ondas de comprimentos de ondas extremamente pequenos. Por outro lado, em certas circunstâncias, um gás rarefeito pode ser descrito por um processo contínuo. No caso de gases altamente rarefeitos, a hipótese do contínuo não pode ser assumida em virtude das moléculas estarem dispostas de tal forma que um volume desta ordem de grandeza pode não conter moléculas suficientes para caracterizar o contínuo, [8]. Como consequência, cada propriedade do fluido é considerada como tendo um valor definido em cada ponto do espaço. Dessa forma, algumas propriedades de um escoamento, como massa específica, temperatura, velocidade etc, são consideradas funções contínuas da posição e do tempo.

A validação da hipótese do contínuo ocorre se as escalas de comprimento dos processos físicos forem várias ordens de magnitudes maiores que o espaçamento médio entre as moléculas

do meio. Uma das hipóteses mais interessantes dos fenômenos de transferência é a de que os processos físicos ocorrem na direção do equilíbrio, isto é, respeitando a segunda Lei da Termodinâmica, [16]. Para qualquer processo físico, o fluxo de grandezas como temperatura, concentração e quantidade de movimento ocorre devido a variação destas quantidades.

Descrever processos físicos analisando molécula por molécula é algo inviável, por isso, um bom método de estudo é o uso de termos estatísticos usando a Mecânica Estatística. Por outro lado, pode-se propor uma abordagem macroscópica da matéria, pensando em termos de distribuição espacial contínua de massa, ou seja, o uso de um meio contínuo, [16]. Como já mencionado anteriormente, o contínuo é uma proposta válida desde que a menor escala de interesse seja muito maior que as escalas moleculares.

O estudo das propriedades de um fluido a partir do comportamento de suas moléculas consiste no enfoque molecular. Este estudo traz muitas complicações para as equações governantes tornando-as, quase sempre, incapazes de serem solucionadas. Por esta razão é conveniente tratar o fluido como um meio contínuo. A hipótese do contínuo consiste em abstrair-se da composição molecular e sua conseqüente descontinuidade ou seja, por menor que venha a ser uma divisão do fluido, esta parte isolada deverá apresentar as mesmas propriedades que a matéria tratada como um todo. A esta pequena parte do fluido costuma-se chamar de Partícula ou Ponto Material, [8].

Através da hipótese do contínuo, pode-se definir a densidade de um fluido em um ponto como sendo o limite da razão entre  $\delta m$  (massa) e  $\delta V$  (volume) quando  $\delta V$  tende para um certo valor limite  $\delta V^*$ . Logo,

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V}. \quad (2.1)$$

Para gases e líquidos submetidos a condições normais,  $\delta V^*$  é da ordem de  $10^{-9}\text{mm}^3$ . Por exemplo: um volume de  $10^{-9}\text{mm}^3$  de ar nas condições normais de temperatura e pressão, contem aproximadamente  $3 \cdot 10^7$  moléculas de ar. Portanto, evidencia-se que um volume desta grandeza é suficientemente pequeno para que em Meteorologia, Engenharia, etc., seja tomado como sendo uma Partícula ou Ponto Material. Enquanto que a quantidade de moléculas existentes neste volume é suficiente para caracterizar o fluido como um todo. A hipótese do contínuo permite estudar as propriedades do fluido através do cálculo diferencial e/ou integral, uma vez que a continuidade é fundamental na teoria do cálculo, [8].

## 2.3 Tópicos da Mecânica do Contínuo

A mecânica do contínuo estuda a resposta dos materiais sob condições de tensão. Ela se divide em duas partes fundamentais:

- Princípios gerais comuns a todos os meios.
- Equações constitutivas que definem materiais idealizados.

Os princípios gerais são:

- conservação de massa;
- balanço de momento linear;
- balanço de momento angular e energia;
- lei da desigualdade da entropia.

Matematicamente temos duas formas equivalentes dos princípios gerais:

- (1) Forma integral, formulada por um volume finito de matéria no contínuo.
- (2) As equações de campo para um volume diferencial de matéria (partículas) em qualquer ponto do campo de interesse.

O segundo tópico a ser abordado são as *equações constitutivas* que são usadas para definir os materiais idealizados. Materiais idealizados representam certas características do comportamento de materiais naturais. Por exemplo, materiais elásticos quando submetidos a perturbações externas tendem a se deformar e a voltar ao seu estado original após as perturbações cessarem. Um outro exemplo é um fluido linearmente viscoso, no qual é baseado na suposição de que o estado de tensão depende linearmente das taxas instantâneas de variação dos comprimentos e ângulos mútuos do elemento de volume, [23].

As equações constitutivas descrevem o comportamento dos materiais sob condições de perturbação a qual são submetidos e não somente a sua composição química.

## 2.4 Cinemática de um Fluido

### 2.4.1 Aceleração de uma Partícula Fluida em um Campo de Velocidade

A translação de uma partícula fluída está conectada com o campo de velocidade  $v = v(x_1, x_2, x_3, t)$ . A aceleração pode ser encontrada a medida que uma partícula se move num campo de esco-

amento conforme ilustra a figura 2.3, [14].

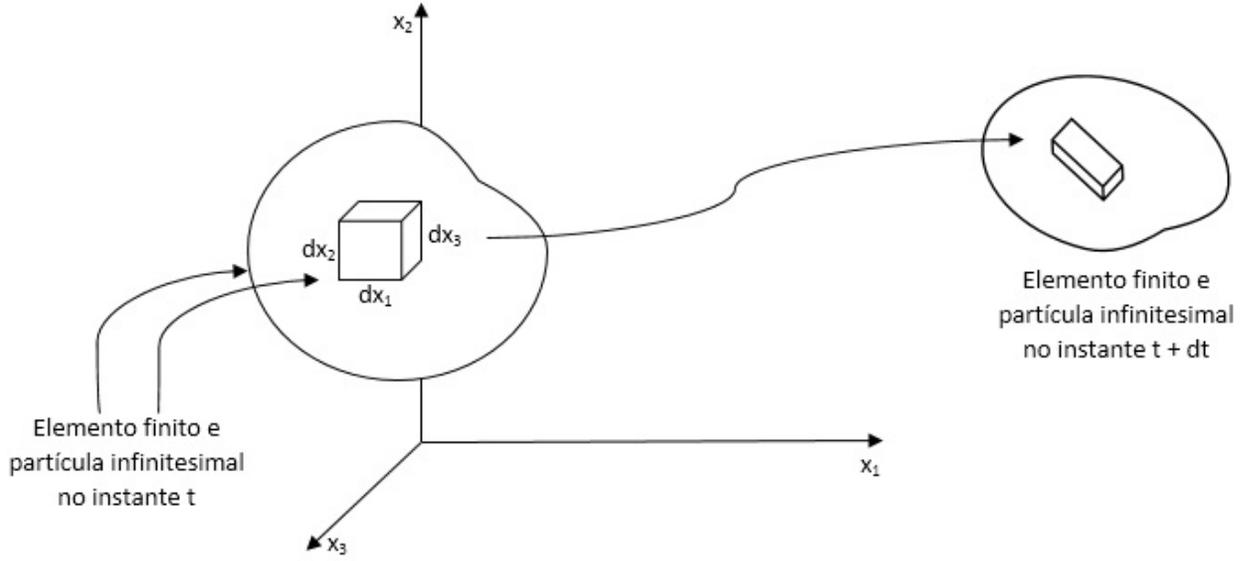


Figura 2.3: *Elemento de fluido e partícula infinitesimal nos instantes t e t+dt. Fonte: [14]*

No instante  $t$ , a partícula está na posição  $x_1, x_2, x_3$  e tem velocidade  $v(t) = v(x_1, x_2, x_3, t)$ . Após um intervalo de tempo  $dt$ , a partícula se desloca para  $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$  tendo então uma velocidade  $v(t+dt) = v(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t + dt)$ . Aplicando a regra da cadeia para a variação de velocidade temos:

$$dv_i = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right) dx_3 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt. \quad (2.2)$$

O índice  $i$  representa as componentes da velocidade. Aplicando a derivada temporal em (2.2) obtemos a aceleração da partícula. Assim:

$$a = \frac{dv_i}{dt} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right) \frac{dx_1}{dt} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right) \frac{dx_2}{dt} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right) \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Temos então:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (2.4)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.4),  $\partial v_i / \partial t$ , é chamado de *aceleração local* e corresponde a variação da velocidade em um mesmo ponto do campo. O segundo termo,  $v_j \partial v_i / \partial x_j$ , é chamado de *aceleração convectiva* e corresponde a variação da velocidade em um mesmo tempo em pontos distintos do campo. Ele representa o efeito de uma partícula

de fluido que se move para um novo local no escoamento, onde o campo de velocidade é diferente, [12].

### Convenção de soma de Einstein

Este tópico foi retirado da referência [23]. Considere a soma

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n. \quad (2.5)$$

Podemos usar a equação anterior sob uma forma mais compacta usando a notação de soma:

$$s = \sum_{i=1}^n a_ix_i. \quad (2.6)$$

Obviamente, as equações seguintes tem o mesmo significado que (2.6):

$$s = \sum_{j=1}^n a_jx_j, \quad s = \sum_{m=1}^n a_mx_m, \quad s = \sum_{k=1}^n a_kx_k. \quad (2.7)$$

Os índices  $i$  em (2.6) ou  $j$  ou  $m$  ou  $k$  em (2.7) são chamados *índices mudos*, isto é, a soma é independente da letra usada para o índice. Podemos simplificar ainda mais a forma da equação (2.5) se adotarmos a seguinte convenção: Sempre que um índice é repetido uma vez, então temos um índice mudo, indicando uma soma com o índice que assume os valores inteiros 1, 2, ..., n. Essa convenção é conhecida como *convenção de soma de Einstein*. Usando essa convenção, a expressão (2.5) pode ser escrita simplesmente como

$$s = a_ix_j, \quad s = a_jx_j, \quad s = a_mx_m, \quad s = a_kx_k, \quad \text{etc.} \quad (2.8)$$

### 2.4.2 Taxa de Deformação de um Fluido

Considere um elemento de fluido que se deforma na direção  $x_1$  no plano  $(x_1, x_2)$  conforme a figura 2.4. Sendo assim, a componente de velocidade  $v_2 = 0$  e a velocidade  $v_1$  é uma função de  $x_1$ . Inicialmente o elemento de fluido tem tamanho  $\Delta x_1$ , tal que se deforma continuamente com o tempo  $t$  devido a presença da velocidade  $v_1$ . Essa condição nos leva a trabalhar com a *taxa* de deformação linear e não com deformação linear. Então, a taxa de deformação do elemento na direção  $x_1$  é definida como a variação relativa no tamanho do elemento naquela

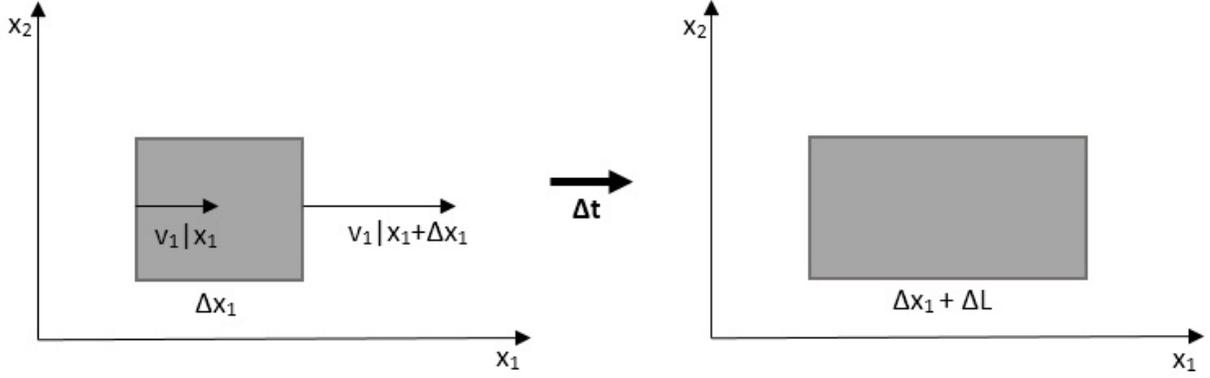


Figura 2.4: *Deformação linear de um elemento de fluido em escoamento plano unidirecional.*

direção, [16]. Em termos matemáticos dizemos que:

$$\Delta_1 \equiv \frac{1}{\Delta x_1} \frac{d}{dt}(\Delta x_1) = \frac{v_{x_1+\Delta x_1} - v_{x_1}}{\Delta x_1}. \quad (2.9)$$

Considerando o lado direito de (2.9) suficientemente pequeno,

$$\frac{1}{\Delta x_1} \frac{d}{dt}(\Delta x_1) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}. \quad (2.10)$$

De forma análoga, podemos obter a *taxa de deformação volumétrica*, isto é, a taxa de deformação nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , assim,

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d}{dt} \Delta V = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \frac{d}{dt}(\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3). \quad (2.11)$$

Calculando as derivadas parciais acima, temos então que a taxa de deformação volumétrica é a soma das taxas de deformação linear nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  ou o divergente do vetor velocidade. Isto é,

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (2.12)$$

ou em coordenadas cartesianas retangulares,

$$\Delta \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (2.13)$$

### 2.4.3 Tensor Taxa de Deformação

Como já mencionado, um fluido é um material distribuído de acordo com a hipótese do contínuo que se deforma sob tensão tangencial. Nesta seção iremos determinar o tensor taxa de deformação ou de cisalhamento para um fluido em escoamento. A figura 2.5 mostra um elemento de massa fluida em escoamento bidimensional com lados  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ , onde após um tempo  $\Delta t$ , passa a ter uma deformação angular definida por  $\alpha$  e  $\beta$ . Seguindo a definição de taxa de deformação, a taxa de variação angular é dado por:

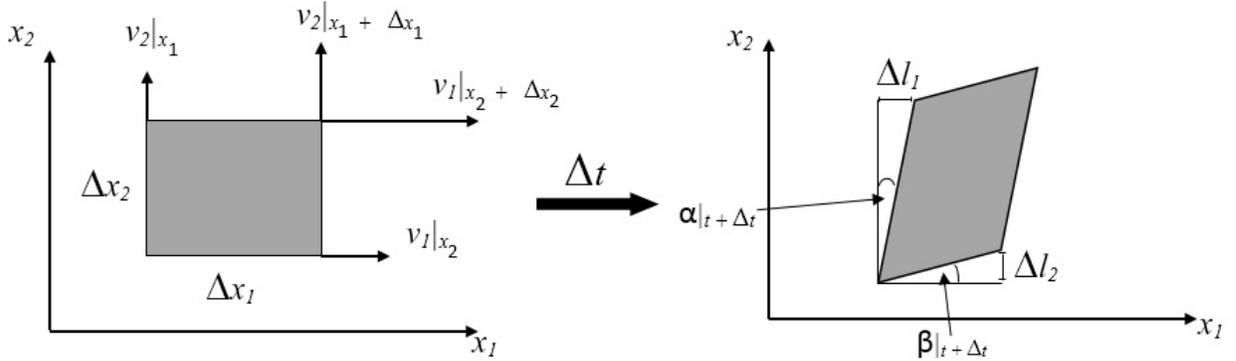


Figura 2.5: Deformação de cisalhamento no plano  $(x_1, x_2)$  de um elemento de fluido em escoamento.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\alpha|_{t+\Delta t} - \alpha|_t}{\Delta t} + \frac{\beta|_{t+\Delta t} - \beta|_t}{\Delta t} \right). \quad (2.14)$$

De acordo com a figura,

$$\alpha|_t = \beta|_t = 0 \quad (2.15)$$

e

$$\alpha|_{t+\Delta t} + \beta|_{t+\Delta t} = \arctan \frac{\Delta l_1}{\Delta x_2} + \arctan \frac{\Delta l_2}{\Delta x_1} \approx \frac{\Delta l_1}{\Delta x_2} + \frac{\Delta l_2}{\Delta x_1}, \quad (2.16)$$

onde

$$\Delta l_1 = (v_1|_{x_2+\Delta x_2} - v_1|_{x_2})\Delta t. \quad (2.17)$$

$$\Delta l_2 = (v_2|_{x_1+\Delta x_1} - v_2|_{x_1})\Delta t. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18), (2.17) e (2.16) em (2.14) e considerando  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  suficientemente pequenos,

$$\frac{1}{2} \frac{d(\alpha + \beta)}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right). \quad (2.19)$$

A equação acima calcula a taxa de deformação no plano  $(x_1, x_2)$ . Para um caso geral, ou seja, no hiperplano  $(x_1, x_2, x_3)$ , temos

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.20)$$

Ou na forma matricial,

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A expressão (2.20) é o *tensor taxa de deformação* ou *tensor de cisalhamento*. Importante notar a simetria de  $D_{ij}$ . Este tensor obedece a todas as leis dos tensores cartesianos, tais como a dos invariantes tensoriais, as leis de transformação e dos eixos principais, [12].

## 2.5 Equações Constitutivas

Diferentes corpos, submetidos a esforços idênticos reagem diferentemente. É o que se percebe quando se submete um fio de aço ou um fio de borracha a um mesmo esforço de tração, [2]. As equações de balanço que serão obtidas posteriormente são aplicáveis a todos os meios contínuos, mas não dizem nada sobre a resposta de materiais específicos às cargas de força ou temperatura. Para preencher esta necessidade, introduzimos as *equações constitutivas*. Matematicamente, a utilidade destas equações é descrever as relações entre as equações de campo cinemático, mecânico e térmico e permitir a formulação de problemas bem postos em mecânica do contínuo, [26]. Idealmente, seria necessário deduzir estas equações constitutivas a partir de imagens moleculares da matéria, porém, as técnicas computacionais atuais não são adequadas para esta tarefa, [4]. Portanto, estas equações são obtidas experimentalmente, [1], e os resultados sugerem modelos matemáticos idealizados para várias classes de materiais, [4].

Quando tratamos de equações constitutivas, conseqüentemente levamos em conta o comportamento do material sob efeitos de carga e não apenas de sua composição.

