

QUINTINO DALMOLIN  
Licenciado em Matemática

# AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO PROCESSO ITERATIVO

Tese de Grau de Mestre em Ciências apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Departamento de Geociências, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná

Curitiba - Paraná - 1976

A MEUS PAIS GIÁCOMO E ELIZA F. DALMOLIN

## AGRADECIMENTOS

O autor deseja manifestar seus profundos agradecimentos,

ao Dr. Camil Gemael, coordenador do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas pelo estímulo e orientação na elaboração deste trabalho;

ao professor João Bosco Lugnani pelas sugestões e conselhos;

à CAPES pela bolsa de estudos concedida;

ao DAU, cujo suporte financeiro permitiu minha vinculação provisória ao Curso de Pós-Graduação;

à todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

## SINOPSE

Este trabalho pode ser dividido em duas partes:

A primeira é uma parte básica para facilitar ao leitor a compreensão do ajustamento de observações, na qual foram abordados os princípios básicos de cálculo matricial, soluções de sistemas de equações homogêneas e não homogêneas e o princípio dos mínimos quadrados.

A segunda apresenta o desenvolvimento matemático na forma matricial para o ajustamento de observações iterativamente; estuda a convergência para cada método, PARÂMETROS, CORRELATOS e COMBINADO; e compara os resultados obtidos no ajustamento de um quadrilátero através da linearização por TAYLOR e clássica.

## SYNOPSIS

This work is divided into two parts:

The first one is basically essential for the reader to understand the adjustment of observations, in which basic principles of matricial calculus, solution of systems of homogeneous equations as well as non - homogeneous equations, and the principle of least squares were considered.

The second one presents the mathematical development in the matricial form for the adjustment of observations iteratively; it considers the convergence for each method: Parameters, Correlated and Combined; and it compares the results that are to be accomplished in the adjustment of a quadrilateral by means of classical linearization as well as TAYLOR linearization.

## CONTEÚDO

TÍTULO .....	ii
DEDICATÓRIA .....	iii
AGRADECIMENTOS .....	iv
SINOPSE .....	v
SYNOPSIS .....	vi
CONTEÚDO .....	vii

### CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO .....	01
------------------	----

### CAPÍTULO II

CÁLCULO MATRICIAL .....	03
2.1 - Matrizes .....	03
2.2 - Representação geral e convenções .....	04
2.3 - Matriz linha e matriz coluna .....	04
2.4 - Matriz quadrada .....	04
2.5 - Matriz simétrica .....	05
2.6 - Matriz diagonal .....	05
2.7 - Matriz identidade .....	05
2.8 - Matriz triangular .....	06
2.9 - Adição de matrizes .....	06
2.9.1-Produto de uma matriz por um escalar .....	07
2.9.2-Propriedades básicas .....	07
2.10- Multiplicação de matrizes .....	08

2.10.1	- Produto de duas matrizes .....	08
2.10.2	- Propriedades .....	09
2.11	- Igualdade de matrizes .....	09
2.12	- Transposta de u'a matriz .....	10
2.13	- Propriedades .....	10
2.14	- Determinante de u'a matriz .....	11
2.15	- Matriz co-fatora .....	12
2.16	- Matriz adjunta .....	13
2.16.1	- Propriedades .....	13
2.17	- Matrizes inversíveis .....	13
2.17.1	- Propriedades da inversa .....	14
2.17.2	- Inversa da matriz diagonal .....	14
2.18	- Característica de u'a matriz .....	15
2.19	- Casos especiais .....	15

### CAPÍTULO III

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E SUAS SOLUÇÕES .....	17
3.1 - Sistemas de equações lineares .....	17
3.2 - Existência da solução de um sistema $m \times n$ equações.	18
3.3 - Solução de sistemas de equações lineares por inversão de matrizes .....	19
3.3.1 - Sistema $n \times n$ .....	19
3.3.2 - Sistema $m \times n$ .....	20
3.4 - Solução de sistemas $n \times n$ por eliminações sucessivas .....	21
3.4.1 - Exemplo ilustrativo .....	22

### CAPÍTULO IV

LINEARIZAÇÃO E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS .....	24
4.1 - Diferenciação de matrizes .....	24

4.2 - Linearização por série de TAYLOR em forma matricial ..	26
4.2.1-Linearização da equação de lado .....	28
4.3 - Variância .....	33
4.4 - Covariância .....	34
4.5 - Matriz variância-covariância (M.V-C) .....	34
4.6 - Lei da propagação das covariâncias .....	35
4.7 - Lei de propagação das covariâncias de modelos lineari- zados pela fórmula de TAYLOR .....	36
4.8 - Matriz dos coeficientes de peso .....	37
4.9 - Aplicação do método dos mínimos quadrados (MMQ).....	38

## CAPÍTULO V

AJUSTAMENTO PELO PROCESSO ITERATIVO .....	41
5.1 - Método dos parâmetros .....	41
5.1.1 - Equações normais .....	43
5.1.2 - M.V-C dos valores observados $\Sigma_{Lb}$ .....	44
5.1.3 - Variância da unidade de peso $\hat{\sigma}_o^2$ .....	45
5.1.4 - M.V-C dos parâmetros ajustados $\Sigma_{Xa}$ .....	45
5.1.5 - M.V-C dos valores observados ajustados $\Sigma_{La}$ .....	45
5.1.6 - Coeficientes de peso dos parâmetros $Q_x$ .....	46
5.1.7 - Coeficientes de peso dos valores observados ajusta- dos $Q_{La}$ .....	46
5.1.8 - Desenvolvimento iterativo do método dos parâmetros .	46
5.1.9 - Síntese das fórmulas para o ajustamento iterativo do método dos parâmetros .....	48
5.2 - Método dos correlatos .....	49
5.2.1 - Equações de condição .....	49
5.2.2 - Equações normais .....	50
5.2.3 - Valores observados ajustados .....	51
5.2.4 - Variância da unidade de peso .....	52



5.2.5 - M.V-C dos valores ajustados .....	52
5.2.6 - Desenvolvimento iterativo do método dos correlatos .	53
5.2.7 - Síntese das fórmulas para o ajustamento iterativo do método dos correlatos .....	55
5.3 - Método combinado .....	55
5.3.1 - Modelo matemático .....	55
5.3.2 - Solução das equações normais .....	58
5.3.3 - M.V-C dos parâmetros .....	59
5.3.4 - Desenvolvimento iterativo do método combinado .....	60
5.3.5 - Síntese das fórmulas para o ajustamento iterativo do método combinado .....	62
5.3.6 - Observações importantes .....	63

## CAPÍTULO VI

EXPERIÊNCIAS .....	66
6.1 - Primeira experiência - (método dos parâmetros) .....	66
6.2 - Segunda experiência - (método dos correlatos) .....	70
6.3 - Terceira experiência - (método dos correlatos) .....	73
6.4 - Quarta experiência - (método combinado) .....	76
6.5 - Quinta experiência - (método combinado) .....	81
6.6 - Análise dos resultados .....	82

## CAPÍTULO VII

CONCLUSÃO .....	85
APÊNDICE - Programas em linguagem BASIC, modelo HP-30 utili- zados nas experiências .....	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	95

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O grande volume de cálculos e o tempo gasto para se resolver certos problemas foram facilitados e em muito, graças ao desenvolvimento e modernização que a tecnologia sofreu nas últimas décadas. As ciências modernas colocam em nossas mãos uma grande quantidade de equipamentos sofisticados de grande precisão, quer seja para medidas ou para cálculos.

Embora sejam utilizados aparelhos de alta precisão para efetuar medidas, estas não fogem a regra geral de estarem sempre sujeitas a erros de leitura, ou mesmo instrumentais.

No século XVIII, Karl Friederich Gauss e Adrien Marie Legendre simultaneamente, mas independentemente foram os primeiros a usar o "método dos mínimos quadrados" para ajustar estas medidas, e chamaram-no de Ajustamento de Observações pelo MMQ.

Devido ao grande impulso que sofreram a Geodésia e Aerofotogrametria nos últimos anos, e a grande quantidade de observações que as envolvem, formam sistemas de equações redundantes de grande porte. O cálculo matricial, largamente utilizado por geodestas, permite representar estes sistemas numa notação concisa.

O MMQ, ferramenta de maior importância no ajustamento, admite como valor ajustado aquele que melhor satisfizer a condição  $V^T PV = \min.$

Entretanto na utilização de certos métodos de ajustamento, como o dos Parâmetros e Combinado somos obrigados a lançar mão de valores iniciais suficientemente próximos dos valores reais para obter uma boa precisão dos valores ajustados na primeira solução, quando imposta a condição acima.

Neste trabalho os métodos dos Parâmetros, Correlatos e Combinado, foram linearizados pela fórmula de TAYLOR e desenvolvidos iterativamente da seguinte maneira:

Na primeira iteração, tomou-se um valor inicial qualquer como uma primeira aproximação. Fez-se o ajustamento e obteve-se um valor aproximado melhorado.

Na segunda iteração, introduziu-se este valor aproximado melhorado como sendo o valor inicial e calculou-se um novo valor melhor que o anterior. Prosseguiu-se dessa maneira e na  $i$ -ésima iteração, o valor melhorado se estabilizou, isto é, permaneceu igual ao valor obtido na iteração anterior ( $i - 1$ ), havendo portanto convergido e assim obtido o valor ajustado final.

Assim, objetivamos a nossa pesquisa para esclarecer aos usuários que, dependendo da precisão desejada, não se pode admitir como valores ajustados finais aqueles obtidos da primeira iteração. Por outro lado, evidenciamos a maior facilidade, precisão e convergência que apresenta a linearização dos modelos através da fórmula de TAYLOR sobre a fórmula clássica, principalmente em ajustamento de figuras básicas de triangulações geodésicas.

Desta maneira, procuramos colaborar com os interessados e principalmente com os alunos do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas no que diz respeito a solucionar sistemas de equações, linearizar equações e ajustar observações pelo processo iterativo.

## CAPÍTULO II

### CÁLCULO MATRICIAL

---

#### 2.1.- MATRIZES

Seja  $K$  um corpo arbitrário real ou complexo, uma disposição retangular da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nu} \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

é chamada matriz sobre o corpo  $K$ , ou simplesmente matriz, onde os  $a_{ij}$  são escalares em  $K$ .

A matriz acima é também notada por  $[a_{ij}]$ ,  
( $i = 1, 2 \dots n$ ) e ( $j = 1, 2 \dots u$ ).

As  $n$  - uplas horizontais são as linhas da matriz e as  $u$ -enuplas verticais são as suas colunas.

O elemento ou componente  $a_{ij}$  aparece na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna.

A forma ou dimensão de uma matriz  $A$  com  $n$  linhas e

u colunas é anotada  $n \times u$  ou  ${}_n^A u$ .

## 2.2 - REPRESENTAÇÃO GERAL E CONVENÇÕES

Usualmente as matrizes serão representadas por letras maiúsculas, A, B, C ..., e os seus elementos por letras minúsculas, a, b, c ....

A matriz é anotada entre colchetes [ ], ou parênteses ( ), para evitar a provável confusão com determinante de uma matriz que é anotado entre barras | |.

## 2.3 - MATRIZ LINHA E MATRIZ COLUNA

A matriz  $A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1u}]$  é u'a matriz linha ou vetor linha de dimensão  $1 \times u$ .

$$\text{A matriz } B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

é u'a matriz coluna ou vetor coluna de dimensão  $n \times 1$ .

Obs:- Um elemento pode ser considerado como u'a matriz  $1 \times 1$ .

## 2.4 - MATRIZ QUADRADA

U'a matriz que tem o número n de linhas igual ao número u de colunas, é chamada de matriz quadrada de ordem u.

$${}_u^A u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{u1} & a_{u2} & \dots & a_{uu} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (2.4.1)$$

$[a_{ij}]$  é u'a matriz quadrada com  $i = 1, 2 \dots u$  e  $j = 1, 2 \dots u$ .

A diagonal principal de u'a matriz quadrada  $[a_{ij}]$ , consiste nos elementos  $a_{ij}$  com  $i = j$ .

### 2.5 - MATRIZ SIMÉTRICA

U'a matriz simétrica é u'a matriz quadrada  $[a_{ij}]$  cujos elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais. Isto é,  $a_{ij} = a_{ji}$ .

### 2.6 - MATRIZ DIAGONAL

U'a matriz  ${}_u A_u$  será u'a matriz diagonal, se seus elementos não diagonais forem todos iguais a zero.

Assim,

$${}_u A_u = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{uu} \end{bmatrix} \quad (2.6.1)$$

é u'a matriz diagonal se  $a_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ e \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$

### 2.7 - MATRIZ IDENTIDADE

Matriz identidade, representada por I, é u'a matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais à unidade.

Assim,

$${}_u I_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7.1)$$

é u'a matriz identidade ou unidade onde os

$$a_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ & e \\ = 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Obs.- U'a matriz cujos elementos são todos iguais a zero, é chamada de matriz nula, e representado por 0. ( $a_{ij} = 0$  para qualquer  $ij$ ).

## 2.8 - MATRIZ TRIANGULAR

U'a matriz quadrada  $[a_{ij}]$  será triangular superior se, e somente se, os seus elementos  $a_{ij}$  forem iguais a zero para  $i > j$ , e será triangular inferior, se  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ .

Assim

$${}_u A_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1u} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2u} \\ 0 & 0 & \dots & a_{uu} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (2.8.1)$$

representa u'a matriz triangular superior.

Obs.- A matriz triangular pode ser facilmente obtida através de simples operações com linhas  $|04|$ .

## 2.9 - ADIÇÃO DE MATRIZES

Consideremos duas matrizes A e B de mesmas dimensões  $nxu$ .

$${}_n A_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nu} \end{bmatrix} \quad e \quad {}_n B_u = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1u} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nu} \end{bmatrix}$$

A soma de A e B, escrita  $A + B$ , será a matriz  ${}_n C_u$  que é obtida adicionando-se os termos correspondentes, isto é,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1u} + b_{1u} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2u} + b_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nu} + b_{nu} \end{bmatrix} = C$$

onde  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $i = 1, 2 \dots u; j = 1, 2 \dots n$ ) é um elemento genérico de C.

Obs. - A soma de matrizes de dimensões diferentes não é definida.

### 2.9.1 - PRODUTO DE U'A MATRIZ POR UM ESCALAR

O produto de u'a matriz  ${}_n A_u$  por um escalar k, escrito  $k.A$ , é igual a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por k.

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1u} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nu} \end{bmatrix}$$

Obs. - Obtém-se a matriz  $-A$  multiplicando-se o escalar  $(-1)$  pela matriz A.

### 2.9.2 - PROPRIEDADES BÁSICAS

Seja V o conjunto de todas as matrizes  $n \times u$  sobre um corpo K. Demonstra-se que para quaisquer matrizes A, B e C em V e quaisquer escalares  $k_1$  e  $k_2$  em K tem-se:

- I.  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (lei associativa para a soma)
- II.  $(A + 0) = A$  (0 é a matriz nula)



- III.  $A + (-A) = 0$  (matriz oposta)
- IV.  $A + B = B + A$  (lei comutativa)
- V.  $k_1 (A + B) = k_1 A + k_1 B$  (lei distributiva para a adição de matrizes)
- VI.  $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$  (idem para a adição de escalares)
- VII.  $(k_1 k_2)A = k_1 (k_2 A)$  (lei associativa para o produto de escalares)
- VIII.  $IA = AI = A$  e  $OA = 0$  (matriz unidade e matriz nula).

2.10 - MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

2.10.1 - PRODUTO DE DUAS MATRIZES

O produto de duas matrizes A e B nesta ordem, só será possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B; isto é;  $A(n \times p)$  e  $B(p \times u)$ .

O produto AB será u'a matriz C de dimensões  $n \times u$ , cujos elementos  $c_{ij}$  são obtidos pela soma dos produtos da i-ésima linha de A pela j-ésima coluna de B.

Assim:  $n \times p \quad p \times u = n \times u$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

( $i = 1, 2 \dots n$ ;  $j = 1, 2 \dots u$ ).

Em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nu} \end{bmatrix}$$

Geralmente a lei comutativa para a multiplicação de matrizes não é válida.

Se A e B são retangulares o produto  $AB \neq BA$ , pois suas dimensões são diferentes.

Se A é retangular e B quadrada o produto  $AB \neq BA$  pelas mesmas razões.

