

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ADRIANO RODRIGUES DE MELO

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONSERVAÇÃO ESPACIAL-TEMPORAL DE ALTA
ORDEM E ALTA RESOLUÇÃO PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS HIPERBÓLICOS

CURITIBA

2017

ADRIANO RODRIGUES DE MELO

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONSERVAÇÃO ESPACIAL-TEMPORAL DE ALTA
ORDEM E ALTA RESOLUÇÃO PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS HIPERBÓLICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, na linha de pesquisa em Abordagem de Problemas de Otimização e de Análise Numérica, dos Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientadora: Prof.^a Dra. Liliana Madalena Gramani
Coorientador: Prof. Dr. Eloy Kaviski

CURITIBA

2017

M528m

Melo, Adriano Rodrigues de

Método dos elementos de conservação espacial-temporal de alta ordem e alta resolução para a solução de problemas hiperbólicos / Adriano Rodrigues de Melo. – Curitiba, 2017.

224 p. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia e de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2017.

Orientador: Liliansa Madalena Gramani – Co-orientador: Eloy Kaviski,.
Bibliografia: p. 113-121.

1. Equações diferenciais hiperbólicas. 2. Lei de Conservação (Matemática). 3. Conservação espacial-temporal.. I. Universidade Federal do Paraná. II. Gramani, Liliansa Madalena. III. Kaviski, Eloy . IV. Título.

CDD: 515.353



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **ADRIANO RODRIGUES DE MELO** intitulada: **MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONSERVAÇÃO ESPACIAL-TEMPORAL DE ALTA ORDEM E ALTA RESOLUÇÃO PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS HIPERBÓLICOS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 03 de Agosto de 2017.

LILIANA MADALENA GRAMANI

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

MICHAEL MANNICH

Avaliador Externo (UFPR)

HIGIDIO FORTILLO QWENDO

Avaliador Externo (UFPR)

ADILANDRI MÉRCIO LOBEIRO

Avaliador Externo (UTFPR)

AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS

Avaliador Externo (UPPR)

*Dedico este trabalho aos meus pais Adenildo e Leonilda,
pelos cuidados, paciência e confiança depositados em mim.*

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Prof.^a Dra. Liliana Madalena Gramani e ao meu coorientador, Prof. Dr. Eloy Kaviski, pelo acompanhamento e orientação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, do Setor de Tecnologia/Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, na pessoa do seu coordenador Prof. Dr. Marcos Arndt, pelo apoio recebido.

Ao secretário do Programa, Jair Bezerra dos Anjos Silva por estar sempre diligente junto à secretaria do curso.

Aos queridos amigos Dantas, Drica e Monique pela presença, confiança e amizade.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

RESUMO

Esta tese aborda o desenvolvimento de esquemas numéricos explícitos por meio do método dos elementos de conservação espacial-temporal aplicados em problemas hiperbólicos. O método, desenvolvido originalmente para leis de conservação de primeira ordem no tempo, é estendido a equações com derivadas de segunda ordem temporal e aplicado à equação da onda. Para o caso da onda elástica unidimensional sob condições de contorno naturais ou essenciais, um esquema numérico com resposta analítica foi obtido. Uma classe de problemas de ondas não-lineares unidimensionais foi estudada e soluções do tipo D'Alembert foram construídas. No sentido de ampliar a estratégia ao caso bidimensional, uma formulação híbrida foi construída ao utilizar-se, conjuntamente, a Transformada de Fourier. Desenvolveu-se, também, esquemas de alta ordem para a solução numérica das equações hiperbólicas de Saint-Venant em uma e duas dimensões. A estratégia para o aumento de ordem consiste em aumentar o grau dos polinômios presentes nas funções de base, o que resultou em um esquema com precisão de terceira ordem. Os vários experimentos numéricos realizados demonstram a eficiência dos esquemas desenvolvidos, sobretudo no que tange a problemas com descontinuidades e formação de choque, como o caso não-linear.

Palavras-chaves: Método de Conservação Espacial-Temporal. Equações Hiperbólicas. Esquema de Alta Ordem e Alta Resolução. Volumes de Controle.

ABSTRACT

This thesis addresses the development of explicit numerical schemes using the space-time conservation element and solution element method applied to hyperbolic problems. The method, developed for first-order conservation laws, is extended to equations with second-order temporal derivatives and applied to the wave equation. For the one-dimensional elastic wave under natural or essential boundary conditions, a numerical scheme with analytical properties was obtained. A class of one-dimensional nonlinear wave problems was studied and D'Alembert type solutions were constructed. In order to extend the strategy to the two-dimensional case, a hybrid formulation was constructed using the Fourier Transform. High-order schemes are also developed for the numerical solution of the one- and two-dimensional Saint-Venant equations. The strategy to increase order consists of considering polynomials of higher degrees in the base functions, which resulted in a third order accuracy scheme. The numerical experiments performed demonstrate the efficiency of the developed schemes, especially with regard to problems with discontinuities and shock formation, such as the nonlinear case.

Key-words: Space-Time Conservation Element and Solution Element Method. Hyperbolic Equations. High Order and High Resolution Numerical Schemes. Control Volumes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – A malha espaço-tempo escalonada.	32
FIGURA 2 – Os elementos de solução e de conservação espacial-temporal.	32
FIGURA 3 – (a) A malha espaço-tempo; (b) Elementos de conservação e elementos de solução definidos como sendo um mesmo objeto; (c) Elementos de solução definidos por Chang (1995).	35
FIGURA 4 – Interface das relações de conservação do fluxo.	37
FIGURA 5 – Malha espaço-tempo, elementos de conservação e de solução para a equação da onda 1D	44
FIGURA 6 – Elementos de conservação e de solução do primeiro passo	47
FIGURA 7 – Elementos de conservação e de solução utilizados nos contornos.	49
FIGURA 8 – Solução numérica versus espectral do problema da barra com condições de Dirichlet	51
FIGURA 9 – Solução analítica versus solução numérica da equação linear da onda unidimensional não-homogênea	52
FIGURA 10 – Solução numérica versus espectral do problema da corda percutida por um martelo	53
FIGURA 11 – Solução analítica versus solução numérica ao longo do domínio espacial da equação da onda com condições iniciais descontínuas	54
FIGURA 12 – Dispersão numérica da solução da equação de Klein-Gordon	56
FIGURA 13 – Solução analítica versus solução numérica da equação de Klein-Gordon linear	59
FIGURA 14 – Erros numéricos em função do incremento Δx , para a solução da equação de Klein-Gordon	60
FIGURA 15 – Formação das curvas de controle espaço-tempo	61
FIGURA 16 – Formação da malha espaço-tempo pela intersecção das curvas de controle	64
FIGURA 17 – Malha espaço-tempo construída para a solução da equação da onda não-linear	66
FIGURA 18 – Solução numérica da equação da onda bidimensional pelo esquema CE/SE com Transformada de Fourier	71
FIGURA 19 – Elementos de solução, elementos de conservação e malha bidimensional	77
FIGURA 20 – Gráficos da elevação da superfície e da velocidade para o problema de Riemann I	89
FIGURA 21 – Gráficos da elevação da superfície e da velocidade para o problema de Riemann I $h_r/h_l = 0,001$ (Algoritmo 1)	91
FIGURA 22 – Elevação da superfície da água $h + z$ e velocidade u para os problemas de escoamento transcrito	93

FIGURA 23 – Elevação da superfície da água $h + z$ e velocidade u para os problemas de escoamento transcrito com formação de choque	94
FIGURA 24 – Elevação da superfície da água $h + z$ e velocidade u para o problema de escoamento permanente subcrítico	95
FIGURA 25 – Elevação da superfície da água h e velocidade u para o problema de Riemann II	95
FIGURA 26 – Elevação da superfície da água h e vazão q para o problema de Riemann II com resistência	96
FIGURA 27 – Elevação da superfície da água h e vazão q para o problema de Riemann III	97
FIGURA 28 – Elevação da superfície da água $h + z$ e vazão q para o problema da superfície plana	99
FIGURA 29 – Domínio computacional do problema de Ruptura de barragem 2D	99
FIGURA 30 – Elevação da superfície e mapas de contorno (ruptura de barragem 2D, $h_r/h_l = 0,5$)	100
FIGURA 31 – Campos de velocidades (ruptura de barragem 2D, $h_r/h_l = 0,5$)	101
FIGURA 32 – Elevação da superfície, mapas de contorno e campos de velocidades (ruptura de barragem 2D, $h_r/h_l = 0,1$)	102
FIGURA 33 – Elevação da superfície, mapas de contorno e campo de velocidade (ruptura de barragem 2D, $h_r/h_l = 0,0$)	103
FIGURA 34 – Campo de vazão (ruptura de barragem 2D, $h_r/h_l = 0,0$)	104
FIGURA 35 – Superfícies, mapas de contorno e campos de velocidade para o problema de ruptura de barragem circular	105
FIGURA 36 – Superfícies, curvas de nível e campo de velocidade para o problema de ruptura de barragem circular sobre leito seco	106
FIGURA 37 – Campo de vazão para o problema de ruptura de barragem circular sobre leito seco	107
FIGURA 38 – Cone característico definido sobre a equação da onda 2D.	130
FIGURA 39 – Volume de controle formado pela união de dois cones característicos de raio $c\Delta t$	131
FIGURA 40 – A malha espaço-tempo escalonada.	133
FIGURA 41 – Os elementos de solução e de conservação espacial-temporal.	134
FIGURA 42 – Superfícies geradas por Zhang, Zeng e Chen (2012)	223
FIGURA 43 – Superfícies e mapas de contorno gerados por Akoh, Li e Xiao (2008) e Zoppou e Roberts (2000)	224

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Erros relativo e absoluto das soluções em série e numérica para o problema da barra	50
TABELA 2 – Erros relativo e absoluto das soluções analítica e numérica para o problema não homogêneo	51
TABELA 3 – Erros das soluções em série e numérica para o problema da corda percutida	53
TABELA 4 – Ordem de precisão experimental para o esquema aplicado a Klein-Gordon	60
TABELA 5 – Erro absoluto calculado na norma do máximo para a solução da equação da onda 1D não-linear	67
TABELA 6 – Erro relativo sobre a solução numérica da equação 2D, conforme gráficos dispostos na FIGURA 18.	70
TABELA 7 – Ordem de precisão experimental para o esquema unidimensional	88
TABELA 8 – Ordem de precisão experimental para o esquema bidimensional	89
TABELA 9 – Taxa de decrescimento do erro relativo com o uso do Algoritmo 1	92
TABELA 10 – Erro relativo (Ruptura de barragem 1D com $h_r/h_l = 0,001$)	92
TABELA 11 – Erro relativo (fluxo transcrito estado permanente 1D)	94
TABELA 12 – Erro relativo (fluxo subcrítico estado permanente 1D)	94
TABELA 13 – Erro relativo (ruptura de barragem em domínio seco 1D)	96
TABELA 14 – Erro relativo (ruptura de barragem 1D com resistência ao escoamento)	97
TABELA 15 – Erro relativo (Problema de Riemann III)	98
TABELA 16 – Erro absoluto (oscilações sobre uma bacia parabólica)	99

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CE/SE	<i>Conservation element and solution element</i>
CE	<i>Conservation element</i>
SE	<i>Solution element</i>
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
1D	Unidimensional
2D	Bidimensional
DF	Diferenças finitas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	25
1.1 JUSTIFICATIVA	29
1.2 OBJETIVOS	29
1.2.1 Objetivo geral	29
1.2.2 Objetivos específicos	29
1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE	30
2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONSERVAÇÃO ESPACIAL-TEMPORAL	31
2.1 PRIMEIRA ABORDAGEM	31
2.2 SEGUNDA ABORDAGEM	34
2.3 COMPARAÇÃO COM OUTROS MÉTODOS	38
2.4 CONSIDERAÇÕES	39
3 EQUAÇÕES HIPERBÓLICAS DE SEGUNDA ORDEM TEMPORAL	41
3.1 CONCEITOS AUXILIARES	42
3.2 EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL	43
3.2.1 Início do processo: uso das condições iniciais	47
3.2.2 Condições de contorno naturais	48
3.2.2.1 Contorno esquerdo ($x = a$)	48
3.2.2.2 Contorno direito ($x = b$)	49
3.2.3 Exemplos	50
3.2.4 Equação de Klein-Gordon	56
3.2.4.1 Exemplo	58
3.2.5 Problema não-linear	61
3.2.5.1 Malha espaço-tempo não estruturada	63
3.3 EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL	68
3.3.1 Redução ao problema unidimensional	68
3.3.1.1 Exemplo	69
3.4 CONSIDERAÇÕES	70
4 EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT	73
4.1 SOBRE AS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT	73
4.2 O MÉTODO CE/SE PARA AS EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS	76
4.2.1 Avaliação de $(q_m)_{i,j}^k$	77
4.2.2 Avaliação de $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$, $[(q_m)_{xy}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$	80
4.2.3 Avaliação de $[(q_m)_x]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_y]_{i,j}^k$	81

4.2.4	Propriedades do Esquema	82
4.2.4.1	Erro de Truncamento e Consistência	82
4.2.4.2	Estabilidade	83
4.2.5	Experimentos Numéricos Preliminares	87
4.2.6	Esquema Para Problemas Descontínuos ou Com Formação de Choque	90
4.2.7	Experimentos Numéricos	92
4.2.7.1	Outros Exemplos Unidimensionais	92
4.2.7.2	Exemplos Bidimensionais	98
4.3	CONSIDERAÇÕES	104
5	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	109
5.1	CONCLUSÕES	109
5.2	RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	111
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICES	123
	APÊNDICE A CÁLCULOS AUXILIARES	125
A.1	EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON	125
A.1.1	Uma aproximação para o termo fonte	125
A.1.2	Análise de estabilidade	126
A.1.3	Análise de dissipação numérica	127
A.1.4	Análise de dispersão numérica	127
A.1.5	Dispersão do esquema CE/SE modificado para a equação de Klein-Gordon	128
A.2	CURVAS CARACTERÍSTICAS 2D	129
	APÊNDICE B O MÉTODO CE/SE PARA AS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT UNIDIMENSIONAIS	133
B.1	AVALIAÇÃO DE $(q_m)_i^j$	135
B.2	AVALIAÇÃO DE $[(q_m)_x]_i^j$	138
B.3	AVALIAÇÃO DE $[(q_m)_{xx}]_i^j$	138
B.3.1	Propriedades	139
B.3.2	Consistência e erro de truncamento	139
B.3.3	Estabilidade	139
	APÊNDICE C CÓDIGOS COMPUTACIONAIS DESENVOLVIDOS	143
C.1	CÓDIGOS REFERENTES AO CAPÍTULO 3	143

C.1.1 Problemas lineares unidimensionais	143
C.1.2 Caso não-homogêneo unidimensional: equação de Klein-Gordon	149
C.1.3 Problema não-linear unidimensional	152
C.1.4 Problema linear bidimensional	153
C.2 CÓDIGOS REFERENTES AO CAPÍTULO 4	155
C.2.1 Precisão 1D	155
C.2.2 Precisão 2D	157
C.2.3 Código - Equações de Saint-Venant unidimensionais	163
C.2.4 Código - Equações de Saint-Venant bidimensionais	188

ANEXOS	221
---------------	-----

ANEXO A FIGURAS AUXILIARES PARA O TESTE 2D DE RUPTURA PARCIAL DE BARRAGEM	223
--	------------

1 INTRODUÇÃO

Em muitas situações, a solução de uma equação diferencial que modela um determinado fenômeno físico, deve ser obtida por meio de técnicas de aproximação. É o caso, por exemplo, de problemas com geometrias ou condições de contorno complexas ou mesmo pela presença de não-linearidade (BURDEN; FAIRES, 2008). Métodos numéricos representam a possibilidade de aproximar uma solução que usualmente não se pode obter por meios algébrico-analíticos. De modo ideal, essa aproximação deve estar sob controle¹ e neste sentido, não apenas a matemática do problema deve ser satisfeita, mas também as condições físicas que englobam o modelo analisado.

Fundamentados nas propriedades físicas, Chang e To (1991), no início da década de 1990, desenvolveram um novo método numérico multidimensional, aqui denominado por método dos elementos de conservação espacial-temporal (no inglês, *space-time conservation element and solution element method*), ou simplesmente método CE/SE², cujo foco é a resolução de leis de conservação (por exemplo, equação de advecção-difusão, equações de Euler e Navier-Stokes).

Conforme Chang (1993), Chang (1995) e Chang, Wang e Chow (1999), o referido método difere dos tradicionais esquemas de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos e métodos espectrais em termos, tanto de conceito, quanto de metodologia. Conforme argumentam, o foco das simulações numéricas é dado inteiramente sobre as formas integrais das leis de conservação e como resultado, afirmam que a nova ferramenta tem o potencial de fornecer uma resposta mais acurada do fenômeno físico, mesmo no caso em que as variáveis possuem comportamento não suave. Algumas de suas principais características (CHANG, 1995) são:

- Para representar de modo mais eficiente e realístico as propriedades físicas do fenômeno, o foco da modelagem é dado sob a forma integral das leis de conservação, em vez da forma diferencial. Isto se justifica pelo fato de que para se obter a lei de conservação diferencial, é necessário a hipótese de diferenciabilidade sobre as variáveis conservadas. Neste sentido, soluções descontínuas não satisfazem a EDP no sentido clássico, uma vez que as derivadas não estão definidas em descontinuidades (LEVEQUE, 1992);
- A conservação do fluxo de modo local e global, no espaço e no tempo, é um princípio fundamental no seu desenvolvimento;

¹ Este termo “aproximação sob controle” se refere à necessidade inerente de se conhecer como e quando o método numérico converge, sobretudo à necessidade de se estabelecer as condições para que isso ocorra.

² Está é a abreviação comumente presente na literatura: CE - Conservation Element, SE - Solution Element.

- As derivadas espaciais das variáveis dinâmicas são tratadas como variáveis independentes. Isto significa que, para um certo ponto (x_i, t_j) de uma malha Ψ , deverão ser calculadas tanto a variável $u(x_i, t_j) \equiv u_i^j$ quanto sua derivada espacial $u_x(x_i, t_j) \equiv (u_x)_i^j$;
- Tendo em vista que a conservação do fluxo é uma propriedade do espaço/tempo, espaço e tempo são unificados e tratados sob o mesmo ponto de vista. Por exemplo, uma função $u(x, t)$ deverá ser considerada como uma função de duas variáveis. Dessa forma seu gradiente deverá ser $\nabla u(x, t) = (u_x, u_t)$;
- A inclusão das condições de contorno/iniciais no esquema é, geralmente, simples e possui mais acurácia que os métodos tradicionais. A justificativa é o fato de que u_x também é uma variável de marcha no esquema explícito, razão pela qual condições de contorno de Neumann são simples de serem incluídas;
- Utiliza apenas variáveis discretas locais (os coeficientes da expansão em série de Taylor) em vez de variáveis globais (como os coeficientes de expansão utilizados em métodos espectrais).

Chang e To (1991) apresentaram o método desenvolvendo esquemas para a lei de conservação que governa a advecção e a difusão unidimensional de uma variável física escalar (formulação tratada no capítulo 2). Uma extensa análise de estabilidade, consistência, dissipação e dispersão foi realizada e condições de estabilidade foram deduzidas para o esquema produzido. Outros resultados sobre o problema de advecção-difusão em uma dimensão foram apresentados nos anos que se seguiram (CHANG et al., 1995; CHANG; WANG; CHOW, 1995; CHANG; WANG; TO, 2000), inclusive sobre a perspectiva bidimensional (CHANG; WANG; CHOW, 1994; WANG; CHOW; CHANG, 1995; CHANG; WANG; CHOW, 1995).

O seu desenvolvimento prosseguiu na forma de aplicações sobre problemas não-lineares, como as equações de Euler em uma (CHANG, 1993; CHANG, 1995) e duas dimensões (CHANG; WANG; CHOW, 1994; CHANG; WANG; CHOW, 1995; CHANG; WANG; CHOW, 1999). Formulações para as equações de Navier-Stokes unidimensional (CHANG, 1993; CHANG, 1995) e bidimensional (ZHANG et al., 1999) também foram construídas. Nestes casos, os autores introduzem um parâmetro ϵ para controlar a dispersão numérica.

Zhang, Yu e Chang (2002) apresentaram uma formulação com malhas não estruturadas para as equações de Euler em duas e três dimensões. Ao contrário dos trabalhos iniciais (destacados anteriormente) que utilizavam malhas triangulares para o caso bidimensional e tetraédricas para o caso tridimensional, estes projetaram malhas quadriláteras e hexaédricas para os casos bidimensional e tridimensional, respectivamente. No entanto, Cheng et al. (2011) mostraram que malhas triangulares e tetraédricas são superiores às quadriláteras e hexaédricas em termos de precisão.

Chang e Wang (2003) desenvolveram extensões do método CE/SE, aplicado às equações de Euler em malhas altamente não uniformes, no sentido de torná-lo independente do número de Courant, ou seja, da condição CFL . A dissipação numérica cresce quando o número de Courant ($CFL = |c\Delta t/\Delta x|$, em que c é a velocidade de onda) decresce. No caso de acentuada disparidade na condição CFL (por exemplo, em simulações em que a malha é não uniforme), seu desempenho pode se tornar sensível com respeito ao número CFL , levando à soluções altamente dissipativas nas regiões em que $CFL \ll 1$. Venkatachari et al. (2008) realizaram estudo semelhante com foco nas equações bidimensionais de Navier-Stokes.

Qurrat-UI-Ain, Qamar e Warnecke (2007) produziram uma variação do método CE/SE para sistemas hiperbólicos não-lineares. No método construído por Chang (1995), as derivadas espaciais das variáveis dinâmicas eram aproximadas por diferenças finitas, abordagem contrária ao caso linear, que trata tais derivadas como variáveis de marcha independentes. Para contornar esta situação, foi introduzido um limitador adequado para a variação das inclinações das variáveis do fluxo e, com esta abordagem, tornou-se possível aplicar o esquema linear em problemas não-lineares. Os esquemas resultantes, aplicáveis a equações de uma ou duas dimensões, possuem simplicidade, eficiência e boa acurácia, principalmente em descontinuidades de contato.

Muitos trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de analisar a qualidade do método CE/SE, com aplicações em diversos fenômenos e em diversos campos. Como por exemplo problemas de fluxo viscoso, tais como fluxos de camada limite, fluxo de entrada de canal e fluxo de cavidade (GUO et al., 2004); em sistemas hiperbólicos que modelam a dinâmica de um fluxo instável ao longo de um duto cônico com atrito e transferência de calor (JEREZ et al., 2004); em equações de Magneto-Hidro-Dinâmica ideal (ZHANG et al., 2006; QAMAR; MUDASSER, 2010; GONG; LI; WENG, 2014) e de águas rasas (QAMAR; WARNECKE, 2006); em problemas que envolvem o transporte de espécies químicas (ARNAU et al., 2006; JEREZ et al., 2007); na simulação de transição de fase dos vapores d'água em fluxo compressível (LUO et al., 2007); para simular as distribuições de temperatura e fluxo de calor num meio finito sujeito a modelos de condução de calor do tipo não-Fourier (CHOU; YANG, 2008); problemas de fluxos elasto-plásticos (WANG; LIU; ZHANG, 2009); problemas de impacto à altas velocidades com grandes deformações, altas taxas de deformações e fraturas (*spall fracture*) (CHEN; WANG; LIU, 2010); em mecânica da explosão (WANG; WANG; LIU, 2010); em reações químicas de detonações gasosas (WANG et al., 2010); na simulação de ondas elásticas lineares e não-lineares (YU et al., 2010; CHEN; YANG; YU, 2011; SHEN; LIU; ZHANG, 2012; LOWE et al., 2016); em hidrodinâmica relativística (QAMAR; YOUSAF; MUDASSER, 2011; QAMAR; YOUSAF, 2012); em problemas que envolvem fluxos de gases (WANG et al., 2011; MULJADI; YANG, 2012; QAMAR; ASHRAF, 2012; SADIGHI; AHMAD; SHIRVANI, 2012); em aplicações que envolvem o fenômeno de condução de calor (QAMAR; ASHRAF, 2014) e problemas de multi-fluidos compressíveis (SHEN et al., 2017).

No que diz respeito às equações de Saint-Venant, Molls e Molls (1998) construíram

esquemas unidimensionais para simular o problema de ruptura de barragem e ressalto hidráulico em um canal retangular. Simularam também um ressalto hidráulico oblíquo bidimensional seguindo uma estratégia distinta daquela proposta por Chang e To (1991). Ao contrário, empregaram o método de Strang de passo em frações, que transforma o problema bidimensional em dois problemas unidimensionais. No entanto, conforme Zhang, Zeng e Chen (2012), esta estratégia não garante a conservação do fluxo. Em todo caso, Molls e Molls (1998) concluem que os resultados produzidos são altamente acurados. Sobre esta mesma equação, Zhang, Zeng e Chen (2012) realizaram simulações de ruptura de barragem bidimensional através de uma modificação semelhante àquela utilizada por Qurrat-Ul-Ain, Qamar e Warnecke (2007) (mencionada anteriormente), de modo que os esquemas obtidos tomavam as derivadas espaciais como variáveis de marcha. Afirmando que o método é consistente com a solução analítica do problema e com os dados experimentais.

Recentemente foram desenvolvidas algumas variações do método original, sobretudo no que tange à mudanças nas definições dos elementos de solução. É o caso do trabalho de Shen, Wen e Zhang (2015), que modifica a forma de se calcular o fluxo através da interface numérica de dois elementos de conservação distintos. Originalmente, o fluxo era derivado a partir de uma expansão de Taylor na direção inversa do tempo (CHANG, 1995). A redefinição proposta faz com que o fluxo seja determinado por um procedimento ascendente. Esta modificação, afirmam, não altera as características conservadoras locais e globais do método proposto por Chang e To (1991). Yao et al. (2015) desenvolveram um acelerador de convergência exclusivo para um esquema CE/SE aplicado à simulação de cromatografia de leito móvel (tecnologia para a separação de componentes quimicamente semelhantes).

Embora o método dos elementos de conservação espacial-temporal seja originalmente de segunda ordem (CHANG; TO, 1991; CHANG, 1993), outras formulações de alta ordem foram apresentadas, como esquemas de quarta ordem desenvolvidos por Chang e To (2010) para a equação de Burgers unidimensional; o trabalho de Shen et al. (2015), que construiu esquemas de terceira e quarta ordem sobre malhas híbridas, com aplicações nas equações de Euler; Bilyeu et al. (2014) também obteve esquemas de quarta ordem sobre malhas não estruturadas com aplicações nas equações de Euler, estendendo até a terceira dimensão (BILYEU, 2014).

Diante do exposto, observa-se que a proposta inicial do método CE/SE, bem como os trabalhos que se seguiram, deram-se com base em equações e sistemas de equações de primeira ordem no tempo. Uma das propostas desta tese consiste em estendê-lo à problemas hiperbólicos de segunda ordem temporal. Embora uma equação de segunda ordem possa ser transformada num sistema de primeira ordem, seria possível desenvolver o referido método diretamente?

No que concerne a sistemas hiperbólicos, a abordagem terá por foco as equações de Saint-Venant que modelam fluxo de rios e canais abertos. Não obstante existam trabalhos relacionados ao método CE/SE, o objetivo do presente consiste em aumentar o grau dos

polinômios de Taylor utilizados como funções de base, para que se possa obter esquemas com alta ordem de precisão.

1.1 JUSTIFICATIVA

Métodos numéricos são importantes na simulação de problemas em que soluções exatas são desconhecidas. Quanto mais eficiente em termos de precisão, convergência e generalidade, mais ampla será a sua utilidade científica e prática. Nestes termos, esta tese pretende contribuir com a teoria pertinente ao método dos elementos de conservação espacial-temporal no que tange a sua abrangência e generalidade, tendo em vista que as aplicações encontradas na literatura envolvem equações ou sistemas de equações de primeira ordem no tempo. No que concerne às equações de Saint-Venant, produzir um esquema de alta ordem corresponde a obter soluções de alta precisão, fator indispensável quando se trata de aplicações reais que admitem, inclusive, soluções não suaves.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Os objetivos desta tese se dividem, em duas partes: estender o método dos elementos de conservação espacial-temporal para a aplicação em equações hiperbólicas de segunda ordem e construir esquemas de alta ordem para a solução das equações de Saint-Venant em uma e duas dimensões.

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

- a) Desenvolver esquemas para equações diferenciais hiperbólicas de segunda ordem, lineares e não-lineares, por meio do método CE/SE. Em problemas unidimensionais, utilizar informações das curvas características, em problemas bidimensionais, utilizar um redutor de dimensão (na forma da Transformada de Fourier);
- b) Desenvolver adaptações eficientes à inclusão, junto aos esquemas deduzidos conforme item a), das condições iniciais e das condições de contorno do tipo Neumann;
- c) Desenvolver esquemas para as equações de Saint-Venant em uma e duas dimensões utilizando funções de base com grau superior ao comumente usado e, conseqüentemente, obter um aumento na ordem de precisão;
- d) Analisar a consistência e a estabilidade das formulações construídas, bem como apresentar experimentos numéricos que demonstrem e validem sua precisão e sua eficiência.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A estrutura desta tese é composta, além do presente, pelos capítulos 2, 3, 4 e 5. No capítulo 2 é apresentado o método dos elementos de conservação espacial-temporal. Elementos de conservação e de solução, bem como formas tradicionais de aproximação, são definidas tendo como base o problema de advecção-difusão unidimensional.

No capítulo 3, são elencados os resultados pertinentes à primeira parte da presente tese: construção de formulações para problemas hiperbólicos de segunda ordem temporal, com estudos de caso para verificação da precisão e efetividade dos esquemas.

O capítulo 4 destina-se ao cumprimento da segunda parte deste trabalho: o desenvolvimento de esquemas CE/SE de alta resolução para as equações de Saint-Venant unidimensionais e bidimensionais. Uma apresentação detalhada é realizada. Extensivos experimentos numéricos são abordados com o objetivo de validar e consolidar o esquema construído.

Finalmente, no capítulo 5 são tecidas as considerações e conclusões. Neste capítulo também são fornecidas observações gerais sobre possíveis pesquisas futuras.

Fazem parte deste trabalho, ainda, três apêndices: o APÊNDICE A, apresentando cálculos auxiliares concernentes às equações hiperbólicas de segunda ordem temporal tratadas no capítulo 3; o APÊNDICE B, que dispõe sobre a dedução do método CE/SE para solução das equações de Saint-Venant unidimensionais; e o APÊNDICE C contendo todos os códigos computacionais desenvolvidos em linguagem FORTRAN 90.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONSERVAÇÃO ESPACIAL-TEMPORAL

Neste capítulo apresenta-se o método dos elementos de conservação espacial-temporal. O desenvolvimento das ideias fundamenta-se especialmente nas publicações de Chang e To (1991), Chang (1995) e Chang, Wang e To (2000). Na seção 2.1, são apresentadas as definições constantes nos trabalhos mencionados, sobretudo as definições dos elementos de conservação e dos elementos de solução. A descrição do método é feita por meio de sua aplicação à equação de advecção-difusão homogênea unidimensional. Na seção 2.2, um segundo esquema explícito é desenvolvido por meio de outra abordagem. Neste sentido, novos elementos de conservação e de solução são definidos. Esta segunda abordagem é de interesse, ao menos com respeito as definições dos tipos de elementos, pois fundamenta os resultados obtidos no capítulo 3. Realiza-se um comparativo entre os clássicos métodos de volumes finitos e diferenças finitas na seção 2.3. O capítulo é encerrado com a seção 2.4, com as considerações gerais.

2.1 PRIMEIRA ABORDAGEM

Seja a forma unidimensional da equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde a e μ são constantes positivas. Fisicamente, x é a variável espacial (L), t a variável temporal (T), a é a velocidade de advecção (LT^{-1}) e μ o coeficiente de difusão (L^2T^{-1}). A variável escalar $u(x, t)$ pode representar um campo de temperatura ou de concentração de uma substância num domínio unidimensional: tipicamente, (2.1) é utilizada em hidrologia ambiental para modelação unidimensional de problemas de qualidade de água em rios (DIAS, 2003).

No método CE/SE, tempo e espaço são tratados matematicamente de modo indistinto. O operador ∇ , por exemplo, definido canonicamente para um campo escalar bidimensional $f(x, y, t)$ como

$$\nabla f(x, y, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (2.2)$$

no método CE/SE será

$$\nabla f(x, y, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (2.3)$$

Neste sentido, a equação (2.1) pode ser compreendida como a divergência do vetor densidade $\mathbf{F}(x, t) = \left(au - \mu \frac{\partial u}{\partial x}, u \right)$ de \mathbb{R}^2 e, pelo teorema da divergência no plano, obtém-se a lei de conservação integral

$$\int_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = 0, \quad (2.4)$$

onde dA é o elemento de superfície a partir da região R ; C é o contorno da região espaço-tempo arbitrária $R \subset \mathbb{R}^2$; \mathbf{N} o vetor normal unitário exterior de C ; ds o elemento de linha sobre a curva C .

Seja Ψ o conjunto de todos os pontos da malha em R , conforme FIGURA 1. Para cada $(i, j) \in \Psi$ associa-se um elemento de solução (SE), denotado por $SE(i, j)$ e definido como sendo o interior de uma região espaço-tempo limitada por uma curva pontilhada conforme FIGURA 2a. Nota-se que o elemento de solução é basicamente uma vizinhança dos segmentos de reta horizontal e vertical centrados em (i, j) . O domínio é dividido em regiões retangulares não sobrepostas que são referidas como elementos de conservação (CE). Conforme as FIGURAS 2c e 2d, cada ponto $(i, j) \in \Psi$ está associado a dois CEs, denotados por $CE_-(i, j)$ e $CE_+(i, j)$. O contorno de um CE_{\pm} é composto por dois SEs, por exemplo, o contorno de $CE_-(i, j)$ é formado por $SE(i, j)$ e $SE(i - 1/2, j - 1/2)$.

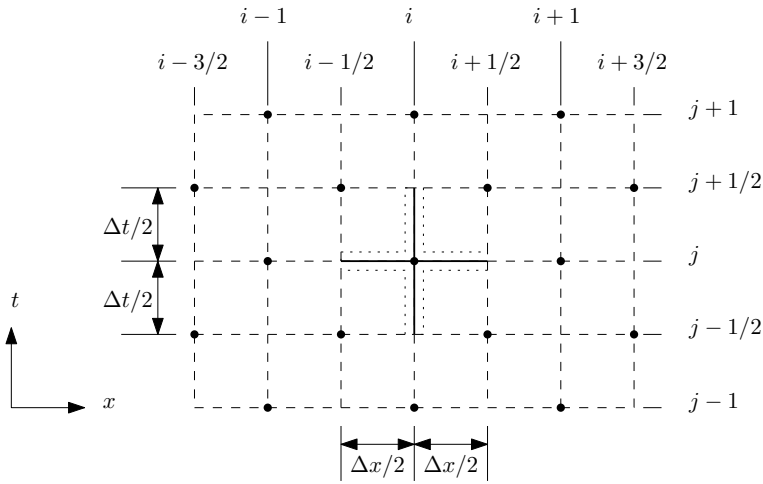


FIGURA 1 – A malha espaço-tempo escalonada.

Fonte – Chang (1995), Chang et al. (1995), Chang, Wang e To (2000).

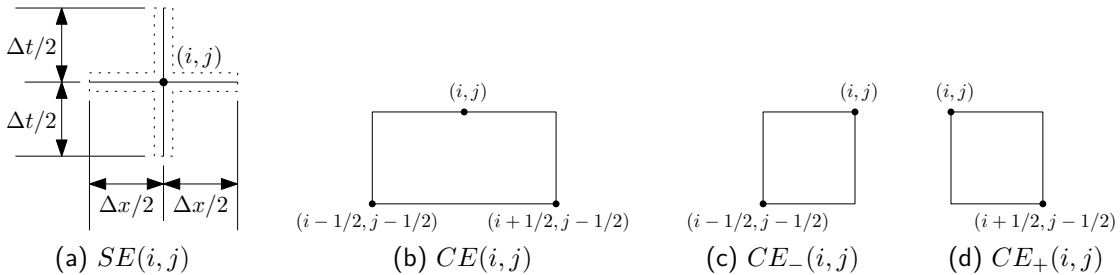


FIGURA 2 – Os elementos de solução e de conservação espacial-temporal.

Fonte – Chang (1995), Chang et al. (1995), Chang, Wang e To (2000).

Para todo $(x, t) \in SE(i, j)$, $u(x, t)$ e $\mathbf{F}(x, t)$ serão aproximados, respectivamente, por:

$$u^*(x, t; i, j) = u_i^j + (u_x)_i^j(x - x_i) + (u_t)_i^j(t - t_j), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{F}^*(x, t; i, j) = \left(au^*(x, t; i, j) - \mu \frac{\partial u^*(x, t; i, j)}{\partial x}, u^*(x, t; i, j) \right), \quad (2.6)$$

nos quais o super-índice “*” indica a aproximação da variável.

A equação (2.5) é uma expansão de Taylor de primeira ordem de u em torno de (x_i, t_j) , em que u_i^j , $(u_x)_i^j$ e $(u_t)_i^j$ são constantes em $SE(i, j)$ e (x_i, t_j) são as coordenadas do ponto (i, j) da malha. Neste mesmo sentido, \mathbf{F}^* é a aproximação de \mathbf{F} .

Supondo que u^* satisfaz (2.1) em $SE(i, j)$, isto é, $\text{div } \mathbf{F}^* = 0$, então

$$(u_t)_i^j = -a(u_x)_i^j, \quad (2.7)$$

e com isso, substituindo (2.7) em (2.5), tem-se

$$u^*(x, t; i, j) = u_i^j + (u_x)_i^j [(x - x_i) - a(t - t_j)], \quad (x, t) \in SE(i, j). \quad (2.8)$$

Assim, u_i^j e $(u_x)_i^j$ são as únicas variáveis independentes associadas com o ponto (i, j) da malha. Além disso, a equação (2.4) é aproximada por

$$\oint_C \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{N} ds = 0. \quad (2.9)$$

Seja o fluxo definido sobre elementos de conservação

$$F_{\pm}(i, j) = \oint_{S(CE_{\pm}(i, j))} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{N} ds. \quad (2.10)$$

Para avaliar a integral (2.10) sobre $CE_{-}(i, j)$, divide-se o processo em duas fases:

1. Contorno em $SE(i, j)$:

$$\begin{aligned} F_{-}^{(i, j)}(i, j) &= \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} \left[au^*(x, t; i, j) - \mu \frac{\partial u^*(x, t; i, j)}{\partial x} \right] dt + \int_{-x_i}^{-x_{i-1/2}} u^*(x, t; i, j) dx, \\ &= \left(au_i^j \frac{\Delta t}{2} - \mu (u_x)_i^j \frac{\Delta t}{2} + a^2 \frac{\Delta t^2}{8} (u_x)_i^j \right) + \left(u_i^j \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x^2}{8} (u_x)_i^j \right), \\ &= \frac{\Delta x}{2} [(1 + \nu)u_i^j - (1 - \nu^2 + \xi)(u_x^+)_i^j], \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que

$$\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \xi = 4\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{e} \quad (u_x^+)_i^j = \frac{\Delta x}{4} (u_x)_i^j. \quad (2.12)$$

2. Contorno em $SE(i - 1/2, j - 1/2)$:

$$\begin{aligned} F_{-}^{(i-1/2, j-1/2)}(i, j) &= - \int_{-t_j}^{-t_{j-1/2}} au^*(x, t; i - 1/2, j - 1/2) dt \\ &\quad + \int_{-t_j}^{-t_{j-1/2}} \mu \frac{\partial u^*(x, t; i - 1/2, j - 1/2)}{\partial x} dt \\ &\quad - \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} u^*(x, t; i - 1/2, j - 1/2) dx, \end{aligned} \quad (2.13)$$

isto é,

$$\begin{aligned}
F_-^{(i-1/2, j-1/2)}(i, j) &= \left(-aw_{i-1/2}^{j-1/2} \frac{\Delta t}{2} + a^2 \frac{\Delta t^2}{8} (u_x)_{i-1/2}^{j-1/2} \right) + \left(\mu \frac{\Delta t}{2} (u_x)_{i-1/2}^{j-1/2} \right) \\
&\quad + \left(-\frac{\Delta x}{2} w_{i-1/2}^{j-1/2} - \frac{\Delta x^2}{8} (u_x)_{i-1/2}^{j-1/2} \right), \\
&= \frac{\Delta x}{2} \left[-(1 + \nu) w_{i-1/2}^{j-1/2} - (1 - \nu^2 - \xi) (u_x^+)_{i-1/2}^{j+1/2} \right]. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Assim, pelo fato de $F_-(i, j) = F_-^{(i, j)}(i, j) + F_-^{(i-1/2, j-1/2)}(i, j)$ e diante de (2.11) e (2.14), tem-se que o fluxo em $CE_-(i, j)$ será dado por:

$$F_-(i, j) = \frac{\Delta x}{2} \left\{ (1 + \nu) \left[w_i^j - w_{i-1/2}^{j-1/2} \right] - (1 - \nu^2 + \xi) (u_x^+)_i^j - (1 - \nu^2 - \xi) (u_x^+)_{i-1/2}^{j-1/2} \right\}. \quad (2.15)$$

De maneira equivalente, o fluxo sobre o elemento de controle $CE_+(i, j)$, observando que seus contornos são formados pelos elementos de solução $SE(i, j)$ e $SE(i + 1/2, j - 1/2)$, é:

$$F_+(i, j) = \frac{\Delta x}{2} \left\{ (1 - \nu) \left[w_i^j - w_{i+1/2}^{j-1/2} \right] + (1 - \nu^2 + \xi) (u_x^+)_i^j + (1 - \nu^2 - \xi) (u_x^+)_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}. \quad (2.16)$$

Por (2.9), segue-se que $F_-(i, j) = 0 = F_+(i, j)$, donde conclui-se que

$$w_i^j = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \nu) w_{i-1/2}^{j-1/2} + (1 - \nu) w_{i+1/2}^{j-1/2} + (1 - \nu^2 - \xi) \left[(u_x^+)_{i-1/2}^{j-1/2} - (u_x^+)_{i+1/2}^{j-1/2} \right] \right\} \quad (2.17)$$

e

$$\begin{aligned}
(u_x^+)_i^j &= \frac{-1}{2(1 - \nu^2 + \xi)} \left\{ (1 - \nu^2) \left(w_{i-1/2}^{j-1/2} - w_{i+1/2}^{j-1/2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \nu^2 - \xi) \left[(1 - \nu) (u_x^+)_{i-1/2}^{j-1/2} + (1 + \nu) (u_x^+)_{i+1/2}^{j-1/2} \right] \right\}. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Assim, as equações (2.17) e (2.18) definem as variáveis de marcha w_i^j e $(u_x^+)_i^j$ em termos dos pontos $(i \pm 1/2, j - 1/2)$ da malha Ψ .

2.2 SEGUNDA ABORDAGEM

Nesta abordagem, a malha é a mesma utilizada anteriormente (FIGURA 3a). No entanto, o elemento de solução associado ao ponto $(i, j) \in \Psi$ é definido como o paralelogramo centrado em (i, j) , inclusive seu contorno (FIGURA 3b). O respectivo elemento de conservação será definido como sendo o próprio SE, isto é, nesta abordagem elementos de conservação e de solução constituem um mesmo objeto (FIGURA 3b novamente). Neste ponto há uma diferença diante dos trabalhos de Chang e To (1991), Chang (1995) e Chang, Wang e To (2000). Estes autores definem um SE como sendo o interior de um paralelogramo centrado em (i, j) , excluindo portanto, sua borda (ver FIGURA 3c) e o CE é definido como a união do SE e

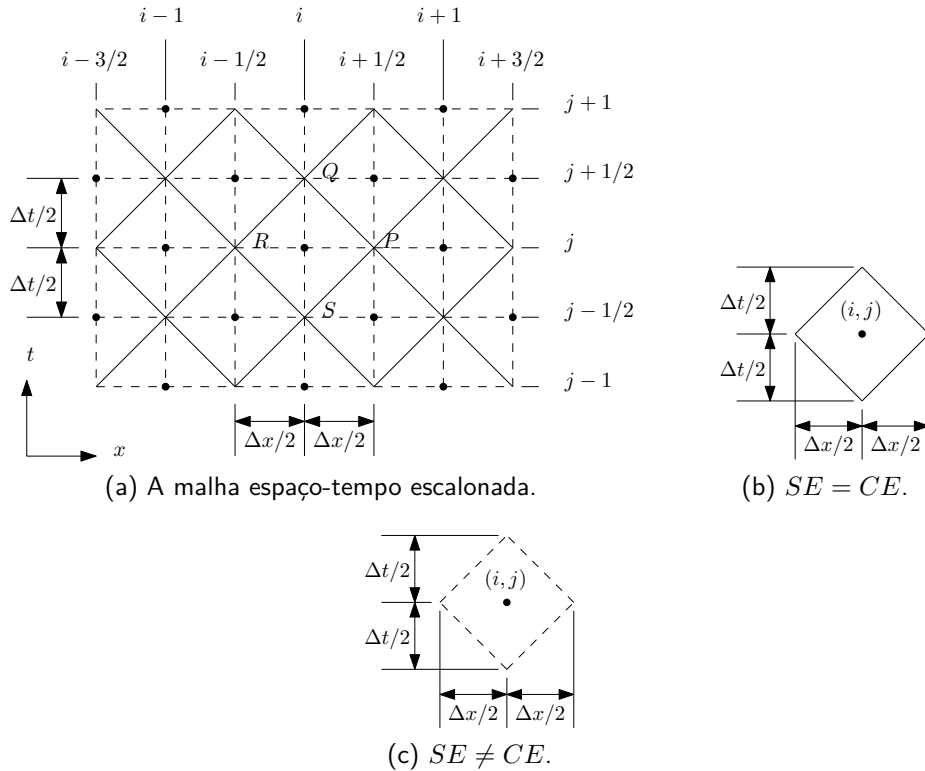


FIGURA 3 – (a) A malha espaço-tempo; (b) Elementos de conservação e elementos de solução definidos como sendo um mesmo objeto; (c) Elementos de solução definidos por Chang (1995).

Fonte – Chang e To (1991), Chang (1995), Chang, Wang e To (2000).

seu contorno. Nesta última definição, ocorre que $SE(i, j) = CE(i, j) - S(CE(i, j))$, em que $S(CE(i, j))$ corresponde à borda do elemento de conservação $CE(i, j)$.

Para compreender a razão dessa mudança, primeiramente observa-se que uma condição necessária à (2.9), utilizando as mesmas aproximações (2.6) e (2.8), é que

$$\oint_{S(CE(i,j))} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{N} ds = 0, \quad \text{para todo } (i, j), \quad (2.19)$$

isto é, o fluxo total saindo de qualquer elemento de conservação é zero. Observa-se que $S(CE(i, j))$ é o contorno do paralelogramo, conforme FIGURA 3a. Assim, para que a integral (2.19) esteja definida é necessário que $S(CE(i, j)) \subset SE(i, j)$, isto é, $S(CE(i, j)) \cap SE(i, j) \neq \emptyset$, pois as aproximações u^* e \mathbf{F}^* estão definidas em $(x, t) \in SE(i, j)$. Para que esta inclusão ocorra, ou seja, para que $S(CE(i, j)) \subset SE(i, j)$ definiu-se $CE(i, j) = SE(i, j)$.

Ao aplicar a equação (2.9) separadamente em quaisquer dois CEs vizinhos e em seguida, em sua união, percebe-se que é necessário exigir também que o fluxo total que está saindo de um deve ser igual ao que está entrando no outro, por meio das interfaces adjacentes que separam os mesmos.

Para obter as condições sobre as interfaces, considera-se um ponto arbitrário $(i, j) \in \Psi$. Avaliando (2.19) sobre o paralelogramo $PQRS$, conforme FIGURA 3a, obtém-se, seguindo

(2.6) e (2.8):

$$\begin{aligned}
J(\overline{PQ}) &= \int_{\overline{PQ}} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{N} ds = \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} (au^* - \mu(u_x^*)^j, u^*) \cdot (\Delta t / \Delta x, 1) dx, \\
&= \frac{\Delta x}{2} \left\{ (u_x)_i^j \left[\left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\Delta x}{4} - a \frac{\Delta t}{2} \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) - \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^j \right\}, \tag{2.20}
\end{aligned}$$

onde $J(\overline{PQ})$ representa o fluxo do escalar u na fronteira \overline{PQ} e o termo $(\Delta t / \Delta x, 1) dx$ é o elemento de linha da seção \overline{PQ} . Após as simplificações, obtém-se

$$J(\overline{PQ}) = \frac{\Delta x}{2} [(1 + \nu)u_i^j + (1 - \nu^2 - \xi)(u_x^+)_i^j]. \tag{2.21}$$

Pode-se obter, de modo equivalente, nas respectivas seções \overline{QR} , \overline{RS} e \overline{SP} :

$$J(\overline{QR}) = \frac{\Delta x}{2} [(1 - \nu)u_i^j - (1 - \nu^2 - \xi)(u_x^+)_i^j], \tag{2.22}$$

$$J(\overline{RS}) = -\frac{\Delta x}{2} [(1 + \nu)u_i^j - (1 - \nu^2 + \xi)(u_x^+)_i^j], \tag{2.23}$$

$$J(\overline{SP}) = \frac{\Delta x}{2} [(1 - \nu)u_i^j + (1 - \nu^2 + \xi)(u_x^+)_i^j], \tag{2.24}$$

e observa-se ainda que

$$J(\overline{PQ}) + J(\overline{QR}) + J(\overline{RS}) + J(\overline{SP}) = 0. \tag{2.25}$$

Para continuar, sejam os fluxos de saída (normalizados pela unidade de comprimento) em $CE(i, j)$ pelas seções \overline{PQ} e \overline{QR} definidos, respectivamente, por

$$f_1^{(0)}(i, j) = \frac{2}{\Delta x} J(\overline{PQ}) \quad \text{e} \quad f_2^{(0)}(i, j) = \frac{2}{\Delta x} J(\overline{QR}), \tag{2.26}$$

e os fluxos de entrada em $CE(i, j)$ pelas faces \overline{RS} e \overline{SP} , respectivamente, definidos por

$$f_1^{(1)}(i, j) = -\frac{2}{\Delta x} J(\overline{RS}) \quad \text{e} \quad f_2^{(1)}(i, j) = -\frac{2}{\Delta x} J(\overline{SP}), \tag{2.27}$$

ambos também normalizados pela unidade espacial. As condições de conservação sobre as interfaces do fluxo podem agora serem expressas (ver FIGURA 4), para todo $(i, j) \in \Psi$, como

$$f_1^{(1)}(i, j) = f_1^{(0)}(i - 1/2, j - 1/2) \quad \text{e} \quad f_2^{(1)}(i, j) = f_2^{(0)}(i + 1/2, j - 1/2). \tag{2.28}$$

Utilizando as equações (2.21) a (2.27) em (2.28), encontram-se os mesmos resultados de (2.17) e (2.18). A equação (2.28) pode, no entanto, ser usada para se obter um esquema alternativo em que $f_1^{(0)}(i, j)$ e $f_2^{(0)}(i, j)$ são as variáveis de marcha. Para isso, sejam as formas matriciais

$$\mathbf{f}^{(0)}(i, j) = \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(i, j) \\ f_2^{(0)}(i, j) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(1)}(i, j) = \begin{pmatrix} f_1^{(1)}(i, j) \\ f_2^{(1)}(i, j) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(i, j) = \begin{pmatrix} u_i^j \\ (u_x^+)_i^j \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

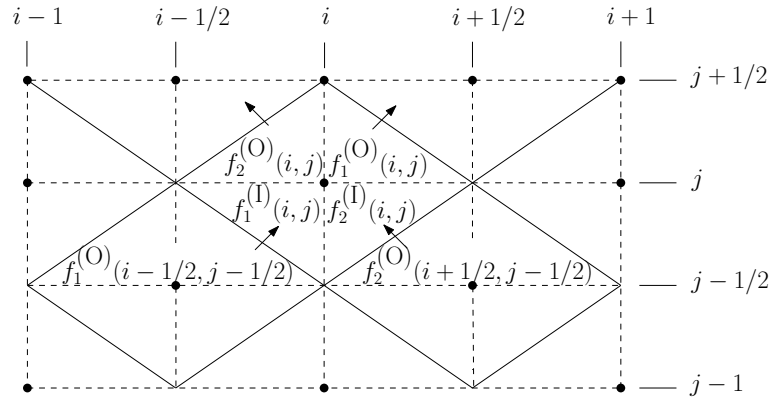


FIGURA 4 – Interface das relações de conservação do fluxo.

Fonte – Chang, Wang e To (2000).

$$\mathbf{\Lambda}^{(O)} = \begin{pmatrix} 1 + \nu & 1 - \nu^2 - \xi \\ 1 - \nu & -(1 - \nu^2 - \xi) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Lambda}^{(I)} = \begin{pmatrix} 1 + \nu & -(1 - \nu^2 + \xi) \\ 1 - \nu & 1 - \nu^2 + \xi \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

A partir das equações (2.21) a (2.27), pode-se escrever

$$\mathbf{f}^{(O)}(i, j) = \mathbf{\Lambda}^{(O)} \mathbf{q}(i, j) \quad \text{e} \quad \mathbf{f}^{(I)}(i, j) = \mathbf{\Lambda}^{(I)} \mathbf{q}(i, j), \quad (2.31)$$

e então

$$\mathbf{f}^{(O)}(i, j) = \mathbf{\Lambda}^{(O)} [\mathbf{\Lambda}^{(I)}]^{-1} \mathbf{f}^{(I)}(i, j), \quad \text{para } 1 - \nu^2 - \xi \neq 0. \quad (2.32)$$

A equação (2.32) pode ser desenvolvida e escrita como

$$f_l^{(O)}(i, j) = \sum_{m=1}^2 \omega_{lm} f_m^{(I)}(i, j), \quad l = 1, 2, \quad (2.33)$$

em que ω_{lm} é o lm -ésimo elemento da matriz $\mathbf{\Lambda}^{(O)} [\mathbf{\Lambda}^{(I)}]^{-1}$, isto é,

$$\omega_{11} = \frac{\nu(1 - \nu^2) + \xi}{1 - \nu^2 + \xi}, \quad \omega_{12} = \frac{(1 + \nu)(1 - \nu^2)}{1 - \nu^2 + \xi}, \quad \omega_{21} = \frac{(1 - \nu)(1 - \nu^2)}{1 - \nu^2 + \xi} \quad (2.34)$$

e

$$\omega_{22} = \frac{-\nu(1 - \nu^2) + \xi}{1 - \nu^2 + \xi}. \quad (2.35)$$

Combinando a equação (2.28) com (2.33), obtém-se

$$\begin{aligned} f_1^{(O)}(i, j) &= \omega_{11} f_1^{(O)}(i - 1/2, j - 1/2) + \omega_{12} f_2^{(O)}(i + 1/2, j - 1/2), \\ f_2^{(O)}(i, j) &= \omega_{21} f_1^{(O)}(i - 1/2, j - 1/2) + \omega_{22} f_2^{(O)}(i + 1/2, j - 1/2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

O esquema em (2.36) avança no tempo em termos dos próprios fluxos $f_1^{(O)}(i, j)$ e $f_2^{(O)}(i, j)$. Sua vantagem sobre (2.17) e (2.18) é que ele possui apenas quatro operações (duas adições e duas multiplicações) contra doze (seis adições e seis multiplicações), um ganho computacional de 66,66%.

2.3 COMPARAÇÃO COM OUTROS MÉTODOS

Apresenta-se nesta seção as principais características do método CE/SE em relação aos clássicos métodos de volumes finitos e diferenças finitas.

A principal distinção do método CE/SE em relação a diferenças finitas é o fato de se utilizar informações de ambas as formas diferencial e integral da lei de conservação. No método de diferenças finitas, embora também se utilizem polinômios de Taylor para aproximar a função incógnita na vizinhança de um ponto, a restrição é feita apenas sobre a equação diferencial, isto é, a aproximação é restrita a satisfazer apenas a forma diferencial. Assim, em diferenças finitas, aproxima-se cada termo da equação (cada derivada) a fim de se obter uma forma diferencial aproximada. Aqui aparece outra distinção. No método CE/SE, as derivadas das funções também são tratadas como incógnitas, pois constrói-se uma equação específica para a sua obtenção (veja equação (2.18)). Por outro lado, é possível obter esquemas CE/SE idênticos a esquemas de diferenças finitas, conforme resultados da seção 3.2.

Esquemas convencionais de volumes finitos avaliam as variáveis nos nós computacionais em função dos valores nodais por extrapolação ou interpolação (CHANG, 1995; FERZIGER; PERIĆ, 2002, p. 76). No método CE/SE, o fato das derivadas espaciais das variáveis dinâmicas serem consideradas incógnitas faz com que os fluxos numéricos possam ser avaliados sem interpolação ou extrapolação. Na verdade, pode-se interpretar o método CE/SE como uma variação do método de volumes finitos em que o fluxo é aproximado por expansão de Taylor. De fato, um esquema de volumes finitos *upwind* para a equação

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(q(x, t))}{\partial x} = 0, \quad (2.37)$$

começa por analisar formas de se aproximar a equação integral conservativa

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_j) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_{j-1/2}) dx = \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt. \quad (2.38)$$

As integrais podem ser aproximadas pelo valor médio (teorema do valor médio), isto é,

$$Q_i^j \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_j) dx, \quad Q_i^{j-1/2} \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_{j-1/2}) dx, \quad (2.39)$$

$$F_{i-1/2}^{j-1/2} \approx \frac{2}{\Delta t} \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt, \quad F_{i+1/2}^{j-1/2} \approx \frac{2}{\Delta t} \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt. \quad (2.40)$$

Assim, o método numérico de volumes finitos tem a forma

$$Q_i^j = Q_i^{j-1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(F_{i+1/2}^{j-1/2} - F_{i-1/2}^{j-1/2} \right), \quad (2.41)$$

em que o esquema obtido irá depender da escolha do fluxo médio F_i^j (LEVEQUE, 2004, p. 65). Desta forma, observa-se que o desenvolvimento é distinto apenas no que tange às aproximações

das integrais de conservação: no método CE/SE utiliza-se expansões de Taylor para aproximar as funções q e $f(q)$, e conseqüentemente cada uma das integrais em (2.38).

Aproximando as funções q e $f(q)$ por polinômios constantes, a equação (2.38), avaliada no elemento de conservação constante na FIGURA 2b, se torna

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_i^j dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} q_{i-1/2}^{j-1/2} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} q_{i+1/2}^{j-1/2} dx = \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f_{i-1/2}^{j-1/2} dt - \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f_{i+1/2}^{j-1/2} dt, \quad (2.42)$$

isto é,

$$q_i^j = \frac{q_{i-1/2}^{j-1/2} + q_{i+1/2}^{j-1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(f_{i+1/2}^{j-1/2} - f_{i-1/2}^{j-1/2} \right). \quad (2.43)$$

As equações (2.38) e (2.43) foram deduzidas pelos métodos de volumes finitos (clássico) e CE/SE, respectivamente. Observe que $Q_i^{j-1/2}$ pode ser entendido como uma média de $q_{i-1/2}^{j-1/2}$ e $q_{i+1/2}^{j-1/2}$.

2.4 CONSIDERAÇÕES

Este capítulo teve como objetivo introduzir o método dos elementos de conservação espacial-temporal em termos de metodologia e conceitos. Duas abordagens foram apresentadas, ambas desenvolvidas por Chang e To (1991). As explanações se deram com uma aplicação sobre a equação da advecção-difusão. Uma observação importante diz respeito à modificação realizada na definição dos elementos de solução relativos à segunda abordagem (seção 2.2), aquela em que os volumes de controle correspondem aos paralelogramos no espaço-tempo. Optou-se por definir os elementos de solução e elementos de conservação como sendo um único objeto. Essa alteração faz com que a aproximação da equação integral de conservação esteja bem definida. Isto se justifica pois a forma integral de conservação é uma integral de contorno, definida sobre o contorno de cada um dos $CE(i, j)$. As funções de base estão, no entanto, definidas no elemento de solução $SE(i, j)$. Por isso, é necessário que a borda $S(CE(i, j))$ de $CE(i, j)$ esteja contida em $SE(i, j)$, isto é, $S(CE(i, j)) \subset CE(i, j)$.

O conteúdo do capítulo 3, a seguir, apresenta os primeiros resultados. Trata-se de problemas hiperbólicos lineares de segunda ordem no tempo em uma e duas dimensões espaciais. Alguns casos unidimensionais não-lineares também são tratados. Reforça-se que a abordagem da seção 2.2 é a estrutura conceitual para o capítulo a seguir.

3 EQUAÇÕES HIPERBÓLICAS DE SEGUNDA ORDEM TEMPORAL

Este capítulo apresenta os primeiros resultados desenvolvidos nesta tese, cuja abordagem consiste no estudo numérico de problemas de ondas hiperbólicas de segunda ordem. Nas seções 3.2 (caso unidimensional) e 3.3 (caso bidimensional) serão considerados os problemas modelados por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = f, \quad (3.1)$$

onde a constante $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda; o termo f representa uma fonte externa; ∇^2 é o operador Laplaciano, que em \mathbb{R} é definido por $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e em \mathbb{R}^2 possui a forma $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; x e y são as direções no espaço em coordenadas cartesianas; t o tempo. A variável u pode representar um campo de pressão ou um campo de deslocamento. A equação ocorre primariamente em três áreas (WHITHAM, 1974, p. 209): acústica, elasticidade e eletromagnetismo.

Em acústica, o campo acústico é descrito por $P(x, y, t)$ e $u(x, y, t)$, onde P representa o campo de pressão descrito pela equação (3.1), u é o deslocamento das partículas no meio (FERNANDES et al., 2009). A relação entre P e u é dada pela Lei de Hooke $P = -k \nabla u$, isto é, deformações em um corpo são proporcionais as tensões que a provocam, em que k é a compressibilidade do meio e ∇ é o operador gradiente (SANTOS, 2012, p. 16). Sob esta perspectiva, é utilizada em modelagem sísmica, técnica utilizada na exploração petrolífera e que busca descrever o fenômeno de propagação de ondas que vão desde a fonte, passando pelas camadas do meio geofísico, até o retorno aos receptores (DI BORTOLO, 2010).

Em elasticidade, a equação (3.1) pode ser obtida no tratamento elementar de vibrações transversais em cordas e membranas ou em ondas torcionais e longitudinais percorridas ao longo de uma barra (RODRIGUES, 2012).

Em eletromagnetismo clássico o conjunto de quatro equações

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.2)$$

é conhecido como as equações de Maxwell, onde ρ é a densidade de carga (C/m^3 , Coulombs por metro cúbico), \mathbf{E} é o campo elétrico (V/m , Volts por metro), \mathbf{D} o campo de deslocamento elétrico (C/m^2 , Coulombs por metro quadrado), \mathbf{B} é a densidade do fluxo magnético, algumas vezes chamado de indução magnética (T, Tesla), \mathbf{J} é a densidade de corrente (A/m^2 , Ampères por metro quadrado) e \mathbf{H} é o campo magnético (A/m , Ampères por metro). Estas quatro equações podem ser resolvidas apenas em situações simples (JACKSON, 1999, p. 238). Introduzindo um potencial elétrico escalar Φ e um potencial magnético vetorial \mathbf{A} , outro conjunto de equações desacopladas equivalente, em todos os aspectos, às equações de Maxwell

no vácuo, pode ser deduzido (JACKSON, 1999, p. 240):

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (3.3)$$

em que $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ é a velocidade da luz, ϵ_0 e μ_0 são os valores da constante dielétrica (ϵ) e permeabilidade magnética (μ), respectivamente, ambas medidas no vácuo (JACKSON, 1999, p. 780). Observa-se que, nesta situação, os potenciais Φ e \mathbf{A} satisfazem a equação da onda (3.1).

Uma forma particular de (3.1) é a conhecida equação de Klein-Gordon, que será abordada na seção 3.2.4. Tal modelo está presente na mecânica quântica relativística (CARDOSO; CASTRO, 2007) e em problemas de vibração de membranas sujeitas à uma força restauradora proporcional ao deslocamento (ARROYO, 2008). A seção 3.2.5 seguinte, trata do modelo unidimensional para deslocamentos não-lineares de uma barra elástica (RIVERA; ANDRADE, 2000).

A organização deste capítulo é constituída em 3 seções. Na seção 3.1, são elencados alguns teoremas e definições que norteiam os argumentos utilizados nas deduções das seções que se seguem. Na seção 3.2 demonstra-se que o método CE/SE é semi-analítico quando aplicado ao problema (3.1) unidimensional com condições de contorno do tipo Dirichlet ou Neumann, isto é, a solução numérica é livre de erro de discretização. O método é estendido à uma classe de problemas não-lineares unidimensionais (seção 3.2.5). Para alguns casos, determinam-se soluções implícitas do tipo D'Alembert. Ao fim do presente capítulo, na seção 3.3, estuda-se o problema bidimensional por meio de um esquema híbrido entre métodos CE/SE e a Transformada de Fourier.

3.1 CONCEITOS AUXILIARES

Esta seção trata de alguns resultados importantes para o desenvolvimento das ideias deste capítulo. Os primeiros conceitos a serem tratados dizem respeito a erros de discretização, erros de truncamento local e consistência, enunciados conforme Ferziger e Perić (2002) e Lima (2011).

Definição 3.1.1 (Erro de discretização global). Sejam \mathbf{u} e $\bar{\mathbf{u}}_\Psi$ os vetores solução das equações contínua e discretizada sobre uma malha Ψ , respectivamente. O erro de discretização global é definido por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Psi = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_\Psi. \quad (3.4)$$

Definição 3.1.2 (Erro de truncamento local). Dada uma equação diferencial $\mathcal{P}(u) = f$ e uma equação de diferenças finitas $P_\Psi(u) = f$. O erro de truncamento local pode ser formalmente definido como a diferença entre as equações contínua e discreta, ou seja,

$$\mathcal{T}_\Psi = \mathcal{P}(u) - P_\Psi(u), \quad (3.5)$$

para funções suaves.

Neste sentido, \mathcal{T}_Ψ representa o erro cometido em uma iteração do método numérico, supondo que a solução exata é conhecida no(s) passo(s) anterior(es).

Definição 3.1.3 (Consistência). Diz-se que um esquema de diferenças finitas é consistente com a equação diferencial parcial se, para toda função suave u ,

$$\mathcal{T}_\Psi \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta t, \Delta x \longrightarrow 0, \quad (3.6)$$

com convergência pontual para cada (x, t) . Na consistência, as malhas precisam estar encaixadas (refinando).

Definição 3.1.4 (Estabilidade). Um método de solução numérica é dito ser estável se ele não amplia os erros que aparecem no processo de obtenção da solução numérica.

Para problemas temporais, estabilidade garante que o método produz uma solução limitada sempre que a solução da equação exata for limitada.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer). Para um problema de EDP's de evolução bem posto, um esquema em diferenças finitas linear consistente é convergente se e somente se é estável.

Teorema 3.1.2 (Teorema da divergência de Gauss). Seja $E \subset \mathbb{R}^3$ uma região compacta cuja borda é a superfície S orientada segundo o campo de vetores normais exteriores unitários \mathbf{N} . Se $\mathbf{F} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um campo vetorial de classe C^1 , então vale a igualdade

$$\int_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma. \quad (3.7)$$

Definição 3.1.5 (Normas). Seja $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ um vetor em \mathbb{R}^n tal que $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, $i = 0, \dots, n-1$. Define-se nestes espaços as normas L^1 e L^2 na malha como

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \Delta x \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\Delta x \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Fundamentam-se, a partir desses conceitos, os argumentos que se apresentam junto à seção 3.2 seguinte.

3.2 EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL

Seja $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e Γ o seu contorno. Considere o problema de valor inicial formado pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.9)$$

com condições iniciais prescritas

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (3.10)$$

A descrição dos parâmetros e variáveis foi realizada no início do capítulo. A equação (3.9) é conhecida como equação da onda homogênea unidimensional. O objetivo desta seção é mostrar que existe um esquema CE/SE que resolve a equação (3.9) de modo semi-analítico (livre de erro de discretização). A construção da malha espaço-tempo é determinante para o sucesso dessa afirmação. É conhecido que a equação (3.9) possui duas retas características: $x - ct = \xi$ e $x + ct = \eta$, em que ξ e η são duas constantes. Considera-se uma malha com $n + 1$ pontos de discretização (com n elementos) no espaço, tal que o incremento espacial seja dependente do incremento temporal. A relação utilizada é aquela fornecida pelas retas características, isto é, $\Delta x = c\Delta t$, conforme FIGURA 5a.

Sejam os elementos de conservação e de solução $CE(i, j) \equiv SE(i, j)$, conforme FIGURA 5b, tais que $S(CE(i, j)) = \bigcup_{i=1}^4 L_i$. Integrando a equação (3.9), ao longo deste volume de controle e aplicando o teorema da divergência de Gauss 3.1.2, obtém-se

$$\int_{CE(i,j)} \text{div } \mathbf{F} dxdt = \oint_{S(CE(i,j))} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \sum_{i=1}^4 \int_{L_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_i ds = 0, \quad (3.11)$$

em que $\mathbf{F} = (-c^2 u_x, u_t)$.

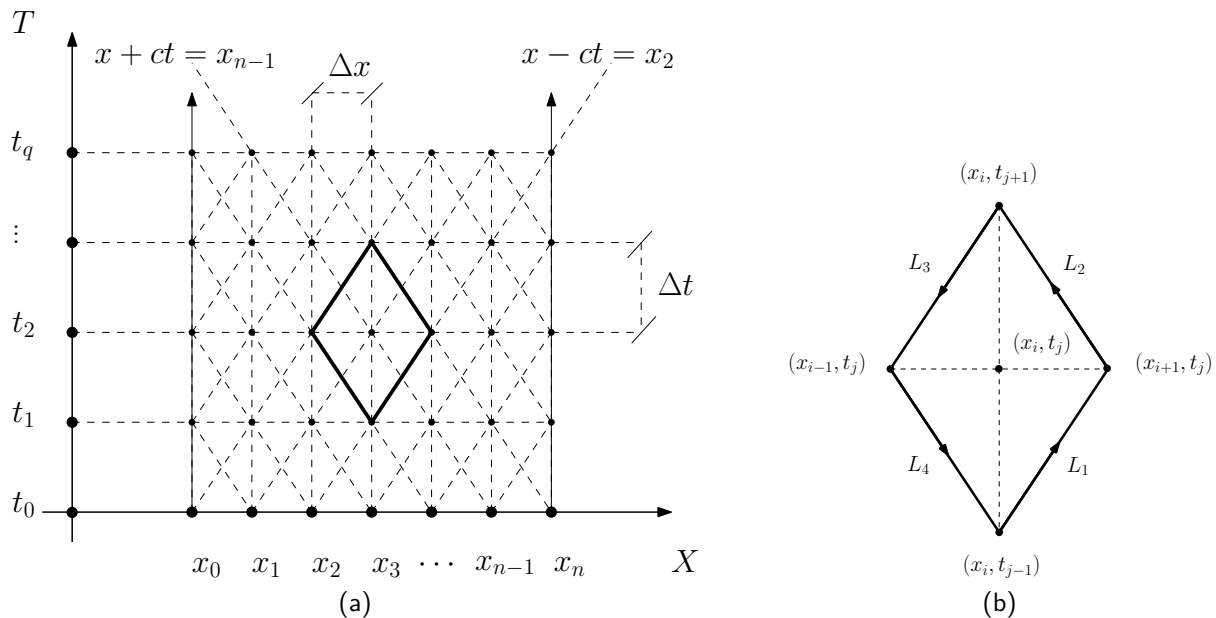


FIGURA 5 – (a) Malha espaço-tempo escalonada por meio da relação incremental $c\Delta t = \Delta x$; (b) Elementos de conservação e elementos de solução $CE(i, j) \equiv SE(i, j)$, com contornos limitados pelas curvas características da equação (3.9).

Então:

- Sobre L_1 e L_3 , tem-se que os vetores normais são $\mathbf{N}_1 = (1, -c)$ e $\mathbf{N}_3 = (-1, c)$, de modo que,

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 ds &= \int_{L_1} (-c^2 u_x, u_t) \cdot (1, -c) ds = -c \int_{L_1} (cu_x + u_t) ds, \\ &= -c \int_{L_1} (u_x, u_t) \cdot (c, 1) ds = -c \int_{L_1} \nabla u(\mathbf{C}_1(s)) \cdot \mathbf{C}'_1(s) ds, \\ &= -c[u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1})], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_3 ds &= \int_{L_3} (-c^2 u_x, u_t) \cdot (-1, c) ds = c \int_{L_3} (cu_x + u_t) ds, \\ &= -c \int_{L_3} (u_x, u_t) \cdot (-c, -1) ds = -c \int_{L_3} \nabla u(\mathbf{C}_3(s)) \cdot \mathbf{C}'_3(s) ds, \\ &= -c[u(x_{i-1}, t_j) - u(x_i, t_{j+1})], \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que $\mathbf{C}_1(s) = (x_i + c(s - t_{j-1}), s)$ para $t_{j-1} \leq s \leq t_j$ e $\mathbf{C}_3(s) = (x_i - c(s + t_{j+1}), -s)$ para $-t_{j+1} \leq s \leq -t_j$, são as parametrizações das retas que contém os segmentos L_1 e L_3 , respectivamente.

- Sobre L_2 e L_4 , encontra-se as parametrizações $\mathbf{C}_2(s) = (x_{i+1} + c(t_j - s), s)$ para $t_j \leq s \leq t_{j+1}$ e $\mathbf{C}_4(s) = (x_{i-1} + c(s + t_j), -s)$ para $-t_j \leq s \leq -t_{j-1}$, respectivamente. Os vetores normais sobre estes lados são $\mathbf{N}_2 = (1, c)$ e $\mathbf{N}_4 = -(1, c)$, respectivamente. Assim:

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 ds &= \int_{L_2} (-c^2 u_x, u_t) \cdot (1, c) ds = c \int_{L_2} (-cu_x + u_t) ds, \\ &= c \int_{L_2} (u_x, u_t) \cdot (-c, 1) ds = c \int_{L_2} \nabla u(\mathbf{C}_2(s)) \cdot \mathbf{C}'_2(s) ds, \\ &= c[u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i+1}, t_j)], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_4 ds &= \int_{L_4} (-c^2 u_x, u_t) \cdot (-1, -c) ds = c \int_{L_4} (cu_x - u_t) ds, \\ &= c \int_{L_4} (u_x, u_t) \cdot (c, -1) ds = c \int_{L_4} \nabla u(\mathbf{C}_4(s)) \cdot \mathbf{C}'_4(s) ds, \\ &= c[u(x_i, t_{j-1}) - u(x_{i-1}, t_j)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo as equações (3.12) a (3.15) em (3.11), após a soma dos termos semelhantes resultará em

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1}), \quad (3.16)$$

com $1 \leq i \leq n-1$, $j \geq 1$ e substituindo $u(x_i, t_j)$ por u_i^j , a equação (3.16) tomará a forma

$$u_i^{j+1} = u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - u_i^{j-1}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1, j \geq 1. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é o esquema explícito CE/SE desenvolvido para o problema (3.9). Estes cálculos provam o seguinte

Teorema 3.2.1 (Regra do Paralelogramo das Características (JOHN, 1910)). *Se $u \in C^2(a, b)$ é solução de (3.9), então u é também solução de*

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1}), \quad (3.18)$$

para $x_i = a + i\Delta x$, $1 \leq i \leq n - 1$, $t_j = j\Delta t$, $1 \leq j \in \mathbb{N}$, $\Delta x = (b - a)/n$ e $c\Delta t = \Delta x$.

O teorema 3.2.1 anterior afirma que uma função de classe $C^2(a, b)$, solução da equação diferencial (3.9), é também solução da equação discreta (3.17). Uma consequência direta deste resultado é o seguinte

Corolário 3.2.2. *Se $u \in C^2(a, b)$ e $c\Delta t = \Delta x$, então o esquema (3.17) possui erro de truncamento local nulo.*

Demonstração. Seja $u \in C^2(a, b)$ uma solução em sentido clássico de (3.9). Pelo teorema 3.2.1, u também é solução de (3.17). Sendo assim, pela definição 3.1.2,

$$\mathcal{T}_{\Psi} = (u_{tt} - c^2 u_{xx}) - (u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_j) - u(x_{i+1}, t_j) + u(x_i, t_{j-1})) = 0 - 0 = 0.$$

□

Antes de prosseguir, é importante destacar que:

(i) O esquema (3.17), deduzido pela formulação CE/SE, é idêntico àquele obtido pelo método das diferenças finitas:

$$u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j), \quad (3.19)$$

se $c\Delta t = \Delta x$ (veja FIGURA 5).

(ii) Erro de truncamento local igual a zero (corolário 3.2.2) significa que a solução no passo de tempo t_{j+1} é exata (livre de erro), na hipótese de que as soluções nos passos anteriores, t_j e t_{j-1} , também sejam. Em outras palavras, não é possível afirmar erro nulo em termos globais, pois podem existir erros de discretização devidos às condições iniciais e condições de contorno, além do erro de truncamento inerente ao cálculo no computador (arredondamento).

Para o caso não-homogêneo, a integral em (3.11) sobre o termo fonte $f(x, t) \in C^1(a, b)$ é dada por

$$\int_{CE(i,j)} f(x, t) dV = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_i - c(t_{j+1} - \tau)}^{x_i + c(t_{j+1} - \tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{x_i - c(\tau - t_{j-1})}^{x_i + c(\tau - t_{j-1})} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (3.20)$$

de modo que (3.16) se torna

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1}) + \frac{1}{2c} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_i-c(t_{j+1}-\tau)}^{x_i+c(t_{j+1}-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \\ + \frac{1}{2c} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{x_i-c(\tau-t_{j-1})}^{x_i+c(\tau-t_{j-1})} f(s, \tau) ds d\tau, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1, j \geq 1. \quad (3.21)$$

Quando a integral sobre f for de difícil avaliação, utiliza-se uma aproximação por quadratura. O esquema produzido é, em todo caso, de passo múltiplo, pois para obter a solução no tempo $j+1$ é necessário conhecê-la nos tempos j e $j-1$. Isso implica, como já mencionado, que em termos globais ainda existe um erro inerente que é devido às condições de contorno e iniciais que devem ser consideradas.

As próximas seções, 3.2.1 e 3.2.2, possuem este propósito: realizar um tratamento sobre os contornos e condições iniciais que produza esquemas para o primeiro avanço no tempo com a mesma propriedade vista no teorema 3.2.1.

3.2.1 Início do processo: uso das condições iniciais

As equações (3.16) e (3.21) não podem ser utilizadas para $j=0$, tendo em vista que u_i^{j-1} é desconhecido. Por essa razão, para o início do processo, considere o elemento de conservação (e de solução) triangular auxiliar $CE(i, 0) \equiv SE(i, 0)$ ilustrado pela FIGURA 6.

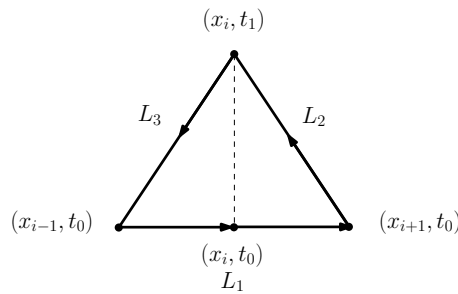


FIGURA 6 – Elementos de conservação e de solução auxiliares $CE(i, 0) \equiv SE(i, 0)$ utilizados no cálculo do primeiro passo de tempo.

Integrando a equação (3.9) sobre o referido elemento e aplicando novamente o teorema da divergência:

$$\int_{CE(i,0)} f(x, t) dx dt = \int_{CE(i,0)} \text{div } \mathbf{F} dx dt = \int_{S(CE(i,0))} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \sum_{i=1}^3 \int_{L_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_i ds. \quad (3.22)$$

Então, de forma análoga ao caso anterior, tem-se que as integrais de linha sobre as faces L_1 , L_2 e L_3 correspondem, respectivamente, a

$$\int_{L_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 ds = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_t(x, t_0) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi(x) dx, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\int_{L_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 ds &= c \int_{L_2} u_x dx + u_t dt = c[u(x_i, t_1) - u(x_{i+1}, t_0)], \\ &= c[u(x_i, t_1) - \phi(x_{i+1})],\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}\int_{L_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_3 ds &= -c \int_{L_3} u_x dx + u_t dt = -c[u(x_{i-1}, t_0) - u(x_i, t_1)], \\ &= -c[\phi(x_{i-1}) - u(x_i, t_1)],\end{aligned}\quad (3.25)$$

enquanto que a integral de domínio sobre o termo fonte é

$$\int_{CE(i,0)} f(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_i - c(t_1 - \tau)}^{x_i + c(t_1 - \tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (3.26)$$

Então, substituindo as equações de (3.23) a (3.26) em (3.22), obtém-se

$$u(x_i, t_1) = \frac{\phi(x_{i+1}) + \phi(x_{i-1})}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi(x) dx + \frac{1}{2c} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_i - c(t_1 - \tau)}^{x_i + c(t_1 - \tau)} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (3.27)$$

com $1 \leq i \leq n - 1$.

A equação anterior é conhecida como solução de D'Alembert para o problema de Cauchy e determina os valores de u no primeiro passo de tempo de modo exato. Se as condições de contorno são essenciais (ou de Dirichlet), então, após a determinação de u no primeiro passo de tempo com a equação (3.27), basta utilizar a equação (3.17) ou (3.21), conforme o problema seja homogêneo ou não, para determinar a variável nos demais avanços de tempo. Condições de contorno naturais (ou de Neumann) são abordadas na subseção 3.2.2 a seguir.

3.2.2 Condições de contorno naturais

Se as condições são naturais (ou de Neumann), em um ou ambos os contornos, então serão utilizados novos elementos de conservação e de solução (veja FIGURA 7).

3.2.2.1 Contorno esquerdo ($x = a$)

Suponha que $u_x(a, t) = g(t)$ seja conhecido, então no contorno esquerdo, considera-se um volume de controle triangular $CE(0, j)$ dado pela FIGURA 7a. Ao integrar a equação sobre este volume, encontra-se, por meio do mesmo raciocínio, a seguinte equação:

$$\begin{aligned}u(x_0, t_{j+1}) &= 2u(x_1, t_j) - u(x_0, t_{j-1}) + c \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} g(\tau) d\tau + \\ &\quad \frac{1}{c} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_0}^{x_0 + c(t_{j+1} - \tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \frac{1}{c} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{x_0}^{x_0 + c(\tau - t_{j-1})} f(s, \tau) ds d\tau,\end{aligned}\quad (3.28)$$

para $j \geq 1$.

Observa-se que a equação (3.28) anterior não pode ser utilizada quando $j = 0$, tendo em vista que $u(x_0, t_{j-1})$ não é definido. Para solucionar este problema, repete-se o raciocínio

sobre a célula $CE(0, 0)$ representada pela FIGURA 7c. A expressão resultante das simplificações é:

$$u(x_0, t_1) = \phi(x_1) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) dx + c \int_{t_0}^{t_1} g(\tau) d\tau + \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_0+c(t_1-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (3.29)$$

As equações (3.28) e (3.29) são adaptações do método CE/SE utilizadas no contorno esquerdo.

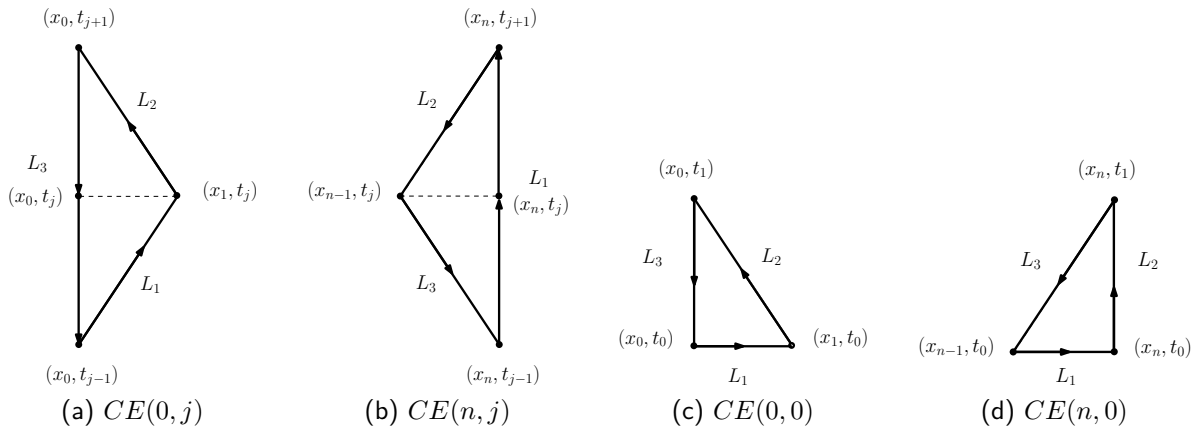


FIGURA 7 – Elementos de conservação e de solução auxiliares utilizados no cálculo do contorno esquerdo (a) $CE(0, j)$, (c) $CE(0, 0)$ e direito (b) $CE(n, j)$, (d) $CE(n, 0)$.

3.2.2.2 Contorno direito ($x = b$)

Se $u_x(b, t) = h(t)$ é prescrito, então no contorno direito, utiliza-se o CE auxiliar triangular dado pela FIGURA 7b. Ao integrar a equação sobre este volume, encontra-se:

$$u(x_n, t_{j+1}) = 2u(x_{n-1}, t_j) - u(x_n, t_{j-1}) + c \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} h(\tau) d\tau + \frac{1}{c} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_n-c(t_{j+1}-\tau)}^{x_n} f(s, \tau) ds d\tau + \frac{1}{c} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{x_n-c(\tau-t_{j-1})}^{x_n} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (3.30)$$

para $j \geq 1$.