Na discussão anterior, foram encontrados as taxas de deformação de um meio contínuo em função dos seus campos de velocidade. Na seção seguinte será obtido a relação dessas taxas com as tensões do fluido.

### 2.5.1 Transferência de Quantidade de Movimento

No caso da transferência de movimento, podemos encontrar a equação constitutiva analisando o *experimento de Newton*, também conhecido como *escoamento cisalhante unidirecional*. O esquema é mostrado na figura 2.6.

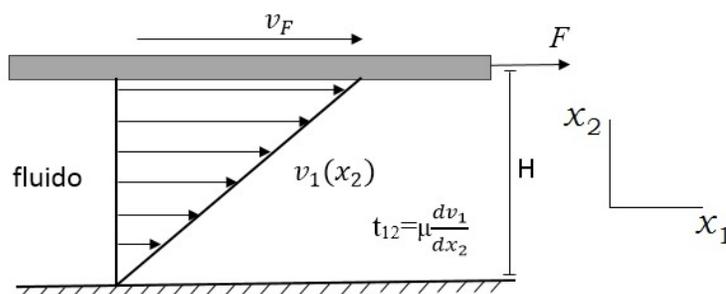


Figura 2.6: O experimento de Newton de transferência de quantidade de movimento. Fonte: [16]

Um fluido de altura  $H$  está confinado entre duas placas paralelas, uma móvel na parte superior e outra fixa na parte inferior. Uma força  $F$  é aplicada sobre a placa superior, de tal forma que ela produz uma velocidade  $v_F$  constante. Com isso, surge na placa superior uma tensão tangencial  $t_{ij}$ . Para esse caso, de um movimento unidirecional, temos  $t_{12}$ . Assim podemos escrever  $t_{12} = \frac{F}{A}$ , com  $A$ =Área da placa.

Devido a transferência de quantidade de movimento da placa para o fluido, observa-se que o mesmo entra em movimento criando uma distribuição espacial de velocidades,  $v_1(x_2)$ , que é diretamente proporcional a altura  $H$ , ou seja,  $v_1(x_2 = 0) = 0$  e  $v_1(x_2 = H) = v_F$ . Estando a placa inferior fixa, esta tende a resistir ou frear as camadas de fluido adjacentes, criando uma distribuição de velocidades. A variação da velocidade  $dv_1/dx_2$  é a taxa de transferência de quantidade de movimento, [16].

Newton estabeleceu uma relação de proporcionalidade entre a taxa de deformação e a tensão tangencial, a qual denominou de *viscosidade dinâmica*,  $\mu$ ,

$$t_{12} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (2.22)$$

A equação (2.22) representa a equação constitutiva de transferência de quantidade de movimento para um fluido em escoamento cisalhante em uma única direção.

A intensidade da resistência que um fluido exerce para escoar é determinada pela *viscosidade*,  $\mu$ . Ela determina a taxa de deformação de um fluido que é gerada por uma determinada tensão de cisalhamento aplicada. O ar, por exemplo, possui uma viscosidade 50 vezes menor que a da água que por sua vez possui uma viscosidade 300 vezes menor que a do óleo SAE 30W, [36]. Os fluidos podem possuir uma vasta gama de valores de viscosidade.

Evidências experimentais indicam que a viscosidade também possui dependência com a temperatura, [35]. Isso pode ser observado nas forças de coesão molecular dos líquidos e gases. Quanto aos líquidos, as forças moleculares são maiores que a dos gases, então para um aumento de temperatura, o espaçamento médio entre as moléculas do gás aumenta, ocasionando diminuição do atrito e por consequência uma mudança na viscosidade.

Como o estado de tensão de um fluido em movimento de corpo rígido (não se deforma) é dado por um tensor isotrópico, ao lidar com um fluido em movimento geral, é natural decompor o tensor das tensões em duas partes, isto é, a parte hidrostática

$$\vec{t}_{repouso} = -p\vec{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

onde  $\vec{I}$  é a matriz identidade, e a parte dinâmica  $\vec{t}'$ , que depende somente da taxa de deformação de um fluido em movimento, de tal modo que ela é nula para fluidos em movimento de corpo rígido ou em repouso. E  $p$  é um escalar que não depende explicitamente da taxa de deformação, [23]. Dessa forma,

$$\vec{t} = -p\vec{I} + \vec{t}'. \quad (2.24)$$

No caso mais geral, na presença de deformação volumétrica e de cisalhamento das três dimensões a parte dinâmica  $\vec{t}'$  é dada pela relação, [16]:

$$\vec{t}' = 2\mu\vec{D} - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{I} + \eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{I}. \quad (2.25)$$

Onde  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  corresponde a deformação volumétrica,  $\vec{D}$  é o tensor taxa de deformação dado por (2.20) e  $\eta$  é a viscosidade volumétrica, esta última é nula para gases ideais. Dessa

forma, substituindo (2.25) em (2.24), temos a equação constitutiva para a transferência de quantidade de movimento:

$$\vec{t} = -p\vec{I} + 2\mu\vec{D} - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{I} + \eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{I}. \quad (2.26)$$

Ou na forma de componentes

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{ij} + \eta \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{ij}. \quad (2.27)$$

Em um fluido ideal,  $\mu = 0$  e  $\eta = 0$ , (como consequência, sem deformação volumétrica) a expressão (2.27) se reduz a (2.23),

$$t_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (2.28)$$

A equação (2.28) representa a equação constitutiva para um fluido em repouso ou em movimento uniforme.

## 2.5.2 Lei de Fourier

Em um meio contínuo há transferência de energia térmica por condução sempre quando o mesmo apresentar gradientes de temperatura, ao passo que gradientes de velocidade produzem transferência de quantidade de movimento. A equação constitutiva que relaciona o fluxo de calor por condução e temperatura é conhecida como Lei de Fourier [16]. Como exemplo, considere um sólido em forma de barra, longa e com pequena seção transversal, constituída de um material homogêneo e isotrópico, inicialmente com uma temperatura  $T$  igualmente distribuída como mostrado na figura 2.7. Ao fornecer calor a uma das extremidades, um desequilíbrio térmico surge ocasionando um fluxo de calor no sentido oposto ao do gradiente de temperatura, isto é, haverá um fluxo de calor da extremidade mais quente para a mais fria.

A Lei de Fourier é caracterizada pelo *vetor fluxo de calor*  $\vec{q}$ . A relação entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura nesse caso é linear na direção  $x_1$ , ou seja,  $q_1$ . Generalizando para um caso tridimensional temos:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.29)$$

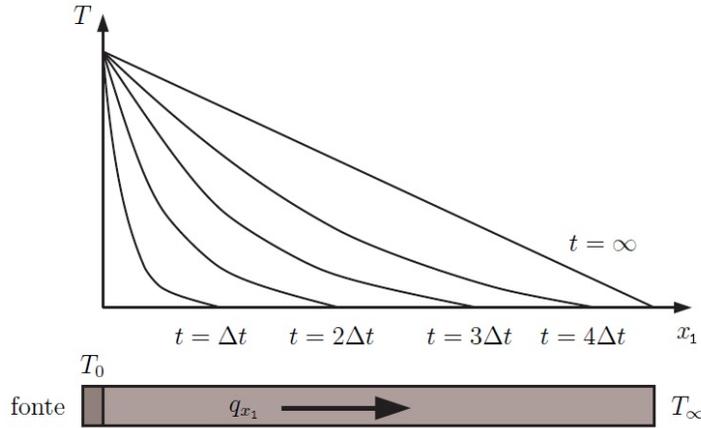


Figura 2.7: *Condução de calor em uma barra.* Fonte: [16]

onde  $\lambda$  é a *condutividade térmica*, e que de acordo com a teoria cinética para gases ideais possui a seguinte forma:

$$\lambda = \frac{15}{4} \frac{k_B}{m} \mu, \quad (2.30)$$

onde  $k_B$  e  $m$  são a constante de Boltzmann<sup>1</sup> e a massa (correspondente a uma molécula do meio), respectivamente. Sua dimensão é  $[\lambda] = \frac{J}{msK}$ .

## 2.6 Fluidos newtonianos e não-newtonianos

Quando uma tensão de cisalhamento é aplicada num sólido elástico, este se deforma a partir de sua configuração inicial até que essa tensão perdure. A deformação do sólido é mantida até que o cisalhamento for mantido, e após a tensão ser removida, o sólido volta ao seu estado original de configuração. Quando uma tensão de cisalhamento é aplicada em uma camada de fluido, este irá deformar-se a partir de sua configuração inicial atingindo um estado constante, onde o fluido se deforma continuamente com uma taxa de cisalhamento diferente de zero. Após cessar a tensão de cisalhamento, o fluido irá manter a sua configuração final mesmo com a retirada da mesma. Para tais líquidos, não é necessário nenhum esforço para manter dada quantidade de deformação, mas é necessária uma determinada quantidade de tensão de cisalhamento para manter uma taxa constante de deformação, [23]. Todo fluido que obedece essa característica e às equações constitutivas dadas na seção anterior são conhecidos como *fluidos newtonianos*. O comportamento linear de um fluido Newtoniano pode ser visto na

<sup>1</sup>Ludwig Boltzmann, 1844-1906

figura 2.8. Alguns exemplos são a água, ar e gasolina, [14].

Para fluidos não-newtonianos o esforço de cisalhamento depende da taxa de tensão de cisalhamento, [35]. Dois exemplos familiares são o mel e a pasta dental. A pasta dental comporta-se como um fluido quando espremida do tubo. Contudo, ela não escorre por si só quando a tampa é removida. Há uma demarcação ou um limite de tensão abaixo do qual a pasta dental comporta-se como um sólido. Os fluidos não-newtonianos são geralmente classificados como tendo um comportamento independente ou dependente do tempo, [14]. Para muitas aplicações em engenharia, numerosas equações empíricas têm sido propostas para modelar as relações observadas entre a tensão de cisalhamento e taxa de deformação. Uma das mais adequadamente apresentadas é a do modelo de potência, que para um escoamento unidimensional, [14], é dada por

$$t_{12} = c \left( \frac{dv_1}{dx_2} \right)^n . \quad (2.31)$$

Onde o expoente  $n$  é chamado de índice de *comportamento de escoamento* e o coeficiente  $c$  é o *índice de consistência*. Esta equação reduz-se à lei de Newton para  $n = 1$  e  $c = \mu$ .

A figura 2.8 mostra a relação entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação para alguns tipos de fluidos.

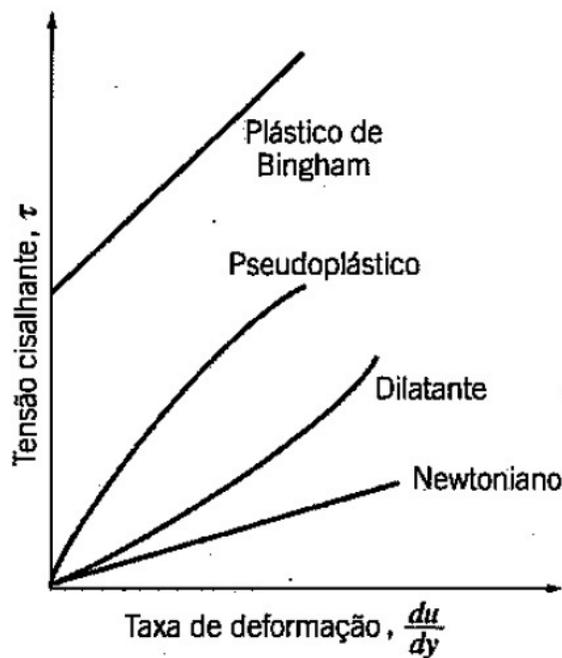


Figura 2.8: Tensão de cisalhamento como função da taxa de deformação para um escoamento unidimensional de vários fluidos não-newtonianos. Fonte: [14]

## 2.7 Equações de Balanço para Fluidos

A teoria termodinâmica dos fluidos tem por objetivo a determinação de cinco campos escalares, em cada ponto do espaço  $x$  e em todo o instante de tempo  $t$ , [20]:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) & \text{—densidade de massa} \\ v_i(\vec{x}, t) & \text{—velocidade} \\ T(\vec{x}, t) & \text{—temperatura}\end{aligned}\tag{2.32}$$

O conhecimento destes campos se faz através do uso das equações de balanço de massa (densidade), quantidade de movimento (momento linear) e energia.

### 2.7.1 Transporte de Reynolds

Na dinâmica dos fluidos, é mais comum trabalhar com um *volume de controle*, definido como uma região do espaço selecionada para estudo, figura 2.9. O tamanho e a forma de um sistema pode mudar durante o processo, mas nenhuma massa cruza suas fronteiras. Um volume de controle, por outro lado, permite que a massa escoe para dentro ou para fora de suas fronteiras, as quais são chamadas de *superfície de controle*. Um volume de controle também pode se movimentar e deformar durante o processo, mas muitas aplicações do mundo real envolvem volumes de controle fixos e não deformáveis, [12].

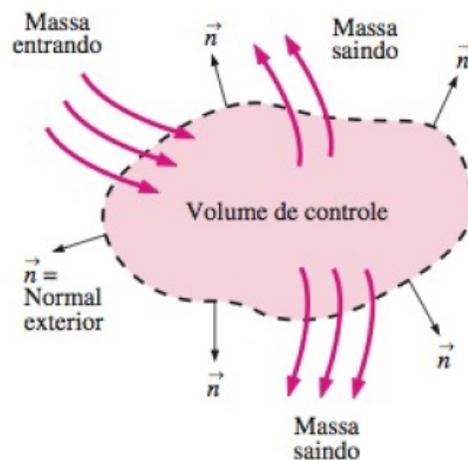


Figura 2.9: Fluxo de massa através do volume de controle. Fonte: [12]

Na mecânica dos fluidos, em geral, é mais conveniente trabalhar com volume de controle

com as variações em um sistema. A relação entre as taxas de variação no tempo de uma propriedade extensiva para um sistema e para um volume de controle é expressa pelo *Teorema de Reynolds* que oferece a ligação entre as abordagens de sistema e o volume de controle. Sua expressão é:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \vec{T}(\vec{x}, t) dV = \int_{V_C} \frac{\partial \vec{T}(\vec{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{S_C} \vec{T}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.33)$$

Onde  $\vec{T}(\vec{x}, t)$  é um escalar ou uma função tensorial com coordenadas espaciais  $(x_1, x_2, x_3)$  e tempo  $t$ . Como veremos a seguir, são exemplos de  $T(x, t)$  a densidade  $\rho(x, t)$  ou momento linear  $\rho(x, t)v(x, t)$ . O volume material  $V_m$  coincide instantaneamente com o volume de controle  $V_C$ , e consiste nas mesmas partículas de material em todos os momentos, e portanto, tem contorno  $S_m$  dependente do tempo ao movimento do material.  $\hat{n}$  é o vetor normal para fora da superfície, [12]. A derivada,  $D/Dt$ , na frente da integral do lado esquerdo da igualdade na expressão (2.33) é chamada de *derivada material* e enfatiza que o volume de contorno da integral se move com o material e estamos calculando a sua taxa seguindo os movimentos do material, [23].

## 2.7.2 Balanço de Massa

Para uma superfície que se move com as partículas, o fluxo de densidade de massa,  $\rho(x, t)$ , é zero, pois se trata de uma superfície material, sendo assim, a massa é uma quantidade conservativa no processo. Tal característica se dá pelo fato que a massa não pode ser criada no interior de um volume de controle por meio de ações externas, [20]. Dessa forma, temos que

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho(x, t) dV = 0. \quad (2.34)$$

Podemos usar o teorema de transporte de Reynolds dado por (2.33):

$$\int_{V_C} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dV = - \int_{S_C} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \rho(x, t) dV + \int_{S_C} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (2.36)$$

Segundo o Teorema da divergência, ou teorema de Gauss: *Dado um campo vetorial  $\vec{f}$  qualquer, e um volume  $V$  no espaço envolvido por uma superfície fechada,  $S$ , tem-se a igualdade*

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) dV = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.37)$$

Dessa forma, com  $\vec{f} = \rho\vec{v}$  em (2.36), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \rho dV + \int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) dV = 0. \quad (2.38)$$

Como o volume de controle não varia com o tempo, o operador  $\partial/\partial t$  pode se distribuir dentro da integral, [23], então

$$\int_{V_C} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) \right] dV = 0. \quad (2.39)$$

A expressão (2.39) deve valer para qualquer volume de controle independente de seu tamanho ou forma. Isso é possível somente se o integrando for identicamente igual a zero, [12]. Então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0. \quad (2.40)$$

Ou na forma de componentes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.41)$$

A expressão (2.41), também chamada de *Equação da Continuidade*, nos diz que *a taxa de variação temporal da massa no interior do volume de controle é igual ao fluxo líquido de massa através da superfície de controle.*

### 2.7.3 Balanço de Momento Linear

O fluxo de densidade de momento linear é o tensor pressão  $p_{ij}$ . O negativo do tensor pressão é o tensor tensão  $t_{ij}$ , isto é,  $p_{ij} = -t_{ij}$ , [20]. A densidade de momento linear também é uma quantidade conservativa, razão pela qual a sua produção é nula. O suprimento da densidade de momento linear se deve a uma força externa por unidade de massa aqui denominada  $\vec{B}$ :

$$\int_{S_C} \vec{t} dS + \int_{V_C} \rho \vec{B} dV = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{v} dV. \quad (2.42)$$

Usando o teorema de transporte de Reynolds com  $\vec{T} = \rho\vec{v}$ , a equação (2.42) se torna

$$\int_{S_C} \vec{t} dS + \int_{V_C} \rho \vec{B} dV = \int_{V_C} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_{S_C} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.43)$$

Em outras palavras, a equação (2.43) nos diz que: *A força total exercida sobre o volume de controle  $V_C$  é igual a soma entre a taxa de variação de momento linear dentro do volume de controle e a saída líquida de momento linear através da superfície de controle*, [23]. Usando o teorema da divergência dado por (2.37) nas integrais sobre as superfícies de controle de tal forma que  $\vec{f}_{\vec{t}} = \vec{t}$  e  $\vec{f}_{\vec{v}} = \rho\vec{v}\vec{v}$ , então (2.43) se torna:

$$\int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot \vec{t} dV - \int_{V_C} \rho \vec{B} dV = \int_{V_C} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dV \quad (2.44)$$

Onde  $\vec{v}\vec{v}$  é um vetor produto chamado de *produto exterior* do vetor velocidade por ele mesmo, [12]. Reescrevendo a expressão acima

$$\int_{V_C} \left[ -\vec{\nabla} \cdot \vec{t} + \rho \vec{B} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right] dV = 0. \quad (2.45)$$

Tomando a regra do produto na parcela  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})$  e usando a equação do balanço de massa dado por (2.40) temos

$$\int_{V_C} \left[ -\vec{\nabla} \cdot \vec{t} + \rho \vec{B} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] dV = 0. \quad (2.46)$$

A lei integral da conservação de momento linear só pode ser satisfeita se o integrando for nulo para qualquer ponto do espaço em qualquer instante, [23]. Então

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{t} + \rho \vec{B} = 0. \quad (2.47)$$

Podemos reescrever a expressão acima sob a forma de componentes:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0. \quad (2.48)$$

Posteriormente iremos usar  $B_i$  como sendo o potencial gravitacional por unidade de massa  $\vec{\nabla} \phi$ . Quando tratamos o balanço de momento linear como um fluido ideal, a equação (2.48)

passa a ter somente forças devido ao gradiente de pressão e a força externa por unidade de massa,  $B_i$ , [35], portanto

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = 0. \quad (2.49)$$

A equação acima é conhecida como *Equação de Euler*, e como já citado, ela é caracterizada pela ausência de termos dissipativos.

