

JOSÉ OZILDO DE MOURA

APLICAÇÃO DO AJUSTAMENTO LIVRE À FOTOGRAMETRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1981

APLICAÇÃO DO AJUSTAMENTO LIVRE À FOTOGRAMETRIA

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências
Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências pela Universidade Federal do Paraná

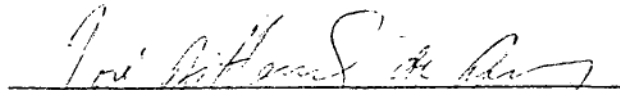
por


JOSÉ OZILDO DE MOURA, Engenheiro Civil

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1981

BANCA EXAMINADORA


PhD. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE, Orientador


Dr. HANS-PETER BÄHR


MSc. DENIZAR BLITZKOW

Aos meus pais:

JOSÉ DE MOURA RÊGO

e

MARIA AURORA DA PAZ MOURA

AGRADECIMENTOS

Desejamos externar nossos agradecimentos,
ao Dr. José Bittencourt de Andrade, Coordenador do
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, pelo incentivo
e orientação na elaboração deste trabalho;

ao Dr. Camil Gemael, pela leitura e sugestões apre-
sentadas;

à Fundação Universidade Federal do Piauí, por ter con-
cedido meu afastamento para realização do Curso;

à Bel. em Biblioteconomia Maria Eliane Stroparo, pelo
preparo das referências bibliográficas.

ao Tecnologista Romario Cardoso de Araujo, pelo tra-
balho de dactilografia.

SINOPSE

Este trabalho é dividido em quatro capítulos e dá um método para o ajustamento de redes livres, onde nenhum parâmetro precisa ser fixo.

O capítulo I apresenta a noção de injunções e estabelece a diferença entre ajustamento livre e clássico.

No capítulo II, as teorias sobre inversas generalizadas são estudadas para obter a solução de mínimos quadrados e norma mínima de um sistema possível inconsistente de equações ponderadas $AX=-L$.

O capítulo III estuda o ajustamento livre e clássico pelo método das equações de observação, usando as fórmulas deduzidas no capítulo II.

Finalmente no capítulo IV, um bloco de seis fotografias foi ajustado pelos dois métodos; para testar o método proposto, e seus resultados foram analisados.

SYNOPSIS

This paper is divided in four Chapters and gives a method for the adjustment of free networks where no parameter needs to be fixed.

Chapter I presents the notion of constraints and establishes the difference between free and classical adjustment.

In Chapter II, the theories on generalized inverses are studied in order to obtain the minimum norm least square solution for a possible inconsistent system of weighted equations $AX = -L$.

Chapter III studies the classical and free adjustment by the method of observation equations using the formulas deduced in Chapter II.

Finally, in Chapter IV, a block of six photos has been adjusted by two methods in order to test the proposed method, and its results have been analysed.

CONTEÚDO

	Página
Título.....	ii
Dedicatória.....	iii
Agradecimentos.....	iv
Sinopse.....	v
Synopsis.....	vi
Conteúdo.....	vii

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1	Ajustamento clássico.....	01
1.1.1	Injunções iniciais.....	01
1.1.2	Variação das injunções iniciais.....	01
1.1.3	Visualização geométrica.....	02
1.1.4	Interpretação algébrica.....	03
1.2	Ajustamento livre.....	03

CAPÍTULO II

EXISTÊNCIA E CONSTRUÇÃO DE INVERSAS GENERALIZADAS.

2.1	Equações de Penrose.....	06
2.2	Existência e construção das inversas generalizadas A^g	07
2.3	Propriedades das inversas A^g	12
2.4	Bases para o espaço coluna e espaço nulo de uma matriz.....	14

2.5	Existência e construção das inversas reflexivas A^R	17
2.6	Existência e construção das inversas generalizadas fraca à direita, fraca à esquerda e pseudo-inversa.....	19
2.7	Solução de sistemas lineares.....	23
2.8	Caracterização das inversas $A^{(1,3)}$ e $A^{(1,4)}$	25
2.9	Matrizes idempotentes e projetores.....	26
2.10	Inversas generalizadas com espaço coluna e espaço nulo prescritos.....	31
2.11	Projeções ortogonais e projetores ortogonais.....	36
2.12	Solução de mínimos quadrados de sistemas lineares inconsistentes.....	38
2.13	Solução de norma mínima.....	41
2.14	Inversas generalizadas ponderadas.....	44
2.15	Cálculo da pseudo-inversa.....	48
2.15.1	Característica de uma matriz.....	58

CAPÍTULO III

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO PARAMÉTRICO

3.1	Introdução.....	59
3.2	Esperança matemática.....	59
3.3	Matriz variância-covariância (MV-C).....	61
3.4	Aproximação linear da série de Taylor na forma matricial.....	64
3.5	Lei de propagação da matriz variância-covariância.....	66

3.6	Matriz dos coeficientes de peso.....	68
3.7	Ajustamento pelo método das equações de observação.....	69
3.7.1	Equação de observação.....	69
3.7.2	MV-C dos valores observados (Σ_{L_b})	70
3.7.3	Resolução do sistema (3.7.9).....	71
3.8	Uso de Iterações no método paramétrico....	76

CAPÍTULO IV

EXEMPLO NUMÉRICO

4.1	Introdução.....	77
4.2	Modelo matemático.....	78
4.2.1	Equações projetivas.....	79
4.2.2	Transformação de coordenadas topocêntricas para fotogramétricas.....	79
4.2.3	Modelo matemático.....	81
4.3	Modelo linearizado.....	83
4.4	Obtenção das coordenadas fiduciais (observações) e dos valores aproximados dos parâmetros.....	87
4.4.1	Coordenadas fiduciais.....	87
4.4.2	Refração fotogramétrica.....	87
4.4.3	Valores aproximados dos parâmetros.....	90
4.5	Aplicação de injunções (relativas) de posição aos pontos de controle.....	91
4.5.1	Modelo linearizado.....	92
4.5.2	Matriz dos coeficientes.....	93
4.5.3	Equações normais.....	94
4.6	Programas usados.....	95

4.7	Resultados	95
4.7.1	Testes qui-quadrado.	96
4.8	Conclusões e Recomendações	108
NOTAS DE REFERÊNCIAS		110
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		113
APÊNDICE: PROGRAMAS FORTRAN		115

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - Ajustamento Clássico

1.1.1 - Injunções Iniciais

Consideremos as coordenadas topocêntricas de um ponto qualquer de uma aerotriangulação em bloco. Como elas são obtidas? Sabemos que as mesmas resultam de um ajustamento das respectivas coordenadas observadas nas fotografias (coordenadas de modelo), partindo-se dos seus valores aproximados obtidos de um mapa ou do próprio mosaico fotográfico. Para que tenhamos um sistema de referência fixo, devemos ter, dentre os demais parâmetros do ajustamento, as coordenadas topocêntricas de, no mínimo, três pontos de controle (podemos ter apenas a cota do terceiro), tomando-se para valores aproximados das mesmas os valores fornecidos pela Geodésia. O Ajustamento é feito de tal maneira que as coordenadas terrestres desses pontos de controle variem dentro de suas variâncias obtidas geodesicamente. Tal imposição se constitui em um mínimo de sete equações adicionais (com resíduos ponderados) do tipo "observado - calculado = 0", que representam as injunções iniciais do sistema.

1.1.2 - Variação das Injunções Iniciais

Quais as consequências de uma alteração das injunções iniciais? O "bloco aerotriangulado", por independender de tais injunções, não seria afetado; o mesmo ocorreria com a forma quadrática $V^T P V$ (V : vetor dos resíduos; P : matriz dos pesos) e, conseqüentemente, com a variância da unidade de peso (σ_0^2) [01],

mas as coordenadas e o elipsóide de erros de todos os pontos sofreriam alterações.

Podemos dizer que a cada grupo de injunções iniciais que se arbitre corresponderá uma coleção distinta de coordenadas, existindo portanto, infinitas coleções para o problema.

1.1.3 - Visualização Geométrica

Consideremos (fig. 1.1.3) os pontos A, B, C, D, ... situados sobre a superfície física da Terra (a, a_1, b, c são coordenadas conhecidas).

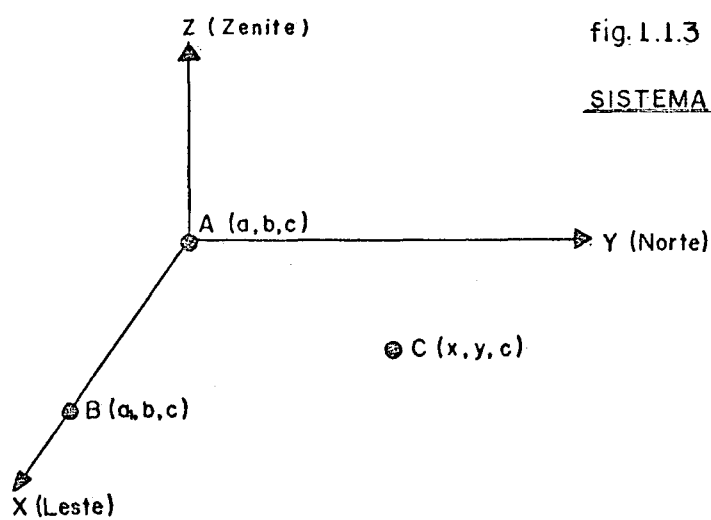
Tais pontos poderão, após o ajustamento, ser individualizados com três números. Entretanto ficarão determinados α :

a) fixarmos as coordenadas de um ponto A, para impedir translações do sistema, que alterariam as coordenadas de todos os pontos.

b) fixarmos as coordenadas de um ponto B, para impedir rotações em torno dos eixos Y e Z (que também alterariam as coordenadas).

c) fixarmos a cota Z do ponto C, não colinear com AB, para impedir rotações em torno do eixo X.

As injunções visualizadas geometricamente neste item, chamadas injunções de posição, não são os únicos tipos de injunções que podemos usar em aerotriangulação. Quaisquer injunções que fixem o sistema e que possam ser expressas em termos das coordenadas, podem ser utilizadas.



1.1,4 - Interpretação Algébrica

Algebricamente, a não fixação de injunções iniciais implica em uma matriz $N = A^T P A$, dos coeficientes das equações normais singular, com característica $r = n - k$, sendo n a ordem da matriz e k o grau de singularidade (ou deficiência de característica).

1.2 - Ajustamento Livre

a) Há poucos anos a A.G.I. introduziu uma alteração de 14 unidades no valor da gravidade de Potsdam, datum gravimétrico mundial. Nas duas décadas anteriores, a comunidade geodésica já tinha ciência de que aquele valor envolvia um erro superior a uma dezena de unidades [02]. Isso, entretanto, não impediu que centenas de milhares de estações gravimétricas espalhadas por todos os continentes e ilhas continuassem vinculadas ao longo de tantos anos, àquele valor sabidamente errado.

b) Haverá lógica em que as coordenadas de todos os vértices do sistema geodésico brasileiro dependam basicamente de quatro valores iniciais fixados de maneira um tanto arbitraria?

c) Por outro lado, uma vez variando as injunções iniciais variam o vetor dos parâmetros ajustados (X_a) e a matriz variância - covariância destes parâmetros (ΣX_a), e a elipse dos erros não pode ser considerada uma medida absoluta de precisão. Em tais circunstâncias não seria lógico investigar um critério para escolher, dentre as soluções possíveis, uma que pudesse ser considerada a "melhor"?

d) Considerações desta natureza conduzem naturalmente à idéia de um "ajustamento livre", ou seja, um ajustamento realizado sem a adoção de injunções iniciais.

e) Em termos de álgebra de Cailey estariámos chegando a um beco sem saída, pois a matriz (N) das equações normais é singular e, portanto, não admite inversa ordinária. Entretanto, sabemos que qualquer matriz admite uma inversa, chamada inversa generalizada. A idéia de inversas generalizadas data de 1920, quando Moore estendeu a noção de inversa a matrizes singulares. Somente em 1951, um geodesta, Bjerhammar, fez uso das mesmas em ajustamento livre.

Neste trabalho nos propomos a demonstrar que um sistema (inconsistente) de equações lineares, $AX = -L$, tem uma única solução X tal que:

$$V^T P V = \text{mín} \quad (1.2.1)$$

e

$$X^T X = \text{mín}, \quad (1.2.2)$$

e que esta solução única pode ser dada por qualquer uma das expressões abaixo:

$$X = -(P^{1/2} A)^+ P^{1/2} L \quad (1.2.3)$$

$$X = -N^{(1,4)} U \quad (1.2.4)$$

$$X = -N^+ U \quad (1.2.5)$$

Sendo,

$P^{1/2}$: raiz quadrada da matriz dos pesos (P)

$N = A^T P A$

$$U = A^T P L$$

$N^{(1,4)}$ e N^+ : inversas generalizadas a serem definidas posteriormente.

Além disso, faremos uma aerotriangulação em bloco utilizando os métodos "clássico" e "livre", tendo em vista a comparação dos resultados obtidos pelos mesmos.

CAPÍTULO IIEXISTÊNCIA E CONSTRUÇÃO DE INVERSAS GENERALIZADAS2.1 - Equações de Penróse

$$A X A = A \quad (2.1.1)$$

$$X A X = X \quad (2.1.2)$$

$$(A X)^T = A X \quad (2.1.3)$$

$$(X A)^T = X A \quad (2.1.4)$$

Definição 2.1.1 - Chama-se inversa generalizada de uma matriz A , a uma matriz $X = A^g$ satisfazendo (2.1.1) .

Definição 2.1.2 - Chama-se inversa generalizada reflexiva de uma matriz A , a uma matriz $X = A^r$ satisfazendo (2.1.1) e (2.1.2) .

Definição 2.1.3 - Chama-se inversa generalizada fraca à direita de uma matriz A , a uma matriz $X = A^d$ satisfazendo (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) .

Definição 2.1.4 - Chama-se inversa generalizada fraca à esquerda de uma matriz A , a uma matriz $X = A^e$ satisfazendo (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.4).

Definição 2.1.5 - Chama-se de pseudo-inversa de uma matriz A , a matriz $X = A^+$ satisfazendo (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.4).

Definição 2.1.6 - De modo geral, definimos como $X = A^{(i,j)}$ uma inversa generalizada de A satisfazendo (2.1.i) e (2.1.j).

2.2 - Existência e Construção das Inversas Generalizadas A^g

Definição 2.2.1 - Diz-se que uma matriz $H_{m \times n}^r$, de característica r , está na forma normal de Hermite se:

a) cada uma de suas r primeiras linhas contém, no mínimo, um elemento não nulo, enquanto as linhas restantes contém somente zeros.

b) As r primeiras colunas da matriz unitária I_m , aparecem como colunas da matriz H .

Por uma adequada permutação de suas colunas, a matriz H pode ser transformada em uma matriz particionada da forma:

$$R = \left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right| \quad (2.2.1)$$

onde 0 representa a matriz nula.

Tal permutação das colunas de H pode ser interpretada como uma pós-multiplicação de H por uma adequada matriz permutação P .

Definição 2.2.2 - Se P_j representa a j -ésima coluna de P e se a j -ésima coluna de I_n aparece na k -ésima coluna de H , então,

$$P_j = e_k$$

sendo, e_k a k -ésima coluna de I_n .

Exemplo 2.2.1 - Seja reduzir à forma da equação (2.2.1) a matriz

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Solução - No caso, a primeira coluna de I_4 aparece na terceira coluna de H , logo, $P_1 = e_3$. De igual maneira obtemos: $P_2 = e_4$, $P_3 = e_2$ e $P_4 = e_1$

Então,

$$R = HP = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Qualquer matriz na forma normal de Hermite pode ser transformada em uma matriz particionada como a da equação (2.2.1), pós-multiplicando-a por uma matriz permutação P .

Entretanto, para uma matriz qualquer, podemos chegar diretamente à forma particionada (2.2.1) através do método de eliminação de GAUSS:

- a) achar o maior elemento da primeira coluna;
- b) colocar no pivô (isto é, em $a_{\ell\ell}$, onde $\ell = 1$ inicialmente) e, ao mesmo tempo, trocar de posição as linhas;
- c) dividir toda linha do pivô por $a_{\ell\ell}$;
- d) subtrair das outras linhas, a linha ℓ multiplicada por $a_{i\ell}$. Toda coluna ℓ , com exceção do pivô, ficou zerada.

e) Repetir os passos (a) a (d) para o novo pivô, isto é, para $l=l+1$ até $l=r$

Teorema 2.2.1 - Para qualquer matriz $(n-r) \times (m-r)$, a matriz

$$n \times m \quad S_m = \left| \begin{array}{cc} I_r & 0 \\ 0 & L \end{array} \right| \quad (2.2.2)$$

é uma inversa A^g da matriz dada em (2.2.1)

Demonstração.

$$\left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} I_r & 0 \\ 0 & L \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} I_r & KL \\ 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right|_{++}$$

A redução de uma matriz A pelo método de eliminação de GAUSS pode ser interpretada como uma premultiplicação de A por uma matriz elementar E, tal que

$$EAP = \left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right| \quad (2.2.3)$$

Teorema 2.2.2 - Sejam $A_{m \times n}^r$, E_m^m e P_n^n matrizes (o índice superior indicando a característica) tais que

$$EAP = \left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right| \quad (2.2.3)$$

então, para qualquer matriz $(n-r) \times (m-r)$, a matriz

$$X = P \left| \begin{array}{cc} I_r & 0 \\ 0 & L \end{array} \right| E \quad (2.2.4)$$

é uma inversa A^g de A .

Demonstração. Escrevendo (2.2.3) como:

$$A = E^{-1} \left| \begin{array}{cc} I_r & K \\ 0 & 0 \end{array} \right| P^{-1} \quad (2.2.5)$$

verifica-se que X satisfaz $A X A = A$ ††

Seja $A_{m \times n}$ uma matriz e $T_0 = |A \quad I_m|$.

Podemos aplicar o método de eliminação de GAUSS à matriz T_0 para encontrar a matriz elementar E . Após a eliminação ser completada, teremos

$$T_k = ET_0 = |EA \quad E|$$

Exemplo 2.2.2 - Seja calcular uma inversa generalizada da matriz

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 20 & 16 \\ 3 & 9 & 18 & 12 & 6 \\ 1 & 7 & 13 & 30 & 19 \\ 3 & 9 & 18 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

Solução:

$$T_0 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 20 & 16 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 18 & 12 & 6 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 13 & 30 & 19 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 18 & 12 & 6 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T_1 = \left| \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & -6 & -3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 & 15 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & -6 & -3/4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$T_2 = \left| \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{5} & 10 & 25 & 15 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & -6 & -3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & -6 & -3/4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$T_3 = \left| \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -5 & -2 & 7/20 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & -1/20 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{3} & -18 & -15 & -12/20 & 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & -15 & -12/20 & 0 & -3/5 & 1 \end{array} \right|$$

$$T_4 = \left| \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -7 & 3/20 & 1/3 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & 13 & 7/20 & -2/3 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 & -4/20 & 1/3 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$P = I$ (matriz unitária)

$$E = \left| \begin{array}{cccc|c} 3/20 & 1/3 & -3/5 & 0 & \\ 7/20 & -2/3 & 3/5 & 0 & \\ -4/20 & 1/3 & -1/5 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \right|$$

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$X = P \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} 3/20 & 1/3 & -3/5 & 0 \\ 7/20 & -2/3 & 3/5 & 0 \\ -4/20 & 1/3 & -1/5 & 0 \\ \hline 0 & -a & 0 & a \\ 0 & -b & 0 & b \end{vmatrix}$$

é uma inversa generalizada de A ††

2.3 - Propriedades das Inversas A^g

Definição 2.3.1 - Diz-se que uma matriz E é idempotente se $E^2 = E$

Lema 2.3.1

a) A característica de uma matriz A não excede a característica de qualquer uma de suas inversa A^g :

$$r(A) \leq r(A^g)$$

Demonstração. Esta propriedade depende do fato de que a característica de um produto não excede a característica de cada fator |03|. Então,

$$r(A) = r(AA^gA) \leq r(A^g)$$

$$r(A) \leq r(A^g)$$

b) $(A^T)^g = (A^g)^T$ onde A^T representa a transposta de A.

Demonstração. Sejam:

$$X = (A^T)^g \quad e \quad Y = (A^g)^T$$

Obtendo a transposta de ambos os membros de $AA^gA=A$,
teremos

$$A^T(A^g)^T A^T = A^T \text{ ou } A^T Y A^T = A^T \quad (2.3.1)$$

Mas,

$$A^T(A^T)^g A^T = A^T \text{ ou } A^T X A^T = A^T \quad (2.3.2)$$

A comparação de (2.3.1) com (2.3.2) nos dá,

$$(A^T)^g = (A^g)^T \quad (2.3.3)$$

c) Se A é uma matriz idempotente, $A^g = A$

Demonstração. $AAA = A^2A = AA = A$. Donde, $A = A^g$

d) Dada uma matriz A qualquer, AA^g e A^gA são idempoten-
tes e tem a mesma característica que A .

Demonstração. Posmultiplicando,

$$AA^gA = A$$

por A^g , obtemos:

$$(AA^g)(AA^g) = AA^g$$

Por outro lado, a característica de um produto não excede a ca-
racterística de cada fator, logo,

$$r(AA^gA) = r|(AA^g)A| = r(A) \leq r(AA^g) \leq r(A)$$

Então,

$$r(AA^G) = r(A)$$

De igual maneira provaríamos para $A^G A$. ††

2.4 - Bases Para o Espaço Coluna e Espaço Nulo de Uma Matriz

Definição 2.4.1 - Chamamos de espaço coluna $R(A)$ de uma matriz ${}_m A_n$ ao espaço linear gerado pelas colunas de A:

$$R(A) = \{y \in R^m : y = Ax \text{ para algum } x \in R^n\}$$

onde R^m representa o espaço vetorial m-dimensional.

Definição 2.4.2 - Definimos o espaço nulo $N(A)$ de uma matriz ${}_m A_n$ como o conjunto de todos os vetores de R^n que são transformados no vetor nulo de R^m , através de A:

$$N(A) = \{x \in R^n : Ax = 0\}$$

Definição 2.4.3 - Chama-se de base de um espaço vetorial n-dimensional V, a uma seqüência de vetores linearmente independentes $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ que geram V. Exceto quando dito o contrário, a nossa base será a de vetores unitários.