Observa-se, novamente, que a equação (3.30) anterior não pode ser utilizada quando $j = 0$, pois $u(x_n, t_{j-1})$ não é definido. Para solucionar este problema repete-se o raciocínio sobre a célula representada pela FIGURA 7d. A expressão resultante das simplificações é:

$$u(x_n, t_1) = \phi(x_{n-1}) + \frac{1}{c} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \psi(x) dx + c \int_{t_0}^{t_1} h(\tau) d\tau + \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_n-c(t_1-\tau)}^{x_n} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (3.31)$$

As equações (3.30) e (3.31) correspondem as condições de contorno do método CE/SE.

3.2.3 Exemplos

Considera-se nesta subsecção alguns exemplos numéricos típicos para a equação da onda (3.9). Os parâmetros relativos ao domínio são fixados em $a = 0$, $b = 2$ e $L = b - a = 2$. A velocidade da onda c varia conforme o problema, porém, os resultados são independentes do seu valor. O incremento temporal Δt obedece, conforme salientado nas deduções anteriores, a relação $\Delta t = \Delta x/c$, sendo $\Delta x = L/n$. Os resultados numéricos foram comparados com as soluções analíticas dos respectivos problemas que podem ser todos encontradas em Polyanin (2002). Os códigos computacionais estão dispostos no APÊNDICE C.1.1.

Exemplo 3.2.1 (Barra com condições de contorno de Dirichlet variável no tempo). Considere a equação (3.9) na forma homogênea com as prescrições $u(a, t) = u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ e $u(b, t) = \text{sen}(\omega t)$, sendo $\omega = \pi(3L)^{-1}$. Substituindo estes dados nas equações (3.21) e (3.27), obtém-se, respectivamente,

$$u_i^{j+1} = u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - u_i^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.32)$$

$$u_i^1 = \frac{u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0}{2}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (3.33)$$

A equação (3.32) é utilizada no interior da malha, enquanto que (3.33) é utilizada no primeiro passo de tempo. É importante salientar o número reduzido de operações envolvidas: 2 operações (1 soma e 1 divisão) para os cálculos do primeiro passo de tempo e 2 operações (1 soma e 1 divisão) nos demais passos. Os resultados numéricos foram obtidos utilizando $n+1 = 3$ pontos ao longo do espaço, incrementos $\Delta x = 1$ e $c = 1$ m/s. Foram tomados incrementos grosseiros para comprovar que o esquema é indiferente a magnitude do espaçamento. Na FIGURA 8a está apresentado o gráfico da solução numérica (pontos) e espectral (traço contínuo), avaliada ao longo do tempo sobre o único ponto interior da malha $x_1 = 1$. A FIGURA 8b contém uma ampliação da mesma.

A solução espectral para este problema pode ser determinada por série de Fourier (POLYANIN, 2002). A TABELA 1 computa os erros relativo e absoluto avaliados nas normas L^2 e L^1 (conforme equações em (3.8)) no tempo $t = 195$ s (observa-se na FIGURA 8b que este é um dos picos do gráfico). Para o truncamento da série de Fourier, estabeleceu-se que os coeficientes de Fourier \hat{u}_k seriam calculados até que $|\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}| < 10^{-20}$.

TABELA 1 – Erros relativo e absoluto das soluções em série e numérica, avaliados no tempo $t = 195$ s para o problema da barra com condições de contorno de Dirichlet.

Relativo (L^2)	Relativo (L^1)	Absoluto (L^2)	Absoluto (L^1)
$2,3613765 \times 10^{-3}$	$1,6742606 \times 10^{-3}$	$3,1189909 \times 10^{-3}$	$3,1189909 \times 10^{-3}$

Exemplo 3.2.2 (Problema não homogêneo com condições de Neumann). Seja agora o problema com condições iniciais: $u(x, 0) = 0$ e $u_t(x, 0) = \omega[\cos(\lambda x) - x^2]$; e condições de

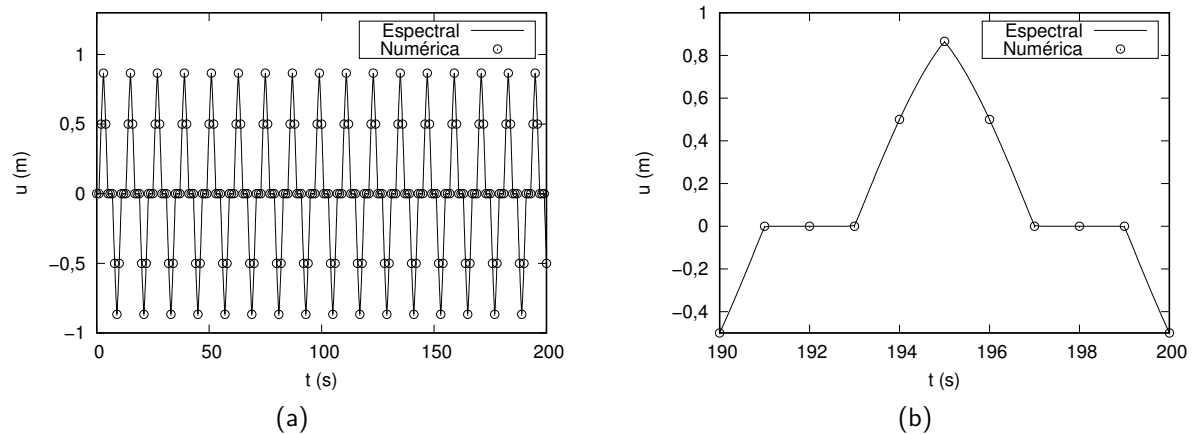


FIGURA 8 – (a) Solução espectral versus solução numérica para a equação linear da onda unidimensional homogênea com condições de contorno do tipo Dirichlet avaliada no ponto $x = 1$; (b) Ampliação da FIGURA 8a.

contorno de Neumann: $u_x(a, t) = 0$ e $u_x(b, t) = -4\text{sen}(\omega t)$, para $\omega = \pi(3L)^{-1}$ e $\lambda = \pi L^{-1}$. Considere, ainda, que a equação (3.9) seja não-homogênea com termo fonte

$$f(x, t) = \text{sen}(\omega t)[\cos(\lambda x)(c^2\lambda^2 - \omega^2) + \omega^2(x^2 - t) + 2c^2] + 2\omega \cos(\omega t). \quad (3.34)$$

Este problema tem solução analítica¹ $u(x, t) = \text{sen}(\omega t)[\cos(\lambda x) - x^2 + t]$. Para o cálculo da solução numérica utilizou-se $n + 1 = 3$ pontos: o contorno esquerdo ($x = a$), um ponto interior ($x = a + \Delta x$) e o contorno direito ($x = b$). Dessa forma os incrementos utilizados foram $\Delta x = 1,0$ e $\Delta t = 0,25$. O esquema utilizado envolve todas as equações deduzidas nos parágrafos anteriores (equações (3.21), (3.27) e (3.28)-(3.31)). As integrais sobre o termo fonte foram avaliadas por quadratura de Gauss-Legendre (5 pontos-pesos). A FIGURA 9 contém os gráficos da solução numérica dos três pontos da malha, computados no intervalo $0 \leq t \leq 200$ s. Embora a função cresça ao longo do tempo, a solução numérica se mantém estável, sem suavização, conforme gráfico constante na FIGURA 9d, ampliação das FIGURAS 9a, 9b e 9c.

TABELA 2 – Erros relativo e absoluto das soluções analítica e numérica, avaliados no tempo $t = 200$ s para o problema não homogêneo com condições de contorno de Neumann.

Relativo (L^2)	Relativo (L^1)	Absoluto (L^2)	Absoluto (L^1)
$4,1634276 \times 10^{-13}$	$3,4059601 \times 10^{-13}$	$1,2387176 \times 10^{-10}$	$1,7550406 \times 10^{-10}$

Os erros relativo e absoluto calculados nas normas L^1 e L^2 no tempo fixo em $t = 200$ s, constantes na TABELA 2, ocorrem devido ao acúmulo dos erros de arredondamento.

¹ Esta solução foi obtida pelo método da solução fabricada, em que o termo-fonte é construído de tal forma que a função-solução satisfaça a EDP. Assim, a função-solução determina o termo fonte (3.34).

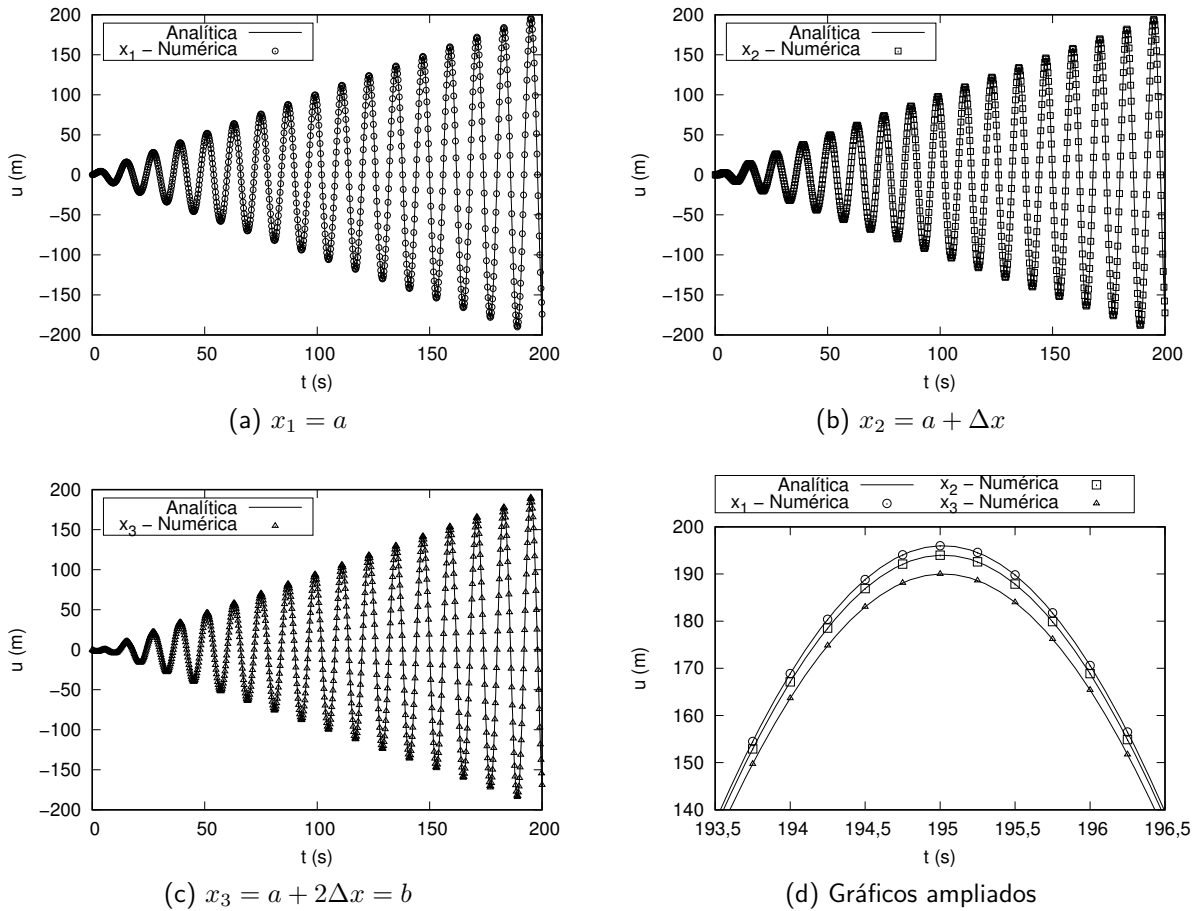


FIGURA 9 – Solução analítica versus solução numérica da equação linear da onda unidimensional não-homogênea, com termo fonte dado pela equação (3.34) e condições de contorno do tipo Neumann, avaliada em pontos fixos do espaço e velocidade de onda $c = 4$ m/s.

Exemplo 3.2.3 (Problema com descontinuidade nos dados iniciais). Considere agora o problema, também homogêneo, que modela uma corda inicialmente em repouso percutida por um martelo plano de largura 2δ . Os dados de contorno (Dirichlet) para este problema são todos nulos e as condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} \nu, & \text{se } |x - \xi| \leq \delta, \\ 0, & \text{se } |x - \xi| > \delta, \end{cases} \quad (3.35)$$

onde $0 < \xi < L$. O objetivo deste problema é avaliar a presença de descontinuidades a partir dos dados iniciais. Os gráficos nas FIGURAS 10a e 10c apresentam o comportamento da solução numérica ao longo do tempo nos três pontos interiores da malha ($n + 1 = 5$), com incremento espacial de $\Delta x = 0,5$ e velocidade de onda $c = 3$ m/s. Estas FIGURAS dispõem, também, os gráficos referentes à solução espectral avaliadas nos respectivos pontos. A solução espectral, obtida por série de Fourier (FIGUEIREDO, 2012), foi truncada a partir do critério $|\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}| < 10^{-50}$, em que \hat{u}_k é o coeficiente de Fourier. As FIGURAS 10b e 10d representam ampliações das FIGURAS 10a e 10c, respectivamente. É evidente, a partir destas ampliações,

a fragilidade da solução em série nas regiões de inexistência de derivadas (as “pontas” ou “quinas” dos gráficos): a solução obtida pelo esquema CE/SE proposto não sofre influência nestes pontos. Na TABELA 3 encontram-se os erros absolutos da solução numérica e da série truncada, calculados ambos nas normas L^1 e L^2 no tempo $t = 29, \bar{6}$ s². Observa-se que os valores são virtualmente idênticos. Pode-se concluir através da análise gráfica e quantitativa que a solução obtida pelo esquema CE/SE é idêntica à espectral.

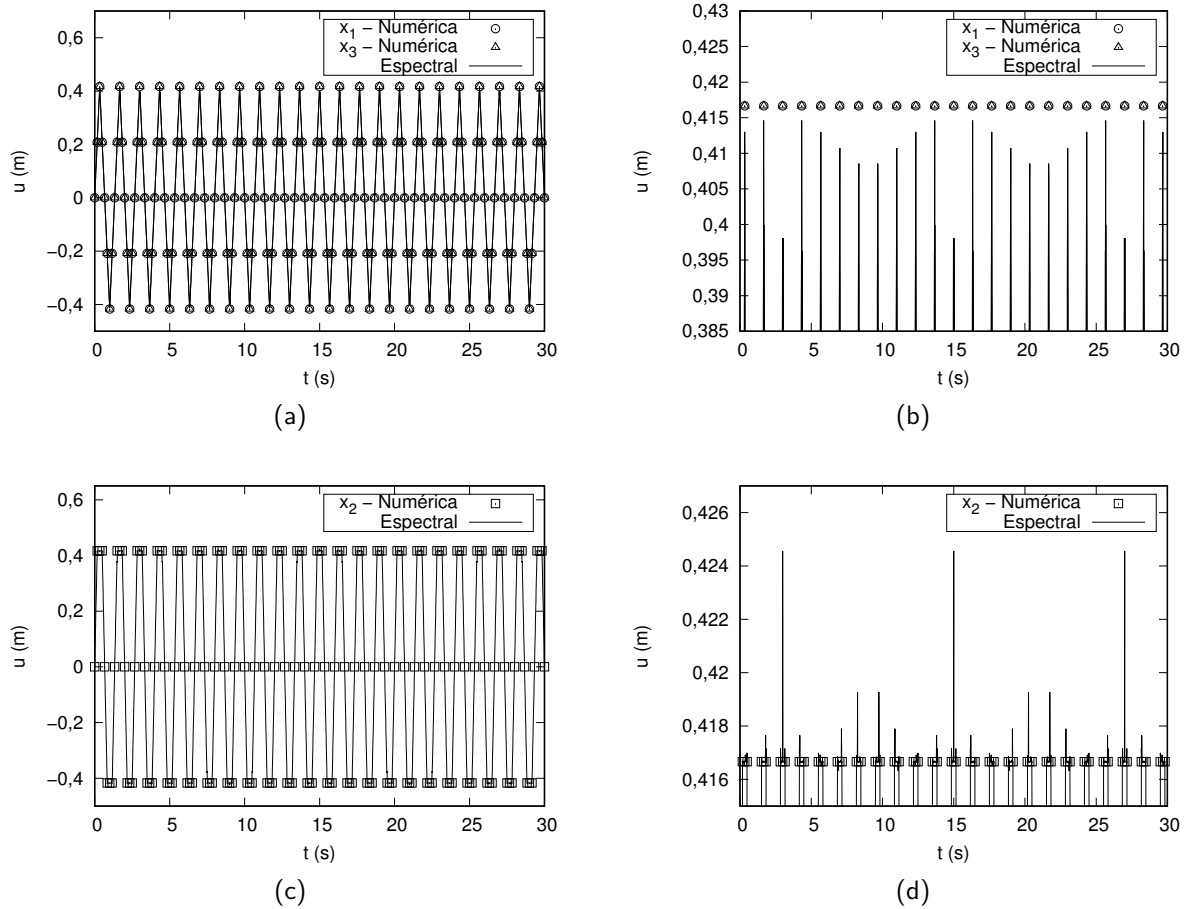


FIGURA 10 – (a)-(c) Solução espectral versus solução numérica para a equação da onda linear unidimensional homogênea com condições de contorno do tipo Dirichlet e condições iniciais descontínuas (equação (3.35)), avaliadas nos 3 pontos interiores da malha, com parâmetros $\xi = 1,0$ m, $\delta = 0,5$ m e $\nu = 2,5$ m/s; (b)-(d) Ampliações das FIGURAS 10a e 10c, respectivamente.

TABELA 3 – Erros relativo e absoluto das soluções em série e numérica, avaliados no tempo $t = 29, \bar{6}$ s para o problema da corda percutida por um martelo.

Relativo (L^2)	Relativo (L^1)	Absoluto (L^2)	Absoluto (L^1)
$8,6933414 \times 10^{-2}$	$7,7187071 \times 10^{-2}$	$4,1777760 \times 10^{-2}$	$4,5350864 \times 10^{-2}$

² A partir da FIGURA 10b é possível observar que neste tempo a curva da solução em série é distinta da numérica, esta observação motivou a escolha do tempo $t = 29, \bar{6}$ s para análise do erro.

Para completar a análise, considerou-se o gráfico constante na FIGURA 11a que apresenta as soluções numérica e analítica avaliadas ao longo do domínio espacial, $a \leq x \leq b$, com t fixo em 1 s. Observa-se que existem quatro pontos com rápida mudança caracterizando a inexistência de derivadas de primeira ordem. Ampliando-se a vizinhança desses pontos, FIGURAS 11b e 11c, observa-se a presença do fenômeno de Gibbs. Mais importante é a constância produzida pela solução numérica que não oscila na região desses pontos.

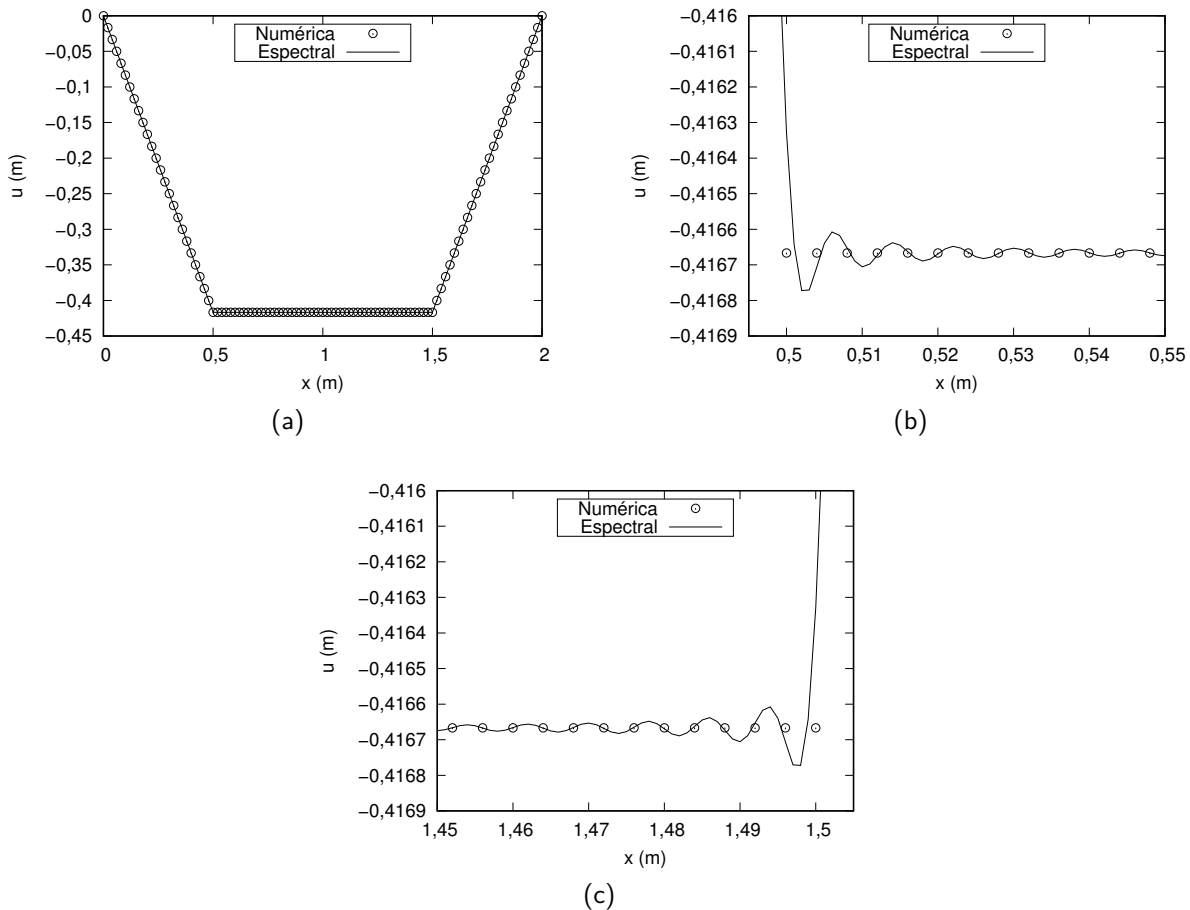


FIGURA 11 – (a) Solução analítica versus solução numérica da equação da onda linear homogênea unidimensional com condições de contorno de Dirichlet e condições iniciais descontínuas (equação (3.35)), avaliada no domínio espacial fixado o tempo em $t = 1$ s; (b)-(c) Ampliações da FIGURA 11a nos pontos com rápida mudança com presença do fenômeno de Gibbs.

Para finalizar, será feita uma análise importante do ponto de vista teórico. Como destacado anteriormente, o esquema CE/SE (3.32) para a EDP homogênea é idêntico àquele obtido por diferenças finitas (3.19), quando impõe-se $c\Delta t = \Delta x$.

Analisando este esquema (3.32), à luz do método de diferenças finitas, conclui-se da mesma forma que o erro de truncamento local associado ao referido esquema é igual a zero (corolário 3.2.2). Porém, neste caso é preciso supor que a solução $u \in C^\infty(X)$, ou seja, que u e todas as suas derivadas sejam contínuas em $X \subset \mathbb{R}^2$, pois, com isso, a função u poderá ser

expandida em série de Taylor na vizinhança do ponto (x_i, t_j) e, quando substituída em (3.32), resultará em

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \frac{\Delta t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \frac{\Delta x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \frac{(-\Delta x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \frac{(-\Delta t)^k}{k!}, \quad (3.36)$$

que é equivalente a

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\Delta t^{2k}}{(2k)!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \frac{\Delta x^{2k}}{(2k)!}, \quad (3.37)$$

tendo em vista que apenas os termos pares de (3.36) permanecem. Agora, ao se subtrair a equação (3.9) da equação (3.37), encontra-se o erro de truncamento local (definição 3.1.2):

$$\mathcal{T}_{\Psi} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\Delta t^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \frac{\Delta x^{2k}}{(2k)!}. \quad (3.38)$$

Basta observar agora que $\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} = c^{2k} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}$, $k \geq 0$, pela EDP homogênea analisada e que, além disso, está-se considerando $c\Delta t = \Delta x$. Com isso a equação do erro de truncamento torna-se

$$\mathcal{T}_{\Psi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \frac{(c\Delta t)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \frac{\Delta x^{2k}}{(2k)!} = 0. \quad (3.39)$$

O que o método CE/SE demonstrou foi que essa hipótese de continuidade pode ser extremamente enfraquecida. Conforme teorema 3.2.1, basta que u seja de classe $C^2(X)$, ou seja, que u seja uma solução que possua derivadas contínuas até a segunda ordem. Porém, pode-se ir um pouco mais além, pois essa hipótese diz respeito às soluções da equação diferencial. A equação integral é superior a equação diferencial, no sentido de que esta última é derivada da primeira, sobre a hipótese (de certo modo cara) de regularidade (FIGUEIREDO, 2012, p. 172). Isto significa que uma solução que satisfaz a lei integral não precisa necessariamente possuir derivadas de primeira e segunda ordem contínuas. O método CE/SE baseia-se na formulação integral, por isso que a resposta numérica deste exemplo é tão precisa, na verdade é a própria solução da equação integral.

Saliente-se que, do ponto de vista do método das diferenças finitas, a propriedade de erro de truncamento localmente nulo só é válida para a equação homogênea. Isso porque para a equação não-homogênea não é possível estabelecer a igualdade $\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} = c^{2k} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}$, $k \geq 0$. Assim, mesmo que se estabeleça $c\Delta t = \Delta x$, o erro de truncamento não irá se anular. Para o esquema CE/SE desenvolvido, no entanto, a afirmação de erro de truncamento nulo continua válida.

O exemplo numérico a seguir é relevante pois auxiliará na resolução da equação bidimensional.

3.2.4 Equação de Klein-Gordon

Seja o problema não homogêneo particular com termo fonte³ $f(x, t) = -m^2u(x, t)$, isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -m^2 u, \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.40)$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (3.41)$$

A equação (3.40) é conhecida como equação de Klein-Gordon. Um caminho para se resolver este problema é aproximar a integral dupla sobre o termo fonte em (3.20). Apresenta-se uma possível aproximação no APÊNDICE A.1.1. Entretanto, tal resultado produz um esquema com problemas de dispersão e dissipação numérica (ver APÊNDICE A.1.4), conforme FIGURA 12.

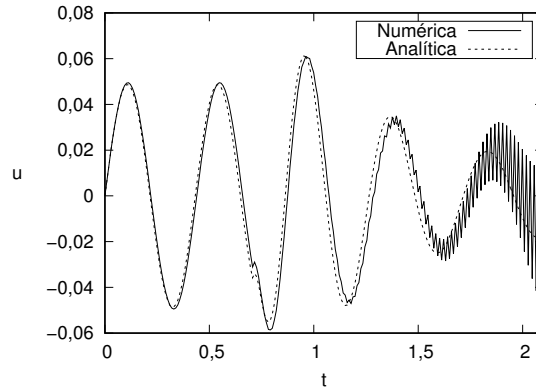


FIGURA 12 – Dispersão numérica verificada na solução da equação (3.40) avaliada no ponto $x = 1$, com parâmetros, condições iniciais e de contorno descritos todos no exemplo 3.2.4, utilizando uma aproximação por polinômios de Lagrange descrita no APÊNDICE A.1.1.

A fim de solucionar estes problemas de dispersão e dissipação, realizou-se uma mudança de variáveis da forma $u(x, t) = e^{-mx/c}v(x, t)/2$, de modo que

$$u_{tt} = \frac{1}{2}e^{-mx/c}v_{tt} \quad \text{e} \quad u_{xx} = \frac{m^2}{2c^2}e^{-mx/c}v - \frac{m}{c}e^{-mx/c}v_x + \frac{1}{2}e^{-mx/c}v_{xx}, \quad (3.42)$$

e substituindo as equações de (3.42) em (3.40), obtém-se a equação modificada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2mc \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.43)$$

enquanto que os dados iniciais são modificados para

$$v(x, 0) = 2e^{mx/c}\phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 2e^{mx/c}\psi(x). \quad (3.44)$$

Agora, sob as mesmas condições do teorema 3.2.1, integrando a equação anterior sob o volume representado pela FIGURA 5b, com $\mathbf{F} = (-c^2v_x + 2mcv, v_t)$ em (3.11), obtém-se

³ Aqui, $-m^2u$ é considerado um termo fonte, tendo em vista a aproximação que será empregada.

- Sobre L_1 e L_3 :

$$\begin{aligned}\int_{L_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 ds &= \int_{L_1} (-c^2 v_x + 2mcv, v_t) \cdot (1, -c) ds = -c \int_{L_1} (cv_x + v_t - 2mv) ds, \\ &= -c[v(x_{i+1}, t_j) - v(x_i, t_{j-1})] + 2mc \int_{t_{j-1}}^{t_j} v(\mathbf{C}_1(s)) ds, \quad (3.45)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{L_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_3 ds &= \int_{L_3} (-c^2 v_x + 2mcv, v_t) \cdot (-1, c) ds = c \int_{L_3} (cv_x + v_t - 2mv) ds, \\ &= -c[v(x_{i-1}, t_j) - v(x_i, t_{j+1})] - 2mc \int_{-t_{j+1}}^{-t_j} v(\mathbf{C}_3(s)) ds, \quad (3.46)\end{aligned}$$

em que $\mathbf{C}_1(s) = (x_i + c(s - t_{j-1}), s)$ para $t_{j-1} \leq s \leq t_j$ e $\mathbf{C}_3(s) = (x_i - c(s + t_{j+1}), -s)$ para $-t_{j+1} \leq s \leq -t_j$.

- Sobre L_2 e L_4 :

$$\begin{aligned}\int_{L_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 ds &= \int_{L_2} (-c^2 v_x + 2mcv, v_t) \cdot (1, c) ds = c \int_{L_2} (-cv_x + v_t + 2mv) ds, \\ &= c[v(x_i, t_{j+1}) - v(x_{i+1}, t_j)] + 2mc \int_{t_j}^{t_{j+1}} v(\mathbf{C}_2(s)) ds, \quad (3.47)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{L_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_4 ds &= \int_{L_4} (-c^2 v_x + 2mcv, v_t) \cdot (-1, -c) ds = c \int_{L_4} (cu_x - u_t - 2mv) ds, \\ &= c[v(x_i, t_{j-1}) - v(x_{i-1}, t_j)] - 2mc \int_{-t_j}^{-t_{j-1}} v(\mathbf{C}_4(s)) ds, \quad (3.48)\end{aligned}$$

em que $\mathbf{C}_2(s) = (x_{i+1} + c(t_j - s), s)$ para $t_j \leq s \leq t_{j+1}$ e $\mathbf{C}_4(s) = (x_{i-1} + c(s + t_j), -s)$ para $-t_j \leq s \leq -t_{j-1}$.

Conforme observa-se nas equações (3.45)-(3.48), quando o termo fonte depende de u , u_x e/ou u_t deve-se empregar uma aproximação numérica, diferentemente do caso demonstrado no teorema 3.2.1. Observa-se também que estas são integrais de contorno sobre o volume de controle (FIGURA 5b) e que o problema de aproximar uma integral dupla foi substituído pelo de aproximar uma integral de linha.

Utilizando a regra do trapézio, as integrais presentes nas equações (3.45)-(3.48) tornam-se, respectivamente,

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} v(\mathbf{C}_1(s)) ds \approx \frac{\Delta t}{2} [v(\mathbf{C}_1(t_j)) + v(\mathbf{C}_1(t_{j-1}))] = \frac{\Delta t}{2} (v_{i+1}^j + v_i^{j-1}), \quad (3.49)$$

$$\int_{-t_{j+1}}^{-t_j} v(\mathbf{C}_3(s)) ds \approx \frac{\Delta t}{2} [v(\mathbf{C}_3(-t_{j+1})) + v(\mathbf{C}_3(-t_j))] = \frac{\Delta t}{2} (v_{i-1}^j + v_i^{j+1}), \quad (3.50)$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} v(\mathbf{C}_2(s)) ds \approx \frac{\Delta t}{2} [v(\mathbf{C}_2(t_j)) + v(\mathbf{C}_2(t_{j+1}))] = \frac{\Delta t}{2} (v_{i+1}^j + v_i^{j+1}) \quad (3.51)$$

e

$$\int_{-t_j}^{-t_{j-1}} v(\mathbf{C}_4(s)) ds \approx \frac{\Delta t}{2} [v(\mathbf{C}_4(-t_j)) + v(\mathbf{C}_4(-t_{j-1}))] = \frac{\Delta t}{2} (v_{i-1}^j + v_i^{j-1}). \quad (3.52)$$

Assim, substituindo os resultados destas equações, de (3.49) a (3.52), nas respectivas equações (3.45)-(3.48), obtém-se

$$\int_{L_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 ds = c [(m\Delta t - 1)v_{i+1}^j + (m\Delta t + 1)v_i^{j-1}], \quad (3.53)$$

$$\int_{L_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_3 ds = -c [(m\Delta t + 1)v_{i-1}^j + (m\Delta t - 1)v_i^{j+1}], \quad (3.54)$$

$$\int_{L_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 ds = c [(m\Delta t - 1)v_{i+1}^j + (m\Delta t + 1)v_i^{j+1}] \quad (3.55)$$

e

$$\int_{L_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_4 ds = -c [(m\Delta t + 1)v_{i-1}^j + (m\Delta t - 1)v_i^{j-1}], \quad (3.56)$$

e, substituindo-se novamente na equação (3.11), encontra-se finalmente,

$$v_i^{j+1} = (1 - m\Delta t)v_{i+1}^j + (1 + m\Delta t)v_{i-1}^j - v_i^{j-1}. \quad (3.57)$$

A partir do raciocínio da seção 3.2.1, segue-se que a equação (3.27), utilizada no início do processo, torna-se

$$v(x_i, t_1) = (1 - m\Delta t)e^{mx_{i+1}/c}\phi(x_{i+1}) + (1 + m\Delta t)e^{mx_{i-1}/c}\phi(x_{i-1}) + \frac{1}{c} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{mx/c}\psi(x)dx. \quad (3.58)$$

As equações (3.28)-(3.31) da seção 3.2.2, referentes às condições de contorno naturais, podem ser adaptadas de modo análogo.

3.2.4.1 Exemplo

Exemplo 3.2.4. Este exemplo numérico tem por objetivo avaliar a eficácia do método ao longo do tempo. Considera-se o problema (3.40), com posição e velocidade inicial definidos, respectivamente, por $u(a, 0) = 0$ e $u_t(x, 0) = \text{sen}(\omega x)$, sendo $\omega = 3\pi(2L)^{-1}$, em que $L = (b - a)m$. Para completar a definição do problema, considera-se condições de contorno nulas, isto é, $u(a, t) = 0 = u(b, t)$.

Os parâmetros utilizados na simulação foram: contornos $a = 0$ m e $b = 2$ m, velocidade de onda $c = \sqrt{2}$ m/s e $m^2 = 200$. Definiu-se o coeficiente $m^2 = 200$ arbitrariamente elevado para que se pudesse avaliar a instabilidade oriunda da dispersão observada e apresentada na FIGURA 12. Termos pequenos, tais como $m^2 = 1$ não apresentaram instabilidade, isso porque quando m tende a zero a relação de dispersão numérica converge para a analítica, conforme equação (A.24) do APÊNDICE A.1.4. Os cálculos se deram por meio das equações (3.57) e (3.58), sendo que o código computacional desenvolvido encontra-se no APÊNDICE C.1.2.

A fim de se ter uma melhor compreensão do comportamento da solução numérica em relação à analítica, construiu-se o gráfico da FIGURA 13a, para x igual a 1. Comparando

as FIGURAS 12 e 13b, lembrando que a primeira foi construída sobre os mesmos parâmetros e condições, observa-se que a mudança de variável $u = e^{-mx/cv}/2$ resolve o problema de dispersão (ver análise de dispersão do esquema no APÊNDICE A.1.5).

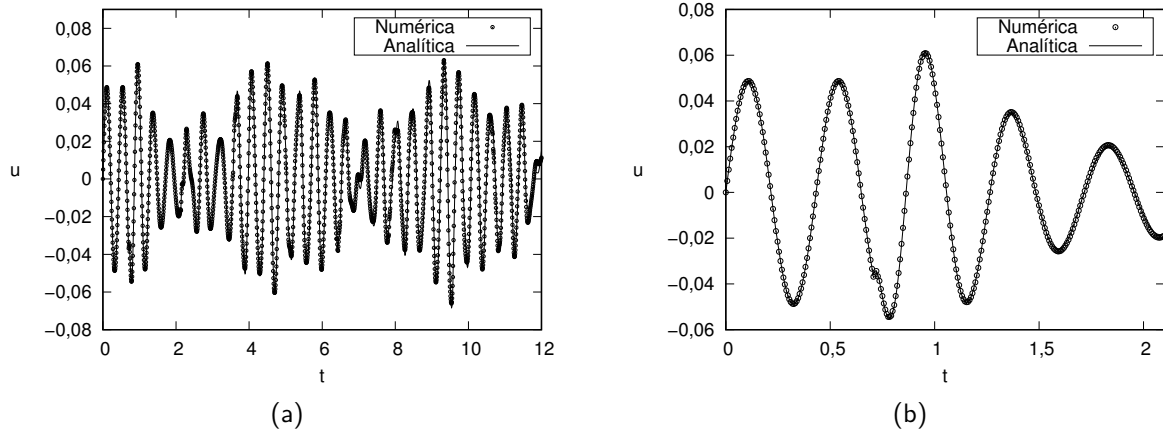


FIGURA 13 – (a) Solução analítica versus solução numérica da equação de Klein-Gordon linear, avaliada ao longo do tempo em $x = 1$, sobre uma malha com $n + 1 = 201$ pontos; (b) Ampliação do gráfico apresentado na FIGURA 13a para fins de comparação com àquele apresentado na FIGURA 12.

A TABELA 4 computa estimativas da ordem de precisão do método. Se um método tem ordem de precisão s , então espera-se que o erro comporte-se como (LEVEQUE, 2004)

$$\|\epsilon^N\| = \|\mathbf{u}^j - \hat{\mathbf{u}}^j\| = C(\Delta x)^s + \text{termos de alta ordem}, \quad (3.59)$$

quando a malha é refinada e $\Delta x \rightarrow 0$, sendo C alguma constante que depende da solução particular e do tempo t . Os “termos de alta ordem”, que dependem de potências de Δx , são assintoticamente negligenciáveis quando $\Delta x \rightarrow 0$. Assim, sejam os pares $(\|\epsilon^N\|, \Delta x_N)$ e $(\|\epsilon^n\|, \Delta x_n)$ de erro e incremento obtidos sobre uma malha N e seu refinamento n , respectivamente. Então, da equação (3.59), segue-se que

$$\begin{cases} \log \|\epsilon^N\| \approx \log |C| + s \log(\Delta x_N) \\ \log \|\epsilon^n\| \approx \log |C| + s \log(\Delta x_n) \end{cases}, \text{ isto é, } s \approx \frac{\log \|\epsilon_N\| - \log \|\epsilon_n\|}{\log(\Delta x_N) - \log(\Delta x_n)}. \quad (3.60)$$

As estimativas da TABELA 4 foram feitas com a equação (3.60), sobre erros calculados no tempo $t = 1$ s, $c = 1$ m/s, nas normas L^1 e L^2 (ver equação (3.8)). Observa-se, a partir desta TABELA, que o esquema possui ordem de precisão 2 ou, simplesmente, $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$.

Outra análise importante diz respeito à sensibilidade do esquema com relação ao coeficiente m^2 . Na FIGURA 14 estão dispostos gráficos do comportamento do erro em relação ao incremento Δx . Percebe-se, também, que o coeficiente m^2 está relacionado às intensidades do erro e do espaçamento Δx : quanto menor é o valor do coeficiente m^2 menor é a variação do erro em relação à Δx , o que implica que malhas menos refinadas produzem erros próximos

TABELA 4 – Ordem de precisão experimental do esquema CE/SE modificado à equação de Klein-Gordon (3.40), avaliado no tempo $t = 1$ s e velocidade da onda $c = 1$ m/s.

L/n	Erro (L^1)	Ordem	Erro (L^2)	Ordem
$L/40$	$1,01 \times 10^{-2}$	—	$8,56 \times 10^{-3}$	—
$L/80$	$2,52 \times 10^{-3}$	2,00	$2,17 \times 10^{-3}$	1,98
$L/160$	$6,44 \times 10^{-4}$	1,97	$5,59 \times 10^{-4}$	1,95
$L/320$	$1,66 \times 10^{-4}$	1,95	$1,60 \times 10^{-4}$	1,81
$L/640$	$5,13 \times 10^{-5}$	1,69	$7,76 \times 10^{-5}$	1,04

do ponto em que o erro se estabiliza (quando $m^2 = 1$ e $n = 40$: erro na casa de 10^{-4} ; $m^2 = 1$ e $n = 2560$: erro na casa de 10^{-5}).

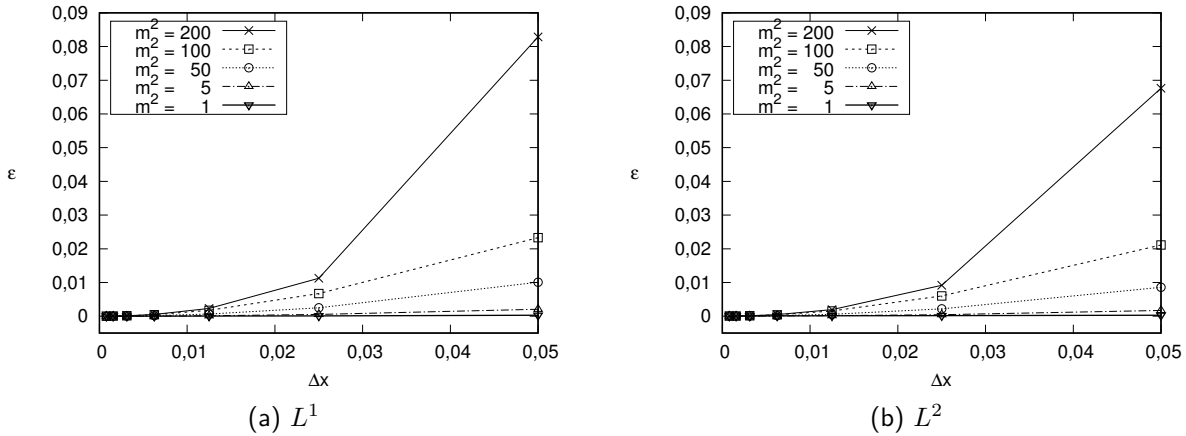


FIGURA 14 – Erros numéricos nas normas L^1 (a) e L^2 (b) em função do incremento Δx , avaliados no tempo $t = 1$ s, $c = 1$ m/s e variados coeficientes m^2 , para a solução da equação de Klein-Gordon (3.40).

Uma observação sobre condições de contorno de Robin. Supondo, que sobre o contorno direito fosse prescrita a condição de Robin $\alpha u_x(a, t) + \beta u(a, t) = g(t)$. Então, a equação (3.28) teria a forma

$$\begin{aligned}
 u(x_0, t_{j+1}) = & 2u(x_1, t_j) - u(x_0, t_{j-1}) + \frac{c}{\alpha} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} g(\tau) d\tau - \frac{c\beta}{\alpha} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u(x_0, \tau) d\tau \quad (3.61) \\
 & + \frac{1}{c} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_0}^{x_0+c(t_{j+1}-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \frac{1}{c} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{x_0}^{x_0+c(\tau-t_{j-1})} f(s, \tau) ds d\tau,
 \end{aligned}$$

isto é, ocorre a presença da função variável $u(x_0, \tau)$ desconhecida na integral, assim como acontece nas equações (3.49)-(3.52).

A seção 3.2.5 aborda a versão não-linear da equação (3.9). São desenvolvidas expressões semelhantes àsquelas obtidas nos parágrafos anteriores.

3.2.5 Problema não-linear

Seja a equação não-linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(F(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.62)$$

com condições iniciais prescritas

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3.63)$$

sendo u o deslocamento das partículas e $F(u)u_x$ a tensão (RIVERA; ANDRADE, 2000). O objetivo desta seção é mostrar que a equação (3.62) possui uma estrutura semelhante à (3.9). Para isso, supõe-se que $F(u) \geq 0$ em $\Omega \times \mathbb{R}_+$ e considera-se duas curvas, $s(t) = (\bar{x}(t), t)$ e $S(t) = (\hat{x}(t), t)$ com inclinações $ds/dt = (\sqrt{F(u)}, 1)$ e $dS/dt = (-\sqrt{F(u)}, 1)$, respectivamente, conforme FIGURA 15.

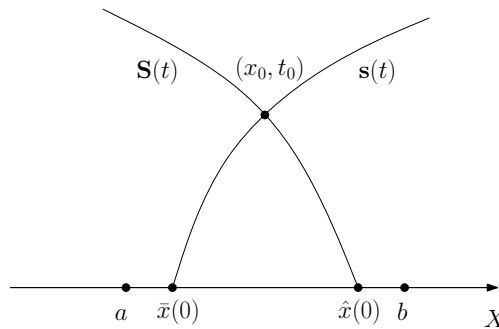


FIGURA 15 – Formação das curvas de controle espaço-tempo definidas pelos pontos iniciais $\hat{x}(0)$ e $\bar{x}(0)$.

Integrando a equação (3.62) ao longo do volume de controle limitado pelo eixo das abscissas e pelas curvas s e S (FIGURA 15), obtém-se

$$0 = \int_V \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(F(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dV = \int_V \text{div } \mathbf{F} dV = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma, \quad (3.64)$$

em que $\mathbf{F} = (-F(u)u_x, u_t)$. Os vetores normais ao eixo x e às curvas s e S são

$$\mathbf{N}_x = -\mathbf{e}_2 = (0, -1), \quad \mathbf{N}_s = (-1, \sqrt{F(u)}) \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_S = (1, \sqrt{F(u)}), \quad (3.65)$$

respectivamente. Então, a equação (3.64) se torna

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (-F u_x, u_t) \cdot (1, \sqrt{F}) dt + \int_s (-F u_x, u_t) \cdot (-1, \sqrt{F}) dt - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \\ &= \int_0^{t_0} (u_x, u_t) \cdot (-\sqrt{F}, 1) \sqrt{F} dt + \int_0^{t_0} (u_x, u_t) \cdot (\sqrt{F}, 1) \sqrt{F} dt - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \\ &= \int_0^{t_0} \nabla u(\mathbf{S}(t)) \cdot \mathbf{S}'(t) \sqrt{F} dt + \int_0^{t_0} \nabla u(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) \sqrt{F} dt - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Agora, seja $h(u)$ tal que $\frac{dh}{du} = \sqrt{F(u)}$. Então,

$$\frac{dh(u(\mathbf{S}(t)))}{dt} = \frac{dh}{du} \frac{du}{dt} = \sqrt{F} \nabla u(\mathbf{S}(t)) \cdot \mathbf{S}'(t), \quad (3.67)$$

$$\frac{dh(u(\mathbf{s}(t)))}{dt} = \frac{dh}{du} \frac{du}{dt} = \sqrt{F} \nabla u(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t). \quad (3.68)$$

Comparando as equações (3.66), (3.67) e (3.68) conclui-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_0} \frac{dh(u(\mathbf{S}(t)))}{dt} dt + \int_0^{t_0} \frac{dh(u(\mathbf{s}(t)))}{dt} dt - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \\ &= h(u(\mathbf{S}(t_0))) - h(u(\mathbf{S}(0))) + h(u(\mathbf{s}(t_0))) - h(u(\mathbf{s}(0))) - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (3.69)$$

isto é,

$$h(u(x_0, t_0)) = \frac{h(u(\hat{x}(0), 0)) + h(u(\bar{x}(0), 0))}{2} + \frac{1}{2} \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \quad (3.70)$$

ou, conforme dados iniciais em (3.63),

$$h(u(x_0, t_0)) = \frac{h(\phi(\hat{x}(0))) + h(\phi(\bar{x}(0)))}{2} + \frac{1}{2} \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} \psi(x) dx. \quad (3.71)$$

A equação (3.71) define a solução geral do problema de valor inicial descrito pelas equações (3.62) e (3.63). Observa-se que é possível interpretá-la como uma solução implícita do tipo D'Alembert, tendo em vista que possui a mesma estrutura da solução de D'Alembert do problema linear

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x) dx. \quad (3.72)$$

Exemplo 3.2.5. Suponha-se que a função F possua não-linearidade do tipo monomial, isto é, $F(u) = c^2 u^\beta > 0$, para $0 < c$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Neste caso, observando que

$$c \frac{d}{dt} (u(\mathbf{S}(t))^{\beta/2+1}) = c \left(\frac{\beta}{2} + 1 \right) u(\mathbf{S}(t))^{\beta/2} \nabla u(\mathbf{S}(t)) \cdot \mathbf{S}'(t), \quad (3.73)$$

e comparando com (3.66), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{2c}{\beta + 2} \right) u(\mathbf{S}(t))^{\beta/2+1} \Big|_0^{t_0} + \left(\frac{2c}{\beta + 2} \right) u(\mathbf{s}(t))^{\beta/2+1} \Big|_0^{t_0} - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \\ &= \left(\frac{2c}{\beta + 2} \right) [2u(x_0, t_0)^{\beta/2+1} - u(\bar{x}(0), 0)^{\beta/2+1} - u(\hat{x}(0), 0)^{\beta/2+1}] - \\ &\quad \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (3.74)$$

isto é

$$u(x_0, t_0)^{\beta/2+1} = \frac{\phi(\bar{x}(0))^{\beta/2+1} + \phi(\hat{x}(0))^{\beta/2+1}}{2} + \left(\frac{\beta + 2}{4c} \right) \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} \psi(x) dx. \quad (3.75)$$

Os cálculos anteriores se deram a partir da equação (3.66). Poder-se-ia obter h por meio da relação

$$\frac{dh}{du} = \sqrt{F(u)} = c \cdot u^{\beta/2} \implies h(u) = \frac{2c}{\beta+2} u^{\beta/2+1}, \quad (3.76)$$

que, substituída em (3.71), resulta em (3.75).

Por fim, observa-se que quando $\beta = 0$ a equação (3.75) se torna idêntica a (3.72), pois $\bar{x}(0) = x - ct$ e $\hat{x}(0) = x + ct$, já que neste caso $F = c^2$.

Exemplo 3.2.6. Considerando agora, o caso em que a não-linearidade é do tipo exponencial, sendo $F(u) = c^2 e^{\beta u}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então

$$\frac{d}{dt} (c e^{\beta u/2}) = c \frac{\beta}{2} e^{\beta u/2} \nabla u(\mathbf{S}(t)) \cdot \mathbf{S}'(t). \quad (3.77)$$

Comparando as equações (3.77) e (3.66), conclui-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2c}{\beta} e^{\beta u/2} \Big|_0^{t_0} + \frac{2c}{\beta} e^{\beta u/2} \Big|_0^{t_0} - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \\ &= \frac{2c}{\beta} [2e^{\beta u(x_0, t_0)/2} - e^{\beta u(\bar{x}(0), 0)/2} - e^{\beta u(\hat{x}(0), 0)/2}] - \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} u_t(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (3.78)$$

isto é,

$$e^{\beta u(x_0, t_0)/2} = \frac{e^{\beta \phi(\bar{x}(0))/2} + e^{\beta \phi(\hat{x}(0))/2}}{2} + \frac{\beta}{4c} \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} \psi(x) dx, \quad (3.79)$$

que também é uma fórmula do tipo D'Alembert. Ou ainda,

$$u(x_0, t_0) = \frac{2}{\beta} \ln \left| \frac{e^{\beta \phi(\bar{x}(0))/2} + e^{\beta \phi(\hat{x}(0))/2}}{2} + \frac{\beta}{4c} \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} \psi(x) dx \right|. \quad (3.80)$$

A fórmula geral (3.71) depende inteiramente dos dados iniciais. A grande dificuldade, no entanto, está em determinar as curvas $\mathbf{s}(t) = (\bar{x}(t), t)$ e $\mathbf{S}(t) = (\hat{x}(t), t)$, pois é necessário avaliar-se as EDO's

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sqrt{F(u)} \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = -\sqrt{F(u)}. \quad (3.81)$$

3.2.5.1 Malha espaço-tempo não estruturada

Esta seção continua explorando a estrutura da equação (3.62) e tem por objetivo determinar uma equação semelhante a (3.16). Para isso, será considerado uma malha não estruturada contendo os pontos (x_i^j, t_i^j) , obtidos pelas intersecções das curvas $\mathbf{s}(t)$ e $\mathbf{S}(t)$, conforme FIGURAS 16a e 16b. A notação (x_i^j, t_i^j) possui o seguinte significado:

- x_i^j : é a i -ésima abscissa avaliada no j -ésimo passo de tempo;
- t_i^j : é o j -ésimo passo de tempo avaliado na i -ésima abscissa.

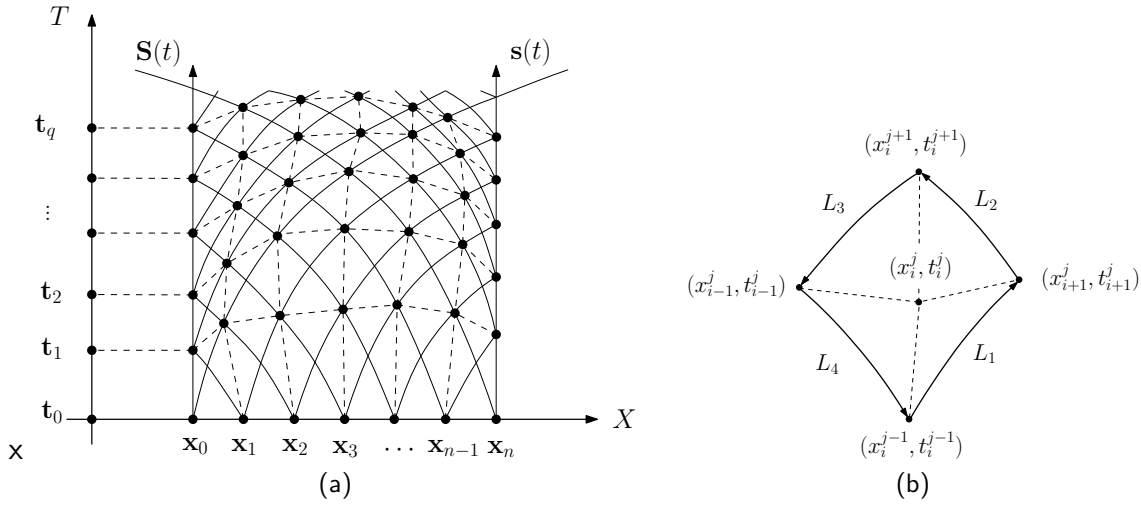


FIGURA 16 – (a) Formação da malha espaço-tempo pela intersecção das curvas de controle, sendo x_i e t_i os vetores das posições de intersecção; (b) Volume de controle interno delimitado pelas curvas de controle.

Em termos computacionais, no j -ésimo passo de tempo calcula-se dois vetores t_j e x_j ($0 \leq j \leq q$, sendo q o número de avanços no tempo), ambos com dimensão $(n + 1) \times 1$ cujas componentes são t_i^j e x_i^j ($0 \leq i \leq n$), respectivamente.

Agora, integrando a equação (3.62) sobre o volume representado pela FIGURA 16b tem-se

$$0 = \int_V \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(F(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \sum_{k=1}^4 \int_{L_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma, \quad (3.82)$$

em que $\mathbf{F} = (-F(u)u_x, u_t)$. Sejam $\mathbf{S}_k(t)$, $k = 1, \dots, 4$ as curvas que contém os respectivos segmentos curvos L_k , $k = 1, \dots, 4$, de tal forma que suas inclinações sejam

$$\mathbf{s}'_1(t) = (\sqrt{F}, 1), \quad \mathbf{S}'_2(t) = (-\sqrt{F}, 1), \quad \mathbf{s}'_3(t) = (-\sqrt{F}, -1) \quad \text{e} \quad \mathbf{S}'_4(t) = (\sqrt{F}, -1). \quad (3.83)$$

Assim, os vetores normais a cada uma das curvas L_k , $k = 1, \dots, 4$ é

$$\mathbf{N}_1 = (1, -\sqrt{F}), \quad \mathbf{N}_2 = (1, \sqrt{F}), \quad \mathbf{N}_3 = (-1, \sqrt{F}) \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_4 = (-1, -\sqrt{F}). \quad (3.84)$$

Então, cada uma das integrais de linha da equação (3.82) terão as seguintes formas:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (-F u_x, u_t) \cdot (1, -\sqrt{F}) dt &= - \int_{t_i^{j-1}}^{t_{i+1}^j} (u_x, u_t) \cdot (\sqrt{F}, 1) \sqrt{F} dt, \\ &= - \int_{t_i^{j-1}}^{t_{i+1}^j} \nabla u(\mathbf{s}_1(t)) \cdot \mathbf{s}'_1(t) \sqrt{F} dt, \\ \int_{L_2} (-F u_x, u_t) \cdot (1, \sqrt{F}) dt &= \int_{t_{i+1}^j}^{t_i^{j-1}} (u_x, u_t) \cdot (-\sqrt{F}, 1) \sqrt{F} dt, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\int_{L_2} (-Fu_x, u_t) \cdot (1, \sqrt{F}) dt = \int_{t_{i+1}^j}^{t_i^{j+1}} \nabla u(\mathbf{S}_2(t)) \cdot \mathbf{S}'_2(t) \sqrt{F} dt, \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_3} (-Fu_x, u_t) \cdot (-1, \sqrt{F}) dt &= - \int_{t_i^{j+1}}^{t_{i-1}^j} (u_x, u_t) \cdot (-\sqrt{F}, -1) \sqrt{F} dt, \\ &= - \int_{t_i^{j+1}}^{t_{i-1}^j} \nabla u(\mathbf{s}_3(t)) \cdot \mathbf{s}'_3(t) \sqrt{F} dt, \end{aligned} \quad (3.87)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{L_4} (-Fu_x, u_t) \cdot (-1, -\sqrt{F}) dt &= \int_{t_{i-1}^j}^{t_i^{j-1}} (u_x, u_t) \cdot (\sqrt{F}, -1) \sqrt{F} dt, \\ &= \int_{t_{i-1}^j}^{t_i^{j-1}} \nabla u(\mathbf{S}_4(t)) \cdot \mathbf{S}'_4(t) \sqrt{F} dt. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Definindo novamente a função $h(u)$ tal que $\frac{dh}{du} = \sqrt{F(u)}$, então, pelas equações (3.67) e (3.68), as equações anteriores se tornam, respectivamente,

$$- \int_{t_i^{j-1}}^{t_{i+1}^j} \nabla u(\mathbf{s}_1(t)) \cdot \mathbf{s}'_1(t) \sqrt{F} dt = - [h(u(x_{i+1}^j, t_{i+1}^j)) - h(u(x_i^{j-1}, t_i^{j-1}))], \quad (3.89)$$

$$\int_{t_{i+1}^j}^{t_i^{j+1}} \nabla u(\mathbf{S}_2(t)) \cdot \mathbf{S}'_2(t) \sqrt{F} dt = [h(u(x_i^{j+1}, t_i^{j+1})) - h(u(x_{i+1}^j, t_{i+1}^j))], \quad (3.90)$$

$$- \int_{t_i^{j+1}}^{t_{i-1}^j} \nabla u(\mathbf{s}_3(t)) \cdot \mathbf{s}'_3(t) \sqrt{F} dt = - [h(u(x_{i-1}^j, t_{i-1}^j)) - h(u(x_i^{j+1}, t_i^{j+1}))], \quad (3.91)$$

e

$$\int_{t_{i-1}^j}^{t_i^{j-1}} \nabla u(\mathbf{S}_4(t)) \cdot \mathbf{S}'_4(t) \sqrt{F} dt = [h(u(x_i^{j-1}, t_i^{j-1})) - h(u(x_{i-1}^j, t_{i-1}^j))]. \quad (3.92)$$

Substituindo as equações de (3.89) a (3.92) em (3.82) obtém-se a relação

$$h(u(x_i^{j+1}, t_i^{j+1})) = h(u(x_{i+1}^j, t_{i+1}^j)) + h(u(x_{i-1}^j, t_{i-1}^j)) - h(u(x_i^{j-1}, t_i^{j-1})), \quad (3.93)$$

que possui a mesma estrutura do caso linear (veja equação (3.16)).

Saliente-se, no entanto, que a malha dessa forma definida pode gerar a formação de singularidades do espinha de peixe (ver Leveque (2004)). Dessa forma, a solução numérica se torna inválida após sua formação.

Exemplo 3.2.7. Se $F(u) = c^2 u^\beta$, foi visto que $h(u) = \frac{2c}{\beta + 2} u^{\beta/2+1}$, então a equação (3.93) se torna

$$u(x_i^{j+1}, t_i^{j+1})^{\beta/2+1} = u(x_{i+1}^j, t_{i+1}^j)^{\beta/2+1} + u(x_{i-1}^j, t_{i-1}^j)^{\beta/2+1} - u(x_i^{j-1}, t_i^{j-1})^{\beta/2+1}, \quad (3.94)$$

ou ainda, simplificando a nomenclatura em $u(x_i^j, t_i^j) \equiv u_i^j$,

$$(u_i^{j+1})^{\beta/2+1} = (u_{i+1}^j)^{\beta/2+1} + (u_{i-1}^j)^{\beta/2+1} - (u_i^{j-1})^{\beta/2+1}. \quad (3.95)$$

Saliente-se, novamente, que se $\beta = 0$ a equação anterior reduz-se à (3.17) que é o caso do problema linear homogêneo.

Exemplo 3.2.8. Para $F(u) = c^2 e^{\beta u}$, tem-se que $\frac{dh}{du} = ce^{\beta u/2}$ implica em $h(u) = \frac{2c}{\beta} e^{\beta u/2}$. Assim, (3.93) se torna

$$e^{(\beta/2)u(x_i^{j+1}, t_i^{j+1})} = e^{(\beta/2)u(x_{i+1}^j, t_{i+1}^j)} + e^{(\beta/2)u(x_{i-1}^j, t_{i-1}^j)} - e^{(\beta/2)u(x_i^{j-1}, t_i^{j-1})}, \quad (3.96)$$

ou simplesmente,

$$u_i^{j+1} = \frac{2}{\beta} \ln \left| e^{(\beta/2)u_{i+1}^j} + e^{(\beta/2)u_{i-1}^j} - e^{(\beta/2)u_i^{j-1}} \right|. \quad (3.97)$$

Exemplo 3.2.9. Seja o problema descrito pela equação (3.62), com $F(u) = u$. Uma solução para tal equação é (POLYANIN, 2004, p. 221)

$$u(x, t) = (At + B)\sqrt{Cx + D}. \quad (3.98)$$

Objetiva-se, com este exemplo, verificar a estabilidade do método ao longo do tempo. Para este fim, fixou-se a malha computacional em $4 \leq x \leq 6$ e os parâmetros foram arbitrariamente escolhidos como $A = 2$, $B = \pi$, $C = 5$ e $D = 8$. As condições de contorno e condições iniciais satisfazem a solução (3.98). Observou-se que com uma discretização de $n + 1 = 10$ pontos no espaço, foram suficientes $q = 1000$ avanços no tempo. A malha, formada conforme sub-seção 3.2.5.1, está representada na FIGURA 17a.

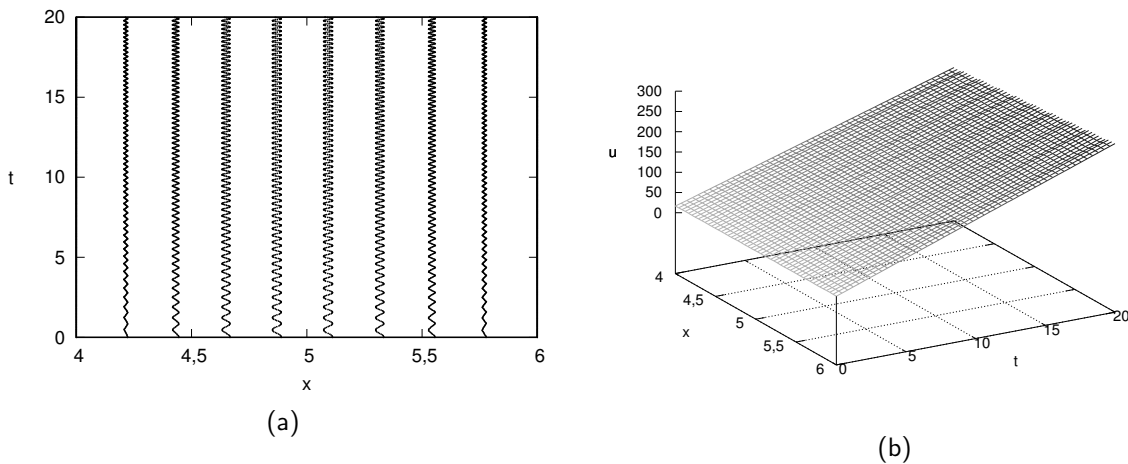


FIGURA 17 – (a) Malha espaço-tempo construída, com $n + 1 = 10$ pontos no espaço e 1000 avanços no tempo, a partir da estratégia apresentada na subseção 3.2.5.1, para a solução da equação não-linear (3.62); (b) Solução numérica obtida sobre a malha representada na FIGURA 17a.

A variação inicial da malha é $\Delta x = 2/10 = 0,2$ que é razoavelmente grosseira, isto é, não-refinada. Conforme se percebe na representação gráfica, esse padrão se mantém ao longo

do tempo. Na FIGURA 17b é apresentado o gráfico da superfície ao longo do espaço-tempo gerado pela solução numérica. A superfície gerada pela resposta analítica é muito semelhante, motivo pelo qual não será apresentada. O código desenvolvido para este problema encontra-se no APÊNDICE C.1.3.

Na TABELA 5 apresenta-se o erro absoluto cometido na aproximação ao longo dos vetores posição \mathbf{x}_i , mensurado pela norma do máximo, isto é,

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_i\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq q} |u(x_i^j, t_i^j) - \hat{u}(x_i^j, t_i^j)|, \quad (3.99)$$

sendo u a resposta analítica e \hat{u} a numérica. Por exemplo, para o vetor posição \mathbf{x}_5 o erro absoluto é $\|\boldsymbol{\varepsilon}_5\|_\infty = 0,04763$ e ocorre no tempo $t_5^{998} = 19,98583$ quando $x_5^{998} = 5,07947$. Embora a malha seja grosseira no espaço, a aproximação apresenta erro absoluto razoavelmente pequeno. Por outro lado, os incrementos temporais (Δt) possuem grandeza em torno de 0,02.

TABELA 5 – Erro absoluto calculado na norma do máximo ao longo dos vetores posição \mathbf{x}_i , para a solução da equação da onda 1D não-linear, com condições de contorno e condições iniciais satisfazendo equação (3.98).

Vetores posição	Erro absoluto ($\ \boldsymbol{\varepsilon}_i\ _\infty$)	Espaço (x)	Tempo (t)
Contorno: \mathbf{x}_0	0,00000	0,00000	0,00000
\mathbf{x}_1	0,02359	4,21284	19,81512
\mathbf{x}_2	0,03364	4,43027	19,82931
\mathbf{x}_3	0,04165	4,65342	19,84374
\mathbf{x}_4	0,04866	4,88284	19,85844
\mathbf{x}_5	0,04763	5,07947	19,98583
\mathbf{x}_6	0,03853	5,31273	19,97105
\mathbf{x}_7	0,02958	5,54356	19,95655
\mathbf{x}_8	0,01984	5,77233	19,94229
Contorno: \mathbf{x}_9	0,00000	0,00000	0,00000

Observa-se que este problema se encaixa ao caso em que $F(u) = u^\beta$, com $\beta = 1$. Assim, combinando as equações (3.75) e (3.81), tem-se

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = c \left[\frac{\phi(\bar{x}(0))^{3/2} + \phi(\hat{x}(0))^{3/2}}{2} + \frac{3}{4c} \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} \psi(x) dx \right]^{1/3}, \quad (3.100)$$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = -c \left[\frac{\phi(\bar{x}(0))^{3/2} + \phi(\hat{x}(0))^{3/2}}{2} + \frac{3}{4c} \int_{\bar{x}(0)}^{\hat{x}(0)} \psi(x) dx \right]^{1/3}. \quad (3.101)$$

Somando as equações (3.100) e (3.101) e integrando no intervalo de $(0, t_1)$, encontra-se

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = 0 \implies \bar{x}(t_1) + \hat{x}(t_1) = \bar{x}(0) + \hat{x}(0). \quad (3.102)$$

Agora, supondo que as curvas $\bar{x}(t)$ e $\hat{x}(t)$ se interceptam no tempo t_1 (observar FIGURA 15), tem-se então

$$\bar{x}(t_1) = \hat{x}(t_1) = \frac{\bar{x}(0) + \hat{x}(0)}{2}. \quad (3.103)$$

Assim, seguindo a notação indicada na seção 3.2.5.1 (notar FIGURA 16b), tem-se que a i -ésima abscissa avaliada no primeiro passo de tempo foi calculada por

$$x_i^1 = \frac{x_{i-1}^0 + x_{i+1}^0}{2}. \quad (3.104)$$

Sendo $x_i^0 = i\Delta x$, $0 \leq i \leq n$ para um dado $\Delta x = (b - a)/n$ fornecido inicialmente. Os demais passos de tempo foram avaliados numericamente por meio da regra do trapézio aplicada na primeira equação em (3.81). A variável t_i^j também foi obtida numericamente por meio desta equação.

Este exemplo encerra a seção referente aos problemas hiperbólicos unidimensionais. A seção 3.3, a seguir, considera equações hiperbólicas lineares e bidimensionais. A abordagem é realizada através da equação da onda, tendo em vista ser o modelo canônico para problemas hiperbólicos lineares.

3.3 EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL

Seja $\Omega = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. O sistema formado pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.105)$$

com condições iniciais

$$u(x, y, 0) = \phi(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), \quad (3.106)$$

é o modelo padrão para problemas hiperbólicos lineares. Esta seção destina-se ao desenvolvimento de um esquema CE/SE para sua solução. A abordagem proposta consiste em transformar a equação (3.105) na equação de Klein-Gordon unidimensional estudada na seção 3.2.4.

3.3.1 Redução ao problema unidimensional

Por simplicidade, considera-se $[c, d] = [0, 2\pi]$ e expandindo u em série de Fourier, obtém-se (a série truncada em $N/2$ termos)

$$u^N(x, y, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k(x, t) e^{iky}, \quad (3.107)$$

em que i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$) e \hat{u}_k os coeficientes da expansão dados por

$$\hat{u}_k(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y, t) e^{-iky} dy, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}. \quad (3.108)$$

Substituindo a aproximação u^N de (3.107) na equação (3.105) e multiplicando ambos os lados por funções de ponderação e^{imy} , ao mesmo tempo em que se integra no intervalo de

$(0, 2\pi)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right) \right] e^{imy} dy, \\
0 &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \left[\frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial t^2} e^{iky} - c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial x^2} e^{iky} + c^2 k^2 \hat{u}_k(x, t) e^{iky} \right] e^{-imy} dy, \\
0 &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} \left[\frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial x^2} + c^2 k^2 \hat{u}_k(x, t) \right] \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)y} dy, \quad (3.109)
\end{aligned}$$

para $-N/2 \leq m \leq N/2$.

Porém, a integral na equação (3.109) é

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)y} dy = \begin{cases} y \Big|_0^{2\pi}, & \text{se } m = k \\ \frac{e^{i(k-m)y}}{i(k-m)} \Big|_0^{2\pi}, & \text{se } m \neq k \end{cases} = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } m = k \\ 0, & \text{se } m \neq k \end{cases}. \quad (3.110)$$

Dessa forma, a equação (3.109) implica em

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial x^2} = -c^2 k^2 \hat{u}_k(x, t), \text{ para } k = m, \quad (3.111)$$

que é a equação de Klein-Gordon não-homogênea considerada na seção 3.2.4. Observa-se que estão incluídas nesta equação condições de contorno do tipo natural ao longo da direção y .

No caso em que (3.105) for não-homogênea, com termo fonte $f(x, y, t)$, então a equação (3.111) se torna

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_k(x, t)}{\partial x^2} = -c^2 k^2 \hat{u}_k(x, t) + \hat{f}_k(x, t) \quad \text{e} \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}, \quad (3.112)$$

em que

$$\hat{f}_k(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y, t) e^{-iky} dy, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}, \quad (3.113)$$

conforme (3.108).

3.3.1.1 Exemplo

Exemplo 3.3.1. Seja o problema descrito pela equação (3.105) sujeita aos seguintes dados iniciais

$$u(x, y, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = x(x - 2\pi) \text{sen} \left(\frac{y}{2} \right), \quad (3.114)$$

com condições de contorno

$$u(a, y, t) = u(b, y, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x, c, t)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, d, t)}{\partial y} = 0. \quad (3.115)$$

As condições naturais na direção y são acopladas diretamente na equação (3.111), as demais condições devem ser levadas ao domínio de \hat{u}_k . Para isso, basta utilizar a equação (3.108) a fim de se obter

$$\begin{cases} \hat{u}_k(a, t) = 0 \\ \hat{u}_k(b, t) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{u}_k(x, 0) = 0 \\ \frac{\hat{u}_k(x, 0)}{\partial t} = \frac{2x(x - 2\pi)}{(1 - 4k^2)\pi} \end{cases}, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}. \quad (3.116)$$

Este exemplo foi tratado numericamente através do código desenvolvido (Fortran 90) e que se encontra no APÊNDICE C.1.4. Nas simulações, utilizou-se a equação (3.107) com $N = 38$ termos, domínio computacional $[a, b] = [c, d] = [0, 2\pi]$, velocidade da onda $c = 1$ m/s, $n_x = 400$ e $n_y = 100$. Os valores distintos de n_x e n_y na formação da malha se deve ao fato de que na direção y , utiliza-se uma aproximação por série de Fourier, enquanto que na direção x e no tempo t , utiliza-se o método de conservação espacial-temporal descrito na seção 3.2.4. Assim, aplica-se o método CE/SE iterativamente para cada $-19 \leq k \leq 19$, conforme condições elencadas na equação (3.116).

A FIGURA 18 dispõe as superfícies, sobre tempos arbitrariamente fixos, geradas pela solução numérica. A TABELA 6 fornece uma ideia quantitativa da precisão do método, ao computar os erros relativos sobre as normas L^1 e L^2 .

TABELA 6 – Erro relativo calculado nas normas L^1 e L^2 sobre a solução numérica da equação bidimensional (3.105), conforme gráficos dispostos na FIGURA 18.

Tempo	Erro (L^1)	Erro (L^2)	Tempo	Erro (L^1)	Erro (L^2)
7,069	$2,158 \times 10^{-3}$	$4,214 \times 10^{-3}$	28,274	$1,117 \times 10^{-2}$	$2,228 \times 10^{-2}$
14,137	$4,323 \times 10^{-3}$	$7,015 \times 10^{-3}$	35,343	$1,785 \times 10^{-2}$	$2,379 \times 10^{-2}$
21,206	$9,839 \times 10^{-3}$	$1,823 \times 10^{-2}$	42,412	$1,003 \times 10^{-2}$	$1,264 \times 10^{-2}$

3.4 CONSIDERAÇÕES

Este capítulo abordou a aplicação do método CE/SE em equações hiperbólicas de segunda ordem. A ênfase deve ser dada ao alto grau de resolução obtido com os problemas lineares unidimensionais. O esquema unidimensional desenvolvido é livre de erro de truncamento local (corolário 3.2.2), no que tange tanto aos problemas homogêneos (equação (3.16)), quanto aos problemas não-homogêneos independentes da função incógnita (equação (3.21)). Em conjunto com a estratégia de inclusão das condições de contorno e condições iniciais, também livre de erro de discretização, tornou-se possível obter esquemas suscetíveis apenas a erros de arredondamento. Um importante resultado teórico foi estabelecido com relação ao esquema

$$w_i^{j+1} = w_{i+1}^j + w_{i-1}^j - w_i^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad j \geq 1, \quad (3.117)$$

interpretado tanto como esquema CE/SE quanto esquema DF. Quando interpretado à luz do método das diferenças finitas, conclui-se que uma função infinitamente diferenciável,

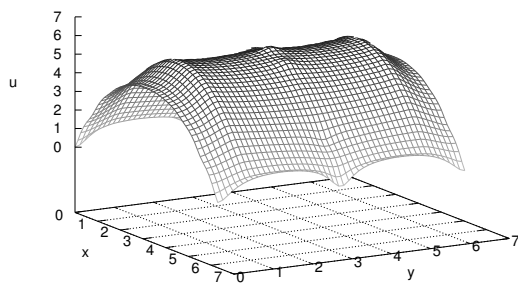
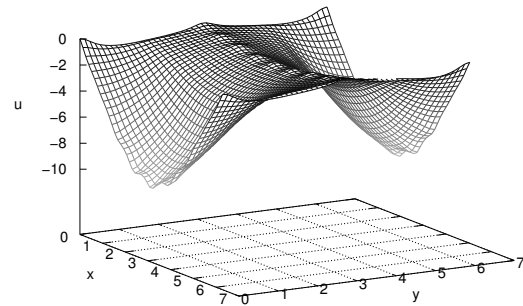
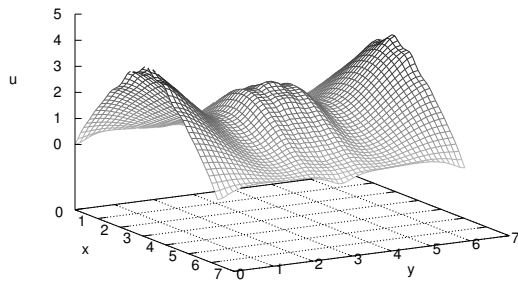
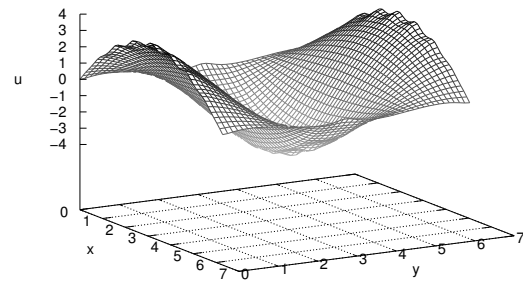
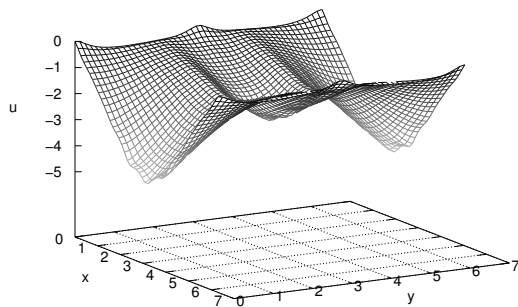
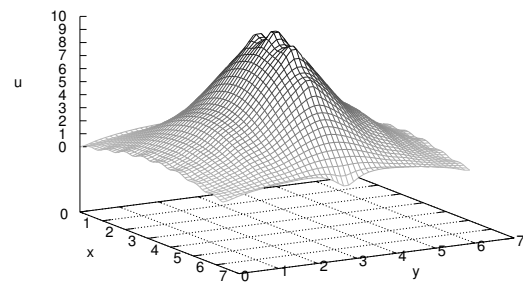
(a) $t = 7,069$ s(b) $t = 14,137$ s(c) $t = 21,206$ s(d) $t = 28,274$ s(e) $t = 35,343$ s(f) $t = 42,412$ s

FIGURA 18 – Solução numérica da equação da onda bidimensional (3.105) com condições iniciais (3.114) e condições de contorno (3.115), pelo esquema CE/SE com Transformada de Fourier e expansão parcial em série com $N = 38$ termos.

$u \in C^\infty(X)$, $X \in \mathbb{R}^2$, que satisfaz a equação (3.9) também satisfaz (3.117). Quando interpretado à luz do método CE/SE, percebe-se que esta condição pode ser extremamente enfraquecida, uma vez que este método considera a equação integral de conservação e uma função que a satisfaz também satisfará (3.117). O exemplo 3.2.3 corrobora com esta afirmação.

Um ponto frágil é que não foi possível estender os resultados unidimensionais ao caso bidimensional. Tudo começa com a formação da malha espaço-tempo. A malha espaço-tempo do problema 1D foi definida como a intersecção das curvas características no plano $x-t$. Tem-se que para problemas multidimensionais as projeções das características são superfícies 2D ou 3D no espaço-tempo (CHANG, 1995) e, por isso, não foi possível obter uma equação discreta livre de erro de truncamento local (mais detalhes no APÊNDICE A.2). A estratégia utilizada consistiu em aplicar a Transformada de Fourier na equação bidimensional, com coeficientes de Fourier dependendo de duas variáveis (x e t , por exemplo). Esperava-se que essa redução recaísse em um problema unidimensional com a propriedade de erro nulo. Infelizmente, a equação modificada-reduzida apresentou termo fonte dependendo da função variável que necessitou aproximação. Observa-se, neste sentido, que alcançar a propriedade de erro nulo em equações unidimensionais com termo fonte dependente da variável pode, por extensão, produzir um esquema com melhor qualidade de ajuste para os problemas bidimensionais.

Outro ponto de destaque deste capítulo diz respeito aos resultados para a equação não-linear, por conta das soluções gerais deduzidas e interpretadas como soluções do tipo D'Alembert. As expressões obtidas nos casos destacados se tornam idênticas à solução de D'Alembert (solução da equação linear), quando se impõe que o termo $F(u)$ se torne igual a c^2 . Saliente-se, no entanto, que existe a possibilidade de formação de singularidades do tipo espinha de peixe, ocasião em que o esquema deixa de ser válido.

O capítulo 4 seguinte é destinado a um típico sistema de equações hiperbólicas: as equações de Saint-Venant, também conhecidas como equações de águas rasas. Nele são apresentados o desenvolvimento de novos esquemas CE/SE de alta resolução. O ponto chave é a utilização de funções de segunda ordem na aproximação.

4 EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

Este capítulo é dedicado às equações de Saint-Venant uni e bidimensional, também conhecidas na literatura por equações de águas rasas. A seguir são apresentadas as hipóteses básicas envolvidas às suas deduções, suas formas conservativas, expressões para o termo fonte bem como alguns trabalhos recentes sobre as mesmas.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: a seção 4.1 descreve brevemente o modelo de águas rasas hiperbólico, as hipóteses de sua dedução, as equações unidimensionais e bidimensionais obtidas, bem como sua importância no que tange a aplicações; a seção 4.2 é destinada ao desenvolvimento de esquemas CE/SE para as referidas equações.

4.1 SOBRE AS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

Existem vários métodos para se obter as equações de Saint-Venant. Cada estratégia possui suas vantagens na medida em que mostra algumas das hipóteses e aproximações utilizadas (LOBEIRO, 2012). Por exemplo, para uma dedução a partir das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível, consultar Chaudhry (2008), para uma derivação a partir do teorema do transporte de Reynolds, ver Lobeiro (2012). Em uma dimensão são consideradas as seguintes hipóteses (CHAUDHRY, 2008):

1. A distribuição da pressão é hidrostática. Esta é uma suposição válida se as linhas de corrente não possuem curvaturas acentuadas;
2. A inclinação do fundo do canal é pequena, de modo que a profundidade de fluxo medida ortogonalmente à parte inferior do canal ou medida na vertical são aproximadamente as mesmas;
3. A velocidade do fluxo através da seção transversal do canal é uniforme;
4. O canal é prismático, isto é, a seção transversal do canal e a inclinação do seu fundo não mudam com a distância. As variações na seção transversal ou na inclinação de sua parte inferior podem ser consideradas através da aproximação por vários canais prismáticos;
5. As perdas de carga no fluxo não permanente podem ser simuladas usando as mesmas leis de resistência do estado permanente, como a equação de Manning ou de Chezy, isto é, perdas de carga para uma dada velocidade de fluxo durante um fluxo não permanente são consideradas idênticas às de fluxo no estado permanente.

As equações deduzidas a partir dessas hipóteses compõem o sistema

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \quad (4.1)$$

com

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_2^2/q_1 + gq_1^2/2 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

e

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ gq_1(S_{0_x} - S_{f_x}) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

em que $q_1 = h(x, t)$ é a profundidade do fluxo (m); $q_2 = uh$ é a vazão específica por unidade de largura de contribuição lateral (m^2/s), sendo $u(x, t)$ a velocidade média do escoamento (m/s) na direção x ; x é a distância ao longo do canal (m); t é o tempo (s); g é a aceleração da gravidade (m/s^2) e S_{0_x} é a inclinação do fundo do canal. A resistência do escoamento pode ser avaliada pela relação (CHAUDHRY, 2008, p. 249):

$$S_{f_x} = \frac{\eta^2 |u|u}{h^{4/3}} = \frac{\eta^2 |q_2|q_2}{q_1^{10/3}}, \quad (4.4)$$

sendo η ($\text{s} \cdot \text{m}^{-1/3}$) o coeficiente de Manning. Para um canal retangular, a forma conservativa em duas dimensões é dada pelo sistema

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \quad (4.5)$$

em que

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \\ uvh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_2^2/q_1 + gq_1^2/2 \\ q_2q_3/q_1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + gh^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2q_3/q_1 \\ q_3^2/q_1 + gq_1^2/2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

e

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ gq_1(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ gq_1(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

As variáveis $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ correspondem as velocidades médias do fluxo nas direções x e y , respectivamente; $h(x, y, t)$ a profundidade da água medida verticalmente; g a aceleração devido a gravidade; $S_{0_x} = \text{sen}\alpha_x$ e $S_{0_y} = \text{sen}\alpha_y$ as declividades (inclinações do fundo do canal) nas direções x e y , respectivamente; α_x e α_y o ângulo entre o fundo do canal e as direções x e y , respectivamente; S_{f_x} e S_{f_y} representam as resistências ao escoamento nas

direções x e y , respectivamente. As resistências S_f são calculadas a partir das fórmulas do estado permanente (CHAUDHRY, 2008):

$$S_{f_x} = \frac{\eta^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} = \frac{\eta^2 q_2 \sqrt{q_2^2 + q_3^2}}{q_1^{10/3}}, \quad S_{f_y} = \frac{\eta^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} = \frac{\eta^2 q_3 \sqrt{q_2^2 + q_3^2}}{q_1^{10/3}}. \quad (4.9)$$

Pode-se encontrar aplicações das equações de Saint-Venant no estudo de propagação de marés em rios e estuários; na variação do fluxo produzida pela construção de controles artificiais tais como comportas ou máquinas hidroelétricas alimentadas pelo canal, ou até mesmo pela ruptura de uma barragem; e no comportamento de ondas oceânicas oscilatórias, que devem ser reconhecidas como um caso de fluxo não permanente (HENDERSON, 1966).

