

LUIZ CARLOS BERARDI

**DINÂMICA DE UM OSCILADOR NÃO-LINEAR  
FORÇADO SUJEITO A UM POTENCIAL BIESTÁVEL**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

**CURITIBA  
1995**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. LUIZ CARLOS BERARDI

TÍTULO DA TESE: "Dinâmica de um Oscilador Não-Linear Forçado Sujeito a um Potencial Biestável"

Em sessão pública de Defesa de Tese, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arguição pela Banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 24 de fevereiro de 1995

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana  
Presidente/Orientador - UFPR

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas  
Departamento de Física - USP

Prof. Dr. Liu Kai  
Professor Emérito - UFPR



*À meus pais Elevy e Izolda,  
que com seu amor me deram a vida e  
com sua sabedoria a luz para guiar os meus passos.*

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos de Dinâmica Não-Linear</b>	<b>8</b>
2.1	Modelagem . . . . .	10
2.2	Sistemas Dinâmicos - Espaço de Fase . . . . .	12
2.3	Atratores . . . . .	14
2.4	Mapa de Poincaré . . . . .	19
2.5	Espectro de Potência . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Osciladores Não-Lineares</b>	<b>29</b>
3.1	Características Gerais . . . . .	29
3.2	O Potencial Estudado neste Trabalho . . . . .	33
3.3	Lagrangiana e Hamiltoniana do Oscilador . . . . .	37
3.4	Retratos de Fase, Mapas de Poincaré e Espectro de Potência . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Métodos de Aproximação</b>	<b>55</b>
4.1	Introdução . . . . .	55
4.2	Método do Balanço Harmônico . . . . .	57

4.3	Método do Balanço Harmônico para Oscilações Harmônicas Forçadas e com Amortecimento . . . . .	60
4.4	Método de Ritz . . . . .	61
4.5	Método da Fase e Amplitude Lentamente Variáveis . . . . .	64
4.6	Método da Fase e Amplitude Lentamente Variáveis para Oscilações Forçadas e Amortecidas . . . . .	67
4.7	Método de Duffing para Oscilações Harmônicas Forçadas sem Amortecimento . . . . .	70
4.8	Método de Duffing Modificado . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Soluções Harmônicas</b>	<b>75</b>
5.1	Método de Van der Pol . . . . .	75
5.1.1	Caso I: $b = 0, g = 0$ . . . . .	78
5.1.2	Caso II: $b = 0, g > 0$ . . . . .	79
5.1.3	Caso III: $b > 0, g = 0$ . . . . .	80
5.1.4	Caso IV: $b > 0, g > 0$ . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Curvas de Ressonância</b>	<b>84</b>
6.1	Introdução . . . . .	84
6.2	Resultados . . . . .	84
6.2.1	Método de Duffing para Oscilações Forçadas sem Amortecimento	84
6.2.2	Método do Balanço Harmônico . . . . .	88
6.2.3	Método de Ritz . . . . .	89
6.2.4	Método de Van der Pol . . . . .	90

<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Estabilidade das Soluções Harmônicas</b>	<b>99</b>
A.1	Método de Andronov e Witt . . . . .	99

# Lista de Figuras

2.1	Espaço de Fase para o Pêndulo . . . . .	13
2.2	Atrator de Ponto Fixo . . . . .	17
2.3	Atrator Periódico . . . . .	18
2.4	Seção de Poincaré . . . . .	20
2.5	Mapejamento Estroboscópico . . . . .	22
2.6	Discretização de uma função contínua . . . . .	25
2.7	Espectro de potência de um sinal periódico . . . . .	27
2.8	Espectro de potência de um sinal quase-periódico . . . . .	28
2.9	Espectro de potência de um sinal aperiódico . . . . .	28
3.1	Aproximação Harmônica para um Potencial Genérico . . . . .	31
3.2	Potencial detalhado para os valores $\lambda = -18,6$ e $g = 1,45743$ . . . . .	34
3.3	Espaço de Fase com $b = 0,1$ , $F = 15$ e $g = 1$ . . . . .	42
3.4	Série temporal de $y$ para os parâmetros da figura precedente . . . . .	42
3.5	Espectro de Potência para a série temporal $y$ . . . . .	43
3.6	Espaço de Fase com $b = 0,01$ , $F = 60$ e $g = 1$ . . . . .	44
3.7	Série temporal de $x$ para os parâmetros da figura precedente . . . . .	44
3.8	Espectro de Potência para a série temporal $x$ . . . . .	45

3.9	Espaço de Fase com $b = 0,01$ , $F = 35$ e $g = 1$ . . . . .	45
3.10	Série temporal de $x$ para os parâmetros da figura precedente . . . . .	46
3.11	Mapa de Poincaré para os parâmetros da figura precedente . . . . .	46
3.12	Espaço de Fase com $b = 0,5$ , $F = 5$ e $g = 2$ . . . . .	47
3.13	Série temporal de $x$ para os parâmetros da figura precedente . . . . .	48
3.14	Espectro de Potência para a série temporal $x$ . . . . .	48
3.15	Espaço de Fase com $b = 0,5$ , $F = 10$ e $g = 2$ . . . . .	49
3.16	Série temporal de $x$ para os parâmetros da figura precedente . . . . .	49
3.17	Espectro de Potência para a série temporal $x$ . . . . .	50
3.18	Espaço de Fase com $b = 0,5$ , $F = 23$ e $g = 2$ . . . . .	50
3.19	Série temporal de $x$ para os parâmetros da figura precedente . . . . .	51
3.20	Mapa de Poincaré para os parâmetros da figura precedente . . . . .	51
3.21	Espaço de Fase com $b = 0,5$ , $F = 23,61$ e $g = 2$ . . . . .	52
3.22	Mapa de Poincaré para os parâmetros da figura precedente . . . . .	52
3.23	Espectro de Potência para a série temporal $x$ . . . . .	53
3.24	Espaço de Fase com $b = 0,5$ , $F = 23,6325$ e $g = 2$ . . . . .	53
3.25	Série temporal de $y$ para os parâmetros da figura precedente . . . . .	54
3.26	Espectro de Potência para a série temporal $y$ . . . . .	54
5.1	Estabilidade das soluções para $b = 0$ , $g < 0$ . . . . .	81
6.1	Diagrama de ressonância, caso linear . . . . .	86
6.2	Curva de Ressonância para o oscilador não-linear, pelo método de Duffing	88
6.3	Diagrama de ressonância, pelo método do balanço harmônico . . . . .	89



6.4	Diagrama de ressonância, pelo método de Ritz . . . . .	90
6.5	Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso I . . . . .	91
6.6	Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso II . . . . .	92
6.7	Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso III . . . . .	94
6.8	Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso IV . . . . .	95

# Agradecimentos

Este trabalho é fruto do idealismo e perseverança que deveria estar presente no espírito de cada ser humano.

É evidente que nele está incrustado, de uma maneira irremovível, minha gratidão sincera:

- Ao professor e orientador Dr. Ricardo Luiz Viana que, pela sua paciência, dedicação, amizade e por sua elevada capacidade, norteou constantemente minhas buscas neste trabalho;
- Ao Prof. Dr. Liu Kai meu primeiro orientador, e que despertou o meu interesse por essa área fascinante do conhecimento humano;
- Ao Prof. Dr. Cristiano Graf pelo seu voto de apoio;
- Ao professor Sergio Luiz Meister Berleze, pelo apoio no uso do DEC-10 e nos métodos de integração ;
- À amiga Cintia Gisele Pizzato pelas orientações no uso da linguagem C;
- À amiga Silvia Helena Soares Schwab pelo trabalho sobre Análise de Fourier;
- Ao amigo Nelson Haj Mussi Sobrinho pelo valioso e abnegado auxílio e incentivo;
- Aos amigos Cleusa Satsuki Assakura e Carlos Isao Kumoto, pelo paciente trabalho na elaboração de algumas figuras e pelo incentivo pessoal;
- Aos demais colegas e professores do Departamento de Física que me auxiliaram no desenvolvimento desta tese;
- À Universidade Federal do Paraná que acolhe a todos que têm sede do saber, possibilitando o aprimoramento dos conhecimentos, voltada sempre para o bem comum;

- Ao corpo gerencial da COPEL que me permitiu as condições mais adequadas, dentro de suas possibilidades, para que eu pudesse realizar este trabalho, em particular ao amigo Luís Pedro Zambon;
- A cada amigo, que através de uma palavra de incentivo, ou de orientação, me insuflou o espírito para continuar esta jornada, e que para não deixar de citar todos, simbolizo-os no nome do amigo Rogério Francisco Sibowicz.
- À minha esposa Rosane e aos meus filhos Fernando e Rafael que brilham eternamente como estrelas no meu caminho a guiar-me na vida para o bem, que perdoem a minha ausência para que eu pudesse realizar este sonho;
- Aos meus caros irmãos Dicesar e Isolde;
- Agradeço a DEUS, Criador e Grande Arquiteto do Universo, sem o qual nada existiria, e que esteve sempre ao meu lado.

# Resumo

Potenciais biestáveis são frequentemente encontrados na análise de problemas envolvendo física de lasers e na Mecânica Quântica. Neste trabalho estudamos o comportamento dinâmico de um oscilador não-linear amortecido e periodicamente forçado, sob a ação de um potencial biestável da forma  $V(x) = x^2 + \lambda x^2/(1 + gx^2)$ . Uma análise qualitativa é realizada através de retratos de fase, mapas de Poincaré e espectros de potência. Métodos de aproximação são utilizados para construir curvas de ressonância, que caracterizam a resposta dinâmica do sistema à excitação externa, e para identificar soluções harmônicas.

# Abstract

Bistable potentials are often found in the analysis of problems in laser physics and Quantum Mechanics as well. In this work, we study the dynamical behaviour of a damped, periodically forced nonlinear oscillator under the action of a bistable potential of the form  $V(x) = x^2 + \lambda x^2/(1 + gx^2)$ . A qualitative analysis was carried out through phase space portraits, Poincaré maps and power spectra. Approximation methods are used to generate resonance curves, which characterize the dynamical response of the system to the external excitation, and to identify harmonic solutions.

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas oscilantes não-lineares e não-conservativos apresentam, sob certas condições, soluções periódicas chamadas ciclos limites, que aparecem na análise matemática de fenômenos não-lineares. Entre estes estão a teoria de laser e de plasma, oscilações bioquímicas, ritmos circadianos e muitas aplicações em engenharia, em particular em eletrônica [14].

Neste trabalho, estudamos o comportamento dinâmico de um oscilador não-linear amortecido e periodicamente perturbado no tempo, sob a ação de um potencial da forma  $V(x) = x^2 + \lambda x^2/(1 + gx^2)$ , com  $\lambda$  e  $g$  conectados pela relação  $\lambda = \lambda(g) = -6g^2 - 4g$ , com  $g > 0$  e portanto  $\lambda < 0$ .

Um aspecto interessante da interação com  $\lambda < 0$  é que o potencial se comporta assintoticamente como um oscilador harmônico, mas contém um duplo mínimo, sendo portanto um potencial biestável. Potenciais de duplo mínimo têm sido usados na teoria quântica de moléculas como modelos dinâmicos simples para descrever o movimento de uma partícula sujeita a dois centros de força [8]. Estes potenciais são também de grande interesse na investigação de processos difusivos em geral (tunelamento quântico) e também em Física de Laser e Física Nuclear.

Uma característica de grande interesse, do ponto de vista quântico, é que tanto o potencial considerando bem como suas derivadas são contínuos e contêm soluções analíticas exatas (isto é, a equação de Schrödinger pode ser resolvida para este potencial) (vide bi-

bliografia no capítulo 3).

Essa diversidade de aplicações na Mecânica Quântica e o número considerável de publicações recentes envolvendo esse potencial, despertou-nos o interesse em estudar o comportamento dinâmico de um oscilador sujeito a esse mesmo potencial, porém no domínio clássico. Foram adicionadas características de amortecimento e de uma perturbação externa periódica, com o objetivo de tornar o modelo mais realista e rico na sua dinâmica devido ao desequilíbrio das forças envolvidas.

O trabalho foi então segmentado da seguinte forma:

No capítulo 2 são apresentados alguns conceitos da Teoria dos Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, necessários à compreensão do escopo do trabalho e para permitir, na sequência, que pudéssemos proceder a um estudo qualitativo e quantitativo mais detalhado do comportamento dos regimes dinâmicos do sistema.

No capítulo 3 realizamos uma análise qualitativa do oscilador através de retratos de fase, mapas de Poincaré e espectros de Potência.

No capítulo 4 iniciamos uma análise quantitativa através do emprego de métodos de aproximação, procurando integrar e uniformizar a sua aplicação ao problema.

No capítulo 5, são analisadas soluções harmônicas empregando o método de Van der Pol, efetuando-se também uma discussão da questão da estabilidade destas soluções através do método de Andronov e Witt e do critério de Poincaré.

No capítulo 6 os regimes dinâmicos são analisados através das curvas de resposta à excitação externa, baseado nos resultados obtidos nos métodos de aproximação empregados nos capítulos 4 e 5. Nossas conclusões são apresentadas a seguir.

Certos de que para termos uma compreensão melhor de fenômenos do mundo real, isto é, para desenvolvermos modelos adequados, precisamos inicialmente conhecer mais do comportamento de aproximações locais, acreditamos ter obtido um retrato mais adequado do comportamento dinâmico do sistema. Esse retrato não pode ser colocado como global

pois esbarra em dois tipos de problema:

O primeiro é no nível numérico ou observacional, pois só podemos efetuar um número finito de experimentos numéricos com um número finito de variação de valores de parâmetros, cada um com precisão finita. O segundo é no nível teórico. Mesmo que tivéssemos certeza de que nossos experimentos numéricos estavam corretos, nosso conhecimento teórico pode não ser adequado para sermos capazes de responder a todas as questões a respeito do sistema como gostaríamos.



## Capítulo 2

# Conceitos de Dinâmica Não-Linear

A dinâmica não-linear é um ramo da teoria de sistemas dinâmicos que se transformou numa área de intensa pesquisa científica nas últimas décadas, representando uma quebra de paradigma das teorias embasadas puramente no determinismo <sup>1</sup>.

Uma definição simples para *Sistema Dinâmico*, pode ser dada como um sistema de equações que nos permite, em princípio, prever o futuro, conhecido o passado [22]. Um sistema dinâmico consiste de duas partes: as noções de um estado (as informações essenciais a respeito de um sistema) e a dinâmica (uma regra que descreve como o estado evolui no tempo). Um bom exemplo de um sistema dinâmico é encontrado no pêndulo simples. Tudo que é necessário para determinar seu movimento são duas variáveis: posição e velocidade. O estado é representado então por um ponto no plano, cujas coordenadas são posição e velocidade. A segunda lei de Newton provê uma regra, expressa matematicamente como uma equação diferencial, que descreve como o estado evolui no decorrer do tempo.

A evolução temporal de um sistema dinâmico pode ocorrer em tempo contínuo ou em tempo discreto. O primeiro sistema é chamado *fluxo* e o último, um *mapeamento* [15]. *Fluxo*, é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no tempo,  $dx(t)/dt = \mathbf{G}(x, t)$ , onde  $x(t)$  é um vetor D-dimensional e  $\mathbf{G}$  é uma função vetorial D-dimensional de  $x$  e  $t$ . Um exemplo é um pêndulo que move-se continuamente de um estado

---

<sup>1</sup>É importante salientar que sistemas não-lineares também são determinísticos porém, devido à uma característica básica da dinâmica de sistemas caóticos, que faz com que ocorra uma amplificação exponencial de erros de medidas iniciais, a nossa habilidade de efetuar previsões é rapidamente superada. Para sistemas não-caóticos, pequenos erros permanecem limitados e o comportamento é portanto previsível.

para outro e portanto, é descrito por um fluxo contínuo no tempo.

*Mapa.* Um mapa é uma equação da forma  $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$ , com  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^D$  e  $\mathbf{F}$  uma função arbitrária, onde o “tempo”  $t$  assume valores discretos e inteiros [22]. Assim, dado  $\mathbf{x}_0$ , o mapa fornece  $\mathbf{x}_1$ ; dado  $\mathbf{x}_1$ , o mapa fornece  $\mathbf{x}_2$ , e assim por diante. Os mapas podem surgir a partir de sistemas físicos de tempo contínuo na forma de uma superfície de secção de Poincaré. Por exemplo, o número de insetos nascidos cada ano numa área específica, a evolução do gotejar de uma torneira, são mais naturalmente descritos por um mapeamento discreto no tempo. Dessa forma, podemos substituir o estudo de um sistema de equações diferenciais acopladas pelo estudo de relações de recorrência discretas acopladas [27].

As técnicas numéricas aliadas ao uso e disponibilidade de computadores das mais diversas capacidades, aplicadas a novas idéias geométricas, foram as forças básicas que impulsionaram a explosão de pesquisa na área.

A força dessa nova teoria revelou-se através de duas características importantes - ser uma teoria geral e interdisciplinar. Nesse sentido, a pesquisa nos aspectos matemáticos, procura estabelecer princípios básicos que podem ser usados para analisar e compreender sistemas nos mais variados campos, como por exemplo:

- Biologia - estudo de contaminação por vírus ou bactérias;
- Dinâmica de fluidos - problema da origem da turbulência;
- Finanças, economia e modelos gerenciais [57];
- Física da matéria condensada - estruturas periódicas [7];
- Física do plasma - turbulência em plasma [46];
- Fisiologia - dinâmica das redes neurais e do coração [20];
- Mecânica celeste - a estabilidade do sistema solar;
- Meteorologia - previsão numérica do tempo;

- Engenharia Química - cinética de reatores, mistura de fluidos [42];
- Teoria da informação - ruído, correção de erros, redundância [20];

e, mais recentemente, um novo passo foi dado permitindo-nos passar da posição de observadores para o controle de sistemas dinâmicos através do uso de pequenas perturbações [49].

O elemento comum entre estes exemplos é que eles são sistemas não-lineares e podem exibir movimentos muito complicados em termos de evolução temporal. Embora estes sistemas obedeçam leis estritamente deterministas, às vezes eles parecem se comportar de uma forma aleatória ou randômica [21].

## 2.1 Modelagem

Quando tratamos com sistemas não-lineares, não conseguimos obter todas as informações necessárias para uma compreensão global apenas pela análise das equações que modelam o fenômeno físico. Precisamos de ferramentas que nos permitam visualizar toda a história escondida no sistema, não bastando somente uma interpretação local.

Uma idéia central na Dinâmica Não-Linear é a da modelagem, a capacidade de um corpo de idéias servir de ferramenta para a simulação e o estudo de sistemas [57]. H. Simon [50] realizou uma síntese interessante sobre esta questão a partir das possibilidades abertas pela Dinâmica Não-Linear, partindo do princípio de que o mundo é mais complexo que qualquer modelo e que a natureza é capaz de gerar comportamentos e dinâmicas mais ricas que a capacidade de apreensão de conjuntos de equações. Isto porém não é motivo suficiente para inviabilizar o uso de modelos. Devemos ser capazes de extrair dos mesmos as informações essenciais de modo a obter um quadro simplificado porém, que nos permita efetuar inferências razoavelmente seguras.

Quando modelamos um sistema, se estamos interessados no seu comportamento dinâmico, abrem-se três hipóteses:

- Desejamos prever o futuro a partir de condições iniciais, ou
- Saber se existem posições estáveis de equilíbrio, ou
- Verificar os resultados de intervenções involuntárias.

Nesse conjunto de hipóteses, estão colocadas duas questões essenciais na modelagem que são a predição e a prescrição . Elas refletem nosso grande fascínio pela possibilidade de prever o futuro ou nele interferir conscientemente. A Dinâmica Não-Linear não apresenta soluções para o problema da previsão, mas mostra os limites à capacidade de tratamento <sup>2</sup>. No caso da estratégia de intervenção , nem sempre nos interessa a evolução contínua do sistema, e sim as ordens de grandeza relacionadas ao seu macrocomportamento.

As idéias sobre modelagem no aspecto de intervenção , não serão tratadas nesta tese; mas sim a predição , em busca de uma *ordem* subjacente do sistema, e que delinea a estrutura da mesma, através da análise do efeito de mudanças nas condições iniciais e/ou nos parâmetros sobre a evolução do sistema.

A ordem permite que se façam *previsões* [2]. O sonho de todo jogador de roleta é descobrir o padrão de sua ordem. Quem souber isto, poderá prever que número vai dar. É fascinante saber que, por detrás do aparente acaso da roleta, existe uma ordem. Não podemos determinar qual será o resultado da próxima rodada, mas os donos do cassino sabem que eles ganharão, na relação de 38/36. Talvez não possamos determinar a forma de uma certa nuvem, mas a meteorologia pode prever se vai haver muitas nuvens, de que tipo e quais as suas consequências.

A agricultura, a pesca, a navegação , as várias formas de artesanato, desenvolveram-se na medida em que os homens descobriram que existe ordem na natureza. Sementes,

---

<sup>2</sup>Na realidade, a existência de caos afeta o próprio método científico. A abordagem clássica para verificar uma teoria consiste em efetuar previsões e testá-las contra dados experimentais. Se entretanto o fenômeno é caótico, previsões de longa duração são intrinsicamente impossíveis. Assim, o processo de verificar uma teoria, torna-se uma operação muito mais delicada, dependendo mais de propriedades estatísticas e geométricas do que de previsões detalhadas [15].

estações , peixes e bichos, ventos e materiais se comportarão amanhã da forma como se comportaram ontem.

*Este espanto perante a ordem é a primeira inspiração da ciência.* Quando um cientista enuncia uma lei ou uma teoria, ele está contando *como* se processa a ordem, está oferecendo um *modelo da ordem*. Agora ele poderá *prever* como a natureza vai se comportar no futuro.

## 2.2 Sistemas Dinâmicos - Espaço de Fase

Para visualizar a evolução de um sistema dinâmico, W. Hamilton e K. Jacobi, criaram, há mais de 150 anos, um dos conceitos fundamentais para a compreensão da dinâmica não-linear: a noção de espaço de fase [16]. Qualquer sistema que possa ser descrito por uma equação matemática é composto por dois tipos de variáveis: dinâmicas e estáticas. *Variáveis dinâmicas* são quantidades fundamentais que mudam de valor com o tempo, tais como a posição e velocidade de um objeto em movimento. *Variáveis estáticas*, ou parâmetros, são estabelecidas num determinado momento e depois não são alteradas durante a análise de um comportamento dinâmico específico, tal como o comprimento da haste de um pêndulo.

O *Espaço de fase* é representado por um espaço no qual cada eixo coordenado está associado a uma variável dinâmica [16]. Assim, cada grau de liberdade do sistema exige uma dimensão no espaço de fase, ou seja, representa uma coordenada nesse espaço abstrato, de modo que cada ponto desse espaço, contenha informações suficientes para determinar o estado do sistema de forma única no tempo. O movimento de um pêndulo, por exemplo, é completamente determinado por sua posição inicial e velocidade inicial.

A medida em que o sistema evolui no tempo, ele se move de ponto a ponto no espaço de fase, definindo uma trajetória, caminho ou “órbita”. Esta trajetória representa a história do sistema dinâmico e é determinada pela equação de movimento. Desse modo, o espaço de fase torna-se um conceito extremamente útil para se conhecer o comportamento do sistema.

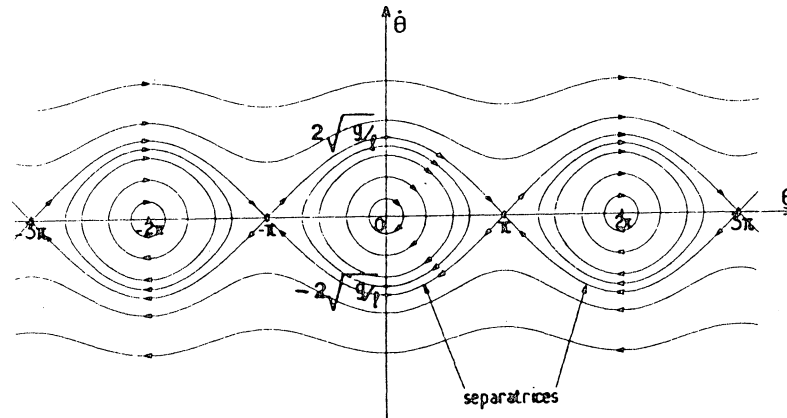


Figura 2.1: Espaço de Fase para o Pêndulo

O movimento de um ponto no espaço de fase nunca pode sofrer auto-intersecção, pois nesse espaço, ele representa o estado do sistema e portanto, nele está incorporada toda a informação a respeito da evolução dinâmica, incluindo sua história futura e não pode haver dois caminhos diferentes partindo de um mesmo ponto no espaço de fase [27].

Em geral as coordenadas do espaço de fase variam de acordo com o contexto; para um sistema mecânico: como o pêndulo acima, poderão ser posição e velocidade (fig. ( 2.1) extraída da ref. [9]), mas para um modelo ecológico poderão ser populações de diferentes espécies.

Sistemas reais são normalmente modelados através de equações não-lineares, para as quais soluções analíticas fechadas não são possíveis de maneira geral. Entretanto, a partir de condições iniciais, podemos integrar numericamente as equações de movimento determinando-se a evolução temporal do sistema.

## 2.3 Atratores

Um aspecto importante em dinâmica não-linear é o estudo do comportamento de longo prazo de sistemas de equações diferenciais ordinárias ou mapas, que são usadas para modelar processos, como por exemplo, oscilações não-lineares, ou a predição da população de mosquitos no próximo ano baseado em parâmetros como a incidência de chuvas neste ano, número de pássaros, áreas alagadas, etc [21].

Um problema básico neste estudo é a dependência das condições iniciais - como explorar as respostas a todas as condições iniciais possíveis? Como avaliar o que pode acontecer na evolução de um sistema e como esta evolução pode ser influenciada pelas condições iniciais? Nesse sentido, o conceito de atrator é um dos princípios fundamentais para compreender a dinâmica do sistema.

Antes de conceituar o atrator devemos conceituar os sistemas que são tipicamente caracterizados pela presença de atratores.

*Sistema dissipativo.* Consideremos, por exemplo, um espaço de fase bidimensional  $(q,p)$ , onde  $q$  denota uma variável de posição e  $p$  uma variável de momentum. Quando, através da equação de movimento, tomamos o conjunto de condições iniciais no tempo  $t = t_0$  e fazemos o sistema evoluir no tempo para o conjunto no tempo  $t = t_1$ , sistemas dissipativos são aqueles em que tipicamente a área, no espaço de fase, diminui no tempo, devido a causas como a presença de atrito ou dissipação mecânica no sistema, de forma que a área do conjunto final será menor do que a área do conjunto inicial gerando em consequência a presença de atratores <sup>3</sup> [22].

Uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  não-autônoma, isto é, que depende explicitamente do tempo, pode ser reduzida a um sistema de  $n + 1$  equações autônomas (independentes do tempo) de primeira ordem (fluxo), da forma:

---

<sup>3</sup>Deve ser observado porém que comportamentos caóticos bem como não-caóticos, podem ocorrer em sistemas conservativos. Nestes, as órbitas não convergem para um atrator mas são confinadas numa superfície de energia [15].

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^T \in \mathfrak{R}^{n+1}$ ;  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  são variáveis dependentes (funções a serem determinadas) e  $\mathbf{F}$  são funções não-lineares dessas variáveis.

Para esse sistema é possível mostrar ([56], [47]) que por meio do teorema de Gauss pode-se representar a variação temporal de um volume  $V(t)$  no espaço de fase, pela relação :

$$V(t) = V(0)e^{\mathcal{N}t} \quad (2.2)$$

onde  $V(0) = V(t=0)$ , e

$$\mathcal{N} = \text{div}\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{X}_i}$$

Caso  $\mathcal{N} = 0$ ,  $V(t) = V(0)$ , e o fluxo é conservativo. Se  $\mathcal{N} < 0$ ,  $V(t) < V(0)$  e o fluxo será dissipativo. Para  $t \rightarrow \infty$ , isto fornece um volume nulo para um atrator.

Para mapeamentos m-dimensionais da forma:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{X}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})^T \in \mathfrak{R}^m$ , a transformação de volumes  $V_n$  no espaço de fase para intervalos discretos de tempo é descrita pela equação ([56], [47], [38]):

$$V_{n+1} = |J|V_n \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o Jacobiano do mapeamento (2.3), a saber:

$$J = \det \mathbf{J}_{ij} \quad \text{onde} \quad \mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{X}_j} \quad (2.5)$$

Se  $|J| = 1$  ou  $|J| < 1$  o mapeamento será conservativo ou dissipativo, respectivamente.



*Atrator.* Se considerarmos um sistema e seu espaço de fase, então as condições iniciais podem convergir para um subconjunto desse espaço (o atrator) a medida que  $t \rightarrow \infty$  [22]. Os sistemas dinâmicos dissipativos tipicamente apresentam um transiente inicial, depois do que o movimento converge para alguma forma de comportamento recorrente de longa duração. A curto prazo portanto, qualquer ponto num espaço de fase pode representar um comportamento possível do sistema (transientes). A longo prazo, os únicos comportamentos possíveis são os próprios atratores <sup>4</sup>.

*Pontos Fixos.* Um pêndulo que se move com atrito, eventualmente irá parar, o que no espaço de fase significa que a órbita aproxima-se de um ponto. O ponto não se move - ele é um *ponto fixo*, e já que ele atrai órbitas próximas, é conhecido como um *atrator*. Se é dado um pequeno empurrão no pêndulo, depois de algum tempo ele retorna ao mesmo atrator de ponto fixo. Este é o atrator mais simples, o *ponto de equilíbrio estacionário* no qual todo movimento acaba por cessar. Qualquer sistema que tende ao repouso com o passar do tempo, pode ser caracterizado por um ponto fixo no espaço de fase. Este é um exemplo de um fenômeno muito geral, onde perdas devido ao atrito ou viscosidade, por exemplo, fazem com que as órbitas sejam atraídas para uma região menor do espaço de fase com dimensão pequena.

*Atrator periódico.* Alguns sistemas não tendem ao repouso mas pelo contrário, efetuam periodicamente ciclos através de uma sequência de estados. Para um oscilador periodicamente forçado, o conjunto limite é uma curva fechada no espaço de fase, dita *ciclo limite* [22]. Um ciclo limite estável pode ser imaginado como um estado de oscilação em equilíbrio de um sistema não-linear, exatamente como um ponto fixo estável representa um equilíbrio estacionário [38].

Em sistemas forçados em ressonância, onde o sistema se estabiliza numa vibração na frequência do forçamento, se ocorre uma pequena perturbação, os transientes decairão lentamente e a oscilação fundamental estável será restabelecida. Mas efetuada uma per-

---

<sup>4</sup>Uma definição matemática de atrator pode ser encontrada em [38].