Se A e B forem quadradas,  $AB = BA$  se, e somente se, A ou B é uma matriz diagonal ou Identidade. Neste caso a comutatividade se aplica.

$$AI = IA = A.$$

Se  $AB = AC$  ou  $BA = CA$  com  $A \neq 0$ , então  $B = C$ .

#### 2.10.2 - PROPRIEDADES

- I.  $(AB)C = A(BC)$  (lei associativa)
- II.  $A(B + C) = AB + AC$  (lei distributiva à esquerda)
- III.  $(B + C)A = BA + CA$  (lei distributiva à direita)
- IV.  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$  (k é um escalar)
- V.  $A0 = 0$  e  $0B = 0$  (0 é a matriz nula).

#### 2.11 - IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes A e B são iguais, e escrevemos  $A=B$ , se e somente se, tiverem as mesmas dimensões e seus elementos correspondentes forem iguais.

Se A e B tiverem as dimensões  $n \times u$ , teremos um sistema de  $n \cdot u$  igualdades, uma para cada par de elementos.

## 2.12 - TRANSPOSTA DE U'A MATRIZ

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2u} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

A transposta de A, escrita  $A^T$ , é a matriz obtida escrevendo as linhas de A ordenadamente como colunas de  $A^T$ .

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1u} & a_{2u} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix} = [a_{ji}]$$

Então poderemos escrever  $A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$ .

A transposta de u'a matriz qualquer  $n \times u$ , terá suas dimensões trocadas, isto é  $u \times n$ .

Obs.- Se A é u'a matriz simétrica, então  $A = A^T$ .

## 2.13 - PROPRIEDADES

A transposição de matrizes deve satisfazer às seguintes propriedades:

I.  $(A + B)^T = A^T + B^T$  (a transposta de uma soma é igual a soma das transpostas).

II.  $(A^T)^T = A$  (a transposta da transposta é a própria matriz).

- III.  $(kA)^T = kA^T$  (a transposta do produto por um escalar é igual ao produto do escalar pela transposta).
- IV.  $(AB)^T = B^T A^T$  (a transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transposta com a sua ordem trocada), conseqüentemente  $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ .

#### 2.14 - DETERMINANTE DE U'A MATRIZ

Dada u'a matriz  $A = [a_{ij}]$  quadrada de ordem  $n$ , o determinante associado à matriz  $A$ , e anotado por  $\det A$  ou  $|A|$ , é um número definido (ou calculado) resultante do somatório dos produtos obtidos mantendo fixos os primeiros índices e permutando os segundos de todos os modos possíveis  $|01|$ .

Por outro lado, sabemos que o produto de duas matrizes  $AB$ , terá como resultado u'a matriz quadrada, se o número  $n$  de linhas de  $A$  fôr igual ao número  $u$  de colunas de  $B$ . Nestas condições, o produto de matrizes será de grande importância na teoria dos determinantes.

Pela teoria dos determinantes  $|02|$  é de nosso conhecimento que:

- Se  $n > u$ , o produto não é u'a matriz quadrada e não tem determinante.
- Se  $n = u$ , o produto é u'a matriz quadrada cujo determinante  $|AB|$  será igual à soma dos produtos dos determinantes de ordem menor em  $A$  com os correspondentes menores contidos em  $B$ .

Diante disto, podemos concluir que o determinante do produto de duas matrizes quadradas será igual ao produto dos determinantes de cada matriz.

Assim,

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

## 2.15 - MATRIZ CO-FATORA

Consideremos u'a matriz quadrada  $n \times n$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Representaremos por  $M_{ij}$  a submatriz quadrada de ordem  $(n - 1) \times (n - 1)$  de  $A$ , obtida suprimindo a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna.

O determinante  $|M_{ij}|$  é chamado "Menor cofator" de  $a_{ij}$  denotado por  $A_{ij}$  e afetado do sinal  $(-1)^{i+j}$ .

Assim;

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Pelo exposto acima, a matriz dos cofatores de  $A$  escreve-se

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O determinante de  $A$  é obtido pela regra de Laplace.

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

## 2.16 - MATRIZ ADJUNTA

A adjunta de u'a matriz  $A$   $n \times n$ , denotada por  $\text{adj}A$  é definida como sendo a transposta da co-fatora de  $A$ .

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

### 2.16.1 - PROPRIEDADES

Para qualquer matriz quadrada  $A$  tem-se:

$$A \text{adj}A = \text{adj}A \cdot A = |A| \cdot I \quad (2.16.1)$$

## 2.17 - MATRIZES INVERSÍVEIS

Trataremos aqui apenas da inversa de u'a matriz quadrada regular.

U'a matriz quadrada  $A$  não singular admite uma inversa, se e somente se, existir uma única matriz  $B$  com as mesmas dimensões de  $A$  que, pré-multiplicada ou pós-multiplicada por  $A$ , resulte na matriz identidade.

$$BA = AB = I \quad (2.17.1)$$

A matriz  $B$  é chamada de inversa de  $A$ , sendo anotada por  $A^{-1}$ .

A relação (2.17.1) é simétrica, pois se  $B$  for a inversa de  $A$ , então  $A$  será a inversa de  $B$ .

Assim podemos escrevê-la;

$$A^{-1} A = A \cdot A^{-1} = I \quad (2.17.2)$$

mas pela (2.16.1)

$$\frac{A \cdot \text{adj}A}{|A|} = I \quad (2.17.3)$$

que levada na (2.17.2) resulta

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A \quad (2.17.4)$$

Obs.- Para que a inversa ( $A^{-1}$ ) exista, devemos ter necessariamente  $A \neq 0$ .

A regra de Cramer [03] permite inverter matrizes de até ordem terceira sem maiores dificuldades. Porém não é o caso da Geodésia e Aerofotogrametria que em quase a totalidade de seus problemas requer a inversão de matrizes de ordem bem elevada.

U'a matriz é dita singular quando o seu determinante fôr igual a zero.

#### 2.17.1 - PROPRIEDADES DA MATRIZ INVERSA

I.  $(A^{-1})^{-1} = A$

II.  $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

#### 2.17.2 - INVERSA DA MATRIZ DIAGONAL

Seja,

$$G = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e } \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{nn} \neq 0$$

então,

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{g_{nn}} \end{bmatrix}$$

### 2.18 - CARACTERÍSTICA DE U'A MATRIZ

Consideremos u'a matriz  $A$   $m \times n$ , isto é com  $m$  linhas e  $n$  colunas:

- 1º Se  $m > n$ , supriremos  $m - n$  linhas, não importando quais, obtendo u'a matriz de ordem  $n$ , não singular.
- 2º Se  $n > m$ , supriremos  $n - m$  colunas, obtendo u'a matriz de ordem  $m$ , não singular.
- 3º Se  $m = n$ , não supriremos coisa alguma, pois a matriz já é quadrada.

Então, a característica de u'a matriz  $A$   $m \times n$  denotada por  $\text{Car}(A)$  é a maior ordem de u'a matriz quadrada, não singular, que se pode obter da matriz dada, suprimindo ou não linhas ou colunas.

Se a matriz dada não for a matriz nula, sua característica será pelo menos 1.

A característica da matriz nula é por definição igual a zero.

### 2.19 - CASOS ESPECIAIS

Neste ítem trataremos de alguns casos especiais do produto de matrizes, de grande importância para o cálculo matricial e sua aplicação ao ajustamento.



2.19.1 - U'a matriz multiplicada por um vetor coluna é um vetor coluna.

$$n^A_n \cdot n^X_1 = n^L_1$$

2.19.2 - Um vetor linha multiplicado por u'a matriz é um vetor linha.

$$1^V_n \cdot n^A_n = 1^X_n$$

2.19.3 - Um vetor linha multiplicado por um vetor coluna é um número.

$$1^X_n \cdot n^Y_1 = 1^Z_1$$

2.19.4 - Um vetor coluna multiplicado por um vetor linha é u'a matriz.

$$n^X_1 \cdot 1^Y_n = n^A_n$$

2.19.5 - Um vetor linha multiplicado pelo seu transposto é igual à soma dos quadrados de seus elementos.

2.19.6 - U'a matriz retangular multiplicada pela sua transposta, ou a transposta multiplicada pela original, será sempre u'a matriz quadrada, porém de dimensões diferentes.

$$m^A_n \cdot n^A^T_m = m^B_m \quad \text{ou}$$

$$n^A^T_m \cdot m^A_n = n^B_n$$

2.19.7 - Pré-multiplicar (pós-multiplicar) u'a matriz diagonal D por u'a matriz quadrada A de mesma ordem, equivale a multiplicar as linhas (colunas) de A pelos correspondentes elementos diagonais de D.

## CAPÍTULO III

### SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E SUAS SOLUÇÕES

---

#### 3.1 - SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A teoria das equações lineares desenvolve métodos que permitem saber se um conjunto de equações lineares tem solução comum, e em caso afirmativo como encontrá-la. Nesta procura e determinação intervêm de modo preponderante, os conceitos de matriz, determinante e característica de u'a matriz.

Consideremos o sistema  $m \times n$ ,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

ou na forma compacta

$${}^m A_n X_1 = {}^m B_1 \quad (3.1.3)$$

onde,

$A = [a_{ij}]$  é a matriz dos coeficientes das incógnitas;

$X = [x_i]$  é o vetor colunas das incógnitas;

$B = [b_i]$  é o vetor colunas dos termos independentes.

O sistema  $m \times n$  acima é dito homogêneo se o vetor dos termos independentes for igual a zero, isto é,

$${}^m A_n X_1 = 0 \quad (3.1.4)$$

### 3.2 - EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA $m \times n$ EQUAÇÕES.

Antes de processarmos a solução geral de um sistema de equações, devemos fazer um estudo preliminar da possibilidade ou impossibilidade do sistema. Para tal é necessário definir a matriz aumentada.

"Denomina-se matriz aumentada  $(A, B)$ , de um sistema  $A X = B$ , a matriz dos coeficientes aumentada da coluna dos termos independentes" |05|.

Consideremos o sistema (3.1.1) cuja matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Então, a condição necessária e suficiente para que o sistema seja possível é que as matrizes A e (A, B) tenham a mesma característica, e determinado, se esta fôr igual ao número n de incógnitas.

Anotando a característica da matriz A por Car(A), a solução do sistema AX = B, admitirá as seguintes possibilidades:

a) Se a Car(A, B) > Car(A), o sistema será impossível;

b) Se a Car(A, B) = Car(A) = n (número de incógnitas), o sistema será possível e determinado;

c) Se a Car(A, B) = Car(A) < n, o sistema será possível e indeterminado com (Car - n) incógnitas arbitrárias.

### 3.3 - SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR INVERSÃO DE MATRIZES

#### 3.3.1 - SISTEMA n x n

Consideremos um sistema n x n, cuja notação matricial é,

$${}^A_n \quad {}^X_n \quad {}^B_1 = {}^B_1 \quad (3.3.1)$$

Se A é quadrada e não singular, admitirá uma inversa tal que,

$${}^{A^{-1}}_n \quad {}^A_n \quad {}^X_n \quad {}^B_1 = {}^{A^{-1}}_n \quad {}^B_1$$

$${}^I_n X_1 = {}^A_n^{-1} {}^B_1$$

ou

$$\boxed{{}_n X_1 = {}_n A^{-1} {}_n B_1} \quad (3.3.2)$$

logo, a solução de um sistema  $n \times n$  é dada pelo produto da inversa da matriz dos coeficientes pelo vetor dos termos independentes.

### 3.3.2 - SISTEMA $m \times n$

Consideremos o caso mais geral de um sistema de  $m$  equações a  $n$  incógnitas.

Designaremos por  $A$  a matriz retangular  $m \times n$  dos coeficientes das incógnitas, e por  $(A, B)$  a matriz aumentada de  $A$  pelo vetor coluna dos termos independentes.

Vimos no parágrafo anterior (3.2), ítem b, a condição necessária e suficiente para que um sistema de equações lineares seja possível e determinado.

Entretanto, podemos ter um sistema redundante com um número maior de equações que o de incógnitas ( $m > n$ ),

$${}^A_m X_1 = {}^B_m \quad (3.3.3)$$

neste caso a matriz  $A$  é retangular, mas  $A^T A$  será quadrada.

Pré-multiplicando ambos os membros da (3.3.3) por  $A^T$  temos,

$$A^T A X = A^T B \quad (3.3.4)$$

cuja solução é

$$\boxed{X = (A^T A)^{-1} A^T B} \quad (3.3.5)$$

Obs.- Outros métodos de solucionar sistemas de equações lineares, que são largamente utilizados em Geodésia e Aerofotogrametria devido a facilidade de serem programados para computadores eletrônicos, citamos: Decomposição Triangular de Banachiewicz [09], Decomposição Simétrica de Choleski [09], e Gradientes Conjugados [04].

### 3.4 - SOLUÇÃO DE SISTEMAS $n \times n$ POR ELIMINAÇÕES SUCESSIVAS

Consideremos o sistema  $n \times n$  não homogêneo,

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1}$$

Aplicando o método da eliminação sucessiva de Gauss [04] para tornar o sistema acima, na forma triangular, usando apenas operações com linhas temos,

$$\begin{aligned}
 x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
 & \\
 x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 & \\
 x_n &= b'_n
 \end{aligned}
 \tag{3.4.2}$$

onde os  $a'_{ij}$  e  $b'_i$  são respectivamente, os coeficientes das incógnitas e os termos independentes do sistema reduzido a forma triangular, através de simples operações com linhas.

Como podemos ver, o sistema (3.4.2) pode ser facilmente solucionado pela retrossubstituição.

Entretanto, na redução pelo método da eliminação de Gauss, um sistema pode apresentar três casos a serem discutidos:

1º - Se o sistema triangularizado apresentar o número de equações igual ao número de incógnitas, será DETERMINADO;

2º - Se uma ou mais equações forem combinações lineares de outra, isto é,  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$ , será INDETERMINADO, com uma ou mais variáveis arbitrárias;

3º - Se uma ou mais equações tomar a seguinte forma:  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n \neq 0$ , será IMPOSSÍVEL.

Consideremos agora um sistema de equações lineares homogêneo.

Este tipo de sistema sempre é POSSÍVEL, apresentando pelo menos a solução trivial;

a) Se o número de equações for igual ao de incógnitas, DETERMINADO.

b) Se o número de equações for menor que o de incógnitas, INDETERMINADO.

### 3.4.1 - EXEMPLO ILUSTRATIVO

Vamos solucionar o sistema abaixo pelo método da Eliminação Sucessiva:

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$$

Multiplicando a 1.<sup>a</sup> linha por escalares convenientes, e adicionando eliminaremos  $x_1$  da 2.<sup>a</sup>, 3.<sup>a</sup> e 4.<sup>a</sup> linhas,

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$- x_2 + 0x_3 + x_4 = 1$$

$$5x_2 - x_3 - 5x_4 = -3$$

$$2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -1$$

agora, operando sobre a 2.<sup>a</sup> linha, eliminaremos  $x_2$  da 3.<sup>a</sup> e 4.<sup>a</sup>,

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$- x_2 + 0x_3 + x_4 = 1$$

$$- x_3 + 0x_4 = -2$$

$$- 4x_3 - x_4 = 1$$

e finalmente, operando sobre a 3.<sup>a</sup>, eliminaremos  $x_3$  da 4.<sup>a</sup> linha,

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$- x_2 + 0x_3 + x_4 = 1$$

$$- x_3 + 0x_4 = -2$$

$$- x_4 = -7$$

cuja solução pela retro-substituição é:

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -2 \quad \text{e} \quad x_4 = 7.$$



## CAPÍTULO IV

### LINEARIZAÇÃO E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

#### 4.1 - DIFERENCIAÇÃO DE MATRIZES

Consideremos um vetor  $X$  com  $n$  elementos  $x_i$ , ( $i = 1, 2 \dots n$ ) chamados de componentes, e um vetor  $Y$  com  $m$  elementos  $y_j$ , ( $j = 1, 2 \dots m$ ) os quais são funções das componentes. Podemos então, formar  $n.m$  derivadas parciais,

$g_{ji} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$  escritas sob a forma matricial,

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = G \quad (4.1.1)$$

Quando fixamos valores para o vetor  $X$  ( $X_0$ ), podemos calcular os correspondentes valores numéricos das funções

Y ( $Y_0$ )

Fazendo uso dos valores fixados, calculamos os valores numéricos das derivadas parciais, os quais nos fornecem u'a matriz retangular  $G_{m \times n}$  ou

$$dY = G \quad (4.1.2)$$

Caso pequenas correções  $dX$  sejam introduzidas nos parâmetros, a correspondente correção  $dY$  das funções é calculada a partir da fórmula:

$$dY = GdX \quad (4.1.3)$$

Anotando o vetor  $Z$ , cujos elementos são funções dos elementos de  $Y$ , obtemos as derivadas parciais

$$f_{hj} = \frac{\partial Z_h}{\partial Y_j} \quad (4.1.4)$$

$Z_0$  é o vetor correspondente de  $Y_0$ , e os valores numéricos das derivadas parciais da matriz  $F$  são;

$$dZ = FdY = FGdX \quad (4.1.5)$$

onde o produto  $FG$  representa a derivada parcial de  $Z$  em relação a  $X$ .