A partir da forma normal de Hermite podemos obter bases para $R(A)$, $N(A)$ e $R(A^T)$.

As r colunas linearmente independentes da matriz ${}_m A_n^r$, formam uma base para $R(A)$. Se a coluna C_j da matriz unitária I_r aparece na k-ésima coluna da matriz EA (forma normal de Hermite), então a k-ésima coluna de A é um elemento da base de $R(A)$.

Também podemos verificar que quaisquer $(m-r)$ colunas da matriz

$$n^{B(n-r)} = \left| \begin{array}{c} -K \\ I_{n-r} \end{array} \right| \quad (2.4.1)$$

formam uma base para $N(A)$.

Por outro lado, é evidente que as r primeiras linhas da matriz EA são linearmente independentes e cada uma é uma combinação linear das linhas de A . Portanto, elas formam uma base para $R(A^T)$.

Exemplo 2.4.1 - Seja determinar bases para $R(A)$, $N(A)$ e $R(A^T)$, sendo A a matriz do exemplo (2.2.2)

Solução:

a) base para $R(A)$. Vemos que as três primeiras colunas da matriz unitária I_3 aparecem nas três primeiras colunas de

$$T_4 = | EA \quad E |$$

do exemplo (2.2.2). Portanto, as três primeiras colunas de A formam uma base para $R(A)$.

b) Base para $N(A)$. Como para o exemplo anterior, $P = I$, temos:

$$EAP = EA = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} I_r & K \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$B = P \left| \begin{array}{c} -K \\ I_{n-r} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 11 & 7 \\ -17 & -13 \\ 6 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$m - r = 4 - 3 = 1$$

Então, qualquer uma das duas colunas de B forma uma base para $N(A)$..

c) Base para $R(A^T)$. Da matriz E A obtemos

$$C = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & 17 & -6 \\ -7 & 13 & -5 \end{array} \right|$$

As colunas de C formam uma base para $R(A^T)$. ††

Lema 2.4.1 - Para qualquer matriz A, são válidas as relações:

- a) $R(A A^g) = R(A)$
- b) $N(A^g A) = N(A)$
- c) $R((A^g A)^T) = R(A^T)$

Demonstração. Veja Greville [04].

Lema 2.4.2 - Dadas duas matrizes A e B

- a) $R(AB) = R(A)$ se e somente se $r(AB) = r(A)$

b) $N(AB) = N(B)$ se e somente se $r(AB) = r(B)$

Demonstração. Veja Greville [05].

2.5 - Existência e Construção das Inversas Reflexivas A^r

Teorema 2.5.1 - Seja A uma matriz qualquer e $X = A^g$ uma de suas inversas generalizadas. X será uma inversa reflexiva se e somente se $r(X) = r(A)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3.1 (d)

$$r(XA) = r(A)$$

Agora, se,

$$r(A) = r(X)$$

ficamos com

$$r(XA) = r(X)$$

e, pelo Lema (2.4.2),

$$R(XA) = R(X)$$

Agora, seja x_i a i -ésima coluna de X . É lógico que $x_i \in R(X)$. Então $x_i \in R(XA)$ ou seja, existe algum vetor y_i tal que $x_i = XAy_i$. Considerando y_i como a i -ésima coluna de uma certa matriz Y , podemos escrever: $XA Y = X$

Premultiplicando por A , ambos os membros da expressão anterior, obtemos,

$$AX = AXAY = AY$$

e, premultiplicando por X ,

$$XAX = XAY = X$$

Por outro lado, sendo X uma inversa generalizada de A , $r(A) = r(AX)$ e, para que A seja uma inversa generalizada de X , devemos ter $r(AX) = r(X)$. Então X será uma inversa generalizada reflexiva de A somente se $r(A) = r(X)$ ††

Lema 2.5.1 - Sejam Y e Z inversas generalizadas de uma dada matriz A . Então,

$$X = Y A Z$$

é uma inversa generalizada reflexiva de A .

Demonstração.

$$AXA = A(YAZ)A = (AYA)ZA = AZA = A$$

$$XAX = (YAZ)A(YAZ) = Y(AZA)YAZ = Y(AYA)Z = YAZ = X$$

Portanto, $X = A^r$. ††

Exemplo 2.4.2 - Seja calcular uma inversa generalizada reflexiva da matriz A do exemplo (2.2.2)

Solução:

Atribuindo valores a \underline{a} e \underline{b} obtemos duas inversas generalizadas de A :

$$Y = \begin{vmatrix} 3/20 & 1/3 & -3/5 & 0 \\ 7/20 & -2/3 & 3/5 & 0 \\ -4/20 & 1/3 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Z = \begin{vmatrix} 3/20 & 1/3 & -3/5 & 0 \\ 7/20 & -2/3 & 3/5 & 0 \\ -4/20 & 1/3 & -1/5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$YA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X = YAZ = \begin{vmatrix} 3/20 & 205/3 & -3/5 & -68 \\ 7/20 & -350/3 & 3/5 & 116 \\ -1/5 & 130/3 & -1/5 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \dagger\dagger$$

2.6 - Existência e Construção das Inversas Generalizadas Fraca à Direita, Fraca à Esquerda e Pseudo-Inversa.

Lema 2.6.1 - Para qualquer matriz A,

$$r(AA^T) = r(A^T A) = r(A) = r(A^T)$$

Demonstração. Se A possui m linhas e n colunas, AA^T terá m linhas e sua característica será m menos o número de linhas proporcionais.

Para mostrar que

$$r(AA^T) = r(A)$$

é suficiente mostrar que toda relação linear entre as linhas de A vale para as linhas de AA^T e vice-versa.

Uma relação linear não trivial entre as linhas de uma matriz H é equivalente à existência de um vetor linha não nulo x^T , tal que $x^T H = 0$. Por exemplo, a matriz A do exemplo (2.2.2) guarda uma relação linear entre a segunda e quarta linha e, para a mesma, $x^T = |0 \quad -1 \quad 0 \quad 1|$ satisfaz $x^T A = 0$.

Agora,

$$x^T A = 0 \Rightarrow x^T AA^T = 0$$

e, reciprocamente,

$$\begin{aligned} x^T AA^T = 0 &\Rightarrow 0 = x^T AA^T x = (A^T x)^T A^T x \\ &\Rightarrow A^T x = 0 \Rightarrow 0 = (A^T x)^T = x^T A \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato que, para todo vetor coluna y^T só se anula se todos os elementos de y forem nulos.

A demonstração de que $r(A^T A) = r(A)$ e $r(A) = r(A^T)$ é semelhante ††

Corolário 2.6.1 - Para toda matriz A , $R(AA^T) = R(A)$ e $N(A^T A) = N(A)$

Demonstração. Isto resulta dos Lemas (2.4.2) e (2.6.1)††

Teorema 2.6.1 - Seja A uma matriz qualquer. Considere-
mos as relações:

$$Y = (A^T A)^g A^T \quad (2.6.1)$$

$$Z = A^T (AA^T)^g \quad (2.6.2)$$

Então, Y é uma inversa generalizada fraca à direita A^d , e Z é uma inversa generalizada fraca à esquerda A^e .

Demonstração. Lembrando que

$$R(A^T A) = R(A^T) \quad (\text{corolário (2.6.1)})$$

podemos escrever,

$$A^T = A^T AU \quad (2.6.3)$$

para algum U.

Transpondo (2.6.3) teremos,

$$A = U^T A^T A \quad (2.6.4)$$

consequentemente,

$$AYA = U^T A^T A (A^T A)^g A^T A = U^T A^T A = A$$

Então Y satisfaz (2.1.1)

Mas, $r(Y) \geq r(A)$ pelo Lema 2.3.1 (a)

e,

$$r(Y) \leq r(A^T) = r(A) \text{ pela definição de Y e Lema (2.6.1)}$$

Portanto,

$$r(Y) = r(A)$$

e, pelo Teorema (2.5.1), Y satisfaz (2.2.1) e (2.2.2).

Finalmente, (2.6.4), (2.6.1) e (2.6.3) dão,

$$\begin{aligned} AY &= (U^T A^T A)Y = (U^T A^T A) |(A^T A)^g A^T| \\ &= U^T A^T A(A^T A)^g A^T A U = U^T A^T A U, \end{aligned}$$

que é claramente hermitica.

Portanto, Y satisfaz (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) .

De igual maneira provaríamos para Z ††

Teorema 2.6.2 - Para qualquer matriz A,

$$A^{(1,4)} A A^{(1,3)} = A^+ \quad (2.6.5)$$

Demonstração. Façamos,

$$X = A^{(1,4)} A A^{(1,3)} \quad (2.6.6)$$

Segue-se, do Lema (2.5.1) que X é uma inversa generalizada reflexiva.

Entretanto, (2.6.6) nos dá,

$$AX = AA^{(1,3)} \quad \text{e} \quad XA = A^{(1,4)}A$$

Então,

$$(AX)^T = (AA^{(1,3)})^T = AA^{(1,3)} = AX$$

$$(XA)^T = (A^{(1,4)}A)^T = A^{(1,4)}A = XA$$

Portanto, X satisfaz (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.4)

Agora, suponhamos que exista uma outra matriz Y satisfazendo as quatro equações que definem a pseudo-inversa.

Então,

$$\begin{aligned} X &= X(AX)^T = XX^T A^T = XX^T (AYA)^T \\ &= X(AX)^T (AY)^T = XAY = (XA)^T (YA)^T Y \\ &= A^T Y^T Y = (YA)^T Y = Y \end{aligned}$$

Portanto, $X = A^+$ e é única.

Logicamente, como as classes das inversas A^d e A^e estão contidas nas classes das inversas $A^{(1,3)}$ e $A^{(1,4)}$ respectivamente, podemos particularizar (2.6.5):

$$A^e AA^d = A^+ \quad (2.6.7)$$

2.7 - Solução de Sistemas Lineares

A principal aplicação das inversas generalizadas A^g é na solução de sistemas lineares.

Teorema 2.7.1 - Sejam ${}_m A_n$, ${}_p B_q$ e ${}_m D_g$ matrizes quaisquer. Então a equação matricial

$$A X B = D \quad (2.7.1)$$

é consistente se e somente se, para quaisquer inversas A^g e B^g , tivermos,

$$AA^g DB^g B = D \quad (2.7.2)$$

em cujo caso, a solução geral é

$$X = A^g DB^g + Y - A^g AYBB^g \quad (2.7.3)$$

para qualquer matriz $n \times p$ Y .

Demonstração. Se (2.7.2) é verdadeira, então $X = A^g DB^g$ é uma solução de (2.7.1).

Reciprocamente, se X é alguma solução de (2.7.1) então

$$D = AXB = AA^g AXBB^g B = AA^g DB^g B$$

Além disso, segue de (2.7.2) e da definição de A^g e B^g , que toda matriz X da forma (2.7.3) satisfaz (2.7.1).

Realmente,

$$\begin{aligned} AXB &= A(A^g DB^g + Y - A^g AYBB^g)B \\ &= AA^g DB^g B + AYB - AA^g AYBB^g B \\ &= AA^g DB^g B + AYB - AYB = D \quad \dagger\dagger \end{aligned}$$

Corolário 2.7.1 - Sejam A_n e b_m quaisquer. Então a equação

$$Ax = b \quad (2.7.4)$$

é consistente se e somente se, para qualquer inversa A^g ,

$$AA^g b = b \quad (2.7.5)$$

em cujo caso, a solução geral de (2.7.4) é

$$x = A^g b + (I - A^g A) y \quad (2.7.6)$$

para qualquer vetor y_n .

Demonstração. Se (2.7.5) é verdadeira, então, $b = Ax = AA^g b$

Além disso, segue de (2.7.5) e da definição de A^G , que todo vetor x da forma (2.7.6) satisfaz (2.7.4). Realmente,

$$\begin{aligned} Ax &= A [A^G b + (I - A^G A) y] \\ &= AA^G b + Ay - AA^G Ay \\ &= AA^G b + Ay - Ay = b \quad \dagger\dagger \end{aligned}$$

Teorema 2.7.2 - Sejam $A_{m \times n}$ e $X_{n \times m}$ matrizes quaisquer. Então X é uma inversa generalizada de A se e somente se, para todo b tal que $Ax = b$ é consistente, $x = Xb$ é uma solução.

Demonstração. Veja Greville [06] $\dagger\dagger$

2.8 - Caracterização das Inversas $A^{(1,3)}$ e $A^{(1,4)}$.

Teorema 2.8.1 - O conjunto das inversas $A^{(1,3)}$ consiste de todas as soluções para X , de

$$AX = AA^{(1,3)} \quad (2.8.1)$$

onde $A^{(1,3)}$ é um elemento qualquer do conjunto.

Demonstração. Se X satisfaz (2.8.1), então,

$$AXA = AA^{(1,3)} A = A$$

e,

$$(AX)^T = (AA^{(1,3)})^T = AA^{(1,3)} = AX$$

Portanto X satisfaz (2.1.1) e (2.1.3). Por outro lado, se X satisfaz as equações (2.1.1) e (2.1.3) então, tendo em vista o Lema 2.3.1 (b), obtemos:

$$\begin{aligned}
AA^{(1,3)} &= AXAA^{(1,3)} = (AX)^T AA^{(1,3)} \\
&= X^T A^T (A^{(1,3)})^T A^T = X^T A^T (A^T)^{(1,3)}_{AT} \\
&= X^T A^T = (AX)^T = AX \quad \dagger\dagger
\end{aligned}$$

Teorema 2.8.2 - O conjunto das inversas $A^{(1,4)}$ consiste de todas as soluções para X , de

$$XA = A^{(1,4)} A \quad (2.8.2)$$

onde $A^{(1,4)}$ é um elemento qualquer do conjunto.

Demonstração. A demonstração é similar à do teorema (2.8.1) $\dagger\dagger$

2.9 - Matrizes Idempotentes e Projétores .

Lema 2.9.1 - Seja E uma matriz idempotente. Então:

- $E(I - E) = (I - E)E = 0$
- $Ex = x$ se e somente se $x \in R(E)$
- $N(E) = R(I - E)$

Demonstração.

- $E(I - E) = (I - E)E = E - E^2 = 0$
- Se $x \in R(E)$, para algum y ,

$$x = Ey \Rightarrow Ex = E^2 y = Ey \Rightarrow x = Ex$$

Por outro lado, se $x \notin R(E)$ então, para qualquer y , $x \neq Ey$ e, para $y = x$, $x \neq Ex$.

c) Seja $x \in N(E)$. Então $Ex = 0$, e, fazendo $b = 0$ na equação (2.7.6) e considerando o Lema 2.3.1 (c) obtemos

$$x = (I - E^g E)y = (I - E)y$$

para qualquer y . Portanto,

$$x \in R (I - E)$$

e,

$$N(E) = R (I - E) \quad \dagger\dagger$$

Definição 2.9.1 - Definimos a soma $L + M$ de duas series L e M de vetores n -dimensionais, como

$$L + M = \{y + z : y \in L \quad e \quad z \in M\}$$

Se L e M são sub-espacos de R^n , então $L + M$ é também um sub-espaco de R^n .

Definição 2.9.2 - Se, adicionalmente, $L \cap M = \{0\}$, isto é, o único vetor comum a L e M é o vetor nulo, a soma $L + M$ é chamada soma direta e representada por $L \oplus M$.

Definição 2.9.3 - Dois sub-espacos L e M de R^n são chamados complementares se

$$R^n = L \oplus M \quad (2.9.1)$$

Definição 2.9.4 - No caso de L e M serem sub-espacos complementares de R^n , todo vetor $x \in R^n$ pode ser univocamente determinado como uma soma

$$x = y + z \quad (y \in L, \quad z \in M) \quad (2.9.2)$$

e diremos que y é a projeção de x em L ao longo de M .

Exemplo 2.9.1 - Sejam:

$$\mathbb{R}^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \text{ para } \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$$L = \{(\alpha, 0, \gamma) \text{ para } \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$$M = \{0, \beta, 0\} \text{ para } \forall \beta \in \mathbb{R}\}$$

Calcular a projeção do vetor

$$x = |2 \ 5 \ 7|^T$$

em L ao longo de M .

Solução.

$$y = |2 \ 0 \ 7|^T \quad \dagger\dagger$$

Representamos por $P_{L,M}$ o operador que transforma qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ em sua projeção em L ao longo de M , ou seja,

$$y = P_{L,M} x.$$

Diremos que $P_{L,M}$ é o projetor em L ao longo de M . Essa transformação é linear e idempotente.

Teorema 2.9.1 - Para qualquer matriz idempotente $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R(E)$ e $N(E)$ são sub-espços complementares com,

$$E = P_{R(E), N(E)} \quad (2.9.3)$$

Reciprocamente, se L e M são sub-espços complementares, existe uma única matriz idempotente $P_{L,M}$ tal que

$$R(P_{L,M}) = L \quad \text{e} \quad N(P_{L,M}) = M$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Na equação

$$x = Ex + (I - E)x \tag{2.9.4}$$

fazendo,

$$y = Ex \in R(E)$$

e,

$$z = (I - E)x \in R(I - E) = N(E)$$

teremos,

$$x = y + z$$

ou seja,

$$\mathbb{R}^n = R(E) + N(E)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} y = z &\Rightarrow Ex = (I-E)x \Rightarrow E^2x = E(I-E)x \\ &\Rightarrow Ex = E(I-E)x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $R(E)$ e $N(E)$ são complementares, e a equação (2.9.4) mostra que, para todo x , Ex é a projeção de x em $R(N)$ ao longo de $N(E)$, o que estabelece (2.9.3).

Por outro lado, sejam

$$\{x_1, x_2, \dots, x_\ell\} \quad \text{e} \quad \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

bases para L e M respectivamente. Então, se $P_{L,M}$ existe, é unicamente determinado por:

$$P_{L,M} x_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, \ell) \tag{2.9.5}$$

$$P_{L,M} y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Representemos por $X = |x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_\ell|$ a matriz cujas colunas são os vetores x_i . Similarmente, seja $Y = |y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m|$. Então, (2.9.5) é equivalente a

$$P_{L,M} |X \ Y| = |X \ 0| \tag{2.9.6}$$

Desde que $|X \ Y|$ seja não singular, a única solução de (2.9.6), é portanto de (2.9.5), é,

$$P_{L,M} = |X \ 0| \ |X \ Y|^{-1} \tag{2.9.7}$$

Visto que (2.9.5) implica

$$P_{L,M} |X \ 0| = |X \ 0| ,$$

$P_{L,M}$ como dado por (2.9.7) é idempotente. ††

Exemplo 2.9.2 - Seja calcular o projetor $P_{L,M}$ correspondente ao Exemplo (2.9.1).

Solução.

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{base para } L$$

$$Y = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{base para } M$$

$$P_{L,M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \dagger\dagger$$

2.10 - Inversas Generalizadas com Espaço Coluna e Espaço Nulo Prescritos.

Lema: 2.10.1 - Dadas três matrizes A , B e C , existe, no máximo, uma matriz X , satisfazendo as equações,

$$AX = B, \quad XA = C \quad \text{e} \quad XAX = X$$

Demonstração. Veja Greville [07]

Lema 2.10.2 - Seja X_0 uma solução comum das equações

$$AX = B \quad \text{e} \quad XD = E \quad (2.10.1)$$

Então, a solução geral comum é,

$$X = X_0 + (I - A^g A)Y(I - DD^g) \quad (2.10.2)$$

para quaisquer A^g , D^g e Y .

Demonstração.

$$AX = A[X_0 + (I - A^g A)Y(I - DD^g)] = AX_0 = B$$

$$XD = [X_0 + (I - A^g A)Y(I - DD^g)]D = X_0 D = E \quad \dagger\dagger$$

Lema 2.10.3 - Dados uma matriz $A_{m \times n}$ e dois sub-espacos complementares L e M de R^n , são válidas as afirmações:

a) $P_{L,M} A = A$ se e somente se $R(A) \subset L$

b) $AP_{L,M} = A$ se e somente se $N(A) \supset M$

Demonstração. a) Seja $x \in R^n$ um vetor tal que $Ax \in R(A)$. Então, pelo Lema 2.9.1 (b), $P_{L,M} Ax = Ax$ se e somente se $Ax \in R(P_{L,M}) = L$.

Deste modo, $P_{L,M} A = A$ se e somente se todo vetor $y = Ax \in R(A)$, também pertence a L , ou seja $R(A) \subset L$.

b) Para qualquer vetor $x \in N(P_{L,M}) = M$ temos:

$$x \in N(P_{L,M}) \Rightarrow P_{L,M} x = 0 \Rightarrow AP_{L,M} x = 0$$

Agora, se $AP_{L,M} = A$ é verdade, temos,

$$AP_{L,M} = A \Rightarrow 0 = AP_{L,M} x = Ax \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A)$$

Portanto, se

$$AP_{L,M} = A, \quad N(A) \supset M.$$

Por outro lado, se $N(A) \supset M$, para qualquer vetor $x \in M$,

$$P_{L,M} x = 0 \quad \text{e} \quad Ax = 0$$

Portanto,

$$AP_{L,M} = A \quad \text{é verdade.} \quad \dagger\dagger$$

Teorema 2.10.1 - Sejam $A_{m \times n}^{(r)}$, $R(A)=L$, $N(A)=M$, $L \oplus S = \mathbb{R}^m$ e $M \oplus T = \mathbb{R}^n$. Então:

a) X é uma inversa generalizada de A tal que

$$N(AX)=S \quad \text{e} \quad R(XA)=T$$

se e somente se,

$$AX = P_{L,S} \quad \text{e} \quad XA = P_{T,M} \quad (2.10.3)$$

b) A solução geral de (2.10.3) é

$$X = P_{T,M} A^g P_{L,S} + (I_n - A^g A) Y (I_m - A A^g) \quad (2.10.4)$$

sendo A^g uma inversa generalizada qualquer e $Y_{n \times m}$ uma matriz qualquer.

c) $A_{T,S}^r = P_{T,M} A^g P_{L,S}$ é a única inversa reflexiva de A tendo espaço coluna T e espaço nulo S .