## 2.7.4 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes são derivadas parciais que determinam campos de velocidade e pressão num escoamento. Ela estabelece que mudanças no momento e aceleração de uma partícula fluida são o resultado das mudanças na pressão e forças viscosas dissipativas atuando no fluido. Tais forças são originadas de interações moleculares. Diferentemente das equações algébricas, esta equação estabelece relações ente as taxas de variação ou fluxos, como por exemplo, velocidade e pressão. Podemos substituir a equação constitutiva dada por (2.27) em (2.48) e assim obter,

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{ij} \right) + \eta \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] + \rho B_i = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Esta é a equação diferencial geral da quantidade de movimento ou de Navier-Stokes para um fluido Newtoniano. A suposição de que a viscosidade volumétrica,  $\eta$ , é zero, é conhecida como *suposição de Stokes*. Então a expressão (2.50) toma a seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{ij} \right) \right] + \rho B_i = 0 \quad (2.51)$$

## 2.7.5 Balanço de Energia Interna

A energia total do sistema irá variar em função da taxa de calor  $\dot{Q}$  recebido pelo sistema e o trabalho por unidade de tempo  $\dot{W}$  realizado sobre o sistema, que descreve a primeira lei da termodinâmica, [16]. A taxa de calor  $\dot{Q}$  é calculado a partir do vetor fluxo específico de calor

$\vec{q}$  integrado sobre toda a superfície do sistema, isto é

$$\dot{Q} = - \int_{S_S} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.52)$$

O sinal negativo indica que o fluxo de calor para dentro do sistema é positivo. O trabalho  $W$  por unidade de tempo realizado pela forças de superfície sobre o sistema é

$$\dot{W} = \int_{S_S} [(\vec{t} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v}] dS. \quad (2.53)$$

A taxa de variação da energia total do sistema  $DE/Dt$  é igual à soma da taxa de calor fornecido ao sistema através da superfície,  $\dot{Q}$ , e da taxa de trabalho realizado sobre o sistema,  $\dot{W}$ . Isto é

$$\frac{DE}{Dt} = \dot{Q} + \dot{W}. \quad (2.54)$$

Usando o teorema de transporte de Reynolds (2.33) para  $DE/Dt$  na combinação das equações (2.52), (2.53), (2.54), e levando em consideração que  $\vec{t}$  é um tensor simétrico, isto é,  $(\vec{t} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} = (\vec{t} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}$  temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \epsilon \rho dV + \int_{S_C} \epsilon \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{S_C} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS + \int_{S_C} [(\vec{t} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS, \quad (2.55)$$

onde  $\epsilon$  é a energia por unidade de massa. Aplicando três vezes o teorema da divergência dado por (2.37) com  $\vec{f} = \epsilon \rho \vec{v}$ ,  $\vec{f} = \vec{q}$  e  $\vec{f} = \vec{t} \cdot \vec{v}$  às integrais de superfície de (2.55), notando que  $\frac{\partial}{\partial t} \int \epsilon \rho dV = \int \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \rho) dV$ , combinando as integrais de volume, e usando o fato que o integrando deve ser nulo, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \rho + \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{t} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}. \quad (2.56)$$

Usando a equação da continuidade (2.40) então (2.56) se torna

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \epsilon = \vec{\nabla} \cdot (\vec{t} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}, \quad (2.57)$$

ou na forma de componentes

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = t_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2.58)$$

A equação (2.58) representa a equação diferencial geral de conservação de energia.

# Capítulo 3

## Cosmologia

### 3.1 Princípio Cosmológico

A cosmologia é a ciência que estuda a estrutura, evolução e composição do Universo através do método teórico-observacional para criar e testar modelos. *Estrutura* é o problema da forma e da organização da matéria no Universo; *evolução* são as diferentes fases pelos quais o Universo passou; *composição* diz respeito daquilo que é feito o Universo. A gravidade, sendo a força mais fraca entre as quatro forças fundamentais, é a responsável por descrever a dinâmica do Cosmos fazendo uso da teoria da relatividade geral.

O princípio cosmológico é a hipótese de que, em escalas suficientemente grandes (superior a 100  $Mpc$ ), o Universo é ao mesmo tempo isotrópico e homogêneo; Homogeneidade é uma propriedade física/matemática que, ao considerar o cosmos como um todo, o mesmo se apresenta semelhante para todos os observadores enquanto a isotropia caracteriza o Universo tendo as mesmas propriedades físicas independente da direção considerada, [9].

Este princípio foi adotado por Einstein e subsequentes cosmólogos relativistas, sem qualquer ferramenta de observação experimental. Na verdade, não era conhecido até a década de 1920 que as nebulosas em espiral (agora conhecidas como galáxias) estavam fora da nossa própria galáxia, a Via Láctea - figura 3.1 -, sendo assim, acreditava-se que a Via Láctea era essencialmente todo o cosmos, [9].

Einstein foi particularmente motivado pelas ideias associadas a Ernst Mach no qual afirmava que as leis da física são determinadas pela distribuição em grandes escalas da matéria. Portanto, Einstein acreditava que havia uma simplicidade básica para a estrutura global no

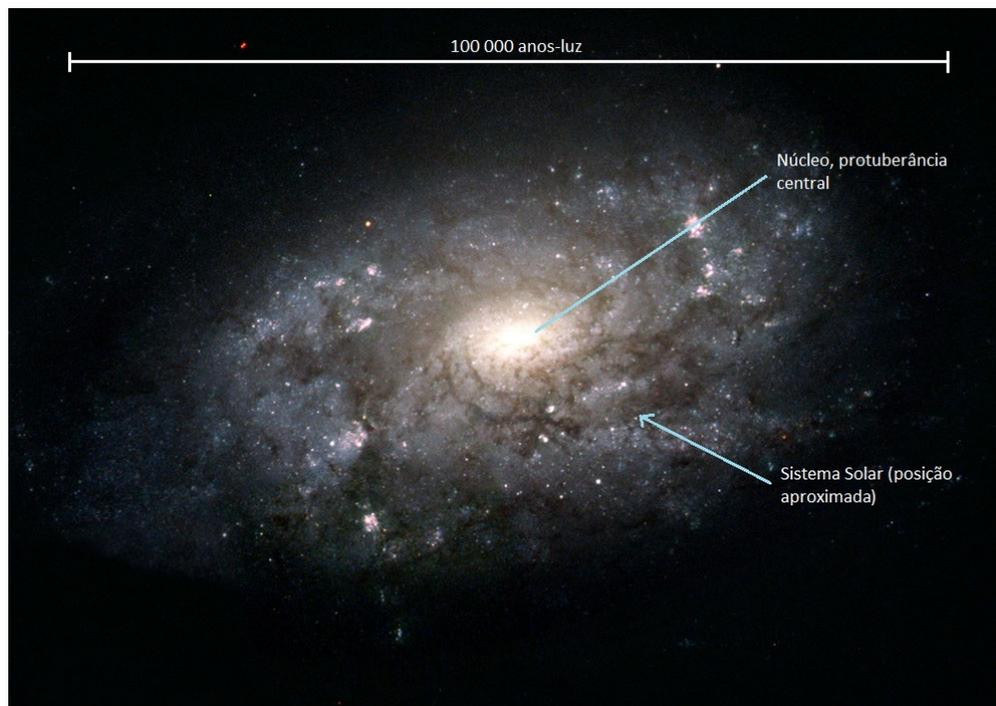


Figura 3.1: *Via Láctea*. Fonte: [37].

comportamento local da matéria, como por exemplo, a constante gravitacional  $G$  foi pensada como tendo relação com a quantidade de massa no Universo, [9].

### 3.1.1 Radiação Cósmica de Fundo

Para reforçar a isotropia do Universo, pode-se fazer uma análise da radiação cósmica de fundo. Penzias e Wilson descobriram acidentalmente em 1965 que a Terra é banhada por radiação de microondas, com um espectro de corpo negro a uma temperatura de cerca de 3 Kelvin. Observações do experimento FIRAS (Far InfraRed Absolute Spectrometer) a bordo do satélite COBE (Cosmic Background Explorer) confirmaram que a radiação é extremamente perto da forma de corpo negro a uma temperatura de  $2.728 \pm 0.001$  Kelvin, [24]. O espectro relatado pela equipe COBE em 1993, como mostrado na figura 3.2, corresponde às previsões da teoria do Big Bang quente. Os erros de medição em cada uma das 34 posições de comprimento de onda são tão pequenos que não podem ser distinguidos da curva teórica de corpo negro.

Vale ressaltar que esse espectro de corpo negro puro nunca havia sido observado em experimentos laboratoriais. Todas as teorias que tentam explicar a origem da estrutura em grande escala vista no Universo de hoje devem estar em conformidade com as restrições impostas por essas medidas do COBE, [31].

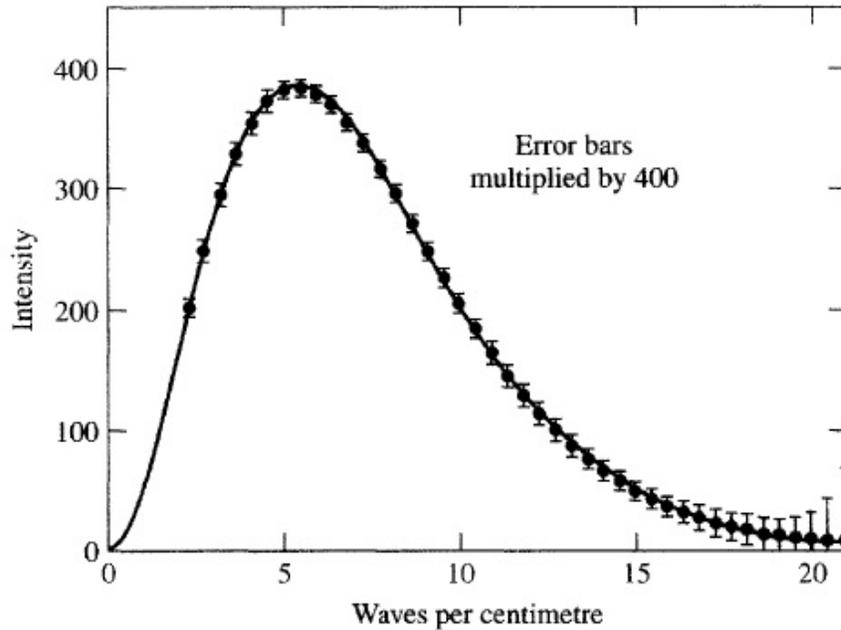


Figura 3.2: O espectro da radiação cósmica de fundo medida pelo satélite COBE comparada com um ajuste da fórmula de Planck com uma temperatura de 2,74 Kelvin. Fonte: [24]

Além disso, a temperatura proveniente de diferentes partes do céu se mostra uniforme. Também recentemente tem sido possível detectar pequenas variações, uma parte em cem mil, entre as intensidades das microondas vindas de diferentes direções. Estudos recentes mostram flutuações na homogeneidade e isotropia da ordem de  $10^{-5}$ , [24].

A Radiação Cósmica de Fundo remete a idade em que o Universo resfriou do plasma de bárions e elétrons para um fluido de átomos e radiação. A figura 3.3 mostra como a radiação se desacoplou da matéria preenchendo uniformemente o cosmos e carregando informações das flutuações de temperatura.

O conteúdo do Universo em qualquer tempo é determinado pela sua temperatura e densidade. Nos primórdios, ele era dominado por espécies exóticas de partículas, mas depois de alguns minutos após o Big-Bang, há uma mistura de bárions e fótons a temperaturas de bilhões de graus. Dessa forma a matéria bariônica é ionizada, até que, depois de uns 380 000 anos ocorre a recombinação<sup>1</sup> depois da qual a matéria no Universo é praticamente neutra, [28]. A tabela (3.1) mostra uma breve história térmica do Universo.

<sup>1</sup>Este nome não é muito apropriado no sentido que o Universo fica neutro pela primeira vez na sua história. Pode-se falar alternativamente na época do desacoplamento, embora as duas coisas não sejam exatamente iguais.

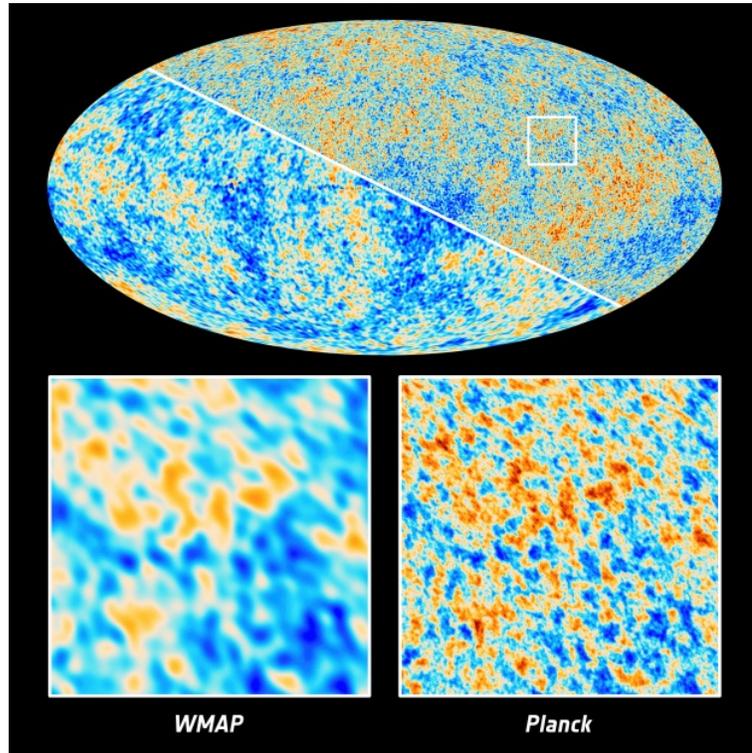


Figura 3.3: *Esta imagem mostra as flutuações de temperatura na Radiação Cósmica de Fundo. A metade superior direita, com melhor resolução, mostra os dados coletados pelo satélite Planck da ESA em comparação com seu antecessor, a sonda WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) da NASA. Uma porção menor do mapa é destacada e mostrada em detalhe abaixo. Fonte: [13]*

Em resumo, o Universo passou por uma era clássica conhecida como *tempo de Planck*, onde sua descrição se fez pelo uso da teoria quântica para a gravidade. Depois veio a era descrita pelo modelo padrão de partículas. E para os dias "atuais" tivemos a formação de  $H_2$  em estrelas e galáxias para então se iniciar a formação das primeiras estruturas do Universo. As transições com \*, da tabela 3.1, referem-se as fases para as quais não há evidências observacionais ou cujos mecanismos físicos ainda são desconhecidos, [28].

## 3.2 Métrica de Robertson-Walker

Supõe-se que pode-se considerar o Universo preenchido por um fluido contínuo, atribuindo a cada elemento de fluido três coordenadas espaciais  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Portanto, qualquer ponto no espaço-tempo pode ser marcado pelas coordenadas  $x^\alpha$  correspondente ao elemento de fluido que passa através do ponto, e um parâmetro de tempo como sendo o *tempo próprio*  $t$  medido

Tabela 3.1: Breve história térmica do Universo

Evento	T(Kelvin)	(segundos)
Tempo de Planck - início da era clássica (*)	$10^{32}$	$10^{-43}$
Bariogênese (*)	$10^{29}$	$10^{-37}$
Hadronização - aniquilação $p - p$	$10^{12}$	$10^{-4}$
Núcleossíntese - formação de He, D, Li	$10^{11} - 10^9$	$10^{-2} - 10^2$
Igualdade matéria-radiação	$10^4$	$10^{12}$
Recombinação - desacoplamento dos fótons	$10^3$	$10^{13}$
Primeiras estrelas e galáxias - formação de $H_2$	$10^2$	$10^{15}$
Aglomerados de galáxias	10	$10^{17}$
Agora	3	$4 \times 10^{17}$

por um relógio que se move com o elemento de fluido. As coordenadas  $x^\alpha$  são chamadas de *coordenadas comóveis*. As propriedades geométricas do espaço-tempo são descritos por uma métrica, [9]. Pode-se mostrar a partir de considerações geométricas que a métrica mais geral do espaço-tempo descrevendo um Universo em que o princípio cosmológico é obedecido é da forma

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

onde usou-se coordenadas esféricas.  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas comóveis ( $r$  é por convenção adimensional);  $t$  é o tempo próprio;  $a(t)$  é o fator de escala cósmica ou o parâmetro de expansão; a constante  $K$  é o parâmetro de curvatura que assume os valores 1, 0 ou -1, e correspondem respectivamente, a hipersfera, espaço Euclidiano e espaço de curvatura negativa constante, [9], como mostrado na figura (3.4).

