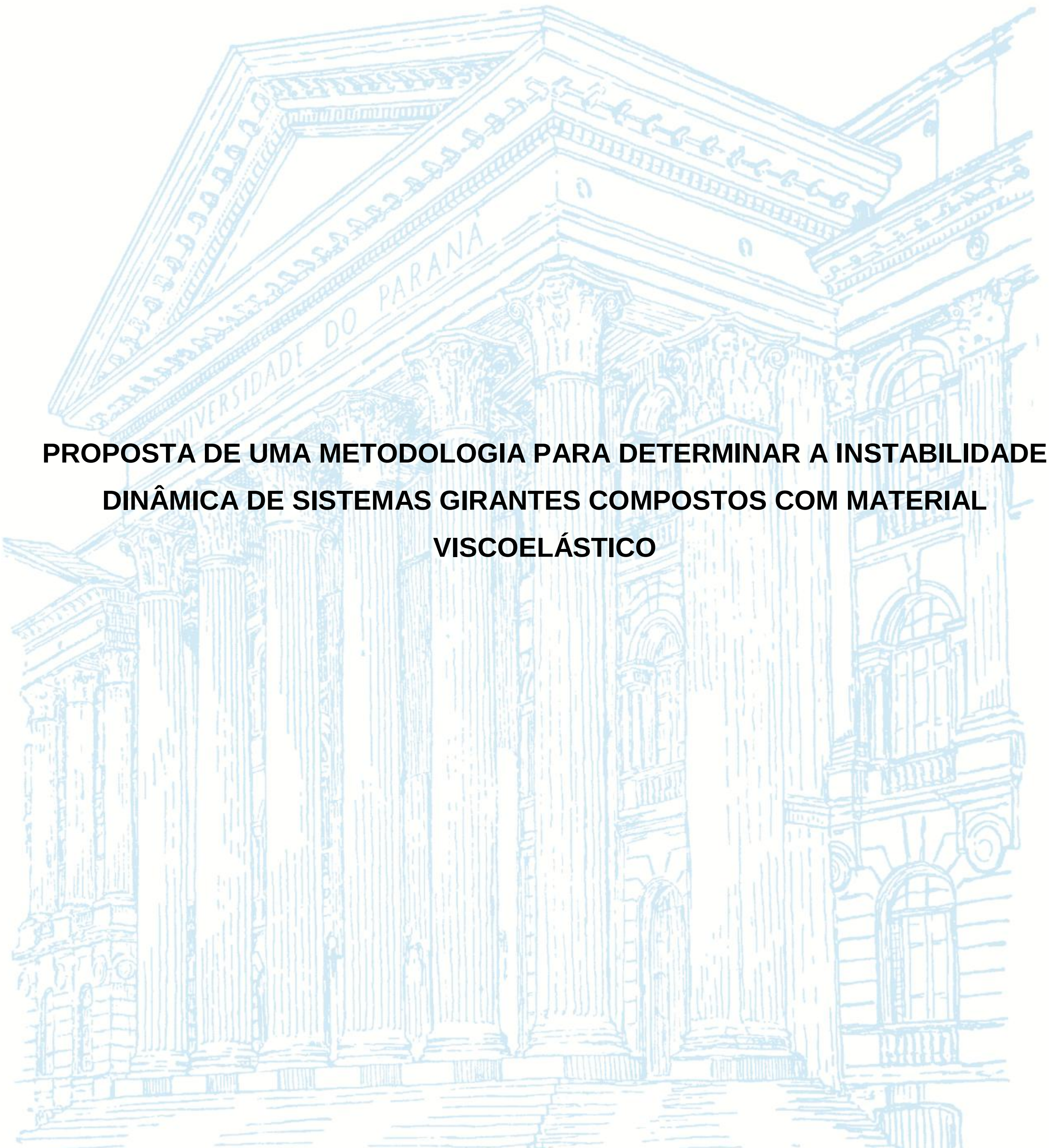
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THIAGO DA SILVA



PROPOSTA DE UMA METODOLOGIA PARA DETERMINAR A INSTABILIDADE DINÂMICA DE SISTEMAS GIRANTES COMPOSTOS COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

CURITIBA

2016

THIAGO DA SILVA

PROPOSTA DE UMA METODOLOGIA PARA DETERMINAR A INSTABILIDADE DINÂMICA DE SISTEMAS GIRANTES COMPOSTOS COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

Dissertação apresentada como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
Coorientadora: Prof. Dra. Ana Gabriela Martinez

CURITIBA

2016

S586
Silva, Thiago da.
Proposta de uma metodologia para determinar a instabilidade dinâmica de sistemas girantes compostos com material viscoelástico . / Thiago da Silva. – Curitiba: UFPR, 2016.
110 f.: il. Color. ; 30 cm.

Dissertação – Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2016.

Orientador: Carlos Alberto Bavastri.
Coorientadora: Ana Gabriela Martinez
Bibliografia: p. 104-110

1. Materiais viscoelásticos - Engenharia. 2. Controle de vibração - Rotor - Engenharia. I. Universidade Federal do Paraná. II. Bavastri, Carlos Alberto. III. Martinez, Ana Gabriela. IV. Título.

CDD 621.434

Sueli Terezinha Pimentel CRB-9/1623

TERMO DE APROVAÇÃO

THIAGO DA SILVA

PROPOSTA DE UMA METODOLOGIA PARA DETERMINAR A INSTABILIDADE DE SISTEMAS GIRANTES COMPOSTOS COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marco Antônio Luersen
UTFPR

Prof. Dr. Robson Pederiva
UNICAMP

Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes
UFPR

Curitiba, 25 de fevereiro de 2016.

Aos meus pais, Beline e Sueli,
por todo apoio, dedicação e carinho.
A Franciane, meu amor,
por todos os momentos que passamos juntos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, nosso criador e que nos dá o dom de viver e conviver.

À minha família, por todos os ensinamentos e carinho dados em todos os momentos da minha vida.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri, por todo apoio, dedicação, orientação e paciência que me ofereceu desde o meu início na pós-graduação.

À Prof.ª Dr.ª Ana Gabriela Martinez, que como minha coorientadora atuou sempre com presteza e gentileza, além de muito acrescentar na parte matemática deste trabalho.

Ao apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás – PRH-ANP/MCTI, à Petrobras e a toda equipe do PRH-24.

Ao Prof. Dr. Eduardo Marcio de Oliveira Lopes, pelo auxílio em momentos importantes do desenvolvimento deste trabalho, além da correção minuciosa deste texto.

À toda equipe do Laboratório de Vibrações e Som (LAVIBS): Fernanda Oliveira Balbino, Francielly Elizabeth de Castro Silva, Gabriela Wessling Oening Dicati, Jederson da Silva, João do Carmo Lopes Gonçalves, José Eduardo Gubaua, Klaas Bastiaan Bronkhorst, Igor Fernando Rodrigues e Tiago Lima de Souza. Obrigado pelas conversas e convivência.

Aos alunos da pós-graduação Alcemir Miliavaca, Eduardo Afonso Ribeiro e Rodrigo Bubniak Silvério, pelos ensinamentos práticos em dinâmica de rotores.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Abraço a todos.

“Agrada-me mais a dúvida do que o saber”
Dante Alighieri

“Se o conhecimento traz problemas, não é a ignorância que os resolve”
Isaac Asimov

RESUMO

A instabilidade presente em sistemas girantes com rotações elevadas é uma das principais causas de graves problemas nos mesmos, podendo levar o rotor a falhas catastróficas ou desgastes prematuros de seus componentes. Uma forma de reduzir este problema em dinâmica de rotores é a adição de amortecimento nos mancais. O uso de materiais viscoelásticos (MVEs) em controle de vibrações, seja através de isolamento ou neutralizadores dinâmicos, tem sido aplicado com relativo sucesso já há alguns anos, pois além da elevada capacidade de dissipar energia vibratória, os MVEs possuem baixos custos iniciais de implementação e de manutenção. Porém, os modelos utilizados para descrever o comportamento dinâmico destes materiais com exatidão no domínio da frequência, levam a matrizes de rigidez complexas, em função da frequência e da temperatura. Uma forma de constatar a instabilidade de um sistema é verificar a parte real dos autovalores associados a este tipo de problema. No presente caso, a dinâmica destes sistemas deve ser resolvida no espaço de estado, um espaço $2n$ dimensional, onde n é o número de graus de liberdade ou frequências naturais. Em modelos numéricos que utilizam matrizes com coeficientes reais, é possível observar, no espaço de estado, que os autovalores aparecem com multiplicidade dupla em pares complexos conjugados. Por outro lado, quando utilizado o modelo de derivadas fracionárias para descrever o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos (polímeros, borrachas, entre outros), a matriz de rigidez possui coeficientes complexos. Neste caso, os autovalores, que devem estar relacionados de alguma forma pela redundância de informação, podem aparecer repetidos e em pares complexos conjugados, e/ou em pares complexos e seu oposto. Sendo assim, uma simples inspeção na parte real dos autovalores não pode mais ser realizada, já que os códigos numéricos não poderiam determinar quem é o autovalor e quem é o oposto. Dentro deste contexto, o objetivo deste trabalho é propor um método para estimar com exatidão a instabilidade dinâmica de rotores quando os mesmos são compostos com materiais viscoelásticos. Para tal, é proposto o acompanhamento da trajetória dos autovalores no plano de Laplace. Partindo de um ponto de equilíbrio, quando o autovalor cruzar o eixo da parte imaginária, o sistema se tornará instável. Para corroborar esta proposta, é considerado um sistema com amortecimento histerético, que é solucionado no domínio do tempo para algumas velocidades de rotação predeterminadas. Com isto, o método apresenta resultados satisfatórios, ao ser analisado um caso particular.

Palavras-chave: Instabilidade. Rotor. Autovalor. Material viscoelástico.

ABSTRACT

The instability in high-speed rotors is one of the main causes of their problems, which may lead to catastrophic rotor failure or premature weakening. One way to reduce this problem is the addition of damping in the bearings. The use of viscoelastic materials (VEM) for vibration control, either through isolation or dynamic neutralizers, has been applied with relative success in the last years, because, besides its high capacity to dissipate vibrational energy, the VEM have lower initial costs of implementation and maintenance. However, the models used to describe the dynamic behavior of such materials with accuracy lead to complex stiffness matrices as function of frequency and temperature. One way to verify the instability of a system is to check the real part of the associated eigenvalues. In this case, this problem should be solved in the state space, a $2n$ dimensional space, where n is the number of degrees of freedom or natural frequencies. In numerical models involving matrices with real coefficients, it is possible to observe in the state space that the eigenvalues appear with double multiplicity and complex conjugate pairs. On the other hand, when using the fractional-derivative model describing the dynamic behavior of viscoelastic materials (polymers, rubbers and so on) the matrix has complex coefficients. In this case, the eigenvalues should be in some way related by redundant information that may appear in complex conjugate pairs and repeated, and also in complex and opposite pairs, as has been observed in some numerical simulations and previous work. If this is the case, a simple inspection of the real part of the eigenvalues cannot be performed, since the numeric codes could not determine which eigenvalue is physically relevant. Within this context, the aim of this work is to propose a method for accurately estimate the dynamic instability of rotors when they are built with viscoelastic materials. For that, it is proposed to monitor the trajectory of eigenvalues in Laplacian plan. Starting from an equilibrium point, when the trajectory of eigenvalues crosses the axis of the imaginary part, the system will become unstable. To confirm this proposal, it is considered a system with hysteretic damping, which is solved in the time domain to some pre-determined speed. Thus, the method shows satisfactory results, when taken into account a special case.

Key-words: Instability. Rotor. Eigenvalue. Viscoelastic material.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

ALFABETO LATINO

$\hat{a}(t)$	Derivada temporal do vetor de estados $\hat{x}(t)$;
$\hat{A}$	Matriz de coeficientes constantes de $\hat{a}_{ij} = \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial \hat{x}_j}$;
A	Matriz assimétrica do rotor no espaço de estados;
b_1	Constante de tempo de relaxação;
B	Matriz simétrica do rotor no espaço de estados;
$\hat{B}$	Matriz de coeficientes constantes de $\hat{b}_{ij} = \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial \hat{u}_j}$;
$\bar{B}$	Matriz no espaço de estados com coeficientes complexos;
c_i	Coeficientes de amortecimento não circulatório
c_{r_i}	Coeficientes de amortecimento circulatório
C	Matriz de amortecimento
C_r	Matriz de amortecimento circulatório
$\mathcal{C}$	Centro geométrico de uma estrutura;
E	Módulo de Young;
E_0	Módulo de elasticidade em frequências baixas (MVEs);
E_∞	Módulo de elasticidade em frequências altas (MVEs);
E_c	Módulo de elasticidade complexo (MVEs)
FF	Fator de forma;
FG	Fator geométrico;
fg	Força gravitacional;
g_i	Coeficientes giroscópicos
F	Força
$\mathcal{F}$	Função de dissipação de Rayleigh;
G	Matriz giroscópica
G^*	Módulo de elasticidade transversal;
h	Constante adimensional, representando o amortecimento histerético;
H	Matriz de amortecimento histerético;
$\mathcal{H}_n$	Coeficientes da tabela de Routh;

I	Momento de inércia em relação aos eixos X e Y;
J	Tensor de inércia;
J_t	Inércia de translação;
J_p	Momento polar de inércia;
k_i	Coeficientes de rigidez;
K	Matriz de rigidez;
$\overline{K}$	Matriz de rigidez com coeficientes complexos;
$\overline{K}_{MVE}$	Rigidez do material viscoelástico;
L	Comprimento do elemento finito;
$\mathcal{L}$	Lagrangeano;
m_i	Coeficientes de massa;
M	Matriz de massa
n	Número de graus de liberdade;
N	Funções de interpolação;
$O_i(x^2)$	Termos de alta ordem de aproximação;
P	Coordenadas principais generalizadas, domínio da frequência
$\mathcal{P}$	Centro de massa de uma estrutura;
q	Coordenada generalizada;
Q	Força generalizada externa;
s	Raiz do polinômio característico; laplaciano;
r_i	Coordenada da i-ésima partícula;
R	Matriz rotacional
S	Área da seção transversal;
t	Tempo;
t_0	Tempo inicial;
T	Temperatura;
T_{ref}	Temperatura de referência;
$T1$	Período;
$\mathcal{T}$	Energia cinética;
$T_2, T_1\ e\ T_0$	Blocos de energia cinética relacionados às coordenadas generalizadas;
u_i	Deslocamento nodal, direção do eixo X;

$\hat{u}(t)$	Vetor de forças generalizado;
$\mathcal{U}$	Energia potencial;
v	Vetor constante arbitrário;
$V_{\mathcal{P}}$	Velocidade do centro de massa;
$\mathcal{V}$	Potencial dinâmico do sistema ($\mathcal{U} - T_0$);
w_i	Deslocamento nodal, direção do eixo Y;
$\mathcal{w}_n$	Solução do sistema, por modos assumidos;
W	Trabalho;
x_e	Solução constante do espaço de estado;
y_0	Posição de equilíbrio no espaço de estado;
$y(t)$	Vetor generalizado de estado, domínio do tempo;
$\mathcal{Y}$	Vetor generalizado de estado, domínio da frequência;
x, y, z	Coordenadas cartesianas, com origem em $\mathcal{C}$, referencial rotacional;
x', y', z'	Coordenadas cartesianas referencial rotacional;
X, Y, Z	Coordenadas cartesianas inerciais fixas, com origem em O;
X', Y', Z'	Coordenadas cartesianas, com referencial rotacional;
x, y, z	Coordenadas cartesianas, com origem em $\mathcal{C}$, que acompanham a deformação do eixo do rotor;
x', y', z'	Coordenadas cartesianas, com origem em $\mathcal{C}$, que rotacionam de acordo com ϑ;
$\mathcal{P}1, 2, 3$	Eixos principais de inércia do corpo rígido.

ALFABETO GREGO

α	Ângulo de fase/desbalanceamento;
α_T	Fator de deslocamento;
β	Expoente da derivada fracionária;
β_n	Coeficiente modal, varia de acordo com as condições de contorno;
γ_i	Coeficientes cinéticos do sistema, relacionados com a antissimetria das matrizes;
Γ	Matriz de termos cinéticos do sistema;

δ_{jk}	Delta de Kronecker;
ε	Excentricidade entre os centros de massa e geométrico em uma estrutura;
η	Fator de perda, relacionado a componentes viscoelásticos;
ϑ	Ângulo de rotação, que varia de acordo com a velocidade de rotação;
σ_i	Deslocamento nodal, rotação, plano XY;
ϕ	Funções de teste, para modos assumidos;
$[I]$	Matriz identidade;
λ	Autovalor;
$\bar{\lambda}$	Autovalor conjugado;
$[\Lambda]$	Matriz espectral de autovalores;
μ	Fator de correção para tensões transversais cisalhantes;
ξ	Fator de amortecimento viscoso;
ρ	Densidade do material;
τ_t	Energia cinética de translação do centro de massa;
τ_r	Energia cinética de rotação;
$\varphi_x;\ \varphi_y$	Ângulos entre as transformações de coordenadas;
$\theta; \Theta$	Autovetores à direita;
$\theta_1;\ \theta_2$	Parâmetros do material viscoelástico;
χ	Erro angular;
ζ_i	Deslocamento nodal, rotação, plano YZ;
$\psi;\ \Psi$	Autovetores à esquerda;
Ω	Frequência
Ω'_{123}	Vetor de velocidade angular;
$\mathit{\Omega}_j$	Frequências naturais do sistema;
Ξ, H'	Coordenadas cartesianas, com origem em O, em referencial rotacional;
$\epsilon; d$	Raios de esferas para determinação de estabilidade.

SIGLAS

G.L.	Graus de Liberdade;
GVIBS	Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos da UFPR;
LAVIBS	Laboratório de Vibrações e Som da UFPR;
MEF	Método dos Elementos Finitos;
MVEs	Materiais viscoelásticos;
PEG	Parâmetros equivalentes generalizados.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A instabilidade é um fenômeno que ocorre com frequência em sistemas dinâmicos. Normalmente ela pode estar associada a uma grande variedade de fatores, tais como geometria, fator de amortecimento, interação fluído estrutura, anisotropia dos mancais, união com outros sistemas, entre outros. Uma das características mais marcantes de um sistema instável é que, frente a uma perturbação qualquer, sua resposta vibracional pode crescer no decorrer do tempo, porém sem continuidade da presença de ações externas.

Em dinâmica de rotores, este fenômeno geralmente está associado às velocidades de rotação de um eixo e à capacidade do sistema de voltar à sua posição de equilíbrio, estático ou dinâmico, após uma perturbação qualquer. Quando a instabilidade do sistema é atingida, a tendência é que vibrações excessivas criem desgastes no rotor ou em algum elemento deste de forma prematura. Sua presença, com maior frequência, está relacionada à presença de rotações supercríticas, isto é, além de suas rotações críticas. Quando o sistema rotativo se apresenta na faixa instável, o mesmo pode vibrar excessivamente, podendo provocar fadiga, defeitos críticos e até mesmo sua ruptura.

Buscando a redução de vibrações, podem-se aplicar diferentes técnicas, tais como: operação fora da faixa instável, adição de amortecimento nos mancais do sistema, isotropia dos mancais, modificação estrutural e uso de neutralizadores de vibrações. Cada técnica apresenta vantagens e desvantagens e cada caso deve ser estudado, a fim da aplicação destas técnicas. Um dos métodos mais utilizados é a adição de amortecimento nos mancais do eixo do rotor e/ou tornar estes isotrópicos, o que pode mitigar esta condição de funcionamento não desejada, ampliando a faixa útil de trabalho do sistema, com o consequente aumento da sua vida útil.

O uso de materiais viscoelásticos (MVEs) em controle de vibrações, seja através de isolamento ou neutralizadores dinâmicos, tem sido aplicado com relativo sucesso há alguns anos, pois, além de proporcionar uma elevada capacidade de dissipar energia vibratória, seus custos iniciais de implementação e de manutenção são mais baixos que as soluções tradicionais – uso de mancais hidrodinâmicos e magnéticos.

Estudos sobre o uso de materiais viscoelásticos em controle de vibrações e estabilidade vêm sendo realizados há algumas décadas. Os modelos clássicos para a modelagem do comportamento dinâmico destes materiais são os de Maxwell, Kelvin-Voigt, Zenner ou combinações destes, cuja equação constitutiva pode ser representada através de relações tensão-deformação usando derivadas de ordem inteira ou fracionárias. Esta última reproduz com maior fidelidade as características dinâmicas dos materiais viscoelásticos mais utilizados na engenharia, em uma ampla faixa de frequência e de temperatura, com um número reduzido de parâmetros.

Geralmente as causas de instabilidade em rotores estão associadas a vários fatores, tais como sua geometria, material utilizado em sua construção, velocidade de rotação, entre outros. Quando existe o uso de mancais hidrodinâmicos, a instabilidade pode ser causada pelas assimetrias na matriz de rigidez e/ou amortecimento. Segundo Genta (2005), o aumento da velocidade de rotação de um rotor gera uma força centrífuga que pode causar um aumento ilimitado da amplitude de vibrações. A partir de uma determinada velocidade de rotação, esta autoexcitação do sistema provoca campos de instabilidade.

Uma das formas de estudar o comportamento dinâmico devido à instabilidade de um rotor é através do problema de autovalores. Em geral, quando as matrizes possuem coeficientes reais e o amortecimento é modelado da forma viscoso geral, os autovalores (λ) resultam em pares complexos e conjugados. A parte real do autovalor fornece o fator de crescimento ou decrescimento da resposta de um sistema em vibração livre e a parte imaginária fornece a oscilação da mesma. Portanto, para analisar a estabilidade do rotor, basta analisar o sinal da parte real dos autovalores. Se a parte real do autovalor possui um sinal positivo, o sistema é estável, caso contrário o sistema é instável. No espaço de estado, calculamos o coeficiente de Laplace (s) que tem sinal oposto ao dos autovalores, $s = -\lambda$. Neste caso, o sistema é estável se sua parte real for negativa e instável se for positiva.

O uso de materiais viscoelásticos gera matrizes de rigidez complexas, em função da frequência e da temperatura. Estas matrizes complexas mostram a capacidade destes materiais de armazenar e dissipar energia vibratória. Esta afirmação, associada ao fato de que rotores possuem o efeito de amortecimento próprio e o efeito giroscópico, fazem com que os autovalores não se apresentem mais em pares complexos e conjugados, o que dificulta a análise de instabilidade neste tipo de sistema. Devido ao modo no qual as matrizes são agrupadas no espaço de estado, o sistema em estudo é considerado um “sistema hamiltoniano”. Nestes sistemas, se uma das matrizes é complexa, os autovalores do sistema vêm em pares, complexos e opostos (λ e $-\lambda$), o que dificulta a análise de estabilidade da maneira clássica, pois em cada par de autovalores nota-se a presença de sinais opostos.

Vários trabalhos em dinâmica de rotores já foram realizados pelo Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS), certificado pela UFPR e pelo CNPq, mas, em nenhum deles, foi estudado o comportamento dinâmico destes sistemas no que diz respeito à instabilidade. Portanto, é de suma importância que se possa predizer com relativa exatidão em qual frequência e velocidade de rotação do eixo do rotor a instabilidade se fará presente.

Nos primeiros capítulos (2 e 3) é feita uma revisão bibliográfica sobre conceitos de estabilidade em sistemas dinâmicos, formulação matemática em dinâmica de rotores e comportamento dos autovalores em sistemas dinâmicos. No capítulo 4 é realizada uma série de simulações numéricas de um rotor teórico para corroborar a modelagem matemática. O capítulo 5 traz a proposta de metodologia de análise capaz de predizer, com exatidão, a instabilidade em rotores com mancais compostos por MVEs.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho visa revisar o conceito de instabilidade dinâmica em rotores e propor um método com a finalidade de estimar a instabilidade dinâmica de rotores quando os mesmos são compostos com materiais viscoelásticos.

Além disso, especificamente, este trabalho se propõe a:

- Desenvolver códigos numéricos para dar suporte ao projeto e estudos de sistemas rotativos compostos com materiais viscoelásticos;
- Realizar simulações numéricas para verificação da capacidade do método proposto para determinar a rotação para a qual o sistema se torna instável.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 ESTABILIDADE E INSTABILIDADE

O conceito de estabilidade de uma posição de equilíbrio pode ser exemplificado da seguinte maneira: em um sistema cuja energia mecânica se conserva, isto é, “sistema conservativo”, uma posição de equilíbrio correspondente a um mínimo da energia potencial é uma posição de equilíbrio estável. Tendo em vista a FIGURA 1, pode-se afirmar que as posições de equilíbrio de uma partícula de massa m, levando em conta a força gravitacional (fg) aplicada, são localizadas em todos os pontos onde a curva tem uma tangente horizontal, isto é, onde dy/dx é igual a zero. Dessa forma, o ponto A (posição mínima relativa de energia potencial) corresponde a uma posição de equilíbrio estável e os pontos B (máximo relativo de energia potencial) e C (ponto de inflexão com tangente horizontal) são posições de equilíbrio instável, ou seja, qualquer perturbação pode causar grandes deslocamentos (HAGEDORN, 1984).

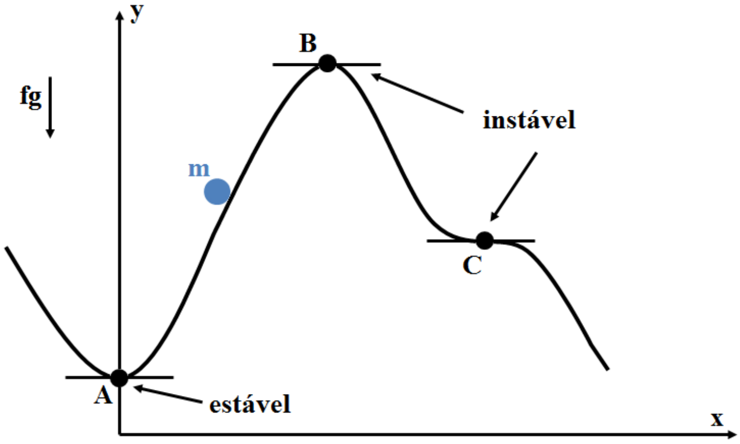


FIGURA 1 – ESTABILIDADE DE UMA FUNÇÃO DE EQUILÍBRIO

Em grande parte dos trabalhos na área de dinâmica de sistemas girantes realiza-se a análise de estabilidade observando a parte real dos autovalores obtidos a partir do sistema de equações linearizado que governa o movimento. Também existem técnicas que podem determinar a estabilidade sem necessariamente encontrar as soluções destas equações, tais como a teoria de estabilidade em pontos de equilíbrio e o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.

2.2 DINÂMICA DE ROTORES

A dinâmica de rotores é o ramo da dinâmica que lida com sistemas girantes. Um rotor pode ser definido, de uma forma mais simples, como um corpo suspenso por um conjunto de suportes (mancais) que permitem que ele gire livremente sobre um eixo fixo no espaço (GENTA et al., 1999). Os primeiros estudos sobre dinâmica de rotores foram desenvolvidos por Rankine (1869), apresentando o conceito de velocidade crítica, onde a partir deste ponto o sistema giraria com precessão e deflexão ilimitadas. Em 1889, Gustaf De Laval construiu com sucesso máquinas centrífugas e turbinas que operavam acima da primeira rotação crítica. O termo "rotação crítica" foi utilizado pela primeira vez por Dunkerley (1894) em um trabalho sobre vibrações em eixos, onde também é apresentada uma teoria sobre rotores em operações supercríticas (rotações acima da rotação crítica). Um dos primeiros modelos matemáticos sobre rotores foi apresentado por Jeffcott (1919), que apesar de simples apresentava consistência até a rotação crítica. Outros conceitos importantes foram introduzidos por Campbell (1924), que através de um simples diagrama, mostrou que as rotações críticas podem ser representadas em relação as frequências naturais e velocidades de rotação – e por Smith (1933), que abordou a estabilidade introduzida pelo amortecimento em rotores, com a presença de velocidades rotacionais instáveis. Posteriormente, Myklestad (1944), Prohl (1945) e outros desenvolveram o método de cálculo da rotação crítica através de matrizes de transferência, que ainda hoje é aplicado em algumas situações.

Atualmente, os modelos numéricos para sistemas rotativos estão muito bem desenvolvidos, podendo-se citar vários trabalhos como Vance (1988), Lalanne e Ferraris (1990), Genta (2005), entre outros. Estes autores descrevem um sistema girante através de equações diferenciais gerais do movimento, utilizando matrizes consistentes de massa, rigidez e amortecimento considerando o efeito giroscópico. Estas matrizes, por sua vez, podem ser obtidas através de modelos de elementos finitos, em geral utilizando elementos de viga, disco e mancais, conforme proposto por Lalanne e Ferraris (1990), o que possibilita simulações numéricas com resultados precisos.