Demonstração.

a) Se as equações (2.10.3) são válidas, pelo Teorema (2.9.1) $P_{L,S}$ e $P_{T,M}$ são as únicas matrizes idempotentes tais que,

$$N(XA) = N(P_{T,M}) = M = N(A)$$

$$R(AX) = R(P_{L,S}) = L = R(A)$$

$$N(AX) = N(P_{L,S}) = S$$

$$R(XA) = R(P_{T,M}) = T$$

Seja a_j a j -ésima coluna de A . É evidente que $a_j \in R(A)$ e, portanto, $a_j \in R(AX)$.

Então, pelos Lemas 2.9.1 (b) e 2.3.1 (d):

$$AXa_j = a_j$$

Donde,

$$AXA = A.$$

Reciprocamente, seja X uma inversa generalizada de A tal que $N(AX) = S$ e $R(XA) = T$. Pelos Lemas 2.3.1 (d) e (2.4.1), AX e XA são idempotentes com $R(AX)=R(A)$ e $N(XA)=N(A)$.

Agora, pelo Teorema (2.9.1), temos:

$$P_{L,S} = P_{R(A),S} = P_{R(AX), N(AX)} = AX$$

$$P_{T,M} = P_{T,N(A)} = P_{R(XA), N(XA)} = XA$$

b) Pelo Lema (2.10.3) podemos escrever,

$$AP_{T,M} = A, \text{ já que } N(A) = M$$

$$P_{L,S}A = A, \text{ já que } R(A) = L$$

Então,

$$AX = AP_{T,M}A^{\mathcal{G}}P_{L,S} = AA^{\mathcal{G}}P_{L,S} = AA^{\mathcal{G}}AX = AX$$

$$XA = P_{T,M}A^{\mathcal{G}}P_{L,S}A = P_{T,M}A^{\mathcal{G}}A = XAA^{\mathcal{G}}A = XA$$

Portanto,

$$X = P_{T,M}A^{\mathcal{G}}P_{L,S}$$

satisfaz as (2.10.3).

A equação (2.10.4) decorre do Lema (2.10.2).

c) já que $X = P_{T,M}A^{\mathcal{G}}P_{L,S}$ é uma inversa generalizada de A , sua característica é no mínimo r , pelo Lema 2.3.1 (a), enquanto sua característica não excede r , já que $r(P_{L,S}) = r(AX) = r$, por (2.10.3) e Lema 2.3.1 (d). Então, tem a mesma característica que A e é uma inversa reflexiva de A , pelo Teorema (2.5.1). Mas,

$$\begin{aligned} R(A_{T,S}^r) &= R(P_{T,M}A^{\mathcal{G}}P_{L,S}) = R(XAA^{\mathcal{G}}AX) = R(XAX) \\ &= R(X) = R(XA) = R(P_{T,M}) = T, \end{aligned}$$

usando o Lema 2.4.1 (a) e lembrando que X é reflexiva.

Dé igual maneira, usando o Lema 2.4.1 (b):

$$N(A_{T,M}^r) = N(X) = N(AX) = N(P_{L,S}) = S.$$

Por outro lado, seja X uma inversa reflexiva de A , tendo espaço coluna T e espaço nulo S . Então,

$$R(XA) = R(X) = T = R(P_{T,M})$$

e,

$$N(AX) = N(X) = S = N(P_{L,S})$$

Portanto, X satisfaz as equações (2.10.3) e também (2.1.2). E, pelo Lema (2.10.1), estas três equações têm no máximo uma solução. ††

2.11 - Projeções Ortogonais e Projetores Ortogonais.

Definição 2.11.1 - Uma função de valores reais, $\| \cdot \|$, em R^n é dita uma norma em R^n se ela satisfaz

$$\| x \| \geq 0 \quad \| x \| = 0 \text{ somente se } x = 0$$

$$\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$$

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| ,$$

para todo $x, y \in R^n$, $\alpha \in R$.

Definição 2.11.2 - Neste trabalho, sempre que nos referirmos à norma de um vetor, estamos nos referindo à norma euclidiana, definida como:

$$\| x \| = (x^T x)^{1/2} \quad (2.11.1)$$

Definição 2.11.3 - Dado um vetor $x \in R^n$ e um sub-espaço L de R^n , existe em L um único vetor u_x tal que $\| x-u \|$ é menor para $u = u_x$ que para qualquer outro $u \in L$. O vetor u_x é unicamente caracterizado pelo fato que $x-u_x$ é ortogonal a u_x ,

o que representaremos por,

$$x - u_x \perp u_x$$

Diremos que u_x é a projeção ortogonal de x em L .

O operador que transforma qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em sua projeção ortogonal em L , será chamado de projetor ortogonal em L , e representado por P_L . O projetor ortogonal é representável por uma matriz quadrada idempotente e hermitica.

Definição 2.11.4 - Dados dois sub-espacos L e M de \mathbb{R}^n , diz-se que M é o complemento ortogonal de L , e representa-se por L^\perp , se:

$$\begin{aligned} L \oplus M &= \mathbb{R}^n \\ x^T y &= 0 \quad (x \in L, y \in M) \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

Lema 2.11.1 - Seja

$$\mathbb{R}^n = L \oplus M$$

Então $M = L^\perp$ se e somente se $P_{L,M}$ é hermitica.

Demonstração. Veja Greville [08] ††

Para qualquer sub-espaco L , para o qual uma base é disponível é fácil construir a matriz P_L . A base deve primeiro ser ortonormalizada.

Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_\ell\}$ uma base ortonormal para L .

Então,

$$P_L = \sum_{j=1}^{\ell} x_j x_j^T \quad (2.11.3)$$

Exemplo 2.11.1 - Seja calcular o projetor ortogonal em L , onde L é dado no Exemplo (2.9.1)

Solução. (veja também Exemplo (2.9.2)).

$$P_L = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.12 - Solução de Mínimos Quadrados de Sistemas Lineares Inconsistentes

Definição 2.12.1 - Dados uma matriz $A_{m \times n}$ e um vetor b_m , o sistema linear

$$Ax = b \quad (2.12.1)$$

é consistente, isto é, tem solução para x , se e somente se $b \in R(A)$. Em caso contrário, o vetor residual

$$V = Ax - b \quad (2.12.2)$$

é não nulo para todo vetor x n -dimensional, e pode-se desejar encontrar uma solução de (2.12.1) de tal modo que o vetor V tenha norma mínima. Tal solução será dita uma solução de mínimos quadrados. O teorema seguinte resolve este problema.

Definição 2.12.2 - Dados dois vetores V e W , definimos o produto interno (V,W) dos mesmos, como

$$(V,W) = W^T V$$

Lema 2.12.1 - (Pitágoras) - Sejam Y e Z sub-espacos de R^n . Então $Y \perp Z$ se e somente se

$$\|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad (\forall y \in Y, z \in Z) \quad (2.12.3)$$

Demonstração. Seja $y \in Y$ e $z \in Z$. Então, se (2.12.3) é verdadeira, podemos escrever,

$$\begin{aligned} (y,y) + (z,z) &= \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 = \\ &= (y+z, y+z) = (y,y) + (z,z) + (y,z) + (z,y) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$(y,z) + (z,y) = 0 \quad (2.12.4)$$

De (2.12.4) concluimos que $y \perp z$.

Reciprocamente, seja $Y \perp Z$. Então, para quaisquer $y \in Y$ e $z \in Z$, teremos

$$\|y+z\|^2 = (y+z, y+z) = (y,y) + (z,z) = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

já que $(y,z) = (z,y) = 0$ ++

Teorema 2.12.1 - Sejam ${}_m A_n$ e b_m . Então $\|Ax - b\|$ é mínima quando $x = A^{(1,3)} b$, sendo $A^{(1,3)}$ qualquer inversa da respectiva classe. Reciprocamente, se ${}_n X_m$ tem a propriedade que, para todo b , $\|Ax - b\|$ é mínima, quando $x = Xb$, então X é uma inversa generalizada $A^{(1,3)}$.

Demonstração. Escrevendo,

$$Ax - b = (Ax - P_{R(A)}b) + (P_{R(A)}b - b)$$

segue-se, do Lema (2.12.1) que:

$$\|Ax - b\|^2 = \|Ax - P_{R(A)}b\|^2 + \|P_{R(A)}b - b\|^2 \quad (2.12.5)$$

já que,

$$(Ax - P_{R(A)}b) \in R(A)$$

e,

$$(P_{R(A)}b - b) \in R(A)^\perp$$

Evidentemente, (2.12.5) assume o seu mínimo se e somente se

$$Ax = P_{R(A)}b \quad (2.12.6)$$

Agora, lembrando que $AA^{(1,3)}$ é idempotente e hermitica, teremos pelo Teorema (2.9.1) e Lemas (2.4.1) e (2.11.1):

$$AA^{(1,3)} = P_{R(AA^{(1,3)})}, N(AA^{(1,3)}) = P_{R(A), R(A)^\perp} = P_{R(A)} \quad (2.12.7)$$

Portanto, (2.12.6) é válida se $x = A^{(1,3)}b$.

Reciprocamente, se X é tal que, para todo b , $\|Ax - b\|$ é mínima quando $x = Xb$, (2.12.6) dá,

$$Ax = AXb = P_{R(A)}b \Rightarrow AX = P_{R(A)}$$

Então, por (2.12.7) e Teorema (2.8.1), X é uma inversa $A^{(1,3)}$ de A ++

Corolário 2.12.1 - O vetor x é uma solução de mínimos quadrados de $Ax = b$, se e somente se,

$$Ax = P_{R(A)}b = AA^{(1,3)}b$$

Portanto, a solução geral de mínimos quadrados é:

$$x = A^{(1,3)}b + (I_n - A^{(1,3)}A)y, \quad (2.12.8)$$

sendo $A^{(1,3)}$ e y_n quaisquer.

Demonstração. Premultiplicando (2.12.8) por A , obtemos,

$$Ax = AA^{(1,3)}b + (A - AA^{(1,3)}A)y = AA^{(1,3)}b$$

Então, (2.12.8) é uma solução geral.

2.13 - Solução de Norma Mínima.

Quando o sistema $Ax=b$ tem mais de uma solução para x , existe uma única solução tal que a norma de x é mínima.

Lema 2.13.1 - Seja ${}_m A_n$. Então A é uma transformação biunívoca de $R(A^T)$ em $R(A)$.

Demonstração. Veja Greville [09] ++

Corolário 2.13.1 - Sejam ${}_m A_n$ e $b \in R(A)$.

Então, existe uma única solução de norma mínima de

$$Ax = b, \quad (2.12.1)$$

dada como a solução de (2.12.1) contida em $R(A^T)$.

Demonstração. Pelo Lema (2.13.1), a equação (2.12.1)

tem uma única solução x_0 em $R(A^T)$. Agora, fazendo $A^G b = x_0$ e $(I - A^G A)y = z$ em (2.7.6), obtemos para solução geral de (2.12.1):

$$x = x_0 + z$$

Além disso, segue-se dos Lemas 2.3.1 (d), 2.9.1 (c) e 2.4.1 (b), que $z \in N(A)$. Agora, pelo Lema 2.12.1, podemos escrever:

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|z\|^2,$$

provando que $\|x\| > \|x_0\|$ para todo $x \neq x_0$.

Aqui foi usado o fato de que $N(A) = R(A^T)^\perp$, demonstrado em Greville [10] ††

Teorema 2.13.1 - Sejam ${}_m A_n$ e b_m . Se $Ax = b$ tem uma solução para x , a única solução para a qual $\|x\|$ é mínima é dada por

$$x = A^{(1,4)} b,$$

onde $A^{(1,4)}$ é qualquer inversa de sua respectiva classe.

Reciprocamente, se ${}_n X_m$ é tal que, sempre que $Ax = b$ tem uma solução, $x = Xb$ é a solução de norma mínima, então X é uma inversa $A^{(1,4)}$.

Demonstração. Se $Ax = b$ é consistente, então, para qualquer inversa $A^{(1,4)}$, $x = A^{(1,4)} b$ é uma solução (Corolário (2.7.1)). Seja x_0 outra solução de $Ax = b$. Podemos escrever:

$$x = A^{(1,4)} b = A^{(1,4)} A x_0,$$

e, considerando (2.1.4) e o Lema 2.4.1 (c), temos

$$x \in R(A^{(1,4)} A) = R((A^{(1,4)} A)^T) = R(A^T)$$

Portanto $x \in R(A^T)$ e, pelo Lema (2.13.1), é a única solução em $R(A^T)$. Finalmente, x é a única solução de norma mínima, pelo Corolário (2.13.1).

Reciprocamente, seja X tal que para todo $b \in R(A)$, $x = Xb$ seja a solução de norma mínima de $Ax=b$. Substituindo por b cada coluna de A , uma de cada vez, concluímos que,

$$XA = A^{(1,4)}_A$$

e $X = A^{(1,4)}$, pelo Teorema (2.8.2) ††

Corolário 2.13.2 - Seja $A_{m \times n}$ e b_m . Então, dentre as soluções de mínimos quadrados de $Ax=b$, A^+b é a única de norma mínima. Reciprocamente, se $X_{n \times m}$ tem a propriedade que, para todo b , Xb é a solução de mínimos quadrados e norma mínima de $Ax=b$, então $X = A^+$.

Demonstração. Pelo Corolário (2.12.1) as soluções de mínimos quadrados de $Ax=b$ coincidem com as soluções de

$$Ax = AA^{(1,3)}_b \quad (2.13.1)$$

Portanto, a solução de mínimos quadrados e norma mínima de $Ax=b$ é a solução de norma mínima de (2.13.1).

Então, pelo Teoremas (2.13.1) e (2.6.2), podemos escrever:

$$x = A^{(1,4)} | AA^{(1,3)}_b | = A^+ b$$

Reciprocamente, seja X tal que $x=Xb$ seja a solução de mínimos quadrados e norma mínima de $Ax=b$. Então

$$x=Xb=A^{(1,4)} AA^{(1,3)}_b = A^+ b \quad \text{e} \quad X = A^+ \quad \dagger\dagger$$

2.14 - Inversas Generalizadas Ponderadas.

Deseja-se dar diferentes pesos aos diferentes quadrados dos resíduos do sistema linear $Ax=b$. Este é um problema mais geral que o resolvido pelas inversas $A^{(1,3)}$. Seja, portanto, minimizar uma dada forma quadrática positiva definida:

$$\| Ax - b \|_W^2 = (Ax-b)^T W(Ax-b) \quad (2.14.1)$$

onde W é uma matriz positiva definida.

Quando A , não é uma matriz alta de característica integral, este problema não possui uma única solução para x , e podemos escolher da classe de soluções de mínimos quadrados, aquela para a qual,

$$\| x \|_U = x^T U x \quad (2.14.2)$$

é mínima, sendo U uma matriz positiva definida.

Toda matriz positiva definida H tem uma única raiz quadrada positiva definida K , tal que $K^2 = H$. Representemos este K por $H^{1/2}$ e sua inversa por $H^{-1/2}$.

Agora, introduzamos as transformações,

$$\bar{A} = W^{1/2} A U^{-1/2}, \quad \bar{x} = U^{1/2} x, \quad \bar{b} = W^{1/2} b \quad (2.14.3)$$

Verifica-se que,

$$\| Ax - b \|_W = \| \bar{A}\bar{x} - \bar{b} \| \quad (2.14.4)$$

$$\| x \|_U = \| \bar{x} \| \quad (2.14.5)$$

Teorema 2.14.1 - Sejam $A_{m \times n}$ e b_m . Seja ainda W_m positiva definida. Então

$$\|Ax - b\|_W$$

é mínima quando $x = Xb$, onde X satisfaz:

$$AXA = A \quad e \quad (WAX)^T = WAX \quad (2.14.6)$$

Reciprocamente, se $X_{n \times m}$ tem a propriedade que, para todo b ,

$$\|Ax - b\|_W$$

é mínimo quando $x = Xb$, então X satisfaz (2.14.6).

Demonstração. Em vista de (2.14.4) e do Teorema (2.12.1), $\|Ax - b\|_W$ é mínima quando $\bar{x} = Y\bar{b}$, onde Y satisfaz

$$\bar{A} Y \bar{A} = \bar{A} \quad e \quad (\bar{A} Y)^T = \bar{A} Y \quad (2.14.7)$$

Também, se Y tem a propriedade que, para todo b , $\|Ax - b\|_W$ é mínima, quando $\bar{x} = Y\bar{b}$, então Y satisfaz (2.14.7).

Agora, seja

$$X = U^{-1/2} Y W^{1/2} \quad (2.14.8)$$

tal que,

$$Y = U^{1/2} X W^{-1/2} \quad (2.14.9)$$

Então, verifica-se por (2.14.3) e (2.14.9) que,

$$\bar{x} = Y\bar{b} \iff x = Xb \quad (2.14.10)$$

$$\bar{A}Y\bar{A} = \bar{A} \iff AXA = A \quad (2.14.11)$$

$$(\bar{A}Y)^T = \bar{A}Y \iff (WAX)^T = WAX \quad ++$$

Teorema 2.14.2 - Sejam ${}_m A_n$ e b_m . Seja também ${}_n U_n$ uma matriz positiva definida. Se $Ax=b$ tem uma solução para x , a única solução para a qual $\|x\|_U$ é mínima é dada por $x=Xb$, onde X satisfaz

$$AXA = A \quad e \quad (UXA)^T = UXA \quad (2.14.12)$$

Reciprocamente, se ${}_n X_m$ é tal que, quando $Ax=b$ tem uma solução, $x=Xb$ é a solução para a qual $\|x\|_U$ é mínima, então X satisfaz (2.14.12)

Demonstração. Em vista de (2.14.3),

$$Ax = b \iff \bar{A}\bar{x} = \bar{b}$$

Então, segue-se de (2.14.5) e Teorema (2.13.1) que se $Ax=b$ tem uma solução para x , a única solução para a qual $\|x\|_U$ é mínima é dada por $\bar{x} = Y\bar{b}$, onde Y satisfaz,

$$\bar{A}Y\bar{A} = \bar{A} \quad e \quad (Y\bar{A})^T = Y\bar{A} \quad (2.14.13)$$

e, além disso, se ${}_n Y_m$ tem a propriedade que, quando $Ax=b$ tem uma solução, $\|x\|_U$ é mínima para $\bar{x} = Y\bar{b}$, então Y satisfaz as (2.14.13). Como no Teorema (2.14.1), seja X dada por (2.14.8), tal que (2.14.9) vale. Então temos, em adição com (2.14.10) e (2.14.11)

$$(Y\bar{A})^T = Y\bar{A} \iff (UXA)^T = UXA \quad ++$$

Corolário 2.14.1 - Seja $A_{m \times n}$ e b_m . Seja ainda W_m e U_n definidas positivas. Então, existe uma única inversa generalizada reflexiva de A ,

$$X = A_{W,U}^r$$

Satisfazendo,

$$(WAX)^T = WAX \quad \text{e} \quad (UXA)^T = UXA \quad (2.14.14)$$

Além disso, $\|Ax-b\|_W$ assume seu valor mínimo para $x=Xb$ e da série de vetores x para a qual este mínimo valor é assumido, $x=Xb$ é aquele para o qual $\|x\|_U$ é mínima.

Se Y_m tem a propriedade que, para todo b , $x=Yb$ é o vetor para o qual $\|x\|_U$ é mínima entre aqueles para os quais $\|Ax-b\|_W$ assume seu mínimo valor, então $Y = A_{W,U}^r$

Demonstração. Pelo Teoremas (2.14.1) e (2.14.2) vemos que a uma matriz X , tal que $x=Xb$ é a solução de mínimos quadrados e norma mínima de $Ax=b$, corresponde uma matriz Y tal que $\bar{x}=Y\bar{b}$ é a solução de mínimos quadrados e norma mínima de $\bar{A}\bar{x}=\bar{b}$. Agora, pelo Corolário (2.13.2) Y é a pseudo-inversa de \bar{A} e, portanto, única. Então, X como dada por (2.14.8) é única ++

Corolário 2.14.2 - Sejam $A_{m \times n}$ e b_m . Sejam ainda W e U definidas e positivas. Então o sistema $Ax=b$ tem uma única solução $x=Xb$ tal que $\|x\|_U$ e $\|Ax-b\|_W$ são mínimas, sendo a matriz X dada por,

$$X = U^{-1/2} (W^{1/2} A U^{-1/2})^+ W^{1/2} \quad (2.14.15)$$

Demonstração. Do Corolário (2.14.1) vimos que Y , dada por (2.14.9) é a pseudo-inversa de \bar{A} , dada por (2.14.3). Então, de (2.14.8) obtemos:

$$x = U^{-1/2} \bar{A}^+ W^{1/2} = U^{-1/2} (W^{1/2} A U^{-1/2})^+ W^{1/2} \quad \text{'++}$$

Corolário (2.14.3) - Sejam A, b e W como no Teorema (2.14.1). Então um vetor x minimiza $\|Ax - b\|_W$ se e somente se é uma solução de

$$A^T W A x = A^T W b \quad (2.14.16)$$

Demonstração. Veja Gemael [11]. ++

2.15 - Cálculo da Pseudo-inversa

Método I

Pelos Teoremas (2.6.1) e (2.6.2) podemos escrever:

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)} = A^T (A A^T)^g A (A^T A)^g A^T \quad (2.15.1)$$

Particularizando para uma matriz quadrada simétrica:

$$A^+ = |A(AA)^g|^{-2} A \quad (2.15.2)$$

Esta fórmula foi programada em Linguagem FORTRAN por Modro [12]

Método II

A demonstração correspondente a este método acha-se em Greville [13].