### 3.2.1 Lei de Hubble

A *distância própria*,  $d_P$ , de um ponto  $P$  a partir de outro ponto  $P_0$ , é a medida mantida por observadores que conecta  $P$  a  $P_0$  no instante  $t$ . Da equação 3.1 com  $dt = 0$  e  $\theta$  e  $\phi$  constantes temos

$$d_P = \int_0^r \frac{adr'}{(1 - Kr'^2)^{1/2}} = af(r), \quad (3.2)$$

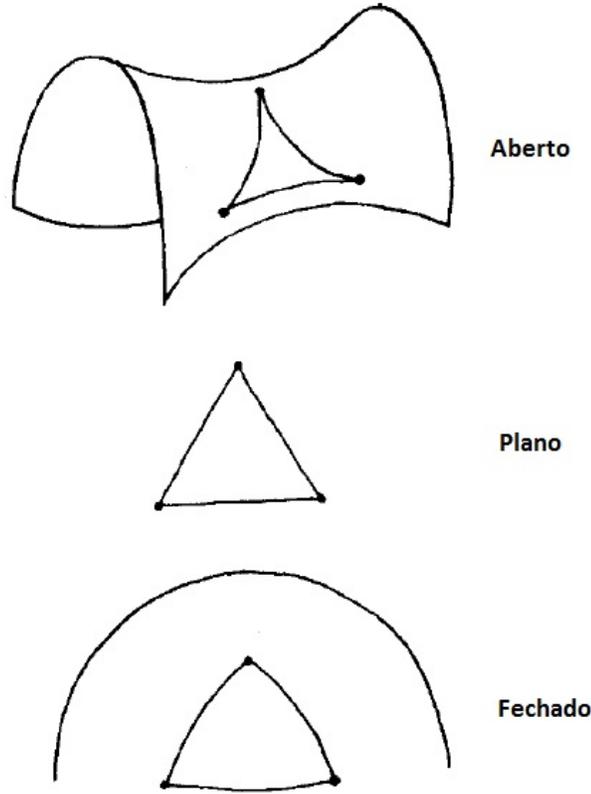


Figura 3.4: Exemplos de espaços em 2 dimensões: no espaço com curvatura negativa (aberto) a soma dos ângulos internos do triângulo é menor que  $180^\circ$ . No espaço fechado é maior que  $180^\circ$ . Fonte: [9]

onde a função  $f(r)$  é, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 f(r) &= \text{sen}^{-1}r & (K = 1), \\
 f(r) &= r & (K = 0), \\
 f(r) &= \text{senh}^{-1}r & (K = -1).
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

A distância própria no tempo  $t$  está relacionada com o tempo presente,  $t_0$ , por

$$d_P(t_0) = a_0 f(r) = \frac{a_0}{a} d_P(t),
 \tag{3.4}$$

onde  $a_0$  é o valor de  $a(t)$  em  $t = t_0$ . Definindo  $a_0 f(r)$  como a coordenada comóvel  $d_c$ , temos a relação entre a coordenada própria e a coordenada comóvel, ou seja

$$d_c = \frac{a_0}{a} d_P.
 \tag{3.5}$$

A distância própria,  $d_P$ , de uma fonte, pode mudar com o tempo devido a dependência temporal do parâmetro de expansão  $a$ . Nesse caso, a fonte em  $P$  tem uma velocidade radial com respeito a origem  $P_0$  dado por

$$v_r = \dot{a}f(r) = \frac{\dot{a}}{a}d_P. \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é chamada Lei de Hubble e a quantidade

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.7)$$

é parâmetro de Hubble que mede a taxa de expansão em qualquer tempo  $t$  para qualquer modelo que obedece ao Princípio Cosmológico. Os resultados atuais do WMAP mostram que a constante de Hubble,  $H_0$ , tem um valor de  $71,0 \pm 2,5$  (km/seg)/Mpc. Se os dados do WMAP forem combinados com outros dados cosmológicos, a melhor estimativa é  $71,4 \pm 1,4$  (km/seg)/Mpc, [38].

### 3.2.2 Desvio para o Vermelho (Redshift)

No século passado, descontado o movimento aparente das estrelas devido à órbita da Terra ao redor do Sol, acreditava-se que o Universo seria estático. Mesmo Einstein acreditava nisso pois não havia evidências observacionais do contrário. Mas em 1929, com o uso da espectroscopia, o astrônomo norte americano Edwin Hubble, observou que as galáxias estão se afastando de nós, [30]. Uma das evidências observacionais na cosmologia é que quase tudo no Universo parece estar se afastando (tomando a Via-Láctea como referencial), e quanto maior a distância, mais rápida sua recessão parece ser. Estas velocidades são medidas através do desvio para o vermelho (redshift), o que é, basicamente, o efeito Doppler aplicado as ondas de luz. Galáxias têm um conjunto de absorção e emissão de linhas identificáveis nos seus espectros, cujas frequências características são bem conhecidas. Se a galáxia está se afastando, as linhas características se movem em direção a extremidade vermelha do espectro, [24]. A figura (3.5) mostra a velocidade contra a distância, um gráfico conhecido como diagrama de Hubble.

Consideremos uma linha de absorção particular cujo comprimento de onda, como medido aqui na Terra é  $\lambda_e$ , no tempo  $t_e$ . O comprimento de onda que medimos para a mesma linha

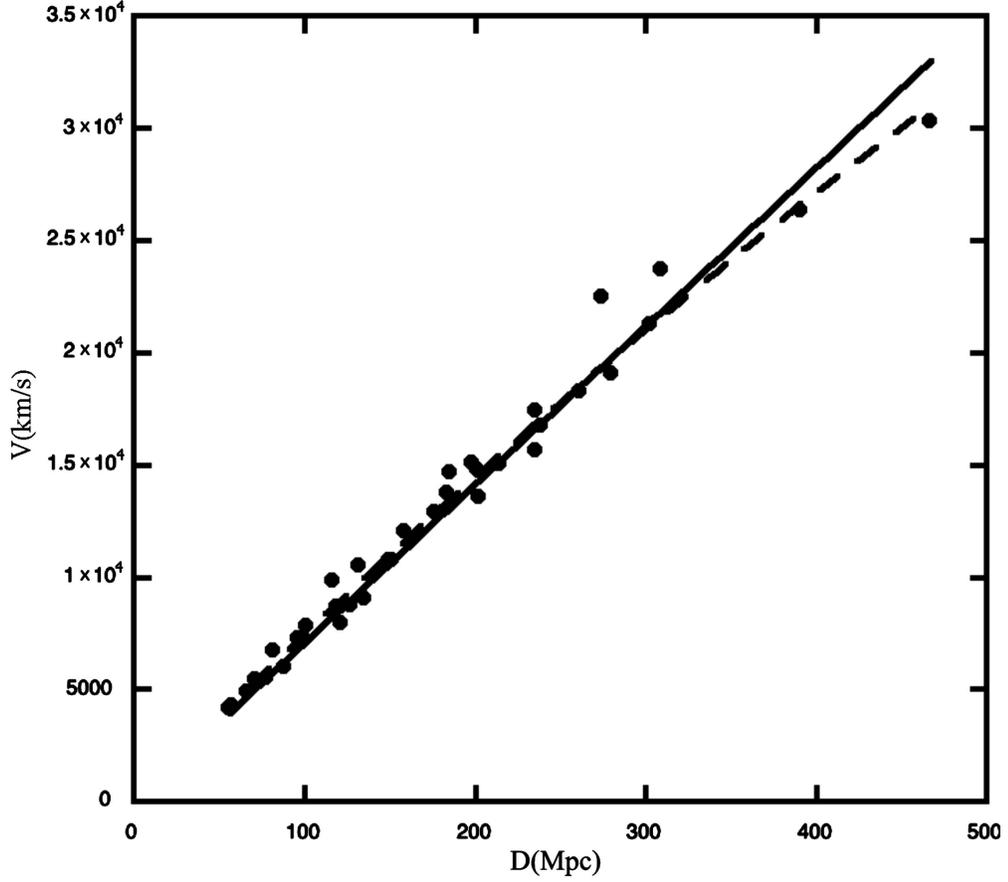


Figura 3.5: *Relação velocidade-distância entre galáxias. Os dados (círculos preenchidos) são da referência [5] e [29]. A linha completa é um ajuste de acordo com a lei de Hubble [17], enquanto a linha tracejada leva em consideração correções de segunda ordem, resultando em uma melhor reprodução dos dados. Fonte: [5][17][29].*

de absorção em um espectro de galáxias distantes é,  $\lambda_0$ , no tempo  $t_0$  (origem do sistema de coordenadas), [31]:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}. \quad (3.8)$$

A fonte está se movendo com a expansão do Universo com coordenada comóvel  $r$ . A radiação viaja ao longo de um raio de luz (geodésica nula) a partir da fonte para o observador tal que,  $ds^2 = 0$ , portanto

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}} = f(r) \quad (3.9)$$

A luz emitida a partir da fonte em  $t'_e = t_e + \delta t_e$  alcança o observador em  $t'_0 = t_0 + \delta t_0$ . Dado que a função  $f(r)$  não muda pelo fato de  $r$  ser uma coordenada comóvel e a fonte e observador

se moverem com expansão cósmica, pode-se escrever

$$\int_{t'}^{t'_0} \frac{cdt}{a(t)} = f(r), \quad (3.10)$$

se  $\delta t$  e  $\delta t_0$  são pequenos, (3.9) e (3.10) implicam que

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t}{a}. \quad (3.11)$$

Se, em particular,  $\delta t = \lambda_e/c$  e  $\delta t_0 = \lambda_0/c$ , ( $c$ =velocidade da luz no vácuo), temos a relação

$$\frac{a_0}{a} = 1 + z, \quad (3.12)$$

que é *desvio para o vermelho* da luz. Se  $a$  aumenta temos o *redshift*. Alternativamente se  $a$  diminui então temos o *blueshift*, [34].

### 3.2.3 Parâmetro de Desaceleração

Se expandirmos o parâmetro de expansão cósmica  $a(t)$  em uma série de potência, isto é

$$a(t) = a_0[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots], \quad (3.13)$$

podemos definir a relação

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)a_0}{\dot{a}(t_0)^2}, \quad (3.14)$$

que é chamada de *parâmetro de desaceleração*. O sufixo "0" se refere ao fato de que  $q_0 = q(t_0)$ . Tendo  $H(t)$  dimensão de tempo inverso, o parâmetro  $q$  é adimensional. Dessa forma,  $q_0$  assume valores negativos para a expansão acelerada e valores positivos para expansão desacelerada, [9].

## 3.3 Equações de Friedmann

As equações de Einstein da relatividade geral relaciona as propriedades geométricas do espaço-tempo com o tensor energia-momento que descreve a composição do Universo, [9]. Em particular, para um fluido perfeito homogêneo e isotrópico com densidade de energia  $\rho c^2$  e

pressão  $p$ , as soluções das equações de Einstein são as *Equações de Friedmann*:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2. \quad (3.15)$$

Podemos combinar a expressão (3.15) com a equação da densidade de massa para um Universo homogêneo e isotrópico que é definida como:

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0; \quad (3.16)$$

E assim obter a equação para a aceleração cósmica:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right)a. \quad (3.17)$$

Para um fluido sem pressão e considerando um Universo plano ( $K = 0$ ) as expressões (3.15) e (3.17) tomam a seguinte forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.18)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho. \quad (3.19)$$

Estas equações serão usadas posteriormente para o estudo da instabilidade de Jeans para um Universo em expansão.

### 3.4 Equação de Poisson

Esta seção baseia-se em [33]. Ao se estudar o campo gravitacional  $\vec{g}$  devido à massa puntiforme  $m$ , considera-se um volume  $V$  qualquer, que contenha a massa  $m$  e que  $\hat{n}$  seja o vetor unitário normal a superfície  $S$  que limita o volume  $V$  como mostrado na figura 3.6. Calcula-se a seguinte integral de superfície

$$I = \int_S \hat{n} \cdot \vec{g} dS. \quad (3.20)$$

O significado físico ou geométrico desta integral pode ser observado introduzindo-se o conceito de linhas de força, desenhada em todos os pontos do espaço na direção de  $\vec{g}$ , e de tal maneira que o número de linhas, por unidade de área, em qualquer ponto, é igual a intensidade do campo gravitacional. Então  $I$  será o número de linhas cortando a superfície

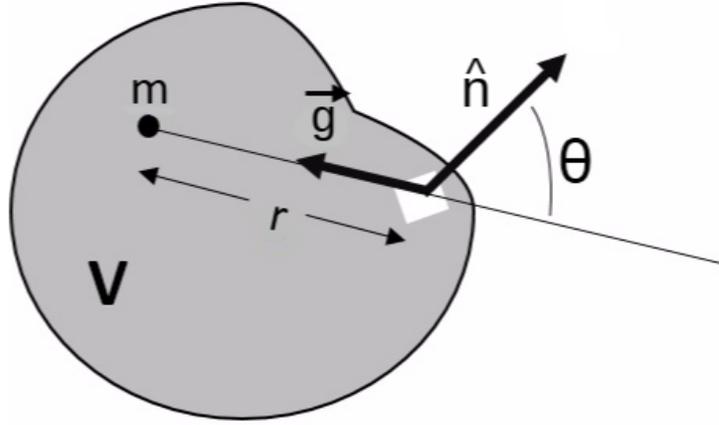


Figura 3.6: Massa  $m$  contida no volume  $V$ . Fonte: [33]

$S$  e denominada *fluxo* de  $\vec{g}$  através de  $S$ . O elemento de ângulo sólido  $d\Omega$  compreendido na posição da massa  $m$  por um elemento de superfície  $dS$  é definido como a área varrida, sobre uma esfera de raio unitário, por um raio que varre, em torno de  $m$ , um elemento de área  $dS$ . Esta área é

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2}. \quad (3.21)$$

A partir da figura 3.6 temos a relação

$$\hat{n} \cdot \vec{g} = -\frac{mG \cos\theta}{r^2}. \quad (3.22)$$

Substituindo as duas relações acima na integral  $I$ , o resultado será

$$I = \int_S -mG d\Omega = -4\pi mG. \quad (3.23)$$

A integral  $I$  é independente da posição de  $m$  no interior da superfície  $S$ . Como o campo gravitacional de um número qualquer de massas é a soma dos seus campos individuais, para uma superfície  $S$  envolvendo um conjunto de massas  $m_i$ , temos:

$$I = \int_S \hat{n} \cdot \vec{g} dS = -\sum_i 4\pi m_i G. \quad (3.24)$$

Para uma distribuição contínua de massa no interior de  $S$ , esta equação torna-se

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{g} dS = -\int_V 4\pi G \rho dV. \quad (3.25)$$

Usando o teorema da divergência ou de Gauss dado por (2.37) no primeiro membro desta equação:

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{g} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV. \quad (3.26)$$

Subtraindo a equação (3.25) da (3.26), chega-se ao seguinte resultado:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + 4\pi G\rho) dV = 0. \quad (3.27)$$

Como a equação (3.27) deve ser válida para qualquer volume  $V$  e isto só pode ser verdadeiro se o integrando se anular,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \quad (3.28)$$

Esta equação em coordenadas cartesianas tem a seguinte forma

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} = -4\pi G\rho(x_1, x_2, x_3). \quad (3.29)$$

Quando  $\rho(x_1, x_2, x_3)$  é conhecido, podemos determinar univocamente o campo gravitacional  $(g_1, g_2, g_3)$ , adicionando a condição limite que  $g \rightarrow 0$ , quando  $|r| \rightarrow \infty$ . Substituindo o resultado acima na equação que relaciona força e energia potencial,  $\vec{g} = \vec{\nabla}\phi$ , obtém-se a seguinte equação para o potencial:

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho \quad (3.30)$$

Esta relação simples determina  $\phi(x_1, x_2, x_3)$  univocamente, acrescentando a condição que  $\phi \rightarrow 0$  quando  $|r| \rightarrow \infty$ . A expressão (3.30) chama-se *Equação de Poisson*. As equações desta forma são encontradas frequentemente na teoria física. Por exemplo, o potencial eletrostático satisfaz uma equação da mesma forma, onde  $\rho$  é a densidade de carga elétrica. Se  $\rho = 0$ , a equação (3.30) toma a forma da *Equação de Laplace*,  $\nabla^2\phi = 0$ .

## 3.5 Teoria da Formação de Estruturas

Nesta seção, faremos análises das flutuações de densidade para um Universo estático sem dissipação. Vamos introduzir as equações de fluido da Cosmologia Newtoniana para descrever o estudo sobre o mecanismo de crescimento das estruturas no regime linear e obter o

comprimento de Jeans em termos de comprimento de onda.

### 3.5.1 Teoria de Jeans

O físico, astrônomo e matemático britânico, James Hopwood Jeans demonstrou em 1902, a existência de uma instabilidade na evolução de nuvens de gás, na tentativa de compreender a formação de estrelas e planetas. Tal instabilidade hoje é conhecida como instabilidade de Jeans ou instabilidade gravitacional.

Em cenários astrofísicos, a teoria mais simples que descreve a agregação de massas no espaço é a instabilidade de Jeans. O sistema é composto por partículas que podem agregar-se, dependendo da magnitude relativa da força de pressão e da força gravitacional. Sempre que a pressão interna de um gás é muito fraca para equilibrar a força de auto-gravidade de uma perturbação de densidade de massa, um colapso ocorre, [21]. A instabilidade de Jeans compreende o processo de formação de estrelas, planetas, cometas, asteróides e outros objetos astrofísicos, [18].