Se  $m = n$  a matriz  $G$  é quadrada, e se  $|G| \neq 0$  pela (4.1.3) escrevemos

$$dX = G^{-1} dY \quad (4.1.6)$$

que representa a inversa de  $G$ , quando dada a derivada de  $X$  em relação a  $Y$ .

Considerando dois vetores  $X^T$  e  $Y$ , ambos com o mes-

mo número de componentes o seu produto é um escalar,

$$X^T Y = c \quad (4.1.7)$$

Se os dois vetores são variáveis, sua equação diferencial é;

$$dc = X^T dY + Y^T dX \quad (4.1.8)$$

No caso especial em que  $Y = X$ , o produto é um escalar na forma quadrática [09]

$$c = X^T X \quad (4.1.9)$$

cuja equação diferencial em relação a  $X$  é,

$$dc = X^T dX + X^T dX$$

$$dc = 2X^T dX \quad (4.1.10)$$

Em ajustamento, freqüentemente escrevemos

$$c = X^T G X \quad (4.1.11)$$

onde  $G$  é u'a matriz quadrada simétrica, e sua equação diferencial em relação a  $X$  é,

$$dc = 2X^T G dX \quad (4.1.12)$$

#### 4.2 - LINEARIZAÇÃO POR SÉRIE DE TAYLOR EM FORMA MATRICIAL

A série de TAYLOR nos proporciona o valor de uma função  $f(t)$  no ponto  $t = x$ , quando conhecemos o valor da função para  $t = x^0$ , na forma,

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0) \frac{(x-x^0)}{1!} + f''(x^0) \frac{(x-x^0)^2}{2!} + \dots$$

onde  $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$

Considerando somente os termos lineares da s\u00e9rie, e para valores de x nas proximidades de  $x^0$ , a curva  $f(t)$  pode ser substituída por uma reta (fig. 01):

$$f(x) = f(x^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0} (x - x^0) \quad (4.2.1)$$

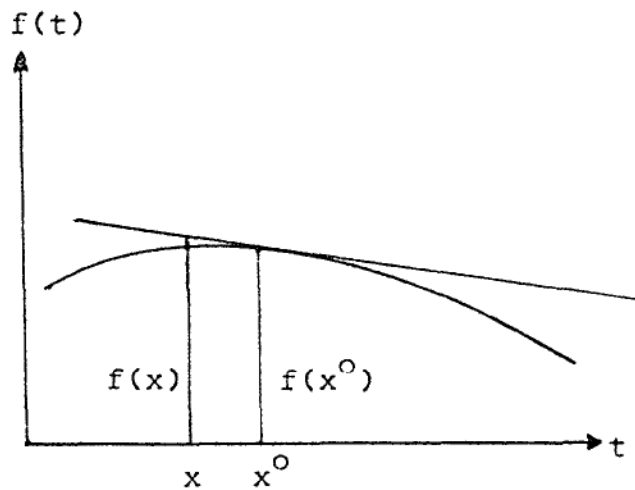


Fig. 01

onde  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0}$  \u00e9 o coeficiente angular da curva no ponto de abscissa  $x^0$ .

Para uma fun\u00e7\u00e3o de n vari\u00e1veis tem-se:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1^0} (x_1 - x_1^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_2^0} (x_2 - x_2^0) +$$

$$+ \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x_n^0} (x_n - x_n^0)$$

$$= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i^0} (x_i - x_i^0) \quad (4.2.2)$$

e fazendo:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} ;$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{bmatrix} \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

a linearização, ou aproximação linear da série de TAYLOR, na forma matricial será:

$$F(X) = F(X^0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^0} \Delta X \quad (4.2.3)$$

#### 4.2.1 - LINEARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE LADO

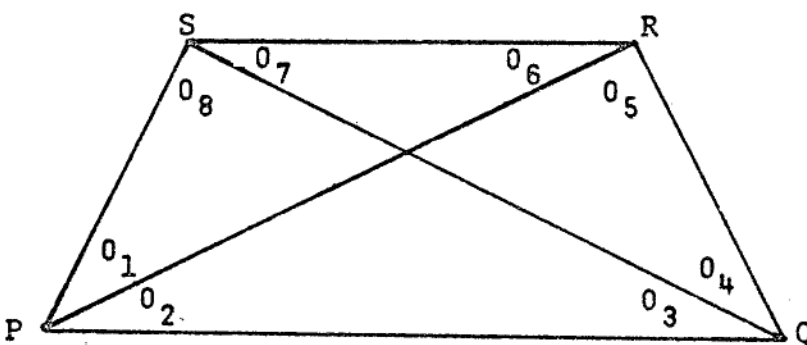


Fig. 02

Consideremos o quadrilátero PQRS (fig. 02), no qual as diagonais e os quatro lados foram observados, e sejam  $\epsilon_j$  e  $W_j$  ( $j = 1, 2 \dots 4$ ) o excesso esférico e o erro de fechamento angular de cada triângulo respectivamente.

As equações angulares para cada triângulo serão obtidas a partir da expressão:

$$\Sigma(O_i + v_i) = 180^\circ + \epsilon_j \quad (4.2.4)$$

onde  $\epsilon_j$  é o excesso esférico do triângulo considerado

$O_i$  os ângulos observados do triângulo considerado

$v_i$  as correções para cada ângulo do triângulo considerado.

Levando em consideração que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é igual a  $180^\circ + \epsilon$ , a (4.2.4) pode ser escrita,

$$\Sigma v_i + \left[ \Sigma O_i - (180^\circ + \epsilon_j) \right] = 0 \quad (4.2.5)$$

cuja expressão entre colchetes representa o erro de fechamento ( $W_j$ ) do triângulo considerado.

Assim, a equação geral para a formação das equações angulares é, com base na (4.2.5),

$$\Sigma v_i + W_j = 0 \quad (4.2.6)$$

fixa-se  $j$  e se tem o erro de fechamento angular do  $j$ -ésimo triângulo.

Entretanto, somente as equações de ângulos não são suficientes para que um quadrilátero seja ajustado, porque pequenas mudanças nos ângulos alteram o comprimento dos lados.

Então, para que a figura fique completamente homogênea, torna-se necessário o estabelecimento da equação de lado. Uma

das maneiras fáceis de obter esta equação é tomar como pólo um dos vértices da figura e desenvolvê-la segundo os senos dos ângulos observados |08|.

Tomando como pólo o vértice P temos:

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{\text{sen}(\theta_3 + v_3)}{\text{sen}(\theta_8 + v_8)} \quad (4.2.7)$$

$$\frac{PS}{PR} = \frac{\text{sen}(\theta_6 + v_6)}{\text{sen}(\theta_7 + \theta_8 + v_7 + v_8)} \quad (4.2.8)$$

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{\text{sen}(\theta_3 + \theta_4 + v_3 + v_4)}{\text{sen}(\theta_5 + v_5)} \quad (4.2.9)$$

Eliminando PS, PR e PQ das equações acima temos:

$$\frac{\text{sen}(\theta_8 + v_8) \text{sen}(\theta_6 + v_6) \text{sen}(\theta_3 + \theta_4 + v_3 + v_4)}{\text{sen}(\theta_3 + v_3) \text{sen}(\theta_5 + v_5) \text{sen}(\theta_7 + \theta_8 + v_7 + v_8)} = 1 \quad (4.2.10)$$

Poderíamos formar mais quatro equações tomando-se pólos diferentes. Entretanto, estas equações estão implicitamente contidas na equação acima, que preenche a condição necessária e suficiente de três equações angulares e uma de lado para o ajustamento de um quadrilátero.

Sendo a equação de lado não linear, deverá ser reduzida a esta forma para ser juntada às equações angulares no ajustamento.

Há três maneiras de linearizar uma equação de lado, e estas são abaixo apresentadas para a equação (4.2.10).

Primeira: Aplicando logarítmos a ambos os membros da equação (4.2.10) temos,

$$\begin{aligned} & \log \text{sen}(\theta_8 + v_8) + \log \text{sen}(\theta_6 + v_6) + \log \text{sen}(\theta_3 + \theta_4 + v_3 + v_4) - \\ & - \log \text{sen}(\theta_3 + v_3) - \log \text{sen}(\theta_5 + v_5) - \log \text{sen}(\theta_7 + \theta_8 + v_7 + v_8) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.10a)$$

ou

$$\begin{aligned} & \log \operatorname{sen} 0_8 + \log \operatorname{sen} 0_6 + \log \operatorname{sen}(0_3 + 0_4) - \log \operatorname{sen} 0_3 - \log \operatorname{sen} 0_5 - \\ & - \log \operatorname{sen}(0_7 + 0_8) + D_8 v_8 + D_6 v_6 + D_{3,4}(v_3 + v_4) - D_3 v_3 - D_5 v_5 - \\ & - D_{7,8}(v_7 + v_8) = 0 \end{aligned}$$

onde

$D_i = \left[ \log \operatorname{sen}(0_i + 1'' ) - \log \operatorname{sen}(0_i) \right]$  (podendo-se retirá-los das tabelas de logarítmos na 6.<sup>a</sup> casa decimal), e

$$\sum \log \operatorname{sen} 0_i = W \quad (\text{erro de fechamento})$$

Então a equação acima poderá ser escrita no forma linear,

$$D_{3,4} v_3 - D_3 v_3 + D_{3,4} v_4 - D_5 v_5 + D_6 v_6 - D_{7,8} v_7 + D_8 v_8 - D_{7,8} v_8 + W = 0 \quad (4.2.11)$$

Os coeficientes dos  $v_i$  são funções dos logarítmos dos senos dos ângulos observados, fornecendo termos absolutos na equação de lado.

Segunda: Esta dispensa a diferença do logarítmo do seno para um segundo de arco, mas exige que se utilize o ângulo observado em segundos na base dos logarítmos comuns.

A identidade

$$\sum_{i=1}^n d(\log \operatorname{sen} x_i) = \sum_{i=1}^n M \operatorname{sen} 1'' \cot g x_i dx_i$$

permite obter em segundos de arco na base decimal, os termos da (4.2.10a), onde

$$M = 0,43429480 \quad (\text{módulo dos logarítmos comuns})$$



$x_i = \hat{\text{ângulos observados}}$

$dx_i = \text{resíduos } v_i$

e desta forma a equação (4.2.10a) linearizada fica,

$$\text{Msenl}'' \left\{ \left[ \cotg 0_8 \right] v_8 + \left[ \cotg 0_6 \right] v_6 + \left[ \cotg(0_3 + 0_4) \right] (v_3 + v_4) - \right. \\ \left. \left[ \cotg 0_3 \right] v_3 - \left[ \cotg 0_5 \right] v_5 - \left[ \cotg(0_7 + 0_8) \right] (v_7 + v_8) \right\} = 0 \quad (4.2.12)$$

Os coeficientes  $\text{Msenl}'' \cotg 0_i$  são idênticos aos  $D_i$  da equação (4.2.11). A equação (4.2.12) representa certas vantagens sobre a (4.2.11), principalmente no que tange em se ganhar tempo e cálculos.

Terceira: Das três maneiras é a mais moderna e mais fácil de ser empregada.

Consideremos os ângulos observados ( $0_i$ ) como sendo ajustados ( $0'_i$ ) e desenvolveremos a linearização pela fórmula de TAYLOR, tomando o valor da derivada parcial em relação ao valor ajustado no ponto observado. Reescrevendo a (4.2.10) nesta forma temos:

$$\frac{\text{sen} 0'_8 \text{ sen} 0'_6 \text{ sen}(0'_3 + 0'_4)}{\text{sen} 0'_3 \text{ sen} 0'_5 \text{ sen}(0'_7 + 0'_8)} = 1$$

$$\text{sen} 0'_8 \text{ sen} 0'_6 (0'_3 + 0'_4) - \text{sen} 0'_3 \text{ sen} 0'_5 \text{ sen}(0'_7 + 0'_8) = 0 = F$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} = \left[ \frac{\partial F}{\partial L_{1a}}, \frac{\partial F}{\partial L_{2a}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial L_{8a}} \right]$$

onde

$L_b = \hat{\text{ângulo observado}}$

$L_a = \hat{\text{ângulo ajustado}}$

$L_{ia} = \hat{\text{ângulos observados considerados ajustados}}$

calculando as derivadas parciais em relação aos  $L_{ia}$  temos:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{1a}} \right|_{L_b} = \left. \frac{\partial F}{\partial L_{2a}} \right|_{L_b} = 0$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{3a}} \right|_{L_b} = \text{sen}0'_8 \text{sen}0'_6 \cos(0'_3 + 0'_4) - \cos0'_3 \text{sen}0'_5 \text{sen}(0'_7 + 0'_8)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{4a}} \right|_{L_b} = \text{sen}0'_8 \text{sen}0'_6 \cos(0'_3 + 0'_4)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{5a}} \right|_{L_b} = - \text{sen}0'_3 \cos0'_5 \text{sen}(0'_7 + 0'_8)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{6a}} \right|_{L_b} = \text{sen}0'_8 \cos0'_6 \text{sen}(0'_3 + 0'_4)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{7a}} \right|_{L_b} = - \text{sen}0'_3 \text{sen}0'_5 \cos(0'_7 + 0'_8)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{8a}} \right|_{L_b} = \cos0'_8 \text{sen}0'_6 \text{sen}(0'_3 + 0'_4) - \text{sen}0'_3 \text{sen}0'_5 \cos(0'_7 + 0'_8)$$

Estas derivadas fornecem os coeficientes da equação de lado linearizada por TAYLOR.

#### 4.3 - VARIÂNCIA

Denotaremos por  $E\{x\} = u_x$  a esperança matemática de uma variável aleatória  $x$  |06|.

A variância será dada pela seguinte relação:

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = E\{(x - u_x)^2\}$$

que desenvolvida resulta, [06]

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - u_x^2 \quad (4.2.1)$$

O desvio padrão da variável  $x$  é a raiz quadrada aritmética da variância.

#### 4.4 - COVARIÂNCIA

Consideremos uma variável aleatória bidimensional  $(x, y)$ , onde cada uma das componentes pode ser considerada como variável uni-dimensional com variância própria, na forma,

$$\sigma_x^2 = E\{(x - u_x)^2\}$$

$$\sigma_y^2 = E\{(y - u_y)^2\}$$

A covariância exprime o grau de dependência entre duas variáveis bi-dimensionais e é dada pela expressão:

$$\text{cov}(x, y) = \sigma_{xy} = E\{(x - u_x)(y - u_y)\}$$

ou após um desenvolvimento, [06]

$$\sigma_{xy} = E\{xy\} - E\{x\} \cdot E\{y\} \quad (4.4.1)$$

#### 4.5 - MATRIZ VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA (M.V-C)

Generalizando a variância e a covariância para uma variável aleatória  $n$ -dimensional,

$$X = \left[ x_1, x_2 \dots x_n \right]^T$$

e denotando a  $E\{X\}$  por  $U_x$  [06], obteremos a matriz variância-covariância  $\Sigma_x$ ,  $n \times n$  simétrica, a partir da expressão matricial,

$$(X - U_x)(X - U_x)^T$$

cujos elementos diagonais são  $\sigma_{ii}^2$  e os demais  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Assim,

$$\Sigma_x = E\{(X - U_x)(X - U_x)^T\} \quad (4.5.1)$$

ou

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \quad (4.5.2)$$

que é u'a matriz simétrica

#### 4.6 - LEI DA PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Consideremos duas variáveis aleatórias Y e X onde Y é uma função linear de X;

$$Y = GX + C \quad (4.6.1)$$

sendo C uma constante.

A esperança matemática de Y é,

$$U_y = E\{Y\} = E\{GX + C\} = GE\{X\} + C \quad (4.6.2)$$

mas em analogia com a (4.5.1) podemos escrever a matriz variância-covariância,

$$\Sigma_y = E\{(Y - U_y)(Y - U_y)^T\} \quad (4.6.3)$$

Substituindo (4.6.1) e (4.6.2) em (4.6.3) vem,

$$\Sigma_y = G E\{(X - U_x)(X - U_x)^T\} G^T \quad (4.6.4)$$

ou

$$\Sigma_y = G \Sigma_x G^T$$

que é a lei de propagação das covariâncias.