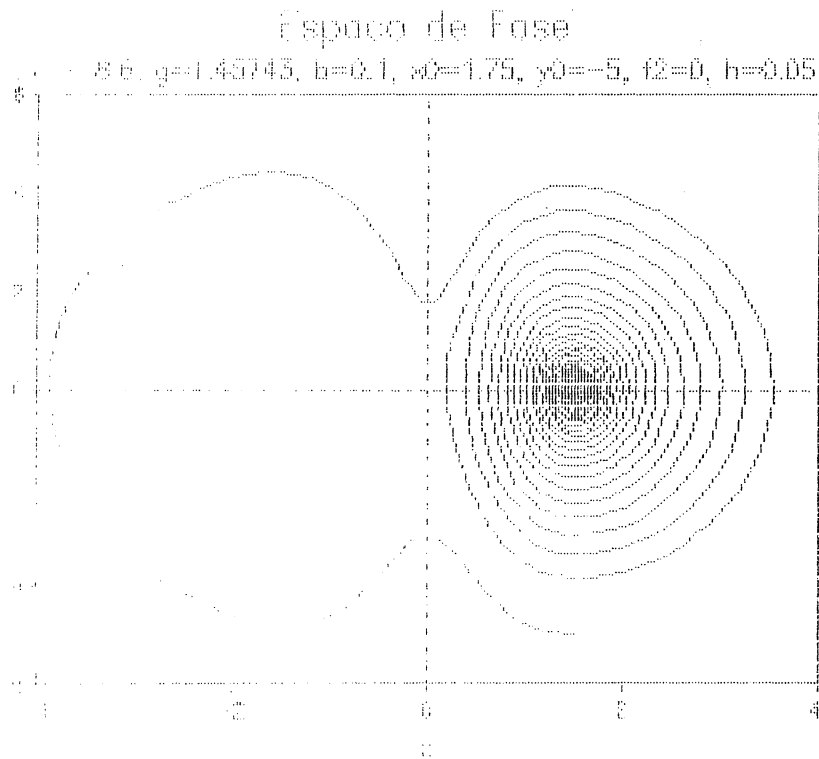


Figura 2.2: Atrator de Ponto Fixo

turbação maior, um estado estacionário estável completamente novo poderá ser observado. Condições iniciais diferentes de um dado sistema podem assim conduzir a estados finais alternativos, com múltiplos atratores coexistindo no retrato de fase de um sistema dinâmico simples num estado de competição [54].

Sistemas familiares que apresentam atratores de ciclo limite, são o relógio de pêndulo, no qual a energia perdida devido ao atrito é repostada por um sistema de pesos ou molas, e os ritmos cardíacos.

Oscilações compostas independentes, também conhecidas como movimento quase-periódico, observadas por exemplo em osciladores elétricos forçados, correspondem a um atrator tipo *torus*, onde duas ou mais frequências determinam o comportamento do sistema periódico [15].

*Atrator estranho.*<sup>5</sup> Nas definições anteriores, os atratores eram um ponto ( que é um

---

<sup>5</sup>Denominação dada por D. Ruelle e F. Takens [20].

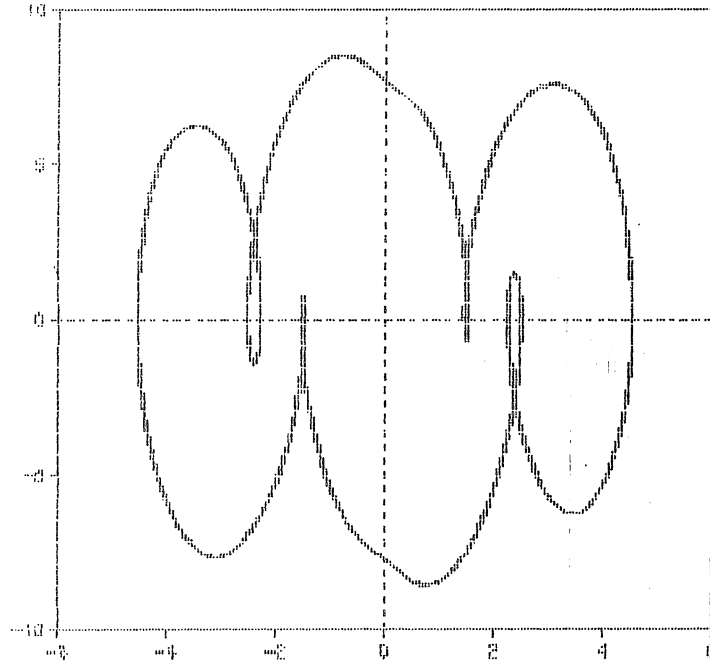


Figura 2.3: Atrator Periódico

conjunto de dimensão zero), e uma curva fechada ( que é um conjunto de dimensão um). Para muitos outros atratores o conjunto atrator pode ser muito mais irregular e, de fato, podem ter uma dimensão que não é um número inteiro. Tais conjuntos têm sido chamados *fractais*<sup>6</sup> e, quando eles são atratores, eles são chamados atratores estranhos [22].

Uma característica frequente na dinâmica do atrator estranho é a extrema sensibilidade do sistema às condições iniciais, o famoso efeito “Borboleta”<sup>7</sup> da Dinâmica Não-Linear.

Devido a enorme sensibilidade às condições iniciais, previsões de longo tempo a respeito de um sistema caótico são impossíveis em termos práticos porque: (a) não conhecemos as condições iniciais com precisão infinita, e (b) não podemos manusear uma série infinita de

---

<sup>6</sup>B. Mandelbrot, criou a palavra fractal em 1975 para denominar as formas, dimensões e geometrias irregulares, caracterizando uma classe de objetos que surgiram em várias partes da matemática e suas aplicações . Duas das propriedades principais que tais objetos possuem são auto-similaridade e dimensão fracionária [20], [43].

<sup>7</sup>E. Lorenz, meteorologista do MIT, descobriu este efeito em 1961, no seu trabalho com simulações , em computadores, de modelos de previsão do tempo, comprovando a enorme sensibilidade de sistemas não-lineares às condições iniciais, denominado de “efeito borboleta” devido à forma do atrator observado [20].

dígitos em nossos cálculos [38].

Pode-se calcular quantidades conhecidas como *expoentes de Lyapunov* para um sistema dinâmico. O expoente de Lyapunov é um número que oferece uma medida das características topológicas que correspondem a conceitos como imprevisibilidade. Os expoentes de Lyapunov num sistema, proporcionam uma maneira de medir os efeitos conflitantes de distensão, contração e dobragem no espaço de fase de um atrator. Um expoente positivo significa distensão - pontos inicialmente muito próximos se distanciam exponencialmente com o passar do tempo. Pelo contrário, um expoente negativo significa contração. Para um atrator de ponto fixo, todos os expoentes de Lyapunov são negativos, já que o sentido de contração é “para dentro”, no sentido do regime estacionário final. Um atrator na forma de uma órbita periódica tem um expoente nulo e os outros expoentes negativos. Um atrator estranho tem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo [20]. Métodos de cálculo de expoente de Lyapunov para mapas e fluxos podem ser encontrados por exemplo em [18] e [38].

## 2.4 Mapa de Poincaré

Consideremos um sistema dinâmico autônomo definido por  $N$  equações diferenciais simultâneas:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_N), \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1, \dots, x_N),\end{aligned}\tag{2.6}$$

Uma solução pode ser representada por uma curva, ou *trajetória*, num espaço de fase  $N$ -dimensional  $(x_1, \dots, x_N)$ . Uma técnica frequentemente usada consiste em considerar sucessivas interseções da trajetória com uma *superfície de seção*  $\Sigma$ , a qual em geral é um subconjunto de dimensão  $(N - 1)$  do espaço de fase, definido por uma equação da forma

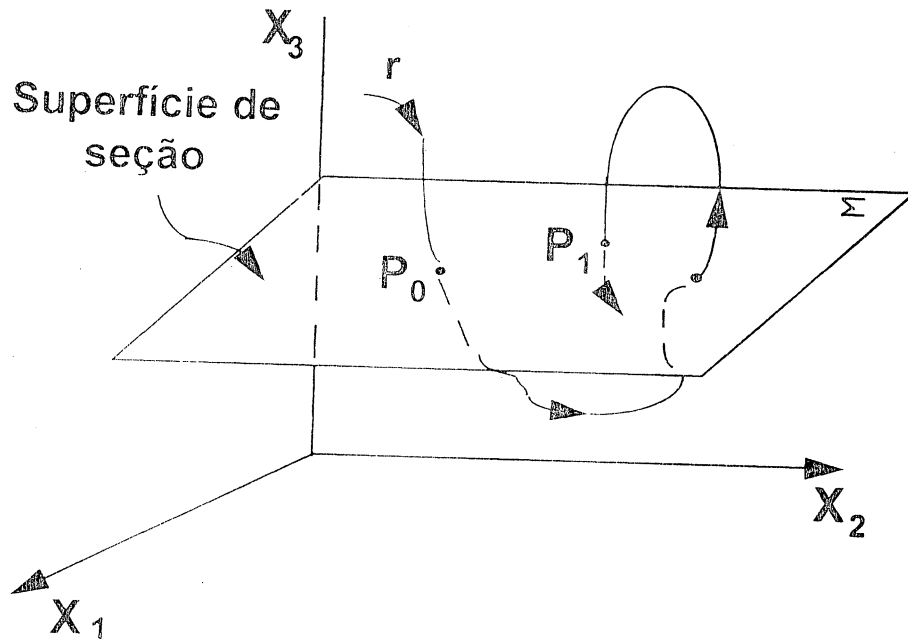


Figura 2.4: Seção de Poincaré

$$S(x_1, \dots, x_N) = 0. \quad (2.7)$$

O sistema dinâmico ( 2.6) define então um mapeamento de  $\Sigma$  nela mesma, conhecido como *mapa de Poincaré* [26]. O estudo deste mapeamento é frequentemente mais simples e mais esclarecedor do que o estudo das próprias trajetórias.

Para exemplificar, num espaço de fase de três dimensões, a técnica consiste em considerar os pontos de interseção da trajetória com um plano, conforme apresentado na figura ( 2.4). Para fins ilustrativos, foi tomado o plano  $\Sigma$  definido por  $x_3 = \text{constante}$ , e foram assinalados os pontos de interseção correspondentes a uma dada direção de evolução ( $\dot{x}_3 < 0$ ). A altura  $h$  do plano é escolhida de modo que a trajetória  $r$  intersepta  $\Sigma$  em  $P_0, P_1, P_2, \dots$ , onde presume-se que a dinâmica é tal que  $r$  continuamente cruza de um lado de  $\Sigma$  para o outro [9].

A superfície  $\Sigma$  pode ser em princípio qualquer plano, porém uma escolha apropriada

produz seções que são mais facilmente analisadas. Começando com uma condição inicial, obtemos um conjunto de pontos que compreendem a seção de Poincaré num gráfico em duas dimensões. A transformação que leva de um ponto ao próximo é um mapeamento contínuo  $T$  de  $\Sigma$  nela mesma, chamado de mapa de Poincaré como já foi citado, dado por:

$$P_{k+1} = T(P_k) = T(T(P_{k-1})) = T^2(P_{k-1}) = \dots = T^{k+1}(P_0) \quad (2.8)$$

Uma vez que a solução de ( 2.6) é única, o ponto  $P_0$  determina completamente  $P_1$ , o qual por sua vez determina  $P_2$ , e assim por diante. Se, inversamente,  $P_1$  determina unicamente  $P_0$  invertendo o sinal de  $t$  em ( 2.6), então  $T$  é um mapeamento *inversível* de  $\Sigma$  nela mesma.

Observamos que a seção de Poincaré substitui a evolução temporal contínua de ( 2.6) com um mapeamento discreto no tempo dado por ( 2.8). Além de casos excepcionais, o intervalo de tempo entre dois pontos sucessivos não é constante.

Um dos modos mais simples para obter uma seção de Poincaré é medir, em algum intervalo regular, a posição da trajetória do sistema no espaço de fase, tratando o tempo como uma variável extra no referido espaço (de um sistema de equações diferenciais não-autônomas) [56]. Nesta situação, uma variante desta técnica, conhecida como *mapeamento estroboscópico*, que consiste basicamente em “fotografar” o estado do sistema em instantes regulares de tempo, particularmente útil em sistemas periodicamente perturbados onde podemos usar o período devido à frequência de forçamento para obter esse “instantâneo”, foi utilizada nesta tese. Nele, as medidas são efetuadas no final de cada ciclo do sinal de forçamento.

Este mapeamento, ilustrado na figura ( 2.5), pode ser visualizado através de seções de Poincaré, cada qual para um valor de  $t = \text{constante}$ . O mapeamento definitivo será a projeção dos pontos de interseção sobre um plano qualquer (como  $t = 0$ ).

Esta técnica produz um mapa no qual uma órbita de período um aparece como um ponto, uma órbita de período dois aparece como dois pontos e assim por diante.

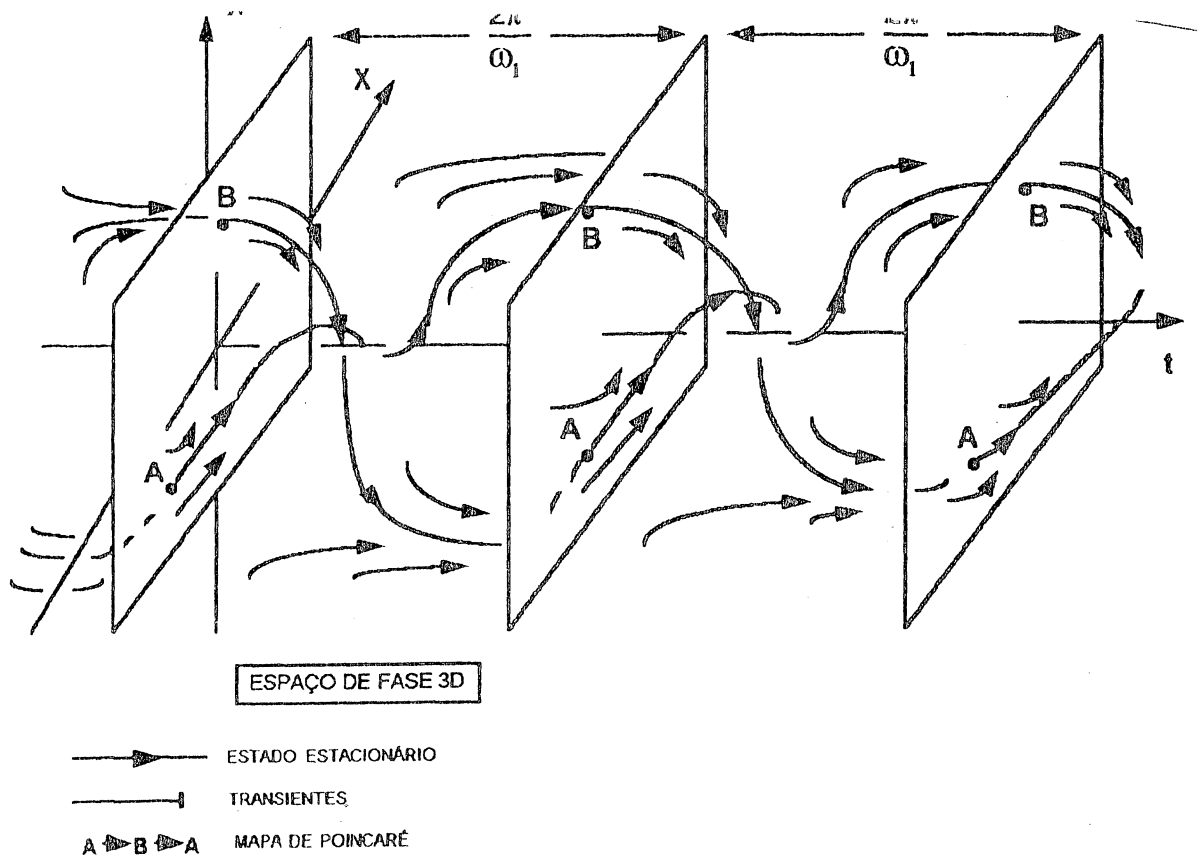


Figura 2.5: Mapeamento Estroboscópico

É interessante enfatizar que a seção de Poincaré e o mapa possuem o mesmo tipo de propriedades topológicas que o fluxo que as originou. Por exemplo, se o fluxo ( 2.6) é dissipativo, de forma que os volumes no espaço de fase são contraídos, então  $T$  contrai áreas no plano  $\Sigma$ . Reciprocamente,  $T$  conserva áreas se o fluxo ( 2.6) é conservativo ou Hamiltoniano. De maneira similar, se o fluxo tem um atrator, suas características estruturais são também encontradas na seção de Poincaré.

O método de seções de Poincaré simplifica o estudo de fluxos contínuos por três razões. Primeiro, passamos de um fluxo em  $\mathcal{R}^3$ , por exemplo, para um mapeamento no plano, reduzindo por um o número de coordenadas. Em segundo lugar, o tempo é discretizado e as equações diferenciais são substituídas por equações a diferenças, definindo o mapa de Poincaré  $P \mapsto T(P)$ . Estas equações algébricas são consideravelmente mais fáceis de resolver. Finalmente, a quantidade de dados a serem manipulados é grandemente reduzida, já que quase todos os pontos intermediários da trajetória

podem ser ignorados.

Na maioria dos casos o mapa de Poincaré não é dado por equações explícitas; ele é definido implicitamente por ( 2.6) e ( 2.7). A fim de encontrar a imagem de um ponto  $P$  de  $\Sigma$ , devemos seguir a trajetória que tem origem naquele ponto até que ela intersepte  $\Sigma$  novamente. Nos confrontaremos então com dois problemas práticos: (i) integrar numericamente as equações diferenciais ( 2.6) da trajetória; (ii) detectar e computar suas interseções com  $\Sigma$  definida por ( 2.7).

O primeiro problema tem sido bastante estudado e pode ser considerado como completamente resolvido: atualmente podemos escolher entre um número de algoritmos de integração excelentes, com os quais uma trajetória pode ser seguida com alta precisão. O segundo problema, entretanto, exige uma parcela maior de atenção pois, é frequentemente neste estágio que os maiores erros computacionais ocorrem <sup>8</sup>.

## 2.5 Espectro de Potência

Quando, como um resultado de um experimento ou simulação numérica, obtemos um sinal dependente do tempo  $x(t)$  - denominado série temporal<sup>8</sup> - uma das tarefas essenciais é determinar o tipo de evolução que o produziu [9]. O nosso propósito é condensar a informação numa maneira que enfatize as características mais significantes que caracterizem o regime dinâmico. Estamos trabalhando com uma oscilação , complicada na forma, mas com um período perfeitamente definido? Estamos trabalhando com superposição de oscilações , que diferem em amplitude, período, razão de harmônicos, etc. (regime quase-periódico), ou num regime caótico?

Os sinais possuem dois parâmetros básicos que são a *frequência* e a *amplitude* [3]. A frequência refere-se ao número de oscilações completas do sinal por segundo, medida em hertz (i.e., ciclos por segundo). Frequência ( $\omega$ ) é uma função inversa do tempo ( $T$ ) entre

---

<sup>8</sup>Existe um método alternativo proposto por Hénon para calcular um mapa de Poincaré, que pode ser encontrado nas referências [6] e [26].



picos fundamentais ou vales num sinal:  $\omega = \frac{1}{T}$ . O intervalo de tempo ( $T$ ) é chamado *período*. A amplitude é uma medida da intensidade do sinal. É medida em diferentes unidades dependendo da aplicação. Para sinais de áudio, por exemplo, a medida é dada em decibéis.

Pode-se representar e visualizar sinais de várias maneiras. As duas representações mais comuns são no domínio do tempo e da frequência. No domínio do tempo representa-se a amplitude do sinal no eixo vertical e tempo no eixo horizontal. Frequentemente necessita-se analisar o conteúdo de frequência de um sinal. Para isto, devemos ter uma representação no domínio da frequência do sinal. Este tipo de representação tem a amplitude no eixo vertical e frequência no eixo horizontal.

O processo de passagem do domínio do tempo para o domínio da frequência é realizado por *transformadas de Fourier*. O método da análise espectral de um sinal, constitui-se atualmente num poderoso instrumento de avaliação de sua estrutura [48]. A essência da análise de Fourier é aplicá-la a um sinal complexo, com o objetivo de separar as ondas ou sinais espectrais componentes, que possuam diferentes frequências.

*Transformada Discreta de Fourier* [9], [18], [38] e [13]. A transformada de Fourier pode ser aplicada a funções contínuas bem como a sequências discretas, com somas substituindo integrais. O rápido desenvolvimento de métodos computacionais, fez com que um sinal  $x(t)$  uma função contínua no tempo - fosse muito frequentemente medido por amostragem ou discretização. Por essa razão, um experimento geralmente fornece uma sequência discreta de números reais  $x_j$  ( $j \in \mathbf{Z}$ ) regularmente espaçados em intervalos de tempo  $\Delta t$  (cf. fig. 2.6), isto é, o sinal experimental (função contínua) é substituído por uma série de pontos.

Na prática, esta sequência de números é necessariamente finita, contendo  $n$  valores para uma duração total de tempo  $t_{max} = n \cdot \Delta t$ . A escolha de  $n$  e  $\Delta t$  é normalmente determinada por considerações de ordem prática, tais como a duração aceitável do experimento, e a capacidade para armazenar e processar as medidas. A separação  $\Delta t$  dos pontos amostrados

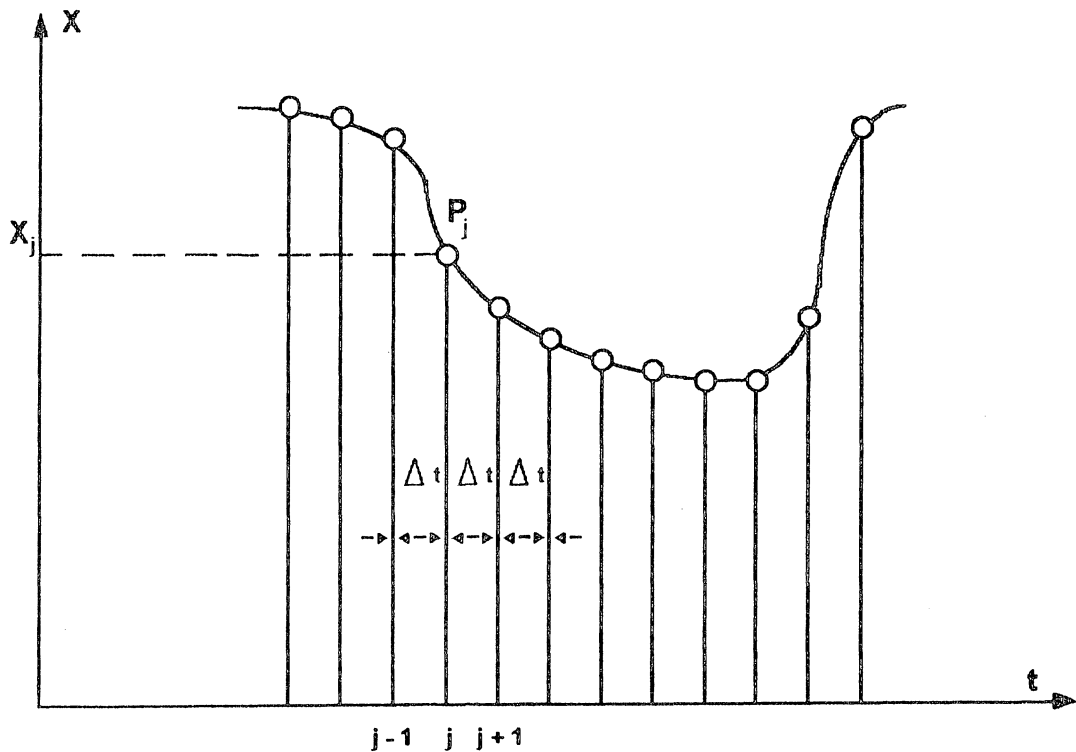


Figura 2.6: Discretização de uma função contínua

determina a componente de frequência máxima da série temporal que poderá ser calculada pela transformada de Fourier, e o período total de tempo  $n\Delta t$  determina a frequência mínima.

Definimos a transformada de Fourier de uma série temporal discreta  $x_j$  como sendo a operação que cria uma série discreta correspondente  $\hat{x}_k$ , tal que:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j \exp\left(-i \frac{2\pi j k}{n}\right) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.9)$$

Nesta tese, foi utilizado para cálculo da transformada de Fourier o algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*)<sup>9</sup>.

*Espectro de Potência.* O espectro de potência de um sinal escalar  $x_j$  mede a quantidade de energia por unidade de tempo (isto é, a potência) contida no sinal como uma função da

<sup>9</sup>Este algoritmo foi desenvolvido em 1965 por Cooley e Tukey, e revolucionou muitos campos onde o volume de cálculo era um impedimento ao progresso.

frequência  $\omega$ .

O espectro de potência  $S(\omega)$  é definido como o módulo quadrado de sua amplitude de Fourier por unidade de tempo:

$$S_k(\omega) = |\hat{x}_k|^2 \quad (2.10)$$

O gráfico representando  $|\hat{x}_k|^2$  como uma função da frequência  $\omega(\omega = k.\Delta\omega)$  é também chamado de espectro de potência.

O tamanho do passo  $\omega = 1/(n.\Delta t)$  ao longo da abscissa corresponde à resolução espectral. Para aumentar a resolução, o produto  $n.\Delta t$  deve ser incrementado. A frequência mais alta do espectro é  $\omega_{max} = \frac{1}{\Delta t}$ . Para ampliar o domínio da frequência explorada,  $\Delta t$  deve ser reduzido. Em qualquer caso, devido à relação :

$$|\hat{x}_k|^2 = |\hat{x}_{n-k}|^2 \quad (2.11)$$

o espectro é simétrico com relação a linha vertical  $\omega = \frac{1}{2}\omega_{max}$ . Conseqüentemente, o domínio de frequência útil efetivo, que contém informação não-redundante, se estende somente de 0 a  $\frac{1}{2\Delta t}$ , de acordo com o teorema de Nyquist <sup>10</sup>.

Para ser completamente rigoroso, o espectro é composto de uma seqüência de “passos”, cada um de largura  $\Delta\omega$ . Na prática, o que se faz frequentemente é apenas desenhar um ou mais segmentos de linhas verticais de alturas  $|\hat{x}_k|^2$  em  $\omega = k.\Delta\omega$ .

Existe um relacionamento claro entre a natureza periódica, quase-periódica, ou aperiódica (caótica) de um sinal e a forma de seu espectro de potência <sup>11</sup>. Um sistema

---

<sup>10</sup>Uma consideração importante no processamento de sinais, diz respeito à taxa de amostragem. Se o sinal analisado é limitado por banda, isto é, se as frequências do sinal estão abaixo de uma frequência  $\omega$ , o sinal pode ser reconstruído do sinal amostrado desde que o sinal analisado seja amostrado pelo menos  $2\omega$  vezes por segundo. A frequência  $\omega$  é chamada de *frequência de Nyquist*. Assim, um sinal com uma largura de banda de 20 kHz, deve ser amostrado pelo menos a 40 kHz para ser adequadamente reconstruído evitando o fenômeno de “aliasing”, que faz com que frequências do sinal analisado acima da frequência de Nyquist gerem frequências indesejáveis, frequências que formam um espelho em torno da frequência de Nyquist [3].

<sup>11</sup>As fig. 2.7, 2.8 e 2.9. foram extraídas da ref. [9].

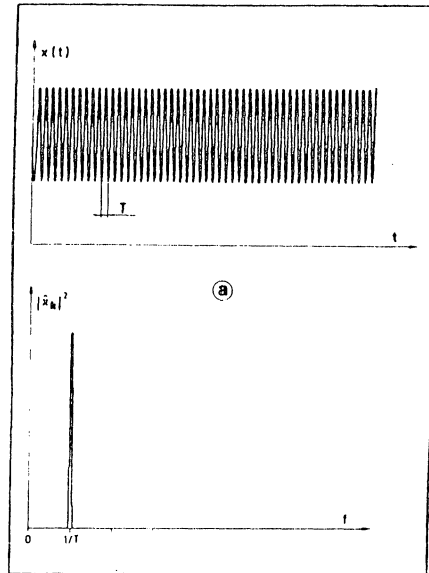


Figura 2.7: Espectro de potência de um sinal periódico

periódico, com frequência  $\omega$ , tem funções delta de Dirac em  $\omega$  e seus harmônicos  $2\omega, 3\omega, \dots$  (cf. fig. 2.7). Um sistema quase-periódico com frequências básicas  $\omega_1, \dots, \omega_k$  tem funções delta de Dirac nestas posições e também em todas as combinações lineares com coeficientes inteiros (cf. fig. 2.8). Um sinal caótico não tem um espectro de Fourier puramente discreto, mas tem uma banda extensa, um componente contínuo em seu espectro (cf. fig. 2.9). Em espectros de potência reais, as funções delta de Dirac não são infinitamente agudas, elas tem pelo menos uma “largura experimental”  $2\pi/T$ , onde  $T$  é o comprimento da série temporal usada [30].

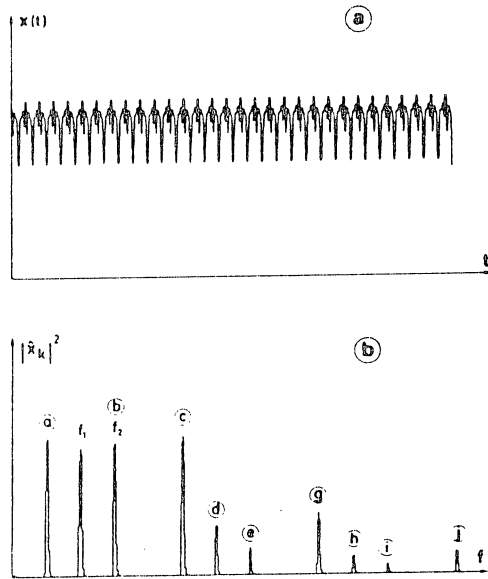


Figura 2.8: Espectro de potência de um sinal quase-periódico

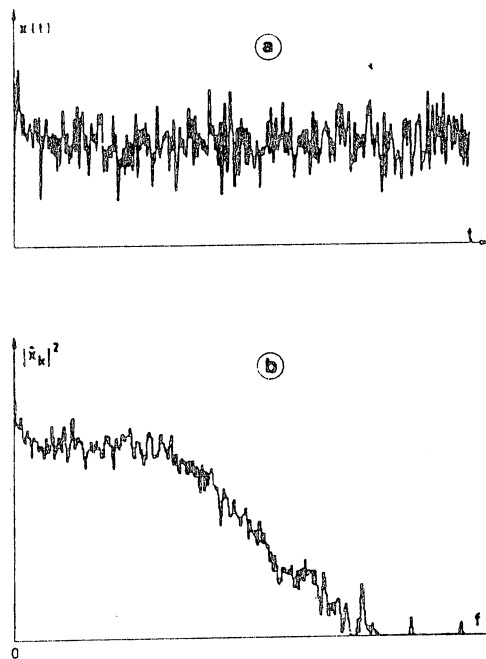


Figura 2.9: Espectro de potência de um sinal aperiódico

## Capítulo 3

# Osciladores Não-Lineares

Neste capítulo apresentaremos algumas características relevantes no estudo do comportamento de osciladores não-lineares, considerando-se a importância do assunto, uma vez que as equações que descrevem os sistemas físicos reais são em geral lineares apenas em primeira aproximação .