A expansão do Universo não era conhecida em sua época, por isso seus cálculos foram realizados no contexto de um fluido estático. Seu trabalho levou em consideração um fluido homogêneo e isotrópico, cuja demonstração foi a de que pequenas flutuações na densidade,  $\delta\rho$ , e velocidade,  $\delta v$ , podem evoluir com o tempo. Tais flutuações só ocorrem se o efeito de pressão for muito menor que o efeito de auto-gravidade. Isto é, sendo a gravidade uma força atrativa e as componentes de pressão pequenas, ocorre uma aglomeração de matéria em uma determinada região causando um aumento da densidade nesse ponto. Quanto mais matéria for agregada maior será a sua densidade, resultando em uma instabilidade que pode induzir a um colapso, [9]. Esse colapso obedece a uma função exponencial, que será descrito posteriormente.

Para uma simples análise da instabilidade de Jeans, consideramos uma esfera homogênea de massa  $M$ , e raio  $\lambda$  contendo uma pequena flutuação de densidade,  $\delta\rho > 0$ . A flutuação irá crescer se a força de auto-gravidade por unidade de massa,  $F_g$ , for maior que a força de oposição resultante da pressão por unidade de massa,  $F_p$ , [9], ou seja

$$F_g \simeq \frac{GM}{\lambda^2} \simeq \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda^2} > F_p \simeq \frac{p\lambda^2}{\rho\lambda^3} \simeq \frac{v_S^2}{\lambda}, \quad (3.31)$$

onde  $v_S^2 = p/\rho$  é a velocidade adiabática do som. Para que ocorra o crescimento temporal da densidade, o critério se baseia na relação entre o comprimento de onda típico de uma flutuação,  $\lambda$ , e o *comprimento de onda de Jeans*,  $\lambda_J$ , de tal forma que

$$\lambda > \lambda_J \simeq \frac{v_S}{(G\rho)^{1/2}}. \quad (3.32)$$

O colapso da nuvem irá ocorrer se o comprimento de onda típico de uma flutuação for *maior* que o comprimento de onda de Jeans, [3], [15].

### 3.5.2 Teoria de Jeans para Fluidos

Para descrever a evolução newtoniana de um fluido, vamos introduzir aqui as equações de balanço que regem os parâmetros do fluido: a densidade  $\rho$ , a velocidade  $v$  (com componentes  $v_i$ ) e a pressão  $p$ , na presença do potencial gravitacional  $\phi$ . Para este caso, iremos desconsiderar termos dissipativos como viscosidade e condução de calor. Então, podemos usar as equações de balanço obtidas na seção 2.7:

- Balanço de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.33)$$

- Equação de Euler:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0. \quad (3.34)$$

- Equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} - 4\pi G \rho = 0. \quad (3.35)$$

- Equação da conservação da entropia por unidade de massa:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0. \quad (3.36)$$

Onde  $p = p(\rho, s)$ . A equação da entropia foi adicionada pois nessa primeira análise estamos desprezando termos dissipativos. Neste modelo, estamos fazendo uma abordagem newtoniana para um Universo estático. A hipótese fundamental dessa análise é uma solução estática e uniforme, [7], isto é,  $\tilde{\rho} = const$ ,  $\tilde{v} = 0$ ,  $\tilde{p} = const$ ,  $\tilde{s} = const$  e  $\tilde{\phi} = const$ .

Vamos agora adicionar pequenas flutuações nas soluções não perturbadas, isto é,  $\rho =$

$\tilde{\rho} + \delta\rho$ ,  $v_i = \delta v_i$ ,  $p = \tilde{p} + \delta p$ ,  $s = \tilde{s} + \delta s$ ,  $\phi = \tilde{\phi} + \delta\phi$ . O sufixo *til* representa a quantidade inicial e  $\delta$  a flutuação ou perturbação. Introduzindo estas soluções nas expressões (3.33) a (3.36) e desprezando perturbações de segunda ordem, temos

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \tilde{\rho}\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.37)$$

$$\tilde{\rho}\frac{\partial\delta v_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \frac{\partial\delta\rho}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \frac{\partial\delta s}{\partial x_i} + \tilde{\rho}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x_i} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2\delta\phi}{\partial x_j\partial x_j} - 4\pi G\delta\rho = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial\delta s}{\partial t} = 0. \quad (3.40)$$

A condição  $\partial^2\tilde{\phi}/\partial x_j\partial x_j = 0$  não satisfaz a equação de Poisson devido ao fato de que seu lado direito se refere a densidade de massa do sistema auto-gravitante. A fim de eliminar esta inconsistência, faz-se o uso do "Jeans Swindle", que considera que a equação de Poisson é válida apenas para a densidade perturbada e potencial gravitacional perturbado, [19].

O sistema de equações acima possui cinco soluções: Duas do tipo adiabáticas longitudinais, uma do tipo entrópica e duas de modo transversais. Para encontrá-las vamos considerar soluções na forma de ondas planas na direção  $x_1$ , isto é, considerando apenas as longitudinais, logo

$$\delta u_n = \delta_n(t)e^{-ikx_1}, \quad (3.41)$$

onde,  $n = 1, 2, 3, 4$ , e  $\delta u_n$  representam as perturbações para  $\delta\rho$ ,  $\delta v_i$ ,  $\delta\phi$  e  $\delta s$ , respectivamente. Sendo  $\delta_n$  dependente apenas do tempo, podemos procurar soluções na forma

$$\delta_n(t) = \delta_{0n}e^{i\omega t}. \quad (3.42)$$

Então as perturbações tomam a seguinte forma:

$$\delta\rho = \bar{\rho}e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (3.43)$$

$$v_i = \begin{bmatrix} \bar{v}e^{i(\omega t - kx_1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\delta\phi = \bar{\phi}e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (3.45)$$

$$\delta s = \bar{s}e^{i(\omega t - kx_1)}. \quad (3.46)$$

Onde  $k$  é o vetor de onda,  $\omega$  é a frequência, e  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{s}$  são as amplitudes de perturbação. Substituindo (3.43) a (3.46) em (3.37) a (3.40) temos

$$\omega\bar{\rho} - k\tilde{\rho}\bar{v} = 0, \quad (3.47)$$

$$kv_s^2\bar{\rho} - \omega\tilde{\rho}\bar{v} + k\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \bar{s} + k\tilde{\rho}\bar{\phi} = 0, \quad (3.48)$$

$$4\pi G\bar{\rho} + k^2\bar{\phi} = 0, \quad (3.49)$$

$$\omega\bar{s} = 0. \quad (3.50)$$

Em um fluido, mudanças infinitesimais insentrópicas na densidade e pressão se propagam através do meio com velocidade finita definida como  $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ . Esta é a velocidade adiabática do som, [22]. Uma análise de solução para o sistema de equações acima pode ser feita levando em consideração soluções dependentes do tempo, ou seja,  $\omega \neq 0$ , implicando em (3.50) que  $\bar{s} = 0$ . Nesta situação temos uma solução do tipo adiabática. Dessa forma, tomando  $\bar{s} = 0$  em (3.50) e (3.48) o sistema de equações acima se reduz a

$$\begin{bmatrix} \omega & -k\tilde{\rho} & 0 \\ kv_s^2 & -\omega\tilde{\rho} & k\tilde{\rho} \\ 4\pi G & 0 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{v} \\ \bar{\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.51)$$

Este sistema admite soluções não-nulas para  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{\phi}$  se e somente se seu determinante for nulo. Portanto, obtemos a relação de dispersão de Jeans para um Universo estático na ausência de termos dissipativos:

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\tilde{\rho}. \quad (3.52)$$

Para  $\omega = 0$  e considerando o fato de que  $\lambda = 2\pi/k$ , obtemos

$$\lambda_J = v_s \left( \frac{\pi}{G\tilde{\rho}} \right)^{1/2}, \quad (3.53)$$

que é chamado *comprimento de Jeans*. Nota-se a mesma dependência de  $G$ ,  $\rho$  e  $v_s$  descrito na equação (3.32).

Quando  $k$  em (3.52) é suficientemente grande, isto é,  $k^2 > \frac{4\pi G\tilde{\rho}}{v_s^2}$  o lado direito da relação de dispersão de Jeans é positivo, assim  $\omega$  é real e as perturbações variam periodicamente com o tempo conforme ilustra a figura (3.7). Nota-se que a amplitude da perturbação e o comprimento de onda se mantêm constantes, isso porque não estamos considerando termos dissipativos e expansão do Universo, respectivamente. Então para o caso em que  $\lambda < \lambda_J$  a frequência angular obtida de (3.52) é

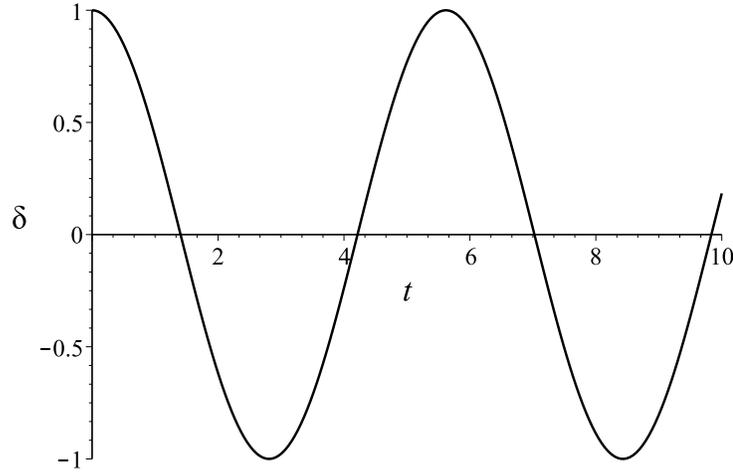


Figura 3.7: *Evolução da perturbação para  $\lambda < \lambda_J$ .*

$$\omega = \pm v_s k \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.54)$$

Das equações (3.41) e (3.42) obtemos que

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \delta_0 e^{[i(kx_1 \pm \omega t)]}, \quad (3.55)$$

$$\delta v = \mp v_s \delta_0 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2} e^{[i(kx_1 \pm \omega t)]}, \quad (3.56)$$

$$\delta\phi = -\delta_0 v_S^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 e^{[i(kx_1 \pm \omega t)]}, \quad (3.57)$$

que representa duas ondas de som nas direções  $\pm k$ , com dispersão dado por (3.54). A velocidade de fase tende a zero para  $\lambda \rightarrow \lambda_J$ . Para essa solução, não há colapso da nuvem.

No limite,  $k \rightarrow \infty$ , a relação (3.52) se torna,  $\omega^2 = v_s^2 k^2$  e nesse caso temos uma solução para ondas de som isotérmicas e qualquer compressão é restaurada pelo aumento de pressão. Novamente não temos um colapso da nuvem ou formação estelar. Na situação em que  $k^2 < \frac{4\pi G \tilde{\rho}}{v_s^2}$ ,  $\omega$  tem solução imaginária na forma de  $\pm i\xi$ , onde  $\xi$  é real. Portanto, existem perturbações proporcionais a  $e^{\pm \xi t}$  que crescem ou decrescem exponencialmente com o tempo como ilustrado na figura (3.8). Então quando  $\lambda > \lambda_J$  a frequência é imaginária,

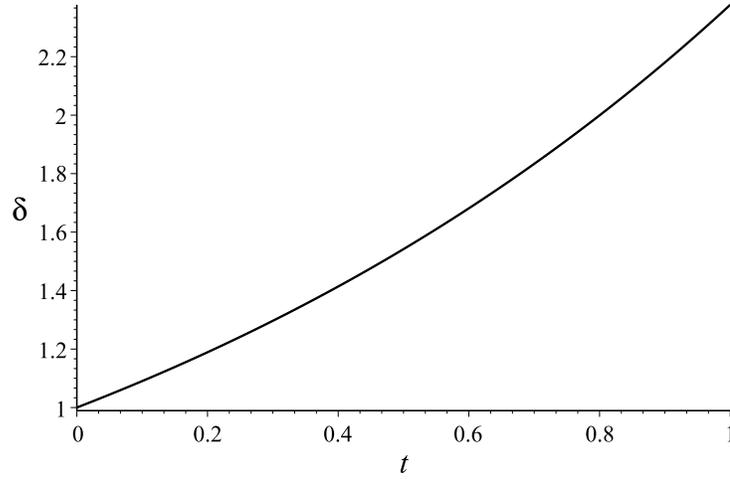


Figura 3.8: *Evolução da perturbação para  $\lambda > \lambda_J$ .*

$$\omega = \pm i(4\pi G \rho_0)^{1/2} \left[ 1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.58)$$

e as perturbações são instáveis. Nesse caso, temos

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \delta_0 e^{[i(kx_1 \pm \omega t)]}, \quad (3.59)$$

$$\delta\vec{v} = \mp \frac{\delta_0}{k} (4\pi G \rho_0)^{1/2} \left[ 1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 \right]^{1/2} e^{[i(kx_1 \pm \omega t)]}, \quad (3.60)$$

$$\delta\phi = -\delta_0 v_S^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 e^{[i(kx_1 \pm \omega t)]}. \quad (3.61)$$

Esta condição representa uma solução não propagadora (onda estacionária) de amplitude crescente ou decrescente. A escala de tempo característico para a evolução desta amplitude é

$$\tau \equiv |\omega|^{-1} = i(4\pi G\rho_0)^{-1/2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.62)$$

Então, é somente a condição em que  $\lambda > \lambda_J$  que leva a instabilidade das perturbações e por consequência a condensação gravitacional.

# Capítulo 4

## Instabilidade gravitacional com pressão e energia interna em função da densidade e temperatura

Neste capítulo será obtido o comprimento de Jeans tendo a pressão e a energia interna como funções da densidade e temperatura, onde esta última se refere a temperatura do gás. Nesse sentido, a equação da entropia será substituída pela expressão do balanço de energia interna. Novamente não será considerado termos dissipativos, e as equações de balanço são:

- Balanço de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.1)$$

- Equação de Euler:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0. \quad (4.2)$$

- Equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} - 4\pi G \rho = 0. \quad (4.3)$$

- Equação de balanço de energia interna:

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4.4)$$

Onde  $p = p(\rho, T)$  e  $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$ .

Perturbando o sistema, e considerando soluções sob a forma de onda plana na direção  $x_1$ ,

temos

$$\rho = \tilde{\rho} + \bar{\rho}e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (4.5)$$

$$v_i = \begin{bmatrix} \bar{v}e^{i(\omega t - kx_1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\phi = \tilde{\phi} + \bar{\phi}e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (4.7)$$

$$T = \tilde{T} + \bar{T}e^{i(\omega t - kx_1)}. \quad (4.8)$$

Os sufixos *til* e *barra* representam a quantidade inicial e amplitude de perturbação respectivamente. Substituindo estas soluções nas expressões (4.1) a (4.4) e com  $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_\rho = c_v$  (calor específico a volume constante) temos

$$\omega \bar{\rho} - k \tilde{\rho} \bar{v} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{k}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \bar{\rho} - \omega \bar{v} + \frac{k}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \bar{T} + k \bar{\phi} = 0, \quad (4.10)$$

$$k^2 \bar{\phi} + 4\pi G \bar{\rho} = 0, \quad (4.11)$$

$$-\omega \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_T \bar{\rho} + \tilde{p} k \bar{v} - \omega c_v \tilde{\rho} \bar{T} = 0. \quad (4.12)$$

Pode-se otimizar o sistema acima substituindo a expressão (4.11) em (4.10), assim temos um sistema linear com três equações para  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{T}$ :

$$\begin{bmatrix} \omega & -k \tilde{\rho} & 0 \\ \left[\frac{k}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T - \frac{4\pi G}{k}\right] & -\omega & \frac{k}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \\ -\omega \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_T & k \tilde{p} & -\omega \tilde{\rho} c_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{v} \\ \bar{T} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

Este sistema admite soluções não-nulas se o determinante for nulo. Logo

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T - 4\pi G \tilde{\rho} + \frac{\tilde{p} k^2}{c_v \tilde{\rho}^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho - \frac{k^2}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_T. \quad (4.14)$$

Usando as relações termodinâmicas

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_T = \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[ \tilde{p} - \tilde{T} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \right] \quad (4.15)$$

e

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \quad (4.16)$$

e substituindo em (4.14),

$$\omega^2 = \frac{k^2}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left[ c_v - \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \right] - 4\pi G \tilde{\rho}. \quad (4.17)$$

O termo no colchetes representa o calor específico a pressão constante,  $c_p$ , então (4.17) se torna

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \frac{c_p}{c_v} - 4\pi G \tilde{\rho}. \quad (4.18)$$

Sendo  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \frac{c_p}{c_v}$  a velocidade térmica do som,  $v_s^2$ , obtemos

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \tilde{\rho}. \quad (4.19)$$

A equação (4.19) é a relação de dispersão de Jeans para pressão e energia interna como função da densidade e temperatura. Nota-se claramente o mesmo resultado de (3.52).

# Capítulo 5

## Instabilidade gravitacional para um Universo estático e dissipativo

Neste capítulo será obtida a expressão de Jeans para um fluido dissipativo em um Universo estático. Vamos usar novamente as equações de balanço e de Poisson mas agora considerando viscosidade e condução de calor. Para isso, será necessário o uso das equações constitutivas que são o tensor das tensões,  $t_{ij}$ , para descrever a viscosidade e a Lei de Fourier,  $q_i$ , para a condução de calor.