No capítulo 1 foram elencados alguns trabalhos que relacionam o método dos elementos de conservação espacial-temporal com as equações de águas rasas. Outros trabalhos recentes sobre as mesmas podem ser destacados, como o artigo de Liu et al. (2015) que desenvolveram uma nova aproximação pelo reticulado de Boltzmann para resolver as equações unidimensionais. A formulação resultante é totalmente explícita e, conforme concluem, de boa precisão. Yang, Kurganov e Liu (2015) desenvolveram esquemas de volumes finitos centrais com sobreposição de células em problemas 1D e 2D, com a característica de preservar o balanço entre o gradiente do fluxo e o termo fonte. De maneira análoga, Borsche (2015) desenvolveu um método cuja atenção especial está no balanceamento do termo fonte. O autor realiza uma discretização especial sobre a lei de pressão, de tal forma que certas propriedades analíticas são transferidas para o método numérico construído. Kesserwani et al. (2015) desenvolveram uma formulação numérica do tipo Godunov combinada com multi-wavelets com o objetivo de determinar de forma adaptativa o nível de resolução local. Hwang (2013) desenvolveu um novo método denominado método da partícula característica baseado na realocação das partículas computacionais ao longo das curvas características. Lobeiro (2012) construiu um método de pseudo-características para a solução das equações em sua forma bidimensional.

Existem ainda, vários trabalhos relacionados a simulação de fluxo de ruptura de barragem, tais como Chang et al. (2011) que propuseram um método sem malha para simulações em canais abertos 1D baseado na hidrodinâmica de partículas suaves; Singh, Altinakar e Ding (2011) que desenvolveram um modelo numérico, validado por meio de experimentos laboratoriais, em que as derivadas espaciais eram discretizadas por meio de um esquema central conservativo *upwind* explícito; Aliparast (2009) que formulou um esquema de volumes finitos *upwind* centrado na célula e de segunda ordem sobre malhas triangulares não estruturadas com a finalidade de auxiliar a construção de um plano de ação de emergência para a barragem de Torogh, no Irã.

A seção a seguir (seção 4.2), aborda o desenvolvimento de esquemas CE/SE de alta resolução para a solução das equações bidimensionais. Para isso, apresenta-se as definições bidimensionais dos elementos de conservação e de solução, bem como as funções de aproximação utilizadas. Erro de truncamento, consistência e estabilidade são investigados na subseção

4.2.4. Experimentos numéricos em problemas unidimensionais e bidimensionais são realizados junto as subseções 4.2.5 e 4.2.7, com o objetivo de obter a ordem de precisão experimental/computacional bem como avaliar o comportamento do esquema perante descontinuidades. O desenvolvimento detalhado para o caso unidimensional é apresentado junto ao apêndice B.

4.2 O MÉTODO CE/SE PARA AS EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS

Considera-se, por simplicidade, a equação (4.5) como

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial g_m}{\partial y} = S_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

então, pelo teorema da divergência no espaço \mathbb{R}^3 , tem-se que a equação (4.10) representa a forma diferencial da lei integral de conservação

$$\oint_{S(V)} \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{s} = \int_V S_m dV, \quad (4.11)$$

em que $\mathbf{H}_m = (f_m, g_m, q_m)$, $m = 1, 2, 3$ e $S(V)$ representa o contorno de uma região espaço-tempo $V \subset \mathbb{R}^3$.

No método CE/SE, um elemento de conservação (CE) é uma região espaço-tempo em que a conservação do fluxo, equação (4.11), é forçada, enquanto que um elemento de solução (SE) é uma região espaço-tempo, normalmente distinta, em que as variáveis fluxo são supostamente suaves e a equação (4.10) é válida. Para definir estes dois importantes objetos, considera-se primeiramente uma malha no plano x - y , conforme FIGURA 19a. Existem dois grupos de pontos, marcados por círculos e estrelas, que representam nós da malha em dois níveis de tempo diferentes. A cada ponto (i, j, k) da malha associa-se um CE e um SE. O CE é definido como o quadrilátero $EFGHE'F'G'H'$ e o SE é a união do quadrilátero $P''Q''R''S''P'Q'R'S'$ e o polígono $EFGH$ (ver FIGURA 19b).

Para todo $(x, y, t) \in SE(i, j, k)$, aproxima-se q_m por um polinômio de Taylor de segunda ordem

$$\begin{aligned} q_m^*(x, y, t; i, j, k) &= (q_m)_{i,j}^k + [(q_m)_x]_{i,j}^k(x - x_i) + [(q_m)_y]_{i,j}^k(y - y_j) + [(q_m)_t]_{i,j}^k(t - t_k) \\ &+ [(q_m)_{xt}]_{i,j}^k(x - x_i)(t - t_k) + [(q_m)_{yt}]_{i,j}^k(y - y_j)(t - t_k) \\ &+ \frac{1}{2}[(q_m)_{tt}]_{i,j}^k(t - t_k)^2 + \frac{1}{2}[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k(x - x_i)^2 + \\ &+ [(q_m)_{xy}]_{i,j}^k(x - x_i)(y - y_j) + \frac{1}{2}[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k(y - y_j)^2, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aproximações análogas são feitas sobre as funções f_m e g_m , $m = 1, 2, 3$. O termo fonte, por outro lado, é aproximado por uma ordem a menos, ou seja,

$$S_m^*(x, y, t; i, j, k) = (S_m)_{i,j}^k + [(S_m)_x]_{i,j}^k(x - x_i) + [(S_m)_y]_{i,j}^k(y - y_j) + [(S_m)_t]_{i,j}^k(t - t_k). \quad (4.13)$$

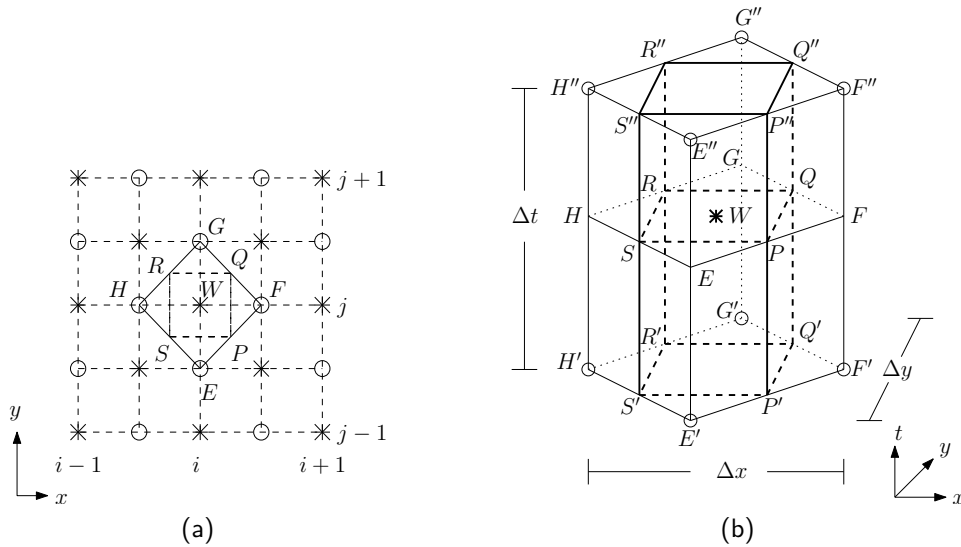


FIGURA 19 – (a) Pontos da malha representativa no plano x - y e (b) as definições dos elementos de solução $SE(i, j, k)$ e elementos de conservação $CE(i, j, k)$ no ponto (i, j, k) da malha (ZHANG; ZENG; CHEN, 2012; ZHANG et al., 1999).

Dessa forma, a equação (4.10) pode ser aproximada no $SE(i, j, k)$ por $\text{div } \mathbf{H}_m^* = S_m^*$, em que $\mathbf{H}_m^* = (f_m^*, g_m^*, q_m^*)$, $m = 1, 2, 3$, ao mesmo tempo em que a equação (4.11) é aproximada no $CE(i, j, k)$ por

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} = \int_{CE(i,j,k)} S_m^* dV, \quad m = 1, 2, 3. \quad (4.14)$$

4.2.1 Avaliação de $(q_m)_{i,j}^k$

Observa-se que a integral de superfície (4.14) sobre o volume descrito pela Figura 19b subdivide-se da seguinte maneira:

1. A superfície $EPE'P' \cup ESE'S'$ está contida no elemento de solução $SE(i, j - 1/2, k - 1/2)$, de modo que as funções q_m^* , f_m^* , g_m^* e S_m^* são expansões na região do ponto $(x_i, y_{j-1/2}, t_{k-1/2})$. Com essas funções, obtém-se a seguinte contribuição

$$T_E = \frac{\Delta x \Delta t}{2^2} \left\{ \frac{\Delta y}{2^3} [(f_m)_x - (g_m)_y] - \left[g_m + \frac{\Delta t}{2^2} (g_m)_t \right] + \frac{\Delta y \Delta t}{2^5} [(f_m)_{xt} - (g_m)_{yt}] \right. \\ \left. + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \left[\frac{\Delta y^2}{2} (f_m)_{xy} - \Delta t^2 (g_m)_{tt} - \frac{\Delta x^2 (g_m)_{xx} + \Delta y^2 (g_m)_{yy}}{4} \right] \right\}_{i,j-1/2}^{k-1/2}. \quad (4.15)$$

2. A superfície $PF'P'F' \cup FQF'Q'$ está contida no elemento de solução $SE(i + 1/2, j, k - 1/2)$, de modo que as expansões ocorrem na vizinhança do ponto $(x_{i+1/2}, y_j, t_{k-1/2})$. Dessa forma, a contribuição sobre essa região é dada por

$$\begin{aligned}
T_F = & \frac{\Delta y \Delta t}{2^2} \left\{ f_m + \frac{\Delta t}{2^2} (f_m)_t - \frac{\Delta x}{2^3} [(f_m)_x - (g_m)_y] + \frac{\Delta x \Delta t}{2^5} [(g_m)_{yt} - (f_m)_{xt}] \right. \\
& \left. + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \left[\Delta t^2 (f_m)_{tt} - \frac{\Delta x^2}{2} (g_m)_{xy} + \frac{\Delta x^2 (f_m)_{xx} + \Delta y^2 (f_m)_{yy}}{4} \right] \right\}_{i+1/2, j}^{k-1/2}.
\end{aligned} \quad (4.16)$$

3. A superfície $QGQ'G' \cup GRG'R'$ está contida em $SE(i, j + 1/2, k - 1/2)$, de modo que as aproximações ocorrem na região do ponto $(x_i, y_{j+1/2}, t_{k-1/2})$ e são dadas por

$$\begin{aligned}
T_G = & \frac{\Delta x \Delta t}{2^2} \left\{ g_m + \frac{\Delta t}{2^2} (g_m)_t + \frac{\Delta y}{2^3} [(f_m)_x - (g_m)_y] + \frac{\Delta y \Delta t}{2^5} [(f_m)_{xt} - (g_m)_{yt}] \right. \\
& \left. + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \left[\Delta t^2 (g_m)_{tt} - \frac{\Delta y^2}{2} (f_m)_{xy} + \frac{\Delta x^2 (g_m)_{xx} + \Delta y^2 (g_m)_{yy}}{4} \right] \right\}_{i, j+1/2}^{k-1/2}.
\end{aligned} \quad (4.17)$$

4. Na última parcela da superfície lateral $RHR'H' \cup HSH'S'$, contida no elemento de solução $SE(i - 1/2, j, k - 1/2)$, as expansões são realizadas na vizinhança de $(x_{i-1/2}, y_j, t_{k-1/2})$ e a integral de superfície dessa parcela corresponde a

$$\begin{aligned}
T_H = & -\frac{\Delta y \Delta t}{2^2} \left\{ f_m + \frac{\Delta t}{2^2} (f_m)_t + \frac{\Delta x}{2^3} [(f_m)_x - (g_m)_y] + \frac{\Delta x \Delta t}{2^5} [(f_m)_{xt} - (g_m)_{yt}] \right. \\
& \left. + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \left[\Delta t^2 (f_m)_{tt} - \frac{\Delta x^2}{2} (g_m)_{xy} + \frac{\Delta x^2 (f_m)_{xx} + \Delta y^2 (f_m)_{yy}}{4} \right] \right\}_{i-1/2, j}^{k-1/2}.
\end{aligned} \quad (4.18)$$

5. A integral sobre a face inferior $E'F'G'H'$ deve ser decomposta em quatro partes, pois esta superfície contém partes de quatro elementos de solução: $SE(i, j - 1/2, k - 1/2)$, $SE(i + 1/2, j, k - 1/2)$, $SE(i, j + 1/2, k - 1/2)$ e $SE(i - 1/2, j, k - 1/2)$. Assim, esta integral terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int_{E'F'G'H'} q_m^* dx dy = & \int_{S'E'P'W'} q_m^*(x, y, t_{k-1/2}; i, j - 1/2, k - 1/2) dx dy + \\
& \int_{P'F'Q'W'} q_m^*(x, y, t_{k-1/2}; i + 1/2, j, k - 1/2) dx dy + \\
& \int_{Q'G'R'W'} q_m^*(x, y, t_{k-1/2}; i, j + 1/2, k - 1/2) dx dy + \\
& \int_{R'H'S'W'} q_m^*(x, y, t_{k-1/2}; i - 1/2, j, k - 1/2) dx dy. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Após a avaliação de cada uma das integrais presentes em (4.19), obtém-se, após todas as simplificações

$$\begin{aligned}
T_{W^-} = & -\frac{\Delta x \Delta y}{2^3} \left\{ \left[q_m + \frac{\Delta y}{2^2} (q_m)_y \right]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + \left[q_m - \frac{\Delta x}{2^2} (q_m)_x \right]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + \left[q_m - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\Delta y}{2^2} (q_m)_y \right]_{i,j+1/2}^{k-1/2} + \left[q_m + \frac{\Delta x}{2^2} (q_m)_x \right]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \right\} - \frac{\Delta x \Delta y}{3 \cdot 2^9} \left\{ [\Delta x^2 (q_m)_{xx}] \right. \\
& + 7\Delta y^2 (q_m)_{yy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + [7\Delta x^2 (q_m)_{xx} + \Delta y^2 (q_m)_{yy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [\Delta x^2 (q_m)_{xx} \\
& \left. + 7\Delta y^2 (q_m)_{yy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} + [7\Delta x^2 (q_m)_{xx} + \Delta y^2 (q_m)_{yy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \right\}. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

6. Ao contrário da superfície inferior, a face superior $EFGH$ está contida em um único elemento de solução: $SE(i, j, k)$. Após todas os cálculos e simplificações, obtém-se a contribuição

$$T_{W^+} = \frac{\Delta x \Delta y}{2} \left\{ q_m + \frac{\Delta x^2 (q_m)_{xx} + \Delta y^2 (q_m)_{yy}}{3 \cdot 2^4} \right\}_{i,j}^k. \quad (4.21)$$

Pela lei de conservação (4.14), segue-se que, para $m = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
\sum T_l = & \frac{\Delta x \Delta y \Delta t}{2^4} \left\{ \left[S_m + \frac{\Delta t}{2^2} (S_m)_t + \frac{\Delta y}{2^2} (S_m)_y \right]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + \left[S_m + \frac{\Delta t}{2^2} (S_m)_t \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\Delta x}{2^2} (S_m)_x \right]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + \left[S_m + \frac{\Delta t}{2^2} (S_m)_t - \frac{\Delta y}{2^2} (S_m)_y \right]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right. \\
& \left. + \left[S_m + \frac{\Delta t}{2^2} (S_m)_t + \frac{\Delta x}{2^2} (S_m)_x \right]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \right\}, \quad (4.22)
\end{aligned}$$

em que o lado esquerdo da igualdade anterior simboliza a soma de todas as contribuições referidas pelas equações (4.15)-(4.21) e o lado direito, é a integral de volume sobre o termo fonte (4.13).

Após todas as simplificações, obtém-se o esquema de avanço no tempo para a variável $(q_m)_{i,j}^k$, representado resumidamente como:

$$\begin{aligned}
(q_m)_{i,j}^k + \frac{\Delta x^2}{48} [(q_m)_{xx}]_{i,j}^k + \frac{\Delta y^2}{48} [(q_m)_{yy}]_{i,j}^k = & [P_m^y(\Delta x, f_m, g_m)]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \\
& + [P_m^y(-\Delta x, f_m, g_m)]_{i+1/2,j}^{k-1/2} \\
& + [P_m^x(\Delta y, g_m, f_m)]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \\
& + [P_m^x(-\Delta y, g_m, f_m)]_{i,j+1/2}^{k-1/2}, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

para $m = 1, 2, 3$, em que

$$\begin{aligned}
P_m^\zeta(\Delta \xi, \phi, \psi) = & \frac{1}{4} \left\{ q_m + \frac{\Delta \xi}{4} (q_m)_\xi + \frac{\Delta t}{4} [\phi_\xi - \psi_\zeta] + \frac{2\Delta t}{\Delta \xi} \left[\phi + \frac{\Delta t}{4} \phi_t \right] \right. \\
& + \frac{\Delta t}{48\Delta \xi} [\Delta \zeta^2 \phi_{\zeta\zeta} + \Delta \xi^2 \phi_{\xi\xi}] + \frac{\Delta t}{12\Delta \xi} \left[\Delta t^2 \phi_{tt} - \frac{\Delta \xi^2}{2} \psi_{\zeta\xi} \right] + \frac{\Delta \zeta^2}{192} (q_m)_{\zeta\zeta} \\
& \left. + \frac{\Delta t^2}{16} [\phi_{\xi t} - \psi_{\zeta t}] + \frac{7\Delta \xi^2}{192} (q_m)_{\xi\xi} + \frac{\Delta t}{2} \left[S_m + \frac{\Delta t}{4} (S_m)_t + \frac{\Delta \xi}{4} (S_m)_\xi \right] \right\}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Observe que $P_m^\zeta(\Delta\xi, \phi, \psi)$ é uma função de quatro variáveis: ζ e ξ , que podem assumir os valores de x ou de y ; e ϕ e ψ , que podem ser as funções f_m ou g_m , $m = 1, 2, 3$. É importante notar, ainda, que as equações (4.23) e (4.24) dependem apenas das incógnitas $q_m, (q_m)_x, (q_m)_y, (q_m)_{xx}, (q_m)_{yy}$ e $(q_m)_{xy}$ do tempo $t_{k-1/2}$, para $m = 1, 2, 3$. Observe, por exemplo, que o cálculo de

$$\begin{aligned} (f_m)_t &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial t} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \left[S_l - \frac{\partial f_l}{\partial x} - \frac{\partial g_l}{\partial y} \right], \\ &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} S_l - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \sum_{n=1}^3 \left[\frac{\partial f_l}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial x} + \frac{\partial g_l}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

é inteiramente dependente das variáveis $q_m, (q_m)_x$ e $(q_m)_y$, $m = 1, 2, 3$.

Por outro lado, é preciso conhecer $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$ previamente à obtenção de $(q_m)_{i,j}^k$ no tempo t_k , conforme equação (4.23). A seção a seguir descreve a obtenção dessas derivadas espaciais duplas.

4.2.2 Avaliação de $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$, $[(q_m)_{xy}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$

Para prosseguir, constrói-se primeiramente equações auxiliares a partir de (4.10) por derivação:

$$\frac{\partial (q_m)_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(f_m)_{xx} - (S_m)_x] + \frac{\partial (g_m)_{xx}}{\partial y} = \text{div } \hat{\mathbf{H}}_m = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial (q_m)_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(f_m)_{xy} - \frac{1}{2}(S_m)_y \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(g_m)_{xy} - \frac{1}{2}(S_m)_x \right] = \text{div } \tilde{\mathbf{H}}_m = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial (q_m)_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial (f_m)_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(g_m)_{yy} - (S_m)_y] = \text{div } \bar{\mathbf{H}}_m = 0, \quad (4.28)$$

com respectivas formas integrais:

$$\oint_{S(V)} \hat{\mathbf{H}}_m \cdot ds = 0, \quad \oint_{S(V)} \tilde{\mathbf{H}}_m \cdot ds = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{S(V)} \bar{\mathbf{H}}_m \cdot ds = 0, \quad m = 1, 2, 3. \quad (4.29)$$

As equações (4.26)-(4.29) possuem, conforme equações (4.12) e (4.13), para todo $(x, y, t) \in SE(i, j, k)$, os seguintes análogos numéricos:

$$\text{div } \hat{\mathbf{H}}_m^* = \text{div } \tilde{\mathbf{H}}_m^* = \text{div } \bar{\mathbf{H}}_m^* = 0, \quad (4.30)$$

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \hat{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = \oint_{S(CE(i,j,k))} \tilde{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = \oint_{S(CE(i,j,k))} \bar{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = 0. \quad (4.31)$$

Os campos vetoriais aproximados $\hat{\mathbf{H}}_m^*$, $\tilde{\mathbf{H}}_m^*$ e $\bar{\mathbf{H}}_m^*$ são constantes (lembre-se que as funções f^* , g^* e q^* são polinômios de segundo grau), de modo que a avaliação das equações em (4.31), sobre o elemento de conservação descrito pela FIGURA 19b, retornam:

$$\begin{aligned}
[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k &= \frac{1}{4} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right\} \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xx}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} - [(f_m)_{xx}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [(S_m)_x]_{i+1/2,j}^{k-1/2} - [(S_m)_x]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \right\} \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left\{ [(g_m)_{xx}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} - [(g_m)_{xx}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right\}, \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k &= \frac{1}{4} \left\{ [(q_m)_{yy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{yy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{yy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + [(q_m)_{yy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right\} \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left\{ [(g_m)_{yy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} - [(g_m)_{yy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} + [(S_m)_y]_{i,j+1/2}^{k-1/2} - [(S_m)_y]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \right\} \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ [(f_m)_{yy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} - [(f_m)_{yy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} \right\} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[(q_m)_{xy}]_{i,j}^k &= \frac{1}{4} \left\{ [(q_m)_{xy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + [(q_m)_{xy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right\} \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} - [(f_m)_{xy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + \frac{[(S_m)_y]_{i+1/2,j}^{k-1/2} - [(S_m)_y]_{i-1/2,j}^{k-1/2}}{2} \right\} \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left\{ [(g_m)_{xy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} - [(g_m)_{xy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} + \frac{[(S_m)_x]_{i,j+1/2}^{k-1/2} - [(S_m)_x]_{i,j-1/2}^{k-1/2}}{2} \right\}. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

As equações (4.32), (4.33) e (4.34) fornecem os valores das variáveis de marcha com derivada de segunda ordem. Aborda-se na seção a seguir o cálculo das derivadas de primeira ordem das variáveis dinâmicas q_m , $m = 1, 2, 3$.

4.2.3 Avaliação de $[(q_m)_x]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_y]_{i,j}^k$

As variáveis $[(q_m)_x]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_y]_{i,j}^k$ podem ser determinadas por meio de uma estratégia análoga àquela apresentada na seção 4.2.2 anterior, bastando, para isso, construir leis diferenciais de conservação (já nas formas aproximadas)

$$\frac{\partial(q_m^*)_x}{\partial t} + \frac{\partial(f_m^*)_x}{\partial x} + \frac{\partial(g_m^*)_x}{\partial y} = \text{div } \check{\mathbf{H}}_m^* = (S_m^*)_x, \quad m = 1, 2, 3, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial(q_m^*)_y}{\partial t} + \frac{\partial(f_m^*)_y}{\partial x} + \frac{\partial(g_m^*)_y}{\partial y} = \text{div } \check{\mathbf{H}}_m^* = (S_m^*)_y, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.36)$$

e integrais

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \check{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = \int_{CE(i,j,k)} (S_m^*)_x dV \quad \text{e} \quad \oint_{S(CE(i,j,k))} \check{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = \int_{CE(i,j,k)} (S_m^*)_y dV. \quad (4.37)$$

As avaliações das equações em (4.37) fornecem as inclinações equacionadas por

$$\begin{aligned}
[(q_m)_\xi]_{i,j}^k &= [Q_m^{(1)}(\Delta x, \xi)]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [Q_m^{(1)}(-\Delta x, \xi)]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [Q_m^{(2)}(\Delta y, \xi)]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \\
&+ [Q_m^{(2)}(-\Delta y, \xi)]_{i,j+1/2}^{k-1/2}, \quad \text{para } \xi = x, y \quad \text{e} \quad m = 1, 2, 3, \quad (4.38)
\end{aligned}$$

em que $[(q_m)_\xi]_{i,j}^k = [(q_m)_x]_{i,j}^k$, para $\xi = x$, isto é, a derivada de primeira ordem de q_m . E ainda,

$$Q_m^{(1)}(\Delta x, \xi) = \frac{1}{4} \left\{ (q_m)_\xi + \frac{\Delta x}{4} (q_m)_{x\xi} + \frac{\Delta t}{4} [(f_m)_{x\xi} - (g_m)_{y\xi}] + \frac{\Delta t}{2} (S_m)_\xi + \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[(f_m)_\xi + \frac{\Delta t}{4} (f_m)_{t\xi} \right] \right\}, \quad (4.39)$$

$$Q_m^{(2)}(\Delta y, \xi) = \frac{1}{4} \left\{ (q_m)_\xi + \frac{\Delta y}{4} (q_m)_{y\xi} + \frac{\Delta t}{4} [(g_m)_{y\xi} - (f_m)_{x\xi}] + \frac{\Delta t}{2} (S_m)_\xi + \frac{2\Delta t}{\Delta y} \left[(g_m)_\xi + \frac{\Delta t}{4} (g_m)_{t\xi} \right] \right\}. \quad (4.40)$$

O esquema CE/SE é formado, por tanto, pelo conjunto de equações (4.23), (4.32)-(4.34) e (4.38). Para o caso unidimensional, utiliza-se as equações

$$(q_m)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} [(q_m)_{xx}]_i^j = \frac{1}{2} \left\{ [Q_m(\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} + [Q_m(-\Delta x)]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad m = 1, 2, \quad (4.41)$$

$$[(q_m)_x]_i^j = \frac{1}{2} \left\{ [Q_m^x(\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} + [Q_m^x(-\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad m = 1, 2 \quad (4.42)$$

e

$$[(q_m)_{xx}]_i^j = \frac{1}{2} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} \right\} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(f_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} + [(S_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(S_m)_x]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad m = 1, 2, \quad (4.43)$$

em que

$$[Q_m(\Delta x)]_i^j = (q_m)_i^j + \frac{\Delta x}{4} \left\{ [(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x}{6} [(q_m)_{xx}]_i^j \right\} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (f_m)_i^j + \frac{\Delta t}{4} [(f_m)_t]_i^j + \frac{\Delta t^2}{24} [(f_m)_{tt}]_i^j \right\} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ (S_m)_i^j + \frac{\Delta x}{4} [(S_m)_x]_i^j + \frac{\Delta t}{4} [(S_m)_t]_i^j \right\}, \quad (4.44)$$

$$[Q_m^x(\Delta x)]_i^j = [(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x}{4} [(q_m)_{xx}]_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ [(f_m)_x]_i^j - (S_m)_i^j \right\} + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xt}]_i^j - [(S_m)_t]_i^j \right\}, \quad m = 1, 2. \quad (4.45)$$

A dedução completa desse esquema possui passos semelhantes ao apresentado (bidimensional), razão pela qual não foi mostrada no texto principal, mas foi alocada no apêndice B.

4.2.4 Propriedades do Esquema

Avalia-se nesta subsecção as propriedades básicas do esquema numérico, tais como erro de truncamento, consistência 4.2.4.1 e estabilidade 4.2.4.2.

4.2.4.1 Erro de Truncamento e Consistência

Considera-se, por simplicidade, as equações de águas rasas homogênea e suponha inicialmente que as soluções q_m , $m = 1, 2, 3$ da equação (4.5) sejam funções suaves de modo que

$q_m \in C^\infty(V)$ e ainda que $f_m(q_1, q_2, q_3), g_m(q_1, q_2, q_3) \in C^\infty(V)$. Neste caso, as funções q_m, f_m e g_m podem ser expandidas em série de Taylor na vizinhança de $(x_i, y_j, t_{j-1/2}) \in V \subset \mathbb{R}^3$. O mesmo é possível para suas derivadas, isto é, para as funções $(q_m)_\xi, (f_m)_\xi, (g_m)_\xi, (q_m)_{\xi\zeta}, (f_m)_{\xi\zeta}$ e $(g_m)_{\xi\eta}$, $\xi, \zeta = x, y, t$. Substituindo adequadamente estas expressões em série de Taylor nas equações (4.23), (4.32)-(4.34), (4.38) e subtraindo o resultado da equação (4.10), tem-se, após as simplificações,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{q_m}(x_i, y_j, t_{j-1/2}) &= \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta y^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta y^4) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta y^2), \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A equação (4.46) representa o erro de truncamento decorrente ao aproximar-se (4.10) por $\text{div } \mathbf{H}_m^* = S_m^*$, $m = 1, 2, 3$. De modo análogo, obtém-se os erros de truncamento para as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(q_m)_\xi}(x_i, y_j, t_{j-1/2}) &= \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta y^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t \Delta y^2), \quad \xi = x, y, \quad m = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(q_m)_{\xi\zeta}}(x_i, y_j, t_{j-1/2}) &= \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t \Delta y^2), \quad \xi, \zeta = x, y, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Pelas equações anteriores, tem-se que os erros de truncamento $\mathcal{T}_{q_m}, \mathcal{T}_{(q_m)_\xi}, \mathcal{T}_{(q_m)_{\xi\zeta}} \rightarrow 0$ quando $\Delta t, \Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, para $\xi, \zeta = x, y, m = 1, 2, 3$, o que implica na consistência do esquema.

4.2.4.2 Estabilidade

As ideias sobre estabilidade serão desenvolvidas sobre a forma vetorial não-conservativa homogênea do sistema (4.5):

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{A}\mathbf{Q}_x + \mathbf{B}\mathbf{Q}_y = \mathbf{0}, \quad (4.49)$$

em que \mathbf{Q} está definido em (4.6) e as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são, respectivamente,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ gh - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Para prosseguir, suponha-se que (4.49) seja linear. Nestes termos, tem-se que

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\alpha}, \quad \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{G}_\alpha = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\alpha}, \quad \mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, t. \quad (4.51)$$

Definindo-se as matrizes

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh/2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ gh/2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

será possível escrever os vetores \mathbf{F} e \mathbf{G} , de (4.6) e (4.7), como $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}$ e $\mathbf{G} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{Q}$, respectivamente. De posse das matrizes em (4.50) e (4.52), define-se as matrizes em bloco

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{Q}_y \\ \mathbf{Q}_{xx} \\ \mathbf{Q}_{xy} \\ \mathbf{Q}_{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta x^2}{48}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{\Delta y^2}{48}\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{7\Delta x^2}{192}\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{16}\mathbf{A}^2 & \frac{\Delta t^2}{16}(\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}) & \frac{\Delta y^2}{192}\mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{16}\mathbf{B}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta x^2}{192}\mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{16}\mathbf{A}^2 & \frac{\Delta t^2}{16}(\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}) & \frac{7\Delta y^2}{192}\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{16}\mathbf{B}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{N}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta x}\bar{\mathbf{A}} & \mathbf{N}_{12}^{(1)} & \mathbf{N}_{13}^{(1)} & \mathbf{N}_{14}^{(1)} & \mathbf{N}_{15}^{(1)} & \mathbf{N}_{16}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{12}^{(1)} & \mathbf{N}_{13}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{12}^{(1)} & \mathbf{N}_{13}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

e

$$\mathbf{N}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta y}\bar{\mathbf{B}} & \mathbf{N}_{12}^{(2)} & \mathbf{N}_{13}^{(2)} & \mathbf{N}_{14}^{(2)} & \mathbf{N}_{15}^{(2)} & \mathbf{N}_{16}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{12}^{(2)} & \mathbf{N}_{13}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{12}^{(2)} & \mathbf{N}_{13}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{12}^{(1)} &= \frac{\Delta x}{8} \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{8} \mathbf{A} - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \mathbf{A}^2 & \mathbf{N}_{12}^{(2)} &= -\frac{\Delta t}{8} \mathbf{A} - \frac{\Delta t^2}{4\Delta y} \mathbf{B} \mathbf{A} \\
\mathbf{N}_{13}^{(1)} &= -\frac{\Delta t}{8} \mathbf{B} - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{N}_{13}^{(2)} &= \frac{\Delta y}{8} \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{8} \mathbf{B} - \frac{\Delta t^2}{4\Delta y} \mathbf{B}^2 \\
\mathbf{N}_{14}^{(1)} &= \frac{\Delta t \Delta x}{96} \mathbf{A} + \frac{\Delta t^3}{24\Delta x} \mathbf{A}^3 & \mathbf{N}_{14}^{(2)} &= \frac{\Delta t \Delta x^2}{96\Delta y} \mathbf{B} + \frac{\Delta t^3}{24\Delta y} \mathbf{B} \mathbf{A}^2 \\
\mathbf{N}_{15}^{(1)} &= \frac{\Delta t^3}{24\Delta x} \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}) - \frac{\Delta t \Delta x}{48} \mathbf{B} & \mathbf{N}_{15}^{(2)} &= \frac{\Delta t^3}{24\Delta y} \mathbf{B} (\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}) - \frac{\Delta t \Delta y}{48} \mathbf{A} \\
\mathbf{N}_{16}^{(1)} &= \frac{\Delta t \Delta y^2}{96\Delta x} \mathbf{A} + \frac{\Delta t^3}{24\Delta x} \mathbf{A} \mathbf{B}^2 & \mathbf{N}_{16}^{(2)} &= \frac{\Delta t \Delta y}{96} \mathbf{B} + \frac{\Delta t^3}{24\Delta y} \mathbf{B}^3
\end{aligned} \quad (4.58)$$

Com isso, o esquema CE/SE pode ser matricialmente escrito como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} \mathbf{W}_{j,k}^m &= \mathbf{M}^{(1)} \left(\mathbf{W}_{j-1/2,k}^{m-1/2} + \mathbf{W}_{j+1/2,k}^{m-1/2} \right) + \mathbf{M}^{(2)} \left(\mathbf{W}_{j,k-1/2}^{m-1/2} + \mathbf{W}_{j,k+1/2}^{m-1/2} \right) + \\
&\quad \mathbf{N}^{(1)} \left(\mathbf{W}_{j-1/2,k}^{m-1/2} - \mathbf{W}_{j+1/2,k}^{m-1/2} \right) + \mathbf{N}^{(2)} \left(\mathbf{W}_{j,k-1/2}^{m-1/2} - \mathbf{W}_{j,k+1/2}^{m-1/2} \right). \quad (4.59)
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier da solução $\hat{\mathbf{W}}^m(\xi_1, \xi_2)$ satisfaz a relação de recursão

$$\hat{\mathbf{W}}^m(\xi_1, \xi_2) = \Theta \hat{\mathbf{W}}^{m-1/2}(\xi_1, \xi_2), \quad (4.60)$$

em que Θ é a matriz de amplificação do método e é dada por

$$\begin{aligned}
\Theta &= 2\mathbf{R}^{-1} \left[\cos\left(\frac{\Delta x \xi_1}{2}\right) \mathbf{M}^{(1)} - i \operatorname{isen}\left(\frac{\Delta x \xi_1}{2}\right) \mathbf{N}^{(1)} \right] \\
&\quad + 2\mathbf{R}^{-1} \left[\cos\left(\frac{\Delta y \xi_2}{2}\right) \mathbf{M}^{(2)} - i \operatorname{isen}\left(\frac{\Delta y \xi_2}{2}\right) \mathbf{N}^{(2)} \right]. \quad (4.61)
\end{aligned}$$

Observe que Θ é uma matriz triangular superior em bloco e o seu conjunto de autovalores é

$$\lambda(\Theta) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \frac{\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)}{2} - i \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \operatorname{sen}(\theta_1) \lambda_1 + \frac{\Delta t}{\Delta y} \operatorname{sen}(\theta_2) \lambda_2 \right] \right\}, \quad (4.62)$$

em que $\theta_1 = \Delta x \xi_1/2$, $\theta_2 = \Delta y \xi_2/2$, λ_1 são os autovalores das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e \mathbf{A} e λ_2 os autovalores das matrizes $\bar{\mathbf{B}}$ e \mathbf{B} , isto é,

$$\lambda_1 = \begin{cases} u \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{gh} \\ \text{ou} \\ u \pm \sqrt{gh} \end{cases} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \begin{cases} v \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{gh} \\ \text{ou} \\ v \pm \sqrt{gh} \end{cases}. \quad (4.63)$$

Considera-se, para dar continuidade, a seguinte

Definição 4.2.1. O raio espectral $\rho(\mathbf{M})$ de uma matriz \mathbf{M} é definido por

$$\rho(\mathbf{M}) = \max |\lambda|, \quad \text{onde } \lambda \text{ é um autovalor de } \mathbf{M}.$$

Se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, então $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Para relacionar raio espectral e norma de matriz, seja o seguinte

Teorema 4.2.1. *Se M é uma matriz $n \times n$, então*

(i) $\rho(M) \leq \|M\|$, para qualquer norma $\|\cdot\|$;

(ii) Para todo $\delta > 0$, existe uma norma natural $\|\cdot\|$, tal que $\|M\| \leq \rho(M) + \delta$.

Assim, uma condição necessária para que $\|\Theta\| \leq 1$, segundo o item (i) do Teorema 4.2.1, é $\rho(\Theta) \leq 1$, isto é,

$$\begin{aligned} \rho(\Theta) &= \max \left| \left[\frac{\cos(\theta_1)}{2} - i \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(\theta_1) \lambda_1 \right] + \left[\frac{\cos(\theta_2)}{2} - i \frac{\Delta t}{\Delta y} \text{sen}(\theta_2) \lambda_2 \right] \right|, \\ &\leq \max \left\{ \sqrt{\frac{\cos^2(\theta_1)}{4} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \lambda_1^2 \text{sen}^2(\theta_1)} + \sqrt{\frac{\cos^2(\theta_2)}{4} + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \lambda_2^2 \text{sen}^2(\theta_2)} \right\}, \\ &= \max \left\{ \frac{\sqrt{1 + \left(4 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \lambda_1^2 - 1\right) \text{sen}^2(\theta_1)}}{2} + \frac{\sqrt{1 + \left(4 \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \lambda_2^2 - 1\right) \text{sen}^2(\theta_2)}}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde \leq acima foi obtido por desigualdade triangular. Neste caso, $\rho(\Theta) \leq 1$ se, e somente se,

$$4 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} [\max(\lambda_1)]^2 - 1 \leq 0 \quad \text{e} \quad 4 \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} [\max(\lambda_2)]^2 - 1 \leq 0, \quad (4.65)$$

isto é,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda_1| \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta t}{\Delta y} \max |\lambda_2| \leq \frac{1}{2}. \quad (4.66)$$

Mas, observe que

$$\max |\lambda_1| = \max \left| u \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{gh}; u \pm \sqrt{gh} \right| \leq \max \left\{ |u| + \sqrt{gh} \right\}, \quad (4.67)$$

e

$$\max |\lambda_2| = \max \left| v \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{gh}; v \pm \sqrt{gh} \right| \leq \max \left\{ |v| + \sqrt{gh} \right\}. \quad (4.68)$$

Assim, comparando as equações (4.66), (4.67) e (4.68), conclui-se que uma condição necessária para estabilidade é

$$CFL = \max \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(|u| + \sqrt{gh} \right) \right\} + \max \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(|v| + \sqrt{gh} \right) \right\} \leq 1. \quad (4.69)$$

Esta condição não é, no entanto, suficiente. Uma condição suficiente (e também necessária, conforme argumentos acima) é

$$CFL = \max \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(|u| + \sqrt{gh} \right) \right\} + \max \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(|v| + \sqrt{gh} \right) \right\} < 1, \quad (4.70)$$

pois, neste caso, $\rho(\Theta) < 1$ e é possível escolher um $\delta > 0$ adequado tal que $\rho(\Theta) + \delta = 1$. Pelo item (ii) do teorema 4.2.1, existe uma norma $\|\cdot\|$ tal que

$$\|\Theta\| \leq \rho(\Theta) + \delta = 1. \quad (4.71)$$

Observe-se que a condição (4.69) é válida para qualquer norma, ao contrário de (4.70), que ainda não estabelece a referida norma.

A condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) para o método unidimensional é restrita por (ZHANG; ZENG; CHEN, 2012):

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|u| + \sqrt{gh}), \quad (4.72)$$

onde o número de Courant satisfaz $0 < CFL \leq 1$ (ver apêndice B.3.3).

O esquema em questão é interessante apenas em problemas com soluções de comportamento suave. A seção a seguir justifica essa afirmação.

4.2.5 Experimentos Numéricos Preliminares

Com o objetivo de avaliar o esquema desenvolvido quanto a precisão e robustez, propõe-se nesta seção três exemplos numéricos. Os códigos computacionais construídos encontram-se no apêndice C.2. Os experimentos relacionados à precisão foram construídos a partir de sistemas lineares tendo em vista a seguinte (STRIKWERDA, 1947, p. 64):

Definição 4.2.2. *Um esquema $P_{\Delta x, \Delta t} v = R_{\Delta x, \Delta t} f$ que é consistente com a equação diferencial $\mathcal{P}u = f$ possui precisão de ordem r no tempo e ordem s no espaço se, para toda função suave $\phi(x, t)$,*

$$P_{\Delta x, \Delta t} \phi - R_{\Delta x, \Delta t} \mathcal{P} \phi = \mathcal{O}(\Delta t^r) + \mathcal{O}(\Delta x^s). \quad (4.73)$$

Ou seja, a ordem de precisão fornece informação do quão acurada está a solução numérica na hipótese de que a solução verdadeira seja suave. Outro detalhe é que essas estimativas são computadas a partir da equação (3.60), da subseção 3.2.4, que computa a ordem de precisão da solução numérica. No entanto, se os dados iniciais são suaves, então a ordem de precisão do esquema e a numérica são iguais (STRIKWERDA, 1947, cap. 10).

Exemplo 4.2.1 (Teste de precisão 1D). O objetivo deste exemplo teste é verificar experimentalmente a ordem de precisão do esquema CE/SE. Seja o sistema hiperbólico linear unidimensional

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0}, \quad \text{onde } \mathbf{U} = (\phi, u), \quad \mathbf{F} = (cu, c\phi) \quad (4.74)$$

e c é uma constante dada. Impondo as condições iniciais $\phi(x, 0) = -c^{-1} \sin(2\pi x)$ e $u(x, 0) = 0$, é possível obter a seguinte solução exata (QURRAT-UL-AIN; QAMAR; WARNECKE, 2007):

$$\phi(x, t) = -c^{-1} \cos(2\pi ct) \sin(2\pi x) \quad \text{e} \quad u(x, t) = c^{-1} \sin(2\pi ct) \cos(2\pi x). \quad (4.75)$$

As soluções são computadas com as equações (4.23), (4.32)-(4.34) e (4.38). A TABELA 7 apresenta os erros calculados nas normas L^1 e L^2 , nas simulações realizadas sobre o domínio computacional $-1 \leq x \leq 1$, $c = 1$, $CFL = 0,8$ até atingir o tempo $t = 1,2$ s, sendo n o número de células no espaço. O experimento verifica a terceira ordem de precisão do esquema para ambas as variáveis u e ϕ .

TABELA 7 – Ordem de precisão experimental do método CE/SE para o sistema hiperbólico linear unidimensional.

n	Norma L^1				Norma L^2			
	Erro (ϕ)	Ordem	Erro (u)	Ordem	Erro (ϕ)	Ordem	Erro (u)	Ordem
20	$8,32 \times 10^{-3}$	–	$1,66 \times 10^{-2}$	–	$7,16 \times 10^{-3}$	–	$1,35 \times 10^{-2}$	–
40	$1,85 \times 10^{-3}$	2,17	$2,53 \times 10^{-3}$	2,72	$1,49 \times 10^{-3}$	2,27	$2,04 \times 10^{-3}$	2,72
80	$3,07 \times 10^{-4}$	2,59	$3,40 \times 10^{-4}$	2,89	$2,44 \times 10^{-4}$	2,61	$2,72 \times 10^{-4}$	2,91
160	$4,37 \times 10^{-5}$	2,81	$4,39 \times 10^{-5}$	2,96	$3,49 \times 10^{-5}$	2,81	$3,47 \times 10^{-5}$	2,97
320	$5,81 \times 10^{-6}$	2,91	$5,57 \times 10^{-6}$	2,98	$4,67 \times 10^{-6}$	2,90	$4,37 \times 10^{-6}$	2,99
640	$7,49 \times 10^{-7}$	2,96	$7,01 \times 10^{-7}$	2,99	$6,03 \times 10^{-7}$	2,95	$5,49 \times 10^{-7}$	2,99

Note-se que $\mathcal{O}(\Delta x^3)$ era esperado, tendo em vista que a ordem de precisão experimental s (ver equação (3.60)) é estimada conforme

$$\|\epsilon^N\|_2 = \|\mathbf{u}^j - \hat{\mathbf{u}}^j\|_2 = C(\Delta x)^s + \text{termos de alta ordem}, \quad (4.76)$$

e como $\hat{\mathbf{u}}^j$ está sendo aproximado por polinômios de segunda ordem, é natural que s seja de ordem 3.

Exemplo 4.2.2 (Teste de precisão 2D). Seja agora o sistema hiperbólico linear bidimensional

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{0}, \quad \text{onde } \mathbf{U} = (\phi, u, v), \quad \mathbf{F} = (cu, c\phi, 0), \quad \mathbf{G} = (cv, 0, c\phi) \quad (4.77)$$

e c é uma constante dada. Para os dados iniciais $\phi(x, y, 0) = -c^{-1}[\text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi y)]$ e $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$, este problema admite a seguinte solução exata (QURRAT-UL-AIN; QAMAR; WARNECKE, 2007):

$$\begin{aligned} \phi &= -c^{-1} \cos(2\pi ct) [\text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi y)], \\ u &= c^{-1} \text{sen}(2\pi ct) \cos(2\pi x) \quad \text{e} \quad v = c^{-1} \text{sen}(2\pi ct) \cos(2\pi y). \end{aligned} \quad (4.78)$$

A TABELA 8 apresenta os erros numéricos calculados nas normas L^1 e L^2 , no tempo $t = 0,2$ s, com parâmetros especificados em $c = 1$, $CFL = 0,4$ e domínio computacional definido em $-1 \leq x, y \leq 1$, sendo $n = n_x = n_y$ e $n_x \times n_y$ o número de células utilizadas na discretização. O experimento confirma novamente a precisão de terceira ordem do esquema CE/SE.

Exemplo 4.2.3 (Problema de Riemann I: ruptura de barragem 1D). Considera-se agora um problema ideal de ruptura de barragem sobre um domínio molhado, isto é, a quebra de barragem

TABELA 8 – Ordem de precisão experimental do método CE/SE para o sistema hiperbólico linear bidimensional.

n	Norma L^1				Norma L^2			
	Erro (ϕ)	Ordem	Erro (u, v)	Ordem	Erro (ϕ)	Ordem	Erro (u, v)	Ordem
20	$2,60 \times 10^{-3}$	–	$1,28 \times 10^{-2}$	–	$1,80 \times 10^{-3}$	–	$7,48 \times 10^{-3}$	–
40	$4,23 \times 10^{-4}$	2,62	$2,03 \times 10^{-3}$	2,66	$3,38 \times 10^{-4}$	2,41	$1,17 \times 10^{-3}$	2,68
80	$7,52 \times 10^{-5}$	2,49	$2,92 \times 10^{-4}$	2,80	$6,11 \times 10^{-5}$	2,47	$1,65 \times 10^{-4}$	2,82
160	$1,20 \times 10^{-5}$	2,65	$3,94 \times 10^{-5}$	2,89	$9,60 \times 10^{-6}$	2,67	$2,22 \times 10^{-5}$	2,90
320	$1,74 \times 10^{-6}$	2,79	$5,13 \times 10^{-6}$	2,94	$1,40 \times 10^{-6}$	2,78	$2,90 \times 10^{-6}$	2,94
640	$2,36 \times 10^{-7}$	2,88	$6,55 \times 10^{-7}$	2,97	$1,94 \times 10^{-7}$	2,85	$3,72 \times 10^{-7}$	2,96

é instantânea, o fundo é plano e não existe resistência ao escoamento. As condições iniciais para esta configuração seguem o clássico problema de Riemann

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l, & \text{para } 0 \text{ m} \leq x \leq x_0 \text{ m} \\ h_r, & \text{para } x_0 \text{ m} < x \leq L \text{ m} \end{cases}, \quad \text{com } h_l \geq h_r \text{ e } u(x, 0) = 0 \text{ m/s.} \quad (4.79)$$

O domínio considerado é $0 \text{ m} \leq x \leq 2000 \text{ m}$, $x_0 = 1000 \text{ m}$ e a solução analítica pode ser encontrada em Stoker (1957, p. 333) ou Delestre et al. (2013). As FIGURAS 20a e 20b demonstram o comportamento da solução numérica em relação à analítica, calculadas no tempo $t = 52 \text{ s}$, com $n + 1 = 201$ pontos, incremento espacial $\Delta x = 10 \text{ m}$, $CFL = 0,8$ e profundidades iniciais a montante e a jusante $h_l = 10 \text{ m}$ e $h_r = 5 \text{ m}$, respectivamente. Note-se que a resposta numérica é coerente com a analítica, embora a presença de dissipação numérica a distancie nas regiões com mudanças abruptas.

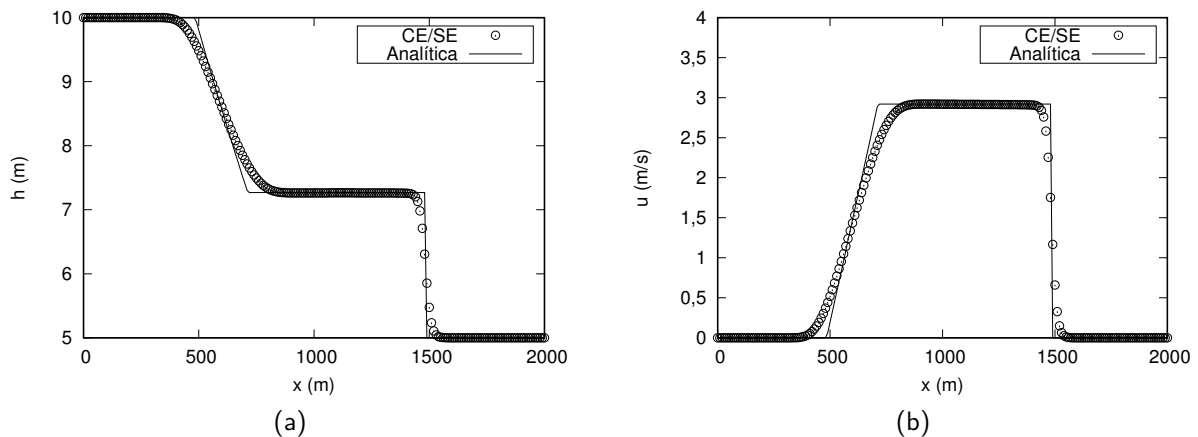


FIGURA 20 – Elevação da superfície da água h e velocidade u para o problema de ruptura de barragem, computada no tempo $t = 52 \text{ s}$, utilizando uma malha uniforme com 201 pontos, incremento espacial $\Delta x = 10 \text{ m}$ e $h_r/h_l = 0,5$.

Com o intuito de aperfeiçoar a aproximação para problemas com descontinuidades ou formação de choque, propõe-se uma modificação do cálculo das variáveis em (4.32)-(4.34) e

(4.38). Trata-se de uma variação do procedimento adotado por Chang (1995) e consiste em um processo iterativo descrito na seção a seguir.

4.2.6 Esquema Para Problemas Descontínuos ou Com Formação de Choque

Considera-se inicialmente as seguintes formas regressivas e progressivas:

$$[(q_m^\pm)_\xi]_{i,j}^k = \delta_\xi^\pm(q_m) \quad \text{e} \quad [(q_m^\pm)_{\zeta\xi}]_{i,j}^k = \delta_\xi^\pm[(q_m)_\zeta], \quad \xi = x, y, \quad \zeta = x, y \quad \text{e} \quad m = 1, 2, 3, \quad (4.80)$$

tal que o operador δ_ξ^\pm seja definido como

$$\delta_\xi^\pm(\phi) = \begin{cases} \pm \frac{2}{\Delta\xi} [(\phi')_{i\pm 1/2,j}^k - \phi_{i,j}^k], & \text{se } \xi = x, \\ \pm \frac{2}{\Delta\xi} [(\phi')_{i,j\pm 1/2}^k - \phi_{i,j}^k], & \text{se } \xi = y, \end{cases} \quad (4.81)$$

e

$$\phi' = \begin{cases} \phi + \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{\Delta t^2}{8} \phi_{tt}, & \text{se } \phi = (q_m)_x, (q_m)_y, \\ \phi + \frac{\Delta t}{2} \phi_t, & \text{se } \phi = (q_m)_{xx}, (q_m)_{xy}, (q_m)_{yy}. \end{cases} \quad (4.82)$$

As aproximações para as derivadas serão definidas, para $m = 1, 2, 3$, como

$$[(q_m)_\xi]_{i,j}^k = W \{ [(q_m^+)_{\xi}]_{i,j}^k, [(q_m^-)_{\xi}]_{i,j}^k, \alpha \}, \quad (4.83)$$

$$[(q_m)_{\zeta\xi}]_{i,j}^k = W \{ [(q_m^+)_{\zeta\xi}]_{i,j}^k, [(q_m^-)_{\zeta\xi}]_{i,j}^k, \alpha \}, \quad \xi = x, y, \quad \zeta = x, y \quad (4.84)$$

e a função W , para $\alpha \geq 0$, é tal que (CHANG; TO, 1991; CHANG, 1995):

$$W(x_-, x_+, \alpha) = \begin{cases} \frac{|x_+|^\alpha x_- + |x_-|^\alpha x_+}{|x_+|^\alpha + |x_-|^\alpha}, & \text{se } |x_+|^\alpha + |x_-|^\alpha \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.85)$$

Observe-se que neste caso, as equações (4.83) e (4.84) representam médias ponderadas das diferenças progressivas e regressivas descritas em (4.80) e (4.81). No caso de $\alpha = 0$, (4.83) e (4.84) tornam-se diferenças finitas centrais (ZHANG; ZENG; CHEN, 2012). Adota-se neste trabalho $\alpha = 1$.

Importante notar, no entanto, que as equações (4.83) e (4.84) dependem da variável $(q_m)_{i,j}^k$ que, por sua vez, depende de $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$, conforme (4.23). Dito de outra forma, para obter $(q_m)_{i,j}^k$ é necessário obter antes $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$, e vice-versa. O que fazer então? Utiliza-se as equações, (4.32) e (4.33) como aproximações iniciais para $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$, respectivamente, o que tornará possível obter a aproximação inicial de $(q_m)_{i,j}^k$ pela equação (4.23). Com isso, novas aproximações das derivadas de primeira e segunda ordem poderão ser obtidas, agora por meio das equações (4.83) e (4.84), respectivamente. Dessa forma, um processo iterativo é construído (Algoritmo 1).

Algoritmo 1: Algoritmo CE/SE para o cálculo das variáveis de marcha sobre um determinado ponto (i, j, k) da malha.

início

Defina uma tolerância τ ;

Faça $m = 1$;

repita

 Faça $l = 1$;

 Calcule $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$ com as equações (4.32) e (4.33), respectivamente;

 Calcule $(q_m^l)_{i,j}^k$ com a equação (4.23);

repita

 Calcule $[(q_m)_x]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_y]_{i,j}^k$ com a equação (4.83);

 Calcule $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$, $[(q_m)_{xy}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$ com a equação (4.84);

 Calcule $(q_m^{l+1})_{i,j}^k$ com a equação (4.23);

até $\|(q_m^{l+1})_{i,j}^k - (q_m^l)_{i,j}^k\| < \tau$;

até $m = 3$;

fim

Utilizando o Algoritmo 1, sob as mesmas condições e com os mesmos parâmetros utilizados no Exemplo 4.2.3, obtém-se os gráficos constantes na FIGURA 21. Observa-se que esta solução numérica é superior à anterior, sobretudo no que tange às regiões de rápidas mudanças. A TABELA 9 dispõe os erros relativos nas normas L^1 e L^2 para as soluções numéricas calculadas sob ambos os esquemas. O Algoritmo 1 produz uma redução no erro relativo de cerca de 81% na norma L^1 e cerca de 60% na norma L^2 , para ambas as variáveis h e u .

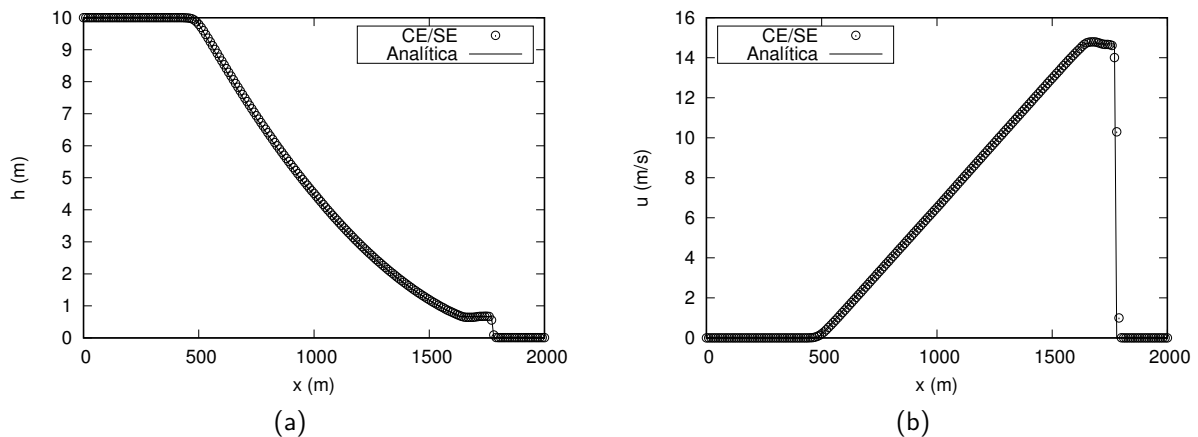


FIGURA 21 – Elevação da superfície da água h e velocidade u para o problema de ruptura de barragem com $h_r/h_l = 0,001$, no tempo $t = 52$ s, numa malha uniforme com 201 pontos e respectivo incremento espacial $\Delta x = 10$ m, calculados com o Algoritmo 1.

Conforme Zhang, Zeng e Chen (2012), a razão h_r/h_l é um importante índice para julgar a aplicabilidade e a acurácia de esquemas numéricos no modelo 1D de ruptura de

TABELA 9 – Taxa de decréscimo do erro relativo após a utilização do Algoritmo 1.

Esquema	Norma L^1		Norma L^2	
	Erro Relativo h	Erro Relativo u	Erro Relativo h	Erro Relativo u
CE/SE	$8,002 \times 10^{-3}$	$5,319 \times 10^{-2}$	$1,910 \times 10^{-2}$	$9,318 \times 10^{-2}$
CE/SE-Alg. 1	$1,508 \times 10^{-3}$	$9,887 \times 10^{-3}$	$7,813 \times 10^{-3}$	$3,663 \times 10^{-2}$
TAXA	-81,16%	-81,41%	-59,08%	-60,69%

barragem. Segundo os mesmos autores, os regimes de escoamentos subcrítico e supercrítico existem simultaneamente num canal sem fricção, horizontal e retangular, quando $h_r/h_l < 0,138$. Altera-se, neste sentido, estes parâmetros para uma razão $h_r/h_l = 0,001$ ($h_r = 0,01$ e $h_l = 10$). Os resultados simulados são mostrados nas FIGURAS 21a e 21b e os erros relativos na TABELA 10.

TABELA 10 – Erro relativo para a solução do problema de ruptura de barragem unidimensional com $h_r/h_l = 0,001$.

Norma	Erro Relativo h	Erro Relativo u
L^1	$5,908 \times 10^{-3}$	$1,999 \times 10^{-2}$
L^2	$6,631 \times 10^{-3}$	$9,762 \times 10^{-2}$

4.2.7 Experimentos Numéricos

Esta seção destina-se à apresentação de novos experimentos numéricos com a presença de descontinuidade na solução. Problemas unidimensionais (subseção 4.2.7.1) e bidimensionais (subseção 4.2.7.2) são analisados. Os códigos computacionais encontram-se no apêndice C.2.3 e C.2.4.

4.2.7.1 Outros Exemplos Unidimensionais

Os exemplos 4.2.4 e 4.2.5 simulam escoamentos permanentes transcrito e subcrítico, respectivamente. São todos simulados sobre um canal com comprimento $L = 25$ m, sem resistência ao escoamento ($S_{f_x} = 0$) e com uma topografia de fundo dada por

$$z(x) = \begin{cases} \frac{4 - (x - 10)^2}{20}, & \text{se } 8 \text{ m} < x < 12 \text{ m}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.86)$$

e suas respectivas soluções analíticas podem ser encontradas em Delestre et al. (2013).

Exemplo 4.2.4 (Escoamento permanente transcrito). Considera-se neste exemplo duas situações: um problema de escoamento transcrito sem formação de choque e um segundo problema, também de escoamento transcrito, mas com formação de choque transiente.

No primeiro caso, o escoamento é fluvial a montante e se torna torrencial na parte superior da saliência (DELESTRE et al., 2013). As condições iniciais podem ser feitas iguais a $h + z = 0,66$ m e $q = 0$ m²/s e, como condições de contorno, $q = 1,53$ m²/s a montante e $h = 0,66$ m a jusante (enquanto o escoamento é subcrítico) (YANG; KURGANOV; LIU, 2015). Nas FIGURAS 22a e 22b encontram-se os gráficos da profundidade h e velocidade u , calculadas em diversos tempos com $CFL = 0,96$. Em cerca de $t = 100$ s a solução atinge o estado permanente (considerada aqui a solução analítica, conforme gráficos constantes nas FIGURAS 22, 23 e 24). Estabeleceu-se, como critério de parada, que a diferença entre as soluções de dois passos de tempo consecutivos, calculados na norma L^2 , fossem inferiores a 10^{-20} , isto é, $\|\mathbf{H}^{j+1} - \mathbf{H}^j\|_2 < 10^{-20}$ e $\|\mathbf{Q}^{j+1} - \mathbf{Q}^j\|_2 < 10^{-20}$.

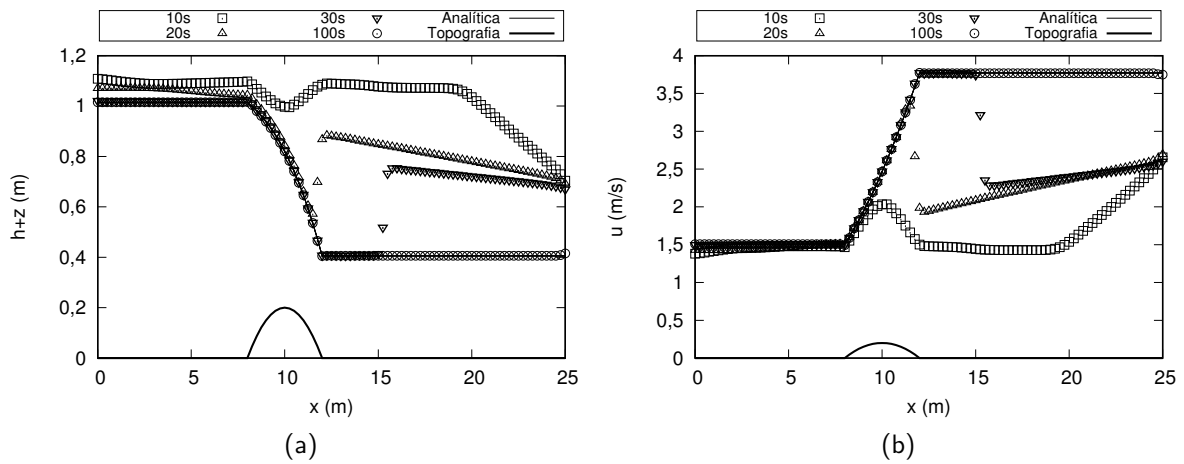


FIGURA 22 – Elevação da superfície da água $h + z$ e velocidade u para os problemas de escoamento transcrito sem formação de choque, em tempos intercalados até a convergência em estado permanente ocorrida em cerca de $t = 100$ s, computados numa malha uniforme com 101 pontos.

No segundo caso, o escoamento torna-se supercrítico no topo da lombada, mas torna-se novamente fluvial após um ressalto hidráulico (DELESTRE et al., 2013). As condições iniciais consideradas são $h + z = 0,33$ m e $q = 0$ m²/s, enquanto que as condições de contorno a jusante e a montante são $q = 0,18$ m²/s e $h = 0,33$ m, respectivamente. As soluções numéricas são comparadas com as analíticas e, conforme FIGURAS 23a e 23b, são devidamente precisas. Utiliza-se, novamente, $CFL = 0,96$. A TABELA 11 dispõe os erros relativos das variáveis h e u nas simulações dos dois problemas. A formação de choque influencia claramente a precisão numérica.

Exemplo 4.2.5 (Escoamento permanente subcrítico). O problema de escoamento subcrítico tem condições iniciais $h + z = 2$ m e $q = 0$ m²/s e as condições de contorno são escolhidas como $q = 4,42$ m²/s a montante (*upstream*) e $h = 2$ m a jusante (*downstream*). As FIGURAS 24a e 24b demonstram o comportamento da solução nos tempos 10 s, 20 s, 30 s até a convergência para o estado permanente em cerca de 100 s (conforme o critério de parada

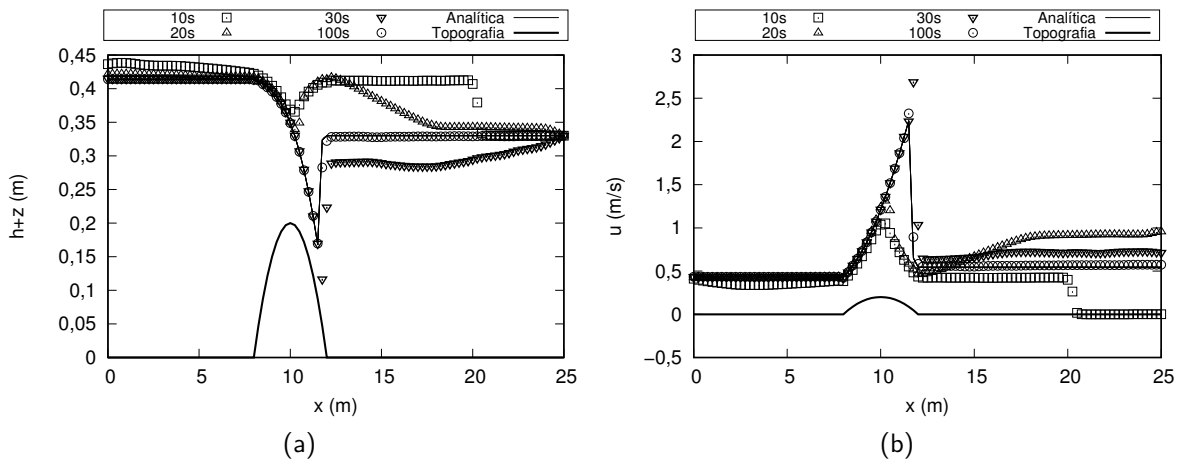


FIGURA 23 – Elevação da superfície da água $h + z$ e velocidade u para os problemas de escoamento transcrito com formação de choque, em tempos intercalados até a convergência em estado permanente ocorrida em cerca de $t = 100$ s, computados numa malha uniforme com 101 pontos.

TABELA 11 – Erro relativo para as soluções dos problemas de fluxo transcrito em estado permanente com e sem formação de choque.

Problema	Norma L^1		Norma L^2	
	Erro Relativo h	Erro Relativo u	Erro Relativo h	Erro Relativo u
Sem choque	$1,107 \times 10^{-3}$	$9,966 \times 10^{-4}$	$2,121 \times 10^{-3}$	$1,712 \times 10^{-3}$
Com choque	$3,432 \times 10^{-3}$	$2,296 \times 10^{-2}$	$1,223 \times 10^{-2}$	$4,319 \times 10^{-2}$

$\|\mathbf{H}^{j+1} - \mathbf{H}^j\|_2 < 10^{-20}$ e $\|\mathbf{Q}^{j+1} - \mathbf{Q}^j\|_2 < 10^{-20}$, mencionado anteriormente). Os resultados foram construídos a partir de uma malha uniforme com $n + 1 = 101$ pontos ($\Delta x = 1/4$) e condição $CFL = 0,9$. A TABELA 12 apresenta os erros relativos nas normas L^1 e L^2 para a solução no tempo $t = 100$ s.

TABELA 12 – Erro relativo para a solução do problema de fluxo subcrítico avaliado no tempo $t = 100$ s, quando converge para a solução em estado permanente.

Norma L^1		Norma L^2	
Erro Relativo h	Erro Relativo u	Erro Relativo h	Erro Relativo u
$4,87915 \times 10^{-4}$	$6,16321 \times 10^{-4}$	$5,91610 \times 10^{-4}$	$9,16994 \times 10^{-4}$

Exemplo 4.2.6 (Problema de Riemann II: ruptura de barragem sobre um domínio seco). O objetivo deste exemplo é avaliar a capacidade do método em situações de profundidade nula. Considera-se nesta seção um segundo problema de Riemann conhecido como problema de ruptura de barragem sobre um domínio plano, seco e sem fricção, com condições iniciais

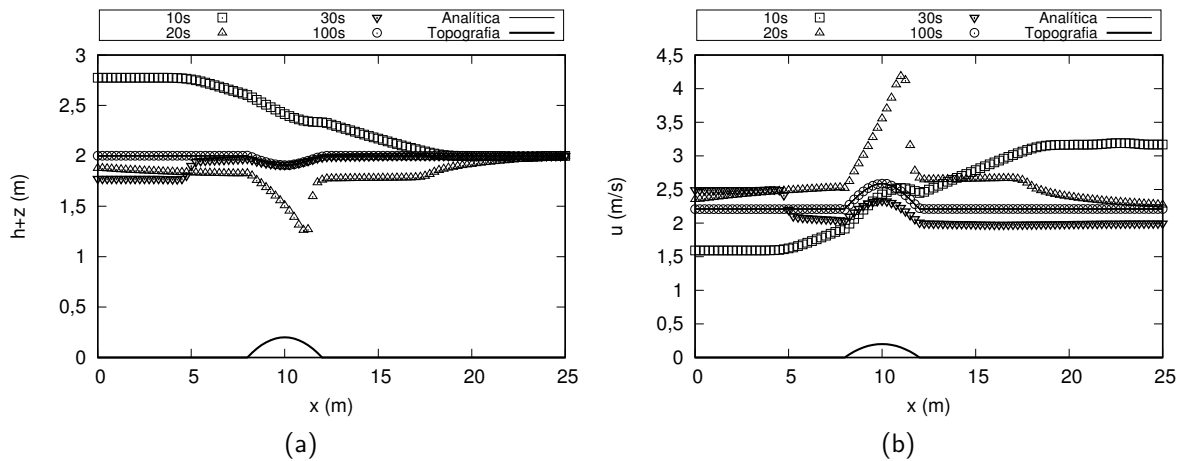


FIGURA 24 – Elevação da superfície da água $h + z$ (a) e velocidade u (b) para o problema de escoamento permanente subcrítico, apresentado em diferentes tempos até a convergência em cerca de $t = 100$ s.

descontínuas

$$(h, u)(x, 0) = \begin{cases} (h_l, 0), & \text{se } 0 \text{ m} \leq x \leq x_0 \text{ m}, \\ (0, 0), & \text{se } x_0 \text{ m} < x \leq L \text{ m}. \end{cases} \quad (4.87)$$

Consiste na simulação do fenômeno que ocorre após a remoção instantânea de uma parede vertical que separa a água no meio de um canal. Os parâmetros utilizados nas simulações correspondem a $h_l = 10$ m, $x_0 = 1000$ m e $L = 2000$ m. As simulações foram computadas sobre uma malha com $n + 1 = 101$ pontos e $CFL = 0,9$. Apresenta-se os gráficos construídos para os tempos fixos em 10 s, 25 s e 50 s, conforme FIGURA 25. Os respectivos erros relativos estão dispostos na TABELA 13.

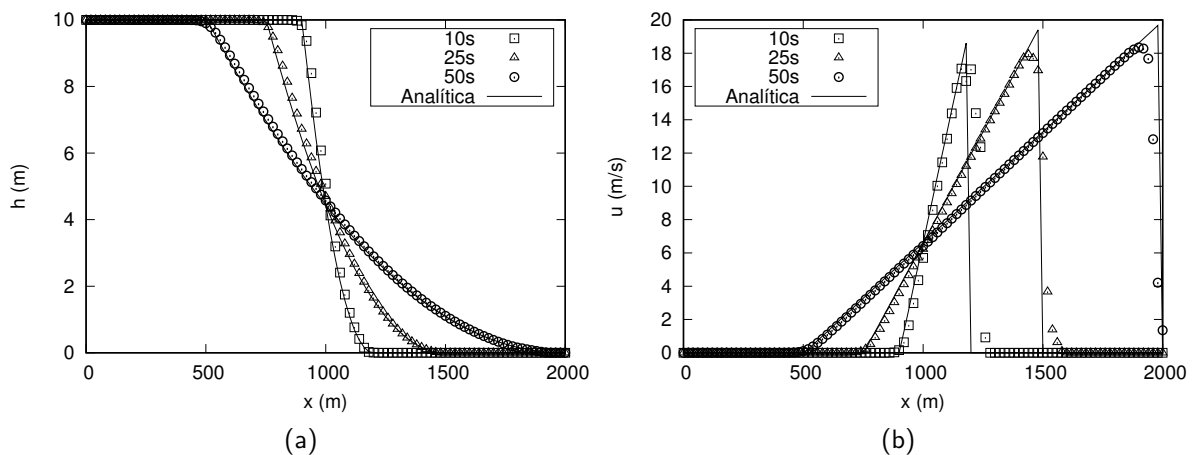


FIGURA 25 – Soluções analítica e numérica da profundidade h (a) e velocidade u (b) para o problema de ruptura de barragem em domínio seco e sem resistência ao escoamento, em diferentes tempos e com 100 células uniformes.

TABELA 13 – Erro relativo para as soluções dos problemas de ruptura de barragem sobre um domínio seco e sem resistência ao escoamento.

Tempo (s)	Norma L^1		Norma L^2	
	Erro Relativo h	Erro Relativo u	Erro Relativo h	Erro Relativo u
10	$1,2302 \times 10^{-2}$	$2,6174 \times 10^{-2}$	$4,3660 \times 10^{-1}$	$5,7190 \times 10^{-1}$
25	$2,6787 \times 10^{-2}$	$3,5988 \times 10^{-2}$	$3,1199 \times 10^{-1}$	$3,8985 \times 10^{-1}$
50	$3,4003 \times 10^{-2}$	$3,5201 \times 10^{-2}$	$2,6537 \times 10^{-1}$	$4,4022 \times 10^{-1}$

Considera-se agora, sob os mesmos dados iniciais em (4.87), a lei de resistência ao escoamento de Chézy

$$S_{f_x} = \frac{u|u|}{C^2 h} = \frac{q|q|}{C^2 h^3}, \quad (4.88)$$

em que C ($m^{1/2}/s$) é o coeficiente de Chézy.

Este problema tem solução analítica conhecida (DRESSLER, 1952; DELESTRE et al., 2013). A FIGURA 26 dispõe os gráficos das soluções numéricas comparadas com a solução analítica, para parâmetros fixados em: $h_l = 6$ m, $x_0 = 1000$ m, $C = 40$ $m^{1/2}/s$, $L = 2000$ m, $n + 1 = 201$ pontos e $CFL = 0,4$. Observe da FIGURA 26b que existe uma região (a partir do ponto em que a vazão atinge seu máximo valor) em que a solução numérica é claramente destoante da analítica. Entretanto, nessa região, a solução de Dressler (1952) falha, tendo em vista que sua expansão assintótica para as derivadas de primeira ordem perdem a validade naquela região. Delestre et al. (2013) utilizam uma aproximação interpolante nesta região. Os respectivos erros relativos estão computados na TABELA 14.

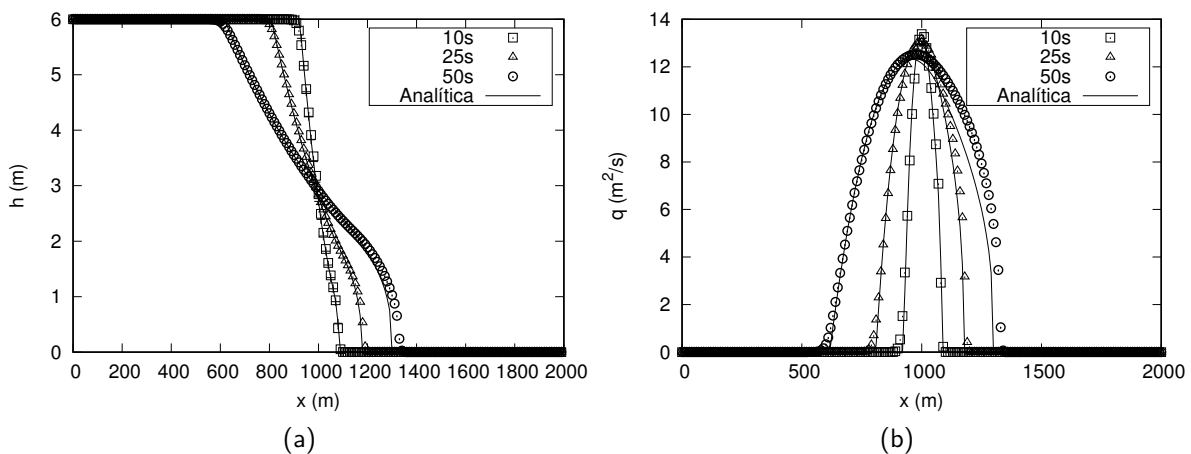


FIGURA 26 – Soluções analítica e numérica da profundidade h (a) e vazão q (b) para o problema de ruptura de barragem em domínio seco e com termo de resistência ao escoamento, em diferentes tempos e com 200 células uniformes.

TABELA 14 – Erro relativo para as soluções dos problemas de ruptura de barragem unidimensional sobre um domínio seco e com resistência ao escoamento de Chézy (4.88).

Tempo (s)	Norma L^1		Norma L^2	
	Erro Relativo h	Erro Relativo q	Erro Relativo h	Erro Relativo q
10	$2,3710 \times 10^{-3}$	$6,4100 \times 10^{-3}$	$4,7690 \times 10^{-2}$	$5,5218 \times 10^{-2}$
25	$3,9140 \times 10^{-3}$	$1,1626 \times 10^{-2}$	$5,8280 \times 10^{-2}$	$8,3365 \times 10^{-2}$
50	$1,0180 \times 10^{-2}$	$3,0145 \times 10^{-2}$	$9,6279 \times 10^{-2}$	$1,4398 \times 10^{-1}$

Exemplo 4.2.7 (Problema de Riemann III). Seja o problema de Riemann definido num domínio plano e sem fricção com condições iniciais

$$(h, u)(x, 0) = \begin{cases} (h_l, u_l), & \text{se } x \leq 0, \\ (h_r, u_r), & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (4.89)$$

Quando $h_l > 0$, $h_r > 0$ e $u_r - u_l \geq 2\sqrt{g}(\sqrt{h_r} + \sqrt{h_l})$, a solução é composta por duas ondas de rarefação separadas por uma zona intermediária seca (FACCANONI; MANGENEY, 2013).

Fixou-se os parâmetros acima em $h_l = 5$ m, $h_r = 10$ m, $u_l = 0$ m/s, $u_r = 40$ m/s para $x \in [-200, 400]$. As FIGURAS 27a e 27b apresentam os resultados numéricos da profundidade e vazão específica, respectivamente, simulados em diferentes tempos. A TABELA 15 mostra os erros relativos para cada uma das soluções calculadas nos seus respectivos tempos. Utilizou-se nestas simulações uma malha com $n + 1 = 201$ pontos e o número de Courant fixo em $CFL = 0,96$.

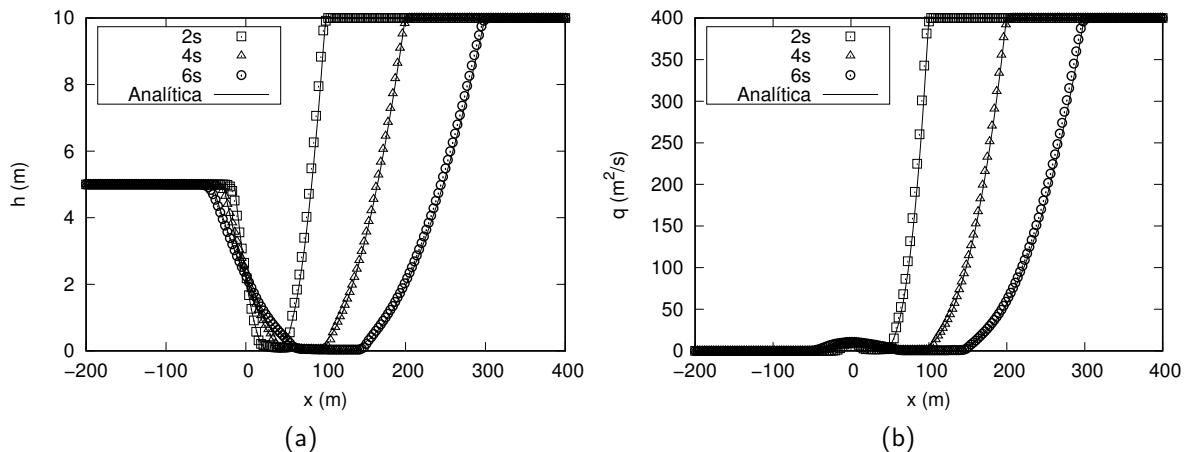


FIGURA 27 – Soluções analítica e numérica da profundidade h (a) e vazão q (b) para o problema de Riemann, em diferentes tempos e com 200 células uniformes.

Exemplo 4.2.8 (Oscilações de uma superfície plana em uma bacia parabólica). Este problema, assim como aqueles apresentados nos exemplos 4.2.6 e 4.2.7, simula a habilidade do método em

TABELA 15 – Erro relativo para a solução do problema de Riemann III, com condições iniciais (4.89), com presença de leito seco.

Tempo (s)	Norma L^1		Norma L^2	
	Erro Relativo h	Erro Relativo q	Erro Relativo h	Erro Relativo q
2	$1,5312 \times 10^{-2}$	$3,2272 \times 10^{-2}$	$9,3390 \times 10^{-3}$	$1,8174 \times 10^{-2}$
4	$2,1975 \times 10^{-2}$	$3,1994 \times 10^{-2}$	$1,4877 \times 10^{-2}$	$2,0441 \times 10^{-2}$
6	$3,3130 \times 10^{-2}$	$3,7737 \times 10^{-2}$	$2,7199 \times 10^{-2}$	$2,4375 \times 10^{-2}$

captar a transição entre os perímetros seco e molhado. Neste caso, os contornos movimentam-se periodicamente ao longo do tempo. A topografia é uma bacia parabólica dada por

$$z(x) = h_0 \left[\frac{1}{a^2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 - 1 \right], \quad (4.90)$$

onde h_0 m é a profundidade da água no ponto central, L m o comprimento do domínio e a m é a distância entre o ponto central e a costa. As condições iniciais são

$$u(x, t) = 0 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad h(x, 0) = \begin{cases} h_0 \left[1 - \left(\frac{2x - L + 1}{2a} \right)^2 \right], & \text{se } |x + (1 - L)/2| \leq a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.91)$$

Este problema foi formulado por Thacker (1981), sob a hipótese de que a velocidade era função do tempo apenas, implicando que a superfície da água é um plano, para todo o tempo, e que o fluxo pode ocorrer sobre um paraboloide circular, um canal parabólico ou um paraboloide elíptico. O movimento é oscilatório e continua indefinidamente no tempo (ALDRIGHETTI, 2007; SAMPSON, 2008), com período $T = 2\pi/\omega$ e $\omega = \sqrt{2gh_0}/a$. Segundo Thacker (1981), as soluções para este problema fornecem um teste valioso para validação de modelos numéricos de inundação de marés de tempestade. Utilizou-se, nas simulações a seguir apresentadas, os seguintes parâmetros: $a = 1$ m, $h_0 = 0,5$ m e $L = 4$ m.

Nas FIGURAS 28a e 28b encontram-se os gráficos das funções de profundidade e de descarga, respectivamente, em diferentes tempos calculados com $n + 1 = 101$ pontos de malha e número de Courant fixo em $CFL = 0,9$. Foram computados os erros absolutos e dispostos na TABELA 16.