Serão utilizadas algumas técnicas qualitativas da teoria de sistemas dinâmicos, tais como a análise do regime no espaço de fase e o uso de mapa de Poincaré, para modelar e explorar a evolução gerada pela equação de movimento associada ao potencial em questão.

### 3.1 Características Gerais

A equação Newtoniana para um oscilador não-linear unidimensional é  $F(x) = m\ddot{x}$ , onde consideramos a força  $F(x)$ , dependente da posição , como sendo obtida de uma função potencial  $V(x)$ ; tal que  $F(x) = -dV(x)/dx$ . Normalizando o oscilador em termos de massa, isto é, considerando um sistema de unidades no qual a massa tem valor igual à unidade ( $m = 1$ ), temos:

$$\ddot{x} + \frac{d}{dx}V(x) = 0 \quad (3.1)$$

Considerando-se uma função potencial suave  $V(x)$  (cf. fig. 3.1), podemos expandi-la

---

<sup>1</sup>Devemos entender esta modelagem de modo restrito uma vez que não efetuaremos uma análise exaustiva do sistema, dependência das condições iniciais e dependência de parâmetros de controle.

em série de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio estável  $\bar{x}$ , na forma:

$$V(x) = V(\bar{x}) + (x - \bar{x})V'(\bar{x}) + \frac{1}{2!}(x - \bar{x})^2V''(\bar{x}) + \dots$$

O primeiro termo da série, o potencial no ponto de mínimo, é uma constante podendo ser considerado simplesmente como um fator de escala. O segundo termo, com a derivada do potencial no ponto de mínimo, é identicamente nulo. O próximo é o primeiro termo que varia com a distância a ser considerado como parte representativa do potencial. Sendo  $V''(\bar{x}) = \text{constante} = \omega_0^2$ , podemos reescrever a função potencial nas vizinhanças do ponto de mínimo como sendo aproximadamente:

$$V(x) \simeq \frac{\omega_0^2(x - \bar{x})^2}{2}$$

Este potencial representa um oscilador harmônico simples, cuja derivada constitui uma força linear. Considerando-se o ponto de equilíbrio estável situado em  $\bar{x} = 0$ , a equação de movimento correspondente será linear:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Podemos adicionar à força dependente do potencial na equação ( 3.1) uma força dissipativa dependente da velocidade:

$$F_{at}(x) = -b\dot{x} \tag{3.2}$$

onde  $b$  é um coeficiente de atrito. Uma consequência do atrito, é a de que o oscilador em movimento perderá gradativamente velocidade até uma parada completa, a menos que seja injetada energia no sistema. Este (des)equilíbrio de forças provoca o surgimento de atratores em sistemas dissipativos.

Considerando-se  $b > 0$  e incluindo ( 3.2) na força dependente do potencial, temos:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \frac{d}{dx}V(x) = 0 \tag{3.3}$$

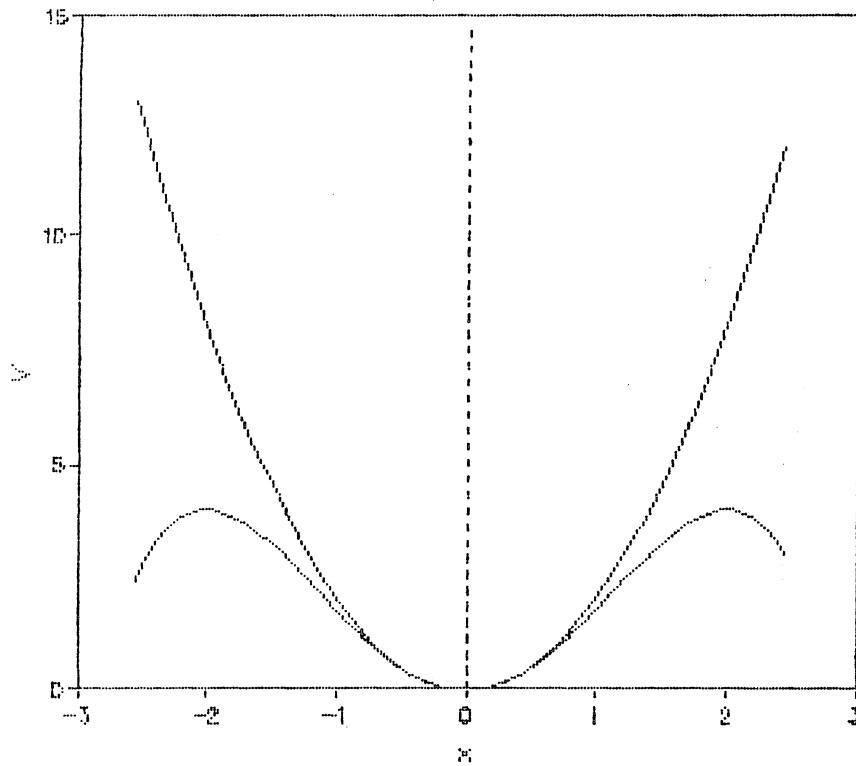


Figura 3.1: Aproximação Harmônica para um Potencial Genérico

Uma força periódica imposta externamente é modelada incluindo-se um termo  $F_{ext}(x, t)$ , de forma que:

$$F(x) = -\frac{d}{dx}V(x) + F_{at}(x) + F_{ext}(x, t)$$

onde o forçamento pode ser:

- Harmônico, se:

$$F_{ext}(x, t) = f_0(x) \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

onde  $f_0$  é a amplitude e  $\omega$  a frequência da força externa.

- Impulsivo, se:

$$F_{ext}(x, t) = f_0(x) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(j - 2\pi\omega t) \quad (3.5)$$



onde  $\delta(j - 2\pi\omega t)$  é uma função delta de Dirac.

Neste trabalho consideramos uma força do tipo ( 3.4), independente da posição ( $F_{ext} = F_{ext}(t)$ ), e periódica no tempo com período  $T$ , isto é:

$$F_{ext}(t + T) = F_{ext}(t)$$

onde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  é a frequência de forçamento. A força externa pode induzir o sistema a um estado estacionário, onde o comportamento dinâmico do sistema não se altera com o tempo — um atrator no espaço de fase. Como este forçamento é periódico, fica automaticamente definida uma frequência natural na qual podemos “fotografar” e congelar o estado do sistema em intervalos regulares. Desta forma, através deste mapeamento estroboscópico, podemos analisar o nosso sistema contínuo numa série de instantes, transformando uma órbita contínua numa órbita discreta [27], como vimos no capítulo anterior.

Nestas condições, como trataremos apenas dos forçamentos harmônicos, a ( 3.3) fica:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \frac{d}{dx}V(x) = f_0 \cos(\omega t) \quad (3.6)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de 2.<sup>a</sup> ordem, não-autônoma (depende explicitamente do tempo) que pode ser transformada num sistema de três equações de 1.<sup>a</sup> ordem, autônomas, reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -by - V'(x) + f_0 \cos(\omega z) \\ \dot{z} &= 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o primo indica que o potencial  $V(x)$  foi diferenciado em relação a  $x$ .

Algumas propriedades de equações diferenciais não-lineares [28], que devem ser mencionadas no presente contexto são:

- A frequência das oscilações não-forçadas pode depender das condições iniciais.
- A estabilidade pode depender das condições iniciais.
- A amplitude das oscilações periódicas pode ser independente das condições iniciais.
- Podem aparecer sub ou super-harmônicos na solução estacionária de uma equação não-linear forçada.

Isto revela que a presença de um termo não-linear numa equação diferencial, pode nos gerar características muito diferentes na sua solução, do que esperaríamos encontrar em equações lineares, o que nos induz a tomar mais cuidado nas aproximações lineares de equações diferenciais não-lineares.

## 3.2 O Potencial Estudado neste Trabalho

Neste trabalho, estudaremos uma função potencial do tipo:

$$V(x) = x^2 + \frac{\lambda x^2}{1 + gx^2} \quad (3.8)$$

Este potencial é de interesse em vários problemas de Física Quântica [8], dentre eles:

- Física de laser - como redução da equação de Fokker-Planck de um laser “single-mode” sob condições adequadas [45].
- Física de partículas elementares - como uma equação de Schrödinger unidimensional associada com uma teoria de campo zero-dimensional [44].
- Física nuclear - possibilitando reproduzir seqüências de níveis de energia no modelo de camadas do núcleo [55].

Um interesse mais fundamental no estudo deste potencial, é que podem-se encontrar autofunções de energia analíticas e exatas (isto é, a equação de Schrödinger pode ser resolvida para este potencial), como encontrado em vários artigos da literatura [8], [11],

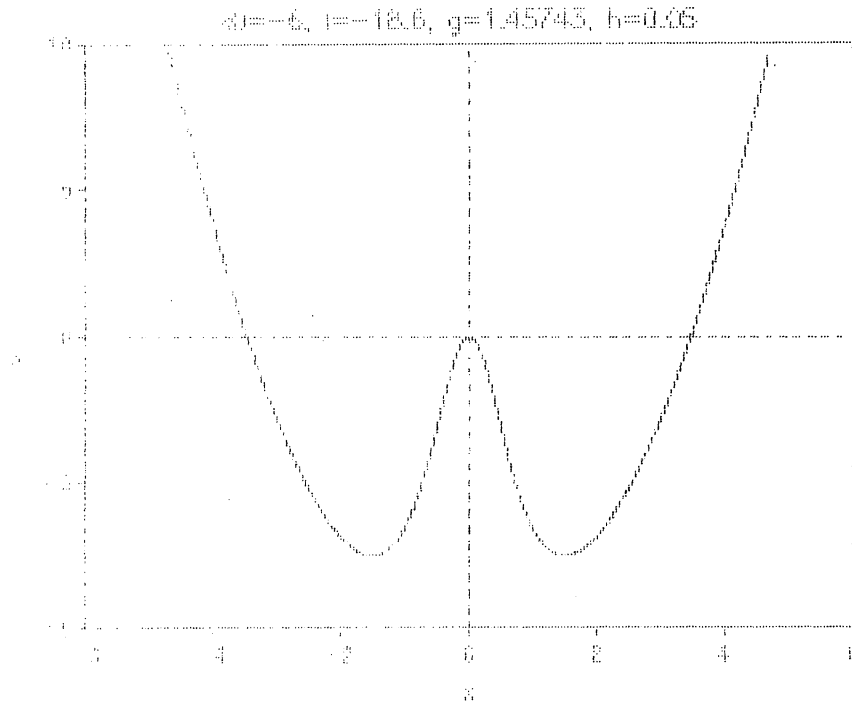


Figura 3.2: Potencial detalhado para os valores  $\lambda = -18,6$  e  $g = 1,45743$

[10], [19], [31], [33]. Em particular, esta propriedade é verificada para a seguinte relação entre os coeficientes  $\lambda$  e  $g$ :

$$\lambda = -6g^2 - 4g \quad (3.9)$$

Um esboço deste potencial é dado na figura (3.2), no caso  $\lambda < 0$  e  $g > 0$ . Elas mostram que (3.8) pertence a uma classe de potenciais bem conhecida denominada *Potenciais Bistáveis*, porque possui dois mínimos estáveis. Este tipo de potencial é bastante estudado na Mecânica Quântica, tanto em problemas de modelos moleculares como de tunelamento quântico [8].

A força dependente do potencial (3.8) é, a menos do sinal negativo:

$$\frac{dV}{dx} = 2x + \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} \quad (3.10)$$

Esta força é *simétrica* em relação à posição de equilíbrio ( $x = 0$ ), considerando seu

afastamento da linearidade [35]. Isto significa, que a magnitude da força exercida sobre uma partícula, é a mesma em  $x$  e em  $-x$ , sendo a direção da força oposta nos dois casos. Outro fato relevante, é que devido a  $\lambda < 0$ , a força dada pela expressão ( 3.10) é menor do que a aproximação linear, isto é, do que o termo linear sozinho, e portanto o sistema é dito *macio* (“soft spring”).

A equação de movimento do oscilador não-linear com forçamento e atrito, é escrita em função da substituição de ( 3.10) em ( 3.6), na forma:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + 2x + \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} = f_0 \cos(\omega t) \quad (3.11)$$

Podemos escrever a equação ( 3.11) na forma de um fluxo tri-dimensional autônomo ( 3.7):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -by - 2x - \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} + f_0 \cos(\omega z) \\ \dot{z} &= 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

O potencial ( 3.8) pode ser expresso na forma de uma expansão em série [31], considerando-se  $gx^2 < 1$  ( $g > 0$ ), o que possibilitará o emprego dos métodos de aproximação nos capítulos 4 e 5.

Aplicando-se a expansão em série [17]:

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1]$$

na equação ( 3.8), obtemos:

$$V(x) = (1 + \lambda)x^2 + \lambda \left[ -gx^4 + g^2x^6 - g^3x^8 + \dots \right]$$

ou expressa como um somatório:

$$V(x) = (1 + \lambda)x^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (-g)^i \lambda x^{2(i+1)}$$

A expressão correspondente para a força, é dada por:

$$F(x) = -2(1 + \lambda)x + 4\lambda g x^3 - 6\lambda g^2 x^5 + 8\lambda g^3 x^7 - \dots$$

Considerando, agora, o sistema de equações ( 3.12) livre ( $F_{ext} = 0$ ), obtemos um novo conjunto de equações :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & (3.13) \\ \dot{y} &= -by - 2x - \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} \end{aligned}$$

Os pontos fixos de período-1 do sistema acima,  $(x^*, y^*)$ , são obtidos pelas seguintes condições [28]:

$$\dot{x}^* = 0 \quad \dot{y}^* = 0 \quad (3.14)$$

Então, utilizando-se ( 3.13):

$$y^* = 0 \quad (3.15)$$

e da segunda equação obtemos:

$$-by^* - 2x^* - \frac{2\lambda x^*}{(1 + gx^{*2})^2} = 0$$

e considerando-se ( 3.15), obtemos:

$$x^*[g^2 x^{*4} + 2gx^{*2} + (\lambda + 1)] = 0 \quad (3.16)$$

que nos fornece as seguintes raízes:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= 0 \\
x_2^* &= +\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{-\lambda}}{g}} & x_4^* &= +\sqrt{\frac{-1 - \sqrt{-\lambda}}{g}} \\
x_3^* &= -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{-\lambda}}{g}} & x_5^* &= -\sqrt{\frac{-1 - \sqrt{-\lambda}}{g}}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

No que segue, iremos supor que  $\lambda < 0$ , considerando-se a relação ( 3.9) e que  $g > 0$ . Neste caso, os pontos  $x_4^*$  e  $x_5^*$  são imaginários puros e devem ser descartados. O ponto  $x_1^*$  representa a posição de equilíbrio (instável) na origem (cf. fig. 3.2), enquanto  $x_2^*$  e  $x_3^* = -x_2^*$  são as posições de equilíbrio do potencial que podem ser estáveis ou não em função dos parâmetros escolhidos. No apêndice A, faremos uma discussão mais aprofundada da estabilidade de pontos de equilíbrio, a partir do critério de Poincaré.

Uma relação interessante para o valor de  $\lambda$  nos pontos de equilíbrio  $x_2^*$  e  $x_3^*$ , elevando-se ao quadrado uma das expressões de ( 3.17):

$$|\lambda| = (1 + gx^{*2})^2 \tag{3.18}$$

### 3.3 Lagrangiana e Hamiltoniana do Oscilador

Steeb e Kunick [52] mostram que uma classe de sistemas dinâmicos dissipativos (osciladores harmônicos não-lineares), com comportamento caótico e de ciclo limite, pode ser derivada de uma Lagrangiana (ver também [5]).

Consideremos a Lagrangiana abaixo, com potencial dependente do tempo:

$$L = e^{bt} \left[ \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x, t) \right] \tag{3.19}$$

Podemos determinar a equação do movimento através das equações de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas que especificam o sistema mecânico que tem a função potencial  $V(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ .

Substituindo ( 3.19) em ( 3.20), considerando  $q_1 = x$ , temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

$$e^{bt} \left[ -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right] - \frac{d}{dt} (e^{bt} \dot{x}) = 0$$

efetuando-se a derivada e reescrevendo a equação , obtemos:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

que é a equação de movimento desejada.

No nosso caso, para um potencial dado por:

$$V(x) = x^2 + \frac{\lambda x^2}{1 + gx^2} \quad (3.22)$$

sendo o sistema submetido a uma força externa periódica  $F \cos(\omega t)$ , a nossa função potencial será:

$$V(x, t) = x^2 + \frac{\lambda x^2}{1 + gx^2} - Fx \cos(\omega t) \quad (3.23)$$

Calculando a derivada da função potencial em relação a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} - F \cos(\omega t) \quad (3.24)$$

Substituindo-se ( 3.23) em ( 3.19), obtemos a Lagrangiana para o potencial dado:

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}e^{bt} \left[ \dot{x}^2 - 2x^2 - \frac{2\lambda x^2}{1 + gx^2} + 2Fx \cos(\omega t) \right] \quad (3.25)$$

e a equação do movimento, derivada da Lagrangiana acima, pode ser obtida pela substituição de ( 3.24) em ( 3.21):

$$\ddot{x} + b\dot{x} + 2x + \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} = F \cos(\omega t) \quad (3.26)$$

A Hamiltoniana correspondente pode ser obtida pela transformação de Legendre, dada por:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \quad (3.27)$$

com  $H = H(p_i, q_i, t)$ , onde os momenta generalizados  $p_i$ , são dados por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.28)$$

Em nosso caso, temos:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}e^{bt} \quad H(p, x, t) = p\dot{x} - L(x, \dot{x}, t) \quad (3.29)$$

Substituindo-se a equação da Lagrangiana dada por ( 3.19), temos:

$$H(p, x, t) = \dot{x}^2 e^{bt} - e^{bt} \left[ \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x, t) \right] = \frac{1}{2}\dot{x}^2 e^{bt} + e^{bt}V(x, t) \quad (3.30)$$

e aplicando-se ( 3.29), obtemos:

$$H(p, x, t) = \frac{1}{2}p^2 e^{-bt} + e^{bt}V(x, t) \quad (3.31)$$

Para o nosso potencial em particular, substituindo-se ( 3.23) em ( 3.31),



$$H(p, x, t) = \frac{1}{2}p^2 e^{-bt} + \left[ x^2 + \frac{\lambda x^2}{1 + gx^2} - Fx \cos(\omega t) \right] e^{bt} \quad (3.32)$$

Já que  $H$  depende explicitamente do tempo, é evidente que  $H(p, x, t)$  não é uma constante do movimento. Deve-se lembrar também, que o comportamento caótico exclui a existência de uma constante global de movimento.

É importante enfatizar que a construção de uma Hamiltoniana para um oscilador amortecido (e forçado) é somente local. De fato, localmente todo campo vetorial (fluxo) é Hamiltoniano. Somente são globalmente Hamiltonianos os fluxos para os quais há preservação global de áreas no espaço de fase [1].

### 3.4 Retratos de Fase, Mapas de Poincaré e Espectro de Potência

Nesta secção apresentaremos alguns resultados obtidos, em termos de caracterização qualitativa do regime dinâmico do potencial em estudo, através das séries temporais, retratos de fase, mapas de Poincaré e espectros de potência.

Para obter as séries temporais, o sistema de equações ( 3.12) foi integrado numericamente utilizando-se os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem [37] [34] e a Modificação de Merson do mesmo método [32], também uma técnica de passo simples mas que permite controle do tamanho do passo. Os dois esquemas de integração apresentaram resultados semelhantes porém, o primeiro é de mais fácil utilização para determinação do mapa estroboscópico em virtude de possuir passo fixo.

É importante salientar que a natureza, ou seja, o comportamento, a forma geral da figura, não depende da rotina de integração utilizada, desde que a mesma tenha uma precisão adequada, mas os detalhes da figura dependem crucialmente disto e das condições iniciais [51].

Vamos apresentar agora, o comportamento dinâmico do sistema, representado qualita-

tivamente através das séries temporais, retrato de fase (projeção do espaço de fase em duas dimensões), mapa de Poincaré e espectro de potência.

Foram efetuadas centenas de simulações a partir de integrações numéricas das equações de movimento que variavam de 5.000 a 150.000 iterações, em cada uma variando-se parâmetros como o coeficiente  $b$  do termo de amortecimento, a amplitude  $F$  e a frequência  $\omega$  da força externa, o coeficiente da não-linearidade  $g$  (e conseqüentemente  $\lambda$  que esta conectado com  $g$  através da relação (3.9)). Entretanto, procuramos nos concentrar neste trabalho no estudo da alteração do regime dinâmico em função da variação dos parâmetros  $b$  e  $F$ .

Muitos foram os resultados interessantes sob o aspecto dinâmico, porém, particularmente para não tornar este trabalho demasiadamente extenso, escolhemos duas séries de resultados:

- Ciclos de forma “exótica”
- Sequências interrompidas de bifurcação de ciclos limite;

Para cada teste tipicamente, foram elaboradas as séries temporais de  $x$  e  $y$ , o retrato de fase, o mapa de Poincaré e o espectro de potência dos sinais das séries temporais. No caso do espectro de potência procuramos incluir o espectro do sinal ( $x$  ou  $y$ ) de maior interesse sob o aspecto dinâmico em termos de mudança qualitativa. O mapa de Poincaré foi incluído nos casos mais relevantes.

Apresentaremos inicialmente alguns comportamentos típicos:

Na figura (3.3) temos um ciclo limite obtido com amortecimento  $b = 0,1$  e amplitude da força externa  $F = 15$  ( $\omega = 2\pi$ ,  $g = 2$  e  $\lambda = -6g^2 - 4g$ ). A figura (3.4) corresponde à série temporal de  $y$  para os mesmos parâmetros e, pelo seu traçado, confirma a periodicidade da solução. O espectro de potência para a série temporal (cf. fig. (3.5)), também caracteriza regime periódico por apresentar somente três picos de frequência<sup>2</sup>.

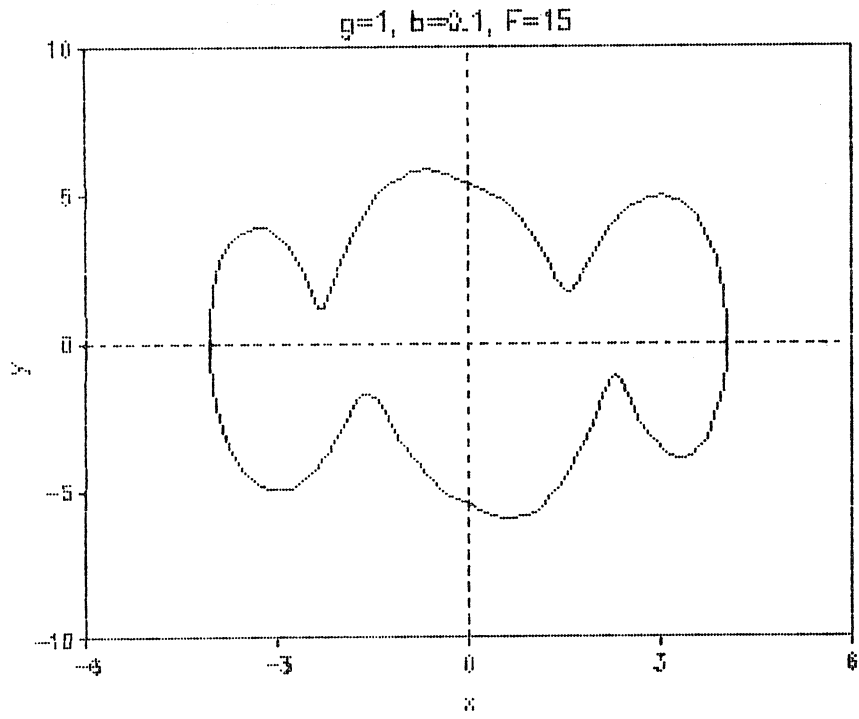


Figura 3.3: Espaço de Fase com  $b = 0,1$ ,  $F = 15$  e  $g = 1$

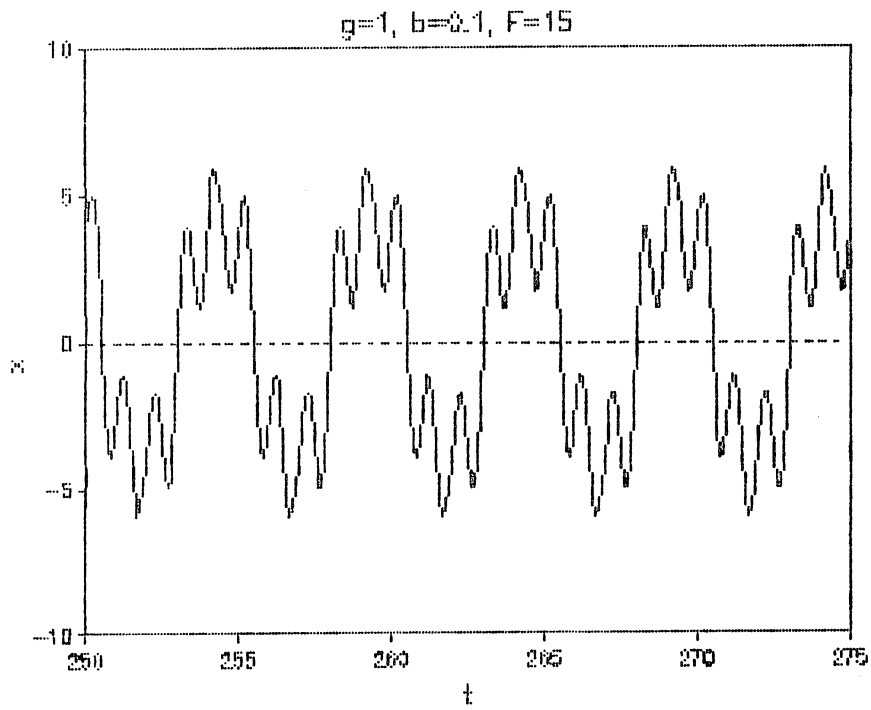


Figura 3.4: Série temporal de  $y$  para os parâmetros da figura precedente

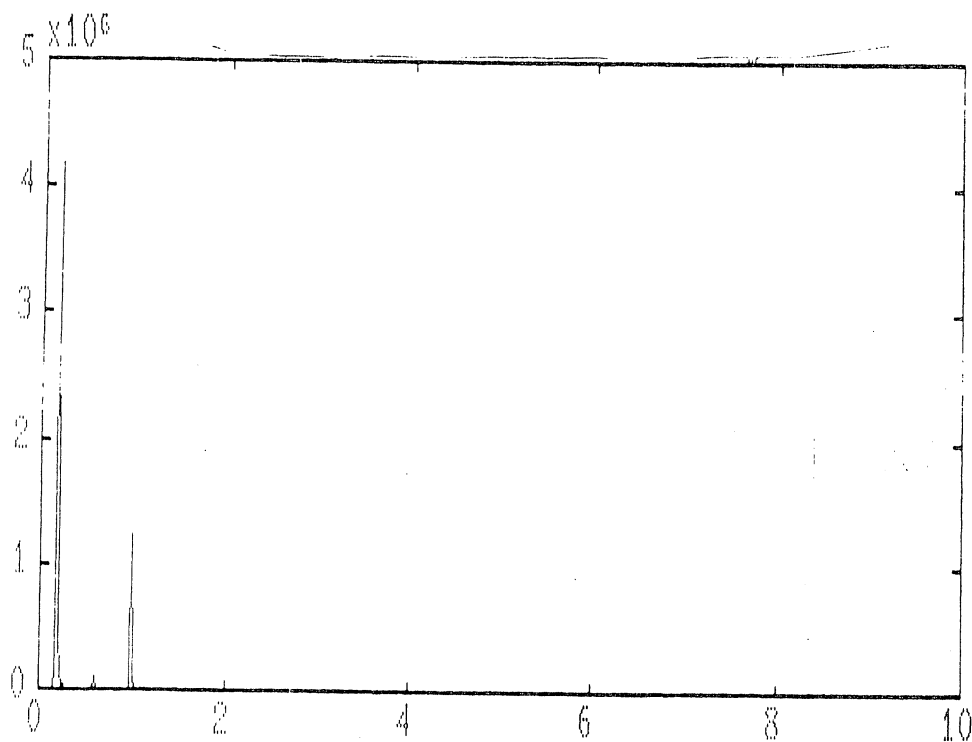


Figura 3.5: Espectro de Potência para a série temporal  $y$

Na figura ( 3.6) observamos um ciclo bem mais complicado, de período consideravelmente mais elevado para os parâmetros  $b = 0,01$  e  $F = 60$  ( $\omega = 2\pi$ ,  $g = 1$  e  $\lambda = -6g^2 - 4g$ ). A série temporal ( 3.7) também se apresenta um pouco mais complexa, porém ainda periódica conforme comprovado pelo espectro ( 3.8).

Na figura ( 3.9) observamos um regime bastante complicado para os parâmetros  $b = 0,33$ ,  $F = 35$ ,  $g = 23$  e  $\omega = 0,7$ . A série temporal ( 3.10) se apresenta visualmente irregular e o mapa de Poincaré ( 3.11) indica oscilação de período elevado.

A figuras seguintes apresentam uma série de bifurcações extremamente interessante, tomando-se a amplitude da força externa  $F$  como parâmetro de controle. Consideraremos fixos os parâmetros  $b = 0,5$ ,  $g = 2$ ,  $\omega = \pi$ , pontos iniciais  $x_0 = 1,5$  e  $y_0 = 1$  para as próximas figuras analisadas. Na figura ( 3.12), para  $F = 5$  tem-se um ciclo limite simples, comprovado pela série temporal ( 3.13) e pelo espectro de potência ( 3.14). À medida

---

<sup>2</sup>A frequência de amostragem utilizada nos espectros de potência foi equivalente ao inverso do passo utilizado na integração numérica.