Seja a_K a K-ésima coluna de uma dada matriz A e A_K a matriz formada pelas K primeiras colunas. Consideremos A_K na forma particionada $|A_{K-1} \ a_K|$

Calculamos:

$$d_K = A_{K-1}^+ a_K$$

$$c_K = a_K - A_{K-1} d_K$$

$$b_K = c_K^+ \quad \text{se } c_K \neq 0$$

$$b_k = (1 + d_k^T d_k)^{-1} d_k^T A_{k-1}^+ \quad \text{se } c_k = 0$$

Então:

$$A_K^+ = \left| \begin{array}{cc} A_{k-1}^+ & - d_k b_k \\ & b_k \end{array} \right|$$

Para iniciar o processo tomamos:

$$A_1^+ = 0 \quad \text{se } a_1 = 0$$

$$A_1^+ = (a_1^T a_1)^{-1} a_1^T \quad \text{se } a_1 \neq 0$$

Exemplo 2.15.1 - Seja calcular a pseudo-inversa da matriz abaixo, usando o método II.

$$A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Solução.

$$A_1 = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right|; \quad a_1 = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right|; \quad A_1^+ = (a_1^T a_1)^{-1} a_1^T = \left| \begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right|$$

$$d_2 = A_1^+ a_2 = \left| \begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

$$c_2 = a_2 - A_1 d_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{vmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$b_2 = c_2^+ = (c_2^T c_2)^{-1} c_2^T = \begin{vmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

$$A_2^+ = \begin{vmatrix} A_1^+ & -d_2 b_2 \\ & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

$$d_3 = A_2^+ a_3 = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = a_3 - A_2 d_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$b_3 = (1 + d_3^T d_3)^{-1} d_3^T A_2^+ = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_3^+ = \begin{vmatrix} A_2^+ & -d_3 b_3 \\ & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = A_3^+ a_4 = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{vmatrix}$$

$$c_4 = a_4 - A_3 d_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{vmatrix} = 0$$

$$b_4 = (1 + d_4^T d_4)^{-1} d_4^T A_3^+ = |1/5 \quad 0 \quad 1/5|$$

$$A_4^+ = \begin{vmatrix} A_3^+ & -d_4 b_4 \\ & b_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{15} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Método III

Este método encontra-se em Boullion [14]. Consiste em, dadas duas séries u_1, \dots, u_n e v_1, \dots, v_n de n vetores em um espaço m -dimensional ($m \geq n$), obter um sistema biortogonal, modificando os vetores. Se considerarmos os vetores u como colunas de uma matriz U e os vetores v como linhas de uma matriz V , a série será biortogonal se $VU = I$. A solução é alcançada escolhendo-se valores iniciais $v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0$ para os vetores. Estes vetores são modificados sucessivamente em n etapas. Após a n -ésima etapa os vetores $v_1^n, v_2^n, \dots, v_n^n$ serão a solução do problema.

Na k -ésima etapa os vetores v_i^{k-1} são transformados em uma nova série v_i^k pelos seguintes cálculos:

$$c_{kk} = (v_k^{k-1}, u_k)$$

$$c_k = c_{kk}^{-1}$$

$$c_{jk} = (v_j^{k-1}, u_k) \quad j \neq k$$

$$V^k = C^k V^{k-1}$$

A única dificuldade que surge é quando $C_{kk} = 0$. Para superar isto, tomamos $V^0 = U^T$. Este seria o método usado para obter uma inversa ordinária. Para calcular a pseudo-inversa de uma matriz, o método é modificado adicionando-se linhas à matriz original de modo a que a característica da nova matriz seja igual ao número de colunas. As linhas adicionadas devem ser ortogonais às da matriz dada. Então aplicamos o método para a matriz resultante. A pseudo-inversa da matriz original é obtida eliminando tantas últimas colunas de V^n quantas linhas tenham sido adicionadas àquela matriz.

Exemplo 2.15.2 - Seja calcular a pseudo-inversa da matriz abaixo, usando o método III.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solução. Adicionamos duas linhas a A, as quais são ortogonais a todas as outras linhas:

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad V^0 = U^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = (v_1^0, u_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^T = 3$$

$$c_{11}^1 = c_{11}^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$c_{21} = (v_2^0, u_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^T = 1$$

$$c_{21}^1 = -c_{21} c_{11}^1 = -\frac{1}{3}$$

$$c_{31} = (v_3^0, u_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^T = 1$$

$$c_{31}^1 = -c_{31} c_{11}^1 = -\frac{1}{3}$$

$$c_{41} = (v_4^0, u_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^T = 1$$

$$c_{41}^1 = -c_{41} c_{11}^1 = -\frac{1}{3}$$

$$C^1 = \begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$V^1 = C^1 V^0 = \begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1 \\ 2/3 & -1 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & -4/3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$c_{12} = (v_1^1, u_2) = \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|^T = \frac{1}{3}$$

$$c_{22} = (v_2^1, u_2) = \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} -1/3 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|^T = \frac{8}{3}$$

$$c_{32} = (v_3^1, u_2) = \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 2/3 & -1 & -1/3 & -1/3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|^T = -\frac{1}{3}$$

$$c_{42} = (v_4^1, u_2) = \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 2/3 & 0 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|^T = -\frac{1}{3}$$

$$c_{22}^2 = c_{22}^{-1} = \frac{3}{8}$$

$$c_{12}^2 = -c_{12} \cdot \frac{2}{22} = -\frac{1}{8}$$

$$c_{32}^2 = \frac{1}{8}$$

$$c_{42}^2 = \frac{1}{8}$$

$$C^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$v^2 = C^2 v^1 = \begin{vmatrix} 3/8 & -1/8 & 2/8 & 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 & 2/8 & -1/8 & 3/8 \\ 5/8 & -7/8 & -2/8 & -3/8 & 9/8 \\ 5/8 & 1/8 & 6/8 & -11/8 & -7/8 \end{vmatrix}$$

De igual manera, obtenemos para las etapas siguientes:

$$V^3 = \begin{vmatrix} 6/21 & 0 & 6/21 & 9/21 & -6/21 \\ -2/21 & 7/21 & 5/21 & -3/21 & 9/21 \\ 5/21 & -7/21 & -2/21 & -3/21 & 9/21 \\ 15/21 & 0 & 15/21 & -30/21 & -15/21 \end{vmatrix}$$

e,

$$V^4 = \begin{vmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 1/3 & 4/5 & -1/5 & 2/5 \\ 4/15 & -1/3 & -1/15 & -1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & -2/5 & -1/5 \end{vmatrix}$$

Eliminando as duas últimas colunas de V^4 , obtemos a pseudo-inversa de A:

$$A^+ = \begin{vmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ -1/15 & 1/3 & 4/15 \\ 4/15 & -1/3 & -1/15 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{vmatrix}$$

No método III, se a matriz dada tem m linhas, n colunas e p linhas proporcionais, devemos adicionar $(n-m+p)$ linhas.

Método IV

A demonstração correspondente a este método acha-se em Greville [15].

Sejam

$${}_m A_n^r, \quad {}_m U_{(m-r)}^{(m-r)} \quad \text{e} \quad {}_n V_{(n-r)}^{(n-r)}$$

matrizes tais que:

- a) As colunas de U são uma base para $N(A^T)$
- b) As colunas de V são uma base para $N(A)$.

Então a matriz

$$B = \begin{vmatrix} A & U \\ V^T & 0 \end{vmatrix} \quad (2.15.3)$$

é não singular e sua inversa é:

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} A^+ & (V^T)^+ \\ U^+ & 0 \end{vmatrix} \quad (2.15.4)$$

Portanto, para obtermos a pseudo-inversa de uma matriz A por este método, encontramos inicialmente bases para $N(A)$ e $N(A^T)$. Depois, formamos a matriz B e encontramos sua inversa ordinária. A matriz B tem $(m-r)$ colunas e $(n-r)$ linhas a mais que a matriz A . Para encontrarmos a matriz A^+ , suprimimos as últimas $(n-r)$ colunas e $(m-r)$ linhas da inversa B^{-1} .

Método V

Este método encontra-se em HÖPCKE [16].

Seja N uma matriz simétrica de ordem n e característica $r < n$, tal que

$$N = \begin{vmatrix} r^B_r & r^C_d \\ d^C_r & d^D_d \end{vmatrix} \quad (2.15.5)$$

Sendo B não singular.

Então, a pseudo-inversa de N é dada por:

$$N^+ = \begin{vmatrix} r^E_r & r^F_d \\ d^F_r & d^G_d \end{vmatrix} \quad (2.15.6)$$

sendo,

$$E = B^{-1} - ZY^T - YZ^T + ZRZ^T \quad (2.15.7)$$

$$F = EZ \quad (2.15.8)$$

$$G = Z^T F \quad (2.15.9)$$

com,

$$\begin{aligned} Z &= B^{-1} C \\ W &= Z^T Z + I \\ U &= Z W^{-1} \\ Y &= N^{-1} U \\ R &= Y^T U \end{aligned} \quad (2.15.10)$$

2.15.1 - Característica de Uma Matriz

No caso de matrizes com dimensão elevada torna-se útil o seguinte método para determinação de sua característica: decompõe-se a matriz dada em um produto de duas matrizes triangulares,

$$N = ED \quad (2.15.11)$$

sendo que a matriz triangular direita tem os elementos diagonais unitários. A característica de N é igual ao número de elementos diagonais não nulos da triangular esquerda [17].

CAPITULO III

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO PARAMÉTRICO

3.1 Introdução

No Capítulo II fizemos um estudo das Inversas Generalizadas dirigido no sentido de obtermos para um sistema de equações inconsistente $Ax=b$, o vetor solução x , tal que $\|Ax-b\|_W$ e $\|x\|_U$ são mínimas. Neste Capítulo estudaremos o ajustamento de observações, utilizando o Método Paramétrico, no caso em que a matriz dos coeficientes das equações normais $A^T Ax = A^T b$ é não singular (ajustamento tradicional) ou quando tal matriz é singular (ajustamento livre).

3.2 Esperança Matemática

Definição 3.2.1 - Seja E um evento. Seja S um espaço amostral associado a E . A cada evento A associaremos um número real representado por $p(A)$ e denominado probabilidade de A , [18]:

- 1) $0 \leq p(A) \leq 1$
- 2) $p(S) = 1$
- 3) Se $A \cap B = \emptyset$, então, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- 4) Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ forem eventos mutuamente exclusivos, dois a dois, então:

$$p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = p(A_1) + \dots + p(A_n).$$

Definição 3.2.2 - Quando uma variável pode assumir qualquer valor do seu domínio com uma determinada probabilidade, recebe o qualificativo de aleatória (randômica, estocástica).

Seja

$$x_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

uma variável aleatória discreta; a cada possível valor de

$$x(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

associa-se uma probabilidade $p(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tal que

$$p_i \geq 0 \quad (3.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (3.2.2)$$

A função de x que estabelece a correspondência de cada x_i e sua respectiva probabilidade p_i denomina-se "função de frequência": $p = p(x)$; a coleção de pares (x_i, p_i) recebe o nome de "distribuição de probabilidade".

Definição 3.2.3 - No caso mais geral de variável aleatória contínua, a probabilidade pontual p é substituída pela "densidade de probabilidade $f(x)$ ":

$$f(x) = p(x_0 \leq x \leq x_0 + dx), \quad (3.2.3)$$

que representa a probabilidade de que o valor da variável x se situe entre x_0 e $x_0 + dx$.

Definição 3.2.4 - Define-se "valor esperado", "valor médio", "expectância", "esperança matemática" ou, simplesmente "esperança" da variável aleatória discreta x , por:

$$E\{x\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (3.2.4)$$

Definição 3.2.5 - No caso de uma variável aleatória contínua, definimos a "esperança matemática" como:

$$E \{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (3.2.5)$$

3.3 Matriz Variância-Covariância (MV-C)

Definição 3.3.1 - Define-se a "variância" de uma variável aleatória x , em relação a sua esperança μ_x , como:

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = E \{(x - \mu_x)^2\} \quad (3.3.1)$$

A raiz quadrada aritmética da variância é denominada desvio padrão (σ).

Definição 3.3.2 - Quando o resultado de uma experiência é expresso por apenas um número, a variável aleatória se diz uni-dimensional. Quando o referido resultado for expresso por uma dupla (x,y) , a variável aleatória será dita bi-dimensional. Cada componente de uma variável aleatória bi-dimensional pode ser considerada como uma variável uni-dimensional com variância própria:

$$\sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} \quad ; \quad \sigma_y^2 = E\{(y - \mu_y)^2\} \quad (3.3.2)$$

Definição 3.3.3 - Podemos definir a "co-variância" de uma variável aleatória bi-dimensional (x,y) para exprimir a correlação entre suas duas componentes:

$$\text{Cov}(x,y) = \sigma_{xy} = E \{(x - \mu_x)(y - \mu_y)\} \quad (3.3.3)$$

Quando as componentes \underline{x} e \underline{y} são independentes entre si, a covariância σ_{xy} é nula. Entretanto, a recíproca nem sempre é verdadeira [19].

Definição 3.3.4 - Analogamente ao que foi visto anteriormente, pode-se generalizar para o caso de uma variável a \underline{n} dimensões: basta associar a cada indivíduo da população \underline{n} variáveis aleatórias. Seja X o vetor da variável n -dimensional:

$$X = | x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n |^T \quad (3.3.4)$$

cada x_i representando uma variável aleatória. Define-se a densidade de probabilidade como:

$$f(X) = P(X_0 \leq X \leq X_0 + dX), \quad (3.3.5)$$

sendo:

$$X_0 = | x_1^0 \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_n^0 |^T \quad (3.3.6)$$

$$dX = | dx_1 \quad dx_2 \quad \dots \quad dx_n |^T \quad (3.3.7)$$

convém ter em mente que

$$P(X_0 \leq X \leq X_0 + dX)$$

representa a probabilidade de que se verifiquem simultaneamente:

$$x_i^0 \leq x_i \leq x_i^0 + dx_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Definição 3.3.5 - A esperança matemática da variável aleatória n-dimensional X é definida como:

$$U_X = E\{X\} = E \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E\{x_1\} \\ E\{x_2\} \\ \vdots \\ E\{x_n\} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{vmatrix} \quad (3.3.8)$$

Definição 3.3.6 - Cada componente da variável n-dimensional X pode ser considerada como uma variável aleatória unidimensional de variância:

$$\sigma_i^2 = E \{(x_i - \mu_i)^2\} \quad (3.3.9)$$

Definição 3.3.7 - Definimos a covariância entre duas componentes quaisquer da variável aleatória n-dimensional X , como:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \sigma_{ij} = E\{(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\} \quad (3.3.10)$$

Definição 3.3.8 - As variâncias σ_i^2 e as covariâncias σ_{ij} das componentes de uma variável n-dimensional podem ser dispostas de maneira a formar uma matriz quadrada e simétrica ($n \times n$) chamada matriz variância-covariância (MV-C):

$$\Sigma_x = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_n^2 \end{vmatrix} \quad (3.3.11)$$

Desenvolvendo-se a expressão matricial

$$(X - U_x) (X - U_x)^T, \quad (3.3.12)$$

podemos escrever

$$\Sigma_x = E\{(X - U_x) (X - U_x)^T\} \quad (3.3.13)$$

3.4 - Aproximação Linear da Série de Taylor em Forma Matricial.

A série de Taylor nos proporciona o valor de uma função $f(t)$ no ponto $t = x$ quando conhecemos o valor da função para $t = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (3.4.1)$$

Para valores de x próximos de a as potências iguais e superiores à segunda podem, em muitos casos práticos, ser negligenciadas; ou seja, nas proximidades de a , a curva $f(t)$ pode ser substituída por uma reta:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad (3.4.2)$$

cujo coeficiente angular no ponto \underline{a} é $f'(a)$.

No caso de uma função de duas variáveis, a aproximação linear é dada por:

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - a_2) \quad (3.4.)$$

Fazendo:

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}; \Delta X = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{vmatrix}; X^0 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}; \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix} \quad (3.4.4)$$

resulta para (3.4.3)

$$f(X) = f(X^0) + \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X^0} \Delta X \quad (3.4.5)$$

Podemos generalizar para o caso de \underline{n} funções e a \underline{u} variáveis:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= f_1(X^0) + \frac{\partial f_1}{\partial X} \Big|_{X^0} \Delta X \\ f_2(X) &= f_2(X^0) + \frac{\partial f_2}{\partial X} \Big|_{X^0} \Delta X \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(X) &= f_n(X^0) + \frac{\partial f_n}{\partial X} \Big|_{X^0} \Delta X \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Fazendo:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}; \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_u} \end{pmatrix} \quad (3.4.7)$$

obtemos a aproximação linear da série de Taylor em forma matricial:

$$F(X) = F(X^0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X^0} \Delta X \quad (3.4.8)$$

3.5 - Lei de Propagação da Matriz Variância-Covariância

Consideremos duas variáveis n-dimensionais X e Y e admitamos que ambas se correlacionam linearmente:

$$Y = GX + C \quad (3.5.1)$$

Se tivermos a esperança $E\{X\}$, podemos obter a esperança $E\{Y\}$ por:

$$E\{Y\} = U_y = E\{GX+C\} = GE\{X\} + C \quad (3.5.2)$$

Da (3.3.13)

$$\Sigma_y = E\{(Y - U_y)(Y - U_y)^T\} \quad (3.5.3)$$

Substituindo (3.5.1) e (3.5.2) em (3.5.3)

$$\begin{aligned}
 \Sigma_y &= E\{(GX+C-GE\{X\}-C)(GX+C-GE\{X\}-C)^T\} \\
 &= E\{(GX-GU_x)(GX-GU_x)^T\} \\
 &= E\{G(X-U_x)|G(X-U_x)|^T\} \\
 &= GE\{(X-U_x)(X-U_x)^T\}G^T \\
 &= G\Sigma_x G^T \\
 \Sigma_y &= G\Sigma_x G^T \tag{3.5.4}
 \end{aligned}$$

A fórmula acima pode ser generalizada para o caso de dependência não linear. Com efeito, admitamos o modelo não linear:

$$Y = F(X) \tag{3.5.5}$$

Usando o desenvolvimento de Taylor, obtemos:

$$Y = F(X) = F(X^0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X^0} (X-X^0) \tag{3.5.6}$$

Fazendo,

$$D = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X^0} \tag{3.5.7}$$

podemos escrever,

$$\Sigma_y = D\Sigma_x D^T \tag{3.5.8}$$

que traduz a lei de propagação da matriz V-CV.

3.6 - Matriz dos Coeficientes de Peso

Consideremos a matriz variância-covariância Σ_X de uma variável aleatória n-dimensional. Atribuíamos a uma de suas componentes o peso unitário e designemos por σ_0^2 a variância dessa componente.

Dividindo Σ_X pela variância σ_0^2 da componente de peso unitário obtemos uma nova matriz simétrica, que recebe o nome de matriz dos coeficientes de peso Q_X :

$$Q_X = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_X \quad (3.6.1)$$

Se a matriz Q_X for não singular, terá uma inversa ordinária

$$Q^{-1} = P_X \quad (3.6.2)$$

chamada matriz dos pesos. P_X é uma matriz simétrica que se reduz a uma matriz diagonal no caso de as componentes de X serem independentes entre si. Neste caso, os elementos de P_X são os pesos P_i das componentes x_i e os elementos de Q_X são os inversos dos pesos $1/P_i$. Quando as componentes de X apresentam interdependência, as matrizes P_X e Q_X são completas. Neste caso, os elementos da diagonal de Q_X são os inversos dos pesos mas os elementos da diagonal de P_X não são os pesos |20|.

Dividindo (3.5.8) por σ_0^2 , teremos:

$$Q_Y = DQ_X D^T \quad (3.6.3)$$

3.7 - Ajustamento Pelo Método das Equações de Observação.

3.7.1 - Equações de Observação

No método das equações de observação (ou dos parâmetros) adota-se o modelo matemático:

$$L_a = F(X_a) \quad (3.7.1)$$

Sendo,

L_a : o vetor dos valores observados ajustados ($n \times 1$)

X_a : o vetor dos parâmetros ajustados ($u \times 1$)

Designando por V o vetor ($n \times 1$) dos resíduos que transformam os valores observados brutos L_b em valores ajustados

$$L_a = L_b + V \quad (3.7.2)$$

a (3.7.1) pode ser escrita:

$$L_b + V = F(X_a) \quad (3.7.3)$$

Linearizando o segundo membro de (3.7.3) pela fórmula de Taylor, podemos escrever:

$$L_b + V = F(X_o + X) = F(X_o) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a = X_o} X \quad (3.7.4)$$

onde X_o representa o vetor ($u \times 1$) dos valores aproximados dos parâmetros e X , o vetor das correções que convertem os parâmetros aproximados em ajustados:

$$X_a = X_o + X \quad (3.7.5)$$

A função dos parâmetros aproximados será designada:

$$F(X_0) = L_0 \quad (3.7.6)$$

Designando ainda por A a matriz $n \times u$ (n =número de observações; u = número de parâmetros) das derivadas parciais:

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a = X_0} \quad (3.7.7)$$

podemos escrever,

$$L_b + V = L_0 + AX$$

$$V = AX + L_0 - L_b$$

Fazendo,

$$L = L_0 - L_b \quad (3.7.8)$$

Teremos:

$$V = AX + L \quad (3.7.9)$$

3.7.2 - MV-C Dos Valores Observados (Σ_{L_b})

Antes do ajustamento necessitamos estimar a precisão das medidas efetuadas: variâncias e covariâncias dos valores observados para com elas construir a respectiva matriz variância-covariância. Tal estimativa é feita em função do conhecimento da precisão dos instrumentos de medida, dos métodos utilizados e do modelo matemático.

Quando as observações são independentes entre si, a

nulidade das covariâncias reduz a MV-C a uma matriz diagonal.

Dispondo da MV-C podemos chegar à matriz dos pesos:

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1} \quad (3.7.10)$$

sendo σ_0^2 a variância da unidade de peso.

3.7.3 - Resolução do Sistema (3.7.9)

Desejamos encontrar um vetor solução X tal que $\|V\|_p$ e $\|X\|$ sejam mínimas.

Aqui temos dois casos a considerar:

a) Ajustamento Clássico

Neste caso adotamos injunções iniciais de modo a fixar o sistema com o qual estamos trabalhando. Por exemplo, em uma rede de nivelamento nosso sistema é uni-dimensional e, além disso, a orientação do eixo segundo o qual medimos as altitudes já está implícita; precisamos portanto de uma única injunção que nos defina a origem do eixo orientado, ou seja, precisamos fixar a altitude de um ponto. Em fototriangulação analítica precisamos definir um sistema tri-dimensional o que exige a adoção de, no mínimo, sete injunções, as quais consistem da fixação de coordenadas (injunção de posição), de distâncias, etc.

A aplicação de injunções garante a não singularidade da matriz $N = A^T P A$.

Tendo em vista o Teorema (2.13.1), o Corolário (2.14.3) e o fato que para qualquer matriz quadrada não singular N , temos $N^{(1,4)} = N^{-1}$, podemos escrever para solução de (3.7.9):

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (3.7.11)$$

(A solução dada por (3.7.11) é obtida do sistema inconsistente $AX = -L$).