4.2.7.2 Exemplos Bidimensionais

Exemplo 4.2.9 (Problema 2D de ruptura parcial de barragem). Este problema hipotético bidimensional é um exemplo utilizado por Zhang, Zeng e Chen (2012), Fennema e Chaudhry (1989) e Zoppou e Roberts (2000). Neste problema as velocidades iniciais são todas nulas, a profundidade a montante é de 10 m, enquanto que a jusante é assumida ser 5 m, 0,1 m ou 0 m (lembre-se que $h_r/h_l < 0,138$ é um bom índice de avaliar a robustez do esquema). O

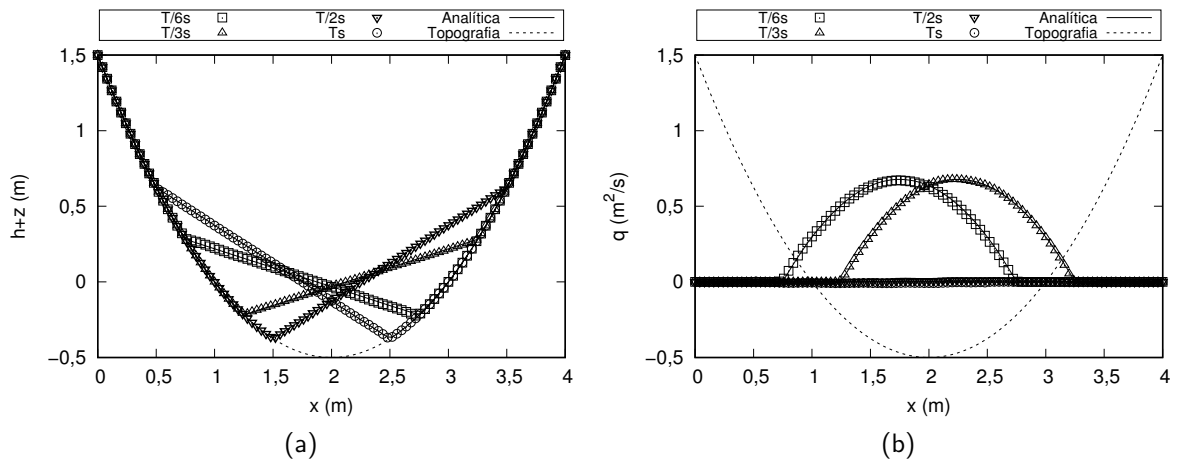


FIGURA 28 – Soluções analítica e numérica da profundidade $h + z$ e vazão q para o problema de oscilações periódicas em diferentes tempos e com 100 células uniformes.

TABELA 16 – Erro absoluto para a solução do problema de oscilações de uma superfície plana em uma bacia parabólica descrita pela equação (4.90), com condições iniciais (4.91).

Tempo (s)	Norma L^1		Norma L^2	
	Erro Absoluto h	Erro Absoluto q	Erro Absoluto h	Erro Absoluto q
$T/6$	$7,6382 \times 10^{-3}$	$1,5181 \times 10^{-2}$	$6,4029 \times 10^{-3}$	$1,1705 \times 10^{-2}$
$T/3$	$5,4120 \times 10^{-3}$	$8,3745 \times 10^{-3}$	$4,3387 \times 10^{-3}$	$7,0535 \times 10^{-3}$
$T/2$	$5,4120 \times 10^{-3}$	$8,3745 \times 10^{-3}$	$4,3387 \times 10^{-3}$	$7,0535 \times 10^{-3}$
T	$2,6683 \times 10^{-3}$	$1,2044 \times 10^{-2}$	$2,2417 \times 10^{-3}$	$9,0159 \times 10^{-3}$

domínio computacional (FIGURA 29) consiste de uma região de 200 m \times 200 m, com uma parede que se estende paralelamente ao eixo y , com 10 m de largura e que está centrada em $x = 100$ m. A falha é suposta ser instantânea, possui 75 m de extensão a partir de $y = 95$ m.

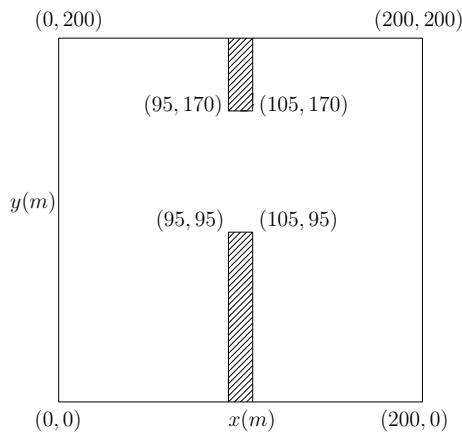


FIGURA 29 – Domínio computacional do problema de ruptura parcial de barragem bidimensional, horizontal e sem resistência ao escoamento. A barragem após a falha é representada pela área rasurada.

O canal é horizontal e desconsidera-se a resistência ao escoamento. Espera-se a formação de uma frente de choque após o rompimento. As condições de contorno são consideradas todas reflexivas. Condições de contorno reflexivas, também conhecidas como condições de não deslizamento, são projetadas para imitar uma parede sólida impenetrável onde não há perdas devido ao atrito. Na superfície da parede, o componente normal da velocidade deve ser zero para evitar a transferência de material através do contorno. É comum definir nós fantasmas simétricos para os nós interiores em toda a parede para todas as variáveis primitivas, exceto para o componente da velocidade normal à parede, que é configurado como anti-simétrico (SCANDALIATO; LIU, 2010).

As soluções numéricas foram todas computadas sobre uma malha uniforme composta por 101×101 células retangulares e $CFL = 0,7$. São apresentados nas FIGURAS 30, 31, 32 e 33 os perfis da profundidade, campos de velocidade e mapas de contorno nos tempos de 5 e 7,2 segundos, para as razões h_r/h_l iguais a 0,5, 0,01 e 0,0, respectivamente.

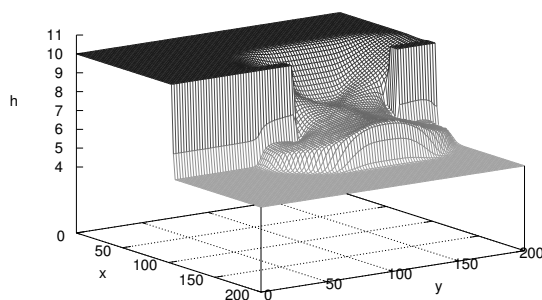
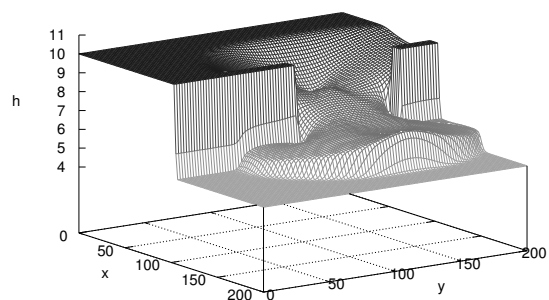
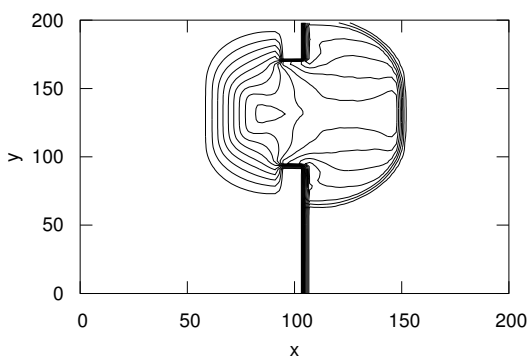
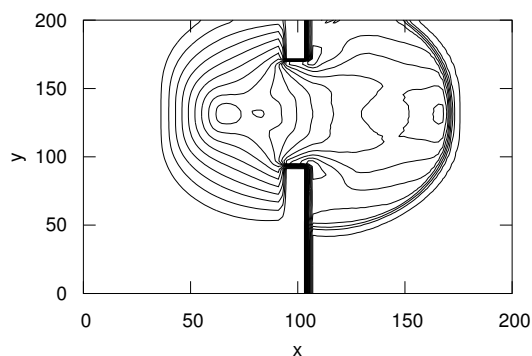
(a) Superfície $t = 5$ s.(b) Superfície $t = 7,2$ s.(c) Mapa de contorno $t = 5$ s.(d) Mapa de contorno $t = 7,2$ s.

FIGURA 30 – Elevação da superfície da água h e mapas de contorno, para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7,2 s com $CFL = 0,7$, do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10 m e a jusante de 5 m.

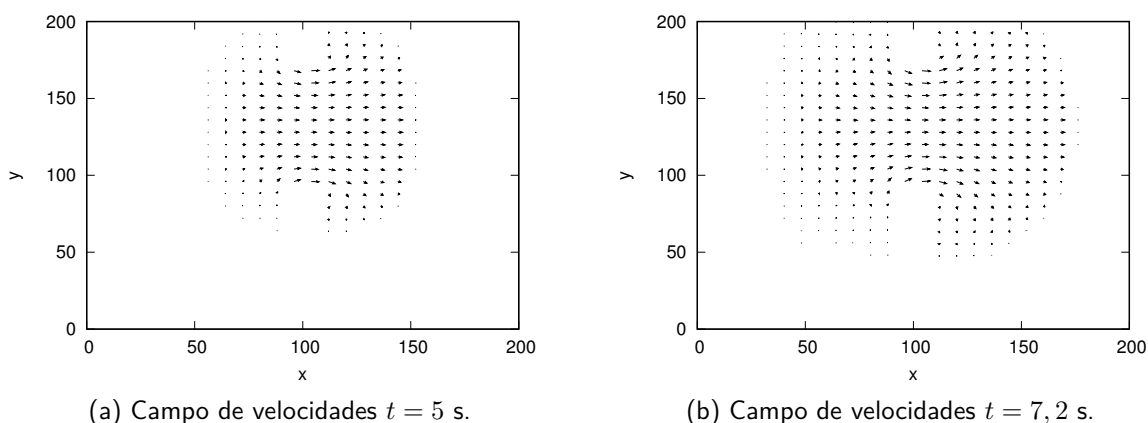


FIGURA 31 – Campos de velocidade para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7,2 s com $CFL = 0,7$, do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10 m e a jusante de 5 m.

Quando existe uma profundidade não nula à jusante, um choque sempre existe (observar FIGURAS 30a, 30b, 32a e 32b). Outro detalhe é que os vetores velocidade tornam-se gradativamente nulos, conforme FIGURAS 31a, 31b, 32e e 32f. Por outro lado, no caso de leito seco, não existe formação de choque viajando à jusante (FIGURAS 33a e 33b), a profundidade é extremamente pequena, no entanto, não nula. Pelo fato de que no esquema numérico $uh = q_1$, $vh = q_2$ e h são as variáveis de marcha estimadas, a precisão de máquina irá produzir valores finitos para a variável u e v , calculadas como $u = uh/h$ e $v = vh/h$, respectivamente, mesmo quando h é, em termos de precisão de máquina, considerado nulo (ver FIGURAS 33e e 33f). Neste caso, uh que é a quantidade conservada, é uma variável melhor para se examinar, tendo-se em vista as FIGURAS 34a e 34b.

Para finalizar as considerações sobre este exemplo, diga-se que todos os resultados são consistentes com aqueles presentes na literatura (ZHANG; ZENG; CHEN, 2012; FENNEMA; CHAUDHRY, 1989; ZOPPOU; ROBERTS, 2000), conforme FIGURAS 42, 43a e 43b, constantes no ANEXO A.

Exemplo 4.2.10 (Problema 2D de ruptura de barragem circular). Este problema teste visa avaliar a habilidade do esquema em preservar simetria. Considera-se um domínio de $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ com contornos reflexivos e condições iniciais:

$$(h, u, v)(x, y, 0) = \begin{cases} (10, 0, 0), & \text{se } (x - 25)^2 + (y - 25)^2 \leq 10,5^2, \\ (1, 0, 0), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.92)$$

No instante da falha da barragem, supõe-se que a parede circular seja removida completamente e, subsequentemente, formam-se ondas que se espalham radialmente. O escoamento passa de subcrítico para supercrítico (ZOPPOU; ROBERTS, 2000). A solução numérica é computada numa malha retangular uniforme com 101×101 células e o passo de

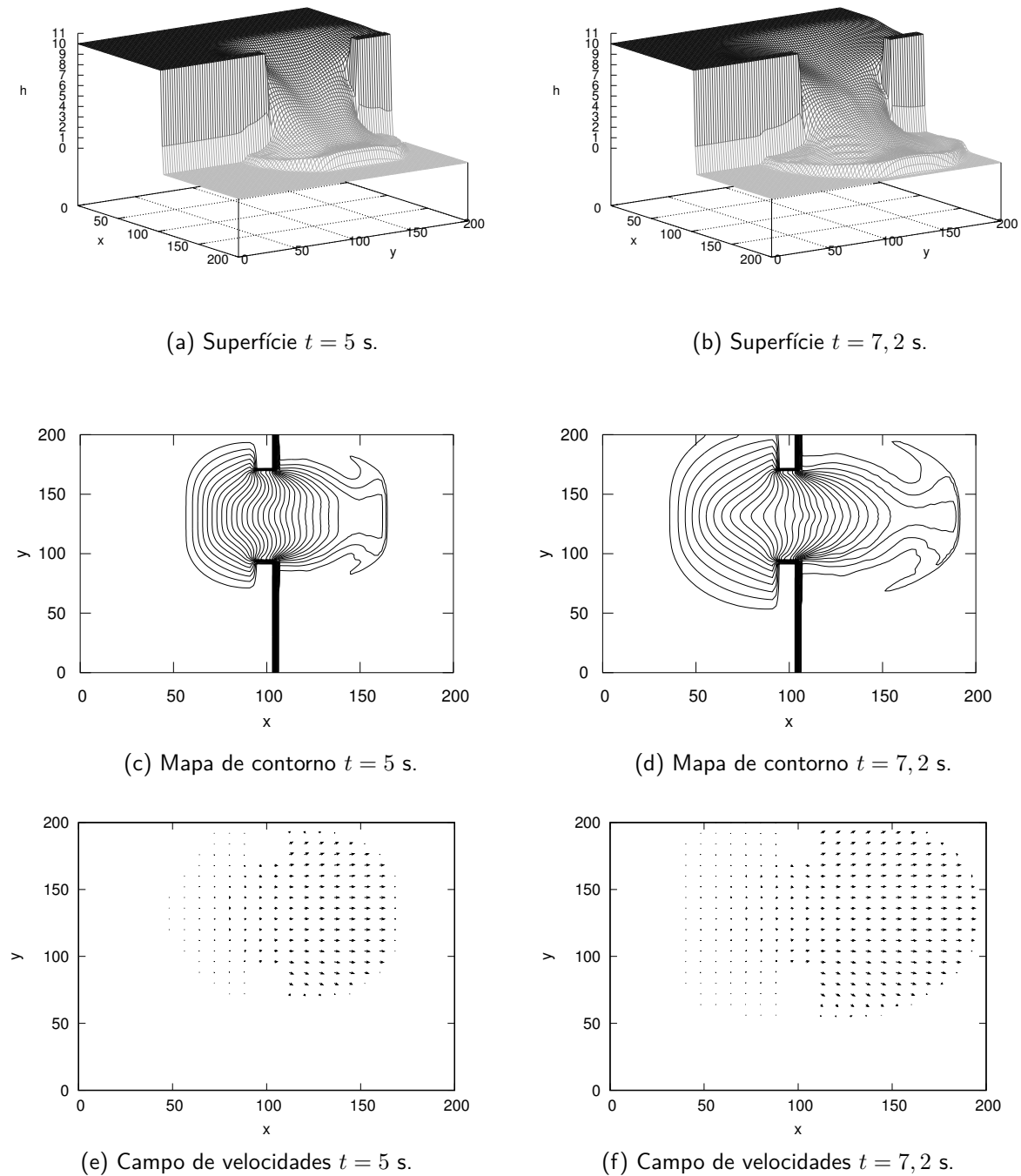


FIGURA 32 – Elevação da superfície da água h , mapas de contorno e campos de velocidade, para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7,2 s com $CFL = 0,7$, do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10 m e a jusante de 0,1 m.

tempo é tal que $CFL = 0,6$. As FIGURAS 35a e 35b apresentam, respectivamente, os perfis da superfície da água 0,72 s e 1,3 s após a hipotética falha na barragem circular. Vetores velocidade e curvas de nível relativas à superfície h estão dispostos nas FIGURAS 35c-35f. As curvas de nível (FIGURAS 35c e 35d) apresentam ondulações que podem ser justificadas

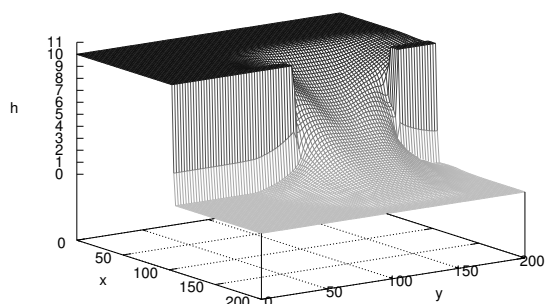
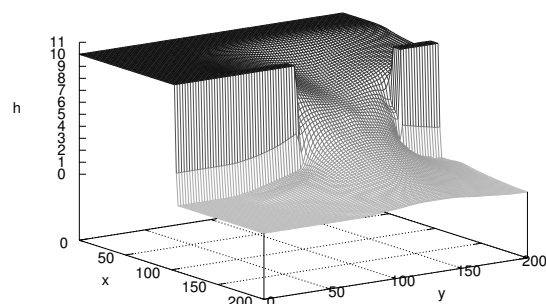
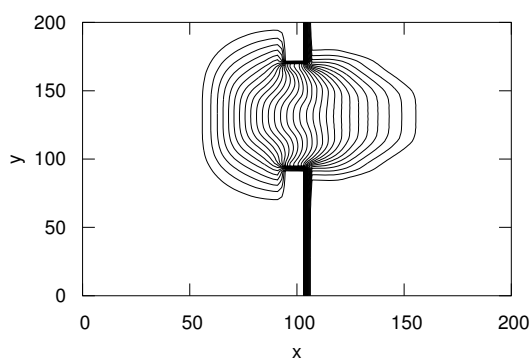
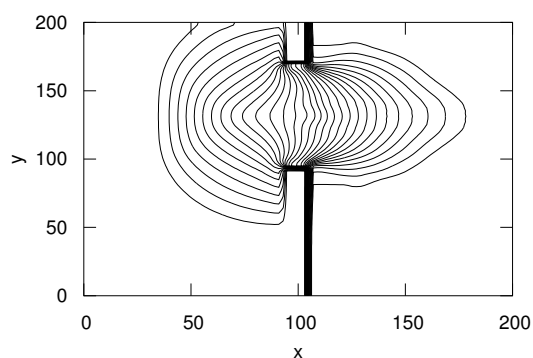
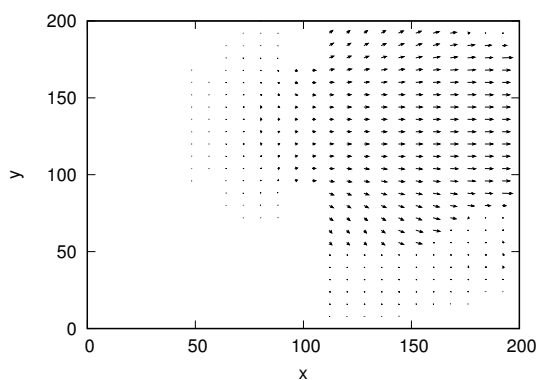
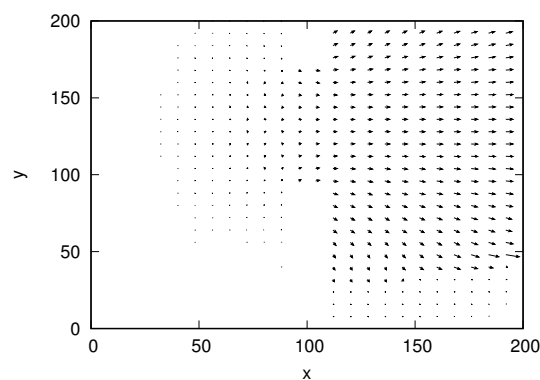
(a) Superfície $t = 5$ s.(b) Superfície $t = 7,2$ s.(c) Mapa de contorno $t = 5$ s.(d) Mapa de contorno $t = 7,2$ s.(e) Campo de velocidades $t = 5$ s.(f) Campo de velocidades $t = 7,2$ s.

FIGURA 33 – Elevação da superfície da água h , mapas de contorno e campo de velocidade, para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7,2 s com $CFL = 0,7$, do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10 m e a jusante de 0 m.

pela tipo de malha (retangular) empregada (ZOPPOU; ROBERTS, 2000). A FIGURA 36 apresenta os mesmos gráficos para uma profundidade a jusante nula, isto é, supondo leito seco. Novamente, as variáveis secundárias uh e vh , que representam as quantidades conservadas, são melhores de serem analisadas, conforme FIGURA 37.

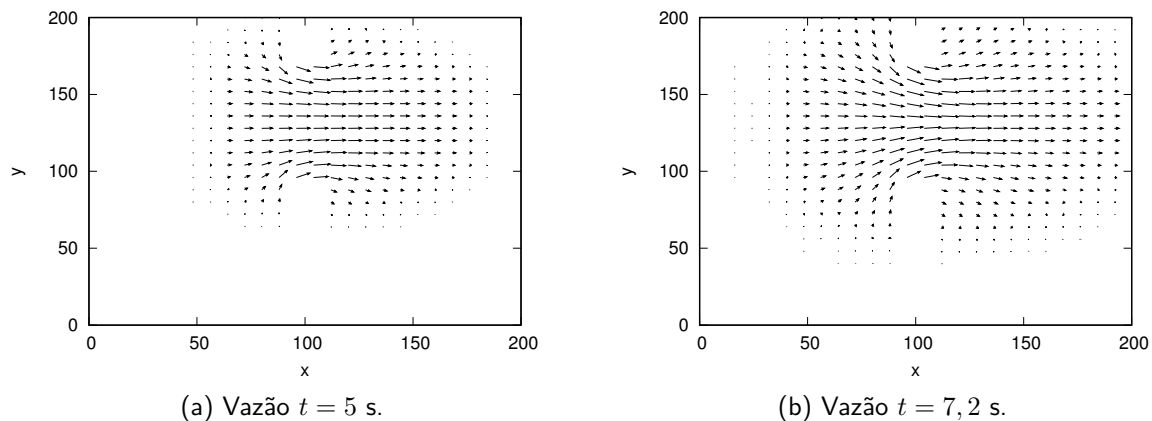


FIGURA 34 – Campo de vazão para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7,2 s com $CFL = 0,7$, do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem resistência ao escoamento, com profundidades a montante de 10 m e a jusante de 0 m. Termos não nulos presentes no campo de velocidades e ausentes no campo de vazão, devido à precisão da máquina.

A simetria da solução numérica é bem preservada e está de acordo com a literatura (AKOH; LI; XIAO, 2008; ALCRUDE; GARCIA-NAVARRO, 1993), conforme FIGURAS 43c, 43d e 43e, constantes no ANEXO A.

4.3 CONSIDERAÇÕES

Este capítulo teve como objetivo apresentar brevemente as equações de águas rasas. Foram consideradas suas representações conservativas e alguns trabalhos recentes foram descritos. Estas equações são do tipo hiperbólico e governam vários fenômenos de fluxo de rios e canais abertos, conforme já salientado.

Ressalte-se que, no que tange a sistemas hiperbólicos, as contribuições propostas nesta tese foram dadas com foco sobre estas equações. Nesta perspectiva, foram apresentadas formulações para os problemas unidimensional e bidimensional considerando funções de base polinomiais de segunda ordem, ao contrário da aplicação tradicional do método que utiliza regularmente aproximações por polinômios de Taylor de primeira ordem, conforme trabalhos de Molls e Molls (1998) e Zhang, Zeng e Chen (2012).

Importante destacar a precisão de terceira ordem obtida com o método, obtida à custo da expansão de segunda ordem. Quando se expande uma função em série de Taylor e se trunca em termos de segunda ordem, significa que os termos de ordem maior ou igual a 3 são desconsiderados. Então é natural que uma expansão de segunda ordem alcance uma precisão de terceira ordem.

Adaptações foram feitas no sentido de tornar o esquema sensível à descontinuidades e choques. A estratégia seguiu a abordagem de Chang (1995), que consiste em utilizar médias

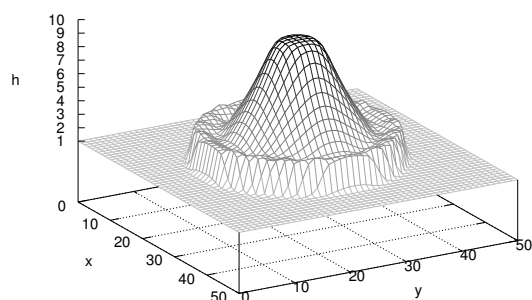
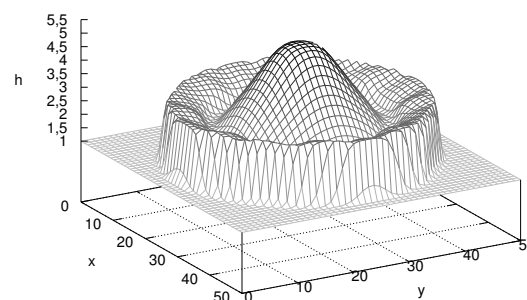
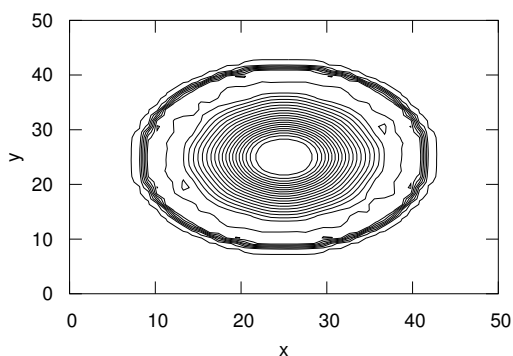
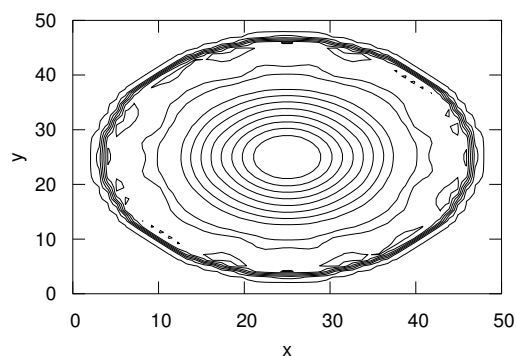
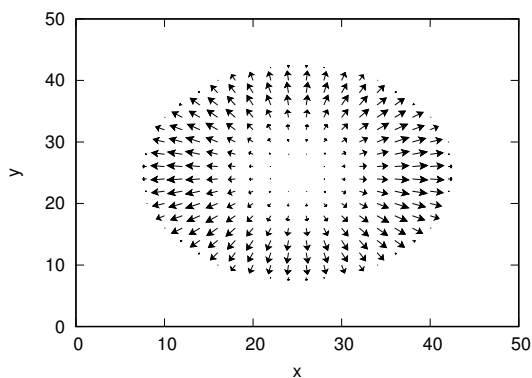
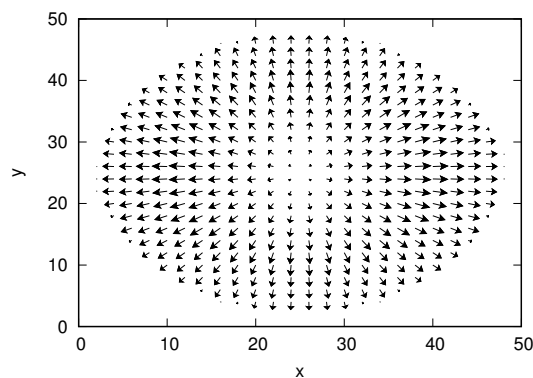
(a) Superfície $t = 0,72$ s.(b) Superfície $t = 1,3$ s.(c) Mapa de contorno $t = 0,72$ s.(d) Mapa de contorno $t = 1,3$ s.(e) Campo de velocidades $t = 0,72$ s.(f) Campo de velocidades $t = 1,3$ s.

FIGURA 35 – Perfil da superfície da água h , curvas de nível e vetores velocidade, para o problema de ruptura de barragem circular em um domínio horizontal e sem resistência ao escoamento.

ponderadas no cálculo das derivadas de primeira $(q_m)_x$ e segunda $(q_m)_{xx}$ ordem.

Os esquemas desenvolvidos foram extensivamente validados por meio dos experimentos numéricos analisados. Para o caso unidimensional, foram analisados problemas de estado permanente, os clássicos problemas de Riemann (ruptura de barragem), importantes por conta

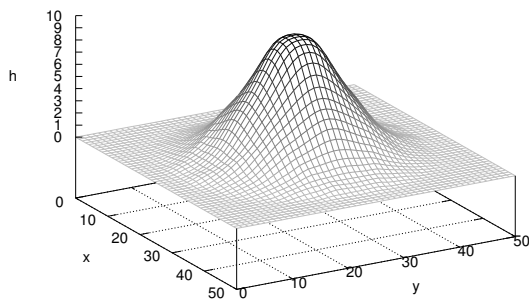
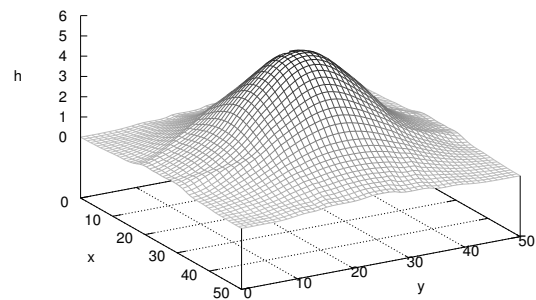
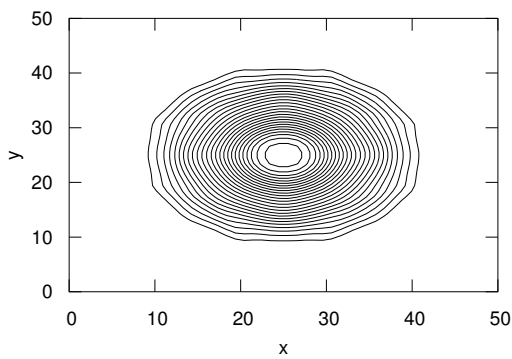
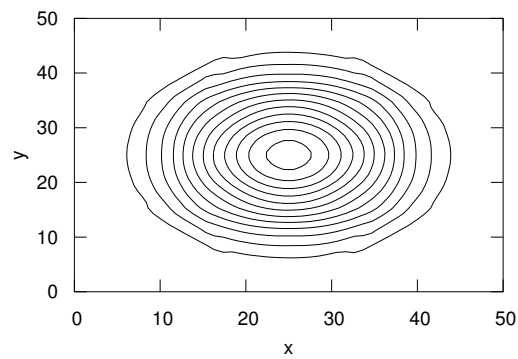
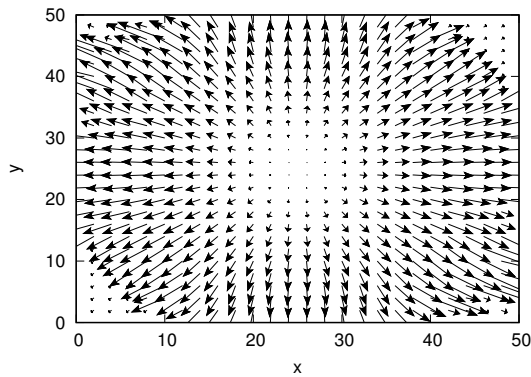
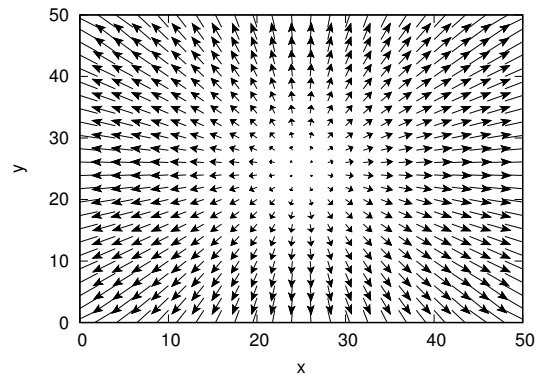
(a) Superfície $t = 0,72$ s.(b) Superfície $t = 1,3$ s.(c) Mapa de contorno $t = 0,72$ s.(d) Mapa de contorno $t = 1,3$ s.(e) Campo de velocidades $t = 0,72$ s.(f) Campo de velocidades $t = 1,3$ s.

FIGURA 36 – Perfil da superfície da água h , curvas de nível e campo de velocidade, para o problema de ruptura de barragem circular em um domínio horizontal e sem resistência ao escoamento.

da formação de choques e discontinuidades e um problema de oscilações sobre uma bacia parabólica, importantes pois validam modelos numéricos de inundação de marés de tempestades (THACKER, 1981). Todos os exemplos numéricos apresentaram boa precisão e consistência com relação às soluções analíticas. No que tange ao caso bidimensional, foram simulados dois problemas de ruptura de barragem. O primeiro diz respeito a uma falha parcial instantânea em

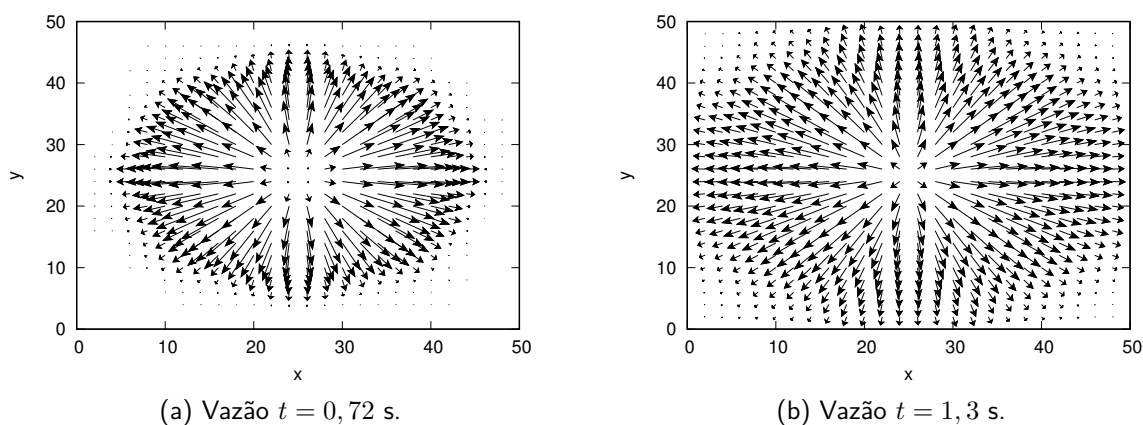


FIGURA 37 – Campo de vazão para o problema de ruptura de barragem circular em um domínio horizontal e sem resistência ao escoamento. Termos não nulos presentes no campo de velocidades e ausentes no campo de vazão, devido à precisão da máquina.

uma barragem. Este problema não possui solução analítica, porém os resultados são coerentes com a literatura, mesmo para o caso em que a profundidade inicial a jusante foi prescrita em zero. O segundo problema, diz respeito a uma barragem hipotética circular, testada sobre as mesmas condições. Embora também sem solução analítica disponível, foi possível avaliar a capacidade do método em preservar a simetria da solução, tendo em vista a consistência dos resultados em relação à literatura vigente (AKOH; LI; XIAO, 2008; ALCRUDO; GARCIA-NAVARRO, 1993).

5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 CONCLUSÕES

Junto à descrição e revisão do método dos elementos de conservação espacial-temporal realizada no capítulo 2, considerou-se necessário, conforme seção 2.2, modificar o elemento de solução de “o interior de um paralelogramo centrado em (x_i, t_j) ” (sem a borda), para “o paralelogramo centrado em (x_i, t_j) ” (com a borda). A compreensão do elemento de solução como um objeto com borda é necessária pois se trata da região em que as funções de base estão definidas. De fato, a lei integral de conservação

$$\int_{CE} \operatorname{div} \mathbf{F}^* dV = \oint_{S(CE)} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{N} ds = S^*$$

está definida apenas se o campo vetorial aproximado \mathbf{F}^* estiver definido no contorno do elemento de conservação $S(CE)$. Como os elementos de solução constituem a região em que as funções aproximadoras estão definidas, isso acontece apenas se as bordas dos elementos de conservação estiverem contidas nos elementos de solução, isto é, $S(CE) \subset SE$.

Apresentou-se, no capítulo 3, os resultados relativos à primeira parte das pesquisas realizadas na elaboração da presente tese. Na seção 3.2 demonstrou-se que uma solução em sentido estrito, isto é, de classe $u \in C^2$, para o problema descrito pela equação da onda homogênea unidimensional, é também solução da equação de diferenças finitas centrais, ajustada ao mesmo problema, no caso em que a condição $c\Delta t = \Delta x$ seja satisfeita. A abordagem empregada na demonstração da proposição em questão, remete à metodologia descrita na seção 2.2 e, portanto, à uma formulação variante do método CE/SE aplicado à equação de onda (3.9).

Neste contexto, redefiniu-se o elemento de conservação e de solução como sendo a região do paralelogramo (inclusive seu contorno) delimitado pelas curvas características da equação (3.9). Essa redefinição segue caminho contrário àquele proposto por Chang (1995), que escolhia um volume de controle sem presença de características. Conforme salienta o próprio autor, a dificuldade decorrente está relacionada à generalização de problemas em dimensões maiores, o que de fato ocorreu, conforme apêndice A.2. Um fato importante e já salientado anteriormente, é que a equação deduzida tem a propriedade de também ser satisfeita pela solução da lei integral de conservação, uma vez que sua dedução ocorreu por meio dela, a lei integral. Essas considerações implicam em um esquema com erro de truncamento localmente nulo (corolário 3.2.2).

Nas subseções seguintes (3.2.1 e 3.2.2), foram realizados tratamentos sobre as condições iniciais e de contorno (caso em que sejam do tipo Neumann), definindo-se novos CEs e SEs. As condições iniciais e de contorno foram perfeitamente acopladas aos esquemas determinados

e, aliado ao resultado obtido com o teorema 3.2.1 (o comentado acima), foi possível concluir que o método CE/SE, aplicado a equação da onda linear unidimensional, conduz a resultados altamente precisos. Mais especificamente, a solução produzida pelo esquema completo, passo inicial mais passos do interior da malha, coincide com a solução analítica avaliada nos pontos da malha. A única situação a considerar, é o caso em que a integral sobre o termo fonte ou sobre as condições de contorno/iniciais forem de difícil avaliação analítica, ocasião em que fórmulas de quadratura deverão ser utilizadas. Os exemplos numéricos analisados, embora simples, evidenciam o alcance dos esquemas construídos.

O método discutido no caso linear unidimensional foi aplicado, com as devidas adaptações, a uma classe de problemas não-lineares (subseção 3.2.5). Nesta situação, os CEs e SEs tornaram-se não regulares, uma vez que as curvas características possuem variação não constante, diferentemente do caso linear. Por conseguinte, a malha produzida é não-estruturada e Lagrangeana, no sentido de que acompanha a partícula desde sua posição inicial. Um ponto de interesse foi a dedução de fórmulas implícitas do tipo D'Alembert para o problema de valor inicial (utilizadas no início da marcha). O padrão dos esquemas determinados segue de perto àquele desenvolvido para a equação (3.9). Os resultados numéricos produzidos indicam boa acurácia para a classe de problemas considerados.

A seção 3.3 encerra o leque de resultados ao considerar a equação da onda em duas dimensões. Infelizmente a propriedade de erro de truncamento localmente nulo não foi obtida na resolução dessa equação (apêndice A.2). A abordagem alternativa consistiu em “reduzir” a dimensão do problema em questão. Aplicou-se o método da Transformada de Fourier ao problema de duas dimensões, definindo os coeficientes da série em função de duas variáveis: uma espacial e outra temporal. Esta abordagem gera a equação de Klein-Gordon não homogênea, cujas variáveis são os coeficientes de Fourier. Determinou-se a forma fraca da sentença de resíduos ponderados, o que propiciou a inclusão direta das condições naturais de contorno. Uma limitação para esta abordagem é, portanto, que em pelo menos uma das dimensões espaciais, condições de Neumann devem ser prescritas. Esperava-se que essa estratégia de redução pudesse ser favorecida pelos resultados unidimensionais, que obtiveram precisão perfeita. Entretanto, a presença do termo fonte dependente da variável impossibilitou esse ganho (aqui aparece uma fresta para pesquisas futuras). Não obstante um único e simples exemplo numérico tenha sido fornecido, o resultado indica que essa estratégia possui um desempenho aceitável.

A segunda parte desta tese diz respeito ao desenvolvimento de esquemas CE/SE de alta precisão para a solução das equações de Saint-Venant em uma e duas dimensões. Este tema foi apresentado junto ao capítulo 4. O diferencial da proposta foi a utilização de polinômios de Taylor de segunda ordem que propiciaram precisão de terceira ordem. As abordagens encontradas na literatura e associadas às equações de Saint-Venant, remetem a utilização de funções de primeira ordem (MOLLS; MOLLS, 1998; ZHANG; ZENG; CHEN, 2012), o que resulta em esquemas de (também alta) segunda ordem de precisão. Detalhou-se

todo o desenvolvimento pertinente à obtenção do esquema, que foi adaptado para capturar soluções com formação de choque e descontinuidades. O método foi testado extensivamente por meio de problemas unidimensionais e bidimensionais. Vários problemas de ruptura de barragem, dentre estes, o clássico problema de Riemann unidimensional, foram abordados tanto em uma quanto em duas dimensões. Todos os testes realizados corroboram com a afirmação de que o esquema possui boa precisão, sobretudo no que tange à situações com presença de descontinuidades e formação de choque.

5.2 RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Com relação à primeira parte da tese, pesquisas futuras podem ser feitas no sentido de alcançar a propriedade de erro de truncamento local nulo junto às equações de Klein-Gordon. O êxito desses esforços impactariam não só a resolução do problema bidimensional, mas também dos problemas com condição de contorno do tipo Robin, que apresentam dificuldades muito semelhantes: uma integral sobre a função variável deve ser avaliada e, como não se conhece tal função, um tipo de aproximação deve ser utilizada (o objetivo é alcançar erro local nulo). Problemas definidos em meios heterogêneos também podem ser analisados.

No que tange à segunda parte, o aumento no grau do polinômio abre caminho para aplicações do método sobre as equações de Boussinesq

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (5.1)$$

em que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{g}{2}h^2 - \frac{h^3}{3}(E + F + G) \\ uvh \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{g}{2}h^2 - \frac{h^3}{3}(E + F + G) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ gh(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

sendo

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \\ F &= v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ G &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Observa-se que utilizar uma aproximação de primeira ordem seria inviável, tendo em vista a presença de derivadas de segunda ordem nos termos E , F e G .

O material detalhado nestas linhas consiste numa apresentação dos primeiros resultados no sentido de estender o método dos elementos de conservação espacial-temporal, formulado por Chang e To (1991), a problemas hiperbólicos de segunda ordem no tempo. Desde o seu surgimento, em 1991, todas as pesquisas envolvidas ao mesmo tratavam de aplicações em equações ou sistemas de equações de primeira ordem temporal. Embora uma equação de segunda ordem possa ser concebida ou transformada num sistema de primeira ordem, a abordagem apresentada não modifica a ordem da equação. Na situação unidimensional, pode-se concluir que o método é perfeitamente adequado, uma vez que a resposta tem caráter analítico-numérico. Em se tratando do problema homogêneo, a solução é obtida com apenas duas somas e uma subtração (nos pontos interiores da malha), conforme resultado demonstrado no teorema 3.2.1. Todavia, outras pesquisas podem ser realizadas no sentido de esclarecer e explorar o potencial da presente metodologia em problemas de segunda ordem, conforme elencado em 5.1.

REFERÊNCIAS

AKOH, R.; LI, S.; XIAO, F. A CIP/multi-moment finite volume method for shallow water equations with source terms. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 56, p. 2245 – 2270, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 16, 104, 107 e 224.

ALCRUDO, F.; GARCIA-NAVARRO, P. A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for 2D shallow-water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 16, p. 489–505, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 107.

ALDRIGHETTI, E. *Computational Hydraulic Techniques for the Saint Venant Equations in Arbitrarily Shaped Geometry*. Dissertação (Mestrado) — Università Degli Studi di Trento, Trento, 2007. Citado na página 98.

ALIPARAST, M. Two-dimensional finite volume method for dam-break flow simulation. *International Journal of Sediment Research*, v. 24, n. 1, p. 99 – 107, 2009. ISSN 1001-6279. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1001627909600196>>. Citado na página 75.

ARNAU, J. et al. A semi-implicit conservation element-solution element method for chemical species transport simulation to tapered ducts of internal combustion engine. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 73, n. 1-4, p. 28–37, 2006. ISSN 0378-4754. Applied and Computational Mathematics - Selected Papers of the Fifth PanAmerican Workshop - June 21-25, 2004, Tegucigalpa, Honduras. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475406001662>>. Citado na página 27.

ARROYO, V. C. *Estudo da Equação de Klein-Gordon Linear*. Dissertação (Mestrado) — UNESP, São José do Rio Preto, 2008. Disponível em: <http://www.dcce.ibilce.unesp.br/pos/webfacil/publico/File/mdl_alunos_diss_462_0.pdf>. Citado na página 42.

BILYEU, D. *A High-Order Conservation Element Solution Element Method for Solving Hyperbolic Differential Equations on Unstructured Meshes*. Tese (Doutorado) — Ohio State University, Ohio, 2014. Citado na página 28.

BILYEU, D. L. et al. A two-dimensional fourth-order unstructured-meshed euler solver based on the CESE method. *Journal of Computational Physics*, v. 257, Part A, p. 981 – 999, 2014. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199911300658X>>. Citado na página 28.

BORSICHE, R. A well-balanced solver for the Saint Venant equations with variable cross-section. *Journal of Numerical Mathematics*, v. 23, n. 2, p. 99–115, 2015. ISSN 15702820. Disponível em: <<http://search-ebsohost-com.ez317.periodicos.capes.gov.br/login.aspx?direct=true&db=aph&AN=108798068&lang=pt-br&site=ehost-live>>. Citado na página 75.

BURDEN, R. L.; FAIRES, D. *Análise Numérica*. São Paulo: Cengage Learning, 2008. 721 p. Tradução All Tasks; revisão técnica Helena Castro. Citado na página 25.

CARDOSO, T. R.; CASTRO, A. S. Sobre o limiar para a produção de pares e localização de partículas sem spin. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 29, p. 203–208, 00 2007.

ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000200004&nrm=iso>. Citado na página 42.

CHANG, S.-C. *New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - Applications to the Euler and Navier-Stokes Equations*. Lewis Research Center, NASA, 1993. TM 106226. Disponível em: <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/microbus/>>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 28.

CHANG, S.-C. The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - A New Approach for Solving the Navier-Stokes and Euler Equations. *Journal of Computational Physics*, v. 119, n. 2, p. 295–324, 1995. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999185711370>>. Citado 16 vezes nas páginas 15, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 34, 35, 38, 72, 90, 104, 109, 133 e 134.

CHANG, S.-C.; TO, W.-W. *A New Numerical Framework for Solving Conservation Laws - The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element*. Lewis Research Center, NASA, 1991. TM 104495. Disponível em: <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/microbus/>>. Citado 9 vezes nas páginas 25, 26, 28, 31, 34, 35, 39, 90 e 112.

CHANG, S.-C.; TO, W.-W. *A New Approach for Constructing Highly Stable High Order CESE Schemes*. Lewis Research Center, NASA, 2010. TM 104495. Disponível em: <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/microbus/>>. Citado na página 28.

CHANG, S.-C.; WANG, X.-Y. Multi-Dimensional Courant Number Insensitive CE/SE Euler Solvers for Applications involving Highly Nonuniform Meshes. *AIAA-2003-5285*, AIAA-2003-5285, Huntsville, Alabama, USA, p. 29, jul. 2003. Citado na página 27.

CHANG, S.-C.; WANG, X.-Y.; CHOW, C.-Y. *New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - Applications to Two-Dimensional Time-Marching Problems*. Lewis Research Center, NASA, 1994. TM 106758. Disponível em: <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/microbus/>>. Citado na página 26.

CHANG, S.-C.; WANG, X.-Y.; CHOW, C.-Y. *The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - Applications to One-Dimensional and Two-Dimensional Time-Marching Flow Problems*. Lewis Research Center, NASA, 1995. TM 106915. Disponível em: <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/microbus/>>. Citado na página 26.

CHANG, S.-C.; WANG, X.-Y.; CHOW, C.-Y. The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method: A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, v. 156, n. 1, p. 89–136, 1999. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199963544>>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 138.

CHANG, S.-C. et al. *The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - Development of a New Implicit Solver*. Lewis Research Center, NASA, 1995. TM 106897. Disponível em: <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/microbus/>>. Citado 4 vezes nas páginas 26, 32, 133 e 134.

CHANG, S.-C.; WANG, X.-Y.; TO, W.-M. Application of the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method to One-Dimensional Convection-Diffusion Problems. *Journal of Computational Physics*, v. 165, n. 1, p. 189–215, 2000. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999100966105>>. Citado 8 vezes nas páginas 26, 31, 32, 34, 35, 37, 133 e 134.

CHANG, T.-J. et al. Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Hydrology*, v. 408, n. 1-2, p. 78–90, 2011. ISSN 0022-1694. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169411004793>>. Citado na página 75.

CHAUDHRY, M. H. *Open-Channel Flow - Second Edition*. [S.l.]: Springer Science, 2008. 528 p. Citado 3 vezes nas páginas 73, 74 e 75.

CHEN, Q.; WANG, J.; LIU, K. Improved CE/SE scheme with particle level set method for numerical simulation of spall fracture due to high-velocity impact. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 19, p. 7503–7519, 2010. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110003487>>. Citado na página 27.

CHEN, Y.-Y.; YANG, L.; YU, S.-T. J. Simulations of waves in elastic solids of cubic symmetry by the Conservation Element and Solution Element method. *Wave Motion*, v. 48, n. 1, p. 39–61, 2011. ISSN 0165-2125. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212510000703>>. Citado na página 27.

CHENG, G. C. et al. Comparative study of different numerical approaches in space-time CESE framework for high-fidelity flow simulations. *Computers & Fluids*, v. 45, n. 1, p. 47–54, 2011. ISSN 0045-7930. 22nd International Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics (ParCFD 2010)ParCFD. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793011000375>>. Citado na página 26.

CHOU, Y.; YANG, R.-J. Application of CESE method to simulate non-Fourier heat conduction in finite medium with pulse surface heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, n. 13-14, p. 3525–3534, 2008. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931007006692>>. Citado na página 27.

DELESTRE, O. et al. SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 72, n. 3, p. 269–300, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 89, 92, 93 e 96.

DI BORTOLO, L. *Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistemas de Equações em Segunda Ordem*. Tese (Doutorado) — UFRJ, Rio de Janeiro, 10 2010. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/index.php/component/docman/cat_view/28-doutorado/66-2010?start=15>. Citado na página 41.

DIAS, N. L. Obtenção de uma Solução Analítica da Equação de Difusão-Advecção com Decaimento de 1ª Ordem pelo Método da Transformação de Similaridade Generalizada. *RBRH*, RBRH, p. 181–188, jan. 2003. Disponível em: <<http://www.abrh.org.br/SGCv3/index.php?PUB=1&ID=37&SUMARIO=572>>. Citado na página 31.

DRESSLER, R. F. Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 49, p. 217–225, 09 1952. Citado na página 96.

FACCANONI, G.; MANGENEY, A. Exact solution for granular flows. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 37, n. 10, p. 1408–1433, 2013. ISSN 1096-9853. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nag.2124>>. Citado na página 97.

FENNEMA, R. J.; CHAUDHRY, M. H. Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows. *Journal of Hydraulic Research*, v. 27, n. 3, p. 321–332, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 101.

FERNANDES, L. L. et al. Modelagem Sísmica via Métodos das Diferenças Finitas: Caso da Bacia do Amazonas. *Acta Amazonica*, scielo, v. 39, p. 155–163, 03 2009. ISSN 0044-5967. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0044-59672009000100015&nrm=iso>. Citado na página 41.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2002. 423 p. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 42.

FIGUEIREDO, D. G. d. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 274 p. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 55.

GONG, F.; LI, X.; WENG, C.-S. Three-dimensional mhd modeling of railgun plasma armature with the ce/se method. *International Journal of Applied Electromagnetics & Mechanics*, v. 46, n. 1, p. 207 – 216, 2014. ISSN 13835416. Citado na página 27.

GUO, Y. et al. Extension of CE/SE method to 2D viscous flows. *Computers & Fluids*, v. 33, n. 10, p. 1349–1361, 2004. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793004000118>>. Citado na página 27.

HENDERSON, F. M. *Open Channel Flow*. New York: Macmillan Publishing Co., 1966. 522 p. Citado na página 75.

HWANG, Y.-H. A characteristic particle method for the Saint Venant equations. *Computers & Fluids*, v. 76, p. 58–72, 2013. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793013000522>>. Citado na página 75.

JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley, 1999. 808 p. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

JEREZ, S. et al. A semi-implicit space-time CE-SE method to improve mass conservation through tapered ducts in internal combustion engines. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 40, n. 9-10, p. 941–951, 2004. ISSN 0895-7177. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717704002948>>. Citado na página 27.

JEREZ, S. et al. A nonuniform mesh semi-implicit CE-SE method modelling unsteady flow in tapered ducts. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 76, n. 1-3, p. 94–98, 2007. ISSN 0378-4754. Mathematical Modelling and Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475407000080>>. Citado na página 27.

JOHN, F. *Partial differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1910. 259 p. Citado na página 46.

KESSERWANI, G. et al. Multiwavelet discontinuous Galerkin-adaptive shallow water model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 294, p. 56–71, 2015. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782515001899>>. Citado na página 75.

LEVEQUE, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1992. Citado na página 25.

LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. eBook (netLibrary): Cambridge University Press, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 38, 59 e 65.

LIMA, E. L. *Curso de Análise vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 546 p. Citado na página 42.

LIU, H. et al. Lattice Boltzmann method for the Saint-Venant equations. *Journal of Hydrology*, v. 524, p. 411–416, 2015. ISSN 0022-1694. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169415001651>>. Citado na página 75.

LOBEIRO, A. M. *Solução das equações de Saint Venant em uma e duas dimensões usando o método das características*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 75.

LOWE, R. L. et al. An eulerian model for nonlinear waves in elastic rods, solved numerically by the CESE method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 94-95, p. 179 – 195, 2016. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768316300348>>. Citado na página 27.

LUO, X. et al. The space-time CESE method applied to phase transition of water vapor in compressible flows. *Computers & Fluids*, v. 36, n. 7, p. 1247–1258, 2007. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793007000138>>. Citado na página 27.

MOLLS, T.; MOLLS, F. Space-Time Conservation Method Applied to Saint Venant Equations. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 124, n. 5, p. 501–508, 1998. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1998\)124:5\(501\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:5(501))>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 104 e 110.

MULJADI, B. P.; YANG, J.-Y. Space time CE/SE and discrete ordinate method for solving gas flows of arbitrary statistics. *Computers & Fluids*, v. 63, p. 184–188, 2012. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793012001600>>. Citado na página 27.

POLYANIN, A. D. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2002. 667 p. Citado na página 50.

POLYANIN, A. D. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2004. 803 p. Citado na página 66.

QAMAR, S.; ASHRAF, W. Application of Space-Time CE/SE Method for Solving Gas-Solid Reaction and Chemotaxis Models. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 51, n. 26, p. 9173–9185, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1021/ie3005622>>. Citado na página 27.

QAMAR, S.; ASHRAF, W. A SPACE-TIME CE/SE METHOD FOR SOLVING HYPERBOLIC HEAT CONDUCTION MODEL. *International Journal of Computational Methods*, v. 11, n. 01, p. 1350048, 2014. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219876213500485>>. Citado na página 27.

QAMAR, S.; MUDASSER, S. On the application of a variant CE/SE method for solving two-dimensional ideal MHD equations. *Applied Numerical Mathematics*, v. 60, n. 6, p. 587–606, 2010. ISSN 0168-9274. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016892741000022X>>. Citado na página 27.

QAMAR, S.; WARNECKE, G. Application of space-time CE/SE method to shallow water magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 196, n. 1, p. 132–149, 2006. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042705005224>>. Citado na página 27.

QAMAR, S.; YOUSAF, M. The space-time CESE method for solving special relativistic hydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, v. 231, n. 10, p. 3928–3945, 2012. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999112000708>>. Citado na página 27.

QAMAR, S.; YOUSAF, M.; MUDASSER, S. The space-time CE/SE method for solving ultra-relativistic Euler equations. *Computer Physics Communications*, v. 182, n. 4, p. 994–1004, 2011. ISSN 0010-4655. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465510005370>>. Citado na página 27.

QURRAT-UL-AIN; QAMAR, S.; WARNECKE, G. A high-resolution space-time conservative method for non-linear hyperbolic conservation laws. *International Journal of Computational Methods*, v. 04, n. 02, p. 223–247, 2007. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S021987620700100X>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 87 e 88.

RIVERA, J. E. M.; ANDRADE, D. Exponential Decay of Non-linear Wave Equation with a Viscoelastic Boundary Condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 23, p. 41–61, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 61.

RODRIGUES, V. L. C. *Propagação de Ondas Unidimensionais por Meio da Formulação Dependente do Tempo do Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) — UFPR, Curitiba, 2012. Disponível em: <<http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080/dspace/handle/1884/28392>>. Citado na página 41.

SADIGHI, S.; AHMAD, A.; SHIRVANI, M. Dynamic Simulation of a Pilot Scale Vacuum Gas Oil Hydrocracking Unit by the Space-Time CE/SE Method. *Chemical Engineering & Technology*, WILEY-VCH Verlag, v. 35, n. 5, p. 919–928, 2012. ISSN 1521-4125. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/ceat.201100305>>. Citado na página 27.

SAMPSON, J. *Some Solutions of the Shallow Water Wave Equations*. Tese (Doutorado) — Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia, 2008. Citado na página 98.

SANTOS, J. L. R. *Modelagem da Equação da Onda Acústica Aplicada ao Imageamento de Estruturas Geológicas*. Dissertação (Mestrado) — COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/index.php/component/docman/cat_view/1-mestrado/2-2012?Itemid=>>. Citado na página 41.

SCANDALIATO, A. L.; LIOU, M.-S. A USM-based high-order solution for Euler equations. *AIAA 2010-719*, 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida, v. 39, p. 27, 01 2010. Citado na página 100.

SHEN, H.; LIU, K.; ZHANG, D. A local space-time conservation scheme and its application in shock wave propagation. *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, n. 4, p. 1958–1974, 2012. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300312008314>>. Citado na página 27.

SHEN, H. et al. Robust high-order space-time conservative schemes for solving conservation laws on hybrid meshes. *Journal of Computational Physics*, v. 281, p. 375–402, 2015. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114007050>>. Citado na página 28.

SHEN, H. et al. Maximum-principle-satisfying space-time conservation element and solution element scheme applied to compressible multifluids. *Journal of Computational Physics*, v. 330, p. 668 – 692, 2017. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999116305344>>. Citado na página 27.

SHEN, H.; WEN, C.-Y.; ZHANG, D.-L. A characteristic space-time conservation element and solution element method for conservation laws. *Journal of Computational Physics*, v. 288, p. 101–118, 2015. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999115000881>>. Citado na página 28.

SINGH, J.; ALTINAKAR, M. S.; DING, Y. Two-dimensional numerical modeling of dam-break flows over natural terrain using a central explicit scheme. *Advances in Water Resources*, v. 34, n. 10, p. 1366–1375, 2011. ISSN 0309-1708. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170811001369>>. Citado na página 75.

STOKER, J. J. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. New York: Interscience Publishers, 1957. Citado na página 89.

STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Philadelphia: Siam, 1947. 435 p. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 127.

TAFLOVE, A. *Computational Electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. Norwood, MA: Artech House, 1995. Citado na página 127.

THACKER, W. C. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, v. 107, p. 499–508, 06 1981. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 106.

VENKATACHARI, B. S. et al. Validation and verification of Courant number insensitive CE/SE method for transient viscous flow simulations. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 78, n. 5-6, p. 653–670, 2008. ISSN 0378-4754. Applied Scientific Computing: Numerical Grid Generation and Field Simulation. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475408001651>>. Citado na página 27.

WANG, G.; WANG, J.; LIU, K. New numerical algorithms in SUPER CE/SE and their applications in explosion mechanics. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, SP Science in China Press, v. 53, n. 2, p. 237–243, 2010. ISSN 1674-7348. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11433-009-0266-z>>. Citado na página 27.

WANG, G. et al. An improved CE/SE scheme for numerical simulation of gaseous and two-phase detonations. *Computers & Fluids*, v. 39, n. 1, p. 168–177, 2010. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004579300900111X>>. Citado na página 27.

WANG, G. et al. An improved CE/SE scheme and its application to dilute gas-particle flows. *Computer Physics Communications*, v. 182, n. 8, p. 1589–1601, 2011. ISSN 0010-4655. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465511001226>>. Citado na página 27.

WANG, J.; LIU, K.; ZHANG, D. An improved CE/SE scheme for multi-material elastic-plastic flows and its applications. *Computers & Fluids*, v. 38, n. 3, p. 544–551, 2009. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793008001369>>. Citado na página 27.

WANG, X.-Y.; CHOW, C.-Y.; CHANG, S.-C. *Application of the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method to Two-Dimensional Advection-Diffusion Problems*. Lewis Research Center, NASA, 1995. TM 106946. Disponível em: <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/microbus/>>. Citado na página 26.

WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley Interscience, 1974. 636 p. Citado na página 41.

YANG, S.; KURGANOV, A.; LIU, Y. Well-Balanced Central Schemes on Overlapping Cells with Constant Subtraction Techniques for the Saint-Venant Shallow Water System. *Journal of Scientific Computing*, Springer US, v. 63, n. 3, p. 678–698, 2015. ISSN 0885-7474. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10915-014-9908-z>>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 93.

YAO, C. et al. Combination of space-time conservation element/solution element method and continuous prediction technique for accelerated simulation of simulated moving bed chromatography. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, v. 96, p. 54 – 61, 2015. ISSN 0255-2701. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S025527011530074X>>. Citado na página 28.

YU, S.-T. J. et al. Numerical simulation of linear and nonlinear waves in hypoelastic solids by the CESE method. *Wave Motion*, v. 47, n. 3, p. 168–182, 2010. ISSN 0165-2125. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212509000845>>. Citado na página 27.

ZHANG, M. et al. Solving the MHD equations by the space-time conservation element and solution element method. *Journal of Computational Physics*, v. 214, n. 2, p. 599–617, 2006. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910500464X>>. Citado na página 27.

ZHANG, Y.; ZENG, Z.; CHEN, J. The improved space-time conservation element and solution element scheme for two-dimensional dam-break flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 68, n. 5, p. 605–624, 2012. ISSN 1097-0363. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/flid.2525>>. Citado 12 vezes nas páginas 16, 28, 77, 87, 90, 91, 98, 101, 104, 110, 141 e 223.

ZHANG, Z.-C.; YU, S. T. J.; CHANG, S.-C. A Space-time Conservation Element and Solution Element Method for Solving the Two- and Three-dimensional Unsteady Euler Equations Using

Quadrilateral and Hexahedral Meshes. *J. Comput. Phys.*, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 175, n. 1, p. 168–199, jan. 2002. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2001.6934>>. Citado na página 26.

ZHANG, Z.-C. et al. A Modified Space-Time Conservation Element and Solution Element Method for Euler and Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 99-3277, p. 10, 1999. In A Collection of Technical Papers, 14th AIAA CFD Conference, 28/Junho à 1/Julho, 1999, Norfolk, Virginia. Disponível em: <http://cfdsolvcon.net/old/pub/zzc/Norfolk_99_CFD.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 77.

ZOPPOU, C.; ROBERTS, S. Numerical solution of the two-dimensional unsteady dam break. *Applied Mathematical Modelling*, v. 24, n. 7, p. 457 – 475, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 16, 98, 101, 103 e 224.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CÁLCULOS AUXILIARES

A.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

A.1.1 Uma aproximação para o termo fonte

O esquema CE/SE para a equação de Klein-Gordon

$$\begin{aligned}
 u(x_i, t_{j+1}) = & u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1}) - \underbrace{\frac{m^2}{2c} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_i-c(t_{j+1}-\tau)}^{x_i+c(t_{j+1}-\tau)} u(s, \tau) ds d\tau}_{I_1} \\
 & - \underbrace{\frac{m^2}{2c} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{x_i-c(\tau-t_{j-1})}^{x_i+c(\tau-t_{j-1})} u(s, \tau) ds d\tau}_{I_2}, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

é dependente da variável u , por isso, uma aproximação nessas integrais é necessária. Uma possibilidade é aproximar a função u sobre I_1 e I_2 pelos polinômios de Lagrange

$$\begin{aligned}
 u(x, t) \approx & \left(\frac{t_{j+1} - t}{\Delta t} \right) \left[\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2\Delta x^2} u(x_{i-1}, t_j) + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-\Delta x^2} u(x_i, t_j) \right. \\
 & \left. + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2\Delta x^2} u(x_{i+1}, t_j) \right] + \frac{(t - t_j)}{\Delta t} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-\Delta x^2} u(x_i, t_{j+1}), \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 u(x, t) \approx & \left(\frac{t - t_{j-1}}{\Delta t} \right) \left[\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2\Delta x^2} u(x_{i-1}, t_j) + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-\Delta x^2} u(x_i, t_j) \right. \\
 & \left. + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2\Delta x^2} u(x_{i+1}, t_j) \right] + \frac{(t_j - t)}{\Delta t} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-\Delta x^2} u(x_i, t_{j-1}), \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

respectivamente. Com isso, tais integrais se tornarão iguais a

$$I_1 \approx \frac{c\Delta t^2}{15} u(x_{i-1}, t_j) + \frac{8c\Delta t^2}{15} u(x_i, t_j) + \frac{c\Delta t^2}{15} u(x_{i+1}, t_j) + \frac{3c\Delta t^2}{10} u(x_i, t_{j+1}), \tag{A.4}$$

$$I_2 \approx \frac{c\Delta t^2}{15} u(x_{i-1}, t_j) + \frac{8c\Delta t^2}{15} u(x_i, t_j) + \frac{c\Delta t^2}{15} u(x_{i+1}, t_j) + \frac{3c\Delta t^2}{10} u(x_i, t_{j-1}). \tag{A.5}$$

Então, substituindo as equações (A.4) e (A.5) em (A.1), obtém-se

$$\begin{aligned}
 u_i^{j+1} = & u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - u_i^{j-1} - \frac{m^2 c \Delta t^2}{2c} \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3} u_{i-1}^j + \frac{16}{3} u_i^j + \frac{2}{3} u_{i+1}^j + \frac{3}{2} u_i^{j-1} + \frac{3}{2} u_i^{j+1} \right], \\
 = & \left(1 - \frac{m^2 \Delta t^2}{15} \right) (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) - \left(1 + \frac{3m^2 \Delta t^2}{20} \right) u_i^{j-1} - \frac{8m^2 \Delta t^2}{15} u_i^j \\
 & - \frac{3m^2 \Delta t^2}{20} u_i^{j+1}, \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{(20 + 3m^2\Delta t^2)}{20}u_i^{j+1} = \frac{(15 - m^2\Delta t^2)}{15}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) - \frac{(20 + 3m^2\Delta t^2)}{20}u_i^{j-1} - \frac{8m^2\Delta t^2}{15}u_i^j, \quad (\text{A.7})$$

ou ainda,

$$u_i^{j+1} = \frac{4}{3} \frac{(15 - m^2\Delta t^2)}{(20 + 3m^2\Delta t^2)}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) - \frac{32m^2\Delta t^2}{3(20 + 3m^2\Delta t^2)}u_i^j - u_i^{j-1}. \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Análise de estabilidade

Ao realizar uma análise de estabilidade por Von Neumann, substitui-se u_k^j por $g^j e^{ik\theta}$ no esquema CE/SE (A.8), sendo que agora i é a unidade imaginária definida de modo que $i^2 = -1$. Assim, obtém-se

$$g^{j+1} e^{ik\theta} = \frac{4}{3} \frac{(15 - m^2\Delta t^2)}{(20 + 3m^2\Delta t^2)}(g^j e^{i(k-1)\theta} + g^j e^{i(k+1)\theta}) - \frac{32m^2\Delta t^2}{3(20 + 3m^2\Delta t^2)}g^j e^{ik\theta} - g^{j-1} e^{ik\theta}, \quad (\text{A.9})$$

isto é,

$$g^{j+1} = \left[\frac{4}{3} \frac{(15 - m^2\Delta t^2)}{(20 + 3m^2\Delta t^2)}(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) - \frac{32m^2\Delta t^2}{3(20 + 3m^2\Delta t^2)} \right] g^j - g^{j-1}, \quad (\text{A.10})$$

ou,

$$3(20 + 3m^2\Delta t^2)g^1 = [8(15 - m^2\Delta t^2) \cos(\theta) - 32m^2\Delta t^2] g^0 - 3(20 + 3m^2\Delta t^2)g^{-1}. \quad (\text{A.11})$$

Reescrevendo a equação anterior de forma compacta,

$$\alpha g^2 + \beta g + \alpha = 0, \quad \text{em que} \quad \begin{cases} \alpha = 3(20 + 3m^2\Delta t^2) \\ \beta = 8(m^2\Delta t^2 - 15) \cos(\theta) + 32m^2\Delta t^2 \end{cases}. \quad (\text{A.12})$$

Assim, o fator de amplificação é $g = -(\beta/2\alpha) \pm \sqrt{(\beta/2\alpha)^2 - 1}$ e terá módulo ≤ 1 apenas se $|\beta/2\alpha| \leq 1$, pois

- Se $|\beta/2\alpha| = 1$, então $|g| = \left| -\frac{\beta}{2\alpha} \right| = 1$;
- Se $|\beta/2\alpha| < 1$, então $g = -(\beta/2\alpha) \pm i\sqrt{1 - (\beta/2\alpha)^2}$ é complexo e

$$|g| = \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \left| 1 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right|} = \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + 1 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}} = 1. \quad (\text{A.13})$$

Neste caso, $|\beta/2\alpha| \leq 1$ implica em

$$|-60 + m^2\Delta t^2(4 \cos(\theta) + 16)| \leq 60 + 9m^2\Delta t^2, \quad (\text{A.14})$$

ou ainda

$$0 \leq m^2\Delta t^2 \leq \frac{120}{4 \cos(\theta) + 7} \leq \frac{120}{-4 + 7} = \frac{120}{3} = 40. \quad (\text{A.15})$$

Assim, o esquema é condicionalmente estável, sendo que a condição é

$$0 \leq m^2\Delta t^2 \leq 40. \quad (\text{A.16})$$

A.1.3 Análise de dissipação numérica

A dissipação é definida da seguinte maneira:

Definição A.1.1 (Dissipação Numérica). Um esquema é dissipativo de ordem $2r$ se existe uma constante positiva c , independente de Δx e Δt , tal que cada fator de amplificação $g_\nu(\theta)$ satisfaça

$$|g_\nu(\theta)| \leq 1 - c \left[\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{2r}.$$

Observe que, segundo a definição A.1.1, o esquema deduzido na seção anterior é estritamente não dissipativo uma vez que seus fatores de amplificação possuem magnitude identicamente iguais a 1. Isso significa que o esquema (A.8) propaga os distúrbios iniciais sem amortecê-los (STRIKWERDA, 1947, p. 121).

A.1.4 Análise de dispersão numérica

Dispersão é definida como a variação da propagação de uma onda com comprimento de onda λ e frequência f . Por conveniência, dispersão é também frequentemente representada como a variação da propagação de uma onda com número de onda $\xi = 2\pi/\lambda$ e frequência angular $\omega = 2\pi/f$ (TAFLOVE, 1995).

Considera-se uma solução de onda sinusoidal viajante $u(x, t) = u_0 e^{i(\omega t - \xi x)}$, onde ω e ξ foram definidos acima e i é a unidade imaginária. Substituindo esta função na equação de Klein-Gordon original $u_{tt} = c^2 u_{xx} - m^2 u$, obtém-se

$$-\omega^2 u_0 e^{i(\omega t - \xi x)} = -c^2 \xi^2 u_0 e^{i(\omega t - \xi x)} - m^2 u_0 e^{i(\omega t - \xi x)}, \quad (\text{A.17})$$

o que implica em

$$\omega^2 = c^2 \xi^2 + m^2. \quad (\text{A.18})$$

A equação (A.18) representa a dispersão (analítica) para uma onda plana propagando-se em um meio homogêneo e sem perdas.

Para obter a equação de dispersão numérica, substitui-se a solução de onda plana $u_k^j = u_0 e^{i(\omega_j \Delta t - \xi_k \Delta x)}$ na equação (A.8), obtendo

$$\begin{aligned} u_0 e^{i[\omega(j+1)\Delta t - \xi_k \Delta x]} &= \frac{4(15 - m^2 \Delta t^2)}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)} \{ u_0 e^{i[\omega_j \Delta t - \xi(k-1)\Delta x]} + u_0 e^{i[\omega_j \Delta t - \xi(k+1)\Delta x]} \} \\ &\quad - \frac{32m^2 \Delta t^2}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)} u_0 e^{i(\omega_j \Delta t - \xi_k \Delta x)} - u_0 e^{i[\omega(j-1)\Delta t - \xi_k \Delta x]}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

que pode ser fatorada como

$$\begin{aligned} u_0 e^{i(\omega_j \Delta t - \xi_k \Delta x)} e^{i\omega \Delta t} &= \frac{4(15 - m^2 \Delta t^2)}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)} u_0 e^{i(\omega_j \Delta t - \xi_k \Delta x)} (e^{i\xi \Delta x} + e^{-i\xi \Delta x}) \\ &\quad - \frac{32m^2 \Delta t^2}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)} u_0 e^{i(\omega_j \Delta t - \xi_k \Delta x)} - u_0 e^{i\omega_j \Delta t - \xi_k \Delta x} e^{-i\omega \Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

e, após dividir todos os membros por $u_0 e^{i(\omega j \Delta t - \xi k \Delta x)}$, encontra-se

$$e^{i\omega \Delta t} + e^{-i\omega \Delta t} = \frac{4(15 - m^2 \Delta t^2)}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)} (e^{i\xi \Delta x} + e^{-i\xi \Delta x}) - \frac{32m^2 \Delta t^2}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)}, \quad (\text{A.21})$$

ou ainda, tendo em vista que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$,

$$2 \cos(\omega \Delta t) = \frac{8(15 - m^2 \Delta t^2)}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)} \cos(\xi \Delta x) - \frac{32m^2 \Delta t^2}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)}. \quad (\text{A.22})$$

Agora, realizando a substituição $\cos(x) = \cos^2(x/2) - \text{sen}^2(x/2)$ a última equação, tem-se

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) &= \frac{4(15 - m^2 \Delta t^2)}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)} \left[\cos^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{16m^2 \Delta t^2}{3(20 + 3m^2 \Delta t^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Dividindo a equação (A.23) por Δt^2 e tomando o seu limite, com Δt tendendo a zero, encontra-se

$$-\frac{\omega^2}{4} = -\frac{c^2 \xi^2}{4} - \frac{4m^2}{15}, \quad \text{ou ainda,} \quad \omega^2 = c^2 \xi^2 + \frac{16m^2}{15}. \quad (\text{A.24})$$

Ao comparar-se as equações (A.24) e (A.18), conclui-se que a dispersão numérica não converge para a analítica. Em outras palavras, não é possível escolher uma grade CE/SE de forma a reduzir a dispersão numérica a qualquer nível desejado.

A.1.5 Dispersão do esquema CE/SE modificado para a equação de Klein-Gordon

O objetivo agora é analisar a dispersão numérica do esquema CE/SE modificado, desenvolvido a partir da equação modificada, conforme seção 3.2.4:

$$v_k^{j+1} = (1 - m\Delta t)v_{k+1}^j + (1 + m\Delta t)v_{k-1}^j - v_k^{j-1}. \quad (\text{A.25})$$

Para isso, substitui-se a solução de onda plana $v_k^j = v_0 e^{i(\omega j \Delta t - \xi k \Delta x)}$ em (A.25), obtendo

$$\begin{aligned} v_0 e^{i[\omega(j+1)\Delta t - \xi k \Delta x]} &= (1 - m\Delta t)v_0 e^{i[\omega j \Delta t - \xi(k+1)\Delta x]} + (1 + m\Delta t)v_0 e^{i[\omega j \Delta t - \xi(k-1)\Delta x]} \\ &\quad - v_0 e^{i[\omega(j-1)\Delta t - \xi k \Delta x]}, \\ v_0 e^{i(\omega j \Delta t - \xi k \Delta x)} e^{i\omega \Delta t} &= v_0 e^{i(\omega j \Delta t - \xi k \Delta x)} [(1 - m\Delta t)e^{-i\xi \Delta x} + (1 + m\Delta t)e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\omega \Delta t}]. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Dividindo a equação anterior por $v_0 e^{i(\omega j \Delta t - \xi k \Delta x)}$, pode-se encontrar

$$\begin{aligned} e^{i\omega \Delta t} + e^{-i\omega \Delta t} &= (1 - m\Delta t)e^{-i\xi \Delta x} + (1 + m\Delta t)e^{i\xi \Delta x}, \\ &= e^{i\xi \Delta x} + e^{-i\xi \Delta x} + m\Delta t (e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x}), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

ou ainda, pela igualdade $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$,

$$2 \cos(\omega\Delta t) = 2 \cos(\xi\Delta x) + i2m\Delta t \text{sen}(\xi\Delta x). \quad (\text{A.28})$$

Note-se que o argumento de cada uma das funções seno e cosseno da equação (A.28) são pequenos. Por tanto, pode-se aplicar uma expansão de Taylor de primeira ordem às funções seno e cosseno válidas para pequenos argumentos e, com isso, será obtido

$$1 - \frac{(\omega\Delta t)^2}{2} = 1 - \frac{(\xi\Delta x)^2}{2} + im\Delta t \left[\xi\Delta x - \frac{(\xi\Delta x)^3}{6} \right], \quad (\text{A.29})$$

e, isolando ω ,

$$\omega^2 = c^2\xi^2 - 2imc\xi + imc^3\frac{\Delta t^2}{6}, \quad (\text{A.30})$$

Tomando o limite da equação anterior, com Δt tendendo a zero, encontra-se finalmente

$$\omega^2 = c^2\xi^2 - 2imc\xi, \quad (\text{A.31})$$

que é a equação de dispersão analítica (obtida substituindo-se a solução de onda plana $v(x, t) = v_0 e^{i(\omega t - \xi x)}$ na equação de Klein-Gordon modificada: $v_{tt} = c^2 v_{xx} - 2mcv_x$). Conclui-se, assim, que a dispersão numérica converge para a analítica, significando que é possível escolher uma grade CE/SE de forma a reduzir a dispersão numérica a qualquer nível desejado.

A.2 CURVAS CARACTERÍSTICAS 2D

Como interpretar as características para o problema bidimensional? Observa-se que para o problema unidimensional, integrou-se a equação (3.9) ao longo de um triângulo característico (FIGURA 6 da seção 3.2.1 obtendo-se, assim, a conhecida fórmula de D'Alembert (3.27)). Cada curva característica unidimensional é expressa como $\mathbf{S}(\tau) = (c(\tau - t_0), \tau)$ e $\mathbf{s}(\tau) = (c(t_0 - \tau), \tau)$. Calculando as derivadas de $u(\mathbf{S}(\tau))_t$ e $u(\mathbf{S}(\tau))_x$ em relação a τ encontra-se

$$\frac{du_t}{d\tau} = \frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{du_x}{d\tau} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{A.33})$$

Multiplicando a equação (A.33) por $-c$ e somando com a equação (A.32):

$$\frac{du_t}{d\tau} - c \frac{du_x}{d\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{A.34})$$

De maneira equivalente, calculando as derivadas de $u(\mathbf{s}(\tau))_t$ e $u(\mathbf{s}(\tau))_x$ em relação a τ e seguindo o processo acima encontra-se

$$\frac{du_t}{d\tau} + c \frac{du_x}{d\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{A.35})$$

As equações (A.34) e (A.35) são conhecidas como invariantes de Riemann, pois $u_t - cu_x$ tem variação nula em $\mathbf{S}(\tau)$, enquanto que $u_t + cu_x$ tem variação nula em $\mathbf{s}(\tau)$.

Para o problema 2D, no entanto, tem-se uma projeção da característica 2D: um cone regular centrado no ponto $(x_0, y_0, 0)$, conforme FIGURA 38, com superfícies parametrizadas por \mathbf{R} (base) e \mathbf{S} (lateral), dadas respectivamente por

$$\mathbf{R}(\tau, \theta) = (c\tau \cos \theta + x_0, c\tau \sin \theta + y_0, 0), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \tau \leq t_0,$$

$$\mathbf{S}(\tau, \theta) = (c(t_0 - \tau) \cos \theta + x_0, c(t_0 - \tau) \sin \theta + y_0, \tau), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \tau \leq t_0.$$

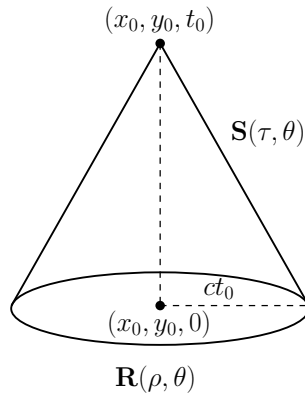


FIGURA 38 – Cone característico definido sobre a equação da onda 2D.

Agora, calculando as derivadas de $u(\mathbf{S}(\tau, \theta))_t$, $u(\mathbf{S}(\tau, \theta))_x$ e $u(\mathbf{S}(\tau, \theta))_y$ em relação a τ pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial u_t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \cos(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - c \sin(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}, \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - c \cos(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \sin(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - c \cos(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - c \sin(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{A.38})$$

Então, somando a equação (A.36) com a equação (A.37) multiplicada por $c \cos(\theta)$ e somando a equação resultante com (A.38) multiplicada por $c \sin(\theta)$ obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_t}{\partial \tau} + c \cos(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + c \sin(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad - 2c^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Calculando as derivadas de $u(\mathbf{S}(\tau, \theta))_x$ e $u(\mathbf{S}(\tau, \theta))_y$ em relação a θ pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial u_x}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -c(t_0 - \tau) \sin(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t_0 - \tau) \cos(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -c(t_0 - \tau) \sin(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(t_0 - \tau) \cos(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{A.41})$$

Multiplicando a equação (A.40) por $-c\text{sen}(\theta)$ e somando com a equação (A.41) multiplicada por $c\cos(\theta)$ encontra-se

$$\begin{aligned} -2c^2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= -\frac{c\text{sen}(\theta)}{(t_0-\tau)}\frac{\partial u_x}{\partial\theta} + \frac{c\cos(\theta)}{(t_0-\tau)}\frac{\partial u_y}{\partial\theta} - c^2\text{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad - c^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Substituindo a equação (A.42) em (A.39),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2[\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &= \frac{\partial u_t}{\partial\tau} + c\cos(\theta)\frac{\partial u_x}{\partial\tau} + c\text{sen}(\theta)\frac{\partial u_y}{\partial\tau} + \frac{c\text{sen}(\theta)}{(t_0-\tau)}\frac{\partial u_x}{\partial\theta} - \frac{c\cos(\theta)}{(t_0-\tau)}\frac{\partial u_y}{\partial\theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

A equação (A.43) é equivalente às equações dadas em (A.34) e (A.35) que fornecem as invariantes de Riemann unidimensionais. No entanto, observa-se que consiste de uma combinação não linear das derivadas dos parâmetros τ e θ da superfície característica.

Agora, seja o volume de controle definido conforme FIGURA 39, consistindo da união de dois cones característicos opostos cujas parametrizações são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\tau, \theta) &= (c(t_{k+1} - \tau)\cos\theta + x_i, c(t_{k+1} - \tau)\text{sen}\theta + y_j, \tau), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, t_k \leq \tau \leq t_{k+1}, \\ \mathbf{s}(\tau, \theta) &= (c(\tau - t_{k-1})\cos\theta + x_i, c(\tau - t_{k-1})\text{sen}\theta + y_j, \tau), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, t_{k-1} \leq \tau \leq t_k. \end{aligned}$$

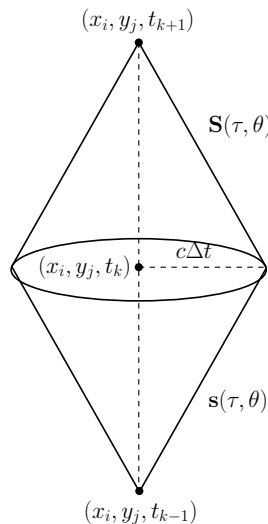


FIGURA 39 – Volume de controle formado pela união de dois cones característicos de raio $c\Delta t$.

Os vetores normais das respectivas superfícies são

$$\mathbf{N}_S = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} = (c(t_{k+1} - \tau)\cos\theta, c(t_{k+1} - \tau)\text{sen}\theta, c^2(t_{k+1} - \tau)), \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{N}_s = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \tau} = (c(\tau - t_{k-1})\cos\theta, c(\tau - t_{k-1})\text{sen}\theta, -c^2(\tau - t_{k-1})). \quad (\text{A.45})$$

Integrando a equação $\text{div } \mathbf{F} = u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$ sobre o volume definido conforme FIGURA 39, obtém-se

$$\begin{aligned}
0 &= \int_V \text{div } \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_S d\sigma + \int_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_s d\sigma, \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-c^2 u_x, -c^2 u_y, u_t) \cdot (c \cos \theta, c \sin \theta, c^2) (t_{k+1} - \tau) d\tau d\theta + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (-c^2 u_x, -c^2 u_y, u_t) \cdot (c \cos \theta, c \sin \theta, -c^2) (\tau - t_{k-1}) d\tau d\theta, \\
&= c^2 \int_0^{2\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u_x, u_y, u_t) \cdot (-c \cos \theta, -c \sin \theta, 1) (t_{k+1} - \tau) d\tau d\theta - \\
&\quad c^2 \int_0^{2\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u_x, u_y, u_t) \cdot (c \cos \theta, c \sin \theta, 1) (\tau - t_{k-1}) d\tau d\theta, \tag{A.46}
\end{aligned}$$

podendo, ainda, ser reescrita como

$$\begin{aligned}
0 &= c^2 \int_0^{2\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \nabla u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} (t_{k+1} - \tau) d\tau d\theta - \\
&\quad c^2 \int_0^{2\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \nabla u(\mathbf{s}(\tau, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \tau} (\tau - t_{k-1}) d\tau d\theta. \tag{A.47}
\end{aligned}$$

Utilizando as igualdades

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(t_{k+1} - \tau)u(\mathbf{S}(\tau, \theta))] = -u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) + (t_{k+1} - \tau) \nabla u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau}, \tag{A.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(\tau - t_{k-1})u(\mathbf{s}(\tau, \theta))] = u(\mathbf{s}(\tau, \theta)) + (\tau - t_{k-1}) \nabla u(\mathbf{s}(\tau, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \tau}, \tag{A.49}$$

em (A.47), computa-se seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) d\tau d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(\mathbf{s}(\tau, \theta)) d\tau d\theta &= \Delta t \int_0^{2\pi} u(\mathbf{S}(t_k, \theta)) d\theta + \\
&\quad \Delta t \int_0^{2\pi} u(\mathbf{s}(t_k, \theta)) d\theta, \tag{A.50}
\end{aligned}$$

mas como $u(\mathbf{S}(t_k, \theta)) = u(\mathbf{s}(t_k, \theta))$, segue-se que a equação anterior é equivalente a

$$\int_0^{2\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(\mathbf{S}(\tau, \theta)) d\tau d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(\mathbf{s}(\tau, \theta)) d\tau d\theta = 2\Delta t \int_0^{2\pi} u(\mathbf{S}(t_k, \theta)) d\theta. \tag{A.51}$$

O fato é, finalmente, a partir da equação (A.51), que não é possível avançar a fim de encontrar uma equação discreta e livre de erro de discretização como no caso unidimensional.