#### 4.7 - LEI DE PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS DE MODELOS LINEARIZADOS PELA FÓRMULA DE TAYLOR

Se a função  $Y = F(\bar{X})$  não for linear, a fórmula de TAYLOR conduzir-nos-á ao seguinte desenvolvimento para um vetor  $X^0$  muito próximo de  $\bar{X}$ , ou seja;

$$Y = F(\bar{X}) = F(X^0) + \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{X}} \right|_{X^0} (\bar{X} - X^0) \quad (4.7.1)$$

Fazendo

$$F(X^0) = C \quad ; \quad (\bar{X} - X^0) = X \quad e$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \bar{X}} \right|_{X^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = D$$

e procedendo com um raciocínio idêntico ao anterior, obteremos a lei de propagação das covariâncias de um modelo linearizado pela

fórmula de TAYLOR.

$$\Sigma_y = D \Sigma_x D^T \quad (4.7.2)$$

#### 4.8 - MATRIZ DOS COEFICIENTES DE PESO

Consideremos a MV-C  $\Sigma_x$  (4.5.2) de uma variável aleatória n-dimensional cujas variâncias das componentes  $x_i$  são anotadas por  $\sigma_{ii}^2$  e as covariâncias de cada par de componentes  $x_i$  e  $x_j$  por  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Atribuíamos a uma de suas componentes o peso unitário e designemos por  $\sigma_0^2$  a variância dessa componente. Dividindo a matriz  $\Sigma_x$  pela variância  $\sigma_0^2$  da componente de peso unitário, obtemos uma nova matriz simétrica chamada de "matriz dos coeficientes de peso"  $Q_x$ , isto é,

$$Q_x = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_x \quad (4.8.1)$$

onde

$$q_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2} \quad (4.8.2)$$

são os elementos da matriz  $Q_x$ .

Se  $Q_x$  for não singular, admitirá uma inversa  $Q_x^{-1}$  representada por  $P_x$  e que recebe o nome de "matriz dos pesos".

Quando as componentes do vetor  $X$  são independentes, as covariâncias  $\sigma_{ij}$  são todas iguais a zero. Então as matrizes  $Q_x$  e  $P_x$  consistirão apenas dos elementos diagonais.

Neste caso os elementos de  $P_x$  serão os pesos ( $p_i$ ) das componentes  $x_i$ ; enquanto que os elementos de  $Q_x$  serão o inverso dos pesos ( $\frac{1}{p_i}$ ), e os seus correspondentes inversos serão os próprios pesos ( $p_i$ ).

Portanto, devemos ter sempre em mente que os elemen

tos da diagonal de  $Q_x$  são os inversos dos pesos, mas os elementos da diagonal de  $P_x$  nem sempre são os pesos.

Pela (4.6.1) descrita anteriormente, vimos que a lei de propagação das covariâncias é dada pela expressão

$$\Sigma_y = G \Sigma_x G^T$$

Dividindo ambos os membros por  $\sigma_0^2$ , obteremos a "lei de propagação dos coeficientes de peso" [07]

$$Q_y = G Q_x G^T \quad (4.8.3)$$

#### 4.9 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ)

Consideremos o sistema de equações lineares,

$$n^A_u u^X_1 = n^L_1 \quad (4.9.1)$$

cujo vetor  $L$  é oriundo de observações e que está eivado dos inevitáveis erros de medida; tornando assim o sistema inconsistente.

Esta inconsistência é removida através da introdução de um vetor  $n^V_1$  chamado vetor das correções.

$$L = L_b + V \quad (4.9.1a)$$

onde  $L_b$  é o vetor dos valores observados.

Levando a (4.9.1a) na (4.9.1) temos

$$AX - L_b = V \quad (4.9.2)$$

A-priori o vetor  $V$  não é conhecido, mas como temos um número de observações maior que o número de incógnitas, aplica-

remos o MMQ, aceitando como melhor valor aquele que satisfizer a condição,

$$V^T V = \text{mín} \quad (4.9.3)$$

Introduzindo a matriz dos pesos

$$Q_x^{-1} = P$$

resulta,

$$V^T P V = \text{mín} \quad (4.9.4)$$

Substituindo o vetor  $V$  dado pela (4.9.2) obtemos a função,

$$\phi = (AX - L_b)^T P (AX - L_b) = \text{mín} \quad (4.9.5)$$

Derivando em relação a  $X$  e igualando a zero temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial X} &= A^T P A X + A^T P A X - A^T P L_b - A^T P L_b + 0 = 0 \\ &= 2A^T P A X - 2A^T P L_b = 0 \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

$$= A^T P A X - A^T P L_b = 0 \quad (4.9.7)$$

fazendo,

$$A^T P A = N \quad (4.9.8)$$

$$A^T P L_b = U \quad (4.9.9)$$

a (4.9.7) se apresenta

$$\boxed{NX - U = 0} \quad (4.9.10)$$

cuja solução é,

$$X = N^{-1}U \quad (4.9.11)$$



A (4.9.10) representa o sistema de equações normais, cuja importância se revelará no decorrer do próximo capítulo.

## CAPÍTULO V

### AJUSTAMENTO PELO PROCESSO ITERATIVO

---

#### 5.1 - MÉTODO DOS PARÂMETROS

O método dos parâmetros ou das equações de observação é aquele no qual as quantidades observadas são funções lineares das incógnitas; e se não o forem, serão facilmente reduzidas a esta forma, como vimos no parágrafo 4.2.

Para aplicar neste método os mínimos quadrados necessário se torna que o número de equações de observação seja maior que o número de incógnitas.

Denotaremos por;

$X$  o vetor  $u \times 1$  das correções;

$X_0$  o vetor  $u \times 1$  dos valores aproximados;

$X_a$  o vetor  $u \times 1$  dos parâmetros ajustados.

A variação dos parâmetros será dada por,

$$X = X_a - X_0 \quad (5.1.1)$$

$$X_a = X_0 + X \quad (5.1.2)$$

As quantidades aproximadas dos parâmetros são funções dos próprios parâmetros.

Chamaremos de;

$L_b$  o vetor  $n \times 1$  das quantidades observadas.

$L_o$  o vetor das quantidades calculadas em função dos parâmetros aproximados ( $X_o$ ).

$$L_o = F(X_o) \quad (5.1.3)$$

$L_a$  o vetor  $n \times 1$  das quantidades observadas ajustadas.

$V$  o vetor  $n \times 1$  dos resíduos que transformam os valores observados ( $L_b$ ) em ajustados ( $L_a$ ).

$$L_a = L_b + V \quad (5.1.4)$$

O método dos parâmetros admite que os valores observados ajustados podem ser expressos em função dos parâmetros ajustados. Assim o modelo matemático é;

$$L_a = F(X_a) \quad (5.1.5)$$

Levando a (5.1.5) na (5.1.4) temos

$$L_b + V = F(X_a) \quad (5.1.6)$$

Linearizando o segundo membro pela série de TAYLOR teremos:

$$L_b + V = F(X_o + X) = F(X_o) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_o} X \quad (5.1.7)$$

Designando por  $A$  a matriz  $n \times u$  das derivadas parciais;

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_a} \right|_{x_0} = A \quad (5.1.8)$$

a equação (5.1.7) pode ser escrita:

$$L_b + V = L_o + AX$$

ou:

$$\boxed{AX + L = V} \quad (5.1.9)$$

na qual:

$$L = L_o - L_b \quad (5.1.9a)$$

ou

$$L = F(X_o) - L_b \quad (5.1.9b)$$

Devido a (5.1.8), e a (5.1.9) se tem n equações de observação,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{1,0} - l_{1,b} \\ l_{2,0} - l_{2,b} \\ \vdots \\ l_{n,0} - l_{n,b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (5.1.10)$$

### 5.1.1 - EQUAÇÕES NORMAIS

Impondo a condição dos mínimos quadrados:

$$V^T P V = \min$$

substituindo a (5.1.9) vem,

$$\phi = (AX + L)^T P (AX + L) = \min$$

e derivando em relação a X, vem

$$A^T P A X + A^T P L = 0 \quad (5.1.11)$$

Fazendo agora,

$$A^T P A = N \quad e \quad A^T P L = U \quad (5.1.12)$$

a (5.1.11) fica,

$$N X + U = 0 \quad (5.1.13)$$

que representa u(número de linhas de X) equações normais, cuja solução é,

$$X = - N^{-1} U \quad (5.1.14)$$

Levando o vetor X na (5.1.2) obtemos o valor dos parâmetros ajustados, e na (5.1.9) o valor das observações ajustadas.

### 5.1.2 - MV-C DOS VALORES OBSERVADOS $\Sigma_{Lb}$

Construiremos a MV-C dos valores observados, estimando os valores em função da precisão dos aparelhos de medidas e dos métodos utilizados, bem como do modelo matemático empregado, (veremos adiante os demais modelos matemáticos).

Quando as observações são independentes umas das outras, a matriz  $\Sigma_{Lb}$  é diagonal.

Assim sendo e lembrando que a variância de unidade de peso é  $\sigma_0^2$  (a-priori) podemos escrever a matriz dos pesos na forma

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1} \quad (5.1.15)$$

### 5.1.3 - VARIÂNCIA DA UNIDADE DE PESO $\hat{\sigma}_o^2$

A variância da unidade de peso pode ser obtida a partir da (5.1.4) na (4.9.4)

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V^T P V}{n - u} = \frac{V^T P V}{r} \quad (5.1.16)$$

onde  $r$  é o número de graus de liberdade  $n - u$  e,

$$V^T P V = X^T U + L^T P L \quad (5.1.17)$$

### 5.1.4 - M.V-C DOS PARÂMETROS AJUSTADOS $\Sigma_{Xa}$

A solução de um sistema de equações normais é dada pela fórmula (5.1.14).

Pela (5.1.12) e (4.6.1), a matriz variância-covariância de  $X$  é dada pela expressão.

$$\Sigma_{Xa} = \hat{\sigma}_o^2 (A^T P A)^{-1} \quad (5.1.18)$$

ou

$$\Sigma_{Xa} = \hat{\sigma}_o^2 N^{-1} \quad (5.1.20)$$

### 5.1.5 - M.V-C DOS VALORES OBSERVADOS AJUSTADOS $\Sigma_{La}$

Lembrando que os valores observados ajustados são dados pela expressão:

$$L_a = A X + L_o \quad (5.1.21)$$

e novamente considerando a (4.6.1)

$$\Sigma_{La} = A \Sigma_X A^T \quad (5.1.22)$$

onde

$$\Sigma_X = \hat{\sigma}_o^2 N^{-1} \quad ; \quad \text{a } \Sigma_{La} \text{ se escreve,}$$

$$\Sigma_{La} = \hat{\sigma}_o^2 A N^{-1} A^T \quad (5.1.23)$$

### 5.1.6 - COEFICIENTES DE PESO DOS PARÂMETROS $Q_x$

Se partirmos da (5.1.12) e da (5.1.9a) podemos facilmente chegar à matriz dos coeficientes de peso dos parâmetros,

$$Q_x = N^{-1} \quad (5.1.24)$$

### 5.1.7 - COEFICIENTES DE PESO DOS VALORES OBSERVADOS AJUSTADOS DOS $Q_{La}$

Da fórmula (5.1.23) obteremos,

$$Q_{La} = AN^{-1}A^T \quad (5.1.25)$$

### 5.1.8 - DESENVOLVIMENTO ITERATIVO DO MÉTODO DOS PARÂMETROS

Vimos anteriormente que o modelo matemático do método dos parâmetros nos fornece os valores observados ajustados em função dos parâmetros ajustados.

Para que o método possa ser desenvolvido iterativamente, é necessário que se introduza um  $Xa_i$  variável, bem como um  $La_i$  também variável que iterativamente convirjam para os valores ajustados finais.

Assim o modelo matemático considerado é,

$$La_i = F(Xa_i) \quad (5.1.26)$$

Sendo,

$La_i$  o vetor  $n \times 1$  dos valores observados ajustados;

$Xa_i$  o vetor  $u \times 1$  dos parâmetros ajustados.

Chamaremos de  $Xa_{i-1}$  o vetor  $u \times 1$  dos valores aproximados dos parâmetros e  $X_i$  o vetor  $u \times 1$  das correções que convertem os parâmetros aproximados em ajustados,

$$X_{a_i} = X_{a_{i-1}} + X_i \quad (5.1.27)$$

e lembrando que

$$L_{a_i} = L_b + V_i \quad (5.1.28)$$

no qual  $V_i$  é o vetor  $n \times 1$  dos resíduos, o desenvolvimento de TAYLOR nos proporciona o seguinte sistema de equações lineares;

$$L_b + V_i = F(X_{a_{i-1}} + X_i) = F(X_{a_{i-1}}) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_{a_i}} \right|_{X_{a_{i-1}}} (X_{a_i} - X_{a_{i-1}})$$

ou

$$V_i = \left. \frac{\partial F}{\partial X_{a_i}} \right|_{X_{a_{i-1}}} (X_{a_i} - X_{a_{i-1}}) + F(X_{a_{i-1}}) - L_b \quad (5.1.29)$$

Fazendo,

$$F(X_{a_{i-1}}) - L_b = L_{i-1} - L_b = L_i \quad (5.1.30)$$

e

$$\left. \frac{\partial F}{\partial X_{a_i}} \right|_{X_{a_{i-1}}} = A_i \quad (5.1.31)$$

a equação (5.1.29) se escreve em sua forma genérica,

$$V_i = A_i X_i + L_i \quad (5.1.32)$$

Aplicando o MMQ, o sistema de equações normais é dado por

$$A_i^T P A_i X_i + A_i^T P L_i = 0 \quad (5.1.33)$$

cuja solução é,

$$X_i = - (A_i^T P A_i)^{-1} A_i^T P L_i \quad (5.1.34)$$



Levando o valor de  $X_i$  dado pela (5.1.34) na (5.1.32) obteremos o valor de  $V_i$ , e finalmente os valores ajustados,

$$X_{a_i} = X_{a_{i-1}} + X_i$$

$$L_{a_i} = L_b + V_i$$
(5.1.35)

Chamamos atenção para o seguinte fato: a convergência do método não depende somente das variáveis  $X_{a_i}$  e  $L_{a_i}$ , pois a matriz  $A_i$  dos coeficientes também é variável e deve ser calculada para cada iteração, utilizando sempre o valor ajustado melhorado. Quando as correções  $X_i$  forem nulas, a matriz  $A_i$  terá atingido a sua estabilidade e, conseqüentemente o método convergido.

#### 5.1.9 - SÍNTESE DAS FÓRMULAS PARA O AJUSTAMENTO ITERATIVO DO MÉTODO DOS PARÂMETROS.

(01) Modelo matemático	$F(X_{a_i}) = L_{a_i}$
(02) Matriz dos coeficientes dos parâmetros	$\left. \frac{\partial F}{\partial X_{a_i}} \right _{X_{a_{i-1}}} = A_i$
(03) Matriz dos pesos dos valores observados ( $\sigma_0^2$ a priori)	$\sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1} = P$
(04) Estabelecimento do vetor $L_i$	$L_i = F(X_{a_{i-1}}) - L_b$
(05) Vetor das correções	$X_i = -(A_i^T P A_i)^{-1} A_i^T P L_i$
(06) Vetor dos resíduos	$V_i = A_i X_i + L_i$
(07) Parâmetros ajustados	$X_{a_i} = X_{a_{i-1}} + X_i$
(08) Valores observados ajustados	$L_{a_i} = L_b + V_i$
(09) Variância da unidade de peso	$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V_i^T P V_i}{n-u}$

(10) M.V-C dos parâmetros ajustados  $\Sigma X a_i = \hat{\sigma}_o^2 (A_i^T P A_i)^{-1}$

(11) M.V-C dos valores observados ajustados  $\Sigma L a_i = \hat{\sigma}_o^2 A_i (A_i^T P A_i)^{-1} A_i^T$

### 5.2 - MÉTODO DOS CORRELATOS

A fórmula (5.1.9) representa um sistema de  $n$  equações lineares com  $u$  parâmetros.

Se estes parâmetros forem eliminados destas equações teremos  $n-u = r$  equações que contêm somente os resíduos desconhecidos.

Na forma matricial, a eliminação destes parâmetros será feita através da derivação parcial da função em relação aos valores observados ajustados no ponto observado.