Fazendo,

$$N = A^T P A ; U = A^T P L \quad (3.7.12)$$

Podemos escrever:

$$X = -N^{-1} U \quad (3.7.13)$$

a₁) MV-C dos Parâmetros Ajustados (Σ_{X_a})

De (3.7.13) e (3.7.12) podemos escrever:

$$X = -N^{-1} U = -N^{-1} A^T P L = -N^{-1} A^T P (L_o - L_b) \quad (3.7.14)$$

$$X = -N^{-1} A^T P L_o + N^{-1} A^T P L_b \quad (3.7.15)$$

Comparando com a (3.5.4):

$$\Sigma_X = G \Sigma_{L_b} G^T \quad (3.7.16)$$

com,

$$G = N^{-1} A^T P \Rightarrow G^T = P^T A (N^{-1})^T = P A N^{-1} \quad (3.7.17)$$

e,

$$-N^{-1} A^T P L_o = \text{constante.}$$

Logo:

$$\Sigma_X = N^{-1} A^T P \Sigma_{L_b} P A N^{-1} \quad (3.7.18)$$

Considerando ainda que:

$$\Sigma_{L_b} = \sigma_o^2 P^{-1} \quad (3.7.19)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= \sigma_o^2 N^{-1} A^T P P^{-1} P A N^{-1} \\ &= \sigma_o^2 N^{-1} A^T P A N^{-1} = \sigma_o^2 N^{-1} N N^{-1} \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

$$\Sigma_X = \sigma_o^2 N^{-1} \quad (3.7.21)$$

Na equação (3.7.5) X_o é constante; logo:

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \sigma_o^2 N^{-1} \quad (3.7.22)$$

a₂) MV-C dos Valores Observados Ajustados (Σ_{L_a})

Façamos:

$$L_a = L_b + V = L_b + AX + L = L_b + AX + L_o - L_b \quad (3.7.23)$$

$$L_a = AX + L_o \quad (3.7.24)$$

Considerando a (3.5.4) novamente,

$$\Sigma_{L_a} = A \Sigma_X A^T \quad (3.7.25)$$

e substituindo Σ_X pelo seu valor dado pela (3.7.21):

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_o^2 A N^{-1} A^T \quad (3.7.26)$$

a₃) Variância da Unidade de Peso

O valor estimado de σ_0^2 (variância da unidade de peso) pode ser obtido com a fórmula:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u} \quad (3.7.27)$$

b) Ajustamento Livre

Neste caso não adotamos injeções iniciais. A matriz $N = A^T P A$ é, agora, singular.

Apresentamos duas soluções para o sistema (3.7.9):

Solução Tipo I:

Tendo em vista o Teorema (2.13.1) o Corolário (2.14.3) e o fato que a pseudo-inversa pertence à classe das inversas $A^{(1,4)}$, podemos escrever para solução de (3.7.9):

$$X = - (A^T P A)^+ A^T P L \quad (3.7.28)$$

(Resaltamos o fato de que poderíamos usar $(A^T P A)^{(1,4)}$ em vez da pseudo-inversa em 3.7.28) |21| e |22|.

Utilizando as (3.7.12), podemos escrever:

$$X = N^+ U \quad (3.7.29)$$

b₁) MV-C dos Parâmetros Ajustados (Σ_{X_a})

De maneira semelhante à do ajustamento tradicional, obtemos:

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \sigma_0^2 N^+ \quad (3.7.30)$$

b₂) MV-C dos Valores Observados Ajustados (Σ_{L_a})

De igual maneira, obtemos:

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_o^2 AN^+A^T \quad (3.7.31)$$

Solução Tipo II:

Fazendo $W = P_1$, $b = -L$ e $U = I$ (matriz unitária), obtemos pelo Corolário (2.14.2)

$$X = -(P^{1/2} A)^+ P^{1/2} L \quad (3.7.32)$$

b₃) MV-C dos Parâmetros Ajustados (Σ_{X_a})

$$X = -(P^{1/2} A)^+ P^{1/2} L = -(P^{1/2} A)^+ P^{1/2} (L_o - L_b) \quad (3.7.33)$$

$$X = -(P^{1/2} A)^+ P^{1/2} L_o + (P^{1/2} A)^+ P^{1/2} L_b \quad (3.7.34)$$

Comparando com a (3.5.4):

$$\Sigma_X = G \Sigma_{L_b} G^T$$

com

$$G = (P^{1/2} A)^+ P^{1/2} \Rightarrow G^T = P^{1/2} | (P^{1/2} A)^+ |^T$$

e,

$$-(P^{1/2} A)^+ P^{1/2} L_o = \text{constante}$$

logo:

$$\Sigma_X = (P^{1/2} A)^+ P^{1/2} \Sigma_{L_b} P^{1/2} | (P^{1/2} A)^+ |^T \quad (3.7.35)$$

Introduzindo a (3.7.19), vem

$$\Sigma_X = \sigma_o^2 (P^{1/2} A)^+ |(P^{1/2} A)^+|^T \quad (3.7.36)$$

E, considerando a (3.7.5):

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \sigma_o^2 (P^{1/2} A)^+ |(P^{1/2} A)^+|^T \quad (3.7.37)$$

b₄) MV-C dos Valores Observados Ajustados (Σ_{L_a})

Substituindo (3.7.36) em (3.7.25) obtemos:

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_o^2 A(P^{1/2} A)^+ |(P^{1/2} A)^+|^T A^T \quad (3.7.38)$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_o^2 A(P^{1/2} A)^+ |A(P^{1/2} A)^+|^T \quad (3.7.39)$$

3.8 - Uso de Iterações no Método Paramétrico

O ajustamento com iterações é feito tomando para vetor dos parâmetros aproximados (X_o) da iteração i , o vetor dos parâmetros ajustadas da iteração $i-1$. Em síntese, teremos:

$$L_{a_i} = F(X_{a_i}) \quad (3.8.1)$$

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_{a_{i-1}}} \quad (3.8.2)$$

$$L_i = F(X_{a_{i-1}}) - L_b \quad (3.8.3)$$

$$X_i = -(A_i^T P A_i)^{-1} A_i^T P L_i \quad (\text{ou equivalente})$$

$$V_i = A_i X_i + L_i \quad (3.8.4)$$

$$X_{a_i} = X_{a_{i-1}} + X_i \quad (3.8.5)$$

$$L_{a_i} = L_b + V_i \quad (3.8.6)$$

CAPÍTULO IV

EXEMPLO NUMÉRICO

4.1 - Introdução

Neste capítulo, com a finalidade de testar o método proposto, fazemos o ajustamento de um bloco de 6 fotografias. Ele consiste de 34 pontos aerotriangulados (figura 4.1.1) e de 150 pontos imagem. Cada ponto imagem fornece duas equações de observação e cada ponto aerotriangulado, 3 parâmetros. Cada foto fornece seis parâmetros. Temos, portanto, 300 equações de observação e 138 parâmetros.

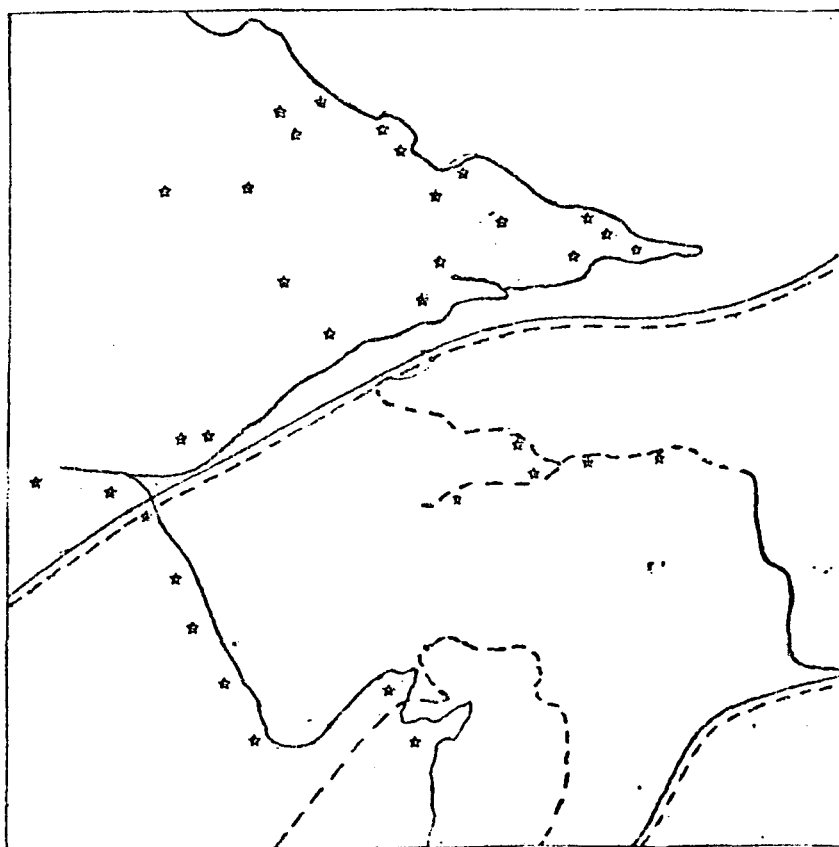


Fig. 4.1.1 - Esquema do campo de testes.

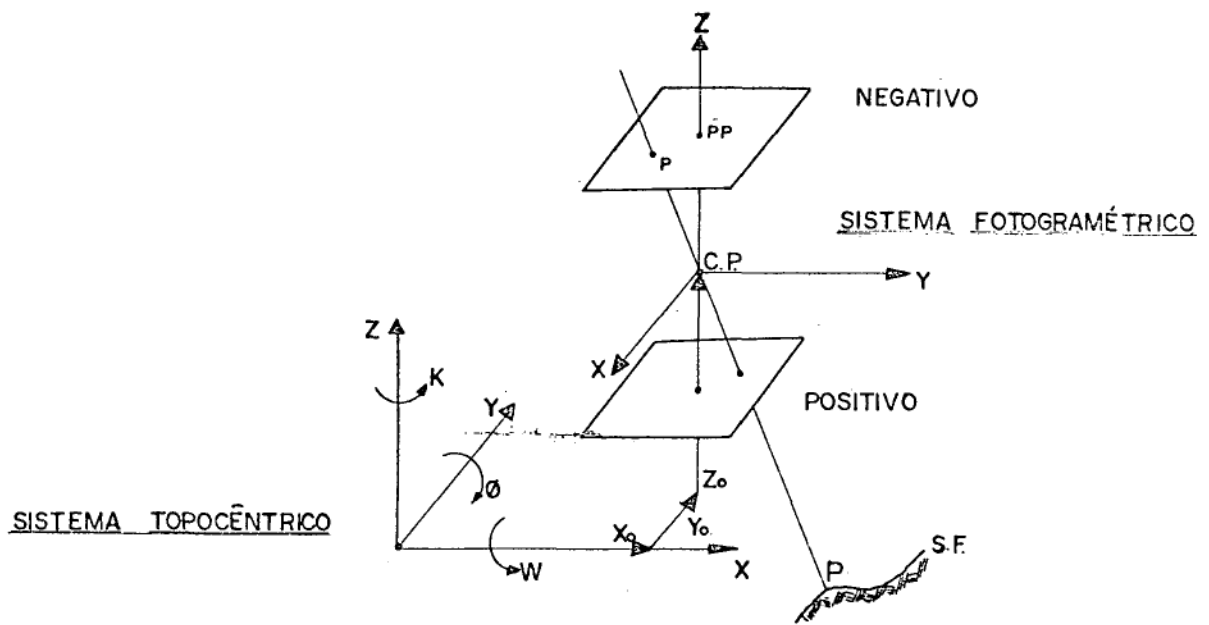
4.2 - Modelo Matemático

fig. 4.2.1

4.2.1 - Equações Projetivas

Da colinearidade do ponto objeto (P), centro perspectivo (C.P) e ponto imagem (p), obtemos (fig.4.2.1)

$$\frac{x'}{X'} = \frac{z'}{Z'} \quad (4.2.1)$$

$$\frac{y'}{Y'} = \frac{z'}{Z'}$$

sendo,

(X', Y', Z'): Coordenadas fotogramétricas do ponto P.

(x', y', z'): Coordenadas fotogramétricas da imagem de P.

Agora, fazendo $z' = c$ (distância focal calibrada):

$$x' = c \frac{X'}{Z'} \quad (4.2.2)$$

$$y' = c \frac{Y'}{Z'}$$

4.2.2 - Transformação de Coordenadas Topocêntricas Para Fotogramétricas.

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{vmatrix} = FR_3(\kappa)R_2(\phi)R_1(\omega) \begin{vmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{vmatrix} \quad (4.2.3)$$

sendo,

(X, Y, Z) : Coordenadas topocêntricas do ponto P

(X_0, Y_0, Z_0) : Coordenadas topocêntricas da estação de
exposição (C.P.)

(κ, ϕ, ω) : Ângulos de orientação entre os dois sistemas.

F: Fator de escala

R_1, R_2 e R_3 : Matrizes de rotação

$$R_3(\kappa) = \begin{vmatrix} \cos\kappa & \text{sen}\kappa & 0 \\ -\text{sen}\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.2.4)$$

$$R_2(\phi) = \begin{vmatrix} \cos\phi & 0 & -\text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{vmatrix} \quad (4.2.5)$$

$$R_1(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \text{sen}\omega \\ 0 & -\text{sen}\omega & \cos\omega \end{vmatrix} \quad (4.2.6)$$

Fazendo,

$$M = R_3(\kappa) R_2(\phi) R_1(\omega) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \quad (4.2.7)$$

teremos,

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{vmatrix} = F \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{vmatrix} \quad (4.2.8)$$

4.2.3 - Modelo Matemático

Substituindo em (4.2.2), os valores de X' , Y' e Z' , obtidos de (4.2.8), teremos:

$$x' = c \frac{m_{11}(X-X_0) + m_{12}(Y-Y_0) + m_{13}(Z-Z_0)}{m_{31}(X-X_0) + m_{32}(Y-Y_0) + m_{33}(Z-Z_0)} \quad (4.2.9)$$

$$y' = c \frac{m_{21}(X-X_0) + m_{22}(Y-Y_0) + m_{23}(Z-Z_0)}{m_{31}(X-X_0) + m_{32}(Y-Y_0) + m_{33}(Z-Z_0)}$$

Ou, simplificadamente:

$$x' = c \frac{m}{q} \quad (4.2.10)$$

$$y' = c \frac{n}{q}$$

Por outro lado, chamando de (x_0, y_0) as coordenadas fiduciais do ponto principal, e de (x, y) as coordenadas fiduciais do ponto P, teremos:

$$x' = x - x_0 \quad (4.2.11)$$

$$y' = y - y_0$$

Finalmente, substituindo (4.2.11) em (4.2.10), obtemos nosso modelo matemático:

$$x = x_0 + c \frac{m}{q}$$

(4.2.12)

$$y = y_0 + c \frac{n}{q}$$

As equações (4.2.12) são do tipo $L_a = F(X_a)$,

sendo:

$$L_a = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_s \\ y_s \end{vmatrix}$$

Valores ajustados das coordenadas de foto dos s pontos imagem (observações ajustadas).

$$X_a = \begin{vmatrix} \kappa^i \\ \phi^i \\ \omega^i \\ X_0^i \\ Y_0^i \\ Z_0^i \\ X^j \\ Y^j \\ Z^j \end{vmatrix}$$

Valores ajustados dos parâmetros correspondentes a f fotos e t pontos triangulados.

$i = 1, 2, \dots, f$
 $j = 1, 2, \dots, t$

4.3 - Modelo Linearizado

$$AX + L = V \quad (4.3.1)$$

Sendo,

$$L = L_o - L_b ; \quad L_o = F(X_o) \quad (4.3.2)$$

L_b : Vetor das observações brutas;

X_o : Vetor dos valores aproximados dos parâmetros.

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a = X_o} \quad (4.3.3)$$

$$A = \left| \begin{array}{cccccccccc} \frac{\partial x_1}{\partial \kappa^i} & \frac{\partial x_1}{\partial \phi^i} & \frac{\partial x_1}{\partial \omega^i} & \frac{\partial x_1}{\partial X_o^i} & \frac{\partial x_1}{\partial Y_o^i} & \frac{\partial x_1}{\partial Z_o^i} & \frac{\partial x_1}{\partial X^j} & \frac{\partial x_1}{\partial Y^j} & \frac{\partial x_1}{\partial Z^j} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \kappa^i} & \frac{\partial y_1}{\partial \phi^i} & \frac{\partial y_1}{\partial \omega^i} & \frac{\partial y_1}{\partial X_o^i} & \frac{\partial y_1}{\partial Y_o^i} & \frac{\partial y_1}{\partial Z_o^i} & \frac{\partial y_1}{\partial X^j} & \frac{\partial y_1}{\partial Y^j} & \frac{\partial y_1}{\partial Z^j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_s}{\partial \kappa^i} & \frac{\partial x_s}{\partial \phi^i} & \frac{\partial x_s}{\partial \omega^i} & \frac{\partial x_s}{\partial X_o^i} & \frac{\partial x_s}{\partial Y_o^i} & \frac{\partial x_s}{\partial Z_o^i} & \frac{\partial x_s}{\partial X^j} & \frac{\partial x_s}{\partial Y^j} & \frac{\partial x_s}{\partial Z^j} \\ \frac{y_s}{\partial \kappa^i} & \frac{y_s}{\partial \phi^i} & \frac{y_s}{\partial \omega^i} & \frac{y_s}{\partial X_o^i} & \frac{y_s}{\partial Y_o^i} & \frac{y_s}{\partial Z_o^i} & \frac{y_s}{\partial X^j} & \frac{y_s}{\partial Y^j} & \frac{y_s}{\partial Z^j} \end{array} \right| \quad (4.3.4)$$

$X_a = X_o$

$$i = 1, 2, \dots, f$$

$$j = 1, 2, \dots, t$$

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \cos\kappa\cos\phi \\
 m_{12} &= \text{sen}\kappa\cos\omega + \cos\kappa\text{sen}\phi\text{sen}\omega \\
 m_{13} &= \text{sen}\kappa\text{sen}\omega - \cos\kappa\text{sen}\phi\cos\omega \\
 m_{21} &= -\text{sen}\kappa\cos\phi \\
 m_{22} &= \cos\kappa\cos\omega - \text{sen}\kappa\text{sen}\phi\text{sen}\omega \\
 m_{23} &= \cos\kappa\text{sen}\omega + \text{sen}\kappa\text{sen}\phi\cos\omega \\
 m_{31} &= \text{sen}\phi \\
 m_{32} &= -\cos\phi\text{sen}\omega \\
 m_{33} &= \cos\phi\cos\omega
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Fazendo,

$$\begin{aligned}
 \Delta X &= X - X_0 \\
 \Delta Y &= Y - Y_0 \\
 \Delta Z &= Z - Z_0
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

e derivando as equações (4.2.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \kappa} &= \frac{c}{q} \frac{\partial m}{\partial \kappa} - \frac{cm}{q^2} \frac{\partial q}{\partial \kappa} \\
 &= \frac{c}{q} \frac{\partial}{\partial \kappa} (m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z) \\
 &= \frac{c}{q} \left[\Delta X(-\text{sen}\kappa)\cos\phi + \Delta Y(\cos\kappa\cos\omega - \text{sen}\kappa\text{sen}\phi\text{sen}\omega) + \right. \\
 &\quad \left. + \Delta Z(\cos\kappa\text{sen}\omega + \text{sen}\kappa\text{sen}\phi\cos\omega) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{q} (\Delta X \cdot m_{21} + \Delta Y \cdot m_{22} + \Delta Z \cdot m_{23}) \quad (4.3.7)$$

De igual maneira obtemos as demais derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \phi} = & - \frac{c}{q^2} \left[q (\Delta X \cdot \cos \kappa \sin \phi - \Delta Y \cdot \cos \kappa \cos \phi \sin \omega \right. \\ & + \Delta Z \cdot \cos \kappa \cos \phi \cos \omega) + m (\Delta X \cdot \cos \phi \\ & \left. + \Delta Y \cdot \sin \phi \sin \omega - \Delta Z \cdot \sin \phi \cos \omega) \right] \quad (4.3.8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = - \frac{c}{q^2} \left[q (\Delta Y \cdot m_{13} - \Delta Z \cdot m_{12}) - m (\Delta Y \cdot m_{33} - \Delta Z \cdot m_{32}) \right] \quad (4.3.9)$$

$$\frac{\partial x}{\partial X_o} = - \frac{c}{q^2} (q \cdot m_{11} - m \cdot m_{31}) \quad (4.3.10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y_o} = - \frac{c}{q^2} (q \cdot m_{12} - m \cdot m_{32}) \quad (4.3.11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z_o} = - \frac{c}{q^2} (q \cdot m_{13} - m \cdot m_{33}) \quad (4.3.12)$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = - \frac{\partial x}{\partial X_o} \quad (4.3.13)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = - \frac{\partial x}{\partial Y_o} \quad (4.3.14)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = - \frac{\partial x}{\partial Z_o} \quad (4.3.15)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \kappa} = -\frac{c}{q} (\Delta X \cdot m_{11} + \Delta Y \cdot m_{12} + \Delta Z \cdot m_{13}) \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \phi} = -\frac{c}{q^2} & \left| -q(\Delta X \cdot \text{sen} \kappa \text{sen} \phi - \Delta Y \cdot \text{sen} \kappa \cos \phi \text{sen} \omega \right. \\ & + \Delta Z \cdot \text{sen} \kappa \cos \phi \cos \omega) + n(\Delta X \cdot \cos \phi + \\ & \left. \Delta Y \cdot \text{sen} \phi \text{sen} \omega - \Delta Z \cdot \text{sen} \phi \cos \omega) \right| \quad (4.3.17) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{c}{q^2} \left| q(-\Delta Y \cdot m_{23} + \Delta Z \cdot m_{22}) + n(\Delta Y \cdot m_{33} - \Delta Z \cdot m_{32}) \right| \quad (4.3.18)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X_o} = -\frac{c}{q} (q \cdot m_{21} - n \cdot m_{31}) \quad (4.3.19)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_o} = -\frac{c}{q} (q \cdot m_{22} - n \cdot m_{32}) \quad (4.3.20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z_o} = -\frac{c}{q} (q \cdot m_{23} - n \cdot m_{33}) \quad (4.3.21)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial y}{\partial X_o} \quad (4.3.22)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{\partial y}{\partial Y_o} \quad (4.3.23)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z} = -\frac{\partial y}{\partial Z_o} \quad (4.3.24)$$

As fórmulas acima são válidas para uma distância focal negativa.