Um dos assuntos de maior interesse em dinâmica de rotores é a instabilidade, que pode ser causada por diversos fatores, tais como o subamortecimento nos mancais de rolamento, assimetria de construção, assimetria causada por mancais hidrodinâmicos em altas rotações, entre outros. Diversos estudos foram desenvolvidos levando em conta estas características, tais como abordagens da instabilidade em mancais hidrodinâmicos, onde se têm alguns problemas associados ao “oil-whip/whirl”, que ocorrem quando altas velocidades de rotação causam vibrações subsíncronas proporcionais, descrevendo uma órbita de sentido direto (MUSZYNSKA, 1988; CASTRO et al., 2008; MA et al. 2013). Atualmente, os tipos de mancais hidrodinâmicos mais utilizados são os “tilting-pad”, que decorrem de uma técnica capaz de alterar a rigidez e amortecimento do mancal, deixando os mancais simétricos, para o aumento da estabilidade (CARNEIRO et al., 2013; YANG et al., 2014; MENDES e CAVALCA, 2014). Estudos em rotores com mancais magnéticos podem ser vistos em Das et al. (2008), Awrejcewicz e Dzyubak (2010) e Brusa (2014). Este tipo de mancal é muito eficiente no controle de vibrações em rotores, porém, devido à sua alta complexidade e nível de controle exigido, representa uma alternativa mais onerosa. Também já foram realizados estudos de instabilidade levando em conta pequenas imperfeições no rotor, que podem ser encontrados em Sekhar e Dey (2000), Chen et al. (2007) e Han e Chu (2012).

Conforme apresentado por Lalanne e Ferraris (1990), a análise de problemas envolvendo máquinas girantes em elevadas rotações tem importância crucial, tendo em vista a grande importância destes tipos de máquinas em aplicações industriais.

2.3 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS EM DINÂMICA DE ROTORES

Para ampliar a faixa de rotação de trabalho estável em um sistema girante, uma das ações mais utilizadas é a introdução de amortecimento nos suportes (mancais). Quando mancais hidrodinâmicos são utilizados, existe uma anisotropia natural no rotor, o que pode provocar instabilidades dinâmicas. Nesses casos, uma solução é o uso de mecanismos conhecidos como “tilting-pad”, que torna o rotor isotrópico.

Em mancais magnéticos, o problema é que o amortecimento não é suficientemente elevado, assim, a solução aqui se dá através de controle ativo. Em controle passivo de vibrações, uma alternativa viável ao uso de mancais hidrodinâmicos é a adição de materiais viscoelásticos nos mancais de rolamento, por exemplo.

O uso de materiais viscoelásticos (MVEs) para o controle de vibrações e ruído irradiado é uma solução atrativa, devido à sua alta capacidade de dissipação de energia vibratória e de armazenamento de energia potencial elástica (FERRY, 1980; LOWRY, 2009; FAN et al., 2009; ESPÍNDOLA et al., 2010). Dutt e Toi (2003) demonstraram a grande aplicabilidade destes materiais no controle e na redução de vibrações por desbalanceamento, quando introduzidos nos mancais. Os materiais viscoelásticos podem estar sob os mancais ou entre a caixa de mancais e o pedestal (FERREIRA, 2004; PANDA e DUTT, 2003; TILLEMA, 2003). Por não necessitar de sistemas auxiliares, tornam-se alternativas simples, confiáveis e de baixo custo. Com isto, além da redução dos efeitos da vibração no equipamento em que os MVEs estão inseridos e do isolamento das vibrações para as máquinas vizinhas, os mesmos propiciam um aumento de confiabilidade, redução dos custos de manutenção e garantia de disponibilidade.

Estudos relacionados ao uso de materiais viscoelásticos aplicados nos mancais de rotores vêm crescendo nos últimos quarenta anos. Um dos primeiros trabalhos nesta linha foi o de Kirk e Gunter (1972), que consistia em um rotor Jeffcott apoiado sobre suportes elásticos. Para modelar o sistema, foi utilizada uma formulação elástica linear e um modelo de um grau de liberdade (massa – mola – amortecedor), semelhante ao modelo de Kelvin-Voigt. Os autores concluíram que para sistemas com suportes que possuem valores de massa e rigidez previamente determinados, é possível otimizar o fator de amortecimento, tendo como objetivo reduzir a amplitude das deflexões no eixo do rotor. Da mesma maneira, Panda e Dutt (2003) utilizaram o modelo de um rotor com um grau de liberdade, porém nesse caso o disco estava deslocado no eixo, isto é, estava mais próximo de um dos mancais. Para modelar o material viscoelástico, foi utilizado o modelo de quatro elementos em função da frequência. Então, a rigidez e o fator de perda do suporte com MVE foram otimizados. Naquele trabalho, o objetivo foi maximizar a faixa de estabilidade e minimizar a resposta à vibração do rotor.

Em Genta e Amati (2010), dada à complexidade de modelamento devido às deformações em suportes de rotores que operam em altas rotações, foi desenvolvido um modelo baseado no amortecimento histerético. Porém, dada a dificuldade de se aplicar o modelo histerético no domínio do tempo, foi desenvolvido então um equacionamento com base naquele, porém agora generalizado, que foi chamado de modelo “não-viscoso”.

Recentemente, Kang et al. (2011) apresentaram um modelo robusto, empregando o método de elementos finitos (MEF) e utilizando a formulação de viga de Timoshenko na discretização dos elementos do rotor. Porém, o suporte composto com MVEs foi considerado constante em relação à frequência. Nesse trabalho, concluiu-se que as características de rigidez e amortecimento dos suportes têm influência significativa nas velocidades críticas do rotor, bem como na redução das amplitudes de resposta.

Estudos com aplicações de materiais viscoelásticos na base da caixa de rolamento também foram realizados. Bavastri et al. (2008) utilizaram um modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros, que pode calcular a resposta a uma excitação de desbalanceamento, com base na montagem do diagrama de Campbell. Devido à matriz de rigidez ser complexa, dependendo da frequência de excitação e da temperatura, para a montagem do diagrama de Campbell dois problemas de autovalores devem ser resolvidos: um fixando a rotação, outro interno onde as frequências naturais são calculadas para diferentes frequências de excitação (Campbell auxiliar). Desta forma, para encontrar as frequências características do rotor para cada velocidade de rotação, um cálculo auxiliar de frequências naturais em função das frequências de excitação deve ser realizado. Dessa forma, interpolando uma reta a 45 graus, em um gráfico frequência natural versus frequência de excitação, é possível calcular as frequências características de um rotor para uma determinada rotação.

Em Doubrawa et al. (2010), uma aplicação de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos, utilizados em controle de vibrações flexionais em um sistema girante, mostra a potencialidade desta técnica e a fidelidade do modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros em representar os materiais viscoelásticos quando utilizados em dinâmica de rotores. Uma metodologia de proposta de projeto ótimo desses dispositivos de controle foi proposta e implementada em uma bancada em laboratório.

Ribeiro et al. (2015) realiza a comparação de duas técnicas numéricas para modelar a influência do suporte de mancais compostos com MVEs em um sistema girante – parâmetros equivalentes generalizados (PEG) e adição de graus de liberdade – com o objetivo de determinar qual a mais eficaz na obtenção dos parâmetros ótimos do suporte. Nesse trabalho, se conclui que apesar de ambas técnicas apresentarem resultados consistentes, o PEG consome um tempo computacional consideravelmente menor, tornando esta metodologia mais interessante.

2.4 INSTABILIDADE EM DINÂMICA DE ROTORES

O conceito de estabilidade, em engenharia aplicada, pode ser exemplificado da seguinte forma: uma máquina tem um comportamento estável quando a amplitude de vibração da operação normal não excede um valor aceitável. Segundo Muszynska (2005), uma máquina rotativa é estável se seu rotor executa um movimento rotacional puro em um eixo adequado, com uma velocidade adequada e este movimento não gera outros modos de vibrar do rotor, de seus elementos ou de outras partes da máquina, ou, se tais modos ocorrerem, suas amplitudes de vibração não excedam valores considerados aceitáveis. Uma máquina rotativa estável é imune às perturbações externas, ou seja, qualquer perturbação aleatória não altera significativamente seu comportamento.

A instabilidade em máquinas rotativas é normalmente produzida por forças que são tangenciais à órbita de giro do rotor, chamadas de forças desestabilizadoras (GENTA, 2005). Estas forças se relacionam com as matrizes que compõem o modelo matemático do rotor, incluindo componentes antissimétricos às mesmas. Conforme sua magnitude, estas componentes podem desestabilizar o sistema. A antissimetria é especialmente importante, pois pode provocar instabilidade quando se faz presente nas matrizes de rigidez e/ou giroscópica do sistema.

A amplitude das vibrações livres de um sistema linear amortecido diminui exponencialmente no tempo devido à dissipação de energia causada pelo amortecimento. Entretanto, no caso dos rotores, existe uma fonte de energia, o campo centrífugo, que pode em alguns casos causar um crescimento ilimitado das amplitudes de vibração. As faixas de velocidade de rotação em que este campo centrífugo ocorre são chamadas de campos de instabilidade ou faixas de instabilidade, e a velocidade onde esta faixa se inicia é chamada de limiar de instabilidade (GENTA, 2005). Com a introdução de amortecimento nos mancais, pode-se eliminar o problema, e também, em geral, ampliar a região de trabalho estável do sistema girante.

Na maioria dos trabalhos que visam atenuar a instabilidade e/ou ampliar a faixa de estabilidade em rotores se utiliza a adição de amortecimento nos mancais. Porém a maioria dos estudos é direcionada a mancais hidrodinâmicos, em especial devido aos fenômenos de “oil whip/whirl”, como demonstrado por Muszynska (1988), Castro et al. (2008), Schweizer (2009) e Mendes e Cavalca (2014). Também nesta área, um trabalho interessante pela variedade de métodos para análise de instabilidade foi realizado por Chang-Jian e Chen (2009). Estudos sobre mancais magnéticos também são bem explorados, como visto em Brusa (2014), que utiliza uma técnica de “contra-rotação” para ampliar a faixa de estabilidade do rotor. Também pode-se citar artigos envolvendo a redução de instabilidade com o número de esferas utilizadas nos mancais (ZHANG et al., 2013) e com o número de discos e sua posição no eixo do rotor (CHIU e CHEN, 2011).

2.5 INSTABILIDADE EM ROTORES – MANCAIS VISCOELÁSTICOS

A literatura sobre instabilidade em rotores com mancais viscoelásticos é ainda escassa atualmente. Alguns trabalhos importantes foram desenvolvidos na década de 90, como pode-se ver em Dutt e Nakra (1992) e, posteriormente, em Dutt e Nakra (1996), nos quais foram realizados estudos comparativos entre mancais hidrodinâmicos e viscoelásticos. Esse trabalho foi estendido em Panda e Dutt (1999), onde foi apresentada uma metodologia ótima para minimizar a resposta ao desbalanceamento e aumentar o limiar de estabilidade do sistema.

Em Ganesan (2000), foi desenvolvida uma equação que poderia estimar a instabilidade em rotores que estivessem sobre mancais anisotrópicos. Genta e Amati

(2010) desenvolveram uma formulação para análise de amortecimento viscoelástico em rotores em rotações críticas e nos limiares de estabilidade, utilizando o modelo histerético (ou não-viscoso), que, segundo os autores, representa de forma mais adequada o comportamento dinâmico desses sistemas se comparado ao modelo viscoso até então utilizado.

Em Montagnier e Hochard (2007), foi realizado um estudo de estabilidade de sistemas rotor-mancal com mancais hidrodinâmicos, em comparação à sistemas rotor-mancal apoiados em fundações com suportes viscoelásticos. Nesse trabalho, foi demonstrado que eixos longos possuem maior estabilidade quando montados sobre fundação com mancais viscoelásticos. Em contrapartida, os mancais hidrodinâmicos ofereceram melhor estabilidade para sistemas com eixos mais curtos. Porém, o trabalho apresenta limitações por considerar o modelo de material viscoelástico como histerético e independente da frequência.

O trabalho mais recente encontrado na literatura sobre estabilidade em rotores apoiados em suportes viscoelásticos foi desenvolvido também por Montagnier e Hochard (2014). Nesse trabalho, também foi utilizada a mesma modelagem para o material viscoelástico presente no trabalho mencionado anteriormente, porém, a abordagem para modelagem do eixo utiliza equações analíticas e valores de rigidez e amortecimento equivalentes (valores reais), que não conseguem representar as propriedades do MVE com a mesma acurácia que o modelo de derivadas fracionárias, por exemplo (valores complexos).

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

A mecânica lagrangeana permite modelar sistemas mecânicos complexos exigindo somente o conhecimento de algumas funções escalares tais como as funções do trabalho virtual (W) das forças externas, da energia cinética $(\mathcal{T})$ e da energia potencial $(\mathcal{U})$, além do uso de coordenadas generalizadas (q), que são coordenadas independentes utilizadas para descrever o movimento de um sistema com n graus de liberdade.

Conforme demonstrado por Meirovitch (1967), mediante a combinação dos princípios do trabalho virtual, de D'Alembert e de Hamilton, a equação de Lagrange é dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_r} = Q_r, r = 1,2,\dots,n, \tag{3.1}$$

onde Q_r representam as forças externas generalizada que atuam no sistema.

Notando que $\mathcal{U}$ não está em função das velocidades generalizadas $\dot{q}_r$, a eq. (3.1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = Q_r, \qquad r = 1,2,\dots,n, \tag{3.2}$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ é o lagrangeano.

No caso especial de um sistema conservativo, as equações de Lagrange se reduzem a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = 0, \qquad r = 1,2,\dots,n. \tag{3.3}$$

3.2 EQUAÇÕES DE ESTADO E LINEARIZAÇÃO: ABORDAGEM CONCEITUAL

Conforme descrito na seção anterior, o movimento de um sistema pode ser escrito utilizando coordenadas generalizadas q_k como variáveis auxiliares. Se as velocidades generalizadas $\dot{q}_k$ forem também tomadas como variáveis auxiliares, então o movimento pode ser descrito geometricamente em um espaço $2n$ dimensional definido por q_k e $\dot{q}_k$, também conhecido como espaço de estado.

Para obter as equações de estado, retorna-se à forma geral da equação de Lagrange (MEIROVITCH, 1990), em que

$$\ddot{q}_k(t) = f_k\big(q_1(t), \dots, q_n(t), \acute{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), \hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_r(t)\big), \qquad k = 1 \dots n\,, \tag{3.4}$$

onde $\hat{u}(t)$ representa as forças que agem no sistema. Note que em geral f_k são funções não-lineares de $q_n(t)$ e $\dot{q}_n(t)$ e lineares de $\hat{u}_r(t)$. Simplificando (3.4), tem-se

$$\ddot{q}(t) = f\big(q(t), \dot{q}(t), \hat{u}(t)\big)\,, \tag{3.5}$$

sendo f e q vetores n-dimensionais e $\hat{u}$ r-dimensional. O vetor q é conhecido também como vetor de configurações e o $\hat{u}$ como vetor de controle.

Incluindo então o vetor de estado

$$y(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \cdots \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

bem como o vetor

$$\hat{a}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f\big(q(t), \dot{q}(t), \hat{u}(t)\big) \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

pode-se reescrever as equações de estado na forma de um vetor geral

$$\dot{y}(t) = \hat{a}\big(y(t), \hat{u}(t)\big), \tag{3.8}$$

que define um sistema dinâmico no sentido que se $y(t)$ é dado em $t = t_0$ e $\hat{u}(t)$ no intervalo de tempo $t_0 < t < t_0 + T1$, então a eq. (3.8) pode ser integrada para gerar

$y(t)$ no final do intervalo $T1$. Com isto, este vetor de estado pode representar o sistema dinâmico em qualquer intervalo de tempo correspondente.

A eq. (3.8) representa um conjunto de $2n$ equações diferenciais ordinárias (ODEs) não lineares de primeira ordem. Estas equações não possuem solução geral aproximada trivial. A alternativa para sua resolução é analisar as soluções particulares.

As soluções particulares são também conhecidas como pontos de equilíbrio e possuem soluções mais simples de determinar que as soluções gerais. Assim, consideráveis informações do sistema podem ser obtidas estudando as equações linearizadas sobre pontos de equilíbrio.

Um ponto de equilíbrio pode ser definido como uma solução constante no espaço de estado ($y = y_e = constante$). Todos os outros pontos são ditos ordinários. Esse conceito consiste na ausência de forças externas, isto é, na eq. (3.8),

$$\hat{a}(y_e, 0) = 0. \tag{3.9}$$

Se os componentes de $\hat{a}$ são funções não lineares, pode haver mais de um ponto de equilíbrio, porém, se são lineares, há um único ponto de equilíbrio. Da definição de vetor de estado (eq. 3.6), conclui-se que se $y_e = constante$, então $q_e = constante$ e $\dot{q}_e, \ddot{q}_e = 0$, o que explica o termo ponto de equilíbrio. Como $\dot{q}_e = 0$, tem-se que todos os pontos de equilíbrio se dispõem no espaço de configurações, um espaço n dimensional definido pelas componentes do vetor de configuração $q(t)$. Consequentemente, para determinar o vetor y_e, é somente necessário determinar os componentes de q_e.

Para obter as equações linearizadas de movimento, escreve-se a eq. (3.8) na sua forma escalar

$$\dot{y}_i(t) = \hat{a}_i(y_1, \dots, y_{2n}, u_1, \dots, u_r), \qquad i = 1, \dots, 2n\,, \tag{3.10}$$

e expandindo-a por série de Taylor para a_i sobre o equilíbrio, tem-se

$$\hat{a}_i(y_1, \dots, y_{2n}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r) = \hat{a}_i(y_{1e}, \dots, y_{2ne}, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^{2n} \left. \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial y_j} \right|_{y=y_e} y_j + \sum_{j=1}^{r} \left. \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial \hat{u}_j} \right|_{y=y_e} \hat{u}_j + O_i(y^2) \qquad (3.11)$$

$$i = 1, \dots, 2n.$$

Como o primeiro termo à direita da equação é igual a 0 (eq. 3.9), e incluindo a notação abaixo

$$\hat{a}_{ij} = \left. \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial y_j} \right|_{y=y_e}, \qquad i, j = 1, \dots, 2n; \qquad \hat{b}_{ij} = \left. \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial \hat{u}_j} \right|_{y=y_e}, \qquad i, j = 1, \dots, r, \qquad (3.12)$$

e ignorando os termos de ordem superior ($O_i(y^2)$), pode-se escrever a seguinte aproximação linear:

$$\hat{a}_i(y_1, \dots, y_{2n}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r) \cong \sum_{j=1}^{2n} \hat{a}_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{r} \hat{b}_{ij} \hat{u}_j, \qquad i = 1, \dots, 2n. \qquad (3.13)$$

Consequentemente, inserindo a eq. (3.13) na (3.10), obtêm-se as equações de estado sobre o equilíbrio y_e

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{2n} \hat{a}_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{r} \hat{b}_{ij} \hat{u}_j, \qquad (3.14)$$

ou, matricialmente,

$$\dot{y}(t) = \hat{A} y(t) + \hat{B} \hat{u}(t), \qquad (3.15)$$

onde $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são matrizes de coeficientes constantes, com entrada de dados realizadas pela eq. (3.12). A eq. (3.15), obtida pelas equações de Lagrange, resulta em um vetor de estado $2n$ dimensional, onde n é o número de graus de liberdade do sistema.

3.3 ESTABILIDADE EM PONTOS DE EQUILÍBRIO

Existe uma vasta diversidade de conceitos sobre estabilidade e instabilidade de sistemas. Uma das mais aceitas é a teoria da estabilidade de Liapunov. Uma das vantagens desta teoria é a sua aplicabilidade para sistemas não-lineares e autônomos.

Segundo Genta (2005), a definição de estabilidade de Liapunov está baseada em uma representação do sistema em movimento no espaço de estado. Sendo $y(t)$ um vetor de posições no espaço de estado, onde $|y(t)|$ é sua norma euclidiana, e y_0 uma posição de equilíbrio, se diz que essa posição é estável se, e somente se, para qualquer valor positivo arbitrário ϵ, exista uma quantidade positiva d, tal que

$$\begin{gathered} |y(t) - y_0| < \epsilon, para 0 \leq t < \infty, \qquad e \\ |y(0) - y_0| < d. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Isto significa que, como ilustrado na FIGURA 2, para qualquer esfera de raio ϵ centrada em y_0, existe uma esfera de raio d com centro em y_0 – d depende de ϵ – tal que qualquer trajetória iniciada na esfera de raio d permanece na esfera de raio ϵ, para todo tempo maior ou igual a zero ($t \geq 0$). Se

$$\lim_{t \to \infty} |y(t) - y_0| = 0 \tag{3.17}$$

então o equilíbrio é assintoticamente estável, ou seja, as trajetórias próximas a y_0 tendem para o equilíbrio.

Portanto, a instabilidade de um estado de equilíbrio ocorre quando existe um número real $\epsilon > 0$ tal que, seja qual for $d > 0$, sempre irá existir uma trajetória que partindo de dentro do círculo de raio d e centro y_0, irá abandonar o círculo de raio ϵ e centro y_0.

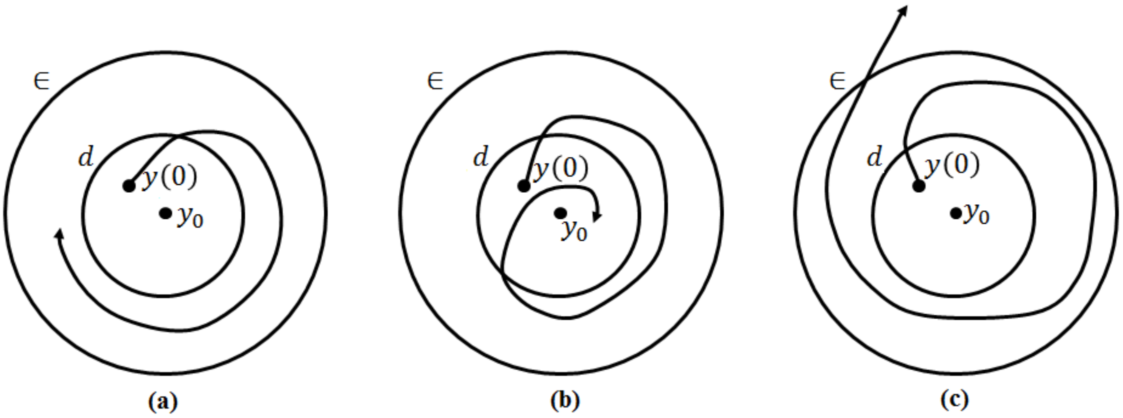


FIGURA 2 - (a) ESTADO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL; (b) ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL; (c) INSTÁVEL

Pelo exposto nos parágrafos anteriores, tem-se uma definição qualitativa sobre estabilidade. Entretanto, para determinar a estabilidade com um viés quantitativo, a eq. (3.15), com $\hat{u}(t) = 0$, é linearizada sobre um ponto de equilíbrio, resultando em

$$\dot{y}(t) = \hat{A}y(t). \tag{3.18}$$

Especificamente neste caso, esta equação representa um sistema de ordem n. Analisando o movimento na vizinhança do equilíbrio, assume-se, para a eq. (3.18), a seguinte equação exponencial

$$y(t) = ve^{st} \tag{3.19}$$

onde v é um vetor constante e s é um escalar. Colocando a eq. (3.19) na (3.18) e dividindo por e^{st}, obtém-se

$$[\hat{A} - sI]v = 0. \tag{3.20}$$

A eq. (3.20) representa um conjunto de n equações algébricas homogêneas, constituindo o problema de autovalores algébricos. Com isto, sabe-se que as soluções consistem de n autovalores s, associados a n autovetores v. Portanto, quando os n autovalores são linearmente independentes, a solução para a eq. (3.18) é

$$y(t) = \sum_{r=1}^{n} v_r e^{s_r t}. \quad (3.21)$$

Claramente, a natureza da solução depende dos autovalores $s_1, \dots, s_n$. Para obter os autovalores de um conjunto de equações algébricas, iguala-se o determinante de seus coeficientes a zero, isto é

$$det[A - sI] = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s^1 + a_n = 0. \quad (3.22)$$

que é conhecida como equação característica e seu polinômio como polinômio característico. As raízes deste polinômio são os autovalores.

Conforme Meirovitch (1990), a estabilidade do sistema é então determinada pela parte real destes autovalores, os quais podem ser de três tipos:

I. *Com parte real nula*: Os autovalores aparecem em pares complexo e complexo conjugado, puramente imaginários, que, combinados, fornecem uma solução oscilatória sobre o equilíbrio. Nesses casos, a solução é marginalmente estável;
II. *Com parte real negativa*: A solução aproxima-se do ponto de equilíbrio a medida que o sistema avança. A solução é, então, assintoticamente estável;
III. *Com parte real positiva*: A solução afasta-se do ponto de equilíbrio com o avanço do sistema. A solução é instável.

A natureza do equilíbrio pode ser visualizada em um gráfico no plano s (vide FIGURA 3). Neste caso, o eixo imaginário representa a região de limiar de instabilidade. No plano esquerdo se encontra a região de estabilidade assintótica e no direito a região de instabilidade.

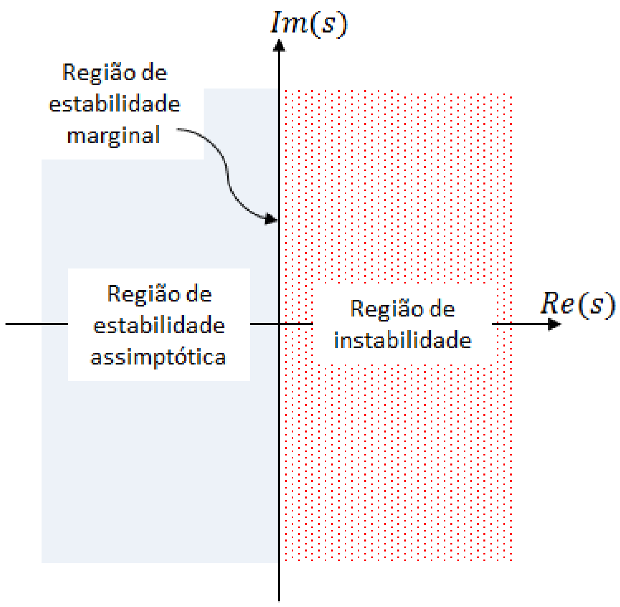


FIGURA 3 – LIMITE DE REGIÃO ESTÁVEL PARA OS AUTOVALORES

A condição de estabilidade assintótica pode ser também determinada sem a resolução das equações características, através do critério de Routh-Hurwitz.

3.3.1 CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Este critério é um método algébrico que fornece informação sobre a estabilidade absoluta de um sistema linear invariante no tempo que possui uma equação característica com coeficientes constantes.

O método requer duas etapas:

- Gerar uma tabela de dados chamada de tabela Routh;
- Interpretar a tabela de Routh para contar quantas raízes do sistema estão no semiplano esquerdo, no semiplano direito, e no eixo imaginário.

Conforme apresentado em Lalanne e Ferraris (1990), seja um sistema com a equação característica abaixo, cujas raízes da equação permitam determinar as frequências naturais do sistema em estudo (vide eq. 3.22). A equação é:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0. \tag{3.23}$$

A tabela de Routh então é construída da seguinte maneira:

$$\mathcal{H}_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Assim, os n coeficientes $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ podem ser obtidos, sendo suas expressões as seguintes:

$$\begin{gathered} |\mathcal{H}_1| = det[\mathcal{H}_1] = a_1 \\ |\mathcal{H}_2| = det[\mathcal{H}_2] = det \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 \\ \vdots \\ |\mathcal{H}_n| = det[\mathcal{H}_n] \end{gathered} \tag{3.25}$$

O critério de Routh-Hurwitz estabelece que se todos os valores de $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ são positivos, então o sistema é estável (LALANNE E FERRARIS, 1990).

3.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO VIA COORDENADAS GENERALIZADAS

Conforme Meirovich (1990), as equações de movimento de um sistema mecânico podem ser obtidas através das equações de Lagrange. Definindo a energia cinética em função das coordenadas físicas em um sistema de n partículas quaisquer, tem-se

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i \dot{r}_i \tag{3.26}$$

onde m_i e $\dot{r}_i$ são a massa e velocidade da i-ésima partícula, respectivamente.

Assumindo que o vetor de posição r_i está em função das coordenadas generalizadas q_i e do tempo t, e derivando-o em função do tempo, se obtém

$$\dot{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k} \acute{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3.27}$$

Inserindo a eq. (3.27) na (3.26), tal que

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s + 2 \frac{\partial r_i}{\partial t} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial r_i}{\partial t} \right], \tag{3.28}$$

e considerando que a energia cinética pode ser escrita como

$$\mathcal{T} = T_2 + T_1 + T_0 \,, \tag{3.29}$$

tem-se que

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \,, \qquad onde \qquad m_{ij} = \sum_{s=1}^{n} m_s \frac{\partial r_s}{\partial q_i} \frac{\partial r_s}{\partial q_j}, \tag{3.30}$$

é uma função quadrática homogênea em função das velocidades generalizadas $\dot{q}$,

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \dot{q}_i \,, \qquad com \qquad \gamma_i = \sum_{s=1}^{n} m_s \frac{\partial r_s}{\partial t} \frac{\partial r_s}{\partial q_i} \tag{3.31}$$

é uma função linear das velocidades generalizadas e

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial r_i}{\partial t} \tag{3.32}$$

não possui velocidades generalizadas e representa um enrijecimento estrutural devido a campos longitudinais de esforços.