APÊNDICE B – O MÉTODO CE/SE PARA AS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT UNIDIMENSIONAIS

No desenvolvimento do esquema CE/SE para as equações de Saint-Venant unidimensionais, começa-se por reescrever a equação vetorial (4.1) como

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} = S_m, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.1})$$

Em seguida, pelo teorema da divergência no espaço \mathbb{R}^2 , tem-se que ela, a equação (B.1), representa a forma diferencial da lei integral de conservação

$$\oint_{S(V)} \mathbf{H}_m \cdot ds = \int_V S_m dV, \quad m = 1, 2, \quad (\text{B.2})$$

em que $S(V)$ representa o contorno de uma região espaço-tempo $V \subset \mathbb{R}^2$ e o campo vetorial $\mathbf{H}_m = (f_m, q_m)$, $m = 1, 2$.

A malha espaço-tempo bem como os elementos de solução e conservação utilizados serão os mesmos do capítulo 2 e, por conveniência serão todos novamente apresentados neste capítulo através das FIGURAS 40 e 41.

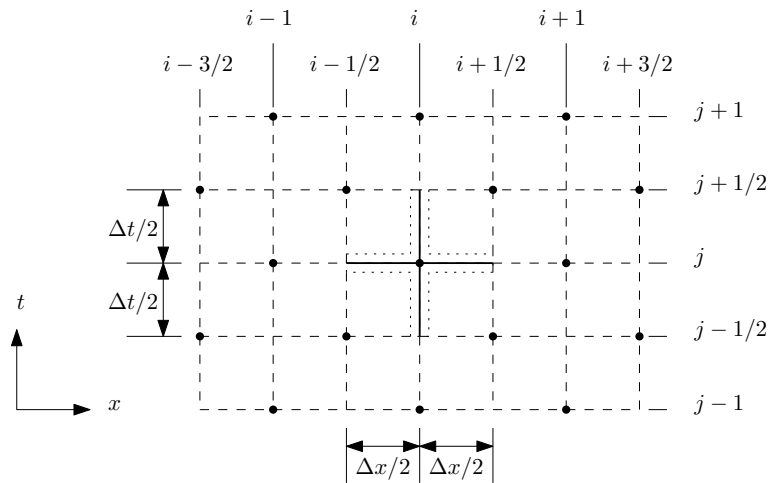


FIGURA 40 – A malha espaço-tempo escalonada.

Fonte – Chang (1995), Chang et al. (1995), Chang, Wang e To (2000).

Para todo $(x, t) \in SE(i, j)$, aproxima-se as funções $q_m(x, t)$ e $f_m(x, t)$ por polinômios de Taylor de segunda ordem, dados respectivamente por

$$\begin{aligned} q_m^*(x, t; i, j) &= (q_m)_i^j + [(q_m)_x]_i^j(x - x_i) + [(q_m)_t]_i^j(t - t_j) + \frac{1}{2}[(q_m)_{xx}]_i^j(x - x_i)^2 \\ &\quad + [(q_m)_{xt}]_i^j(x - x_i)(t - t_j) + \frac{1}{2}[(q_m)_{tt}]_i^j(t - t_j)^2, \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} f_m^*(x, t; i, j) &= (f_m)_i^j + [(f_m)_x]_i^j(x - x_i) + [(f_m)_t]_i^j(t - t_j) + \frac{1}{2}[(f_m)_{xx}]_i^j(x - x_i)^2 \\ &\quad + [(f_m)_{xt}]_i^j(x - x_i)(t - t_j) + \frac{1}{2}[(f_m)_{tt}]_i^j(t - t_j)^2, \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

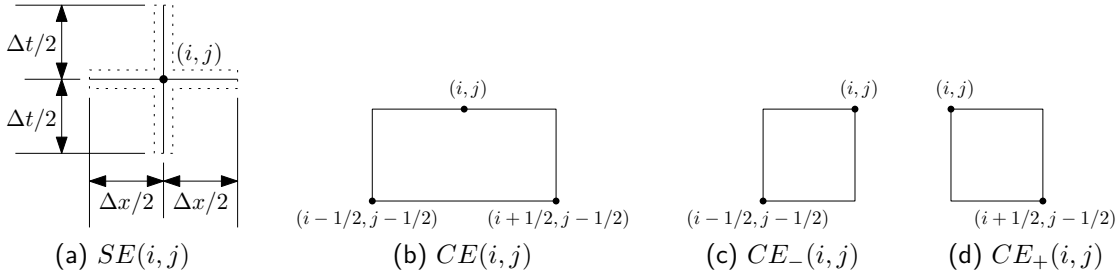


FIGURA 41 – Os elementos de solução e de conservação espacial-temporal.

Fonte – Chang (1995), Chang et al. (1995), Chang, Wang e To (2000).

Observa-se a partir da equação (4.2), que f_m , $m = 1, 2$ depende explicitamente das variáveis q_1 e q_2 . Assim,

$$\frac{\partial f_m}{\partial x} = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_m}{\partial t} = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial t} = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \left(S_l - \frac{\partial f_l}{\partial x} \right), \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.5})$$

isto é, as derivadas de primeira ordem de f_m , $m = 1, 2$ são todas funções de q_m e $(q_m)_x$, $m = 1, 2$. Observa-se que a última igualdade em (B.5) foi obtida utilizando-se a lei diferencial de conservação (B.1). De maneira equivalente, tem-se que as derivadas de segunda ordem são calculadas, para $m = 1, 2$, como

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial x^2} = \sum_{l=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial q_l \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x} \frac{\partial q_l}{\partial x} + \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \frac{\partial^2 q_l}{\partial x^2} \right), \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial x \partial t} = \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial q_l \partial q_k} \left(S_k - \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x} + \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \left(\frac{\partial S_l}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x^2} \right) \right], \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial t^2} = \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial q_l \partial q_k} \left(S_k - \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) \left(S_l - \frac{\partial f_l}{\partial x} \right) + \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \left(\frac{\partial S_l}{\partial t} - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x \partial t} \right) \right], \quad (\text{B.8})$$

ou seja, as derivadas de segunda ordem de f_m dependem todas de q_m , $(q_m)_x$ e $(q_m)_{xx}$, $m = 1, 2$. Observa-se a partir da equação 4.3 que S_m depende de q_m , $m = 1, 2$. Assim, a presença de $(S_l)_x$ e $(S_l)_t$ nas equações (B.7) e (B.8), respectivamente, não altera a afirmação anterior, visto que

$$\frac{\partial S_m}{\partial x} = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial S_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_m}{\partial t} = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial S_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial t} = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial S_m}{\partial q_l} \left(S_l - \frac{\partial S_l}{\partial x} \right), \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.9})$$

O termo fonte S_m , $m = 1, 2$ é aproximado por um polinômio de Taylor de primeira ordem, pois o mesmo possui derivada de uma ordem a menos que q_m e f_m na equação (B.1). Assim,

$$S_m^*(x, t; i, j) = (S_m)_i^j + [(S_m)_x]_i^j (x - x_i) + [(S_m)_t]_i^j (t - t_j), \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.10})$$

Conclui-se, a partir das equações (B.5)-(B.9), que $(q_m)_i^j$, $[(q_m)_x]_i^j$ e $[(q_m)_{xx}]_i^j$, $m = 1, 2$ são os únicos coeficientes desconhecidos nas aproximações (B.3), (B.4) e (B.10).

Agora, para todo $(x, t) \in SE(i, j)$, aproxima-se a equação (B.1) por

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_m^* = \frac{\partial q_m^*}{\partial t} + \frac{\partial f_m^*}{\partial x} = S_m^*, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.11})$$

Com isso, a lei integral (B.2) é aproximada por

$$\oint_{S(V)} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} = \int_V S_m^* dV, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.12})$$

Uma condição necessária à equação (B.12) é

$$\oint_{S(CE(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} = \int_{CE(i,j)} S_m^* dV, \quad m = 1, 2, \quad (\text{B.13})$$

para todo volume de controle (elemento de conservação) $CE(i, j)$. A seção B.1 a seguir é destinada a avaliação da equação integral (B.13) anterior.

B.1 AVALIAÇÃO DE $(q_m)_i^j$

O elemento de conservação $CE(i, j)$ pode ser decomposto em $CE_-(i, j)$ e $CE_+(i, j)$. Então a integral em (B.13) pode ser desmembradas nos contornos desses sub volumes. Assim:

$$\begin{aligned} \oint_{S(CE_-(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} &= - \underbrace{\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} q_m^*(x, t_{j-1/2}) dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f_m^*(t, x_{i-1/2}) dt}_{I_2} \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f_m^*(t, x_i) dt}_{I_3} + \underbrace{\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} q_m^*(x, t_j) dx}_{I_3}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

As funções em I_1 e I_2 estão definidas em $SE(i-1/2, j-1/2)$. Assim:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \left\{ (q_m)_{i-1/2}^{j-1/2} + [(q_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} (x - x_{i-1/2}) + [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} \frac{(x - x_{i-1/2})^2}{2} \right\} dx, \\ &= \frac{\Delta x}{2} (q_m)_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x^2}{8} [(q_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x^3}{48} [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} \left\{ (f_m)_{i-1/2}^{j-1/2} + [(f_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} (t - t_{j-1/2}) + [(f_m)_{tt}]_{i-1/2}^{j-1/2} \frac{(t - t_{j-1/2})^2}{2} \right\} dt, \\ &= \frac{\Delta t}{2} (f_m)_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta t^2}{8} [(f_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta t^3}{48} [(f_m)_{tt}]_{i-1/2}^{j-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Por outro lado, as funções em I_3 e I_4 estão definidas em $SE(i, j)$. Assim:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \left\{ (q_m)_i^j + [(q_m)_x]_i^j (x - x_i) + [(q_m)_{xx}]_i^j \frac{(x - x_i)^2}{2} \right\} dx, \\ &= \frac{\Delta x}{2} (q_m)_i^j - \frac{\Delta x^2}{8} [(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x^3}{48} [(q_m)_{xx}]_i^j, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} \left\{ (f_m)_i^j + [(f_m)_t]_i^j (t - t_j) + [(f_m)_{tt}]_i^j \frac{(t - t_j)^2}{2} \right\} dt, \\ &= \frac{\Delta t}{2} (f_m)_i^j - \frac{\Delta t^2}{8} [(f_m)_t]_i^j + \frac{\Delta t^3}{48} [(f_m)_{tt}]_i^j. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Substituindo as equações (B.15)-(B.18) em (B.14) encontra-se

$$\begin{aligned}
\oint_{S(CE_-(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} &= \frac{\Delta t}{2}(f_m)_i^j - \frac{\Delta t^2}{8}[(f_m)_t]_i^j + \frac{\Delta t^3}{48}[(f_m)_{tt}]_i^j + \frac{\Delta x}{2}(q_m)_i^j \\
&- \frac{\Delta x^2}{8}[(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x^3}{48}[(q_m)_{xx}]_i^j - \frac{\Delta t}{2}(f_m)_{i-1/2}^{j-1/2} - \frac{\Delta t^2}{8}[(f_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} \\
&- \frac{\Delta t^3}{48}[(f_m)_{tt}]_{i-1/2}^{j-1/2} - \frac{\Delta x}{2}(q_m)_{i-1/2}^{j-1/2} - \frac{\Delta x^2}{8}[(q_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} \\
&- \frac{\Delta x^3}{48}[(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2}.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

De maneira equivalente, a integral sobre o volume $CE_+(i, j)$

$$\begin{aligned}
\oint_{S(CE_+(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} &= - \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} q_m^*(x, t_{j-1/2}) dx + \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f_m^*(t, x_{i+1/2}) dt \\
&+ \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} q_m^*(x, t_j) - \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} f_m^*(t, x_i) dt,
\end{aligned} \tag{B.20}$$

torna-se, após todos os cálculos e simplificações

$$\begin{aligned}
\oint_{S(CE_+(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{\Delta t}{2}(f_m)_i^j + \frac{\Delta t^2}{8}[(f_m)_t]_i^j - \frac{\Delta t^3}{48}[(f_m)_{tt}]_i^j + \frac{\Delta x}{2}(q_m)_i^j \\
&+ \frac{\Delta x^2}{8}[(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x^3}{48}[(q_m)_{xx}]_i^j + \frac{\Delta t}{2}(f_m)_{i+1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta t^2}{8}[(f_m)_t]_{i+1/2}^{j-1/2} \\
&+ \frac{\Delta t^3}{48}[(f_m)_{tt}]_{i+1/2}^{j-1/2} - \frac{\Delta x}{2}(q_m)_{i+1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x^2}{8}[(q_m)_x]_{i+1/2}^{j-1/2} \\
&- \frac{\Delta x^3}{48}[(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2}.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Assim, a equação (B.13) se torna

$$\begin{aligned}
\oint_{S(CE(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{S(CE_-(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s} + \oint_{S(CE_+(i,j))} \mathbf{H}_m^* \cdot d\mathbf{s}, \\
&= \Delta x(q_m)_i^j + \frac{\Delta x^3}{24}[(q_m)_{xx}]_i^j - \frac{\Delta x}{2} \left[(q_m)_{i+1/2}^{j-1/2} + (q_m)_{i-1/2}^{j-1/2} \right] \\
&- \frac{\Delta x^2}{8} \left\{ [(q_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(q_m)_x]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} - \frac{\Delta x^3}{48} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} \right. \\
&+ [(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \left. \right\} - \frac{\Delta t}{2} \left[(f_m)_{i-1/2}^{j-1/2} - (f_m)_{i+1/2}^{j-1/2} \right] \\
&- \frac{\Delta t^2}{8} \left\{ [(f_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(f_m)_t]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} - \frac{\Delta t^3}{48} \left\{ [(f_m)_{tt}]_{i-1/2}^{j-1/2} \right. \\
&- [(f_m)_{tt}]_{i+1/2}^{j-1/2} \left. \right\} = \int_{CE(i,j)} S_m^* dV, \quad m = 1, 2.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

A fim de tornar o esquema totalmente explícito, avaliou-se a integral sobre o termo fonte da seguinte forma

$$\int_{CE(i,j)} S_m^* dV = \int_{CE_-(i,j)} S_m^* dV + \int_{CE_+(i,j)} S_m^* dV, \tag{B.23}$$

em que

$$\begin{aligned} \int_{CE-(i,j)} S_m^* dV &= \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} S_m^*(x, y; i-1/2, j-1/2) dx dt, \\ &= \frac{\Delta x \Delta t}{4} (S_m)_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x \Delta t^2}{16} [(S_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x^2 \Delta t}{16} [(S_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

e

$$\begin{aligned} \int_{CE+(i,j)} S_m^* dV &= \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} S_m^*(x, y; i+1/2, j-1/2) dx dt, \\ &= \frac{\Delta x \Delta t}{4} (S_m)_{i+1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x \Delta t^2}{16} [(S_m)_t]_{i+1/2}^{j-1/2} - \frac{\Delta x^2 \Delta t}{16} [(S_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{CE(i,j)} S_m^* dV &= \frac{\Delta x \Delta t}{4} [(S_m)_{i-1/2}^{j-1/2} + (S_m)_{i+1/2}^{j-1/2}] + \frac{\Delta x \Delta t^2}{16} \left\{ [(S_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} \right. \\ &\quad \left. + [(S_m)_t]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} + \frac{\Delta x^2 \Delta t}{16} \left\{ [(S_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(S_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Substituindo a equação (B.26) em (B.22), obtém-se finalmente o esquema

$$\begin{aligned} (q_m)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} [(q_m)_{xx}]_i^j &= \frac{1}{2} [(q_m)_{i+1/2}^{j-1/2} + (q_m)_{i-1/2}^{j-1/2}] + \frac{\Delta x}{8} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{48} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(f_m)_{i-1/2}^{j-1/2} \\ &\quad - (f_m)_{i+1/2}^{j-1/2}] + \frac{\Delta t^2}{8\Delta x} \left\{ [(f_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(f_m)_t]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} \\ &\quad + \frac{\Delta t^3}{48\Delta x} \left\{ [(f_m)_{tt}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(f_m)_{tt}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} + \frac{\Delta t}{4} [(S_m)_{i-1/2}^{j-1/2} \\ &\quad + (S_m)_{i+1/2}^{j-1/2}] + \frac{\Delta t^2}{16} \left\{ [(S_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} + [(S_m)_t]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} \\ &\quad + \frac{\Delta x \Delta t}{16} \left\{ [(S_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(S_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

O esquema (B.27) pode ter sua estrutura compactada ao se definir a função

$$\begin{aligned} [Q_m(\Delta x)]_i^j &= (q_m)_i^j + \frac{\Delta x}{4} \left\{ [(q_m)_{xx}]_i^j + \frac{\Delta x}{6} [(q_m)_{xxx}]_i^j \right\} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (f_m)_i^j + \frac{\Delta t}{4} [(f_m)_t]_i^j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t^2}{24} [(f_m)_{tt}]_i^j \right\} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ (S_m)_i^j + \frac{\Delta x}{4} [(S_m)_{xx}]_i^j + \frac{\Delta t}{4} [(S_m)_t]_i^j \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

tornando-se, portanto, igual a

$$(q_m)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} [(q_m)_{xx}]_i^j = \frac{1}{2} \left\{ [Q_m(\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} + [Q_m(-\Delta x)]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.29})$$

Observa-se que a equação anterior depende de duas variáveis de marcha: q_m e $(q_m)_{xx}$. Dessa forma, necessita-se avaliar previamente $[(q_m)_{xx}]_i^j$ (descrita na seção B.3), para sua utilização. Na seção B.2 é apresentada a avaliação das derivadas espaciais de primeira ordem.

B.2 AVALIAÇÃO DE $[(q_m)_x]_i^j$

Seja l o número de leis de conservação unidimensionais a serem resolvidas. No método CE/SE tradicional existem $2l$ variáveis de marcha independentes para cada ponto (i, j) da malha (CHANG; WANG; CHOW, 1999, p. 96). O esquema proposto neste trabalho supõe seis variáveis de marcha, ou seja, duas a mais que o esperado. Para contornar esta situação, constrói-se uma equação auxiliar derivando-se (B.1) uma vez em relação a x :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_m}{\partial x} - S_m \right) = 0, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.30})$$

Assim, integrando a equação anterior sobre os elementos de conservação $CE_{\pm}(i, j)$ e aplicando teorema da divergência, obtém-se

$$\int_{CE_{\pm}(i,j)} \text{div } \hat{\mathbf{H}}^* dV = \oint_{S(CE_{\pm}(i,j))} \hat{\mathbf{H}}^* \cdot ds = 0, \quad (\text{B.31})$$

em que $\hat{\mathbf{H}}^*(x, t; i, j) = ((f_m)_x^* - S_m, (q_m)_t^*)$. Assim, após todas os cálculos e simplificações, a equação (B.31) se torna, para $m = 1, 2$,

$$\begin{aligned} [(q_m)_x]_i^j &= \frac{1}{2} \left\{ [(q_m)_x]_{i+1/2}^{j-1/2} + [(q_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} \right\} + \frac{\Delta x}{8} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ [(f_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(f_m)_x]_{i+1/2}^{j-1/2} + (S_m)_{i-1/2}^{j-1/2} - (S_m)_{i+1/2}^{j-1/2} \right\} \\ &+ \frac{\Delta t^2}{8\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xt}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(f_m)_{xt}]_{i+1/2}^{j-1/2} + [(S_m)_t]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(S_m)_t]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

ou ainda, definido a função,

$$\begin{aligned} [Q_m^x(\Delta x)]_i^j &= [(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x}{4} [(q_m)_{xx}]_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ [(f_m)_x]_i^j - (S_m)_i^j \right\} \\ &+ \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xt}]_i^j - [(S_m)_t]_i^j \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

pode-se reescrever (B.27) como

$$[(q_m)_x]_i^j = \frac{1}{2} \left\{ [Q_m^x(\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} + [Q_m^x(-\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.34})$$

B.3 AVALIAÇÃO DE $[(q_m)_{xx}]_i^j$

A obtenção de $[(q_m)_{xx}]_i^j$ pode ser feita de modo análogo. Derivando a equação original (B.1) duas vezes em relação a x , obtendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f_m}{\partial x^2} - \frac{\partial S_m}{\partial x} \right) = 0, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.35})$$

Basta aplicar o mesmo raciocínio das seções anteriores sobre a equação (B.35) para que se obtenha o esquema

$$\begin{aligned} [(q_m)_{xx}]_i^j &= \frac{1}{2} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} \right\} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(f_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right. \\ &\left. + [(S_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(S_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

B.3.1 Propriedades

B.3.2 Consistência e erro de truncamento

Considere por simplicidade o caso homogêneo, isto é, o caso em que $S_m = 0$, $m = 1, 2$. Suponha-se inicialmente que as soluções q_m , $m = 1, 2$ das equações em (B.1) sejam funções suaves de modo que $q_m \in C^\infty(V)$, $m = 1, 2$ e ainda que $f_m(q_1, q_2) \in C^\infty(V)$. Neste caso, as funções q_m , $m = 1, 2$ podem ser expandidas em série de Taylor na vizinhança de $(x_i, t_{j-1/2}) \in V \subset \mathbb{R}^2$. O mesmo é possível para suas derivadas, isto é, para as funções

$$\frac{\partial q_m}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_m}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 q_m}{\partial x \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 q_m}{\partial t^2}, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.37})$$

Substituindo devidamente estas expressões em série de Taylor nas equações (B.1) e (B.27), ao mesmo tempo em que se subtrai as mesmas, conforme definição 3.1.2, tem-se

$$\mathcal{T}_\Psi^{q_m}(x_i, t_{j-1/2}) = \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^4), \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.38})$$

A equação (B.38) representa o erro de truncamento decorrente ao aproximar-se a equação (B.1) por (B.27). De modo análogo, obtém-se os erros de truncamento relativos as derivadas

$$\mathcal{T}_\Psi^{(q_m)_x}(x_i, t_{j-1/2}) = \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2), \quad m = 1, 2, \quad (\text{B.39})$$

$$\mathcal{T}_\Psi^{(q_m)_{xx}}(x_i, t_{j-1/2}) = \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2), \quad m = 1, 2, \quad (\text{B.40})$$

obtidos com as aproximações (B.32) e (B.36), respectivamente. Pelas equações anteriores, tem-se que os erros de truncamento $\mathcal{T}_\Psi^{q_m, (q_m)_x, (q_m)_{xx}}(x_i, t_{j-1/2}) \rightarrow 0$ quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$. E, conforme definição 3.1.3, o esquema é consistente.

B.3.3 Estabilidade

As ideias sobre estabilidade serão desenvolvidas sobre a forma vetorial não conservativa homogênea do sistema (B.1):

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{A}\mathbf{Q}_x = \mathbf{0}, \quad (\text{B.41})$$

em que \mathbf{Q} e \mathbf{A} são, respectivamente,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

Para prosseguir, suponha-se que a equação (B.41) seja linear. Nestes termos, tem-se que

$$\mathbf{Q}_{tt} = \mathbf{A}^2 \mathbf{Q}_{xx} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_{xt} = -\mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx}. \quad (\text{B.43})$$

Observa-se ainda que

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{A}\mathbf{Q}_x, \quad \mathbf{F}_t = -\mathbf{A}^2 \mathbf{Q}_x, \quad \mathbf{F}_{tt} = \mathbf{A}^3 \mathbf{Q}_{xx} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{xt} = -\mathbf{A}^2 \mathbf{Q}_{xx}. \quad (\text{B.44})$$

Definindo-se a matriz

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh/2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}, \quad (\text{B.45})$$

será possível escrever o vetor \mathbf{F} como

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh/2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hu \\ u^2h + gh/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.46})$$

A equação (B.27) pode, então, ser reescrita na forma vetorial

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^j + \frac{\Delta x^2}{24}(\mathbf{Q}_{xx})_i^j &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{\mathbf{A}} \right) \mathbf{Q}_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{\mathbf{A}} \right) \mathbf{Q}_{i+1/2}^{j-1/2} + \\ &\frac{1}{8} \left(\Delta x \mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \mathbf{A}^2 \right) (\mathbf{Q}_x)_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{1}{8} \left(-\Delta x \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \mathbf{A}^2 \right) (\mathbf{Q}_x)_{i+1/2}^{j-1/2} \\ &+ \frac{1}{48} \left(\Delta x^2 \mathbf{I} + \frac{\Delta t^3}{\Delta x} \mathbf{A}^3 \right) (\mathbf{Q}_{xx})_{i-1/2}^{j-1/2} \\ &+ \frac{1}{48} \left(\Delta x^2 \mathbf{I} - \frac{\Delta t^3}{\Delta x} \mathbf{A}^3 \right) (\mathbf{Q}_{xx})_{i+1/2}^{j-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

O mesmo para as equações (B.32) e (B.36), reescritas respectivamente como

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_x)_i^j &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \right) (\mathbf{Q}_x)_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \right) (\mathbf{Q}_x)_{i+1/2}^{j-1/2} + \frac{1}{8} \left(\Delta x \mathbf{I} \right. \\ &\left. - \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \mathbf{A}^2 \right) (\mathbf{Q}_{xx})_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{1}{8} \left(-\Delta x \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \mathbf{A}^2 \right) (\mathbf{Q}_{xx})_{i+1/2}^{j-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

$$(\mathbf{Q}_{xx})_i^j = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \right) (\mathbf{Q}_{xx})_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \right) (\mathbf{Q}_{xx})_{i+1/2}^{j-1/2}. \quad (\text{B.49})$$

Diante dessas últimas igualdades, equações (B.47), (B.48) e (B.49), define-se as matrizes em bloco

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{Q}_{xx} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{\Delta x^2}{48} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{\Delta x^2}{24} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{B.50})$$

e

$$\mathbf{M}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{\mathbf{A}} & \frac{1}{4} \left(\Delta x \mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \mathbf{A}^2 \right) & \frac{\Delta t^3}{24 \Delta x} \mathbf{A}^3 \\ \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} & \frac{1}{4} \left(\Delta x \mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \mathbf{A}^2 \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.51})$$

Com isso, o esquema CE/SE pode ser matricialmente escrito como

$$\mathbf{R}\mathbf{W}_k^j = \mathbf{M}^{(1)} \left(\mathbf{W}_{k-1/2}^{j-1/2} + \mathbf{W}_{k+1/2}^{j-1/2} \right) + \mathbf{M}^{(2)} \left(\mathbf{W}_{k-1/2}^{j-1/2} - \mathbf{W}_{k+1/2}^{j-1/2} \right). \quad (\text{B.52})$$

A transformada de Fourier da solução $\hat{\mathbf{W}}^m(\xi)$ satisfaz a relação de recursão

$$\hat{\mathbf{W}}^j(\xi) = \Theta \hat{\mathbf{W}}^{j-1/2}(\xi), \quad (\text{B.53})$$

em que Θ é a matriz de amplificação do método e é dada por

$$\Theta = 2\mathbf{R}^{-1} \left[\cos\left(\frac{\Delta x \xi}{2}\right) \mathbf{M}^{(1)} - i \text{sen}\left(\frac{\Delta x \xi}{2}\right) \mathbf{M}^{(2)} \right]. \quad (\text{B.54})$$

Observa-se que Θ é uma matriz triangular superior em bloco e o seu conjunto de autovalores é

$$\lambda(\Theta) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \cos(\theta) - i \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(\theta) \gamma \right\}, \quad (\text{B.55})$$

em que $\theta = \Delta x \xi / 2$ e γ corresponde aos autovalores das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e \mathbf{A} , isto é,

$$\gamma = \gamma_{\bar{\mathbf{A}}} = u \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{gh} \quad \text{ou} \quad \gamma = \gamma_{\mathbf{A}} = u \pm \sqrt{gh}. \quad (\text{B.56})$$

A estabilidade é satisfeita quando $|\lambda(\Theta)| \leq 1$, assim

$$\begin{aligned} |\lambda(\Theta)| &= \sqrt{\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \gamma\right)^2} \leq \sqrt{\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \max \gamma\right)^2}, \\ &\leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \max \gamma\right)^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\gamma| \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Observando que

$$\max |\gamma| = \max \left\{ \left| u \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{gh} \right|; \left| u \pm \sqrt{gh} \right| \right\} \leq \max \left\{ |u| + \sqrt{gh} \right\}. \quad (\text{B.58})$$

Segue-se que a condição para estabilidade do tipo *CFL*, conforme Zhang, Zeng e Chen (2012), é

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max \left\{ |u| + \sqrt{gh} \right\} \leq 1. \quad (\text{B.59})$$

Para melhorar a precisão da solução em problemas com descontinuidades, os cálculos das derivadas podem ser realizados por equações de ponderação. Para detalhes, ver seção 4.2.6.

APÊNDICE C – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS DESENVOLVIDOS

C.1 CÓDIGOS REFERENTES AO CAPÍTULO 3

C.1.1 Problemas lineares unidimensionais

```

PROGRAM PRINCIPAL
!Problema de Valor de Contorno/Inicial (Equação da Onda)
IMPLICIT NONE
INTEGER I, J, K, N, NT, NG,M
REAL*8 DX, DT, C, L, W, PI,TT, XX, LAM, DELTA, NU,ALP
REAL*8 A, A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, SOMA
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: U, UA, E, GAUSS
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:):: X, T
L = 2.0DO                !COMPRIMENTO DO DOMÍNIO UNIDIMENSIONAL
N = 3                    !NÚMERO DE PONTOS DA MALHA
C = 4.0DO                !VELOCIDADE DA ONDA
NT = (200*C*(N-1))/L    !NÚMERO DE AVANÇOS NO TEMPO
NG = 5                   !NÚMERO DE PONTOS DE GAUSS
DX = L/(N-1)            !INCREMENTO NA DIREÇÃO X
DT = DX/C                !INCREMENTO NA DIREÇÃO T
PI = DACOS(-1.0DO)
A = 1.0DO; DELTA = 0.5DO; NU = 2.5DO    !DADOS DO PROBLEMA COM DESCONTINUIDADE
ALLOCATE(U(N,NT+1), UA(N,2000+1), E(N,NT+1))
ALLOCATE(T(NT+1), X(N), GAUSS(NG,2))
!CALL BARRA_CC_VARIABEL_I
!CALL CORDA_PERCUTIDA
CALL GAUSS_LEGENDRE(NG, GAUSS(:,1),GAUSS(:,2))
CALL NOVO
CONTAINS
SUBROUTINE BARRA_CC_VARIABEL_I
!LEITURA DAS CONDIÇÕES INICIAIS
DO I = 1, N
  X(I) = (I-1)*DX
  U(I,1) = 0.0DO !POSIÇÃO EM T = 0
END DO
!LEITURA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO
U(1,:) = 0.0DO !CONTORNO ESQUERDO X = 0$
W = PI/(3*L)
DO I = 1, NT+1
  U(N,I) = DSIN(W*(I-1.0DO)*DT) !CONTORNO DIREITO X = L$
  T(I) = (I-1.0DO)*DT
END DO
!PRIMEIRO AVANÇO DO TEMPO
DO I = 2, N-1
  U(I,2) = (U(I+1,1)+U(I-1,1))/2.0DO
END DO
!DEMAIS AVANÇOS NO TEMPO
DO J = 2, NT
  DO I = 2,N-1
    U(I,J+1) = U(I-1,J) + U(I+1,J) - U(I,J-1)
  END DO
END DO

```

```

!Solução analítica com condições  $u(0,t)=0$ ,  $u(L,t)=\text{sen}(wt)$ ,  $u_0(x)=0$ ,  $v_0(x) = 0$ 
ua = 0.0d0
dt = (nt*dt)/2000
do j = 1,2000+1
  !J = (195/DT) + 1
  do k = 1, N
    a3 = 0.0d0
    if (w /= (pi/l)) then
      do i = 1, 500
        xx = (c*i*pi)/l
        a0 = (xx**2 - w**2)*i
        a1 = xx*dsin(xx*(j-1)*dt) - w*dsin(w*(j-1)*dt)
        a2 = dcos(i*pi)*dsin((i*pi*x(k))/l)
        a3 = a3 + (2*w*a1*a2)/a0
      end do
      ua(k,j) = a3/pi+(x(k)/l)*dsin(w*(j-1)*dt)
    else
      do i = 2, 500
        xx = (c*i*pi)/l
        a0 = (xx**2 - w**2)*(i*pi)
        a1 = xx*dsin(xx*(j-1)*dt) - w*dsin(w*(j-1)*dt)
        a2 = ((-1)**i)*dsin((i*pi*x(k))/(l))
        a3 = a3 + (2*w*a1*a2)/a0
      end do
      ua(k,j) = (x(k)/l)*dsin(w*(j-1)*dt)-(dsin(w*(j-1)*dt)+w*(j-1)*dt*dcos(w*(j-1)*dt))*
        dsin(w*x(k))/pi+a3
    end if
  end do
end do
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
DO I = 1,NT+1
  WRITE(1,1) T(I), U(2,I), U(3,I)
  1 FORMAT(3(F20.11))
END DO
CLOSE(1)
OPEN(2,FILE="SAIDA1.TXT")
DO I = 1,2000+1
  WRITE(2,2) (I-1)*DT, UA(2,I), UA(3,I)
  2 FORMAT(3(F20.11))
END DO
CLOSE(2)
END SUBROUTINE BARRA_CC_VARIAVEL_I
SUBROUTINE NOVO
  LEITURA DAS CONDIÇÕES INICIAIS
  U(:,1) = 0.0DO
  DO I = 1, N
    X(I) = (I-1)*DX
  END DO
  DO J = 1, NT+1
    T(J) = (J-1)*DT
  END DO
  W = PI/(3.0DO*L)
  LAM = (1*PI)/L !AO ALTERAR ESTE PARÂMETRO ALTERA-SE TAMBÉM A CC U_X(B,T)
  !PRIMEIRO AVANÇO DO TEMPO
  !CÁLCULO NO CONTORNO ESQUERDO
  A2 = (C*LAM)**2.0DO-W**2.0DO
  SOMA = 0.0DO

```

```

DO I = 1, NG
  A0 = DT*(1.0DO+GAUSS(I,2))/2.0DO
  A4 = 0.0DO
  DO J = 1, NG
    A1 = C*(DT-A0)*(GAUSS(J,2)+1.0DO)/2.0DO + X(1)
    A3 = DCOS(LAM*A1)*A2+ W*W*(A1*A1-A0) + 2.0DO*C*C
    A3 = DSIN(W*A0)*A3 + 2.0DO*W*DCOS(W*A0)
    A4 = A4 + GAUSS(J,1)*A3
  END DO
  SOMA = SOMA + GAUSS(I,1)*A4*(DT-A0)
END DO
U(1,2) = W*(DSIN(LAM*DX)/LAM - (DX**3.0DO)/3.0DO)/C + DT*SOMA/4.0DO
!CÁLCULO NO INTERIOR DA MALHA
DO K = 2, N-1
  SOMA = 0.0DO
  DO I = 1, NG
    A0 = DT*(1.0DO+GAUSS(I,2))/2.0DO
    A4 = 0.0DO
    DO J = 1, NG
      A1 = C*(DT-A0)*GAUSS(J,2) + X(K)
      A3 = DCOS(LAM*A1)*A2+ W*W*(A1*A1-A0) + 2.0DO*C*C
      A3 = DSIN(W*A0)*A3 + 2.0DO*W*DCOS(W*A0)
      A4 = A4 + GAUSS(J,1)*A3
    END DO
    SOMA = SOMA + GAUSS(I,1)*A4*(DT-A0)
  END DO
  U(K,2) = W*((DSIN(LAM*X(K+1))-DSIN(LAM*X(K-1)))/LAM+(X(K-1)**3.0DO -
  X(K+1)**3.0DO)/3.0DO)/(2.0DO*C)+ DT*SOMA/4.0DO
END DO
!CÁLCULO NO CONTORNO DIREITO
SOMA = 0.0DO
DO I = 1, NG
  A0 = DT*(1.0DO+GAUSS(I,2))/2.0DO
  A4 = 0.0DO
  DO J = 1, NG
    A1 = C*(DT-A0)*(GAUSS(J,2)-1.0DO)/2.0DO + X(N)
    A3 = DCOS(LAM*A1)*A2+ W*W*(A1*A1-A0) + 2.0DO*C*C
    A3 = DSIN(W*A0)*A3 + 2.0DO*W*DCOS(W*A0)
    A4 = A4 + GAUSS(J,1)*A3
  END DO
  SOMA = SOMA + GAUSS(I,1)*A4*(DT-A0)
END DO
U(N,2) = W*((DSIN(LAM*X(N))-DSIN(LAM*X(N-1)))/LAM+(X(N-1)**3.0DO-X(N)**3.0DO)/3.0DO)/C +
4.0DO*C*(DCOS(W*DT)-1.0DO)/W+DT*SOMA/4.0DO
!DEMAIS AVANÇOS NO TEMPO
DO J = 2, NT
  !CÁLCULO NO CONTORNO ESQUERDO
  SOMA = 0.0DO
  DO I = 1, NG !PRIMEIRA INTEGRAL
    A0 = DT*(GAUSS(I,2)+1.0DO)/2.0DO + T(J)
    A5 = DT*(GAUSS(I,2)-1.0DO)/2.0DO + T(J)
    A4 = 0.0DO;A6 = 0.0DO
  DO K = 1, NG
    A1 = C*(T(J+1)-A0)*(GAUSS(K,2)+1.0DO)/2.0DO + X(1)
    A3 = DSIN(W*A0)*(DCOS(LAM*A1)*A2+W*W*(A1*A1-A0)+2.0DO*C*C)+2.0DO*W*DCOS(W*A0)
    A4 = A4 + GAUSS(K,1)*A3
    A1 = C*(A5-T(J-1))*(GAUSS(K,2)+1.0DO)/2.0DO + X(1)
  END DO
  SOMA = SOMA + GAUSS(I,1)*A4*(DT-A0)
END DO

```

```

      A3 = DSIN(W*A5)*(DCOS(LAM*A1)*A2+ W*W*(A1*A1-A5)+2.ODO*C*C)+2.ODO*W*DCOS(W*A5)
      A6 = A6 + GAUSS(K,1)*A3
    END DO
    SOMA = SOMA + GAUSS(I,1)*(A4*(T(J+1)-A0)+A6*(A5-T(J-1)))
  END DO
  U(1,J+1) = 2.ODO*U(2,J)-U(1,J-1)+DT*SOMA/4.ODO
  !CÁLCULO NO INTERIOR DA MALHA
  DO I = 2, N-1
    SOMA = 0.ODO
    DO K = 1, NG
      A0 = DT*(GAUSS(K,2)+1.ODO)/2.ODO + T(J)
      A5 = DT*(GAUSS(K,2)-1.ODO)/2.ODO + T(J)
      A4 = 0.ODO; A6 = 0.ODO
      DO M = 1, NG
        A1 = C*(T(J+1)-A0)*GAUSS(M,2) + X(I)
        A3 = DSIN(W*A0)*(DCOS(LAM*A1)*A2+W*W*(A1*A1-A0)+2.ODO*C*C)+2.ODO*W*DCOS(W*A0)
        A4 = A4 + GAUSS(M,1)*A3
        A1 = C*(A5-T(J-1))*GAUSS(M,2) + X(I)
        A3 = DSIN(W*A5)*(DCOS(LAM*A1)*A2+ W*W*(A1*A1-A5)+2.ODO*C*C)+2.ODO*W*DCOS(W*A5)
        A6 = A6 + GAUSS(M,1)*A3
      END DO
      SOMA = SOMA + GAUSS(K,1)*(A4*(T(J+1)-A0)+A6*(A5-T(J-1)))
    END DO
    U(I,J+1) = U(I-1,J)+U(I+1,J)-U(I,J-1)+DT*SOMA/4.ODO
  END DO
  !CÁLCULO NO CONTORNO DIREITO
  SOMA = 0.ODO
  DO I = 1, NG
    A0 = DT*(GAUSS(I,2)+1.ODO)/2.ODO + T(J)
    A5 = DT*(GAUSS(I,2)-1.ODO)/2.ODO + T(J)
    A4 = 0.ODO; A6 = 0.ODO
    DO K = 1, NG
      A1 = C*(T(J+1)-A0)*(GAUSS(K,2)-1.ODO)/2.ODO + X(N)
      A3 = DSIN(W*A0)*(DCOS(LAM*A1)*A2+W*W*(A1*A1-A0)+2.ODO*C*C)+2.ODO*W*DCOS(W*A0)
      A4 = A4 + GAUSS(K,1)*A3
      A1 = C*(A5-T(J-1))*(GAUSS(K,2)-1.ODO)/2.ODO + X(N)
      A3 = DSIN(W*A5)*(DCOS(LAM*A1)*A2+W*W*(A1*A1-A5)+2.ODO*C*C)+2.ODO*W*DCOS(W*A5)
      A6 = A6 + GAUSS(K,1)*A3
    END DO
    SOMA = SOMA + GAUSS(I,1)*(A4*(T(J+1)-A0)+A6*(A5-T(J-1)))
  END DO
  U(N,J+1)=2.ODO*U(N-1,J)-U(N,J-1)+4.ODO*C*(DCOS(W*T(J+1))-DCOS(W*T(J-1)))/W+DT*SOMA/4.ODO
END DO
!CÁLCULO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA
!DT = (NT*DT)/2000
DO I = 1, N
  DO J = 1, NT+1!2000+1
    UA(I,J) = DSIN(W*(J-1)*DT)*(DCOS(LAM*X(I)) - X(I)*X(I)+(J-1)*DT)
    !E(I,J) = DABS(UA(I,J) - U(I,J))
  END DO
END DO
AO = 0.ODO; A1 = AO
DO I = 1,N
  AO = AO + (U(I,NT+1)-UA(I,NT+1))*2.ODO
  A1 = A1 + DABS(U(I,NT+1)-UA(I,NT+1))
END DO
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")

```

```

DO I = 1,NT+1
  WRITE(1,1) X(I), U(1,I), U(2,I), U(3,I) !DX*A1, DSQRT(DX*AO)!T(I),U(1,I),U(2,I),U(3,I)
  1 FORMAT(6(1PE20.11))
END DO
CLOSE(1)
OPEN(2,FILE="SAIDA1.TXT")
DO I = 1,2000+1
  WRITE(2,2) (I-1)*DT, UA(1,I), UA(2,I), UA(3,I)
  2 FORMAT(6(F20.11))
END DO
CLOSE(2)
END SUBROUTINE NOVO
SUBROUTINE CORDA_PERCUTIDA
  !LEITURA DAS CONDIÇÕES INICIAIS
  U = 0.0D0; E = 0.0D0
  DO I = 1, N
    X(I) = (I-1)*DX
  END DO
  DO J = 1, NT+1
    T(J) = (J-1)*DT
  END DO
  !PRIMEIRO AVANÇO DO TEMPO
  DO I = 2, N-1
    IF ((X(I+1)<-DELTA+A+10**(-4.0D0)) .OR. (X(I-1)>DELTA+A-10**(-4.0D0))) THEN
      U(I,2) = 0.0D0
    ELSE IF ((X(I-1)>-DELTA+A-10**(-4.0D0)) .AND. (X(I+1)<DELTA+A+10**(-4.0D0))) THEN
      U(I,2) = (DX*NU)/C
    ELSE IF ((X(I-1)<-DELTA+A+10**(-4.0D0)) .AND. (X(I+1)<DELTA+A+10**(-4.0D0))) THEN
      U(I,2) = (NU*(X(I+1)+DELTA-A))/(2*C)
    ELSE IF ((X(I-1)>-DELTA+A-10**(-4.0D0)) .AND. (X(I+1)>DELTA+A-10**(-4.0D0))) THEN
      U(I,2) = (NU*(DELTA+A-X(I-1)))/(2*C)
    ELSE IF ((X(I-1)<-DELTA+A+10**(-4.0D0)) .AND. (X(I+1)>DELTA+A-10**(-4.0D0))) THEN
      U(I,2) = (DELTA*NU)/C
    ELSE
      WRITE(*,*) I, "ERROR"
    END IF
  END DO
  !DEMAIS AVANÇOS NO TEMPO
  DO J = 2, NT
    DO I = 2, N-1
      U(I,J+1) = U(I-1,J) + U(I+1,J)-U(I,J-1)
    END DO
  END DO
  !SOLUÇÃO ANALÍTICA
  dt = (nt*dt)/2000.0d0
  DO I = 1, N
    DO J = 1, 2000+1
      SOMA = 0.0D0
      DO K = 501,1000
        SOMA = SOMA + DSIN(K*PI*A/L)*DSIN(K*PI*DELTA/L)*DSIN(K*PI*X(I)/L)
          *DSIN(K*PI*C*(J-1)*DT/L)/(K*K)
      END DO
      UA(I,J) = (4*NU*L*SOMA)/(PI*PI*C)
    END DO
  END DO
  OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
  AO = 0.0d0; A1 = AO; A2 = AO

```

```

DO i = 1,N
  AO = AO + (UA(I,J))*2.0D0
  A1 = A1 + DABS(UA(I,J))
  WRITE(1,1) A1, DSQRT(AO) !T(J), U(2,J), U(3,J), U(4,J)
  1 FORMAT(7(1PE20.11))
END DO
CLOSE(1)
OPEN(2,FILE="SAIDA1.TXT")
DO J = 1,2000+1
  WRITE(2,2) (J-1)*DT, UA(2,J), UA(3,J), UA(4,J)
  2 FORMAT(7(1PE20.11))
END DO
CLOSE(2)
END SUBROUTINE CORDA_PERCUTIDA
SUBROUTINE GAUSS_LEGENDRE(n, c, t)
!*****
!*      Código implementado a partir do algoritmo que se encontra no livro ALGORIT- *
!*      MOS NUMÉRICOS, 2ª edição, Campos Filho, F. F., LTC, pg. 241. *
!*      OBJETIVO: Calcular pesos e abscissas para a fórmula de GAUSS-LEGENDRE *
!*      PARÂMETROS DE ENTRADA: Número "n" de pontos de Gauss *
!*      PARÂMETROS DE SAÍDA: Vetor de Pesos "c" e Vetor de Abscissas "t" *
!*****
REAL*8, DIMENSION(:), INTENT(OUT) :: t, c
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: A, T1
REAL*8 pi, z1, z, tol, p1, p2, c1, c2, p3, pp, dif
INTEGER m, j, i, p, CondErro, k
INTEGER, INTENT(IN) :: n
!A e T1 ESTÃO COM MEMÓRIAS ALOCADAS NO PROGRAMA PRINCIPAL
tol = 10.0d0**(-15)
m = 0.5*(n+1) !Comprimento dos vetores A e T1
ALLOCATE(A(m), T1(m))
IF (n<1) THEN
  CondErro = 1
ELSE
  CondErro = 0
pi = dacos(-1.0d0)
DO i = 1,m
  z = dcos(pi*(i-0.25d0)/(n+0.5d0))
  dif = 2
DO WHILE (dif > tol)
  p1 = 1.0d0
  p2 = 0.0d0
DO j = 1,n
  p3 = p2
  p2 = p1
  !POLINÔMIO DE LEGENDRE NO PONTO Z
  p1 = ((2*j-1.0d0)*z*p2 - (j-1.0d0)*p3)/j
END DO
!DERIVADAS DO POLINÔMIO DE LEGENDRE NO PONTO Z
pp = n*(z*p1 - p2)/(z**2 - 1.0d0)
z1 = z
!MÉTODO DE NEWTON PARA CALCULAR OS ZEROS DO POLINÔMIO
z = z1 - p1/pp
dif = DABS(z - z1)
END DO
T1(m+1-i) = z !ABSCISSA
A(m+1-i) = 2/((1-z**2)*(pp**2)) !PESO

```

```

        !SOMENTE AS RAÍZES NÃO NEGATIVAS SÃO CALCULADAS DEVIDO A SIMETRIA
    END DO
END IF
p = n/2
IF (n == p*2 ) THEN
    c1 = 1.0d0
    c2 = 0.5d0
ELSE
    c1 = 0.0d0
    c2 = 1.0d0
END IF
DO i = 1, n
    IF (i - 0.5*(n+c1) < 0.0d0) THEN
        k = -1
    ELSE IF (i - 0.5*(n+c1) == 0.0d0) THEN
        k = 0
    ELSE
        k = 1
    END IF
    p = i - 0.5*(n+1) + k*c2
    IF(p < 0.0d0) THEN
        k = -1
    ELSE IF (p == 0.0d0) THEN
        k = 0
    ELSE
        k = 1
    END IF
    p = DABS(1.0d0*p)
    t(i) = k*T1(p)
    c(i) = A(p)
END DO
END SUBROUTINE GAUSS_LEGENDRE
END PROGRAM PRINCIPAL

```

C.1.2 Caso não-homogêneo unidimensional: equação de Klein-Gordon

```

PROGRAM PRINCIPAL
!Problema de Valor de Contorno/Inicial (Equação de Klein-Gordon)
IMPLICIT NONE
INTEGER I, J, K, N, NT,0
REAL*8 DX, DT, C, L, W, PI, B
REAL*8 AO, A1, A2, A3, A4,A5
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: U, UXX, UA, E
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:):: X, T
CALL NAO_HOMOGENEO_2 !VELOCIDADE E POSIÇÃO INICIAL PRESCRITAS APENAS
!CALL NAO_HOMOGENEO_1
CONTAINS
SUBROUTINE NAO_HOMOGENEO_1
    !U(X,0) = 1; U_T(X,0) = SIN(WX), U(0,T) = U(L,T) = 0
    !LEITURA DAS CONDIÇÕES INICIAIS
    W = (3*PI)/(2*L)
    DO I = 1, N
        X(I) = (I-1)*DX
        U(I,1) = 0.0D0          !POSIÇÃO EM      T = 0
    END DO
    DO I = 1, NT+1

```

```

    T(I) = (I-1)*DT
END DO
!LEITURA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO
U(1,:) = 0.0DO          !CONTORNO ESQUERDO X = 0$
U(N,:) = 0.0DO          !CONTORNO DIREITO X = L$
!PRIMEIRO AVANÇO DO TEMPO
A0 = 20+3*B*DT*DT
A1 = (2*(15-B*DT*DT))/(3*A0)
A2 = (16*B*DT*DT)/(3*A0)
A3 = 20/A0
DO I = 2, N-1
    A4 = (DCOS(W*X(I-1))-DCOS(W*X(I+1)))/(2*C*W)
    U(I,2) = A1*(U(I+1,1)+U(I-1,1))-A2*U(I,1)+20*A4/A0
END DO
!DEMAIS AVANÇOS NO TEMPO
A4 = 2*A1
A5 = 2*A2
DO K = 2, NT
    DO I = 2,N-1
        U(I,K+1) = A4*(U(I-1,K)+U(I+1,K))-A5*U(I,K)-U(I,K-1)
    END DO
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
UA = 0.0DO
DO J = 1, NT+1
    DO K = 1, N
        A3 = 0.0DO
        DO I = 1, 200
            A0 = (PI*I)/L
            A1 = DSQRT((C*A0)**2 + B)
            A2 = (1-DCOS(I*PI))*DCOS(A1*T(J))/(I*PI)
            A4 = W*DSIN(I*PI)*DCOS(W*L) - A0*DCOS(I*PI)*DSIN(W*L)
            A4 = A4*DSIN(A1*T(J))/(A1*L*(A0**2-W**2))
            A3 = A3 + DSIN(A0*X(K))*(A4)
        END DO
        UA(K,J) = 2*A3
    END DO
END DO
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
    J = (N-1)/2+1      !SELECIONA X = 1
    DO I = 1,NT+1
        WRITE(1,1) T(I), U(J,I), UA(J,I)
        1 FORMAT(3(F20.11))
    END DO
CLOSE(1)
END SUBROUTINE NAO_HOMOGENEO_1
SUBROUTINE NAO_HOMOGENEO_2
    L = 2.0DO
    C = 1.0DO
    B = 1.0DO !M^2
    PI = DACOS(-1.0DO)
    N = 41
    OPEN(1,FILE="SAIDA5.TXT")
        DO O =1,7
            NT = (1*C*(N-1))/L
            DX = L/(N-1)
            DT = DX/C

```

```

ALLOCATE(U(N,NT+1), UA(N,NT+1),T(NT+1), X(N))
!U(X,0) = 1; U_T(X,0) = SIN(WX), U(0,T) = U(L,T) = 0
!LEITURA DAS CONDIÇÕES INICIAIS
W = (3*PI)/(2*L)
DO I = 1, N
  X(I) = (I-1)*DX
  U(I,1) = 0.0DO          !POSIÇÃO EM T = 0
END DO
DO I = 1, NT+1
  T(I) = (I-1)*DT
END DO
WRITE(*,*) N, T(NT+1)
!LEITURA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO
U(1,:) = 0.0DO          !CONTORNO ESQUERDO X = 0$
U(N,:) = 0.0DO          !CONTORNO DIREITO X = L$
!PRIMEIRO AVANÇO DO TEMPO
A3 = DSQRT(B)
A4 = (1+A3*DT)
A5 = (1-A3*DT)
DO I = 2, N-1
  A1 = (A3*DSIN(W*X(I+1))-C*W*DCOS(W*X(I+1)))*DEXP(A3*X(I+1)/C)
  A1 = A1-(A3*DSIN(W*X(I-1))-C*W*DCOS(W*X(I-1)))*DEXP(A3*X(I-1)/C)
  U(I,2) = A5*DEXP(A3*X(I+1)/C)*U(I+1,1)+A4*DEXP(A3*X(I-1)/C)*U(I-1,1)+A1/(B+C*C*W*W)
END DO
!DEMAIS AVANÇOS NO TEMPO
DO J = 2, NT
  DO I = 2,N-1
    U(I,J+1) = A4*U(I-1,J)+A5*U(I+1,J)-U(I,J-1)
  END DO
END DO
DO I = 2,N-1
  U(I,:) = 0.5DO*DEXP(-(A3*X(I))/C)*U(I,:)
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
UA = 0.0DO
!DO J = 1, NT+1
  J = NT+1
  DO K = 1, N
    A3 = 0.0DO
    DO I = 1, 200
      A0 = (PI*I)/L
      A1 = DSQRT((C*A0)**2 + B)
      A2 = (1-DCOS(I*PI))*DCOS(A1*T(J))/(I*PI)
      A4 = W*DSIN(I*PI)*DCOS(W*L) - A0*DCOS(I*PI)*DSIN(W*L)
      A4 = A4*DSIN(A1*T(J))/(A1*L*(A0**2-W**2))
      A3 = A3 + DSIN(A0*X(K))*(A4)
    END DO
    UA(K,J) = 2.0DO*A3
  END DO
!END DO
AO = 0.0DO; A1 = 0.0DO
J = NT+1
DO I = 1, N
  AO = AO+DABS(U(I,J)-UA(I,J))
  A1 = A1+(U(I,J)-UA(I,J))**2.0DO
END DO
WRITE(1,1) N-1, DX, DX*AO, DSQRT(DX*A1)

```

```

1 FORMAT(I4, 1X, 3(1PE18.11))
DEALLOCATE(U,UA,T,X)
N = 2*(N-1)+1
END DO
CLOSE(1)
END SUBROUTINE NAO_HOMOGENEO_2
END PROGRAM PRINCIPAL

```

C.1.3 Problema não-linear unidimensional

```

PROGRAM PRINCIPAL
!Problema de Valor de Contorno/Inicial (Equação Não-Linear)
IMPLICIT NONE
INTEGER I, J, N, NT
REAL*8 DX, DT, L1, L2, AUX, PI, TESTE
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: U, UA, X, T, E
INTEGER, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: POS
L1 = 4.0D0
L2 = 6.0D0
N = 10           !NÚMERO DE NÓS NA MALHA
NT = 1000       !NÚMERO DE AVANÇOS NO TEMPO
DX = (L2-L1)/(N-1) !INCREMENTO ESPACIAL INICIAL
PI = DACOS(-1.0D0)
ALLOCATE(U(N,NT+1),UA(N,NT+1),X(N,NT+1),T(N,NT+1),E(N,NT+1),POS(2,2))
!DISCRETIZAÇÃO INICIAL
T(:,1) = 0.0D0
DO I = 1, N
  X(I,1) = (I-1)*DX+L1
  U(I,1) = PI*DSQRT(5*X(I,1)+8.0D0)
END DO
!PRIMEIRO AVANÇO NO TEMPO
X(1,:) = L1; X(N,:) = L2
DO I = 2,N-1
  X(I,2) = (X(I-1,1)+X(I+1,1))/2.0D0
  AUX = (DSQRT(5*X(I+1,1)+8.0D0)**3-DSQRT(5*X(I-1,1)+8.0D0)**3)/5.0D0
  U(I,2) = ((DSQRT(U(I-1,1))**3+DSQRT(U(I+1,1))**3)/2.0D0+AUX)**(2.0D0/3)
  T(I,2) = DX/DSQRT(U(I,2))
END DO
!CALCULO DO TEMPO NOS CONTORNOS
DT = T(2,2)           !SOLUÇÃO INICIAL PARA O MÉTDO DE NEWTON
DO I = 1,50           !MÉTODO DE NEWTON
  TESTE = DT
  AUX = 2.0D0*(DT**3)+PI*(DT**2)-((DX**2)/DSQRT(5.0D0*L1+8.0D0))
  DT = DT - AUX/(6*DT*DT+2*PI*DT)
  IF (DABS(TESTE - DT) < 10**(-6.0D0)) EXIT
END DO
T(1,2) = DT
DT = T(N-1,2)
DO I = 1,50
  TESTE = DT
  AUX = 2.0D0*(DT**3)+PI*(DT**2)-((DX**2)/DSQRT(5.0D0*L2+8.0D0))
  DT = DT - AUX/(6*DT*DT+2*PI*DT)
  IF (DABS(TESTE - DT) < 10**(-6.0D0)) EXIT
END DO
T(N,2) = DT
!CÁLCULO DE U NOS CONTORNOS PARA O PRIMEIRO PASSO DE TEMPO

```

```

U(1,2) = (2*T(1,2)+PI)*DSQRT(5*L1+8.0D0)
U(N,2) = (2*T(N,2)+PI)*DSQRT(5*L2+8.0D0)
!DEMAIS AVANÇOS NO TEMPO
DO J = 2, NT
  DO I = 2,N-1
    AUX = DSQRT(U(I-1,J))**3+DSQRT(U(I+1,J))**3-DSQRT(U(I,J-1))**3
    U(I,J+1) = DABS(AUX)**(2.0D0/3)
    X(I,J+1) = (X(I-1,J)+X(I+1,J)+DSQRT(U(I,J))*(T(I+1,J)-T(I-1,J)))/2.0D0
    T(I,J+1) = ((X(I+1,J)-X(I-1,J))/DSQRT(U(I,J))+T(I+1,J)+T(I-1,J))/2.0D0
  END DO
!CALCULO DO TEMPO NOS CONTORNOS
DT = T(2,J+1)          !SOLUÇÃO INICIAL PARA O MÉTDO DE NEWTON
DO I = 1,50           !MÉTDO DE NEWTON
  TESTE = DT
  AUX = 2*(DT**3)+(PI-4*T(2,J))*(DT**2)+2*T(2,J)*(T(2,J)
        -PI)*DT+PI*(T(2,J)**2)-(((X(2,J)-L1)**2)/DSQRT(5.0D0*L1+8.0D0))
  DT = DT - AUX/(6*DT*DT+2*(PI-4*T(2,J))*DT+2*T(2,J)*(T(2,J)-PI))
  IF (DABS(TESTE - DT) < 10**(-6.0D0)) EXIT
END DO
T(1,J+1) = DT
DT = T(N-1,J+1)
DO I = 1,50
  TESTE = DT
  AUX = 2*(DT**3)+(PI-4*T(N-1,J))*(DT**2)+2*T(N-1,J)*(T(N-1,J)
        -PI)*DT+PI*(T(N-1,J)**2)-(((L2-X(N-1,J))**2)/DSQRT(5.0D0*L2+8.0D0))
  DT = DT - AUX/(6*DT*DT+2*(PI-4*T(N-1,J))*DT+2*T(N-1,J)*(T(N-1,J)-PI))
  IF (DABS(TESTE - DT) < 10**(-6.0D0)) EXIT
END DO
T(N,J+1) = DT
!CÁLCULO DE U NOS CONTORNOS PARA O PRIMEIRO PASSO DE TEMPO
U(1,J+1) = (2*T(1,J+1)+PI)*DSQRT(5*L1+8.0D0)
U(N,J+1) = (2*T(N,J+1)+PI)*DSQRT(5*L2+8.0D0)
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
DO I = 1, N
  DO J = 1, NT+1
    UA(I,J) = (2.0D0*T(I,J)+PI)*DSQRT(5*X(I,J)+8.0D0)
    E(I,J) = DABS(UA(I,J)-U(I,J))
  END DO
END DO
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
DO I = 1,N
  DO J = 1, NT+1
    WRITE(1,1) X(I,J), T(I,J), U(I,J), UA(I,J)
    1 FORMAT(4(F20.11))
  END DO
END DO
CLOSE(1)
END PROGRAM PRINCIPAL

```

C.1.4 Problema linear bidimensional

```

PROGRAM PRINCIPAL
USE PORTLIB
IMPLICIT NONE
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:, :, :) :: UK, U, UA

```

```

REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: X, Y, T
INTEGER NX, NY, NT, M, I, J, K, NF, N
REAL*8 C, B, DX, DY, DT, LX, LY, PI, AUX, AUX1
REAL*8 A0,A1,A2, SOMA, SOMA1
PI = DACOS(-1.0DO); NF = 20
NX = 401; NY = 101; LX = 2*PI; LY = 2*PI
C = 1.0DO; DY = LY/(NY-1); NT = 2700
DX = LX/(NX-1); DT = DX/C
ALLOCATE(X(NX),Y(NY),U(NX,NY,NT+1), UA(NX,NY,NT+1))
ALLOCATE(T(NT+1), UK(NX,NT+1,NF+1))
CALL INT_SIMPLES
CONTAINS
SUBROUTINE INT_SIMPLES
!LEITURA DAS CONDIÇÕES INICIAIS
U = 0.0DO
X = 0.0DO
DO I = 1, NX
  X(I) = (I-1)*DX
  DO J = 1, NY
    Y(J) = (J-1)*DY
    U(I,J,1) = X(I)*(X(I)-LX)*DSIN((Y(J))/2)
  END DO
END DO
DO I = 1, NT+1
  T(I) = (I-1)*DT
END DO
!CALCULO DOS COEFICIENTES DE FOURIER
!Condições iniciais dos coeficientes de Fourier
UK = 0.0DO
DO K = 0, NF
  DO I = 1, NX
    UK(I,1, K+1) = 2*DEXP(K*X(I))*(X(I)*(X(I)-LX))/(PI*(1-4*K*K))
  END DO
END DO
DO N = 0, NF
  !PRIMEIRO AVANÇO NO TEMPO
  A0 = (1-N*C*DT)/2
  A1 = (1+N*C*DT)/2
  DO I = 2, NX-1
    UK(I,2,N+1) = A0*UK(I+1,1,N+1)+ A1*UK(I-1,1,N+1)
  END DO
  !DEMAIS AVANÇOS NO TEMPO
  A0 = 2*A0
  A1 = 2*A1
  DO K = 2, NT
    DO I = 2,NX-1
      UK(I,K+1,N+1) = A1*UK(I-1,K,N+1)+ A0*UK(I+1,K,N+1) - UK(I,K-1,N+1)
    END DO
  END DO
END DO
!CALCULO DA SOLUÇÃO
DO I = 2, NX-1
  DO J = 1, NY
    DO M = 2, NT+1
      AUX1 = 0.0DO; AUX = 0.0DO
      DO K = 1, NF
        AUX1 = AUX1 + UK(I,M,K+1)*DEXP(-K*X(I))*DCOS(K*Y(J))
      END DO
    END DO
  END DO
END DO

```

```

        END DO
        U(I,J,M) = UK(I,M,1) + 2*AUX1
    END DO
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
UA = 0.0DO
!DO K = 451, NT+1,450
do k = 1,nt+1
    i = (nx-1)/2+1; j = (ny-1)/2+1
    !DO I = 2, NX-1
        !DO J = 1, NY
            SOMA1 = 0.0DO
            DO M = 1,200
                AUX = M/2.0DO
                SOMA = DCOS(C*AUX*T(K))
                DO NF = 2, 200
                    AUX1 = NF/2.0DO
                    AO = DSQRT(AUX**2+AUX1**2)
                    SOMA = SOMA + DCOS(AUX1*Y(J))*(1+DCOS(PI*NF))*DCOS(C*AO*T(K))/(1-4*(AUX1**2))
                END DO
                SOMA1 = SOMA1 + DSIN(AUX*X(I))*(DCOS(M*PI)-1)*SOMA/(M**3)
                !AUX1 = PI*C*(DSQRT(1/(LX*LX) + 9/(LY*LY)))*T(K)
                !UA(I,J,K) = 0.2*DSIN(PI*X(I)/LX)*DSIN(3*PI*Y(J)/LY)*DCOS(AUX1)
            END DO
            UA(I,J,K) = 32*SOMA1/(PI**2)
        !END DO
    !END DO
END DO
OPEN(1, FILE="SAIDA.TXT")
DO I = 1, NX
    DO J = 1, NY
        WRITE(1,1) (T(K), X(I), Y(J), U(I,J,K), UA(I,J,K), K=451,NT+1,450)
        1 FORMAT(100(F20.11))
    END DO
END DO
CLOSE(1)
END SUBROUTINE INT_SIMPLES
END PROGRAM PRINCIPAL

```

C.2 CÓDIGOS REFERENTES AO CAPÍTULO 4

C.2.1 Precisão 1D

```

PROGRAM PRINCIPAL
IMPLICIT NONE
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:, :) :: U,UX,UXX,P,PX,PXX
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: X,UA,PA
REAL*8 DT,L,DX,PI,C,TE,TT,CFL
INTEGER I,J,K,M,N
REAL*8 AO,A1,EP,EU

L = 2.0DO
PI = DACOS(-1.0DO)
TE = 1.2DO

```

```

CFL = 0.8d0
C = 1.0D0
N = 21
OPEN(1,FILE="SAIDA1.TXT")
DO K = 1,6
  DX = L/(N-1)
  M = 2*(N-1)+1
  DT = (CFL*DX)/C
  ALLOCATE(U(M,2),P(M,2),X(M),PX(M,2),UX(M,2),PXX(M,2),UXX(M,2),UA(M),PA(M))
  !CONDIÇÕES INICIAIS
  P = 0.0D0; U = 0.0D0; PX = 0.0D0; UX = 0.0D0; PXX = 0.0D0; UXX = 0.0D0
  DO I = 1, M
    X(I) = -1.0D0+0.5D0*(I-1)*DX
    P(I,1) = -DSIN(2.0D0*PI*X(I))/C
    PX(I,1) = -2.0D0*PI*DCOS(2.0D0*PI*X(I))/C
    PXX(I,1) = 4.0D0*PI*PI*DSIN(2.0D0*PI*X(I))/C
  END DO
  TT = 0.5D0*DT
  DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-6.0D0))
    P(1,2) = 0.0D0; U(1,2) = DSIN(2.0D0*PI*C*TT)/C
    px(1,2) = -2.0d0*pi*dcos(2*pi*c*tt)*dcos(2*pi*x(1))
    ux(1,2) = -2.0d0*pi*dsin(2*pi*c*tt)*dsin(2*pi*x(1))
    pxx(1,2) = 4.0d0*pi*pi*dcos(2*pi*c*tt)*dsin(2*pi*x(1))
    uxx(1,2) = -4.0d0*pi*pi*dsin(2*pi*c*tt)*dcos(2*pi*x(1))
    P(M,2) = 0.0D0; U(M,2) = DSIN(2.0D0*PI*C*TT)/C
    px(m,2) = -2.0d0*pi*dcos(2*pi*c*tt)*dcos(2*pi*x(m))
    ux(m,2) = -2.0d0*pi*dsin(2*pi*c*tt)*dsin(2*pi*x(m))
    pxx(m,2) = 4.0d0*pi*pi*dcos(2*pi*c*tt)*dsin(2*pi*x(m))
    uxx(m,2) = -4.0d0*pi*pi*dsin(2*pi*c*tt)*dcos(2*pi*x(m))
    DO I = 2,M-1
      A0 = UX(I-1,1)+C*DT*PX(I-1,1)/DX+UXX(I-1,1)*(DX-C*C*DT*DT/DX)/4.0D0
      A1 = UX(I+1,1)-C*DT*PX(I+1,1)/DX+UXX(I+1,1)*(C*C*DT*DT/DX-DX)/4.0D0
      UX(I,2) = (A0+A1)/2.0D0
      UXX(I,2) = 0.5D0*(UXX(I-1,1)+UXX(I+1,1)+C*DT*(PXX(I-1,1)-PXX(I+1,1))/DX)
      A0 = U(I-1,1)+C*DT*P(I-1,1)/DX+UX(I-1,1)*(DX-C*C*DT*DT/DX)/4.0D0
      A0 = A0+(DX*DX*UXX(I-1,1)+((C*DT)**3.0D0)*PXX(I-1,1)/DX)/24.0D0
      A1 = U(I+1,1)-C*DT*P(I+1,1)/DX+UX(I+1,1)*(C*C*DT*DT/DX-DX)/4.0D0
      A1 = A1+(DX*DX*UXX(I+1,1)-((C*DT)**3.0D0)*PXX(I+1,1)/DX)/24.0D0
      U(I,2) = (A0+A1-DX*DX*UXX(I,2)/12.0D0)/2.0D0
      A0 = PX(I-1,1)+C*DT*UX(I-1,1)/DX+PXX(I-1,1)*(DX-C*C*DT*DT/DX)/4.0D0
      A1 = PX(I+1,1)-C*DT*UX(I+1,1)/DX+PXX(I+1,1)*(C*C*DT*DT/DX-DX)/4.0D0
      PX(I,2) = (A0+A1)/2.0D0
      PXX(I,2) = 0.5D0*(PXX(I-1,1)+PXX(I+1,1)+C*DT*(UXX(I-1,1)-UXX(I+1,1))/DX)
      A0 = P(I-1,1)+C*DT*U(I-1,1)/DX+PX(I-1,1)*(DX-C*C*DT*DT/DX)/4.0D0
      A0 = A0+(DX*DX*PXX(I-1,1)+((C*DT)**3.0D0)*UXX(I-1,1)/DX)/24.0D0
      A1 = P(I+1,1)-C*DT*U(I+1,1)/DX+PX(I+1,1)*(C*C*DT*DT/DX-DX)/4.0D0
      A1 = A1+(DX*DX*PXX(I+1,1)-((C*DT)**3.0D0)*UXX(I+1,1)/DX)/24.0D0
      P(I,2) = (A0+A1-DX*DX*PXX(I,2)/12.0D0)/2.0D0
    END DO
    U(:,1) = U(:,2); UX(:,1) = UX(:,2); UXX(:,1) = UXX(:,2)
    P(:,1) = P(:,2); PX(:,1) = PX(:,2); PXX(:,1) = PXX(:,2)
    TT = TT+0.5D0*DT
  END DO
  TT = TT-0.5D0*DT
  WRITE(*,*) TT
  EP = 0.0D0; EU = 0.0D0
  DO j = 1,n

```

```

      I = 2*J-1
      UA(I) = DSIN(2.0D0*PI*C*TT)*DCOS(2.0D0*PI*X(I))/C
      PA(I) = -DCOS(2.0D0*PI*C*TT)*DSIN(2.0D0*PI*X(I))/C
      EP = EP+(P(I,2)-PA(I))**2.0D0
      EU = EU+(U(I,2)-UA(I))**2.0D0
      !EP = EP+dabs(P(I,2)-PA(I))
      !EU = EU+dabs(U(I,2)-UA(I))
    END DO
    DEALLOCATE(U,P,X,PX,UX,PXX,UXX,UA,PA)
    !WRITE(1,1) X(I), P(I,2), PA(I), U(I,2), UA(I)
    WRITE(1,1) n, DX, DT, TT, DSQRT(DX*EP),DSQRT(DX*EU)
    1 FORMAT(I5, 2x, 9(1F15.9))
    N = 2*(N-1)+1
  END DO
CLOSE(1)
END PROGRAM PRINCIPAL

```

C.2.2 Precisão 2D

```

PROGRAM SAINT_VENANT
IMPLICIT NONE
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:,:):: Q,QX,QY,QXX,QYY,QXY
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:):: PHI,U,V
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:):: X,Y
INTEGER N1,N2,I,J,K
REAL*8 C,CFL,L1,L2,DX,DY,DT,TT,TE,PI
REAL*8 AO,A1,A2,A3,A4,P1X1,P1X2,P1Y1,P1Y2

TE = 0.2D0
L1 = 2.0D0 !X
L2 = 2.0D0 !Y
CFL = 0.4D0
PI = DACOS(-1.0D0)
C = 1.0D0
N1 = 21 !UTILIZAR ÍMPARES: X
N2 = 21 !UTILIZAR ÍMPARES: Y
OPEN(1, FILE="SAIDA.TXT")
DO K = 1,6
  DX = 2.0D0*L1/(N1-1) !X
  DY = 2.0D0*L2/(N2-1) !Y
  DT = CFL*DX/C
  ALLOCATE(Q(N1,N2,2,3),QX(N1,N2,2,3),QY(N1,N2,2,3),X(N1),Y(N2),V(N1,N2))
  ALLOCATE(QXX(N1,N2,2,3),QYY(N1,N2,2,3),QXY(N1,N2,2,3),PHI(N1,N2),U(N1,N2))
  !CONDIÇÕES INICIAIS
  Q = 0.0D0; QX = 0.0D0; QY = 0.0D0; QXX = 0.0D0; QXY = 0.0D0; QXY = 0.0D0
  DO I = 1, N1
    X(I) = -1.0D0+0.5D0*(I-1)*DX
  END DO
  DO J = 1,N2
    Y(J) = -1.0D0+0.5D0*(J-1)*DY
  END DO
  DO I = 1, N1
    DO J = 1, N2
      Q(I,J,1,1) = -(DSIN(2.0D0*PI*X(I))+DSIN(2.0D0*PI*Y(J)))/C
      QX(I,J,1,1) = -2.0D0*PI*DCOS(2.0D0*PI*X(I))/C
      QXX(I,J,1,1) = 4.0D0*PI*PI*SIN(2.0D0*PI*X(I))/C

```

```

      QY(I,J,1,1) = -2.00*PI*DCOS(2.00*PI*Y(J))/C
      QYY(I,J,1,1)= 4.00*PI*PI*DSIN(2.00*PI*Y(J))/C
    END DO
  END DO
  TT = 0.500*DT
  !AVANÇO NO TEMPO
  DO WHILE (TT-TE<10.000*(-5.000))
    DO I = 1, N1
      !CONDIÇÕES DE CONTORNO (Y = -1.0)
      Q(I,1,2,1)  =-DCOS(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*X(I))/C
      QX(I,1,2,1) =-2.00*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)*DCOS(2.00*PI*X(I))/C
      QXX(I,1,2,1)= 4.00*PI*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*X(I))/C
      QY(I,1,2,1) =-2.00*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)/C
      QYY(I,1,2,1)= 0.000
      QXY(I,1,2,1)= 0.000
      Q(I,1,2,2)  = DSIN(2.00*PI*C*TT)*DCOS(2.00*PI*X(I))/C
      QX(I,1,2,2) =-2.00*PI*DSIN(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*X(I))/C
      QXX(I,1,2,2)=-4.00*PI*PI*DSIN(2.00*PI*C*TT)*DCOS(2.00*PI*X(I))/C
      QY(I,1,2,2) = 0.000
      QXY(I,1,2,2)= 0.000
      QYY(I,1,2,2)= 0.000
      Q(I,1,2,3)  = DSIN(2.00*PI*C*TT)/C
      QX(I,1,2,3) = 0.000
      QXX(I,1,2,3)= 0.000
      QY(I,1,2,3) = 0.000
      QXY(I,1,2,3)= 0.000
      QYY(I,1,2,3)= -4.00*PI*PI*DSIN(2.00*PI*C*TT)/C
      !CONDIÇÕES DE CONTORNO (Y = 1.0)
      Q(I,N2,2,1) =-DCOS(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*X(I))/C
      QX(I,N2,2,1) =-2.00*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)*DCOS(2.00*PI*X(I))/C
      QXX(I,N2,2,1)= 4.00*PI*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*X(I))/C
      QY(I,N2,2,1) =-2.00*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)/C
      QYY(I,N2,2,1)= 0.000
      QXY(I,N2,2,1)= 0.000
      Q(I,N2,2,2)  = DSIN(2.00*PI*C*TT)*DCOS(2.00*PI*X(I))/C
      QX(I,N2,2,2) =-2.00*PI*DSIN(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*X(I))/C
      QXX(I,N2,2,2)=-4.00*PI*PI*DSIN(2.00*PI*C*TT)*DCOS(2.00*PI*X(I))/C
      QY(I,N2,2,2) = 0.000
      QXY(I,N2,2,2)= 0.000
      QYY(I,N2,2,2)= 0.000
      Q(I,N2,2,3)  = DSIN(2.00*PI*C*TT)/C
      QX(I,N2,2,3) = 0.000
      QXX(I,N2,2,3)= 0.000
      QY(I,N2,2,3) = 0.000
      QXY(I,N2,2,3)= 0.000
      QYY(I,N2,2,3)=-4.00*PI*PI*DSIN(2.00*PI*C*TT)/C
    END DO
    DO J = 1, N2
      !CONDIÇÕES DE CONTORNO (X = -1.0)
      Q(1,J,2,1)  =-DCOS(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*Y(J))/C
      QX(1,J,2,1) =-2.00*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)/C
      QY(1,J,2,1) =-2.00*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)*DCOS(2.00*PI*Y(J))/C
      QYY(1,J,2,1)= 4.00*PI*PI*DCOS(2.00*PI*C*TT)*DSIN(2.00*PI*Y(J))/C
      QXY(1,J,2,1)= 0.000
      QXX(1,J,2,1)= 0.000
      Q(1,J,2,2)  = DSIN(2.00*PI*C*TT)/C
      QX(1,J,2,2) = 0.000

```

```

QY(1,J,2,2) = 0.0D0
QYY(1,J,2,2)= 0.0D0
QXY(1,J,2,2)= 0.0D0
QXX(1,J,2,2)= -4.0D0*PI*PI*DSIN(2.0D0*PI*C*TT)/C
Q(1,J,2,3) = DSIN(2.0D0*PI*C*TT)*DCOS(2.0D0*PI*Y(J))/C
QX(1,J,2,3) = 0.0D0
QY(1,J,2,3) = -2.0D0*PI*DSIN(2.0D0*PI*C*TT)*DSIN(2.0D0*PI*Y(J))/C
QYY(1,J,2,3)= -4.0D0*PI*PI*DSIN(2.0D0*PI*C*TT)*DCOS(2.0D0*PI*Y(J))/C
QXY(1,J,2,3)= 0.0D0
QXX(1,J,2,3)= 0.0D0
!CONDIÇÕES DE CONTORNO (X = 1.0)
Q(N1,J,2,1) ==-DCOS(2.0D0*PI*C*TT)*DSIN(2.0D0*PI*Y(J))/C
QX(N1,J,2,1) ==-2.0D0*PI*DCOS(2.0D0*PI*C*TT)/C
QY(N1,J,2,1) ==-2.0D0*PI*DCOS(2.0D0*PI*C*TT)*DCOS(2.0D0*PI*Y(J))/C
QYY(N1,J,2,1)= 4.0D0*PI*PI*DCOS(2.0D0*PI*C*TT)*DSIN(2.0D0*PI*Y(J))/C
QXY(N1,J,2,1)= 0.0D0
QXX(N1,J,2,1)= 0.0D0
Q(N1,J,2,2) = DSIN(2.0D0*PI*C*TT)/C
QX(N1,J,2,2) = 0.0D0
QY(N1,J,2,2) = 0.0D0
QYY(N1,J,2,2)= 0.0D0
QXY(N1,J,2,2)= 0.0D0
QXX(N1,J,2,2)= -4.0D0*PI*PI*DSIN(2.0D0*PI*C*TT)/C
Q(N1,J,2,3) = DSIN(2.0D0*PI*C*TT)*DCOS(2.0D0*PI*Y(J))/C
QX(N1,J,2,3) = 0.0D0
QY(N1,J,2,3) = -2.0D0*PI*DSIN(2.0D0*PI*C*TT)*DSIN(2.0D0*PI*Y(J))/C
QYY(N1,J,2,3)= -4.0D0*PI*PI*DSIN(2.0D0*PI*C*TT)*DCOS(2.0D0*PI*Y(J))/C
QXY(N1,J,2,3)= 0.0D0
QXX(N1,J,2,3)= 0.0D0
END DO
DO I = 2,N1-1
DO J = 2, N2-1
!CÁLCULO DE QXX1
A0 = (QXX(I-1,J,1,1)+QXX(I+1,J,1,1)+QXX(I,J-1,1,1)+QXX(I,J+1,1,1))/4.0D0
A1 = (QXX(I-1,J,1,2)-QXX(I+1,J,1,2))/DX+(QXX(I,J-1,1,3)-QXX(I,J+1,1,3))/DY
A1 = C*DT*A1/2.0D0
QXX(I,J,2,1) = A0+A1
!CÁLCULO DE QXX2
A0 = (QXX(I-1,J,1,2)+QXX(I+1,J,1,2)+QXX(I,J-1,1,2)+QXX(I,J+1,1,2))/4.0D0
A1 = C*DT*(QXX(I-1,J,1,1)-QXX(I+1,J,1,1))/(2.0D0*DX)
QXX(I,J,2,2) = A0+A1
!CÁLCULO DE QXX3
A0 = (QXX(I-1,J,1,3)+QXX(I+1,J,1,3)+QXX(I,J-1,1,3)+QXX(I,J+1,1,3))/4.0D0
A1 = C*DT*(QXX(I,J-1,1,1)-QXX(I,J+1,1,1))/(2.0D0*DY)
QXX(I,J,2,3) = A0+A1
!CÁLCULO DE QYY1
A0 = (QYY(I-1,J,1,1)+QYY(I+1,J,1,1)+QYY(I,J-1,1,1)+QYY(I,J+1,1,1))/4.0D0
A1 = (QYY(I-1,J,1,2)-QYY(I+1,J,1,2))/DX+(QYY(I,J-1,1,3)-QYY(I,J+1,1,3))/DY
A1 = C*DT*A1/2.0D0
QYY(I,J,2,1) = A0+A1
!CÁLCULO DE QYY2
A0 = (QYY(I-1,J,1,2)+QYY(I+1,J,1,2)+QYY(I,J-1,1,2)+QYY(I,J+1,1,2))/4.0D0
A1 = C*DT*(QYY(I-1,J,1,1)-QYY(I+1,J,1,1))/(2.0D0*DX)
QYY(I,J,2,2) = A0+A1
!CÁLCULO DE QYY3
A0 = (QYY(I-1,J,1,3)+QYY(I+1,J,1,3)+QYY(I,J-1,1,3)+QYY(I,J+1,1,3))/4.0D0
A1 = C*DT*(QYY(I,J-1,1,1)-QYY(I,J+1,1,1))/(2.0D0*DY)