### 5.1 Relação de Dispersão de Jeans

Equações de balanço:

- Balanço de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0; \quad (5.1)$$

- Balanço de momento linear

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0; \quad (5.2)$$

- Balanço de energia

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - t_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0; \quad (5.3)$$

- Equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} - 4\pi G \rho = 0. \quad (5.4)$$

As equações constitutivas para  $t_{ij}$  e  $q_i$  são expressas por (2.26) e (2.29):

- Tensor tensão

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{ij} \right]. \quad (5.5)$$

- Lei de Fourier

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (5.6)$$

O termo onde temos a viscosidade volumétrica,  $\eta$ , foi desprezado pois estamos tratando da *suposição de Stokes*, onde  $\eta = 0$ . Substituindo as equações constitutivas (5.5) e (5.6) nas equações de balanço (5.2) e (5.3) e usando soluções sob a forma de onda plana unidimensional na direção  $x_1$ ,

$$\rho = \tilde{\rho} + \bar{\rho} e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (5.7)$$

$$v_i = \begin{bmatrix} \bar{v} e^{i(\omega t - kx_1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$T = \tilde{T} + \bar{T} e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (5.9)$$

$$\phi = \tilde{\phi} + \bar{\phi} e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (5.10)$$

temos o seguinte sistema linear para  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{T}$ ,

$$\begin{bmatrix} \omega & -\tilde{\rho} & 0 \\ k \frac{k_B}{m} \tilde{T} - \frac{4\pi G \tilde{\rho}}{k} & i \frac{4}{3} k \tilde{\mu} - \frac{\omega \tilde{\rho}}{k} & k \frac{k_B}{m} \tilde{\rho} \\ 0 & -i \frac{k_B}{m} \tilde{T} \tilde{\rho} & i \omega \frac{3}{2} \frac{k_B}{m} \tilde{\rho} + \lambda k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ k \bar{v} \\ \bar{T} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.11)$$

Este sistema admite soluções não nulas se o determinante for nulo. Fazendo o cálculo do determinante e considerando o fluido como um gás ideal de tal forma que

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T, \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left[ p - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho T \right] = \frac{1}{\rho^2} \left( p - \frac{k_B}{m} \rho T \right) = 0 \quad (5.13)$$

e

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_\rho = \frac{3}{2} \frac{k_B}{m}, \quad (5.14)$$

temos a relação de dispersão de Jeans para um fluido com viscosidade e condução de calor:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{kv_S}{\omega}\right)^4 \left( i \frac{3}{5} \frac{\lambda}{\frac{3}{5} \frac{k_B \rho}{m}} - \omega \frac{\frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\lambda}{\frac{3}{2} \frac{k_B}{m}}}{v_S^2} \right) - \\ & - \left(\frac{kv_S}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{v_S^2}{\omega} + i \left( \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} + \frac{\lambda}{\frac{3}{2} \frac{k_B}{m} \rho} + \frac{8\pi G \lambda}{3\omega^2 k_B} \right) \right] + \\ & + \frac{v_S^2}{\omega} \left( 1 + \frac{4\pi G \rho}{\omega^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Onde  $v_S^2 = \frac{5}{3} \frac{k_B}{m} T$  é a velocidade adiabática do som. Os *tios* foram omitidos de (5.15).

Fazendo as seguintes substituições em (5.15):

$$k = k_* k_J, \quad (5.16)$$

$$\omega = \omega_* v_S k_J, \quad (5.17)$$

$$\lambda = \frac{15}{4} \frac{k_B}{m} \mu, \quad (5.18)$$

$$\mu = \frac{\mu_0 k_J}{\rho_0 v_s}. \quad (5.19)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} & -\omega_*^3 \left[ i \frac{3}{2} v_S^2 k_J^2 \right] + \omega_*^2 \left[ \frac{23}{4} v_S^2 k_J^2 k_*^2 \right] \mu_0 + \\ & + \omega_* \left[ i \frac{15}{3} v_S^2 k_J^2 k_*^4 \mu_0^2 + i \frac{3}{2} v_S^2 k_J^2 k_*^2 - i 6\pi G \rho \right] + \\ & + \left[ 15\pi G \rho k_*^2 - \frac{9}{4} v_S^2 k_J^2 k_*^4 \right] \mu_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Introduzindo o número de onda de Jeans,  $k_J^2 = 4\pi G\rho/v_S^2$ , a equação (5.20) se reduz a

$$\begin{aligned} \omega_*^3 + \mu_0 \left[ i\frac{23}{6}k_*^2 \right] \omega_*^2 + \left[ 1 - k_*^2 - \frac{10}{3}k_*^4\mu_0^2 \right] \omega_* + \\ + i\mu_0 \left[ \frac{5}{2}k_*^2 - \frac{3}{2}k_*^4 \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Esta última equação, é a relação de dispersão de Jeans para um fluido viscoso e condutor de calor em um Universo estático. Na ausência de viscosidade,  $\mu_0 = 0$ , a equação (5.21) se reduz a

$$\omega_*^3 - k_*^2\omega_* + \omega_* = 0, \quad (5.22)$$

e ao usar (5.16) e (5.17), se torna

$$\omega^2 - k^2v_S^2 + 4\pi G\rho = 0. \quad (5.23)$$

que é a relação de dispersão de Jeans para um fluido sem dissipação como discutido na seção 3.5.2. A expressão (5.21) nos exhibe soluções na forma  $\omega_* = a + ib$ . Para obter a perturbação referente a estas raízes, inserimos as mesmas na expressão (3.42) e a reescrevemos para termos de seno e cosseno,

$$\delta(t) \sim e^{i\omega_*t} = e^{i(a+ib)t} = [\cos(at) - i\text{sen}(at)]e^{bt}, \quad (5.24)$$

e extraíndo a parte real podemos definir a perturbação como sendo

$$\delta(t) \sim e^{bt}\cos(at). \quad (5.25)$$

Nas duas seções seguintes vamos adotar os valores de  $k_* = 0,5$  e  $k_* = 1,5$ . Estes valores foram atribuídos com o objetivo de obtermos as condições em que  $\lambda > \lambda_J$  e  $\lambda < \lambda_J$ , respectivamente.

### 5.1.1 $k_* = 0,5$

Primeiramente adotamos  $k_* = 0,5$  para três diferentes valores de  $\mu_0$  como descrito na legenda da figura 5.1. Essa condição em que  $k_* < 1$ , nos leva à transformação definida por (5.16) onde podemos ver que  $k < k_J$  ou  $\lambda > \lambda_J$ . Então, neste argumento, as perturbações são instáveis e a função tem um crescimento no tempo que obedece a função exponencial definida por (5.25)

com  $a = 0$  e  $b > 0$ .

A curva para  $\mu_0 = 0$  representa a perturbação de Jeans para um fluido sem dissipação e foi incluída para mostrar como a viscosidade interfere na perturbação tal como o número de onda  $k_*$ . Em outras palavras, quanto menor é o coeficiente de viscosidade, maior é a aproximação das soluções de um fluido com dissipação para um fluido sem dissipação. Nesta situação em que  $k < k_J$ , as perturbações são instáveis e temos uma possibilidade de formação de estruturas.

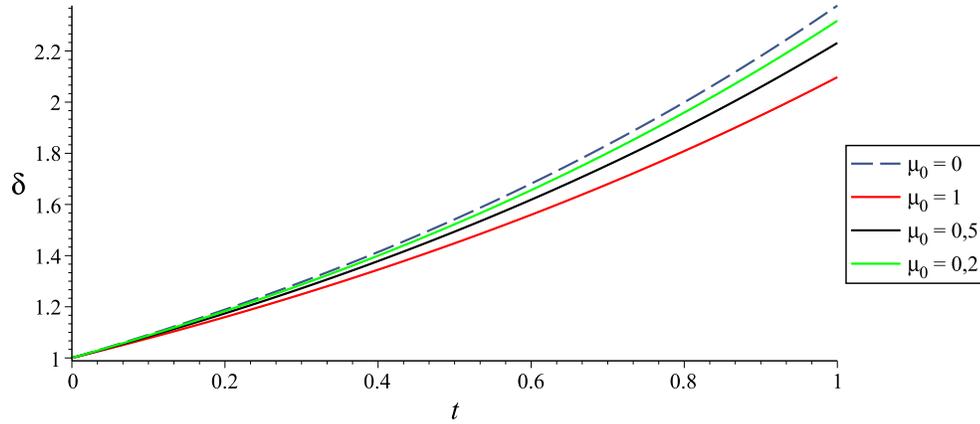


Figura 5.1: *Evolução da perturbação para  $\lambda > \lambda_J$ .*

### 5.1.2 $k_* = 1,5$

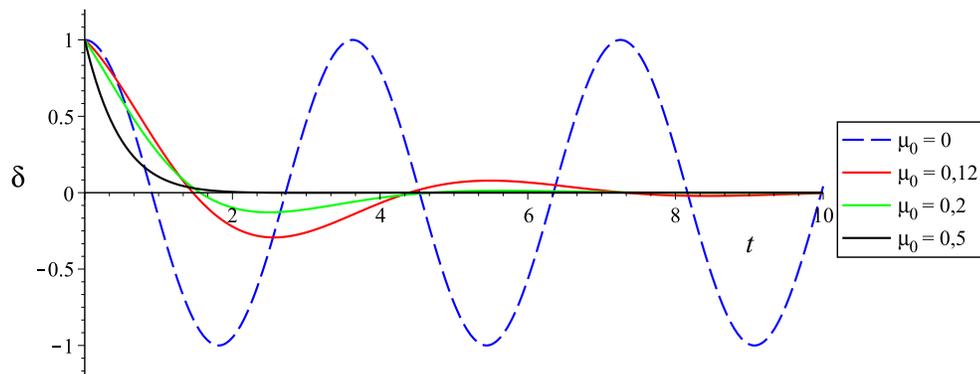


Figura 5.2: *Evolução da perturbação para  $\lambda < \lambda_J$ .*

O gráfico 5.2 mostra como a flutuação se comporta para um valor de  $k_* = 1,5$ . A linha tracejada representa a solução de Jeans para um fluido sem dissipação. Para esta condição em que  $k_* > 1$  e por consequência  $k > k_J$  ou  $\lambda < \lambda_J$ , a perturbação oscila periodicamente

no tempo com gradual queda na amplitude de oscilação. Essa taxa de amortecimento pode ser interpretada pela presença da exponencial como produto da função cosseno na equação (5.25). Para essa escolha de  $k_*$ , obtemos valores de  $b < 0$  e  $a \neq 0$ , mostrando que a função respeita uma taxa de decaimento na amplitude de oscilação que depende do coeficiente de viscosidade. Dessa forma, a taxa de decaimento da amplitude da onda será tanto maior quanto maior for o valor da viscosidade no fluido. Nota-se também que o comprimento de onda se mantém constante no tempo, pois a princípio, não estamos considerando a expansão do Universo. Nesta situação em que  $k > k_J$ , a perturbação é estável e temos apenas a propagação de uma onda acústica.

Portanto, existem valores de número de onda tal que este favorecerá ou não a instabilidade de Jeans em um Universo estático sob influências dissipativas. Sendo que para valores onde  $k < k_J$ , a perturbação respeita uma função exponencial crescente que resulta numa instabilidade e por consequência na formação de estruturas. Em contra partida, para a condição em que  $k > k_J$ , a curva mostrou-se periódica no tempo, desfavorecendo a instabilidade gravitacional.

No próximo capítulo vamos fazer uma análise da instabilidade de Jeans em um fluido dissipativo para um Universo em expansão.

# Capítulo 6

## Instabilidade gravitacional para um Universo em expansão e dissipativo

A teoria original de Jeans da instabilidade gravitacional para um Universo estático não pode ser aplicada a um modelo cosmológico em expansão. Neste capítulo, o objetivo é traduzir a linguagem usual da instabilidade gravitacional no contexto dos modelos de Friedmann. Vamos assumir um Universo dominado por matéria sem pressão. Numa primeira análise que será feita na seção 6.1 vamos desprezar termos dissipativos como viscosidade e condução de calor.

### 6.1 Comprimento de Jeans e perturbação da densidade na ausência de dissipação

Equações de Balanço:

- Balanço de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0; \quad (6.1)$$

- Balanço de momento linear

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0; \quad (6.2)$$

- Equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} - 4\pi G \rho = 0; \quad (6.3)$$

- Balanço de energia interna

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (6.4)$$

Para esta situação onde estamos desconsiderando termos dissipativos, o tensor das tensões  $t_{ij}$  apresenta somente o termo que descreve o negativo do gradiente de pressão, isto é,  $t_{ij} = -p\delta_{ij}$ . E a condução de calor definida por (2.29) é zero pois a condutividade térmica é zero. O sistema de equações acima admite soluções estáticas (não perturbadas) da seguinte forma:

$$\tilde{\rho}(t) = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3; \quad (6.5)$$

$$\tilde{v}_i(t) = \frac{\dot{a}}{a} x_i; \quad (6.6)$$

$$\tilde{\phi}(t) = \frac{2}{3} \pi G \tilde{\rho} x_i x_i; \quad (6.7)$$

$$\tilde{T}(t) = T_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2. \quad (6.8)$$

Com  $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$  e  $p = p(\rho, T)$  e  $\rho_0$  e  $a_0$  constantes. A solução para a temperatura de equilíbrio,  $\tilde{T}(t)$ , é obtida inserindo as soluções estáticas na equação de balanço de energia interna. Esta temperatura é atribuída macroscopicamente para todo o gás.

As perturbações não podem ser do tipo  $e^{i\omega t}$  pois as amplitudes de perturbação são dependentes do tempo devido ao parâmetro de expansão  $a(t)$ . Devemos também observar que o vetor de onda  $k$  correspondente a um comprimento de onda  $\lambda$  também varia devido a expansão do Universo, isto é,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi a_0}{\lambda_0 a} = k_0 \frac{a_0}{a} = \frac{q}{a}. \quad (6.9)$$

Sabendo que as equações de movimento de primeira ordem são espacialmente inhomogêneas de modo que se pode tratar soluções sob a forma de onda plana, [7], vamos introduzir uma

pequena flutuação nas soluções de equilíbrio, logo

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \bar{\rho}(t) e^{i \frac{q r x_r}{a}}, \quad (6.10)$$

$$v_i = \frac{\dot{a}}{a} x_i + \bar{v}_i(t) e^{i \frac{q r x_r}{a}}, \quad (6.11)$$

$$\phi = \frac{2}{3} \pi G \tilde{\rho} x_i x_i + \bar{\phi}(t) e^{i \frac{q r x_r}{a}}, \quad (6.12)$$

$$T = T_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \bar{T}(t) e^{i \frac{q r x_r}{a}}. \quad (6.13)$$

O fator  $1/a(t)$  representa a taxa de redução do comprimento de onda para a expansão do Universo. Substituindo o conjunto de soluções (6.10) a (6.13) nas equações de balanço e considerando ondas longitudinais na direção  $x_1$  obtemos

$$\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} + i \tilde{\rho} \frac{q}{a} \bar{v} = 0, \quad (6.14)$$

$$\dot{\bar{v}} + \frac{\dot{a}}{a} \bar{v} + i \frac{q}{a} \frac{k_B}{m} \bar{T} - i 4\pi G \frac{a}{q} \bar{\rho} = 0, \quad (6.15)$$

$$\dot{\bar{T}} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \bar{T} + i \frac{2}{3} \tilde{T} \frac{q}{a} \bar{v} = 0. \quad (6.16)$$

Para um Universo em expansão, tanto a solução estática e perturbada da densidade e do potencial gravitacional satisfazem a equação de Poisson, por esse motivo não é necessário fazer o uso do Jeans Swindle. Vamos introduzir o contraste de densidade  $\delta_\rho = \bar{\rho}/\tilde{\rho}$  na equação (6.14) para obter a amplitude de perturbação da velocidade e sua primeira derivada e relação ao tempo que são

$$\bar{v} = -\frac{a}{iq} \dot{\delta}_\rho \quad (6.17)$$

e

$$\dot{\bar{v}} = \frac{\dot{a}}{a} \bar{v} - \frac{a}{iq} \ddot{\delta}_\rho, \quad (6.18)$$

respectivamente, e substituir na expressão (6.15) que passa a ser

$$\ddot{\delta}_\rho + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_\rho + \left( \frac{q^2 k_B \tilde{T}}{a^2 m} - 4\pi G \tilde{\rho} \right) \delta_\rho + \frac{q^2 k_B \tilde{T}}{a^2 m} \bar{T} = 0. \quad (6.19)$$

Introduzindo também o contraste de temperatura  $\delta_T = \bar{T}/\tilde{T}$  e sua primeira derivada que é

$$\dot{\delta}_T = \frac{\dot{\tilde{T}}}{\tilde{T}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\tilde{T}}{\tilde{T}} \quad (6.20)$$

na expressão (6.16) obtemos

$$\delta_T = \frac{2}{3}\delta_\rho. \quad (6.21)$$

Substituindo (6.21) em (6.19) obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para a perturbação da densidade em um Universo em expansão com ausência de viscosidade e condução de calor:

$$\ddot{\delta}_\rho + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_\rho + \left(\frac{q^2}{a^2}v_s^2 - 4\pi G\tilde{\rho}\right)\delta_\rho = 0. \quad (6.22)$$

Onde  $v_s^2 = \frac{5}{3}\frac{k_B\tilde{T}}{m}$ .

As soluções da equação (6.22) dependem do modelo de background relativo a onde as perturbações são definidas. Neste modelo,

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{6\pi Gt^2}, \quad (6.23)$$

$$a = a_0 \left(\frac{3}{2}H_0t\right)^{2/3}, \quad (6.24)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}, \quad (6.25)$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3}. \quad (6.26)$$

Substituindo estas soluções em (6.22), introduzindo os comprimentos de onda

$$\lambda = \frac{2\pi a_0}{q}, \quad (6.27)$$

$$\lambda_J = \frac{2\pi v_s}{4\pi G\rho_0}, \quad (6.28)$$

e uma dimensionalização do tempo  $\tau = t\sqrt{6\pi G\rho_0}$ , obtemos

$$\tau^2\delta_\rho'' + \frac{4}{3}\tau\delta_\rho' - \frac{2}{3}\left[1 - \Lambda^2\frac{1}{\tau^{2/3}}\right] = 0, \quad (6.29)$$

onde  $\Lambda = \lambda_J/\lambda$ . As linhas se referem as derivadas em relação a  $\tau$ .