Em geral, os coeficientes m_{ij} e γ_j e a função T_0 dependem das coordenadas generalizadas $q_i (i = 1, \dots, n)$. Introduzindo a eq. (3.29) na igualdade $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$, tem-se

$$\mathcal{L} = T_2 + T_1 - \mathcal{V}, \tag{3.33}$$

onde

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \mathcal{U} - T_0 \qquad (3.34)$$

que é também conhecido como potencial dinâmico do sistema.

Conforme afirmado anteriormente, as coordenadas generalizadas $q_i(t)$ definem um vetor n dimensional no espaço de configurações. Porém, para a definição do estado do sistema é necessária também a utilização do vetor de velocidades generalizadas $\dot{q}_i(t)$. Com isto, o movimento do sistema é descrito em um espaço $2n$ (espaço de estado), com a utilização do vetor de estado (eq. 3.6).

Assumindo as condições para pontos de equilíbrio, isto é, $q_{ie} = constante$, $\dot{q}_{ie} = 0$, $Q_i = 0$ (forças generalizadas) e utilizando as eq. (3.30) – (3.34), se conclui que q_{ie} satisfaz a seguinte equação (MEIROVICH, 1990):

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \qquad (3.35)$$

Com isto, o movimento na vizinhança da solução trivial é $q_e = \dot{q}_e = 0$. Esta afirmação implica na linearização das equações de movimento sobre o equilíbrio, o que também implica que somente os termos quadráticos nas coordenadas e velocidades generalizadas são considerados no Lagrangeano. Consequentemente, os coeficientes m_{ij} da eq. (3.30) se tornam constantes e simétricos ($m_{ij} = m_{ji}$). Além disto, os coeficientes γ_i na eq. (3.31) se tornam lineares nas coordenadas generalizadas, isto é,

$$\gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} q_i\,, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad (3.36)$$

onde γ_{ij} são coeficientes constantes. Portanto,

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} q_i\, \dot{q}_j. \qquad (3.37)$$

Finalmente, expandindo o potencial dinâmico em uma série de Taylor sobre a origem, se obtém

$$\mathcal{V}(q_1, \dots, q_n) \cong \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_i q_j \,, \tag{3.38}$$

onde o termo $\mathcal{V}(0, \dots ,0)$ foi ignorado como uma constante que não tem efeito nas equações de movimento, enquanto que os termos lineares em q_i são zero em virtude da eq. (3.35). Os coeficientes

$$k_{ij} = k_{ji} = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=0} = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_j \partial q_i}\right|_{q=0} \tag{3.39}$$

são constantes e simétricos.

Incluindo as eq. (3.30), (3.31) e (3.38) no lagrangeano (eq. 3.33) e utilizando a eq. (3.2), é obtida a equação de movimento de Lagrange linearizada, a saber,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\ddot{q}_j + g_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j\right) = Q_i, \qquad i = 1, \dots , n, \tag{3.40}$$

onde m_{ij} e k_{ij} são coeficientes de massa e rigidez, respectivamente, e

$$g_{ij} = \gamma_{ji} - \gamma_{ij} = -g_{ji}, \qquad i, j = 1, \dots , n, \tag{3.41}$$

correspondem aos coeficientes associados ao efeito giroscópico, e conforme indicado, são antissimétricos.

Pode ser observado que quando a energia potencial ocorre devido ao efeito elástico, a parte de k_{ij} que surge de $\mathcal{U}$ define o coeficiente de rigidez elástico. Quando a mesma surge de T_0, define-se o coeficiente de rigidez geométrico, que pode ser atribuído aos efeitos centrífugos de estruturas rotacionais.

Existem dois tipos de forças não conservativas que não aparecem explicitamente na eq. (3.40) e estão implícitos em Q_i, que são as forças de amortecimento viscoso e circulatório. Estas podem ser explicitadas reescrevendo a equação de Lagrange, de forma que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k, \qquad k = 1, \dots, n\,, \tag{3.42}$$

onde a função de dissipação de Rayleigh $\mathcal{F}$ é

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_r)_{ij}\dot{q}_i\,q_j \tag{3.43}$$

na qual $c_{ij} = c_{ji}$ é o coeficiente de amortecimento viscoso (simétrico) e $(c_r)_{ij} = -(c_r)_{ji}$ o coeficiente circulatório (antissimétrico). Consequentemente, a equação de movimento se torna

$$\sum_{j=1}^{n}\left[m_{ij}\ddot{q}_j + \left(c_{ij} + g_{ij}\right)\dot{q}_j + \left((c_r)_{ij} + k_{ij}\right)q_j\right] = Q_i, \qquad i = 1, \dots, n\,, \tag{3.44}$$

ou, matricialmente,

$$M\ddot{q} + (C + G)\dot{q} + (K + C_r)q = Q \tag{3.45}$$

onde M é a matriz de massa (simétrica), C é a matriz de amortecimento (simétrica), G é a matriz giroscópica (antissimétrica), K é a matriz de rigidez (simétrica) e C_r é a matriz circulatória (antissimétrica). Ressalta-se que as matrizes giroscópica e circulatória surgem somente em estruturas girantes ou com partes girantes.

A eq. (3.45) representa as equações de movimento de um sistema linear amortecido com efeito giroscópico e forças circulatórias. Matematicamente, ela constitui um conjunto de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, o que é geralmente referenciado como invariante no tempo. O comportamento do sistema depende de suas matrizes – M, C, G, K e C_r – e do vetor de forças generalizadas, Q. Estas matrizes podem ser descritas como as formas quadráticas de T_2, T_1, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{V}$. Desta forma, é possível reescrever os termos de energia na forma de produtos matriciais, a saber,

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q}, \qquad T_1 = q^T \Gamma \dot{q}, \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}\dot{q}^T C \dot{q} + \dot{q}^T C_r q, \qquad \mathcal{V} = q^T K q \tag{3.46}$$

onde

$$G = \Gamma^T - \Gamma = -G^T. \tag{3.47}$$

A energia cinética em T_2 é por definição positiva definida e função quadrática das velocidades generalizadas $\dot{q}$, então a matriz M é sempre positiva definida. Por outro lado, a energia cinética do termo T_1, conduz à matriz antissimétrica G, que não possui propriedades de sinal. O mesmo se aplica à matriz C_r. Para a matriz C, sua função de dissipação é geralmente não negativa, porém não é possível afirmar se é positiva definida, somente positiva semidefinida. O potencial dinâmico $\mathcal{V}$ ocorre devido a uma série de fatores, podendo incluir forças elásticas de restauração, gravitacionais e centrífugas. Estas últimas dependem da velocidade de rotação do elemento de referência, ou seja, as propriedades de $\mathcal{V}$ podem variar, o que pode determinar a estabilidade do sistema e, consequentemente, se o movimento obedece às condições assumidas de pequenos deslocamentos.

3.5 MODELO DE ROTOR COM 2 GRAUS DE LIBERDADE (2GL)

Apesar de esse modelo ser extremamente simplificado, algumas características básicas que permitem obter uma visão qualitativa de importantes fenômenos típicos da dinâmica de rotores são mantidas. Para tal, será analisado o rotor Jeffcott, por ser considerado modelo mais simples no qual o comportamento dinâmico básico em rotores pode ser estudado. Esse modelo leva esse nome pois foi primeiramente analisado em Jeffcott (1919).

Considerando o rotor como amortecido, para a determinação das equações que regem o seu movimento, são consideradas três propriedades físicas principais: uma massa global m, uma rigidez global k, ambas representando a massa e a rigidez do eixo, disco e suporte; e o amortecimento c, que possui elementos associados ao amortecimento próprio (causado pela estrutura – principalmente pelos mancais) e ao amortecimento circulatório, causado pelo efeito de circulação do eixo.

Conforme apresentado na FIGURA 4, a linha curvada representa o eixo do rotor, que de uma maneira geral possui uma excentricidade ε entre seu centro de massa $\mathcal{P}$ (onde a massa m está localizada) e geométrico $\mathcal{C}$. Por menor que seja ε, o mesmo pode causar desbalanceamentos no sistema.

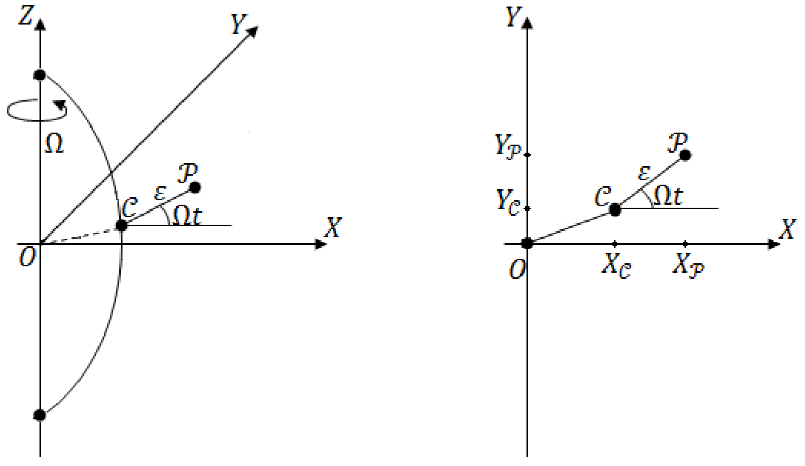


FIGURA 4 – ROTOR JEFFCOTT COM DESBALANCEAMENTO $m\varepsilon$

Para um sistema com dois graus de liberdade, as energias potencial e cinética, considerando o centro geométrico do rotor como coordenada generalizada são

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\left\{\dot{X}_{\mathcal{C}}{}^{2} + \dot{Y}_{\mathcal{C}}{}^{2} + \varepsilon^2\Omega^2 + 2\varepsilon\Omega_R\left[-\dot{X}_{\mathcal{C}}sin(\Omega t) + \dot{Y}_{\mathcal{C}}cos(\Omega t)\right]\right\},$$
$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}k\left(X_{\mathcal{C}}{}^2 + Y_{\mathcal{C}}{}^2\right). \tag{3.48}$$

Aplicando a equação de Lagrange – eq. (3.1) – e lembrando que a velocidade de giro é assumida como constante, as seguintes equações de movimento são obtidas:

$$m\ddot{X}_{\mathcal{C}}(t) + kX_{\mathcal{C}}(t) = m\varepsilon\Omega^2cos(\Omega t),$$
$$m\ddot{Y}_{\mathcal{C}}(t) + kY_{\mathcal{C}}(t) = m\varepsilon\Omega^2cos(\Omega t). \tag{3.49}$$

Considerando o sistema como amortecido, assume-se que a força causada pelo amortecimento rotacional é proporcional a velocidade do ponto C, quando observada de um elemento de referência girando na mesma velocidade do rotor. Isto significa que para o estudo de um sistema com amortecimento rotacional, um elemento de referência rotacional deve ser introduzido conforme a FIGURA 5. A origem está no mesmo local do elemento referencial inicial, porém os eixos Ξ e H' (referencial rotacional) rotacionam no plano XY com a mesma velocidade do rotor. Quando a velocidade de rotação é constante, o ângulo entre os dois elementos de referência é simplesmente dado por Ωt.

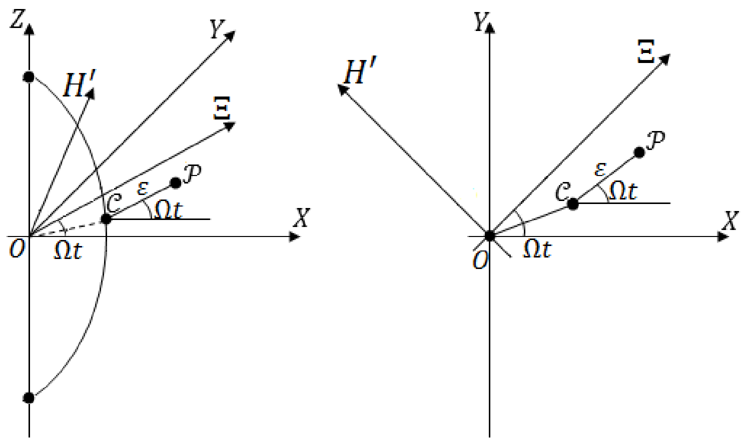


FIGURA 5 – DEFINIÇÃO DO REFERENCIAL $O\Xi H'$

Os eixos X e Y se relacionam com os Ξ e H' através da matriz rotacional R, que é definida como

$$R = \begin{bmatrix} cos(\Omega t) & sin(\Omega t) \\ -sin(\Omega t) & cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

A velocidade do ponto $\mathcal{C}$ pode ser expressa como

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Xi}_{\mathcal{C}} \\ \dot{H}'_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} \dot{X}_{\mathcal{C}} \\ \dot{Y}_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix} + \dot{R} \begin{Bmatrix} X_{\mathcal{C}} \\ Y_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix}, \tag{3.51}$$

onde

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} -sin(\Omega t) & cos(\Omega t) \\ -cos(\Omega t) & -sin(\Omega t) \end{bmatrix}. \tag{3.52}$$

Usualmente, em matrizes rotacionais, se mostra que $R^T R = I$ e, como consequência disso,

$$R^T \dot{R} = \Omega_R \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

As forças devido ao amortecimento rotacional e não-rotacional são então obtidas pela introdução da função dissipação de Rayleigh na equação de Lagrange, da mesma maneira que na seção anterior (MEIROVITCH, 1990). Sua expressão para esta modelagem é

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} c\left(\dot{X}_{\mathcal{C}}^2 + \dot{Y}_{\mathcal{C}}^2\right) + \frac{1}{2} c_r \left(\dot{\Xi}_{\mathcal{C}}^2 + \dot{H}'^2_{\mathcal{C}}\right). \tag{3.54}$$

Incluindo a eq. (3.51) na (3.54), tem-se

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} c\left(\dot{X}_{\mathcal{C}}^2 + \dot{Y}_{\mathcal{C}}^2\right) + \frac{1}{2} c_r \left(\begin{Bmatrix} \dot{X}_{\mathcal{C}} \\ \dot{Y}_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix}^T R^T + \begin{Bmatrix} X_{\mathcal{C}} \\ Y_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix}^T \acute{R}^T \right) \left(R \begin{Bmatrix} \dot{X}_{\mathcal{C}} \\ \dot{Y}_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix} + \dot{R} \begin{Bmatrix} X_{\mathcal{C}} \\ Y_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix} \right). \tag{3.55}$$

Realizando as multiplicações e lembrando que $R^T R = I$ e $\dot{R}^T \dot{R} = \Omega^2 I$, então

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (c + c_r)\left(\dot{X}_{\mathcal{C}}^2 + \dot{Y}_{\mathcal{C}}^2\right) + \frac{1}{2} c_r \Omega^2 (X_{\mathcal{C}}^2 + Y_{\mathcal{C}}^2) + c_r \Omega_R \begin{Bmatrix} \dot{X}_{\mathcal{C}} \\ \dot{Y}_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix}^T R^T \dot{R} \begin{Bmatrix} X_{\mathcal{C}} \\ Y_{\mathcal{C}} \end{Bmatrix}, \tag{3.56}$$

ou seja,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(c + c_r)\left(\dot{X}_\mathcal{C}^2 + \dot{Y}_\mathcal{C}^2\right) + \frac{1}{2}c_r\Omega^2\left(X_\mathcal{C}^2 + Y_\mathcal{C}^2\right) + c_r\Omega_R\left(\dot{X}_\mathcal{C}Y_\mathcal{C} + \dot{Y}_\mathcal{C}X_\mathcal{C}\right). \tag{3.57}$$

Incluindo a equação de dissipação de Rayleigh na equação de Lagrange, conforme ocorre na eq. (3.42), tem-se a equação de movimento na forma matricial, isto é,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{X}_\mathcal{C} \\ \ddot{Y}_\mathcal{C} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c + c_r & 0 \\ 0 & c + c_r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X}_\mathcal{C} \\ \dot{Y}_\mathcal{C} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \Omega_R\begin{bmatrix} 0 & c_r \\ -c_r & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} X_\mathcal{C} \\ Y_\mathcal{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\varepsilon\Omega^2 cos(\Omega t) \\ m\varepsilon\Omega^2 sin(\Omega t) \end{Bmatrix}. \tag{3.58}$$

3.5.1 INSTABILIDADE EM ROTORES COM 2 GRAUS DE LIBERDADE

A determinação da instabilidade se dá resolvendo o sistema de equações apresentado pela eq. (3.58), considerando que não existe aplicação de forças externas (rotação livre),

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{X}_\mathcal{C} \\ \ddot{Y}_\mathcal{C} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c + c_r & 0 \\ 0 & c + c_r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X}_\mathcal{C} \\ \dot{Y}_\mathcal{C} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \Omega_R\begin{bmatrix} 0 & c_r \\ -c_r & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} X_\mathcal{C} \\ Y_\mathcal{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3.59}$$

Introduzindo a solução da equação homogênea da mesma forma que na eq. (3.19), qual seja,

$$\begin{aligned} X_\mathcal{C}(t) &= X_{\mathcal{C}_0}e^{st} \\ Y_\mathcal{C}(t) &= Y_{\mathcal{C}_0}e^{st} \end{aligned} \tag{3.60}$$

chega-se a seguinte equação característica

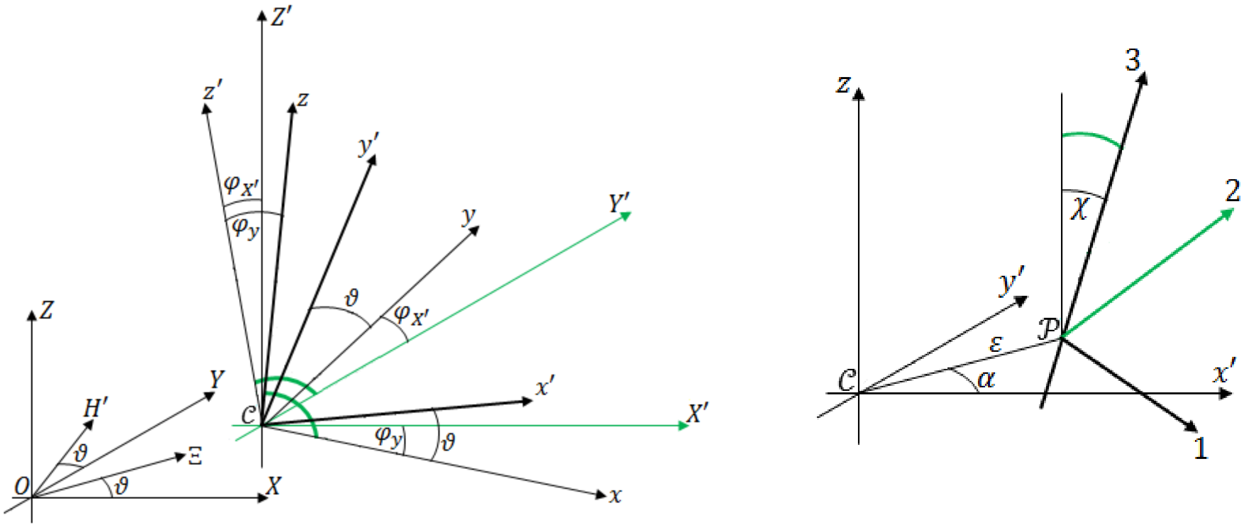
$$det\begin{vmatrix} s^2m + s(c + c_r) + k & \Omega_R c_r \\ -\Omega_R c_r & s^2m + s(c + c_r) + k \end{vmatrix} = 0\,, \tag{3.61}$$

onde as raízes de s podem ser complexas e o *sinal da parte real* destas raízes serão suficientes para determinar a estabilidade do sistema.

3.6 MODELO DE ROTOR COM 4 GRAUS DE LIBERDADE (4GL)

A forma na qual o modelo de um rotor Jeffcott é analisado com quatro graus de liberdade é semelhante à anterior, porém, é adicionado um elemento crucial para a dinâmica de rotores, o efeito giroscópico. As inércias do eixo e disco (polar e translacional) também são consideradas na modelagem do rotor, além dos graus de liberdade de flexão, que causam o aumento dos graus de liberdade.

As coordenadas generalizadas para a determinação do modelo com 4GL (FIGURA 6) seguem o que foi descrito por Genta (2005).



(a) (b)

FIGURA 6 – REFERENCIAIS NO ESTUDO DO ROTOR COM 4GL.
a) EIXOS b) PLANOS

Na FIGURA 6, algumas propriedades geométricas estão em *verde*:

- O plano $z'Y'$ é perpendicular a X' (a);
- O plano zx é perpendicular a y (a);
- O eixo Y' é paralelo ao Y (a);
- O eixo X' é paralelo ao X (a);
- O plano formado pelo ângulo χ é perpendicular a y' (b);
- O eixo 2 é paralelo ao y' (b).

Então, conforme apresentado na FIGURA 6, as coordenadas do sistema são:

- Sistema de coordenadas $OXYZ$: sistema de coordenadas inerciais, com origem em O e eixo Z coincidente com o eixo de rotação do rotor.
- Sistema de coordenadas $O\Xi H'Z$: sistema de coordenadas com origem em O e eixo Z coincidente com o eixo de rotação do rotor. Eixos Ξ e H' rotacionam no plano XY com ângulo ϑ, para o caso de velocidade de rotação constante. Este será um sistema de coordenadas rotativo.
- Sistema de coordenadas $\mathcal{C}X'Y'Z'$: sistema de coordenadas com origem em $\mathcal{C}$. Seus eixos permanecem paralelos aos do sistema $OXYZ$. O plano $X'Y'$ permanece paralelo ao plano XY.
- Sistema de coordenadas $\mathcal{C}xyz$: sistema de coordenadas com origem em $\mathcal{C}$. Seu eixo z coincide com o eixo de rotação de corpo rígido na posição em que está deformado.
- Sistema de coordenadas $\mathcal{C}x'y'z$: sistema com origem no ponto $\mathcal{C}$. É obtido rotacionando os eixos x e y no plano xy com um ângulo ϑ. Este sistema está relacionado ao corpo rígido, apesar de não estar em seu centro de gravidade devido à excentricidade ε e nem a inércia principal devido ao erro angular χ.
- Sistema de coordenadas $\mathcal{P}123$: representa os eixos principais de inércia do corpo rígido, que são obtidos rotacionando o sistema $\mathcal{C}x'y'z$. O desbalanceamento do sistema é representado neste sistema pelo ângulo de fase α.

Buscando obter os eixos X e Y, cada um dos sistemas de coordenadas são rotacionados, gerando as seguintes matrizes de transformação rotacionais:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi_{x'}) & sin(\varphi_{x'}) \\ 0 & -sin(\varphi_{x'}) & cos(\varphi_{x'}) \end{bmatrix}, \tag{3.62}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} cos(\varphi_y) & 0 & -sin(\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\varphi_y) & 0 & cos(\varphi_y) \end{bmatrix}, \tag{3.63}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} cos(\vartheta) & sin(\vartheta) & 0 \\ -sin(\vartheta) & cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; e \tag{3.64}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} cos(\chi) & 0 & -sin(\chi) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\chi) & 0 & cos(\chi) \end{bmatrix}. \tag{3.65}$$

Através das matrizes rotacionais, é possível escrever as equações de movimento do disco pelas coordenadas X, Y e Z do ponto $\mathcal{C}$ e os ângulos φ_x, φ_y e ϑ como coordenadas generalizadas.

A energia cinética do corpo rígido é determinada pela soma das energias cinéticas de translação do centro de massa e da energia cinética de rotação, a saber,

$$\mathcal{T} = \tau_t + \tau_r = \frac{1}{2} m V_{\mathcal{P}}^2 + \frac{1}{2} \Omega_{123}'^{T} [J] \Omega_{123}', \tag{3.66}$$

onde V_P é a velocidade do centro de massa, Ω_{123}' é o vetor velocidade angular, dado por,

$$\Omega_{123}' = [R_4] \left([R_3] \left([R_2] \begin{Bmatrix} \acute{\varphi}_{X'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \acute{\varphi}_y \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \acute{\vartheta} \end{Bmatrix} \right), \tag{3.67}$$

e J é o tensor de inércia para o corpo rígido, expresso por

$$[J] = \begin{bmatrix} J_t & & \\ & J_t & \\ & & J_p \end{bmatrix}, \tag{3.68}$$

onde J_t representa a inércia de translação e J_p a inércia polar.

Desenvolvendo matematicamente as eq. (3.67) e (3.68) e negligenciando os termos contendo o produto da excentricidade ou do erro angular (por serem considerados pequenos), não haverá acoplamento axial. Então, a energia cinética de translação será

$$\tau_t = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + 2\varepsilon\Omega \left[-\dot{X} sin(\Omega t + \alpha) + -\dot{Y} cos(\Omega t + \alpha) \right] + \varepsilon^2 \Omega^2 \right\}. \tag{3.69}$$

onde $\Omega t = \vartheta$.

Segundo Genta (2005), como as componentes do vetor Ω'_{123} são referentes ao eixo principal de inércia, e desprezando-se os termos de ordem superior, onde se tem a multiplicação de pequenos deslocamentos, a energia cinética de rotação será

$$\tau_r = \frac{1}{2}\left\{J_t\left(\dot{\varphi}_{X'}^2 + \dot{\varphi}_y^2 + \chi^2\Omega^2\right) + J_p\left(\Omega^2 + 2\Omega_R\dot{\varphi}_{X'}\dot{\varphi}_y\right) + 2\Omega\chi\left(J_p - J_t\right)\left[\dot{\varphi}_{X'}cos(\vartheta) + \dot{\varphi}_y sin(\vartheta)\right]\right\}. \quad (3.70)$$

Para o cálculo da energia potencial do sistema, são consideradas as forças e momentos que causam reações elásticas no eixo. Estas forças e as coordenadas generalizadas do sistema estão relacionadas pela matriz de rigidez. Além disto, no plano xy, o comportamento translacional do rotor é desacoplado do rotacional e somente as forças, deslocamentos e suas rotações correspondentes são considerados. No plano yz, a situação é parecida, porém, devido à simetria axial do eixo, os elementos antissimétricos da matriz têm sinais opostos aos simétricos, conforme se vê abaixo

$$K_{xy} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, K_{yz} = -\begin{bmatrix} K_{11} & -K_{12} \\ -K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

As matrizes acima podem ser obtidas por meio de aplicação do método dos elementos finitos, conforme visto em Reddy (2006), Fish (2007) e outros.

A energia potencial do sistema é então dada por

$$U = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} X \\ \varphi_y \end{Bmatrix}^T K_{xy}\begin{Bmatrix} X \\ \varphi_y \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} Y \\ \varphi_{X'} \end{Bmatrix}^T K_{yz}\begin{Bmatrix} Y \\ \varphi_{X'} \end{Bmatrix}. \quad (3.72)$$

Aplicando então a equação de Lagrange (eq. 3.1), obtêm-se as equações de movimento para um rotor com quatro graus de liberdade não amortecido, quais sejam,

$$\begin{cases} m\ddot{X} + K_{11}X + K_{12}\varphi_y = m\varepsilon\Omega^2 cos(\Omega t + \alpha), \\ m\ddot{Y} + K_{11}Y + K_{12}\varphi_{X'} = m\varepsilon\Omega^2 sin(\Omega t + \alpha), \\ J_t\ddot{\varphi}_{X'} + J_p\Omega_R\dot{\varphi}_y - K_{12}Y + K_{22}\varphi_{X'} = -\chi\Omega^2(J_t - J_p)sin(\Omega t), \\ J_t\ddot{\varphi}_y - J_p\Omega_R\dot{\varphi}_{X'} + K_{12}X + K_{22}\varphi_y = \chi\Omega^2(J_t - J_p)cos(\Omega t). \end{cases} \tag{3.73}$$

Reorganizando as equações acima na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\varphi}_{X'} \end{Bmatrix} + \Omega_R \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{Y} \\ \dot{\varphi}_{X'} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11} & -K_{11} \\ 0 & 0 & -K_{12} & K_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \varphi_y \\ Y \\ \varphi_{X'} \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} m\varepsilon cos(\Omega t + \alpha) \\ \chi(J_t - J_p)cos(\Omega t) \\ m\varepsilon sin(\Omega t + \alpha) \\ -\chi(J_t - J_p)sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \tag{3.74}$$

ou simplificadamente,

$$M\ddot{q}(t) + \Omega_R G\dot{q}(t) + Kq(t) = F(t) \tag{3.75}$$

onde M representa a matriz inercial, G a matriz giroscópica, K a matriz de rigidez e q e F, representam os vetores de deslocamento e força generalizados, respectivamente.