```

```

QYY(I,J,2,3) = AO+A1
!CÁLCULO DE QXY1
AO = (QXY(I-1,J,1,1)+QXY(I+1,J,1,1)+QXY(I,J-1,1,1)+QXY(I,J+1,1,1))/4.ODO
A1 = C*DT*((QXY(I-1,J,1,2)-QXY(I+1,J,1,2))/DX+(QXY(I,J-1,1,3)-QXY(I,J+1,1,3))/DY)/2.ODO
QXY(I,J,2,1) = AO+A1
!CÁLCULO DE QXY2
AO = (QXY(I-1,J,1,2)+QXY(I+1,J,1,2)+QXY(I,J-1,1,2)+QXY(I,J+1,1,2))/4.ODO
A1 = C*DT*(QXY(I-1,J,1,1)-QXY(I+1,J,1,1))/(2.ODO*DX)
QXY(I,J,2,2) = AO+A1
!CÁLCULO DE QXY3
AO = (QXY(I-1,J,1,3)+QXY(I+1,J,1,3)+QXY(I,J-1,1,3)+QXY(I,J+1,1,3))/4.ODO
A1 = C*DT*(QXY(I,J-1,1,1)-QXY(I,J+1,1,1))/(2.ODO*DY)
QXY(I,J,2,3) = AO+A1
!CÁLCULO DE QX1
AO = QX(I-1,J,1,1)+(DX*QXX(I-1,J,1,1)+C*DT*(QXX(I-1,J,1,2)-QXY(I-1,J,1,3)))/4.ODO
AO = AO/4.ODO+C*DT*(QX(I-1,J,1,2)-C*DT*QXX(I-1,J,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A1 = QX(I+1,J,1,1)+(C*DT*(QXX(I+1,J,1,2)-QXY(I+1,J,1,3))-DX*QXX(I+1,J,1,1))/4.ODO
A1 = A1/4.ODO-C*DT*(QX(I+1,J,1,2)-C*DT*QXX(I+1,J,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A2 = QX(I,J-1,1,1)+(DY*QXY(I,J-1,1,1)+C*DT*(QXY(I,J-1,1,3)-QXX(I,J-1,1,2)))/4.ODO
A2 = A2/4.ODO+C*DT*(QX(I,J-1,1,3)-C*DT*QXY(I,J-1,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DY)
A3 = QX(I,J+1,1,1)+(C*DT*(QXY(I,J+1,1,3)-QXX(I,J+1,1,2))-DY*QXY(I,J+1,1,1))/4.ODO
A3 = A3/4.ODO-C*DT*(QX(I,J+1,1,3)-C*DT*QXY(I,J+1,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DY)
QX(I,J,2,1) = AO+A1+A2+A3
!CÁLCULO DE QY1
AO = QY(I-1,J,1,1)+(DX*QXY(I-1,J,1,1)+C*DT*(QXY(I-1,J,1,2)-QYY(I-1,J,1,3)))/4.ODO
AO = AO/4.ODO+C*DT*(QY(I-1,J,1,2)-C*DT*QXY(I-1,J,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A1 = QY(I+1,J,1,1)+(C*DT*(QXY(I+1,J,1,2)-QYY(I+1,J,1,3))-DX*QXY(I+1,J,1,1))/4.ODO
A1 = A1/4.ODO-C*DT*(QY(I+1,J,1,2)-C*DT*QXY(I+1,J,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A2 = QY(I,J-1,1,1)+(DY*QYY(I,J-1,1,1)+C*DT*(QYY(I,J-1,1,3)-QXY(I,J-1,1,2)))/4.ODO
A2 = A2/4.ODO+C*DT*(QY(I,J-1,1,3)-C*DT*QYY(I,J-1,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DY)
A3 = QY(I,J+1,1,1)+(C*DT*(QYY(I,J+1,1,3)-QXY(I,J+1,1,2))-DY*QYY(I,J+1,1,1))/4.ODO
A3 = A3/4.ODO-C*DT*(QY(I,J+1,1,3)-C*DT*QYY(I,J+1,1,1))/4.ODO/(2.ODO*DY)
QY(I,J,2,1) = AO+A1+A2+A3
!CÁLCULO DE QX2
AO = QX(I-1,J,1,2)/4.ODO+(DX*QXX(I-1,J,1,2)+C*DT*QXX(I-1,J,1,1))/16.ODO
AO = AO+C*DT*(QX(I-1,J,1,1)-C*DT*(QXX(I-1,J,1,2)+QXY(I-1,J,1,3)))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A1 = QX(I+1,J,1,2)/4.ODO+(C*DT*QXX(I+1,J,1,1)-DX*QXX(I+1,J,1,2))/16.ODO
A1 = A1-C*DT*(QX(I+1,J,1,1)-C*DT*(QXX(I+1,J,1,2)+QXY(I+1,J,1,3)))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A2 = QX(I,J-1,1,2)/4.ODO+(DY*QXY(I,J-1,1,2)-C*DT*QXX(I,J-1,1,1))/16.ODO
A3 = QX(I,J+1,1,2)/4.ODO-(DY*QXY(I,J+1,1,2)+C*DT*QXX(I,J+1,1,1))/16.ODO
QX(I,J,2,2) = AO+A1+A2+A3
!CÁLCULO DE QY2
AO = QY(I-1,J,1,2)/4.ODO+(DX*QXY(I-1,J,1,2)+C*DT*QXY(I-1,J,1,1))/16.ODO
AO = AO+C*DT*(QY(I-1,J,1,1)-C*DT*(QXY(I-1,J,1,2)+QYY(I-1,J,1,3)))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A1 = QY(I+1,J,1,2)/4.ODO+(C*DT*QXY(I+1,J,1,1)-DX*QXY(I+1,J,1,2))/16.ODO
A1 = A1-C*DT*(QY(I+1,J,1,1)-C*DT*(QXY(I+1,J,1,2)+QYY(I+1,J,1,3)))/4.ODO/(2.ODO*DX)
A2 = QY(I,J-1,1,2)/4.ODO+(DY*QYY(I,J-1,1,2)-C*DT*QXY(I,J-1,1,1))/16.ODO
A3 = QY(I,J+1,1,2)/4.ODO-(DY*QYY(I,J+1,1,2)+C*DT*QXY(I,J+1,1,1))/16.ODO
QY(I,J,2,2) = AO+A1+A2+A3
!CÁLCULO DE QX3
AO = QX(I-1,J,1,3)/4.ODO+(DX*QXX(I-1,J,1,3)-C*DT*QXY(I-1,J,1,1))/16.ODO
A1 = QX(I+1,J,1,3)/4.ODO-(DX*QXX(I+1,J,1,3)+C*DT*QXY(I+1,J,1,1))/16.ODO
A2 = QX(I,J-1,1,3)/4.ODO+(DY*QXY(I,J-1,1,3)+C*DT*QXY(I,J-1,1,1))/16.ODO
A2 = A2+C*DT*(QX(I,J-1,1,1)-C*DT*(QXX(I,J-1,1,2)+QXY(I,J-1,1,3)))/4.ODO/(2.ODO*DY)
A3 = QX(I,J+1,1,3)/4.ODO+(C*DT*QXY(I,J+1,1,1)-DY*QXY(I,J+1,1,3))/16.ODO
A3 = A3-C*DT*(QX(I,J+1,1,1)-C*DT*(QXX(I,J+1,1,2)+QXY(I,J+1,1,3)))/4.ODO/(2.ODO*DY)
QX(I,J,2,3) = AO+A1+A2+A3

```

!CÁLCULO DE QY3

A0 = QY(I-1, J, 1, 3)/4.0D0+(DX*QXY(I-1, J, 1, 3)-C*DT*QYY(I-1, J, 1, 1))/16.0D0
 A1 = QY(I+1, J, 1, 3)/4.0D0-(DX*QXY(I+1, J, 1, 3)+C*DT*QYY(I+1, J, 1, 1))/16.0D0
 A2 = QY(I, J-1, 1, 3)/4.0D0+(DY*QYY(I, J-1, 1, 3)+C*DT*QYY(I, J-1, 1, 1))/16.0D0
 A2 = A2+C*DT*(QY(I, J-1, 1, 1)-C*DT*(QXY(I, J-1, 1, 2)+QYY(I, J-1, 1, 3)))/4.0D0)/(2.0D0*DY)
 A3 = QY(I, J+1, 1, 3)/4.0D0+(C*DT*QYY(I, J+1, 1, 1)-DY*QYY(I, J+1, 1, 3))/16.0D0
 A3 = A3-C*DT*(QY(I, J+1, 1, 1)-C*DT*(QXY(I, J+1, 1, 2)+QYY(I, J+1, 1, 3)))/4.0D0)/(2.0D0*DY)
 QY(I, J, 2, 3) = A0+A1+A2+A3

!CÁLCULO DE Q1

A0 = Q(I-1, J, 1, 1)/4.0D0+(DX*QX(I-1, J, 1, 1)+C*DT*(QX(I-1, J, 1, 2)-QY(I-1, J, 1, 3)))/16.0D0
 A1 = C*DT*(Q(I-1, J, 1, 2)-C*DT*QX(I-1, J, 1, 1))/4.0D0)/(2.0D0*DX)
 A2 = C*DT*(C*DT*(QYY(I-1, J, 1, 1)-QXX(I-1, J, 1, 1))+(DX*DX*QXX(I-1, J, 1, 2) +
 DY*DY*QYY(I-1, J, 1, 2)))/(3.0D0*DX))/64.0D0
 A3 = C*DT*(((C*DT)**2.0D0)*(QXX(I-1, J, 1, 2)+QXY(I-1, J, 1, 3)) -
 0.5D0*DX*DX*QXY(I-1, J, 1, 3))/(48.0D0*DX)
 A4 = (7.0D0*DX*DX*QXX(I-1, J, 1, 1)+DY*DY*QYY(I-1, J, 1, 1))/(768.0D0)

P1X1 = A0+A1+A2+A3+A4

A0 = Q(I+1, J, 1, 1)/4.0D0+(C*DT*(QX(I+1, J, 1, 2)-QY(I+1, J, 1, 3))-DX*QX(I+1, J, 1, 1))/16.0D0
 A1 = -C*DT*(Q(I+1, J, 1, 2)-C*DT*QX(I+1, J, 1, 1))/4.0D0)/(2.0D0*DX)
 A2 = C*DT*(C*DT*(QYY(I+1, J, 1, 1)-QXX(I+1, J, 1, 1))-(DX*DX*QXX(I+1, J, 1, 2) +
 DY*DY*QYY(I+1, J, 1, 2)))/(3.0D0*DX))/64.0D0
 A3 = -C*DT*(((C*DT)**2.0D0)*(QXX(I+1, J, 1, 2)+QXY(I+1, J, 1, 3)) -
 0.5D0*DX*DX*QXY(I+1, J, 1, 3))/(48.0D0*DX)
 A4 = (7.0D0*DX*DX*QXX(I+1, J, 1, 1)+DY*DY*QYY(I+1, J, 1, 1))/(768.0D0)

P1X2 = A0+A1+A2+A3+A4

A0 = Q(I, J-1, 1, 1)/4.0D0+(DY*QY(I, J-1, 1, 1)+C*DT*(QY(I, J-1, 1, 3)-QX(I, J-1, 1, 2)))/16.0D0
 A1 = C*DT*(Q(I, J-1, 1, 3)-C*DT*QY(I, J-1, 1, 1))/4.0D0)/(2.0D0*DY)
 A2 = C*DT*(C*DT*(QXX(I, J-1, 1, 1)-QYY(I, J-1, 1, 1))+(DX*DX*QXX(I, J-1, 1, 3) +
 DY*DY*QYY(I, J-1, 1, 3)))/(3.0D0*DY))/64.0D0
 A3 = C*DT*(((C*DT)**2.0D0)*(QYY(I, J-1, 1, 3)+QXY(I, J-1, 1, 2)) -
 0.5D0*DY*DY*QXY(I, J-1, 1, 2))/(48.0D0*DY)
 A4 = (DX*DX*QXX(I, J-1, 1, 1)+7.0D0*DY*DY*QYY(I, J-1, 1, 1))/(768.0D0)

P1Y1 = A0+A1+A2+A3+A4

A0 = Q(I, J+1, 1, 1)/4.0D0+(C*DT*(QY(I, J+1, 1, 3)-QX(I, J+1, 1, 2))-DY*QY(I, J+1, 1, 1))/16.0D0
 A1 = -C*DT*(Q(I, J+1, 1, 3)-C*DT*QY(I, J+1, 1, 1))/4.0D0)/(2.0D0*DY)
 A2 = C*DT*(C*DT*(QXX(I, J+1, 1, 1)-QYY(I, J+1, 1, 1))-(DX*DX*QXX(I, J+1, 1, 3) +
 DY*DY*QYY(I, J+1, 1, 3)))/(3.0D0*DY))/64.0D0
 A3 = -C*DT*(((C*DT)**2.0D0)*(QYY(I, J+1, 1, 3)+QXY(I, J+1, 1, 2)) -
 0.5D0*DY*DY*QXY(I, J+1, 1, 2))/(48.0D0*DY)
 A4 = (DX*DX*QXX(I, J+1, 1, 1)+7.0D0*DY*DY*QYY(I, J+1, 1, 1))/(768.0D0)

P1Y2 = A0+A1+A2+A3+A4

Q(I, J, 2, 1) = P1X1+P1X2+P1Y1+P1Y2-(DX*DX*QXX(I, J, 2, 1)+DY*DY*QYY(I, J, 2, 1))/48.0D0

!CÁLCULO DE Q2

A0 = Q(I-1, J, 1, 2)/4.0D0+(DX*QX(I-1, J, 1, 2)+C*DT*QX(I-1, J, 1, 1))/16.0D0
 A1 = C*DT*(Q(I-1, J, 1, 1)-C*DT*(QX(I-1, J, 1, 2)+QY(I-1, J, 1, 3)))/4.0D0)/(2.0D0*DX)
 A2 = C*DT*(-C*DT*(QXX(I-1, J, 1, 2)+QXY(I-1, J, 1, 3))+(DX*DX*QXX(I-1, J, 1, 1) +
 DY*DY*QYY(I-1, J, 1, 1)))/(3.0D0*DX))/64.0D0
 A3 = ((C*DT)**3.0D0)*(QXX(I-1, J, 1, 1)+QYY(I-1, J, 1, 1))/(48.0D0*DX)
 A4 = (7.0D0*DX*DX*QXX(I-1, J, 1, 2)+DY*DY*QYY(I-1, J, 1, 2))/(768.0D0)

P1X1 = A0+A1+A2+A3+A4

A0 = Q(I+1, J, 1, 2)/4.0D0+(C*DT*QX(I+1, J, 1, 1)-DX*QX(I+1, J, 1, 2))/16.0D0
 A1 = -C*DT*(Q(I+1, J, 1, 1)-C*DT*(QX(I+1, J, 1, 2)+QY(I+1, J, 1, 3)))/4.0D0)/(2.0D0*DX)
 A2 = -C*DT*(C*DT*(QXX(I+1, J, 1, 2)+QXY(I+1, J, 1, 3))+(DX*DX*QXX(I+1, J, 1, 1) +
 DY*DY*QYY(I+1, J, 1, 1)))/(3.0D0*DX))/64.0D0
 A3 = -((C*DT)**3.0D0)*(QXX(I+1, J, 1, 1)+QYY(I+1, J, 1, 1))/(48.0D0*DX)
 A4 = (7.0D0*DX*DX*QXX(I+1, J, 1, 2)+DY*DY*QYY(I+1, J, 1, 2))/(768.0D0)

P1X2 = A0+A1+A2+A3+A4

```

AO = Q(I,J-1,1,2)/4.0D0+(DY*QY(I,J-1,1,2)-C*DT*QX(I,J-1,1,1))/16.0D0
A1 = C*DT*(C*DT*(QXX(I,J-1,1,2)+QXY(I,J-1,1,3))/64.0D0-DY*QXY(I,J-1,1,1)/48.0D0)
A2 = (DX*DX*QXX(I,J-1,1,2)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J-1,1,2))/(768.0D0)
P1Y1 = A0+A1+A2
AO = Q(I,J+1,1,2)/4.0D0-(DY*QY(I,J+1,1,2)+C*DT*QX(I,J+1,1,1))/16.0D0
A1 = C*DT*(C*DT*(QXX(I,J+1,1,2)+QXY(I,J+1,1,3))/64.0D0+DY*QXY(I,J+1,1,1)/48.0D0)
A2 = (DX*DX*QXX(I,J+1,1,2)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J+1,1,2))/(768.0D0)
P1Y2 = A0+A1+A2
Q(I,J,2,2) = P1X1+P1X2+P1Y1+P1Y2-(DX*DX*QXX(I,J,2,2)+DY*DY*QYY(I,J,2,2))/48.0D0
!CÁLCULO DE Q3
AO = Q(I-1,J,1,3)/4.0D0+(DX*QX(I-1,J,1,3)-C*DT*QY(I-1,J,1,1))/16.0D0
A1 = C*DT*(C*DT*(QXY(I-1,J,1,2)+QYY(I-1,J,1,3))/64.0D0-DX*QXY(I-1,J,1,1)/48.0D0)
A2 = (7.0D0*DX*DX*QXX(I-1,J,1,3)+DY*DY*QYY(I-1,J,1,3))/(768.0D0)
P1X1 = A0+A1+A2
AO = Q(I+1,J,1,3)/4.0D0-(DX*QX(I+1,J,1,3)+C*DT*QY(I+1,J,1,1))/16.0D0
A1 = C*DT*(C*DT*(QXY(I+1,J,1,2)+QYY(I+1,J,1,3))/64.0D0+DX*QXY(I+1,J,1,1)/48.0D0)
A2 = (7.0D0*DX*DX*QXX(I+1,J,1,3)+DY*DY*QYY(I+1,J,1,3))/(768.0D0)
P1X2 = A0+A1+A2
AO = Q(I,J-1,1,3)/4.0D0+(DY*QY(I,J-1,1,3)+C*DT*QY(I,J-1,1,1))/16.0D0
A1 = C*DT*(Q(I,J-1,1,1)-C*DT*(QX(I,J-1,1,2)+QY(I,J-1,1,3))/4.0D0)/(2.0D0*DY)
A2 = C*DT*((DX*DX*QXX(I,J-1,1,1)+DY*DY*QYY(I,J-1,1,1))/(3.0D0*DY) -
C*DT*(QXY(I,J-1,1,2)+QYY(I,J-1,1,3)))/64.0D0
A3 = ((C*DT)**3.0D0)*(QXX(I,J-1,1,1)+QYY(I,J-1,1,1))/(48.0D0*DY)
A4 = (DX*DX*QXX(I,J-1,1,3)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J-1,1,3))/(768.0D0)
P1Y1 = A0+A1+A2+A3+A4
AO = Q(I,J+1,1,3)/4.0D0+(C*DT*QY(I,J+1,1,1)-DY*QY(I,J+1,1,3))/16.0D0
A1 = -C*DT*(Q(I,J+1,1,1)-C*DT*(QX(I,J+1,1,2)+QY(I,J+1,1,3))/4.0D0)/(2.0D0*DY)
A2 = -C*DT*(C*DT*(QXY(I,J+1,1,2)+QYY(I,J+1,1,3))+(DX*DX*QXX(I,J+1,1,1) +
DY*DY*QYY(I,J+1,1,1)))/(3.0D0*DY))/64.0D0
A3 = -((C*DT)**3.0D0)*(QXX(I,J+1,1,1)+QYY(I,J+1,1,1))/(48.0D0*DY)
A4 = (DX*DX*QXX(I,J+1,1,3)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J+1,1,3))/(768.0D0)
P1Y2 = A0+A1+A2+A3+A4
Q(I,J,2,3) = P1X1+P1X2+P1Y1+P1Y2-(DX*DX*QXX(I,J,2,3)+DY*DY*QYY(I,J,2,3))/48.0D0
END DO
END DO
Q(:, :, 1, :) = Q(:, :, 2, :); QX(:, :, 1, :) = QX(:, :, 2, :); QY(:, :, 1, :) = QY(:, :, 2, :)
QXX(:, :, 1, :) = QXX(:, :, 2, :); QXY(:, :, 1, :) = QXY(:, :, 2, :); QYY(:, :, 1, :) = QYY(:, :, 2, :)
TT = TT+0.5D0*DT
END DO
TT = TT-0.5D0*DT
WRITE(*,*) TT
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
AO = 0.0D0; A1 = 0.0D0; A2 = 0.0D0
DO I = 1,N1
DO J = 1,N2
PHI(I,J) = -DCOS(2.0D0*C*PI*TT)*(DSIN(2.0D0*PI*X(I))+DSIN(2.0D0*PI*Y(J)))/C
U(I,J) = DSIN(2.0D0*C*PI*TT)*DCOS(2.0D0*PI*X(I))/C
V(I,J) = DSIN(2.0D0*C*PI*TT)*DCOS(2.0D0*PI*Y(J))/C
!A0 = A0+DABS(PHI(I,J)-Q(I,J,2,1))
!A1 = A1+DABS(U(I,J)-Q(I,J,2,2))
!A2 = A2+DABS(V(I,J)-Q(I,J,2,3))
A0 = A0+(PHI(I,J)-Q(I,J,2,1))**2.0d0
A1 = A1+(U(I,J)-Q(I,J,2,2))**2.0d0
A2 = A2+(V(I,J)-Q(I,J,2,3))**2.0d0
END DO
END DO
DX = 0.5D0*DX; DY = 0.5D0*DY

```

```

A3 = DX*DY
WRITE(1,1) N1, N2, DX, DY, TT, dsqrt(A3*A0), dsqrt(A3*A1), dsqrt(A3*A2)!x(i), y(j), Q(I,J,2,1)
1 FORMAT(I3, 2X, I3, 2X, 6(1PE13.5))
DEALLOCATE(Q,QX,QY,X,Y,V,QXX,QYY,QXY,PHI,U)
N1 = 2*(N1-1)+1; N2 = 2*(N2-1)+1
END DO
CLOSE(1)
END PROGRAM SAINT_VENANT

```

C.2.3 Código - Equações de Saint-Venant unidimensionais

```

PROGRAM PRINCIPAL
IMPLICIT NONE
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: U,UX,UXX,H,HX,HXX,Q,QX,QXX,A
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:):: X,Z,B,ZX,ZXX
INTEGER I,J,K,M,N,O
REAL*8 DT,L,DX,G,AO,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,HO,H1,CO,C1,PI,C

!CALL ACCURACY_TEST_CESE2 !TRANSCRITICAL SEM CHOQUE
!CALL DAM_BREAK_CESE2
!CALL DAM_BREAK_OCESE2
!CALL DAM_BREAK_ICESE2
CALL PLANAR_CESE2
!CALL FLOW_SUBCRITICAL_CESE2
!CALL FLOW_TRANSCRITICAL_SCHOCK_CESE2
!CALL DAM_BREAK_FRIC_CESE2
CONTAINS
SUBROUTINE DAM_BREAK_FRIC_CESE2
REAL*8 VXX1,VXX2,VXT1,VXT2,VTT1,VTT2,VT1,VT2,QT1,QT2,VX1,VX2,QXT1,QXT2
REAL*8 QTT1,QTT2,V1,V2,UT1,UT2,UCT1,UCT2,UTT1,UTT2,FX1,FX2,FXT1,FXT2,F
REAL*8 TE,TT,CFL
N = 201
L = 2000.0D0
DX = L/(N-1)
M = 2*(N-1)+1
G = 9.812D0
H1 = 6.0D0
HO = 0.0D0
CO = DSQRT(G*HO)
C1 = DSQRT(G*H1)
PI = DACOS(-1.0D0)
TE = 50.0D0
CFL = 0.4D0
C = 40.0D0
ALLOCATE(U(M,2),H(M,2),Q(M,2),X(M),HX(M,2),UX(M,2),QX(M,2),HXX(M,2),UXX(M,2),QXX(M,2))
!CONDIÇÕES INICIAIS
U = 0.0D0; H = 0.0D0; ; Q = 0.0D0
UX = 0.0D0; HX = 0.0D0; QX = 0.0D0
UXX = 0.0D0; HXX = 0.0D0; QXX = 0.0D0
DO I = 1, M
X(I) = 0.5D0*(I-1.0D0)*DX
IF(X(I) < 0.5D0*L+10**(-5.0D0)) THEN
H(I,1) = H1
ELSE
H(I,1) = HO
END IF

```

```

END DO
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(DABS(H(:,1)))))
TT = 0.5DO*DT; J = 0
DO WHILE (TT<TE+10.ODO**(-5.ODO))
!CÁLCULO DO NOVO U
H(1,2) = H(2,1); U(1,2) = U(2,1); Q(1,2) = Q(2,1) !CC DE ABSORÇÃO
H(M,2) = H(M-1,1); U(M,2) = U(M-1,1); Q(M,2) = Q(M-1,1)
HX(1,2) = HX(2,1); UX(1,2) = UX(2,1); QX(1,2) = QX(2,1) !CC DE ABSORÇÃO
HX(M,2) = HX(M-1,1); UX(M,2) = UX(M-1,1); QX(M,2) = QX(M-1,1)
HXX(1,2) = HXX(2,1); UXX(1,2) = UXX(2,1); QXX(1,2) = QXX(2,1) !CC DE ABSORÇÃO
HXX(M,2) = HXX(M-1,1); UXX(M,2) = UXX(M-1,1); QXX(M,2) = QXX(M-1,1)
DO I = 2,M-1
FX1 = U(I-1,1)*UX(I-1,1)+G*HX(I-1,1)
IF (DABS(H(I-1,1))<10.ODO**(-4.ODO)) THEN
UT1 = -FX1
ELSE
UT1 = -FX1-G*U(I-1,1)*DABS(U(I-1,1))/(C*C*H(I-1,1))
END IF
FX2 = U(I+1,1)*UX(I+1,1)+G*HX(I+1,1)
IF (DABS(H(I+1,1))<10.ODO**(-4.ODO)) THEN
UT2 = -FX2
ELSE
UT2 = -FX2-G*U(I+1,1)*DABS(U(I+1,1))/(C*C*H(I+1,1))
END IF
UXT1= -U(I-1,1)*UXX(I-1,1)-UX(I-1,1)*UX(I-1,1)-G*HXX(I-1,1)
UXT2= -U(I+1,1)*UXX(I+1,1)-UX(I+1,1)*UX(I+1,1)-G*HXX(I+1,1)
FXT1 = UT1*UX(I-1,1)+U(I-1,1)*UXT1-G*QXX(I-1,1)
IF (DABS(H(I-1,1))<10.ODO**(-4.ODO)) THEN
UTT1 = -FXT1
ELSE
F = (UT1*DABS(U(I-1,1))+U(I-1,1)*DSIGN(UT1,U(I-1,1)))/H(I-1,1)
UTT1 = -FXT1-G*(F+QX(I-1,1)*U(I-1,1)*DSIGN(UT1,U(I-1,1))/(H(I-1,1)**2.ODO))/(C*C)
END IF
FXT2 = UT2*UX(I+1,1)+U(I+1,1)*UXT2-G*QXX(I+1,1)
IF (DABS(H(I+1,1))<10.ODO**(-4.ODO)) THEN
UTT2 = -FXT2
ELSE
F = (UT2*DABS(U(I+1,1))+U(I+1,1)*DSIGN(UT2,U(I+1,1)))/H(I+1,1)
UTT2 = -FXT2-G*(F+QX(I+1,1)*U(I+1,1)*DSIGN(UT2,U(I+1,1))/(H(I+1,1)**2.ODO))/(C*C)
END IF
F = -G*U(I-1,1)*DABS(U(I-1,1))/(C*C) !TERMO DE FRICÇÃO
VX1 = UX(I-1,1)*Q(I-1,1)+QX(I-1,1)*U(I-1,1)+G*H(I-1,1)*HX(I-1,1)
QT1 = -VX1+F
V1 = U(I-1,1)*Q(I-1,1)+0.5DO*G*H(I-1,1)*H(I-1,1)
A1 = UXX(I-1,1)*Q(I-1,1)+2.ODO*UX(I-1,1)*QX(I-1,1)+U(I-1,1)*QXX(I-1,1)
VXX1 = A1+G*(HX(I-1,1)*HX(I-1,1)+H(I-1,1)*HXX(I-1,1))
!TERMO DE FRICÇÃO
F = -G*(UX(I-1,1)*DABS(U(I-1,1))+U(I-1,1)*DSIGN(UX(I-1,1),U(I-1,1)))/(C*C)
QXT1 = -VXX1+F
A1 = UXT1*Q(I-1,1)+QT1*UX(I-1,1)+QXT1*U(I-1,1)+QX(I-1,1)*(UT1-G*HX(I-1,1))
VXT1 = A1-G*H(I-1,1)*QXX(I-1,1)
F = -G*(UT1*DABS(U(I-1,1))+U(I-1,1)*DSIGN(UT1,U(I-1,1)))/(C*C) !TERMO DE FRICÇÃO
QTT1 = -VXT1+F
VT1 = UT1*Q(I-1,1)+QT1*U(I-1,1)-G*H(I-1,1)*QX(I-1,1)
VTT1 = UTT1*Q(I-1,1)+2.ODO*UT1*QT1+QTT1*U(I-1,1)+G*(QX(I-1,1)*QX(I-1,1)-H(I-1,1)*QXT1)
F = -G*U(I+1,1)*DABS(U(I+1,1))/(C*C) !TERMO DE FRICÇÃO
VX2 = UX(I+1,1)*Q(I+1,1)+QX(I+1,1)*U(I+1,1)+G*H(I+1,1)*HX(I+1,1)

```

```

QT2 = -VX2+F
V2 = U(I+1,1)*Q(I+1,1)+0.5DO*G*H(I+1,1)*H(I+1,1)
A2 = UXX(I+1,1)*Q(I+1,1)+2.0DO*UX(I+1,1)*QX(I+1,1)+U(I+1,1)*QXX(I+1,1)
VXX2 = A2+G*(HX(I+1,1)*HX(I+1,1)+H(I+1,1)*HXX(I+1,1))
!TERMO DE FRICÇÃO
F = -G*(UX(I+1,1)*DABS(U(I+1,1))+U(I+1,1)*DSIGN(UX(I+1,1),U(I+1,1)))/(C*C)
QXT2 = -VXX2+F
A2 = UXT2*Q(I+1,1)+QT2*UX(I+1,1)+QXT2*U(I+1,1)+QX(I+1,1)*(UT2-G*HX(I+1,1))
VXT2 = A2-G*H(I+1,1)*QXX(I+1,1)
F = -G*(UT2*DABS(U(I+1,1))+U(I+1,1)*DSIGN(UT2,U(I+1,1)))/(C*C) !TERMO DE FRICÇÃO
QTT2 = -VXT2+F
VT2 = UT2*Q(I+1,1)+QT2*U(I+1,1)-G*H(I+1,1)*QX(I+1,1)
VTT2 = UTT2*Q(I+1,1)+2.0DO*UT2*QT2+QTT2*U(I+1,1)+G*(QX(I+1,1)*QX(I+1,1)-H(I+1,1)*QXT2)
!CÁLCULO DE HX
AO = HX(I+1,1)+HX(I-1,1)+DX*(HXX(I-1,1)-HXX(I+1,1))/4.0DO+DT*(QX(I-1,1)-QX(I+1,1))/DX
HX(I,2) = 0.5DO*(AO+DT*DT*(QXT1-QXT2))/(4.0DO*DX)
!CÁLCULO DE QX
F = UX(I-1,1)*DABS(U(I-1,1))+U(I-1,1)*DSIGN(UX(I-1,1),U(I-1,1))
F = F+UX(I+1,1)*DABS(U(I+1,1))+U(I+1,1)*DSIGN(UX(I+1,1),U(I+1,1))
AO = QX(I+1,1)+QX(I-1,1)+DX*(QXX(I-1,1)-QXX(I+1,1))/4.0DO
QX(I,2) = 0.5DO*(AO+DT*(VX1-VX2)/DX+DT*DT*(VXT1-VXT2)/(4.0DO*DX))-G*DT*F/(4.0DO*C*C)
!CÁLCULO DE HXX
A1 = 2.0DO*(HX(I,2)-HX(I-1,1)+0.5DO*DT*QXX(I-1,1))/DX
A2 = 2.0DO*(HX(I+1,1)-0.5DO*DT*QXX(I+1,1)-HX(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO*(-4.0DO)) THEN
  HXX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  HXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!CÁLCULO DE QXX
A1 = 2.0DO*(QX(I,2)-QX(I-1,1)-0.5DO*DT*QXT1)/DX
A2 = 2.0DO*(QX(I+1,1)+0.5DO*DT*QXT2-QX(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO*(-4.0DO)) THEN
  QXX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  QXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!CÁLCULO DE H
AO = H(I+1,1)+H(I-1,1)+DX*(HX(I-1,1)-HX(I+1,1))/4.0DO
A1 = DX*DX*(HXX(I-1,1)+HXX(I+1,1))/24.0DO
A2 = DT*(Q(I-1,1)-Q(I+1,1))/DX+DT*DT*(QT1-QT2)/(4.0DO*DX)
A6 = 0.5DO*(AO+A1+A2+(DT**3.0DO)*(QTT1-QTT2))/(24.0DO*DX)
!CÁLCULO DE Q
AO = UT1*DABS(U(I-1,1))+U(I-1,1)*DSIGN(UT1,U(I-1,1))+UT2*DABS(U(I+1,1))+
  U(I+1,1)*DSIGN(UT2,U(I+1,1))
A1 = UX(I-1,1)*DABS(U(I-1,1))+U(I-1,1)*DSIGN(UX(I-1,1),U(I-1,1))-UX(I+1,1)*DABS(U(I+1,1))-
  U(I+1,1)*DSIGN(UX(I+1,1),U(I+1,1))
F = DT*(U(I-1,1)*DABS(U(I-1,1))+U(I+1,1)*DABS(U(I+1,1)))+(DT*AO+DX*A1)/4.0DO)
AO = DT*DT*(VT1-VT2+DT*(VTT1-VTT2))/6.0DO)/(4.0DO*DX)
AO = AO+DT*(V1-V2)/DX+DX*DX*(QXX(I-1,1)+QXX(I+1,1))/24.0DO
A7 = 0.5DO*(AO+Q(I+1,1)+Q(I-1,1)+DX*(QX(I-1,1)-QX(I+1,1))/4.0DO)-G*F/(4.0DO*C*C)
H(I,2) = A6-DX*DX*HXX(I,2)/24.0DO; Q(I,2) = A7-DX*DX*QXX(I,2)/24.0DO
A4 = H(I,2); A5 = Q(I,2)
DO K = 1, 20
  !RECÁLCULO DE HX

```

```

A1 = H(I-1,1)-0.5DO*DT*QX(I-1,1); A1 = 2.0DO*(H(I,2)-A1)/DX
A2 = H(I+1,1)-0.5DO*DT*QX(I+1,1); A2 = 2.0DO*(A2-H(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  HX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  HX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!RECÁLCULO DE QX
A1 = Q(I-1,1)+0.5DO*DT*QT1; A1 = 2.0DO*(Q(I,2)-A1)/DX
A2 = Q(I+1,1)+0.5DO*DT*QT2; A2 = 2.0DO*(A2-Q(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  QX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  QX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!RECÁLCULO DE HXX
A1 = 2.0DO*(HX(I,2)-HX(I-1,1)+0.5DO*DT*QXX(I-1,1))/DX
A2 = 2.0DO*(HX(I+1,1)-0.5DO*DT*QXX(I+1,1)-HX(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  HXX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  HXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!RECÁLCULO DE QXX
A1 = 2.0DO*(QX(I,2)-QX(I-1,1)-0.5DO*DT*QXT1)/DX
A2 = 2.0DO*(QX(I+1,1)+0.5DO*DT*QXT2-QX(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  QXX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  QXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!CÁLCULO DE H
H(I,2) = A6-DX*DX*HXX(I,2)/24.0DO
!CÁLCULO DE Q
Q(I,2) = A7-DX*DX*QXX(I,2)/24.0DO
A5 = DABS(Q(I,2)-A5); A4 = DABS(H(I,2)-A4)
IF (A5<10.0DO**(-6.0DO) .AND. A4<10.0DO**(-6.0DO)) THEN
  EXIT
ELSE
  A5 = Q(I,2); A4 = H(I,2)
END IF
END DO
IF(DABS(H(I,2))<10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  U(I,2) = 0.0DO
ELSE
  U(I,2) = Q(I,2)/H(I,2)
END IF
A1 = U(I-1,1)+0.5DO*DT*UT1; A1 = 2.0DO*(U(I,2)-A1)/DX
A2 = U(I+1,1)+0.5DO*DT*UT2; A2 = 2.0DO*(A2-U(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  UX(I,2) = 0.0DO
ELSE

```

```

    UX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!RECÁLCULO DE UXX
A1 = 2.000*(UX(I,2)-UX(I-1,1)-0.500*DT*UXT1)/DX
A2 = 2.000*(UX(I+1,1)+0.500*DT*UXT2-UX(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.000**(-4.000)) THEN
    UXX(I,2) = 0.000
ELSE
    UXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
END DO
U(:,1) = U(:,2); H(:,1) = H(:,2); Q(:,1) = Q(:,2)
UX(:,1) = UX(:,2); HX(:,1) = HX(:,2); QX(:,1) = QX(:,2)
UXX(:,1) = UXX(:,2); HXX(:,1) = HXX(:,2); QXX(:,1) = QXX(:,2)
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(DABS(H(:,1)))))
TT = TT+0.500*DT
IF (TE-TT<0.500*DT+10.000**(-5.000)) THEN
    TT = TT-0.500*DT
    DT = 2.000*(TE-TT)
    TT = TT+0.500*DT; J = J+1
END IF
IF (J == 1) THEN
    EXIT
END IF
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
AO = 0.500*L-TT*C1; A1 = 0.500*L+2.000*TT*C1
u(:,1) = 0.000; DT = 0.100; TT = DT; A6 = 0.500*L; A7 = 0.000
DO WHILE (TT<TE+10.000**(-5.000))
    DO J = 1, N
        I = 2*J-1
        IF (X(I)<AO-10.000**(-5.000)) THEN
            H(I,1) = H1; U(I,1) = 0.000
        ELSE IF(X(I)>AO-10.000**(-5.000) .AND. X(I)<A1+10.000**(-5.000)) THEN
            A2 = 2.000-(X(I)-0.500*L)/(C1*TT)
            A3 = 6.000/(5.000*A2)-2.000/3.000+(4.000*DSQRT(3.000)*(A2**(3.000/2.000)))/135.000
            A4 = 2.000*C1/3.000-(X(I)-0.500*L)/(3.000*TT)+((G/C)**2.000)*A3*TT
            H(I,1) = A4*A4/G
            A3 = 12.000/A2-8.000/3.000+8.000*DSQRT(3.000)*(A2**(3.000/2.000))/189.000-
                108.000/(7.000*A2*A2)
            U(I,1) = 2.000*C1/3.000+2.000*(X(I)-0.500*L)/(3.000*TT)+((G/C)**2.000)*A3*TT
        ELSE
            U(I,1) = 0.000
            H(I,1) = H0
        END IF
    END DO
END DO
A5 = 0.000
DO J = 1, N
    I = 2*J-1
    A5 = MAX(A5,U(I,1))
END DO
A6 = A6+DT*(A7+A5)/2.000 !LOCALIZAÇÃO DO TIP
A7 = A5 !VELOCIDADE NO TIP
TT = TT+DT
END DO
TT = TT-DT

```

```

DO J = 1,N
  I = 2*J-1
  IF (U(I,1)==A7) THEN
    O = J !LOCALIZAÇÃO DO COMEÇO DO TIP
    WRITE(*,*) X(I)
  END IF
  if (A6>X(I)) then
    K = J !LOCALIZAÇÃO DO FINAL DO TIP
  end if
end do
A0 = DX/(H(2*O-1,1)-H(2*(O-1)-1,1))
A1 = (A0*H(2*O-1,1)+X(2*K-1)-X(2*O-1))/(H(2*O-1,1)**2.0D0)
A2 = A0-2.0D0*A1*H(2*O-1,1)
DO J = O, K
  I = 2*J-1
  U(I,1) = A7
  H(I,1) = (-A2-DSQRT(A2*A2-4.0D0*A1*(X(2*K-1)-X(I))))/(2.0D0*A1)
END DO
DO J = K+1,N
  I = 2*J-1
  U(I,1) = 0.0D0
  H(I,1) = 0.0D0
END DO
OPEN(1,FILE="SAIDA1.TXT")
DO J = 1, N-1
  I = 2*J-1
  WRITE(1,1) X(I), H(I,2), U(I,2), H(I,1), U(I,1)
END DO
!WRITE(1,1) DX, DT, T(NT+1), DSQRT(DX*A0),DX*A1,DSQRT(DX*A2),DX*A3
1 FORMAT(9(1F15.6))
CLOSE(1)
END SUBROUTINE DAM_BREAK_FRIC_CESE2
SUBROUTINE FLOW_TRANSCRITICAL_SCHOCK_CESE2
REAL*8 TT,TE,CFL
L = 25.0D0
G = 9.812D0
TE = 100.0D0
CFL = 0.96D0
N = 101
DX = L/(N-1)
M = 2*(N-1)+1
ALLOCATE(U(M,2),H(M,2),Q(M,2),HX(M,2),QX(M,2),A(3,3),B(3))
ALLOCATE(X(M),Z(M),ZX(M),ZXX(M),HXX(M,2),QXX(M,2))
Q = 0.0D0; H = 0.0D0; U = 0.0D0
QX = 0.0D0; HX = 0.0D0; QXX = 0.0D0; HXX = 0.0D0

!CONDIÇÕES INICIAIS
DO I = 1, M
  X(I) = 0.5D0*(I-1)*DX
  IF (X(I) < 8.0D0+(10.0D0**(-6.0D0))) THEN
    Z(I) = 0.0D0; H(I,1) = 0.33D0-Z(I)
  ELSE IF (12.0D0 < X(I)+(10.0D0**(-6.0D0))) THEN
    Z(I) = 0.0D0; H(I,1) = 0.33D0-Z(I)
  ELSE
    Z(I) = 0.2D0-0.05D0*((X(I)-10.0D0)**2.0D0)
    H(I,1) = 0.33D0-Z(I)
  END IF

```

```

END DO
!DERIVADA
ZX(1) = 0.0D0; ZX(2) = 0.0D0
ZX(M+2) = 0.0D0; ZX(M+1) = 0.0D0
ZXX(M+2) = 0.0D0; ZXX(M+1) = 0.0D0
DO I = 3,M
  ZX(I) = (-Z(I+2)+8.0D0*Z(I+1)-8.0D0*Z(I-1)+Z(I-2))/(6.0D0*DX)
  ZXX(I) = (-Z(I+2)+16.0D0*Z(I+1)-30.0D0*Z(I)+16.0D0*Z(I-1)-Z(I-2))/(3.0D0*DX*DX)
END DO
HX(:,1) = -ZX; HXX(:,1) = -ZXX
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1))))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
TT = 0.5D0*DT; J = 0
DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-5.0D0))
  !CÁLCULO DO NOVO UX, HX, UXX E HXX
  H(1,2) = H(2,1); Q(1,2) = 0.18D0
  H(M,2) = 0.33D0-Z(M); Q(M,2) = Q(M-1,1)
  DO I = 2,M-1
    CALL CALCULA_ORDEM_2
  END DO
  HX(1,2) = HX(2,1); QX(1,2) = QX(2,1)
  HXX(1,2) = HXX(2,1); QXX(1,2) = QXX(2,1)
  HX(M,2) = HX(M-1,1); QX(M,2) = QX(M-1,1)
  QXX(M,2) = QXX(M-1,1); HXX(M,2) = HXX(M-1,1)
  H(:,1) = H(:,2); HX(:,1) = HX(:,2); HXX(:,1) = HXX(:,2)
  Q(:,1) = Q(:,2); QX(:,1) = QX(:,2); QXX(:,1) = QXX(:,2)
  !CÁLCULO DE U
  DO I = 1,M
    U(I,2) = Q(I,2)/H(I,2)
  END DO
  DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,2))))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,2))))
  TT = TT+0.5D0*DT
  IF (TE-TT<0.5D0*DT+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    TT = TT-0.5D0*DT
    DT = 2.0D0*(TE-TT)
    TT = TT+0.5D0*DT; J = J+1
  END IF
  IF (J == 1) THEN
    EXIT
  END IF
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
A0 = 0.2D0 !Z MAXIMO
A2 = 0.33D0 !H(L)
A3 = 0.18D0 !Q0
!DETERMINANDO A ALTURA MÁXIMA
A1 = (A3/DSQRT(G))**(2.0D0/3.0D0)
!DETERMINANDO O SHOCK
A4 = 0.2D0; A5 = 0.3D0; A6 = 0.005D0
DO I = 1,100
  A(1,1) = 3*A4*A4+2*(A6-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*A4; A(1,2) = 0.0D0; A(1,3) = A4*A4
  A(2,1) = 0.0D0; A(2,2) = 3*A5*A5+2*(A6-((A3/A2)**2.0D0)/(2*G)-A2)*A5; A(2,3) = A5*A5
  A(3,1) = -((A3/A4)**2.0D0)+G*A4; A(3,2) = (A3/A5)**2.0D0-G*A5; A(3,3) = 0.0D0
  B(1) = A4**3.0D0+(A6-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*A4*A4+A3*A3/(2*G)
  B(2) = A5**3.0D0+(A6-((A3/A2)**2.0D0)/(2*G)-A2)*A5*A5+A3*A3/(2*G)
  B(3) = A3*A3*(1/A4-1/A5)+0.5D0*G*(A4*A4-A5*A5)
  CALL LU(A, B, 3)
  A4 = A4-B(1); A5 = A5-B(2); A6 = A6-B(3)

```

```

END DO
A6 = 10.0D0+DSQRT((0.2D0-A6)/0.05D0) !X DE SHOCK
DO K = 1, M
  IF (X(K) < 10.D0+10.0D0**(-6.0D0)) THEN
    A4 = 0.4D0
    DO I = 1, 100
      A5 = (A4**3.0D0)+(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*(A4**2.0D0)+A3*A3/(2*G)
      A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*A4)
      A4 = A4+A5
    END DO
    H(K,1) = A4!+Z(K)
    U(K,1) = A3/A4
  ELSE IF (X(K) < A6+10.0D0**(-6.0D0)) THEN
    A4 = 0.1D0
    DO I = 1, 100
      A5 = (A4**3.0D0)+(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*(A4**2.0D0)+A3*A3/(2*G)
      A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*A4)
      A4 = A4+A5
    END DO
    H(K,1) = A4!+Z(K)
    U(K,1) = A3/A4
    J = K
  ELSE IF (X(K) < 12.0D0+10.0D0**(-6.0D0)) THEN
    A4 = 0.3D0
    DO I = 1, 100
      A5 = (A4**3.0D0)+(Z(K)-((A3/A2)**2.0D0)/(2*G)-A2)*(A4**2.0D0)+A3*A3/(2*G)
      A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A2)**2.0D0)/(2*G)-A2)*A4)
      A4 = A4+A5
    END DO
    H(K,1) = A4!+Z(K)
    U(K,1) = A3/A4
  ELSE
    H(K,1) = A2!+Z(K)
    U(K,1) = A3/A2
  END IF
END DO
A0 = 0.0D0; A1 = 0.0D0
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  WRITE(1,1) X(I), Z(I), H(I,2)+Z(I), H(I,1)+Z(I), U(I,2), U(I,1)
END DO
1 FORMAT(7(1F22.12))
! WRITE(*,*) X(J)
! M = (J+1)/2
! A0 = 0.0D0; A1 = 0.0D0; A2 = 0.0D0; A3 = 0.0D0
! A4 = 0.0D0; A5 = 0.0D0; A6 = 0.0D0; A7 = 0.0D0
! DO J = 1,M
! I = 2*J-1
! A0 = A0+DABS(H(I,2)-H(I,1))
! A1 = A1+DABS(U(I,2)-U(I,1))
! A2 = A2+(H(I,2)-H(I,1))**2.0D0
! A3 = A3+(U(I,2)-U(I,1))**2.0D0
! A4 = A4+DABS(H(I,1))
! A5 = A5+(H(I,1))**2.0D0
! A6 = A6+DABS(U(I,1))
! A7 = A7+(U(I,1))**2.0D0

```

```

! END DO
! WRITE(1,1) A0/A4,A1/A6,DSQRT(A2/A5),DSQRT(A3/A7)!DX*A0,DX*A1,DSQRT(DX*A2),DSQRT(DX*A3)
! 1 FORMAT(1X,9(1PE15.6))
CLOSE(1)
END SUBROUTINE FLOW_TRANSCRITICAL_SCHOCK_CESE2
SUBROUTINE FLOW_SUBCRITICAL_CESE2
REAL*8 TT,TE,CFL
L = 25.0D0
G = 9.812D0
TE = 100.5D0
CFL = 0.9D0
N = 101
DX = L/(N-1)
M = 2*(N-1)+1
ALLOCATE(U(M,2),H(M,2),Q(M,2),HX(M,2),QX(M,2))
ALLOCATE(X(M),Z(M),ZX(M),ZXX(M),HXX(M,2),QXX(M,2))

U = 0.0D0; Q = 0.0D0; H = 0.0D0
QX = 0.0D0; HX = 0.0D0; QXX = 0.0D0; HXX = 0.0D0
!CONDIÇÕES INICIAIS
DO I = 1, M
  X(I) = 0.5D0*(I-1)*DX
  IF (X(I) < 8.0D0+(10.0D0**(-6.0D0))) THEN
    Z(I) = 0.0D0; H(I,1) = 2.0D0-Z(I)
  ELSE IF (12.0D0 < X(I)+(10.0D0**(-6.0D0))) THEN
    Z(I) = 0.0D0; H(I,1) = 2.0D0-Z(I)
  ELSE
    Z(I) = 0.2D0-0.05D0*((X(I)-10.0D0)**2.0D0)
    H(I,1) = 2.0D0-Z(I)
  END IF
END DO
!CONDIÇÕES INICIAIS
ZX(1) = 0.0D0; ZX(2) = 0.0D0
ZX(M-1) = 0.0D0; ZX(M) = 0.0D0
ZXX(M) = 0.0D0; ZXX(M) = 0.0D0
DO I = 3,M-2
  ZX(I) = (-Z(I+2)+8.0D0*Z(I+1)-8.0D0*Z(I-1)+Z(I-2))/(6.0D0*DX)
  ZXX(I) = (-Z(I+2)+16.0D0*Z(I+1)-30.0D0*Z(I)+16.0D0*Z(I-1)-Z(I-2))/(3.0D0*DX*DX)
END DO
HX(:,1) = -ZX; HXX(:,1) = -ZXX
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
TT = 0.5D0*DT; J = 0
DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-5.0D0))
  !CÁLCULO DO NOVO UX, HX, UXX E HXX
  H(1,2) = H(2,1); H(M,2) = 2.0D0-Z(M)
  Q(1,2) = 4.42D0; Q(M,2) = Q(M-1,1)
  DO I = 2,M-1
    CALL CALCULA_ORDEM_2
  END DO
  HX(1,2) = HX(2,1); HX(M,2) = HX(M-1,1)
  HXX(1,2) = HXX(2,1); HXX(M,2) = HXX(M-1,1)
  QX(1,2) = QX(2,1); QX(M,2) = QX(M-1,1);
  QXX(M,2) = QXX(M-1,1); QXX(:,1) = QXX(:,2)
  H(:,1) = H(:,2); Q(:,1) = Q(:,2)
  HX(:,1) = HX(:,2); QX(:,1) = QX(:,2)
  HXX(:,1) = HXX(:,2); QXX(1,2) = QXX(2,1)
  !CÁLCULO DE U

```

```

DO I = 1, M
  U(I, 2) = Q(I, 2)/H(I, 2)
END DO
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:, 2)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:, 2))))
TT = TT+0.5DO*DT
IF (TE-TT<0.5DO*DT+10.0DO**(-5.0DO)) THEN
  TT = TT-0.5DO*DT
  DT = 2.0DO*(TE-TT)
  TT = TT+0.5DO*DT; J = J+1
END IF
IF (J == 1) THEN
  EXIT
END IF
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
AO = 0.2DO !Z MAXIMO
A2 = 2.0DO !H(L)
A3 = 4.42DO !QO
!DETERMINANDO A ALTURA MÁXIMA
A1 = (A3/DSQRT(G))*2.0DO/3.0DO
DO K = 1, M
  IF (X(K) < 10.0DO+10.0DO**(-6.0DO)) THEN
    A4 = A2
    DO I = 1, 100
      A5 = (A4**3.0DO)+(Z(K)-((A3/A2)**2.0DO)/(2*G)-A2)*(A4**2.0DO)+A3*A3/(2*G)
      A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A2)**2.0DO)/(2*G)-A2)*A4)
      A4 = A4+A5
    END DO
    H(K, 1) = A4+Z(K)
    U(K, 1) = A3/A4
  ELSE IF (X(K) < 12.0DO+10.0DO**(-6.0DO)) THEN
    A4 = A2
    DO I = 1, 100
      A5 = (A4**3.0DO)+(Z(K)-((A3/A2)**2.0DO)/(2*G)-A2)*(A4**2.0DO)+A3*A3/(2*G)
      A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A2)**2.0DO)/(2*G)-A2)*A4)
      A4 = A4+A5
    END DO
    H(K, 1) = A4+Z(K)
    U(K, 1) = A3/A4
  ELSE
    A4 = A2
    DO I = 1, 100
      A5 = (A4**3.0DO)+(Z(K)-((A3/A2)**2.0DO)/(2*G)-A2)*(A4**2.0DO)+A3*A3/(2*G)
      A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A2)**2.0DO)/(2*G)-A2)*A4)
      A4 = A4+A5
    END DO
    H(K, 1) = A4+Z(K)
    U(K, 1) = A3/A4
  END IF
END DO
AO = 0.0DO; A1 = 0.0DO
OPEN(1, FILE="SAIDA.TXT")
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  WRITE(1, 1) X(I), Z(I), H(I, 2)+Z(I), H(I, 1), U(I, 2), U(I, 1)
  !AO = AO + (H(I, NT+1)+Z(I)-U(I, 2))*2.0DO
  !A1 = A1 + DABS(H(I, NT+1)+Z(I)-U(I, 2))

```

```

END DO
1 FORMAT(7(1F22.12))
!A0 = DSQRT(DX*A0); A1 = DX*A1
CLOSE(1)
END SUBROUTINE FLOW_SUBCRITICAL_CESE2
SUBROUTINE PLANAR_CESE2
REAL*8 A,W,TT,TE,CFL
N = 101
L = 4.0D0
DX = L/(N-1)
M = 2*(N-1)+1
G = 9.812D0
HO = 0.5D0
A = 1.0D0
CO = DSQRT(2.0D0*G*HO)
C1 = CO/(2.0D0*A)
PI = DACOS(-1.0D0)
W = 2.0D0*PI*A/CO
TE = W
CFL = 0.9D0
ALLOCATE(U(M,2),H(M,2),HX(M,2),UX(M,2),Q(M,2),QX(M,2),Z(M),ZX(M),ZXX(M))
ALLOCATE(UXX(M,2),HXX(M,2),QXX(M,2),X(M))
DO I = 1, M
  X(I) = 0.5D0*(I-1.0D0)*DX
  Z(I) = HO*((X(I)-0.5D0*L)/A)**2.0D0-1.0D0)
  ZX(I) = 2.0D0*HO*(X(I)-0.5D0*L)/(A*A)
  ZXX(I) = 2.0D0*HO/(A*A)
END DO
!CONDIÇÕES INICIAIS
U = 0.0D0; H = 0.0D0; Q = 0.0D0
UX = 0.0D0; HX = 0.0D0; QX = 0.0D0
UXX = 0.0D0; HXX = 0.0D0; QXX = 0.0D0
A1 = 0.5D0*(L-1.0D0)-A; A2 = 0.5D0*(L-1.0D0)+A
DO I = 1, M
  IF(A1-10.0D0**(-5.0D0)<X(I) .AND. X(I)<A2+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = -HO*((X(I)-0.5D0*L)/A+C1/CO)**2.0D0-1.0D0)
  ELSE
    H(I,1) = 0.0D0
  END IF
END DO
!DERIVADA
HX(1,1) = 0.0D0; HX(2,1) = 0.0D0
HX(M,1) = 0.0D0; HX(M-1,1) = 0.0D0
HXX(M,1) = 0.0D0; HXX(M-1,1) = 0.0D0
DO I = 3,M-2
  HX(I,1) = (-H(I+2,1)+8.0D0*H(I+1,1)-8.0D0*H(I-1,1)+H(I-2,1))/(6.0D0*DX)
  HXX(I,1) = (-H(I+2,1)+16.0D0*H(I+1,1)-30.0D0*H(I,1)+16.0D0*H(I-1,1)-H(I-2,1))/(3.0D0*DX*DX)
END DO
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
TT = 0.5D0*DT; J = 0
DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-5.0D0))
  !CÁLCULO DO NOVO U
  H(1,2) = H(2,1); U(1,2) = U(2,1); Q(1,2) = Q(2,1) !CC DE ABSORÇÃO
  H(M,2) = H(M-1,1); U(M,2) = U(M-1,1); Q(M,2) = Q(M-1,1)
  DO I = 2, M-1
    CALL CALCULA_ORDEM_2_0
  END DO

```

```

HX(1,2) = HX(2,1); UX(1,2) = UX(2,1); QX(1,2) = QX(2,1) !CC DE ABSORÇÃO
HX(M,2) = HX(M-1,1); UX(M,2) = UX(M-1,1); QX(M,2) = QX(M-1,1)
HXX(1,2) = HXX(2,1); UXX(1,2) = UXX(2,1); QXX(1,2) = QXX(2,1) !CC DE ABSORÇÃO
HXX(M,2) = HXX(M-1,1); UXX(M,2) = UXX(M-1,1); QXX(M,2) = QXX(M-1,1)
U(:,1) = U(:,2); UX(:,1) = UX(:,2); UXX(:,1) = UXX(:,2)
H(:,1) = H(:,2); HX(:,1) = HX(:,2); HXX(:,1) = HXX(:,2)
Q(:,1) = Q(:,2); QX(:,1) = QX(:,2); QXX(:,1) = QXX(:,2)
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
TT = TT+0.5D0*DT
IF (TE-TT<0.5D0*DT+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  TT = TT-0.5D0*DT
  DT = 2.0D0*(TE-TT)
  TT = TT+0.5D0*DT; J = J+1
END IF
IF (J == 1) THEN
  EXIT
END IF
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
AO = 0.5D0*(L-DCOS(CO*TT/A))-A
A1 = 0.5D0*(L-DCOS(CO*TT/A))+A
DO I = 1, M
  IF(X(I)>AO-10.0D0**(-5.0D0) .AND. X(I)<A1+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = -HO*((X(I)-0.5D0*L)/A+C1*DCOS(CO*TT/A)/CO)**2.0D0-1.0D0)
    U(I,1) = C1*DSIN(CO*TT/A)
  ELSE
    H(I,1) = 0.0D0
    U(I,1) = 0.0D0
  END IF
END DO
END DO
!CÁLCULO DO ERRO
AO = (H(1,2)-H(1,1))**2.0D0; A1 = DABS(H(1,2)-H(1,1))
A2 = (U(1,2)-U(1,1))**2.0D0; A3 = DABS(U(1,2)-H(1,1))
DO K = 2, N-1
  I = 2*K-1
  AO = AO+(H(I,2)-H(I,1))**2.0D0; A1 = A1+DABS(H(I,2)-H(I,1))
  A2 = A2+(U(I,2)-U(I,1))**2.0D0; A3 = A3+DABS(U(I,2)-H(I,1))
END DO
AO = AO+(H(M,2)-H(M,1))**2.0D0; A1 = A1+DABS(H(M,2)-H(M,1))
A2 = A2+(U(M,2)-U(M,1))**2.0D0; A3 = A3+DABS(U(M,2)-H(M,1))

OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  WRITE(1,1) X(I), Z(I), H(I,2)+Z(I), H(I,1)+Z(I), H(I,2)*U(I,2), H(I,1)*U(I,1)
END DO
1 FORMAT(9(1F15.6))
CLOSE(1)
END SUBROUTINE PLANAR_CESE2
SUBROUTINE DAM_BREAK_ICESE2
REAL*8 TT,TE,CFL,U1,U0
L = 600.0D0
TE = 2.0D0
G = 9.812D0
H1 = 5.0D0; HO = 10.0D0
U1 = 0.0D0; U0 = 40.0D0
CO = DSQRT(G*HO)

```

```

C1 = DSQRT(G*H1)
PI = DACOS(-1.0D0)
CFL = 0.96D0
ALLOCATE(A(3,3),B(3))
N = 201
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
DX = L/(N-1)
M = 2*(N-1)+1
ALLOCATE(U(M,2),H(M,2),Q(M,2),HX(M,2),UX(M,2),QX(M,2),X(M))
ALLOCATE(UXX(M,2),HXX(M,2),QXX(M,2))
DO I = 1, M
  X(I) = -200.0D0+0.5D0*(I-1.0D0)*DX
END DO
!CONDIÇÕES INICIAIS
U = 0.0D0; H = 0.0D0; Q = 0.0D0
UX = 0.0D0; HX = 0.0D0; QX = 0.0D0
UXX = 0.0D0; HXX = 0.0D0; QXX = 0.0D0
DO I = 1, M
  IF(X(I) < 10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = H1; U(I,1) = U1; Q(I,1) = H1*U1
  ELSE
    H(I,1) = H0; U(I,1) = U0; Q(I,1) = H0*U0
  END IF
END DO
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
TT = 0.5D0*DT; J = 0
DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-5.0D0))
  !CÁLCULO DO NOVO U
  H(1,2) = H(2,1); Q(1,2) = Q(2,1); H(M,2) = H(M-1,1); Q(M,2) = Q(M-1,1)
  HX(1,2) = HX(2,1); QX(1,2) = QX(2,1); HX(M,2) = HX(M-1,1); QX(M,2) = QX(M-1,1)
  HXX(1,2) = HXX(2,1); QXX(1,2) = QXX(2,1); HXX(M,2) = HXX(M-1,1); QXX(M,2) = QXX(M-1,1)
  DO I = 2,M-1
    CALL CALCULA_ORDEM_2H
  END DO
  Q(:,1) = Q(:,2); QX(:,1) = QX(:,2);
  H(:,1) = H(:,2); HX(:,1) = HX(:,2)
  HXX(:,1) = HXX(:,2); QXX(:,1) = QXX(:,2)
  DO I = 1, M
    U(I,2) = Q(I,2)/H(I,2)
  END DO
  DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,2)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,2))))
  TT = TT+0.5D0*DT
  IF (TE-TT<0.5D0*DT+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    TT = TT-0.5D0*DT
    DT = 2.0D0*(TE-TT)
    TT = TT+0.5D0*DT; J = J+1
  END IF
  IF (J == 1) THEN
    EXIT
  END IF
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
!DETERMINAÇÃO DO PARÂMETRO XI
A0 = (U1-C1)*TT; A1 = (U1+2.0D0*C1)*TT
A2 = (U0-2.0D0*CO)*TT; A3 = (U0+CO)*TT
DO I = 1, M
  IF(X(I)<A0+10.0D0**(-5.0D0)) THEN

```

```

      H(I,1) = H1; U(I,1) = U1
    ELSE IF (A0-10.0D0**(-5.0D0)<X(I).AND. X(I) <A1+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
      H(I,1) = ((U1+2.0D0*C1-(X(I)/TT)**2.0D0)/(9.0D0*G)
      U(I,1) = (U1+2.0D0*C1+2.0D0*X(I)/TT)/3.0D0
    ELSE IF (A1-10.0D0**(-5.0D0)<X(I).AND. X(I) <A2+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
      H(I,1) = 0.0D0; U(I,1) = 0.0D0
    ELSE IF (A2-10.0D0**(-5.0D0)<X(I).AND. X(I) <A3+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
      H(I,1) = ((-U0+2.0D0*CO+X(I)/TT)**2.0D0)/(9.0D0*G)
      U(I,1) = (U0-2.0D0*CO+2.0D0*X(I)/TT)/3.0D0
    ELSE
      H(I,1) = H0; U(I,1) = U0
    END IF
  END DO
!CÁLCULO DO ERRO
A0 = 0.0D0; A1 = 0.0D0; A2 = 0.0D0; A3 = 0.0D0
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  A0 = A0+(H(I,2)-H(I,1))**2.0D0; A1 = A1+DABS(H(I,2)-H(I,1))
  A2 = A2+(U(I,2)-U(I,1))**2.0D0; A3 = A3+DABS(U(I,2)-H(I,1))
END DO
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  WRITE(1,1) X(I), H(I,2), h(i,2)*U(I,2), H(I,1), h(i,1)*U(I,1)
END DO
!WRITE(1,1) DX, DT, DSQRT(DX*A0),DX*A1,DSQRT(DX*A2),DX*A3
1 FORMAT(9(1F15.6))
!DEALLOCATE(U,H,X,HX,UX,Q,QX)
!N = 2*N-1
CLOSE(1)
END SUBROUTINE DAM_BREAK_ICESE2
SUBROUTINE DAM_BREAK_CESE2
REAL*8 TE,TT,CFL,VX1,VX2
N = 201
L = 2000.0D0
DX = L/(N-1)
M = 2*(N-1)+1
G = 9.812D0
H1 = 10.0D0
H0 = 5.0D0
CO = DSQRT(G*H0)
C1 = DSQRT(G*H1)
PI = DACOS(-1.0D0)
TE = 52.0D0
CFL = 0.8D0
ALLOCATE(U(M,2),Q(M,2),H(M,2),X(M),HX(M,2),HXX(M,2),QX(M,2),QXX(M,2),A(3,3),B(3))

DO I = 1, M
  X(I) = 0.5D0*(I-1.0D0)*DX
END DO

!CONDIÇÕES INICIAIS
U = 0.0D0; H = 0.0D0; QX = 0.0D0; HX = 0.0D0; QXX = 0.0D0; HXX = 0.0D0
DO I = 1, M
  IF(X(I) < 1000+10**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = H1
  ELSE
    H(I,1) = H0
  
```

```

END IF
END DO
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
TT = 0.5D0*DT; J = 0
DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-5.0D0))
  !CÁLCULO DO NOVO U
  H(1,2) = H(2,1); Q(1,2) = Q(2,1); H(M,2) = H(M-1,1); Q(M,2) = Q(M-1,1)
  HX(1,2) = HX(2,1); QX(1,2) = QX(2,1); HX(M,2) = HX(M-1,1); QX(M,2) = QX(M-1,1)
  HXX(1,2) = HXX(2,1); QXX(1,2) = QXX(2,1); HXX(M,2) = HXX(M-1,1); QXX(M,2) = QXX(M-1,1)
  DO I = 2, M-1
    CALL CALCULA_ORDEM_2H
  END DO
  Q(:,1) = Q(:,2); QX(:,1) = QX(:,2);
  H(:,1) = H(:,2); HX(:,1) = HX(:,2)
  HXX(:,1) = HXX(:,2); QXX(:,1) = QXX(:,2)
  DO I = 1, M
    U(I,2) = Q(I,2)/H(I,2)
  END DO
  DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,2)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,2))))
  TT = TT+0.5D0*DT
  IF (TE-TT<0.5D0*DT+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    TT = TT-0.5D0*DT
    DT = 2.0D0*(TE-TT)
    TT = TT+0.5D0*DT; J = J+1
  END IF
  IF (J == 1) THEN
    EXIT
  END IF
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
!DETERMINAÇÃO DO PARÂMETRO XI
A0 = 1.0D0 !PASSO INICIAL DE NEWTON
DO I = 1, 100
  A2 = A0/CO-(CO/(4*A0))*(1+DSQRT(1+8*((A0/CO)**2.0D0)))-(2*C1)/CO
  A2 = A2+DSQRT(2*(DSQRT(1+8*((A0/CO)**2.0D0))-1))
  VX1 = 1.0D0/CO+(CO/(4*(A0**2.0D0)))*(1+DSQRT(1+8*((A0/CO)**2.0D0)))-
    2/(CO*DSQRT(1+8*((A0/CO)**2.0D0)))
  VX1 = VX1+(8*A0)/(CO*CO*DSQRT(1+8*((A0/CO)**2.0D0))*DSQRT(2*(DSQRT(1+8*((A0/CO)**2.0D0))-1))
  VX2 = A0-(A2/VX1)
  IF(DABS(VX2-A0)<10.0D0**(-10.0D0)) THEN
    EXIT
  ELSE
    A0 = VX2
  END IF
END DO
A0 = VX2*TT
A2 = VX2-CO*CO*(1+DSQRT(1+8*((VX2/CO)**2.0D0)))/(4*VX2)
A1 = CO*DSQRT((DSQRT(1+8*((VX2/CO)**2.0D0))-1)/2.0)
VX1 = -C1*TT
VX2 = (A2-A1)*TT
DO I = 1, M
  IF(X(I)-1000 < VX1+10**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = H1
    U(I,1) = 0.0D0
  ELSE IF(VX1-10**(-5.0D0)<X(I)-1000 .AND. X(I)-1000<VX2+10**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = ((2*C1-(X(I)-1000)/TT)**2.0D0)/(9*G)
    U(I,1) = 2*(C1+(X(I)-1000)/TT)/3

```

```

ELSE IF(VX2-10**(-5.0D0)<X(I)-1000 .AND. X(I)-1000<A0+10**(-5.0D0)) THEN
  H(I,1) = (A1**2.0D0)/G
  U(I,1) = A2
ELSE IF(A0-10**(-5.0D0)<X(I)-1000) THEN
  H(I,1) = H0
  U(I,1) = 0.0D0
END IF
END DO
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
!A0 = 0.0D0; A1 = 0.0D0; A2 = 0.0D0; A3 = 0.0D0
!A4 = 0.0D0; A5 = 0.0D0; A6 = 0.0D0; A7 = 0.0D0
!DO J = 1,N
  !I = 2*J-1
  !A0 = A0+DABS(H(I,2)-H(I,1))
  !A1 = A1+DABS(U(I,2)-U(I,1))
  !A2 = A2+(H(I,2)-H(I,1))**2.0D0
  !A3 = A3+(U(I,2)-U(I,1))**2.0D0
  !A4 = A4+DABS(H(I,1))
  !A5 = A5+(H(I,1))**2.0D0
  !A6 = A6+DABS(U(I,1))
  !A7 = A7+(U(I,1))**2.0D0
!END DO
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  WRITE(1,1) X(I), H(I,2), U(I,2), H(I,1), U(I,1)
END DO
!WRITE(1,1) DX, DT, A0/A4,A1/A6,DSQRT(A2/A5),DSQRT(A3/A7)
1 FORMAT(9(1PE15.6))
CLOSE(1)
END SUBROUTINE DAM_BREAK_CESE2
SUBROUTINE DAM_BREAK_OCESE2
REAL*8 TT,TE,CFL
N = 101
L = 2000.0D0
TE = 50.DO
DX = L/(N-1)
M = 2*(N-1)+1
G = 9.812D0
H1 = 10.0D0
H0 = 10.0D0**(-8.0D0)
CO = DSQRT(G*H0)
C1 = DSQRT(G*H1)
PI = DACOS(-1.0D0)
CFL = 0.9D0
ALLOCATE(U(M,2),H(M,2),Q(M,2),HX(M,2),UX(M,2),QX(M,2))
ALLOCATE(A(3,3),B(3),X(M),HXX(M,2),UXX(M,2),QXX(M,2))

DO I = 1, M
  X(I) = 0.5D0*(I-1.0D0)*DX
END DO

!CONDIÇÕES INICIAIS
U = 0.0D0; H = 0.0D0; QX = 0.0D0; HX = 0.0D0; QXX = 0.0D0; HXX = 0.0D0
DO I = 1, M
  IF(X(I) < 1000+10**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = H1
  ELSE

```

```

      H(I,1) = HO
    END IF
  END DO
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
TT = 0.5D0*DT; J = 0
DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-5.0D0))
  !CÁLCULO DO NOVO U
  H(1,2) = H(2,1); Q(1,2) = Q(2,1); H(M,2) = H(M-1,1); Q(M,2) = Q(M-1,1)
  HX(1,2) = HX(2,1); QX(1,2) = QX(2,1); HX(M,2) = HX(M-1,1); QX(M,2) = QX(M-1,1)
  HXX(1,2) = HXX(2,1); QXX(1,2) = QXX(2,1); HXX(M,2) = HXX(M-1,1); QXX(M,2) = QXX(M-1,1)
  DO I = 2, M-1
    CALL CALCULA_ORDEM_2H
  END DO
  Q(:,1) = Q(:,2); QX(:,1) = QX(:,2);
  H(:,1) = H(:,2); HX(:,1) = HX(:,2)
  HXX(:,1) = HXX(:,2); QXX(:,1) = QXX(:,2)
  DO I = 1, M
    U(I,2) = Q(I,2)/H(I,2)
  END DO
  DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,2)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,2))))
  TT = TT+0.5D0*DT
  IF (TE-TT<0.5D0*DT+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    TT = TT-0.5D0*DT
    DT = 2.0D0*(TE-TT)
    TT = TT+0.5D0*DT; J = J+1
  END IF
  IF (J == 1) THEN
    EXIT
  END IF
END DO
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
!DETERMINAÇÃO DO PARÂMETRO XI
HO = 0.0D0
AO = -TT*C1
A1 = 2*TT*C1
DO I = 1, M
  IF(X(I)-0.5D0*L <AO+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = H1
    U(I,1) = 0.0D0
  ELSE IF(AO-10.0D0**(-5.0D0)<X(I)-0.5D0*L .AND. X(I)-0.5D0*L <A1+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    H(I,1) = 4.0D0*((C1-(X(I)-0.5D0*L)/(2.0D0*TT))**2.0D0)/(9.0D0*G)
    U(I,1) = 2.0D0*(C1+(X(I)-0.5D0*L)/TT)/3.0D0
  ELSE
    H(I,1) = HO
    U(I,1) = 0.0D0
  END IF
END DO
!CÁLCULO DO ERRO
AO = (H(1,2)-H(1,1))**2.0D0; A1 = DABS(H(1,2)-H(1,1))
A2 = (U(1,2)-U(1,1))**2.0D0; A3 = DABS(U(1,2)-H(1,1))
DO J = 2, N-1
  I = 2*J-1
  AO = AO+(H(I,2)-H(I,1))**2.0D0; A1 = A1+DABS(H(I,2)-H(I,1))
  A2 = A2+(U(I,2)-U(I,1))**2.0D0; A3 = A3+DABS(U(I,2)-H(I,1))
END DO
AO = AO+(H(M,2)-H(M,1))**2.0D0; A1 = A1+DABS(H(M,2)-H(M,1))
A2 = A2+(U(M,2)-U(M,1))**2.0D0; A3 = A3+DABS(U(M,2)-H(M,1))

```

```

OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  WRITE(1,1) X(I), H(I,2), U(I,2), H(I,1), U(I,1)
END DO
!WRITE(1,1) DX, DT, T(NT+1), DSQRT(DX*A0),DX*A1,DSQRT(DX*A2),DX*A3
1 FORMAT(9(1F15.6))
CLOSE(1)
END SUBROUTINE DAM_BREAK_OCESE2
SUBROUTINE ACCURACY_TEST_CESE2 !TRANSCRITICAL SEM CHOQUE
REAL*8 TT,TE,CFL
L = 25.0D0
G = 9.812D0
PI = DACOS(-1.0D0)
TE = 100.0D0
CFL = 0.96D0
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
N = 101
DO O = 1,1
  DX = L/(N-1)
  M = 2*(N-1)+1
  ALLOCATE(U(M+2,2),H(M+2,2),Q(M+2,2),HX(M+2,2),QX(M+2,2))
  ALLOCATE(X(M+2),Z(M+2),ZX(M+2),ZXX(M+2),HXX(M+2,2),QXX(M+2,2))
  DO I = 1, M+2
    X(I) = 0.5D0*(I-1.0D0)*DX
  END DO
  !CONDIÇÕES DE CONTORNO
  Q(1,:) = 1.53D0; H(M+2,:) = 0.66D0; U = 0.0D0
  !CONDIÇÕES INICIAIS
  DO I = 1, M+2
    IF (X(I)>8.0D0+10.0D0**(-5.0D0) .AND. X(I)<12.0D0-10.0D0**(-5.0D0)) THEN
      Z(I) = 0.2D0-0.05D0*((X(I)-10.0D0)**2.0D0); H(I,1) = 0.66D0-Z(I)
    ELSE
      Z(I) = 0.0D0; H(I,1) = 0.66D0
    END IF
  END DO
  !DERIVADA
  ZX(1) = 0.0D0; ZX(2) = 0.0D0
  ZX(M+2) = 0.0D0; ZX(M+1) = 0.0D0
  ZXX(M+2) = 0.0D0; ZXX(M+1) = 0.0D0
  DO I = 3,M
    ZX(I) = (-Z(I+2)+8.0D0*Z(I+1)-8.0D0*Z(I-1)+Z(I-2))/(6.0D0*DX)
    ZXX(I) = (-Z(I+2)+16.0D0*Z(I+1)-30.0D0*Z(I)+16.0D0*Z(I-1)-Z(I-2))/(3.0D0*DX*DX)
  END DO
  HX(:,1) = -ZX; HXX(:,1) = -ZXX; HXX(:,2) = HXX(:,1)
  Q(:,1) = 0.0D0; QX = 0.0D0; U(:,1) = 0.0D0; HX(:,2) = HX(:,1)
  DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,1))))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,1))))
  TT = 0.5D0*DT; J = 0
  DO WHILE (TT<TE+10.0D0**(-5.0D0))
    !CÁLCULO DO NOVO U
    H(1,2) = H(2,1); H(M+2,2) = 0.66D0 !CONDIÇÕES DE CONTORNO
    Q(1,2) = 1.53D0; Q(M+2,2) = Q(M+1,1)
    HX(1,2) = HX(2,1); HX(M+2,2) = HX(M+1,1)
    QX(1,2) = QX(2,1); QX(M+2,2) = QX(M+1,1)
    QXX(1,2) = QXX(2,1);QXX(M+2,2) = QXX(M+1,1)
    DO I = 2, M+1

```

```

CALL CALCULA_ORDEM_2
END DO
H(:,1) = H(:,2); Q(:,1) = Q(:,2)
HX(:,1) = HX(:,2); QX(:,1) = QX(:,2)
HXX(:,1) = HXX(:,2); QXX(:,1) = QXX(:,2)
!CÁLCULO DE U
DO I = 1,M+2
    U(I,2) = Q(I,2)/H(I,2)
END DO
DT = CFL*DX/(MAXVAL(DABS(U(:,2)))+DSQRT(G*MAXVAL(H(:,2))))
TT = TT+0.5D0*DT
IF (TE-TT<0.5D0*DT+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
    TT = TT-0.5D0*DT
    DT = 2.0D0*(TE-TT)
    TT = TT+0.5D0*DT; J = J+1
END IF
IF (J == 1) THEN
    EXIT
END IF
END DO
TT = TT-0.5D0*DT
!SOLUÇÃO ANALÍTICA
A0 = 0.2D0 !Z MAXIMO
A2 = 0.66D0 !H(L)
A3 = 1.53D0 !Q0
!DETERMINANDO A ALTURA MÁXIMA
A1 = (A3/DSQRT(G))**(2.0D0/3.0D0)
DO K = 1, M
    IF (X(K) < 10.0D0+10.0D0**(-6.0D0)) THEN
        A4 = 1.0D0
        DO I = 1, 100
            A5 = (A4**3.0D0)+(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*(A4**2.0D0)+A3*A3/(2*G)
            A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*A4)
            A4 = A4+A5
        END DO
        H(K,1) = A4!+Z(K)
        U(K,1) = A3/A4
        J = K
    ELSE IF (X(K) < 12.0D0+10.0D0**(-6.0D0)) THEN
        A4 = 0.3D0
        DO I = 1, 100
            A5 = (A4**3.0D0)+(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*(A4**2.0D0)+A3*A3/(2*G)
            A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*A4)
            A4 = A4+A5
        END DO
        H(K,1) = A4!+Z(K)
        U(K,1) = A3/A4
    ELSE
        A4 = A2
        DO I = 1, 100
            A5 = (A4**3.0D0)+(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*(A4**2.0D0)+A3*A3/(2*G)
            A5 = -A5/(3*A4*A4+2*(Z(K)-((A3/A1)**2.0D0)/(2*G)-A1-A0)*A4)
            A4 = A4+A5
        END DO
        H(K,1) = A4!+Z(K)
        U(K,1) = A3/A4
    END IF
END IF

```

```

END DO
DO J = 1, N
  I = 2*J-1
  WRITE(1,1) X(I), Z(I),H(I,2)+Z(I),H(I,1)+Z(I),U(I,2),U(I,1)
  1 FORMAT(9(1F22.12))
END DO
!M = (J+1)/2
!A0 = 0.0D0; A1 = 0.0D0; A2 = 0.0D0; A3 = 0.0D0
!A4 = 0.0D0; A5 = 0.0D0; A6 = 0.0D0; A7 = 0.0D0
!DO J = 1,N
  !I = 2*J-1
  !A0 = A0+DABS(H(I,2)-H(I,1))
  !A1 = A1+DABS(U(I,2)-U(I,1))
  !A2 = A2+(H(I,2)-H(I,1))**2.0D0
  !A3 = A3+(U(I,2)-U(I,1))**2.0D0
  !A4 = A4+DABS(H(I,1))
  !A5 = A5+(H(I,1))**2.0D0
  !A6 = A6+DABS(U(I,1))
  !A7 = A7+(U(I,1))**2.0D0
  !WRITE(*,*) DABS(U(I,2)-U(I,1)), DABS(H(I,2)-H(I,1))
!END DO
!WRITE(1,1) A0/A4,A1/A6,DSQRT(A2/A5),DSQRT(A3/A7)!DX*A0,DX*A1,DSQRT(DX*A2),DSQRT(DX*A3)
!1 FORMAT(1X,9(1PE15.6))
!DEALLOCATE(U,H,Q,HX,QX,X,Z,ZX,ZXX,HXX,QXX)
!N = 2*N-1
END DO
CLOSE(1)
END SUBROUTINE ACCURACY_TEST_CESE2
SUBROUTINE CALCULA_ORDEM_2H
REAL*8 VXX1,VXX2,VXT1,VXT2,VTT1,VTT2,VT1,VT2,QT1,QT2,VX1,VX2,QXT1,QXT2
REAL*8 QTT1,QTT2,V1,V2
!VARIÁVEIS AUXILIARES
VX1 = HX(I-1,1)*(G*H(I-1,1)-(Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0)+2.0D0*Q(I-1,1)*QX(I-1,1)/H(I-1,1)
QT1 = -VX1
VX2 = HX(I+1,1)*(G*H(I+1,1)-(Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0)+2.0D0*Q(I+1,1)*QX(I+1,1)/H(I+1,1)
QT2 = -VX2
V1 = Q(I-1,1)*Q(I-1,1)/H(I-1,1)+0.5D0*G*H(I-1,1)*H(I-1,1)
V2 = Q(I+1,1)*Q(I+1,1)/H(I+1,1)+0.5D0*G*H(I+1,1)*H(I+1,1)
A1 = 2.0D0*QX(I-1,1)*(QX(I-1,1)-2.0D0*Q(I-1,1)*HX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
A1 = A1+(HX(I-1,1)**2.0D0)*(2.0D0*(Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0)/H(I-1,1)+G
VXX1 = A1+2.0D0*Q(I-1,1)*QXX(I-1,1)/H(I-1,1)+HXX(I-1,1)*(G*H(I-1,1)-(Q(I-1,1)
/H(I-1,1))**2.0D0)
QXT1 = -VXX1
A2 = 2.0D0*QX(I+1,1)*(QX(I+1,1)-2.0D0*Q(I+1,1)*HX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
A2 = A2+(HX(I+1,1)**2.0D0)*(2.0D0*(Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0)/H(I+1,1)+G
VXX2 = A2+2.0D0*Q(I+1,1)*QXX(I+1,1)/H(I+1,1)+HXX(I+1,1)*(G*H(I+1,1)-(Q(I+1,1)
/H(I+1,1))**2.0D0)
QXT2 = -VXX2
A1 = 2.0D0*Q(I-1,1)*(QXT1+QX(I-1,1)*QX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
A1 = A1+QXX(I-1,1)*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0-G*H(I-1,1))
A1 = A1+2.0D0*QT1*(QX(I-1,1)-Q(I-1,1)*HX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
VXT1 = A1-QX(I-1,1)*HX(I-1,1)*(G+2.0D0*(Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0)/H(I-1,1)
QTT1 = -VXT1
A2 = 2.0D0*Q(I+1,1)*(QXT2+QX(I+1,1)*QX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
A2 = A2+QXX(I+1,1)*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0-G*H(I+1,1))
A2 = A2+2.0D0*QT2*(QX(I+1,1)-Q(I+1,1)*HX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
VXT2 = A2-QX(I+1,1)*HX(I+1,1)*(G+2.0D0*(Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0)/H(I+1,1)

```

```

QTT2 = -VXT2
VT1 = QX(I-1,1)*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0DO-G*H(I-1,1))+2.0DO*Q(I-1,1)*QT1/H(I-1,1)
VT2 = QX(I+1,1)*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0DO-G*H(I+1,1))+2.0DO*Q(I+1,1)*QT2/H(I+1,1)
A1 = 2.0DO*QT1*(QT1+2.0DO*Q(I-1,1)*QX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
A1 = A1+QXT1*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0DO-G*H(I-1,1))+2.0DO*Q(I-1,1)*QTT1/H(I-1,1)
VTT1 = A1+(QX(I-1,1)**2.0DO)*(G+2.0DO*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0DO)/H(I-1,1))
A2 = 2.0DO*QT2*(QT2+2.0DO*Q(I+1,1)*QX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
A2 = A2+QXT2*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0DO-G*H(I+1,1))+2.0DO*Q(I+1,1)*QTT2/H(I+1,1)
VTT2 = A2+(QX(I+1,1)**2.0DO)*(G+2.0DO*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0DO)/H(I+1,1))
!CÁLCULO DE HX
AO = HX(I+1,1)+HX(I-1,1)+DX*(HXX(I-1,1)-HXX(I+1,1))/4.0DO+DT*(QX(I-1,1)-QX(I+1,1))/DX
HX(I,2) = 0.5DO*(AO+DT*DT*(QXT1-QXT2)/(4.0DO*DX))
!CÁLCULO DE QX
AO = QX(I+1,1)+QX(I-1,1)+DX*(QXX(I-1,1)-QXX(I+1,1))/4.0DO
QX(I,2) = 0.5DO*(AO+DT*(VX1-VX2)/DX+DT*DT*(VXT1-VXT2)/(4.0DO*DX))
!CÁLCULO DE HXX
HXX(I,2) = (HXX(I-1,1)+HXX(I+1,1)+DT*(QXX(I-1,1)-QXX(I+1,1))/DX)/2.0DO
!CÁLCULO DE QXX
QXX(I,2) = (QXX(I-1,1)+QXX(I+1,1)+DT*(VXX1-VXX2)/DX)/2.0DO
!CÁLCULO DE H
AO = H(I+1,1)+H(I-1,1)+DX*(HX(I-1,1)-HX(I+1,1))/4.0DO
A1 = DX*DX*(HXX(I-1,1)+HXX(I+1,1))/24.0DO
A2 = DT*(Q(I-1,1)-Q(I+1,1))/DX+DT*DT*(QT1-QT2)/(4.0DO*DX)
A6 = 0.5DO*(AO+A1+A2+(DT**3.0DO)*(QTT1-QTT2)/(24.0DO*DX))
!CÁLCULO DE Q
AO = DT*DT*(VT1-VT2+DT*(VTT1-VTT2))/6.0DO/(4.0DO*DX)
AO = AO+DT*(V1-V2)/DX+DX*DX*(QXX(I-1,1)+QXX(I+1,1))/24.0DO
A7 = 0.5DO*(AO+Q(I+1,1)+Q(I-1,1)+DX*(QX(I-1,1)-QX(I+1,1))/4.0DO)
H(I,2) = A6-DX*DX*HXX(I,2)/24.0DO; Q(I,2) = A7-DX*DX*QXX(I,2)/24.0DO
A4 = H(I,2); A5 = Q(I,2)
DO K = 1, 20
  RECÁLCULO DE HX
  A1 = H(I-1,1)-0.5DO*DT*QX(I-1,1)-DT*DT*QXT1/8.0DO
  A1 = 2.0DO*(H(I,2)-A1)/DX
  A2 = H(I+1,1)-0.5DO*DT*QX(I+1,1)-DT*DT*QXT2/8.0DO
  A2 = 2.0DO*(A2-H(I,2))/DX
  AO = DABS(A2)+DABS(A1)
  IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-5.0DO)) THEN
    HX(I,2) = 0.0DO
  ELSE
    HX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
  END IF
  RECÁLCULO DE QX
  A1 = Q(I-1,1)+0.5DO*DT*QT1+DT*DT*QTT1/8.0DO
  A1 = 2.0DO*(Q(I,2)-A1)/DX
  A2 = Q(I+1,1)+0.5DO*DT*QT2+DT*DT*QTT2/8.0DO
  A2 = 2.0DO*(A2-Q(I,2))/DX
  AO = DABS(A2)+DABS(A1)
  IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-5.0DO)) THEN
    QX(I,2) = 0.0DO
  ELSE
    QX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
  END IF
  !RECÁLCULO DE HXX
  A1 = 2.0DO*(HX(I,2)-HX(I-1,1)+0.5DO*DT*QXX(I-1,1))/DX
  A2 = 2.0DO*(HX(I+1,1)-0.5DO*DT*QXX(I+1,1)-HX(I,2))/DX
  AO = DABS(A2)+DABS(A1)