4.4 - Obtenção das coordenadas Fiduciais (observações) e dos Valores Aproximados dos Parâmetros.

4.4.1 - Coordenadas Fiduciais

As coordenadas fiduciais foram obtidas a partir de coordenadas instrumentais medidas com um monocomparador Space-Optic em fotografias tomadas com uma câmara RMK A 15/23 dotada de objetiva grande angular Pleogon A ($c=153,14\text{mm}$; $x_o=y_o=0$). Tais coordenadas são as mesmas do Projeto de Calibração de Câmaras da Universidade Federal do Paraná.

4.4.2 - Refração Fotogramétrica

As coordenadas de foto foram corrigidas da refração fotogramétrica através das fórmulas [23]:

$$\epsilon_{45} = \frac{(1-bZ_s)(Z_s-Z_p) + \frac{1}{b(c+1)} \left| (1-bZ_s)^{c+1} - (1-bZ_p)^{c+1} \right|}{(Z_s-Z_p) \left| (1-bZ_s)^c - (1-bZ_p)^c \right|}$$

$$\ell_n \left| \frac{1+0,000226a (1-bZ_p)^c}{1+0,000226a (1-bZ_s)^c} \right| \quad (4.4.1)$$

ou

$$\epsilon_{45} = \frac{1}{Z_s-Z_p} \left(\frac{A+B}{C+D} - Z_p \right) \ell_n \left| \frac{1+0,000226a(1-bZ_p)^c}{1+0,000226a' -b(Z_s-1l)} \right| \quad (4.4.2)$$

Sendo,

e = base de logaritmos neperianos

ℓ_n = logaritmo neperiano

a = 1,2256

b = 0,02257

c = 4,256

a' = 0,3638

b' = 0,1578

$$A = a \left| (1-11b)^c \cdot 11 + \frac{(1-11b)^{c+1}}{b(c+1)} - \frac{(1-bZ_P)^{c+1}}{b(c+1)} - (1-bZ_P)^c Z_P \right| \quad (4.4.3)$$

$$B = a' \left| \left(Z_S + \frac{1}{b'} \right) e^{-b'(Z_S-11)} - 11 - \frac{1}{b'} \right| \quad (4.4.4)$$

$$C = a \left| (1-11b)^c - (1-bZ_P)^c \right| \quad (4.4.5)$$

$$D = a' \left| e^{-b'(Z_S-11)} - 1 \right| \quad (4.4.6)$$

Z_S : altitude de vôo em km

Z_P : altitude do ponto em km

ϵ_{45} : refração fotogramétrica para um ângulo nadir de 45°

Usa-se (4.4.1) para $Z_S \leq 11$ km e (4.4.2) para $Z_S \geq 11$ km.

Chamando de (x_C^*, y_C^*) as coordenadas (x^*, y^*) corrigidas da refração, temos |24|

$$x_C^* = x^* - \epsilon_{45} \left(1 + \frac{x^{*2} + y^{*2}}{c^{*2}} \right) x^* \quad (4.4.7)$$

$$y_c^* = y^* - \epsilon_{45} \left(1 + \frac{x^{*2} + y^{*2}}{c^{*2}} \right) y^* \quad (4.4.8)$$

As fórmulas acima são válidas para uma foto perfeitamente vertical [25]. Portanto é necessário projetar a foto real em uma foto sintética vertical com distância focal c^* . A transformação de uma foto real em uma foto sintética vertical é dada por:

$$x_c^* = c^* \frac{m_{11}x' + m_{21}y' + m_{31}c}{m_{13}x' + m_{23}y' + m_{33}c} \quad (4.4.9)$$

$$y_c^* = c^* \frac{m_{12}x' + m_{22}y' + m_{32}c}{m_{13}x' + m_{23}y' + m_{33}c} \quad (4.4.10)$$

onde (x^*, y^*) são as coordenadas sintéticas, (x', y') são as coordenadas reais, c é a distância focal para a foto real e $m_{11} \dots m_{33}$ são os elementos da matriz rotacional. Isto requer o conhecimento dos elementos de orientação externa, que são obtidos na "iteração zero". Como a matriz rotacional é ortogonal, podemos retornar à foto real usando as fórmulas:

$$x_c' = c \frac{m_{11} x_c^* + m_{12} y_c^* + m_{13} c^*}{m_{31} x_c^* + m_{32} y_c^* + m_{33} c^*} \quad (4.4.11)$$

$$y_c' = c \frac{m_{21} x_c^* + m_{22} y_c^* + m_{23} c^*}{m_{31} x_c^* + m_{32} y_c^* + m_{33} c^*} \quad (4.4.12)$$

Resumindo, obtemos uma solução preliminar (iteração zero) sem considerar a refração, usamos as (4.4.9) e (4.4.10),

para termos coordenadas sintéticas, corrigimos estas coordenadas sintéticas por 4.4.1 (ou (4.4.2)), (4.4.7) e (4.4.8); e, por último retornamos à foto real usando as (4.4.11) e (4.4.12).

A correção foi feita usando a subrotina REFRA. Na mesma fizemos $c^* = c$.

4.4.3 - Valores Aproximados dos Parâmetros

Tendo em vista que dispunhamos de coordenadas topocêntricas aproximadas, obtidas para o Projeto de Calibração de Câmera, usamos estes valores. Também, do referido projeto, obtivemos as coordenadas dos pontos de apoio: pontos 12, 31 e 32. Tais coordenadas têm uma variância de 10^{-4} m^2 . Entretanto, tais valores aproximados poderiam ser obtidos graficamente do seguinte modo:

a) traçar em papel milimetrado as linhas fiduciais correspondentes à primeira foto e locar em escala natural todos os pontos da mesma. Como estes pontos aparecem na segunda foto, podemos traçar as linhas fiduciais para a mesma e locar os seus pontos restantes. O processo continua até a última foto;

b) caso tenhamos pontos de controle, calcular a escala média das fotos por

$$\frac{l}{M} = \frac{d}{D} \quad (4.4.13)$$

sendo,

d: distância entre dois pontos na foto

D: respectiva distância no terreno;

c) caso não tenhamos pontos de apoio, adotar como escala média, a escala nominal de tomada das fotografias;

d) de posse da escala média locar (caso tenhamos pontos de controle) ou arbitrar (caso contrário) a origem do

sistema topocêntrico, orientado como na figura (1.1.3). Calcular as coordenadas (X,Y) de todos os pontos e (X_o,Y_o) de todas as fotos neste sistema topocêntrico.

e) Conhecidos a escala média e a distância focal calibrada (c) , calcular a altura média de vôo (H) :

$$\frac{1}{M} = \frac{c}{H} \quad (4.4.14)$$

f) Dispondo-se de pontos de apoio, adotar como valores aproximados para as altitudes (Z) , a média das altitudes dos pontos de apoio ou os valores obtidos de uma carta (caso tenhamos).

g) Caso não tenhamos pontos de apoio, admitimos que o terreno seja plano, e arbitramos um mesmo valor (Z) para todos os pontos.

h) Calcular a média das altitudes de todos os pontos (Z_m) e a altitude de vôo (Z_o) :

$$Z_o = Z_m + H \quad (4.4.15)$$

i) Adotar, para todas as fotos, $\phi = \omega = 0$ (o que corresponde a admitir que as fotos são perfeitamente verticais).

j) O ângulo κ é medido positivamente do eixo X para o eixo x .

4.5 - Aplicação de Injunções (Relativas) de Posição aos Pontos de Controle.

Aqui usamos o conceito de parâmetros ligados por injunções. As injunções utilizadas são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 j_{X_a^o} &= j_{X_a^c} \\
 j_{Y_a^o} &= j_{Y_a^c} \quad j= 1,2,\dots,p(p=n^\circ \text{ de pontos de apoio}). \\
 j_{Z_a^o} &= j_{Z_a^c}
 \end{aligned}
 \tag{4.5.1}$$

sendo (X_a^c, Y_a^c, Z_a^c) as coordenadas topocêntricas calculadas ajustadas de um ponto de controle e (X_a^o, Y_a^o, Z_a^o) as suas respectivas coordenadas observadas ajustadas.

As equações (4.5.1) são do tipo:

$$L_a^c = G(X_a^c) \tag{4.5.2}$$

sendo,

$$L_a^c = \begin{vmatrix} i_{X_a^o} \\ i_{Y_a^o} \\ i_{Z_a^o} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Vetor das observações adicionais} \\ \text{ajustadas . } i= 1, 2, \dots p \end{array}$$

(4.5.3)

4.5.1 - Modelo Linearizado

Fazendo

$$L_o^c = G(X_o^c) \tag{4.5.4}$$

$$L = L_o^c - L_D^c \tag{4.5.5}$$

$$V = L_a^c - L_b^c \quad (4.5.6)$$

obtemos o modelo linearizado:

$$AX + L = V \quad (4.5.7)$$

4.5.2 - Matriz dos Coeficientes

$$A = \left. \frac{\partial G}{\partial X_a} \right|_{X_a = X_0} = \begin{vmatrix} 0 & C & 0 \end{vmatrix} \quad (4.5.8)$$

com

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial^j X_a^0}{\partial^j X_a^c} & \frac{\partial^j X_a^0}{\partial^j Y_a^c} & \frac{\partial^j X_a^0}{\partial^j Z_a^c} \\ \frac{\partial^j Y_a^0}{\partial^j X_a^c} & \frac{\partial^j Y_a^0}{\partial^j Y_a^c} & \frac{\partial^j Y_a^0}{\partial^j Z_a^c} \\ \frac{\partial^j Z_a^0}{\partial^j X_a^c} & \frac{\partial^j Z_a^0}{\partial^j Y_a^c} & \frac{\partial^j Z_a^0}{\partial^j Z_a^c} \end{vmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4.5.9)$$

Efetuada as derivadas obtemos $P = I$ (matriz identidade).

Portanto,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & I & 0 \end{vmatrix}$$

4.5.3 - Equações Normais

Para obter as equações normais, devemos minimizar a função,

$$\phi = V^T P V + \overset{C}{V}^T \overset{C}{P} \overset{C}{V}$$

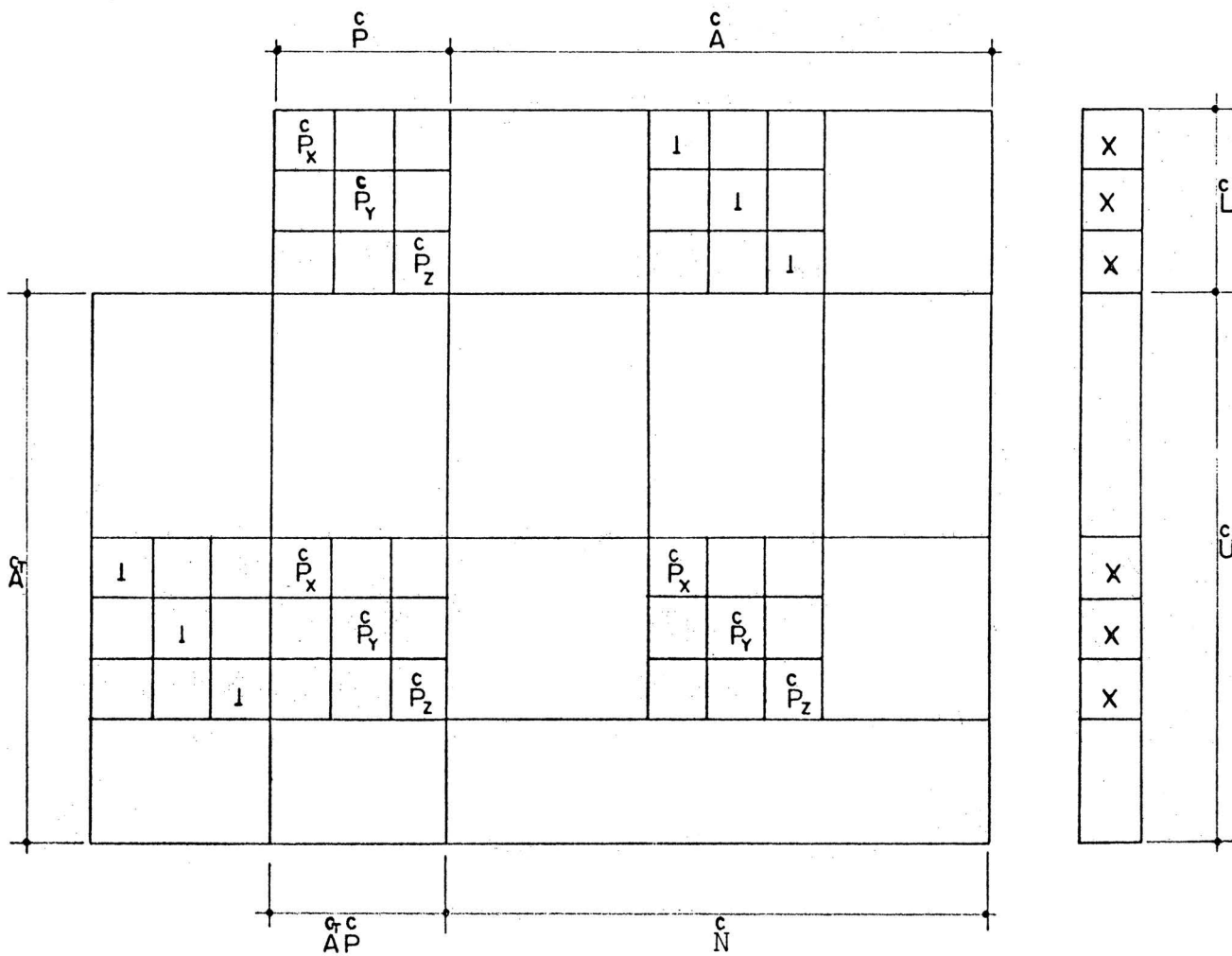
($\overset{C}{P}$: matriz dos pesos das equações 4.5.1), o que nos dá,

$$(A^T P A + \overset{C}{A}^T \overset{C}{P} \overset{C}{A}) X + (A^T P L + \overset{C}{A}^T \overset{C}{P} L) = 0 \quad (4.5.10)$$

ou, simplificando,

$$(N + \overset{C}{N}) X + (U + \overset{C}{U}) = 0 \quad (4.5.11)$$

O esquema abaixo mostra que, tendo-se a matriz N, para obtermos a matriz $N' = N + \overset{C}{N}$ basta somarmos os pesos nas posições não nulas de $\overset{C}{N}$. O mesmo fazemos para obter $U' = U + \overset{C}{U}$



4.6 - Programas Usados

Para executar o ajustamento proposto elaboramos um programa em Linguagem FORTRAN (ver apêndice) o qual consiste do programa principal e das subrotinas VERSOL, PSEUDO e REFRA \tilde{X} .

Este programa permite (dentro das limitações de armazenamento) executar uma aerotriangulação em bloco, para qualquer número de pontos de apoio.

Chamando de p o número de pontos de apoio, temos:

a) Para $p = 0$, não aplica injunções e utiliza a subrotina PSEUDO para cálculo de N^+ .

b) Para $0 < p < 3$, aplica $(3P-2)$ injunções de posição e usa, ainda, a subrotina PSEUDO.

c) Para $p \geq 3$, aplica $(3P-2)$ injunções de posição e usa a subrotina VERSOL para cálculo de N^{-1} .

Nos ítems (b) e (c) acima, não impomos injunções às coordenadas X e Y do último ponto de apoio lido. Entretanto devemos colocar um valor qualquer para tais coordenadas (valor sem efeito) para que não haja erro no formato de leitura.

A subrotina PSEUDO calcula a pseudo-inversa de uma matriz (inclusive retangular), usando o método II, sem necessidade do conhecimento de sua característica.

A subrotina VERSOL calcula a inversa ordinária de uma matriz. O algoritmo usado encontra-se em Modro |26|.

4.7 - Resultados

Apresentamos nas tabelas 4.7.1 a 4.7.9, os resultados do ajustamento pelos dois métodos, bem como os dados utilizados.

Na obtenção destes resultados, usamos os seguintes

critérios de convergência:

a) Máximo de cinco iterações.

b) Correção não superior a 10^{-3} m para todas as coordenadas e 10^{-3} rad para todos os ângulos de orientação.

4.7.1 - Testes Qui-Quadrado

Apresentamos, na tabela (4.7.9), testes de hipótese correspondente aos dois métodos, bem como o valor do traço da matriz variância-covariância. O teste de hipótese é feito ao nível de 95% de confiança. Testamos a hipótese básica (H_0) de que a variância da unidade de peso a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) seja igual à variância da unidade de peso a priori (σ_0^2), contra a hipótese alternativa de estes dois valores serem diferentes (H_a):

$$H_0: \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad (4.7.1)$$

$$H_a: \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \quad (4.7.2)$$

O valor de χ^2 é dado por |27|

$$\chi^2 = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} \quad (4.7.3)$$

Lógicamente, no ajustamento clássico devemos incluir o vetor $\overset{c}{V}$:

$$\chi^2 = \frac{V^T P V + \overset{c}{V}^T \overset{c}{P} \overset{c}{V}}{\sigma_0^2} \quad (4.7.4)$$

Para mais de 100 graus de liberdade a curva de

qui-quadrado é aproximadamente igual à curva de distribuição normal com média g e variância $2g$, onde g é o número de graus de liberdade.

De uma tabela de distribuição normal obtemos, para $p = 0,475$, $z = 1,96$. Então,

$$\chi^2_{0,025} = g + 1,96 \sqrt{2g}$$

$$\chi^2_{0,975} = g - 1,96 \sqrt{2g}$$

A hipótese básica é aceita se:

$$\chi^2_{0,025} > \chi^2 > \chi^2_{0,975} \quad (4.7.5)$$

Se $\hat{\sigma}_o^2$ for estatisticamente igual a σ_o^2 podemos afirmar que:

- a) o modelo matemático está correto;
- b) não há erro grosseiro nas observações;
- c) a variância usada na formação da matriz dos pesos está compatível com a exatidão do monocomparador.

TABELA 4.7.1 COORDENADAS FIDUCIAIS E RESÍDUOS
(Desvio padrão: $\sigma = 0,004$ mm)

FOTO	PONTO	COORDENADAS FIDUCIAIS		RESÍDUOS	
		X(MM)	Y(MM)	RX(MM)	RY(MM)
1.	18.	-106.00000	-54.61910	-0.00004	0.00200
1.	19.	-100.45730	-62.76430	-0.00094	0.00289
1.	20.	-71.56120	-69.01850	0.00187	-0.00345
1.	21.	-53.83580	-58.93800	0.00165	-0.00272
1.	22.	-38.83870	-51.59510	0.00216	-0.00231
1.	23.	-21.77350	-40.30220	-0.00275	-0.00045
1.	24.	-4.02590	-26.16560	-0.00510	0.00563
1.	25.	-26.17340	16.46080	0.00114	-0.00021
1.	26.	-81.72940	30.49320	0.00017	-0.00223
1.	27.	-94.09810	50.60040	-0.00369	0.00422
1.	28.	-101.44330	45.82710	0.00033	-0.00079
1.	29.	-98.51820	67.84810	0.00153	0.00245
1.	30.	-102.59660	91.59660	0.00250	-0.00003
1.	31.	-8.48560	28.02330	-0.00186	-0.00268
1.	32.	-80.51850	-109.64470	0.00163	-0.00255
1.	34.	-80.55120	-83.03930	0.00162	0.00049
2.	1.	-69.23330	58.73220	0.00053	0.00043
2.	2.	-70.38220	79.55650	0.00503	0.00089
2.	3.	-78.42600	71.91370	0.00053	-0.00403
2.	4.	-80.57290	60.25970	-0.00134	0.00111
2.	5.	-94.07130	18.04040	-0.00126	0.00405
2.	6.	-78.25270	34.92960	0.00704	-0.00144
2.	8.	-75.57780	12.41950	-0.00186	-0.00313
2.	9.	-36.58480	-21.21830	-0.00265	0.00046
2.	10.	-86.98550	9.09780	-0.00190	0.00669
2.	11.	-102.42220	-2.82240	-0.00026	-0.00222
2.	12.	-106.92740	-11.52030	0.00351	0.00126
2.	13.	-113.84420	-29.67950	0.00208	-0.00140
2.	14.	-101.90850	-39.07870	-0.00337	-0.00484
2.	15.	-107.90000	-41.96340	0.00183	0.00195
2.	16.	-84.53700	-52.83650	-0.00085	-0.00259
2.	17.	-51.58370	-37.24880	0.00213	-0.00173
2.	18.	2.61890	-58.99120	-0.00264	0.00318
2.	19.	7.67260	-67.28030	-0.00033	0.00156
2.	20.	34.55940	-74.14240	-0.00400	0.00288
2.	21.	52.87170	-64.39040	0.00159	0.00070
2.	22.	68.73730	-57.34410	-0.00247	-0.00016
2.	23.	86.39020	-46.34840	-0.00242	0.00122
2.	24.	104.46310	-32.50560	-0.00380	-0.00011
2.	25.	82.98620	10.48440	0.01000	-0.00018
2.	26.	16.70110	25.69930	-0.00480	0.00045
2.	27.	4.67150	45.69430	0.00040	0.00206
2.	28.	-2.56980	41.09900	0.00125	-0.00729
2.	29.	0.53670	62.67950	-0.00484	0.00289
2.	30.	-2.96480	85.92370	-0.00046	0.00309
2.	31.	101.94860	21.64660	0.00253	0.00152
2.	33.	-78.62960	-80.59010	-0.00174	-0.00483
2.	34.	25.55710	-88.10780	0.00136	-0.00213
3.	1.	-35.53760	58.89750	0.00037	-0.00126
3.	2.	33.59810	80.06260	-0.00073	-0.00040

TABELA 4.7.1 (Continuação)