A eq. (3.75) descreve um sistema de 4GL não amortecido. Se o sistema for amortecido, as matrizes de amortecimento aparecem na equação de maneira similar à eq. (3.58), ou seja,

$$M\ddot{q}(t) + (\Omega_R G + C)\dot{q}(t) + (K - \Omega_R C_r)q(t) = F(t), \tag{3.76}$$

onde C representa o amortecimento próprio, geralmente associado aos suportes do rotor e C_r representa o amortecimento circulatório, que ocorre devido ao movimento de rotação do rotor.

Nas análises seguintes, o amortecimento circulatório não será considerado, uma vez que nos rotores estudados nesse trabalho, este fenômeno não está presente.

3.7 MODELO DE ROTOR COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Os modelos utilizados para o equacionamento do rotor a ser utilizado neste trabalho podem ser mais bem apreciados em Bavastri (2006) e Carvalho et al. (2007), onde são especificados os cálculos da energia cinética e energia potencial de cada elemento do rotor. Aplicando a equação de Lagrange, é possível obter as matrizes elementares de inércia e de amortecimento, bem como a matriz de rigidez complexa, no caso dos mancais viscoelásticos, e a matriz giroscópica.

Neste caso, foi utilizada a formulação por elementos finitos com base na teoria da viga de Timoshenko, devido à sua generalidade de aplicação. A formulação numérica foi realizada usando elementos quadráticos de comprimento L. Assim, o correspondente elemento possui três nós e quatro graus de liberdade por nó, conforme a FIGURA 7.

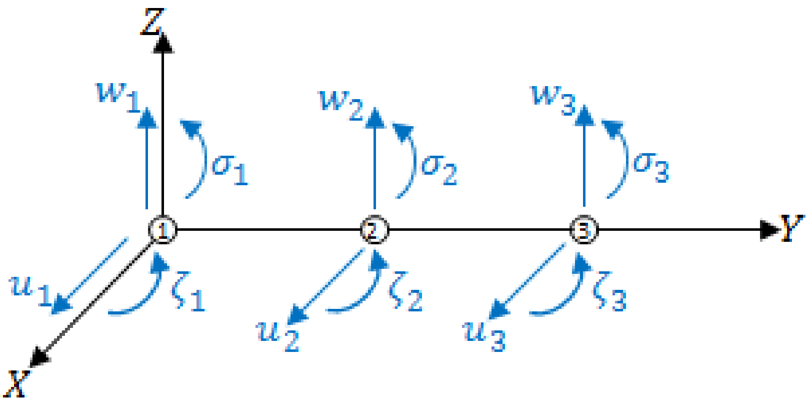


FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA E DOS GRAUS DE LIBERDADE PARA O ELEMENTO FINITO DE VIGA DE 3 NÓS

A aproximação da função de deslocamento por deslocamentos nodais e das funções de interpolação N é dada por

$$q(Y) = N_1(Y)q_1 + N_2(Y)q_2 + N_3(Y)q_3 = [N_1(Y) \quad N_2(Y) \quad N_3(Y)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \{N\}^T\{q\} \qquad (3.77)$$

onde q_i representa os deslocamentos nodais – u_i, w_i, σ_i e ζ_i – e N o vetor das funções quadráticas dadas por Bathe (1982), sendo que

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1(Y) \\ N_2(Y) \\ N_3(Y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-Y}{L}\left(1 - \frac{2Y}{L}\right) \\ 1 - \left(\frac{2Y}{L}\right)^2 \\ \frac{Y}{L}\left(1 + \frac{2Y}{L}\right) \end{Bmatrix}, \quad e \quad \{N'\} = \frac{\partial}{\partial Y}\{N\} = \begin{Bmatrix} \frac{-L-4Y}{L^2} \\ \frac{-8Y}{L^2} \\ \frac{L-4Y}{L^2} \end{Bmatrix}. \tag{3.78}$$

Conforme apresentado em Bavastri (2006), a equação para a energia potencial, já com a aplicação da eq. (3.78), é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = {} & \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2}\{N'\}\{N'\}^T EI_X dY}_{K^1}\{\sigma\} + \frac{1}{2}\{\zeta\}^T \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2}\{N'\}\{N'\}^T EI_Y dY}_{K^2}\{\zeta\} + \frac{1}{2}\{\zeta\}^T \underbrace{\mu\int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N\}^T G^* S dY}_{K^3}\{\zeta\} + \\ & +\frac{1}{2}\{\zeta\}^T \underbrace{\mu\int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N'\}^T G^* S dY}_{K^4}\{u\} + \frac{1}{2}\{u\}^T \underbrace{\mu\int_{-L/2}^{L/2}\{N'\}\{N\}^T G^* S dY}_{K^5}\{\zeta\} + \frac{1}{2}\{u\}^T \underbrace{\mu\int_{-L/2}^{L/2}\{N'\}\{N'\}^T G^* S dY}_{K^6}\{u\} + \\ & +\frac{1}{2}\{\sigma\}^T \underbrace{\mu\int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}}\{N\}\{N\}^T G^* S dY}_{K^7}\{\sigma\} + \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \underbrace{\left(-\mu\int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N'\}^T G^* S dY\right)}_{K^8}\{w\} \\ & +\frac{1}{2}\{w\}^T \underbrace{\left(-\mu\int_{-L/2}^{L/2}\{N'\}\{N\}^T G^* S dY\right)}_{K^9}\{\sigma\} + \frac{1}{2}\{w\}^T \underbrace{\mu\int_{-L/2}^{L/2}\{N'\}\{N'\}^T G^* S dY}_{K^{10}}\{w\}, \end{aligned} \tag{3.79}$$

onde L é o comprimento do elemento finito, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia nas direções X e Y, G^* é o módulo de elasticidade transversal e S é a área da seção transversal.

Cada K^i representa a matriz de rigidez relativa aos graus de liberdade a que está associado. O termo μ adicionado na equação refere-se a um fator de correção para tensões transversais cisalhantes (Timoshenko and Goodier, 1980). Para seções circulares, $\mu = 0{,}898936$, e para seções retangulares e quadradas, $\mu = 5/6$.

Buscando também prevenir problemas de locking[1], aplica-se uma integração gaussiana seletiva, onde os termos relativos ao cisalhamento transversal são sub-integrados, e os demais termos integrados de forma completa, conforme descrito por Hughes (2000).

---

[1] O *Locking*, ou travamento, ocorre em vigas modeladas pela teoria de Timoshenko, em que, para vigas muito finas, a tensão de cisalhamento, que deveria desaparecer, não desaparece e continua a atuar no atual modelo com um valor relativamente elevado. Para tentar corrigir este problema, faz-se uma substituição da parcela correspondente ao cisalhamento transversal. Isto é realizado através de uma integração numérica utilizando a quadratura gaussiana.

Aplicando a equação de Lagrange (eq. 3.1) na eq. (3.79), obtém-se a matriz de rigidez global do sistema. A matriz pode ser dividida em duas, K^{11} e K^{12}, associadas à flexão e ao cisalhamento do elemento, respectivamente. Somando-as, tem-se a matriz de rigidez com base na teoria de Timoshenko, quais sejam,

$$K^{11} = \frac{EI}{3L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

$$K^{12} = \mu G^{*} S \begin{bmatrix} \frac{7}{3L} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-8}{3L} & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3L} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{7}{3L} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-8}{3L} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3L} & \frac{-1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{-L}{18} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & \frac{-L}{18} \\ \frac{-8}{3L} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-8}{3L} & 0 & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-8}{3L} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 & \frac{16}{3L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-8}{3L} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{4L}{9} & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{L}{9} & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{4L}{9} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} \\ \frac{1}{3L} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-8}{3L} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3L} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3L} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-8}{3L} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 & \frac{7}{3L} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-L}{18} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{L}{9} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-L}{18} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{L}{9} \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

A energia cinética do sistema gera as matrizes de inércia e giroscópica. Para tanto, primeiramente se tomam as equações das velocidades, que são as derivadas da eq. (3.77), isto é,

$$\dot{q}(y) = \{N\}^T\{\dot{q}\}. \tag{3.82}$$

Assim, de maneira semelhante ao que ocorre na eq. (3.79) para energia potencial, a energia cinética do sistema é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{T} = {} & \frac{1}{2}\{\dot{u}\}^T \underbrace{\rho S \int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N\}^T dy}_{M^1}\{\dot{u}\} + \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T \underbrace{\rho S \int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N\}^T dy}_{M^2}\{\dot{w}\} + \\ & \frac{1}{2}\{\dot{\sigma}\}^T \underbrace{\rho I \int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N\}^T dy}_{M^3}\{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{2}\{\dot{\zeta}\}^T \underbrace{\rho I \int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N\}^T dy}_{M^4}\{\dot{\zeta}\} + \\ & \rho I L \Omega^2 + \frac{1}{2}\{\dot{\zeta}\}^T \underbrace{2\rho I \Omega \int_{-L/2}^{L/2}\{N\}\{N\}^T dy}_{G}\{\sigma\}\ ,\end{aligned} \tag{3.83}$$

onde ρ é a densidade, e Ω é a rotação do rotor.

As matrizes M^1, M^2, M^3 e M^4 são as matrizes de inércia associadas aos graus de liberdade e G é a matriz que contém os termos giroscópicos. Incluindo o vetor de velocidades nodais, e aplicando a equação de Lagrange na eq. (3.83), tem-se as matrizes de inércia, M^{11} e M^{12}, sendo a primeira uma matriz clássica de massa e a segunda é aquela que traz os efeitos da inércia rotacional, e também a matriz G. O termo $\rho I L \Omega^2$ não causa efeito algum no cálculo das matrizes, pois, devido ao fato de ser uma constante, desaparece quando a equação de Lagrange é aplicada.

$$M^{11} = \frac{LS\rho}{30}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

$$M^{12} = \frac{IL\rho}{30}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

$$G = \frac{IL\rho\Omega}{15}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

Os valores da matriz de amortecimento C são fornecidos pelo amortecimento presente nos mancais. A inclusão das propriedades de rigidez e amortecimento dos mancais são fornecidas pelas matrizes

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} & c_{X\sigma} & c_{X\zeta} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} & c_{Z\sigma} & c_{Z\zeta} \\ c_{\sigma X} & c_{\sigma Z} & c_{\sigma\sigma} & c_{\sigma\zeta} \\ c_{\zeta X} & c_{\zeta Z} & c_{\zeta\sigma} & c_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad e \quad [K]_M = \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} & k_{X\sigma} & k_{X\zeta} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} & k_{Z\sigma} & k_{Z\zeta} \\ k_{\sigma X} & k_{\sigma Z} & k_{\sigma\sigma} & k_{\sigma\zeta} \\ k_{\zeta X} & k_{\zeta Z} & k_{\zeta\sigma} & k_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}, \tag{3.87}$$

que são adicionadas às matrizes giroscópica e de rigidez, nas regiões das matrizes correspondentes aos nós onde os suportes do rotor estão posicionados.

Esta adição pode ser observada na FIGURA 8, que representa uma matriz de rigidez global, onde os nós das matrizes elementares são dados por $K_{11}, K_{12}, K_{21} e K_{22}$ – que compõem a matriz elementar – e pela matriz K_M, que corresponde às matrizes da eq. (3.87). Os nós em azul, mostram a adição dos valores da matriz do mancal e da matriz global.

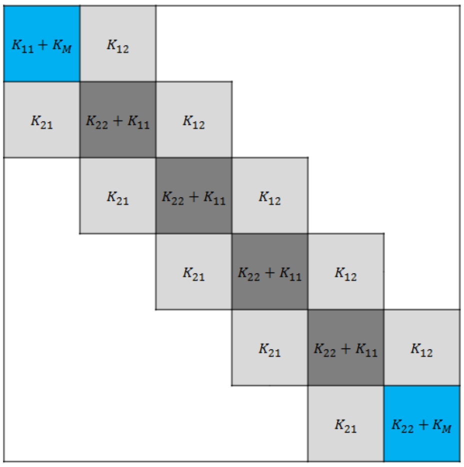


FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO DA MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

A partir destas matrizes, obtém-se o sistema de equações globais que governa o movimento de um sistema girante. O modelo apresentado pela eq. (3.88) representa o caso com amortecimento viscoso, que é utilizado para mancais de rolamento e/ou mancais hidrodinâmicos, sendo semelhante ao apresentado pela eq. (3.76), ou seja,

$$M_{n\times n}\ddot{q}(t)_{n\times 1} + \left(C + G(\Omega_R)\right)_{n\times n}\dot{q}(t)_{n\times 1} + K_{n\times n}q(t)_{n\times 1} = F(t)_{n\times 1}, \tag{3.88}$$

onde:

- M é a matriz de inércia (constante e simétrica);
- G é a matriz giroscópica do eixo e disco (função da rotação Ω_R e antissimétrica);
- C é a matriz de amortecimento do mancal (constante e simétrica);
- K é a matriz de rigidez do eixo e dos mancais (constante e simétrica);
- q é o vetor de coordenadas generalizadas, que ao adotar uma discretização de n elementos, possui uma dimensão $4(n+1) \times 1$, pois se tem $n+1$ nós e quatro graus de liberdade por nó;
- F é o vetor de forças generalizadas.

3.7.1 INSTABILIDADE EM ROTORES COM MULTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

A metodologia para a determinação da instabilidade para um sistema de múltiplos graus de liberdade (válido também para 4GL) ocorre encontrando a solução polinomial do modelo matemático do sistema – autovalores – que fornecem as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento. Devido a características das matrizes presentes na eq. (3.88) – todos os coeficientes reais – os autovalores são complexos e conjugados, com uma parte real (relacionada ao decaimento ou não da resposta em vibração livre) e uma imaginária (relacionada ao efeito oscilante do sistema). A parte real é a que está associada a instabilidade do sistema.

Assim, supõe-se que o rotor esteja em vibração livre ($F(t) = 0$) e que a resposta do sistema é dada de forma semelhante a eq. (3.19), isto é,

$$q(t)_{n\times 1} = \theta_{n\times 1} e^{st}, \qquad \theta \in \mathbb{C}^n. \tag{3.89}$$

Com isto, substituindo a eq. (3.89) na (3.88), se obtém a seguinte equação algébrica:

$$\left[s^2 M + s\big(C + G(\Omega_R)\big) + K\right]_{n\times n} \theta_{n\times 1} = 0. \tag{3.90}$$

Para fins de cálculo, a equação acima necessita ser reorganizada de forma matricial. Porém, como não existe garantia de simetria na matriz $C + G$, o sistema deve ser resolvido em um espaço de estado. No entanto, para tal, é necessário a criação de um vetor generalizado de estado, que contém as informações sobre deslocamentos e velocidades, a saber,

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \cdots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}_{2n\times 1}. \tag{3.91}$$

Aplicando a eq. (3.91) na (3.90), e reorganizando matricialmente, obtêm-se

$$\left[\big(C + G(\Omega_R)\big) \ \ \vdots \ \ M\right]_{n\times 2n} \dot{y}(t)_{2n\times 1} + [K \ \ \vdots \ \ 0]_{n\times 2n} y(t)_{2n\times 1} = \{0\}_{n\times 1}. \tag{3.92}$$

Entretanto, neste caso existem n equações e $2n$ incógnitas. Para levar a um sistema de equações diferenciais de ordem quadrada, utiliza-se a seguinte igualdade, com a equação adjunta:

$$[M \;\vdots\; 0]_{n\times 2n}\dot{y}(t)_{2n\times 1} + [0 \;\vdots\; -M]_{n\times 2n} y(t)_{2n\times 1} = \{0\}_{n\times 1}. \tag{3.93}$$

Desta forma, as eq. (3.92) e (3.93) no espaço de estado se tornam,

$$\begin{bmatrix} \left(C + G(\Omega_R)\right) & \vdots & M \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \dot{y}(t)_{2n\times 1} + \begin{bmatrix} K & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix}_{2n\times 2n} y(t)_{2n\times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n\times 1}, \tag{3.94}$$

ou, simplificadamente,

$$A(\Omega_R)_{2n\times 2n}\dot{y}(t)_{2n\times 1} + B_{2n\times 2n} y(t)_{2n\times 1} = 0_{2n\times 1}. \tag{3.95}$$

Devido às características das matrizes M, C, G e K, a matriz B é uma matriz simétrica e A é uma matriz assimétrica. Então, a eq. (3.95) representa um problema de $2n$ equações.

Aplicando a eq. (3.89) na (3.91), se obtém

$$y(t) = \begin{Bmatrix} \theta \\ \cdots \\ s\theta \end{Bmatrix}_{2n\times 1} e^{st}. \tag{3.96}$$

Dessa forma, aplicando a eq. (3.96) na (3.95), é gerado um problema de autovalores generalizado, que pode ser definido da seguinte forma,

$$B\Theta_i = \lambda_i A(\Omega_R)\Theta_i, \qquad i = 1, \ldots, 2n. \tag{3.97}$$

onde $\lambda = -s$, sendo λ_i os autovalores do sistema e s o coeficiente de Laplace. Os Θ_i, são os autovetores à direita no espaço de estados, que se relacionam com seus equivalentes no espaço de configurações através de

$$\Theta_i = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \cdots \\ s_i\theta_i \end{Bmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, 2n. \tag{3.98}$$

Como a matriz A pode ser assimétrica, o problema adjunto de autovalores, abaixo exposto, deve ser resolvido. Esse problema é

$$B^T \Psi_i = \lambda_i A^T(\Omega_R)\Psi_i, \tag{3.99}$$

sendo Ψ_i os autovalores à esquerda, com $i = 1 \dots 2n$.

3.7.1.1 ORTOGONALIDADE

Em Ewins (1984) é demonstrado que os autovetores ortonormalizados são obtidos fazendo $\Theta_i/\sqrt{a_i}$ e $\Psi_i/\sqrt{a_i}$, sendo $a_i = \Psi_i^T A \Theta_i^T$. Partindo destes vetores e usando as matrizes A e B, verificam-se as seguintes propriedades de ortogonalidade:

$$\Psi^T A \Theta = [I] \qquad \Psi^T B \Theta = [\Lambda], \tag{3.100}$$

onde $[I]$ e $[\Lambda] = diag(\lambda_i)$ representam a matriz identidade e a matriz espectral de autovalores, respectivamente. Conforme visto em (3.98), os autovetores podem ser

$$\begin{aligned} \Theta &= [\theta \ \vdots \ s\theta]^T, \qquad e \\ \Psi &= [\psi \ \vdots \ s\psi]^T. \end{aligned} \tag{3.101}$$

As seguintes propriedades de ortogonalidade são demonstráveis a partir das equações em (3.100) (EWINS, 1984):

- 1ª Condição de Ortogonalidade:

$$-\lambda_j \lambda_k \psi_j^T M \theta_k + \psi_j^T K \theta_k = b_j \delta_{jk} \ ; \tag{3.102}$$

- 2ª Condição de Ortogonalidade:

$$-(\lambda_j + \lambda_k)\psi_j^T M \theta_k + \psi_j^T (C + G)\theta_k = a_j \delta_{jk} \ . \tag{3.103}$$

Pelas características do sistema, os autovalores λ_j são complexos e vem em pares complexos conjugados, de forma que

$$\lambda_{j,j+1} = Re\{\lambda\}_j \pm i Im\{\lambda\}_j. \tag{3.104}$$

Então, sendo $k = j + 1$, $\lambda_k = \lambda_j^*$ e tomando $k \neq j$, sabe-se que $a_j = 0$. Aplicando nas relações de ortogonalidade, tem-se,

$$2Re\{\lambda\}_j = \frac{\psi_j^T (C + G)\theta_k}{\psi_j^T M\theta_k} = \frac{c_j}{m_j} \quad e \quad \lambda_j \lambda_{j+1}^* = \frac{\psi_j^T K\theta_k}{\psi_j^T M\theta_k} = \frac{k_j}{m_j} = \Omega_j^2, \tag{3.105}$$

resultando em

$$\xi_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_j}{2m_j\Omega_j} \quad e \quad \Omega_j^2 = \left|\lambda_j\right|^2 \Longrightarrow \Omega_j = \left|\lambda_j\right|, \tag{3.106}$$

onde ξ é o fator de amortecimento do sistema e Ω_j suas frequências naturais.

3.7.2 MODELO DE AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO

Os modelos utilizados para o equacionamento do rotor com material viscoelástico segue o que foi descrito no capítulo anterior. A adição de componentes viscoelásticos nos mancais está descrita em Silvério (2015), e, resumidamente, na seção 4. Naquele trabalho, a matriz de rigidez passa a ser complexa e função da frequência e da temperatura. Assim, a equação de movimento de um rotor composto com material viscoelástico, no domínio da frequência, é dada por

$$\{-\Omega^2 M + i\Omega[C + G(\Omega_R)] + \overline{K}(\Omega)\}Q(\Omega) = F(\Omega), \tag{3.107}$$

que é similar a eq. (3.88), e onde$Q(\Omega) e F(\Omega)$ são as transformadas de Fourier das coordenadas generalizadas e força, respectivamente.

Na eq. (3.107), o valor de C é zero, uma vez que o amortecimento do sistema é considerado apenas no material viscoelástico que faz parte do mancal de rolamento. Esse amortecimento está presente na matriz de rigidez ($\overline{K}$) complexa.

Para determinar o problema de autovalores, encontram-se algumas dificuldades adicionais já que, em geral, as matrizes não são simétricas e a matriz de rigidez da eq. (3.107) é dependente da frequência de excitação, que pode ser distinta da frequência de rotação, Ω_R. Uma maneira de contornar estas dificuldades é reescrevendo a eq. (3.107) no espaço de estado. Deste modo, define-se a variável de estado como:

$$\mathcal{Y}(\Omega) = \begin{Bmatrix} Q(\Omega) \\ \cdots \\ i\Omega Q(\Omega) \end{Bmatrix}. \tag{3.108}$$

Então a equação de movimento pode ser escrita matricialmente como

$$i\Omega \begin{bmatrix} C + G(\Omega_R) & \vdots & M \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \mathcal{Y}(\Omega)_{2n\times 1} + \begin{bmatrix} \overline{K}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \mathcal{Y}(\Omega)_{2n\times 1} = \begin{Bmatrix} F(\Omega) \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n\times 1}. \tag{3.109}$$

ou, de forma mais compacta, já considerando $F(\Omega) = 0$,

$$[i\Omega A(\Omega_R)_{2n\times 2n} + \bar{B}(\Omega)_{2n\times 2n}]\mathcal{Y}(\Omega)_{2n\times 1} = \{0\}_{2n\times 1}. \tag{3.110}$$

No domínio da frequência, a resposta modal do sistema pode ser pela seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathcal{Y}(\Omega)_{2n\times 1} = \theta_{2n\times 1} P(\Omega), \tag{3.111}$$

onde $P(\Omega)$ é conhecido como coordenadas principais generalizadas. Portanto, a eq. (3.110) pode ser reescrita como

$$[i\Omega A(\Omega_R)_{2n\times 2n}\theta_{2n\times 1} + \bar{B}(\Omega)_{2n\times 2n}\theta_{2n\times 1}]P(\Omega) = \{0\}, \tag{3.112}$$

que gera o problema de autovetores generalizado, equivalente a eq. (3.112), dado por

$$\bar{B}(\Omega)\Theta_i = \lambda_i A(\Omega_R)\Theta_i, \qquad com \quad \lambda_i = -i\Omega \tag{3.113}$$

no qual Θ_i é denominado autovetor à direita e λ_i o seu autovalor, com i variando de 1 a $2n$. Consequentemente, o cálculo dos autovalores do sistema é dependente da frequência de rotação do rotor (Ω_R) e da frequência de excitação (Ω) aplicada no material viscoelástico, conforme relatado por Ribeiro et al. (2015) e Ferreira (2004).

Considerando que A e/ou $\bar{B}$ são matrizes não simétricas, deve-se resolver o problema de autovalor adjunto, definindo-se o autovetor a esquerda com a variável ψ, ou seja,

$$\bar{B}^T(\Omega)\psi_i = \lambda_i A^T(\Omega_R)\psi_i, \tag{3.114}$$

onde $i = 1$ a $2n$.

Dadas as condições de ortogonalidade apresentadas na seção anterior (3.7.1.1), obtém-se

$$\Psi^T A(\Omega_R)\Theta = I \quad e \quad \Psi^T \bar{B}(\Omega)\Theta = \Lambda, \tag{3.115}$$

onde I é a matriz identidade e Λ é a matriz espectral de autovalores. Como estes autovalores são complexos, com uma parte real e outra imaginaria, tem-se

$$\lambda_j = Re\{\lambda\}_j \pm iIm\{\lambda\}_j. \tag{3.116}$$

Devido à formulação ser realizada no espaço de estado – com suportes viscoelásticos e portanto matrizes com coeficientes complexos, os autovalores são complexos e diferentes, porém, tem que estar relacionados de alguma forma. Verifica-se assim que, para este tipo de problemas, os autovalores estão formados por pares λ_j e $-\lambda_j$. Desta maneira, tomando-se valores de $j \neq k$, mas com $\lambda_j = -\lambda_k$ e aplicando estes valores nas relações de ortogonalidade,

$$\lambda_j^2 = \left(-i\bar{\Omega}_j\right)^2. \tag{3.117}$$

Por definição, tem-se

$$\begin{gathered} -\lambda_j^2 = \bar{\Omega}_j^2 = \Omega_j^2\left(1 + i\eta_j\right), \\ \lambda_j = \Omega_j\sqrt{1 + i\eta_j} \end{gathered} \tag{3.118}$$

onde Ω_j é a frequência natural do sistema e η_j o seu fator de perda.

Destas relações, chega-se à seguinte conclusão:

$$\Omega_j = |\lambda_j|, \quad e \quad \eta_j = \frac{Im\left(\lambda_j^2\right)}{Re\left(\lambda_j^2\right)}. \tag{3.119}$$

3.8 MODELO DE ROTOR POR MODOS ASSUMIDOS

O método de modos assumidos consiste na adoção de uma solução, $w_n(x,t)$, para o problema de vibrações na forma de uma série composta de uma combinação linear de funções admissíveis / teste ϕ_i, que estão em função de coordenadas espaciais, multiplicadas por coordenadas generalizadas do tipo $q_i(t)$, de modo que

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} \phi_i q_i(t). \tag{3.120}$$

Essa abordagem, em essência, trata um sistema contínuo como um sistema com n graus de liberdade. Como se trata de uma aproximação de um sistema contínuo, quanto maior o número n de graus de liberdade utilizados, maior sua aproximação com os valores reais do sistema.

Conforme descrito por Lalanne e Ferraris (1990), no caso de um rotor padrão composto por suportes (mancais), eixo e discos, a equação de energia cinética por modos assumidos é

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left[\rho S\int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)dx + \rho I\int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x)dx + M_D\phi_i(x_P)\phi_j(x_P) + J_t\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x_P)\frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x_P)\right]}_{ComponentesInerciais(MouT_2)}\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t) \\ & -\Omega_R\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left[J_p\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x_P)\frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x_P) + 2\rho I\int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x)dx\right]}_{ComponentesGiroscópicas(GouT_1)} q_i(t)\dot{q}_j(t), \end{aligned} \tag{3.121}$$

onde ρ representa a densidade do material, S a área da seção transversal do eixo, I o segundo momento de inércia de área do eixo, M_D a massa do disco, J_t o momento de inércia transversal do disco, J_p o momento de inércia polar do disco e x_P a posição do disco em um eixo de comprimento L.

A energia potencial do sistema é dada por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left[EI\int_0^L \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}(x)\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}(x)dx + K_M\phi_i(x_M)\phi_j(x_M)\right]}_{ComponentesdeRigidez(KouV)} q_i(t)q_j(t), \tag{3.122}$$

onde E representa o módulo de elasticidade do material (eixo), K_M a rigidez do mancal e x_M a sua posição.

O amortecimento do sistema é dado por

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[C_M \phi_i(x_M)\phi_j(x_M)\right] q_i(t)\dot{q}_j(t), \tag{3.123}$$

onde C_M é o coeficiente de amortecimento representando o amortecimento introduzido pelos mancais. Neste caso, o amortecimento circulatório foi negligenciado.

Para este caso apresentado, a função admissível é representada pela função modal para vibração lateral em vigas, com as condições de contorno livre-livre (RAO, 2009), ou seja

$$\phi_n(x) = \sin\beta_n x + \sinh\beta_n x + \mathbb{a}_n(\cos\beta_n x + \cosh\beta_n x), \tag{3.124a}$$

$$em\ que \qquad \mathbb{a}_n = \left(\frac{\sin\beta_n L - \sinh\beta_n L}{\cosh\beta_n L - \cos\beta_n L}\right). \tag{3.124b}$$

onde β_n é um valor que depende das condições de contorno do sistema e varia conforme o número de graus de liberdade do sistema.

As matrizes de massa, giroscópica, de amortecimento e de rigidez são geradas pelas eq. (3.121, 3.122 e 3.123). O problema de autovalores para estas matrizes é o mesmo utilizado para a resolução do sistema com MGL.