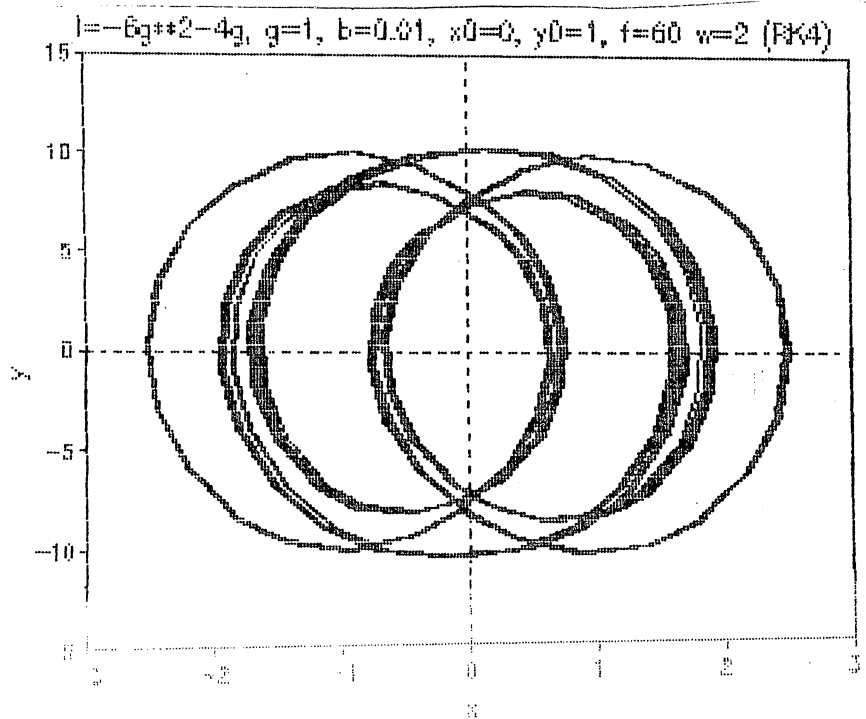


Figura 3.6: Espaço de Fase com  $b = 0,01, F = 60$  e  $g = 1$

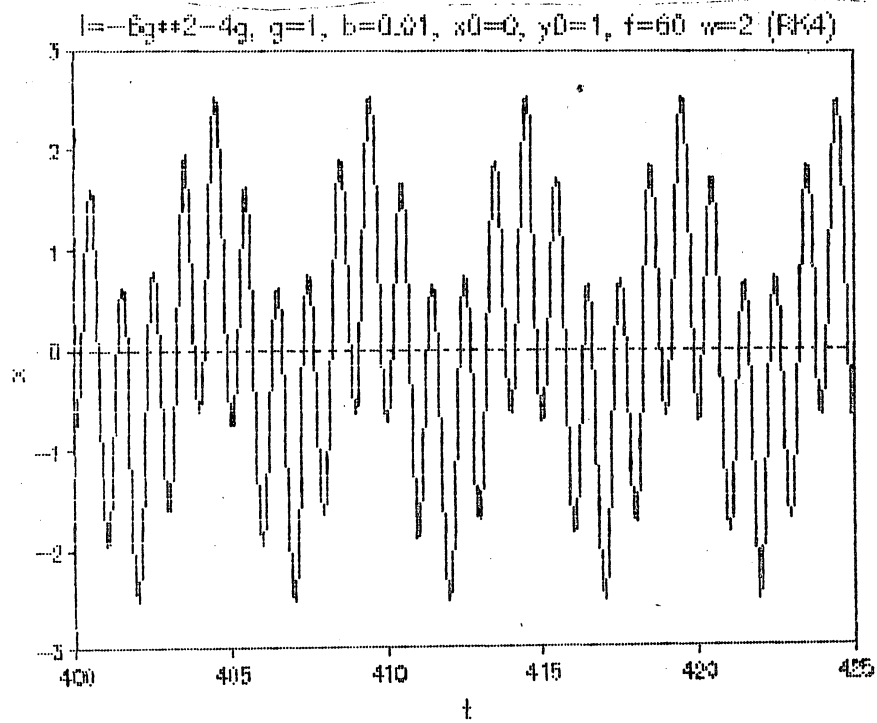


Figura 3.7: Série temporal de  $x$  para os parâmetros da figura precedente

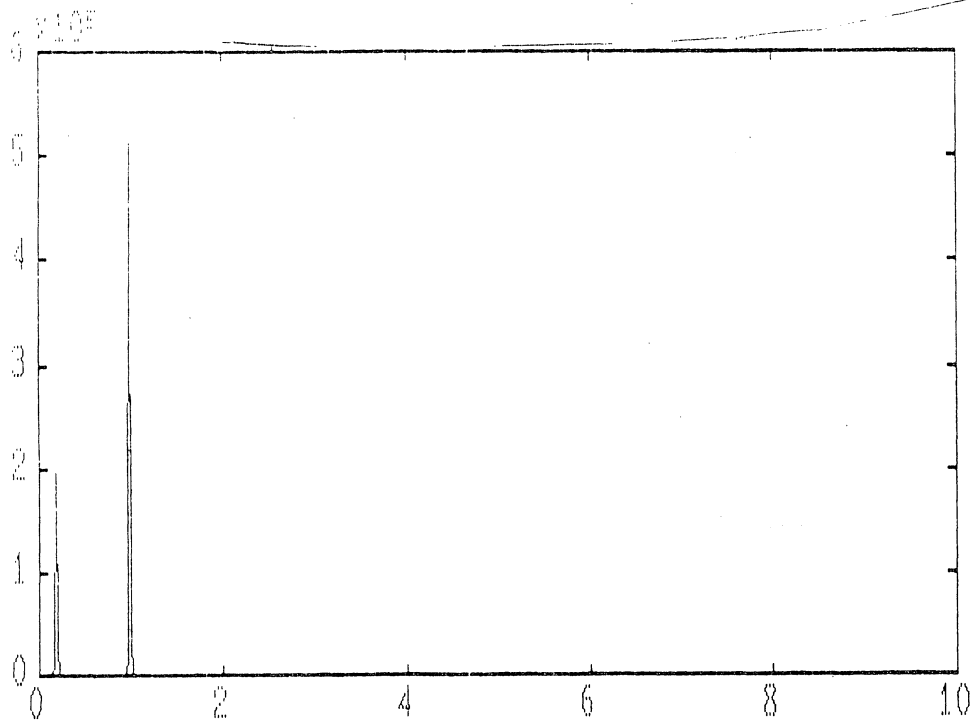


Figura 3.8: Espectro de Potência para a série temporal  $x$

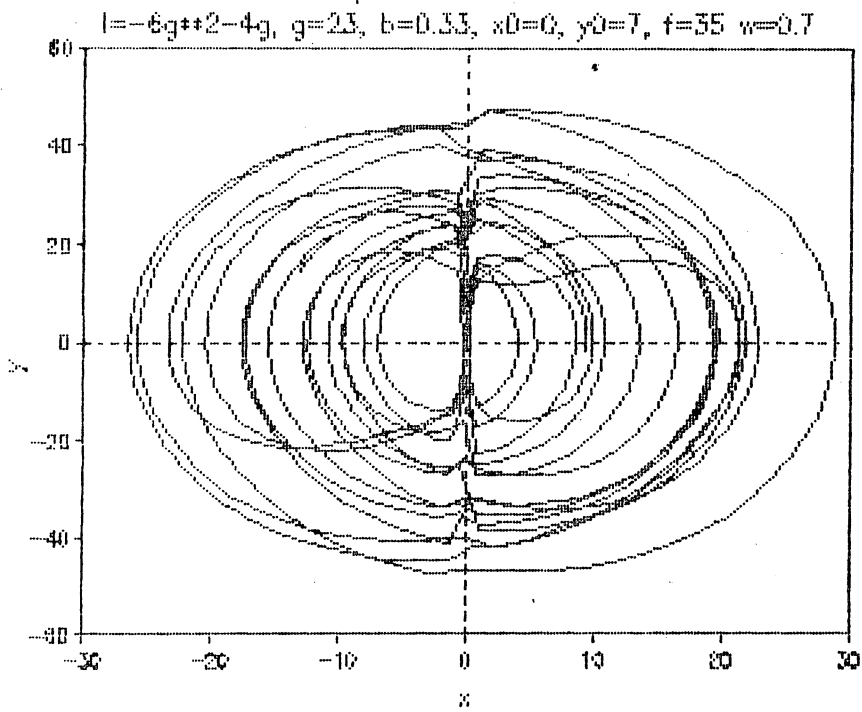


Figura 3.9: Espaço de Fase com  $b = 0,33, F = 35$  e  $g = 23$

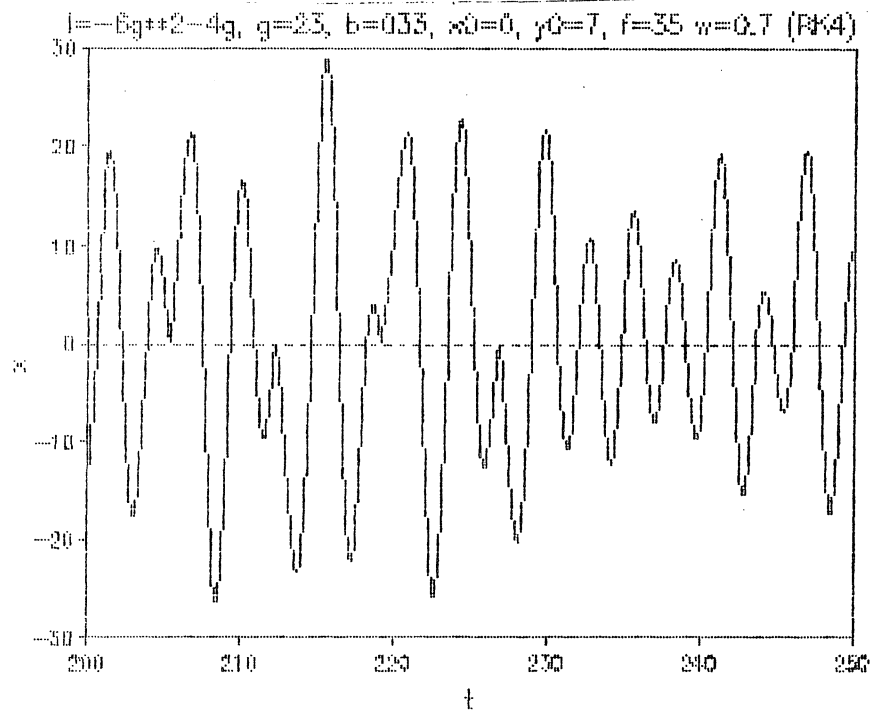


Figura 3.10: Série temporal de  $x$  para os parâmetros da figura precedente

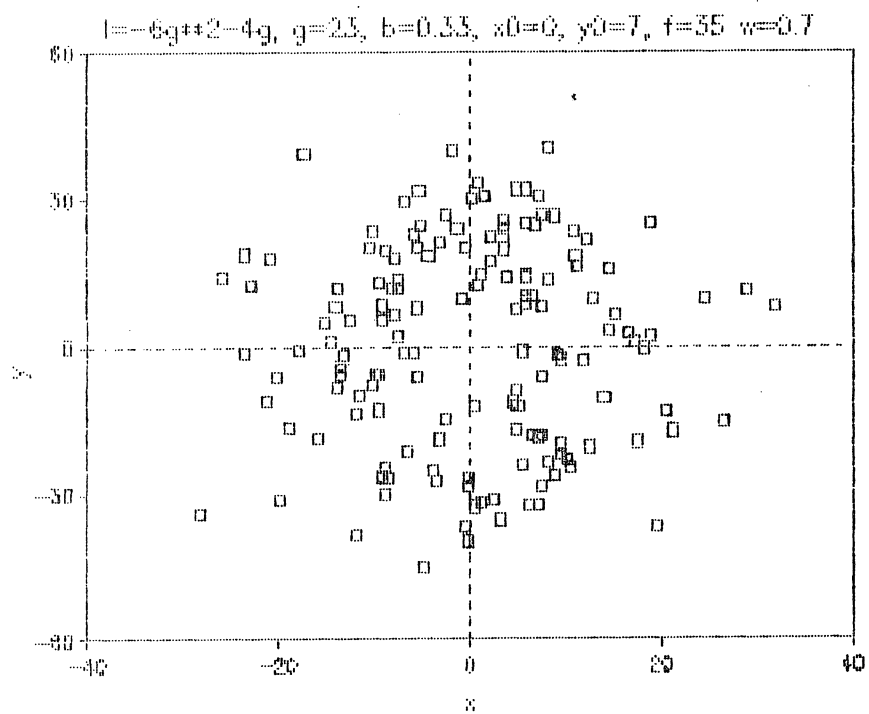


Figura 3.11: Mapa de Poincaré para os parâmetros da figura precedente

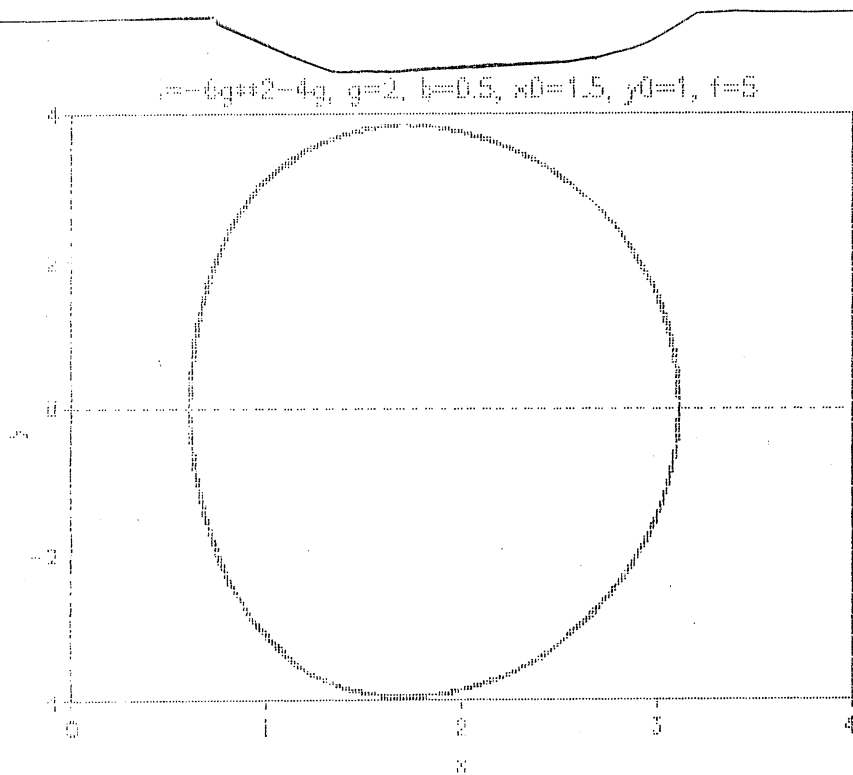


Figura 3.12: Espaço de Fase com  $b = 0,5$ ,  $F = 5$  e  $g = 2$

que aumentamos a intensidade da amplitude  $F$ , começam a ocorrer bifurcações (cf. fig. 3.15, série temporal 3.16 e espectro de potência 3.17), que vão se tornando cada vez mais complicadas (cf. fig. 3.18<sup>3</sup> e 3.21<sup>4</sup>) e, após um determinado valor de  $F$ , volta a apresentar ciclos de baixo período (cf. fig. 3.24, 3.25 e 3.26), inicialmente após um longo transiente, e à medida que ampliamos a intensidade da força externa o transiente se torna mais breve, não sendo mais observada nova bifurcação com aumento de período.

Foram observados também ciclos de baixo período coexistindo na mesma faixa dos ciclos de elevado período, mas antes e após essa faixa, observaram-se apenas ciclos de período baixo.

<sup>3</sup>A série temporal correspondente 3.19 apresenta ainda um comportamento regular, também observado no mapeamento estroboscópico dado pela figura 3.20

<sup>4</sup>Embora o espectro de potência 3.23 ainda apresente um número discreto de picos, podemos observar uma “dispersão” no mapa estroboscópico, cf. fig. 3.22