#### 5.2.1 - EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

Como o método das equações de condição (correlatos) não depende de parâmetros, o modelo matemático será uma função dos valores observados ajustados, na forma,

$$F(L_a) = 0 \tag{5.2.1}$$

Fazendo,

$$L_a = L_b + V \tag{5.2.2}$$

a equação (5.2.1) pode ser escrita,

$$F(L_b + V) = 0 \tag{5.2.3}$$

O desenvolvimento de TAYLOR nos conduz ao modelo

linearizado, derivando parcialmente a função em relação aos valores observados ajustados e abandonando os termos de ordem superior ou igual à segunda,

$$F(L_a) = F(L_b + V) = F(L_b) + \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} V \quad (5.2.4)$$

onde o vetor  $r \times 1$  do erro de fechamento é,

$$F(L_b) = W \quad (5.2.5)$$

e a matriz das derivadas parciais,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} = B \quad (5.2.6)$$

Assim o modelo linearizado das equações de condição transformadas, é dado pela expressão:

$$r_n^B V_n + r_1^W = 0 \quad (5.2.7)$$

### 5.2.2 - EQUAÇÕES NORMAIS

Existe uma infinidade de vetores  $V$  que satisfaz a equação (5.2.7). Mas o método dos mínimos quadrados requer a minimização de  $V^T P V$ .

Para tanto, utilizaremos o método de minimização de Lagrange a função  $\phi$  definida por:

$$\phi = V^T P V - 2K^T (B V + W) = \min \quad (5.2.8)$$

onde  $K$  é um vetor desconhecido  $r \times 1$  dos correlativos.

Derivando a (5.2.8) em relação a  $V$  obteremos,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial V} = PV - B^T K \quad (5.2.9)$$

e igualando a zero

$$PV - B^T K = 0 \quad (5.2.10)$$

de onde podemos calcular o valor de  $V$  a menos de  $K$ ,

$$V = P^{-1} B^T K \quad (5.2.11)$$

Substituindo a (5.2.11) na (5.2.7) vem,

$$BP^{-1} B^T K + W = 0 \quad (5.2.12)$$

e fazendo

$$BP^{-1} B^T = M \quad (5.2.13)$$

o sistema de equações normais é,

$$MK + W = 0 \quad (5.2.14)$$

cujo valor de  $K$  se torna conhecido

$$K = - M^{-1} W \quad (5.2.15)$$

Voltando com este vetor na (5.2.11) o vetor das correções ficará também determinado.

### 5.2.3 - VALORES OBSERVADOS AJUSTADOS

De posse do vetor das correções, levaremos a

(5.2.11) na (5.2.2) e obteremos o vetor dos valores observados ajustados:

$$L_a = L_b + P^{-1} B^T K \quad (5.2.16)$$

#### 5.2.4 - VARIÂNCIA DA UNIDADE DE PESO

Como o número  $r$  de equações de condição é igual ao número de graus de liberdade, a variância da unidade de peso será dada por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n - u} = \frac{V^T PV}{r} \quad (5.2.17)$$

onde  $V^T PV$  poderá ser calculado a partir da (5.2.11)

$$V^T PV = - K^T W \quad (5.2.18)$$

#### 5.2.5 - MV-C DOS VALORES AJUSTADOS

Uma vez que neste método não existem parâmetros, necessitamos apenas da MV-C dos valores observados ajustados  $\Sigma_{L_a}$ .

Levando a equação (5.2.15) na (5.2.11) temos

$$V = - P^{-1} B^T M^{-1} W \quad (5.2.19)$$

lembrando que  $W = F(L_b)$  e aplicando a lei de propagação das covariâncias,

$$\Sigma_{L_a} = D L_b D^T \quad (5.2.20)$$

onde

$$\Sigma_{L_b} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (5.2.21)$$

e

$$D = \frac{\partial L_a}{\partial L_b} = I - P^{-1} B^T M^{-1} B \quad (5.2.22)$$

feita a substituição de (5.2.21) e (5.2.22) em (5.2.20) e desenvolvendo |06|, a MV-C dos valores observados ajustados fica;

$$\Sigma_{La} = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}) \quad (5.2.23)$$

#### 5.2.6 - DESENVOLVIMENTO ITERATIVO DO MÉTODO DOS CORRELATOS

Como sabemos, este método é uma função somente dos valores observados ajustados, cujo modelo matemático para a  $i$ -ésima iteração se escreve,

$$F(La_i) = 0 \quad (5.2.24)$$

No desenvolvimento iterativo, o vetor dos valores observados  $L_b$ , deverá ser melhor após cada iteração. Portanto o definiremos como sendo,

$$L_b = La_{i-1} \quad (5.2.25)$$

Fazendo

$$La_i = La_{i-1} + V_i \quad (5.2.26)$$

e linearizando por TAYLOR, a (5.2.24) resulta,

$$F(La_i) = F(La_{i-1} + V_i) = \left. \frac{\partial F}{\partial La_i} \right|_{La_{i-1}} (La_i - La_{i-1}) + F(La_{i-1}) = 0 \quad (5.2.27)$$

onde

$$\left. \frac{\partial F}{\partial La_i} \right|_{La_{i-1}} = B_i \quad (5.2.28)$$

e

$$F(La_{i-1}) = W_i \quad (5.2.29)$$

(ver observação 1 no final deste capítulo)

Assim a equação (5.2.27) toma a forma,

$$B_i V_i + W_i = 0 \quad (5.2.30)$$

cuja solução é,

$$V_i = - P^{-1} B_i^T (B_i P^{-1} B_i^T)^{-1} W_i \quad (5.2.31)$$

e os correspondentes valores observados ajustados são,

$$La_i = La_{i-1} + V \quad (5.2.32)$$

É importante notar que:

a) A matriz dos coeficientes (5.2.28) deve ser recalculada para cada iteração tomando o valor da derivada parcial no ponto observado ajustado melhorado ( $La_{i-1}$ );

b) O vetor do erro de fechamento (5.2.29), também deve ser recalculado para cada iteração, tomando o valor da função no ponto observado ajustado melhorado ( $La_{i-1}$ );

c) No limite, a convergência do método será completa quando o vetor  $La_{i-1}$  for igual a  $La_i$ . Neste caso, o vetor dos resíduos da i-ésima iteração ( $V_i$ ) será igual a zero pela (5.2.27) e conseqüentemente o modelo matemático  $F(La_i)$  também será igual a zero.

d) A distribuição dos  $V$ 's pela fórmula (5.2.27), é chamada por ALLEN J. POPE [10] de, "efeito de minimização de resíduos sobre resíduos";

c) A variância da unidade de peso  $\hat{\sigma}_0^2$ , é calculada com o vetor  $V$  resultante da diferença entre o valor ajustado final e o observado, ( $V = La_i - L_b$ ).

5.2.7 - SÍNTESE DAS FÓRMULAS PARA O AJUSTAMENTO ITERATIVO DO MÉTODO DOS CORRELATOS

- (01) Modelo matemático  $F(La_i) = 0$
- (02) Matriz dos coeficientes  $\frac{\partial F}{\partial La_i} \Big|_{La_{i-1}} = B_i$
- (03) Vetor do erro de fechamento  $F(La_{i-1}) = W_i$
- (04) Modelo linearizado  $B_i V_i + W_i = 0$
- (05) Matriz dos pesos ( $\sigma_0^2$  a-priori)  $\sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1} = P$
- (06) Vetor dos correlativos K  $K_i = -M_i^{-1} W_i$

sendo

$$M_i = (B_i P^{-1} B_i^T)$$

- (07) Vetor das correções  $V_i = P^{-1} B_i^T K_i$
- (08) Valores observados ajustados  $La_i = La_{i-1} + V_i$
- (09) Variância da unidade de peso  $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r}$

sendo

$$V = La_i - L_b$$

- (10) MV-C dos valores observados ajustados

$$\Sigma La_i = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - P^{-1} B_i^T M_i^{-1} B_i P^{-1})$$

5.3 - MÉTODO COMBINADO

5.3.1 - MODELO MATEMÁTICO

No caso das equações de observação definimos o mode



lo matemático sob a forma,

$$L_a = F(X_a) \quad (5.1.3)$$

e no caso das equações de condição,

$$F(L_a) = 0 \quad (5.2.1)$$

Poderemos combinar estes dois métodos em um caso geral, chamado de Método Combinado onde aparecem simultaneamente parâmetros desconhecidos e quantidades observadas,

$$F(L_a, X_a) = 0 \quad (5.3.1)$$

Usando derivadas similares às do ítem 5.1, o modelo será linearizado pela série de TAYLOR,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_a=L_b} V + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a=X_0} X + F(L_b, X_0) = 0 \quad (5.3.2)$$

onde

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} = B \quad (5.3.3)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} = A \quad (5.3.4)$$

$$F(L_b, X_0) = W \quad (5.3.5)$$

e a matriz dos pesos P será associada às observações  $L_b$ .

Assim o modelo linearizado já dimensionado, sob a forma matricial será:

$$r_n^B v_n + r_u^A x_u + r_1^W = 0 \quad (5.3.6)$$

O princípio dos mínimos quadrados impõe que  $V^T P V = \text{mín.}$

O método multiplicativo de Lagrange permite-nos a solução através da minimização da função,  $\phi$  definida por

$$\phi = V^T P V - 2K^T (BV + AX + W) = \text{mín} \quad (5.3.7)$$

onde  $K$  é o vetor multiplicativo de Lagrange.

Diferenciando a (5.3.7) em relação a  $V$ ,  $K$  e  $X$ , o conjunto de equações normais, escreve-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial V} = PV - B^T K = 0 \quad \cdot \quad -PV + B^T K = 0 \quad (5.3.8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial K} = -BV - AX - W = 0 \quad \cdot \quad BV + AX + W = 0 \quad (5.3.9)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial X} = -A^T K = 0 \quad \cdot \quad A^T K = 0 \quad (5.3.10)$$

Lembrando que:

$n$  = número de observações;

$u$  = número de parâmetros;

$r$  = número de equações.

O conjunto das  $(n + u + r)$  equações algébricas envolvendo  $n$  incógnitas  $v$ ,  $u$  parâmetros  $x$  e  $r$  incógnitas  $k$ , pode ser escrito num sistema hiper-matricial.

$$\begin{bmatrix} \overline{n}^P & n^B & n^0 \\ r^B & r^0 & r^A \\ u^0 & u^A & u^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^V \\ r^K \\ u^X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^0 \\ \overline{r}^W \\ u^0 \end{bmatrix} \quad (5.3.11)$$

cuja solução só será possível se  $n + u > r$  e  $r > u$ .

### 5.3.2 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NORMAIS

Solucionaremos o sistema de equações normais pelo método da substituição, porém tomando a precaução de estarmos tratando com coeficientes que são matrizes.

Reescrevendo o sistema originado de (5.3.8), (5.3.9) e (5.3.10),

$$- PV + B^T K = 0 \quad (a)$$

$$BV + AX + W = 0 \quad (b)$$

$$A^T K = 0 \quad (c)$$

de (a) temos

$$V = P^{-1} B^T K \quad (5.3.12)$$

o que concorda com a (5.2.11), levando em (b) e fazendo:

$$M = B P^{-1} B^T \quad (5.3.13)$$

vem

$$MK + AX + W = 0 \quad (5.3.14)$$

ou

$$K = -M^{-1}(AX + W) \quad (5.3.15)$$

e finalmente substituindo a (5.3.15) em (c)

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W \quad (5.3.16)$$

Para obter o valor de  $V^T P V$  procederemos da seguinte maneira:

$$V = P^{-1} B^T K$$

$$V^T P V = K^T B^T P^{-1} P P^{-1} B^T K$$

$$V^T P V = K^T M K$$

Substituindo o valor de K e lembrando que  $A^T K = 0$  pela (5.3.10) obteremos o valor final

$$V^T_{PV} = - K^T W \quad (5.3.17)$$

Com isto podemos estabelecer de imediato a variância da unidade de peso,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T_{PV}}{r - u} = - \frac{K^T W}{L} \quad (5.3.18)$$

onde

$L = r - u$  é o número de graus de liberdade.

### 5.3.3 - MV-C DOS PARÂMETROS

A matriz dos coeficientes de peso é estabelecida pelo processo usual,

$$\Sigma_W = \Sigma L_b = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1}$$

No lado direito da equação (5.3.16), somente W é variável,

$$W = F(L_b, X_0)$$

onde

$X_0$  é um vetor constante.

Em analogia com a (4.6.4) tem-se,

$$\Sigma_{X_a} = G \Sigma_W G^T \quad (5.3.20)$$

Diferenciando a (5.3.16) em relação a  $L_a$  e lembrando a (5.3.3)

$$\frac{\partial X}{\partial L_a} = - (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B = G$$

$L_b$

Substituindo este resultado em (5.3.20) e considerando a (5.3.19), vem

$$\Sigma_{Xa} = \hat{\sigma}_O^2 (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

o que em face da (5.3.13) fica,

$$\Sigma_{Xa} = \hat{\sigma}_O^2 (A^T M^{-1} A)^{-1} \quad (5.3.21)$$

A matriz variância-covariância dos valores observados ajustados poderá ser obtida similarmente [06], cuja equação final é;

$$\Sigma_{La} = \hat{\sigma}_O^2 \left[ P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} \right] \quad (5.3.22)$$

Se assumirmos que  $A = 0$  teremos somente equações de condição (correlatos);

No caso em que  $A \neq 0$  e  $B = -I$ , temos equações de observação (parâmetros);

Quando  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  o modelo matemático é formado por equações de condição com parâmetros (combinado).

#### 5.3.4 - DESENVOLVIMENTO ITERATIVO DO MÉTODO COMBINADO

O modelo matemático do método combinado para a  $i$ -ésima iteração em função dos parâmetros ajustados e dos valores observados ajustados é,

$$F(Xa_i, La_i) = 0 \quad (5.3.23)$$

Como nos métodos anteriores faremos,

$$Xa_i = Xa_{i-1} + X_i, \quad (5.3.24)$$

$$La_i = La_{i-1} + V_i \quad (5.3.25)$$

Levando estes valores na (5.3.23), o modelo matemático será;

$$F(Xa_{i-1} + X_i, La_{i-1} + V_i) = 0 \quad (5.3.26)$$

e linearizando por TAYLOR |10|,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial Xa_i} \right|_{Xa_{i-1}} (Xa_i - Xa_{i-1}) + \left. \frac{\partial F}{\partial La_i} \right|_{La_{i-1}} (La_i - La_{i-1}) + F(Xa_{i-1}, La_{i-1}) = 0 \quad (5.3.27)$$

Fazendo:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial Xa_i} \right|_{Xa_{i-1}} = A_i \quad (5.3.28)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial La_i} \right|_{La_{i-1}} = B_i \quad (5.3.29)$$

e

$$F(Xa_{i-1}, La_{i-1}) = W_i \quad (5.3.30)$$

(ver observação 2, no final deste capítulo)

a equação (5.3.27) toma a seguinte forma:

$$A_i X_i + B_i V_i + W_i = 0, \quad (5.3.31)$$

cujas soluções são,

$$V_i = P^{-1} B_i^T K_i \quad (5.3.32)$$

$$X_i = -(A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T M_i^{-1} W_i \quad (5.3.33)$$

onde

$$M_i = B_i P^{-1} B_i^T \quad (5.3.34)$$

e

$$K_i = - M_i^{-1} (A_i X_i + W_i) \quad (5.3.35)$$

Os valores ajustados finais são:

$$Xa_i = Xa_{i-1} + X_i \quad (5.3.36)$$

e

$$La_i = La_{i-1} + V_i \quad (5.3.37)$$

Na equação (5.3.27), linearizada através da fórmula de TAYLOR, foram negligenciados os termos de segunda ordem e superiores. Entretanto a convergência do método está condicionada na utilização dos valores ajustados melhorados para cada nova iteração |10|.

Assim no limite,  $Xa_{i-1}$  tenderá para  $Xa_i$  e  $La_{i-1}$  para  $La_i$ , anulando a primeira e a segunda parcelas da equação (5.3.27) e conseqüentemente o modelo matemático  $F(Xa_i, La_i)$  também se anulará. Entretanto, devem ser observadas as condições d) e c) do parágrafo (5.2.6).