FOTO	PONTO	COORDENADAS FIDUCIAIS		RESÍDUOS	
		X(MM)	Y(MM)	RX(MM)	RY(MM)
3.	3.	26.15600	72.23530	0.00041	0.00153
3.	4.	24.50590	60.37940	-0.00092	-0.00147
3.	5.	10.89760	17.72580	0.00350	-0.00168
3.	6.	26.82140	34.78060	0.00039	0.00016
3.	7.	52.85350	8.69370	-0.00076	0.00065
3.	8.	29.40290	12.13110	0.00229	0.00030
3.	9.	67.31710	-21.52910	-0.00171	0.00075
3.	10.	18.02960	8.75930	-0.00026	-0.00260
3.	11.	2.08030	-3.17770	-0.00156	0.00200
3.	12.	-2.55700	-11.86860	0.00140	0.00393
3.	13.	-9.76460	-29.94960	0.00354	-0.00059
3.	14.	2.32070	-39.29560	-0.00100	0.00443
3.	15.	-3.96570	-42.15450	0.00217	-0.00030
3.	16.	19.47960	-52.97820	0.00201	-0.00004
3.	17.	52.64570	-37.53820	-0.00002	0.00085
3.	18.	104.96410	-59.24750	0.00151	-0.00544
3.	19.	109.77510	-67.50030	-0.00536	-0.00349
3.	26.	108.47090	26.06880	0.00669	-0.00132
3.	27.	96.00750	46.30590	-0.00936	0.00379
3.	28.	88.71360	41.61580	-0.00148	-0.00212
3.	29.	91.70540	63.55640	0.00021	0.00025
3.	30.	88.14850	87.26260	-0.00219	0.00575
3.	33.	24.56360	-80.42620	-0.00001	-0.00302
4.	5.	-84.30480	-89.56130	0.00343	-0.00314
4.	6.	-100.71650	-74.23080	-0.00064	-0.00071
4.	7.	-74.69060	-49.00550	0.00042	-0.00446
4.	8.	-78.80410	-72.22730	-0.00148	0.00325
4.	9.	-44.91710	-35.56960	-0.00191	0.00209
4.	10.	-75.65550	-83.10510	0.00218	0.00325
4.	11.	-63.92790	-97.86120	-0.00199	0.00309
4.	12.	-55.48650	-102.27590	0.00341	-0.00092
4.	13.	-37.89300	-109.13110	0.00384	-0.00464
4.	14.	-28.78520	-98.23920	-0.00171	0.00227
4.	15.	-25.89960	-103.89320	0.00320	-0.00449
4.	16.	-15.06080	-82.25840	0.00160	-0.00027
4.	17.	-29.72190	-50.49260	-0.00014	0.00049
4.	18.	-5.89520	2.05010	0.00180	0.00004
4.	19.	2.58940	6.87240	-0.00495	-0.00057
4.	20.	11.19060	33.78040	-0.00261	-0.00059
4.	21.	1.65050	52.63540	-0.00233	0.00005
4.	22.	-5.51990	69.09170	-0.00325	0.00450
4.	23.	-16.50100	87.68810	0.00308	0.00247
4.	24.	-30.32360	107.03240	0.00700	0.00579
4.	25.	-74.33060	85.63500	-0.00045	-0.00605
4.	26.	-82.82140	18.95970	0.00304	0.00218
4.	27.	-102.50770	7.46330	0.00051	0.00460
4.	28.	-97.97990	0.13700	-0.00596	0.00164
4.	31.	-86.39870	105.75450	0.00064	-0.00265
4.	32.	51.69380	22.82580	-0.00259	-0.00145
4.	33.	12.46410	-77.31140	-0.00237	-0.00032

TABELA 4.7.1 (Continuação)

FOTO	PONTO	COORDENADAS FIDUCIAIS		RESÍDUOS	
		X(MM)	Y(MM)	RX(MM)	RY(MM)
4.	34.	24.70500	24.31010	-0.00224	-0.00474
5.	1.	-39.22540	-71.01550	-0.00057	-0.00096
5.	2.	-60.48100	-71.95340	0.00009	-0.00210
5.	3.	-52.69210	-79.97460	-0.00266	-0.00111
5.	4.	-40.85300	-82.17340	-0.00165	-0.00169
5.	5.	0.79130	-95.43380	0.00043	0.00117
5.	6.	-15.52150	-80.03250	0.00053	-0.00236
5.	7.	10.54930	-53.75670	-0.00109	0.00063
5.	8.	6.75050	-77.52960	0.00202	-0.00133
5.	9.	40.46500	-39.78680	0.00325	0.00232
5.	10.	9.74920	-88.60500	0.00080	-0.00027
5.	11.	20.83900	-103.45760	0.00184	-0.00115
5.	12.	29.11210	-107.76110	0.00193	-0.00432
5.	13.	46.29020	-114.28600	-0.00604	-0.00123
5.	14.	55.71890	-102.92470	0.00131	0.00234
5.	15.	58.19960	-108.60260	-0.00162	0.00020
5.	16.	69.39780	-86.38500	-0.00440	-0.00082
5.	17.	55.63210	-54.61520	-0.00079	-0.00263
5.	18.	78.00390	-1.98660	-0.00206	0.00113
5.	19.	86.12910	2.79780	0.00627	0.00719
5.	20.	93.39850	29.20730	0.00218	0.00282
5.	21.	84.78990	47.66290	0.00022	-0.00318
5.	22.	78.72020	63.74410	0.00078	-0.00423
5.	23.	68.69730	81.97180	-0.00217	0.00258
5.	24.	55.68230	100.98560	-0.00132	0.00254
5.	25.	11.98070	80.92610	-0.00059	-0.00485
5.	26.	-7.80810	14.95590	-0.00247	-0.00342
5.	27.	-28.33840	3.38720	0.00526	0.00221
5.	28.	-23.83110	-4.00900	-0.00328	0.00378
5.	29.	-45.74620	-0.35210	0.00535	0.00042
5.	30.	-69.68290	-3.34280	0.00549	0.00183
5.	31.	1.45470	100.89920	-0.00057	0.00113
5.	33.	95.71610	-80.81440	-0.00585	0.00246
5.	34.	106.47540	19.90620	0.00050	0.00186
6.	1.	60.65490	-70.01010	-0.00027	0.00006
6.	2.	38.86140	-70.66520	0.00033	-0.00227
6.	3.	47.11900	-78.71570	0.00021	0.00019
6.	4.	59.33280	-81.08990	0.00135	0.00403
6.	5.	101.40250	-95.17810	-0.00144	-0.00041
6.	6.	84.86600	-79.37400	-0.00130	-0.00452
6.	7.	110.85440	-53.11710	0.00126	0.00445
6.	8.	107.63290	-77.20080	-0.00330	-0.00220
6.	10.	110.72610	-88.46570	0.00124	-0.00072
6.	25.	111.41320	84.78910	0.00025	0.00015
6.	26.	80.50770	16.55250	-0.00357	-0.00071
6.	27.	59.26910	4.51670	0.00453	0.00570
6.	28.	63.87500	-2.87720	-0.00094	-0.00536
6.	29.	41.61460	0.52470	0.00019	0.00249
6.	30.	17.88020	-2.75400	0.00318	-0.00187
6.	31.	101.60640	104.87350	-0.00118	0.00099

TABELA 4.7.2 VALORES APROXIMADOS DOS PARÂMETROS

FOTO	KAPA(RAD)	PHI(RAD)	OMEGA(RAD)	XO(M)	YO(M)	ZO(M)
1	1.45407	0.01101	-0.01406	1721.990	799.530	2771.050
2	1.47161	-0.00572	-0.00559	1875.190	1919.240	2767.440
3	1.47026	0.00789	0.00540	2006.150	2966.540	2761.360
4	-0.07322	-0.00937	0.03979	1190.620	1906.050	2773.380
5	-0.07543	0.02712	0.02421	2138.770	1821.320	2767.060
6	-0.08871	-0.03001	0.02765	3061.800	1741.290	2767.050

TABELA 4.7.3 VALORES APROXIMADOS DOS PARÂMETROS

PONTO	X(M)	Y(M)	Z(M)
1	2552.674	2556.381	1200.034
2	2772.976	2551.936	1188.951
3	2697.197	2637.415	1198.638
4	2576.890	2667.299	1205.806
5	2162.152	2847.035	1202.231
6	2317.529	2669.345	1204.450
7	2028.117	2426.956	1187.121
8	2086.641	2665.497	1201.723
9	1703.624	2307.990	1183.239
10	2064.173	2783.953	1202.336
11	1959.291	2957.432	1193.488
12	1875.168	3013.773	1190.489
13	1696.249	3106.809	1183.633
14	1588.322	2992.277	1186.286
15	1563.889	3060.095	1180.875
16	1429.187	2830.212	1183.661
17	1555.754	2475.956	1188.750
18	1265.997	1944.206	1157.910
19	1172.896	1900.043	1154.469
20	1060.549	1621.428	1130.148
21	1147.517	1418.571	1137.878
22	1209.982	1247.895	1150.398
23	1308.955	1053.816	1157.525
24	1435.299	850.574	1159.949
25	1907.765	1029.094	1158.591
26	2168.282	1682.594	960.000
27	2419.829	1800.264	953.297
28	2373.669	1891.241	954.272
29	2627.314	1828.853	949.452
30	2908.479	1842.862	947.849
31	2003.614	830.294	1177.538
32	638.410	1769.008	1129.470
33	1133.212	2804.778	1169.821
34	924.546	1732.378	1133.414

TABELA 4.7.4 VALORES AJUSTADOS DOS PARÂMETROS (Ajustamento Clássico)

FOTO	KAPA(RAD)	PHI(RAD)	OMEGA(RAD)	XO(M)	YO(M)	ZO(M)
1	1.45408	0.01101	-0.01405	1721.923	799.091	2771.101
2	1.47160	-0.00569	-0.00558	1875.218	1919.314	2767.640
3	1.47024	0.00787	0.00540	2006.167	2966.923	2761.408
4	-0.07322	-0.00937	0.03977	1190.358	1906.111	2773.537
5	-0.07542	0.02717	0.02420	2138.912	1821.353	2767.240
6	-0.08866	-0.02973	0.02765	3062.517	1741.306	2766.899

TABELA 4.7.5 VALORES AJUSTADOS DOS PARÂMETROS (Ajustamento Livre)

FOTO	KAPA(RAD)	PHI(RAD)	OMEGA(RAD)	XO(M)	YO(M)	ZO(M)
1	1.45400	0.01030	-0.01376	1720.306	800.306	2767.461
2	1.47153	-0.00640	-0.00529	1873.447	1918.784	2764.438
3	1.47017	0.00716	0.00569	2004.273	2964.763	2758.612
4	-0.07326	-0.01008	0.04006	1189.642	1905.649	2769.834
5	-0.07548	0.02646	0.02449	2136.726	1820.955	2764.199
6	-0.08871	-0.03044	0.02794	3058.895	1740.965	2764.493

TABELA 4.7.6 VALORES AJUSTADOS DOS PARÂMETROS

PONTO	AJUSTAMENTO CLÁSSICO			AJUSTAMENTO LIVRE		
	X(M)	Y(M)	Z(M)	X(M)	Y(M)	Z(M)
1	2552.642	2556.353	1200.034	2550.985	2555.240	1199.927
2	2772.931	2551.917	1189.019	2770.941	2550.799	1189.085
3	2697.169	2637.404	1198.725	2695.295	2636.156	1198.747
4	2576.873	2667.302	1205.823	2575.182	2666.015	1205.757
5	2162.136	2847.028	1202.226	2161.103	2845.493	1201.922
6	2317.511	2669.345	1204.479	2316.224	2668.074	1204.230
7	2028.100	2426.960	1187.123	2027.255	2426.090	1186.625
8	2086.627	2665.499	1201.799	2085.699	2664.251	1201.389
9	1703.612	2308.024	1183.275	1703.264	2307.362	1182.518
10	2064.159	2783.950	1202.375	2063.274	2782.520	1201.982
11	1959.290	2957.448	1193.493	1958.585	2955.759	1193.089
12	1875.168	3013.773	1190.489	1874.600	3012.004	1190.047
13	1696.252	3106.808	1183.632	1695.973	3104.910	1183.099
14	1588.327	2992.283	1186.291	1588.205	2990.570	1185.644
15	1563.896	3060.086	1180.867	1563.820	3058.271	1180.231
16	1429.194	2830.231	1183.607	1429.308	2828.781	1182.804
17	1555.764	2475.966	1188.811	1555.653	2475.053	1187.987
18	1265.989	1944.245	1157.936	1266.311	1944.186	1156.800
19	1172.871	1900.097	1154.471	1173.336	1900.114	1153.262
20	1060.552	1621.468	1130.160	1061.189	1621.931	1128.827
21	1147.510	1418.610	1137.862	1147.991	1419.379	1136.520
22	1209.971	1247.933	1150.372	1210.335	1248.958	1149.007
23	1308.939	1053.853	1157.429	1309.131	1055.169	1156.067
24	1435.287	850.630	1160.014	1435.266	852.252	1158.679
25	1907.751	1029.125	1158.632	1907.012	1030.436	1157.688
26	2168.240	1682.636	960.277	2167.287	1682.974	960.015
27	2419.774	1800.304	953.466	2418.444	1800.444	953.428
28	2373.610	1891.266	954.549	2372.358	1891.267	954.503
29	2627.231	1828.885	949.671	2625.585	1828.966	949.794
30	2908.363	1842.892	948.149	2906.284	1842.931	948.480
31	2003.614	830.294	1177.538	2002.699	831.900	1176.575
32	638.410	1769.053	1129.470	639.711	1769.318	1127.880
33	1133.226	2804.796	1169.859	1133.806	2803.410	1168.859
34	924.544	1732.417	1133.449	925.396	1732.717	1132.046

TABELA 4.7.7 MATRIZES VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA USANDO UMA VARIÂNCIA DA UNIDADE DE PESO A-POSTERIORI
(AJUSTAMENTO CLÁSSICO)

Unidade angular em radiano
Unidade de comprimento em metro

MATRIZ VARIANCIACOVARIANCIAPARA A FOTO 6

KAPA	0.1196E-08						
PHI	0.1348E-08	0.2093E-07					
OMEGA	-0.1138E-08	-0.1696E-08	0.3186E-08				
X0	0.2173E-05	0.3396E-04	-0.3152E-05	0.5613E-01			
Y0	0.3622E-05	0.5734E-05	-0.7591E-05	0.9991E-02	0.1960E-01		
Z0	-0.1061E-05	-0.2106E-04	0.1603E-05	-0.3368E-01	-0.5204E-02	0.2243E-01	

MATRIZ VARIANCIACOVARIANCIAPARA O PONTO 1

X	0.1100E-02		
Y	0.2503E-03	0.1652E-02	
Z	-0.1356E-02	-0.1699E-02	0.8982E-02

MATRIZ VARIANCIACOVARIANCIAPARA O PONTO 2

X	0.1551E-02		
Y	0.3854E-03	0.1775E-02	
Z	-0.2011E-02	-0.1734E-02	0.1218E-01

MATRIZ VARIANCIACOVARIANCIAPARA O PONTO 3

X	0.1424E-02		
Y	0.4074E-03	0.1856E-02	
Z	-0.1855E-02	-0.2008E-02	0.1124E-01

MATRIZ VARIANCIACOVARIANCIAPARA O PONTO 4

X	0.1201E-02		
Y	0.3405E-03	0.1833E-02	
Z	-0.1509E-02	-0.2074E-02	0.9606E-02

TABELA 4.7.8 MATRIZES VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA USANDO UMA VARIÂNCIA DA UNIDADE DE PESO A-POSTERIORI (AJUSTAMENTO LIVRE)

Unidade angular em radiano

Unidade de comprimento em metro

MATRIZ VARIANÇIA-COVARIANÇIA PARA A FOTO 6

KAPA	0.1069E-08						
PHI	0.1327E-08	0.9428E-08					
OMEGA	-0.6108E-09	0.5624E-09	0.2196E-08				
XD	0.2422E-05	0.1533E-04	-0.1723E-05	0.2525E-01			
YO	0.2303E-05	0.1710E-05	-0.5531E-05	0.2850E-02	0.1316E-01		
ZD	-0.9019E-06	-0.7959E-05	0.2463E-06	-0.1275E-01	-0.2299E-02	0.7958E-02	

MATRIZ VARIANÇIA-COVARIANÇIA PARA O PONTO 1

X	0.4822E-03		
Y	0.1219E-03	0.6090E-03	
Z	-0.4272E-03	-0.8523E-03	0.2514E-02

MATRIZ VARIANÇIA-COVARIANÇIA PARA O PONTO 2

X	0.7269E-03		
Y	0.1860E-03	0.6588E-03	
Z	-0.7750E-03	-0.1052E-02	0.2879E-02

MATRIZ VARIANÇIA-COVARIANÇIA PARA O PONTO 3

X	0.6569E-03		
Y	0.2310E-03	0.7103E-03	
Z	-0.6730E-03	-0.1073E-02	0.2673E-02

MATRIZ VARIANÇIA-COVARIANÇIA PARA O PONTO 4

X	0.4714E-03		
Y	0.1516E-03	0.6967E-03	
Z	-0.3608E-03	-0.1000E-02	0.2417E-02

TABELA 4.7.9 TESTE χ^2

I - AJUSTAMENTO LIVRE

II - AJUSTAMENTO CLÁSSICO

g - GRAUS DE LIBERDADE

T - TRAÇO DA MATRIZ VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA

	σ_o^2	$\hat{\sigma}_o^2$	g	χ^2	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,025}$	T
I	1×10^{-4}	$0,931 \times 10^{-4}$	162	150,8	126,7	197,3	0,278
II,	1×10^{-4}	$0,893 \times 10^{-4}$	169	150,9	133,0	205,0	0,508

4.8 - Conclusões e Recomendações

Tendo em vista os resultados do ajustamento podemos concluir:

a) O traço de matriz variância-covariância no ajustamento livre é menor do que no clássico, ou seja, de um modo geral as variâncias obtidas pelo ajustamento livre são menores.

b) Para um mínimo de injunções, a forma quadrática $V^T PV$ tem o mesmo valor nos dois métodos.

O vetor dos resíduos é o mesmo ou, em outras palavras, chegamos às mesmas observações ajustadas.

c) Nos dois métodos, a variância da unidade de peso a posteriori é uma estimativa imparcial da variância da unidade de peso a priori, com 95% de confiança (Tabela 4.7.9).)

d) As coordenadas ajustadas pelo método "livre" estão em um sistema definido via pseudo-inversa, enquanto as do método clássico estão em um sistema definido pelos pontos de apoio. A discrepância máxima entre as coordenadas ajustadas por um método e outro foi de 2,079 m.

e) Para o mesmo número de parâmetros e o método de cálculo da pseudo-inversa programado, o ajustamento livre exige computador com o dobro de capacidade de armazenamento. O tempo de "CPU" utilizado é um pouco menor no ajustamento livre.

Tendo em vista as conclusões acima, recomendamos aos órgãos e empresas do ramo o uso do ajustamento livre em fotogrametria a curta distância tal como em Contrôle de Estruturas, Contrôle de Erosão, Estudos do Comportamento Hidráulico de Barra

gens em Modelo Reduzido, etc. Também recomendamos o seu uso em densificação de pontos geodésicos, quando não temos confiança nas coordenadas dos pontos de controle.

NOTAS DE REFERÊNCIAS

|⁰¹| MITTERMAYER, E. A generalisation of the least-squares method for the adjustment of free networkes. Bulletin Géodésique (104): 140, 1976.

|⁰²| GEMAEL, C. Ajustamento livre: inversas generalizadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 1977. p.28 .

|⁰³| BEN-ISRAEL, A. & GREVILLE, T.N.E. Generalized inverses: theory and applications. New York, John Wiley, 1973. p. 11 .

|⁰⁴| Ibid., p. 16

|⁰⁵| Ibid., p. 17

|⁰⁶| Ibid., p. 40

|⁰⁷| Ibid., p. 26

|⁰⁸| Ibid., p. 64

|⁰⁹| Ibid., p. 113

|¹⁰| Ibid., p. 68

|¹¹| GEMAEL, C. Aplicações do cálculo matricial em geodésia: ajustamento de observações. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976 . p. 23 .

|¹²| MODRO, Nelson. Método para inversão de matrizes: aplicações às Ciências Geodésicas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas , 1981. p. 41 .

- |¹³| BEN-ISRAEL, A. & GREVILLE, p. 220
- |¹⁴| BOULLION, T.L. & ODELL, P.L. Generalized inverse matrices . New York, Wiley-Interscience, 1971. p.71.
- |¹⁵| BEN-ISRAEL, A. & GREVILLE, p. 228 .
- |¹⁶| HÖPCKE, Walter. Fehlerlehre und ausgleichsrechnung. New York. Walter de Gruyter, 1980. p. 38-40.
- |¹⁷| GEMAEL, C. Ajustamento livre... p.13
- |¹⁸| MEYER, Paul L. Probabilidade; aplicações à estatística. Rio de Janeiro. Ao Livro Técnico, 1970. p.17 .
- |¹⁹| GEMAEL, C. Aplicações... p.5 .
- |²⁰| Ibid., p.14 .
- |²¹| BOSSLER, J.D. A note on the meaning of generalized inverse solutions in geodesy. Journal of Geophysical Research, 78 (14): 2616, May 1973 .
- |²²| GRAFAREND, D. & SCHAFFRIN, B. Unbiased free net adjustment. In: IAG SYMPOSIUM ON COMPUTATION METHODS IN GEOMETRICAL GEODESY. Paper, Oxford, 1973. p.202 .
- |²³| ANDRADE, José Bittencourt de. Photogrammetric refraction. Ohio, The Ohio State University, 1977. p.109-13 .
- |²⁴| Ibid., p.48-9
- |²⁵| Ibid., p.54

|²⁶| MODRO, Método para inversão de matrizes:... p. 23 .

|²⁷| UOTILA, U.A. Introduction to adjustment computations with matrices. Ohio, The Ohio State University, 1967. p.69 .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 ANDRADE, José Bittencourt. Photogrammetric Refraction. Ohio. The Ohio State University, 1977. 117 p.
- 02 ASHKENAZI, V. Criteria for optimization: a practical assesment of a free network adjustment. Buletino di Geodesia e Scienze Affini, 33 (1): 7-90, 1974.
- 03 BEN-ISRAEL, A. & GREVILLE, T.N.E. Generalized inverses: teory and aplications. New York, John Wiley, 1973. 395 p.
- 04 BOSSLER, J.D. A note on the meaning of generalized inverse solutions in Geodesy. Journal of Geophysical Research, 78 (14): 2616-7 .
- 05 BOULLION, T.L. & ODELL, P.L. Generalized inverse matrices. New York, Wiley interscience, 1971. 103 p.
- 06 GEMAEL, C. Aplicações do Cálculo Matricial em Geodésia: Ajustamento de Observações. Curitiba, Universidade Federal do Parana, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. 100 p.
- 07 GEMAEL; C. Ajustamento Livre: Inversas Generalizadas. Curitiba, Universidade Federal do Parana, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1977. 30 p.
- 08 GRAFAREND, E. & SCHAFFRIN, B. Unbiased free net adjustment. In IAG SYMPOSIUM ON COMPUTATION METHODS IN GEOMETRICAL GEODESY. Papel Oxford, 1973. p. 200-218.
- 09 HÖPCKE, Walter. Fehlerlehre und ausgleichsrechnung. New York, Walter de Gruyter, 1980. 227 p.
- 10 MEYER, Paul L. Probabilidade: aplicações à estatística. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico 1970, 391 p.
- 11 MITTERMMAYER, E. A Generalization of the least square method for the adjustment of free networks. Bulletin Géodésique (104): 139-51, 1976 .
- 12 MODRO, N. Método para Inversão de Matrizes: Aplicações às Ciências Geodésicas. Curitiba, Universidade Federal do Parana, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981. 75 p.
- 13 SCHUT, G.H. On the choice of inverse in the adjustment of coordinates. Bulletin Géodésique, (110): 397-403, décembre 1973.