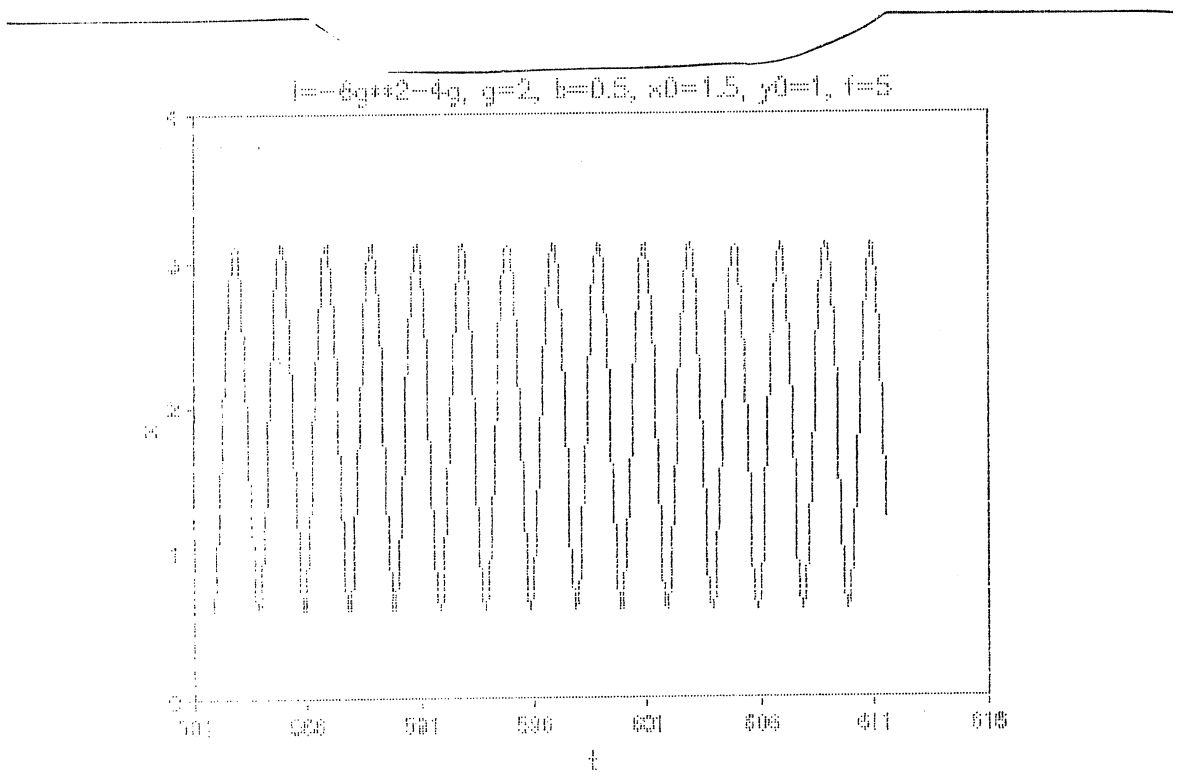


Figura 3.13: Série temporal de  $x$  para os parâmetros da figura precedente

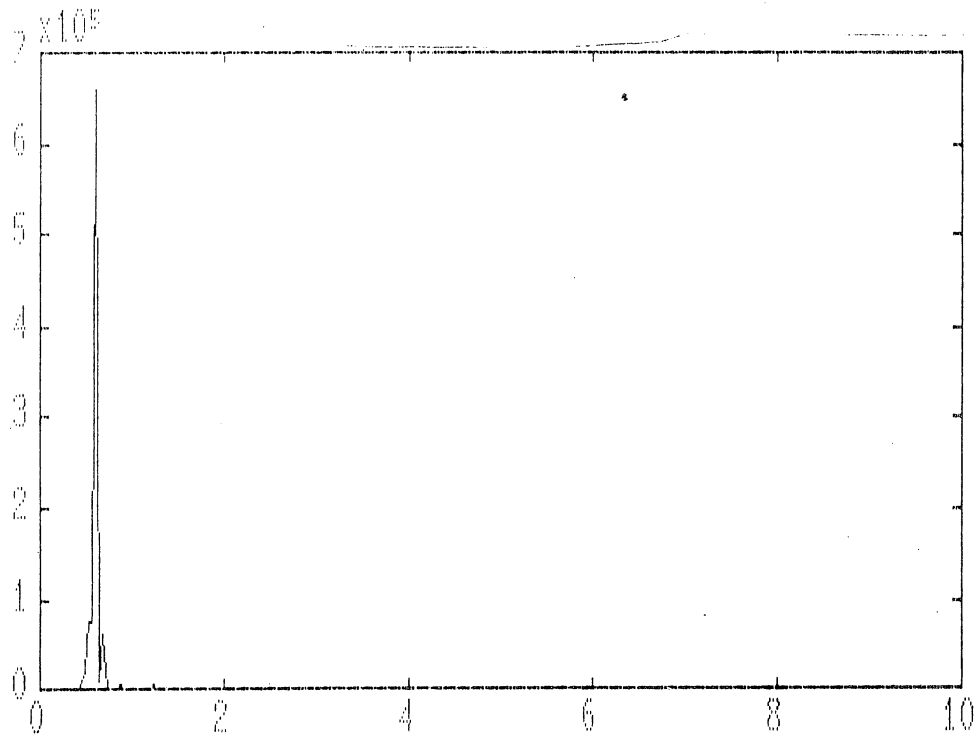


Figura 3.14: Espectro de Potência para a série temporal  $x$

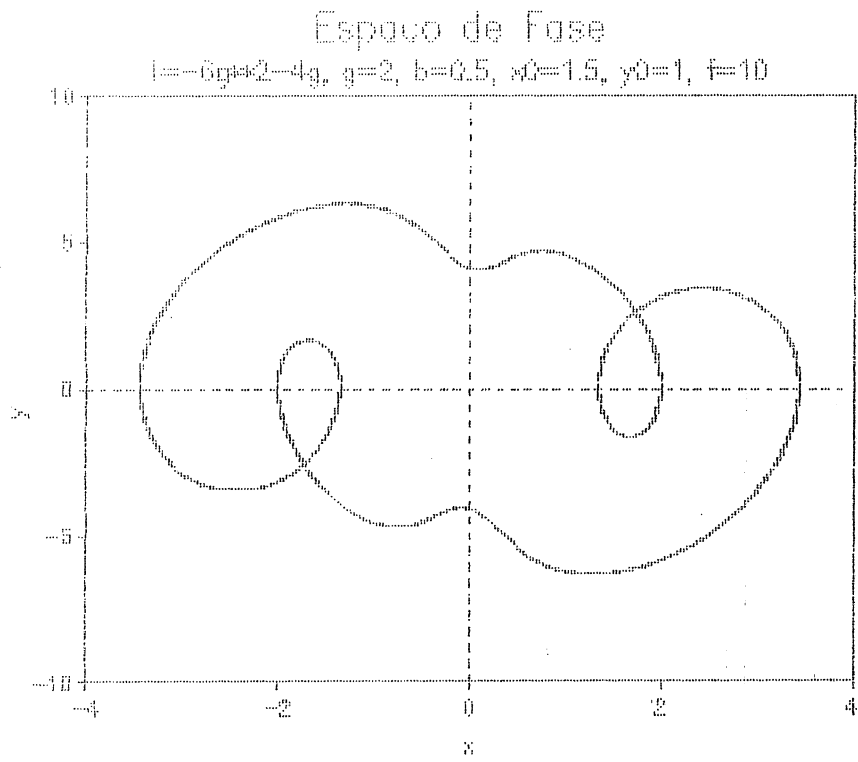


Figura 3.15: Espaço de Fase com  $b = 0,5$ ,  $F = 10$  e  $g = 2$

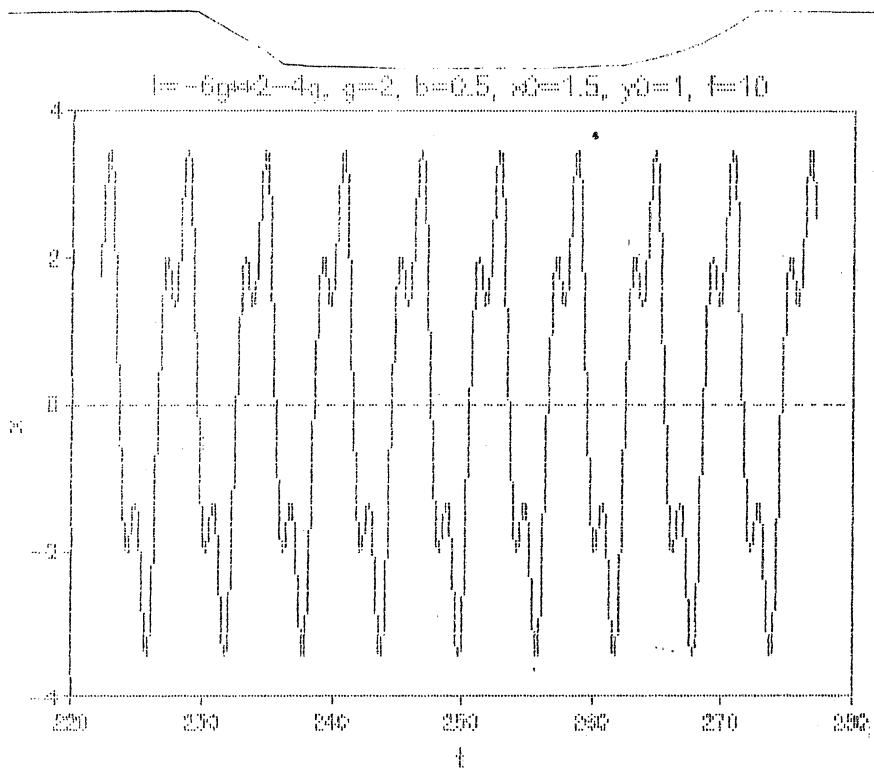


Figura 3.16: Série temporal de  $x$  para os parâmetros da figura precedente

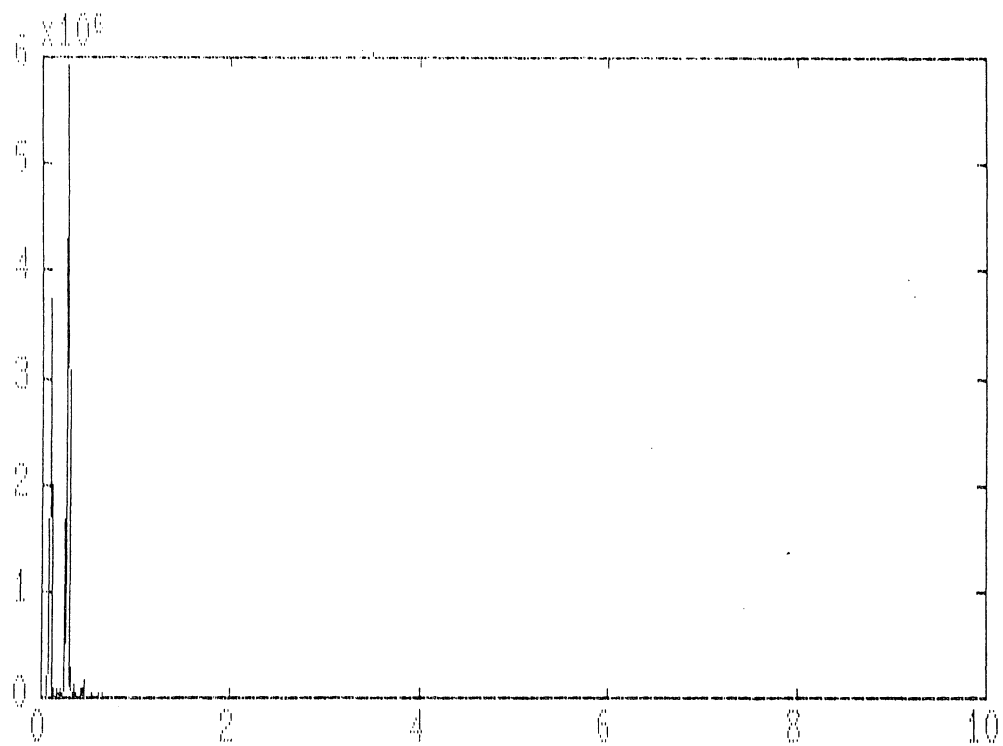


Figura 3.17: Espectro de Potência para a série temporal  $x$

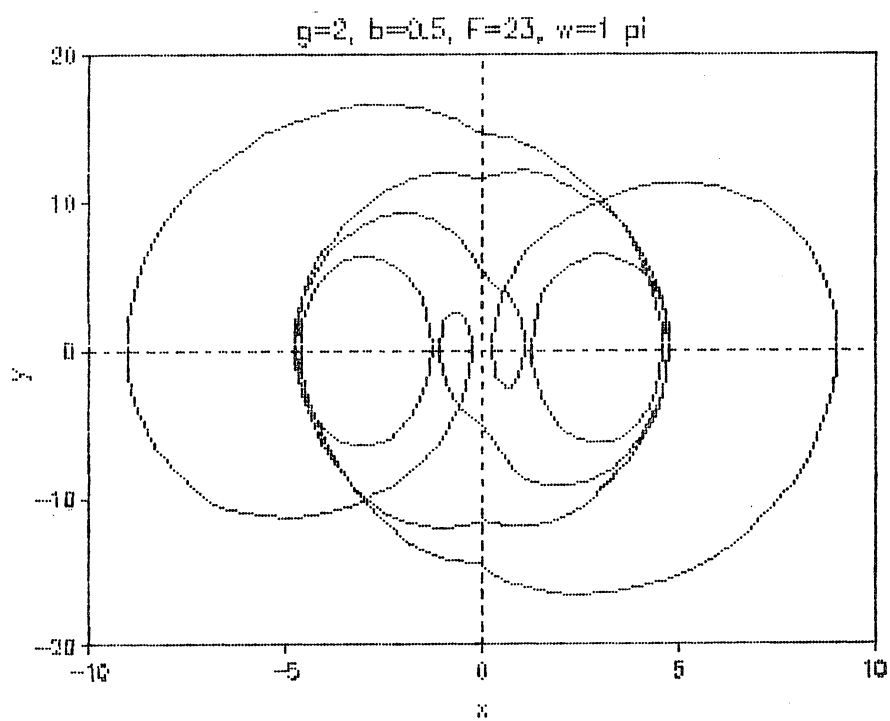


Figura 3.18: Espaço de Fase com  $b = 0,5$ ,  $F = 23$  e  $g = 2$

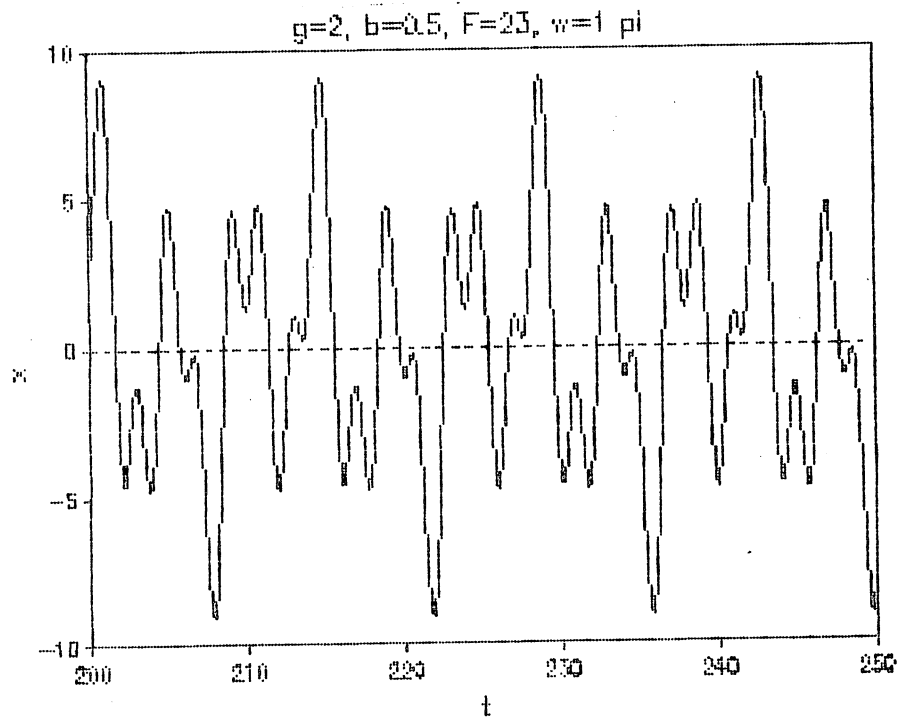


Figura 3.19: Série temporal de  $x$  para os parâmetros da figura precedente

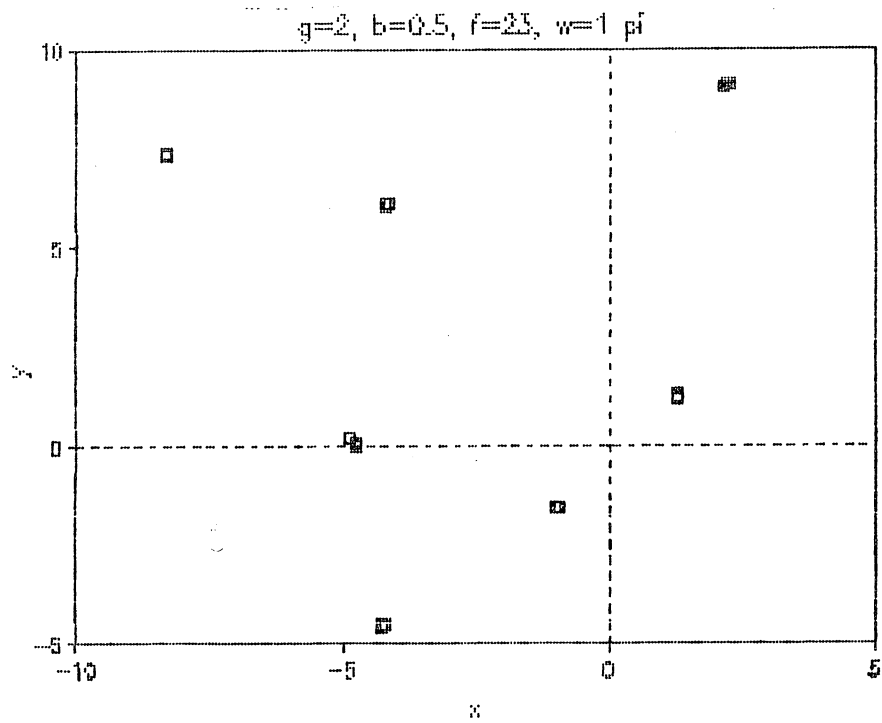


Figura 3.20: Mapa de Poincaré para os parâmetros da figura precedente

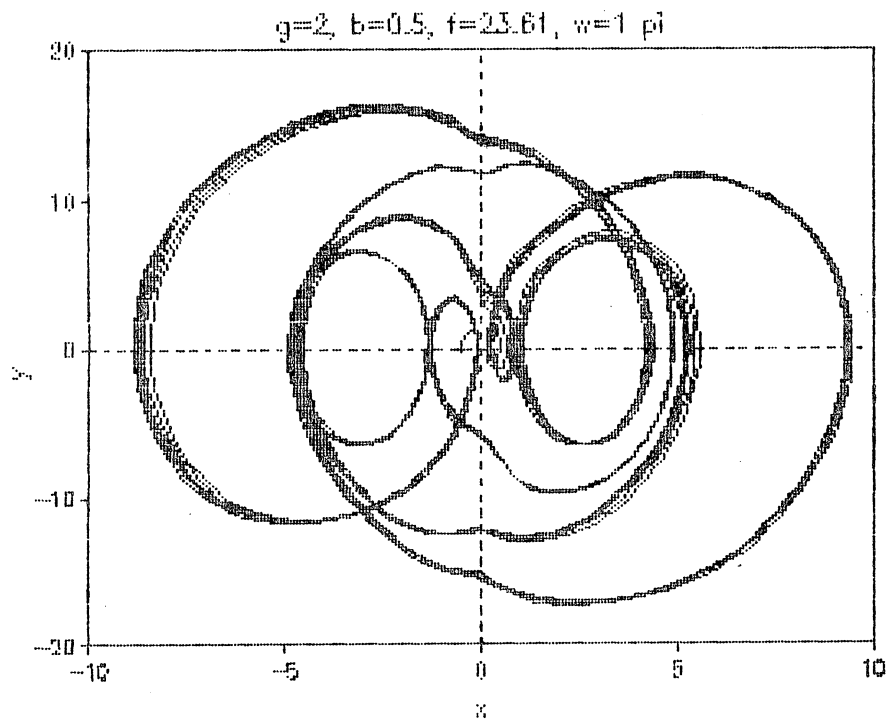


Figura 3.21: Espaço de Fase com  $b = 0,5$ ,  $F = 23,61$  e  $g = 2$

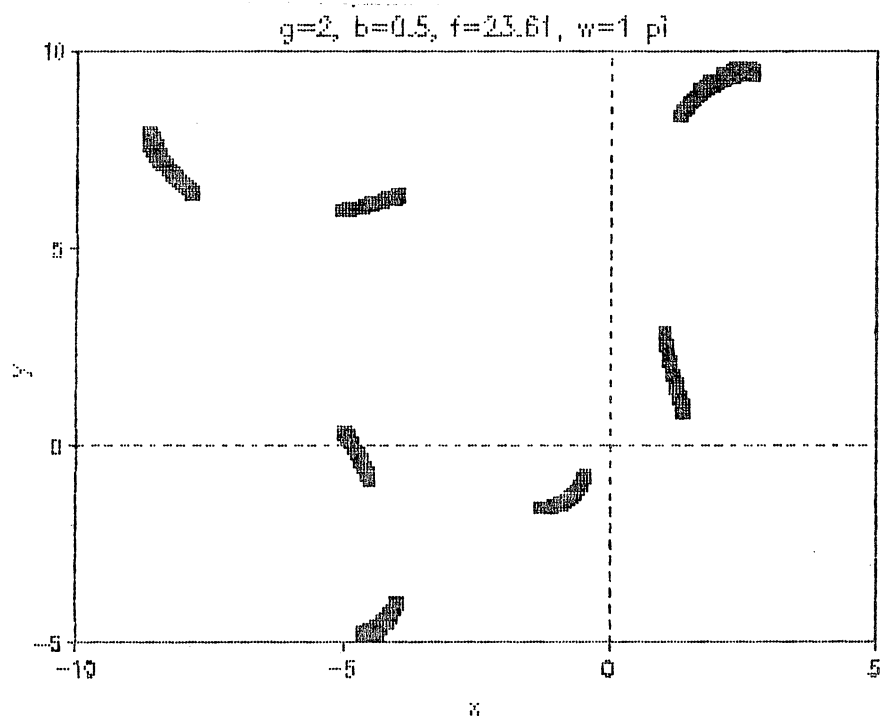


Figura 3.22: Mapa de Poincaré para os parâmetros da figura precedente

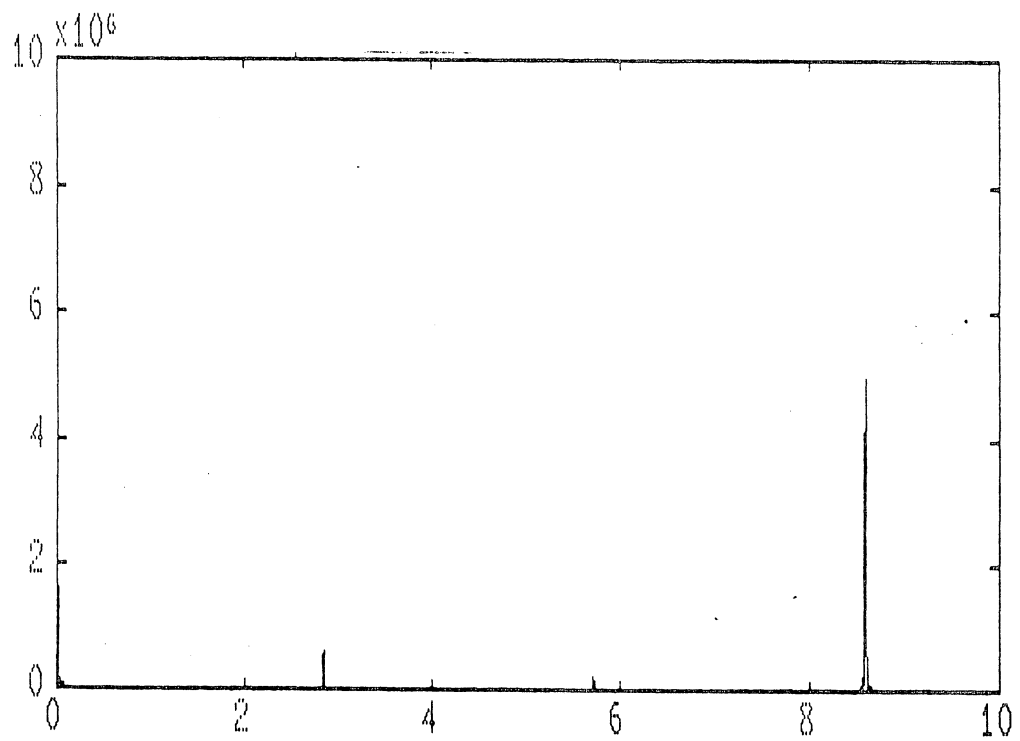


Figura 3.23: Espectro de Potência para a série temporal  $x$

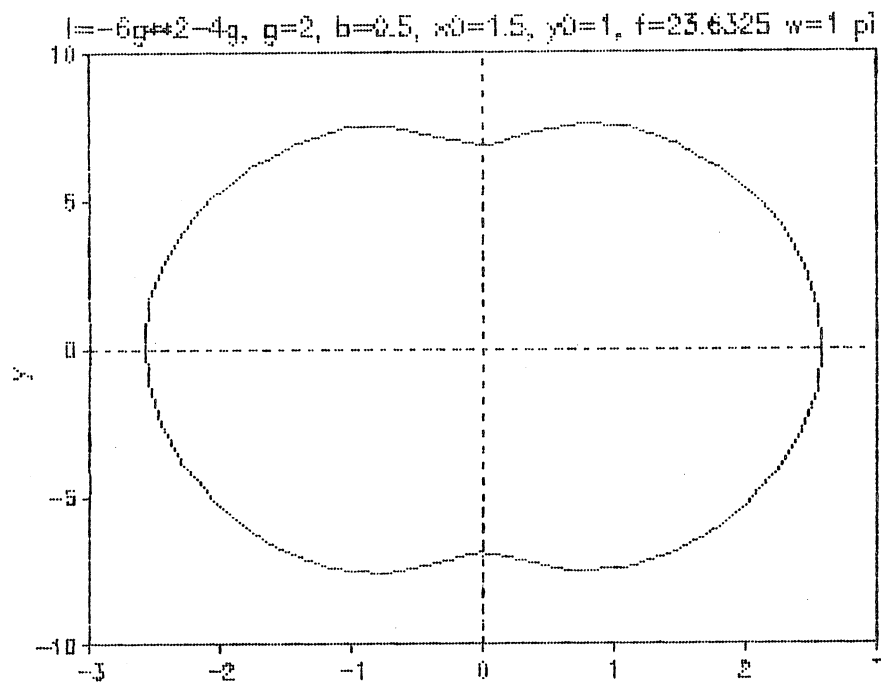


Figura 3.24: Espaço de Fase com  $b = 0,5$ ,  $F = 23,6325$  e  $g = 2$

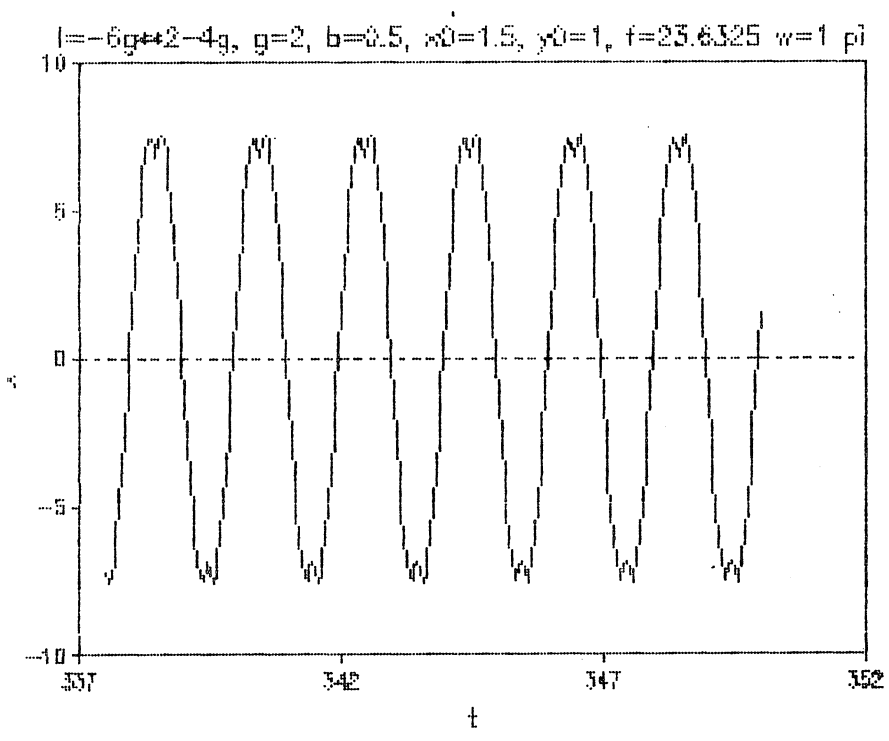


Figura 3.25: Série temporal de  $y$  para os parâmetros da figura precedente

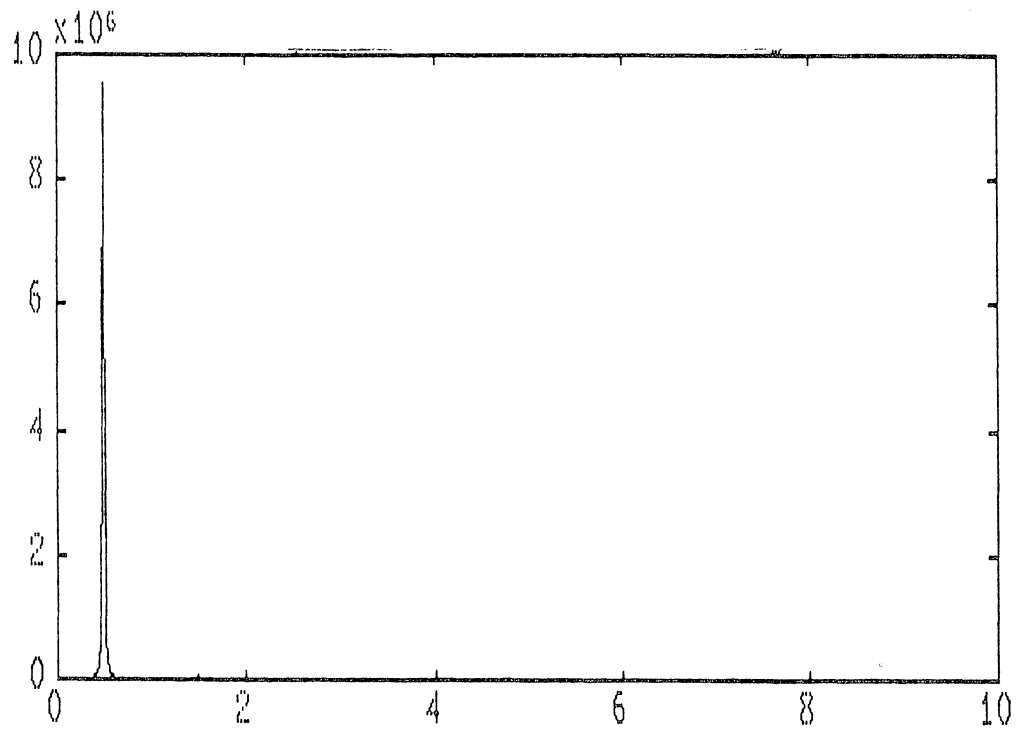


Figura 3.26: Espectro de Potência para a série temporal  $y$

## Capítulo 4

# Métodos de Aproximação

No capítulo 3, utilizamos métodos de análise qualitativos (ou topológicos) que nos permitem uma visão mais global das situações possíveis que envolvem o sistema dinâmico, em particular determinando o caráter das soluções .

Neste capítulo, empregaremos métodos quantitativos para obtenção da solução com um grau desejado de aproximação . A importância do uso destes métodos, reside no fato de que eles nos permitem obter resultados numéricos; com a restrição de que dependem de aproximações envolvendo soluções na forma de certas séries de potência e, portanto, a precisão dependerá do número de termos da série usados na solução . Além disto, há o problema da convergência ou não da própria série, que pressuporemos sempre convergir. Naturalmente, uma solução numérica conduz ao objetivo, se se deseja determinar o movimento correspondente a determinadas condições iniciais, entretanto; não é suficiente quando o objetivo é determinar os vários tipos de solução e da respectiva dependência de parâmetros de controle.

### 4.1 Introdução

A teoria de equações diferenciais lineares tem sido profundamente estudada e desenvolvida, particularmente para sistemas com coeficientes constantes. Por outro lado, há muito pouco, em termos de caráter geral, conhecido a respeito de equações diferenciais não-lineares. Por exemplo, o princípio da superposição de soluções , por ser de caráter linear, não se aplica



aos sistemas não-lineares, e conseqüentemente, as noções de oscilações forçadas e livres, frequências forçadas e livres, e ressonância, que estão intimamente relacionadas com o princípio da superposição, possuem sentido bem-definido somente para sistemas lineares, embora tenha se tornado uma prática padrão, o uso de alguns destes termos na análise de problemas não-lineares [53].

A análise de sistemas não-lineares depende portanto do uso de métodos de aproximação, pois em geral não podemos obter soluções explícitas em termos de funções elementares, e está restrita em grande parte à discussão de casos especiais.

É importante salientar que não efetuaremos um estudo e justificativa teóricos para os métodos utilizados, mas os mesmos serão explicados através da sua própria aplicação para análise do nosso potencial, de uma maneira expositiva e com ênfase na obtenção de resultados. Também não nos detivemos na resolução de sutilezas matemáticas, mas tão somente na aplicação dos métodos como uma ferramenta para a obtenção das soluções aproximadas.

O sistema não-linear, dado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + b\dot{x} + 2x + \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} = F \cos \omega t \quad (4.1)$$

será analisado, em seguida, através do uso de diversos métodos, considerando o efeito dos termos de amortecimento e forçamento no comportamento do regime dinâmico <sup>1</sup>.

Considerando-se a expansão em série efetuada no capítulo 2, a equação (4.1) pode ser escrita de forma aproximada até o termo de potência sete como:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + 2(1 + \lambda)x - 4\lambda gx^3 + 6\lambda g^2 x^5 - 8\lambda g^3 x^7 = F \cos(\omega t) \quad (4.2)$$

ou, definindo-se  $\omega_0^2 = 2(1 + \lambda)$ , temos:

---

<sup>1</sup>Neste, e no capítulo 5, não vincularemos os parâmetros  $\lambda$  e  $g$  pela relação  $\lambda = -6g^2 - 4g$ , como no capítulo anterior, para termos resultados mais gerais.

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x - 4\lambda g x^3 + 6\lambda g^2 x^5 - 8\lambda g^3 x^7 = F \cos(\omega t) \quad (4.3)$$

Da teoria de equações diferenciais sabemos que a equação ( 4.1) possui soluções  $x(t)$  as quais são determinadas unicamente uma vez que os valores do deslocamento e da velocidade no tempo  $t = 0$  são conhecidos, isto é, quando  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ , as condições iniciais, são prescritas.

É natural que possam existir outras soluções para a equação ( 4.1) além das soluções periódicas, entretanto concentraremos nossa atenção no estudo de vários tipos de soluções periódicas desta equação , com o objetivo de inicialmente obter informações de caráter qualitativo sobre as soluções . Uma vez que isto tenha sido feito, podem-se obter informações quantitativas precisas.

Trataremos das oscilações *harmônicas*, isto é, soluções periódicas  $x(t)$  de ( 4.1) nas quais o período é o mesmo que o período  $2\pi/\omega$  da força externa  $F \cos(\omega t)$ , embora oscilações *subharmônicas*, nas quais a solução  $x(t)$  tem como seu período menor por um múltiplo inteiro (diferente da unidade) do período da força externa, possam ser tratadas de uma maneira similar [53], [24].

## 4.2 Método do Balanço Harmônico

A idéia deste método é expressar a solução periódica na forma de uma combinação linear de funções periódicas [24], [41]:

$$x = C \sin(\omega t) + \sum_{n=2}^m C_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=2}^m D_n \cos(n\omega t)$$

Então, substituindo-se esta solução tentativa na equação ( 4.3), esta é aproximadamente satisfeita se os coeficientes de  $\sin(\omega t)$ ,  $\sin(n\omega t)$  e  $\cos(n\omega t)$ ,  $n = 2, 3, \dots, m$  desta série, forem impostos iguais a zero. Isto resulta em  $2m - 1$  equações algébricas para as incógnitas  $w$ ,  $C_2, C_3, \dots, C_m, D_2, D_3, \dots$ , e  $D_m$  em termos de  $C$ . A precisão da solução periódica

resultante, depende do valor de  $C$  e da aplicação do método de forma a conter harmônicos de ordem superior.

Este método também é conhecido como método da linearização harmônica [28] ou, método da função de descrição na literatura da teoria de controle, e tem a característica de poder tratar não somente não-linearidades analíticas suaves mas também não-linearidades analíticas abruptas encontradas em muitos problemas físicos, sendo relativamente fácil obter soluções aproximadas através do seu uso.

Considerando-se a oscilação livre ( $F = 0$ ) e não amortecida ( $b = 0$ ), obtém-se como resultado, a partir da equação (4.1):

$$\ddot{x} + 2x + \frac{2\lambda x}{(1 + gx^2)^2} = 0 \quad (4.4)$$

ou usando-se a expressão (4.3) resultante da expansão em série, tem-se:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - 4\lambda g x^3 + 6\lambda g^2 x^5 - 8\lambda g^3 x^7 = 0 \quad (4.5)$$

Aplicaremos o método do balanço harmônico, admitindo-se que (4.4) tenha uma solução que possa ser aproximada por:

$$x(t) = C \text{sen}(\omega t), \quad (4.6)$$

onde a frequência circular  $\omega(C)$  pode depender da amplitude. Substituindo-se (4.6) em (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 4\lambda g x^3 + 6\lambda g^2 x^5 - 8\lambda g^3 x^7 = & -C\omega^2 \text{sen}(\omega t) + \omega_0^2 C \text{sen}(\omega t) - \\ & -4\lambda g C^3 \text{sen}^3(\omega t) + 6\lambda g^2 C^5 \text{sen}^5(\omega t) - 8\lambda g^3 C^7 \text{sen}^7(\omega t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo-se as potências de funções trigonométricas, por senos de arcos múltiplos e considerando-se que se  $x(t)$  fosse uma solução de (4.4), o lado direito de (4.7) deveria se

anular, o que naturalmente em geral não ocorre, temos que:

$$\begin{aligned}
& (\omega_0^2 - \omega^2)C\text{sen}(\omega t) - 4\lambda g C^3 \left[ \frac{3}{4}\text{sen}(\omega t) - \frac{1}{4}\text{sen}(3\omega t) \right] + \\
& + 6\lambda g^2 C^5 \left[ \frac{5}{8}\text{sen}(\omega t) - \frac{5}{16}\text{sen}(3\omega t) + \frac{1}{16}\text{sen}(5\omega t) \right] - \\
& - 8\lambda g^3 C^7 \left[ \frac{35}{64}\text{sen}(\omega t) - \frac{21}{64}\text{sen}(3\omega t) + \frac{7}{64}\text{sen}(5\omega t) - \frac{1}{64}\text{sen}(7\omega t) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Portanto, agrupando-se termos semelhantes,

$$\begin{aligned}
& \left( \omega_0^2 - \omega^2 - 3\lambda g C^2 + \frac{15}{4}\lambda g^2 C^4 - \frac{35}{8}\lambda g^3 C^6 \right) C\text{sen}(\omega t) + \\
& + \left( \lambda g C^2 - \frac{15}{8}\lambda g^2 C^4 + \frac{21}{8}\lambda g^3 C^6 \right) C\text{sen}(3\omega t) + \\
& + \left( \frac{3}{8}\lambda g^2 C^4 - \frac{7}{8}\lambda g^3 C^6 \right) C\text{sen}(5\omega t) + \frac{1}{8}\lambda g^3 C^7 \text{sen}(7\omega t) = 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pode-se, no entanto, anular o fator em  $\text{sen}(\omega t)$ , escolhendo-se:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{3}{\omega_0^2}\lambda g C^2 + \frac{15}{4\omega_0^2}\lambda g^2 C^4 - \frac{35}{8\omega_0^2}\lambda g^3 C^6 \tag{4.10}$$

que é a relação entre a frequência circular da solução adotada  $x(t)$  e a amplitude  $C$ .

Admitindo-se que os coeficientes das demais potências em seno na equação ( 4.7) sejam pequenos, então o lado direito de ( 4.7) difere muito pouco de zero e a equação ( 4.4) é aproximadamente satisfeita.

Para obter uma solução consistente pelo uso deste método, precisamos ou ter um bom conhecimento a respeito da solução *a priori* (o que não é o caso), ou considerar um número suficiente de termos na solução e checar a ordem dos coeficientes de todos os harmônicos desconsiderados, caso contrário, pode-se obter uma aproximação incorreta [41]. Em nosso caso, poderemos comparar a solução obtida com outros métodos de aproximação .

Apesar de, em geral, não ser possível dar uma justificativa matemática satisfatória para este método, ele é útil para muitas aplicações práticas [25]. No que segue, apresentaremos outros métodos mais bem definidos para a obtenção de soluções aproximadas.

### 4.3 Método do Balanço Harmônico para Oscilações Harmônicas Forçadas e com Amortecimento

Considerando-se o oscilador ( 4.3), onde substituímos a força periódica  $F \cos(\omega t)$  pelas forças combinadas  $F_1 \text{sen}(\omega t) + F_2 \cos(\omega t)$ , e na presença de amortecimento ( $b \neq 0$ ), obtemos:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x - 4\lambda g x^3 + 6\lambda g^2 x^5 = F_1 \text{sen}(\omega t) + F_2 \cos(\omega t) \quad (4.11)$$

Admitindo uma solução que possa ser aproximada por:

$$x_1(t) = C \text{sen}(\omega t),$$

e substituindo em ( 4.11), temos:

$$\begin{aligned} & -C\omega^2 \text{sen}(\omega t) + bC\omega \cos(\omega t) + \omega_0^2 C \text{sen}(\omega t) - \\ & -4\lambda g C^3 \text{sen}^3(\omega t) + 6\lambda g^2 C^5 \text{sen}^5(\omega t) = F_1 \text{sen}(\omega t) + F_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo-se as potências de funções trigonométricas, por senos de arcos múltiplos, desconsiderando-se porém os termos em  $\text{sen}(3\omega t)$  e  $\text{sen}(5\omega t)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & -C\omega^2 \text{sen}(\omega t) + bC\omega \cos(\omega t) + \omega_0^2 C \text{sen}(\omega t) - 3\lambda g C^3 \text{sen}(\omega t) + \\ & + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^5 \text{sen}(\omega t) = F_1 \text{sen}(\omega t) + F_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Reagrupando-se os termos:

$$\left( \omega_0^2 - \omega^2 - 3\lambda g C^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^4 \right) C \text{sen}(\omega t) + bC\omega \cos(\omega t) = F_1 \text{sen}(\omega t) + F_2 \cos(\omega t) \quad (4.14)$$

Igualando-se os coeficientes em  $\sin(\omega t)$  e  $\cos(\omega t)$  obtemos o sistema de equações :

$$\begin{aligned}\omega_0^2 C - \omega^2 C - 3\lambda g C^3 + \frac{15}{4}\lambda g^2 C^5 &= F_1 \\ bC\omega &= F_2\end{aligned}\tag{4.15}$$

De onde segue:

$$F^2 \equiv F_1^2 + F_2^2 = \left(\omega_0^2 C - \omega^2 C - 3\lambda g C^3 + \frac{15}{4}\lambda g^2 C^5\right)^2 + b^2 C^2 \omega^2\tag{4.16}$$

Elevando-se ao quadrado, reagrupando os termos em função de potências de  $\omega$  e dividindo-se por  $C^2$ , obtemos a equação algébrica biquadrada:

$$\begin{aligned}\omega^4 + \left[b^2 - 2\omega_0^2 + 6\lambda g C^2 - \frac{15}{2}\lambda g^2 C^4\right] \omega^2 + \\ + \left[\omega_0^4 - 6\omega_0^2 \lambda g C^2 + \left(9\lambda^2 + \frac{15}{2}\omega_0^2 \lambda\right) g^2 C^4 - \frac{45}{2}\lambda^2 g^3 C^6 + \frac{225}{16}\lambda^2 g^4 C^8\right] &= \frac{F^2}{C^2}\end{aligned}\tag{4.17}$$

cujas raízes são, dividindo-se por  $\omega_0^2$

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} &= 1 - \frac{b^2}{2\omega_0^2} - 3\frac{\lambda g}{\omega_0^2} C^2 + \frac{15}{4\omega_0^2} \lambda g^2 C^4 \pm \\ \pm \frac{1}{2\omega_0^2} \left[ \frac{4F^2 b^2}{C^2} \left( b^2 - 4\omega_0^2 + 12\lambda g C^2 - 15\lambda g^2 C^4 \right) \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Para  $F = 0$ ,  $b = 0$  recaímos na equação ( 4.10).

## 4.4 Método de Ritz

Este método, frequentemente usado na solução de problemas de valor de contorno na mecânica de sistemas elásticos, pode também ser empregado em problemas de oscilações não-lineares [24].

A função incógnita, isto é, a solução da equação ( 4.5),  $x(t)$ , é convenientemente escrita como uma combinação linear das funções suaves  $\psi_i(t), i = 1, 2, \dots, m$ , isto é,

$$x(t) = \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(t), \quad (4.19)$$

onde  $m$  pode tender a infinito. Os coeficientes  $C_i, i = 1, 2, \dots, m$ , devem ser determinados de maneira que o erro cometido pela substituição da solução exata pela solução aproximada seja o menor possível. Considerando-se o oscilador ( 4.3) livre ( $F = 0$ ) e sem amortecimento ( $b = 0$ ) e, escrevendo-se ( 4.3) em função de ( 4.19), temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 4\lambda g x^3 + 6\lambda g^2 x^5 - 8\lambda g^3 x^7 = \sum_{i=1}^m C_i \ddot{\psi}_i(t) + \omega_0^2 \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(t) - \\ - 4\lambda g \left[ \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(t) \right]^3 + 6\lambda g^2 \left[ \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(t) \right]^5 - 8\lambda g^3 \left[ \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(t) \right]^7 \equiv e(t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

impõe-se que o erro quadrático médio

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b e^2(t) dt$$

seja o menor possível num intervalo de tempo determinado, ou seja, ele deve ser minimizado, sujeito à restrição ( 4.19). Assim,

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_a^b e^2(t) dt = 2 \int_a^b e \frac{\partial e}{\partial C_j} dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

fornece um sistema de equações algébricas, do qual as constantes  $C_i, i = 1, 2, \dots$  podem ser determinadas.