### 5.3.5 - SÍNTESE DAS FÓRMULAS PARA O AJUSTAMENTO ITERATIVO DO MÉTODO COMBINADO.

(01) Modelo matemático  $F(Xa_i, La_i) = 0$

(02) Matriz dos coeficientes dos parâmetros  $\left. \frac{\partial F}{\partial Xa_i} \right|_{Xa_{i-1}} = A_i$

(03) Matriz dos coeficientes dos valores observados  $\left. \frac{\partial F}{\partial La_i} \right|_{La_{i-1}} = B_i$

(04) Vetor do erro de fechamento  $F(X_{a_{i-1}}, L_{a_{i-1}}) = W_i$

(05) Modelo linearizado  $A_i X_i + B_i V_i + W_i = 0$

(06) Matriz dos pesos ( $\sigma_0^2$  a-priori)  $\sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1} = P$

(07) Vetor das correções, onde

$$M_i = B_i P^{-1} B_i^T \quad X_i = -(A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T M_i^{-1} W_i$$

(08) Vetor dos correlativos  $K_i = -M_i^{-1}(A_i X_i + W_i)$

(09) Vetor dos resíduos  $V_i = P^{-1} B_i^T K_i$

(10) Variância da unidade de peso,  $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r - u}$

onde  $V = L_{a_i} - L_b$

(11) MV-C dos parâmetros ajustados  $\Sigma X_{a_i} = \hat{\sigma}_0^2 (A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1}$

(12) MV-C dos valores observados ajustados

$$\Sigma L_{a_i} = \hat{\sigma}_0^2 \left[ P^{-1} + P^{-1} B_i^T M_i^{-1} A_i (A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T M_i^{-1} B_i P^{-1} - P^{-1} B_i^T M_i^{-1} B_i P^{-1} \right]$$

### 5.3.6 - OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Observação 1 - A fórmula (5.2.27) deste trabalho, se apresenta sob uma forma diferente da (21) desenvolvida por POPE [10], que é,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial L_{a_i}} \right|_{L_{a_{i-1}}} (L_{a_i} - L_b) + F(L_{a_{i-1}}) + \left. \frac{\partial F}{\partial L_{a_i}} \right|_{L_{a_{i-1}}} (L_b - L_{a_{i-1}}) = 0 \quad (5.3.38)$$

na qual,

$$L_{a_i} - L_b = V_i$$



$$L_b - La_{i-1} = - V_{i-1}$$

$$F(La_{i-1}) + \frac{\partial F}{\partial La_i} \Big|_{La_{i-1}} (L_b - La_{i-1}) = W_i$$

assumindo a seguinte forma:

$$B_i V_i + F(La_{i-1}) - V_i V_{i-1} = 0$$

ou

$$B_i V_i + W_i = 0$$

A diferença entre as duas fórmulas reside no seguinte fato:

Na (5.2.27), os resíduos  $V_i$  após cada iteração são adicionados ao valor observado melhorado ( $La_{i-1}$ ), enquanto que na (5.3.38), os resíduos  $V_i$  são sempre adicionados ao valor observado ( $L_b$ ).

Lembrando que a condição c) do parágrafo (5.2.6) não pode ser esquecida para o cálculo da variância  $\hat{\sigma}_0^2$ .

Observação 2 - Esta fórmula, (5.3.37), também se apresenta sob uma forma diferente da (16), desenvolvida por POPE [10], que é,

$$\frac{\partial F}{\partial Xa_i} \Big|_{Xa_{i-1}} (Xa_i - Xa_{i-1}) + \frac{\partial F}{\partial La_i} \Big|_{La_{i-1}} (La_i - L_b) + F(Xa_{i-1}, La_{i-1}) + \frac{\partial F}{\partial La_i} \Big|_{La_{i-1}} (L_b - La_{i-1}) = 0 \quad (5.3.39)$$

assumindo a seguinte forma:

$$A_i X_i + B_i V_i + F(Xa_{i-1}, La_{i-1}) - B_i V_{i-1} = 0$$

ou

$$A_i X_i + B_i V_i + W_i = 0$$

A diferença entre as duas fórmulas é a já citada na observação 1.

As experiências 6.4 e 6.5 mostram os resultados obtidos com as duas fórmulas, (5.3.37) e (5.3.39) respectivamente.

## CAPÍTULO VI

### EXPERIÊNCIAS

Para cada método de ajustamento (Parâmetros, Correlatos e Combinado), desenvolvidos iterativamente, fizemos experiências testando a convergência e analisamos os resultados iterando e não iterando.

#### 6.1 - PRIMEIRA EXPERIÊNCIA - (método dos parâmetros)

As coordenadas (x, y) dos pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  são conhecidas. Ajustar as coordenadas do ponto P onde foram observadas as distâncias de P a cada ponto conhecido e o ângulo  $\widehat{P_1 P P_2}$

Ponto	x(m)	y(m)	Dist.(m)	$\sigma$ (m)
$P_1$	842,281	925,523	244,512	0,012
$P_2$	1.337,544	996,249	321,570	0,016
$P_3$	1.831,727	723,962	773,154	0,038
$P_4$	840,408	658,345	279,992	0,014
$P_1 \widehat{P P_2}$			123°38'1,4"	2,0"

Estabelecimento das equações

$$La_i = F(Xa_i)$$

$$La_i = Lb + v_i = F(Xa_i)$$

$$l_{1a} = l_{1b} + v_1 = \left[ (x_1 - xa_i)^2 + (y_1 - ya_i)^2 \right]^{1/2}$$

$$l_{2a} = l_{2b} + v_2 = \left[ (x_2 - xa_i)^2 + (y_2 - ya_i)^2 \right]^{1/2}$$

$$l_{3a} = l_{3b} + v_3 = \left[ (x_3 - xa_i)^2 + (y_3 - ya_i)^2 \right]^{1/2}$$

$$l_{4a} = l_{4b} + v_4 = \left[ (x_4 - xa_i)^2 + (y_4 - ya_i)^2 \right]^{1/2}$$

$$l_{5a} = l_{5b} + v_5 = \text{arc tg}\left(\frac{x_2 - xa_i}{y_2 - ya_i}\right) - \text{arc tg}\left(\frac{x_1 - xa_i}{y_1 - ya_i}\right)$$

Cálculo do vetor  $L_i$

$$L_i = F(Xa_{i-1}) - L_b$$

Atribui-se um valor inicial às coordenadas do ponto P e substitui-se nas equações para obter o valor de L na primeira iteração

$$Xa_{i-1} = \begin{bmatrix} xa_i \\ ya_i \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz dos coeficientes  $A_i$

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial Xa_i} \Bigg|_{Xa_{i-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{1a}}{\partial xa_i} & \frac{\partial l_{1a}}{\partial ya_i} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial l_{5a}}{\partial xa_i} \cdot \rho & \frac{\partial l_{5a}}{\partial ya_i} \cdot \rho \end{bmatrix}$$

onde  $\rho = \frac{1''}{\text{sen } 1''} = 206\,264,8062''$

Matriz dos pesos P

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & \frac{1}{\sigma_5^2} \end{bmatrix}$$

Solução

$$N_i = A_i^T P A_i$$

$$U_i = A_i^T P L_i$$

$$X_i = - N_i^{-1} U_i$$

$$Xa_i = Xa_{i-1} + X_i \quad (\text{ver apêndice, prog. 01})$$

Quadros demonstrativos dos resultados

Quadro 1 - Valores ajustados para cada iteração

$$(Xa_i = Xa_{i-1} + X_i)$$

	$Xa_0$	$Xa_1$	$Xa_2$	$Xa_3$
<b>xa</b>	1 065,00	1 065,225489	1 065,225402	1 065,225402
<b>ya</b>	825,00	825,1856159	825,1857195	825,1857195

Quadro 2 - Variação dos valores de  $L_i$  para cada iteração

$$(L_i = F(X_{a_{i-1}}) - L_b)$$

$l_i$	1. <sup>a</sup>	2. <sup>a</sup>	3. <sup>a</sup>	4. <sup>a</sup>
$l_1$	-0,158513249	$-1,84972 \times 10^{-3}$	$-1,97202 \times 10^{-3}$	$-1,97202 \times 10^{-3}$
$l_2$	0,309561224	$-5,5207 \times 10^{-3}$	$-5,50166 \times 10^{-3}$	$-5,50166 \times 10^{-3}$
$l_3$	0,201655567	-0,027362969	-0,027262654	-0,027262654
$l_4$	-0,321737923	$-5,95638 \times 10^{-3}$	$-5,96496 \times 10^{-3}$	$-5,96496 \times 10^{-3}$
$l_5$	-245,1311208"	-0,124632"	0,010836"	0,0108324"

Quadro 3 - Correções para cada iteração ( $X_i = -N_i^{-1} U_i$ )

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
x	0,255489454	$-8,75196 \times 10^{-5}$	$2,443 \times 10^{-9}$	$2,119 \times 10^{-9}$
y	0,185615910	$1,03547 \times 10^{-4}$	$-1,734 \times 10^{-9}$	$9,849 \times 10^{-10}$

Quadro 4 - Variação dos resíduos  $v_i$  para cada iteração

$$(V_i = A_i X_i + L_i)$$

$v_i$	1. <sup>a</sup>	2. <sup>a</sup>	3. <sup>a</sup>	4. <sup>a</sup>
$v_1$	$-2,00356 \times 10^{-3}$	$-1,97202 \times 10^{-3}$	$-1,97202 \times 10^{-3}$	$-1,97202 \times 10^{-3}$
$v_2$	$-5,5214 \times 10^{-3}$	$-5,50168 \times 10^{-3}$	$-5,50166 \times 10^{-3}$	$-5,50166 \times 10^{-3}$
$v_3$	-0,027393514	-0,027262646	-0,027262657	-0,027262657
$v_4$	$-5,95638 \times 10^{-3}$	$-5,96496 \times 10^{-3}$	$-5,96496 \times 10^{-3}$	$-5,96496 \times 10^{-3}$
$v_5$	0,010332591"	0,010833524"	0,010833736"	0,010833703"

Variância da unidade de peso,

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V_i^T P V_i}{n - u} = 0,280507633$$

MV-C dos parâmetros ajustados,

$$\Sigma_{Xa_i} = \hat{\sigma}_o^2 N_i^{-1} = \begin{bmatrix} 2,23862 \times 10^{-5} & -1,61437 \times 10^{-7} \\ -1,61437 \times 10^{-7} & 6,46427 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Quadro 5 - valores observados ajustados com iteração e sem iteração.

$la_i$	c/iteração	s/iteração	Diferença
$la_1$	244,51002798	244,50999644	$3,156 \times 10^{-5}$
$la_2$	321,56449834	321,5644786	$1,974 \times 10^{-5}$
$la_3$	773,12673744	773,12606486	$67,258 \times 10^{-5}$
$la_4$	279,98603504	279,98604362	$-0,858 \times 10^{-5}$
$la_5$	123°38'1,410833703"	123°38'1,410332591"	$50,1112 \times 10^{-5}$

## 6.2 - SEGUNDA EXPERIÊNCIA (método dos correlatos)

Trata-se do ajustamento angular do quadrilátero ABCD (fig. 03), utilizando o desenvolvimento de Taylor para linearizar a equação de lado. Os excessos esféricos ( $\epsilon$ ) dos triângulos ABD, ADC e ABC são respectivamente 1,36", 1,77" e 1,02" e os ângulos observados são:

- 1 = 61° 07' 52,00"
- 2 = 38° 28' 34,90"
- 3 = 38° 22' 19,10"
- 4 = 42° 01' 12,15"
- 5 = 29° 14' 32,85"
- 6 = 70° 21' 59,20"
- 7 = 49° 26' 21,85"
- 8 = 30° 57' 07,10"

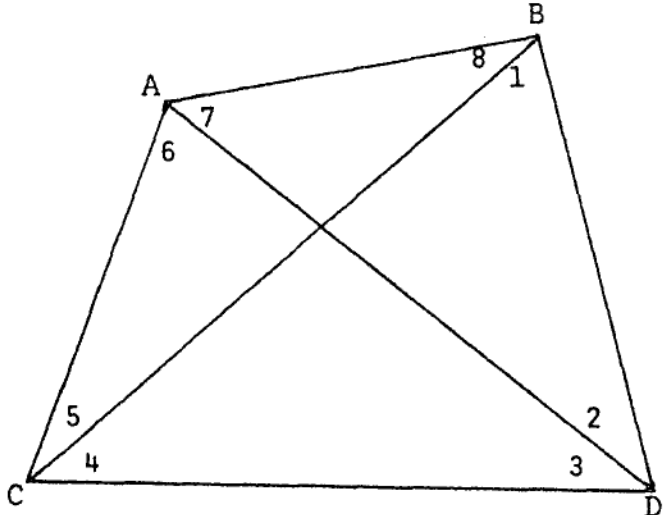


fig. 03

Estabelecimento das equações.

Equações angulares:

$$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 + [(1 + 2 + 7 + 8) - (180^\circ + 1,36'')] = 0$$

$$v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + [(3 + 4 + 5 + 6) - (180^\circ + 1,77'')] = 0$$

$$v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + [(5 + 6 + 7 + 8) - (180^\circ + 1,02'')] = 0$$

Equação de lado.

Tomando como pólo o vértice A temos:

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

ou

$$\frac{\text{sen}(2) \text{sen}(4 + 5) \text{sen}(8)}{\text{sen}(1 + 8) \text{sen}(3) \text{sen}(5)} = 1$$

A linearização por Taylor, requer que se tome o valor da derivada parcial em relação ao ângulo ajustado no ponto observado. (Ver apêndice, programa 02).

Quadros demonstrativos dos resultados.



Quadro 6 - Valores do erro de fechamento para cada iteração

$$W_i = F(La_{i-1}) \text{ em (")}$$

	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$w_1$	-5,51	$3,6 \times 10^{-6}$	0	0
$w_2$	1,53	$1,2 \times 10^{-6}$	$-2,4 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{-6}$
$w_3$	-0,02	$2,4 \times 10^{-6}$	$-1,2 \times 10^{-6}$	$-1,2 \times 10^{-6}$
$w_4$	-0,393820363	$-3,32623 \times 10^{-6}$	$5,36288 \times 10^{-6}$	$-2,47518 \times 10^{-6}$

Quadro 7 - Valores das correções  $v_i$  para cada iteração em (")

$v_i$	$V$	$V_1$	$V_2$	$V_3$
$v_1$		2,47006	$-1,736 \times 10^{-3}$	$2,57 \times 10^{-6}$
$v_2$		1,46506	$1,170 \times 10^{-3}$	$-1,73 \times 10^{-6}$
$v_3$		0,66455	$-1,604 \times 10^{-3}$	$2,98 \times 10^{-6}$
$v_4$		-0,63968	$2,168 \times 10^{-3}$	$-2,61 \times 10^{-6}$
$v_5$		-0,18235	$-2,003 \times 10^{-3}$	$3,57 \times 10^{-6}$
$v_6$		-1,37252	$1,438 \times 10^{-3}$	$-1,53 \times 10^{-6}$
$v_7$		1,48814	$-1,745 \times 10^{-3}$	$2,58 \times 10^{-6}$
$v_8$		0,08672	$2,308 \times 10^{-3}$	$-3,42 \times 10^{-6}$

Quadro 8 - Valores observados ajustados

$$La_i = La_{i-1} + V_i \text{ nos (")}$$

ang. \ La	La <sub>1</sub>	La <sub>2</sub>	La <sub>3</sub>
1	54,47006	54,46832	54,46832
2	36,36506	36,36623	36,36623
3	19,76455	19,76295	19,76295
4	11,51032	11,51249	11,51249
5	32,66765	32,66564	32,66564
6	57,82748	57,82892	57,82892
7	23,22810	23,33636	23,33636
8	7,18672	7,18902	7,18902

A variância da unidade de peso

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum V_i^T V_i}{r} = 3,30484883 \text{ ou o desvio padrão}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \pm 1,81792''$$

### 6.3 - TERCEIRA EXPERIÊNCIA - (método dos correlatos)

Nesta experiência, nos propusemos a comparar os resultados obtidos no Ajustamento do quadrilátero ABCD (fig. 04) até a 3.<sup>a</sup> iteração, utilizando a equação de lado linearizada pela maneira clássica (logaritmos) e moderna (Taylor).