3.9 DIAGRAMA DE CAMPBELL

3.9.1 MODELO VISCOSO

O diagrama de Campbell foi apresentado pela primeira vez em Campbell (1924). No caso de um sistema com múltiplos graus de liberdade, como G está em função da rotação, para cada Ω_R deve ser resolvido um problema de autovalores. Portanto, para cada rotação Ω_R, os parâmetros modais do rotor, $\Omega_j, \Theta_j, \Psi_j e \xi_j$, são calculados. Uma vez resolvido o problema de autovalores para cada rotação, é possível construir o diagrama de Campbell, o qual mostra as distintas frequências características de um sistema girante para distintas condições de velocidade de rotação.

Para uma excitação de massa desbalanceada, a resposta do sistema pode ser prevista através dos parâmetros modais obtidos no diagrama de Campbell, traçando uma reta onde $\Omega_j = \Omega_R$. Assim, através da intersecção desta reta com as curvas de frequências características do diagrama de Campbell, obtêm-se as rotações críticas do sistema ($\Omega_R = \Omega_j$, reta em verde), como pode ser observado na FIGURA 9. Para qualquer outro tipo de excitação, as rotações críticas do sistema girante podem ser obtidas traçando uma reta que a represente. Por exemplo, no caso de instabilidade dos mancais hidrodinâmicos, onde $\Omega_j = \frac{1}{2}\Omega_R$, o que é representado pela reta em laranja, as rotações críticas corresponderão aos pontos de intersecção dessa reta com as curvas de frequências características.

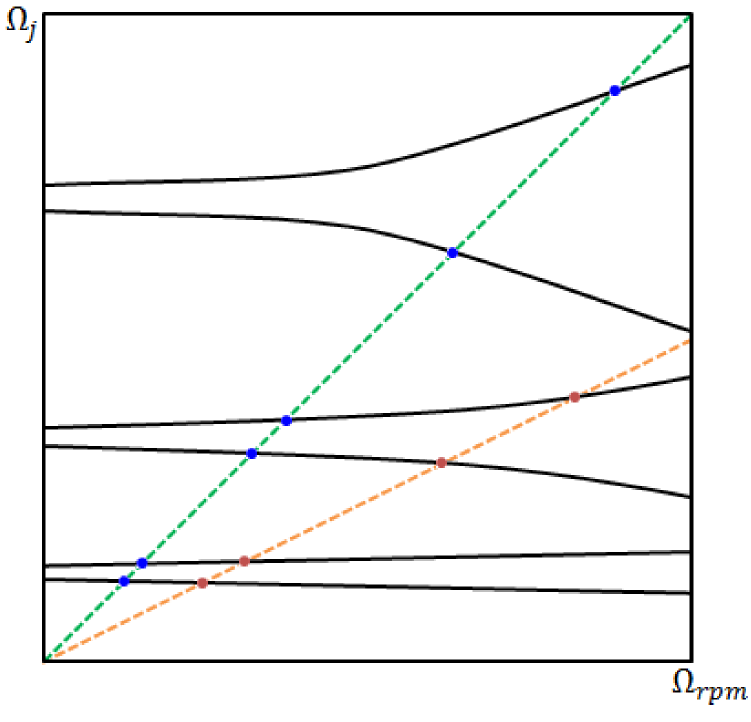


FIGURA 9 – DIAGRAMA DE CAMPBELL

A resposta da figura acima é representada na FIGURA 10.

$$\begin{cases} Variação\ da\ rotação(\Omega_R) \\ B\Phi = \lambda A(\Omega_R)\Phi \\ B\psi = \lambda A(\Omega_R)\psi, \\ Campbell\ Final \end{cases}$$

FIGURA 10 – RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALORES E DIAGRAMA DE CAMPBELL – MODELO VISCOSO

3.9.2 MODELO VISCOELÁSTICO

Nos casos em que o rotor é composto por mancais com MVEs, a matriz A, que contém a matriz giroscópica, é função da rotação do eixo (Ω_R), enquanto a matriz $\bar{B}$, que contém a matriz de rigidez, é complexa e função da frequência Ω. Desta forma, o problema de autovalores é função da rotação e da variável frequência. Isto é, para uma determinada rotação do rotor ($\Omega_R = cte$), o problema de autovalores é função da frequência e pode ser resolvido através de um diagrama de Campbell auxiliar, $\Omega_j \times \Omega$, conforme apresentado por Bavastri et al. (2008).

A partir deste Campbell auxiliar, fazendo $\Omega = \Omega_j$, condição representada por uma reta que cruza as curvas $\Omega_j \times \Omega$, serão extraídas as frequências naturais do sistema, de forma equivalente ao trabalho Floody et al. (2007) para uma viga sanduíche (metal - material viscoelástico - metal).

Esse processo deve ser repetido para todas as rotações do rotor, resultando em um novo diagrama de Campbell final, agora ($\Omega_j \times \Omega_R$), contendo as rotações críticas do rotor dinâmico viscoelástico. A partir deste diagrama de Campbell final é possível determinar as características dinâmicas do sistema de rotor dinâmico composto com material viscoelástico. A FIGURA 11b representa o diagrama de Campbell auxiliar e a FIGURA 11a o resultado final. Como pode ser observado, para calcular as frequências naturais do sistema para uma rotação constante, é preciso resolver um problema de autovalores função da frequência devido à característica da matriz de rigidez.

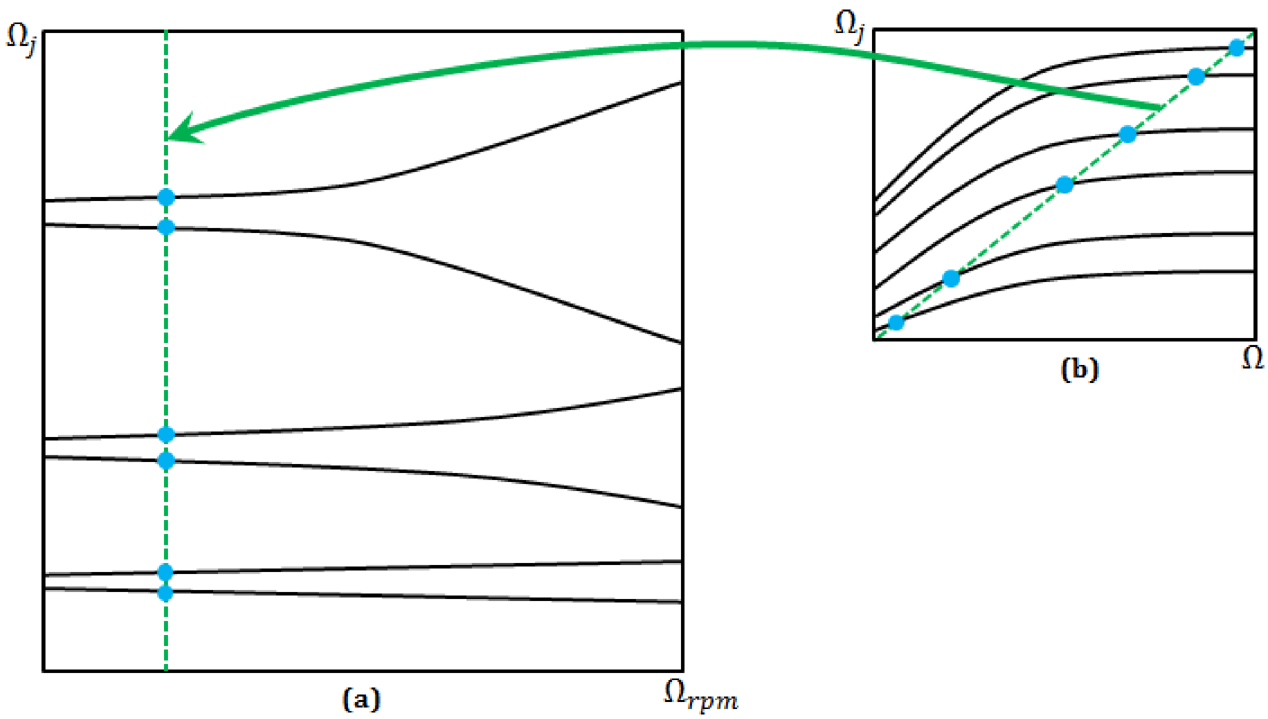


FIGURA 11 – (a) CAMPBELL FINAL; (b) CAMPBELL AUXILIAR

A FIGURA 12 mostra como deve ser resolvido o problema de autovalores para um sistema girante com mancais viscoelásticos, conforme visto nas eq. (3.106) e (3.109), onde $\Omega_j = |\lambda_j|$.

$$\left[\begin{array}{l} Variação\ da\ rotação(\Omega_R) \\ \left[\begin{array}{l} Variação\ da\ frequência\ (\Omega) \\ \bar{B}(\Omega)\Phi = \lambda A(\Omega_R)\Phi \\ \bar{B}(\Omega)\psi = \lambda A(\Omega_R)\psi, \\ CampbellAuxiliar \end{array}\right. \\ CampbellFinal \end{array}\right.$$

FIGURA 12 – RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALORES E DIAGRAMA DE CAMPBELL – MODELO VISCOELÁSTICO

3.10 AUTOVALORES EM SISTEMAS HAMILTONIANOS

Devido a necessidade da eq. (3.107) ser reorganizada no espaço de estado, tem-se, conforme a eq. (3.109), as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} \hat{G}(\Omega_R) & \vdots & M \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{K}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix}. \tag{3.125}$$

onde $\hat{G} = C + G$, sendo C a matriz de amortecimento e G a matriz giroscópica.

Conforme Higham et al. (2006), Mehrmann e Watkins (2002) e Lancaster (2013), ambas as matrizes acima representam um sistema Hamiltoniano[2]. A equação matricial delineada no espaço de estado (eq. 3.107) pode ser também reescrita na forma de um problema quadrático de autovalores (QEP – Quadratic Eigenvalue Problem).

As raízes de um QEP, isto é, seus autovalores, possuem algumas características, com base nas propriedades das matrizes que o compõem.

3.10.1 MATRIZES REAIS, Ĝ = C E G = 0

Se as matrizes que compõem o sistema são todas reais, isto é, $M, K, \hat{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com $\hat{G} = C$, os autovalores serão em pares, complexo e conjugado ($\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}^{n\times n}$), conforme apresentado pela FIGURA 13, e vêm do seguinte polinômio característico:

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda\hat{G} + K\,, \tag{3.126}$$

pois $Q^T(\lambda) = Q(\bar{\lambda})$, e portanto,

$$\det Q^T(\lambda) = \det Q(\bar{\lambda}) = 0. \tag{3.127}$$

Se, além de reais, as matrizes são simétricas e positivas definidas, se tem a garantia do sistema ser estável, pois a parte real de λ é menor que zero. Isto pode ser visto na demonstração abaixo, pois, sendo

---

[2] O sistema dinâmico Lagrangeano se transforma em Hamiltoniano quando ocorre a mudança de resolução de um espaço n dimensional para $2n$ dimensional. Ver seção 3.7.1, eq. (3.90) – (3.94).

$$Q(\lambda)\mathrm{v} = 0, \qquad \mathrm{v} \neq 0, \qquad e \quad \mathrm{v} \in \mathbb{C}^n, \tag{3.128}$$

tem-se, sucessivamente,

$$\mathrm{v}^T\left(\lambda^2 M + \lambda\hat{G} + K\right)\mathrm{v} = 0\,, \;\; e \tag{3.129}$$

$$\lambda^2\mathrm{v}^T M\mathrm{v} + \lambda\mathrm{v}^T\hat{G}\mathrm{v} + \mathrm{v}^T K\mathrm{v} = 0. \tag{3.130}$$

Por simplificação, chega-se a

$$\lambda^2 m_V + \lambda\hat{g}_V + k_V = 0, \tag{3.131}$$

onde $m_V, \hat{g}_V$ e k_V são maiores que zero. Com isso, as raízes do polinômio são dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\hat{g}_V}{2m_V} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{g}_V}{2m_V}\right)^2 - \frac{k_V}{m_V}}. \tag{3.132}$$

Desta forma, se

$$\left(\frac{\hat{g}_V}{2m_V}\right)^2 - \frac{k_V}{m_V} < 0 \Longrightarrow \frac{\hat{g}_V}{2m_V} < \sqrt{\frac{k_V}{m_V}}, \tag{3.133}$$

obtêm-se

$$Re(\lambda) = \frac{-\hat{g}_V}{2m_V} < 0, \qquad e \qquad \lambda \in \mathbb{C}^n. \tag{3.134}$$

Ainda assim, mesmo se $\lambda \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\left(\frac{\hat{g}_V}{2m_V}\right)^2 - \frac{k_V}{m_V} \geq 0, \tag{3.135}$$

os autovalores serão negativos pois, caso contrário,

$$\frac{-\hat{g}_V}{2m_V} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{g}_V}{2m_V}\right)^2 - \frac{k_V}{m_V}} \geq 0\,, \qquad e \tag{3.136}$$

$$\left(\frac{\hat{g}_V}{2m_V}\right)^2 \leq \left(\frac{\hat{g}_V}{2m_V}\right)^2 - \frac{k_V}{m_V}, \tag{3.137}$$

o que não é possível fisicamente, pois k_V/m_V não é menor ou igual a zero.

$\underline{M, K, \hat{G} \in \mathbb{R}^n,\ simétricos,\ \hat{G} = C\ e\ G = 0}$

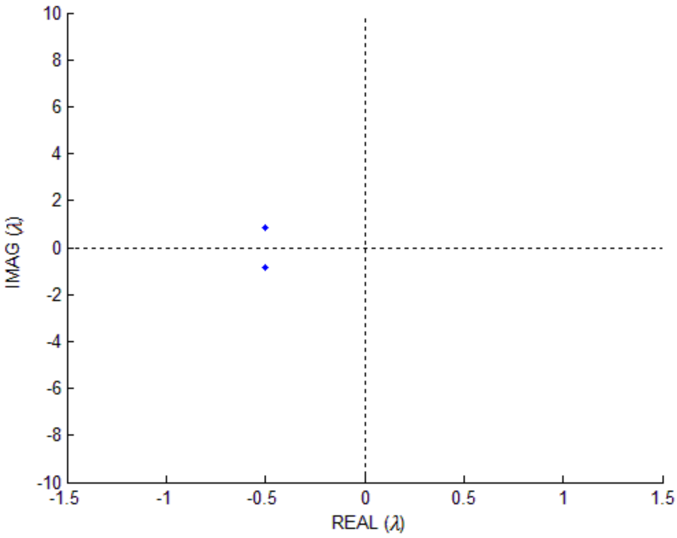


FIGURA 13 – AUTOVALORES $\lambda, \bar{\lambda}$, COM PARTES REAL E IMAGINÁRIA

3.10.2 MATRIZES REAIS, Ĝ = 0

Observando a raiz do polinômio (λ), pode-se concluir que se $\hat{G} = 0$, então a resposta do sistema é puramente imaginária, isto é,

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k_V}{m_V}}. \tag{3.138}$$

Conforme a FIGURA 14, neste caso, os autovalores são dispostos no eixo imaginário.

$\underline{M, K \in \mathbb{R}^n, \hat{G} = 0, simétricos}$

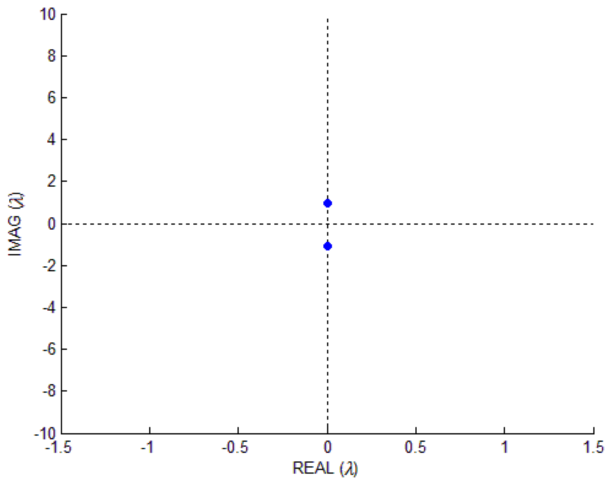


FIGURA 14 – AUTOVALORES $\lambda, \bar{\lambda}$, SOMENTE COM PARTE IMAGINÁRIA

3.10.3 MATRIZES REAIS, Ĝ = G E C = 0

Se, entretanto, a matriz $\hat{G}$ for antissimétrica ($\hat{G}^T = -\hat{G}$), com $\hat{G} = G$, $C = 0$, e as propriedades anteriores das matrizes M e K forem mantidas, além dos autovalores serem em pares $\lambda, \bar{\lambda}$, eles também serão em pares $-\lambda, -\bar{\lambda}$, pois

$$Q(\lambda)^T = (\lambda)^2 M^T + (\lambda)\hat{G}^T + K^T = (-\lambda)^2 M + (-\lambda)\hat{G} + K = Q(-\lambda)\,. \qquad (3.139)$$

Portanto, os autovalores para um sistema com M e K simétricas e positivas definidas e $\hat{G}$ antissimétrica, os autovalores associados são $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda$ e $-\bar{\lambda}$. Além disso, eles são imaginários puros, como podemos ver na FIGURA 15, onde os autovalores estão no eixo imaginário, variando de acordo com a influência da matriz $\hat{G}$.

$\underline{M, K, \hat{G} \in \mathbb{R}^n,\ M = M^T,\ K = K^T,\ G = -G^T\ e\ C = 0}$

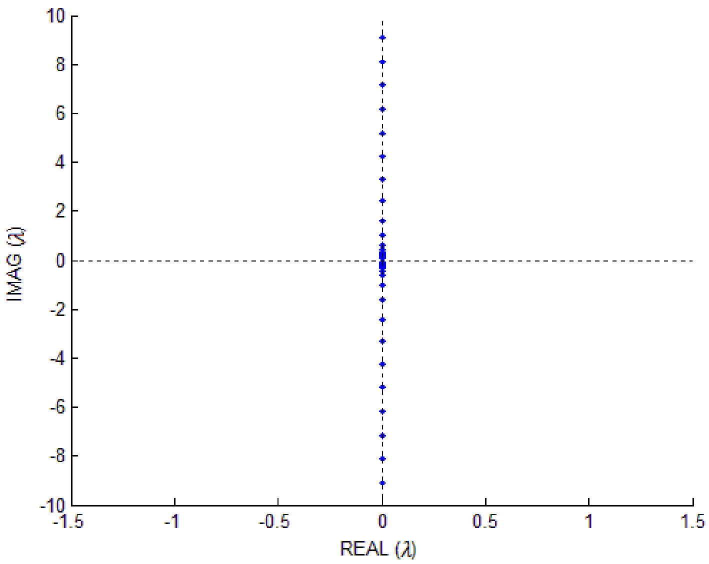


FIGURA 15 – AUTOVALORES $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda}$, SOMENTE COM PARTE IMAGINÁRIA

Se a matriz K for simétrica, porém indefinida, os autovalores possuirão partes real e imaginária, conforme a FIGURA 16.

$\underline{M, K, \hat{G} \in \mathbb{R}^n, \ \ M = M^T, \ \ K\ indefinida, \ \ G = -G^T \ \ e \ \ C = 0}$

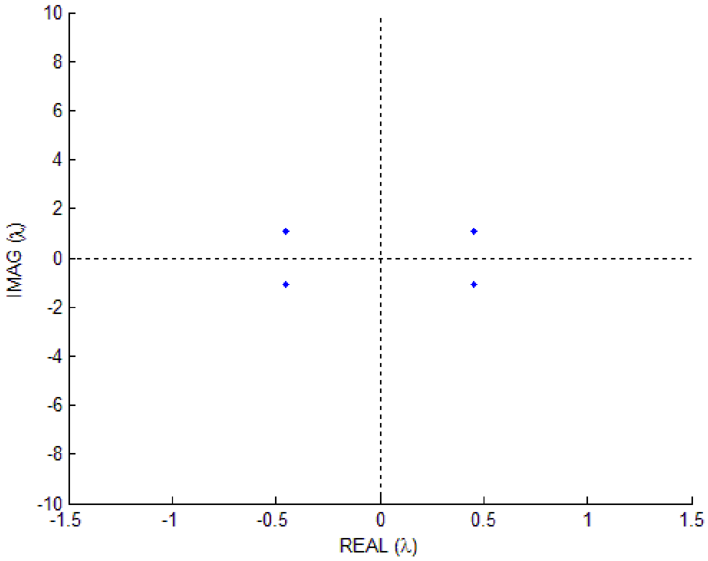


FIGURA 16 – AUTOVALORES $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda}$, COM PARTES REAL E IMAGINÁRIA

3.10.4 MATRIZES REAIS, Ĝ = G + C

Em decorrência do exposto anteriormente, existe a possibilidade de avaliação da instabilidade por meio da parte real destes autovalores, pois, vindo em pares complexo e conjugado, eles podem ser positivos e negativos. Se a matriz $\hat{G} = C + G$, sendo a matriz de amortecimento $C = C^T$ e a giroscópica $G^T = -G$, tem-se a base do modelo de rotor com amortecimento viscoso, que é representado na FIGURA 17.

$\underline{M, K, \hat{G} \in \mathbb{R}^n, \ M = M^T, \ K = K^T, \ G = -G^T \ e \ C = C^T}$

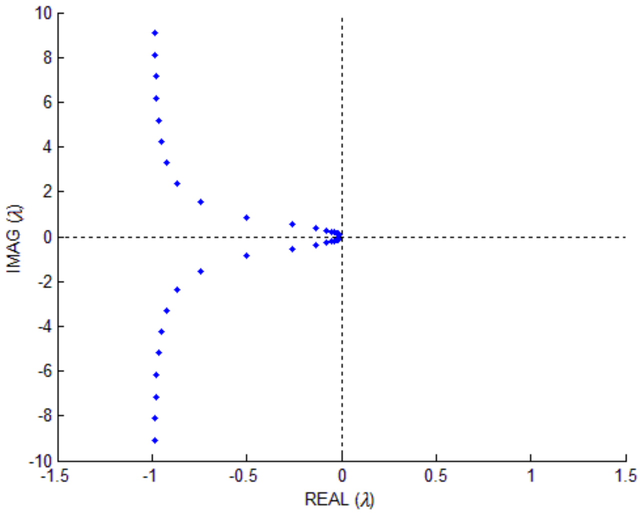


FIGURA 17 – AUTOVALORES $\lambda, \bar{\lambda}$, COM PARTES REAL E IMAGINÁRIA

Se, ao invés disso, fossem estimados os autovalores de um rotor com mancais hidrodinâmicos, as matrizes K e C seriam não simétricas, com $M = M^T$ e $G^T = -G$, e os resultados seriam os ilustrados na FIGURA 18.

$\underline{M, K, \hat{G} \in \mathbb{R}^n, \;\; C, K = \text{não simétricas}, \;\; G = -G^T \;\; e \;\; M = M^T}$

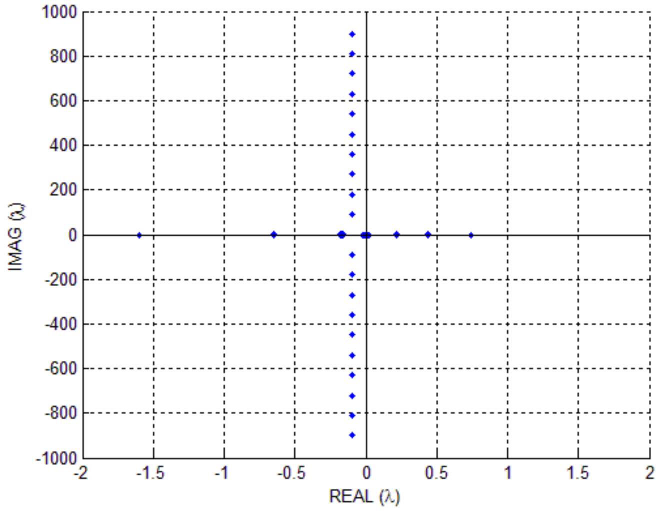


FIGURA 18 – AUTOVALORES $\lambda, \bar{\lambda}$, COM PARTES REAL E IMAGINÁRIA

Ou seja, o sistema se tornaria instável com facilidade. Os mancais hidrodinâmicos com sistema “tilting-pad”, mencionado na seção 2.2, fazem com que o rotor se torne isotrópico, o que deixa as matrizes K e C simétricas, aumentando a estabilidade.

3.10.5 MATRIZES COMPLEXAS, C = 0

Entretanto, quando alguma das matrizes é complexa – neste específico caso, $K \in C^{n \times n}$ – a característica do sistema é alterada e os autovalores continuam apresentando-se em pares, só que, neste caso, λ e $-\lambda$. Em um rotor com material viscoelástico nos suportes, a matriz $C = 0$, pois o amortecimento efetivo do sistema recai sobre o material viscoelástico, estando a dissipação de energia representada na parte imaginária do número complexo adicionado na matriz de rigidez (K).

Sendo o problema quadrático associado a eq. (3.107), tem-se

$$\left(\lambda^2 M + \lambda \hat{G} + K\right)\mathrm{v} = 0 \qquad (3.140)$$

onde v é um autovetor generalizado.

Supondo que $M, \hat{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M^T = M$, $\hat{G}^T = -\hat{G}$ e $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tal que $K^T = K$,

$$Q^T(\lambda) = \lambda^2 M^T + \lambda \hat{G}^T + K^T, \tag{3.141}$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda\left(-\hat{G}\right) + K\,, \tag{3.142}$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M - \lambda \hat{G} + K\,. \tag{3.143}$$

Como $(-\lambda)^2 = (\lambda)^2$, por substituição na eq. (3.143), tem-se

$$Q(-\lambda) = (-\lambda)^2 M + (-\lambda)\hat{G} + K \tag{3.144}$$

e, portanto,

$$Q(-\lambda) = \lambda^2 M - \lambda \hat{G} + K. \tag{3.145}$$

Isso mostra que se λ é autovalor do QEP, então $-\lambda$ também o será, pois,

$$\det Q(\lambda) = \det Q^T(\lambda) = \det Q(-\lambda) = 0. \tag{3.146}$$

Com isto, fica clara a presença de autovalores de pares opostos no sistema com matrizes complexas, que é o caso do modelo de sistema girante com mancais compostos por MVEs. Fica claro também que isto é uma característica do modelo matemático do sistema. A FIGURA 19 apresenta a representação gráfica desta contestação.

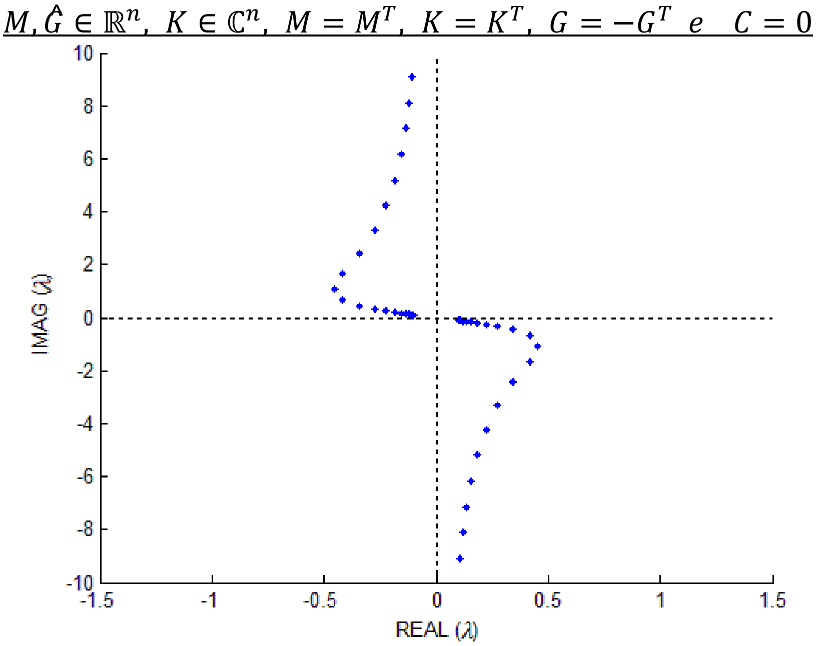


FIGURA 19 – AUTOVALORES $\lambda, -\lambda$, COM PARTES REAL E IMAGINÁRIA

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Foram realizadas simulações numéricas para cada um dos modelos de rotores apresentados anteriormente, quais sejam:

- Com amortecimento viscoso nos mancais: dois e quatro graus de liberdade, via método dos elementos finitos e modos assumidos;
- Com amortecimento viscoelástico nos mancais: método dos elementos finitos.

Nas simulações, podem ser comparados os diagramas de Campbell obtidos com os diferentes modelos e feito um estudo de instabilidade com a análise dos autovalores, tanto no diagrama de Campbell quanto no *plano de Laplace*.

No plano de Laplace, a instabilidade no sistema com amortecimento viscoso pode ser observada quando existem pontos no lado direito do eixo vertical, isto é, quando parte real do coeficiente de Laplace é positiva.

Os dados utilizados para a realização destas simulações foram os mesmos utilizados por Silvério (2015). As TABELAS 1-3 descrevem os dados utilizados nas simulações.