A escolha de  $\psi_1(t) = \text{sen}(\omega t), \psi_2(t) = \dots = \psi_m(t) = 0$ , fornece:

$$\begin{aligned} e(t) \equiv -C_1 \omega^2 \text{sen}(\omega t) + \omega_0^2 C_1 \text{sen}(\omega t) - 4\lambda g C_1^3 \text{sen}^3(\omega t) + \\ + 6\lambda g^2 C_1^5 \text{sen}^5(\omega t) - 8\lambda g^3 C_1^7 \text{sen}^7(\omega t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Substituindo-se as potências trigonométricas por senos de arcos múltiplos e desconsiderando-se termos em  $\text{sen}(5\omega t)$  e  $\text{sen}(7\omega t)$ , obtemos:

$$e(t) \equiv \left( \omega_0^2 - \omega^2 - 3\lambda g C_1^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C_1^4 - \frac{35}{8} \lambda g^3 C_1^6 \right) C_1 \text{sen}(\omega t) + \\ + \left( \lambda g C_1^2 - \frac{15}{8} \lambda g^2 C_1^4 + \frac{21}{8} \lambda g^3 C_1^6 \right) C_1 \text{sen}(3\omega t) \quad (4.23)$$

e com  $a = 0$  e  $b = T = \frac{2\pi}{\omega}$ , substituindo-se em (4.21):

$$\int_0^T e \frac{\partial e}{\partial C_1} dt = \int_0^T \left[ \left( \omega_0^2 - \omega^2 - 3\lambda g C_1^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C_1^4 - \frac{35}{8} \lambda g^3 C_1^6 \right) C_1 \text{sen}(\omega t) + \right. \\ \left. + \left( \lambda g C_1^2 - \frac{15}{8} \lambda g^2 C_1^4 + \frac{21}{8} \lambda g^3 C_1^6 \right) C_1 \text{sen}(3\omega t) \right] \times \\ \left[ \left( \omega_0^2 - \omega^2 - 9\lambda g C_1^2 + \frac{75}{4} \lambda g^2 C_1^4 - \frac{245}{8} \lambda g^3 C_1^6 \right) \text{sen}(\omega t) + \right. \\ \left. + \left( 3\lambda g C_1^2 - \frac{75}{8} \lambda g^2 C_1^4 + \frac{147}{8} \lambda g^3 C_1^6 \right) \text{sen}(3\omega t) \right] dt = 0 \quad (4.24)$$

Resolvendo-se as integrais, além da solução trivial  $C_1 = 0$ , obtém-se a equação algébrica:

$$\omega^4 - \left( 2\omega_0^2 - 12\lambda g C_1^2 + \frac{45}{2} \lambda g^2 C_1^4 - 35\lambda g^3 C_1^6 \right) \omega^2 + \left( \omega_0^2 - 12\lambda g C_1^2 - \frac{45}{2} \lambda g^2 C_1^4 - \right. \\ \left. - 35\lambda g^3 C_1^6 \right) \omega_0^2 + 30\lambda^2 g^2 C_1^4 - 105\lambda^2 g^3 C_1^6 = 0 \quad (4.25)$$

com as duas raízes:

$$\omega^2 = \left( \omega_0^2 - 6\lambda g C_1^2 + \frac{45}{4} \lambda g^2 C_1^4 - \frac{35}{2} \lambda g^3 C_1^6 \right) \pm \frac{1}{2} \left( 24\lambda^2 g^2 C_1^4 - 120\lambda^2 g^3 C_1^6 + \right. \\ \left. + \frac{5385}{4} \lambda^2 g^4 C_1^8 - 1575\lambda^2 g^5 C_1^{10} + 1225\lambda^2 g^6 C_1^{12} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.26)$$

e finalmente, dividindo-se por  $\omega_0^2$ , temos:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - 6\lambda g \frac{C_1^2}{\omega_0^2} + \frac{45}{4} \lambda g^2 \frac{C_1^4}{\omega_0^2} - \frac{35}{2} \lambda g^3 \frac{C_1^6}{\omega_0^2} \pm \\ \frac{1}{2\omega_0^2} \left( 24\lambda^2 g^2 C_1^4 - 120\lambda^2 g^3 C_1^6 + \frac{5385}{4} \lambda^2 g^4 C_1^8 - 1575\lambda^2 g^5 C_1^{10} + 1225\lambda^2 g^6 C_1^{12} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.27)$$



Para efeito de comparação , se em ( 4.23) considerarmos os termos em  $\sin(5\omega t)$ , a equação ( 4.26) ficaria:

$$\omega^2 = \left( \omega_0^2 - 6\lambda g C_1^2 + \frac{45}{4} \lambda g^2 C_1^4 - \frac{35}{2} \lambda g^3 C_1^6 \right) \pm \frac{1}{2} \left( 24\lambda^2 g^2 C_1^4 - 120\lambda^2 g^3 C_1^6 + \frac{2895}{8} \lambda^2 g^4 C_1^8 - \frac{1071}{2} \lambda^2 g^5 C_1^{10} + \frac{7595}{16} \lambda^2 g^6 C_1^{12} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.28)$$

Podemos observar então, comparando-se ( 4.28) com ( 4.26), que somente houve alteração a partir do 3.º termo dentro da raiz e que portanto, a influência de termos de arcos múltiplos em  $5\omega t$  e superiores, contribuirá muito pouco na precisão da solução final (considerando-se  $\lambda$ ,  $g$  e  $C$  pequenos).

## 4.5 Método da Fase e Amplitude Lentamente Variáveis

Este método, também conhecido como *Método das Médias* [41], ou como uma extensão do método de variação de parâmetros [40], obtém como resultado um sistema de equações autônomas, isto é, independente do tempo que, em primeira aproximação , descreve a variação da fase e amplitude da solução com o tempo. Por esta razão, é frequentemente chamado de método da fase e amplitude lentamente variáveis. Ao mesmo tempo ele corresponde à primeira aproximação do método assintótico de Bogoliubov e Mitropolsky [24].

Considerando-se o oscilador ( 4.3), livre ( $F = 0$ ) e amortecido ( $b \neq 0$ ), obtemos:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \equiv f(x, \dot{x}) \quad (4.29)$$

onde

$$f(x, \dot{x}) = -b\dot{x} + 4\lambda g x^3 - 6\lambda g^2 x^5 + 8\lambda g^3 x^7$$

Introduzimos uma transformação não-linear de coordenadas de  $x$ ,  $\dot{x}$  para  $a$  e  $\psi$ , definida por:

$$x(t) = a(t)\text{sen}(\omega_0 t + \psi(t)) \quad (4.30)$$

$$\dot{x}(t) = a(t)\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi(t))$$

Diferenciando-se a primeira equação de ( 4.30) em relação ao tempo, e comparando-se o resultado com a segunda, obtém-se:

$$\dot{a}(t)\text{sen}(\omega_0 t + \psi(t)) + a(t)\dot{\psi}(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t)) = 0 \quad (4.31)$$

Reescrevemos a equação ( 4.29) em termos das novas variáveis  $\dot{a}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$ . Calculando-se  $\ddot{x}$  da segunda equação de ( 4.30), substituindo-se em ( 4.29) juntamente com  $x$  da primeira equação de ( 4.30), obtemos:

$$\dot{a}\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi(t)) - a\dot{\psi}(t)\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t + \psi(t)) = f(x(a, \psi), \dot{x}(a, \psi)) \quad (4.32)$$

A multiplicação de ( 4.31) e ( 4.32) por  $\text{sen}(\omega_0 t + \psi(t))$  e  $\cos(\omega_0 t + \psi(t))$  respectivamente, e a subsequente adição , fornecem:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{\omega_0} f(a\text{sen}(\omega_0 t + \psi(t)), a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi(t))) \cos(\omega_0 t + \psi(t)), \\ \dot{\psi} &= \frac{-1}{\omega_0 a} f(a\text{sen}(\omega_0 t + \psi(t)), a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi(t))) \text{sen}(\omega_0 t + \psi(t)), \end{aligned} \quad (4.33)$$

Após esta transformação de coordenadas, com a qual obtivemos duas equações diferenciais de 1.<sup>a</sup> ordem, se considerarmos  $f(x, \dot{x})$  pequena,  $\dot{a}$  e  $\dot{\psi}$  também serão pequenas, isto é, a amplitude “a” e a fase  $\psi$  variam lentamente, o que significa que durante um intervalo de tempo de duração  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , tanto o valor de  $\psi$  no argumento  $(\omega_0 t + \psi(t))$  como o valor de  $a(t)$ , permanecem praticamente constantes. Em geral, como não é possível obter uma solução exata para ( 4.33), as equações diferenciais são simplificadas, substituindo-se os lados direitos pelos respectivos valores médios no intervalo de tempo  $[t, t + T_0]$ . Esta técnica

de média é usualmente denominada como sendo o método de Van der Pol ou método de Krilov-Bogoliubov [40]. Em consequência destes valores médios, “a” e  $\psi$  serão mantidas constantes no lado direito de ( 4.33) e podemos assim representá-la por:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\text{sen}(\Theta + \psi), a\omega_0 \cos(\Theta + \psi)) \cos(\Theta + \psi) d\Theta; \\ \dot{\psi} &= \frac{-1}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\text{sen}(\Theta + \psi), a\omega_0 \cos(\Theta + \psi)) \text{sen}(\Theta + \psi) d\Theta,\end{aligned}\quad (4.34)$$

onde  $\Theta = \omega_0 t$ .

Aplicando-se agora para a  $f(x, \dot{x})$  do oscilador ( 4.29) em estudo, temos:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \{-ba\omega_0 \cos(\Theta + \psi) + 4\lambda g a^3 \text{sen}^3(\Theta + \psi) - \\ &- 6\lambda g^2 a^5 \text{sen}^5(\Theta + \psi) + 8\lambda g^3 a^7 \text{sen}^7(\Theta + \psi)\} \cos(\Theta + \psi) d\Theta, \\ \dot{\psi} &= \frac{-1}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} \{-ba\omega_0 \cos(\Theta + \psi) + 4\lambda g a^3 \text{sen}^3(\Theta + \psi) - \\ &- 6\lambda g^2 a^5 \text{sen}^5(\Theta + \psi) + 8\lambda g^3 a^7 \text{sen}^7(\Theta + \psi)\} \text{sen}(\Theta + \psi) d\Theta\end{aligned}\quad (4.35)$$

Substituindo-se as potências trigonométricas e efetuando-se as integrais, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{-ba}{2} \\ \dot{\psi} &= \frac{-3}{2\omega_0} \lambda g a^2 + \frac{15}{8\omega_0} \lambda g^2 a^4 - \frac{35}{16\omega_0} \lambda g^3 a^6\end{aligned}\quad (4.36)$$

Integrando-se a primeira equação de ( 4.36) e substituindo o resultado na segunda, com as condições iniciais  $a(0) = C_0$  e  $\psi(0) = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}a &= C_0 e^{\frac{-b}{2}t} \\ \psi &= \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{g}{b} C_0^2 (e^{-bt} - 1) - \frac{15}{16} \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{g^2}{b} C_0^4 (e^{-2bt} - 1) + \frac{35}{48} \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{g^3}{b} C_0^6 (e^{-3bt} - 1)\end{aligned}\quad (4.37)$$

que de acordo com a primeira equação de ( 4.30), conduz à solução aproximada:

$$x(t) = C_0 e^{-bt/2} \text{sen} \left( \omega_0 t + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{g}{b} C_0^2 (e^{-bt} - 1) - \frac{15}{16} \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{g^2}{b} C_0^4 (e^{-2bt} - 1) + \frac{35}{48} \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{g^3}{b} C_0^6 (e^{-3bt} - 1) \right) \quad (4.38)$$

Sem o efeito do amortecimento ( $b = 0$ ), teremos:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\psi} &= \frac{-3}{2\omega_0} \lambda g C_0^2 + \frac{15}{8\omega_0} \lambda g^2 C_0^4 - \frac{35}{16\omega_0} \lambda g^3 C_0^6 \end{aligned} \quad (4.39)$$

e integrando obtemos:

$$\begin{aligned} a &= C_0 \\ \psi &= \frac{-3}{2\omega_0} \lambda g C_0^2 t + \frac{15}{8\omega_0} \lambda g^2 C_0^4 t - \frac{35}{16\omega_0} \lambda g^3 C_0^6 t \end{aligned} \quad (4.40)$$

e a solução  $x(t)$  será:

$$x(t) = C_0 \text{sen} \left( \omega_0 t - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\omega_0} g C_0^2 t + \frac{15}{8} \frac{\lambda}{\omega_0} g^2 C_0^4 t - \frac{35}{16} \frac{\lambda}{\omega_0} g^3 C_0^6 t \right). \quad (4.41)$$

que é, também, obtida levando a equação ( 4.38) ao limite quando  $b \rightarrow 0$ .

## 4.6 Método da Fase e Amplitude Lentamente Variáveis para Oscilações Forçadas e Amortecidas

Considerando-se o oscilador ( 4.3), forçado ( $F \neq 0$ ) e amortecido ( $b \neq 0$ ), obtemos:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}) \quad (4.42)$$

onde

$$f(x, \dot{x}) = -b\dot{x} + 4\lambda g x^3 - 6\lambda g^2 x^5 + F \cos(\omega t)$$

Introduzindo-se a transformação de coordenadas aplicada na seção anterior de  $x$ ,  $\dot{x}$  para  $a$  e  $\psi$ , definida por:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t)\text{sen}(\omega_0 t + \psi(t)) \\ \dot{x}(t) &= a(t)\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi(t)) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Diferenciando-se a primeira equação de ( 4.44) em relação ao tempo:

$$\dot{x}(t) = \dot{a}\text{sen}(\omega t + \psi(t)) + a(\omega + \dot{\psi}(t)) \cos(\omega t + \psi(t))$$

que comparada com a segunda equação de ( 4.44), fornece:

$$\dot{a}(t)\text{sen}(\omega t + \psi(t)) + a(t)\dot{\psi}(t) \cos(\omega t + \psi(t)) = 0 \quad (4.44)$$

Calculando-se  $\ddot{x}$  da segunda equação de ( 4.44):

$$\ddot{x}(t) = \dot{a}\omega \cos(\omega t + \psi(t)) - a\omega(\omega + \dot{\psi}(t))\text{sen}(\omega t + \psi(t)) \quad (4.45)$$

Reescrevemos a equação ( 4.42) em termos das novas variáveis  $a(t)$  e  $\psi(t)$ , substituindo-se ( 4.45) juntamente com  $x$  da primeira equação de ( 4.44) em ( 4.42), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \dot{a}\omega \cos(\omega t + \psi(t)) - a\omega^2 \text{sen}(\omega t + \psi(t)) - a\omega\dot{\psi}(t)\text{sen}(\omega t + \psi(t)) - \\ -4\lambda g a^3 \text{sen}^3(\omega t + \psi(t)) + 6\lambda g^2 a^5 \text{sen}^5(\omega t + \psi(t)) = F \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Multiplicando-se ( 4.46) por  $\cos(\omega t + \psi(t))$  e ( 4.44) por  $\omega \text{sen}(\omega t + \psi(t))$  e somando, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \frac{F}{\omega} \cos(\omega t + \psi(t)) \cos(\omega t) + \frac{a}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) \text{sen}(\omega t + \psi(t)) \cos(\omega t + \psi(t)) - \\ & - ab \cos^2(\omega t + \psi(t)) + 4 \frac{\lambda g}{\omega} a^3 \text{sen}^3(\omega t + \psi(t)) \cos(\omega t + \psi(t)) - \\ & - 6 \frac{\lambda g^2}{\omega} a^5 \text{sen}^5(\omega t + \psi(t)) \cos(\omega t + \psi(t)) \quad (4.47) \end{aligned}$$

E, multiplicando-se ( 4.46) por  $\text{sen}(\omega t + \psi(t))$  e ( 4.44) por  $-\omega \cos(\omega t + \psi(t))$  e somando, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & -\frac{F}{a\omega} \text{sen}(\omega t + \psi(t)) \cos(\omega t) + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega} \text{sen}^2(\omega t + \psi(t)) + b \text{sen}(\omega t + \psi(t)) \times \\ & \cos(\omega t + \psi(t)) - 4 \frac{\lambda g}{\omega} a^2 \text{sen}^4(\omega t + \psi(t)) + 6 \frac{\lambda g^2}{\omega} a^4 \text{sen}^6(\omega t + \psi(t)) \quad (4.48) \end{aligned}$$

Substituindo-se os lados direitos de ( 4.47) e ( 4.48) pelos respectivos valores médios, obtemos respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{F}{\omega} \cos(\omega t + \psi) \cos(\omega t) + \frac{a}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) \text{sen}(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi) - \right. \\ & - ab \cos^2(\omega t + \psi) + 4 \frac{\lambda g}{\omega} a^3 \text{sen}^3(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi) - \\ & \left. - 6 \frac{\lambda g^2}{\omega} a^5 \text{sen}^5(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi) \right] d(\omega t) \quad (4.49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{F}{a\omega} \text{sen}(\omega t + \psi) \cos(\omega t) + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega} \text{sen}^2(\omega t + \psi) + \right. \\ & + b \text{sen}(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi) - 4 \frac{\lambda g}{\omega} a^2 \text{sen}^4(\omega t + \psi) + \\ & \left. + 6 \frac{\lambda g^2}{\omega} a^4 \text{sen}^6(\omega t + \psi) \right] d(\omega t) \quad (4.50) \end{aligned}$$

Substituindo-se as potências trigonométricas e efetuando-se as integrais, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{F}{2\omega} \cos \psi - \frac{ab}{2} \\ \dot{\psi} &= -\frac{F}{2a\omega} \sin \psi + \frac{1}{2\omega}(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{3}{2\omega} \lambda g a^2 + \frac{15}{8\omega} \lambda g^2 a^4\end{aligned}\tag{4.51}$$

Soluções estacionárias são obtidas com  $\dot{a} = 0$ , ou  $a = a_s = C$ , e  $\dot{\psi} = 0$ :

$$\begin{aligned}0 &= \frac{F}{2\omega} \cos \psi - \frac{Cb}{2} \\ 0 &= -\frac{F}{2C\omega} \sin \psi + \frac{1}{2\omega}(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{3}{2\omega} \lambda g C^2 + \frac{15}{8\omega} \lambda g^2 C^4\end{aligned}\tag{4.52}$$

e elevando-se ao quadrado e somando, obtemos:

$$F^2 = \left( \omega_0^2 C - \omega^2 C - 3\lambda g C^3 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^5 \right)^2 + \omega^2 b^2 C^2\tag{4.53}$$

que é idêntica à expressão (4.16) obtida pelo método do balanço harmônico. Nesta equação, a relação  $\omega^2/\omega_0^2$  com a amplitude da solução é dada implicitamente.

## 4.7 Método de Duffing para Oscilações Harmônicas Forçadas sem Amortecimento

Este é um método de iteração utilizado originalmente por Duffing para obter soluções periódicas para oscilações harmônicas sem amortecimento [24], [53]. Consiste basicamente em escolher uma solução harmônica inicial, substituir na equação diferencial e integrá-la para obter a nova solução aproximada que será reinsertada na equação diferencial dando continuidade ao processo iterativo. Para haver convergência, é necessário que  $\lambda$ ,  $g$ ,  $F$ ,  $b$  e  $C$  sejam suficientemente pequenos.

Considerando-se o oscilador (4.3), forçado ( $F \neq 0$ ) e não-amortecido ( $b = 0$ ), obtemos:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - 4\lambda g x^3 + 6\lambda g^2 x^5 - 8\lambda g^3 x^7 = F \cos(\omega t)\tag{4.54}$$

Apesar de não apresentarmos uma prova rigorosa para a convergência do método de Duffing, usaremos o mesmo comparando parte dos resultados com resultados obtidos de outros métodos, restringindo-se a discussão a soluções periódicas com frequência circular  $\omega$  (a frequência da força externa).

Reescrevendo ( 4.54) na forma:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 4\lambda g x^3 - 6\lambda g^2 x^5 + 8\lambda g^3 x^7 + F \cos(\omega t) \quad (4.55)$$

Iniciamos com  $x_1 = C \cos(\omega t)$ ,  $C =$  constante, como primeira aproximação <sup>2</sup> para a solução desejada com frequência  $\omega$ , substituindo-se no lado direito de ( 4.55), obtendo-se:

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 C \cos(\omega t) + 4\lambda g C^3 \cos^3(\omega t) - 6\lambda g^2 C^5 \cos^5(\omega t) + 8\lambda g^3 C^7 \cos^7(\omega t) + F \cos(\omega t) \quad (4.56)$$

Substituindo-se as potências trigonométricas em ( 4.56) e integrando-se duas vezes, obtemos a próxima aproximação para a solução :

$$\begin{aligned} x_2 = & -\frac{1}{\omega^2} \left( F - \omega_0^2 C + 3\lambda g C^3 - \frac{15}{4} \lambda g^2 C^5 + \frac{35}{8} \lambda g^3 C^7 \right) \cos(\omega t) - \\ & -\frac{1}{9\omega^2} \left( \lambda g C^3 - \frac{15}{8} \lambda g^2 C^5 + \frac{21}{8} \lambda g^3 C^7 \right) \cos(3\omega t) - \\ & -\frac{1}{25\omega^2} \left( -\frac{3}{8} \lambda g^2 C^5 + \frac{7}{8} \lambda g^3 C^7 \right) \cos(5\omega t) - \frac{1}{392\omega^2} \lambda g^3 C^7 \cos(7\omega t) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Às constantes de integração foi atribuído o valor zero a fim de garantir que  $x_2$  seja uma função periódica. O processo iterativo pode ser continuado pela substituição de ( 4.57) em ( 4.55) e por nova integração , exigindo porém, para convergir, que as constantes  $\omega_0^2$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $C$  e  $F$  sejam suficientemente pequenas. O truncamento do processo iterativo no primeiro passo já fornece uma aproximação satisfatória.

---

<sup>2</sup>Na realidade já deveria ser considerada como segunda aproximação em função de  $x \equiv 0$



O coeficiente de  $\cos(\omega t)$  em ( 4.57) é tomado igual a  $C$ , a amplitude da primeira aproximação  $x_1(t)$ , na suposição de que aquele coeficiente deve diferir mas pouco deste, se  $x_1(t) = C \cos(\omega t)$  for verdadeiramente uma aproximação razoável <sup>3</sup>.

Assim temos:

$$C = -\frac{1}{\omega^2} \left( F - \omega_0^2 C + 3\lambda g C^3 - \frac{15}{4} \lambda g^2 C^5 + \frac{35}{8} \lambda g^3 C^7 \right) \quad (4.58)$$

ou,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{F}{C} - 3\lambda g C^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^4 - \frac{35}{8} \lambda g^3 C^6 \quad (4.59)$$

e finalmente, a relação entre a amplitude  $C$  e a frequência  $\omega$  da solução periódica pode ser expressa como:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{F}{C\omega_0^2} - 3\frac{\lambda g}{\omega_0^2} C^2 + \frac{15}{4} \frac{\lambda g^2}{\omega_0^2} C^4 - \frac{35}{8} \frac{\lambda g^3}{\omega_0^2} C^6 \quad (4.60)$$

que com  $F = 0$  torna-se idêntica à equação ( 4.10) do método do Balanço Harmônico.

A segunda aproximação é, então, substituindo-se ( 4.58) e ( 4.59) em ( 4.57),

$$\begin{aligned} x_2(t) = & C \cos(\omega t) - \left[ 9 \left( \omega_0^2 - \frac{F}{C} - 3\lambda g C^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^4 - \frac{35}{8} \lambda g^3 C^6 \right) \right]^{-1} \times \\ & \times \left( \lambda g C^3 - \frac{15}{8} \lambda g^2 C^5 + \frac{21}{8} \lambda g^3 C^7 \right) \cos(3\omega t) - \\ - & \left[ 25 \left( \omega_0^2 - \frac{F}{C} - 3\lambda g C^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^4 - \frac{35}{8} \lambda g^3 C^6 \right) \right]^{-1} \left( -\frac{3}{8} \lambda g^2 C^5 + \frac{7}{8} \lambda g^3 C^7 \right) \cos(5\omega t) - \\ - & \left[ 392 \left( \omega_0^2 - \frac{F}{C} - 3\lambda g C^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^4 - \frac{35}{8} \lambda g^3 C^6 \right) \right]^{-1} \lambda g^3 C^7 \cos(7\omega t) \end{aligned} \quad (4.61)$$

## 4.8 Método de Duffing Modificado

Uma pequena variação do método de Duffing [53], utilizada aqui apenas para obter a relação entre amplitude e frequência da solução harmônica, consiste em inicialmente rees-

---

<sup>3</sup>Duffing argumenta que tal procedimento fornece o resultado exato no caso linear ( $g = 0$ ) e pode-se portanto esperar produzir bons resultados para  $\lambda$  e  $g$  pequenos, o que foi pressuposto [53].

crever a equação ( 4.54) na forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2)x + 4\lambda g x^3 - 6\lambda g^2 x^5 + 8\lambda g^3 x^7 + F \cos(\omega t) \quad (4.62)$$

onde adicionou-se o termo  $\omega^2 x$  em ambos os lados da equação .

É razoável iniciarmos o processo de iteração com a solução de ( 4.62) para  $\omega^2 = \omega_0^2$  e  $g = 0$ , isto é, com a oscilação linear livre de frequência  $\omega = \omega_0$ . Portanto iniciamos com  $x_0 = A \cos(\omega t)$  como primeira aproximação , supondo-se conhecida a amplitude  $A$ .

Se inserirmos  $x_0$  no lado direito de ( 4.62), obtemos  $x_1$  como equação diferencial para a próxima aproximação :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = & (\omega^2 - \omega_0^2)A \cos(\omega t) + 4\lambda g A^3 \cos^3(\omega t) - 6\lambda g^2 A^5 \cos^5(\omega t) + \\ & + 8\lambda g^3 A^7 \cos^7(\omega t) + F \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.63)$$

efetuando-se as substituições trigonométricas:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = & (\omega^2 - \omega_0^2)A \cos(\omega t) + 4\lambda g A^3 \left( \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \right) - \\ & - 6\lambda g^2 A^5 \left( \frac{5}{8} \cos(\omega t) + \frac{5}{16} \cos(3\omega t) + \frac{1}{16} \cos(5\omega t) \right) + \\ & + 8\lambda g^3 A^7 \frac{1}{64} (\cos(7\omega t) + 7 \cos(5\omega t) + 21 \cos(3\omega t) + 35 \cos(\omega t)) + F \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Agrupando-se os termos em função de  $\cos(n\omega)$ , ( $n = 1, 3, 5, 7$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = & \left[ (\omega^2 - \omega_0^2)A + 3\lambda g A^3 + \frac{15}{4} \lambda g^2 A^5 + \frac{35}{8} \lambda g^3 A^7 + F \right] \cos(\omega t) + \\ & + \left( \lambda g A^3 - \frac{15}{8} \lambda g^2 A^5 + \frac{21}{8} \lambda g^3 A^7 \right) \cos(3\omega t) + \\ & + \left( -\frac{3}{8} \lambda g^2 A^5 + \frac{7}{8} \lambda g^3 A^7 \right) \cos(5\omega t) + \frac{1}{8} \lambda g^3 A^7 \cos(7\omega t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

A equação de ( 4.65) apresenta um caso de ressonância excepcional já que o lado direito contém um termo em  $P_1 \cos(\omega t)$ , onde  $P_1$  é um polinômio em  $A$ , da mesma forma que ocorreria na solução da equação diferencial homogênea. Se  $P_1$  não for identicamente nulo, a solução de ( 4.65) conterà um termo do tipo  $Ct \sin(\omega t)$  e  $x_1$  não poderá ser periódica. Já que estamos interessados em soluções periódicas, devemos pressupor que  $P_1$ , o coeficiente de  $\cos(\omega t)$  na equação, seja identicamente nulo. Igualando-se este coeficiente a zero, a seguinte relação será produzida entre a frequência  $\omega$  e a amplitude  $A$  da primeira aproximação :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 3\lambda g A^2 + \frac{15}{4} \lambda g^2 A^4 - \frac{35}{8} \lambda g^3 A^6 - \frac{F}{A} \quad (4.66)$$

que é a mesma relação ( 4.59) obtida pelo método de Duffing, e com  $F = 0$  torna-se a mesma relação ( 4.10) obtida pelo método do Balanço Harmônico.

Obtendo a solução  $x_1$  para ( 4.65), podemos inserí-la no lado direito de ( 4.62) e assim determinar  $x_2$ , a próxima aproximação para a solução .

## Capítulo 5

# Soluções Harmônicas

### 5.1 Método de Van der Pol

Efeturemos agora, um estudo qualitativo pelo método de Van der Pol [36], [53], que além de prover uma derivação das curvas de resposta, o que será visto no próximo capítulo, permite uma discussão simples da questão da estabilidade pela aplicação do método de Andronov e Witt, sobre um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem obtido a partir da equação :

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x - 4\lambda g x^3 = F \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

que é uma simplificação da equação ( 4.3), onde suprimimos dois termos da série. A estabilidade será, então, determinada pela utilização do critério de Poincaré (ver apêndice A).

O primeiro passo no método de Van der Pol, consiste em pressupor que  $b$ ,  $\lambda g$ ,  $F$  e  $\omega - \omega_0$  são todos pequenos e de  $O(\epsilon)$ <sup>1</sup>, isto é, estamos nas vizinhanças da vibração livre ( $F = 0$ ), não-amortecida ( $b = 0$ ) e linear ( $g = 0$ ).

O segundo passo é pressupor que:

$$x(t) = d_1 \sin(\omega t) + d_2 \cos(\omega t), \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>Onde  $\epsilon$  é um parâmetro de ordem, que é introduzido para indicar a ordem de grandeza dos termos perturbadores. No final, pode ser feito igual a um ( $\epsilon = 1$ ) sem perda de generalidade.

onde  $d_1, d_2$  são funções que variam lentamente. A periodicidade é imposta fazendo-se com que  $d_1, d_2$  sejam constantes. Isto significa dizer que  $x(t)$  é essencialmente uma oscilação de frequência  $\omega$  com amplitude e fase que variam lentamente, como no método dado na secção (4.5). Expressamos isto analiticamente estabelecendo:

$$d_i = O(1), \quad \dot{d}_i = O(\epsilon), \quad \ddot{d}_i = O(\epsilon^2), \quad (i = 1, 2) \quad (5.3)$$

Pressupomos que outros possíveis harmônicos são de  $O(\epsilon^2)$ . Então, efetuando-se as derivadas de ( 5.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{d}_1 \text{sen}(\omega t) + \dot{d}_2 \cos(\omega t) + \omega d_1 \cos(\omega t) + \omega d_2 \text{sen}(\omega t), \\ \ddot{x}(t) &= \ddot{d}_1 \text{sen}(\omega t) + \omega \dot{d}_1 \cos(\omega t) + \ddot{d}_2 \cos(\omega t) - \omega \dot{d}_2 \text{sen}(\omega t) + \omega \dot{d}_1 \cos(\omega t) - \\ &\quad - \omega^2 d_1 \text{sen}(\omega t) - \omega \dot{d}_2 \text{sen}(\omega t) - \omega^2 d_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

e calculando-se a potência cúbica de ( 5.2), obtemos:

$$x^3(t) \simeq \frac{3}{4}(d_1^2 + d_2^2)[d_1 \text{sen}(\omega t) + d_2 \cos(\omega t)] \quad (5.5)$$

mais termos de frequência  $3\omega$ , que serão ignorados.