Dados de observação

Ângulos

$$1 = 22^{\circ} 01' 43,06''$$

$$2 = 16^{\circ} 44' 31,70''$$

$$3 = 57^{\circ} 08' 58,04''$$

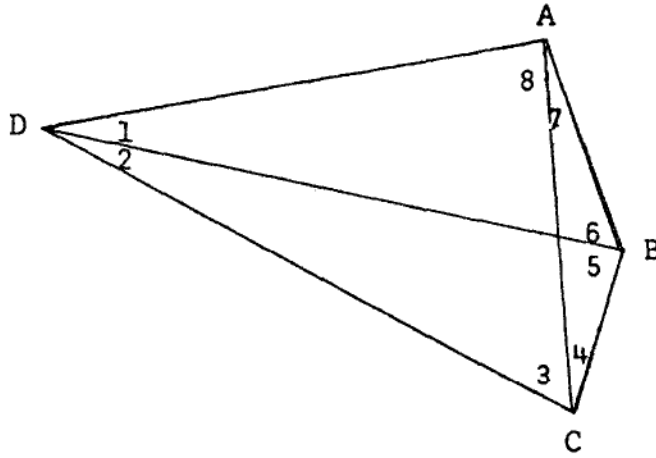
$$4 = 19^{\circ} 33' 14,24''$$

$$5 = 86^{\circ} 33' 13,95''$$

$$6 = 58^{\circ} 46' 36,48''$$

$$7 = 15^{\circ} 06' 52,39''$$

$$8 = 84^{\circ} 04' 51,60''$$



Excessos esféricos

$$\Delta DAB = 1,64''$$

$$\Delta DBC = 1,50''$$

$$\Delta DAC = 2,82''$$

fig. 04

Equações:

$$v_1 + v_6 + v_7 + v_8 + 1,89 = 0$$

$$v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 3,57 = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + 1,58 = 0$$

$$\frac{\text{sen}(6) \text{sen}(3 + 4) \text{sen}(8)}{\text{sen}(7 + 8) \text{sen}(4) \text{sen}(5)} = 1$$

Linearizando a equação de lado pela maneira clássica através de logaritmos (ver apêndice, programa 03), e procedendo o ajustamento até a 3.<sup>a</sup> iteração obtivemos as seguintes correções:

Quadro 9 - Linearização clássica, correções em (")

ANG.	CORR(1)	CORR(2) X 10 <sup>-3</sup>	CORR(3) X 10 <sup>-3</sup>
1	-1,094273	1,79	1,06
2	0,314128	-1,71	-1,68
3	0,258029	1,90	1,86
4	1,519240	-1,40	-1,37
5	1,478603	1,22	1,19
6	0,161520	-1,87	-1,83
7	0,100638	2,05	2,01
8	-1,057883	-1,26	-1,24

Linearizando a equação de lado pela maneira moderna, Taylor (ver apêndice, programa 04), e procedendo o ajustamento até a 3.<sup>a</sup> iteração obtivemos as seguintes correções:

Quadro 10 - Linearização moderna, correções em (")

ANG.	CORR(1)	CORR(2) X 10 <sup>-6</sup>	CORR(3) X 10 <sup>-6</sup>
1	-1,041948	-3,696	6,215
2	0,231063	6,349	-8,855
3	0,349962	-5,342	9,590
4	1,451423	4,930	-7,648
5	1,537551	-3,538	5,713
6	0,070994	5,448	-9,241
7	0,200033	-7,240	1,078
8	-1,119077	3,888	-5,750

Quadro 11 - Comparação dos ângulos ajustados

ANG.	CLÁSSICA(")	MODERNA(")	DIFERENÇA(")
1	41,968577	42,018054	-0,049477
2	32,010738	31,931060	0,078678
3	58,301789	58,389966	-0,088177
4	15,756470	15,691420	0,065050
5	15,431013	15,487553	-0,056540
6	36,637820	36,550990	0,086830
7	52,494698	52,590036	-0,095338
8	50,539617	50,480921	0,058696
	$\hat{\sigma}_o = \pm 1,32393$	$\hat{\sigma}_o = \pm 1,32560$	

6.4 - QUARTA EXPERIÊNCIA - (método combinado)

Calcular as coordenadas do centro da circunferência que melhor se ajusta aos quatro pontos observados:

PTO.	X	$\sigma_x^2$	Y	$\sigma_y^2$
1	140,0	2	60,0	2
2	165,0	4	100,0	4
3	165,0	2	150,0	2
4	140,0	4	180,0	4

Estabelecimento das equações:

Vetor dos parâmetros  $X_{a_{i-1}} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ r_c \end{bmatrix}$

Equações

$$f_1 = (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 - r_c^2 = 0$$

$$f_2 = (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 - r_c^2 = 0$$

$$f_3 = (x_3 - x_c)^2 + (y_3 - y_c)^2 + r_c^2 = 0$$

$$f_4 = (x_4 - x_c)^2 + (y_4 - y_c)^2 + r_c^2 = 0$$

onde  $(x_c, y_c)$  são as coordenadas do centro e  $r_c$  é o raio da circunferência

$$\text{Matriz } {}_4A_3 = \frac{\partial F}{\partial Xa_i} \Bigg|_{Xa_{i-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_c} & \frac{\partial f_1}{\partial y_c} & \frac{\partial f_1}{\partial r_c} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_c} & \frac{\partial f_4}{\partial y_c} & \frac{\partial f_4}{\partial r_c} \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz } {}_4B_8 = \frac{\partial F}{\partial La_i} \Bigg|_{La_{i-1}}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial y_4} \end{bmatrix}$$

Matriz  $W = F(La_{i-1}, Xa_{i-1})$

onde  $La_{i-1}$  é o vetor dos valores observados e  
 $Xa_{i-1}$  é o vetor da 1.<sup>a</sup> aproximação.

Matriz dos pesos

$${}_8P_8 = \sigma_0^2 \Sigma_{La_{i-1}}^{-1}$$

Modelo linear

$${}_4A_3 \quad {}_3X_1 + {}_4B_8 \quad {}_8V_1 + {}_4W_1 = 0$$

$$\text{Solução} \left\{ \begin{array}{l} M_i = B_i P_i^{-1} B_i^T \\ X_i = - (A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T M_i^{-1} W_i \\ V_i = - P_i^{-1} B_i^T M_i^{-1} (A_i X_i + W_i) \end{array} \right.$$

(ver apêndice, programa 05).

Os quadros 12 a 19 mostram os valores de  $Xa_{i-1}$  (vetor das coordenadas do centro e raio da circunferência) e  $La_{i-1}$  (vetor dos valores observados) ambos ajustados para cada iteração, ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ).

Quadro 12 - (i = 1)

Xa <sub>0</sub>	PTO.	La <sub>0</sub>	
		X	Y
80,0	1	140,0	60,0
100,0	2	165,0	100,0
60,0	3	165,0	150,0
	4	140,0	180,0

Quadro 13 - (i = 2)

Xa <sub>1</sub>	PTO.	La <sub>1</sub>	
		X	Y
93,27348224	1	139,7845253	59,26738612
120,8327198	2	164,7665691	99,56905066
73,47997286	3	166,4652278	150,4309494
	4	140,0	180,5745991

Quadro 14 - (i = 3)

Xa <sub>2</sub>	PTO.	La <sub>2</sub>	
		X	Y
93,90552399	1	139,754722	59,09637937
120,6781292	2	164,768156	99,63254655
75,95278600	3	166,8072413	150,4405560
	4	139,475093	180,6211647



Quadro 15 - (i = 4)

Xa <sub>3</sub>	PTO.	La <sub>3</sub>	
		X	Y
93,88791072	1	139,7543707	59,0907603
120,6828309	2	164,7638166	99,62499746
75,92858821	3	166,8184794	150,4912586
	4	139,4710876	180,6322315

Quadro 16 - (i = 5)

Xa <sub>4</sub>	PTO.	La <sub>4</sub>	
		X	Y
93,88843004	1	139,7543800	59,09091672
120,6826926	2	164,7639408	99,62521495
75,92819635	3	166,8181666	150,49124
	4	139,4711893	180,631916

Quadro 17 - (i = 6)

Xa <sub>5</sub>	PTO.	La <sub>5</sub>	
		X	Y
93,88841475	1	139,7543797	59,09091211
120,6826966	2	164,7639371	99,62520854
75,92820784	3	166,8181758	150,4912406
	4	139,4711863	180,6319254

Quadro 18 - (i = 7)

Xa <sub>6</sub>	PTO.	La <sub>6</sub>	
		X	Y
93,8884152	1	139,7543797	54,09091225
120,6826965	2	164,7639372	99,62520873
75,9282075	3	166,8181755	150,4912406
	4	139,4711864	180,631925

Quadro 19 - (i = 8)

Xa <sub>7</sub>	PTO.	La <sub>7</sub>	
		X	Y
93,8884152	1	139,7543797	59,09091225
120,6826965	2	164,7639372	99,62520873
75,9282975	3	166,8181755	150,4912406
	4	139,4711864	180,631925

6.5 - QUINTA EXPERIÊNCIA - (método combinado)

Repetiremos a experiência 6.4, utilizando a fórmula (5.3.39) de POPE [10], na qual os resíduos são adicionados sempre ao valor observado. (Ver apêndice, programa 06).

O Quadro 20 mostra os valores ajustados finais obtidos na 12<sup>a</sup> iteração, em que o modelo matemático convergiu,

$$F(Xa_i, La_i) = 0.$$

Quadro 20 - (i = 12)

Xa <sub>12</sub>	PTO.	La <sub>12</sub>	
		X	Y
93,88841519	1	139,7543797	59,09091224
120,6826965	2	164,7639372	99,62520872
75,92820752	3	166,8181755	150,4912406
	4	139,4711864	180,631925

#### 6.6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Uma análise dos resultados obtidos nas experiências anteriores executadas através do processo iterativo, observou-se que:

a) O método dos parâmetros, experiência 6.1, ofereceu-nos uma convergência rápida, com seus valores estáveis e precisos até a 6.<sup>a</sup> casa decimal na 3.<sup>a</sup> iteração (quadro 1).

b) O erro que se cometeria iterando e não iterando (quadro 5), é relativamente pequeno. Entretanto, este erro está condicionado aos valores aproximados iniciais, pois, neste caso foram atribuídos valores iniciais próximos dos reais.

c) Uma das maneiras que nos possibilita saber se os valores iniciais são próximos dos reais ou não, é processar pelo menos duas iterações e comparar os resultados. Havendo uma variação nos resíduos maior que a precisão desejada, o processo iterativo deve continuar.

d) A experiência mostrou que o número de iterações depende somente dos valores iniciais. Verificou-se que para valores iniciais Xa<sub>0</sub>(1000, 800) foram necessárias sete iterações para obter os mesmos valores do quadro 1.

e) O método dos correlatos, experiência 6.2, também mostrou uma convergência rápida. Seus valores ajustados se estabilizaram na 3.<sup>a</sup> iteração com uma precisão de cinco casas decimais do segundo de arco (quadro 8). Entretanto, se a precisão desejada no ajustamento de direções for da ordem do milésimo do segundo, são necessárias no mínimo duas iterações como mostra o quadro 7. Isto se explica pelo fato de se tomar o valor da derivada parcial em relação ao valor ajustado no ponto observado.

f) A experiência 6.3, mostrou que a linearização por Taylor, além de nos proporcionar uma rápida convergência, as correções são sempre da ordem do milionésimo do segundo a partir da 2.<sup>a</sup> iteração (quadro 10). No entanto, a linearização clássica apresentou uma convergência lenta e as correções sempre na ordem do milésimo do segundo (quadro 9).

g) Os ângulos ajustados na 3.<sup>a</sup> iteração por Taylor são de absoluta confiança até a 5.<sup>a</sup> casa decimal do segundo, não podendo dizer o mesmo dos ângulos ajustados através da linearização clássica por motivos já explicados anteriormente. O quadro 11, mostra as diferenças entre os ângulos ajustados utilizando as duas maneiras de linearizar a equação de lado até a 3.<sup>a</sup> iteração.

h) A experiência 6.4, provou que não há necessidade de se estabelecer valores iniciais próximos dos reais para se efetuar o ajustamento. Mas por medida de economia de tempo e de computador deve-se tomá-los tão próximos possíveis, pois diminuem o número de iterações. O quadro 19 mostra os valores ajustados finais com precisão de sete casas decimais na 7.<sup>a</sup> iteração.

i) A fórmula de POPE |10|, (5.3.39) empregada na experiência 6.5, provou na 12.<sup>a</sup> iteração, serem verdadeiros os valores da 7.<sup>a</sup> iteração obtidos pela (5.3.37).

j) O tempo gasto para executar o ajustamento itera

tivo e o trabalho de elaborar os programas, são compensados pela certeza da precisão dos valores finais.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÃO

---

Pelo que foi descrito em páginas anteriores, verificamos que em todos os métodos de ajustamento que utilizam a linearização dos modelos por Taylor, que aliás, ocorre com frequência em Geodésia e Aerofotogrametria, uma só iteração não nos permite afirmar se os valores ajustados são realmente satisfatórios, principalmente porque se parte de valores aproximados iniciais para calcular as correções finais.

Quando se trata de um ajustamento de precisão, parece-nos um tanto perigoso admitir como valores finais aqueles obtidos da 1.<sup>a</sup> iteração. Neste caso aconselhamos que se utilize o método de ajustamento iterativo, desenvolvido em detalhes no capítulo V deste trabalho, para melhorar os resultados e obter assim a precisão desejada.

Na experiência 6.3, comparamos os valores finais do ajustamento angular de um quadrilátero cuja equação de lado foi linearizada de duas maneiras diferentes (clássica e Taylor), e concluimos que a linearização por Taylor, além de proporcionar uma convergência mais rápida, os valores finais são precisos até a 5.<sup>a</sup> casa decimal do segundo de arco, o que não se verificou com a linearização clássica.

Na experiência 6.4 e 6.5, comparamos os resultados de um mesmo problema utilizando duas fórmulas diferentes (5.3.37) e (5.3.39), cujos resultados foram iguais a menos do número de ite

rações (quadro 19 e 20).

Embora o número de iterações da (5.3.37) tenha sido menor que o da (5.3.39), (sete contra doze), esta última apresenta a grande vantagem de não cometermos o risco da convergência se dar num ponto falso (PITFALLS). Chamamos a atenção deste detalhe pelo seguinte fato: se a função não fôr bem comportada, passará por vários mínimos, e utilizando a (5.3.37), pode ocorrer que a convergência se dê num desses pontos que realmente não é o menor mínimo.

Para um futuro trabalho, pretendemos ajustar iterativamente uma rede de triangulação e uma poligonal e analisar todas as vantagens e desvantagens do processo iterativo sobre o não iterativo.

Desta maneira, concluímos que o Ajustamento pelo Processo Iterativo pode ser de grande valia à Geodésia e Aerofotogrametria na obtenção de valores ajustados precisos.