- 14 UOTILA, U.A. Introduction to adjustment computations with matrices. Ohio, The Ohio State University, 1967.
Paginação irregular.
- 15 UOTILA, U.A. Generalized inverse as a weight matrix.
The Canadian surveyor, 28 (5): 698-701, December 1974.

APÊNDICE

PROGRAMAS FORTRAN

```

C .... PROGRAMA PARA AEROTRIANGULACAO EM BLOCO
C .... METODO PARAMETRICO
C .... NI=NUMERO DE PONTOS IMAGEM
C .... NPT=NUMERO DE PONTOS AEROTRIANGULADOS
C .... NFO=NUMERO DE FOTOS
C .... NPA=NUMERO DE PONTOS DE APOIO
C .... M=2 * NI
C .... N = (6 * NFO) + (3 * NPT)
C .... DIMENSION A(N,N),FT(NI),P(M),PCT(NPA),PT(NI),XLIT(6),YLIT(3)
C .... 1,U(N),V(M),VX(NPA),VY(NPA),VZ(NPA),X(N),XC(NPA),XL(M),XLB(M)
C .... 1,XN(N,N),XO(N),YC(NPA),ZC(NPA),ZL(N),RX(NPA),RY(NPA),RZ(NPA)
C .... IMPLICIT REALS (A-H,O-Z)
C .... DIMENSION A(138,138),FT(150),P(300),PCT(3),PT(150),XLIT(6),YLIT(3)
C .... 1,U(138),V(300),VX(3),VY(3),VZ(3),X(138),XC(3),XL(300),XLB(300)
C .... 1,XN(138,138),XO(138),YC(3),ZC(3),ZL(138),RX(3),RY(3),RZ(3)
C .... DATA LEIT,IMPR,(XLIT(I),I=1,6),(YLIT(I),I=1,3)/2,3,' KAPA',
C .... 1' PHI','OMEGA',' XO',' YO',' ZO',' X',' Y',' Z'/
C .... LEITURA DOS ELEMENTOS DE ORIENTACAO INTERNA
C .... DISTANCIA FOCAL POSITIVA PARA COORDENADAS LIDAS NO DIAPOSITIVO
C .... READ(LEIT,1)DF,XPF,YPF
1 .... FORMAT(3F)
C .... LEITURA DO NUMERO DE FOTOS,DE PONTOS IMAGEM LIDOS NAS
C .... FOTOS,DE PONTOS TRIANGULADOS,DE PONTOS DE APOIO E DESVIO PADRAO
C .... READ(LEIT,2)NFO,NI,NPT,NPA,DP
2 .... FORMAT(4I,F)
C .... LEITURA E IMPRESSAO DO NUMERO DA FOTO,DO PONTO,DE SUAS
C .... CORRESPONDENTES COORDENADAS(FIDUCIAIS) NA FOTO E DESVIO PADRAO
C .... FORMACAO DO VETOR DOS PESOS E DAS OBSERVACOES
C .... WRITE(IMPR,3)
3 .... FORMAT(1H1, ///,30X,' FOTO PONTO COORDENA
1DAS FIDUCIAIS DESVIO',/,67X,'X(MM) Y(MM) PA
2DRAO',/)
C .... DO 6 I=1,NI
C .... READ(LEIT,4)FT(I),PT(I),XF,YF
4 .... FORMAT(4F)
C .... WRITE(IMPR,5)FT(I),PT(I),XF,YF,DP
5 .... FORMAT(41X,2(F7.0,4X),2(F10.5,4X),2X,F7.5)
C .... J=2*I
C .... XLB(J-1)=XF-XPF
C .... XLB(J)=YF-YPF
C .... F(J-1)=1./DP**2
C .... F(J)=F(J-1)
6 .... CONTINUE
C .... LEITURA E IMPRESSAO DOS VALORES APROXIMADOS DOS PARAMETROS NA
C .... SEGUINTE ORDEM: (KAPA,PHI,OMEGA,XO,YO,ZO) DE TODAS AS FOTOS,
C .... (X,Y,Z) DE TODOS OS PONTOS.
C .... ANGULOS LIDOS EM GRAU E ESCRITOS EM RADIANO.
C .... NPAR=6*NFO+3*NPT
C .... READ(LEIT,7)(XO(I),I=1,NPAR)
7 .... FORMAT(6F)
C .... WRITE(IMPR,8)
8 .... FORMAT(1H1,///,44X,'VALORES APROXIMADOS DOS PARAMETROS',//,25X,'FO
1TD KAPA(RAD) PHI(RAD) OMEGA(RAD) XO(M) YO(M)
1 ZO(M)',/)
C .... DO 541 I=1,NFO
C .... J=6*(I-1)

```

```

DO 5050 NR=1,3
5050  X0(J+NR)=X0(J+NR)*DATAN(1.0D0)/45.
541  WRITE(IMPR,55)I,(X0(J+K),K=1,6)
      WRITE(IMPR,56)
      DO 571 I=1,NPT
        J=6*NFD+3*(I-1)
571  WRITE(IMPR,58)I,(X0(J+K),K=1,3)
      ITER=-1
      DO 572 I=1,NPAR
572  X(I)=10.
      IF(NPA)13,13,81
C .... LEITURA DOS PONTOS DE CONTROLE(CONHECIDOS),SUAS COORDENADAS
C .... E RESPECTIVAS VARIANCIAS
81  WRITE(IMPR,9)
9   FORMAT(1H1,///,36X,'COORDENADAS DOS PONTOS DE CONTROLE',/,25X,'PON
      ITO      X(M)      VX      Y(M)      VY      Z(M)      VZ'
      1/)
      DO 12 I=1,NPA
      READ(LEIT,10)PCT(I),XC(I),YC(I),ZC(I),UX(I),UY(I),UZ(I)
10  FORMAT(7F)
      WRITE(IMPR,11)PCT(I),XC(I),UX(I),YC(I),UY(I),ZC(I),UZ(I)
11  FORMAT(23X,F7.0,3(2X,F11.3,2X,F7.5))
12  CONTINUE
C .... MONTAGEM DA MATRIZ N=ATPA E DO VETOR U=ATPL
13  ITER=ITER+1
      DO 14 I=1,NPAR
        U(I)=0.
        DO 14 J=1,NPAR
14  XN(I,J)=0.
          L=6*NFD
          IPIV=-1
          DO 17 I=1,NI
            IF(IPIV-FT(I))15,16,15
15  IPIV=FT(I)
            J=6*(FT(I)-1)
            R=DCOS(X0(J+1))
            S=DCOS(X0(J+2))
            T=DCOS(X0(J+3))
            B=DSIN(X0(J+1))
            E=DSIN(X0(J+2))
            F=DSIN(X0(J+3))
            XM11=S*R
            XM12=T*B+F*E*R
            XM13=F*B-T*E*R
            XM21=-S*B
            XM22=T*R-F*E*B
            XM23=F*R+T*E*B
            XM31=E
            XM32=-F*S
            XM33=T*S
16  N=L+3*(PT(I)-1)
            M=2*I
            DX=X0(N+1)-X0(J+4)
            DY=X0(N+2)-X0(J+5)
            DZ=X0(N+3)-X0(J+6)

```

```

Q=XM31*DX+XM32*DY+XM33*DZ
XM1=XM11*DX+XM12*DY+XM13*DZ
XN1=XM21*DX+XM22*DY+XM23*DZ
IF(ITER-1)172,171,172
C .... CORRECAO DA REFRACAO PARA UMA FOTO SINTETICA VERTICAL
171 TT=XLB(M-1)+XPP
YF=XLB(M)+YPP
XF=-DF*(XM11*TT+XM21*YF-XM31*DF)/(XM13*TT+XM23*YF-XM33*DF)
YF=-DF*(XM12*TT+XM22*YF-XM32*DF)/(XM13*TT+XM23*YF-XM33*DF)
CALL REFRA(X0(J+6),X0(N+3),XF,YF,DF)
XLB(M-1)=-DF*(XM11*XF+XM12*YF-XM13*DF)/(XM31*XF+XM32*YF-XM33*DF)
XLB(M-1)=XLB(M-1)-XPP
XLB(M)=-DF*(XM21*XF+XM22*YF-XM23*DF)/(XM31*XF+XM32*YF-XM33*DF)-YPP
C .... VETOR XL=LO-LB (CALCULADO-OBSERVADO)
172 XL(M-1)=-DF*(XM1/Q)-XLB(M-1)
XL(M)=-DF*(XN1/Q)-XLB(M)
DO 1050 II=J+1,N+3
1050 V(II)=0.
V(J+1)=(-DF/Q)*(DX*XM21+DY*XM22+DZ*XM23)
V(J+2)=Q*(DX*E*R-DY*F*S*R+DZ*T*S*R)+XM1*(DX*S+DY*F*E-DZ*T*E)
V(J+2)=(V(J+2))*(DF/Q**2)
V(J+3)=(DF/Q**2)*(Q*(DY*XM13-DZ*XM12)-XM1*(DY*XM33-DZ*XM32))
V(J+4)=(DF/Q**2)*(Q*XM11-XM1*XM31)
V(J+5)=(DF/Q**2)*(Q*XM12-XM1*XM32)
V(J+6)=(DF/Q**2)*(Q*XM13-XM1*XM33)
V(N+1)=-V(J+4)
V(N+2)=-V(J+5)
V(N+3)=-V(J+6)
DO 1051 II=J+1,N+3
U(II)=U(II)+V(II)*P(M-1)*XL(M-1)
DO 1051 JJ=J+1,N+3
1051 XN(II,JJ)=XN(II,JJ)+V(II)*P(M-1)*V(JJ)
V(J+1)=(DF/Q)*(DX*XM11+DY*XM12+DZ*XM13)
V(J+2)=-Q*(DX*E*B-DY*F*S*B+DZ*T*S*B)+XN1*(DX*S+DY*F*E-DZ*T*E)
V(J+2)=(V(J+2))*(DF/Q**2)
V(J+3)=- (DF/Q**2)*(Q*(-DY*XM23+DZ*XM22)+XN1*(DY*XM33-DZ*XM32))
V(J+4)=(DF/Q**2)*(Q*XM21-XN1*XM31)
V(J+5)=(DF/Q**2)*(Q*XM22-XN1*XM32)
V(J+6)=(DF/Q**2)*(Q*XM23-XN1*XM33)
V(N+1)=-V(J+4)
V(N+2)=-V(J+5)
V(N+3)=-V(J+6)
DO 17 II=J+1,N+3
U(II)=U(II)+V(II)*P(M)*XL(M)
DO 17 JJ=J+1,N+3
17 XN(II,JJ)=XN(II,JJ)+V(II)*P(M)*V(JJ)
C .... TESTES DE CONVERGENCIA
IF(ITER-5)88,59,59
88 DO 591 I=1,NPAR
IF(DABS(X(I))-1.0D-3)591,591,592
591 CONTINUE
WRITE(IMPR,499)
499 FORMAT(1H1,///20X,' FOI OBTIDA A CONVERGENCIA')
GO TO 59
C .... APLICACAO DE INJUNCOES DE POSICAO PARA PONTOS DE CONTROLE

```

```

592     IF(NFA-1)28,19,29
29      DO 22 I=1,NFA-1
        N=L+3*(PCT(I)-1)
        PX=1./VX(I)
        PY=1./VY(I)
        PZ=1./VZ(I)
        XN(N+1,N+1)=XN(N+1,N+1)+PX
        XN(N+2,N+2)=XN(N+2,N+2)+PY
        XN(N+3,N+3)=XN(N+3,N+3)+PZ
        U(N+1)=U(N+1)+PX*(XO(N+1)-XC(I))
        U(N+2)=U(N+2)+PY*(XO(N+2)-YC(I))
22      U(N+3)=U(N+3)+PZ*(XO(N+3)-ZC(I))
19      N=L+3*(PCT(NFA)-1)
        PZ=1./VZ(NFA)
        XN(N+3,N+3)=XN(N+3,N+3)+PZ
        U(N+3)=U(N+3)+PZ*(XO(N+3)-ZC(NFA))
        IF(NFA-2)28,28,105
C .... INVERSAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DAS EQUACOES NORMAIS (XN)
105     CALL VERSOL(XN,X,NPAR)
        DO 106 I=1,NPAR
        DO 106 J=1,NPAR
106     A(I,J)=XN(I,J)
C .... CALCULO DAS CORRECOES
        DO 27 J=1,NPAR
        X(J)=0.
        DO 27 K=1,NPAR
27     X(J)=X(J)-XN(J,K)*U(K)
        GO TO 49
C .... CALCULO DA PSEUDO-INVERSA DE N
28     NN=NPAR-1
        CALL PSEUDO(XN,A,ZL,U,X,NPAR,NPAR,NN)
C .... CALCULO DAS CORRECOES
        DO 48 J=1,NPAR
        X(J)=0.
        DO 48 K=1,NPAR
48     X(J)=X(J)-A(J,K)*U(K)
C .... CALCULO DOS VALORES AJUSTADOS DOS PARAMETROS
49     DO 51 I=1,NPAR
51     XO(I)=XO(I)+X(I)
C .... IMPRESSAO DOS VALORES AJUSTADOS DOS PARAMETROS
        WRITE(IMPR,52)ITER
52     FORMAT(1H1,/,52X,16('*'),/,52X,'* ITERACAO',I4,'*',/,52X,16('*'))
        WRITE(IMPR,53)
53     FORMAT(///,44X,'VALORES AJUSTADOS DOS PARAMETROS',//,25X,'FOTO
1      KAPA(RAD) PHI(RAD) OMEGA(RAD) XO(M) YO(M)
1      ZO(M)',/)
        DO 54 I=1,NFO
        J=6*(I-1)
54     WRITE(IMPR,55)I,(XO(J+K),K=1,6)
55     FORMAT(25X,I3,2X,F10.5,2F11.5,3F13.3)
        WRITE(IMPR,56)
56     FORMAT(///,25X,'PONTO X(M) Y(M) Z(M)',/)
        DO 57 I=1,NPT
        J=L+3*(I-1)
57     WRITE(IMPR,58)I,(XO(J+K),K=1,3)

```

```

58      FORMAT(25X,I3,3(2X,F11.3))
      GO TO 13
59      T=0.
C .... VARIANCIA DA UNIDADE DE PESO
      SIG2=0.
      M=2*N1
      DO 62 I=1,M
      V(I)=-XL(I)
62      SIG2=SIG2+V(I)*P(I)*V(I)
      IF(NPA-1)998,202,999
998     SIG2=SIG2/(M-NPAR)
      GO TO 997
999     DO 201 I=1,NPA-1
      N=L+3*(PCT(I)-1)
      RX(I)=XC(I)-X0(N+1)
      RY(I)=YC(I)-X0(N+2)
      RZ(I)=ZC(I)-X0(N+3)
201     SIG2=SIG2+(RX(I)**2)/VX(I)+(RY(I)**2)/VY(I)+(RZ(I)**2)/VZ(I)
202     N=L+3*(PCT(NPA)-1)
      RX(NPA)=0
      RY(NPA)=0
      RZ(NPA)=ZC(NPA)-X0(N+3)
      SIG2=SIG2+(RZ(NPA)**2)/VZ(NPA)
      WRITE(IMPR,204)
      DO 203 I=1,NPA
203     WRITE(IMPR,205)PCT(I),RX(I),RY(I),RZ(I)
      SIG2=SIG2/(M-NPAR+3*NPA-2)
997     WRITE(IMPR,104)SIG2
104     FORMAT(//20X,' VARIANCIA DA UNIDADE DE PESO = ',E9.3)
C .... CALCULO DA MATRIZ V-CV DOS PARAMETROS AJUSTADOS
      DO 109 I=1,NPAR
      T=T+A(I,I)
      DO 109 J=1,NPAR
109     A(I,J)=A(I,J)*SIG2
      T=T*SIG2
      WRITE(IMPR,71)T
      DO 887 I=1,NFO
      WRITE(IMPR,70)I
      J=6*(I-1)
      DO 887 K=1,6
887     WRITE(IMPR,881)XLIT(K),(A(J+K,KL),KL=J+1,J+K)
      DO 888 I=1,NFT
      WRITE(IMPR,996)I
      J=L+3*(I-1)
      DO 888 K=1,3
888     WRITE(IMPR,882)YLIT(K),(A(J+K,KL),KL=J+1,J+K)
      WRITE(IMPR,206)
      DO 207 I=1,NI
      J=2*I
207     WRITE(IMPR,208)FT(I),PT(I),V(J-1),V(J)
70      FORMAT(//20X,' MATRIZ VARIANCIA-COVARIANCIA PARA A FOTO',I3)
71      FORMAT(//20X,' TRACO DA MV-C DOS PARAMETROS AJUSTADOS = ',E9.3)
881     FORMAT(20X,A5,6E15.4)
996     FORMAT(//20X,' MATRIZ VARIANCIA-COVARIANCIA PARA O PONTO',I4)
882     FORMAT(24X,A1,3E15.4)

```

```

204  FORMAT(///36X,'RESIDUOS DAS COORDENADAS DOS PONTOS DE CONTROLE ',
      1/36X,'PONTO      RX(M)      RY(M)      RZ(M)')
205  FORMAT(36X,F5.0,3E13.4)
206  FORMAT(///36X,'RESIDUOS DAS COORDENADAS FIDUCIAIS',/36X,'FOTO
      1  PONTO      RX(MM)      RY(MM)')
208  FORMAT(36X,F4.0,F11.0,2F11.5)
      STOP
      END
      SUBROUTINE PSEUDO(B,C,D,E,F,M,N,L)
C .... C = PSEUDO-INVERSA DE B
C .... L = N-1
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION B(M,N),C(N,M),D(L),E(M),F(M)
      S=0.
      DO 1 I=1,M
1      S=S+B(I,1)**2
      DO 2 I=1,M
2      C(1,I)=B(I,1)/S
      DO 16 K=1,L
      DO 3 I=1,K
      D(I)=0.
      DO 3 J=1,M
3      D(I)=D(I)+C(I,J)*B(J,K+1)
      DO 40 I=1,M
      E(I)=0
      DO 4 J=1,K
4      E(I)=E(I)-B(I,J)*D(J)
40     E(I)=B(I,K+1)+E(I)
      DO 5 I=1,M
      IF(E(I))9,5,9
5      CONTINUE
      S=0
      DO 6 I=1,K
6      S=S+D(I)**2
      S=S+1
      DO 8 I=1,M
      F(I)=0.
      DO 7 J=1,K
7      F(I)=F(I)+D(J)*C(J,I)
8      F(I)=F(I)/S
      GO TO 14
9      S=0.
      DO 10 I=1,M
10     S=S+E(I)**2
      DO 11 I=1,M
11     F(I)=E(I)/S
      S=0.
      DO 12 I=1,M
12     S=S+F(I)*B(I,K+1)
      DO 13 I=1,M
13     F(I)=F(I)/S
14     DO 16 J=1,M
      DO 15 I=1,K
15     C(I,J)=C(I,J)-D(I)*F(J)
16     C(K+1,J)=F(J)

```

```

RETURN
END
SUBROUTINE VERSOL(A,B,I)
C .... A = INVERSA ORDINARIA DE A
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(I,I),B(I)
IF(I.EQ.1) GO TO 10
IM=I-1
DO 5 K=1,I
DO 2 J=1,IM
2 B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)
B(I)=1./A(1,1)
DO 4 L=1,IM
DO 3 J=1,IM
3 A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
4 A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
DO 5 J=1,I
5 A(I,J)=B(J)
RETURN
10 A(1,1)=1./A(1,1)
RETURN
END
SUBROUTINE REFRAX(ZO,ZZ,X,Y,ZC)
C .... CORRIGE REFRAÇÃO
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
ZS=ZO/1000.00
ZF=ZZ/1000.00
A=8.429700
D=4.25600
E=5.25600
F=0.00027700
G=1.225600
H=0.363800
P=0.157800
Q=5.14624100
B=1.00-0.0225700*ZF
C=1.00-0.0225700*ZS
IF(ZS.GT.11) GO TO 40
CSI=(C**D*ZS-B**D*ZF+A*(C**E-B**E))/(C**D-B**D)-ZF
EE=(CSI/(ZS-ZF))*DLOG((1.00+F*B**D)/(1.00+F*C**D))
GO TO 50
40 AA=G*(Q-A*B**E-B**D*ZF)
BB=H*((ZS+1.00/P)*DEXP(-F*(ZS-11))-17.33713600)
CC=G*(0.296838-B**D)
DD=H*(DEXP(-F*(ZS-11))-1.00)
CSI=(AA+BB)/(CC+DD)-ZF
EE=(CSI/(ZS-ZF))*DLOG((1.00+F*B**D)/
1(1.00+0.00008200*DEXP(-F*(ZS-11))))
50 R=1.00+(X**2+Y**2)/ZC**2
X=X-R*X*EE
Y=Y-R*Y*EE
RETURN
END

```