Inserindo as expressões ( 5.2), ( 5.4) e ( 5.5) em ( 5.1), temos:

$$\begin{aligned} &2\omega \dot{d}_1 \cos(9\omega t) - 2\omega \dot{d}_2 \text{sen}(\omega t) - \omega^2 d_1 \text{sen}(\omega t) - \omega^2 d_2 \cos(\omega t) + \ddot{d}_1 \text{sen}(\omega t) + \\ &\quad + \ddot{d}_2 \cos(\omega t) + b\dot{d}_1 \text{sen}(\omega t) + b\dot{d}_2 \cos(\omega t) + \omega b d_1 \cos(\omega t) - \omega b d_2 \text{sen}(\omega t) + \\ &+ \omega^2 d_1 \text{sen}(\omega t) + \omega^2 d_2 \cos(\omega t) - 4\lambda g \frac{3}{4}(d_1^2 + d_2^2)[d_1 \text{sen}(\omega t) + d_2 \cos(\omega t)] = f \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Rejeitando-se termos de ordem superior a  $\epsilon$  e fazendo-se  $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
& (2\omega\dot{d}_1 - \omega^2 d_2 + \omega b d_1 + \omega_0^2 d_2 - 3\lambda g d^2 d_2) \cos(\omega t) + \\
& + (-2\omega\dot{d}_2 - \omega^2 d_1 - \omega b d_2 + \omega_0^2 d_1 - 3\lambda g d^2 d_1) \sin(\omega t) = F \cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Igualando-se os termos em  $\cos(\omega t)$  e  $\sin(\omega t)$  e dividindo-se por  $\omega$ , chegamos ao seguinte sistema de equações diferenciais de 1.<sup>a</sup> ordem nas funções  $d_1$  e  $d_2$ :

$$\begin{aligned}
2\dot{d}_1 + \left[ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} - 3\lambda g \frac{d^2}{\omega} \right] d_2 + b d_1 &= \frac{F}{\omega} \\
-2\dot{d}_2 + \left[ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} - 3\lambda g \frac{d^2}{\omega} \right] d_1 - b d_2 &= 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A natureza qualitativa das soluções deste sistema varia consideravelmente dependendo dos valores dos parâmetros  $b$  e  $g$ . Trataremos portanto este sistema considerando separadamente os seguintes casos:

- Caso I  $b = 0, g = 0$
- Caso II  $b = 0, g > 0$
- Caso III  $b > 0, g = 0$
- Caso IV  $b > 0, g > 0$

Definindo-se  $\Delta = 2(\omega_0 - \omega)$ , e lembrando que  $(\omega_0 - \omega) = O(\epsilon)$ , temos:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = 2\omega(\omega_0 - \omega) + O(\epsilon^2)$$

e então,  $(\omega_0^2 - \omega^2) = \Delta$  até termos de 1.<sup>a</sup> ordem. Conseqüentemente, reescrevemos o sistema (5.8) na forma:

$$\begin{aligned}
2\dot{d}_1 + \left[ \Delta - 3\lambda g \frac{d^2}{\omega} \right] d_2 + b d_1 &= \frac{F}{\omega} \\
-2\dot{d}_2 + \left[ \Delta - 3\lambda g \frac{d^2}{\omega} \right] d_1 - b d_2 &= 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Já que estamos interessados principalmente em soluções harmônicas, supomos que  $d_1$ ,  $d_2$  sejam constantes, isto é,  $\dot{d}_1 = \dot{d}_2 = 0$ . O sistema de equações ( 5.9) se reduz então a um sistema de equações algébricas para as curvas de resposta. Esta restrição de fazer  $d_1$ ,  $d_2$  constantes, também permite a aplicação do chamado método de Andronov e Witt, isto é, as soluções harmônicas da equação ( 5.1) são identificadas com os pontos singulares do sistema de equações diferenciais de 1.<sup>a</sup> ordem dado por ( 5.9). A estabilidade é então determinada pela utilização dos critérios de Poincaré para a classificação de singularidades de tais sistemas.

Adotaremos a notação :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + D\eta} \quad (5.10)$$

### 5.1.1 Caso I: $b = 0$ , $g = 0$

Nesta seção analisaremos o caso do oscilador linear ( $g = 0$ ), sem amortecimento ( $b = 0$ ), porém com forçamento ( $F \neq 0$ ).

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$\sigma = \Delta, \quad x = d_1, \quad y = d_2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tau = \frac{t}{2} \quad e \quad F_1 = \frac{F}{\omega}$$

o sistema de equações ( 5.9) se torna:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} + \sigma y &= F_1 \\ -\frac{dy}{d\tau} + \sigma x &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para analisar a estabilidade pelo critério de Poincaré, a partir de ( 5.11), fazemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma x}{F_1 - \sigma y} \quad (5.12)$$

Usando o apêndice A, determinamos os valores dos elementos da matriz Jacobiana de ( 5.11), a saber:

$$A = \sigma, \quad B = 0, \quad C = 0 \quad e \quad D = -\sigma$$

que substituídos em ( 5.10) fornecem:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{(\sigma)\xi + (0)\eta}{(0)\xi + (-\sigma)\eta} \quad (5.13)$$

e conseqüentemente temos:

$$(B - C)^2 + 4AD = -4\sigma^2, \quad AD - BC = -\sigma^2 \quad e \quad B + C = 0$$

o que nos leva a concluir que todos os pontos singulares são centros, de acordo com a classificação usada no Apêndice A, já que não foi necessária linearização para obter ( 5.13).

Todas as oscilações são estáveis neste caso.

### 5.1.2 Caso II: $b = 0, g > 0$

Nesta seção analisaremos o caso do oscilador não-linear ( $g \neq 0$ ), sem amortecimento ( $b = 0$ ) e com forçamento ( $F \neq 0$ ).

Fazendo:

$$\sigma = \Delta, \quad x = \frac{d_1}{a_0}, \quad y = \frac{d_2}{a_0}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tau = \frac{t}{2},$$

$$F_1 = \frac{F}{\omega a_0}, \quad a_0^2 = \frac{\omega}{3|\lambda|g} \quad e \quad \rho = x_0^2 + y_0^2$$

e substituindo no sistema de equações ( 5.9), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} + (\sigma + r^2)y &= F_1 \\ -\frac{dy}{d\tau} + (\sigma + r^2)x &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$



Para analisar a estabilidade pelo critério de Poincaré, a partir de ( 5.14), fazemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sigma + r^2)x}{F_1 - (\sigma + r^2)y} \quad (5.15)$$

Usando o apêndice A, determinamos os seguintes valores de:

$$A = \sigma - (2x_0^2 + \rho), \quad B = -2x_0y_0, \quad C = 2x_0y_0 \quad e \quad D = -\sigma + (2y_0^2 + \rho)$$

que substituídos em ( 5.10) fornecem:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{[\sigma - (2x_0^2 + \rho)]\xi + (-2x_0y_0)\eta}{(2x_0y_0)\xi + [-\sigma + (2y_0^2 + \rho)]\eta} \quad (5.16)$$

e conseqüentemente temos:

$$(B - C)^2 + 4AD = -4(3\rho + \sigma)(\rho + \sigma), \quad AD - BC = -(3\rho + \sigma)(\rho + \sigma) \quad e \quad B + C = 0$$

A região do gráfico ( 5.1)  $\rho$  versus  $\sigma$  acima da linha  $\rho = -\sigma/3$ , mas abaixo da linha  $\rho = -\sigma$ , determina uma região de pontos de sela pelo critério de Poincaré e portanto é uma região de instabilidade. A área restante, onde  $(B - C)^2 + 4AD < 0$  é uma região composta por centros ou espirais.

### 5.1.3 Caso III: $b > 0$ , $g = 0$

Nesta seção analisaremos o caso do oscilador linear ( $g = 0$ ), amortecido ( $b \neq 0$ ) e forçado ( $F \neq 0$ ).

Fazendo:

$$\sigma = \frac{\Delta}{b}, \quad x = d_1, \quad y = d_2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tau = \frac{bt}{2} \quad e \quad F_1 = \frac{F}{\omega b}$$

e substituindo no sistema de equações ( 5.9), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} + \sigma y + x &= F_1 \\ -\frac{dy}{d\tau} + \sigma x - y &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

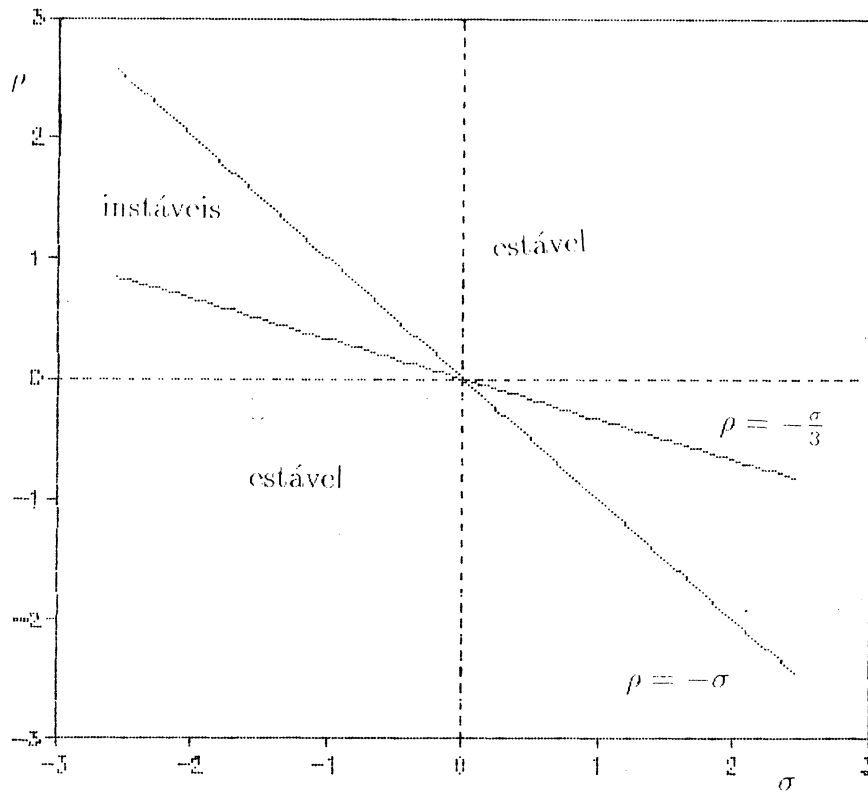


Figura 5.1: Estabilidade das soluções para  $b = 0, g > 0$

Para analisar a estabilidade pelo critério de Poincaré, a partir de ( 5.17), fazemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma x - y}{F_1 - \sigma y - x} \quad (5.18)$$

Usando o apêndice A, determinamos os valores de:

$$A = \sigma, \quad B = -1, \quad C = -1 \quad e \quad D = -\sigma$$

que substituídos em ( 5.10) fornecem:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{(\sigma)\xi + (-1)\eta}{(-1)\xi + (-\sigma)\eta} \quad (5.19)$$

e conseqüentemente temos:

$$(B - C)^2 + 4AD = -4\sigma^2, \quad AD - BC = -\sigma^2 - 1 \quad e \quad B + C = -2$$

o que nos leva a concluir que todas as oscilações correspondem a espirais estáveis.

### 5.1.4 Caso IV: $b > 0, g > 0$

Nesta seção analisaremos o caso geral do oscilador não-linear ( $g \neq 0$ ), amortecido ( $b \neq 0$ ) e forçado ( $F \neq 0$ ).

Fazendo:

$$\sigma = \Delta, \quad x = \frac{d_1}{a_0}, \quad y = \frac{d_2}{a_0}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tau = \frac{t}{2} \quad e \quad F_1 = \frac{F}{\omega a_0}$$

e substituindo no sistema de equações ( 5.9), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} + (\sigma + r^2)y + bx &= F_1 \\ -\frac{dy}{d\tau} + (\sigma + r^2)x - by &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para analisar a estabilidade pelo critério de Poincaré, a partir de ( 5.20), fazemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sigma + r^2)x - by}{F_1 - (\sigma + r^2)y - bx} \quad (5.21)$$

Usando o apêndice A, determinamos os valores de:

$$A = \sigma + (2x_0^2 + \rho), \quad B = 2x_0y_0 - b, \quad C = -2x_0y_0 - b \quad e \quad D = -\sigma - (2y_0^2 + \rho)$$

que substituídos em ( 5.10) fornecem:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{[\sigma + (2x_0^2 + \rho)]\xi + [2x_0y_0 - b]\eta}{[-2x_0y_0 - b]\xi + [-\sigma - (2y_0^2 + \rho)]\eta} \quad (5.22)$$

e conseqüentemente temos:

$$(B - C)^2 + 4AD = -4(\sigma + 3\rho)(\sigma + \rho), \quad AD - BC = -(\sigma + 3\rho)(\sigma + \rho) - b^2 \quad e$$

$$B + C = -2b$$

o que nos leva que, conforme a classificação das singularidades do Apêndice A:

- Para  $\rho = -\sigma$ , e para  $\rho = -\sigma/3$  temos nós estáveis;
- Acima de  $\rho = -\sigma$  temos espirais estáveis;
- Abaixo de  $\rho = -\sigma/3$  temos espirais estáveis;
- Entre  $\rho = -\sigma$  e  $\rho = -\sigma/3$ , temos ponto de sela para  $b^2 < (\sigma + 3\rho)(\sigma + \rho)$ , ou  $b = 0$  e nós estáveis para  $b^2 > (\sigma + 3\rho)(\sigma + \rho)$ .

## Capítulo 6

# Curvas de Ressonância

### 6.1 Introdução

Neste capítulo, procuramos construir e interpretar os diagramas que representam relações entre a frequência  $\omega$  para cada valor  $F$  da amplitude da excitação, e a amplitude da oscilação  $C$  (definida como sendo o valor numérico máximo de  $x$ ); ou, a amplitude em relação a um parâmetro  $\sigma$ , conhecido como *parâmetro de ressonância* [41], que descreve quantitativamente a proximidade (“detuning”) de  $\omega$  em relação a  $\omega_0$ .

Esses diagramas, obtidos através dos resultados da aplicação dos métodos de aproximação nos capítulos 4 e 5, são denominados de *curvas de resposta de frequência* [41] ou, *curvas de ressonância* [24].

### 6.2 Resultados

#### 6.2.1 Método de Duffing para Oscilações Forçadas sem Amortecimento

Considerando-se a relação ( 4.60), obtida no capítulo 4, entre a amplitude  $C$  e a frequência  $\omega$  para o oscilador ( 4.54), forçado ( $F \neq 0$ ) e não amortecido ( $b = 0$ ),

e considerando-se a definição de  $\omega_0^2 = 2(1 + \lambda)$ , analisaremos o comportamento das curvas de ressonância do oscilador para os casos linear e não-linear <sup>1</sup>.

No estudo de oscilações lineares, isto é, para  $g = 0$ , a equação ( 4.60) fornece:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{F}{C\omega_0^2} \quad (6.1)$$

A curva de ressonância para o oscilador linear é obtida a partir da equação ( 6.1).

Considerando-se  $C_0 = \frac{F}{\omega_0^2}$ , denominada “deflexão estática” [24], temos:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{C_0}{C} \quad (6.2)$$

ou ainda,

$$\frac{|C|}{C_0} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|} \quad (6.3)$$

com pólos em  $\omega^2 = \omega_0^2$ .

Mantendo-se a amplitude da força externa constante, observamos que o valor da amplitude da solução aumenta inicialmente com o aumento da frequência, até atingir uma singularidade, isto é, a amplitude torna-se indeterminada na ressonância. Após este ponto, o valor decresce exponencialmente com o aumento da frequência. Um fato relevante, é que a cada valor de  $\omega$  corresponde uma única amplitude  $C$  [24]. A resposta ilimitada no ponto de ressonância é devida a ausência de um termo de amortecimento [28], (cf. fig. 6.1).

No caso não-linear ( $g \neq 0$ ), as curvas do diagrama de ressonância, para  $\lambda$  e  $g$  pequenos, devem residir nas vizinhanças das curvas correspondentes do oscilador linear forçado [53].

---

<sup>1</sup>Esta análise é extensiva para o método de Duffing modificado já que a relação obtida entre frequência e amplitude é a mesma.

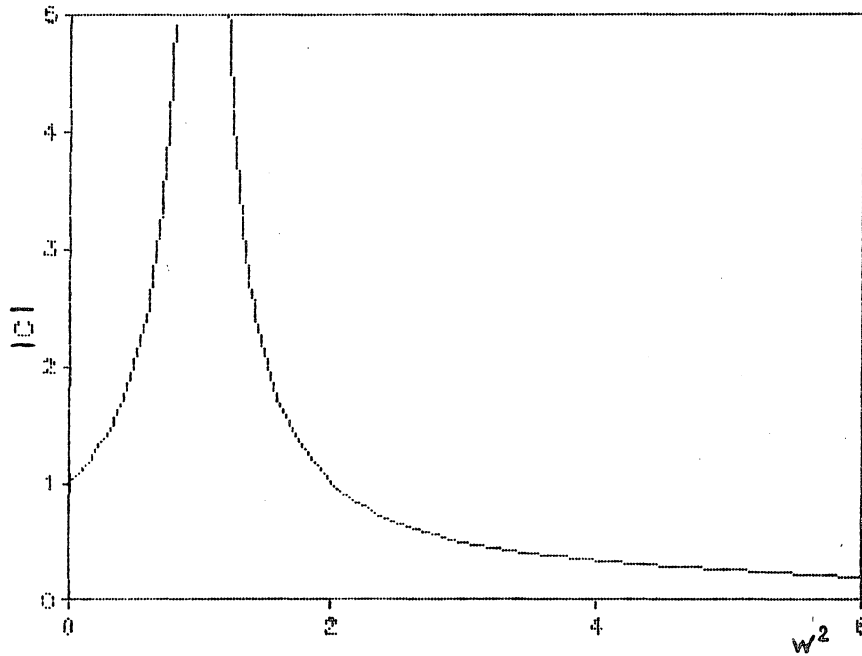


Figura 6.1: Diagrama de ressonância, caso linear

Da equação ( 4.60), com  $\frac{F}{\omega_0^2} = C_0$ , obtemos

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{C_0}{C} - 3\lambda g \frac{F^2 C^2}{\omega_0^6 C_0^2} + \frac{15}{4} \lambda g^2 \frac{F^4 C^4}{\omega_0^{10} C_0^4} - \frac{35}{8} \lambda g^3 \frac{F^6 C^6}{\omega_0^{14} C_0^6} \quad (6.4)$$

Para auxiliar na construção do diagrama, denominamos

$$S = S_1 + S_2 \quad (6.5)$$

onde,

$$S_1 = -\frac{C_0}{C}$$

$$S_2 = 1 - 3\lambda g \frac{F^2 C^2}{\omega_0^6 C_0^2} + \frac{15}{4} \lambda g^2 \frac{F^4 C^4}{\omega_0^{10} C_0^4} - \frac{35}{8} \lambda g^3 \frac{F^6 C^6}{\omega_0^{14} C_0^6}$$

podemos construir diagramas auxiliares e compor a curva de ressonância <sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Pelo método utilizado as curvas de resposta produzem resultados precisos quando  $|C|$  é pequeno o suficiente, isto é, próximo ao eixo  $\omega(S)$ .

Na equação ( 6.4),  $\omega^2$  é dada como uma função de  $C$ , uma vez que é muito importante considerar  $C$  como prescrita e  $\omega$  como uma função a ser determinada.

Como exemplo, para obtermos a curva de ressonância da fig. ( 6.2), adotaremos os seguintes valores:

$$\lambda = -0,5 \quad \longrightarrow \quad \omega_0^2 = 1$$

$$\lambda = -6g^2 - 4g \quad \longrightarrow \quad g = 0,1076252$$

$$F = 1 \quad \longrightarrow \quad C_0 = \frac{F}{\omega_0^2} = 1$$

Logo,

$$S_1 = -\frac{1}{C}$$

$$S_2 = 1 + 0,1614378C^2 - 0,0217181C^4 + 0,0027269C^6$$

O resultado pode ser observado na figura ( 6.2).

Ao contrário do caso linear, podem existir agora, para um determinado valor de  $\omega$ , até três valores para  $C$ . Outra diferença em relação ao caso linear é o fato de  $C$  ser sempre finito para todos os valores de  $\omega$ , em função da curvatura causada pela presença da não-linearidade. Isto é importante porque significa que mesmo na ausência de amortecimento, uma resposta infinita é evitada [28]. Deste modo, a amplitude permanecerá limitada já que as oscilações não-lineares são auto-limitantes [35].

O número de termos considerados na equação ( 6.4) é fundamental na obtenção de resultados corretos. Para  $|C|$  pequeno, prevalece o termo em  $C^2$  sobre as demais potências. Para  $|C|$  um pouco maior, passam a prevalecer os termos de potência



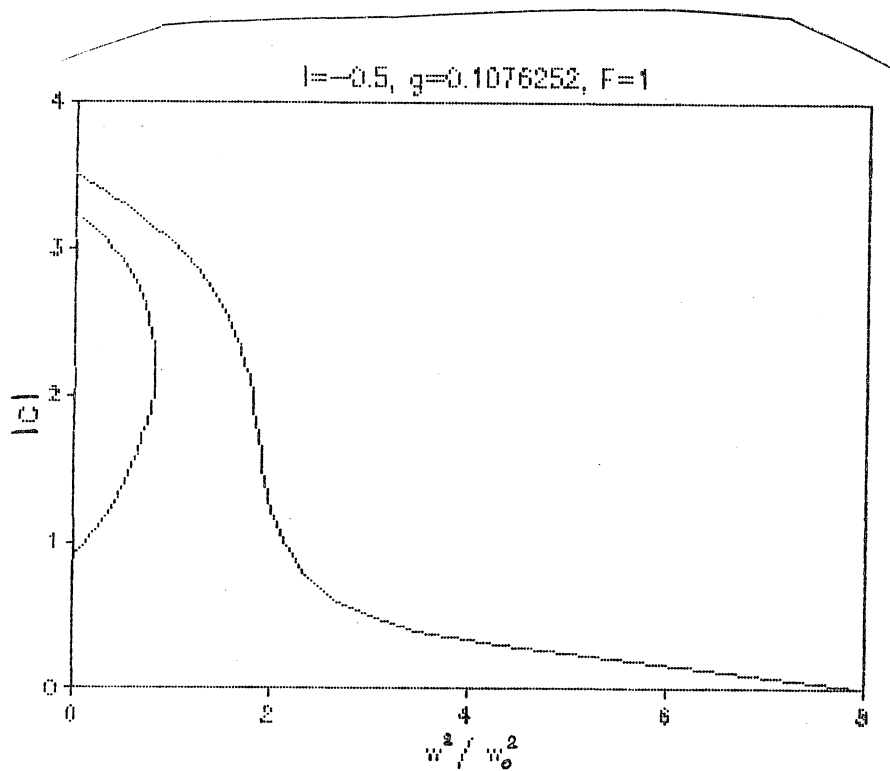


Figura 6.2: Curva de Ressonância para o oscilador não-linear, pelo método de Duffing superior, e se não escolhermos adequadamente o número de termos podemos estar distorcendo a forma da curva  $S_2$  e conseqüentemente da curva de ressonância.

### 6.2.2 Método do Balanço Harmônico

O ponto limite da região de instabilidade é aquele no qual a tangente à curva de ressonância é vertical. Este ponto pode ser determinado, diferenciando-se a expressão (4.16) em relação a  $C$  e igualando-se  $\frac{d\omega}{dC}$  a zero.

Temos então:

$$2 \left( \omega_0^2 C - \omega^2 C - 3\lambda g C^3 + \frac{15}{4} \lambda g^2 C^5 \right) \left( \omega_0^2 - \omega^2 - 9\lambda g C^2 + \frac{75}{4} \lambda g^2 C^4 \right) + 2b^2 C \omega^2 = 0 \quad (6.6)$$

Dividindo-se por  $2C$  e atribuindo-se o valor  $b = 0$ , obtemos as soluções :

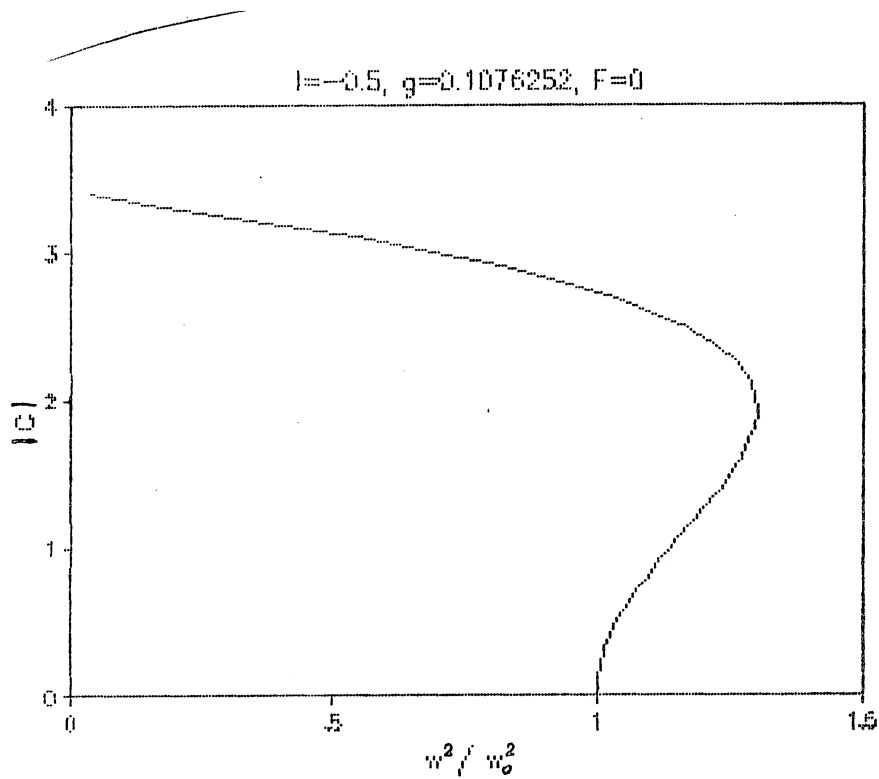


Figura 6.3: Diagrama de ressonância, pelo método do balanço harmônico

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - 3 \frac{\lambda g}{\omega_0^2} C^2 + \frac{15}{4} \frac{\lambda g^2}{\omega_0^2} C^4 \quad (6.7)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - 9 \frac{\lambda g}{\omega_0^2} C^2 + \frac{75}{4} \frac{\lambda g^2}{\omega_0^2} C^4$$

Para pequenos valores de  $b$ , as soluções situam-se na proximidade das curvas definidas por ( 6.7), conforme fig. ( 6.3), onde aparece somente uma “linha mestra” devido à ausência de forçamento.

Na presença dos termos de amortecimento e de atrito, o diagrama será idêntico ao do caso IV no método de Van der Pol, a ser visto na sequência.

### 6.2.3 Método de Ritz

A partir da equação ( 4.28), podemos determinar as curvas de resposta do oscilador (cf. figura ( 6.4)), que é, na forma, idêntica à figura ( 6.3) do balanço harmônico,

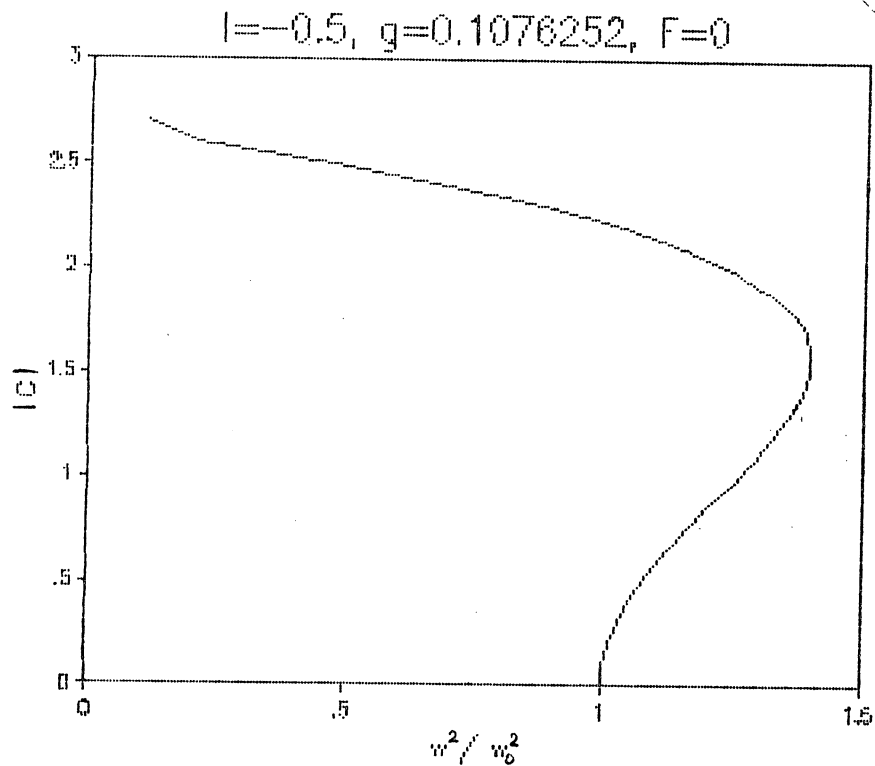


Figura 6.4: Diagrama de ressonância, pelo método de Ritz

apresentando também somente uma “linha mestra” devido à ausência de forçamento ( $\lambda = -0.5$ ,  $g = 0.1076252$  e  $F = 0$ ).