```

```

IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  HXX(I,2) = 0.0D0
ELSE
  HXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE QXX
A1 = 2.0D0*(QX(I,2)-QX(I-1,1)-0.5D0*DT*QXT1)/DX
A2 = 2.0D0*(QX(I+1,1)+0.5D0*DT*QXT2-QX(I,2))/DX
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,2) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!CÁLCULO DE H
H(I,2) = A6-DX*DX*HXX(I,2)/24.0D0
!CÁLCULO DE Q
Q(I,2) = A7-DX*DX*QXX(I,2)/24.0D0
A5 = DABS(Q(I,2)-A5); A4 = DABS(H(I,2)-A4)
IF (A5<10.0D0**(-6.0D0) .AND. A4<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
  EXIT
ELSE
  A5 = Q(I,2); A4 = H(I,2)
END IF
END DO
END SUBROUTINE CALCULA_ORDEM_2H
SUBROUTINE CALCULA_ORDEM_2
REAL*8 VXX1, VXX2, VXT1, VXT2, VTT1, VTT2, VT1, VT2, F1, QT1, QT2, VX1, VX2, QXT1, QXT2
REAL*8 QTT1, QTT2, V1, V2
!VARIÁVEIS AUXILIARES
VX1 = HX(I-1,1)*(G*H(I-1,1)-(Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0)+2.0D0*Q(I-1,1)*QX(I-1,1)/H(I-1,1)
QT1 = -VX1-G*H(I-1,1)*ZX(I-1)
VX2 = HX(I+1,1)*(G*H(I+1,1)-(Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0)+2.0D0*Q(I+1,1)*QX(I+1,1)/H(I+1,1)
QT2 = -VX2-G*H(I+1,1)*ZX(I+1)
V1 = Q(I-1,1)*Q(I-1,1)/H(I-1,1)+0.5D0*G*H(I-1,1)*H(I-1,1)
V2 = Q(I+1,1)*Q(I+1,1)/H(I+1,1)+0.5D0*G*H(I+1,1)*H(I+1,1)
A1 = 2.0D0*QX(I-1,1)*(QX(I-1,1)-2.0D0*Q(I-1,1)*HX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
A1 = A1+(HX(I-1,1)**2.0D0)*(2.0D0*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0)/H(I-1,1)+G)
VXX1 = A1+2.0D0*Q(I-1,1)*QXX(I-1,1)/H(I-1,1)+HXX(I-1,1)*(G*H(I-1,1)-(Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0)
QXT1 = -VXX1-G*(HX(I-1,1)*ZX(I-1)+H(I-1,1)*ZXX(I-1))
A2 = 2.0D0*QX(I+1,1)*(QX(I+1,1)-2.0D0*Q(I+1,1)*HX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
A2 = A2+(HX(I+1,1)**2.0D0)*(2.0D0*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0)/H(I+1,1)+G)
VXX2 = A2+2.0D0*Q(I+1,1)*QXX(I+1,1)/H(I+1,1)+HXX(I+1,1)*(G*H(I+1,1)-(Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0)
QXT2 = -VXX2-G*(HX(I+1,1)*ZX(I+1)+H(I+1,1)*ZXX(I+1))
A1 = 2.0D0*Q(I-1,1)*(QXT1+QX(I-1,1)*QX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
A1 = A1+QXX(I-1,1)*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0-G*H(I-1,1))
A1 = A1+2.0D0*QT1*(QX(I-1,1)-Q(I-1,1)*HX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
VXT1 = A1-QX(I-1,1)*HX(I-1,1)*(G+2.0D0*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0)/H(I-1,1))
QTT1 = -VXT1+G*ZX(I-1)*QX(I-1,1)
A2 = 2.0D0*Q(I+1,1)*(QXT2+QX(I+1,1)*QX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
A2 = A2+QXX(I+1,1)*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0-G*H(I+1,1))
A2 = A2+2.0D0*QT2*(QX(I+1,1)-Q(I+1,1)*HX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
VXT2 = A2-QX(I+1,1)*HX(I+1,1)*(G+2.0D0*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0D0)/H(I+1,1))
QTT2 = -VXT2+G*ZX(I+1)*QX(I+1,1)
VT1 = QX(I-1,1)*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0D0-G*H(I-1,1))+2.0D0*Q(I-1,1)*QT1/H(I-1,1)

```

```

VT2 = QX(I+1,1)*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0DO-G*H(I+1,1))+2.0DO*Q(I+1,1)*QT2/H(I+1,1)
A1 = 2.0DO*QT1*(QT1+2.0DO*Q(I-1,1)*QX(I-1,1)/H(I-1,1))/H(I-1,1)
A1 = A1+QXT1*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0DO-G*H(I-1,1))+2.0DO*Q(I-1,1)*QTT1/H(I-1,1)
VTT1 = A1+(QX(I-1,1)**2.0DO)*(G+2.0DO*((Q(I-1,1)/H(I-1,1))**2.0DO)/H(I-1,1))
A2 = 2.0DO*QT2*(QT2+2.0DO*Q(I+1,1)*QX(I+1,1)/H(I+1,1))/H(I+1,1)
A2 = A2+QXT2*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0DO-G*H(I+1,1))+2.0DO*Q(I+1,1)*QTT2/H(I+1,1)
VTT2 = A2+(QX(I+1,1)**2.0DO)*(G+2.0DO*((Q(I+1,1)/H(I+1,1))**2.0DO)/H(I+1,1))
!CÁLCULO DE HX
AO = HX(I+1,1)+HX(I-1,1)+DX*(HXX(I-1,1)-HXX(I+1,1))/4.0DO+DT*(QX(I-1,1)-QX(I+1,1))/DX
HX(I,2) = 0.5DO*(AO+DT*DT*(QXT1-QXT2)/(4.0DO*DX))
!CÁLCULO DE QX
AO = QX(I+1,1)+QX(I-1,1)+DX*(QXX(I-1,1)-QXX(I+1,1))/4.0DO
AO = 0.5DO*(AO+DT*(VX1-VX2)/DX+DT*DT*(VXT1-VXT2)/(4.0DO*DX))
!CONTRIBUIÇÕES DO TERMO FONTE
A1 = ZX(I-1,1)*(H(I-1,1)-DT*QX(I-1,1))/4.0DO-DT*DT*QXT1/24.0DO
A2 = ZX(I+1,1)*(H(I+1,1)-DT*QX(I+1,1))/4.0DO-DT*DT*QXT2/24.0DO
QX(I,2) = AO+0.5DO*DT*G*(A1-A2)/DX
!CÁLCULO DE HXX
A1 = 2.0DO*(HX(I,2)-HX(I-1,1)+0.5DO*DT*QXX(I-1,1))/DX
A2 = 2.0DO*(HX(I+1,1)-0.5DO*DT*QXX(I+1,1)-HX(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  HXX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  HXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
HXX(I,2) = 0.5DO*(HXX(I+1,1)+HXX(I-1,1)+DT*(QXX(I-1,1)-QXX(I+1,1))/DX)
A1 = G*(H(I-1,1)*ZXX(I-1)+HX(I-1,1)*ZX(I-1))
A2 = G*(H(I+1,1)*ZXX(I+1)+HX(I+1,1)*ZX(I+1))
QXX(I,2) = 0.5DO*(QXX(I+1,1)+QXX(I-1,1)+DT*(VXX1+A1-VXX2-A2)/DX)
!CÁLCULO DE QXX
A1 = 2.0DO*(QX(I,2)-QX(I-1,1)-0.5DO*DT*QXT1)/DX
A2 = 2.0DO*(QX(I+1,1)+0.5DO*DT*QXT2-QX(I,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0DO**(-4.0DO)) THEN
  QXX(I,2) = 0.0DO
ELSE
  QXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!CÁLCULO DE H
AO = H(I+1,1)+H(I-1,1)+DX*(HX(I-1,1)-HX(I+1,1))/4.0DO
A1 = DX*DX*(HXX(I-1,1)+HXX(I+1,1))/24.0DO
A2 = DT*(Q(I-1,1)-Q(I+1,1))/DX+DT*DT*(QT1-QT2)/(4.0DO*DX)
A6 = 0.5DO*(AO+A1+A2+(DT**3.0DO)*(QTT1-QTT2)/(24.0DO*DX))
!CÁLCULO DE Q
AO = DT*DT*(VT1-VT2+DT*(VTT1-VTT2))/6.0DO/(4.0DO*DX)
AO = AO+DT*(V1-V2)/DX+DX*DX*(QXX(I-1,1)+QXX(I+1,1))/24.0DO
A7 = 0.5DO*(AO+Q(I+1,1)+Q(I-1,1)+DX*(QX(I-1,1)-QX(I+1,1))/4.0DO)
!CONTRIBUIÇÕES DO TERMO FONTE
AO = -H(I-1,1)*ZX(I-1)-DX*(ZX(I-1)*HX(I-1,1)+H(I-1,1)*ZXX(I-1))/4.0DO+
  DT*ZX(I-1)*QX(I-1,1)/4.0DO
A1 = -H(I+1,1)*ZX(I+1)+DX*(ZX(I+1)*HX(I+1,1)+H(I+1,1)*ZXX(I+1))/4.0DO+
  DT*ZX(I+1)*QX(I+1,1)/4.0DO
F1 = G*DT*(AO+A1)/4.0DO
H(I,2) = A6-DX*DX*HXX(I,2)/24.0DO; Q(I,2) = A7-DX*DX*QXX(I,2)/24.0DO+F1
A4 = H(I,2); A5 = Q(I,2)
DO K = 1, 20

```

```

!RECÁLCULO DE HX
A1 = H(I-1,1)-0.5D0*DT*QX(I-1,1)-DT*DT*QXT1/8.0D0
A1 = 2.0D0*(H(I,2)-A1)/DX
A2 = H(I+1,1)-0.5D0*DT*QX(I+1,1)-DT*DT*QXT2/8.0D0
A2 = 2.0D0*(A2-H(I,2))/DX
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  HX(I,2) = 0.0D0
ELSE
  HX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE QX
A1 = Q(I-1,1)+0.5D0*DT*QT1+DT*DT*QTT1/8.0D0
A1 = 2.0D0*(Q(I,2)-A1)/DX
A2 = Q(I+1,1)+0.5D0*DT*QT2+DT*DT*QTT2/8.0D0
A2 = 2.0D0*(A2-Q(I,2))/DX
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QX(I,2) = 0.0D0
ELSE
  QX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE HXX
A1 = 2.0D0*(HX(I,2)-HX(I-1,1)+0.5D0*DT*QXX(I-1,1))/DX
A2 = 2.0D0*(HX(I+1,1)-0.5D0*DT*QXX(I+1,1)-HX(I,2))/DX
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  HXX(I,2) = 0.0D0
ELSE
  HXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE QXX
A1 = 2.0D0*(QX(I,2)-QX(I-1,1)-0.5D0*DT*QXT1)/DX
A2 = 2.0D0*(QX(I+1,1)+0.5D0*DT*QXT2-QX(I,2))/DX
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QXX(I,2) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!CÁLCULO DE H
H(I,2) = A6-DX*DX*HXX(I,2)/24.0D0
!CÁLCULO DE Q
Q(I,2) = A7-DX*DX*QXX(I,2)/24.0D0+F1
A5 = DABS(Q(I,2)-A5); A4 = DABS(H(I,2)-A4)
IF (A5<10.0D0**(-6.0D0) .AND. A4<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
  EXIT
ELSE
  A5 = Q(I,2); A4 = H(I,2)
END IF
END DO
END SUBROUTINE CALCULA_ORDEM_2
SUBROUTINE LU(A, b, n)
!*****
!*      Código implementado a partir do algoritmo que se encontra no livro ALGORIT- *
!*      MOS NUMÉRICOS, 2ª edição, Campos Filho, F. F., LTC, pgs. 46-67.          *
!*      OBJETIVO: Fazer a decomposição LU da matriz A do sistema Ax = b; Resolver o *

```

```

!*          sistema triangular inferior  $Ly = Pb$ , pelas substituições sucessi- *
!*          vas, com a matriz L obtida da decomposição LU com pivotação par- *
!*          cial; Resolver o sistema triangular superior  $Ux = y$  pelas substi- *
!*          tuições retroativas. *
!*          PARÂMETROS DE ENTRADA: Ordem "n" e matriz "A" do sistema *
!*          PARÂMETROS DE SAÍDA: Vetor de soluções "b" e Determinante "D" (caso queira) *
!*****
REAL*8, DIMENSION(:, :) :: A
REAL*8, DIMENSION(:) :: b
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: y
INTEGER, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: Pivot
REAL*8 Det, r, Amax, t, Mult, soma
INTEGER k, n, i, j, p, m

ALLOCATE(Pivot(n), y(n))
DO i = 1, n
    Pivot(i) = i
END DO
Det = 1.0d0
DO j = 1, n-1
    !ESCOLHA DO ELEMENTO PIVÔ
    p = j; Amax = DABS(A(j,j))
    DO k = j+1, n
        IF (DABS(A(k,j)) > Amax) THEN
            Amax = DABS(A(k,j)); p = k
        END IF
    END DO
    IF (p /= j) THEN
        !TROCA DE LINHAS
        DO k = 1, n
            t = A(j,k); A(j,k) = A(p,k); A(p,k) = t
        END DO
        m = Pivot(j); Pivot(j) = Pivot(p)
        Pivot(p) = m; Det = -Det
    END IF
    Det = Det*A(j,j)
    IF (DABS(A(j,j)) /= 0.0d0) THEN
        r = 1.0d0/A(j,j) !ELIMINAÇÃO DE GAUSS
        DO i = j+1, n
            Mult = A(i,j)*r; A(i,j) = Mult
            DO k = j+1, n
                A(i,k) = A(i,k) - Mult*A(j,k)
            END DO
        END DO
    END IF
END DO
Det = Det*A(n,n)
!ALGORITMO SUBSTITUIÇÃO SUCESSIVA
k = Pivot(1); y(1) = b(k)
DO i = 2, n
    soma = 0.0d0
    DO j = 1, i-1
        soma = soma + A(i,j)*y(j)
    END DO
    k = Pivot(i); y(i) = b(k) - soma
END DO
!ALGORITMO SUBSTITUIÇÃO RETROATIVA

```

```

        b(n) = y(n)/A(n,n)
        DO i = n-1, 1, -1
            soma = 0.0d0
            DO j = i+1, n
                soma = soma + A(i,j)*b(j)
            END DO
            b(i) = (y(i) - soma)/A(i,i)
        END DO
    END SUBROUTINE LU
END PROGRAM PRINCIPAL

```

C.2.4 Código - Equações de Saint-Venant bidimensionais

```

PROGRAM SAINT_VENANT
IMPLICIT NONE
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:,:): Q,QX,QY,QXX,QYY,QXY
REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:): U,V
!REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION(:): X,Y
INTEGER N1,N2,I,J,K,M1,M2,0
REAL*8 CFL,L1,L2,DX,DY,DT,G,H1,H2,TT,TE,A1,A2,N
!CALL DAM_BREAK_2D
CALL DAM_BREAK_2D_CIRC
CONTAINS
SUBROUTINE DAM_BREAK_2D
N1 = 101 !UTILIZAR ÍMPARES: X
N2 = 101 !UTILIZAR ÍMPARES: Y
TE = 7.2D0
L1 = 200.0D0 !X
L2 = 200.0D0 !Y
DX = 2.0D0*L1/(N1-1) !X
DY = 2.0D0*L2/(N2-1) !Y
G = 9.812D0
H1 = 10.0D0
H2 = 10.0D0*(-8.0D0)
CFL = 0.7D0
ALLOCATE(Q(N1,N2,2,3),QX(N1,N2,2,3),QY(N1,N2,2,3),U(N1,N2),V(N1,N2))
ALLOCATE(QXX(N1,N2,2,3),QYY(N1,N2,2,3),QXY(N1,N2,2,3))
!CONDIÇÕES INICIAIS: H=10, P/ 0<=X<=105; H=5, P/ 105<X<=200
Q = 0.0D0; QX = 0.0D0; QY = 0.0D0; QXX = 0.0D0; QXY = 0.0D0; QYY = 0.0D0
DO I = 1, N1
    IF (0.5D0*(I-1)*DX<95.0D0+10.0D0*(-5.0D0)) THEN
        M1 = I
        Q(I,:,1,1) = H1
    ELSE IF (0.5D0*(I-1)*DX<105.0D0+10.0D0*(-5.0D0)) THEN
        M2 = I
        Q(I,:,1,1) = H1
    ELSE
        Q(I,:,1,1) = H2
    END IF
END DO
DO I = 1,N1
    DO J = 1,N2
        U(I,J) = Q(I,J,1,2)/Q(I,J,1,1)
        V(I,J) = Q(I,J,1,3)/Q(I,J,1,1)
    END DO
END DO

```

```

A1 = MAXVAL(DABS(U))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:, :, 1, 1))))
A2 = MAXVAL(DABS(V))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:, :, 1, 1))))
DT = CFL*DX/MAX(A1,A2); TT = 0.5D0*DT; O = 0
!AVANÇO NO TEMPO
DO WHILE (TT-TE<10.0D0**(-5.0D0))
  DO I = 2, M1-2
    DO J = 2, N2-1
      CALL CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
    END DO
  END DO
  I = M1-1
  Q(I, :, 2, :) = Q(I-1, :, 1, :); QX(I, :, 2, :) = QX(I-1, :, 1, :)
  QY(I, :, 2, :) = QY(I-1, :, 1, :); QXY(I, :, 2, :) = QXY(I-1, :, 1, :)
  QXX(I, :, 2, :) = QXX(I-1, :, 1, :); QYY(I, :, 2, :) = QYY(I-1, :, 1, :)
  DO J = M1, N2
    IF (0.5D0*(J-1)*DY>95.0D0 .AND. 0.5D0*(J-1)*DY<170.0D0-10.0D0**(-5.0D0)) THEN
      CALL CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
    END IF
  END DO
  !CONDIÇÃO DE CONTORNO NA REGIÃO DE MUDANÇA DE DOMÍNIO
  DO I = M1, M2
    !CONDIÇÃO DE CONTORNO FIXA SOBRE O MURO
    Q(I, :, 2, :) = Q(I, :, 1, :); QX(I, :, 2, :) = QX(I, :, 1, :)
    QY(I, :, 2, :) = QY(I, :, 1, :); QXY(I, :, 2, :) = QXY(I, :, 1, :)
    QXX(I, :, 2, :) = QXX(I, :, 1, :); QYY(I, :, 2, :) = QYY(I, :, 1, :)
    J = M1
    Q(I, J, 2, :) = Q(I, J+1, 1, :); QX(I, J, 2, :) = QX(I, J+1, 1, :)
    QY(I, J, 2, :) = QY(I, J+1, 1, :); QXY(I, J, 2, :) = QXY(I, J+1, 1, :)
    QXX(I, J, 2, :) = QXX(I, J+1, 1, :); QYY(I, J, 2, :) = QYY(I, J+1, 1, :)
    DO J = M1+1, N2
      IF (0.5D0*(J-1)*DY>95.0D0+10.0D0**(-5.0D0) .AND.
        0.5D0*(J-1)*DY<170.0D0-10.0D0**(-5.0D0)) THEN
        CALL CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
      ELSE IF (0.5D0*(J-1)*DY<170.0D0+10.0D0**(-5.0D0) .AND.
        0.5D0*(J-1)*DY>170.0D0-10.0D0**(-5.0D0)) THEN
        Q(I, J, 2, :) = Q(I, J-1, 1, :); QX(I, J, 2, :) = QX(I, J-1, 1, :)
        QY(I, J, 2, :) = QY(I, J-1, 1, :); QXY(I, J, 2, :) = QXY(I, J-1, 1, :)
        QXX(I, J, 2, :) = QXX(I, J-1, 1, :); QYY(I, J, 2, :) = QYY(I, J-1, 1, :)
      END IF
    END DO
  END DO
  I = M2+1
  Q(I, :, 2, :) = Q(I+1, :, 1, :); QY(I, :, 2, :) = QY(I+1, :, 1, :)
  QX(I, :, 2, :) = QX(I+1, :, 1, :); QXY(I, :, 2, :) = QXY(I+1, :, 1, :)
  QXX(I, :, 2, :) = QXX(I+1, :, 1, :); QYY(I, :, 2, :) = QYY(I+1, :, 1, :)
  DO J = M1, N2-1
    IF (0.5D0*(J-1)*DY>95.0D0 .AND. 0.5D0*(J-1)*DY<170.0D0-10.0D0**(-5.0D0)) THEN
      CALL CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
    END IF
  END DO
  DO I = M2+2, N1-1
    DO J = 2, N2-1
      CALL CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
    END DO
  END DO
  !CONDIÇÕES DE CONTORNO DE BORDA
  !REFLEXIVA EM Y

```

```

Q(:,1,2,:) = Q(:,2,1,:); Q(:,N2,2,:) = Q(:,N2-1,1,:)
QX(:,1,2,:) = QX(:,2,1,:); QX(:,N2,2,:) = QX(:,N2-1,1,:)
QY(:,1,2,:) = QY(:,2,1,:); QY(:,N2,2,:) = QY(:,N2-1,1,:)
QXY(:,1,2,:) = QXY(:,2,1,:); QXY(:,N2,2,:) = QXY(:,N2-1,1,:)
QXX(:,1,2,:) = QXX(:,2,1,:); QXX(:,N2,2,:) = QXX(:,N2-1,1,:)
QYY(:,1,2,:) = QYY(:,2,1,:); QYY(:,N2,2,:) = QYY(:,N2-1,1,:)
!FIXA EM X = 0
Q(1,:,2,:) = Q(2,:,1,:); QX(1,:,2,:) = QX(2,:,1,:)
QY(1,:,2,:) = QY(2,:,1,:); QXY(1,:,2,:) = QXY(2,:,1,:)
QXX(1,:,2,:) = QXX(2,:,1,:); QYY(1,:,2,:) = QYY(2,:,1,:)
!FIXA EM X = L1
Q(N1,:,2,:) = Q(N1-1,:,1,:); QX(N1,:,2,:) = QX(N1-1,:,1,:)
QY(N1,:,2,:) = QY(N1-1,:,1,:); QXY(N1,:,2,:) = QXY(N1-1,:,1,:)
QXX(N1,:,2,:) = QXX(N1-1,:,1,:); QYY(N1,:,2,:) = QYY(N1-1,:,1,:)
!ATUALIZACAO DO VETOR K-1
Q(:,1,2,:) = Q(:,2,1,:); QX(:,1,2,:) = QX(:,2,1,:)
QY(:,1,2,:) = QY(:,2,1,:); QXY(:,1,2,:) = QXY(:,2,1,:)
QXX(:,1,2,:) = QXX(:,2,1,:); QYY(:,1,2,:) = QYY(:,2,1,:)
DO I = 1,N1
  DO J = 1,N2
    U(I,J) = Q(I,J,1,2)/Q(I,J,1,1)
    V(I,J) = Q(I,J,1,3)/Q(I,J,1,1)
  END DO
END DO
A1 = MAXVAL(DABS(U))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:,1,1))))
A2 = MAXVAL(DABS(V))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:,1,1))))
DT = CFL*DX/MAX(A1,A2); TT = TT+0.5D0*DT
IF (TE-TT<0.5D0*DT+10.0D0*(-5.0D0)) THEN
  TT = TT-0.5D0*DT
  DT = TE-TT
  TT = TT+DT; O = O+1
END IF
IF (O == 1) THEN
  EXIT
END IF
END DO
WRITE(*,*) TT
OPEN(1,FILE="SAIDA.TXT")
DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    WRITE(1,1) 0.5D0*(I-1)*DX, 0.5D0*(J-1)*DY, Q(I,J,2,1)
    1 FORMAT(5(1PE13.5))
  END DO
END DO
CLOSE(1)
OPEN(2,FILE="SAIDA1.TXT")
DO I = 1, N1,4
  DO J = 1, N2,4
    WRITE(2,2) 0.5D0*(I-1)*DX, 0.5D0*(J-1)*DY, Q(I,J,2,2), Q(I,J,2,3)
    2 FORMAT(5(1PE13.5))
  END DO
END DO
CLOSE(2)
END SUBROUTINE DAM_BREAK_2D
SUBROUTINE DAM_BREAK_2D_CIRC
REAL*8 BO
N1 = 101 !UTILIZAR PRIMOS: X E Y

```

```

N2 = 101
TE = 1.3D0
L1 = 50.0D0 !X
L2 = 50.0D0 !Y
DX = 2.0D0*L1/(N1-1) !X
DY = 2.0D0*L2/(N2-1) !Y
G = 9.812D0
CFL = 0.6D0
ALLOCATE(U(N1,N2),V(N1,N2),Q(N1,N2,2,3),QX(N1,N2,2,3),QY(N1,N2,2,3))
ALLOCATE(QXY(N1,N2,2,3),QXX(N1,N2,2,3),QYY(N1,N2,2,3))
!CONDIÇÕES INICIAIS
Q = 0.0D0; QX = 0.0D0; QY = 0.0D0; U = 0.0D0; V = 0.0D0
QXY = 0.0D0; QXX = 0.0D0; QYY = 0.0D0
DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    BO = ((0.5D0*(I-1)*DX-25.0D0)**2.0D0)+((0.5D0*(J-1)*DY-25.0D0)**2.0D0)
    IF(BO <(10.5D0)**2.0D0+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
      Q(I,J,1,1) = 10.0D0
    ELSE
      Q(I,J,1,1) = 10.0D0**(-8.0D0)
    END IF
  END DO
END DO
DO I = 1,N1
  DO J = 1,N2
    U(I,J) = Q(I,J,1,2)/Q(I,J,1,1)
    V(I,J) = Q(I,J,1,3)/Q(I,J,1,1)
  END DO
END DO
A1 = MAXVAL(DABS(U))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:, :, 1, 1))))
A2 = MAXVAL(DABS(V))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:, :, 1, 1))))
DT = CFL*DX/MAX(A1,A2); TT = 0.5D0*DT; O = 0
!AVANÇO NO TEMPO
DO WHILE (TT-TE<10.0D0**(-5.0D0))
  DO I = 2, N1-1
    DO J = 2, N2-1
      CALL CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
    END DO
  END DO
  !CONDIÇÃO DE CONTORNO REFLEXIVA EM Y = 0
  Q(:,1,2,:) = Q(:,2,1,:); QX(:,1,2,:) = QX(:,2,1,:)
  QY(:,1,2,:) = QY(:,2,1,:); QXY(:,1,2,:) = QXY(:,2,1,:)
  QXX(:,1,2,:) = QXX(:,2,1,:); QYY(:,1,2,:) = QYY(:,2,1,:)
  !CONDIÇÃO DE CONTORNO REFLEXIVA EM Y = L
  Q(:,N2,2,:) = Q(:,N2-1,1,:); QX(:,N2,2,:) = QX(:,N2-1,1,:)
  QY(:,N2,2,:) = QY(:,N2-1,1,:); QXY(:,N2,2,:) = QXY(:,N2-1,1,:)
  QXX(:,N2,2,:) = QXX(:,N2-1,1,:); QYY(:,N2,2,:) = QYY(:,N2-1,1,:)
  !CONDIÇÃO DE CONTORNO REFLEXIVA EM X = 0
  Q(1, :, 2, :) = Q(2, :, 1, :); QX(1, :, 2, :) = QX(2, :, 1, :)
  QY(1, :, 2, :) = QY(2, :, 1, :); QXY(1, :, 2, :) = QXY(2, :, 1, :)
  QXX(1, :, 2, :) = QXX(2, :, 1, :); QYY(1, :, 2, :) = QYY(2, :, 1, :)
  !CONDIÇÃO DE CONTORNO REFLEXIVA EM X = L
  Q(N1, :, 2, :) = Q(N1-1, :, 1, :); QX(N1, :, 2, :) = QX(N1-1, :, 1, :)
  QY(N1, :, 2, :) = QY(N1-1, :, 1, :); QXY(N1, :, 2, :) = QXY(N1-1, :, 1, :)
  QXX(N1, :, 2, :) = QXX(N1-1, :, 1, :); QYY(N1, :, 2, :) = QYY(N1-1, :, 1, :)
  !ATUALIZAÇÃO DO VETOR K-1
  Q(:, :, 1, :) = Q(:, :, 2, :); QX(:, :, 1, :) = QX(:, :, 2, :)

```

```

QY(:, :, 1, :) = QY(:, :, 2, :); QXY(:, :, 1, :) = QXY(:, :, 2, :)
QXX(:, :, 1, :) = QXX(:, :, 2, :); QYY(:, :, 1, :) = QYY(:, :, 2, :)
DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    U(I, J) = Q(I, J, 1, 2)/Q(I, J, 1, 1)
    V(I, J) = Q(I, J, 1, 3)/Q(I, J, 1, 1)
  END DO
END DO
A1 = MAXVAL(DABS(U))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:, :, 1, 1))))
A2 = MAXVAL(DABS(V))+SQRT(G*MAXVAL(DABS(Q(:, :, 1, 1))))
DT = CFL*DX/MAX(A1, A2); TT = TT+0.5D0*DT
IF (TE-TT<DT+10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  TT = TT-0.5D0*DT
  DT = TE-TT
  TT = TT+DT; O = O+1
END IF
IF (O == 1) THEN
  EXIT
END IF
END DO
OPEN(1, FILE="SAIDA.TXT")
DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    WRITE(1, 1) 0.5D0*(I-1)*DX, 0.5D0*(J-1)*DY, Q(I, J, 2, 1)
    1 FORMAT(9(1PE15.5))
  END DO
END DO
CLOSE(1)
OPEN(2, FILE="SAIDA1.TXT")
DO I = 1, N1, 4
  DO J = 1, N2, 4
    WRITE(2, 2) 0.5D0*(I-1)*DX, 0.5D0*(J-1)*DY, Q(I, J, 2, 2), Q(I, J, 2, 3)
    2 FORMAT(9(1PE15.5))
  END DO
END DO
CLOSE(2)
END SUBROUTINE DAM_BREAK_2D_CIRC
SUBROUTINE CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
REAL*8 A0, A, A1, A2, A3, A4, AQ1, AQ2, AQ3, TQ1, TQ2, TQ3, Q1TT3, Q1TT4, Q2TT3, Q2TT4, Q3TT3, Q3TT4
REAL*8 Q1T1, Q1T2, Q1T3, Q1T4, Q1XT1, Q1XT2, Q1XT3, Q1XT4, Q1YT1, Q1YT2, Q1YT3, Q1YT4, Q1TT1, Q1TT2
REAL*8 Q2T1, Q2T2, Q2T3, Q2T4, Q2XT1, Q2XT2, Q2XT3, Q2XT4, Q2YT1, Q2YT2, Q2YT3, Q2YT4, Q2TT1, Q2TT2
REAL*8 Q3T1, Q3T2, Q3T3, Q3T4, Q3XT1, Q3XT2, Q3XT3, Q3XT4, Q3YT1, Q3YT2, Q3YT3, Q3YT4, Q3TT1, Q3TT2
REAL*8 F21, F22, F2X1, F2X2, F2X3, F2X4, F2T1, F2T2, F2Y1, F2Y2, F2XY1, F2XY2, F2XY3, F2XY4
REAL*8 F2XX1, F2XX2, F2XX3, F2XX4, F2YY1, F2YY2, F2XT1, F2XT2, F2XT3, F2XT4, F2YT1, F2YT2, F2TT1, F2TT2
REAL*8 F31, F32, F3X1, F3X2, F3X3, F3X4, F3T1, F3T2, F3Y1, F3Y2, F3XY1, F3XY2, F3XY3, F3XY4, F3TT1, F3TT2
REAL*8 F3XX1, F3XX2, F3XX3, F3XX4, F3YY1, F3YY2, F3YY3, F3YY4, F3XT1, F3XT2, F3XT3, F3XT4, F3YT1, F3YT2
REAL*8 G23, G24, G2X1, G2X2, G2X3, G2X4, G2T3, G2T4, G2Y1, G2Y2, G2Y3, G2Y4, G2XY1, G2XY2, G2XY3, G2XY4
REAL*8 G2XX3, G2XX4, G2YY1, G2YY2, G2YY3, G2YY4, G2XT3, G2XT4, G2YT1, G2YT2, G2YT3, G2YT4, G2TT3, G2TT4
REAL*8 G33, G34, G3X3, G3X4, G3Y1, G3Y2, G3T3, G3T4, G3XY1, G3XY2, G3XY3, G3XY4, G3Y3, G3Y4
REAL*8 G3XX3, G3XX4, G3YY1, G3YY2, G3YY3, G3YY4, G3XT3, G3XT4, G3YT1, G3YT2, G3YT3, G3YT4, G3TT3, G3TT4
!VARIÁVEIS AUXILIARES
!PARA (I-1, J)
  A = Q(I-1, J, 1, 2)/Q(I-1, J, 1, 1); A2 = Q(I-1, J, 1, 3)/Q(I-1, J, 1, 1); A3 = G*Q(I-1, J, 1, 1)-A*A
  F2X1 = 2.0D0*A*QX(I-1, J, 1, 2)+QX(I-1, J, 1, 1)*A3
  F2Y1 = 2.0D0*A*QY(I-1, J, 1, 2)+QY(I-1, J, 1, 1)*A3
  F21 = A*Q(I-1, J, 1, 2)+0.5D0*G*(Q(I-1, J, 1, 1)**2.0D0)
  F31 = A*Q(I-1, J, 1, 3)

```

```

F3Y1 = A2*QY(I-1,J,1,2)+A*QY(I-1,J,1,3)-A2*A*QY(I-1,J,1,1)
A1 = QY(I-1,J,1,2)*QY(I-1,J,1,3)+(A*A2*QY(I-1,J,1,1)-(A2*QY(I-1,J,1,2)+A*QY(I-1,J,1,3)))
      *QY(I-1,J,1,1)
G2YY1 = 2.0D0*A1/Q(I-1,J,1,1)+A2*QYY(I-1,J,1,2)+A*QYY(I-1,J,1,3)-A*A2*QYY(I-1,J,1,1)
F3YY1 = G2YY1
A1 = QY(I-1,J,1,1)*(G*QX(I-1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I-1,J,1,1)-QX(I-1,J,1,2))/Q(I-1,J,1,1))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I-1,J,1,2)*(QX(I-1,J,1,2)-A*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*QXY(I-1,J,1,2))
F2XY1 = A1+QXY(I-1,J,1,1)*A3
Q2YT1 = -F2XY1-G2YY1
Q1YT1 = -QXY(I-1,J,1,2)-QYY(I-1,J,1,3)
A1 = 2.0D0*(QX(I-1,J,1,2)*(QX(I-1,J,1,2)-2.0D0*A*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*QXX(I-1,J,1,2))
F2XX1 = A1+QXX(I-1,J,1,1)*A3+(QX(I-1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I-1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(QY(I-1,J,1,2)*(QY(I-1,J,1,2)-2.0D0*A*QY(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*QYY(I-1,J,1,2))
F2YY1 = A1+QYY(I-1,J,1,1)*A3+(QY(I-1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I-1,J,1,1))
G2X1 = A2*QX(I-1,J,1,2)+A*QX(I-1,J,1,3)-A2*A*QX(I-1,J,1,1)
F3X1 = G2X1
A1 = 2.0D0*A2*QX(I-1,J,1,1)*QY(I-1,J,1,1)-(QX(I-1,J,1,3)*QY(I-1,J,1,1)+QY(I-1,J,1,3)
      *QX(I-1,J,1,1))
A1 = A*(QXY(I-1,J,1,3)+A1/Q(I-1,J,1,1)-A2*QXY(I-1,J,1,1))
A4 = QXY(I-1,J,1,2)-(QX(I-1,J,1,2)*QY(I-1,J,1,1)+QY(I-1,J,1,2)*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)
G2XY1 = A1+A2*A4+(QX(I-1,J,1,2)*QY(I-1,J,1,3)+QY(I-1,J,1,2)*QX(I-1,J,1,3))/Q(I-1,J,1,1)
F3XY1 = G2XY1
Q1T1 = -QX(I-1,J,1,2)-QY(I-1,J,1,3)
Q2T1 = -F2X1-G2X1
F2T1 = 2.0D0*A*Q2T1+Q1T1*A3
G2Y1 = A2*QY(I-1,J,1,2)+A*QY(I-1,J,1,3)-A2*A*QY(I-1,J,1,1)
Q1XT1=-QXX(I-1,J,1,2)-QXY(I-1,J,1,3)
Q2XT1 = -F2XX1-G2XY1
A1 = 2.0D0*(Q2T1*(QX(I-1,J,1,2)-A*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*Q2XT1)+Q1XT1*A3
F2XT1 = A1+Q1T1*(G*QX(I-1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I-1,J,1,1)-QX(I-1,J,1,2))/Q(I-1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(Q2T1*(QY(I-1,J,1,2)-A*QY(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*Q2YT1)+Q1YT1*A3
F2YT1 = A1+Q1T1*(G*QY(I-1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QY(I-1,J,1,1)-QY(I-1,J,1,2))/Q(I-1,J,1,1))
A3 = G*Q(I-1,J,1,1)-A2*A2
G3Y1 = 2.0D0*A2*QY(I-1,J,1,3)+QY(I-1,J,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I-1,J,1,2)*QX(I-1,J,1,3)-QX(I-1,J,1,1)*(A2*QX(I-1,J,1,2)+A*QX(I-1,J,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I-1,J,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I-1,J,1,3)*QX(I-1,J,1,1)-A2*QX(I-1,J,1,2)
      *QX(I-1,J,1,1)
F3XX1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+A2*QXX(I-1,J,1,2)+A*QXX(I-1,J,1,3)-A*A2*QXX(I-1,J,1,1)
A1 = QY(I-1,J,1,1)*(G*QX(I-1,J,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I-1,J,1,1)-QX(I-1,J,1,3))/Q(I-1,J,1,1))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I-1,J,1,3)*(QX(I-1,J,1,3)-A2*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A2*QXY(I-1,J,1,3))
G3XY1 = A1+QXY(I-1,J,1,1)*A3
Q3T1 = -F3X1-G3Y1
F3T1 = A2*Q2T1+A*Q3T1-A*A2*Q1T1
Q3XT1 = -F3XX1-G3XY1
A1 = Q1T1*(2.0D0*A*A2*QX(I-1,J,1,1)-A*QX(I-1,J,1,3)-A2*QX(I-1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T1*(QX(I-1,J,1,2)-A*QX(I-1,J,1,1))+Q2T1*(QX(I-1,J,1,3)-A2*QX(I-1,J,1,1))
F3XT1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+Q2XT1*A2+A*Q3XT1-A*A2*Q1XT1
A1 = 2.0D0*(QY(I-1,J,1,3)*(QY(I-1,J,1,3)-2.0D0*A2*QY(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A2
      *QYY(I-1,J,1,3))
G3YY1 = A1+QYY(I-1,J,1,1)*A3+(QY(I-1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I-1,J,1,1))
Q3YT1 = -F3XY1-G3YY1
A1 = Q1T1*(2.0D0*A*A2*QY(I-1,J,1,1)-A*QY(I-1,J,1,3)-A2*QY(I-1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T1*(QY(I-1,J,1,2)-A*QY(I-1,J,1,1))+Q2T1*(QY(I-1,J,1,3)-A2*QY(I-1,J,1,1))
F3YT1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+Q2YT1*A2+A*Q3YT1-A*A2*Q1YT1
G2YT1 = F3YT1
Q2TT1 = -F2XT1-G2YT1
Q1TT1 = -Q2XT1-Q3YT1

```

```

A1 = Q1T1*(G*QY(I-1,J,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QY(I-1,J,1,1)-QY(I-1,J,1,3)))/Q(I-1,J,1,1))
G3YT1 = A1+2.0D0*(Q3T1*(QY(I-1,J,1,3)-A2*QY(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A2*Q3YT1)+Q1YT1*A3
Q3TT1 = -F3XT1-G3YT1
A1 = 2.0D0*(Q2T1*(Q2T1-2.0D0*A*Q1T1)/Q(I-1,J,1,1)+A*Q2TT1)
F2TT1 = A1+Q1TT1*(G*Q(I-1,J,1,1)-A*A)+Q1T1*Q1T1*(G+2.0D0*A*A/Q(I-1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(Q3T1*Q2T1+(A2*A*Q1T1-(A2*Q2T1+A*Q3T1))*Q1T1)
F3TT1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+A2*Q2TT1+A*Q3TT1-A2*A*Q1TT1
!PARA (I+1,J)
A = Q(I+1,J,1,2)/Q(I+1,J,1,1); A2 = Q(I+1,J,1,3)/Q(I+1,J,1,1); A3 = G*Q(I+1,J,1,1)-A*A
F2X2 = 2.0D0*A*QX(I+1,J,1,2)+QX(I+1,J,1,1)*A3
F2Y2 = 2.0D0*A*QY(I+1,J,1,2)+QY(I+1,J,1,1)*A3
F22 = A*Q(I+1,J,1,2)+0.5D0*G*(Q(I+1,J,1,1)**2.0D0)
F32 = A*Q(I+1,J,1,3)
G2Y2= A2*QY(I+1,J,1,2)+A*QY(I+1,J,1,3)-A2*A*QY(I+1,J,1,1)
F3Y2 = A2*QY(I+1,J,1,2)+A*QY(I+1,J,1,3)-A2*A*QY(I+1,J,1,1)
A1 = 2.0D0*QY(I+1,J,1,2)*QY(I+1,J,1,3)-QY(I+1,J,1,1)*(A2*QY(I+1,J,1,2)+A*QY(I+1,J,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I+1,J,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QY(I+1,J,1,3)*QY(I+1,J,1,1)-A2*QY(I+1,J,1,2)
*QY(I+1,J,1,1)
G2YY2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+A2*QYY(I+1,J,1,2)+A*QYY(I+1,J,1,3)-A*A2*QYY(I+1,J,1,1)
F3YY2 = G2YY2
A1 = QY(I+1,J,1,1)*(G*QX(I+1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I+1,J,1,1)-QX(I+1,J,1,2)))/Q(I+1,J,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I+1,J,1,2)*(QX(I+1,J,1,2)-A*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*QXY(I+1,J,1,2))
F2XY2 = A1+QXY(I+1,J,1,1)*A3
Q2YT2 = -F2XY2-G2YY2
Q1YT2 = -QXY(I+1,J,1,2)-QYY(I+1,J,1,3)
A1 = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,2)*(QX(I+1,J,1,2)-2.0D0*A*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*QXX(I+1,J,1,2))
F2XX2 = A1+QXX(I+1,J,1,1)*A3+(QX(I+1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I+1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(QY(I+1,J,1,2)*(QY(I+1,J,1,2)-2.0D0*A*QY(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*QYY(I+1,J,1,2))
F2YY2 = A1+QYY(I+1,J,1,1)*A3+(QY(I+1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I+1,J,1,1))
G2X2 = A2*QX(I+1,J,1,2)+A*QX(I+1,J,1,3)-A2*A*QX(I+1,J,1,1)
F3X2 = G2X2
A1 = 2.0D0*A2*QX(I+1,J,1,1)*QY(I+1,J,1,1)-(QX(I+1,J,1,3)*QY(I+1,J,1,1)+QY(I+1,J,1,3)
*QX(I+1,J,1,1))
A1 = A*(QXY(I+1,J,1,3)+A1/Q(I+1,J,1,1)-A2*QXY(I+1,J,1,1))
A4 = QXY(I+1,J,1,2)-(QX(I+1,J,1,2)*QY(I+1,J,1,1)+QY(I+1,J,1,2)*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)
G2XY2 = A1+A2*A4+(QX(I+1,J,1,2)*QY(I+1,J,1,3)+QY(I+1,J,1,2)*QX(I+1,J,1,3))/Q(I+1,J,1,1)
F3XY2 = G2XY2
Q1T2 = -QX(I+1,J,1,2)-QY(I+1,J,1,3)
Q2T2 = -F2X2-G2X2
F2T2 = 2.0D0*A*Q2T2+Q1T2*A3
Q1XT2 = -QXX(I+1,J,1,2)-QXY(I+1,J,1,3)
Q2XT2 = -F2XX2-G2XY2
A1 = 2.0D0*(Q2T2*(QX(I+1,J,1,2)-A*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*Q2XT2)+Q1XT2*A3
F2XT2 = A1+Q1T2*(G*QX(I+1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I+1,J,1,1)-QX(I+1,J,1,2)))/Q(I+1,J,1,1)
A1 = 2.0D0*(Q2T2*(QY(I+1,J,1,2)-A*QY(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*Q2YT2)+Q1YT2*A3
F2YT2 = A1+Q1T2*(G*QY(I+1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QY(I+1,J,1,1)-QY(I+1,J,1,2)))/Q(I+1,J,1,1)
A3 = G*Q(I+1,J,1,1)-A2*A2
G3Y2 = 2.0D0*A2*QY(I+1,J,1,3)+QY(I+1,J,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I+1,J,1,2)*QX(I+1,J,1,3)-QX(I+1,J,1,1)*(A2*QX(I+1,J,1,2)+A*QX(I+1,J,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I+1,J,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I+1,J,1,3)*QX(I+1,J,1,1)-A2*QX(I+1,J,1,2)
*QX(I+1,J,1,1)
F3XX2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+A2*QXX(I+1,J,1,2)+A*QXX(I+1,J,1,3)-A*A2*QXX(I+1,J,1,1)
A1 = QY(I+1,J,1,1)*(G*QX(I+1,J,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I+1,J,1,1)-QX(I+1,J,1,3)))/Q(I+1,J,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I+1,J,1,3)*(QX(I+1,J,1,3)-A2*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A2*QXY(I+1,J,1,3))
G3XY2 = A1+QXY(I+1,J,1,1)*A3
Q3T2 = -F3X2-G3Y2
F3T2 = A2*Q2T2+A*Q3T2-A*A2*Q1T2

```

```

Q3XT2 = -F3XX2-G3XY2
A1 = Q1T2*(2.0D0*A*A2*QX(I+1,J,1,1)-A*QX(I+1,J,1,3)-A2*QX(I+1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T2*(QX(I+1,J,1,2)-A*QX(I+1,J,1,1))+Q2T2*(QX(I+1,J,1,3)-A2*QX(I+1,J,1,1))
F3XT2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+Q2XT2*A2+A*Q3XT2-A*A2*Q1XT2
A1 = 2.0D0*(QY(I+1,J,1,3)*(QY(I+1,J,1,3)-2.0D0*A2*QY(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A2
    *QYY(I+1,J,1,3))
G3YY2 = A1+QYY(I+1,J,1,1)*A3+(QY(I+1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I+1,J,1,1))
Q3YT2 = -F3XY2-G3YY2
A1 = Q1T2*(2.0D0*A*A2*QY(I+1,J,1,1)-A*QY(I+1,J,1,3)-A2*QY(I+1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T2*(QY(I+1,J,1,2)-A*QY(I+1,J,1,1))+Q2T2*(QY(I+1,J,1,3)-A2*QY(I+1,J,1,1))
F3YT2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+Q2YT2*A2+A*Q3YT2-A*A2*Q1YT2
G2YT2 = F3YT2
Q2TT2 = -F2XT2-G2YT2
Q1TT2 = -Q2XT2-Q3YT2
A1 = Q1T2*(G*QY(I+1,J,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QY(I+1,J,1,1)-QY(I+1,J,1,3))/Q(I+1,J,1,1))
G3YT2 = A1+2.0D0*(Q3T2*(QY(I+1,J,1,3)-A2*QY(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A2*Q3YT2)+Q1YT2*A3
Q3TT2 = -F3XT2-G3YT2
A1 = 2.0D0*(Q2T2*(Q2T2-2.0D0*A*Q1T2)/Q(I+1,J,1,1)+A*Q2TT2)
F2TT2 = A1+Q1TT2*(G*Q(I+1,J,1,1)-A*A)+Q1T2*Q1T2*(G+2.0D0*A*A/Q(I+1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(Q3T2*Q2T2+(A2*A*Q1T2-(A2*Q2T2+A*Q3T2))*Q1T2)
F3TT2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+A2*Q2TT2+A*Q3TT2-A2*A*Q1TT2
! PARA (I,J-1)
A = Q(I,J-1,1,2)/Q(I,J-1,1,1); A2 = Q(I,J-1,1,3)/Q(I,J-1,1,1); A3 = G*Q(I,J-1,1,1)-A*A
F2X3 = 2.0D0*A*QX(I,J-1,1,2)+QX(I,J-1,1,1)*A3
G2Y3 = A2*QY(I,J-1,1,2)+A*QY(I,J-1,1,3)-A2*A*QY(I,J-1,1,1)
G23 = A*Q(I,J-1,1,3)
G33 = A2*Q(I,J-1,1,3)+0.5D0*G*(Q(I,J-1,1,1)**2.0D0)
A1 = 2.0D0*QY(I,J-1,1,2)*QY(I,J-1,1,3)-QY(I,J-1,1,1)*(A2*QY(I,J-1,1,2)+A*QY(I,J-1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J-1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QY(I,J-1,1,3)*QY(I,J-1,1,1)-A2*QY(I,J-1,1,2)
    *QY(I,J-1,1,1)
G2YY3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+A2*QYY(I,J-1,1,2)+A*QYY(I,J-1,1,3)-A*A2*QYY(I,J-1,1,1)
F3YY3 = G2YY3
A1 = QY(I,J-1,1,1)*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,2))/Q(I,J-1,1,1))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J-1,1,2)*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A*QXY(I,J-1,1,2))
F2XY3 = A1+QXY(I,J-1,1,1)*A3
Q1YT3 = -QXY(I,J-1,1,2)-QYY(I,J-1,1,3)
A1 = 2.0D0*(QX(I,J-1,1,2)*(QX(I,J-1,1,2)-2.0D0*A*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A*QXX(I,J-1,1,2))
F2XX3 = A1+QXX(I,J-1,1,1)*A3+(QX(I,J-1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I,J-1,1,1))
G2X3 = A2*QX(I,J-1,1,2)+A*QX(I,J-1,1,3)-A2*A*QX(I,J-1,1,1)
Q1T3 = -QX(I,J-1,1,2)-QY(I,J-1,1,3)
Q2T3 = -F2X3-G2X3
F3X3 = G2X3
Q2YT3 = -F2XY3-G2YY3
A1 = 2.0D0*A2*QX(I,J-1,1,1)*QY(I,J-1,1,1)-(QX(I,J-1,1,3)*QY(I,J-1,1,1)+QY(I,J-1,1,3)
    *QX(I,J-1,1,1))
A1 = A*(QXY(I,J-1,1,3)+A1/Q(I,J-1,1,1)-A2*QXY(I,J-1,1,1))
A4 = QXY(I,J-1,1,2)-(QX(I,J-1,1,2)*QY(I,J-1,1,1)+QY(I,J-1,1,2)*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)
G2XY3 = A1+A2*A4+(QX(I,J-1,1,2)*QY(I,J-1,1,3)+QY(I,J-1,1,2)*QX(I,J-1,1,3))/Q(I,J-1,1,1)
F3XY3 = G2XY3
A3 = G*Q(I,J-1,1,1)-A2*A2
G3Y3 = 2.0D0*A2*QY(I,J-1,1,3)+QY(I,J-1,1,1)*A3
G3X3 = 2.0D0*A2*QX(I,J-1,1,3)+QX(I,J-1,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I,J-1,1,2)*QX(I,J-1,1,3)-QX(I,J-1,1,1)*(A2*QX(I,J-1,1,2)+A*QX(I,J-1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I,J-1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I,J-1,1,3)*QX(I,J-1,1,1)-A2*QX(I,J-1,1,2)
    *QX(I,J-1,1,1)
F3XX3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+A2*QXX(I,J-1,1,2)+A*QXX(I,J-1,1,3)-A*A2*QXX(I,J-1,1,1)
G2XX3 = F3XX3

```

```

A1 = QY(I,J-1,1,1)*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,3)))/Q(I,J-1,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J-1,1,3)*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A2*QXY(I,J-1,1,3))
G3XY3 = A1+QXY(I,J-1,1,1)*A3
Q3XT3 = -F3XX3-G3XY3
Q2XT3 = -F2XX3-G2XY3
Q3T3 = -F3X3-G3Y3
G2T3 = A2*Q2T3+A*Q3T3-A*A2*Q1T3
G3T3 = 2.0D0*A2*Q3T3+Q1T3*A3
Q1XT3 = -QXX(I,J-1,1,2)-QXY(I,J-1,1,3)
A1 = 2.0D0*(Q2T3*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A*Q2XT3)+Q1XT3*(G*Q(I,J-1,1,1)
-A*A)
F2XT3 = A1+Q1T3*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,2)))/Q(I,J-1,1,1)
A1 = Q1T3*(2.0D0*A*A2*QX(I,J-1,1,1)-A*QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,2))
A1 = A1+Q3T3*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1))+Q2T3*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1))
G2XT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+Q2XT3*A2+A*Q3XT3-A*A2*Q1XT3
A1 = Q1T3*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,3)))/Q(I,J-1,1,1)
G3XT3 = A1+2.0D0*(Q3T3*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q3XT3)+Q1XT3*A3
A1 = 2.0D0*(QY(I,J-1,1,3)*(QY(I,J-1,1,3)-2.0D0*A2*QY(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A2
*QYY(I,J-1,1,3))
G3YY3 = A1+QYY(I,J-1,1,1)*A3+(QY(I,J-1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J-1,1,1))
A1 = 2.0D0*(QX(I,J-1,1,3)*(QX(I,J-1,1,3)-2.0D0*A2*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A2
*QXX(I,J-1,1,3))
G3XX3 = A1+QXX(I,J-1,1,1)*A3+(QX(I,J-1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J-1,1,1))
Q3YT3 = -F3XY3-G3YY3
A1 = Q1T3*(2.0D0*A*A2*QY(I,J-1,1,1)-A*QY(I,J-1,1,3)-A2*QY(I,J-1,1,2))
A1 = A1+Q3T3*(QY(I,J-1,1,2)-A*QY(I,J-1,1,1))+Q2T3*(QY(I,J-1,1,3)-A2*QY(I,J-1,1,1))
G2YT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+Q2YT3*A2+A*Q3YT3-A*A2*Q1YT3
A1 = Q1T3*(G*QY(I,J-1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QY(I,J-1,1,1)-QY(I,J-1,1,3)))/Q(I,J-1,1,1)
G3YT3 = A1+2.0D0*(Q3T3*(QY(I,J-1,1,3)-A2*QY(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q3YT3)+Q1YT3*A3
A1 = Q1T3*(2.0D0*A*A2*QX(I,J-1,1,1)-A*QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,2))
A1 = A1+Q3T3*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1))+Q2T3*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1))
F3XT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+Q2XT3*A2+A*Q3XT3-A*A2*Q1XT3
Q3TT3 = -F3XT3-G3YT3
Q2TT3 = -F2XT3-G2YT3
Q1TT3 = -Q2XT3-Q3YT3
A1 = 2.0D0*(Q3T3*Q2T3+(A2*A*Q1T3-(A2*Q2T3+A*Q3T3))*Q1T3)
G2TT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q2TT3+A*Q3TT3-A2*A*Q1TT3
A1 = 2.0D0*(Q3T3*(Q3T3-2.0D0*A2*Q1T3)/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q3TT3)
G3TT3 = A1+Q1TT3*A3+(Q1T3**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J-1,1,1))
!PARA (I,J+1)
A = Q(I,J+1,1,2)/Q(I,J+1,1,1); A2 = Q(I,J+1,1,3)/Q(I,J+1,1,1); A3 = G*Q(I,J+1,1,1)-A*A
F2X4 = 2.0D0*A*QX(I,J+1,1,2)+QX(I,J+1,1,1)*A3
G24 = A*Q(I,J+1,1,3)
G34 = A2*Q(I,J+1,1,3)+0.5D0*G*(Q(I,J+1,1,1)**2.0D0)
Q1YT4 = -QXY(I,J+1,1,2)-QYY(I,J+1,1,3)
G2Y4 = A2*QY(I,J+1,1,2)+A*QY(I,J+1,1,3)-A2*A*QY(I,J+1,1,1)
A1 = 2.0D0*QY(I,J+1,1,2)*QY(I,J+1,1,3)-QY(I,J+1,1,1)*(A2*QY(I,J+1,1,2)+A*QY(I,J+1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J+1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QY(I,J+1,1,3)*QY(I,J+1,1,1)-A2*QY(I,J+1,1,2)
*QY(I,J+1,1,1)
G2YY4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+A2*QYY(I,J+1,1,2)+A*QYY(I,J+1,1,3)-A*A2*QYY(I,J+1,1,1)
F3Y4 = G2YY4
A1 = QY(I,J+1,1,1)*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,2)))/Q(I,J+1,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J+1,1,2)*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A*QXY(I,J+1,1,2))
F2XY4 = A1+QXY(I,J+1,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,2)*(QX(I,J+1,1,2)-2.0D0*A*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A*QXX(I,J+1,1,2))
F2XX4 = A1+QXX(I,J+1,1,1)*A3+(QX(I,J+1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I,J+1,1,1))
G2X4 = A2*QX(I,J+1,1,2)+A*QX(I,J+1,1,3)-A2*A*QX(I,J+1,1,1)

```

```

Q1T4 = -QX(I,J+1,1,2)-QY(I,J+1,1,3)
F3X4 = G2X4
Q2T4 = -F2X4-G2X4
A1 = 2.0D0*A2*QX(I,J+1,1,1)*QY(I,J+1,1,1)-(QX(I,J+1,1,3)*QY(I,J+1,1,1)+QY(I,J+1,1,3)
      *QX(I,J+1,1,1))
A1 = A*(QXY(I,J+1,1,3)+A1/Q(I,J+1,1,1)-A2*QXY(I,J+1,1,1))
A4 = QXY(I,J+1,1,2)-(QX(I,J+1,1,2)*QY(I,J+1,1,1)+QY(I,J+1,1,2)*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)
G2XY4 = A1+A2*A4+(QX(I,J+1,1,2)*QY(I,J+1,1,3)+QY(I,J+1,1,2)*QX(I,J+1,1,3))/Q(I,J+1,1,1)
F3XY4 = G2XY4
Q2YT4 = -F2XY4-G2YY4
Q2XT4 = -F2XX4-G2XY4
Q1XT4 = -QXX(I,J+1,1,2)-QXY(I,J+1,1,3)
A1 = 2.0D0*(Q2T4*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A*Q2XT4)+Q1XT4*A3
F2XT4 = A1+Q1T4*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,2)))/Q(I,J+1,1,1)
A3 = G*Q(I,J+1,1,1)-A2*A2
G3Y4 = 2.0D0*A2*QY(I,J+1,1,3)+QY(I,J+1,1,1)*A3
G3X4 = 2.0D0*A2*QX(I,J+1,1,3)+QX(I,J+1,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I,J+1,1,2)*QX(I,J+1,1,3)-QX(I,J+1,1,1)*(A2*QX(I,J+1,1,2)+A*QX(I,J+1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I,J+1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I,J+1,1,3)*QX(I,J+1,1,1)-A2*QX(I,J+1,1,2)
      *QX(I,J+1,1,1)
F3XX4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+A2*QXX(I,J+1,1,2)+A*QXX(I,J+1,1,3)-A*A2*QXX(I,J+1,1,1)
G2XX4 = F3XX4
A1 = QY(I,J+1,1,1)*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,3)))/Q(I,J+1,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A2*QXY(I,J+1,1,3))
G3XY4 = A1+QXY(I,J+1,1,1)*A3
Q3XT4 = -F3XX4-G3XY4
Q3T4 = -F3X4-G3Y4
G2T4 = A2*Q2T4+A*Q3T4-A*A2*Q1T4
G3T4 = 2.0D0*A2*Q3T4+Q1T4*A3
A1 = Q1T4*(2.0D0*A*A2*QX(I,J+1,1,1)-A*QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,2))
A1 = A1+Q3T4*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))+Q2T4*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1))
G2XT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+Q2XT4*A2+A*Q3XT4-A*A2*Q1XT4
A1 = Q1T4*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,3)))/Q(I,J+1,1,1)
G3XT4 = A1+2.0D0*(Q3T4*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q3XT4)+Q1XT4*A3
A1 = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)*(QY(I,J+1,1,3)-2.0D0*A2*QY(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A2
      *QYY(I,J+1,1,3))
G3YY4 = A1+QYY(I,J+1,1,1)*A3+(QY(I,J+1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J+1,1,1))
A1 = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,3)*(QX(I,J+1,1,3)-2.0D0*A2*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A2
      *QXX(I,J+1,1,3))
G3XX4 = A1+QXX(I,J+1,1,1)*A3+(QX(I,J+1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J+1,1,1))
Q3YT4 = -F3XY4-G3YY4
A1 = Q1T4*(2.0D0*A*A2*QY(I,J+1,1,1)-A*QY(I,J+1,1,3)-A2*QY(I,J+1,1,2))
A1 = A1+Q3T4*(QY(I,J+1,1,2)-A*QY(I,J+1,1,1))+Q2T4*(QY(I,J+1,1,3)-A2*QY(I,J+1,1,1))
G2YT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+Q2YT4*A2+A*Q3YT4-A*A2*Q1YT4
A1 = Q1T4*(G*QY(I,J+1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QY(I,J+1,1,1)-QY(I,J+1,1,3)))/Q(I,J+1,1,1)
G3YT4 = A1+2.0D0*(Q3T4*(QY(I,J+1,1,3)-A2*QY(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q3YT4)+Q1YT4*A3
A1 = Q1T4*(2.0D0*A*A2*QX(I,J+1,1,1)-A*QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,2))
A1 = A1+Q3T4*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))+Q2T4*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1))
F3XT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+Q2XT4*A2+A*Q3XT4-A*A2*Q1XT4
Q3TT4 = -F3XT4-G3YT4
Q2TT4 = -F2XT4-G2YT4
Q1TT4 = -Q2XT4-Q3YT4
A1 = 2.0D0*(Q3T4*Q2T4+(A2*A*Q1T4-(A2*Q2T4+A*Q3T4))*Q1T4)
G2TT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q2TT4+A*Q3TT4-A2*A*Q1TT4
A1 = 2.0D0*(Q3T4*(Q3T4-2.0D0*A2*Q1T4)/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q3TT4)
G3TT4 = A1+Q1TT4*A3+(Q1T4**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J+1,1,1))
!CÁLCULO DE QX1

```

```

!TERMO P(2) [DY]
!A = QX(I,J-1,1,1)+(DY*QXY(I,J-1,1,1)+DT*(QXY(I,J-1,1,3)-QXX(I,J-1,1,2)))/4.ODO
!A = A+2.ODO*DT*(QX(I,J-1,1,3)+DT*Q3XT3/4.ODO)/DY
!TERMO P(2) [-DY]
!A1 = QX(I,J+1,1,1)+(DT*(QXY(I,J+1,1,3)-QXX(I,J+1,1,2))-DY*QXY(I,J+1,1,1))/4.ODO
!A1 = A1-2.ODO*DT*(QX(I,J+1,1,3)+DT*Q3XT4/4.ODO)/DY
!TERMO P(1) [DX]
!A2 = QX(I-1,J,1,1)+(DX*QXX(I-1,J,1,1)+DT*(QXX(I-1,J,1,2)-QXY(I-1,J,1,3)))/4.ODO
!A2 = A2+2.ODO*DT*(QX(I-1,J,1,2)+DT*Q2XT1/4.ODO)/DX
!TERMO P(1) [-DX]
!A3 = QX(I+1,J,1,1)+(DT*(QXX(I+1,J,1,2)-QXY(I+1,J,1,3))-DX*QXX(I+1,J,1,1))/4.ODO
!A3 = A3-2.ODO*DT*(QX(I+1,J,1,2)+DT*Q2XT2/4.ODO)/DX
!QX(I,J,2,1) = (A+A1+A2+A3)/4.ODO
!CÁLCULO DE QX2
!TERMO P(2) [DY]
! A = QX(I,J-1,1,2)+(DY*QXY(I,J-1,1,2)+DT*(G2XY3-F2XX3))/4.ODO
! A = A+2.ODO*DT*(G2X3+DT*G2XT3/4.ODO)/DY
! !TERMO P(2) [-DY]
! A1 = QX(I,J+1,1,2)+(DT*(G2XY4-F2XX4)-DY*QXY(I,J+1,1,2))/4.ODO
! A1 = A1-2.ODO*DT*(G2X4+DT*G2XT4/4.ODO)/DY
! !TERMO P(1) [DX]
! A2 = QX(I-1,J,1,2)+(DX*QXX(I-1,J,1,2)+DT*(F2XX1-G2XY1))/4.ODO
! A2 = A2+2.ODO*DT*(F2X1+DT*F2XT1/4.ODO)/DX
! !TERMO P(1) [-DX]
! A3 = QX(I+1,J,1,2)+(DT*(F2XX2-G2XY2)-DX*QXX(I+1,J,1,2))/4.ODO
! A3 = A3-2.ODO*DT*(F2X2+DT*F2XT2/4.ODO)/DX
! QX(I,J,2,2) = (A+A1+A2+A3)/4.ODO
!CÁLCULO DE QX3
!TERMO P(2) [DY]
!A = QX(I,J-1,1,3)+(DY*QXY(I,J-1,1,3)+DT*(G3XY3-F3XX3))/4.ODO
!A = A+2.ODO*DT*(G3X3+DT*G3XT3/4.ODO)/DY
!TERMO P(2) [-DY]
!A1 = QX(I,J+1,1,3)+(DT*(G3XY4-F3XX4)-DY*QXY(I,J+1,1,3))/4.ODO
!A1 = A1-2.ODO*DT*(G3X4+DT*G3XT4/4.ODO)/DY
!TERMO P(1) [DX]
!A2 = QX(I-1,J,1,3)+(DX*QXX(I-1,J,1,3)+DT*(F3XX1-G3XY1))/4.ODO
!A2 = A2+2.ODO*DT*(F3X1+DT*F3XT1/4.ODO)/DX
!TERMO P(1) [-DX]
!A3 = QX(I+1,J,1,3)+(DT*(F3XX2-G3XY2)-DX*QXX(I+1,J,1,3))/4.ODO
!A3 = A3-2.ODO*DT*(F3X2+DT*F3XT2/4.ODO)/DX
!QX(I,J,2,3) = (A+A1+A2+A3)/4.ODO
!CÁLCULO DE QY1
!TERMO P(2) [DY]
!A = QY(I,J-1,1,1)+(DY*QYY(I,J-1,1,1)+DT*(QYY(I,J-1,1,3)-QXY(I,J-1,1,2)))/4.ODO
!A = A+2.ODO*DT*(QY(I,J-1,1,3)+DT*Q3YT3/4.ODO)/DY
!TERMO P(2) [-DY]
!A1 = QY(I,J+1,1,1)+(DT*(QYY(I,J+1,1,3)-QXY(I,J+1,1,2))-DY*QYY(I,J+1,1,1))/4.ODO
!A1 = A1-2.ODO*DT*(QY(I,J+1,1,3)+DT*Q3YT4/4.ODO)/DY
!TERMO P(1) [DX]
!A2 = QY(I-1,J,1,1)+(DX*QXY(I-1,J,1,1)+DT*(QXY(I-1,J,1,2)-QYY(I-1,J,1,3)))/4.ODO
!A2 = A2+2.ODO*DT*(QY(I-1,J,1,2)+DT*Q2YT1/4.ODO)/DX
!TERMO P(1) [-DX]
!A3 = QY(I+1,J,1,1)+(DT*(QXY(I+1,J,1,2)-QYY(I+1,J,1,3))-DX*QXY(I+1,J,1,1))/4.ODO
!A3 = A3-2.ODO*DT*(QY(I+1,J,1,2)+DT*Q2YT2/4.ODO)/DX
!QY(I,J,2,1) = (A+A1+A2+A3)/4.ODO
!CÁLCULO DE QY2
!TERMO P(2) [DY]

```

```

!A = QY(I,J-1,1,2)+(DY*QYY(I,J-1,1,2)+DT*(G2YY3-F2XY3))/4.0D0
!A = A+2.0D0*DT*(G2Y3+DT*G2YT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2) [-DY]
!A1 = QY(I,J+1,1,2)+(DT*(G2YY4-F2XY4)-DY*QYY(I,J+1,1,2))/4.0D0
!A1 = A1-2.0D0*DT*(G2Y4+DT*G2YT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1) [DX]
!A2 = QY(I-1,J,1,2)+(DX*QXY(I-1,J,1,2)+DT*(F2XY1-G2YY1))/4.0D0
!A2 = A2+2.0D0*DT*(F2Y1+DT*F2YT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1) [-DX]
!A3 = QY(I+1,J,1,2)+(DT*(F2XY2-G2YY2)-DX*QXY(I+1,J,1,2))/4.0D0
!A3 = A3-2.0D0*DT*(F2Y2+DT*F2YT2/4.0D0)/DX
!QY(I,J,2,2) = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
!CÁLCULO DE QY3
!TERMO P(2) [DY]
!A = QY(I,J-1,1,3)+(DY*QYY(I,J-1,1,3)+DT*(G3YY3-F3XY3))/4.0D0
!A = A+2.0D0*DT*(G3Y3+DT*G3YT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2) [-DY]
!A1 = QY(I,J+1,1,3)+(DT*(G3YY4-F3XY4)-DY*QYY(I,J+1,1,3))/4.0D0
!A1 = A1-2.0D0*DT*(G3Y4+DT*G3YT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1) [DX]
!A2 = QY(I-1,J,1,3)+(DX*QXY(I-1,J,1,3)+DT*(F3XY1-G3YY1))/4.0D0
A2 = A2+2.0D0*DT*(F3Y1+DT*F3YT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1) [-DX]
!A3 = QY(I+1,J,1,3)+(DT*(F3XY2-G3YY2)-DX*QXY(I+1,J,1,3))/4.0D0
!A3 = A3-2.0D0*DT*(F3Y2+DT*F3YT2/4.0D0)/DX
!QY(I,J,2,3) = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
!CÁLCULO DE QXX1
A1 = (QXX(I-1,J,1,1)+QXX(I+1,J,1,1)+QXX(I,J-1,1,1)+QXX(I,J+1,1,1))/4.0D0
A2 = DT*((QXX(I-1,J,1,2)-QXX(I+1,J,1,2))/DX+(QXX(I,J-1,1,3)-QXX(I,J+1,1,3))/DY)/2.0D0
QXX(I,J,2,1) = A1+A2
!A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,1)+0.5D0*DT*Q1XT2-QX(I,J,2,1))/DX
!A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,1)-QX(I-1,J,1,1)-0.5D0*DT*Q1XT1)/DX
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
!IF (A2<10.0D0*(-5.0D0)) THEN
  !QXX(I,J,2,1) = 0.0D0
!ELSE
  !QXX(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QXY1
A1 = (QXY(I-1,J,1,1)+QXY(I+1,J,1,1)+QXY(I,J-1,1,1)+QXY(I,J+1,1,1))/4.0D0
A2 = DT*((QXY(I-1,J,1,2)-QXY(I+1,J,1,2))/DX+(QXY(I,J-1,1,3)-QXY(I,J+1,1,3))/DY)/2.0D0
QXY(I,J,2,1) = A1+A2
!A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1XT4-QX(I,J,2,1))/DY
!A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,1)-QX(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1XT3)/DY
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
!IF (A2<10.0D0*(-5.0D0)) THEN
  !QXY(I,J,2,1) = 0.0D0
!ELSE
  !QXY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QYY1
A1 = (QYY(I-1,J,1,1)+QYY(I+1,J,1,1)+QYY(I,J-1,1,1)+QYY(I,J+1,1,1))/4.0D0
A2 = DT*((QYY(I-1,J,1,2)-QYY(I+1,J,1,2))/DX+(QYY(I,J-1,1,3)-QYY(I,J+1,1,3))/DY)/2.0D0
QYY(I,J,2,1) = A1+A2
!A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1YT4-QY(I,J,2,1))/DY
!A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,1)-QY(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1YT3)/DY
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)

```

```

! IF (A2<10.0DO*(-5.0DO)) THEN
  !QYY(I,J,2,1) = 0.0DO
!ELSE
  !QYY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QXX2
A1 = (QXX(I-1,J,1,2)+QXX(I+1,J,1,2)+QXX(I,J-1,1,2)+QXX(I,J+1,1,2))/4.0DO
A2 = DT*((F2XX1-F2XX2)/DX+(G2XX3-G2XX4)/DY)/2.0DO
QXX(I,J,2,2) = A1+A2
!A = 2.0DO*(QX(I+1,J,1,2)+0.5DO*DT*Q2XT2-QX(I,J,2,2))/DX
!A1= 2.0DO*(QX(I,J,2,2)-QX(I-1,J,1,2)-0.5DO*DT*Q2XT1)/DX
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
! IF (A2<10.0DO*(-5.0DO)) THEN
  !QXX(I,J,2,2) = 0.0DO
!ELSE
  !QXX(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QXY2
A1 = (QXY(I-1,J,1,2)+QXY(I+1,J,1,2)+QXY(I,J-1,1,2)+QXY(I,J+1,1,2))/4.0DO
A2 = DT*((F2XY1-F2XY2)/DX+(G2XY3-G2XY4)/DY)/2.0DO
QXY(I,J,2,2) = A1+A2
!A = 2.0DO*(QX(I,J+1,1,2)+0.5DO*DT*Q2XT4-QX(I,J,2,2))/DY
!A1= 2.0DO*(QX(I,J,2,2)-QX(I,J-1,1,2)-0.5DO*DT*Q2XT3)/DY
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
! IF (A2<10.0DO*(-5.0DO)) THEN
  !QXY(I,J,2,2) = 0.0DO
!ELSE
  !QXY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QYY2
A1 = (QYY(I-1,J,1,2)+QYY(I+1,J,1,2)+QYY(I,J-1,1,2)+QYY(I,J+1,1,2))/4.0DO
A2 = DT*((F2YY1-F2YY2)/DX+(G2YY3-G2YY4)/DY)/2.0DO
QYY(I,J,2,2) = A1+A2
!A = 2.0DO*(QY(I,J+1,1,2)+0.5DO*DT*Q2YT4-QY(I,J,2,2))/DY
!A1= 2.0DO*(QY(I,J,2,2)-QY(I,J-1,1,2)-0.5DO*DT*Q2YT3)/DY
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
! IF (A2<10.0DO*(-5.0DO)) THEN
  !QYY(I,J,2,2) = 0.0DO
!ELSE
  !QYY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QXX3
A1 = (QXX(I-1,J,1,3)+QXX(I+1,J,1,3)+QXX(I,J-1,1,3)+QXX(I,J+1,1,3))/4.0DO
A2 = DT*((F3XX1-F3XX2)/DX+(G3XX3-G3XX4)/DY)/2.0DO
QXX(I,J,2,3) = A1+A2
!A = 2.0DO*(QX(I+1,J,1,3)+0.5DO*DT*Q3XT2-QX(I,J,2,3))/DX
!A1= 2.0DO*(QX(I,J,2,3)-QX(I-1,J,1,3)-0.5DO*DT*Q3XT1)/DX
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
! IF (A2<10.0DO*(-5.0DO)) THEN
  !QXX(I,J,2,3) = 0.0DO
!ELSE
  !QXX(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QXY3
A1 = (QXY(I-1,J,1,3)+QXY(I+1,J,1,3)+QXY(I,J-1,1,3)+QXY(I,J+1,1,3))/4.0DO
A2 = DT*((F3XY1-F3XY2)/DX+(G3XY3-G3XY4)/DY)/2.0DO
QXY(I,J,2,3) = A1+A2

```

```

!A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3XT4-QX(I,J,2,3))/DY
!A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,3)-QX(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3XT3)/DY
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
!IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  !QXY(I,J,2,3) = 0.0D0
!ELSE
  !QXY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE QYY3
A1 = (QYY(I-1,J,1,3)+QYY(I+1,J,1,3)+QYY(I,J-1,1,3)+QYY(I,J+1,1,3))/4.0D0
A2 = DT*((F3YY1-F3YY2)/DX+(G3YY3-G3YY4)/DY)/2.0D0
QYY(I,J,2,3) = A1+A2
!A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3YT4-QY(I,J,2,3))/DY
!A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,3)-QY(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3YT3)/DY
!A2 = DABS(A)+DABS(A1)
!IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  !QYY(I,J,2,3) = 0.0D0
!ELSE
  !QYY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
!END IF
!CÁLCULO DE Q1
!TERMO P(2) [DY]
A = (DX*DX*QXX(I,J-1,1,3)+DY*DY*QYY(I,J-1,1,3))/16.0D0+(DT*DT*Q3TT3-0.5D0*DY*DY
  *QXY(I,J-1,1,2))/4.0D0
A = DT*A/(3.0D0*DY)+Q(I,J-1,1,1)+(DY*QY(I,J-1,1,1)+DT*(QY(I,J-1,1,3)-QX(I,J-1,1,2)))/4.0D0
A = A+DT*(2.0D0*(Q(I,J-1,1,3)+DT*Q3T3/4.0D0)/DY+DT*(Q3YT3-Q2XT3)/16.0D0)
A = A+(DX*DX*QXX(I,J-1,1,1)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J-1,1,1))/(192.0D0)
!TERMO P(2) [-DY]
A1 = (DX*DX*QXX(I,J+1,1,3)+DY*DY*QYY(I,J+1,1,3))/16.0D0+(DT*DT*Q3TT4-0.5D0*DY*DY
  *QXY(I,J+1,1,2))/4.0D0
A1 = -DT*A1/(3.0D0*DY)+Q(I,J+1,1,1)+(DT*(QY(I,J+1,1,3)-QX(I,J+1,1,2))-DY*QY(I,J+1,1,1))/4.0D0
A1 = A1+DT*(DT*(Q3YT4-Q2XT4)/16.0D0-2.0D0*(Q(I,J+1,1,3)+DT*Q3T4/4.0D0)/DY)
A1 = A1+(DX*DX*QXX(I,J+1,1,1)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J+1,1,1))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [DX]
A2 = (DX*DX*QXX(I-1,J,1,2)+DY*DY*QYY(I-1,J,1,2))/16.0D0+(DT*DT*Q2TT1-0.5D0*DX*DX
  *QXY(I-1,J,1,3))/4.0D0
A2 = DT*A2/(3.0D0*DX)+Q(I-1,J,1,1)+(DX*QX(I-1,J,1,1)+DT*(QX(I-1,J,1,2)-QY(I-1,J,1,3)))/4.0D0
A2 = A2+DT*(2.0D0*(Q(I-1,J,1,2)+DT*Q2T1/4.0D0)/DX+DT*(Q2XT1-Q3YT1)/16.0D0)
A2 = A2+(7.0D0*DX*DX*QXX(I-1,J,1,1)+DY*DY*QYY(I-1,J,1,1))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = (DX*DX*QXX(I+1,J,1,2)+DY*DY*QYY(I+1,J,1,2))/16.0D0+(DT*DT*Q2TT2-0.5D0*DX*DX
  *QXY(I+1,J,1,3))/4.0D0
A3 = -DT*A3/(3.0D0*DX)+Q(I+1,J,1,1)+(DT*(QX(I+1,J,1,2)-QY(I+1,J,1,3))-DX*QX(I+1,J,1,1))/4.0D0
A3 = A3+DT*(DT*(Q2XT2-Q3YT2)/16.0D0-2.0D0*(Q(I+1,J,1,2)+DT*Q2T2/4.0D0)/DX)
A3 = A3+(7.0D0*DX*DX*QXX(I+1,J,1,1)+DY*DY*QYY(I+1,J,1,1))/(192.0D0)
AQ1 = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
Q(I,J,2,1) = AQ1-(DX*DX*QXX(I,J,2,1)+DY*DY*QYY(I,J,2,1))/(48.0D0)
!CÁLCULO DE Q2
!TERMO P(2) [DY]
A = (DX*DX*G2XX3+DY*DY*G2YY3)/16.0D0+(DT*DT*G2TT3-0.5D0*DY*DY*F2XY3)/4.0D0
A = DT*A/(3.0D0*DY)+Q(I,J-1,1,2)+(DY*QY(I,J-1,1,2)+DT*(G2Y3-F2X3))/4.0D0
A = A+DT*(2.0D0*(G23+DT*G2T3/4.0D0)/DY+DT*(G2YT3-F2XT3)/16.0D0)
A = A+(DX*DX*QXX(I,J-1,1,2)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J-1,1,2))/(192.0D0)
!TERMO P(2) [-DY]
A1 = (DX*DX*G2XX4+DY*DY*G2YY4)/16.0D0+(DT*DT*G2TT4-0.5D0*DY*DY*F2XY4)/4.0D0
A1 = -DT*A1/(3.0D0*DY)+Q(I,J+1,1,2)+(DT*(G2Y4-F2X4)-DY*QY(I,J+1,1,2))/4.0D0
A1 = A1+DT*(DT*(G2YT4-F2XT4)/16.0D0-2.0D0*(G24+DT*G2T4/4.0D0)/DY)

```

```

A1 = A1+(DX*DX*QXX(I,J+1,1,2)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J+1,1,2))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [DX]
A2 = (DX*DX*F2XX1+DY*DY*F2YY1)/16.0D0+(DT*DT*F2TT1-0.5D0*DX*DX*G2XY1)/4.0D0
A2 = DT*A2/(3.0D0*DX)+Q(I-1,J,1,2)+(DX*QX(I-1,J,1,2)+DT*(F2X1-G2Y1))/4.0D0
A2 = A2+DT*(2.0D0*(F21+DT*F2T1/4.0D0)/DX+DT*(F2XT1-G2YT1)/16.0D0)
A2 = A2+(7.0D0*DX*DX*QXX(I-1,J,1,2)+DY*DY*QYY(I-1,J,1,2))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = (DX*DX*F2XX2+DY*DY*F2YY2)/16.0D0+(DT*DT*F2TT2-0.5D0*DX*DX*G2XY2)/4.0D0
A3 = -DT*A3/(3.0D0*DX)+Q(I+1,J,1,2)+(DT*(F2X2-G2Y2)-DX*QX(I+1,J,1,2))/4.0D0
A3 = A3+DT*(DT*(F2XT2-G2YT2)/16.0D0-2.0D0*(F22+DT*F2T2/4.0D0)/DX)
A3 = A3+(7.0D0*DX*DX*QXX(I+1,J,1,2)+DY*DY*QYY(I+1,J,1,2))/(192.0D0)
AQ2 = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
Q(I,J,2,2) = AQ2-(DX*DX*QXX(I,J,2,2)+DY*DY*QYY(I,J,2,2))/(48.0D0)
!CÁLCULO DE Q3
!TERMO P(2) [DY]
A = (DX*DX*G3XX3+DY*DY*G3YY3)/16.0D0+(DT*DT*G3TT3-0.5D0*DY*DY*F3XY3)/4.0D0
A = DT*A/(3.0D0*DY)+Q(I,J-1,1,3)+(DY*QY(I,J-1,1,3)+DT*(G3Y3-F3X3))/4.0D0
A = A+DT*(2.0D0*(G33+DT*G3T3/4.0D0)/DY+DT*(G3YT3-F3XT3)/16.0D0)
A = A+(DX*DX*QXX(I,J-1,1,3)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J-1,1,3))/(192.0D0)
!TERMO P(2) [-DY]
A1 = (DX*DX*G3XX4+DY*DY*G3YY4)/16.0D0+(DT*DT*G3TT4-0.5D0*DY*DY*F3XY4)/4.0D0
A1 = -DT*A1/(3.0D0*DY)+Q(I,J+1,1,3)+(DT*(G3Y4-F3X4)-DY*QY(I,J+1,1,3))/4.0D0
A1 = A1+DT*(DT*(G3YT4-F3XT4)/16.0D0-2.0D0*(G34+DT*G3T4/4.0D0)/DY)
A1 = A1+(DX*DX*QXX(I,J+1,1,3)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J+1,1,3))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [DX]
A2 = (DX*DX*F3XX1+DY*DY*F3YY1)/16.0D0+(DT*DT*F3TT1-0.5D0*DX*DX*G3XY1)/4.0D0
A2 = DT*A2/(3.0D0*DX)+Q(I-1,J,1,3)+(DX*QX(I-1,J,1,3)+DT*(F3X1-G3Y1))/4.0D0
A2 = A2+DT*(2.0D0*(F31+DT*F3T1/4.0D0)/DX+DT*(F3XT1-G3YT1)/16.0D0)
A2 = A2+(7.0D0*DX*DX*QXX(I-1,J,1,3)+DY*DY*QYY(I-1,J,1,3))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = (DX*DX*F3XX2+DY*DY*F3YY2)/16.0D0+(DT*DT*F3TT2-0.5D0*DX*DX*G3XY2)/4.0D0
A3 = -DT*A3/(3.0D0*DX)+Q(I+1,J,1,3)+(DT*(F3X2-G3Y2)-DX*QX(I+1,J,1,3))/4.0D0
A3 = A3+DT*(DT*(F3XT2-G3YT2)/16.0D0-2.0D0*(F32+DT*F3T2/4.0D0)/DX)
A3 = A3+(7.0D0*DX*DX*QXX(I+1,J,1,3)+DY*DY*QYY(I+1,J,1,3))/(192.0D0)
AQ3 = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
Q(I,J,2,3) = AQ3-(DX*DX*QXX(I,J,2,3)+DY*DY*QYY(I,J,2,3))/(48.0D0)
TQ1 = Q(I,J,2,1); TQ2 = Q(I,J,2,2); TQ3 = Q(I,J,2,3)
DO K = 1, 50
!RECÁLCULO DE QX1
A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,1)-Q(I-1,J,1,1)-0.5D0*DT*Q1T1-DT*DT*Q1TT1/8.0D0)/DX
A2 = 2.0D0*(Q(I+1,J,1,1)+0.5D0*DT*Q1T2+DT*DT*Q1TT2/8.0D0-Q(I,J,2,1))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0D0*(-4.0D0)) THEN
  QX(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QX(I,J,2,1) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!RECÁLCULO DE QX2
A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,2)-Q(I-1,J,1,2)-0.5D0*DT*Q2T1-DT*DT*Q2TT1/8.0D0)/DX
A2 = 2.0D0*(Q(I+1,J,1,2)+0.5D0*DT*Q2T2+DT*DT*Q2TT2/8.0D0-Q(I,J,2,2))/DX
AO = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(AO) < 10.0D0*(-4.0D0)) THEN
  QX(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QX(I,J,2,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/AO
END IF
!RECÁLCULO DE QX3