TABELA 1 – DADOS DO ROTOR UTILIZADOS EM TODAS AS SIMULAÇÕES

Dados do eixo			
Diâmetro	Comprimento	Densidade	Módulo de Young
$10mm$	$400mm$	$7742,67\, kg/m^3$	$2,07 \times 10^{11} Pa$
Dados do disco			
Diâmetro	Espessura	Densidade	Módulo de Young
$72mm$	$24mm$	$7742,67\, kg/m^3$	$2,07 \times 10^{11} Pa$

Os valores da matriz de rigidez para os modelos com dois e quatro graus de liberdade foram obtidos pela teoria da flexibilidade de vigas conforme apresentado por Genta (2005), onde foi considerado que o eixo do rotor se encontra sobre dois mancais infinitamente rígidos. Nos modelos calculados para amortecimento viscoso por elementos finitos e modos assumidos, os valores de rigidez e amortecimento dos mancais foram definidos teoricamente, conforme exemplos apresentados por Lalanne (1999) e Lalanne e Ferraris (1990) e descritos na TABELA 2.

TABELA 2 – DADOS DE AMORTECIMENTO E RIGIDEZ PARA OS MODELOS DE M.G.L. VISCOSO E M.A.

Dados dos mancais – Amortecimento Viscoso (mancais simétricos)	
Rigidez radial ($k_{xx} = k_{yy}$)	Amortecimento radial ($c_{xx} = c_{yy}$)
$7.0 \times 10^7\ N/m$	$100N\ s/m$

O modelo físico utilizado nas simulações foi um rotor de Jeffcott, com uma massa central e dois mancais nas extremidades, conforme apresentado na FIGURA 20.

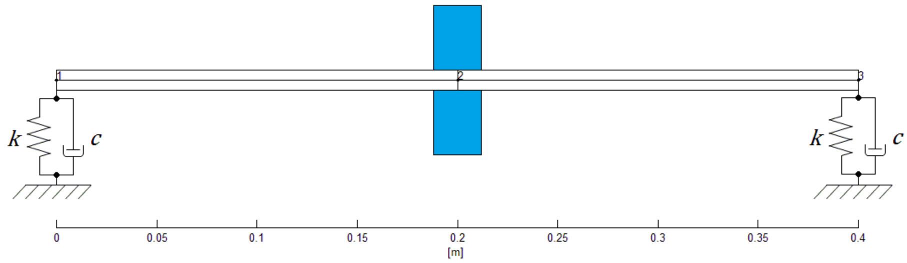


FIGURA 20 – MODELO TEÓRICO DO ROTOR EXPERIMENTAL

Para o modelo de MEF com materiais viscoelásticos, os parâmetros do material viscoelástico além da forma como suas propriedades são inseridas na matriz de rigidez, estão descritos em Silvério (2015), vide TABELA 3. Resumidamente, expõe-se que os efeitos combinados de temperatura e frequência sobre o material viscoelástico podem ser representados, na faixa linear, pela seguinte equação do módulo de elasticidade complexo:

$$E_c(\Omega, T) = \frac{E_0 + E_\infty b_1 [i\Omega\alpha_T(T)]^\beta}{1 + b_1\left(i\Omega\alpha_T(T)\right)^\beta}, \tag{4.1}$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade em frequências baixas, E_∞ o módulo de elasticidade para frequências altas, b_1 é uma constante adimensional, correspondente ao tempo de relaxação do material e β é a ordem da derivada fracionária. O parâmetro α_T é denominado "fator de deslocamento" e permite predizer o comportamento do material a diferentes temperaturas, a partir de uma temperatura de referência. Em Ferry (1980), este parâmetro é modelado através da seguinte equação:

$$\log_{10} \alpha_T(T) = \frac{-\theta_1(T - T_{ref})}{\theta_2 + (T - T_{ref})}, \tag{4.2}$$

onde θ_1 e θ_2 são parâmetros característicos do material, T_{ref} é a temperatura de referência e T é a temperatura de trabalho do material (arbitrária).

Portanto, a rigidez complexa correspondente ao suporte composto com MVEs, e que é incluída na matriz de rigidez global, é

$$\overline{K}_{MVEs} = E_c(\Omega, T) \times FG \times FF, \tag{4.3}$$

onde FG é o fator geométrico, que relaciona a área da seção transversal do MVEs pelo seu comprimento e FF é o fator de forma do material, como definido em Nashif et al. (1985), ou em Silvério (2015), no qual o produto entre FG e FF é obtido via MEF.

O MVE empregado na simulação foi o C-1002, fornecido pela empresa E-A-R Specialty Composites (que pertence à 3M). Os parâmetros apresentados na TABELA 3 foram retirados pelo nomograma fornecido pelo fabricante.

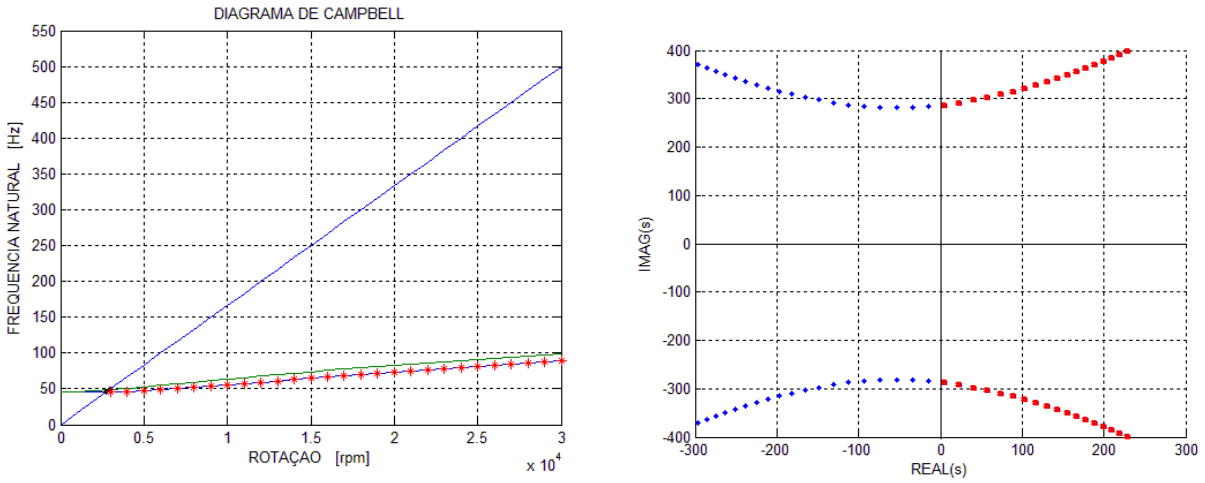
TABELA 3 – PARÂMETROS DO MATERIAL VISCOELÁSTICO

Material: C-1002							
E_0	E_∞	β	b_1	θ_1	θ_2	T_{ref}	T
$1{,}967 \times 10^6$	$2{,}582 \times 10^9$	$0{,}545$	$0{,}0314$	$24{,}207$	$249{,}808$	$286{,}325\ K$	$306{,}325\ K$

4.1 MODELO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE (AMORTECIMENTO VISCOSO)

Neste modelo, não existem graus de liberdade de rotação, e, consequentemente, efeito giroscópico (eq. 3.58). Para efeito de análise da alteração das propriedades das matrizes, e consequentemente nas frequências naturais do sistema a cada rotação, unicamente nesta etapa foi considerado o efeito circulatório, que foi definido arbitrariamente devido à dificuldade de se obter valores reais para este tipo de amortecimento. Com isto, foi utilizado para fins de cálculo o amortecimento circulatório (C_r) de $100\ N\,s/m$.

O modelo utilizado para o cálculo de massa e rigidez é o mesmo apresentado pela FIGURA 20. Assim sendo, foram construídos os diagramas de Campbell e o gráfico no domínio de Laplace (s), apresentando os autovalores ($s = -\lambda$) do sistema conforme mostrado na FIGURA 21.



(a) (b)

FIGURA 21 – (a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (2GL); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)

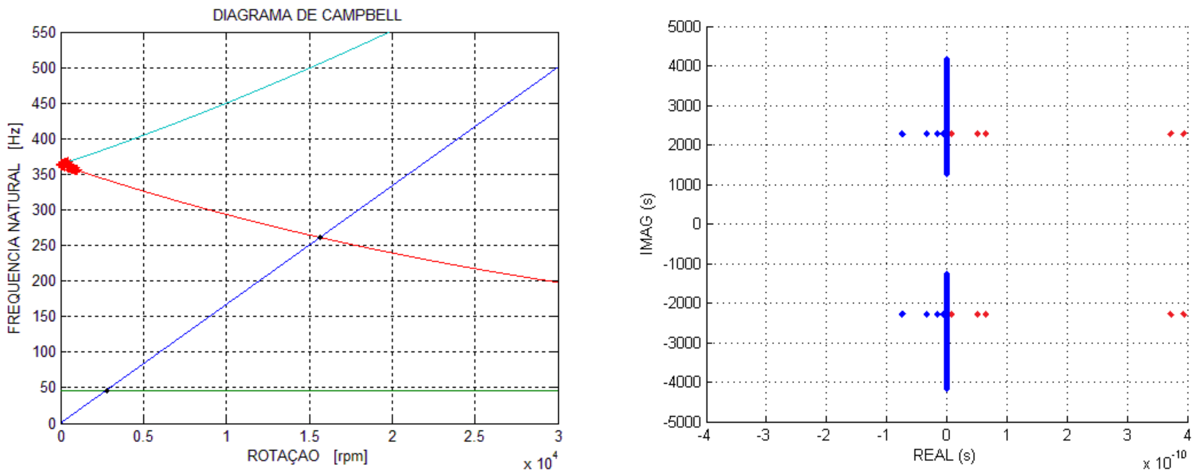
Percebe-se na FIGURA 21a, que o sistema apresenta instabilidade (pontos vermelhos) em rotações com o fenômeno backward, logo após a rotação crítica. Observando a FIGURA 21b, nota-se também a presença de autovalores instáveis, pois os mesmos estão presentes à direita do eixo imaginário, isto é, quando a parte real dos seus autovalores se torna positiva.

Recorrendo a eq. 3.59, observa-se que a instabilidade pode ser causada devido à mudança de propriedade da matriz de rigidez global ($K + C_r$), que conforme o aumento do efeito de circulação desfaz sua simetria inicial.

4.2 MODELO COM QUATRO GRAUS DE LIBERDADE (AMORTECIMENTO VISCOSO)

No modelo com quatro graus de liberdade o efeito circulatório é negligenciado, porém, neste caso, aparece o efeito giroscópico. O efeito da matriz giroscópica é semelhante ao da matriz circulatória, porém, sua ação ocorre na matriz de amortecimento do sistema. Conforme a velocidade de rotação aumenta o efeito giroscópico também aumenta, mudando as propriedades da matriz (vide eq. (3.73)).

Nesta modelagem, existe, além dos dados apresentados na TABELA 02, a adição de propriedades inerciais presentes na eq. (3.68), a saber, a inércia translacional (J_t), a inércia polar (J_p), e o momento de inércia de área (I), que é, considerando o eixo do rotor como um cilindro uniforme, dado por $\pi {r_e}^4/4$, onde r_e é o raio da seção transversal do eixo do rotor. Partindo das eq. (3.97) e (3.99), e calculando os autovalores do sistema, forma levantados os diagramas de Campbell e da disposição dos autovalores, como ilustrado na FIGURA 22.



(a) (b)

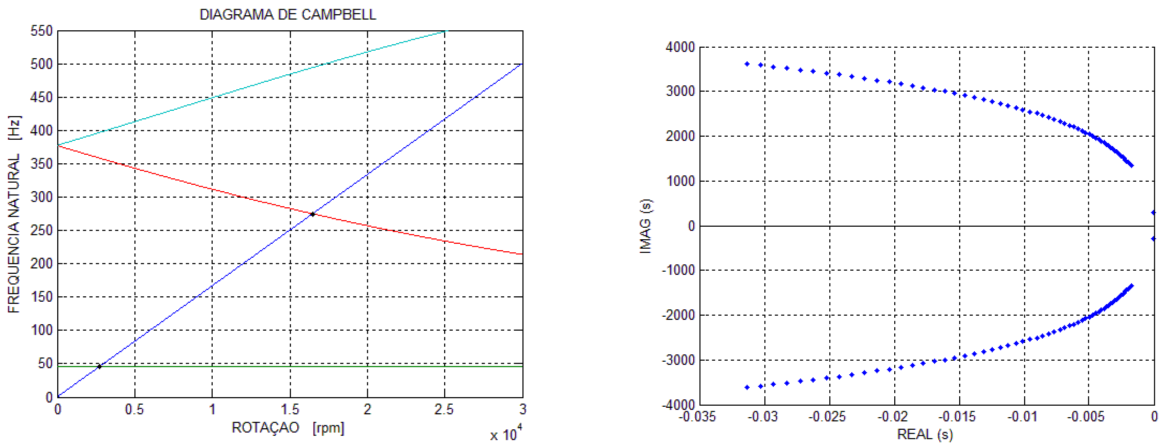
FIGURA 22 – (a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (4GL); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)

Observando o diagrama de Campbell (FIGURA 22a) nota-se os quatro graus de liberdade, representado pelas linhas coloridas, com exceção da azul, que é utilizada para determinar as frequências críticas por desbalanceamento ($\Omega_R = \Omega_j$). Os dois primeiros são idênticos, portanto são linhas sobrepostas (verde), que ocorrem devido a não haver influência do efeito giroscópico sobre eles por causa da posição do disco – no centro do eixo – e da simetria das propriedades dos mancais. Nos outros, existe uma distinção das linhas de frequências naturais dos modos, causadas pelo efeito giroscópico. A instabilidade que aparece no diagrama de Campbell é confirmada pela presença de pontos no lado direto do gráfico de Laplace (FIGURA 24b).

4.3 MODELO POR MODOS ASSUMIDOS (AMORTECIMENTO VISCOSO)

O método para a obtenção do diagrama de Campbell e dos autovalores do sistema foi explicado na seção 3.8. Foram escolhidos para a análise deste modelo

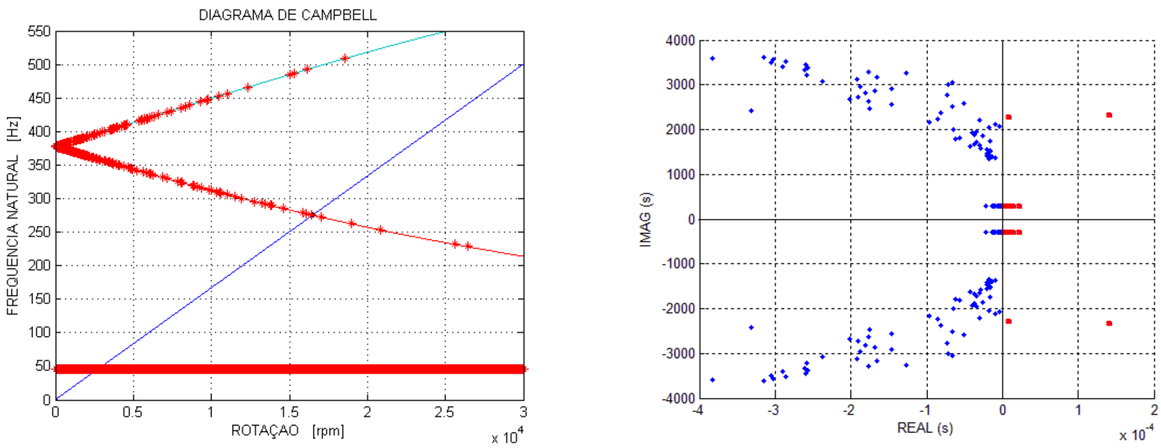
15 modos assumidos. As propriedades do rotor pertinentes ao cálculo dos modos assumidos foram retiradas das TABELAS 1 e 2. Neste modelo consideram-se os mancais como flexíveis, isto é, com valores arbitrários para a rigidez e amortecimento, ao contrário dos anteriores, onde a rigidez dos mancais era teoricamente infinita e o amortecimento era de todo o sistema. O diagrama de Campbell e os autovalores no plano de Laplace são apresentados pela FIGURA 23.



(a) (b)

FIGURA 23 – (a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (M.A.); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)

Com isto, o sistema é estável. Porém, se a rigidez presente nos mancais for aumentada para $7{,}0 \times 10^8\ N/m$, o sistema se instabiliza, que pode ter sido causado por algum erro no modelo, já que na prática, este aumento não significaria uma condição de instabilidade. O efeito pode ser verificado nas FIGURAS 24a e 24b.



(a) (b)

FIGURA 24 – (a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (M.A.); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)

4.4 MODELO POR ELEMENTOS FINITOS

4.4.1 AMORTECIMENTO VISCOSO

O modelo do rotor com múltiplos graus de liberdade foi obtido utilizando o método dos elementos finitos, conforme explicitado na seção 3.7, e o código em Matlab® Rotordin (vide FIGURA 25), que vem sendo desenvolvido pelo grupo GVIBS há um longo período.

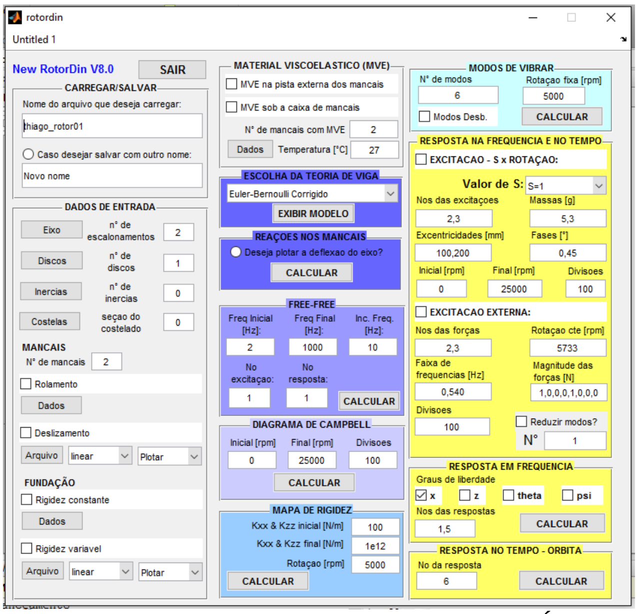
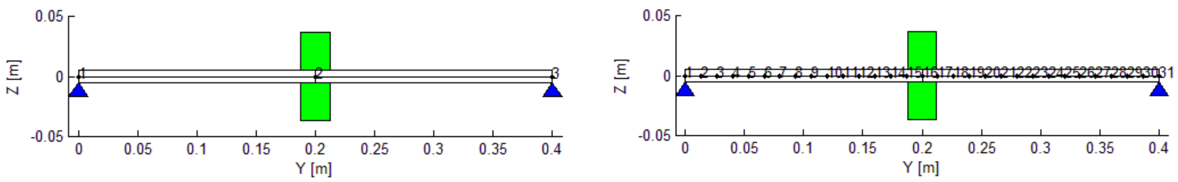


FIGURA 25 – ROTORDIN (INTERFACE GRÁFICA)

Para este caso, foram analisados dois rotores, para efeito de comparação: um com somente dois elementos, visando sua comparação com os modelos apresentados acima, e um com 30 elementos, a fim de comparação com os resultados obtidos pelo modelo por modos assumidos. Estes modelos são ilustrados pela FIGURA 26.



(a) (b)

FIGURA 26 – (a) MODELO COM 2 ELEMENTOS (b) MODELO COM 30 ELEMENTOS

Para ambos, as propriedades consideradas são expostas na FIGURA 27.

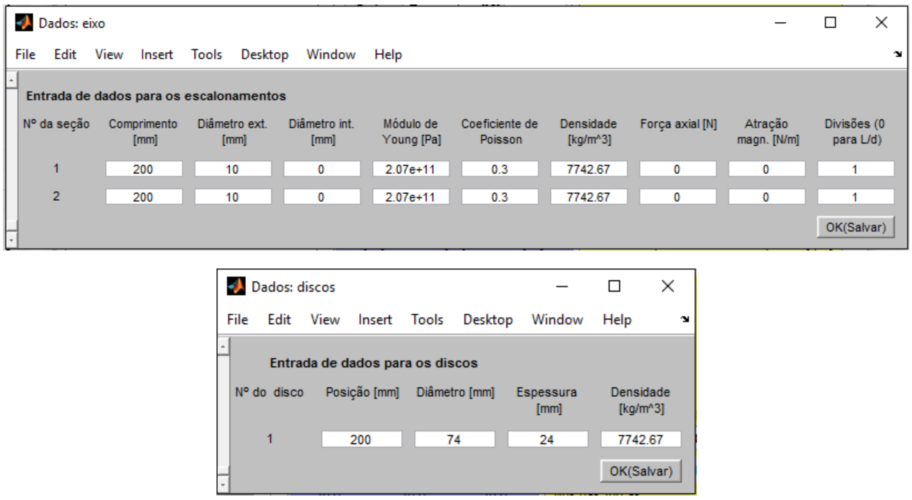


FIGURA 27 – DADOS DO EIXO E DISCO, UTILIZADOS NO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

A única mudança ocorre no número de discretização de elementos do eixo, como destacado na FIGURA 28.

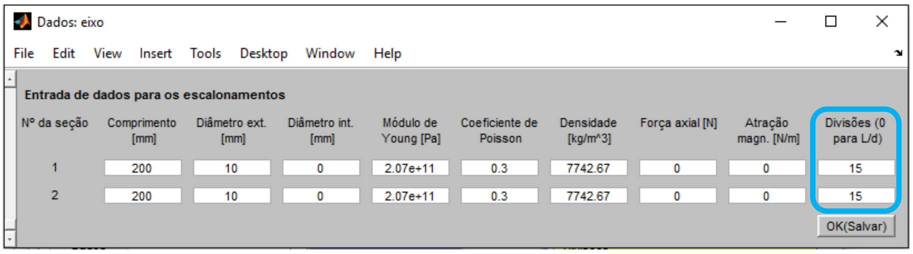
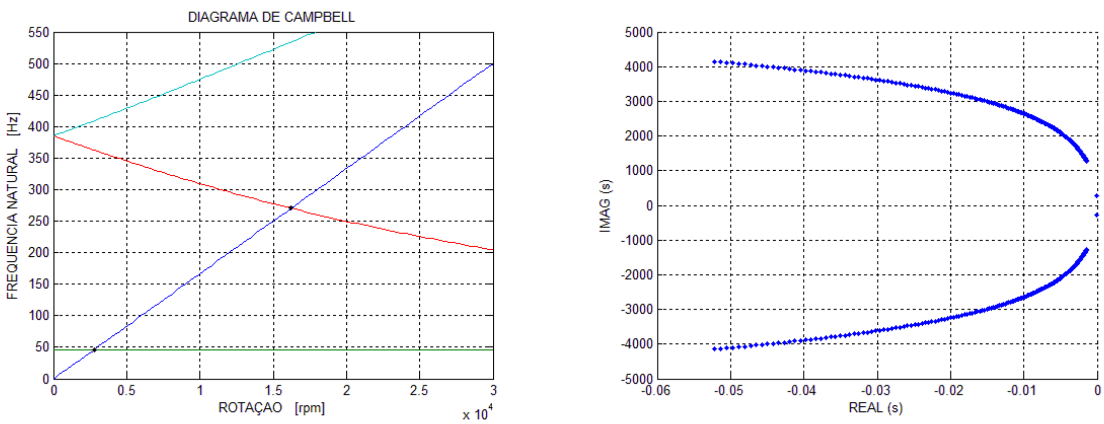


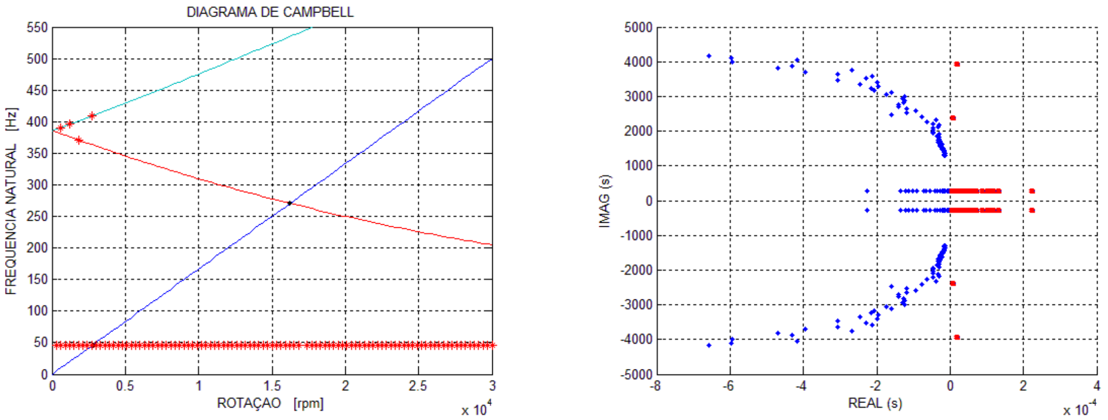
FIGURA 28 – DISCRETIZAÇÃO DO EIXO NO ROTORDIN

Com isto, apresentam-se os resultados contidos nas FIGURAS 29 e 30.



(a) (b)

FIGURA 29 – (a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (MGL – 2 ELEMENTOS); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)



(a) (b)

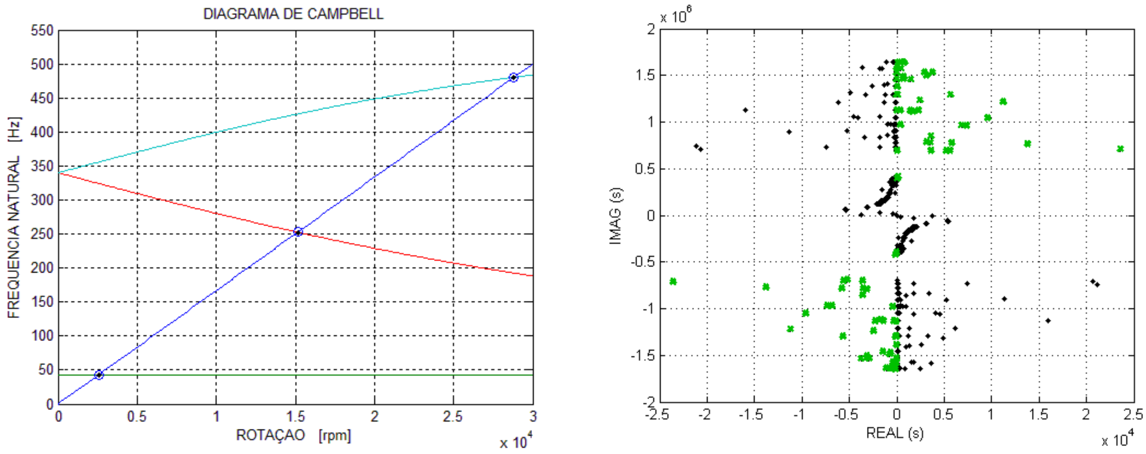
FIGURA 30 – (a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (MGL – 30 ELEMENTOS); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)

Assim como no modelo realizado por modos assumidos, neste caso, se o valor de rigidez for aumentado em 10 vezes, nota-se a presença de instabilidade no sistema, que aparentemente possui causas numéricas, tal qual a simulação do modelo por modos assumidos.

4.4.2 AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO

O modelo com a inclusão de material viscoelástico nos mancais segue o que foi apresentado na seção 3.7.2, e as simulações seguem o que foi apresentado acima para múltiplos graus de liberdade, com discretização do eixo em 30 elementos.

As propriedades do material viscoelástico estão descritas na TABELA 03. A construção do modelo pelo MEF com MVE foi também realizada no software *Rotordin*, de onde foi retirado o diagrama de Campbell, além da apresentação dos autovalores, ambos ilustrados pela FIGURA 31.



(a) (b)

FIGURA 31 – (a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (MGL – MVE); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)

A FIGURA 31b apresenta os autovalores para um sistema mecânico com material viscoelástico, isto é, com a matriz de rigidez ($\bar{K}$) complexa. O resultado é semelhante ao apresentado na FIGURA 19, e corrobora o que foi descrito nos trabalhos de Ferreira (2004) e Silvério (2015), onde é verificada a duplicidade de autovalores, na forma λ e $-\lambda$. Com isto, a análise de instabilidade feita somente pelo sinal da parte real dos autovalores torna-se inadequada.

Assim, este trabalho propõe uma metodologia para estabelecer a instabilidade de um sistema girante composto com MVE, que é apresentada no capítulo 5.

4.5 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DE ROTAÇÕES CRÍTICAS AO DESBALANCEAMENTO PELOS DIFERENTES MODELOS MATEMÁTICOS

Comparando os diversos modelos matemáticos, a TABELA 4 apresenta os resultados de rotações críticas (em RPM) do rotor Jeffcott.