### 6.2.4 Método de Van der Pol

Para o caso I, da solução pelo método de Van der Pol no capítulo 5, com  $b = 0$  e  $g = 0$ , num ponto singular  $(x_0, y_0)$ , obtemos a partir do sistema de equações ( 5.11):

$$\sigma y_0 = F_1 \tag{6.8}$$

$$\sigma x_0 = 0$$

Fazendo  $\rho = x_0^2 + y_0^2$ , obtemos as curvas de resposta (cf. fig. 6.5). Cada curva corresponde a valores diferentes de  $F_1$ . O segmento que aparece no topo de cada

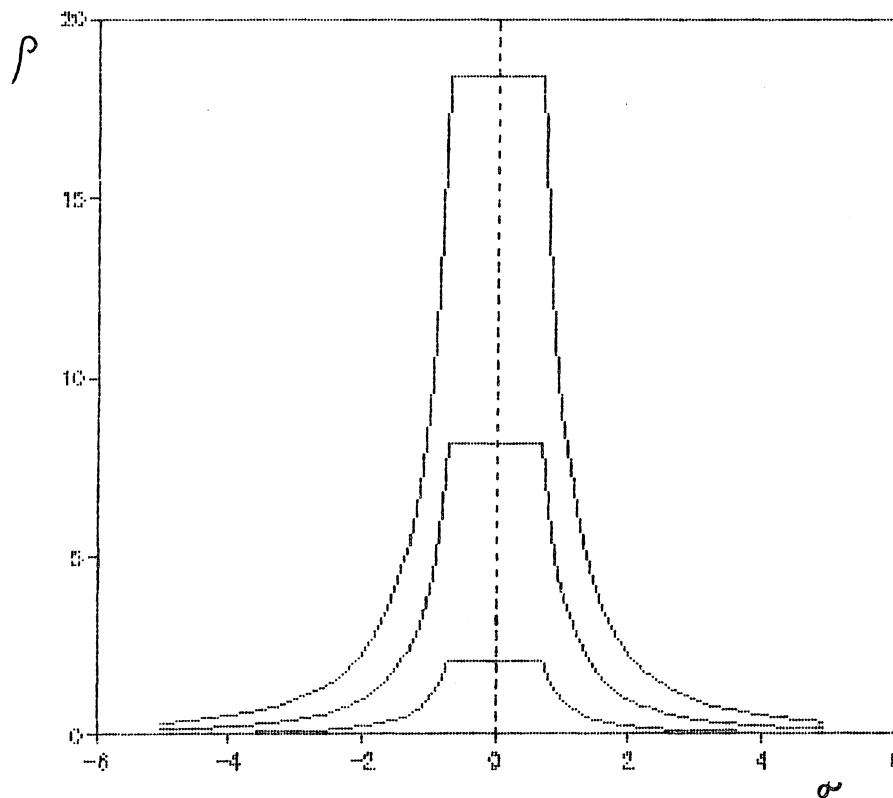


Figura 6.5: Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso I  
 curva, não faz parte do diagrama, tendo sido introduzido por restrições do programa  
 usado para desenhar a curva):

$$\sigma^2 \rho = F_1^2 \quad (6.9)$$

- $F_1 = 0$  (vibração livre):  $\rho = 0$  ou  $\sigma = 0$ .
- $F_1 \neq 0$  (vibração forçada):  $\rho = \frac{F_1^2}{\sigma^2}$ .

Para o caso II, com  $b = 0$  e  $g > 0$ , num ponto singular  $(x_0, y_0)$ , obtemos a partir do sistema de equações ( 5.14):

$$(\sigma + \rho)y_0 = F_1 \quad (6.10)$$

$$(\sigma + \rho)x_0 = 0$$

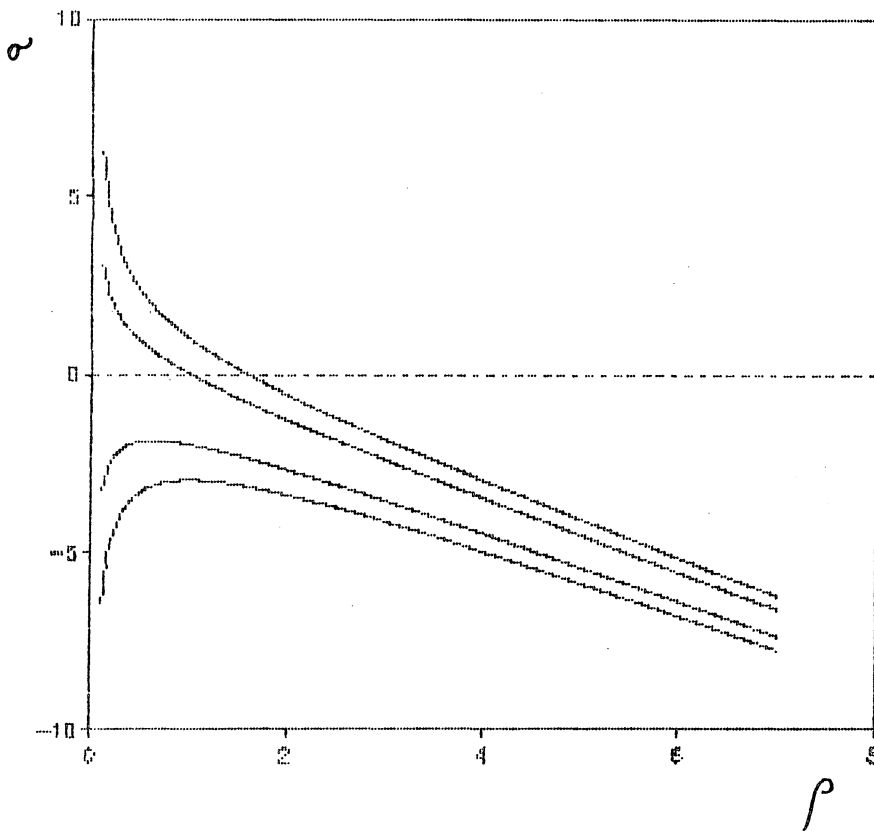


Figura 6.6: Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso II

Fazendo  $\rho = x_0^2 + y_0^2$ , obtemos as curvas de resposta (cf. fig. 6.6), para dois valores de  $F_1$ , onde podemos observar novamente, a curvatura do diagrama devido à não-linearidade do sistema):

$$(\sigma + \rho)^2 \rho = F_1^2 \tag{6.11}$$

- $F_1 = 0$  (vibração livre):  $\rho = 0$  ou  $\sigma = -\rho$ .
- $F_1 \neq 0$  (vibração forçada):  $\rho = \frac{F_1^2}{(\sigma + \rho)^2}$

Para  $F_1^2$  pequeno e  $\rho \approx 0$ , temos  $\rho = F_1^2 / \sigma^2$ .

Para  $F_1^2$  pequeno e  $\rho \approx 1$ , temos  $\rho \approx -\sigma \pm F_1$ .

Para o caso III, com  $b > 0$  e  $g = 0$ , num ponto singular  $(x_0, y_0)$ , obtemos a partir do sistema de equações ( 5.17):

$$\sigma y_0 + x_0 = F_1 \quad (6.12)$$

$$\sigma x_0 - y_0 = 0$$

Elevando-se ao quadrado as duas expressões e somando-se membro a membro, obtemos:

$$\rho(\sigma^2 + 1) = F_1^2 \quad (6.13)$$

então, apresentam-se duas situações possíveis, a saber:

- $F_1 = 0$  (vibração livre):  $\rho = 0$
- $F_1 \neq 0$  (vibração forçada):  $\rho = \frac{F_1^2}{\sigma^2 + 1}$

O diagrama de ressonância deixa de apresentar a singularidade devido à presença de amortecimento (cf. fig. 6.7).

Para o caso IV, com  $b > 0$  e  $g > 0$ , num ponto singular  $(x_0, y_0)$ , obtemos a partir do sistema de equações ( 5.20):

$$(\sigma + \rho)y_0 + bx_0 = F_1 \quad (6.14)$$

$$(\sigma + \rho)x_0 - by_0 = 0$$

Elevando-se ao quadrado as duas expressões e somando-se membro a membro, obtemos:

$$\rho[(\sigma + \rho)^2 + b^2] = F_1^2 \quad (6.15)$$

o que leva aos seguintes casos:

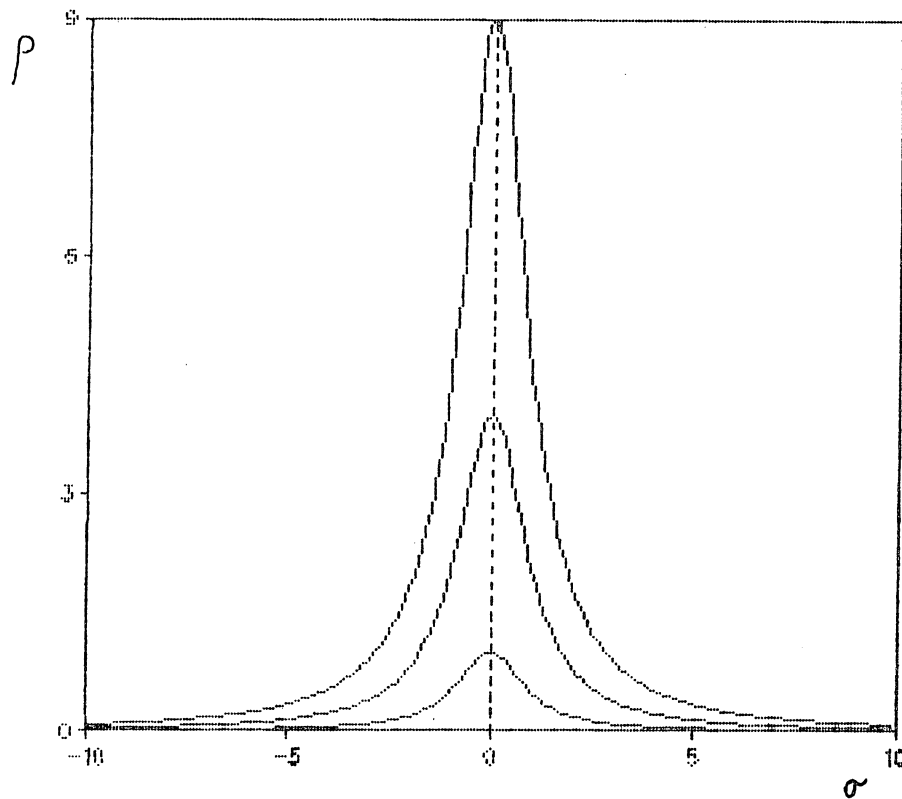


Figura 6.7: Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso III

- $F_1 = 0$  (vibração livre):  $\rho = 0$
- $F_1 \neq 0$  (vibração forçada):  $\rho = \frac{F_1^2}{(\sigma + \rho)^2 + b^2}$

Um sistema não-linear com uma curva de ressonância como a da figura ( 6.8), exibirá o fenômeno de salto de amplitude ( [24], [53], [35], [28] e [40]) ou histerese. Mantendo-se constante o valor da amplitude da excitação externa, aumentamos lentamente o valor da frequência de excitação ,  $\sigma$ , e observamos a amplitude da resposta harmônica. Iniciando-se no ponto 1, o aumento de  $\sigma$  provoca um pequeno aumento de  $\rho$  passando pelo ponto 2 até atingir o ponto 3. Se continuamos aumentando  $\sigma$ , um salto do ponto 3 ao ponto 4 é observado com o acompanhamento de uma elevação em  $\rho$  e posterior redução à medida que  $\sigma$  cresce em direção ao ponto 5. No sentido inverso, à medida que reduzimos  $\sigma$ , o valor de  $\rho$  cresce até atingirmos o ponto 6. Com um pequeno decréscimo no valor da frequência, observa-se um salto do ponto 6 ao ponto 2, com

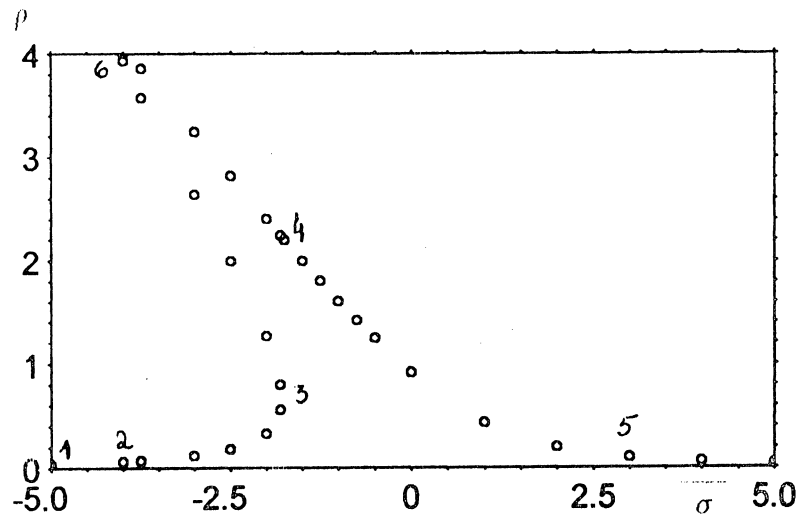


Figura 6.8: Diagrama de ressonância pelo método de Van der Pol - caso IV

consequente diminuição do valor de  $\rho$ , depois do que,  $\rho$  volta a decrescer lentamente com a diminuição da frequência. A região 3 a 6 da curva de resposta é instável e portanto não pode ser produzida experimentalmente [40].

Saltos de amplitude deste tipo podem ser também observados em movimentos oscilatórios mecânicos e elétricos, por exemplo [35].



## Capítulo 7

### Conclusões

O estudo de osciladores não-lineares forçados periodicamente é relevante sob um duplo ponto de vista - primeiramente, ele é um modelo bastante adequado ao estudo da dinâmica não-linear, pela riqueza de comportamentos dinâmicos presentes. Em segundo lugar, tais osciladores podem representar exata ou aproximadamente diversos sistemas físicos de interesse. No caso do potencial biestável que foi o objeto do presente trabalho, além das aplicações em lasers e outros campos, a equação de Schrödinger de uma partícula sujeita a este potencial tem soluções exatas, o que tem gerado um número bastante elevado de publicações recentes a respeito.

Este grande interesse na Mecânica Quântica levou-nos a considerar o problema classicamente equivalente - qual o comportamento de uma partícula clássica sujeita a este potencial? Para tornarmos o modelo o mais realista possível, foi incluído também um termo de dissipação mecânica, que obviamente só possui sentido do ponto de vista macroscópico; e também um forçamento externo periódico - que torna o sistema não-autônomo e, portanto, potencialmente mais rico em matéria de comportamentos possíveis.

Em princípio, por exemplo, este fato permite a existência de órbitas caóticas no sistema. No entanto, no decorrer de inúmeras simulações feitas com o presente potencial, onde variamos diversos parâmetros do sistema (como amplitude e frequência

da força externa, coeficiente de atrito, intensidade do termo anarmônico, etc.), não foi possível detectar tal comportamento de maneira inequívoca. Entretanto, certos comportamentos decorrentes do que parece ser uma cascata de bifurcações com duplicação do período (vide Capítulo 3) levam-nos a crer que seja possível, ainda que para intervalos extremamente estreitos de valores dos parâmetros, a existência de atratores caóticos.

Esta constatação decorre do fato de que ciclos limites de período muito alto, como os que observamos no plano de fase, nem sempre são facilmente distinguíveis de atratores caóticos. Esta dificuldade foi acentuada pela nossa escolha de um diagnóstico muito sensível a ruídos numéricos - os espectros de potência - onde certas bandas espectrais alargadas podem ou não ser associadas a um comportamento caótico. Para evidenciar de maneira inequívoca este fato, caso ele realmente ocorra, necessitaríamos empregar outros diagnósticos, como os expoentes de Lyapounov. Esta extensão do presente trabalho está começando a ser implementada no momento.

A despeito deste fato, uma das observações que reputamos mais importantes para futura investigação, é a de que as cascatas de bifurcações dos ciclos limites repetem-se após um certo tempo, fato este cuja interpretação desconhecemos a nível da literatura disponível. Uma explicação teórica adequada poderia ser feita com o auxílio da teoria de bifurcações. Outro enfoque a este fenômeno é tentar identificar uma "universalidade", ou seja, a existência de leis de escala para as bifurcações, o que é bem mais simples.

Na impossibilidade de obter informações sobre a dinâmica de nosso sistema pela absoluta ausência de soluções exatas, foi imperativo o emprego de métodos de aproximação. Nesta última situação, obtivemos soluções a partir de diversos (seis) métodos disponíveis na literatura de oscilações não-lineares: Balanço Harmônico, Fase e Amplitude Lentamente Variáveis, Ritz, Van der Pol, Duffing, Duffing Modi-

ficado. Gostaríamos de ressaltar que a compilação de métodos que fizemos não se pode encontrar em uma única referência; sua organização e unificação de linguagem e notação sendo um dos objetivos deste trabalho. Além disso, estendemos a análise, em alguns casos, a potências superiores a quatro - o que não é encontrado na bibliografia clássica de oscilações não-lineares, como o tratado de Nayfeh e Mooh (que analisa até termos de potência quatro no potencial).

Como é de se esperar, o uso de métodos diferentes de aproximação leva a resultados ligeiramente distintos. Uma maneira de visualizar tais resultados foi a confecção de curvas de ressonância, que exibem a resposta (em amplitude) do oscilador a variações na frequência de excitação externa. As características gerais destas curvas são as mesmas para todos os métodos, como a presença de histerese devido ao forçamento e o efeito “auto-limitante” da não-linearidade. Uma comparação definitiva entre eles, para indicar qual o mais eficiente, só pode ser efetuada a partir da comparação com a solução numérica “exata” do oscilador (já que não há solução analítica com tal propriedade). Uma extensão importante deste trabalho consistirá em proceder a este exame, para o qual contaremos com o auxílio dos espectros de potência, bem como as curvas de ressonância obtidos para esta dissertação .

## Apêndice A

# Estabilidade das Soluções Harmônicas

### A.1 Método de Andronov e Witt

O método de Andronov e Witt [36] [53] nos permite identificar as soluções harmônicas da equação diferencial ordinária de ordem  $n$  com pontos singulares de um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1.<sup>a</sup> ordem. A estabilidade das soluções pode então ser determinada pela utilização do critério de Poincaré [53], para classificação de singularidades de tais sistemas.

Dado o sistema de equações diferenciais ordinárias de 1.<sup>a</sup> ordem:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F_x(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= F_y(x, y)\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde pelo menos uma das funções  $F_x$ ,  $F_y$  é não-linear, sua solução pode ser representada por uma curva no plano  $xy$ , iniciando de algum ponto inicial  $(x_0, y_0)$ . Este plano não deve ser confundido com o plano de fase, que somente se aplica para o caso particular onde  $\dot{x} = y$  [28].

As curvas de solução no plano  $xy$  podem ser obtidas aproximadamente na vizinhança de pontos de equilíbrio por um processo de linearização . O sistema ( A.1) pode ter

mais de um ponto de equilíbrio, devendo o método de linearização ser aplicado na região próxima a cada um desses pontos, de modo a se obter uma imagem completa das curvas de solução no plano  $xy$ .

Do sistema ( A.1) podemos obter a equação das tangentes às curvas de solução , dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{F_y}{F_x} \quad (\text{A.2})$$

Um *ponto singular* no plano  $xy$  para o sistema ( A.1), é aquele onde ambas as funções  $F_x(x, y)$  e  $F_y(x, y)$  são nulas. Isto implica, pelo sistema de equações ( A.1), que num ponto singular  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , de modo que um ponto singular também é um ponto de equilíbrio [28].

Logo, no ponto singular  $(x_0, y_0)$ , temos:

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0) = 0 &\Rightarrow \frac{dx_0}{dt} = 0 \\ F_y(x_0, y_0) = 0 &\Rightarrow \frac{dy_0}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

De acordo com a idéia básica de Andronov e Witt [53], a estabilidade de qualquer solução harmônica de ( A.1), é definida conforme o caráter da singularidade de ( A.2). Por exemplo, se a singularidade de ( A.2) for um ponto de sela, a solução periódica correspondente deveria ser considerada instável, já que uma pequena perturbação resultaria, em geral, em grandes alterações em  $x$  e  $y$ .

Para estudar a estabilidade do ponto singular, escolhemos um ponto inicial próximo ao mesmo e analisamos se o ponto  $(x, y)$  na curva de solução permanece próximo ao ponto singular analisado [4], [28]. Sejam, pois:

$$x = x_0 + \xi \quad y = y_0 + \eta$$

Derivando-se em relação ao tempo, e efetuando a linearização através de uma expansão em série de Taylor nas vizinhanças do ponto singular  $(x_0, y_0)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 + \dot{\xi} &= F_x(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = F_x(x_0, y_0) + \xi \left. \frac{\partial F_x}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + \eta \left. \frac{\partial F_x}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} + \dots \quad (\text{A.4}) \\ \dot{y}_0 + \dot{\eta} &= F_y(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = F_y(x_0, y_0) + \xi \left. \frac{\partial F_y}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + \eta \left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} + \dots\end{aligned}$$

e considerando-se ( A.3), obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \xi \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \eta \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ \dot{\eta} &= \xi \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) + \eta \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Logo,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + D\eta} \quad (\text{A.6})$$

onde,

$$A = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial F_y}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial F_x}{\partial x} \quad e \quad D = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

com  $AD - BC \neq 0$ , pois do contrário, ( A.6) se torna  $d\eta/d\xi = \text{constante}$ , e neste caso, sem interesse para este contexto.

Considerando-se o sistema de equações ( A.5) em notação matricial:

$$\dot{\delta} = \mathbf{J}\delta \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\delta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad e$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana ou de Floquet. A estabilidade dos pontos singulares é determinada pelos autovalores de  $\mathbf{J}$ , os quais são solução da equação secular [12], [28], [4]:

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (\text{A.8})$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} C - \lambda & D \\ A & B - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

também denominada *equação característica*, que pode ainda ser expressa na forma:

$$\lambda^2 - (B + C)\lambda + BC - AD = 0 \quad (\text{A.9})$$

que fornece as raízes (autovalores):

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ B + C \pm [(B + C)^2 - 4(BC - AD)]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{A.10})$$

ou expresso de forma mais abreviada:

$$\lambda = \frac{1}{2} [(B + C) \pm \sqrt{\Delta}] \quad (\text{A.11})$$

onde

$$\Delta = (B - C)^2 + 4AD = (B + C)^2 + 4(AD - BC)$$

A análise da estabilidade, com base nas raízes da equação característica, pode ser resumida da seguinte forma [53]:

Para  $(B - C)^2 + 4AD > 0$ :

- Nó se  $AD - BC < 0$ 
  - \* Estável se  $B + C < 0$
  - \* Instável se  $B + C > 0$
- Ponto de Sela se  $AD - BC > 0$

Para  $(B - C)^2 + 4AD < 0$ :

- Centro se  $B + C = 0$
- Espiral se  $B + C \neq 0$ 
  - \* Estável se  $B + C < 0$
  - \* Instável se  $B + C > 0$

Para  $(B - C)^2 + 4AD = 0$ :

- Nó
  - \* Estável se  $B + C < 0$
  - \* Instável se  $B + C > 0$

o que abrange todos os casos possíveis.



# Bibliografia

- [1] Abarbanel, H.D.I. and Ronki, A.: *Hamiltonian Structure for Smooth Vector Fields*, Phys. Lett. A, **124**, 281, 1987.
- [2] Alves, R.: *Filosofia da Ciência - Introdução ao Jogo e suas Regras*, São Paulo, Editora Brasiliense, 1981, pp. 209.
- [3] Anderson, E. C., Shepard, S. e Sohn, P.: *Signal Computing*, Byte, 155-164, Nov 1992.
- [4] Arnold, V.: *Equações Diferenciais Ordinárias*, Moscovo, Editora Mir, 1985, pp. 327.
- [5] Bahar, L. Y. and Kwatny, H. G.: *Generalized Lagrangian and Conservation Law for the Damped Harmonic Oscillator*, Am. J. Phys., **49**(11), 1062-1065, Nov. 1981.
- [6] Bai-lin, H.: *Numerical Methods to Study Chaos in Ordinary Differential Equations* in "Directions in Chaos", Singapore, Ed. Hao Bai-Lin, World Scientific, **2**, 295-309, (1988).
- [7] Bak, P.: *The Devil's Staircase*, Physics Today, 38-45, Dec 1986.
- [8] Beims, M. W. e Gallas, J. A. C.: *Existence of Infinite Exact Eigensolutions for the  $x^2 + \lambda x^2/(1 + gx^2)$  Interaction*, Rev. Bras. Fis., **20**, 92-98, 1990.
- [9] Bergé, P., Pomeau, Y. e Vidal, C.: *Order within Chaos*, Paris, Hermann and John Wiley and Sons, Inc., 1984, pp. 329.

- [10] Berghe, G. V. e De Meyer, H. E.: *Pairs of Analytical Eigenfunctions for the  $x^2 + \lambda x^2/(1 + gx^2)$  Interaction*, J. Phys. A, **22**, 1705-1710, 1989.
- [11] Blecher, M. H. e Leach, P. G. L.: *The Schrödinger Equation for the  $x^2 + \lambda x^2/(1 + gx^2)$  Interaction*, J. Phys. A, **20**, 5923-5927, 1987.
- [12] Boyce, W. E. and Di Prima, R. C.: *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Rio de Janeiro, Guanabara Koogan, 5.<sup>a</sup> ed., 1994, pp. 531.
- [13] Bracewell, R. N.: *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill Book Company, 2nd edition, 356-384, 1986.
- [14] Caldas, I. L. and Tasso, H.: *Limit Cycles of Periodically Forced Oscillations*, Phys. Lett. A, **135(4,5)**, 264-266, 1989.
- [15] Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Packard, N. H. and Shaw, R. S.: *Chaos*, Sci. Am., 38-49, December, 1986.
- [16] Ditto, W. L. and Pecora, L. M.: *Mastering chaos*, Sci. Am., 62-68, August, 1993.
- [17] Dwight, H. B.: *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, New York, Macmillan, 9th edition, 1968.
- [18] Eckmann, J. P. and Ruelle, D.: *Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors*, Rev. Mod. Phys., **57**, No. 3, Part I, 617-655, Jul 1985.
- [19] Gallas, J. A. C.: *Exact Analytical Eigenfunctions for the  $x^2 + \lambda x^2/(1 + gx^2)$  Interaction*, J. Phys. A, **21**, 3393-3397, 1988.
- [20] Gleick, J.: *Caos: A Criação de uma Nova Ciência*, 4.<sup>a</sup> ed., Rio de Janeiro, Editora Campus Ltda., 1991, pp. 310.
- [21] Grebogi, C.: *Nonlinear Dynamics - The Role of Supercomputers in Basic Energy Science*, U.S. Department of Energy Report, 79-88 (1985).

- [22] Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J. A.: *Chaos, Strange Attractors, and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics*, Science, **238**, 632-638, Oct, 1987.
- [23] Guckenheimer, J. and Holmes, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York, Springer-Verlag, 1986, pp. 458.
- [24] Hagedorn, P.: *Oscilações Não-Lineares*, São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda., 1984, pp. 320.
- [25] Hayashi, C.: *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, New York, McGraw Hill, (1964).
- [26] Hénon, M.: *On the Numerical Computation of Poincaré Maps*, Physica **5D**, 412-414, (1982).
- [27] Hofstadter, D. R.: *Strange Attractors: Mathematical Patterns Delicately Poised Between Order and Chaos*, Sci. Am., **245(5)**, 16-29, Nov 1981.
- [28] Huntley, I. D. and Johnson, R. M.: *Linear and Nonlinear Differential Equations*, Chichester, Ellis Horwood Limited, 1983, pp. 190.
- [29] Hurewicz, W.: *Lectures on Ordinary Differential Equations*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1958, pp.122.
- [30] Kadanoff, L. P.: *Roads to Chaos*, Physics Today, 46-53, Dec, 1983.
- [31] Kaushal, R. S.: *Small  $g$  and Large  $\lambda$  Solution of the Schrödinger Equation for the Interaction  $\lambda x^2/(1 + gx^2)$* , J. Phys. A, **12(10)**, L253, 1979.
- [32] Kubíček, M. and Marek, M.: *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*, New York, Springer-Verlag, 1983, 84-85.
- [33] Lakhtakia, A.: *On the Simultaneous Eigenproblem for the  $x^2 + \lambda x^2(1 + gx^2)^{-1}$  Interaction: Extension of Gallas' Results*, J. Phys. A, **22**, 1701-1703, 1989.
- [34] Levy, H. and Baggett, E. A.: *Numerical Solutions of Differential Equations*, New York, Dover Publications, Inc., 1950, pp.238.

- [35] Marion, J.B.: *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 2nd. ed., Academic Press, New York, 1970.
- [36] McCartin, B. J.: *An Alternative Analysis of Duffing's Equation*, SIAM Review, **34**, No. 3, 482-491, Sep 1992.
- [37] McCracken, D. D. and Dorn, W. S.: *Numerical Methods and Fortran Programming*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1964, pp. 457.
- [38] Milonni, P. W., Shih, M.-L. e Ackerhalt, J. R.: *Chaos in Laser-Matter Interactions*, Singapore, World Scientific, 1987, pp. 369.
- [39] Minorsky, N.: *Nonlinear Oscillations*, New York, D. Van Nostrand Company, Inc., 1962, pp. 714.
- [40] Nayfeh, A. H.: *Introduction to Perturbation Techniques*, New York, John Wiley and Sons, 1981, pp. 519.
- [41] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T.: *Nonlinear Oscillations*, New York, John Wiley and Sons, 1979, pp. 704.
- [42] Ottino, J. M.: *The Mixing of Fluids*, Sci. Am., **260**, 40-49, Jan, 1989.
- [43] Peitgen, H.-O. e Richter, P. H.: *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986, pp. 199.
- [44] Polyakov, A. M.: *Quark Confinement and Topology of Gauge Theories*, Nucl. Phys., **B120**, 429-459, 1977.
- [45] Risken, H. and Vollmer, H. D.: *The Influence of Higher Order Contributions to the Correlation Function of the Intensity Fluctuation in a Laser near Threshold*, Zeit. für Physik, **201**, 323-330, 1967.
- [46] Rowlands, G.: *Turbulence, Chaos and Strange Attractors*, Culham Plasma Physics Summer School, 1-22, (1986).

- [47] Schuster, H. G.: *Deterministic Chaos*, 2nd edition, Weinheim, Physik-Verlag, 1984, pp. 220.
- [48] Schwab, S. H. S.: *Elementos de Análise de Fourier*, (Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas), Curitiba, 1994, pp. 86.
- [49] Shinbrot, T., Grebogi, C., Ott, E. e Yorke, J. A.: *Using Small Perturbations to Control Chaos*, Nature, **363**, 411-417 (1993).
- [50] Simon, H. A.: *Prediction and Prescription in Systems Modeling*, Operations Research, Baltimore, **38**, n. 1, p. 7-14, Jan/Feb 1990.
- [51] Sparrow, C.: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, New York, Springer-Verlag, 1982, pp. 269.
- [52] Steeb W.-H. and Kunick, A.: *Lagrange Functions of a Class of Dynamical Systems with Limit-cycle and Chaotic Behaviour*, Phys. Rev. A, **25(6)**, 2889-2892, Jun 1982.
- [53] Stoker, J. J.: *Nonlinear Vibrations*, 1.<sup>a</sup> ed., New York, Interscience Publishers, Inc., 1950, pp. 273.
- [54] Thompson, J. M. T. e Stewart, H. B.: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, London, John Wiley and Sons Ltd., 1986, pp. 376.
- [55] Varshni, Y. P.: *Eigenenergies of  $r^2 + \lambda r^2/(1 + gr^2)$  Potential Obtained by the Shifted  $1/N$  Expansion*, Phys. Rev. A, **36(7)**, 3009-3014, Oct 1987.
- [56] Viana, R. L.: *Problemas Não-lineares com Perturbação Impulsiva e Aplicações em Física de Plasmas*, Tese de Doutorado, Instituto de Física da USP, São Paulo, 1991, pp. 217.
- [57] Wood Jr., T.: *Caos: a Criação de uma Nova Ciência*, São Paulo, Revista de Administração de empresas, **33(4)**, 94-105, Jul/Ago, 1993.