A solução de (6.29) é dado em termos da função de Bessel de primeira espécie  $J_{\pm\frac{5}{2}}\left(\sqrt{6}\lambda_J/\lambda\tau^{1/3}\right)$ . Portanto, o contraste de densidade é dado por

$$\delta_\rho = t^{-1/6} \left[ C_1 J_{+\frac{5}{2}}\left(\frac{\sqrt{6}\lambda_J}{\lambda\tau^{1/3}}\right) + C_2 J_{-\frac{5}{2}}\left(\frac{\sqrt{6}\lambda_J}{\lambda\tau^{1/3}}\right) \right]. \quad (6.30)$$

Para análise desta solução, resolvemos analiticamente a expressão (6.29) considerando as condições iniciais,  $\delta_\rho(1) = 1$  e  $\delta'_\rho(1) = 1$ . Nas duas seções seguintes são abordados dois valores de  $\Lambda$  para analisarmos o comportamento do contraste de densidade para pequenos e grandes comprimentos de onda.

### 6.1.1 $\Lambda = 100$

Para grandes valores de  $\lambda_J/\lambda$  (pequenos comprimentos de onda,  $\lambda \ll \lambda_J$ ) a função de Bessel resulta em uma oscilação do contraste de densidade respeitando uma função de onda. A figura 6.1 mostra o comportamento desta oscilação para  $\Lambda = 100$ . Para estas situações, não temos o favorecimento de formação de estruturas. Nota-se pela curva que o comprimento de onda aumenta com o passar do tempo. Isso se deve a dependência do comprimento de onda com o parâmetro de expansão  $a(t)$  conforme a expressão dada por (6.9), isto é,  $\lambda \sim a(t) \sim 1/k$ . Nota-se também que a curva possui amplitude de oscilação constante, isto porquê a princípio, não estamos considerando termos dissipativos.

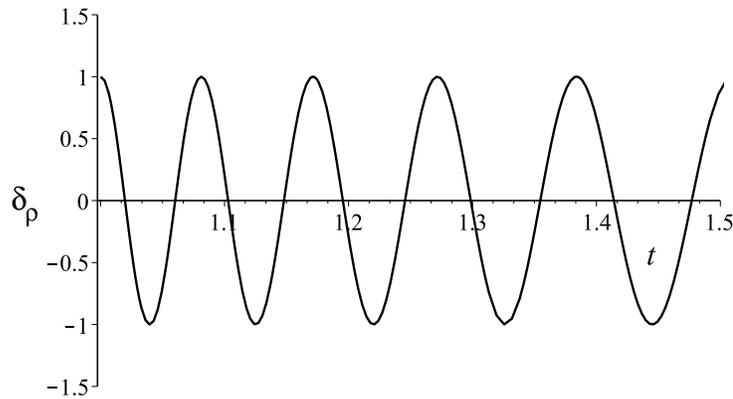


Figura 6.1: *Contraste de densidade para um Universo em expansão com  $\mu = 0$  e  $\Lambda = 100$  ou  $\lambda \ll \lambda_J$ .*

### 6.1.2 $\Lambda = 1/2$

Para pequenos valores de  $\lambda_J/\lambda$  (grandes comprimentos de onda,  $\lambda \gg \lambda_J$ ) a função de Bessel mostra um comportamento crescente da perturbação que evolui como

$$\delta_\rho \sim \tau^{2/3} \quad (6.31)$$

e decrescente com evolução

$$\delta_\rho \sim 1/\tau. \quad (6.32)$$

A figura 6.2 mostra como a solução de crescimento da perturbação da densidade se comporta para  $\Lambda = 1/2$ . A curva é representada pela solução  $\tau^{2/3}$  que mostra um ligeiro crescimento nos dois primeiros instantes de tempo para em seguida ter um comportamento aproximadamente linear. Portanto, quando temos grandes comprimentos de onda, temos também o favorecimento da formação de estruturas.

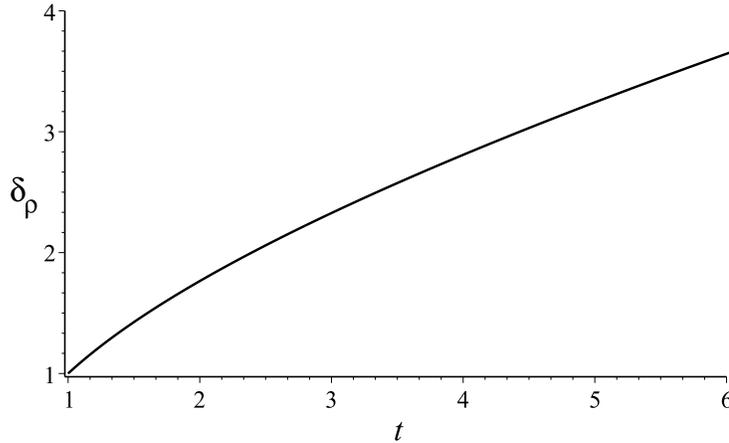


Figura 6.2: *Contraste de densidade para um Universo em expansão com  $\mu = 0$  e  $\Lambda = 1/2$  ou  $\lambda \gg \lambda_J$ .*

## 6.2 Perturbação da densidade e temperatura na presença de dissipação

Nesta seção será obtido o comportamento da perturbação da densidade e da temperatura para um meio viscoso e condutor de calor considerando a expansão do Universo. Abaixo

seguem as equações de Friedmann e aceleração para um fluido sem pressão que usaremos para obter mais adiante o sistema de equações em termos das perturbações:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (6.33)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho. \quad (6.34)$$

Para este caso, vamos usar as mesmas equações de balanço e de Poisson mas agora na presença de viscosidade e condução de calor, isto é, para  $\mu = \lambda \neq 0$ . Fazendo uso das soluções (6.10) a (6.13) temos o seguinte sistema de equações para  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{T}$  e  $\bar{\phi}$ :

$$\dot{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\bar{\rho} + \frac{iq}{a}\tilde{\rho}\bar{v} = 0, \quad (6.35)$$

$$\dot{\bar{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\bar{v} + \frac{k_B\tilde{T}}{m}\frac{iq}{a}\left(\frac{\bar{\rho}}{\tilde{\rho}} + \frac{\bar{T}}{\tilde{T}}\right) + \frac{4\tilde{\mu}q^2}{3\tilde{\rho}a^2}\bar{v} + \frac{iq}{a}\bar{\phi} = 0, \quad (6.36)$$

$$\frac{3}{2}\dot{\bar{T}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\bar{T} + \frac{m\tilde{\lambda}q^2}{k\tilde{\rho}a^2}\bar{T} + \frac{iq}{a}\tilde{T}\bar{v} = 0, \quad (6.37)$$

$$\bar{\phi} + \frac{4\pi Ga^2}{q^2}\bar{\rho} = 0. \quad (6.38)$$

Introduzindo os contrastes de densidade e temperatura,  $\delta_\rho = \bar{\rho}/\tilde{\rho}$  e  $\delta_T = \bar{T}/\tilde{T}$ , respectivamente, obtemos de (6.35) que

$$\dot{\delta}_\rho = -\frac{iq}{a}\bar{v} \quad (6.39)$$

e o sistema de equações (6.35) a (6.38) se reduz a um sistema de equações para determinação de  $\delta_\rho$  e  $\delta_T$ :

$$\delta_\rho + \left(2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{4\tilde{\mu}q^2}{3\tilde{\rho}a^2}\right)\delta_\rho + \frac{k_B\tilde{T}}{m}\frac{q^2}{a^2}(\delta_\rho + \delta_T) - 4\pi G\tilde{\rho}\delta_\rho = 0, \quad (6.40)$$

$$\delta_T - \frac{2}{3}\delta_\rho + \frac{2}{3}\frac{m}{k_B}\frac{\tilde{\lambda}q^2}{\tilde{\rho}a^2}\delta_T = 0. \quad (6.41)$$

Na ausência de qualquer tipo de dissipação, isto é, para  $\mu = \lambda = 0$  em (6.40) e (6.41), estas expressões se reduzem a (6.22).

Para  $\mu$  e  $\lambda \neq 0$  temos a viscosidade como uma função da temperatura e do parâmetro de

expansão, isto é,

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{\tilde{T}}{T_0} \right)^\alpha = \left( \frac{a_0}{a} \right)^{2\alpha}, \quad (6.42)$$

onde de acordo com a teoria cinética de gases rarefeitos, o coeficiente  $\alpha$  está contido no intervalo  $1/2 < \alpha < 1$ , o valor  $1/2$  é para esferas rígidas e 1 para esferas não rígidas.

Introduzindo a dimensionalização do tempo  $\tau$  no sistema de equações (6.40) e (6.41) teremos,

$$\tau^2 \delta_\rho'' + \frac{4}{3} \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \mu \Lambda^2 \tau^{\frac{5-4\alpha}{3}} \right] \tau \delta_\rho' - \frac{2}{3} \left[ \delta_\rho - \frac{3}{5} \Lambda^2 \frac{\delta_\rho + \delta_T}{\tau^{2/3}} \right] = 0, \quad (6.43)$$

$$\tau \left( \delta_T' - \frac{2}{3} \delta_\rho' \right) + \frac{5}{\sqrt{6}} \mu \Lambda^2 \tau^{\frac{5-4\alpha}{3}} \delta_T = 0, \quad (6.44)$$

onde  $\Lambda = \lambda_J/\lambda$ . Este sistema admite solução numérica para  $\delta_\rho$  e  $\delta_T$ . As condições iniciais inseridas foram  $\delta_\rho(1) = 1$ ,  $\delta_\rho'(1) = 1$  e  $\delta_T(1) = 1$ . O valor de  $\Lambda$  se mostrou significativo na descrição do comportamento das flutuações de densidade e temperatura. Sendo este a grandeza que determina o favorecimento ou não da instabilidade de Jeans. Por esse motivo, para as próximas seções, adotaremos os valores de  $\Lambda = 1/2$  e  $\Lambda = 100$  para as soluções de  $\delta_\rho$  e  $\delta_T$ , isto é, comprimentos de onda grandes e comprimentos de onda pequenos, respectivamente.

### 6.2.1 $\Lambda = 100$

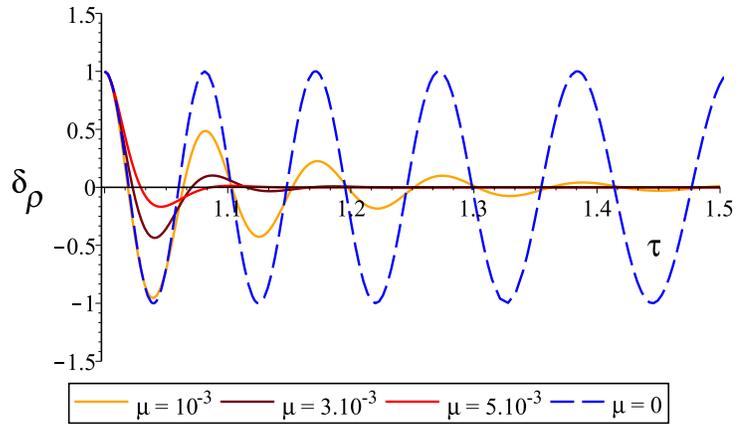


Figura 6.3: *Contraste de densidade para  $\alpha = 1$ ,  $\Lambda = 100$  ou  $\lambda \ll \lambda_J$ .*

Para grandes valores de  $\Lambda$  ( $\lambda \ll \lambda_J$ ) a perturbação da densidade mostrou um comportamento oscilante no tempo com gradual queda na amplitude e aumento do comprimento de onda. As curvas são mostradas nas figuras 6.3 e 6.4.

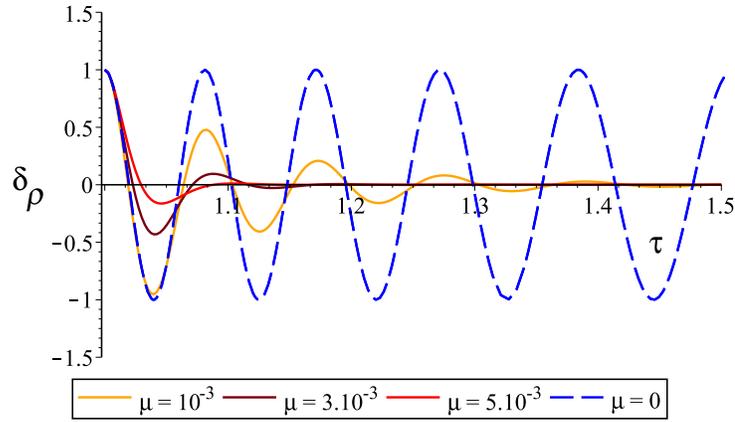


Figura 6.4: *Contraste de densidade para  $\alpha = 1/2$ ,  $\Lambda = 100$  ou  $\lambda \ll \lambda_J$ .*

O contraste de temperatura teve um comportamento similar ao da densidade. O resultado mostrou uma oscilação periódica no tempo com decaimento na amplitude e aumento do comprimento de onda. Este comportamento pode ser visto nas figuras 6.5 e 6.6.

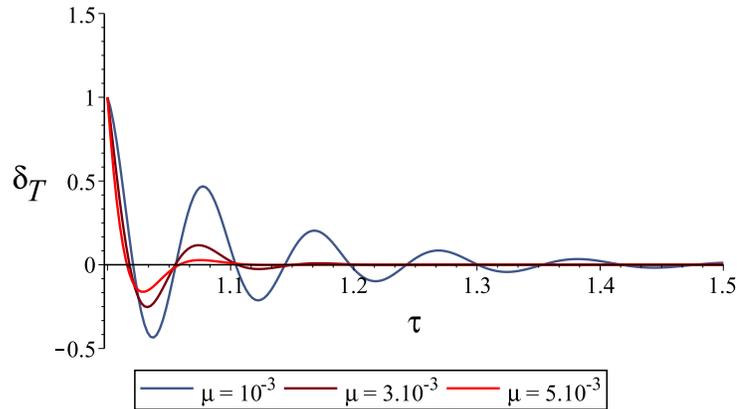


Figura 6.5: *Contraste de temperatura para  $\alpha = 1$ ,  $\Lambda = 100$  ou  $\lambda \ll \lambda_J$ .*

A diferença de atenuação nas amplitudes de oscilação pode ser interpretada pela presença de viscosidade no fluido. Nota-se pelas curvas das figuras 6.3 a 6.6 que a intensidade do amortecimento é tanto maior quanto maior for o valor da viscosidade. A linha tracejada representa o contraste de densidade para um fluido sem dissipação.

O comprimento de onda característico da flutuação apresenta uma taxa de crescimento que depende do parâmetro  $a(t)$ , como descrito pela expressão (6.9). O parâmetro de expansão também possui dependência com o parâmetro de viscosidade e com o parâmetro  $\alpha$  como descrito pela expressão (6.42). Levando em consideração os valores adotados, quando temos  $\alpha = 1$ , a viscosidade e o parâmetro de expansão tem proporção  $\mu \sim 1/a^2$ , enquanto que para

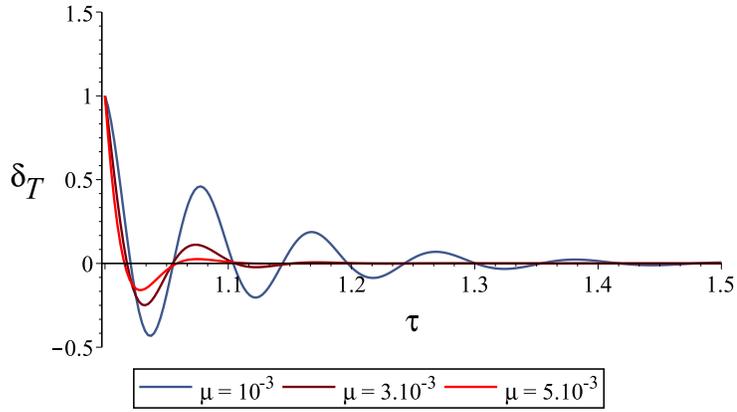


Figura 6.6: *Contraste de temperatura para  $\alpha = 1/2$ ,  $\Lambda = 100$  ou  $\lambda \ll \lambda_J$ .*

$\alpha = 1/2$ , esta proporção obedece a  $\mu \sim 1/a$ .

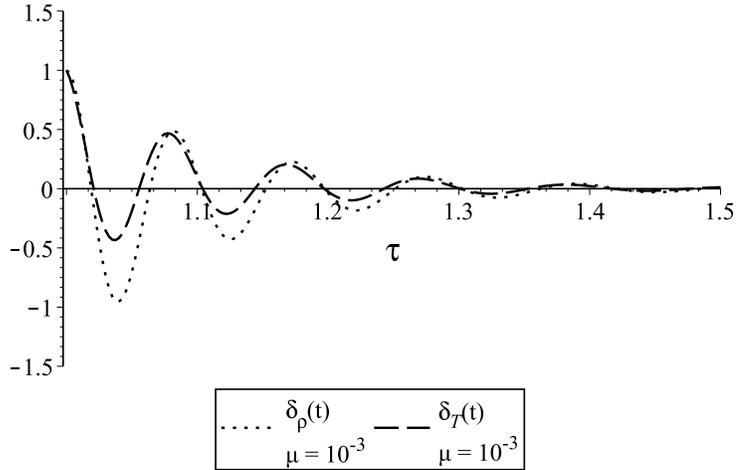


Figura 6.7: *Contrastes de densidade e temperatura para  $\alpha = 1$  e  $\Lambda = 100$ .*

As curvas mostradas na figura 6.7 mostram a evolução dos contrastes para  $\alpha = 1$ . Os pontos de mínimo do contraste de densidade se apresenta mais acentuado em comparação com o contraste de temperatura. Neste limite, para o qual o comprimento de onda é pequeno, a instabilidade gravitacional não é observada.

### 6.2.2 $\Lambda = 1/2$

Vamos discutir agora as soluções de  $\delta_\rho$  e  $\delta_T$  quando temos grandes comprimentos de onda. Nesta seção, vamos introduzir os mesmos coeficientes para  $\mu$  e  $\alpha$  mas adotando  $\Lambda = 1/2$ , que representa um comprimento de onda longo.