```

```

A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,3)-Q(I-1,J,1,3)-0.5D0*DT*Q3T1-DT*DT*Q3TT1/8.0D0)/DX
A2 = 2.0D0*(Q(I+1,J,1,3)+0.5D0*DT*Q3T2+DT*DT*Q3TT2/8.0D0-Q(I,J,2,3))/DX
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QX(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QX(I,J,2,3) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE QY1
A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,1)-Q(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1T3-DT*DT*Q1TT3/8.0D0)/DY
A2 = 2.0D0*(Q(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1T4+DT*DT*Q1TT4/8.0D0-Q(I,J,2,1))/DY
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QY(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QY(I,J,2,1) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE QY2
A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,2)-Q(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2T3-DT*DT*Q2TT3/8.0D0)/DY
A2 = 2.0D0*(Q(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2T4+DT*DT*Q2TT4/8.0D0-Q(I,J,2,2))/DY
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QY(I,J,2,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE QX3
A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,3)-Q(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3T3-DT*DT*Q3TT3/8.0D0)/DY
A2 = 2.0D0*(Q(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3T4+DT*DT*Q3TT4/8.0D0-Q(I,J,2,3))/DY
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QY(I,J,2,3) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!CÁLCULO DE QXX1
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,1)+0.5D0*DT*Q1XT2-QX(I,J,2,1))/DX
A1 = 2.0D0*(QX(I,J,2,1)-QX(I-1,J,1,1)-0.5D0*DT*Q1XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY1
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1XT4-QX(I,J,2,1))/DY
A1 = 2.0D0*(QX(I,J,2,1)-QX(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY1
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1YT4-QY(I,J,2,1))/DY
A1 = 2.0D0*(QY(I,J,2,1)-QY(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)

```

```

IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXX2
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,2)+0.5D0*DT*Q2XT2-QX(I,J,2,2))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,2)-QX(I-1,J,1,2)-0.5D0*DT*Q2XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY2
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2XT4-QX(I,J,2,2))/DY
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,2)-QX(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY2
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2YT4-QY(I,J,2,2))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,2)-QY(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXX3
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,3)+0.5D0*DT*Q3XT2-QX(I,J,2,3))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,3)-QX(I-1,J,1,3)-0.5D0*DT*Q3XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY3
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3XT4-QX(I,J,2,3))/DY
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,3)-QX(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY3
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3YT4-QY(I,J,2,3))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,3)-QY(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE

```

```

      QYY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
    END IF
    !RECÁLCULO DE Q1
    Q(I,J,2,1) = AQ1-(DX*DX*QXX(I,J,2,1)+DY*DY*QYY(I,J,2,1))/(48.0D0)
    Q(I,J,2,2) = AQ2-(DX*DX*QXX(I,J,2,2)+DY*DY*QYY(I,J,2,2))/(48.0D0)
    Q(I,J,2,3) = AQ3-(DX*DX*QXX(I,J,2,3)+DY*DY*QYY(I,J,2,3))/(48.0D0)
    TQ1 = DABS(Q(I,J,2,1)-TQ1)
    TQ2 = DABS(Q(I,J,2,2)-TQ2)
    TQ3 = DABS(Q(I,J,2,3)-TQ3)
    IF (TQ1<10.0D0**(-6.0D0) .AND. TQ2<10.0D0**(-6.0D0) .AND. TQ3<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
      EXIT
    ELSE
      TQ1 = Q(I,J,2,1); TQ2 = Q(I,J,2,2); TQ3 = Q(I,J,2,3)
    END IF
  END DO
END SUBROUTINE CALCULA_HOMOGENEO_CESE2
SUBROUTINE CALCULA_NAO_HOMOGENEO_CESE2
REAL*8 AO,A,A1,A2,A3,A4,AQ1,AQ2,AQ3,TQ1,TQ2,TQ3,Q1TT3,Q1TT4,Q2TT3,Q2TT4,Q3TT3,Q3TT4
REAL*8 Q1T1,Q1T2,Q1T3,Q1T4,Q1XT1,Q1XT2,Q1XT3,Q1XT4,Q1YT1,Q1YT2,Q1YT3,Q1YT4,Q1TT1,Q1TT2
REAL*8 Q2T1,Q2T2,Q2T3,Q2T4,Q2XT1,Q2XT2,Q2XT3,Q2XT4,Q2YT1,Q2YT2,Q2YT3,Q2YT4,Q2TT1,Q2TT2
REAL*8 Q3T1,Q3T2,Q3T3,Q3T4,Q3XT1,Q3XT2,Q3XT3,Q3XT4,Q3YT1,Q3YT2,Q3YT3,Q3YT4,Q3TT1,Q3TT2
REAL*8 F21,F22,F2X1,F2X2,F2X3,F2X4,F2T1,F2T2,F2Y1,F2Y2,F2XY1,F2XY2,F2XY3,F2XY4
REAL*8 F2XX1,F2XX2,F2XX3,F2XX4,F2YY1,F2YY2,F2YT1,F2YT2,F2YT3,F2YT4,F2YT1,F2YT2,F2TT1,F2TT2
REAL*8 F31,F32,F3X1,F3X2,F3X3,F3X4,F3T1,F3T2,F3Y1,F3Y2,F3XY1,F3XY2,F3XY3,F3XY4,F3TT1,F3TT2
REAL*8 F3XX1,F3XX2,F3XX3,F3XX4,F3YY1,F3YY2,F3YY3,F3YY4,F3XT1,F3XT2,F3XT3,F3XT4,F3YT1,F3YT2
REAL*8 G23,G24,G2X1,G2X2,G2X3,G2X4,G2T3,G2T4,G2Y1,G2Y2,G2Y3,G2Y4,G2XY1,G2XY2,G2XY3,G2XY4
REAL*8 G2XX3,G2XX4,G2YY1,G2YY2,G2YY3,G2YY4,G2XT3,G2XT4,G2YT1,G2YT2,G2YT3,G2YT4,G2TT3,G2TT4
REAL*8 G33,G34,G3X3,G3X4,G3Y1,G3Y2,G3T3,G3T4,G3XY1,G3XY2,G3XY3,G3XY4,G3Y3,G3Y4
REAL*8 G3XX3,G3XX4,G3YY1,G3YY2,G3YY3,G3YY4,G3XT3,G3XT4,G3YT1,G3YT2,G3YT3,G3YT4,G3TT3,G3TT4
REAL*8 S21,S22,S23,S24,S31,S32,S33,S34,S2T1,S2T2,S2T3,S2T4,S3T1,S3T2,S3T3,S3T4
REAL*8 S2X1,S2X2,S2X3,S2X4,S3X1,S3X2,S3X3,S3X4,S2Y1,S2Y2,S2Y3,S2Y4,S3Y1,S3Y2,S3Y3,S3Y4
REAL*8 TF2,TF3
!VARIÁVEIS AUXILIARES
!PARA (I-1,J)
  !CÁLCULO DO TERMO FONTE
  A = DSQRT(Q(I-1,J,1,2)**2.0D0+Q(I-1,J,1,3)**2.0D0)
  IF (A<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
    S21 = 0.0D0; S31 = 0.0D0
    S2X1 = 0.0D0; S3X1 = 0.0D0
    S2Y1 = 0.0D0; S3Y1 = 0.0D0
  ELSE
    A1 = Q(I-1,J,1,1)**(7.0D0/3.0D0)
    S21 = -G*N*N*Q(I-1,J,1,2)*A/A1; S31 = -G*N*N*Q(I-1,J,1,3)*A/A1
    A2 = Q(I-1,J,1,2)*QX(I-1,J,1,2)+Q(I-1,J,1,3)*QX(I-1,J,1,3)
    S2X1 = 7.0D0*Q(I-1,J,1,2)*A*QX(I-1,J,1,1)/(3.0D0*Q(I-1,J,1,1))
    S2X1 = G*N*N*(S2X1-QX(I-1,J,1,2)*A-Q(I-1,J,1,2)*A2/A)/A1
    S3X1 = 7.0D0*Q(I-1,J,1,3)*A*QX(I-1,J,1,1)/(3.0D0*Q(I-1,J,1,1))
    S3X1 = G*N*N*(S3X1-QX(I-1,J,1,3)*A-Q(I-1,J,1,3)*A2/A)/A1
    A2 = Q(I-1,J,1,2)*QY(I-1,J,1,2)+Q(I-1,J,1,3)*QY(I-1,J,1,3)
    S2Y1 = 7.0D0*Q(I-1,J,1,2)*A*QY(I-1,J,1,1)/(3.0D0*Q(I-1,J,1,1))
    S2Y1 = G*N*N*(S2Y1-QY(I-1,J,1,2)*A-Q(I-1,J,1,2)*A2/A)/A1
    S3Y1 = 7.0D0*Q(I-1,J,1,3)*A*QY(I-1,J,1,1)/(3.0D0*Q(I-1,J,1,1))
    S3Y1 = G*N*N*(S3Y1-QY(I-1,J,1,3)*A-Q(I-1,J,1,3)*A2/A)/A1
  END IF
  A = Q(I-1,J,1,2)/Q(I-1,J,1,1); A2 = Q(I-1,J,1,3)/Q(I-1,J,1,1); A3 = G*Q(I-1,J,1,1)-A*A
  F2X1 = 2.0D0*A*QX(I-1,J,1,2)+QX(I-1,J,1,1)*A3
  F2Y1 = 2.0D0*A*QY(I-1,J,1,2)+QY(I-1,J,1,1)*A3

```

```

F21 = A*Q(I-1,J,1,2)+0.5D0*G*(Q(I-1,J,1,1)**2.0D0)
F31 = A*Q(I-1,J,1,3)
F3Y1 = A2*QY(I-1,J,1,2)+A*QY(I-1,J,1,3)-A2*A*QY(I-1,J,1,1)
A1 = QY(I-1,J,1,2)*QY(I-1,J,1,3)+(A*A2*QY(I-1,J,1,1)-(A2*QY(I-1,J,1,2)+A*QY(I-1,J,1,3)))
      *QY(I-1,J,1,1)
G2YY1 = 2.0D0*A1/Q(I-1,J,1,1)+A2*QYY(I-1,J,1,2)+A*QYY(I-1,J,1,3)-A*A2*QYY(I-1,J,1,1)
F3YY1 = G2YY1
A1 = QY(I-1,J,1,1)*(G*QX(I-1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I-1,J,1,1)-QX(I-1,J,1,2))/Q(I-1,J,1,1))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I-1,J,1,2)*(QX(I-1,J,1,2)-A*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*QXY(I-1,J,1,2))
F2XY1 = A1+QXY(I-1,J,1,1)*A3
Q2YT1 = -F2XY1-G2YY1+S2Y1
Q1YT1 = -QXY(I-1,J,1,2)-QYY(I-1,J,1,3)
A1 = 2.0D0*(QX(I-1,J,1,2)*(QX(I-1,J,1,2)-2.0D0*A*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*QXX(I-1,J,1,2))
F2XX1 = A1+QXX(I-1,J,1,1)*A3+(QX(I-1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I-1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(QY(I-1,J,1,2)*(QY(I-1,J,1,2)-2.0D0*A*QY(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*QYY(I-1,J,1,2))
F2YY1 = A1+QYY(I-1,J,1,1)*A3+(QY(I-1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I-1,J,1,1))
G2X1 = A2*QX(I-1,J,1,2)+A*QX(I-1,J,1,3)-A2*A*QX(I-1,J,1,1)
F3X1 = G2X1
A1 = 2.0D0*A2*QX(I-1,J,1,1)*QY(I-1,J,1,1)-(QX(I-1,J,1,3)*QY(I-1,J,1,1)+QY(I-1,J,1,3)
      *QX(I-1,J,1,1))
A1 = A*(QXY(I-1,J,1,3)+A1/Q(I-1,J,1,1)-A2*QXY(I-1,J,1,1))
A4 = QXY(I-1,J,1,2)-(QX(I-1,J,1,2)*QY(I-1,J,1,1)+QY(I-1,J,1,2)*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)
G2XY1 = A1+A2*A4+(QX(I-1,J,1,2)*QY(I-1,J,1,3)+QY(I-1,J,1,2)*QX(I-1,J,1,3))/Q(I-1,J,1,1)
F3XY1 = G2XY1
Q1T1 = -QX(I-1,J,1,2)-QY(I-1,J,1,3)
Q2T1 = -F2X1-G2X1+S21
F2T1 = 2.0D0*A*Q2T1+Q1T1*A3
G2Y1 = A2*QY(I-1,J,1,2)+A*QY(I-1,J,1,3)-A2*A*QY(I-1,J,1,1)
Q1XT1=-QXX(I-1,J,1,2)-QXY(I-1,J,1,3)
Q2XT1 = -F2XX1-G2XY1+S2X1
A1 = 2.0D0*(Q2T1*(QX(I-1,J,1,2)-A*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*Q2XT1)+Q1XT1*A3
F2XT1 = A1+Q1T1*(G*QX(I-1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I-1,J,1,1)-QX(I-1,J,1,2))/Q(I-1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(Q2T1*(QY(I-1,J,1,2)-A*QY(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A*Q2YT1)+Q1YT1*A3
F2YT1 = A1+Q1T1*(G*QY(I-1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QY(I-1,J,1,1)-QY(I-1,J,1,2))/Q(I-1,J,1,1))
A3 = G*Q(I-1,J,1,1)-A2*A2
G3Y1 = 2.0D0*A2*QY(I-1,J,1,3)+QY(I-1,J,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I-1,J,1,2)*QX(I-1,J,1,3)-QX(I-1,J,1,1)*(A2*QX(I-1,J,1,2)+A*QX(I-1,J,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I-1,J,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I-1,J,1,3)*QX(I-1,J,1,1)-A2*QX(I-1,J,1,2)
      *QX(I-1,J,1,1)
F3XX1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+A2*QXX(I-1,J,1,2)+A*QXX(I-1,J,1,3)-A*A2*QXX(I-1,J,1,1)
A1 = QY(I-1,J,1,1)*(G*QX(I-1,J,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I-1,J,1,1)-QX(I-1,J,1,3))/Q(I-1,J,1,1))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I-1,J,1,3)*(QX(I-1,J,1,3)-A2*QX(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A2*QXY(I-1,J,1,3))
G3XY1 = A1+QXY(I-1,J,1,1)*A3
Q3T1 = -F3X1-G3Y1+S31
F3T1 = A2*Q2T1+A*Q3T1-A*A2*Q1T1
Q3XT1 = -F3XX1-G3XY1+S3X1
A1 = Q1T1*(2.0D0*A*A2*QX(I-1,J,1,1)-A*QX(I-1,J,1,3)-A2*QX(I-1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T1*(QX(I-1,J,1,2)-A*QX(I-1,J,1,1))+Q2T1*(QX(I-1,J,1,3)-A2*QX(I-1,J,1,1))
F3XT1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+Q2XT1*A2+A*Q3XT1-A*A2*Q1XT1
A1 = 2.0D0*(QY(I-1,J,1,3)*(QY(I-1,J,1,3)-2.0D0*A2*QY(I-1,J,1,1))/Q(I-1,J,1,1)+A2
      *QYY(I-1,J,1,3))
G3YY1 = A1+QYY(I-1,J,1,1)*A3+(QY(I-1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I-1,J,1,1))
Q3YT1 = -F3XY1-G3YY1+S3Y1
A1 = Q1T1*(2.0D0*A*A2*QY(I-1,J,1,1)-A*QY(I-1,J,1,3)-A2*QY(I-1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T1*(QY(I-1,J,1,2)-A*QY(I-1,J,1,1))+Q2T1*(QY(I-1,J,1,3)-A2*QY(I-1,J,1,1))
F3YT1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+Q2YT1*A2+A*Q3YT1-A*A2*Q1YT1
G2YT1 = F3YT1

```

```

!TERMO FONTE
A4 = DSQRT(Q(I-1,J,1,2)**2.0DO+Q(I-1,J,1,3)**2.0DO)
IF (A4<10.0DO**(-6.0DO)) THEN
  S2T1 = 0.0DO; S3T1 = 0.0DO
ELSE
  A1 = Q(I-1,J,1,2)*Q2T1+Q(I-1,J,1,3)*Q3T1
  S2T1 = 7.0DO*Q(I-1,J,1,2)*A4*Q1T1/(3.0DO*Q(I-1,J,1,1))
  S2T1 = G*N*N*(S2T1-A4*Q2T1-Q(I-1,J,1,2)*A1/A4)/(Q(I-1,J,1,1)**(7.0DO/3.0DO))
  S3T1 = 7.0DO*Q(I-1,J,1,3)*A4*Q1T1/(3.0DO*Q(I-1,J,1,1))
  S3T1 = G*N*N*(S3T1-A4*Q3T1-Q(I-1,J,1,3)*A1/A4)/(Q(I-1,J,1,1)**(7.0DO/3.0DO))
END IF
Q2TT1 = -F2XT1-G2YT1+S2T1
Q1TT1 = -Q2XT1-Q3YT1
A1 = Q1T1*(G*QY(I-1,J,1,1)+2.0DO*A2*(A2*QY(I-1,J,1,1)-QY(I-1,J,1,3)))/Q(I-1,J,1,1)
G3YT1 = A1+2.0DO*(Q3T1*(QY(I-1,J,1,3)-A2*QY(I-1,J,1,1)))/Q(I-1,J,1,1)+A2*Q3YT1+Q1YT1*A3
Q3TT1 = -F3XT1-G3YT1+S3T1
A1 = 2.0DO*(Q2T1*(Q2T1-2.0DO*A*Q1T1)/Q(I-1,J,1,1)+A*Q2TT1)
F2TT1 = A1+Q1TT1*(G*Q(I-1,J,1,1)-A*A)+Q1T1*Q1T1*(G+2.0DO*A*A/Q(I-1,J,1,1))
A1 = 2.0DO*(Q3T1*Q2T1+(A2*A*Q1T1-(A2*Q2T1+A*Q3T1))*Q1T1)
F3TT1 = A1/Q(I-1,J,1,1)+A2*Q2TT1+A*Q3TT1-A2*A*Q1TT1
!PARA (I+1,J)
!CÁLCULO DO TERMO FONTE
A = DSQRT(Q(I+1,J,1,2)**2.0DO+Q(I+1,J,1,3)**2.0DO)
IF (A<10.0DO**(-6.0DO)) THEN
  S22 = 0.0DO; S32 = 0.0DO
  S2X2 = 0.0DO; S3X2 = 0.0DO
  S2Y2 = 0.0DO; S3Y2 = 0.0DO
ELSE
  A1 = Q(I+1,J,1,1)**(7.0DO/3.0DO)
  S22 = -G*N*N*Q(I+1,J,1,2)*A/A1; S32 = -G*N*N*Q(I+1,J,1,3)*A/A1
  A2 = Q(I+1,J,1,2)*QX(I+1,J,1,2)+Q(I+1,J,1,3)*QX(I+1,J,1,3)
  S2X2 = 7.0DO*Q(I+1,J,1,2)*A*QX(I+1,J,1,1)/(3.0DO*Q(I+1,J,1,1))
  S2X2 = G*N*N*(S2X2-QX(I+1,J,1,2)*A-Q(I+1,J,1,2)*A2/A)/A1
  S3X2 = 7.0DO*Q(I+1,J,1,3)*A*QX(I+1,J,1,1)/(3.0DO*Q(I+1,J,1,1))
  S3X2 = G*N*N*(S3X2-QX(I+1,J,1,3)*A-Q(I+1,J,1,3)*A2/A)/A1
  A2 = Q(I+1,J,1,2)*QY(I+1,J,1,2)+Q(I+1,J,1,3)*QY(I+1,J,1,3)
  S2Y2 = 7.0DO*Q(I+1,J,1,2)*A*QY(I+1,J,1,1)/(3.0DO*Q(I+1,J,1,1))
  S2Y2 = G*N*N*(S2Y2-QY(I+1,J,1,2)*A-Q(I+1,J,1,2)*A2/A)/A1
  S3Y2 = 7.0DO*Q(I+1,J,1,3)*A*QY(I+1,J,1,1)/(3.0DO*Q(I+1,J,1,1))
  S3Y2 = G*N*N*(S3Y2-QY(I+1,J,1,3)*A-Q(I+1,J,1,3)*A2/A)/A1
END IF
A = Q(I+1,J,1,2)/Q(I+1,J,1,1); A2 = Q(I+1,J,1,3)/Q(I+1,J,1,1); A3 = G*Q(I+1,J,1,1)-A*A
F2X2 = 2.0DO*A*QX(I+1,J,1,2)+QX(I+1,J,1,1)*A3
F2Y2 = 2.0DO*A*QY(I+1,J,1,2)+QY(I+1,J,1,1)*A3
F22 = A*Q(I+1,J,1,2)+0.5DO*G*(Q(I+1,J,1,1)**2.0DO)
F32 = A*Q(I+1,J,1,3)
G2Y2= A2*QY(I+1,J,1,2)+A*QY(I+1,J,1,3)-A2*A*QY(I+1,J,1,1)
F3Y2 = A2*QY(I+1,J,1,2)+A*QY(I+1,J,1,3)-A2*A*QY(I+1,J,1,1)
A1 = 2.0DO*QY(I+1,J,1,2)*QY(I+1,J,1,3)-QY(I+1,J,1,1)*(A2*QY(I+1,J,1,2)+A*QY(I+1,J,1,3))
A1 = A1+2.0DO*(QY(I+1,J,1,1)**2.0DO)*A*A2-A*QY(I+1,J,1,3)*QY(I+1,J,1,1)-A2*QY(I+1,J,1,2)
  *QY(I+1,J,1,1)
G2YY2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+A2*QYY(I+1,J,1,2)+A*QYY(I+1,J,1,3)-A*A2*QYY(I+1,J,1,1)
F3YY2 = G2YY2
A1 = QY(I+1,J,1,1)*(G*QX(I+1,J,1,1)+2.0DO*A*(A*QX(I+1,J,1,1)-QX(I+1,J,1,2)))/Q(I+1,J,1,1)
A1 = A1+2.0DO*(QY(I+1,J,1,2)*(QX(I+1,J,1,2)-A*QX(I+1,J,1,1)))/Q(I+1,J,1,1)+A*QXY(I+1,J,1,2)
F2XY2 = A1+QXY(I+1,J,1,1)*A3
Q2YT2 = -F2XY2-G2YY2+S2Y2

```

```

Q1YT2 = -QXY(I+1,J,1,2)-QYY(I+1,J,1,3)
A1 = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,2)*(QX(I+1,J,1,2)-2.0D0*A*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*QXX(I+1,J,1,2))
F2XX2 = A1+QXX(I+1,J,1,1)*A3+(QX(I+1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I+1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(QY(I+1,J,1,2)*(QY(I+1,J,1,2)-2.0D0*A*QY(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*QYY(I+1,J,1,2))
F2YY2 = A1+QYY(I+1,J,1,1)*A3+(QY(I+1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I+1,J,1,1))
G2X2 = A2*QX(I+1,J,1,2)+A*QX(I+1,J,1,3)-A2*A*QX(I+1,J,1,1)
F3X2 = G2X2
A1 = 2.0D0*A2*QX(I+1,J,1,1)*QY(I+1,J,1,1)-(QX(I+1,J,1,3)*QY(I+1,J,1,1)+QY(I+1,J,1,3)
    *QX(I+1,J,1,1))
A1 = A*(QXY(I+1,J,1,3)+A1/Q(I+1,J,1,1)-A2*QXY(I+1,J,1,1))
A4 = QXY(I+1,J,1,2)-(QX(I+1,J,1,2)*QY(I+1,J,1,1)+QY(I+1,J,1,2)*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)
G2XY2 = A1+A2*A4+(QX(I+1,J,1,2)*QY(I+1,J,1,3)+QY(I+1,J,1,2)*QX(I+1,J,1,3))/Q(I+1,J,1,1)
F3XY2 = G2XY2
Q1T2 = -QX(I+1,J,1,2)-QY(I+1,J,1,3)
Q2T2 = -F2X2-G2X2+S22
F2T2 = 2.0D0*A*Q2T2+Q1T2*A3
Q1XT2 = -QXX(I+1,J,1,2)-QXY(I+1,J,1,3)
Q2XT2 = -F2XX2-G2XY2+S2X2
A1 = 2.0D0*(Q2T2*(QX(I+1,J,1,2)-A*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*Q2XT2)+Q1XT2*A3
F2XT2 = A1+Q1T2*(G*QX(I+1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I+1,J,1,1)-QX(I+1,J,1,2))/Q(I+1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(Q2T2*(QY(I+1,J,1,2)-A*QY(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A*Q2YT2)+Q1YT2*A3
F2YT2 = A1+Q1T2*(G*QY(I+1,J,1,1)+2.0D0*A*(A*QY(I+1,J,1,1)-QY(I+1,J,1,2))/Q(I+1,J,1,1))
A3 = G*Q(I+1,J,1,1)-A2*A2
G3Y2 = 2.0D0*A2*QY(I+1,J,1,3)+QY(I+1,J,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I+1,J,1,2)*QX(I+1,J,1,3)-QX(I+1,J,1,1)*(A2*QX(I+1,J,1,2)+A*QX(I+1,J,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I+1,J,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I+1,J,1,3)*QX(I+1,J,1,1)-A2*QX(I+1,J,1,2)
    *QX(I+1,J,1,1)
F3XX2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+A2*QXX(I+1,J,1,2)+A*QXX(I+1,J,1,3)-A*A2*QXX(I+1,J,1,1)
A1 = QY(I+1,J,1,1)*(G*QX(I+1,J,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I+1,J,1,1)-QX(I+1,J,1,3))/Q(I+1,J,1,1))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I+1,J,1,3)*(QX(I+1,J,1,3)-A2*QX(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A2*QXY(I+1,J,1,3))
G3XY2 = A1+QXY(I+1,J,1,1)*A3
Q3T2 = -F3X2-G3Y2+S32
F3T2 = A2*Q2T2+A*Q3T2-A*A2*Q1T2
Q3XT2 = -F3XX2-G3XY2+S3X2
A1 = Q1T2*(2.0D0*A*A2*QX(I+1,J,1,1)-A*QX(I+1,J,1,3)-A2*QX(I+1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T2*(QX(I+1,J,1,2)-A*QX(I+1,J,1,1))+Q2T2*(QX(I+1,J,1,3)-A2*QX(I+1,J,1,1))
F3XT2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+Q2XT2*A2+A*Q3XT2-A*A2*Q1XT2
A1 = 2.0D0*(QY(I+1,J,1,3)*(QY(I+1,J,1,3)-2.0D0*A2*QY(I+1,J,1,1))/Q(I+1,J,1,1)+A2
    *QYY(I+1,J,1,3))
G3YY2 = A1+QYY(I+1,J,1,1)*A3+(QY(I+1,J,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I+1,J,1,1))
Q3YT2 = -F3XY2-G3YY2+S3Y2
A1 = Q1T2*(2.0D0*A*A2*QY(I+1,J,1,1)-A*QY(I+1,J,1,3)-A2*QY(I+1,J,1,2))
A1 = A1+Q3T2*(QY(I+1,J,1,2)-A*QY(I+1,J,1,1))+Q2T2*(QY(I+1,J,1,3)-A2*QY(I+1,J,1,1))
F3YT2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+Q2YT2*A2+A*Q3YT2-A*A2*Q1YT2
G2YT2 = F3YT2
!TERMO FONTE
A4 = DSQRT(Q(I+1,J,1,2)**2.0D0+Q(I+1,J,1,3)**2.0D0)
IF (A4<10.0D0*(-6.0D0)) THEN
    S2T2 = 0.0D0; S3T2 = 0.0D0
ELSE
    A1 = Q(I+1,J,1,2)*Q2T2+Q(I+1,J,1,3)*Q3T2
    S2T2 = 7.0D0*Q(I+1,J,1,2)*A4*Q1T2/(3.0D0*Q(I+1,J,1,1))
    S2T2 = G*N*N*(S2T2-A4*Q2T2-Q(I+1,J,1,2)*A1/A4)/(Q(I+1,J,1,1)**(7.0D0/3.0D0))
    S3T2 = 7.0D0*Q(I+1,J,1,3)*A4*Q1T2/(3.0D0*Q(I+1,J,1,1))
    S3T2 = G*N*N*(S3T2-A4*Q3T2-Q(I+1,J,1,3)*A1/A4)/(Q(I+1,J,1,1)**(7.0D0/3.0D0))
END IF
Q2TT2 = -F2XT2-G2YT2+S2T2

```

```

Q1TT2 = -Q2XT2-Q3YT2
A1 = Q1T2*(G*QY(I+1,J,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QY(I+1,J,1,1)-QY(I+1,J,1,3)))/Q(I+1,J,1,1))
G3YT2 = A1+2.0D0*(Q3T2*(QY(I+1,J,1,3)-A2*QY(I+1,J,1,1)))/Q(I+1,J,1,1)+A2*Q3YT2)+Q1YT2*A3
Q3TT2 = -F3XT2-G3YT2+S3T2
A1 = 2.0D0*(Q2T2*(Q2T2-2.0D0*A*Q1T2)/Q(I+1,J,1,1)+A*Q2TT2)
F2TT2 = A1+Q1TT2*(G*Q(I+1,J,1,1)-A*A)+Q1T2*Q1T2*(G+2.0D0*A*A/Q(I+1,J,1,1))
A1 = 2.0D0*(Q3T2*Q2T2+(A2*A*Q1T2-(A2*Q2T2+A*Q3T2))*Q1T2)
F3TT2 = A1/Q(I+1,J,1,1)+A2*Q2TT2+A*Q3TT2-A2*A*Q1TT2
!PARA (I,J-1)
!CÁLCULO DO TERMO FONTE
A = DSQRT(Q(I,J-1,1,2)**2.0D0+Q(I,J-1,1,3)**2.0D0)
IF (A<10.0D0*(-6.0D0)) THEN
    S23 = 0.0D0; S33 = 0.0D0
    S2X3 = 0.0D0; S3X3 = 0.0D0
    S2Y3 = 0.0D0; S3Y3 = 0.0D0
ELSE
    A1 = Q(I,J-1,1,1)**(7.0D0/3.0D0)
    S23 = -G*N*N*Q(I,J-1,1,2)*A/A1; S33 = -G*N*N*Q(I,J-1,1,3)*A/A1
    A2 = Q(I,J-1,1,2)*QX(I,J-1,1,2)+Q(I,J-1,1,3)*QX(I,J-1,1,3)
    S2X3 = 7.0D0*Q(I,J-1,1,2)*A*QX(I,J-1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J-1,1,1))
    S2X3 = G*N*N*(S2X3-QX(I,J-1,1,2)*A-Q(I,J-1,1,2)*A2/A)/A1
    S3X3 = 7.0D0*Q(I,J-1,1,3)*A*QX(I,J-1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J-1,1,1))
    S3X3 = G*N*N*(S3X3-QX(I,J-1,1,3)*A-Q(I,J-1,1,3)*A2/A)/A1
    A2 = Q(I,J-1,1,2)*QY(I,J-1,1,2)+Q(I,J-1,1,3)*QY(I,J-1,1,3)
    S2Y3 = 7.0D0*Q(I,J-1,1,2)*A*QY(I,J-1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J-1,1,1))
    S2Y3 = G*N*N*(S2Y3-QY(I,J-1,1,2)*A-Q(I,J-1,1,2)*A2/A)/A1
    S3Y3 = 7.0D0*Q(I,J-1,1,3)*A*QY(I,J-1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J-1,1,1))
    S3Y3 = G*N*N*(S3Y3-QY(I,J-1,1,3)*A-Q(I,J-1,1,3)*A2/A)/A1
END IF
A = Q(I,J-1,1,2)/Q(I,J-1,1,1); A2 = Q(I,J-1,1,3)/Q(I,J-1,1,1); A3 = G*Q(I,J-1,1,1)-A*A
F2X3 = 2.0D0*A*QX(I,J-1,1,2)+QX(I,J-1,1,1)*A3
G2Y3 = A2*QY(I,J-1,1,2)+A*QY(I,J-1,1,3)-A2*A*QY(I,J-1,1,1)
G23 = A*Q(I,J-1,1,3)
G33 = A2*Q(I,J-1,1,3)+0.5D0*G*(Q(I,J-1,1,1)**2.0D0)
A1 = 2.0D0*QY(I,J-1,1,2)*QY(I,J-1,1,3)-QY(I,J-1,1,1)*(A2*QY(I,J-1,1,2)+A*QY(I,J-1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J-1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QY(I,J-1,1,3)*QY(I,J-1,1,1)-A2*QY(I,J-1,1,2)
    *QY(I,J-1,1,1)
G2YY3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+A2*QYY(I,J-1,1,2)+A*QYY(I,J-1,1,3)-A*A2*QYY(I,J-1,1,1)
F3YY3 = G2YY3
A1 = QY(I,J-1,1,1)*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,2)))/Q(I,J-1,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J-1,1,2)*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1)))/Q(I,J-1,1,1)+A*QXY(I,J-1,1,2))
F2XY3 = A1+QXY(I,J-1,1,1)*A3
Q1YT3 = -QXY(I,J-1,1,2)-QYY(I,J-1,1,3)
A1 = 2.0D0*(QX(I,J-1,1,2)*(QX(I,J-1,1,2)-2.0D0*A*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A*QXX(I,J-1,1,2))
F2XX3 = A1+QXX(I,J-1,1,1)*A3+(QX(I,J-1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I,J-1,1,1))
G2X3 = A2*QX(I,J-1,1,2)+A*QX(I,J-1,1,3)-A2*A*QX(I,J-1,1,1)
F3X3 = G2X3
Q1T3 = -QX(I,J-1,1,2)-QY(I,J-1,1,3)
Q2T3 = -F2X3-G2X3+S23
Q2YT3 = -F2XY3-G2YY3+S2Y3
A1 = 2.0D0*A2*QX(I,J-1,1,1)*QY(I,J-1,1,1)-(QX(I,J-1,1,3)*QY(I,J-1,1,1)+QY(I,J-1,1,3)
    *QX(I,J-1,1,1))
A1 = A*(QXY(I,J-1,1,3)+A1/Q(I,J-1,1,1)-A2*QXY(I,J-1,1,1))
A4 = QXY(I,J-1,1,2)-(QX(I,J-1,1,2)*QY(I,J-1,1,1)+QY(I,J-1,1,2)*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)
G2XY3 = A1+A2*A4+(QX(I,J-1,1,2)*QY(I,J-1,1,3)+QY(I,J-1,1,2)*QX(I,J-1,1,3))/Q(I,J-1,1,1)
F3XY3 = G2XY3
A3 = G*Q(I,J-1,1,1)-A2*A2

```

```

G3Y3 = 2.0D0*A2*QY(I,J-1,1,3)+QY(I,J-1,1,1)*A3
G3X3 = 2.0D0*A2*QX(I,J-1,1,3)+QX(I,J-1,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I,J-1,1,2)*QX(I,J-1,1,3)-QX(I,J-1,1,1)*(A2*QX(I,J-1,1,2)+A*QX(I,J-1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I,J-1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I,J-1,1,3)*QX(I,J-1,1,1)-A2*QX(I,J-1,1,2)
      *QX(I,J-1,1,1)
F3XX3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+A2*QXX(I,J-1,1,2)+A*QXX(I,J-1,1,3)-A*A2*QXX(I,J-1,1,1)
G2XX3 = F3XX3
A1 = QY(I,J-1,1,1)*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,3)))/Q(I,J-1,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J-1,1,3)*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1)))/Q(I,J-1,1,1)+A2*QXY(I,J-1,1,3))
G3XY3 = A1+QXY(I,J-1,1,1)*A3
Q3XT3 = -F3XX3-G3XY3+S3X3
Q2XT3 = -F2XX3-G2XY3+S2X3
Q3T3 = -F3X3-G3Y3+S33
G2T3 = A2*Q2T3+A*Q3T3-A*A2*Q1T3
G3T3 = 2.0D0*A2*Q3T3+Q1T3*A3
Q1XT3 = -QXX(I,J-1,1,2)-QXY(I,J-1,1,3)
A1 = 2.0D0*(Q2T3*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1))/Q(I,J-1,1,1)+A*Q2XT3)+Q1XT3*(G*Q(I,J-1,1,1)
      -A*A)
F2XT3 = A1+Q1T3*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,2)))/Q(I,J-1,1,1)
A1 = Q1T3*(2.0D0*A*A2*QX(I,J-1,1,1)-A*QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,2))
A1 = A1+Q3T3*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1))+Q2T3*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1))
G2XT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+Q2XT3*A2+A*Q3XT3-A*A2*Q1XT3
A1 = Q1T3*(G*QX(I,J-1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J-1,1,1)-QX(I,J-1,1,3)))/Q(I,J-1,1,1)
G3XT3 = A1+2.0D0*(Q3T3*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1)))/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q3XT3)+Q1XT3*A3
A1 = 2.0D0*(QY(I,J-1,1,3)*(QY(I,J-1,1,3)-2.0D0*A2*QY(I,J-1,1,1)))/Q(I,J-1,1,1)+A2
      *QYY(I,J-1,1,3))
G3YY3 = A1+QYY(I,J-1,1,1)*A3+(QY(I,J-1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J-1,1,1))
A1 = 2.0D0*(QX(I,J-1,1,3)*(QX(I,J-1,1,3)-2.0D0*A2*QX(I,J-1,1,1)))/Q(I,J-1,1,1)+A2
      *QXX(I,J-1,1,3))
G3XX3 = A1+QXX(I,J-1,1,1)*A3+(QX(I,J-1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J-1,1,1))
Q3YT3 = -F3XY3-G3YY3+S3Y3
A1 = Q1T3*(2.0D0*A*A2*QY(I,J-1,1,1)-A*QY(I,J-1,1,3)-A2*QY(I,J-1,1,2))
A1 = A1+Q3T3*(QY(I,J-1,1,2)-A*QY(I,J-1,1,1))+Q2T3*(QY(I,J-1,1,3)-A2*QY(I,J-1,1,1))
G2YT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+Q2YT3*A2+A*Q3YT3-A*A2*Q1YT3
A1 = Q1T3*(G*QY(I,J-1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QY(I,J-1,1,1)-QY(I,J-1,1,3)))/Q(I,J-1,1,1)
G3YT3 = A1+2.0D0*(Q3T3*(QY(I,J-1,1,3)-A2*QY(I,J-1,1,1)))/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q3YT3)+Q1YT3*A3
A1 = Q1T3*(2.0D0*A*A2*QX(I,J-1,1,1)-A*QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,2))
A1 = A1+Q3T3*(QX(I,J-1,1,2)-A*QX(I,J-1,1,1))+Q2T3*(QX(I,J-1,1,3)-A2*QX(I,J-1,1,1))
F3XT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+Q2XT3*A2+A*Q3XT3-A*A2*Q1XT3
!TERMO FONTE
A4 = DSQRT(Q(I,J-1,1,2)**2.0D0+Q(I,J-1,1,3)**2.0D0)
IF (A4<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
  S2T3 = 0.0D0; S3T3 = 0.0D0
ELSE
  A1 = Q(I,J-1,1,2)*Q2T3+Q(I,J-1,1,3)*Q3T3
  S2T3 = 7.0D0*Q(I,J-1,1,2)*A4*Q1T3/(3.0D0*Q(I,J-1,1,1))
  S2T3 = G*N*(S2T3-A4*Q2T3-Q(I,J-1,1,2)*A1/A4)/(Q(I,J-1,1,1)**(7.0D0/3.0D0))
  S3T3 = 7.0D0*Q(I,J-1,1,3)*A4*Q1T3/(3.0D0*Q(I,J-1,1,1))
  S3T3 = G*N*(S3T3-A4*Q3T3-Q(I,J-1,1,3)*A1/A4)/(Q(I,J-1,1,1)**(7.0D0/3.0D0))
END IF
Q3TT3 = -F3XT3-G3YT3+S3T3
Q2TT3 = -F2XT3-G2YT3+S2T3
Q1TT3 = -Q2XT3-Q3YT3
A1 = 2.0D0*(Q3T3*Q2T3+(A2*A*Q1T3-(A2*Q2T3+A*Q3T3))*Q1T3)
G2TT3 = A1/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q2TT3+A*Q3TT3-A2*A*Q1TT3
A1 = 2.0D0*(Q3T3*(Q3T3-2.0D0*A2*Q1T3)/Q(I,J-1,1,1)+A2*Q3TT3)
G3TT3 = A1+Q1TT3*A3+(Q1T3**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J-1,1,1))

```

```

!PARA (I,J+1)
!CÁLCULO DO TERMO FONTE
A = DSQRT(Q(I,J+1,1,2)**2.0D0+Q(I,J+1,1,3)**2.0D0)
IF (A<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
  S24 = 0.0D0; S34 = 0.0D0
  S2X4 = 0.0D0; S3X4 = 0.0D0
  S2Y4 = 0.0D0; S3Y4 = 0.0D0
ELSE
  A1 = Q(I,J+1,1,1)**(7.0D0/3.0D0)
  S24 = -G*N*N*Q(I,J+1,1,2)*A/A1; S34 = -G*N*N*Q(I,J+1,1,3)*A/A1
  A2 = Q(I,J+1,1,2)*QX(I,J+1,1,2)+Q(I,J+1,1,3)*QX(I,J+1,1,3)
  S2X4 = 7.0D0*Q(I,J+1,1,2)*A*QX(I,J+1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J+1,1,1))
  S2X4 = G*N*N*(S2X4-QX(I,J+1,1,2)*A-Q(I,J+1,1,2)*A2/A)/A1
  S3X4 = 7.0D0*Q(I,J+1,1,3)*A*QX(I,J+1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J+1,1,1))
  S3X4 = G*N*N*(S3X4-QX(I,J+1,1,3)*A-Q(I,J+1,1,3)*A2/A)/A1
  A2 = Q(I,J+1,1,2)*QY(I,J+1,1,2)+Q(I,J+1,1,3)*QY(I,J+1,1,3)
  S2Y4 = 7.0D0*Q(I,J+1,1,2)*A*QY(I,J+1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J+1,1,1))
  S2Y4 = G*N*N*(S2Y4-QY(I,J+1,1,2)*A-Q(I,J+1,1,2)*A2/A)/A1
  S3Y4 = 7.0D0*Q(I,J+1,1,3)*A*QY(I,J+1,1,1)/(3.0D0*Q(I,J+1,1,1))
  S3Y4 = G*N*N*(S3Y4-QY(I,J+1,1,3)*A-Q(I,J+1,1,3)*A2/A)/A1
END IF
A = Q(I,J+1,1,2)/Q(I,J+1,1,1); A2 = Q(I,J+1,1,3)/Q(I,J+1,1,1); A3 = G*Q(I,J+1,1,1)-A*A
F2X4 = 2.0D0*A*QX(I,J+1,1,2)+QX(I,J+1,1,1)*A3
G24 = A*Q(I,J+1,1,3)
G34 = A2*Q(I,J+1,1,3)+0.5D0*G*(Q(I,J+1,1,1)**2.0D0)
Q1YT4 = -QXY(I,J+1,1,2)-QYY(I,J+1,1,3)
G2Y4 = A2*QY(I,J+1,1,2)+A*QY(I,J+1,1,3)-A2*A*QY(I,J+1,1,1)
A1 = 2.0D0*QY(I,J+1,1,2)*QY(I,J+1,1,3)-QY(I,J+1,1,1)*(A2*QY(I,J+1,1,2)+A*QY(I,J+1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J+1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QY(I,J+1,1,3)*QY(I,J+1,1,1)-A2*QY(I,J+1,1,2)
  *QY(I,J+1,1,1)
G2YY4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+A2*QYY(I,J+1,1,2)+A*QYY(I,J+1,1,3)-A*A2*QYY(I,J+1,1,1)
F3YY4 = G2YY4
A1 = QY(I,J+1,1,1)*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,2))/Q(I,J+1,1,1))
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J+1,1,2)*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A*QXY(I,J+1,1,2))
F2XY4 = A1+QXY(I,J+1,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,2)*(QX(I,J+1,1,2)-2.0D0*A*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A*QXX(I,J+1,1,2))
F2XX4 = A1+QXX(I,J+1,1,1)*A3+(QX(I,J+1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A*A/Q(I,J+1,1,1))
G2X4 = A2*QX(I,J+1,1,2)+A*QX(I,J+1,1,3)-A2*A*QX(I,J+1,1,1)
F3X4 = G2X4
Q1T4 = -QX(I,J+1,1,2)-QY(I,J+1,1,3)
Q2T4 = -F2X4-G2X4+S24
A1 = 2.0D0*A2*QX(I,J+1,1,1)*QY(I,J+1,1,1)-(QX(I,J+1,1,3)*QY(I,J+1,1,1)+QY(I,J+1,1,3)
  *QX(I,J+1,1,1))
A1 = A*(QXY(I,J+1,1,3)+A1/Q(I,J+1,1,1)-A2*QXY(I,J+1,1,1))
A4 = QXY(I,J+1,1,2)-(QX(I,J+1,1,2)*QY(I,J+1,1,1)+QY(I,J+1,1,2)*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)
G2XY4 = A1+A2*A4+(QX(I,J+1,1,2)*QY(I,J+1,1,3)+QY(I,J+1,1,2)*QX(I,J+1,1,3))/Q(I,J+1,1,1)
F3XY4 = G2XY4
Q2YT4 = -F2XY4-G2YY4+S2Y4
Q2XT4 = -F2XX4-G2XY4+S2X4
Q1XT4 = -QXX(I,J+1,1,2)-QXY(I,J+1,1,3)
A1 = 2.0D0*(Q2T4*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))/Q(I,J+1,1,1)+A*Q2XT4)+Q1XT4*A3
F2XT4 = A1+Q1T4*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A*(A*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,2))/Q(I,J+1,1,1))
A3 = G*Q(I,J+1,1,1)-A2*A2
G3Y4 = 2.0D0*A2*QY(I,J+1,1,3)+QY(I,J+1,1,1)*A3
G3X4 = 2.0D0*A2*QX(I,J+1,1,3)+QX(I,J+1,1,1)*A3
A1 = 2.0D0*QX(I,J+1,1,2)*QX(I,J+1,1,3)-QX(I,J+1,1,1)*(A2*QX(I,J+1,1,2)+A*QX(I,J+1,1,3))
A1 = A1+2.0D0*(QX(I,J+1,1,1)**2.0D0)*A*A2-A*QX(I,J+1,1,3)*QX(I,J+1,1,1)-A2*QX(I,J+1,1,2)

```

```

      *QX(I,J+1,1,1)
F3XX4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+A2*QXX(I,J+1,1,2)+A*QXX(I,J+1,1,3)-A*A2*QXX(I,J+1,1,1)
G2XX4 = F3XX4
A1 = QY(I,J+1,1,1)*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,3)))/Q(I,J+1,1,1)
A1 = A1+2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1)))/Q(I,J+1,1,1)+A2*QXY(I,J+1,1,3))
G3XY4 = A1+QXY(I,J+1,1,1)*A3
Q3XT4 = -F3XX4-G3XY4+S3X4
Q3T4 = -F3X4-G3Y4+S34
G2T4 = A2*Q2T4+A*Q3T4-A*A2*Q1T4
G3T4 = 2.0D0*A2*Q3T4+Q1T4*A3
A1 = Q1T4*(2.0D0*A*A2*QX(I,J+1,1,1)-A*QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,2))
A1 = A1+Q3T4*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))+Q2T4*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1))
G2XT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+Q2XT4*A2+A*Q3XT4-A*A2*Q1XT4
A1 = Q1T4*(G*QX(I,J+1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QX(I,J+1,1,1)-QX(I,J+1,1,3)))/Q(I,J+1,1,1)
G3XT4 = A1+2.0D0*(Q3T4*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1)))/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q3XT4+Q1XT4*A3
A1 = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)*(QY(I,J+1,1,3)-2.0D0*A2*QY(I,J+1,1,1)))/Q(I,J+1,1,1)+A2
      *QYY(I,J+1,1,3))
G3YY4 = A1+QYY(I,J+1,1,1)*A3+(QY(I,J+1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J+1,1,1))
A1 = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,3)*(QX(I,J+1,1,3)-2.0D0*A2*QX(I,J+1,1,1)))/Q(I,J+1,1,1)+A2
      *QXX(I,J+1,1,3))
G3XX4 = A1+QXX(I,J+1,1,1)*A3+(QX(I,J+1,1,1)**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J+1,1,1))
Q3YT4 = -F3XY4-G3YY4+S3Y4
A1 = Q1T4*(2.0D0*A*A2*QY(I,J+1,1,1)-A*QY(I,J+1,1,3)-A2*QY(I,J+1,1,2))
A1 = A1+Q3T4*(QY(I,J+1,1,2)-A*QY(I,J+1,1,1))+Q2T4*(QY(I,J+1,1,3)-A2*QY(I,J+1,1,1))
G2YT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+Q2YT4*A2+A*Q3YT4-A*A2*Q1YT4
A1 = Q1T4*(G*QY(I,J+1,1,1)+2.0D0*A2*(A2*QY(I,J+1,1,1)-QY(I,J+1,1,3)))/Q(I,J+1,1,1)
G3YT4 = A1+2.0D0*(Q3T4*(QY(I,J+1,1,3)-A2*QY(I,J+1,1,1)))/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q3YT4+Q1YT4*A3
A1 = Q1T4*(2.0D0*A*A2*QX(I,J+1,1,1)-A*QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,2))
A1 = A1+Q3T4*(QX(I,J+1,1,2)-A*QX(I,J+1,1,1))+Q2T4*(QX(I,J+1,1,3)-A2*QX(I,J+1,1,1))
F3XT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+Q2XT4*A2+A*Q3XT4-A*A2*Q1XT4
!TERMO FONTE
A4 = DSQRT(Q(I,J+1,1,2)**2.0D0+Q(I,J+1,1,3)**2.0D0)
IF (A4<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
  S2T4 = 0.0D0; S3T4 = 0.0D0
ELSE
  A1 = Q(I,J+1,1,2)*Q2T4+Q(I,J+1,1,3)*Q3T4
  S2T4 = 7.0D0*Q(I,J+1,1,2)*A4*Q1T4/(3.0D0*Q(I,J+1,1,1))
  S2T4 = G*N*N*(S2T4-A4*Q2T4-Q(I,J+1,1,2)*A1/A4)/(Q(I,J+1,1,1)**(7.0D0/3.0D0))
  S3T4 = 7.0D0*Q(I,J+1,1,3)*A4*Q1T4/(3.0D0*Q(I,J+1,1,1))
  S3T4 = G*N*N*(S3T4-A4*Q3T4-Q(I,J+1,1,3)*A1/A4)/(Q(I,J+1,1,1)**(7.0D0/3.0D0))
END IF
Q3TT4 = -F3XT4-G3YT4+S3T4
Q2TT4 = -F2XT4-G2YT4+S2T4
Q1TT4 = -Q2XT4-Q3YT4
A1 = 2.0D0*(Q3T4*Q2T4+(A2*A*Q1T4-(A2*Q2T4+A*Q3T4))*Q1T4)
G2TT4 = A1/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q2TT4+A*Q3TT4-A*A2*Q1TT4
A1 = 2.0D0*(Q3T4*(Q3T4-2.0D0*A2*Q1T4)/Q(I,J+1,1,1)+A2*Q3TT4)
G3TT4 = A1+Q1TT4*A3+(Q1T4**2.0D0)*(G+2.0D0*A2*A2/Q(I,J+1,1,1))
!CÁLCULO DE QX1
!TERMO P(2) [DY]
A = QX(I,J-1,1,1)+(DY*QXY(I,J-1,1,1)+DT*(QXY(I,J-1,1,3)-QXX(I,J-1,1,2)))/4.0D0
A = A+2.0D0*DT*(QX(I,J-1,1,3)+DT*Q3XT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2) [-DY]
A1 = QX(I,J+1,1,1)+(DT*(QXY(I,J+1,1,3)-QXX(I,J+1,1,2))-DY*QXY(I,J+1,1,1))/4.0D0
A1 = A1-2.0D0*DT*(QX(I,J+1,1,3)+DT*Q3XT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1) [DX]
A2 = QX(I-1,J,1,1)+(DX*QXX(I-1,J,1,1)+DT*(QXX(I-1,J,1,2)-QXY(I-1,J,1,3)))/4.0D0

```

```

A2 = A2+2.0D0*DT*(QX(I-1,J,1,2)+DT*Q2XT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1)[-DX]
A3 = QX(I+1,J,1,1)+(DT*(QXX(I+1,J,1,2)-QXY(I+1,J,1,3))-DX*QXX(I+1,J,1,1))/4.0D0
A3 = A3-2.0D0*DT*(QX(I+1,J,1,2)+DT*Q2XT2/4.0D0)/DX
QX(I,J,2,1) = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
!CÁLCULO DE QX2
!TERMO P(2)[DY]
A = QX(I,J-1,1,2)+(DY*QXY(I,J-1,1,2)+DT*(G2XY3-F2XX3))/4.0D0
A = A+2.0D0*DT*(G2X3+DT*G2XT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2)[-DY]
A1 = QX(I,J+1,1,2)+(DT*(G2XY4-F2XX4)-DY*QXY(I,J+1,1,2))/4.0D0
A1 = A1-2.0D0*DT*(G2X4+DT*G2XT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1)[DX]
A2 = QX(I-1,J,1,2)+(DX*QXX(I-1,J,1,2)+DT*(F2XX1-G2XY1))/4.0D0
A2 = A2+2.0D0*DT*(F2X1+DT*F2XT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1)[-DX]
A3 = QX(I+1,J,1,2)+(DT*(F2XX2-G2XY2)-DX*QXX(I+1,J,1,2))/4.0D0
A3 = A3-2.0D0*DT*(F2X2+DT*F2XT2/4.0D0)/DX
!TERMO FONTE
TF2 = DT*(S2X1+S2X2+S2X3+S2X4)/2.0D0
QX(I,J,2,2) = (A+A1+A2+A3+TF2)/4.0D0
!CÁLCULO DE QX3
!TERMO P(2)[DY]
A = QX(I,J-1,1,3)+(DY*QXY(I,J-1,1,3)+DT*(G3XY3-F3XX3))/4.0D0
A = A+2.0D0*DT*(G3X3+DT*G3XT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2)[-DY]
A1 = QX(I,J+1,1,3)+(DT*(G3XY4-F3XX4)-DY*QXY(I,J+1,1,3))/4.0D0
A1 = A1-2.0D0*DT*(G3X4+DT*G3XT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1)[DX]
A2 = QX(I-1,J,1,3)+(DX*QXX(I-1,J,1,3)+DT*(F3XX1-G3XY1))/4.0D0
A2 = A2+2.0D0*DT*(F3X1+DT*F3XT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1)[-DX]
A3 = QX(I+1,J,1,3)+(DT*(F3XX2-G3XY2)-DX*QXX(I+1,J,1,3))/4.0D0
A3 = A3-2.0D0*DT*(F3X2+DT*F3XT2/4.0D0)/DX
!TERMO FONTE
TF3 = DT*(S3X1+S3X2+S3X3+S3X4)/2.0D0
QX(I,J,2,3) = (A+A1+A2+A3+TF3)/4.0D0
!CÁLCULO DE QY1
!TERMO P(2)[DY]
A = QY(I,J-1,1,1)+(DY*QYY(I,J-1,1,1)+DT*(QYY(I,J-1,1,3)-QXY(I,J-1,1,2)))/4.0D0
A = A+2.0D0*DT*(QY(I,J-1,1,3)+DT*Q3YT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2)[-DY]
A1 = QY(I,J+1,1,1)+(DT*(QYY(I,J+1,1,3)-QXY(I,J+1,1,2))-DY*QYY(I,J+1,1,1))/4.0D0
A1 = A1-2.0D0*DT*(QY(I,J+1,1,3)+DT*Q3YT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1)[DX]
A2 = QY(I-1,J,1,1)+(DX*QXY(I-1,J,1,1)+DT*(QXY(I-1,J,1,2)-QYY(I-1,J,1,3)))/4.0D0
A2 = A2+2.0D0*DT*(QY(I-1,J,1,2)+DT*Q2YT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1)[-DX]
A3 = QY(I+1,J,1,1)+(DT*(QXY(I+1,J,1,2)-QYY(I+1,J,1,3))-DX*QXY(I+1,J,1,1))/4.0D0
A3 = A3-2.0D0*DT*(QY(I+1,J,1,2)+DT*Q2YT2/4.0D0)/DX
QY(I,J,2,1) = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
!CÁLCULO DE QY2
!TERMO P(2)[DY]
A = QY(I,J-1,1,2)+(DY*QYY(I,J-1,1,2)+DT*(G2YY3-F2XY3))/4.0D0
A = A+2.0D0*DT*(G2Y3+DT*G2YT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2)[-DY]
A1 = QY(I,J+1,1,2)+(DT*(G2YY4-F2XY4)-DY*QYY(I,J+1,1,2))/4.0D0

```

```

A1 = A1-2.0D0*DT*(G2Y4+DT*G2YT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1) [DX]
A2 = QY(I-1,J,1,2)+(DX*QXY(I-1,J,1,2)+DT*(F2XY1-G2YY1))/4.0D0
A2 = A2+2.0D0*DT*(F2Y1+DT*F2YT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = QY(I+1,J,1,2)+(DT*(F2XY2-G2YY2)-DX*QXY(I+1,J,1,2))/4.0D0
A3 = A3-2.0D0*DT*(F2Y2+DT*F2YT2/4.0D0)/DX
!TERMO FONTE
TF2 = DT*(S2Y1+S2Y2+S2Y3+S2Y4)/2.0D0
QY(I,J,2,2) = (A+A1+A2+A3+TF2)/4.0D0
!CÁLCULO DE QY3
!TERMO P(2) [DY]
A = QY(I,J-1,1,3)+(DY*QYY(I,J-1,1,3)+DT*(G3YY3-F3XY3))/4.0D0
A = A+2.0D0*DT*(G3Y3+DT*G3YT3/4.0D0)/DY
!TERMO P(2) [-DY]
A1 = QY(I,J+1,1,3)+(DT*(G3YY4-F3XY4)-DY*QYY(I,J+1,1,3))/4.0D0
A1 = A1-2.0D0*DT*(G3Y4+DT*G3YT4/4.0D0)/DY
!TERMO P(1) [DX]
A2 = QY(I-1,J,1,3)+(DX*QXY(I-1,J,1,3)+DT*(F3XY1-G3YY1))/4.0D0
A2 = A2+2.0D0*DT*(F3Y1+DT*F3YT1/4.0D0)/DX
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = QY(I+1,J,1,3)+(DT*(F3XY2-G3YY2)-DX*QXY(I+1,J,1,3))/4.0D0
A3 = A3-2.0D0*DT*(F3Y2+DT*F3YT2/4.0D0)/DX
!TERMO FONTE
TF3 = DT*(S3Y1+S3Y2+S3Y3+S3Y4)/2.0D0
QY(I,J,2,3) = (A+A1+A2+A3+TF3)/4.0D0
!CÁLCULO DE QXX1
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,1)+0.5D0*DT*Q1XT2-QX(I,J,2,1))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,1)-QX(I-1,J,1,1)-0.5D0*DT*Q1XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY1
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1YT4-QY(I,J,2,1))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,1)-QY(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY1
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1YT4-QY(I,J,2,1))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,1)-QY(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXX2
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,2)+0.5D0*DT*Q2XT2-QX(I,J,2,2))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,2)-QX(I-1,J,1,2)-0.5D0*DT*Q2XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)

```

```

IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY2
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2XT4-QX(I,J,2,2))/DY
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,2)-QX(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY2
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2YT4-QY(I,J,2,2))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,2)-QY(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXX3
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,3)+0.5D0*DT*Q3XT2-QX(I,J,2,3))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,3)-QX(I-1,J,1,3)-0.5D0*DT*Q3XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY3
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3XT4-QX(I,J,2,3))/DY
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,3)-QX(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY3
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3YT4-QY(I,J,2,3))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,3)-QY(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE Q1
!TERMO P(2) [DY]
A = (DX*DX*QXX(I,J-1,1,3)+DY*DY*QYY(I,J-1,1,3))/16.0D0+(DT*DT*Q3TT3-0.5D0*DY*DY
  *QXY(I,J-1,1,2))/4.0D0
A = DT*A/(3.0D0*DY)+Q(I,J-1,1,1)+(DY*QY(I,J-1,1,1)+DT*(QY(I,J-1,1,3)-QX(I,J-1,1,2)))/4.0D0
A = A+DT*(2.0D0*(Q(I,J-1,1,3)+DT*Q3T3/4.0D0)/DY+DT*(Q3YT3-Q2XT3)/16.0D0)
A = A+(DX*DX*QXX(I,J-1,1,1)+7.0D0*DY*DY*QYY(I,J-1,1,1))/(192.0D0)

```

```

!TERMO P(2) [-DY]
A1 = (DX*DX*QXX(I, J+1, 1, 3)+DY*DY*QYY(I, J+1, 1, 3))/16.0D0+(DT*DT*Q3TT4-0.5D0*DY*DY
      *QXY(I, J+1, 1, 2))/4.0D0
A1 = -DT*A1/(3.0D0*DY)+Q(I, J+1, 1, 1)+(DT*(QY(I, J+1, 1, 3)-QX(I, J+1, 1, 2))-DY*QY(I, J+1, 1, 1))/4.0D0
A1 = A1+DT*(DT*(Q3YT4-Q2XT4)/16.0D0-2.0D0*(Q(I, J+1, 1, 3)+DT*Q3T4/4.0D0)/DY)
A1 = A1+(DX*DX*QXX(I, J+1, 1, 1)+7.0D0*DY*DY*QYY(I, J+1, 1, 1))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [DX]
A2 = (DX*DX*QXX(I-1, J, 1, 2)+DY*DY*QYY(I-1, J, 1, 2))/16.0D0+(DT*DT*Q2TT1-0.5D0*DX*DX
      *QXY(I-1, J, 1, 3))/4.0D0
A2 = DT*A2/(3.0D0*DX)+Q(I-1, J, 1, 1)+(DX*QX(I-1, J, 1, 1)+DT*(QX(I-1, J, 1, 2)-QY(I-1, J, 1, 3)))/4.0D0
A2 = A2+DT*(2.0D0*(Q(I-1, J, 1, 2)+DT*Q2T1/4.0D0)/DX+DT*(Q2XT1-Q3YT1)/16.0D0)
A2 = A2+(7.0D0*DX*DX*QXX(I-1, J, 1, 1)+DY*DY*QYY(I-1, J, 1, 1))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = (DX*DX*QXX(I+1, J, 1, 2)+DY*DY*QYY(I+1, J, 1, 2))/16.0D0+(DT*DT*Q2TT2-0.5D0*DX*DX
      *QXY(I+1, J, 1, 3))/4.0D0
A3 = -DT*A3/(3.0D0*DX)+Q(I+1, J, 1, 1)+(DT*(QX(I+1, J, 1, 2)-QY(I+1, J, 1, 3))-DX*QX(I+1, J, 1, 1))/4.0D0
A3 = A3+DT*(DT*(Q2XT2-Q3YT2)/16.0D0-2.0D0*(Q(I+1, J, 1, 2)+DT*Q2T2/4.0D0)/DX)
A3 = A3+(7.0D0*DX*DX*QXX(I+1, J, 1, 1)+DY*DY*QYY(I+1, J, 1, 1))/(192.0D0)
AQ1 = (A+A1+A2+A3)/4.0D0
Q(I, J, 2, 1) = AQ1-(DX*DX*QXX(I, J, 2, 1)+DY*DY*QYY(I, J, 2, 1))/(48.0D0)
!CÁLCULO DE Q2
!TERMO P(2) [DY]
A = (DX*DX*G2XX3+DY*DY*G2YY3)/16.0D0+(DT*DT*G2TT3-0.5D0*DY*DY*F2XY3)/4.0D0
A = DT*A/(3.0D0*DY)+Q(I, J-1, 1, 2)+(DY*QY(I, J-1, 1, 2)+DT*(G2Y3-F2X3))/4.0D0
A = A+DT*(2.0D0*(G23+DT*G2T3/4.0D0)/DY+DT*(G2YT3-F2XT3)/16.0D0)
A = A+(DX*DX*QXX(I, J-1, 1, 2)+7.0D0*DY*DY*QYY(I, J-1, 1, 2))/(192.0D0)
!TERMO P(2) [-DY]
A1 = (DX*DX*G2XX4+DY*DY*G2YY4)/16.0D0+(DT*DT*G2TT4-0.5D0*DY*DY*F2XY4)/4.0D0
A1 = -DT*A1/(3.0D0*DY)+Q(I, J+1, 1, 2)+(DT*(G2Y4-F2X4)-DY*QY(I, J+1, 1, 2))/4.0D0
A1 = A1+DT*(DT*(G2YT4-F2XT4)/16.0D0-2.0D0*(G24+DT*G2T4/4.0D0)/DY)
A1 = A1+(DX*DX*QXX(I, J+1, 1, 2)+7.0D0*DY*DY*QYY(I, J+1, 1, 2))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [DX]
A2 = (DX*DX*F2XX1+DY*DY*F2YY1)/16.0D0+(DT*DT*F2TT1-0.5D0*DX*DX*G2XY1)/4.0D0
A2 = DT*A2/(3.0D0*DX)+Q(I-1, J, 1, 2)+(DX*QX(I-1, J, 1, 2)+DT*(F2X1-G2Y1))/4.0D0
A2 = A2+DT*(2.0D0*(F21+DT*F2T1/4.0D0)/DX+DT*(F2XT1-G2YT1)/16.0D0)
A2 = A2+(7.0D0*DX*DX*QXX(I-1, J, 1, 2)+DY*DY*QYY(I-1, J, 1, 2))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = (DX*DX*F2XX2+DY*DY*F2YY2)/16.0D0+(DT*DT*F2TT2-0.5D0*DX*DX*G2XY2)/4.0D0
A3 = -DT*A3/(3.0D0*DX)+Q(I+1, J, 1, 2)+(DT*(F2X2-G2Y2)-DX*QX(I+1, J, 1, 2))/4.0D0
A3 = A3+DT*(DT*(F2XT2-G2YT2)/16.0D0-2.0D0*(F22+DT*F2T2/4.0D0)/DX)
A3 = A3+(7.0D0*DX*DX*QXX(I+1, J, 1, 2)+DY*DY*QYY(I+1, J, 1, 2))/(192.0D0)
!TERMO FONTE
TF2 = S21+S22+S23+S24+DT*(S2T1+S2T2+S2T3+S2T4)/4.0D0
TF2 = TF2+(DX*(S2X1+S2X2)+DY*(S2Y3+S2Y4))/4.0D0
AQ2 = (A+A1+A2+A3+0.5D0*DT*TF2)/4.0D0
Q(I, J, 2, 2) = AQ2-(DX*DX*QXX(I, J, 2, 2)+DY*DY*QYY(I, J, 2, 2))/(48.0D0)
!CÁLCULO DE Q3
!TERMO P(2) [DY]
A = (DX*DX*G3XX3+DY*DY*G3YY3)/16.0D0+(DT*DT*G3TT3-0.5D0*DY*DY*F3XY3)/4.0D0
A = DT*A/(3.0D0*DY)+Q(I, J-1, 1, 3)+(DY*QY(I, J-1, 1, 3)+DT*(G3Y3-F3X3))/4.0D0
A = A+DT*(2.0D0*(G33+DT*G3T3/4.0D0)/DY+DT*(G3YT3-F3XT3)/16.0D0)
A = A+(DX*DX*QXX(I, J-1, 1, 3)+7.0D0*DY*DY*QYY(I, J-1, 1, 3))/(192.0D0)
!TERMO P(2) [-DY]
A1 = (DX*DX*G3XX4+DY*DY*G3YY4)/16.0D0+(DT*DT*G3TT4-0.5D0*DY*DY*F3XY4)/4.0D0
A1 = -DT*A1/(3.0D0*DY)+Q(I, J+1, 1, 3)+(DT*(G3Y4-F3X4)-DY*QY(I, J+1, 1, 3))/4.0D0
A1 = A1+DT*(DT*(G3YT4-F3XT4)/16.0D0-2.0D0*(G34+DT*G3T4/4.0D0)/DY)
A1 = A1+(DX*DX*QXX(I, J+1, 1, 3)+7.0D0*DY*DY*QYY(I, J+1, 1, 3))/(192.0D0)

```

```

!TERMO P(1) [DX]
A2 = (DX*DX*F3XX1+DY*DY*F3YY1)/16.0D0+(DT*DT*F3TT1-0.5D0*DX*DX*G3XY1)/4.0D0
A2 = DT*A2/(3.0D0*DX)+Q(I-1,J,1,3)+(DX*QX(I-1,J,1,3)+DT*(F3X1-G3Y1))/4.0D0
A2 = A2+DT*(2.0D0*(F31+DT*F3T1/4.0D0)/DX+DT*(F3XT1-G3YT1)/16.0D0)
A2 = A2+(7.0D0*DX*DX*QXX(I-1,J,1,3)+DY*DY*QYY(I-1,J,1,3))/(192.0D0)
!TERMO P(1) [-DX]
A3 = (DX*DX*F3XX2+DY*DY*F3YY2)/16.0D0+(DT*DT*F3TT2-0.5D0*DX*DX*G3XY2)/4.0D0
A3 = -DT*A3/(3.0D0*DX)+Q(I+1,J,1,3)+(DT*(F3X2-G3Y2)-DX*QX(I+1,J,1,3))/4.0D0
A3 = A3+DT*(DT*(F3XT2-G3YT2)/16.0D0-2.0D0*(F32+DT*F3T2/4.0D0)/DX)
A3 = A3+(7.0D0*DX*DX*QXX(I+1,J,1,3)+DY*DY*QYY(I+1,J,1,3))/(192.0D0)
!TERMO FONTE
TF3 = S31+S32+S33+S34+DT*(S3T1+S3T2+S3T3+S3T4)/4.0D0
TF3 = TF3+(DX*(S3X1+S3X2)+DY*(S3Y3+S3Y4))/4.0D0
AQ3 = (A+A1+A2+A3+0.5D0*DT*TF3)/4.0D0
Q(I,J,2,3) = AQ3-(DX*DX*QXX(I,J,2,3)+DY*DY*QYY(I,J,2,3))/(48.0D0)
TQ1 = Q(I,J,2,1); TQ2 = Q(I,J,2,2); TQ3 = Q(I,J,2,3)
DO K = 1, 50
  !RECÁLCULO DE QX1
  A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,1)-Q(I-1,J,1,1)-0.5D0*DT*Q1T1-DT*DT*Q1TT1/8.0D0)/DX
  A2 = 2.0D0*(Q(I+1,J,1,1)+0.5D0*DT*Q1T2+DT*DT*Q1TT2/8.0D0-Q(I,J,2,1))/DX
  A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
  IF(DABS(A0) < 10.0D0*(-4.0D0)) THEN
    QX(I,J,2,1) = 0.0D0
  ELSE
    QX(I,J,2,1) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
  END IF
  !RECÁLCULO DE QX2
  A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,2)-Q(I-1,J,1,2)-0.5D0*DT*Q2T1-DT*DT*Q2TT1/8.0D0)/DX
  A2 = 2.0D0*(Q(I+1,J,1,2)+0.5D0*DT*Q2T2+DT*DT*Q2TT2/8.0D0-Q(I,J,2,2))/DX
  A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
  IF(DABS(A0) < 10.0D0*(-4.0D0)) THEN
    QX(I,J,2,2) = 0.0D0
  ELSE
    QX(I,J,2,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
  END IF
  !RECÁLCULO DE QX3
  A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,3)-Q(I-1,J,1,3)-0.5D0*DT*Q3T1-DT*DT*Q3TT1/8.0D0)/DX
  A2 = 2.0D0*(Q(I+1,J,1,3)+0.5D0*DT*Q3T2+DT*DT*Q3TT2/8.0D0-Q(I,J,2,3))/DX
  A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
  IF(DABS(A0) < 10.0D0*(-4.0D0)) THEN
    QX(I,J,2,3) = 0.0D0
  ELSE
    QX(I,J,2,3) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
  END IF
  !RECÁLCULO DE QY1
  A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,1)-Q(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1T3-DT*DT*Q1TT3/8.0D0)/DY
  A2 = 2.0D0*(Q(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1T4+DT*DT*Q1TT4/8.0D0-Q(I,J,2,1))/DY
  A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
  IF(DABS(A0) < 10.0D0*(-4.0D0)) THEN
    QY(I,J,2,1) = 0.0D0
  ELSE
    QY(I,J,2,1) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
  END IF
  !RECÁLCULO DE QY2
  A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,2)-Q(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2T3-DT*DT*Q2TT3/8.0D0)/DY
  A2 = 2.0D0*(Q(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2T4+DT*DT*Q2TT4/8.0D0-Q(I,J,2,2))/DY
  A0 = DABS(A2)+DABS(A1)

```

```

IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QY(I,J,2,2) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!RECÁLCULO DE QX3
A1 = 2.0D0*(Q(I,J,2,3)-Q(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3T3-DT*DT*Q3TT3/8.0D0)/DY
A2 = 2.0D0*(Q(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3T4+DT*DT*Q3TT4/8.0D0-Q(I,J,2,3))/DY
A0 = DABS(A2)+DABS(A1)
IF(DABS(A0) < 10.0D0**(-4.0D0)) THEN
  QY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QY(I,J,2,3) = (DABS(A1)*A2+DABS(A2)*A1)/A0
END IF
!CÁLCULO DE QXX1
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,1)+0.5D0*DT*Q1XT2-QX(I,J,2,1))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,1)-QX(I-1,J,1,1)-0.5D0*DT*Q1XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY1
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1XT4-QX(I,J,2,1))/DY
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,1)-QX(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY1
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,1)+0.5D0*DT*Q1YT4-QY(I,J,2,1))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,1)-QY(I,J-1,1,1)-0.5D0*DT*Q1YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,1) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,1) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXX2
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,2)+0.5D0*DT*Q2XT2-QX(I,J,2,2))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,2)-QX(I-1,J,1,2)-0.5D0*DT*Q2XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY2
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2XT4-QX(I,J,2,2))/DY
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,2)-QX(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE

```

```

      QXY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY2
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,2)+0.5D0*DT*Q2YT4-QY(I,J,2,2))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,2)-QY(I,J-1,1,2)-0.5D0*DT*Q2YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,2) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,2) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXX3
A = 2.0D0*(QX(I+1,J,1,3)+0.5D0*DT*Q3XT2-QX(I,J,2,3))/DX
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,3)-QX(I-1,J,1,3)-0.5D0*DT*Q3XT1)/DX
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXX(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QXX(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QXY3
A = 2.0D0*(QX(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3XT4-QX(I,J,2,3))/DY
A1= 2.0D0*(QX(I,J,2,3)-QX(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3XT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QXY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QXY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!CÁLCULO DE QYY3
A = 2.0D0*(QY(I,J+1,1,3)+0.5D0*DT*Q3YT4-QY(I,J,2,3))/DY
A1= 2.0D0*(QY(I,J,2,3)-QY(I,J-1,1,3)-0.5D0*DT*Q3YT3)/DY
A2 = DABS(A)+DABS(A1)
IF (A2<10.0D0**(-5.0D0)) THEN
  QYY(I,J,2,3) = 0.0D0
ELSE
  QYY(I,J,2,3) = (DABS(A)*A1+DABS(A1)*A)/A2
END IF
!RECÁLCULO DE Q1
Q(I,J,2,1) = AQ1-(DX*DX*QXX(I,J,2,1)+DY*DY*QYY(I,J,2,1))/(48.0D0)
Q(I,J,2,2) = AQ2-(DX*DX*QXX(I,J,2,2)+DY*DY*QYY(I,J,2,2))/(48.0D0)
Q(I,J,2,3) = AQ3-(DX*DX*QXX(I,J,2,3)+DY*DY*QYY(I,J,2,3))/(48.0D0)
TQ1 = DABS(Q(I,J,2,1)-TQ1)
TQ2 = DABS(Q(I,J,2,2)-TQ2)
TQ3 = DABS(Q(I,J,2,3)-TQ3)
IF (TQ1<10.0D0**(-6.0D0) .AND. TQ2<10.0D0**(-6.0D0) .AND. TQ3<10.0D0**(-6.0D0)) THEN
  EXIT
ELSE
  TQ1 = Q(I,J,2,1); TQ2 = Q(I,J,2,2); TQ3 = Q(I,J,2,3)
END IF
END DO
END SUBROUTINE CALCULA_NAO_HOMOGENEO_CESE2
END PROGRAM SAINT_VENANT

```


ANEXOS

ANEXO A – FIGURAS AUXILIARES PARA O TESTE 2D DE RUPTURA PARCIAL DE BARRAGEM

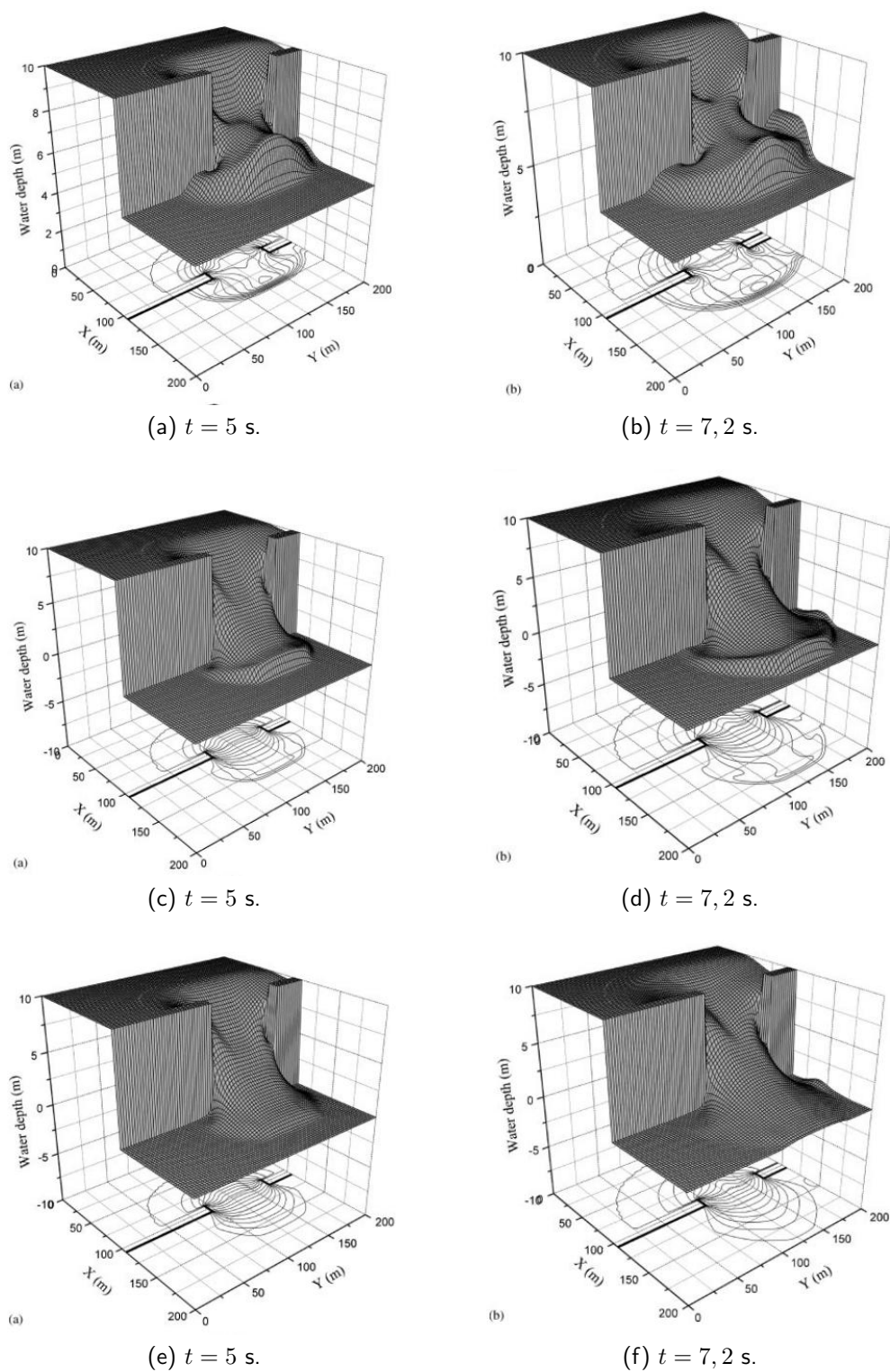


FIGURA 42 – Superfícies geradas por Zhang, Zeng e Chen (2012), para o problema assimétrico de ruptura parcial de barragem, conforme seção 4.2.7.2.

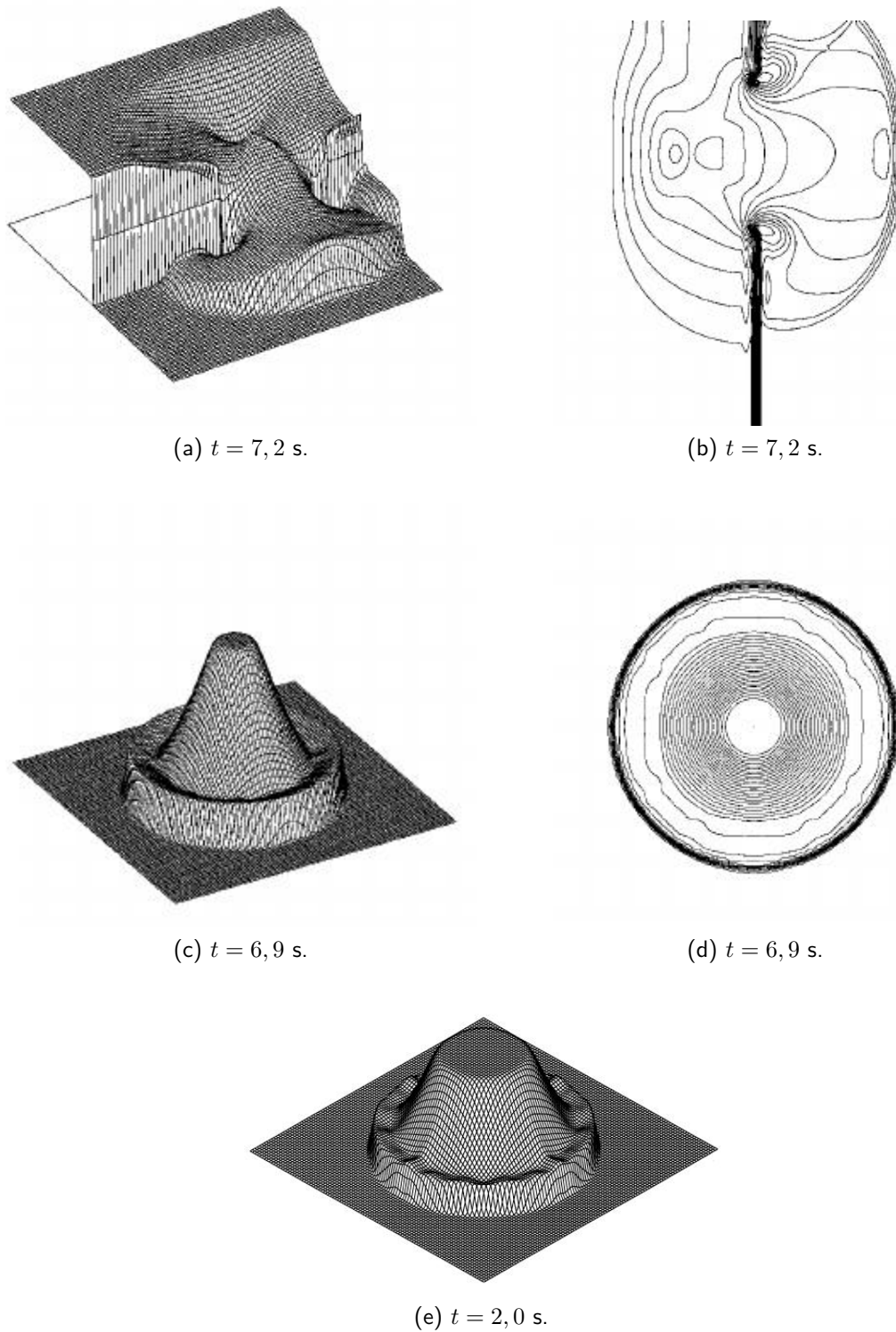


FIGURA 43 – Superfícies e mapas de contorno gerados por Akoh, Li e Xiao (2008) (a)-(d) e Zoppou e Roberts (2000) (e), para os problemas de ruptura de barragem assimétrico e circular, conforme seção 4.2.7.2.