TABELA 4 – COMPARAÇÃO DE RESULTADOS ENTRE OS MODELOS DE ROTOR (EM RPM)

	Modelo Matemático				
Rotações críticas	2 G.L.	4 G.L.	M.A.	M.E.F. 2 Elementos	M.E.F. 30 Elementos
1ª	2736	2769	2760	2772	2772
2ª	-	15675	16497	16221	16131

Observando a TABELA 4, nota-se pouca diferença entre os diversos métodos para a determinação das rotações críticas do rotor. Isso pode ser devido ao modelo simplificado do rotor (Jeffcott). Também, neste caso, consideram-se somente as rotações críticas em *forward*, pois como o rotor têm mancais com as propriedades iguais (rotor simétrico), as rotações críticas em *backward*, devido a uma excitação puramente de desbalanceamento, não são excitadas. A maior variação para a 1ª rotação crítica se dá entre os modelos com dois graus de liberdade e o de múltiplos graus de liberdade (com 2 e 30 elementos), com uma variação de 1,29%. Para a 2ª rotação crítica, esta máxima diferença ocorre entre os modelos com 4 graus de liberdade e o realizado por modos assumidos, com uma diferença de 4,98 %. A FIGURA 32 apresenta os diagramas de Campbell sobrepostos, para cada modelo.

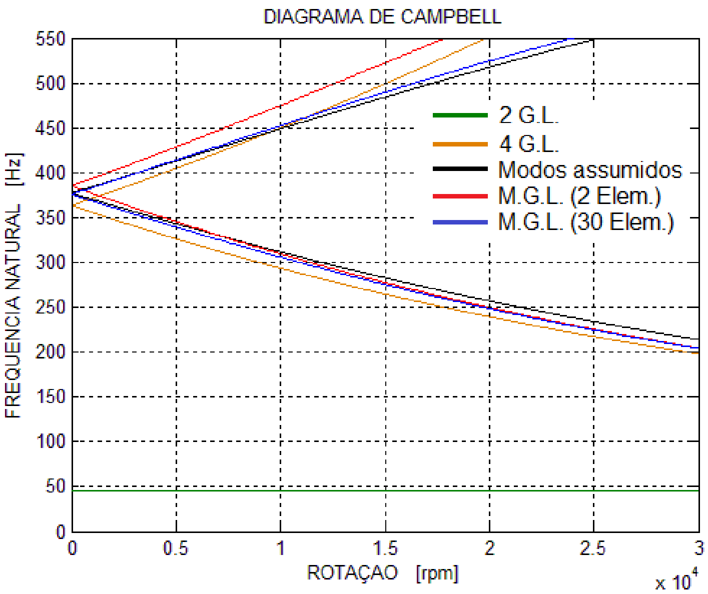


FIGURA 32 – DIAGRAMAS DE CAMPBELL DOS DIVERSOS MODELOS UTILIZADOS

Percebe-se, na FIGURA 32, que apesar de haver uma diferença ligeiramente maior nas rotações críticas, os modelos que mais se aproximam, levando em consideração a semelhança gráfica, são os de MGL com 30 elementos e o feito por modos assumidos. Isto se deve a natureza contínua da teoria dos modos assumidos, que a aproxima do método dos elementos finitos, principalmente quando a discretização do problema é mais alta. Também se nota graficamente que não houve alteração significativa de valores na determinação das duas primeiras rotações críticas. Portanto, as curvas dos modelos estão praticamente sobrepostas.

5 PROPOSTA DE METODOLOGIA PARA A DETERMINAÇÃO DA INSTABILIDADE

Conforme observado nas seções 3.7.2, 3.10.5 e 4.4.2, onde são realizadas análises sobre os autovalores de um sistema girante composto com material viscoelástico, realizar o estudo da instabilidade somente observando a parte real dos autovalores torna-se ineficaz, uma vez que, nestes casos, os autovalores se apresentam em pares, da forma λ e $-\lambda$. Ao analisar apenas a parte real do autovalor ou do seu equivalente s de Laplace, fica difícil determinar o momento no qual o sistema se torna instável, ou dito de outra forma, onde os autovalores trocam a sua parte real de positiva para negativa ou vice-versa.

Com isto, após o desenvolvimento apresentado durante este estudo, a atenção para esta análise voltou-se para um prévio estudo das equações no domínio do tempo, para determinar, principalmente, as condições iniciais do sistema e sua instabilidade, o que pode ser atrelado ao que foi observado na seção 3.3.

A proposta apresentada para a determinação da instabilidade do sistema com material viscoelástico é a observação da trajetória dos autovalores no domínio de Laplace (s). A instabilidade do sistema será determinada quando, após o sistema iniciar sua trajetória numa posição inicial de equilíbrio, a parte real de λ cruzar o eixo imaginário conforme o incremento da velocidade de rotação, conforme ilustrado na FIGURA 33.

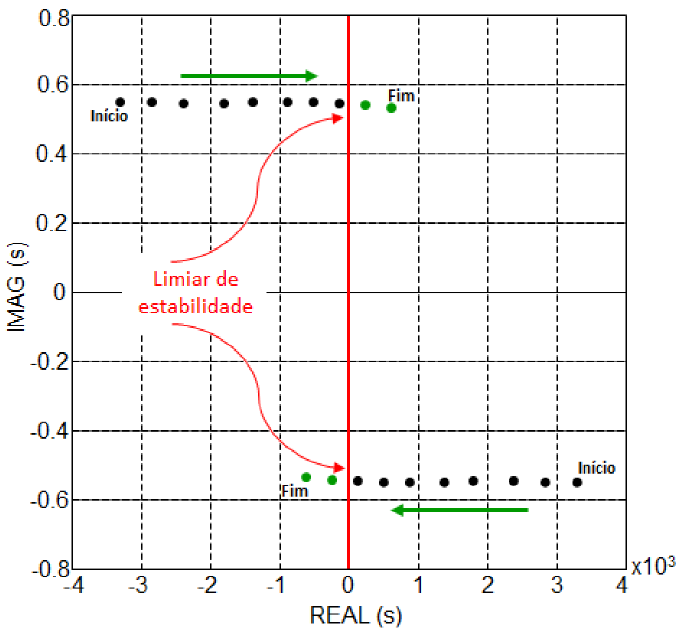


FIGURA 33 – ACOMPANHAMENTO DA TRAJETÓRIA DE AUTOVALORES

Esta análise é pertinente, pois os pares de autovalores do sistema, apesar de iniciarem em lados opostos do gráfico – considerando o eixo das ordenadas – tendem a ir se aproximando desse eixo, caso o sistema tenda a ser instável em algum momento.

5.1 MODELO HISTERÉTICO

Buscando um modelo equivalente do modelo viscoelástico, ou seja, com a matriz de rigidez complexa e matriz de amortecimento nula, foi estabelecido um modelo simplificado com amortecimento histerético. Devido à dificuldade em encontrar as soluções do sistema girante no domínio do tempo, que no caso do material viscoelástico é calculada por meio de derivadas fracionárias, optou-se por utilizar o modelo histerético equivalente, que é atualizado para cada rotação. A inclusão das derivadas fracionárias no sistema de equações no domínio do tempo não é o escopo deste trabalho.

Para a análise do sistema com amortecimento histerético, foi considerado como fator de perda (η) do material viscoelástico o valor de $1{,}0169$, obtido de acordo com a eq. (3.119).

A equação de movimento, no domínio da frequência, considerando o amortecimento histerético, é dada por

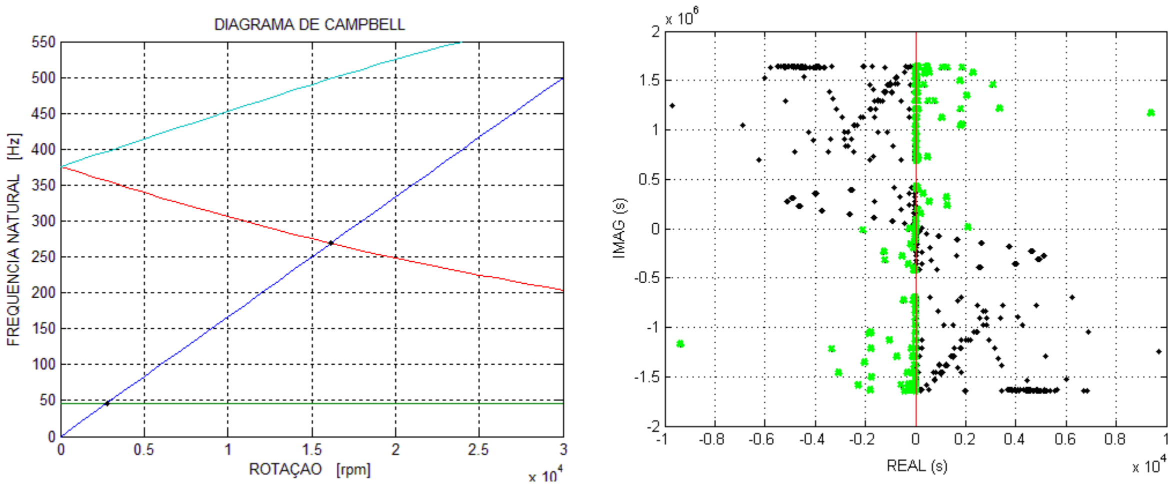
$$[\Omega^2 M + i\Omega G + K(1 + i\eta)]Q(\Omega) = F(\Omega). \tag{5.1}$$

A eq. (5.1) também apresenta sua solução no espaço de estado, de forma similar a eq. (3.109). A formulação correspondente é

$$i\Omega \begin{bmatrix} G(\Omega_R) & \vdots & M \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix} Y(\Omega) + \begin{bmatrix} K(1 + i\eta) & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix} Y(\Omega) = \begin{Bmatrix} F(\Omega) \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5.2}$$

que gera um problema de autovalores semelhante a eq. (4.113). As matrizes utilizadas foram retiradas do modelo de MGL com 30 elementos. Buscando obter um resultado similar ao apresentado na seção 4.4.2, os valores complexos adicionados à matriz de rigidez foram alocados nos nós, onde existe a presença dos mancais com MVEs, conforme visto na FIGURA 8.

Resolvendo este sistema conforme exposto nas seções 3.7.2 e 3.9.2, tem-se os resultados ilustrados na FIGURA 34.



(a) (b)

FIGURA 34 – MODELO HISTERÉTICO:
(a) DIAGRAMA DE CAMPBELL (4GL); (b) AUTOVALORES NO PLANO LAPLACIANO (s)

A princípio, como o sistema apresenta autovalores no semiplano direito no plano laplaciano, o sistema poderia ser considerado instável, como também ocorre nas seções 3.10.5 e 4.4.2, onde os sistemas apresentam a matriz de rigidez complexa. Entretanto, é improvável que um rotor estático, ou em baixas rotações seja instável. Para demonstrar teoricamente esta estabilidade inicial, o sistema é então resolvido no domínio do tempo em rotação quase nula, que seria sua posição de equilíbrio inicial.

5.2 ESTABILIDADE NA POSIÇÃO INICIAL DO SISTEMA

Para a resolução proposta acima, foram retiradas as matrizes globais do modelo viscoelástico de MGL com 30 elementos. O sistema mecânico é representado no domínio do tempo, conforme descrito por Inman (2006), o que, no presente caso se dá por

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

onde I representa a matriz identidade.

Dessa forma, foi aplicada, em um código em Matlab®, uma integração numérica pelo método de *Runge-Kutta* (função *ode45*) na eq. (5.3), para a obtenção das variáveis de resposta do sistema, q e $\dot{q}$.

Porém, como foi abordada anteriormente, a condição complexa da matriz de rigidez ocasiona problemas. Para facilitar sua aplicação, considera-se que o amortecimento utilizado é histerético, similar ao apresentado por Newmark (1962). Partindo da equação geral da segunda lei de Newton para um sistema girante, qual seja,

$$m\ddot{x}(t) + (c + g)\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)\cos\Omega, \tag{5.4}$$

tem-se que esta equação, considerando o amortecimento como histerético, se torna, no domínio do tempo,

$$m\ddot{x}(t) + \left(\frac{\eta}{\Omega}k + g\right)\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)\cos\Omega, \tag{5.5}$$

isto é, o coeficiente de amortecimento se torna

$$c = \frac{\eta}{\Omega}k = h\,, \tag{5.6}$$

que é inversamente proporcional à frequência Ω e diretamente proporcional à rigidez k, sendo h uma constante adimensional, determinada pelas características do material que adiciona amortecimento ao sistema. Para questões de cálculo, o valor de η é obtido de acordo com a eq. (3.119), que resulta em $\eta = 1{,}0169$.

Com isto, a eq. 5.1 transforma-se em

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}(G + H) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

onde, conforme a eq. (5.6),

$$H = \frac{\eta}{\Omega}K. \tag{5.8}$$

Para um rotor estático, neste caso, com rotação $\Omega \approx 0$ (pois se fosse igual a 0 invalidaria eq. 5.8), ou seja, em sua condição inicial (ponto vermelho), obtém-se o gráfico que indica a resposta do sistema, se afastando ou se aproximando da posição de equilíbrio (posição azul), conforme a FIGURA 35.

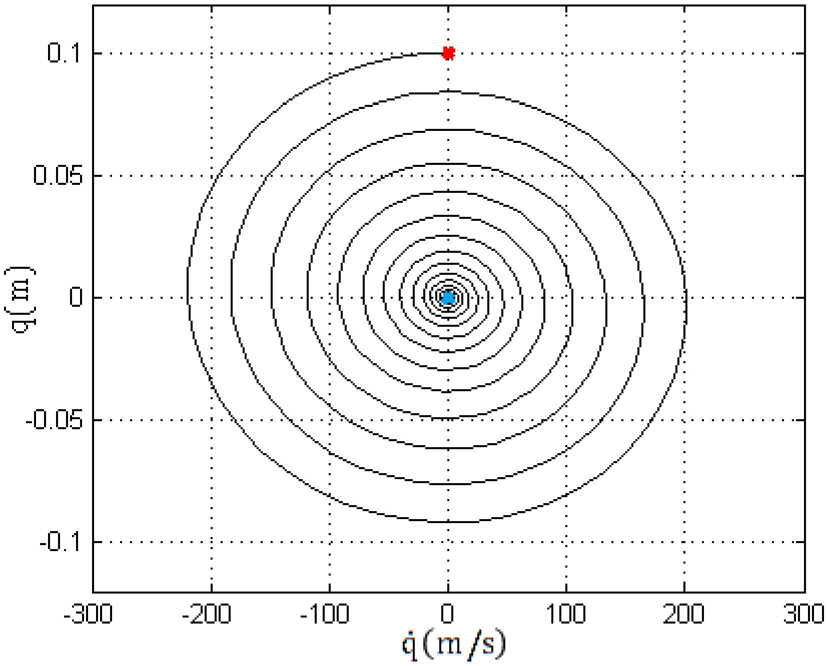


FIGURA 35 – RESPOSTA DE $\dot{q}(t) \times q(t)$ NO DOMÍNIO DO TEMPO

Como a condição inicial x_0 pré-determinada (iniciou em 0,1), percebe-se claramente que o sistema é estável, pois à medida que o tempo avança, os deslocamentos e velocidades do sistema diminuem, encaminhando as soluções do sistema a condição de equilíbrio.

Portanto, é demonstrado que o sistema girante com amortecimento histerético, em sua condição inicial, pode ser considerado estável, ao contrário da suposição inicial percebida somente avaliando os autovalores do mesmo sistema no domínio da frequência.

5.3 ACOMPANHAMENTO DA TRAJETÓRIA DOS AUTOVALORES E DE SUA RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Considerando o caso dos autovalores obtidos na seção 4.4.2 para material viscoelástico, a proposta de metodologia para o estudo da instabilidade de rotores compostos com material viscoelástico é acompanhar a trajetória dos autovalores, como visto na FIGURA 33. Conforme apresentado na FIGURA 36, partindo de um ponto inicial estável (circundados em vermelho), como mostrado na seção 5.2, não importando em qual semiplano o autovalor está, quando este cruzar o eixo imaginário do plano laplaciano (em vermelho), o sistema se torna instável (destaque em verde).

Na FIGURA 36, são apresentados vários autovalores complexos e os seus correspondentes negativos para diferentes rotações. Como pode ser observado, alguns autovalores partem dos quadrantes 2 e 4, e, conforme aumenta a rotação, tendem aos quadrantes 1 e 3, respectivamente.

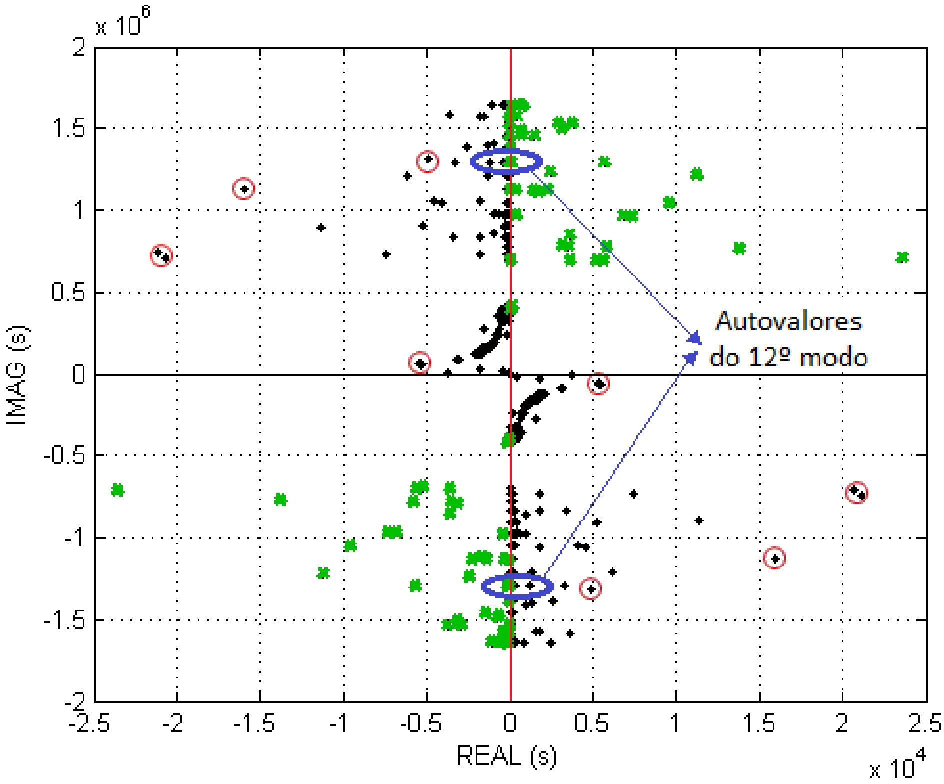
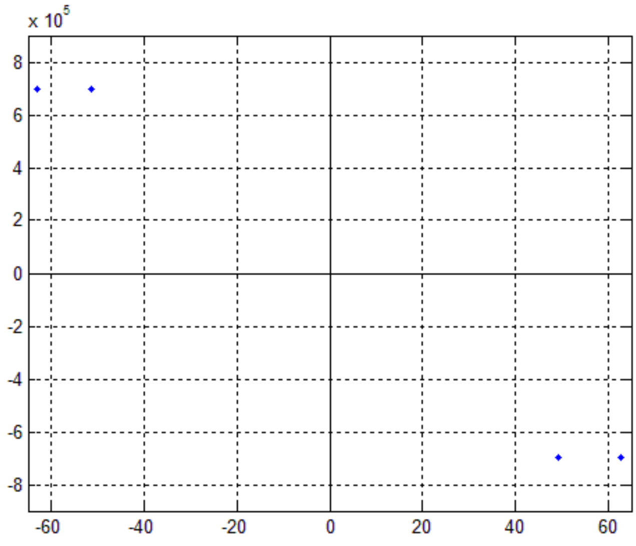


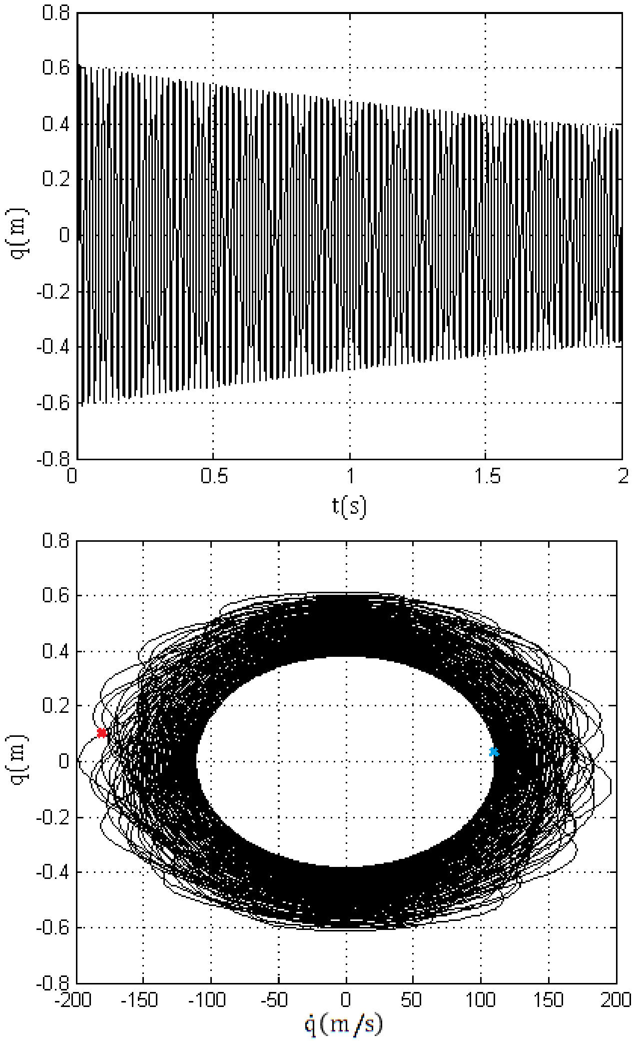
FIGURA 36 – VISUALIZAÇÃO DE INSTABILIDADE (PONTOS VERDES)

Buscando uma análise qualitativa, os autovalores calculados no domínio da frequência, conforme 3.7.2, são acompanhados em determinadas velocidades de rotação e sua respectiva resposta no domínio do tempo é calculada. Para facilitar a visualização nas figuras subsequentes, foi realizado o acompanhamento da trajetória do conjunto de autovalores correspondentes ao 12º modo de vibrar, pois sabe-se que o mesmo se torna instável a uma rotação de aproximadamente 25000rpm (vide FIGURA 36). As respostas do sistema no domínio do tempo, isto é, os gráficos $q \times t$ e $q \times \dot{q}$, foram obtidas conforme a seção 5.2. Porém, neste caso, houve a variação das velocidades de rotação, ou seja, para cada rotação, foi resolvida a eq. (5.7) obtendo, assim, os deslocamentos e velocidades generalizadas para cada modo de vibrar.

As velocidades de rotação consideradas foram as seguintes: 5000rpm (523.59 rad/s), 10000rpm (1047.19 rad/s), 15000rpm (1570.79 rad/s), 20000rpm (2094.39 rad/s), 25000rpm (2617.99 rad/s) e 30000rpm (3141.59 rad/s). Os resultados correspondentes são ilustrados nas FIGURAS 37 a 42.

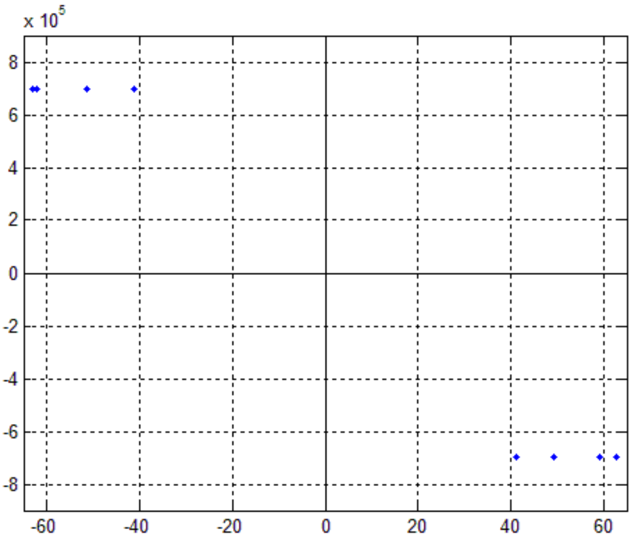


(A)

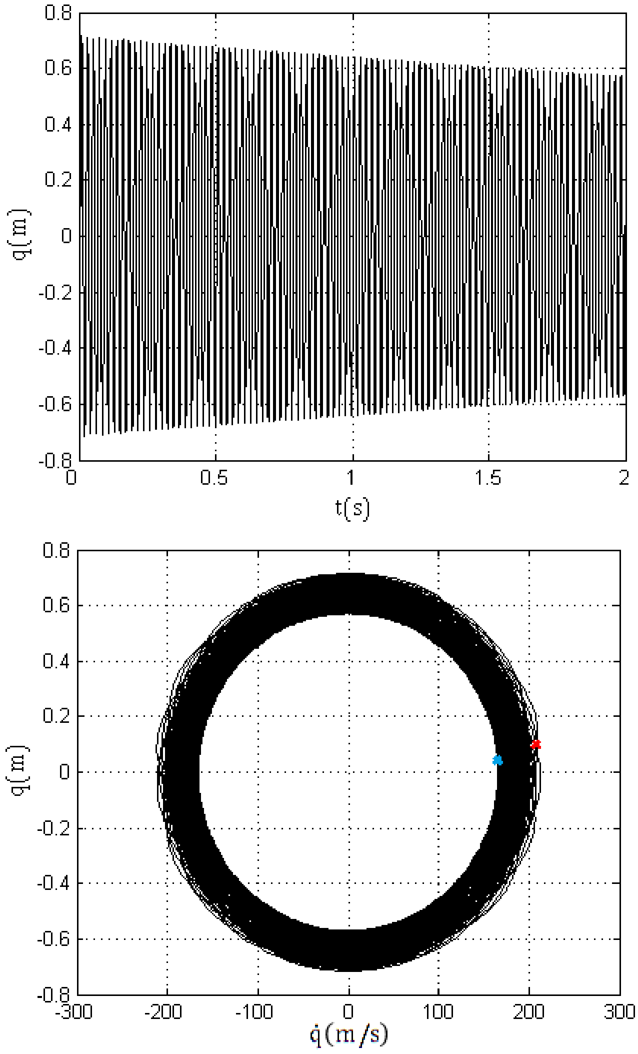


(B)

FIGURA 37 – 5000 RPM: (A) AUTOVALOR NO PLANO s; (B) RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

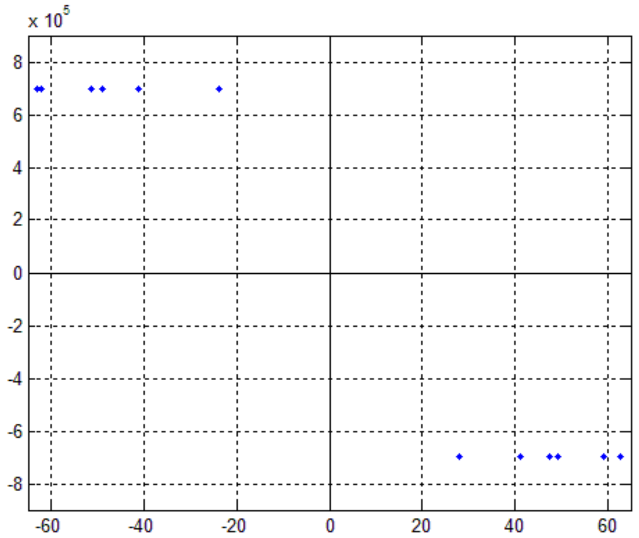


(A)

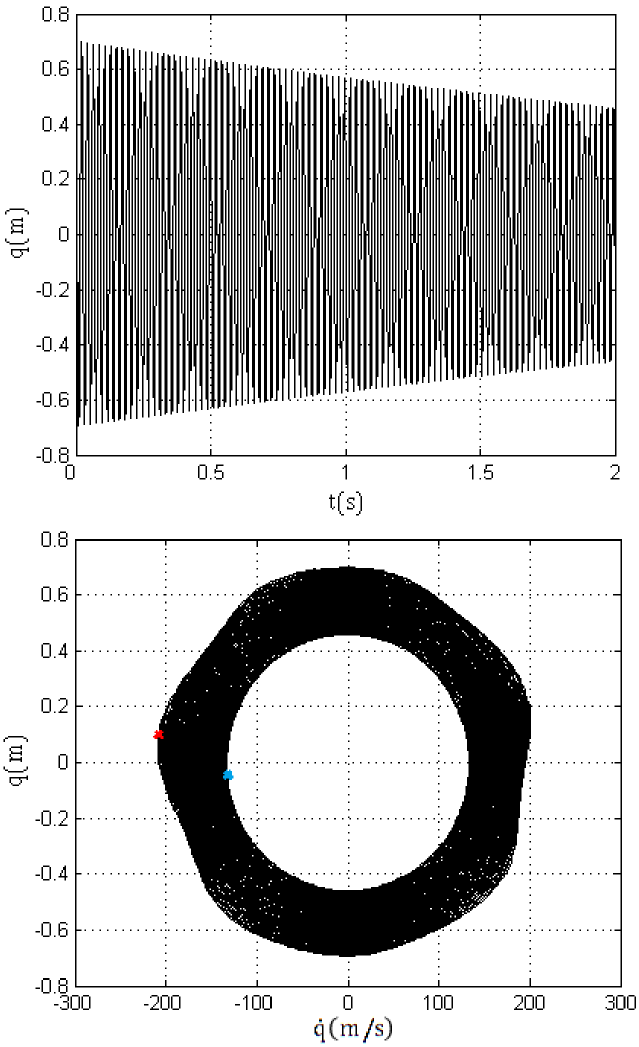


(B)