APÊNDICE



Programa 01 - referente à experiência 6.1

```

10 DIM XC(4),YC(4),OC(5),O(5,1),L(5,1),A(5,2),P(5,5),T(2,5)
20 DIM OC(2,2),O(2,1),F(2,1),G(2,5),V(5,1)
30 FOR I=1 TO 4
40 INPUT XC(I),YC(I),OC(I)
50 NEXT I
60 FOR I=1 TO 2
70 INPUT Z(I)
80 NEXT I
90 FOR I=1 TO 4
100 O(1,1)=(XC(I)-Z(1))^2+(YC(I)-Z(2))^2+0.5
110 L(I,1)=O(1,1)-Z(1)
120 NEXT I
130 O(5,1)=ATN((XC(2)-Z(1))/(YC(2)-Z(2)))-ATN((XC(1)-Z(1))/(YC(1)-Z(2))),
140 O(5,1)=O(5,1)*180/PI
150 L(5,1)=O(5,1)-123.633722221
160 L(5,1)=L(5,1)*3600
170 MAT PRINT L
180 FOR I=1 TO 4
190 A(I,1)=-(XC(I)-Z(1))/O(1,1)
200 A(I,2)=-(YC(I)-Z(2))/O(1,1)
210 NEXT I
220 A(5,1)=-(YC(2)-Z(2))/(O(2,1)+2)+(YC(1)-Z(2))/(O(1,1)+2)
230 A(5,2)=-(XC(1)-Z(1))/(O(1,1)+2)+(XC(2)-Z(1))/(O(2,1)+2)
240 A(5,1)=A(5,1)*206264.8062
250 A(5,2)=A(5,2)*206264.8062
260 MAT PRINT A
270 MAT P=ZER
280 P(1,1)=6944.4444444
290 P(2,2)=3906.25
300 P(3,3)=692.52077562
310 P(4,4)=5102.0403163
320 P(5,5)=0.25
330 MAT T=TRN(A)
340 MAT G=T*P
350 MAT N=G*A
360 MAT N=INV(N)
370 MAT N=(-1)*N
380 MAT U=G*L
390 MAT F=N*U
400 MAT PRINT F
410 MAT Z=Z+F
420 MAT PRINT Z
430 MAT V=A+F
440 MAT V=V+L
450 MAT PRINT V
460 END

```

Programa 02 - referente à experiência 6.2

```

10 DIM WC(4,8),AC(8),CC(8,4),ME(4,4),KE(4,1),VE(8,1)
20 DEG
30 FOR I=1 TO 8
40 INPUT G,G1,G2
50 AC(I)=G+G1/60+G2/3600
60 NEXT I
70 WC(1,1)=AC(1)+AC(2)+AC(7)+AC(8)-(180+1.36/3600)
80 WC(1,1)=WC(1,1)/3600
90 WC(2,1)=AC(3)+AC(4)+AC(5)+AC(6)-180-1.77/3600
100 WC(2,1)=WC(2,1)/3600
110 WC(3,1)=AC(5)+AC(6)+AC(7)+AC(8)-180-1.02/3600
120 WC(3,1)=WC(3,1)/3600
130 WC(4,1)=SIN(AC(2))*SIN(AC(4)+AC(5))*SIN(AC(8))
140 WC(4,1)=WC(4,1)-SIN(AC(1)+AC(8))*SIN(AC(3))*SIN(AC(5))
150 WC(4,1)=WC(4,1)+206264.8062
160 MAT PRINT W
170 MAT B=ZER
180 BC(1,1)=1
190 BC(1,2)=1
200 BC(1,7)=1
210 BC(1,8)=1
220 BC(2,3)=1
230 BC(2,4)=1
240 BC(2,5)=1
250 BC(2,6)=1
260 BC(3,5)=1
270 BC(3,6)=1
280 BC(3,7)=1
290 BC(3,8)=1
300 BC(4,1)=-COS(AC(1)+AC(8))*SIN(AC(3))*SIN(AC(5))
310 BC(4,2)=COS(AC(2))*SIN(AC(5)+AC(4))*SIN(AC(8))
320 BC(4,3)=-SIN(AC(1)+AC(3))*COS(AC(5))*SIN(AC(5))
330 BC(4,4)=SIN(AC(2))*COS(AC(5)+AC(4))*SIN(AC(8))
340 BC(4,5)=SIN(AC(2))*COS(AC(5)+AC(4))*SIN(AC(8))
350 BC(4,5)=BC(4,5)-SIN(AC(1)+AC(8))*SIN(AC(3))*COS(AC(5))
360 BC(4,8)=SIN(AC(2))*SIN(AC(5)+AC(4))*COS(AC(8))
370 BC(4,8)=BC(4,8)-COS(AC(1)+AC(8))*SIN(AC(3))*SIN(AC(5))
380 MAT PRINT B
390 MAT C=TRN(B)
400 MAT M=B*C
410 MAT N=INV(M)
420 MAT N=(-1)*N
430 MAT K=M*N
440 MAT V=C*K
450 MAT PRINT V
460 FOR I=1 TO 8
470 VE(I,1)=VE(I,1)/3600
475 AC(I)=AC(I)+VE(I,1)
480 NEXT I
500 MAT PRINT A
510 END

```

Programa 0.3- referente à experiência 6.3, cuja equação de **Iado**  
**foi linearizada por Taylor.**

```

10 DIM BL(4,8),WC(4,1),AC(8),CS(4),ME(4,4),K(4,1),V(8,1)
20 GOSUB
30 FOR I=1 TO 8
40 INPUT G,G1,G2
50 AC(I)=G+G1/60+G2/3600
60 NEXT I
70 WC(1,1)=AC(1)+AC(6)+AC(7)+AC(8)-(180+1.64/3600)
80 WC(1,1)=WC(1,1)*3600
90 WC(2,1)=AC(2)+AC(3)+AC(4)+AC(5)-(180+1.5/3600)
100 WC(2,1)=WC(2,1)*3600
110 WC(3,1)=AC(1)+AC(2)+AC(3)+AC(8)-(180+2.82/3600)
120 WC(3,1)=WC(3,1)*3600
130 WC(4,1)=SIN(AC(8))*SIN(AC(6))*SIN(AC(3)+AC(4))
140 WC(4,1)=WC(4,1)-SIN(AC(3))*SIN(AC(5))*SIN(AC(7)+AC(8))
150 WC(4,1)=WC(4,1)+206264.8062
160 MAT PRINT W
170 MAT B=ZER
180 BC(1,1)=1
190 BC(1,6)=1
200 BC(1,7)=1
210 BC(1,8)=1
220 BC(2,2)=1
230 BC(2,3)=1
240 BC(2,4)=1
250 BC(2,5)=1
260 BC(3,1)=1
270 BC(3,2)=1
280 BC(3,3)=1
290 BC(3,8)=1
300 BC(4,8)=SIN(AC(8))*SIN(AC(6))*COS(AC(3)+AC(4))
310 BC(4,3)=BC(4,3)-COS(AC(3))*SIN(AC(5))*SIN(AC(7)+AC(8))
320 BC(4,4)=SIN(AC(8))*SIN(AC(6))*COS(AC(3)+AC(4))
330 BC(4,5)=-SIN(AC(3))*COS(AC(5))*SIN(AC(7)+AC(8))
340 BC(4,6)=SIN(AC(8))*COS(AC(6))*SIN(AC(3)+AC(4))
350 BC(4,7)=-SIN(AC(3))*SIN(AC(5))*COS(AC(7)+AC(8))
360 BC(4,8)=COS(AC(8))*SIN(AC(6))*SIN(AC(3)+AC(4))
370 BC(4,3)=BC(4,3)-SIN(AC(3))*SIN(AC(5))*COS(AC(7)+AC(8))
380 MAT PRINT B
390 MAT C=TRN(B)
400 MAT M=B+C
410 MAT M=INV(M)
420 MAT M=(-1)*M
430 MAT K=M*N
440 MAT V=C*K
450 MAT PRINT V
460 FOR I=1 TO 8
470 VC(I,1)=V(I,1)/3600
480 WC(I)=AC(I)+VC(I,1)
490 NEXT I
500 MAT PRINT A
510 END

```

Programa 04 - referente à experiência 6.3, cuja equação de lado  
foi linearizada pela maneira clássica

```

10 DIM WC(4,1),LI(8),BC(4,8),MC(4,4),KC(4,1),VC(8,1),C(8,4)
20 DEG
30 M=SIN(1/3600)+0.4342948*10000000
40 FOR I=1 TO 8
50 INPUT G,G1,G2
60 LI(I)=G+G1/60+G2/3600
70 NEXT I
80 WC(1,1)=LI(1)+LI(6)+LI(7)+LI(8)-(180+1.64/3600)
90 WC(1,1)=WC(1,1)+3600
100 WC(2,1)=LI(2)+LI(3)+LI(4)+LI(5)-(180+1.5/3600)
110 WC(2,1)=WC(2,1)+3600
120 WC(3,1)=LI(1)+LI(2)+LI(3)+LI(8)-(180+2.82/3600)
130 WC(3,1)=WC(3,1)+3600
140 WC(4,1)=LGT(SIN(LI(8)))+LGT(SIN(LI(6)))+LGT(SIN(LI(3)+LI(4)))
150 WC(4,1)=WC(4,1)-LGT(SIN(LI(3)))-LGT(SIN(LI(5)))-LGT(SIN(LI(7)+LI(8)))
160 WC(4,1)=WC(4,1)*206264.8062
170 MAT PRINT W
180 MAT B=ZER
190 BC(1,1)=1
200 BC(1,6)=1
210 BC(1,7)=1
220 BC(1,8)=1
230 BC(2,2)=1
240 BC(2,3)=1
250 BC(2,4)=1
260 BC(2,5)=1
270 BC(3,1)=1
280 BC(3,2)=1
290 BC(3,3)=1
300 BC(3,8)=1
310 BC(4,3)=(1/TAN(LI(3)+LI(4))-1/TAN(LI(3)))*M
320 BC(4,4)=(1/TAN(LI(3)+LI(4)))*M
330 BC(4,5)=-((1/TAN(LI(5)))*M)
340 BC(4,6)=(1/TAN(LI(6)))*M
350 BC(4,7)=-((1/TAN(LI(7)+LI(8)))*M)
360 BC(4,8)=(1/TAN(LI(8))-1/TAN(LI(7)+LI(8)))*M
370 MAT PRINT B
380 MAT C=TRN(B)
390 MAT M=B*C
400 MAT M=INV(M)
410 MAT M=(-1)*M
420 MAT K=M*M
430 MAT V=C*K
440 MAT PRINT V
450 FOR I=1 TO 8
460 VI(I,1)=WC(I,1)/3600
470 NEXT I
480 MAT L=L+V
490 MAT PRINT L
500 END

```

Programa 05 - referente à experiência 6.4

```

10 DIM AE(4,3),XE(3,1),BE(4,8),LE(4,2),PE(8,1),WE(4,1),YE(3,1)
20 DIM CE(3,4),DE(8,4),EE(8,4),ME(4,4),NE(3,4),OE(3,3),OF(3,1),SE(4,1)
30 LOAD DATA 2,L
40 LOAD DATA 3,X
50 LOAD DATA 4,P
210 FOR I=1 TO 4
220 AE(I,1)=-2*(LE(I,1)-XE(1,1))
230 AE(I,2)=-2*(LE(I,2)-XE(2,1))
240 AE(I,3)=-2*XE(3,1)
250 NEXT I
260 MAT B=ZER
270 BE(1,1)=2*(LE(1,1)-XE(1,1))
280 BE(2,3)=2*(LE(2,1)-XE(1,1))
290 BE(2,4)=2*(LE(2,2)-XE(2,1))
300 BE(3,5)=2*(LE(3,1)-XE(1,1))
310 BE(4,7)=2*(LE(4,1)-XE(1,1))
320 BE(3,6)=2*(LE(3,2)-XE(2,1))
330 BE(4,8)=2*(LE(4,2)-XE(2,1))
340 BE(1,2)=2*(LE(3,1)-XE(2,1))
350 FOR I=1 TO 4
360 AE(I,1)=CE(I,1)-XE(1,1)+2*(LE(I,2)-XE(2,1))+2*(XE(3,1))+2
370 NEXT I
372 LINK 5,330

380 MAT C=TRN(A)
390 MAT D=TRN(B)
400 FOR I=1 TO 8
410 PE(I,1)=1/PE(I,1)
420 FOR J=1 TO 4
430 EE(I,J)=PE(I,1)*DE(I,J)
440 NEXT J
450 NEXT I
460 MAT M=B+E
470 MAT N=INV(M)
480 MAT H=C*M
490 MAT O=N*B
500 MAT Q=INV(O)
510 MAT R=N*W
520 MAT U=(-1)*O
530 MAT Y=O*Q
540 MAT D=E*N
550 MAT S=A*Y
560 MAT S=S+U
570 MAT P=D*S
580 MAT P=(-1)*P
590 MAT X=K*Y
600 FOR I=1 TO 4
610 LE(I,1)=PE(I,1)+LE(I,1)
620 LE(I,2)=PE(I+4,1)+LE(I,2)
625 NEXT I
627 STORE DATA 3,X
630 PRINT "MAT X"
640 MAT PRINT X
650 PRINT "MAT L"
660 MAT PRINT L
661 DISP "CHAMAR LOAD 1"
662 WAIT 3000
670 END

```

Programa 06 - referente à experiência 6.5

```

10 DIM LC(4,2),XC(3,1),PC(8,1),WC(8,1)
20 DISP "MAT L"
30 WAIT 3000
40 FOR I=1 TO 4
50 FOR J=1 TO 2
60 INPUT LC(I,J)
70 NEXT J
80 NEXT I
90 DISP "MAT X0"
100 WAIT 3000
110 FOR I=1 TO 3
120 INPUT XC(I,1)
130 NEXT I
140 DISP "MAT P - EM DIAGONAL"
150 WAIT 3000
160 FOR I=1 TO 8
170 INPUT PC(I,1)
180 NEXT I
182 MAT V=ZER
190 STORE DATA 2,L
200 STORE DATA 3,X
210 STORE DATA 4,P
212 STORE DATA 8,V
230 DISP "CHAMAR LOAD 1"
235 WAIT 2000
240 END

```

```

10 DIM AC(4,3),XC(3,1),BC(4,8),LC(4,2),PC(8,1),WC(4,1),YC(3,1),VC(8,1)
20 DIM CE(3,4),DE(8,4),EE(8,4),ME(4,4),NE(3,4),OE(3,3),QE(3,1),SE(4,1)
30 LOAD DATA 2,L
40 LOAD DATA 3,X
50 LOAD DATA 4,P
210 FOR I=1 TO 4
220 AC(1,1)=-2*(LC(1,1)-XC(1,1))
230 AC(1,2)=-2*(LC(1,2)-XC(2,1))
240 AC(1,3)=-2*XC(3,1)
250 NEXT I
260 MAT B=ZER
270 BC(1,1)=2*(LC(1,1)-XC(1,1))
280 BC(2,3)=2*(LC(2,1)-XC(1,1))
290 BC(2,4)=2*(LC(2,2)-XC(2,1))
300 BC(3,5)=2*(LC(3,1)-XC(1,1))
310 BC(4,7)=2*(LC(4,1)-XC(1,1))
320 BC(3,6)=2*(LC(3,2)-XC(2,1))
330 BC(4,8)=2*(LC(4,2)-XC(2,1))
340 BE(1,2)=2*(LC(2,1)-XC(2,1))
350 FOR I=1 TO 4
360 WE(I,1)=(LC(I,1)-XC(1,1))+2*(LC(I,2)-XC(2,1))+2*(XC(3,1))+2
370 NEXT I
371 LOAD DATA 8,V
372 MAT S=B*V
373 MAT W=W+S
374 MAT PRINT W
378 LINK 5,380

```

```

380 MAT C=TRN(A)
390 MAT D=TRN(B)
400 FOR I=1 TO 8
410 P(I,1)=1/P(I,1)
420 FOR J=1 TO 4
430 E(I,J)=P(I,1)*D(I,J)
440 NEXT J
450 NEXT I
460 MAT M=B+E
470 MAT N=INV(M)
480 MAT H=C*M
490 MAT O=N*A
500 MAT S=INV(O)
510 MAT Q=N*M
520 MAT R=(C-1)*O
530 MAT Y=O*O
540 MAT D=EXP
550 MAT S=A*Y
560 MAT S=S+M
570 MAT P=D*5
580 MAT P=(C-1)*P
581 STORE DATA S,P
582 MAT PRINT P
590 MAT Z=X+Y
600 FOR I=1 TO 4
610 L(I,1)=P(I,1)*L(I,1)
620 L(I,2)=P(I,1)*L(I,2)+L(I,2)
625 NEXT I
627 STORE DATA Z,X
630 PRINT "MAT X"
640 MAT PRINT X
650 PRINT "MAT L"
660 MAT PRINT L
661 DISP "CHƯƠNG LOAD 1"
662 WAIT 3000
670 END

```

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |01| SHIRLOV, G.E. Linear algebra, Englewood Cliffs. New Jersey Prentice-Hall inc. 1971, 387 p.
- |02| RAO, C.R. Linear statistical inference and its applications 2<sup>nd</sup> edition - New York - John Willey Sans 1965, 618 p.
- |03| NOBLE, B. Applied linear algebra, New Jersey Prentice-Hall inc. 1969, 523 p.
- |04| FADDEEVA, V.N. Computational methods of linear algebra, S. Francisco - W.H. Freeman and Co. 1963, 621 p.
- |05| KREYSZIG, E. Matemática superior, Rio de Janeiro, Livro Técnico e Científico Editora Ltda. 1969, volume 1, 490 p.
- |06| GEMAEL, C. Aplicação do cálculo matricial em Geodésia, Curitiba, Setor de Tecnologia da UFP 1974, 2.<sup>a</sup> parte.
- |07| UOTILA, U.A. Introduction to adjustment computations with matrices, Ohio S.U. Department of Geodetic Science 1967.
- |08| RAINSFORD, H.F. Survey adjustment and least squares, O.S. London, Constable Co. LTD. 1968, 326 p.
- |09| ASHKENAZI, V. Compendium of formulae on Geodetic position networks, Curitiba Julho 1976.
- |10| POPE, A.J. Some pitfalls to be avoided in the iterative adjustment of nonlinear problems, National Ocean Survey



Geodetic Research e Development Laboratory - Rockville,  
md. 20852.