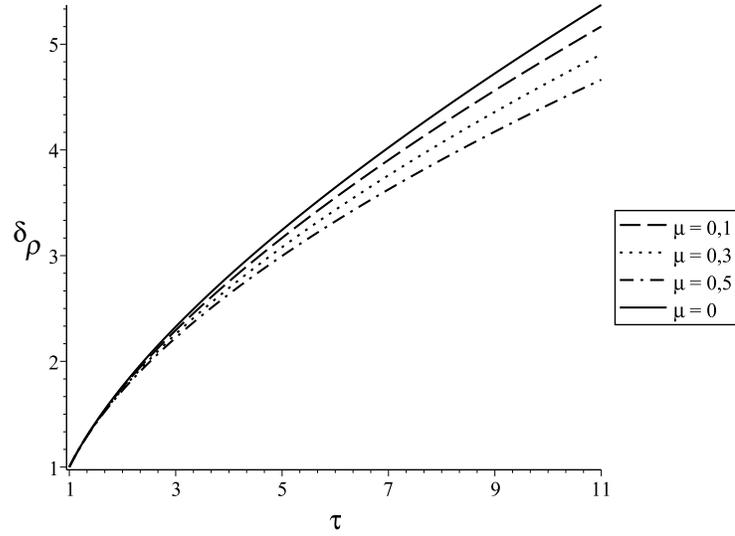


Figura 6.8: *Contraste de densidade para  $\alpha = 1$ ,  $\Lambda = 1/2$  ou  $\lambda \gg \lambda_J$ .*

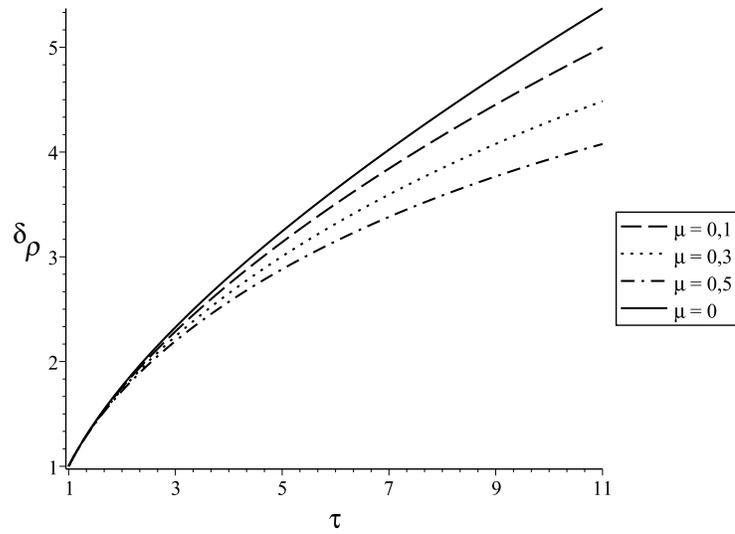


Figura 6.9: *Contraste de densidade para  $\alpha = 1/2$ , e  $\Lambda = 1/2$  ou  $\lambda \gg \lambda_J$ .*

Para grandes comprimentos de onda, a evolução do contraste de densidade mostra um comportamento crescente, como pode ser visto na figura 6.8, onde  $\alpha = 1$ . Este crescimento se aproxima da solução de Jeans para um fluido ideal (linha contínua) quando a viscosidade é reduzida no sistema.

Da mesma forma, o contraste de densidade possui um crescimento no tempo para  $\alpha = 1/2$ , como visto na figura 6.9. Sendo que nesta situação, as curvas apresentam uma maior divergência para os últimos instantes de tempo em comparação com o caso em que  $\alpha =$

1. Novamente a linha contínua representa o crescimento da perturbação para um gás sem dissipação.

Este mesmo crescimento pode ser observado para o contraste de temperatura quando também temos grandes comprimentos de onda. Para  $\alpha = 1$  da figura 6.10, a evolução do contraste de temperatura é crescente, de tal forma que seu crescimento é atenuado com o aumento da viscosidade.

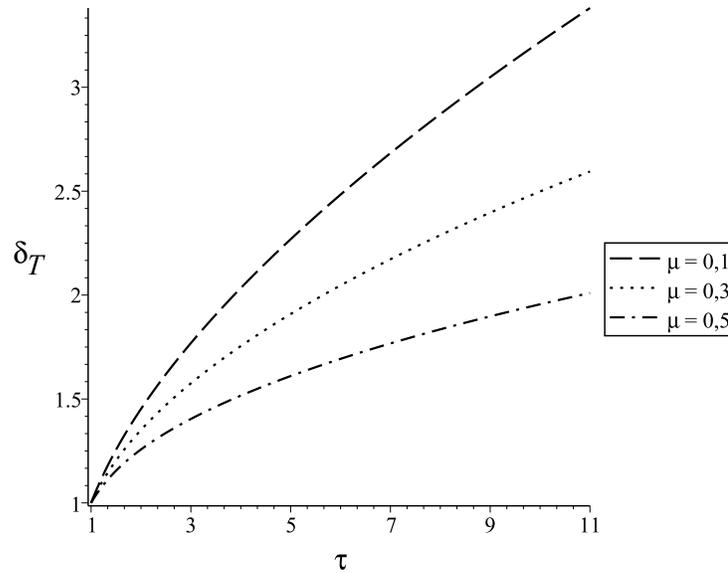


Figura 6.10: *Contraste de temperatura para  $\alpha = 1$  e  $\Lambda = 1/2$  ou  $\lambda \gg \lambda_J$ .*

No caso em que  $\alpha = 1/2$ , o amortecimento da solução também é mais acentuado com o aumento da viscosidade. As curvas representadas por  $\mu = 0,3$  e  $\mu = 0,5$  possuem um máximo nos primeiros três instantes de tempo, para em seguida se aproximarem de zero.

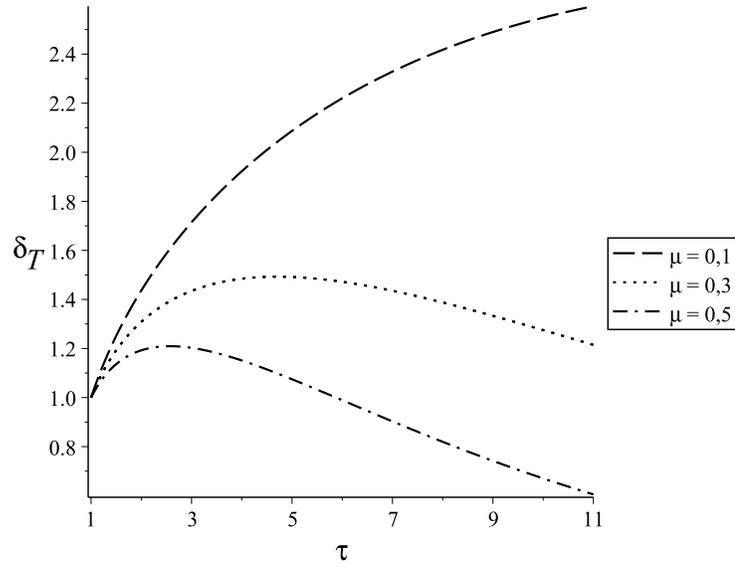


Figura 6.11: *Contraste de temperatura para  $\alpha = 1/2$  e  $\Lambda = 1/2$  ou  $\lambda \gg \lambda_J$ .*

O gráfico da figura 6.12 mostra a evolução dos contrastes de densidade e temperatura para  $\alpha = 1$ , onde podemos ver que a taxa de aumento do contraste de densidade é maior que a taxa de aumento do contraste de temperatura. Portanto nesse sentido, para valores tal que o comprimento de onda característico da flutuação é muito maior que o comprimento de onda de Jeans, a instabilidade gravitacional é observada e temos a possibilidade de formação de um objeto gravitacionalmente ligado.

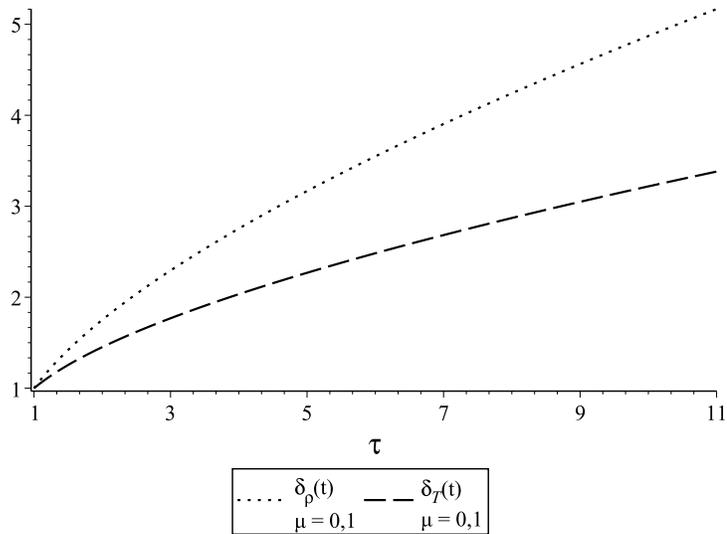


Figura 6.12: *Contrastes de densidade e temperatura para  $\alpha = 1$  e  $\Lambda = 1/2$ .*

# Capítulo 7

## CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho consistiu no estudo do critério de Jeans para um fluido viscoso e condutor de calor, tanto para o caso de um Universo estático como em expansão. A finalidade foi encontrar condições em termos de comprimento de onda para que ocorra a formação de estruturas.

Ao usarmos as equações de balanço de massa, momento e energia interna com a pressão e a energia interna em função da densidade e da temperatura,  $p(\rho, T)$  e  $\epsilon(\rho, T)$  respectivamente, obtemos a mesma relação de dispersão de Jeans para um fluido ideal (sem dissipação).

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \tilde{\rho}. \quad (7.1)$$

Para esta situação usamos a velocidade térmica do som que é definida como:  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \frac{c_p}{c_v} = v_s^2$ .

Usando a mesmas equações de balanço mas no caso de um fluido com viscosidade e condução de calor, a seguinte relação de dispersão de Jeans para  $\omega$  foi encontrada para um Universo estático:

$$\begin{aligned} \omega_*^3 + \mu_0 \left[ i \frac{23}{6} k_*^2 \right] \omega_*^2 + \left[ 1 - k_*^2 - \frac{10}{3} k_*^4 \mu_0^2 \right] \omega_* + \\ + i \mu_0 \left[ \frac{5}{2} k_*^2 - \frac{3}{2} k_*^4 \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Após a análise das raízes fazendo uso da solução de onda dado por (3.42), constatou-se que, para valores de  $k_*$  onde  $\lambda < \lambda_J$ , a perturbação se mostrou oscilante no tempo com gradual queda na amplitude de perturbação devido a presença de viscosidade. Esta última se mostrou determinante para a intensidade do amortecimento, de tal forma que a taxa de

atenuação da onda é tanto maior quanto maior for a viscosidade atribuída.

Para valores de  $k_*$  onde  $\lambda > \lambda_J$ , a perturbação demonstrou um crescimento no tempo, obedecendo a uma lei de potência. Portanto, existem valores de  $k_*$  de tal forma que quando são menores que um, a condensação gravitacional ocorre e temos assim o favorecimento da formação de estruturas.

Para o caso da análise de Jeans para um Universo em expansão, o seguinte sistema de equações para  $\delta_\rho(t)$  e  $\delta_T(t)$  foi encontrado:

$$\tau^2 \delta_\rho'' + \frac{4}{3} \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \mu \Lambda^2 \tau^{\frac{5-4\alpha}{3}} \right] \tau \delta_\rho' - \frac{2}{3} \left[ \delta_\rho - \frac{3}{5} \Lambda^2 \frac{\delta_\rho + \delta_T}{\tau^{2/3}} \right] = 0, \quad (7.3)$$

$$\tau \left( \delta_T' - \frac{2}{3} \delta_\rho' \right) + \frac{5}{\sqrt{6}} \mu \Lambda^2 \tau^{\frac{5-4\alpha}{3}} \delta_T = 0, \quad (7.4)$$

Sendo  $\Lambda = \lambda_J/\lambda$ .

Para grandes valores de  $\Lambda$  ou pequenos comprimentos de onda ( $\lambda \ll \lambda_J$ ), tanto o contraste de densidade como o da temperatura obedecem a um comportamento oscilante, tendo seu efeito suprimido com o passar do tempo pelo decaimento da amplitude devido o aumento da viscosidade. Notou-se também o aumento no comprimento de onda sob a justificativa de estarmos considerando a expansão do Universo sob influência do parâmetro  $a(t)$ . Portanto, para comprimentos de onda curtos, a instabilidade de Jeans não ocorre.

Já para pequenos valores de  $\Lambda$ , isto é, grandes comprimentos de onda ( $\lambda \gg \lambda_J$ ), as perturbações da densidade e temperatura crescem no tempo. Este crescimento mostra uma redução conforme o aumento da viscosidade. Nesta situação em que o comprimento de onda é longo, a instabilidade gravitacional é observada e temos a possibilidade de formação de estruturas gravitacionalmente ligadas.

Como *trabalhos futuros*, podemos obter a relação de dispersão de Jeans para um Universo estático e em expansão na presença de viscosidade e condução de calor usando as equações dos treze momentos. Este trabalho consiste na introdução de um sistema hiperbólico de equações para determinação dos campos de densidade de massa  $\rho$ , velocidade  $v_i$ , tensor pressão  $p_{ij}$  e o vetor fluxo de calor  $q_i$ . Para um gás ideal, estas equações de equilíbrio podem ser obtidas a partir do método Grad da teoria cinética ou da chamada teoria termodinâmica estendida.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. Abeyaratne. *Continuum Mechanics - The Mechanics of Elastic Solids*, volume II. Rohan Abeyaratne, Cambridge, 2012.
- [2] N. Achcar. *Mecânica dos Meios Contínuos*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Notas de aula.
- [3] S. Argal et al. Jeans instability of rotating viscoelastic fluid in the presence of magnetic field. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 70:39–45, 2015.
- [4] G. Backus. *Continuum Mechanics*. Samizdat Press, Colorado, 1997.
- [5] A. Bonasera. On the expansion and fate of the Universe. *Journal of Modern Physics*, 3(11):1722–1726, 2012.
- [6] F. Brunetti. *Mecânica dos Fluidos*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2nd edition, 2008.
- [7] N. Carlevaro and G. Montani. The Jeans Instability In Presence Of Viscous Effects. *International Journal of Modern Physics D*, 18, 2009.
- [8] E. P. Cavalcanti. *Dinâmica dos Fluidos*. Campina Grande - Universidade Federal da Paraíba, 2001.
- [9] P. Coles and F. Lucchin. *Cosmology - The Origin and Evolution Of Cosmic Structure*. Wiley, British Library, 2nd edition, 2002.
- [10] M. G. Corona-Galindo. The Jeans Instability criterion for a compressible fluid including viscosity and heat conduction. *Astrophysics and Space Science*, 153(1):87–94, 1989.
- [11] J. P. M. de Carvalho and P. G. Macedo. On the onset of the jeans instability in a two-component fluid. *Astronomy & Astrophysics*, 299:326–338, 1995.

- [12] Y. A. Çengel and J. M. Cimbala. *Fluid Mechanics - Fundamentals and Applications*. McGraw-Hill, 2004.
- [13] ESA and the Planck Collaboration; NASA / WMAP Science Team. Cosmic Microwave Background. <http://sci.esa.int/planck/51554-the-cosmic-microwave-background-as-seen-by-planck-and-wmap/> - Acessado em 06 de março de 2017.
- [14] R. W. Fox et al. *Introdução a Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, 6th edition, 2006.
- [15] J. E. C. Gliddon. Gravitational Instability of Anisotropic Plasma. *Astrophysical Journal*, 145:583, 1966.
- [16] M. Gobbi et al. *Introdução à Mecânica dos Fluidos e aos Fenômenos de Transporte*. Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná. Apostila.
- [17] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15(3):168–173, 1929.
- [18] M. S. Janaki et al. Jeans instability in a viscoelastic fluid. *Physics of Plasmas*, 18, 2013.
- [19] G. M. Kremer. Analysis of jeans instability from the Boltzmann equation. *AIP Publishing*, 1786(160002), 2016.
- [20] G. M. Kremer. *Mecânica Estatística de Processos Irreversíveis*. Universidade Federal do Paraná, 2016. Notas de aula.
- [21] G. M. Kremer and R. André. Analysis of instability of systems composed by dark and baryonic matter. *IJMP D*, 25(1):7, 2015.
- [22] P. K. Kundu et al. *Fluid Mechanics*. Else, Oxford, 5th edition, 2012.
- [23] M. Lai et al. *Introduction to Continuum Mechanics*. Elsevier, Oxford, 4th edition, 2010.
- [24] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, British Library, 2nd edition, 2003.

- [25] J. A. S. Lima et al. Jeans' Gravitational Instability and Nonextensive Kinetic Theory. *Astronomy & Astrophysics*, 396:309–314, 2002.
- [26] G. T. Mase and G. E. Mase. *Continuum Mechanics for Engineers*. CRC Press, 2nd edition, 1999.
- [27] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [28] M. Novello et al. *Programa Mínimo de Cosmologia*. Jauá, Rio de Janeiro, 2010.
- [29] A. G. Riess et al. New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy. *The Astrophysical Journal*, 659(1), 2007.
- [30] R. Rosenfeld. *A Cosmologia*. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação, UNESP - São Paulo, 2005.
- [31] B. Ryden. *Introduction to Cosmology*. Addison-Wesley, The Ohio State University, 2002.
- [32] P. K. Shukla and L. Stenflo. Jeans instability in a self-gravitating dusty plasma. *The Royal A Society*, 462:403–407, 2005.
- [33] K. R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley, Massachusetts, 2nd edition, 1960.
- [34] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [35] J. R. Welty et al. *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*. Wiley, 5th edition, 2007.
- [36] F. M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 7th edition, 2009.
- [37] J. Wilson. Milky Way. [nasa.gov/multimedia/imagegallery/image\\_feature\\_202.html](http://nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_202.html) - Acessado em 25 de agosto de 2016.
- [38] E. J. Wollack. The Hubble Constant. [map.gsfc.nasa.gov/universe/bb\\_tests\\_exp.html](http://map.gsfc.nasa.gov/universe/bb_tests_exp.html) - Acessado em 02 de dezembro de 2016.