FIGURA 38 – 10000 RPM: (A) AUTOVALOR NO PLANO s; (B) RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

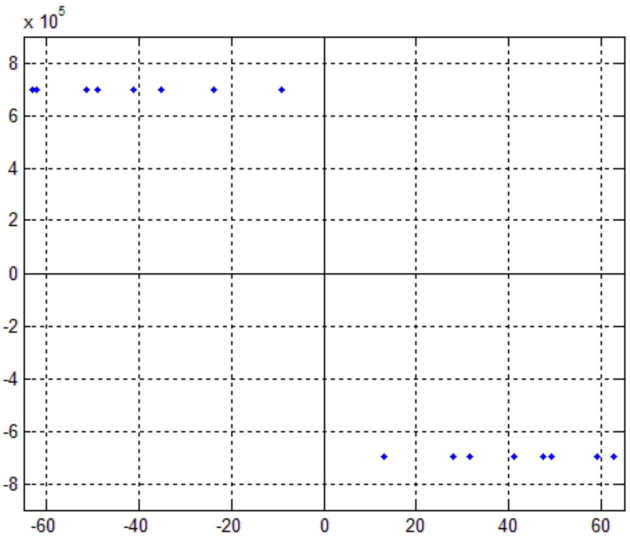


(A)

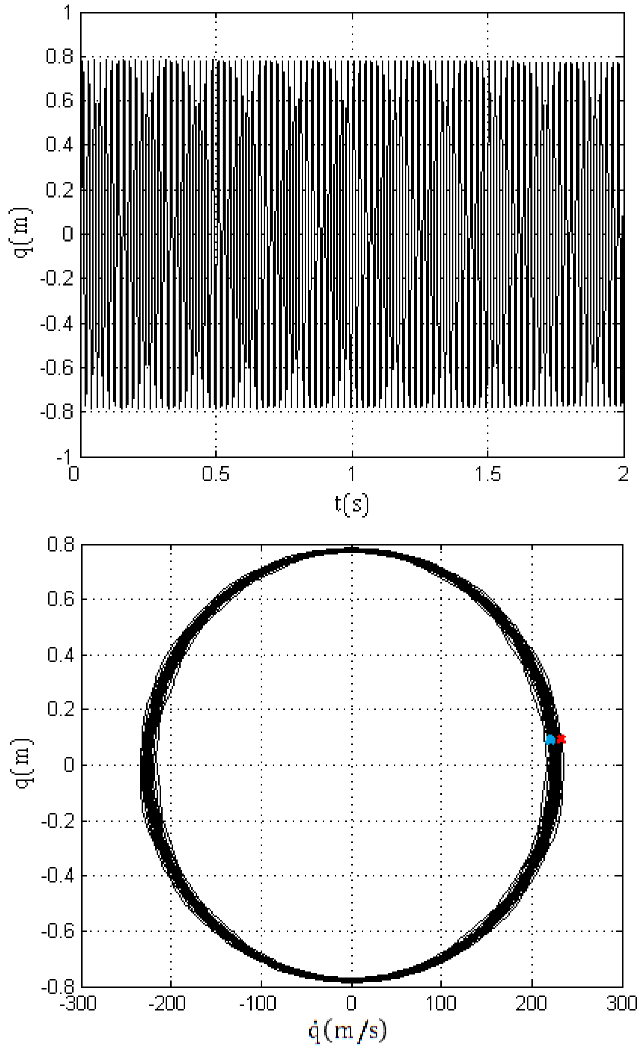


(B)

FIGURA 39 – 15000 RPM: (A) AUTOVALOR NO PLANO s; (B) RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

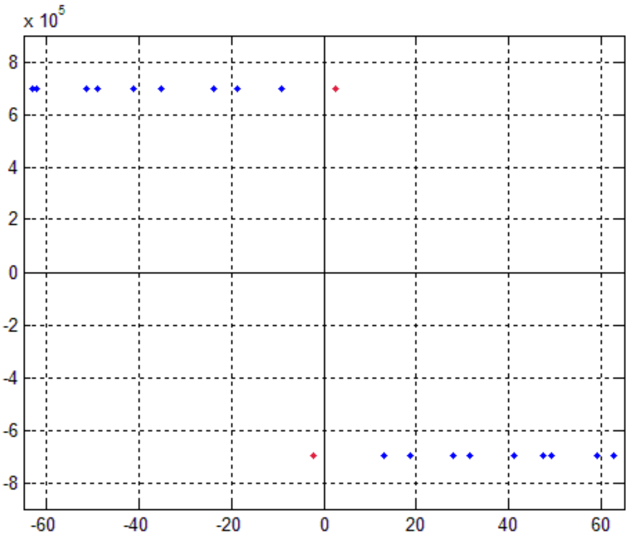


(A)

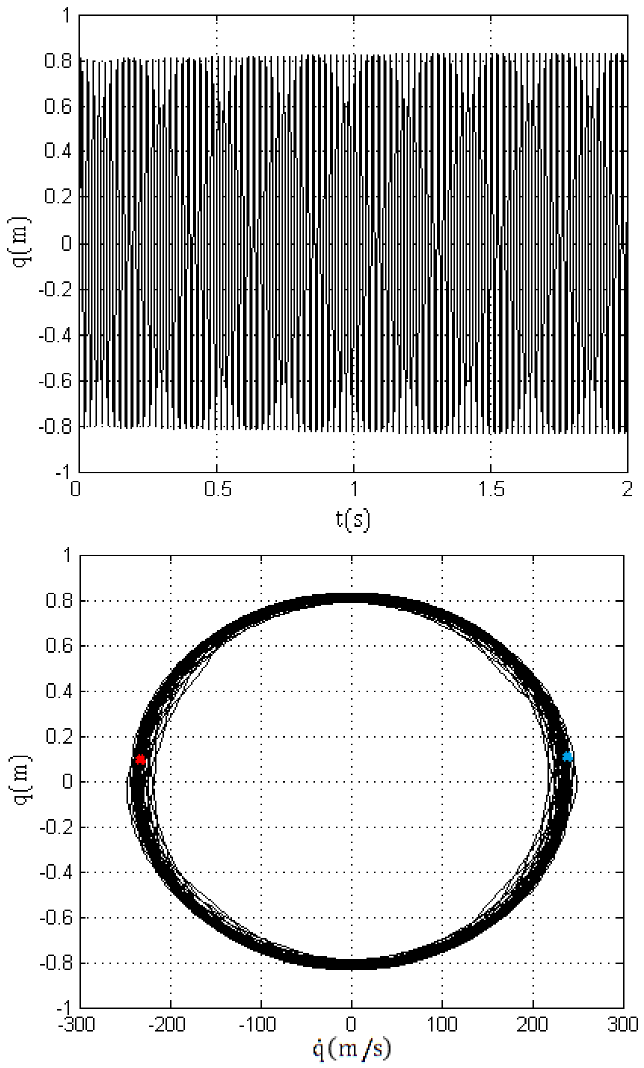


(B)

FIGURA 40 – 20000 RPM: (A) AUTOVALOR NO PLANO s; (B) RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

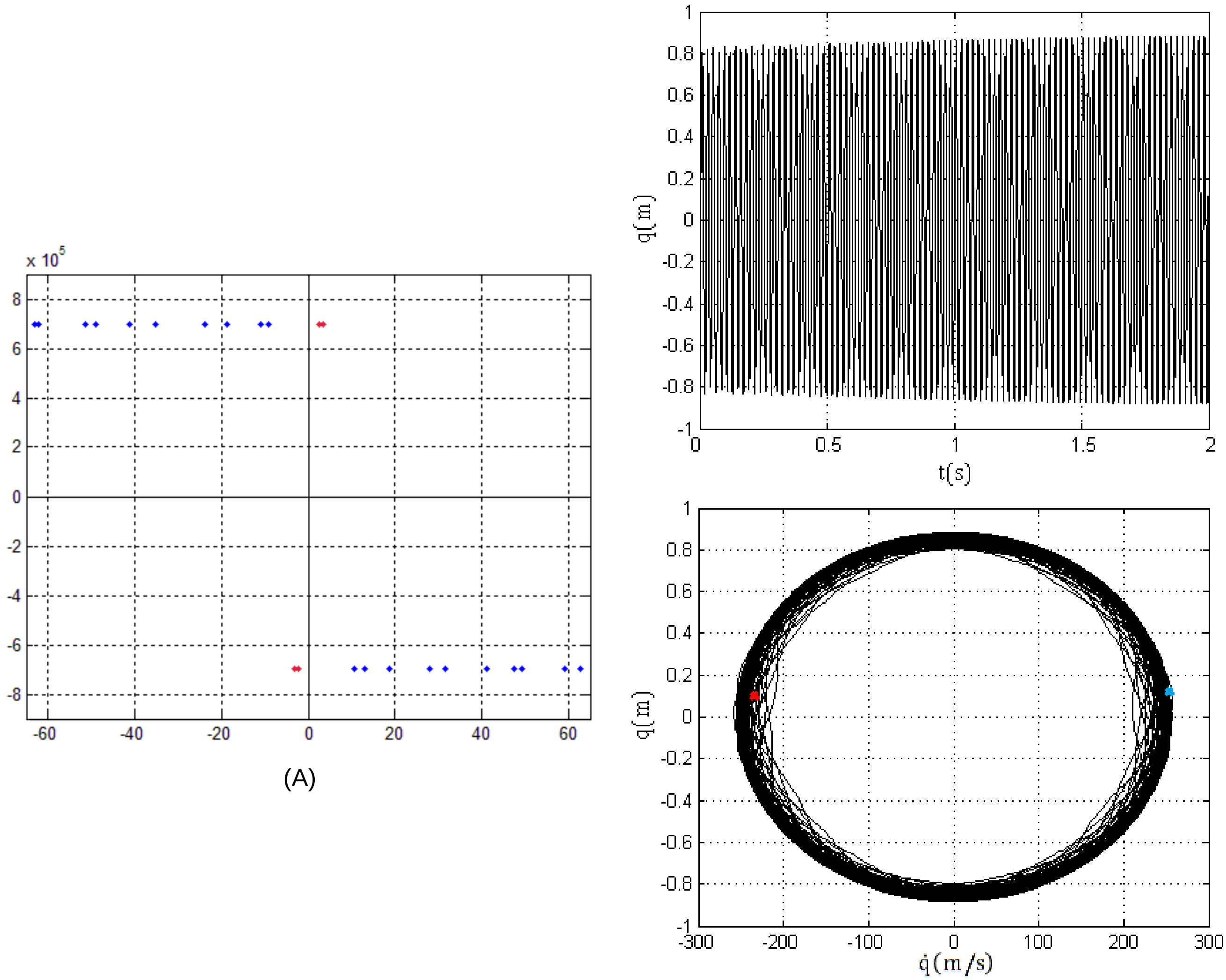


(A)



(B)

FIGURA 41 – 25000 RPM: (A) AUTOVALOR NO PLANO s; (B) RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO



(A)

(B)

FIGURA 42 – 30000 RPM: (A) AUTOVALOR NO PLANO s; (B) RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Conforme observado nas FIGURAS 37-40, o sistema é estável, com a resposta em vibração livre, a diferentes rotações, tendendo levemente à posição de equilíbrio, isto é, com $x = 0$. A partir da FIGURA 41 (25000rpm), o sistema tende a aumentar a amplitude da resposta, caracterizando uma instabilidade no sistema. Isto pode ser corroborado tanto no plano s (FIGURA 41a), quanto no domínio do tempo (FIGURA 41b). Dessa forma, ao menos com o modelo histerético equivalente, a metodologia proposta se mostra pertinente.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi proposta e implementada numericamente uma metodologia simples para determinar a instabilidade de sistemas girantes compostos com material viscoelástico. Ela é baseada no acompanhamento da parte real dos autovalores do sistema, partindo da premissa de que, em rotação zero, na qual as matrizes do modelo numérico são simétricas e positivas definidas, o sistema é estável.

Foram revisados alguns conceitos gerais sobre dinâmica de sistemas, além de diversas modelagens de sistemas girantes. Para cada modelagem, foi definido a maneira como instabilidade é calculada. Também foi revisado matematicamente o comportamento dos autovalores, em função das propriedades das matrizes que compõem o sistema a ser analisado. Dentre os estudos de instabilidade, o que melhor se adapta para este problema é verificar se a parte real dos coeficientes de Laplace (valor negativo do autovalor) é negativa, sendo, neste caso, o sistema considerado estável.

Quando existem matrizes com coeficientes complexos, como no caso de sistemas girantes compostos com material viscoelástico, abordados no domínio da frequência, os autovalores se apresentam em pares complexo e seu negativo, de forma redundante. Nesse caso, a metodologia tradicional torna-se inadequada, uma vez que no computo numérico é impossível detectar quem é o autovalor e quem o seu negativo, muito menos saber quando essa troca acontece, ou seja, o momento em que o sistema se torna instável. Porém, essa característica dos sinais dos autovalores é intrínseca ao sistema quando o mesmo possui pelo menos uma matriz com coeficientes complexos no espaço de estado.

Destaca-se, então, a metodologia proposta e implementada via códigos numéricos do Laboratório de Vibrações e Som da UFPR, que, ao observar a trajetória dos autovalores do modelo viscoelástico no plano s de Laplace, pode determinar a instabilidade do sistema. Para verificar o método proposto, foram realizados estudos simplificados de um sistema girante no domínio do tempo, com amortecimento histerético equivalente. Ambos estudos mostraram que em aproximadamente 25000 rpm o sistema se torna instável.

Pode-se concluir que a metodologia proposta é capaz de determinar com exatidão a condição de instabilidade num sistema girante composto com mancais viscoelásticos, partindo do pressuposto que, em condições iniciais, o sistema é estável.

6.1 SUGESTOES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou uma proposta de análise para determinação de instabilidade dinâmica em rotores com material viscoelástico. Porém, o estudo não foi robusto o suficiente, devido a alguns valores arbitrários considerados, além de uma análise no domínio do tempo relativamente simplificada, assumindo o sistema como histerético.

A sugestão para trabalhos futuros é realizar um estudo de instabilidade de rotores com suportes viscoelásticos totalmente no domínio do tempo. Apesar dos problemas numéricos envolvidos, devido ao fato da solução das equações diferenciais com derivadas de ordem fracionárias apresentam uma elevada exigência computacional e certa instabilidade numérica, este estudo permitiria, assim como com o modelo histerético, determinar a estabilidade do sistema para várias rotações. Porém, poderiam ser obtidos resultados mais robustos, que refletiriam com maior fidelidade a realidade do sistema e o comportamento do material viscoelástico.

Também se faz necessária uma realização experimental do modelo, a fim de corroborar os resultados numéricos. Com isto, a modelagem se tornaria mais confiável e haveria uma confirmação da metodologia proposta neste estudo.

REFERÊNCIAS

AWREJCEWICZ, J.; DZYUBAK, L. P. 2-Dof Non-Linear Dynamics of a Rotor Suspended in the Magneto-Hydrodynamic Field in the Case of Soft and Rigid Magnetic Materials. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 45, n. 9, p. 919–930, 2010. Elsevier. Disponível em: < http://goo.gl/74eRo6 >. Acesso em: 14/11/2014.

BATHE, K. **Finite element procedures in engineering analysis**. 1.ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

BAVASTRI, C. A. *et. al*. Modeling of Dynamic Rotors with Flexible Bearings using Viscoelastic Materials. In: XI DINAME. **Proceedings...** Ouro Preto, 2005. 10 p.

BAVASTRI, C. A. (Coord.). **Projeto de Inovação Tecnológica em Componentes Mecânicos para Motores Elétricos ITECMEL/PROMOVE (Atividade 2: Dedução das matrizes elementares de rigidez flexional e axial para um modelo de viga Timoshenko)**. Curitiba: UTFPR – Laboratório de Vibrações, 2006. 10 p. (Financiadora de Estudos e Projetos / Weg Industrias Elétricas S. A. – Projeto PROMOVE – FINEP 4931/06). Projeto concluído.

BAVASTRI, C. A. *et. al*. Modeling of Dynamic Rotors with Flexible Bearings due to the use of Viscoelastic Materials. **Journal of Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering**, v. 30, n. 1, p. 22–29, 2008.

BRUSA, E. Semi-active and active magnetic stabilization of supercritical rotor dynamics by contra-rotating damping. **Mechatronics**, v. 24, n. 5, p. 500–510, 2014. Disponível em: < http://goo.gl/pv8yuj>. Acesso em: 14/11/2014.

CAMPBELL, W. Protection of Steam Turbine Disk Wheels from Axial Vibration. **Transactions of the ASME: 31–160**. 1924.

CARNEIRO, A. C.; DANIEL, G. B.; CAVALCA, K. L. Dynamic analysis and stability conditions in rotating systems with tilting pad journal bearing. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 22., 2013, Ribeirão Preto. **Anais...** Ribeirão Preto, 2013. p.623–634.

CARVALHO, A. P. *et. al*. Análise de dinâmica de rotores utilizando elementos finitos de viga de timoshenko de classe C^0. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE

ENGENHARIA MECANICA, 8., 2007, Lima. **Anais...** Lima: Pontifícia Universidad Catolica del Peru, 2007. 9 p.

CASTRO, H. F. DE; CAVALCA, K. L.; NORDMANN, R. Whirl and whip instabilities in rotor-bearing system considering a nonlinear force model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 317, n. 1-2, p. 273–293, 2008. Disponível em: < http://goo.gl/pNyDoh>. Acesso em: 14/11/2014.

CHANG-JIAN, C.-W.; CHEN, C.-K. Nonlinear analysis of a rub-impact rotor supported by turbulent couple stress fluid film journal bearings under quadratic damping. **Nonlinear Dynamics**, v. 56, n. 3, p. 297–314, 2009. Disponível em: < http://goo.gl/aSGGiw>. Acesso em: 14/11/2014.

CHEN, C.; DAI, L.; FU, Y. Nonlinear response and dynamic stability of a cracked rotor. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 12, n. 6, p. 1023–1037, 2007. Disponível em: < http://goo.gl/ZZeQG3>. Acesso em: 14/11/2014.

CHIU, Y.-J.; CHEN, D.-Z. The coupled vibration in a rotating multi-disk rotor system. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 53, n. 1, p. 1–10, 2011. Elsevier. Disponível em: < http://goo.gl/nHm39L>. Acesso em: 14/11/2014.

DAS, A. S. *et. al.* Vibration control and stability analysis of rotor-shaft system with electromagnetic exciters. **Mechanism and Machine Theory**, v. 43, n. 10, p. 1295–1316, 2008. Disponível em: < http://goo.gl/a7i6Gw>. Acesso em: 10/11/2014.

DOUBRAWA FILHO, F. J.; LUERSEN, M. A.; BAVASTRI, C. A. Optimal design of viscoelastic vibration absorbers for rotating systems. **Journal of Vibration and Control**, v. 17, n. 5, p. 699–710, 2010. Disponível em: < http://goo.gl/fbgYY5>. Acesso em: 11/12/2014.

DUNKERLEY, S. On the whirling and vibration of shaft. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 195, n. 1, p. 279-359, 1894.

DUTT, J. K.; NAKRA, B. C. Stability of rotor systems with viscoelastic supports. **Journal of Sound and Vibration**, v. 153, n. 1, p. 89–96, 1992.
DUTT, J. K.; NAKRA, B. C. Stability characteristics of rotating systems with journal bearings on viscoelastic supports. **Mechanism and Machine Theory**, v. 31, n. 6, p. 771–779, 1996.

DUTT, J. K.; TOI, T. Rotor vibration reduction with polymeric sectors. **Journal of Sound and Vibration**, v. 262, n. 4, p. 769–793, 2003. Disponível em: < http://goo.gl/i7zfiu>. Acesso em: 27/11/2014.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A.; LOPES, E. M. O. On the passive control of vibrations with viscoelastic dynamic absorbers of ordinary and pendulum types. **Journal of the Franklin Institute**, v. 347, n. 1, p. 102–115, 2010. Disponível em: < http://goo.gl/Yxs3oi>. Acesso em: 26/5/2015.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice, and Application**. 1.ed. New York: John Wiley & Sons Ltd. 1984.

FAN, R. *et. al.* Experimental study of the effect of viscoelastic damping materials on noise and vibration reduction within railway vehicles. **Journal of Sound and Vibration**, v. 319, n. 1-2, p. 58–76, 2009. Disponível em: < http://goo.gl/HXKqkB >. Acesso em: 26/1/2016.

FERREIRA, E. M. S. **Modelos de rotores dinâmicos com mancais flexíveis utilizando material viscoelástico**. 54f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

FERRY, J. D. **Viscoelastic properties of polymers**. 3.ed. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1980.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. 1.ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007.

FLOODY, S. E.; ARENAS, J. P.; ESPÍNDOLA, J. J. DE. Modelling Metal-Elastomer Composite Structures Using a Finite-Element-Method Approach. **Journal of Mechanical Engineering**, v. 53, n. 2, p. 66–77, 2007.

GANESAN, R. Effects of bearing and shaft asymmetries on the instability of rotors operating at near-critical speeds. **Mechanism and machine theory**, v. 35, p.737–752, 2000. Disponível em: < http://goo.gl/8f7VUY>. Acesso em: 18/11/2014.

GENTA, G.; DELPRETE, C.; BRUSA, E. Some considerations on the basic assumptions in rotordynamics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 227, n. 3, p. 611–645, 1999. Disponível em: < http://goo.gl/F13wyB>. Acesso em: 14/11/2014.

GENTA, G. **Dynamics of Rotating Systems.** New York: Springer Science+Business Media Inc., 2005.

GENTA, G.; AMATI, N. Hysteretic damping in rotordynamics: An equivalent formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 22, p. 4772–4784, 2010. Disponível em: < http://goo.gl/XNJ6sp>. Acesso em: 14/11/2014.

HAGEDORN, P. **Oscilações Não Lineares**. São Paulo: Edgard Blücher. 1984.

HAN, Q.; CHU, F. The effect of transverse crack upon parametric instability of a rotor-bearing system with an asymmetric disk. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 17, n. 12, p. 5189–5200, 2012. Disponível em: < http://goo.gl/ncoLr7>. Acesso em: 10/11/2014.

HIGHAM, N. J. *et. al*. Scaling, sensitivity and stability in the numerical solution of quadratic eigenvalue problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 73, n. 3, p. 344–360, 2008. Disponível em: < http://goo.gl/471Ds7>. Acesso em: 26/1/2016.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. 2.ed. New York: Dover Publications. 2000.

INMAN, D. J. **Vibration with Control**. 1.ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2006.

JEFFCOTT H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a wirling speed-the effect of want of balance. **Philosophical Magazine**, v. 37, n. 6, p. 304-314, 1919.

KANG, C. H. *et. al.* Dynamic analysis of gear-rotor system with viscoelastic supports under residual shaft bow effect. **Mechanism and Machine Theory**, v.46, n.3, p. 264–275, 2011. Disponível em: < http://goo.gl/HDpbls>. Acesso em: 11/12/2014.

KIRK, R.; G. GUNTER, E. J. The effect of support flexibility and damping on the synchronous response of a single-mass flexible rotor**. ASME Journal of Engineering for Industry**, v. 94, n. 1, p. 221-232, 1972.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering.** 1.ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1990.

LALANNE, C. **Mechanical Vibration and Shock**: Sinusoidal Vibration. 1.ed. Londres: Hermes Science Publications, 1999

LANCASTER, P. Stability of linear gyroscopic systems: A review. **Linear Algebra and its Applications**, v. 439, n. 3, p. 686–706, 2013. Disponível em: http://goo.gl/BW0uAL. Acesso em: 25/2/2015.

LOWRY, M. A predictive technique for evaluating structural vibration gain of damped suspensions in hard disk drives. **Microsystem Technologies**, v. 16, n. 1-2, p. 67–71, 2009. Disponível em: < http://goo.gl/N7327e>. Acesso em: 26/1/2016.

MA, H. *et. al*. Effects of eccentric phase difference between two discs on oil-film instability in a rotor–bearing system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 41, n. 1-2, p. 526–545, 2013. Disponível em: < http://goo.gl/FqKO9E>. Acesso em: 14/11/2014.

MEHRMANN, V.; WATKINS, D. S. Polynomial eigenvalue problems with hamiltonian structure. **Electronic Transactions on Numerical Analysis**, v. 13, p. 106–118, 2002.

MEIROVITCH, L. **Analytical Methods in Vibrations**. New York: The Macmillan Company, 1967.

MEIROVITCH, L. **Dynamics and control of structures**. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1990.

MENDES, R. U.; CAVALCA, K. L. On the Instability Threshold of Journal Bearing Supported Rotors. **International Journal of Rotating Machinery**, v. 2014, p. 1–17, 2014. Disponível em: < http://goo.gl/gIUhCp>.

MONTAGNIER, O.; HOCHARD, C. Dynamic instability of supercritical driveshafts mounted on dissipative supports – Effects of viscous and hysteretic internal damping. **Journal of Sound and Vibration**, v. 305, n. 3, p. 378–400, 2007. Disponível em: < http://goo.gl/JRdbGP>. Acesso em: 14/11/2014.

MONTAGNIER, O.; HOCHARD, C. Dynamics of a supercritical composite shaft mounted on viscoelastic supports. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 2, p. 470–484, 2014. Disponível em: <http://goo.gl/RiC2sc>. Acesso em: 14/11/2014.

MUSZYNSKA, A. **Rotordynamics**. Boca Raton: Taylor and Francis Group, 2005.

MUSZYNSKA, A. Stability of whirl and whip in rotor/bearing systems. **Journal of Sound and Vibration**, v.127, n.1, p.49–64,1988. Disponível em: http://goo.gl/ZS92cw.

MYKLESTAD, N. O. **Vibration analysis**. New York: McGraw-Hill, 1944.

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration Damping**. New York: John Wiley & Sons, 1985.

NEWMARK, S. **Concept of Complex Stiffness Applied to Problems of Oscillations with Viscous and Hysteretic Damping**. Londres: Ministry of Aviation – Aeronautical Research Council, 1962. 36 p. Relatório técnico.

PANDA, K. C.; DUTT, J. K. Design of optimum support parameters for minimum rotor response and maximum stability limit. **Journal of Sound and Vibration**, v. 223, n. 1, p. 1–21, 1999.

PANDA, K. C.; DUTT, J. K. Optimum support characteristics for rotor–shaft system with preloaded rolling element bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 260, n. 4, p. 731–755, 2003. Disponível em: < http://goo.gl/P1swJj>. Acesso em: 11/12/2014.

PROHL, M. A. A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors. **Journal of Applied Mechanics**, v. 12, n. 3, p.142-148. 1945.

RANKINE W. J. M. Centrifugal Whirling of Shafts. **The Engineer**. 1869
RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3.ed. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2006.

RIBEIRO, E. A.; PEREIRA, J. T.; BAVASTRI, C A. Passive vibration control in rotor dynamics: Optimization of composed support using viscoelastic materials. **Journal of Sound and Vibration**, v. 351, p. 43–56, 2015. Disponível em: < http://goo.gl/DCbNPo>. Acesso em: 15/7/2015.

SCHWEIZER, B. Total instability of turbocharger rotors – Physical explanation of the dynamic failure of rotors with full-floating ring bearings. **Journal of Sound and**

Vibration, v. 328, n. 1-2, p. 156–190, 2009. Disponível em: < http://goo.gl/GciQtq >. Acesso em: 14/11/2014.

SEKHAR, A. S.; DEY, J. K. Effects of cracks on rotor system instability. **Mechanism and Machine Theory**, v. 35, n. 12, p. 1657–1674, 2000. Disponível em: < http://goo.gl/lLA11w>. Acesso em: 20/11/2014.

SILVÉRIO, R. B. **Aplicação de material viscoelástico em mancais de rotores de máquinas rotativas**. 183f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SMITH, A. D. M. The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A.**, v. 142, n. 846, p. 92–118, 1933.

TILLEMA, H. G. **Noise reduction of rotating machinery by viscoelastic bearing supports.** 94f. PhD thesis, University of Twente, Enschede, Netherlands, 2003.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Teoria da elasticidade**. 3.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois. 1980.

VANCE, J. M. **Rotordynamics of Turbomachinery**. 1.ed. New York: John Wiley & Sons, 1988.

YANG, L.-H. *et. al*. A new nonlinear dynamic analysis method of rotor system supported by oil-film journal bearings. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, n. 21-22, p. 5239–5255, 2014. Disponível em: < http://goo.gl/FDNc0d>. Acesso em: 14/11/2014.

ZHANG, X. *et. al*. Stability analysis of a rotor–bearing system with time-varying bearing stiffness due to finite number of balls and unbalanced force. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, n. 25, p. 6768–6784, 2013. Disponível em: < http://goo.gl/7Eyi7V>. Acesso em: 4/11/2014.